

Verzweigungen und Strukturen in der Strömung  
zwischen unabhängig rotierenden Zylindern

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von  
Arne Schulz

Kiel,  
Mai 2000

Referent: Prof. Dr. G. Pfister .....

Korreferent: Prof. Dr. U.P. Hansen .....

Tag der mündlichen Prüfung: 11.07.2000 .....

Zum Druck genehmigt: Kiel, den .....

.....

Dekan

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Das Taylor–Couette–System</b>	<b>5</b>
2.1	Die Navier–Stokes–Gleichungen . . . . .	6
2.2	Systemparameter . . . . .	6
2.3	Taylor–Couette–Strömungszustände . . . . .	7
2.4	Reale Systeme . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Verzweigungstheorie</b>	<b>11</b>
3.1	Lineare Systeme . . . . .	11
3.2	Nichtlineare Systeme . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Vorhergehende Arbeiten</b>	<b>19</b>
4.1	Anomale Moden . . . . .	19
4.2	Strömungszustände bei ruhendem Außenzylinder und $\eta = 0,5$ . . . . .	20
4.2.1	Schwingungsformen . . . . .	21
4.2.2	Stabilitätsdiagramm der Taylor–Wirbel–Strömung . . . . .	21
4.3	Strömungszustände zwischen unabhängig rotierenden Zylindern im schmalen Spalt . . . . .	24
4.3.1	Gegenrotierende Zylinder . . . . .	26
4.3.2	Gleichsinnig rotierende Zylinder . . . . .	27
4.4	Theoretische Arbeiten . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Der experimentelle Aufbau</b>	<b>33</b>
5.1	Das Taylor–Couette–Experiment . . . . .	33
5.2	Meßflüssigkeit . . . . .	35
5.3	Drehzahlregelung . . . . .	36
5.4	Temperaturstabilisierung . . . . .	36
5.5	Sichtbarkeitsanlage . . . . .	37
5.6	Unsicherheiten in den Kontrollparametern . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Optische Strömungsmeßmethoden</b>	<b>39</b>
6.1	Laser–Doppler–Anemometrie (LDA) . . . . .	39
6.1.1	Funktionsweise des LDAs . . . . .	39
6.1.2	Realisierung am Taylor–System . . . . .	42
6.2	Particle Image Velocimetry (PIV) . . . . .	46
6.2.1	Aufbau und Funktionsweise . . . . .	46

6.2.2	Auswertung der Bilder . . . . .	47
6.2.3	Fehlererkennung und Korrektur . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Kleine Geometrien (<math>\Gamma &lt; 1,4</math>)</b>	<b>51</b>
7.1	Stand der Forschung . . . . .	52
7.1.1	Stabilitätsdiagramm und dynamisches Verhalten für $Re_a = 0$ . . . . .	55
7.1.2	Erste Instabilitäten bei kleinen Geometrien . . . . .	56
7.1.3	Universelle Eigenschaften . . . . .	57
7.2	Einfluß eines rotierenden Außenzylinders . . . . .	58
7.2.1	Verschiebung kritischer Punkte . . . . .	58
7.2.2	Vergleich mit numerischen Berechnungen . . . . .	60
7.2.3	Verzweigungstheoretische Analyse . . . . .	67
7.2.4	Einfluß auf eine Hopf-Verzweigung . . . . .	71
<b>8</b>	<b>Strukturen und Verzweigungen zwischen gegenrotierenden Zylindern</b>	<b>75</b>
8.1	Stabilitätsdiagramm für $\eta = 0,5$ und $\Gamma = 12$ . . . . .	75
8.2	Erste Instabilitäten . . . . .	78
8.2.1	Übergang zur Taylor-Wirbelströmung . . . . .	78
8.2.2	Spiralwellen als erste Instabilität . . . . .	83
8.2.3	Übergang zu den Spiralen . . . . .	84
8.2.4	Übergang zu Gegenläufigen Spiralen . . . . .	96
8.3	Höhere Instabilitäten . . . . .	99
8.3.1	Übergang der Spiralen zur Taylor-Wirbelströmung . . . . .	99
8.3.2	Übergang zwischen Wirbelzuständen . . . . .	101
8.3.3	Die Wavy-Mode . . . . .	102
8.3.4	Propagierende Taylor-Wirbel . . . . .	108
8.4	Vergleich mit numerischen Berechnungen . . . . .	109
8.4.1	Einsetzen der ersten Instabilität . . . . .	110
8.4.2	Normierte Frequenzen der Spiralwellen . . . . .	111
8.5	Verhalten am bikritischen Punkt ( $Re_a = -77,54$ ) . . . . .	112
8.6	Hystereseverhalten . . . . .	114
<b>9</b>	<b>Strukturen zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern</b>	<b>117</b>
9.1	Erste Instabilität . . . . .	118
9.2	Eigenschaften der Twist-Mode . . . . .	119
9.3	PIV-Aufnahmen der Twist-Mode . . . . .	123
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>131</b>
<b>Anhang</b>		
<b>A</b>	<b>Kenndaten der Apparatur</b>	<b>133</b>
<b>B</b>	<b>Wichtige Meßdaten (<math>\Gamma &lt; 1,4</math>)</b>	<b>135</b>
<b>C</b>	<b>Wichtige Meßdaten (<math>\Gamma = 12</math>)</b>	<b>139</b>

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>145</b>
<b>Danksagungen</b>	<b>155</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>156</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

In vielen dissipativen Systemen, seien sie physikalischer, chemischer oder biologischer Art, entstehen fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht räumliche Strukturen. Seit etwa 30 Jahren beschäftigt sich der Bereich der "Synergetik" fachübergreifend mit Strukturbildungsmechanismen. Mit Hilfe von Modellen und Konzepten der nichtlinearen Dynamik versucht man im Bereich der Synergetik, grundlegende Prinzipien der Entstehung raum-zeitlicher Strukturen zu verstehen.

Ein für die Untersuchung der Phänomene der Strukturbildung und Selbstorganisation geeignetes hydrodynamisches Testsystem ist die Taylor-Couette-Strömung. Diese bildet sich aus, wenn eine viskose Flüssigkeit im Spalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern durch die Rotation der Zylinder in Bewegung gesetzt wird. Die Strukturen, die je nach den Randbedingungen zu finden sind, reichen von laminarer Strömung über zeitlich und räumlich periodische bis hin zu chaotischen oder sogar turbulenten Strömungsformen. Ein Vorteil des Taylor-Couette Systems besteht darin, daß es im Gegensatz zu vielen nichtlinearen Systemen, in denen bisher nicht einmal die beschreibenden Gleichungen genau bekannt sind, einer mathematischen Beschreibung zugänglich ist, den Navier-Stokes-Gleichungen. Da eine strenge analytische Lösung dieser nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen nur für einige Sonderfälle möglich ist, ist man auf Numerik angewiesen. Der Vergleich der numerischen Lösungen der exakten Navier-Stokes Gleichungen unter realistischen Randbedingungen mit den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen führt zum weiteren Verständnis fundamentaler Eigenschaften der Bewegungsgleichungen. Allerdings verzeichnet die Numerik gegenüber dem Experiment Defizite. So sind zum Beispiel höhere Instabilitäten in endlichen Systemen von der Numerik noch nicht berechenbar.

Von besonderer Bedeutung sind die bei Änderung der Kontrollparameter auftretenden qualitativen Änderungen der topologischen Struktur der Strömung. Diese findet man sowohl in experimentellen als auch in theoretischen Untersuchungen wieder. Bei diesen Veränderungen spricht man von Verzweigungen; besonders deren Kenntnisse sind bei der Analyse nichtlinearer Systeme von fundamentaler Wichtigkeit.

Bei nichtlinearen Systemen hängt die zeitliche Entwicklung eines Strömungszustandes äußerst sensitiv von den Anfangsbedingungen ab. Nur gleiche Ursachen haben auch gleiche Wirkungen (schwache Kausalität). Darüber hinaus gibt es auch eine große Sensitivität

von den Randbedingungen. Deshalb ist eine hohe Präzision sämtlicher Komponenten des Systems im Experiment eine Grundvoraussetzung, um eine Reproduzierbarkeit des Systemverhaltens zu erreichen.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Analyse von Verzweigungen und Strukturen, die sich zwischen zwei unabhängig voneinander rotierenden Zylindern ausbilden. Der Einsatz moderner optischer Meßverfahren erlaubt dabei erstmals eine exakte Bestimmung von Stabilitätsgrenzen und von charakteristischen Größen der existierenden Strömungsformen, sowie eine genaue Analyse auftretender raum-zeitlicher Strukturen.

Die Art der in dieser Arbeit gewonnenen experimentellen Resultate läßt einen Vergleich mit numerischen Simulationen zu.

Zur Einführung werden in **Kapitel 2** die Taylor–Couette–Strömung näher beschrieben und die physikalischen Aspekte erläutert, die zum Auftreten der elementaren Strömungszustände führen. Außerdem werden die für das System charakteristischen Parameter genannt.

In **Kapitel 3** wird die Theorie dynamischer Systeme insoweit vorgestellt, wie sie für spätere Beschreibungen benötigt wird.

Einige für das Verständnis der vorliegenden Arbeit wichtige Veröffentlichungen werden in **Kapitel 4** dargestellt. Hierbei handelt es sich um experimentelle und theoretische Ergebnisse, die bei der Untersuchung der Strömungszustände zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern bisher erzielt wurden.

Die Realisierung des Taylor–Couette–Experiments, das im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurde, beschreibt **Kapitel 5**. Die Funktionsweise und der Aufbau der verwendeten optischen Meßsysteme werden in **Kapitel 6** dargestellt.

Die Kapitel 7, 8 und 9 befassen sich mit den durchgeführten Messungen am vorliegenden Taylor–Couette–System.

So werden in **Kapitel 7** Ergebnisse der Untersuchungen an Systemen mit kleinen geometrischen Abmessungen vorgestellt. Diese unterscheiden sich von ausgedehnteren Systemen schon dadurch, daß ein anderer Grundzustand vorliegt. Die bisher an den kleinen Geometrien erzielten Ergebnisse werden präsentiert. Das erleichtert, die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse einzuordnen. Diese beschäftigen sich hier mit dem Einfluß einer Außenzylinderrotation auf Stabilitätsgrenzen auftretender Strömungszustände. Es wird zusätzlich ein Vergleich mit der Numerik über einen großen Parameterbereich angestellt.

Die Ergebnisse der Untersuchungen in ausgedehnten Systemen zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern wurden in zwei Kapitel aufgeteilt.

Im Fall gegeneinander rotierender Zylinder stellt **Kapitel 8** die Meßergebnisse dar. Der Verlauf der Übergänge zwischen verschiedenen Strömungszuständen konnte exakt bestimmt werden. Die auftretenden Wechselwirkungen zwischen den Strömungszuständen wurden analysiert; erstmals gelang eine genaue raum-zeitliche Strukturanalyse der Strömungszustände.

**Kapitel 9** befaßt sich mit Strömungen zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern. Hier konnten die physikalischen Aspekte eines typischen Strömungszustandes, der "Twist-Mode", die über einen großen Parameterbereich gefunden werden kann, zum ersten Mal aufgedeckt und theoretische Vorhersagen im Experiment bestätigt werden.

Das **Kapitel 10** faßt die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick über mögliche künftige experimentelle Schwerpunkte, um die Strömungszustände, die in der Taylor-Couette-Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern unter realistischen Randbedingungen auftreten, mit den einhergehenden Eigenschaften besser verstehen zu können.





# Kapitel 2

## Das Taylor–Couette–System

Das Taylor–Couette–System ist eines der klassischen hydrodynamischen Systeme. Es handelt sich hierbei um eine inkompressible viskose Flüssigkeit, die sich zwischen zwei konzentrisch gelagerten Zylindern mit den Radien  $r_i$  und  $r_a$  befindet, siehe Abbildung 2.1.

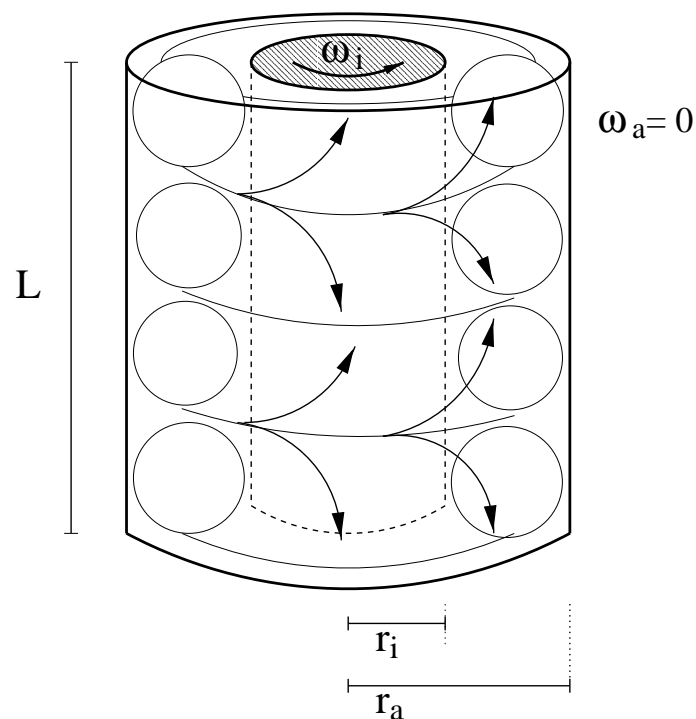


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der Taylor–Couette–Geometrie:  $r_i/a$  Innen- und Außenzylinderradius,  $\omega_i$  Winkelgeschwindigkeit des Innenzylinders bei ruhendem Außenzylinder  $\omega_a = 0$  und  $L$  Zylinderhöhe.

Im allgemeinen Fall rotieren beide Zylinder unabhängig voneinander. Dadurch bilden sich in der viskosen Flüssigkeit je nach den Winkelgeschwindigkeiten der Zylinder unterschiedliche Strukturen aus.

## 2.1 Die Navier–Stokes–Gleichungen

Grundlegend für die Beschreibung aller hydrodynamischen Systeme, so also auch des Taylor–Couette–Systems, sind die von *Claude Navier* (1822) und *George Stokes* (1845) unabhängig voneinander hergeleiteten Differentialgleichungen, die **Navier–Stokes–Gleichungen**, die die zeitliche Veränderung des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  an jedem Ort  $\mathbf{x}$  einer inkompressiblen Flüssigkeit beschreiben :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \\ &= -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\frac{1}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F}\end{aligned}$$

also :

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \mu\frac{1}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (2.1)$$

Hierbei sind  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $p(\mathbf{x}, t)$  der Druck pro (konstanter) Massendichte,  $\mu$  die dynamische Viskosität und  $\mathbf{F}$  eine externe Kraft pro Masseneinheit.

Da von einer inkompressiblen Flüssigkeit ausgegangen wird, folgt aus der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \implies \nabla\mathbf{v} = 0.$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung (2.1) beschreibt die Geschwindigkeitsänderung durch den konvektiven Transport, der zweite die Änderung aufgrund der Druckunterschiede im Fluid, und der dritte berücksichtigt den Energieverlust durch innere Reibung.

Wegen ihrer Nichtlinearität sind die Navier–Stokes–Gleichungen nur für wenige Sonderfälle analytisch exakt lösbar. Auch die Numerik tritt aufgrund eines hohen Rechenaufwandes schnell an ihre Grenzen.

## 2.2 Systemparameter

Um die Resultate theoretischer und experimenteller Untersuchungen miteinander vergleichen zu können, sind einige Abkürzungen und Normierungen gebräuchlich. Diese werden im folgenden vorgestellt.

- Radius des Innenzylinders  $r_i$
- Radius des Außenzylinders  $r_a$
- Radienverhältnis  $\eta = \frac{r_i}{r_a}$

- Spaltbreite  $d = r_a - r_i$
- Zylinderlänge  $L$

Diese ergibt sich als Abstand zwischen Boden- und Deckelplatte des Zylinders.

- Höhenverhältnis  $\Gamma = \frac{L}{d}$
- Anzahl der Wirbel  $N$
- Wirbelhöhe (normiert)  $\gamma = \frac{L}{N d}$

Diese sagt aus, ob die Wirbel gestaucht oder gestreckt sind. Runde Wirbel weisen  $\gamma = 1$  auf.

- Winkelgeschwindigkeit des Innenzylinders  $\omega_i$
- Winkelgeschwindigkeit des Außenzylinders  $\omega_a$
- dynamische Viskosität  $\mu$
- kinematische Viskosität  $\nu = \mu/\rho$
- Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i = \frac{r_i(r_a - r_i)}{\nu} \omega_i$
- Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a = \frac{r_a(r_a - r_i)}{\nu} \omega_a$

Die dimensionslosen Reynoldszahlen (nach O. Reynolds) beschreiben das Verhältnis zwischen Trägheits- und Zähigkeitskräften und sind direkt proportional zur Winkelgeschwindigkeit des jeweiligen Zylinders. In Systemen mit gleichen Reynoldszahlen bilden sich die gleichen hydrodynamischen Strukturen aus (Reynoldssches Ähnlichkeitsgesetz).

- normierte, gemessene Frequenz  $f_{norm} = \frac{\omega_{Mode}}{\omega_i}$

## 2.3 Taylor–Couette–Strömungszustände

In dem Taylor–Couette–System bilden sich in Abhängigkeit der äußeren Kontrollparameter verschiedene Strömungsformen aus. Hier wird zur Vereinfachung zunächst von einem unendlich ausgedehnten System mit schmalen Spalt und ruhendem Außenzylinder ausgegangen.

Durch einen rotierenden Innenzylinder wird die sich zwischen den Zylindern befindliche Flüssigkeit in Rotation versetzt. Aufgrund der Haftbedingungen bewegen sich die Flüssigkeitsschichten direkt am Innenzylinder mit dessen Winkelgeschwindigkeit, während die Teilchen am ruhenden Außenzylinder die Geschwindigkeit Null besitzen.

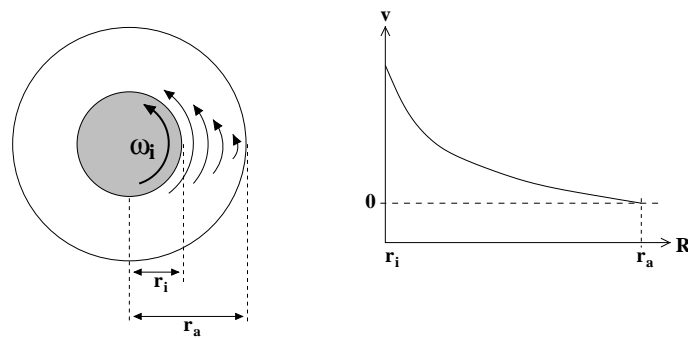


Abbildung 2.2: Verlauf der azimuthalen Geschwindigkeit in der Couette-Strömung bei ruhendem Außenzylinder.

Dadurch bildet sich eine laminare Strömung aus, die durch eine von innen nach außen monoton abfallende azimuthale Geschwindigkeitskomponente gekennzeichnet ist (s. Abb. 2.2). Dieser Strömungszustand wird als Couette-Strömung geführt (nach M. Couette [30], 1890).

In der rotierenden Flüssigkeit existieren mit der Zentrifugalkraft und den viskosen Kräften zwei miteinander konkurrierende Effekte. Die Flüssigkeitsteilchen werden durch die Zentrifugalkraft nach außen in Richtung Außenzylinder beschleunigt. Dieser Kraft wirken die viskosen Kräfte entgegen, die versuchen, jedes Teilchen auf seiner momentanen Bahn um den Innenzylinder zu halten.

Bei Erhöhung der Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  überwiegen ab einem bestimmten Punkt die Zentrifugalkräfte. Hier wird die Grundströmung nach dem Rayleighschen Stabilitätskriterium [103] instabil:

$$\frac{d(rv)^2}{dr} > 0$$

$r$  bezeichnet dabei den Abstand von der Zylinderachse und  $v$  die dort vorliegende Geschwindigkeit. Eine ausführliche Beschreibung des Stabilitätskriteriums findet sich zum Beispiel bei Koschmieder [70].

Die Teilchen nahe dem Innenzylinder werden nun aufgrund der Zentrifugalkraft nach außen gedrängt. Dieses bewirkt, daß die sich dort aufhaltenden Flüssigkeitsteilchen aufgrund der Inkompressibilität der Flüssigkeit nach innen strömen. Es entsteht so ein gleichmäßiges Muster, die sogenannten Taylor-Wirbel (nach G. I. Taylor [132], 1923). Dabei handelt es sich um jeweils paarweise gegensinnig rotierende Tori, so daß sich benachbarte Wirbel mit gleichgerichteter Geschwindigkeit berühren. Die einzelnen Wirbel liegen ruhig übereinander. Ein einfaches Abzählen der Wirbel ergibt die Wirbelzahl  $N$ , die meistens gerade ist. Dieser Zustand wird als Taylor-Wirbelströmung (TVF) bezeichnet.

Bestand in der Couette-Strömung noch eine Translationsinvarianz in axialer und azimuthaler Richtung, kommt es mit Auftreten der Taylor-Wirbelströmung zur Symmetriebrechung. Es besteht in axialer Richtung nur noch eine Spiegelsymmetrie zur Zylinder-

mitte.

Bei weiterer Erhöhung der Drehfrequenz des Innenzylinders werden die Wirbel instabil; es entstehen wellenförmige Wirbel, eine Wavy-Mode (WVF). Hierbei handelt es sich um die zweite Instabilität. Im Gegensatz zur Couette-Strömung und zur Taylor-Wirbelströmung sind diese Wirbel nicht stationär. Eine weitere Reynoldszahlerhöhung führt zu einer Modulation der Wavy-Mode (MWVF) und anschließendem Übergang zu chaotischem Verhalten.

Diese sich im schmalen Spalt ausbildende Abfolge von Strömungszuständen bei Erhöhung des Kontrollparameters (der Reynoldszahl)

$$\text{Couette-Strömung} \rightarrow \text{TVF} \rightarrow \text{WVF} \rightarrow \text{MWVF} \rightarrow \text{Chaos}$$

wird als *main sequence* bezeichnet [47].

## 2.4 Reale Systeme

Zur Beschreibung der Dynamik der Strömungszustände, die sich im Taylor-Couette-System ausbilden, wird oft von unendlich langen Zylindern ausgegangen [35]. Experimentell wird jedoch ein großer Einfluß der Ränder (Boden und Deckel) beobachtet, der zum Beispiel bei dem Übergang der laminaren Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung im unterkritischen Bereich für das Auftreten von sogenannten Ekman-Wirbel sorgt.

### Ekman-Wirbel

Die Strömungsgeschwindigkeit der Grenzschichtflüssigkeit wird an den feststehenden Rändern auf Null gezwungen. Die durch eine zunehmende Innenzylinderrotation an Einfluß gewinnende Zentrifugalkraft verursacht aufgrund der Haftreibung an Boden und Deckel eine zum Innenzylinder hin gerichtete Strömung, die dort zum Entstehen von Randwirbeln sorgt, den Ekman-Wirbeln.

Durch diese wird das Entstehen der Taylor-Wirbelströmung begünstigt, da die Ekman-Wirbel die Taylor-Wirbel antreiben. Deshalb kommt es bei Erhöhung der Reynoldszahl zu einem kontinuierlichen Übergang zwischen der Couette-Strömung und der Taylor-Wirbelströmung. Somit ist es keine Instabilität (s. Abschnitt 3) [12]. Dieses Verhalten konnte numerisch von Roquefort und Grillaud [108] für einen schmalen Spalt und experimentell von Pfister und Rehberg [95] für einen breiten Spalt vollständig bestätigt werden.



# Kapitel 3

## Verzweigungstheorie

In diesem Kapitel sollen die mathematischen Grundlagen vermittelt werden, die zur qualitativen Analyse des Langzeitverhaltens dynamischer Systeme benötigt werden.

Zur Beschreibung der Entwicklungsprozesse dynamischer Systeme betrachtet man die Änderung physikalischer Größen als Funktion der Zeit. Ist zu einem bestimmten Zeitpunkt der betrachtete Zustand durch  $n$  Zustandsgrößen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  definiert, wird dessen Entwicklung durch ein System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{3.1}$$

beschrieben. Es lassen sich formal Spaltenvektoren einführen

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \\ \mathbf{F} &= (F_1 \ F_2 \ \dots \ F_n),\end{aligned}$$

womit sich das Gleichungssystem 3.1 übersichtlicher schreiben läßt:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}).\tag{3.2}$$

Die nichtlineare Dynamik kann ohne Kenntnis der Theorie linearer Differentialgleichungen nicht verstanden werden. Deshalb soll diese lineare Theorie im folgenden aufgezeigt werden; auf ihr wird später die nichtlineare Theorie aufbauen.

### 3.1 Lineare Systeme

Im einfachsten Fall ist das Differentialgleichungssystem (3.2) linear mit konstanten Koeffizienten:



$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x}$$

mit der konstanten, nichtsingulären  $(n \times n)$ -Matrix der Koeffizienten  $\mathbf{L}$ . Mit dem Lösungsansatz

$$\mathbf{x} = e^{\lambda t}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)$$

erhält man ein homogenes lineares Gleichungssystem  $[\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{y} = 0$ , das nur dann eine nichttriviale Lösung besitzt, wenn die Determinante verschwindet:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det[\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}] \\ &= A_n\lambda^n + A_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + A_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$P(\lambda)$  stellt ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $\lambda$  dar und wird charakteristische Gleichung oder Säkulargleichung genannt. Die Nullstellen von  $P(\lambda)$  sind die Eigenwerte von  $\mathbf{L}$ . Ein nichtverschwindender Vektor  $\mathbf{y}$ , der die Gleichung  $[\mathbf{L} - \lambda\mathbf{I}]\mathbf{y} = 0$  erfüllt, heißt Eigenvektor von  $\mathbf{L}$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

So gewinnt man für jedes Paar  $\lambda_i, \mathbf{y}_i$  eine Lösung der Form

$$\mathbf{x}_i = e^{\lambda_i t}\mathbf{y}_i.$$

Gibt es  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\lambda_i$ , so erhält man  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{y}_i$ , und die allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination (nach Arnol'd und Braun) mit durch die Anfangsbedingung  $\mathbf{x}(\mathbf{t}_0)$  festgelegten Integrationskonstanten  $C_i$  zu:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \mathbf{y}_i.$$

Die Gültigkeit des Superpositionsprinzips ist die wichtigste Eigenschaft linearer Systeme. Dieses Prinzip gilt im Gegensatz dazu bei den nun zu behandelnden nichtlinearen Systemen nicht.

## 3.2 Nichtlineare Systeme

Hier interessieren die Eigenschaften des nichtlinearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_\mu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k, \quad (3.3)$$

wobei  $\mu$  einen  $k$ -dimensionalen Parameterraum aufspannt. Dieser Parameter kann zum Beispiel die Reynoldszahl oder die Temperatur sein.

Mit einer Änderung der Kontrollparameter des Systems können qualitative Änderungen der Dynamik einhergehen. Diese werden Verzweigungen oder Bifurkationen, die zugehörigen kritischen Parameterwerte  $\mu_{cr}$  Verzweigungswerte genannt. Die Bifurkationen können sowohl die Anzahl der möglichen Lösungen als auch deren Stabilität verändern. So kann zum Beispiel ein ursprünglich stabiler Gleichgewichtszustand für einen kritischen Wert

$\mu_{cr}$  des Kontrollparameters instabil werden, wobei gleichzeitig zwei neue stabile Gleichgewichtslagen entstehen. Hierbei heißen Lösungen, die gegenüber Störungen ihr Verhalten nicht ändern, **stabil**, die anderen **instabil**. Es ist nun Aufgabe der Bifurkationsanalyse, Verzweigungspunkte  $\mu_{cr}$  zu bestimmen und für Werte  $\mu > \mu_{cr}$  neu auftretende Lösungen zu ermitteln.

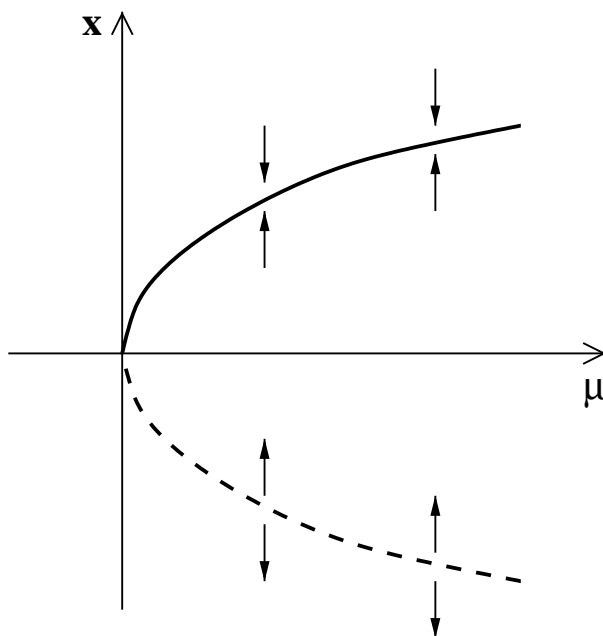


Abbildung 3.1: Die eindimensionale Sattelknoten-Verzweigung.

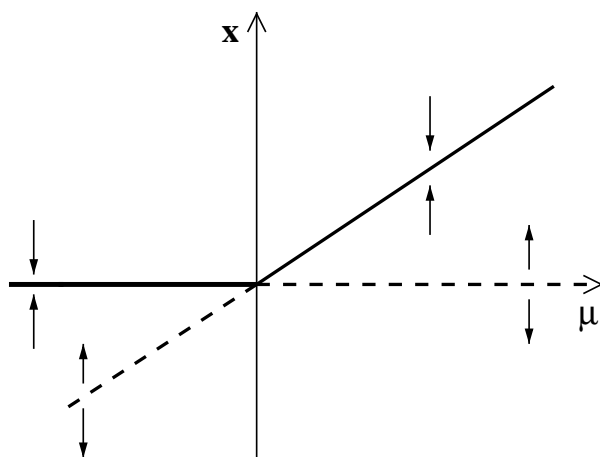


Abbildung 3.2: Die eindimensionale transkritische Verzweigung.

Um einen Verzweigungspunkt mathematisch beschreiben zu können, muß man das Gleichungssystem (3.3) linearisieren. Dazu wird die Taylorentwicklung um den Verzwei-

gungspunkt nach Termen niedriger Ordnung abgebrochen. So gewonnene Aussagen gelten daher nur lokal in einer kleinen Umgebung um den Verzweigungspunkt. Man spricht von **lokalen Verzweigungen**. Aussagen über den gesamten Verlauf der Lösung (**Globale Verzweigung**) lassen sich so nicht treffen. Diese sind komplizierter [138].

Im folgenden sollen die einfachsten lokalen Bifurkationstypen dargestellt werden, die sich bis zur Näherung dritter Ordnung ergeben. Betrachtet werden hier Systeme, die nur von einem Kontrollparameter abhängen. Es werden vier verschiedene Typen unterschieden:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad \text{Sattelknoten-Verzweigung} \quad (3.4)$$

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \quad \text{Transkritische Verzweigung} \quad (3.5)$$

$$\dot{x} = \mu x - gx^3 \quad \text{Gabel-Verzweigung} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \mu x - (x^2 + y^2)x \\ \dot{y} &= x + \mu y - (x^2 + y^2)y \end{aligned} \quad \text{Hopf-Verzweigung} \quad (3.7)$$

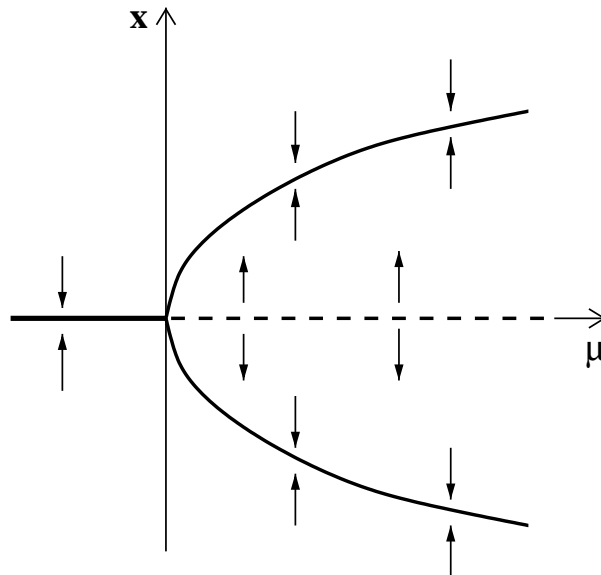


Abbildung 3.3: Diagramm der eindimensionalen Gabelverzweigung.

Die Abbildungen 3.1 – 3.4 zeigen die zugehörigen Verzweigungsdiagramme. Dort sind die stabilen Lösungen mit einem durchgezogenen und die instabilen mit einem gestrichelten Ast dargestellt. Eine nun folgende Stabilitätsanalyse gibt Aufschluß über das Stabilitätsverhalten der Lösungen.

Betrachtet man zum Beispiel die Sattelknoten–Verzweigung, Gleichung (3.4), dann findet man als Gleichgewichtslösungen ( $F_\mu(x) = 0$ ) :  $x_s = \pm\sqrt{\mu}$ . Für  $\mu < 0$  existieren keine Lösungen bzw. Gleichgewichtslagen.

Zur Stabilitätsanalyse sind die Eigenwerte der Jakobi–Matrix  $DF$

$$(DF)_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x_s}$$

zu betrachten. Eine Stabilitätsanalyse für die Sattelknoten–Verzweigung

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_s} = -2x|_{x_s}$$

zeigt, daß für  $\mu > 0$  der Zweig  $x_s = \sqrt{\mu}$  stabil,  $x_s = -\sqrt{\mu}$  dagegen instabil ist. Für den Punkt  $\mu \rightarrow +0$  nähern sich der stabile und instabile Lösungsast soweit an, daß sie bei  $\mu = 0$  zusammenfließen und sich gegenseitig auflösen.

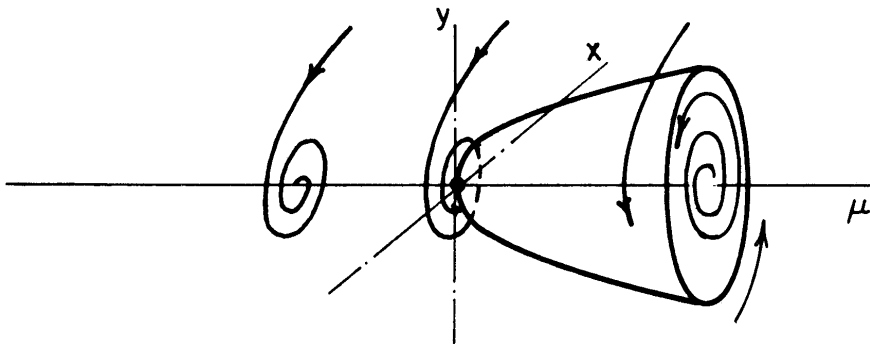


Abbildung 3.4: Die Hopf–Verzweigung, aus [55].

Die Unterschiede der Verzweigungsformen liegen in der verschiedenartigen Symmetrie der Gleichungen begründet. Die Gabelverzweigung ist dabei allgegenwärtig in physikalischen Systemen, da ein quadratischer Term auf der rechten Seite der Gleichung (3.6) fehlt und so die Symmetrie  $F_\mu(-x) = -F_\mu(x)$  vorliegt.

Den Verzweigungstypen in den Gleichungen (3.4) – (3.6) ist gemein, daß die Eigenwerte der Jakobi–Matrix im Gleichgewichtszustand reell sind. Dieses ist bei der Hopf–Verzweigung, Gleichung (3.7), nicht der Fall. Hier erhält man ein Paar konjugiert komplexer Eigenwerte:  $\lambda_{1/2} = \mu \pm i$ . Die Hopf–Bifurkation besitzt einen Fixpunkt, der für  $\mu < 0$  stabil ist,  $Re(\lambda_{1/2}) < 0$ , aber für  $\mu > 0$  seine Stabilität verliert,  $Re(\lambda_{1/2}) > 0$ . An dem Punkt  $\mu = 0$  findet die Verzweigung eines Fixpunktes in einen periodischen Grenzzyklus statt. So können Oszillationen in nichtlinearen Systemen auftreten. Viele Schwingungszustände im Taylor–Couette–System lassen sich durch diese Verzweigung beschreiben. Der Kontrollparameter  $\mu$  bestimmt ab einem kritischen Wert  $\mu_{cr}$  sowohl die Existenz neuer Gleichgewichtslösungen als auch deren Stabilitätsverhalten.

In der Theorie kann zu jeder Verzweigungsform eine komplementäre gefunden werden, die als **inverse Verzweigung** bezeichnet wird. Hier sind die Stabilitätseigenschaften der Lösungsäste umgekehrt.

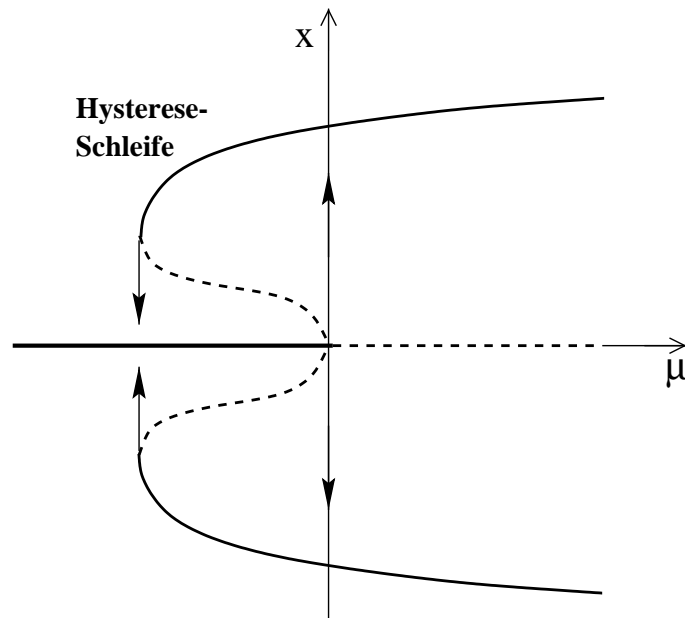


Abbildung 3.5: Verzweigungsdiagramm einer subkritischen Gabelverzweigung. Eine auftretende Hysterese bei Änderung des Kontrollparameters ist deutlich zu erkennen.

Berücksichtigt man bei der Taylor-Entwicklung auch höhere Terme als dritter Ordnung, kommt es zu komplizierteren Verzweigungsformen. Eine sehr wichtige Verzweigung ist dabei die **subkritische Gabelverzweigung**, die sich aus einer inversen Gabelverzweigung und zwei Sattelpotenverzweigungen zusammensetzt. Diese ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Bei Erhöhung des Kontrollparameters  $\mu$  aus dem unterkritischen Bereich heraus wird die Lösung bei  $\mu = 0$  instabil und geht durch einen Sprung in einen der beiden möglichen stabilen Zustände über. Die eingetragenen Pfeile deuten die Sprungrichtungen an.

Bei Erniedrigung von  $\mu$  von diesem Punkt aus bleibt dieser Ast als stabile Lösung auch über den Punkt  $\mu = 0$  hinweg erhalten und fällt erst nach einer weiteren endlichen Parameterreduktion in den ursprünglichen Lösungsast zurück. Im Systemverhalten ist eine Hysterese zu beobachten.

Da im unterkritischen Bereich schon andere Lösungsäste existieren, bezeichnet man diesen Verzweigungstyp als **subkritische Verzweigung** oder Rückwärts-Bifurkation. Im Vergleich dazu handelt es sich bei der einfachen Gabelverzweigung (s. Abb. 3.3) um eine **superkritische Verzweigung** oder Vorwärts-Bifurkation.

Das Verhalten eines Systems vor einem kritischen Punkt bezeichnet man als **unterkritisch**; nach Durchgang durch den Verzweigungspunkt nennt man es **überkritisch**.

Befindet sich das System in der Nähe von Verzweigungspunkten, so antwortet es auf Parameteränderungen auf der Zeitskala:

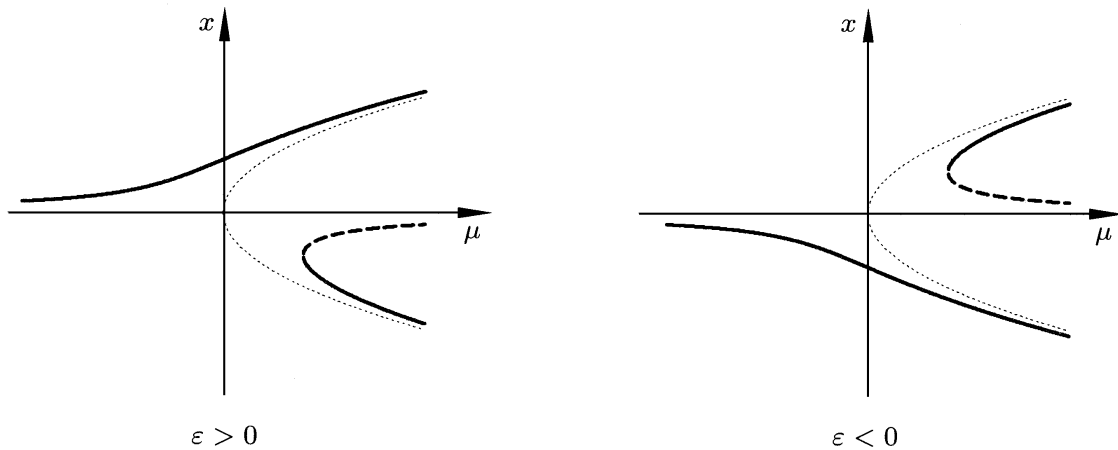


Abbildung 3.6: Die strukturinstabile Gabel-Verzweigung, aus [11].

$$\tau \approx \frac{1}{\mu - \mu_{cr}}.$$

Dort können von der Einstellung bis zum letztlich stabilen Endzustand im Taylor–Couette–System Stunden vergehen. Dieses Verhalten wird als „*critical slowing down*“ bezeichnet. Werden generell die notwendigen Relaxationszeiten des Systems nicht eingehalten, stellen sich scheinbar stabile Zustände ein, die aber nach endlicher Zeit verschwinden. Diese werden **transiente Zustände** genannt.

In physikalischen Systemen treten zwangsläufig immer Störungen auf. Deshalb sind Untersuchungen erforderlich, wie sich die einzelnen Verzweigungstypen unter Störungen verhalten. Betrachtet man z.B. die Gabel-Verzweigung, Gleichung (3.6) unter Berücksichtigung einer Störung  $\epsilon$

$$\dot{x} = \epsilon + \mu x - x^3,$$

so zeigt sich, daß die ursprünglich symmetrische Gabel-Verzweigung durch die Störung  $\epsilon \neq 0$  aufgebrochen wird, siehe Abbildung 3.6. Es entsteht ein Ast von Fixpunktlösungen, der sich nicht verzweigt. Für  $\mu_{cr} > 0$  kommt eine Sattelknoten-Verzweigung hinzu. Diese Störung  $\epsilon$  führt hier zu einer qualitativen Änderung der Dynamik. Man bezeichnet die Gabelverzweigung deshalb als **strukturinstabil**. Die Lösungsäste nennt man in diesem Fall **entkoppelt**.

In physikalischen Systemen gelangt man durch eine kontinuierliche Erhöhung des Kontrollparameters  $\mu$  in der Nähe des Verzweigungspunktes immer wieder in die durch die Störung bevorzugte Lösung. Diese stellt den **primären Zustand** dar, der topologisch mit dem unterkritischen Bereich verbunden ist.

Der abgekoppelte Lösungsast läßt sich nur durch eine sprunghafte Erhöhung von  $\mu$  aus dem unterkritischen Bereich heraus erreichen. Diesen Zustand bezeichnet man als **sekundär**. Er ist topologisch mit dem unterkritischen Bereich nicht verbunden. Wie die Gabelverzweigung ist die transkritische Verzweigung strukturinstabil.

Die Sattelknoten- und die Hopf-Verzweigung erweisen sich als stabil gegenüber Störungen. Hier spricht man von **strukturstabilen Verzweigungen**. Diese beiden stellen auch die typischen Verzweigungsformen dar, die in physikalischen Systemen anzutreffen sind.

Bei den in diesem Abschnitt beschriebenen Verzweigungstypen handelt es sich um sogenannte **Kodimension-Eins-Verzweigungen**. Sie treten aufgrund der Veränderung lediglich eines Kontrollparameters auf.

Die Kodimension bezeichnet dabei die kleinste Anzahl von Parametern, die notwendig ist, um eine Verzweigung zu beschreiben.

Bei der in dieser Arbeit durchgeführten Strömungsanalyse im Taylor-Couette-System werden die zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern auftretenden Zustände bei festen geometrischen Randbedingungen durch die Reynoldszahlen des Innen- und Außenzylinders ( $Re_i, Re_a$ ) charakterisiert. So ist in diesem zweidimensionalen Parameterraum mit dem Auftreten von Kodimension-Eins- und **Kodimension-Zwei-Verzweigungen** zu rechnen.

Während eine Kodimension-Eins-Verzweigung üblicherweise durch die Variation von  $Re_i$  bei konstantem  $Re_a$  zu untersuchen ist, können aus theoretischer Sicht Kodimension-Zwei-Verzweigungen nur durch die gleichzeitige Änderung von  $Re_i$  und  $Re_a$  erhalten werden. Dieses ist experimentell nicht möglich.

Der Punkt, an dem zwei verschiedene Kodimension-Eins-Verzweigungen zusammentreffen und eine Kodimension-Zwei-Verzweigung bilden, wird bikritischer Punkt genannt. Ein solcher existiert bei dem Übergang von der Couette-Stömung zu der Taylor-Wirbelströmung beziehungsweise zu den Spiralen. Hier treffen eine Hopf-Verzweigung und eine stationäre Verzweigung aufeinander. Zur Analyse der aus der Kodimension-Zwei-Verzweigung resultierenden Dynamik werden die Kodimension-Eins-Verzweigungen in der unmittelbaren Nähe des bikritischen Punktes untersucht. Hier kommt es zu Moden-Wechselwirkungen. Diese wurden in [24] und [73] ausgiebig untersucht. Die Analyse allgemeiner Moden-Wechselwirkungen findet sich bei [31] und [49].

Der Inhalt dieses Unterkapitels stellt nur einen knappen Abriss der Verzweigungstheorie dar und soll vor allem Termini erklären, soweit diese für die Betrachtung der Meßergebnisse in dieser Arbeit erforderlich sind.

Für einen tieferen Einblick in die Theorie nichtlinearer Systeme und eine ausführliche Beschreibung der Verzweigungstheorie sei auf die Literatur verwiesen [11, 31, 32, 46, 55, 60, 118, 138].

# Kapitel 4

## Vorhergehende Arbeiten

Im Taylor–Couette–System treten zusätzlich zu den in Abschnitt 2.3 beschriebenen noch weitere Strömungszustände auf, deren Existenz von dem Radienverhältnis  $\eta$  und von den Winkelgeschwindigkeiten der beiden Zylinder abhängt. Die unterschiedlichen Strömungsformen, die sich bei ruhendem Außenzylinder im breitem Spalt sowie bei unabhängig voneinander rotierenden Zylindern im schmalen Spalt ausbilden, werden in diesem Kapitel vorgestellt. Sie sind wichtig für die Beschreibung und Interpretation der in dieser Arbeit gewonnenen Meßergebnisse. Neben diesen werden hier auch einige theoretische Arbeiten vorgestellt, soweit sie mit dieser Arbeit in Verbindung stehen.

### 4.1 Anomale Moden

Bei kontinuierlicher Erhöhung der Reynoldszahl des Innenzylinders bei ruhendem Außenzylinder ergibt sich in ausgedehnten endlichen Systemen aus der Couette–Strömung heraus eine gerade Anzahl an Taylor–Wirbeln.

Während deren Drehsinn sich so einstellt, daß an den Rändern eine Einwärtsströmung vorliegt, konnte Benjamin 1978 [12] erstmals auch Strömungszustände beobachten, die er als "Anomale Moden" beschrieb. Diese sind in dem Sinne nicht normal, als daß an den Rändern eine Auswärtsströmung vorliegt.

Benjamin und Mullin [13] zeigten 1981, daß auch anomale Zustände mit einer ungeraden Anzahl an Wirbeln existieren. Hierbei liegt an dem einen Rand eine Einwärts– und an dem anderen Rand eine Auswärtsströmung vor.

Zur Beschreibung ihrer Ergebnisse benutzten sie ein Modell von Schaeffer [111], welches mit Hilfe eines "Homotopie–Parameters"  $\tau \in [0, 1]$  einen kontinuierlichen Übergang vom mathematisch idealisierten Taylor–Problem ( $\tau = 0$ ) zu realistischen Randbedingungen ( $\tau = 1$ ) zu beschreiben vermag. Qualitativ ähnliche Resultate zu experimentellen Ergebnissen findet Schaeffer schon bei kleinen Störungen ( $\tau \ll 1$ ).

Für  $\tau = 0$  ergibt sich in den Rechnungen für den Übergang von der Couette–Strömung zur Taylor–Wirbelströmung eine superkritische Gabelverzweigung (s. Abb. 3.3). Die beiden möglichen Lösungsäste unterscheiden sich in dem Drehsinn der Wirbel. Für  $\tau > 0$  wird die Gabelverzweigung bei einer geraden Anzahl von Wirbeln durch den Einfluß der Ränder entkoppelt. Die anomalen Zustände lassen sich nur noch durch Kontrollparametersprünge einstellen. Bei einer ungeraden Anzahl der Wirbel im System wird die Gabelverzweigung für  $\tau > 0$  subkritisch und das Verzweigungsverhalten komplizierter.



Die superkritische Gabelverzweigung, die im idealisierten Fall auftritt, entkoppelt ebenso bei Störungen. Allerdings ist hier der zweite Ast komplett instabil, also müßten auch alle anomalen Zustände instabil sein. Da aber anomale Zustände im Experiment auftreten, ist diese Gabelverzweigung offensichtlich nicht geeignet, den Übergang in endlichen Systemen zu beschreiben.

Experimentelle Ergebnisse zeigen, daß der Grad der Entkopplung nahezu unabhängig von der Anzahl der Wirbel ist [75], aber vom Radienverhältnis  $\eta$  abhängt [27]. Mit wachsendem  $\eta$  nimmt dieser zu.

Zum Beispiel unterscheiden sich die Einsatze der normalen und anomalen Moden bei  $\eta = 0,5$  um einen Faktor 2,7 [75].

Weitere Untersuchungen zu anomalen Moden finden sich bei [26, 27, 75, 107].

## 4.2 Strömungszustände bei ruhendem Außenzylinder und $\eta = 0,5$

Die bei ruhendem Außenzylinder im breiten Spalt auftretenden Strömungsformen werden zu einem Vergleich mit den in dieser Arbeit ebenfalls bei  $\eta = 0,5$  gewonnenen Meßergebnissen zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern benötigt und deshalb hier kurz vorgestellt.

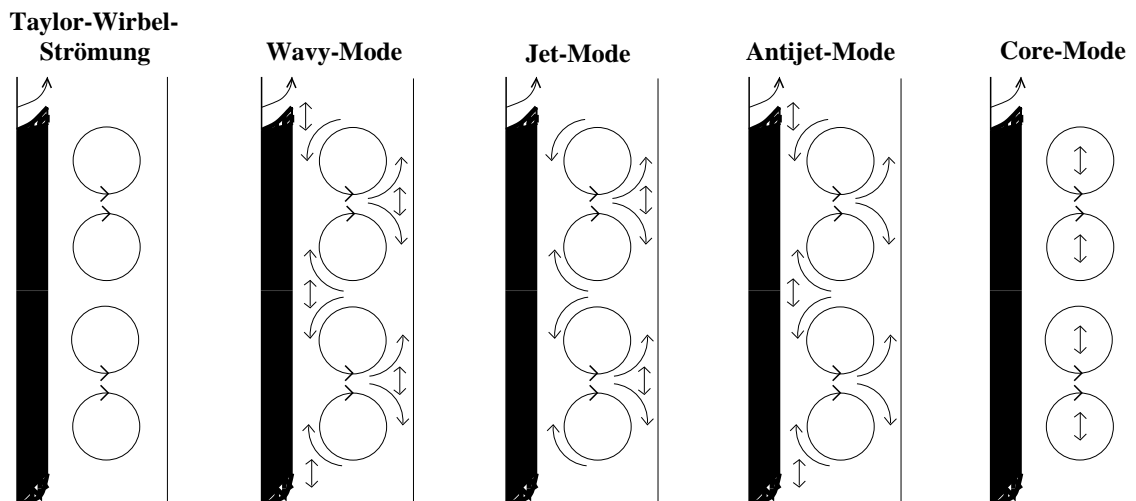


Abbildung 4.1: Schematische Darstellung der Taylor-Wirbelströmung und Schwingungsformen verschiedener zeitperiodischer Zustände des Taylor-Couette-Systems. Auf der linken Seite der Bilder ist jeweils der rotierende Innenzylinder angedeutet.

### 4.2.1 Schwingungsformen

- **Jet-Mode:**  
Bei der Jet-Mode handelt es sich um eine Oszillation der Auswärtsströmung bei stationärer Einwärtsströmung. Je nach Amplitude der Schwingung unterscheidet man „Kleine-Jet-Mode“ („small Jet“) und „Große-Jet-Mode“ („large Jet“)<sup>1</sup>, wobei die zweite sich durch eine sehr große Amplitude auszeichnet. Während bei der Großen-Jet-Mode benachbarte Auswärtsströmungen in Phase schwingen, sind diese bei der Kleinen-Jet-Mode gegenphasig.
- **Antijet-Mode:**  
Im Gegensatz zur Jet-Mode findet hier eine schnelle Oszillation der Einwärtsströmung statt, während die Auswärtsströmung stationär bleibt. Diese Mode findet man häufig bei ausgedehnten Wirbelsystemen ( $\gamma > 1$ ), die Jet-Mode bei gestauchten ( $\gamma < 1$ ).
- **Core-Mode:**  
Bei der Core-Mode sind sowohl Auswärts- als auch Einwärtsströmung stationär. Hier sind es die Wirbelkerne, die schwingen. Die Core-Mode wurde nur bei Dehnung des Wirbelsystems gefunden. Das System antwortet mit einer höheren Frequenz als der anregenden Innendrehzahlfrequenz ( $\Omega_{Mode} > 1$ ), siehe auch Tabelle 4.1.
- **Wavy-Mode:**  
Hier findet eine kollektive Schwingung des gesamten Wirbelsystems statt. Dabei weist die Oszillation der Ein- und Auswärtsströmung eine feste Phasenbeziehung auf.
- **VLF (very low frequency)-Mode:**  
Dieses ist eine sehr langsame, zeitperiodisch axialsymmetrische Schwingung des gesamten Wirbelsystems mit azimuthaler Wellenzahl  $m = 0$ .

In Tabelle 4.1 sind die bisher gefundenen Schwingungsformen noch einmal mit den entsprechenden normierten Eigenfrequenzen für  $\eta = 0.5$  aufgeführt. Für alle Moden wird eine azimuthale Wellenzahl  $m$  definiert, die angibt, wie viele Schwingungsmaxima im Spalt bei einem Umlauf um den Zylinder existieren. Schematisch sind die Grundmoden in Abbildung 4.1 dargestellt.

### 4.2.2 Stabilitätsdiagramm der Taylor-Wirbel-Strömung

Um Aufschluß über die Stabilitätsbereiche der Taylor-Wirbel-Strömung zu gewinnen, ermittelt man diejenige Reynoldszahl, bei der eine Oszillation einsetzt. Trägt man für die jeweiligen Wirbelzustände diese kritische Reynoldszahl in Abhängigkeit der normierten Wirbelhöhe  $\gamma = \Gamma/N$  auf, gelangt man zu dem sogenannten normalisierten Stabilitätsdiagramm. Dieses ist in Abbildung 4.2 für ein Radienverhältnis von  $\eta = 0.5$  und die Wirbelzahlen  $N = 4 \dots 16$  dargestellt.

---

<sup>1</sup>Hierbei handelt es sich um Eigennamen der Moden.

Grundmode		normierte Frequenz $\Omega_{Mode}$
Kleine-Jet	( $m = 1$ )	0.40 – 0.43
Große-Jet	( $m = 1$ )	0.50 – 0.54
Antijet	( $m = 4$ )	0.70 – 0.72
	( $m = 5$ )	0.91 – 0.93
Core		1.1 – 1.2
Wavy	( $m = 1$ )	0.10 – 0.12
VLF	( $m = 0$ )	< 0.01

Tabelle 4.1: Die auf die Rotationsfrequenz des Innenzylinders normierten Eigenfrequenzen der bisher bekannten Grundmoden der Taylor–Couette–Strömung für  $\eta = 0.5$  und  $Re_a = 0$ .  $m$  bezeichnet die azimuthale Wellenzahl.

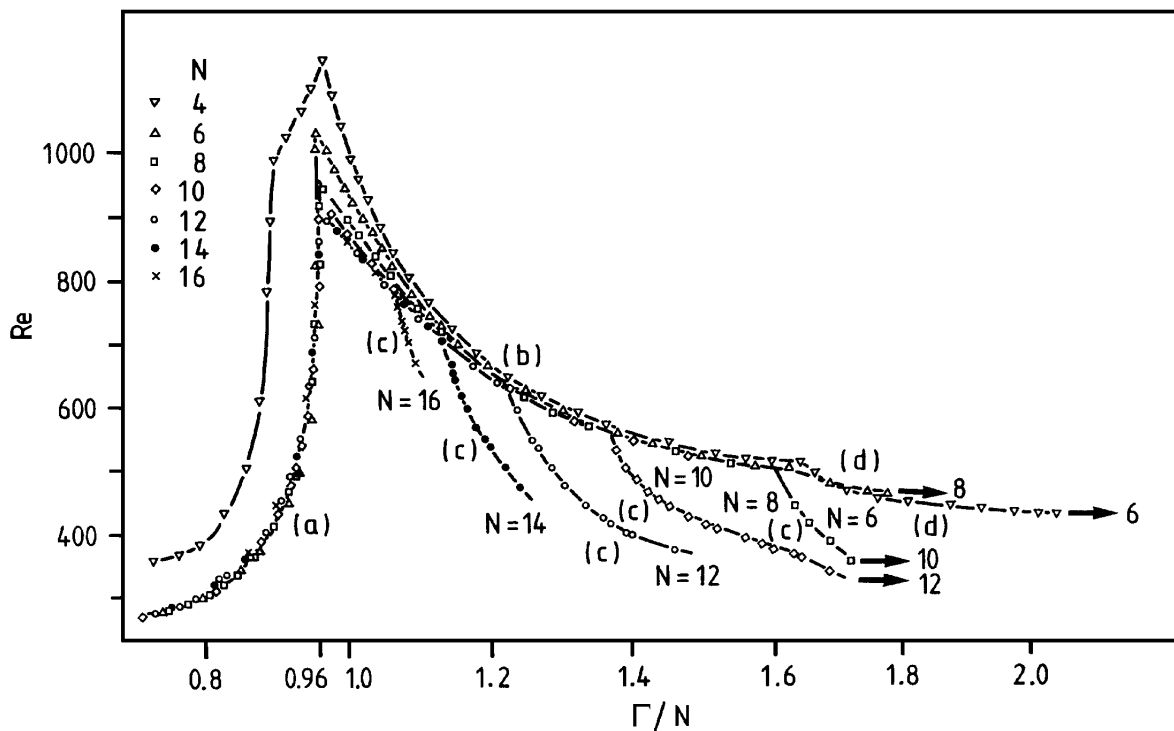


Abbildung 4.2: Das normalisierte Stabilitätsdiagramm für  $\eta = 0.5$  und Wirbelzahlen  $N = 4 \dots 16$ , aus [45].

Es zeigt sich, daß der Stabilitätsbereich für  $\Gamma/N \approx 1$  am größten ist. Hier entspricht die Wirbelhöhe etwa der Wirbelbreite. Die Linie (a) in Abbildung 4.2 kennzeichnet den Einsatz der Kleinen-Jet-Mode. Bei der Linie (b) setzt die Antijet-Mode ein. Zu größeren  $\Gamma/N$ -Werten hin löst die Wavy-Mode die Antijet-Mode als erste zeitperiodische Instabilität ab (c). Die Wavy-Mode tritt für  $N \leq 6$  nicht auf. Stattdessen bildet sich dort (d) die Core-Mode aus.

Die Stabilitätsgrenzen für die Wirbelzahlen  $N \geq 6$  zeigen eine starke Ähnlichkeit. Nur der Einsatzpunkt der Wavy-Mode verschiebt sich für größere  $N$  zu kleineren  $\Gamma/N$ -Werten.

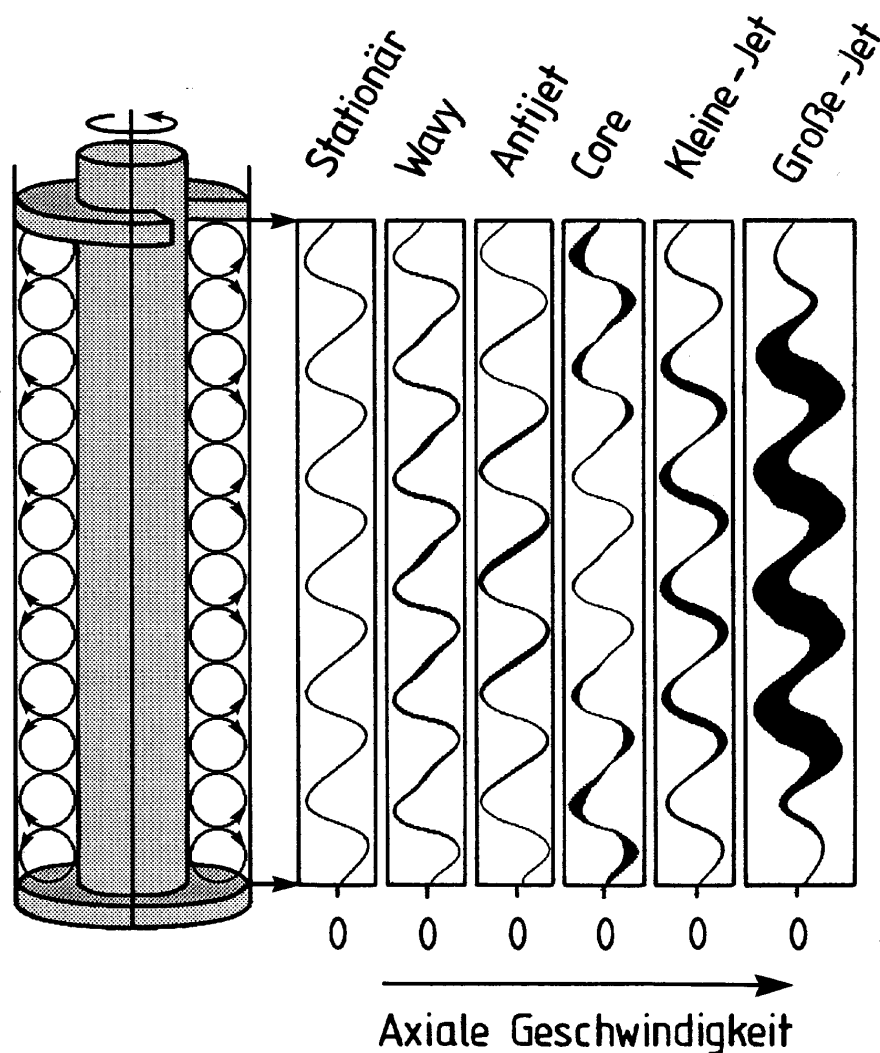


Abbildung 4.3: Axiale Geschwindigkeitsprofile der Grundmoden. Hier ist ein 12-Wirbel-Zustand dargestellt, aus [125].

Bei  $N = 4$  haben die Randeffekte einen großen Einfluß, so daß die Oszillation hier erst bei etwas höheren Reynoldszahlen einsetzt [107].

Die einzelnen Zustände existieren nicht über den ganzen Parameterbereich hinweg, weil die Taylor-Wirbel nicht beliebig ausgedehnt oder gestaucht werden können. Übergänge in Zustände mit anderen Wirbelzahlen sind möglich (angedeutet durch  $\rightarrow$ ).

Die Abbildung 4.3 zeigt Geschwindigkeitsprofile der in diesem Abschnitt vorgestellten Moden im 12-Wirbelzustand. Diese wurden erhalten, indem das LDA-Meßvolumen in vertikaler Richtung durch den Zylinder bewegt wurde. Deutlich sind die unterschiedlichen Amplitudenverteilungen der oszillatorischen Moden in Abhängigkeit von der vertikalen Position im Zylinder erkennbar.

Während die Kleine-Jet-Mode, die Antijet-Mode, die Wavy-Mode und für gewisse Bereiche (siehe oben) auch die Core-Mode als erste zeitabhängige Instabilitäten im breiten Spalt auftreten, erscheinen die Große-Jet-Mode und die VLF-Mode nur als höhere zeitabhängige Instabilitäten.

Im schmalen Spalt vollzieht sich der Übergang ins chaotische Regime immer über die Wavy-Mode. Im breiten Spalt ist das anders: So läßt sich bei Erhöhung der Reynoldszahl des Innenzylinders beispielsweise die folgende Abfolge von Systemzuständen feststellen:

Couette-Strömung  $\rightarrow$  TVF  $\rightarrow$  Kleine-Jet-Mode  $\rightarrow$  VLF-Mode  $\rightarrow$  Chaos

Die Erscheinungsformen der VLF-Mode, die maßgeblich an der Entstehung chaotischer Systemzustände beteiligt sein kann, sowie deren charakteristischen Eigenschaften wurden von Gerdts et al. [45], Gerdts [44], v. Stamm et al. [126] und Abshagen [6] untersucht.

Weiterführende Ergebnisse zu den im breiten Spalt bei  $\eta = 0,5$  existierenden Moden und deren Wechselwirkungen finden sich bei [1, 18, 45, 101, 124, 125].

### 4.3 Strömungszustände zwischen unabhängig rotierenden Zylindern im schmalen Spalt

Werden bei einem Taylor-Couette-Experiment beide Zylinder unabhängig voneinander rotiert, treten eine Vielzahl neuartiger Moden auf, die bei einem ruhenden Außenzylinder nicht beobachtet werden können. In diesem Abschnitt sollen einige wegweisende Arbeiten zur Untersuchung dieser Strömungszustände vorgestellt werden.

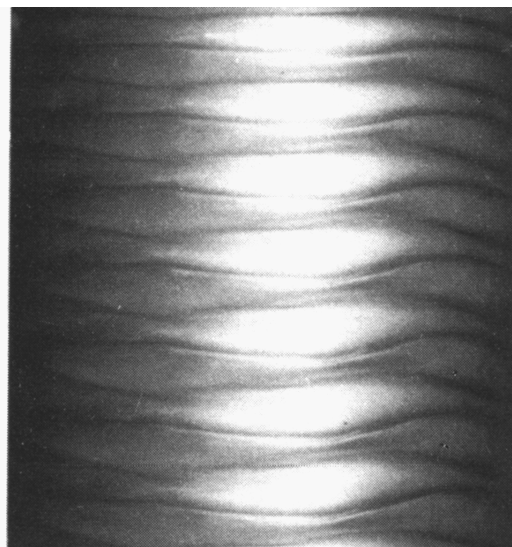


Abbildung 4.4: Typisches Erscheinungsbild der Wavy-Mode im schmalen Spalt ( $\eta = 0,88$ ), aus [35].

Bereits G.I. Taylor [132] benutzte einen Aufbau mit zwei rotierenden Zylindern. Es gelang ihm, die obere Stabilitätsgrenze der Couette-Strömung experimentell auszumessen und mit einer linearen Stabilitätsanalyse zu berechnen. Er konnte so zum ersten Mal eine quantitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erzielen. Die oberhalb der Stabilitätsgrenze entstehenden Wirbel wurden ihm zu Ehren Taylor-Wirbel genannt.

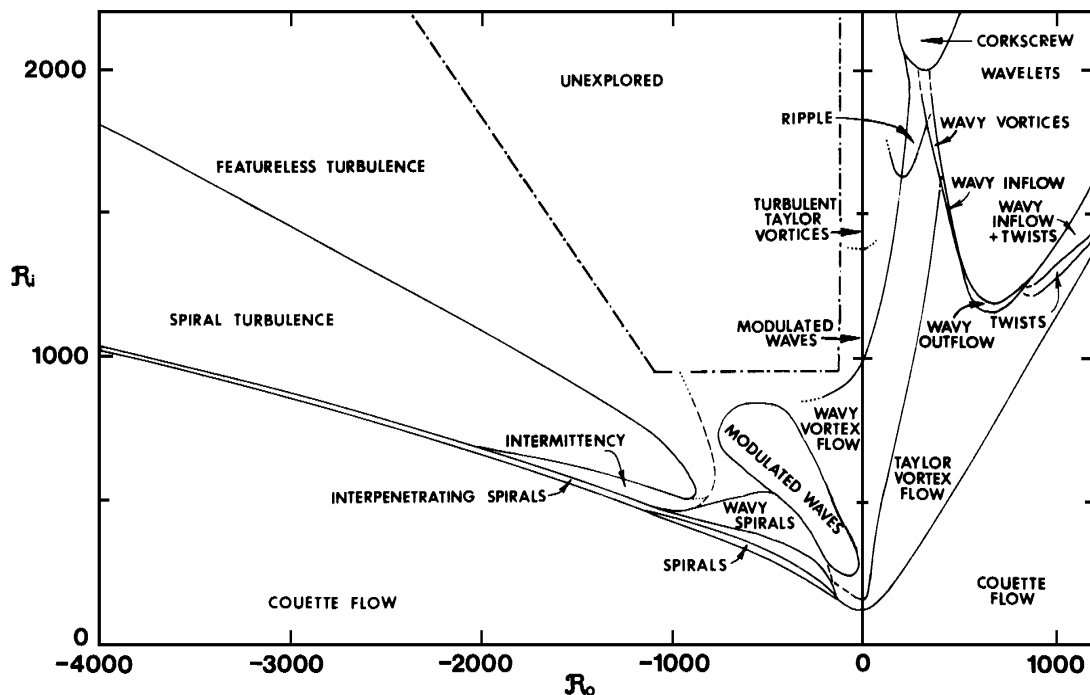


Abbildung 4.5: Stabilitätsdiagramm für  $\eta = 0,883$ . Aufgetragen ist die Reynoldszahl des Innenzylinders  $R_i$  über der des Außenzylinders  $R_o$ , aus [9].

1965 wurden von Coles [28] erstmals ausgedehnte Untersuchungen zu höheren Instabilitäten durchgeführt. Neben der Klassifizierung eines neuartigen Strömungszustandes, der heute als Wavy-Mode bekannt ist und auf den Taylor-Wirbeln einsetzt (s. Abb. 4.4), konnte Coles zeigen, daß an ein und demselben Punkt im Parameterraum bis zu 26 verschiedene Zustände erhalten werden können (Multiplizität der Lösungen). Welcher Zustand sich ausbildet, hängt davon ab, auf welchem Weg der Punkt im Parameterraum erreicht wurde.

Um eindeutige Meßergebnisse zu erzielen, stellte Coles zuerst die Rotationsrate des Außenzylinders ein. Bei ruhendem Innenzylinder ergibt sich so die Couette-Strömung. Anschließend wurde die Drehfrequenz des Innenzylinders langsam quasistatisch erhöht, bis der gewünschte Meßort im Parameterraum erreicht war.

Diese Vorgehensweise hat sich bei der Präparation der Zustände in der Strömung zwischen unabhängig rotierenden Zylindern durchgesetzt und wird seitdem in der Numerik, in der Analytik und im Experiment angewendet. Die in dieser Arbeit vorgestellten Meßergebnisse wurden ebenfalls nach dieser Vorgehensweise erhalten.

1986 veröffentlichten Andereck, Liu und Swinney [9] die ersten systematisch über einen großen  $(Re_a, Re_i)$ -Parameterbereich ausgeführten Untersuchungen zu Strömungszuständen, die zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern auftreten. Wie auch Taylor und Coles benutzten Andereck et al. [9] einen Taylor–Couette Aufbau mit einem schmalen Spalt ( $\eta = 0,883$ ). Für die meisten ihrer Untersuchungen betrug das Höhen- zu Breitenverhältnis  $\Gamma = 30$ .

Die Präparation der Zustände erfolgte auf der bei Coles beschriebenen Weise. Erst wurde die Reynoldszahl des Außenzylinders eingestellt und anschließend die des Innenzylinders quasistatisch erhöht. Die Ergebnisse ihrer Messungen zum Existenzbereich verschiedenartigster Moden sind in dem Stabilitätsdiagramm in Abbildung 4.5 dargestellt. Aufgetragen ist die Reynoldszahl des Innenzylinders  $R_i$  über der des Außenzylinders  $R_o$ . Negative Werte von  $R_o$  bedeuten eine Gegenrotation der Zylinder.

Die Ergebnisse wurden ausschließlich durch Sichtbarkeitsmessungen erzielt. Dazu wurden der Flüssigkeit Streuteilchen zugesetzt. Nach Erreichen eines gewünschten Meßortes im Parameterraum wurde der Strömungszustand, der sich ausgebildet hat, photographiert und anschließend ausgewertet. Dabei konnten neuartige Moden gefunden werden, auf die im folgenden eingegangen wird.

### 4.3.1 Gegenrotierende Zylinder

Zwischen gegenrotierenden Zylindern findet für geringe Rotationsraten des Außenzylinders ( $R_o > -155$ ) ein Übergang von der laminaren Couette–Strömung zur stationären Taylor–Wirbelströmung statt. Bei Erhöhung von  $R_i$  setzt erst auf den Taylor–Wirbeln eine Wavy–Mode ein, die im weiteren Verlauf moduliert wird. Dieses Verhalten ist qualitativ das gleiche wie bei einem System mit ruhendem Außenzylinder.

Für  $-1200 < R_o < 155$  treten Spiralen ("Spirals") als erste Instabilität auf. Die Spiralen haben, wie die Taylor–Wirbel, eine Geschwindigkeitskomponente in azimuthaler Richtung, aber zusätzlich bewegen sie sich auch in axialer Richtung fort. In Abbildung 4.6 ist ein typisches Erscheinungsbild der Spiralen im schmalen Spalt zu sehen. Deutlich erkennt man die Struktur gleich großer Wirbel, die einen gewissen Anstellwinkel haben und sich um den Innenzylinder schrauben. Der Zustand der Spiralen ist zeitperiodisch und nicht axial–symmetrisch.

Erhöht man in diesem Bereich die Reynoldszahl des Innenzylinders, so gelangt man in den Existenzbereich der "Interpenetrating spirals". Hierbei handelt es sich um zwei Spiralwellen, die unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen haben und sich im gesamten mittleren Bereich des Zylinder überlagern. Ab einem gewissen  $R_i$  oszillieren die Spiralen zusätzlich ("Wavy spirals").

In dem Bereich  $R_o < -1000$  und  $R_i > 500$  treten weitere teilweise intermittente oder turbulente Zustände auf ("Intermittency", "Spiral turbulence" und "Featureless turbulence"), auf die hier aber nicht weiter eingegangen werden soll, da sie mit der vorliegenden Arbeit nichts gemein haben.

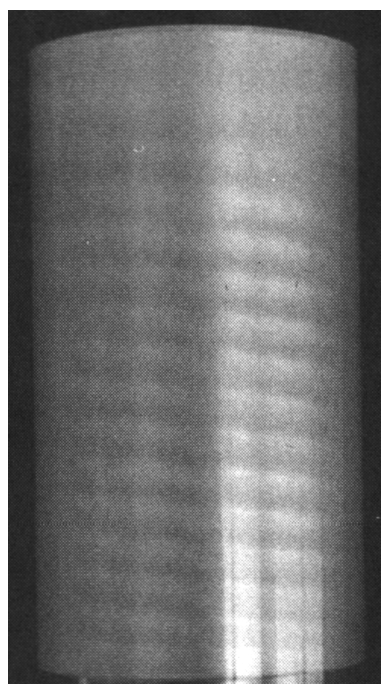


Abbildung 4.6: Typisches Erscheinungsbild der Spiralwellen im schmalen Spalt, aus [24].

### 4.3.2 Gleichsinnig rotierende Zylinder

Im Fall gleichsinnig rotierender Zylinder setzt sich die Abfolge der Übergänge, wie sie bei ruhendem Außenzylinder im schmalen Spalt zu beobachten ist (s. Abschnitt 2.3) zunächst fort: Couette-Strömung, Taylor-Wirbelströmung, wellenförmige Wirbel (Wavy-Mode) und modulierte wellenförmige Wirbel (Modulated wavy mode). Die Stabilitätsgrenzen verschieben sich allerdings für zunehmende Reynoldszahl des Außenzylinders  $R_o$  zu höheren  $R_i$ .

Für große Reynoldszahlen des Innenzylinders ( $R_i > 1000$ ) treten im schmalen Spalt verschiedene Strömungszustände auf, die durch zusätzliche Oszillationen gekennzeichnet sind. Neben einer Schwingung der Einwärtsströmung ("Wavy inflow") und einer Schwingung der Auswärtsströmung ("Wavy outflow"), die auch im breiten Spalt bei ruhendem Außenzylinder auftreten, konnten Andereck et al. [9] einen Bereich einer Wavy-Mode mit azimuthaler Wellenzahl  $m = 2$  ausfindig machen. Dieses ist erstaunlich, besitzt die Wavy-Mode im schmalen Spalt sonst eine höhere azimuthale Wellenzahl [28].

Ein großer Bereich im Parameterraum wird von "Wavelets" dominiert. Hierbei handelt es sich um Schwingungen der Ein- und Auswärtsströmungen mit verschiedenen Phasengeschwindigkeiten und im allgemeinen auch unterschiedlichen azimuthalen Wellenzahlen.

Vom optischen Erscheinungsbild her am auffälligsten ist die Twist-Mode, die in Abbildung 4.7 für  $R_o = 720$  und  $R_i = 1040$  zu sehen ist. Es fällt eine seilartige Struktur innerhalb der Taylor-Wirbel auf. Die Schwingungen sind über der gesamten Zylinderlänge in Phase. Ein- und Auswärtsströmung befinden sich bei diesem Zustand in Ruhe.



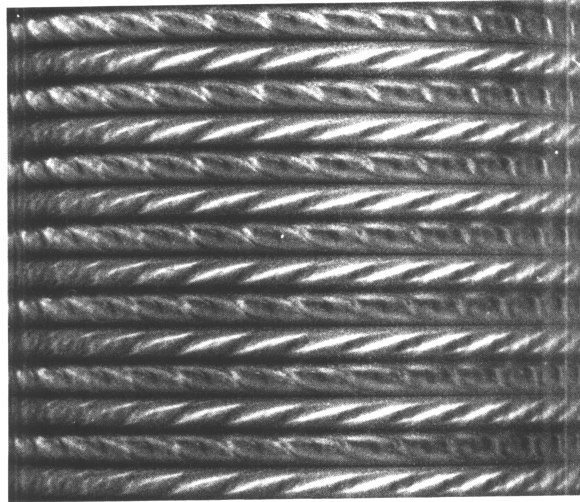


Abbildung 4.7: Twist-Mode bei  $Re_o = 720$  und  $Re_i = 1040$ . Eine feste Phasenbeziehung der Schwingungen ist deutlich zu erkennen, aus [9].

Weiterhin finden sich Moden mit sehr hohen azimuthalen Wellenzahlen (”Ripple” und ”Corkscrew”), die aber noch nicht näher untersucht sind.

## 4.4 Theoretische Arbeiten

Zwischen zwei unendlich langen rotierenden Zylindern läßt sich für die Couette-Strömung eine exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen angeben. Diese Grundströmung weist nur eine azimuthale Geschwindigkeitskomponente auf, deren Größe abhängig von der Entfernung  $r$  vom Innenzylinder ist:

$$V(r) = A * r + B/r$$

Mit den beiden Winkelgeschwindigkeiten des Innen- und Außenzylinders  $\omega_i$  und  $\omega_a$  und dem Verhältnis dieser  $\mu = \omega_a / \omega_i$  ergeben sich  $A$  und  $B$  zu:

$$A = \frac{r_i^2 \omega_i - r_a^2 \omega_a}{r_i^2 - r_a^2} = -\omega_i \frac{\eta^2 - \mu}{1 - \eta^2}$$

$$B = \omega_i \frac{r_i^2 (1 - \mu)}{1 - \eta^2}$$

Betrachtet man die Strömung zwischen gegenrotierenden Zylindern, so wird eine Schicht mit azimuthaler Strömungsgeschwindigkeit Null, die sich bei  $Re_a = 0$  direkt am ruhenden Außenzylinder befindet, in Richtung Innenzylinder verschoben. Dieses ist schematisch in Abbildung 4.8 dargestellt.

Es läßt sich eine verschwindende Strömungsgeschwindigkeit auf einem Zylinder mit Radius  $r$  finden:

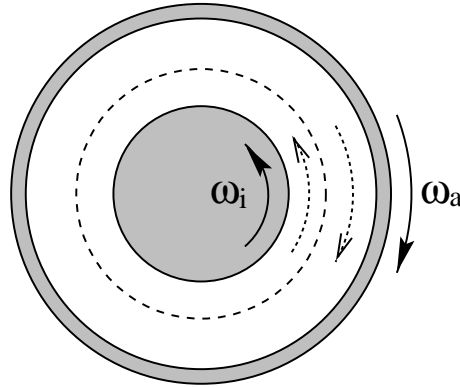


Abbildung 4.8: Darstellung der Strömungsverhältnisse bei gegeneinander rotierenden Zylindern im Fall einer laminaren Strömung. Die unterbrochene Linie entspricht der Schicht mit einer azimutalen Strömungsgeschwindigkeit Null.

$$r = r_i (1 - \mu)(\eta^2 - \mu)^{1/2}$$

Außer der für die Couette-Strömung zwischen unendlich langen Zylindern läßt sich für die im Taylor-Couette-System auftretenden Strömungszustände keine analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen angeben.

Taylor [132] benutzte 1923 eine lineare Stabilitätsanalyse, mit der er den Übergang von der Couette-Strömung zur stationären Taylor-Wirbelströmung bestimmen konnte.

Diese wurde 1965 von Krueger [71] erweitert. Damit war es zum ersten Mal möglich, auch Übergänge zu zeitabhängigen nicht axial-symmetrischen Zuständen zu erhalten; ein Übergang von der Couette-Strömung zu den Spiralwellen konnte berechnet werden.

Die Spiralwellen lassen sich in Zylinderkoordinaten als eine laufende Welle in  $\Phi$  und  $z$  Richtung  $\exp(i(\omega t + m\Phi + \lambda z))$  mit einer azimutalen Wellenzahl  $m$  und Wellenlänge  $\lambda$  beschreiben [71].

Aufbauend auf den Arbeiten von Krueger et al. [71] und Jones [63] haben Langford et al. [73] das Einsetzen der ersten Instabilitäten und charakteristische Größen der auftretenden Moden, wie Wellenzahlen und Wellengeschwindigkeiten, in der Strömung zwischen gegeneinander rotierenden Zylindern numerisch für verschiedene Radienverhältnisse ( $0,4 \leq \eta \leq 0,98$ ) bestimmt.

In diesem Abschnitt sollen theoretische Ergebnisse vorgestellt werden, die von Langford et al. im breiten Spalt bei  $\eta = 0,5$  erzielt worden sind, da diese in Kapitel 8 zum Vergleich mit meinen Messungen herangezogen werden.

In Abbildung 4.9(a) sind die kritischen Punkte zum Einsetzen der ersten Instabilität in Abhängigkeit von der Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a$  dargestellt. Die azimutalen Wellenzahlen  $m$  der in dem entsprechenden Bereich gefundenen Moden nehmen mit stärkerer Gegenrotation der Zylinder zu. Die azimutale Wellenzahl  $m = 0$  entspricht der stationären Taylor-Wirbelströmung, bei  $m = 1$  und  $m = 2$  handelt es sich um zwei verschiedene Arten von Spiralwellen. In der Abbildung ist für jede azimutale Wellenzahl der Verlauf über  $Re_a$  durch gepunktete Linien dargestellt. Die in den jeweiligen Bereichen vorherrschende kleinste kritische Reynoldszahl ist durch die durchgezogene Linie markiert.

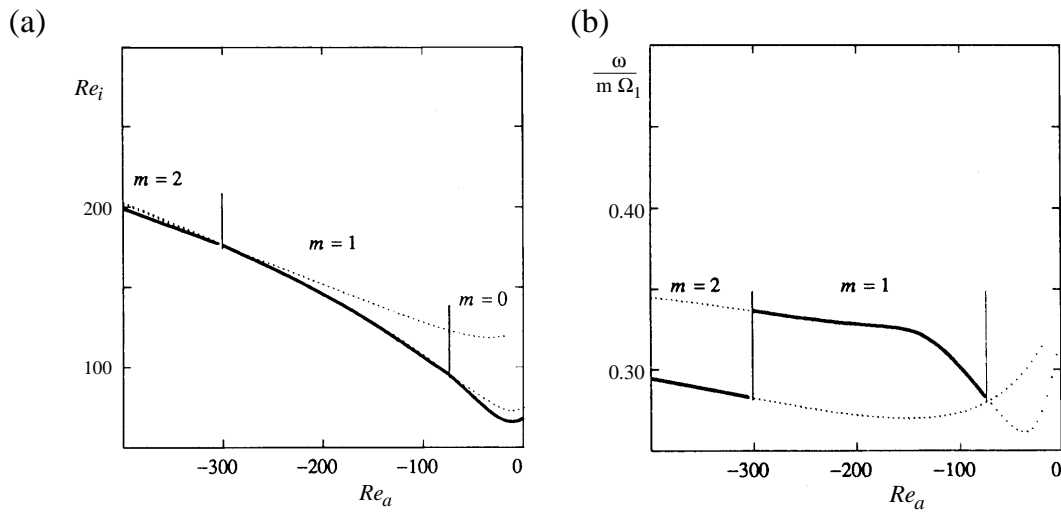


Abbildung 4.9: (a) Kritische Reynoldszahlen für den Übergang zur ersten Instabilität bei  $\eta = 0,5$ , (b) Wellengeschwindigkeit als Funktion von  $Re_a$  bei  $\eta = 0,5$ , aus [73].

Diese Werte sollten auch im Experiment beobachtet werden. Die senkrechten Linien kennzeichnen die Lage bikritischer Punkte, also diejenigen Punkte, an denen sich die Kurven für unterschiedliche  $m$  kreuzen. Hier sind Moden mit unterschiedlichen azimuthalen Wellenzahlen gleichzeitig stabil und wechselwirken miteinander.

Den Verlauf der normierten Wellengeschwindigkeit in Abhängigkeit von  $Re_a$  zeigt Abbildung 4.9(b). Hier lassen sich auch Aussagen über die Dispersion der Wellen in Bezug auf ihre azimuthale Wellenzahl treffen. Wäre die Wellengeschwindigkeit dispersionslos, so gäbe es keine Sprünge im Kurvenverlauf.

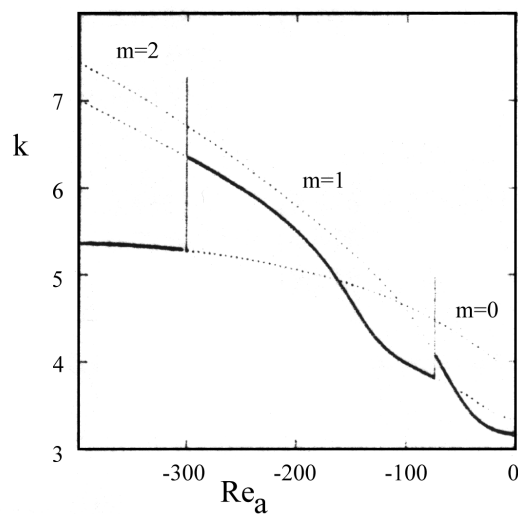


Abbildung 4.10: Axiale Wellenzahlen in Abhängigkeit von  $Re_a$  bei  $\eta = 0,5$ , aus [73].

Abbildung 4.10 zeigt die Abhängigkeit der axialen Wellenzahl  $k$  von  $Re_a$  für unterschiedliche azimutale Wellenzahlen. Die Wellenzahl ist hierbei auf die Spaltbreite  $d$  normiert, um unabhängig von den reinen geometrischen Abmessungen zu sein. An den Punkten, an denen ein Wechsel von  $m$  stattfindet, findet man eine Diskontinuität im Kurvenverlauf. Innerhalb des Bereiches einer azimutalen Wellenzahl  $m$  findet man mit abnehmenden  $Re_a$  eine Zunahme von  $k$ . Dieses war auch zu erwarten, nimmt doch der Bereich, in dem die Grundströmung instabil wird, bei stärkerer Gegenrotation ab (vergl. Abb. 4.8).

Mehr als eintausend Veröffentlichungen beschäftigen sich mit der Strömung zwischen rotierenden Zylindern, darunter auch einige Übersichtsartikel, auf die hiermit verwiesen sein soll: Zum Beispiel [23, 24, 35, 36, 70, 88, 89, 129].



# Kapitel 5

## Der experimentelle Aufbau

Dieses Kapitel beschreibt den mechanischen Aufbau der Versuchsanlage. Neben den Zylindern, deren Antrieb und Regelung wird auch auf die notwendige Thermostatisierung der Meßflüssigkeit eingegangen. Die optischen Meßverfahren zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit und die Aufnahme und Verarbeitung der Daten erklärt Kapitel 6.

### 5.1 Das Taylor–Couette–Experiment

Zur Analyse der Strömungsformen im Taylor–Couette–System sind im Laufe der Jahre drei Meßapparaturen aufgebaut und ständig erweitert worden, die im wesentlichen auf U. Gerdt's [44] zurückgehen.

Bei zwei Anlagen rotiert nur der innere Zylinder, während der äußere Zylinder und die Boden- und Deckelplatte ruhen. Diese beiden Anlagen unterscheiden sich im Stand der Rechnerunterstützung, der einstellbaren Radienverhältnisse und der maximalen Zylinderhöhe.

- „großer“ Zylinder : zum Beispiel Phasendynamik, critical slowing down ([6, 44, 83, 125, 140])
- „kleiner“ Zylinder mit verkippbarem Deckel, veränderbarem  $\eta$ : zum Beispiel Chaoskontrolle, Strömung in breiten Spalten ( $\eta \leq 0,5$ ) ([78, 79, 107, 116, 113])

Diese beiden Anlagen wurden um eine weitere ergänzt, die im wesentlichen im Rahmen dieser Arbeit in Zusammenarbeit mit W. Prange [100] aufgebaut wurde. Bei dieser Anlage handelt es sich um ein System, bei dem zusätzlich zum inneren auch unabhängig von diesem der äußere Zylinder rotiert. Hierbei stammen die Konzepte für den Antrieb des Außenzylinders und die Entnahme des Silikonöls von H. Röpcke [107]. Die zusätzliche Rotation des Außenzylinders führt unter anderem zum Auftreten neuartiger Strömungsformen. Diese sind Bestandteil der von mir durchgeführten Messungen und werden in den folgenden Kapiteln ausführlich dargestellt.

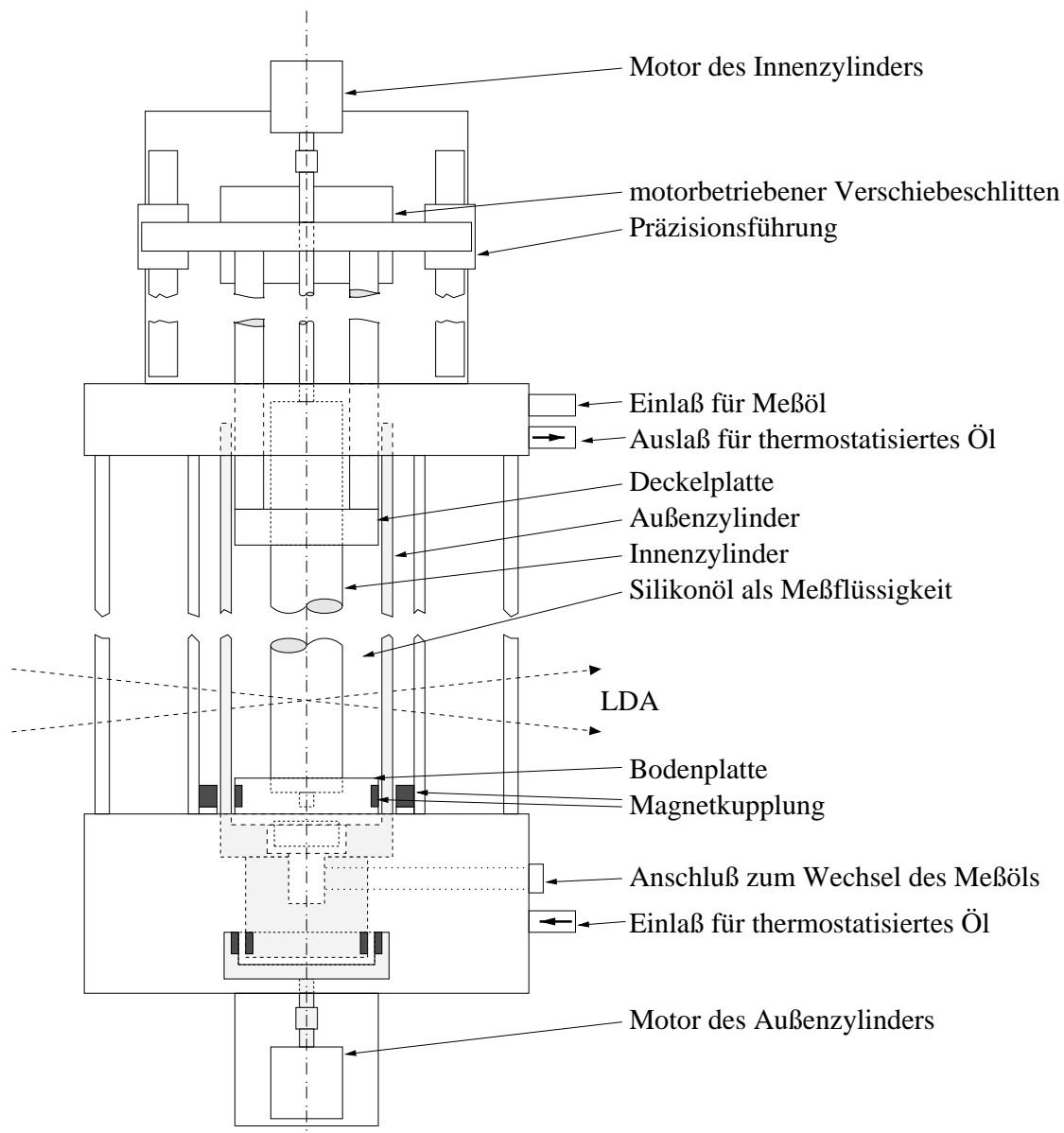


Abbildung 5.1: Schematischer Aufbau der Taylor-Couette-Anlage mit unabhängig voneinander rotierenden Zylindern.

Die Abbildung 5.1 zeigt den schematischen Aufbau des Strömungsexperiments. Das Strömungsvolumen wird durch den Innen- und Außenzylinder sowie durch die Boden- und Deckelplatte begrenzt.

Der Innenzylinder besteht aus einer geschliffenen Präzisionsstahlwelle mit einem Radius  $r_i = 12,5$  mm, der Außenzylinder ist aus Glas und hat einen Innenradius  $r_a = 25,0$  mm. Somit beträgt das Radienverhältnis  $\eta = r_i/r_a = 0,5$  - man spricht bei diesem Wert von einem **breiten Spalt**.

Die Bodenplatte des Systems wird über Magnete in einer festen Position gehalten. Sie reicht jeweils bis auf 0,1 mm an die rotierenden Zylinder heran, ist aber mit keinem Zylinder verbunden.

Nach oben hin wird das Meßvolumen durch die Deckelplatte begrenzt, deren Position in axialer Richtung stufenlos verstellbar ist. Es besteht auch die Möglichkeit, die Deckelplatte zu verkippen und damit gezielt asymmetrische Randbedingungen zu erschaffen, wie zum Beispiel bei der Periodenverdopplung in kleinen Geometrien bei ruhendem Außenzylinder [22]. Deshalb mußte zwischen Deckelplatte und Innen- und Außenzylinder ein größerer Abstand als bei der Bodenplatte eingehalten werden. Er beträgt 0,25 mm. Durch den stufenlos verstellbaren Deckel ist eine maximale Höhe des Meßvolumens von  $L = 232$  mm einstellbar. Für alle hier vorgestellten Messungen ist die Deckelplatte nicht verkippt. Zur Feineinstellung der Zylinderhöhe findet ein Präzisionsverschiebeschlitten Verwendung, der über den Rechner gesteuert wird. Dieser fährt die vorgeschriebenen Positionen auf 1/100 mm genau an.

In der Abbildung 5.1 sind alle mit dem Außenzylinder rotierenden Teile grau unterlegt. Es ist zu erkennen, daß der Außenzylinder zusammen mit dem anschließenden Metallteil einen abgeschlossenen Becher bildet, in dem sich die Meßflüssigkeit befindet. Dieser Becher wird von dem thermostatisierten Öl umgeben (s. Abschnitt 5.4). Der Antrieb des Außenzylinders geschieht senkrecht von unten. Das Drehmoment des Motors wird über eine Magnetkupplung auf den Becher und damit auf den Außenzylinder übertragen. So kann die Öldichtigkeit der Anlage gewährleistet werden, und es kann nicht zu einem Vermischen des Meßöls mit dem Thermostatisierungsöl kommen.

Der Innenzylinder wird direkt über eine Welle von oben angetrieben. Am Außenzylinder hingegen tritt ein Drehmoment auf, das für einen Motor ohne Getriebe zu groß ist. Deswegen ist für den Antrieb des Außenzylinders ein Motor mit Getriebe notwendig. Das große Drehmoment beruht darauf, daß sich an der Innen- und Außenseite des äußeren Zylinders Silikonöl befindet und zur exakten Lagerung des Außenzylinders eine Vielzahl an großen Kugellagern notwendig ist.

## 5.2 Meßflüssigkeit

Als Meßflüssigkeit wurde Silikonöl mit unterschiedlichen Viskositäten von  $\nu \approx 5cSt$  bis  $\nu \approx 50cSt$  verwandt. Zur Anwendung von optischen Meßverfahren (s. Kapitel 6) ist dieses in geringer Konzentration mit  $6.8\mu m$  großen Latex-Teilchen versehen. Diese sind so geschaffen, daß sie der Strömung gut folgen, ohne sie zu beeinflussen.



Da selbst kleine Staubteilchen oder Ablagerungen die Qualität des Meßsignals stark herabsetzen, ist es besonders wichtig, das Silikonöl sauber zu halten. Falls das Silikonöl gefiltert werden muß, erlaubt ein Ventil unterhalb der Bodenplatte ein einfaches Ablassen. Wiederbefüllt wird der Zylinder dann durch eine Zuleitung oberhalb des Deckels. Bei den beiden älteren Taylor-Anlagen muß das Öl über eine Spritze mit einem langen Schlauch aus dem nach unten abgeschlossenen Zylinder herausgeholt und nach dem Filtern wieder hineingefüllt werden. Dazu muß der obere Teil der Anlage komplett zerlegt werden. Dieses entfällt bei der hier beschriebenen Anlage.

### 5.3 Drehzahlregelung

Es ist ein sehr präziser Aufbau erforderlich, um eine Reproduzierbarkeit der gemessenen Ergebnisse zu gewährleisten. Außerdem können, wie sich im folgenden auch zeigen wird, kleinste Veränderungen der Systemeinstellungen große Wirkungen nach sich ziehen.

Die dimensionslose Reynoldszahl dient als wichtiger Kontrollparameter bei Strömungsexperimenten. Hier fließen neben geometrischen Parametern die Drehfrequenz der Zylinder und die Viskosität ein. Auf die Viskosität wird im folgenden noch genauer eingegangen (s. Abschnitt 5.4), hier soll die präzise Kontrolle der Drehzahl der Antriebsmotoren behandelt werden.

Es ist zum Beispiel für das Ausmessen von Stabilitätsgrenzen unerlässlich, die Reynoldszahl gezielt verändern und gegebenenfalls über einen längeren Zeitraum konstant halten zu können. Zu diesem Zweck wurde schon Ende der 80er Jahre eine Drehzahlregelung mit Rechneransteuerung entwickelt [113, 117]. Diese wurde von W. Prange im Rahmen seiner Diplomarbeit [100] um eine Mikrocontroller-Platine erweitert. So ist es möglich, unabhängig vom verwandten Betriebssystem des Auswerte-Rechners, zu jedem gewünschten Zeitpunkt, die Drehzahl zu ändern. Die Ansteuerung geschieht in der Regel über die serielle Schnittstelle, aber auch manuell läßt sich die Drehzahl einstellen.

Am Motor befindet sich eine Frequenzgebereinheit, die pro voller Achsendrehung 1000 Impulse liefert. Dieses ist die Ist-Frequenz. Sie wird über einen Regelkreis (Phase-Locked Loop, PLL) mit der eingetragenen Soll-Frequenz ständig kontrolliert. Details zur Funktionsweise der Regelung sind bei F. Schulz [117] ausführlich erklärt. Hiermit wird eine hohe Frequenzstabilität über einen langen Zeitraum garantiert. Die Drehzahl selbst kann in Schritten von bis zu  $\Delta f = 0.0001$  Hz verändert werden.

### 5.4 Temperaturstabilisierung

Wie schon erwähnt, stellt die Reynoldszahl den Hauptkontrollparameter dar. Dieser hängt von der Viskosität des als Meßflüssigkeit verwandten Silikonöls ab. Da die Viskosität temperaturabhängig ist, muß zur Reproduzierbarkeit der Ergebnisse sehr genau auf eine konstante Temperatur geachtet werden. Dieses geschieht in drei Stufen und ist schematisch in Abbildung 5.2 dargestellt:

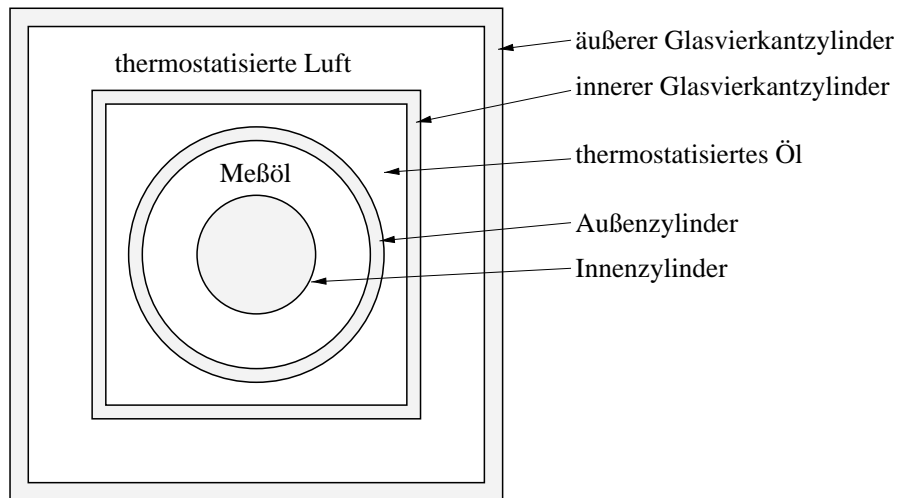


Abbildung 5.2: Schnitt durch die Taylor-Apparatur, aus [100]

- Der Außenzylinder ist von einer Glasküvette mit quadratischem Querschnitt umgeben. Durch den so gebildeten Zwischenraum strömt ein auf  $(21 \pm 0.01)^\circ\text{C}$  temperiertes Silikonöl. Mit diesem wird die Temperatur des Öls zwischen Innen- und Außenzylinder stabilisiert. Gleichzeitig werden so optische Verzerrungen durch Angleichung der Brechungsindizes (*index matching*) im Strahlengang des LDAs vermieden.
- Die innere Glasküvette ist vom einem weiteren äußeren Vierkantzylinder aus Fensterglas umgeben. Zwischen der Küvette und dem äußeren Glasvierkantzylinder wird die Luft thermostatisiert. Selbst bei starken Schwankungen (geöffnete Türen oder Fenster) kann die Lufttemperatur auf  $(21 \pm 0.1)^\circ\text{C}$  gehalten werden. Allerdings führt die Thermostatisierung zu einer elektrostatischen Aufladung der Glasküvette, die die Strömungsformen im Taylor-Couette-System beeinflussen kann. Durch Erhöhung der Luftfeuchtigkeit mit Hilfe eines Verdunstungspapiers, das in den Luftkreislauf eingebracht wird, läßt sich dieser Effekt unterdrücken.
- Die Raumtemperatur wird zudem durch eine Klimaanlage und Lüfter auf  $(21 \pm 1)^\circ\text{C}$  konstant gehalten. Hinzu kommt noch ein Ventilator, der für eine gute Durchmischung der Luft sorgt.

## 5.5 Sichtbarkeitsanlage

Um die zwischen den rotierenden Zylindern auftretenden vielfältigen Strömungszustände klassifizieren zu können, wurde von mir eine zusätzliche Anlage entwickelt, die den Sichtbarkeitsmessungen dient.

Sie besitzt einen ähnlichen Aufbau wie die vorher beschriebene Präzisionsanlage mit annähernd vergleichbarer Genauigkeit und gleichen Abmessungen.

An dieser wurden auch die PIV-Aufnahmen (s. Abschnitt 6.2) durchgeführt, da diese

Streuteilchen benötigen, die für die Messungen mit dem LDA (s. Abschnitt 6.1) zu groß sind.

## 5.6 Unsicherheiten in den Kontrollparametern

Bei konstanten Radien des Innen- und Außenzylinders hängen die Reynoldszahlen nur von den Winkelgeschwindigkeiten der Zylinder und der Viskosität der Flüssigkeit im Meßvolumen ab.

Die die Zylinder antreibenden Gleichstrommotoren werden elektronisch geregelt (siehe oben). Mittels einer Phasenregelschleife ("Phase-Locked-Loop", PLL) läßt sich eine so hohe Konstanz der Winkelgeschwindigkeiten der Zylinder erreichen, daß die Drehzahlschwankungen während einer einzelnen Umdrehung unter 0,01% und im längeren Mittel unter  $10^{-5}\%$  liegen.

Die Viskosität kann dagegen lediglich auf ca. 1% genau bestimmt werden. Damit ergeben sich absolute Unsicherheiten in der Angabe der Reynoldszahlen von  $\Delta Re_{i/a} \approx 1$ .

Während einer Messung ändert sich die Viskosität nicht. So lassen sich relative Genauigkeiten der Reynoldszahlen von  $\Delta Re_{i/a} \approx 0,01$  erzielen, da diese dann nur noch von den präzise regelbaren Winkelgeschwindigkeiten der Zylinder abhängen.

Deshalb treten bei der Präsentation der Meßergebnisse bis zu zwei Nachkommastellen in der Angabe der Reynoldszahlen auf, wenn unterschiedliche Zustände durch eine quasistatische Erhöhung der Drehzahlen der Zylinder auseinander hervorgegangen sind.

# Kapitel 6

## Optische Strömungsmeßmethoden

Die in dieser Arbeit präsentierten Meßergebnisse wurden durch den Einsatz zweier optischer Verfahren zur Geschwindigkeitsmessung in Strömungen ermöglicht. Dieses waren die Laser–Doppler–Anemometrie und die Particle Image Velocimetry, die beide in diesem Kapitel vorgestellt werden.

### 6.1 Laser–Doppler–Anemometrie (LDA)

Mit der Laser–Doppler–Anemometrie (LDA) steht ein optisches Verfahren zur Verfügung, das es erlaubt, in Gasen und Flüssigkeiten berührungslos lokale Geschwindigkeitskomponenten zu messen. Es beruht auf dem Doppler–Effekt und hat gegenüber anderen Verfahren zur Geschwindigkeitsmessung den Vorteil, daß kein Meßkopf in die Strömung eingebracht werden muß. Die Strömung wird also durch die Messung nicht verändert; somit können die ungestörten Geschwindigkeitskomponenten gemessen werden. Dieses Verfahren wird auch in der Industrie verstärkt eingesetzt, etwa bei der Konstruktion von Flugzeugflügeln oder der Entwicklung neuer Automobilkarrosserien. Ausführliche Beschreibungen des Meßverfahrens findet man in [37, 38, 39, 48, 94, 109, 110].

#### 6.1.1 Funktionsweise des LDAs

Der Aufbau eines Laser–Doppler–Anemometers kann auf unterschiedliche Arten realisiert werden. In diesem Kapitel wird die Differential– oder Kreuzstrahlmethode vorgestellt, weil diese Methode der Laser–Doppler–Anemometrie zur Geschwindigkeitsmessung im Taylor–Couette–System Anwendung findet.

Das LDA–Verfahren beruht auf der Streuung von Laser–Licht an kleinen Teilchen, die der Strömung folgen. Unter Ausnutzung des Doppler–Effektes kann die Geschwindigkeit der Streuteilchen bestimmt werden, woraus man auf die vorliegende Strömungsgeschwindigkeit schließen kann.

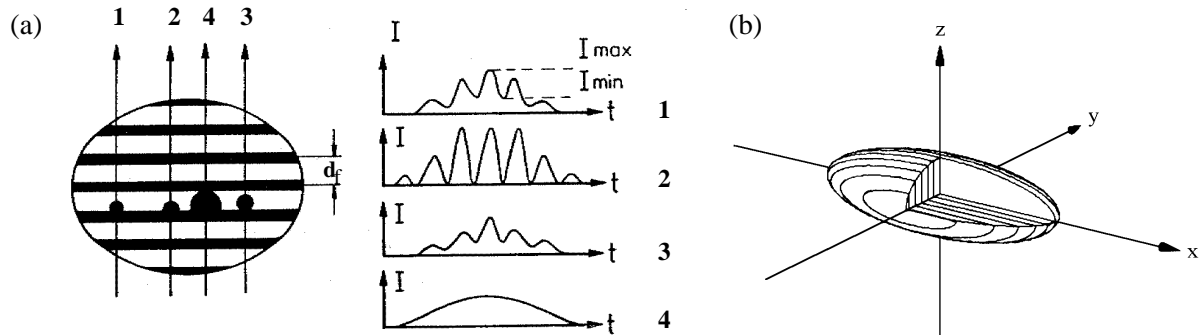


Abbildung 6.1: (a) Aussehen der Laserbursts in Abhängigkeit vom Durchgangsort der Streuteilchen durch das Meßvolumen und von deren Größe [39]. (b) Das Meßvolumen selbst hat das Aussehen eines langgestreckten Ellipsoids.

In einem Laser-Doppler-Anemometer wird ein Laser-Strahl mittels eines Strahlteilers in zwei gleichstarke parallele Teilstrahlen zerlegt. Diese werden dann durch eine Linse zur Kreuzung gebracht. Es entsteht im Kreuzungspunkt dieser kohärenten Laserstrahlen ein räumliches Interferenzfeld, das das Meßvolumen darstellt. Sind die Wellenfronten im Kreuzungspunkt eben, so besteht das Interferenzmuster aus Ebenen abwechselnd hoher und niedriger Lichtintensität, je nachdem, ob am jeweiligen Ort konstruktive oder destruktive Interferenz vorliegt. Für die Laser-Doppler-Anemometrie finden überwiegend Laser-Verwendungen, die kontinuierlich betrieben werden und in der  $TEM_{00}$ -Mode (Transversale elektro-magnetische Mode) oszillieren. Diese Mode weist eine Gauß-förmige Intensitätsverteilung über den Strahlquerschnitt auf. Deshalb hat das Interferenzstreifenmuster, das parallel zur Winkelhalbierenden der es erzeugenden Laser-Strahlen liegt, die Form eines langgestreckten Rotationsellipsoids (Abb. 6.1(b)).

Die Interferenzstreifen haben jeweils einen Abstand

$$d_f = \frac{\lambda}{2\sin(\varphi/2)}$$

zueinander, wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des verwandten Laserlichtes und  $\varphi$  der Schnittwinkel der Laserstrahlen ist [110].

Ein Teilchen, das durch die Strömung mitgeführt wird und das Streifenmuster im Meßvolumen durchquert, verursacht an den einzelnen Ebenen hoher Lichtintensität eine Reihe von Lichtblitzen. Diese werden detektiert, und es kann die Frequenz der Lichtblitze bestimmt werden. Die Frequenz  $f_D$  dieser sogenannten Laserbursts ist ein lineares Maß für die lokale Geschwindigkeitskomponente  $v_{\perp}$  des Teilchens parallel zu den Normalenvektoren der einzelnen Interferenzebenen und ergibt sich zu:

$$f_D = \frac{v_{\perp}}{d_f} = \frac{2v_{\perp}\sin(\varphi/2)}{\lambda}$$

Zur Bestimmung der Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  der Strömung muß also die Streulichtintensität aus dem Meßvolumen detektiert werden. Aus dem so erhaltenen Doppler-Signal wird die

Signalfrequenz bestimmt, womit auf  $v_{\perp}$  geschlossen werden kann. Damit die auf diese Weise bestimmte Signalgeschwindigkeit tatsächlich der Strömungsgeschwindigkeit entspricht, müssen die der Strömung zugesetzten Streuteilchen ein gutes Teilchenfolgevermögen aufweisen. Dieses muß bei der Auswahl der Teilchen und insbesondere bei der Auswahl ihrer Größe bedacht werden.

Zusätzlich müssen zwei weitere Dinge beachtet werden: Die Signalqualität der Laserbursts hängt zum einen von dem Verhältnis der Größe der Streuteilchen zu dem Abstand der Interferenzebenen ab und zum anderen von der Intensität des gestreuten Lichtes in Richtung des Photodetektors.

Abbildung 6.1a zeigt die Abhängigkeit des Dopplersignals von der Teilchengröße und von dessen Weg durch das Interferenzstreifensystem, das das Meßvolumen bildet. Die Gauß-förmige Intensitätsverteilung im Laserstrahl ruft eine ortsabhängige Intensität der Interferenzstreifen hervor (Abb. 6.1(b)). Ein Maß für die Güte des Signals ist die Modulationstiefe, die einen möglichst hohen Wert erreichen sollte. Die Modulationstiefe  $M$  ist definiert durch:

$$M = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Diese Modulationstiefe hängt von der Größe der Teilchen ab und von dem Weg, auf dem die Teilchen das Meßvolumen durchqueren. Dieses ist in Abbildung 6.1a für vier verschiedene Fälle dargestellt:

Einen optimalen Laserburst erzeugt Teilchen Nr. 2. Hier wird das Meßvolumen nahezu in der Mitte durchquert, wo die Helligkeitsunterschiede der Interferenzstreifen maximal sind. Das detektierbare Signal weist eine hohe Modulationstiefe auf. Zum Rand hin nehmen die Helligkeitsunterschiede ab, was sich auch in der Signalqualität widerspiegelt (Teilchen Nr. 1). Sind die Streuteilchen zu groß gewählt (Teilchen Nr. 4), ist das gestreute Licht nicht mehr moduliert und enthält somit keine Information über die Teilchengeschwindigkeit.

Durch die Anwendung des bis hierher beschriebenen Verfahrens kann nur der Betrag von  $v_{\perp}$  bestimmt werden, nicht aber die Strömungsrichtung. Die Richtungsinformation ist aber für die Charakterisierung der Strömung im Taylor-Couette System unerlässlich. Um diese zu erhalten, wird der Doppler-Effekt ein zweites Mal ausgenutzt.

Die Richtungsunsicherheit kann dadurch behoben werden, daß man anstelle eines stehenden ein laufendes Interferenzmuster im Meßvolumen erzeugt. Bewegt sich das Interferenzstreifensystem mit der Frequenz  $f_{SH}$ , so ergibt sich die Bursts signalfrequenz  $f$  zu  $f = f_{SH} \pm f_D$ . Je nachdem, ob sich das Teilchen mit oder gegen die Laufrichtung des Interferenzstreifensystems bewegt, gilt das negative bzw. das positive Vorzeichen. Ein laufendes Interferenzmuster erhält man, wenn die Frequenzen der beiden das Meßvolumen bildenden Laser-Strahlen nicht exakt übereinstimmen. Die beiden Laserstrahlen werden zu diesem Zweck üblicherweise durch Braggzellen frequenzverschoben. Hierbei handelt es sich um eine akusto-optische Methode. Ultraschallwellen werden durch einen Kristall (die Braggzelle) geschickt, erzeugen dort Dichteschwankungen und rufen so eine periodische Änderung des Brechungsindex hervor. Es wird ein bewegtes drei-dimensionales

Beugungsgitter geschaffen, an dem das einfallende Laserlicht gebeugt wird. Da das Beugungsgitter bewegt ist, sind aufgrund des Doppler-Effektes die Frequenzen der höheren Beugungsordnungen verschoben. Fällt der Laserstrahl unter dem Bragg-Winkel auf die Zelle, so können bis zu 90% des gebeugten Lichtes in den Strahl erster Ordnung gelangen. Die genaue Funktionsweise der Braggzellen ist in der angegebenen Literatur beschrieben.

Kreuzt man die frequenzverschobenen Strahlen, so entsteht im Kreuzungspunkt ein mit der Differenzfrequenz der beiden Laserstrahlen  $f_{SH}$  laufendes Interferenzstreifensystem.

Somit wird die Dopplerverschiebung der gestreuten Lichtwellen zur Messung des Betrages und der Richtung der Geschwindigkeit ausgenutzt.

### 6.1.2 Realisierung am Taylor-System

Der Aufbau der LDA-Anlage am Taylor-System läßt eine Zweiteilung in Sende- und Empfangseinheit zu. Diese sollen im folgenden beschrieben werden.

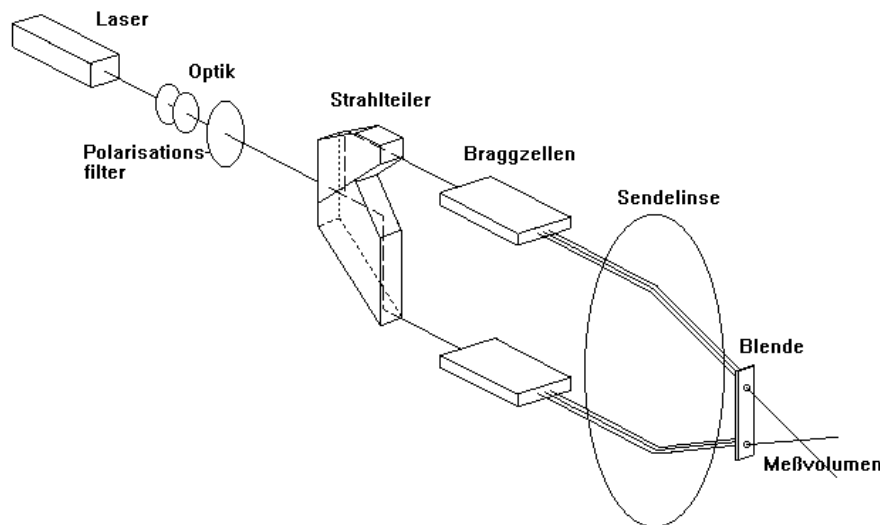


Abbildung 6.2: Skizze des Aufbaus der Sendeeinheit der LDA-Anlage, aus [125]

#### Die Sendeeinheit

Die Sendeeinheit besteht bei dem in dieser Arbeit verwandten System aus einem 7 mW Helium-Neon-Laser, dessen Strahl mittels eines Strahlteilers in zwei gleichstarke Teilstrahlen zerlegt wird (Abb. 6.2). Durch Braggzellen werden diese um 40,0 MHz bzw. 40,1 MHz frequenzverschoben und mit einer Linse im Taylor-Zylinder gekreuzt. Sie erzeugen im Kreuzungspunkt ein mit 100 KHz laufendes Interferenzstreifensystem.

Durch Drehen der Sendeanlage um 90° kann man wahlweise die radiale oder axiale Geschwindigkeitskomponente im Taylor-Zylinder bestimmen. Ein Teilchen, das keine Geschwindigkeitskomponente in die zur Detektion ausgewählte Richtung hat, liefert somit

eine Signalfrequenz von 100 KHz.

Das als Meßflüssigkeit verwandte Silikonöl ist zur Geschwindigkeitsmessung mit  $6.8\mu\text{m}$  großen sphärischen Latexteilchen versehen, die aufgrund ihrer Größe und ihrer geringen Konzentration das Strömungsverhalten nicht verändern.

## Die Empfangseinheit

Das Streulicht wird mittels einer Avalanche-Fotodiode (APD) detektiert, in einem Bandpaß (10 kHz - 200 kHz) gefiltert, verstärkt und einem „Phase-locked-Loop“-Tracker (PLL-Tracker) zugeführt. Der PLL-Tracker paßt seine interne Frequenz dem eingehenden Signal an und liefert eine dieser Frequenz proportionale Spannung [117]. Intern wird die Phasendifferenz zwischen dem einfallenden Signal und einem spannungsgesteuerten Oszillator (VCO) mittels eines Komparators verglichen. Dieser liefert eine der Phasendifferenz proportionale Spannung, die wiederum den VCO steuert. Ist die Phasendifferenz Null, so ist die am VCO anliegende Spannung ein Maß für die Frequenz des Eingangssignals und somit für die Teilchengeschwindigkeit.

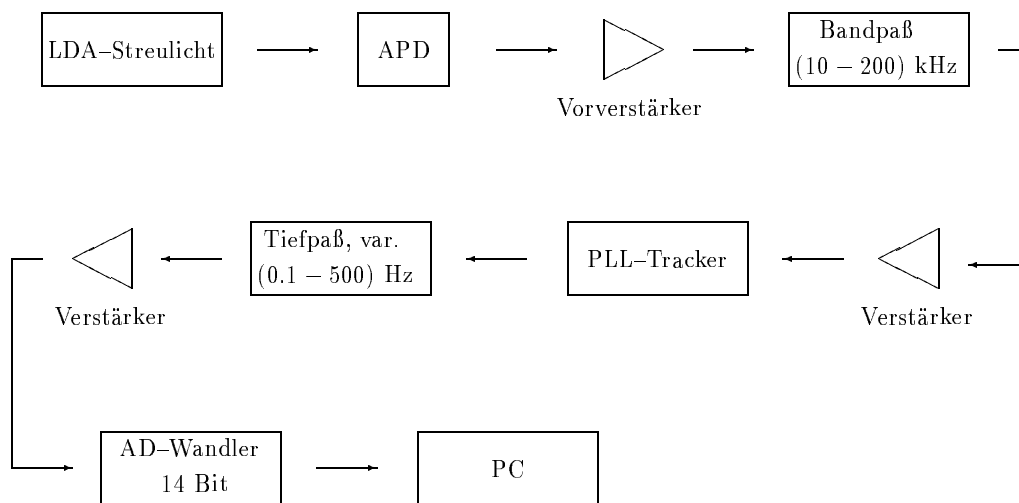


Abbildung 6.3: Schematischer Aufbau der Empfangseinheit zur Verarbeitung der LDA-Daten von der Avalanche-Photodiode (APD) bis zum Rechner. Näheres hierzu ist im Text zu finden.

Dieses Signal kann weiterverarbeitet werden, durchläuft einen variablen Tiefpaß (0,1Hz - 500Hz), wird verstärkt und gelangt über eine im Bereich von -5V bis +5V mit 14-Bit abtastende AD-Wandlerkarte in den Meßrechner (PC), siehe Abbildung 6.3.

Die eigentliche Meßwertaufnahme und -verarbeitung sowie erste Analysen erfolgen auf einem unter der Oberfläche MS-Windows laufenden Personal Computer. Das dazu notwendig Programm wurde von Axel Sommerfeldt [122] und mir [114] entwickelt.



### Vor- und Nachteile des LDA-Aufbaus

Das LDA, wie es im vorangegangenen Abschnitt beschrieben worden ist, wird in Vorwärtsstreureichtung betrieben. Das heißt, daß Sende- und Empfangseinheit auf einer Achse liegen und der Taylor-Zylinder sich dazwischen befindet. Diese Anordnung hat den Vorteil, daß so das Streulicht mit der größtmöglichen Intensität detektiert werden kann. Das liegt darin begründet, daß die Streuung an den Teilchen aufgrund deren Größe der Mie-Theorie gehorcht und somit das Streulicht die höchste Intensität in Vorwärtsrichtung besitzt.

Die Abbildung 6.4 zeigt die Streulichtintensitäten in Abhängigkeit vom Raumwinkel für drei verschiedene Teilchengrößen in Wasser:  $1\mu\text{m}$  (oben),  $10\mu\text{m}$  (Mitte) und  $30\mu\text{m}$  (unten). Allen gemein ist der um mehrere Ordnungen größere Anteil der Streuintensität in Vorwärtsrichtung ( $180^\circ$ ) gegenüber jeder anderen Raumrichtung. Qualitativ liefert die Streuung an Teilchen in Silikonöl die gleichen Ergebnisse.

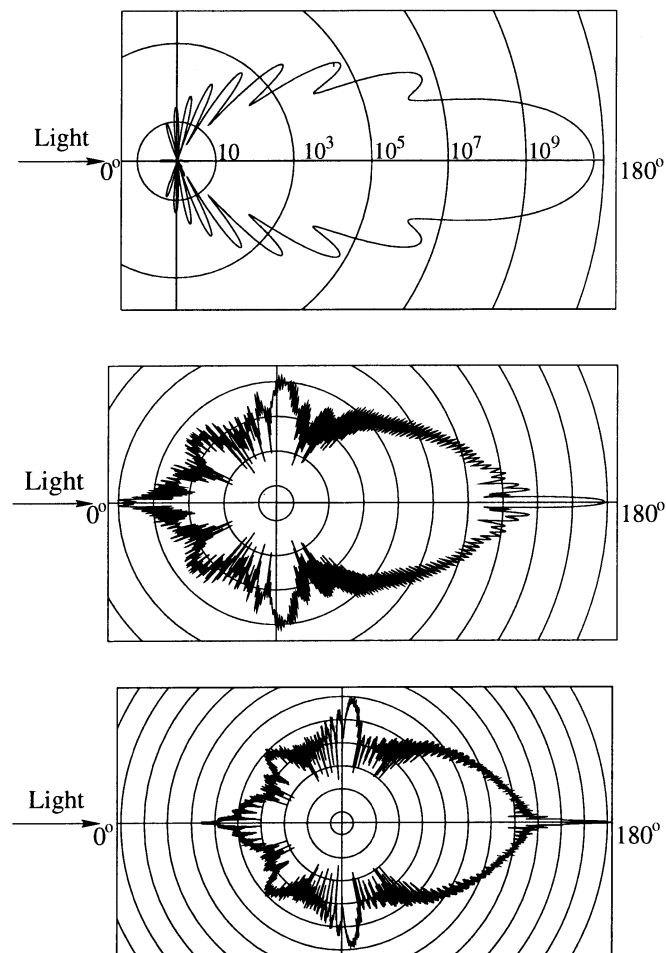


Abbildung 6.4: Streuung des Lichtes an unterschiedlich großen Teilchen in Abhängigkeit vom Raumwinkel: Teilchendurchmesser (oben)  $1\mu\text{m}$  , (Mitte)  $10\mu\text{m}$  und (unten)  $30\mu\text{m}$  (unten), aus [102]

Bei den hier vorgestellten Messungen am Taylor-Couette System rotiert zusätzlich zum inneren auch der äußere Zylinder. Da die Laserstrahlen an der Wand des gläsernen Außenzylinders gebrochen werden, muß sehr auf eine konstante Wanddicke des Zylinders über seine gesamte Länge geachtet werden. Ansonsten nimmt die Signalqualität deutlich ab, da die beiden Teilstrahlen in diesem Fall unterschiedliche Weglängen haben und der Kreuzungspunkt der beiden Strahlen sich dadurch während einer Rotation des Außenzylinders ständig leicht verschiebt. Mehrere Zylinder mußten angefertigt werden, bis einer so präzise gearbeitet war, daß er den hohen Anforderungen der LDA-Messungen gerecht wurde.

## 6.2 Particle Image Velocimetry (PIV)

Die Particle Image Velocimetry ist ein optisches Meßverfahren, mit dem zweidimensionale Geschwindigkeitsvektorfelder in Gasen oder in Flüssigkeiten erzeugt werden können.

Man findet eine zusammenfassende Sammlung von Veröffentlichungen zur Particle Image Velocimetry (PIV) in [53], eine theoretische Beschreibung in [136] und in [102] grundlegende Konzepte sowie verschiedene Anwendungsbeispiele.

Langenberg [72] beschreibt einen speziellen Aufbau und Techniken, die bei den hier vorgestellten Messungen in der Taylor–Couette–Strömung Anwendung finden und im folgenden in knapper Form wiedergegeben werden.

Für eine ausführliche Darstellung sei auf die oben angegebene Literatur verwiesen.

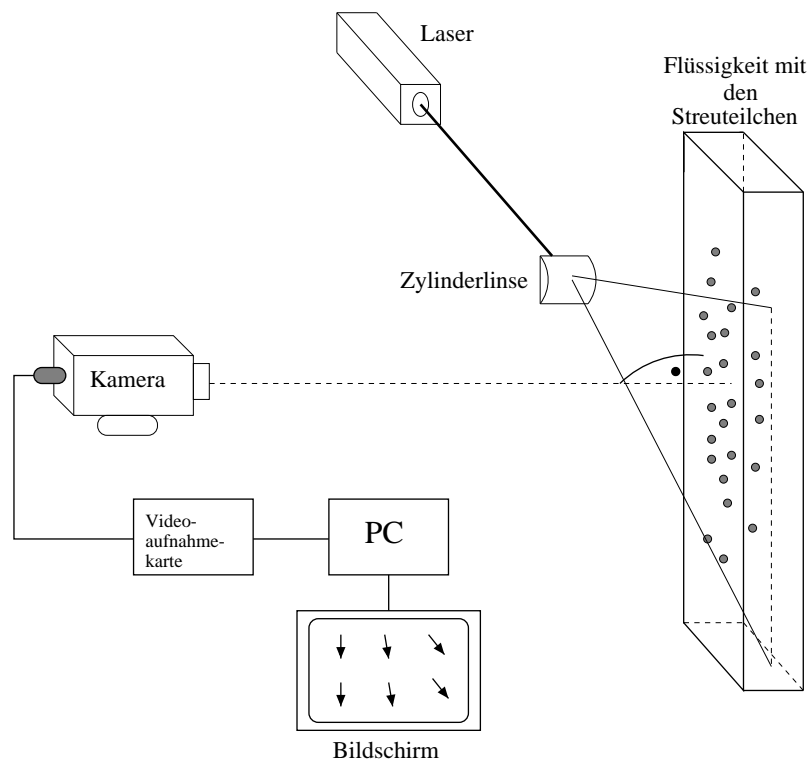


Abbildung 6.5: Experimenteller Aufbau zur Durchführung der Particle Image Velocimetry.

### 6.2.1 Aufbau und Funktionsweise

In Abbildung 6.5 ist ein experimenteller Aufbau zur Durchführung der Particle Image Velocimetry vereinfacht dargestellt:

Ein Laser wird als Lichtquelle benutzt. Der von ihm ausgehende Strahl wird durch eine Zylinderlinse aufgeweitet und leuchtet so eine Fläche in der Flüssigkeit aus (Lichtschnitttechnik).

Zur Erzeugung eines Geschwindigkeitsvektorfeldes wird das Meßvolumen zweimal kurz

hintereinander belichtet. Zwischen den beiden Belichtungen bewegen sich die der Strömung zugesetzten Streuteilchen in der zu messenden Strömung. Das von den Streuteilchen reflektierte Licht wird von einer analogen CCD-Kamera auf zwei verschiedene Bilder aufgenommen. Die Kamera zeigt dabei in Richtung des Normalenvektors der ausgeleuchteten Fläche. Zur Auswertung (siehe Abschnitt 6.2.2) werden die in den beiden Bildern abgebildeten Teilchen einander zugeordnet und so der Betrag und die Richtung der Teilchengeschwindigkeiten bestimmt.

Wie auch in der Laser-Doppler-Anemometrie (siehe Abschnitt 6.1) müssen die der Strömung zugesetzten Streuteilchen ein gutes Teilchenfolgevermögen besitzen, damit sie der Strömung folgen, ohne diese zu beeinflussen. Als Streuteilchen finden in dieser Arbeit zwei verschiedene Arten silberbeschichteter hohler Glaskugeln Verwendung. Sie besitzen einen mittleren Durchmesser von wahlweise  $15\mu\text{m}$  und  $44\mu\text{m}$ . Das von ihnen gestreute Licht gehorcht den Gesetzen der Mie-Streuung und weist senkrecht zur Beleuchtungsrichtung seine größte Intensität auf (s. Abb. 6.4).

Eine abschließende Verarbeitung der beiden Aufnahmen geschieht auf einem PC und wird im folgenden Abschnitt behandelt.

### 6.2.2 Auswertung der Bilder

Bei der Auswertung der Bilder kommt es auf die Messung einer Verschiebung eines ganzen Teilchenensembles an. Dieses ist ein großer Unterschied zu der Laser-Doppler-Anemometrie, bei der die Geschwindigkeitskomponente einzelner Streuteilchen bestimmt wird (siehe Abschnitt 6.1).

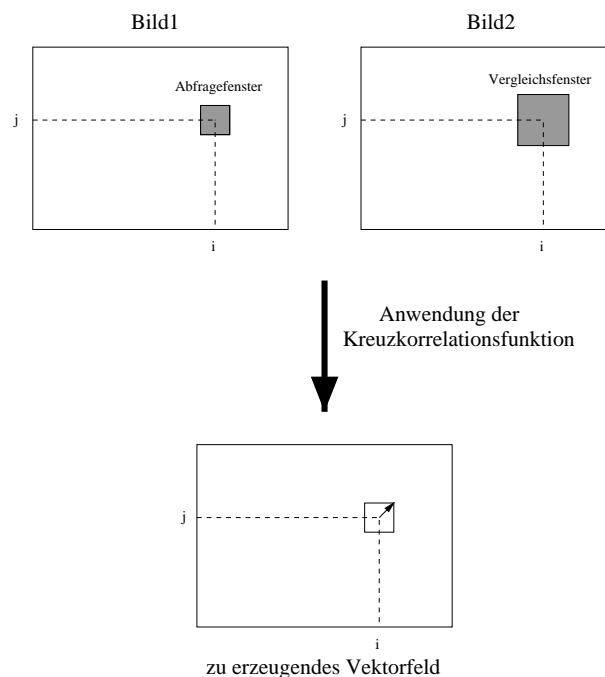


Abbildung 6.6: Konzeptionelle Anordnung zur Bestimmung eines Geschwindigkeitsvektors an der Position  $(i, j)$ .

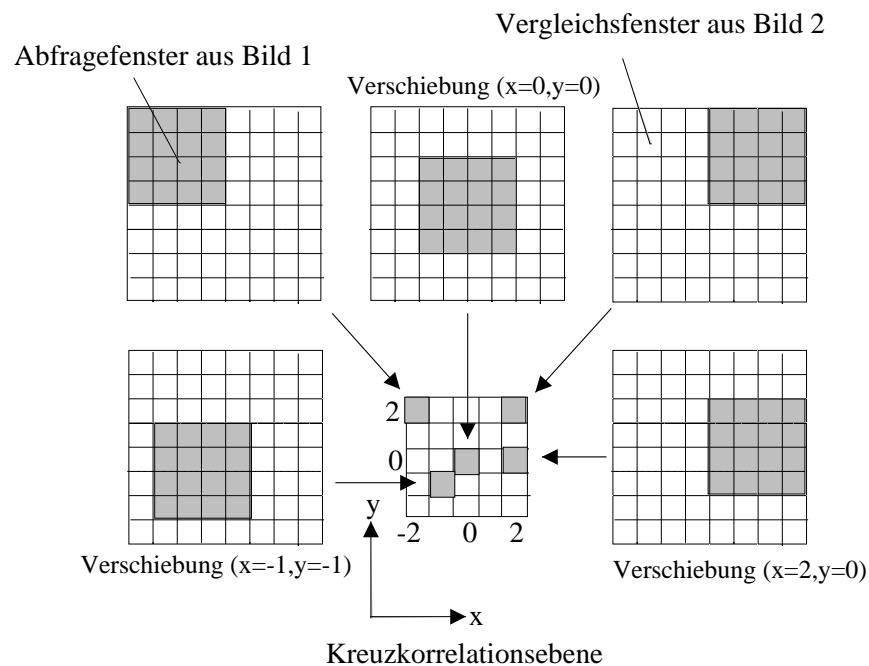


Abbildung 6.7: Darstellung zur Berechnung einer Korrelationsebene [102].

Der große Vorteil des PIVs gegenüber dem LDA besteht also darin, daß mit nur einer Messung die Geschwindigkeitsverteilung einer ganzen Fläche bestimmt werden kann.

Die Vorgehensweise bei der Bestimmung dieser Geschwindigkeitsverteilung ist dabei die folgende:

Die beiden im kurzen Zeitabstand voneinander aufgenommenen Bilder liegen im Rechner in digitaler Form vor. In Abbildung 6.6 sind diese eingetragen und mit *Bild1* und *Bild2* bezeichnet. Es wird nun ein kleiner quadratischer Abschnitt aus dem ersten Bild (Abfragefenster) an einer bestimmten Position  $(i,j)$  extrahiert. Dieses Abfragefenster wird anschließend mit einem ebenfalls quadratischen aber größeren Ausschnitt (Vergleichsfenster) im zweiten Bild verglichen. Die Mittelpunkte der beiden Fenster liegen dabei an derselben Position.

Man möchte nun den Bereich im Vergleichsfenster finden, der die größte Übereinstimmung mit dem Teilchenensemble im Abfragefenster aufweist. Üblicherweise ist das Teilchenensemble, das sich bei der ersten Aufnahme im Abfragefenster befand, bei der zweiten Aufnahme gemäß dem Strömungsverlauf um einen gewissen Betrag in eine Richtung verschoben. Aus dieser Verschiebung resultiert ein Geschwindigkeitsvektor an der Stelle  $(i,j)$  (Abb. 6.6).

Die Berechnung der besten Übereinstimmung erfolgt mittels einer normierten Kreuzkorrelationsfunktion. Diese bestimmt die Güte der Überdeckung des kleineren Abfragefensters mit dem größeren Vergleichsfenster bei einer bestimmten Verschiebung  $(x,y)$  des Abfragefensters zur ursprünglichen Position  $(i,j)$  im ersten Bild. Dieses ist in Abbildung 6.7 dargestellt.

Für jede mögliche Verschiebung des Abfragefensters auf dem Vergleichsfenster wird ein entsprechender Kreuzkorrelationswert berechnet; es ergibt sich somit eine Korrelations-

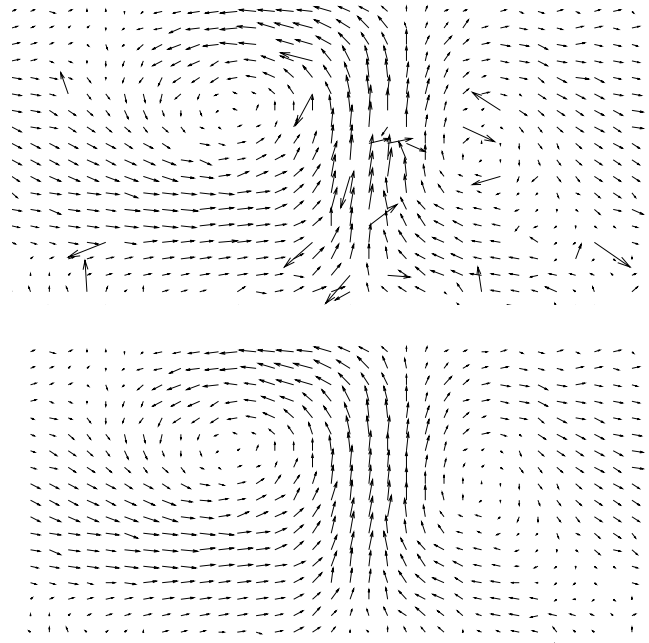


Abbildung 6.8: PIV-Auswertung ohne (oberes Bild) und mit (unteres Bild) Anwendung einer Fehlererkennung und einer Fehlerinterpolation.

ebene. Man bestimmt nun die Position  $(x,y)$  des Maximums der Korrelationsebene. Bei dieser Verschiebung ist die beste Übereinstimmung zu erzielen.

Mit Angabe der Richtung der Verschiebung und der Kenntnis vom zeitlichen Abstand beider Bilder läßt sich schließlich ein Geschwindigkeitsvektor an der Position  $(i,j)$  in Abbildung 6.6 eintragen.

Die Anzahl der Vektoren kann dadurch erhöht werden, daß die Abfragefenster sich mit einem bestimmten Überlappungsgrad überdecken [57]. Der optimale Überlappungsgrad sowie die Größe der Abfrage- und Vergleichsfenster sind bei der Auswertung frei wählbar und müssen der zu untersuchenden Strömung angepaßt werden.

### 6.2.3 Fehlererkennung und Korrektur

Durch verschiedene Ursachen können im Geschwindigkeitsfeld fehlerhafte Vektoren auftreten, welche es zu erkennen gilt. Fehler können beispielsweise durch einen hohen Geschwindigkeitsgradienten in der Strömung entstehen, der das Teilchenensemble während zwei Aufnahmen stark deformiert, oder durch Rauschen bei der Aufnahme mit der Kamera.

Zur zuverlässigen Fehlererkennung eignen sich lokale Verfahren, bei denen jeder berechnete Geschwindigkeitsvektor mit seinen acht direkt angrenzenden Nachbarvektoren verglichen wird [137]. Weicht der Vektor von dem Mittelwert der Nachbarvektoren um mehr als einen zulässiger Grenzwert ab, der den experimentellen Gegebenheiten individuell angepaßt werden muß, so wird dieser Vektor als fehlerhaft markiert und ein neuer Vektor durch Interpolation eingefügt.

Das Ergebnis einer solchen Fehlererkennung und -behandlung ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Im oberen Bild ist eine Original-Aufnahme mit einigen Fehlervektoren zu sehen. Die fehlerhaften Vektoren sind mit dem Auge gut auszumachen. Wendet man die oben beschriebene Fehlererkennung an, erhält man als Resultat das untere Bild in Abbildung 6.8.

Die in dieser Arbeit vorgestellten PIV-Aufnahmen an Strömungszuständen im Taylor-Couette-System sind alle fehlerbehandelt.

# Kapitel 7

## Kleine Geometrien ( $\Gamma < 1,4$ )

Der Einfluß der Ränder auf die Lage kritischer Punkte und allgemein auf das dynamische Verhalten der Strömungszustände wurde in Kapitel 2.4 dargestellt.

Dieser Einfluß ist offensichtlich dann am größten, wenn der Abstand zwischen Boden- und Deckelplatte möglichst gering ist. So erlauben es kleine Zylinderhöhen, gezielt den Einfluß dieser Begrenzungsplatten auf die Dynamik und auf die Art und das Aussehen der auftretenden Verzweigungen zu untersuchen. Aufgrund der geringen räumlichen Ausdehnung ist auch mit einer geringeren Anzahl möglicher auftretender Moden im Vergleich zu längeren, ausgedehnteren Systemen zu rechnen.

Dennoch findet man ein komplexes Verzweigungsdiagramm mit einer Vielzahl unterschiedlicher Moden und Übergängen ins Chaos (s. Abschnitt 7.1).

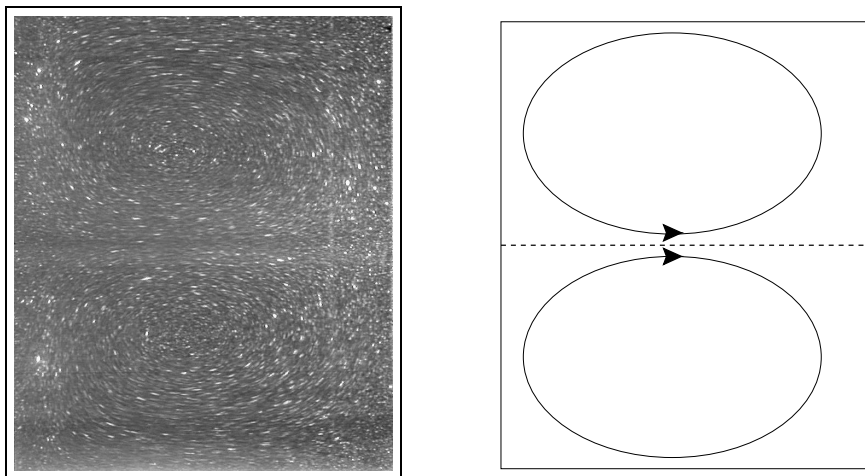


Abbildung 7.1: Der symmetrische Zwei-Wirbelzustand als Grundzustand bei kleinen Geometrien. Hier ist  $\Gamma = 1,2$  und  $Re_i = 100$ ,  $Re_a = 0$ . Links ist eine Sichtbarkeitsaufnahme zu sehen, rechts zur Verdeutlichung eine schematische Zeichnung dieses Strömungszustandes.

Bei Systemen, die ein großes Höhen- zu Breitenverhältnis  $\Gamma$  aufweisen, bildet sich in der mittleren Region des Zylinders für hinreichend kleine Reynoldszahlen eine reine laminare Scherströmung aus, die Couette-Strömung. Diese stellt den Grundzustand dar, der



bei Erhöhung der Reynoldszahl in andere Zustände übergeht.

Bei den hier zu betrachtenden kleinen Geometrien ( $\Gamma < 1,4$ ) ist das anders: Dort besteht der Grundzustand, der sich von  $Re_i = 0$  bei Erhöhung der Reynoldszahl aus entwickelt, aus einem symmetrischen Zwei-Wirbelzustand. Dieses ist durch die Ränder bedingt, die aufgrund der Haftbedingung an den Endplatten zu einer Einwärtsströmung hin zum Innenzylinder führen.

Aufgrund des geringen Höhen- zu Breitenverhältnisses erscheinen die Wirbel zusammengedrückt. Dieser Zustand ist in Abbildung 7.1 für  $\Gamma = 1,2$  und  $Re_i = 150$  bei ruhendem Außenzylinder dargestellt. Auf der linken Seite ist eine Sichtbarkeitsmessung zu sehen<sup>1</sup>. Infolge der geringen Rotationsraten des Innenzylinders sind die Teilchenbahnen nur undeutlich zu erkennen. Die schematische Zeichnung auf der rechten Seite dient deshalb dem besseren Verständnis.

Dieser Zwei-Wirbelzustand geht für  $\Gamma \leq 1,304$  bei Erhöhung der Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  über eine Gabelverzweigung in einen asymmetrischen Ein-Wirbelzustand über.

Hierbei wächst ein Wirbel des vorher symmetrischen Zwei-Wirbelzustandes sukzessive an, bis er in axialer Richtung fast von der Boden- zur Deckelplatte reicht. Der andere Wirbel verringert sich entsprechend und plaziert sich in der oberen oder unteren Ecke nahe am Innenzylinder. Eine leichte Asymmetrie im experimentellen Aufbau, die in einem realen Experiment immer vorliegt, führt dazu, daß das Anwachsen eines bestimmten Wirbels auf Kosten des anderen bevorzugt wird. Bei der idealisierten mathematischen Beschreibung hingegen liegt vollständige Symmetrie vor, und es ist gleich wahrscheinlich, ob der obere oder der untere Wirbel des ursprünglichen symmetrischen Zwei-Wirbelzustandes anwächst.

Bei allen hier vorgestellten Ergebnissen zu den kleinen Geometrien wurde die axiale Geschwindigkeitskomponente als Meßgröße gewählt. Mißt man diese in der Zylindermitte, so ist sie am besten dazu geeignet, zwischen symmetrischen und asymmetrischen Zuständen zu unterscheiden. Ein symmetrischer Zwei-Wirbelzustand besitzt in der Zylindermitte nur eine Strömungskomponente in radialer und keine in axialer Richtung, während ein asymmetrischer Ein-Wirbelzustand an diesem Ort eine von Null verschiedene axiale Strömungskomponente aufweist.

## 7.1 Stand der Forschung

Die Abbildung 7.2 zeigt ein experimentelles Verzweigungsdiagramm für  $\Gamma = 1,2$  (nach [74]). Aufgetragen ist die axiale Geschwindigkeitskomponente in willkürlichen Einheiten in Abhängigkeit von der Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$ , welche quasistatisch von  $Re_i = 50$  bis  $Re_i = 1450$  mit  $\Delta Re_i / \Delta t = 0,35 s^{-1}$  erhöht wurde.

---

<sup>1</sup>Mit einer Zylinderlinse wurde der Laserstrahl aufgeweitet und somit eine zweidimensionale Schicht in axialer und radialer Richtung geringer Dicke (2–3 mm) erzeugt (Lichtschnitt-Technik). Somit lassen sich mit der Kamera Momentaufnahmen der Strömungszustände anfertigen. Diese Technik findet auch bei der PIV-Messung Anwendung.

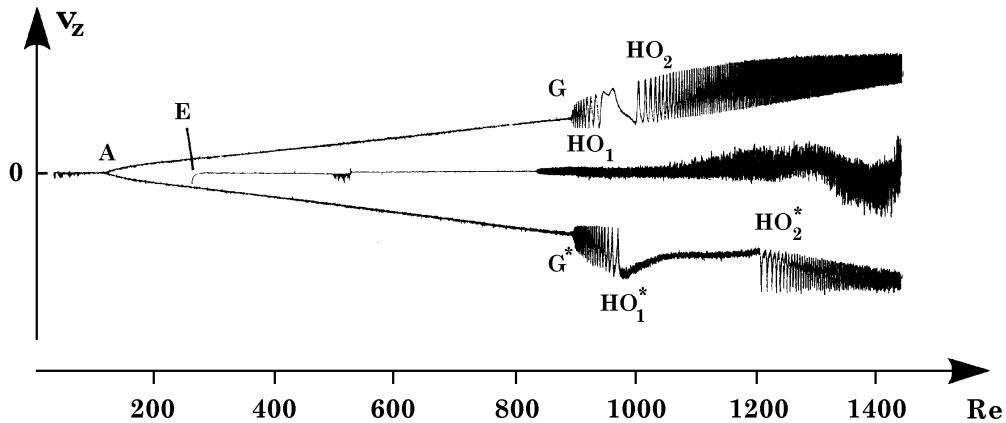


Abbildung 7.2: Experimentelles Verzweigungsdiagramm für  $\Gamma = 1,2$ : Aufgetragen ist die axiale Geschwindigkeitskomponente über der Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$ , die quasistatisch erhöht wurde. Der symmetrische Zwei-Wirbelzustand verzweigt an dem Punkt  $A$  superkritisch in zwei asymmetrische Ein-Wirbelzustände, die unterschiedliche Drehrichtungen aufweisen und ab  $Re_i \approx 900$  zeitabhängig werden ( $G, HO_1, HO_2$ ). Der Punkt  $E$  markiert die untere Stabilitätsgrenze eines restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes (aus [74]).

Der symmetrische Zwei-Wirbelzustand verzweigt an dem Punkt  $A$  superkritisch in einen der beiden Ein-Wirbelzustände, deren Drehsinn unterschiedlich ist. Bei weiterer Erhöhung von  $Re_i$  wächst einer der beiden Wirbel an, bis dieser in axialer Richtung nahezu den gesamten Spalt ausfüllt. Der zweite Wirbel ist immer noch vorhanden, aber da er deutlich kleiner als der andere ist, spricht man hier von einem Ein-Wirbelzustand. An einem der Ränder liegt eine Auswärtsströmung vor. Es handelt sich also bei dem asymmetrischen Ein-Wirbelzustand um eine anomale Mode. Das Besondere an diesem Zustand ist, daß, im Gegensatz zu allen anderen anomalen Moden (s. Abschnitt 4.1), diese Mode von dem Grundzustand nicht entkoppelt ist [13].

Bei einer Reynoldszahl  $Re_i \approx 900$  führt eine Hopf-Verzweigung zu einer zeitperiodischen Schwingung im System mit einer azimuthalen Wellenzahl  $m = 2$  (Punkt  $G$  in Abb. 7.2). Im weiteren Verlauf nimmt die Frequenz der ( $m = 2$ )-Mode bei Erhöhung der Reynoldszahl immer weiter zu Null ab, bis keine Schwingung mehr erkennbar ist. Man befindet sich im Bereich einer "Frequenzlücke". Bei weiterer Erhöhung der Reynoldszahl setzt ab einem bestimmten Wert die Oszillation wieder mit voller Amplitude ein. Man findet am Anfang und am Ende der "Frequenzlücke" jeweils einen homoklinen Orbit [55, 138], der hier mit  $HO_1$  und  $HO_2$  gekennzeichnet ist. Die Zustände im zweiten Ast der Verzweigung vom Punkt  $A$  sind zur Unterscheidung mit einem  $*$  markiert. Das etwas unterschiedliche Verhalten der beiden Äste ist auf eine leichte Asymmetrie im System zurückzuführen.

Der Punkt  $E$  in Abbildung 7.2 kennzeichnet die untere Stabilitätsgrenze eines restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes. Dieser ist nur durch eine abrupte Änderung der Reynoldszahl

(durch einen Sprung) aus dem Grundzustand unterhalb des Punktes  $A$  in einen Bereich oberhalb des Punktes  $E$  erreichbar.

Somit existieren auch bei kleinen Zylinderhöhen in einem Parameterbereich unterschiedliche Zustände (Multiplizität der Lösungen). Dieses ist in Abbildung 7.3 für  $\Gamma = 1,2$  und  $Re_i = 350$  dargestellt: (a) zeigt eine Sichtbarkeitsaufnahme des restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes, (c) einen Ein-Wirbelzustand, bei dem der kleine Wirbel in der linken unteren Ecke nahe am Innenzylinder erscheint. Deutlich sind hier die unterschiedlichen Größenverhältnisse erkennbar. Die Bilder (b) und (d) zeigen numerisch ermittelte Ergebnisse von S. Tavener [131]. Numerik und Experiment zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Gegenüber dem Grundzustand (Abb. 7.1) sind die Wirbelkerne im Zwei-Wirbelzustand in Richtung Außenzylinder verschoben.

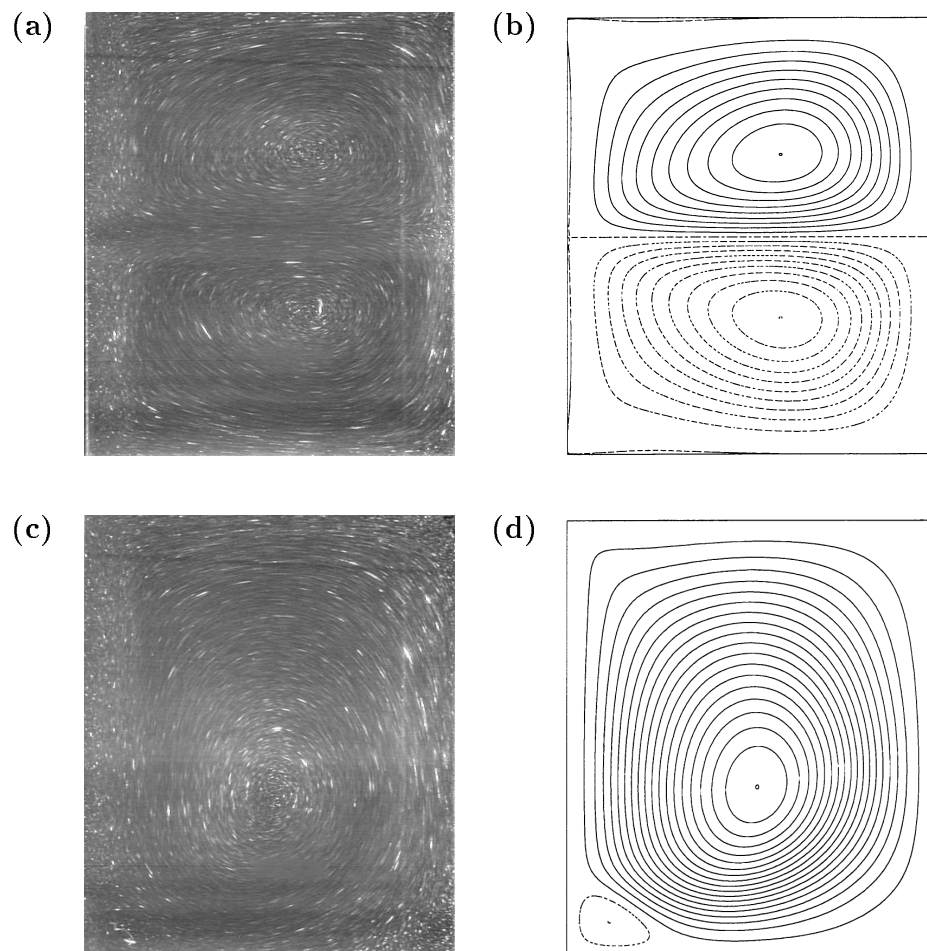


Abbildung 7.3: Ein Beispiel für die Multiplizität der Lösungen bei  $\Gamma = 1,2$  und  $Re_i = 350$ : (a) symmetrischer Zwei-Wirbelzustand, (c) asymmetrischer Ein-Wirbelzustand, (b) und (d) numerisch ermittelte Strömungslinien der beiden Zustände.

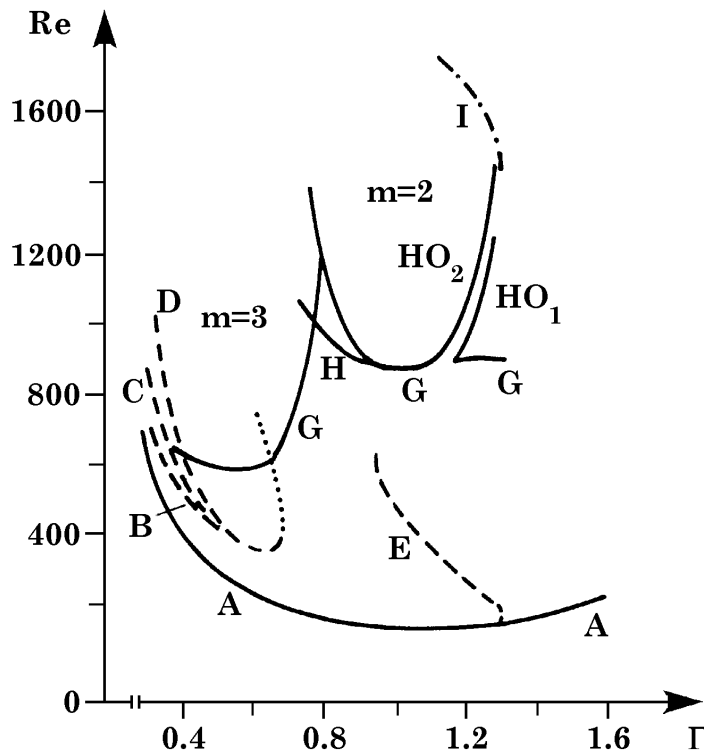


Abbildung 7.4: Stabilitätsdiagramm für kleine Geometrien in der  $(\Gamma, Re)$ -Ebene: Der Zwei-Wirbelzustand verzweigt beim Überschreiten der Linie  $A$  in einen Ein-Wirbelzustand. Dieser ist vorerst stationär, wird aber bei Erhöhung von  $Re$  zeitabhängig (Dieses ist durch die Linien  $G, H, HO_1, HO_2$  markiert.). Restabilisierte Zwei-Wirbelzustände existieren jenseits der Linien  $E$  und  $B$  (aus [125]).

### 7.1.1 Stabilitätsdiagramm und dynamisches Verhalten für $Re_a = 0$

In Abbildung 7.4 ist das Stabilitätsdiagramm in der  $(\Gamma, Re)$ -Ebene aufgetragen (nach [97, 98]). Bei den diesem Diagramm zugrundeliegenden Untersuchungen rotierte allein der Innenzylinder, während sich der Außenzylinder sowie die Boden- und Deckelplatte in Ruhe befanden. Dieses Diagramm soll einen Überblick geben über alle bisher gefundenen Strömungszustände bei kleinen Geometrien und einem feststehenden Außenzylinder. Für eine ausführliche Betrachtung sei auf die im Text angegebene Literatur verwiesen.

In diesem Diagramm (Abb. 7.4) wurden die gleichen Bezeichnungen wie für das experimentelle Verzweigungsdiagramm (Abb. 7.2) gewählt. So markiert die Linie ( $A$ ) die obere Stabilitätsgrenze des primären Zwei-Wirbelzustandes. Beim Überschreiten dieser Linie findet eine Verzweigung in den asymmetrischen Ein-Wirbelzustand statt. Bei Erhöhung der Reynoldszahl wird dieser zeitabhängig (Linie ( $G$ )), und es tritt eine Oszillation mit

azimutaler Wellenzahl  $m = 3$  bzw.  $m = 2$  auf [74, 106]. Hierbei lassen sich zwei Schwingungsmoden unterscheiden: Eine ( $m = 3$ )-Mode mit einer normierten Frequenz von  $f_{norm} = f_{(m=3)}/f_i = 0,3$ , die bei kleineren Höhen- zu Breitenverhältnissen gefunden werden kann und eine ( $m = 2$ )-Mode mit einer normierten Frequenz von  $f_{norm} = 0,06$ . Diese ( $m = 2$ )-Mode tritt bei größerem  $\Gamma$  auf.

In dem Bereich  $1,04 \leq \Gamma \leq 1,28$  konnten homokline Orbits gefunden werden ( $HO_1$  und  $HO_2$ ) [74, 98]. Bei weiterer Erhöhung der Reynoldszahl kommt man in den Bereich eines intermittenten Überganges ins Chaos.

Die Linien ( $B$ ) und ( $E$ ) markieren jeweils die untere Stabilitätsgrenze eines restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes. Auf diese wird im folgenden noch näher eingegangen.

### 7.1.2 Erste Instabilitäten bei kleinen Geometrien

In Abbildung 7.5 ist ein detaillierter Ausschnitt aus Abbildung 7.4 dargestellt, der die Stabilitätsbereiche der Zustände für  $Re_i \leq 750$  enthält. Um auf die einzelnen Zustände näher eingehen zu können, wurden andere Bezeichnungen als vorher gewählt.

Während ab dem Punkt  $B$  ( $\Gamma > 1,304$ ) das System kontinuierlich im Zwei-Wirbelzustand bleibt, findet beim Überschreiten der Linie ( $A, B$ ) eine Verzweigung in einen asymmetrischen Ein-Wirbelzustand statt. Für einen kleinen Bereich von Höhen- zu Breitenverhältnissen ( $1,267 \leq \Gamma \leq 1,304$ ) geht die vorher superkritische Verzweigung in eine subkritische über. Dort treten Hystereseerscheinungen auf. Man findet bei dem Punkt  $B$  ( $\Gamma = 1,267$ ) eine Kodimension-Zwei-Verzweigung in Form einer Spitzensingularität [25, 97].

Die Linie ( $C, D$ ) kennzeichnet den unteren Stabilitätsbereich des restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes. Hierbei handelt es sich um einen sekundären Zustand, der nur durch eine abrupte Änderung der Reynoldszahl (durch einen Sprung) aus dem primären Zwei-Wirbelzustand heraus auf eine Reynoldszahl, die sich jenseits der Linie ( $C, D$ ) befindet, erreicht werden kann. Befindet man sich in diesem restabilisierten Zustand und verringert langsam die Reynoldszahl, so geht der Zwei-Wirbelzustand beim Überschreiten der Linie ( $C, D$ ) in den asymmetrischen Ein-Wirbelzustand über.

Für kleines  $\Gamma$  findet man auch jenseits der Linie ( $F, G$ ) experimentell einen restabilisierten Zwei-Wirbelzustand, dessen Auswärtsströmung bei Erhöhung der Reynoldszahl zu schwingen beginnt (Linie ( $I, G$ )). Diese Oszillation unterliegt einer Periodenverdopplungskaskade ins Chaos [116]. G. Geister konnte eine iterierte Periodenverdopplung bis zum 32fachen der ursprünglichen Periode ausmessen [43]. Diese Route ins Chaos wurde mit Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse ausgewertet. Näheres findet man in [19, 20, 22, 96, 99]. In diesem Bereich lassen sich auch komplexe Verzweigungsstrukturen feststellen, die aus einer Wechselwirkung stabiler und instabiler Lösungsäste stammen [98, 113].

Vor kurzem gelang es O. Lütjhe, einen Chaos-Kontrollmechanismus nach dem Pyragas-Verfahren auf die Strömung in dem restabilisierten Zwei-Wirbelzustand erfolgreich anzu-

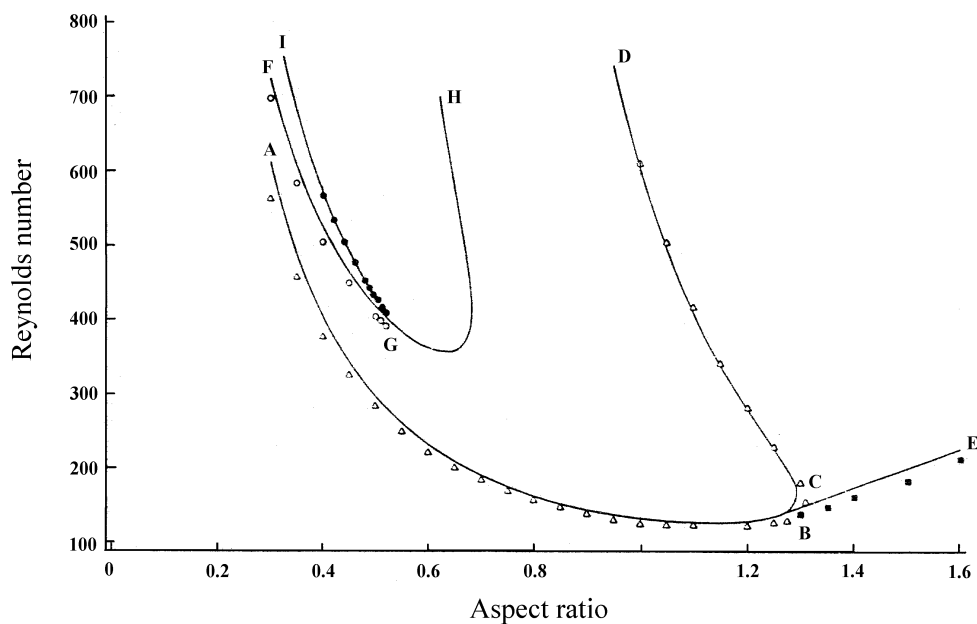


Abbildung 7.5: Stabilitätsdiagramm in der  $(\Gamma, Re_i)$ -Ebene. Hier ist ein detaillierter Ausschnitt aus Abbildung 7.4 dargestellt (aus [97]).

wenden. So konnte er in dem chaotischen Regime einen periodischen Orbit restabilisieren [78, 79].

### 7.1.3 Universelle Eigenschaften

Alle bisher in diesem Kapitel angeführten Ergebnisse beziehen sich auf ein Radienverhältnis  $\eta = 0,5$ . Sie stellen aber keine Eigenart dieser speziellen geometrischen Abmessungen dar. So konnte H. Röpcke [107] zum Beispiel homokline Orbits bei  $\eta = 0,3$  und  $\eta = 0,45$  nachweisen; es lassen sich auch Periodenverdopplungen bei  $\eta = 0,45$  finden [84].

Ebenso zeigte J. Kobine, daß die kontinuierliche  $SO(2)$  Symmetrie, gegeben durch die beiden das System begrenzenden Zylinder, nicht benötigt wird, um die oben beschriebenen Strömungszustände zu erhalten [69]. Er benutzte anstatt eines Außenzylinders einen Quader als äußere Begrenzung und schaffte sich somit aus der ehemals kontinuierlichen eine diskrete Symmetrie. Trotz dieses massiven Eingriffs fand er qualitativ gleiche Eigenschaften des Systems. Für kleine Höhen- zu Breitenverhältnissen  $\Gamma \leq 0,9$  stimmen seine Meßergebnisse mit denen aus Pfister et al. [97] gut überein, weil die Dynamik sich bei diesen Abmessungen näher am Innenzylinder abspielt und somit die äußere Begrenzung keinen großen Einfluß hat.

## 7.2 Einfluß eines rotierenden Außenzylinders

Mich beschäftigte bei den kleinen Geometrien die Frage, inwieweit eine kleine Störung in Form eines rotierenden Außenzylinders die Lage der Verzweigungspunkte und die Art der Verzweigung beeinflusst. Hierbei wird das Hauptaugenmerk auf die ersten Instabilitäten gelegt. Speziell wird betrachtet, was mit den Stabilitätslinien ( $A, B, C, D$ ) und ( $B, E$ ) aus Abbildung 7.5 für einen ruhenden Außenzylinder ( $Re_a = 0$ ) geschieht, wenn dieser rotiert ( $Re_a \neq 0$ ).

### 7.2.1 Verschiebung kritischer Punkte

In diesem ersten Abschnitt wurde die Gabel-Verzweigung von dem symmetrischen Zwei-Wirbelzustand in den asymmetrischen Ein-Wirbelzustand untersucht. Hierbei rotierte zusätzlich zum Innenzylinder auch der äußere Zylinder mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit. Es zeigte sich, daß die Rotation des Außenzylinders einen großen Einfluß auf diese Verzweigung hat.

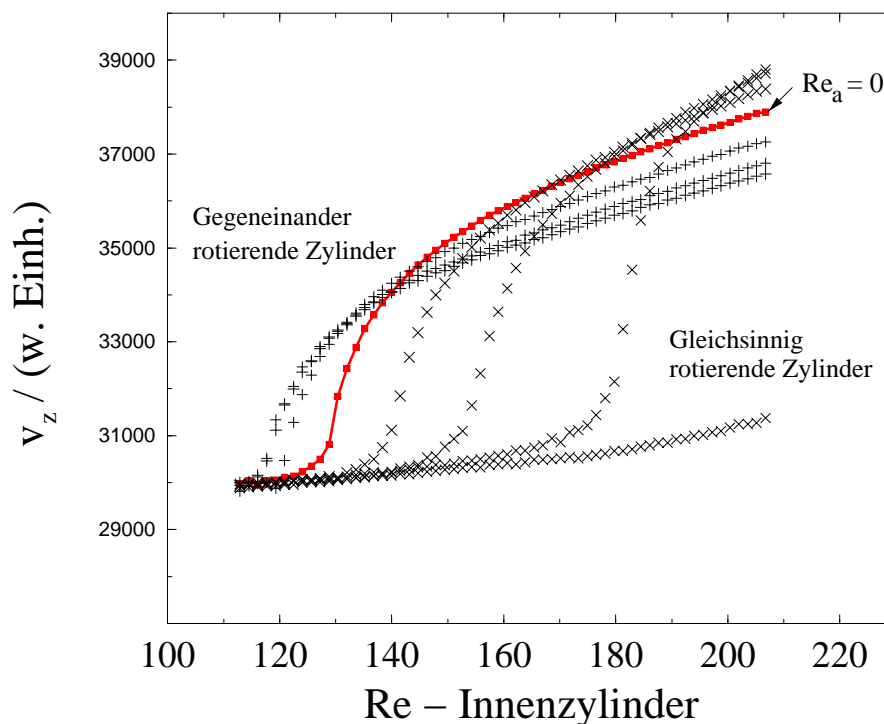


Abbildung 7.6: Verzweigungsdiagramme für  $\Gamma = 1,04$  und unterschiedliche Rotationsraten des Außenzylinders. Deutlich ist eine Verschiebung der Verzweigungspunkte in Abhängigkeit von  $Re_a$  zu sehen. Näheres ist im Text zu finden.

In Abbildung 7.6 ist die axiale Geschwindigkeitskomponente  $v_z$ , gemessen in der Zylindermitte, in willkürlichen Einheiten gegen die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  aufgetragen. Der symmetrische Zwei-Wirbelzustand verzweigt im Fall eines ruhenden Außenzylinders ( $Re_a = 0$ ) für  $\Gamma = 1,04$  am Punkt  $Re_i = 127,2$  in einen asymmetrischen Ein-Wirbelzustand. Das komplette Verzweigungsdiagramm im Fall eines ruhenden Außenzylinders ist hier durch die durchgezogene Linie dargestellt. Die einzelnen Meßpunkte ergeben sich jeweils aus einer Mittelung einer Zeitreihe mit  $2^{13}$  Punkten.

Bei der Meßwertaufnahme der Diagramme wurde zuerst die Winkelgeschwindigkeit des Außenzylinders auf den gewünschten festen Wert gesetzt. Dann wurde  $Re_i$  langsam quasistatisch erhöht, bis ein neuer gewünschter Parameterwert erreicht wurde. Anschließend wurde 15 Minuten gewartet, ehe die Zeitreihe aufgenommen wurde, um dem System genügend Zeit zum Relaxieren zu geben. Ein Auftragen der gemittelten Zeitreihen führt dann zu den in Abbildung 7.6 dargestellten Verläufen.

Deutlich ist hier das typische Ansteigen der Strömungsgeschwindigkeit in axialer Richtung bei Erhöhung von  $Re_i$  zu erkennen.

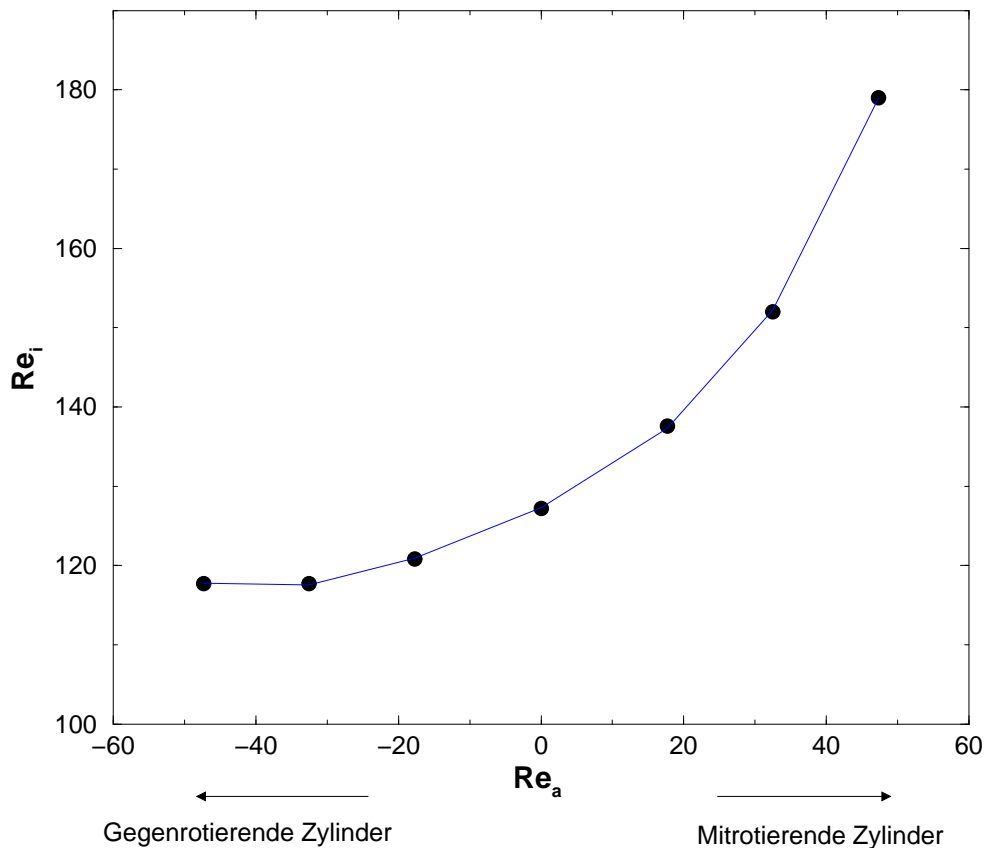


Abbildung 7.7: Verschiebung der kritischen Verzweigungspunkte für  $\Gamma = 1,04$  im Fall gegenrotierender Zylinder ( $Re_a < 0$ ) und mitrotierender Zylinder ( $Re_a > 0$ ) gegenüber einem System mit ruhendem Außenzylinder ( $Re_a = 0$ ).

Im Fall gleichsinnig rotierender Zylinder ( $Re_a > 0$ ) findet eine Stabilisierung des Zwei-



Wirbelzustandes statt. Dieser bleibt über einen großen Reynoldszahl-Bereich des Innenzylinders stabil.

In der Darstellung in Diagramm 7.6 nimmt die Reynoldszahl des Außenzylinders ( $Re_a$ ) nach rechts hin zu. Man sieht eine Verschiebung der Verzweigungspunkte hin zu höheren Reynoldszahlen des Innenzylinders. In dem hier dargestellten Reynoldszahlbereich bleibt das System bei  $Re_a = +62,1$  sogar im Zwei-Wirbelzustand (unterste Kurve).

Die gleiche Betrachtung im Fall gegeneinander rotierender Zylinder zeigt, daß der Zwei-Wirbelzustand destabilisiert wird und so eine Verzweigung in den Ein-Wirbelzustand bei geringerem  $Re_i$  auftritt als bei einem ruhendem Außenzylinder.

Eine Rotation beider Zylinder in die gleiche Drehrichtung ( $Re_a > 0$ ) hat einen deutlich größeren Einfluß auf die Verzweigung als gegeneinander rotierende Zylinder ( $Re_a < 0$ ) mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit des äußeren Zylinders.

Dieses wird in Abbildung 7.7 deutlich: Hier sind die kritischen Punkte für die Verzweigung in den Ein-Wirbelzustand für gleiche Randbedingungen ( $\Gamma = 1,04$ ) in Abhängigkeit von  $Re_a$  wiedergegeben. Man erhält die kritischen Punkte aus den Verzweigungsdiagrammen aus Abbildung 7.6. Da dieser Übergang einer Gabelverzweigung gehorcht, wurden jeweils eine Wurzelfunktion angepaßt und so die kritischen Punkte ermittelt.

Im Fall gleichsinnig rotierender Zylinder resultiert selbst eine kleine Erhöhung von  $Re_a$  in einer großen Verschiebung des kritischen Verzweigungspunktes.

## 7.2.2 Vergleich mit numerischen Berechnungen

In diesem Abschnitt wird der Einfluß eines rotierenden Außenzylinders auf die Lage kritischer Punkte und die Art der Verzweigung systematisch für unterschiedliche Höhen- zu Breitenverhältnissen  $\Gamma$  untersucht.  $\Gamma$  variiert hier von  $\Gamma = 0,56$  bis  $\Gamma = 1,24$ . Dabei sollen die experimentellen Ergebnisse mit numerischen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen verglichen werden. Diese numerischen Lösungen wurden von S. Tavener [115] mit dem Programm Endwife durchgeführt.

Bei dem Programm handelt es sich um numerische Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen für axialsymmetrische Strömungszustände mit realistischen Randbedingungen. Die Rechnungen basieren auf der Methode der finiten Elemente in Verbindung mit Methoden der Verzweigungstheorie.

Die numerischen Methoden sind in [97] und den darin zitierten Arbeiten beschrieben und wurden von S. Tavener für einen rotierenden Außenzylinder angepaßt [115].

In den numerischen Betrachtungen wird, soweit machbar, mit dimensionslosen Größen gerechnet. Deshalb wurde von S. Tavener die azimutale Geschwindigkeitskomponente mit der azimutalen Geschwindigkeit des Innenzylinders skaliert. So führt er das Verhältnis von azimutaler Geschwindigkeit des Außenzylinders zu azimutaler Geschwindigkeit des Innenzylinders ein. Um nun seine Rechnungen mit meinen Ergebnissen besser vergleichen zu können, wird in den Abbildung 7.8 bis 7.11 im Unterschied zu Abbildung 7.7  $Re_i$  gegenüber  $Re_a/Re_i$  aufgetragen.

Die Abbildungen 7.8 bis 7.10 zeigen die Einsatzpunkte einer symmetriebrechenden Verzweigung für  $\Gamma = 0,56$ ,  $\Gamma = 0,71$ ,  $\Gamma = 0,86$ ,  $\Gamma = 0,96$ ,  $\Gamma = 1,04$  und  $\Gamma = 1,08$  in Abhängigkeit von  $Re_a$ .

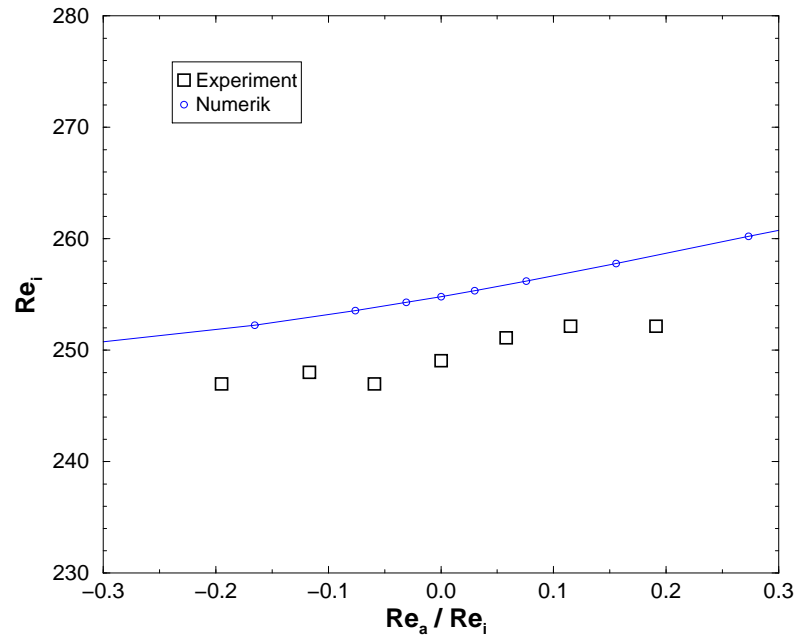
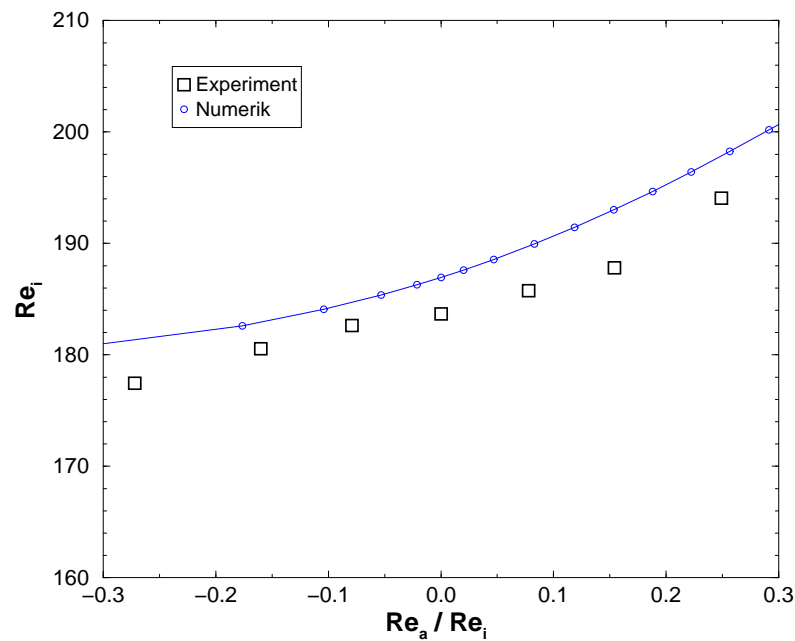
(a)  $\Gamma = 0,56$ (b)  $\Gamma = 0,71$ 

Abbildung 7.8: Einsatzpunkte einer symmetriebrechenden Verzweigung für (a)  $\Gamma = 0,56$  und (b)  $\Gamma = 0,71$ . Aufgetragen ist die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  gegenüber der normierten Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a / Re_i$ . Die Messergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit der Numerik [115].

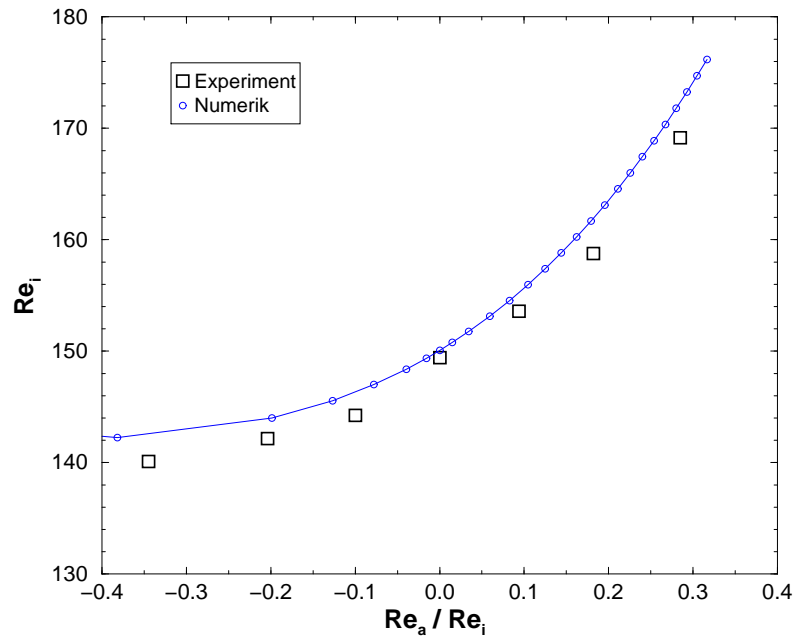
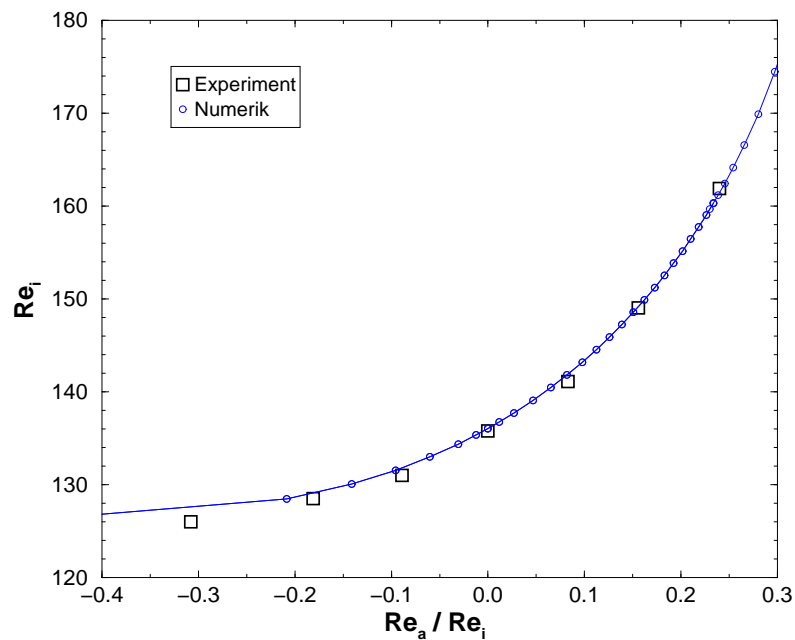
(a)  $\Gamma = 0,86$ (b)  $\Gamma = 0,96$ 

Abbildung 7.9: Einsatzpunkte einer symmetriebrechenden Verzweigung für (a)  $\Gamma = 0,86$  und (b)  $\Gamma = 0,96$ . Sonst wie in Abbildung 7.8.

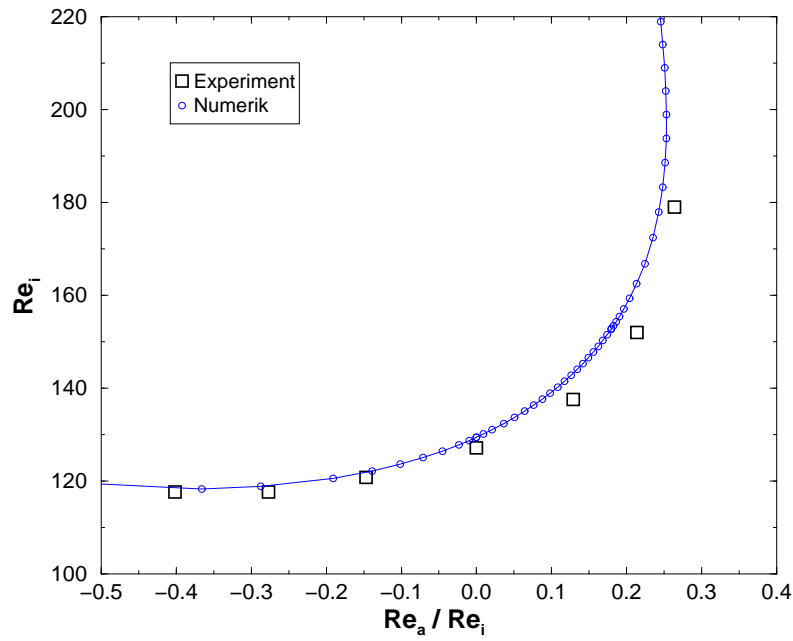
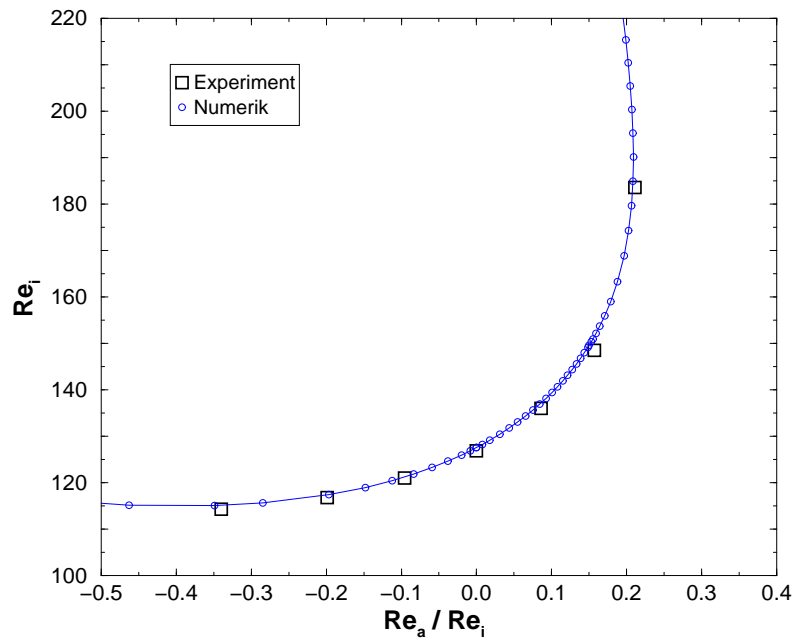
(a)  $\Gamma = 1,04$ (b)  $\Gamma = 1,08$ 

Abbildung 7.10: Einsatzpunkte einer symmetriebrechenden Verzweigung für (a)  $\Gamma = 1,04$  und (b)  $\Gamma = 1,08$ . Sonst wie in Abbildung 7.8.

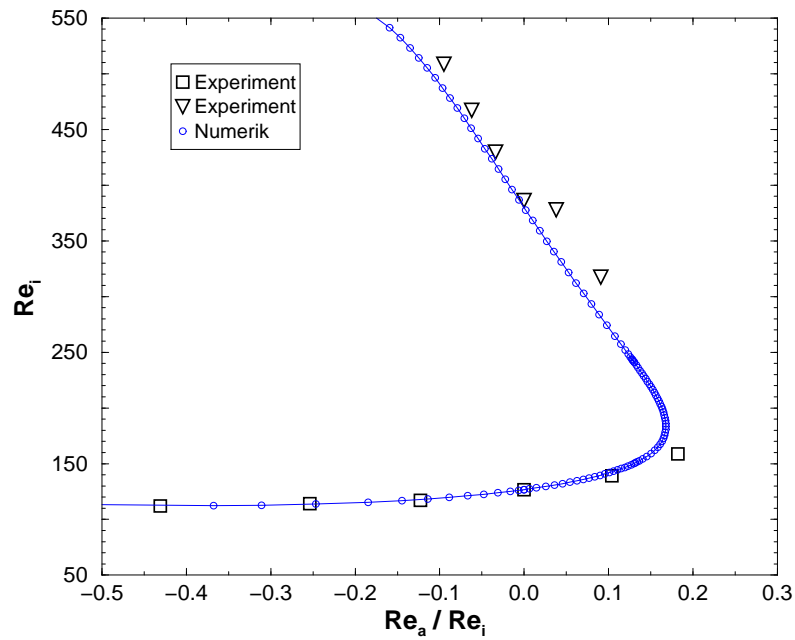
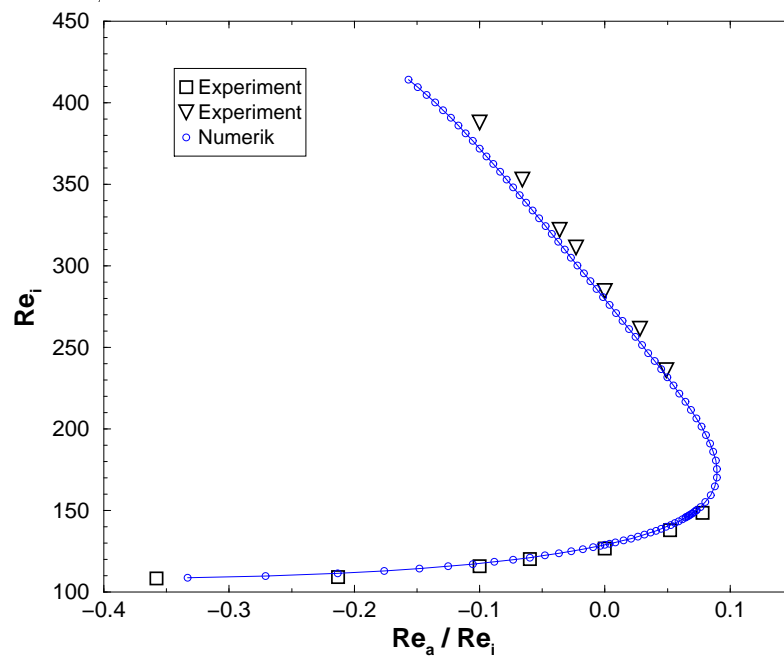
(a)  $\Gamma = 1,12$ (b)  $\Gamma = 1,20$ 

Abbildung 7.11: Einsatzpunkte einer symmetriebrechenden Verzweigung für (a)  $\Gamma = 1,12$  und (b)  $\Gamma = 1,20$ . Die großen Symbole kennzeichnen die experimentellen Ergebnisse bei Erhöhung von  $Re_i$  ( $\square$ ), bzw. die untere Stabilitätsgrenze des restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes ( $\nabla$ ). Sonst wie in Abbildung 7.8.

Aufgetragen ist jeweils die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  gegenüber der normierten Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a/Re_i$ . Die experimentell ermittelten kritischen Punkte für ein festes  $\Gamma$  und verschiedene Rotationsraten des Außenzylinders sind in allen Abbildungen durch die großen Symbole dargestellt ( $\square$ ). Die kleineren offenen Kreise, die durch eine Linie verbunden sind, zeigen die Lösungen aus den Navier–Stokes–Gleichungen [115] für die einzelnen Parameterwerte. Die experimentellen Ergebnisse können so gut mit der Numerik verglichen werden.

Während für große Höhen– zu Breitenverhältnissen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erzielt werden kann, liegen die experimentell bestimmten Verzweigungspunkte für  $\Gamma = 0,56$  und  $\Gamma = 0,71$  unterhalb der von der Numerik vorhergesagten.

Dieses liegt in einer leichten Asymmetrie im Aufbau begründet, die im realen Experiment immer vorhanden ist. So ist ein Ast der symmetrischen Gabelverzweigung entkoppelt, und auch der primäre Ast ist gestört. Dieses wurde auch im Fall eines ruhenden Außenzylinders gefunden [98]. Der Einfluß der leichten Asymmetrie ist für kleinere Höhen– zu Breitenverhältnissen größer und führt zur leichten Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment (Abb. 7.8). Aber auch in diesem Fall zeigen die theoretischen und experimentellen Ergebnisse den gleichen qualitativen Verlauf.

Für  $\Gamma = 1,12$  und  $\Gamma = 1,2$  wurde zusätzlich zur Verzweigung des Zwei– in den Ein–Wirbelzustand auch die untere Stabilitätsgrenze des restabilisierten Zwei–Wirbelzustandes unter Variation der Reynoldszahl des Außenzylinders untersucht. Wie bereits erwähnt, erreicht man diesen Zustand nur durch eine sprunghafte Änderung der Reynoldszahl aus dem symmetrischen Zwei–Wirbelzustand heraus. Durch die Messung der axialen Strömungskomponente in der Zylindermitte nahe am Innenzylinder kann man leicht zwischen diesen beiden Zuständen unterscheiden. Der restabilisierte Zwei–Wirbelzustand besitzt dort keine axiale Strömungskomponente, während die des asymmetrischen Ein–Wirbelzustands von Null verschieden ist.

Somit erhält man die Verläufe aus Abbildung 7.11 für (a)  $\Gamma = 1,12$  und (b)  $\Gamma = 1,2$ . Hier stehen die großen Symbole wiederum für die experimentellen Meßwerte, die kleineren mit der durchgezogenen Linie sind die entsprechenden numerischen Ergebnisse [115]. So kennzeichnen, wie auch in den Abbildungen für kleinere  $\Gamma$ , die Symbole ( $\square$ ) die experimentellen Ergebnisse bei Erhöhung von  $Re_i$  und ( $\nabla$ ) die untere Stabilitätsgrenze des restabilisierten Zwei–Wirbelzustandes.

Deutlich ist zu sehen, daß es auch hier zu einer Verschiebung kritischer Punkte kommt. Dabei fällt die Verschiebung der unteren Stabilitätsgrenze des restabilisierten Zwei–Wirbelzustandes für das gleiche Verhältnis von  $(Re_a/Re_i)$  stärker aus als eine Veränderung der kritischen Punkte beim primären Übergang in den asymmetrischen Ein–Wirbelzustand.

Betrachtet man Abbildung 7.5, so erkennt man auch hier eine große Steigung der Linie  $(C, D)$ . Dieses Diagramm zeigt allerdings den Verlauf der kritischen Punkte in der  $(\Gamma, Re_i)$ –Ebene. Das legt die Vermutung nahe, daß eine zusätzliche Rotation des Außenzylinders einen ähnlichen Einfluß auf die Lage kritischer Punkte hat wie eine Variation von  $\Gamma$  im Fall eines ruhenden Außenzylinders. Das heißt, trägt man in der  $(\Gamma, Re_i)$ –Ebene

die Verzweigungspunkte mit dem Verhältnis von  $(Re_a/Re_i)$  als Parameter auf, so sollte es zu einer Verschiebung der gesamten Linie  $(A, B, C, D)$  aus Abbildung 7.5 kommen. Dieses ist in Abbildung 7.12 dargestellt. Die kleinen gefüllten Kreise zeigen zum Vergleich die Stabilitätsgrenzen aus Abbildung 7.5 für einen ruhenden Außenzylinder. Da meine Messungen an einer neuen Taylor–Couette–Anlage durchgeführt wurden, habe ich meine Ergebnisse für  $Re_a = 0$  mit in dieses Diagramm aufgenommen ( $\diamond$ ). Die Übereinstimmung ist deutlich zu erkennen.

Der Einfluß eines rotierenden Außenzylinders auf die Lage der Verzweigungspunkte ist exemplarisch für zwei Fälle dargestellt:

Für gleichsinnig rotierender Zylinder ( $Re_a/Re_i = +0,05(\circ)$ ) und für gegeneinander rotierende Zylinder ( $Re_a/Re_i = -0,1(\square)$ ).

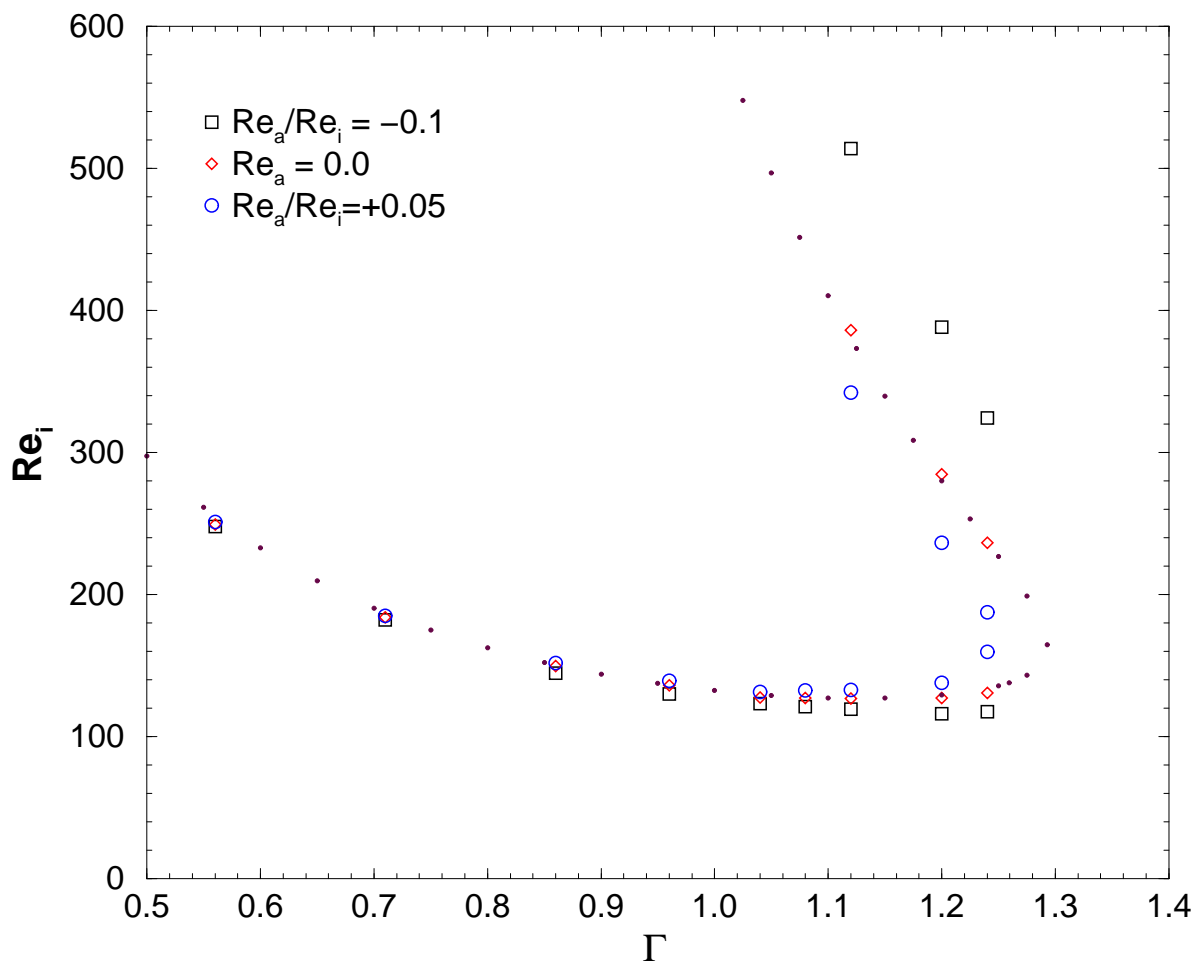


Abbildung 7.12: Stabilitätsdiagramm in der  $(\Gamma, Re_i)$ -Ebene. Eine Rotation des Außenzylinders führt zu einer Verschiebung des gesamten Diagramms. Die Punkte zeigen zum Vergleich die Stabilitätsgrenzen aus Abbildung 7.5 für einen ruhenden Außenzylinder.

Hier läßt sich deutlich erkennen, daß eine Rotation des Außenzylinders im Fall kleiner

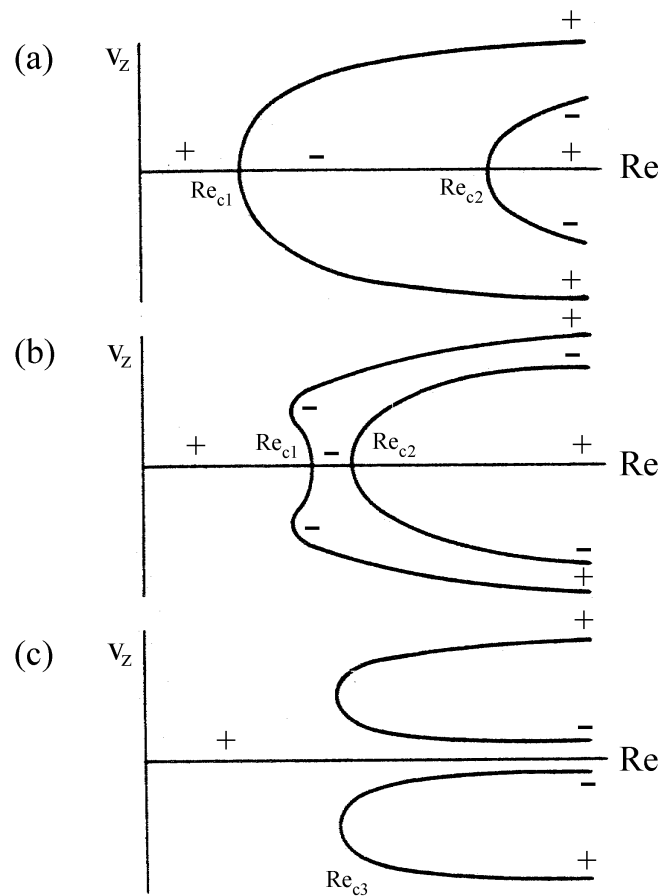


Abbildung 7.13: Die Verzweigungsdiagramme zeigen die Übergänge zwischen dem symmetrischen Zwei- und dem asymmetrischen Ein-Wirbelzustand. Das Höhen- zu Breitenverhältnis  $\Gamma$  nimmt von (a) bis (c) zu. Ein '+' kennzeichnet hier einen stabilen, ein '-' einen instabilen Ast im Verzweigungsdiagramm (nach [97]). Näheres im Text.

Höhen- zu Breitenverhältnisse ( $\Gamma \leq 0,75$ ) kaum einen Einfluß auf die Lage der Verzweigungspunkte vom Zwei- in den Einwirbelzustand hat. Das ist dadurch zu erklären, daß sich die Wirbel für  $\Gamma \leq 0,75$  nahe am Innenzylinder befinden und deshalb in ihrer radialen Ausdehnung nicht mehr die gesamte Spaltbreite ausfüllen. Dieses ändert sich bei größerem  $\Gamma$ : Die ganze Stabilitätslinie verschiebt sich unter dem Einfluß gleichsinnig rotierender Zylinder hin zu kleineren und unter dem Einfluß gegeneinander rotierender Zylinder hin zu größeren  $\Gamma$ -Werten. Eine Außenzylinderrotation mit  $Re_a > 0$  wirkt sich somit stabilisierend auf den Zwei-Wirbelzustand aus, während dieser für  $Re_a < 0$  destabilisiert wird.

### 7.2.3 Verzweigungstheoretische Analyse

In Abschnitt 7.1.2 wurde schon in knapper Form auf die Art der Verzweigungen zwischen dem Ein- und Zwei-Wirbelzustand eingegangen, was in diesem Abschnitt vertieft werden soll.



Verzweigungstheoretische Konzepte helfen sehr bei dem Verständnis der zugrundeliegenden Dynamik.

Benjamin und Mullin [13], Cliffe [25] und Pfister et al. [97] haben sich mit der Analyse und Wechselwirkungen der Verzweigungen für  $\Gamma < 1,6$  beschäftigt. Lücke et al. [76] untersuchten die superkritische Verzweigung bei  $\Gamma = 1,05$  im direkten Vergleich mit experimentellen Daten und Aitta et al. [7, 8] analysierten die Hysterese-Effekte im Bereich der subkritischen Verzweigung. In allen diesen Arbeiten wurde ein System mit ruhendem Außenzylinder betrachtet.

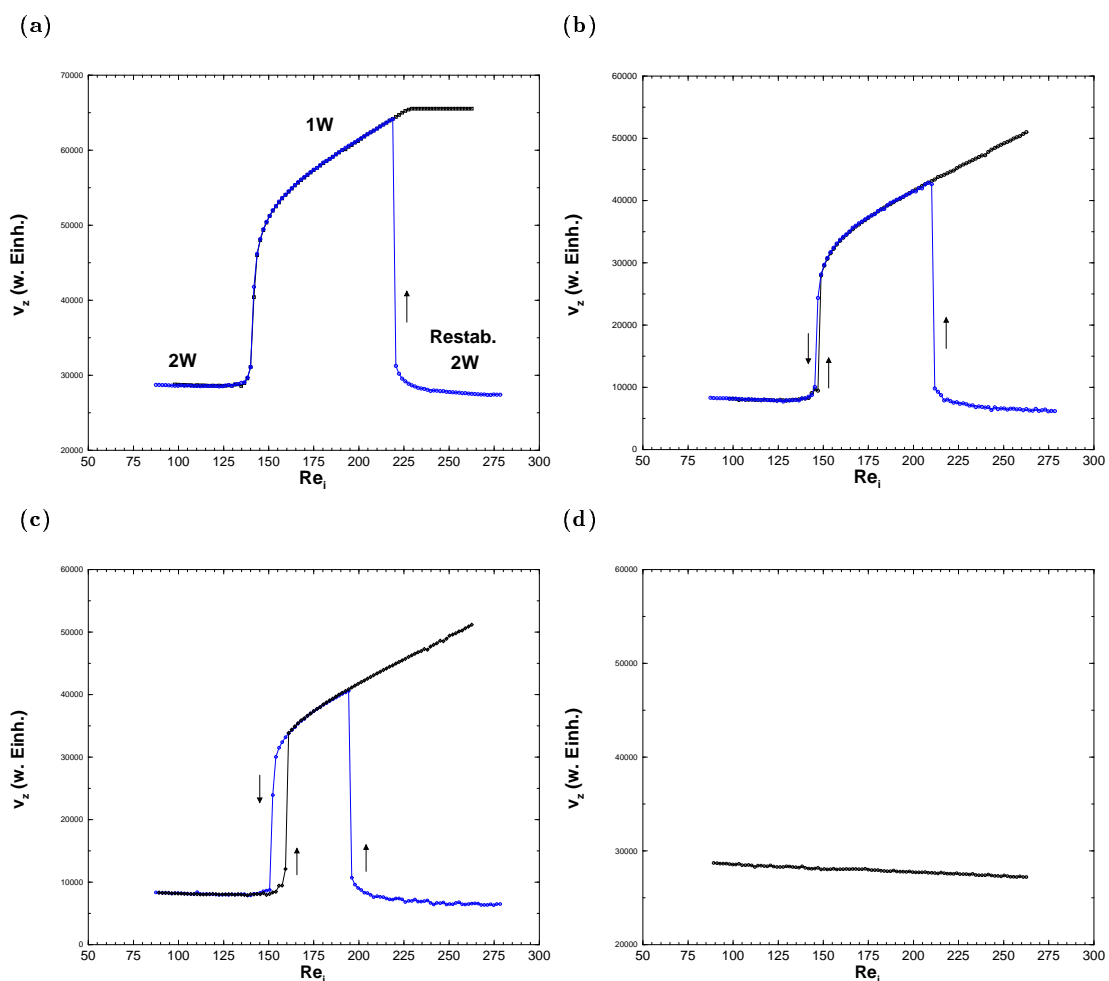


Abbildung 7.14: Verzweigungsdiagramme für  $\Gamma = 1,24$  aus dem primären Zwei-Wirbelzustand (2W) in den Ein-Wirbelzustand (1W) bei Erhöhung von  $Re_i$  und aus dem restabilisierten Zwei-Wirbelzustand (Restab. 2W) bei Erniedrigung von  $Re_i$  für unterschiedliche  $Re_a$ :

(a)  $Re_a = +4,07$ , (b)  $Re_a = +6,10$ , (c)  $Re_a = +8,14$  und (d)  $Re_a = +20,35$ . Die Pfeile deuten die Sprungrichtung an. Bei (d) bleibt das System im Zwei-Wirbelzustand.

Die Abbildung 7.13 zeigt, wie sich die Art der Verzweigung mit zunehmendem  $\Gamma$  ändert (nach [97]). Aufgetragen ist hier die axiale Geschwindigkeitskomponente in Abhängigkeit von  $Re_i$ . Der Außenzylinder ruht ( $Re_a = 0$ ). Bei diesen Diagrammen wurde vollständige Symmetrie angenommen, so daß beide Äste bei der Verzweigung vom Zwei- in den Ein-Wirbelzustand gleich wahrscheinlich sind. Im realen Experiment wird immer ein Ast bevorzugt (siehe oben). Ein '+' kennzeichnet hier einen stabilen, ein '-' einen instabilen Ast im Verzweigungsdiagramm.

In Abbildung 7.13(a) ist eine superkritische Verzweigung zu sehen. Das System geht am Punkt  $Re_{c1}$  in den Ein-Wirbelzustand über. Dieses Verhalten ist bis zu dem Punkt  $B$  in Abbildung 7.5 ( $\Gamma < 1.267$ ) zu beobachten. In Abbildung 7.6 ist eine reale superkritische Verzweigung zu sehen, wie sie im Experiment auftritt.  $Re_{c2}$  kennzeichnet in Abbildung 7.13(a) die untere Stabilitätsgrenze des restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes.

Vergößert man  $\Gamma$  und nähert sich dabei dem Punkte  $B$ , so nähern sich die beiden kritischen Punkte  $Re_{c1}$  und  $Re_{c2}$  einander an. Gelangt man an den Punkt  $B$ , so geht die vorher superkritische Verzweigung in eine subkritische über. Es kommt zu Hysterese-Erscheinungen (Abb. 7.13(b)).

Für  $\Gamma > 1,304$  haben sich die beiden Verzweigungsäste soweit angenähert, daß sie verschmolzen und vom primären Zustand entkoppelt sind (Abb. 7.13(c)). Bei quasistatischer Erhöhung von  $Re_i$  bleibt das System im Zwei-Wirbelzustand. Der Ein-Wirbelzustand existiert auch noch, ist aber nur durch eine abrupte Änderung von  $Re_i$  auf einen Wert oberhalb von  $Re_{c3}$  erreichbar. Befindet man sich im Ein-Wirbelzustand und verringert  $Re_i$  so geht das System am Punkt  $Re_{c3}$  wieder in den Zwei-Wirbelzustand über. So wechselt man durch die Variation von  $\Gamma$  zwischend den drei verschiedenen Verzweigungsdiagrammen.

Wie im vorhergehenden Abschnitt festgestellt wurde, führt eine Außenzylinderrotation zu einer Verschiebung des gesamten Verzweigungsdiagramms. So verhält sich eine Änderung von  $\Gamma$  ähnlich wie eine Änderung von  $Re_a$ . Damit läßt sich für bestimmte Höhen- zu Breitenverhältnisse  $\Gamma$  allein durch die Erhöhung von  $Re_a$  bei festem  $\Gamma$  die Art der Verzweigung von Abbildung 7.13(a) über (b) zu (c) wechseln.

Dieses ist in Abbildung 7.14 dargestellt. Hier sind die experimentellen Verzweigungsdiagramme für den Zwei- in den Ein-Wirbelzustand bei Erhöhung von  $Re_i$ , beziehungsweise aus dem restabilisierten Zwei-Wirbelzustand heraus bei Erniedrigung von  $Re_i$  in Abhängigkeit von  $Re_a$  für  $\Gamma = 1,24$  zu sehen. In den Abbildungen 7.14(a-c) sind jeweils beide Verzweigungsdiagramme (resultierend aus der Erhöhung und Erniedrigung) dargestellt.

Die Abbildung 7.14(a) zeigt eine superkritische Verzweigung für  $Re_a = +4,07$ . Der linke Ast resultiert aus der Erhöhung von  $Re_i$ . Hier verzweigt der Zwei- (2W) in den Ein-Wirbelzustand (1W). Der andere Ast zeigt das Verhalten bei Verringerung von  $Re_i$ , wenn das System sich im restabilisierten Zwei-Wirbelzustand (Restab. 2W) befindet: An der unteren Stabilitätsgrenze findet ein Sprung in den asymmetrischen Ein-Wirbelzustand statt, der dann bei weiterer Verringerung von  $Re_i$  in den symmetrischen Zwei-Wirbelzustand übergeht. Ein Pfeil deutet die Sprungrichtung an. Hierbei tritt keine Hysterese auf.

Dieses ändert sich, wenn  $Re_a$  weiter erhöht wird. In Abbildung 7.14(b) beträgt  $Re_a = 6,10$ .

Hier hat sich die Art der Verzweigung von vormalig einer superkritischen vom Zwei- in den Ein-Wirbelzustand in eine subkritische geändert. Eine kleine Hysterese ist erkennbar. Dieses wird noch deutlicher für  $Re_a = 8, 14$  (Abb. 7.14(c)). Hier beträgt der Hysterese-Bereich  $\Delta Re_{i,hyst.} \approx 9$ .

Bei weiterer Erhöhung von  $Re_a$  bleibt das System ab einem gewissen  $Re_a$  im Zwei-Wirbelzustand, der Ein-Wirbelzustand ist entkoppelt. Dieses Verhalten zeigt Abbildung 7.14d für  $Re_a = 20, 35$ .

Diese Änderungen in der Art der Verzweigungen resultiert also nur aus der Zunahme von  $Re_a$ ,  $\Gamma$  ist hier fest.

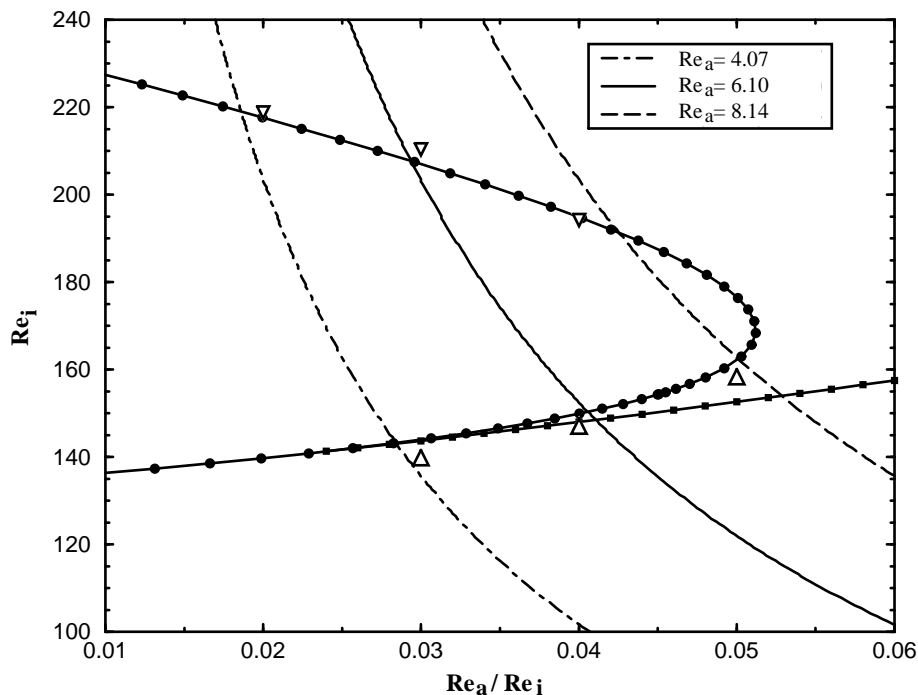


Abbildung 7.15: Einsatzpunkte der symmetriebrechenden Verzweigung für  $\Gamma = 1,24$ . Die großen offenen Symbole kennzeichnen die experimentell bestimmten kritischen Punkte, die anderen sind Ergebnisse der Numerik [115]. Ein unter Variation von  $Re_a$  entstandener Hysterese-Bereich ist gut zu erkennen.

Abbildung 7.15 zeigt die Einsatzpunkte einer symmetriebrechenden Verzweigung für  $\Gamma = 1,24$ . Hier ist wiederum  $Re_i$  gegenüber der normierten Reynoldszahl des Außenzylinders aufgetragen ( $Re_a/Re_i$ ). Die durchgezogenen Linien stellen die Ergebnisse der numerischen Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen dar, die von S. Tavener berechnet wurden [115]. Auch in der Numerik ist der Hysterese-Bereich, der sich durch Variation von  $Re_a$  ergibt, gut erkennbar. Die großen offenen Symbole sind meine experimentell ermittelten kritischen Punkte für die Verzweigung vom Zwei- in den Ein-Wirbelzustand bzw. die untere Stabilitätsgrenze des restabilisierten Zwei-Wirbelzustandes. Selbst in diesem kleinen empfindlichen Hysterese-Bereich stimmen Experiment und Numerik sehr gut überein.

## 7.2.4 Einfluß auf eine Hopf-Verzweigung

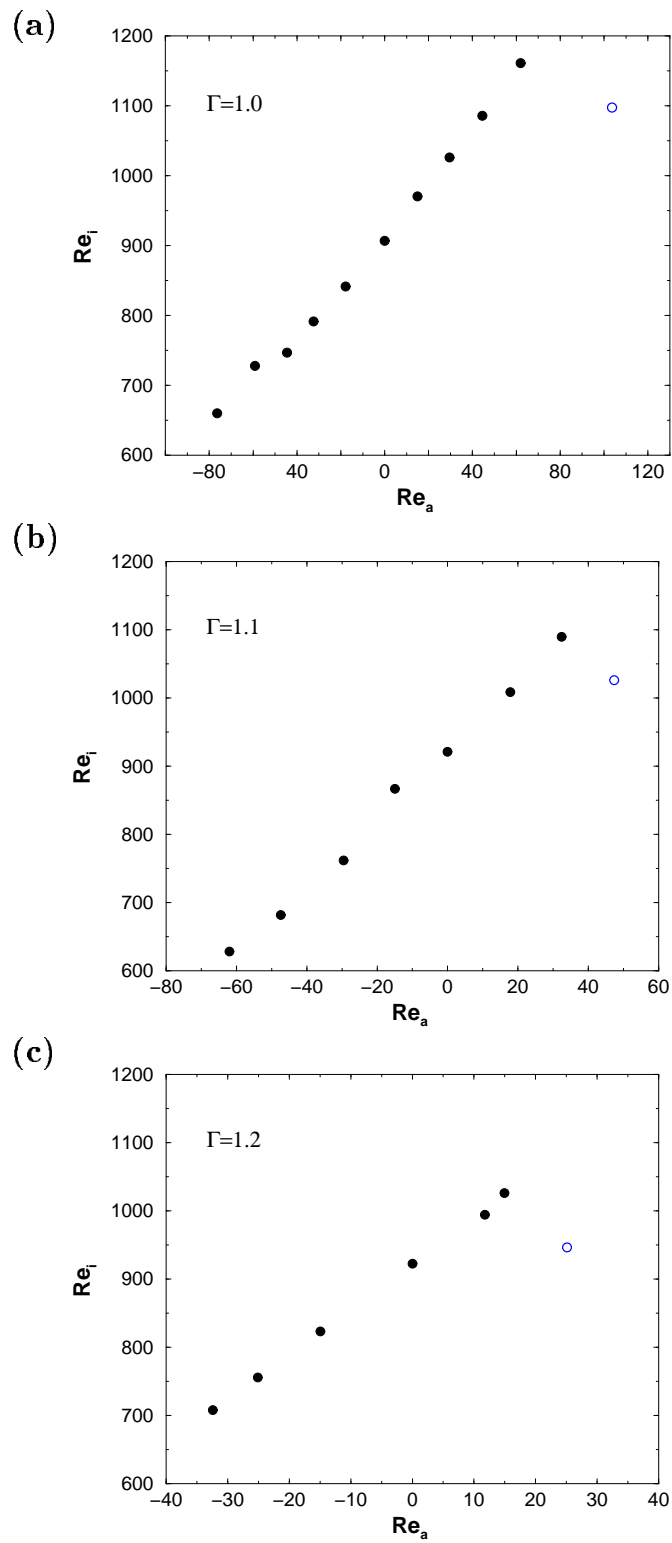


Abbildung 7.16: Einsatzpunkte der Hopf-Verzweigung im Ein-Wirbelzustand ( $\bullet$ ) für unterschiedliche Höhen- zu Breitenverhältnisse  $\Gamma$  in Abhängigkeit von  $Re_a$ : (a)  $\Gamma = 1, 0$ , (b)  $\Gamma = 1, 1$ , (c)  $\Gamma = 1, 2$ . (o) s. Text.

Hat an der Linie  $(A, B)$  aus Abbildung 7.5 eine Verzweigung in den asymmetrischen Ein-Wirbelzustand stattgefunden, so bleibt dieser bei Erhöhung von  $Re_i$  stabil und wird ab einem kritischen Punkt zeitabhängig. Abbildung 7.2 zeigt das Verzweigungsdiagramm für  $Re_a = 0$ . Hier markiert der Punkt  $(G)$  den Ort einer Hopf-Verzweigung auf dem bis dahin stationären Ein-Wirbelzustand.

In Abschnitt 7.2.1 wurde der Einfluß eines rotierenden Außenzylinders auf eine Gabelverzweigung dargestellt. Es zeigte sich, daß es hierbei zu einer deutlichen Verschiebung kritischer Punkte kommt. Dabei führen gleichsinnig rotierende Zylinder zu einer stärkeren Verschiebung als gegeneinander rotierende Zylinder mit der betragsmäßig gleichen Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a$ .

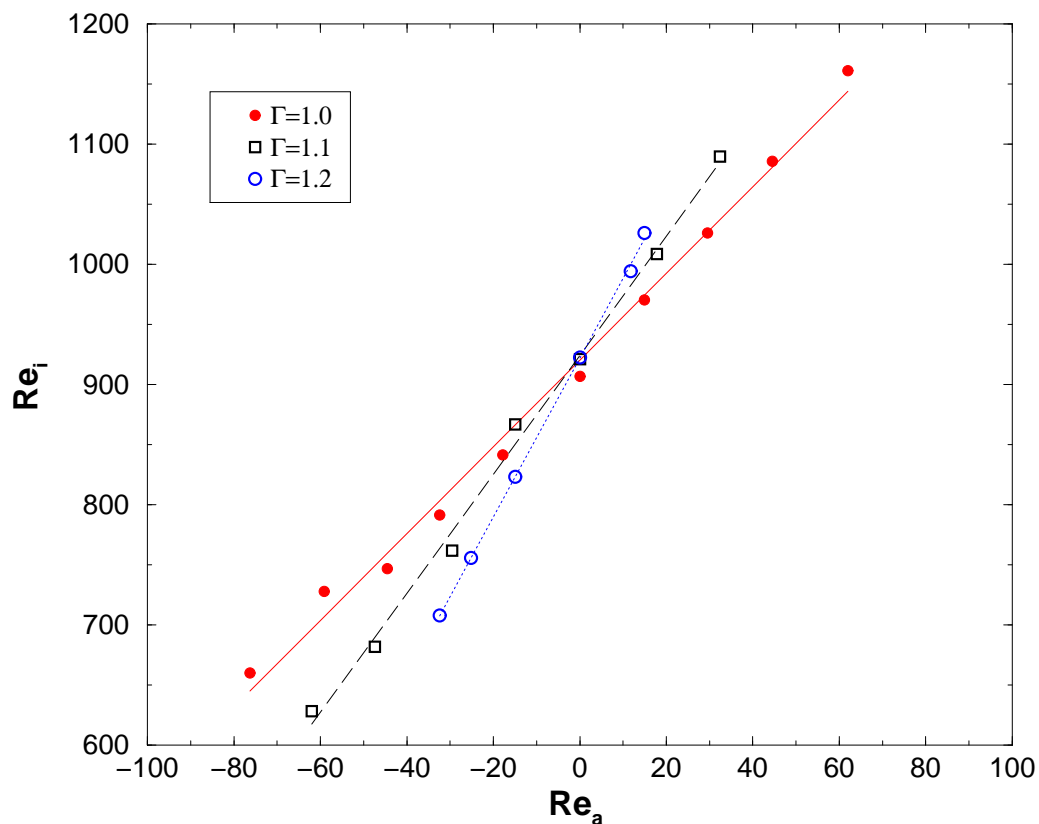


Abbildung 7.17: Lineare Verschiebung der Einsatzpunkte der Hopf-Verzweigung aus Abbildung 7.16(a-c). Eingetragen sind zusätzlich die Regressionsgeraden.

Den Einfluß einer Außenzylinderrotation auf eine Hopf-Verzweigung zeigt Abbildung 7.16. Hier ist für drei unterschiedliche Höhen- zu Breitenverhältnisse ((a)  $\Gamma = 1,0$ , (b)  $\Gamma = 1,1$  und (c)  $\Gamma = 1,2$ ) die Verschiebung der Einsatzpunkte der Hopf-Verzweigung gezeigt. Aufgetragen ist in dieser Abbildung  $Re_i$  gegenüber  $Re_a$ . Für einen ruhenden Außenzylinder  $Re_a = 0$  setzt die Oszillation bei allen drei Höhen- zu Breitenverhältnissen nahezu am gleichen Ort ein:  $Re_i \approx 900$ . Allen dreien ist außerdem gemein, daß bei gegeneinander rotierenden Zylindern ( $Re_a < 0$ ) die Oszillation im Ein-Wirbelzustand gegenüber einem ruhenden Außenzylinder ( $Re_a = 0$ ) früher auftritt. Die Einsatzpunkte

der Hopf–Verzweigung verschieben sich zu geringerem  $Re_i$  je kleiner  $Re_a$  ist (stärkere Gegenrotation).

Im Fall gleichsinnig rotierender Zylinder bleibt der Ein–Wirbelzustand bei Erhöhung von  $Re_i$  länger stationär, bis schließlich auch hier die Oszillation einsetzt.

In Abhängigkeit von  $\Gamma$  findet im mitrotierenden Fall keine Verzweigung mehr in den asymmetrischen Ein–Wirbelzustand statt, wenn  $Re_a$  einen bestimmten Wert übersteigt. Dieser Schwellenwert wird kleiner, je größer  $\Gamma$  ist. Das System verbleibt bei diesen Parameterwerten im Grundzustand. Bei Erhöhung von  $Re_i$  setzt auch im Zwei–Wirbelzustand eine Oszillation ein. Die offenen Kreise (o) in den Abbildung 7.16(a, b, c) kennzeichnen diesen Einsatzzpunkt einer Hopf–Verzweigung im Zwei–Wirbelzustand.

$\Gamma$	$\Delta Re_i / \Delta Re_a$
1,0	3,61
1,1	4,95
1,2	6,61

Tabelle 7.1: Steigungen der Regressionsgeraden in Abhängigkeit von  $\Gamma$ . Alle Geraden weisen hohe Korrelationskoeffizienten ( $> 0,99$ ) auf.

Es kommt zu einer linearen Verschiebung der Verzweigungspunkte, wenn die Winkelgeschwindigkeit des äußeren Zylinders geändert wird. Dieses zeigt Abbildung 7.17. Hier sind die Werte aus Abbildung 7.16(a, b, c) zusammen mit den jeweiligen Regressionsgeraden in ein gemeinsames Diagramm eingetragen. Die Steigungen der Geraden sind für die drei Höhen– zu Breitenverhältnisse  $\Gamma$  unterschiedlich und sind in Tabelle 7.1 dargestellt. So hat ein mit einer vorgegebenen Winkelgeschwindigkeit rotierender Außenzylinder dann den größten Einfluß auf den Einsatzzpunkt der Hopf–Verzweigung, wenn  $\Gamma$  möglichst groß ist.

Die hier beobachtete lineare Abhängigkeit der Lage der Verzweigungspunkte von  $Re_a$  ist erstaunlich, zeigte doch die Gabelverzweigung vom symmetrischen Zwei– in den asymmetrischen Ein–Wirbelzustand ein nichtlineares Verhalten.

In diesem Kapitel wurde der Einfluß einer Rotation des Außenzylinders auf Strukturen und deren Stabilitätsverhalten untersucht. Als vorteilhaft haben sich kleine Geometrien ( $\Gamma < 1,4$ ) erwiesen, da dort nur eine geringe Anzahl an verschiedenen Moden existiert und die bei ruhendem Außenzylinder ( $Re_a = 0$ ) auftretenden Strukturen bekannt waren. Es zeigte sich, daß eine Rotation des Außenzylinders zu einer Verschiebung kritischer Punkte des Übergangs von dem symmetrischen Zwei– in den asymmetrischen Ein–Wirbelzustand führt. Hierbei wirkt sich eine gleichsinnige Rotation beider Zylinder stabilisierend auf den Zwei–Wirbelzustand aus, während eine Gegenrotation einen destabilisierenden Einfluß hat. Es kommt somit zu einer Verschiebung des gesamten Stabilitätsdiagramms gegenüber der Lage bei  $Re_a = 0$ . Die dabei auftretenden Verzweigungsformen sind die gleichen, allerdings sind diese im Parameterraum verschoben.

Wurde die Art der Verzweigung bei ruhendem Außenzylinder durch eine Änderung von  $\Gamma$  beeinflusst, läßt sich hier ein ähnlicher Einfluß bei festem  $\Gamma$  durch eine Variation von  $Re_a \neq 0$  erreichen. Dieses zeigte sich besonders deutlich im Hysteresebereich.

Die von S. Tavener [115] durchgeführten numerischen Simulationen der exakten Navier–Stokes–Gleichungen unter realistischen Randbedingungen wurden mit den in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnissen verglichen. Sie zeigen über einen großen Parameterbereich hinweg quantitative Übereinstimmung.

Der Einfluß einer Außenzylinderrotation wird mit abnehmender Zylinderhöhe kleiner. Dieses Verhalten zeigt sich auch bei einer Verschiebung der Einsatzpunkte einer Hopf–Verzweigung im Ein–Wirbelzustand. Dieses war auch zu erwarten, da die Strömungszustände hier nicht mehr den gesamten Spalt in radialer Richtung ausfüllen, sondern auf eine kleine Region nahe am Innenzylinder beschränkt sind.

# Kapitel 8

## Strukturen und Verzweigungen zwischen gegenrotierenden Zylindern

Schon G.I. Taylor [132] hat sich in seiner wegweisenden Arbeit mit der Analyse der zwischen zwei unabhängig voneinander rotierenden Zylindern auftretenden Strömungen beschäftigt. Der Großteil der seitdem veröffentlichten Arbeiten wurde jedoch an dem einfacheren System mit ruhendem Außenzylinder durchgeführt. Deshalb sind bis heute viele physikalische Aspekte der zwischen gegenrotierenden Zylindern in ausgedehnten Systemen auftretenden Strömungszustände noch nicht verstanden.

Aktuell besteht ein verstärktes theoretisches Interesse an diesen Strömungszuständen, zum Beispiel [10] und [59]. Es finden sich auch erste Ergebnisse zu numerischen Simulationen unter Annahme realistischer Randbedingungen [80]. Die experimentellen Ergebnisse in diesem Gebiet liefern notwendige Anhaltspunkte für die Numerik.

Das Zusammenwirken von Theorie und Experiment führt zum weiteren Verständnis der auftretenden Moden.

### 8.1 Stabilitätsdiagramm für $\eta = 0,5$ und $\Gamma = 12$

In diesem Kapitel werden experimentelle Ergebnisse zu dem Strömungsverhalten der Moden vorgestellt, die zwischen schwach gegeneinander rotierenden Zylindern im breiten Spalt  $\eta = 0,5$  auftreten. Das Hauptaugenmerk wurde dabei auf die ersten Instabilitäten und auf eine detaillierte Strukturanalyse der auftretenden Strömungszustände gelegt.

Zum ersten Mal kommen mit dem LDA und PIV moderne optische Meßverfahren bei einem rotierenden Außenzylinder zum Einsatz, die sich gut ergänzen und im Zusammenwirken eine genaue raum-zeitliche Analyse der Strömung zulassen.

Hier wird der Parameterbereich  $-310 \leq Re_a \leq 0$  (mit der Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a$ ) untersucht. Das Einstellen der Zustände geschah auf dem in der Literatur üblichen Weg [9, 121]: Zuerst wurde  $Re_a$  auf den gewünschten Wert gesetzt und dann konstant gehalten. Anschließend wurde die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  quasi-statisch erhöht. Um Vergleiche mit anderen Arbeiten anstellen zu können, ist die gleiche Vorgehensweise bei der Präparation der Zustände einzuhalten. Das ist sehr wichtig, weil



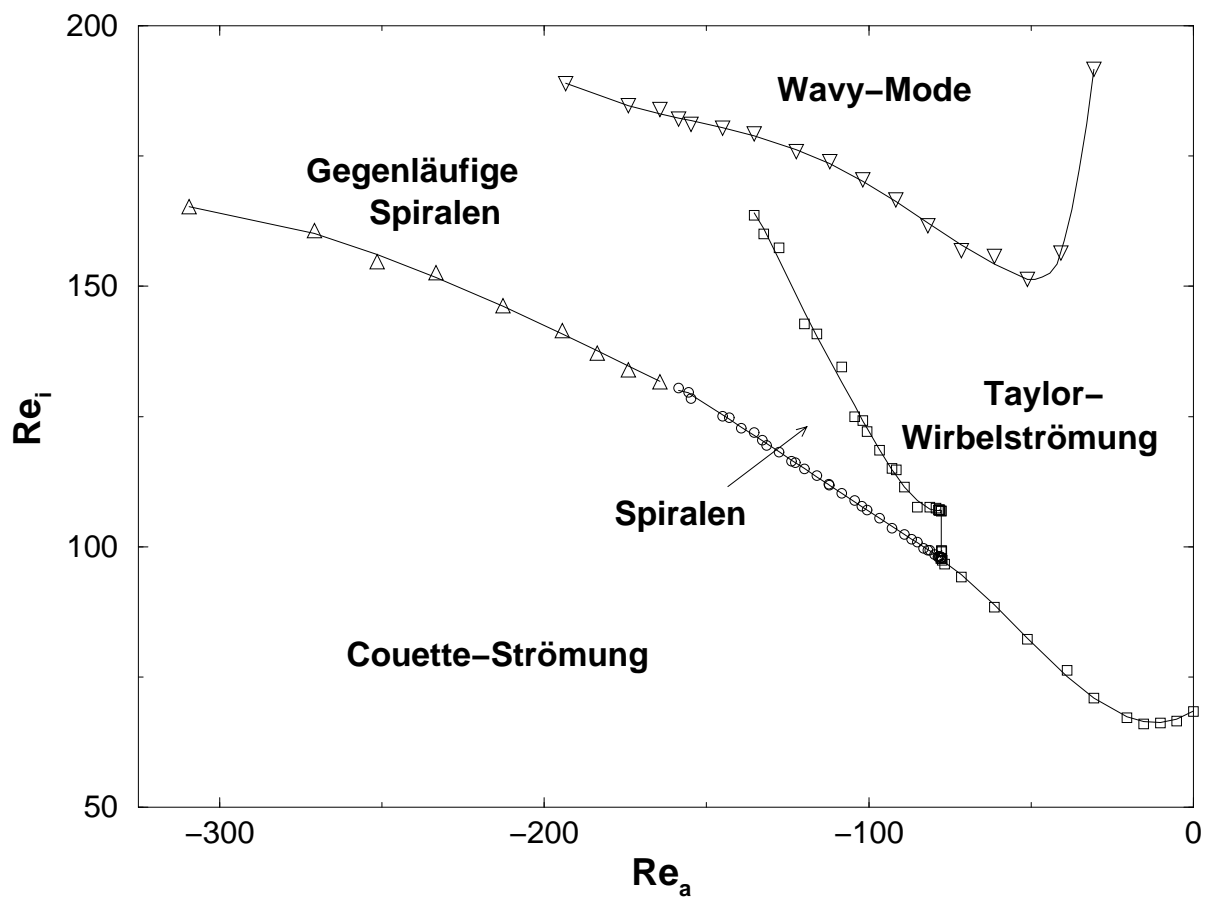


Abbildung 8.1: Stabilitätsdiagramm im Fall gegenläufig rotierender Zylinder für  $\eta = 0,5$  und  $\Gamma = 12$ . Aufgetragen ist die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  über der des Außenzylinders  $Re_a$ .

die sich einstellenden Zustände von ihrer Vorgeschichte abhängen. So können für die gleichen Parameterwerte eine Vielzahl unterschiedlicher Moden existieren [14, 28].

Bei den hier vorgestellten Ergebnissen wurde das Radienverhältnis  $\eta$  und das Höhen- zu Breitenverhältnis  $\Gamma$  nicht verändert. In allen Fällen beträgt  $\eta = 0,5$  und  $\Gamma = 12$ . Gerds et al. [45] konnten an einem Taylor–Couette System mit ruhendem Außenzylinder und  $\eta = 0,5$  zeigen, daß sich mit zunehmender Zylinderlänge das dynamische Verhalten der Strömungszustände nur wenig ändert, wenn sich sechs oder mehr Wirbel im System befinden. Nur die Zwei- und Vier-Wirbelzustände nehmen eine Sonderstellung ein. Somit ergibt sich bei diesen Messungen ein zweidimensionaler Kontrollparameterraum  $(Re_i, Re_a)$ .

Die Abbildung 8.1 zeigt das Stabilitätsdiagramm der in dem untersuchten Parameterbereich gefundenen Zustände. Aufgetragen ist die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  über der des Außenzylinders  $Re_a$ . Zum präzisen Ausmessen der Stabilitätsgrenzen wurden Schrittweiten von  $0,01 \leq \Delta Re_i \leq 0,1$  gewählt. Die Zeit zwischen zwei Schritten betrug ca. 15 Minuten.

Im untersuchten Parameterbereich findet ein Übergang von der laminaren Grundströmung (Couette–Strömung) zur Taylor–Wirbelströmung und bei stärkerer Gegenrotation beider Zylinder von der Couette–Strömung zu zeitperiodischen Spiralen statt. Dieses sind laufende Wellen in azimuthaler und axialer Richtung.

Die Verzweigung zu den Spiralen findet für  $Re_a \leq -77,54$  statt und grenzt direkt an den Bereich, in dem der Übergang von der Couette– zur Taylor–Wirbelströmung stattfindet. Somit existiert ein Punkt, an dem Moden mit zwei unterschiedlichen azimuthalen Wellenzahlen gleichzeitig stabil sind (ein sogenannter bikritischer Punkt).

Für  $Re_a < -160$  ändert sich das raum–zeitliche Verhalten der Spiralwellen, und ”Gegenläufige Spiralen” treten im System auf.

Bei Erhöhung von  $Re_i$  setzt eine Wavy–Mode ein. Hierbei handelt es sich um eine zeitperiodische Modulation der Taylor–Wirbel mit einer azimuthalen Wellenzahl  $m = 2$  für  $Re_a \geq -158$ . Bei stärkerer Gegenrotation läßt sich eine niedrigere azimuthale Wellenzahl beobachten ( $m = 1$ ).

Teile der in diesem Kapitel vorgestellten Ergebnisse stammen aus der Zusammenarbeit mit Silja Füser und Joël Langenberg im Rahmen ihrer Diplomarbeiten [42, 72].

## 8.2 Erste Instabilitäten

### 8.2.1 Übergang zur Taylor-Wirbelströmung

Im Fall eines ruhenden Außenzylinders kommt es bei Erhöhung der Reynoldszahl des Innenzylinders zu einem Übergang von der laminaren Couette-Strömung hin zur Taylor-Wirbelströmung. Durch die endliche Länge des experimentellen Aufbaus handelt es sich hierbei um keine Instabilität: Die feststehenden Boden- und Deckelplatten erzwingen an den Rändern eine Einwärtsströmung, und es bilden sich so Ekman-Wirbel aus. Bei Erhöhung der Reynoldszahl induzieren diese weitere Wirbelpaare, die sich fortlaufend in Richtung Zylindermitte ausbreiten. Dieses geschieht solange, bis Taylor-Wirbelpaare von den Rändern kommend sich in der Mitte des Zylinders treffen. Dieses Verhalten wurde zum ersten Mal von Cole beobachtet [29].

Die lineare Stabilitätsanalyse, die von unendlich langen Zylindern ausgeht, findet einen kritischen Punkt  $Re_{i,krit} = 68,2$ , an dem die Taylor-Wirbel einsetzen [34, 68]. Da sich in realen Systemen, wie oben beschrieben, für Reynoldszahlen unterhalb  $Re_{i,krit}$  schon Wirbel ausbilden, spricht man bei diesen von 'Geisterwirbeln'.

Es handelt sich um einen weichen Übergang von der laminaren Couette-Strömung hin zur Taylor-Wirbelströmung. Ein eigentlicher kritischer Punkt existiert nicht. Auf diese Besonderheit endlicher Systeme wurde schon in Kapitel 2.4 sowie in Abschnitt 4.1 eingegangen.

Für schwach gegeneinander rotierende Zylinder ( $Re_a \geq -77,54$ ) findet bei einer Erhöhung von  $Re_i$  ebenfalls zuerst ein Übergang von der Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung statt. Auch bei diesem handelt es sich um einen weichen Übergang, was in Abbildung 8.2 für  $Re_a = -60$  zu sehen ist. Aufgetragen sind hier Profile der radialen Geschwindigkeitskomponente in willkürlichen Einheiten gegenüber der axialen Position im Zylinder. 0 mm steht für die Bodenplatte, 150 mm für den Deckel.

Man erhält diese Profile, indem das Meßvolumen des LDA-Systems in einem festen Abstand vom Innenzylinder mit einer konstanten Verfahrgeschwindigkeit  $v_{rec} = 1$  mm/s vom Boden aus zum Deckel bewegt wird. Dieses stellt eine gute Möglichkeit dar, mit dem Verfahren der Laser-Doppler-Anemometrie, das nur lokale Geschwindigkeitsmessungen erlaubt, Aufschluß über raum-zeitlichen Strukturen im Zylinder zu erhalten. So werden solche Geschwindigkeitsprofile auch zum Beispiel bei der Betrachtung der Spiralen, auf die später eingegangen wird, Anwendung finden.

In der Abbildung 8.2 wird die Reynoldszahl des Innenzylinders von  $Re_i = 70,02$  (a) bis  $Re_i = 113,79$  (h) ständig erhöht. Der konstante Bereich in der Zylindermitte in Abbildung 8.2(a,b,c) kennzeichnet eine radiale Strömungsgeschwindigkeit Null. In dieser Abbildung findet man für größere radiale Strömungsgeschwindigkeiten  $v_r$  eine Auswärtsströmung und für kleinere  $v_r$  eine Einwärtsströmung. Deutlich zu sehen sind die Ekman-Wirbel an den Rändern. Es kommt langsam zum Entstehen und Anwachsen der Wirbel in der Zylindermitte (Abb. 8.2(c,d,e)), bis schließlich ab Abbildung 8.2(f) der Übergang zur Taylor-Wirbelströmung vollständig stattgefunden hat. Es befinden sich nun 14 Wirbel im Spalt, die mit Ausnahme der Ekman-Wirbel alle die gleiche Größe aufweisen. Bei

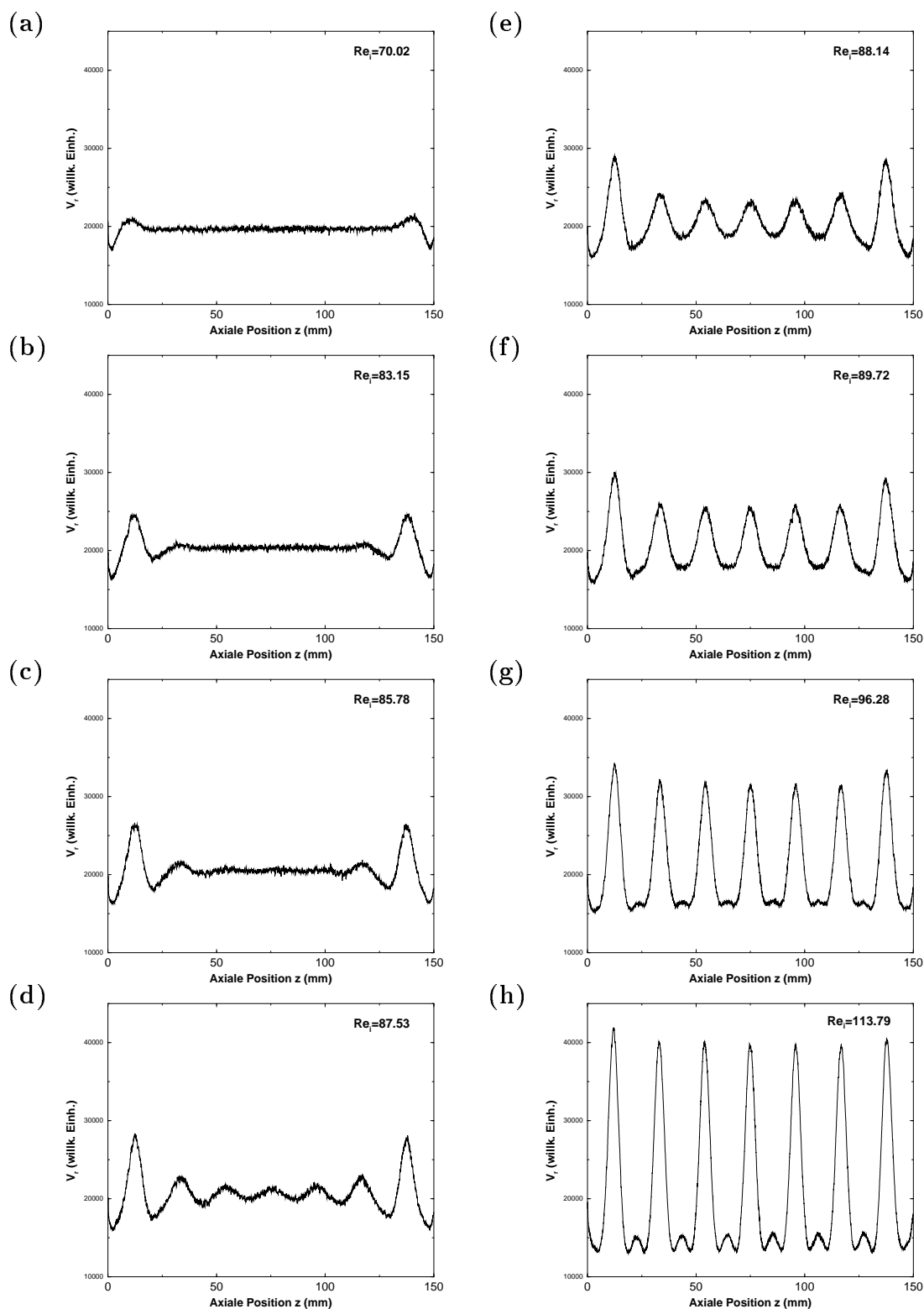


Abbildung 8.2: Entstehung der Taylor–Wirbelströmung bei  $Re_a = -60$ . Die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  nimmt von (a) bis (h) zu. Bei (f) hat der für unendlich lange Zylinder zu erwartende Übergang von der Couette–Strömung zur Taylor–Wirbelströmung stattgefunden.

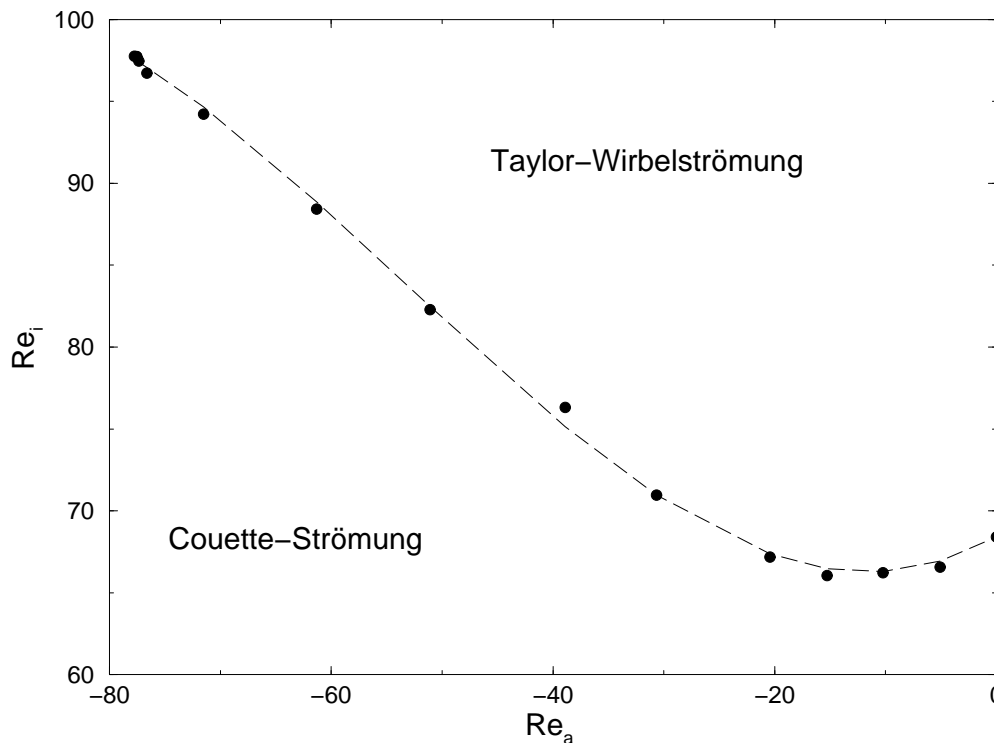


Abbildung 8.3: Stabilitätsdiagramm des Überganges von der laminaren Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung. Die eingetragenen Symbole stellen die Meßwerte dar ( $\bullet$ ). Die angepaßte Kurve dient nur der Verdeutlichung des Verlaufs der Meßwerte.

weiterer Erhöhung von  $Re_i$  nimmt die Strömungsgeschwindigkeit in radialer Richtung zu (Abb. 8.2(g,h)). Deutlich sieht man die im Verhältnis zur Einwärtsströmung starke Auswärtsströmung. In der Mitte zwischen zwei Einwärtsströmungen findet man einen Staupunkt am Innenzylinder, so daß an dem Punkt eine geringere radiale Geschwindigkeitskomponente gemessen wird.

Um nun den Übergangspunkt zwischen der Couette-Strömung und der Taylor-Wirbelströmung experimentell zu bestimmen, wurde das Meßvolumen des LDA-Systems in die axiale Mitte des Zylinders zwischen Boden- und Deckelplatte positioniert. Dann wurde  $Re_i$  quasistatisch erhöht, typischerweise 15 Minuten gewartet und anschließend die Strömungsamplitude des Signals in radialer Richtung aufgenommen.

Da der Übergang für die hier betrachteten normalen Moden sich wie eine gestörte Gabelverzweigung verhält [52, 56], wurde zum Abschluß an die erhaltenen Werte eine Wurzelfunktion angepaßt und so ein Übergangspunkt zur Taylor-Wirbelströmung bestimmt. (Die anomalen Moden lassen sich nicht in dieser Weise beschreiben. Siehe Abschnitt 4.1.)

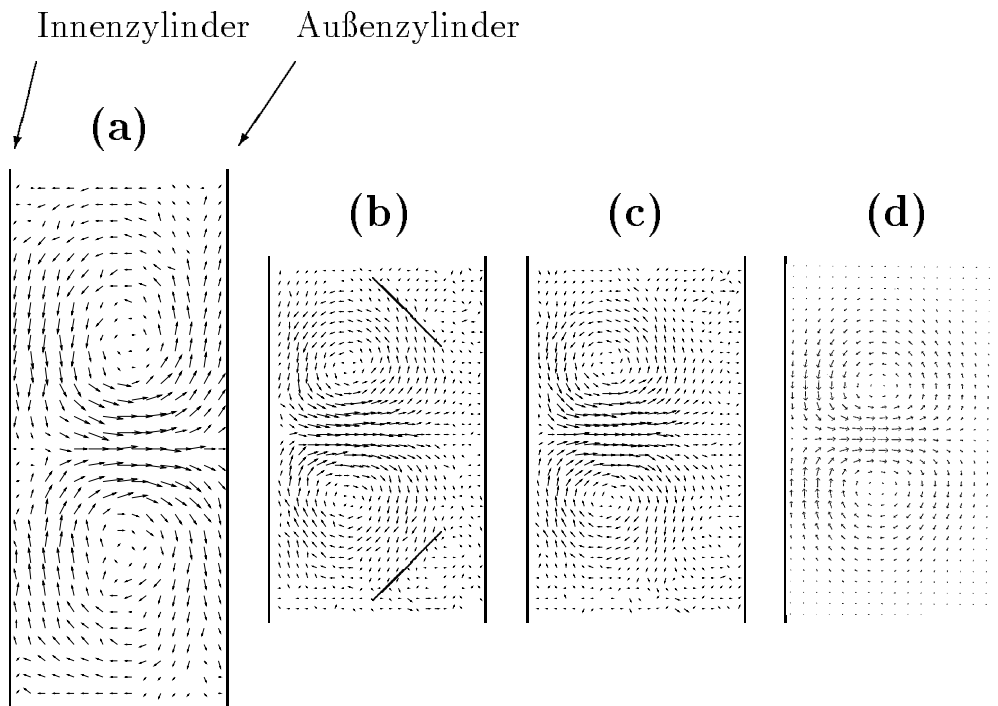


Abbildung 8.4: PIV-Aufnahme der Taylor-Wirbel bei  $Re_i = 159$  und unterschiedlichem  $Re_a$ : (a)  $Re_a = 0$ , (b) und (c)  $Re_a = -100$ . (d) ist das Ergebnis numerischer Analysen bei  $Re_i = 140$  und  $Re_a = -100$  [59]. Deutlich ist das Zusammendrücken der Taylor-Wirbel für stärkere Gegenrotation zu erkennen. Auf die eingezeichneten Linien wird im Text eingegangen.

Das Ergebnis dieser Vorgehensweise zeigt Abbildung 8.3. Zu sehen sind die Übergangspunkte zur Taylor-Wirbelströmung in der  $(Re_i, Re_a)$ -Ebene. Die eingezeichnete Linie dient nur der Verdeutlichung des Verlaufs der Meßwerte. Für einen ruhenden Außenzylinder ( $Re_a = 0$ ) konnte  $Re_i = 68,4$  als Übergangspunkt bestimmt werden. Dieses ist in guter Übereinstimmung mit den veröffentlichten experimentellen und theoretischen Werten (siehe [95] und darin zitierte Arbeiten).

Wird nun zusätzlich zum inneren Zylinder auch der äußere in entgegengesetzter Richtung rotiert, findet man, daß diese Rotation sich zunächst destabilisierend auswirkt. So findet der Übergang zur Taylor-Wirbelströmung für  $Re_a = -15,26$  bereits bei  $Re_i = 66,05$  statt. Dieses stellt zugleich das Minimum dar. Wird die Gegenrotation stärker, so wirkt sich diese nach Überschreitung des Minimums schnell stabilisierend aus.

Während für  $Re_a = 0$  die Taylor-Wirbel den gesamten Spalt zwischen Innen- und Außenzylinder ausfüllen, nimmt die Ausdehnung der Wirbel in radialer Richtung für stärkere Gegenrotation ab. Die Wirbel erscheinen nahe am Innenzylinder, während in dem Bereich in der Nähe des Außenzylinders eine schwache entgegengesetzte Zirkulation der Flüssigkeit beobachtet werden kann. Durch eine Gegenrotation der Zylinder wird

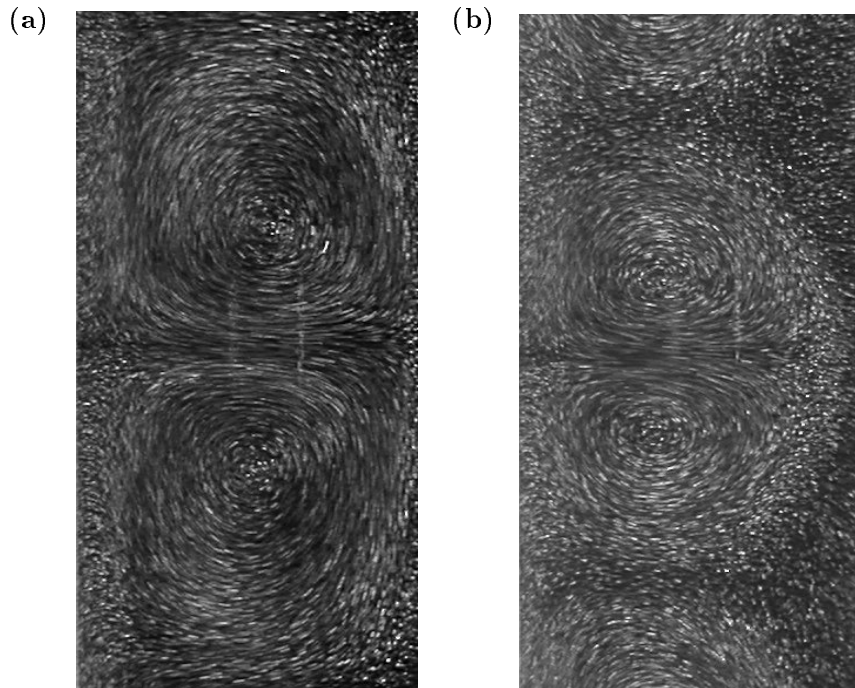


Abbildung 8.5: Sichtbarkeitsaufnahme der Taylor–Wirbel bei  $Re_i = 159$  und unterschiedlichem  $Re_a$ : (a)  $Re_a = 0$ , (b)  $Re_a = -100$ .

die Schicht mit azimuthaler Strömungsgeschwindigkeit Null in Richtung Innenzylinder verschoben (s. Abb. 4.8).

Taylor führte zum ersten Mal experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Wirbelgröße in Abhängigkeit vom Verhältnis der Rotationsraten von Innen- und Außenzylinder durch [132]. Obwohl seine Ergebnisse an einem System mit schmalen Spalt erzielt wurden, findet sich eine qualitative Übereinstimmung mit den hier vorgestellten Ergebnissen.

In Abbildung 8.4 sind Ergebnisse von PIV–Aufnahmen (Particle Image Velocimetry, s. Abschnitt 6.2) dargestellt. Die Aufnahmen zeigen jeweils ein komplettes Wirbelpaar. An diesen zweidimensionalen Geschwindigkeitsfeldern läßt sich eine Abnahme der radialen Ausdehnung der Taylor–Wirbel bei einem gegen-rotierenden Außenzylinder erkennen. Während bei ruhendem Außenzylinder (Abb. 8.4(a)) die Wirbel die gesamte Spaltbreite ausfüllen, bleibt die Region nahe am Außenzylinder bei  $Re_a = -100$  von der Taylor–Wirbelströmung unberührt (Abb. 8.4(b,c)). Bei diesen beiden Bildern handelt es sich um die gleiche Aufnahme. Bei den Wirbeln fällt eine starke jet-artige Auswärtsströmung auf, die fast bis an den Außenzylinder reicht. Die Einwärtsströmung ist schwach und wird in Richtung Innenzylinder gedrückt. Die vormals nahezu runden Taylor–Wirbel erscheinen mit einer Spitze, die in Richtung Außenzylinder zeigt. Dieses ist in Bild 8.4(b) durch die beiden eingezeichneten Linien angedeutet.

Abbildung 8.4(d) zeigt das Ergebnis numerischer Simulationen für  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 140$  [59]. Es läßt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment erkennen.

Das Zusammendrücken der Taylor–Wirbel bei stärkerer Gegenrotation führt zu einer höheren Anzahl  $N$  an Wirbeln im System. Dieses Verhalten ist durch die konstant bleibende Länge  $L$  des Systems ( $L = 150$  mm, also  $\Gamma = 12$ ) bedingt. Die Anzahl ändert sich somit von  $N = 12$  bei  $Re_a = 0$  über  $N = 14$  bei  $Re_a \approx -30$  zu  $N = 16$  bei  $Re_a \approx -96$ . Damit läßt sich auch die unterschiedliche Größe der Wirbel in Abbildung 8.4 erklären: Die Wellenlänge eines Wirbelpaares ist bei Abbildung 8.4(a) deutlich größer als bei Abbildung 8.4(b). Im ersten Fall befinden sich 12 Wirbel im System, im zweiten hat sich die Anzahl der Wirbel aufgrund der Gegenrotation auf 16 erhöht.

Dieses zeigen auch die Sichtbarkeitsaufnahmen, die ebenfalls bei  $Re_i = 159$  aufgenommen wurden. Abbildung 8.5(a) zeigt die Taylor–Wirbelströmung bei  $Re_a = 0$ . Dargestellt ist hier ein Wirbelpaar. Die Einzelwirbel haben nahezu die gleiche radiale wie axiale Ausdehnung. Zwischen den beiden Wirbeln ist die Auswärtsströmung zu sehen. Bei einer Rotation des Außenzylinders ( $Re_a = -100$ , Abb. 8.5(b)) nimmt die Wellenlänge deutlich ab. Die beiden Photos zeigen den gleichen Ausschnitt aus dem Zylinder; so lassen sich die Größenverhältnisse gut erkennen. Die Taylor–Wirbel erscheinen mit der oben beschriebenen Spitze, die ebenfalls in den PIV–Aufnahmen erkennbar ist (Abb. 8.4).

### 8.2.2 Spiralwellen als erste Instabilität

Spiralen als erste Instabilität der laminaren Couette–Strömung wurden zum ersten Mal von Coles [28] erwähnt. Durch eine lineare Stabilitätsanalyse konnten Krueger et al. [71] belegen, daß der Übergang von der Grundströmung, wenn die Gegenrotation beider Zylinder stark genug ist, nicht zur Taylor–Wirbelströmung sondern zu den Spiralen stattfindet. Diese Ergebnisse konnten experimentell von Snyder [119] bestätigt werden.

Andereck et al. [9] zeigten durch ihre Messungen im schmalen Spalt über einen großen ( $Re_a, Re_i$ )–Bereich, daß Spiralen als erste Instabilität und auch als höhere Instabilität zum Beispiel in Form von 'Interpenetrating Spirals' und 'Wavy Interpenetrating Spirals' auftreten. Die Ergebnisse von Andereck et al. sind in Abschnitt 4.3 dargestellt. Neuere theoretische Arbeiten, wie [10] und [59], zeigen nach wie vor ein großes aktuelles Interesse an Spiralwellen.

Zum Vergleich mit den in diesem Kapitel vorgestellten Meßergebnissen werden die Arbeiten von Langford et al. [73] und Hoffmann und Lücke [59] herangezogen, die numerische Untersuchungen für  $\eta = 0,5$  durchführten.

Im folgenden Abschnitt werden Messungen zu den Spiralwellen vorgestellt. Der erstmalige Einsatz optischer Meßverfahren (LDA und PIV) zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern erlaubt das präzise Ausmessen von Stabilitätsgrenzen und eine raum–zeitliche Analyse der auftretenden Strukturen über die gesamte Spaltbreite. Dieses ist mit Sichtbarkeitsmessungen nur begrenzt möglich. Die so gewonnenen Ergebnisse dienen als Anhaltspunkte für theoretische Betrachtungen und können zum besseren Verständnis der Strömungszustände beitragen.



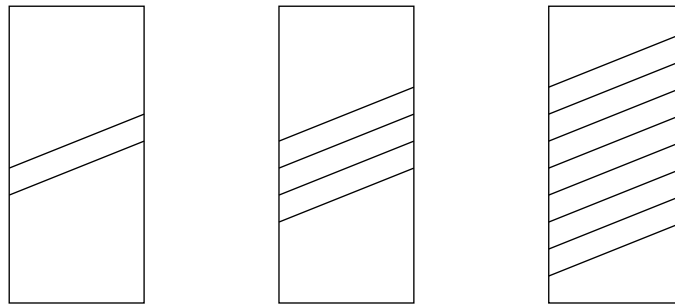


Abbildung 8.6: Skizze vom Ausbreitungsprozeß der Spiralen. Die Bilder deuten von links nach rechts den Entwicklungsprozeß des Strömungszustandes an.

### 8.2.3 Übergang zu den Spiralen

Der Übergang von der laminaren Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung findet für Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a > -77,54$  statt. Bei stärkerer Gegenrotation ( $Re_a \leq -77,54$ ) unterliegt die Couette-Strömung einer Hopf-Verzweigung, und es bilden sich beim Überschreiten des kritischen Punktes Spiralwellen aus. Hierbei handelt es sich um eine in azimuthaler und axialer Richtung um den Innenzylinder laufende Mode.

Wie auch beim Übergang zwischen der Couette-Strömung und der Taylor-Wirbelströmung findet man auch hier im unterkritischen Bereich Taylor-Wirbel-artige Strukturen, aus denen am kritischen Punkt die Spiralwellen im mittleren Teil des Zylinders entstehen und sich anschließend ausbreiten. Dieser Prozeß ist schematisch in der Abbildung 8.6 dargestellt.

Im untersuchten Parameterbereich ( $-310 < Re_a \leq -77,54$ ) konnten zwei verschiedene Arten von Spiralwellen gefunden werden. Zum einen "Spiralen", die sich von der mittleren Region im Zylinder ausbreiten und sich in eine Richtung bewegen (entweder zur Boden- oder zur Deckelplatte hin) und zum anderen "Gegenläufige Spiralen", die von den Rändern kommend sich in die Zylindermitte bewegen. Die Spiralen sind Gegenstand der Untersuchungen in diesem Abschnitt, während die Gegenläufigen Spiralen in Abschnitt 8.2.4 behandelt werden. Eine Skizze vom Ausbreitungsprozeß der Spiralen zeigt Abbildung 8.6.

#### Raum-zeitliches Verhalten

In Abbildung 8.7 ist eine Sichtbarkeitsaufnahme gezeigt, die durch die Lichtschnitttechnik erzeugt wurde. Dazu sind der Strömung  $20\mu\text{m}$  große verspiegelte sphärische Glaskügelchen zugesetzt worden, die auch bei der PIV-Aufnahme Anwendung finden. Das System befindet sich bei  $Re_a = -130$  im Zustand der Spiralwellen. Deutlich sind zwei Spiralwellen erkennbar. Am linken Bildrand ist außerdem noch ein Teil des Innenzylinders zu sehen. Der rechte Bildrand markiert die Position des Außenzylinders. Die Spiralen bewegen sich in diesem Bild von der Deckel- zur Bodenplatte, also von oben nach unten. Durch die Gegenrotation ist der Bereich, in dem sich die Spiralen ausbilden, auf eine Region nahe am Innenzylinder beschränkt. Die Spiralen füllen also nicht mehr den gesamten Spalt in

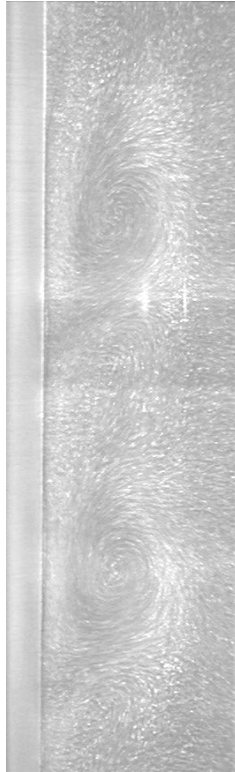


Abbildung 8.7: Sichtbarkeitsaufnahme der Spiralen bei  $Re_a = -130$ .

radialer Richtung aus.

Zwischen den Spiralen und dem Außenzylinder befindet sich eine nahezu strukturlose Schicht. Diese beträgt bei den hier verwendeten Abmessungen bis zu einigen Millimetern (abhängig von den Rotationsraten beider Zylinder). Bei einer reinen Sichtbarkeitsmessung von außen, wie sie von Andereck et al. [9] benutzt wurde, würde diese strukturlose Schicht nahe dem Außenzylinder die Spiralen verdecken. Eine Analyse wäre nicht möglich.

Die hier vorgestellten Sichtbarkeitsaufnahmen werden nicht zur Analyse der Strömungszustände herangezogen, sondern dienen lediglich der Verdeutlichung.

Aussagekräftiger für eine Strukturanalyse sind die PIV-Aufnahmen in Abbildung 8.8. Sie zeigen Geschwindigkeitsfelder zu unterschiedlichen Zeitpunkten. So bewegt sich die Spirale in den Abbildungen 8.8(a-c) in axialer Richtung hinab, also vom Deckel zum Boden. Die linke Linie markiert in den jeweiligen Bildern die Position des Innenzylinders, die rechte die des Außenzylinders. Das System befindet sich bei  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 114$ . Da die Spirale eine im Vergleich zu Azimutalgeschwindigkeit geringe axiale und radiale Geschwindigkeitskomponente besitzt, stößt man mit dem verwandten PIV-System an seine Grenzen (s. Abschnitt 6.2). Dennoch läßt sich das raum-zeitliche Verhalten der Spiralen anhand der Abbildungen 8.8(a-c) gut erkennen. Abbildung 8.8(d) zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation mit periodischen Randbedingungen in axialer Richtung bei  $Re_i = 140$  und gleicher Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a = -100$  und  $\eta = 0,5$  [59]. Man erkennt eine Übereinstimmung im Strömungsverhalten.

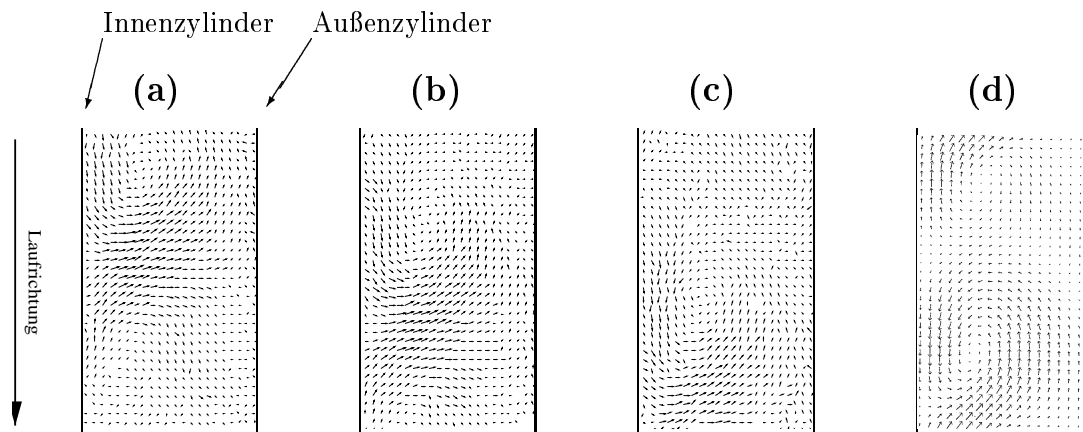


Abbildung 8.8: PIV-Aufnahmen der Spiralen bei (a)-(c)  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 114$ . Bild (d) zeigt das Ergebnis numerischer Betrachtungen bei  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 140$  [59].

Der Einsatz eines LDA-Systems in dem Strömungsbereich, in dem sich die Spiralen ausgebildet haben, erlaubt es, die dynamischen Eigenschaften des Strömungszustandes mit einer hohen zeitlichen und räumlichen Auflösung zu erfassen. Dabei kann das Meßvolumen an jeder axialen oder radialen Position im Zylinder plziert werden. Somit läßt sich die interessante Dynamik, die sich im Fall gegeneinander rotierender Zylinder nahe am Innenzylinder abspielt, gut untersuchen.

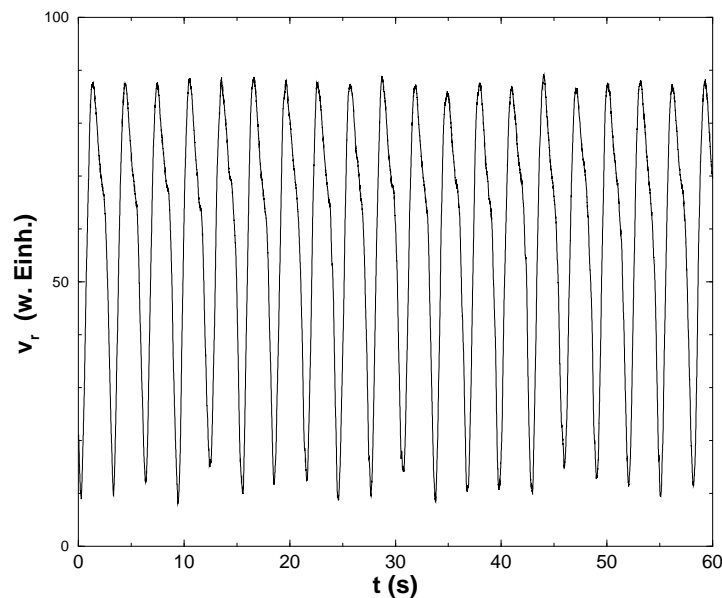


Abbildung 8.9: Typische Zeitreihe der Spiralen bei  $Re_a = -94,7$  und  $Re_i = 111,0$ . Aufgetragen ist die radiale Geschwindigkeitskomponente über der Zeit. Die Periodizität der Schwingung ist gut erkennbar.

In Abbildung 8.9 ist eine typische Zeitreihe der Spiralen bei  $Re_a = -94,7$  und  $Re_i = 111,0$  aufgetragen. Das Durchlaufen der Spiralwellen durch das LDA-Meßvolumen erkennt man an der Schwingung der radialen Geschwindigkeitskomponente. Das Meßvolumen befindet sich bei dieser Aufnahme in der Zylindermitte in einem Abstand von 4,5 mm vom Innenzylinder. Aus mehreren Messungen mit variierendem Abstand zum Innenzylinder war ersichtlich, daß die beste Signalqualität an dieser Position zu erlangen war.

Bei den Spiralen handelt es sich um einen zeitperiodischen Strömungszustand. Durch ein gleichzeitiges Messen mit zwei LDA-Volumina auf beiden Seiten des Zylinders kann die azimutale Wellenzahl  $m$  bestimmt werden. Sie beträgt bei den Spiralen  $m = 1$ .

Wie auch schon in Abschnitt 8.2.1 angewendet, kann durch die Aufnahme von Profilen der radialen Geschwindigkeitskomponente über die gesamte Zylinderlänge auf die vorliegende raum-zeitliche Dynamik geschlossen werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 8.10 dargestellt. Das Meßvolumen wurde mit einer konstanten Verfahrgeschwindigkeit  $v_{rec}$  vom Boden (0 mm) zum Deckel (150 mm) bewegt. Diese betrug in Bild 8.10(a)  $v_{rec} = 1$  mm/s. Die Spiralen haben sich bei  $Re_a = -112$  und  $Re_i = 115$  in der mittleren Region des Zylinders von  $z \approx 30$  mm bis  $z \approx 120$  mm ausgebildet und erscheinen dort als Oszillation der radialen Geschwindigkeitskomponente (vergl. Abbildung 8.9). An den Rändern befinden sich die Ekman-Wirbel, die bei jedem Strömungszustand auftreten. Diese weisen eine starke Auswärtsströmung auf, die in dem Geschwindigkeitsprofil als ausgeprägter Peak bei  $z \approx 15$  mm und  $z \approx 135$  mm erscheint.

Bewegt man das Meßvolumen langsamer durch den Zylinder ( $v_{rec} = 0,1$  mm/s), erhält man Abbildung 8.10(b). Diese Aufnahme dauerte 25 Minuten. In dieser Zeit bewegen sich zehn Mal mehr Spiralen durch das Meßvolumen als in Abbildung 8.10(a). Dieses führt dazu, daß die Region, in der die Spiralen sich ausgebildet haben, als dunkler Bereich erscheint. Die Ekman-Wirbel sind hier noch deutlicher zu erkennen.

Die Spiralen bewegen sich nur in eine Richtung, entweder von der Deckel- zur Bodenplatte, oder umgekehrt. Der Ort der Entstehung und der Vernichtung der Spiralen ist in Nähe der Ekman-Wirbel. Dort treffen zwei Strömungsformen mit verschiedener azimutaler Wellenzahl aufeinander: Die Ekman-Wirbel haben eine azimutale Wellenzahl  $m = 0$ , die Spiralen  $m = 1$ . Darauf wird in Abschnitt 8.2.3 noch eingegangen.

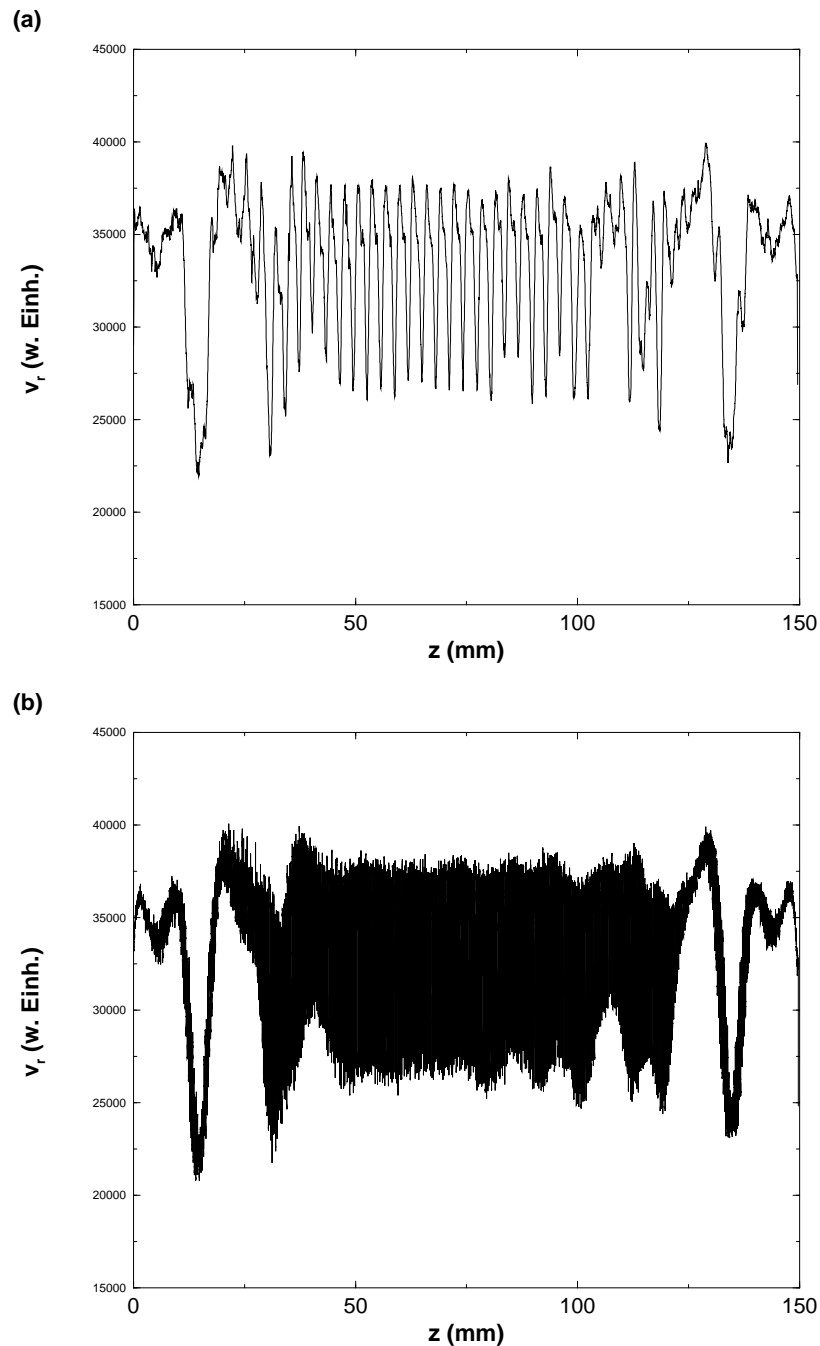


Abbildung 8.10: Radiale Geschwindigkeitsprofile der Spiralen über der axialen Höhe  $z$  im Zylinder bei  $Re_a = -112$  und  $Re_i = 115$  mit zwei verschiedenen Aufnahmegeschwindigkeiten  $v_{rec}$ : (a)  $v_{rec} = 1$  mm/s, (b)  $v_{rec} = 0,1$  mm/s. Deutlich ist die Ausbreitung der Spirale von  $z \approx 30$  mm bis  $z \approx 120$  mm zu sehen.

### Frequenzverhalten

In Abbildung 8.11 ist das Frequenzverhalten der Spiralen gezeigt. Hier sind die auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierten Frequenzen der Spiralen über der Reynoldszahl des Innenzylinders aufgetragen. Exemplarisch sind für drei verschiedene Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a = -78,12$ ,  $Re_a = -96,69$  und  $Re_a = -142,06$  die Frequenzverläufe dargestellt.

Man erkennt bei Erhöhung von  $Re_i$  eine streng monotone Abnahme der Frequenz der Spiralen von ihrem Einsatzpunkt, der durch einen Pfeil ( $\uparrow$ ) gekennzeichnet ist. Ab einem kritischen Punkt sind die Spiralen nicht mehr stabil, und es findet ein plötzlicher Übergang zur stationären Taylor–Wirbelströmung statt. Dieser Übergang wird in Abschnitt 8.3.1 behandelt.

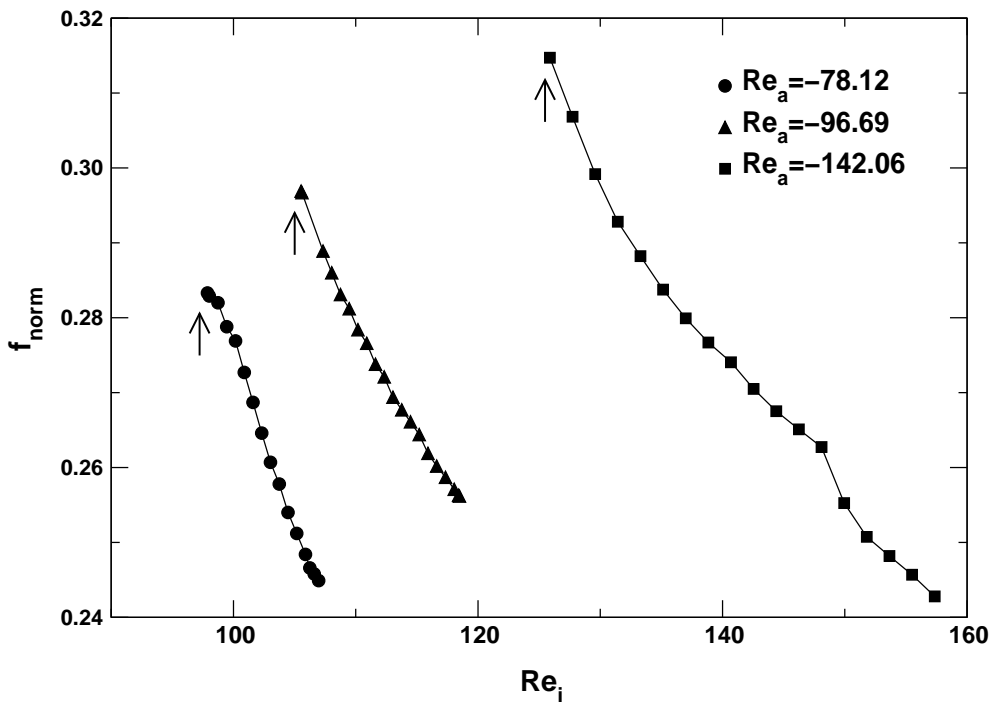


Abbildung 8.11: Frequenzverhalten der Spiralen für unterschiedliche  $Re_a$  in Abhängigkeit von  $Re_i$ . Die normierten Frequenzen nehmen von der Entstehung  $\uparrow$  monoton ab, bis ein Übergang zu der Taylor–Wirbelströmung stattfindet.

### Wellenlängen der Spiralen

Neben den Frequenzen ist die Wellenlänge eine charakteristische Größe der Spiralwellen. Da es sich bei den Spiralen um in axialer Richtung laufende Strukturen handelt, läßt sich die Wellenlänge mit dem LDA nicht unmittelbar bestimmen.

Um dennoch Aussagen über die Wellenlänge treffen zu können, mußte ein anderes Verfahren angewendet werden. Hierzu wurden die beiden frequenzverschobenen Laserstrahlen

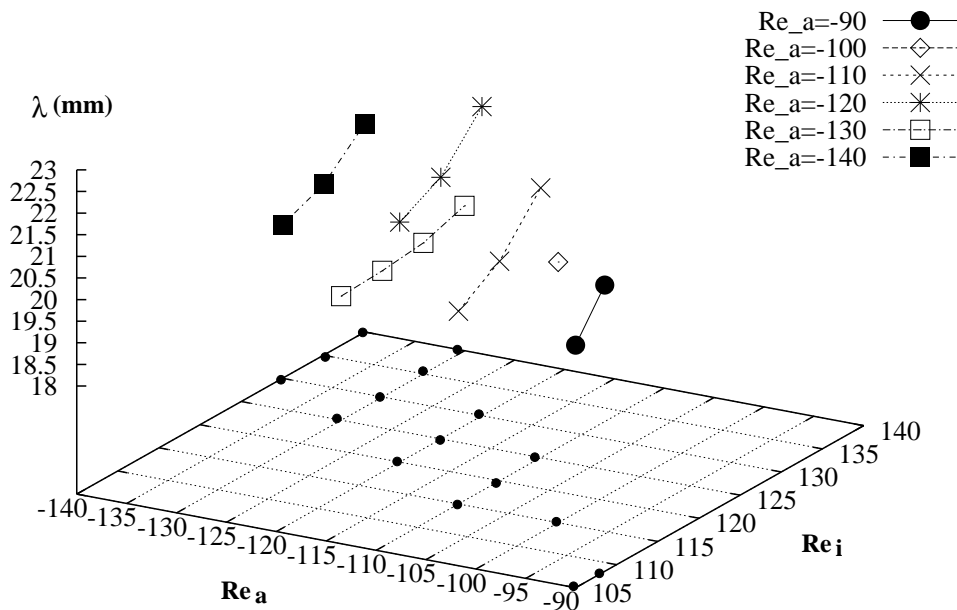


Abbildung 8.12: Wellenlängen der Spiralen für feste  $Re_a$  in Abhängigkeit von  $Re_i$ .

des LDA-Systems mit einem Stahlteilerwürfel aufgespalten. Damit ließ sich ein zweites LDA-Meßvolumen bilden, das sich von dem ersten nur durch einen gewissen Abstand in axialer Richtung unterschied. Dieser Abstand war frei wählbar.

So konnte zeitgleich an beiden Orten die radiale Geschwindigkeitskomponente bestimmt werden. Da sich ein Durchlauf der Spiralen durch das Meßvolumen in einer Oszillation der radialen Geschwindigkeitskomponente äußert (s. Abb. 8.9), konnte durch eine Kreuzkorrelationsanalyse der Signale an beiden Meßorten ein Phasenversatz zwischen den beiden Schwingungen ermittelt werden. Aus dem festen Abstand beider Meßvolumina, der sich mit Hilfe eines Hubtisches mit Servomotor (s. Kapitel 5) auf 1/100 mm bestimmen läßt, aus der Frequenz der Spiralen und aus dem Phasenversatz kann die Wellenlänge bestimmt werden.

Die so ermittelten Wellenlängen sind in Abbildung 8.12 für verschiedene Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  in Abhängigkeit von  $Re_i$  dargestellt. Für ein gegebenes  $Re_a$  findet man eine Zunahme der axialen Wellenlänge bei Erhöhung von  $Re_i$ . Dieses geht einher mit der gleichzeitigen Abnahme der normierten Frequenzen der Spiralen (s. Abb. 8.11).

Eine Zusammenstellung der Meßwerte findet sich in Tabelle 8.1. Neben der Wellenlänge ist hier auch die auf die Spaltbreite  $d$  normierte Wellenzahl  $k = 2\pi d/\lambda$  angegeben. Diese dimensionslose Größe eignet sich zum Vergleich mit Ergebnissen anderer Autoren.

Eine monotone Zunahme der normierten Wellenzahl  $k$  am kritischen Punkt bei Verringerung von  $Re_a$  (stärkere Gegenrotation), wie sie von Langford et al. [73] vorhergesagt

$Re_a$	$Re_i$	$\lambda(mm)$	$k = \frac{2\pi}{\lambda/d}$
-90	105	$21,11 \pm 0,56$	$3,72 \pm 0,10$
-90	108,5	$22,12 \pm 0,18$	$3,55 \pm 0,03$
-100	115	$21,53 \pm 0,19$	$3,65 \pm 0,03$
-110	115	$19,96 \pm 0,32$	$3,93 \pm 0,06$
-110	120	$20,58 \pm 0,24$	$3,81 \pm 0,04$
-110	125	$21,74 \pm 0,22$	$3,61 \pm 0,04$
-120	120	$21,05 \pm 0,07$	$3,73 \pm 0,01$
-120	125	$21,55 \pm 0,03$	$3,64 \pm 0,01$
-120	130	$22,65 \pm 0,04$	$3,47 \pm 0,01$
-130	125	$18,37 \pm 0,18$	$4,28 \pm 0,04$
-130	130	$18,42 \pm 0,14$	$4,26 \pm 0,03$
-130	135	$18,53 \pm 0,06$	$4,23 \pm 0,01$
-130	140	$18,85 \pm 0,08$	$4,17 \pm 0,02$
-140	130	$19,05 \pm 0,20$	$4,12 \pm 0,04$
-140	135	$19,45 \pm 0,17$	$4,04 \pm 0,04$
-140	140	$20,32 \pm 0,14$	$3,87 \pm 0,03$

Tabelle 8.1: Wellenlängen und dazugehörige Wellenzahlen der Spiralen in Abhängigkeit von  $Re_a$  und  $Re_i$ .

wurde (s. Abb. 4.10 für  $m = 1$ ), konnte nicht gefunden werden. Es zeigt sich, daß die Wellenlänge der Spiralen von dem Einfluß endlicher Systeme abhängt und sich durch die Annahme periodischer Randbedingungen in axialer Richtung nicht zufriedenstellend beschreiben läßt.

### Entstehung und Vernichtung

In realen Experimenten, bei denen es sich um endliche Systeme handelt, findet man einen Ort der Entstehung und einen Ort der Vernichtung der Spiralen. Diese befinden sich nahe der Randwirbel. Die Wirbel am den Rändern haben eine azimuthale Wellenzahl  $m = 0$ , bei den Spiralen beträgt diese  $m = 1$ . Die Wechselwirkung dieser beiden Zustände, die zum Entstehen bzw. zum Vernichten der Spiralen führt, konnte im Rahmen dieser Arbeit erstmalig mit einem PIV-System untersucht werden.

Der Entstehungsprozeß einer Spirale wird in Abbildung 8.13 deutlich. In der PIV-Aufnahme wird der Bereich des Zylinders dargestellt, der sich direkt unterhalb des oberen Randwirbelpaares an der Deckelplatte befindet. Jeweils die linke Linie in den Einzelbildern markiert die Lage des Innenzylinders, die rechte die des Außenzylinders.

In Abbildung 8.13(a) entsteht bei  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 114$  unterhalb des Randwirbelpaares ein Taylor-Wirbelpaar. Die Auswärtsströmung ist gut zu erkennen und deren Ort am Innenzylinder durch ein Kreuz zusätzlich gekennzeichnet. Dieses Wirbelpaar weist



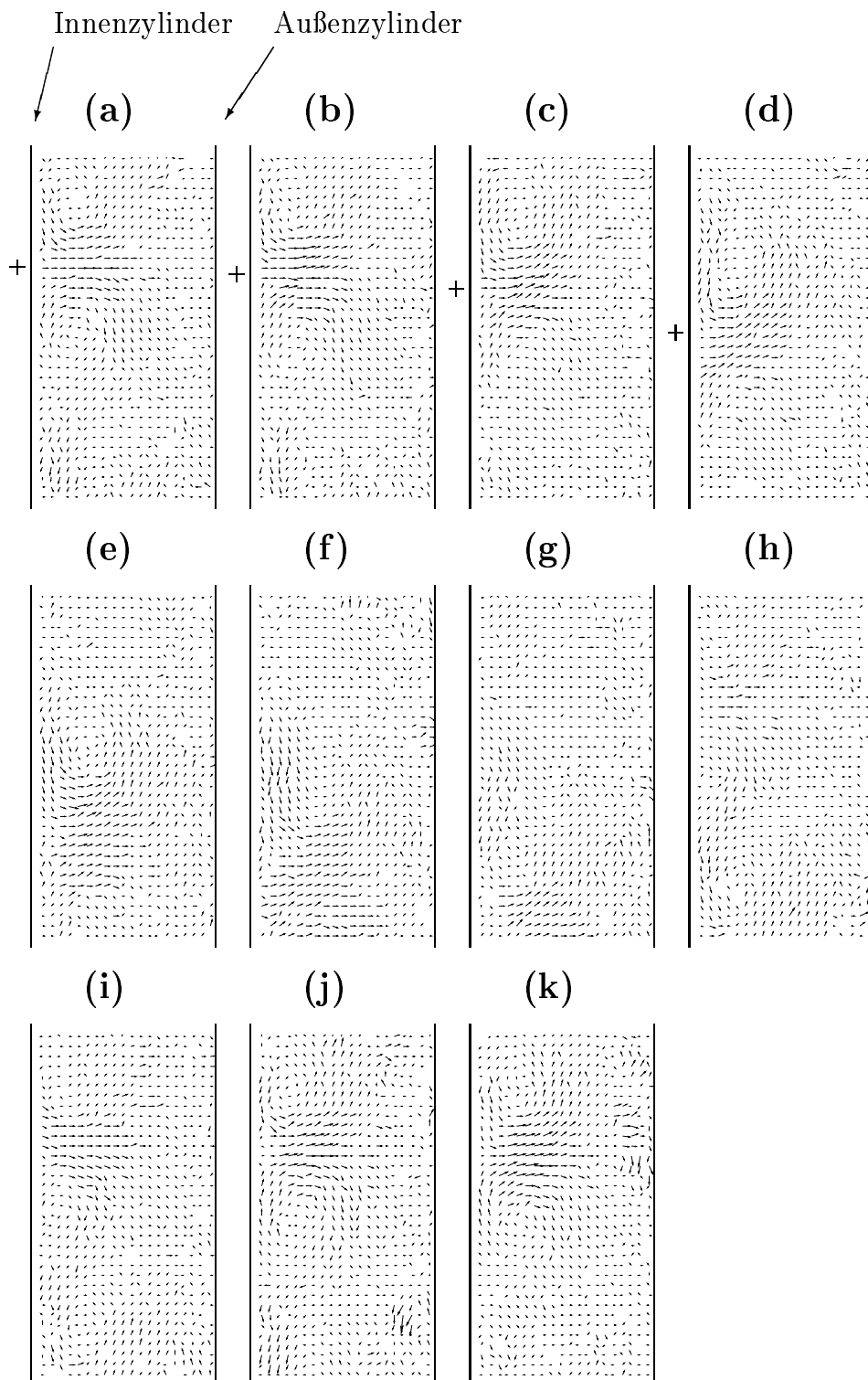


Abbildung 8.13: Die Sequenz der PIV-Aufnahmen zeigt den Prozeß der Entstehung von Spiralen. Das Meßvolumen befindet sich direkt unterhalb des Randwirbelpaares an der Deckelplatte. Ein Kreuz (+) markiert den Ort der Auswärtsströmung der sich mit der Spirale nach unten Richtung Bodenplatte fortbewegt. Eine schematische Skizze des Entstehungsprozesses zeigt Abbildung 8.14.

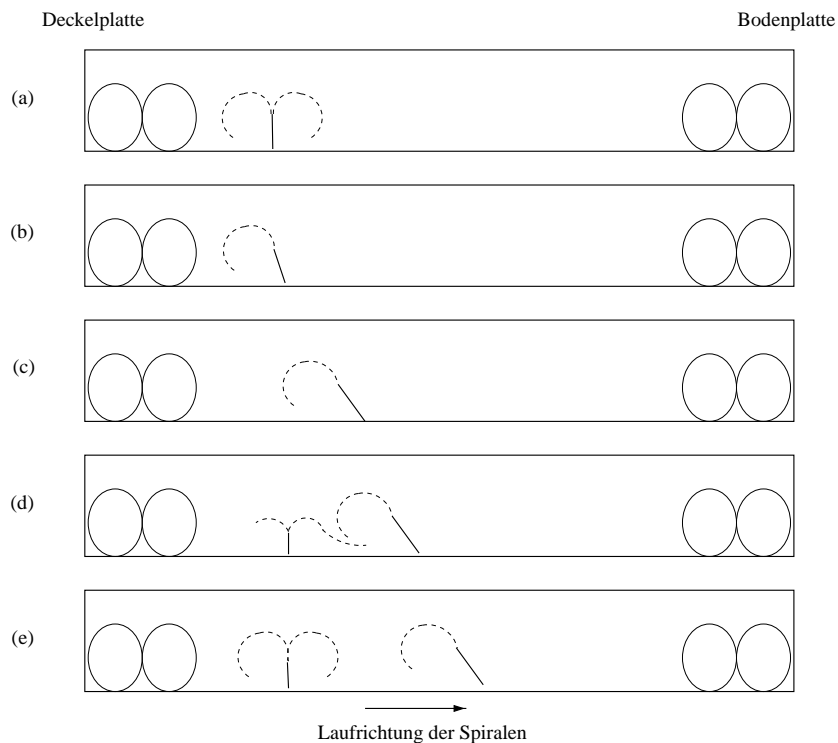


Abbildung 8.14: Schematische Skizze des Entstehungsprozesses der Spiralen.

eine geringe Ausdehnung in radialer Richtung auf.

Der Ort der Auswärtsströmung am Innenzylinder (+) verlagert sich in den Abbildungen 8.13(b-g) sukzessiv weiter nach unten in Richtung Bodenplatte. Durch die Verlagerung der Auswärtsströmung wird der obere Wirbel mitgezogen. Die Auswärtsströmung neigt sich in Richtung Deckelplatte. Der untere Wirbel ist bereits in Bild 8.13(c) nicht mehr zu erkennen.

In Abbildung 8.14 ist eine schematische Darstellung vom Entstehungsprozeß der Spiralen gezeigt, die das zugrundeliegende Strömungsverhalten verdeutlichen soll. Im folgenden wird diese Abbildung bei der Beschreibung der PIV-Aufnahmen mit herangezogen. So sind schematisch in Abbildung 8.14(b,c) die Bewegung der Auswärtströmung in Richtung Bodenplatte, sowie deren Neigung in Richtung Deckelplatte angedeutet.

Nachdem die Spirale sich weit genug von den Randwirbel entfernt hat, entsteht an demselben Ort wie in Bild 8.13(a) ein neues Taylor-Wirbelpaar, das anwächst (Abb. 8.13(h-k)). In den Abbildungen 8.13(h,i) ist eine Wechselwirkung zwischen den entstehenden Taylor-Wirbeln und der bereits bestehenden Spirale zu erkennen. Dieses ist in Abbildung 8.14(d) angedeutet. Die Wechselwirkung beider Einwärtsströmungen verzögert den Ablöseprozeß der Spiralen, der erst stattfindet, wenn das entstehende Taylor-Wirbelpaar sich weiter ausgedehnt hat (Abb. 8.13(j,k) und 8.14(e)). Das beschriebene Szenario wiederholt sich periodisch.

Der Prozeß der Vernichtung der Spiralen findet ebenfalls nahe der Randwirbel statt.

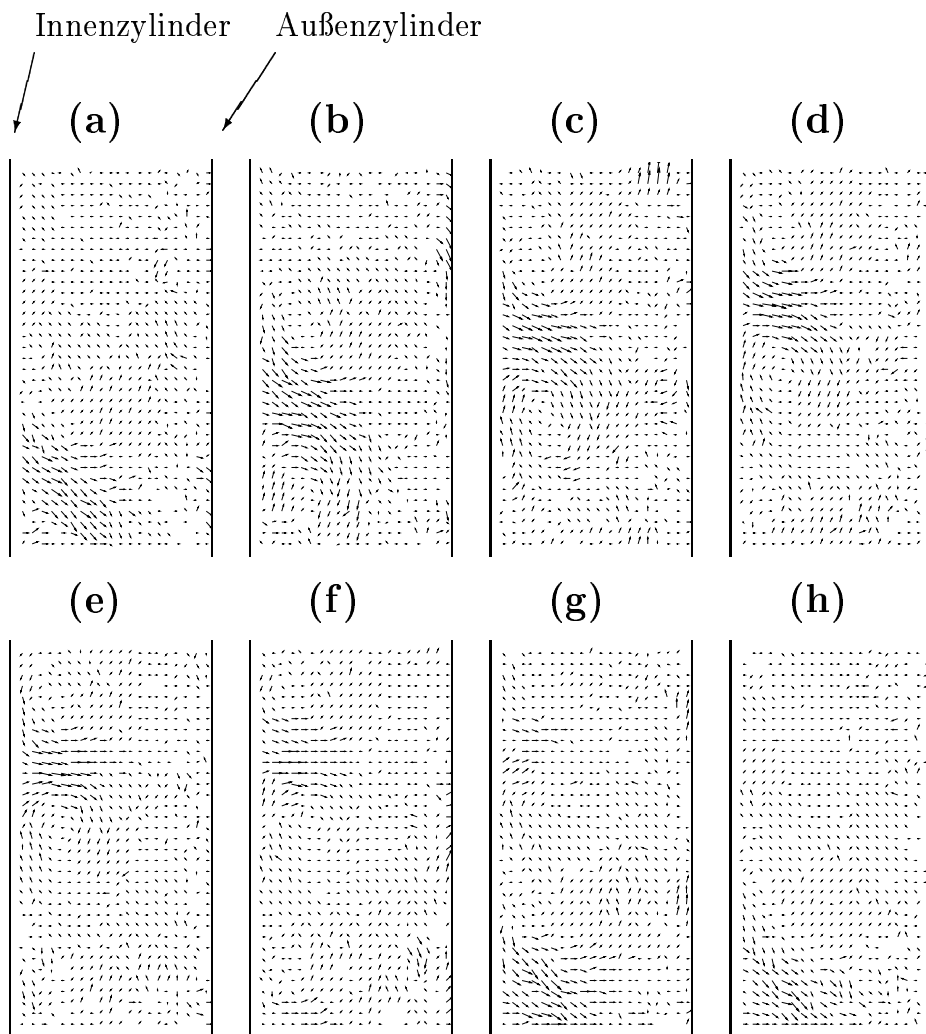


Abbildung 8.15: Die Sequenz der PIV-Aufnahmen zeigt die Vernichtung von Spiralen. Das Meßvolumen befindet sich direkt unterhalb des Randwirbelpaares an der Deckelplatte. Die Spirale bewegt sich nach oben in Richtung Deckelplatte. Eine schematische Skizze des Prozesses der Auflösung von Spiralen zeigt Abbildung 8.16.

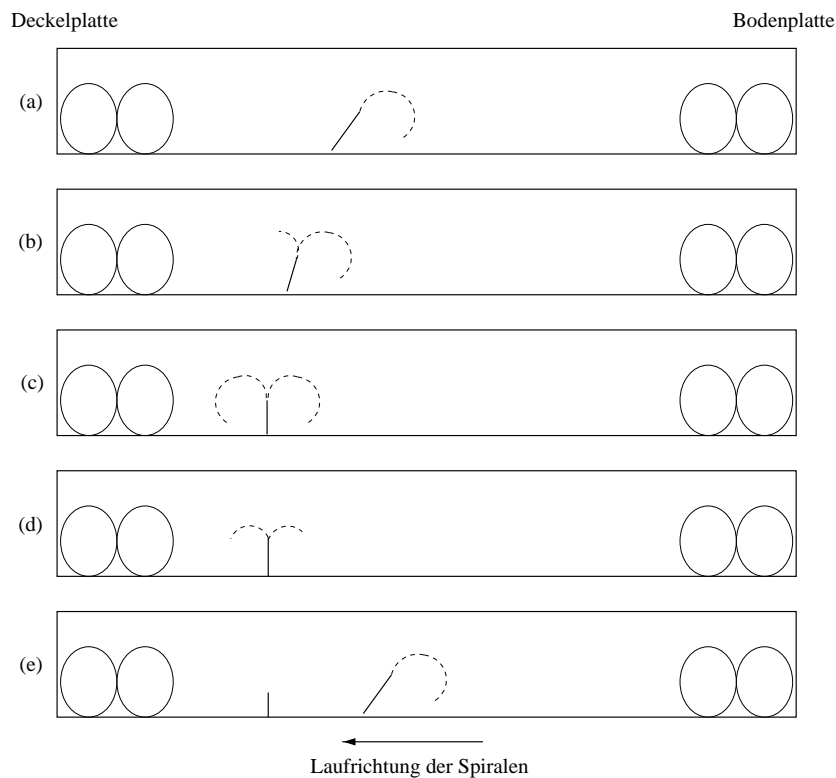


Abbildung 8.16: Schematische Skizze des Prozesses der Vernichtung von Spiralen.

In den PIV-Aufnahmen (Abb. 8.15) und der dazu gehörenden schematischen Skizze (Abb. 8.16) ist eine Sequenz einer Vernichtung der Spiralen gezeigt. Die hier gezeigte Spirale bewegt sich nach oben in Richtung Deckelplatte. Das System befindet sich im gleichen Parameterbereich wie auch bei der Entstehungssequenz:  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 114$ . Ebenso befindet sich auch das Meßvolumen des PIV-System an derselben Stelle direkt unterhalb des Randwirbelpaares an der Deckelplatte.

In den Abbildungen 8.15(a,b) ist die Laufrichtung der Spiralen nach oben zu erkennen. Dieses ist auch in den Abbildungen 8.16(a,b) schematisch angedeutet. In den Abbildungen 8.15(c,d) sieht man, wie die Spiralen in ihrem Bestreben, sich weiter in axialer Richtung auszubreiten, durch die Nähe der Randwirbel eingeschränkt werden. Es kommt zu einem Aufrichten der Auswärtsströmung. Dieses geht soweit, daß diese in Abbildung 8.15(e) radial in Richtung Außenzylinder zeigt. Das führt zur Bildung eines Taylor-Wirbelpaares (vergl. Abb. 8.16(b,c)). Da der Zustand der Taylor-Wirbel in diesem  $(Re_a, Re_i)$ -Parameterbereich nicht stabil ist, klingt er wieder ab. Das eben entstandene Taylor-Wirbelpaar löst sich also wieder auf. Damit ist die ursprüngliche Spirale vernichtet. Dieses zeigen die Abbildungen 8.15(e,f,g) und 8.16(d,e). In den Abbildungen 8.15(g,h) ist am unteren Bildrand schon die nächste Spirale erkennbar.

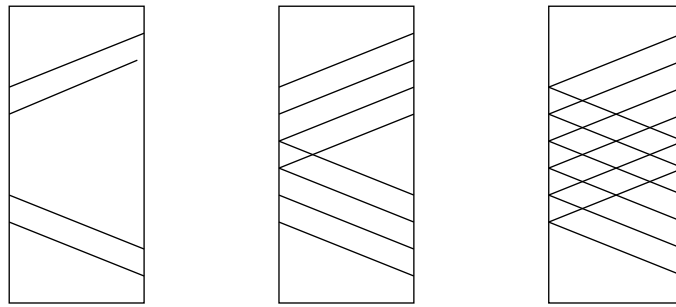


Abbildung 8.17: Skizze vom Ausbreitungsprozeß der Gegenläufigen Spiralen. Die Bilder deuten von links nach rechts den Entwicklungsprozeß des Strömungszustandes an.

### 8.2.4 Übergang zu Gegenläufigen Spiralen

Die Spiralen aus Abschnitt 8.2.2 existieren für  $\Gamma = 12$  bis zu einer Reynoldszahl des Außenzylinders von  $Re_a \approx -160$ . Für stärker gegeneinander rotierende Zylinder ( $Re_a \leq -160$ ) findet eine superkritische Verzweigung von der Couette-Strömung zu Gegenläufigen Spiralen statt.

Dieser Strömungszustand besteht im Gegensatz zu den Spiralen aus zwei propagierenden Spiralwellen. Die eine entsteht in der Nähe der Bodenplatte, die andere nahe der Deckelplatte. Diese beiden Spiralwellen laufen mit der gleichen Propagationsgeschwindigkeit (gleiche Frequenz) aufeinander zu, treffen sich in der Zylindermitte und bilden dort einen komplexen Strömungszustand. Dieses Verhalten ist schematisch in den Einzelbilder der Abbildung 8.17 von links nach rechts dargestellt und läßt sich mit einer Strömungsanalyse mittels des LDAs verifizieren.

In Abbildung 8.18 ist das Anwachsen der Gegenläufigen Spiralwellen für  $Re_a = -309$  zu sehen. Aufgetragen ist die radiale Geschwindigkeitskomponente in Abhängigkeit von der Zylinderhöhe  $z$ . In diesen Profilen steht  $z = 0$  mm für den Boden des Zylinders und  $z = 150$  mm für den Deckel.  $Re_i$  nimmt von Abbildung 8.18(a) ( $Re_i = 164, 56$ ) zu Abbildung 8.18(f) ( $Re_i = 171, 72$ ) hin zu.

Der kritische Punkt für das Einsetzen der Gegenläufigen Spiralwellen bei  $Re_a = -309$  beträgt  $Re_{i,krit.} = 165, 28$ . Das System befindet sich für Reynoldszahlen des Innenzylinders unterhalb des kritischen Wertes noch im Bereich der laminaren Couette-Strömung. Dieses zeigt Abbildung 8.18(a) für  $Re_i = 164, 56$ . Hier sind nur an den Rändern die Ekman-Wirbel zu erkennen, die aufgrund der feststehenden Randplatten immer vorhanden sind und auch in allen sechs Profilen dieser Abbildung auftauchen. Sonst haben sich noch keine weiteren Strukturen ausgebildet.

Überschreitet man den kritischen Punkt ( $Re_i \geq Re_{i,krit.}$ ), so bilden sich die Gegenläufigen Spiralen zuerst im unteren und oberen Drittel des Zylinders aus, nähern sich einander immer weiter an (Abb. 8.18(b) bis 8.18(e)) und treffen schließlich in der Zylindermitte aufeinander (Abb. 8.18(f)). Der Strömungszustand hat sich jetzt voll ausgebildet. Die Ge-

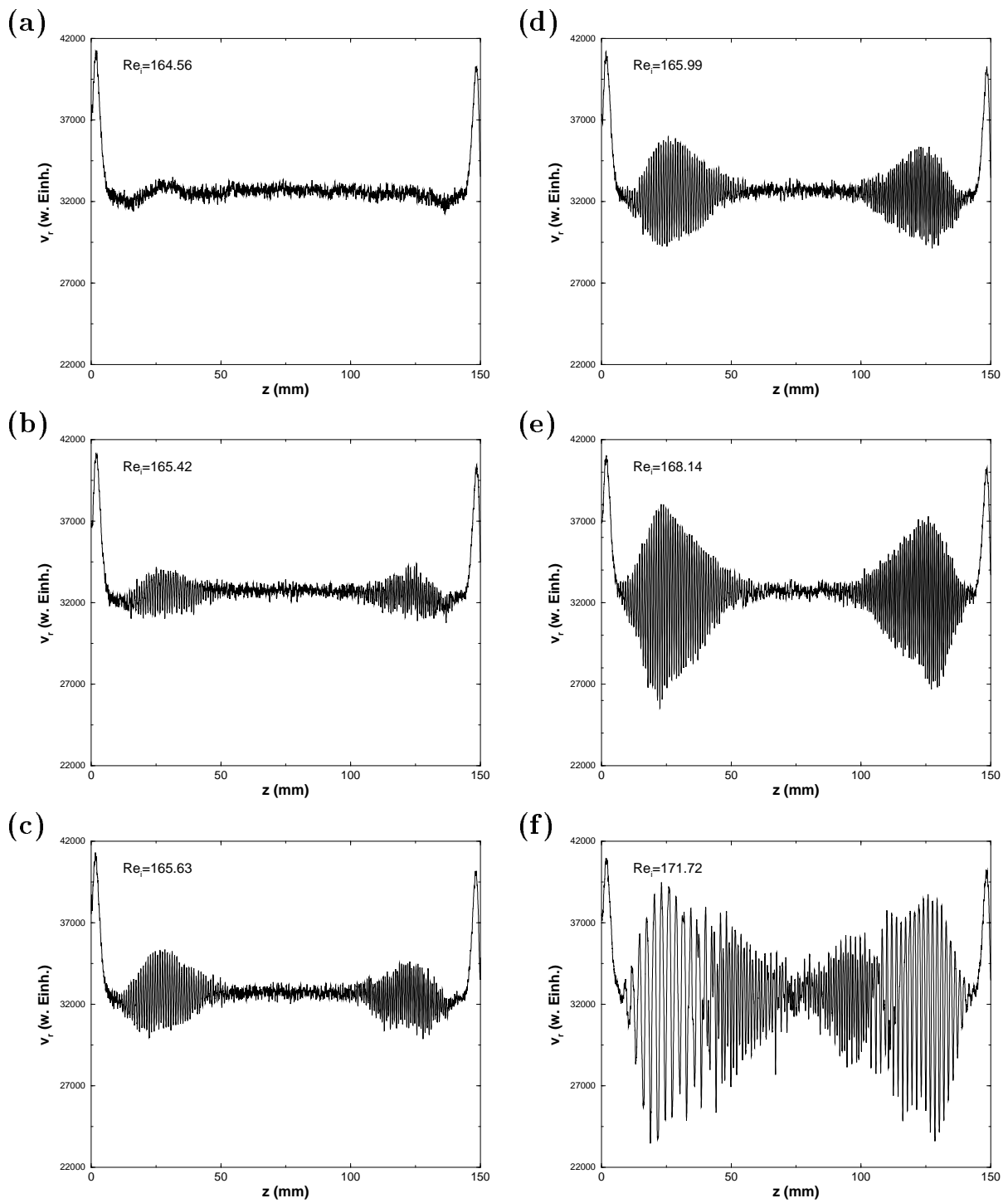


Abbildung 8.18: Geschwindigkeitsprofile der Gegenläufigen Spiralen bei  $Re_a = -309$ .  $Re_i$  nimmt von (a) zu (f) zu. Das Anwachsen der Spiralwellen von den Rändern aus ist deutlich zu erkennen.

genläufigen Spiralwellen überlagern sich in einem Bereich von  $z \approx 40$  mm bis  $z \approx 110$  mm. Die Spiralen entstehen jeweils in der Nähe der Ekman-Wirbel. Betrachtet man Abbildung 8.18, so fällt ein kontinuierliches Anwachsen der Spiralwellen in Amplitude und Raum auf. Dieses ist ähnlich der Entstehung der Taylor-Wirbel (Abb. 8.2).

Bei Aufnahme der Geschwindigkeitsprofile wurde das LDA-Meßvolumen mit einer konstanten Geschwindigkeit vom Boden des Zylinders zum Deckel bewegt. Somit bewegt man sich in Ausbreitungsrichtung der einen Spiralwelle und entgegen der anderen. Dieses führt dazu, daß die eine Schwingung aufgrund des Doppler-Effekts aufgeweitet und die andere zusammengedrückt erscheint. Wenn der Zustand der Spiralwellen sich vollständig ausgebildet hat, nimmt die in der Zylindermitte gemessene Wellenlänge der Spiralen ab. Die Frequenz muß dabei die gleiche bleiben (Abb. 8.18(f)). Sie beträgt in der Zylindermitte ungefähr das Doppelte der Frequenz der Einzelspiralen. Die Abweichung davon beträgt ca. 5%.

Während sich der Codimension-Zwei-Punkt, der die Spiralen von der Taylor-Wirbelströmung trennt, exakt bestimmen ließ ( $Re_{a,codim} = -77,54$ ), läßt sich kein solcher Punkt für die Verzweigung der Couette-Strömung entweder zu den Spiralen oder zu den Gegenläufigen Spiralen ausmachen. Es handelt sich hierbei vielmehr um einen Bereich von etwa  $\Delta Re_a \approx 20$ , in dem die beiden Strömungszustände koexistieren.

Offensichtlich zeigen die hier vorgestellten Gegenläufigen Spiralwellen ein ganz anderes raum-zeitliches Verhalten als die Spiralen.

Der Grund für das Auftreten der Gegenläufigen Spiralen ist physikalisch noch nicht verstanden. Sichtbarkeitsmessungen haben gezeigt, daß die Wellenlänge der Gegenläufigen Spiralen deutlich kleiner ist als die der Spiralen, ebenso ist die radiale Ausdehnung deutlich geringer. Diese Gründe führten dazu, daß eine PIV-Aufnahme mit der vorhandenen Ausrüstung nicht möglich war. Diese wäre in Zukunft wünschenswert, da sie sehr zum näheren Verständnis beitragen könnte.

## 8.3 Höhere Instabilitäten

### 8.3.1 Übergang der Spiralen zur Taylor–Wirbelströmung

Für Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a \geq -150$  findet ein Übergang von den Spiralen zu den stationären Taylor–Wirbeln statt, die sich dann über die gesamte Zylinderlänge ausdehnen. Bei weiterer Erhöhung werden diese dann instabil gegenüber der Wavy–Mode. Vergleicht man die experimentell bestimmte obere Stabilitätsgrenze der Spiralen, die in Abbildung 8.19 durch ausgefüllte Quadrate dargestellt ist, mit numerischen Rechnungen von Hoffmann und Lücke [59], so fallen Unterschiede auf, auf die in diesem Abschnitt eingegangen wird.

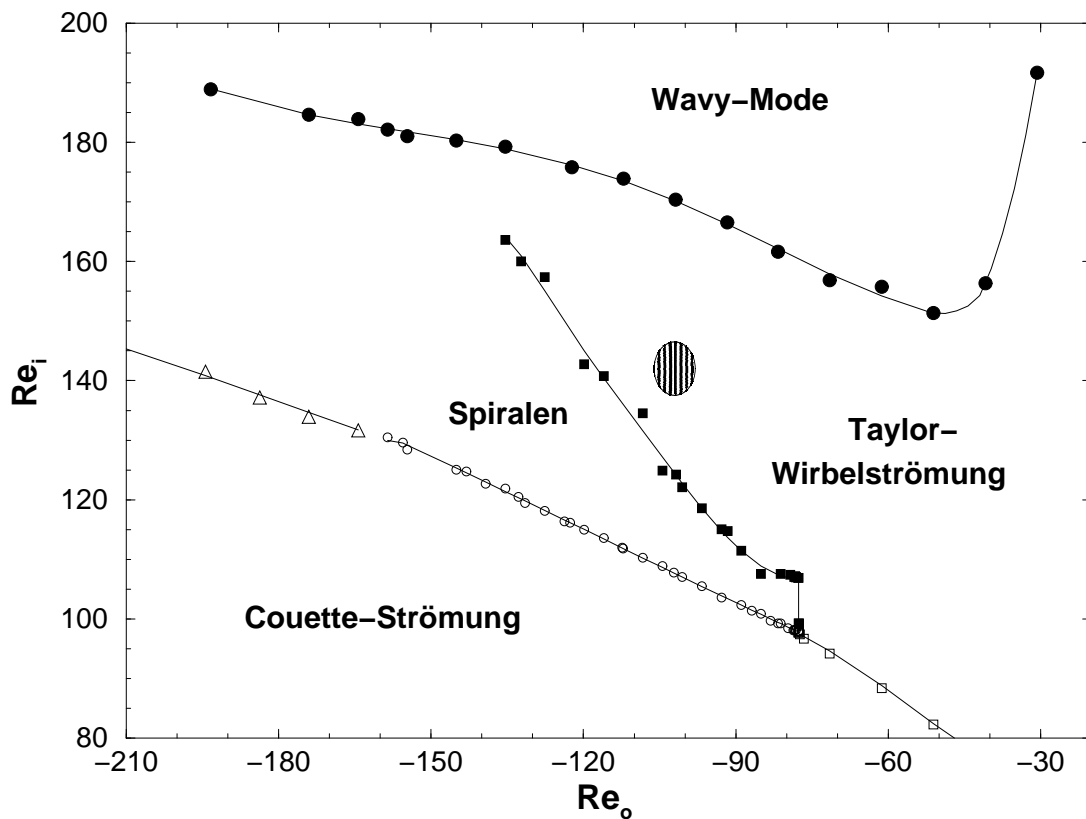


Abbildung 8.19: Stabilitätsdiagramm für das Einsetzen der höheren Instabilitäten. Das schraffierte Gebiet kennzeichnet einen Bereich, in dem es zu einem periodischen Wechsel der Anzahl der Taylor–Wirbel kommt (s. Abschnitt 8.3.2). Die angepassten Kurven dienen nur der Verdeutlichung.

In Abbildung 8.20 sind die Phasengeschwindigkeiten der Spiralen in Abhängigkeit von  $Re_i$  dargestellt. Dabei ergeben sich die Phasengeschwindigkeiten aus den normierten Frequenzen der Spiralen gemäß:  $w_{PH} = (f_{norm} Re_i \eta) / ((1 - \eta) k)$  [59].

Im Experiment sind die hier dargestellten Spiralen ( $\bullet$ ) bei  $Re_a = -96,7$  von  $Re_i = 105,5$



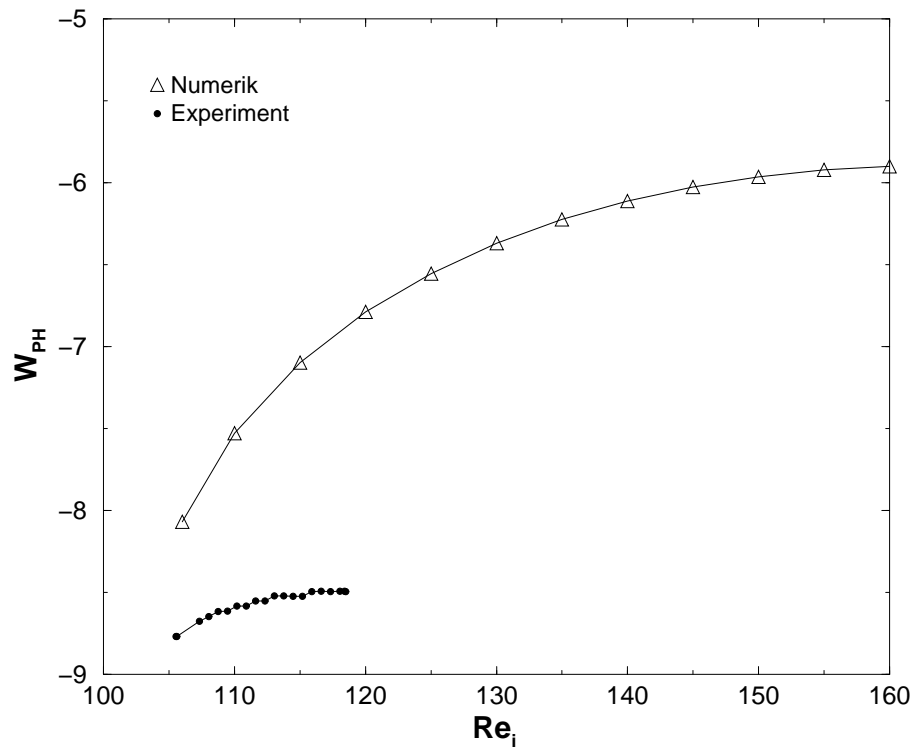


Abbildung 8.20: Phasengeschwindigkeit  $W_{PH}$  der Spiralen mit  $m = 1$  in Abhängigkeit von der Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$ . Der Stabilitätsbereich der Spiralen ist in der Numerik ( $\Delta$ ) [59] gegenüber den experimentellen Ergebnissen ( $\bullet$ ) stark ausgedehnt.

bis  $Re_i = 118,5$  stabil und gehen bei weiterer Erhöhung in die stationäre Taylor-Wirbelströmung über. Während der Einsatzpunkt der Spiralen in der Numerik ( $\Delta$ ) [59] bei  $Re_a = -100$  mit dem experimentell bestimmten gut übereinstimmt, sind die Spiralen in der numerischen Simulation länger stabil.

Die stationären Randplatten im Experiment rufen die Entstehung von Ekman-Wirbeln hervor, die in jedem Strömungszustand vorhanden sind. Diese scheinen sich stabilisierend auf die Taylor-Wirbelströmung auszuwirken. So ist der Stabilitätsbereich der Spiralen im Experiment gegenüber der Numerik zugunsten der Taylor-Wirbelströmung verkleinert.

Bei dem Übergang zwischen Spiralen und Taylor-Wirbeln zeigen sich auch Hystereseerscheinungen, auf die in Abschnitt 8.6 noch näher eingegangen wird.

### 8.3.2 Übergang zwischen Wirbelzuständen

Nach dem Übergang von den Spiralen zur Taylor–Wirbelströmung befinden sich, je nachdem welche Reynoldszahlen vorliegen, 14 oder 16 Wirbel im System.

In dem schraffierten Bereich in Abbildung 8.19 findet über einen großen Reynoldszahlbereich ein periodischer Wechsel zwischen dem 14–Wirbel– und 16–Wirbelzustand statt. Dieses ist in dem Verzweigungsdiagramm in Abbildung 8.21 exemplarisch für eine Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a = -98$  dargestellt. Hier ist die radiale Geschwindigkeitskomponente über der Reynoldszahl des Innenzylinders aufgetragen, die quasistatisch von  $Re_i = 87$  bis  $Re_i = 175$  mit  $\Delta Re_i / \Delta t = 0,013 \text{ s}^{-1}$  erhöht wurde. Das Meßvolumen des LDA–Systems befand sich in der Zylindermitte.

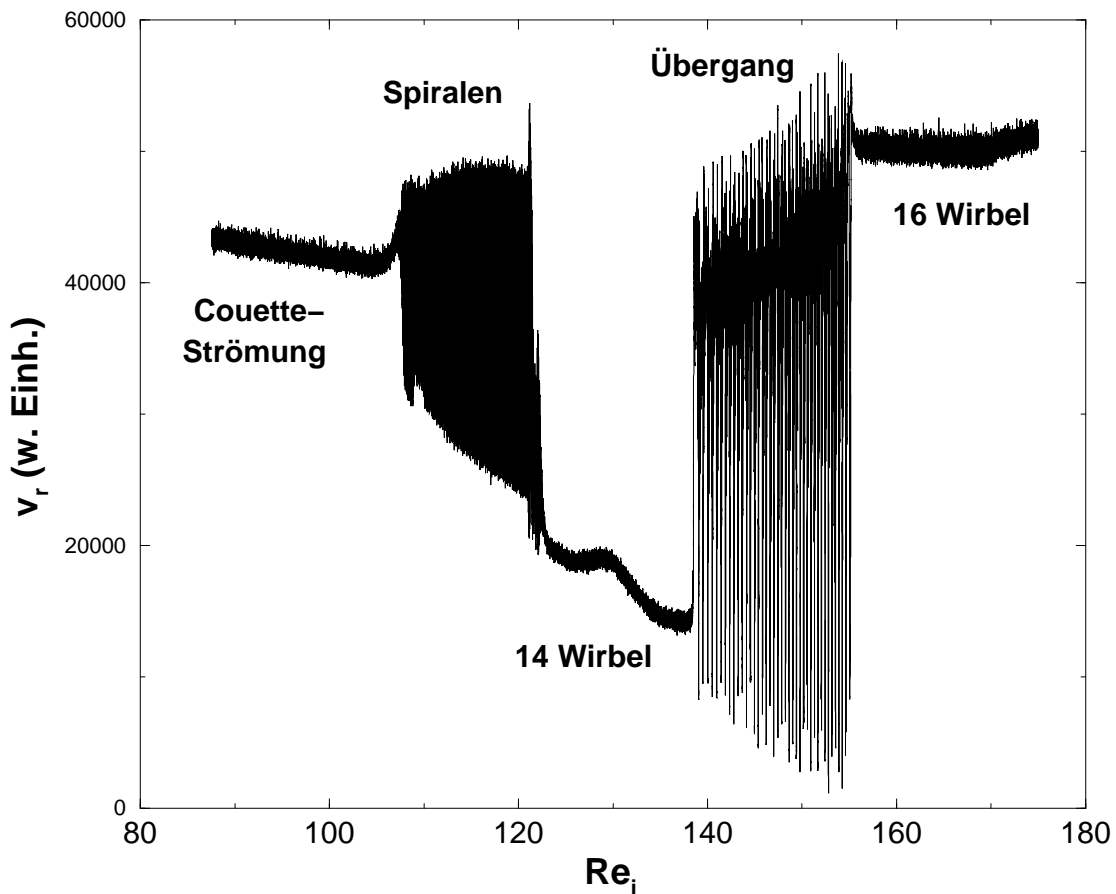


Abbildung 8.21: Verzweigungsdiagramm für  $Re_a = -98$ .  $Re_i$  wurde quasistatisch von  $Re_i = 87$  bis  $Re_i = 175$  mit  $\Delta Re_i / \Delta t = 0,013 \text{ s}^{-1}$  erhöht.

Die Couette–Strömung geht hier bei Erhöhung von  $Re_i$  in die Spiralen über, die über einen Bereich von  $\Delta Re_i \approx 17$  stabil sind. Beim Überschreiten des Stabilitätsbereiches der Spiralen bildet sich die Taylor–Wirbelströmung aus. Es läßt sich eine starke stationäre Auswärtsströmung messen. In diesem Parameterbereich befinden sich 14 Wirbel im System, wie aus der Analyse von Profilen der radialen Geschwindigkeitskomponente

ersichtlich war, die über der gesamten Zylinderlänge aufgenommen wurden.

Ab  $Re_i \approx 154$  lassen sich 16 Wirbel finden. An dem Meßort, an dem sich im 14–Wirbel–Zustand eine Auswärtsströmung befand, erkennt man nun eine Einwärtsströmung. Dadurch läßt sich der Übergang mit dem LDA gut erkennen.

In dem Reynoldszahlbereich  $137 < Re_i < 153$  findet ein periodischer Übergang zwischen dem 14– und dem 16–Wirbelzustand statt. Hierbei bildet sich zwischen den Einwärtsströmungen zweier beliebiger Wirbelpaare ein neues Wirbelpaar, das anwächst, eine maximale Ausdehnung erreicht und danach wieder abklingt. Die anderen Wirbel im System reagieren darauf mit Ausgleichsprozessen, müssen doch alle ihre Wellenlänge (an die neue Situation) anpassen.

Bei diesem Zustand handelt es sich um kein transientes Verhalten. Hat er sich einmal ausgebildet, ist er stabil. Selbst nach einigen Tagen ist keine Änderung erkennbar.

### 8.3.3 Die Wavy-Mode

Bei einem ruhendem Außenzylinder findet man bei Erhöhung der Reynoldszahl des Innenzylinders unterschiedliche Moden, die auf den Taylor–Wirbeln einsetzen, wenn die stationäre Taylor–Wirbelströmung instabil wird.

Im schmalen Spalt findet sich die typische Abfolge, die als *main sequence* bezeichnet wird (s. Abschnitt 2.3). So setzt ab einem kritischen Punkt die Wavy–Mode ein. Diese besteht aus einer den Taylor–Wirbeln überlagerten azimuthal umlaufenden Welle. Die Ein– und Auswärtsströmung oszillieren dabei periodisch.

Schon bei einem System mit ruhendem Außenzylinder lassen sich deutliche Unterschiede im Verhalten der Wavy–Mode feststellen, wenn man diese Strömungsform einmal im schmalen und dann im breiten Spalt betrachtet. Die Wavy–Mode im schmalen Spalt weist eine große Schwingungsamplitude und eine hohe azimuthale Wellenzahl auf. Zu einer weitergehenden Beschreibung ihrer Strömungseigenschaften sei auf die Literatur verwiesen. Die Wavy–Mode wird zum Beispiel bei [28, 40, 51, 65, 67, 66, 82, 86] behandelt. Dagegen besitzt die Wavy–Mode in einem Taylor–Couette System mit breitem Spalt, in dem nur der innere Zylinder rotiert, eine azimuthale Wellenzahl  $m = 1$  und zeichnet sich durch eine geringe Schwingungsamplitude aus (s. Abschnitt 4.2).

Im Fall gegenrotierender Zylinder läßt sich bei  $\eta = 0,5$  ein anderer Typ einer Wavy–Mode über einen weiter Parameterbereich finden (s. Abb. 8.1). Das Erscheinungsbild dieser Mode ist ähnlich einer im schmalen Spalt mit Ausnahme einer geringeren azimuthalen Wellenzahl und wurde das erste Mal bei Snyder beschreiben [121]. Snyder beschäftigte sich mit der Frage, inwieweit Änderungen in der Wellenlänge der Wavy–Mode deren Strömungseigenschaften beeinflussen, wenn die äußeren Randbedingungen ansonsten unverändert bleiben. Dazu benutzte er ein Taylor–Couette Experiment mit einer freien Oberfläche. So konnte er die Wellenlänge der Wavy–Mode durch Heben oder Senken des Flüssigkeitspegels verändern. Snyder führte Sichtbarkeitsmessungen durch und konnte zeigen, daß eine Variation der Wellenlänge bei konstanter innerer und äußerer Reynoldszahl einen großen Einfluß auf die Strömungsform hat. Die Sichtbarkeitsmessungen belegten, daß in dem untersuchten Parameterbereich zuerst eine Wavy–Mode mit einer azimuthalen Wellenzahl  $m = 2$  anschwingt. Dieses wurde durch Rechnungen von Jones [64] bestätigt.

In der hier vorliegenden Arbeit zeigt weitere Eigenschaften der Wavy-Mode auf. Die Geschwindigkeitsvektorfelder in Abbildung 8.22 zeigen eine halbe Periode einer Schwingung der Wavy-Mode. Die Vektorfelder ergeben sich aus Auswertungen von PIV-Aufnahmen. Die Linie am linken Rand der Einzelbilder markiert jeweils die Lage des Innenzylinders, die am rechten Rand die des Außenzylinders. Das qualitative Aussehen der Wavy-Mode ist in dem untersuchten Parameterbereich ( $-200 < Re_a < -30$ ) oberhalb des kritischen Einsatzpunktes das gleiche. Die Aufnahmen in Abbildung 8.22 entstanden bei  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 306$ .

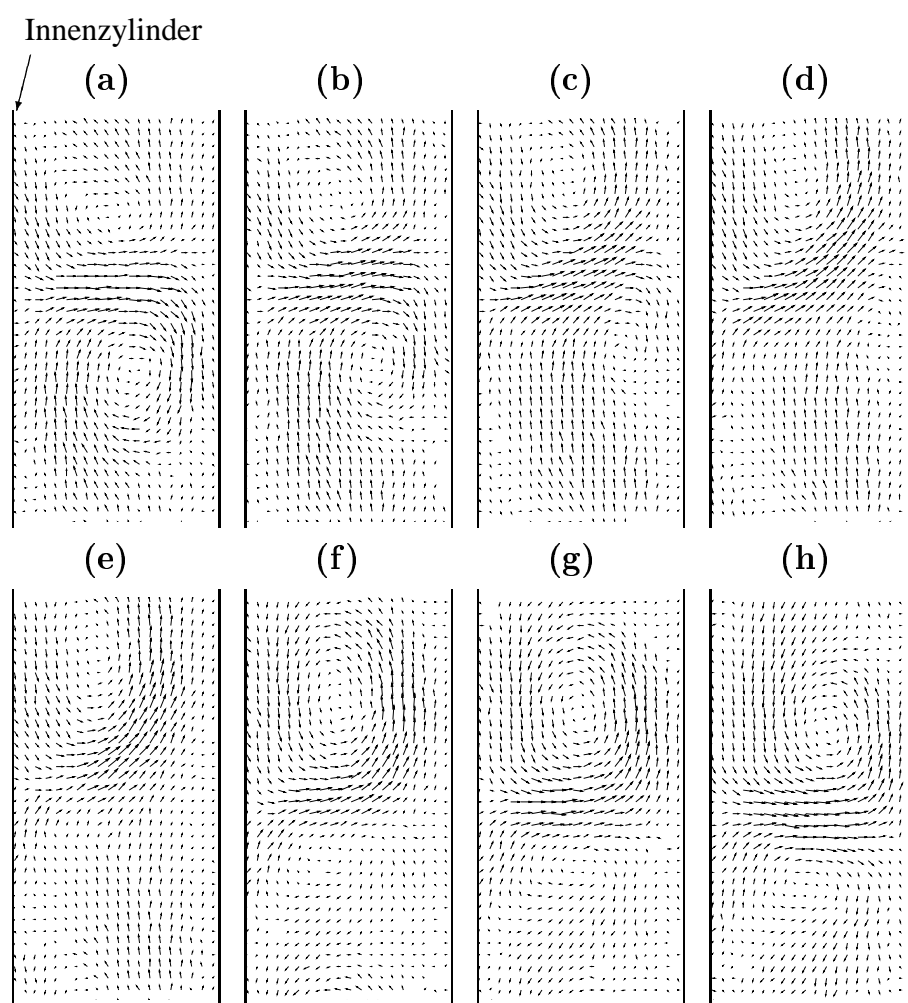


Abbildung 8.22: PIV-Aufnahme der Wavy-Mode mit azimuthaler Wellenzahl  $m = 2$  bei  $Re_o = -100$ ,  $Re_i = 306$ . Gezeigt ist eine halbe Periode der Schwingung.

Die Bilder zeigen eine Schwingung des gesamten Wirbelsystems, bei der sich die Einwärts-, die Auswärtsströmung und die Lage der Wirbelkerne periodisch ändern. Beginnt man die Periode bei einem Zustand, in dem beide Wirbel eines Wirbelpaares un-

gefähr die gleiche Größe aufweisen (Abb. 8.22(a)), findet man eine starke Auswärtsströmung, die in eine Richtung tendiert. Infolge dessen dehnt sich der in dieser Richtung liegende Wirbel aus (in diesem Fall der obere, Abb. 8.22(b)). Der andere Wirbel verringert seine Ausdehnung und verlagert seinen Wirbelkern Richtung Außenzylinder (Abb. 8.22(b,c)). Wenn in Abbildung 8.22(d) der obere Wirbel seine maximale Ausdehnung erreicht hat, ist der untere Wirbel kaum noch sichtbar. Man erkennt hier am unteren Bildrand noch den Einfluß des darunter liegenden Wirbelpaares. Diese vier Bilder beschreiben eine viertel Periode der Wavy-Mode. In Abbildung 8.22(e) erscheint unterhalb der Auswärtsströmung am Innenzylinder ein kleiner Wirbel, der immer weiter anwächst. Dabei richtet sich die Auswärtsströmung immer weiter auf (Abb. 8.22(f,g)) bis in Abbildung 8.22(h) diese wieder senkrecht in Richtung Außenzylinder zeigt und beide Wirbel des Paares wieder die gleiche Größe haben. Die bis hierhin beschriebene Abfolge startet erneut, dieses Mal in die entgegengesetzte Richtung. Somit wird eine vollständige Periode der Schwingung der Wavy-Mode gebildet.

Bei dieser Schwingung bleibt die Lage der Auswärtsströmung am Innenzylinder ortsfest. Die Wavy-Mode erfäßt alle Wirbel, sogar die Ekman-Wirbel. Hierbei besteht eine feste Phasenbeziehung, das heißt, daß benachbarte Wirbelpaare in Phase schwingen.

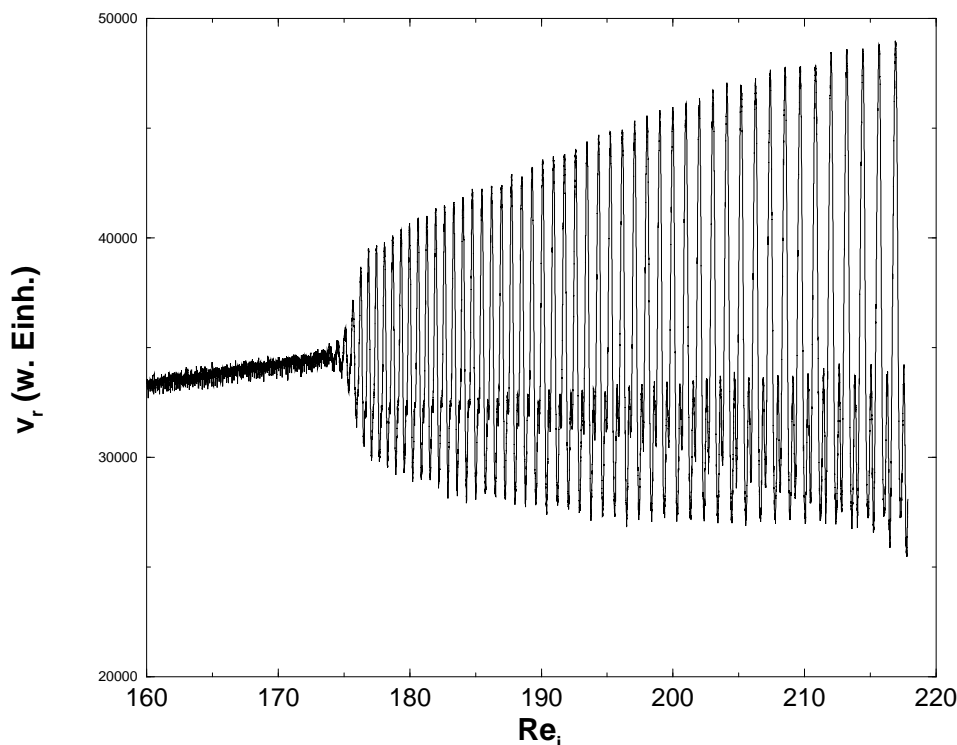


Abbildung 8.23: Verzweigungsdiagramm der Wavy-Mode bei  $Re_a = -112$ . Die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  wurde quasistatisch von  $Re_i = 160$  bis  $Re_i = 218$  mit  $\Delta Re_i / \Delta t = 0,09s^{-1}$  erhöht.

Zur Bestimmung der zeitlichen Dynamik der Wavy-Mode und der exakten Bestim-

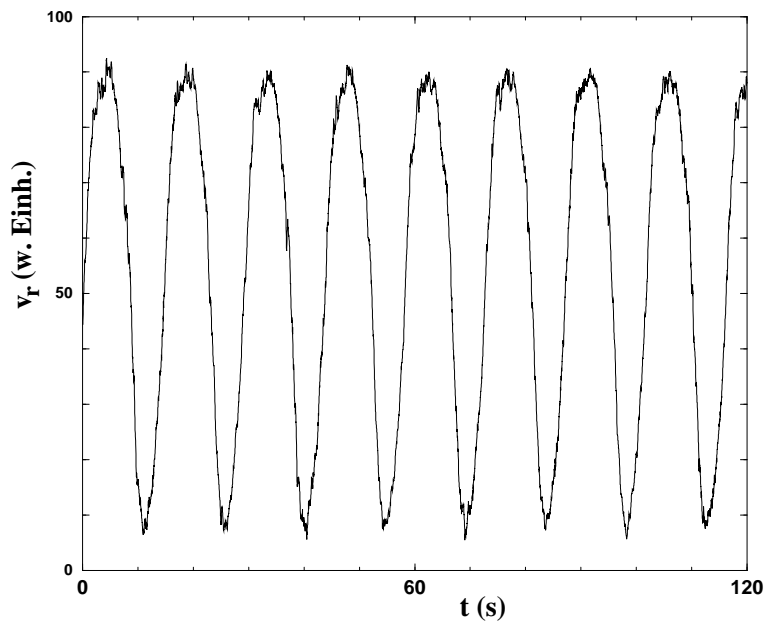


Abbildung 8.24: Typische Zeitreihe der Wavy-Mode bei  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 262,6$ .

mung von Stabilitätsgrenzen eignet sich die Laser-Doppler-Anemometrie am besten. Ausgehend von der Taylor-Wirbelströmung unterliegt die Strömung bei Erhöhung von  $Re_i$  einer Hopf-Verzweigung, und es kommt zu einer wellenförmigen Überlagerung der Taylor-Wirbel. Dieses ist in Abbildung 8.23 zu sehen. Hier ist die radiale Geschwindigkeitskomponente in Abhängigkeit von  $Re_i$  aufgetragen. Um dieses Verzweigungsdiagramm zu erhalten, wurde  $Re_i$  quasistatisch mit  $\Delta Re_i / \Delta t = 0,09 s^{-1}$  von  $Re_i = 160$  bis  $Re_i = 218$  erhöht. In der Nähe des kritischen Punktes erkennt man das für eine Hopf-Verzweigung typische Anwachsen der Amplitude, das einer Wurzelfunktion gehorcht. So findet man knapp oberhalb des kritischen Punktes eine geringe Schwingungsamplitude der Wavy-Mode, die aber bei Entfernung vom kritischen Punkt schnell anwächst. Dieses Verhalten läßt sich zur Bestimmung der kritischen Punkte heranziehen.

Die zusätzliche Strukturierung, die man in Abbildung 8.23 erkennt, resultiert nur aus der Wahl des Meßortes. Um möglichst große Änderungen der radialen Geschwindigkeitskomponente während einer Periode zu bekommen, wurde nicht auf Höhe der Auswärtsströmung am Innenzylinder gemessen (vergl. Abb. 8.22). Stattdessen wurde das Meßvolumen einige Millimeter von diesem Ort entfernt plaziert. So wurden in dieser Abbildung schon Einflüsse des benachbarten Wirbelpaares mit aufgenommen, die in Abbildung 8.23 als Strukturierung erkennbar sind.

Bei der LDA-Messung an der Wavy-Mode muß also aufgrund der starken Schwingungsamplitude im Gegensatz zu den Messungen am System mit ruhendem Außenzylinder sehr auf die Wahl des Meßortes geachtet werden.

Eine typische Zeitreihe, die die Schwingung der Wavy-Mode zeigt, ist in Abbildung 8.24 dargestellt. Auffällig ist die im Vergleich zu den Spiralen große Periodendauer. Für die hier gewählten Reynoldszahlen  $Re_a = -100$  und  $Re_i = 262,6$  beträgt sie etwa 15 Sekun-

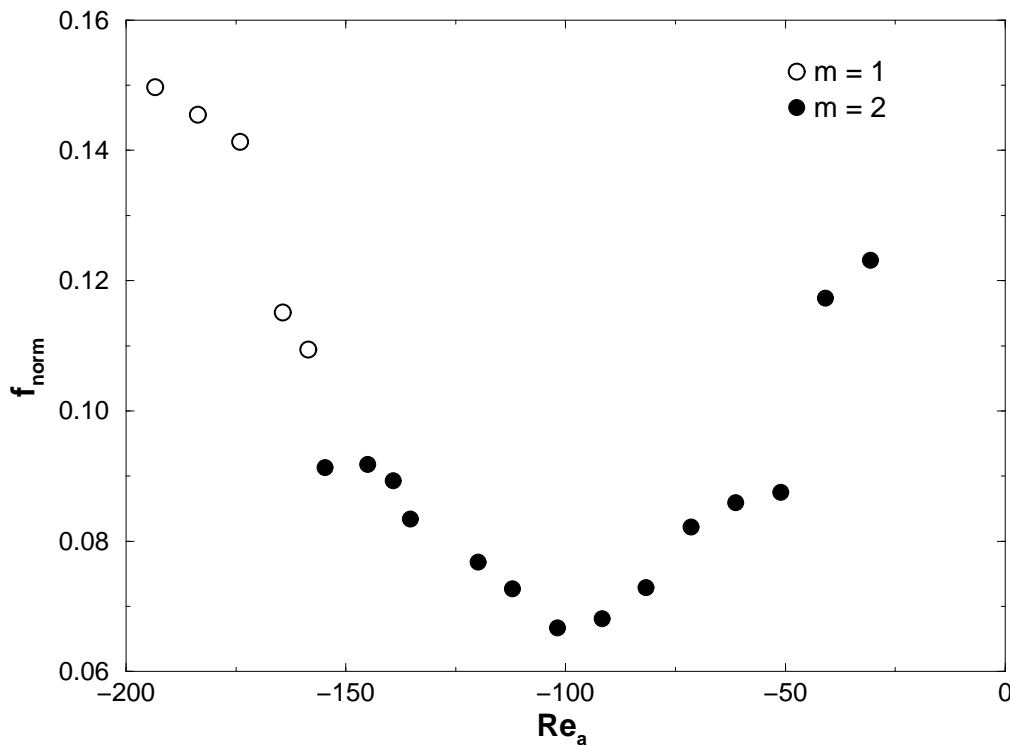


Abbildung 8.25: Normierte Frequenzen der Wavy-Mode in Abhängigkeit von der Reynoldszahl des Außenzylinders  $Re_a$  in der Nähe des Einsatzpunktes.

den. Die Frequenz der Wavy-Mode-Schwingung hängt stark von  $Re_i$  und  $Re_a$  ab. Hierauf wird im folgenden noch eingegangen.

In Abbildung 8.19 sind die kritischen Verzweigungspunkte zur Wavy-Mode eingetragen ( $\bullet$ ). Das angepaßte Polynom dient nur der Verdeutlichung. Es fällt ein Minimum bei  $Re_a \approx -51$  auf.

Betrachtet man die auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierten Frequenzen der Schwingung der Wavy-Mode im überkritischen Bereich nahe des Einsatzpunktes in Abhängigkeit von  $Re_a$ , so sieht man ein Minimum bei  $Re \approx -100$  (Abb. 8.25). Es läßt sich kein Zusammenhang zwischen den beiden Minima beim Einsatzpunkt und bei den normierten Frequenzen aus den Abbildungen 8.19 und 8.25 feststellen.

Im untersuchten Bereich weist die Wavy-Mode unterschiedliche azimutale Wellenzahlen  $m$  auf. Für  $Re_a \geq -158$  setzt eine Schwingung mit  $m = 2$  ein, für  $Re_a < -158$  eine mit  $m = 1$ . Dieses zeigt sich auch in einem kleinen Sprung in den normierten Frequenzen. Die Analyse der azimutalen Wellenzahlen gelang durch Messungen mit zwei LDA-Meßvolumina auf beiden Seiten vom Zylinder und durch Sichtbarkeitsmessungen. Für  $Re_a \geq -45$  findet sich ein zweiter Typ der Wavy-Mode mit azimutaler Wellenzahl  $m = 2$ . Dieser unterscheidet sich von der Wavy-Mode, die bei stärkerer Gegenrotation der Zylinder auftritt, durch eine deutlich geringere Schwingungsamplitude. In diesem Punkt ähnelt diese Wavy-Mode (für  $Re_a \geq -45$ ) der bei ruhendem Außenzylinder.

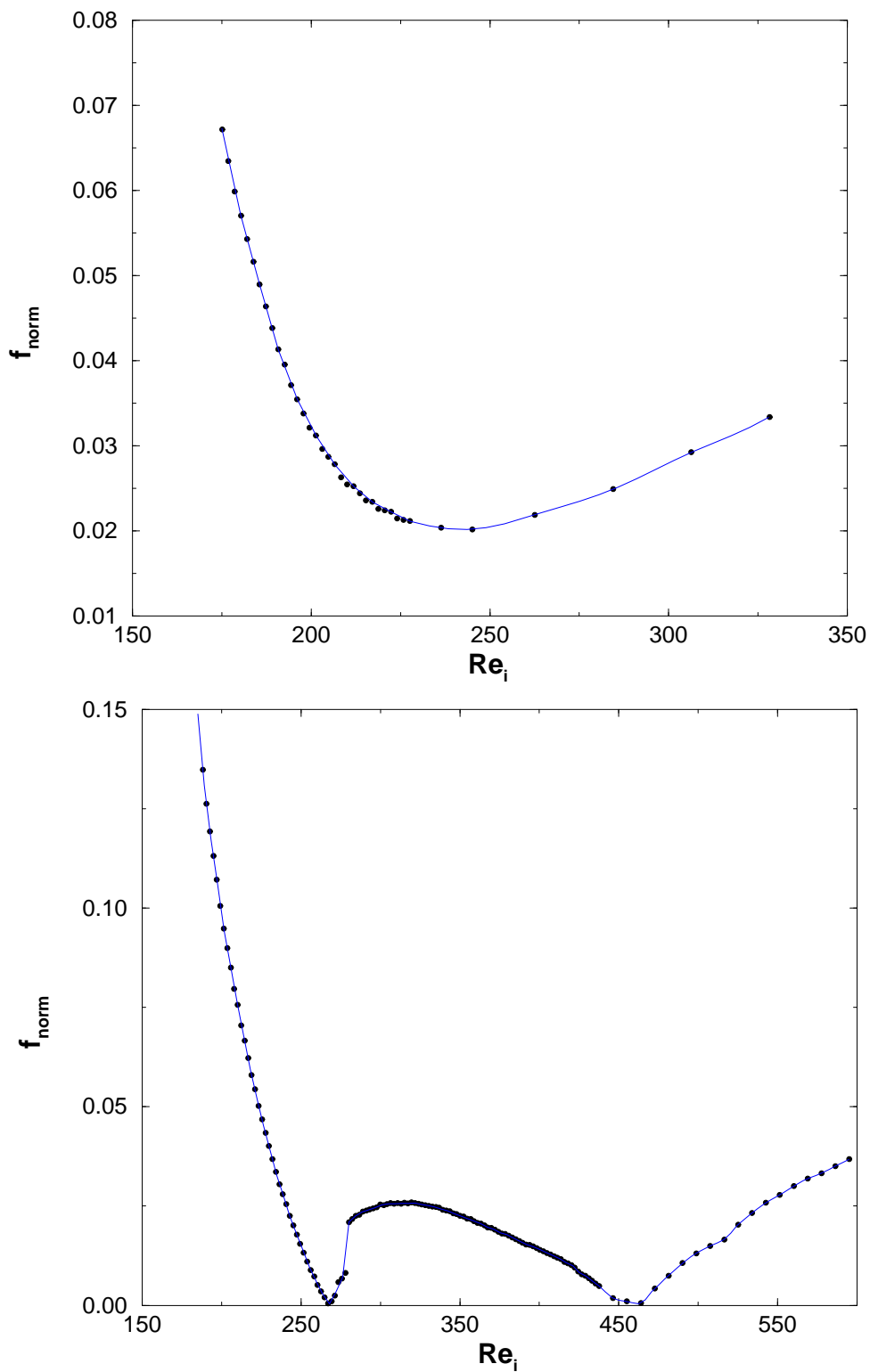


Abbildung 8.26: Normierte Frequenzen der Wavy-Mode für  $Re_a = -110$  (oben) und  $Re_a = -180$  (unten) in Abhängigkeit von  $Re_i$ .



Hat sich die Wavy-Mode einmal ausgebildet, so nimmt die Frequenz der Schwingung bei Erhöhung von  $Re_i$  ab, erreicht ein Minimum und wächst danach wieder an. Dieses Verhalten ist ähnlich zu dem bei King et al. [66] beschriebenen für einen ruhenden Außenzylinder.

Die normierten Frequenzen der Wavy-Mode sind in Abbildung 8.26 exemplarisch für zwei verschiedene Reynoldszahlen des Außenzylinders dargestellt. Das obere Diagramm der Abbildung 8.26 zeigt den Frequenzverlauf für eine Wavy-Mode mit  $m = 1$  bei  $Re_a = -110$ , das untere für eine ( $m = 2$ )-Mode bei  $Re_a = -180$ . Beide Moden mit unterschiedlichen azimuthalen Wellenzahlen zeigen nach ihrem Einsetzen eine Abnahme der normierten Frequenzen für steigendes  $Re_i$ . Während die ( $m = 1$ )-Mode nach Erreichen eines Minimums kontinuierlich wieder ansteigt, ist bei den Frequenzen der Wavy-Mode bei  $Re_a = -180$  eine Diskontinuität, also ein Sprung zu erkennen. Anschließend schwingt die Mode mit etwas höherer Frequenz, aber kleiner Amplitude. Ab  $Re_i \approx 415$  ist die Schwingung der Wavy-Mode zusätzlich moduliert. Die normierten Frequenzen zeigen ein zweites Minimum und steigen anschließend wieder an. Der Reynoldszahlbereich  $Re_i \gg 200$  wurde in dieser Arbeit nicht weiter systematisch untersucht.

Schon bei der Analyse der PIV-Aufnahmen zeigte sich eine Besonderheit der Wavy-Mode im breiten Spalt zwischen gegenrotierenden Zylinder. So hat diese Wavy-Mode eine große Schwingungsamplitude. Dieses entspricht einer Wavy-Mode im schmalen Spalt. Mit der geringen azimuthalen Wellenzahl verhält sie sich hier wie die Wavy-Mode im breiten Spalt bei ruhendem Außenzylinder. Es handelt sich also um eine Mischform und ist somit mit keiner der beiden Moden unmittelbar vergleichbar.

### 8.3.4 Propagierende Taylor-Wirbel

Das Gebiet im Stabilitätsdiagramm (Abb. 8.1) für stärkere Gegenrotation der beiden Zylinder ( $Re_a \leq -200$ ) und oberhalb der Stabilitätsgrenze der Gegenläufigen Spiralen ist bisher noch nicht systematisch untersucht worden. An dieser Stelle soll einmal für  $Re_a = -210$  gezeigt werden, welche Zustände sich dort beobachten lassen.

Die laminare Couette-Strömung wird bei  $Re_i = 145$  instabil, und es bilden sich Gegenläufige Spiralen aus. Bei weiterer Erhöhung von  $Re_i$  wird die Spiralbewegung schwächer und hört schließlich auf. Es ist bei  $Re_i \approx 160$  eine Taylor-Wirbelstruktur erkennbar. Aber statt einer bekannten stationären Taylor-Wirbelströmung tauchen hier propagierende Taylor-Wirbel auf. Sie entstehen in der Nähe der Boden- und Deckplatte und bewegen sich in Paaren in Richtung Zylindermitte. Durch nachfolgende Wirbelpaare werden die Wirbel in der Mitte immer weiter zusammengedrückt, bis schließlich die Auswärtsströmungen benachbarter Wirbelpaare zusammenlaufen und nur ein Wirbelpaar übrig bleibt.

In Abbildung 8.27 ist eine mit dem LDA gemessene Zeitreihe dargestellt. Aufgetragen ist hier die radiale Geschwindigkeitskomponente an einem Meßort 110 mm von der Bodenplatte entfernt in Abhängigkeit von der Zeit. Passiert ein Wirbelpaar den Meßort, erkennt man das Durchlaufen der Auswärtsströmung in diesem Diagramm an einem deutlichen

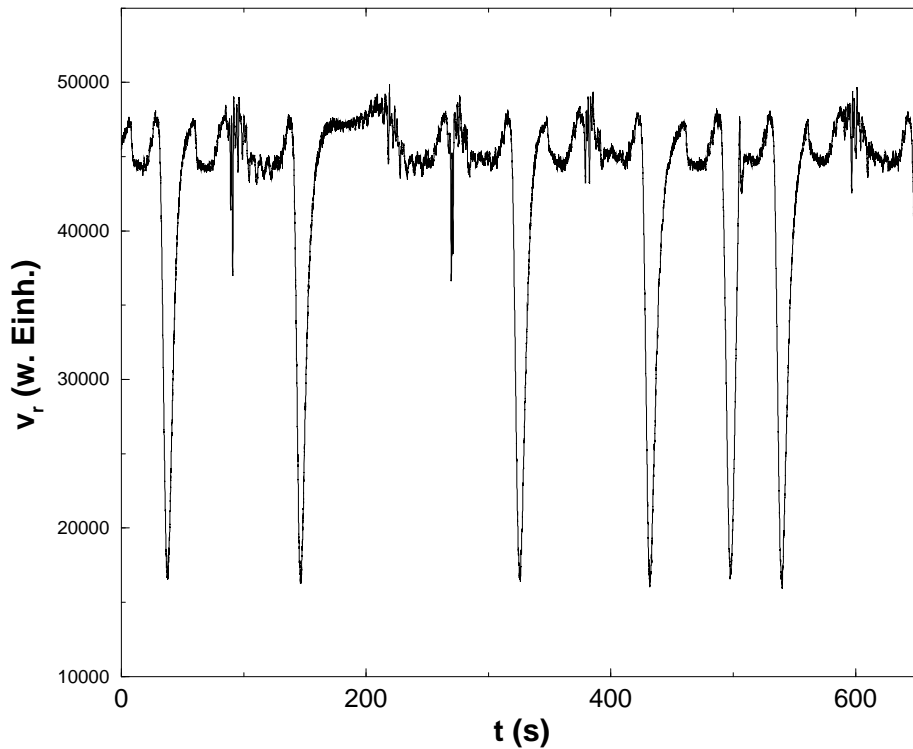


Abbildung 8.27: Zeitreihe der propagierenden Taylor-Wirbel bei  $Re_a = -210$  und  $Re_i = 180$ .

Minimum der radialen Strömungsgeschwindigkeit. Dieser Zustand ist zeitabhängig aber nicht periodisch.

Das Besondere an den propagierenden Taylor-Wirbeln ist, daß es sich um eine in axialer Richtung fortlaufende Struktur mit azimuthaler Wellenzahl  $m = 0$  handelt. Solche laufenden Taylor-Wirbel sind bisher nur von einem Taylor-Couette-System mit Durchfluß (z.B. [16], [104], [130]) oder von einem, in dem sich der ganze innere Zylinder oder auch nur ein Teil des inneren Zylinders konisch verjüngt und somit eine Rampe erzeugt wird (z.B. [93], [105]), bekannt.

Bei Erhöhung der Reynoldszahl setzt bei  $Re_i \approx 210$  eine Wavy-Mode mit azimuthaler Wellenzahl  $m = 1$  ein, diese wird im weiteren Verlauf moduliert, und es findet schließlich bei  $Re_i \approx 350$  ein Übergang zu einer Wavy-Mode mit  $m = 2$  statt.

## 8.4 Vergleich mit numerischen Berechnungen

In Abschnitt 4.4 wurden Ergebnisse numerischer Analysen vorgestellt, soweit diese den hier vorgestellten Parameterbereich ( $\eta = 0.5$ ,  $Re_a \geq -309$ ) betreffen. Speziell sind diese in den Arbeiten von Langford et al. [73] und Hoffmann und Lücke [59] zu finden, die die Einsatzpunkte der ersten Instabilität und Frequenzverläufe der Spiralen berechneten.

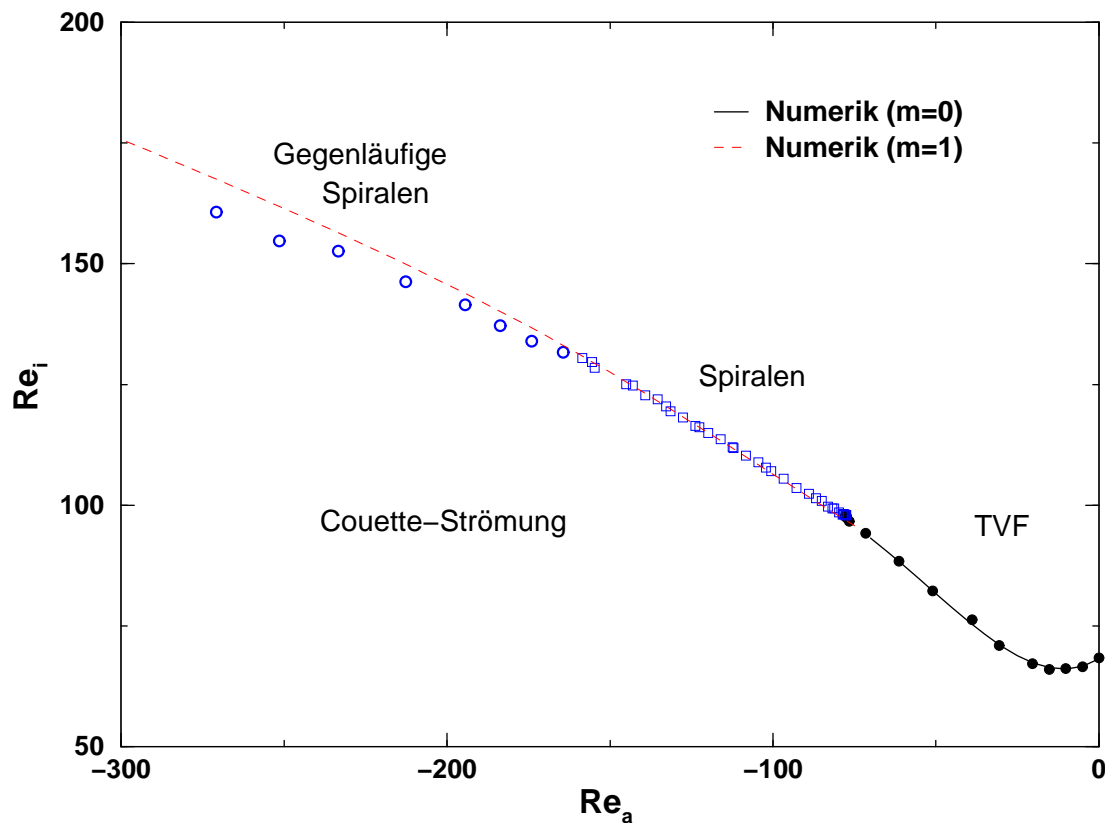


Abbildung 8.28: Kritische Punkte der ersten Instabilität in Abhängigkeit von  $Re_a$ . Die Resultate der Numerik [59, 73] stimmen mit den experimentellen Werten gut überein.

### 8.4.1 Einsetzen der ersten Instabilität

In Abb. 8.28 sind die Ergebnisse der Numerik zum Einsatz der ersten Instabilität aufgetragen. Langford et al. und Hoffmann, Lücke erzielen in dem vorgestellten Parameterbereich ( $Re_a \geq -309$ ) die gleichen Ergebnisse. Die durchgezogene Linie stellt hier die Lage der Übergangspunkte von der Couette-Strömung hin zur Taylor-Wirbelströmung ( $m = 0$ ) dar und die gestrichelte Linie die kritischen Punkte zum Einsatz der Spiralwellen ( $m = 1$ ). Die Symbole kennzeichnen die experimentellen Ergebnisse: die Übergangspunkte zur Taylor-Wirbelströmung (●), sowie die kritischen Punkte bei den Spiralen (□) und bei den gegenläufigen Spiralen (o).

Ein Vergleich der experimentellen Ergebnisse mit denen der Numerik zeigt eine gute Übereinstimmung, obwohl die Numerik von periodischen Randbedingungen, also unendlich langen Zylindern ausging. Lediglich für den Reynoldszahlbereich, in dem experimentell die gegenläufigen Spiralen gefunden wurden ( $Re_a < -160$ ), weichen die experimentellen und numerischen Resultate leicht voneinander ab. Die Abweichung beträgt dort einige Prozent.

Dieses ist auch nicht verwunderlich, werden doch in beiden Arbeiten [59, 73] die Spiralen bis  $Re_a = -300$  berücksichtigt und gegenläufige Spiralen in dem Bereich von der Numerik nicht gefunden, da axial periodische Randbedingungen angenommen wurden.

Kodimension–Zwei–Punkte (s. Abschnitt 3.2) sind Ausgangspunkt interessanter Dynamiken. An dem Punkt, der die Taylor–Wirbelströmung von den Spiralen trennt, treffen eine stationäre und ein Hopf–Verzweigung aufeinander. Dieser Punkt wird in Abschnitt 8.5 noch eingehender behandelt. Die Tabelle

	Experiment	Numerik (nach [73])	Abweichung
$Re_a$	–77,54	–73,79	5,1%
$Re_i$	97,95	95,25	2,8%
$\mu = \omega_a/\omega_i$	–0,3958	–0,3874	2,2%
$\omega_{SPI}/\omega_i$	0,2837	0,2813	0,9%

zeigt eine Gegenüberstellung experimenteller und numerischer Parameterwerte für diesen Kodimension–Zwei–Punkt. Die Abweichungen betragen im schlechtesten Fall einige Prozent. Betrachtet man die auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierte Frequenz der Spiralen am Einsatzpunkt ( $\omega_{SPI}/\omega_i$ ), so liegt die Übereinstimmung im Rahmen der Meßgenauigkeit.

### 8.4.2 Normierte Frequenzen der Spiralwellen

Die Abbildung 8.29 zeigt die auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierten Frequenzen der Spiralen ( $f_{norm}$ ) in Abhängigkeit von  $Re_a$ . Die von der Numerik [73] gelieferten Werte sind in das Diagramm als durchgezogene Kurve eingetragen. Wie in Abschnitt 8.4.1 schon erwähnt, werden die Spiralen in der Theorie bis  $Re_a = -300$  berücksichtigt. Dieses zeigt sich auch im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen ( $\bullet$ ). Die gestrichelte Linie markiert den experimentell bestimmten Übergangsbereich zwischen Spiralen und Gegenläufigen Spiralen. Zur Verdeutlichung dieser beiden unterschiedlicher Moden sind in die entsprechenden Bereiche zusätzlich typische Geschwindigkeitsprofile eingetragen. Solange  $Re_a$  so groß ist, daß im Experiment Spiralen als erste Instabilität auftreten, liegen die experimentell bestimmten normierten Frequenzen gut auf dem von der Numerik vorhergesagten Verlauf. Mit dem Einsatz der Gegenläufigen Spiralen gibt es größere Abweichungen.

In der Numerik werden für stärkere Gegenrotation ( $Re_a \leq -300,18$ ) Spiralwellen mit einer azimuthalen Wellenzahl  $m = 2$  gefunden. Hier ist der Anstiegswinkel der Spiralen so groß, daß auf einer Höhe im Zylinder zwei Spiralwellen existieren. Sichtbarkeitsmessungen legen die Vermutung nahe, daß die im Experiment gefundenen Gegenläufigen Spiralen nicht mit der in der Numerik vorkommenden ( $m = 2$ )–Spirale [73] identisch sind. Eine eingehende Untersuchung steht noch aus.

Abschließend läßt sich feststellen, daß es in den dargestellten Bereichen zu einer weitestgehend guten Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment kommt. Die Unterschiede resultieren aus den Randbedingungen. Während der Einfluß der Ränder in der Numerik nicht berücksichtigt wurde, macht dieser sich im Experiment deutlich bemerkbar und führt zum Beispiel zum Entstehen der Gegenläufigen Spiralen.

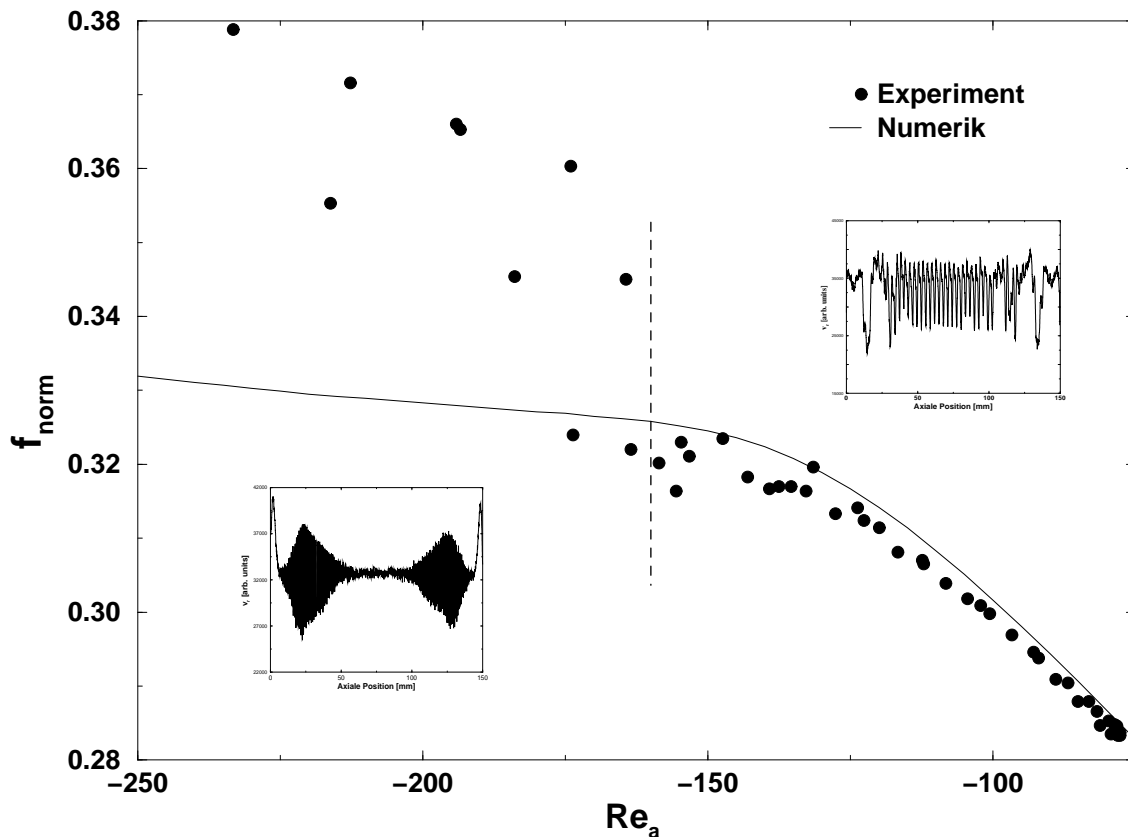


Abbildung 8.29: Auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierte Frequenzen der Spiralwellen in Abhängigkeit von  $Re_a$ . Im Bereich der Spiralen ( $Re_a > -160$ ) stimmen Numerik [73] und Experiment gut überein.

Die Leistungsfähigkeit moderner Computer-Anlagen in Verbindung mit neuen theoretischen Konzepten erlauben seit kurzem die ersten Instabilitäten in einem endlichen Taylor-Couette System mit zwei unabhängig voneinander rotierenden Zylindern zu berechnen. Dieses wird in Zukunft zum näheren Verständnis der beobachteten Strukturen führen.

## 8.5 Verhalten am bikritischen Punkt ( $Re_a = -77,54$ )

In Abschnitt 8.4 wurden die Meßergebnisse mit den vorhandenen Rechnungen verglichen. Die Numerik konnte den bikritischen Punkt bestimmen, an dem die Übergänge zur Taylor-Wirbelströmung und zu den Spiralen sich treffen. Dieser stimmt mit den gefundenen experimentellen Werten gut überein.

Das Verhalten der Strömung in unmittelbarer Nähe des bikritischen Punkte nach Verlassen des Grundzustandes ist besonders interessant, da es hier zu einer möglichen Wechselwirkung zwischen einem zeitlich stationären und einem zeitlich periodischen Zustand kommt.

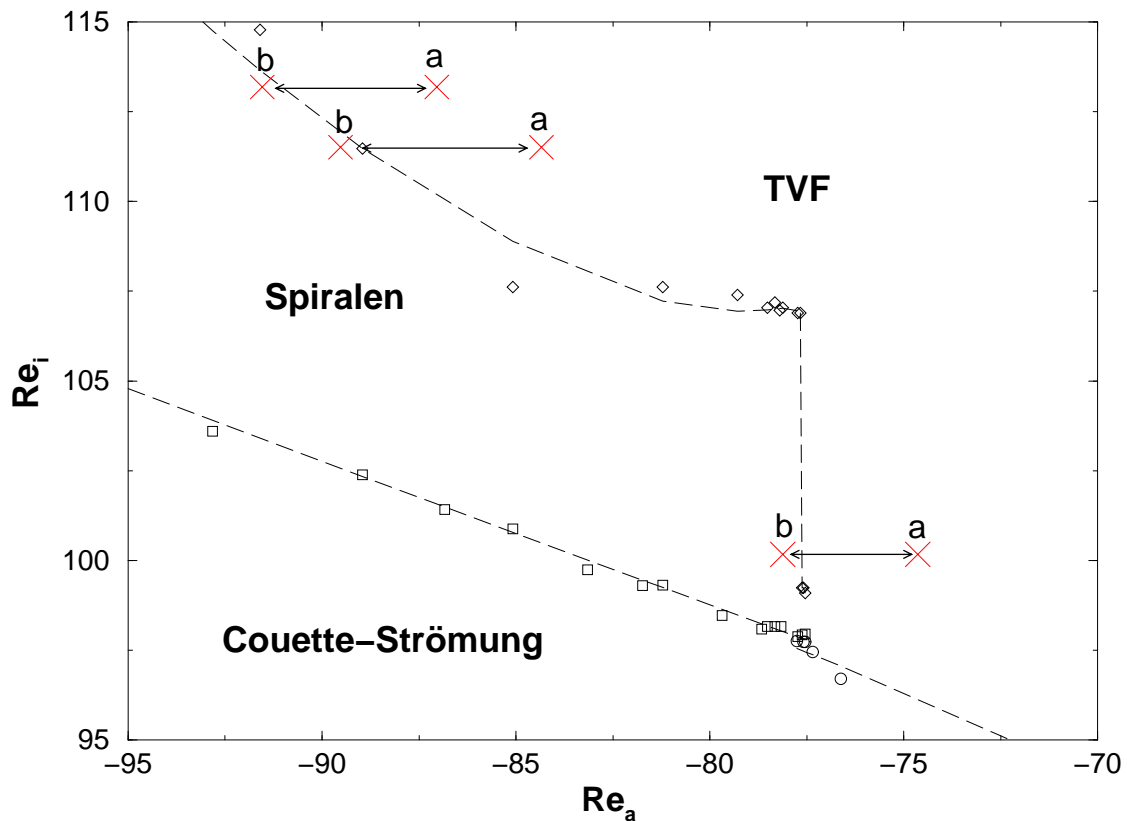


Abbildung 8.30: Verhalten in der Nähe des bikritischen Punktes bei  $Re_a = -77,54$ . Die angepaßten Kurven dienen nur der Verdeutlichung.

Die Abbildung 8.30 zeigt die Verzweigungen nahe des kritischen Punktes. Aufgetragen ist hier die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  gegenüber der des Außenzylinders  $Re_a$ .

Es fällt auf, daß die Spiralen nach ihrem Einsatz über einen großen Reynoldszahlbereich ( $\Delta Re_i \approx 9$ ) stabil sind. Dieses Verhalten findet man für  $Re_a \leq -77,66$ . In diesem Bereich nimmt die normierte Frequenz der Spiralen bei Erhöhung von  $Re_i$  monoton ab, bis plötzlich ein Übergang zur stationären Taylor-Wirbelströmung auftritt (s. Abb. 8.11).

Die Spiralen selbst treten zum ersten Mal bei  $Re_a = -77,54$  auf. Eine genaue Analyse des Bereiches ergab, daß sich dort zuerst eine schwache Taylor-Wirbelstruktur ausbildet, auf der dann die Spiralen einsetzen. Diese weisen allerdings bei diesen Parameterwerten nur eine geringe Schwingungsamplitude auf. Bei Erhöhung von  $Re_i$  bleibt die laufende Spiralwelle nur über  $\Delta Re_i \approx 1$  stabil. Danach dominieren wiederum die Taylor-Wirbel, die sich dann vollständig ausbilden.

Die Stabilität der Spiralwellen zeigt sich auch beim Überschreiten der ursprünglichen Stabilitätslinien in Wechselwirkung mit der Taylor-Wirbelströmung. Dazu wurde ein Zustand eingestellt, in dem die Spiralen sich ausbilden. Dann wurde  $Re_i$  konstant gehalten und  $Re_a$  vergrößert (schwächere Gegenrotation). Die Spiralen bleiben lange stabil. Erst am Punkt (a) bilden sich Taylor-Wirbel aus. Dieses Verhalten ist für drei verschiedene Reynoldszahlen des Innenzylinders in Abbildung 8.30 zu sehen:  $Re_i = 100, 17,$

$Re_i = 111,51$  und  $Re_i = 113,18$ . Die Pfeile deuten an, in welche Richtung  $Re_a$  verändert wurde.

Betrachtet man den anderen Fall, wenn man also aus dem Bereich der Taylor–Wirbelströmung kommt und  $Re_a$  verringert (stärkere Gegenrotation), setzen bereits am Punkt (b) die Spiralwellen ein. Die Stabilitätsgrenzen der Taylor–Wirbel lassen sich also nur ganz leicht in den ursprünglichen Bereich der Spiralen hinein verschieben, während die Spiralen weit in den Bereich der Taylor–Wirbel hineinreichen.

## 8.6 Hystereseverhalten

Um Aufschluß über Arten von Verzweigungen zwischen verschiedenen Zuständen zu erhalten, sind Untersuchungen auf ein mögliches Hysterese–Verhalten unerlässlich. Die Abbildung 8.31 zeigt dazu erste Ergebnisse. Aufgetragen ist die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  gegenüber der des Außenzylinders  $Re_a$ .

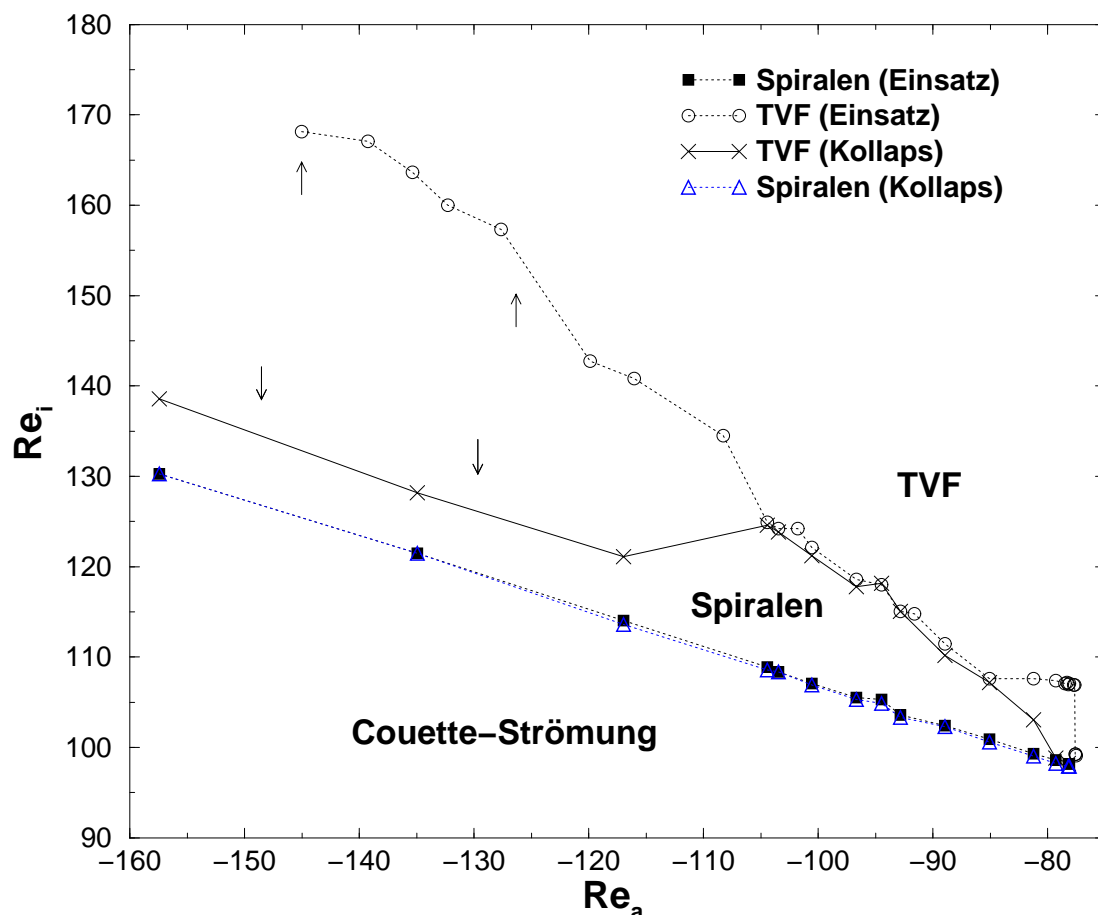


Abbildung 8.31: Hystereseverhalten im Bereich der Spiralwellen von  $-160 < Re_a < -77$ . Man findet eine starke Hysterese beim Übergang zwischen der Taylor–Wirbelströmung (TVF) und den Spiralen.

Es soll das Hystereseverhalten in dem Bereich aufgezeigt werden, in dem die Spiralen auftreten. Dieser Bereich ist deswegen so interessant, weil in diesem Übergänge zwischen Strömungszuständen mit unterschiedlichen azimuthalen Wellenzahlen untersucht werden können. Dieses sind die Spiralen ( $m = 1$ ) und die Taylor–Wirbelströmung ( $m = 0$ ).

Die Couette–Strömung wird bei Erhöhung von  $Re_i$  instabil, und es bilden sich Spiralen. Die kritischen Punkte sind durch ausgefüllte Quadrate dargestellt. Befindet man sich oberhalb dieser Stabilitätslinie und verringert  $Re_i$ , gelangt man wieder in den Bereich der Couette–Strömung ( $\Delta$ ). Im Rahmen der Meßgenauigkeit ist keine Hysterese erkennbar. Es handelt sich um eine superkritische Verzweigung. Dieses ist in Einklang mit der Theorie [59].

In Abbildung 8.31 kennzeichnen offene Kreise die Einsatzpunkte der Taylor–Wirbelströmung (TVF) bei Erhöhung von  $Re_i$ . Die Kreuze zeigen die untere Stabilitätsgrenze der Taylor–Wirbel bei Erniedrigung von  $Re_i$  an. Beim Überschreiten der Linie bilden sich Spiralen aus.

Für  $Re_a > -104$  findet man beim Übergang zwischen Spiralen und Taylor–Wirbeln nur in der Nähe des bikritischen Punktes eine nennenswerte Hysterese. Für  $-83 < Re_a < -77$  ist die Hysterese so stark, daß die Spiralen bei Erniedrigung von  $Re_i$  die Taylor–Wirbel erst kurz vor dem Übergang zur Couette–Strömung verdrängen. Dieses könnte an der starken Dominanz der Taylor–Wirbelströmung am bikritischen Punkt liegen (s. Abschnitt 8.5). Die Spiralen entstehen dort als eine Art Überlagerung der Taylor–Wirbel und werden bei geringer Erhöhung von  $Re_i$  wieder von den Wirbeln verdrängt.

Für Reynoldszahlen des Außenzylinders von  $Re_a < -104$  findet man eine deutliche Hysterese. Auch hier bleiben die Taylor–Wirbel bei Erniedrigung von  $Re_i$  lange stabil, bis schließlich doch Spiralen entstehen ( $X$ ). Die beiden Äste im Stabilitätsdiagramm, die den Einsatz der Taylor–Wirbelströmung bei Erhöhung von  $Re_i$ , bzw. den Einsatz der Spiralen bei Erniedrigung von  $Re_i$  kennzeichnen, laufen bei  $Re_a \approx -104$  zusammen und scheinen eine dort eine Spitze zu bilden.

Es handelt sich also um eine subkritische Verzweigung zwischen der Taylor–Wirbelströmung und den Spiralen. Es fällt auf, daß das Maß der Hysterese stark von  $Re_a$  abhängt. Zur abschließenden Klärung sind in diesem Bereich noch weitere Messungen notwendig.

Dieses Kapitel beschreibt die Ergebnisse systematischer Untersuchungen der Strömungszustände zwischen gegeneinander rotierenden Zylindern. Die sich ausbildenden Strukturen waren bis dato weitestgehend unbekannt, weil sich die interessante Dynamik bei Gegenrotation im breiten Spalt vorzugsweise nahe am Innenzylinder abspielt und daher mit gebräuchlichen Sichtbarkeitsmessungen nicht zugänglich war.

Mit dem Einsatz von LDA und PIV konnten erstmals die grundlegende Dynamik bei rotierendem Außenzylinder genau analysiert werden.

Neben dem bekannten Übergang zur Taylor–Wirbelströmung für stärkere Gegenrotation wurden mit den Spiralen und den gegenläufigen Spiralen zwei unterschiedliche zeitperiodisch laufende Strukturen als erste Instabilität der Couette–Strömung ausgemacht. Mit dem LDA war eine exakte Bestimmung der Stabilitätslinien möglich. Außerdem konnten die charakteristischen Größen der Spiralwellen, wie die Frequenz, die Wellenlänge und



die azimutale Wellenzahl, bestimmt werden. Die Untersuchung der Dynamik am bikritischen Punkt gab Aufschluß über die dort vorherrschende Wechselwirkung zwischen einer stationären und einer Hopf-Verzweigung.

Durch den Einsatz des PIV-Systems gelang zudem erstmals eine raum-zeitliche Strukturanalyse der Spiralen. Im Rahmen dessen konnten die Szenarien der Entstehung und Vernichtung von Spiralen in endlichen Systemen beobachtet und verstanden werden.

Langford et al. [73] und Hoffmann und Lücke [59] stellten numerische Simulationen für die ersten Instabilitäten im breiten Spalt ( $\eta = 0,5$ ) an. Dabei gingen sie von periodischen Randbedingungen in axialer Richtung, also unendlich langen Zylindern, aus. Ihre theoretischen Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit meinen experimentellen Ergebnissen für die Lage der oberen Stabilitätsgrenze der Couette-Strömung. In der Numerik wird allerdings aufgrund der Annahme periodischer Randbedingungen ein gegenüber dem Experiment vergrößerter Stabilitätsbereich der Spiralen vorhergesagt.

Es ist von Seiten der Theorie her interessant, mit realistischen Randbedingungen zu rechnen. Die hier gewonnenen experimentellen Ergebnisse geben Anhaltspunkte für diese Numerik.

Als höhere Instabilitäten konnten die Wavy-Mode und ebenso ein Zustand propagierender Taylor-Wirbel mit azimutaler Wellenzahl  $m = 0$  beobachtet werden.

# Kapitel 9

## Strukturen zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern

Zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern lassen sich eine Vielzahl neuartiger Strömungszustände finden, die bei ruhendem oder gegensinnig rotierendem Außenzylinder nicht auftreten. Diese sind in Abschnitt 4.3 für einen schmalen Spalt zusammengetragen und beruhen auf experimentellen Ergebnissen von Andereck et al. [9] und Hegseth et al. [58]. Hierbei handelt es sich um Sichtbarkeitsexperimente, bei denen der Meßflüssigkeit reflektierende Teilchen in geringer Konzentration zugeführt werden. Die Intensität des reflektierten Lichtes wird aufgenommen, und daraus werden charakteristische Größen wie etwa die Wellenlänge und die Frequenz gewonnen. Die Vorgänge innerhalb der Strömungsstrukturen, speziell die Dynamik nahe am Innenzylinder, bleiben dieser Meßmethode verschlossen.

Die Twist-Mode ist die vom optischen Erscheinungsbild her auffälligste Mode, die zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern auftaucht. Betrachtet man die Twist-Mode von außen, ist den Taylor-Wirbeln eine Struktur überlagert, die aussieht wie ein geflochtenes Seil (s. Abb. 4.7). Die Ein- und Auswärts-Strömung sind nahezu in Ruhe. Zwischen den Twist-Moden auf den einzelnen Wirbel besteht eine feste Phasenbeziehung. Diese Phasenbeziehung besteht auch bei der Wavy-Twist-Mode, bei der im Gegensatz zur Twist-Mode auch die Ein- und Auswärtsströmung periodisch deformiert werden.

Die Twist-Mode und die Wavy-Twist-Mode sind auch Gegenstand theoretischer Arbeiten, z.B. von Nagata [90] und Weisshaar et al. [134]. Aus der Analyse berechneter Geschwindigkeitsfelder konnte Nagata herausarbeiten, daß die periodische Bewegung der Twist-Mode sich im Bereich der Wirbelkerne abspielt. Dieses konnte von Hegseth et al. [58] nicht bestätigt werden, da deren Meßmethode (s.o.) die Dynamik innerhalb der Wirbel nicht erfassen kann. In ihrer Zusammenfassung schreiben sie: 'The TWI (*Twist-Mode*) pattern may be a result of inertial waves that form in the interior of the vortices.' Die physikalischen Aspekte der Twist-Mode sind also experimentell bis dato noch nicht voll erfaßt.

Die Untersuchungen beschränken sich in diesem Kapitel auf die Twist- und Wavy-Twist-Mode und stellen einen Vergleich dieser mit der Core-Mode an, die bei ruhendem Außenzylinder zu beobachten ist. Durch den Einsatz der optischen Meßmethoden LDA und PIV konnten neue Erkenntnisse der Twist-Mode erlangt werden.

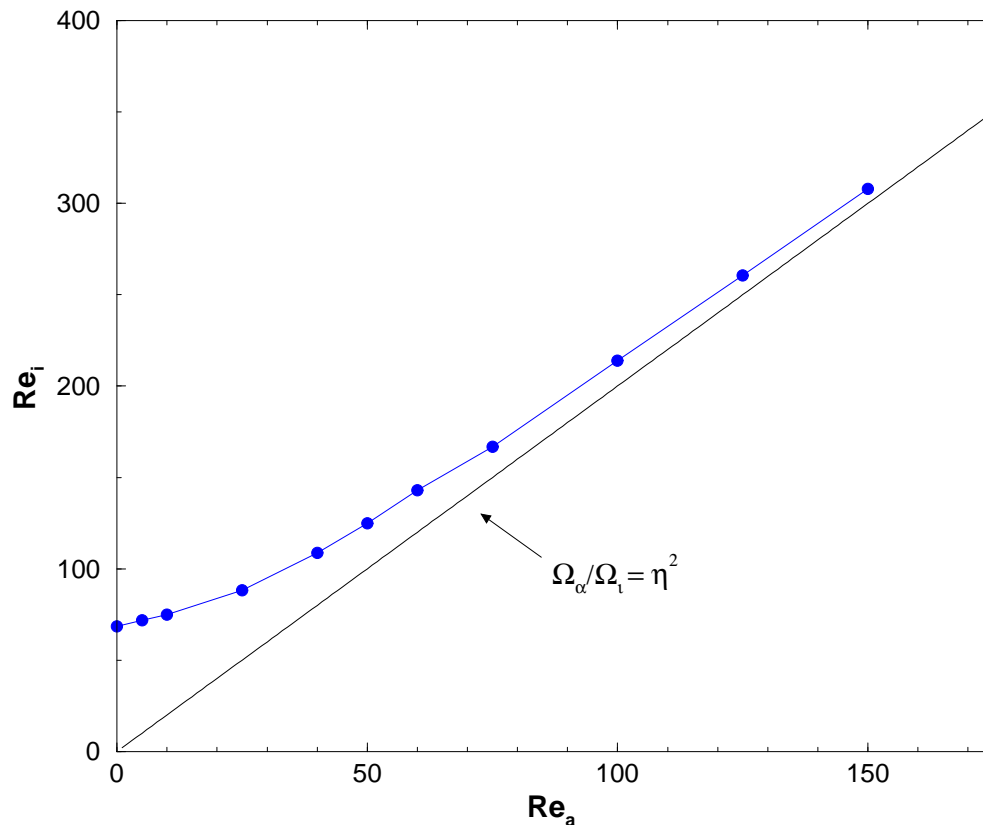


Abbildung 9.1: Einsatzpunkte der Taylor–Wirbelströmung für gleichsinnig rotierende Zylinder ( $Re_a > 0$ ) und  $\eta = 0,5$ . Eingetragen ist auch die theoretisch berechnete Linie, die nach dem Kriterium von Rayleigh (s. Abschnitt 2.3) den stabilen von dem instabilen Bereich trennt.

## 9.1 Erste Instabilität zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern

Zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern findet man für alle Rotationsraten bei Erhöhung von  $Re_i$  zuerst einen Übergang von der laminaren Couette–Strömung hin zur Taylor–Wirbelströmung. Dieses ist für  $\eta = 0,5$  in Abbildung 9.1 dargestellt. Aufgetragen ist hier die Reynoldszahl des Innenzylinders  $Re_i$  gegenüber der des Außenzylinders  $Re_a$ .

Die eingezeichnete Gerade markiert das Stabilitätskriterium von Rayleigh [103]. Hiernach trennt die Geradengleichung  $\Omega_a/\Omega_i = \eta^2$  den stabilen vom instabilen Bereich (s. Abschnitt 2.3). Die Symbole ( $\bullet$ ) stellen meine Meßergebnisse dar.

Für große Rotationsraten der Zylinder nähern sich die Meßwerte asymptotisch dem Kriterium von Rayleigh an. Deutliche Unterschiede ergeben sich bei kleineren Rotationsraten und im Fall eines ruhenden Außenzylinders. Dieses rührt daher, daß Rayleigh bei seinen Betrachtungen von einer nichtviskosen Flüssigkeit ausging. So sollte die Couette–Strömung bei einem ruhendem Außenzylinder instabil werden, sobald der innere Zylinder rotiert. Da viskose Kräfte den Einsatz der Instabilität im Experiment verzögert, kommt es zu dem verspäteten Einsatz der Taylor–Wirbelströmung und damit zu den beobachteten



Abbildung 9.2: Sichtbarkeitsaufnahme der Twist-Mode bei  $Re_a = +150$  und  $Re_i = 435$ .

Differenzen.

## 9.2 Eigenschaften der Twist-Mode

Aufgrund der gleichsinnigen Rotation von Innen- und Außenzylinder ist die azimutale Strömungsgeschwindigkeit an jedem Punkt größer als Null. Eine Ausnahme bilden nur die ruhenden Ränder. Induziert durch die Ränder bilden sich Ekman-Wirbel aus, die gegenüber einem System mit ruhendem Außenzylinder stark vergrößert sind. Untersuchungen zur Größe der Ekman-Wirbel in Abhängigkeit von den Rotationsraten lassen sich vielfach in der Literatur finden (z.B. in [58, 132]) und sollen hier nicht Hauptgegenstand der Untersuchungen sein.

In Abbildung 9.3 sind Profile der radialen Geschwindigkeitskomponente in Abhängigkeit vom Ort im Zylinder aufgetragen. 0 mm steht in den Diagrammen für den Boden des Zylinders, 150 mm für den Deckel. Analog zur Betrachtung der Dynamik zwischen gegenrotierenden Zylindern in Kapitel 8 ist ebenfalls eine Zylinderhöhe von 150 mm ( $\Gamma = 12$ ) gewählt worden. Die Reynoldszahl des Außenzylinders beträgt  $Re_a = +75$ .

Bereits bei einer Reynoldszahl des Innenzylinders von  $Re_i = 218,8$  (Abb. 9.3(a)) ist in den Geschwindigkeitsprofilen eine Oszillation auf den Ekman-Wirbeln zu beobachten,

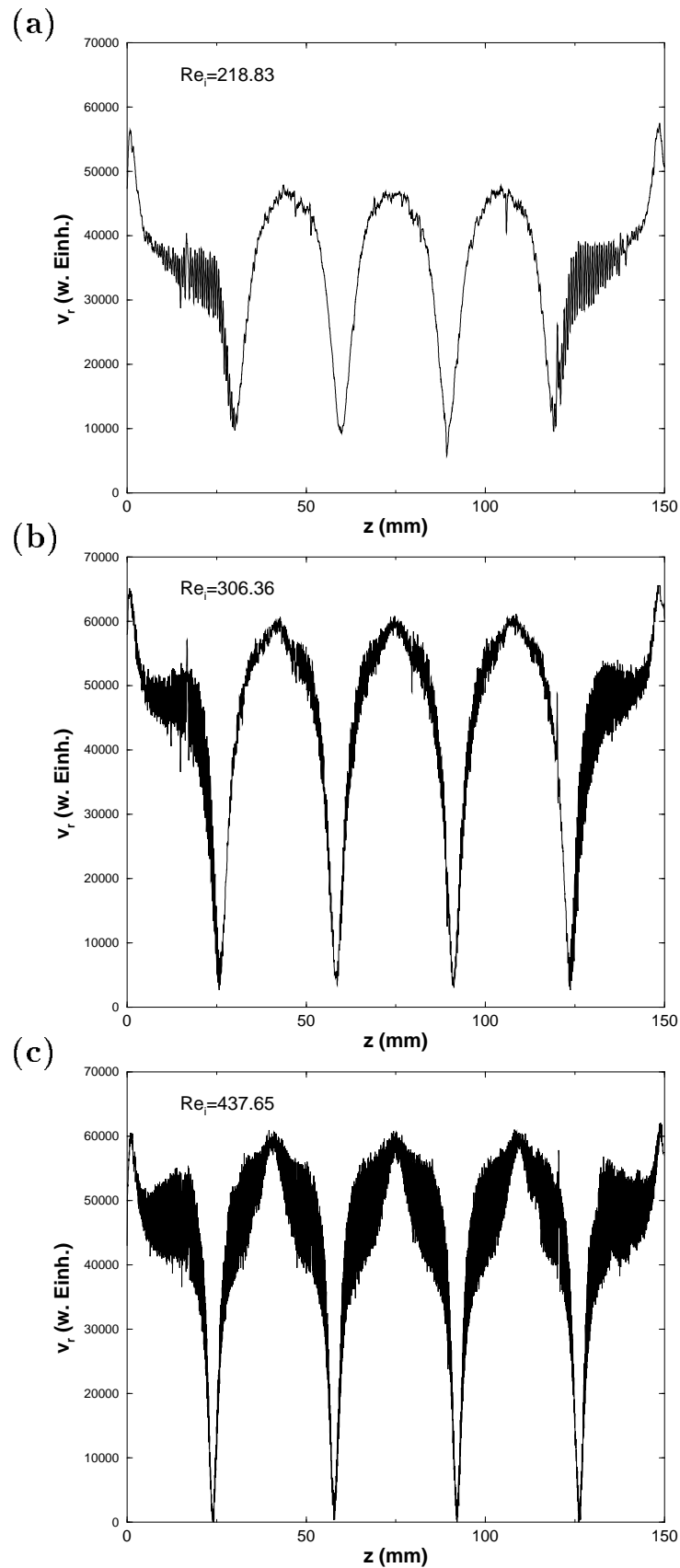


Abbildung 9.3: Radiale Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit vom axialen Abstand von der Bodenplatte im Zylinder bei  $Re_a = +75$ .  $Re_i$  wird von (a) bis (c) erhöht: (a)  $Re_i = 218,83$ , (b)  $Re_i = 306,36$  und (c)  $Re_i = 437,65$ .

die deutlich vergrößert sind und in axialer Richtung eine Ausdehnung von  $\Delta z \approx 30$  mm haben. Es befinden sich hier acht Wirbel im System.

Die Anwendung der LDA-Meßtechnik erlaubt eine Messung an jedem Ort im Zylinder. Somit läßt sich erkennen, daß es die Wirbelkerne sind, die oszillieren. Sichtbarkeitsmessungen im gleichen Parameterbereich konnten zeigen, daß sich auf den Ekman-Wirbeln eine Twist-artige Struktur ausgebildet hat.

Bei Erhöhung von  $Re_i$  fangen langsam auch die Wirbel in der Zylindermitte an zu oszillieren (Abb. 9.3(b)). Infolge der Schwingung nimmt die axiale Ausdehnung der Ekman-Wirbel ab.

Bei  $Re_i = 437,7$  (Abb. 9.3(c)) hat sich die Twist-artige Struktur auch auf den Wirbeln in der Zylindermitte ausgebildet. Der Bereich der Einwärtsströmung schwingt hier auch leicht mit, die Auswärtsströmung ist nahezu stationär.

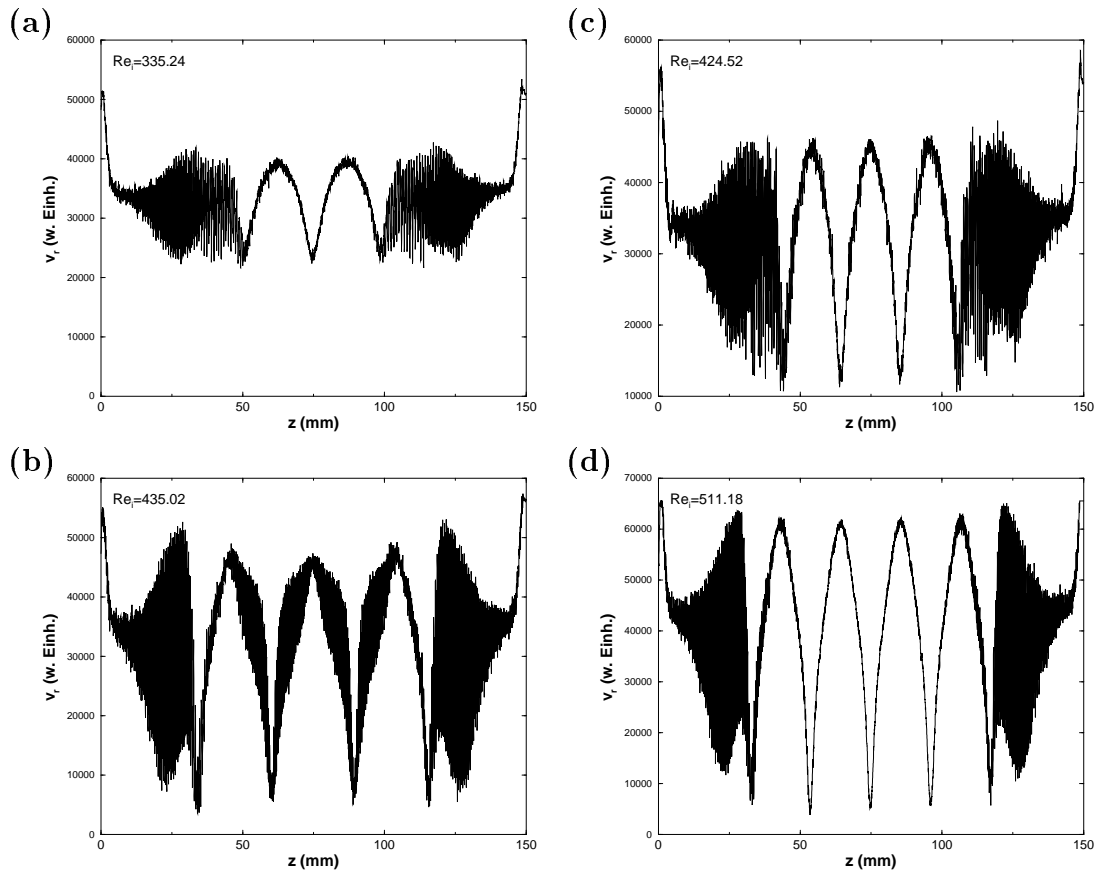


Abbildung 9.4: Radiale Geschwindigkeitsprofile bei (a)  $Re_a = +150$ ,  $Re_i = 335,24$ , (b)  $Re_a = +150$ ,  $Re_i = 435,02$ , (c)  $Re_a = +200$ ,  $Re_i = 424,52$  und (d)  $Re_a = +200$ ,  $Re_i = 511,18$ .

In Abbildung 9.2 ist eine Sichtbarkeitsaufnahme der Twist-Mode gezeigt. Zur Visualisierung sind der Flüssigkeit Aluminium-Flitter zugefügt worden. Man erkennt acht

Wirbel, die von einer seilartigen Struktur, der Twist-Mode, überlagert sind. Die dunklen Linien kennzeichnen die Auswärtsströmungen. Diese sind stationär. Da es sich um ein Taylor-Couette-System mit einem breiten Spalt handelt, sind die Strukturen gegenüber einem System mit einem schmalen Spalt (s. Abb. 4.7) deutlich vergrößert. Dieses resultiert auch in einer geringeren azimuthalen Wellenzahl.

Schon anhand dieser Ergebnisse läßt sich der Einfluß der Ränder und die im Vergleich zum schmalen Spalt gänzlich verschiedenen Stabilitätsgrenzen im Fall gleichsinnig rotierender Zylinder erkennen. Im schmalen Spalt tritt die Twist-Mode (abhängig von der mittleren Wellenlänge) ab  $Re_a \approx +600$  und  $Re_i \approx 700$  auf [9, 58].

Die Anzahl der Wirbel im System kann bei festem  $Re_a$  und Erhöhung von  $Re_i$  zunehmen. Dieses zeigen die Abbildungen 9.4(a,b) für  $Re_a = +150$  und 9.4(c,d) für  $Re_a = +200$ . Bei  $Re_a = +150$  und  $Re_i = 335,2$  (Abb.9.4(a)) befinden sich sechs Wirbel im System. Auffallend sind hier die besonders großen Ekman-Wirbel, die eine axiale Ausdehnung von  $\Delta z \approx 50$  mm aufweisen. Erhöht man die Reynoldszahl des Innenzylinders auf  $Re_i = 435,0$  (Abb.9.4(b)), kommt hier ein Wirbelpaar hinzu, so daß nun acht Wirbel im Zylinder sind. Dieses führt natürlich zu einer Abnahme der axialen Ausdehnung der Ekman-Wirbel. Deutlich ist die Twist-Mode auf allen Wirbeln erkennbar.

Die Abbildungen 9.4(c,d) zeigen ein ähnliches Verhalten. Bei Erhöhung von  $Re_i = 424,5$  auf  $Re_i = 511,2$  kommt ein neues Wirbelpaar hinzu und die Ekman-Wirbel werden kleiner.

Neben der guten räumlichen bietet das LDA-System auch eine hohe zeitliche Auflösung. Damit lassen sich die Schwingungsfrequenzen der Twist-Mode sehr gut bestimmen.

Die Abbildung 9.5(c) zeigt den Frequenzverlauf der Oszillation im Ekman-Wirbel für  $Re_a = +125$  in Abhängigkeit von  $Re_i$ . Aufgetragen ist die auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierte Frequenz der Twist-Mode gegenüber  $Re_i$ . Hierbei fällt eine streng monotone Abnahme der normierten Frequenz bei Erhöhung von  $Re_i$  auf. Der Sprung resultiert aus dem Aufkommen eines neuen Wirbelpaares. So steigt die Anzahl der Wirbel  $N$  dort von  $N = 8$  auf  $N = 10$ .

Jeweils ein Geschwindigkeitsprofil mit acht beziehungsweise zehn Wirbeln ist in den Abbildungen 9.5(a) und 9.5(b) dargestellt.

Hat sich die Twist-Mode auf allen Wirbeln im System ausgebildet, lassen sich für die einzelnen Wirbel unterschiedliche auf die Innenzylinderdrehfrequenz normierte Frequenzen feststellen. So erhält man im Acht-Wirbelzustand bei  $Re_a = +125$ ,  $Re_i = 464,8$ :

Wirbel Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_{norm}$	0,88	1,24	1,26	1,26	1,26	1,26	1,24	0,88

Die Wirbel sind hierbei vom Boden zum Deckel hin durchnummeriert. Es zeigt sich, daß die Twist-Mode auf den Ekman-Wirbeln sich von der Twist-Mode auf den Wirbeln in der Zylindermitte unterscheidet. Während die beiden mittleren Wirbelpaare phasengekoppelt sind, ist die normierte Frequenz der Twist-Mode auf den Ekman-Wirbeln unterschiedlich von allen anderen. Die Wirbel Nr. 2 und 7 nehmen eine Sonderstellung ein, da sie direkt an die Randwirbel angrenzen und deshalb von diesen beeinflusst werden.

Da es sich bei den normierten Frequenzen der Oszillation auf den Ekman-Wirbeln und auf den Wirbeln in der Zylindermitte um keine Vielfachen voneinander handelt, resultieren die Unterschiede also nicht nur aus anderen azimuthalen Wellenzahlen. Dieser Unterschied wird auch noch bei der Betrachtung von PIV-Aufnahmen im folgenden deutlich.

### 9.3 PIV-Aufnahmen der Twist-Mode

Während die LDA-Messung zur lokalen Geschwindigkeitsmessung sehr gut geeignet ist, erlaubt erst die Anwendung eines PIV-Systems eine Analyse der raum-zeitlichen Struktur des Strömungszustandes. Da es sich bei der Twist-Mode um einen periodischen Zustand handelt, konnten Aufnahmen aus verschiedenen Schwingungsperioden zusammengesetzt werden. Dieses war notwendig, da das PIV-System maximal ein Bild pro Sekunde aufnehmen kann (s. Abschnitt 6.2) und die Twist-Mode mit einigen Hertz oszilliert.

In diesem Abschnitt werden zum ersten Mal PIV-Aufnahmen vorgestellt, die eine Sequenz der Twist-Mode im breiten Spalt aufzeigen. Diese Aufnahmen werden zum weiteren Verständnis des Strömungszustandes beitragen.

Das System befindet sich bei  $Re_a = +90$  und  $Re_i = 322$  im Acht-Wirbelzustand. Die Ekman-Wirbel sind stark ausgedehnt. Die Abbildung 9.6 zeigt das periodische Verhalten der Twist-Mode auf einem Wirbel in der Zylindermitte. Die Berandungen links und rechts stellen den Ort des Innen- bzw. des Außenzylinders dar. Somit handelt es sich am oberen Rand des Bildes jeweils um eine Auswärtsströmung. Den Ort der Einwärtsströmung markiert der untere Bildrand. Zur Verdeutlichung ist die Lage der Wirbelkerne durch ein Kreuz gekennzeichnet (+).

In Abbildung 9.6(a) ist ein großer Wirbel zu sehen. Dieser soll als Ausgangspunkt der Periode dienen. Auffällig ist eine breite Auswärtsströmung am oberen Bildrand. Die Strömung im Wirbelkern ist nahezu strukturlos und läßt sich hier eindeutig identifizieren. Die Breite der Auswärtsströmung nimmt in den Abbildungen 9.6(b,c) ab, der strukturlose Bereich in der Kernregion wird größer und dehnt sich in axialer Richtung aus. In der Abbildung 9.6(d) klappt die Strömung entlang des Außenzylinders nach innen, und es setzt die Bildung eines Wirbels nahe der Auswärtsströmung ein. Hier lassen sich kurzzeitig zwei 'Wirbelkerne' ausmachen. Durch den starken oberen Wirbel wird die Wirbelbewegung in der Region nahe der Einwärtsströmung abgeschwächt (Abb. 9.6(e,f)) und ist schließlich fast nicht mehr auszumachen (Abb. 9.6(g)). Der obere Wirbel beginnt, sich in Richtung Einwärtsströmung auszudehnen (Abb. 9.6(h)), und die Schwingung beginnt von vorne.

Diese Bilder zeigen, daß das periodische Anwachsen eines Wirbels mit der damit verbundenen Verlagerung der Wirbelkerne zu der Erscheinung der Twist-Mode führen. Würde man die beiden Extrempositionen (Abb. 9.6(c) und 9.6(f)) der Schwingung an einem Punkt von außen betrachten, so würde man im ersten Fall einen stark reflektierenden Bereich ausmachen, weil eine starke Stömung in axialer Richtung am Außenzylinder entlang läuft. Im anderen Fall ist ein großes Gebiet am Außenzylinder nahe der Einwärtsströmung strukturlos und würde nur wenig Licht reflektieren.

Da die Twist-Mode eine zeitperiodische Schwingung ist und eine hohe azimuthale Wel-



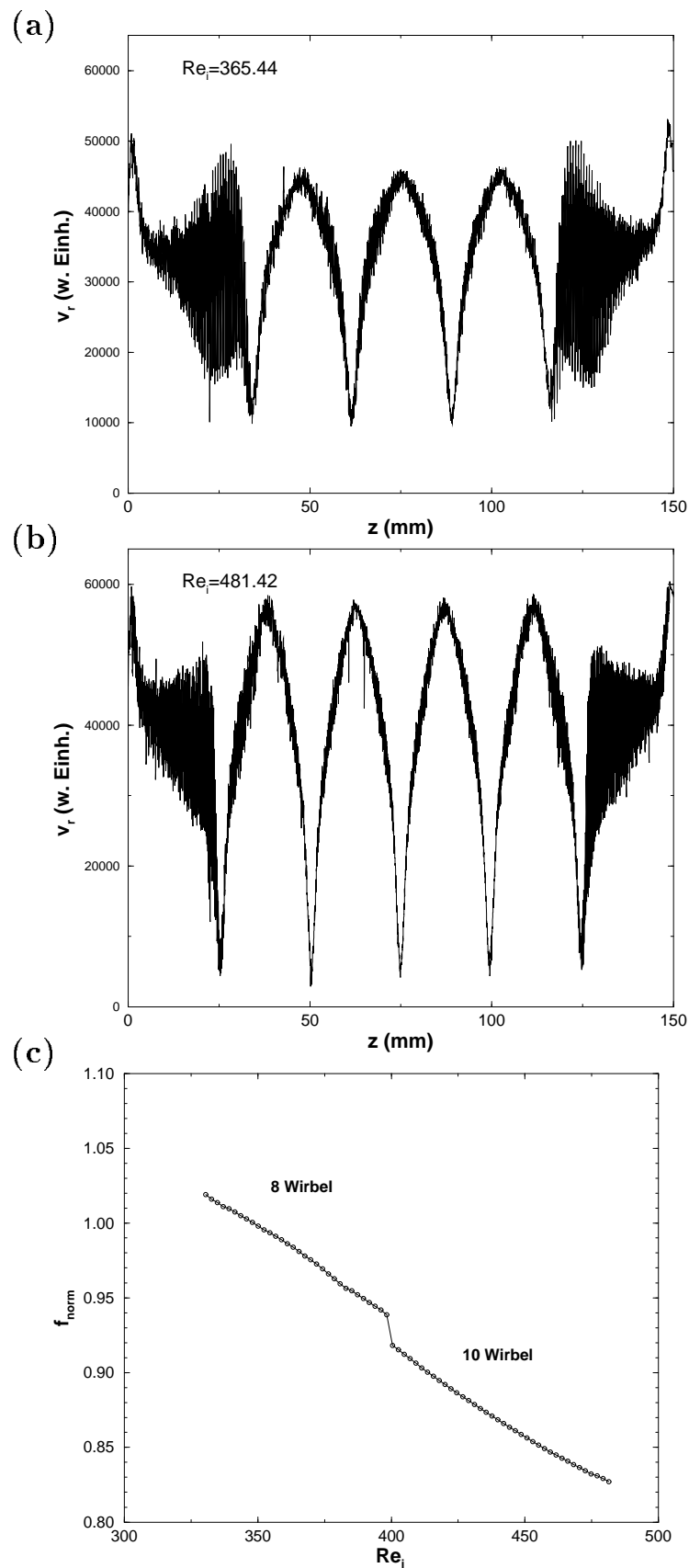


Abbildung 9.5: Radiale Geschwindigkeitsprofile bei (a)  $Re_a = +125$ ,  $Re_i = 365,4$  und (b)  $Re_a = +125$ ,  $Re_i = 481,4$ . (c) zeigt den Frequenzverlauf in Abhängigkeit von  $Re_i$  für die Twist-Mode auf den Ekman-Wirbeln.

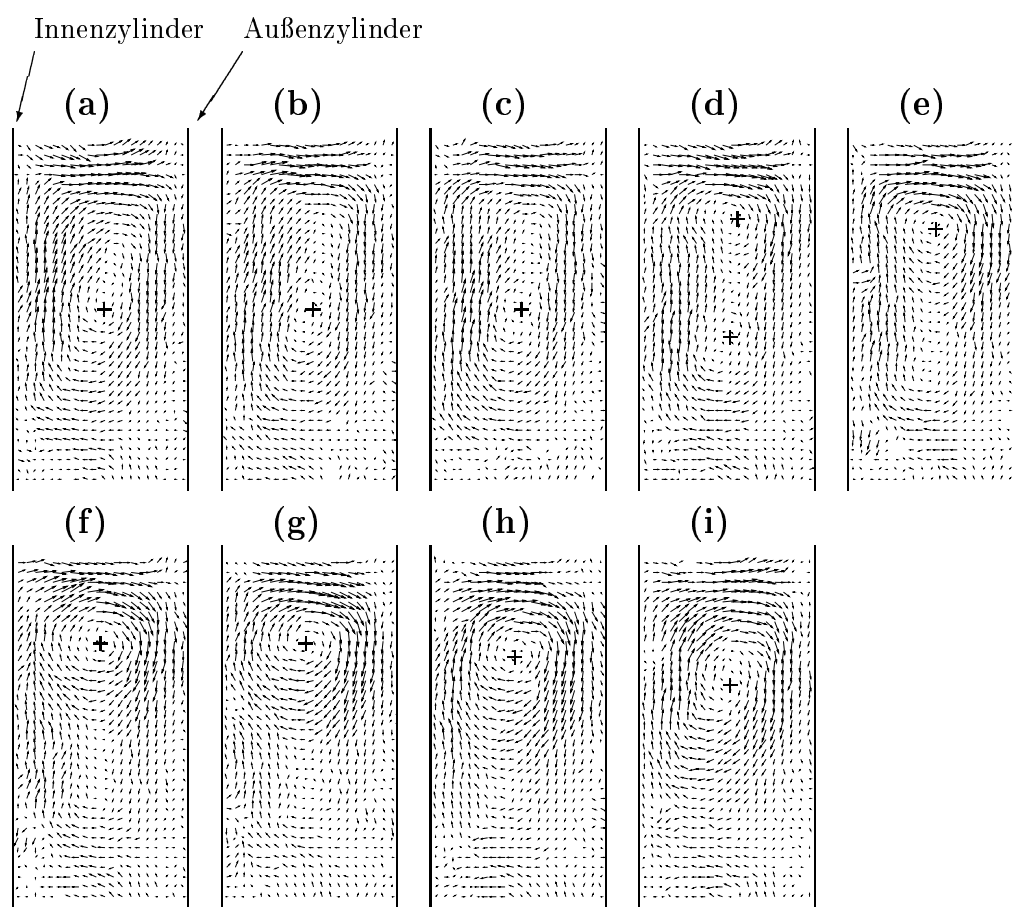


Abbildung 9.6: Sequenz einer Periode der Twist-Mode bei  $Re_a = +90$  und  $Re_i = 322$ . Dargestellt ist hier jeweils ein Wirbel. Die Kreuze kennzeichnen die Wirbelkerne, die ihre Lage im Wirbel während einer Periode ändern.

lenzahl aufweist, entsteht so also eine Struktur auf den Wirbeln, die das Aussehen eines geflochtenen Seils hat. Die theoretischen Ergebnisse zum Entstehen der Twist-Mode sind hiermit erstmals experimentell bestätigt worden.

Für einen ruhenden Außenzylinder taucht über einen großen  $(\Gamma, Re_i)$ -Bereich die Core-Mode als erste oder höhere Instabilität bei ausgedehnten Wirbeln auf. Bei dieser Mode handelt es sich um eine Schwingung der Wirbelkerne. Die Core-Mode in breiten Spalten wurde bereits intensiv untersucht [54, 101].

In Abbildung 9.7 sind PIV-Aufnahmen bei  $Re_a = 0$  und  $Re_i = 540$  im Sechswirbelzustand mit einer normierten Wirbelhöhe  $\gamma = \Gamma/N = 1.5$  dargestellt. In diesen Bildern befindet sich jeweils die Auswärtsströmung am unteren und die Einwärtsströmung am oberen Rand. Die Wirbelkerne sind hier wiederum als Kreuze gekennzeichnet. Die raum-zeitlichen Strukturen lassen sich gut erkennen.

Die Abbildungen 9.7(a) bis 9.7(l) zeigen die Sequenz einer Periode der Core-Mode. In Bild 9.7(a) existieren kurzzeitig zwei Wirbelkerne, wobei der äußere in Bild 9.7(b) bereits nicht mehr vorhanden ist. Die Position der Wirbelkerne verlagert sich sukzessive in den Abbildungen 9.7(c-g) von der Auswärtsströmung immer weiter Richtung Einwärtsströmung. Dabei dehnt sich der Wirbel aus. Es kommt entlang des Außenzylinders zu einer weitreichenden Strömung in axialer Richtung hin zum Ort der Einwärtsströmung.

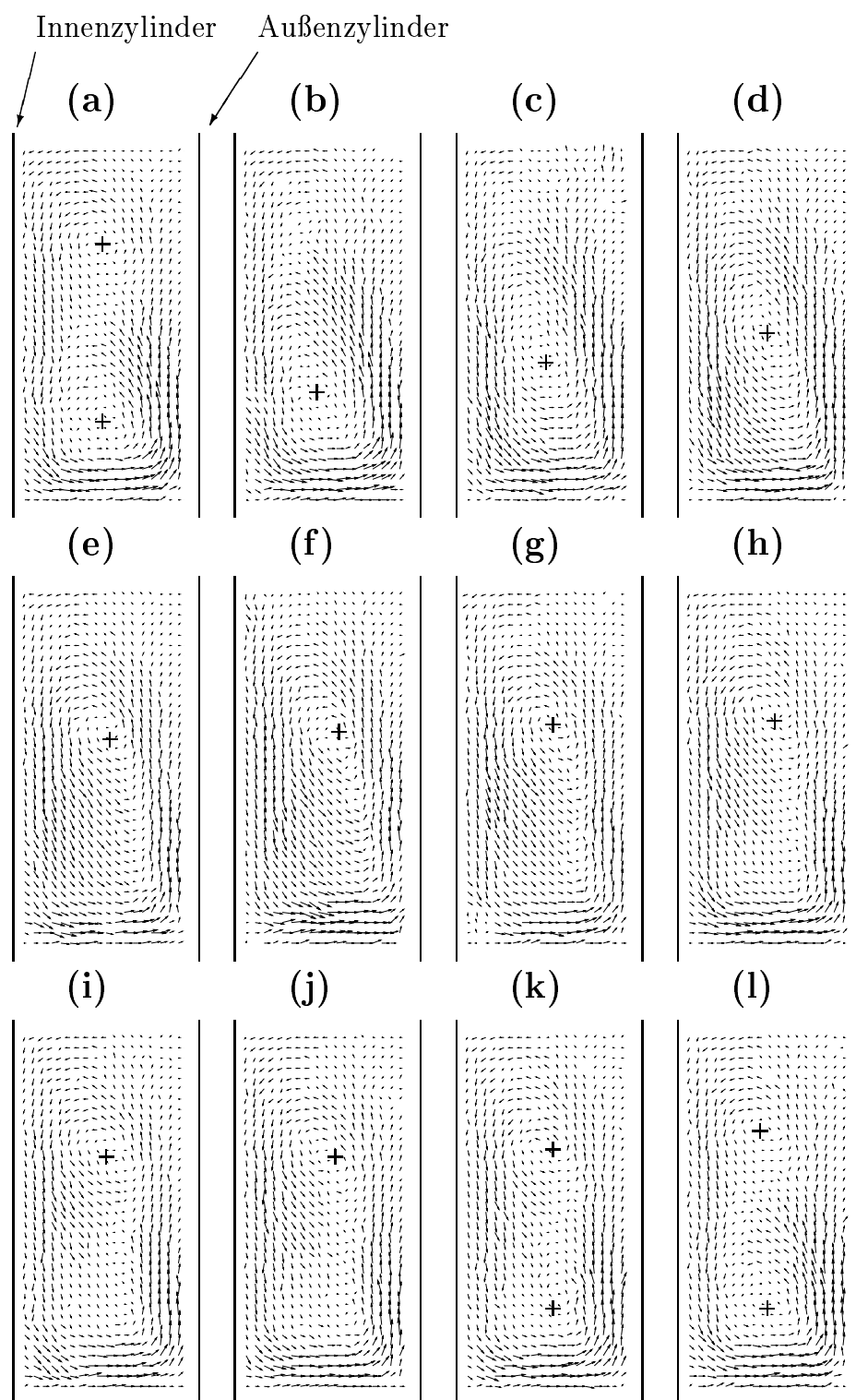


Abbildung 9.7: Sequenz einer Periode der Core-Mode bei  $\Gamma/N = 1.5$ . Es läßt sich ein ähnliches Strömungsverhalten wie bei der Twist-Mode erkennen (s. Abb. 9.6).

Durch die Verschiebung der Wirbelkerne weist die Strömung, die am Innenzylinder entlang läuft, eine deutliche zum Außenzylinder hin gerichtete radiale Komponente auf (Abb. 9.7(f)). Diese Geschwindigkeitskomponente nahe der Auswärtsströmung wird kleiner, (Abb. 9.7(h-j)) bis bei Abbildung 9.7(k) ein neuer Wirbelkern nahe der Auswärtsströmung entsteht.

Wie bei der Twist-Mode kommt es auch bei der Core-Mode zum periodischen Anwachsen eines Wirbels und der Verlagerung von Wirbelkernen.

Vergleicht man die Sequenzen der Twist-Mode (Abb. 9.6) mit denen der Core-Mode (Abb. 9.7), so stellt man eine gute Übereinstimmung des Strömungsverhaltens fest. Dieses legt die Vermutung nahe, daß es sich bei der Core-Mode im breiten Spalt und der Twist-Mode um den gleichen Strömungszustand handeln könnte.

Wie schon erwähnt, tauchen auch auf den Ekman-Wirbeln Twist-artige Strukturen auf, die bereits bei geringen Reynoldszahlen des Innenzylinders erscheinen (s. Abb. 9.3, 9.4 und 9.5). Diese unterscheiden sich unter anderem im Frequenzverhalten von der Twist-Mode in der Zylindermitte (s. Abschnitt 9.2).

Die PIV-Aufnahmen in Abbildung 9.8 zeigen auch ein unterschiedliches Strömungsverhalten. Die Ekman-Wirbel zeigen eine große axiale Ausdehnung. Infolge dessen nimmt die Anzahl der Geschwindigkeitsvektoren in der PIV-Aufnahme ab, die groben Strukturen sind aber immer noch zu erkennen. In Bild 9.8(a) ist ein großer Wirbel mit einer Auswärtsströmung am oberen Rand des Bildes auszumachen. Den unteren Rand bildet hier die Bodenplatte.

Die im Vergleich zur Einwärtsströmung starke Auswärtsströmung verlagert sich sukzessive immer weiter in Richtung Bodenplatte (Bilder 9.8(d) bis (f)). Bei Bild 9.8(f) sind im oberen und unteren Bereich des Bildes kaum Strukturen zu erkennen. In Bild 9.8(g) bildet sich im oberen Bereich ein neuer Wirbel mit einem zum vorhandenen Wirbel gleichgerichteten Drehsinn. Dieses führt bei Bild 9.8(j) zum Aufbrechen beider Wirbel, die dann zu einem großen verschmelzen (Abb. 9.8(l)). Eine neue Schwingungsperiode beginnt.

In diesem Kapitel wurde erstmals die Twist-Mode mit präzisen Meßverfahren (LDA und PIV) untersucht. Damit war es zum ersten Mal experimentell möglich, genaue Aussagen über innere Strukturen und physikalische Strömungseigenschaften der Twist-Mode zu erhalten.

Beide Meßverfahren zeigen deutlich, daß es sich bei der Twist-Mode um eine periodische Schwingung (in der Nähe) der Wirbelkerne handelt. Dieses war theoretisch vorhergesagt worden, konnte aber in der hier gezeigten Deutlichkeit experimentell vorher nicht bestätigt werden. Ein Vergleich der Twist-Mode mit der bei ruhendem Außenzylinder und breitem Spalt auftretenden Core-Mode zeigt eine Übereinstimmung im Strömungsverhalten. Dieses legt die Vermutung nahe, daß es sich hierbei um die gleichen physikalischen Strukturen handelt. Hier werden noch weitergehende Untersuchungen Klarheit bringen.

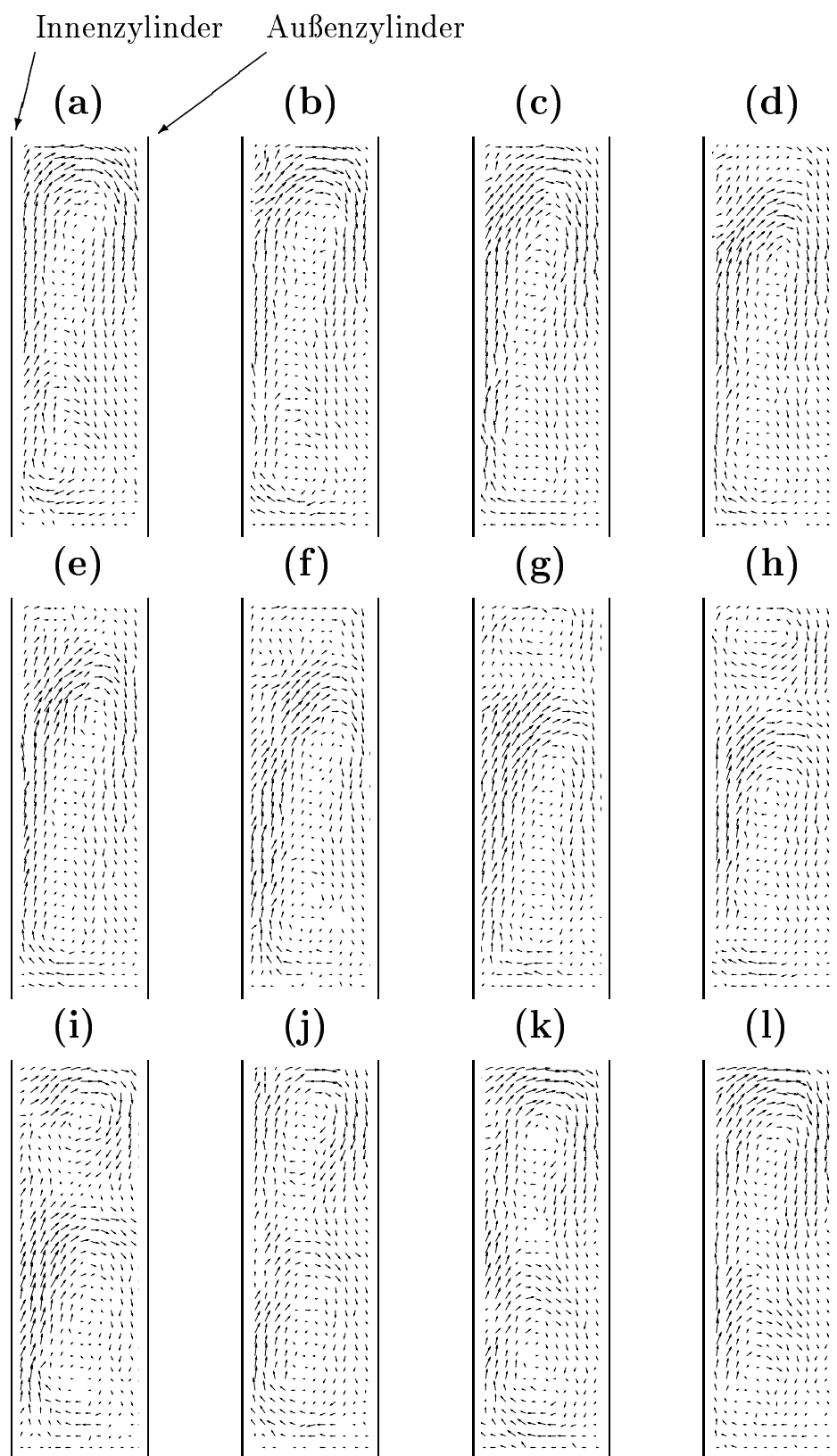


Abbildung 9.8: Sequenz der Twist-artigen Strukturen auf den Ekman-Wirbeln.



# Kapitel 10

## Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse von Strömungsformen und Verzweigungen, die zwischen unabhängig voneinander rotierenden Zylindern im breiten Spalt ( $\eta = 0,5$ ) auftreten.

Da, wie in der Arbeit gezeigt, die Kontrollparameter, wie die Reynoldszahlen und die Randbedingungen, die Systemzustände wesentlich beeinflussen, ist im Experiment eine hohe Präzision die Grundvoraussetzung für reproduzierbare Meßergebnisse. Darauf mußte bei der Entwicklung und dem anschließenden Aufbau des Taylor–Couette–Systems mit unabhängig voneinander rotierenden Zylindern geachtet werden.

Mit der Laser–Doppler–Anemometrie (LDA) und der Particle Image Velocimetry (PIV) kamen erstmals bei rotierendem Außenzylinder zwei moderne optische Meßverfahren zusammen zum Einsatz, die eine präzise Analyse der vorliegenden Strömungsformen ermöglichen.

Bei kleinen Geometrien ( $\Gamma < 1,4$ ) waren die Strömungszustände bei ruhendem Außenzylinder bekannt. Da sich zudem aufgrund der geringen räumlichen Abmessungen nur eine sehr begrenzte Anzahl an Moden ausbildet, ließ sich hier der Einfluß einer Außenzylinderrotation auf deren Existenzbereiche besonders gut studieren.

Es wurde sowohl bei einer stationären Gabelverzweigung als auch bei einer Hopf–Verzweigung eine starke Abhängigkeit der Lage der Verzweigungspunkte von der Reynoldszahl des Außenzylinders ( $Re_a$ ) entdeckt.

Bei ruhendem Außenzylinder bewirkt eine Veränderung des Höhen– zu Breitenverhältnisses  $\Gamma$  einen Wechsel in der Art der Verzweigung vom Zwei– in den Einwirbelzustand. Eine ähnliche Abhängigkeit konnte bei festem  $\Gamma$  durch eine Variation von  $Re_a$  beobachtet werden.

Der Vergleich mit numerischen Simulationen der exakten Navier–Stokes–Gleichungen unter realistischen Randbedingungen von Tavener zeigte über einen großen Parameterbereich hinweg quantitative Übereinstimmung.

Bei ausgedehnteren Systemen ( $\Gamma = 12$ ) im breiten Spalt treten neben der Taylor–Wirbelströmung bei stärkerer Gegenrotation Spiralen und gegenläufige Spiralen als erste Instabilität der Couette–Strömung auf. Hierbei handelt es sich um zeitperiodische, in azimuthaler und axialer Richtung um den Innenzylinder laufende Strukturen. Da sich die Dynamik bei gegeneinander rotierenden Zylindern nahe am Innenzylinder abspielt, ist



diese durch reine Sichtbarkeitsmessungen von außen nicht zugänglich.

Mit dem LDA und dem PIV war in dieser Arbeit zum ersten Mal eine genaue Analyse der Stabilitätsbereiche und der charakteristischen Eigenschaften der auftretenden Moden, sowie eine Untersuchung ihres raum-zeitlichen Verhaltens möglich.

So führte die Aufnahme einer Sequenz von der Entstehung und Vernichtung der Spiralen in endlichen System zum näheren Verständnis dieses Strömungszustandes.

Es zeigte sich, daß die Numerik unter Annahme periodischer Randbedingungen in axialer Richtung (Langford et al., Hoffmann und Lücke) nur bedingt geeignet ist, die Dynamik in endlichen Systemen zu beschreiben. Die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse werden als Anhaltspunkte für zukünftige numerische Simulationen dienen, die die Besonderheiten realer Systeme berücksichtigen.

Als höhere Instabilitäten konnten die Wavy-Mode und ebenso ein Zustand propagierender Taylor-Wirbel mit azimuthaler Wellenzahl  $m = 0$  beobachtet werden.

Eine vom optischen Erscheinungsbild her auffällige Mode ist die zwischen gleichsinnig rotierenden Zylindern auftretende Twist-Mode. In dieser Arbeit konnten zum ersten Mal die von der Theorie vorhergesagten physikalischen Aspekte dieser Mode bestätigt werden. Es wurde außerdem eine große Ähnlichkeit zu der im breiten Spalt bei ruhendem Außenzylinder zu beobachtenden Core-Mode festgestellt.

Ob es sich hierbei um den gleichen Strömungszustand handelt, werden zukünftige Untersuchungen zeigen.

Ein interessantes Untersuchungsgebiet stellt auch die bei der Wechselwirkung zwischen Taylor-Wirbelströmung und Spiralen auftretenden Hysterese dar. Auffallend ist die starke Abhängigkeit des Maßes der Hysterese von  $Re_a$ . Zur abschließenden Klärung sind in diesem Bereich noch weitere Messungen notwendig.

In dieser Arbeit konnte ein deutlicher Einfluß der Ränder auf die auftretenden Strömungsformen festgestellt werden. Dieser Einfluß ließe sich durch ein System mit weichen Rändern (Durchfluß) reduzieren. Inwieweit sich diese veränderten Randbedingungen auf die in dieser Arbeit untersuchten Strömungszustände auswirken, wird in zukünftigen Untersuchungen geklärt werden müssen.

Es besteht aktuell ein großes theoretisches Interesse (hier seien vor allem die Gruppen um Mullin, Tavener, Tagg und Lücke erwähnt) an präzisen experimentellen Ergebnissen der zwischen rotierenden Zylindern auftretenden Strömungszustände. Durch eine Fortführung der Zusammenarbeit von theoretisch und experimentell arbeitenden Gruppen wird das Verständnis der zugrundeliegenden Dynamik in Zukunft wachsen.

# Anhang A

## Kenndaten der Apparatur

- Taylorzylinder:

Radius des Außenzylinders	$R_o$	$25 \pm 0.005$ mm
Radius des Innenzylinders	$R_i$	$12.5 \pm 0.005$ mm
Exzentrizität des Innenzylinders		$\leq 0.005$ mm
Spaltbreite	$d$	$12.5 \pm 0.01$ mm
Radienverhältnis	$\eta$	$0.5 \pm 0.0003$ mm
Länge des Spaltes	$L$	$0 \dots 232$ mm
Absolutfehler von $L$	$\Delta L$	$\leq 0.03$ mm

- Meßflüssigkeit: Silikonöl

Temperatur	$T$	$21.00 \pm 0.01^\circ$ C
Viskosität	$\nu$	$\approx 5 \dots 50$ cSt
Temperaturkoeffizient	$-d\nu/dT$	$0.20$ cSt/K
Durchmesser Latex-Streuteilchen	$\emptyset$	$6.8\mu\text{m}$

- Drehzahlregelung:

Drehzahlbereich - Innenzylinder	$\omega_i$	$0.5 \dots 50$ Hz
Außenzylinderantrieb über Getriebe (Untersetzung wählbar)		$3.7 : 1, 14 : 1, 43 : 1$
Auflösung		$0.001 \dots 0.1$ Hz (4 gültige Ziffern)
Drehzahlschwankungen		$0.01\%$ kurzzeitig $0.00001\%$ langfristig
	$\Delta Re/Re$	$\leq 0.004$

- LDA-System:

Laserleistungen		5 mW
Wellenlänge	$\lambda$	632.8 $\mu\text{m}$ (He-Ne)
Frequenzen der Braggzellentreiber	$f_{1,2}$	40.0 bzw. 40.1 MHz
Verschiebungsfrequenz	$f_D$	100.00 $\pm$ 0.001 kHz
Brennweite der Sendelinse	$f_S$	248.8 mm
Brennweite der Empfangslinse	$f_e$	275 mm
Meßvolumen	Durchmesser $\phi$	0.1 mm
	Länge	0.8 mm

- Datenerfassung:

LDA-Bandpaß		18 ... 190 kHz
Eingangsbereich des PLL-Tracker		10 ... 200 kHz
Abtastfrequenzen		10 ... 500 Hz
Wandlungsbereich		-5 ... + 5 V
Wandlerauflösung	14 Bit	$\approx$ 0.61 mV

# Anhang B

## Wichtige Meßdaten ( $\Gamma < 1,4$ )

In den folgenden Tabellen sind ausgewählte Meßdaten dargestellt. Zu deren Beschreibung sind einige wichtige Parameter notwendig:

$\Gamma$  gibt das Höhen- zu Breiten-Verhältnis an,  $Re_{i,krit}$  die kritische Reynoldszahl des Innenzylinders,  $Re_i^*$  die aus Hysterese resultierende kritische Reynoldszahl,  $Re_i^\dagger$  die kritische Reynoldszahl des restabilisierten Zwei-Wirbel-Zustandes,  $Re_{a,krit}$  die kritische Reynoldszahl des Außenzylinders und  $\frac{\omega_a * r_a}{\omega_i * r_i}$  das Verhältnis der azimuthalen Geschwindigkeiten.

$\Gamma$	$Re_{i,krit}$	$Re_i^*$	$Re_i^\dagger$	$Re_{a,krit}$	$\frac{\omega_a * r_a}{\omega_i * r_i}$	Bemerkungen
0.56	246.97	–	–	-48.27	-0.195	–
0.56	248.01	–	–	-28.96	-0.117	–
0.56	246.97	–	–	-14.48	-0.059	–
0.56	249.05	–	–	0.0	0.0	–
0.56	251.12	–	–	14.48	0.058	–
0.56	252.16	–	–	28.96	0.115	–
0.56	252.16	–	–	48.27	0.191	–
0.71	177.45	–	–	-48.27	-0.272	–
0.71	180.56	–	–	-28.96	-0.160	–
0.71	182.64	–	–	-14.48	-0.079	–
0.71	183.67	–	–	0.0	0.0	–
0.71	185.75	–	–	14.48	0.078	–
0.71	187.82	–	–	28.96	0.154	–
0.71	194.05	–	–	48.27	0.249	–
0.86	140.09	–	–	-48.27	-0.345	–
0.86	142.16	–	–	-28.96	-0.204	–
0.86	144.24	–	–	-14.48	-0.100	–
0.86	149.43	–	–	0.0	0.0	–
0.86	153.58	–	–	14.48	0.094	–
0.86	158.77	–	–	28.96	0.182	–
0.86	169.15	–	–	48.27	0.285	–

$\Gamma$	$Re_{i,krit}$	$Re_i^*$	$Re_i^\dagger$	$Re_{a,krit}$	$\frac{\omega_a * r_a}{\omega_i * r_i}$	Bemerkungen
0.96	126.02	–	–	-38.82	-0.308	–
0.96	128.53	–	–	-23.29	-0.181	–
0.96	131.03	–	–	-11.65	-0.089	–
0.96	135.79	–	–	0.0	0.0	–
0.96	141.13	–	–	11.65	0.083	–
0.96	149.06	–	–	23.29	0.156	–
0.96	161.91	–	–	38.82	0.240	–
1.04	117.7	–	–	-47.34	-0.402	–
1.04	117.7	–	–	-32.55	-0.277	–
1.04	120.8	–	–	-17.75	-0.147	–
1.04	127.2	–	–	0.0	0.0	–
1.04	137.6	–	–	17.75	0.129	–
1.04	152.0	–	–	32.55	0.214	–
1.04	179.0	–	–	47.34	0.264	–
1.08	114.34	–	–	-38.82	-0.340	–
1.08	116.84	–	–	-23.29	-0.199	–
1.08	121.01	–	–	-11.65	-0.096	–
1.08	126.86	–	–	0.0	0.0	–
1.08	136.04	–	–	11.65	0.086	–
1.08	148.56	–	–	23.29	0.157	–
1.08	183.61	–	–	38.82	0.211	–
1.12	112.07	–	–	-48.27	-0.431	–
1.12	114.14	–	–	-28.96	-0.254	–
1.12	117.26	–	–	-14.48	-0.123	–
1.12	126.60	–	–	0.0	0.0	–
1.12	139.05	–	–	14.48	0.104	–
1.12	158.77	–	–	28.96	0.182	–
1.12	–	–	508.47	-48.27	-0.095	restab. 2WZ
1.12	–	–	466.97	-28.96	-0.062	restab. 2WZ
1.12	–	–	429.61	-14.48	-0.034	restab. 2WZ
1.12	–	–	386.02	0.0	0.0	restab. 2WZ
1.12	–	–	377.72	14.48	0.038	restab. 2WZ
1.12	–	–	317.54	28.96	0.091	restab. 2WZ

$\Gamma$	$Re_{i,krit}$	$Re_i^*$	$Re_i^\dagger$	$Re_{a,krit}$	$\frac{\omega_a * r_a}{\omega_i * r_i}$	Bemerkungen
1.20	108.5	–	–	-38.82	-0.358	–
1.20	109.33	–	–	-23.29	-0.213	–
1.20	116.01	–	–	-11.65	-0.100	–
1.20	120.37	–	–	-7.24	-0.060	–
1.20	126.86	–	–	0.0	0.0	–
1.20	138.01	–	–	7.24	0.052	–
1.20	148.56	–	–	11.65	0.078	–
1.20	–	–	388.09	-38.82	-0.100	restab. 2WZ
1.20	–	–	353.03	-23.29	-0.066	restab. 2WZ
1.20	–	–	322.16	-11.65	-0.036	restab. 2WZ
1.20	–	–	311.31	-7.24	-0.023	restab. 2WZ
1.20	–	–	284.60	0.0	0.0	restab. 2WZ
1.20	–	–	261.50	7.24	0.028	restab. 2WZ
1.20	–	–	236.19	11.65	0.049	restab. 2WZ
1.24	104.7	–	–	-40.70	-0.389	–
1.24	107.9	–	–	-24.42	-0.226	–
1.24	119.9	–	–	-8.14	-0.068	–
1.24	130.6	–	–	0.0	0.0	–
1.24	139.8	–	–	4.07	0.029	–
1.24	146.9	145.1	–	6.1	0.042	Hysterese
1.24	159.2	150.4	–	8.14	0.051	Hysterese
1.24	–	–	339.4	-40.70	-0.120	restab. 2WZ
1.24	–	–	307.9	-24.42	-0.079	restab. 2WZ
1.24	–	–	264.2	-8.14	-0.034	restab. 2WZ
1.24	–	–	236.2	0.0	0.0	restab. 2WZ
1.24	–	–	218.7	4.07	0.019	restab. 2WZ
1.24	–	–	209.8	6.10	0.029	restab. 2WZ
1.24	–	–	194.1	8.14	0.042	restab. 2WZ

$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$
-76,33	659,98	-62,02	628,17	-32,44	707,68
-59,16	727,56	-47,39	681,44	-25,13	755,39
-44,53	746,65	-29,58	761,75	-14,95	822,98
-32,44	791,17	-14,95	866,71	0	922,37
-17,81	841,27	0	920,78	11,77	993,94
0	906,47	17,81	1008,25	14,95	1025,74
14,95	970,08	32,44	1089,36		
29,58	1025,74				
44,53	1085,38				
62,02	1160,92				

Tabelle B.1: Einsätze einer Hopf-Verzweigung im asymmetrischen Ein-Wirbel-Zustand unter Einfluß einer Außenzylinderrotation. In der ersten Spalte sind die Ergebnisse für  $\Gamma = 1,0$  aufgeführt, in der zweiten die für  $\Gamma = 1,1$  und in der dritten die für  $\Gamma = 1,2$ .

# Anhang C

## Wichtige Meßdaten ( $\Gamma = 12$ )

Gleichsinnig rotierende Zylinder ( $Re_a > 0$ ) :

$Re_a$	$Re_i$
0	68,4
5	71,7
10	74,8
25	88,3
40	108,8
50	124,8
60	142,9
75	166,8
100	214,0
125	260,6
150	307,9

Tabelle C.1: Kritische Reynoldszahlen des Innenzylinders  $Re_i$  für den Einsatz der Taylor-Wirbelströmung bei gleichsinniger Rotation der Zylinder in Abhängigkeit von  $Re_a$ .

Gegeneinander rotierende Zylinder ( $Re_a < 0$ ) :



$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$
-77,76	97,76	-38,89	76,32
-77,58	97,73	-30,65	70,95
-77,54	97,73	-20,43	67,17
-77,35	97,45	-15,27	66,05
-76,62	96,71	-10,22	66,23
-71,51	94,22	-5,09	66,58
-61,30	88,43	0	68,42
-51,08	82,29		

Tabelle C.2: Kritische Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  und des Innenzylinders  $Re_i$  für das Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung bei gegenrotierendem Außenzylinder.

$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$
-158,57	130,50	-116,03	113,62	-81,73	99,30
-155,53	129,60	-112,39	112,00	-81,22	99,30
-154,70	128,43	-112,16	111,83	-79,69	98,47
-145,03	125,07	-108,29	110,26	-78,67	98,09
-143,03	124,78	-104,42	108,90	-78,51	98,16
-139,23	122,71	-102,16	107,77	-78,32	98,16
-135,36	121,92	-100,56	107,04	-78,16	98,16
-132,81	120,47	-96,69	105,53	-77,74	97,88
-131,50	119,49	-92,82	103,60	-77,62	97,94
-127,63	118,13	-88,95	102,39	-77,58	97,96
-123,76	116,41	-86,84	101,42	-77,54	97,95
-122,60	116,16	-85,09	100,88		
-119,90	114,98	-83,15	99,74		

Tabelle C.3: Kritische Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  und des Innenzylinders  $Re_i$  für das Einsetzen der Spiralwellen.

$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$
-309,40	165,28	-194,42	141,49
-270,73	160,70	-183,71	137,16
-251,39	154,69	-174,04	133,94
-233,29	152,57	-164,37	131,65
-212,71	146,24		

Tabelle C.4: Kritische Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  und des Innenzylinders  $Re_i$  für das Einsetzen der Gegenläufigen Spiralwellen.

$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$
-145,03	168,14	-101,77	124,23	-78,51	107,04
-139,23	167,07	-100,56	122,13	-78,32	107,19
-135,36	163,63	-96,69	118,56	-78,20	106,96
-132,31	160,00	-92,82	115,05	-78,12	107,04
-127,63	157,33	-91,60	114,78	-77,74	106,89
-119,89	142,74	-88,95	111,47	-77,66	106,89
-116,03	140,81	-85,09	107,61	-77,62	99,24
-108,29	134,51	-81,22	107,61	-77,58	99,24
-104,42	124,92	-79,28	107,39	-77,54	99,09

Tabelle C.5: Kritische Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  und des Innenzylinders  $Re_i$  für den Endpunkt der Spiralwellen.

$Re_a$	$Re_i$	$Re_a$	$Re_i$
-193,38	188,89	-101,89	170,38
-174,04	184,59	-91,70	166,58
-164,37	183,88	-81,73	161,61
-158,57	182,09	-71,51	156,85
-154,70	181,02	-61,30	155,75
-145,03	180,30	-51,08	151,31
-135,36	179,23	-40,86	156,32
-122,26	175,81	-30,65	191,65
-112,08	173,92		

Tabelle C.6: Kritische Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  und des Innenzylinders  $Re_i$  für das Einsetzen der Wavy-Mode.

(a)	untere Grenze der Spiralwellen	obere Grenze der Spiralwellen
$Re_a$	$Re_i$	$Re_i$
-104,42	108,90	124,92
-100,56	107,04	122,13
-96,69	105,53	118,56
-92,82	103,60	115,05
-88,95	102,39	111,47
-85,09	100,89	107,61
-81,22	99,31	107,61
-79,28	98,59	107,39
-78,20	98,16	106,96
-78,12	98,16	107,04

(b)	untere Grenze der Spiralwellen	obere Grenze der Spiralwellen
$Re_a$	$Re_i$	$Re_i$
-157,44	130,24	138,56
-134,95	121,50	128,16
-116,96	113,60	121,09
-104,42	108,54	124,57
-103,46	108,35	123,83
-100,56	106,89	121,20
-96,69	105,32	117,77
-94,47	104,86	118,17
-92,82	103,33	115,05
-88,95	102,31	110,18
-85,09	100,60	107,18
-81,22	99,02	103,03
-79,28	98,24	98,81
-78,20	97,88	98,24
-78,12	7,88	98,25

Tabelle C.7: Kritische Reynoldszahlen der Spiralwellen für die Messung der Hysterese: (a) Ergebnisse bei Erhöhung von  $Re_i$ , (b) Ergebnisse bei Erniedrigung von  $Re_i$ .

$Re_a$	$f_{\text{norm}}$	$Re_a$	$f_{\text{norm}}$	$Re_a$	$f_{\text{norm}}$
-158,57	0,3202	-119,89	0,3114	-83,15	0,2879
-155,53	0,3164	-116,65	0,3081	-81,73	0,2866
-154,70	0,3230	-112,38	0,3070	-81,22	0,2847
-153,24	0,3211	-112,16	0,3065	-79,69	0,2853
-147,41	0,3235	-108,29	0,3039	-79,28	0,2835
-143,03	0,3183	-104,42	0,3018	-78,67	0,2848
-139,23	0,3167	-102,16	0,3009	-78,51	0,2836
-137,58	0,3170	-100,55	0,2998	-78,32	0,2836
-135,36	0,3170	-96,69	0,2969	-78,24	0,2846
-132,81	0,3164	-92,82	0,2946	-78,20	0,2836
-131,49	0,3196	-91,95	0,2938	-78,16	0,2836
-127,63	0,3133	-88,95	0,2909	-78,12	0,2833
-123,76	0,3141	-86,84	0,2904	-77,74	0,2833
-122,60	0,3124	-85,08	0,2879	-77,66	0,2837

Tabelle C.8: Auf die Innenzylinder-Drehfrequenz normierte Frequenzen der Spiralwellen, gemessen am Einsatzpunkt.

$Re_a$	$f_{\text{norm}}$	$Re_a$	$f_{\text{norm}}$
-233,29	0,3788	-183,89	0,3454
-216,19	0,3553	-174,04	0,3603
-212,71	0,3716	-173,68	0,3240
-194,15	0,3660	-164,37	0,3450
-193,38	0,3653	-163,46	0,3220

Tabelle C.9: Auf die Innenzylinder-Drehfrequenz normierte Frequenzen der Gegenläufigen Spiralwellen, gemessen am Einsatzpunkt.

$Re_a$	$f_{\text{norm}}$	$Re_a$	$f_{\text{norm}}$
-193,38	0,1497	-112,08	0,0727
-183,71	0,1455	-101,89	0,0667
-174,04	0,1413	-91,70	0,0681
-164,37	0,1151	-81,73	0,0729
-158,57	0,1094	-71,51	0,0822
-154,70	0,0913	-61,30	0,0859
-145,03	0,0918	-51,08	0,0875
-139,23	0,0893	-40,86	0,1173
-135,36	0,0834	-30,65	0,1231
-119,89	0,0768		

Tabelle C.10: Auf die Innenzylinder-Drehfrequenz normierte Frequenzen der Wavy-Mode, gemessen am Einsatzpunkt. Für  $Re_a < 158$  existiert eine Mode mit der azimuthaler Wellenzahl  $m = 1$ , für  $Re_a \geq 158$  eine mit  $m = 2$ .

	Einsatz der Taylor–Wirbelströmung	Einsatz der Spiralwellen
$Re_i$	$Re_a$	$Re_a$
100,17	-74,64	-78,12
111,51	-84,34	-89,52
113,18	-87,04	-91,54

Tabelle C.11: Kritische Reynoldszahlen des Außenzylinders  $Re_a$  für den Einsatz der Taylor–Wirbelströmung (bei Erhöhung von  $Re_a$ ), beziehungsweise der Spiralwellen (bei Erniedrigung von  $Re_a$ ) für drei verschiedene Reynoldszahlen  $Re_i$ . Deutlich ist eine Hysterese zu erkennen.

# Literaturverzeichnis

## Teile der Arbeit wurden bereits veröffentlicht:

- [1] **J. Abshagen, A. Schulz, G. Pfister** (1996): The Couette–Taylor flow: A paradigmatic system for instabilities, pattern formation and routes to chaos, in 'Nonlinear physics of complex systems', ed. J. Parisi, S.C. Müller, W. Zimmermann, Springer Verlag, Berlin
- [2] **A. Schulz, W. Prange, G. Pfister** (1997): External perturbations on scenarios in Couette–Taylor flow, Proceedings of the 10<sup>th</sup> international Couette–Taylor workshop, Paris, Frankreich
- [3] **A. Schulz, S. Füsler, G. Pfister** (1999): Bifurcation and mode interaction with independently rotating cylinders in Taylor–Couette flow, Proceedings of the 11<sup>th</sup> international Couette–Taylor workshop, Bremen
- [4] **A. Schulz, G. Pfister** (2000): Bifurcation and structure of flow between counter-rotating cylinders, in 'Physics of rotating fluids', ed. by C. Egbers, G. Pfister, Springer Verlag, Berlin

## Verwendete Literatur:

- [5] **J. Abshagen** (1996): Wellenlängenselektion bei symmetriebrechenden Verzweigungen in der Taylor–Couette Strömung, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [6] **J. Abshagen** (2000): Organisation chaotischer Dynamik in der Taylor–Couette Strömung, Dissertation, Universität Kiel
- [7] **A. Aitta, G. Ahlers, D.S. Cannell** (1985): Tricritical phenomena in rotating Couette–Taylor flow, Phys. Rev. Lett. **54**, Nr. 7, 673–676
- [8] **A. Aitta** (1989): Dynamics near a tricritical point in Couette–Taylor flow, Phys. Rev. Lett. **62**, Nr. 18, 2116–2119
- [9] **C.D. Andereck, S.S. Liu, H.L. Swinney** (1986): Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders, J. Fluid Mech. **164**, 155–183
- [10] **J. Antonijoan, F. Marquès, J. Sánchez** (1998): Non-linear spirals in the Taylor–Couette problem, Physics of Fluids **10**, 829–838

- [11] **J.H. Argyris, G. Faust, M. Haase** (1994): Die Erforschung des Chaos, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden
- [12] **T.B. Benjamin** (1978): Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid – II. Experiments, Proc. R. Soc. Lond. A. **359**, 27–43
- [13] **T.B. Benjamin, T. Mullin** (1981): Anomalous modes in the Taylor experiment, Proc. R. Soc. Lond. A **377**, 221–249
- [14] **T.B. Benjamin, T. Mullin** (1982): Notes on the multiplicity of flows in the Taylor experiment, J. Fluid Mech. **121**, 219–230
- [15] **P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal** (1984): Order within chaos, Hermann, Paris
- [16] **P. Büchel, M. Lücke** (1996): Pattern selection as a nonlinear eigenvalue problem, in: 'Nonlinear physics of complex systems - Current status and future trends', ed. J. Parisi, S.C. Müller, W. Zimmermann, Springer Verlag, Berlin
- [17] **J. E. Burkhalter, E. L. Koschmieder** (1974): Steady supercritical Taylor vortices after sudden starts, The Physics of Fluids, **17**, Nr. 11, 1929–1935
- [18] **F.H. Busse, G. Pfister, D. Schwabe** (1998): Formation of dynamical structures in axisymmetric fluid systems, in 'Evolution of spontaneous structures in dissipative continuous systems', ed. F.H. Busse, S.C. Müller, Springer Verlag, Berlin, 86–126
- [19] **T. Buzug, T. Reimers, G. Pfister** (1990): Dimensions and Lyapunov Spectra from Measured Time Series of Taylor-Couette Flow, in: 'Nonlinear Evolution of Spatio-Temporal Structures in Dissipative Continuous Systems', ed. F. H. Busse, L. Kramer, Plenum Press, New York
- [20] **T. Buzug, J. von Stamm, G. Pfister** (1992): Fractal dimensions of strange attractors obtained from the Taylor–Couette experiment, Physica A **191**, 559–563
- [21] **T. Buzug** (1993): Analyse chaotischer Dynamik nichtlinearer dissipativer Systeme, Dissertation, Universität Kiel
- [22] **T. Buzug, J. von Stamm, G. Pfister** (1993): Characterization of period-doubling scenarios in Taylor-Couette flow, Phys. Rev. E **47**, Nr. 2, 1054–1065
- [23] **S. Chandrasekhar** (1961): Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Clarendon Press, Oxford
- [24] **P. Chossat, G. Iooss** (1994): The Couette-Taylor problem, Applied Mathematical Sciences **102**, Springer-Verlag, New York
- [25] **K.A. Cliffe** (1983): Numerical calculations of two-cell and one-cell Taylor flows, J. Fluid Mech. **135**, 219–233
- [26] **K.A. Cliffe, T. Mullin** (1985): A numerical and experimental study of anomalous modes in the Taylor experiment, J. Fluid Mech. **153**, 243

- [27] **K.A. Cliffe, J.J. Kobine, T. Mullin** (1992): The role of anomalous modes in Taylor–Couette flow, *Proceedings of the Royal Society London A* **439**, 341
- [28] **D. Coles** (1965): Transition in circular Couette flow, *J. Fluid Mech.* **21**, 385–425
- [29] **J.A. Cole** (1976): Taylor–vortex instability and annulus–length effects, *J. Fluid Mech.* **75**, 1–15
- [30] **M. Couette** (1890): Etudes sur le frottement des liquides, *Ann. Chim. Phys.* **6**, 433–510
- [31] **J.D. Crawford, E. Knobloch** (1991): Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **23**, 341–387
- [32] **M.C. Cross, P.C. Hohenberg** (1993): Pattern formation outside of equilibrium, *Rev. Mod. Phys.* **65**, 851–1112
- [33] **G. Dangelmayr, E. Knobloch** (1991): Hopf bifurcation with broken circular symmetry, *Nonlinearity* **4**, 399–427
- [34] **A. Davey** (1962): The growth of Taylor vortices in flow between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **14**, 336
- [35] **R.C. DiPrima, H.L. Swinney** (1981): Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders, in 'Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence', ed. H.L. Swinney, J.P. Gollub, Springer–Verlag, Berlin
- [36] **R.J. Donnelly** (1991): Taylor-Couette flow: The early days, *Physics today* Nov. 1991, 32–39
- [37] **T.S. Durrani, C.A. Greated** (1977): *Laser systems in flow measurement*, Plenum Press, New York
- [38] **F. Durst, A. Melling, J.H. Whitelaw** (1976): *Principles and practice of Laser-Doppler-Anemometry*, Academic Press, London
- [39] **H. Eckelmann** (1997): *Einführung in die Strömungsmeßtechnik*, Teubner Verlag
- [40] **W.S. Edwards, S.R. Beane, S. Varma** (1991): Onset of wavy vortices in the finite-length Couette–Taylor problem, *Phys. Fluids A* **3**, 1510–1518
- [41] **P. R. Fenstermacher, H. L. Swinney, J. P. Gollub** (1979): Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow, *J. Fluid Mech.* **94**, Nr. 1, 103–128
- [42] **S. Füsler** (1999): *Instabilitäten im Taylor–Couette–System bei gegeneinander rotierenden Zylindern*, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [43] **G. Geister** (1985): *Experimenteller Nachweis von deterministischem Chaos im kurzen Taylor–Zylinder*, Diplomarbeit, Universität Kiel



- [44] **U. Gerdts** (1985): Induzierte und spontane Phasendiffusion in der Taylor–Couette Strömung, Dissertation, Universität Kiel
- [45] **U. Gerdts, J.von Stamm, T. Buzug, G. Pfister** (1994): Axisymmetric time-dependent flow in the Taylor–Couette system, *Phys. Rev. E* **49**, Nr. 5
- [46] **P. Glendinning** (1994): Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations, Cambridge University Press
- [47] **J.P. Gollup, H.L. Swinney** (1975): Onset of turbulence in a rotating fluid, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 927
- [48] **R.J. Goldstein** (1983): Fluid mechanics measurements, Springer Verlag, Berlin
- [49] **M. Golubitsky, I. Stewart, D.G. Schaeffer** (1987): Singularities and groups in bifurcation theory vol. 2, Applied Mathematical Sciences **69**, Springer-Verlag, New York
- [50] **M. Golubitsky, W.F. Langford** (1988): Pattern formation and bistability in flow between counterrotating cylinders, *Physica D* **32** 362–392
- [51] **M. Gorman, H.L. Swinney** (1982): Spatial and temporal characteristics of modulated waves in the circular Couette system, *J. Fluid Mech.* **117**, 123
- [52] **R. Graham, J.A. Domaradzki** (1982): Local amplitude equation for Taylor vortices and its boundary condition, *Phys. Rev. A* **26**, 1572
- [53] **I. Grant** (1994): Selected papers on particle image velocimetry SPIE Milestone Series, MS99, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, Washington
- [54] **U. Gries** (1998): Lokale Instabilitäten im Taylor–Couette System, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [55] **J. Guckenheimer, P. Holmes** (1983): Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Springer Verlag, Berlin
- [56] **H. Haken** (1977): Synergetics, an introduction, Springer Verlag, Berlin
- [57] **W. Heckmann** (1995): Auswertelgorithmen in der Particle Image Velocimetry, Dissertation, Universität GH Essen
- [58] **J. J. Hegseth, G. W. Baxter, C. D. Andereck** (1996): Bifurcations from Taylor vortices between corotating concentric cylinders, *Phys. Rev. E* **53**, Nr. 1, 507–521
- [59] **Chr. Hoffmann, M. Lücke** (2000): Spiral vortices and Taylor vortices in the annulus between counter–rotating cylinders, in 'Physics of rotating fluids', ed. by C. Egbers, G. Pfister, Springer, Berlin
- [60] **G. Iooss, D. D. Joseph** (1980): Elementary Stability and Bifurcation Theory, Springer–Verlag, Berlin

- [61] **E. Atlee Jackson** (1991): Perspectives of nonlinear dynamics, Volume **1**, Cambridge University Press, Cambridge
- [62] **E. Atlee Jackson** (1991): Perspectives of nonlinear dynamics, Volume **2**, Cambridge University Press, Cambridge
- [63] **C.A. Jones** (1981): Nonlinear Taylor vortices and their stability, *J. Fluid Mech.* **102**, 249–261
- [64] **C.A. Jones** (1982): On flow between counter-rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **120**, 433–450
- [65] **C.A. Jones** (1985): The transition to wavy Taylor vortices, *J. Fluid Mech.* **157**, 135
- [66] **G.P. King, Y. Li, W. Lee, H.L. Swinney, P.S. Marcus** (1984): Wave speeds in wavy Taylor–vortex flow, *J. Fluid Mech.* **141**, 365–390
- [67] **G.P. King, H.L. Swinney** (1983): Limits of stability and irregular flow patterns in wavy Taylor vortex flow, *Phys. Rev. A* **27**, 1240
- [68] **K. Kirchgässner** (1961): Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor–Wirbeln für beliebige Spaltbreiten, *Zeitschrift f. Angw. Mathematik u. Physik* **12**, 14
- [69] **J. Kobine** (1990): Single–cell Taylor flows with modified boundary conditions, A first year graduate report for the Clarendon Laboratory, Oxford
- [70] **E. L. Koschmieder** (1993): Bénard Cells and Taylor Vortices, Cambridge University Press, Cambridge
- [71] **E.R. Krueger, A. Gross, R.C. DiPrima** (1966): On the relative importance of Taylor–vortex and non–axisymmetric modes in flow between rotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **24**, Nr. 3, 521–538
- [72] **J. Langenberg** (2000): Messung hydrodynamischer Strömungszustände in einem Taylor–Couette System mittels Digital Particle Image Velocimetry, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [73] **W.F. Langford, R. Tagg, E.J. Kostelich, H.L. Swinney, M. Golubitsky** (1988): Primary instabilities and bicriticality in flow between counter–rotating cylinders, *Phys. Fluids* **31**, 776–785
- [74] **B. Lensch** (1988): Über die Dynamik der Einwirbelströmung im Taylor–Cylinder, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [75] **A. Lorenzen, T. Mullin** (1985): Anomalous modes and finite-length effects in Taylor–Couette flow, *Phys. Rev. A* **31**, Nr. 5, 3463–3465
- [76] **M. Lücke, M. Mihelcic, K. Wingerath, G. Pfister** (1984): Flow in a small annulus between concentric cylinders, *J. Fluid Mech.* **140**, 343–353

- [77] **M. Lücke, M. Mihelcic, K. Wingerath** (1985): Front propagation and pattern formation of Taylor vortices growing into unstable circular Couette flow, *Phys. Rev. A* **31**, 396
- [78] **O. Lüthje** (2000): Chaostkontrolle am Taylor–Couette Strömungsexperiment mittels Zeitverzögerungs–Autosynchronisation, Diplomarbeit, Universität Kiel (2000)
- [79] **O. Lüthje, S. Wolff, G. Pfister** (2000): Chaos control in Taylor–Couette flow, in Vorbereitung
- [80] **E. Magère** (1999): Numerical study of transitions in Taylor–Couette flow, Dissertation, EPFL, Lausanne, Schweiz
- [81] **A. Malessa** (1995): Sichtbarmachung ausgewählter zeitperiodischer Taylor–Wirbel mit Hilfe von Videotechnik und digitaler Bildverarbeitung, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [82] **P.S. Marcus** (1984): Simulation of Taylor–Couette flow. Part 1. Numerical methods and comparison with experiment. Part 2. Numerical results for wavy–vortex flow with one travelling wave, *J. Fluid Mech.* **146**, 45–64 und 65–113
- [83] **O. Meincke** (1997): Critical-slowing-down in der Nähe kritischer Punkte am Beispiel des Taylor-Couette-Systems, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [84] **K. Melzner** (1994): Dynamik des restabilisierten Zweiwirbelzustandes im Taylor–Couette System, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [85] **T. Mullin** (1982): Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment, *J. Fluid Mech* **121**, 207–218
- [86] **T. Mullin** (1985): Onset of time dependence in Taylor-Couette flow, *Phys. Rev. A* **31**, 1216-1218
- [87] **T. Mullin, A. Lorenzen** (1985): Bifurcation phenomena in flows between a rotating circular cylinder and a stationary square outer cylinder, *J. Fluid Mech.* **157**, 289–303
- [88] **T. Mullin** (1993): *The nature of chaos*, Oxford University Press, Oxford
- [89] **T. Mullin, J.J. Kobine** (1995): Organized chaos in fluid dynamics, in 'Nonlinear mathematics and its applications', ed. P.T. Aston, Cambridge University Press
- [90] **M. Nagata** (1986): Bifrucations in Couette flow between almost corotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **169**, 229–250
- [91] **M. Nagata** (1988): On wavy instabilities of the Taylor–vortex flow between corotating cylinders, *J. Fluid Mech.* **188**, 585–598
- [92] **I. Nakamura, Y. Toya** (1996): Existence of extra vortex and twin vortex of anomalous mode in Taylor vortex flow with a small aspect ratio, *Acta Mechanica* **117**, 33–46

- [93] **L. Ning, G. Ahlers, D.S. Cannell** (1990): Wave-number selection and traveling vortex waves in spatially ramped Taylor–Couette flow, *Phys. Rev. Lett.* **64**, Nr. 11, 1235-1238
- [94] **H. Oertel sen., H. Oertel jun.** (1989): *Optische Strömungsmeßtechnik*, Verlag Braun, Karlsruhe
- [95] **G. Pfister, I. Rehberg** (1981): Space-dependent order parameter in circular Couette Flow transitions, *Physics Letters*, Vol. **83** A, Nr. 1, 19–22
- [96] **G. Pfister** (1984): Period doubling in the rotational Taylor–Couette flow, in "Laser anemometry in fluid mechanics", 159–169
- [97] **G. Pfister, H. Schmidt, K.A. Cliffe, T. Mullin** (1988): Bifurcation phenomena in Taylor–Couette flow in a very short annulus, *J. Fluid Mech.* **191**, 1–18
- [98] **G. Pfister, A. Schulz, B. Lensch** (1991): Bifurcations and a route to chaos of an one-vortex-state in Taylor–Couette flow, *Eur. J. Mech. B/Fluids* **10**, Nr. 2, 247–252
- [99] **G. Pfister, Th. Buzug, N. Enge** (1992): Characterization of experimental time series from Taylor–Couette flow, *Physica D* **58**, 441–454
- [100] **W. Prange** (1997): *Entwicklung und Aufbau eines Taylor–Couette–Experiments mit unabhängig rotierenden Zylindern*, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [101] **A.A. Predtechensky** (1991): Transition to oscillatory motion in a family of gap varied Couette–Taylor flows, DAAD–Bericht
- [102] **M. Raffel, C. Willert, J. Kompenhans** (1998): *Particle Image Velocimetry*, Springer, Berlin
- [103] **Lord Rayleigh** (1916): On the dynamics of revolving fluids, *Proc. Roy. Soc. London A* **93**, 148-154
- [104] **A. Recktenwald, M. Lücke, H.W. Müller** (1993): Taylor vortex formation in axial through flow: Linear and nonlinear analysis, *Phys. Rev. E* **48**, 4444
- [105] **H. Riecke, H.G. Paap** (1987): Perfect wave-number selection and drifting patterns in ramped Taylor vortex flow, *Phys. rev. Lett.* **59**, 2570
- [106] **H.S. Röpcke** (1990): *Untersuchungen periodischer Lösungen der asymmetrischen Einwirbelströmung im Taylor–Couette–System*, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [107] **H.S. Röpcke** (1995): *Die Taylor–Couette–Strömung in breiten Spalten*, Dissertation, Universität Kiel
- [108] **T.A. d. Roquefort, G. Grillaud** (1978): Computation of Taylor vortex flow by a transient implicit method, *Comput. Fluids* **6**, 259–269
- [109] **D. Rosenberger** (1975): *Technische Anwendungen des Lasers*, Springer, Berlin
- [110] **B. Ruck** (1987): *Laser–Doppler–Anemometrie*, AT-Fachverlag GmbH

- [111] **D.G. Schaeffer** (1980): Qualitative analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **87**, 307–337
- [112] **H. Schmidt** (1983): Experimentelle Bestimmung des Stabilitätsverhaltens einer Taylor–Couette–Strömung von zwei Wirbeln, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [113] **A. Schulz** (1987): Verzweigungen zwischen Ein- und Zweiwirbelzuständen der Taylor–Strömung, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [114] **A. Schulz** (1996): Lokale Modenkopplung im Taylor–Couette–System, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [115] **A. Schulz, S. Tavener, G. Pfister, T. Mullin** (2000) in Vorbereitung
- [116] **F. Schulz** (1985): Über Periodenverdopplungen im Taylor–Couette–System, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [117] **F. Schulz** (1988): Entwicklung und Erprobung eines PLL–Trackers zur Anwendung bei der Laser–Doppler–Anemometrie, Dissertation, Universität Kiel
- [118] **H. G. Schuster** (1989): *Deterministic Chaos*, VCH-Verlag, Weinheim
- [119] **H.A. Snyder** (1968): Stability of rotating Couette flow. I. Asymmetric waveforms, *Physics of Fluids* **11**, Nr. 4, 728–734
- [120] **H.A. Snyder** (1968): Wave–number selection at finite amplitude in rotating Couette flow, *J. Fluid Mech.* **35**, 273
- [121] **H.A. Snyder** (1969): Change in wave–form and mean flow associated with wavelength variations in rotating Couette flow. Part 1, *J. Fluid Mech.* **35**, 337–352
- [122] **A. Sommerfeldt** (1994): Experimente zur Stabilität der stationären Taylor–Couette–Strömung in großen Spalten, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [123] **J. von Stamm** (1992): Quasiperiodizität, Phasenkopplung, Symmetriebrechung und Chaos in der Taylor–Couette Strömung, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [124] **J. von Stamm, T. Buzug, G. Pfister** (1994): Frequency locking in a rotation symmetric hydrodynamic flow, *Phys. Lett. A* **194**, 173
- [125] **J. von Stamm** (1995): Phasendynamik, Symmetriebrechung und Chaos in der Taylor–Couette–Strömung, Dissertation, Universität Kiel
- [126] **J. von Stamm, U. Gerds, T. Buzug, G. Pfister** (1996): Symmetry breaking and period doubling on a torus in the VLF regime in Taylor–Couette flow, *Phys. Rev. E* **54**, 1–20
- [127] **R. Tagg, W.S. Edwards, H.L. Swinney, P.S. Marcus** (1989): Nonlinear standing waves in Couette–Taylor flow, *Phys. Rev. A* **39**, Nr. 7, 3734–3737

- [128] **R. Tagg, W.S. Edwards, H.L. Swinney** (1990): Convective versus absolute instability in flow between counterrotating cylinders, *Phys. Rev. A* **42**, Nr. 2, 831–837
- [129] **R. Tagg** (1994): The Couette–Taylor problem, *Nonlinear Science Today*, Vol. **4**, Nr. 3, 2–25
- [130] **D.I. Takeuchi, D.F. Jankowski** (1981): A numerical and experimental investigation of the instability of spiral Poiseuille flow, *J. Fluid Mech.* **102**, 101
- [131] **S. Tavener, A. Cliffe** (2000) wird veröffentlicht
- [132] **G. I. Taylor** (1923): Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **223**, 289–343
- [133] **S.G.K. Tennakoon, C.D. Andereck** (1993): Time–dependent patterns in counterrotating eccentric cylinders, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3111–3114
- [134] **E. Weisshaar, F.H. Busse, M. Nagata** (1991): Twist vortices and their instabilities in the Taylor–Couette system, *J. Fluid Mech.* **226**, 549–564
- [135] **S.T. Wereley, R.M. Lueptow** (1998): Spatio-temporal character of non-wavy and wavy Taylor–Couette flow, *J. Fluid Mech.* **364**, 59–80
- [136] **J. Westerweel** (1993): Digital Particle Image Velocimetry: Theory and application, Ph.D. Dissertation, Delft University Press, Delft
- [137] **J. Westerweel** (1994): Efficient detection of spurious vectors in particle image velocimetry data, *Exp. Fluids* **16**, 263–247
- [138] **S. Wiggins** (1988): Global bifurcations and chaos, Springer verlag, New York
- [139] **S. Wolff** (1995): Analyse von Zeitserien aus dem Taylor–Couette–System und aus EEGs, Diplomarbeit, Universität Kiel
- [140] **M. Wrage** (1998): Kritische Exponenten und Zeitkonstanten verschiedener Instabilitäten der Taylor–Couette–Strömung, Diplomarbeit, Universität Kiel



# Danksagungen

Ich danke Prof. Gerd Pfister für die Möglichkeit, bei ihm zu promovieren und für eine sehr angenehme, freundschaftliche Zeit mit ihm an der Uni und auch außerhalb dieser.

Bei den Herren Prof. Tom Mullin, Prof. Simon Tavener, Prof. Manfred Lücke und Christian Hoffmann möchte ich mich für die gute Zusammenarbeit, die fruchtbaren Diskussionen sowie für das Interesse, das meiner Arbeit entgegengebracht wurde, bedanken.

Mein Dank gilt auch den Mitarbeitern der Werkstatt im Physikzentrum, insbesondere den Herren Brix, Suren, Willing und Nils, für die technische Erstellung und Betreuung der Taylor-Anlagen, sowie den Technikern Heinz Horak und Wolfgang Schumann für ihre ständige Hilfsbereitschaft, vor allem dann, wenn "eine Drehzahlregelung nicht so wollte, wie sie sollte".

Hendrik Timmermann danke ich für sein geduldiges Korrekturlesen.

Ich danke Silja Fuser und Joël Langenberg für die gute Zusammenarbeit, die neben der Arbeit auch viel Spaß gemacht hat.

Bei Oliver Meincke und Marc Wrage bedanke ich mich für die viele gemeinsam im "Taylor-Labor" verbrachte Zeit und die lustigen außeruniversitären Aktivitäten, die bis heute anhalten.

Ferner möchte ich mich bei der ganzen Arbeitsgruppe für die nette Atmosphäre bedanken. Auch die fachlichen und nicht-fachlichen Diskussionen im Kaffeeraum waren immer wieder eine schöne Abwechslung.

Jan Abshagen danke ich für das Teilen von Freud' und Leid seit Beginn des Studiums bis heute. Die vielen gemeinsamen Aktivitäten haben immer großen Spaß gemacht.

Ein großes Dankeschön geht an Wiebke. Ohne sie hätte ich die letzten Monate nicht so glücklich überstanden ... :-)

Nicht zuletzt möchte ich mich besonders bei meinen Eltern bedanken, daß sie mich immer unterstützt haben und für mich da waren.



# Lebenslauf

Geboren: am 02.12.1969  
in Kiel  
Eltern: Regierungsdirektor Uwe Schulz  
Caren Schulz, geb. Lüdecke

Familienstand: ledig

Staats-  
angehörigkeit: deutsch

Schulausbildung: 1976 - 1980 Brüder-Grimm-Schule Kronshagen  
1980 - 1989 Gymnasium Kronshagen  
02.06.1989 Abitur

Wehrdienst: 05.06.1989–  
31.08.1990 als Funker bei der Marine

Studium: ab WS 1990/91 Studiengang Physik mit angestrebtem Abschluß Diplom  
an der Christian-Albrechts Universität (CAU), Kiel  
12.11.1992 Vordiplom  
01.01.1996 Diplomarbeit am Institut für Angewandte Physik bei  
Prof. G. Pfister: „Lokale Modenkopplung im  
Taylor-Couette-System“  
23.02.1996 Diplom  
ab 01.04.1996 Promotion am Institut für Experimentelle und  
Angewandte Physik der CAU bei Prof. G. Pfister:  
„Verzweigungen und Strukturen in der Strömung  
zwischen unabhängig rotierenden Zylindern“

Beruf: 01.04.1996–  
29.02.2000 Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für  
Experimentelle und Angewandte Physik der CAU

# Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Dissertation selbständig verfaßt habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel von mir eingesetzt worden sind. Desweiteren versichere ich, daß die vorliegende Dissertation weder ganz noch zum Teil bei einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat.

Kiel, den

.....  
Arne Schulz