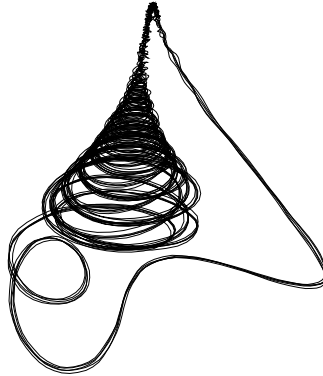


Organisation chaotischer Dynamik in der Taylor-Couette-Strömung



Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von
Jan Abshagen

Kiel, Mai 2000

Referent:

Koreferent:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Kiel, den

.....

Dekan

INHALTSVERZEICHNIS

1. <i>Einleitung</i>	1
2. <i>Hydrodynamik und nichtlineare Instabilitäten</i>	3
2.1 Das Taylor-Couette-System	3
2.2 Stabilitäts- und Verzweigungstheorie	5
2.2.1 Hydrodynamische Instabilitätsmechanismen	5
2.2.2 Grundlagen der Theorie dynamischer Systeme	6
2.2.3 Verzweigungstheorie	9
2.2.4 Raum-zeitliche Strukturbildung in dissipativen Systemen	13
2.3 Der Übergang zur Taylor-Wirbelströmung (TWS)	13
3. <i>Aufbau des Taylor-Couette Experiments</i>	17
3.1 Mechanischer Aufbau	17
3.2 Optische Strömungsmeßverfahren	18
4. <i>Untersuchungen zum Relaxationsverhalten am Übergang zur TWS</i>	21
4.1 Meß- und Auswertungsverfahren	21
4.1.1 Bestimmung der Zeitkonstanten	21
4.1.2 Bestimmung des Skalierungsverhaltens	26
4.2 Symmetriebrechende Verzweigung des 2-Wirbelzustandes	26
4.3 Einsetzen der stationären Taylor-Wirbelströmung	29
4.3.1 Zeitkonstanten	30
4.3.2 Skalierungsverhalten	33
5. <i>Höhere Instabilitäten und Chaos</i>	37
5.1 Homokline Verzweigungen	37
5.2 Chaos und homokline Orbits	38
5.3 Höhere Instabilitäten der Taylor-Couette-Strömung	41
5.4 Chaotische Taylor-Couette-Strömung	42
6. <i>Untersuchungen zur Jet-Instabilität der Taylor-Wirbelströmung</i>	45
6.1 Strömungsmuster der Kleinen und Großen-Jet-Mode	45
6.2 „Critical-slowng-down“ beim Einsetzen der Kleinen-Jet-Mode	49
6.3 Wechselwirkung axialsymmetrischer und wellenförmiger Strömung	55

7. <i>Analyse der axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen TWS</i> . . .	61
7.1 Klassifikation der oszillatorischen Instabilitäten	62
7.2 Stabilitätsverhalten des 10-Wirbelzustandes	67
7.3 Verzweigungsstruktur des 8-Wirbelzustandes	69
7.3.1 Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.77$	69
7.3.2 Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.793$	72
7.3.3 Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.82$	73
7.3.4 Stabilitätsdiagramm der axialsymmetrischen Moden	75
7.3.5 Verzweigungsanalyse des 8-Wirbelzustandes	76
7.4 Stabilitätsverhalten des 4-Wirbelzustandes	82
7.4.1 Symmetriebrechung und VLF-Mode	82
7.4.2 Symmetriebrechende Verzweigung höherer Ordnung	91
8. <i>Experimentelle Hinweise auf Shil'nikov Chaos in der wellenförmigen TWS</i> . .	97
8.1 Chaotische homokline Dynamik	97
8.1.1 Chaotische „Gluing“-Verzweigung im 10-Wirbelzustand	97
8.1.2 Inverse Periodenverdopplungskaskade im 8-Wirbelzustand	99
8.2 Einsatz von Chaos über Intermittenz	103
8.2.1 Symmetrisches Chaos	104
8.2.2 Untersuchung des Intermittentztyps	107
8.2.3 Experimenteller Shil'nikov Attraktor	109
8.3 Analyse der chaotischen Strömung	111
9. <i>Taylor-Couette-Strömung bei höheren Reynoldszahlen – Lokalisierte Moden</i> .	115
9.1 Lokalisierung in nichtlinearen Systemen	115
9.2 Untersuchungen zur lokalisierten Core-Mode	117
9.2.1 Stabilität und Symmetriebrechung	117
9.2.2 Wirbelgrößenverteilung	120
9.3 Dynamik der lokal oszillatorischen Zustände	121
10. <i>Diskussion</i>	125
11. <i>Zusammenfassung</i>	131

1. EINLEITUNG

Das Auftreten von Turbulenz in Strömungen wird vielfach als das letzte große ungelöste Problem der klassischen Physik bezeichnet. Dabei liegen die Schwierigkeiten nicht in der Konzeption der zugrundeliegenden Gleichungen. Die Navier-Stokes-Gleichungen gelten seit langem als fester Bestandteil des physikalischen Weltbildes und bringen im wesentlichen die Newton'schen Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum zum Ausdruck. Vielmehr sind die Mechanismen, die zum Auftreten der großen Vielzahl der phänomenologisch bekannten Strömungszustände führen, und der Ursprung der Komplexität in diesen Zuständen nicht verstanden. Aufgrund der mathematischen Schwierigkeiten, die sich bei der Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen ergeben, kommen geschlossenen Strömungen in gut kontrollierbaren Laborexperimenten eine wichtige Rolle zu. Dabei besteht die Hoffnung, aus den Untersuchungen der ersten Instabilitäten Rückschlüsse auf grundsätzliche Mechanismen beim Übergang von laminarem zu irregulärem Strömungsverhalten schließen zu können.

Wegen seiner geometrischen Einfachheit und guten experimentellen Kontrollierbarkeit ist die Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern, die als Taylor-Couette-Strömung bezeichnet wird, eine häufig untersuchte Konfiguration. In diesem System tritt bei Erhöhung der Reynoldszahl eine Zentrifugalinstabilität in der laminaren Couette-Strömung auf, die zum Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung führt. Experimentelle und theoretische Stabilitätsuntersuchungen haben gezeigt, daß dieser Übergang in einem endlichen System durch die Randbedingungen kontinuierlich verläuft, und keine Instabilität mehr auftritt. Die bisherigen experimentellen Befunde bezüglich des Relaxationsverhaltens beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung widersprechen allerdings diesen Ergebnissen. Um diesen Widerspruch aufzuklären, sind im Rahmen dieser Arbeit weitere Untersuchungen zum Relaxationsverhalten beim Übergang zur Taylor-Wirbelströmung durchgeführt worden.

Eine zentrale Aussage der Theorie des deterministischen Chaos ist die, daß durch die nichtlineare Wechselwirkung weniger Freiheitsgrade zeitlich irreguläres Verhalten zustande kommen kann, das auf deterministischen Gesetzen beruht. Daher besitzt diese Theorie für prinzipielle Untersuchung des Übergangs von laminarer zu irregulärer Strömung eine große Bedeutung. Da es sich bei Strömungen aber um raum-zeitliche Prozesse handelt, in denen im Prinzip unendlich viele Freiheitsgrade das Systemverhalten bestimmen können, lassen sich komplexe Strömungszustände in vielen Fällen nicht im Sinne einer niederdimensionalen Theorie verstehen. Um die Anzahl der räumlichen Freiheitsgrade zu reduzieren, werden Untersuchungen niederdimensionalen Verhaltens daher häufig in sehr kleinen Systemen durchgeführt. Durch diesen Ansatz konnten Szenarien gefunden werden, die zeigen, daß in Strömungen niederdimensionales Chaos für das Einsetzen irregulären Strömungsverhaltens verantwortlich sein kann. Experi-

mentelle Untersuchungen in diesem Bereich offenbarten, daß das Auftreten von Verzweigungen, welche die Spiegelsymmetrie des Systems brechen, eine große Bedeutung für die Entstehung von Chaos im Taylor-Couette-System besitzen, indem sie durch Wechselwirkung mit einer oszillatorischen Instabilität sogenanntes homoklines Chaos hervorbringen können. Diese Untersuchungen blieben bisher aber auf kleine Systeme beschränkt.

In größeren Taylor-Couette-Systemen konnten ebenfalls Strömungszustände beobachtet werden, die ein chaotisches Zeitverhalten aufweisen. Bevor die stationäre Taylor-Wirbelströmung allerdings chaotisch wird, treten zeitperiodische Instabilitäten auf, die zum Einsetzen wellenförmiger Moden in der axialsymmetrischen Wirbelströmung führen. Dabei wurde häufig angenommen, daß Wechselwirkungen in der zeitabhängigen Strömung für die Entstehung chaotischen Verhaltens bei höheren Reynoldszahlen verantwortlich sind, obwohl es vom theoretischen Standpunkt aus prinzipielle Schwierigkeit gibt.

Experimentelle Untersuchungen von v.Stamm et al [142] hatten gezeigt, daß eine quasi-periodische Strömung auch über eine Periodenverdopplungskaskade auf einem Torus ins Chaos übergehen kann. Sie konnten dieses Verhalten in Strömungszuständen von 10 bis 40 Wirbeln beobachten. Außerdem fanden sie, daß vor dem Einsetzen der zweiten Oszillation eine stationäre Verzweigung auftritt, welche die Spiegelsymmetrie der zeitabhängigen Taylor-Wirbelströmung bricht. Im Rahmen dieser Arbeit wird untersucht, welche Bedeutung diese Symmetriebrechung für das Einsetzen des Chaos in dieser zeitabhängigen Taylor-Wirbelströmung hat.

2. HYDRODYNAMIK UND NICHTLINEARE INSTABILITÄTEN

Die Hydrodynamik befaßt sich als Teilgebiet der Mechanik mit den Eigenschaften von strömenden Flüssigkeiten. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik [6, 7] leiten sich somit unmittelbar aus den Newton'schen Gesetzen ab und wurden von Navier und Stokes formuliert:

$$\partial_t \vec{u} + \vec{u} \nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{1}{\rho} \vec{F}, \quad (2.1)$$

wobei ρ die Dichte und ν die kinematische Viskosität der Flüssigkeit ist. Diese Gleichungen enthalten auf der linken Seite die Zeitableitung der Geschwindigkeit des Fluides. Aufgrund der Kontinuumsbeschreibung kommt noch ein sogenannter advektiver Term hinzu, welcher sich aus der Änderung der Geschwindigkeit in räumlicher Richtung ergibt. Die rechte Seite ergibt sich als Summe der Volumenkräfte, des Drucks und der Viskosität. Der letzte Term beschreibt die Kräfte aufgrund der Deformation der Fluidelemente. Die Navier-Stokes-Gleichungen werden häufig in einer dimensionslosen Form geschrieben. Als dimensionsloser Parameter ergibt sich die Reynoldszahl, die definiert ist als:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (2.2)$$

Die Reynoldszahl gibt ein Verhältnis von Trägheitskräften eines Systems auf der einen Seite und der Viskosität ν auf der anderen Seite an. Welche konkreten Größen hier zum Tragen kommen, hängt dabei von der Problemstellung ab. In der Hydrodynamik werden sehr häufig Verhältnisse von typischen physikalischen Größen in dimensionslosen Größen ausgedrückt [7]. Für kleine Reynoldszahlen treten im allgemeinen laminare Strömungen auf. Beispiele für diese laminaren Strömungen sind die Rohrströmung, die im laminaren Bereich durch das Hagen-Poiseuille-Gesetz beschrieben werden kann, oder die Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern, die als laminare Couette-Strömung bezeichnet wird. Diese Strömungsanordnung wird im allgemeinen als Taylor-Couette-System bezeichnet und bildet die Grundlage der Untersuchungen dieser Arbeit.

2.1 Das Taylor-Couette-System

Aufgrund der einfachen geometrischen Struktur des Taylor-Couette-Systems wird es häufig für grundlegende Untersuchungen nichtlinearer Phänomene und des Übergang in chaotisches und turbulentes Strömungsverhalten benutzt. Zum einen führt diese einfache Strömungsanordnung dazu, daß viele numerische Untersuchungen explizit durchgeführt werden können. Auf der anderen Seite ist das Taylor-Couette-System eines der

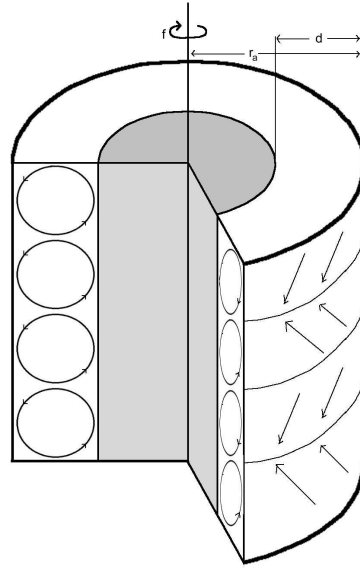


Abb. 2.1: Schematische Darstellung eines Taylor-Couette-Systems mit Taylor-Wirbelströmung. Hierbei bezeichnet f die Innenzylinderdrehfrequenz, r_i den Radius des Innenzylinders, r_a den Radius des Außenzylinders und d die Spaltbreite.

am besten kontrollierbaren hydrodynamischen Experimente überhaupt [24, 18, 19, 25].

Als Taylor-Couette-Strömung bezeichnet man die Strömung im Spalt zwischen zwei konzentrischen Zylindern, die im allgemeinen Fall unabhängig voneinander rotieren können [46, 45]. Abbildung 2.1 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Taylor-Couette-Systems mit den geometrischen Parametern. Schematisch ist die stationäre Taylor-Wirbelströmung eingezeichnet. Dieser Zustand ergibt sich durch das Auftreten einer Instabilität der laminaren Couette-Strömung (vgl. Abschnitt 2.3).

Ein wichtiger geometrischer Parameter für die Beschreibung der Strömung ist das Radienverhältnis $\eta = \frac{r_i}{r_a}$, wobei r_i und r_a respektive den Radius des Innen- und des Außenzylinders bezeichnen. Die Spaltbreite beträgt daher $d = r_a - r_i$. Experimentelle Systeme sind im allgemeinen durch eine ruhende Boden- und Deckelplatte begrenzt, so daß die Strömung in der Höhe begrenzt ist. Daher führt man ein Höhen- zu Spaltbreitenverhältnis $\Gamma = \frac{L}{d}$ ein, wobei die Höhe in Anlehnung an andere strukturbildende Systeme als L bezeichnet wird. Modifikationen, die sich durch die Wahl anderer Randbedingungen oder durch abweichende Geometrien ergeben, sind bei Koschmieder [25] dargestellt.

In theoretischen Arbeiten werden häufig Systeme untersucht, die in der Länge unendlich ausgedehnt sind. Für diese Untersuchungen werden periodische Randbedingungen angenommen [19, 18, 13]. Experimentell hat sich indes gezeigt, daß das Höhen- zu Spaltbreitenverhältnis Γ ein sehr wichtiger Parameter zur Beschreibung der Taylor-Couette-Strömung darstellt [61, 62, 63, 60]. Bei experimentellen Untersuchungen ist zumeist das Radienverhältnis fest, so daß Γ die Höhe des Systems widerspiegelt. Neben

den geometrischen Parametern kann man auch eine Reynoldszahl Re für das Taylor-Couette-System definieren. Bei unabhängig rotierenden Zylindern müssen sogar zwei Reynoldszahlen, eine „äußere“ und eine „innere“, eingeführt werden. Da in dieser Arbeit nur der Fall eines rotierenden Innenzylinders betrachtet wird, während der äußere in Ruhe bleibt, wird im folgenden kurz von der Reynoldszahl Re des Taylor-Couette-Systems gesprochen. Sie ist definiert als:

$$Re = 2\pi \frac{r_i df}{\nu} \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet f die Rotationsfrequenz des Innenzylinders und ν die kinematische Viskosität.

2.2 Stabilitäts- und Verzweigungstheorie

Bei Erhöhung der Reynoldszahl können in laminaren Strömungen Instabilitäten auftreten, das heißt, daß Störungen nicht mehr gedämpft werden, sondern anwachsen können. Dieses führt dazu, daß der laminare Strömungszustand in einen anderen Zustand übergeht. Die laminare Grundströmung wird dann von einer Sekundärströmung überlagert. Verschiedene physikalische Mechanismen können die Ursache von Instabilitäten sein.

2.2.1 Hydrodynamische Instabilitätsmechanismen

Im Taylor-Couette-System tritt bei Erhöhung der Reynoldszahl eine Zentrifugalinstabilität auf. Diese wird dadurch verursacht, daß Flüssigkeit aufgrund der Haftbedingung an den Rändern bei Rotation des Innenzylinders ebenfalls in Rotation versetzt wird. Unter Vernachlässigung der Viskosität ist diese Konfiguration instabil, da Flüssigkeit wegen der höheren Zentrifugalkraft am Innenzylinder gegenüber den Bereichen am Außenzylinder nach außen strömt. Dies Verhalten wird als Rayleigh'schen Stabilitätskriteriums bezeichnet (siehe [25]). Bei Hinzunahme der Viskosität tritt eine dämpfende Komponente hinzu, so daß sich bei Rotation des Innenzylinders zunächst eine laminare Schichtenströmung, die sogenannte Couette-Strömung, einstellt. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl führt auch zu einer Zunahme der Zentrifugalkräfte, so daß sich bei einer kritischen Reynoldszahl Re_c ein Kräftegleichgewicht ergibt. Eine weitere Erhöhung führt zum Auftreten einer Instabilität, so daß das System überkritisch wird. Die im überkritischen Fall auftretende Strömung wird als Taylor-Wirbelströmung (TWS) bezeichnet. In diesem Strömungszustand wird der azimuthalen Couette-Strömung eine sekundäre Wirbelströmung mit radialer und axialer Komponente überlagert. Dieses führt zur Bildung torusförmiger Wirbel um den Innenzylinder, die in axialer Richtung periodisch angeordnet sind. Abbildung 2.1 zeigt eine schematische Darstellung dieses Strömungszustandes.

Das grundlegende Verhalten in der Umgebung einer Instabilität ist durch das Konkurrieren zweier gegenläufiger Prozesse bestimmt, von denen der eine dämpfend und der andere treibend wirkt. Bei rotierenden Flüssigkeiten ist die Zentrifugalkraft der treibende Mechanismus für die Instabilität. Sehr häufig werden auch andere Konfigurationen rotierender Flüssigkeiten untersucht, wie zum Beispiel die Strömung zwischen

rotierenden Kugeln [44]. Zentrifugalininstabilitäten treten aber auch in der Grenzschicht konkaver Flächen (Görtler-Instabilität) und in der Poiseuille-Strömung gekrümmter Rohre (Taylor-Dean-Instabilität) auf. Der Stand der Forschung dieser Instabilitätsklasse ist in [24] dargestellt.

Eine andere wichtige Klasse sind die Konvektionsinstabilitäten, deren bekannteste die Rayleigh-Bénard Instabilität darstellt. Durch einen Temperaturgradienten wird dabei eine instabile Dichteschichtung erzeugt, der Reibungskräfte und Wärmeleitung entgegenwirken. Konvektionsinstabilitäten können unter anderem auch in Flüssigkristallen [20] auftreten.

Neben den Schichteninstabilitäten können aber auch Scherinstabilitäten und Kombinationen verschiedener Instabilitätsmechanismen auftreten. Die in diesem Abschnitt dargestellten Mechanismen sind verantwortlich für das Auftreten von Instabilitäten in laminaren Strömungen. Sie werden daher auch als primäre Instabilitäten bezeichnet. Umfassende Darstellungen hydrodynamischer Instabilitätsmechanismen finden sich in [8, 9, 12, 25, 10]

2.2.2 Grundlagen der Theorie dynamischer Systeme

Für eine mathematische Behandlung von Instabilitätsproblemen liefert die Theorie dynamischer Systeme den begrifflichen Rahmen, der hier kurz dargestellt wird. Umfassend wird diese Theorie in Guckenheimer und Holmes [26] oder bei Glendinning [30] dargelegt. In dieser Arbeit werden ausschließlich Konzepte der Theorie kontinuierlicher deterministischer Systeme zur Anwendung kommen.

Strömungen gehören zur Klasse der unendlich-dimensionalen Systeme, da sie durch partielle Differentialgleichungen beschrieben werden. Eine exakte mathematische Behandlung dieser Systeme ist in den meisten Fällen nicht möglich. In der Umgebung von Instabilitätspunkten läßt sich das dynamische Verhalten aber häufig durch sehr wenige Freiheitsgrade beschreiben, so daß sich das Problem dann auf ein niederdimensionales dynamisches System reduzieren läßt. Gegenstand dieser Arbeit wird die experimentelle Untersuchung von Instabilitäten der Taylor-Couette-Strömung sein, daher wird auf eine explizite Darstellung der Theorie unendlich-dimensionaler dynamischer Systeme verzichtet. Begrifflich lassen sich endlich- und unendlich-dimensionale dynamische Systeme weitgehend analog entwickeln.

Eine Evolutionsgleichung bestehend aus einem System nichtlinearer, gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}; \vec{\mu}) \quad (2.4)$$

Dabei ist \vec{F} mindestens ein \mathcal{C}^1 -Vektorfeld und $\vec{x} \in \mathbf{R}^n$ ein n-dimensionaler Vektor. Die Parameterabhängigkeit von \vec{F} wird durch $\vec{\mu}$ angedeutet. Das System ist autonom, das heißt, \vec{F} hängt nicht explizit von der Zeit ab, und es ist von erster Ordnung in der Zeit. Dieses sind keine wesentlichen Einschränkungen, da sich Systeme von Differentialgleichungen auf diese Form zurückführen lassen.

Als *Phasenraum* bezeichnet man den durch die Koordinaten x_1, \dots, x_n aufgespannten Raum. Dabei wird jeder Systemzustand zu einem Zeitpunkt durch einen Punkt im

Phasenraum charakterisiert. Der Graph einer Lösung $\vec{x}(t)$ von Gleichung 2.4 heißt *Trajektorie*, während durch die Gesamtheit der Lösungen der *Fluß* $\phi(\vec{x}, t)$ definiert wird:

$$\frac{d}{dt}\phi(\vec{x}, t) = \vec{F}(\phi(\vec{x}, t)) \quad (2.5)$$

Dabei ist eine einzelne Lösung $\vec{x}(t)$ von Gleichung 2.4 mit dem Anfangswert $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ durch $\phi(\vec{x}_0, t)$ gegeben.

Zwei einfache Objekte im Phasenraum lassen sich definieren durch:

- \vec{x} ist ein *Fixpunkt* des Flusses $\phi(\vec{x}, t) \Leftrightarrow \phi(\vec{x}, t) = \vec{x}$ für alle t
- \vec{x} ist *periodisch* mit (minimaler) Periode $T \Leftrightarrow \phi(\vec{x}, t+T) = \phi(\vec{x}, t)$ für alle t , und $\phi(x, t+s) \neq \phi(x, t)$ für alle $0 < s < T$. Die Kurve $\Gamma = \{y : y = \phi(x, t), 0 \leq t < T\}$ wird *periodischer Orbit* genannt.

Einen Fixpunkt \vec{x}_* erhält man als Lösung der Gleichung: $\vec{F}(\vec{x}_*, \vec{\mu}) = 0$

Stabilitätstheorie

Zur Untersuchung der Stabilität führt man einen *Referenzzustand* \vec{x}_s ein, der Lösung von Gleichung 2.4 ist. Dieser Zustand ist vom physikalischen Standpunkt aus beobachtbar, wenn er *stabil*, das heißt robust gegen Störung, ist. Sei \vec{x} eine zweite Lösung von Gleichung 2.4, dann ist eine *Störung* \tilde{x} definiert als: $\tilde{x} = \vec{x} - \vec{x}_s$

Man unterscheidet zwischen zwei Typen von Stabilität. Ein Zustand \vec{x}_s wird als *Lyapunov-stabil* bezeichnet, wenn der Abstand des Referenzzustandes \vec{x}_s zum gestörten Zustand \vec{x} im Phasenraum für alle Zeiten beliebig klein gehalten werden kann. Ein benachbarter Zustand bleibt in diesem Fall benachbart. Als *quasi-asymptotisch stabil* bezeichnet man einen Zustand \vec{x} , wenn Störungen \tilde{x} für $t \rightarrow \infty$ gegen Null gehen. Über die Größe der Störung \tilde{x} bis zu einem beliebigen Zeitpunkt wird dabei nichts ausgesagt.

Ein Zustand heißt *asymptotisch stabil*, wenn er *Lyapunov-stabil* und *quasi-asymptotisch stabil* ist. Das bedeutet, daß Störungen im System wieder abklingen können und der Referenzzustand wiederhergestellt wird. *Asymptotische Stabilität* ist daher mit Irreversibilität verbunden und eine Eigenschaft von dissipativen Systemen. Sie tritt in konservativen Systemen nicht auf.

Ein Zustand kann aber auch *lokal stabil* und *global instabil* sein. Man spricht dann von *bedingter Stabilität*. Dieses ist zum Beispiel bei einem System mit Hysterese gegeben. Eine wichtige Eigenschaft nichtlinearer Systeme ist, daß sie *multistabil* sein können. Das bedeutet, daß für einen Kontrollparameterwert mehrere Lösungen gleichzeitig in einem System existieren können. Dies steht im Gegensatz zu den Eindeutigkeitsätzen linearer Systeme.

Eine hinreichende Bedingung für die *Instabilität* eines Fixpunktes wird durch die *Lineare Stabilitätsanalyse* geliefert, die Aussagen darüber macht, ob eine Störung im System wieder abklingt, oder ob sie verstärkt wird. Mit Hilfe dieses Verfahrens, bei dem es sich um ein *lokales* handelt, kann der kritische Kontrollparameterwert ermittelt werden, an dem das System instabil wird.

Betrachtet man eine Störung \tilde{x} des stationären Zustandes \vec{x}_s , der Lösung von Gleichung 2.4 ist, so ergibt sich als Evolutionsgleichung für \tilde{x} :

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}_s + \tilde{x}) - \vec{F}(\vec{x}_s) \quad (2.6)$$

Ist die Störung sehr klein $\tilde{x} \ll 1$, so läßt sich $\vec{F}(\vec{x}_s + \tilde{x})$ in einer Taylorreihe entwickeln. Damit wird aus Gleichung 2.6:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \mathcal{L}\tilde{x} + \mathcal{N}(\tilde{x}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{L} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_s) \quad (2.7)$$

Der Term \mathcal{L} ist die Jacobi-Matrix, während der Term $\mathcal{N}(\tilde{x})$ alle Glieder höherer Ordnung in \tilde{x} umfaßt. Für das linearisierte Problem ergibt sich dann:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \mathcal{L}(\tilde{x}) \quad (2.8)$$

Der Lösungsansatz $\tilde{x}(t) = e^{\lambda t} \tilde{x}(0)$ führt auf ein Eigenwertproblem. Durch Transformation auf das Koordinatensystem A mit den (linear unabhängigen) Eigenvektoren \mathbf{y}_i als Basisvektoren ergibt sich ein entkoppeltes Gleichungssystem:

$$\frac{dA_i}{dt} = \lambda_i A_i \quad \text{mit} \quad n = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

Als allgemeine Lösung des linearisierten Systems 2.8 ergibt sich dann:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{\lambda_i t} \mathbf{y}_i \quad (2.10)$$

Durch Lösung des linearen Problems 2.8 lassen sich schon wichtige Aussagen über das nichtlineare System (Gleichung 2.4) machen. Man nennt einen stationären Punkt \vec{x}_s des nichtlinearen Systems einen *hyperbolischen Fixpunkt*, sofern alle Eigenwerte λ der Jacobi-Matrix \mathcal{L} nicht verschwinden bzw. rein imaginär sind. An einem solchen hyperbolischen Fixpunkt kann die Klassifizierung des nichtlinearen Systems auf das lineare zurückgeführt werden (Theorem von Hartman und Grobman [26]).

Sind an einem hyperbolischen Fixpunkt \vec{x}_s alle Realteile der Eigenwerte λ von \mathcal{L} negativ ($Re(\lambda) < 0$), so ist der stationäre Punkt \vec{x}_s asymptotisch stabil. Sofern nur ein Eigenwert von \mathcal{L} einen positiven Realteil besitzt, ist \vec{x}_s instabil. An nicht-hyperbolischen Punkten kann das lineare System keine Aussagen liefern [26].

Da \vec{F} vom Kontrollparameter $\vec{\mu}$ abhängt, führt eine Änderung von $\vec{\mu}$ meistens auch zu einer Änderung der Jacobi-Matrix \mathcal{L} und der zugehörigen Eigenwerte λ . Damit definiert das lineare Problem den kritischen Kontrollparameterwert $\vec{\mu}_{krit}$ – auch einfach *kritischer Punkt* genannt – an dem das nichtlineare System instabil wird. Es handelt

sich dabei um den Punkt, an dem der erste Realteil eines Eigenwertes λ_{krit} durch Null geht ($Re(\lambda_{krit}(\vec{\mu})) = 0$). Ein stationärer Punkt ist bei $\vec{\mu}_{krit}$ nicht-hyperbolisch.

Zusätzlich liefert das lineare Problem die Moden, die am kritischen Punkt auftreten können, und zwar durch die Eigenvektoren \mathbf{y}_i der Jacobi-Matrix \mathcal{L} . In räumlich ausgedehnten Systemen führt die lineare Stabilitätsanalyse zu Aussagen über die marginale Stabilitätskurve und die kritische Wellenzahl k_c . Die marginale Stabilitätskurve ist definiert durch $\lambda(k) = 0$, wobei k die Wellenzahl der Moden der linearen Analyse darstellt.

2.2.3 Verzweigungstheorie

Mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse kann ein kritischer Punkt eines Systems ermittelt werden. Für räumlich ausgedehnte Systeme liefert diese Analyse weiterhin die kritische Wellenzahl der kritischen Mode. Die Gültigkeit der linearen Analyse endet aber am kritischen Punkt, da sie keine nichtlinearen Einflüsse, wie zum Beispiel die nichtlineare Dämpfung eines linearen Wachstums einer Mode, berücksichtigt. Um nichtlineare Einflüsse in die Beschreibung zu integrieren und um die prinzipiellen Eigenschaften eines nichtlinearen Systems in der Umgebung eines kritischen Punktes zu erfassen, wird eine schwach nichtlineare Analyse durchgeführt. Dieses wird meistens mittels einer Mehrfachskalentheorie gemacht, da in diesem Verfahren eine explizite Trennung der Zeitskalen vorgenommen wird. Eine genaue Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in [16, 17]. Bei dieser Methode wird das „critical-slowness-down“ in die Analyse integriert. Diese kritische Verlangsamung resultiert daher, daß die Anwachsrate der kritischen Mode am kritischen Punkt verschwindet, das heißt, der Fixpunkt wird nicht-hyperbolisch. Die Zeitkonstante ist definiert als das reziproke der Anwachsrate, und divergiert daher am kritischen Punkt. Aus dem „critical-slowness-down“ folgt eine sehr wichtige Eigenschaft nichtlinearer Systeme in der Umgebung von Verzweigungspunkten. Die kritische Verlangsamung führt dazu, daß in der Umgebung eines kritischen Punktes nur noch sehr wenige, meistens nur eine einzige Mode die gesamte Dynamik eines nichtlinearen Systems bestimmt. Die anderen Moden werden adiabatisch eliminiert [16] oder „versklavt“ [14]. Das bedeutet, daß es genügt, die Dynamik in der Umgebung eines kritischen Punktes auf einem niederdimensionalen Unterraum des Systems zu untersuchen. Mathematisch drückt sich diese Aussage im „Zentrumsmanifoldtheorem“ aus, das zum Beispiel in [31] zu finden ist. Die Klassifizierung des Lösungsverhaltens in der Umgebung von kritischen Punkten wird im Rahmen der Verzweigungstheorie behandelt [26, 31, 30].

Dabei zeigt sich, daß sich im überkritischen Bereich die Struktur des Phasenraums ändern kann. Es können zum Beispiel neue Lösungen entstehen oder verschwinden, oder die Dynamik der Lösung kann sich ändern. Ein wichtiges Ergebnis der Verzweigungstheorie ist, daß nur sehr wenige verschiedene generische Typen von sogenannten lokalen Verzweigungen auftreten können. Ihre Eigenschaften spiegeln im wesentlichen die Art des kritischen Eigenwertes und die Symmetrie des Systems wieder. Lokale Verzweigungen lassen sich im Gegensatz zu globalen [29] vollständig im Rahmen der lokalen Analyse des nicht-hyperbolischen Fixpunktes verstehen. Im Rahmen der Verzweigungstheorie werden die reduzierten Gleichungen häufig in Normalform angegeben.

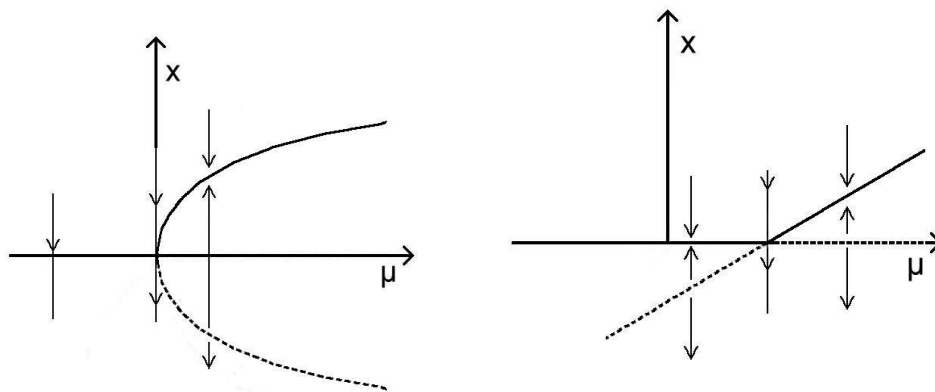


Abb. 2.2: Schematische Verzweigungsdiagramm (links) einer Sattelknoten-Verzweigung und (rechts) einer transkritischen Verzweigung.

Diese bezeichnet die „einfachste“ nichtlineare Gestalt einer gewöhnlichen Differentialgleichung, um noch alle generischen Eigenschaften einer Verzweigung wiederzugeben. Normalformgleichungen sind nicht eindeutig [26].

Verzweigungstypen

Wichtig für die Klassifizierung der Verzweigungstypen ist die Anzahl der kritischen Eigenwerte. In diesem Abschnitt werden nur Verzweigungen mit einem reellen oder einem Paar konjugiert komplexer Eigenwerte dargestellt. Verzweigungen mit einer höheren Anzahl kritischer Eigenwerte werden in Kapitel 5 besprochen. Wird ein reeller Eigenwert kritisch und das System besitzt keine Symmetrie, so wird das Verhalten in der Umgebung durch eine Sattelknoten-Verzweigung beschrieben. Die Normalform dieser Verzweigung ist eindimensional und lautet:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad (2.11)$$

Dabei ist μ der Kontrollparameter des Systems. Diese Verzweigung hängt nur von einem Parameter ab, man bezeichnet sie daher als Kodimension-1 Verzweigung. Als Kodimension einer Verzweigung versteht man die Anzahl der Parameter, die nötig sind, die möglichen Strukturänderungen des Phasenraums in der Umgebung eines kritischen Punktes vollständig zu beschreiben [26, 27, 28]. Abbildung 2.2 zeigt das Verzweigungsdiagramm einer Sattelknoten-Verzweigung. Ein anderer Verzweigungstyp, der bei einem reellen Eigenwert auftreten kann, ist die transkritische Verzweigung, deren Verzweigungsdiagramm ebenfalls in Abbildung 2.2 dargestellt ist. Die zweite generische Kodimension-1 Verzweigung ist die Hopf-Verzweigung, sie tritt in einem 2-dimensionalen Phasenraum auf und ändert die dynamischen Eigenschaften des Systems. Beim Durchgang durch den kritischen Punkt wird ein stabiler Fixpunkt instabil, und ein stabiler Grenzzyklus entsteht. Über eine Hopf-Verzweigung können Oszillationen in einem nichtlinearen System auftreten. Die Normalform der Hopf-Verzweigung, deren Verzweigungsdiagramm in Abbildung 2.3 dargestellt ist, lautet:

$$\dot{x} = \mu x - \omega z - x(x^2 + z^2) \quad \text{und} \quad \dot{z} = \omega x + \mu z - z(x^2 + z^2) \quad (2.12)$$

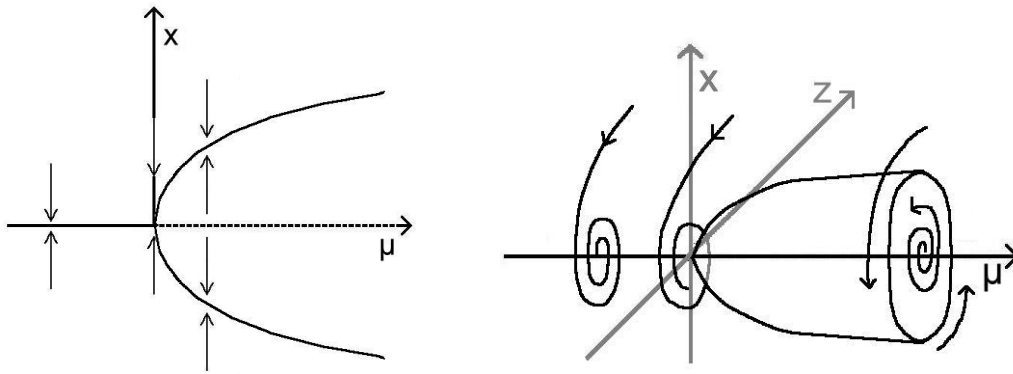


Abb. 2.3: Schematisches Verzweigungsdiagramm einer Gabelverzweigung (links) und einer Hopf-Verzweigung (rechts).

ω ist die Frequenz des Grenzzyklus im überkritischen Bereich. Eine umfassende Darstellung der Verzweigungstheorie findet sich in [26, 31]. Sofern eine Verzweigung in einem räumlich ausgedehnten System vom trivialen Fixpunkt aus auftritt, bedeutet das das Auftreten von Strukturen im unstrukturierten Grundzustand. Dabei sind die Symmetrien des Systems von entscheidender Bedeutung,

Symmetriebrechende Verzweigungen

Darstellungen des Einflusses von Symmetrien auf Verzweigungen findet man in [27, 28, 33]. Das Taylor-Couette-System im Fall unendlicher Ausdehnung in axialer Richtung besitzt die Symmetriegruppe $O(2) \times SO(2)$. Diese Gruppe spiegelt die Translationsinvarianz in axialer Richtung, die Spiegelsymmetrie Z_2 und die Rotationssymmetrie des Systems wieder. Eine Darstellung der Verzweigungen des Taylor-Couette-System unter dem Gesichtspunkt der Symmetrie findet sich bei Chossat und Iooss [18]

Sehr wichtig für die Beschreibung physikalischer Systeme ist die stationäre Verzweigung mit Z_2 -Symmetrie. Anstelle der Sattelknoten-Verzweigung tritt dann eine Gabelverzweigung auf. Die Normalform einer Gabelverzweigung lautet:

$$\dot{x} = \mu x - x^3 \quad (2.13)$$

Eine schematische Darstellung des Verzweigungsdiagramms der Gabelverzweigung ist in Abbildung 2.3 zu sehen.¹

Man erkennt, daß der triviale Fixpunkt $x = 0$ bei dieser Verzweigung erhalten bleibt und seine Stabilität wechselt. In Z_2 -symmetrischen Systemen können auch Sattelknoten-Verzweigungen auftreten, aber nicht vom trivialen Fixpunkt. Abbildung 2.4 zeigt eine subkritische Gabelverzweigung. Die bisher dargestellten Verzweigungen waren alle superkritisch. Eine subkritischen Verzweigung verhält sich sowohl im Stabilitätsverhalten als auch in der Abhängigkeit vom Kontrollparameter invers zu einer superkritischen Verzweigung. Sie wird daher auch inverse Verzweigung genannt. Die in Abbildung 2.4

¹ In dieser Arbeit wird die stationäre Verzweigung mit Z_2 -Symmetrie auch einfach „symmetriebrechende Verzweigung“ genannt.

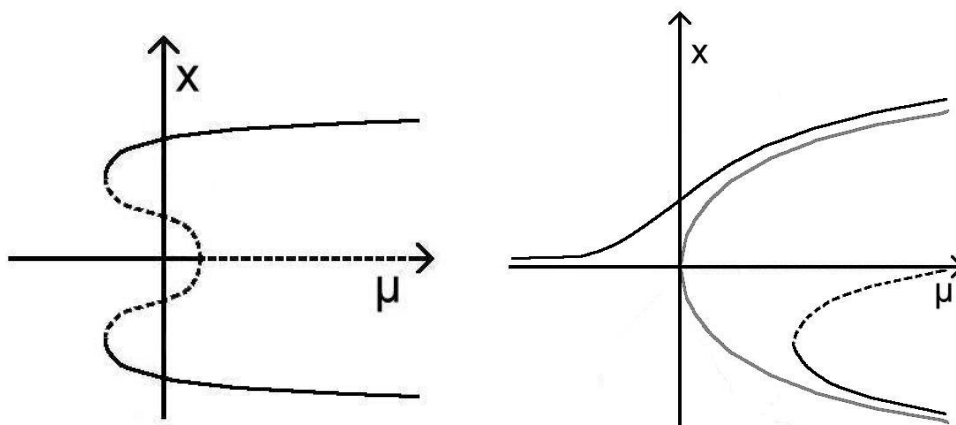


Abb. 2.4: Schematische Verzweigungsdiagramm (links) einer subkritischen Verzweigung und (rechts) einer gestörten Gabelverzweigung.

auftretenden Sattelknoten-Verzweigungen im asymmetrischen Bereich ist eine Folge von nichtlinearen Termen höherer Ordnung in der Normalform der Gabelverzweigung. Die Eigenschaften dieser Normalform sind dann aber nicht mehr durch einen Kontrollparameter beschreibbar. Die Normalform ist daher von höherer Kodimension [26]. Neben nichtlinearer Entartung kann auch die Strukturinstabilität einer Verzweigung zu einer höheren Kodimension führen. Von diesem Standpunkt aus ist die Gabelverzweigung eine Kodimension-2 Verzweigung, da die Hinzunahme eines konstanten Terms zur Normalform die exakte Z_2 -Symmetrie zerstören würde. Ein solcher Term wird daher auch als symmetriebrechende Störung bezeichnet. Bei der Gabelverzweigung führt ein solcher symmetriebrechender Term dazu, daß der Verzweigungspunkt verschwindet. Ein Lösungsast verläuft dann kontinuierlich, während die instabile und eine stabile Lösung vom kontinuierlichen Ast entkoppeln und eine Sattelknoten-Verzweigung bilden. Dieses Verhalten ist in Abbildung 2.4 dargestellt.

Stationäre Verzweigungen mit $O(2)$ -Symmetrie werden durch zweidimensionale Normalformen beschrieben und führen zum Auftreten von sogenannten „relativen“ Gleichgewichtslagen [33]. Bei einer Hopf-Verzweigung mit $O(2)$ -Symmetrie treten laufende und stehende Wellen auf [34]. Ein Brechung dieser $O(2)$ -Symmetrie kann schon zum Auftreten komplexer Dynamik führen [36, 35]

Explizit berechnet werden Verzweigungspunkte häufig mit Hilfe numerischer Methoden. Hängen physikalische Systeme von mehreren Parametern ab, so gibt es Verfahren, mit deren Hilfe die Abhängigkeit vom Verzweigungspunkt von diesen Parametern bestimmt werden kann. A.Cliffe [120, 60] hat eine solches Verfahren für die axialsymmetrische Taylor-Wirbelströmung entwickelt („ENTWIFE“). Gewöhnliche Differentialgleichungen werden häufig mit dem Programmpaket AUTO untersucht.²

² Dieses Programmpaket ist verfügbar unter www.concordia.ca.

2.2.4 Raum-zeitliche Strukturbildung in dissipativen Systemen

Das Auftreten von Instabilitäten in räumlich ausgedehnten Systemen, ist mit der Entstehung von räumlichen Strukturen verbunden, sofern die kritische Wellenzahl $k_c \neq 0$ ist. Die Analyse dieser strukturierten Zustände nimmt einen breiten Raum in der Untersuchung nichtlinearer Systeme ein. Eine umfassende Übersicht über dieses Gebiet ist von Cross und Hohenberg [17] erstellt worden. Weitere Darstellungen finden sich in [16, 22, 21, 15].

Wie im vorherigen Abschnitt dargelegt, sind die Eigenschaften dieser Muster durch die Eigenwerte und die kritischen Wellenzahlen des linearisierten Operators bestimmt. Eine schwach nichtlineare Analyse im überkritischen Bereich gibt eine Beschreibung der Amplitude der kritischen Mode. Um auch räumliche Variationen erfassen zu können, wird die schwach nichtlineare Analyse um räumliche Abhängigkeiten erweitert. Diese führt dann auf eine sogenannte Ginzburg-Landau-Gleichung für die Amplitude $A(x, t) = R(x)e^{i\Phi(x)}$ der kritischen Mode. Die Amplitude ist wegen der zugrundeliegenden Translationssymmetrie komplex. Dabei bezeichnet $R(x)$ den Modulus und $\Phi(x)$ die Phase des periodischen Musters:

$$\tau_0 \partial_t A(t, x) = \varepsilon A(t, x) - g |A(t, x)|^2 A(t, x) + \xi_0 \partial_{x^2} A(t, x) \quad (2.14)$$

Ein solche Gleichung wurde für zunächst für die Rayleigh-Bénard Konvektion von Newell und Whitehead [47] und von Segel [48] abgeleitet. Für die Taylor-Couette-Strömung stellten Graham und Domaradzki [49] eine Ginzburg-Landau-Gleichung auf. In diesem Fall ist $\varepsilon = \frac{Re - Re_c}{Re_c}$. Im Fall stationärer Instabilitäten sind die Koeffizienten der Ginzburg-Landau-Gleichung reell, während sie bei zeitperiodischen Instabilitäten komplex sind. Die komplexe Ginzburg-Landau-Gleichung kann unter Umständen auch raum-zeitliches Chaos zeigen.

Wegen dieser allgemeinen Eigenschaften findet das Konzept der Amplitudengleichungen auch in vielen anderen Gebieten der Naturwissenschaft Eingang. So lassen sich z.B. das Anschwingen eines Lasers aber auch Strukturbildung in chemischen Reaktionen im Rahmen des Amplitudengleichungskonzeptes verstehen. Letzteres führt bei Hinzunahme von Diffusion zu raum-zeitlicher Strukturbildung, die sowohl in chemischen als auch biologischen Systemen Gegenstand intensiver Forschung ist. Eine Darstellung des Forschungsstandes ist in [21, 22] zu finden. Allen diesen Strukturen ist die Eigenschaft inhärent, daß sie nur im thermodynamischen Nicht-Gleichgewicht, also unter ständiger Energiezufuhr, auftreten können. Da die Energie vom System dissipiert wird, werden diese Strukturen auch „dissipative“ Strukturen genannt, was im Gegensatz zu Strukturen in konservativen Systemen aber auch in Systemen, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht befinden, zu sehen ist. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf die Arbeit von Cross und Hohenberg [17] verwiesen.

2.3 Der Übergang zur Taylor-Wirbelströmung (TWS)

Seit der Arbeit von Taylor [54] aus dem Jahr 1923, in der er sowohl auf theoretischer Seite eine lineare Stabilitätsanalyse durchführte als auch eine experimentelle Bestätigung für seine Berechnungen fand, wurden viele Arbeiten zum Übergang von der la-

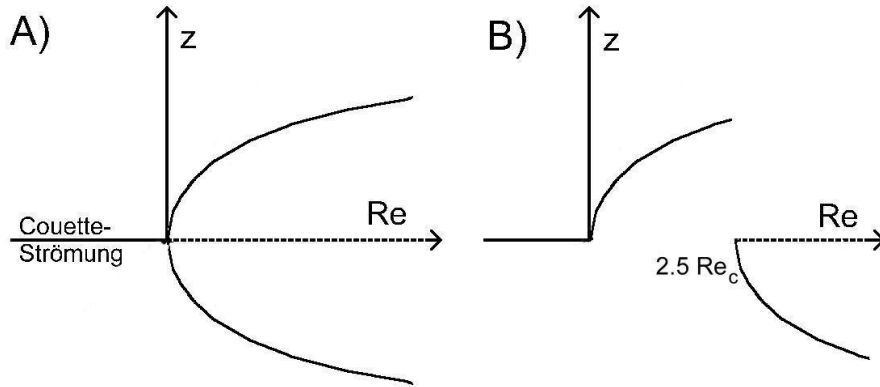


Abb. 2.5: Schematische Darstellung des Verzweigungsdiagramms des Übergangs von der Couette-Strömung in die Taylor-Wirbelströmung in einem endlichen Taylor-Couette-Systems mit (A) periodischen und (B) physikalischen Randbedingungen

minaren Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung durchgeführt. Eine Übersicht über den Stand der Forschung mit einer umfassenden Bibliographie wurde von R. Tagg [19] erstellt. Weitere Zusammenfassungen von Untersuchungsergebnissen finden sich bei Koschmieder [25], Mullin [131, 132], Di Prima und Swinney [13] und Busse et al. [23]. Eine mathematische Darstellung ist von Chossat und Iooss [18] veröffentlicht worden. Bei der Darstellung der Eigenschaften des Taylor-Couette Übergangs in diesem Abschnitt sollen Modifikationen durch Änderungen in der Geometrie und durch unabhängig rotierende Zylinder nicht betrachtet werden.

In theoretischen Arbeiten wird häufig die Taylor-Couette-Strömung mit einer unendlichen Ausdehnung in axialer Richtung betrachtet. Dieses entspricht dem Verhalten eines Systems mit periodischen Randbedingungen. Lineare Stabilitätsanalysen und schwach nichtlineare Analysen wurden unter anderem von [55, 58] von durchgeführt. Diese Analysen lieferten Aussagen über die kritische Reynoldszahl Re_c und die kritische Wellenzahl λ_c . Diese Werte hängen von der Spaltbreite η ab. Für ein Taylor-Couette-System mit $\eta = 0.5$ beträgt die kritische Reynoldszahl für ein unendlich ausgedehntes System $Re = 68.2$ [55, 58, 13]. Pfister und Rehberg [56] fanden experimentell eine gute Bestätigung für diesen Wert, indem sie die Amplitudenprofile der Strömung in einem endlichen System mittels einer Ginzburg-Landau-Gleichung auswerteten. Dabei lagen sie mit $Re_c = 68.0$ sehr nahe an der numerisch bestimmten von $Re_c = 68.2$. Die schwach nichtlinearen Analysen von Davey et al. [55] ergaben, daß die Strömungsamplitude der Taylor-Wirbel im überkritischen Bereich durch eine Landau-Gleichung beschrieben werden kann. Diese Gleichung beschreibt das Verhalten einer Gabelverzweigung (2.13). Stationäre Eigenschaften dieser Landau-Gleichung wurden von [57, 59] untersucht. Die Ergebnisse dieser Analysen sind in [13, 25] zusammengefaßt. In einem endlichen System mit ruhendem Boden und Deckel, wie es experimentell häufig verwendet wird [117, 23, 1], kann man schon im unterkritischen Bereich eine sekundäre Wirbelströmung beobachten, die sich von den Rändern ausbildet [56, 51, 117]. Diese sogenannten Ekman-Wirbel resultieren aus einer Veränderung des Geschwin-

digkeitsprofils der laminaren Couette-Strömung, aufgrund einer Singularität zwischen dem rotierenden Innenzylinder und den stationären Boden- und Deckelplatten. Diese Singularität hat zur Folge, daß sich die Isotachen, d.h. die Linien gleicher Azimutalgeschwindigkeit, des Couette-Profiles, in diesem Punkt treffen und somit eine Abnahme der Zentrifugalkraft in der Nähe der Endplatten bewirken. Aufgrund des damit auftretenden Gradienten in axialer Richtung kommt es zu einer Induktion eines Wirbels. Dieser erzeugt normalerweise eine Einwärtsströmung an den Endplatten.

Benjamin und Mullin [61, 62, 65, 63] konnten zeigen, daß diese Störung der laminaren Couette-Strömung durch die Ekman-Wirbel die Taylor-Couette-Instabilität in einem endlichen System zerstört. Sie fanden, daß in einem endlichen System mit ruhenden Endplatten sogenannte „anormale“ Moden auftreten können [65]. Diese zeichnen sich durch eine Auswärtsströmung an einer oder beiden Endplatten aus [65, 66]. Eine wichtige Eigenschaft dieser „anormalen“ Moden ist, daß sie bei einer festen Spaltbreite unabhängig von der Zylinderlänge immer bei der gleichen kritischen Reynoldszahl auftreten, die für $\eta = 0.5$ bei ca. $2.5Re_c$ liegt [66]. Schäfer stellte ein Modell für den Taylor-Couette Übergang in unter Berücksichtigung von Randbedingungen auf [64]. Ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeiten ist es, daß das Stabilitätsproblem einer endlichen Strömung sich konzeptionell von dem einer unendlich ausgedehnten Strömung unterscheidet. Diese beiden Systeme lassen sich nicht ineinander überführen, da die Randbedingungen auch für sehr große Zylinderlängen die Verzweigung zerstören. Abbildung 2.5 zeigt schematisch das Verzweigungsdiagramm der Taylor-Couette-Strömung mit (A) periodischen Randbedingungen und mit (B) realistischeren Randbedingungen.

Zur Untersuchung von Eigenschaften der Taylor-Wirbelströmungen, wie zum Beispiel dem Problem der Wellenzahlselektion [50, 51], werden häufig Ginzburg-Landau-Gleichungen herangezogen. Eine Zusammenfassung dieser Ergebnisse findet sich in [15, 19]. Randbedingungen für diese Gleichungen wurden von Graham und Domaratzki [49] untersucht. Das räumliche Ausbreiten einer Front in einem Bereich der instabilen Couette-Strömung bei Änderung der Reynoldszahl wurde numerisch von [77, 78, 79, 80] untersucht. Ahlers et al. [76] führten Experimente zur Frontpropagation durch.

Transiente Dynamik wurde im Bereich des Einsatzes der Taylor-Wirbelströmung zuerst von Davey et al. [67] und Donnelly et al. [68, 69] untersucht. Sie hatte aufgrund störungstheoretischer Überlegungen für ein Taylor-Couette-System mit Radienverhältnis $\eta = 0.5$ einen Zusammenhang $\tau_0 = 0.24\varepsilon$ aufgestellt, wobei τ_0 die Anwachsrate und ε den relativen Abstand des Kontrollparameters vom kritischen Punkt darstellt. Gollub und Freilich [70] untersuchten experimentell das Relaxationsverhalten beim Übergang in die Taylor-Wirbelströmung in einem System mit einem Höhen- zu Spaltbreitenverhältnis von $\Gamma = 30.5$ und einem Radienverhältnis von $\eta = 0.612$ mit Hilfe der Laser-Doppler-Anemometrie. Gemessen wurden die Zeitkonstanten τ durch sprungartige Änderung des Kontrollparameters von einem stationären Anfangszustand aus. Als Meßbereich wurde $-0.05 < \varepsilon < 0.5$ gewählt. Sie gaben eine Skalierung der reziproken Zeitkonstanten von $1/\tau = a_0 = (0.33 \pm 0.01)\varepsilon^{1.01 \pm 0.03}$ an. Aus diesem Ergebnis schlossen sie auf ein Auftreten eines „critical-slowness“ und sahen die Landau Theorie als bestätigt an. Für die Rayleigh- Bénard-Konvektion konnte ein „critical-slowness“ am Einsatz der Konvektionsschwelle von Behringer und Ahlers [71] gefunden werden. Numerische Untersuchungen der transienten Dynamik in einem endlichen System wur-

den von Neitzel [72] auf der Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen durchgeführt. Anders als bei den Messungen von Gollub und Freilich [70] verwendete Neitzel [72] aber immer den ruhenden Innenzylinder als Anfangswert seiner Berechnungen.

3. AUFBAU DES TAYLOR-COUETTE EXPERIMENTS

3.1 Mechanischer Aufbau

Für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen stand ein Taylor-Couette Experiment zur Verfügung, welches den sehr hohen Anforderungen genügt, die bei der Untersuchung nichtlinearen Phänomenen an ein Experiment gestellt werden. Diese konnte durch eine Reihe von vorhergehenden Arbeiten unter Beweis gestellt [117, 52, 122, 121].

Der mechanische Aufbau besteht im wesentlichen aus einem Außenzylinder, der aus Glas gefertigt wurde, und einem Innenzylinder aus Stahl. Der Radius des Außenzylinders beträgt $r_o = (25.0 \pm 0.005) \text{ mm}$ und der des Innenzylinders $r_i = (12.5 \pm 0.005) \text{ mm}$. Daher ergibt sich eine Spaltbreite von $d = 12.5 \text{ mm}$ und Radienverhältnis von $\eta = r_i/r_o = 0.5$. Messungen haben eine Exzentrizität des Innenzylinders von $\epsilon < 0.0005 \text{ mm}$ ergeben. Die Boden- und Deckelplatte sind aus Messing gefertigt. Der Deckel ist über einen Schrittmotor mit einer Genauigkeit von $\Delta L = 0.01 \text{ mm}$ in der Höhe justierbar. Während der Untersuchungen dieser Arbeit waren sowohl Boden- und Deckelplatte als auch der Außenzylinder in Ruhe, nur der Innenzylinder rotierte. Die Drehzahl des Innenzylinders wurde über eine Regelung basierend auf einen „PLL“ (phase locked loop) mit einer Genauigkeit von $f/\Delta f = 10^{-4}$ bei einer Rotation und im Langzeitmittel auf $f/\Delta f = 10^{-7}$ konstant gehalten. Als Meßflüssigkeit wurde Silikonöl mit unterschiedlicher Viskosität benutzt. Dabei kam sowohl Silikonöl mit $\nu \approx 35 \text{ cSt}$ für die Untersuchung des Taylor-Couette Übergangs als auch Silikonöl mit $\nu \approx 10 \text{ cSt}$ für die Untersuchungen der zeitperiodischen Instabilitäten zum Einsatz. Die genaue Viskosität wurde jeweils ermittelt. Unterschiedliche Viskositäten ermöglichen eine Skalierung des relevanten Drehzahlbereichs, da die geometrischen Parameter fest sind.

Die Reynoldszahl, die durch $Re = 2\pi \frac{d \cdot r_i \cdot f}{\nu}$ definiert ist, ist bei fester Viskosität und einer festen Geometrie proportional zur Drehfrequenz f des Innenzylinders. Um eine hohe Genauigkeit in der Reynoldszahl zu bekommen, muß die Temperatur der Meßflüssigkeit möglichst konstant gehalten werden, da eine starke Abhängigkeit der Viskosität des Silikonöls von der Temperatur besteht. Um dieses zu erreichen und auch mögliche Temperaturgradienten zu vermeiden, wird die Thermostatisierung in drei Stufen durchgeführt. Zunächst wird das Labor mit Hilfe einer Klimaanlage auf $(21.0 \pm 1)^\circ \text{ C}$ gehalten. In der nächsten Stufe wird das Innere einer isolierten Box, die das gesamte Experiment umschließt, durch eine Luftthermostatisierung auf $(21.0 \pm 0.1)^\circ \text{ C}$ temperiert. Die eigentliche Thermostatisierung geschieht durch ein Umströmen des Außenzylinders mit einem auf $(21.0 \pm 0.01)^\circ \text{ C}$ temperierten Silikonöl. Dabei ist der Außenzylinder nochmals von einer Box aus Plexiglas umgeben. Der experimentelle Aufbau ist schematisch in Abbildung 3.1 dargestellt.

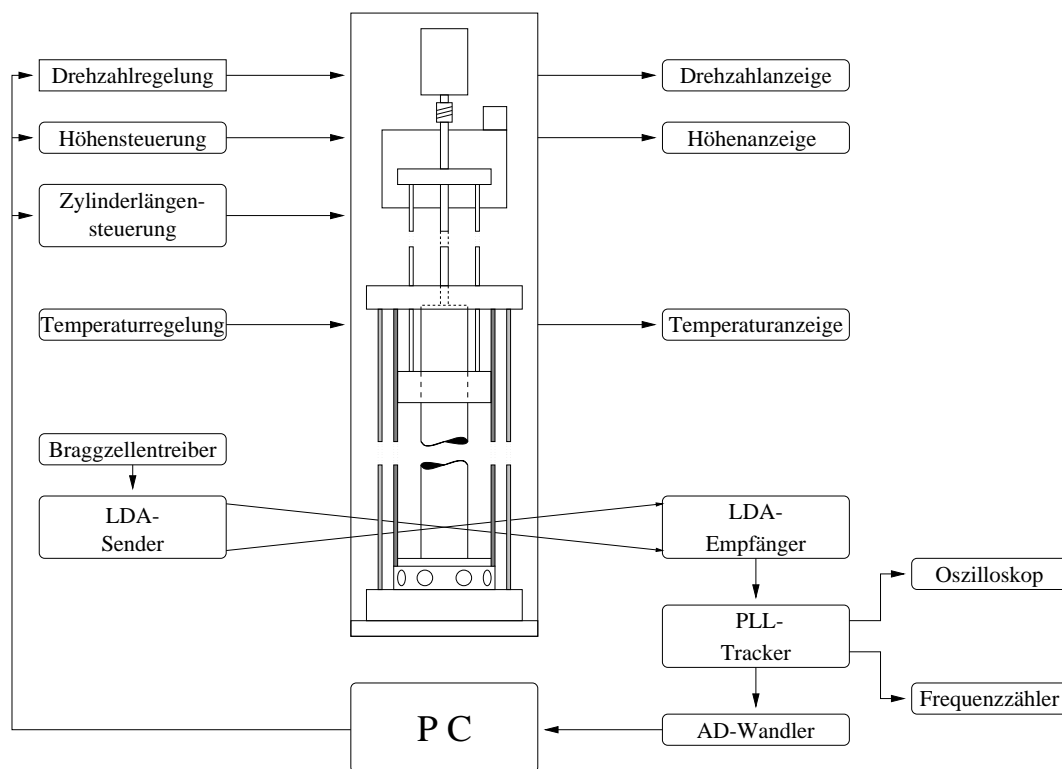


Abb. 3.1: Schematischer Aufbau des Taylor-Couette Experiments mit Regelungselementen und Laser-Doppler Anemometer.

3.2 Optische Strömungsmeßverfahren

Die Strömungsgeschwindigkeit der Meßflüssigkeit wird mit Hilfe optischer Strömungsmeßverfahren bestimmt. Optische Meßverfahren haben gegenüber anderen, wie der Hitzdrahtanemometrie oder dem Pilotrohr [41, 42], den Vorteil, daß die Strömung nicht durch Einführen mechanischer Komponenten gestört wird. Dieses würde insbesondere die zumeist sehr sensiblen Effekte, die Gegenstand dieser Untersuchungen sind, zerstören. Bei optischen Verfahren wird hingegen nicht die Geschwindigkeit der Flüssigkeit selbst, sondern die suspendierter oder schon in der Strömung vorhandener Streupartikel gemessen. Es muß natürlich sichergestellt sein, daß diese Teilchen zum einen die Strömung ebenfalls nicht stören, zum anderen aber auch eine gutes Folgeverhalten und eine hinreichende Streucharakteristik besitzen. In Rahmen dieser Arbeit kamen zwei optische Meßverfahren zum Einsatz, die Laser-Doppler Anemometrie (LDA) und die Particle-Image-Verlocimetry (PIV), wobei der überwiegende Teil der Untersuchungen mit LDA durchgeführt wurden.

Die Laser-Doppler Anemometrie ist ein optisches Strömungsmeßverfahren, welches die Strömungsgeschwindigkeit des Meßfluids lokal mißt [39, 40]. Dabei wird üblicherweise nur eine Geschwindigkeitskomponente im Meßort bestimmt. Mehrkomponenten-LDA sich ebenfalls möglich, aber technisch deutlich aufwendiger zu realisieren [42]. Die Laser-Doppler Anemometrie zeichnet sich durch eine gute zeitliche Auflösung und eine hohe Geschwindigkeitsauflösung aus. In diesen Punkten ist LDA zur Zeit das Verfahren

der Strömungsmeßtechnik mit der höchsten Genauigkeit [41]. Daher ist es für Untersuchungen dynamischer Eigenschaften einer Strömung, wie sie in dieser Arbeit durchgeführt werden, besonders geeignet. Ergänzt werden die Messungen mittels LDA durch Visualisierungsverfahren, mit denen die räumliche Strukturen von Strömungen untersucht werden. In unserer Arbeitsgruppe steht dafür ein „Partikel-Image-Velocimeter“ zur Verfügung, das neben der Visualisierung auch quantitative Informationen über das räumliche Strömungsverhalten liefert [37].

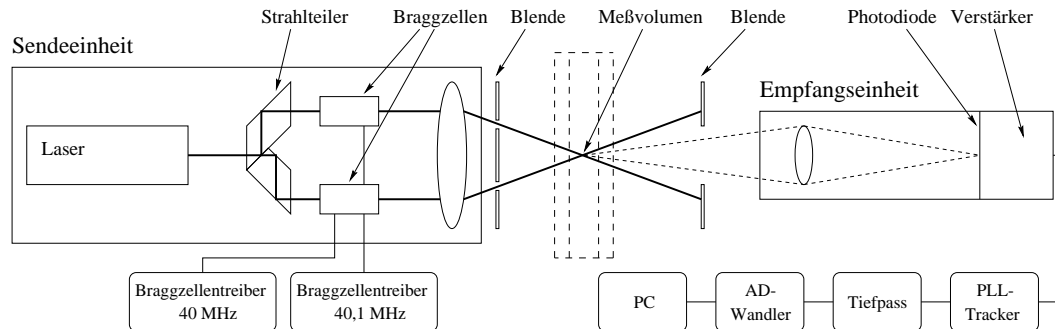


Abb. 3.2: Schematischer Aufbau eines Laser-Doppler-Anemometers (LDA)

Die Funktionsweise der Laser-Doppler Anemometrie basiert darauf, daß Frequenzunterschiede im Streulicht bewegter Teilchen, die aufgrund des Dopplereffekt zustande kommen, bezüglich eines Referenzsignals detektiert und ausgewertet werden [40, 39]. Bewegen sich Teilchen mit der Meßflüssigkeit, so liefert die Teilchengeschwindigkeit die Information über die Strömungsgeschwindigkeit. Für die konkrete Realisierung der Meßanordnung gibt es mehrere prinzipielle Möglichkeiten, die in [40, 39] dargestellt sind. Das für diese Arbeit benutzte Verfahren basiert auf dem Prinzip, daß zwei sich unter einem Winkel kreuzende Laserstrahlen jeweils unterschiedlich verschobenes Streulicht aussenden, welches vom Detektor aufgenommen wird. Aufgrund der unterschiedlichen Winkel der beiden Laserstrahlen bezüglich der Bewegung des Streuteilchens kommt es zu unterschiedlichen Doppler-Verschiebungsfrequenzen. In diesem Verfahren wird nur Streulicht aus dem Kreuzungspunkt der beiden Laserstrahlen ausgewertet. Daher nennt man diesen Kreuzungspunkt auch Meßvolumen, welches die Form eines Ellipsoides hat. Eine schematische Darstellung des für die Arbeit benutzten Meßaufbaus ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

Bei dem in diesem Experiment benutzten Laser handelt es sich um einen 7mW HeNe-Laser. Nachdem der Laserstrahl mit Hilfe eines Strahlteilers in zwei Teilstrahlen aufgespalten wird, wird die Frequenz des Lichts durch akusto-optische Modulatoren (Bragg-Zellen) verschoben. Dieses geschieht durch laufende Schallwellen in einem Kristall, die zu Dichteschwankungen und damit zu Brechungsindexänderungen führen, und so als Phasengitter wirken. Die Verschiebung der beiden Teilstrahlen ist etwas unterschiedlich, sie liegt bei 40MHz und bei $39,9\text{MHz}$. Diese Differenz bewirkt, daß das Interferenzstreifenmuster im Meßvolumen nicht mehr fest ist, sondern in eine Richtung läuft. Damit wird die Nulllage des Streulichts auf 100kHz verschoben, so daß es möglich ist, neben dem Betrag der Geschwindigkeit auch die Richtung zu bestimmen. Wegen der geringen Laserleistung wird die Streuung in Vorwärtsrichtung detektiert.

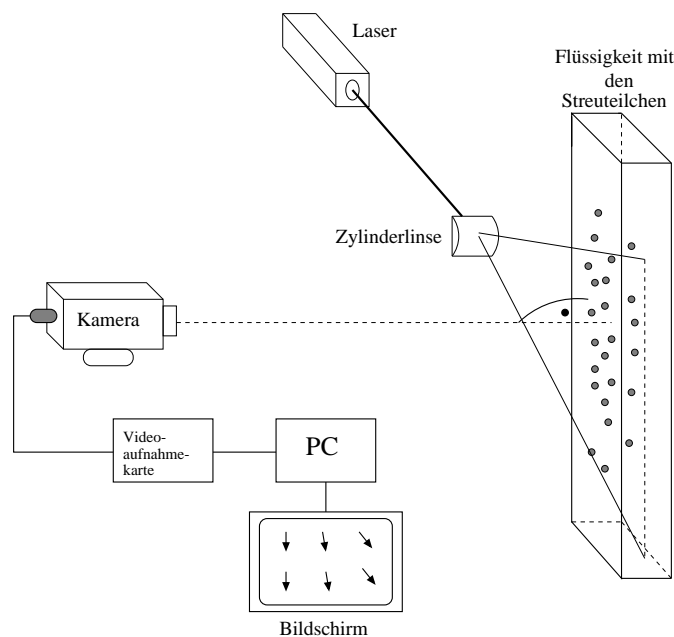


Abb. 3.3: Darstellung eines Particle-Image-Velocimeters (PIV) (aus [37])

Wegen einer Streuteilchengröße von $6.2\mu\text{m}$ (monodisperse Latexteilchen) kommt die Mie'sche Streutheorie zu Anwendung, deren höchste Amplitude in Vorwärtsrichtung zu finden ist. Detektiert wird das Licht mit Hilfe einer Avalanche-Photodiode. Zur Auswertung der LDA-Burst wird ein Analogtracker benutzt. Das Prinzip basiert auf einer Regenstrecke aus Phasenkomparator und spannungsgesteuertem Oszillator. Die Regelspannung dieses Oszillators ist proportional zur Frequenz des detektierten Streulichtes. Diese Regelspannung entspricht somit der lokalen Strömungsgeschwindigkeit im Meßvolumen. Sie wird nach analoger Verstärkung und Filterung mit Hilfe eines 14-bit AD-Wandlers in eine Meßrechner eingelesen und dann weiterverarbeitet. Eine detaillierte Beschreibung des Meßaufbaus findet sich in [43, 122].

Die zweite Strömungsmeßmethode, die in dieser Arbeit zur Anwendung kommt, ist die „Particle-Image-Velocimetrie“. Dieses Verfahren erlaubt es, zweidimensionale Geschwindigkeitsfelder einer Strömung aufnehmen zu können. Diese Verfahren ist ebenfalls berührungslos und liefert quantitative Geschwindigkeitsinformationen. Der schematische Aufbau dieses Meßverfahrens ist in Abbildung 3.1 dargestellt. Mit Hilfe eines Lasers wird ein Lichtschnitt erzeugt, der in der Strömung in den relevanten Meßbereich eingebracht wird. Gemessen werden bei diesem Verfahren die beiden Geschwindigkeitskomponenten innerhalb der Ebene, indem das Streulicht von suspendierten Teilchen mittels einer Kamera aufgezeichnet wird. Dabei werden zwei Bilder in einem kurzen Zeitabstand nacheinander belichtet. Die Verschiebung zwischen den beiden Bildern liefert die Geschwindigkeitsinformation, die mittels statistischer Verfahren ausgewertet werden. Die prinzipiellen Eigenschaften der „Particle-Image-Velocimetrie“ sind in Raffel [38] beschrieben worden. Die Spezifikationen des in dieser Arbeit verwendeten Meßsystems finden sich bei Langenberg [37].

4. UNTERSUCHUNGEN ZUM RELAXATIONSVERHALTEN AM ÜBERGANG ZUR TAYLOR-WIRBELSTRÖMUNG

Aus den bisherigen Untersuchungen des Übergangs zur Taylor-Wirbelströmung ergeben sich offenkundig Widersprüche. Die Arbeiten von Benjamin und Mullin [61, 62, 65, 63] haben, wie in Kapitel 2.3 dargelegt, eindeutig gezeigt, daß es sich beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung nicht um eine Verzweigung, sondern um einen kontinuierlichen Prozeß handelt, welcher durch die Randwirbel ausgelöst wird. Dieses gilt insbesondere auch für sehr lange Systeme. Auf der anderen Seite steht die Auffassung [70, 15], daß sich der Taylor-Couette-Übergang in einem endlichen System als leicht gestörte Variante des Taylor-Couette-Problems in unendlich ausgedehnten Systemen darstellt. Letztere Betrachtung impliziert die Anwendbarkeit einer Landau-Gleichung, welche aus der schwachen nichtlinearen Analyse des unendlich ausgedehnten Systems herrührt, auch für die Beschreibung der Taylor-Couette-Strömung in einem endlichen System. Die Störung durch die Ränder wird in diesem Bild als eine schwache symmetriebrechende Störung angesehen, welche die Gabelverzweigung wegen der Strukturinstabilität entkoppelt. Insbesondere wird angenommen, daß diese Störung für sehr große Systemlängen zumindest in einem ausreichenden Abstand von den Rändern klein werden und daher das prinzipielle Verhalten nicht verändert.

Ein solches Verhalten würde die Anwendung einer Landau-Gleichung rechtfertigen, und insbesondere auch das Auftreten eines „critical-slowness“ mit einem Skalierungsverhalten von $\tau = \tau_0 \varepsilon^{-1}$ am Übergangspunkt zur Taylor-Wirbelströmung erwarten lassen. Dieses Verhalten wurde von Gollub und Freilich experimentell gefunden [70]. Wegen der ungeklärten Widersprüche, die sich bei der Beschreibung des Taylor-Couette-Übergangs ergeben, ist es nötig, diese Ergebnisse zu überprüfen und erneute Messungen zum Relaxationsverhalten am Taylor-Couette-Übergang durchzuführen.¹

4.1 Meß- und Auswertungsverfahren

4.1.1 Bestimmung der Zeitkonstanten

Um das Relaxationsverhalten eines nichtlinearen Systems zu bestimmen, wird, wie bei linearen Systemen auch, eine kleine Störung in das System eingebracht und das Responseverhalten beobachtet. In der Umgebung von Instabilitäten wird dieses zumeist durch kleine Kontrollparametersprünge von einem stationären Anfangszustand ausgehend durchgeführt. Die Auswertung der gewonnenen Zeitreihen hängt dann vom Modell ab, welches die Dynamik des Systems beschreibt.

¹ Die Messungen wurden in Zusammenarbeit mit O. Meincke [73] und M. Wrage [74] im Rahmen ihrer Diplomarbeit durchgeführt

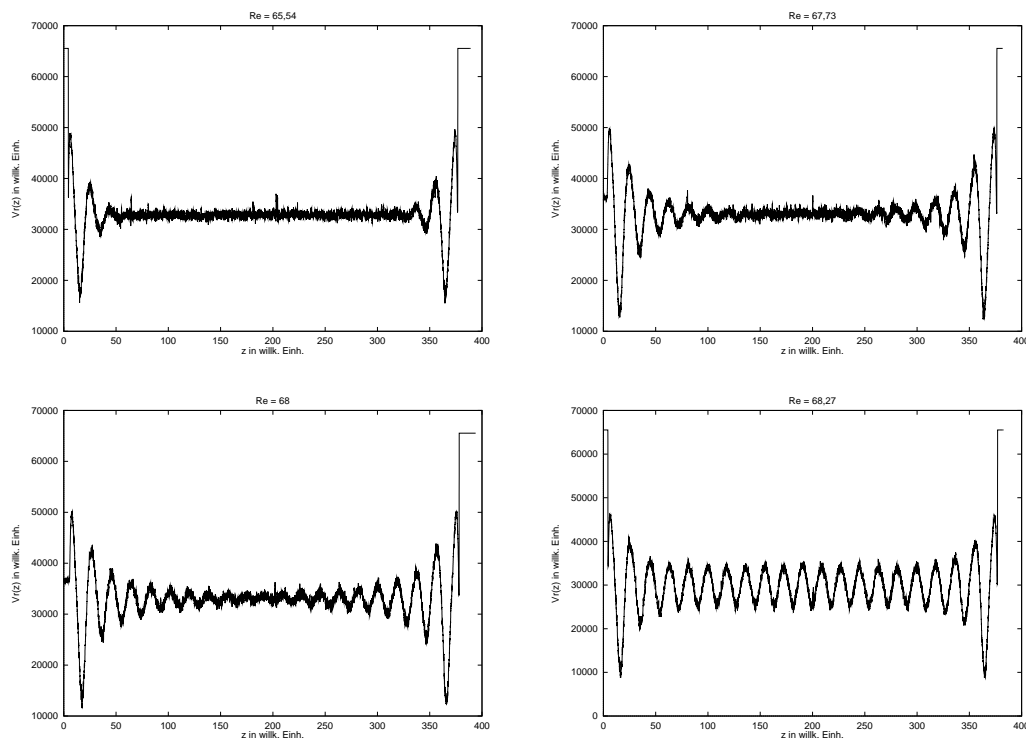


Abb. 4.1: Profile der radialen Strömungsgeschwindigkeit v_r , für vier verschiedene Reynoldszahlen aufgenommen in einem 40-Wirbelzustand. Deutlich ist die Induktion von Wirbeln ausgehend von den Rändern schon im „unterkritischen“ Bereich ($Re = 65.54, 67.73, 68.0$) zu erkennen.

Meßwertaufnahme

Bei der Messung des Relaxationsverhaltens des Übergangs von der Couette- zur Taylor-Wirbelströmung geht man ebenso vor. Da es sich bei diesem Übergang aber um einen räumlich ausgedehnten Prozeß handelt, ist die Wahl des Meßortes von entscheidender Bedeutung. Um das Einsetzen der sekundären Wirbelströmung zu charakterisieren, muß nur entweder die radiale oder die axiale Komponente gemessen werden, weil es sich bei der Couette-Strömung um eine reine Azimutalströmung ohne radiale und axiale Komponenten handelt. Dabei ist zu beachten, daß die gewählte Komponente und der Meßort die Amplitude der Taylor-Wirbelströmung hinreichend repräsentiert. Daher wurde die radiale Komponente der Strömungsgeschwindigkeit v_r in der Zylindermitte $L/2$ in einem Abstand von 3mm vom Innenzylinder gemessen. Abbildung 4.1 zeigt die räumliche Verteilung von v_r eines 40-Wirbelzustandes für vier verschiedene Reynoldszahlen in der unmittelbaren Umgebung des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung. Dabei entspricht nur das Profil, welches bei $Re = 68.27$ aufgenommen wurde, einem, im Sinne des unendlich ausgedehnten Systems, überkritischen Zustand. Aus den Profilen im „unterkritischen“ Bereich wird deutlich, daß die von den Rändern induzierten Wirbel nahe des kritischen Punktes selbst im 40-Wirbelzustand schon fast den gesamten Zylinder ausfüllen. Deshalb ist offensichtlich, daß es auch für relativ große Systeme nicht sinnvoll ist, beim Übergang von der Couette- zur Taylor-Wirbelströmung

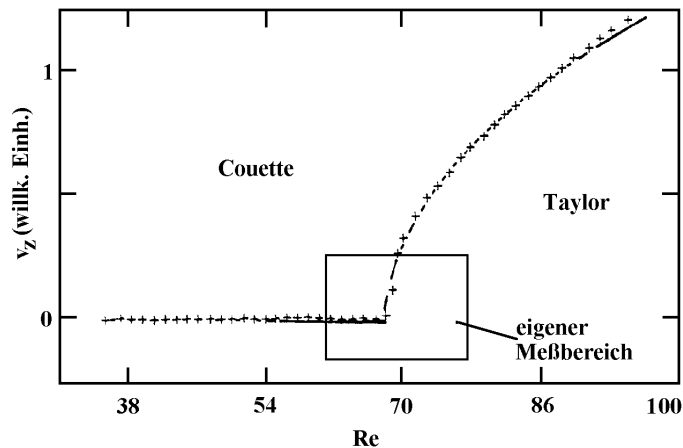


Abb. 4.2: Wurzelartiges Ansteigen der Strömungsgeschwindigkeit beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung (aus [53]). Der für die Untersuchungen des Relaxationsverhaltens relevante Meßbereich ist dargestellt.

von einer schwach gestörten Instabilität zu sprechen, bei der die Störung für große Systeme zu vernachlässigen ist. Aus den Profilen in Abbildung 4.1 geht hervor, daß die Zylindermitte der sinnvollste Meßort ist, da hier die Störungen von den Ränder minimal sind. Außerdem ist wegen der Spiegelsymmetrie des Systems in der Zylindermitte immer das Maximum der radialen Strömungsgeschwindigkeit im Bereich der Taylor-Wirbelströmung. Wegen der Änderung der Wirbelgröße mit der Reynoldszahl [117, 51, 50] hätten andere Meßorte zudem den Nachteil, daß nicht nur die Amplitude, sondern auch die Änderung des Profils mitgemessen würde. Dieses würde insbesondere bei den Messungen des Responseverhaltens zu inakzeptablen Verfälschungen des Zeitverhaltens durch Phasendiffusionsprozesse [52, 2, 117] führen.

Da es Ziel dieser Untersuchung ist, ein möglichst präzises Bild vom Relaxationsverhalten in der Umgebung des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung zu erhalten, wurden die Messungen in einem kleinen Bereich um den kritischen Punkt durchgeführt. Abbildung 4.2 zeigt den Reynoldszahlbereich, in dem das Responseverhalten untersucht wurde. Dargestellt ist die radiale Strömungsgeschwindigkeit eines stationären 30-Wirbelzustandes in der Zylindermitte aufgetragen über der Reynoldszahl. Man erkennt deutlich das wurzelartige Verhalten der Strömungsamplitude über einen großen Reynoldszahlbereich. Allerdings ist in unmittelbarer Umgebung des Einsetzens der Wurzelfunktion eine ähnlich inhomogene Verteilung der Strömungsgeschwindigkeit im System vorhanden, wie es für den 40-Wirbelzustand in Abbildung 4.1 dargestellten ist. Trotz des großen Bereichs der Übereinstimmung mit dem Wurzelgesetz ist für die Untersuchung der kritischen Verlangsamung nur der Bereich in unmittelbarer Umgebung des Einsetzens der Wirbelströmung relevant, da nur hier die theoretischen Ableitungen Gültigkeit besitzen [55, 59]. Das Responseverhalten im nichtlinearen Bereich ist zur Zeit theoretisch nicht verstanden, so daß etwaige Effekte bei einer Messung in diesem Bereich nicht berücksichtigt würden und zu fehlerhaften Interpretationen führen könnten.

Um das Relaxationsverhalten zu bestimmen, wird ausgehend von einem Anfangs-

wert die Reynoldszahl sprunghaft erhöht und die sich ergebende Änderung der Strömungsgeschwindigkeit aufgezeichnet. Dabei wird zunächst sichergestellt, daß es sich bei dem Anfangszustand um einen stationären Zustand handelt, indem eine ausreichende Zeit abgewartet wird. Dann wird eine Zeitreihe aufgenommen, um daraus einen Mittelwert für den Anfangszustand, welcher für die weitere Auswertung benutzt wird, zu bestimmen. Als Anfangszustände werden sowohl unter- als auch überkritische Strömungszustände gewählt. Dabei wurde von den unterkritischen Zuständen aus das Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung und von den überkritischen das Abklingverhalten untersucht. Die unterkritischen Anfangszustände wurden so gewählt, daß zwar noch keine radiale Strömung am Meßort vorhanden war, sich aber schon eine Wirbelströmung vom Zylinder ausbreiten konnte. Dadurch kann bei der sprunghaftigen Erhöhung der Reynoldszahl vermieden werden, daß sich Fronten von den Rändern aus bilden, die in der Zylindermittle zusammenlaufen. Die dabei auftretenden Selektions- und Ausgleichsprozesse würden sonst das Einsetzen der Wirbelströmung überlagern. Aus diesem Grund konnten Messungen auch nur sinnvoll bis zu Zuständen mit 20 Wirbeln durchgeführt werden. Bedingt durch die kleinen Reynoldszahländerungen entstehen nur kleine Änderungen in der Strömungsgeschwindigkeit. Wegen des relativ hohen Rauschanteils aufgrund der kleinen radialen Strömungsgeschwindigkeiten war es nur möglich, das Verhalten überkritischer Endzustände zu untersuchen, da in diesem Fall eine endliche Amplitude nach Abklingen der Transienten vorliegt. Bei unterkritischen Endzuständen treten im Experiment Fluktuationen auf, welche das Meßsignal überlagern. Nachdem das Relaxationsverhalten aufgenommen worden ist, wird die Strömungsamplitude des stationären Endzustandes bestimmt, indem wiederum nach einer ausreichenden Wartezeit (ca. 10min) eine Zeitreihe zur Mittelwertbildung gemessen wird. Diese wird ebenfalls für die dann folgende Auswertung benutzt.

Zeitkonstanten in nichtlinearen Systemen

Um aus den Meßdaten Aussagen über das Verhalten der Zeitkonstante machen zu können, wird die zu erwartende theoretische Kurve an das gemessene Zeitverhalten angepaßt. Die Zeitkonstante ist dabei assoziiert mit dem exponentiellen Verhalten in der Umgebung eines Fixpunkts, bestimmt sich also aus dem Realteil des größten Eigenwerts der Jakobi-Matrix bzw. der Frechét-Ableitung für räumlich ausgedehnte Systeme. Als Zeitkonstante wird das Reziproke dieses Eigenwertes definiert. Für einen kritischen Punkt, der durch einen Nulldurchgang dieses Realteils definiert ist, ergibt sich daher eine divergente Zeitkonstante. Die konkrete Dynamik eines Systems hängt jedoch auch von den nichtlinearen Termen ab. So divergiert zwar die Zeitkonstante der Landau-Gleichung am kritischen Punkt, Störungen klingen aber wegen des nichtlinearen Dämpfungsterms trotzdem ab. Das Zeitverhalten ist allerdings nicht mehr exponentiell, sondern gehorcht einem $1/\sqrt{t}$ -Gesetz. Hier wird auch deutlich, daß Systeme mit unterschiedlichen nichtlinearen Termen zwar ein unterschiedliches Zeitverhalten aufweisen, aber trotzdem demselben Skalierungsgesetz gehorchen können. Zu sehen ist dies beispielsweise beim Vergleich des logistischen Wachstums mit der Landau-Theorie [14]. Diese Definition der Zeitkonstanten ist sinnvoll, da eine Instabilität bis zum kritischen Punkt vollständig durch den linearen Anteil beschrieben werden kann.

In diesem Bereich genügt die lineare Dämpfung, um das Anwachsen einer Störung zu schwächen. Erst im überkritischen Bereich kommt es zu einer Konkurrenz zwischen linearem Wachstum und nichtlinearer Dämpfung, welche für das Auftreten einer endlichen Amplitude verantwortlich ist. Die Hinzunahme eines Störterms bewirkt, daß sich schon im unterkritischen Bereich eine endliche Gleichgewichtsamplitude einstellt. Daher wird das „critical-slowng-down“ zerstört. Bei räumlich ausgedehnten Systemen ist das Verhalten im Prinzip dasselbe, nur kann hier auch unter der Annahme von stationären Störungen ein deutlich komplizierteres Verhalten auftreten, da räumliche Inhomogenitäten berücksichtigt werden müssen. So treten beim Taylor-Couette-System die Störungen nur an den Rändern auf.

Da es zur Zeit kein befriedigendes mathematisches Modell gibt, welches den Übergang zur Taylor-Wirbelströmung hinreichend beschreibt und Voraussagen über das Relaxationsverhalten liefert, die experimentell zu überprüfen wären, sind die Meßergebnisse trotz der prinzipiellen Schwierigkeiten im Sinne der Landau-Theorie ausgewertet worden. An die Meßkurven wird die Lösung der Landau-Gleichung 2.13 angepaßt:

$$A(t) = \frac{A_f e^{\frac{t}{\tau}}}{\sqrt{e^{\frac{t}{\tau}} + \left(\frac{A_f}{A_i}\right)^2 - 1}} \quad (4.1)$$

Die Anfangsamplitude A_i und die Endamplitude A_f werden, wie oben dargestellt, in den stationären Zuständen gemessen, so daß als einziger freier Parameter die Zeitkonstante τ angepaßt wird. Die Wahl dieser Auswertungsmethode hat im wesentlichen zwei Gründe. Zunächst stehen die Untersuchungen von Gollub und Freilich [70] im Raum, die behaupten, daß das Relaxationsverhalten am Übergang zur Taylor-Wirbelströmung im Rahmen der Landau-Theorie zu verstehen ist und insbesondere daß ein „critical-slowng-down“ auftritt. Die Anwendung derselben Auswertungsmethode ermöglicht somit einen direkten Vergleich mit ihren Ergebnissen. Zudem wird die Relaxation nur an einem Ort in der Strömung gemessen. Somit liegen nur skalare Zeitreihen vor und es können keine experimentellen Aussagen über räumliche Prozesse gemacht werden. Die Landau-Theorie liefert daher die einfachste funktionale Form, welche für die stationären Zustände eine Wurzelabhängigkeit der Amplitude vom Kontrollparameter beschreibt. Wie aus Abbildung 4.2 ersichtlich, tritt dieses Verhalten bei hinreichend großen Zylinderhöhen zumindest in der Zylindermitte auf.

Wegen der im Experiment unvermeidlich vorhandenen Störungen könnte noch ein Störterm für die Beschreibung des realen Experiments hinzugenommen werden. Gollub und Freilich [70] haben versucht, diesen durch die Wahl eines großen Systems klein zu halten, um ihn für die Analyse ausschließen zu können. Ein solcher Term würde die Anzahl der anzupassenden Parameter erhöhen. Da die Strömungsgeschwindigkeiten im interessanten Meßbereich sehr klein sind und damit das Meßrauschen entsprechend groß ist, führt ein zusätzlicher Parameter zu einer größeren Beliebigkeit. Somit wird auch hier zunächst, wie bei den Experimenten von Gollub und Freilich, angenommen, daß diese Störungen klein sind und das prinzipielle Verhalten nur wenig beeinflussen, wie es bei den stationären Amplituden der Fall ist.

4.1.2 Bestimmung des Skalierungsverhaltens

Kann man bei der Bestimmung der Zeitkonstanten noch davon ausgehen, daß, wie im vorherigen Abschnitt dargelegt, eine Anpassung mit Hilfe der Lösung der Landau-Gleichung bei leicht verrauschten Daten auch bei einem gestörten System noch zu approximativ richtigen Ergebnissen bei der Bestimmung der Zeitkonstanten führt, so treten bei der Untersuchung des Skalierungsverhaltens konzeptionelle Probleme auf. Denn wie die Arbeiten von Benjamin und Mullin [65, 61, 62, 63] gezeigt haben, tritt auch in langen Systemen kein kritischer Punkt beim Übergang zur Taylor-Wirbelströmung auf. Um eine Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen von Gollub und Freilich [70] zu ermöglichen, wird in dieser Arbeit zunächst davon ausgegangen, daß zumindest approximativ auch die Skalierung im Sinne der Landau-Theorie auszuwerten ist. Eine konstante Störung der Landau-Gleichung führt dazu, daß die Divergenz der Zeitkonstanten verschwindet und sich ein Maximum ergibt. Dies tritt aber wiederum am ursprünglichen kritischen Punkt auf, so daß dieser Punkt bei schwacher Störung für die experimentelle Auswertung als „approximativer“ kritischer Punkt angesehen werden kann. Die Bestimmung dieses Punktes kann dann durch das Wurzelgesetz erfolgen. Dieses Verfahren wird im folgenden bei der Untersuchung des Relaxationsverhaltens einer symmetriebrechenden Verzweigung des 2-Wirbelzustandes angewendet. In diesem Fall ist theoretisch und experimentell gezeigt worden, daß es sich um eine Gabelverzweigung handelt [120, 122], die allerdings durch experimentelle Ungenauigkeiten gestört ist. Beim Übergang zur Taylor-Wirbelströmung wird in dieser Arbeit neben dem Skalierungsverhalten auch die Abhängigkeit dieser Skalierung von der Länge des Systems untersucht. Dabei ist zur Zeit nicht geklärt, ob eine Änderung der Länge zu einer Verschiebung des Maximums der Zeitkonstanten führt. Der Grund für eine solche Verschiebung könnte darin liegen, daß das räumliche Profil der Amplitude gekrümmt ist. Dieses ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Bei konvektionsunterdrückenden Rändern führt die räumliche Inhomogenität zu einer Verschiebung des kritischen Punktes und damit des „critical-slowng-down“ zu höheren Kontrollparameterwerten [15, 17]. In der Ginzburg-Landau-Gleichung ist dieses eine Folge der zweiten Ortsableitung. Eine Krümmung des Profils entgegengesetzt derer, die bei konvektionsunterdrückenden Rändern auftritt, könnte zu einer Verschiebung des Maximums der Zeitkonstanten zu kleineren Kontrollparameterwerten führen. Um einen Vergleich mit den Ergebnissen von Gollub und Freilich [70] zu ermöglichen, wird die Skalierung zum einen unter der Annahme eines „approximativen“ kritischen Punktes im Sinne der gestörten Landau-Theorie bestimmt. Dabei wird in einem großen System der „approximative“ kritische Punkt auf Grundlage des Wurzelgesetzes bestimmt und für alle Zylinderhöhen zur Auswertung verwendet. Andererseits wird unter der Annahme, daß eine Verschiebung des Maximums der Zeitkonstanten bei Veränderung der Systemlänge auftritt, die Bestimmung des kritischen Punktes für jede Zylinderhöhe separat durchgeführt.

4.2 Symmetriebrechende Verzweigung des 2-Wirbelzustandes

Bevor der Übergang von der Couette- zur Taylor-Wirbelströmung betrachtet wird, soll das Relaxationsverhalten an einer symmetriebrechenden Verzweigung eines 2-Wirbel-

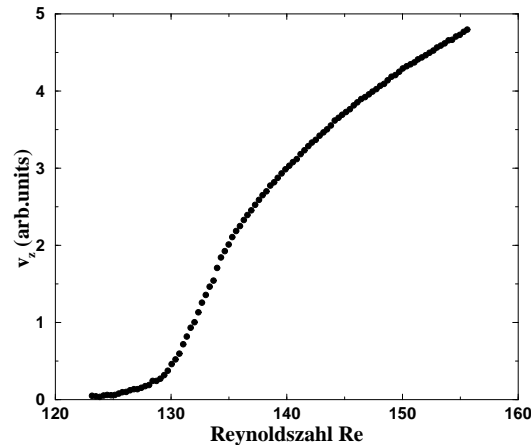


Abb. 4.3: Gemittelte axiale Strömungsgeschwindigkeit v_z im Übergangsbereich vom symmetrischen 2- in den asymmetrischen 1-Wirbelzustand. Durch Anpassung einer Wurzelfunktion ergibt sich eine kritische Reynoldszahl $Re_c = 129.2$.

zustandes untersucht werden. Wirbelströmungen in sehr kleinen Systemen wurden von Pfister, Cliffe und Mullin [120, 122] mit dem Ziel untersucht, die Anzahl der stationären Lösungen stark zu reduzieren. Dabei wurden neben einer Vielzahl von zeitperiodischen Instabilitäten auch stationäre Verzweigungen gefunden, welche den reflexionssymmetrischen Grundzustand in einen bezüglich der Z_2 -Symmetrie asymmetrischen übergehen lassen. Diese symmetriebrechenden Verzweigungen wurden sowohl experimentell [122] als auch mit Hilfe numerischer Verzweigungsanalyse der Navier-Stokes-Gleichungen untersucht [120, 122]. Somit ist sowohl vom theoretischen als auch vom experimentellen Standpunkt klar, daß es sich beim Übergang vom symmetrischen 2-Wirbelzustand in einen asymmetrischen 1-Wirbelzustand um eine Z_2 -symmetriebrechende Verzweigung handelt. Diese läßt sich in niedrigster Ordnung durch eine Gabelverzweigung beschreiben (vgl. Kapitel 2.2.3). Die experimentellen Untersuchungen zeigten aber auch, daß ein asymmetrischer 1-Wirbelzustand entkoppelt ist, während sich der andere kontinuierlich aus dem symmetrischen 2-Wirbelzustand entwickelt [122]. Es liegt also das Verhalten einer gestörten Gabelverzweigung vor, deren Relaxationsverhalten in diesem Abschnitt untersucht werden soll.

Als normierte Höhe des Zylinders wurde $\Gamma = 1$ gewählt. Gemessen wurde die axiale Strömungsgeschwindigkeit v_z in der Zylindermitte ($L/2$) in einem Abstand von $r = 1.55\text{mm}$ vom Innenzylinder, da hier das Maximum der axialen Strömungsgeschwindigkeit des asymmetrischen 1-Wirbelzustandes liegt. Die axiale Geschwindigkeitskomponente wurde gewählt, da so der symmetrische 2-Wirbelzustand eindeutig durch eine verschwindende Geschwindigkeitskomponente charakterisiert ist. Die radiale Komponente ändert sich mit der Reynoldszahl und ist somit für die Bestimmung des Zustandes nicht geeignet. Um das stationäre Verhalten in der Umgebung des kritischen Punktes zu bestimmen, wurde zunächst für verschiedene Reynoldszahlen die axiale Strömungsgeschwindigkeit am Meßort bestimmt. Dabei wurden für jeden Meßpunkt Zeitreihen nach einer gewissen Wartezeit (typischerweise 10 min) aufgenommen

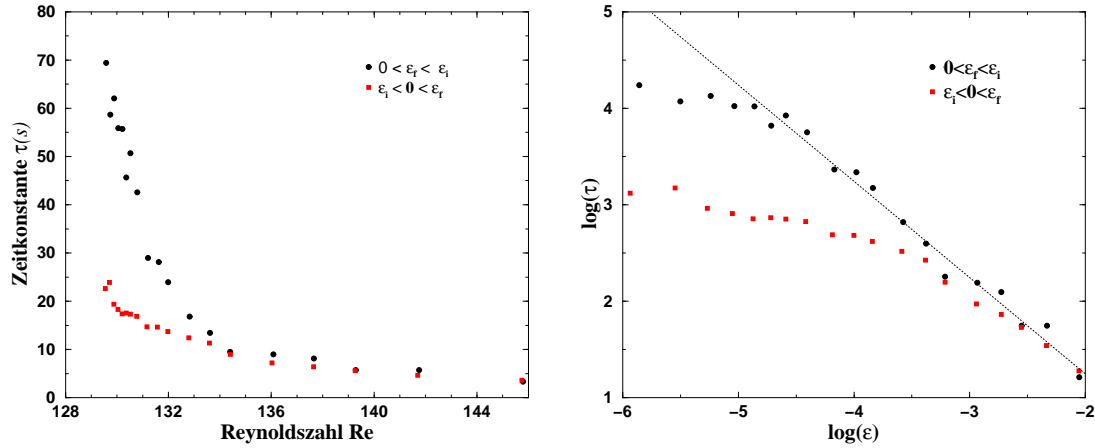


Abb. 4.4: Rechts: Zeitkonstanten im Übergangsbereich von 1- und 2-Wirbelzustand für einen unter- und überkritischen Anfangszustand; links: Skalierungsverhalten an symmetriebrechender Verzweigung für unterschiedliche Anfangszustände. Die Gerade entspricht der Skalierung ε^{-1} .

und dann gemittelt. Das Ergebnis dieser Messungen ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Der wurzelartige Anstieg der mittleren Strömungsgeschwindigkeit ist ebenso wie die leichte Störung in unmittelbarer Umgebung des kritischen Punktes zu erkennen. Die Anpassung einer Wurzelfunktion ergibt eine kritische Reynoldszahl von $Re_c = 129.2$. Das Relaxationsverhalten wurde nur für den überkritischen Bereich bestimmt, da die axiale Geschwindigkeit im unterkritischen Bereich verschwindet und daher die Auswertung problematisch ist (vgl. Kapitel 4.1). Das Relaxationsverhalten wurde jeweils für einen unter- und einen überkritischen Anfangszustand bestimmt, um den Unterschied von Einsetzen und Abklingen zu untersuchen. Dabei sind der symmetrische 2-Wirbelzustand bei $Re = 114.7$ und der asymmetrische 1-Wirbelzustand bei $Re = 147.4$ als Anfangszustände gewählt worden. Die Auswertung ist, wie in Abschnitt 4.1.1 dargestellt, mittels Bestimmung der Anfangsamplitude A_i und der Endamplitude A_f und Anpassung der Lösung der Landau-Gleichung an die Meßdaten durchgeführt worden.

Die Ergebnisse dieser Auswertung sind in Abbildung 4.4 (links) zu sehen. Es ist zunächst festzustellen, daß sich die Zeitkonstanten für beide Anfangswerte bei Annäherung an den kritischen Punkt vergrößern. Die Zeitkonstanten, die sich beim überkritischen Anfangswert ergeben, steigen aber in der Umgebung des kritischen Punktes deutlich stärker an als die Zeitkonstanten, die sich bei dem unterkritischen Anfangswert ergeben. Die Betrachtung der Skalierungseigenschaften, dargestellt in Abbildung 4.4 (rechts), zeigt, daß die Zeitkonstanten des Abklingprozesses noch nahe am kritischen Punkt dem von der Landau-Theorie vorhergesagten Skalierungsverhalten $\tau = \tau_0 \varepsilon^{-1}$ entspricht. Dieses Verhalten ist durch die Gerade in Abbildung 4.4 (rechts) angedeutet. Erst die Zeitkonstanten in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes weichen von der Geraden ab und folgen einem flacheren Verlauf. Für die Zeitkonstanten, die sich bei einem unterkritischen Anfangswert ergeben, weicht der Verlauf der Zeitkonstanten schon viel früher bei Annäherung an den kritischen Punkt vom theoretischen Verlauf ab. Nur in einem relativ großem Abstand vom kritischen Punkt entspricht die Steigung

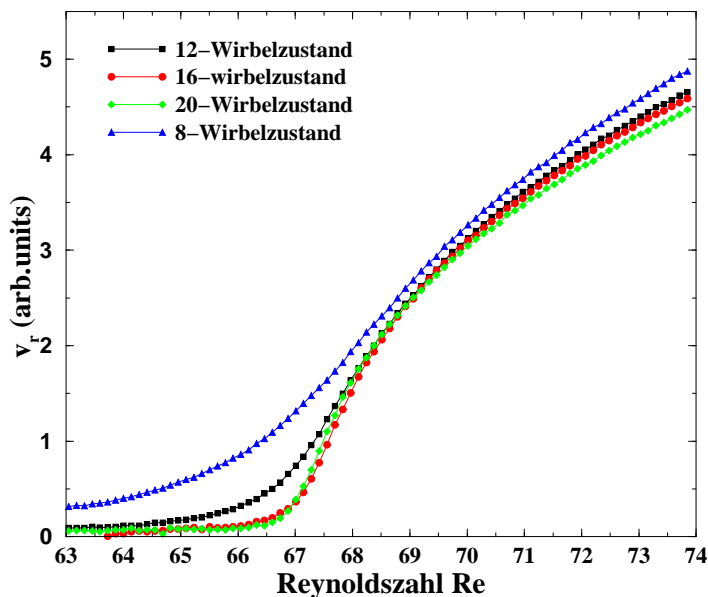


Abb. 4.5: Gemittelte radiale Strömungsgeschwindigkeit v_r , gemessen in der Zylindermitte in einem Abstand von 3mm vom Innenzylinder aufgetragen für verschiedenen Reynoldszahlen im Bereich des Einsetzens des 8-, 12- 16- und 20-Wirbelzustandes.

der theoretischen, wird dann aber bei Annäherung an den kritischen Punkt deutlich kleiner.

Diese Diskrepanz in den Zeitkonstanten ist nicht im Rahmen der Landau-Theorie zu verstehen. Die Abweichung der Zeitkonstanten von der theoretischen Skalierung in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes, wie dieses bei den Zeitkonstanten bei einem überkritischen Anfangszustand der Fall ist, würde man bei experimentellen Systemen erwarten, da in diesem Fall Störungen unvermeidlich sind. Ungeklärt ist aber, wieso die Zeitkonstanten, die sich bei einem unterkritischen Anfangszustand ergeben, deutlich früher vom theoretischen Verhalten und den Zeitkonstanten, die sich bei einem überkritischen Anfangszustand ergeben, abweichen.

4.3 Einsetzen der stationären Taylor-Wirbelströmung

Bei der Untersuchung des Relaxationsverhaltens wurde in der gleichen Weise vorgegangen, wie bei der Untersuchung der symmetriebrechenden Verzweigung im 2-Wirbelzustand. Im Unterschied zu den Messungen von Gollub und Freilich [70] wurde in dieser Arbeit auch die Abhängigkeit des Relaxationsverhaltens von der Systemgröße untersucht. Dazu wurden Messungen in Zuständen mit 8, 12, 16 und 20 Wirbeln durchgeführt. Untersuchungen in Zuständen höherer Wirbelzahl waren wegen des sehr kleinen Meßbereichs nicht sinnvoll durchzuführen, da Störungen im Experiment auftraten, die das Zeitverhalten überlagerten. Abbildung 4.5 zeigt die stationäre Amplitude der vier Zustände in der Umgebung des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung. Als normierte Zylinderhöhe wurde bei allen Messungen $\Gamma/N = 1$ gewählt, so daß

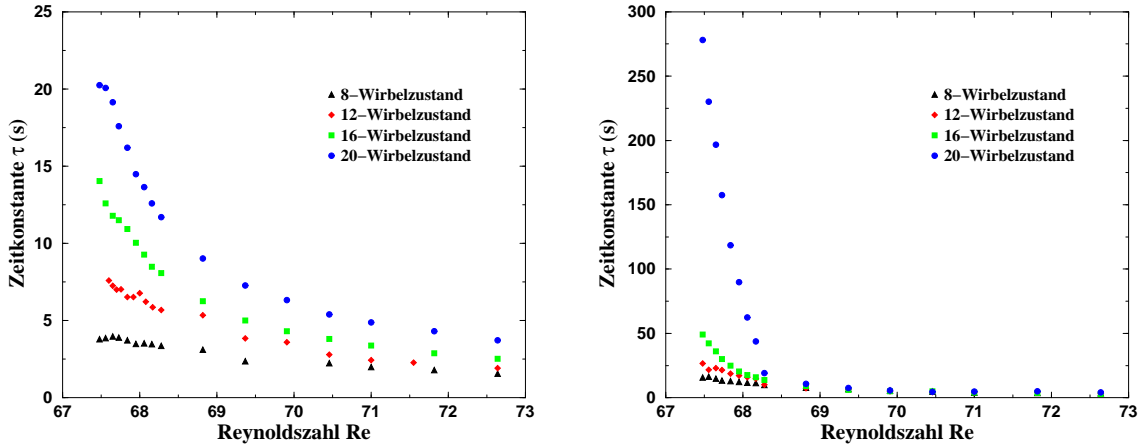


Abb. 4.6: Zeitkonstanten des 8- bis 20-Wirbelzustandes: (links) Anfangszustand $Re = 62.8$ ($\varepsilon_i < 0 < \varepsilon_f$), (rechts) Anfangszustand $Re = 73.7$ ($0 < \varepsilon_f < \varepsilon_i$)

die Wirbelgröße im wesentlichen der kritischen Wellenlänge des unendlich ausgedehnten Systems entspricht. Die Einflüsse der Ränder sind bei der stationären Amplitude des 8-Wirbelzustandes noch signifikant. Wegen dieser starken Beeinflussung wurde auf Untersuchung von Zuständen mit weniger als acht Wirbeln verzichtet. Man erkennt in Abbildung 4.5, daß der Einfluß der Randstörung mit zunehmender Wirbelzahl deutlich abnimmt. Während dieser Einfluß beim 12-Wirbelzustand noch signifikant ist, erkennt man in der stationären Amplitude des 16-Wirbelzustandes und des 20-Wirbelzustandes im Rahmen der Meßgenauigkeit beim Einsetzen der Wurzel keinen Unterschied. Die stationäre Amplitude geht im 20-Wirbelzustand im Rahmen der Meßgenauigkeit in eine Sättigung über. Daher stellt die Begrenzung der Zylinderhöhe auf einen 20-Wirbelzustand aufgrund des Meßverfahrens keine Einschränkung für diese Untersuchung dar.

4.3.1 Zeitkonstanten

Die Zeitkonstanten wurden nach dem in Kapitel 4.1.1 dargestellten Verfahren ermittelt. Abbildung 4.6 zeigt die Ergebnisse der Untersuchungen für den 8-, 12-, 16- und 20-Wirbelzustand. Eine Bestimmung der Zeitkonstanten bei kleineren Reynoldszahlen war mit dem verwendeten Meßverfahren nicht möglich, da die Strömungsamplituden zu klein waren. Auf der linken Seite von Abbildung 4.6 sind die Zeitkonstanten dargestellt, die sich beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung ergeben. Dabei wurde als Anfangszustand immer ein „unterkritischer“ gewählt, das heißt, es gilt immer $(\varepsilon_i < 0 < \varepsilon_f)^2$. Die Reynoldszahl des Anfangszustandes betrug $Re = 62.8$. In Abbildung 4.6 (rechts) sind die Ergebnisse der Untersuchungen für einen „überkritischen“ Anfangszustand dargestellt. Die Reynoldszahl dieses Zustandes betrug $Re = 73.7$. Bei diesen Messungen wurde immer das Abklingen der Strömungsamplitude bei sprunghafter Erniedrigung des Kontrollparameters untersucht ($0 < \varepsilon_f < \varepsilon_i$).

² Es wird hier trotz der konzeptionellen Probleme dieselbe Klassifizierung für die Anfangs- und Endzustände verwendet, die auch von Gollub und Freilich [70] benutzt wurde.

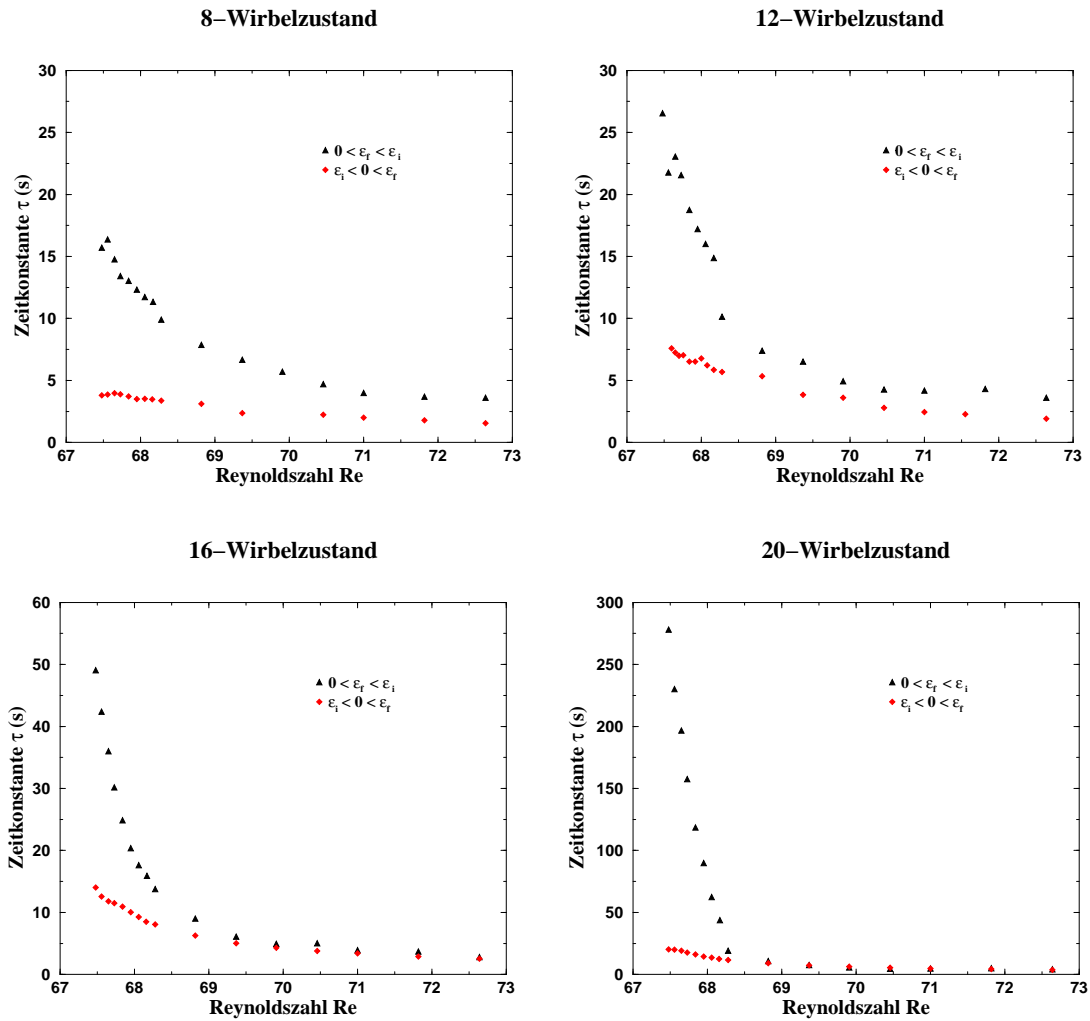


Abb. 4.7: Vergleich der Zeitkonstanten des Einsatz- und des Abklingprozesses für die untersuchten Strömungszustände ($N=8, 12, 16, 20$)

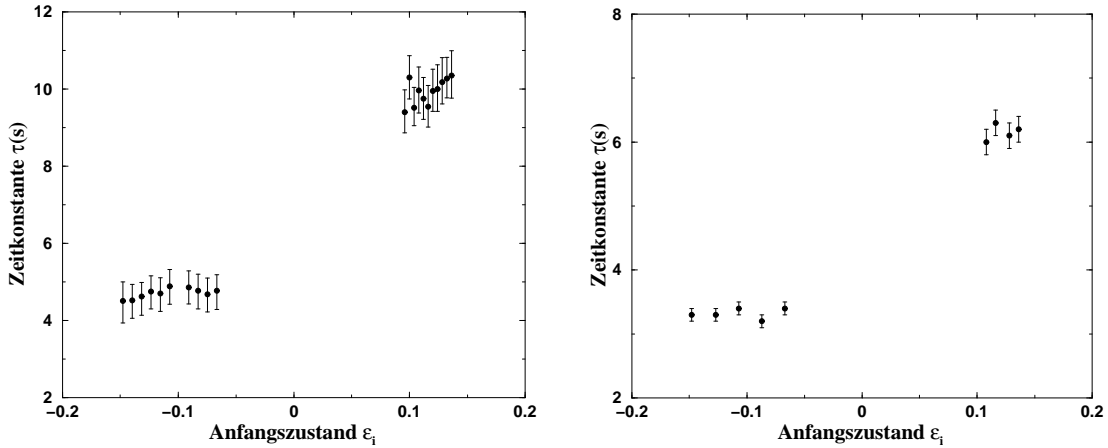


Abb. 4.8: Zeitkonstanten eines Endzustandes für verschiedene Anfangszustände in einem 12- und einem 8-Wirbelzustand aufgenommen.

Sowohl beim Einsetzen der Taylor-Wirbel als auch beim Abklingen der Strömungsamplitude ist eine signifikante Erhöhung der Zeitkonstanten bei Reduktion der Reynoldszahl zu erkennen. Dabei wurden die Messungen bis zu der Reynoldszahl durchgeführt, an der aufgrund der zu kleinen Strömungsgeschwindigkeit keine Auswertung mehr möglich war. Dieser Punkt liegt aber insbesondere beim 16- und 20-Wirbelzustand in unmittelbarer Nähe des Einsetzens der Wurzelabhängigkeit, so daß man im Rahmen der Landau-Theorie von einer Annäherung an den kritischen Punkt sprechen würde. Eine Quantifizierung dieser Aussage wird im folgenden Abschnitt dargestellt. Man erkennt allerdings auch in Abbildung 4.6, daß eine signifikante Längenabhängigkeit existiert. Die Zeitkonstanten nehmen mit der Systemlänge zu. Dieses ist insbesondere für den Abklingprozeß (Abbildung 4.6, rechts) ausgeprägt. Bemerkenswert ist dabei, daß eine sehr starke Zunahme zwischen dem 16-Wirbelzustand und dem 20-Wirbelzustand auftritt, da die stationären Amplituden der beiden Zustände in der Zylindermitte, wie aus Abbildung 4.5 zu sehen, sich nicht mehr signifikant unterscheiden.

Abbildung 4.7 zeigt noch einmal die Ergebnisse aus Abbildung 4.6, wobei hier zum Vergleich das Einsatz- und das Abklingverhalten für die einzelnen Zustände aufgetragen sind. Man erkennt, daß die Zeitkonstante des Einsatzprozesses bei allen Zuständen immer deutlich unter der des Abklingprozesses liegt. Qualitativ konnte dieses Verhalten auch bei der Untersuchung des 2-Wirbelzustandes beobachtet werden (vgl. Abschnitt 4.2). Betrachtet man aber diese Diskrepanz für die verschiedenen Zustände, so findet sich eine signifikante Zunahme bei Erhöhung der Wirbelzahl. Diese ist besonders deutlich bei den Zeitkonstanten des 20-Wirbelzustandes zu erkennen. Die Zeitkonstanten des Abklingprozesses steigen dabei überproportional gegenüber denen des Einsatzprozesses an. Um sicherzustellen, daß die Diskrepanz in den Zeitkonstanten für den Einsatz- und den Abklingprozeß nicht von der konkreten Wahl des Anfangszustandes abhängt, sondern nur davon, ob es sich um das Einsetzen oder das Abklingen der Taylor-Wirbelströmung handelt, wurden exemplarische Messungen mit verschiedenen Anfangszuständen durchgeführt. Abbildung 4.8 zeigt die Ergebnisse für Messungen im 8-Wirbelzustand (rechts) und im 12-Wirbelzustand (links). Für den 8-Wirbelzustand

wurde ein Endzustand mit einer Reynoldszahl $Re = 69.8$ und beim 12-Wirbelzustand mit einer Reynoldszahl $Re = 69.3$ gewählt. Man erkennt, daß die Zeitkonstanten für den Einsatz- und für den Abklingprozeß im Rahmen der Fehlergenauigkeit jeweils gleich sind. Daher läßt sich folgern, daß sich die Diskrepanz in den Zeitkonstanten, die sich für einen Endzustand ergibt, durch unterschiedliche dynamische Eigenschaften des Einsatz- und Abklingvorgangs ergeben muß, und nicht in der konkreten Wahl des Anfangszustandes begründet liegt.

Im Rahmen der Landau-Theorie, die Gollub und Freilich [70] bei ihren Untersuchungen unterstellten, wird der Einfluß der Ränder auf den Taylor-Couette-Übergang als Störung betrachtet, die auf das Verhalten in der Zylindermitte mit Zunahme der Systemgröße immer geringeren Einfluß hat. In diesem Sinne wählten Gollub und Freilich [70] einen Zylinder mit $\Gamma = 30.5$. Die Messungen dieser Arbeit zeigen, daß die durch die Ränder eingebrachte Störung für das Abklingen der Strömungsamplitude des 8- bis 16-Wirbelzustandes noch signifikant ist, obwohl auch hier eine Zunahme der Zeitkonstanten auftritt. Beim 20-Wirbelzustand tritt aber ein qualitativer Sprung zu deutlich größeren Zeitkonstanten auf. Daher läßt sich schließen, daß die Randstörung in diesem Bereich einen sehr viel geringeren Einfluß besitzt als in Zuständen mit weniger Wirbeln. Dieses Verhalten entspräche noch der Landau-Theorie. Für das Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung kann man dieses Verhalten in Abhängigkeit von der Wirbelzahl nicht feststellen, obwohl auch hier eine Zunahme der Zeitkonstanten mit der Wirbelzahl zu verzeichnen ist. Die Diskrepanz zwischen den beiden Prozessen nimmt aber mit größerer Wirbelzahl signifikant zu. Der Einfluß der Randstörungen auf das Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung ist in Bezug auf das Relaxationsverhalten offenbar ein qualitativ anderer als der Einfluß auf das Abklingen. Dieses widerspricht der Annahme, daß der Einfluß der Randstörungen bei Erhöhung der Zylinderhöhe zu vernachlässigen ist, da dies sowohl für das Einsetzen als auch für das Abklingen der Taylor-Wirbelströmung zutreffen müßte. Bei den Messungen dieser Arbeit vergrößerte sich die Diskrepanz der Zeitkonstanten der beiden Prozesse noch mit zunehmender Wirbelzahl.

4.3.2 Skalierungsverhalten

Die Bestimmung der Zeitkonstanten hat einen signifikanten Unterschied beim Einsetzen und beim Abklingen der Taylor-Wirbelströmung aufgezeigt. In diesem Abschnitt wird daher untersucht, ob sich die beiden Prozesse auch in ihrem Skalierungsverhalten unterscheiden. Dabei ist die Wahl eines approximativen „kritischen“ Punktes für die Auswertung der Meßwerte aufgrund der konzeptionellen Schwierigkeiten, die sich beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung ergeben, problematisch. Das relative Skalierungsverhalten der beiden Prozesse zueinander läßt sich aber ungeachtet dieser Schwierigkeiten durch eine solche Betrachtung trotzdem untersuchen. Zunächst wird das Skalierungsverhalten unter der Annahme untersucht, daß sich das Maximum der Zeitkonstanten mit der Wirbelzahl nicht verschiebt. Diese Annahme entspricht der Landau-Theorie unter der Annahme, daß die Randstörung mit der Wirbelzahl klein wird. Dies ist zumindest für die stationäre Amplitude in der Zylindermitte der Fall. Wie in Abbildung 4.5 zu sehen, ändert diese sich beim Übergang vom 16- und zum

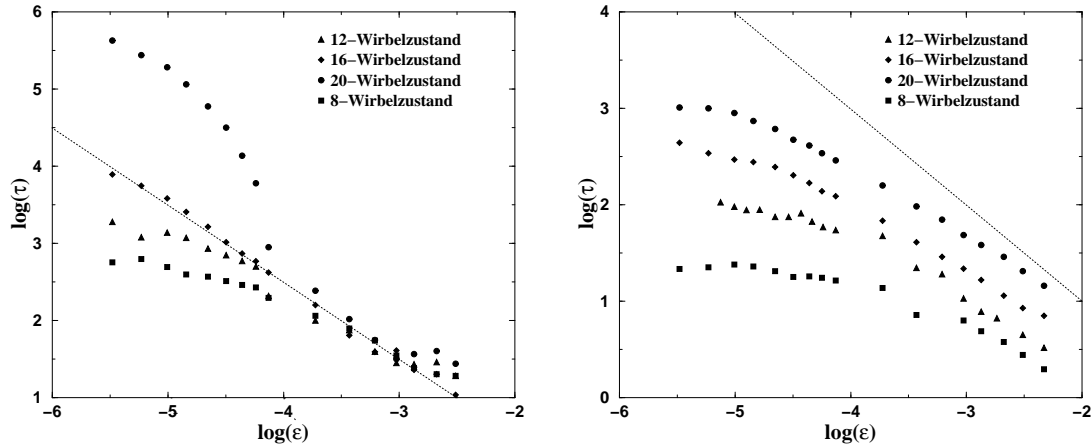


Abb. 4.9: Abhängigkeit des Skalierungsverhaltens von ε , wobei als kritischer Punkt $Re_c = 67.2$ angenommen wird. Links ist das Verhalten beim „Abkling“-rechts beim „Anschwingprozeß“ dargestellt. Die gepunktete Linie entspricht der Skalierung ε^{-1} gemäß der Landau-Theorie.

20-Wirbelzustand nicht mehr wesentlich. Der „kritische“ Punkt ergibt sich daher im Sinne der Landau-Theorie aus der Anpassung einer Wurzelfunktion an die stationäre Amplitude des 20-Wirbelzustandes zu $Re_c = 67.2$.

Das Skalierungsverhalten in den vier untersuchten Zuständen unter dieser Annahme ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Zusätzlich ist jeweils zum Vergleich die theoretische Skalierung gemäß der Landau-Theorie von ε^{-1} eingezeichnet. Die Skalierung, die sich für des Abklingens der Strömungsamplitude ergibt, ist in Abbildung 4.9 (links) dargestellt. Man erkennt für den 16-Wirbelzustand eine sehr gute Übereinstimmung mit dem theoretischen Verlauf. Die Skalierung beim 12- und 8-Wirbelzustand weicht allerdings vom theoretischen Verlauf ab und folgt einem flacheren Verlauf. Dies ist im Sinne eines stärkeren Einflusses der Ränder zu interpretieren. Der starke Anstieg der Zeitkonstanten des 20-Wirbelzustandes im Vergleich zum theoretischen Verlauf ist zur Zeit nicht verstanden, spiegelt allerdings den überproportionalen Anstieg der Zeitkonstanten des 20-Wirbelzustandes nahe des kritischen Punktes wieder.

Abbildung 4.9 zeigt die Skalierung der Zeitkonstanten des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung. Man erkennt für alle Zustände eine qualitative Abweichung vom theoretischen Verlauf. Die Meßkurven verlaufen alle deutlich flacher als die theoretische Kurve. In Abbildung 4.10 ist zum Vergleich das Skalierungsverhaltens des Einsetzens und des Abklingens der Taylor-Wirbelströmung im 16-Wirbelzustand dargestellt. Zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Skalierungsverhalten sind Ausgleichsgeraden für die Meßwerte bestimmt worden. Dabei ergibt sich für den Abklingprozeß eine Skalierung von $\varepsilon^{-0.99}$, was dem Wert der Landau-Theorie entspricht. Dementgegen verhält sich eine durch die Zeitkonstanten des Einsatzprozesses gelegte Ausgleichsgerade wie $\varepsilon^{-0.65}$. Die Auswertung des kritischen Punktes beim 16-Wirbelzustand ergibt, wie beim 20-Wirbelzustand, einen Wert von $Re_c = 67.2$.

Betrachtet man das Skalierungsverhalten unter der Annahme, daß sich das Maximum der Zeitkonstanten mit der Systemlänge ändern kann, dann ergibt sich für den 8-

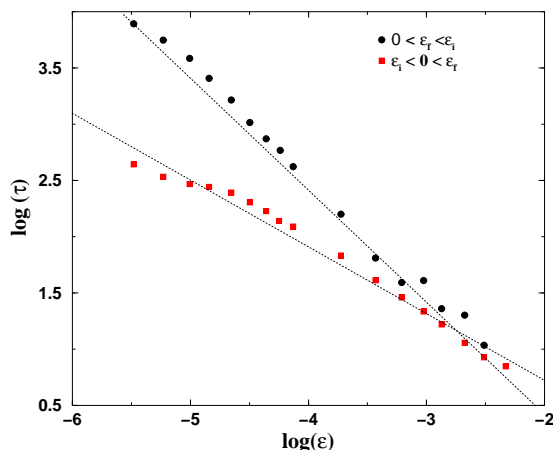


Abb. 4.10: Skalierungsverhalten im Bereich des Einsetzens des 16-Wirbelzustandes mit $Re_c = 67.2$. Die Ausgleichsgerade für den Einsatzprozeß verläuft deutlich flacher als die des Abklingprozesses. Diese entspricht dem theoretischen Verlauf von ε^{-1} .

und den 12-Wirbelzustand ein qualitativ ähnliches Skalierungsverhalten wie für den 16-Wirbelzustand. Insbesondere liegen die Ausgleichsgeraden für die Abklingprozesse in allen Zuständen bei jeweils ungefähr $\tau \approx \varepsilon^{-1}$ und für die Einsatzprozesse bei $\tau \approx \varepsilon^{-0.6}$.

Da die Skalierung sehr stark vom kritischen Punkt abhängt, ist eine Aussage über den exakten Wert nicht zu treffen. Allerdings läßt sich festhalten, daß sich die Skalierungen des Einsetzens und des Abklingens der Taylor-Wirbelströmung ebenfalls signifikant unterscheiden, da das relative Verhalten der Skalierung bei Variation des kritischen Punktes erhalten bleibt. Qualitativ ist das Verhalten des Abklingprozesses sehr viel näher an dem der Landau-Theorie als das des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung, obwohl das Verhalten des 20-Wirbelzustandes ebenfalls vom theoretischen abweicht.

Zusammenfassend zeigen diese Untersuchungen, daß das Relaxationsverhalten beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung nicht im Rahmen der Landau-Theorie beschrieben werden kann. Insbesondere kann ein qualitativ unterschiedliches dynamisches Verhalten beim Einsetzen und beim Abklingen der Taylor-Wirbelströmung beobachtet werden. Dabei zeigt sich, daß die Randstörungen nur für den Abklingprozeß bei größeren Zylinderlängen konzeptionell vernachlässigt werden können. Beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung ist dieser Einfluß auch für große Systeme nicht vernachlässigbar, was sich in einer starken Diskrepanz der Zeitkonstanten, insbesondere beim 20-Wirbelzustand, äußert. Dieses Verhalten spiegelt sich auch in den Skalierungseigenschaften der beiden Prozesse wieder. Insbesondere der Einsatzprozeß skaliert in allen untersuchten Zuständen anders als die Landau-Theorie.

Die Ergebnisse dieser Arbeit widerlegen somit die Aussagen von Gollub und Freilich [70], daß beim Übergang zur Taylor-Wirbelströmung ein „critical-slowing-down“ auftritt. Die Untersuchungen zeigen, daß die Randstörungen auch bei großen Systemen den Einsatzprozeß qualitativ verändern und somit nicht vernachlässigt werden können [75]. Die Ergebnisse dieser Arbeit sind daher in Übereinstimmung mit denen der Stabilitätsuntersuchungen von Benjamin und Mullin [61, 62, 63]. Für eine theore-

tische Beschreibung des experimentellen Relaxationsverhalten müßte der Einfluß der Randbedingungen in die theoretische Beschreibung eingehen. Neitzel [72] untersucht ein solches Verhalten numerisch auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen, wählte aber als Anfangswert einen ruhenden Innenzylinder. Die Untersuchungen mit einseitiger Berandung[77, 78], die zur Auftreten von Fronten führt, sind auf die in dieser Arbeit vorliegende experimentelle Situation nur bedingt übertragbar, da die Ausbildung stationären Fronten einen deutlich längeren Laufweg benötigt [79], als es bei den Experimenten in dieser Arbeit der Fall ist. Außerdem treten bei den einseitig berandeten Systeme keine Überlagerungen von gegenläufigen Prozessen auf.

5. HÖHERE INSTABILITÄTEN UND CHAOS

In nichtlinearen Systemen können auch höhere Instabilitäten auftreten, die andere Eigenschaften haben können als die lokalen Verzweigungen.

5.1 Homokline Verzweigungen

Ein sehr wichtiger Typ von Verzweigungen sind sogenannte homokline Verzweigungen, die dadurch entstehen, daß periodische Orbits und Fixpunkte miteinander wechselwirken. Da sich diese Verzweigungen nicht im Rahmen der linearen Analyse verstehen lassen, bezeichnet man sie als globale Verzweigungen. Eine umfassende Darstellung der globalen Verzweigungstheorie findet sich bei Wiggins [29].

Ein homokliner Orbit im Phasenraum tritt dann auf, wenn die stabile Mannigfaltigkeit eines Sattelpunktes mit der instabilen Mannigfaltigkeit verbunden ist. Als heteroklinen Orbit bezeichnet man die geschlossene Verbindung stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten mehrerer Sattelpunkte. Die stabile (instabile) Mannigfaltigkeit eines Fixpunkts ist dadurch definiert, daß die Trajektorie für $t \rightarrow +(-)\infty$ in den Fixpunkt läuft. Solche Orbits sind allerdings stukturinstabil, so daß eine Störung zu einem Aufbrechen der Verbindung zwischen stabiler und instabiler Mannigfaltigkeit führt. In Abhängigkeit von den Parametern können daher durch das Verschmelzen von periodischen Orbits mit Sattelpunkten homokline und heterokline Verzweigungen auftreten. Dabei werden die Eigenschaften dieser Verzweigungen von den Eigenschaften der Sattelpunkte bestimmt.

In einem zweidimensionalen System können im wesentlichen zwei Arten von homoklinen Verzweigungen auftreten. Eine tritt durch das Verschmelzen eines periodischen Orbits mit einem hyperbolischen Sattelpunkt auf. Die Annäherung des periodischen Orbits an den Sattelpunkt führt zu einer Divergenz der Periodendauer mit $\tau = -c * \ln \varepsilon$, wobei ε den Abstand zum kritischen Punkt darstellt [156, 31]. Dieser Verzweigungstyp wird auch Andronov-Leontovic-Verzweigung genannt. Eine weitere homokline Verzweigung in einem planaren System tritt durch die Bildung eines periodischen Orbits durch eine Sattelknoten-Verzweigung auf. Diese Verzweigungstyp wird auch als SNIPER- (Saddle-Node-Infinite-PERiod) Verzweigung bezeichnet. Die Periodendauer divergiert bei diesem Typ mit $\tau = c * \varepsilon^{-1/2}$ [156, 31]. Außerdem tritt keine Hysterese auf, da ein stabiler Fixpunkt über eine Sattelknoten-Verzweigung in einen stabilen periodischen Orbit übergeht.

Diese Typen von homoklinen Verzweigungen können auch in dreidimensionalen Systemen auftreten. Ein weiterer Typ von homokliner Verzweigung, der sehr ähnlich einer SNIPER Verzweigung ist, wird als „Blue-Sky“-Katastrophe bezeichnet. Bei diesem Typ

führt eine Sattelknoten-Verzweigung von periodischen Orbits zur Bildung eines zusätzlichen „großen“ periodischen Orbits (siehe [31]).

Physikalische Systeme besitzen häufig eine Z_2 -Symmetrie. In diesen Systemen treten oft homokline Orbits auf, die durch das Verschmelzen von zwei periodischen Orbits mit dem symmetrischen Sattelpunkt entstehen. Eine solche Verzweigung wird auch als „Gluing“-Verzweigung bezeichnet. Im Lorenz-System, das häufig zur Analyse chaotischen Verhaltens untersucht wird, tritt ein solcher Orbit auf [157]. Glendinning und Mullin [158] haben den Einfluß von symmetriebrechenden Störungen auf symmetrische homokline Verzweigungen untersucht. Sie fanden unter anderem, daß Störungen zu einer Entkopplung der homoklinen Verzweigungen führen.

Wenn gleichzeitig mehrere lokale Instabilitäten auftreten, so können Wechselwirkungen zwischen diesen Moden zu höheren lokalen und zu globalen Verzweigungen führen. Eine Klassifikation der Normalformen gekoppelter lokaler Verzweigung wurden von Arneoro et al. [164] durchgeführt. Häufig untersucht wurde das gleichzeitige Auftreten von stationären und oszillatorischen Instabilitäten. Dabei kann es als Folge der Kopplung der Instabilitäten zum Auftreten eines Torus kommen. Eine Darstellung dieser Untersuchungen findet sich bei [165]. Terme höherer Ordnung in der Normalform können zu komplizierteren Wechselwirkungen führen. Entfaltungen der Normalformen mit höherer Ordnung wurden unter anderem von Algaba et al. [168] und Krauskopf und Rousseau [167] durchgeführt.

5.2 Chaos und homokline Orbits

Eine wichtige Eigenschaft homokliner Orbits ist, daß sie der Ursprung für die Entstehung chaotischen Verhaltens in einem nichtlinearen System sein können [29, 159, 160, 161, 162, 163]. Ein chaotischer Zustand ist intrinsisch mit der Bildung eines „seltsamen“ Attraktors im Phasenraum verbunden. Dieser Attraktor unterscheidet sich qualitativ von stationären und periodischen Attraktoren, da er eine fraktale Dimension besitzt. Eine weitere Eigenschaft des chaotischen Zustandes ist, daß benachbarte Trajektorien im Phasenraum sich exponentiell voneinander entfernen. Dieses Entfernen zweier Trajektorien entspricht einem positiven Lyapunov-Exponenten. Wegen dieser Eigenschaft muß es einen Rückfaltungsmechanismus geben, da ein Attraktor nur ein begrenztes Gebiet im Phasenraum einnimmt. Darstellungen der Eigenschaften chaotischer Attraktoren finden sich bei Schuster [144] und Argyris [146].

Abbildung 5.1 zeigt schematisch einen homoklinen Orbit bezüglich eines Sattelfokus in drei Dimensionen. Die Analyse eines solchen Orbits geht auf Shil'nikov zurück und ist ausführlich in Guckenheimer und Holmes [26] und Wiggins [29] dargestellt. Der Fixpunkt vom Sattelfokus-Typ hat eine zweidimensionale stabile Mannigfaltigkeit W^s mit den Eigenschaften eines stabilen Fokus in der (x_2, x_3) -Ebene und eine eindimensionale instabile Mannigfaltigkeit W^u in der x_1 -Richtung. Eine Verbindung dieser beiden Mannigfaltigkeiten ergibt einen homoklinen Orbit vom Shil'nikov-Typ. In der Umgebung dieses Orbits kann es zur Bildung chaotischer Attraktoren kommen. Diese hängt vom Verhältnis der Eigenwerte der stabilen und der instabilen Mannigfaltigkeit ab [161, 26]. Der Ursprung dieses Verhaltens liegt anschaulich darin, daß die Ebene Σ^+ bei fortschreitender Zeit durch die Dynamik in der Umgebung des Sattelfokus auf die

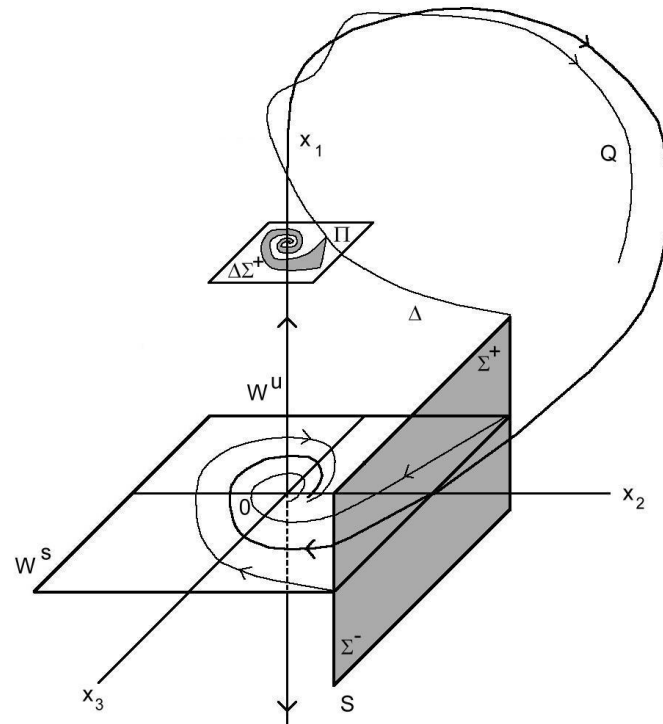


Abb. 5.1: Schematische Darstellung des Phasenraums in der Umgebung eines homoklinen Orbits vom Shil'nikov Typ (Beschreibung im Text).

Ebene $\Delta\Sigma^+$ abgebildet wird. Dadurch kommt es zu einer spiralförmigen Deformation der Ebene Σ^+ auf der Ebene $\Delta\Sigma^+$. Durch Rückfaltung auf die Ebene Σ^+ kann es zum Auftreten von chaotischem Verhalten kommen [161, 26].

Es existieren numerische Verfahren, mit deren Hilfe man Eigenschaften, wie Dimension und Lyapunov-Exponent, eines chaotischen Attraktors bestimmen kann [187, 189]. Eine Methode zur Bestimmung der Korrelationsdimension wurde von Grassberger und Procacia [181] entwickelt. Für die Auswertung chaotischer Zeitreihen kann man eine auf Takens zurückgehende Methode der Attraktorrekonstruktion mittels zeitverzögerter Koordinaten benutzen. Der rekonstruierte Attraktor ist dem originalen Attraktor topologisch äquivalent. Diese Verfahren werden ausführlich in [187, 189] behandelt. Buzug [187] entwickelte Verfahren, um experimentelle Zeitreihen optimal charakterisieren zu können. Ein Verfahren zur Rauschreduktion, das auf der Phasenraumrekonstruktion beruht, wurde von Enge [186] entwickelt. Ein Überblick über den Stand der Forschung ist bei Galka [189] zu finden.

Glendinnig und Sparrow [161] führten eine Verzweigungsanalyse einer homoklinen Verzweigung vom Sattelfokus-Typ durch. Sie fanden, daß abhängig von den Eigenwerten des Sattelfokus zwei unterschiedliche Szenarien auftreten können. Sie konnten zeigen, daß ein chaotischer Zustand über Periodenverdopplungskaskaden einsetzen kann. Der Weg ins Chaos über Periodenverdopplung ist in [144] dargestellt. Glendinnig und Sparrow [161] konnten außerdem zeigen, daß eine komplexe Verzweigungsstruktur in der Umgebung einer Shil'nikov-Orbits auftreten kann. Diese Verzweigungsstruktur wird

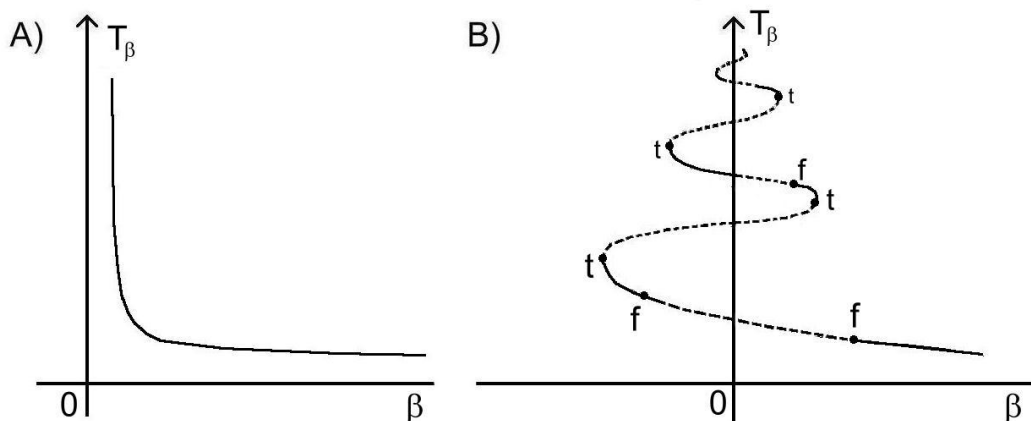


Abb. 5.2: Verhalten eines periodischen Orbits bei einer Shil'nikov-Verzweigung: (A) Divergenz der Periode, (B) Sattelknoten-Verzweigungen (f) und Periodenverdopplungen (t)

auch als „Shil'nikov-Wiggle“ bezeichnet. Abbildung 5.2 zeigt die Periode eines Orbits in der Umgebung eines Shil'nikov Orbits für die beiden auftretenden Szenarien. Eine detaillierte Darstellung findet sich in [29, 31]. Experimentell konnte dieses Verhalten bisher nur von Healey et al.[174] in einem elektronischen Schwingkreis beobachtet werden. Weitere Untersuchungen des Shil'nikov-Orbits sind unter anderem von Arneodo et al.[159], Gaspard und Nicolis [160], Gaspard et al. [162] und Gonchenko et al.[163] durchgeführt worden. Das Ausreten von Shil'nikov Orbits in Zusammenhang mit einer Hopf-Verzweigung wurde unter anderem vom Hirschberg und Knobloch [169] und von M.Bosch, C.Simó[170] untersucht. Shil'nikov-Chaos kann auch durch die Kopplung stationärer und oszillatorischer Verzweigungen entstehen [166]. Homoklines Chaos wurde unter anderem in elektronischen Schwingkreisen [171, 172, 173, 174], in Lasern [175, 176] und in chemischen Systemen [177, 178, 179, 180] gefunden.

Neben Periodenverdopplungen können auch andere Übergänge ins Chaos auftreten [144, 146]. Eines dieser Szenarien ist der Weg ins Chaos über Intermittenz [149, 150]. Intermittenz tritt durch eine subkritische Verzweigung eines periodischen Orbits auf. Dabei klassifiziert man die Intermittenztypen nach den auftretenden Verzweigungen[143]. Typ-I entsteht durch eine Sattelknoten-Verzweigung, Typ-II durch eine inverse Hopf-Verzweigung und Typ-III durch eine inverse subharmonische Verzweigung eines periodischen Orbits. Da es sich um subkritische Verzweigungen handelt, müssen noch Mechanismen im Phasenraum existieren, die das System wieder in die Umgebung des ursprünglichen periodischen Orbits bringen. Intermittenz wurde zum Beispiel in einer Rayleigh-Bénard Konvektion [151] oder einer Taylor-Couette Strömung [129, 121] beobachtet. Weitere Typen von Intermittenz wurden von Bauer et al. [155] und Price und Mullin [129] gefunden. Ein anderer Weg in Chaos ist das Ruelle-Takens-Szenario, daß dadurch auftritt, daß ein T^3 -Torus im allgemeinen nicht stabil ist, und in einen chaotischen Attraktor übergeht [144].

5.3 Höhere Instabilitäten der Taylor-Couette-Strömung

Bei Erhöhung der Reynoldszahl treten in der Taylor-Couette-Strömung zeitperiodische Instabilitäten auf. Dabei entsteht eine zeitabhängige Strömung, die die Form einer rotierenden Welle hat. Umfangreiche numerische [81, 82, 83, 84, 86, 87] und experimentelle [88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 96, 97, 98, 116] Untersuchungen dieser Instabilitäten sind durchgeführt worden. Diese Untersuchungen hatten das Ziel, die kritische Reynoldszahl, die azimutale Wellenzahl m und die Wellengeschwindigkeit c zu bestimmen. Während in einem Taylor-Couette-System mit schmalen Spalt die Wavy-Mode einsetzt [13, 93], konnten für ein Radienverhältnis von $\eta = 0.5$ verschiedene Typen von zeitperiodischen Moden gefunden werden [98, 116]. Untersuchungen bei Radienverhältnissen $\eta < 0.5$ wurden von Roepke [103] durchgeführt, der weitere Typen von zeitperiodischen Moden fand. Zur Klassifizierung der verschiedenen Instabilitäten wird als Parameter das normierte Höhen- zu Spaltbreitenverhältnis Γ auf die Wirbelzahl normiert N . Dieses Verhältnis wird auch als normierte Höhe Γ/N bezeichnet.

In der Taylor-Couette-Strömung bei $\eta = 0.5$ setzen als erste zeitperiodische Instabilität die Kleine-Jet-Mode, die Antijet-Mode, die Wavy-Mode und die Core-Mode ein [98, 116, 142]. Die Kleine-Jet-Mode ist eine Oszillation der Auswärtsströmung mit einer azimutalen Wellenzahl $m = 1$. Die Wellengeschwindigkeit normiert auf die Innenzylinderdrehzahl liegt im Bereich $0.46 \leq c/f \leq 0.52$. Oszillationen in benachbarten Auswärtsströmungen sind gegenphasig. Die Kleine-Jet-Mode setzt im Bereich $\Gamma/N < 0.96$ als erste zeitperiodische Instabilität ein. Der Verzweigungspunkt hängt von der Reynoldszahl ab, ist aber bei fester Reynoldszahl für alle Zustände mit mehr als vier Wirbeln identisch. [116, 117]. Die Eigenschaften der Kleinen-Jet-Mode sind sehr ähnlich zu denen der von Jones [82] numerisch gefundenen „Subharmonic-Mode“. Iooss fand diese Mode durch Symmetriebetrachtungen [85]. Untersuchungen von Eigenschaften der Kleinen-Jet-Mode werden in Kapitel 6 vorgestellt. Die Eigenschaften der anderen ersten zeitperiodischen Instabilitäten findet sich bei Gerdtts et al. [116, 117].

Eine weitere Grundmode der Taylor-Couette-Strömung bei $\eta = 0.5$ ist die Große-Jet-Mode, die sehr ähnliche Eigenschaften wie die Kleine-Jet-Mode besitzt [193, 1, 117]. Sie tritt erst bei höheren Reynoldszahlen und besitzt eine größere Schwingungsamplitude und Wellengeschwindigkeit. Im Gegensatz zur Kleine-Jet-Mode oszillieren benachbarte Wirbelpaare in Phase. Im Bereich der Großen-Jet-Mode konnten Bereiche gefunden werden, in denen es zu einer Frequenzkopplung von Kleiner-Jet- und Großer-Jet-Mode kommt [119].

Das Relaxationsverhalten beim Einsetzen der Wavy-Mode wurde von Pfister und Gerdtts [102] untersucht. Ein Ginzburg-Landau Gleichung für die wellenförmige Taylor-Wirbelströmung wurde von Marx und Haken [100, 101] abgeleitet. Bust et al. [99] fanden, daß das Einsetzen einer Wavy-Mode zu einer inhomogenen Verteilung der Wirbelgrößen im System führt. Abshagen [193] konnte dieses Verhalten auch beim Einsatz der Kleinen-Jet-Mode beobachten.

Modulierte wellenförmige Taylor-Wirbelströmungen sind experimentell von Gorman und Swinney [104, 107], Zhang und Swinney [110] und King und Swinney [109] untersucht worden. Coughlin und Marcus [113, 114] haben umfangreiche numerische Simulationen der von Gorman und Swinney [104, 107] und Zhang und Swinney [110]

gefundenen Moden durchgeführt. Sie fanden eine Vielzahl quasi-periodischer Lösungen bei höheren Reynoldszahlen. Weitere Untersuchungen der modulierten wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung sind von [112, 111, 108, 105] durchgeführt worden.

Die Untersuchungen von Gerdtts et al.[116] und v.Stamm et al.[142] zeigten, daß in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung als sekundäre zeitperiodische Instabilität eine axialsymmetrische ($m = 0$)-Mode einsetzen kann. Wegen der extrem niedrigen Frequenz gegenüber den rotierenden Wellen wurde diese Mode als „Very-Low-Frequency,, (VLF)-Mode bezeichnet. v.Stamm et al.[142] konnten eine „universelle“ Sequenz von Instabilitäten im Bereich von $\Gamma/N < 0.96$ für Zustände mit 10 bis 50 Wirbeln beobachten. Dabei trat vor dem Einsetzen der VLF-Mode eine symmetriebrechende Verzweigung auf. Eine Erhöhung der Reynoldszahl führte dann zum Einsetzen einer VLF-Mode-Oszillation auf beiden asymmetrischen Ästen über eine homokline Verzweigung. Laure et al. [115, 18] konnten numerisch eine Drift-Verzweigung in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung beobachten.

5.4 Chaotische Taylor-Couette-Strömung

Übergänge ins Chaos wurde schon in vielen Strömungsexperimenten beobachtet. Eine Übersicht über diese Arbeiten findet sich bei Gollub und Swinney [12] und Cvitanović[145].

In der Taylor-Couette-Strömung wurden in verschiedenen Zuständen Übergänge ins Chaos beobachtet [13, 131, 132, 1]. Dabei unterscheiden sich Systeme mit einer kleinen Anzahl von Wirbeln und großen Systemen durch die Anzahl der stationären Lösungen. Umfangreiche Untersuchungen der Taylor-Couette Strömung bei sehr kleinen Zylinderhöhen wurden von Pfister et al. [184, 121, 122, 123, 124] durchgeführt. Sie fanden bei ihren Untersuchungen verschiedene niederdimensionale Szenarien, wie Periodenverdopplung und Intermittenz [121, 124, 123].

Mullin [131, 132, 128, 130] untersuchte die Entstehung von Chaos im Zusammenhang mit symmetriebrechenden Verzweigungen im Strömungen mit einer kleinen Anzahl von Wirbeln. Stabilitätsuntersuchungen dieser Zustände wurden von Tavener et al.[125] und Mullin [63] durchgeführt. Mullin et al.[126] fanden eine oszillatorische Instabilität, die durch eine Wechselwirkung der symmetriebrechenden Verzweigung und einer Sattelknoten-Verzweigung erzeugt wird. Die Sattelknoten-Verzweigung geht aus der Wechselwirkung von axialsymmetrischen Zuständen verschiedener Wirbelzahlen hervor [63]. Mullin und Price [127] fanden, daß Chaos aus einer Wechselwirkung der symmetriebrechenden und der oszillatorischen Instabilität auftreten kann. Die Ursache für chaotisches Verhalten liegt dabei in der Bildung von homoklinen Orbits vom Shil'nikov-Typ. Dieses waren die ersten Beobachtungen für das Auftreten dieses Mechanismus in einem Strömungsexperiment. In weiteren Untersuchungen entdeckten sie auch einen bis dahin unbekanntem Typ von Intermittenz, den sie Typ X [129] nannten. Peacock et al. [134] konnten Shil'nikov Orbits auch in Strömungsexperimenten mit Flüssigkristallen beobachten.

In Taylor-Couette-Strömungen mit einer größeren Anzahl von Wirbeln wurde die ersten Hinweise auf chaotisches Verhalten zuerst von Gollub und Swinney [135] und anschließend von Fenstermacher, Swinney und Gollub [136] gefunden. Ihre Untersu-

chungen zeigten, daß irreguläres Verhalten nicht im Sinne der Landau-Szenarios [6] auftritt, sondern schon nach wenigen zeitperiodischen Instabilitäten. Die Beobachtungen stellten aber noch kein Beweis für chaotische Dynamik dar. Dieser wurde von Brandstätter et al. [137] und Brandstätter und Swinney [139] geliefert. Sie konnten nachweisen, daß in einer Taylor-Couette-Strömung ein sogenannter „seltsamer Attraktor“ [144] auftritt. Damit konnten sie zeigen, daß sich Strömungen nach Gesetzen des deterministischen Chaos verhalten. Der Annahme, daß es sich bei den Übergängen in chaotischen Strömungszustände um ein Szenario in Sinne Ruelle-Takens handelt [137, 136], wurde von Coughlin und Marcus [113, 114] widersprochen. Sie argumentierten, daß es sich bei der modulierten wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung in einem mitrotierenden Bezugssystem um eine einfach periodischen Strömung handelt. Somit geht ein einfach-periodischer Zustand direkt in niederdimensionales chaotisches Strömungsverhalten über. Zur Zeit gibt es daher keine Erklärung für den Übergang in die von Gollub und Swinney [135] und von Brandstätter et al. [137] untersuchten chaotischen Zustände.

Ein Übergang ins Chaos verbunden mit dem Auftreten zweier Frequenzen wurde von L'vov, A.A. Predtechinsky und A.I. Chernykh [141] experimentell und numerisch untersucht. Sie analysierten das Szenario auf Basis der Kopplung der räumlich verteilten Oszillationen. Vastano und Moser [140] untersuchten den Übergang von einem quasiperiodischen Zustand ins Chaos mittels Kurzzeit-Lyapunov-Exponenten. Die Charakterisierung chaotischer Strömung auf Grundlage der Analyse von Zeitreihen wurde von Buzug und Pfister [182, 183, 184, 185, 187, 188] durchgeführt. Sie entwickelten Methoden, um die Analyse experimenteller Zeitreihen zu optimieren. v.Stamm et al.[142] konnten ein anderes Übergangsszenario ins Chaos beobachten. Sie fanden in Zusammenhang mit ihren Untersuchungen zur Symmetriebrechung und dem Einsetzen der VLF-Mode, daß dieser doppelt-periodische Zustand über eine Periodenverdopplungskaskade auf dem Torus ins Chaos übergeht. Sie beobachteten dieses Szenario für Zustände von 10 bis 40 Wirbeln.

6. UNTERSUCHUNGEN ZUR JET-INSTABILITÄT DER TAYLOR-WIRBELSTRÖMUNG

Im Rahmen dieser Arbeit werden die axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung untersucht. Daher werden zunächst die Eigenschaften des Einsatzes der zeitabhängigen Strömung betrachtet. Die bei den folgenden Analysen unterliegende zeitperiodische Mode ist die Kleine-Jet-Mode, die im Bereich $\Gamma/N = 0.96$ auftritt. Bei der Kleinen-Jet-Mode handelt es sich um eine $m = 1$ -Mode, deren größte Amplitude in der Auswärtsströmung lokalisiert ist. Es wird zunächst das räumliche Verhalten der zeitabhängigen Taylor-Wirbelströmung mittels PIV betrachtet. Zum Vergleich sind auch Aufnahmen der Großen-Jet-Mode, die bei höheren Reynoldszahlen auftritt, durchgeführt worden. Um die Eigenschaften des Verzweigungstyps beim Einsetzen der Kleinen-Jet-Mode in einem endlichen System zu bestimmen, sind, wie bei der Taylor-Wirbelströmung, ebenfalls Messungen des Relaxationsverhaltens durchgeführt worden. Ferner wurde experimentell die Wechselwirkung der Jet-Instabilität mit einer axialsymmetrischen Instabilität der Taylor-Wirbelströmung untersucht.

6.1 Strömungsmuster der Kleinen und Großen-Jet-Mode

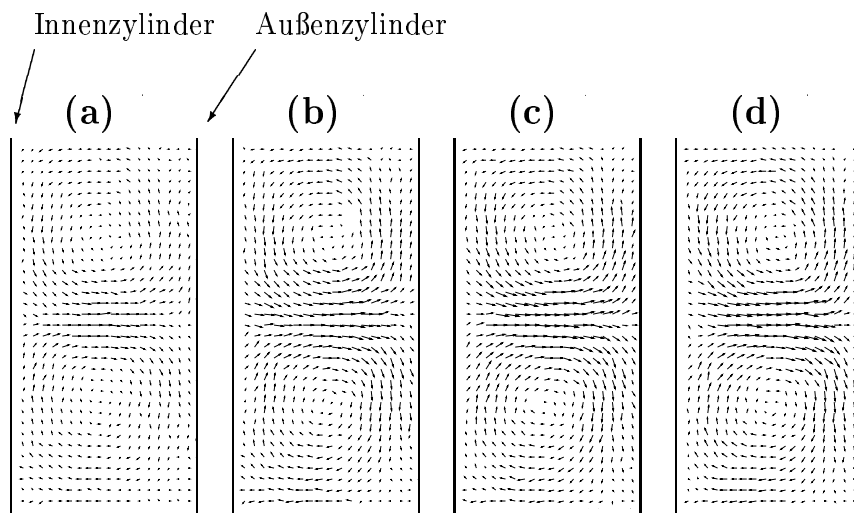


Abb. 6.1: PIV-Aufnahmen eines Wirbelpaares der stationären Taylor-Wirbelströmung bei $\Gamma/N = 0.87$ und (a) $Re = 203$, (b) $Re = 254$, (c) $Re = 304$, (d) $Re = 321$. Man erkennt die Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit in der Auswärtsströmung bei Erhöhung der Reynoldszahl.

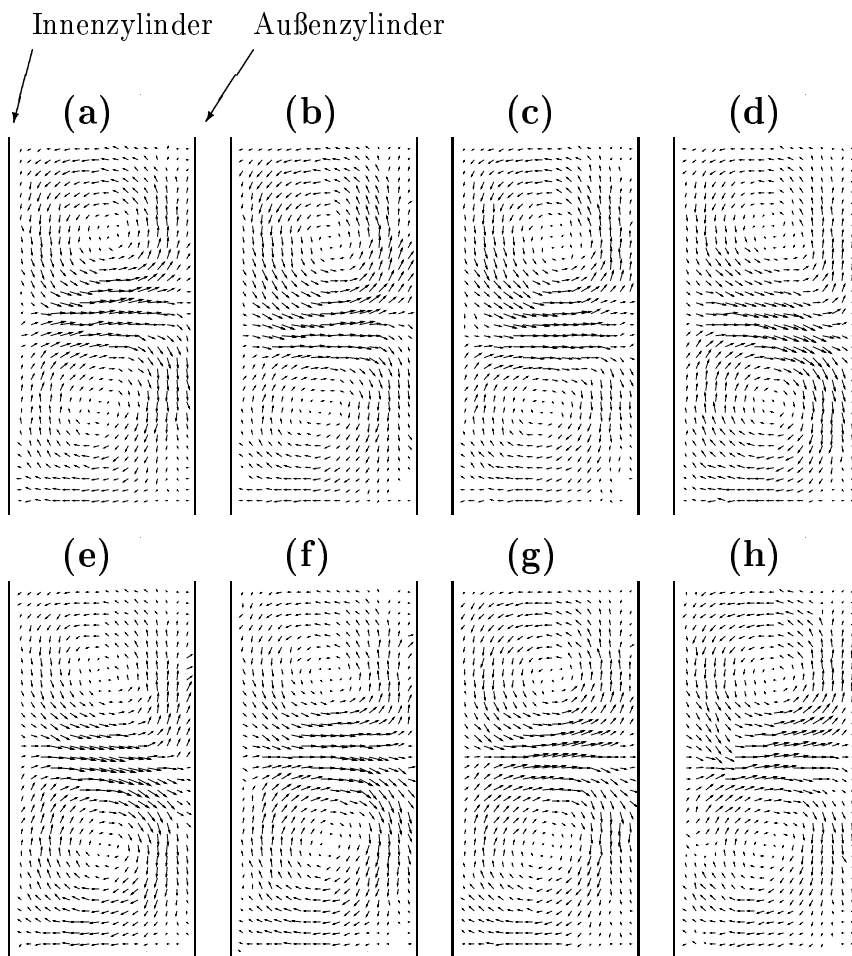


Abb. 6.2: PIV-Aufnahmen einer Schwingungsperiode der Kleinen-Jet-Mode in einem Wirbelpaar bei $\Gamma/N = 0.87$ und $Re = 339$.

Da es sich beim Einsatz einer zeitperiodischen Instabilität in der Taylor-Wirbelströmung um einen raum-zeitlichen Prozeß handelt, sind Aufnahmen mit Hilfe eines PIV Systems durchgeführt worden¹. Dabei bietet die PIV Technik gegenüber anderen Visualisierungsverfahren den Vorteil, daß quantitative Informationen in einer zweidimensionalen Ebene einer Strömung gewonnen werden können. Laser-Doppler-Anemometrie besitzt zwar eine höhere Auflösung bezüglich Zeit und Geschwindigkeit, setzt aber eine genaue Kenntnis des räumlichen Verhaltens eines Strömungsvorganges voraus. Diese muß erst durch Visualisierungsverfahren erlangt werden, solange es sich nicht um rein stationäre Strömungen handelt. Da bei den Untersuchungen in diesem Abschnitt nur strukturelle Eigenschaften der Strömung im Vordergrund stehen, wird auf eine quantitative Auswertung der Geschwindigkeitsfelder verzichtet. Trotzdem ist auch hier die PIV Technik den anderen Visualisierungsverfahren überlegen, da es keine Fehlinterpretationen der Strömungsbilder erlaubt, und da die räumlichen Geschwin-

¹ Die Messungen wurden in Zusammenarbeit mit J. Langenberg [37] im Rahmen seiner Diplomarbeit durchgeführt.

digkeitsunterschiede zu erkennen sind. Wie in Kapitel 5.3 dargestellt, gibt es zwei

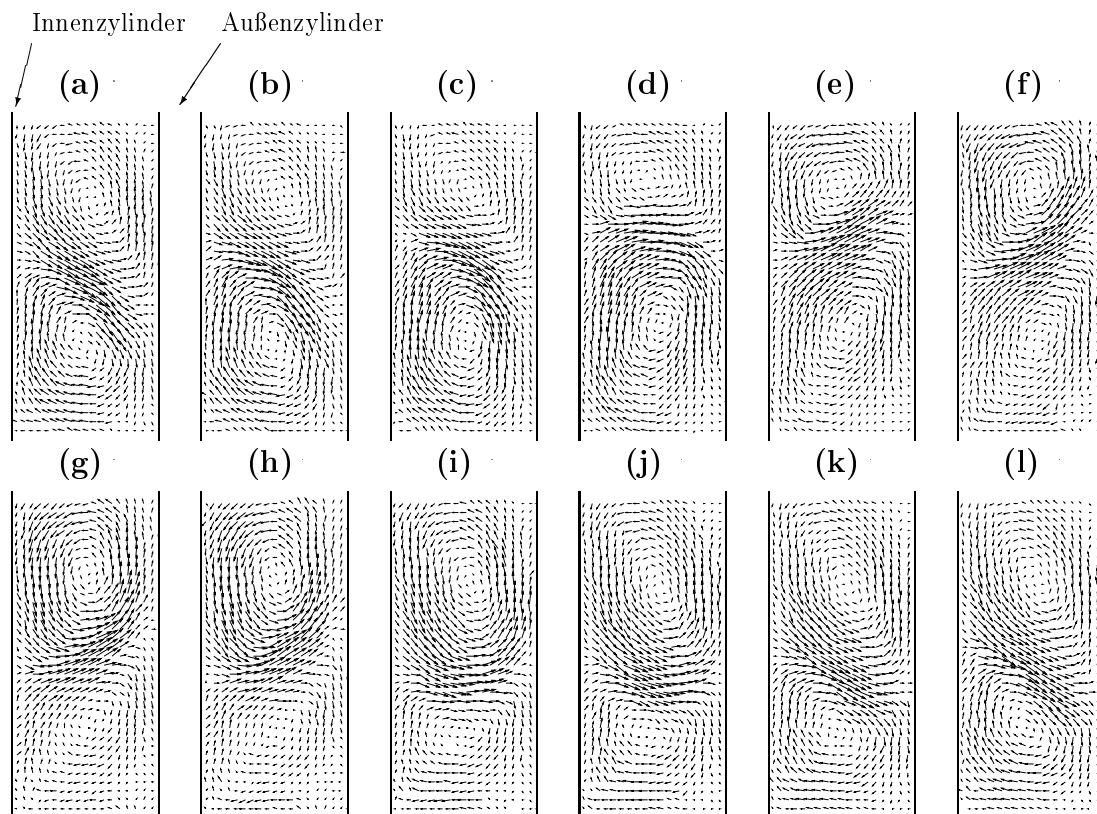


Abb. 6.3: PIV-Aufnahmen einer Schwingungsperiode der Großen-Jet-Mode in einem Wirbelpaar bei $\Gamma/N = 0.87$ und $Re = 507$.

unterschiedliche Typen von Jet-Moden. Diese werden in Anlehnung an das Verhältnis ihrer Schwingungsamplituden als Kleine-Jet- und Große-Jet-Mode bezeichnet. Dabei hat sich gezeigt, daß in der Taylor-Wirbelströmung für Zustände mit mehr als vier Wirbeln immer die Kleine-Jet-Mode als erste zeitperiodische Instabilität auftritt. Die Große-Jet-Mode setzt erst bei höheren Reynoldszahlen ein.

Da es sich bei der Jet-Instabilität der Taylor-Wirbelströmung um eine Instabilität der Auswärtsströmung handelt, sind zunächst Strömungsbilder von der axialsymmetrischen Strömung bei Annäherung bis unmittelbar an den kritischen Punkt gemacht worden. Abbildung 6.1 zeigt eine Sequenz von Aufnahmen eines einzelnen Wirbelpaars des 12-Wirbelzustandes bei $\Gamma/N = 0.87$ für aufsteigende Reynoldszahlen von (a) $Re = 203$ bis (d) $Re = 321$. Man erkennt, daß die Strömungsgeschwindigkeit im Bereich der Auswärtsströmung bei Erhöhung der Reynoldszahl deutlich zunimmt. Dieses hat zur Folge, daß sich auch die Position der Wirbelkerne in Richtung der Auswärtsströmung verschiebt, während die Einwärtsströmung nahezu unverändert bleibt. Diese Asymmetrie zwischen der Ein- und der Auswärtsströmung der Taylor-Wirbel ist seit langem bekannt und wird durch eine starke Zunahme der räumlichen zweiten Harmonischen zum Ausdruck gebracht [59, 50]. Dieses Verhalten ist für den Bereich $\Gamma/N < 1$ stärker ausgeprägt als für $\Gamma/N > 1$ [37].

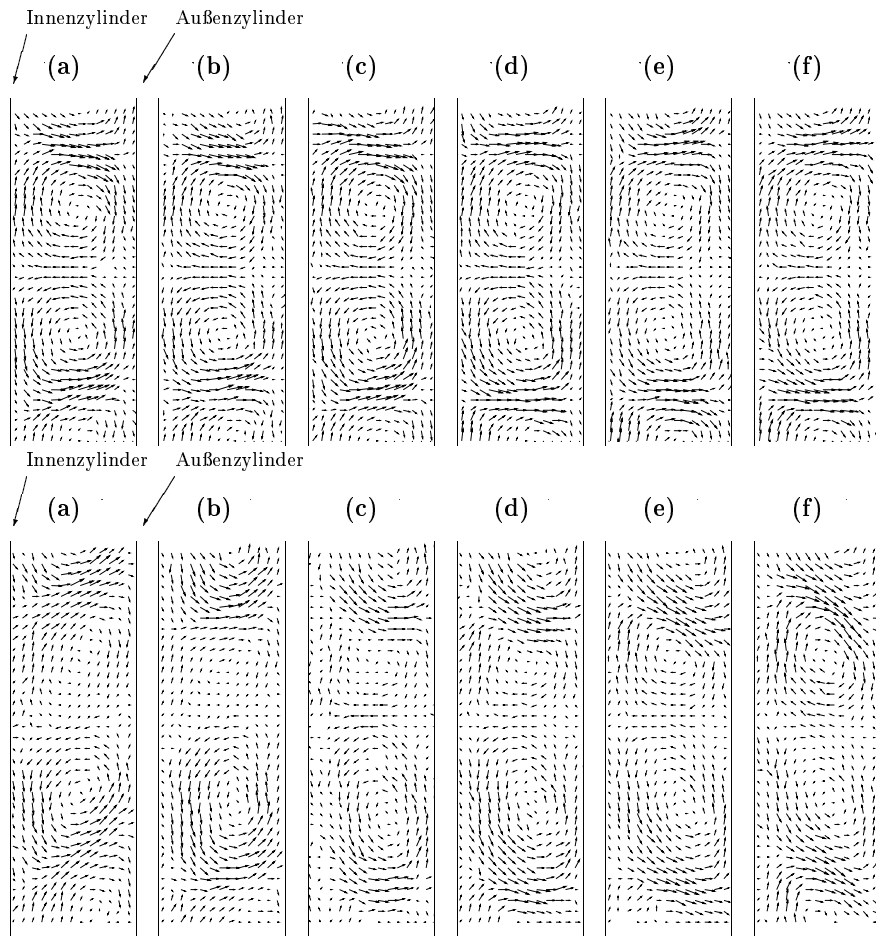


Abb. 6.4: PIV-Aufnahmen einer halben Schwingungsperiode der Kleinen-Jet-Mode (oben, $Re = 339$) und der Großen-Jet-Mode (unten, $Re = 507$) bei $\Gamma/N = 0.87$. Die Darstellung der Oszillationen in zwei benachbarten Auswärtsströmungen zeigt das typische gegenphasige Verhalten der Kleinen-Jet-Mode (oben) und das typische gleichphasige Verhalten der Großen-Jet-Mode (unten).

Die Zunahme der Strömungsgeschwindigkeit in der Auswärtsströmung führt zu einer Instabilität und zum Auftreten der nicht-axialsymmetrischen zeitabhängigen Kleinen-Jet-Mode. Abbildung 6.2 zeigt eine ganze Periode der Kleinen-Jet-Mode in einem Wirbelpaar aufgenommen bei $Re = 339$ und $\Gamma = 0.87$. Dabei ist es mit dem benutzten PIV-Verfahren nicht möglich, eine Sequenz von Strömungsbildern, die aus einer einzelnen Schwingungsperiode stammen, aufzunehmen, da die höchste Bildwiederholungsrate bei ca. $2Hz$ liegt [37]. Daher wurden die Bilder stroboskopisch aufgenommen, wobei auch hier eine exakte Synchronisierung zur Zeit nicht vorhanden ist. Somit entsprechen alle auch im folgenden dargestellten Sequenzen nur qualitativ dem zeitlichen Strömungsverlauf. Die Große-Jet-Mode zeichnet sich im Vergleich zur Kleinen-Jet-Mode durch eine deutlich größere Schwingungsamplitude aus. Abbildung 6.3 zeigt eine Periode der Großen-Jet-Mode in einem einzelnen Wirbelpaar bei einer Reynoldszahl

$Re = 507$ und einer normierten Höhe $\Gamma/N = 0.87$. Man erkennt deutlich die größere Schwingungsamplitude der Großen-Jet-Mode im Vergleich zur Kleinen-Jet-Moden. Während bei der Kleinen-Jet-Mode die Positionen der Wirbelkerne nahezu unverändert bleiben, ändern sich diese bei einer Großen-Jet-Mode-Oszillation signifikant.

Die beiden Moden unterscheiden sich neben ihrer Oszillationsfrequenz und ihrer Amplitude auch durch die axiale Periodizität. Mit Hilfe zweier LDA-Systeme konnten nachweisen, daß benachbarte Oszillationen der Großen-Jet-Mode in Phase und die der Kleinen-Jet-Mode gegenphasig schwingen [117]. Abbildung 6.4 zeigt PIV Aufnahmen des räumlichen Verhaltens der Kleinen-Jet- und der Großen-Jet-Mode. Dargestellt ist jeweils eine halbe Periode beider Oszillationen in axial benachbarten Wirbelpaaren. Die Parameter sind identisch zu den obigen der Einzelmessungen. Signifikant ist das Phasenverhalten der beiden Oszillationstypen zu erkennen, wobei bei der Kleinen-Jet-Mode-Oszillation ein leichter Phasenversatz auftritt. Dieses Verhalten wird ebenfalls in [117] berichtet. Trotz der großen Schwingungsamplitude der Großen-Jet-Mode wird aus Abbildung 6.4 ersichtlich, daß auch bei dieser Mode die Einwärtsströmung im Vergleich zur Auswärtsströmung nahezu in Ruhe bleibt. Untersuchungen mittels PIV im Bereich der VLF-Mode konnten wegen der kleinen Schwingungsamplitude der VLF-Mode und der begrenzten Auflösung der PIV nicht durchgeführt werden.

6.2 „Critical-slowng-down“ beim Einsetzen der Kleinen-Jet-Mode

Wie aus den Untersuchungen des Relaxationsverhaltens, das beim Einsatz der Taylor-Wirbelströmung auftritt, deutlich wird, erlaubt auch die Untersuchung der transienten Dynamik Rückschlüsse auf die Art einer Instabilität. Die zeitperiodischen Moden in der Taylor-Wirbelströmung treten im Fall unendlich ausgedehnter Systeme über eine Hopf-Verzweigung auf [117, 12]. Aus der Normalform einer Hopf-Verzweigung wird

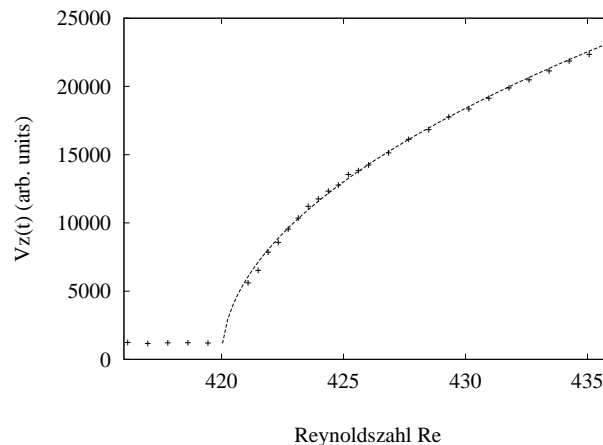


Abb. 6.5: Stationäre Amplitude der Kleinen-Jet-Mode aufgetragen über der Reynoldszahl Re aufgenommen in einem 10-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.9$. Die an die Meßdaten angepaßte Wurzelfunktion ergibt eine kritische Reynoldszahl $Re_c = 420.3$.

deutlich, daß die Amplitude der Oszillation die gleiche funktionale Form besitzt wie die

Landau-Gleichung. Daher tritt ein „critical-slowng-down“ auch beim Einsetzen einer Oszillation über eine Hopf-Verzweigung ein. Dabei bezieht sich die kritische Verlangsamung auf die Anpassung der Amplitude einer Oszillation an die Endamplitude bei einem festen Kontrollparameterwert. Die Oszillationsfrequenz ist davon nicht beeinflusst. Pfister und Gerds [102] haben dieses Verhalten beim Einsatz der Wavy-Mode in einem Taylor-Couette System mit $\eta = 0.5$ untersucht. Sie fanden dabei eine sehr gute Bestätigung für das Auftreten eines „critical-slowng-down“.

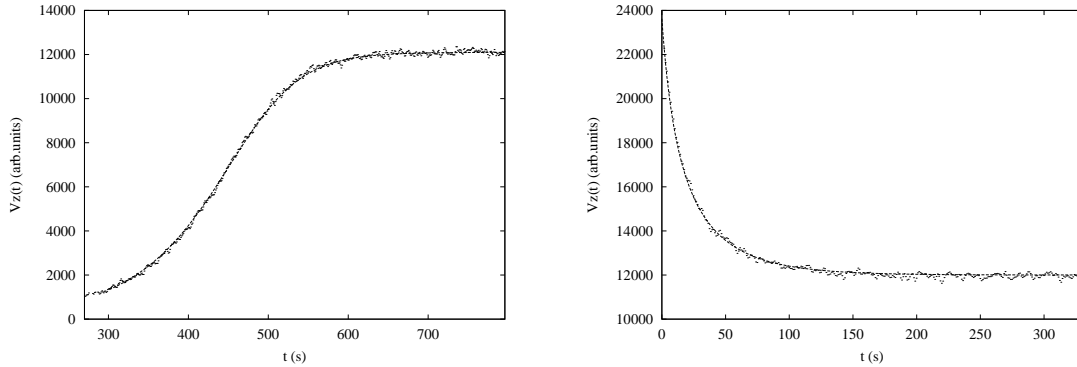


Abb. 6.6: Typisches Zeitverhalten der Amplitude einer oszillatorischen Mode bei einem Anschwing- und einem Abklingprozeß. Links ist der Anschwingprozeß mit $\varepsilon_i < 0 < \varepsilon_f$ und rechts der Abklingprozeß mit $\varepsilon_f < \varepsilon_i$ dargestellt. Die Meßwerte entsprechen den Extrema der Oszillation, die angepaßt Kurve ist Lösung der Landau-Gleichung (4.1). Diese Messungen wurden für eine Wavy-Mode bei $\Gamma/N = 1.3$ in einem 16-Wirbelzustand durchgeführt

Es wird untersucht, ob diese Eigenschaft auch beim Einsatz der Kleinen-Jet-Mode auftritt.² Dabei sind zum Vergleich die Messungen beim Einsetzen der Wavy-Mode wiederholt. Die Meßmethode ist identisch zu der, welche auch bei der Untersuchung der stationären Strömung benutzt wurde. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die Amplitude der Oszillation nicht direkt gemessen werden konnte. Daher wurden die anschwingenden und abklingenden Oszillationen aufgenommen, um dann aus den Oszillationsmaxima die Einhüllende dieses Prozesses zu bestimmen.

Abbildung 6.5 zeigt die stationäre Amplituden der Kleinen-Jet-Mode in Abhängigkeit von der Reynoldszahl. Die Messung wurde in einem 10-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.9$ durchgeführt. Die sich ergebende Wurzelabhängigkeit wurde zur Bestimmung des kritischen Punktes genutzt, indem eine Wurzelfunktion an die Meßwerte angepaßt wurde. Als kritischer Punkt ergibt sich hier $Re_c = 420.3$. Daraufhin wurden, wie schon bei der Untersuchung der Taylor-Wirbelströmung, das Anschwing- und Abklingverhalten mit Hilfe von Kontrollparametersprüngen ausgemessen. Als Anfangszustand dienten dafür wieder ein unter- und ein überkritischer Wert. Abbildung 6.6 gibt einen typischen Anschwing- und einen typischen Abklingprozeß wieder. Zu sehen ist die Einhüllende der Kleinen-Jet-Mode, an die die Lösung der Landau-Gleichung angepaßt wurde

² Die Messungen wurden in Zusammenarbeit mit M. Wrage [74] im Rahmen seiner Diplomarbeit durchgeführt.

(vgl. Gleichung 4.1). Die Signalqualität im Vergleich zu den Zeitreihen, die bei der Untersuchung der stationären Strömung zur Verfügung standen, ist signifikant besser. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß bei der Untersuchung der stationären Strömung direkt die sehr kleinen Radialgeschwindigkeiten gemessen wurden. Obwohl die Änderungen im Geschwindigkeitsfeld der Kleinen-Jet-Mode, wie in Abbildung 6.2 zu sehen ist, ebenfalls nicht sehr groß sind, werden wegen des ortsfesten Meßvolumens die Geschwindigkeitsänderungen am Gradienten des stationären Strömungsfeldes verstärkt. Diese sind in der Auswärtsströmung sehr groß, so daß eine hohe Verstärkung erzielt wird. Die für den 10-Wirbelzustand ermittelten Zeitkonstanten sind in Abbildung 6.7

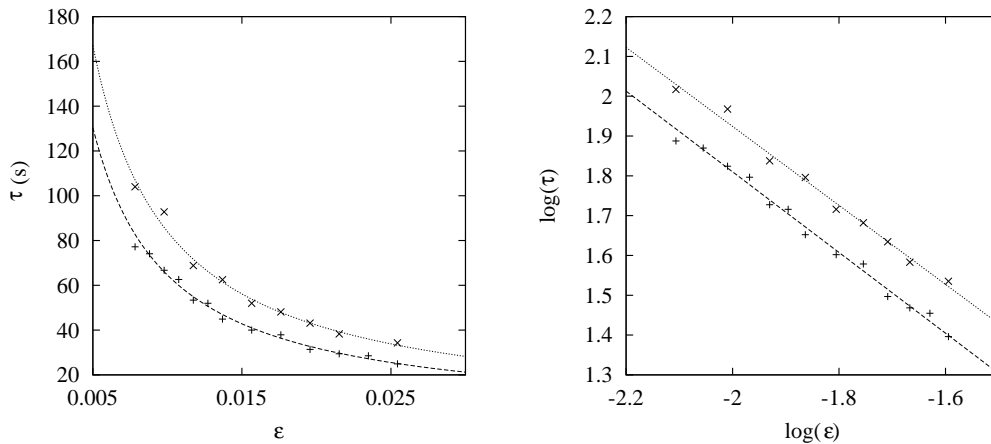


Abb. 6.7: Zeitkonstanten (links) und Skalierungsverhalten (rechts) beim Einsetzen der Kleinen-Jet-Mode bei $\Gamma/N = 0.9$. Exemplarisch sind die Meßergebnisse für den 10-Wirbelzustand dargestellt. Die Zeitkonstanten der Anschwingprozesses ($\varepsilon_i < \varepsilon_f$) (X) sind stets größer als die des Abklingprozesses ($\varepsilon_i < \varepsilon_f$) (+) bei gleichem Endzustand ε_f

aufgetragen. Dabei wurden wiederum nur überkritische Endzustände betrachtet. Man sieht eine im experimentellen Rahmen sehr gute Annäherung an ein divergentes Verhalten in der Umgebung des kritischen Punktes. Dieses gilt sowohl bei unterkritischen als auch bei überkritischen Anfangszuständen. Als kritischen Exponenten ergeben sich mit der in Abbildung 6.5 bestimmten kritischen Reynoldszahl von $Re_c = 420.3$ für den Anschwingprozeß ($\varepsilon_i < 0 < \varepsilon_f$) $\varepsilon^{-1.013}$ und für den Abklingprozeß ($0 < \varepsilon_f < \varepsilon_i$) $\varepsilon^{-0.992}$. Die gleichen Messungen wurden auch für Zustände mit 6 und mit 16 Wirbeln durchgeführt. Dabei wurden als kritische Exponenten für den Anschwingprozeß $\varepsilon_6^{-1.036}$ und $\varepsilon_{16}^{-1.036}$ und für den Abklingprozeß $\varepsilon_6^{-0.923}$ und $\varepsilon_{16}^{-0.989}$ respektive für den 6- und den 16-Wirbelzustand ermittelt. Dieses kann als sehr gute Bestätigung dafür angesehen werden, daß auch beim Einsatz der Kleinen-Jet-Instabilität ein „critical-slowing-down“ auftritt.

Aus Abbildung 6.7 wird aber auch ersichtlich, daß der Wert der Zeitkonstanten des Anschwingprozesses ($\varepsilon_i < \varepsilon_f$) immer deutlich oberhalb dem des Abklingprozesses ($\varepsilon_f < \varepsilon_i$) liegt. Auch Pfister und Gerdts [102] hatten kleine Unterschiede zwischen den Zeitkonstanten der beiden Prozesse bei den Untersuchungen der Wavy-Mode feststellen können. Vergleichsmessungen beim Einsatz der Wavy-Mode konnten dieses indes nicht

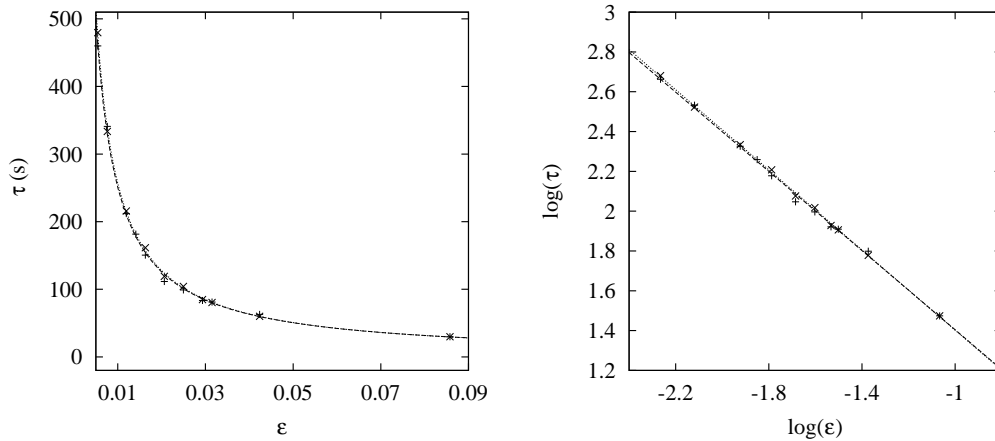


Abb. 6.8: Meßergebnisse der Vergleichsmessungen beim Einsetzen der Wavy-Mode im 16-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 1.3$. Dargestellt ist wiederum das Anschwing- (+) und Abklingverhalten (x) für verschiedene Endzustände. Im Rahmen der Meßgenauigkeit sind die Zeitkonstanten identisch.

bestätigen. Abbildung 6.8 zeigt die Zeitkonstanten beim Einsetzen der Wavy-Mode in einem 16-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 1.3$. Dabei tritt auch beim Einsatz der Wavy-Mode ein „critical-slowng-down“ auf. Als kritische Exponenten ergeben sich für den Abklingprozeß -1.007 und für den Anschwingprozeß -0.994 bei einem kritischen Punkt von $Re_c = 378.1$. Dieses Verhalten bestätigt die Ergebnisse von Pfister und Gerdtts [102]. Es lassen sich aber keine signifikanten Abweichungen zwischen den Zeitkonstanten des Anschwing- und des Abklingprozesses feststellen. Bei der Bewertung der Unterschiede zwischen diesen Ergebnissen und denen von Pfister und Gerdtts muß berücksichtigt werden, daß sie die Wavy-Mode in einem 36-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 1.003$ untersuchten, so daß ihre normierte Höhe näher an der lag, die bei den Messungen der Zeitkonstanten der Kleinen-Jet-Mode eingestellt wurde, als an der für diese Untersuchungen verwendete. Um festzustellen, ob die Diskrepanz zwischen den Zeitkonstanten bei einem Kontrollparameterwert vom Anfangszustand abhängt, oder ob es sich um eine Eigenschaft des Anschwing- und des Abklingprozesses handelt, wurden einige dieser Untersuchungen für verschiedene Anfangszustände wiederholt. Abbildung 6.9 zeigt die Ergebnisse dieser Untersuchung für den Einsatz der Kleinen-Jet-Mode (links) und zum Vergleich für den Einsatz der Wavy-Mode (rechts). Die Messungen der Zeitkonstanten der Kleinen-Jet-Mode wurden wiederum in einem 10-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.9$ durchgeführt. Dargestellt sind in Abbildung 6.9 die Ergebnisse für den Endzustand $\epsilon_f = 0.018$. Man erkennt, daß die Zeitkonstanten jeweils für den Anschwing- und den Abklingprozeß im Rahmen der Meßgenauigkeit für verschiedene Anfangszustände identisch sind, sich aber für die beiden Prozesse unterscheiden. Beachtet werden sollte, daß dieses beim Anschwingprozeß auch für überkritischen Anfangszustände, die aber unterhalb des Endzustandes liegen, gilt. Untersuchungen für andere Endzustände ergaben qualitativ das gleiche Verhalten. Aus diesen Untersuchungen wird deutlich, daß die Unterschiede zwischen den Zeitkonstanten nicht durch die unterschiedlichen Anfangswerte zustande kommen, sondern Eigenschaften des Anschwing- und des Abklingpro-

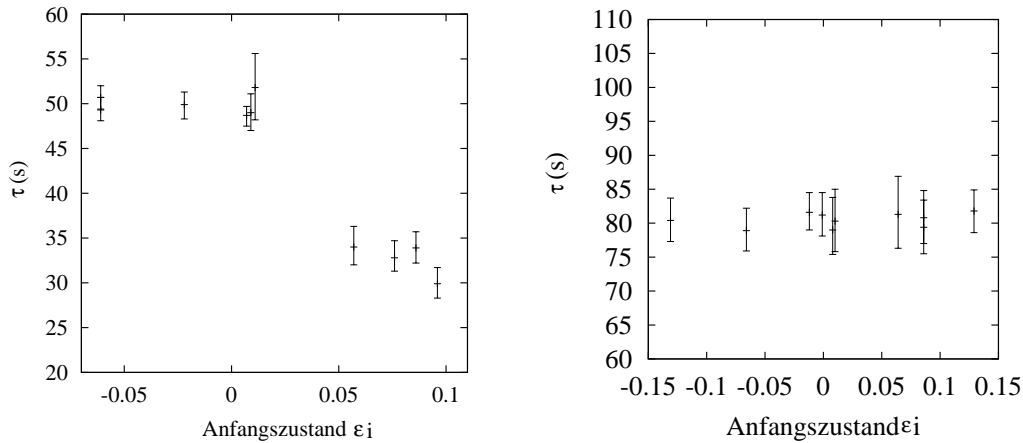


Abb. 6.9: Abhängigkeit der Zeitkonstanten von der Wahl des Anfangszustandes bei festem Endzustand. Exemplarisch sind links die Ergebnisse der Messungen bei Einsatz der Kleinen-Jet-Mode im 10-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.9$ für einen Endzustand $\varepsilon_f = 0.018$ gezeigt. Zum Vergleich sind rechts die Ergebnisse der Messungen beim Einsetzen der Wavy-Mode im 16-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 1.3$ für einen Endzustand $\varepsilon_f = 0.031$ dargestellt.

zesses widerspiegeln. Die Vergleichsmessungen beim Einsetzen der Wavy-Mode ergaben im Rahmen der Meßgenauigkeit keine Unterschiede zwischen Zeitkonstanten bei verschiedenen Anfangszuständen. Die Messungen wurden im 16-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 1.3$ durchgeführt. Die Tatsache, daß für den Anschwing- und den Abkling-

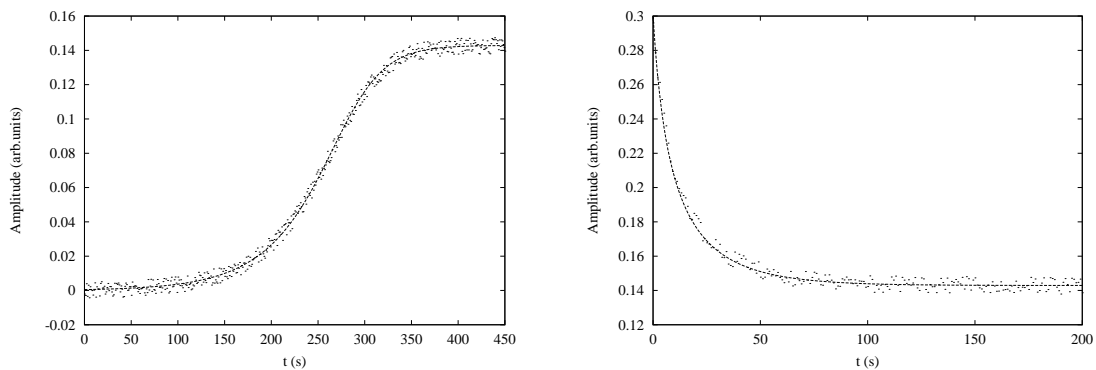


Abb. 6.10: Darstellung eines numerisch simulierten (links) Anschwing- und (rechts) Abklingprozesses. Zusätzlich ist die Anpassung der Lösung der Landau-Gleichung an die numerischen Daten zu sehen.

prozeß unterschiedliche Zeitkonstanten auftreten, ist nicht im Rahmen der Landau-Theorie zu verstehen. Daher müssen Prozesse das Relaxationsverhalten beeinflussen, die in der bisherigen Beschreibung nicht enthalten sind. Im Unterschied zum Verhalten am Übergang zur Taylor-Wirbelströmung liegen die Zeitkonstanten des Anschwingprozesses beim Einsatz der Kleinen-Jet-Mode immer oberhalb derer des Abklingprozesses. Am Verzweigungspunkt der zeitperiodischen Kleinen-Jet-Mode konnte aber sowohl für

den Anschwing- als auch für den Abklingprozeß das gleiche Skalierungsverhalten beobachtet werden. Dieses Verhalten wird aber durch die lineare Dynamik in der Umgebung des Fixpunkts bestimmt. Da für beide Prozesse eine Skalierung gemäß der Landau-Theorie beobachtet werden konnte, kann die lineare Dynamik des Prozesses nicht beeinflußt sein. Beim Taylor-Couette-Übergang führten die durch die Ränder in das System eingebrachte Störungen zur Zerstörung des kritischen Verhaltens. Da die Oszillation an den Rändern verschwindet, lauten die Randbedingungen anders als beim Taylor-Couette-Übergang $A(0) = A(L) = 0$. Diese Randbedingungen führen lediglich zu einer Verschiebung des kritischen Punktes, ändern aber die funktionale Form der Landau-Gleichung nicht [15, 17]. Daher muß die Abweichung in den Zeitkonstanten bei Einsatz der Kleinen-Jet-Mode andere Ursachen haben. Dabei muß beachtet werden, daß es sich bei der zeitperiodischen Instabilität um eine Instabilität eines periodischen Grundmusters handelt. Daher wird die Dynamik nicht nur durch die kritische zeit-

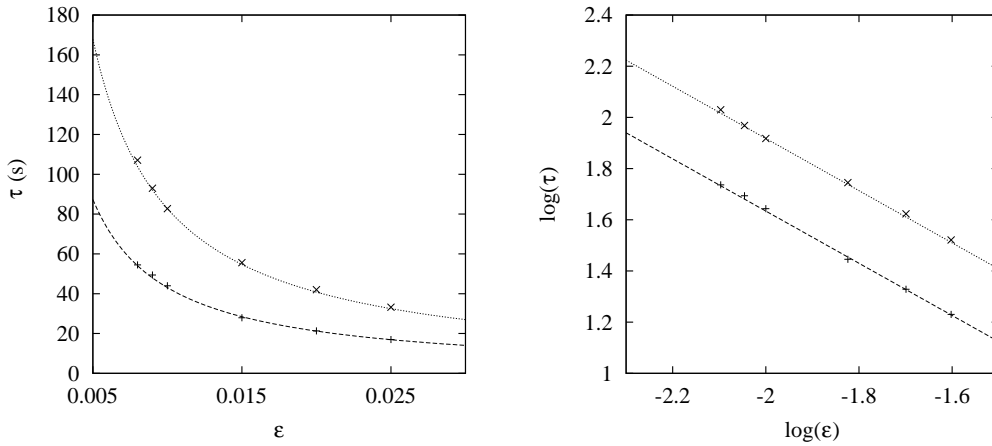


Abb. 6.11: Zeitkonstanten und Skalierungsverhalten eines simulierten Szenarios. Die Zeitkonstanten des Anschwingprozesses $0 < \epsilon_i < \epsilon_f$ liegen immer deutlich oberhalb derer des Abklingprozesses $0 < \epsilon_f < \epsilon_i$.

periodische Mode, sondern auch durch die Phase des periodischen Musters bestimmt. Messungen der Wirbelgröße beim Einsetzen der Kleinen-Jet-Mode haben ergeben, daß die zeitabhängige Strömung eine inhomogene Verteilung besitzt [193, 1]. Um diesen Einfluß phänomenologisch zu modellieren, wird ein weiterer nichtlinearer Term zur Landau-Gleichung hinzugefügt. Da ein weiterer A^3 -Term lediglich zu einer Umskalierung führt und nur Terme hinzugefügt werden können, die mit der Symmetrie des Systems übereinstimmen, wird als zusätzlicher „Störterm“ A^5 zur Landau-Gleichung addiert. Der Einfluß dieses Terms soll allerdings als klein angenommen werden, so daß sich folgende Gleichung ergibt:

$$\tau_0 \partial_t A = \epsilon A - g A^3 - \delta A^5 \quad (6.1)$$

Dieser zusätzliche Term bedeutet, daß eine stärkere nichtlineare Dämpfung im System vorhanden ist, die anschaulich zu einem „schnelleren“ Abklingen und einem „langsameren“ Anschwingen führt. Da eine Auswertung der Meßdaten auf Grundlage dieser

Gleichung nicht möglich ist, wurden numerisch Zeitreihen erzeugt, die dann mit demselben Verfahren ausgewertet wurden, wie es auch zur Auswertung der experimentellen Zeitreihen benutzt wurde. Simuliert wurden, wie im Experiment, Kontrollparametersprünge, wobei die Parameter ε und g den experimentellen Werten entsprachen. Zusätzlich wurden die Datensätze mit einem statistischen Rauschen überlagert, das in der Größenordnung des Meßrauschens lag. Abbildung 6.10 zeigt numerisch erzeugte Zeitreihen eines Anschwing- und eines Abklingprozesses. Die Auswertung eines simulierten Szenarios ist in Abbildung 6.11 dargestellt. Dabei liegen die Zeitkonstanten des Anschwingprozesses $0 < \varepsilon_i < \varepsilon_f$ immer deutlich oberhalb derer des Abklingprozesses $0 < \varepsilon_f < \varepsilon_i$. Das Skalierungsverhalten entspricht aber dem der Landau-Theorie. Die Ergebnisse der Simulation reproduzieren konsistent das Verhalten, das auch am Einsatzpunkt der Kleinen-Jet-Mode beobachtet wurde. Das ist ein Hinweis darauf, daß beim Einsatz der Kleinen-Jet-Mode noch weitere Prozesse beteiligt sind, die nicht im Rahmen einer Landau-Gleichung beschrieben werden können, so daß eine Auswertung in Sinne der Landau-Theorie zu Artefakten führt. Offenkundig ist aber, daß es sich beim Einsatz der Kleinen-Jet-Mode um eine Verzweigung handelt, das kritische Verhalten also nicht zerstört wird.

6.3 Wechselwirkung axialsymmetrischer und wellenförmiger Strömung

Folgt man dem Verzweigungspunkt der Kleinen-Jet-Mode ausgehend von dem im letzten Abschnitt untersuchten bei $\Gamma/N = 0.9$ zu kleineren normierten Höhen, so kommt man in einen Bereich, in dem der axialsymmetrische Strömungszustand sekundär wird [63, 117]. Dieses ist dabei im Sinne des Stabilitätswechsels von axialsymmetrischen Zuständen verschiedener Wirbelzahl mit Γ zu verstehen (vgl. Kapitel 2.3). Eine Reduktion der Reynoldszahl ausgehend vom sekundären Zustand führt dabei zu einem Übergang des sekundären Zustandes in den primären über eine Sattelknoten-Verzweigung. Im Bereich der Jet-Mode besitzt der primäre Zustand ein Wirbelpaar weniger. Abbildung 6.12 zeigt einen Ausschnitt aus dem Stabilitätsdiagramm des symmetrischen 4-Wirbelzustandes S_4 . Der S_4 Zustand ist in diesem Γ -Bereich sekundär, während der symmetrische 2-Wirbelzustand S_2 den primären darstellt. Linie A in Abbildung 6.12 bezeichnet die untere Stabilitätslinie der axialsymmetrischen 4-Wirbelzustandes S_4 . Bei Reduktion der Reynoldszahl tritt an dieser Linie eine Sattelknoten-Verzweigung auf. Die „jet“-Linie markiert den Einsatzpunkt der zeitperiodischen Jet-Mode über eine Hopf-Verzweigung. Am Punkt Γ_1 , an dem sich diese beiden Stabilitätslinien treffen, kommt es zu einer Veränderung des Stabilitätsverhaltens des 4-Wirbelzustandes. Es bildet sich eine Spitze aus, deren obere Linie B die obere Stabilitätsgrenze des oszillatorischen 4-Wirbelzustandes bildet. Diese Linie läuft mit der unteren Stabilitätslinie C des oszillatorischen 4-Wirbelzustandes am Punkt Γ_2 zusammen. Anschaulich läßt sich festhalten, daß das Auftreten einer zeitperiodischen Welle die untere Stabilitätsgrenze des 4-Wirbelzustandes zu höheren Reynoldszahlen hin verschiebt. Die Tatsache, daß der Einsatz einer zeitperiodischen Strömung das Stabilitätsverhalten der axialsymmetrischen Strömung signifikant verändert, läßt sich aus den bisherigen theoretischen Arbeiten zur wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung nicht verstehen (vgl. Kapitel 5.3). Auch wurde dieses Verhalten bei den Untersuchungen der axialsymmetri-

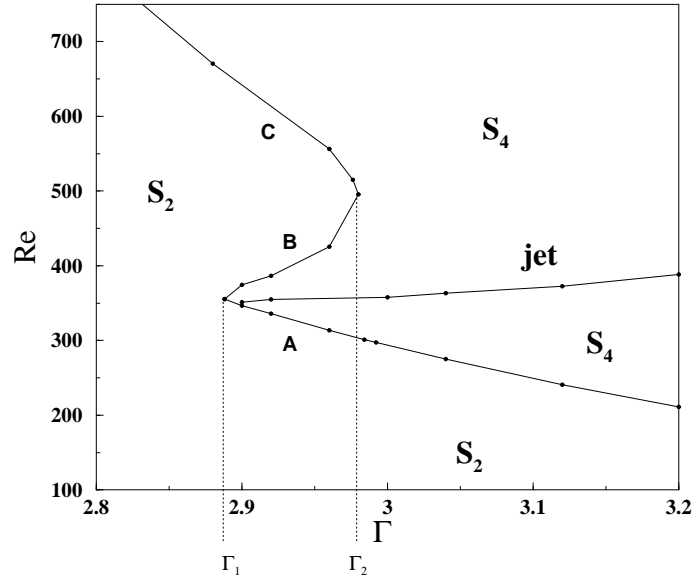


Abb. 6.12: Stabilitätsdiagramm des sekundären 4-Wirbelzustandes S_4 . Am Punkt Γ_1 trifft die Stabilitätslinie der Hopf-Verzweigung die untere Stabilitätsgrenze von S_4 (A). Die Linien (B) und (C) stellen respektive die obere und untere Stabilitätslinien des oszillatorischen S_4 Zustandes dar, die bei Γ_2 zusammenlaufen.

schen Strömung nicht beobachtet. Es ist daher naheliegend, daß die Änderung des Stabilitätsverhaltens durch eine Wechselwirkung von axialsymmetrischer und nicht-axialsymmetrischer Struktur verursacht wird. Physikalisch ist zur Zeit nicht verstanden, wie eine solche Wechselwirkung zustande kommt. Eine Untersuchung der mathematischen Struktur einer Kopplung von Hopf- und Sattelknoten-Verzweigung zeigt indes, daß dieser theoretische Rahmen eine hinreichende Basis für die Beschreibung der Änderung des Stabilitätsverhaltens des S_4 -Zustandes darstellt. Die Normalform einer gekoppelten Instabilität aus Sattelknoten- und Hopf-Verzweigung lautet bei entsprechender Anpassung der freien Parameter [31]:

$$\dot{z} = a + z^2 + r^2 \quad (6.2)$$

$$\dot{r} = r(-b - z + z^2) \quad (6.3)$$

Zu einer vollständigen Entfaltung gehört neben der axialen Komponente z , die das Auftreten stationären Verhaltens beschreibt, und der radialen Komponente r , die die Amplitude des oszillatorischen Verhaltens wiedergibt, auch noch eine azimutale Komponente ω . Daher handelt es sich eigentlich um ein dreidimensionales System, bei dem aber die Azimutalkomponente entkoppelt ist. Der Parameter a ist für das Auftreten der Sattelknoten-Verzweigung und der Parameter b für das Auftreten der Hopf-Verzweigung verantwortlich. Abbildung 6.13 zeigt den für diese Untersuchungen relevanten Teil des Stabilitätsdiagramms der Normalform 6.2. Unterhalb der Linie D ($a < 0$) ist kein stabiler Fixpunkt im System vorhanden. Die Linie D korrespondiert mit der Linie A im Stabilitätsdiagramm 6.12. Im Bereich zwischen Linie D und C in Abbildung 6.13 existiert nur ein stabiler Fixpunkt auf der z -Achse. Dieser Bereich entspricht

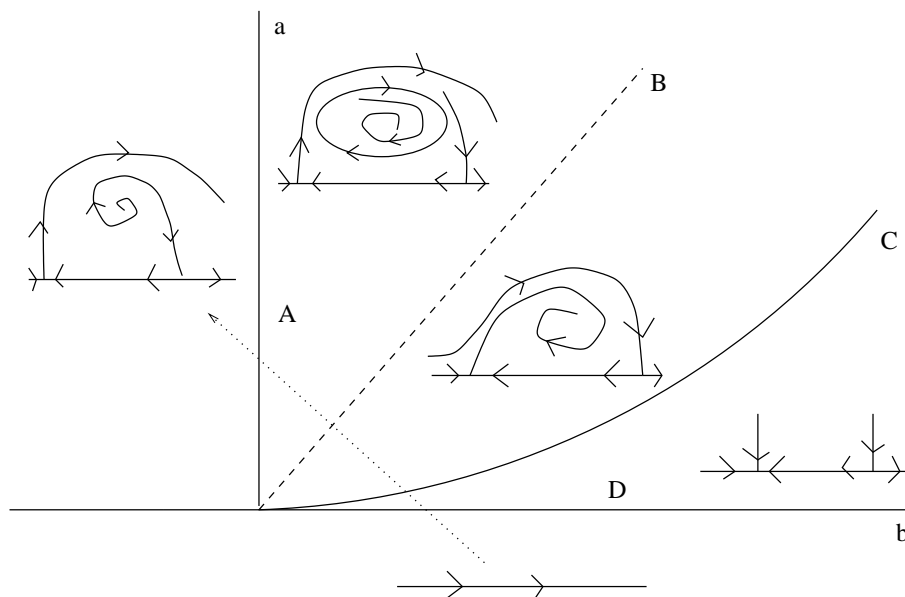


Abb. 6.13: Teil des Stabilitätsdiagramms der Normalform 6.2 mit Parametern a und b . Auftretende Verzweigungen: A inverse sekundäre Hopf, B heterokline Verzweigung, C primäre Hopf- und D Sattelknoten-Verzweigung. Der gepunktete Pfeil entspricht dem in Abbildung 6.14 dargestellten Verzweigungsdiagramm.

dem Bereich des stabilen axialsymmetrischen 4-Wirbelzustandes, welcher in Abbildung 6.12 zwischen den Linien „A“ und „jet“ lokalisiert ist. Bei Linie C in Abbildung 6.2 tritt eine Hopf-Verzweigung auf, die den Einsatz der Jet-Mode repräsentiert. Die Bildung eines heteroklinen Orbits bei Linie B und die Existenz eines instabilen Torus im Bereich zwischen Linie A und B ist experimentell nicht zu überprüfen, da beim Übergang von Linie B sich die Struktur der stabilen Fixpunkte in Abbildung 6.13 nicht ändert. Bei Linie A kommt es in Abbildung 6.13 zu einer inversen Hopf-Verzweigung, was in der dreidimensionalen Normalform einer inversen Torus-Verzweigung entspricht. Diese Verzweigung führt dazu, daß es jenseits der Linie A keinen stabilen Fixpunkt mehr gibt. Diese Verzweigung entspricht im Stabilitätsdiagramm des 4-Wirbelzustandes der Linie B . Da im System lokal kein Fixpunkt mehr existiert, stabilisiert sich das System auf einem anderen Fixpunkt im Phasenraum. Dieses entspricht im Fall des S_4 Zustandes dem primären S_2 Zustand. Abbildung 6.14 zeigt eine schematische Darstellung des möglichen Verzweigungsdiagramms im Bereich $\Gamma_1 < \Gamma < \Gamma_2$. Dieses Diagramm entspricht dem Pfad entlang dem gestrichelt gezeichneten Pfeil in Abbildung 6.13. Die auftretenden Verzweigungen am Punkt A , jet und B sind entsprechend der Notation aus Abbildung 6.12 dargestellt. Bei der Beschreibung einer Verzweigung mittels einer Normalform muß man sich im klaren sein, daß die Parameter, die in der Normalform auftreten, im allgemeinen nicht direkt mit den physikalischen Parametern des untersuchten Systems übereinstimmen müssen.

Neben den Stabilitätsaussagen, die sich aus der Normalform ergeben, lassen sich auch Aussagen über dynamisches Verhalten aus der Normalform ableiten, die sich

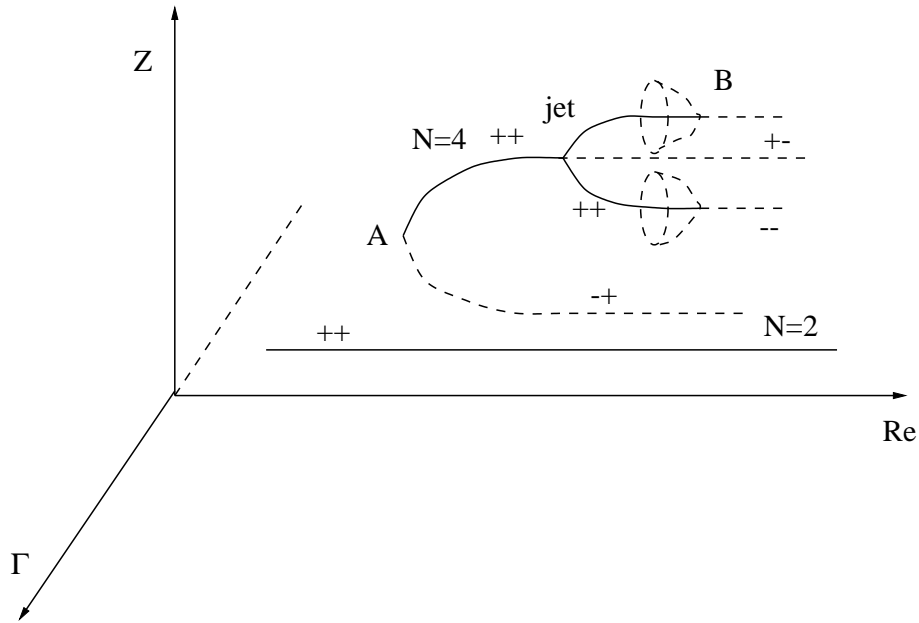


Abb. 6.14: Schematische Darstellung eines möglichen Verzweigungsdiagramms des sekundären 4-Wirbelzustandes ($N=4$) bei einer normierten Höhe $\Gamma_1 < \Gamma < \Gamma_2$. Die Punkte A und B entsprechen respektive den Punkten auf den entsprechenden Linien in Abbildung 6.12. Der vordere Index steht für Stabilität (+) bzw. Instabilität (-) in z -Richtung, der hintere entsprechend für die r -Richtung. Der primäre 2-Wirbelzustand ($N=2$) ist ebenfalls dargestellt.

experimentell überprüfen lassen. Zunächst ist die Oszillationsfrequenz in niedrigster Ordnung nicht vom Stabilitätsverhalten beeinflusst. Insbesondere tritt keine Divergenz der Oszillationsfrequenz durch Bildung eines homoklinen Orbits auf. Eine experimentelle Untersuchung der Wellengeschwindigkeit der Jet-Mode unmittelbar nach ihrem Einsatz zeigt, daß diese sich zwar leicht ändert, aber dieselbe Größenordnung für alle Γ besitzt (Abbildung 6.15). Insbesondere kommt es zu keinen qualitativen Änderungen, welche auf andere strukturelle Eigenschaften, wie z.B. die Existenz von homoklinen Orbits, schließen ließe. Insofern ist diese Beobachtung konsistent mit dem Verhalten der Normalform. Eine zweite dynamische Eigenschaft betrifft den Übergang an Linie A in Abbildung 6.13. Die in der Normalform auftretende sekundäre inverse Hopf-Verzweigung, die dafür verantwortlich ist, daß der gesamte Zustand instabil wird, äußert sich durch das Auftreten einer instabilen Modulation des periodischen Zustandes. Die Modulationsfrequenz ist dabei unabhängig von der des Grenzzyklus. Eine solche transiente Modulation konnte an der Stabilitätsgrenze B in Abbildung 6.12 bei $Re = 405$ und $\Gamma = 2.94$ beobachtet werden. Abbildung 6.16 zeigt eine Zeitreihe der experimentell auftretenden Modulation des oszillatorischen 4-Wirbelzustandes. Dabei wurde wegen der unterschiedlichen Zeitskalen die „schnelle“ Jet-Mode mit einem Tiefpaß von $f_{cutoff} = 0.2Hz$ herausgefiltert. Am Ende der dargestellten Zeitreihe geht die Strömung vom modulierten oszillatorischen 4-Wirbel- in den stationären 2-Wirbelzustand über. Die Analyse des Stabilitätsverhaltens zeigt, daß sich das Zu-

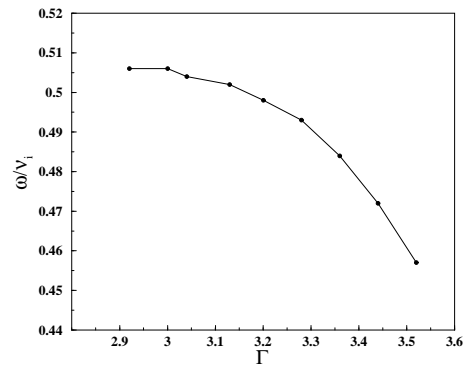


Abb. 6.15: Auf die Drehfrequenz des Innenzylinder ν_1 normierte Oszillationsfrequenz ω der Jet-Mode unmittelbar nach ihrem Einsatz aufgetragen über die normierte Höhe Γ

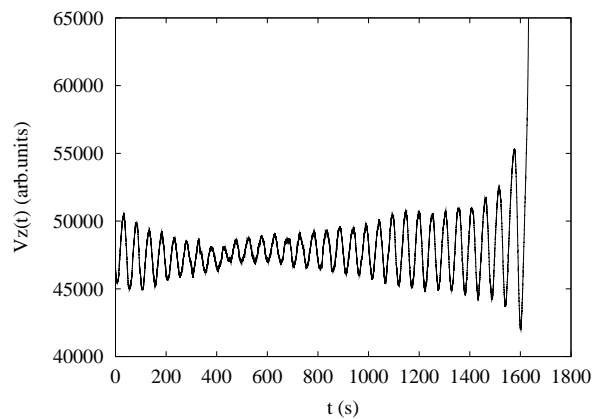


Abb. 6.16: Zeitreihe der langsamen Modulation des instabilen zweifach-periodischen 4-Wirbelzustands bei $\Gamma = 2.94$ und $Re = 405$. Der Sprung am Ende der Zeitreihe markiert den Übergang in den 2-Wirbelzustand.

sammentreffen von Sattelknoten-Verzweigung der axialsymmetrischen Strömung und Hopf-Verzweigung der nicht-axialsymmetrischen Strömung im Rahmen der Verzweigungstheorie vollständig beschreiben läßt. Allerdings sind die physikalischen Ursachen für diese Kopplung noch ungeklärt.

Die Jet-Instabilität weist eine Reihe von Eigenschaften auf, die generisch im Sinne der bestehenden Theorie erfaßt werden können. Allerdings ist insbesondere die Wechselwirkung der Kleinen-Jet-Mode mit der unterliegenden axialsymmetrischen Strömung nicht verstanden.

7. ANALYSE DER AXIALSYMMETRISCHEN INSTABILITÄTEN DER WELLENFÖRMIGEN TAYLOR-WIRBELSTRÖMUNG

Im diesem Kapitel werden Untersuchungen der axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung im Bereich $\Gamma/N < 0.96$ vorgestellt. Hier tritt die Kleine-Jet-Mode als erste zeitperiodische Instabilität in der stationären Taylor-Wirbelströmung auf. Die Arbeiten von v.Stamm et al. [142] hatten gezeigt, daß in dieser zeitperiodischen Strömung eine „universelle“ Sequenz von Strömungszuständen auftritt, die durch axialsymmetrische Instabilitäten zustande kommt. Sie untersuchten diese Sequenz in Zuständen mit mehr als zehn Wirbeln und fanden bis zum 50-Wirbelzustand, der ihre experimentelle Grenze darstellte, die gleiche Abfolge von Instabilitäten.

Die experimentellen Untersuchungen dieser axialsymmetrischen Instabilitäten sind in dieser Arbeit für Strömungszustände mit vier bis zehn Wirbeln durchgeführt worden. Dabei standen hier auftretende Wechselwirkungen zwischen den asymmetrischen Ästen im Vordergrund. Diese asymmetrischen Äste treten durch eine symmetriebrechende Verzweigung in der zeitabhängigen Strömung auf. Die experimentellen Ergebnisse werden auf Grundlage der Verzweigungstheorie analysiert. Dabei wird neben der Reynoldszahl Re und der normierten Höhe Γ/N auch die Wirbelzahl N als Verzweigungsparameter betrachtet. Letzterer charakterisiert den Einfluß der Randbedingungen auf die axialsymmetrischen Instabilitäten.

Ziel dieser Analyse ist die Rückführung der beobachteten Verzweigungen auf grundlegende Instabilitäten, die zu einer Vielzahl von Verzweigungen im experimentellen System führen können. Auch wenn eine solche Analyse ihrer Natur nach phänomenologisch bleiben muß, ermöglicht eine Beschreibung auf Grundlage der Prinzipien der Verzweigungstheorie Aufschluß über die Organisation der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung. Die Anwendbarkeit der in dieser Arbeit verwendeten Methode zur Analyse von Instabilitäten, die einer exakten theoretischen Behandlung nicht zugänglich sind, leitet sich zum einen aus der Allgemeingültigkeit der Verzweigungstheorie für nichtlineare Systeme und zum anderen aus der Vielzahl exakter Anwendungen im Bereich des Taylor-Couette-Systems ab [60, 63, 66, 122, 117].

Die in diesem und im nächsten Kapitel benutzte Terminologie zur Beschreibung der Verzweigungen bezieht sich ausschließlich auf die axialsymmetrischen ($m = 0$) Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung. Dieses dient der Vereinfachung und ist gerechtfertigt, da weder von Gertds et.al [116], v.Stamm et al. [142] noch in dieser Arbeit eine direkte Wechselwirkung der „schnellen“ ($m = 1$) Oszillation der Kleinen-Jet-Mode mit der axialsymmetrischen ($m = 0$) Struktur beobachtet werden konnte. Lediglich auf der „langsamen“ Zeitskala der VLF-Mode wurden Variationen in der Phase der Kleinen-Jet-Mode beobachtet [116, 142, 117]. Welche Bedeutung die-

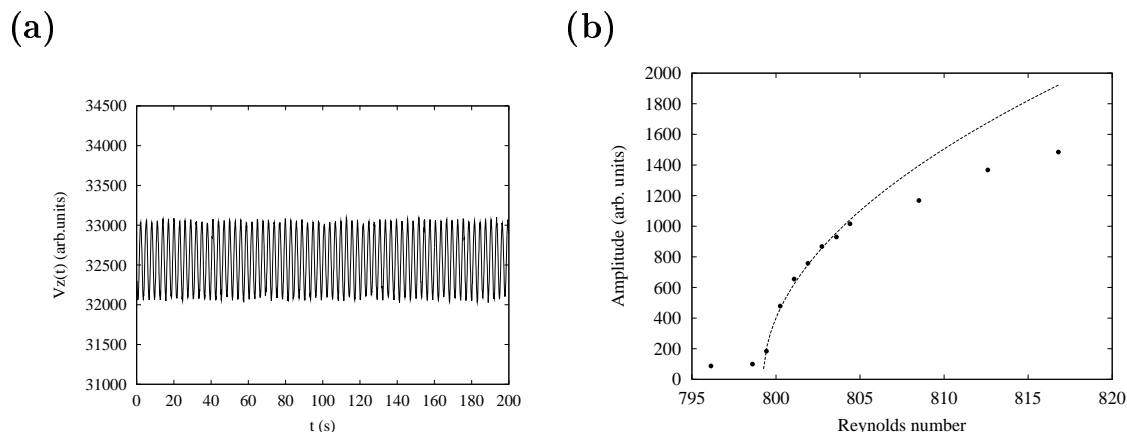


Abb. 7.1: (a): Amplitude der VLF Oszillation aufgetragen gegen die Reynoldszahl Re für $\Gamma/N = 0.913$ und $N = 12$. Die Abweichung vom Wurzelgesetz bei höheren Reynoldszahlen ist durch das Auftreten einer Modulation zu erklären. (b): Zeitreihe einer VLF-Oszillation beim Einsetzen über Hopf-Verzweigung, aufgenommen bei $Re = 804.4$ und $\Gamma/N = 0.913$ im 12-Wirbelzustand.

se Kopplung für die Entstehung der axialsymmetrischen Instabilitäten hat, ist aber zur Zeit noch nicht vollständig geklärt [116]. In dieser Arbeit werden lediglich die dynamischen Eigenschaften der axialsymmetrischen Instabilität untersucht, so daß die Kleine-Jet-Mode als „Trägerfrequenz“ betrachtet wird, die dynamisch nicht direkt an die „langsame“ axialsymmetrische Dynamik koppelt. Sie ist daher in allen Zeitreihen der VLF-Mode in diesem und im folgenden Kapitel mittels eines Tiefpasses herausgefiltert worden. Ein bei den Untersuchungen der VLF-Mode als stationär bezeichneter Fixpunkt ist also stationär im Sinne einer axialsymmetrischen Dynamik. Die Strömung selbst ist aber zeitabhängig aufgrund der nicht-axialsymmetrischen Kleinen-Jet-Mode. Alle Zeitreihen der VLF-Mode sind in der Zylindermitte ($L/2$) in einem Abstand von 3mm vom Innenzylinder gemessen worden. Dabei wurde die axiale Komponente der Strömungsgeschwindigkeit v_z gewählt, da diese in einem stationären symmetrischen Zustand verschwindet (vgl. [116, 142, 117]).

7.1 Klassifikation der oszillatorischen Instabilitäten

Einsatz der VLF-Mode über eine Hopf-Verzweigung

Experimentelle Untersuchungen im 4-, 8-, 10- und 12-Wirbelzustand haben gezeigt, daß es neben der von Gerdts et al. [116] gefundenen VLF-Mode, die über eine homokline Verzweigung einsetzt, im Bereich $\Gamma/N < 0.96$ noch einen zweiten Typ von VLF-Mode gibt. Diese VLF-Mode setzt über eine Hopf-Verzweigung ein. Abbildung 7.1 (links) zeigt eine Zeitreihe dieses zweiten Typs. Die Zeitreihe wurde in einem 12-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.913$ und $Re = 804.4$ aufgenommen. Die Amplituden der stationären Oszillationen bei dieser Zylinderhöhe sind in Abbildung 7.1 (rechts) dargestellt. Man erkennt deutlich das wurzelförmige Ansteigen der Amplituden vom kri-

tischen Punkt. Im Experiment findet man, daß die Oszillationsfrequenz dieser Mode beim Einsatz einen endlichen Wert besitzt. Daher läßt sich auf einen Einsatz der Oszillation über eine Hopf-Verzweigung schließen. Die Abweichung vom Wurzelgesetz bei höheren Reynoldszahlen ist auf das Auftreten einer Modulation zurückzuführen. Die Frequenz dieser zweiten VLF-Mode liegt typischerweise um eine Größenordnung höher als die der VLF-Mode, welche über eine homokline Verzweigung einsetzt. Die azimutale Wellenzahl ist aber ebenfalls $m = 0$, was durch Messungen mittels zweier LDA an verschiedenen azimutalen Positionen nachgewiesen werden konnte. Diese Messungen wurden ebenfalls im 4-, 8-, 10- und 12-Wirbelzustand durchgeführt. Die Analyse der unterliegenden zeitperiodischen Strömung im Bereich dieser VLF-Mode ergab keine Unterschiede zu der beim anderen Typ der VLF-Mode. In beiden Fällen ist lediglich die Kleine-Jet-Mode präsent. Somit ist diese Oszillation nicht auf eine Änderung in der unterliegenden Strömung zurückzuführen, sondern stellt eine andere Art von Instabilität der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung dar. Dieser Typ wird zur Vereinfachung im folgenden aufgrund seines Einsatzes als VLF_{Hopf} -Mode bezeichnet, während der andere Typ entsprechend $VLF_{homoklin}$ -Mode genannt wird. Für den 12-Wirbelzustand liegt der Bereich, in dem die VLF_{Hopf} -Mode als erste zeitperiodische axialsymmetrische Mode in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung auftritt, bei $\Gamma/N \geq 0.913$. Für $\Gamma/N \leq 0.907$ tritt die $VLF_{homoklin}$ -Mode als erste Instabilität auf. Ein gemeinsamer Instabilitätspunkt konnte nicht identifiziert werden, da für $0.913 > \Gamma/N > 0.907$ die asymmetrische wellenförmige Wirbelströmung bei Erhöhung der Reynoldszahl direkt in einen anderen Strömungszustand übergeht, ohne daß eine zeitperiodische axialsymmetrische Instabilität auftritt.

Einsatz der VLF-Mode über eine homokline Verzweigung

Der Typ der homoklinen Verzweigung, über die die $VLF_{homoklin}$ -Mode einsetzt, wurde von v.Stamm et al. [142] experimentell charakterisiert. Sie fanden, daß die $VLF_{homoklin}$ -Mode mit endlicher Amplitude aber sehr großer Periode, die bis zu einigen Stunden gehen kann, einsetzt. Die Periode skaliert dabei mit $\tau = \tau_0 \ln(\varepsilon)$. Zudem fanden sie keine Hysterese beim Einsatz. Sie klassifizierten den Typ der auftretenden Verzweigung wegen des Skalierungsgesetzes als eine Andronov-Leontovich Verzweigung.

Eine genauere Betrachtung zeigt indes, daß dieser Verzweigungstyp nur unter sehr speziellen Annahmen eine derartige Situation beschreibt. Bei einer homoklinen Verzweigung, die durch das Verschmelzen eines hyperbolischen Sattelpunktes mit einem periodischen Orbit zustande kommt, führt das Aufbrechen des Orbits dazu, daß kein stabiler Attraktor in der Umgebung dieses homoklinen Orbits existiert. Da aber experimentell ein asymmetrischer stabiler Fixpunkt beobachtet wird, müßte ein weiterer stabiler Fixpunkt existieren, der nicht in die homokline Verzweigung involviert ist. Da aber keine Hysterese beobachtet wurde, müßte dieser zweite Fixpunkt gleichzeitig mit der homoklinen Verzweigung entstehen oder verschwinden, was im einfachsten Fall über eine Sattelknoten-Verzweigung mit einem weiteren Fixpunkt geschehen könnte. Da es zwischen diesen Verzweigungen keine Kopplung gibt, erscheint ein solches Verhalten, das in einem physikalischen System in einem großen Bereich der Reynoldszahl Re und normierten Höhe Γ auftritt, höchst unwahrscheinlich. Viel naheliegender ist

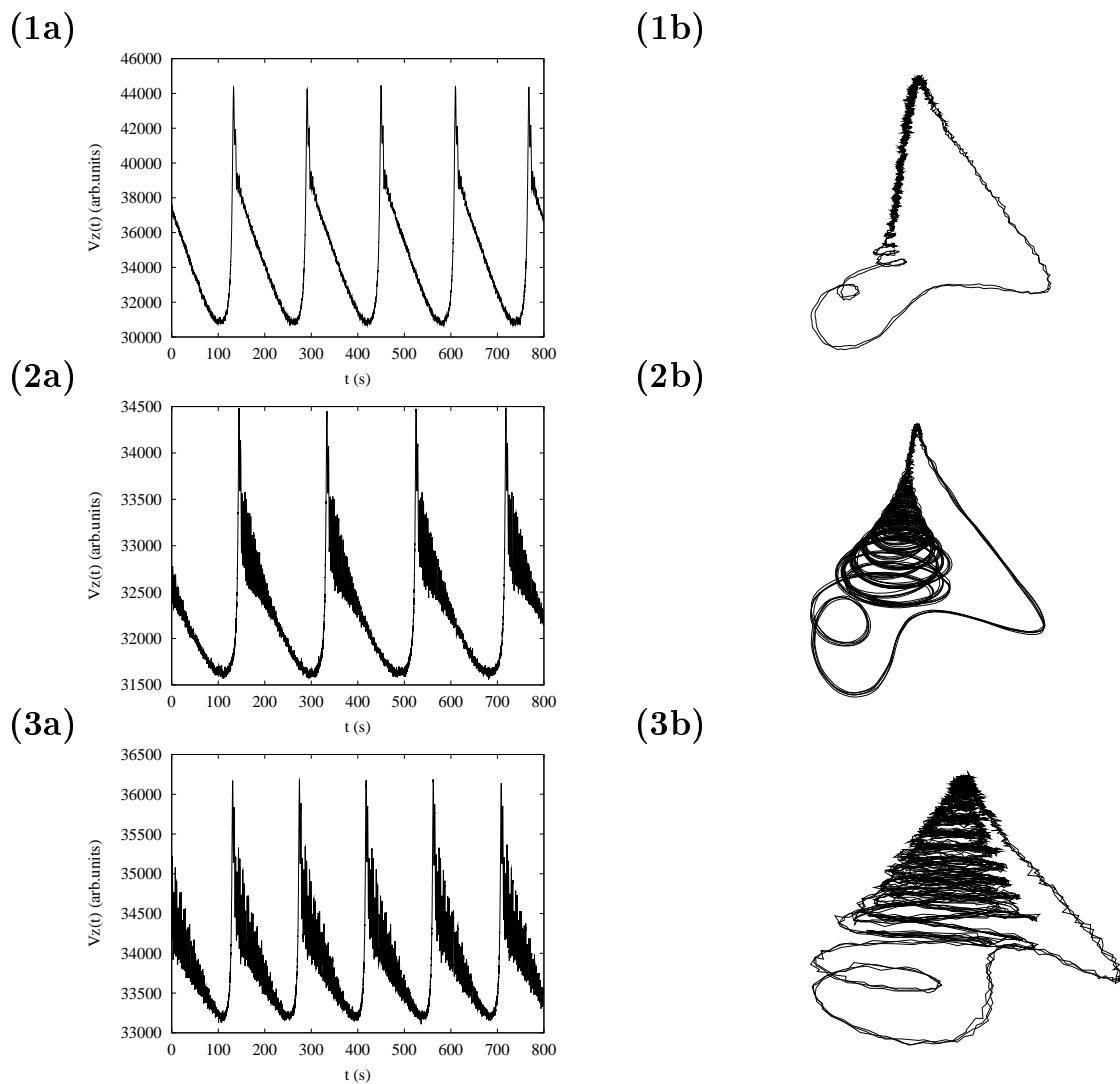


Abb. 7.2: Drei Zeitreihen (a) und rekonstruierte Attraktoren (b) der periodischen $VLF_{homoklin}$ -Mode unmittelbar an den Grenzen zum Bereich der VLF_{Hopf} Mode. Die Messungen wurden in einem 12-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.9$ und $Re = 660$ (1) und bei $\Gamma/N = 0.907$ und $Re = 784$ (2) und $Re = 817$ (3) durchgeführt. Der Attraktor (2b) ist rauschreduziert im Phasenraum [186].

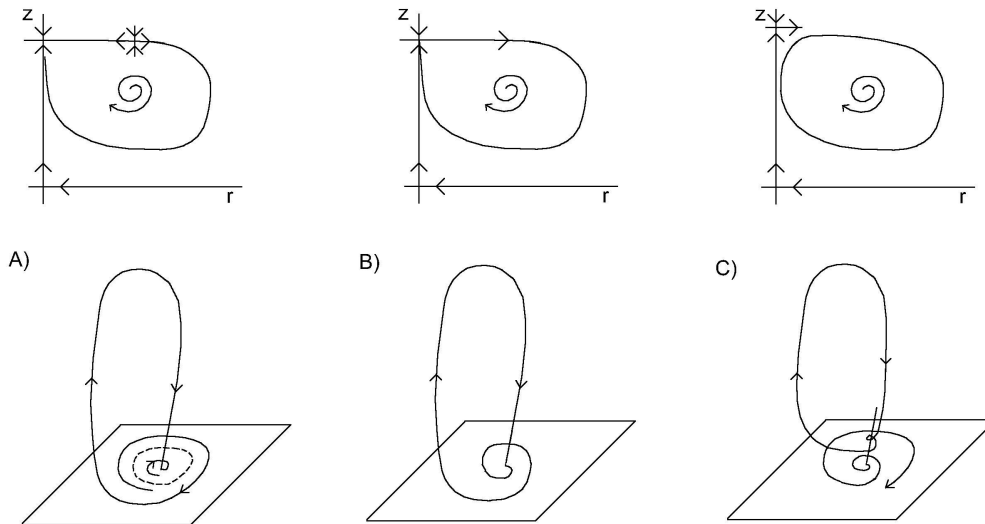


Abb. 7.3: Schematisches Verzweigungsdiagramm der Abspaltung eines Torus von einem Fixpunkt über eine inverse Hopf-Verzweigung: a) stabiler asymmetrischer Fixpunkt, b) Verzweigungspunkt, c) instabiler asymmetrischer Fixpunkt und stabiler Torus

die Annahme, daß der periodische Orbit sich direkt über eine homokline Verzweigung vom stabilen Fixpunkt ablöst. In diesem Fall würde keine Hysterese auftreten, wie es im Experiment beobachtet wird. Allerdings stellt im planaren Fall das Auftreten der Sattelnoden-Verzweigung bei gleichzeitiger Bildung eines homoklinen Orbits ebenfalls keine hinreichende Beschreibung der experimentellen Befunde dar. Eine solche SNIPER-Verzweigung besitzt das Skalierungsgesetz $\tau = \tau_0 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}$ (vgl. Kapitel 5). Der Verzweigungstyp der zum Auftreten der $VLF_{homoklin}$ -Mode führt, läßt sich somit nicht durch eine planare homokline Verzweigung adäquat beschreiben.

Eine hinreichende Beschreibung muß sowohl das Skalierungsverhalten als auch das Fehlen einer Hysterese beinhalten. Die Tatsache, daß die Periode der $VLF_{homoklin}$ -Mode mit $\tau = \tau_0 \ln(\varepsilon)$ skaliert, bedeutet, daß der periodische Orbit der $VLF_{homoklin}$ -Mode in die Nähe eines Sattelpunktes kommen muß. Die logarithmische Skalierung in der Nähe der homoklinen Verzweigung ist Ausdruck der linearen Dynamik des Sattelpunktes. Da, wie oben gesehen, das beschreibende System nicht zweidimensional sein kann, ist es naheliegend, von einem dreidimensionalen System auszugehen. Ein stabiler Fixpunkt, wie zum Beispiel ein asymmetrischer Ast, besitzt dann drei stabile Mannigfaltigkeiten. Da der Fixpunkt bei der homoklinen Verzweigung nicht verschwindet, sondern von einem stabilen Fixpunkt in einen Sattelpunkt übergeht, tritt eine lokale Verzweigung auf. Aufgrund der Sattelpunkteigenschaft muß noch eine stabile Richtung vorhanden sein, so daß diese lokale Verzweigung planar ist. Daher kann es sich nur um eine inverse Hopf- oder eine inverse Gabelverzweigung handeln. Letztere ist aber sehr unwahrscheinlich, da keine zusätzliche Symmetrie im System vorhanden ist, die das Auftreten einer weiteren Gabelverzweigung nach der ersten Symmetriebrechung rechtfertigt.

Abbildung 7.2 zeigt drei typische Zeitreihen der periodischen $VLF_{homoklin}$ -Mode.

Die Zeitreihen (2) und (3) wurden in einem 12-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.907$ aufgenommen. Man erkennt deutlich, daß die Attraktoren die Struktur eines Torus besitzen. Das liegt daran, daß diese Zustände in unmittelbarer Nähe zur oszillatorischen Instabilität der VLF_{Hopf} -Mode bei $\Gamma/N = 0.913$ auftreten. Da die Strömung in diesem Bereich lokal instabil gegen die oszillatorische VLF_{Hopf} -Mode wird, kann man folgern, daß auch die $VLF_{homoklin}$ -Mode die Folge einer lokalen Instabilität gegenüber der oszillatorischen Mode ist. Ob in der Strömung eine Hopf-Verzweigung, wie bei der VLF_{Hopf} -Mode, oder eine homokline Verzweigung, wie bei der $VLF_{homoklin}$ -Mode, auftritt, ist durch die nichtlinearen Wechselwirkungen bestimmt.

Bei der $VLF_{homoklin}$ -Mode kommt es nun nicht zu einer Stabilisierung eines periodischen Orbits, sondern die Trajektorie entfernt sich über die instabile Mannigfaltigkeit des Fixpunkts und wird über die verbleibende stabile wieder in die Umgebung der Fixpunkts reinjiziert. Auf diese Weise bildet sich ein homokliner Orbit. Die lokale Instabilität des Fixpunkts läßt sich aus obigen Betrachtungen als inverse Hopf-Verzweigung verstehen. Daher bildet sich ein homokliner Orbit vom Shil'nikov-Typ am Instabilitätspunkt der inversen Hopf-Verzweigung. Eine solche Verzweigung läßt sich im Rahmen einer Kopplung von stationärer und Hopf-Verzweigung verstehen, wie sie auch im Experiment auftritt. Krauskopf und Rousseau [167] haben diese Verzweigung im Rahmen einer Kodimension-3-Entfaltung von planaren Vektorfeldern gefunden. Abbildung 7.3 zeigt schematisch die mögliche Verzweigung beim Einsatz der $VLF_{homoklin}$ -Mode. Die oberen Graphiken von Abbildung 7.3 zeigen die übliche planare Darstellung der radialen (r) und der axialen Komponente (z), die auch bei der Entfaltung von gekoppelten oszillatorischen und stationären Instabilitäten benutzt wird [26, 31]. Die azimutale Komponente der Hopf-Verzweigung ist weggelassen worden. Die Darstellungen unterhalb der planaren Vektorfelder zeigt schematisch den dreidimensionalen Phasenraum. In Abbildung 7.3 (A) existieren ein stabiler Fixpunkt auf der z -Achse und zwei instabile periodische Orbits. Bei (B) tritt eine inverse Hopf-Verzweigung auf und es bildet sich ein homokliner Orbit vom Shil'nikov-Typ. Bei (C) hat sich ein periodischer Orbit vom Sattelpunkt abgespalten. In der Normalformbeschreibung existieren ein instabiler Fixpunkt und ein stabiler Torus. Es handelt sich beim Einsatz der $VLF_{homoklin}$ -Mode eigentlich um die Abspaltung eines Torus von einem stabilen Fixpunkt über eine inverse Hopf-Verzweigung.

Die Skalierungseigenschaften ergeben sich bei der beschriebenen Verzweigung aus der Analyse von Glendinnig und Sparrow [161], da es sich um einen homoklinen Orbit vom Shil'nikov-Typ handelt. Der Unterschied zu einer „einfachen“ Shil'nikov-Verzweigung liegt im überkritischen Bereich. Während im „einfachen“ Fall der homokline Orbit aufbricht, bildet sich bei der $VLF_{homoklin}$ -Mode ein stabiler Fixpunkt über eine inverse Hopf-Verzweigung.

Die bisherigen Analysen der Verzweigungsstruktur der axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung zeigen, daß sich die stationären und zeitperiodischen Instabilitäten der Zustände mit zwölf und mehr Wirbeln konsistent durch die Wechselwirkung einer symmetriebrechenden und einer zeitperiodischen Mode beschreiben lassen. Im folgenden werden die stationären und zeitperiodischen Verzweigungen in Zuständen mit zehn und weniger Wirbeln analysiert.

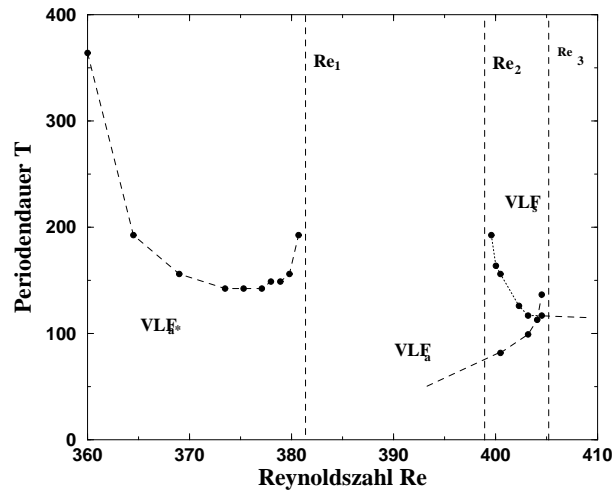


Abb. 7.4: Periode der verschiedenen VLF-Oszillationen bei $\Gamma/N = 0.8$, aufgenommen im 10-Wirbelzustand. Der kontinuierliche Ast ist nur im Koexistenzbereich dargestellt.

7.2 Stabilitätsverhalten des 10-Wirbelzustandes

Bei der Untersuchung des Einsatzes der $VLF_{homoklin}$ -Mode hatten v.Stamm et al. [142] festgestellt, daß diese auch im 10-Wirbelzustand über eine homokline Verzweigung einsetzt. Sie hatten dabei Messungen bei $\Gamma/N = 0.8$ und $\Gamma/N = 0.84$ durchgeführt. Messungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, haben ergeben, daß diese Mode in einem Bereich von $0.8 \leq \Gamma/N \leq 0.88$ auftritt. Kleinere Zylinderhöhen wurden nicht untersucht. Für $\Gamma/N \geq 0.888$ konnte der Einsatz der VLF_{Hopf} -Mode als erste axialsymmetrische zeitperiodische Instabilität der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung beobachtet werden. Diese Untersuchungen ergaben, daß sich der Einsatz der VLF-Mode im 10-Wirbelzustand qualitativ genauso verhält wie im 12-Wirbelzustand.

In den Untersuchungen von v.Stamm et al. [142] zeigte sich indes, daß die beiden asymmetrischen zeitperiodischen Zustände bei $\Gamma/N = 0.8$ bei Erhöhung der Reynoldszahl in einen symmetrischen oszillatorischen Zustand übergehen. In Zuständen mit mehr als zehn Wirbeln konnte ein solches Phänomen weder von v.Stamm et al. [142] noch in den Untersuchungen dieser Arbeit beobachtet werden. Daher stellt der 10-Wirbelzustand eine Grenze dar, an der es zu Wechselwirkungen zwischen stationären und oszillatorischen Moden kommt. Der Typ dieser Verzweigung, der zum Auftreten einer symmetrischen Oszillation führt, wurde von v.Stamm et al. [142] nicht untersucht.

Um die Wechselwirkungen zwischen den asymmetrischen Ästen zu analysieren, wurde in dieser Arbeit eine genaue Analyse der Verzweigungstypen durchgeführt. Abbildung 7.4 zeigt die Frequenzen der im Übergangsbereich von asymmetrischer und symmetrischer Strömung auftretenden periodischen Zustände. Dabei bezeichnet VLF_A den asymmetrischen $VLF_{homoklin}$ -Zustand, der sich bei quasistatischer Erhöhung der Reynoldszahl von der stationären Taylor-Wirbelströmung aus ergibt. VLF_{A^*} bezeichnet den zu VLF_A spiegelsymmetrischen Zustand. Dieser ist aufgrund unvermeidlicher experimenteller Ungenauigkeiten entkoppelt. Der symmetrische periodische Zustand wird

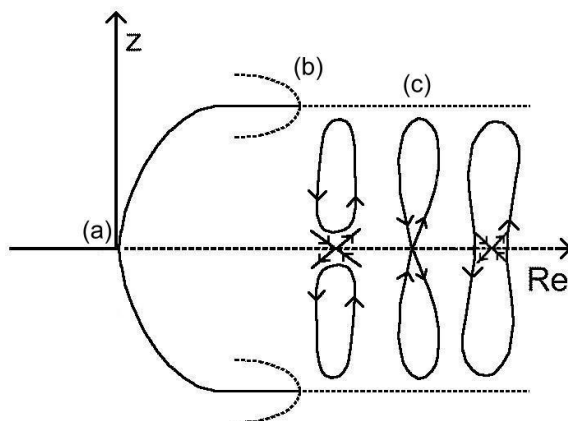


Abb. 7.5: Schematisches Verzweigungsdiagramm des 10-Wirbelzustandes bei $\Gamma/N = 0.8$ im symmetrischen Fall: (a) Symmetriebrechung, (b) Einsatz der VLF-Mode über inverse Hopf-Verzweigung des asymmetrischen Fixpunkts, (c) symmetrische homokline Verzweigung

mit VLF_S bezeichnet. Man erkennt, daß der primäre asymmetrische Zustand VLF_A eine signifikante Zunahme der Oszillationsfrequenz bis $Re = 404.9$ erfährt. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl führt zum Übergang in der VLF_S -Zustand. Bei VLF_A ist nur der Anstieg im relevanten Reynoldszahlbereich dargestellt. Der VLF_S -Zustand erhöht bei Erniedrigung bis $Re = 399.9$ seine Oszillationsfrequenz und geht bei weiterer Erniedrigung wieder in den asymmetrischen VLF_A -Zustand über. Es ergibt sich daher ein Koexistenzbereich von $\Delta Re \approx 5$, was experimentell als signifikant angesehen werden muß. Die entkoppelte VLF_{A*} geht schon bei $Re = 381$ in den primären VLF_A -Zustand über. Dabei kommt es auch zu einer Erhöhung der Oszillationsfrequenz. Zu sehen ist zusätzlich die Annäherung der VLF_{A*} -Mode an die untere Stabilitätsgrenze, was zu einer deutlichen Erhöhung der Oszillationsfrequenz führt.

Sowohl das Stabilitätsverhalten als auch das Verhalten der Oszillationsfrequenzen der VLF-Moden entspricht qualitativ dem, was Glendinning und Mullin [158] bei einer symmetrischen homoklinen Verzweigung gefunden haben, die einer Störung ausgesetzt ist. Charakteristisch für diese Verzweigung ist die Bildung eines Koexistenzbereichs von asymmetrischem und symmetrischem periodischen Orbit. Daher läßt sich aus den Beobachtungen der VLF-Moden im 10-Wirbelzustand schließen, daß die asymmetrischen periodischen Orbits der $VLF_{homoklin}$ -Moden über eine homokline Verzweigung mit dem instabilen Fixpunkt zu einem symmetrischen periodischen Orbit verschmelzen. Diese sogenannte „Gluing“-Verzweigung ist durch experimentelle Störungen allerdings entkoppelt. Ein schematisches Verzweigungsdiagramm des 10-Wirbelzustandes bei $\Gamma/N = 0.8$ ist in Abbildung 7.5 zu sehen.

Zeitreihen der drei unterschiedlichen oszillatorischen Zustände sind in Abbildung 7.6 zu sehen. Dabei sind jeweils die Zeitreihen dargestellt, die unmittelbar an den Verzweigungspunkten auftreten. Untersuchungen haben gezeigt, daß bei größeren normierten Höhen die Strömung zeitlich chaotisch wird, bevor es zu einem Verschmelzen der asymmetrischen Äste kommt. Dieses wird in Kapitel 8.1 dargestellt.

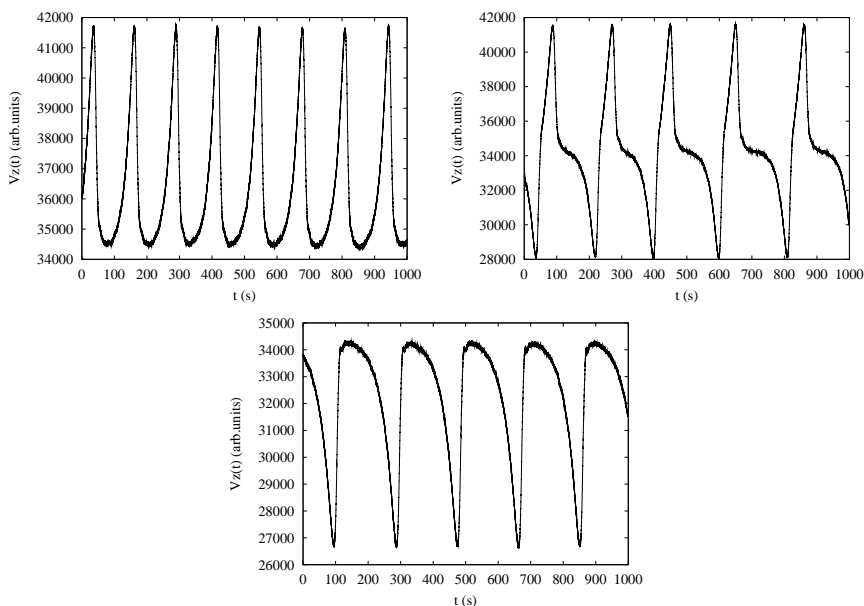


Abb. 7.6: Zeitreihen der periodischen VLF-Oszillationen bei $\Gamma/N = 0.8$ aufgenommen im 10-Wirbelzustand. Oben links: VLF_a -Mode-Oszillation bei $Re = 404.9$, oben rechts: Symmetrische VLF_s -Mode-Oszillation bei $Re = 399.9$, unten: VLF_{a^*} -Mode-Oszillation bei $Re = 381.0$.

7.3 Verzweigungsstruktur des 8-Wirbelzustandes

Die experimentelle Untersuchung der axialsymmetrischen Instabilitäten des zeitabhängigen 8-Wirbelzustandes offenbart eine deutlich komplexere Verzweigungsstruktur als die, die in Strömungszuständen mit zehn und mehr Wirbeln beobachtet wird. Bei der Untersuchung des 10-Wirbelzustandes konnte zwar eine Verschmelzung von periodischen Orbits, die auf den beiden asymmetrischen Ästen auftritt, zu einem symmetrischen beobachtet werden, aber der Einsatz dieser oszillatorischen Moden ist von der Wechselwirkung der asymmetrischen Äste nicht beeinflusst.

Im 8-Wirbelzustand findet man Wechselwirkungen zwischen den beiden verschiedenen Typen der VLF-Mode und der Symmetriebrechung. Im folgenden werden die drei qualitativ unterschiedlichen Verzweigungsdiagramme dargestellt, die in Abhängigkeit von der normierten Höhe Γ/N beobachtet werden konnten.

7.3.1 Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.77$

Zunächst wurde das Verhalten der Symmetriebrechung und der $VLF_{homoklin}$ -Mode in einem Bereich untersucht, in dem die VLF_{Hopf} -Mode nicht auftritt. Als Abfolge von Zuständen ergibt sich bei der normierten Höhe $\Gamma/N = 0.77$ nach Einsatz der Kleinen-Jet-Mode ein „kontinuierlicher“ Übergang von dem symmetrischen Zustand in einen asymmetrischen. Dieser asymmetrische Zustand wird bei $Re = 383.5$ über eine homokline Verzweigung instabil. Dabei tritt eine axialsymmetrische VLF-Mode auf. Im Gegensatz zum 10-Wirbelzustand verbindet diese Oszillation schon beim Einsatz beide asymmetrischen Bereiche. Da es sich somit um einen symmetrischen periodischen

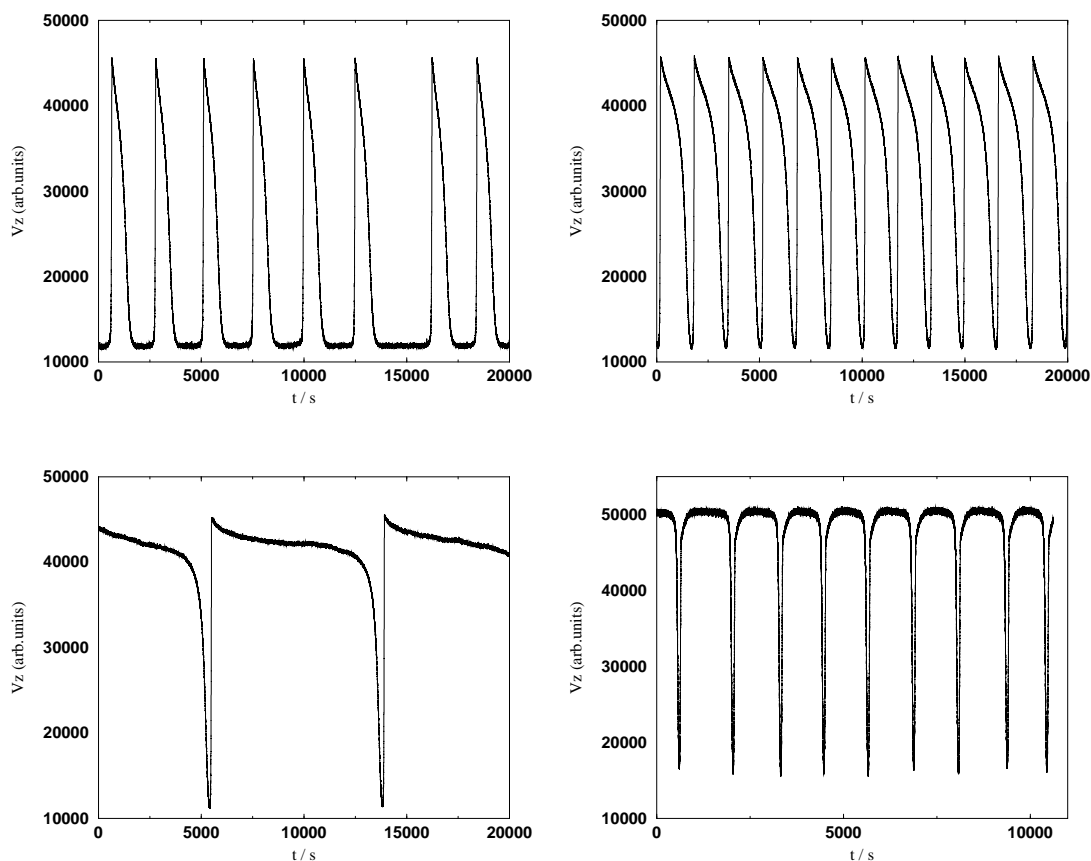


Abb. 7.7: Unterschiedliches oscillatorisches Verhalten des 8-Wirbelzustandes bei $\Gamma/N = 0.77$, aufgenommen für verschiedene Reynoldszahlen (von links oben nach unten: $Re = 383.5$, $Re = 385.3$, $Re = 386.3$, $Re = 390.4$, $Re = 391.1$)

Zustand handelt, wird diese Mode auch als VLF_{S1} -Mode bezeichnet. Zeitreihen dieser VLF_{S1} sind in Abbildung 7.7 (links und rechts oben und unten links) dargestellt. Die Zeitreihe in Abbildung 7.7 (oben links) ist unmittelbar nach dem Einsatz der Mode bei $Re = 383.5$ aufgenommen worden. Man erkennt eine leichte Irregularität in den Abständen der Oszillation. Eine sehr geringe Erhöhung der Reynoldszahl führt indes schon zu einem exakt periodischen Verhalten der Oszillation, so daß von einem dynamischen Ursprung dieser Irregularität nicht auszugehen ist. Zudem wird ein solches Verhalten häufig in der unmittelbaren Nähe eines homoklinen Orbits in experimentellen Systemen beobachtet [123]. Die asymmetrische Form der Oszillation ist auf eine experimentelle Asymmetrie zurückzuführen, die auch für die Entkopplung der symmetriebrechenden Verzweigung verantwortlich ist. Die Zeitreihe, die in Abbildung 7.7 (oben rechts) zu sehen ist, ist bei $Re = 385.3$ aufgenommen worden und zeigt eine typische VLF_{S1} -Mode-Oszillation. Eine leichte Erhöhung der Reynoldszahl führt erneut zu einem deutlichen Anstieg der Periode und schließlich zu einer Restabilisierung eines asymmetrischen Fixpunkts bei $Re = 386.4$ über eine rückwärtsgerichtete homo-

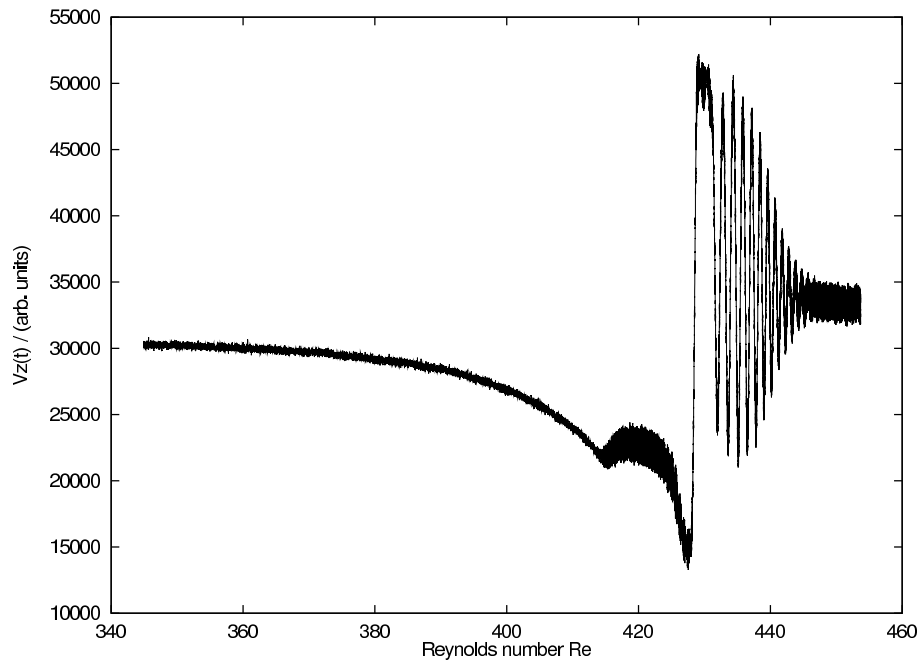


Abb. 7.8: Verzweigungsdiagramm der axialsymmetrischen Moden in zeitperiodische 8-Wirbelzustand aufgenommen bei $\Gamma/N = 0.793$.

kline Verzweigung. Abbildung 7.7 (links unten) zeigt eine VLF_{S1} -Mode Oszillation bei $Re = 386.3$. Die Periode der VLF_{S1} -Mode liegt in diesem Bereich bei ca. zwei Stunden, so daß die VLF_{S1} -Mode um vier Größenordnungen langsamer oszilliert als die unterliegende Kleine-Jet-Mode, deren Frequenz im Bereich von $2Hz$ liegt. Ein Skalierungsverhalten der beiden homoklinen Verzweigungen konnte nicht sinnvoll bestimmt werden, da die oszillatorischen Zustände nur in einem sehr kleinen Reynoldszahlbereich stabil sind und jeweils beide Verzweigungen die Oszillationsfrequenz beeinflussen.

Der restabilisierte asymmetrische Fixpunkt, der bei $Re = 386.4$ auftritt, liegt auf der dem primären Fixpunkt entgegengesetzten Seite des symmetrischen Fixpunktes. Der primäre Fixpunkt geht kontinuierlich aus dem symmetrischen hervor. Es muß festgehalten werden, daß unterhalb von $Re = 386.4$ kein asymmetrischer Fixpunkt, der entgegengesetzt zum primären liegt, gefunden werden konnte. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl vom zweiten asymmetrischen Fixpunkt ausgehend führt erneut zum Einsatz einer symmetrischen VLF-Mode Oszillation. Diese setzt wiederum über eine homokline Verzweigung bei $Re = 391.1$ ein und wird als VLF_{S2} -Mode bezeichnet. Abbildung 7.7 (unten, rechts) zeigt eine Zeitreihe dieser VLF_{S2} bei $Re = 391.1$. Eine weitere Erhöhung ändert das Strömungsverhalten qualitativ nicht, nur eine Erhöhung der Oszillationsfrequenz ist festzustellen. Der doppelt-periodische Zustand aus Kleiner-Jet-Mode und VLF_{S2} -Mode restabilisiert sich bei höherer Reynoldszahl in einem symmetrischen Zustand der Großen-Jet-Mode bei $Re = 402.0$. Ein Vergleich der homoklinen Verzweigungen zeigt, daß die Verzweigungen in Vorwärtsrichtung, die zum Auftreten einer Oszillation bei Erhöhung der Reynoldszahl führen, sich anders verhalten, als die rückwärtsgerichteten, die eine Restabilisierung eines asymmetrischen Fixpunkts verursachen. Während die vorwärtsgerichteten zwar eine signifikante Erhöhung der Oszilla-

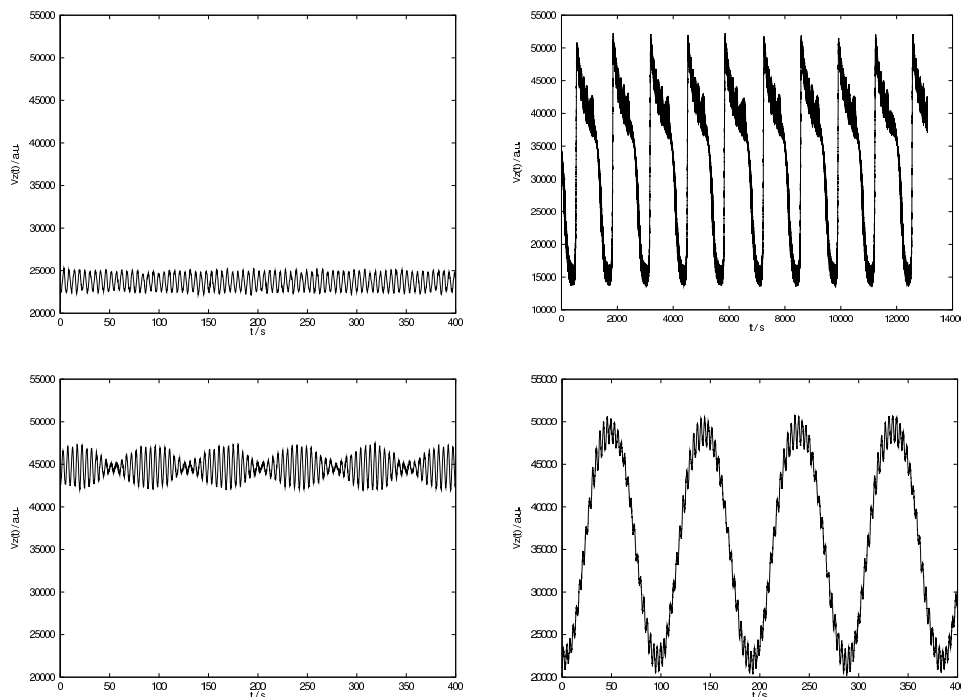


Abb. 7.9: Vier Typen von oszillatorischem Verhalten des 8-Wirbelzustandes bei $\Gamma/N = 0.793$ (von links oben nach rechts unten: $Re = 420.8$, $Re = 428.2$, $Re = 429.8$ und $Re = 437.6$). Die asymmetrischen Zustände sind oszillatorische, die symmetrischen doppelt-oszillatorische (gleicher Maßstab).

tionsfrequenz mit sich bringen, so daß man im Rahmen der Meßgenauigkeit von einer homoklinen Verzweigung sprechen kann, ist im Vergleich mit der rückwärtsgerichteten der Absolutwert der Frequenz deutlich kleiner. Zudem konnte bei den rückwärtsgerichteten Verzweigungen keine Hysterese gefunden werden, während man bei den vorwärtsgerichteten einen sehr kleinen Koexistenzbereich von $\Delta Re \approx 0.3$ von stationärem und zeitperiodischem Verhalten findet. Ob diese Beobachtung experimentell oder dynamisch bedingt ist, läßt sich nicht klären. Allerdings zeigen diese Beobachtungen, daß es zwei Typen von homoklinen Verzweigungen in der Strömung gibt, die auf unterschiedliche Entstehungsmechanismen hindeuten.

7.3.2 Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.793$

Bei einer leichten Vergrößerung der Zylinderhöhe ändert sich das Verzweigungsdiagramm der axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung. Abbildung 7.8 zeigt eine Aufnahme eines Verzweigungsdiagramms bei $\Gamma/N = 0.793$. Dabei wurde, wie bei allen Zeitreihen der axialsymmetrischen VLF-Mode Oszillationen, die „schnelle“ Kleine-Jet-Mode mittels Tiefpaß herausgefiltert. Dieses Diagramm erhält man experimentell durch Messung der Strömungsgeschwindigkeit in der Zylindermittte bei quasi-statischer Erhöhung der Reynoldszahl mit $\Delta Re/\Delta t = 2 * 10^{-3} s^{-1}$. Man erkennt, daß die Strömung in der gleichen Weise wie bei $\Gamma/N = 0.77$ kontinuierlich asymmetrisch wird, es dann aber zum Einsatz der oszillatorischen VLF_{Hopf} -

Mode auf dem asymmetrischen Ast kommt. Eine Zeitreihe dieses Zustandes ist in Abbildung 7.9 (oben links) zu sehen. Dieser Zustand wurde bei $Re = 420.8$ aufgenommen. Das Verzweigungsdiagramm in Abbildung 7.8 zeigt, daß die Abfolge der Zustände doch ansonsten qualitativ gleich zu der bei $\Gamma/N = 0.77$ ist. Allerdings gehen bei $\Gamma/N = 0.793$ nicht mehr stationäre asymmetrische Zustände in periodische symmetrische Oszillationen über, sondern periodische asymmetrische Zustände in doppelt-periodische symmetrische Oszillationen. Es handelt sich daher um homokline Verzweigungen zwischen periodischen Orbits. Der zuerst auftretende symmetrische doppelt-periodische Zustand wird als VLF_{S1*} und der zweite entsprechend als VLF_{S2*} bezeichnet. Abbildung 7.9 zeigt die vier verschiedenen oszillatorischen Zustände bei $\Gamma/N = 0.793$ deren Abfolge entsprechend wie bei $\Gamma/N = 0.77$ bei Erhöhung der Reynoldszahl von einem asymmetrischen in den oszillatorischen Zustand VLF_{S1*} (Abbildung 7.9 oben, rechts) übergeht, um sich dann wiederum in einem anderen asymmetrischen Zustand zu restabilisieren. Dieser geht dann in den symmetrischen oszillatorischen Zustand VLF_{S2*} über (Abbildung 7.9 unten, rechts). Im zweiten asymmetrischen Bereich tritt eine Schwebung bei der VLF_{Hopf} -Mode auf.

7.3.3 Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.82$

Eine weitere Vergrößerung der normierten Höhe Γ/N führt nochmals zu einer qualitativen Änderung des Stabilitätsverhaltens der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung. Abbildung 7.10 zeigt fünf verschiedene Zeitreihen, die das Stabilitätsverhalten bei $\Gamma/N = 0.82$ charakterisieren. Zunächst fällt auf, daß die oszillatorische VLF_{Hopf} schon im symmetrischen Zustand auftritt. Der Wechsel zwischen symmetriebrechender Verzweigung und Hopf-Verzweigung vollzieht sich im Bereich von $0.8 < \Gamma/N < 0.82$. Eine genauere Bestimmung ist nicht möglich, da es sich wegen der Störung bei der Symmetriebrechung nicht um einen kritischen Punkt handelt, sondern um einen kontinuierlichen Prozeß. Nach Einsatz der VLF_{Hopf} -Mode wird die Strömung asymmetrisch, und es setzt wieder eine Schwebung ein. Anders als in Zuständen im Bereich $\Gamma/N < 0.82$ geht dieser asymmetrische Zustand nicht über eine homokline Verzweigung in einen symmetrischen oszillatorischen Zustand über, sondern verzweigt direkt in den entkoppelten asymmetrischen Zustand.

Dieser ist ebenfalls periodisch, wobei hier eine Modulation auftritt. Bei $\Gamma/N = 0.82$ findet man eine kleine Hysterese zwischen den beiden asymmetrischen Ästen. Der bei kleineren Zylinderhöhen auftretende oszillatorische Zwischenbereich VLF_{S1} ist verschwunden. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl führt dann allerdings, wie bei kleineren Zylinderhöhen, zum Einsatz einer symmetrischen Oszillation. Dabei weist diese Oszillation schon deutliche zeitliche Irregularitäten auf. Dieses Verhalten wird in Kapitel 8.1.2 untersucht.

Eine weitere Vergrößerung der Zylinderhöhe führt zu einer Verschiebung der Symmetriebrechung zu höheren Reynoldszahlen. Auch bei $\Gamma/N = 0.84$ wird die periodische VLF_{Hopf} -Mode nach Einsatz einer Modulation bei höheren Reynoldszahlen auf dem symmetrischen Ast chaotisch. Diese Zustände wurden daher in dieser Arbeit nicht weitergehend untersucht, da hier die Wechselwirkung von Symmetriebrechung und oszillatorischem Verhalten im Vordergrund steht.

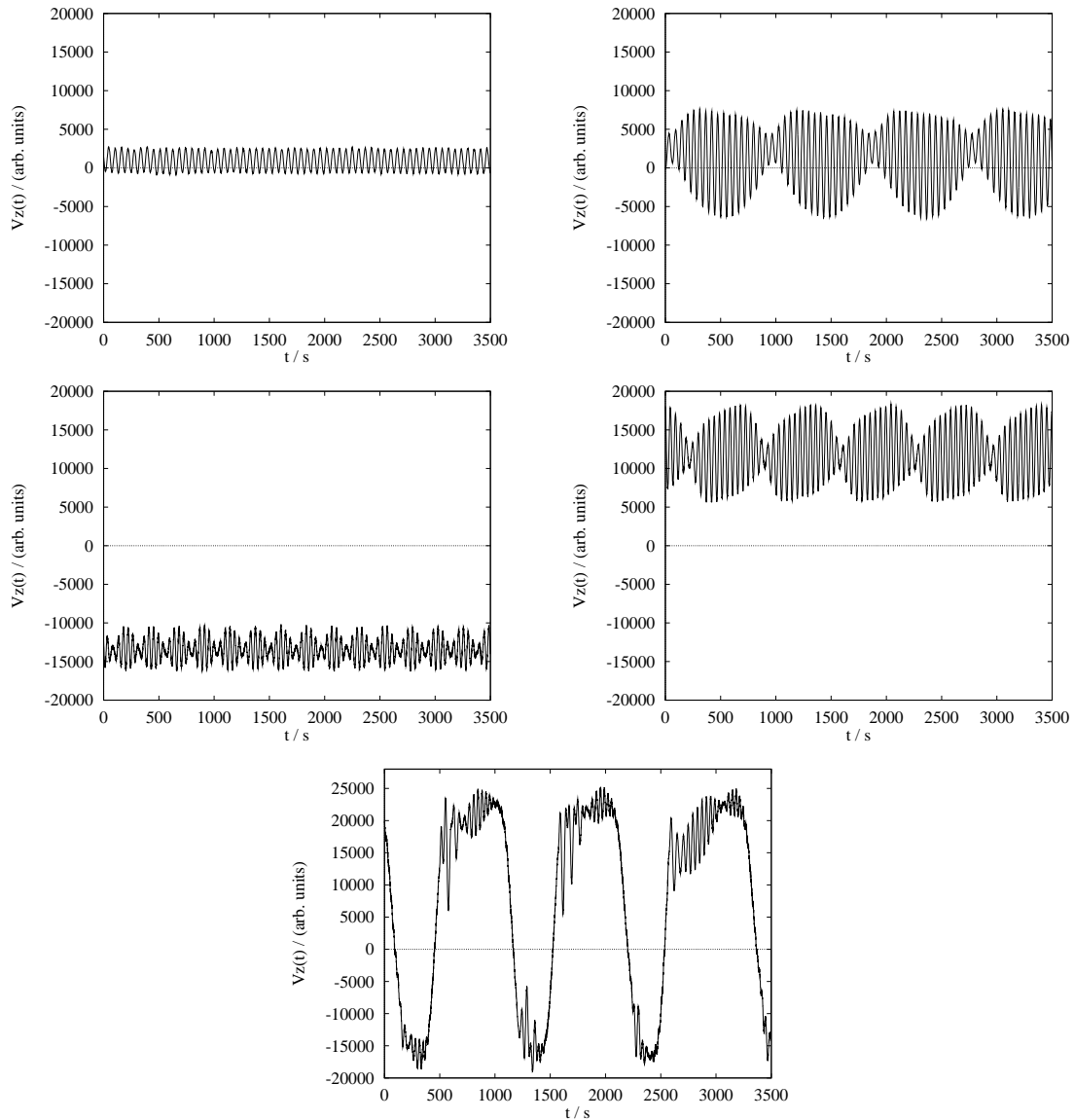


Abb. 7.10: Fünf verschiedene Typen oszillatorischen Verhaltens des 8-Wirbelzustandes aufgenommen bei $\Gamma/N = 0.82$ (von links oben nach unten: $Re = 451.6$, $Re = 462.0$, $Re = 487.6$, $Re = 486.7$, $Re = 511.5$). Die Linie bei Null zeigt in den Zeitreihen den symmetrischen Zustand an.

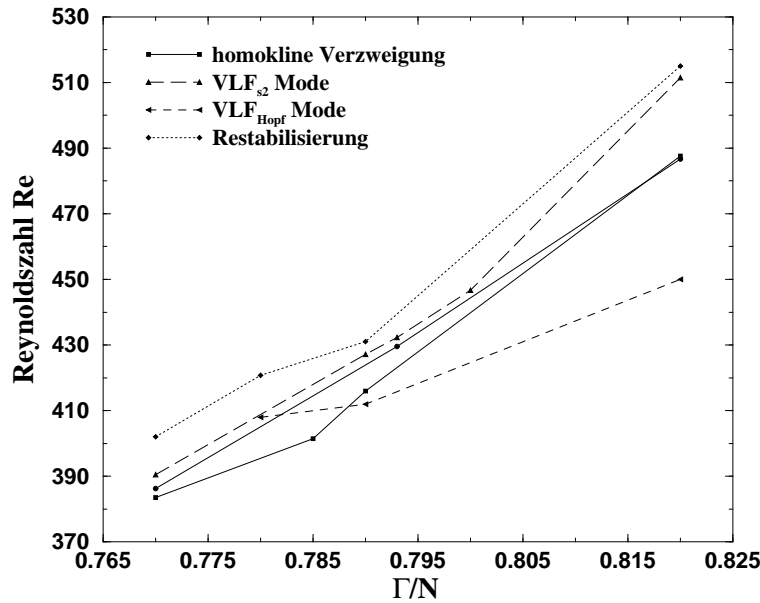


Abb. 7.11: Diagramm der axialsymmetrischen Instabilitäten des wellenförmigen 8-Wirbelzustandes. Die beiden durchgezogenen Linien markieren die homoklinen Verzweigungen des VLF_{S1} - beziehungsweise VLF_{S1*} -Zustandes. Der Kreuzungspunkt dieser Linien kennzeichnet das Verschwinden dieses Bereichs und das Auftreten von Hysterese.

7.3.4 Stabilitätsdiagramm der axialsymmetrischen Moden

Abbildung 7.11 zeigt eine Zusammenfassung über das Stabilitätsverhalten der axialsymmetrischen Instabilitäten im Bereich der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung des 8-Wirbelzustandes. Der Einsatz der Symmetriebrechung ist nicht mit eingezeichnet, da, wie oben erläutert, die Instabilität durch Störungen im Experiment zerstört wird. Bei kleinem Entkopplungsgrad gibt man üblicherweise den kritischen Punkt der Sattelknoten-Verzweigung der entkoppelten Lösung an, dessen Bestimmung hier dadurch verhindert wird, daß Wechselwirkungen zwischen symmetriebrechendem und oszillatorischem Verhalten auftreten. Innerhalb der durchgezogenen Linien befindet sich der symmetrische oszillatorische Zwischenbereich VLF_{S1} beziehungsweise VLF_{S1*} , der die beiden asymmetrischen Zustände trennt. Die Linien geben daher gleichzeitig die unteren und die oberen Verzweigungen der stationären asymmetrischen Zustände an. Der Kreuzungspunkt der Linien markiert das Verschwinden des oszillatorischen Bereichs und den Beginn einer Hysterese zwischen beiden asymmetrischen Zuständen zu größeren Zylinderhöhen, wie sie bei $\Gamma/N = 0.82$ auftritt. Der Kreuzungspunkt wurde nicht explizit bestimmt. Ferner zeigt Abbildung 7.11, die Einsatzlinie der VLF_{Hopf} -Mode und des VLF_{S2} - beziehungsweise des VLF_{S2*} -Zustandes. Die Restabilisierung des symmetrischen Zustandes der Großen-Jet-Mode ist ebenfalls eingezeichnet. Man erkennt, daß der Einsatz der VLF_{Hopf} -Mode das Verhalten der asymmetrischen Äste und den Einsatz der homoklinen Verzweigungen qualitativ nicht beeinflußt.

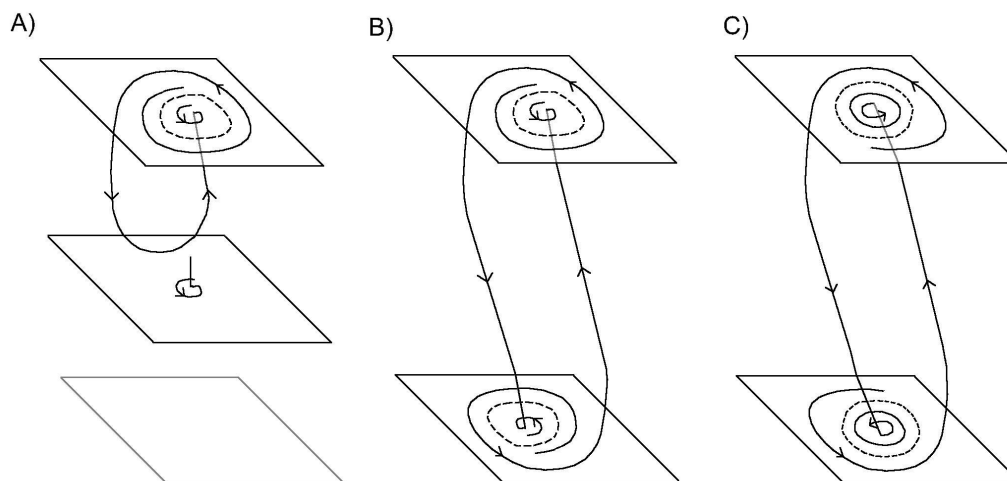


Abb. 7.12: Schematische Darstellung des Phasenraums in der Umgebung des Einsatzes der VLF_{homoklin} -Mode. (A) Bildung eines homoklinen Orbits über inverse Hopf-Verzweigung, (B) Bildung eines heteroklinen Orbits über inverse Hopf-Verzweigung, (C) Bildung eines heteroklinen Orbits über Sattelknoten-Verzweigung von periodischen Orbits

7.3.5 Verzweigungsanalyse des 8-Wirbelzustandes

Aus den experimentellen Untersuchungen der Stabilität des zeitabhängigen 8-Wirbelzustandes wird deutlich, daß sich das Verhalten qualitativ von dem in Zuständen mit zehn oder mehr Wirbeln unterscheidet. Es tritt zwar im zeitabhängigen 8-Wirbelzustand ebenfalls eine Symmetriebrechung auf, und auch der Einsatz von oszillatorischem Verhalten über homokline Verzweigungen von asymmetrischen Fixpunkten läßt sich ermitteln. Im Gegensatz zum Verhalten von Zuständen mit zehn oder mehr Wirbeln können aber für verschiedene normierte Höhen mehrere homokline Verzweigungspunkte existieren, die zu einem Wechsel von stationärem und oszillatorischem Verhalten führen. Im 8-Wirbelzustand treten aber, anders als bei Zuständen größerer Wirbelzahl, keine asymmetrischen Oszillationen auf, die auf jeweils eine Seite des symmetrischen Fixpunkts beschränkt sind, sondern nur große symmetrische Oszillationen, die den instabilen symmetrischen Fixpunkt einschließen. Das bedeutet, daß es beim Einsatz der VLF-Mode, die durch eine inverse Hopf-Verzweigung auftritt, nicht zu einer Reinjektion in die stabile Mannigfaltigkeit desselben Fixpunkts kommt, sondern zu einer Reinjektion in die stabile Mannigfaltigkeit des instabilen Fixpunkts auf der spiegelsymmetrischen Seite. Treten keine Störungen im System auf, welche die Z_2 -Symmetrie des Systems brechen, so bildet sich am Einsatzpunkt der VLF-Mode ein heterokliner Orbit zwischen den beiden asymmetrischen Sattelpunkten. Abbildung 7.12 (A) zeigt schematisch die Phasenraumstruktur unmittelbar vor dem Einsatz der VLF-Mode in Zuständen mit mehr als acht Wirbeln. Diese Darstellung korrespondiert zu Abbildung 7.3 (A). Die Ebenen in Abbildung 7.12 (A) sollen die Trennung der asymmetrischen Bereiche beim Einsetzen der VLF-Mode andeuten. Die Phasenraumstruktur des 8-Wirbelzustandes

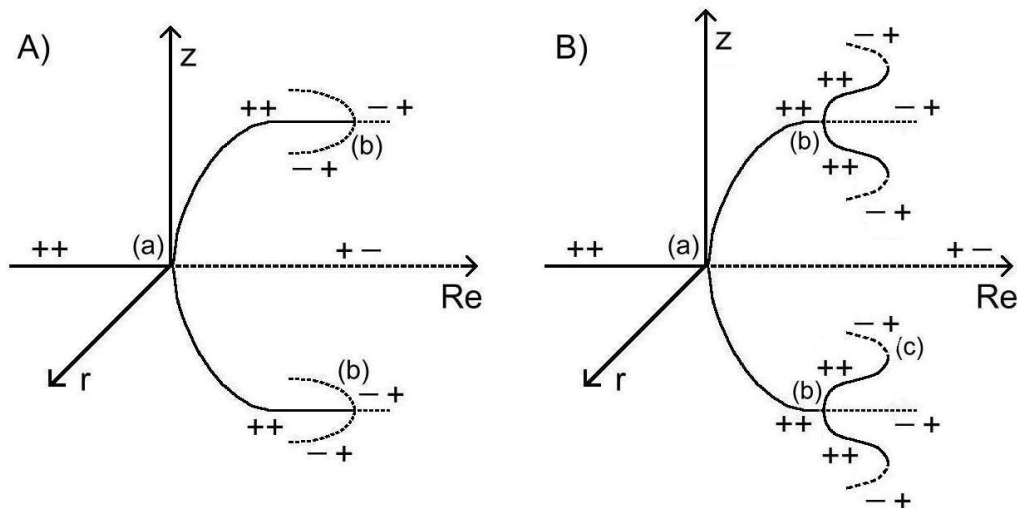


Abb. 7.13: Schematisches Verzweigungsdiagramm der lokalen Verzweigungen in der Umgebung der z -Achse im symmetrischen Fall: (A) Symmetriebrechung (a) und inverse Hopf-Verzweigung (b); (B) Symmetriebrechung (a), superkritische Hopf-Verzweigung (b) und Sattelknoten-Verzweigung von periodischen Orbits (c).

unmittelbar von dem Einsatz der VLF-Mode ist in Abbildung 7.12 (B) für den Fall dargestellt, daß keine symmetriebrechenden Störungen im System vorhanden sind.

Eine schematische Darstellung der Abfolge der lokalen Verzweigungen der Fixpunkte des 8-Wirbelzustandes, die im ungestörten Fall auftreten würden, ist in Abbildung 7.13 (A) zu sehen. Stabile Lösungen sind in dieser Darstellung mittels durchgezogener Linien gekennzeichnet, instabile Lösungen durch gestrichelte. Zur genaueren Klassifizierung des Stabilitätsverhaltens ist die Art der Stabilität beziehungsweise Instabilität der Lösungsäste eingezeichnet. Das erste + (–) bedeutet, daß das System stabil (instabil) gegenüber oszillatorischen Störungen ist, das zweite + (–) kennzeichnet Stabilität (Instabilität) gegenüber stationären Störungen. Punkt (a) in Abbildung 7.13 (A) kennzeichnet den Einsatz der symmetriebrechenden Verzweigung, wie es auch im Experiment der Fall ist. An Punkt (b) setzt die symmetrische VLF-Mode über eine inverse Hopf-Verzweigung ein.

Die experimentellen Befunde des 8-Wirbelzustandes zeigen aber, daß die Bereiche der VLF_{Hopf} -Mode nicht getrennt von dem der $VLF_{homoklin}$ -Mode sind, wie es beim 10-Wirbelzustand und beim 12-Wirbelzustand der Fall ist. Es wurden Übergänge von asymmetrischen oszillatorischen Zuständen in symmetrische oszillatorische Zustände beobachtet. Dadurch ändert sich die lokale Verzweigungsstruktur. Der stabile Fixpunkt wird in diesem Fall instabil durch das Auftreten einer superkritischen Hopf-Verzweigung. Das bedeutet, daß sich ein stabiler Grenzzyklus in der Umgebung des asymmetrischen Fixpunkts bildet, bevor die heterokline Verzweigung über die inverse Hopf-Verzweigung einsetzt. Beim Übergang in einen symmetrisch oszillatorischen Zustand, ausgehend vom asymmetrischen oszillatorischen Zustand, kommt es daher

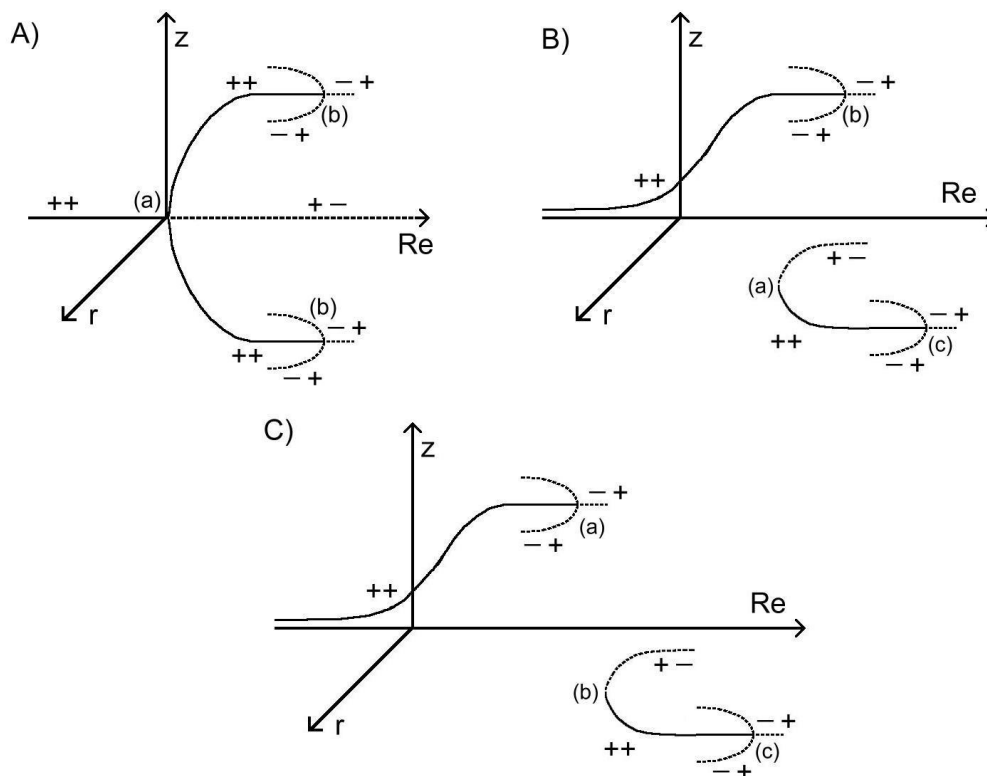


Abb. 7.14: Darstellung der lokalen Instabilitäten der Fixpunkte auf der z -Achse unter Einfluß von Störungen: (A) symmetrischer Fall, Einsatz der Symmetriebre-
rechnung bei (a) und der inversen Hopf-Verzweigung bei (b); (B) und (C):
Einfluß verschiedener Störstärken auf die Verzweigung; bei (B) tritt ein
entkoppelter Ast vor der inversen Hopf des kontinuierlichen Astes auf, bei
(C) dahinter. Hier existiert ein Bereich ohne stabilen Fixpunkt.

zu einer Sattelknoten-Verzweigung von periodischen Orbits. Dieses stimmt mit den Beobachtungen überein, da zwar die Periode der symmetrischen Oszillation am Verzweigungspunkt divergiert, aber das Verhalten in der Umgebung des asymmetrischen Grenzzyklus unverändert bleibt. Aus der heteroklinen Verzweigung wird also eine Blue-Sky-Katastrophe.

Die Phasenraumstruktur unmittelbar vor Einsatz dieser Verzweigung ist in Abbildung 7.12 (C) dargestellt. Das Verhalten ist sehr ähnlich zu dem in Abbildung 7.12 (B). Der Unterschied besteht darin, daß anstelle von stabilen Fixpunkten in (B) stabile periodische Orbits in (C) existieren. Die zur inversen Hopf-Verzweigung gehörenden instabilen Grenzzyklen sind in beiden Abbildungen zusätzlich dargestellt. Unterschiedliche stabile Attraktoren in (B) und (C) führen zu anderen Verzweigungstypen. Aus den experimentellen Beobachtungen wird aber deutlich, daß das Auftreten von homoklinen Verzweigungen nicht durch die VLF_{Hopf} -Mode beeinflusst wird. Insofern kann die Bildung eines stabilen Grenzzyklus als lokales Ereignis in der Umgebung eines Fixpunkts betrachtet werden, durch das die globale Struktur des Phasenraums nicht

beeinflusst wird. Abbildung 7.13 (B) zeigt das modifizierte Verzweigungsdiagramm des 8-Wirbelzustandes im symmetrischen Fall mit dem Auftreten der superkritischen Hopf-Verzweigung an Punkt (b) und der Sattelknoten-Verzweigung periodischer Orbits an Punkt (c). Gemäß den experimentellen Beobachtungen können die Verzweigungspunkte der symmetriebrechenden (a) und der superkritischen Hopf-Verzweigung (b) die Reihenfolge tauschen, was im Experiment zwischen $0.8 < \Gamma/N < 0.82$ der Fall ist.

Die bisherige Analyse kann zwar prinzipielle Eigenschaften des Stabilitätsverhaltens wiedergeben, insbesondere aber die explizite Verzweigungsstruktur nicht erfassen. Bisher wurden die Verzweigungen nur unter der Annahme einer exakten Z_2 -Symmetrie betrachtet. Offenbar haben Störungen, die diese Symmetrie brechen, signifikanten Einfluß auf das Stabilitätsverhalten des 8-Wirbelzustandes. Da aber nicht nur die Symmetriebrechung entkoppelt ist, sondern auch der Einsatz der homoklinen Verzweigungen auf den asymmetrischen Ästen bei unterschiedlichen Reynoldszahlen auftritt, muß der Einsatz der inversen Hopf-Verzweigung an die symmetriebrechende Verzweigung gekoppelt sein. Das bedeutet, daß die inverse Hopf-Verzweigung bei einem bestimmten Grad der Asymmetrie einsetzt. Eine Normalform, welche den Einsatz der oszillatorischen Instabilität an den Grad der Asymmetrie des Systems koppelt, läßt sich folgendermaßen beschreiben:

$$\dot{z} = \varepsilon z - az^3 \quad \text{und} \quad \dot{r} = \mu r + bz^2 r, \quad (7.1)$$

Dabei bezeichnet z die symmetriebrechende und r die oszillatorische Mode. Da in dieser Analyse nur die Stabilität der Fixpunkte betrachtet wird, ist die Gleichung in r -Richtung nur linearisiert angegeben. Im einfachsten Fall kann man annehmen, daß der Kontrollparameter μ der Hopf-Verzweigung stets negativ ist, aber eine positive Kopplung b zwischen Symmetriebrechung und Hopf-Verzweigung besteht. Zur Vereinfachung kann man $a = b = 1$ und $\mu = -1$ setzen, so daß nur ein Kontrollparameter im System übrigbleibt. Bei $\varepsilon = 0$ wird der symmetrische Fixpunkt instabil und eine symmetriebrechende Verzweigung tritt auf. Solange $|z| < 1$ ist, ist das System aber in r -Richtung stabil. Bei $|z| = 1$ wird der Fixpunkt auf der z -Achse in radialer Richtung instabil. Dieses entspricht dem Auftreten der inversen Hopf-Verzweigung, die im Experiment für das Auftreten der VLF-Mode ist.

Addiert man einen Z_2 -symmetriebrechenden konstanten Störterm in die Gleichung für z , so ändert sich das Stabilitätsverhalten. Es entkoppelt die symmetriebrechende Verzweigung, so daß ein kontinuierlicher Ast und eine entkoppelte Sattelknoten-Verzweigung entsteht. Wegen der unterschiedlichen Amplituden wird die Bedingung $|z| = 1$ auf dem kontinuierlichen Ast bei kleinerem ε_{ho1} als auf dem entkoppelten Ast erfüllt (ε_{ho2}). Daher wird der kontinuierliche Ast schon bei kleineren Reynoldszahlen instabil als der entkoppelte. Sofern die beiden asymmetrischen Bereiche sich dynamisch getrennt verhalten, wie es in Zuständen mit zehn oder mehr Wirbeln beim Einsatz der VLF-Mode der Fall ist, führt das frühere Auftreten der inversen Hopf-Verzweigung auf dem kontinuierlichen Ast lediglich dazu, daß auch die VLF-Mode auf dem kontinuierlichen Ast bei niedrigeren Reynoldszahlen auftritt als auf dem entkoppelten. Dynamisch bleiben die beiden Bereiche jedoch getrennt. Die Verzweigung auf dem entkoppelten Ast bei großen Störungen verläßt den Bereich der lokalen Analyse.

Beim 8-Wirbelzustand tritt im symmetrischen Fall beim Einsetzen der inversen

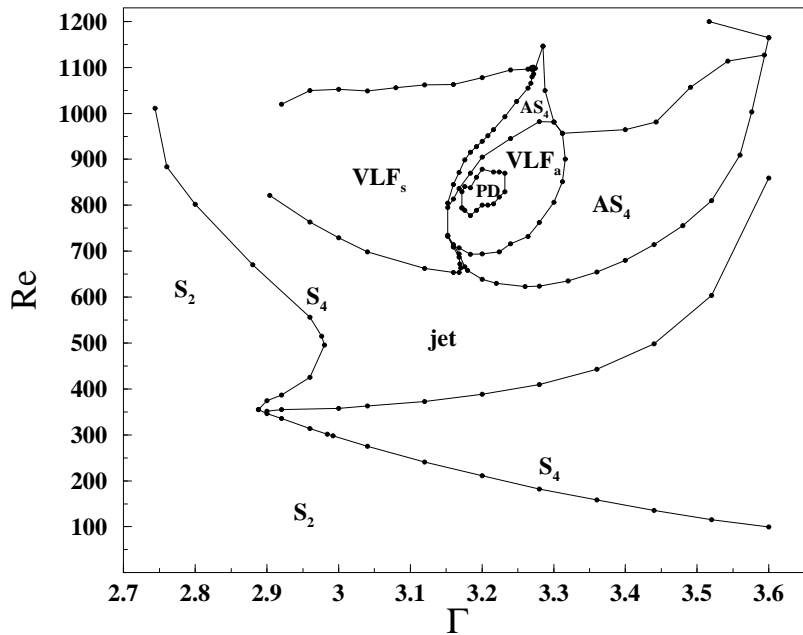
Hopf-Verzweigung ein heterokliner Orbit auf. Eine Störung bewirkt nun, daß die inverse Hopf-Verzweigung auf dem kontinuierlichen Ast bei ε_{ho1} einsetzt, bevor dies auf dem entkoppelten der Fall ist. Daher führt diese Instabilität lediglich dazu, daß sich das System auf dem entkoppelten Ast stabilisiert. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl führt dann bei ε_{ho2} zum Auftreten einer Oszillation über die inverse Hopf-Verzweigung, da kein stabiler Fixpunkt mehr im System vorhanden ist. Abbildung 7.14 (b) zeigt diese Situation. Insbesondere tritt eine Hysterese zwischen den beiden asymmetrischen Ästen auf. Dieses Verhalten korrespondiert mit dem prinzipiellen Verzweigungsdiagramm bei $\Gamma/N = 0.82$. Wie oben dargestellt, beeinflußt das Auftreten der VLF_{Hopf} -Mode dieses Wechselwirkungsverhalten zwischen den asymmetrischen Zuständen nicht.

Eine Erhöhung der Störung hat nun zur Folge, daß der Einsatzpunkt der inversen Hopf-Verzweigung auf dem kontinuierlichen Ast zu niedrigeren, während die Sattelknoten-Verzweigung des entkoppelten Astes zu höheren Reynoldszahlen wandert. Dabei kann die inverse Hopf-Verzweigung bei kleineren Kontrollparameterwerten als die Sattelknoten-Verzweigung auftreten. Diese Situation ist in Abbildung 7.14 dargestellt. Bei Einsatz der inversen Hopf-Verzweigung auf dem kontinuierlichen Ast tritt nun eine homokline Verzweigung auf, da sich der entkoppelte Ast noch nicht gebildet hat. Erst beim Auftreten der Sattelknoten-Verzweigung entsteht ein stabiler Fixpunkt, und der periodische Orbit verschwindet somit über eine SNIPER-Verzweigung. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl führt dann zum Auftreten der inversen Hopf-Verzweigung auf dem entkoppelten Ast und damit zur Bildung eines neuen periodischen Orbits über eine homokline Verzweigung. Diese Verzweigungsstruktur entspricht genau jener, die im 8-Wirbelzustand, zum Beispiel bei $\Gamma/N = 0.77$, beobachtet wird. Insbesondere erklärt diese Stabilitätsbetrachtung auch das unterschiedliche Verhalten der vorwärts- und rückwärtsgerichteten homoklinen Verzweigung bei $\Gamma/N = 0.77$. Während die vorwärtsgerichteten durch eine inverse Hopf-Verzweigung verursacht werden, tritt bei der rückwärtsgerichteten eine SNIPER-Verzweigung auf.

Für den Bereich, in dem die VLF_{Hopf} -Mode auftritt, gelten für die Entstehung der homoklinen Verzweigungen dieselben Argumente, da durch das Auftreten des „kleinen“ Grenzyklus der VLF_{Hopf} -Mode nur die lokale Phasenraumstruktur in der Umgebung des Fixpunkts modifiziert wird. Allerdings treten anstelle der inversen Hopf-Verzweigung eine Sattelknoten-Verzweigung periodischer Orbits und anstelle der Sattelknoten-Verzweigung von Fixpunkten Sattelknoten-Verzweigung periodischer Orbits auf.

Als Ergebnis dieser Analyse läßt sich festhalten, daß sich das Stabilitätsverhalten des 8-Wirbelzustandes, wie auch bei Zuständen mit mehr Wirbeln, ebenfalls im Rahmen der Wechselwirkung von symmetriebrechender und oszillatorischer Instabilität beschreiben läßt. Allerdings beeinflussen Störungen, die im Experiment auftreten, das Stabilitätsverhalten stärker als bei Zuständen mit zehn oder mehr Wirbeln und führen zu qualitativen Änderungen in der Verzweigungsstruktur.

(a)



(b)

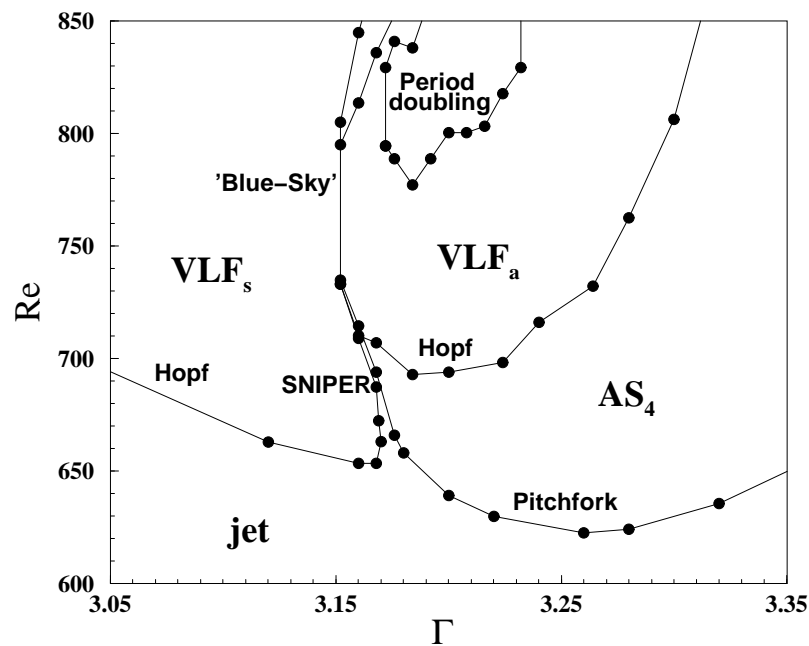


Abb. 7.15: (a): Vollständiges Stabilitätsdiagramm des 4-Wirbelzustandes S_4 mit unterer Stabilitätsgrenze, Einsatz der Zeitabhängigkeit und Instabilitäten der zeitabhängigen Strömung; (b) Axialsymmetrische Instabilitäten des zeitabhängigen S_4 Zustandes. (Detaillierte Beschreibung im Text)

7.4 Stabilitätsverhalten des 4-Wirbelzustandes

7.4.1 Symmetriebrechung und VLF-Mode

Im vorherigen Kapitel konnte gezeigt werden, daß eine Verringerung der Wirbelzahl bei gleicher normierter Höhe die Wechselwirkung zwischen den asymmetrischen Zuständen qualitativ beeinflußt. Insbesondere kommt es beim 8-Wirbelzustand zu einem Auftreten von symmetrischen VLF-Mode-Oszillationen. In diesem Abschnitt wird das Stabilitätsverhalten im 4-Wirbelzustand untersucht. Sowohl das Stabilitätsverhalten der axialsymmetrischen Strömung [63] als auch der Einsatz der ersten zeitperiodischen Instabilität in der axialsymmetrischen Strömung [116] verhält sich in diesem Zustand qualitativ in der gleichen Weise, wie es bei Zuständen mit einer höheren Anzahl von Wirbeln der Fall ist. Der 2-Wirbelzustand zeigt demgegenüber ein anderes Stabilitätsverhalten als der 4-Wirbelzustand [122, 63]. Daher kann der 4-Wirbelzustand als das kleinste System angesehen werden, in dem das Auftreten von Symmetriebrechung und VLF-Mode-Oszillationen untersucht werden kann. Vom prinzipiellen Standpunkt unterscheidet sich der 4-Wirbelzustand von Zuständen mit einer größeren Anzahl von Wirbeln dadurch, daß aufgrund der geringen Zylinderhöhe deutlich weniger stationäre Lösungen existieren [63] als zum Beispiel beim 12-Wirbelzustand. Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens der zeitabhängigen Strömung kann daher ebenfalls Aufschluß über die Vergleichbarkeit von Strömungen in kleinen Systemen und solchen in großen Systemen geben. Die Untersuchungen des 4-Wirbelzustandes bauen auf Ergebnissen von M. Semrau auf, die er im Rahmen seiner Diplomarbeit gewonnen hat [118].

Experimentelle Ergebnisse

Abbildung 7.15 (a) zeigt das gesamte Stabilitätsdiagramm des 4-Wirbelzustandes S_4 für den für diese Arbeit relevanten Zylinderhöhenbereich. Dargestellt ist zur Übersicht nochmals der Übergang vom 4- in den 2-Wirbelzustand S_2 sowie der Einsatz der Jet-Mode. Dieses Stabilitätsverhalten wurde schon in Kapitel 6.3 untersucht. Die zu höheren Reynoldszahlen gelegenen Verzweigungslinien kennzeichnen den Einsatz von axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung. Dabei wird der zeitabhängige symmetrische S_4 -Zustand im Bereich AS_4 asymmetrisch, während im Bereich VLF_S eine axialsymmetrische Oszillation auftritt. Der Stabilitätsbereich VLF_a kennzeichnet das Auftreten einer axialsymmetrischen VLF-Mode-Oszillation auf den asymmetrischen Ästen, wobei innerhalb eines kleinen Bereichs eine Periodenverdopplung (PD) beobachtet werden konnte. Die oberen Stabilitätsgrenzen dieser Zustände sind ebenfalls in Abbildung 7.15 (a) dargestellt.

Abbildung 7.15 (b) zeigt eine detaillierte Darstellung der axialsymmetrischen Instabilitäten des zeitabhängigen S_4 Zustandes. Für $\Gamma \leq 3.168$ tritt eine Hopf-Verzweigung auf, und das System geht von einem periodischen in einen doppelt-periodischen Zustand über. Die dabei auftretende Mode, die als VLF_S bezeichnet wird, ist eine axialsymmetrische Oszillation, die direkt vom symmetrischen Fixpunkt einsetzt. Der Einsatz der VLF_S -Mode vom symmetrischen Fixpunkt über eine Hopf-Verzweigung ist in Zuständen mit höherer Wirbelzahl nicht beobachtet worden. Abbildung 7.16 (a) zeigt die Oszillationsfrequenz ω , normiert auf die Innenzylinderdrehzahl ν_i der symmetri-

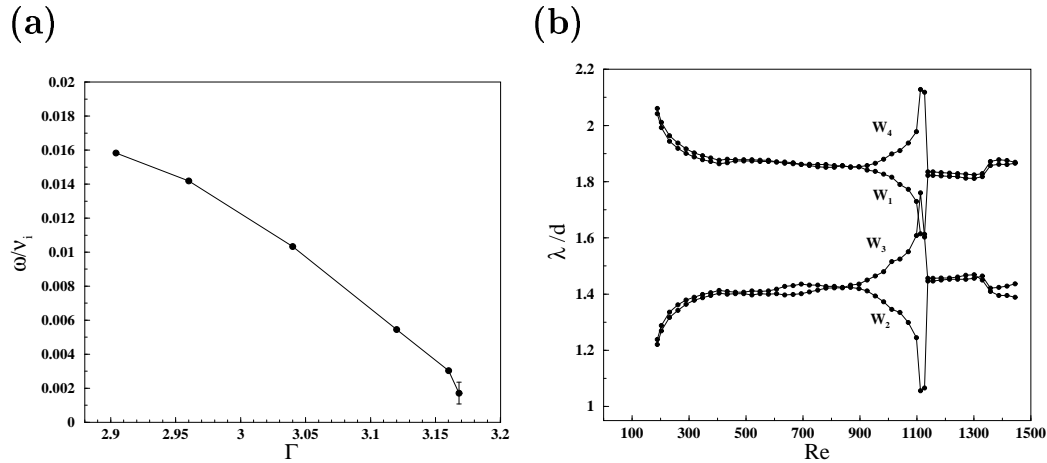


Abb. 7.16: (a) Auf die Innenzylinderdrehzahl ν_i normierte Frequenz ω der VLF_S -Mode unmittelbar nach ihrem Einsatz; (b) Verteilung der auf die Spaltbreite d normierte Wirbelgröße λ bei $\Gamma = 3.28$ aufgetragen über die Reynoldszahl Re . Die einzelnen Wirbel sind vom Boden (W_1) zum Deckel (W_4) durchnummriert.

schen VLF_S -Mode, unmittelbar nach ihrem Einsatz. Die Frequenz nimmt bei Erhöhung von Γ stark ab, und verschwindet bei $\Gamma = 3.168$ fast vollständig. Für $\Gamma > 3.168$ tritt anstelle der Hopf-Verzweigung eine symmetriebrechende Verzweigung auf. Im Rahmen der Meßgenauigkeit konnte keine Hysterese zwischen dem oszillatorischen und dem asymmetrischen Bereich beobachtet werden. Daß die Stabilitätslinien der Hopf-Verzweigung und der symmetriebrechenden Verzweigung in Abbildung 7.15 nicht zusammenlaufen, liegt daran, daß die symmetriebrechende Verzweigung entkoppelt ist und die Stabilitätslinie der Sattelknoten-Verzweigung des entkoppelten Astes eingezeichnet ist. Dieser entkoppelte Zustand wird mit AS_{4*} bezeichnet. Eine Analyse des Überganges zwischen dem symmetrischen oszillatorischen Bereich und dem asymmetrischen Bereich wird in Abschnitt 7.4.1 vorgenommen.

Abbildung 7.16 (b) zeigt den Verlauf der Wirbelgrößen über die Reynoldszahl, aufgetragen bei $\Gamma = 3.28$. Die Wirbelgrößen λ sind dabei normiert auf die Spaltbreite d . W_1 bis W_4 bezeichnen die Wirbel vom Boden zum Deckel. Die beiden Randwirbel W_1 und W_4 sind signifikant größer als die beiden Wirbel in der Mitte der Strömung. Zu kleineren Reynoldszahlen bis hin zur unteren Stabilitätsgrenze wird dieses Verhalten noch verstärkt. Der Einsatz der symmetriebrechenden Verzweigung ist daran zu erkennen, daß die beiden Wirbelpaare oberhalb der Zylindermite, W_3 und W_4 , sich mit zunehmender Reynoldszahl gegenüber den übrigen Wirbeln W_1 und W_2 vergrößern. Das räumliche Verhalten der Symmetriebrechung im 4-Wirbelzustand ist somit identisch zu jenem, das in Systemen mit einer größeren Anzahl von Wirbeln beobachtet wurde [142]. Die asymmetrischen Äste werden wiederum instabil gegen eine oszillatorische Mode, die daher als VLF_a bezeichnet wird. Untersuchungen mit zwei LDA haben gezeigt, daß es sich um eine oszillatorische Mode mit azimuthaler Wellenzahl $m = 0$ handelt. Aufgrund der kleinen Schwingungsamplitude und einer typischen Oszillati-

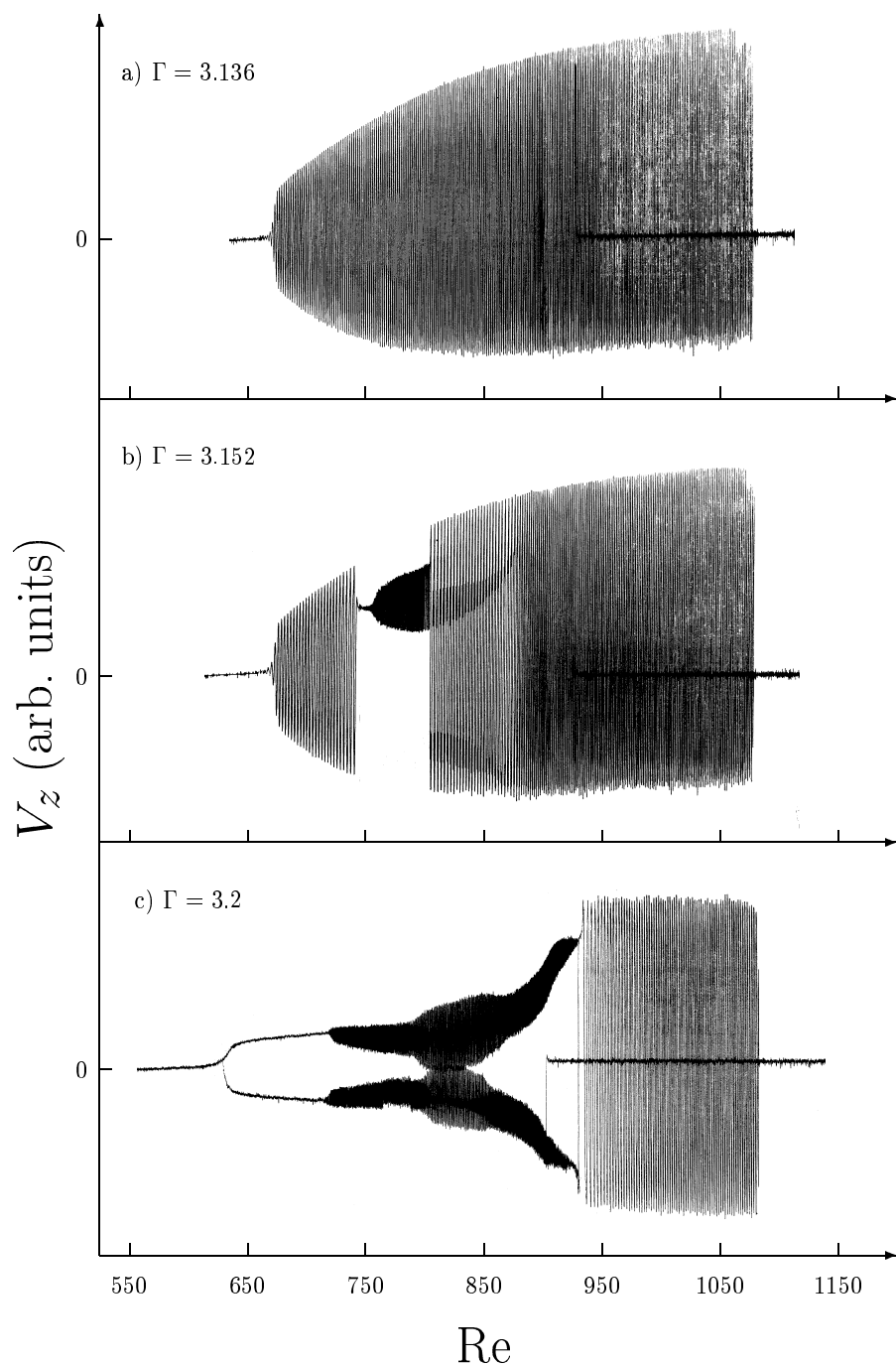


Abb. 7.17: Verzweigungsdiagramme der axialsymmetrischen Instabilitäten: (a) Einsatz der $VLFS$ -Mode über Hopf-Verzweigung, (b) Restabilisierung des AS_4 -Zustandes innerhalb des $VLFS$ Bereichs, (c) Symmetriebrechung und $VLFS_{Hopf}$ -Mode, Restabilisierung der $VLFS$ -Mode bei höheren Reynoldszahlen. Die Diagramme wurden durch quasistatische Erhöhung der Reynoldszahl aufgenommen. Die Jet-Mode-Oszillationen sind herausgefiltert.

onsfrequenz, die vergleichbar mit jener der VLF_{Hopf} -Mode ist, liegt der Schluß nahe, daß es sich hierbei um die gleiche oszillatorische Instabilität handelt.

Abbildung 7.17 zeigt drei typische Verzweigungsdiagramme der axialsymmetrischen Moden im zeitabhängigen 4-Wirbelzustand. Experimentell wurden diese Diagramme durch Messung der axialen Strömungsgeschwindigkeit in der Zylindermitte ($L/2$) bei einem Abstand von $3mm$ vom Innenzylinder mittels quasistatischer Erhöhung der Reynoldszahl gewonnen. Das Meßsignal wurde, wie in allen Untersuchungen das VLF-Mode in dieser Arbeit, tiefpaßgefiltert. Die Grenzfrequenz des Filters betrug $f = 0.2Hz$. Bei $\Gamma = 3.136$ (a) tritt nur die symmetrische VLF_S -Mode auf. Man erkennt oszillatorisches Verhalten in allen Diagrammen durch einen breiten Streifen, der bedingt durch die Aufnahmetechnik nur die Amplitude der Oszillation widerspiegelt. Eine Erhöhung der Reynoldszahl führt zum Übergang des doppelt-periodischen Zustands in einen anderen symmetrischen Zustand, der hier nicht weiter untersucht wurde. Zu erkennen ist in den drei Diagrammen an der durchgezogenen Linie im VLF_S -Mode-Bereich, daß dieser symmetrische Zustand ein hysteretisches Verhalten aufweist. Bei $\Gamma = 3.152$ (b) wird der VLF_S Bereich unterbrochen durch eine Restabilisierung des asymmetrischen AS_4 -Zustandes. Eine Erhöhung der Reynoldszahl führt dann zum Einsatz der VLF_a -Mode auf dem asymmetrischen Ast, die daraufhin direkt wieder in den symmetrischen VLF_S übergeht. Bei $\Gamma = 3.2$ (c) stellt sich ein anderes Szenario ein. Der symmetrische S_4 -Zustand geht über die symmetriebrechende Verzweigung in den asymmetrischen AS_4 -Zustand über. Zur Verdeutlichung sind in diesem Diagramm beide asymmetrischen Äste AS_4 und AS_{4*} durch zwei aufeinander folgende Aufnahmen ausgemessen worden. Das Verhalten der beiden Äste ist qualitativ gleich. Eine Erhöhung der Reynoldszahl führt zum Einsatz der VLF_a -Mode. Der Bereich größerer Amplitude in diesem oszillatorischen Bereich kennzeichnet den Einsatz einer Periodenverdopplung. Der oszillatorische Zustand geht bei weiterer Erhöhung der Reynoldszahl über eine inverse Hopf-Verzweigung wieder in der AS_4 -Zustand über, der daraufhin in den oszillatorischen Bereich der VLF_S -Mode verzweigt.

Verzweigungsanalyse

Experimentell ergeben sich qualitative Ähnlichkeiten der axialsymmetrischen Instabilitäten des 4-Wirbelzustands mit denen des 8-Wirbelzustands. Zunächst tritt auch im zeitabhängigen 4-Wirbelzustand eine symmetriebrechende Verzweigung auf. Ferner konnten, wie im 8-Wirbelzustand, zwei Typen von VLF-Moden beobachtet werden. Zum einen tritt die VLF_{Hopf} -Mode in den asymmetrischen Zuständen AS_4 auf, zum anderen konnte die symmetrische VLF_S -Mode identifiziert werden. Anders ist beim 4-Wirbelzustand jedoch das Auftreten der VLF_S -Mode über eine Hopf-Verzweigung des symmetrischen Fixpunkts. Besonders das Zusammentreffen der Hopf-Verzweigung und der symmetriebrechenden Verzweigung ist nicht im Rahmen der bisherigen Verzweigungsanalyse zu verstehen.

Die bisherige Beschreibung ging davon aus, daß die VLF_S -Mode im 8-Wirbelzustand und die $VLF_{homoklin}$ -Mode in Zuständen mit mehr als acht Wirbeln über eine inverse Hopf-Verzweigung des asymmetrischen Fixpunkts einsetzt. Insbesondere ist es ein wichtiges Ergebnis der Verzweigungsanalyse des 8-Wirbelzustandes, daß das Auftre-

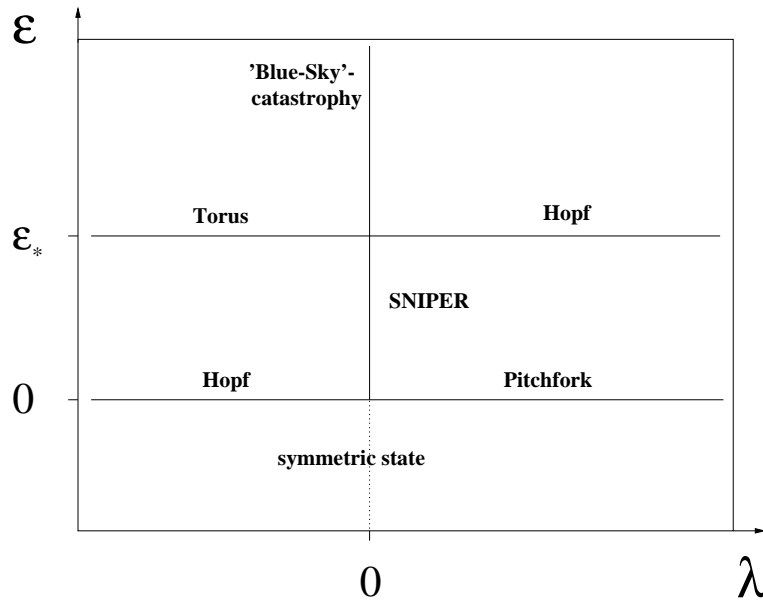


Abb. 7.18: Ausschnitt aus dem Verzweigungsdiagramm von Gleichung 7.2. Kontrollparameter sind ε und λ . Die dynamischen Bereiche und die auftretenden Verzweigungen werden im Text erläutert.

ten der inversen Hopf-Verzweigung an den Grad der Asymmetrie gekoppelt ist. Das impliziert, daß vor dem Einsatz der $VLF_S/homoklin$ -Mode eine Symmetriebrechung aufgetreten sein muß. Außerdem setzt die $VLF_S/homoklin$ -Mode bei Zuständen mit größerer Wirbelzahl immer über eine homokline Verzweigung ein.

Beim Übergang zwischen dem symmetrischen VLF_S Bereich und dem asymmetrischen AS_4 -Zustand wurde eine im Rahmen der Meßgenauigkeit divergente Periode der VLF_S -Mode bei Annäherung an den Verzweigungspunkt beobachtet. Außerdem wurde an diesem Verzweigungspunkt keine Hysterese beobachtet. Daher zeigt diese homokline Verzweigung eine starke Ähnlichkeit mit der homoklinen Verzweigung im 8-Wirbelzustand. Allerdings setzt die VLF_S -Mode in 4-Wirbelzustand für $\Gamma \leq 3.168$ über eine Hopf-Verzweigung des symmetrischen Fixpunkts ein. Dadurch sind in diesem Bereich keine asymmetrischen Fixpunkte vorhanden. Die asymmetrischen Fixpunkte müssen beim Übergang vom VLF_S -Zustand in den AS_4 -Zustand erst über eine Sattelknoten-Verzweigung entstehen. Somit tritt eine SNIPER-Verzweigung im 4-Wirbelzustand auf. Im 8-Wirbelzustand entstehen die asymmetrischen Fixpunkte durch die symmetriebrechende Verzweigung und werden dann instabil.

Um das Stabilitätsverhalten des 4-Wirbelzustandes möglichst vollständig beschreiben zu können und auch das Überwechseln zwischen den asymmetrischen Zuständen zu erfassen, wurde ein Modell aufgestellt. Um eine möglichst einfache Gestalt der beschreibenden Gleichungen zu bekommen und die Struktur der auftretenden Verzweigung zu verdeutlichen, wurde ein anderes Koordinatensystem gewählt, als es für die Beschreibung von gekoppelten Instabilitäten üblich ist. Bei den bisherigen Modellierungen wurde der symmetriebrechenden Mode die z-Koordinate zugeordnet, so daß diese mit der z-Koordinate des physikalischen Systems übereinstimmt. Da die Normalform

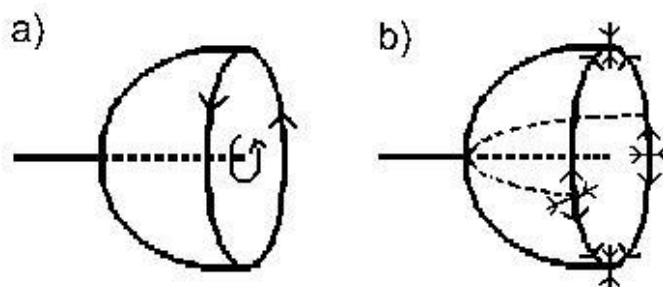


Abb. 7.19: Schematische Verzweigungsdiagramme von Gleichung 7.2 bei festem λ und $\varepsilon < \varepsilon_*$: (a) $\lambda < 0$, Hopf-Verzweigung bei $\varepsilon = 0$, (b) $\lambda > 0$, bei $\varepsilon = 0$ treten zwei stabile Fixpunkte und zwei Sattelpunkte auf

zur Beschreibung der Kopplung von oszillatorischer und symmetriebrechender Mode im Fall nicht-trivialen Verhaltens in z -Richtung wegen der Axialsymmetrie immer einen Fixpunkt auf der z -Achse besitzt [165], eignet diese sich nicht zur vollständigen Beschreibung des Verhalten des 4-Wirbelzustandes. Die Struktur der auftretenden axialsymmetrischen Verzweigungen im 4-Wirbelzustand läßt sich durch ein System von Differentialgleichungen in Zylinderkoordinaten (r, h, ϕ) beschreiben:

$$\dot{r} = h \quad (7.2)$$

$$\dot{h} = \varepsilon r + (\varepsilon - \varepsilon_*) - r^3 - h^3 \quad (7.3)$$

$$\dot{\phi} = (\cos^2(\phi) - 1) + \lambda \quad (7.4)$$

Um Verwechslungen mit der z -Koordinate der Strömung zu vermeiden, wurde die Bezeichnung h gewählt. Die beiden Kontrollparameter des Gleichungssystems sind ε und λ , die strukturell in der Umgebung der Verzweigung den physikalischen Parametern Re und Γ entsprechen. ε_* ist eine positive Konstante. Die (r, h) -Gleichungen sind die eines selbsterregten Duffing-Oszillators [146]. Die hier gewählte Form der Selbsterregung ist nicht die einzig mögliche, andere wären ebenfalls denkbar. Für $\varepsilon < 0$ existiert nur ein stabiler Fixpunkt bei $r, h = 0$. Bei $\varepsilon = 0$ wird dieser Fixpunkt instabil und es tritt eine Gabelverzweigung auf. Da wegen der Zylinderkoordinaten $r \geq 0$ sein muß, ist diese Gabelverzweigung nur einseitig. Bei $\varepsilon = \varepsilon_*$ wird der nicht-triviale Fixpunkt instabil und es setzt eine Oszillation über eine Hopf-Verzweigung ein.

Betrachtet man nur die Gleichung für ϕ , so ist offensichtlich, daß für $\lambda < 0$ keine Fixpunkte existieren, da für die rechte Seite der Gleichung $F(\phi) := (\cos^2(\phi) - 1) + \lambda$ immer $F(\phi) < 0$ gilt. Damit wächst der Betrag der Phase monoton mit modulo 2π mit der Zeit. Für $\lambda \geq 0$ treten Fixpunkte auf. Für $\lambda = 0$ existieren zwei Sattelpunkte bei $F_2^*(\phi, \lambda = 0) = 0$ und $F_2^*(\phi, \lambda = 0) = \pi$, wobei hier nur das Intervall $[0, 2\pi)$ betrachtet wird. Für $\lambda > 0$ tritt eine Sattelknoten-Verzweigung auf und es entstehen im Intervall $[0, 2\pi)$ zwei stabile und zwei instabile Fixpunkte aus den Sattelpunkten $F_{1,2}^*(\phi, \lambda = 0)$. Für die Modellierung ist nur der Bereich in unmittelbarer Umgebung der Sattelknoten-Verzweigung bei $\lambda = 0$ interessant, so daß wegen $|\lambda| \ll 1$ die bei $\lambda = 1$ auftretenden

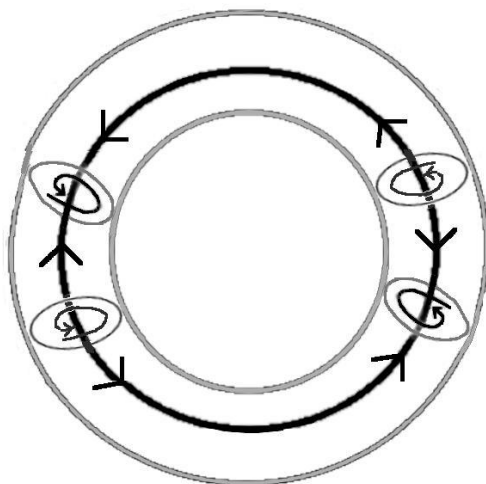


Abb. 7.20: Schematische Darstellung des Phasenraums von Gleichung 7.2 im Bereich $\lambda < 0$ und $\varepsilon > \varepsilon_*$. Es existieren zwei stabile und zwei instabile periodische Orbits. Bei $\lambda = 0$ verschmilzt jeweils ein stabiler und instabiler Orbit und ein heterokliner Orbit von nicht-hyperbolischen periodischen Orbits entsteht.

Sattelknoten-Verzweigungen keine Einschränkung der Modellierung darstellen.

Das Gleichungssystem beschreibt somit die Dynamik auf einem Torus, wobei eine Frequenz sich aus der selbsterregten Schwingung des Duffing-Oszillators ergibt. Die andere resultiert aus der ϕ -Gleichung. Abbildung 7.18 zeigt die fünf verschiedenen dynamischen Bereiche des Modells, die für die Beschreibung der Verzweigungsstruktur des 4-Wirbelzustandes relevant sind. Zusätzlich sind die auftretenden Verzweigungen eingezeichnet. Für $\varepsilon < 0$ gibt es im Modell nur einen symmetrischen Fixpunkt unabhängig von der ϕ -Variablen. Bei $\varepsilon = 0$ wird dieser Fixpunkt instabil und es tritt nicht-triviale Dynamik auf. Für $\lambda < 0$ existieren keine Fixpunkte in der ϕ -Gleichung, so daß aus dem symmetrischen Fixpunkt ein symmetrischer Grenzzyklus über eine Hopf-Verzweigung entsteht. Dies entspricht dynamisch dem Verhalten beim Einsetzen der VLF_5 -Mode bei $\Gamma \leq 3.168$. Für $\lambda > 0$ besitzt die ϕ -Gleichung Fixpunkte, so daß beim Nulldurchgang von ε aus dem symmetrischen Fixpunkt zwei instabile und zwei stabile Fixpunkte des Gesamtsystems hervorgehen. Diese strukturell unterschiedlichen Verzweigungsdiagramme sind in Abbildung 7.19 dargestellt. Das Verhalten in z -Richtung des physikalischen Systems, das bei der Modellierung des 8-Wirbelzustandes direkt mit der symmetriebrechenden Mode übereinstimmt, ergibt sich bei dieser Beschreibung aus der Projektion $z = r * \cos(\phi)$. Eine entsprechende Koordinatentransformation auf die Normalformkoordinaten wäre möglich, würde aber die Stabilitätseigenschaften des Systems nicht so deutlich heraustreten lassen. Das Auftreten der zwei stabilen Fixpunkte korrespondiert mit dem Auftreten der symmetriebrechenden Verzweigung. Zusätzlich entstehen noch zwei Sattelpunkte am Verzweigungspunkt. Diese Entartung läßt sich allerdings experimentell nicht verifizieren. Der Übergang zwischen dem oszillatorischen

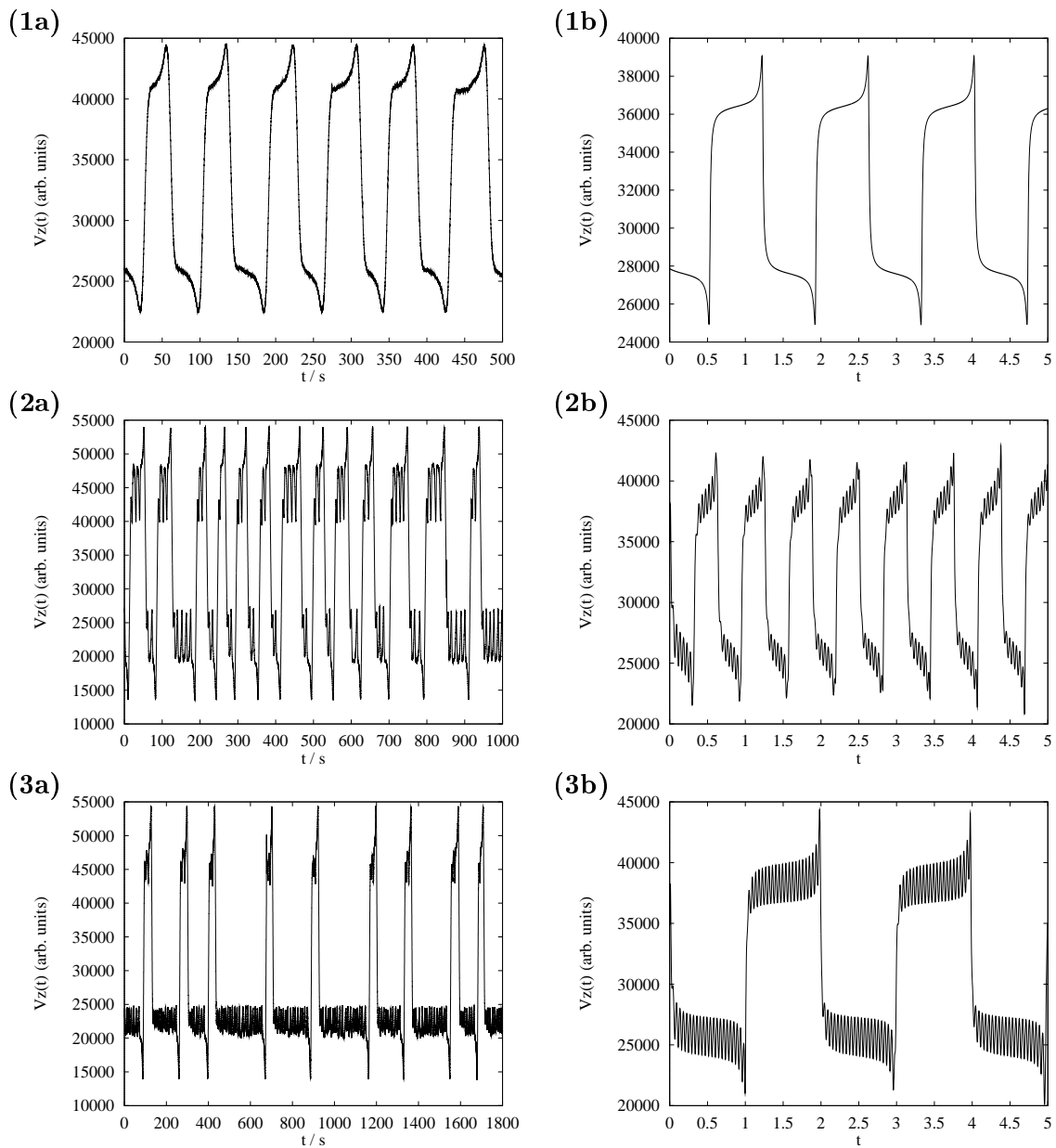


Abb. 7.21: Experimentelle (a) und numerische Zeitreihen (b) in der Nähe der globalen Verzweigungen des zeitabhängigen 4-Wirbelzustandes. Die numerischen Zeitreihen entsprechen $v_z(t) = r(t)\cos(\phi(t))$, die experimentellen der axialen Strömungsgeschwindigkeit bei $L/2$: (1) (a) VLF_S -Mode nahe der SNIPER-Verzweigung bei $\Gamma = 3.168$ und $Re = 734.7$ ((b) numerische Parameter: $\varepsilon = 0.5, \lambda = -0.002$), (2) und (3a) VLF_S -Mode nahe der Blue-Sky-Katastrophe bei (2a) $\Gamma = 3.168$ und $Re = 855.5$ und (3a) $\Gamma = 3.155$ und $Re = 782.9$ ((b) numerische Parameter: $\varepsilon = 1.1, (2)\lambda = -0.012, (3)\lambda = -0.012$)

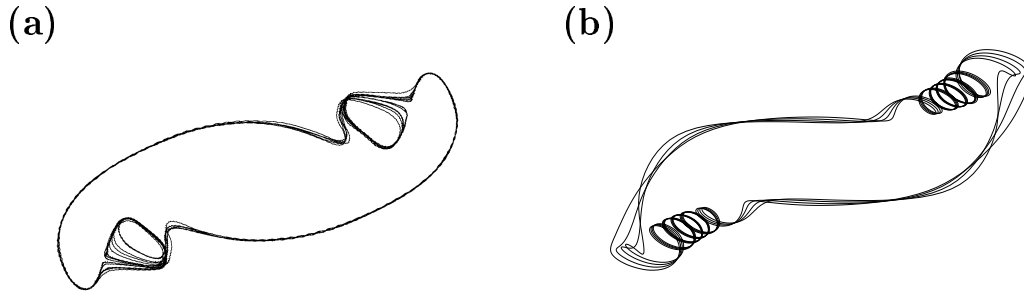


Abb. 7.22: Rekonstruktion eines experimentellen (a) und numerischen (b) Attraktors von Zeitreihe (2a,b) aus Abbildung 7.21

und dem asymmetrischen Bereich wurde bei der experimentellen Betrachtung als eine Sattelknoten-Verzweigung klassifiziert, was durch die Modellierung gestützt wird. Im Modell tritt eine SNIPER-Verzweigung auf.

Für $\varepsilon > \varepsilon_*$ tritt eine zusätzliche Oszillation durch eine Hopf-Verzweigung auf. Das führt dazu, daß der periodische Orbit bei $\lambda < 0$ in einen Torus übergeht. Abbildung 7.20 zeigt eine Darstellung des Phasenraums in diesem Bereich. Die beiden stabilen asymmetrischen Fixpunkte bei $\lambda > 0$ werden oszillatorisch. Der Übergang zwischen den beiden Bereichen bei $\lambda = 0$ und $\varepsilon > \varepsilon_*$ findet über eine Sattelknoten-Verzweigung von periodischen Orbits statt, die zu einer „Blue-Sky“ Katastrophe führen. Der Einfluß von symmetriebrechenden Störungen ist bei dieser Modellierung nicht berücksichtigt worden, so daß im Modell jeweils heterokline Verzweigungen auftreten, während im Experiment Störungen meist zu homoklinen Verzweigungen führen. Da aber die experimentellen Beobachtungen keinen signifikanten Einfluß von Störungen nahelegen, ist bei der Modellierung darauf verzichtet worden.

Neben dem Stabilitätsverhalten kann wegen der expliziten Modellierung auch das dynamische Verhalten verglichen werden. Abbildung 7.21 zeigt jeweils drei verschiedene experimentelle (a) und numerische (b) Zeitreihen. Die oberen Zeitreihen (1) zeigen das dynamische Verhalten in unmittelbarer Nähe zur SNIPER-Verzweigung. Diese tritt bei $\Gamma = 3.168$ bei einer Reynoldszahl von $Re = 738$ auf, die experimentelle Zeitreihe wurde bei $Re = 734.7$ im Bereich der VLF_S -Mode aufgenommen. Die Modellparameter sind $\varepsilon = 0.5$ und $\lambda = -0.002$, wobei $\varepsilon_* = 1$ gewählt wurde. Die Zeitreihen (2) und (3) in Abbildung 7.21 sind in der Nähe der „Blue-Sky“-Katastrophe aufgenommen worden. Zeitreihe (2a) wurde bei $Re = 855.5$ und $\Gamma = 3.168$ gemessen, Zeitreihe (3a) bei $Re = 782.9$ und 3.155 . Das Auftreten von irregulärem Verhalten in der Nähe von homoklinen Verzweigungen ist schon in Abschnitt 7.3.1 dargelegt worden. Inwiefern das zeitlich irreguläre Verhalten dynamischen Ursprungs ist, läßt sich auch für den 4-Wirbelzustand nicht eindeutig klären, aber auch in diesem Fall tritt diese Irregularität erst unmittelbar am Verzweigungspunkt auf. Man erkennt deutlich den Einfluß einer symmetriebrechenden Störung in den Zeitreihen (2a) und (3a). Die numerischen Zeitreihen sind bei Parameterwerten von $\varepsilon = 1.1$, $\lambda = -0.012$ (2b) und $\varepsilon = 1.1$,

$\lambda = -0.001$ (3b) berechnet worden. Abbildung 7.22 (a) zeigt den rekonstruierten Attraktor von der Zeitreihe 7.21 (2a), und Abbildung 7.22 (b) den von Zeitreihe (2b). Man erkennt deutlich die Lage der beiden asymmetrischen periodischen Bereiche und das Überwechseln zwischen diesen Bereichen. Der Vergleich der dynamischen Eigenschaften belegt nochmals die sehr gute Übereinstimmung von Experiment und Modell. Diese ist ein sehr starker Hinweis, daß sich die axialsymmetrischen Instabilitäten des zeitabhängigen 4-Wirbelzustandes strukturell durch Gleichung 7.2 beschreiben lassen.

Die Untersuchungen der axialsymmetrischen Instabilitäten des zeitabhängigen S_4 -Zustandes haben gezeigt, daß sehr viele strukturelle und dynamische Ähnlichkeiten zum Verhalten in Zuständen höherer Wirbelzahl zu beobachten sind. Insbesondere konnten auch im 4-Wirbelzustand eine symmetriebrechende Verzweigung und zwei Typen von *VL*F-Moden identifiziert werden. Insofern verhält sich der 4-Wirbelzustand auch bei axialsymmetrischen Instabilitäten qualitativ wie Zustände mit einer höheren Anzahl von Wirbeln. Allerdings zeigen sich auch strukturelle Besonderheiten, wie das Auftreten einer Hopf-Verzweigung des symmetrischen Fixpunkts und das Auftreten einer SNIPER-Verzweigung zwischen dem symmetrisch oszillatorischen und dem asymmetrisch stationärem Bereich.

7.4.2 Symmetriebrechende Verzweigung höherer Ordnung

Experimentelle Ergebnisse

In den bisherigen Untersuchungen stand die Wechselwirkung zwischen symmetriebrechenden und oszillatorischen Instabilitäten im Vordergrund. Abbildung 7.23 zeigt den Verlauf der symmetriebrechenden Verzweigung, die im vorherigen Abschnitt untersucht wurde, in Abhängigkeit von der Reynoldszahl für fünf Höhen- zu Spaltbreitenverhältnisse zwischen $\Gamma = 3.368$ und $\Gamma = 3.64$. Die fünf Diagramme zeigen jeweils den Wert der axialen Geschwindigkeit in der Zylindermitte, wobei die Oszillationen der Jet-Mode herausgefiltert wurden. Die Nulllage in den Diagrammen entspricht daher einer verschwindenden axialen Geschwindigkeit in der Zylindermitte, was einem Z_2 -symmetrischen Strömungszustand gleichkommt. Die Verzweigungsdiagramme wurden alle durch quasistatische Variation der Reynoldszahl bei fester Zylinderhöhe gewonnen, wobei sie sich wegen der in einigen Parameterbereichen vorhandenen Multistabilität zum Teil aus mehreren einzelnen Diagrammen zusammensetzten. Die Pfeile in den Verzweigungsdiagrammen sollen die Richtung des Übergangs von einem Lösungsast in einen anderen anzeigen.

Zunächst ist allen Verzweigungsdiagrammen gemein, daß die Strömung bei kleinen und bei großen Reynoldszahlen symmetrisch ist. Der symmetrische Zustand bei kleinen Reynoldszahlen entspricht dem zeitperiodischen S_4 -Zustand, während es sich bei dem symmetrischen Zustand bei größeren Reynoldszahlen ebenfalls um einen S_4 -Zustand handelt, der allerdings ein anderes Zeitverhalten aufweist. Dieser wurde in der vorliegenden Arbeit nicht untersucht. Bei $\Gamma = 3.64$ (Abbildung 7.23 e) ist zu erkennen, daß keine Symmetriebrechung auf dem primären Ast auftritt, sondern der periodische S_4 -Zustand bei Erhöhung der Reynoldszahl direkt in den anderen Zustand übergeht. In allen anderen vier Verzweigungsdiagrammen (Abbildung 7.23, a-d) tritt im zeitperiodischen S_4 eine symmetriebrechende Verzweigung, wie sie auch bei kleineren Zylind-

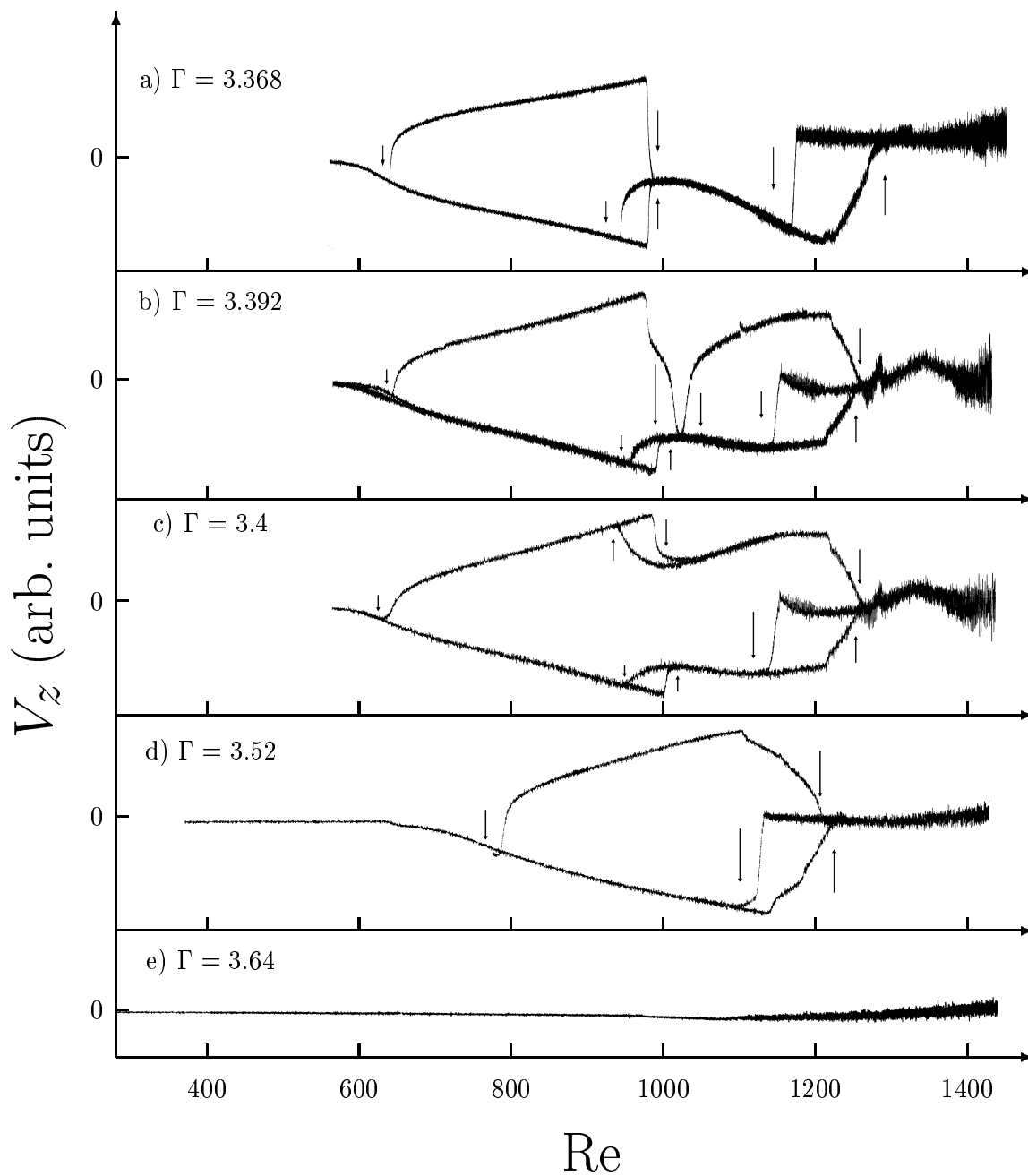


Abb. 7.23: Verlauf der Symmetriebrechung des zeitabhängigen S_4 -Zustandes für fünf verschiedene Zylinderhöhen. Die Verzweigungsdiagramme sind durch quasi-statische Erhöhung beziehungsweise Erniedrigung der Reynoldszahl aufgenommen worden.

derhöhen einsetzt, auf. Die bei dieser Verzweigung festgestellte Entkopplung aufgrund experimentellen Störungen ist durch den nach unten zeigenden Pfeil kenntlich gemacht. Auffällig ist allerdings, daß sich die Entkopplung geändert hat. Bei $\Gamma = 3.2$ (Abbildung 7.17 c) verläuft der obere Ast kontinuierlich, während der untere entkoppelt ist. Bei größerer Zylinderhöhe ist dies, wie in Abbildung 7.23(a-d) zu sehen, umgekehrt. Dieses Verhalten läßt sich zur Zeit nicht vollständig erklären, es zeigt aber, daß eine Störung auf eine Verzweigung nicht unmittelbar mit einer experimentellen Ungenauigkeit in Verbindung gebracht werden kann.

Eine Erhöhung der Reynoldszahl ausgehend vom Punkt der Symmetriebrechung führt zu differenziertem Verhalten bei verschiedenen Zylinderhöhen. Bei $\Gamma = 3.52$ werden beide asymmetrischen Äste bei höherer Reynoldszahl instabil und das System restabilisiert sich wieder in einem symmetrischen Zustand. Dabei tritt eine Hysterese auf, was durch die Pfeile dargestellt ist. Der symmetrische Zustand verzweigt bei Reduzierung der Reynoldszahl immer in den kontinuierlichen Ast des AS_4 -Zustandes. Dieses Verhalten ändert sich bei Verringerung der Zylinderhöhe auf $\Gamma = 3.4$. Zunächst wandert der Einsatzzpunkt zu kleineren Reynoldszahlen. Wichtiger ist allerdings, daß innerhalb der beiden AS_4 -Zustände ein Reynoldsbereich existiert, innerhalb dessen eine Koexistenz von jeweils zwei asymmetrischen Zuständen unterschiedlicher Amplitude auftritt. Im System sind in diesem Bereich daher insgesamt vier stabile asymmetrische Zustände vorhanden. Diese Koexistenz kommt durch die Bildung einer Hysterese zustande, wobei jeweils einer dieser Zustände mit dem Bereich höherer und der andere mit dem Bereich niedrigerer Reynoldszahlen kontinuierlich verbunden ist. Während sich dieses Verhalten für den kontinuierlichen AS_4 -Zustand bei $\Gamma = 3.392$ und bei $\Gamma = 3.368$ (Abbildung 7.23 a,b) nicht ändert, kommt es auf dem entkoppelten Ast des AS_4 -Zustandes zu qualitativen Veränderungen. Bei $\Gamma = 3.392$ erkennt man eine Trennung des entkoppelten Astes, so daß zwei unabhängige entkoppelte Bereiche entstehen. Eine weitere Verminderung der Zylinderhöhe führt dann dazu, daß bei $\Gamma = 3.368$ der entkoppelte Bereich bei höheren Reynoldszahlen vollständig verschwindet, so daß in diesem Bereich nur noch der leicht asymmetrische kontinuierliche Ast vorhanden ist.

Identifikation der auftretenden Verzweigungen

Bei der Betrachtung des experimentellen Verzweigungsdiagramms fällt der signifikante Einfluß der Störung auf die Verzweigungen auf. Zur Identifikation der Verzweigungstypen ist es daher notwendig, die Verzweigungen unter Annahme einer exakten Z_2 -Symmetrie zu kennen. Zunächst muß festgehalten werden, daß bei der experimentellen Untersuchung keine Hinweise auf eine globale oder eine oszillatorische Verzweigung auftraten, so daß sich die Beschreibung im Rahmen der Theorie lokaler stationärer Verzweigungen bewegen kann. Wegen der Z_2 -Symmetrie kann es sich nur um eine Gabelverzweigung handeln. Diese muß allerdings Terme höherer Ordnung enthalten, da im System bis zu vier stabile Lösungen gleichzeitig auftreten. Da es keine Überschneidungen von Lösungen im experimentellen Diagramm gibt, genügt eine eindimensionale Betrachtung. Abbildung 7.24 zeigt eine Darstellung der möglichen Verzweigungen, welche das Verhalten der nicht-trivialen Diagramme in Abbildung 7.23 wiedergeben. Der Einfluß der Störung ergibt sich dabei unmittelbar aus dem Verhalten der Lösun-

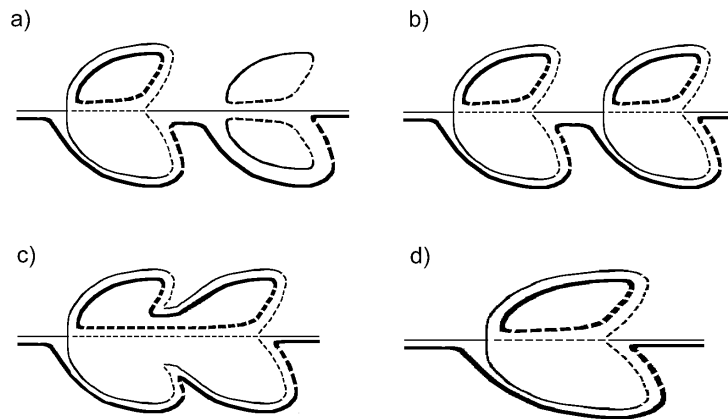


Abb. 7.24: Schematische Darstellung der vier nicht-trivialen Verzweigungsdiagramme aus Abbildung 7.23. (a) $\Gamma/N = 3.368$, (b) $\Gamma/N = 3.392$, (c) $\Gamma/N = 3.4$, (d) $\Gamma/N = 3.52$. Zusätzlich sind die Verzweigungsdiagramme im Z_2 -symmetrischen Fall eingezeichnet.

gen einer einfachen Gabelverzweigung, die sich in einen kontinuierlichen Ast und eine Sattelnoden-Verzweigung aufspaltet.

Aus Abbildung 7.24 erkennt man, daß im symmetrischen Fall die Verzweigungsdiagramme als eine Abfolge von superkritischen und subkritischen Gabelverzweigungen zu verstehen sind. Insbesondere der Übergang zwischen dem Verzweigungsdiagramm (a) und (b) und der Übergang zwischen (b) und (c) impliziert das Zusammentreffen von sub- und superkritischer Verzweigung. Dieses entspricht einer Entartung des Verzweigungspunktes. Dabei gibt es zum einen die Möglichkeit, daß eine stabile symmetrische Lösung vollständig verschwindet und eine Hysterese jeweils zwischen den beiden asymmetrischen Lösungen entsteht. Dieses geschieht beim Übergang von (b) nach (c). Zum anderen kann auch die instabile symmetrische Lösung verschwinden. Dabei kommt es zu einer Abspaltung von zwei entkoppelten Bereichen.

Abbildung 7.25 zeigt eine schematische Darstellung des Verzweigungsdiagramms unter der Annahme exakter Z_2 -Symmetrie. Die Bereiche (1), (2), (3), (4) und (6) geben das prinzipielle Verzweigungsdiagramm der fünf verschiedenen experimentellen Diagramme aus Abbildung 7.23 wieder, wobei der Einfluß der Störung hier unberücksichtigt bleibt. Die durchgezogenen Linien in Abbildung 7.25 zeigen den Einsatz der Gabelverzweigungen, während die gestrichelten Linien Sattelnoden-Verzweigungen darstellen. Das Zusammentreffen zweier Sattelnoden-Verzweigungen markiert daher entweder das Verschwinden oder das Auftreten eines entkoppelten asymmetrischen Bereichs. Der Zustand, der zum Bereich (5) im schematischen Stabilitätsdiagramm korrespondiert, ist in Abbildung 7.23 nicht dargestellt. Stichprobenartige Messungen konnten aber die Existenz eines solchen Zustandes bestätigen. Dieser Zustand verzweigt nicht in einen asymmetrischen, obwohl in einem Reynoldszahlbereich entkoppelte asymmetrische Zustände gefunden werden konnte, die sowohl bei Erhöhung als auch bei Erniedrigung der Reynoldszahl wieder in der symmetrischen Zustand übergehen.

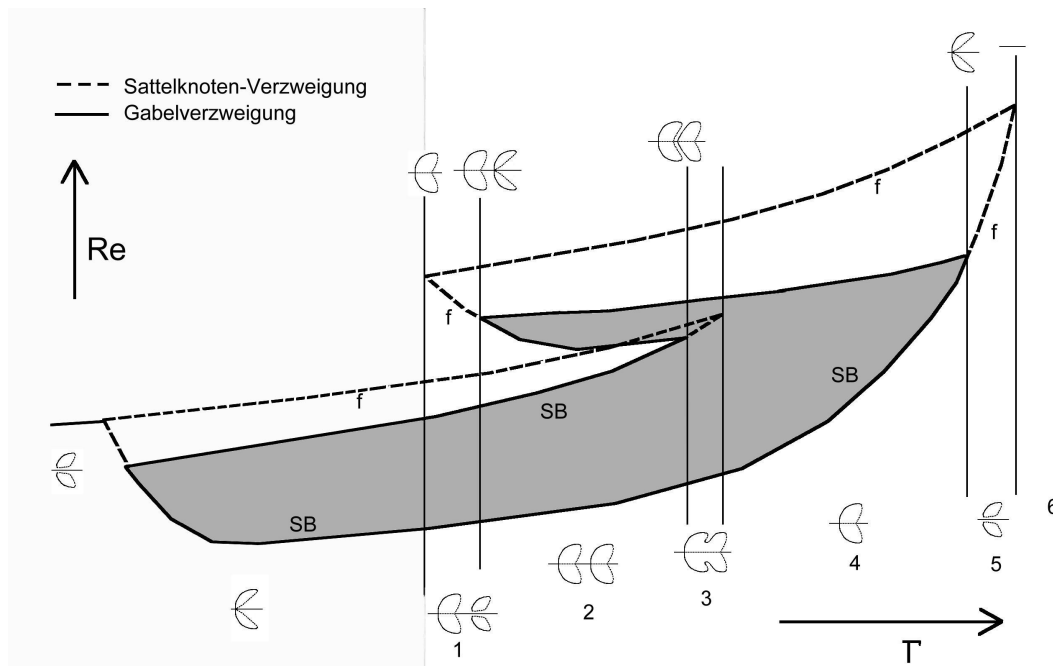


Abb. 7.25: Stabilitätsdiagramm der Z_2 -symmetrischen Verzweigungen aus Abbildung 7.24. Die Verzweigungsdiagramme (a) bis (d) entstammen den Bereichen (1) bis (4). Die mit SB bezeichneten Linien stellen den Einsatz einer symmetriebrechenden Verzweigung dar, die mit f markierten den einer Sattelknoten-Verzweigung. Im Bereich (5) treten nur noch entkoppelte asymmetrische Lösungen auf, im Bereich (6) sind gar keine asymmetrischen Lösungen vorhanden. Die Zustände im unterlegten Bereich links von (1) wurden nicht beobachtet.

Für eine Beschreibung der Verzweigungsdiagramme aus Abbildung 7.25 sind wegen der Multistabilität nichtlineare Terme höherer Ordnung in der Normalform der Gabelverzweigung notwendig. Maximal treten vier stabile Lösungen gleichzeitig auf, so daß zusammen mit den drei instabilen Lösungen, welche die stabilen Bereiche voneinander trennen, insgesamt sieben verschiedene Lösungen gleichzeitig auftreten können. Daher müssen Terme bis zur siebenten Ordnung in der Normalform vorhanden sein, wobei wegen der angenommenen Z_2 -Symmetrie nur ungerade Terme möglich sind. Diese Untersuchungen zeigen, daß auch das stationäre Verhalten des zeitabhängigen S_4 -Zustandes ein kompliziertes Wechselwirkungsverhalten aufweist, das sich mit Hilfe der Verzweigungstheorie strukturell offenlegen läßt.

In diesem Kapitel ist eine Verzweigungsanalyse der axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung im Bereich der Kleinen-Jet-Mode durchgeführt worden. Dabei wurde neben der Reynoldszahl Re und der normierten Höhe Γ/N auch die Wirbelzahl N als Verzweigungsparameter verwendet. Im Vordergrund dieser Analyse standen die Zustände mit vier bis zehn Wirbeln. In diesen Zuständen konnten experimentell Wechselwirkungen zwischen symmetriebrechenden und oszillatorischen Moden beobachtet werden, deren prinzipielles Stabilitätsverhalten

sich vollständig im Rahmen der lokalen und globalen Verzweigungstheorie beschreiben läßt. Dabei zeigte sich insbesondere, daß das Zusammenwirken einer oszillatorischen und einer symmetriebrechenden Instabilität für die Vielzahl der im Experiment auftretenden Instabilitäten eine hinreichende Beschreibung darstellt. Zustände mit mehr als zehn Wirbeln wurden von v.Stamm et al. [142] untersucht. Sie fanden eine universelle Sequenz von Zuständen, die sich an die in dieser Arbeit untersuchten Zustände anschließt und auf Grundlage der Ergebnisse dieser Arbeit beschreiben läßt. Es ergibt sich daher ein konsistentes Bild der Verzweigungsstruktur der axialsymmetrischen Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung im Bereich der Kleinen-Jet-Mode für Zustände von 4 bis 50 Wirbeln.

8. EXPERIMENTELLE HINWEISE AUF SHIL'NIKOV CHAOS IN DER WELLENFÖRMIGEN TAYLOR-WIRBELSTRÖMUNG

Die Analyse des Stabilitätsverhaltens der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung hat gezeigt, daß das Zusammenwirken von symmetriebrechenden und oszillatorischen Moden zur Bildung von homoklinen Orbits führen kann. Wie in Kapitel 5 dargelegt, kann in der Umgebung homokliner Orbits chaotisches Verhalten im Sinne Shil'nikovs entstehen. In diesem Kapitel werden experimentelle Untersuchungen des Übergangs in chaotisches Systemverhalten im Bereich der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung dargestellt. Die Untersuchungen sind in Zuständen mit acht bis zwölf Wirbeln durchgeführt worden. Im 4-Wirbelzustand wurde kein Hinweis auf chaotisches Systemverhalten gefunden. In Zuständen mit mehr als zwölf Wirbeln hatten v.Stamm et al. [142] eine Periodenverdopplungskaskade der VLF-Mode auf den asymmetrischen Ästen beobachtet. In den Untersuchungen dieser Arbeit steht der Einfluß der Wechselwirkung der asymmetrischen Äste auf den Übergang ins Chaos im Vordergrund. Besonders die Bedeutung der homoklinen Orbits in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung für die Entstehung von Chaos wird untersucht.

8.1 Chaotische homokline Dynamik

8.1.1 Chaotische „Gluing“-Verzweigung im 10-Wirbelzustand

In Kapitel 7.2 wurde gezeigt, daß im 10-Wirbelzustand eine gestörte homokline Verzweigung bei $\Gamma/N = 0.8$ auftritt. Dabei verschmelzen die beiden asymmetrischen periodischen Orbits mit dem instabilen symmetrischen Fixpunkt und bilden einen großen symmetrischen periodischen Orbit über eine homokline Verzweigung. Durch Störungen entkoppelt diese Verzweigung im Sinne der Analyse von Glendinnig und Mullin [158]. Allerdings treten auch im gestörten Fall homokline Orbits auf. Aus der Verzweigungsanalyse von Glendinnig und Sparrow [161] wird deutlich, daß das Auftreten von chaotischer Dynamik in der Umgebung des homoklinen Orbits vom Verhältnis der Eigenwerte abhängt. Da bei einer normierten Höhe von $\Gamma/N = 0.8$ nur periodische Lösungen auftreten, ist offenbar die Shil'nikov-Bedingung nicht erfüllt. Daher wurde der Bereich des 10-Wirbelzustandes, in dem es zu einer gestörten homoklinen Verzweigung kommt, für verschiedene Höhenverhältnisse untersucht. Bei diesen Untersuchungen, die im Bereich $0.8 < \Gamma/N < 0.88$ durchgeführt wurden, traten qualitativ zwei unterschiedliche Szenarien auf. Abbildung 8.1 zeigt exemplarisch jeweils eines dieser Szenarien ins Chaos, das im 10-Wirbelzustand beobachtet werden konnte. Das linke Szenario in Abbildung 8.1 wurde bei $\Gamma/N = 0.816$ aufgenommen. Der Einsatz der Symmetriebrechung und der VLF-Mode stimmt bei dieser normierten Höhe mit dem

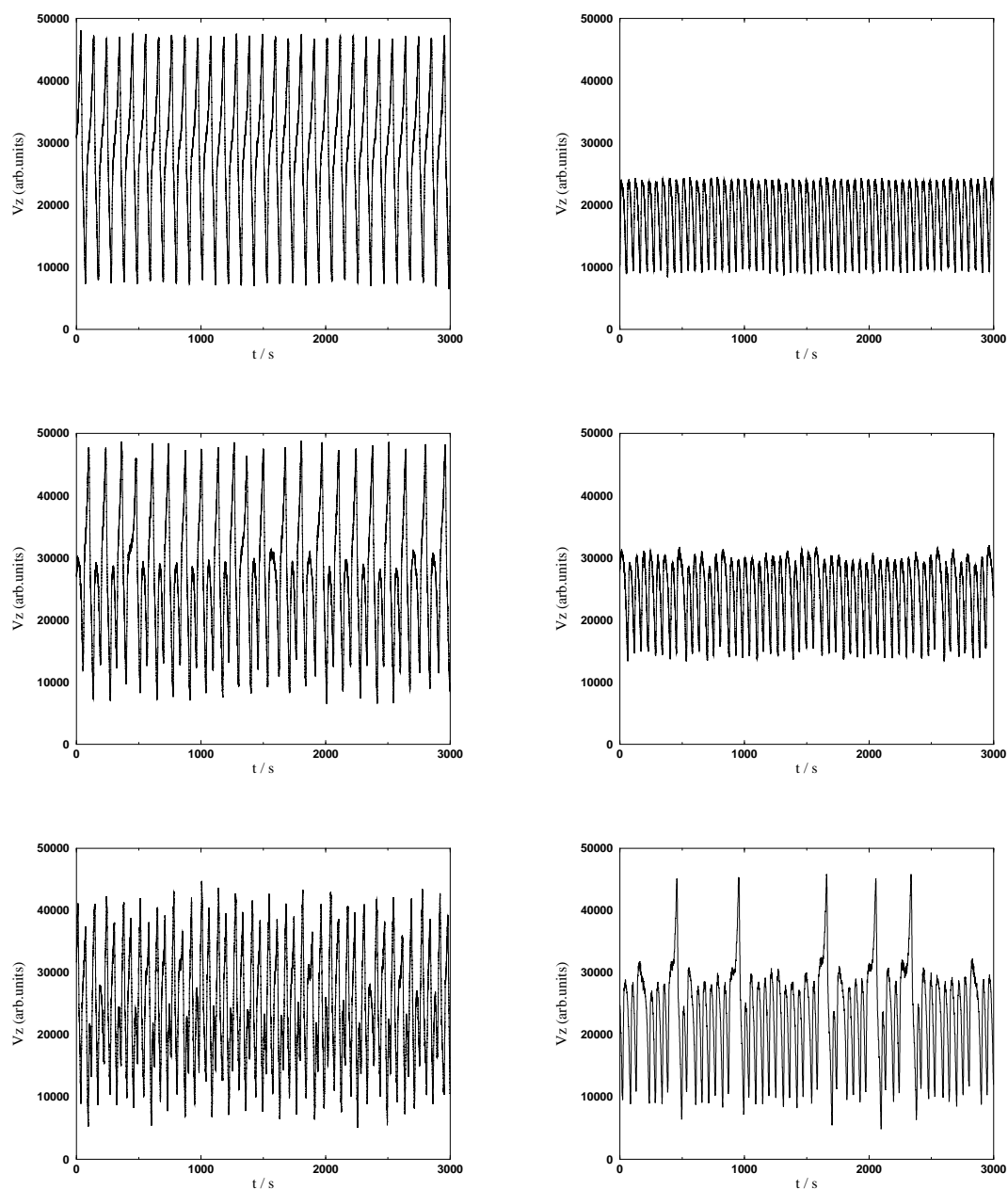


Abb. 8.1: Zwei Szenarien ins Chaos, aufgenommen im 10-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.816$ (links) und $\Gamma/N = 0.824$ (rechts). Links ist der Übergang ins Chaos des symmetrischen periodischen Orbits bei $Re = 445.5$, $Re = 466.1$ und $Re = 478.5$ (von oben nach unten) zu sehen. Das rechte Szenario zeigt den Übergang ins Chaos auf dem asymmetrischen Ast bei $Re = 429.0$, $Re = 457.9$, $Re = 462.0$ (von oben nach unten).

bei $\Gamma/N = 0.8$ überein. Außerdem tritt bei dieser normierten Höhe dieselbe symmetrische homokline Verzweigung auf, die auch bei $\Gamma/N = 0.8$ gefunden werden konnte. Abbildung 8.1 (oben links) zeigt die periodische VLF_S -Mode des aus dieser Verzweigung hervorgegangenen symmetrischen Zustands. Bei einer Erhöhung der Reynoldszahl geht dieser symmetrische Zustand ins Chaos über. Ein Szenario im Sinne einer niederdimensionalen Beschreibung läßt sich allerdings nicht beobachten. Vielmehr wird die periodische Oszillation der VLF_S -Mode leicht irregulär in der Amplitude. Um auszuschließen, daß es sich bei diesem Verhalten um transiente Dynamik handelt, wurde die Einschwingzeit auf bis zu 24 Stunden ausgedehnt. Bei $Re = 466.1$ tritt ein anderes Verhalten auf, das sich sehr ähnlich wie eine Periodenverdopplung verhält. In Abbildung 8.1 (links, mitte) ist eine Zeitreihe dieses Zustandes dargestellt. Man erkennt die asymmetrische Struktur dieser Zeitreihe, da die Verdopplung nur auf einer Seite des symmetrischen Fixpunkts auftritt. Allerdings ist die Amplitude leicht irregulär und Phasensprünge sind zu beobachten. Trotzdem stellt dieser Übergang einen Hinweis auf eine niederdimensionale Wechselwirkung zwischen symmetrischem Fixpunkt und periodischem Orbit dar. Ähnliche dynamische Zustände treten auch im Lorenz-System auf [157], wobei im Verzweigungsdiagramm dieses Systems, wie im 10-Wirbelzustand, ebenfalls eine symmetrische homokline Verzweigung auftritt. Im Lorenz-System ist diese Verzweigung verantwortlich für die Entstehung chaotischen Verhaltens. Eine weitere Erhöhung der Reynoldszahl führt zu einem chaotischen Zustand, wie in Abbildung 8.1 (unten links) zu sehen ist.

Das Szenario in Abbildung 8.1 (rechts), aufgenommen bei $\Gamma/N = 0.824$, ist typisch für das Verhalten des 10-Wirbelzustandes bei etwas größeren Zylinderhöhen. Man sieht, daß bei der Erhöhung der Reynoldszahl das Zeitverhalten aus dem primären asymmetrischen Ast ein zeitlich irreguläres Verhalten aufweist, ohne daß sich hier ein klares Szenario erkennen läßt. Eine weitere Erhöhung führt dann zu einer Attraktorkrise, bei der sich die Größe des chaotischen Attraktors schlagartig verdoppelt. Dabei ist der „große“ chaotische Attraktor durch experimenteller Störungen ebenfalls asymmetrisch. Eine experimentelle Analyse des dynamischen Verhaltens und des Überganges ins Chaos auf dem primären Ast hat kein klares Übergangsszenario ergeben. Die schwache Form des auftretenden Chaos deutet indes auch in diesem Fall auf ein niederdimensionales Verhalten hin. Untersuchungen des Überganges ins Chaos auf dem entkoppelten asymmetrischen Ast zeigen ein ähnliches Verhalten.

Die Untersuchungen des Überganges ins Chaos in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung des 10-Wirbelzustandes zeigen deutliche Hinweise auf niederdimensionales Verhalten, das durch die Wechselwirkung zwischen dem symmetrischen Fixpunkt und den oszillatorischen Moden entsteht. Allerdings läßt sich keine eindeutige Zuordnung zu einem niederdimensionalen Szenario finden.

8.1.2 Inverse Periodenverdopplungskaskade im 8-Wirbelzustand

Die Untersuchung der symmetrischen VLF_{S2^*} -Mode im 8-Wirbelzustand hat eindeutige experimentelle Hinweise für das Auftreten von homoklinem Chaos in Sinne Shil'nikovs geliefert. Die Analyse der Verzweigungsstruktur des 8-Wirbelzustandes hat gezeigt, daß das Auftreten der VLF_{S2^*} über eine homokline Verzweigung stattfindet. Die Ursache

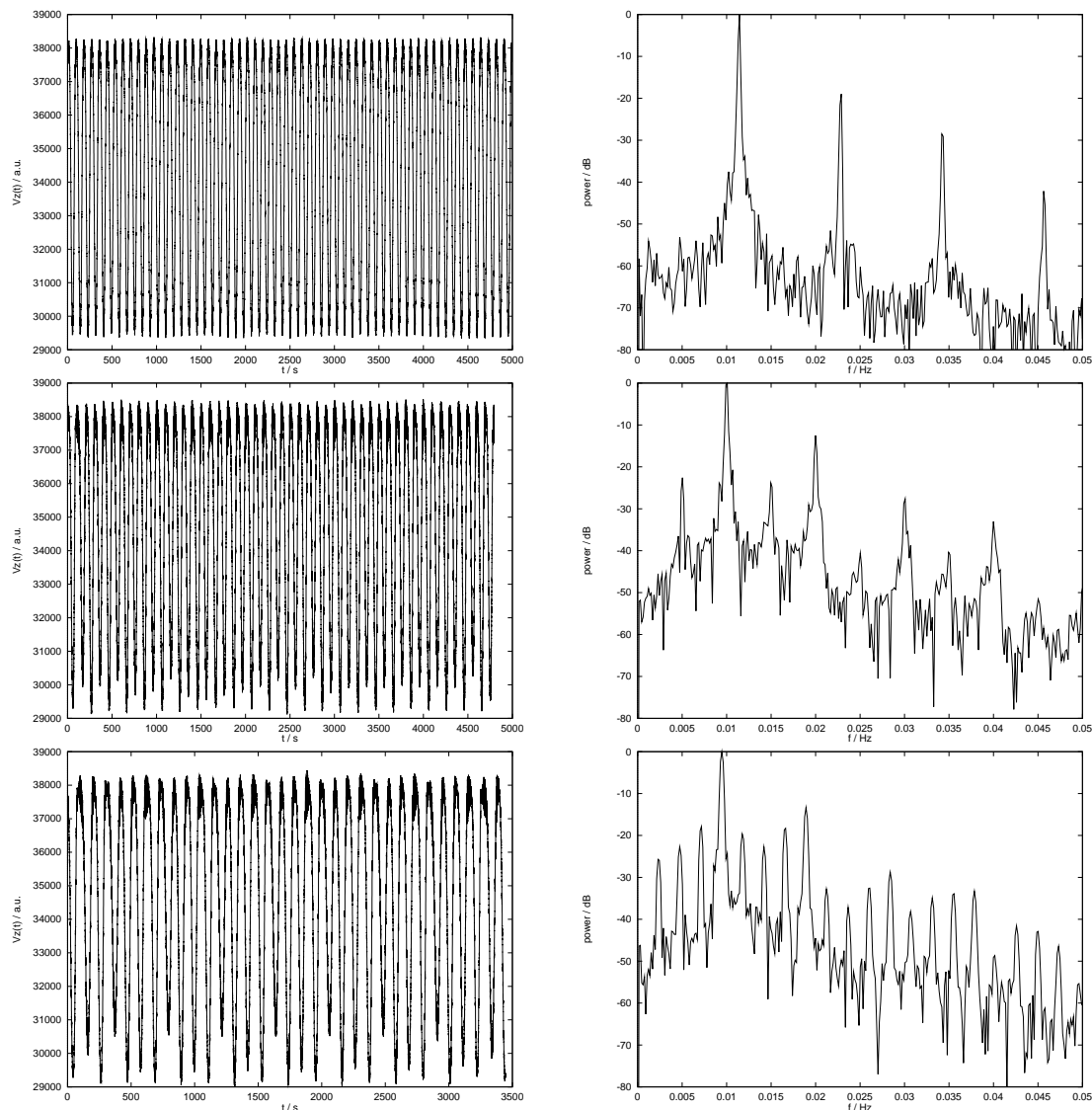


Abb. 8.2: Inverse Periodenverdopplungskaskade der VLF_{S2^*} -Mode im 8-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.8$. Links: Zeitreihen der VLF_{S2^*} -Mode, rechts: Leistungsspektrum. (oben) einfach-periodische VLF_{S2^*} -Mode (P1) bei $Re = 453.75$, (mitte) doppelt-periodische VLF_{S2^*} -Mode (P2) bei $Re = 451.28$, (unten) vierfach-periodische VLF_{S2^*} -Mode (P4) bei $Re = 450.45$.

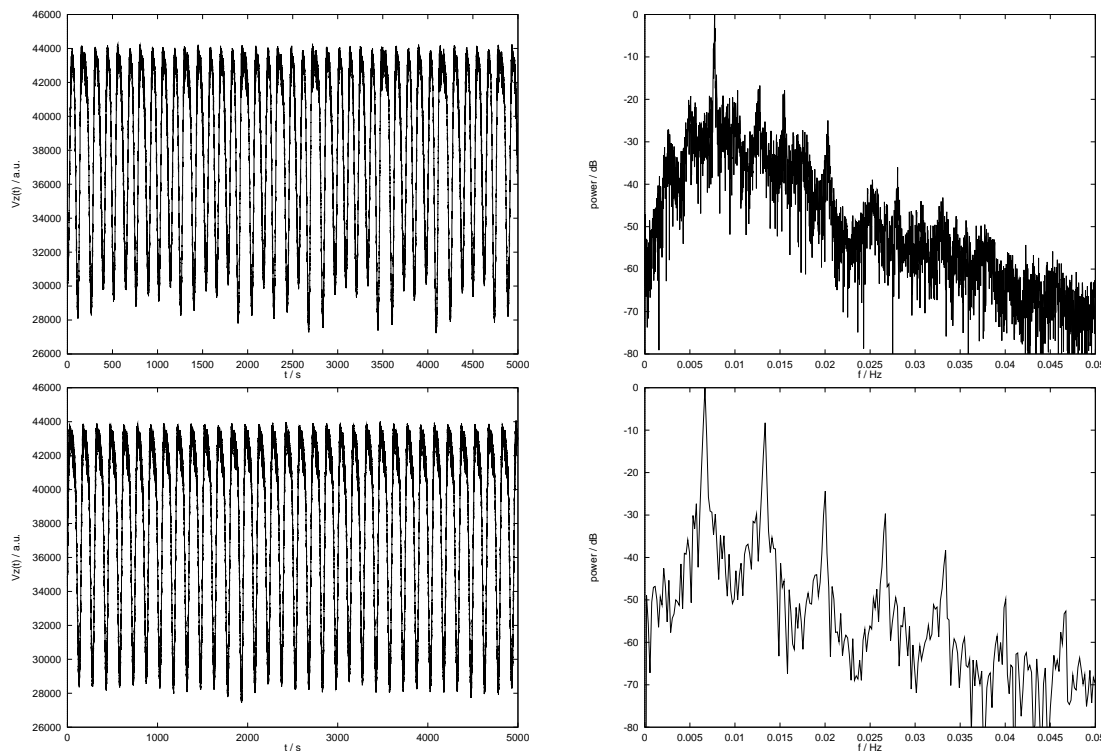


Abb. 8.3: Chaotische und periodische VLF_{S2^*} -Mode im 8-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.8$. Links: Zeitreihe der VLF_{S2^*} -Mode, rechts: Leistungsspektrum. (oben) chaotische VLF_{S2^*} -Mode bei $Re = 447.56$, (unten) periodische VLF_{S2^*} -Mode bei $Re = 447.15$

für diese homokline Verzweigung gegenüber einer heteroklinen Verzweigung im symmetrischen Fall lag in der Entkopplung der lokalen Verzweigungen durch Störungen, die im Experiment auftreten. Für $\Gamma/N = 0.8$ bildet sich zusätzlich in der Umgebung der asymmetrischen Fixpunkte lokal ein Grenzzyklus aus, so daß die homokline Verzweigung lokal durch eine Sattelknoten-Verzweigung periodischer Orbits zustandekommt.

Für $\Gamma/N = 0.8$ konnte im Bereich der VLF_{S2^*} -Mode unmittelbar nach deren Einsetzen über die homokline Verzweigung ein Übergangsszenario gefunden werden, was sehr große Übereinstimmung zu der Verzweigungsstruktur in der Nähe einer homoklinen Verzweigung von Shil'nikov Typ zeigt. Abbildung 8.2 zeigt die Entwicklung der Dynamik der VLF_{S2^*} -Mode im 8-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.8$ bei einer Annäherung an die homokline Verzweigung von höheren Reynoldszahlen aus. Bei $Re = 453.75$ ist die VLF_{S2^*} -Mode noch einfach-periodisch (P1). Bei einer Verringerung der Reynoldszahl tritt eine inverse Periodenverdopplungskaskade auf, wie es auch bei Annäherung an einen homoklinen Orbit von Shil'nikov Typ unter sehr allgemeinen Bedingungen der Fall ist [161, 162]. Die Kaskade konnte bei $\Gamma/N = 0.8$ bis zum vierfach-periodischen Zustand (P4) bei $Re = 450.45$ verfolgt werden. Bei einer weiteren Reduktion der Reynoldszahl geht die VLF_{S2^*} -Mode in einen schwach chaotischen Zustand über. Abbildung 8.3 (oben) zeigt eine Zeitreihe und das zugehörige Leistungsspektrum der chaotischen VLF_{S2^*} -Mode bei $Re = 447.56$. Der Übergang ins Chaos der VLF_{S2^*} -Mode entspricht daher genau dem, der bei einer Shil'nikov-Verzweigung zu beobachten ist.

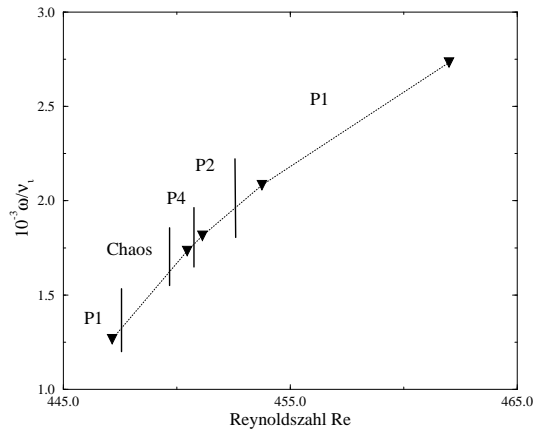


Abb. 8.4: Normierte Frequenzen ω/ν_i der VLF_{S2^*} – Mode im 8-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.8$ für die beobachteten dynamischen Bereiche. Eine weitere Reduktion der Reynoldszahl führt zum Übergang in einen asymmetrischen Zustand.

Eine weitere Reduktion des Kontrollparameters führt bei der Shil'nikov-Verzweigung erneut zum Auftreten einer Periodenverdopplungskaskade, die eine Restabilisierung des periodischen Zustandes mit sich bringt. Dieser periodische Zustand verschwindet dann über eine Sattelknoten-Verzweigung, ohne daß die Periodendauer divergiert. Folgt man der Kaskade des VLF_{S2^*} -Zustandes bei $\Gamma/N = 0.8$ vom chaotischen Bereich zu niedrigeren Reynoldszahlen, so findet man eine Restabilisierung eines einfach-periodischen Zustandes bei $Re = 447.15$. Eine Zeitreihe der VLF_{S2^*} -Mode bei dieser Reynoldszahl ist in Abbildung 8.3 (unten) zu sehen. Allerdings konnte experimentell keine erneute Periodenverdopplungskaskade beobachtet werden. Eine weitere Reduktion der Reynoldszahl vom restabilisierten einfach-periodischen Zustand der VLF_{S2^*} – Mode bei $Re = 447.15$ führt unmittelbar zu einem Übergang in einen asymmetrischen oszillatorischen Zustand. Dabei wurde keine Divergenz der Periodendauer des VLF_{S2^*} -Zustandes beim Übergang in den asymmetrischen Zustand beobachtet. Diese Tatsache ist ein weiterer Hinweis für das Auftreten einer Shil'nikov Verzweigung. Abbildung 8.4 zeigt die verschiedenen dynamischen Bereiche der VLF_{S2^*} -Mode bei $\Gamma/N = 0.8$ im Überblick. Aufgetragen sind die auf die Innenzylinderdrehzahl ν_i normierten Frequenzen der Grundfrequenz ω der VLF_{S2^*} über der Reynoldszahl. Für andere normierte Höhen konnten ähnliche Szenarien beobachtet werden. Abbildung 8.5 zeigt die Ergebnisse der Untersuchungen bei $\Gamma/N = 0.8$, $\Gamma/N = 0.793$, $\Gamma/N = 0.79$ und $\Gamma/N = 0.78$. Für $\Gamma/N = 0.79$ trat ebenfalls eine inverse Periodenverdopplungskaskade von einfach-periodischen VLF_{S2^*} ausgehend auf. Allerdings konnte bei dieser normierten Höhe der vierfach-periodische Zustand (P4) nicht mehr identifiziert werden. Auch war es nicht möglich, den restabilisierten einfach-periodischen Zustand zu präparieren. Für $\Gamma/N \leq 0.78$ bleibt das dynamische Verhalten der VLF_{S2} -Mode einfach-periodisch. Für normierte Höhen $\Gamma/N > 0.8$ konnte der Übergang von periodischem zu chaotischem dynamischen Verhalten bei Reduktion der Reynoldszahl im VLF_{S2^*} -Zustand

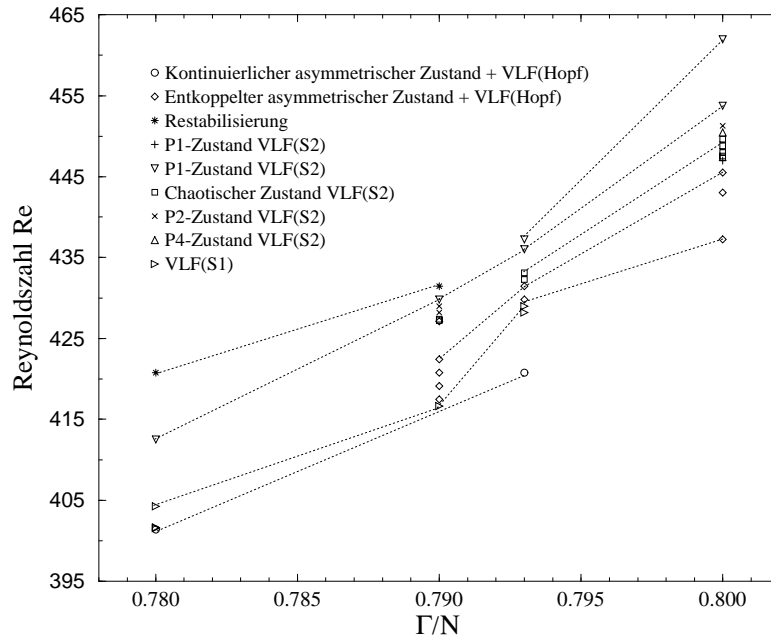


Abb. 8.5: Ausschnitt aus dem Verzweigungsdiagramm des 8-Wirbelzustandes. Neben dem Szenario bei $\Gamma/N = 0.8$ sind auch die beobachteten Zustände der VLF_{S2} -Mode bei $\Gamma/N = 0.793$, $\Gamma/N = 0.79$ und $\Gamma/N = 0.78$ dargestellt.

auch beobachtet werden. Hier war es allerdings experimentell nicht möglich, eine Periodenverdopplungskaskade zu beobachten.

Die Untersuchungen des dynamischen Verhaltens der VLF_{S2^*} -Mode im 8-Wirbelzustand haben eindeutige experimentelle Hinweise für das Auftreten von chaotischer Dynamik in Verbindung mit homoklinen Orbits in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung geliefert. Diese Ergebnisse zeigen zum ersten Mal, daß chaotische Dynamik in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung auch durch eine Wechselwirkung von symmetriebrechender und oszillatorischer Instabilität in Sinne Shil'nikovs organisiert werden kann [133].

8.2 Einsatz von Chaos über Intermittenz

Die Untersuchungen des 8- und des 10-Wirbelzustandes haben gezeigt, daß die Wechselwirkungen zwischen den asymmetrischen Ästen zum Auftreten von chaotischem Verhalten führen. Dieses Verhalten weist dynamisch große Übereinstimmungen mit niederdimensionalem Chaos auf, das in der Umgebung eines homoklinen Orbits vom Shil'nikov-Typ auftreten kann. Für Systeme mit mehr als zehn Wirbeln konnten keine Wechselwirkungen zwischen den periodischen asymmetrischen Zuständen beobachtet werden. Für den 12-Wirbelzustand findet man aber, daß der Übergang ins Chaos von der Wechselwirkung zwischen den beiden asymmetrischen Ästen beeinflusst wird [4].

Dies steht im Widerspruch zu früheren Arbeiten von v.Stamm et al.[142], die auf beiden asymmetrischen Ästen unabhängig voneinander dynamisches Verhalten beobachtet hatten.

Daher wurde erneut eine Analyse des dynamischen Verhaltens des 12- und des 14-Wirbelzustandes durchgeführt. Für den 14-Wirbelzustand konnte in einem sehr kleinen Reynoldszahlbereich vor dem Einsatz von Chaos eindeutig eine Periodenverdopplungskaskade beobachtet werden. v.Stamm et al. [142] haben in Zusammenhang mit diesem Zustand von einem direkten Übergang des periodischen in den chaotischen Zustand berichtet. Die hier beschriebenen Untersuchungen zeigen, daß sich der 14-Wirbelzustand qualitativ wie Zustände mit 16 und mehr Wirbeln verhält. Der 12-Wirbelzustand zeigt indes ein anderes Szenario als Zustände mit einer höheren Anzahl von Wirbeln. Erst eine neue Meßmethode brachte diese Ergebnisse hervor. Während von Stamm et al.[142] die Verzweigungsdiagramme durch quasistatische Erhöhung der Reynoldszahl bestimmten, wurde dieses in dieser Arbeit durch sukzessive Erhöhung der Reynoldszahl bei einer wesentlich längeren Wartezeit zwischen den Reynoldszahländerungen, als es bei der quasistatischen Methode technisch möglich war, durchgeführt. Die Einschwingzeiten in dieser Arbeit betragen dabei bis zu 48 h. Dieses Verfahren ist somit wegen des Zeitaufwandes für systematische Untersuchungen großer Parameterbereiche, wie sie von v.Stamm et al. [142] durchgeführt wurden, nicht praktikabel.

8.2.1 Symmetrisches Chaos

Im 12-Wirbelzustand tritt chaotisches Systemverhalten nicht über eine Periodenverdopplungskaskade, sondern über Intermittenz auf. In Abbildung 8.6 ist eine typische Zeitreihe der chaotischen VLF-Mode, die im 12-Wirbelzustand unmittelbar nach Einsatz des Chaos bei $Re = 412$ und einer normierten Höhe von $\Gamma/N = 0.84$ aufgenommen wurde. Diese Zeitreihe ist, wie alle zuvor gezeigten VLF-Mode-Zeitserien, tiefpaßgefiltert mit einer Cutoff-Frequenz von $f_c = 0.1Hz$. Die Zeitreihe gibt die Dynamik der Strömung in der Zylindermitte ($L/2$) in einem Abstand von $3mm$ vom Innenzylinder wieder. Dabei wurde die axiale Komponente gemessen. Somit entspricht eine Änderung der Strömungsgeschwindigkeit einer axialen Verschiebung Δz des Wirbelsystems, sofern es sich, wie im Fall der VLF-Mode, um kleine Verschiebungen handelt.

Die Zeitreihe in Abbildung 8.6 zeigt die charakteristischen Eigenschaften der chaotischen VLF-Mode im 12-Wirbelzustand. Zunächst erkennt man das Auftreten von laminaren Phasen, die für den Übergang ins Chaos über Intermittenz typisch sind. Als zweites Kennzeichen dieses Zustandes läßt sich festhalten, daß das System zwischen den beiden asymmetrischen Ästen wechselt. Der stabile symmetrische Zustand, der bei kleineren Reynoldszahlen auftritt, entspricht einer Strömungsgeschwindigkeit, die zwischen den beiden asymmetrischen Bereichen in der Zeitreihe lokalisiert ist. Es findet somit ein Übergang von einem asymmetrischen periodischen in einen symmetrischen chaotischen Zustand statt. Die Wiederherstellung der Z_2 -Symmetrie muß dabei im Sinne einer Mittelung verstanden werden [147, 148]. Abbildung 8.7 zeigt diesen Übergang anhand des Verhaltens im rekonstruierten Phasenraum. Dabei wurde eine Einbettung mittels Zeitverzögerung und optimalem Rekonstruktionsparameter verwendet [182, 183, 185, 187]. In Abbildung 8.7 (a) sind beide periodischen Orbits der VLF-Mode zu sehen, die bei

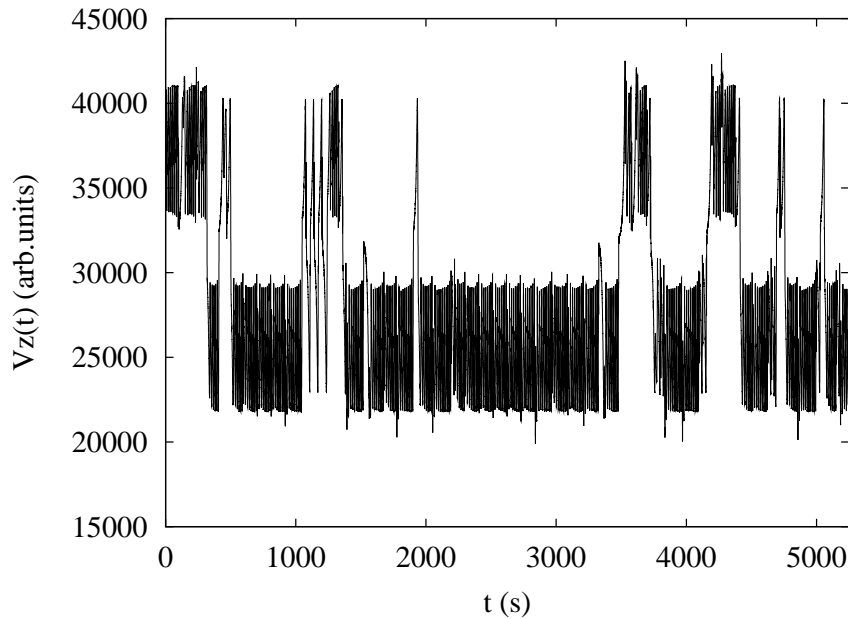


Abb. 8.6: Chaotische VLF-Mode bei $\Gamma/N=0.84$ unmittelbar nach Einsatz des Chaos im 12-Wirbelzustand ($Re = 412$) aufgenommen in der Zylindermitte. Die „schnellen“ Oszillationen der Kleinen-Jet-Mode sind herausgefiltert worden. Deutlich ist das intermittente Verhalten und die Verbindung beider Äste zu erkennen.

$\Gamma/N = 0.84$ und $Re = 411$ jeweils auf den beiden asymmetrischen Ästen auftreten. Der chaotische Attraktor in Abbildung 8.7 (b) entspricht der Zeitreihe aus Abbildung 8.6, und zeigt somit das Verhalten der Strömung bei Erhöhung der Reynoldszahl von $Re = 411$ auf $Re = 412$. Man erkennt deutlich die Position der vormals stabilen periodischen Orbits innerhalb des symmetrischen chaotischen Orbits. Um dieses Verhalten zu verdeutlichen, sind in Abbildung 8.8 Teile des Attraktors aus Abbildung 8.7 (b) dargestellt. Abbildung 8.8 (a) verdeutlicht durch vier verschiedene Ansichten die Struktur des chaotischen Attraktors in der Umgebung des vormals stabilen periodischen Orbits. Dieser Teil des Attraktors entspricht einer laminaren Phase in der in Abbildung 8.6 dargestellten Zeitreihe. Der Wechsel zwischen den asymmetrischen Ästen im chaotischen Fall wird durch den symmetrischen Attraktor in Abbildung 8.8 (b) verdeutlicht.

Innerhalb der experimentellen Genauigkeit von $\Delta Re = 0.2$ konnte keine Hysterese zwischen dem periodischen und dem chaotischen Bereich beobachtet werden. Allerdings muß festgehalten werden, daß in der unmittelbaren Umgebung des kritischen Punktes sehr lange chaotische Transienten aufgetreten sind. Diese können bis zu 24 Stunden dauern, so daß zur Bestimmung des kritischen Punktes Einschwingzeiten bis zu 96 Stunden abgewartet wurden.

Dasselbe Szenario, das bei $\Gamma/N = 0.84$ beobachtet werden konnte, tritt im 12-Wirbelzustand auch für andere Zylinderhöhen auf. Bei kleineren Zylinderhöhen wurde es bis zu einer normierten Höhe von $\Gamma/N = 0.76$ verfolgt. Bei höheren Zylinderhöhen tritt dasselbe Szenario bis zu normierten Höhen von $\Gamma/N = 0.868$ auf. Eine weitere Erhöhung ($\Gamma/N \geq 0.87$) ändert das Verhalten insofern als beim Einsetzen der chaoti-

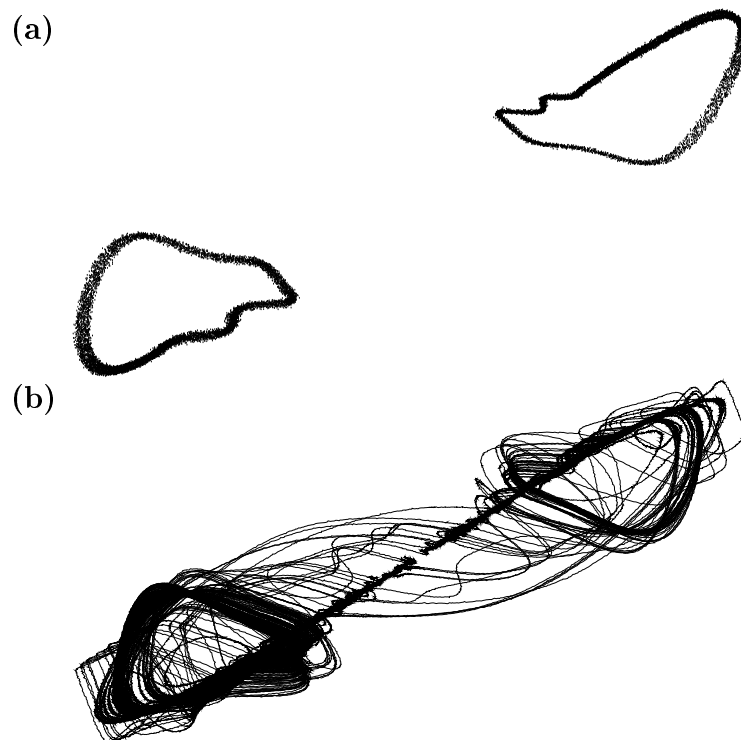


Abb. 8.7: Phasenraumrekonstruktion eines periodischen ($Re = 411$) (a) und eines chaotischen ($Re = 412$) (b) Attraktors der VLF-Mode bei $\Gamma/N = 0.84$. Der chaotische Attraktor korrespondiert mit der Zeitreihe aus Abbildung 8.6. Für den periodischen Zustand sind beide asymmetrischen periodischen Orbits dargestellt.

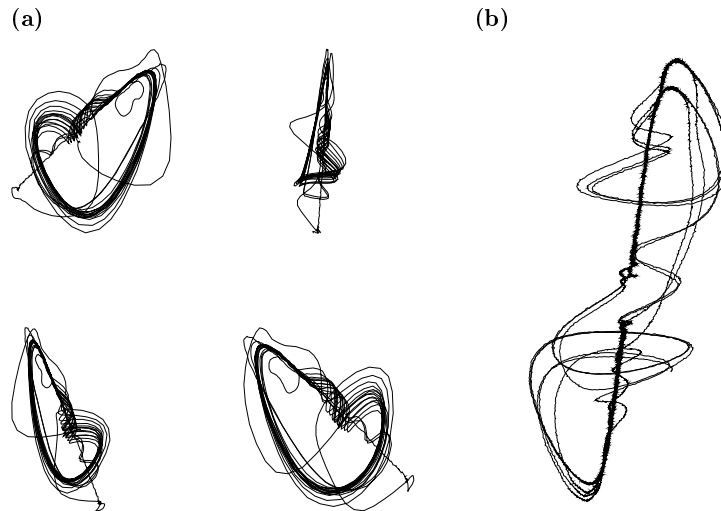


Abb. 8.8: *Rekonstruktion von Teilen des in Abbildung 8.7 gezeigten chaotischen Attraktors: a) Rekonstruktion einer laminaren Phase der intermittenten Zeitserie aus Abbildung 8.7 unter vier verschiedenen Blickwinkeln. Diese Teilattraktoren korrespondieren mit dem periodischen Orbit, der bei $Re = 411$ auftritt. Der symmetrische Attraktor zeigt das Überspringen zwischen den asymmetrischen Zuständen.*

schen Strömung beide asymmetrischen Äste getrennt bleiben, so daß zwei asymmetrische chaotische Attraktoren entstehen. Dabei wurde bei Erhöhung der Reynoldszahl im Fall von asymmetrischem Chaos keine Krise beobachtet, die zu Verschmelzen der beiden asymmetrischen chaotischen Attraktoren zu einem symmetrischen führen. Diese ist somit offenbar nur abhängig von der Zylinderhöhe, so daß es im folgenden sinnvoll erscheint, von einer kritischen normierten Höhe Γ_c/N zu sprechen. In der Nähe dieser kritischen normierten Höhe wurde eine leichte Modulation der periodischen VLF-Mode beobachtet, deren Ursprung allerdings noch nicht geklärt werden konnte.

8.2.2 Untersuchung des Intermittenttyps

Die verschiedenen Intermittenttypen des Pomeau-Manneville-Szenario werden üblicherweise auf Grundlage des Typs der Instabilität des periodischen Orbits charakterisiert [149, 143, 144], obwohl auch die Reinjektion den Typ der Intermittenz beeinflussen kann [153, 154]. Zur Klassifikation des Intermittenttyps, der im Fall der chaotischen VLF-Mode im 12-Wirbelzustand auftritt, wurden sowohl die Wiederkehrabbildung als auch das Skalierungsverhalten untersucht.

Abbildung 8.9 (a) zeigt sehr lange laminare Phasen der chaotischen VLF-Mode, die bei $\Gamma/N = 0.84$ und $Re = 411.6$ aufgenommen worden sind. In Abbildung 8.9 (b) ist die Wiederkehrabbildung exemplarisch für die ersten beiden laminaren Phasen aus (a) dargestellt. Aufgetragen ist dabei jeweils das Maximum einer Oszillation gegen das vorangegangene. Die Reinjektion in die laminare Phase geschieht in der Wiederkehrabbildung über den unteren Ast. Danach hält sich das System für eine gewisse Zeit in der

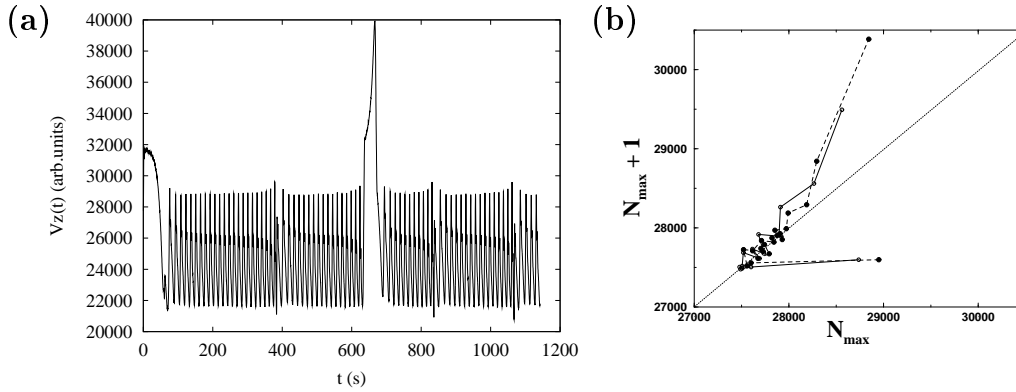


Abb. 8.9: (a) Längste experimentell beobachtete laminare Phasen der VLF-Mode, aufgenommen im 12-Wirbelzustand bei $Re = 411.6$ und $\Gamma/N = 0.84$. (b) Experimentelle Wiederkehrabbildung, exemplarisch für die erste (●) und die zweite (○) laminare Phase aus Zeitserie (a). Aufgetragen ist das Maximum einer Oszillation gegen das vorangegangene.

Umgebung des ursprünglichen stabilen Fixpunkts auf, um dann über den oberen Ast die laminare Phase wieder zu verlassen. Eine qualitativ ähnliche Form der Wiederkehrabbildung wurde in einem Intermittenz-Szenario in einer Rayleigh-Bénard Konvektion beobachtet. Dieses Szenario wird üblicherweise als Prototyp einer Typ-I Intermittenz betrachtet. Das von der theoretischen Form abweichende Aussehen der Wiederkehrabbildung wird dabei durch die Existenz einer zusätzlichen stabilen Mannigfaltigkeit erklärt [151]. Anders als bei Typ-II und Typ-III Intermittenz tritt bei Typ-I Intermittenz kein zusätzliches dynamisches Element zur laminaren Phase hinzu, das auf die Art der Instabilität des periodischen Orbit zurückschließen ließe. Ein solches Element, wie das Auftreten einer instabilen Subharmonischen oder einer zusätzlichen Modulation, kann auch im Fall der VLF-Mode nicht identifiziert werden.

Abbildung 8.10 zeigt die Verteilung der laminaren Phasen der chaotischen VLF-Mode unmittelbar nach Einsatz des Chaos bei $\Gamma = 0.87$ und $Re = 594$. Deutlich zu erkennen ist der „weiche“ Abfall vom Maximum, das in diesem Fall im Intervall $\Delta t = 60 - 80$ s liegt, zu längeren laminaren Phasen. Dieses Verhalten ist charakteristisch für einen Intermittenztyp, der mit der Entstehung eines instabilen Grenzzyklus verbunden ist. Dies ist bei Typ-II und Typ-III der Fall. Charakteristisch für Typ-I Intermittenz wäre eine scharfe Grenze bei den laminaren Phasen. Diese entspricht der längsten Zeit, die es dauert, den Bereich des „Tunnels“ in der Wiederkehrabbildung zu verlassen. Abbildung 8.10 (b) zeigt in doppelt logarithmischer Darstellung die mittlere Länge der laminaren Phasen $\langle \tau \rangle$ aufgetragen über dem relativen Abstand vom kritischen Punkt $\varepsilon = \frac{Re - Re_c}{Re_c}$. Der kritische Punkt ergibt sich dabei aus der Stabilitätsanalyse. Das Skalierungsverhalten, das in Abbildung 8.10 (b) dargestellt ist, korrespondiert mit einem Szenario, daß bei $\Gamma/N = 0.84$ aufgenommen wurde. Es ergibt sich ein Skalierungsgesetz von $\langle \tau \rangle = \varepsilon^{-0.81}$. Zusammen mit zwei weiteren Szenarien, die bei $\Gamma/N = 0.82$ und nochmals bei $\Gamma/N = 0.84$ aufgenommen wurde, ergibt sich ein Skalierungsverhalten von $\langle \tau \rangle = \varepsilon^{-(0.74 \pm 0.05)}$. Dieses Verhalten steht im

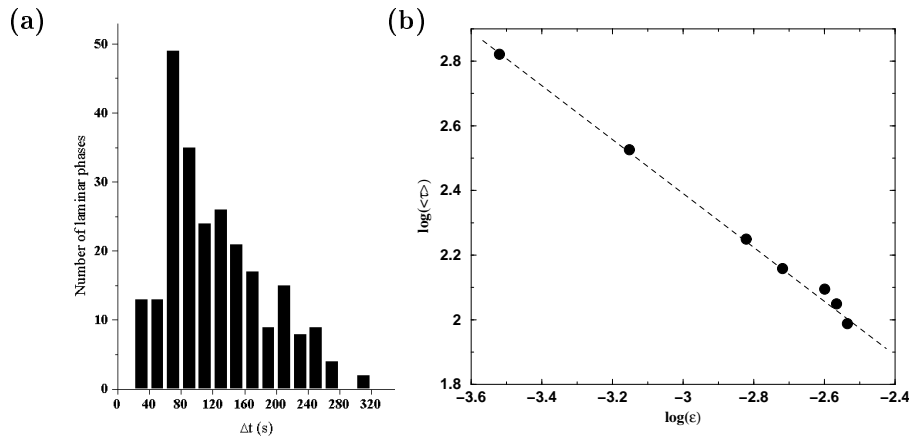


Abb. 8.10: Verteilung der laminaren Phasen der intermittenten VLF-Mode aufgenommen im 12-Wirbelzustand unmittelbar nach Einsatz des Chaos bei $Re = 594$ und $\Gamma/N = 0.87$. Aufgetragen ist die Anzahl der laminaren Phasen über ihrer Länge. (b) Skalierungsverhalten der mittleren Längen der laminaren Phasen $\langle \tau \rangle$ einer intermittenten VLF-Mode-Oszillation bei $\Gamma/N = 0.84$

Widerspruch zum charakteristischen Skalierungsverhalten der drei Intermittenztypen. Während Typ-II und Typ-III Intermittenz mit $\langle \tau \rangle = \varepsilon^{-1}$ skalieren, verhält sich Typ-I mit $\langle \tau \rangle = \varepsilon^{-0.5}$. Das Skalierungsverhalten von Typ-II und Typ-III Intermittenz kann sich allerdings in Abhängigkeit von der Reinjektionswahrscheinlichkeit ändern, so daß auch ein Skalierungsgesetz $\langle \tau \rangle = \varepsilon^{-0.75}$ möglich ist [154, 153]. Für Typ-I können nur Exponenten kleiner 0.5 erreicht werden. Daher widerspricht das experimentell bestimmte Skalierungsverhalten ebenso wie die Verteilung der laminaren Phasen der Annahme, daß es sich bei der im 12-Wirbelzustand auftretenden Intermittenz um den Typ-I handelt. Insbesondere das Skalierungsverhalten und die Verteilung der laminaren Phasen deuten auf die Existenz eines instabilen periodischen Orbits im chaotischen Bereich hin, wie dieses bei Typ-II und Typ-III der Fall ist. Es ergeben sich aber weder aus der Zeitreihe noch aus der Wiederkehrabbildung Hinweise auf die Instabilität des periodischen Orbits, so daß keine eindeutige Zuordnung des Intermittenztyps der VLF-Mode zu den bisher bekannten Typen durchgeführt werden kann.

8.2.3 Experimenteller Shil'nikov Attraktor

Das Szenario im 12-Wirbelzustand zeigt für einige Bereiche der normierten Höhe Γ/N zusätzliche dynamische Eigenschaften, die Rückschlüsse auf die Phasenraumstruktur zulassen. Abbildung 8.11 (a) zeigt eine Zeitreihe eines chaotischen 12-Wirbelzustandes bei $\Gamma/N = 0.8$. Sie gibt das Systemverhalten unmittelbar nach Einsatz des Chaos bei $Re = 366$ wieder. Signifikant sind neben den laminaren Phasen und dem Wechsel zwischen den asymmetrischen Ästen, wie es auch bei $\Gamma/N = 0.84$ der Fall ist (vgl. Abbildung 8.6), Bereiche qualitativ anderen oszillatorischen Verhaltens. Aus Abbildung 8.11 (a) erkennt man, daß diese Bereiche ebenfalls unregelmäßig auftreten, aber dann

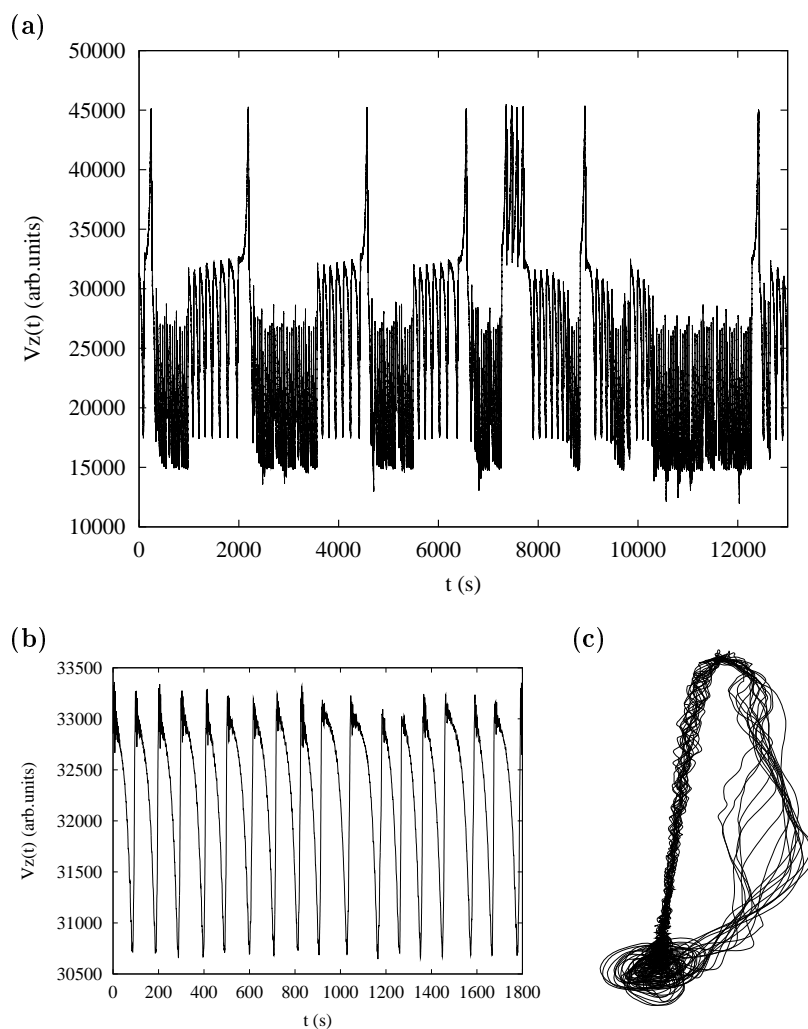


Abb. 8.11: (a) Chaotische VLF-Mode, aufgenommen im 12-Wirbelzustand unmittelbar nach Einsatz des Chaos bei $\Gamma/N = 0.8$ und $Re = 366$. Ein zusätzlicher Typ von Oszillation ist zu sehen. (b) Ausschnitt aus einer Zeitreihe, die bei $\Gamma/N = 0.87$ aufgenommen wurde. (c) Rekonstruierter Attraktor von Zeitserie (b) zeigt eine signifikante Übereinstimmung mit homoklinem Attraktor vom Shil'nikov-Typ

jeweils eine gewisse Zeit andauern. Abbildung 8.11 (b) zeigt eine Phase dieser Oszillationen. Diese Zeitreihe wurde bei $\Gamma/N = 0.87$ unmittelbar nach Einsatz des Chaos bei $Re = 594$ aufgenommen. Die Umgebung der kritischen normierten Höhe ist der zweite Bereich, in dem diese Art von oszillatorischen Verhaltens beobachtet werden konnte. Dabei tritt diese Oszillation nur für $\Gamma/N \geq 0.87$, also im Bereich getrennter asymmetrischer Dynamik auf. Für $\Gamma/N < 0.87$, wo es zu einem Wechsel zwischen den beiden asymmetrischen Ästen kommt, wurde diese Art von Oszillation nicht beobachtet. Abbildung 8.11 (c) zeigt eine Phasenraumrekonstruktion der Zeitreihe aus Abbildung 8.11 (b). Anhand dieses Attraktors wird die Phasenraumstruktur sichtbar. Man erkennt das typische Verhalten, das auch in der Umgebung eines homoklinen Orbits vom Shil'nikov Typ auftritt. Das bedeutet, daß im Bereich des Auftretens dieses Oszillationstyps der instabile symmetrische Fixpunkt in die Dynamik des chaotischen Systems involviert wird. Arneodo et al. [164] konnten in einer Normalform zeigen, daß chaotisches Verhalten durch die Wechselwirkung zwischen einem periodischen Orbit und einem instabilen Fixpunkt auftreten kann, ohne daß es zur Bildung eines homoklinen Orbits kommen muß. Obwohl das dynamische Verhalten des 12-Wirbelzustandes eine komplexere Struktur besitzt als der 8- und der 10-Wirbelzustand, ist auch in diesem Fall die Wechselwirkung zwischen stationären und oszillatorischen Strukturen relevant für die Organisation der Dynamik.

8.3 Analyse der chaotischen Strömung

Die im vorangegangenen Abschnitt dargestellten Ergebnisse haben gezeigt, daß sich der Übergang vom periodischen Strömungsverhalten ins Chaos verhält wie in niederdimensionalen chaotischen Systemen. Diesen ist allerdings eigen, daß die Dimension des chaotischen Attraktors durch die Anzahl der Freiheitsgrade des niederdimensionalen Systems beschränkt ist.

Die Zeitreihe in Abbildung 8.12 zeigt die chaotische VLF-Mode im 12-Wirbelzustand bei $\Gamma/N = 0.84$. Dieser Zustand wurde bei $Re = 509.0$ aufgenommen und ergibt sich somit unmittelbar aus dem in Abbildung 8.6 dargestellten bei Erhöhung der Reynoldszahl. Schon aus der Zeitreihe läßt sich eine signifikante Zunahme der Komplexität des Zeitverhaltens direkt nach dem Einsatz des Chaos erkennen. Um diesen Eindruck zu quantifizieren, wurden Schätzungen der Korrelationsdimension mittels numerischer Verfahren durchgeführt. Das verwendete Verfahren entspricht dem von Grassberger und Procaccia [181, 189].

Um Artefakte bei der Bestimmung der Korrelationsdimension aufgrund einer zu geringen Anzahl von Datenpunkten zu vermeiden, wurde in einer Langzeitmessung eine Zeitreihe des chaotischen Zustandes über 100 Stunden bei einer Abtastfrequenz von 10 Hz aufgezeichnet. Um die Qualität der Schätzung bewerten zu können, ist zusätzlich eine Methode angewendet worden, die bei der Analyse chaotischer Zeitreihen häufig verwendet wird. Aus der chaotischen Zeitreihe werden sogenannte Surrogatzeitreihen erzeugt [189]. Diese Surrogate besitzen die gleichen linearen Eigenschaften wie die Originalzeitreihe, das heißt, sie stimmen im Leistungsspektrum und in der Amplitudenverteilung mit der Originalzeitreihen überein.

Allerdings sind alle nichtlinearen Eigenschaften beseitigt worden, so daß es sich bei

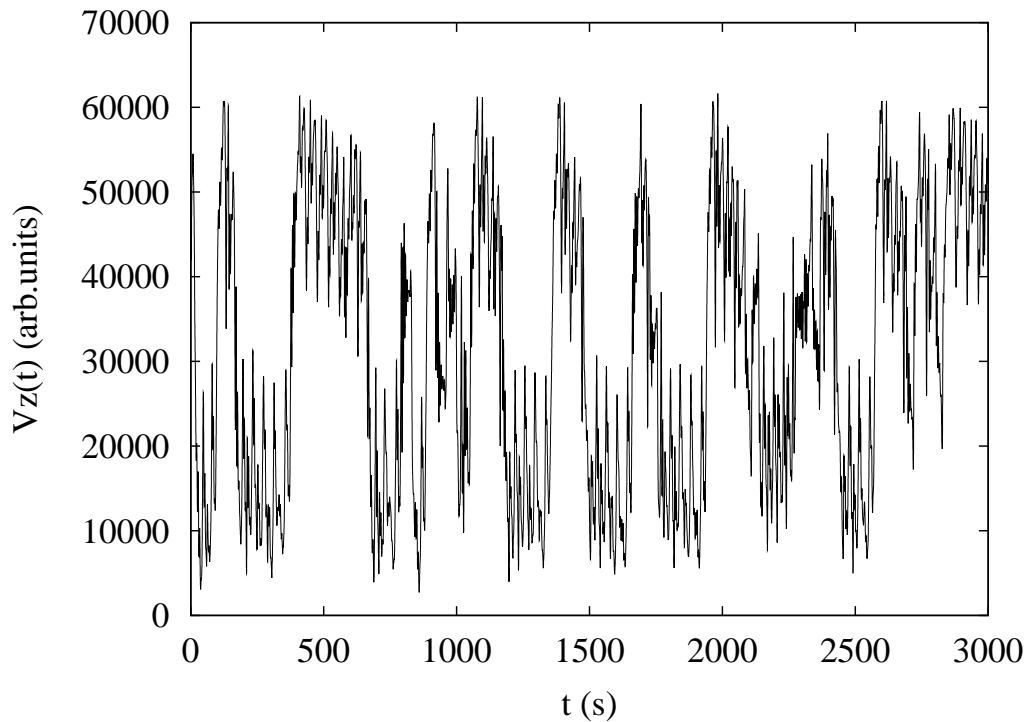


Abb. 8.12: Zeitreihe einer chaotischen VLF-Mode-Oszillation des 12-Wirbelzustandes aufgenommen in der Zylindermittle bei $\Gamma/N = 0.84$ und $Re = 509.0$

den Surrogaten um gefiltertes Rauschen handelt. Bei der Analyse der nichtlinearen Zeitreihe wird dann das entsprechende Maß, wie zum Beispiel die Korrelationsdimension, sowohl von der Originalzeitreihe als auch von den Surrogaten bestimmt.

Abbildung 8.13 zeigt die Ergebnisse der Analyse einer Zeitreihe des chaotischen Zustandes (rechts) und der Surrogatzeitreihen (links). Die Schätzung der Korrelationsdimension bei der chaotischen Zeitreihe ergibt eine signifikante Konvergenz, so daß es sich eindeutig um ein chaotisches Verhalten bei der Zeitreihe in Abbildung 8.12 handelt. Aus Abbildung 8.13 erkennt man allerdings, daß der Wert der Korrelationsdimension ungefähr bei 5.5 liegt. Eine genauere Schätzung ist schwierig, aber für diese Untersuchungen auch nicht notwendig, da es für eine hinreichende Abschätzung der Komplexität der Strömung ausreicht. Eine so hohe Korrelationsdimension wurde in einem experimentellen System bisher kaum beobachtet [189]. Um sicherzustellen, daß es sich nicht um einen Artefakt des Analyseverfahrens handelt, ist eine Schätzung der Korrelationsdimension der Surrogatzeitreihen vorgenommen worden. Die Auswertung der Surrogatzeitreihe, die in Abbildung 8.13 dargestellt ist, zeigt, daß keine Konvergenz bei der Dimensionsbestimmung auftritt. Dieses Ergebnis ist zu erwarten, da es sich bei den Surrogatzeitreihen um gefiltertes Rauschen handelt, die keine fraktale Eigenschaft im Phasenraum besitzen. Eine Konvergenz hätte auf einen Artefakt des Analyseverfahrens hingedeutet. Diese Überprüfung zeigt, daß es sich bei geschätzten Dimension um eine Eigenschaft der chaotischen Strömung handelt.

Aus diesen Analysen wird deutlich, daß es zu einem starken Anstieg der Kom-

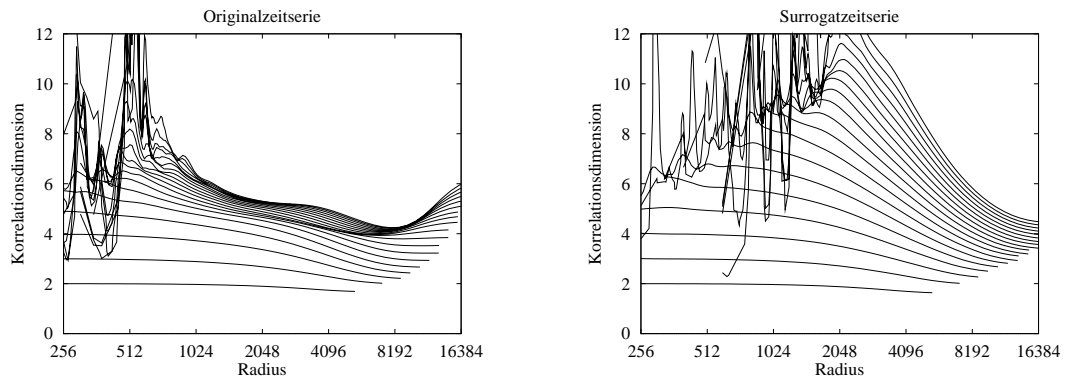


Abb. 8.13: Schätzung der Korrelationsdimension des chaotischen Zustandes, dessen Zeitreihe in Abbildung 8.12 dargestellt ist, (rechts): Schätzung der Korrelationsdimension der Surrogatzeitreihen

plexität im Bereich der chaotischen VLF-Mode bei einer Erhöhung der Reynoldszahl kommt. Während der Einsatz des Chaos im Rahmen eines niederdimensionalen dynamischen Verhaltens beschrieben werden konnte, treten bei Erhöhung der Reynoldszahl offenbar weitere Freiheitsgrade hinzu. Im chaotischen Bereich fern vom Einsatzpunkt muß beachtet werden, daß es sich bei einer Strömung um einen raum-zeitlichen Prozeß handelt, so daß andere Untersuchungsmethoden notwendig werden [189].

9. TAYLOR-COUETTE-STRÖMUNG BEI HÖHEREN REYNOLDSZAHLEN – LOKALISIERTE MODEN

Frühere experimentelle Untersuchungen haben gezeigt, daß bei höheren Reynoldszahlen Strömungszustände auftreten können, bei denen einzelne Wirbelpaare axial lokalisiert oszillieren [191, 193, 195, 117]. Dabei wurden sowohl Zustände mit lokalen Oszillationen der Großen-Jet-Mode als auch mit Oszillationen der Core-Mode beobachtet. Die Zustände der Großen-Jet-Mode sind dabei von v.Stamm [117] und von Abshagen [193] untersucht worden. Sie treten ausgehend von den chaotischen Zuständen der Kleinen-Jet-Mode und der VLF-Mode bei höheren Reynoldszahlen im Bereich $\Gamma/N < 1$ auf. Da die lokal oszillatorischen Zustände vom dynamischen Standpunkt aus zumeist kein komplexes Verhalten aufweisen [193, 117], führt die Erhöhung der Reynoldszahl ausgehend von den hochdimensionalen chaotischen Zuständen zu einer Reduktion der Komplexität und nicht zu einer Erhöhung. Es wurde bisher kein Szenario in der Taylor-Wirbelströmung bei $\eta = 0.5$ beobachtet, das einen stetigen Anstieg der Komplexität von der stationären Taylor-Wirbelströmung aus aufweist [117, 23, 1]. In diesem Kapitel werden systematische Untersuchungen der höheren Instabilitäten der Taylor-Wirbelströmung bei $\eta = 0.5$ für $\Gamma/N > 1$ vorgestellt. Das Auftreten von lokal oszillatorischen Core-Moden wurde in diesem Bereich von v.Stamm[117] beobachtet.

9.1 Lokalisierung in nichtlinearen Systemen

Lokalisierte Strukturen treten in einer Vielzahl von nichtlinearen Systemen auf [17]. In hydrodynamischen Systemen kann dieses zum Beispiel durch Frontpropagation oder Wellenlängenselektion der Fall sein. Frontpropagation im Taylor-Couette System wurde von [76, 77, 78, 79, 80] untersucht. Ein Beispiel von Lokalisierung in Verbindung mit Wellenzahlselektion findet sich bei Hegseth et al.[190]. Sie untersuchten das Auftreten einer inhomogenen Wirbelgrößenverteilung in einer quasi-eindimensionalen Konvektionszelle. Lokalisierte Oszillationen in einem Taylor-Couette-System mit gegenrotierenden Zylindern wurden von Baxter und Andereck [192] untersucht. Sie fanden, daß das Auftreten der lokalen Oszillation auch zu einer lokalen Erhöhung der Wirbelgröße führt. Schulz [194] untersuchte das Auftreten von lokalen Oszillationen in einem Taylor-Couette System bei niedrigen Reynoldszahlen.

Räumlich lokalisierte Oszillationen in einem Taylor-Couette-System wurden zuerst von Pfister [191] gefunden. Dabei handelt es sich um Oszillationen der Großen-Jet-Mode, die bei $\Gamma/N < 1$ auftreten. Umfangreiche experimentelle Untersuchungen dieser Strömungszustände wurden von v.Stamm [117] und Abshagen [193] durchgeführt. Im Vordergrund dieser Untersuchungen stand eine möglichst vollständige Klassifizierung der verschiedenen lokalisierten Zustände und deren Stabilitätsverhalten. Die Un-

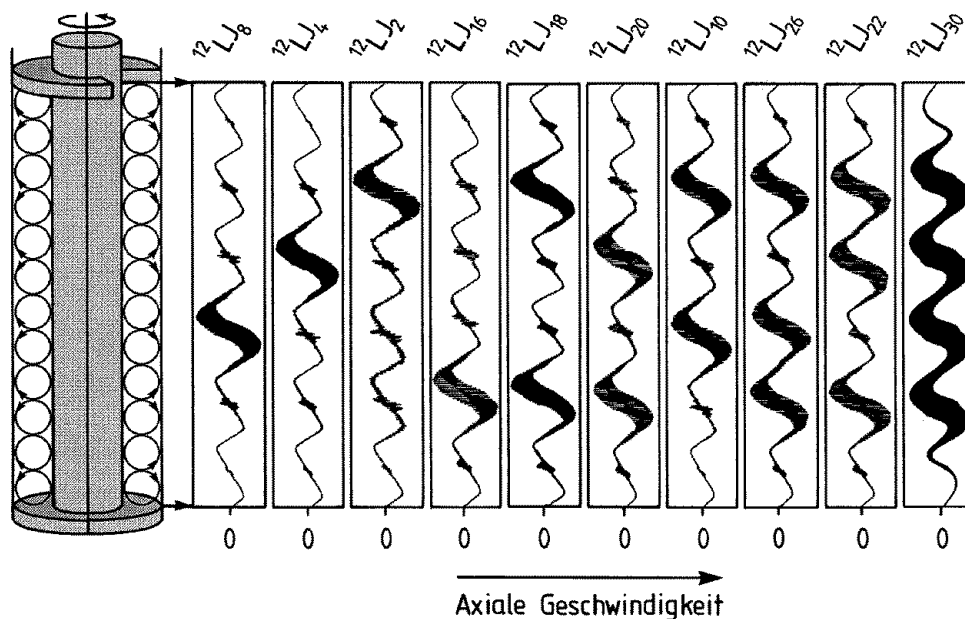


Abb. 9.1: Profile der axialen Strömungsgeschwindigkeit der lokal oszillatorischen Zustände der Großen-Jet-Mode des 12-Wirbelzustandes [193]

tersuchungen wurden wegen der hohen Multiplizität der Lösungen hauptsächlich in Strömungszuständen mit 8 bis 12 Wirbeln durchgeführt, ergänzt von stichprobenartigen Messungen bei Zuständen mit bis zu 40 Wirbeln. Die lokal oszillatorischen Zustände der Großen-Jet-Mode bei 12 Wirbeln sind in Abbildung 9.1 dargestellt. Dabei sind die Profile der axialen Strömungsgeschwindigkeit in einem Abstand von 9mm vom Innenzylinder quasi-statisch aufgenommen worden. Wegen der hohen Multiplizität der möglichen lokal oszillatorischen Zustände wurde eine Kodierung eingeführt [117]. Diese ist für alle untersuchten lokalen Moden identisch. Der vordere obere Index bezeichnet die Wirbelanzahl des Zustandes und die Buchstabenfolge ist ein Kürzel für die lokal auftretende oszillatorische Mode. Die Große-Jet-Mode wird als „LJ“ für „Large-Jet“ bezeichnet, während ein „C“ für lokale Oszillationen der Core-Mode steht.

Der hintere untere Index ist eine binäre Kodierung der axialen Position der lokalen Oszillation vom Zylinderboden aus betrachtet. Dabei wird bei der Großen-Jet-Mode in aufsteigender Folge jedem oszillierenden Wirbelpaar eine „1“ zugeordnet. Liest man die Folge von „1“ und „0“ respektive für ein oszillierendes Wirbelpaar und eines ohne Oszillation vom Boden zum Deckel als Binärzahl, so ergibt der entsprechende Dezimalwert den hinteren Index. Als Beispiel bezeichnet $^{12}LJ_4$ einen 12 Wirbelzustand mit einer lokalen Oszillation der Großen-Jet-Mode im dritten Wirbelpaar vom Zylinderdeckel aus betrachtet (000100). Beim hinteren Index der lokalen Core-Mode muß beachtet werden, daß jedem einzelnen Wirbel eine Binärzahl zugeordnet wird, da die Core-Mode in jedem einzelnen Wirbel unabhängig oszillieren kann. Es treten experimentell nicht alle denkbaren lokalisierten Zustände auf, allerdings wurde zu jedem asymmetrischen Zustand auch der entsprechende spiegelsymmetrische Zustand gefunden. Bei der Untersuchung der strukturellen Eigenschaften zeigte sich, daß eine Oszillation der Großen-Jet-Mode

in einem Wirbelpaar zu einer signifikanten Vergrößerung dieses Wirbelpaares führt. Andere lokalisierte oszillatorische Moden konnten von v.Stamm [117] ebenfalls identifiziert werden. Dabei handelt es sich unter anderem um lokalisierte Oszillationen der Core-Mode, die bei $\Gamma/N > 1$ auftreten.

9.2 Untersuchungen zur lokalisierten Core-Mode

Im Rahmen dieser Arbeit sind die Eigenschaften der lokalisierten Core-Mode experimentell untersucht worden.¹ Ein Hauptteil dieser Untersuchungen befaßt sich mit der Fragestellung, ob ähnliche Eigenschaften, wie sie bei den lokalisierten Oszillationen der Großen-Jet-Mode gefunden werden konnten, auch für die lokalen Oszillationen der Core-Mode zutreffen. Eine systematische Abhängigkeit der Verzweigungssequenzen von der Wirbelzahl, wie man sie qualitativ im Bereich $\Gamma/N < 0.96$ findet, ist für Strömungszustände bei $\Gamma/N > 0.96$ nicht untersucht worden. In diesem Bereich ist allerdings experimentell eine Verschiebung der Verzweigungspunkte der primären zeitperiodischen Instabilitäten in Abhängigkeit von der Wirbelzahl festgestellt worden [116]. Ab einer Wirbelzahl von 30 tritt für $\Gamma/N > 0.96$ nur noch die Wavy-Mode als erste zeitperiodische Instabilität der Taylor-Wirbelströmung auf. Daher ist eine systematische Abhängigkeit, wie sie für $\Gamma/N < 1$ auftritt, schon für die Grundströmung nicht gegeben.

9.2.1 Stabilität und Symmetriebrechung

Ein wesentlicher Unterschied der lokalen Core-Mode zur lokalen Großen-Jet-Mode zeigt sich schon in der Tatsache, daß in jedem Wirbel eines Zustandes eine Oszillation der Core-Mode auftreten kann. Es ergibt sich daher eine wesentlich höhere Anzahl von möglichen Strömungszuständen mit einer lokalen Core-Mode Oszillation, als dieses bei der Großen-Jet-Mode der Fall ist. In diesem Kapitel werden ausschließlich Untersuchungen des 8-Wirbelzustandes dargestellt. Zustände mit anderer Wirbelzahl werden in [195, 196] beschrieben. Im 8-Wirbelzustand könnten prinzipiell 36 verschiedene Zustände mit lokal oszillierender Core-Mode auftreten. Abbildung 9.2 zeigt Strömungsprofile der verschiedenen lokal oszillatorischen Strömungszustände der Core-Mode, die bei einer Messung bei $\Gamma/N = 1.45$ aufgetreten sind. Die Profile zeigen die axiale Strömungskomponente in einem Abstand von 3mm vom Innenzylinder. Dabei ergeben sich die Zustände von links nach rechts durch quasi-statische Erhöhung der Reynoldszahl. In Abbildung 9.2 sind nicht alle möglichen Zustände gezeigt, denn die jeweils spiegelsymmetrischen Zustände können ebenfalls auftreten. Eine umfassende experimentelle Untersuchung des Bereichs $1.1 \leq \Gamma/N \leq 1.6$ zeigte, daß insgesamt 19 verschiedene Zustände mit lokalen Oszillationen der Core-Mode auftreten. Dabei wurden wieder die jeweils zueinander symmetrischen Zustände gefunden. Abbildung 9.3 (oben) zeigt das Stabilitätsdiagramm des 8-Wirbelzustandes in diesem Bereich. Die Punkte geben jeweils die Reynoldszahl an, bei der das System in die entsprechend der Legende angegebenen Zustände übergeht. Dabei wurde bei den Messungen bei fester Zylinderhöhe

¹ Die Messungen wurden in Zusammenarbeit mit U. Gries [195] im Rahmen seiner Diplomarbeit durchgeführt.

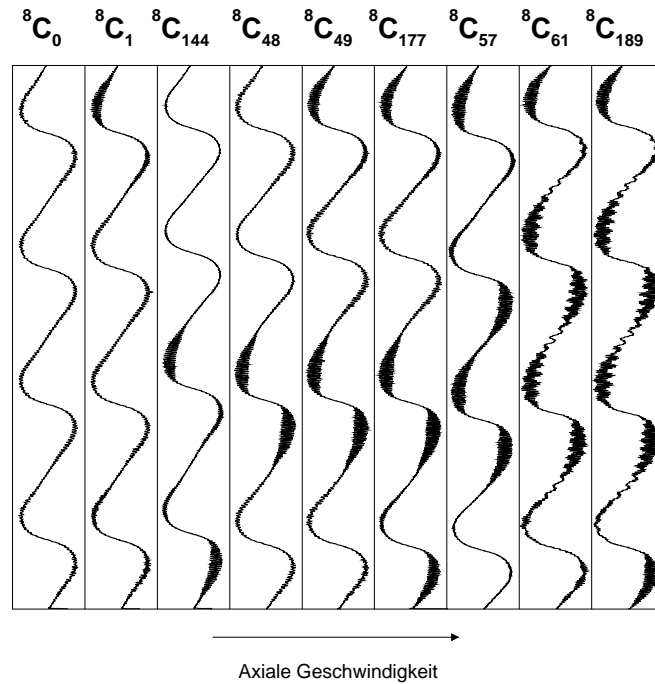


Abb. 9.2: Profile der axialen Strömungsgeschwindigkeiten verschiedener lokal oszillatorischer Zustände der Core-Mode aufgenommen bei $\Gamma/N = 1.45$. Die Reynoldszahl ist von links nach rechts erhöht worden.

die Reynoldszahl von der stationären Taylor-Wirbelströmung aus quasi-statisch erhöht. Die Verzweigungslinien entsprechen daher den Einsatzzpunkten. Weitere systematische Untersuchungen, um die vollständigen Stabilitätsbereiche der einzelnen Zustände zu bestimmen, wurden wegen der hohen Multiplizität nicht durchgeführt. Stichprobenartige Messungen in den Zuständen ${}^8C_{12}$ und ${}^8C_{48}$ bei $\Gamma/N = 1.5$ haben allerdings gezeigt, daß diese Zustände eine Hysterese aufweisen können. Die Reynoldszahl kann bei diesen Zuständen soweit vermindert werden, bis diese lokal oszillatorischen Zustände bei $Re \approx 510$ in die stationäre Taylor-Wirbelströmung übergehen. Das bedeutet, daß ein Koexistenzbereich von stationärer Strömung und lokal oszillatorischen Zuständen auftritt. Abbildung 9.3 (unten) zeigt schematisch eine für den Bereich $1.1 \leq \Gamma/N \leq 1.6$ universelle Sequenz von Verzweigungen, die bei Erhöhung der Reynoldszahl auftreten kann. Dabei ist aus dem Stabilitätsdiagramm ersichtlich, daß nicht alle Übergänge auftreten müssen. Aus dieser Darstellung lassen sich zwei wichtige Beobachtungen ablesen. Zum einen ist ersichtlich, daß es durch den Übergang zwischen den Zuständen zu einer Brechung der Z_2 -Symmetrie kommen kann. Andererseits kann sich das System auch wieder in einem symmetrischen Zustand stabilisieren und somit die Symmetrie der Strömung wieder erhöhen. Somit kann man auch im Bereich $1.1 \leq \Gamma/N \leq 1.6$ davon sprechen, daß Lokalisierung für die Symmetriebrechung aber auch für die Erhöhung der Symmetrie verantwortlich ist. Die zweite Beobachtung ist, daß zu Beginn der Sequenz bei niedrigen Reynoldszahlen nur sehr wenige Wirbel oszillieren, während eine Erhöhung sukzessive zu einer Erhöhung der Anzahl der oszillierenden Wirbel führt. Dieses Verhalten steht im Gegensatz zum Verhalten der lokalen Großen-Jet-Mode,

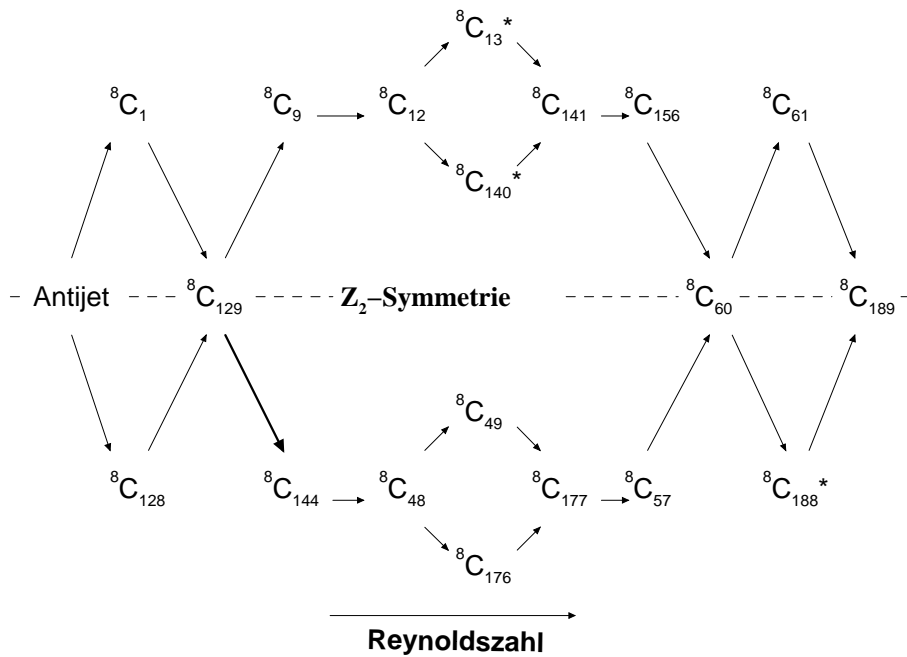
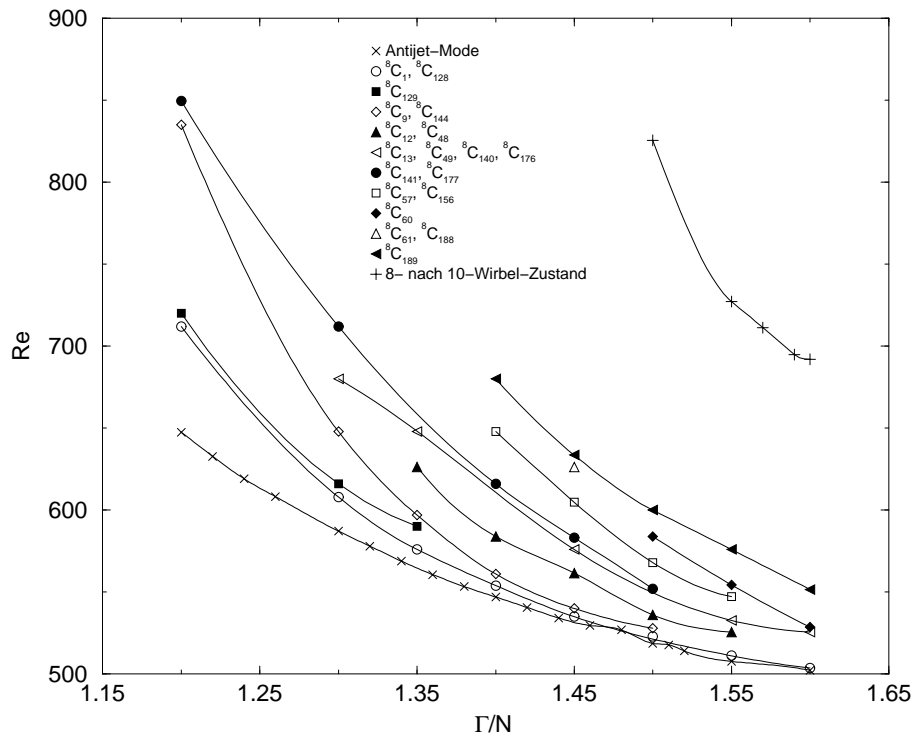


Abb. 9.3: Oben: Ausschnitt aus dem Stabilitätsdiagramm des 8-Wirbelzustandes. Der Einsatz der Antijet-Mode ist von Predtechensky [98, 116] durchgeführt worden. Unten: Schematische Darstellung der auftretenden Verzweigungssequenzen der lokalen Core-Mode im Bereich $1.1 \leq \Gamma/N \leq 1.6$ bei zunehmender Reynoldszahl.

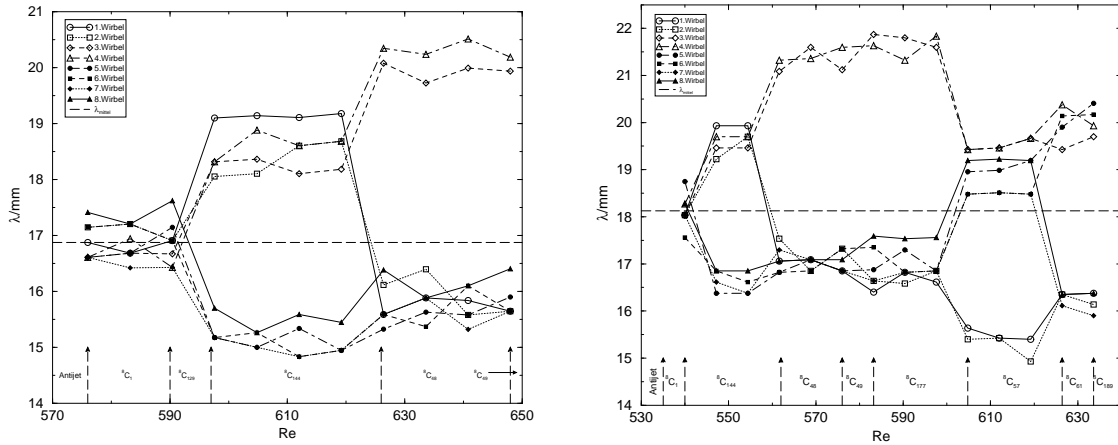


Abb. 9.4: Axiale Verteilung der Wirbelgrößen für verschiedene lokal oszillatorische Zustände ($N = 8$) der Core-Mode bei einer normierten Höhe von (links) $\Gamma/N = 1.35$ und (rechts) $\Gamma/N = 1.45$.

bei der tendenziell bei höheren Reynoldszahlen weniger Wirbelpaare oszillieren als bei niedrigeren.

9.2.2 Wirbelgrößenverteilung

Die Untersuchung der Wirbelgrößen in oszillatorischen Zuständen hat sowohl für die in allen Wirbelpaaren oszillierende Moden als auch für die lokal oszillierenden eine Tendenz zur Vergrößerung der Wirbelgröße durch die Oszillation aufgezeigt [193, 117]. Daher wurden die lokal oszillatorischen Zustände der Core-Mode ebenfalls auf ihre Wirbelgrößenverteilung untersucht. Da bei der Core-Mode die Kerne eines Wirbels oszillieren, die Ein- und Auswärtsströmung aber in Ruhe sind, wurden die Wellenlängen mit Hilfe von Strömungsprofilen, wie sie in Abbildung 9.2 zu sehen sind, bestimmt. Der Fehler liegt dabei bei ca. $\Delta\lambda = 0.3\text{mm}$. Abbildung 9.4 zeigt die Ergebnisse dieser Untersuchungen für $\Gamma/N = 1.35$ (links) und $\Gamma/N = 1.45$ (rechts). Dargestellt sind die Größen der einzelnen Wirbel des 8-Wirbelzustandes vom Boden aus durchnummeriert. Bei $\Gamma/N = 1.35$ tritt, wie aus dem Stabilitätsdiagramm in Abbildung 9.3 ersichtlich, folgende Sequenz von Moden auf:

$$\text{Antijet} \rightarrow {}^8 C_1 \rightarrow {}^8 C_{129} \rightarrow {}^8 C_{144} \rightarrow {}^8 C_{48} \rightarrow {}^8 C_{49} \tag{9.1}$$

Auffällig ist, daß weder der Zustand ${}^8 C_1$ noch der symmetrische Zustand ${}^8 C_{129}$ eine signifikante inhomogene Wellenlängenverteilung besitzen. Erst die Zustände ${}^8 C_{144}$ und ${}^8 C_{48}$ zeigen eine Veränderung der Wirbelgrößen beim Einsetzen einer lokalen Oszillation der Core-Mode. Die Messungen bei Zustand ${}^8 C_{144}$ zeigen, daß nicht nur der Wirbel, der lokal oszilliert, signifikant vergrößert wird, sondern auch der zweite Wirbel eines Wirbelpaares. Dieses gilt hier für den zweiten und dritten Wirbel dieses Zustandes. Beim Übergang von ${}^8 C_{144}$ in den Zustand ${}^8 C_{48}$ paßt sich die Größe des ersten Wirbelpaares an die der übrigen an, und das zweite vergrößert sich. Dabei gibt es im Rahmen der Meßgenauigkeit keine Unterschiede zwischen den einzelnen Wirbeln. Abbildung 9.4

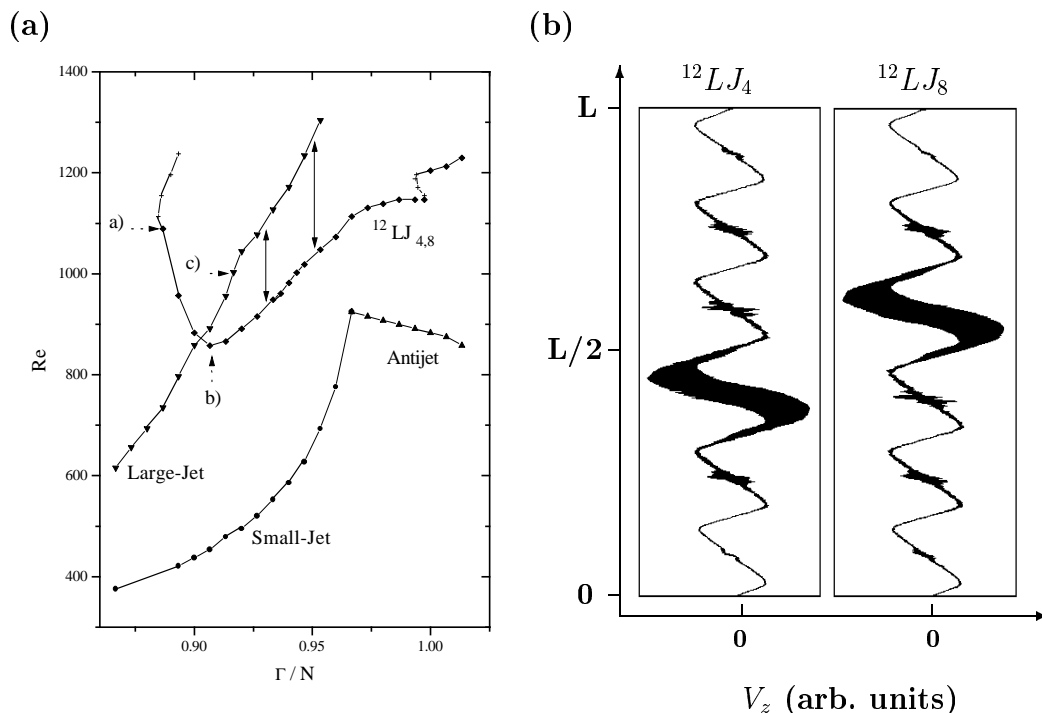


Abb. 9.5: (a) Ausschnitt aus dem Stabilitätsdiagramm des 12-Wirbelzustandes. Dargestellt ist der Einsatz der Kleinen-Jet-, der Großen-Jet- und der Antijet-Mode. Oberhalb des Punktes c) tritt die Große-Jet-Mode axial lokalisiert auf. Die untere Stabilitätslinie der lokal oszillatorischen Zustände $^{12}LJ_{4,8}$ ist ebenfalls dargestellt. Die Pfeile zwischen den Stabilitätslinien zeigen eine Hysterese an. (b): Strömungsprofile der lokal oszillatorischen Zustände $^{12}LJ_{4,8}$ [4].

(rechts) zeigt die Wirbelgrößenverteilung der lokal oszillatorischen Zustände der Core-Mode bei $\Gamma/N = 1.45$. Die bei dieser Höhe auftretende Verzweigungssequenz lautet:

$$Antijet \rightarrow^8 C_1 \rightarrow^8 C_{144} \rightarrow^8 C_{48} \rightarrow^8 C_{49} \rightarrow^8 C_{177} \rightarrow^8 C_{57} \rightarrow^8 C_{61} \rightarrow^8 C_{189} \quad (9.2)$$

Auch bei dieser Zylinderhöhe tritt qualitativ das gleiche Verhalten auf. Lokale Oszillationen der Core-Mode führen zu einer Vergrößerung der Wirbelgröße. Außerdem ist diese Vergrößerung wiederum unabhängig von der Anzahl der Oszillationen in einem Wirbelpaar. Auffällig ist bei $\Gamma/N = 1.45$, daß der Übergang von $^8C_{48}$ auf $^8C_{49}$ und dann auf $^8C_{177}$ zu keiner signifikanten Änderung der Wirbelgrößenverteilung führt. Daher läßt sich schließen, daß eine Oszillation in einem Endwirbelpaar keine Vergrößerung der Wirbelgröße verursacht. Einzige Ausnahme von dieser Regel ist der Zustand $^8C_{144}$. Eine Erklärung dafür gibt es zur Zeit nicht.

9.3 Dynamik der lokal oszillatorischen Zustände

Vom dynamischen Standpunkt aus betrachtet, handelt es sich bei den lokal oszillatorischen Zuständen um periodische, wie bei der lokalen Core-Mode, oder um quasi-

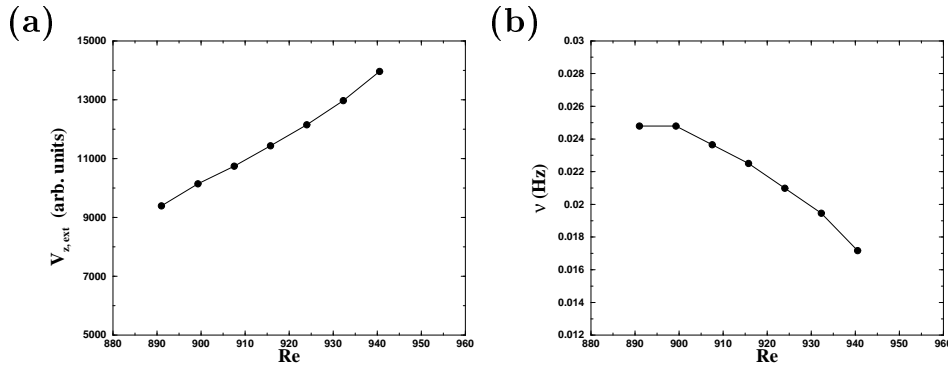


Abb. 9.6: (a) Amplitude der VLF-Mode aufgenommen im Zustand $^{12}LJ_4$ bei $\Gamma/N = 0.9$. Die VLF-Mode tritt bei $Re = 940.5$ mit endlicher Amplitude auf. (b) Oszillationsfrequenz der VLF-Mode [4].

periodische Zustände, sofern die lokalen Oszillationen in einem zeitperiodischen Zustand auftreten. Letzteres ist zum Beispiel beim Einsetzen der lokalen Großen-Jet-Mode mit unterliegender Kleiner-Jet-Mode der Fall. Experimentelle Untersuchungen der lokal oszillatorischen Zustände sowohl der Core-Mode als auch der Großen-Jet-Mode haben gezeigt, daß auch in diesen Zuständen sehr langsame Modulationen auftreten können. Dabei unterscheiden sich, wie im folgenden gezeigt wird, die Art dieser langsamen zeitperiodischen Moden qualitativ.

Abbildung 9.5 zeigt einen Ausschnitt des Stabilitätsdiagramms des 12-Wirbelzustandes. In diesem Diagramm ist der Einsatz der Kleinen-Jet-Mode, der Antijet-Mode und der Großen-Jet-Mode eingezeichnet. Die Große-Jet tritt für größere normierte Höhen $\Gamma/N > 0.89$ (Punkt c) nicht mehr in jedem Wirbelpaar, sondern nur noch axial lokalisiert auf. Zusätzlich ist die untere Stabilitätsgrenze der Zustände $^{12}LJ_{4,8}$ eingezeichnet. Oberhalb des Punktes a) findet der Übergang in den 10-Wirbelzustand statt. Bei einer normierten Höhe von $\Gamma/N = 0.9$, durch den Punkt b) im Diagramm gekennzeichnet, konnte im Bereich der Zustände $^{12}LJ_4$ eine sehr langsame zusätzliche Oszillation gefunden werden. Abbildung 9.6 zeigt die Amplitude (links) und Oszillationsfrequenz (rechts) dieser Mode. Die Oszillation setzt bei $Re = 940.5$ bei Reduzierung der Reynoldszahl mit endlicher Amplitude und sehr kleiner Frequenz ein. Da bei diesem Übergang keine Hysterese festgestellt werden konnte, deutet dieses auf eine inverse homokline Verzweigung hin, wie sie auch beim Einsatz der VLF-Mode im Bereich der Kleinen-Jet-Mode auftritt, obwohl die Hinweise nicht so deutlich sind wie bei dieser. Dynamisch verhält sich der Zustand $^{12}LJ_4$ wie ein stabiler T^3 -Torus bestehend aus Großen-Jet-Mode, Kleiner-Jet-Mode und VLF-Mode. Eine weitere Reduktion der Reynoldszahl ausgehend vom periodischen VLF-Bereich des Zustandes $^{12}LJ_4$ führt zu einem Aufbrechen des T^3 -Torus. Abbildung 9.7 zeigt ein Szenario, das im Zustand $^{12}LJ_4$ bei $\Gamma/N = 0.9$ aufgetreten ist. Dabei zeigen die Zeitreihen (a) nur die VLF-Mode Oszillationen. Die „schnellen“ Oszillationen der Kleinen-Jet- und der Großen-Jet-Mode sind herausgefiltert worden. Die Attraktoren (b) sind ebenfalls nur aus den VLF-Mode Zeitreihen rekonstruiert worden. Der periodische Zustand (Abbildung 9.7, 1) ist bei $Re = 924$ aufgenommen worden. Deutlich zu erkennen sind kleine Schwankungen in

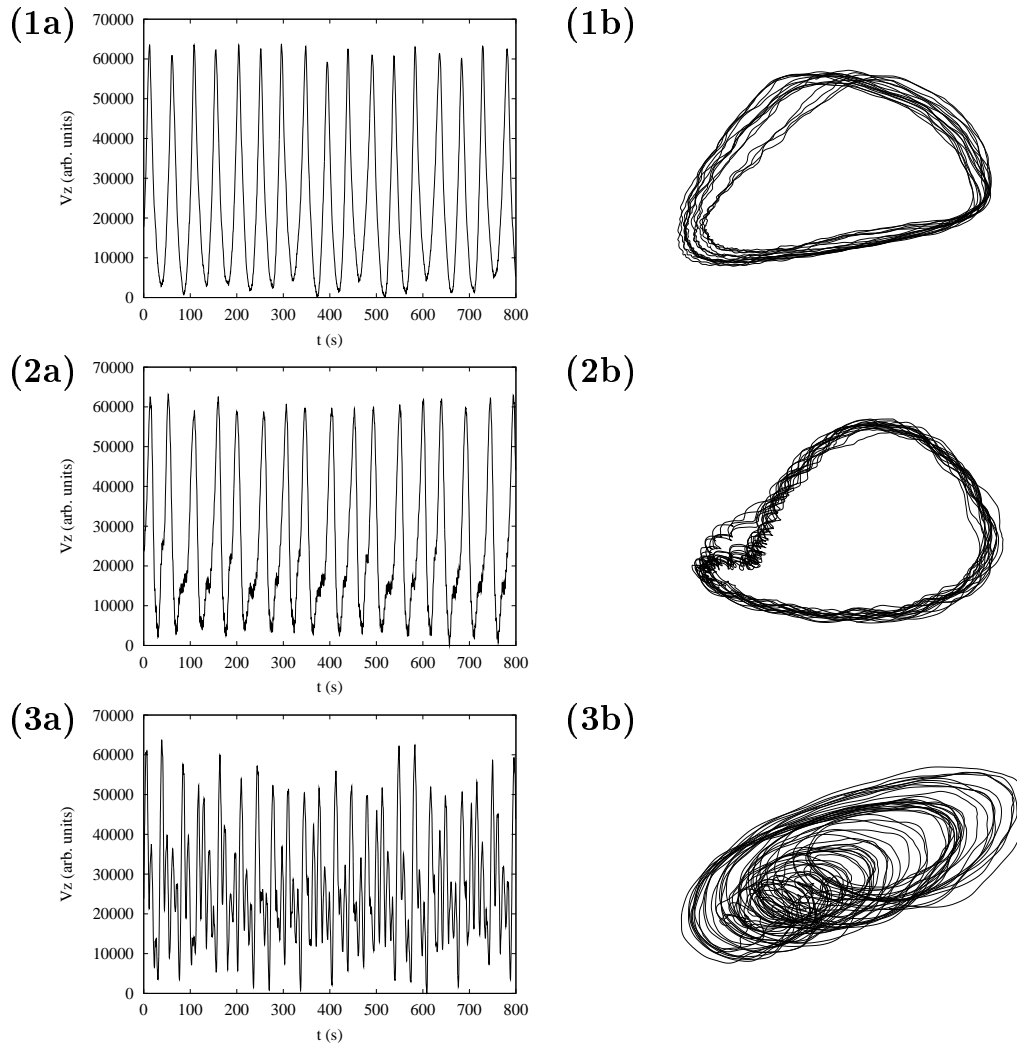


Abb. 9.7: Übergang ins Chaos im Bereich der VLF-Mode des Zustandes $^{12}LJ_4$ bei $\Gamma/N = 0.9$. (a) Zeitreihen und rekonstruierte Attraktoren (b) der VLF-Mode aufgenommen bei (1) $Re = 924$, (2) $Re = 866.2$ und (3) $Re = 849.8$ [4].

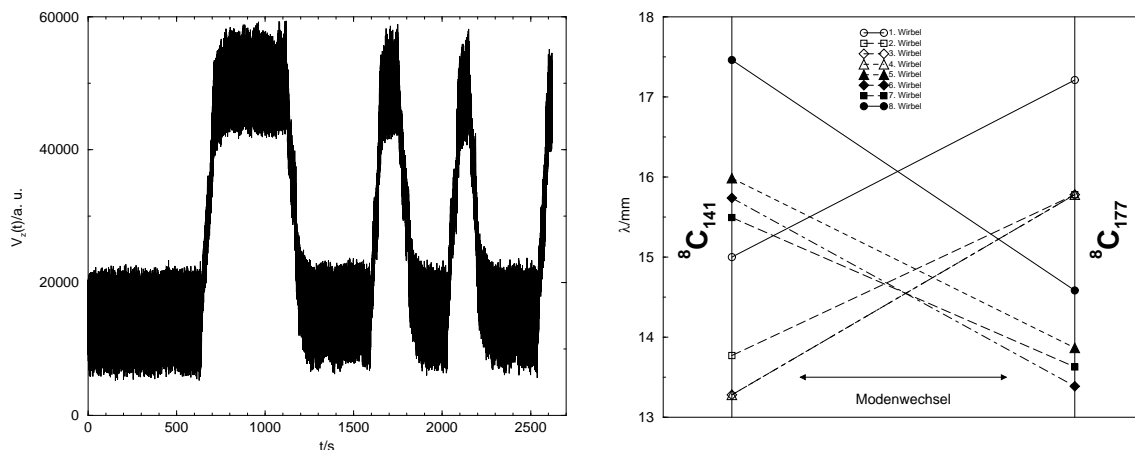


Abb. 9.8: Links: Zeitreihe des oszillatorischen Zustandes aufgenommen bei $\Gamma/N = 1.2$ und $Re > 842$ in der Zylindermitte. Rechts: Schematische Darstellung der Änderung der Wirbelgrößenverteilung beim dynamischen Wechsel zwischen den Moden ${}^8C_{141}$ und ${}^8C_{177}$.

der Amplitude der periodischen Schwingung. Diese sind vermutlich nicht die Auswirkung eines dynamischen Effektes, sondern treten aufgrund experimenteller Grenzen auf, denn die Amplituden der beiden herausgefilterten Jet-Moden sind wesentlich größer als die der VLF-Mode. Eine Reduktion der Reynoldszahl führt zu einer Zunahme der Irregularität, wie es in Abbildung 9.7 (2) zu sehen ist. Diese Zeitreihe wurde bei $Re = 866.2$ aufgenommen. Eine weitere Reduktion der Reynoldszahl führt dann unmittelbar zum Einsatz von chaotischem Verhalten. Dieser Zustand ist in Abbildung 9.7 (3) dargestellt. Die Zeitreihe wurde bei $Re = 849.8$ aufgenommen. Dynamisch findet man im Zustand ${}^{12}LJ_4$ bei $\Gamma/N = 0.9$ einen aufbrechenden T^3 -Torus. Eine weitere Reduktion führt zum Übergang eines anderen lokal oszillatorischen Zustandes der Großen-Jet-Mode. Ein interessantes dynamisches Phänomen konnte im Bereich der lokalen Core-Moden bei $\Gamma/N = 1.2$ beobachtet werden. Für $Re > 842$ tritt ein Zustand auf, der dynamisch zwischen den beiden stationären Zuständen ${}^8C_{141}$ und ${}^8C_{177}$ wechselt. Abbildung 9.8 zeigt eine Zeitreihe des stationären dynamischen Zustandes, die bei $\Gamma/N = 1.2$ und $Re > 842$ in der Zylindermitte aufgenommen worden ist. Daneben ist schematisch die Änderung in der Wirbelgrößenverteilung beim Wechsel zwischen den beiden Zuständen dargestellt. Messungen haben ergeben, daß der Wechsel für $Re = 842.4$ einsetzt und daß bei steigender Reynoldszahl die Frequenz des Wechsels zunimmt. Ein solches dynamisches Phänomen, welches auch die axiale Position der Oszillationen beinhaltet, konnte bisher in einem Taylor-Couette System noch nicht beobachtet werden.

10. DISKUSSION

Im Rahmen dieser Arbeit wurden verschiedene Aspekte des Übergangs vom laminaren Zustand in räumlich und zeitlich komplexes dynamisches Verhalten der Taylor-Couette-Strömung experimentell untersucht. Gegenstand der Untersuchungen war zunächst, ob beim Übergang von der laminaren Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung ein „critical-slowness“ auftritt. Die Verlangsamung der Dynamik bei Annäherung an einen kritischen Punkt ist eine allgemeine Eigenschaft von Instabilitäten. Sie führt zu einer Divergenz der Zeitkonstanten nach einem Skalierungsverhalten $\tau = \tau_0 \varepsilon^{-1}$. Für die Taylor-Couette-Instabilität läßt sich dieses Verhalten aus der nichtlinearen Analyse herleiten [55, 12]. Sie führt für Systeme mit unendlicher Ausdehnung in axialer Richtung zu einer Landau-Gleichung für die Beschreibung der Taylor-Wirbelströmung im überkritischen Bereich. Das aus der Landau-Theorie folgende wurzelförmige Ansteigen der Strömungsamplitude in der Zylindermitte konnte in experimentellen Systemen nachgewiesen werden [12, 15, 53, 117]. Die Eigenschaft des „critical-slowness“ beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung wurde von Gollub und Freilich [70] in einem Taylor-Couette-Experiment mit $\eta = 0.612$ untersucht. Um Störungen zu minimieren, die durch die experimentellen Ränder in das System eingebracht werden könnten, wählten sie ein Strömungssystem mit einem Höhen- zu Spaltbreitenverhältnis von $\Gamma = 30.5$. Sie fanden eine Abhängigkeit der reziproken Zeitkonstanten von $1/\tau = a_0 = (0.33 \pm 0.01) \varepsilon^{1.01 \pm 0.03}$ vom relativen Abstand zum kritischen Punkt. Sie sahen es daher als bestätigt an, daß beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung ein „critical-slowness“ auftritt. Bei ihren Untersuchungen wurde implizit angenommen, daß die durch die Ränder eingebrachten Störungen bei einem Übergang zu Systemen unendlicher Ausdehnung in axialer Richtung verschwinden würden und daher keine prinzipielle Einschränkung der Anwendbarkeit der Landau-Theorie auf endliche Systeme darstellen.

Aus den Arbeiten von Benjamin und Mullin [61, 62, 63, 65] wurde allerdings deutlich, daß sich die Taylor-Couette-Strömung in einem endlichen System prinzipiell anders verhält, als die Taylor-Couette-Instabilität in einem in axialer Richtung unendlich ausgedehnten. Sie führten zusammen mit A. Cliffe experimentelle und numerische Stabilitätsuntersuchungen durch und fanden Zustände der Taylor-Wirbelströmung, deren Umlaufsinn an den Endplatten umgekehrt zu dem der Taylor-Wirbel ist, die sich bei kontinuierlicher Erhöhung der Reynoldszahl ergeben. Sie nannten diese Zustände „anormale“ Moden [65, 66]. Sie fanden, daß der kritische Punkt dieser anormalen Moden zwar mit der Spaltbreite variiert, aber unabhängig von der Systemlänge ist [66]. Insbesondere liegt dieser Einsatzzpunkt im Sinne einer schwachen nichtlinearen Analyse weit entfernt vom Einsatzzpunkt der Taylor-Couette-Instabilität, die bei $\eta = 0.5$ bei $Re = 68.2$ einsetzt, für dieses Radienverhältnis bei ungefähr $2.5 Re_c$. Auf dieser Grundlage entwickelte Schaeffer [64] ein Modell, das die Randbedingungen in die Be-

schreibung des Taylor-Couette-Überganges einführte. Er tat dieses auf Grundlage eines Homotopie-Parameters τ , der bei $\tau = 0$ den theoretisch einfacher zu behandelnden periodischen Randbedingungen und bei $\tau = 1$ den realistischen festen Endplatten entspricht. Diese Untersuchungen zeigten, daß der Übergang zur Taylor-Wirbelströmung in einem endlichen System prinzipiell keine Instabilität darstellt, da der Einfluß der Ränder auf das Stabilitätsverhalten auch für sehr große Systeme nicht abnimmt. Wäre dies der Fall könnte man von einer gestörten Taylor-Couette-Instabilität sprechen, die im Sinne einer Landau-Theorie, wie sie für unendlich ausgedehnte Systeme gültig ist [55, 12], beschrieben werden kann.

Aufgrund dieser prinzipiellen Widersprüche zwischen den Stabilitätsuntersuchungen von Benjamin und Mullin [61, 62, 63, 65] und den Ergebnissen von Gollub und Freilich [70] wurden in dieser Arbeit weitere experimentelle Untersuchungen des Relaxationsverhaltens am Übergang zur Taylor-Wirbelströmung durchgeführt. Anders als bei den Untersuchungen von Gollub und Freilich [70] wurden in dieser Arbeit Messungen in Zuständen verschiedener Wirbelzahl vorgenommen, um die Abhängigkeit der Relaxation von den Randbedingungen feststellen zu können. Da die Stabilitätsuntersuchungen von Benjamin und Mullin [61, 62, 63, 65] keine explizite Aussage über das Relaxationsverhalten machen, wurden die Meßergebnisse im Sinne der Landau-Theorie ausgewertet. Diese ermöglicht eine Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen von Gollub und Freilich [70].

In der Landau-Theorie treten keine Unterschiede in den Zeitkonstanten zwischen dem Einsatz und dem Abklingen des überkritischen Zustandes auf. Um den prinzipiellen Einfluß von Störungen auf das Relaxationsverhalten im Experiment zu untersuchen, wurde zunächst ein Übergang von einem symmetrischen 2-Wirbelzustand in einen asymmetrischen 1-Wirbelzustand betrachtet [122, 120]. Bei diesem Zustand tritt theoretisch eine symmetriebrechende Verzweigung auf, die im Experiment entkoppelt ist [122]. Es zeigte sich, daß Störungen das Abklingen der Strömungsamplitude deutlich weniger beeinflussen als das Einsetzen der 1-Wirbelströmung von einem unterkritischen 2-Wirbelzustand aus. Während die Zeitkonstanten des Abklingprozesses mit dem theoretischen Verlauf bis nahe an den kritischen Punkt qualitativ übereinstimmen, treten beim Einsatzprozeß bei einem deutlich größeren relativen Abstand vom kritischen Punkt Abweichungen von der Theorie auf.

Die Untersuchungen des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung zeigte für alle vier betrachteten Zylinderhöhen ein Verhalten, wie es auch bei der symmetriebrechenden Verzweigung beobachtet wurde. Allerdings setzt die Anwendbarkeit der Landau-Theorie auf endliche Systeme voraus, daß der Einfluß von Störungen bei Zunahme der Zylinderlänge abnimmt und sich dem kritischen Verhalten bei unendlicher Ausdehnung annähert. Dies konnte für das Relaxationsverhalten nicht beobachtet werden. Es trat im Gegenteil für Zustände größerer Wirbelzahl eine deutlich stärkere Diskrepanz zwischen Einsatz und Abklingen der Strömungsamplitude der Taylor-Wirbelströmung auf, so daß der Einfluß der Ränder, wie beim Stabilitätsverhalten, auch für das Relaxationsverhalten nicht vernachlässigt werden kann. Daher tritt in einem endlichen Taylor-Couette-System zwar eine Verlangsamung im Bereich des Einsetzens der Taylor-Wirbelströmung auf. Entgegen den Aussagen von Gollub und Freilich [70] ist diese Verlangsamung aber keine kritische Verlangsamung [75].

Explizite theoretische Voraussagen für das in dieser Arbeit gefundenen Relaxationsverhalten gibt es zur Zeit nicht. Das Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung wird theoretisch meist in einem einseitig berandeten System unter dem Aspekt der Frontpropagation untersucht [77, 78, 79, 80]. Diese Untersuchungen belegen, daß die Geschwindigkeit der Front $v = v_0\sqrt{\varepsilon}$ beträgt. Experimentell wurde diese Abhängigkeit von Ahlers et al.[76] untersucht. Sie fanden eine Bestätigung des prinzipiellen Verhaltens, konnten allerdings die genauen theoretischen Vorhersagen nicht bestätigen [76, 79]. Bei den Untersuchungen von Ahlers et al.[76] wird der Einfluß der Ränder nicht betrachtet, so daß eine direkte Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen dieser Arbeit nicht möglich ist.

Da in dieser Arbeit das Verhalten eines beidseitig berandeten Systems untersucht wurde, sind die theoretischen Ergebnisse [77, 78, 79, 80] ebenfalls nicht direkt übertragbar, obwohl der Einfluß räumlicher Propagationsprozesse auf das Relaxationsverhalten eine sehr naheliegende Erklärung für die Ergebnisse dieser Arbeit darstellt. Numerische Berechnungen der Relaxation in beidseitig berandeten Prozessen auf Grundlage der Navier-Stokes-Gleichungen sind von Neitzel [72] durchgeführt worden. Seine Wahl des Anfangswertes läßt allerdings keinen direkten Vergleich der Ergebnisse zu.

Trotz der Diskrepanzen von endlichen und unendlichen Systemen beim Übergang von der Couette- zur Taylor-Wirbelströmung treten auch im endlichen System bei Erhöhung der Reynoldszahlen zeitperiodische Instabilitäten auf, die zu rotierenden Wellen führen [116, 82, 83, 88]. Diese wurden in theoretischen Analysen von [81, 82, 83, 84, 86, 87] mit dem Ziel untersucht, die Einsatzpunkte sowie die Wellenzahlen und Wellengeschwindigkeiten für verschiedenen Radienverhältnisse zu bestimmen. Nach diesen Analysen treten die rotierenden Wellen über eine Hopf-Verzweigung auf. Experimentelle Untersuchungen dieser strukturellen Eigenschaften und des Stabilitätsverhaltens wurden von [88, 89, 90, 91, 76, 93, 94, 95, 96, 97, 98] durchgeführt. Die für diesen Verzweigungstyp charakteristische Eigenschaft des „critical-slowing-down“ konnte für die Kleine-Jet-Mode [116] in einer Taylor-Couette Strömung mit $\eta = 0.5$ in dieser Arbeit nachgewiesen werden. Pfister und Gerds [102] fanden diese Eigenschaft zuvor am Übergang zur Wavy-Mode. Die Untersuchungen der Kleinen-Jet-Mode in dieser Arbeit zeigten aber auch eine signifikante Abweichung von dem theoretischen Verhalten des „critical-slowing-down“. Dadurch wird deutlich, daß weitere Prozesse am Einsatz der Kleinen-Jet-Mode beteiligt sein müssen, die aber die Instabilität nicht zerstören, wie es beim Taylor-Couette-Übergang der Fall ist. Dieses Verhalten war bisher nicht bekannt. Bisher unbekannt war auch der Einfluß der zeitperiodischen Strömung auf die Stabilität der axialsymmetrischen Wirbelströmung. Insgesamt zeigen diese Ergebnisse, daß in endlichen Systemen zwar eine Hopf-Verzweigung beim Einsetzen der zeitperiodischen Moden beteiligt ist, aber auch weitere Prozesse auftreten, deren Existenz bisher nicht bekannt war.

Die Arbeiten von Gollub und Swinney [135] und Fenstermacher, Swinney und Gollub [136] zeigten, daß irreguläres Strömungsverhalten nicht als Folge sukzessiven Auftretens oszillatorischer Instabilitäten zu verstehen ist, wie es von Landau und Hopf [6] vorgeschlagen wurde. Sie fanden in einem Taylor-Couette-System ein Szenario, bei dem auf eine quasi-periodische Strömung ein zeitlich irregulärer Zustand folgte. Brandstätter et al. [137] und Brandstätter und Swinney [139] konnten nachweisen, daß ein „seltsamer“ Attraktor in einer zeitlich irregulären Taylor-Couette-Strömung, die

auf einen quasi-periodischen Strömungszustand folgt, auftritt. Sie konnten damit zeigen, daß sich eine Strömung wie ein niederdimensionales chaotisches System verhalten kann. Der Übergang vom quasi-periodischen Bereich in einen irregulären Strömungszustand wird dabei häufig im Zusammenhang mit dem Ruelle-Takens-Szenario gebracht [135, 136, 139, 138].

Coughlin und Markus [113, 114] bezweifelten bei ihrer Analyse des Einsetzens der quasiperiodischen Taylor-Wirbelströmung die Relevanz des Ruelle-Takens-Szenarios für das Auftreten irregulären Strömungsverhaltens nach einer quasiperiodischen Taylor-Couette-Strömung. Sie argumentierten, daß der Übergang in einem mitrotierenden Bezugssystem ein Übergang von einem Grenzyklus in einen chaotischen Zustand darstellt. Zur Zeit gibt es daher keine befriedigende Erklärung für das Auftreten von chaotischem Strömungsverhalten, das als Folge einer Reynoldszahlerhöhung aus einem quasiperiodischen Zustand des Taylor-Couette Systems entsteht.

Aufgrund der hohen Anzahl von räumlichen Freiheitsgraden, die in ausgedehnten Systemen auftreten können, sind systematische Untersuchungen niederdimensionaler chaotischer Dynamik hauptsächlich in kleinen Systemen durchgeführt worden [121, 123, 124, 132, 131, 128, 127, 145, 152, 151, 144]. In diesen Systemen ist die Anzahl der räumlichen Freiheitsgrade stark reduziert [60, 63, 120, 122]. Pfister et al. [121, 123, 124] fanden in einer Taylor-Couette-Strömung mit zwei Wirbeln Periodenverdopplungskaskaden und Intermittenzen.

Eine systematische Untersuchung der Organisation von niederdimensionaler chaotischer Dynamik in der Taylor-Couette-Strömung wurde von Mullin et al. [126, 125, 127, 128, 131, 132] durchgeführt. Für ihre Untersuchungen betrachteten sie einen 4-Wirbelzustand in einem modifizierten Taylor-Couette-System mit $\eta = 0.5$ [125, 127, 128]. Durch experimentelle und numerische Analysen der Verzweigungsstruktur konnten sie in dieser Strömung symmetriebrechende und Hopf-Verzweigungen finden. Ihre Untersuchungen zeigten, daß die Wechselwirkung dieser Verzweigungen verantwortlich für die Entstehung chaotischen Strömungsverhaltens ist. Sie beobachteten Hinweise auf Shil'nikov-Chaos [127] und einen neuen Typ von Intermittenz [128]. In ihrer Arbeit betonten sie die Bedeutung der Z_2 Symmetrie für die Organisation chaotischen Verhaltens in der Taylor-Couette-Strömung [131, 132]. Ihre Untersuchungen beschränkten sich aber auf kleine Systeme und relativ niedrige Reynoldszahlen. Sie konnten daher keine Aussagen über die Entstehung von Chaos machen, das in größeren Zylindern bei höheren Reynoldszahlen in der zeitabhängigen Taylor-Wirbelströmung auftritt. v.Stamm et al. [142, 117] untersuchten den Übergang in Chaos als Folge von sukzessiven Instabilitäten in einer Taylor-Couette-Strömung bei $\eta = 0.5$. Sie fanden eine „universelle“ Abfolge von Strömungszuständen ausgehend von der Taylor-Wirbelströmung bei Erhöhung der Reynoldszahl für Zustände mit einer Wirbelzahl von 10 bis 50 Wirbeln. Sie zeigten, daß in einer quasiperiodischen Taylor-Couette-Strömung bestehend aus einer nicht-axialsymmetrischen zeitperiodischen Mode und einer axialsymmetrischen zeitperiodischen Mode ein Übergang in einen chaotischen Strömungszustand über eine Periodenverdopplungskaskade auftritt. Sie fanden außerdem, daß vor der oszillatorischen Instabilität der axialsymmetrischen Mode in der zeitabhängigen Strömung eine symmetriebrechende Verzweigung im System entsteht.

In dieser Arbeit wurden die Organisation chaotischer Dynamik des von v.Stamm et

al.[142] dargestellten Szenarios untersucht. Dazu wurden umfangreiche experimentelle Untersuchungen in Zuständen mit kleinerer Wirbelzahl als in [142] durchgeführt. Durch die Ausweitung der experimentellen Untersuchungen zu kleineren Systemen bis hin zum 4-Wirbelzustand konnte eine Wechselwirkung zwischen der symmetriebrechenden Verzweigung und den axialsymmetrischen oszillatorischen Instabilitäten identifiziert werden. Eine experimentelle Verzweigungsanalyse ergab, daß sich das beobachtete Stabilitätsverhalten im Rahmen einer Wechselwirkung der symmetriebrechenden Verzweigung und einer oszillatorischen Instabilität konsistent beschreiben läßt. Insbesondere konnten homokline Verzweigungen identifiziert werden. Experimentelle Untersuchungen in der Umgebung dieser homoklinen Verzweigungen zeigten eindeutige Hinweise, daß chaotische Dynamik im Sinne Shil'nikovs auftritt. Damit konnte erstmalig demonstriert werden, daß chaotische Dynamik in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung nicht ausschließlich auf Kopplungen von zeitperiodischen Moden zurückzuführen ist, wie es bisher für die quasi-periodische Strömung angenommen wurde, sondern daß auch die Wechselwirkung von symmetriebrechender und oszillatorischer Instabilität zu chaotischem Strömungsverhalten führen kann. Durch diese Arbeit liegen erstmalig eindeutige Hinweise auf einen Mechanismus vor, der für die Organisation niederdimensionalen chaotischen Verhaltens in der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung verantwortlich ist [4, 133].

Zusammen mit den von v.Stamm et al. [142] gewonnenen Ergebnissen, ergibt sich nun ein konsistentes Szenario, das sich von sehr kleinen zu sehr großen Wirbelzahlen erstreckt. Insbesondere läßt sich aus diesem Szenario erkennen, daß nur in einem Zwischenbereich von Zuständen eine direkte Wechselwirkung der asymmetrischen Strömung chaotisches Verhalten hervorruft. Für Zustände größerer Wirbelzahl vereinfacht sich die Verzweigungsstruktur aufgrund der Trennung der Lösungsäste.

Die experimentellen Untersuchungen der lokal oszillatorischen Core-Moden haben gezeigt, daß auch im Bereich $\Gamma/N > 1$ sehr ähnliche Organisationsprinzipien gelten, wie im Bereich $\Gamma/N < 1$ [1, 193, 117] auftreten. Insbesondere führt das lokale Auftreten der Core-Mode auch zu einer Vergrößerung des Wirbelpaares, in dem die rotierende Welle lokalisiert ist. Während allerdings die Große-Jet-Mode in der Mitte eines Wirbelpaares lokalisiert ist und die beiden Wirbel eines Paares gleichmäßig vergrößert, führt das Auftreten der Core-Mode auch zu einer gleichmäßigen Vergrößerung der einzelnen Wirbel eines Paares, wenn nur einer der beiden Wirbelkerne oszilliert. Aufgrund der Untersuchungen der lokalen Core-Moden ergibt sich ein zusammenhängendes Bild über das prinzipielle Verhalten der höheren Instabilitäten des Taylor-Couette-Systems bei $\eta = 0.5$ [196].

11. ZUSAMMENFASSUNG

Chaos und Verzweigungen sind fundamentale Eigenschaften von nichtlinearen Systemen, die sie von linearen unterscheiden. In dieser Arbeit wurden Untersuchungen an einem hydrodynamischen Präzisionsexperiment durchgeführt, um grundsätzliche Eigenschaften von Instabilitäten und dem Einsetzen chaotischen Verhaltens in Strömungen aufzuklären.

Zwischen den numerisch ermittelten und den experimentell gemessenen Verzweigungen beim Übergang zur Taylor-Wirbelströmung treten nicht nur quantitative sondern auch qualitative Unterschiede auf. Diese kommen dadurch zustande, daß bei theoretischen Untersuchungen periodische Randbedingungen angenommen wurden, die das Verhalten unendlich langer Zylinder widerspiegeln. Die theoretisch vorhergesagte Gabelverzweigung wurde unter anderem als Grundlage für die experimentelle Untersuchung des Relaxationsverhaltens genommen. Dabei konnte scheinbar ein „critical-slowng-down“ beobachtet werden.

Erneute Messungen des Relaxationsverhaltens, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, zeigen, daß beim Übergang zur Taylor-Wirbelströmung zwar eine Verlangsamung der Dynamik auftritt aber keine „kritische“ Verlangsamung, da die Randbedingungen auch bei großen Systemen nicht vernachlässigt werden können. Damit werden die Stabilitätsanalysen bestätigt, das heißt, es handelt sich beim Einsetzen der Taylor-Wirbelströmung wegen der Randbedingungen nicht um eine Verzweigung.

Aufgrund von theoretischen Untersuchungen wird das Einsetzen der zeitperiodischen Moden in der stationären Taylor-Wirbelströmung als eine Hopf-Verzweigung beschrieben. Experimentelle Untersuchungen in dieser Arbeit konnten zwar grundlegende Eigenschaften dieser Beschreibung, wie das Auftreten eines „critical-slowng-down“ bestätigen. Sie zeigten aber auch, daß diese Beschreibung nicht hinreichend für alle zeitperiodischen Moden ist. Durch Abweichungen vom theoretisch erwarteten kritischen Verhalten konnte die Beteiligung weiterer Prozesse am Einsatz der zeitperiodischen Moden nachgewiesen werden, die bisher unberücksichtigt waren. Außerdem deckten diese Untersuchungen einen Einfluß der zeitperiodischen Mode auf das Stabilitätsverhalten der Taylor-Wirbelströmung auf, der bisher völlig unbekannt war.

Das Auftreten von komplexem Verhalten ist eine typische Eigenschaft von Strömungen. Zum Verständnis der Mechanismen, die zum Einsetzen dieses komplexen Verhaltens führen, ist aber eine genaue Kenntnis der Verzweigungsstruktur des Systems nötig. Im Rahmen dieser Arbeit konnte durch eine systematische experimentelle Analyse die Verzweigungsstruktur der Instabilitäten einer wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung identifiziert werden. Die Untersuchungen zeigten, daß die Brechung der Spiegelsymmetrie des Systems für die Organisation chaotischen Verhaltens in dieser Strömung verantwortlich ist. Es konnten eindeutige experimentelle Hinweise gefunden werden,

daß das Zusammenwirken von symmetriebrechender und oszillatorischer Instabilität zum Auftreten von homoklinem Chaos im Sinne Shil'nikovs führt. Dies sind die ersten experimentellen Ergebnisse dieser Art für eine Strömung bei höheren Reynoldszahlen. Sie belegen, daß entgegen allen bisherigen Annahmen die wellenförmige Taylor-Wirbelströmung nicht nur durch Kopplung von zeitlichen Moden, sondern auch durch die Wechselwirkung von symmetriebrechender und oszillatorischer Instabilität ins Chaos übergehen kann.

Frühere experimentelle Untersuchungen hatten gezeigt, daß bei höheren Reynoldszahlen lokalisierte zeitperiodische Oszillationen in der Taylor-Couette-Strömung auftreten können. Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen konnten charakteristische Eigenschaften der bisher untersuchten Zustände auch für solche nachweisen, bei denen eine andere zeitperiodische Mode auftritt. Somit ergibt sich gemeinsam mit den früheren Ergebnissen ein einheitliches Bild des prinzipiellen Verhaltens der höheren Instabilitäten des Taylor-Couette Systems.

Die Ergebnisse dieser Arbeit stellen einen Ausgangspunkt für die Untersuchung weiterer grundlegender Eigenschaften einer Strömung auf dem Weg zur Turbulenz dar. Wie die Schätzungen der Korrelationsdimension der chaotischen Zustände bei höheren Reynoldszahlen zeigt, tritt bei einer kleinen Erhöhung der Reynoldszahl vom Einsatzpunkt des Chaos aus ein hochdimensionales chaotisches Verhalten auf. Daher bricht die räumliche Kohärenz auf, die beim Auftreten niederdimensionalem chaotischen Verhaltens noch vorhanden ist, und die raum-zeitliche Abhängigkeit wird für die Organisation irregulären Verhaltens relevant. Somit stellt die chaotische Taylor-Couette-Strömung eines der wenigen experimentellen Systeme dar, an denen der Übergang von niederdimensionalem Chaos in einen raum-zeitlichen chaotischen Zustand untersucht werden kann.

Die Analyse nichtlinearer Systeme ist ohne die detaillierte Betrachtung der auftretenden Verzweigungen und ihrer gegenseitigen Wechselwirkungen nicht möglich. Dieses wurde durch die experimentellen Untersuchungen in dieser Arbeit eindringlich demonstriert.

LITERATURVERZEICHNIS

Teile der Arbeit wurden bereits veröffentlicht in:

- [1] J.Abshagen, A.Schulz, G.Pfister: *The Taylor-Couette flow: A paradigmatic system for instabilities, pattern formation, and routes to chaos*; in [21], p.63
- [2] J.Abshagen, J.von Stamm, D.Roth, U.Gerds and G.Pfister: *Phase dynamics in Couette-Taylor flow with realistic boundary conditions*; Proceedings, 10th International Couette-Taylor Workrshop, Paris (1997)
- [3] J.Abshagen and G.Pfister: *Chaotic homoclinic and heteroclinic dynamics in Taylor-Couette flow*; Proceedings, 11th International Couette-Taylor Workshop, Bremen (1999)
- [4] J.Abshagen, G.Pfister: *Low-dimensional dynamics of axisymmetric modes in wavy Taylor vortex flow*; in [24]
- [5] sowie durch Beiträge auf nationalen und internationalen Tagungen

Hydrodynamik und nichtlineare Instabilitäten

- [6] L.D.Landau, E.M.Lifschitz : *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 6: Hydrodynamik*; Akademie Verlag (1991)
- [7] D.J.Tritton: *Physical fluid dynamics*; Oxfort UP (1988)
- [8] S.Chandrasekhar: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*; Oxford, Clarendon Press (1961)
- [9] P.G.Drazin, W.H.Reid: *Hydrodynamic stability* Cambridge UP (1981)
- [10] H.Oertel, J.Delfs: *Strömungsmechanische Instabilitäten*; Springer (1996)
- [11] J.T.Stuart: *Nonlinear stability theory*; Annu.Rev.Fluid Mech. (1971) 347
- [12] H.L.Swinney, J.P.Gollub (ed.): *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*; Top.Appl.Phys. vol.45, Springer (1985) 2nd. Edition
- [13] R.C.Di Prima, H.L.Swinney: *Instabilities and transition in flow between concentric rotating cylinders*; in [12], 139

-
- [14] H.Haken: *Synergetik*; Springer (1989) 3.Auflage
- [15] G.Ahlers: *Experiments on bifurcation and one-dimensional patterns in non-linear systems far from equilibrium*; in D.Stein (ed.): *Complex systems*; Addison-Wesley (1989)
- [16] P.Manneville: *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic Press (1991)
- [17] M.C.Cross, P.C.Hohenberg: *Pattern formation outside of equilibrium*; Rev.Mod.Phys. **63** num.3 (1993) 851
- [18] P.Chossat, G. Iooss: The Couette-Taylor problem; Springer AMS **102** (1994) **111**, (1995) 125
- [19] R.Tagg: *The Taylor-Couette problem*; Non.Sci.Today **4** (1994) 1
- [20] L.Kramer, W.Pesch: *Convection instabilities in nematic liquid crystals*; Annu.Rev.Fluid Mech. **27** (1995) 515
- [21] J.Parisi, S.C.Müller, W.Zimmermann (Eds.): *Nonlinear physics of complex systems: Current status and future trends*; Lec.Not.Phys. **476**; Springer (1996)
- [22] F.H.Busse, S.C.Müller (Eds.): *Evolution of spontaneous structures in dissipativ continuous systems*; Lec.Not.Phys. **m55** Springer (1998)
- [23] F.H.Busse, G.Pfister, D.Schwabe: in [22]
- [24] C.Egbers, G.Pfister (ed.): *Physics of rotating fluids*; Springer Lec.Not.Phys., erscheint im Sommer (2000)
- [25] E.L.Koschmieder: *Bénard cells and Taylor vortices*, Cambridge UP (1993)
- [26] J.Guckenheimer, P.Holmes: *Nonlinear oscillators, dynamical systems, and bifurcation of vector fields*; AMS 42, Springer (1983)
- [27] M.Golubitsky, D.G.Schaeffer: *Singularities and groups in bifurcation theory: Vol. I*; AMS 51, Springer (1985)
- [28] M.Golubitsky, I.Stewart, D.G.Schaeffer: *Singularities and groups in bifurcation theory: Vol. II*; AMS 69, Springer (1988)
- [29] S.Wiggins: *Global bifurcations and Chaos*; AMS 73, Springer (1988)
- [30] P.Glendinning: *Stability, instability and chaos*; Cambridge UP (1994)
- [31] Y.A.Kuznetsov: *Elements of applied bifurcation theory*; AMS 112, Springer (1995)
- [32] J.D.Crawford, E.Knobloch: *Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics*; Annu.Rev.Fluid Mech **23** (1991) 341

-
- [33] G.Dangelmayr, L.Kramer: *Mathematical tool for pattern formation*; in [22]
- [34] M.Golubitsky, I.Stewart: *Hopf bifurcation in the presence of symmetry*; Arch.Rat.Mech.Anal. vol**86** (1984) 107
- [35] P.Hirschberg, E.Knobloch: *Complex dynamics in the Hopf bifurcation with broken translational symmetry*; Physica D **90** (1996), 56
- [36] A.S.Landsberg, E.Knobloch: *Oscillatory bifurcation with broken translational symmetry*; Phys.Rev.E **53** num.4 (1996) 3579
- [37] J.Langenberg: *Messungen hydrodynamischer Strömungszustände in einem Taylor-Couette System mittels Digital Particle Image Velocimetry*; Diplomarbeit, Universität Kiel (2000)
- [38] M.Raffel, C.Willert, J.Kompenhans: *Particle image velocimetry: A practical guide*; Springer (1998)
- [39] T.S. Durrani, C.A. Greated: *Laser systems in flow measurements*; Plenum Press, New York (1977)
- [40] F. Durst, A. Melling, J.H. Whitelaw: *Principles and practice of Laser-Doppler-anemometry*; Academic Press, London (1976)
- [41] Eckelmann: *Einführung in die Strömungsmesstechnik*; Teubner (1997)
- [42] H. Oertel, H. Oertel: *Optische Strömungsmesstechnik*; G.Braun, Karlsruhe (1989)
- [43] G.Pfister, U.Gerds, A.Lorenzen, K.Schätzel: in *Photon correlation techniques in Fluid mechanics*; ed. O.Schulz-Dubois, Springer Series in optical science vol. **38**, Springer (1983), p.256

Axialsymmetrische Taylor-Wirbelströmung

- [44] C.Egbers, H.J.Rath: *The existence of Taylor vortices and wide-gap instabilities on spherical Couette flow*; Acta Mechanica, vol. **111** (1995) 125
- [45] C.D.Andereck, S.S.Liu, H.L.Swinney: *Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders*; J.Fluid Mech. **164** (1986) 155
- [46] A.Schulz: *Verzweigungen und Strukturen in der Strömung zwischen unabhängig rotierenden Zylindern*; Dissertation, Universität Kiel (2000)
- [47] A.C.Newell, J.A.Whitehead: *Finite bandwidth, finite amplitude convection*; J.Fluid.Mech. **38**, (1969) 203
- [48] L.A.Segel: *Distant side-walls cause slow amplitude modulation of cellular convection*; J.Fluid.Mech. **38**, (1969) 279

-
- [49] R.Graham, J.A.Domaradzki: *Local amplitude equation of Taylor vortices and its boundary condition*; Phys.Rev. A **26** num.3 (1982)1572
- [50] M.A.Dominguez-Lerma, D.S.Cannell, G.Ahlers: *Eckhaus boundary and wave-number selection in rotating Couette-Taylor flow*; Phy.Rev.A **34** num.6 (1986) 4956
- [51] G.Ahlers, D.S.Cannell, M.A.Dominguez-Lerma, R.Heinrichs *Wavenumber selection and Eckhaus instability in Couette-Taylor flow*; Physica D **23** (1986) 202
- [52] U. Gerdt: *Induzierte und spontane Phasendiffusion in der Taylor-Couette-Strömung*; Dissertation, Universität Kiel (1985)
- [53] T.Reimers: *Einflüsse der Modulation des Kontrollparameters auf dynamische Systeme*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1989)
- [54] G.I.Taylor: *Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders*; Phil.Trans.Roy.Soc-London A **223** (1923) 289
- [55] A.Davey, R.C.Di Prima, R.C.Stuart: *On the instability of Taylor vortices*; J.Fluid Mech. **31** (1968) 17
- [56] G.Pfister, I.Rehberg: *Space-dependent order parameter in circular Couette flow transitions*; Phys.Lett:A **83** (1981) 1
- [57] J.P.Gollub, M.H.Freilich: *Optical heterodyne study of the Taylor instability in a rotating fluid*; Phys.Rev.Lett. **33** num.25 (1974) 1465
- [58] M.A.Dominguez-Lerma, G.Ahlers, D.S.Cannell: *Marginal stability curve and linear growth rate for rotating Couette-Taylor flow and Rayleigh-Bénard convection*; Phys.Fluids **27** num.4 (1984) 856
- [59] R.M.Heinrichs, D.S.Cannell, G.Ahlers, M.Jefferson: *Experimental test of the perturbation expansion for the Taylor instability*; Phys.Fluids **31** num.2 (1988) 250
- [60] K.A.Cliffe: *Numerical calculations of primary flow exchange process in the Taylor problem*; J.Fluid Mech. **197** (1988) 52
- [61] T.B. Benjamin: *Bifurcation phenomena in steady flows of a liquid.I.Theory*; Proc. R. Soc. (London) **359** (1978) 1
- [62] T.B. Benjamin: *Bifurcation phenomena in steady flows of a liquid.I.Experiments*; Proc. R. Soc. (London) **359** (1978) 27
- [63] T.Mullin: *Mutation of steady cellular flows in the Taylor experiment* J.Fluid Mech. **121**, 207 (1982)

-
- [64] D.G.Schaeffer: *Qualitativ analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem*; Math.Proc.Camb.Phil.Soc. **87** (1980) 307
- [65] T.B.Benjamin, T.Mullin: *Anomalous modes in the Taylor experiment*; Proc.R.Soc.Lond. A **377** (1981) 221
- [66] K.A.Cliffe, J.J.Kobine, T.Mullin: *The role of anomalous modes in Taylor-Couette flow*; Proc.R.Soc.Lond. A **439** (1992) 341
- [67] Davey: J.Fluid Mech **14** (1962) 336
- [68] R.J.Donnely, K.W.Schwarz: *The approach to equilibrium in nonlinear hydrodynamics*; Phy.Lett. **5** num.5 (1963) 322
- [69] R.J.Donnely, K.W.Schwarz: *Experiments on the stability of viscous flow between rotating cylinders: VI. Finite-amplitude experiments*; Proc.R.Soc.A **283** (1965) 531
- [70] J.P.Gollub, M.H.Freilich: *Optical heterodyne test of perturbation expansion for the Taylor instability*; Phys.Fluids **19** num.5 (1976) 618
- [71] R.P.Behringer, G.Ahlers: Phys.Lett. **62** (1977), 329
- [72] G.P.Neitzel: *Numerical computation of time-dependent Taylor-vortex flow in finite geometries*; J.Fluid Mech. **141** (1984) 51
- [73] O.Meinke: *Critical-slowness in der Nähe kritischer Punkte des Taylor-Couette Systems*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1997)
- [74] M.-S.Wrage: *Kritische Exponenten und Zeitkonstanten verschiedener Instabilitäten der Taylor-Couette-Strömung*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1998)
- [75] J.Abshagen, O.Meinke, M.Wrage, G.Pifster: *Relaxation behaviour at the onset of Taylor vortices*; in Vorbereitung
- [76] G.Ahlers, D.S.Cannell: *Vortex-front propagation in rotating Couette-Taylor flow*; Phys.Rev.Lett **50** num.20 (1983) 1583
- [77] M.Lücke, M.Mihelcic, K.Wingerath: *Front propagation and pattern formation of Taylor-vortices growing into unstable circular Couette flow*; Phys.Rev.A **31**, num.1 (1985) 396
- [78] M.Lücke: *Structure formation by propagating fronts*; in W.Güttinger, G.Dangelmayr: *The physics of structure formation*; Springer 1987
- [79] M.Niklas, M.Lücke, H.Müller-Krumbhaar: *Velocity of a propagating Taylor-vortex front*; Phys.Rev.A **40** num.1 (1989) 493
- [80] J.-P.Eckmann, G.Schneider: *Nonlinear stability of bifurcating front solutions for the Taylor-Couette problem*; preprint 2000

Wellenförmige Taylor-Wirbelströmung

- [81] C.A.Jones: *Nonlinear Taylor vortices and their stability*; J.Fluid Mech. **102** (1981) 249
- [82] C.A.Jones: *The transition to wavy Taylor vortices*; J.Fluid Mech. **157** (1985) 135
- [83] P.S.Marcus: *Simulation of Taylor-Couette flow. Part 1. Numerical methods and comparison with experiments*; J.Fluid Mech. **146** (1984) 45
- [84] P.S.Marcus: *Simulation of Taylor-Couette flow. Part 2. Numerical results for wavy-vortex flow with one travelling wave*; J.Fluid Mech. **146** (1984) 65
- [85] G.Iooss: *Secondary bifurcations of Taylor vortices into wavy inflow and wavy outflow boundaries*; J.Fluid Mech. **173** (1986) 273
- [86] M.Nagata: *On wavy instabilities of the Taylor-vortex flow between corotating cylinders*; J.Fluid Mech. **88** (1988) 585
- [87] W.S.Edwards, S.R.Beane, S.Varma: *Onset of wavy vortices in the finite-length Couette-Taylor problem*; Phys.Fluids A **3** num.6 (1991) 1510
- [88] T.Mullin, T.B.Benjamin: *Transition to oscillatory motion in the Taylor experiment*; Nature **288** (1980) 567
- [89] A.Lorenzen, G.Pfister, T.Mullin: Phys.Fluids **26**, num.10 (1982)
- [90] T.Mullin: *Onset of time dependence in Taylor-Couette flow*; Phys.Rev. A **31** num.2 (1985) 1216
- [91] G.Ahlers, D.S.Cannell, M.A.Dominguez Lerma: *Fractional mode numbers in wavy Taylor vortex flow*; Phys.Rev.Lett **49** num.6 (1982) 368
- [92] G.Ahlers, D.S.Cannell, M.A.Dominguez Lerma: *Possible mechanism for the transition in wavy Taylor-vortex flow*; Phys.Rev. A **27** num.2 (1983) 1225
- [93] G.P.King, Y.Li, W.Lee, H.L.Swinney, P.S.Marcus: *Wave speeds in wavy Taylor-vortex flow*; J.Fluid Mech. **141** (1984) 365
- [94] R.C.DiPrima, P.M.Eagels, B.S.Ng: *The effect of radius ration the stability of Couette and Taylor vortex flow*; Phys.Fluids **27** num.10 (1984) 2403
- [95] G.L.Crawford, K.Park, R.J.Donnely: *Vortex pair annihilation in Taylor wavy-vortex flow*; Phys.Fluids **28** num.1 (1985) 7
- [96] K.Park, K. Jeong: *Stability boundary of the Taylor vortex flow*; Phys.Fluids **27** num.9 (1984) 2201

-
- [97] K.Park: *Unusual transition sequence in Taylor wavy vortex flow*; Phys.Rev. A **29** num.6 (1984) 3458
- [98] G.Pfister, A.A.Predtechensky: *Transition to oscillatory motion in a family of gap-varied Couette-Taylor flow*; DAAD-Report (1992)
- [99] G.S.Bust, B.C.Dornblaser, E.L.Koschmieder: *Amplitudes and wavelength of wavy Taylor vortices*; Phys.Fluids **28** num.5 (1985) 1243
- [100] K.Marx, H.Haken: *The generalized Ginzburg-Landau equation of wavy vortex flow*; Europhys.Lett. **5** num.4 (1988) 315
- [101] K.Marx, H.Haken: *Numerical derivation of the generalized Ginzburg-Landau equation of wavy vortex flow*; Z.Phys.B **75** (1989) 393
- [102] G.Pfister, U.Gerdt: *Dynamics of Taylor wavy vortex flow*; Phys.Lett.A **83** num.1 (1981) 23
- [103] H.S.Röpke: *Die Taylor-Couette-Strömung in breiten Spalten*; Dissertation, Universität Kiel, (1995)

Instabilitäten der wellenförmigen Taylor-Wirbelströmung

- [104] M.Gorman, H.L.Swinney: *Visual observation of the second characteristic mode in a quasiperiodic flow*; Phy.Rev.Lett. **43** num.25 (1979) 1871
- [105] M.Gorman, H.L.Swinney, D.A.Rand: *Doubly periodic circular Couette flow: Experiments compared with predictions from dynamics and symmetry*; Phys.Rev.Lett. **46** num.15 (1981) 992
- [106] J.B.Swift, M.Gorman, H.L.Swinney: *Modulated wavy vortex flow in laboratory and rotating reference frames*; Phys.Lett. **87A** num.5 (1982) 457
- [107] M.Gorman, H.L.Swinney: *Spatial and temporal characteristics of modulated waves in the circular Couette system*; J.Fluid Mech. **117** (1982) 123
- [108] R.S.Shaw, C.D.Andereck, L.A.Reith, H.L.Swinney: *Superposition of traveling waves in the circular Couette system*; Phys.Rev.Lett. **48** num.17 (1982) 1172
- [109] G.P.King, H.L.Swinney: *Limits of stability and irregular flow in wavy vortex flow*; Phys.Rev. A **27** num.2 (1983) 1240
- [110] L.-H.Zhang, H.L.Swinney: *Nonpropagating oscillatory modes in Couette-Taylor flow*; Phys.Rev. A **31** num.2 (1985) 1006
- [111] M.P.Ross, A.K.M.F. Hussain: *Effects of cylinder length on transition to doubly periodic Taylor-Couette flow*; Phys.Fluids **30** num.2 (1987) 607

- [112] K.T.Coughlin, P.S.Marcus, R.P.Tagg, H.L.Swinney: *Distinct quasiperiodic modes with like symmetry in a rotating fluid*; *Phy.Rev.Lett.* **66** num.9 (1991) 1161
- [113] K.T.Coughlin, P.S.Marcus: *Modulated waves in Taylor-Couette flow: Part 1. Analysis*; *J.Fluid Mech.* **234** (1992) 1
- [114] K.T.Coughlin, P.S.Marcus: *Modulated waves in Taylor-Couette flow: Part 2. Numerical simulation*; *J.Fluid Mech.* **234** (1992) 19
- [115] P.Laure, J.Menck, J.Scheurle: *Quasiperiodic drift flow in the Couette-Taylor problem*; in E.Allgower, K.Böhmer, M.Golubitsky: *Bifurcation and Symmetry*; ISMM **104** Birkhäuser (1992) 191
- [116] U.Gerdt, J.von Stamm, Th.Buzug, G.Pfister: *Axisymmetric time-dependent flow in the Taylor-Couette system*; *Phys.Rev. E* **49** num.5 (1994) 4019
- [117] J.von Stamm: *Phasendynamik, Symmetriebrechung und Chaos in der Taylor-Couette Strömung*; Dissertation, Universität Kiel (1996)
- [118] M.Semrau: *Spontane Symmetriebrechung in der Taylor-Couette Strömung*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1988)
- [119] J.von Stamm, Th.Buzug, G.Pfister: *Frequency locking in axisymmetric Taylor-Couette flow*; *Phys.Lett.A* **194**, 173 (1994)

Höhere Instabilitäten und Chaos

- [120] K.A.Cliffe: *Numerical calculations of two-cell and single-cell Taylor flow*; *J.Fluid Mech.* **135** (1983) 219
- [121] G.Pfister: *Deterministic chaos in rotational Taylor-Couette flow*; in G.E.A.Meier, F.Obermeier (Eds.): *Flow of Real Fluids, Lec.Notes Phys.* **235**, Springer (1985)
- [122] G.Pfister, H.Schmidt, K.A.Cliffe, T.Mullin: *Bifurcation phenomenon in Taylor-Couette flow in a very short annulus*; *J.Fluid Mech.* **191**, (1988) 1
- [123] G.Pfister, A.Schulz, B.Lensch: *Bifurcation and a route to chaos of an one-vortex-state in Taylor-Couette flow*; *Eur.J.Mech. B/Fluids* **10**, (1991) 247
- [124] Th.Buzug, J.von Stamm, G.Pfister: *Phys.Rev.E* **47**, (1993) 1054
- [125] S.J.Tavener, T.Mullin, K.A.Cliffe: *Novel bifurcation phenomena in a rotating annulus*; *J.Fluid Mech* **229** (1991) 483
- [126] T.Mullin, K.A.Cliffe, G.Pfister: *Unusual time-dependent phenomena in Taylor-Couette flow at moderately low Reynolds number*; *Phys.Rev.Lett* **58** num.21 (1987) 2212

-
- [127] T.Mullin, T.J.Price: *An experimental observation of chaos arising from the interaction of steady and time-dependent flow*; Nature **340** (1989) 294
- [128] T.Mullin: *Finite-dimensional dynamics in Taylor-Couette flow*; IMA J.Appl.Math. **46** (1991), 109
- [129] T.J.Price, T.Mullin: *An experimental observation of a new type of intermittency*; Physica D **48** (1991) 29-52
- [130] T.Mullin: *Disordered fluid motion in a small closed system*; Physica D **62** (1993) 192
- [131] T.Mullin (Ed.): *The nature of chaos*; Oxford UP (1993)
- [132] T.Mullin, J.J.Kobine: *Organized chaos in fluid dynamics*; in P.T.Aston (Ed.): *Nonlinear Mathematics and its applications*, Cambridge UP (1996)
- [133] J.Abshagen, G.Pfister: *Observation of Shil'nikov chaos in wavy Taylor vortex flow*; in Vorbereitung
- [134] T.Peacock, T.Mullin, D.J.Binks: *Bifurcation phenomena in flows of a nematic liquid crystal*; In: J.Bif.Chaos vol.**9** num.2 (1999) 427
- [135] J.P.Gollub, H.L.Swinney: *Onset of turbulence in a rotating fluid*; Phys.Rev.Lett. **35** num.14 (1975) 927
- [136] P.R.Fenstermacher, H.L.Swinney, J.P.Gollub: *Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow*; J.Fluid Mech. **94** (1979) 103
- [137] A.Brandstätter, J.Swift, H.L.Swinney, A.Wolf, J.D.Farmer, E.Jen, P.J.Crutchfield: *Low-dimensional chaos in a hydrodynamic system*; Phy.Rev.Lett. **51** num.16 (1983) 1442
- [138] H.L.Swinney: *Observation of order and chaos in nonlinear systems*; Physica **7D** num.1-3 (1983) 3 **94** (1979) 103
- [139] A.Branstätter, H.L.Swinney: *Strange attractor in weakly turbulent Couette-Taylor flow*; Phys.Rev. A **35** num.5 (1987) 2207
- [140] J.A.Vastano, R.D.Moser: *Short-time Lyapunov exponent analysis and the transition to chaos in Taylor-Couette flow*; J.Fluid Mech. vol.**233** (1991) 83
- [141] L'vov, A.A. Predtechinsky und A.I. Chernykh: *Bifurcation and chaos in the system of Taylor vortices - laboratory and numerical experiment*; in: G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseh: *Nonlinear dynamics and turbulence*; Pitman (1983) 238
- [142] J.von Stamm, U.Gerds, Th.Buzug, G.Pfister: *Symmetry breaking and period doubling on a torus in the VLF regime in Taylor-Couette flow*; Phys.Rev. E **54** num.5 (1996) 4938

- [143] P.Bergé, Y.Pomeau, C.Vidal: *Order within chaos*, Wiley (1984)
- [144] H.G.Schuster: *Deterministic chaos*; VCH (1989) 2nd ed.
- [145] P.Cvitanović (Ed.): *Universalities in chaos*; Adam Hilger (1984)
- [146] J.Argyris, G.Faust, M.Haase: *Die Erforschung des Chaos*; Vieweg (1995)
- [147] P.Chossat, M.Golubitsky: *Physica D* **32**, 423 (1988)
- [148] M.Dellnitz, M.Golubitsky, I.Melbourne: in E.Allgower, K.Böhmer, M.Golubitsky (Eds.): *Bifurcation and Symmetry*, Birkhäuser (1992)
- [149] Y.Pomeau, P.Manneville: *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*; *Com.Math.Phys.* **74**, 189 (1980)
- [150] J.E.Hirsch, B.A.Huberman, D.J.Scalapino: *Theory of intermittency*; *Phys.Rev.A* **25**, 319 (1982)
- [151] P.Bergé, M.Dubois, P.Manneville, Y.Pomeau: Intermittency in Rayleigh-Bénard *J.Physique-Lett.* **41**, L341 (1980)
- [152] M.Dubois, M.A.Rubio, P.Bergé: *Experimental evidence of intermittencies associated with a subharmonic bifurcation*; *Phys.Rev.Lett.* **51** num.16 (1983) 1446
- [153] Chil-Min Kim, O.J.Kwon, Eok-Kyun Lee, Hoyun Lee: *New characteristic relation in Type-I intermittency*; *Phys.Rev.Lett* **73**, (1994) 525
- [154] M.O.Kim, Hoyun Lee, Chil-Min Kim, Hoyun-Soo Pang, Eok-Kyun Lee, O.J.Kwon: *New characteristic relations in Type-II and III intermittency*; *Int.J.Bif.Chaos* **7**, (1997) 831
- [155] M.Bauer, S.Habib, D.R.He, W.Martienssen: *New type of intermittency in discontinuous maps*; *Phy.Rev.Lett* **68**, (1992) 1625
- [156] C.Kaas-Petersen. S.K.Scott: *Homoclinic orbits in a simple chemical model of an autocatalytic reaction*; *Physica D* **32** (1988) 461
- [157] C.Sparrow: *The Lorenz equation*, AMS **41** Springer (1982)
- [158] T.Mullin, private Mitteilung
- [159] A.Arneodo, P.Coullet, C.Tresser: *Oscillators with chaotic behaviour: An illustration of a theorem by Shil'nikov* *J.Stat.Phys.* **27**, (1982) 171
- [160] P.Gaspard, G.Nicolis: *What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics?*; *J.Stat.Phys.* **31** (1983) 499
- [161] P.Glendinning, C.Sparrow: *Local and global behavior near homoclinic orbits* *J.Stat.Phys.* **35**, (1984) 645

-
- [162] P.Gaspard, R.Kapral, G.Nicolis: *Bifurcation phenomena near homoclinic systems: A two-parameter analysis* J.Stat.Phys. **35**, (1984) 697
- [163] S.V.Gonchenko, D.V.Turaev, P.Gaspard, G.Nicolis: *Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus*; Nonlinearity **10** (1997) 409
- [164] A.Arneodo, P.H.Couillet, E.A.Spiegel, C.Tresser: *Asymptotic chaos*; Physica D **14** (1985) 327
- [165] W.Langford: *A review of interaction of Hopf and steady-state bifurcation*; in: G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph: *Nonlinear dynamics and turbulence*; Pitman (1983)
- [166] P.Gaspard: *Local birth of homoclinic chaos*; Physica D **62** (1993) 94
- [167] B.Krauskopf, C.Rousseau: *Codimension-three unfolding of reflectionally symmetric planar vector fields*; Nonlinearity **10** (1997) 1115
- [168] A.Algaba, E.Freire, G.Gamero, A.J.Rodríguez-Luis: *A three-parameter study of a degenerate case of the Hopf-pitchfork bifurcation*; Nonlinearity **12** (1999) 1177
- [169] P.Hirschberg, E.Knobloch: *Shil'nikov-Hopf bifurcation*; Physica D **62** (1993) 202
- [170] M.Bosch, C.Simó: *Attractors in a Shil'nikov-Hopf scenario and a related one-dimensional map*, Physica D **62** (1993) 217
- [171] L.O.Chua (Ed.): *Proceedings of the IEEE, special issue on chaotic system*, august (1987)
- [172] T.Matsumoto, M.Komuro, H.Kokubu, R.Tokunaga: *Bifurcations: sights and sounds in mathematics*; Springer (1993)
- [173] E.Freire, A.J.Rodríguez-Luis, E.Gamero, E.Ponce: *A case study for homoclinic chaos in an autonomous electronic circuit: A trip from Takens-Bogdanov to Hopf-Shil'nikov*; Physica D **62** (1993) 230
- [174] J.J.Healey, D.S.Broomhead, K.A.Cliffe, R.Jones, T.Mullin: *The origins of chaos in a modified Van der Pol oscillator*; Physica D **48** (1991) 322
- [175] J.I.Rosell, J.Farjas, R.Herrero, F. Pi, G.Orriols: *Homoclinic phenomena in opto-thermal bistability with localized absorption*; Physica D **85** (1995) 509
- [176] R.Herrero, R.Pons, J.Farjas, F. Pi, G.Orriols: *Homoclinic dynamics in experimental Shil'nikov attractors*; Phys.Rev.E **53** num.6 (1996) 5627
- [177] H.Herzel, P.Plath, P.Svensson: *Experimental evidence of homoclinic chaos and type-II intermittency during the oxidation of methanol*; Physica D **48** (1991) 340

-
- [178] F.Argoul, J.Huth, P.Merzeau, A.Arnéodo, H.L.Swinney: *Experimental evidence for homoklinic chaos in an electrochemical growth process*; Physica D **62** (1993) 170
- [179] A.Arnéodo, F.Argoul, J.Elezgaray, P.Richetti: *Homoclinic chaos in chemical systems*; Physica D **62** (1993) 134
- [180] G.Haller: *Chaos near resonance*; Springer AMS **138** (1999)
- [181] P.Grassberger, I.Procaccia: *Measuring the strangeness of strange attractors*; Physika S **9** (1983) 189
- [182] Th.Buzug, T.Reimers, G.Pfister: *Optimal reconstruction of strange attractors from purely geometrical arguments*; Europhys.Lett. **13** num.7 (1990) 605
- [183] Th.Buzug, G.Pfister: *Optimal delay time and embedding dimension for delay-time coordinates by analysis of the global static and local dynamical behavior of strange attractors*; Phys.Rev. A **45** num.10 (1992) 7073
- [184] Th.Buzug, J.von Stamm, G.Pfister: *Fractal dimension of strange attractor obtained from the Taylor-Couette experiment*; Physica A **191** (1992) 559
- [185] Th.Buzug, G.Pfister: *Comparison of algorithms calculating optimal embedding parameters for delay time coordinates*; Physica D **58** (1992) 127
- [186] N.Enge, Th.Buzug, G. Pfister: *Noise reduction on chaotic attractors*; Phys.Lett. A **175** (1993) 178
- [187] Th.Buzug: *Analyse chaotischer Systeme*; BI-Wissenschaftsverlag (1994)
- [188] Th.Buzug, J.von Stamm, G.Pfister: *Characterising experimental time series using local intrinsic dimension*; Phys.Lett. A **202** (1995) 183
- [189] A.Galka: *Topics in nonlinear time series analysis - with applications for EEG analysis*; Adv.Ser.Non.Dyn. vol.14 World Scientific (2000)
- [190] J. Hegseth, J.M. Vince, M. Dubois, P. Bérge: *Pattern Domains in Rayleigh-Bénard Slot Convection*; Europhys.Lett. **17** (5) (1992) pp.413-8
- [191] Pfister: in Proc. 4th Int. Conf. on Photon Correlation Techniques in Fluid Mech., Stanford CA (1980)
- [192] G.W.Baxter, C.D.Andereck: *Formation of dynamical domains*; Phys.Rev.Lett.**57** (1986)3046
- [193] J.Abshagen: *Wellenlängenselektion bei symmetriebrechenden Verzweigungen in der Taylor-Couette Strömung*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1996)
- [194] A.Schulz: *Lokale Modenkopplung im Taylor-Couette System*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1996)

-
- [195] U.Gries: *Lokale Instabilitäten im Taylor-Couette System*; Diplomarbeit, Universität Kiel (1998)
- [196] J.Abshagen, A.Schulz, J.v.Stamm, U.Gries, G.Pfister: *Localised time-dependent oscillations in Taylor-Couette flow*; in Vorbereitung

DANKSAGUNG

Mein besonderer Dank gilt Gerd Pfister, der mir sehr viele Freiheiten und Möglichkeiten gab, meine Arbeit aber nicht aus den Augen verlor und mir half, wenn es nötig war.

Bedanken möchte ich mich ferner bei:

Maïke für ihre „Listen“ und dafür, daß sie es immer wieder schafft, mich aufzubauen;

Arne Schulz für die schöne gemeinsame Zeit im Taylorlabor und auch außerhalb des Taylorlabors;

Jens von Stamm, der mir bei rotierenden Systemen immer noch einen Dreh voraus ist;

Oliver Meincke, Marc Wrage, Ulrich Gries und Joël Langenberg, die mit mir die Höhen und Tiefen des Taylorzylinders teilten; Weihnachtsmärkte und „Pfister Tours“ bleiben unvergessen;

Stephan Wolff, der mir das Leben mit den Rechnern erträglich machte;

Andreas Galka für die interessanten Gespräche und für die Dimensionsanalysen;

der gesamten Arbeitsgruppe für die schöne Zeit und insbesondere für die netten langen Kafferrundendiskussionen, deren Beitrag zu dieser Arbeit nicht unerheblich war;

Heinz Horak und Wolfgang Schumann für ihre außergewöhnliche Hilfsbereitschaft und ihre sehr guten technischen Beiträge;

dem Team der Werkstatt und insbesondere Herrn Brix, für die schnelle und gute technische Betreuung;

Tom Mullin für seine Einladung nach Manchester, für seine Gastfreundschaft und die hilfreichen Diskussionen;

Tante Gudrun und Onkel Herbert, Sabine, Matthias und Justus für die vielseitige Unterstützung;

meinen Eltern, die an mich glaubten;

Doris und Piet für die Betreuung und Verpflegung, besonders in heißen Phasen;

Grobi, Dirk, Martin, Arne und den Dorschen, die dafür sorgten, daß ich auch mal aus dem Keller kam;

Zuletzt aber nicht weniger herzlich möchte ich mich für's Korrektur lesen bedanken bei Sabine und Torsten, Alex und Anja, Doris und Piet, Karl, Olaf, Sabine und Matthias.

LEBENS LAUF

Angaben zur Person:

Name: Jan Abhagen
Geboren: 04.07.1969 in Neumünster
Familienstand: ledig, keine Kinder
Staatsangehörigkeit: deutsch

Ausbildung:

1975-1979 Besuch der Grundschule Wattenbek
1979-1989 Besuch der Alexander-von-Humboldt Schule in Neumünster
1989-1990 Wehrdienst
1990-1996 Physikstudium an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Vordiplom, Note: sehr gut
Abschluß mit Diplom, Note: mit Auszeichnung
Titel: Wellenlängenselektion bei symmetriebrechenden Verzweigungen
in der Taylor-Couette-Strömung
1996-2000 Promotionsstudium an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit unter Anleitung meines akademischen Lehrers und nur mit Hilfe der angegebenen Quellen selbständig angefertigt zu haben.

Kiel, den