

Vorhersagen für das
minimal supersymmetrische Standardmodell
aus infrarotattraktiven Fixmannigfaltigkeiten
der Renormierungsgruppengleichungen

DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT
ZU KIEL

VORGELEGT VON
JÖRN BORGERT
KIEL, IM APRIL 2000

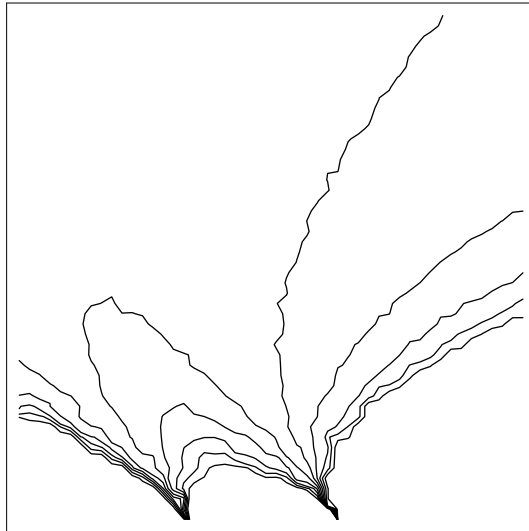
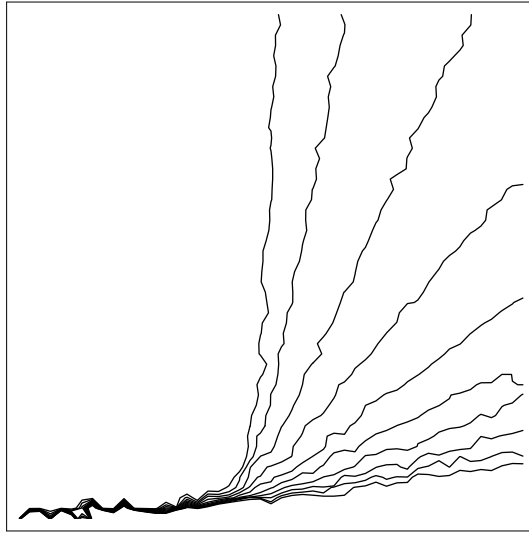
Referentin: Prof. Dr. B. Schrempp

Korreferent:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Kiel, den _____

Dekan: _____



— meinen Eltern Dieter und Ingrid Unfug und meiner Frau Britta —

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	3
I Einführung in die zugrundeliegenden Theorien und Modelle	11
1 Das Standardmodell	12
2 Das minimal supersymmetrische Standardmodell	16
2.1 Teilchengehalt und Symmetrien	18
2.2 Die Brechung der Supersymmetrie	22
2.3 Skalares Potential und elektroschwache Symmetriebrechung	24
2.4 Berechnung der Masseneigenzustände	31
3 Renormierungsgruppengleichungen und Fixmannigfaltigkeiten	39
3.1 Renormierung	39
3.2 Renormierungsgruppengleichungen	42
3.3 Fixmannigfaltigkeiten	46
3.4 Radiative spontane Symmetriebrechung	63
4 Physikalische Bedingungen an das Potential	65
4.1 Traditionelle Bedingungen	66
4.2 Laufende Bedingungen	69
4.3 Erweiterte Bedingungen nach Casas et al.	70
II Vorarbeiten, Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten und Einrichtung des Algorithmus	79
5 Vorarbeiten	80

5.1	Fixierung des Eichsektors im Bereich des Standardmodells	80
5.2	Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren	83
6	Die Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden minimal supersymmetrischen Standardmodells	91
6.1	Die Berechnung der Fixpunkte	93
6.2	Die Bestimmung der Fixlinien	96
6.3	Attraktivität und Klassifizierung	100
6.4	Reduktion der freien Parameter durch Fixmannigfaltigkeiten	103
6.5	Abschließendes zur Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten	105
7	Beschreibung und Einrichtung des Algorithmus	107
7.1	Einrichtung der Renormierungsgruppenevolution	109
7.2	Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_S	112
7.3	Die Bestimmung der Massen	115
7.4	Physikalische Bedingungen an das Potential	118
7.5	Radiative spontane elektroschwache Symmetriebrechung	124
III	Ergebnisse und Auswertung	129
8	Darstellung und Auswertung der Ergebnisse	130
8.1	Die Symmetriebrechungsskala m_S	131
8.2	Elektroschwache Symmetriebrechung	136
8.3	Die Bedingungen zur Beschränktheit und zum Erhalt der Ladung und Farbe . .	142
8.4	Die Bestimmung der Massen	146
9	Abschließende Zusammenfassung	165
A	Graphiken der Massenverteilungen	176
Literatur		185

Einleitung

Das Standardmodell (SM), eine lokal geeichte Feldtheorie, beschreibt die durch Eichbosonen vermittelte elektromagnetische, schwache und starke Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen. Diese sind durch die Fermionen gegeben, die wiederum in Quarks und Leptonen unterteilt sind. Zu den Quarks gehören das Up-, das Down-, das Strange-, das Charm-, das Bottom- und das Topquark, zu den Leptonen das Elektron, das Myon und Taulepton sowie die Neutrinos.

Das Standardmodell gehört im Bereich seiner Vorhersagen zu den erfolgreichsten Theorien, die Vorhersagen befinden sich bei heute erreichbaren Beschleunigerenergien in sehr guter Übereinstimmung mit dem Experiment. Trotzdem haftet dem Standardmodell der Makel des Unvollständigen an, denn die Massen der Quarks und Leptonen gehen als freie Parameter in die Theorie ein. Die Massen der Fermionen müssen experimentell bestimmt und als freie Parameter in die Theorie eingefügt werden. Der Bereich der Massen reicht dabei von etwas mehr als einem halben MeV im Fall des Elektrons bis zu $m_{top}^{pole} \approx 174 \text{ GeV}$ im Fall des Topquarks; im Rahmen der vorliegenden Arbeit werden die Neutrinos als masselos angesehen. Das Massenspektrum erstreckt sich demnach über fast sechs Größenordnungen. Weiter beschreibt das Standardmodell ein hypothetisches Higgs-Boson. Dieses konnte bisher im Experiment noch nicht nachgewiesen werden, seine Kopplung an die bekannten Elementarteilchen wird aber benötigt, um diesen auf eine mit der Theorie verträgliche Weise Massen zu geben. Auch die Masse des Higgs-Bosons geht als freier Parameter in die Theorie ein.

Eine Folge der Quantisierung von Feldtheorien, also auch des Standardmodells, sind sogenannte *Renormierungsgruppengleichungen* (RGG). Diese beschreiben eine Abhängigkeit der Parameter der Theorien von der Impulsskala Q . Bei den Renormierungsgruppengleichungen handelt es sich um ein gekoppeltes System von nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung. So ist man unter Verwendung der Renormierungsgruppengleichungen in der Lage, die physikalischen Gegebenheiten an verschiedenen Orten der Impulsskala miteinander in Verbindung zu setzen. Die Massen der Quarks und Leptonen stehen zu sogenannten *Yukawa-Kopplungen* in Beziehung, deren Verhalten bei Änderung der Impulsskala ebenfalls durch Renormierungsgruppengleichungen beschrieben wird. Zur vollständigen Festlegung einer Lösung der Renormierungsgruppengleichungen wird jedoch ein Satz von Anfangswerten benötigt. Damit bleiben die Werte der Parameter und demzufolge auch der Massen weiterhin durch die Theorie unbestimmt.

Schon hier sei angemerkt, daß der physikalische Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen nach unten und oben beschränkt ist. Diese Beschränkung nach unten ist in dieser Arbeit durch die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung, $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$ gegeben. Die Beschränkung nach oben ist durch die Skala der im nächsten Absatz eingeführten Skala der *Großen Unifizierung*, $Q = m_{\text{GUT}} \approx 10^{16} \text{ GeV}$, spätestens aber durch die Planck-Skala $Q = m_P \approx 10^{19} \text{ GeV}$ gegeben, bei der die Einflüsse der Gravitation nicht mehr vernachlässigt werden können. Die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung wird auch als IR-Skala, die Skala der großen Unifizierung als UV-Skala bezeichnet. Außerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereiches können Werte der beteiligten Kopplungen auftreten, die aufgrund ihrer Größe die Behandlung im Rahmen der Störungstheorie nicht mehr zulassen.

Ausgehend vom Standardmodell führte die Fragestellung nach einer Einbettung in eine übergeordnete Theorie mit nur einer Eichwechselwirkung (große Unifizierung) zu interessanten Erweiterungen des Standardmodells. In diesem Zusammenhang erfolgt die Einführung der sogenannten Skala der *Großen Unifizierung* m_{GUT} , auch GUT-Skala oder Unifizierungsskala genannt. An dieser Skala liegt ein gemeinsamer Wert der Eichkopplungen, die sogenannte *Eichkopplungsunifizierung* vor. Durch die Einführung einer Skala m_{GUT} weit oberhalb der Werte der IR-Skala erhält die Masse des Higgs-Bosons Strahlungskorrekturen von der Ordnung $\mathcal{O}(m_{\text{GUT}}^2)$. Dies wird als das *Hierarchieproblem* bezeichnet.

Die Erweiterung des Standardmodells zum minimal supersymmetrisch erweiterten Standardmodell (MSSM) stellt eine erfolgreiche und in der Literatur viel diskutierte Formulierung einer solchen Erweiterung dar. Im Rahmen des MSSM wird jedem Fermion des Standardmodells ein Boson und jedem Boson ein Fermion, jedem Teilchen somit ein weiteres Teilchen, sein sogenannter Superpartner, zugeordnet. Die Supersymmetrie stellt aus diesem Grund eine Bosonen-Fermionen-Symmetrie dar, und das MSSM besitzt so eine größere Symmetrie als das Standardmodell. Weiterhin benötigt das supersymmetrisch erweiterte Standardmodell im Gegensatz zum gewöhnlichen Standardmodell zwei Higgs-Bosonen, um allen auftretenden Teilchen auf widerspruchsfreie Art und Weise Massen zu geben. Die Erwägung des MSSM als Erweiterung des Standardmodells beruht vor allem auf folgenden Gesichtspunkten:

- Verbesserung der Renormierbarkeitseigenschaften,
- bessere Eigenschaften hinsichtlich der Einbettung der Theorie in groß-unifizierende Theorien (GUT), die zu einer natürlichen Lösung des Hierarchieproblems führen,
- die spontane Symmetriebrechung der elektroschwachen Theorie kann auf natürliche Weise durch Strahlungskorrekturen durchgeführt werden; dieser Aspekt wird in dieser Arbeit eine große Rolle spielen,
- das MSSM in seiner Form als nicht-triviale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells stellt einen entscheidenden Schritt in Richtung der Formulierung der Gravitation als Quantenfeldtheorie dar.

Trotz seiner guten Eigenschaften besitzt das MSSM eine große Anzahl freier Parameter, deren Zahl je nach Ausprägung bis zu 107 betragen kann. Dabei gehen auch die Massen der Quarks und Leptonen weiterhin als freie Parameter in die Theorie ein.

Bei der Untersuchung der Lösung von Renormierungsgruppengleichungen hat sich gezeigt, daß spezielle, nicht von Anfangswerten abhängige, sondern durch Randbedingungen gegebene Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen existieren. Diese werden im folgenden eine wichtige Rolle spielen. Die Untersuchung des durch Renormierungsgruppengleichungen beschriebenen Verhaltens der Parameter in Abhängigkeit von der Skala Q im Standardmodell geht auf Hill, Pendleton, Ross, u.a. [1–4] zurück. Es hat sich gezeigt, daß die speziellen Lösungen im allgemeinen sogenannte Fixpunkte beschreiben, die zu interessanten physikalischen Aussagen führen können. Pendleton und Ross betrachteten dabei ein Untersystem der Renormierungsgruppengleichungen, das nur die Yukawa-Kopplung des Topquarks und die Eichkopplung der starken Wechselwirkung beinhaltet.

Die Auswertung des Fixpunktes führt zu einer Vorhersage der Masse des zu der Zeit noch hypothetischen Topquarks von

$$m_t \approx 90 \text{ GeV} . \quad (1)$$

Eine äquivalente Betrachtung im MSSM wurde zuerst in [5] vorgenommen und führte auf die Vorhersage

$$m_t \approx \sin\beta \cdot 190 \text{ GeV} \quad (2)$$

für die Masse des Topquarks in Abhängigkeit vom im MSSM auftretenden Parameter $\tan\beta$, der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Dubletts angibt. Die Untersuchung der Renormierungsgruppengleichungen konnte im folgenden [6–11] auf die Betrachtungen höherdimensionaler Systeme unter Einbeziehung zusätzlicher Kopplungen erweitert werden. In diesen Systemen treten neben den Fixpunkten weitere sogenannte *Fixmannigfaltigkeiten* wie Fixlinien, Fixflächen und entsprechend höherdimensionale Mannigfaltigkeiten auf. Diese besitzen die Eigenschaft, bei der Renormierungsgruppenevolution aller möglichen Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen von der UV-Skala zur IR-Skala anziehend auf die Gesamtheit der Lösungen zu wirken. Man spricht von in diesem Fall von *Infrarotattraktivität*, die Gesamtheit der Lösungen wird als der *Renormierungsgruppenfluß* bezeichnet. Der Effekt der Infrarotattraktivität wird noch durch den langen Evolutionsweg von der UV-Skala zur IR-Skala unterstützt. Die Auswertung der infrarotattraktiven Fixmannigfaltigkeiten führt zu höchst nicht-trivialen Vorhersagen für die Werte der Parameter und Beziehungen zwischen den Parametern der untersuchten Theorien. Es wurde außerdem erkannt [7,8], daß die erforderliche, aber nicht-triviale Einbeziehung aller drei Eichkopplungen bei der Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen zu einer signifikanten Modifikation der quantitativen Vorhersagen führt. Erste physikalisch relevante Fixlinien, die zu interessanten Beziehungen zwischen der Masse des Topquarks und des Higgs-Bosons führten, wurden in [5, 12, 13] diskutiert.

Einen weiteren Aspekt des supersymmetrisch erweiterten Standardmodells stellt die Tatsache dar, daß die Supersymmetrie der Theorie oberhalb des gegenwärtig experimentell zugänglichen Impulsbereichs gebrochen sein muß. Andernfalls wären die Teilchen und ihre Superpartner bezüglich der Masse degeneriert, und Superpartner der bekannten Teilchen im Experiment nachweisbar. Der am häufigsten in Erwägung gezogene Mechanismus zur Brechung der Supersymmetrie führt explizit die Symmetrie brechende Terme, sogenannte *weich brechende Terme*, in die Theorie ein. Man spricht vom *weich brechenden Sektor* der Theorie. Dieser weich brechende Sektor ist nicht nur für die Brechung der Supersymmetrie verantwortlich, er ist darüber hinaus in der Lage, sämtlichen auftretenden Superteilchen Masse zu verleihen. Es hat in der Literatur [14] erste Anzeichen gegeben, daß das Verhalten der im weich brechenden Sektor enthaltenen Parameter unter Variation der Impulsskala, die wie bei allen Kopplungen durch Renormierungsgruppengleichungen beschrieben wird, ebenfalls von infrarotattraktiven Fixpunkten der Renormierungsgruppengleichungen bestimmt wird.

Die bisher durchgeführten Untersuchungen von Fixpunkten in den Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM beschränken sich dabei wie oben auf Systeme mit dem Topquark, der Eichkopplung der starken Wechselwirkung und der entsprechenden Parameter des weich brechenden Sektors. Die Betrachtungen für ein System mit wenigen Kopplungen führen auf Fixpunkte und können als wegweisende, explorative Untersuchungen bezeichnet werden. Da sie die korrekte Einbeziehung aller drei Eichkopplungen nicht behandeln konnten, waren keine quantitativen Voraussagen möglich. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des supersymmetrisch erweiterten Standardmodells für die vollständige dritte Fermionen-Familie (Top-, Bottomquark und Taulepton) unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors und in Anwesenheit aller drei Eichkopplungen vorgenommen. Die Bestimmung dieser Fixmannigfaltigkeiten stellt einen der zentralen Punkte dieser Arbeit dar. Angeregt von den guten Vorhersagen im Bereich der Masse des Topquarks durch Auswertung der infrarotattraktiven Fixpunkte lautet die sich anschließende zentrale Fragestellung in dieser Arbeit: Ist es möglich durch Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM die große Anzahl

der freien Parameter der Theorie einzuschränken? Es wird gezeigt werden, daß die Anzahl der freien Parameter auf *zwei*, den Anfangswert des Higgs–Mischungsparameters μ_0 und die unifizierende Gaugino–Masse $m_{1/2}$, die später eine genauere Erklärung erfahren, reduziert werden kann. Mit einer Wahl dieser verbleibenden freien Parameter und den experimentellen Vorgaben im Bereich der Eichkopplung liegen die Werte aller Parameter des weich brechenden supersymmetrisch erweiterten Standardmodells an allen Skalen des physikalischen Gültigkeitsbereiches der Renormierungsgruppengleichungen zwischen der UV–Skala und der IR–Skala vollständig fest.

Die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM führt weiterhin zu folgenden Einzeluntersuchungen im Rahmen dieser Arbeit:

- *Bestimmung aller Teilchenmassen des weich brechenden MSSM in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$.* Es wird sich zeigen, daß die erfolgreichen Vorhersagen der Massen der Quarks und Leptonen [7, 8, 10] auch im weich brechenden MSSM erhalten bleiben und für annähernd alle Teilchen des weich brechenden Sektors Massen oberhalb der aktuellen experimentellen Massenschranken vorhergesagt werden können.
- *Untersuchung der Realisierbarkeit der radiativen elektroschwachen Symmetriebrechung in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$.* Es wird sich zeigen, daß in Übereinstimmung mit der vorherrschenden Meinung in der Literatur [15–17] die generellen Vorhersagen auch im Fall der Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM beibehalten werden können. Die Untersuchungen führen zu einem auf den sogenannten *low-tan β -Fixpunkt*. Dieser vernachlässigt die Masse des Bottomquarks und des Tauleptons gegenüber der Masse des Topquarks und führt zu *kleinen* Werten von $\tan\beta \approx 1.5$. Im Gegensatz dazu realisiert der *high-tan β -Fixpunkt* nicht-verschwindende Massen aller Quarks und Leptonen und führt zu einem *großen* Wert von $\tan\beta \approx 60$.
- *Untersuchung zentraler physikalischer Bedingungen in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$.* Diese Bedingungen beinhalten Betrachtungen im Zusammenhang mit der *Beschränktheit* des skalaren Potentials, das die Realisierung der elektroschwachen Symmetriebrechung sicherstellt, und mit dem Auftreten von Minima im Potential, die die Eichsymmetrie der elektrische Ladung und der Farbladung brechen. Diese Bedingungen stellen zentrale physikalische Forderungen an die Selbstkonsistenz der Theorie dar. Aus diesem Grund muß im Rahmen der Untersuchung der Vorhersagen aus Fixmannigfaltigkeiten auch eine Untersuchung der Bedingungen vorgenommen werden, um zu überprüfen, ob sie erfüllt sind. Die Untersuchungen von Bedingungen im IR–Bereich geht auf Claudson, Hall, Hinchliffe, Kounnas, Komatsu u.a. [18, 19] zurück. Cases et al. [20] haben diese *traditionellen Bedingungen* erweitert und so den Weg zur Einbeziehung der Renormierungsgruppenevolution bei der Untersuchung von Bedingungen bereitet. Im Zusammenhang mit den in dieser Arbeit bestimmten Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM und der dadurch vollständig festgelegten Parameter des weich brechenden MSSM wird eine Untersuchung dieser sogenannten *erweiterten Bedingungen* in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ vorgenommen. Die Auswertung der Bedingungen führt dabei zu weiteren, nicht-trivialen Einschränkungen der möglichen Bereiche im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, und damit zusätzlich zu der Reduzierung der freien Parameter durch Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen zu einer weiteren Erhöhung der Aussagekraft der Theorie.

- *Untersuchung der Erfüllung experimenteller Randbedingungen in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$.* Im Bereich der Massen der Superpartner der bekannten Teilchen wird überprüft, ob die berechneten theoretischen Vorhersagen der Massen die aktuellen experimentellen unteren Massenschranken erfüllen.

Die durchgeführten Untersuchungen sind analytisch und numerisch sehr aufwendig, da simultan eine große Anzahl von Berechnungen und Auswertungen von Bedingungen vorgenommen werden müssen. Diese führen auf die Bestimmung der Werte der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, für die die Bedingungen an das Potential für alle Werte der Impulsskala Q erfüllt sind und damit zu einer Vorhersage von Einschränkungen im Raum der freien Parameter und einer weiteren Erhöhung der Aussagekraft der Theorie. Zur Durchführung dieser insgesamt sehr aufwendigen Untersuchung werden die verschiedenen Teiluntersuchungen in einen Algorithmus eingebettet. So ist zum Beispiel durch die einmalige Berechnung von allen Einzeluntersuchungen zugrunde liegenden Teilaspekten eine sehr effiziente Durchführung der Untersuchungen und eine Betrachtung eines großen Bereiches möglicher Werte im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, möglich.

Die Arbeit ist inhaltlich in drei Teile unterteilt. In Teil I wird ab Seite 11 die Einführung in die zugrundeliegenden Theorien und Modelle vorgenommen. In Teil II ab Seite 79 werden die Vorarbeiten, die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten und die Einrichtung des Algorithmus dargestellt. In Teil III ab Seite 129 erfolgt die Darstellung und Auswertung der Ergebnisse und der Berechnungen zur Erfüllung der Bedingungen und Vorhersagen in Abhängigkeit von den verbleibenden zwei freien Parametern der Theorie.

Es schließt sich ein Übersicht der Inhalte der einzelnen Kapitel an.

Teil I — Einführung in die zugrundeliegenden Theorien und Modelle

Kapitel 1 — Das Standardmodell

Einführung in die Grundlagen des Standardmodells (SM) einschließlich der Darstellung der Symmetrien, des Teilchengehalts und des Higgs-Mechanismus.

Kapitel 2 — Das minimal supersymmetrische Standardmodell

Einführung in die Grundlagen der minimal supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells (MSSM) einschließlich der Einführung des weich brechenden Sektors und der Darstellung der radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung sowie der Berechnung der Masseneigenzustände des weich brechenden Sektors.

Kapitel 3 — Renormierungsgruppengleichungen und Fixmannigfaltigkeiten

Einführung der Grundlagen der Renormierung zur Herleitung von Renormierungsgruppengleichungen, Darstellung der Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells und des weich brechenden MSSM, schrittweise Einführung in die Ableitung der Fixmannigfaltigkeiten von Renormierungsgruppengleichungen und die Aspekte der radiativen Symmetriebrechung.

Kapitel 4 — Bedingungen

Ableitung verschiedener physikalischer Bedingungen an das Potential einschließlich traditioneller, laufender sowie erweiterter Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie.

Teil II — Vorarbeiten, Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten und Einrichtung des Algorithmus

Kapitel 5 — Vorarbeiten

Durchführung der Fixierung des Eichsektors im Bereich des Standardmodells und Berechnung der Massen–Zuwachs–Faktoren zur Handhabung der Dynamik der Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells.

Kapitel 6 — Die Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM

Darstellung der Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden Standardmodells einschließlich Klassifizierung der Fixpunkte sowie Bestimmung der Fixlinien zur Evolution von der UV–Skala zur IR–Skala.

Kapitel 7 — Beschreibung des Algorithmus

Beschreibung des Vorgehens bei der Einrichtung des Algorithmus einschließlich der Darstellung des Vorgehens bei der Berechnung der verschiedenen Teilaspekte der Untersuchungen: Bestimmung der Symmetriebrechungsskala, Berechnung der Masseneigenzustände, der physikalischen Bedingungen an das Potential und der Möglichkeit der radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung.

Teil III — Ergebnisse und Auswertung

Kapitel 8 — Darstellung und Auswertung der Ergebnisse

Darstellung und Auswertung der Ergebnisse der Ableitungen und Berechnungen einschließlich der Bestimmung der Symmetriebrechungsskala, der elektroschwachen Symmetriebrechung, der Berechnung der physikalischen Bedingungen an das Potential und der Berechnung der Masseneigenzustände.

Kapitel 9 — Abschließende Zusammenfassung

Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse und Auswertung der untersuchten Teilaspekte sowie abschließende Zusammenfassung einschließlich eines Vergleiches der Vorhersagen der Evolution des low– $\tan\beta$ – und des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes.

Teil I

Einführung in die zugrundeliegenden Theorien und Modelle

In diesem Teil der Arbeit werden die den Untersuchungen zugrundeliegenden Theorien und Modelle eingeführt. In Kapitel 1 wird das Standardmodell (SM), in Kapitel 2 die minimal supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (MSSM) dargestellt. In diesem Zusammenhang wird auf die Motivation zur Einführung der Supersymmetrie, den weich brechenden Sektor und die spontane elektroschwache Symmetriebrechung sowie die Berechnung der Masseneigenzustände der Superpartner der bekannten Teilchen aus den Eicheigenzuständen eingegangen.

In Kapitel 3 wird eine kurze Einführung in die Renormierung gegeben und die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells und des weich brechenden MSSM dargestellt. Weiterhin wird eine schrittweise Einführung in die Bestimmung von Fixmannigfaltigkeiten von Renormierungsgruppengleichungen durchgeführt und auf die Aspekte der radiativen Symmetriebrechung eingegangen.

Das Kapitel 4 geht auf die Ableitung und die Aspekte der Berechnung von physikalischen Bedingungen an das Potential ein. Diese Bedingungen verhindern unphysikalische Minima im skalaren Potential, die die spontane elektroschwache Symmetriebrechung verhindern. Die Darstellung führt traditionelle und *laufende* Bedingungen ein, besitzt jedoch einen Schwerpunkt im Bereich der erweiterten Constraints nach Casas et al. [20], die Grundlage der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen von physikalischen Bedingungen sind.

Kapitel 1

Das Standardmodell

Dieser Abschnitt liefert eine Einführung in die Grundlagen des Standardmodells. Dabei wurden die Schwerpunkte auf die Aspekte der Theorie gelegt, die für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen wichtig sind. Es existieren viele ausführliche und umfassende Lehrbuchdarstellungen des Standardmodells und der zugrundeliegenden Feldtheorien [21].

Das Standardmodell beschreibt die Eigenschaften und Wechselwirkungen der heute bekannten Elementarteilchen. Diese Fermionen sind in Quarks — Up-, Down-, Charm-, Strange-, Top- und Bottomquark — und Leptonen — Elektron, Myon, Taulepton — unterteilt. Zur Verdeutlichung sind diese in Tabelle 1.1 dargestellt.

Die Elementarteilchen sind in drei Familien aufgeteilt, die erste enthält das Up-, das Down-Quark und das Elektron und damit die Teilchen, aus denen sich die Protonen und Neutronen beziehungsweise die Atome zusammensetzen. Die zweite Familie enthält das Charm- das Strange-Quark und das Myon, die dritte Familie das Top-, das Bottomquark und das Taulepton. Zu jeder Familie gehört ein weiteres Lepton, das Neutrino. Diese werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit als masselos angenommen und somit im den Untersuchungen zur Berechnung der Massen der Quarks und Leptonen nicht berücksichtigt. Weiterhin beschränken sich die Untersuchungen auf die Fermionen der dritten Familie. Diese Einschränkung wird sich im Rahmen der Untersuchungen als physikalisch sinnvoll erweisen, da die relevanten Größen für die Fermionen der ersten beiden Familien gegenüber denen der dritten Familie vernachlässigbar sind.

Im Bereich der Wechselwirkungen beschreibt das Standardmodell die auf Glashow, Weinberg und Salam [22–24] zurückgehende Eichtheorie der elektroschwachen Wechselwirkung sowie der starken Wechselwirkung [25–28]. Die Beschreibung dieser Wechselwirkungen erfolgt aus dem Prinzip der lokalen Eichinvarianz und beruht auf der Symmetriegruppe

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y , \quad (1.1)$$

wobei die elektroschwache Wechselwirkung durch die Eichgruppe $SU(2)_L \times U(1)_Y$, die mittels des Higgs-Mechanismus spontan zur $U(1)_{em}$ der Quantenelektrodynamik gebrochen wird

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{em} , \quad (1.2)$$

und die starke Wechselwirkung durch die $SU(3)_c$ beschrieben werden. Das Standardmodell stellt somit eine nichtabelsche Eichtheorie dar.

Der Feldgehalt der Theorien ist durch die Eichfelder, die fermionischen Materiefelder der Quarks und Leptonen und das Higgs-Feld, das bei der spontanen Symmetriebrechung beteiligt ist, gegeben. Jede der Eichsymmetrien in (1.1) erfordert einen Satz von Eichbosonen, die sogenannten

Quarks	T	T_3	Y	Q	Masse
Up	1/2	1/2	1/6	2/3	$\approx 5\text{MeV}$
Down	1/2	-1/2	1/6	-1/3	$\approx 10\text{MeV}$
Charm	1/2	1/2	1/6	2/3	$\approx 1.3\text{GeV}$
Strange	1/2	-1/2	1/6	-1/3	$\approx 200\text{MeV}$
Top	1/2	1/2	1/6	2/3	$\approx 174\text{GeV}$
Bottom	1/2	-1/2	1/6	-1/3	$\approx 4\text{GeV}$
Leptonen					
Elektron	1/2	-1/2	-1/2	-1	$\approx 0.5\text{MeV}$
Myon	1/2	-1/2	-1/2	-1	$\approx 105\text{MeV}$
τ -Lepton	1/2	-1/2	-1/2	-1	$\approx 1.7\text{GeV}$

Tabelle 1.1: Eigenschaften der vom Standardmodell beschriebenen massiven Fermionen aller drei Familien. Gegenstand der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit sind jedoch nur die Fermionen der dritten und zugleich schwersten Familie, das Top-, das Bottomquark und das Taulepton. Die Neutrinos werden als masselos angenommen.

Träger der Wechselwirkung oder Austauscheteilchen. Der Anteil $SU(2)_L \times U(1)_Y$ der gesamten Symmetriegruppe des Standardmodells führt auf das Photon, das Z -Boson und die geladenen W -Bosonen. Die Symmetriegruppe $SU(3)_c$ führt auf acht Eichbosonen, die sogenannten Gluonen, die Vermittlerteilchen der starken Wechselwirkung.

Die Stärke der Eichwechselwirkungen wird durch dimensionslose Eichkopplungen¹

$$g_1, g_2 \quad \text{und} \quad g_3 \quad (1.3)$$

beschrieben. Dabei gibt g_1 die Stärke der $U(1)_Y$ -Eichwechselwirkung, g_2 die Stärke der $SU(2)_L$ -Eichwechselwirkung und g_3 die Stärke der $SU(3)_c$ -Eichwechselwirkung an. Gegenüber der elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkung kann die Kopplungsstärke der Gravitation in den in dieser Arbeit betrachteten Impulsbereichen $Q \lesssim \mathcal{O}(10^{16}\text{GeV})$ vernachlässigt werden. Die Stärke der Gravitationswechselwirkung erreicht erst in der Nähe der Planck-Skala bei Impulsen von $m_P \approx 10^{19}\text{GeV}$ die Kopplungsstärke der anderen Eichwechselwirkungen.

Die Materiefelder der Fermionen sind durch linkshändige Dubletts bezüglich der $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

und rechtshändige Singulets bezüglich der $SU(2)$

$$t_R, b_R \quad \text{und} \quad \tau_R \quad (1.5)$$

gegeben, wobei hier nur die Multipletts der Fermionen der dritten Familie angeschrieben werden. Die Tabelle 1.2 zeigt die Multipletts aller drei Familien im Zusammenhang.

¹Im Rahmen einer Einbettung des Standardmodell in Groß-unifizierenden Theorien (GUT) wird eine Normierung der Eichkopplung g_1 vorgenommen. Diese steht mit der Eichkopplung g' über $g'^2 = \frac{3}{5} g_1^2$ in Zusammenhang.

	1. Familie	2. Familie	3. Familie	Quantenzahlen
Q_L	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3} \ \mathbf{2} \ + \frac{1}{3})$
L_L	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1} \ \mathbf{2} \ - \ 1)$
\bar{q}_R	\bar{u}_R	\bar{c}_R	\bar{t}_R	$(\bar{\mathbf{3}} \ \mathbf{1} \ - \ \frac{4}{3})$
	\bar{d}_R	\bar{s}_R	\bar{b}_R	$(\bar{\mathbf{3}} \ \mathbf{1} \ + \ \frac{2}{3})$
\bar{l}_R	\bar{e}_R	$\bar{\mu}_R$	$\bar{\tau}_R$	$(\mathbf{1} \ \mathbf{1} \ + \ 2)$

Tabelle 1.2: Die im Standardmodell enthaltenen Multipletts. Die Quantenzahlen sind analog zu den in Tabelle (1.1) dargestellten Quantenzahlen in der Reihenfolge $SU(3) \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ aufgeführt. Gegenstand der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit sind nur die Fermionen der dritten Familie.

Das Higgs-Feld Φ wird durch ein komplexes $SU(2)$ -Dublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

beschrieben, wobei ϕ^+ die geladene und ϕ^0 die ungeladene Komponente darstellt.

Die Lagrangedichte in ihrer allgemeinen Form ist durch

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\text{Eich}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} - V(\Phi) \quad (1.7)$$

gegeben. Der Anteil $\mathcal{L}_{\text{Eich}}$ beschreibt die Kinematik und die Wechselwirkung der Eichbosonen mit den Materiefeldern. Das Potential

$$V(\Phi) = -m^2 \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (1.8)$$

enthält die von der Higgs-Selbstkopplung λ abhängige Higgs-Selbstwechselwirkung. Das Potential ist so parametrisiert, daß im Falle eines Vakuumerwartungswertes des Higgs-Feldes

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

der Zusammenbruch der Symmetrie des Grundzustandes durch spontane Symmetriebrechung eintritt. Durch explizites Minimieren läßt sich für einen positiven Wert von m^2 leicht nachvollziehen, daß

$$v = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \quad (1.10)$$

den „Wert“ der Feldkomponente angibt, für den ein Minimum auftritt. Der Wert von v ist durch

$$v = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad G_F = 1.16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (1.11)$$

gegeben und es gilt $v \approx 246.218 \text{ GeV}$ beziehungsweise $v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$. Dabei ist es wichtig, noch einmal darauf hinzuweisen, daß die spontane Symmetriebrechung die Symmetrie des Grundzustandes zerstört, die Symmetrie auf dem Niveau der Kräfte jedoch erhält.

Von den vier Freiheitsgraden des Higgs–Dubletts (1.6) werden im Zuge der spontanen Symmetriebrechung drei zu Goldstone–Bosonen, die in die longitudinalen Feldkomponenten der massiven Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung eingehen und damit für Massen der entsprechenden Teilchen sorgen. Der verbleibende Freiheitsgrad entspricht dem Feld des physikalischen Higgs–Bosons.

Ein weiterer Grund für die Einführung der spontanen Symmetriebrechung liegt in der Tatsache begründet, daß neben den Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung auch die Fermionen Massen erlangen. Das dazu benötigte Higgs–Boson ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt der Forschung noch nicht nachgewiesen, der Mechanismus stellt jedoch einen vielversprechenden Ansatz dar. In diesem Zusammenhang beschreibt der Anteil $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ der Lagrangedichte (1.7) die Wechselwirkung des Higgs–Feldes mit den Massen–Feldern der Fermionen

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_t \bar{Q}_L \Phi^c t_R - y_b \bar{Q}_L \Phi b_R - y_\tau \bar{L}_L \Phi \tau_R + \text{h. c.} , \quad (1.12)$$

wobei Q_L in der Beschränkung auf die dritte Familie durch $(t_L, b_L)^T$ und L_L durch $(\nu_{\tau L}, \tau_L)^T$, vergleiche Tabelle 1.2, gegeben sind, $\Phi^c = i \tau_2 \Phi^*$ die ladungskonjugierte Größe zu Φ und τ_2 die zweite Pauli–Matrix darstellt.

Die Kopplungen y_t , y_b und y_τ stellen die Yukawa–Kopplungen der entsprechenden Fermionen dar. Ihre Werte sind grundsätzlich unbestimmt. Durch den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung ergeben sich die Massen des Topquarks, des Bottomquarks und des Tauleptons auf Baumgraphen–Niveau zu

$$m_t = y_t \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_b = y_b \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_\tau = y_\tau \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (1.13)$$

und die Masse des physikalischen Higgs–Bosons zu

$$m_H = \sqrt{2 \lambda} v . \quad (1.14)$$

Alle Baumgraphen–Massen sind proportional zu v und der Wert von v ist durch (1.11) gegeben. Die Massen sind somit direkt proportional zu der entsprechenden Yukawa–Kopplung beziehungsweise dem Wert der Higgs–Selbstkopplung λ . Da die Werte der Yukawa–Kopplungen y_t , y_b und y_τ sowie die Higgs–Selbstkopplung λ durch die Theorie nicht bestimmt werden und somit freie Parameter darstellen, sind auch die entsprechenden Massen auf Baumgraphen–Niveau unbestimmt.

Kapitel 2

Das minimal supersymmetrische Standardmodell

In diesem Kapitel werden die Grundlagen des minimal supersymmetrisch erweiterten Standardmodells vorgestellt. Ausgehend von der Fragestellung der Einbettung des Standardmodells in eine übergeordnete Theorie mit nur einer Wechselwirkung (Große Unifizierung) führte die Diskussion von Erweiterungen des Standardmodells neben anderen zum minimal supersymmetrischen Standardmodell (MSSM). Diese Theorie hat sich als überaus erfolgreich erwiesen.

Es existieren mehrere Gründe, das MSSM trotz des größeren technischen Aufwands — es müssen zusätzliche Teilchen und ein weiteres Higgs–Dublett eingeführt werden — als Erweiterung des Standardmodells in Erwägung zu ziehen. Zum einen die Verbesserung der Renormierbarkeitseigenschaften zu nennen, die im Rahmen von GUT zu einer natürlichen Lösung des *Hierarchieproblems* führen, zum anderen die bessere Eigenschaften im Zusammenhang mit der Einbettung der Theorie in Groß–Unifizierende–Theorien (GUT). Nicht zuletzt billigt man den nicht–trivialen supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells eine entscheidende Rolle bei der Formulierung der Gravitation als Quantenfeldtheorie zu.

Die Verbesserung der Renormierbarkeitseigenschaften und das *Hierarchieproblem* sind eng miteinander verknüpft. Das Hierarchieproblem bezieht sich auf die Masse des im letzten Kapitel eingeführten Higgs–Bosons m_H des Standardmodells. Der Ausdruck für die Berechnung der Masse erhält quadratische Strahlungskorrekturen der Ordnung $m_H \approx \mathcal{O}(\Lambda)$, wobei Λ die sogenannte Abschneideskala (cutoff) der Theorie ist. Diese kann durchaus im Bereich der Planck–Skala $m_P \approx 10^{19}\text{GeV}$ liegen. Das Standardmodell gibt mit der Einführung der Skala des Vakuumerwartungswertes des Higgs–Feldes v jedoch Anlaß zu der Annahme, daß die Masse des Higgs–Bosons von der Größenordnung $m_H \approx \mathcal{O}(100\text{ GeV})$ sein muß. Man kann durch Feinabstimmung (fine–tuning) der Gegenterme bei der Renormierung (siehe dazu Abschnitt 3.1) der beteiligten Kopplungen erreichen, daß die quadratischen Divergenzen bei der Strahlungskorrektur der Masse des Higgs–Bosons Ordnung für Ordnung Störungstheorie kompensiert werden. Diese Feinabstimmung der Higgs–Masse wird jedoch als *unnatürlich* bezeichnet.

Die Einführung der Supersymmetrie beinhaltet die Annahme, daß jedem Teilchen ein weiteres Teilchen, sein *Superpartner*, zugeordnet wird. Es hat sich gezeigt, daß die Beiträge der bosonischen und fermionischen, einander zugeordneten Teilchen, sich bei der Berechnung der Schleifen zur Strahlungskorrektur so verhalten, daß die quadratisch divergenten Anteile nicht mehr auftreten und nur noch logarithmische Divergenzen verbleiben. Damit erlaubt die Supersymmetrie auf *natürliche* Art und Weise, die Beziehung $m_H \approx \mathcal{O}(100\text{ GeV}) \ll \Lambda$ einzuhalten.

Bei der Untersuchung des Verhaltens der Kopplungen der Standardmodells hat sich gezeigt, daß im Bereich der Eichkopplungen eine sogenannte *Kopplungs-Unifizierung* im Bereich hoher Impulse erreicht werden kann. Dies bedeutet, daß die Werte der Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 an einer bestimmten Skala durch einen einzelnen Wert g_{GUT} gegeben sind; man spricht von Groß-Unifizierenden Theorien (GUT). Die Skala der Unifizierung wird im allgemeinen mit m_{GUT} bezeichnet. Sie befindet sich für den Fall des MSSM im Bereich von $m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV. Im Rahmen von GUT wird angenommen, daß die Eichgruppe des Standardmodells und des MSSM, beide basieren auf derselben Eichgruppe

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y , \quad (2.1)$$

an der Unifizierungsskala in eine umfassendere Symmetriegruppe eingebettet ist.

Wie bereits angesprochen, wird im Rahmen der Supersymmetrie jedem im Standardmodell beschriebenen Teilchen ein sogenannter *Superpartner* zugeordnet. Jedes Fermionen des Standardmodells erhält ein Boson und jedes Boson des Standardmodells ein Fermion. Sei der antikommutierende Operator Q der Generator der supersymmetrischen Transformation, so gilt

$$Q |\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle \quad \text{und} \quad Q |\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle . \quad (2.2)$$

Der Operator Q und der Generator des linearen Impulses P bilden eine *gradierte Lie-Algebra*. Sie erfüllen folgende vereinfacht dargestellte Kommutator- beziehungsweise Antikommutatorbeziehungen

$$\begin{aligned} \{Q, Q^\dagger\} &= P \\ \{Q, Q\} &= \{Q^\dagger, Q^\dagger\} = 0 \\ [P, Q] &= [P, Q^\dagger] = 0 . \end{aligned} \quad (2.3)$$

Die Anzahl der Paare Q und Q^\dagger und somit die Anzahl in einer Theorie verwirklichten Supersymmetrien wird durch die Zahl N angegeben. Das in dieser Arbeit untersuchte *minimal supersymmetrische Standardmodell* ist mit $N = 1$ dabei die einfachste nicht-triviale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells.

Im folgenden geht der Abschnitt 2.1 auf den Teilchengehalt und die Eichsymmetrie des MSSM ein. In Abschnitt 2.2 wird auf den Mechanismus der Brechung der Supersymmetrie mittels weich brechender Terme eingegangen. Die Bestimmung und Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten der Kopplungen dieses weich brechenden Sektors wird ein zentraler Gegenstand der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit sein. Im Abschnitt 2.3.1 wird auf den Mechanismus der Brechung der elektroschwachen Symmetrie im Fall des MSSM eingegangen. Im Abschnitt 2.4 wird letztendlich die Berechnung der Masseneigenzustände der im MSSM enthaltenen Teilchen, das sogenannte Massenspektrum, aus den Eigeigenzuständen beschrieben.

Zu den grundlegenden Fragen zur Konstruktion supersymmetrischer Feldtheorien seien die Darstellungen von Wess und Bagger [29] sowie [30, 31] empfohlen. Nilles, Tata und Bagger [32, 33] gehen auf die phänomenologischen Aspekte supersymmetrischer Theorien ein. In den Veröffentlichungen von Guinon et al. [34] stehen die Aspekte des Higgs-Sektors des MSSM im Vordergrund. Eine gute Übersicht der in den nächsten Kapiteln dargestellten Inhalte ist in dem schon erwähnten *Supersymmetry Primer* von P. M. Martin [30] zu finden.

2.1 Teilchengehalt und Symmetrien

Die Einteilchenzustände einer supersymmetrischen Theorie sind durch sogenannte *Supermultiplets* gegeben. Diese enthalten immer einen fermionischen und einen bosonischen Anteil, die *Superpartner*.

Solange die Supersymmetrie ungebrochen ist, besitzen die beiden, in einem Supermultiplett enthaltenen Superpartner bis auf den Spin immer die gleichen physikalischen Eigenschaften, wie die gleiche Masse, die gleiche elektrische Ladung $Q_{\text{em.}}$, den gleichen Isospin und die gleiche Farbstruktur, d.h. die gleichen Eigenschaften im Bezug auf die starke Wechselwirkung, sofern diese vorhanden ist.

Für ein Supermultiplett muß immer

$$n_F = n_B \quad (2.4)$$

gelten, wobei n_F die Anzahl der fermionischen Freiheitsgrade und n_B die Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade angibt. Die einfachste Art, ein Multiplett zu konstruieren ist die Wahl eines Weyl-Fermions, $n_F = 2$, und zwei reellen Skalaren, $n_B = 1 \rightarrow 2n_B = 2$, die allgemein als ein komplexer Skalar dargestellt werden. Diese Wahl heißt *chirales*, *Massen-* oder *skalares Supermultiplett*. In dieser Arbeit soll die geläufigste Bezeichnung *chirales Supermultiplett* benutzt werden.

Weiterhin kann man ein Supermultiplett aus einem masselosen Spin-1-Vektorboson mit zwei Helizitätszuständen, $n_B = 2$, und einem masselosen Weyl-Fermion mit ebenfalls zwei Helizitätszuständen, $n_F = 2$, zusammensetzen. Supermultipletts dieser Art werden als *Eich-* oder *Vektor-Supermultipletts* bezeichnet. In dieser Arbeit soll die Bezeichnung *Eich-Supermultiplett* verwendet werden. Jede andere Wahl bei der Zusammensetzung von Supermultipletts erweist sich als reduzibel und kann als Kombination der beiden eben eingeführten Arten von Supermultipletts beschrieben werden.

Jedes im Standardmodell beschriebene Teilchen bildet zusammen mit seinem postulierten Superpartner ein Supermultiplett. Der Versuch, verschiedene Teilchen des Standardmodells in einem Supermultiplett unterzubringen, führt zu Widersprüchen. Die im Standardmodell enthaltenen Fermionen sowie die Higgs-Bosonen werden in chirale Supermultipletts, die Eich-Bosonen in Eich-Supermultipletts eingebettet.

Die Superpartner der Fermionen bekommen im Englischen zur Abgrenzung gegenüber ihrem Partner ein „s“ vorangestellt. Im Deutschen sollen dem durch das Voranstellen eines großen „S“ Rechnung getragen werden. So heißen die Partner der Fermionen folgend Sfermionen, die Partner der Leptonen Sleptonen.

Da jedes Teilchen des Standardmodells mit seinem Superpartner in ein Supermultiplett eingebettet ist, ergibt sich formal die gleiche Struktur der Materiefelder wie beim Standardmodell, vergleiche Tabelle 1.2. Im Fall der Fermionen und Sfermionen liegen linkshändige Dubletts Q_L und L_L sowie rechtshändige Singulets t_R , b_R und τ_R bezüglich der $SU(2)_L$ vor. Die Materiefelder der Superpartner sind entsprechend durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{b}_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}, \tilde{t}_R, \tilde{b}_R \text{ und } \tilde{\tau}_R \quad (2.5)$$

gegeben. Dabei werden die gleichen Symbole wie im Fall der Teilchen des Standardmodells mit übergestellter Tilde ($\tilde{}$) verwendet. Auch die Supermultipletts werden mit den gleichen Symbolen, jedoch mit übergestelltem Dach ($\hat{}$) bezeichnet. Es liegen somit folgende chirale Supermultipletts vor: \hat{Q} und \hat{L} sowie \hat{t} , \hat{b} und $\hat{\tau}$.

Wie im Fall der Materiefelder besitzt das MSSM auch, wie schon erwähnt, im Bereich der Eichfelder und Eichsymmetrie formal die gleiche Struktur wie das MSSM. Das MSSM basiert auf der selben Symmetriegruppe wie das Standardmodell

$$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y . \quad (2.6)$$

Damit liegen im MSSM folglich auch dieselben Eichbosonen wie im Standardmodell vor. Diese sind zusammen mit ihren Superpartnern in Eich-Supermultipletts eingebettet.

Im Gegensatz zu den Fermionen werden die Namen der Superpartner der Eichbosonen durch Anhängen der Silbe „-ino“ gebildet. Man erhält so die Bezeichnungen Wino \widetilde{W}^\pm , \widetilde{W}^0 und Bino \widetilde{B}^0 für die Superpartner der Eichbosonen der $SU(2)_L \times U(1)_Y$ in der ungebrochenen Phase und Photino und Zino für die Superpartner der sich aus den ungeladenen Anteilen der Winos und Binos ergebenden Superpartner der Bosonen in der gebrochenen Phase. Die Superpartner der Gluonen wird als Gluino \widetilde{g} bezeichnet. Die Tabelle 2.2 zeigt die Konstituenten der Supermultipletts im Eichsektor im Überblick.

Der Higgs Sektor spielt im Vergleich zu den Fermionen und Bosonen eine besondere Rolle. Zum einen erhält das durch ein komplexes $SU(2)$ -Dublett dargestellte Higgs-Boson einen Superpartner, das Higgsino, zum anderen wird der Higgs-Sektor im Gegensatz zu den Fermionen und Eich-Bosonen um ein weiteres Higgs-Higgsino Paar erweitert. Für diese Erweiterung sind vor allem zwei Gründe verantwortlich. Es ist nicht möglich, im Bereich der elektroschwachen Eichsymmetrie mit nur einem Higgs Dublett eine anomaliefreie Theorie zu konstruieren; es sind dazu zwei Higgs Supermultipletts mit entgegengesetzter Hyperladung-Quantenzahl $Y = \pm 1/2$ nötig. Nachdem sämtliche anderen Kandidaten diese Rolle nicht übernehmen können — sie sind ja selbst schon alle in Supermultipletts enthalten — ist dafür ein weiteres Higgs-Dublett beziehungsweise Supermultiplett nötig. Weiterhin werden zwei Higgs-Dubletts benötigt, um sowohl im Bereich der up-type Quarks, das sind das Top-, das Charm- und das Upquark, als auch der down-type Quarks, das sind das Bottom-, das Strange- und das Downquark, und Leptonen auf korrekte Art und Weise eine Kopplung mit den Fermionen darzustellen. Das minimal supersymmetrische Standardmodell enthält somit zwei Higgs $SU(2)_L$ -Dubletts¹

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix} , \quad (2.7)$$

und deren Superpartner, die Higgsinos

$$\widetilde{H}_u = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_u^+ \\ \widetilde{H}_u^0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{H}_d = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_d^0 \\ \widetilde{H}_d^- \end{pmatrix} . \quad (2.8)$$

Die Higgs-Dubletts und Higgsinos sind zusammen in je ein chirales Supermultiplett \widehat{H}_u und \widehat{H}_d eingebettet. Die Tabelle 2.1 zeigt die eingeführten chiralen Supermultipletts im Überblick. Die dort vorgenommene Darstellung beinhaltet aus schon erwähnten Gründen nur die Teilchen der dritten Familie, die Gegenstand der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit sind.

¹Neben den in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen H_u und H_d sind in der Literatur die Bezeichnungen H_1 und H_2 gebräuchlich, wobei sowohl die Zuweisung $H_u \equiv H_1$, $H_d \equiv H_2$ als auch $H_u \equiv H_2$, $H_d \equiv H_1$ zu finden sind, letztere jedoch die häufiger anzutreffende Variante darstellt. Die Verwendung der Indizes u und d läßt im Gegensatz zu den 1-2-Varianten sofort auf die Zugehörigkeit der Higgs Dubletts schließen, weshalb sie hier Verwendung findet.

Supermultiplett		Spin 1/2	Spin 0	Quantenzahlen bzgl. $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Quarks, Squarks	\widehat{Q}	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \widetilde{t}_L \\ \widetilde{b}_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
	\widehat{t}	t_R	\widetilde{t}_R	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -\frac{2}{3})$
	\widehat{b}	b_R	\widetilde{b}_R	$(\overline{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \frac{1}{3})$
Leptonen, Sleptonen	\widehat{L}_L	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \widetilde{\nu}_\tau \\ \widetilde{\tau}_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
	$\widehat{\tau}$	τ_R	$\widetilde{\tau}_R$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1)$
Higgsinos, Higgs-Bosonen	\widehat{H}_u	$\begin{pmatrix} \widetilde{H}_u^+ \\ \widetilde{H}_u^0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +\frac{1}{2})$
	\widehat{H}_d	$\begin{pmatrix} \widetilde{H}_d^0 \\ \widetilde{H}_d^- \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$

Tabelle 2.1: Die Konstituenten der chiralen Supermultipletts im minimal supersymmetrischen Standardmodell. Ein Teilchen und sein entsprechender Superpartner, zum Beispiel das rechtshändige t_R und das rechtshändige Stop \widetilde{t}_R , sind jeweils in ein Supermultiplett eingebettet. Der Spin der Teilchen beträgt 1/2, es sind Fermionen, der Spin ihrer Superpartner 0, es handelt sich um Bosonen.

	Spin 1	Spin 1/2	Quantenzahlen bzgl. $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$
Gluonen, Gluinos	g	\widetilde{g}	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
W-Bosonen, Winos	W^\pm, W^0	$\widetilde{W}^\pm, \widetilde{W}^0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
B-Boson, Bino	B^0	\widetilde{B}^0	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabelle 2.2: Die Konstituenten der Eich-Supermultipletts im minimal supersymmetrischen Standardmodell. Die Teilchen und jeweiligen Superpartner, zum Beispiel Gluonen g und Gluinos \widetilde{g} sind jeweils zusammen in ein Eich-Supermultiplett eingebettet. Der Spin der Eichbosonen beträgt 1, der Spin ihrer Superpartner 1/2, es handelt sich um Fermionen.

Analog zum Standardmodell in Kapitel 1 setzt sich die Lagrangedichte des MSSM aus mehreren Anteilen zusammen. Hier soll nur die Unterteilung in die Anteile $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$ und $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ vorgenommen werden.

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \quad (2.9)$$

Der Anteil $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$ ist im Gegensatz zum Anteil $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ manifest supersymmetrisch und enthält neben den Anteilen, die die Dynamik der Teilchen und ihre Wechselwirkung untereinander beschreiben, analog zum Standardmodell das skalare Potential, das im Zusammenhang mit der spontanen Symmetriebrechung ebenfalls eine wichtige Rolle spielen wird. Es wird in Abschnitt 2.3 im Detail vorgestellt.

Bei dem Anteil $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ handelt es sich um die sogenannten *weich brechenden Terme* (soft breaking terms), die im folgenden eine entscheidende Rolle spielen werden. Ihre Besprechung ist Gegenstand des Abschnitts 2.2.

Das oben angesprochene skalare Potential setzt sich aus mehreren Anteilen, so zum Beispiel den D-Termen und den F-Termen zusammen. Die F-Terme werden aus dem sogenannten Superpotential W

$$W_{\text{MSSM}} = \widehat{u}_R \mathbf{y}_u \widehat{Q}_L \widehat{H}_u + \widehat{d}_R \mathbf{y}_d \widehat{Q}_L \widehat{H}_d + \widehat{e}_R \mathbf{y}_e \widehat{L}_L \widehat{H}_d + \mu \widehat{H}_u \widehat{H}_d, \quad (2.10)$$

bestimmt. Das Superpotential enthält die Yukawa-Matrizen \mathbf{y}_u , \mathbf{y}_d und \mathbf{y}_e , 3×3 Matrizen im Familienraum, und den Higgs-Mischungsparameter μ , auf den in Abschnitt 2.3.2 näher eingegangen wird. Die Multiplikationen in (2.10) verlaufen alle konform mit der $SU(2)_L$ und der $SU(3)_c$, das heißt alle Indizes werden unterdrückt. Werden die Indizes nicht unterdrückt, so schreibt sich der μ -Term zum Beispiel als $\mu (H_u)_\alpha (H_d)_\beta \epsilon^{\alpha\beta}$ und der Yukawa-Term $\widehat{u}_R \mathbf{y}_u \widehat{Q}_L \widehat{H}_u$ als $\widehat{u}_R^i (\mathbf{y}_u)_i^j \widehat{Q}_{j\alpha}^a (\widehat{H}_u)_\beta \epsilon^{\alpha\beta}$, wobei α und β Indizes des schwachen Isospins, beziehungsweise der $SU(2)_L$, i und j Familien-Indizes und $a = 1, 2, 3$ Farb-Indizes, beziehungsweise Indizes der $SU(3)_c$ darstellen.

Es wurde schon erwähnt, daß im Rahmen dieser Arbeit eine Beschränkung auf die Teilchen der dritten Familie und die mit ihnen im Zusammenhang stehenden Kopplungen und Größen vorgenommen wird. Diese Beschränkung wird sich im Rahmen der durchgeführten Untersuchungen als gerechtfertigt herausstellen, da die Yukawa-Kopplungen der Teilchen der ersten beiden Familien aufgrund ihrer Größe gegenüber den Yukawa-Kopplungen der Teilchen der dritten Familie vernachlässigt werden können. Um die Beschränkung zu realisieren wird folgende Wahl der Yukawa-Matrizen $\mathbf{y}_{u,d,e}$ in 2.10 getroffen.

$$\mathbf{y}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_t \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_b \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y_\tau \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

so daß sich das Superpotential 2.10 analog zum Standardmodell als

$$W_{\text{MSSM}} = \widehat{t}_R y_t \widehat{Q}_L \widehat{H}_u + \widehat{b}_R y_b \widehat{Q}_L \widehat{H}_d + \widehat{\tau}_R y_\tau \widehat{L}_L \widehat{H}_d + \mu \widehat{H}_u \widehat{H}_d, \quad (2.12)$$

schreibt und die Yukawa-Kopplungen y_t , y_b und y_τ beinhaltet. Analog zum Standardmodell beinhaltet das Superpotential die Terme, die die Kopplung zwischen den Higgs-Bosonen und den Fermionen darstellen und somit über den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung dafür verantwortlich sind, den Teilchen Masse zu verleihen.

Im Gegensatz zum Standardmodell liegen im MSSM wie erwähnt zwei Higgs-Dubletts vor. Beide nehmen im Verlaufe der spontanen Symmetriebrechung nach

$$\langle H_u \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \langle H_d \rangle = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Vakuumerwartungswerte an, die verschiedene Werte annehmen können. Es gilt jedoch

$$v^2 = v_u^2 + v_d^2, \quad (2.14)$$

wobei v der aus dem Standardmodell bekannte Vakuumerwartungswert (1.11) des Standardmodell-Higgs-Bosons ist. Es wird weiterhin ein Parameter $\tan\beta$

$$\tan\beta = \frac{v_u}{v_d}, \quad (2.15)$$

eingeführt, der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte v_u und v_d angibt. Damit schreiben sich die aus dem Standardmodell bekannten Beziehungen der Massen und Yukawa-Kopplungen der Fermionen auf Baumgraphen-Niveau (1.13) im MSSM als

$$m_t = \frac{v}{\sqrt{2}} y_t \sin\beta, \quad m_b = \frac{v}{\sqrt{2}} y_b \cos\beta, \quad m_\tau = \frac{v}{\sqrt{2}} y_\tau \cos\beta. \quad (2.16)$$

Das Auftreten der Größen $\sin\beta$ beziehungsweise $\cos\beta$ spiegelt die Kopplung der Fermionen an die unterschiedlichen Higgs-Dubletts wieder.

Innerhalb des Abschnitts 2.4, der die Berechnung des Massenspektrums des weich brechenden MSSM im Detail vorstellt, wird ergänzend auf den Aspekt der *Polmassen-Korrektur* im Fall der Masse des Topquarks eingegangen.

Details zur Konstruktion und Struktur des Higgs-Sektors folgen im Abschnitt 2.3.1 beziehungsweise 2.3.2, der nächste Abschnitt geht auf die weich brechenden Terme $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ zur Brechung der Supersymmetrie im MSSM ein.

2.2 Die Brechung der Supersymmetrie

Würde die Supersymmetrie ungebrochen an allen Skalen zwischen dem IR-Bereich, Impulsen im Bereich des Vakuumerwartungswertes des Higgs-Feldes $v/\sqrt{2} \approx 174\text{GeV}$, und dem UV-Bereich, zum Beispiel der GUT-Skala $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{GeV}$, vorliegen, dann wären die Teilchen des Standardmodells und deren Superpartner jeweils entartet bezüglich der Masse und die Superpartner wären im Experiment nachweisbar.

Da dies nicht der Fall ist, muß angenommen werden, daß die Supersymmetrie an einer Skala oberhalb des IR-Bereichs, $m_S > m_Z$ gebrochen wird. Die Superpartner der Teilchen würden in diesem Fall Massen in der Größenordnung der Brechungsskala erhalten; man spricht auch davon, daß die Superpartner „ausfrieren“.

Neben einigen anderen Mechanismen zur Brechung der Supersymmetrie, zum Beispiel der eichvermittelten Supersymmetrie-Brechung (gauge mediated SUSY breaking), stellt das Einführen sogenannter *weich brechender Terme* (soft breaking terms) die in der Literatur am weitesten verbreitete Variante dar.

Es werden alle weich brechenden Terme in der Lagrangedichte berücksichtigt, die folgende Kriterien erfüllen: Sie respektieren die Eichsymmetrie, sie sind renormierbar, sie besitzen positive Massendimension, das heißt, sie enthalten keine dimensionslosen Kopplungen, da sonst die „Natürlichkeit“ verloren gehen würde. Dies stellt weiterhin sicher [30], daß in allen Ordnungen Störungstheorie keine quadratischen Divergenzen mehr auftreten. Diese Terme brechen die Supersymmetrie explizit.

Bei der Formulierung des MSSM wird damit folgender weich brechender Anteil $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ angesetzt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} &= \frac{1}{2} \left(M_3 \tilde{g} \tilde{g} + M_2 \tilde{W} \tilde{W} + M_1 \tilde{B} \tilde{B} \right) + \text{h.c.} + \\ &+ \left(\tilde{u} \mathbf{a}_u \tilde{Q} H_u + \tilde{d} \mathbf{a}_d \tilde{Q} H_d + \tilde{e} \mathbf{a}_e \tilde{L} H_d \right) + \text{h.c.} + \\ &+ \sum_{\alpha} \tilde{\phi}_{\alpha}^{\dagger} \mathbf{m}_{\tilde{\phi}_{\alpha}}^2 \tilde{\phi}_{\alpha} + m_{H_u}^2 H_u^* H_u + m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (b H_u H_d + \text{h.c.}) , \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei die Größe $\tilde{\phi}_{\alpha}$ über \tilde{Q} , \tilde{L} , \tilde{t} , \tilde{b} und $\tilde{\tau}$ läuft, entsprechend der in Tabelle 2.1 angegebenen Superpartner von Quarks und Leptonen. Die Größen $\mathbf{m}_{\tilde{\phi}_{\alpha}}^2$ stellen somit die Massen-Terme der Sfermionen und Sleptonen dar.

Der Term (2.17) enthält bis auf einen weiteren, im allgemeinen vernachlässigten Anteil, alle Terme, die den oben genannten Kriterien entsprechen. Es ist leicht einzusehen, daß $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ die Supersymmetrie explizit bricht, da nur skalare- und Gaugino-Felder und nicht deren Superpartner enthalten sind.

Die Parameter M_1 , M_2 und M_3 stellen die Bino, Wino und Gluino-Massenterme dar und besitzen die Dimension einer Masse. Die Größen \mathbf{a}_u , \mathbf{a}_d und \mathbf{a}_e sind die sogenannten *trilinearen Kopplungen*. Analog zum Yukawa-Sektor im Superpotential W (2.10) stellen sie 3×3 -Matrizen im Familien-Raum dar. Im allgemeinen sind die Einträge dieser Matrizen keinen Einschränkungen unterworfen. Es ist jedoch üblich folgenden Ansatz

$$\mathbf{a}_u = a_{u0} \mathbf{y}_u, \quad \mathbf{a}_d = a_{d0} \mathbf{y}_d, \quad \mathbf{a}_e = a_{e0} \mathbf{y}_e \quad (2.18)$$

zu machen, der zusammen mit dem Ansatz

$$\mathbf{m}_{\tilde{\phi}}^2 = m_{\tilde{\phi}}^2 \cdot \mathbf{1}_{3 \times 3} \quad (2.19)$$

für die skalaren Massenquadrate Probleme mit Flavour-ändernden neutralen Strömen verhindert. Mit der Wahl (2.11) der Yukawa-Matrizen führt (2.18) zu folgenden äquivalenten Matrizen der trilinearen Kopplungen

$$\mathbf{a}_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_b \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{\tau} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

so daß sich auch in diesem Fall auf die Größen, die mit den Fermionen der dritten Familie im Zusammenhang stehen, beschränkt wird. Die trilinearen Kopplungen a_t , a_b und a_{τ} besitzen die Dimension einer Masse.

Auch im Fall der durch (2.19) gegebenen Diagonal-Matrizen kann die Betrachtung auf die $(3, 3)$ -Elemente beschränkt werden. Dies hat seinen Grund ebenfalls in der Wahl (2.18) der Yukawa-Matrizen, die zusammen mit dem daraus folgenden Ansatz der trilinearen Kopplungen dafür sorgen, daß die in Kapitel 3 eingeführte Renormierungsgruppenevolution der verbleibenden Einträge trivial ist und keinen Einfluß auf die $(3, 3)$ -Elemente hat.

Bei den Größen $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ handelt es sich um die sogenannten *Higgs-Massenparameter*, die eine entscheidende Rolle bei der Bestimmung der Massen der Higgs Bosonen und der Durchführung der spontanen Symmetriebrechung spielen; siehe dazu Abschnitt 2.3.1. Die Massenterme der Sfermionen und Sleptonen sowie die Higgs-Massenparameter sind von der Dimension eines Massenquadrates. Dies trifft auch auf den Parameter b zu, der ebenfalls in das skalare Potential bei der Untersuchung der elektroschwachen Brechung mit einbezogen wird.

M_3, M_2, M_1	Gaugino–Massen
a_t, a_b, a_τ	Trilineare Kopplungen
b	Higgs–Mischungs–Parameter
$m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$	Higgs–Massenparameter
$m_{\tilde{Q}}^2, m_{\tilde{L}}^2, m_{\tilde{t}}^2, m_{\tilde{b}}^2, m_{\tilde{\tau}}^2$	skalare Massenquadrate

Tabelle 2.3: Die Parameter des weich brechenden Sektors des MSSM. Bei den trilinearen Kopplungen und den skalaren Massenquadraten wird aus im Text näher ausgeführten Gründen eine Beschränkung auf die dritte Familie vorgenommen.

Wird folgende Zuordnung vorgenommen

$$\mathbf{a}_u \leftrightarrow \mathbf{y}_u \quad \text{und} \quad b \leftrightarrow \mu, \tag{2.21}$$

so können die jeweiligen Terme im Superpotential (2.10) und (2.17) ineinander übergeführt werden. Daraus folgt, daß die entsprechenden Terme in $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ genau dann die Eichsymmetrie respektieren, wenn es für die Terme im Superpotential sichergestellt ist.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die in $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthaltenen Anteile in der Lage sind, sämtliche in der Theorie auftretenden Skalare und Gauginos mit den benötigten Massen zu versehen. Mehr dazu ist im Abschnitt 2.4 zu finden.

Erste phänomenologische Untersuchungen des weich brechenden MSSM fanden in den achtziger Jahren [15] statt. Im Jahr 1995 haben Lanzagorta und Ross basierend auf einer Arbeit von Ross und Robert aus dem Jahre 1992 [14] erste Ansätze zur Berechnung der Fixpunkte des weich brechenden MSSM im IR–Bereich unternommen. Damit einher gehen neuere Untersuchungen [16], die vor allem auch Einschränkungen der Theorie im IR–Bereich untersuchen.

Bevor in Abschnitt 2.4 explizit auf die Berechnung der Masseneigenzustände der Superpartner des weich brechenden MSSM aus den Eicheigenzuständen eingegangen wird, sollen in den nächsten Abschnitten die Aspekte der elektroschwachen Symmetriebrechung und die Eigenschaften des skalaren Potentials im Fall des MSSM vorgestellt werden.

2.3 Skalares Potential und elektroschwache Symmetriebrechung

In diesem Abschnitt wird auf die Aspekte der elektroschwachen Symmetriebrechung im Rahmen des weich brechenden MSSM eingegangen. Dabei wird auch auf die Modifikation gegenüber dem Standardmodell,— das MSSM besitzt ihm gegenüber zwei Higgs–Dubletts — eingegangen.

Weiterhin werden aus den Stationaritätsbedingungen die Minimierungsbedingungen und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ hergeleitet.

Die Minimierungsbedingungen ermöglichen es, aus der Struktur des Potentials die Masse des Z-Bosons und den Wert des Parameters $\tan\beta$ zu bestimmen und, im Fall des Z-Bosons, mit den experimentellen Vorgaben zu vergleichen.

Die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ verhindert bei Erfüllung ein Minimum im Ursprung des Raumes der im Potential auftretenden Felder und stellt das entscheidende Kriterium zur Entscheidung über die Möglichkeit der elektroschwachen Brechung dar.

2.3.1 Skalares Potential

Wie schon in Abschnitt 2.1 angesprochen, setzt sich das in der Lagrangedichte des MSSM enthaltene skalare Potential auf Baumgraphen-Niveau aus mehreren Anteilen zusammen

$$V = V_F + V_D + V_{\text{soft}} . \quad (2.22)$$

Die F-Terme V_F leiten sich nach

$$V_F = \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial W}{\partial \tilde{\phi}_{\alpha}} \right|^2 \quad (2.23)$$

aus dem Superpotential W (2.10) ab. Die D-Terme sind durch

$$V_D = \frac{1}{2} \sum_a g_a^2 \left(\sum_{\alpha\beta} \phi_{\alpha}^{\dagger} T^{\beta} \phi_{\alpha\beta} \right)^2 \quad (2.24)$$

gegeben, wobei in beiden Fällen ϕ_{α} über alle skalaren Komponenten der chiralen Superfelder läuft und a in (2.24) die Eichgruppen $SU(3)$, $SU(2)_L$ und $U(1)_Y$ durchindiziert. T^{β} stellt die Generatoren der $SU(2)_L$ dar und β läuft dementsprechend von 1 bis 3. Der Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{soft}} = & \left(\tilde{u} \mathbf{a}_u \tilde{Q} H_u + \tilde{d} \mathbf{a}_d \tilde{Q} H_d + \tilde{e} \mathbf{a}_e \tilde{L} H_d \right) + \text{h.c} + \\ & + \sum_{\alpha} \tilde{\phi}_{\alpha}^{\dagger} \mathbf{m}_{\tilde{\phi}_{\alpha}}^2 \tilde{\phi}_{\alpha} + m_{H_u}^2 H_u^* H_u + m_{H_d}^2 H_d^* H_d - (b H_u H_d + \text{h.c}) , \end{aligned} \quad (2.25)$$

enthält die relevanten Anteile der weich brechenden Terme aus Abschnitt 2.2.

Zur Realisierung der Brechung der elektroschwachen Symmetrie

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \longrightarrow U(1)_{\text{em}} \quad (2.26)$$

durch *spontane Symmetriebrechung* muß analog zum Standardmodell in Abschnitt 1 das Minimum des skalaren Potentials gesucht werden. Die Minimierung des Potentials (2.22) muß im Grunde bezüglich aller neutralen Komponenten durchgeführt werden. Da dieses Vorgehen zur Gewinnung von Aussagen aber zu Gleichungssystemen führt, die zu komplex sind, um sie zu lösen, wird eine andere Strategie eingeschlagen. In einem ersten Schritt wird zunächst das sogenannte *Higgs-Potential* (2.28) minimiert. Dieses beinhaltet nur die Terme aus (2.22), die im Zusammenhang mit den Higgs-Dubletts beziehungsweise der Komponenten ihrer Felder und der entsprechenden Kopplungen stehen.

Die sukzessive Erweiterung des Higgs-Potentials um zusätzliche Terme des vollständigen Potentials wird im Verlaufe des Kapitels 4 durchgeführt, um sogenannte *Bedingungen* (constraints)

abzuleiten. Diese Bedingungen erlauben eine Aussage über erwünschte oder unerwünschte Eigenschaften des Potentials im Zusammenhang mit der Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung. Sie verhindern das Auftreten unphysikalischer Minima, die zu einer Unbeschränktheit des Potentials und zu einer Brechung der Ladungs- und Farbsymmetrie führen.

Letztendlich wird mittels der Berechnung der Bedingungen an das Potential die Möglichkeit geschaffen, die Bereiche im Raum der freien Parameter einer Theorie einzuschränken und so die Aussagekraft der Theorie zu erhöhen. Eine ausführliche Darstellung der physikalischen Bedingungen, die den Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit zugrunde liegen, wird wie oben erwähnt, in Kapitel 4 vorgenommen.

2.3.2 Higgs Potential

Wie im letzten Abschnitt angesprochen, wird zunächst nur das sogenannte *Higgs-Potential* V_{Higgs} auf seine Eigenschaften bezüglich der Brechung der elektroschwachen Symmetrie untersucht. Das Higgs-Potential enthält nur solche Terme, die mit den Komponenten der Higgs-Dubletts

$$H_u = \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_u^0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_d = \begin{pmatrix} H_d^0 \\ H_d^- \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

beziehungsweise den entsprechenden Kopplungen in Zusammenhang stehen. Das Higgs-Potential ist durch

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} &= (|\mu|^2 + m_{H_u}^2) \cdot (|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2) + (|\mu|^2 + m_{H_d}^2) \cdot (|H_d^0|^2 + |H_d^-|^2) + \\ &+ b (H_u^+ H_d^- - H_u^0 H_d^0) + c.c. + \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) (|H_u^0|^2 + |H_u^+|^2 - |H_d^0|^2 - |H_d^-|^2)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} |H_u^+ H_d^{0*} + H_u^0 H_d^{-*}|^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

gegeben. Das Ziel ist es, das Minimum dieses Potentials zu berechnen, um $SU(2)_L \times U(1)_Y$ zu $U(1)_{\text{em}}$ zu brechen. Zunächst werden einige Vereinfachungen durchgeführt.

Unter Verwendung von $SU(2)_L$ -Eichtransformationen lassen sich die Isospin-tragenden Komponenten der Higgs Dubletts (2.27) „wegrotieren“. Man erhält

$$H_u^+ = 0 \quad \text{und} \quad H_d^- = 0. \quad (2.29)$$

Weiterhin kann die Größe b o.B.d.A. als reell und positiv angenommen werden. Eine eventuell in b vorhandene Phase kann nämlich durch Redefinition der Phasen von H_u^0 und H_d^0 absorbiert werden, da der zu b proportionale Term in (2.28) der einzige ist, der von den Phasen der H_u^0 und H_d^0 abhängt.

Unter der Verwendung der Schreibweisen $(|\mu|^2 + m_{H_u}^2) = m_1^2$ und $(|\mu|^2 + m_{H_d}^2) = m_2^2$ erhält man folgendes skalares Potential

$$\begin{aligned} V &= m_1^2 |H_u^0|^2 + m_2^2 |H_d^0|^2 - b (H_u^0 H_d^0 + c.c.) + \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) (|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2)^2, \end{aligned} \quad (2.30)$$

wobei im Minimum angenommen werden kann, daß die Größen H_u^0 , H_d^0 und b reell und positiv sind.

Die Berechnung des Minimums von (2.30) entspricht der Bestimmung des Minimums einer Funktion von $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im (H_u^0, H_d^0) - beziehungsweise (v_u, v_d) -Raum, eine aus der mehrdimensionalen Analysis bekannte Aufgabe. Zur Bestimmung der Stelle des Minimum müssen für V die Stationaritätsbedingungen

$$\frac{\partial V}{\partial H_u^0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial H_d^0} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.31)$$

erfüllt sein. Analog zum Vorgehen im Fall des Standardmodells nehmen die Higgs-Dubletts ihre Vakuumerwartungswerte

$$\langle H_u \rangle = \langle 0 | H_u | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_u \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \langle H_d \rangle = \langle 0 | H_d | 0 \rangle = \begin{pmatrix} v_d \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

an, womit man aus den Stationaritätsbedingungen (2.31) folgende Gleichungen in den Vakuumerwartungswerten v_u und v_d der Higgs-Dubletts erhält

$$-2b v_d + 2m_1^2 v_u + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) v_u (v_u^2 - v_d^2) = 0 \quad (2.33)$$

$$-2b v_u + 2m_2^2 v_d - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) v_d (v_u^2 - v_d^2) = 0. \quad (2.34)$$

Das Auflösungen von (2.33, 2.34) nach den Vakuumerwartungswerten v_u und v_d und Einsetzen in (2.28) liefert das Higgs-Potential an der Stelle des Extremums

$$V_{\min.} = \frac{1}{4} \left(m_1^2 (3v_u^2 + v_d^2) + m_2^2 (v_u^2 + 3v_d^2) \pm \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4b^2} (v_u^2 - v_d^2) \right). \quad (2.35)$$

Die Ausdrücke (2.33, 2.34) lassen sich unter Verwendung des Ausdrucks für die Masse des Z-Bosons aus dem skalaren Potential

$$\left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) = 2 \frac{m_Z^2}{v^2}, \quad (2.36)$$

und den schon in (2.14) und (2.15) erwähnten Definitionen des Vakuumerwartungswertes des Higgs-Bosons des Standardmodells v und dem Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der Higgs-Dubletts im MSSM

$$v^2 = v_u^2 + v_d^2 \quad \text{und} \quad \tan\beta = \frac{v_u}{v_d} \quad (2.37)$$

in folgende Minimierungsbedingungen umformen:

$$\begin{aligned} v_u \left(-\frac{2b}{\tan\beta} + 2m_1^2 - m_Z^2 \cos 2\beta \right) &= 0 \\ v_d \left(-2b \tan\beta + 2m_2^2 + m_Z^2 \cos 2\beta \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Das Potential an der Stelle des Minimums (2.35) läßt sich unter der Verwendung von (2.36, 2.37) und den Definitionen

$$m_+ = m_1^2 + m_2^2 \quad \text{und} \quad m_- = m_1^2 - m_2^2 \quad (2.39)$$

folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned} V_{\min.} &= \frac{1}{4} v^2 \left(2(m_1^2 + m_2^2) - \left(m_1^2 - m_2^2 \pm \sqrt{(m_1^2 + m_2^2)^2 - 4b^2} \right) \cos 2\beta \right) \\ V_{\min.} &= \frac{1}{4} v^2 \left(2m_+ - \left(m_- \pm \sqrt{m_+^2 - 4b^2} \right) \cos 2\beta \right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Lösen der Stationaritätsbedingungen

Wie leicht einzusehen ist, sind die Minimierungsbedingungen (2.38) erfüllt, wenn entweder

$$v_u = v_d = 0, \quad (2.41)$$

gilt, welches der Lösung im Ursprung entspricht (vergleiche nächsten Abschnitt) oder

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2b}{\tan\beta} + 2m_1^2 - m_Z^2 \cos 2\beta \right) &= 0 \\ (-2b \tan\beta + 2m_2^2 + m_Z^2 \cos 2\beta) &= 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

gilt. Da die Lösung (2.41) nicht in der Lage ist, die Symmetrie zu brechen, muß eine Bedingung gefunden werden, die diese Lösung ausschließt. Genauer gesagt muß gefordert werden, daß an der Stelle $(0, 0)$ kein Minimum vorliegt. Damit Minima vorliegen würden, müßte die Hessematrix der Funktion $V(v_u, v_d)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^0 \partial H_d^0} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial H_d^0 \partial H_u^0} & \frac{\partial^2 V}{\partial H_d^2} \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

ausgewertet an der Stelle des Extremums, positiv definit sein. Dieses Kriterium erlaubt die Konstruktion einer im nächsten Abschnitt hergeleiteten Bedingung, die eine Aussage über die Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung erlaubt.

Destabilisierung des Potentials im Ursprungs

Die in diesem Abschnitt hergeleitete Bedingung (constraint), die im folgenden kurz Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ genannt werden soll, verhindert bei Erfüllung ein Minimum im Ursprung des Raumes der im Potential auftretenden Felder und stellt somit das entscheidende Kriterium für das mögliche Auftreten der elektroschwachen Brechung dar.

Damit im Ursprung des Raumes der Felder ($H_u = 0, H_d = 0$) *kein* Minimum vorliegt, muß gefordert werden, daß die Hesse-Matrix, ausgewertet an der Stelle $(0, 0)$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial H_u^0 \partial H_d^0} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial H_d^0 \partial H_u^0} & \frac{\partial^2 V}{\partial H_d^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{v_u=v_d=0} = \begin{pmatrix} 2m_1^2 & -2b \\ -2b & 2m_2^2 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

nicht positiv definit ist. Eine Matrix ist genau dann positiv definit, wenn eines der beiden folgenden äquivalenten Kriterien erfüllt ist.

Kriterium i)

eine reelle 2×2 -Matrix A ist positiv definit \Leftrightarrow sämtliche Eigenwerte von A sind positiv

Kriterium ii)

eine reelle 2×2 -Matrix A ist positiv definit $\Leftrightarrow A_{(1,1)}$ und $\det A$ sind positiv

Die Eigenwerte der Hesse-Matrix (2.44) sind durch

$$\lambda_{1,2} = m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{4b^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad (2.45)$$

gegeben. Damit H **nicht** positiv definit ist muß

$$\lambda_1 < 0 \quad \text{oder} \quad \lambda_2 < 0 \tag{2.46}$$

gelten. Unter Verwendung der Eigenwerte (2.45) gelangt man ausgehend von

$$\lambda_{1,2} < 0 \quad \Rightarrow \quad m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{4b^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2} < 0 \tag{2.47}$$

und folgenden Umformungen

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 \pm \sqrt{4b^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2} &< 0 \\ \pm \sqrt{4b^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2} &> m_1^2 + m_2^2 \\ 4b^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 &> (m_1^2 + m_2^2)^2 \end{aligned} \tag{2.48}$$

zur Bedingung

$$b^2 > m_1^2 m_2^2 . \tag{2.49}$$

Verwendet man das Kriterium i), so ergibt die Determinante von H (2.44)

$$\det H = \begin{vmatrix} 2 m_1^2 & -2 b \\ -2 b & 2 m_2^2 \end{vmatrix} = 4m_1^2 m_2^2 - 4 b^2 < 0 \tag{2.50}$$

wobei hinreichend ist, daß $\det H$ kleiner Null ist, damit H nicht positiv definit ist ($4m_1^2 m_2^2 - 4b^2 < 0$); man sieht so leicht die Äquivalenz von (2.50) und (2.49).

Man kann also zusammenfassen: Damit die Lösung der Stationaritätsbedingung beziehungsweise der Minimierungsbedingung im Ursprung, $v_u = v_d = 0$ oder $H_u = H_d = 0$, die nicht in der Lage ist, die elektroschwache Eichsymmetrie in geeigneter Form zu brechen, kein Minimum darstellt, muß gelten:

$$\boxed{b^2 > m_1^2 m_2^2} . \tag{2.51}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist sichergestellt, daß die spontane Symmetriebrechung mit dem in diesem Abschnitt dargestellten Ansatz im Higgs-Sektor des Potentials, beziehungsweise dem Higgs-Potential und der Wahl der Struktur der Vakuumerwartungswerte, möglich ist und zu der gewünschten Brechung $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ führen kann.

Die Auswertung der Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ wird sinnvollerweise an der Skala der Symmetriebrechung vorgenommen, da auch die Berechnung der Masse des Z -Bosons und des Wertes des Parameters $\tan\beta$, beziehungsweise die Auswertung der Stationaritätsbedingungen an dieser Skala vorgenommen werden.

Nicht-triviale Lösung der Stationaritätsbedingung

Als nächstes wird die nicht-triviale Lösung der Minimierungsbedingung (2.31)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{2b}{\tan\beta} + 2m_1^2 - m_Z^2 \cos 2\beta \right) &= 0 \\ (-2b \tan\beta + 2m_2^2 + m_Z^2 \cos 2\beta) &= 0 \end{aligned} \tag{2.52}$$

näher untersucht. Diese Minimierungsbedingung, beziehungsweise deren Lösung, kann verwendet werden, um aus den Werten der Parameter b , m_1^2 und m_2^2 Werte für die Größen m_Z^2 und $\tan\beta$ zu berechnen. Es handelt sich bei (2.52) um zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es ist aber nicht sichergestellt, daß eine reelle Lösung existiert. Es wird sich im Verlauf der Untersuchungen zeigen, daß gewisse Kombinationen der Parameter im Potential existieren, die bezüglich der elektroschwachen Brechung ausgeschlossen werden können, da (2.52) dann keine reelle Lösung besitzt. In diesem Fall ist weder eine Aussage über die Existenz eines Minimums, noch der sich aus diesem ergebenden Werte für m_Z^2 und $\tan\beta$ möglich.

Für m_Z^2 und $\tan\beta$ ergeben (2.52) bzw. (2.33, 2.34)

$$\begin{aligned}\tan\beta &= \frac{2b}{m_+ \pm \sqrt{m_+^2 - 4b^2}} \\ m_Z^2 &= \frac{1}{\cos 2\beta} \left(m_- \pm \sqrt{m_+^2 - 4b^2} \right)\end{aligned}\quad (2.53)$$

als Lösung. Einsetzen der Lösung für $\tan\beta$ in die Lösung für m_Z^2 ergibt

$$m_Z^2 = - \left(\frac{m_-}{\sqrt{m_+^2 - 4b^2}} \pm 1 \right) m_+ . \quad (2.54)$$

Den Gleichungen (2.53) bzw. (2.54) sieht man sofort an, daß die Forderung, reelle Lösungen für m_Z^2 und $\tan\beta$ zu ergeben, darauf zurückgeführt werden kann, daß der Radikant $m_+^2 - 4b^2$ positiv ist. Es muß also gelten

$$m_+^2 - 4b^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1^2 + m_2^2)^2 > 4b^2 , \quad (2.55)$$

wobei echt größer gelten muß, da sonst in der Berechnung von m_Z^2 durch Null geteilt werden würde. Weiterhin erkennt man, daß entweder beide Größen reell oder beide Größen komplex sind.

Zusammenfassung der Lösungen und Bedingungen

Es sollen nun noch einmal die Ergebnisse der letzten Abschnitte im Zusammenhang dargestellt werden.

- Die Bestimmung des Minimums im Potential (2.28) ergibt folgende Lösung für die Wert von m_Z^2 (2.53, 2.54)

$$m_Z^2 = - \left(\frac{m_-}{\sqrt{m_+^2 - 4b^2}} \pm 1 \right) m_+ . \quad (2.56)$$

und $\tan\beta$

$$\tan\beta = \frac{2b}{m_+ \pm \sqrt{m_+^2 - 4b^2}} . \quad (2.57)$$

- Damit obige Lösungen reell sind muß

$$m_+^2 - 4b^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad (m_1^2 + m_2^2)^2 > 4b^2 \quad (2.58)$$

gelten (2.55).

- Damit der Ursprung im Raum der Felder, $(v_u, v_d) = (0, 0)$ beziehungsweise $(H_u, H_d) = (0, 0)$, **kein** Minimum darstellt, muß die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“,

$$b^2 > m_1^2 m_2^2 \quad (2.59)$$

erfüllt sein, um damit die spontane Brechung der elektroschwachen Symmetrie zu ermöglichen.

2.4 Berechnung der Masseneigenzustände

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der Masseneigenzustände aus den Eigeigenzuständen, beziehungsweise die Berechnung des Massenspektrums in Abhängigkeit der Parameter des weich brechenden MSSM dargestellt. Im Rahmen der Untersuchungen dieser Arbeit wird das Massenspektrum aus den Massen der drei Fermionen der dritten Familie, dem Topquark, dem Bottomquark und dem Taulepton, den fünf massiven Freiheitsgraden des Higgs-Sektors, den Neutralinos, den Charginos und den skalaren Massenquadraten der Superpartner des Top- und Bottomquarks und des Tauleptons, dem Stop, dem Sbottom und dem Stau gebildet.

Die Charginos ergeben sich aus der Mischung der geladenen Winos \widetilde{W}^\pm und der geladenen Komponenten der Higgsinos $\widetilde{H}_{u,d}^\pm$, die Neutralinos aus dem neutralen Wino \widetilde{W}^0 und den neutralen Komponenten der $\widetilde{H}_{u,d}^0$.

Noch einmal sei darauf hingewiesen, daß die Berechnung des Massenspektrums in vielen Darstellungen beschrieben wird; hier seien der *Supersymmetry Primer* von P. M. Martin [30], *Journeys beyond the Standard Model* von P. Ramond [21] und die vor allem dem Higgs-Sektor zugewandten Darstellungen von Guinon et al. [34] genannt.

2.4.1 Berechnung der Massen der Quarks und Leptonen im MSSM

Auf das Vorgehen zur Berechnung der Massen der Fermionen der dritten Familie, des Top-, des Bottomquarks und des Tauleptons auf Baumgraphen-Niveau wurde schon in Abschnitt 2.1 eingegangen. Zur Wiederholung seien hier noch einmal die Ausdrücke zur Berechnung der Massen aus den Yukawa-Kopplungen angeführt:

$$m_t = \frac{v}{\sqrt{2}} y_t \sin\beta, \quad m_b = \frac{v}{\sqrt{2}} y_b \cos\beta, \quad m_\tau = \frac{v}{\sqrt{2}} y_\tau \cos\beta. \quad (2.60)$$

Die Größe v ist durch (2.61)

$$v = \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad G_F = 1.16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (2.61)$$

gegeben. Die Größe $\tan\beta$ gibt das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Bosonen im MSSM an. Zusammen gilt $\tan\beta = v_u/v_d$ und $v^2 = v_u^2 + v_d^2$.

Da es sich bei (2.60) um Beziehungen auf Baumgraphen-Niveau handelt, müssen zur Berechnung der Massen Strahlungskorrekturen, in diesem Fall sogenannte *Polmassenkorrekturen* δ_f , berücksichtigt werden. Diese setzen sich im allgemeinen aus zwei Anteilen, dem elektroschwachen- und einem Anteil aufgrund der starken Wechselwirkung (QCD-Anteil)

$$\delta_f = \delta_f^{\text{elektroschwach}} + \delta_f^{\text{QCD}} \quad (2.62)$$

zusammen. Dabei ist zu beachten, daß im Fall des τ -Leptons nur der elektroschwache Anteil vorliegt, da Leptonen nicht der starken Wechselwirkung unterliegen.

Da sich gezeigt hat, daß die elektroschwachen Anteile gegenüber den QCD-Anteilen vernachlässigt werden können, werden im folgenden nur die QCD-Anteile betrachtet. Weiterhin wird die Polmassenkorrektur vernachlässigt, wenn die entsprechenden Yukawa-Kopplungen klein sind. Dies ist in den Untersuchungen in dieser Arbeit für das Bottomquark und das τ -Lepton der Fall, deren Kopplungen im Vergleich zu der Yukawa-Kopplung des Topquarks klein sind.² Es gilt $y_t \approx 1$ und die Polmassenkorrektur des Topquarks ist in erster Ordnung durch den Ausdruck [7]

$$m_{top}^{\text{pole}} = m_t(Q = m_{top}^{\text{pole}}) \left(1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha_s(Q = m_{top}^{\text{pole}})}{\pi} + O(\alpha_s^2) \right) \quad (2.63)$$

gegeben, wobei $m_t(Q) = v/\sqrt{2} y_t(Q)$, y_t die Yukawa-Kopplung des Topquarks darstellt und sich auf den QCD-Anteil beschränkt wurde, da der elektroschwache Anteil aus den genannten Gründen gegenüber dem QCD-Anteil vernachlässigt wird.

Bei der Größe m_t in (2.60) und (2.63) handelt es sich um die sogenannte *laufende Masse*; diese Bezeichnung ergibt sich aus dem Umstand, daß in der Massenbeziehung auf Baumgraphen-Niveau (2.60) die Masse des Topquarks aus der Yukawa-Kopplung, eine *laufende Kopplung*, berechnet wird. Näheres zu laufenden Kopplungen, beziehungsweise laufenden Parametern ist in Abschnitt 3.4 zu finden.

Um im weiteren Verlauf der Arbeit die Polmasse von der laufenden Masse zu unterscheiden, wird erstere wie in (2.63) mit m_{top}^{pole} bezeichnet.

Ist die Yukawa-Kopplung des Bottomquarks nicht vernachlässigbar, $y_b \approx 1$, so muß zur Berechnung der Pol-Masse des Bottomquarks m_{bottom}^{pole} ebenfalls eine Polmassenkorrektur analog zu (2.63) einbezogen werden. Gleiches gilt natürlich auch für das Taulepton, wobei, wie gesagt, nur der elektroschwache Anteil zu berücksichtigen ist, der jedoch gegenüber dem QCD-Anteil vernachlässigt werden kann.

2.4.2 Weich brechender Sektor und Higgs-Sektor

Der Higgs-Sektor des MSSM unter Einbeziehung der weich brechenden Terme enthält neben den fünf massiven Freiheitsgraden des Higgs Sektors zwei Charginos, vier Neutralinos die Gluinos sowie jeweils zwei Masseneigenzustände für jeden der Superpartner der Fermionen der dritten Familie, das Stop, das Sbottom und das Stau.

Die Charginos ergeben sich, wie eingangs erwähnt, aus der Mischung der geladenen Winos \widetilde{W}^\pm und der geladenen Komponenten der Higgsinos $\widetilde{H}_{u,d}^\pm$, die Neutralinos aus dem neutralen Wino \widetilde{W}^0 und den neutralen Komponenten der $\widetilde{H}_{u,d}^0$.

²Hierbei sollte auf folgenden Umstand acht gegeben werden: Sowohl im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ - als auch im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes sind die letztendlich zur Berechnung der Massen des Bottomquarks und des Tauleptons herangezogenen Yukawa-Kopplungen klein. Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes ist dies unmittelbar einleuchtend, die angesprochenen Yukawa-Kopplungen, und dementsprechend auch die Massen, sind Null. Im Fall des high- $\tan\beta$ werden zur Berechnung der Massen die Yukawa-Kopplungen nach der Umrechnung in die Verhältnisse des Standardmodells verwendet. Es gilt z. Bsp. $y_b^{\text{SM}} = y_b^{\text{MSSM}} \cos\beta$. Somit sind auch bei approximativer Yukawa-Kopplungsunifizierung ($y_t \approx y_b \approx y_\tau \approx 1$) die zur Berechnung der Massen verwendeten Yukawa-Kopplungen des Bottomquarks und des Tauleptons klein gegenüber der Yukawa-Kopplung des Topquarks.

Für die Ausführungen bezüglich der Strahlungskorrekturen zur Masse des leichtesten Higgs-Bosons und der Renormierungsgruppenevolution der Higgs-Selbstkopplung λ im Bereich des Standardmodells werden einige Begriffe aus dem Bereich der Renormierungsgruppenevolution benötigt. Diese werden erst in Kapitel 3 eingeführt. Den in Frage kommenden Abschnitt hinter das Kapitel zur Renormierungsgruppenevolution zu verlegen erschien jedoch aus thematischer Gebundenheit nicht ratsam, so daß darum gebeten wird, die benötigten Begriffe im Zweifel vorgehend dort nachzulesen.

Der Higgs Sektor

Wie in Abschnitt 2.1 angeführt, liegen im Higgs Sektor des MSSM zwei komplexe $SU(2)_L$ -Dubletts vor. Diese besitzen 8 reelle Freiheitsgrade, von denen nach der Brechung der elektroschwachen Symmetrie fünf massive Freiheitsgrade verbleiben. Die drei übrigen (masselosen) Freiheitsgrade G und G_{\pm} bilden — analog zum Standardmodell — die longitudinalen Moden des Z und der W -Bosonen.

Die fünf massiven Freiheitsgrade setzen sich zu einem CP-ungeraden Skalar A^0 mit Masse m_{A^0} , einem einfach positiv geladenen Skalar H^+ und dem entsprechenden ladungskonjugierten, einfach negativ geladenen Skalar H^- mit Masse $m_{H^{\pm}}$ und zwei weiteren CP-geraden, neutralen Skalaren h^0 und H^0 mit Massen m_{h^0} und m_{H^0} zusammen.

Die Masseneigenzustände der entsprechenden Skalare berechnen sich aus den Eigeigenzuständen nach

$$\begin{pmatrix} G \\ A \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Im}[H_u^0] \\ \text{Im}[H_d^0] \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & \sin\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_u^+ \\ H_d^{-*} \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

$$\begin{pmatrix} h^0 \\ H^0 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{Re}[H_u^0] - v_u \\ \text{Re}[H_d^0] - v_d \end{pmatrix} \quad (2.66)$$

wobei der auftretende Mischwinkel α durch

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta} = -\frac{m_{A^0}^2 + m_Z^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2}; \quad \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\beta} = -\frac{m_{A^0}^2 - m_Z^2}{m_{H^0}^2 - m_{h^0}^2}. \quad (2.67)$$

definiert wird. Man erhält folgende Ausdrücke für die Massen der fünf massiven Freiheitsgrade des Higgs-Sektors:

$$\begin{aligned} m_{A^0}^2 &= \frac{2b}{\sin 2\beta} \\ m_{H^{\pm}}^2 &= m_{A^0}^2 + m_W^2 \\ m_{h^0, H^0}^2 &= \frac{1}{2} \left(m_{A^0}^2 + m_Z^2 \mp \sqrt{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4m_Z^2 m_{A^0}^2 \cos^2 2\beta} \right) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Während die Massen der Skalare A^0 , H^0 und H^{\pm} nicht nach oben beschränkt sind — sie können mit $b/\sin 2\beta$ wachsen — ist für die Masse des h^0 Skalars auf Baumgraphen-Niveau folgende obere Grenze

$$m_{h^0} < |\cos 2\beta| m_Z \quad (2.69)$$

gegeben. Diese Einschränkung der Masse würde im Prinzip dafür sorgen, daß das leichteste Higgs-Boson des MSSM im LEP nachweisbar sein sollte. Hierbei ist anzumerken, daß es sich bei (2.69) um eine Beziehung auf Baumgraphen-Niveau handelt. Zum einen kann diese obere

Grenze durch die Einbeziehung von Strahlungskorrekturen im skalaren Potential, zum anderen durch die Einbeziehung der Renormierungsgruppenevolution der Selbstkopplung λ des Higgs-Bosons H im Standardmodell unterhalb der Brechungsskala m_S modifiziert werden. Beide Effekte tragen erheblich zur Erhöhung der Massen $m_{h^0}^2$ beziehungsweise m_H gegenüber (2.69) bei [35].

Die Einschleifen-Strahlungskorrektur zur Masse des leichtesten Higgs-Bosons $m_{h^0}^2$ ist durch

$$\begin{aligned} m_{h^0}^2 &= m_{h^0}^{(0)2} + \Delta m_{h^0}^2 \\ &= m_{h^0}^2 + \frac{3}{4\pi^2} v^2 y_t^4 \sin^4 \beta \log \left(\frac{\sqrt{2} m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}}{v^2 y_t^2 \sin^2 \beta} \right) \end{aligned} \quad (2.70)$$

gegeben, wobei $m_{h^0}^2$ durch die letzte Gleichung in (2.68) mit negativer Wurzel gegeben ist.

Zur Durchführung der Renormierungsgruppenevolution (siehe Kapitel 3) im Standardmodell zwischen der Brechungsskala m_S und der Skala der Masse des Z-Bosons m_Z wird folgendermaßen vorgegangen: An der Skala m_S wird das leichteste Higgs-Boson mit der sich nach (2.68, letzte Gleichung) ergebenden Masse m_{h^0} mit dem Higgs-Boson des Standardmodells identifiziert. Nach

$$\lambda = \frac{m_{h^0}^2}{2v^2} \quad (2.71)$$

läßt sich die Masse des Higgs Bosons m_{h^0} in die entsprechende Kopplung λ umrechnen. Die Kopplung des Higgs Bosons λ wird dann zusammen mit den Yukawa-Kopplungen der Fermionen der dritten Familie y_t , y_b und y_τ und den Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 mittels numerischen Integration unter Verwendung der Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells (3.13 bis 3.19) der Evolution unterworfen und an der Skala m_Z ausgewertet. Den so erhaltenen Wert der Kopplung des Higgs Bosons $\lambda(Q = m_Z)$ kann man mittels der inversen Beziehung von (2.71) nach

$$m_H = \sqrt{2\lambda} \cdot v \quad (2.72)$$

in die Masse m_H des Higgs Bosons des Standardmodells umrechnen. Auch das Higgs-Boson erfährt wie das Topquark, siehe Abschnitt 2.4.1, eine Pol-Massen-Korrektur [7], die aber bei den Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt wird. Untersuchungen des MSSM hinsichtlich der Masse des leichtesten Higgs-Bosons, beziehungsweise des Higgs-Bosons des Standardmodells, sind in [35] zu finden.

Massen der Neutralinos, Charginos und der Gluinos

Wie eingangs erwähnt, ergeben sich die Charginos durch Mischung der geladenen Winos \widetilde{W}^\pm und der geladenen Komponenten der Higgsinos $\widetilde{H}_{u,d}^\pm$. Die Charginos stellen zwei einfach geladene Masseneigenzustände dar. Die Neutralinos ergeben sich aus der Mischung des neutralen Wino \widetilde{W}^0 und der neutralen Komponenten der $\widetilde{H}_{u,d}^0$. Die Neutralinos bilden vier neutrale Masseneigenzustände. Die Masseneigenzustände der Charginos und Neutralinos werden entsprechend mit $m_{\widetilde{C}_{1,2}^\pm}$ und $m_{\widetilde{N}_{1,2,3,4}}$ bezeichnet.

Seien $\psi^0 = (\tilde{B}, \tilde{W}^0, \tilde{H}_d^0, \tilde{H}_u^0)$ die Eigeigenzustände der neutralen Komponenten, so läßt sich aus dem Potential die Neutralino–Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{\tilde{N}} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -\cos\beta \sin\theta_w m_Z & \sin\beta \sin\theta_w m_Z \\ 0 & M_2 & \cos\beta \cos\theta_w m_Z & -\sin\beta \cos\theta_w m_Z \\ -\cos\beta \sin\theta_w m_Z & \cos\beta \cos\theta_w m_Z & 0 & -\mu \\ \sin\beta \sin\theta_w m_Z & -\sin\beta \cos\theta_w m_Z & -\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.73)$$

ablesen, wobei M_1 , M_2 und M_3 die Bino–, Wino und Gluino–Massenterme und θ_w den schwachen Mischungswinkel (5.3) darstellt. Die Masseneigenzustände, beziehungsweise die Massen lassen sich aus (2.73) durch Diagonalisieren der Massenmatrix $\mathbf{M}_{\tilde{N}}$ berechnen. Dazu wird wie gewohnt eine unitäre Matrix \mathbf{N} so gewählt, daß mit

$$\tilde{N}_i = N_{ij} \psi_j^0 \quad \text{und} \quad \mathbf{M}_{\tilde{N}}^{\text{diag.}} = \mathbf{N}^* \mathbf{M}_{\tilde{N}} \mathbf{N}^{-1} \quad (2.74)$$

die Diagonalelemente der Matrix $\mathbf{M}_{\tilde{N}}^{\text{diag.}}$ die Massen der Neutralinos $m_{\tilde{N}_1}$, $m_{\tilde{N}_2}$, $m_{\tilde{N}_3}$ und $m_{\tilde{N}_4}$ ergeben.

Auf die explizite Angabe der Einträge der diagonalisierenden Matrix \mathbf{N} und der der Diagonalmatrix $\mathbf{M}_{\tilde{N}}^{\text{diag.}}$ und somit der Ausdrücke für die eben genannten Massen der Neutralinos wird aufgrund der Übersichtlichkeit verzichtet, da die Terme sehr länglich sind.

Das Massenspektrum der Charginos läßt sich auf analoge Art und Weise ableiten. Ausgehend von den Eigeigenzuständen der geladenen Komponenten $\psi_{\pm} = (\tilde{W}^+, \tilde{H}_u^+, \tilde{W}^-, \tilde{H}_d^-)$ der Higgsinos und Gauginos läßt sich die Massenmatrix der Eigeigenzustände aus dem Potential zu

$$\mathbf{M}_{\tilde{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{X}^T \\ \mathbf{X} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2} \sin\beta m_W \\ \sqrt{2} \cos\beta m_W & \mu \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

ablesen. Durch geeignete Wahl der unitären Matrizen \mathbf{U} und \mathbf{V} so, daß

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1^+ \\ \tilde{C}_2^+ \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \tilde{W}^+ \\ \tilde{H}_u^+ \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \tilde{C}_1^- \\ \tilde{C}_2^- \end{pmatrix} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \tilde{W}^- \\ \tilde{H}_d^- \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

die Eigeigenzustände in die Masseneigenzustände überführen, erhält man

$$\mathbf{X}^{\text{diag.}} = \mathbf{U}^* \mathbf{X} \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{C}_1} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{C}_2} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

mit den Massen der Charginos $m_{\tilde{C}_1}$ und $m_{\tilde{C}_2}$ als Diagonalelemente der diagonalisierten Massenmatrix $\mathbf{X}^{\text{diag.}}$. Diese 2×2 Matrizen lassen sich mit weniger Aufwand als die Massenmatrix der Neutralinos (2.73) diagonalisieren und die Massen der Charginos können so explizit angegeben werden:

$$m_{\tilde{C}_{1,2}}^2 = \frac{1}{2} \left((M_2^2 + \mu^2 + 2 m_W^2) \mp \sqrt{(M_2^2 + \mu^2 + 2 m_W^2)^2 - 4 (\mu M_2 - m_W^2 \sin 2\beta)^2} \right). \quad (2.78)$$

Die Gluinos stellen das einzige Farb–Oktett unter den Teilchen des MSSM dar. Aus diesem Grund findet keine Mischung mit anderen Teilchen statt, und die Masse der Gluinos ist auf Baumgraphen–Niveau proportional zu M_3 .

Nimmt man Korrekturen erster Ordnung hinzu, so erhält man den Ausdruck

$$m_{\tilde{g}} = M_3(Q) \left(1 + \frac{\alpha_s}{4\pi^2} \left(15 + 6 \log \frac{Q}{M_3} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) \quad (2.79)$$

für die Masse $m_{\tilde{g}}$ der Gluinos. Diese Korrekturen können für Gluino–Massen zwischen $m_{\tilde{g}} \approx m_S$ bis zu $m_{\tilde{g}} \approx 1300\text{GeV}$, den höchsten in diesen Untersuchungen auftretenden Gluino–Massen, einen Beitrag von 1% bis 25% ausmachen.

Da die untere Schranke für die Masse der Gluinos im Rahmen der Untersuchung des MSSM jedoch keine entscheidende Rolle spielt, wird auf die Betrachtung von Korrekturen verzichtet, und es gilt

$$m_{\tilde{g}} = M_3 \quad (2.80)$$

für die Masse des Gluinos auf Baumgraphen–Niveau.

Masseneigenzustände der Squarks und Sleptonen

Bei der Ableitung der Massen der skalaren Squarks und Sleptonen wird sich von vornherein auf die dritte, schwere Familie beschränkt. Die Ableitung der Ausdrücke für Massen der ersten beiden Familien birgt keine Schwierigkeiten und kann bei Vernachlässigung kleiner Kopplungen mit einigen Abschätzungen für die Renormierungsgruppenevolution explizit angegeben werden; siehe dazu [30]. Es sind hier nur die skalaren Teilchen der dritten Familie, das Stop, das Sbottom, die Superpartner des Top– und Bottomquarks, sowie das Stau, der Superpartner des Tauleptons, zu betrachten.

Das Vorgehen zur Berechnung der Masseneigenzustände und der dazugehörigen Massen verläuft in allen drei Fällen analog. Im Fall des Stop mischen die rechts– und linkshändigen Anteile, um die Massenmatrix zu bilden. Deren Eigenwerte geben die Massen der Masseneigenzustände, $m_{\tilde{t}_1}^2$ und $m_{\tilde{t}_2}^2$, an. Es gilt

$$\mathcal{L} \quad \text{enthält} \quad - (\tilde{t}_L^* \tilde{t}_R^*) \mathbf{M}_t^2 \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix}, \quad (2.81)$$

wobei die Eigeigenzustände \tilde{t}_L den Anteil des Stop aus dem linkshändigen $SU(2)_L$ –Dublett \tilde{Q} und \tilde{t}_R das rechtshändige Singulett darstellen. Die Massenmatrix \mathbf{M}_t^2 aus (2.81) läßt sich mittels einer einfachen aber länglichen Rechnung zu

$$\mathbf{M}_t^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{Q}}^2 + m_t^2 + \Delta_u & v(a_t \sin\beta - \mu y_t \cos\beta) \\ v(a_t \sin\beta - \mu y_t \cos\beta) & m_{\tilde{t}}^2 + m_t^2 + \Delta_{\bar{u}} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

aus dem Potential bestimmen, wobei die Größen Δ_u beziehungsweise $\Delta_{\bar{u}}$ und im folgenden $\Delta_{d,\bar{d}}$ und $\Delta_{e,\bar{e}}$ durch (2.87) beziehungsweise (2.88) gegeben sind. Die unitäre Matrix \mathbf{U}_t mit

$$\begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_t \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{t}_1 \\ \tilde{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_t & \sin\theta_t \\ -\sin\theta_t & \cos\theta_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

rotiert die Eigeigenzustände $\tilde{t}_{L,R}$ in die Masseneigenzustände $\tilde{t}_{1,2}$ und diagonalisiert die Massenmatrix \mathbf{M}_t^2 nach

$$\mathbf{M}_t^{\text{diag.}} = \text{diag} \left(m_{\tilde{t}_1}^2, m_{\tilde{t}_2}^2 \right) = \mathbf{U}_t^* \mathbf{M}_t^2 \mathbf{U}_t^{-1} . \quad (2.84)$$

Im Fall des Sbottom und Stau erhält man analog folgende Massenmatrizen

$$\mathbf{M}_b^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{Q}}^2 + m_b^2 + \Delta_d & v (a_b \cos\beta - \mu y_b \sin\beta) \\ v (a_b \cos\beta - \mu y_t \sin\beta) & m_b^2 + m_{\tilde{b}}^2 + \Delta_{\bar{d}} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

$$\mathbf{M}_{\tilde{\tau}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 + \Delta_e & v (a_{\tau} \cos\beta - \mu y_{\tau} \sin\beta) \\ v (a_{\tau} \cos\beta - \mu y_{\tau} \sin\beta) & m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 + \Delta_{\bar{e}} \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

die zu den Masseneigenzuständen $\tilde{b}_{1,2}$ und $\tilde{\tau}_{1,2}$ mit den Massen $m_{\tilde{b}_{1,2}}^2$ und $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2$ führen.

Die Größen $\Delta_{u,\bar{u}}$, $\Delta_{d,\bar{d}}$ und $\Delta_{e,\bar{e}}$ in den Massenmatrizen sind durch

$$\Delta_{\phi} = \left(T_3^{\phi} - Q_{\text{em.}}^{\phi} \sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \quad (2.87)$$

gegeben, es gilt $\phi = u, \bar{u}, d, \bar{d}, e, \bar{e}$.

Der Ursprung dieser sogenannten *Hyperfein-Aufspaltung* (hyperfine splittings) liegt in der elektroschwachen Symmetriebrechung, genauer in den quadratischen Wechselwirkungen der $U(1)_Y$ - und $SU(2)_L$ -D-Terme; sie haben die Form $(\text{Squark/Slepton})^2 (\text{Higgs})^2$. Die Δ -Terme haben die Eigenschaft, die Massen der in den $SU(2)_L$ -Supermultipletts enthaltenen Komponenten aufzuspalten und spielen vor allem bei den Massen der Skalare der ersten beiden Familien eine Rolle, die ohne dieses Aufspalten degeneriert wären.

In (2.87) gibt T_3^{ϕ} die dritte Komponente des schwachen Isospins und $Q_{\text{em.}}^{\phi}$ die elektrische Ladung des chiralen Supermultipletts an, dem ϕ angehört. Es gilt

$$\begin{aligned} \Delta_u &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \\ \Delta_{\bar{u}} &= \left(\frac{2}{3} \sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \\ \Delta_d &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \\ \Delta_{\bar{d}} &= \left(-\frac{1}{3} \sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \\ \Delta_e &= \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \\ \Delta_{\bar{e}} &= \left(-\sin^2 \theta_w \right) m_Z^2 \cos 2\beta \end{aligned} \quad (2.88)$$

Es sei angemerkt, daß in (2.85) und (2.86) in der Literatur oft auf die Beiträge der dementsprechenden Massen der Fermionen, m_b und m_{τ} , verzichtet wird, da diese aufgrund der Größe ihrer Yukawa-Kopplungen vernachlässigbar erscheinen. In den Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit werden auch große Werte von $\tan\beta$ eine Rolle spielen. Große Werte von $\tan\beta$ haben Top-, bottom- und tau-Yukawa-Kopplungen der gleichen Größenordnung zur Folge, so daß die

Yukawa-Kopplungen des Bottomquarks und des Tauleptons gerade nicht vernachlässigbar klein sind, weshalb im Rahmen dieser Arbeit diese Massen wie in (2.85) und (2.86) mit einbezogen werden.

Auf die explizite Angabe der Ausdrücke für die Massen der Masseneigenzustände wird hier wie im Fall der Neutralinos verzichtet.

Kapitel 3

Renormierungsgruppengleichungen und Fixmannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel wird auf die Renormierung im Rahmen von Feldtheorien, auf Renormierungsgruppengleichungen und auf Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen eingegangen.

Die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM stellt einen zentralen Punkt der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit dar. In Abschnitt 3.3 wird aus diesem Grund eine schrittweise Einführung in die Grundlagen und die Methoden zur Berechnung von Fixmannigfaltigkeiten vorgenommen.

Das Interesse an Fixmannigfaltigkeiten geht auf die Arbeiten von Pendleton, Ross und anderen [1–3, 5, 6] zurück. Neuere Untersuchungen finden sich in [7, 36]. Mathematische Grundlagen zur Theorie der Fixmannigfaltigkeiten können in [37] nachgelesen werden. Weitere Details zur geschichtlichen Einbettung der Untersuchung von Fixmannigfaltigkeiten sind am Beginn des Abschnitts 3.3 zu finden.

Bevor auf die Fixmannigfaltigkeiten eingegangen wird, soll im nächsten Abschnitt kurz der Prozeß der Renormierung als Grundlage zur Berechnung von Renormierungsgruppengleichungen vorgestellt werden. Darauf folgen in Abschnitt 3.2 die Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM und des Standardmodells in Einschleifen-Näherung. In Abschnitt 3.4 wird auf den Mechanismus der *Radiativen Symmetriebrechung* eingegangen. Obwohl dieser thematisch der Darstellung des skalaren Potentials zuzuordnen ist, wird er erst jetzt eingeführt, da einige in diesem Kapitel eingeführte Begriffe zur hinreichenden Darstellung der radiativen Symmetriebrechung benötigt werden.

3.1 Renormierung

Zur Berechnung von Meßgrößen, das heißt zur Berechnung von Streuprozessen im Rahmen einer quantisierten Feldtheorie werden mittels der Störungstheorie Streumatrixelemente beziehungsweise Greensfunktionen berechnet. Die mathematischen Ausdrücke der Greensfunktionen lassen sich formalisiert mit Hilfe sogenannter *Feynman-Graphen* oder *Feynman-Diagramme* ableiten. In erster Ordnung der Störungstheorie, dem sogenannten *Baumgraphen-Niveau*, treten in diesen Diagrammen keine Schleifen auf. Analog zu einem Baum, daher der Name, sind ausschließlich Verzweigungen vorhanden. Innerhalb einer Ordnung müssen zur Berechnung des

Beitrag zum mathematischen Ausdruck zur Beschreibung des Streuprozesses alle möglichen Diagramme, gewichtet mit spezifischen kombinatorischen Faktoren, die die Anzahl der möglichen Konstruktionsmöglichkeiten beschreiben, aufsummiert werden.

Erhöht man die Ordnung der Störungstheorie, so können in den Graphen der jeweiligen Ordnung sogenannte *Schleifen* (loops) auftreten. Die Schleifen beinhalten Umlaufimpulse, die nicht durch die äußeren Gegebenheiten, beziehungsweise durch Impulserhaltung an den Vertices festgelegt sind. Die Umlaufimpulse werden in der mathematischen Beschreibung durch Integrationen über alle möglichen Umlaufimpulse repräsentiert. Bei der Auswertung der mathematischen Ausdrücke erweisen sich diese Integrationen häufig als schwierig, da ihre Beiträge „unendlich“ sein können. Dies ist nicht mit den durch die Streuprozesse beschriebenen Meßgrößen vereinbar, da diese aufgrund ihrer Natur als Meßgröße endliche Werte besitzen sollten.

Nachdem dieser Umstand der unendlichen Beiträge bei der Formulierung der quantisierten Feldtheorien zunächst lange Zeit als Hindernis und Argument gegen quantisierte Feldtheorien empfunden wurde, konnte, basierend auf den Arbeiten von Gell–Mann und Low [38], der Formalismus der Renormierung etabliert werden, um mit den Divergenzen umzugehen. Eine physikalische Deutung der Renormierung als Beschreibung des Skalierungsverhaltens von Meßgrößen konnte bereits 1953 von Stueckelberg und Petermann [39] gegeben werden.

Zur Lösung der Probleme wird im ersten Schritt die Berechnung der divergenten Anteile mittels des Formalismus der *dimensionalen Regularisation* (DREG) durchgeführt. Dazu wird die vierdimensionale Raumzeit in den betrachteten Integralen analytisch in

$$d = 4 - 2\varepsilon; \quad \varepsilon > 0 \quad (3.1)$$

Dimensionen fortgesetzt. Die Ausdrücke lassen sich dann formal in d Dimensionen berechnen und gehen für $\varepsilon \rightarrow 0$ in die ursprünglichen Ausdrücke über. Die auftretenden Integrationen über die vierdimensionale Raumzeit werden infolgedessen durch Integrationen über $d = 4 - 2\varepsilon$ ersetzt

$$\int d^4x \dots \longrightarrow \int d^{4-2\varepsilon}x \dots \quad (3.2)$$

Die durch die Berechenbarkeit der Divergenzen erhaltenen Informationen über die Struktur der divergenten Anteile wird zur Konstruktion sogenannter *Gegenterme* (counter–terms) verwendet, die auf der Ebene der Lagrangedichte den Ausgangstermen hinzugefügt werden

$$\mathcal{L}_{\text{ren.}} = \mathcal{L} - \mathcal{L}_C \quad (3.3)$$

Über die Gegenterme hinaus können in \mathcal{L}_C noch weitere Terme enthalten sein. Welche das sind, ist durch das sogenannte *Renormierungsschema* vereinbart. Enthält \mathcal{L}_C gerade nur die divergenten Anteile aus \mathcal{L} , so spricht man vom *massenunabhängigen Renormierungsschema*. Im anglikanischen Sprachraum wird dieses als MS (minimal subtraction) bezeichnet; der Name ist unmittelbar einleuchtend. Die Bezeichnung „*massenunabhängig*“ rührt daher, daß die Gegenterme nicht explizit von den Massen der beschriebenen Teilchen abhängen. Innerhalb des weitverbreiteten $\overline{\text{MS}}$ –Schemas (sprich: MS–bar) werden über die divergente Anteile hinaus noch die führenden Logarithmen mit einbezogen.

Im Rahmen der dimensional Regularisierung treten durch die Integration über $d = 4 - 2\varepsilon$ Dimensionen Kopplungen auf, die dimensionsbehaftet sind. Um diese Dimensionalität zu kompensieren, werden nach

$$\begin{aligned} \text{Eich- / Yukawa - Kopplung} &\longrightarrow Q^\varepsilon \cdot \text{Eich- / Yukawa - Kopplung} \\ \text{skalare Selbstkopplung} &\longrightarrow Q^{2\varepsilon} \cdot \text{skalare Selbstkopplung} \end{aligned} \quad (3.4)$$

neue Kopplungen eingeführt, die weiterhin dimensionslos sind. Die Dimensionalität wird in die Größe Q verlagert, die als *Renormierungspunkt* oder im folgenden kurz als *Skala* bezeichnet wird. Sie gibt die Impulsskala an, bei der die Auswertung der Theorie vorgenommen wird. Da physikalische Meßgrößen im allgemeinen nicht von Q abhängen können, wird die Skalenabhängigkeit auf die sogenannten *gleitenden Kopplungen* verschoben. Aus den gleitenden Kopplungen lassen sich auf durch das Renormierungsschema festgelegte Weise die physikalischen Meßgrößen berechnen. Das Skalenverhalten der gleitenden Kopplungen wird durch *Renormierungsgruppengleichungen* (RGG) beschrieben. Diese stellen gewöhnliche, nichtlineare Differentialgleichungen, beziehungsweise im Fall von mehreren Kopplungen gekoppelte Systeme von gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen dar.

Um den Schritt zur Ableitung der Renormierungsgruppengleichungen zu verdeutlichen, soll hier das Beispiel der sogenannten ϕ^4 -Theorie eines skalaren Feldes ϕ angeführt werden. Eine mögliche Lagrangedichte zur Beschreibung des skalaren Feldes ϕ mit der Masse m und der ϕ^4 -Kopplung λ ist durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (3.5)$$

gegeben. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der nicht-renormierten und der renormierten n -Punkt Greensfunktion $\Gamma^{(n)}$ in Impulsdarstellung

$$\Gamma_0^{(n)}(p_1 \dots p_n, \lambda_0, m_0, \varepsilon) = Z_\phi^{-n/2} \Gamma^{(n)}(p_1 \dots p_n, \lambda, m, Q, \eta) \quad (3.6)$$

wobei die renormierten und nicht-renormierten (Index 0) Größen nach

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2}(Q) \phi \quad m_0^2 = Z_{m^2}(Q) m^2 \quad \lambda = Z_\lambda(Q) \lambda \quad (3.7)$$

zusammenhängen und die Größen $Z_\phi(Q)$, $Z_{m^2}(Q)$ und $Z_\lambda(Q)$ die sogenannte *Renormierungskonstanten* bezeichnen. Die renormierten Größen sind von Q abhängig, wohingegen die nicht-renormierten Größen von Q unabhängig sind. Die Gleichung (3.6) bringt die Invarianz der unrenormierten Theorie unter Skalierungstransformationen des Renormierungspunktes Q nach

$$Q \longrightarrow Q' = \kappa Q \quad (3.8)$$

zum Ausdruck, wobei κ einen beliebigen Skalierungsfaktor darstellt. Ergänzt um die entsprechende Transformation der Kopplung stellt diese Transformation die *Renormierungsgruppe* dar. Die Differentiation von (3.6) nach Q liefert die *Renormierungsgruppengleichung*

$$\left[Q \frac{\partial}{\partial Q} + Q \frac{\partial \lambda}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial \lambda} + Q \frac{\partial m}{\partial Q} \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} Q \frac{\partial \log Z_\phi}{\partial Q} \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (3.9)$$

Diese Gleichung beschreibt die Änderung der Greensfunktion, die die Skalierung des Renormierungspunktes Q kompensiert. Die Theorie muß invariant gegenüber diesen Renormierungstransformation sein, man spricht von *Renormierungsgruppeninvarianz*. Unter Verwendung der Definitionen

$$\beta(\lambda) = Q \frac{\partial \lambda}{\partial Q} \quad \gamma_m = \frac{1}{2} Q \frac{\partial \log m^2}{\partial Q} \quad \gamma_d = \frac{1}{2} Q \frac{\partial \log Z_\phi}{\partial Q} \quad (3.10)$$

läßt sich die Gleichung (3.9) als

$$\left[Q \frac{\partial}{\partial Q} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \gamma_m \frac{\partial}{\partial m} - n \gamma_d \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (3.11)$$

schreiben, wobei hier und in Gleichung (3.9) nur noch die renormierte Greensfunktion $\Gamma^{(n)}$ auftritt.

In dieser Arbeit finden die Differentialgleichungen der Kopplungen, erster Term in (3.10), Verwendung. Diese beschreiben das Verhalten der gleitenden Kopplungen bei Änderung der Skala Q . Sie stellen im allgemeinen nichtlineare Differentialgleichungen erster Ordnung dar und lassen sich somit unter Angabe einer Anfangsbedingung vollständig festlegen und werden ebenfalls als *Renormierungsgruppengleichungen* bezeichnet. Die zugehörigen β -Funktionen der Kopplungen erhält man störungstheoretisch aus den Korrekturen zu den entsprechenden Wechselwirkungsvertizes.

Es soll noch erwähnt werden, daß die dimensionale Regularisation (DREG) im Fall der Konstruktion supersymmetrischer Feldtheorien, zum Beispiel dem in dieser Arbeit betrachteten MSSM, nicht ohne weiteres anwendbar ist. Die Probleme resultieren aus der Tatsache, daß bei der dimensional Regularisation (DREG) bosonische und fermionische Freiheitsgrade unterschiedlich behandelt werden. Die Gleichstellung von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden stellt jedoch gerade eine wichtige Grundbedingung der Supersymmetrie dar. Zur Lösung wurde ein alternatives Verfahren, die *dimensionale Reduktion* (DRED) eingeführt. Ihr liegt zugrunde, die Lorentz- und Dirac-Algebra in vier Dimensionen, die Integration jedoch wie im Fall der DREG in $(4 - 2\varepsilon)$ Dimensionen auszuführen.

3.2 Renormierungsgruppengleichungen

In diesem Abschnitt werden die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodell [7] für die Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 und die Yukawa-Kopplungen y_t , y_b und y_τ und die Renormierungsgruppengleichungen für MSSM unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors [40] angegeben. Die Kopplungen und Parameter des weich brechenden können Tabelle 2.3 entnommen werden.

Die unabhängige Variable t ist durch

$$t = \log \frac{Q}{Q_0} \quad (3.12)$$

gegeben.

3.2.1 Die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells

Die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells sind hier in Zweischleifen-Näherung angegeben.

$$\frac{d}{dt} g_1^2 = \frac{g_1^4}{8\pi^2} \left(\frac{41}{10} + \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{199}{50} g_1^2 + \frac{27}{10} g_2^2 + \frac{44}{5} g_3^2 - \frac{17}{10} y_t^2 - \frac{1}{2} y_b^2 - \frac{3}{2} y_\tau^2 \right) \right) \quad (3.13)$$

$$\frac{d}{dt} g_2^2 = \frac{g_2^4}{8\pi^2} \left(-\frac{19}{6} + \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{9}{10} g_1^2 + \frac{35}{6} g_2^2 + 12 g_3^2 - \frac{3}{2} y_t^2 - \frac{3}{2} y_b^2 - \frac{1}{2} y_\tau^2 \right) \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{d}{dt} g_3^2 = \frac{g_3^4}{8\pi^2} \left(-7 + \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{10} g_1^2 + \frac{9}{2} g_2^2 - 26 g_3^2 - 2 y_t^2 - 2 y_b^2 \right) \right) \quad (3.15)$$

$$\frac{d}{dt} y_t^2 = \frac{y_t^2}{8\pi^2} \left(-\frac{17}{20} g_1^2 - \frac{9}{4} g_2^2 - 8 g_3^2 + \frac{9}{2} y_t^2 + \frac{3}{2} y_b^2 + y_\tau^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1187}{600} g_1^4 - \frac{9}{20} g_1^2 g_2^2 - \frac{23}{4} g_2^4 + \frac{19}{15} g_1^2 g_3^2 + 9 g_2^2 g_3^2 - 108 g_3^4 + \frac{393}{80} g_1^2 y_t^2 \right. \\
& + \frac{7}{80} g_1^2 y_b^2 + \frac{15}{8} g_1^2 y_\tau^2 + \frac{225}{16} g_2^2 y_t^2 + \frac{99}{16} g_2^2 y_b^2 + \frac{15}{8} g_2^2 y_\tau^2 + 36 g_3^2 y_t^2 + 4 g_3^2 y_b^2 \\
& \left. - 12 g_t^4 - \frac{11}{4} y_t^2 y_b^2 - \frac{1}{4} g_b^4 - \frac{9}{4} y_t^2 y_\tau^2 + \frac{5}{4} y_b^2 y_\tau^2 - \frac{9}{4} g_\tau^4 - 12 y_t^2 \lambda - 4 y_b^2 \lambda + 6 \lambda^2 \right) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y_b^2 &= \frac{y_b^2}{8\pi^2} \left(-\frac{1}{4} g_1^2 - \frac{9}{4} g_2^2 - 8 g_3^2 + \frac{3}{2} y_t^2 + \frac{9}{2} y_b^2 + y_\tau^2 \right. \\
& + \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{127}{600} g_1^4 - \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 - \frac{23}{4} g_2^4 + \frac{31}{15} g_1^2 g_3^2 + 9 g_2^2 g_3^2 - 108 g_3^4 + \frac{91}{80} g_1^2 y_t^2 \right. \\
& + \frac{237}{80} g_1^2 y_b^2 + \frac{15}{8} g_1^2 y_\tau^2 + \frac{99}{16} g_2^2 y_t^2 + \frac{225}{16} g_2^2 y_b^2 + \frac{15}{8} g_2^2 y_\tau^2 + 4 g_3^2 y_t^2 + 36 g_3^2 y_b^2 \\
& \left. - \frac{1}{4} g_t^4 - \frac{11}{4} y_t^2 y_b^2 - 12 g_b^4 + \frac{5}{4} y_t^2 y_\tau^2 - \frac{9}{4} y_b^2 y_\tau^2 - \frac{9}{4} g_\tau^4 - 4 y_t^2 \lambda - 12 y_b^2 \lambda + 6 \lambda^2 \right) \quad (3.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} y_\tau^2 &= \frac{y_\tau^2}{8\pi^2} \left(-\frac{9}{4} g_1^2 - \frac{9}{4} g_2^2 + 3 y_t^2 + 3 y_b^2 + \frac{5}{2} y_\tau^2 \right. \\
& + \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{1371}{200} g_1^4 + \frac{27}{20} g_1^2 g_2^2 - \frac{23}{4} g_2^4 + \frac{17}{8} g_1^2 y_t^2 + \frac{5}{8} g_1^2 y_b^2 + \frac{537}{80} g_1^2 y_\tau^2 + \frac{45}{8} g_2^2 y_t^2 \right. \\
& + \frac{45}{8} g_2^2 y_b^2 + \frac{165}{16} g_2^2 y_\tau^2 + 20 g_3^2 y_t^2 + 20 g_3^2 y_b^2 \\
& \left. - \frac{27}{4} g_t^4 + \frac{3}{2} y_t^2 y_b^2 - \frac{27}{4} g_b^4 - \frac{27}{4} y_t^2 y_\tau^2 - \frac{27}{4} y_b^2 y_\tau^2 - 3 g_\tau^4 - 12 y_\tau^2 \lambda + 6 \lambda^2 \right) \quad (3.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \lambda &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{27}{200} g_1^4 + \frac{9}{20} g_1^2 g_2^2 + \frac{9}{8} g_2^4 - \frac{9}{5} g_1^2 \lambda - 9 g_2^2 \lambda - 6 y_t^4 - 6 y_b^4 - 2 y_\tau^4 \right. \\
& \quad \left. + 12 y_t^2 \lambda + 12 y_b^2 \lambda + 4 y_\tau^2 \lambda + 24 \lambda^2 \right. \\
& + \frac{1}{16\pi^2} \left(-\frac{3411}{2000} g_1^6 - \frac{1677}{400} g_1^4 g_2^2 - \frac{289}{80} g_1^2 g_2^4 + \frac{305}{16} g_2^6 - \frac{171}{100} g_1^4 y_t^2 + \frac{9}{20} g_1^4 y_b^2 \right. \\
& - \frac{9}{4} g_1^4 y_\tau^2 + \frac{63}{10} g_1^2 g_2^2 y_t^2 + \frac{27}{10} g_1^2 g_2^2 y_b^2 + \frac{33}{10} g_1^2 g_2^2 y_\tau^2 - \frac{9}{4} g_2^4 y_t^2 - \frac{9}{4} g_2^4 y_b^2 - \frac{3}{4} g_2^4 y_\tau^2 \\
& + \frac{1887}{200} g_1^4 \lambda + \frac{117}{20} g_1^2 g_2^2 \lambda - \frac{73}{8} g_2^4 \lambda - \frac{8}{5} g_1^2 y_t^4 + \frac{4}{5} g_1^2 y_b^4 - \frac{12}{5} g_1^2 y_\tau^4 - 32 g_3^2 y_t^4 \\
& - 32 g_3^2 y_b^4 + \frac{17}{2} g_1^2 y_t^2 \lambda + \frac{5}{2} g_1^2 y_b^2 \lambda + \frac{15}{2} g_1^2 y_\tau^2 \lambda + \frac{45}{2} g_2^2 y_t^2 \lambda + \frac{45}{2} g_2^2 y_b^2 \lambda + \frac{15}{2} g_2^2 y_\tau^2 \lambda \\
& + 80 g_3^2 y_t^2 \lambda + 80 g_3^2 y_b^2 \lambda + \frac{108}{5} g_1^2 \lambda^2 + 108 g_2^2 \lambda^2 \\
& \left. + 30 y_t^6 - 6 y_t^4 y_b^2 - 6 y_t^2 y_b^4 + 30 y_b^6 + 10 y_\tau^6 - 3 y_t^4 \lambda + 6 y_t^2 y_b^2 \lambda - 3 y_b^4 \lambda \right)
\end{aligned}$$

$$-y_\tau^4 \lambda - 144y_t^2 \lambda^2 - 144y_b^2 \lambda^2 - 48y_\tau^2 \lambda^2 - 312\lambda^3)) \quad (3.19)$$

3.2.2 Die Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM

Die Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM werden hier aus Platzgründen in Einschleifen-Näherung angegeben. Die Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung können [40] entnommen werden. Alle Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit werden mindestens in Zweischleifen-Näherung ausgeführt.

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} g_1 = \frac{33}{5} g_1^3 \quad 16\pi^2 \frac{d}{dt} g_2 = g_2^3 \quad 16\pi^2 \frac{d}{dt} g_3 = -3 g_3^3 \quad (3.20)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} M_1 = 2 \frac{33}{5} g_1^2 M_1 \quad 16\pi^2 \frac{d}{dt} M_2 = 2 g_2^2 M_2 \quad 16\pi^2 \frac{d}{dt} M_3 = 2 \cdot (-3) g_3^2 M_3 \quad (3.21)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} y_t = y_t \left(-\frac{13}{15} g_1^2 - 3 g_2^2 - \frac{16}{3} g_3^2 + y_b^2 + 6 y_t^2 \right) \quad (3.22)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} y_b = y_b \left(-\frac{7}{15} g_1^2 - 3 g_2^2 - \frac{16}{3} g_3^2 + 6 y_b^2 + y_t^2 + y_\tau^2 \right) \quad (3.23)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} y_\tau = y_\tau \left(-\frac{9}{5} g_1^2 - 3 g_2^2 + 3 y_b^2 + 4 y_\tau^2 \right) \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} a_t &= y_t \left(\frac{26}{15} g_1^2 M_1 + 6 g_2^2 M_2 + \frac{32}{3} g_3^2 M_3 + 2 a_b y_b + 10 a_t y_t \right) \\ &+ a_t \left(-\frac{13}{15} g_1^2 - 3 g_2^2 - \frac{16}{3} g_3^2 + y_b^2 + 8 y_t^2 \right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} a_b &= y_b \left(\frac{14}{15} g_1^2 M_1 + 6 g_2^2 M_2 + \frac{32}{3} g_3^2 M_3 + 10 a_b y_b + 2 a_t y_t + 2 a_\tau y_\tau \right) \\ &+ a_b \left(-\frac{7}{15} g_1^2 - 3 g_2^2 - \frac{16}{3} g_3^2 + 8 y_b^2 + y_t^2 + y_\tau^2 \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} 16\pi^2 \frac{d}{dt} a_\tau &= y_\tau \left(\frac{18}{5} g_1^2 M_1 + 6 g_2^2 M_2 + 6 a_b y_b + 6 a_\tau y_\tau \right) \\ &+ a_\tau \left(-\frac{9}{5} g_1^2 - 3 g_2^2 + 3 y_b^2 + 6 y_\tau^2 \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} \mu = \mu \left(-\frac{3}{5} g_1^2 - 3 g_2^2 + 3 y_b^2 + 3 y_t^2 + y_\tau^2 \right), \quad (3.28)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} b = \mu \left(\frac{6}{5} g_1^2 M_1 + 6 g_2^2 M_2 + 6 a_b y_b + 6 a_t y_t + 2 a_\tau y_\tau \right) + b \left(-\frac{3}{5} g_1^2 - 3 g_2^2 + 3 y_b^2 + 3 y_t^2 + y_\tau^2 \right) \quad (3.29)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_u}^2 = -\frac{6}{5} g_1^2 M_1^2 - 6 g_2^2 M_2^2 + 6 \left(a_t^2 + m_{\tilde{t}}^2 y_t^2 + \left(m_{\tilde{Q}}^2 + m_{H_u}^2 \right) y_t^2 \right) \quad (3.30)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{H_d}^2 = 6 a_b^2 + 2 a_\tau^2 - \frac{6}{5} g_1^2 M_1^2 - 6 g_2^2 M_2^2 + 6 m_{\tilde{b}}^2 y_b^2 + 6 \left(m_{\tilde{Q}}^2 + m_{H_d}^2 \right) y_b^2 + 2 m_{\tilde{\tau}}^2 y_\tau^2 + 2 \left(m_{\tilde{L}}^2 + m_{H_d}^2 \right) y_\tau^2 \quad (3.31)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{\tilde{Q}}^2 = 2 a_b^2 + 2 a_t^2 - \frac{2}{15} g_1^2 M_1^2 - 6 g_2^2 M_2^2 - \frac{32}{3} g_3^2 M_3^2 + 2 m_{\tilde{b}}^2 y_b^2 + \left(m_{\tilde{Q}}^2 + 2 m_{H_d}^2 \right) y_b^2 + 2 m_{\tilde{t}}^2 y_t^2 + \left(m_{\tilde{Q}}^2 + 2 m_{H_u}^2 \right) y_t^2 + m_{\tilde{Q}}^2 \left(y_b^2 + y_t^2 \right) \quad (3.32)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{\tilde{L}}^2 = 2 a_\tau^2 - \frac{6}{5} g_1^2 M_1^2 - 6 g_2^2 M_2^2 + m_{\tilde{L}}^2 y_\tau^2 + 2 m_{\tilde{\tau}}^2 y_\tau^2 + \left(m_{\tilde{L}}^2 + 2 m_{H_d}^2 \right) y_\tau^2 \quad (3.33)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{\tilde{t}}^2 = 4 a_t^2 - \frac{32}{15} g_1^2 M_1^2 - \frac{32}{3} g_3^2 M_3^2 + 4 m_{\tilde{Q}}^2 y_t^2 + 2 m_{\tilde{t}}^2 y_t^2 + \left(2 m_{\tilde{t}}^2 + 4 m_{H_u}^2 \right) y_t^2 \quad (3.34)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{\tilde{b}}^2 = 4 a_b^2 - \frac{8}{15} g_1^2 M_1^2 - \frac{32}{3} g_3^2 M_3^2 + 2 m_{\tilde{b}}^2 y_b^2 + 4 m_{\tilde{Q}}^2 y_b^2 + \left(2 m_{\tilde{b}}^2 + 4 m_{H_d}^2 \right) y_b^2 \quad (3.35)$$

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} m_{\tilde{\tau}}^2 = 4 a_\tau^2 - \frac{24}{5} g_1^2 M_1^2 + 4 m_{\tilde{L}}^2 y_\tau^2 + 2 m_{\tilde{\tau}}^2 y_\tau^2 + \left(2 m_{\tilde{\tau}}^2 + 4 m_{H_d}^2 \right) y_\tau^2 \quad (3.36)$$

3.3 Fixmannigfaltigkeiten

Die Untersuchung der Eigenschaften der Kopplungen des Standardmodells in Abhängigkeit von der Impulsskala Q geht auf Hill sowie Pendleton und Ross [1,2] zurück. Die Gültigkeit des Standardmodells ist bis zu $Q = Q_{UV} \approx 10^{16}$ GeV durch die Verträglichkeit mit den Vorhersagen der Protonenlebensdauer gegeben. Im Gegensatz zur Ultraviolettsskala (UV-Skala) liegt die Infrarotskala (IR-Skala), $Q = Q_{IR} \approx v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV, im Bereich des Vakuumerwartungswertes des Higgs-Bosons; siehe Kapitel 2.4. Die Untersuchungen in der Literatur bezogen sich im ersten Schritt auf ein Untersystem des vollständigen SM. Die Betrachtungen beschränkten sich auf die Eichkopplung der starken Wechselwirkung und die Yukawa-Kopplung des damals noch hypothetischen Topquarks. Diese beiden Kopplungen stellen an der IR-Skala die wertmäßig größten Kopplungen dar und es kann daher in erster Näherung angenommen werden, daß die restlichen Kopplungen des SM vernachlässigbar sind. Bei den Untersuchungen in der Literatur hat es sich bisher immer als sinnvoll erwiesen, ausgehend von Systemen mit geringer Anzahl Kopplungen, schrittweise weitere Kopplungen hinzuzunehmen. Es hat sich gezeigt, daß das Verhalten der Kopplungen bei Skalenveränderung, das sogenannte *Renormierungsgruppenlaufen*, von gewissen speziellen Lösungen, sogenannten *Fixmannigfaltigkeiten* beeinflusst wird. Diese Lösungen sind im Vergleich zu gewöhnlichen Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen, deren Laufen durch Anfangswerte bestimmt wird, durch Randbedingungen festgelegt. Weiterhin sind diese Lösungen in der Lage *infrarotattraktiv* auf den Renormierungsgruppenfluß, das heißt die Gesamtheit der Lösungen, zu wirken. Sie ziehen die Lösungen an und bestimmen so die Werte der durch die Lösungen beschriebenen Kopplungen und Parameter im IR-Bereich, wodurch es möglich wurde, Vorhersagen für diese zu treffen. Auf diese Weise gelang es, aus dem sogenannten *Top- g_3 -Fixpunkt* eine erste Abschätzung der Masse des zu der Zeit noch hypothetischen Topquarks von

$$m_t \approx 90 \text{ GeV} \quad (3.37)$$

vorzunehmen, wobei die elektroschwachen Eichkopplungen vernachlässigt wurde. Die äquivalente Betrachtung für das MSSM wurde zuerst in [5] vorgenommen und führte auf

$$m_t \approx \sin\beta \cdot 190 \text{ GeV} . \quad (3.38)$$

Entsprechende Betrachtungen konnten im folgenden auf die komplette dritte Fermionen-Familie und die Einbeziehung aller drei Eichkopplungen erweitert werden [7–11].

Diese Untersuchungen der speziellen Lösungen von Renormierungsgruppengleichungen geben Anlaß zu der Hoffnung, durch infrarotattraktive Fixmannigfaltigkeiten physikalische Voraussagen wie zum Beispiel Teilchenmassen vornehmen zu können. Die Fragestellung nach der Existenz von infrarotattraktiven Fixmannigfaltigkeiten in den Renormierungsgruppengleichungen des minimal supersymmetrischen Standardmodells unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors führte auf den zentralen Aspekt der Untersuchungen dieser Arbeit. Es wird die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des minimal supersymmetrischen Standardmodells unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors vorgenommen und aus diesen physikalische Vorhersagen für die Massen und die beteiligten Parameter abgeleitet. Mittels der vorhergesagten Werte der Parameter wird es möglich sein, neben der Berechnung der Massen der supersymmetrischen Teilchen verschiedene Bedingungen und Aussagen bezüglich der elektroschwachen Symmetriebrechung und der damit in Zusammenhang stehenden Frage nach der Existenz ungewollter Minima im Potential abzuleiten.

Im folgenden soll eine schrittweise Einführung in die Begrifflichkeit und das Vorgehen zur Ableitung von Fixstrukturen in Renormierungsgruppengleichungen vorgenommen werden. Nach

dem reinen Eichsektor wird das oben angesprochene System mit einer Eich- und einer Yukawa-Kopplung dargestellt. Eine nähere Spezifizierung der Eichkopplung und des verwendeten Modells wird dabei zunächst unterbleiben, um die Eigenschaften des Systems bezüglich verschiedener Eichkopplungen, solche, die asymptotisch frei sind wie die Eichkopplung der starken Wechselwirkung g_3 , als auch solcher, die asymptotisch nicht-frei sind, wie die Wechselwirkung der Hyperladung g_1 , in voller Allgemeinheit zu untersuchen.

Für die folgenden Betrachtungen werden Renormierungsgruppengleichungen in Einschleifen-Näherung verwendet. Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Untersuchungen verwenden durchgehend mindestens Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung.

3.3.1 Fixpunkte im Eichsektor

Die Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen g_i sind durch

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} g_i = b_i g_i^3 \quad (3.39)$$

gegeben, wobei $i = 1, 2, 3$, die Größe t die logarithmische Skalenabhängigkeit

$$t = \log \left(\frac{Q}{Q_0} \right) \quad (3.40)$$

darstellt und weiterhin

$$b^{\text{SM}} = \left(\frac{41}{10}, -\frac{19}{6}, -7 \right) \quad b^{\text{MSSM}} = \left(\frac{33}{5}, 1, -3 \right) \quad (3.41)$$

für das SM beziehungsweise MSSM gilt. Durch die Transformation

$$g_i \longrightarrow \alpha_i = \frac{g_i^2}{16\pi^2} \quad (3.42)$$

lassen sich die Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen auf folgende Form

$$\frac{d}{dt} \alpha_i = 2 b_i \alpha_i^2, \quad (3.43)$$

bringen, wobei die Größe α normalerweise durch $\alpha = g^2/(4\pi)$ gegeben ist, die oben verwendeten Transformation hier aber bevorzugt wird, um in den folgenden Gleichungen möglichst wenig konstante Faktoren vorliegen zu haben.

Durch die folgende Transformation auf Verhältnisse von Eichkopplungen

$$\alpha_1 \longrightarrow \rho_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \quad \alpha_2 \longrightarrow \rho_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \quad \alpha_3 \longrightarrow \rho_3 = \frac{1}{\alpha_3} \quad (3.44)$$

und den Wechsel der unabhängigen Variablen von t nach ρ_3 erhält man folgende Renormierungsgruppengleichungen

$$\frac{d}{d \log \rho_3} \rho_1 = \rho_1 \left(1 - \frac{b_1}{b_3} \rho_1 \right) \quad \frac{d}{d \log \rho_3} \rho_2 = \rho_2 \left(1 - \frac{b_2}{b_3} \rho_2 \right), \quad (3.45)$$

wobei $\rho_{1,2}$ — wie gesagt — Funktionen von $\log(1/\alpha_3) = \log \rho_3$, der neuen unabhängigen Variablen sind, $\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(\log \rho_3)$. An Gleichung (3.45) kann man leicht die in Tabelle 3.1 dargestellten Fixpunkte des Eichsektors ablesen.

	<i>i)</i>	<i>ii)</i>	<i>iii)</i>	<i>iv)</i>
ρ_1	0	0	$\frac{b_3}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$
ρ_2	0	$\frac{b_3}{b_2}$	0	$\frac{b_3}{b_2}$

Tabelle 3.1: Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen des Eichsektors in den Variablen $\rho_1 = g_1^2/g_3^2$ und $\rho_2 = g_2^2/g_3^2$.

Unter Verwendung von der Werte des nicht-trivialen Fixpunktes (alle Werte von Null verschieden)

$$\rho_1^* = \frac{b_3}{b_1} \quad \text{und} \quad \rho_2^* = \frac{b_3}{b_2} \tag{3.46}$$

lassen sich die Renormierungsgruppengleichungen (3.45) als

$$\frac{d}{d \log \rho_3} \rho_1 = \rho_1 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*} \right) \quad \frac{d}{d \log \rho_3} \rho_2 = \rho_2 \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_2^*} \right) , \tag{3.47}$$

schreiben.

Die Werte der Fixpunkte ρ_1^* und ρ_2^* des Eichsektor werden in den folgenden Untersuchungen zur Durchführung der Transformation der Eichkopplungen auf Integrale der Differentialgleichungen, den sogenannten *Transformationen auf Integrale* [8], verwendet. Ausgehend von (3.39), den Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 , erhält man durch die Transformation

$$\begin{aligned} g_3 &\longrightarrow a = \frac{4 \pi^2}{g_3^2} \\ g_2 &\longrightarrow b = \frac{4 \pi^2}{g_3^2} - \eta_2 \frac{4 \pi^2}{g_2^2} \\ g_1 &\longrightarrow c = \frac{4 \pi^2}{g_3^2} - \eta_1 \frac{4 \pi^2}{g_1^2} \end{aligned} \tag{3.48}$$

die Renormierungsgruppengleichungen

$$\frac{d}{dt} a = -\frac{1}{2} b_3 \quad \frac{d}{dt} b = \frac{1}{2} (\eta_2 b_2 - b_3) \quad \frac{d}{dt} c = \frac{1}{2} (\eta_1 b_1 - b_3) . \tag{3.49}$$

Diese nehmen eine besonders einfache Form an, wenn man η_1 und η_2 so wählt, daß sie dem Fixpunkt *iv*) in Tabelle 3.1 entsprechen ($\eta_{1,2} = b_3/b_{1,2}$); es ergibt sich

$$\frac{d}{dt} a = -\frac{1}{2} b_3 \quad \frac{d}{dt} b = 0 \quad \frac{d}{dt} c = 0 , \tag{3.50}$$

die Größen b und c sind konstant. Die Form (3.50) der Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen hat vor allem zwei Vorteile: Zum einem kann man die Werte der Konstanten b und c durch eine Wahl der Eichkopplungen an einer *beliebigen* Skala bestimmen. Es ist so möglich, die Werte von $g_1(Q = m_t)$, $g_2(Q = m_t)$ und $g_3(Q = m_t)$ zu verwenden und b und c im gesamten Renormierungsgruppenfluß zu kennen. Zum anderen ist die gesamte Dynamik

des Renormierungsgruppenflusses der Eichkopplungen in der Renormierungsgruppengleichung (3.50, erste Gleichung) für a enthalten, die zudem eine einfache Gestalt hat: ihre Lösung

$$a = a(t) = a_0 - \frac{1}{2} b_3 (t - t_0) \quad (3.51)$$

ist linear ($a_0 = a(t_0)$.) Aus (3.51) läßt sich leicht der Landau-Pol

$$\tilde{t} = t|_{a(t) \rightarrow 0} \quad (3.52)$$

der Eichkopplung der starken Wechselwirkung g_3 berechnen. Man erhält

$$\tilde{t}_3 = t_0 + 2 \frac{a_0}{b_3} \longrightarrow \tilde{t}_3 = t_0 + 2 \frac{4 \pi^2}{b_3 g_{3_0}^2} \quad (3.53)$$

und allgemein für g_i mit $i = 1, 2, 3$

$$\tilde{t}_i = t_0 + 2 \frac{4 \pi^2}{b_i g_{i_0}^2} \quad (3.54)$$

wobei g_{i_0} durch $g_{i_0} = g_i(t_0)$ gegeben ist. Ausgedrückt in den Variablen $\alpha_{1,2,3}$ lautet die Beziehung (3.54) für die Lage der Landau-Pole

$$\tilde{t}_i = t_0 + \frac{1}{2 b_i} \frac{1}{\alpha_{i_0}} . \quad (3.55)$$

Mit (3.53, erste Gleichung) läßt sich die Lösung der Renormierungsgruppengleichung der Größe a (3.50, erste Gleichung) auch folgendermaßen schreiben:

$$a(t) = \frac{1}{2} (\tilde{t}_3 - t) \quad (3.56)$$

und wiederum folgt für die Lösung der Renormierungsgruppengleichung der Eichkopplungen g_i mit $i = 1, 2, 3$

$$g_i^2(t) = \frac{8 \pi^2}{b_3 (\tilde{t}_i - t)} \longrightarrow \alpha_i(t) = \frac{1}{2 b_i (\tilde{t}_i - t)} , \quad (3.57)$$

wobei die Transformation (3.42) die Beziehung zwischen den α_i aus den g_i angibt.

In den Größen $\rho_{1,2,3}$, gegeben durch die Transformation (3.44), lassen sich die allgemeinen Lösungen der entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen (3.47) durch

$$\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(\log \rho_3) = \frac{\rho_{1,2}^*}{1 - \frac{\rho_{3_0}}{\rho_3} \left(1 - \frac{\rho_{1,2}^*}{\rho_{1,2_0}}\right)} \quad (3.58)$$

und

$$\rho_3 = \rho_3(t) = \rho_{3_0} - 2 b_3 (t - t_0) \quad (3.59)$$

angeben.

Die Lage der Landau-Pole (3.54), ausgedrückt in den Variablen $\rho_{1,2,3}$, ergibt

$$\begin{aligned} \tilde{t}_3 &= t_0 + \frac{\rho_{3_0}}{2 b_3} \\ \tilde{t}_2 &= t_0 + \frac{\rho_{3_0}}{2 b_3} \cdot \frac{1}{\rho_{2_0}} = \tilde{t}_3 - \frac{\rho_{3_0}}{2 b_3} \left(1 - \frac{1}{\rho_{2_0}}\right) \\ \tilde{t}_1 &= t_0 + \frac{\rho_{3_0}}{2 b_3} \cdot \frac{1}{\rho_{1_0}} = \tilde{t}_3 - \frac{\rho_{3_0}}{2 b_3} \left(1 - \frac{1}{\rho_{1_0}}\right) , \end{aligned} \quad (3.60)$$

wobei für die Umformung der letzten beiden Gleichungen angenommen wird, daß die Anfangswerte der Eichkopplungen beziehungsweise der entsprechenden transformierten Größen $\rho_{1_0, 2_0, 3_0}$ an einer gemeinsamen Skala t_0 beziehungsweise Q_0 vorliegen.

Unter Verwendung von (3.59) und (3.60, erste Gleichung) kann die allgemeine Lösung (3.58) auch als

$$\rho_{1,2} = \rho_{1,2}(\log \rho_3(t)) = \frac{\rho_{1,2}^*}{1 - \left(\frac{\tilde{t}_3 - t_0}{\tilde{t}_3 - t}\right) \cdot \left(1 - \frac{\rho_{1,2}^*}{\rho_{1,2_0}}\right)} \quad (3.61)$$

geschrieben werden.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Eichsektor durch die Angabe eines Satzes von Anfangswerten in beliebigen Variablen $g_{i_0} = g_i^2(t = t_0)$, $\alpha_{i_0} = \alpha_i(t = t_0)$ oder $\rho_{i_0} = \rho_i(t = t_0)$ und den Koeffizienten b_i in den Renormierungsgruppengleichungen (3.39) vollständig bestimmt ist. Diese ermöglichen die Bestimmung der Landau-Pole der Eichkopplungen (3.54, 3.55 und 3.60) und zusammen mit den Fixpunkten der Verhältnisse der Eichkopplungen $\rho_1^* = b_3/b_1$ und $\rho_2^* = b_3/b_2$ (3.46) die Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen (3.46, 3.61 und 3.59) in den jeweiligen Variablen.

Besonders einfache Gestalt nehmen die Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen durch die Transformation (3.48) unter Ausnutzung der Fixpunkte der Eichkopplungen $\rho_1^* = b_3/b_1$ und $\rho_2^* = b_3/b_2$ an (3.50). Somit besitzen auch deren Lösungen eine besonders einfache Gestalt:

$$a = a(t) = a_0 - \frac{1}{2} (\tilde{t}_3 - t) \quad b = b_0 = \text{const.} \quad c = c_0 = \text{const.} \quad (3.62)$$

Diese Transformation (3.48) wird Transformation auf die Integrale der Eichkopplungen g_1 und g_2 oder kurz *Transformation auf Integrale* genannt. Dabei ist weiterhin von Vorteil, daß die gesamte Dynamik des Eichsektors durch die Dynamik der Größe a bestimmt ist.

Zwischen den Variablen $g_{1,2,3}$ bzw. $g_{1,2,3}^2$ und den Variablen $\alpha_{1,2,3}$ vermittelt die Transformation (3.42). Zwischen ersteren und den Variablen $\rho_{1,2,3}$ vermittelt die Transformation (3.44). Die Transformation auf Integrale (3.48) in den Variablen $\rho_{1,2,3}$ hat folgende Form:

$$\begin{aligned} \rho_3 &\longrightarrow a = \frac{1}{4} \rho_3 \\ \rho_2 &\longrightarrow b = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{b_3}{b_2} \frac{1}{\rho_2}\right) \rho_3 = a \left(1 - \frac{\rho_2^*}{\rho_2}\right) \\ \rho_1 &\longrightarrow c = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{b_3}{b_1} \frac{1}{\rho_1}\right) \rho_3 = a \left(1 - \frac{\rho_1^*}{\rho_1}\right) . \end{aligned} \quad (3.63)$$

Zur Konkretisierung soll zum Abschluß dieses Abschnittes kurz auf die Fixpunkte im Eichsektor des MSSM eingegangen werden.

Die Tabelle 3.2 zeigt die Fixpunkte in den Renormierungsgruppengleichungen des MSSM. Die Werte können durch Einsetzen von (3.41) in die Fixpunkte aus Tabelle 3.1 berechnet werden. Bis auf den Fixpunkt (0, 0) sind alle diese Fixpunkte unphysikalisch, da sie zu negativen Werten der Eichkopplungen führen.

Der Fixpunkt (0, 0) stellt den sogenannten trivialen Fixpunkt der Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen dar. Im allgemeinen werden die Anfangswerte der Eichkopplungen zur Renormierungsgruppenevolution aus den experimentellen Vorgaben bestimmt, siehe dazu Abschnitt 5.1 und Abschnitt 7.1.1, so daß die Fixpunkte des Eichsektors nicht in die weiteren Betrachtungen eingehen.

	<i>i)</i>	<i>ii)</i>	<i>iii)</i>	<i>iv)</i>
ρ_1	0	0	$-\frac{5}{11}$	-3
ρ_2	0	$-\frac{5}{11}$	0	-3

Tabelle 3.2: Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen des Eichsektors des minimal supersymmetrisch erweiterten Standardmodells (MSSM) in den Variablen $\rho_1 = g_1^2/g_3^2$ und $\rho_2 = g_2^2/g_3^2$.

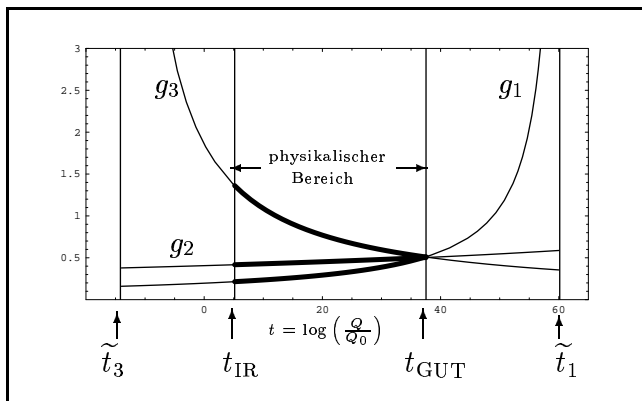


Abbildung 3.1: Evolution des Eichsektors in den Variablen g_1^2 , g_2^2 und g_3^2 . Der physikalische Bereich der Evolution erstreckt sich von der GUT-Skala, $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV, bis zur Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung $Q = v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV.

Die Abbildung 3.1 zeigt die Evolution des Eichsektors des MSSM zwischen der Polstelle \tilde{t}_3 der Eichkopplung der starken Wechselwirkung im Bereich von $t \approx -14$ und der Polstelle \tilde{t}_1 der Wechselwirkung der Hyperladung im Bereich von $t \approx 60$. Der Bereich zwischen diesen beiden Polen stellt den *mathematischen Bereich* der Renormierungsgruppenevolution dar. Dieser schließt den *physikalischen Bereich* der Renormierungsgruppenevolution ein, der sich zwischen der elektroschwachen Skala, $t_{\text{IR}} = \log 174 \approx 5.16$ und der Unifizierungsskala, $t_{\text{UV}} = t_{\text{GUT}} = \log(2 \cdot 10^{16}) \approx 37.5$, befindet.

Es ist wichtig, zu bemerken, daß außerhalb des physikalischen Bereiches der Renormierungsgruppengleichungen zwischen der IR-Skala und der UV-Skala beziehungsweise GUT-Skala der Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen verlassen wird, da Kopplungen aufgrund ihrer Größe eine Behandlung im Rahmen der Störungstheorie unmöglich machen. Es wird sich jedoch im Verlaufe der weiteren Darstellung zeigen, daß Fixmannigfaltigkeiten in den Polstellen der Eichkopplungen die Lage der Fixmannigfaltigkeiten für den mathematischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution festlegen. Da der mathematische Bereich den physikalischen Bereich einschließt, liegt somit auch die Lage der Fixmannigfaltigkeiten im physikalischen Bereich fest.

Aus der Abbildung läßt sich ebenfalls ablesen, daß die Polstelle der Eichkopplung g_2 bei der Festlegung des mathematischen Bereiches der Renormierungsgruppenevolution keine Rolle spielt. Im MSSM ist die Abfolge der Polstellen durch

$$\text{(niedrige Impulse)} \quad \tilde{t}_3 < \tilde{t}_1 < \tilde{t}_2 \quad \text{(hohe Impulse)} \quad (3.64)$$

gegeben. Die Polstelle von g_2 liegt jenseits der Polstelle von g_1 im Bereich großer Impulse.

3.3.2 Fixpunkte im Eich–Yukawa–System

In diesem Abschnitt wird ein System bestehend aus einer Yukawa-Kopplung und einer Eichkopplung betrachtet. Das Ziel ist die Einführung von *Attraktivitätskoeffizienten*. Diese erlauben eine Klassifizierung der Fixpunkte bezüglich ihres Laufverhaltens unter der Renormierungsgruppenevolution. Bildlich gesprochen ist eine Fixmannigfaltigkeit dann attraktiv, wenn sie Lösungen anzieht und entsprechend repulsiv, wenn sie Lösungen abstößt. Je höher die Attraktivität ist, desto größer ist der Attraktivitätskoeffizient. Es wird sich zeigen, daß dieses Verhalten eng mit der Evolution beziehungsweise dem Renormierungsgruppenlaufen, das heißt der Änderung der Impulsskala, und den Landau–Polen der Eichkopplungen verknüpft ist.

Das dargestellte Eich–Yukawa–System führt im Standardmodell beziehungsweise im minimal supersymmetrisch erweiterten Standardmodell auf den in der Einleitung angesprochenen Top– g_3 –Fixpunkt, der zu einer ersten Vorhersage für die Masse des Topquarks

$$m_t \approx 90 \text{ GeV} \quad (3.65)$$

im Standardmodell beziehungsweise

$$m_t \approx \sin\beta \cdot 190 \text{ GeV} . \quad (3.66)$$

im minimal Supersymmetrisch erweiterten Standardmodell führte.

Die Renormierungsgruppengleichungen für das System einer Eichkopplung g und einer Yukawa–Kopplung y unter Vernachlässigung aller konstanten Faktoren ($1/16\pi^2$) lauten:

$$\frac{d}{dt} g = b g^3 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} y = y (\xi y^2 - \chi g^2) . \quad (3.67)$$

Im ersten Schritt wird folgende Transformation durchgeführt:

$$y \longrightarrow \rho = \frac{y^2}{g^2} \quad g \longrightarrow \alpha = g^2 \quad (3.68)$$

wobei die Transformation der Eichkopplung der Transformation (3.42) entspricht. Man erhält

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho &= \beta_\rho \equiv -2 \alpha \rho (b + \chi - \xi \rho) \\ \frac{d}{dt} \alpha &= \beta_\alpha \equiv 2 b \alpha^2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

für die Renormierungsgruppengleichungen in den Variablen $\rho = \rho(t)$ und $\alpha = \alpha(t)$. Aus (3.69) läßt sich leicht der Fixpunkt der Yukawa–Kopplung ablesen. Dieser wird aus der Bedingung

$$\frac{d}{dt} \rho = \beta_\rho \text{ besitzt Fixpunkt } \rho^* \Leftrightarrow \beta_\rho = 0 \text{ und } \frac{d}{dt} \rho^* = 0 \quad (3.70)$$

bestimmt, und er ergibt sich für das Eich–Yukawa–System (3.69) zu

$$\rho = 0 \quad \text{und} \quad \rho = \frac{b + \chi}{\xi} . \quad (3.71)$$

Im folgenden soll

$$\rho^* = \frac{b + \chi}{\xi} \quad (3.72)$$

gelten. Mit dieser Definition läßt sich die Renormierungsgruppengleichung (3.69) als

$$\frac{d}{dt} \rho = -2 \alpha \rho (b + \chi) \left(1 - \frac{\rho}{\rho^*}\right) \quad (3.73)$$

schreiben. Zur Berechnung der Attraktivitätskoeffizienten der Fixpunkte (3.71) müssen noch zwei weitere Transformationen vorgenommen werden. Dies hat seinen Grund in folgenden Überlegungen. Für die Berechnung des Attraktivitätskoeffizienten η_{ρ^*} verfährt man nach

$$\eta_{\rho^*} = \left. \frac{d}{d\rho} \beta_{\rho} \right|_{\rho=\rho^*} . \quad (3.74)$$

Dabei darf die β -Funktion der fraglichen Variablen β_{ρ} nur von ρ abhängen, da sich sonst Attraktivitätskoeffizienten ergäben, die von den auftretenden Größen abhingen. Für (3.73) ist dies genau der Fall, da sie neben ρ noch von α abhängt. Die Anwendung von (3.74) auf (3.73) würde somit zu Attraktivitätskoeffizienten

$$-\eta = -\eta_{\rho=\rho^*} = 2 \alpha (b + \chi) \quad \text{und} \quad \eta_0 = \eta_{\rho=0} = 2 \alpha (b + \chi) = -\eta \quad (3.75)$$

führen, die von α abhängig sind. Dies ist nicht erwünscht, die Variable $\rho = \rho(t)$ ist nicht geeignet zur Berechnung von Attraktivitätskoeffizienten.

Die Renormierungsgruppengleichung (3.73) wird aus diesem Grund auf die Variable $\rho = \rho(\log \alpha)$ transformiert, die sich als geeignet erweisen wird. Es gilt

$$\frac{d\rho}{dt} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} \frac{d\alpha}{d\alpha} \rightarrow \frac{d\alpha}{dt} \frac{d\rho}{d\alpha} = \dot{\alpha} \frac{d\rho}{d\alpha} = \beta_{\alpha} \frac{d\rho}{d\alpha} = 2 b \alpha^2 \frac{d\rho}{d\alpha} \quad (3.76)$$

mit (3.69, zweite Gleichung) und

$$\frac{d\rho}{d\alpha} \rightarrow \frac{d\rho}{d\alpha} \frac{d \log \alpha}{d \log \alpha} \rightarrow \frac{d \log \alpha}{d\alpha} \frac{d\rho}{d \log \alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{d\rho}{d \log \alpha} , \quad (3.77)$$

zusammen also

$$\beta_{\rho(t)} \longrightarrow \beta_{\rho(\log \alpha)} = \alpha \frac{1}{2 b \alpha^2} \cdot \beta_{\rho(t)} \Big|_{t \rightarrow \log \alpha} = \frac{1}{2 b \alpha} \cdot \beta_{\rho(t)} \Big|_{t \rightarrow \log \alpha} , \quad (3.78)$$

welches zur folgender Renormierungsgruppengleichung in der Variablen $\rho = \rho(\log \alpha)$ führt:

$$\frac{d}{d \log \rho_3} \rho = -\rho \left(1 + \frac{\chi}{b}\right) \left(1 - \frac{\rho}{\rho^*}\right) . \quad (3.79)$$

Die Attraktivitätskoeffizienten für diese Renormierungsgruppengleichung, berechnet nach (3.74), ergeben sich zu

$$-\eta = -\eta_{\rho=\rho^*} = \left(1 + \frac{\chi}{b}\right) \quad \text{und} \quad \eta_0 = \eta_{\rho=0} = \left(1 + \frac{\chi}{b}\right) = -\eta \quad (3.80)$$

wobei die Definition des Minuszeichens zu beachten ist. Damit läßt sich (3.79) auch als

$$\dot{\rho} = \rho \eta \left(1 - \frac{\rho}{\rho^*}\right) . \quad (3.81)$$

schreiben. Folgende Funktion für $\rho = \rho(\log \alpha)$ ist Lösung dieser Renormierungsgruppengleichung

$$\rho = \rho(\log \alpha) = \frac{\rho^*}{1 + \left(\frac{\rho^*}{\rho_0} - 1\right) \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta}} \quad (3.82)$$

was sich leicht durch Einsetzen beweisen läßt.

Als nächstes soll bestimmt werden, inwiefern das Laufverhalten der Größe ρ durch die Attraktivitätskoeffizienten $\eta_{\rho^*,0}$ beeinflusst wird, beziehungsweise wie eine Klassifizierung anhand der Attraktivitätskoeffizienten möglich ist. In der Lösung (3.82) stellt der Term

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \quad (3.83)$$

die einzige mit der Skala t veränderlich Größe dar. Nähert man sich dem Landau-Pol ($t \rightarrow \tilde{t}$) der Eichkopplung g , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{t}} g(t) = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \tilde{t}} \alpha(t) = \infty \quad (3.84)$$

und damit

$$t \rightarrow \tilde{t} \Rightarrow g \rightarrow \infty \Rightarrow \alpha \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow \rho^* \text{ für } \eta > 0 \\ \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \rightarrow 1 \Rightarrow \rho \rightarrow \infty \text{ für } \eta = 0 \\ \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \rightarrow \infty \Rightarrow \rho \rightarrow 0 \text{ für } \eta < 0 \end{cases} . \quad (3.85)$$

Nähert man sich umgekehrt dem Bereich der asymptotischen Freiheit der Eichkopplung, d.h.

$$\lim_{t \rightarrow \text{asympt.frei}} g(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \text{asympt.frei}} \alpha(t) = 0 , \quad (3.86)$$

dann folgt

$$t \rightarrow \text{asympt.frei} \Rightarrow g \rightarrow 0 \Rightarrow \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \rightarrow \infty \Rightarrow \rho \rightarrow 0 \text{ für } \eta > 0 \\ \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \rightarrow 1 \Rightarrow \rho \rightarrow \infty \text{ für } \eta = 0 \\ \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta} \rightarrow 0 \Rightarrow \rho \rightarrow \rho^* \text{ für } \eta < 0 \end{cases} , \quad (3.87)$$

wobei der Fall $\eta = 0$ in den in dieser Arbeit diskutierten Theorien nicht vorkommt.

Aus den dargestellten Abhängigkeiten kann man schließen, daß gegeben ein $\eta > 0$ die Lösung für ρ sich dem Fixpunkt $\rho^* = (b + \chi)/\xi$ annähert, wenn man sich in die Polstelle der entsprechenden Eichkopplung begibt.

Um diese Abhängigkeiten etwas anschaulicher zu gestalten, soll angenommen werden, daß es sich bei der Eichkopplung g um die Eichkopplung der starken Wechselwirkung im MSSM handelt. Es gilt

$$b = b_3 = -3 \quad \text{und} \quad \chi = \frac{16}{3} . \quad (3.88)$$

Daraus folgt, daß

$$\eta = -\left(1 + \frac{\chi}{b}\right) = -\left(1 - \frac{16}{9}\right) = \frac{7}{9} > 0 \quad (3.89)$$

und die Lösung der Renormierungsgruppengleichung für ρ (3.82) zeigt das in (3.85, erste Zeile) dargestellte Verhalten: Sie nähert sich dem Fixpunkt $\rho = \rho^* = (b + \chi)/\xi$ an, wenn sich die Eichkopplung ihrem Landau-Pol annähert.

Der Landau–Pol der Eichkopplung der starken Wechselwirkung liegt nach (3.54) für $b = -3$ und $g_{i_0} > 0$ im Infrarotbereich (IR), weshalb man bei dem eben geschilderten Verhalten von

Infrarotattraktivität

spricht. Man spricht demnach entsprechend von

Ultraviolettrepulsivität,

wenn man sich vom Landau–Pol weg begibt und in den Bereich der asymptotischen Freiheit übergeht. Hier sei noch einmal darauf hingewiesen, daß diese Klassifizierung von Faktoren b und χ in den Renormierungsgruppengleichung beziehungsweise der Größe η abhängt, die aus diesem Grund ihren Namen, Attraktivitätskoeffizient, trägt. Hätte η ein anderes Vorzeichen, würde man genau das Entgegengesetzte des eben geschilderten Verhaltens beobachten.

In der Mathematik ist es üblich [37], attraktive Fixmannigfaltigkeiten als *stabil*, repulsive Fixmannigfaltigkeiten als *instabil* zu bezeichnen.

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch auf einen Aspekt hingewiesen werden, der zuerst bei Hill [1] Erwähnung fand. Führt man in (3.82) den formalen Grenzübergang $\rho \rightarrow \infty$ durch, so erhält man durch

$$\rho = \frac{\rho^*}{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^{-\eta}} \quad (3.90)$$

eine obere Schranke für die Yukawa–Kopplung. Diese hängt über die Renormierungsgruppenentwicklung vom Anfangswert der Eichkopplung der starken Wechselwirkung α_0 und der Länge des Evolutionsweges ab. Je länger dieser ist, desto mehr nähert sich (3.90) der eigentlichen Fixmannigfaltigkeit an. Man kann diese Hill’sche Massenschranke (hill–bound) als IR–Abbild der störungstheoretisch maximal erlaubten Werte der Yukawa–Kopplung im UV–Bereich ansehen. In der Literatur wird der aus der Hill’schen Massenschranke gewonnene effektive Fixpunkt an der IR–Skala oft als *Quasi-Fixpunkt* bezeichnet.

3.3.3 Fixmannigfaltigkeiten unter Berücksichtigung mehrerer Eichkopplungen

Im nächsten Schritt soll die Hinzunahme weiterer Eichkopplungen diskutiert werden [1, 7, 8, 10]. Die Eichkopplung g_2 hat auf die Folgerungen und die Ableitung des Vorgehens keinen Einfluß, die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten in den Polstellen von g_1 im UV–Bereich und g_3 im IR–Bereich wird formal nur durch diese beiden Eichkopplungen bestimmt, da in Reihenfolge der Polstellen die Polstelle von g_2 im Bereich großer Impulse jenseits der Polstelle von g_1 liegt, so daß g_2 aus diesem Grund in diesem Abschnitt vernachlässigt wird. Das Vorgehen bei der durchgeführten Ableitung bleibt auch im Fall von drei Eichkopplungen dasselbe, und zur Berechnung der Vorhersagen der Modelle muß g_2 natürlich mit einbezogen werden, da g_2 die Evolution zwischen den Polen beeinflusst, was sich bei der Bestimmung von Massen oder Parametern im IR–Bereich aus den Fixmannigfaltigkeiten niederschlägt.

Es sei auch noch einmal darauf hingewiesen, daß der Bereich zwischen den Polstellen von g_3 und g_1 den mathematischen Bereich der Renormierungsgruppenentwicklung darstellt, der jedoch unphysikalisch ist, da die Kopplungen aufgrund ihrer Größe eine Behandlung im Rahmen der

Störungstheorie unmöglich machen. Der mathematische Bereich schließt jedoch den physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution ein, der sich zwischen der elektroschwachen Skala $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$ und der Unifizierungsskala $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$ befindet.

Es wird sich im Verlaufe des Abschnittes zeigen, daß die in den Polstellen der Eichkopplungen — also im unphysikalischen Bereich — berechneten Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen auf diese Weise die physikalischen Gegebenheiten im physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution beeinflussen. Zur Verdeutlichung können die Abbildung 3.2 und 3.3 herangezogen werden, die im Verlaufe des Abschnittes noch näher erläutert werden.

Ein weiteres Ziel dieses Abschnittes wird es sein, die Struktur der Fixmannigfaltigkeiten bei Anwesenheit mehrerer Eichkopplung besonders in Hinsicht auf die Attraktivitätsverhältnisse darzustellen.

Die Renormierungsgruppengleichungen für das System einer Yukawa-Kopplung y und zweier Eichkopplungen g_1 und g_3 lauten:

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} g_{1,3} = b_{1,3} g_{1,3}^3 \quad \text{und} \quad 16\pi^2 \frac{d}{dt} y = y (\xi y^2 - \chi_3 g_3^2 - \chi_1 g_1^2) . \quad (3.91)$$

Im Unterschied zum vorhergehenden Abschnitt wird im Bereich der Eichkopplungen in diesem Fall die Transformation auf Integrale (3.48) verwendet. Die Yukawa-Kopplung wird mit einer Summe der beiden Eichkopplungsquadrate [8] ins Verhältnis gesetzt.

$$g_3 \rightarrow a = \frac{4\pi^2}{g_3^2} \quad g_1 \rightarrow c = \frac{4\pi^2}{g_3^2} - \frac{b_3}{b_1} \frac{4\pi^2}{g_1^2} \quad y \rightarrow \rho = \frac{y^2}{g_1^2 + g_3^2} \quad (3.92)$$

Die Wahl der Variable wird so getroffen, daß in den Polstellen ($g_3 = 0$ beziehungsweise $g_1 = 0$) der Eichkopplungen jeweils einen endlicher Wert des Fixpunktes auftritt. Man erhält im Bereich der Eichkopplungen folgende Renormierungsgruppengleichungen

$$c' = 0 \quad a' = -\frac{1}{2} b_3 , \quad (3.93)$$

auf die Angabe der Renormierungsgruppengleichung für ρ wird aufgrund der Länge der Terme verzichtet.

Es folgt nun der entscheidende Schritt zur Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten in den Polstellen der Eichkopplungen. In der Polstelle der Eichkopplung g_3 gilt $g_3 \rightarrow \infty$ und somit kann g_1 gegenüber g_3 vernachlässigt werden ($g_1 = 0$). Man erhält in diesem Fall formal eine Renormierungsgruppengleichung der Yukawa-Kopplung, die nur noch von g_3 abhängt und dem Eich-Yukawa-System aus dem letzten Abschnitt entspricht. In der Polstelle von g_1 folgt analog, daß aufgrund von $g_1 \rightarrow \infty$ der Einfluß von g_3 vernachlässigt werden kann ($g_3 = 0$) und eine Renormierungsgruppengleichung der Yukawa-Kopplung vorliegt, die nur von g_1 abhängt.

Zur Berechnung der Renormierungsgruppengleichungen in den Untersystemen Yukawa- g_3 beziehungsweise Yukawa- g_1 werden formal die Grenzwerte $g_3 \rightarrow \infty$ und $g_1 \rightarrow \infty$ durchgeführt, die sich folgendermaßen in die Variablen der Transformation auf Integrale im Bereich der Eichkopplungen übersetzen lassen:

$$\text{Polstelle von } g_3 : \quad g_3 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad a \rightarrow 0 \quad (3.94)$$

$$\text{Polstelle von } g_1 : \quad g_1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad a \rightarrow c . \quad (3.95)$$

So erhält man im Untersystem Yukawa- g_3 ($g_1 = 0$) für die *reduzierte* Renormierungsgruppengleichung von ρ den Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{2} \rho (\xi \rho - b_3 - \chi_3) \quad (3.96)$$

und im Untersystem Yukawa- g_1 ($g_3 = 0$) für die *reduzierte* Renormierungsgruppengleichung von ρ den Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \rho = -\frac{1}{2} \frac{b_3}{b_1} \rho (\xi \rho - b_1 - \chi_1) , \quad (3.97)$$

wobei interessant zu bemerken ist, daß die jeweiligen Ausdrücke nur von Größen (b_3, χ_3 beziehungsweise b_1, χ_1) abhängen, die mit der verbleibenden Eichkopplung (g_3 beziehungsweise g_1) zusammenhängen.

Analog zum letzten Abschnitt lassen sich in den Untersystemen folgende Fixpunkte der jeweiligen Renormierungsgruppengleichungen

$$\begin{aligned} \text{Polstelle von } g_3 : \quad & \rho = 0 \quad \text{und} \quad \rho = \frac{b_3 + \chi_3}{\xi} \\ \text{Polstelle von } g_1 : \quad & \rho = 0 \quad \text{und} \quad \rho = \frac{b_1 + \chi_1}{\xi} \end{aligned} \quad (3.98)$$

in der Kopplung ρ berechnen. Dabei wird der nicht-triviale ($\rho \neq 0$) Fixpunkt in der Polstelle von g_3 — wie die Renormierungsgruppengleichung — allein durch Größen bestimmt, die mit der Kopplung der starken Wechselwirkung g_3 in Verbindung stehen und der Fixpunkt in der Polstelle von g_1 durch Größen, die mit der Eichkopplung g_1 in Verbindung stehen. Sie besitzen formal dieselbe Struktur, und der Fixpunkt in der Polstelle von g_3 entspricht dem Fixpunkt des Eich-Yukawa-Systems aus dem letzten Abschnitt.

Zur Berechnung der Attraktivitätskoeffizienten werden die Renormierungsgruppengleichungen (3.96) und (3.97) analog zum letzten Abschnitt so umgeschrieben, daß die Größe $a = (4\pi^2)/(g_3^2)$ die neue unabhängige Variable bildet. Man erhält so folgende Attraktivitätskoeffizienten:

$$\begin{aligned} \text{Polstelle von } g_3 : \quad & \rho = 0 : -\eta_3 & \rho = \frac{b_3 + \chi_3}{\xi} : \eta_3 \\ \text{Polstelle von } g_1 : \quad & \rho = 0 : \eta_1 & \rho = \frac{b_1 + \chi_1}{\xi} : -\eta_1 \end{aligned} \quad (3.99)$$

mit

$$\eta_3 = -\left(1 + \frac{\chi_3}{b_3}\right) \quad \text{und} \quad \eta_1 = -\left(1 + \frac{\chi_1}{b_1}\right) \quad (3.100)$$

analog zum letzten Abschnitt. Die allgemeinen Betrachtungen der Attraktivitätsverhältnisse sind vollkommen analog zu den im letzten Abschnitt unternommenen Betrachtung im Fall einer Eichkopplung. Zur Verdeutlichung der Attraktivitätsverhältnisse soll wiederum der Fall des MSSM betrachtet werden. Es gilt

$$b_3 = -3, \quad \chi_3 = \frac{16}{3}, \quad b_1 = \frac{33}{5}, \quad \chi_1 = \frac{13}{15} \quad (3.101)$$

und damit

$$\eta_3 = \frac{7}{9} \quad \text{und} \quad \eta_1 = -\frac{112}{99} \quad (3.102)$$

anhand der Erkenntnisse des letzten Abschnitts lassen sich damit folgende Zuordnungen treffen:

In der Polstelle von g_3 gilt $\eta_3 > 0$ und damit wirkt der Fixpunkt $\rho = (b_3 + \chi_3)/\xi$ *attraktiv*, wenn die Evolution vom UV- zum IR-Bereich (Top-down) verläuft. Es liegt *Infrarotattraktivität* vor.

In der Polstelle von g_1 gilt $\eta_1 < 0$ und der Fixpunkt $\rho = (b_1 + \chi_1)/\xi$ wirkt *repulsiv*, wenn die Evolution vom IR-Bereich in den UV-Bereich (bottom-up) verläuft. Es liegt *Ultraviolettrepulsivität* vor.

Wie man sieht, ergänzen sich die beiden Fixpunkte. Der Fixpunkt in der Polstelle von g_3 ist IR-attraktiv und somit UV-repulsiv, der Fixpunkt in der Polstelle von g_1 ist UV-repulsiv und damit IR-attraktiv.

Man kann also folgern, daß der gesamte Renormierungsgruppenfluß — ausgenommen der Lösung $\rho = 0$, die in den trivialen Fixpunkten verharrt — für hinreichend langen Evolutionsweg im infrarotattraktiven Fixpunkt $\rho = (b_3 + \chi_3)/\xi$ in der Polstelle von g_3 mündet. Die beiden Fixpunkte in den Polstellen von g_1 und g_3 werden unter der Renormierungsgruppenevolution durch eine, in Abbildung 3.2 dargestellte Fixlinie verbunden. Diese Fixlinie stellt die um eine Dimension erhöhte Fixmannigfaltigkeit dar, die Fixmannigfaltigkeiten in den Polstellen der Eichkopplungen verbindet. Durch die Auswertung der Fixlinie an einer bestimmten Skala kann der Wert der durch die Renormierungsgruppengleichungen beschriebenen Kopplung an dieser Skala ermittelt werden.

Zur Verdeutlichung kann dieser Umstand auch folgendermaßen dargestellt werden: In den Polstellen der Eichkopplungen liegt jeweils ein entsprechendes Untersystem des vollständigen Systems vor. Dieses entsteht durch Vernachlässigung jeweils einer der Eichkopplungen gegenüber der anderen aus dem vollständigen System. Der mathematische Gültigkeitsbereich des vollständigen Systems ist somit durch das offene Intervall zwischen den Polstellen der Eichkopplungen gegeben und die Untersysteme stellen die Grenzwerte in den Polstellen dar. Formal entsprechen die *reduzierten* Renormierungsgruppengleichungen den entsprechenden Grenzwerten der Renormierungsgruppengleichungen des vollständigen Systems in den Polstellen.

In den Renormierungsgruppengleichungen der Untersysteme lassen sich Fixmannigfaltigkeiten der *reduzierten* Systeme berechnen. Diese werden unter der Renormierungsgruppenevolution des vollständigen Systems durch eine Fixmannigfaltigkeit verbunden, deren Dimension um eins gegenüber der Fixmannigfaltigkeit in den reduzierten Systemen erhöht ist. Konkret werden in diesem Fall die Fixpunkte in den Polstellen von g_1 und g_3 durch eine Fixlinie verbunden. Diese durchquert im Verlaufe der Renormierungsgruppenevolution auch den physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution zwischen der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$ und der Unifizierungsskala und kann an jeder beliebigen Skala ausgewertet werden, um den Wert der entsprechenden Kopplung — hier der Yukawa-Kopplung — an dieser Skala zu ergeben. In diesem Sinne ist die Lage der Fixlinie im physikalischen Bereich vollständig durch die mathematischen Gegebenheiten in den reduzierten Systemen in den Polstellen der Eichkopplungen bestimmt.

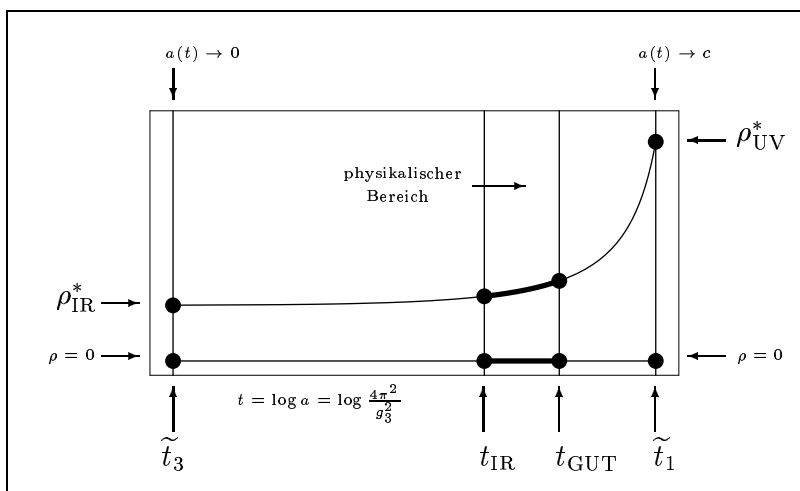


Abbildung 3.2: Evolution des Eich-Yukawa-Systems mit drei Eichkopplungen g_1, g_2 und g_3 . Sowohl im UV-Bereich, dem Pol der Eichkopplung g_1 , als auch im IR-Bereich sind jeweils der nicht-triviale Fixpunkt ρ_{UV}^* beziehungsweise ρ_{IR}^* und der triviale Fixpunkt $\rho = 0$ abgebildet. Diese sind entsprechend durch Fixlinien verbunden, die durch Auswertung an der Skala t_{IR} einen Wert des beschriebenen Parameters an dieser Skala ergeben. Der physikalische Bereich erstreckt sich von der GUT-Skala bis zur Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung.

Die Abbildung 3.3 zeigt konkret die Evolution des top- g_1 - g_2 - g_3 -Systems im Fall des MSSM.

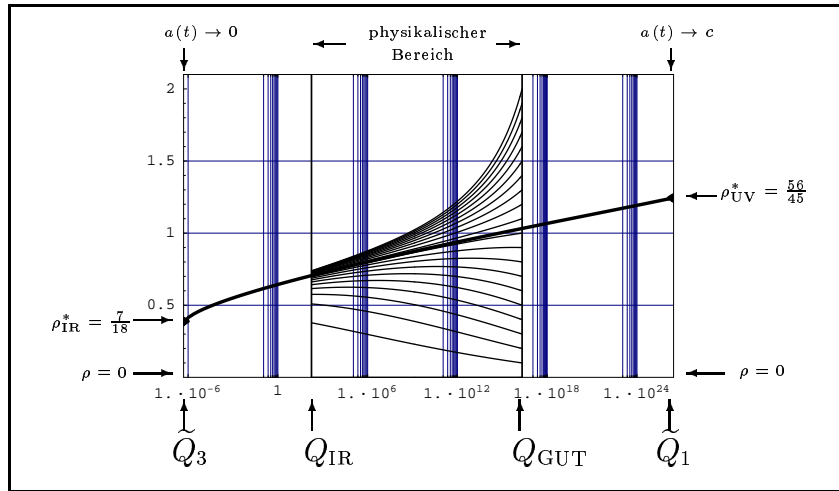


Abbildung 3.3: Evolution des Eich-Yukawa-Systems mit drei Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 . In diesem Fall ist die Evolution des Top- g_1 - g_2 - g_3 -Systems dargestellt. In den Polstellen der Eichkopplungen liegen die nicht-trivialen Fixpunkte $\rho_{UV}^* = 56/45$ und $\rho_{IR}^* = 7/18$ und die trivialen Fixpunkte $\rho = 0$ vor. Wie in Abbildung 3.2 erstreckt sich der physikalische Bereich von der GUT-Skala bis zur Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung. In dieser Abbildung ist weiterhin eine Lösungsschar eingezeichnet, die von der Fixlinie abweichende Anfangswerte im UV-Bereich besitzt. Die attraktive Wirkung der Fixlinie auf diese Lösungen läßt sich gut erkennen.

Die Yukawa-Kopplung ist in diesem Fall direkt über der Impulsskala Q aufgetragen, der Maßstab ist logarithmisch. Es ist sehr gut die attraktive Wirkung der Fixlinie, die die Fixpunkte in den Polstellen von g_1 und g_3 verbindet, auf die in die Graphik eingezeichnete Lösungsschar zu erkennen. Daß die Lösungen unterhalb der Fixlinie nicht so stark zu dieser hingezogen werden wie die oberhalb, hat seinen Grund in der Existenz einer weiteren Fixlinie [5, 6], die sich unterhalb der dargestellten Fixlinie befindet und — obwohl weniger attraktiv — ebenfalls anziehend auf die Lösungen wirkt. Zur Erzeugung der Abbildung 3.3 wurden Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung [36] verwendet. In Abschnitt 3.3.5 wird näher auf die Aspekte der numerischen Integration von Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung eingegangen.

Die laufende Masse des durch das Eich-Yukawa-System beschriebenen Fermions — hier des Topquarks — läßt sich aus dem Wert der Fixlinie an der jeweiligen Skala bestimmen. Zur Berechnung der physikalischen Pol-Masse des Topquarks muß die für die Beziehung

$$m_{top}^{pole} = \frac{v}{\sqrt{2}} (1 + \delta^{QCD}) y_t (Q = m_{top}^{pole}) \quad (3.103)$$

ein selbstkonsistenter Zustand erreicht werden, da m_{top}^{pole} sowohl auf der linken als auch auf der rechten Seite der Gleichung auftritt. Dies kann normalerweise unter Zuhilfenahme eines iterativen Algorithmus geschehen. Es hat sich jedoch gezeigt [7], daß die Bestimmung der Masse an der Skala m_{top}^{pole} im Fall des Topquarks zu vernachlässigbaren Fehlern führt. Im Fall der anderen Quarks und Leptonen wird der Beziehung (3.103) durch die Einführung von sogenannten *Massen-Zuwachs-Faktoren* (siehe Abschnitt 5.2) Rechnung getragen, die zudem die Einflüsse von Teilchenzahlschwellen unterhalb der Skala $Q = m_{top}^{pole}$ miteinbeziehen.

Man erhält so unter Berücksichtigung aller drei Eichkopplungen den einleitend erwähnten Ausdruck

$$m_t \approx \sin\beta \cdot 190 \text{ GeV} . \quad (3.104)$$

für die Masse des Topquarks im minimal supersymmetrischen Standardmodell. Diese stellt eine höchst nicht-triviale Beziehung dar, die zudem von dem Parameter $\tan\beta$, der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Dubletts im MSSM angibt, abhängt. Man erhält

folgenden Ausdruck

$$m_t = y_t \left(Q = m_{top}^{pole} \right) \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (3.105)$$

für die Masse des Topquarks aus der Auswertung der Fixlinie an der IR-Skala. In diesem Fall ist auf die Masse noch die Polmassenkorrektur, siehe dazu Abschnitt 2.4.1, anzuwenden.

An Abbildung 3.3 wird auch deutlich, daß neben den Fixpunkten, hier vor allem der Fixpunkt im IR-Bereich, auch die sie verbindende Fixlinie infrarotattraktiv ist. Allgemein gilt, daß eine Fixmannigfaltigkeit mit höherer Dimension immer attraktiver ist als die in ihr enthaltenen Fixmannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension. In diesem Fall bedeutet dies, daß die Fixlinie attraktiver ist als die Fixpunkte.

3.3.4 Einbeziehung mehrerer Yukawa-Kopplungen

In diesem Abschnitt soll noch kurz auf die Erweiterung auf Systeme mit mehreren Yukawa-Kopplungen eingegangen werden. Dabei werden exemplarisch Ergebnisse im Rahmen des Top-bottom-tau- g_1 - g_2 - g_3 -System dargestellt. Weitere Ergebnisse der Untersuchungen dieses Systems werden zur Veröffentlichung vorbereitet [9].

In Systemen mit mehreren Yukawa-Kopplungen stellen die Renormierungsgruppengleichungen der Yukawa-Kopplungen gekoppelte Systeme von gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen dar. Liegen n Yukawa-Kopplungen $y_{1,\dots,n}$ vor, so sind die Renormierungsgruppengleichungen

$$16 \pi^2 Q \frac{d}{dQ} y_{1,\dots,n} = \mathcal{F}_{1,\dots,n}(y_1, \dots, y_n, g_1, g_2, g_3) \quad (3.106)$$

im allgemeinen Funktionen der Yukawa-Kopplungen und der Eichkopplungen. Die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten bei Anwesenheit aller drei Eichkopplungen verläuft vollkommen analog zu der in Abschnitt 3.3.3 dargestellten Vorgehensweise. Um die Fixpunkte in den Polstellen zu berechnen, muß jedoch gefordert werden, daß die „rechten Seiten“ der Renormierungsgruppengleichungen der vorliegenden Yukawa-Kopplungen in den Fixpunkten simultan Null ergeben. Die in (3.106) auftretenden Funktionen $\mathcal{F}_{1,\dots,n}$ enthalten die sogenannten β -Funktionen der entsprechenden Kopplungen, womit sich die Renormierungsgruppengleichungen formal als

$$16 \pi^2 Q \frac{d}{dQ} y_i = y_i \beta_{y_i} \quad (3.107)$$

schreiben lassen, wobei y_i eine der Yukawa-Kopplungen y_1, \dots, y_n ist. Die jeweilige β -Funktion besitzt dieselbe funktionale Abhängigkeit wie die entsprechende Funktion \mathcal{F}_i .

Besitzt das System wie im Abschnitt 3.3.3 im Fall einer Yukawa-Kopplung Fixpunkte in den Polstellen der Eichkopplungen, so liegen im Fall von drei Yukawa-Kopplungen in den Polstellen Fixflächen vor. Abbildung 3.4 zeigt die Fixfläche beziehungsweise die Fixpunkte in der Polstelle von g_3 für das MSSM. Die dort vorliegenden Fixpunkte sind, wie auch in der Polstelle von g_1 , in Fixlinien eingebettet, die wiederum in die angesprochene Fixfläche eingebunden sind. Bei der Evolution vom UV-Bereich in den IR-Bereich „läuft“ die gesamte abgebildete Fläche vom UV- in den IR-Bereich und bildet so eine vierdimensionale Hyperfläche. Eine Auswertung an der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung führt wiederum zu einer Fixfläche an der entsprechenden Skala, so wie die Auswertung einer Fixlinie zu einem Wert der entsprechenden Kopplung führt.

Der in Abbildung 3.4 durch **HTB** gekennzeichnete nicht-triviale Fixpunkt, für den alle Kopplungen einen Wert ungleich Null haben, ermöglicht die simultane Berechnung der Massen des

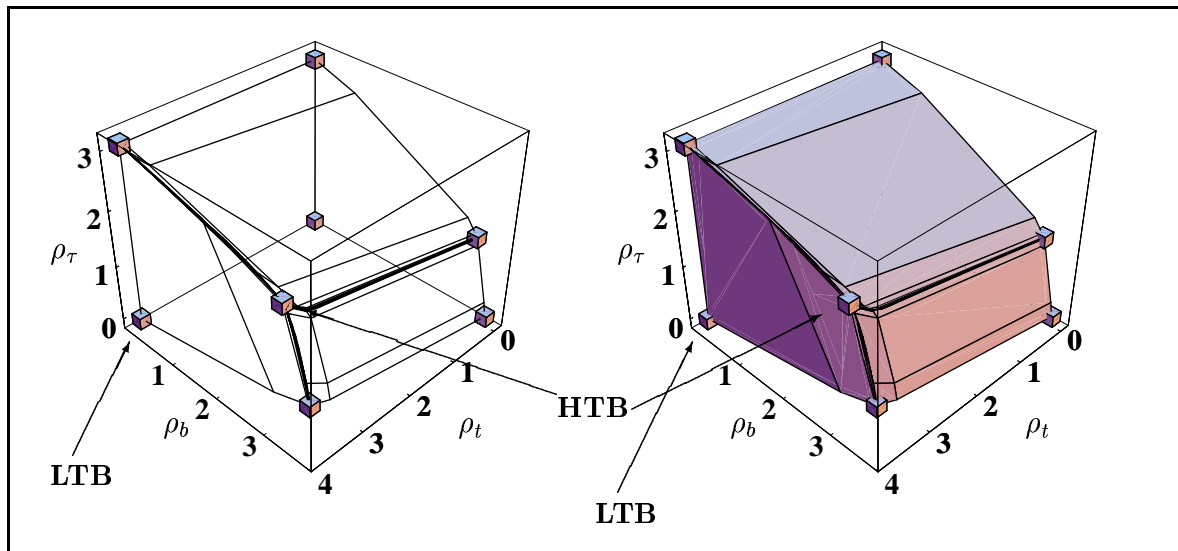


Abbildung 3.4: Die Fixlinien und die Fixfläche des Top-bottom-tau- g_1 - g_2 - g_3 -Systems im IR-Bereich. Die Fixfläche beziehungsweise die Fixlinien entstehen durch die Evolution der Renormierungsgruppen-gleichungen des vollständigen Systems der Fermionen der dritten Familie aus dem UV-Bereich in den IR-Bereich. Die Fixpunkte sind jeweils als Kästchen eingezeichnet. Es lassen sich deutlich die Fixlinien, die die Fixpunkte verbinden, und die Fixflächen, in die die Fixlinien eingebettet sind, erkennen. Das hier abgebildete System wird bei der Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM bis auf den Fixpunkt im Ursprung vollständig reproduziert; vergleiche Abschnitt 6.1 und Tabelle 6.3. Weiterhin sind jeweils der high-tan β - (HTB) und der low-tan β -Fixpunkt (LTB) gekennzeichnet. Weitere Einzelheiten zur Berechnung der Fixfläche und der Fixlinien sind in [7, 8, 10] zu finden.

Topquarks, des Bottomquarks und des Tauleptons. Der Wert des im MSSM auftretenden Parameters $\tan\beta$, der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs-Dubletts angibt, ergibt sich in diesem Fall aus dem Vergleich der berechneten Masse des Tauleptons mit der experimentell bestimmten Masse des Taulepton zu $\tan\beta \approx 60$. Aus diesem Grund wird vom high-tan β -Fixpunkt gesprochen, der low-tan β -Fixpunkt besitzt im Vergleich dazu Werte im Bereich von $\tan\beta \approx 1.5$.

Die Massen ergeben sich in Zweischleifen-Näherung, siehe dazu auch nachfolgendes Kapitel, zu

$$m_{top}^{\text{pole}} \approx 180 \text{ GeV} \quad m_b \approx 4 \text{ GeV} \quad m_\tau = 1.7771 \text{ GeV} \quad (\text{bei } \tan\beta \approx 60) . \quad (3.108)$$

Dieses Ergebnis stellt eine höchst nicht-triviale Beziehung zwischen den Massen der Quarks und Leptonen und dem Wert von $\tan\beta$ her. Weiterhin befinden sich die berechneten Massen in sehr guter Übereinstimmung mit den experimentell bestimmten Werten¹ [41] von

$$m_{top}^{\text{pole}} \approx 173.8 \pm 3.5 \pm 3.9 \text{ GeV} \quad \bar{m}_b \approx 4.3 \text{ GeV} \quad \bar{m}_\tau = 1.7771 \text{ GeV} , \quad (3.109)$$

wobei die vollständige Übereinstimmung der Werte für die Masse des Tauleptons durch die Verwendung der Masse des Tauleptons zur Bestimmung des Wertes von $\tan\beta$ bedingt ist.

Weiterhin ist in Abbildung 3.4 der durch **LTB** gekennzeichnete sogenannte low-tan β -Fixpunkt enthalten, für den $y_b = y_\tau = 0$ gilt und der, wie erwähnt, zu Werten von $\tan\beta \approx 1.5$ führt. Die Masse des Topquarks ergibt sich in diesem Fall zu

$$m_{top}^{\text{pol}} \approx 190 \text{ GeV} \cdot \sin\beta . \quad (3.110)$$

¹Der am Beginn der Untersuchungen zugrunde gelegte Wert der Masse des Topquarks betrug $m_{top}^{\text{pole}} = 173.9$, die Masse des Bottomquarks $\bar{m}_b \approx 4.25$. Die in 3.109 aufgeführten Werte entsprechen dem letzten Update der *Particle Data Group* [41] Anfang 2000.

Die verbleibenden in Abbildung 3.4 dargestellten Fixpunkte führen nicht zu physikalisch sinnvollen Kombinationen der Massen der Quarks und Leptonen.

Bei der Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in Abschnitt 6 wird sich zeigen, daß eine sogenannte *triangulare Kopplungsstruktur* vorliegt. Diese sorgt, wie Tabelle 6.2 zu entnehmen ist, sowohl in Einschleifen-Näherung als auch in Zweischleifen-Näherung für eine vollständige Entkopplung des Yukawa-Sektors vom weich brechenden Sektor des MSSM. Aus diesem Grund können auch die in diesem Abschnitt dargestellten Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen des Yukawa-Sektors bei der Berechnung des Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM identifiziert werden.

3.3.5 Die Einbeziehung des Zweischleifen-Niveaus

Wird die Evolution der Renormierungsgruppengleichungen, wie im Fall der Untersuchung des weich brechenden MSSM im Rahmen dieser Arbeit, in der Zweischleifen-Näherung der Störungstheorie durchgeführt, so ergeben sich geringfügige Modifikationen bei der Betrachtung der numerischen Integration.

In der Zweischleifen-Näherung sind die exemplarisch in den letzten Abschnitten abgeleiteten Fixmannigfaltigkeiten nicht mehr exakt. Die Möglichkeit der Existenz von exakten Fixmannigfaltigkeiten in Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung wird zur Zeit noch diskutiert [11]. Die Struktur der Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung ist

$$Q \frac{d}{dQ} y_i = \frac{y_i}{16\pi^2} \left(\beta_{\text{Einschleifen}} + \frac{1}{16\pi^2} \beta_{\text{Zweischleifen}} \right), \quad (3.111)$$

wobei y_i analog zum letzten Abschnitt eine der Yukawa-Kopplungen aus $y_{1,\dots,n}$ ist. Es ist leicht zu erkennen, daß der Anteil der Zweischleifen-Näherung in der Renormierungsgruppengleichung um den Faktor $(\text{Kopplung})^2/(16\pi^2)$ gegenüber dem Anteil der Einschleifen-Näherung abgeschwächt ist. Es hat sich weiterhin gezeigt, daß in Einschleifen-Näherung berechnete Fixmannigfaltigkeiten bei der Renormierungsgruppenevolution im Gültigkeitsbereich der Störungstheorie zwischen der UV- und IR-Skala in Zweischleifen-Näherung nach wie vor hinsichtlich ihres attraktiven Einflusses wirksam sind. Das Vorgehen bei den durchgeführten Untersuchungen ist daher wie folgt: Die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten wird in Einschleifen-Näherung vorgenommen. Die auf diese Art und Weise gewonnenen Werte im UV-Bereich werden als Anfangswerte für die Evolution in Zweischleifen-Näherung verwendet. Die attraktiven Fixmannigfaltigkeiten liegen weiterhin in der „Nähe“ ihrer Lage in Einschleifen-Näherung, so daß die auf die geschilderte Art gewonnenen Anfangswerte ebenfalls als hinreichend gute Wahl von Anfangswerten für die Renormierungsgruppenevolution in Zweischleifen-Näherung angesehen werden können.

Letztendlich ist die Attraktivität in den betrachteten Fällen im physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution zwischen der UV- und IR-Skala so groß, daß sich die Evolution im numerischen Sinne schon nach wenigen Schritten auf eine Position einstellt, die sich sehr nahe an der ursprünglichen Fixmannigfaltigkeit in Einschleifen-Näherung befindet. Außerhalb des physikalischen Bereiches, insbesondere in der Nähe der Polstellen der Eichkopplungen g_3 und g_1 , trifft dies nicht mehr uneingeschränkt zu. Da jedoch das Interesse auf den physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution beschränkt ist, haben die auftretenden numerischen Effekte keinen Einfluß auf die Vorhersage von Parameter aus den Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen.

Bei der Berechnung der Vorhersagen der Modelle im Rahmen dieser Arbeit werden immer mindestens Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung verwendet. In der Summe erhält man dadurch gegenüber der Einschleifen-Näherung eine Modifikation der berechneten Werte im Bereich von einigen Prozent.

3.4 Radiative spontane Symmetriebrechung

Zum Abschluß dieses Kapitels soll noch auf die sogenannte *radiative spontane Symmetriebrechung* eingegangen werden. Thematisch wäre diese eher in Abschnitt 2.3.1 einzuordnen. Da aber zur hinreichenden Darstellung einige Begriffe im Zusammenhang mit der Renormierungsgruppenevolution und Fixmannigfaltigkeiten benötigt werden, wird diese erst an dieser Stelle vorgenommen.

Grundsätzlich ist radiative Symmetriebrechung nicht zwingend mit der elektroschwachen Symmetriebrechung verknüpft. Jede Art von Symmetrie kann radiativ gebrochen werden. Radiative spontane Symmetriebrechung tritt auf, wenn die für das Eintreten der Symmetriebrechung verantwortlichen Parameter die benötigten Werte durch Strahlungskorrekturen beziehungsweise Renormierungsgruppenevolution erhalten. So kann man annehmen, daß an einer Skala oberhalb der Symmetriebrechungsskala ein Grundzustand vorliegt, in dem die Symmetrie ungebrochen ist. Die verantwortlichen Parameter werden nun der Renormierungsgruppenevolution unterworfen und erhalten so im Verlaufe der Evolution Werte, die zur Brechung der Symmetrie führen.

Die minimal supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells hat (im Gegensatz zum Standardmodell) die höchst attraktive Eigenschaft, daß die radiative spontane Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie auf natürliche Weise auftreten kann. Dies ist in der Literatur ausführlich diskutiert worden [15–17]. Im Detail beruht der Effekt der spontanen radiativen Symmetriebrechung im MSSM darauf, den Higgs-Massenparametern, $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ beziehungsweise m_1^2 und m_2^2 , im Potential (2.28) mittels der Renormierungsgruppenevolution sozusagen auf „natürliche“ Weise durch die Strahlungskorrekturen geeignete Werte zu geben und so die Brechung der elektroschwachen Symmetrie einzuleiten.

Dieser Effekt wird in der Literatur häufig in Verbindung mit kleinen Werten des Parameters $\tan\beta$, der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der Higgs-Dubletts angibt, diskutiert. Ist Der Parameter $\tan\beta$ klein, $\tan\beta \approx 1.5$, dann folgt aus (2.16), daß die Yukawa-Kopplung des Topquarks, $y_t \approx 1$, wesentlich größer als die Yukawa-Kopplung des Bottomquarks und des Tauleptons sein muß, um die experimentellen Massen der Fermionen zu reproduzieren. Ist die Yukawa-Kopplung von der Größenordnung 1, so kann aus der Betrachtung der Renormierungsgruppengleichungen des MSSM relativ schnell abgeleitet werden, daß der Massenparameter $m_{H_u}^2$ durch die große Yukawa-Kopplung ins Negative gezogen wird.

Auf dem Niveau von Fixmannigfaltigkeiten findet man für diesen Effekt jedoch eine wesentlich befriedigendere Begründung. Ist die einem Higgs-Massenparameter zugeordnete Yukawa-Kopplung ungleich Null, so besitzt sie im Infrarot-Bereich einen infrarotattraktiven Fixpunkt im Negativen, der dafür sorgt, den Parameter ins Negative zu ziehen. Ist die entsprechende Yukawa-Kopplung jedoch Null, so liegt der Fixpunkt des entsprechenden Higgs-Massenparameters im Positiven; vergleiche Tabelle 6.3. Im Fall eines kleinen Wertes von $\tan\beta$ tritt nun genau dieser Fall ein. Die Yukawa-Kopplung des Topquarks ist groß, der Parameter $m_{H_u}^2$ wird negativ. Die Yukawa-Kopplung des Bottomquarks ist klein genug, um sie gegenüber der Yukawa-Kopplung des Topquarks zu vernachlässigen, der Parameter $m_{H_d}^2$ bleibt positiv. Das

heißt, die Higgs–Massenparameter besitzen unterschiedliche Vorzeichen im IR–Bereich. Dieser Umstand begünstigt das Eintreten der spontanen Symmetriebrechung durch die Erfüllung der Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ (2.51)

$$b^2 > m_1^2 m_2^2 . \quad (3.112)$$

Man spricht in diesem Fall vom sogenannten low– $\tan\beta$ –Fixpunkt, die Yukawa–Kopplung des Bottomquarks und des Tauleptons können gegenüber der Yukawa–Kopplung des Topquarks vernachlässigt werden.

In dem anderen im Rahmen dieser Arbeit ausführlich untersuchten Fixpunkt, dem high– $\tan\beta$ –Fixpunkt, besitzen das Top– und Bottomquark sowie das Taulepton Yukawa–Kopplungen gleicher Größenordnung, man spricht von *approximativer Unifizierung* der Yukawa–Kopplungen [7, 9, 42], der Wert von $\tan\beta$ liegt im Bereich von $\tan\beta \approx 60$. Nun sind sowohl die Yukawa–Kopplung des Topquarks als auch die Yukawa–Kopplung des Bottomquarks und Tauleptons von Null verschieden und beide Higgs–Massenparameter besitzen einen negativen Fixpunkt im IR–Bereich. Dies führt letztendlich zu den bekannten Problemen mit der elektroschwachen Brechung im Fall der Evolution des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes durch mangelnde Erfüllung der Bedingung (3.112) zur „Destabilisierung des Ursprungs“; vergleiche auch Abschnitt 8.2.

Da, wie gesagt, die Parameter in den Gleichungen, die zur Bestimmung der Brechungseigenschaften verwendet werden, ihre Werte durch die Renormierungsgruppenevolution aus zunächst beliebigen Anfangswerten im UV–Bereich erhalten, spricht man von radiativer Symmetriebrechung. Die Parameter werden in diesem Fall als *laufende Parameter* bezeichnet.

Radiative Symmetriebrechung kann, wie eingangs erwähnt, auch in anderen Fällen als der elektroschwachen Symmetriebrechung auftreten. So wurde in [43] gezeigt, daß in einem rechts–links–symmetrischen, auf der Symmetriegruppe $SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ beruhenden Modell die sequentielle Brechung der Symmetrie

$$SU(3) \times SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1) \rightarrow SU(3) \times SU(2)_L \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)_{\text{em}} \quad (3.113)$$

ebenfalls durch radiative Symmetriebrechung motiviert werden kann.

Kapitel 4

Physikalische Bedingungen an das Potential

In diesem Abschnitt werden die sogenannten *Bedingungen* (constraints) eingeführt. Dabei sind in der Literatur und im allgemeinen Sprachgebrauch zur Kennzeichnung desselben Umstandes verschiedene Bezeichnungen gebräuchlich: Neben der Bedingung spricht man von Constraints, Einschränkung, Bounds und Kriterien. Die Bezeichnung „Constraint“ ist vor allem im anglikanischen Sprachgebrauch verbreitet und wird, sofern es sich anbietet, der deutschen Bezeichnung „Bedingung“ zur besseren Bezugnahme auf die in der Literatur gebräuchlichen Begriffe in Klammern nachgestellt.

Im folgenden wird im Zusammenhang mit Bedingungen und der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen von *freien Parametern* die Rede sein. Im allgemeinen kennzeichnet der Begriff *freie Parameter* einen zunächst beliebigen Satz von Anfangswerten für die Renormierungsgruppenevolution der Parameter des weich brechenden MSSM an der UV-Skala. Wird eine Wahl der freien Parameter getroffen, so liegen die Werte aller Parameter an allen Skalen zwischen der UV-Skala und der IR-Skala über die Renormierungsgruppenevolution der Parameter fest. Die Werte an einer Skala ergeben sich durch die Auswertung der (numerischen) Lösung der Renormierungsgruppengleichungen an der entsprechenden Skala. Im Verlauf der Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in Kapitel 6.2 wird es möglich sein, unter Ausnutzung der Fixmannigfaltigkeiten die Zahl der freien Parameter der Renormierungsgruppenevolution des weich brechenden MSSM auf zwei, den Anfangswert des Higgs-Mischungs-Parameters μ_0 und die unifizierenden Gaugino-Masse $m_{1/2}$, zu reduzieren. Damit liegen alle Parameter des weich brechenden MSSM an allen Skalen zwischen der UV-Skala und der IR-Skala in Abhängigkeit von zwei verbleibenden freien Parametern und den experimentellen Werten der Eichkopplungen fest.

Nach der Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in Kapitel 6 schließt sich im Rahmen der Einzeluntersuchungen die Auswertung von physikalischen Bedingungen an das Potential an. Diese machen eine Aussage über das Austreten von ungewollten Minima im skalaren Potential im Zusammenhang mit der spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung. Treten solche Minima auf, so ist das Potential nicht in der Lage, die gewünschte Symmetriebrechung in geeigneter Form zu realisieren. Mit Hilfe der Bedingungen werden so die möglichen Werte der verbleibenden freien Parameter der Theorie eingeschränkt. Damit können Bedingungen als Mittel zur weiteren Erhöhung der Aussage- oder Vorhersagekraft (Prädiktivität) dienen.

Die Untersuchung von Bedingungen im Sinne von Vorhersagen von Modellen im IR-Bereich geht auf Claudson, Hall Hinchliffe und andere [18] zurück. Die betrachteten Bedingungen werden in diesen Fällen als *traditionelle Bedingungen* (traditional constraints) bezeichnet. Sie werden in Abschnitt 4.1 eingeführt. In Abschnitt 4.2 wird der Begriff der Bedingung auf die oben angesprochene Art und Weise mit der Renormierungsgruppenevolution verbunden, so daß Untersuchungen im Zusammenhang mit laufenden Parametern, das heißt durch Auswertung der Werte der Parameter an allen Skalen des physikalischen Bereichs der Renormierungsgruppenevolution, ermöglicht werden. Für sie soll die Bezeichnung *Laufende Bedingung* (running constraint) verwendet werden. In diesem Zusammenhang spielt auch die erwähnte Festlegung der Werte der Parameter an allen Skalen zwischen der UV-Skala und der IR-Skala durch die Fixmannigfaltigkeiten und die Wahl der verbleibenden freien Parameter eine wichtige Rolle. Die in den nächsten Abschnitten eingeführten *laufenden* und *erweiterten Bedingungen* machen eine Aussage über die Existenz von ungewollten Minima im skalaren Potential für den gesamten physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution und greifen damit auf die für alle Skalen durch die Fixmannigfaltigkeiten festgelegten Werte der Parameter zurück.

In Abschnitt 4.3 wird die Erweiterung der Bedingungen, die sogenannten *Erweiterten Bedingungen* (improved constraints) nach Cases et al. [20] vorgestellt. Die Aussagen dieser Bedingungen schließen die laufenden Bedingungen ein, und die Autoren nehmen weiterhin in Anspruch, mit den von ihnen angegebenen Bedingungen sämtliche möglichen Bedingungen anzugeben. Dieser Anspruch ist genau dann haltbar, wenn die Untersuchungen sich auf alle drei Fermionen-Familien beziehen, was im Rahmen dieser Arbeit nicht zutrifft. In Abschnitt 7.4 wird aus diesem Grund eine Konkretisierung der erweiterten Bedingungen auf die Gegebenheiten der dritten Fermionen-Familie durchgeführt.

Weiterhin existieren mit Abel, Allanach et al. [44] sowie Jack und Jones [45] neuere Untersuchungen, die Aspekte von infrarotattraktiven Fixpunkten in die Betrachtung von Bedingungen und Aussagen über die Stabilität der diskutierten Modelle mit einbeziehen.

4.1 Traditionelle Bedingungen

In diesem Abschnitt werden sogenannte *traditionelle Bedingungen* (traditional constraints) vorgestellt. Ihnen ist gemeinsam, daß sie mittels der im skalaren Potential enthaltenen Parameter Aussagen über die Eigenschaften des Potentials *an einer Skala* zulassen. Im Gegensatz zu den in Abschnitt 4.2 vorgestellten *laufenden Bedingungen* (running constraints) und den in Abschnitt 4.3 vorgestellten von Cases et al. abgeleiteten sogenannten *erweiterten Bedingungen* (improved constraints) stellen die in diesem Abschnitt abgeleiteten Bedingungen Baumgraphen-Beziehungen in nullter Ordnung Störungstheorie dar. Die Parameter werden *nicht* als laufende Parameter angesehen, und die Auswertung der Bedingungen wird an einer bestimmten Skala, der Skala der Symmetriebrechung m_S , vorgenommen.

Generell verläuft die Auswertung der Bedingungen so, daß ausgehend von der Wahl der verbleibenden freien Parameter der Theorie mittels der berechneten Fixmannigfaltigkeiten die Werte der Parameter der Theorie an einer beliebigen Skala im IR-Bereich bestimmt werden, und die Ausdrücke, die den Bedingungen zugrunde liegen, unter Verwendung dieser Werte der Parameter untersucht werden.

Abschnitt 4.1.1 stellt die Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB-constraint, Abkürzung für **U**nbounded **F**rom **B**elow) vor, bei deren Erfüllung das skalare Potential als von unten beschränkt angesehen werden kann. Abschnitt 4.1.2 stellt die Bedingungen zum Erhalt der

Ladungs- und Farbsymmetrie (CCB-constraint, Abkürzung für **C**harge and **C**olor **B**reaking) vor. Diese Bedingungen sichern das Potential gegen die Existenz von Minima ab, die die Eichsymmetrie der Farbladung, die Eigenschaft der Teilchen, die mit der Eichsymmetrie der starken Wechselwirkung verknüpft ist, und elektrische Ladung, die Eigenschaft der Teilchen, die mit der Eichsymmetrie der elektroschwachen Wechselwirkung verknüpft ist, brechen.

Wie schon im Abschnitt 2.3.2 im Zusammenhang mit der Darstellung des skalaren Potentials angedeutet, wird das skalare Potential zur Ableitung dieser Bedingungen teilweise um weitere Terme des vollständigen Potentials (2.22) unter Einbeziehung aller weich brechenden Terme erweitert. Dies ist in diesem Abschnitt bei der Ableitung der Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie der Fall.

4.1.1 Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Im ersten Schritt wird die sogenannte *traditionelle Bedingung zur Beschränktheit des Potentials* (traditional UFB-constraint) abgeleitet. In der Literatur finden sich Darstellungen zu dieser Bedingung in den Standardwerken [21], zum Beispiel in Martin's *Supersymmetry Primer* [30] oder in Ramond's *Journeys beyond the Standard Model* [21].

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Bedingung macht eine Aussage über die Beschränktheit des Potentials. Ist die Bedingung erfüllt, so ist das Potential nach unten beschränkt. Auf diese Weise ist sichergestellt, daß es sich bei einem vorhandenen Minimum um ein globales Minimum handelt.

Die Bedingung wird im anglikanischen als *UFB-constraint* bezeichnet, wobei sich der Name von der Bezeichnung „**U**nbounded **F**rom **B**elow“ ableitet. Die Bedingung soll als erfüllt angesehen werden, wenn das Potential *nicht un-beschränkt*, d. h. beschränkt ist.

Zur Ableitung der Bedingung zur Beschränktheit des Potentials wird das Potential (2.28) in den sogenannten *D-flachen Richtungen* (D-flat directions) betrachtet, für die

$$|H_u^0| = |H_d^0| =: x \quad (4.1)$$

gilt. Diese Richtungen tragen ihren Namen, da durch die obige Definition gerade die sogenannten D-Term Anteile im Potential verschwinden.

Man erhält

$$V_{\text{D-flach}} = m_1^2 x^2 + m_2^2 x^2 - 2 b x^2 . \quad (4.2)$$

Damit das Potential nach unten beschränkt ist, muß

$$V_{\text{D-flat}} \geq M \quad (4.3)$$

und somit

$$(m_1^2 + m_2^2 - 2 b) x^2 \geq M \quad (4.4)$$

gelten. In der Literatur ist die Wahl von $M = 0$ üblich. Es folgt

$$\boxed{m_1^2 + m_2^2 \geq 2 b} . \quad (4.5)$$

Bei dieser Bedingung an das Potential, beziehungsweise an die im Potential enthaltenen Parameter m_1^2 , m_2^2 und b , handelt es sich, wie eingangs erwähnt, um eine Baumgraphen-Beziehung.

Die Auswertung erfolgt somit an einer bestimmten Impulsskala, der Skala der Symmetriebrechung m_S . Ist die Bedingung (4.5) an dieser Skala erfüllt, so gilt die traditionelle Bedingung zur Beschränktheit des Potentials als erfüllt und die Wahl der freien Parameter der Theorie als geeignet hinsichtlich der Beschränktheit des Potentials. In Abschnitt 4.2 wird eine Erweiterung der traditionellen Bedingungen auf laufende Parameter vorgenommen.

4.1.2 Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie

In diesem Abschnitt werden die *traditionellen Bedingungen zur Ladungs- und Farbsymmetriebrechung* (traditional CCB-constraint) abgeleitet. Diese Bedingungen führen bei Erfüllung zum Ausschluß von unphysikalischen Minima im Potential, die zu einer Brechung der der Ladungs- und Farbsymmetrie führen würden. Die Bezeichnung dieser Bedingung im anglikanischen leitet sich von „*Charge- and Colour-Breaking*“ ab.

Die ersten Untersuchungen dieser Art von ungewollten Minima gehen auf Kounnas, et al. [18] und Komatsu [19] zurück, wobei letzterer schon erste Schritte in Richtung zu den erweiterten Bedingungen (improved constraints) nach Cases et al. [20] unternimmt. Neuere Untersuchungen, die parallel zu den Untersuchungen von Casas et al. unternommen wurden, sind zum Beispiel in [46] zu finden.

Zur Ableitung der Bedingungen muß das skalare Potential (2.28) des MSSM um bestimmte Multipletts erweitert werden. Ausgehend vom Potential in der Form

$$V = m_{\tilde{Q}}^2 \left| \tilde{Q} \right|^2 + m_{\tilde{t}}^2 \left| \tilde{t} \right|^2 + m_{H_u}^2 \left| H_u \right|^2 + a_t y_t \left(\tilde{t}^c \tilde{Q} H_u + \text{h.c.} \right) + y_t^2 \left(\left| \tilde{Q} \right|^2 \left| \tilde{t} \right|^2 + \left| \tilde{Q} \right|^2 \left| H_u \right|^2 + \left| \tilde{t} \right|^2 \left| H_u \right|^2 \right), \quad (4.6)$$

wobei nur Terme einbezogen werden, die mit den Kopplungen des Topquarks beziehungsweise des Stop und äquivalenten Größen in Verbindung stehen, betrachtet man im Potential (4.6) die Richtung

$$\langle H_u \rangle = \langle \tilde{Q} \rangle = \langle \tilde{t} \rangle = v, \quad (4.7)$$

wobei die eckigen Klammern den Vakuumerwartungswert $\langle \cdot \rangle = \langle 0 | \cdot | 0 \rangle$ bedeuten. Das Potential läßt sich mit dieser Definition als

$$V = v \left(m_{H_u}^2 + m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{t}}^2 + 3 y_t^2 v^2 + 2 a_t y_t v \right) \quad (4.8)$$

schreiben. Definiert man weiterhin $y = y_t v$ und $a^2 = (m_{H_u}^2 + m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{t}}^2)$, so erhält man

$$V = \frac{y^2}{y_t^2} \left(a^2 + 3 y^2 + 2 a_t y \right). \quad (4.9)$$

Zur Bestimmung des Minimums von (4.9) wird wie gewohnt die Nullstelle der ersten Ableitung gesucht. Man erhält

$$y_{\min} = \frac{1}{4} \left(\sqrt{a_t^2 - \frac{8}{3} a^2} - 3 a_t \right) \quad (4.10)$$

und nach dem Einsetzen von y_{\min} in (4.9)

$$V(y_{\min}) = \frac{1}{288 y_t^2} \left(-24 a^2 + 36 a_t^2 a^2 - 9 a_t^4 + \sqrt{3} a_t \left(3 a_t^2 - 8 a^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right). \quad (4.11)$$

Aus der Forderung, daß $V(y_{\min}) \geq 0$ gelten soll, folgt nach einigen Umformungen die Bedingung

$$a_t^2 \leq 3 a^2 = 3 \left(m_{H_u}^2 + m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{t}}^2 \right) , \quad (4.12)$$

die die traditionelle Ladungs- und Farbbrech-Bedingung für das Topquark beziehungsweise Stop darstellt. Für das Bottomquark beziehungsweise Stop und das Taulepton beziehungsweise Stau lassen sich auf analoge Weise äquivalente Ausdrücke berechnen, wenn in (4.6) die entsprechenden Terme für das jeweilige Fermion eingesetzt werden. Die Bedingungen lauten in diesem Fall

$$a_b^2 \leq 3 \left(m_{H_d}^2 + m_{\tilde{Q}}^2 + m_{\tilde{b}}^2 \right) \quad (4.13)$$

für das Bottomquark/Sbottom und

$$a_\tau^2 \leq 3 \left(m_{H_d}^2 + m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 \right) \quad (4.14)$$

für das Taulepton/Stau.

Wie im Fall der traditionellen Bedingung zur Beschränktheit des Potentials im vorhergehenden Abschnitt handelt es sich wieder um Baumgraphen-Beziehungen. Die Bedingungen werden ausgehend von den Werten der enthaltenen Parameter an einer bestimmten Impulsskala ausgewertet. Sind die Bedingungen (4.12, 4.13 und 4.14) erfüllt, so liegen keine Minima im Potential vor, die die Ladungs- und Farbsymmetrie brechen.

4.2 Laufende Bedingungen

Gegenüber den im letzten Abschnitt dargestellten „traditionellen Bedingungen“ stellen die *laufenden Bedingungen* (running constraints) eine Erweiterung unter Einbeziehung der Renormierungsgruppenevolution dar. Die traditionellen Bedingungen lassen sich dadurch kennzeichnen, daß sie an einer bestimmten Impulsskala ausgewertet werden und Beziehungen der Parameter oder Vorhersagen auf Baumgraphen-Niveau darstellen. Ob die Bedingung eingehalten wird, ist durch die Werte der eingehenden Parameter an der fraglichen Skala festgelegt.

Im Gegensatz dazu fordert man bei den laufenden Bedingungen (running constraints), daß sie für einen festgelegten Bereich der Impulsskala, so zum Beispiel von der IR- beziehungsweise elektroschwachen Skala $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$ oder der Symmetriebrechungsskala $Q = m_S$ bis zur UV- beziehungsweise Unifizierungsskala $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$ erfüllt werden.

Als Beispiel sei die traditionelle Bedingung zur Beschränktheit des Potentials aus Abschnitt 4.1.1 genannt. Diese wird als erfüllt angesehen, wenn an einer bestimmten Skala die Bedingung $2b < m_1^2 + m_2^2$ erfüllt ist. Um eine laufende Bedingung zu konstruieren, muß unter Verwendung des obigen Ausdrucks gefordert werden, daß die Positivität von

$$m_1^2 + m_2^2 - 2b \geq 0 \quad (4.15)$$

für alle Skalen Q von der IR-Skala bis zur UV-Skala gegeben ist. Wird, wie einleitend dargestellt, eine Wahl der freien Parameter der Theorie getroffen, so liegen über die Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen die Werte der Parameter an allen Skalen zwischen der UV-Skala und der IR-Skala und somit im gesamten physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution fest. Diese Werte können an jeder Skala Q verwendet werden, um die Erfüllung der Bedingung 4.15 zu überprüfen. In Abschnitt 7.4.4 wird bei der Einrichtung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Algorithmus dargestellt, wie laufende Bedingungen berechnet werden können.

4.3 Erweiterte Bedingungen nach Casas et al.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten und den Untersuchungen der Brechungseigenschaften des skalaren Potentials im Rahmen dieser Arbeit zugrundeliegenden Bedingungen gehen auf Casas et al. [20] zurück. Dabei wurde der Begriff der *erweiterten Bedingungen* (improved constraints) 1996 von Casas, Lleyda und Muñoz [20] eingeführt, woran sich 1996 Untersuchungen von Casas, S. Dimopoulos [20] und den oben genannten Autoren zur Skalenabhängigkeit der Bedingungen anschließen.

In Abschnitt 7.4 wird eine Konkretisierung der Bedingungen zur Anwendung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Algorithmus zur Untersuchung der Vorhersagen des weich brechenden MSSM vorgenommen. In Abschnitt 8.3 erfolgt die Darstellung der Ergebnisse.

4.3.1 Erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Zur Ableitung der ersten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB–1–constraint) wird ähnlich wie bei der Ableitung der traditionellen Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (traditional UFB–constraint) in Abschnitt 4.1.1 vom „reinen“ Higgs–Potential (2.28) ausgegangen.

Wie schon in der eben erwähnten Ableitung ist die einzig bedeutende Richtung im Potential durch die Bedingung

$$H_u \equiv H_d \quad (4.16)$$

gegeben. Diese Richtung heißt, siehe Abschnitt 4.1.1, *D–flach*, da im Higgs–Potential genau die D–Terme verschwinden. Man erhält so den Ausdruck

$$V_{\text{UFB–1}} = (m_1^2 + m_2^2 - 2b) |H_u|^2 \quad (4.17)$$

für den Wert des Potentials entlang dieser Richtungen. Die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials läßt sich somit als

$$V_{\text{UFB–1}}(Q = \hat{Q}) > V_{\text{real min}}(Q = m_S) \quad (4.18)$$

schreiben. Der Wert von \hat{Q} ist durch

$$\hat{Q} \approx \max(g_2 |H_u|, y_t |H_u|, m_S) \quad (4.19)$$

gegeben.

Casas et al. geben weiterhin an, daß (4.17) äquivalent zu der traditionellen Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

$$m_+ \geq 2b \quad \text{oder} \quad m_1^2 + m_2^2 \geq 2b \quad (4.20)$$

aus Abschnitt 4.1.1 ist, wenn man fordert, daß (4.20) für alle Skalen Q mit $m_S < Q < m_{\text{GUT}}$ erfüllt ist. Dies führt weiterhin zu einer formalen Identität mit den in Abschnitt 4.2 vorgestellten *Laufenden Bedingungen* (running constraint).

4.3.2 Zweite Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Für die Ableitung der zweiten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB–2–constraint) wird dem „reinen“ Higgs–Potential (2.28) ein weiteres Feld, das Feld des leptonischen Dubletts \tilde{L} hinzugefügt. Das Potential besitzt folgende Form

$$V = m_1^2 |H_u^0|^2 + m_2^2 |H_d^0|^2 + m_{\tilde{L}}^2 |\tilde{L}|^2 - b (H_u^0 H_d^0 + c.c.) + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \left(|H_u^0|^2 - |H_d^0|^2 - |\tilde{L}|^2 \right)^2. \quad (4.21)$$

Durch Minimieren unter Beachtung von H_d und \tilde{L} lassen sich diese Felder durch H_u ausdrücken, und man erhält nicht–triviale Ergebnisse, wenn gilt

$$b < \mu^2 \quad \text{und} \quad |H_u|^2 > \frac{4 m_{\tilde{L}}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} \left(1 - \frac{b^2}{(m_2^2 - m_{\tilde{L}}^2)^2} \right), \quad (4.22)$$

da sonst $\tilde{L} = 0$ ein Minimum darstellt und man so wieder die Bedingung zur Beschränktheit des Potentials erhalten würde. Für das Potential ergibt sich so

$$V_{\text{UFB-2}} = \left(m_1^2 + m_{\tilde{L}}^2 - \frac{b^2}{m_2^2 - m_{\tilde{L}}^2} \right) |H_u|^2 - \frac{2 \left(m_{\tilde{L}}^2 \right)^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} \quad (4.23)$$

und analog zur ersten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials wird wiederum gefordert, daß

$$\boxed{V_{\text{UFB-2}} (Q = \hat{Q}) > V_{\text{real min}} (Q = m_S)} \quad (4.24)$$

wobei \hat{Q} durch $\hat{Q} \approx \max (g_2 |H_u|, y_t |H_u|, m_S)$ gegeben ist.

4.3.3 Dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Zur Ableitung der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB–3–constraint) nach Casas et al. ist die Unterscheidung von mehreren Familien vorzunehmen. Dazu werden die Supermultipletts mit i bzw. j indiziert, wobei $i, j = 3$ die dritte, schwerste Familie darstellt; es gilt $\tilde{e}_3 \equiv \tilde{\tau}$ und $\tilde{L}_3 \equiv \tilde{L}$.

In der Konkretisierung der Bedingungen in Kapitel 7.4 wird die Reduzierung der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials auf die dritte, schwerste Familie durchgeführt, die Gegenstand der Untersuchungen in dieser Arbeit ist, wohingegen hier zunächst die Ableitung unter Einbeziehung mehrerer Familien vorgenommen wird. Ausgehend von den Definitionen

$$H_d = 0 \quad \text{und} \quad |\tilde{e}| \equiv |\tilde{e}_{jL}| = |\tilde{e}_j| = \sqrt{\frac{|\mu|}{y_{e_j}}} |H_u| \quad (4.25)$$

erhält man für das Potential

$$V = (m_1^2 - \mu^2) |H_u|^2 + \left(m_{\tilde{L}_j}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2 \right) |e|^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 |\tilde{L}_i|^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \left(|H_u|^2 + |e|^2 - |\tilde{L}_i|^2 \right)^2. \quad (4.26)$$

Wiederum läßt sich das Feld \tilde{L} mittels Minimierung durch H_u ausdrücken

$$\left| \tilde{L}_i \right|^2 = -\frac{4 m_{\tilde{L}_i}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} + (|H_u|^2 + |\tilde{e}|^2) . \quad (4.27)$$

Ist

$$m_{\text{GUT}} > H_u > \sqrt{\frac{\mu^2}{4 y_{e_j}^2} + \frac{4 m_{\tilde{L}_i}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} - \frac{|\mu|}{2 y_{e_j}}} \quad (4.28)$$

erfüllt, so ist $V_{\text{UFB-3}}$ durch

$$V_{\text{UFB-3}} = \left(m_1^2 - \mu^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 \right) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_{e_j}} \left(m_{\tilde{L}_j}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 \right) |H_u| - \frac{2 (m_{\tilde{L}_i}^2)^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} , \quad (4.29)$$

ansonsten durch

$$V_{\text{UFB-3}} = (m_1^2 - \mu^2) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_{e_j}} \left(m_{\tilde{L}_j}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2 \right) |H_u| + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \left(|H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_{e_j}} |H_u| \right)^2 \quad (4.30)$$

gegeben. In beiden Fällen ergibt die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

$$\boxed{V_{\text{UFB-3}} (Q = \hat{Q}) > V_{\text{real min}} (Q = m_S)} , \quad (4.31)$$

wobei \hat{Q} durch $\hat{Q} \approx \max \left(g_2 |e|, y_t |H_u|, g_2 |\tilde{L}_i|, m_S \right)$ gegeben ist.

Mit den Ersetzungen $\tilde{e} \rightarrow \tilde{d}$, $y_{e_j} \rightarrow y_{d_j}$ und $\tilde{L}_j \rightarrow \tilde{Q}_j$ läßt sich analog zur eben angeführten leptonen dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials die dritte Bedingung für den *down*-Fall ableiten. Für \hat{Q} in diesem Fall $\hat{Q} \approx \max \left(y_t |H_u|, g_3 |d|, g_2 |\tilde{Q}_i|, m_S \right)$.

4.3.4 Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie — Allgemeines

In diesem Abschnitt sollen zuerst die allgemeinen Eigenschaften der Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie (improved CCB-constraints) nach Casas et al. [20] abgeleitet werden. In den folgenden Abschnitten werden diese dann unter den Bezeichnungen erste, zweite und dritte Bedingung weiter konkretisiert.

Ausgehend von einer beliebigen trilinearen Kopplung, in diesem Fall der trilinearen Kopplung des up-Quarks, existieren zwei Richtungen im Potential, die untersucht werden müssen. Es sei hier noch einmal angemerkt, daß Konkretisierungen der abgeleiteten Eigenschaften im Hinblick auf die dritte Familie (siehe auch Abschnitt 2.2), die Gegenstand der Untersuchungen in dieser Arbeit ist, in Kapitel 7.4 durchgeführt werden. In den hier dargestellten Ausführungen werden wie in den Originalarbeiten [20] die Kopplungen und Größen im Zusammenhang mit der leichtesten Familie, dem Upquark, dem Downquark und dem Elektron, zu Grunde gelegt.

Die Richtung (a) wird durch die Definitionen

$$\begin{aligned}
H_u, \tilde{Q}_u, \tilde{u}_R &\neq 0 \\
|d_{L_j}|^2 &= |d_{R_j}|^2 \\
\tilde{d}_{L_j} \tilde{d}_{R_j} &= -\frac{\mu}{y_{d_j}} H_u \\
H_d &= 0 \quad (\text{oder vernachlässigbar}) \\
\tilde{L}_i &\neq 0
\end{aligned} \tag{4.32}$$

charakterisiert, womit folgender Ausdruck

$$\begin{aligned}
V_{(a)} &= y_u^2 \left(|H_u \tilde{u}_R|^2 + |\tilde{Q}_u H_u|^2 + |\tilde{Q}_u \tilde{u}_R|^2 \right) + \text{D-Terme} + \\
&+ m_{\tilde{Q}_u}^2 |\tilde{Q}_u|^2 + m_{\tilde{u}}^2 |\tilde{u}_R|^2 + (m_1^2 - \mu^2) |H_u|^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 |L_i|^2 + \\
&+ \left(a_u \tilde{Q}_u H_u \tilde{u}_R + \text{h.c.} \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

für das Potential¹ entsteht, wobei die Terme im Zusammenhang mit dem Downquark oder Sdown vernachlässigt wurden.

Dementsprechend ist die Richtung (b) durch die Definition

$$\begin{aligned}
H_u, \tilde{Q}_u, \tilde{u}_R, H_d &\neq 0 \\
\tilde{L}_i &\neq 0 \quad (\text{nicht notwendig})
\end{aligned} \tag{4.34}$$

charakterisiert, womit in diesem Fall der Ausdruck

$$\begin{aligned}
V_{(b)} &= y_u^2 \left(|H_u \tilde{u}_R|^2 + |\tilde{Q}_u H_u|^2 + |\tilde{Q}_u \tilde{u}_R|^2 \right) + \left(\mu y_u \tilde{Q}_u \tilde{u}_R H_d^* = \text{h.c.} \right) + \text{D-Terme} + \\
&+ m_{\tilde{Q}_u}^2 |\tilde{Q}_u|^2 + m_{\tilde{u}}^2 |\tilde{u}_R|^2 + m_1^2 |H_u|^2 + m_2^2 |H_d|^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 |\tilde{L}_i|^2 + \\
&+ \left(a_u \tilde{Q}_u H_u \tilde{u}_R + \text{h.c.} \right) + \left(b H_u H_d + \text{h.c.} \right)
\end{aligned} \tag{4.35}$$

¹Noch einmal sei daran erinnert, daß in der Literatur in den Potentialen oft der Ausdruck $a_u y_u$ anstatt der trilinearen Kopplung a_u allein anzutreffen ist. Findet man solch einen Term in einem Potential, so sind dementsprechend modifizierte Renormierungsgruppengleichungen zu verwenden, die letztendlich aber zu den gleichen Ergebnissen führen; siehe dazu zum Beispiel [40].

für das Potential folgt. Wiederum wurden die Terme im Zusammenhang mit dem Downquark beziehungsweise Sdown vernachlässigt.

Im weiteren Verlauf werden die Ausdrücke (4.33) für das Potential in Richtung (a) und (4.35) für das Potential in Richtung (b) umgeschrieben, um die Ableitung, vor allem aber die Anwendung der ersten, zweiten und dritten Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie zu vereinfachen.

Im ersten Schritt werden dazu die Vakuumerwartungswerte einiger Felder durch die von $|H_u|$ ausgedrückt. Man setzt

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_u| &= \alpha |H_u| & |\tilde{u}_R| &= \beta |H_u| \\ |H_d| &= \gamma |H_u| & |\tilde{L}_i| &= \gamma_L |H_u| . \end{aligned} \quad (4.36)$$

Sowohl in der Richtung (a), als auch in der Richtung (b) muß zwischen zwei Fällen, $\text{sign } a_u = -\text{sign } b$ und $\text{sign } a_u = \text{sign } b$, unterschieden werden. Es erweist sich als zweckmäßig, mit der Richtung (b) und dem Fall $\text{sign } a_u = -\text{sign } b$ zu beginnen.

Das Potential (4.35) läßt sich unter Verwendung von (4.36) als

$$\begin{aligned} V &= y_u^2 F(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L) \alpha^2 \beta^2 |H_u|^4 - \\ &- 2 y_u \hat{A} \alpha \beta |H_u|^3 + \\ &+ \hat{m}^2(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L) |H_u|^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

mit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L) = 1 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{f(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L)}{\alpha^2 \beta^2} \quad (4.38)$$

und

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L) &= \frac{1}{y_u^2} \left(\frac{1}{8} g_2^2 (1 - \alpha^2 - \gamma^2 - \gamma_L^2)^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{8} g'^2 \left(1 + \frac{1}{3} \alpha^2 - \frac{4}{3} \beta^2 - \gamma^2 - \gamma_L^2 \right)^2 + \\ &\left. + \frac{1}{6} g_3^2 (\alpha^2 - \beta^2)^2 \right) , \end{aligned} \quad (4.39)$$

sowie

$$\hat{A}(\gamma) = \frac{|a_u|}{y_u} + |\mu| \gamma \quad (4.40)$$

und

$$\hat{m}^2(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L) = m_1^2 + m_{\tilde{Q}_u}^2 \alpha^2 + m_{\tilde{u}}^2 \beta^2 + m_1^2 \gamma^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 \gamma_L^2 - 2 b \gamma . \quad (4.41)$$

schreiben. Minimieren nach H_u bei festgehaltenen α, β, γ und γ_L ergibt zum einen die (unerwünschte) Lösung $H_u = 0$ und zum anderen

$$|H_u|_{\text{ext.}} = |H_u(\alpha, \beta, \gamma, \gamma_L)|_{\text{ext.}} = \frac{3 \hat{A}}{4 y_u \alpha \beta F} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8 \hat{m}^2 F}{9 \hat{A}^2}} \right) , \quad (4.42)$$

wobei die Lösung mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel ein Maximum ergibt. So erhält man für das Potential V_{CCB} in der Richtung (b) den Ausdruck

$$V_{\text{CCB}} = -\frac{1}{2} \alpha \beta |H_u|_{\text{ext.}}^2 \left(\hat{A} y_u |H_u|_{\text{ext.}} - \frac{\hat{m}^2}{\alpha \beta} \right) . \quad (4.43)$$

Die Bedingung ergibt sich nun aus der Forderung der Nichtnegativität von (4.43) zu

$$\left(\frac{|a_u|}{y_u} + |\mu| \gamma \right)^2 \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \left(m_1^2 + \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) \alpha^2 + m_2^2 \gamma^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 \gamma_L^2 - 2 b \gamma \right) \quad (4.44)$$

wobei die Wahl $\alpha = 1$ und $\gamma = \gamma_L = 0$ die traditionelle Bedingung (4.1.2) reproduziert.

Mittels einer analogen Ableitung erhält man für die Richtung (a) den Ausdruck

$$\frac{|a_u|^2}{y_u^2} \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \left(m_1^2 - \mu^2 + \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) \alpha^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 \gamma_L^2 \right) \quad (4.45)$$

für die Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie.

In den nächsten drei Abschnitten werden Konkretisierungen der Richtungen (a) und (b) zur Ableitung der ersten, zweiten und dritten Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie vorgenommen.

4.3.5 Erste Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie

Die erste Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie (CCB-1-constraint) tritt in der Richtung (a) auf, es gilt somit die Bedingung (4.45). Die „stärkste“ Bedingung erhält man, wenn die rechte Seite von (4.45) nach α minimiert wird, wobei $\gamma_L^2 = 1 - \alpha^2$ gelten soll. Damit gelangt man zu folgender Fallunterscheidung:

- Gilt

$$m_1^2 - \mu^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 > 0 \quad \text{und} \quad 3 m_{\tilde{L}_i}^2 - \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) + 2 \left(m_1^2 - \mu^2 \right) > 0, \quad (4.46)$$

so tritt die erste Bedingung für $\alpha = 1$ und $\gamma_L = 0$ auf und man erhält

$$\frac{|a_u|}{y_u} \leq 3 \left(m_1^2 - \mu^2 + m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right). \quad (4.47)$$

- Gilt

$$m_1^2 - \mu^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 > 0 \quad \text{und} \quad 3 m_{\tilde{L}_i}^2 - \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) + 2 \left(m_1^2 - \mu^2 \right) < 0, \quad (4.48)$$

so tritt die erste Bedingung für $\alpha \neq 0$ und $\gamma_L \neq 0$ auf und man erhält

$$\frac{|a_u|}{y_u} \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \left(m_1^2 - \mu^2 + \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) \alpha^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 \left(1 - \alpha^2 \right) \right), \quad (4.49)$$

wobei α^2 und γ_L^2 durch

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{2 \left(m_{\tilde{L}_i}^2 + m_1^2 - \mu^2 \right)}{m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 + m_{\tilde{L}_i}^2}}, \quad \gamma_L^2 = 1 - \alpha^2 \quad (4.50)$$

gegeben sind.

- Gilt

$$m_1^2 - \mu^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 < 0, \quad (4.51)$$

so ist die Bedingung (4.45) automatisch verletzt. Die Minimierung ergibt $\alpha^2 \rightarrow 0$ und (4.45) geht in die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials aus Abschnitt 4.3.3 über.

In seltenen Fällen kann weiterhin

$$3 \left(m_{\tilde{L}_i}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2 \right) + \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) - 2 \left(m_1^2 - \mu^2 \right) \leq 0 \quad (4.52)$$

gelten, wobei die erste Bedingung sich zu

$$\frac{|a_u|}{y_u^2} \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \left(m_1^2 - \mu^2 + \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) \alpha^2 + \left(m_{\tilde{L}_i}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2 \right) (\alpha^2 - 1) \right) \quad (4.53)$$

ergibt. Dieser Fall tritt nur bei sogenannten „*nicht-generalisierenden*“ Ansätzen für die Anfangswerte der beteiligten Größen auf; d.h. die Anfangswerte sind durch einen universellen Anfangswert ähnlich einer Unifizierung gegeben. Aus diesem Grund wird dieser Fall von Casas et al. nicht weiter untersucht; er sollte jedoch bei der Wahl von Anfangswerten, die durch Fixmanigfaltigkeiten gegeben sind, beachtet werden, da diese nicht zwingend „*nicht-generalisierend*“ sind, d.h. verschiedene Anfangswerte haben können. Bei den Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit, in denen nur die dritte Familie betrachtet wird, ist dieser Fall jedoch nicht relevant, da er Dubletts verschiedener Familien enthält.

4.3.6 Zweite Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie

Im Gegensatz zur ersten Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie tritt die zweite Bedingung (CCB-2-constraint) in Richtung (b) auf. Weiterhin gilt $\gamma \neq 0$ und $\text{sign } a_u = -\text{sign } b$. Die Bedingung (4.44) schreibt sich mit $\gamma_L^2 = 1 - \alpha^2 - \gamma^2$ als

$$\left(\frac{|a_u|}{y_u} + |\mu| \gamma \right) \leq \left(1 + \frac{2}{\alpha^2} \right) \left(m_1^2 + \left(m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 \right) \alpha^2 + m_2^2 \gamma^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 (1 - \alpha^2 - \gamma^2) - 2 b \gamma \right). \quad (4.54)$$

Zur Bestimmung des Wertes von α , der die rechte Seite von (4.54) minimiert, ist folgendermaßen vorzugehen: Für alle Werte von $0 \leq \gamma \leq 1$ wird die rechte Seite von (4.54) im Prinzip durch

$$\alpha_{\text{ext.}}^4 = \frac{2 \left(m_1^2 + m_2^2 \gamma^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 (1 - \gamma^2) - 2 b \gamma \right)}{m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 - m_{\tilde{L}_i}^2} \quad (4.55)$$

minimiert. Es sei bemerkt, daß für einen negativen Zähler von (4.55)

$$2 \left(m_1^2 + m_2^2 \gamma^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 (1 - \gamma^2) - 2 b \gamma \right) < 0, \quad (4.56)$$

$\alpha \rightarrow 0$ das Minimum der rechten Seite von (4.54) angibt und man — analog zum letzten Abschnitt — die zweite Bedingung zur Beschränktheit des Potentials aus Abschnitt 4.3.2 erhält.

Gilt $\alpha_{\text{ext.}}^2 < 1 - \gamma^2$, so gibt (4.55) in der Tat das α an, das die rechte Seite von (4.54) minimiert. Ist andernfalls $\alpha_{\text{ext.}}^2 > 1 - \gamma^2$, so können die „D-Terme sich nicht aufheben“ und ein zusätzlicher Vakuumerwartungswert ist nötig, um ein Minimum auszubilden. Man erhält in diesem Fall

$$\alpha_{\text{ext.}}^4 = \frac{2 \left(m_1^2 + m_2^2 \gamma^2 - \left(m_{\tilde{L}_i}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2 \right) (1 - \gamma^2) - 2 b \gamma \right)}{m_{\tilde{Q}_u}^2 + m_{\tilde{u}}^2 + m_{\tilde{L}_i}^2 + m_{\tilde{e}_j}^2}. \quad (4.57)$$

Gilt für das modifizierte α' nun $\alpha'_{\text{ext.}}^2 > 1 - \gamma^2$, so gibt dieses das α an, das die rechte Seite von (4.54) minimiert. Gilt nun jedoch $\alpha'_{\text{ext.}}^2 < 1 - \gamma^2$, so ist

$$\alpha = 1 - \gamma^2 \tag{4.58}$$

(es folgt $\gamma_L = 0$) die optimale Wahl, um die rechte Seite von (4.54) zu minimieren.

4.3.7 Dritte Bedingung zum Erhalt der Ladung- und Farbsymmetrie

Die dritte Bedingung zum Erhalt der Ladung- und Farbsymmetrie (CCB-3-constraint) tritt wie die zweite Bedingung in der Richtung (b) auf, es gilt jedoch $\text{sign } a_u = \text{sign } b$. Die weitere Konkretisierung der Bedingung verläuft dann auch analog zur zweiten Ladungs- und Farbbrech-Bedingung, wobei sich jedoch eines der Vorzeichen von $\{|a_u|, |\mu| \gamma, -2 b \gamma\}$ in (4.54) ändert.

Die beiden ersten Möglichkeiten führen letztendlich zum gleichen Resultat, die linke Seite von (4.54) wird durch

$$\left(\frac{|a_u|}{y_u} + |\mu| \gamma \right) \tag{4.59}$$

gegeben. Die letzte Möglichkeit führt dazu, daß in (4.54), (4.55) und (4.57) der Term $+2 b \gamma$ auftritt. Alles andere bleibt.

Abschließend bleibt zu sagen, daß die weitere Konkretisierung der hier vorgestellten Bedingung, der ersten, zweiten und dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials und der ersten, zweiten und dritten Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie, auf die in dieser Arbeit verwendeten Form in Abschnitt 7.4 vorgenommen wird. Dabei wird vor allem die Reduzierung der Bedingungen auf die dritte Familie und die konkrete Umsetzung in eine berechenbare Form eine Rolle spielen.

Teil II

Vorarbeiten, Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten und Einrichtung des Algorithmus

In diesem Teil der Arbeit erfolgt die Darstellung von Inhalten, Ableitungen und Berechnungen, die den eigentlichen Untersuchungen im Rahmen des Algorithmus vorausgehen.

Dabei handelt es sich in Kapitel 5 um die sogenannten Vorarbeiten, die die Fixierung des Eichsektors im Bereich des Standardmodells und die Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren zum Inhalt haben.

Das Kapitel 6 stellt eines des zentralen Abschnitte dieser Arbeit dar. Es wird die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM unter Berücksichtigung aller drei Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 vorgenommen. Weiterhin findet eine Klassifizierung der berechneten Fixpunkte statt, infolge derer sich die Beschränkung auf die Evolution von zwei Fixpunkten, den low- $\tan\beta$ - und den high- $\tan\beta$ -Fixpunkt, ergibt. Diese wird anhand von physikalischen Argumenten motiviert. Letztendlich wird die Bestimmung der Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution des weich brechenden MSSM aus den berechneten Fixpunkten vorgenommen und die Reduktion der Zahl der freien Parameter auf zwei, den Anfangswert des Higgs-Mischungs-Parameter μ_0 und den Wert der unifizierenden Gaugino-Masse $m_{1/2}$, dargestellt.

In Kapitel 7 wird die Einrichtung des Algorithmus beschrieben. Diese bezieht sich dabei vor allem auf die Konkretisierung der in Teil I vorgestellten Grundlagen und der in Kapitel 5 und 6 durchgeführten Berechnungen. Es werden die einzelnen Teilaspekte des Algorithmus dargestellt und in Zusammenhang gebracht.

Kapitel 5

Vorarbeiten

In diesem Abschnitt wird die Bestimmung der Dynamik der Evolution der Eichkopplungen im Rahmen des Standardmodells vorgenommen. In Abschnitt 5.1 erfolgt die Berechnung der Werte der Eichkopplungen im Bereich des Standardmodells unter Beachtung von *Teilchenzahlschwellen* (thresholds). In Abschnitt 5.2 werden die sogenannten *Massen-Zuwachs-Faktoren* berechnet. Diese finden bei der Berechnung der Massen der Quarks und Leptonen Verwendung. Auch in diesem Fall wird der Einfluß von Teilchenzahlschwellen mit einbezogen.

Die Ableitungen im Fall der Massen-Zuwachs-Faktoren gehen auf [47–49] zurück. Eine analoge Ableitung ist in [10] durchgeführt worden, wobei die hier präsentierte Version einige Modifikationen enthält.

5.1 Fixierung des Eichsektors im Bereich des Standardmodells

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der Werte der Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 im Bereich des Standardmodells durchgeführt.

Diese Werte werden zum Beispiel im folgenden Kapitel 5.2 zur Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren und in Kapitel 7.1 zur Bestimmung der Impulsskalen und Verhältnisse im Eichsektor zur Renormierungsgruppenevolution verwendet. Die in diesem Abschnitt berechneten Werte der Eichkopplungen liegen somit allen im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen zugrunde.

Der Bereich der Gültigkeit des Standardmodells erstreckt sich in dieser Arbeit von der Skala 1 GeV bis hinauf zur Symmetriebrechungsskala m_S . Unterhalb 1 GeV sind einige der betrachteten Kopplungen so groß, daß eine Behandlung im Rahmen der Störungstheorie nicht mehr möglich ist.

Die Berechnung der Werte der Eichkopplungen findet unter Beachtung von sogenannten Teilchenzahlschwellen (thresholds) statt. Damit wird dem Umstand Rechnung getragen, daß ein Teilchen nur oberhalb der Impulsskala seiner Eigenenergie zu den Koeffizienten der Renormierungsgruppengleichungen beitragen kann. Näheres hierzu ist im Kapitel 5.2 zur Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren zu finden.

Der Festsetzung der Teilchenzahlschwellen liegen die in Tabelle angeführten Massen der Quarks und Leptonen zugrunde. Die Massenschranke der leichteren Fermionen m_e, m_u, m_d, m_μ und

$m_e, m_u, m_d, m_\mu, m_s$	m_c	m_τ	m_b	m_{top}^{pole}
1 GeV	1.3 GeV	1.7771 GeV	4.25 GeV	173.9 GeV

Tabelle 5.1: Massen der Quarks und Leptonen zur Festlegung der Massenschranken. Die Massenschranke der leichten Fermionen m_e, m_u, m_d, m_μ und m_s wird auf den gemeinsamen Wert 1 GeV gesetzt, da unterhalb dieser Skala aufgrund zu großer Kopplungen Probleme mit der störungstheoretischen Entwicklung auftreten.

m_s wird dabei zusammenfassend auf 1 GeV gesetzt, da unterhalb 1 GeV der wie oben erwähnt der Bereich der Störungstheorie verlassen wird; vergleiche dazu Tabelle 1.1 zu den Massen der Fermionen.

5.1.1 Berechnung der Werte der Eichkopplungen

Zur Berechnung der Eichkopplungen im Bereich des Standardmodells wird von folgenden experimentellen Vorgaben der Particle Data Group ausgegangen [41]. Die Eichkopplung g_1 der Hyperladung und g_2 des Isospins sind durch

$$g_1^2(m_Z) = 0.2132 \quad \text{und} \quad g_2^2(m_Z) = 0.4237 \quad (5.1)$$

gegeben. Der Wert dieser Kopplungen ergibt sich nach [36] aus dem Wert der Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstanten α_{em}

$$\alpha(m_Z) = \alpha_{em}(m_Z) = \frac{1}{127.9} \quad (5.2)$$

und nach [21] unter Verwendung des schwachen Mischungswinkels θ_W

$$\sin^2 \theta_W = 0.23124 \quad (5.3)$$

aus den Beziehungen

$$g_1^2 = \frac{5}{3} \frac{4\pi \alpha_{em}}{1 - \sin^2 \theta_W} \quad \text{und} \quad g_2^2 = \frac{4\pi \alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W} \quad (5.4)$$

zwischen den Eichkopplungen in den Variablen g_1 und g_2 und α_{em} .

Die Berechnung der Werte der Kopplung α an den durch Tabelle 5.1 gegebenen Teilchenzahlschwellen aus $\alpha(m_Z)$ wird mittels der Renormierungsgruppengleichung (5.9) in Einschleifen-Näherung vorgenommen. Die Tabelle 5.2 zeigt die Ergebnisse dieser Berechnungen.

	$m_{e,\mu,u,d,s}$	m_c	m_τ	m_b	m_{top}^{pole}
α_{em}	0.00746347	0.0074759	0.00749573	0.00756215	0.00787489
$1/\alpha_{em}$	133.986	133.763	133.409	132.237	126.986

Tabelle 5.2: Werte der Sommerfeld'schen Feinstrukturkonstante α_{em} . Die Beziehung zwischen den Eichkopplungen in den Variablen g_1 und g_2 und α_{em} ist durch (5.4) gegeben.

$\alpha_s(m_Z)$	$\alpha_s(m_{e,\mu,u,d,s})$	$\alpha_s(m_c)$	$\alpha_s(m_\tau)$	$\alpha_s(m_b)$	$\alpha_s(m_{top}^{\text{pole}})$
0.113	0.385139	0.325862	0.281165	0.205369	0.103375
0.114	0.399042	0.335321	0.287992	0.208831	0.104207
0.115	0.413847	0.345224	0.295057	0.212353	0.105039
0.116	0.429628	0.35558	0.302363	0.215935	0.105869
0.117	0.446545	0.366455	0.30994	0.21958	0.106698
0.118	0.464721	0.37788	0.317794	0.223289	0.107525
0.119	0.484294	0.389884	0.325935	0.227065	0.108351
0.120	0.505551	0.402578	0.334416	0.23091	0.109176
0.121	0.528624	0.41595	0.34321	0.234824	0.109999
0.122	0.553914	0.430127	0.352377	0.238812	0.110821
0.123	0.581746	0.445168	0.36193	0.242874	0.111642
0.124	0.61257	0.461151	0.371886	0.247015	0.112461
0.125	0.647077	0.478223	0.382297	0.251236	0.113279

Tabelle 5.3: Werte von α_s für verschiedene Skalen, berechnet aus dem in (5.5) gegebenen Anfangswerteintervall für $\alpha_s(m_Z)$ im Bereich von $\alpha_s(m_Z) = 0.113$ bis $\alpha_s(m_Z) = 0.125$.

Zur Berechnung der Werte der Eichkopplungen der starken Wechselwirkung wird ein Intervall von Eingabewerten verwendet. Diese liegen an der Skala der Masse der Z-Bosons vor und sind durch

$$\alpha_s(m_Z) \in \{0.113, 0.114, \dots, 0.124, 0.125\} \longrightarrow \alpha_s(m_Z) = 0.119 \pm 0.006 \quad (5.5)$$

gegeben.

Unter Verwendung der Renormierungsgruppengleichungen (5.19, 5.20) und der Berücksichtigung von Teilchenzahlschwellen lassen sich aus diesen Anfangswerten die Werte von α_s an den in Tabelle 5.1 aufgeführten Skalen berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabelle 5.3 dargestellt.

Zusammenfassend ergibt sich aus den in Tabelle 5.2 und 5.3 dargestellten Werten der Kopplungen α und α_s folgenden Werte der Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 an der Skala m_{top}^{pole} für $\alpha_s(m_Z) = 0.119$

$$g_1^2 = 0.2147, \quad g_2^2 = 0.4171, \quad g_3^2 = 1.3616 \quad (5.6)$$

Zur Berechnung der Werte der Eichkopplungen oberhalb von m_{top}^{pole} werden die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells in Zweischleifen-Näherung [7] verwendet, wobei die Werte in (5.6) als Anfangswerte an der Skala m_{top}^{pole} dienen.

Im nächsten Abschnitt werden die Massen-Zuwachs-Faktoren berechnet. Diese beschreiben die Renormierungsgruppenevolution der Kopplungen der Fermionen, die zur Berechnung der Massen der Fermionen verwendet werden, im Bereich des Standardmodells unterhalb der Skala m_{top}^{pole} unter Berücksichtigung von Teilchenzahlschwellen.

5.2 Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren

In diesem Abschnitt werden die sogenannten Massen-Zuwachs-Faktoren (mass-enhancement-factors) berechnet. Diese ermöglichen die Beschreibung der Dynamik der gesamten Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells unterhalb der Skala $Q = m_{top}^{pole}$.

Die allgemeine Definition des Massenzuwachsfaktors η_f eines Fermions f ist durch

$$\eta_f = \frac{m_f(Q = m_f)}{m_f(Q = m_{top}^{pole})} \quad (5.7)$$

gegeben. Hieraus läßt sich die laufende Masse des Fermions an der Skala der Eigenenergie $m_f(m_f)$ kleiner m_{top}^{pole} in Abhängigkeit von der laufenden Masse der Fermions an der Skala der Pol-Masse des Topquarks $m_f(m_{top}^{pole})$ nach

$$m_f(Q = m_f) = \eta_f m_f(Q = m_{top}^{pole}) \quad (5.8)$$

berechnen. In dem Massenzuwachsfaktor η_f ist demnach die gesamte Dynamik der Renormierungsgruppenevolution innerhalb des Standardmodells unterhalb der Skala m_{top}^{pole} enthalten.

Nach einigen weiteren Betrachtungen zur Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren wird in Abschnitt 5.2.1 die Berechnung des QCD-Anteils (starke Wechselwirkung) und in Abschnitt 5.2.2 die Berechnung des QED-Anteils (elektroschwache Wechselwirkung) der Massen-Zuwachs-Faktoren der einzelnen Fermionen vorgenommen.

Ausgehend von den Renormierungsgruppengleichungen der Feinstrukturkonstante der elektroschwachen Wechselwirkung ($\alpha = \alpha_{em}$) und der Strukturkonstanten der starken Wechselwirkung (α_s)

$$Q \frac{d}{dQ} \alpha = -2 b^{QED} \pi \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2, \quad \text{und} \quad Q \frac{d}{dQ} \alpha_s = -2 b^{QCD} \pi \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2, \quad (5.9)$$

und der Renormierungsgruppengleichung laufenden Masse

$$Q \frac{d}{dQ} m = -\gamma_{QED} m \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) - \gamma_{QCD} m \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right) \quad (5.10)$$

läßt sich leicht zeigen, daß

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{1 + \frac{\alpha_0}{\pi} b^{QED} \ln \frac{Q}{Q_0}} \quad \text{und} \quad \alpha_s = \frac{\alpha_{s_0}}{1 + \frac{\alpha_{s_0}}{\pi} b^{QCD} \ln \frac{Q}{Q_0}}, \quad (5.11)$$

die Renormierungsgruppengleichungen (5.9) löst. Diese Gleichungen lassen sich in folgende Form bringen

$$\alpha_0/\alpha = 1 + \frac{\alpha_0}{\pi} b^{QED} \ln \frac{Q}{Q_0} \quad \text{und} \quad \alpha_{s_0}/\alpha_s = 1 + \frac{\alpha_{s_0}}{\pi} b^{QCD} \ln \frac{Q}{Q_0}. \quad (5.12)$$

Weiterhin kann man zeigen, daß die Renormierungsgruppengleichung (5.10) von

$$m = m_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\pi} b^{QED} \ln \frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{\gamma_{QED}}{b^{QED}}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} b^{QCD} \ln \frac{Q}{Q_0}\right)^{\frac{\gamma_{QCD}}{b^{QCD}}}} \quad (5.13)$$

gelöst wird, welches sich unter Verwendung von (5.12) nach einigen Umformungen als

$$m = m_0 \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QED}}}{b^{\text{QED}}}} \left(\frac{\alpha_s}{\alpha_{s_0}} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QCD}}}{b^{\text{QCD}}}} \quad (5.14)$$

schreiben läßt.

Geht man nun von der Definition der Massen–Zuwachs–Faktoren (5.7) aus, so gelangt man unter Verwendung der Lösung (5.14) zu folgendem Ausdruck für die Massen–Zuwachs–Faktoren.

$$\eta_f = \frac{m_f(Q = m_f)}{m_f(Q = m_{\text{top}}^{\text{pole}})} = \quad (5.15)$$

$$= \frac{m_0 \left(\frac{\alpha(Q=m_f)}{\alpha_0} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QED}}}{b^{\text{QED}}}} \left(\frac{\alpha_s(Q=m_f)}{\alpha_{s_0}} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QCD}}}{b^{\text{QCD}}}}}{m_0 \left(\frac{\alpha(Q=m_{\text{top}}^{\text{pole}})}{\alpha_0} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QED}}}{b^{\text{QED}}}} \left(\frac{\alpha_s(Q=m_{\text{top}}^{\text{pole}})}{\alpha_{s_0}} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QCD}}}{b^{\text{QCD}}}}} = \quad (5.16)$$

$$= \left(\frac{\alpha(Q = m_f)}{\alpha(Q = m_{\text{top}}^{\text{pole}})} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QED}}}{b^{\text{QED}}}} \cdot \left(\frac{\alpha_s(Q = m_f)}{\alpha_s(Q = m_{\text{top}}^{\text{pole}})} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QCD}}}{b^{\text{QCD}}}} = \quad (5.17)$$

$$= \eta_f^{\text{QED}} \cdot \eta_f^{\text{QCD}} \quad (5.18)$$

Hierbei sind zwei Punkte bemerkenswert: Zum einen gilt dieser Ausdruck nur, falls zwischen der Ausgangsskala ($Q = m_f$) und der Skala der Top–Masse ($Q = m_{\text{top}}^{\text{pole}}$) keine Teilchenzahlschwelle liegt, da sämtliche Faktoren b^{QED} , b^{QCD} , γ^{QED} und γ^{QCD} von der Teilchenzahl abhängig sind. Diesem Umstand muß man Rechnung tragen, indem man den Ausdruck (5.7) nur innerhalb einer Teilchenzahlschwelle verwendet. Will man mehrere Schwellen überqueren, was bei den leichten Fermionen zwangsläufig der Fall ist, so muß man (5.7) jeweils von Schwelle zu Schwelle betrachten, die sich ergebenden Massen–Zuwachs–Faktoren auswerten und zu dem resultierenden Gesamt–Massenzuwachsfaktor aufmultiplizieren.

Der andere bemerkenswerte Punkt ist die mögliche Separation des Ausdrucks zur Berechnung der Massen–Zuwachs–Faktoren. Dieser zerfällt in einen Betrag, der vom QED–Anteil gebildet wird und einen Beitrag, der vom QCD–Anteil gebildet wird. Diese lassen sich einzeln berechnen und im Endeffekt zum Gesamt–Massenzuwachsfaktor aufmultiplizieren. Ein Vorteil dieses Umstandes ist die Möglichkeit, den QCD–Anteil im Gegensatz zum QED–Anteil numerisch in Dreischleifen–Näherung zu berechnen, welches im Folgenden durchgeführt wird.

5.2.1 Berechnung des QCD–Anteils

Die Renormierungsgruppengleichung in Dreischleifen–Näherung für die Feinstrukturkonstante der starken Wechselwirkung α_s hat die Form

$$Q \frac{d}{dQ} \alpha_s = -2 \pi \sum_{i=0}^2 b_i^{\text{QCD}} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^{i+2} \quad (5.19)$$

mit b_i^{QCD} gegeben durch

$$b_0^{\text{QCD}} = \frac{1}{4} \left(11 - \frac{2}{3} n_f \right)$$

$$\begin{aligned}
b_1^{\text{QCD}} &= \frac{1}{16} \left(102 - \frac{38}{3} n_f \right) \\
b_2^{\text{QCD}} &= \frac{1}{64} \left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18} n_f + \frac{325}{54} n_f^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

abhängig von der Zahl der Fermionen n_f . In diesem Fall werden nur die Fermionen gezählt, die der starken Wechselwirkung unterliegen. Die Renormierungsgruppengleichung für die laufende Masse eines Fermions in Dreischleifen-Näherung ist durch

$$Q \frac{d}{dQ} m = -2 m \sum_{i=0}^2 \gamma_i^{\text{QCD}} \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^{i+1}, \tag{5.21}$$

die γ_i^{QCD} durch

$$\begin{aligned}
\gamma_0^{\text{QCD}} &= 1 \\
\gamma_1^{\text{QCD}} &= \frac{1}{16} \left(\frac{202}{3} - \frac{20}{9} n_f \right) \\
\gamma_2^{\text{QCD}} &= \frac{1}{64} \left(1249 - \left(\frac{2216}{27} + \frac{160}{3} \zeta(3) \right) n_f - \frac{140}{81} n_f^2 \right)
\end{aligned} \tag{5.22}$$

gegeben, wobei ζ die Riemann-Zeta-Funktion darstellt, die durch $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ für $s > 1$ definiert ist. Diese sind wiederum von der Teilchenzahl abhängig n_f anhängig. Speziell gilt für n_f im Fall der starken Wechselwirkung

$$n_f = n_f(Q) = \begin{cases} 3 & \text{für } Q < m_c \\ 4 & \text{für } m_c \leq Q < m_b \\ 5 & \text{für } m_b \leq Q < m_{top}^{\text{pole}} \\ 6 & \text{für } m_{top}^{\text{pole}} \leq Q \end{cases}. \tag{5.23}$$

Die Renormierungsgruppengleichungen (5.19) und (5.21) werden zur Berechnung der Massen-Zuwachs-Faktoren nach

$$\eta_f^{\text{QCD}} = \frac{m_f(Q = m_f)}{m_f(Q = m_{top}^{\text{pole}})} \tag{5.24}$$

für die einzelnen Fermionen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, numerisch integriert, wobei nur der QCD-Anteil des Massenzuwachses betrachtet wird.

Ferner werden die Rechnungen für verschiedene Werte von $\alpha_s(m_Z)$ durchgeführt, um eine Einschätzung des Einflusses der Änderung der Kopplung der starken Wechselwirkung vornehmen zu können. Das untersuchte Intervall erstreckt sich von $\alpha_s(m_Z) = 0.113$ bis $\alpha_s(m_Z) = 0.125$ in Schritten von 0.001

$$\alpha_s \in \{0.113, 0.114, \dots, 0.124, 0.125\} \tag{5.25}$$

und entspricht somit einem Wert von

$$\alpha_s(m_Z) = 0.119 \pm 0.006. \tag{5.26}$$

Die Ergebnisse der numerischen Integration für verschiedene Werte von $\alpha_s(m_Z)$ sind in Tabelle 5.4 dargestellt. Die Abbildung 5.1 zeigt darüberhinaus die Variation der Massen-Zuwachs-Faktoren mit $\alpha_s(m_Z)$.

$\alpha_s(m_Z)$	u	d	s	c	b
0.113	2.13163	2.13163	2.33782	1.94098	1.48964
0.114	2.17049	2.17049	2.3804	1.96743	1.49802
0.115	2.21186	2.21186	2.42564	1.9951	1.50654
0.116	2.25594	2.25594	2.47375	2.02407	1.51522
0.117	2.30319	2.30319	2.5252	2.0545	1.52406
0.118	2.35395	2.35395	2.58037	2.08648	1.53306
0.119	2.40867	2.40867	2.63968	2.12011	1.54223
0.12	2.46811	2.46811	2.70398	2.1557	1.55158
0.121	2.53272	2.53272	2.77374	2.19324	1.5611
0.122	2.60361	2.60361	2.85015	2.2331	1.57081
0.123	2.68177	2.68177	2.9342	2.27545	1.58071
0.124	2.76856	2.76856	3.02733	2.32053	1.59082
0.125	2.86605	2.86605	3.13176	2.3688	1.60113

Tabelle 5.4: Werte von η^{QCD} berechnet für das durch (5.5) gegebenen Anfangswerteintervall für $\alpha_s(m_Z)$ im Bereich von $\alpha_s(m_Z) = 0.113$ bis $\alpha_s(m_Z) = 0.125$.

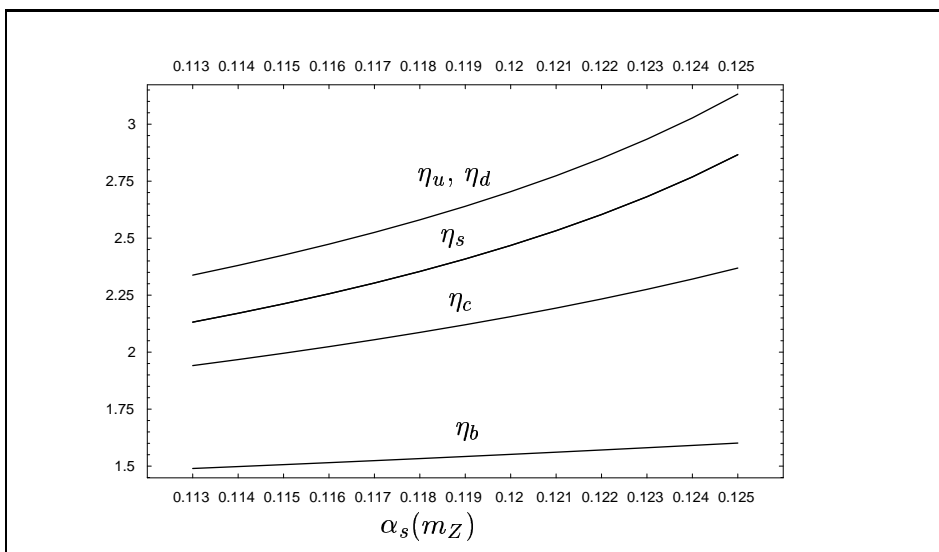


Abbildung 5.1: Variation des QCD-Anteils der Massen-Zuwachs-Faktoren η_f^{QCD} in Abhängigkeit von $\alpha_s(m_Z)$. Der Wert von $\alpha_s(m_Z)$ variiert im Bereich von 0.113 bis 0.125, welches einem Wert vom 0.119 ± 0.006 entspricht.

5.2.2 Berechnung des QED-Anteils

In diesem Abschnitt wird der QED-Anteil der Massen-Zuwachs-Faktoren η_f^{QED} in Einschleifen-Näherung berechnet. Diese Verringerung der Genauigkeit in der Berechnung gegenüber den QCD-Anteilen, die in Dreischleifen-Näherung berechnet wurden, läßt sich *a posteriori* durch die Größenordnung des Massenzuwachses rechtfertigen, der im Mittel bei einem bis zwei Prozent gegenüber bis zu $\approx 280\%$ im Fall der QCD-Anteile liegt.

Weiterhin läßt sich so direkt die analytische Lösung der Renormierungsgruppengleichungen (5.9) und (5.10) und der sich daraus ergebende Ausdruck für den QED-Anteil des Massenzuwachsfaktors

$$\eta_f^{\text{QED}} = \left(\frac{\alpha(Q = m_f)}{\alpha(Q = m_{top}^{\text{pole}})} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QED}}}{b^{\text{QED}}}} \quad (5.27)$$

verwenden. Wie einleitend angesprochen sind die Faktoren b^{QED} und γ^{QED} teilchenzahlabhängig, wobei in diesem Fall im Vergleich zum QCD-Anteil alle in Frage kommenden Fermionen mit einbezogen werden, da sie alle der elektroschwachen Wechselwirkung unterliegen.

Allgemein ist der Faktor b^{QED} durch

$$b^{\text{QED}} = b^{\text{QED}}(n_{f_u}, n_{f_d}, n_{f_e}) = 3(n_{f_u} Q_u^2 + n_{f_d} Q_d^2) + n_{f_e} Q_e^2 \quad (5.28)$$

gegeben, wobei n_{f_u} , n_{f_d} und n_{f_e} die Anzahl der up-type Quarks, der down-type Quarks und der Leptonen an der fraglichen Skala angeben und Q_u , Q_d und Q_e die dementsprechenden elektrischen Ladungen der Fermionen darstellen.

$$Q_u = 2/3, \quad Q_d = -1/3, \quad Q_e = -1 \quad (5.29)$$

Der folgende Ausdruck gibt den Faktor b^{QED} als Funktion der Impulsskala Q unter Annahme der dieser Arbeit zugrundeliegenden Massen der Fermionen wieder.

$$\beta^{\text{QED}} = \beta^{\text{QED}}(Q) = \begin{cases} 3(Q_u^2 + 2Q_d^2) + 2Q_e^2 & \text{für } Q < m_c \\ 3(2Q_u^2 + 2Q_d^2) + 2Q_e^2 & \text{für } m_c \leq Q < m_\tau \\ 3(2Q_u^2 + 2Q_d^2) + 3Q_e^2 & \text{für } m_\tau \leq Q < m_b \\ 3(2Q_u^2 + 3Q_d^2) + 3Q_e^2 & \text{für } m_b \leq Q < m_{top}^{\text{pole}} \\ 3(3Q_u^2 + 3Q_d^2) + 3Q_e^2 & \text{für } m_{top}^{\text{pole}} \leq Q \end{cases} \quad (5.30)$$

Der ebenfalls von der Teilchenzahl abhängende Faktor γ^{QED} ist durch

$$\gamma^{\text{QED}}(f) = 3Q_f^2 \quad (5.31)$$

mit

$$Q_f = \begin{cases} -1 & \text{für } f = e \\ -1 & \text{für } f = \mu \\ 2/3 & \text{für } f = u \\ -1/3 & \text{für } f = d \\ -1/3 & \text{für } f = s \\ 2/3 & \text{für } f = c \\ -1 & \text{für } f = \tau \\ -1/3 & \text{für } f = b \\ 2/3 & \text{für } f = t \end{cases} \quad (5.32)$$

gegeben. Die Massen–Zuwachs–Faktoren lassen sich nun direkt unter Verwendung des in (5.27) gegebenen Ausdrucks berechnen, wobei ein eventuell anstehendes Überspringen einer Massenskala besonders in Betracht gezogen werden muß, da sich die Faktoren b^{QED} und γ^{QED} an der Schwelle ändern.

So ergibt sich für den Massenzuwachsfaktor des Bottomquarks, bei dessen Berechnung keine Schwelle beachtet werden muß

$$\eta_b^{\text{QED}} = \left(\frac{\alpha(Q = m_{\text{top}}^{\text{pole}})}{\alpha(Q = m_b)} \right)^{-\frac{\gamma^{\text{QED}}(b)}{\beta^{\text{QED}}(Q=m_b)}}, \quad (5.33)$$

für den Massenzuwachsfaktor des τ -Leptons, bei dessen Berechnung eine Schwelle übersprungen werden muß

$$\eta_\tau^{\text{QED}} = \left(\frac{\alpha(Q = m_b)}{\alpha(Q = m_\tau)} \right)^{-\frac{\gamma^{\text{QED}}(\tau)}{\beta^{\text{QED}}(Q=m_\tau)}} \cdot \left(\frac{\alpha(Q = m_{\text{top}}^{\text{pole}})}{\alpha(Q = m_b)} \right)^{-\frac{\gamma^{\text{QED}}(\tau)}{\beta^{\text{QED}}(Q=m_b)}} \quad (5.34)$$

und allgemein

$$\eta_f^{\text{QED}} = \prod_{i=f}^8 \left(\frac{\alpha(Q = m_{i+1})}{\alpha(Q = m_i)} \right)^{\frac{\gamma^{\text{QED}}(f)}{\beta^{\text{QED}}(Q=m_i)}} \quad (5.35)$$

wobei die folgende Zuordnung getroffen wird:

$$\begin{aligned} f = 1 &\leftrightarrow e & f = 2 &\leftrightarrow \mu & f = 3 &\leftrightarrow u \\ f = 4 &\leftrightarrow d & f = 5 &\leftrightarrow s & f = 6 &\leftrightarrow c \\ f = 7 &\leftrightarrow \tau & f = 8 &\leftrightarrow b & f = 9 &\leftrightarrow t \end{aligned} \quad (5.36)$$

Die Tabelle 5.5 zeigt die sich ergebenden Werte für die verschiedenen Fermionen. Wie erwartet braucht in diesem Fall im Gegensatz zum QCD–Anteil keine Variation mit $\alpha_s(m_Z)$ betrachtet zu werden, da die QED–Evolution nicht von der QCD–Evolution abhängt und somit nicht von der Variation von $\alpha_s(m_Z)$ abhängt.

e	μ	u	d	s	c	τ	b
1.01562	1.01562	1.00691	1.00172	1.00172	1.008	1.01695	1.00152

Tabelle 5.5: QED-Anteil der Massen-Zuwachs-Faktoren η_f^{QED} .

5.2.3 Zusammenfassung der QCD- und QED-Anteile

Die Massen-Zuwachs-Faktoren η_f ergeben sich nach

$$\eta_f = \eta_f^{\text{QED}} \cdot \eta_f^{\text{QCD}} \quad (5.37)$$

als Produkt des QED- und des QCD-Anteils. Die Tabelle 5.6 zeigt die berechneten Massen-Zuwachs-Faktoren für die entsprechenden variierten Werte von $\alpha_s(m_Z)$. Aus den schon im letzten Abschnitt angeführten Gründen variieren die Werte der Massen-Zuwachs-Faktoren der Leptonen nicht mit $\alpha_s(m_Z)$, da diese nicht der starken Wechselwirkung unterliegen.

$\alpha_s(m_Z)$	e	μ	u	d	s	c	τ	b
0.113	1.01562	1.01562	2.14637	2.13531	2.34185	1.95651	1.01695	1.49191
0.114	1.01562	1.01562	2.18549	2.17423	2.3845	1.98317	1.01695	1.50029
0.115	1.01562	1.01562	2.22715	2.21567	2.42983	2.01106	1.01695	1.50883
0.116	1.01562	1.01562	2.27153	2.25983	2.47802	2.04027	1.01695	1.51752
0.117	1.01562	1.01562	2.31911	2.30716	2.52955	2.07093	1.01695	1.52638
0.118	1.01562	1.01562	2.37023	2.35801	2.58482	2.10317	1.01695	1.53539
0.119	1.01562	1.01562	2.42533	2.41282	2.64423	2.13707	1.01695	1.54458
0.120	1.01562	1.01562	2.48517	2.47236	2.70864	2.17295	1.01695	1.55394
0.121	1.01562	1.01562	2.55023	2.53708	2.77853	2.21078	1.01695	1.56347
0.122	1.01562	1.01562	2.62161	2.6081	2.85506	2.25096	1.01695	1.5732
0.123	1.01562	1.01562	2.70031	2.68639	2.93926	2.29365	1.01695	1.58312
0.124	1.01562	1.01562	2.7877	2.77333	3.03255	2.33909	1.01695	1.59324
0.125	1.01562	1.01562	2.88587	2.87099	3.13716	2.38775	1.01695	1.60356

Tabelle 5.6: Das Produkt des QED- und QCD-Anteils der Massen-Zuwachs-Faktoren $\eta_f = \eta_f^{\text{QED}} \cdot \eta_f^{\text{QCD}}$ für das durch (5.5) gegebenen Anfangswerteintervall für $\alpha_s(m_Z)$ im Bereich von $\alpha_s(m_Z) = 0.113$ bis $\alpha_s(m_Z) = 0.125$.

Wie schon in Abschnitt 5.1 angesprochen, werden die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit für einen Wert von $\alpha_s(m_Z) = 0.119$ durchgeführt. Weiterhin sind nur die Fermionen der dritten Familie Gegenstand der Betrachtungen. Die aus Tabelle 5.6 zu entnehmenden Werte sind in diesem Fall durch

$$\eta_\tau = 1.01695 \quad \text{und} \quad \eta_b = 1.54458 \quad (5.38)$$

gegeben, wobei nach (5.7) $\eta_t = 1$ gilt. Diese fixieren zusammen mit den Werten der Eichkoppelungen an der Skala m_{top}^{pole} für $\alpha_s(m_Z) = 0.119$

$$g_1^2 = 0.2147, \quad g_2^2 = 0.4171, \quad g_3^2 = 1.3616 \quad (5.39)$$

die gesamte Dynamik der Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells von 1 GeV bis zur Skala m_{top}^{pole} .

Zur Erinnerung sei weiterhin noch einmal darauf hingewiesen, daß die mögliche Evolution oberhalb der Skala m_{top}^{pole} unter Verwendung der vollständigen Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells in Zweischleifen-Näherung stattfindet. Oberhalb der Skala m_{top}^{pole} sind alle Quarks und Leptonen vorhanden und die Renormierungsgruppenevolution findet ohne Einfluß von Teilchenmassenschwellen statt.

Kapitel 6

Die Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden minimal supersymmetrischen Standardmodells

Nachdem in Kapitel 3 die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten für Systeme mit einer oder mehreren Yukawa-Kopplungen dargestellt wurde, wird in diesem Abschnitt die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten für das im Rahmen dieser Arbeit untersuchte weich brechende minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM) vorgenommen.

Dieser Abschnitt ist als einer der zentralen Teile der Arbeit zu bezeichnen, da die Untersuchungen im Rahmen der Arbeit zum Ziel haben, die Fixmannigfaltigkeiten des betrachteten Modells und die aus den Fixmannigfaltigkeiten ableitbaren Vorhersagen für verschiedene physikalische Größen des Modells zu berechnen. Die Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten stellt also gleichsam Ziel und Voraussetzung zur Durchführung der weiteren Berechnungen dar.

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß sich die Berechnung und Untersuchung der Fixmannigfaltigkeiten im Rahmen dieser Arbeit von den bisher in der Literatur unternommenen Ableitungen [14] vor allem dadurch unterscheidet, daß eine exakte Behandlung aller drei Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 vorgenommen wird, siehe Abschnitt 3.3.3. In der Literatur ist es üblich, die Eichkopplungen der elektroschwachen Wechselwirkung g_1 und g_2 gegenüber der Eichkopplung der starken Wechselwirkung g_3 zu vernachlässigen und sogenannte *Quasi-Fixpunkte* zu betrachten. Diese entsprechen dem in Abschnitt 3.3.2 eingeführten Hill-Bound [1] und stellen keine exakten Fixmannigfaltigkeiten im eigentlichen Sinne [37] dar. Die bisherigen Untersuchungen in der Literatur können also bestenfalls als exploratorische Vorarbeiten bezeichnet werden. In [7–11] wird auf die Implikationen und die Bedeutung einer korrekten Behandlung aller drei Eichkopplungen eingegangen.

In Abschnitt 6.1 wird die Berechnung der Fixpunkte in den Polstellen von g_3 , der Eichkopplung der starken Wechselwirkung, und g_1 , der Eichkopplung der Hyperladung, durchgeführt. In Abschnitt 6.2 wird auf die Bestimmung der Fixlinien, die die Fixpunkte in den Polstellen verbinden, durchgeführt. In diesem Zusammenhang soll noch einmal zur Verdeutlichung auf folgenden Umstand eingegangen werden: Die erwähnten Polstellen der Eichkopplungen ergeben den mathematischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution, das heißt, die mathematische Anwendbarkeit der Renormierungsgruppengleichungen ist für alle Skalen von der Polstelle von g_3 unterhalb der IR-Skala bis zur Polstelle von g_1 oberhalb der UV-Skala gegeben. Der physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen ist jedoch durch die IR-Skala, die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung $Q = v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV, und die

UV-Skala, beziehungsweise die GUT-Skala, $Q \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV gegeben. Im mathematischen Grenzwerten der Polstellen lassen sich unter Vernachlässigung der jeweils anderen Eichkopplungen Fixmannigfaltigkeiten beziehungsweise Fixpunkte der reduzierten Systeme berechnen. Diese Fixpunkte werden unter der Renormierungsgruppenevolution des vollständigen Systems, in Anwesenheit aller drei Eichkopplungen, durch Fixlinien verbunden. Da der mathematische Bereich der Renormierungsgruppenevolution den physikalischen Bereich einschließt, legt die Lage der Fixmannigfaltigkeiten im gesamten mathematischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution, die durch die Randbedingungen in den unphysikalischen Polstellen festgelegt wird, somit auch die Fixmannigfaltigkeiten beziehungsweise Fixlinien im physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution fest. Im nächsten Schritt lassen sich die Werte der durch die Renormierungsgruppengleichungen beschriebenen Parameter beziehungsweise Kopplungen an einer beliebigen Skala innerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereiches aus den Fixlinien durch Auswertung an eben jener Skala bestimmen. Ihre Werte an einer physikalischen Skala sind somit durch die Fixlinien und folgerichtig durch die Fixmannigfaltigkeiten in den unphysikalischen Grenzwerten der Polstellen der Eichkopplungen festgelegt.

Anschließend werden in Abschnitt 6.3 die Attraktivitätsverhältnisse der Fixpunkte berechnet und auf ihnen beruhend eine Klassifizierung der Fixpunkte vorgenommen, die zur Auswahl der, im Rahmen dieser Arbeit näher untersuchten Evolution der beiden Fixpunkte, den high- $\tan\beta$ - und den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt, führt. In Abschnitt 6.4 wird die Bestimmung der Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution im physikalischen Bereich, durch Auswertung der oben angesprochenen Fixlinien an der UV-Skala in Abhängigkeit von den beiden verbleibenden freien Parametern, dem Higgs-Mischungs-Parameter μ_0 und der unifizierenden Gaugino-Masse $m_{1/2}$, vorgenommen.

Es sollen hier einleitend noch einmal kurz die Annahmen, Grundbedingungen und Zielsetzungen, auf denen die Ableitung der Fixmannigfaltigkeiten und die weiteren Untersuchungen beruhen, angegeben werden.

- Gegenstand ist das weich brechende minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM).
- Die Betrachtung beschränkt sich auf die Fermionen der dritten Familie (top, bottom, tau) und die mit ihnen in Zusammenhang stehenden in Abbildung 6.1 aufgeführten Kopplungen und Größen.
- Das Modell beinhaltet die namensgebenden weich brechenden Terme, die für eine implizite Brechung der Supersymmetrie und für Massenterme der Superpartner verantwortlich sind. Diese sind die Gaugino-Massen $M_{1,2,3}$, die trilinearen Kopplungen $a_{t,b,\tau}$, der Higgs-Mischungsparameter des weich brechenden Sektors b und die skalaren Massenquadrate $m_{\phi_\alpha}^2$ mit $\phi_\alpha = \tilde{Q}, \tilde{L}, \tilde{t}, \tilde{b}, \tilde{\tau}$.
- Das Modell enthält zwei Higgs-Dubletts und nach der Brechung der elektroschwachen Symmetrie fünf massive Freiheitsgrade im Higgs-Sektor.
- In einem ersten Schritt werden die Fixmannigfaltigkeiten in den Polstellen von g_3 ($g_3 \rightarrow \infty, g_3 \gg g_{1,2}$) und g_1 ($g_1 \rightarrow \infty, g_1 \gg g_{2,3}$) bestimmt. Im nächsten Schritt werden die höherdimensionalen Fixmannigfaltigkeiten (hier Fixlinien), die in Anwesenheit aller drei Eichkopplungen die Fixpunkte in den den Polstellen der Eichkopplungen verbinden, bestimmt.
- Durch die berechneten Fixpunkte und Fixlinien ist man in der Lage, die Anzahl der Parameter des betrachteten Modells drastisch zu reduzieren. Letztendlich werden die gesamte

Renormierungsgruppenevolution und sämtliche Vorhersagen durch den Eichsektor und zwei verbleibende freie Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ bestimmt.

- Bei den detaillierten Untersuchungen hinsichtlich der Bedingungen und Vorhersagen für verschiedene Größen und Parameter wird eine Beschränkung auf die Evolution von zwei Fixpunkten, den high- $\tan\beta$ - und den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt, vorgenommen, da diese als einzige in der Lage sind, physikalisch sinnvolle Kombinationen für verschwindende und nicht-verschwindende Massen im Yukawa-Sektor zu liefern.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst die Berechnung der Fixpunkte in den Polstellen von g_3 und g_1 und in Abschnitt 6.2 die Bestimmung der Fixlinien, vorgenommen. Im darauf folgenden Abschnitt wird die Betrachtung der Attraktivitätsverhältnisse der Fixpunkte, die Klassifizierung der Fixpunkte und die genauere Betrachtung der Evolution des high- $\tan\beta$ - und des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes vorgenommen.

6.1 Die Berechnung der Fixpunkte

Wie in Abschnitt 3.3 beziehungsweise 3.3.5 dargestellt, wird die Berechnung der Fixpunkte mit den Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in Einschleifen-Näherung vorgenommen. Die numerische Integration und Berechnung der Ergebnisse und Vorhersagen wird hingegen in Zweischleifen-Näherung durchgeführt.

Die Tabelle 6.1 zeigt die im weich brechenden MSSM zur Berechnung der Fixpunkte betrachteten Kopplungen und Massenparameter. Die entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen in Einschleifen-Näherung sind in Abschnitt 3.2 in den Gleichungen (3.20) bis (3.36) abgebildet. Sie lassen sich aus den Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung [40] durch Vernachlässigung des Zweischleifen-Niveaus ableiten. Seien x_1 bis x_{21} die in Tabelle 6.1 aufgeführten Kopplungen beziehungsweise Massenparameter, dann lassen sich die entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen formal als

$$16\pi^2 Q \frac{d}{dQ} x_i = \mathcal{F}_{x_i}(x_1, \dots, x_{21}) \quad (6.1)$$

darstellen, wobei \mathcal{F}_{x_i} im allgemeinen eine Funktion aller Kopplungen x_j ist. Die Impulsskala Q wird durch die logarithmische Impulsskala $t = \log(Q/Q_0)$ ersetzt, man erhält

$$16\pi^2 \frac{d}{dt} x_i = \mathcal{F}_{x_i}(x_1, \dots, x_{21}) \quad (6.2)$$

Bei näherer Betrachtung der Kopplungsverhältnisse im Sinne eines gekoppelten Differentialgleichungssystems stellt man fest, daß in Einschleifen-Näherung eine *triangulare Kopplungsstruktur* innerhalb der betrachteten Renormierungsgruppengleichungen besteht. Die Tabelle 6.2 zeigt zur Verdeutlichung die Kopplungsstruktur der Renormierungsgruppengleichungen. Dabei stellt ein Eintrag in einer Reihe (*) ein Auftreten einer Kopplung in der entsprechenden Renormierungsgruppengleichung dar. So hängt die Renormierungsgruppengleichung des Parameters μ (fünfte Reihe) von den Eichkopplungen g_i , den Yukawa-Kopplungen y_f und μ selbst ab. Solch eine triangulare Kopplungsstruktur der Renormierungsgruppengleichungen kann zum einen bei der Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten, als auch bei der analytischen Lösung der Renormierungsgruppengleichungen hilfreich sein. In beiden Fällen kann man bei Untersystemen wie zum Beispiel Eich- und Yukawa-Kopplungen anfangen, eine Lösung zu berechnen und zum

g_3, g_2, g_1	Eichkopplungen der Eichgruppe $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ des weich brechenden MSSM
M_3, M_2, M_1	Gaugino–Massen zu den entsprechenden Eichgruppen beziehungsweise Eichwechselwirkungen (weich brechender Sektor)
y_t, y_b, y_τ	Yukawa–Kopplungen der Fermionen der dritten Familie, also des Topquarks des Bottomquarks und des Tauleptons (Superpotential)
a_t, a_b, a_τ	Trilineare Kopplungen (weich brechender Sektor)
μ, b	Higgs–Mischungs–Parameter; $\mu \rightarrow$ Superpotential, $b \rightarrow$ weich brechender Sektor
$m_{H_u}^2, m_{H_d}^2$	Higgs–Massenparameter (weich brechender Sektor)
$m_Q^2, m_L^2, m_t^2, m_b^2, m_\tau^2$	skalare Massenquadrate (weich brechender Sektor)

Tabelle 6.1: Die Kopplungen im weich brechenden MSSM. Die Yukawa–Kopplungen, die trilinearen Kopplungen und die skalaren Massenquadrate sind dabei auf die Teilchen der dritten Familie des Standardmodells und die mit ihnen in Verbindung stehenden Kopplungen beschränkt. In den Klammern ist abzulesen, in welchem Teil der Lagrangedichte, siehe Abschnitt 2.1, die entsprechende Kopplung auftritt.

	g_i	y_f	M_i	a_f	μ	b	$m_{H_{u,d}}^2$	m_ϕ^2
g_i	*							
y_f	*	*						
M_i	*		*					
a_f	*	*	*	*				
μ	*	*			*			
b	*	*	*	*	*	*		
$m_{H_{u,d}}^2$	*	*	*	*			*	*
m_ϕ^2	*	*	*	*			*	*

Tabelle 6.2: Triangulare Kopplungsstruktur im weich brechenden MSSM. Es ist gut zu erkennen, daß das Eich–Yukawa–System ein eigenständiges Untersystem innerhalb des vollständigen weich brechenden MSSM bildet. Das gleiche gilt für das Yukawa–Eichkopplungs– μ –System und für ein System, daß alle Kopplungen bis auf die skalaren Massenquadrate beinhaltet. Als Folge der triangularen Kopplungsstruktur „triggern“ die Fixmannigfaltigkeiten der Untersysteme (Eich–Yukawa) die Fixmannigfaltigkeiten der größeren Systeme. Das vollständige System besitzt nur dann eine Fixmannigfaltigkeit, wenn dies für das Untersystem auch zutrifft. Die Struktur im Sinne der Verteilung der Fixmannigfaltigkeiten wird durch das „kleinste“ nicht–triviale System vorgegeben. In diesem Fall ist dies das Eich–Yukawa–System.

nächst größeren System übergehen, das die vorher berechnete Lösung enthält. So kann das gesamte System sukzessive gelöst werden.

<i>Fixpunkt:</i>	$g_1 \rightarrow \infty$ $g_1 \gg g_{2,3}$							$g_3 \rightarrow \infty$ $g_3 \gg g_{1,2}$		
	LTB	HTB					LTB	HTB		
<i>Verhältnis</i>	↓	↓					↓	↓		
$\rho_y^t = \frac{y_t^2}{g_1^2 + g_3^2}$	$\frac{56}{45}$	$\frac{566}{525}$	$\frac{1027}{915}$	$\frac{56}{45}$	0	0	0	$\frac{7}{18}$	0	$\frac{1}{3}$
$\rho_y^b = \frac{y_b^2}{g_1^2 + g_3^2}$	0	$\frac{524}{525}$	$\frac{134}{183}$	0	$\frac{298}{315}$	$\frac{53}{45}$	0	0	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$
$\rho_y^\tau = \frac{y_\tau^2}{g_1^2 + g_3^2}$	0	0	$\frac{473}{305}$	$\frac{21}{10}$	$\frac{146}{105}$	0	$\frac{21}{10}$	0	0	0
$\rho_a^t = \frac{a_t}{y_t} \frac{1}{M_1 + M_3}$	-1	-1	-1	-1	$-\frac{25}{2079}$	$-\frac{14}{297}$	$\frac{13}{99}$	-1	$-\frac{89}{54}$	-1
$\rho_a^b = \frac{a_b}{y_b} \frac{1}{M_1 + M_3}$	$-\frac{35}{297}$	-1	-1	$-\frac{259}{594}$	-1	-1	$-\frac{49}{198}$	$-\frac{89}{54}$	-1	-1
$\rho_a^\tau = \frac{a_\tau}{y_\tau} \frac{1}{M_1 + M_3}$	$\frac{3}{11}$	$-\frac{19}{105}$	-1	-1	-1	$-\frac{26}{99}$	-1	0	$\frac{7}{18}$	$\frac{1}{3}$
$\rho_b = \frac{b}{\mu} \frac{1}{M_1 + M_3}$	$-\frac{47}{99}$	$-\frac{197}{231}$	$-\frac{1987}{2013}$	$-\frac{157}{198}$	$-\frac{127}{231}$	$-\frac{4}{9}$	$-\frac{5}{22}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{3}$
$\rho_{H_u} = \frac{m_{H_u}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$\frac{103}{198}$	$\frac{1027}{2310}$	$\frac{1871}{4026}$	$\frac{103}{198}$	$-\frac{1}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$-\frac{7}{18}$	0	$-\frac{1}{3}$
$\rho_{H_d} = \frac{m_{H_d}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{943}{2310}$	$\frac{701}{1342}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{25}{42}$	$\frac{97}{198}$	$\frac{3}{11}$	0	$-\frac{7}{18}$	$-\frac{1}{3}$
$\rho_{\tilde{Q}} = \frac{m_{\tilde{Q}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$\frac{109}{594}$	$\frac{13}{42}$	$\frac{101}{366}$	$\frac{109}{594}$	$\frac{575}{4158}$	$\frac{103}{594}$	$-\frac{1}{198}$	$\frac{41}{54}$	$\frac{41}{54}$	$\frac{2}{3}$
$\rho_{\tilde{L}} = \frac{m_{\tilde{Q}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$-\frac{1}{22}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{763}{4026}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{229}{1386}$	$-\frac{1}{22}$	$\frac{3}{11}$	0	0	0
$\rho_{\tilde{t}} = \frac{m_{\tilde{Q}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{284}{1155}$	$\frac{174}{671}$	$\frac{8}{27}$	$-\frac{8}{99}$	$-\frac{8}{99}$	$-\frac{8}{99}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$
$\rho_{\tilde{b}} = \frac{m_{\tilde{Q}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$-\frac{2}{99}$	$\frac{326}{1155}$	$\frac{406}{2013}$	$-\frac{2}{99}$	$\frac{554}{2079}$	$\frac{100}{297}$	$-\frac{2}{99}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{2}{3}$
$\rho_{\tilde{\tau}} = \frac{m_{\tilde{Q}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{580}{2013}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{166}{693}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	0	0	0
								↑	↑	

Tabelle 6.3: Die Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen der durch 6.3 gegebenen Verhältnisse der Kopplungen des weich brechenden MSSM. Die low-tan β - und high-tan β -Fixpunkte sind sowohl im UV-Bereich als auch im IR-Bereich mit LTB beziehungsweise HTB gekennzeichnet. In der Polstelle von g_3 , der Eichkopplung der starken Wechselwirkung, unterhalb der IR-Skala gilt $g_3 \rightarrow \infty$ und somit $g_3 \gg g_{1,2}$. In der Polstelle von g_1 , der Eichkopplung der Hyperladung, jenseits der IR-Skala gilt $g_1 \rightarrow \infty$ und somit $g_1 \gg g_{2,3}$. Die Pfeile im unteren Bereich der Tabelle verdeutlichen den Renormierungsgruppenfluß. So endet die Evolution des high-tan β -Fixpunktes aus der Polstelle von g_1 jenseits des UV-Bereiches im high-tan β -Fixpunkt in der Polstelle von g_3 unterhalb der IR-Skala. Entsprechendes gilt für den low-tan β -Fixpunkt.

Zur Berechnung der Fixpunkte in den Polstellen der Eichkopplungen g_3 , der starken Wechselwirkung, unterhalb der IR-Skala und g_1 , der Wechselwirkung der Hyperladung, jenseits der UV-Skala werden die Renormierungsgruppengleichungen (6.2) auf geeignete Verhältnisse der jeweiligen Kopplungen transformiert

$$\begin{aligned}
M_i &\rightarrow M'_i = \frac{M_i}{g_i^2} & y_f &\rightarrow \rho_y^f = \frac{y_f^2}{g_1^2 + g_3^2} \\
a_f &\rightarrow \rho_a^f = \frac{a_f}{y_f} \frac{1}{M_1 + M_3} & \mu &\rightarrow \rho_\mu = \frac{\mu}{y_t^2 + y_b^2 + y_\tau^2}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$b \rightarrow \rho_b = \frac{b}{\mu} \frac{1}{M_1 + M_3} \quad m_\phi^2 \rightarrow \rho_{\tilde{\phi}} = \frac{m_\phi^2}{M_1^2 + M_3^2} .$$

Die Transformation der Eichkopplungen ist durch die *Transformation auf Integrale* (3.48) gegeben. Durch Ausführen der formalen Grenzwerte $g_3 \rightarrow \infty$, $g_3 \gg g_{1,2}$ in der Polstelle von g_3 und $g_1 \rightarrow \infty$, $g_1 \gg g_{2,3}$ in der Polstelle von g_1 erhält man jeweils einen Satz von Renormierungsgruppengleichungen der reduzierten Systeme in den Polstellen

$$\frac{d}{dt} \rho_i = \mathcal{F}'_{\rho_i}(\rho_1, \dots, \rho_{15}) \tag{6.4}$$

wobei ρ_1 bis ρ_{15} für die in (6.3) eingeführten Kopplungsverhältnisse bis auf die Gaugino-Massenparameter stehen soll. Im nächsten Schritt wird gefordert, daß die für die Fixpunkte $\rho_{1\dots 15}^*$ analog zu Abschnitt 3.3.3 die Bedingungen

$$\mathcal{F}'_{\rho_i}(\rho_1^*, \dots, \rho_{15}^*) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} \rho_{1\dots 15}^* = 0 \tag{6.5}$$

simultan für alle Kopplungsverhältnisse $\rho_{1\dots 15}$ erfüllt sind. Die Berechnung dieser Fixpunkte des vollständigen Systems findet durch Lösen des sich ergebenden Gleichungssystems statt. In der Tabelle 6.3 sind die sich ergebenden Fixpunkte des weich brechenden MSSM im UV- und im IR-Bereich abgebildet. Dabei sind nur diejenigen Fixpunkte in der Polstelle von g_3 in der Tabelle 6.3 dargestellt, die eine positive Yukawa-Kopplung für das Taulepton aufweisen. Die unphysikalischen Fälle negativer Yukawa-Kopplungen werden von vornherein von der weiteren Untersuchung ausgeschlossen. Einige zusätzliche Bemerkungen zu Werten der Kopplungen des Tauleptons in den Fixpunkten der Polstellen sind in Abschnitt 6.3 zu finden. Weiterhin sind der high- $\tan\beta$ - und low- $\tan\beta$ -Fixpunkt sowohl in der Polstelle von g_1 als auch in der Polstelle von g_3 durch **HTB** beziehungsweise **LTB** gekennzeichnet. Durch die Pfeile im unteren Bereich der Tabelle wird angedeutet, daß die Evolution der jeweiligen Fixpunkte in der Polstelle von g_1 in die entsprechenden Fixpunkte in der Polstelle von g_3 führt.

6.2 Die Bestimmung der Fixlinien

In diesem Abschnitt wird auf die Bestimmung der Fixlinien des weich brechenden MSSM eingegangen. Dabei handelt es sich um die Fixlinien, die die in den Polstellen von g_3 unterhalb der IR-Skala und g_1 jenseits der IR-Skala liegenden Fixpunkte der reduzierten Systeme der Renormierungsgruppengleichungen miteinander unter der Renormierungsgruppenevolution verbinden.

Bei der Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM ist zwischen zwei Skalenbereichen zu unterscheiden. Zum einen existiert der mathematische Bereich zwischen den Polstellen von g_3 , der Eichkopplung der starken Wechselwirkung unterhalb der IR-Skala

$$g_3 \rightarrow \infty, \quad g_3 \gg g_{1,2}, \tag{6.6}$$

und g_1 , der Eichkopplung der Hyperladung

$$g_1 \rightarrow \infty, \quad g_1 \gg g_{2,3}, \tag{6.7}$$

jenseits der UV-Skala. In den Polstellen der Eichkopplung können die jeweils verbleibenden Eichkopplungen gegenüber der singulären Eichkopplung vernachlässigt werden. Damit erhält man in den Polstellen reduzierte System der Renormierungsgruppengleichungen, die jeweils nur

von einer Eichkopplung abhängen. Für diese reduzierten Systeme sind im letzten Abschnitt die Fixpunkte berechnet worden.

Im Gegensatz dazu stellt der physikalische Skalenbereich den Bereich zwischen der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung, $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$, und GUT-Skala, $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$, dar. Diese beiden Skalen werden auch als IR-Skala und UV-Skala bezeichnet, und der von ihnen gebildete Skalenbereich stellt den physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen dar. Außerhalb dieses Bereiches ist es möglich, daß Kopplung aufgrund ihrer Größe den störungstheoretisch erlaubten Bereich verlassen.

Bei der Betrachtung der Renormierungsgruppenevolution unter Einbeziehung aller drei Eichkopplungen zwischen den Polstellen der Eichkopplungen g_3 und g_1 hat sich gezeigt, daß die in den reduzierten Systemen der Renormierungsgruppengleichungen vorliegenden Fixpunkte unter der Renormierungsgruppenevolution durch Fixlinien verbunden werden; siehe dazu auch Abschnitt 3.3.3 zum System einer Yukawa-Kopplung und mehrerer Eichkopplungen. Die Fixpunkte in den reduzierten Systemen legen als Randbedingungen die speziellen Lösungen — in diesem Fall Fixlinien — im gesamten mathematischen Skalenbereich fest. Da der mathematische Bereich den physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen zwischen der IR- und UV-Skala umfaßt, sind die speziellen Lösungen der Renormierungsgruppengleichungen — die Fixlinien — auch in diesem Bereich vollständig festgelegt.

Im vorliegenden Fall des weich brechenden MSSM werden die Fixlinien zwischen den Polstellen der Eichkopplungen numerisch bestimmt. Die Bestimmung erfolgt wie im Fall der Berechnung der Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen in den reduzierten Systemen in Einschleifen-Näherung. Die Abbildungen 6.1 und 6.2 stellen die Fixpunkte und Fixlinien des weich brechenden MSSM für die Evolution des low- $\tan\beta$ - und des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar. Dabei liegen die Fixpunkte in den Polstellen der Eichkopplungen, diese sind jeweils links und rechts in den Abbildungen dargestellt. Die Fixpunkte werden durch ausgefüllte Kreise verdeutlicht. Zwischen den Fixpunkten beziehungsweise den Polstellen der Eichkopplungen findet die Renormierungsgruppenevolution unter Einbeziehung aller drei Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 statt. Infolgedessen werden die Fixpunkte durch Fixlinien verbunden. Der dickere Teil der Fixlinien verdeutlicht jeweils die Evolution der Fixlinien im physikalischen Bereich, der sich zwischen $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$ und der der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$, befindet. Es läßt sich somit gut nachvollziehen, wie die mathematischen Gegebenheiten in den Polstellen die Evolution im physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen im Sinne der speziellen Lösungen — hier Fixlinien — festlegt.

Mittels dieser durch die mathematischen Randbedingungen in den unphysikalischen Bereichen vollständig festgelegten speziellen Lösungen — den Fixlinien — im Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen ist es nun durch Auswertung an einer beliebigen Skala innerhalb des physikalischen Bereiches möglich, die Werte der Kopplungen und Massenparameter des Modells an dieser Skala zu bestimmen. Vereinfacht gesagt können die Werte der Parameter aus den Abbildungen 6.1 und 6.2 abgelesen werden, woraufhin sie noch mittels der inversen Transformation von (6.3) in die ursprünglichen Variablen umgerechnet werden müssen. Die Werte der Parameter werden in den folgenden detaillierten Untersuchungen zur Berechnung von Massen und Bedingungen verwendet. In diesem Zusammenhang ist es noch wichtig, zu betonen, daß im Fall der Auswertung der sogenannten *laufenden* und *erweiterten Bedingungen* aus Abschnitt 4.2 beziehungsweise 4.3 nicht nur der Wert eines oder mehrerer Parameter an einer Skala — dies würde auf eine Baumgraphen-Beziehung führen — sondern die gesamte Renormierungsgruppenevolution entlang der entsprechenden Fixlinien in die Bedingungen mit einbezogen wird.

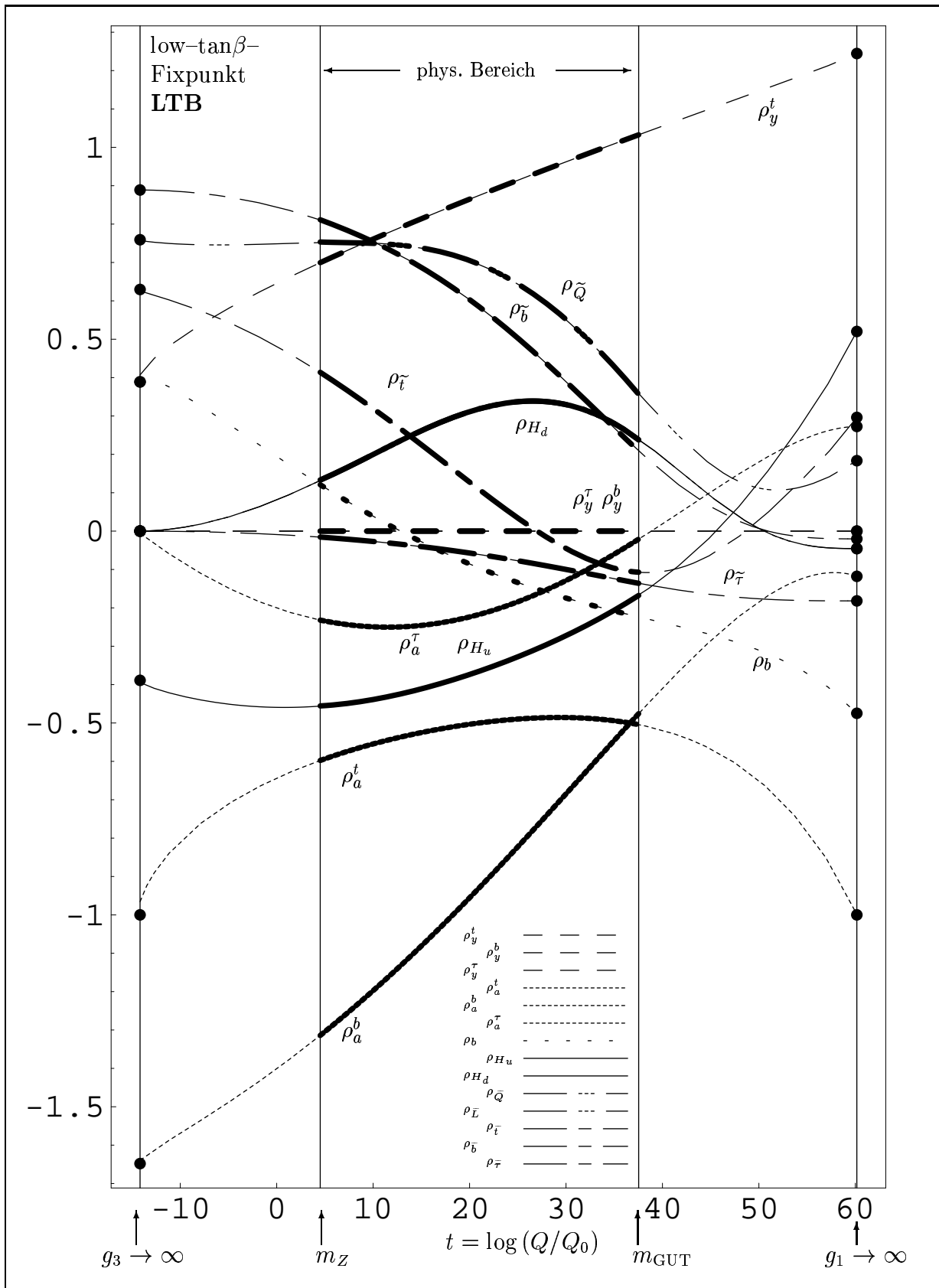


Abbildung 6.1: Die Renormierungsgruppenevolution der durch (6.3) gegebenen Verhältnisse der Kopplungen des weich brechenden MSSM für den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt. Die abgebildeten Fixlinien verbinden die Fixpunkte in den Polen von g_1 ($g_1 \rightarrow \infty$) im UV-Bereich und g_3 ($g_3 \rightarrow \infty$) im IR-Bereich. Die fett eingezeichneten Teile der Fixlinien stellen die Renormierungsgruppenevolution im physikalischen Bereich, zwischen der GUT-Skala $t = \log(Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16})$ und der Skala der Masse des Z-Bosons $t = \log(Q = m_Z)$ dar. Die in dieser Abbildung dargestellte Renormierungsgruppenevolution ist unabhängig von den Werten der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$. Um im IR-Bereich Werte der ursprünglichen Kopplungen zu erhalten, müssen die dort vorliegenden Werte der Verhältnisse mittels der inversen Transformation von (6.3) in Werte der Kopplungen umgerechnet werden.

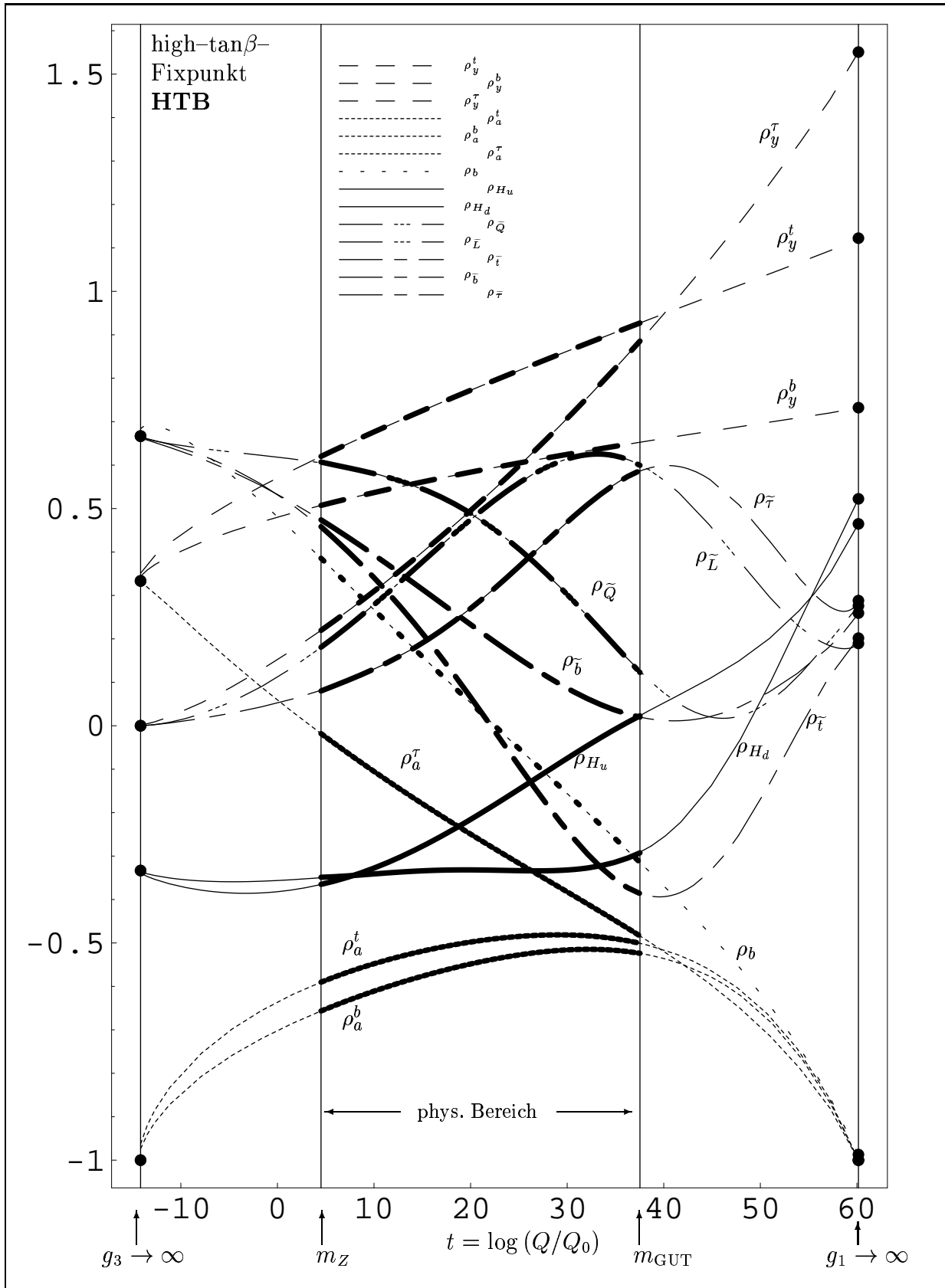


Abbildung 6.2: Die Renormierungsgruppenevolution der durch (6.3) gegebenen Verhältnisse der Kopplungen des weich brechenden MSSM für den high- $\tan\beta$ -Fixpunkt. Die abgebildeten Fixlinien verbinden die Fixpunkte in den Polen von g_1 ($g_1 \rightarrow \infty$) im UV-Bereich und g_3 ($g_3 \rightarrow \infty$) im IR-Bereich. Die fett eingezeichneten Teile der Fixlinien stellen die Renormierungsgruppenevolution im physikalischen Bereich, zwischen der GUT-Skala $t = \log(Q = m_{GUT} \approx 2 \cdot 10^{16})$ und der Skala der Masse des Z-Bosons $t = \log(Q = m_Z)$ dar. Die in dieser Abbildung dargestellte Renormierungsgruppenevolution ist unabhängig von den Werten der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$. Um im IR-Bereich Werte der ursprünglichen Kopplungen zu erhalten, müssen die dort vorliegenden Werte der Verhältnisse mittels der inversen Transformation von (6.3) in Werte der Kopplungen umgerechnet werden.

Die Renormierungsgruppenevolution zur Bestimmung und Ableitung der Vorhersagen wie Massen und Bedingungen wird im Gegensatz zur Bestimmung der Fixpunkte und Fixlinien in Zweischleifen-Näherung vorgenommen. Analog zum Abschnitt 3.3.5 kann in diesem Zusammenhang davon ausgegangen werden, daß die Fixmannigfaltigkeiten in Einschleifen-Näherung im physikalischen Bereich zwischen der UV- und der IR-Skala hinreichend gute Anfangswerte für die Renormierungsgruppenevolution in Zweischleifen-Näherung darstellen. Siehe dazu auch Abschnitt 3.3.5 in der Einführung, der auf die Rolle der Evolution in Zweischleifen-Näherung eingeht. Im Verlaufe des nächsten Abschnittes, der sich mit der Attraktivität der berechneten Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM befaßt, wird sich weiterhin zeigen, daß gerade für die Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen der Parameter des weich brechenden Sektors vergleichsweise große Attraktivitätskoeffizienten vorliegen. Diese haben zur Folge, daß die berechneten Fixmannigfaltigkeiten — hier Fixpunkte und Fixlinien — den Renormierungsgruppenfluß sehr stark anziehen und so leicht den Versatz der Anfangswerte der Einschleifen-Evolution gegenüber der Zweischleifen-Evolution ausgleichen, indem sie die Lösungen in die Nähe der Fixlinie ziehen.

Im vorliegenden Fall wurde zur Verifikation dieser Tatsache eine Untersuchung vorgenommen. Mittels dieser konnte gezeigt werden, daß sich die Evolution der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in Zweischleifen-Näherung in der Tat hinreichend weit in der Nähe der Einschleifen-Näherung befindet. In der Summe führt die Verwendung der Zweischleifen-Näherung zu den in der Literatur [7, 36] wohl bekannten Abweichungen von ≈ 10 Prozent in den Werten der Parameter.

Im nächsten Abschnitt werden die schon angesprochenen Attraktivitätskoeffizienten der Fixpunkte in den reduzierten Systemen berechnet. In Abschnitt 6.4 wird die konkrete Bestimmung der Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution in Zweischleifen-Näherung aus den in diesem Abschnitt bestimmten Fixmannigfaltigkeiten vorgenommen. Dort wird auch dargestellt, wie mittels der Fixmannigfaltigkeiten die Anzahl der Parameter des weich brechenden MSSM auf zwei reduziert werden konnte.

6.3 Attraktivität und Klassifizierung

In diesem Abschnitt wird die Berechnung der Attraktivitätskoeffizienten vorgenommen. Bei der Darstellung der Ergebnisse (Tabelle 6.4) findet eine Beschränkung auf die in Tabelle 6.3 gekennzeichneten high- $\tan\beta$ - und low- $\tan\beta$ -Fixpunkte (**HTB**, **LTB**) beziehungsweise der Evolution der Fixpunkte statt. Die Auswahl der Evolution dieser beiden Fixpunkte für die weiteren Untersuchungen besitzt seinen Grund in der Tatsache, daß sie als einzige der in Tabelle 6.3 abgebildeten Fixpunkte in der Lage sind, die Berechnung von physikalisch sinnvollen Kombinationen von verschwindenden und nicht-verschwindenden Massen für die Fermionen der dritten Familie zu ermöglichen. Man erhält:

$$\begin{aligned} \text{high-}\tan\beta : & \quad y_t \approx y_b \approx y_\tau \approx 1 \\ & \Rightarrow m_{top}^{\text{pole}} \gg m_b \approx m_\tau \\ \\ \text{low-}\tan\beta : & \quad y_t \approx 1; y_b = y_\tau = 0 \\ & \Rightarrow m_{top}^{\text{pole}} \neq 0; m_b = m_\tau = 0. \end{aligned}$$

Die Diskussion der phänomenologischen Aspekte des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes ist in der Literatur weit verbreitet [17]. In diesem Fall liegt folgende, physikalisch sinnvolle Näherung vor: Die

Verhältnis	low-tan β		high-tan β	
	Fixpunkt	Attr.-Koeff.	Fixpunkt	Attr.-Koeff.
$\rho_y^t = \frac{y_t^2}{g_1^2 + g_3^2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{6}$
$\rho_y^b = \frac{y_b^2}{g_1^2 + g_3^2}$	0	$-\frac{35}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$
$\rho_y^\tau = \frac{y_\tau^2}{g_1^2 + g_3^2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	2
$\rho_a^t = \frac{a_t}{y_t} \frac{1}{M_1 + M_3}$	-1	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{8}{3}$
$\rho_a^b = \frac{a_b}{y_b} \frac{1}{M_1 + M_3}$	$-\frac{89}{54}$	$\frac{3}{2}$	-1	$\frac{7}{3}$
$\rho_a^\tau = \frac{a_\tau}{y_\tau} \frac{1}{M_1 + M_3}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\rho_b = \frac{b}{\mu} \frac{1}{M_1 + M_3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
$\rho_\mu = \frac{\mu}{y_t^2 + y_b^2 + y_\tau^2}$	0	$\frac{43}{24}$	0	2
$\rho_{H_u} = \frac{m_{H_u}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$-\frac{7}{18}$	$\frac{25}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{25}{6}$
$\rho_{H_d} = \frac{m_{H_d}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	0	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{23}{6}$
$\rho_{\tilde{Q}} = \frac{m_{\tilde{Q}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$\frac{41}{54}$	3	$\frac{2}{3}$	3
$\rho_{\tilde{L}} = \frac{m_{\tilde{L}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	0	3	0	3
$\rho_{\tilde{t}} = \frac{m_{\tilde{t}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$\frac{17}{27}$	3	$\frac{2}{3}$	3
$\rho_{\tilde{b}} = \frac{m_{\tilde{b}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	$\frac{8}{9}$	3	$\frac{2}{3}$	3
$\rho_{\tilde{\tau}} = \frac{m_{\tilde{\tau}}^2}{M_1^2 + M_3^2}$	0	3	0	3

Tabelle 6.4: Der high-tan β - und low-tan β -Fixpunkt im IR-Bereich aus Tabelle 6.3 zusammen mit den jeweiligen Attraktivitätskoeffizienten. Es ist gut zu erkennen, daß der high-tan β -Fixpunkt in allen Kopplungen infrarot-attraktiv ist, sämtliche Attraktivitätskoeffizienten besitzen ein positives Vorzeichen. Aus diesem Grund wird der high-tan β -Fixpunkt auch *vollständig infrarot-attraktiver Fixpunkt* genannt. Im Gegensatz dazu liegt im Fall des low-tan β -Fixpunktes ein negativer Attraktivitätskoeffizient für das Verhältnis der Yukawa-Kopplung des bottom-Quarks ρ_y^b vor. Der low-tan β -Fixpunkt wirkt in dieser Komponente nicht attraktiv sondern repulsiv auf den Renormierungsgruppenfluß. Da im Rahmen der Untersuchungen dieser Arbeit die Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution aus den Fixpunkten gewonnen werden, der Wert von ρ_y^b , wie aus der Tabelle zu erkennen, Null ist und Null ebenfalls einen Fixpunkt der Renormierungsgruppengleichungen der Yukawa-Kopplungen darstellt, behält ρ_y^b den Wert Null für den gesamten Renormierungsgruppenfluß bei.

Massen des Bottomquarks und des Tauleptons können gegenüber der Masse des Topquarks vernachlässigt werden. Da die Masse auf Baumgraphen-Niveau proportional zu der Yukawa-Kopplung des entsprechenden Fermions ist und ein kleiner Wert von tan β zu annähernd gleichen Werten für die Vakuumerwartungswerte der Higgs-Doublets führt, kann angenommen werden, daß die Yukawa-Kopplungen des Bottomquarks und des Tauleptons gegenüber der Yukawa-Kopplung des Topquarks vernachlässigt werden können. Genau dieses spiegelt der low-tan β -Fixpunkt mit den oben gemachten Annahmen über die Kopplungen der Fermionen wieder.

Im Fall der Evolution des high-tan β -Fixpunktes wird im Gegensatz zum low-tan β -Fixpunkt die korrekte Einbeziehung aller Massen der Fermionen der dritten Familie vorgenommen. Daraus folgt, daß alle Yukawa-Kopplungen von Null verschiedene Werte besitzen und man somit

die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes mit den oben dargestellten Kopplungsverhältnissen erhält. Dies stellt einen Vorteil der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes gegenüber dem low- $\tan\beta$ -Fixpunkt dar, der dafür jedoch wesentlich bessere Eigenschaften im Zusammenhang mit der elektroschwachen Symmetriebrechung im skalaren Potential aufweist.

Die Berechnung der Attraktivitätskoeffizienten verläuft analog zum in Abschnitt 3.3 dargestellten Fall einer Kopplung. Im Fall von mehreren Kopplungen sind die Attraktivitätskoeffizienten durch die Eigenwerte der Matrix der nach den entsprechenden Kopplungen entwickelten Renormierungsgruppengleichungen, ausgewertet an der Stelle der Fixpunkte, gegeben. Weiterhin geben die dazugehörigen Eigenvektoren die Richtung des linearisierten Renormierungsflusses in den Fixpunkten an; Einzelheiten zu der Rolle der Eigenvektoren sind zum Beispiel in [7] zu finden. Im Verlaufe der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit wird auf die Rolle der Eigenvektoren nicht weiter eingegangen.

Stellen also analog zum letzten Abschnitt ρ_i , $i = 1, \dots, n$ die Verhältnisse der betrachteten Kopplungen dar und seien $\mathcal{F}_{\rho_i}^{g_1 \rightarrow \infty}$ beziehungsweise $\mathcal{F}_{\rho_i}^{g_3 \rightarrow \infty}$ die rechten Seiten der entsprechenden Renormierungsgruppengleichungen in den reduzierten Systemen, die in den Polstellen der Eichkopplungen vorliegen und sich durch Vernachlässigung der jeweils anderen Eichkopplungen ergeben, so erhält man die Attraktivitätskoeffizienten als Eigenwerte der Matrizen

$$\left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \mathcal{F}_{\rho_1}^{g_1, 3 \rightarrow \infty} & \dots & \frac{\partial}{\partial \rho_n} \mathcal{F}_{\rho_1}^{g_1, 3 \rightarrow \infty} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \rho_1} \mathcal{F}_{\rho_n}^{g_1, 3 \rightarrow \infty} & \dots & \frac{\partial}{\partial \rho_n} \mathcal{F}_{\rho_n}^{g_1, 3 \rightarrow \infty} \end{array} \right) \Bigg|_{\rho_i \rightarrow \rho_i^*}, \quad (6.8)$$

wobei die ρ_i^* die Werte der Kopplungsverhältnisse in den jeweiligen Fixpunkten für den IR- und den UV-Bereich darstellen.

Die Tabelle 6.4 zeigt die berechneten Attraktivitätskoeffizienten zusammen mit den Fixpunkt-werten für den high- $\tan\beta$ - und den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt. Anhand der in Abschnitt 3.3.2 und 3.3.3 vorgenommenen Betrachtungen kann man schließen, daß es sich bei dem high- $\tan\beta$ -Fixpunkt um den *vollständig infrarot-attraktiven Fixpunkt* handelt. Alle Kopplungen beziehungsweise Kopplungsverhältnisse haben einen positiven Attraktivitätskoeffizienten, der Fixpunkt ist dementsprechend infrarot-attraktiv in allen Komponenten.

Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes besitzt die Yukawa-Kopplung des Bottomquarks einen negativen Attraktivitätskoeffizienten, was gleichbedeutend mit Infrarot-Repulsivität ist. Im allgemeinen gilt immer: Besitzt ein Fixpunkt in einer Yukawa-Kopplung einen nicht-trivialen Wert — man spricht auch kurz vom nicht-trivialen Fixpunkt — so ist der Fixpunkt in dieser Komponente infrarot-attraktiv. Ist die Yukawa-Kopplung in dieser Komponente jedoch Null — man spricht auch vom trivialen Fixpunkt — so ist der Fixpunkt in dieser Komponente in der Regel infrarot-repulsiv. In Tabelle 6.4 fällt jedoch auf, daß die beiden dargestellten Fixpunkte in der Yukawa-Kopplung des Tauleptons einen Fixpunkt-Wert von Null besitzen und trotzdem einen positiven Attraktivitätskoeffizienten haben, also infrarot-attraktiv sind. Dies hat seinen Grund in der Sonderrolle des Tauleptons beziehungsweise seiner Kopplungen im IR-Bereich. Wie schon im letzten Abschnitt angesprochen wurde, besitzt das Taulepton in einigen, in Tabelle 6.3 nicht dargestellten Fixpunkten einen negativen und somit unphysikalischen Wert. Im Fall des Tauleptons verhält es sich so, daß ein Wert von Null den nicht-trivialen Fall und ein negativer Wert den trivialen Fall darstellt. Die Kopplungsstruktur im Fall des Tauleptons scheint gegenüber der des Top- und Bottomquarks scheinbar nach unten, ins Negative, verschoben. Dies hat seinen Grund darin, daß das Taulepton nicht an die starke Wechselwirkung g_3 koppelt und die Fixpunkte im Grenzwert beziehungsweise in der

Polstelle von g_3 berechnet werden. Die in der Renormierungsgruppengleichung des Tauleptons auftretenden Eichkopplungen g_1 und g_2 sind demgegenüber vernachlässigbar.

6.4 Reduktion der freien Parameter durch Fixmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, wie aus den in den letzten Abschnitten berechneten Fixpunkten und den durch sie festgelegten Fixlinien im physikalischen Bereich Anfangswerte für die Renormierungsgruppenevolution bestimmt werden können. Dabei wird ein zentrales Ergebnis dieser Arbeit herausgearbeitet: Durch die Auswertung der in den Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM vorliegenden Fixmannigfaltigkeiten — den Fixpunkten und Fixlinien — ist es möglich, alle bis auf zwei Parameter des weich brechenden MSSM für alle Skalen im physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution von der IR-Skala bis zur GUT- beziehungsweise UV-Skala festzulegen. Durch Auswertung an einer beliebigen Skala innerhalb des physikalischen Bereiches ist es so möglich, die Werte der Parameter an dieser Skala zu bestimmen und zur Berechnung und Ableitung von Vorhersagen und Bedingungen zu verwenden; siehe dazu auch die Abbildungen 6.1 und 6.2 in Abschnitt 6.2.

6.4.1 Die verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$

Betrachtet man die Tabelle 6.3, so fällt auf, daß neben den Eichkopplungen und den Gaugino-Massen auch für den Higgs-Mischungs-Parameter μ keine Fixpunktwerte angegeben sind. Auf diesen Umstand und wie dieser zu den verbleibenden freien Parametern des weich brechenden MSSM führt, soll im folgenden näher eingegangen werden. Die Renormierungsgruppengleichungen von Eichkopplungen besitzen aufgrund ihrer Struktur

$$16\pi^2 Q \frac{d}{dQ} g_i = b_i g_i^3 \quad (6.9)$$

in Einschleifen-Näherung neben den unphysikalischen Fixpunkten in ihren Verhältnissen (g_1/g_3 oder g_2/g_3 ; siehe Abschnitt 3.3.1) ausschließlich triviale Fixpunkte, der Fixpunktwert ist Null. Je nachdem, ob es sich um eine asymptotisch freie oder nicht-freie Theorie handelt, kann ihr Laufverhalten bei Top-down Evolution (UV \rightarrow IR) als repulsiv oder attraktiv angesehen werden. Im Fall des MSSM hat die Eichkopplung der starken Wechselwirkung g_3 ihren Pol unterhalb der IR-Skala, ihr Wert nimmt bei Evolution von der UV-Skala zur IR-Skala zu. Für die Kopplungen der Eichwechselwirkungen der Hyperladung g_1 und des Isospins g_2 liegen die Verhältnisse genau anders herum. Ihre Polstellen befinden sich jenseits der UV-Skala und ihre Werte nehmen dementsprechend bei Evolution zur IR-Skala ab. Die Evolution des Eichsektors ist jedoch durch die experimentellen Vorgaben für die Werte der Eichkopplungen im IR-Bereich — das heißt an der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung — vollständig determiniert, da diese als Anfangswerte für die Renormierungsgruppenevolution des Eichsektors verwendet werden und die Lösung der Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen durch die Angabe je eines Anfangswertes vollständig bestimmt sind.

Die Renormierungsgruppengleichungen der Gaugino-Massen

$$16\pi^2 Q \frac{d}{dQ} M_i = 2 b_i g_i^2 M_i \quad (6.10)$$

hängen — neben den Gaugino–Massen selbst — von den Eichkopplungen ab. Es gilt weiterhin

$$\frac{M_1}{g_1^2} = \frac{M_2}{g_2^2} = \frac{M_3}{g_3^2}, \quad (6.11)$$

was gleichbedeutend damit ist, daß die nach (6.3) gegebenen transformierten Gaugino–Massen M'_i unter der Renormierungsgruppenevolution nicht „laufen“, sie sind Renormierungsgruppeninvariante. Entlehnt man dem Eichsektor das *Unifizierungsprinzip* und fordert analog, daß die Gaugino–Massen an einer ausgezeichneten Skala durch einen gemeinsamen Wert gegeben sind, so folgt aus (6.11) und der experimentellen Fixierung des Eichsektors, daß der Sektor der Gaugino–Massen durch einen einzigen Parameter $m_{1/2}$, der folgerichtig die *unifizierende Gaugino–Masse* genannt werden soll, gegeben ist.

Analog zu den Eichkopplungen besitzt auch der Higgs–Mischungs–Parameter μ nur einen trivialen Fixpunkt. Anhand der Tabelle 6.2 erkennt man, daß die Renormierungsgruppengleichung von μ nur von den Eichkopplungen, den Yukawa–Kopplungen und μ selbst abhängt. Die Renormierungsgruppengleichung ist in Einschleifen–Näherung durch

$$16\pi^2 Q \frac{d}{dQ} \mu = \mu \left(-\frac{3}{5} g_1^2 - 3 g_2^2 + 3 y_t^2 + 3 y_b^2 + y_\tau^2 \right) \quad (6.12)$$

gegeben. Da die Evolution des Eichsektors, wie oben angeführt, durch experimentelle Vorgaben und die Evolution der Yukawa–Kopplungen vollständig durch die Fixpunkte in Tabelle 6.3 beziehungsweise die Fixlinien aus den Abbildungen 6.1 und 6.2 fixiert ist, gehen diese wohldefiniert in die Evolution des Parameters μ ein, dessen Renormierungsgruppenfluß letztendlich also nur noch durch einen Anfangswert μ_0 festgelegt werden muß.

Es verbleiben in der Summe also zwei Anfangswerte zur Festlegung des weich brechenden MSSM. Alle anderen Parameter sind durch die in den Abschnitten 6.1 und 6.2 berechneten Fixpunkte in den Polstellen der Eichkopplungen und die Fixlinien, die diese Fixpunkte verbinden, für den gesamten physikalischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution vollständig festgelegt.

$\mu_0, \quad m_{1/2}$

Verbleibende freie Parameter
des weich brechenden MSSM

Zur konkreten Durchführung der eigentlichen Evolution beziehungsweise der numerischen Integration der Renormierungsgruppengleichungen sind zwei analoge Vorgehensweisen möglich. So kann die Evolution zum einen in den transformierten Parametern ρ_i aber auch in den ursprünglichen Parametern x_i durchgeführt werden. Beide Vorgehensweisen führen selbstverständlich zu identischen Ergebnissen. Die Abbildung 6.3 verdeutlicht die geschilderten Verhältnisse.

In beiden Fällen müssen die aus den Fixpunkten beziehungsweise aus der Evolution erhaltenen Werte der transformierten Parameter in Werte der ursprünglichen Parameter zurücktransformiert werden. Dazu wird die zu (6.3) inverse Transformation bestimmt. Diese ist, wenn man sich auf den positiven Teil in den auftretenden Wurzeln beschränkt, eindeutig.

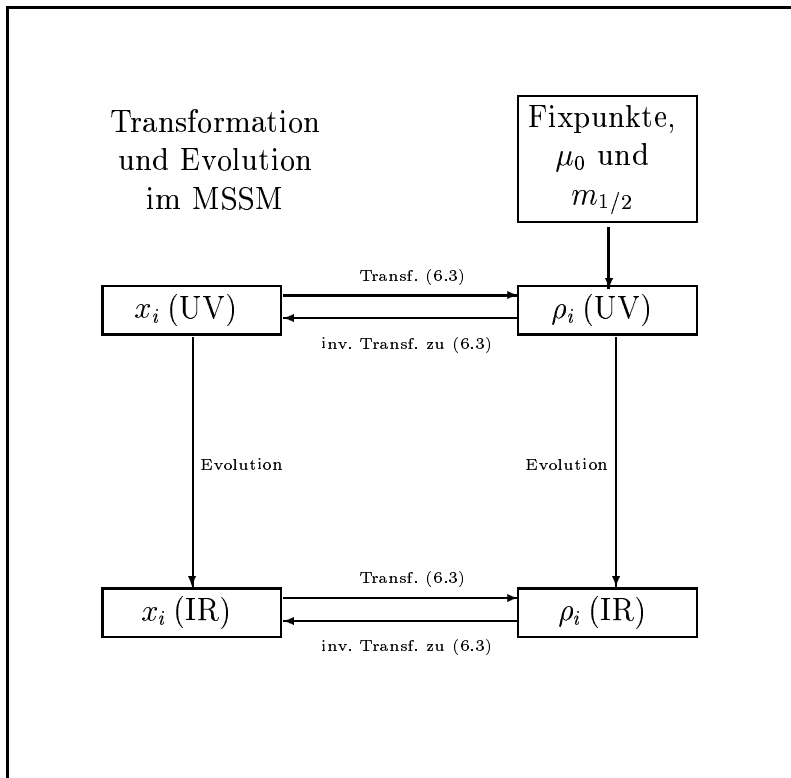


Abbildung 6.3: Zusammenhang von Transformation und inverser Transformation zwischen den ursprünglichen Parametern x_i und den transformierten Parametern ρ_i und der Renormierungsgruppenevolution im MSSM.

6.5 Abschließendes zur Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt soll zusammenfassend auf die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM eingegangen werden. Folgendes konnte erreicht werden:

- Die Berechnung der Fixpunkte des weich brechenden MSSM in den Polstellen der Eichkopplungen g_3 und g_1 . Es gilt $g_3 \rightarrow \infty$, $g_3 \gg g_{1,2}$ in der Polstelle von g_3 und $g_1 \rightarrow \infty$, $g_1 \gg g_{2,3}$ in der Polstelle von g_1 , womit die jeweils verbleibenden Eichkopplungen gegenüber der singulären vernachlässigt werden können. Dies führt zu reduzierten Systemen in den Polstellen, die jeweils nur von einer Eichkopplung abhängen. Die Polstellen liegen außerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereiches der Renormierungsgruppengleichungen und begrenzen den mathematischen Gültigkeitsbereich.
- Bestimmung der Fixlinien, die die Fixpunkte in den Polstellen bei der Renormierungsgruppenevolution unter Einbeziehung aller drei Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 verbinden. Der mathematische Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen umschließt den physikalischen Gültigkeitsbereich, der sich von der Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung, $Q = v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV, bis zur Unifizierungsskala, beziehungsweise GUT-Skala, $Q = m_{\text{GUT}} \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV erstreckt. Aus diesem Grund ist die Evolution der Parameter des weich brechenden MSSM im physikalischen Bereich vollständig durch die Fixmannigfaltigkeiten festgelegt.
- Die Fixpunkte wurden anhand ihrer Attraktivitätskoeffizienten und der Vorhersagen für die Massen der Fermionen der dritten Familie des Standardmodells, die vom Top- und Bottomquark und dem Taulepton gebildet wird, klassifiziert. Dabei wurden zwei Fixpunk-

te, der high- $\tan\beta$ - und der low- $\tan\beta$ -Fixpunkt, ausgewählt. Die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunkt realisiert von Null verschiedene Massen für die Fermionen der dritten Familie, und ist in allen Komponenten *infrarotattraktiv*. Der low- $\tan\beta$ -Fixpunkt vernachlässigt die Massen des Bottomquarks und des Tauleptons gegenüber der Masse des Topquarks und besitzt *infrarotrepulsive* Komponenten im Bereich der verschwindenden Yukawa-Kopplungen.

- Für beide im folgenden detailliert untersuchten Fälle wurde aus den Fixlinien im physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen Anfangswerte für die Renormierungsgruppenevolution gewonnen. Dabei zeigte sich, daß neben den experimentell bestimmten Werten der Eichkopplungen nur zwei weitere freie Parameter, μ_0 , der Anfangswert des Higgs-Mischungs-Parameters, und $m_{1/2}$, die unifizierende Gaugino-Masse, vorliegen. Mit einer Wahl dieser freien Parameter ist die Renormierungsgruppenevolution und damit die Parameter des weich brechenden MSSM im gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen von der IR-Skala bis zur UV-Skala vollständig bestimmt.

Aufgrund der Festlegung der Parameter beziehungsweise der Werte der Parameter im gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen durch die Wahl der beiden verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, wird es im folgenden möglich sein, Massen der Teilchen des weich brechenden MSSM und andere Vorhersagen und Bedingungen in Abhängigkeit der beiden freien Parameter zu berechnen. Dies stellt einen großen Fortschritt gegenüber den in der Literatur [15, 16] durchgeführten Untersuchungen dar. Bei diesen werden die freien Parameter zum Teil durch sogenannte *generalisierende Ansätze* festgelegt, die verwendet werden, weil sie zu den gewünschten Ergebnissen führen. Ihre Wahl ist damit höchst willkürlich und läßt eine fundierte theoretische Rechtfertigung vermissen.

Kapitel 7

Beschreibung und Einrichtung des Algorithmus

In diesem Kapitel wird die Beschreibung und Einrichtung des Algorithmus zur Bestimmung der Vorhersagen des weich brechenden MSSM in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ vorgenommen. Die Einrichtung dient vor allem der Konkretisierung und Erweiterung der in Teil I dargestellten Grundlagen zur Anwendung im Algorithmus und zur Durchführung der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit. Im Prinzip wäre eine Durchführung der Untersuchungen auch voneinander getrennt möglich gewesen. Aufgrund der Verknüpfung der verschiedenen Teilaspekte bietet sich jedoch eine zusammenhängende Behandlung und Berechnung aus verschiedenen Gründen an.

Zum einen sind, wie erwähnt, verschiedene Teilaspekte miteinander verknüpft oder bauen aufeinander auf. So ist zum Beispiel für jede der nachfolgenden Untersuchungen die Bestimmung der Symmetriebrechungsskala und für diese wiederum die Bestimmung der Massen im skalaren Sektor Voraussetzung. Weiterhin wird ein Großteil der Rechenzeit zur Durchführung der eigentlichen Renormierungsgruppenevolution aus dem UV-Bereich in den IR-Bereich benötigt. Nach der Bestimmung der Symmetriebrechungsskala bietet es sich an, diese Evolution nur einmal durchzuführen und für alle weiteren Untersuchungen zu verwenden. In diesem Teilaspekt kann man die Möglichkeiten des Computer-Algebra-Systems Mathematica [50] ausnutzen. Eine numerische Integration liegt dort als abstraktes mathematisches Objekt vor, das an jeder der vorgegebenen Skalen ausgewertet werden kann und mit dem weiterhin, bevor die eigentliche Auswertung stattfindet, wie mit jeder anderen algebraischen Größe gerechnet werden kann. Die einmalige Bestimmung gemeinsam benutzter Teile und Durchführung der Renormierungsgruppenevolution führt so in der Summe zu einer enormen Einsparung an Rechenzeit.

Zur eigentlichen Durchführung der Untersuchung muß eine Wahl der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ getroffen werden. Diese werden innerhalb eines Rasters von

$$\mu_0 (Q = m_{\text{GUT}}) \in (-1500, 1500) \quad \text{und} \quad m_{1/2} (Q = m_{\text{GUT}}) \in (0, 500) \quad (7.1)$$

variiert. Diese Variation kann stetig vorgenommen werden, das heißt die Anfangswerte durchlaufen mit einer vorgegebenen Schrittweite (stepping) den gesamten möglichen Bereich. Damit wird eine gleichmäßige Überdeckung des Bereiches im Raum der freien Parameter erreicht. Es konnte jedoch abgeschätzt werden, daß diese Art der Variation bei der im Falle einiger Teilaspekte benötigten Genauigkeit den zur Verfügung stehenden Zeitrahmen gesprengt hätte. Weiterhin wäre eine Analyse der Ergebnisse erst nach dem endgültigen Abschluß der Berechnungen möglich geworden.

Aus diesen Gründen wurde die Variation der freien Parameter mittels eines dem Monte-Carlo-Verfahren angelehnten Vorgehen vorgenommen. Dabei wurden die Werte der freien Parameter zufällig aus dem Intervall der möglichen Werte gewählt. Dadurch ist es jederzeit möglich, auf Teilergebnisse zuzugreifen, wobei einer Verlängerung der Berechnung zu einer Erhöhung der Genauigkeit der Aussagen durch feinere Überdeckung führt. Weiterhin kann das Intervall der möglichen Werte der freien Parameter nachträglich eingeschränkt werden, um Bereiche stärkeren Interesses genauer zu untersuchen. Im Zusammenhang mit diesem Verfahren ist es folglich unabdinglich, eine gleichmäßig verteilte Zufallsfunktion zu benutzen, die weiterhin nach einem Neustart (restart) in der Lage ist, eine von den vorhergehenden Untersuchungen abweichende Folge von Zufallszahlen zu liefern.

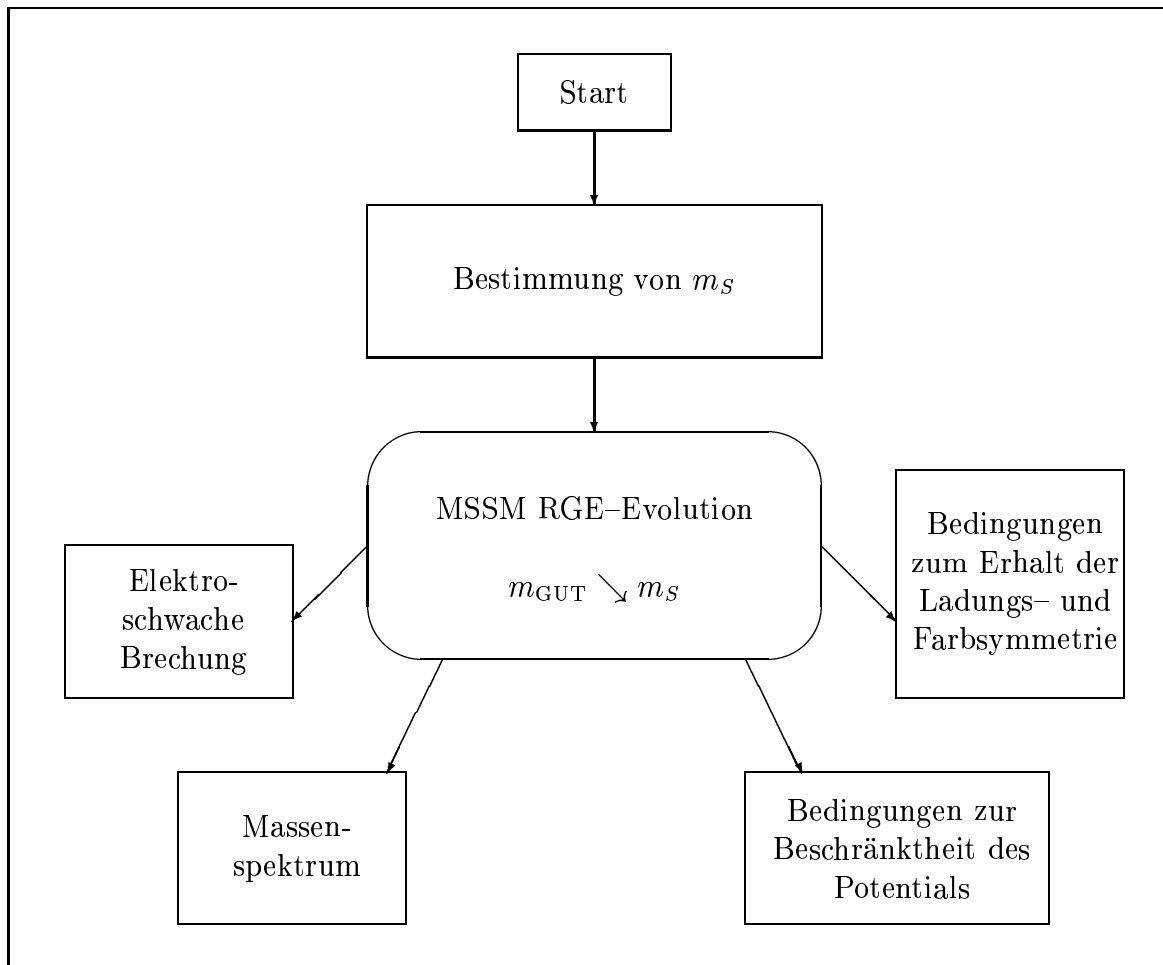


Abbildung 7.1: Übersicht des Ablaufplans des Algorithmus im Zusammenhang. Die Darstellung des Ablaufes zur Bestimmung der Eigenschaften bezüglich der elektroschwachen Symmetriebrechung ist in Abbildung 7.5, die Berechnung des Massenspektrums in Abbildung 7.3 und die Berechnung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie in Abbildung 7.4 zu finden. In Abbildung 7.2 wird der Ablaufplan für den iterativen Algorithmus zur Bestimmung der allen Berechnungen zugrunde liegenden Symmetriebrechungsskala m_s dargestellt.

Die Abbildung 7.1 stellt eine generelle Übersicht zum Ablauf des Algorithmus dar, dessen Teilschritte in den folgenden Abschnitten konkretisiert werden. In Abschnitt 7.2 wird das Vorgehen zur Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_s , in Abschnitt 7.3 die Berechnung der Massen der Quarks und Leptonen und der Teilchen des weich brechenden und des Higgs-Sektors sowie die Bestimmung des Parameters $\tan\beta$ aus den Massen der Fermionen dargestellt. In Abschnitt 7.4 wird die Konkretisierung der ersten, zweiten und dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB-1,2,3-constraint) sowie der Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie (CCB-constraints) zur Anwendung im Rahmen des Algorithmus vorgenommen. Der

Abschnitt 7.5 geht auf das Vorgehen im Zusammenhang mit der Untersuchung der Möglichkeit der radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung im skalaren Potential des weich brechenden MSSM ein.

Vorweg wird im Abschnitt 7.1 auf die Einrichtung der allen Untersuchungen zugrundeliegenden Renormierungsgruppenevolution als solche eingegangen. Dies beinhaltet die Fixierung des Eichsektors, das heißt die Festlegung der Impulsskalen, und die Bestimmung der Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution an der UV-Skala aus den in Kapitel 6 berechneten Fixpunkten beziehungsweise Fixlinien an der UV- beziehungsweise GUT-Skala.

7.1 Einrichtung der Renormierungsgruppenevolution

Die Renormierungsgruppenevolution aus dem UV-Bereich in den IR-Bereich liegt, wie einleitend angesprochen, allen im Rahmen des Algorithmus durchgeführten Untersuchungen zugrunde. Nach der im Verlauf dieses Abschnittes vorgenommenen Fixierung des Eichsektors in Abschnitt 7.1.1 und der konkreten Bestimmung der Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution durch Auswertung der Fixlinien an der UV-Skala kann die Renormierungsgruppenevolution als abstrakte Größe für jede Wahl der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ einmal berechnet und für alle weiteren Untersuchungen im Rahmen des Algorithmus verwendet werden.

7.1.1 Fixierung des Eichsektors und der Impulsskalen

In diesem Abschnitt wird die Fixierung des Eichsektors und der Impulsskalen zur Durchführung der Renormierungsgruppenevolution im Rahmen der Untersuchungen des MSSM durchgeführt. Die zu bestimmenden Impulsskalen sind dabei zum einen die Polstellen der Eichkopplungen g_3 und g_1 , die den mathematischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppenevolution eingrenzen, und die GUT-Skala beziehungsweise UV-Skala, die den physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppenevolution nach oben begrenzt. Die Begrenzung des physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppenevolution nach unten ist durch die IR-Skala, die Skala der elektroschwachen Symmetriebrechung, $Q = v/\sqrt{2} \approx 174 \text{ GeV}$, gegeben. Außerhalb der UV- und IR-Skala ist es möglich, daß gewisse Kopplungen Werte annehmen, die für eine Behandlung im Rahmen der Störungstheorie zu groß sind und somit den physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen verlassen.

Festlegung der Impulsskalen

Die Aspekte der Renormierungsgruppenevolution des Eichsektors und der Festlegung der Impulsskalen sind eng miteinander verknüpft. Nach Abschnitt 3.3.1 bestimmen die experimentellen Werte der Eichkopplungen die Lage der Polstellen der Eichkopplungen (3.54, 3.55)

$$\tilde{t}_i = t_0 + 2 \frac{4 \pi^2}{b_i g_{i0}^2} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{t}_i = t_0 + \frac{1}{2 b_i} \frac{1}{\alpha_{i0}}, \quad (7.2)$$

und damit den mathematischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen beziehungsweise den mathematischen Bereich der Renormierungsgruppenevolution.

Für die jenseits der UV-Skala gelegene Polstelle von g_1 , der Eichkopplung der Hyperladung, gilt mit $t_0 = \log m_{top}^{pole} \approx 5.16$

$$\tilde{t}_1 = 5.16 + \frac{40 \pi^2}{33 g_1^2(m_{top}^{pole})} \approx 60 \quad (7.3)$$

und für die unterhalb der IR-Skala gelegenen Polstelle von g_3 , der Eichkopplung der starken Wechselwirkung gilt

$$\tilde{t}_3 = 5.16 - \frac{8 \pi^2}{3 g_3^2(m_{top}^{pole})} \approx -14, \quad (7.4)$$

wobei die Werte von g_1^2 und g_3^2 durch (5.39) gegeben werden. Die Polstelle von g_1 liegt damit bei $Q \approx 2 \cdot 10^{26}$ GeV, die Polstelle von g_3 bei $Q \approx 7 \cdot 10^{-7}$ GeV = 0.7 eV, beide vollständig im unphysikalischen Bereich, der sich zwischen der GUT-Skala, $Q \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV, und der elektroschwachen Skala, $Q \approx v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV, befindet. Für Skalen außerhalb dieses Bereiches treten Werte der betrachteten Kopplungen auf, die oberhalb des störungstheoretisch erlaubten Bereiches liegen.

In Einschleifen-Näherung ist die Renormierungsgruppenevolution des Eichsektors durch die Angabe der Werte der Eichkopplungen an einer Skala vollständig bestimmt. Die Renormierungsgruppengleichung (3.39) sind nicht gekoppelt, jede hängt nur von sich selbst und der Skala Q ab. Sie sind weiterhin lösbar, und die Angabe eines Anfangswertes ist hinreichend zur Bestimmung der Lösung. Mit der Identifikation der Werte der Eichkopplungen im Standardmodell mit den Werten der Eichkopplungen im MSSM an der Skala m_{top}^{pole}

$$\begin{aligned} g_{1_{MSSM}}^2(m_{top}^{pole}) &= g_{1_{SM}}^2(m_{top}^{pole}) = 0.2147 \\ g_{1_{MSSM}}^2(m_{top}^{pole}) &= g_{1_{SM}}^2(m_{top}^{pole}) = 0.4171 \\ g_{1_{MSSM}}^2(m_{top}^{pole}) &= g_{1_{SM}}^2(m_{top}^{pole}) = 1.3616 \end{aligned} \quad (7.5)$$

ist somit auch die Dynamik der Renormierungsgruppenevolution im Eichsektor des MSSM vollständig bestimmt; zur Verdeutlichung siehe auch Abbildung 3.1.

Newton-Verfahren bei der Zweischleifen-Näherung

Bei dem im Rahmen der Untersuchungen dieser Arbeit entwickelten Algorithmus werden Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung verwendet. Weiterhin ist die Lage der Symmetriebrechungsskala m_S nicht zwingend gleich der Skala m_{top}^{pole} . Oberhalb von m_{top}^{pole} kann ein Bereich vorliegen, in dem eine Renormierungsgruppenevolution im Standardmodell durchzuführen ist. Die Verwendung der Renormierungsgruppengleichungen in Zweischleifen-Näherung führt dazu, daß auch die Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen untereinander gekoppelt sind und somit voneinander und zudem noch von den Yukawa-Kopplungen abhängen.

Die Handhabung dieser beiden Umstände ist stringent und wird mit der Einführung eines Nullstellenverfahrens in einem Schritt gelöst. Das Ziel dieses Nullstellenverfahrens, beziehungsweise Minimierungsverfahrens, ist die Sicherstellung der Anschlußbedingung (7.5), das heißt der Reproduktion der experimentellen Werte der Eichkopplungen im IR-Bereich unter Einbeziehung einer beliebigen Symmetriebrechungsskala $m_S \geq m_{top}^{pole}$.

Zur Durchführung wird eine Funktion \mathcal{F} folgendermaßen definiert: Seien g'_i die Werte der Eichkopplungen, die sich für eine willkürliche Wahl von Eingabeparametern $x_{1,\dots,n}$ aus der Renormierungsgruppenevolution ergeben und g_i die durch (7.5) gegebenen Werte der Eichkopplungen.

Definiert man nun

$$\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^3, x_{1,\dots,n} \longmapsto (g'_1, g'_2, g'_3) - (g_1, g_2, g_3) , \quad (7.6)$$

so sichert die Nullstelle dieser Funktion die Reproduktion der experimentellen Vorgaben im Eichsektor. Aus dem Nullstellenverfahren wird ein Minimierungsverfahren, wenn man eine Funktion $\mathcal{F}' = \|\mathcal{F}\|$ definiert, wobei $\|\cdot\|$ eine zunächst beliebige Norm darstellt. Als geeignete Wahl für die Norm haben sich die „Absolute Norm“ und die „Euklidische Norm“ erwiesen. Weiterhin hat sich die Verwendung des Newton-Verfahrens als Nullstellenverfahren bewährt, welches, in diesem Fall hinreichende, lokale Konvergenz und eine ausreichend große Konvergenzgeschwindigkeit aufweist.

Bei den Eingabeparametern x_n handelt es sich im allgemeinen um die Anfangswerte der Eichkopplungen im UV-Bereich. Diese werden mittels des Newton-Verfahrens angepaßt, um die experimentellen Gegebenheiten im Eichsektor zu reproduzieren. Neben den Anfangswerten der Eichkopplungen hätten auch andere Kopplungen, von denen die Eichkopplungen über die Renormierungsgruppenevolution abhängen, im UV-Bereich variiert werden können. Da die Anfangswerte dieser Kopplungen jedoch im Gegensatz zu den Eichkopplungen und den verbleibenden freien Parametern des weich brechenden MSSM, μ_0 und $m_{1/2}$, durch die im Rahmen dieser Arbeit bestimmten Fixpunkte beziehungsweise Fixlinien für den gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen vollständig festgelegt sind, ist eine Variation der Anfangswerte der Eichkopplungen vorzuziehen. Die einzige und physikalisch sinnvolle Einschränkung im Bereich der Eichkopplungen liegt darin, die experimentellen Vorgaben zu reproduzieren.

Liegt, wie oben angesprochen, eine Symmetriebrechungsskala $m_S > m_{top}^{pole}$ vor, so hat das zur Folge, daß die Werte der Eichkopplungen an der Skala m_S nicht den Werten (7.5) entsprechen. Eine Minimierung oder Nullstellensuche an dieser Skala hätte zur Folge, daß die experimentellen Vorgaben von der Renormierungsgruppenevolution nicht eingehalten werden könnten, da eine nachgeschaltete Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells unterhalb m_S stattfindet. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, wird ausgehend von den Werten der Eichkopplungen an der Skala m_{top}^{pole} (7.5) eine Renormierungsgruppenevolution „hinauf“ (bottom-up) zur Skala m_S mit den Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells in Zweischleifen-Näherung (3.13 bis 3.19) vorgenommen

$$\left(g_1(m_{top}^{pole}), g_2(m_{top}^{pole}), g_3(m_{top}^{pole}) \right) \xrightarrow{\text{SM-Evolution}} (g_1(m_S), g_2(m_S), g_3(m_S)) , \quad (7.7)$$

und die sich ergebenden Werte an der Skala m_S zur Nullstellensuche der Renormierungsgruppenevolution des Eichsektors mittels der Funktion (7.6) verwendet.

Unifizierung

Neben der Bestimmung der Anfangswerte der Eichkopplungen im UV-Bereich findet weiterhin die Bestimmung der Unifizierungsskala $Q = m_{GUT}$ mittels eines Newton-Verfahrens statt. Diese soll sicherstellen, daß eine möglichst weitgehende Unifizierung der Werte der Eichkopplungen an einer Skala erzielt wird. Dazu wird wiederum eine Funktion \mathcal{F} folgendermaßen definiert

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t_{GUT} \longmapsto \mathcal{S}(g_1(m_{GUT}), g_2(m_{GUT}), g_3(m_{GUT})) , \quad (7.8)$$

wobei die Funktion \mathcal{S} in diesem Fall durch

$$\mathcal{S}(g_1(m_{GUT}), g_2(m_{GUT}), g_3(m_{GUT})) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^3 (g_i(m_{GUT}) - g_j(m_{GUT})) \quad (7.9)$$

gegeben ist, und die Summe der Abstände der Werte der Eichkopplungen voneinander mißt. Für die Evolution der beiden untersuchten Fixpunkte, den high- $\tan\beta$ - und den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt, führt die Anwendung dieses Verfahrens zu einer Unifizierungsskala im Bereich von $\approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV, ein Wert, der mit den geläufigen Angaben in der Literatur gut übereinstimmt; siehe zum Beispiel [36].

Konkretisierung der Evolution des Eichsektors

Bei den Untersuchungen dieser Arbeit lagen im Eichsektor folgende Gegebenheiten vor: Die Renormierungsgruppenevolution des Eichsektors ist in Zweischleifen-Näherung unabhängig von der Wahl der Eingabewerte des weich brechenden MSSM μ_0 und $m_{1/2}$, da die Renormierungsgruppengleichungen der Eichkopplungen in Zweischleifen-Näherung nur von sich selbst und den Yukawa-Kopplungen abhängen. Diese wiederum hängen ebenfalls nur von sich selbst und den Eichkopplungen ab, so daß der Eich-Yukawa-Sektor ein abgeschlossenes Untersystem im weich brechenden MSSM darstellt; vergleiche auch Abschnitt 6.1 beziehungsweise Tabelle 6.2 zu der triangularen Kopplungsstruktur des weich brechenden MSSM.

Wäre weiterhin eine feststehende Symmetriebrechungsskala m_S gegeben, so müßte das in den letzten beiden Abschnitten dargestellte Vorgehen zu Fixierung der Impulsskalen und des Eichsektors nur einmal für sämtliche möglichen Kombinationen der Eingabewerte μ_0 und $m_{1/2}$ durchgeführt werden. Da jedoch die Symmetriebrechungsskala m_S von den Eingabewerten abhängt und somit die zur Minimierung verwendeten Werte der Eichkopplungen auch, muß die Nullstellensuche mittels des Newton-Verfahrens für jede Wahl der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, das heißt für jeden Lauf des Algorithmus, neu durchgeführt werden.

Es hat sich bei der Durchführung als sinnvoll erwiesen, die Nullstellensuche einmal für eine beliebige Wahl der verbleibenden freien Parameter durchzuführen und die sich ergebenden Anfangswerte der Eichkopplungen als Eingabeparameter (für das Newton-Verfahren) für die nachfolgenden Läufe des Newton-Verfahrens für andere Kombinationen der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ zu verwenden. Dies führt zu einer Reduzierung der benötigten Newton-Schritte — die Wahl der Eingabeparameter liegt zumindest schon in der Nähe der Nullstelle — und somit zu einer Reduzierung der Rechenzeit.

7.2 Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_S

Dieser Abschnitt stellt den Teil des Algorithmus zur Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_S dar. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Abbildung 7.1. Die in Klammern stehenden lateinischen Buchstaben ((a), (b),...) beziehen sich zur Verdeutlichung der Aspekte der Ableitung dementsprechend auf die darin enthaltenen Kästen.

Bei dem Algorithmus zur Bestimmung der Symmetriebrechungsskala handelt es sich um einen iterativen Algorithmus. Das heißt im Einzelnen, daß dieser so lange angewendet wird, bis er einen selbstkonsistenten Zustand erreicht. Dazu ein paar klärende Einzelheiten: Als Symmetriebrechungsskala wird die Skala verwendet, an der die Einschleifen-Korrekturen zum skalaren Potential minimal sind. Es hat sich gezeigt, daß die Wahl des Mittelwertes der Masseneigenwerte der skalaren Teilchen des Modells eine gute Wahl darstellt. Nun hängen die Massen der skalaren Teilchen natürlich von der Wahl der Skala ab, an der die Diagonalisierung der Massenmatrizen durchgeführt wird. Diese entspricht bei den getroffenen Annahmen im Rahmen der Untersuchungen der Symmetriebrechungsskala und ist beim Start des Algorithmus nicht festgelegt und

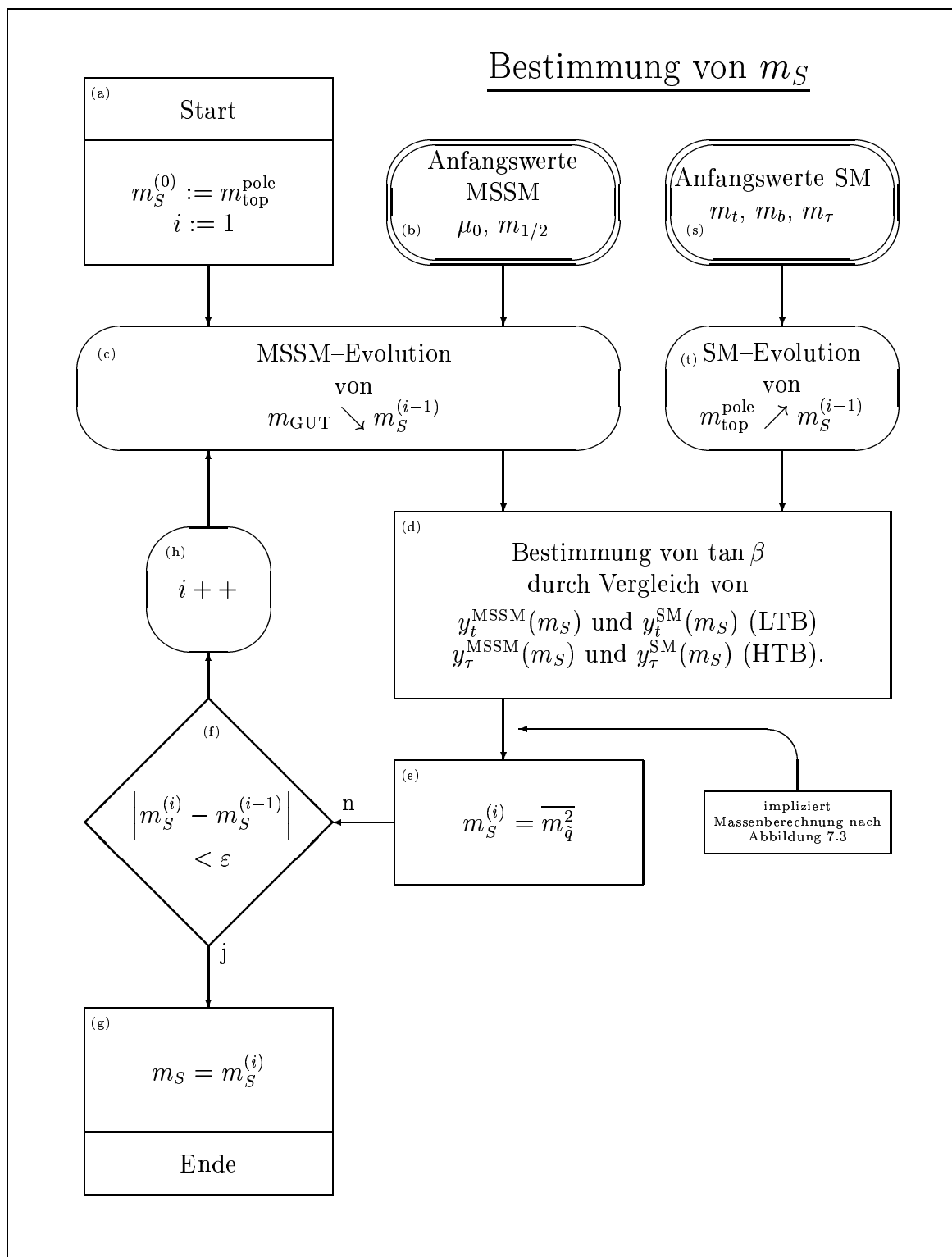


Abbildung 7.2: Ablaufplan zur Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_S . Die Bestimmung von m_S liegt allen weiteren Untersuchungen im Rahmen des Algorithmus zugrunde und wird mittels eines iterativen Algorithmus vorgenommen. Dieser wird solange angewendet, bis ein selbstkonsistenter Zustand erreicht ist.

wird auf einen willkürlichen aber naheliegenden Wert gesetzt. Ein erster Durchlauf des Algorithmus führt dann zu der Festlegung einer ersten Wahl der Symmetriebrechungsskala aus der Berechnung der in Frage kommenden Massen und ihres Mittelwertes. Dieser Massenmittelwert wird im zweiten Durchlauf als Wert für die Symmetriebrechungsskala verwendet. Man erhält neue Werte für die Massen, deren Mittelwerte und folglich für die Symmetriebrechungsskala, deren Wert wiederum als Ausgangspunkt für den nächsten Durchlauf dient. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis der sich ergebende neue Wert der Symmetriebrechungsskala mit dem für den entsprechenden Durchlauf des Algorithmus angesetzten Wert innerhalb einer anzunehmenden Rechengenauigkeit übereinstimmt. Damit ist *Selbstkonsistenz* erreicht.

Der Kasten (a) in Abbildung 7.1 stellt im allgemeinen den Eintrittspunkt des Algorithmus dar. Als erste Wahl der Symmetriebrechungsskala $m_S^{(0)}$ wird die Pol-Masse des top Quarks $m_S^{(0)} = m_{\text{top}}^{\text{pole}}$ verwendet. Der Kasten (b) verdeutlicht die Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution des MSSM. Dabei stellen die verbleibenden Anfangswerte μ_0 und $m_{1/2}$ die einzigen freien Parameter des weich brechenden MSSM beziehungsweise des Algorithmus zur Durchführung der Untersuchungen dar. Zur Erinnerung: Die Anfangswerte der Renormierungsgruppenevolution werden aus den Fixmannigfaltigkeiten der Theorie bestimmt. Dies ermöglicht die Reduzierung der freien Parameter und somit die Erhöhung der Vorhersagekraft (Prädikktivität) der Theorie.

Im Endeffekt ergibt die Wahl der Anfangswerte μ_0 und $m_{1/2}$ zusammen mit den Anfangswerten aus den Fixmannigfaltigkeiten des MSSM und der (vorläufigen) Wahl der Symmetriebrechungsskala $m_S^{(0)}$ alle benötigten Parameter zur Durchführung der Renormierungsgruppenevolution (c) von $m_{\text{top}}^{\text{pole}}$ nach $m_S^{(i-1)}$, wobei im ersten Durchlauf des Algorithmus $i = 1$ gilt.

Mittels der durch die Renormierungsgruppenevolution (c) gewonnenen Werte an der Skala $m_S^{(i-1)}$ wird im ersten Schritt der Wert von $\tan\beta$ berechnet. Dazu (s, t) werden die Kopplungen des Yukawa-Sektors im IR-Bereich aus den experimentellen Vorgaben bestimmt und zur Skala $m_S^{(i-1)}$ mittels der Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells in Zweischleifen-Näherung „hoch“-evaluiert (bottom-up evolution). Aus dem Vergleich der Werte aus der MSSM und der Standardmodell-Evolution läßt sich der Wert von $\tan\beta$ nach

$$y_t^{\text{MSSM}}(m_S) \sin(\beta) = y_t^{\text{SM}}(m_S) \quad (7.10)$$

für die Evolution des low- $\tan\beta$ - und

$$y_\tau^{\text{MSSM}}(m_S) \cos(\beta) = y_\tau^{\text{SM}}(m_S) \quad (7.11)$$

für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes berechnen. An dieser Stelle werden auch unmittelbar die Bedeutungen der Bezeichnungen low- $\tan\beta$ - und high- $\tan\beta$ -Fixpunkt verständlich. Die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes führt zu kleinen Werten von $\tan\beta$, die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes hingegen zu großen Werten.

Mit dem so gewonnenen Wert für $\tan\beta$ und den Werten der Renormierungsgruppenevolution (c) an der Skala $m_S^{(i-1)}$ wird letztendlich (e) über den Mittelwert der skalaren Massen $m_{\tilde{\phi}}$ der neue Wert für die Symmetriebrechungsskala $m_S^{(i)}$ nach

$$m_S^{(i)} = \overline{m_{\tilde{\phi}_\alpha}} \quad (7.12)$$

berechnet, wobei $\tilde{\phi}_\alpha$ wie in Abschnitt 2.2 über die skalaren Komponenten der Supermultipletts \widehat{Q} , \widehat{L} , \widehat{t} , \widehat{b} und $\widehat{\tau}$ läuft. Hat sich der neue Wert gegenüber dem alten nur innerhalb einer angenommenen Rechengenauigkeit ε geändert (f), so gilt die Symmetriebrechungsskala als gefunden

und ist durch den zuletzt berechneten Wert von $m_S^{(i)}$ gegeben (g). Ist die Abweichung zweier aufeinanderfolgender Berechnungen jedoch noch zu groß, so wird die Laufvariable i um eins erhöht und der Algorithmus mit dem gerade berechneten Wert für die Symmetriebrechungsskala als Ausgangspunkt neu durchlaufen (h).

7.3 Die Bestimmung der Massen

In diesem Abschnitt wird auf die Berechnung der Massen der skalaren Teilchen und der Fermionen im MSSM im Rahmen der in dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen eingegangen. Zur Verdeutlichung ist das Vorgehen in der Abbildung 7.3 dargestellt. Wie schon im vorhergehenden Abschnitt dienen lateinische Buchstaben in Klammern ((a), (b), ...) zur Bezugnahme auf die in der Abbildung enthaltenen Elemente.

Nach der Renormierungsgruppenevolution von der UV-Skala zur Skala der Symmetriebrechung m_S liegen dort die zur Berechnung der Massen benötigten Werte der Parameter durch die Auswertung der in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien an der Skala m_S vor.

7.3.1 Massen der Quarks und Leptonen

Aus den Yukawa-Kopplungen der Fermionen der dritten Familie y_t , y_b und y_τ im Fall des MSSM werden nach (2.60) die Yukawa-Kopplungen für das SM berechnet. Der dazu benötigte Wert $\tan\beta$ wird gewöhnlich aus dem Vergleich der Masse der τ -Leptons beziehungsweise der aus ihr berechneten Yukawa-Kopplung im SM mit der aus der Renormierungsgruppenevolution berechneten Yukawa-Kopplung y_τ berechnet. Das Vorgehen ist analog zum dem in Abbildung 7.2 Kästen (s), (t) und (d), sowie Abschnitt 7.2 zur Berechnung der Skala m_S geschilderten Verfahren.

Nach der Renormierungsgruppenevolution der Yukawa-Kopplungen y_t , y_b und y_τ im Standardmodell (d) von der Skala m_S bis zur Skala $m_{\text{top}}^{\text{pole}}$ und der Verwendung der Massen-Zuwachsfaktoren η_b und η_τ , siehe Abschnitt 5.2, zur Berechnung der Massen der entsprechenden Fermionen an der Skala ihrer Eigenenergie $m_b(m_b)$ und $m_\tau(m_\tau)$ liegen die Massen der Fermionen der dritten Familie, beziehungsweise der Wert zweier Massen und $\tan\beta$ vor. Im Fall des Topquarks wird zusätzlich die Pol-Massen-Korrektur nach (2.63) berücksichtigt.

Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes, wo die Yukawa-Kopplung des Tauleptons und des Bottomquarks den Wert Null hat, wird zur Berechnung des Wertes von $\tan\beta$ die experimentell gegebene Masse des Topquarks mit der sich aus der Berechnung ergebenden verglichen; siehe hierzu ebenfalls Abbildung 7.2, Kasten (d).

7.3.2 Die Massen im Higgs-Sektor

Der Higgs-Sektor des weich brechenden MSSM besitzt, wie im Abschnitt 2.4 dargestellt, fünf massive Freiheitsgrade. Deren Massen $m_{A^0}^2$, $m_{h^0}^2$, $m_{H^0}^2$ und $m_{H^\pm}^2$ (i) ergeben sich nach (2.68) als Funktion der aus der Renormierungsgruppenevolution (a) berechneten Parameter $m_{H_u}^2$, $m_{H_d}^2$, μ und b (f) an der Symmetriebrechungsskala m_S . Der ebenfalls benötigte Wert $\tan\beta$ wird aus der Berechnung der Massen der Fermionen der dritten Familie (siehe vorhergehenden Abschnitt) gewonnen. Der Wert von m_Z^2 stellt einen sogenannten „Anschluß-Parameter“

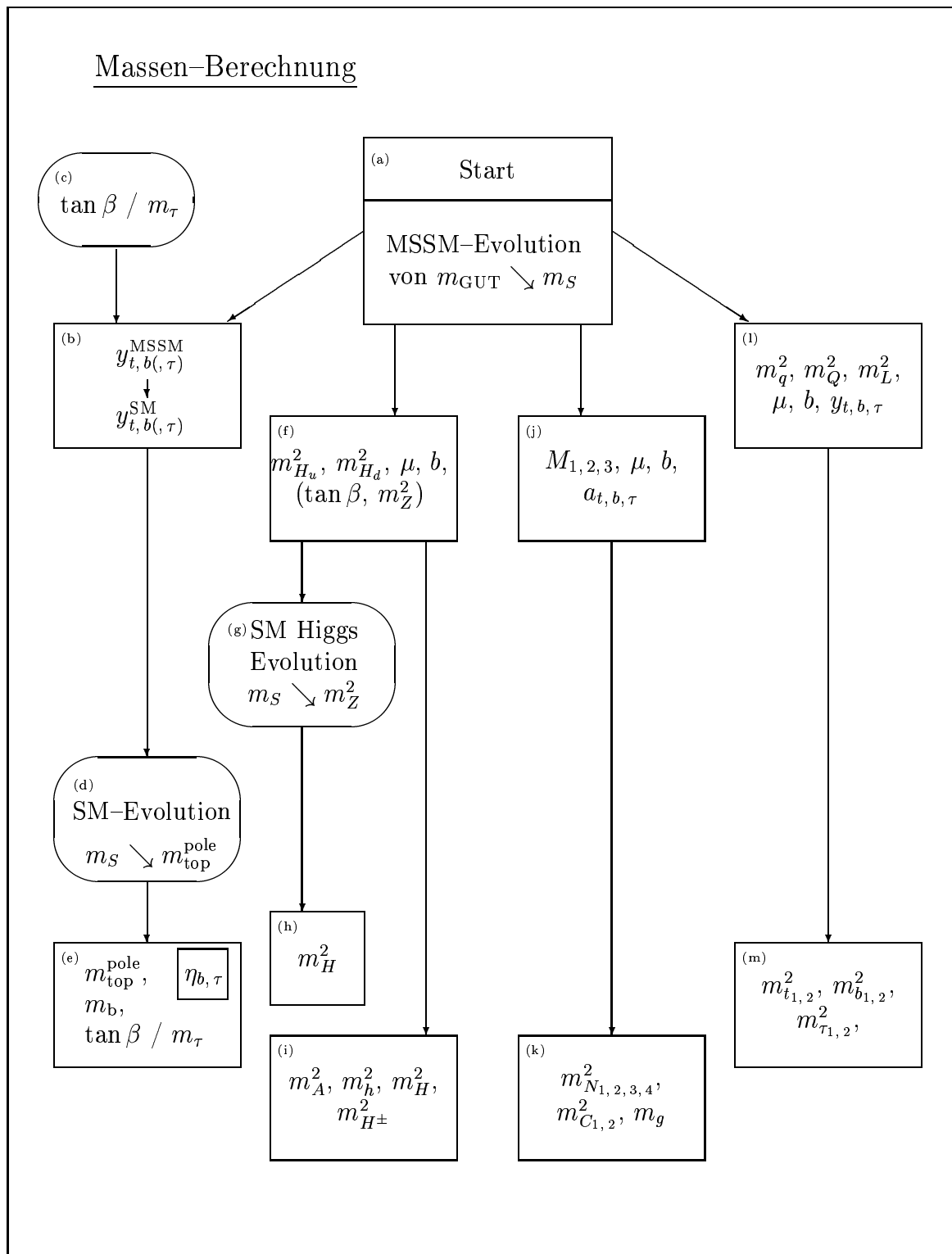


Abbildung 7.3: Ablaufplan zur Berechnung der Massen der skalaren Teilchen und der Fermionen des weich brechenden MSSM im Rahmen des in Abbildung 7.1 im Überblick dargestellten Algorithmus. Auf das Mitführen der Tildes bei den Massen der skalaren Komponenten der Supermultipletts wurde aus Gründen der leichteren Lesbarkeit in dieser Abbildung verzichtet.

(matching-parameter) bei der Analyse des elektroschwachen Symmetriebrechung dar, siehe Abschnitt 7.5, und geht in die Massenberechnung des Higgs-Sektor mit $m_Z^2 = (91.187 \text{ GeV})^2$ ein.

Es ist allgemein üblich, das leichteste im Higgs-Sektor des MSSM vorhandene Higgs-Boson mit dem Higgs-Boson des Standardmodells zu identifizieren. Um analog zur Berechnung der Massen der Fermionen der dritten Familie im letzten Abschnitt die Renormierungsgruppen-evolution (g) im Bereich Standardmodell von der Skala m_S zur Skala $Q = m_{top}^{pole}$ beziehungsweise $Q = m_Z$ mit einzubeziehen, wird folgendermaßen vorgegangen: Die sich nach (2.71) aus der Masse des leichtesten Higgs-Bosons im MSSM $m_{h_0}^2$ ergebende Selbstkopplung λ des Higgs-Bosons im Standardmodell wird zusammen mit den Yukawa-Kopplungen und deren Anfangswerten unter Verwendung der Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells in Zweischleifen-Näherung (3.13 bis 3.19) von der Skala der Symmetriebrechung m_S zur Skala $Q = m_Z$ evoluiert. An dieser Skala wird nach (2.72) die Masse m_H^2 des Higgs-Bosons des Standardmodells (h) berechnet.

Zusätzlich zu dieser Evolution, die eine Modifikation der Masse des leichtesten Higgs-Bosons nach sich zieht, wird die Einschleifen-Strahlungskorrektur nach (2.70) bei der Berechnung der Masse des Higgs-Bosons $m_{h_0}^2$ und somit auch bei der Higgs-Selbstkopplung λ mit einbezogen. Es werden beide Fälle, die Evolution mit und ohne die Einschleifen-Strahlungskorrektur, miteinander verglichen.

7.3.3 Massen der Neutralinos, Charginos und des Gluinos

Die Berechnung der Massen der Neutralinos und Charginos verläuft analog zu der Berechnung der massiven Freiheitsgrade im Higgs-Sektor im letzten Abschnitt. Die Massen der Neutralinos und Charginos (k) ergeben sich durch Diagonalisieren der entsprechenden Massenmatrizen (2.73) und (2.75).

Die Werte der in den Massenmatrizen enthaltenen Parameter $M_{1,2,3}$, μ , b und der trilinearen Kopplungen $a_{t,b,\tau}$ (j) an der Skala der Symmetriebrechung m_S ergeben sich aus den in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien durch Auswertung an der entsprechenden Skala. Der Wert von $\tan\beta$ wird wiederum wie in den letzten beiden Abschnitten aus den Massen der Fermionen der dritten Familie berechnet.

Die Massen der Charginos lassen sich nach (2.78) berechnen, die Ausdrücke für die Eigenwerte der Massenmatrix der Neutralinos sind zu kompliziert und länglich, um sie abzubilden.

Die Masse der Gluinos $m_{\tilde{g}}$ (k) ergibt sich auf Baumgraphen-Niveau durch den Wert des Parameters M_3 , da die Gluinos als einziges ein Farb-Oktett bilden und so mangels dafür zur Verfügung stehender Partner nicht mischen; vergleiche Abschnitt 2.4.2. Die möglichen Korrekturen zur Gluino-Masse $m_{\tilde{g}}$ werden bei den Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt.

7.3.4 Massen der Sfermionen

Die Massen der Sfermionen, der Squarks, $m_{\tilde{t}_{1,2}}^2$ und $m_{\tilde{b}_{1,2}}^2$, und der Sleptonen $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2$ (m) ergeben sich analog zu den letzten beiden Abschnitten durch Diagonalisierung der entsprechenden Massenmatrizen (2.82, 2.85, 2.86). Die Werte der Parameter (l) werden wiederum aus den in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien durch Auswertung an der Skala der Symmetriebrechung

$Q = m_S$ bestimmt. Für den Wert von $\tan\beta$ gilt ebenfalls das in den letzten Abschnitten Gesagte.

7.4 Physikalische Bedingungen an das Potential

In diesem Abschnitt soll die Konkretisierung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie zur Anwendung im Rahmen des Algorithmus vorgenommen werden. Die Darstellung basiert auf den Bedingungen aus Kapitel 4 und dient dazu, die Berechenbarkeit im Rahmen des Algorithmus möglich zu machen. Dieses beinhaltet vor allem die Reduktion der angegebenen Bedingungen auf die dritte Familie der Fermionen und die damit verbundenen Größen und Kopplungen. In diesem Zusammenhang sei in Erinnerung gerufen, daß einige der Bedingungen die Einbeziehung von Dubletts verschiedener Familien voraussetzen. Diese werden sich für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchung als nicht anwendbar erweisen. Es sind davon jedoch nur einen kleiner Teil der untersuchten Bedingungen betroffen.

Es soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, daß aus Platzgründen in Abbildungen und Formeln teilweise die anglikanische Bezeichnung *constraint* der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Bedingungen verwendet wird. Dabei wird die Bedingung zur Beschränktheit des Potentials als UFB-constraint und die Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- Farbsymmetrie als CCB-constraints bezeichnet, wobei jeweils die erste, zweite und dritte Bedingung die Bezeichnung UFB-1-, UFB-2- und UFB-3- erhalten, und entsprechendes für die Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- Farbsymmetrie gilt.

7.4.1 Erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Wie schon in Abschnitt 4.3.1 angesprochen, geben Cases et al. an [20], daß die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB-1-constraint) (4.17)

$$V_{\text{UFB-1}}(Q = \hat{Q}) > V_{\text{real min}}(Q = m_S) \quad (7.13)$$

äquivalent zur traditionellen Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (traditional UFB-constraint)

$$m_+ \geq 2b \quad \text{oder} \quad m_1^2 + m_2^2 \geq 2b \quad (7.14)$$

aus Abschnitt 4.1 ist, wenn man fordert, daß (7.14) für alle Skalen Q mit $m_S < Q < m_{\text{GUT}}$ erfüllt ist.

Die Berechnung dieser Bedingung kann nun im Rahmen der in dieser Arbeit in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien des weich brechenden MSSM leicht vorgenommen werden, da die in (7.14) eingehenden Parameter aus den Fixlinien an jeder Skala innerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereiches der Renormierungsgruppengleichungen durch Auswerten der Fixlinien bestimmt werden kann. In diesem Zusammenhang sei noch einmal daran erinnert, daß die Evolution der Parameter durch die Ausnutzung der berechneten Fixmannigfaltigkeiten nach einer Wahl der verbleibenden freien Parameter vollständig bestimmt ist.

Die Bedingung (7.14) ist trivialerweise äquivalent zu

$$m_+ - 2b = m_1^2 + m_2^2 - 2b \geq 0 . \quad (7.15)$$

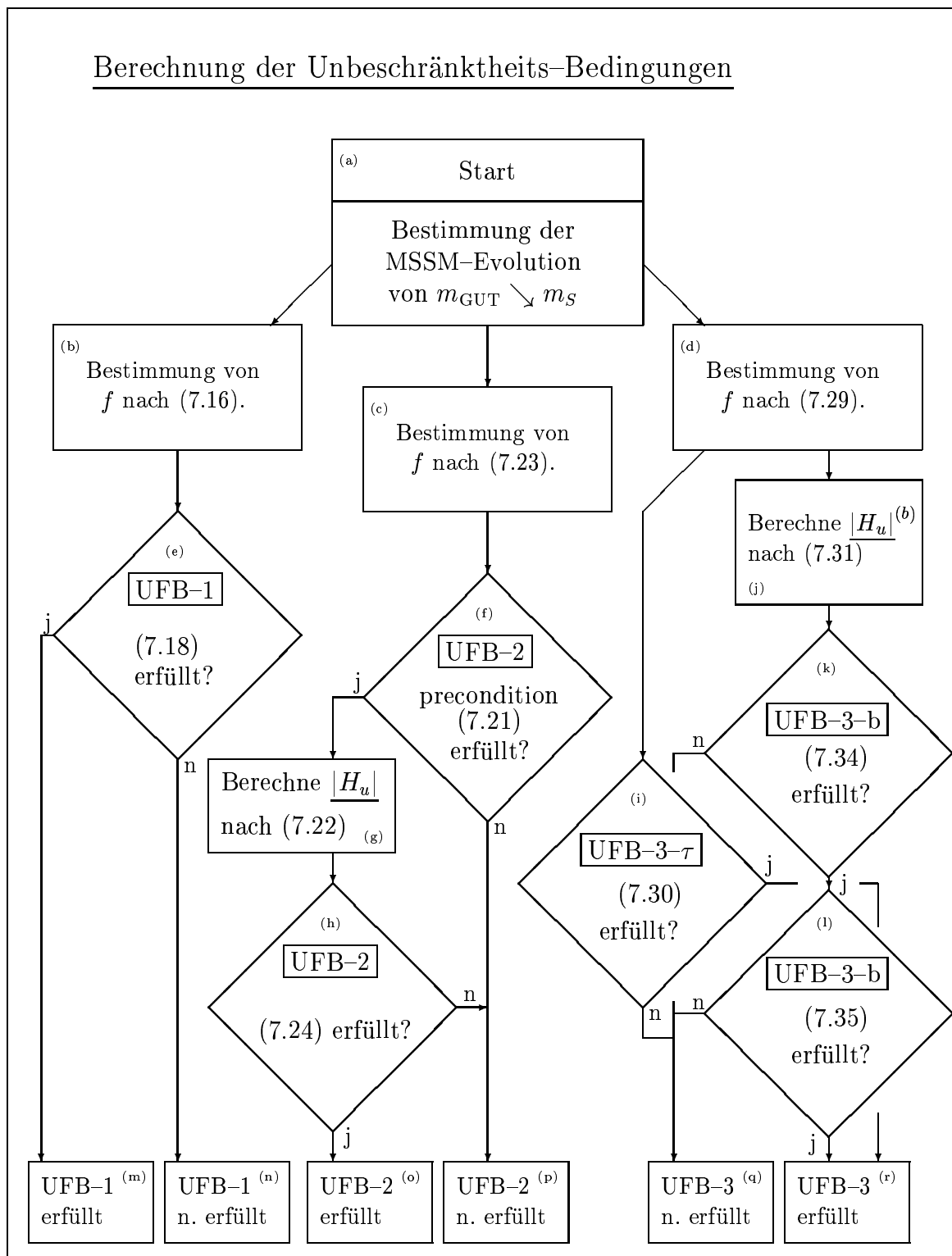


Abbildung 7.4: Ablaufplan zur Berechnung der ersten, zweiten und dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials im Rahmen des in Abbildung 7.1 im Überblick dargestellten Algorithmus. Aus Platzgründen werden in dieser Abbildung und in den Formeln, auf die Bezug genommen wird, die anglikanische Bezeichnungen der Unbeschränktheits-Bedingungen UFB-1-, UFB-2- und UFB-3-Constraint verwendet.

Damit ist die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (7.14) durch

$$\text{UFB-1 erfüllt} \iff \forall_{m_S \leq Q \leq m_{\text{GUT}}} : m_1^2 + m_2^2 - 2b \geq 0 \quad (7.16)$$

gegeben. Die Positivität der Bedingung (7.14) für die Skalen von m_S bis m_{GUT} kann folgendermaßen

$$\int_{m_S}^{m_{\text{GUT}}} dQ (m_1^2(Q) + m_2^2(Q) - 2b(Q) - |m_1^2(Q) + m_2^2(Q) - 2b(Q)|) = 0 \quad (7.17)$$

durch eine Integration ausgedrückt und so der Berechnung im Rahmen des Algorithmus zugänglich gemacht werden. Aufgrund der Berechnung der Bedingungen, beziehungsweise des Integrals (7.17) mittels des Rechners ist es schwierig oder genauer gesagt sogar unmöglich, in (7.17) die exakte Gleichheit ($= 0$) zu erhalten, da immer Rundungsfehler zu berücksichtigen sind. Aus diesem Grund ist zu fordern, daß Bedingungen wie (7.17) als erfüllt angesehen werden, wenn lediglich $\dots \leq \varepsilon$ gilt, wobei ε erfahrungsgemäß von der halben Größenordnung der Maschinengenauigkeit¹ sein sollte. Dies gilt natürlich für alle weiteren Bedingungen, in denen ein mittels des Computers generiertes Ergebnis mit dem Wert Null verglichen werden soll, und somit alle untersuchten Bedingungen, denn durch Subtrahieren der einen von der anderen Seite lassen sich alle Bedingungen auf eine Form wie (7.17) bringen. Man erhält so die Integration beziehungsweise Ungleichung

$$\int_{m_S}^{m_{\text{GUT}}} dQ (m_1^2(Q) + m_2^2(Q) - 2b(Q) - |m_1^2(Q) + m_2^2(Q) - 2b(Q)|) \leq \varepsilon \quad (7.18)$$

bei deren Erfüllung das Potential von unten beschränkt ist, und die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials als erfüllt angesehen werden kann.

7.4.2 Zweite Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Zur Konkretisierung der zweiten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB-2-constraint) wird wieder von der Bedingung (4.24)

$$V_{\text{UFB-2}}(Q = \hat{Q}) > V_{\text{real min}}(Q = m_S) \quad (7.19)$$

ausgegangen, wobei \hat{Q} durch

$$\hat{Q} \approx \max(g_2 |H_u|, y_t |H_u|, m_S) \quad (7.20)$$

gegeben ist. Zur Berechnung dieser Bedingung sei noch einmal daran erinnert, daß

$$b \leq m_2^2 - m_L^2 \quad (7.21)$$

¹Die Maschinengenauigkeit bei der zur Berechnung der Bedingungen verwendeten Mathematica Version (3.0.1) beträgt 16 Stellen, die sich wiederum aus einer Datenwort-Breite von 32Bit ergibt.

und

$$|H_u|^2 > \frac{4 m_{\tilde{L}}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} \left(1 - \frac{b^2}{(m_2^2 - m_{\tilde{L}}^2)^2} \right) \quad (7.22)$$

gelten muß. Zunächst sei angenommen, die Bedingung $b \leq m_2^2 - m_{\tilde{L}}^2$ werde erfüllt. Definiert man nun die Größe $\underline{|H_u|}^2$ als die rechte Seite von (7.22) und weiterhin eine Funktion $f(Q)$ durch

$$f(Q) = V_{\text{UFB-2}}(Q = \hat{Q}) - V_{\text{real min}}(Q = m_S) \quad , \quad (7.23)$$

so erhält man

$$\boxed{\int_{\underline{|H_u|}}^{m_{\text{GUT}}} dH_u (f(Q) - |f(Q)|)|_{Q=H_u} \leq \varepsilon} \quad , \quad (7.24)$$

wobei die Integration nun von $\underline{|H_u|}$ gegeben durch die rechte Seite von (7.22) bis $Q = m_{\text{GUT}}$ läuft.

Es sei noch einmal an die Bedingung $b \leq m_2^2 - m_{\tilde{L}}^2$ erinnert. Diese nimmt bei der Auswertung der zweiten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials mittels des Rechners die Rolle einer sogenannten *Vorbedingung* (precondition) ein. Ist

$$b \leq m_2^2 - m_{\tilde{L}}^2|_{Q=m_S} \quad (7.25)$$

nicht erfüllt, so wird (7.24) gar nicht erst ausgewertet.

7.4.3 Dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Für die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB-3-constraint) wird zwischen zwei Fällen unterscheiden: dem leptonischen oder Stau-Fall, der hier τ -Fall genannt werden soll, und dem Fall des Bottomquarks beziehungsweise Sbottom, der kurz bottom-Fall genannt werden soll.

Die Konkretisierung der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials beinhaltet einige Veränderungen gegenüber Abschnitt 4.3.3 aufgrund der Tatsache, daß nur Kopplungen und Größen im Zusammenhang mit der dritten Familie in den Untersuchungen dieser Arbeit eine Rolle spielen. Im τ -Fall kommt hinzu, daß sich einige Ausdrücke ändern, da sie Größen aus verschiedenen Familien enthalten.

Der τ -Fall Wie im letzten Abschnitt zur zweiten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials wird der Bereich der Integration in der numerischen Bedingung durch eine Wahl von $\underline{|H_u|}$ eingeschränkt. Im diesem Fall ist $\underline{|H_u|}^{(\tau)}$ durch die rechte Seite von (4.28) gegeben. Da jedoch $\tilde{L}_1 = 0$ und $\tilde{L}_2 = 0$ (die beiden leichten Familien) gilt, folgt aus (4.28) für $j = 3$ und $i = 1, 2$, da $i \neq j$ gelten muß

$$\begin{aligned} \underline{|H_u|}^{(\tau)} &= \sqrt{\frac{\mu^2}{4 y_{e_j}^2} + \frac{4 m_{\tilde{L}_i}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} - \frac{|\mu|}{2 y_{e_j}}} = \sqrt{\frac{\mu^2}{4 y_{\tau}^2} + \frac{4 m_{\tilde{L}_{1,2}}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} - \frac{|\mu|}{2 y_{\tau}}} = \\ &= \sqrt{\frac{\mu^2}{4 y_{\tau}^2} - \frac{|\mu|}{2 y_{\tau}}} = \frac{|\mu|}{2 y_{\tau}} - \frac{|\mu|}{2 y_{\tau}} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (7.26)$$

Aus dieser Tatsache folgt, daß das durch (4.29) gegebene Potential keine Verwendung mehr findet, und für alle $0 \leq |H_u| \leq m_{\text{GUT}}$ die Bedingung

$$V_{\text{UFB-3}}(Q = \hat{Q}) > V_{\text{real min}}(Q = m_S) \quad (7.27)$$

mit $V_{\text{UFB-3}}^{(\tau)}$ nach (4.30) zu

$$V_{\text{UFB-3}}^{(\tau)} = (m_1^2 - \mu^2) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_\tau} (m_L^2 + m_\tau^2) |H_u| + \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \left(|H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_\tau} |H_u| \right)^2 \quad (7.28)$$

gegeben ist. Analog zum vorhergehenden Abschnitt definiert man eine Funktion $f^{(\tau)}(Q)$ durch

$$f^{(\tau)}(Q) = V_{\text{UFB-3}}(Q = \hat{Q}) - V_{\text{real min}}(Q = m_S) , \quad (7.29)$$

und erhält

$$\boxed{\int_0^{m_{\text{GUT}}} dH_u (f^{(\tau)}(Q) - |f^{(\tau)}(Q)|) |_{Q=H_u} \leq \varepsilon} \quad (7.30)$$

Der bottom-Fall Im bottom-Fall kann im Gegensatz zum τ -Fall $i = j$ in (7.26) gelten. Man erhält mit den Ersetzungen aus Abschnitt 4.3.3

$$\underline{H_u}^{(b)} = \sqrt{\frac{\mu^2}{4 y_b^2} + \frac{4 m_{\hat{Q}}^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2}} - \frac{|\mu|}{2 y_b} . \quad (7.31)$$

Für $|H_u| < \underline{H_u}^{(b)}$ gilt dann

$$V_{\text{UFB-3}}^{(b)} = V_{\text{UFB-3}}^{(b,u)} = (m_1^2 - \mu^2 + m_{\hat{Q}}^2) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_b} (2 m_{\hat{Q}}^2 + m_b^2) |H_u| - \frac{2 (m_{\hat{Q}}^2)^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2} \quad (7.32)$$

aus Gleichung (4.29) und für $|H_u| > \underline{H_u}^{(b)}$ entsprechend

$$\begin{aligned} V_{\text{UFB-3}}^{(b)} = V_{\text{UFB-3}}^{(b,o)} &= (m_1^2 - \mu^2) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_b} (m_{\hat{Q}}^2 + m_b^2) |H_u| \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2 \right) \left(|H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_b} |H_u| \right)^2 \end{aligned} \quad (7.33)$$

nach Gleichung (4.30). Werden die Funktionen $f^{(b,u)}(Q)$ und $f^{(b,o)}(Q)$ analog zu (7.29) mit $V_{\text{UFB-3}}^{(b,u)}$ und $V_{\text{UFB-3}}^{(b,o)}$ gebildet, so erhält man den ersten

$$\boxed{\int_0^{\underline{H_u}^{(b)}} dH_u (f^{(b,u)}(Q) - |f^{(b,u)}(Q)|) |_{Q=H_u} \leq \varepsilon} \quad (7.34)$$

und den zweiten Anteil

$$\boxed{\int_{\underline{H_u}^{(b)}}^{m_{\text{GUT}}} dH_u (f^{(b,o)}(Q) - |f^{(b,o)}(Q)|) |_{Q=H_u} \leq \varepsilon} \quad (7.35)$$

der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials für den bottom-Fall. Zur konkreten Berechnung wird zuerst geprüft, ob der erste Teil (7.34) erfüllt wird. Ist dies der Fall, wird geprüft, ob auch der zweite Teil (7.35) erfüllt wird, womit gegebenenfalls der bottom-Fall der dritten Bedingung insgesamt als erfüllt angesehen wird.

7.4.4 Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie

Im Verlaufe der Konstruktion des Algorithmus hat sich gezeigt, daß die geplante Realisierung der Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie (CCB-constraints) in der in Abschnitt 4.3 dargestellten Form nicht vorgenommen werden konnte.

Die erste Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie (CCB-1-constraint) ist für kleine Yukawa-Kopplungen $y_f \ll 1$ gültig, was für die Yukawa-Kopplungen der Fermionen der ersten beiden Familien — $y_u, y_d, y_e, y_c, y_s, y_\mu$ — zutrifft. Diese sind jedoch nicht Gegenstand der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit. Hinzu kommt erschwerend, daß für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes die Yukawa-Kopplungen des Bottomquarks und des Tauleptons Null sind und eine sinnvolle Ableitung der ersten Bedingung nach Abschnitt 4.3.5 nicht möglich ist. Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes sind sowohl die Yukawa-Kopplungen des Topquarks, des Bottomquarks und des Tauleptons — wie erwähnt — zu groß.

Die zweite und dritte Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie sind von den Aspekten der Konstruktion im Rahmen des Algorithmus gleich, sie unterscheiden sich nur in der Wahl unterschiedlicher Vorzeichen; siehe dazu Abschnitte 4.3.6 und 4.3.7.

Die Konstruktion ist formal durchgeführt worden, es hat sich aber gezeigt, daß die Auswertung der Bedingungen im numerischen Sinne nicht durchführbar, da zu rechenintensiv war. Dies hat seinen Grund vor allem in der numerischen Integration der funktionalen Abhängigkeit der Größen α , $|H_u|_{\text{ext}}$ und γ , deren Auswertung an zu vielen Stützstellen vorgenommen werden mußte.

Als Alternative wurde auf die Auswertung einer laufenden Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie ausgewichen. Diese ergibt sich aus den traditionellen Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie aus Abschnitt 4.1

$$\begin{aligned} a_t^2 &\leq 3 \left(m_{H_u}^2 + m_Q^2 + m_t^2 \right) \\ a_b^2 &\leq 3 \left(m_{H_d}^2 + m_Q^2 + m_b^2 \right) \\ a_\tau^2 &\leq 3 \left(m_{H_d}^2 + m_L^2 + m_\tau^2 \right) . \end{aligned} \quad (7.36)$$

Dies bedeutet, daß die Bedingungen (7.36) für den gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM von der UV-Skala $Q = m_{\text{GUT}}$ bis zur Symmetriebrechungsskala $Q = m_S$ erfüllt sein müssen.

Zur Konstruktion einer berechenbaren Bedingung wird analog zum Abschnitt 7.4.1 vorgegangen. Dies sei beispielhaft für den Fall der Bedingung des Topquarks beziehungsweise Stop (7.36, erste Gl.) durchgeführt. Die Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie im Fall des Topquarks/Stop ist trivial äquivalent zu $(m_{H_u}^2 + m_Q^2 + m_t^2) - a_t^2 \geq 0$, und man definiert wie gewohnt eine Funktion $f(Q)$ nach

$$f(Q) = 3 \left(m_{H_u}^2 + m_Q^2 + m_t^2 \right) - a_t^2 . \quad (7.37)$$

So ergibt sich zum Beispiel die traditionelle Bedingung zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie für das Topquark/Stop durch $f(Q) \geq 0$. Die laufende Bedingung ergibt sich demnach entsprechend der letzten Abschnitte zu

$$\boxed{\text{CCB-}t \text{ erfüllt} \quad \iff \quad \forall_{m_S \leq Q \leq m_{\text{GUT}}} : f(Q) \geq 0} \quad (7.38)$$

und das numerische Kriterium, das zu erfüllen ist, zu

$$\boxed{\int_{m_S}^{m_{\text{GUT}}} dQ (f(Q) - |f(Q)|) \leq \varepsilon} \quad (7.39)$$

mit der entsprechenden Definition von f nach (7.37).

Die Bedingung für das Bottomquark/Sbottom und das Taulepton/Stau lassen sich analog zur dargestellten Bedingung für das Topquark/Stop ableiten und führen auf formal identische numerische Kriterien. Die Darstellung des Vorgehens im Rahmen des Algorithmus zur Berechnung der laufenden Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie in einer verdeutlichenden Abbildung soll unterbleiben. Es entspricht jeweils den Kästen (a), (b) und (e) zur Berechnung der ersten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials in Abbildung 7.4 mit den entsprechenden Ersetzungen zur Definition der Funktion f .

7.5 Radiative spontane elektroschwache Symmetriebrechung

In diesem Kapitel soll auf die Analyse der Minimierungs- beziehungsweise Stationaritätsbedingung hinsichtlich der elektroschwachen Symmetriebrechung im Rahmen des Algorithmus eingegangen werden. Wie in Abschnitt 2.3.2 dargestellt, führt die Minimierung des Higgs-Potentials $V(H_u, H_d)$ (2.28) über die Stationaritätsbedingungen auf Ausdrücke für die Masse des Z -Bosons

$$m_Z^2 = - \left(\frac{m_-}{\sqrt{m_+^2 - 4b^2}} \pm 1 \right) m_+ . \quad (7.40)$$

und den Wert des Parameters $\tan\beta$

$$\tan\beta = \frac{2b}{m_+ \pm \sqrt{m_+^2 - 4b^2}} . \quad (7.41)$$

in Abhängigkeit von den Parametern m_+ , m_- und b . Zur Erinnerung: Die Parameter m_+ und m_- sind folgendermaßen definiert

$$m_+ = m_1^2 + m_2^2 \quad \text{und} \quad m_- = m_1^2 - m_2^2 , \quad (7.42)$$

wobei wiederum

$$m_1^2 = m_{H_u}^2 + |\mu|^2 \quad \text{und} \quad m_2^2 = m_{H_d}^2 + |\mu|^2 \quad (7.43)$$

gilt. Der Parameter μ stellt den Higgs-Mischungsparameter dar und die Parameter $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ die Higgs-Massenparameter.

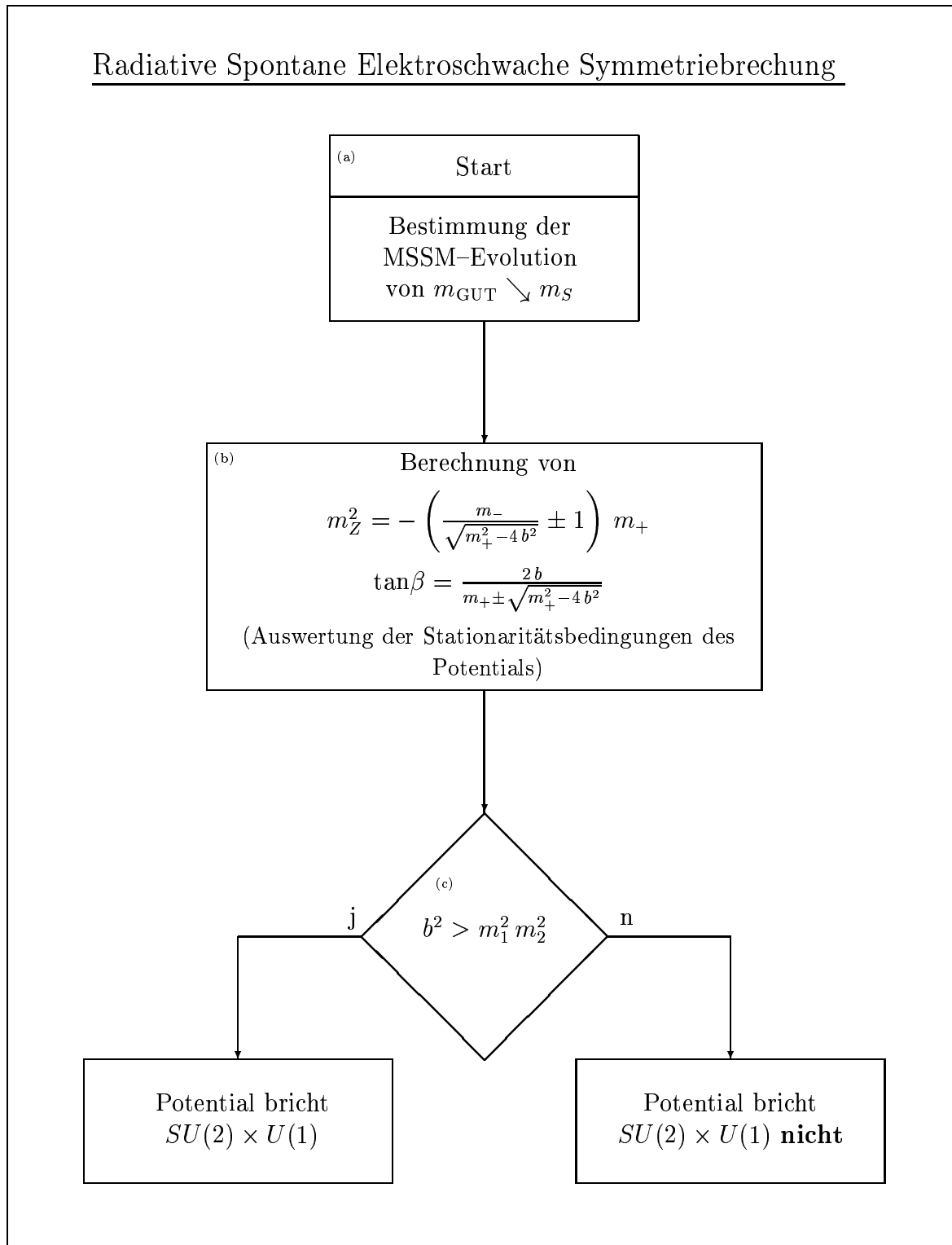


Abbildung 7.5: Ablaufplan zur Analyse des Potentials hinsichtlich der radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung im Rahmen des in Abbildung 7.1 im Überblick dargestellten Algorithmus.

Die Werte dieser Parameter an der Symmetriebrechungsskala m_S ergeben sich durch die Auswertung der in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM an der fraglichen Skala. In diesem Zusammenhang soll noch einmal erwähnt werden, daß die gesamten Renormierungsgruppengleichungen durch die Wahl der verbleibenden freien Parameter des Modells, μ_0 und $m_{1/2}$ vollständig festgelegt sind und sich somit auch die Auswertung der elektroschwachen Symmetriebrechung in Abhängigkeit der beiden verbleibenden freien Parameter ergibt.

Kasten (b) symbolisiert die oben angeführte Berechnung der Werte von m_Z und $\tan\beta$ aus den Stationaritätsbedingungen des Potentials. Mittels der berechneten Werte kann durch einen Vergleich der Ergebnisse mit den experimentellen Vorgaben im Fall des Z-Bosons darüber entschieden werden, ob das Potential in der Lage ist, im symmetriebrechenden Minimum eine geeignete Masse des Z-Bosons vorherzusagen.

In (c) wird die Auswertung der Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“, vergleiche Abschnitt 4.1,

$$b^2 > m_1^2 m_2^2 \quad (7.44)$$

vorgenommen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so liegt im Ursprung ein Minimum vor. Daraus folgt, daß das Potential nicht in der Lage ist, die elektroschwache Symmetrie zu brechen. Das System verbleibt im symmetrischen Ursprung, der ein stabiles Minimum darstellt und die Symmetrie ungebrochen beläßt.

Teil III

Ergebnisse und Auswertung

In diesem Teil der Arbeit wird die Darstellung und Auswertung der Ergebnisse aus der Untersuchung des weich brechenden MSSM vorgenommen. Dabei sei hier noch einmal erwähnt, daß durch die in Kapitel 6 bestimmten Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM eine Untersuchung der Vorhersagen des weich brechenden MSSM in Abhängigkeit von nur noch zwei verbleibenden freien Parametern vorgenommen werden konnte. Nimmt man eine Wahl dieser Parameter vor, so sind die Werte der gesamten Parameter des MSSM unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors für den gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen zwischen der UV- und der IR-Skala vollständig festgelegt.

In Kapitel 8 wird die Darstellung der einzelnen im Rahmen des Algorithmus untersuchten Teilaspekte vorgenommen. Dabei handelt es sich um die Ergebnisse der Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_S im Rahmen des Algorithmus in Abschnitt 8.1, die Ergebnisse der Untersuchung der elektroschwachen Symmetriebrechung in Abschnitt 8.2, der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie in Abschnitt 8.3 sowie die Ergebnisse der Bestimmung der Massen der Quarks und Leptonen und der Teilchen des weich brechenden Sektors in Abschnitt 8.4.

In Kapitel 9 wird eine zusammenfassende und abschließende Auswertung der in den eben erwähnten Abschnitten dargestellten Ergebnisse vorgenommen. Diese hat vor allem die Kombination der einzelnen Bedingungen und Einschränkungen zum Gegenstand, stellt diese in einen Zusammenhang und liefert eine abschließende Aussage über die Einschränkung des Bereiches der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, des weich brechenden MSSM.

Kapitel 8

Darstellung und Auswertung der Ergebnisse

In diesem Kapitel wird eine strukturierte Darstellung der einzelnen im Rahmen des Algorithmus berechneten Teilaspekte vorgenommen. Dabei wird weitestgehend eine vergleichende Darstellung der Ergebnisse der Evolution des low- $\tan\beta$ - und high- $\tan\beta$ -Fixpunktes angestrebt, um die Unterschiede in den Ergebnissen für beide Fälle herauszuarbeiten.

Ausgehend von den in Abschnitt 8.1 dargestellten Ergebnissen für die Bestimmung der allen Berechnungen zugrunde liegenden Symmetriebrechungsskala m_S werden in Abschnitt 8.2 die Ergebnisse der Untersuchung der Möglichkeiten der elektroschwachen Symmetriebrechung vorgenommen.

In Abschnitt 8.3 erfolgt die Darstellung der Auswertung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie, in Abschnitt 8.4 die Darstellung der Ergebnisse für die Berechnung der Massen der Quarks und Leptonen und der Massen des weich brechenden Sektors, wobei ein weiterer Schwerpunkt auf die Analyse der Masse des leichtesten Higgs-Bosons gelegt wird, das mit dem Higgs-Boson des Standardmodells identifiziert werden kann.

Nach diesem Kapitels wird in Kapitel 9 eine abschließende Zusammenfassung der Auswertung der Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit vorgenommen. Dabei werden die Einschränkungen im Bereich des Raums der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, vorgenommen.

Auch in diesem Kapitel wird aus Platzgründen in Abbildungen und Formeln teilweise die anglikanische Bezeichnung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie, UFB- und CCB-Constraint, verwendet. Die Bezeichnungen LTB und HTB beziehen sich, wie in der gesamten Arbeit, auf den low- $\tan\beta$ - und high- $\tan\beta$ -Fixpunkt beziehungsweise auf die Evolution des low- $\tan\beta$ - und high- $\tan\beta$ -Fixpunktes und sind vor allem an Abbildungen angebracht, um die dargestellten Ergebnisse leicht einem der Fixpunkte zuordnen zu können.

8.1 Die Symmetriebrechungsskala m_S

In diesem Abschnitt wird die Verteilung der Werte der Symmetriebrechungsskala m_S in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, dargestellt. Die Berechnungen von m_S erfolgen mittels des in Abschnitt 7.2 geschilderten „Iterativen Algorithmus“.

Es zeigt sich, daß die Skala m_S im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes aufgrund der Art der Berechnung der Skala m_S aus den Massen und der zugrundeliegenden Massen der skalaren Teilchen für den gesamten Bereich im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ den Wert $m_S = m_{top}^{pole}$ annimmt. Die Skala m_{top}^{pole} stellt die niedrigste im Rahmen des Algorithmus zugelassene Skala zur Symmetriebrechung dar. Es gilt somit

$$m_S^{HTB} \approx 5.16 \quad (8.1)$$

für den gesamten Bereich im Raum der freien Parameter im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

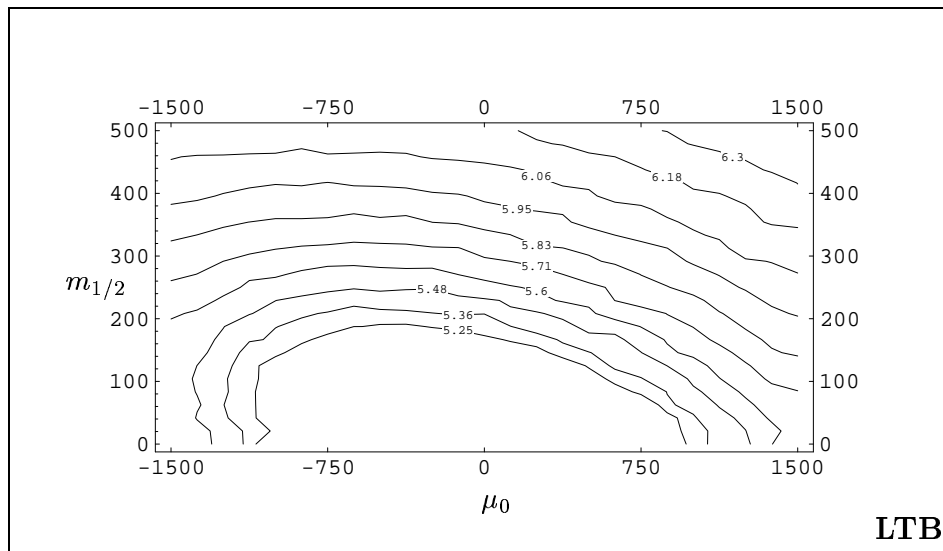


Abbildung 8.1: Verteilung der Werte der Symmetriebrechungsskala m_S im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$. Der Wert schwankt zwischen $t = \log m_{top}^{pole} \approx 5.15$ und $t \approx 6.4 \hat{=} Q = 600 \text{ GeV}$. Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes beträgt der Wert der Symmetriebrechungsskala für den gesamten Bereich im Raum der freien Parameter $t = \log m_{top}^{pole} \approx 5.15$, die kleinste im Zusammenhang mit dem Algorithmus zugelassene Skala.

Im Gegensatz dazu zeigt die Verteilung der Werte im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes Bereiche, in denen sich der Wert der Skala oberhalb der niedrigsten erlaubten Brechungsskala m_{top}^{pole} befindet. Die berechneten Werte liegen im Bereich

$$m_S^{HTB} \in (5.16, 6.4) \hat{=} Q = \left(m_{top}^{pole}, 600 \text{ GeV} \right), \quad (8.2)$$

die Abbildung 8.1 zeigt die Werte von m_S , aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern des weich brechenden MSSM, μ_0 und $m_{1/2}$.

Es soll in diesem Zusammenhang noch einmal darauf hingewiesen werden, daß die Definition von m_{top}^{pole} als niedrigste erlaubte Skala der Symmetriebrechung keine physikalische oder durch die Theorie gegebene Einschränkung dieser Untersuchungen oder des Modells an sich darstellt. Die Setzung von m_{top}^{pole} als Skala der Brechung der Supersymmetrie stellt in der Literatur [7, 36] eine weit verbreitete Wahl dar.

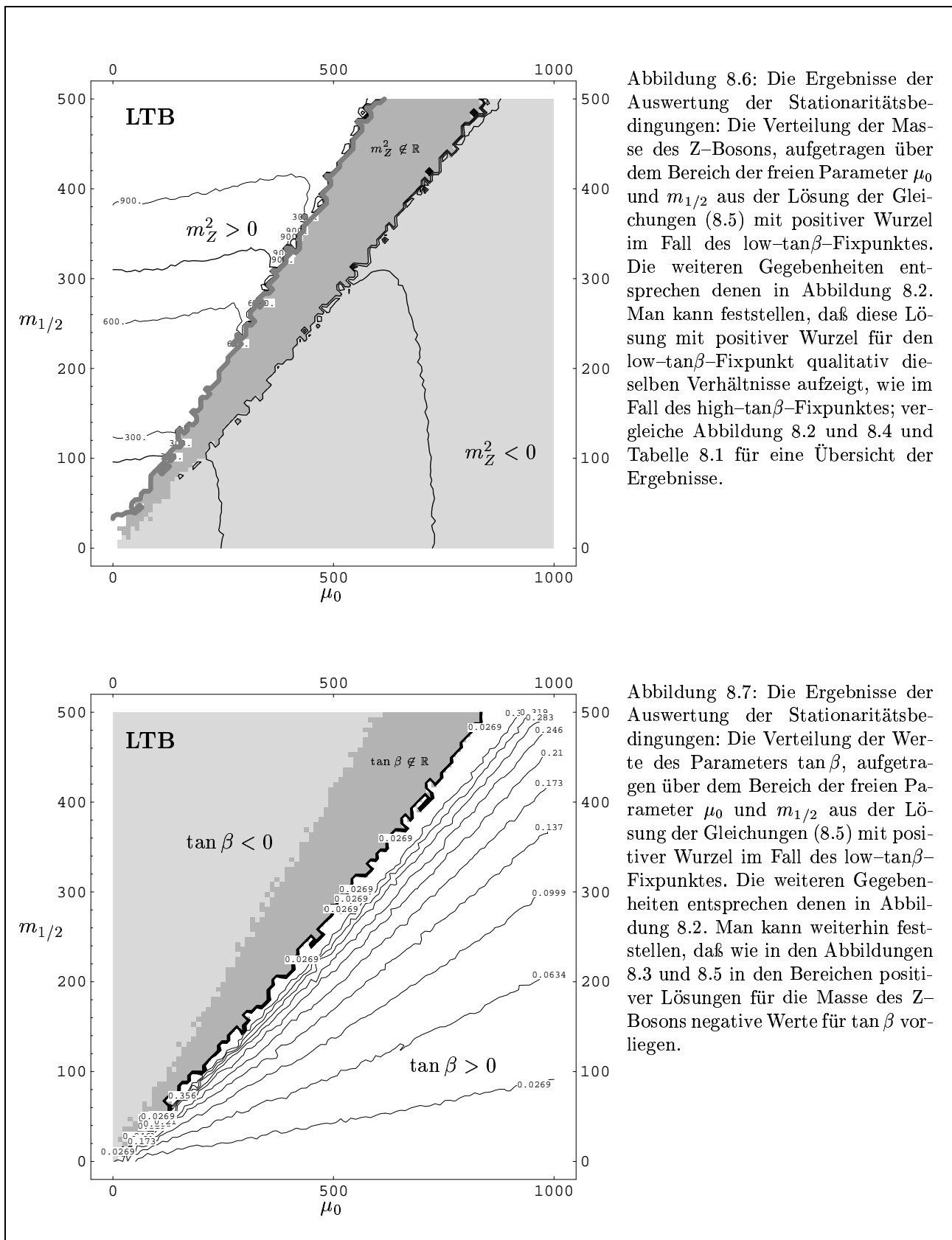


Abbildung 8.6: Die Ergebnisse der Auswertung der Stationaritätsbedingungen: Die Verteilung der Masse des Z-Bosons, aufgetragen über dem Bereich der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus der Lösung der Gleichungen (8.5) mit positiver Wurzel im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die weiteren Gegebenheiten entsprechen denen in Abbildung 8.2. Man kann feststellen, daß diese Lösung mit positiver Wurzel für den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt qualitativ dieselben Verhältnisse aufzeigt, wie im Fall des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes; vergleiche Abbildung 8.2 und 8.4 und Tabelle 8.1 für eine Übersicht der Ergebnisse.

Abbildung 8.7: Die Ergebnisse der Auswertung der Stationaritätsbedingungen: Die Verteilung der Werte des Parameters $\tan\beta$, aufgetragen über dem Bereich der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus der Lösung der Gleichungen (8.5) mit positiver Wurzel im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die weiteren Gegebenheiten entsprechen denen in Abbildung 8.2. Man kann weiterhin feststellen, daß wie in den Abbildungen 8.3 und 8.5 in den Bereichen positiver Lösungen für die Masse des Z-Bosons negative Werte für $\tan\beta$ vorliegen.

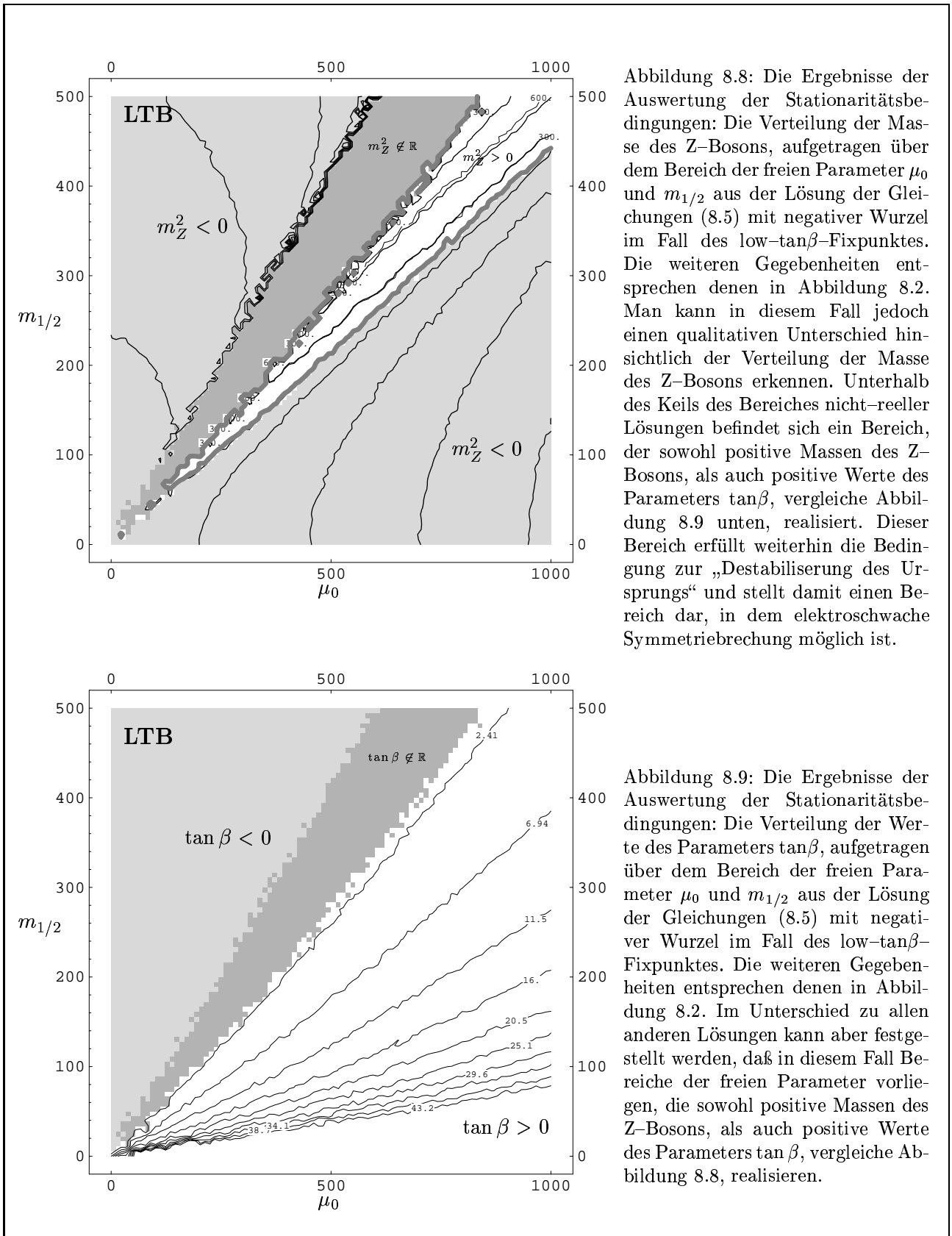


Abbildung 8.8: Die Ergebnisse der Auswertung der Stationaritätsbedingungen: Die Verteilung der Masse des Z-Bosons, aufgetragen über dem Bereich der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus der Lösung der Gleichungen (8.5) mit negativer Wurzel im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die weiteren Gegebenheiten entsprechen denen in Abbildung 8.2. Man kann in diesem Fall jedoch einen qualitativen Unterschied hinsichtlich der Verteilung der Masse des Z-Bosons erkennen. Unterhalb des Keils des Bereiches nicht-reeller Lösungen befindet sich ein Bereich, der sowohl positive Massen des Z-Bosons, als auch positive Werte des Parameters $\tan\beta$, vergleiche Abbildung 8.9 unten, realisiert. Dieser Bereich erfüllt weiterhin die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ und stellt damit einen Bereich dar, in dem elektroschwache Symmetriebrechung möglich ist.

Abbildung 8.9: Die Ergebnisse der Auswertung der Stationaritätsbedingungen: Die Verteilung der Werte des Parameters $\tan\beta$, aufgetragen über dem Bereich der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus der Lösung der Gleichungen (8.5) mit negativer Wurzel im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die weiteren Gegebenheiten entsprechen denen in Abbildung 8.2. Im Unterschied zu allen anderen Lösungen kann aber festgestellt werden, daß in diesem Fall Bereiche der freien Parameter vorliegen, die sowohl positive Massen des Z-Bosons, als auch positive Werte des Parameters $\tan\beta$, vergleiche Abbildung 8.8, realisieren.

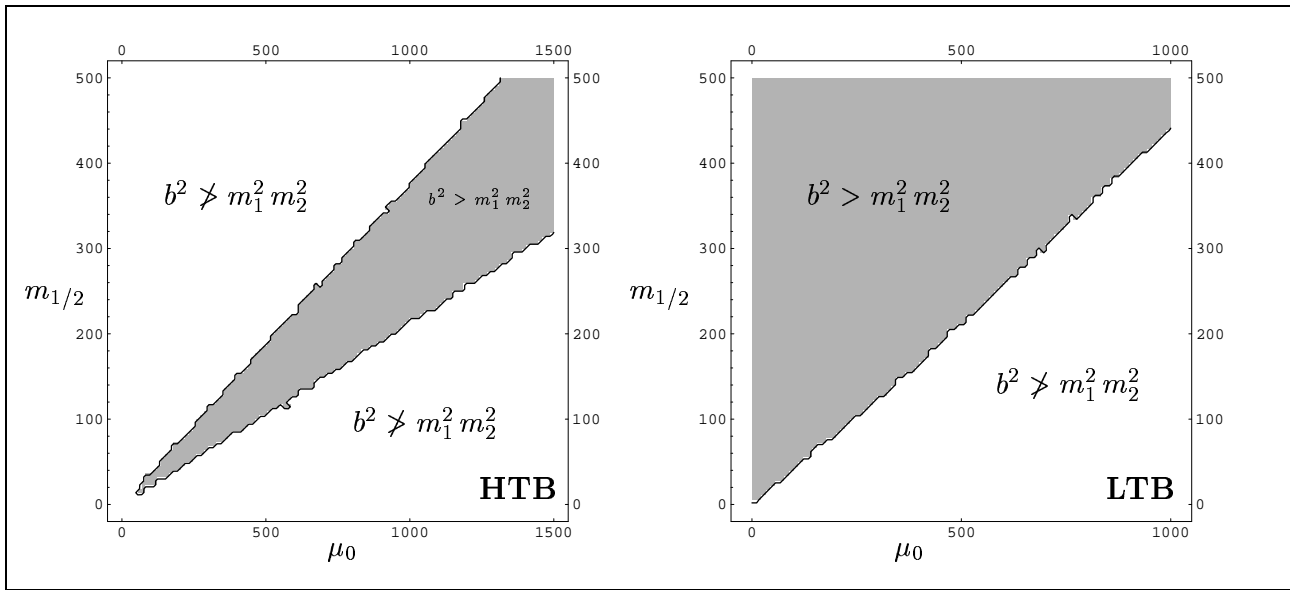


Abbildung 8.10: Darstellung der Bereiche, in denen die Bedingung zur „Destabilisierung des Minimums“ erfüllt ist (grau). Die Bedingung ist nach Abschnitt 2.3.2 genau dann erfüllt, wenn $b^2 > m_1^2 m_2^2$ gilt und läßt eine Aussage darüber zu, ob am Ort des Ursprungs im Raum der Felder ($H_u = 0$, $H_d = 0$) ein Minimum vorliegt. Trifft dies zu, so ist das Potential nicht in der Lage, die elektroschwache Symmetrie auf geeignete Weise zu brechen. Für den high- $\tan\beta$ -Fixpunkt, linke Graphik, deckt sich dieser Bereich mit dem Bereich der freien Parameter, der zu nicht-reellen Werten für das Massenquadrat des Z-Bosons und $\tan\beta$ führt; vergleiche Abbildungen 8.2 bis 8.5. Für den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt trifft der Bereich, in dem eine Destabilisierung des Ursprungs vorliegt, im Fall der negativen Wurzel der Lösung (8.5) mit dem Bereich der freien Parameter zusammen, der zu positiven Werten für die Masse des Z-Bosons und des Parameters $\tan\beta$ führt; vergleiche Abbildungen 8.8 und 8.9.

8.2 Elektroschwache Symmetriebrechung

Wie in den einführenden Abschnitten, vergleiche Kapitel 2.3.1, angesprochen, erlaubt die Minimierung des durch (2.28) gegebenen skalaren Potentials V des weich brechenden MSSM aus den Stationaritätsbedingungen die Berechnung der Masse, beziehungsweise des Massenquadrates des Z-Bosons und des Wertes von $\tan\beta$. Die sich ergebenden Werte werden über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, aufgetragen und können mit den experimentellen Vorgaben verglichen werden. Die Berechnung des Quadrates der Masse des Z-Bosons aus den Stationaritätsbedingungen kann wie auch die Berechnung von $\tan\beta$ zu negativen oder nicht-reellen Werten führen. Es ist nicht möglich, aus negativen Massenquadraten auf befriedigende Weise einen Wert für die Masse des Z-Bosons zu berechnen.

Zusätzlich zur Auswertung der Stationaritätsbedingung wird im skalaren Potential die Bedingung 2.51 aus Abschnitt 2.3.2

$$b^2 > m_1^2 m_2^2 \quad (8.3)$$

untersucht. Diese wird als Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ bezeichnet und erlaubt eine Aussage über die Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung, vergleiche Abschnitt 2.3.2, indem er eine Bedingung dafür angibt, daß im Ursprung des Raumes der Felder ($H_u = 0$, $H_d = 0$) kein lokales Minimum vorliegt, das eine Brechung der Symmetrie verhindern würde.

Zur Durchführung der Minimierung des skalaren Potentials wird unter Vernachlässigung aller Terme, die nicht mit den beiden Higgs-Dubletts in Verbindung stehen, nach allen Komponenten der auftretenden Felder minimiert. Nach dem Übergang zu Vakuum Erwartungswerten der

Higgs–Doublets — nur die neutralen Komponenten erhalten von Null verschiedene Vakuumerwartungswerte v_u und v_d — und einigen Umformungen, vergleiche Abschnitt 2.3.2, stellen die Stationaritätsbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial v_u} V \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial v_d} V \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.4)$$

Gleichungen in den Variablen m_Z^2 , $\tan\beta$, μ , b , $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ dar, die zur Berechnung von m_Z^2 und $\tan\beta$ nach

$$\begin{aligned} m_Z^2 &= - \left(\frac{m_-}{\sqrt{m_+^2 - 4b^2}} \pm 1 \right) m_+ \\ \tan\beta &= \frac{2b}{m_+ \pm \sqrt{m_+^2 - 4b^2}} \end{aligned} \quad (8.5)$$

umgeformt werden können. Zur Erinnerung: Es ist $m_{\pm} = m_1^2 \pm m_2^2$ und $m_{1,2} = |\mu|^2 + m_{H_{u,d}}^2$. Die Gleichungen (8.5) besitzen sowohl für die Evolution des high- $\tan\beta$ - als auch den low- $\tan\beta$ -Fixpunktes zwei Lösungen, jeweils eine mit negativer und eine mit positiver Wurzel.

Hier soll noch einmal verdeutlicht werden, daß die Werte der Parameter μ , b , $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ aus den in Kapitel 6 beziehungsweise 6.2 berechneten Fixmannigfaltigkeiten beziehungsweise Fixlinien durch Auswertung an der Skala m_S bestimmt werden. Durch eine Wahl der verbleibenden freien Parameter der Theorie, μ_0 und $m_{1/2}$, sind die Parameter durch die Fixmannigfaltigkeiten an jeder Skala des physikalischen Gültigkeitsbereiches der Renormierungsgruppengleichungen vollständig festgelegt.

8.2.1 Lösungen für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes

Die Abbildungen 8.2 und 8.3 stellen die Lösung mit positiver Wurzel, die Abbildungen 8.4 und 8.5 die Lösungen mit negativer Wurzel im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar. In den Bereichen, in denen sich ein negatives Massenquadrat für das Z-Boson ergibt, wird hier, wie in allen nachfolgenden Abbildungen, die Größe $-\sqrt{|m_Z^2|}$ aufgetragen.

Beide Lösungen führen zu annähernd identischen Verhältnissen beim Auftragen der Masse des Z-Bosons und des Wertes von $\tan\beta$ über den freien Parametern. Die grauen keilförmigen Bereiche kennzeichnen die Bereiche der freien Parameter, in denen es nicht möglich ist, reelle Werte für das Massenquadrat des Z-Bosons und $\tan\beta$ zu berechnen. Es gilt $m_+^2 < 4b^2$ und man erhält negative Radikanten in den Lösungen (8.5).

Die angedeutete dickere graue Linie oberhalb der angesprochenen Bereiche nicht-reeller Lösungen stellt die Bereiche der freien Parameter dar, in denen sich Massen des Z-Bosons ergeben, die den experimentellen Vorgaben von $m_Z = 91.187 \text{ GeV}$ näherungsweise entsprechen. In der Zusammenfassung der Ergebnisse in Kapitel 9 sind in den dort enthaltenen Abbildungen 9.1 und 9.2 diese Bereiche genauer gekennzeichnet.

Sowohl für die Lösung mit negativer Wurzel, als auch für die Lösung mit positiver Wurzel läßt sich erkennen, daß in den Bereichen positiver Massenquadrate des Z-Bosons negative Werte für $\tan\beta$ vorliegen. Weiterhin bewegen sich die Werte von $\tan\beta$ in Bereichen bis ≈ 16 im Fall der negativen Wurzel, vergleiche Abbildung 8.5, und bis ≈ 0.2 im Fall der positiven Wurzel, vergleiche Abbildung 8.3.

Weiterhin zeigt die Abbildung 8.10 die Bereiche im Raum der freien Parameter, in denen die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ $b^2 > m_1^2 m_2^2$ erfüllt ist, als graue Flächen. Hier zeigt sich im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, linke Graphik, daß diese Bedingung nur in dem Bereich erfüllt ist, der ausschließlich nicht-reelle Lösungen liefert.

8.2.2 Lösungen für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes

Die Abbildungen 8.2 und 8.3 stellen die Lösung mit positiver Wurzel, die Abbildungen 8.4 und 8.5 die Lösungen mit negativer Wurzel im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar. Die Lösung mit positiver Wurzel zeigt qualitativ das gleiche Verhalten wie die Lösungen im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. In den Bereichen der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, die positive Lösungen für das Massenquadrat des Z-Bosons liefern, ist der Parameter $\tan\beta$ negativ und nimmt Werte bis zu $\tan\beta \approx 0.17$ an.

Im Fall der negativen Lösung (siehe Abbildungen 8.4 und 8.5) stellt sich ein qualitativ anderes Verhalten dar. Unterhalb des Bereiches nicht-reeller Lösungen — in den Abbildungen wiederum als grauer Keil eingezeichnet — befindet sich ein Bereich von Lösungen, die sowohl für das Massenquadrat des Z-Bosons als auch für den Parameter $\tan\beta$ positive Werte liefern. Dieser Bereich liegt weiterhin innerhalb des Bereiches der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, die in der Lage sind, eine Destabilisierung des Minimums, vergleiche Abbildung 8.10, vorherzusagen. Für diesen Fall ist somit die radiative elektroschwache Symmetriebrechung möglich, und es können geeignete Werte für die Masse des Z-Bosons und den Parameter $\tan\beta$ vorhergesagt werden. Die Werte von $\tan\beta$ liegen in diesem Bereich bis $\tan\beta \approx 5$.

8.2.3 Vergleich des low- $\tan\beta$ - und des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes

In diesem Abschnitt sollen die in den letzten beiden Abschnitten geschilderten Verhältnisse für die Evolution des low- $\tan\beta$ - und des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes noch einmal näher betrachtet und dabei miteinander verglichen werden. Es wird sich zeigen, daß die Struktur der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM eine Begründung für die vorliegenden Ergebnisse, die Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes und das Mißlingen im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, liefern kann.

Als Ausgangspunkt wird gefordert, daß das Massenquadrat des Z-Bosons, der Wert von $\tan\beta$ (8.5) und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“, $b^2 > m_1^2 \cdot m_2^2$, gleichzeitig größer Null beziehungsweise erfüllt sein sollen. Es werden nun einige Abschätzungen vorgenommen, die auf der Transformation (6.3), beziehungsweise deren inverser Transformation beruhen und eine Beziehung zwischen den Kopplungen und den transformierten Kopplungen, das heißt Verhältnissen der Kopplungen, herstellen. Die Werte der transformierten Kopplungen können aus den Abbildungen 6.2 und 6.1 an der Skala $Q \approx m_{top}^{pole}$ abgelesen und mittels der inversen Transformation in Werte der Kopplungen umgerechnet werden.

high- $\tan\beta$ -Fixpunkt	low- $\tan\beta$ -Fixpunkt
$b^{\text{IR}} = M_3 \mu \rho_b^{\text{IR}}$	$b^{\text{IR}} = M_3 \mu \rho_b^{\text{IR}}$
$\rho_b^{\text{IR}} \approx 0.38$	$\rho_b^{\text{IR}} \approx 0.12$
$\mu_{\text{IR}} \approx 0.665 \mu_0$	$\mu_{\text{IR}} \approx 0.735 \mu_0$
$m_{H_u}^2 = M_3^2 \rho_{H_u}^{\text{IR}}$	$m_{H_u}^2 = M_3^2 \rho_{H_u}^{\text{IR}}$
$m_{H_d}^2 = M_3^2 \rho_{H_d}^{\text{IR}}$	$m_{H_d}^2 = M_3^2 \rho_{H_d}^{\text{IR}}$
$\rho_{H_u}^{\text{IR}} \approx -0.36$ $\rho_{H_d}^{\text{IR}} \approx -0.34$	$\rho_{H_u}^{\text{IR}} \approx -0.45$ $\rho_{H_d}^{\text{IR}} \approx 0.12$

In den Transformationen (6.3) wurde die Größe M_1 gegenüber M_3 vernachlässigt, was im IR-Bereich eine berechnete Annahme darstellt, da $g_3 \gg g_1$ gilt. Weiterhin kann der Wert von M_3 in Abhängigkeit von der unifizierenden Gaugino-Masse $m_{1/2}$, einem der beiden freien Parameter des weich brechenden MSSM, durch Analyse der Verteilung der Werte von M_3 über den freien Parameter zu $M_3 \approx 12/5 \cdot m_{1/2}$ abgeschätzt werden. Setzt man diese Abschätzungen der Werte der Parameter beziehungsweise Kopplungen im IR-Bereich in den Ausdruck für das Massenquadrat des Z-Bosons, den Ausdruck für $\tan\beta$ — in beiden Fällen soll die negative Wurzel verwendet werden — und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ ein, so erhält man deren Werte in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern der Theorie, μ_0 und $m_{1/2}$.

Es fällt auf, daß die Werte des Higgs-Massen-Parameters $m_{H_d}^2$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ - und des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes verschiedene Vorzeichen besitzen. Dies wird sich als ausschlaggebend zur Entscheidung über die Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung herausstellen. Dazu werden wie angeführt sämtliche Abschätzungen bis auf den Wert von ρ_{H_d} in den Ausdruck für das Massenquadrat des Z-Bosons, den Ausdruck für $\tan\beta$ und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ eingesetzt und die sich aus den Forderungen

$$m_Z^2 > 0 \quad \tan\beta > 0 \quad b^2 - m_1^2 m_2^2 > 0 \quad (8.6)$$

ergebenden Ungleichheiten für exemplarische Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ nach ρ_{H_d} aufgelöst. Für die Werte der verbleibenden freien Parameter werden beispielhaft folgende drei Wahlen getroffen:

i) Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes soll $\mu_0 = 750$ und $m_{1/2} = 300$ gelten. Diese Kombination der freien Parameter liegt nach Abbildung 8.8 und 8.9 in dem Bereich, in dem elektroschwache Symmetriebrechung möglich ist und sowohl m_Z^2 als auch $\tan\beta$ positive Werte besitzen; vergleiche auch Bereich III in Abbildung 9.1.

Man erhält so folgende Ungleichheiten für den Wert von ρ_{H_d}

$$\begin{aligned} m_Z^2 > 0 &\iff \rho_{H_d} \in (-0.75, -0.57) \vee \rho_{H_d} > -0.25 \\ \tan\beta > 0 &\iff \rho_{H_d} \geq -0.25 \\ b^2 > m_1^2 m_2^2 &\iff \rho_{H_d} > -0.75 \quad , \end{aligned}$$

die simultan mit dem Wert von $\rho_{H_d}^{\text{IR}} \approx 0.12$ erfüllt werden. Dies steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Untersuchungen der elektroschwachen Symmetriebrechung im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes; vergleiche Abbildung 9.1.

ii) Für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes soll zum einen $\mu_0 = 1250$ und $m_{1/2} = 200$ gelten. Diese Kombination der verbleibenden freien Parameter liegt nach Abbildung 8.4 und 8.5 in dem Bereich, in dem $m_Z^2 < 0$ und $\tan\beta > 0$ gilt und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ nicht erfüllt ist; vergleiche auch Bereich II in Abbildung 9.2.

Man erhält in diesem Fall folgende Ungleichheiten für den Wert von ρ_{H_d} :

$$\begin{aligned} m_Z^2 > 0 &\iff \rho_{H_d} < -6.95 \vee \rho_{H_d} > -2.83 \\ \tan\beta > 0 &\iff \rho_{H_d} \geq -4.32 \\ b^2 > m_1^2 m_2^2 &\iff \rho_{H_d} < -2.83 \end{aligned}$$

Diese Ungleichheiten sind nicht simultan erfüllbar.

iii) Für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes soll als weiteres Beispiel $\mu_0 = 500$ und $m_{1/2} = 400$ gelten. Diese Kombination der verbleibenden freien Parameter liegt nach Abbildung 8.4 und 8.5 in dem Bereich, in dem $m_Z^2 > 0$ und $\tan\beta < 0$ gilt und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ nicht erfüllt ist; vergleiche auch Bereich I in Abbildung 9.2.

Man erhält in diesem Fall folgende Ungleichheiten für den Wert von ρ_{H_d} :

$$\begin{aligned} m_Z^2 > 0 &\iff \rho_{H_d} > 0.38 \\ \tan\beta > 0 &\iff \rho_{H_d} \geq 0.38 \\ b^2 > m_1^2 m_2^2 &\iff \rho_{H_d} > -0.19 \end{aligned}$$

Diese Ungleichheiten sind mit dem Wert von $\rho_{H_d}^{\text{IR}} = -0.34$ nicht simultan erfüllt.

Zusammenfassend läßt sich folgende Aussage treffen: Der negative Wert des transformierten Parameters ρ_{H_d} , dem Verhältnis aus dem Higgs-Massen-Parameter $m_{H_d}^2$ und den Gaugino-Massen-Parametern, siehe (6.3), und der sich daraus durch die inverse Transformation ergebende negative Wert von $m_{H_d}^2$ verhindern im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes die Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung, da sowohl die Werte von m_Z^2 und $\tan\beta$ jeweils verschiedene Vorzeichen besitzen, als auch die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ nicht erfüllt ist. Dabei ist der negative Wert des Parameters ρ_{H_d} im IR-Bereich eine Folge des negativen Fixpunktes im Grenzwert der Polstelle der Eichkopplung der starken Wechselwirkung g_3 ; vergleiche Tabelle 6.3.

Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes besitzt der Parameter ρ_{H_d} einen positiven Fixpunkt und daraus folgend auch einen positiven Wert im IR-Bereich, womit er in der Lage ist, die oben aufgeführten Bedingungen simultan zu erfüllen.

In der Literatur wird als Begründung für den Erfolg des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes der negative Wert des Higgs-Massen-Parameters $m_{H_u}^2$ als Folge einer großen Yukawa-Kopplung des Topquarks

herangezogen. Dies behält natürlich im Licht der hier unternommenen Betrachtungen seine Richtigkeit, jedoch konnte darüber hinaus auf der Ebene von Fixmannigfaltigkeiten gezeigt werden, daß der Wert eines Higgs–Massen–Parameters immer dann kleiner als Null ist, wenn ihm eine große Yukawa–Kopplung gegenübersteht, da er in diesem Fall einen Infrarot–Fixpunkt besitzt, der im Negativen liegt. Der Ausschlag gebenden Punkt ist daher nicht die große Masse beziehungsweise Yukawa–Kopplung des Topquarks, sondern die von Null verschiedene Yukawa–Kopplung des Bottomquarks im Fall der Evolution des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes, die über den Infrarot–Fixpunkt zu einem negativen Wert für $m_{H_d}^2$ führt. Es ist allgemein anerkannt, das verschiedene Vorzeichen bei den beiden Higgs–Massen–Parametern die elektroschwache Symmetriebrechung begünstigt.

Sofern die Yukawa–Kopplung des Bottomquarks von Null verschieden ist, gerät die Renormierungsgruppenevolution in den Einflußbereich des in allen Komponenten infrarot–attraktiven high– $\tan\beta$ –Fixpunktes. Um trotzdem eine kleine Yukawa–Kopplung für das Bottomquark zu erhalten, und damit weiterhin die Möglichkeit zur elektroschwachen Symmetriebrechung zur Verfügung zu haben, muß der entsprechende Anfangswert im UV–Bereich sorgfältig angepaßt werden, man spricht von sogenannter *Feineinstellung* (fine–tuning) [51]. Dies steht natürlich im krassen Widerspruch zu dem Gedanken, Unabhängigkeit von den Anfangswerten zu erzielen. Statt dessen werden ein oder mehrere besonders genau anzupassende weitere freie Parameter in das Modell eingefügt. Trotz der Feineinstellung liegt weiterhin der negative Fixpunkt für den Higgs–Massen–Parameter im IR–Bereich vor, der $m_{H_d}^2$ in den Bereich negativer Werte zieht.

	negative Wurzel	positive Wurzel
high– $\tan\beta$	$m_Z^2 > 0, \tan\beta < 0 \text{ und}$ $b^2 \not\approx m_1^2 m_2^2$ \Downarrow keine geeignete Symmetriebrechung; (Abb. 8.4, 8.5)	$m_Z^2 > 0, \tan\beta < 0 \text{ und}$ $b^2 \not\approx m_1^2 m_2^2$ \Downarrow keine geeignete Symmetriebrechung; (Abb. 8.2, 8.3)
low– $\tan\beta$	$m_Z^2 > 0, \tan\beta > 0 \text{ und}$ $b^2 > m_1^2 m_2^2$ \Downarrow Symmetriebrechung möglich; (Abb. 8.8, 8.9)	$m_Z^2 > 0, \tan\beta < 0 \text{ und}$ $b^2 \not\approx m_1^2 m_2^2$ \Downarrow keine geeignete Symmetriebrechung; (Abb. 8.6, 8.7)

Tabelle 8.1: Übersicht der qualitativen Verhältnisse bei der Untersuchung der elektroschwachen Symmetriebrechung für die Lösungen mit positiver und negativer Wurzel für die Evolution des low– $\tan\beta$ – und des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes bei der Berechnung der Masse des Z–Bosons und des Wertes des Parameters $\tan\beta$ nach (8.5) mit Beschränkung auf die Bereiche der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, in denen das Massenquadrat des Z–Bosons positive Werte annimmt.

Auf die Implikation der Vorhersage der Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung für die Evolution des low– $\tan\beta$ – und des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes wird abschließend noch einmal in Kapitel 9 eingegangen. Die Tabelle 8.1 zeigt die in diesem Abschnitt herausgearbeiteten quali-

tativen Verhältnisse für die Ergebnisse der Berechnung der Masse des Z -Bosons und des Wertes des Parameters $\tan\beta$ aus den Stationaritätsbedingungen (8.5) noch einmal im Zusammenhang.

8.3 Die Bedingungen zur Beschränktheit und zum Erhalt der Ladung und Farbe

In diesem Abschnitt werden die Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie ausgewertet. Ist eine dieser Bedingungen nicht erfüllt, so kann die radiative spontane Symmetriebrechung nicht stattfinden. In Abschnitt 4.3 wurden die Grundlagen, in Abschnitt 7.4 die Konkretisierung hinsichtlich des Algorithmus beziehungsweise der im Rahmen dieser Arbeit unternommenen Untersuchungen dargestellt. Die Ergebnisse der Auswertung der Bedingungen sind zusammenfassend in Tabelle 8.2 dargestellt.

Auch sei hier noch einmal erwähnt, daß durch die in Kapitel 6 bestimmten Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM eine Untersuchung der Vorhersagen des weich brechenden MSSM in Abhängigkeit von nur noch zwei verbleibenden freien Parametern vorgenommen werden konnte. Nimmt man eine Wahl dieser Parameter vor, so sind die Werte der gesamten Parameter des MSSM unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors für den gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen zwischen der UV- und der IR-Skala vollständig festgelegt. Darüber hinaus findet bei der Untersuchung der Bedingungen nicht nur eine Bestimmung der Werte der Parameter an einer Skala sondern auch eine Einbeziehung der Renormierungsgruppenevolution der Parameter im gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM von der UV-Skala bis zur IR-Skala statt. Es kann somit davon ausgegangen werden, daß die betrachteten Bedingungen entweder für den gesamten physikalischen Evolutionsbereich erfüllt beziehungsweise für den gesamten physikalischen Evolutionsbereich nicht erfüllt sind.

Die Abbildungen 8.11 und 8.12 zeigen die zusammenfassende Darstellung der Bedingungen für die Evolution des low- $\tan\beta$ - beziehungsweise des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die eingezeichneten Linien zeigen die Grenzen zwischen den Bereichen der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, für die die jeweilige Bedingung erfüllt beziehungsweise nicht erfüllt ist. Der graue Bereich zeigt den Bereich der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, für den alle abgebildeten Bedingungen erfüllt sind. Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes wird dieser Bereich für positive und negative Werte des freien Parameters μ_0 durch die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials, vergleiche Abschnitt 7.4.1, im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes wird der Bereich durch die zweite Bedingung zur Beschränktheit des Potentials, vergleiche Abschnitt 7.4.2, bestimmt. Die Grenzen, die durch diese Bedingung gegeben sind, unterscheiden sich jedoch kaum von den Grenzen, die durch die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials gegeben sind.

Sowohl für die Evolution des low- $\tan\beta$ - als auch für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes schränken alle anderen Bedingungen den Bereich der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, weniger ein als die erste beziehungsweise zweite Bedingung zur Beschränktheit des Potentials. Dies schließt auch die Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie aus Abschnitt 7.4.4, das heißt die Bedingungen für den Top-, den Bottom- und den Tau-Fall ein. Sie stellen somit „schwächere“ Bedingungen dar.

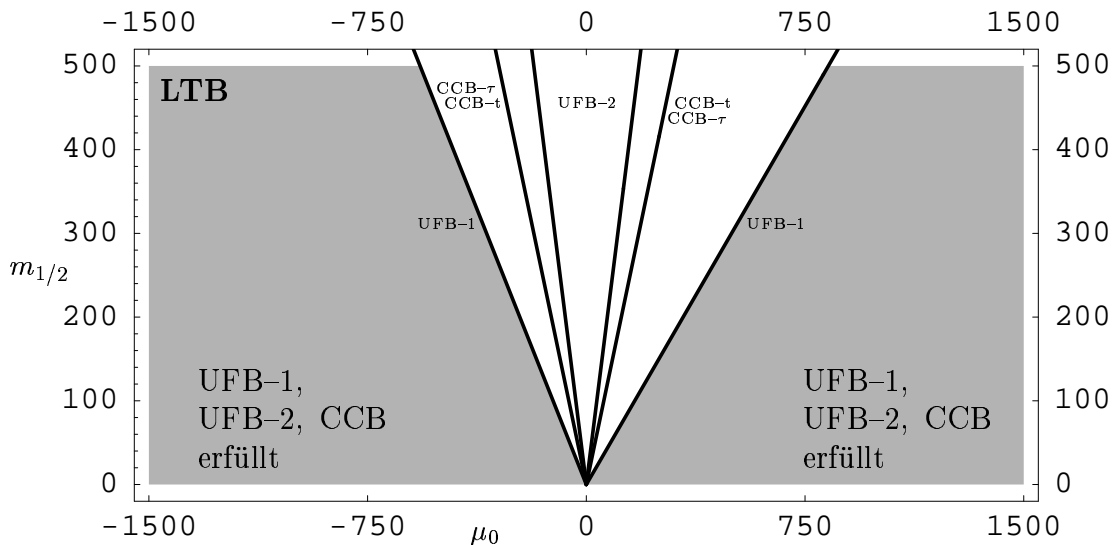


Abbildung 8.11: Auswertung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie für den low-tanβ-Fixpunkt. Die eingezeichneten Linien entsprechen den Grenzen zwischen den Bereichen der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, für die die jeweilige Bedingung erfüllt beziehungsweise nicht erfüllt ist. Der graue Bereich kennzeichnet den Bereich der freien Parameter, für den alle abgebildeten Bedingungen erfüllt sind. Dieser wird von der ersten Bedingung bestimmt. Die Tabelle 8.2 zeigt die Steigungen der eingezeichneten Grenzen und die Ergebnisse der Bedingungen im Zusammenhang. Die Grenzen der dritten Bedingung sind nicht mit eingezeichnet. Für diesen wird im Fall des low-tanβ-Fixpunktes eine analytische Abschätzung vorgenommen; siehe Text Abschnitt 8.3.

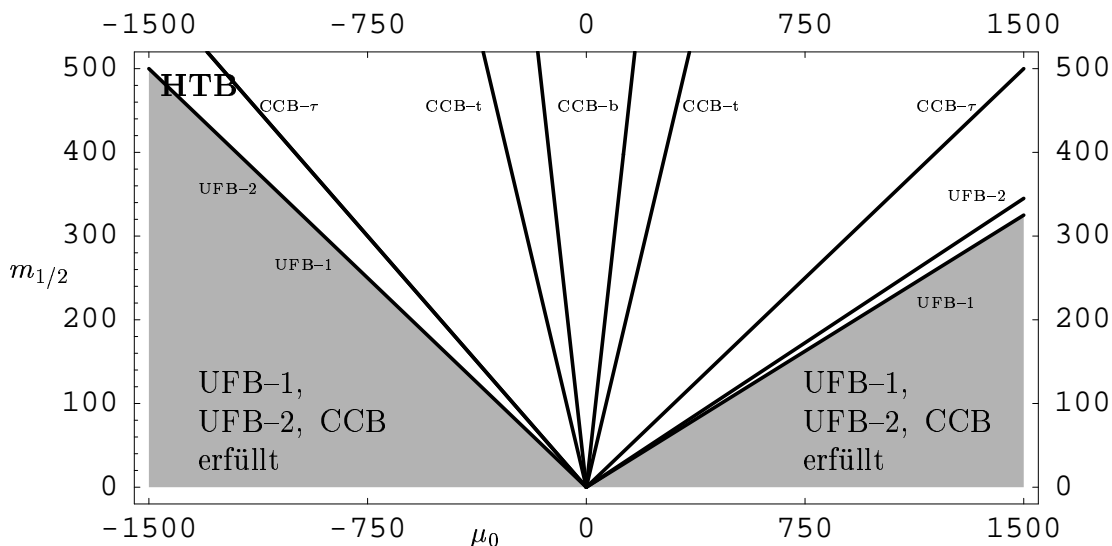


Abbildung 8.12: Auswertung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie für den high-tanβ-Fixpunkt. Es gilt das oben für Abbildung 8.11 Gesagte. Der graue Bereich wird in diesem Fall von der zweiten Bedingung bestimmt. Die Tabelle 8.2 zeigt die Steigungen der eingezeichneten Grenzen und die Ergebnisse der Bedingungen im Zusammenhang. Die Grenzen der dritten Bedingung sind nicht mit eingezeichnet. Diese ist für den Tau-Fall für alle freien Parameter erfüllt, für den Bottom-Fall jedoch für alle freien Parameter nicht erfüllt. Eine minimale rechtfertigbare Modifikation des Integrationsintervalls führt jedoch dazu, daß diese Bedingung auch für den Bottom-Fall für alle freien Parameter erfüllt ist; vergleiche Abschnitt 8.3.1.

	low-tan β -Fixpunkt	high-tan β -Fixpunkt
UFB-1	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{50}{57} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{2}{3} \mu_0$ bestimmende Bedingung	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{2}{5} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{23}{100} \mu_0$
UFB-2	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{25}{9} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{25}{9} \mu_0$	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{2}{5} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{13}{60} \mu_0$ bestimmende Bedingung
UFB-3-b	für kein $(\mu_0, m_{1/2})$ erfüllt (für alle bei Anpassung der Integrationsgrenzen; siehe Text)	„analytisch“
UFB-3-tau	für alle $(\mu_0, m_{1/2})$ erfüllt	„analytisch“
CCB-t	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{5}{3} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{5}{3} \mu_0$	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{25}{17} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{25}{17} \mu_0$
CCB-b	für alle $(\mu_0, m_{1/2})$ erfüllt	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{25}{8} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{25}{8} \mu_0$
CCB-tau	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{5}{3} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{5}{3} \mu_0$	$\mu_0 < 0: m_{1/2} \lesssim -\frac{1}{3} \mu_0$ $\mu_0 > 0: m_{1/2} \lesssim \frac{1}{3} \mu_0$

Tabelle 8.2: Ergebnisse der Untersuchungen der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie im Zusammenhang. Die angegebenen Steigungen in den Beziehungen zwischen den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, entsprechen den in den Abbildungen 8.11 und 8.12 eingezeichneten Grenzen der Bereiche der freien Parameter, für die die jeweilige Bedingung erfüllt beziehungsweise nicht erfüllt ist.

8.3.1 Die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials

Ein Ausnahme bildet die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB–3–constraint). Die Untersuchung dieser Bedingung ist, vergleiche Abschnitt 7.4.3, in zwei Teile unterteilt: Die Untersuchung des Bottom–Falles und die Untersuchung des Tau–Falles. Sowohl für die Evolution des low– $\tan\beta$ – als auch die des high– $\tan\beta$ –Fixpunkt führt die Analyse im Rahmen des Algorithmus zu Einschränkungen.

Eine Untersuchung im Rahmen der Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes ist für den Bottom– und den Tau–Fall nicht möglich, da im Potential $V_{\text{UFB-3}}$ Terme auftreten, die Inverse der Yukawa–Kopplungen des Tauleptons beziehungsweise Bottomquarks enthalten.

$$V_{\text{UFB-3}} \propto \frac{1}{y_{b,\tau}}; \quad V_{\text{UFB-3}} \propto \frac{1}{y_{b,\tau}^2} \quad (8.7)$$

Man kann jedoch annehmen, daß diese Abhängigkeit im Grenzwert $y_{b,\tau} \rightarrow 0$ zu folgender Abschätzung für den Wert von $V_{\text{UFB-3}}$

$$V_{\text{UFB-3}} \rightarrow \infty \quad \text{für} \quad y_{b,\tau} \rightarrow 0 \quad (8.8)$$

führt, und $V_{\text{UFB-3}}$ damit in jedem Fall größer als $V_{\text{real-min}}$ ist und die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials für die Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes sowohl im Tau–Fall als auch im Bottom–Fall im Grenzwert als erfüllt angesehen werden kann.

Für die Evolution des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes ergibt die Untersuchung des Tau–Falls eine Erfüllung der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials für den gesamten Bereich im Raum der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$. Die Untersuchung des Bottom–Falls ergibt jedoch ein genau entgegengesetztes Bild. Die dritte Bedingung ist für den gesamten Bereich im Raum der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ nicht erfüllt, womit das Potential nicht nach unten beschränkt ist. Dieser Umstand soll nun etwas genauer untersucht werden.

Die Untersuchung des Bottom–Falles der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials ist nach Abschnitt 4.3 und 7.4 in zwei Teile unterteilt. Zum einen muß die Bedingung für Werte unterhalb eines ausgezeichneten Wertes des Feldes H_u (7.31)

$$\underline{H}_u^{(b)} = \sqrt{\frac{\mu^2}{4y_b^2} + \frac{4m_{\tilde{Q}}^2}{\frac{3}{5}g_1^2 + g_2^2}} - \frac{|\mu|}{2y_b} \quad (8.9)$$

erfüllt sein, wobei das Potential in diesem Fall durch

$$V_{\text{UFB-3}}^{(b,u)} = \left(m_1^2 - \mu^2 + m_{\tilde{Q}}^2\right) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_b} \left(2m_{\tilde{Q}}^2 + m_b^2\right) |H_u| - \frac{2\left(m_{\tilde{Q}}^2\right)^2}{\frac{3}{5}g_1^2 + g_2^2} \quad (8.10)$$

gegeben ist. Oberhalb des Wertes (8.9) ist das Potential durch

$$\begin{aligned} V_{\text{UFB-3}}^{(b,o)} &= \left(m_1^2 - \mu^2\right) |H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_b} \left(m_{\tilde{Q}}^2 + m_b^2\right) |H_u| \\ &+ \frac{1}{8} \left(\frac{3}{5}g_1^2 + g_2^2\right) \left(|H_u|^2 + \frac{|\mu|}{y_b} |H_u|\right)^2 \end{aligned} \quad (8.11)$$

gegeben. Es hat sich gezeigt, daß die Bedingung oberhalb $\underline{H}_u^{(b)}$ mit $V_{\text{UFB-3}}^{(b,o)}$ keine Probleme verursacht und für alle möglichen Werte der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ erfüllt

wird. Unterhalb $\underline{H}_u^{(b)}$ verläuft die Integration (7.34) vom Wert Null bis $\underline{H}_u^{(b)}$. Für $\underline{H}_u^{(b)} = 0$ liest sich das Potential $V_{\text{UFB-3}}^{(b,u)}$ als

$$V_{\text{UFB-3}}^{(b,u)} = -\frac{2 \left(m_{\tilde{Q}}^2\right)^2}{\frac{3}{5} g_1^2 + g_2^2}, \quad (8.12)$$

da nur der konstante Anteil verbleibt. In diesem Fall ist das Potential aufgrund des Wertes von $(m_{\tilde{Q}}^2)^2 = (M_3^2 \rho_{\tilde{Q}}^2)^2$ tiefer als $V_{\text{real-min}}$, und die Integration (7.34) liefert einen von Null verschiedenen Wert. Die Bedingung ist nicht erfüllt.

Schließt man in (7.34) jedoch den Wert Null aus, indem die untere Integrationsgrenze zum Beispiel auf 1 gesetzt wird, so zeigt sich, daß der Einfluß des Feldes H_u und der in $V_{\text{UFB-3}}^{(b,u)}$ auftretenden Parameter den Wert des Potentials über den des Potentials $V_{\text{real-min}}$ hebt. Die Bedingung ist erfüllt.

Die Tabelle 8.2 zeigt die Ergebnisse der Untersuchung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und der Erhaltung der Ladungs- und Farbsymmetrie noch einmal im Zusammenhang. Die in der Tabelle eingetragenen Steigungen in den Beziehungen zwischen den freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ entsprechen den Steigungen der in den Abbildungen 8.11 und 8.12 eingezeichneten Grenzen zwischen den Bereichen im Raum der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, in denen eine jeweilige Bedingung erfüllt beziehungsweise nicht erfüllt ist.

8.4 Die Bestimmung der Massen

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der Bestimmung der Massen der Quarks und Leptonen und der Teilchen des weich brechenden Sektors des MSSM vorgestellt. Dabei werden die Massen wiederum in Abhängigkeit der zwei verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, des weich brechenden MSSM bestimmt.

Der Abschnitt 8.4.1 stellt die Massen der des Top- und Bottomquarks und des Tauleptons dar, Abschnitt 8.4.2 die Massen des weich brechenden Sektors, die Massen der Charginos, Neutralinos, der Gluonen und die skalaren Massen $m_{\tilde{\phi}_\alpha}$, wobei die Größe $\tilde{\phi}_\alpha$ durch \tilde{Q} , \tilde{L} , \tilde{t} , \tilde{b} oder $\tilde{\tau}$ gegeben ist.

8.4.1 Die Massen der Quarks und Leptonen

In diesem Abschnitt soll auf die Massen der Quarks und Leptonen, das heißt die Massen des Topquarks, des Bottomquarks und des Tauleptons, eingegangen werden. Dabei handelt es sich um die Fermionen der dritten schwersten Familie des Standardmodells. Die Massen der Fermionen der ersten beiden Familien werden in den Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, was eine physikalisch sinnvolle Näherung darstellt, da die entsprechenden Massen wesentlich kleiner sind als die Massen der Fermionen der dritten Familie.

Da die Evolution der für die Berechnung der Massen der Fermionen herangezogenen Yukawa-Kopplungen y_t , y_b und y_τ auch in Zweischleifen-Näherung nur von den Eichkopplungen abhängt kann der Eich-Yukawa-Sektor als selbständiger Untersektor des vollständigen Sektors des weich brechenden MSSM angesehen werden. Vergleiche dazu Abschnitt 6.1 und darin Tabelle 6.2. So hängen die Massen der Fermionen nicht von den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und

$m_{1/2}$, des weich brechenden MSSM ab. Da jedoch die Yukawa-Kopplungen auch im Bereich des Standardmodells der Renormierungsgruppenevolution unterworfen sind, hat die Wahl der Symmetriebrechungsskala einen Einfluß auf die Massen der Fermionen. Generell gilt: Je höher die Symmetriebrechungsskala liegt, desto größer wird die Masse des Topquarks [9].

In Abschnitt 7.2 wurde dargestellt, daß die Skala der Symmetriebrechung m_S für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes für alle betrachteten Werte der verbleibenden freien Parameter auf der Skala m_{top}^{pole} liegt. Aus diesem Grund erhält man im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes keine Variation der Massen der Fermionen und des Wertes von $\tan\beta$ über den gesamten Bereich der freien Parameter. Zur Erinnerung: Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes wird der Wert des Parameters $\tan\beta$ durch Vergleich der Yukawa-Kopplung des Tauleptons aus der Renormierungsgruppenevolution aus dem UV-Bereich mit der aus der Masse des Tauleptons und mittels Renormierungsgruppenevolution im Standardmodell aus dem IR-Bereich (bottom-up) aus der Beziehung

$$y_\tau^{SM} \left(Q = m_{top}^{pole} \right) = y_\tau^{MSSM} \left(Q = m_{top}^{pole} \right) \cdot \cos\beta \quad (8.13)$$

berechnet. Die Masse des Tauleptons beträgt $m_\tau = 1.7771 \text{ GeV}$. Für die Massen des Top- und Bottomquarks und den Wert des Parameters $\tan\beta$ erhält man so

$$m_{top}^{pole} \approx 180 \text{ GeV} \quad m_b \approx 4 \text{ GeV} \quad m_\tau = 1.7771 \text{ GeV} \quad (\text{bei } \tan\beta \approx 60) \quad (8.14)$$

für den gesamten Bereich im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, was in sehr guter Übereinstimmung mit experimentellen Werten [41] von

$$m_{top}^{pole} \approx 173.8 \pm 3.5 \pm 3.9 \text{ GeV} \quad \bar{m}_b \approx 4.3 \text{ GeV} \quad \bar{m}_\tau = 1.7771 \text{ GeV} , \quad (8.15)$$

steht. Die Masse des Tauleptons wird zur Berechnung des Wertes von $\tan\beta$ verwendet, da die Masse des Tauleptons innerhalb der dritten Fermionen-Familie am genauesten bestimmt ist.

Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes gestaltet sich die Berechnung der Massen der Fermionen der dritten Familie etwas schwieriger. Die Massen des Bottomquarks und des Tauleptons sind von vornherein Null, da ihre Yukawa-Kopplungen jeweils auch den Wert Null besitzen. Aus diesem Grund läßt sich die Masse des Tauleptons nicht zur Berechnung des Wertes des Parameters $\tan\beta$ verwenden, da die Beziehung (8.13) $y_\tau^{SM} = 0$ ergibt, beziehungsweise eine Division durch Null auftreten würde.

Die Berechnung des Wertes für $\tan\beta$ wird aus diesem Grund auf Basis der Masse des Topquarks, des einzigen Fermions der dritten Familie mit nicht-verschwindender Masse, analog zum geschilderten Vorgehen im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes unter Verwendung des Tauleptons vorgenommen.

Abbildung 8.13 zeigt die Verteilung der Werte von $\tan\beta$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$. Da wie im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes auch in diesem Fall die Renormierungsgruppenevolution der Yukawa-Kopplungen nur von den Eichkopplungen abhängt, ist der Wert der Yukawa-Kopplung wiederum nicht von den freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ abhängig. Da wie angesprochen die Massen der Fermionen jedoch über die Werte der Yukawa-Kopplungen zusätzlich von der Länge des Evolutionsweges im Standardmodell und somit von der Lage der Symmetriebrechungsskala m_S abhängen, ändert sich der Wert von $\tan\beta$ im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes geringfügig mit den Werten von μ_0 und $m_{1/2}$. Aus diesem Grund besteht auch eine rein „formhafte“ Ähnlichkeit zwischen der Verteilung der Werte von $\tan\beta$, Abbildung 8.13, und der Werte der Symmetriebrechungsskala, Abbildung 8.1.

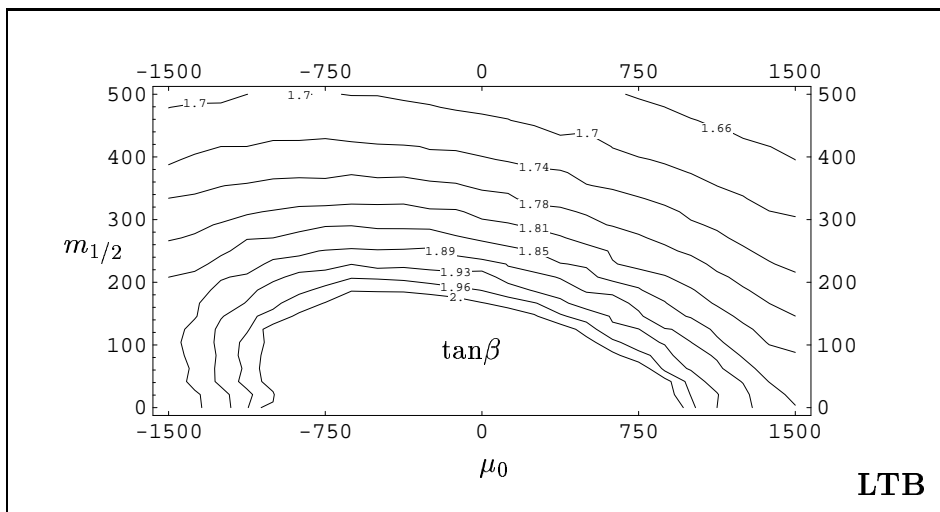


Abbildung 8.13: Verteilung der Werte des Parameters $\tan\beta$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, des weich brechenden MSSM. Die Berechnung von $\tan\beta$ erfolgt in diesem Fall aus dem Vergleich der Pol-Masse des Topquarks mit der Yukawa-Kopplung des Topquarks, die sich durch die Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten beziehungsweise der in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien an der Skala m_S ergibt.

Weiterhin kann folgende, in erster Näherung von der Brechungsskala unabhängige Beziehung für die Masse des Topquarks durch

$$y_{top}(m_S) = y_t^{\text{MSSM}} \sin\beta \approx 1.06 \sin\beta \quad (8.16)$$

und damit bei nicht allzu langem Evolutionsweg im Standardmodell

$$m_{top}^{\text{pole}} \approx \frac{v}{\sqrt{2}} \cdot 1.06 \cdot 1.04 \cdot \sin\beta \approx 192 \text{ GeV} \cdot \sin\beta \quad (8.17)$$

angegeben werden. Der Faktor 1.04 in obiger Gleichung rührt von der Pol-Massen-Korrektur, vergleiche Abschnitt 2.4.1, her. Diese beträgt in guter Näherung 4%. Dieses Ergebnis steht in guter Übereinstimmung mit den Vorhersagen der Masse des Topquarks in der Literatur [1–4].

Entnimmt man aus den Abbildungen 8.8 und 8.9 die Werte von $\tan\beta$ für den Bereich im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, der positive Werte für das Massenquadrat des Z-Bosons liefert und weiterhin mit der Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ verträglich ist, so erhält man einen Wert von $\tan\beta \in (0.15, 5.2)$. Weiterhin kann man aus der in Abbildung 9.1 eingefügten Graphik den Wert von $\tan\beta$ an den Stellen im Raum der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ ablesen, die eine mit den experimentellen Vorgaben verträgliche Vorhersage der Masse der Z-Bosons liefern. Unter Beachtung der unteren Massenschranke des Higgs-Bosons des Standardmodells, $m_H > 95 \text{ GeV}$, vergleiche Abschnitt 8.4.2, ergibt sich ein Bereich von $\tan\beta \in (4, 5.2)$. Im ersten Fall erhält man so die Pol-Masse des Topquarks zu

$$m_{top}^{\text{pole}} \in (28 \text{ GeV}, 189 \text{ GeV}) , \quad (8.18)$$

im zweiten Fall zu

$$m_{top}^{\text{pole}} \in (186 \text{ GeV}, 189 \text{ GeV}) . \quad (8.19)$$

Um eine Pol-Masse von $\approx 174 \text{ GeV}$ zu erhalten, muß ein Wert von $\tan\beta \approx 1.76$ zugrunde gelegt werden. Dieser wird sicher innerhalb des in Abbildung 9.1, beziehungsweise 8.8 und 8.9 dargestellten Bereiches angenommen.

Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes ist eine ähnliche Abschätzung nicht möglich, da sowohl für die Lösung der Stationaritätsbedingungen (8.5) mit positiver als auch mit negativer Wurzel keine Werte der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ existieren, die gleichzeitig ein positives Massenquadrat des Z-Bosons und einen positiven Wert für den Parameter $\tan\beta$ liefern.

Die Abbildung 8.14 zeigt die Werte der Pol-Masse des Topquarks, der Masse des Bottomquarks und des Parameters $\tan\beta$ unter Variation des Wertes der Symmetriebrechungsskala m_S . Die Berechnung von $\tan\beta$ erfolgt in diesem Fall wie oben dargestellt aus der Yukawa-Kopplung des Tauleptons. Es ist klar zu erkennen, daß eine Erhöhung der Symmetriebrechungsskala zu einer Erhöhung der entsprechenden Werte führt. Die Abbildung 8.15 zeigt im Gegensatz dazu

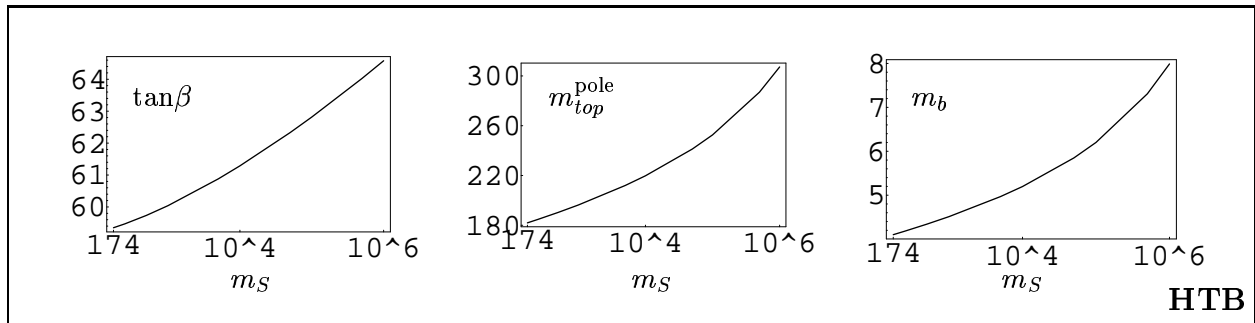


Abbildung 8.14: Die Werte des Parameters $\tan\beta$, der Pol-Masse des Topquarks m_{top}^{pole} und der Masse des Bottomquarks m_b in Abhängigkeit von der Symmetriebrechungsskala m_S im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die Berechnung des Parameters $\tan\beta$ erfolgt aus dem Vergleich der experimentellen Vorgabe der Masse des Tauleptons mit der Masse, die aus der Yukawa-Kopplung des Tauleptons berechnet wird.

einen gemittelten Wert des Parameters $\tan\beta$ im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Dieser nimmt bei der Erhöhung der Symmetriebrechungsskala ab. Auf diese Weise scheint es möglich, den gewünschten Wert $\tan\beta \approx 1.76$ an den Stellen der freien Parameter zu erreichen, die eine den experimentellen Vorgaben entsprechende Masse des Z-Bosons ergeben; vergleiche Abbildung 9.1.

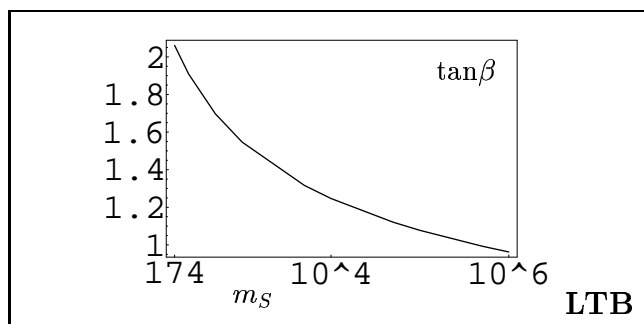


Abbildung 8.15: Der gemittelte Wert von $\tan\beta$ in Abhängigkeit von der Brechungsskala m_S im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die Berechnung des Wertes von $\tan\beta$ erfolgt in diesem Fall durch den Vergleich der aus der Yukawa-Kopplung berechneten Pol-Masse des Topquarks mit den experimentellen Vorgaben von $m_{top}^{pole} = 174$ GeV.

8.4.2 Die Massen des weich brechenden und des Higgs-Sektors

In diesem Abschnitt wird die Verteilung der Massen der Teilchen des weich brechenden Sektors, der Charginos, der Neutralinos, der Gluinos, sowie der skalaren Massen und der Massen im Higgs-Sektor in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern der Theorie, μ_0 und $m_{1/2}$, dargestellt. Die Masseneigenzustände der Charginos $m_{\tilde{C}_{1,2}}$ ergeben sich aus der Mischung der geladenen Winos \tilde{W}^\pm und den geladenen Komponenten der Higgsinos $\tilde{H}_{u,d}^\pm$, die

Masseneigenzustände der Neutralinos $m_{\tilde{N}_{1\dots 4}}$ aus dem neutralen Wino \widetilde{W}^0 und den neutralen Komponenten der $\widetilde{H}_{u,d}^0$. Weiterhin liegen im Higgs-Sektor fünf massive Freiheitsgrade vor. Diese setzen sich aus einem CP-ungeraden Skalar A mit Masse m_{A^0} , einem einfach positiv geladenen Skalar H^+ und dem entsprechenden ladungskonjugierten, einfach negativ geladenen Skalar H^- mit Masse $m_{H^\pm}^2$ und zwei weiteren CP-geraden neutralen Skalaren h^0 und H^0 mit Massen m_{h^0} und m_{H^0} zusammen.

Die Abbildung von Graphiken beschränkt sich hier auf solche Massenverteilungen, die eine Rolle bei der Einschränkung des Bereichs der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, spielen. Sämtliche Massenverteilungen sind im Anhang A abgebildet. Die Tabelle 8.3 gibt eine Übersicht der berechneten Massen. Sie stellt die für alle Werte der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ bestimmten Minima und Maxima der jeweiligen Massen dar. Weiterhin zeigt sie die Minima, Maxima und den Mittelwert des Quotienten der jeweiligen Masse und der Masse der Gluinos, aufgetragen über den Parametern μ_0 und $m_{1/2}$.

Die Gleichungen zur Bestimmung der hier dargestellten Massen sind in Kapitel 2.4 aufgeführt. Das Kapitel 7.3 geht auf die Konkretisierung der Berechnung der Massen im Rahmen des Algorithmus zur Untersuchung der Vorhersagen des weich brechenden MSSM ein.

Die Massen der Gluinos, der Charginos und der Neutralinos

Es folgt die Darstellung der Massen der Gluinos, der Charginos und der Neutralinos. Diese ergeben sich, wie einleitend dargestellt, durch die Mischung der Eigeigenzustände der Winos, Binos und Higgsinos.

Die Masse der Gluinos Die Masse der Gluinos ist auf Baumgraphen-Niveau, vergleiche Abschnitt 2.4.2, durch den Wert von M_3 , den Gaugino-Massenparameter der starken Wechselwirkung, gegeben.

$$m_{\tilde{g}} = M_3 \quad (8.20)$$

Wie in Abschnitt 2.4.2 angeführt, wird im Fall der Gluinos, den Superpartnern der Gluonen, bei der Berechnung der Masse keine Korrektur berücksichtigt. Der Bereich der Korrektur umfaßt zwar einen Bereich von 1% bis 25%, in den Bereichen kleiner Werte von $m_{1/2}$, wo die untere Massenschranke des Gluinos von Bedeutung wäre, liegt sie jedoch im Bereich kleiner Werte von $m_{1/2}$ bei $\approx 1\%$.

Die Abbildung 8.16 zeigt die Verteilung der Gluino-Masse über den verbleibenden freien Parametern für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Der grau eingezeichnete Bereich kennzeichnet die Werte der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, für die die Gluino-Masse unterhalb der unteren Massenschranke von 180 GeV [41] liegt. Um mit der unteren Massenschranke des Gluinos verträgliche Ergebnisse zu produzieren, muß $m_{1/2} \gtrsim 80$ gelten. Wie in Abbildung 9.2 zu erkennen, beschränkt die untere Massenschranke im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes die möglichen Werte des freien Parameters μ_0 nach unten.

Sowohl im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ - als auch im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes ergeben sich Massen der Gluinos bis ≈ 1250 GeV, vergleiche Tabelle 8.3. Die Masse der Gluinos ist annähernd proportional zum Wert des freien Parameters $m_{1/2}$. Dieser gibt einen Anfangswert für die Massenparameter M_1 , M_2 und M_3 an der GUT-Skala. Da hier im Fall der Gluino-Massen keine Korrekturen betrachtet werden, ergibt sich die zu beobachtende Abhängigkeit vom Wert des freien Parameters $m_{1/2}$.

	high- $\tan\beta$ -Fixpunkt		low- $\tan\beta$ -Fixpunkt	
	Masse	$m/m_{\tilde{g}}$	Masse	$m/m_{\tilde{g}}$
$m_{\tilde{g}}$	(3, 1294)	—	(3, 1223)	—
$m_{\tilde{C}_1}$	(0, 379)	(0 0.23 0.4)	(0, 429)	(0 0.3 4.87)
$m_{\tilde{C}_2}$	(115, 697)	(0.31 1.95 228)	(103, 1116)	(0.33 3.1 262)
$m_{\tilde{N}_1}$	(25, 673)	(0.02 1.85 227)	(21, 1110)	(0.02 3.03 260)
$m_{\tilde{N}_2}$	(0, 202)	(0 0.13 0.17)	(0, 206)	(0 0.16 5.7)
$m_{\tilde{N}_3}$	(0, 379)	(0.16 0.25 0.41)	(0, 389)	(0.17 0.3 3.9)
$m_{\tilde{N}_4}$	(97, 678)	(0.31 1.92 227)	(87, 1117)	(0.32 3.07 262)
$m_{\tilde{t}_1}$	(140, 849)	(0.61 1.12 56.2)	≤ 869	(0 8.67 18)
$m_{\tilde{t}_2}$	(170, 1028)	(0.79 1.45 59.4)	(165, 1016)	(0.77 1.81 91.3)
$m_{\tilde{b}_1}$	≤ 900	(0 0.48 1.1)	(28, 927)	(0.76 0.84 7.8)
$m_{\tilde{b}_2}$	(62, 1009)	(0.76 1.57 111)	(40, 1100)	(0.9 1 11.3)
$m_{\tilde{\tau}_1}$	≤ 85	(0 0.01 0.37)	≤ 40	(0 0.07 2.6)
$m_{\tilde{\tau}_2}$	(64, 397)	(0.27 1.05 94)	(40, 297)	(0.24 0.38 13.42)
A^0	≤ 4347	(0 2.24 45)	≤ 648	(0 0.38 10.2)
H^\pm	≤ 4348	(0 2.26 49)	≤ 652	(0 0.54 24.8)
H^0	(91, 4347)	(0.07 2.47 45)	(44, 653)	(0.04 0.66 27.1)
h^0	Abschn. 8.4.2		Abschn. 8.4.2	

Tabelle 8.3: Massen der Teilchen im weich brechenden beziehungsweise Higgs-Sektor des minimal supersymmetrischen Standardmodells. Die Intervalle geben die minimale und die maximale Masse für alle möglichen Werte der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, an. Die Intervalle $m/m_{\tilde{g}}$ geben die minimalen, mittleren und maximalen Werte des Quotienten der jeweiligen Masse mit der Masse der Gluinos an.

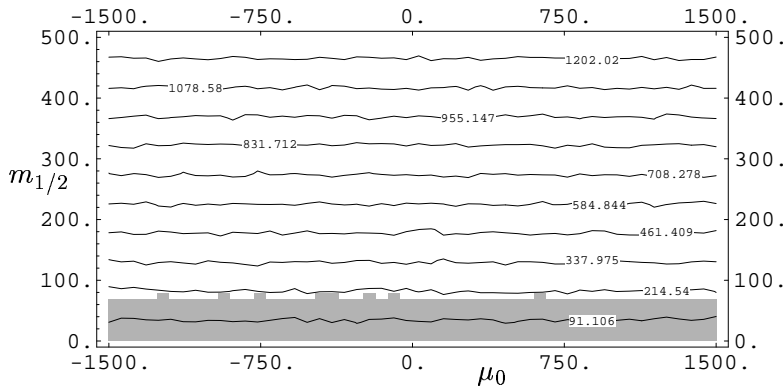


Abbildung 8.16: Verteilung der Masse der Glunios $m_{\tilde{g}}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, aufgetragen über die freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$. Der graue Bereich kennzeichnet den Bereich der freien Parameter, der Massen ergibt, die unterhalb der unteren Massenschranke von 180GeV für das Gluino liegen.

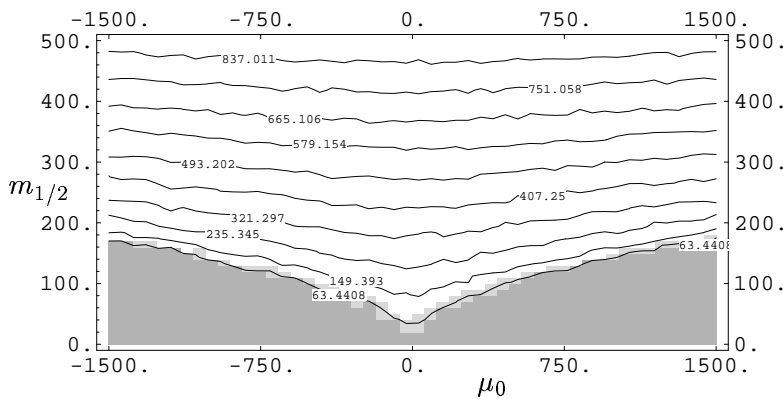


Abbildung 8.17: Verteilung der Masse des Sbottom $m_{\tilde{b}_1}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Alles weitere gilt entsprechend Abbildung 8.19. Die untere Massenschranke beträgt 82GeV für die Sbottom.

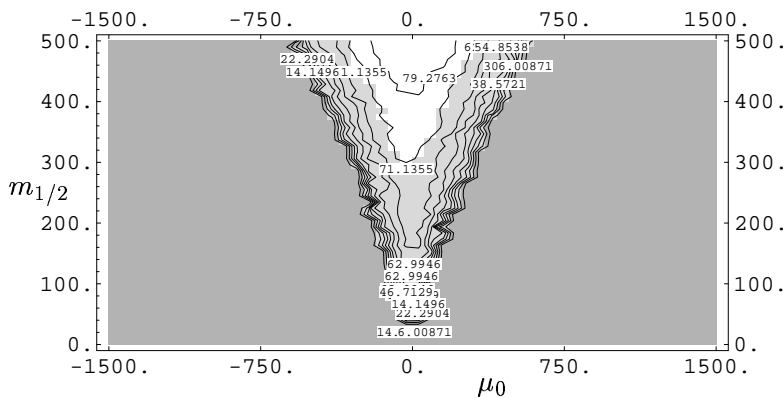


Abbildung 8.18: Verteilung der Masse des Stau $m_{\tilde{\tau}_1}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die dunkelgrauen Bereiche kennzeichnen die Bereiche der freien Parameter, die negative Massenquadrate ergeben, die hellgrauen Bereiche Massen, die unterhalb der unteren Massenschranke von 72GeV für die Masse der Stau liegen.

Abbildung A.32 stellt die Massenverteilung für den Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar. Auch in diesem Fall gelten die für den Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunkt getroffenen Aussagen bezüglich der unteren Massenschranke. Es liegen jedoch mit der Masse des Higgs-Bosons des Standardmodells und der Masse des Stop, dem Superpartner des Topquarks, andere Massenschranken vor, die die Werte der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, wesentlich stärker einschränken.

Die Massen der Charginos Im Bereich der Charginos werden zwei geladene Masseneigenzustände $\tilde{C}_{1,2}^\pm$ berechnet, vergleiche Abschnitt 2.4.2. Diese ergeben sich durch Mischung aus den Eigeigenzuständen der Gluinos, hauptsächlich durch den Massenparameter M_2 , und der Higgsinos.

Die Abbildungen A.7 und A.8 zeigen die Verteilung der Chargino-Massen für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, die Abbildungen A.23 und A.24 die Verteilung für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. In beiden Fällen liegen für die Massen $m_{\tilde{C}_2^\pm}$ des zweiten Charginos — positive Wurzel in (2.78) — keine Einschränkungen des Bereichs der freien Parameter durch die untere Massenschranke von 45 GeV [41] vor. Für die Massen $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ zeigt sich weiterhin, daß diese für $\mu_0 \gtrsim 750$ proportional zu μ_0 sind.

Die Massen $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ — negative Wurzel in (2.78) — führen jedoch zu den Einschränkungen $m_{1/2} \gtrsim 80$ und $\mu_0 \gtrsim 100$ für beide Fälle. Diese Einschränkungen decken sich für kleine $m_{1/2}$ mit den unteren Massenschranken der Gluinos.

Die Massen der Neutralinos Im Bereich der Neutralinos liegen vier ungeladene Masseneigenzustände $\tilde{N}_{1\dots 4}$ vor, vergleiche Abschnitt 2.4.2. Diese ergeben sich wie im Fall der Charginos durch Mischung aus den Eigeigenzuständen der Gluinos, hier vor allem der Massenparameter M_1 und M_2 , und der Higgsinos.

Die Abbildungen A.9 bis A.12 stellen die Verteilungen der Massen der Neutralinos $m_{\tilde{N}_{1\dots 4}}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -, die Abbildungen A.25 bis A.28 die Verteilung der Massen der Neutralinos für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar. Die Verteilung der Masse $m_{\tilde{N}_1}$ ist für beide Fixpunkte annähernd im gesamten Bereich proportional zu μ_0 und die Masse liegt oberhalb der unteren Massenschranke der Neutralinos von 14 GeV [41]. Die Verteilung der Masse $m_{\tilde{N}_2}$ zeigt für beide Fixpunkte eine Verteilung, die der Chargino-Masse $m_{\tilde{C}_2^\pm}$ entspricht. Die Verteilung der Masse $m_{\tilde{N}_3}$ liefert eine leichte Einschränkung für kleine Werte von $m_{1/2}$. Die Verteilung der Masse $m_{\tilde{N}_4}$ entspricht weitestgehend der Verteilung der Chargino-Masse $m_{\tilde{C}_1^\pm}$ und ist für $\mu_0 \gtrsim 550$ annähernd proportional zu μ_0 .

Eine über die in den Abbildungen 9.1 und 9.2 dargestellten Einschränkungen hinausgehende Einschränkung des Bereiches der freien Parameter durch die Neutralinos liegt nicht vor.

Die Massen der Sfermionen

Im Bereich der Sfermionen liegen für die Superpartner der Fermionen der dritten Familie des Standardmodells, das Topquark, das Bottomquark und das Taulepton, jeweils zwei Masseneigenzustände, $m_{\tilde{t}_{1,2}}^2$, $m_{\tilde{b}_{1,2}}^2$ und $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2$, die sogenannten Sfermionen beziehungsweise Squarks und Sleptonen vor. Diese ergeben sich hauptsächlich durch Mischung der Eigeigenzustände der linkshändigen Multipletts \tilde{Q} und \tilde{L} und der rechtshändigen Multipletts \tilde{t} , \tilde{b} und $\tilde{\tau}$, vergleiche

che Abschnitt 2.4.2, und stellen somit die bosonischen Komponenten der jeweiligen chiralen Superfelder dar.

Die Abbildungen A.17 bis A.22 zeigen die Verteilungen der Massen der Sfermionen für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, die Abbildungen A.17 bis A.22 die Verteilungen der Massen der Sfermionen für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes in Abhängigkeit von den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$.

Weiterhin sind für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes in Abbildung 8.17 und 8.18 die Verteilung der Massen $m_{b_1}^2$ und $m_{\tilde{\tau}_1}^2$ und für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes in den Abbildungen 8.19 bis 8.21 die Verteilung der Massen $m_{t_1}^2$ sowie $m_{\tilde{\tau}_1}^2$ und $m_{\tilde{\tau}_2}^2$ gesondert aufgeführt, da sie die stärksten Einschränkungen der Werte der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, durch Massenschranken liefern. Diese sollen im folgenden Gegenstand einer eingehenderen Betrachtung sein.

Stau-Massen im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes Im folgenden soll auf diese Verteilungen der Masse des Stau, des Superpartners des Tauleptons, genauer eingegangen werden, da dieses die stärksten Einschränkungen der Bereiche im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, durch Massenschranken liefert.

Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes schließt die untere Massenschranke des Tauleptons von 76 GeV [41] den gesamten Bereich der möglichen Werte der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus. Im Fall der Masse des ersten Staus $m_{\tilde{\tau}_1}^2$ muß zur Erfüllung der Massenschranke $m_{1/2} \gtrsim 120$ gelten, vergleiche Abbildung 8.21, für die Masse des zweiten Staus $m_{\tilde{\tau}_2}^2$ muß $m_{1/2} \lesssim 120$ gelten, vergleiche Abbildung 8.21. Beide Bedingungen schließen sich gegenseitig aus. Um zu verstehen, wie es zu diesem Verhalten kommen kann, muß man die Massenmatrix der Staus untersuchen. Es gilt (2.86)

$$\mathbf{M}_{\tilde{\tau}}^2 = \begin{pmatrix} m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 + \Delta_e & v(a_{\tau} \cos\beta - \mu y_{\tau} \sin\beta) \\ v(a_{\tau} \cos\beta - \mu y_{\tau} \sin\beta) & m_{\tilde{\tau}}^2 + m_{\tilde{e}}^2 + \Delta_e \end{pmatrix} \quad (8.21)$$

wobei die in (8.21) auftretenden Größen in Abschnitt 2.4.2 definiert sind. Die Masseneigenzustände $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2$ sind durch die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{M}_{\tilde{\tau}}^2$ gegeben.

Die Bestimmung der Werte der Parameter in (8.21) wird wie in allen Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit aus den Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM vorgenommen. Durch die in Abschnitt 6.2 bestimmten Fixlinien der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM sind die Werte der Parameter des weich brechenden MSSM für den gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen zwischen der UV- und der IR-Skala in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, vollständig festgelegt. Den Wert eines Parameters an einer Skala erhält man durch die Auswertung der Fixlinien an dieser Skala.

Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes gilt $y_{\tau} = 0$ für alle Q . Aus der Transformation (6.3)

$$a_{\tau} \rightarrow \rho_a^{\tau} = \frac{a_{\tau}}{y_{\tau} (M_1 + M_3)} \quad (8.22)$$

aus Kapitel 6.1 zur Berechnung der Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM für die trilineare Kopplung a_{τ} folgt

$$a_{\tau} = \rho_a^{\tau} y_{\tau} (M_1 + M_3) \quad (8.23)$$

und wegen $y_\tau = 0$ somit auch $a_\tau = 0$, obwohl $\rho_a^\tau = -1 \neq 0$ gilt. Die Renormierungsgruppen-gleichung der trilinearen Kopplung a_τ besteht aus einer Summe, deren Summanden proportional zu y_τ und entsprechend a_τ sind. Aus diesem Grund folgt $a_\tau = 0$ für alle Skalen und somit auch im IR-Bereich. Damit schreibt sich die Massenmatrix der Staus

$$\mathbf{M}_\tau^2 \approx \begin{pmatrix} m_L^2 + m_\tau^2 + \Delta_e & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\tau}}^2 + m_\tau^2 + \Delta_{\tilde{e}} \end{pmatrix}. \quad (8.24)$$

Die Werte der Größen Δ_e und $\Delta_{\tilde{e}}$ betragen nach dem Einsetzen der gewohnten Werte, vergleiche Kapitel 5.1

$$\Delta_e \approx 0.1 m_Z^2 \quad \text{und} \quad \Delta_{\tilde{e}} \approx 0.09 m_Z^2 \quad (8.25)$$

und man erhält mit $m_\tau = 1.7771 \text{ GeV}$

$$\mathbf{M}_\tau^2 \approx \begin{pmatrix} m_L^2 + 830 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\tau}}^2 + 830 \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

für die Massenmatrix der Stau. Die Eigenwerte dieser Matrix ergeben die Massen $m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2$, die direkt durch die Diagonalelemente von (8.26)

$$m_{\tilde{\tau}_1}^2 = m_L^2 + 830 \quad \text{und} \quad m_{\tilde{\tau}_2}^2 = m_{\tilde{\tau}}^2 + 830 \quad (8.27)$$

gegeben sind. Die Massen der Stau sind in diesem Fall — es liegt keine Mischung vor, die Nebendiagonalelemente in (8.26) sind Null — direkt durch die skalaren Massenquadrate des linkshändigen Supermultipletts m_L^2 und des rechtshändigen Supermultiplett $m_{\tilde{\tau}}^2$ gegeben.

Für die Werte der Größen m_L^2 und $m_{\tilde{\tau}}^2$ gilt wiederum nach (6.3)

$$m_L^2 = (M_1^2 + M_3^2) \rho_{\tilde{L}} \quad \text{und} \quad m_{\tilde{\tau}}^2 = (M_1^2 + M_3^2) \rho_{\tilde{\tau}}. \quad (8.28)$$

Im IR-Bereich kann in der Summe der Gaugino-Massen M_1^2 gegenüber M_3^2 aufgrund von $g_3 \gg g_1$ vernachlässigt werden. Man erhält

$$m_L^2 = M_3^2 \rho_{\tilde{L}} \quad \text{und} \quad m_{\tilde{\tau}}^2 = M_3^2 \rho_{\tilde{\tau}} \quad (8.29)$$

und mit den Werten von $\rho_{\tilde{L}}$ und $\rho_{\tilde{\tau}}$, die an der IR-Skala aus der Abbildung 6.1 abgelesen werden können, die Ausdrücke

$$m_L^2 = 0.15 M_3^2 \quad \text{und} \quad m_{\tilde{\tau}}^2 = -0.02 M_3^2 \quad (8.30)$$

für die Massen der Stau.

Weiterhin ist, wie in Abschnitt 8.4.2 dargestellt, der Wert von M_3 im IR-Bereich annähernd proportional zum freien Parameter $m_{1/2}$, es gilt

$$M_3 (Q = Q_{\text{IR}}) \approx \frac{12}{5} m_{1/2}. \quad (8.31)$$

Zusammengenommen erhält man die Ausdrücke

$$m_{\tilde{\tau}_1}^2 \approx 830 + 0.86 m_{1/2}^2 \quad \text{und} \quad m_{\tilde{\tau}_2}^2 \approx 830 - 0.12 m_{1/2}^2 \quad (8.32)$$

für die Massen der Staus. Diesen Ausdrücken sieht man leicht an, daß mit ansteigendem Wert von $m_{1/2}$ das Massenquadrat des zweiten Staus abnimmt und für $m_{1/2} \approx 80$ kleiner als Null wird.

Die Masse des ersten Staus zeigt ein genau entgegengesetztes Verhalten, das dem der anderen skalaren Massenquadrate entspricht: für ansteigendes $m_{1/2}$ nimmt die Masse des jeweiligen Teilchens zu.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die ungewöhnlich einschränkende Verteilung der Massen der Staus im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes eine direkte Folge der Bestimmung der Werte der Massen beziehungsweise der in die Berechnung der Massen eingehenden Parameter aus den Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM und hier im besonderen der Werte der Yukawa-Kopplungen ist. Zum einen ist die trilineare Kopplung als Folge des Verschwindens der Yukawa-Kopplung des Tauleptons Null und bleibt dies auch für die gesamte Renormierungsgruppenevolution, zum anderen liegt der Wert des skalaren Massenquadrates m_τ^2 im IR-Bereich im Negativen, was zu einem gegensätzlichen Verhalten der beiden Massen bei ansteigendem Wert von $m_{1/2}$ führt.

Würde man, wie in der Literatur üblich, einen Anfangswert der trilinearen Kopplung a_τ ungleich Null annehmen, so hätte dies zur Folge, daß die Nebendiagonalelemente in (8.26) nicht Null wären, eine echte Mischung der Eigeigenzustände vorliegen würde und, wie bei den anderen skalaren Massenquadraten, eine ähnliche Abhängigkeit der Werte der Massen vom Wert des freien Parameters $m_{1/2}$ vorliegen würde. Dies hätte aber auch zur Folge, daß ein weiterer freier Parameter, ein Anfangswert für die trilineare Kopplung a_τ , in die Theorie eingeführt werden müßte.

Die Stau-Masse im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes treten nicht die im letzten Abschnitt geschilderten Probleme mit der Verteilung der Massen der Staus auf. Die Verteilungen haben die gleiche Struktur wie bei den übrigen Sfermionen, grob gesagt nimmt die Masse zu, wenn der Wert des freien Parameters $m_{1/2}$ zunimmt. Es liegt jedoch auch in diesem Fall eine Einschränkung durch die Verteilung der Masse des ersten Stau vor: die untere Massenschranke von 76 GeV [41] ist für einen großen Bereich im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$ nicht erfüllt. Der hellgraue, keilförmige Bereich in Abbildung 8.18 kennzeichnet diese Bereiche im Raum der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$. Im dunkelgrauen Bereich ist zudem das skalare Massenquadrat negativ, so daß sich nicht auf befriedigende Weise eine Masse berechnen läßt.

Der Grund hierfür liegt in den Gegebenheiten der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Geht man wie im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes wiederum von der Massenmatrix der Staus in den Eigeigenzuständen

$$\mathbf{M}_\tau^2 = \begin{pmatrix} m_L^2 + m_\tau^2 + \Delta_e & v(a_\tau \cos\beta - \mu y_\tau \sin\beta) \\ v(a_\tau \cos\beta - \mu y_\tau \sin\beta) & m_\tau^2 + m_\tau^2 + \Delta_\varepsilon \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

aus, so gilt

$$\tan\beta \approx 60 \implies \sin\beta \approx 1 \quad \text{und} \quad \cos\beta \approx 0.02 \quad (8.34)$$

und man kann in guter Näherung annehmen, daß die Massenmatrix durch

$$\mathbf{M}_\tau^2 = \begin{pmatrix} m_L^2 + 2245 & -v \mu y_\tau \\ -v \mu y_\tau & m_\tau^2 + 1912 \end{pmatrix} \quad (8.35)$$

gegeben ist, wobei für die Größen Δ_e und Δ_ε eine zum letzten Abschnitt analoge Definition vorgenommen wurde. Die Eigenwerte der Matrix M_τ^2 ergeben wiederum die Massen der Mas-

seneigenzustände

$$m_{\tilde{\tau}_{1,2}}^2 \approx \frac{1}{2} \left(m_{\tilde{L}}^2 + m_{\tilde{\tau}}^2 \mp \sqrt{\left(m_{\tilde{L}}^2 - m_{\tilde{\tau}}^2 + 333 \right)^2 + 4 v^2 y_{\tilde{\tau}}^2 \mu^2 + 4157} \right), \quad (8.36)$$

wobei die konstanten Faktoren im Radikanten überwiegen. Sie werden durch den Faktor $v^2 y_{\tilde{\tau}}^2 \mu^2$ bestimmt, da dieser in (8.33) mit $\sin\beta \approx 1$ multipliziert wird und im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes weiterhin $y_{\tilde{\tau}} \approx 0.6$ gilt. Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes beträgt dieser Wert $\sin\beta \approx 0.8$ und außerdem gilt $y_{\tilde{\tau}} = 0$, was dazu führt, daß der fragliche Faktor verschwindet und dafür jedoch die im letzten Abschnitt geschilderten Probleme für die Massen der Stau im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes auftreten.

So ist der angesprochene Faktor $v^2 y_{\tilde{\tau}}^2 \mu^2$ ausschließlich im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes hinreichend groß, um in weiten Bereichen im Raum der Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ für eine ausreichend große negative Wurzel zu sorgen und das Massenquadrat des ersten Stau, begünstigt durch kleine Werte der transformierten Größen $\rho_{\tilde{L}}$ und $\rho_{\tilde{\tau}}$, ins Negative zu ziehen. Im Fall der positiven Wurzel treten diese Probleme dementsprechend nicht auf, vergleiche Abbildung A.6.

Die Massen im Higgs-Sektor

Im Higgs-Sektor liegen, wie in Abschnitt 2.4.2 dargestellt, fünf massive Freiheitsgrade vor. Als ungeladene Teilchen treten A^0 , h^0 und H^0 auf, als geladene Teilchen H^\pm , wobei letzteres zwei Freiheitsgrade repräsentiert.

Die Abbildungen A.13, A.14 und A.15 stellen die Verteilungen der Massen m_{A^0} , m_{H^0} und m_{H^\pm} für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, die Abbildungen A.29, A.30 und A.31 die Verteilungen der entsprechenden Massen für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, dar. Das leichteste der Higgs-Bosonen h^0 wird im allgemeinen mit dem Higgs-Boson des Standardmodells identifiziert. Um die Einflüsse von Strahlungskorrekturen höherer Ordnung und der Renormierungsgruppen-evolution im Standardmodell unterhalb der Symmetriebrechungsskala m_S zu untersuchen, wird die Darstellung der Verteilungen der Masse $m_{h^0}^2$ für beide Fixpunkte gesondert in Abschnitt 8.4.2 vorgenommen.

Die Masse des ungeladenen Higgs-Bosons A^0 ist nach (2.68, erste Gleichung) durch $m_{A^0}^2 = 2b/\sin\beta$ gegeben. Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes folgt aus $\tan\beta \approx 60$ die Abschätzung $m_{A^0}^2 \approx 59b$, für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes aus $\tan\beta \approx 1.7$ die Abschätzung $m_{A^0}^2 \approx 2.3b$. Die Masse $m_{A^0}^2$ sollte demnach für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes wesentlich geringer ausfallen als für den high- $\tan\beta$ -Fixpunkt. Dieses läßt sich durch den Vergleich der Abbildungen A.13 und A.29 leicht verifizieren.

Nach Tabelle 8.3 liegen für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes Massen bis zu 4348 GeV, für den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt Massen bis zu 648 GeV vor. Daß diese Massen nicht ganz die Verhältnisse der oben durchgeführten Abschätzung widerspiegeln, hat seinen Grund im Wert des Parameters b , der für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes größer ist als für den high- $\tan\beta$ -Fixpunkt.

Weiterhin läßt sich aus den Abbildungen A.13 und A.29 (graue Bereiche) ablesen, daß im annähernd gesamten Bereich negativer Werte des freien Parameters μ_0 das Massenquadrat $m_{A^0}^2$ negativ und eine Berechnung der Masse m_{A^0} nicht möglich ist. Diese Verhältnisse lassen

sich nachvollziehen, wenn man die Transformation (6.3) des Parameters b beziehungsweise ρ_b betrachtet. Im IR-Bereich kann wie in den vorangegangenen Abschnitten M_1 gegenüber M_3 vernachlässigt werden und es gilt

$$b = M_3 \mu \rho_b . \quad (8.37)$$

Da der Wert von μ direkt vom Wert des freien Parameters μ_0 abhängt und dieser im Bereich negativer Werte von μ_0 dementsprechend negativ ist, folgt dies auch für b , da sowohl M_3 als auch ρ_b im IR-Bereich positiv sind; vergleiche Abbildungen 6.2 und 6.1.

Die Masse des geladenen Higgs-Bosons H^\pm ist nach (2.68, zweite Gleichung) durch

$$m_{H^\pm} = m_{A^0}^2 + m_W^2 \quad (8.38)$$

gegeben. Für ausreichend große Massen m_A^2 kann man somit $m_{H^\pm}^2 \approx m_{A^0}^2$ abschätzen. Die Abbildungen A.15 und A.31 bestätigen diese Abschätzung und die formale Ähnlichkeit der Verteilung der Massen mit der Verteilung der Massen m_{A^0} .

Die Abbildungen A.14 und A.30 zeigen die Verteilung der Massen der ungeladenen Higgs Bosonen H^0 , gegeben durch die positive Wurzel von (2.68, letzte Gleichung)

$$m_{H^0}^2 = \frac{1}{2} \left(m_{A^0}^2 + m_Z^2 + \sqrt{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4 m_Z^2 m_{A^0}^2 \cos^2 2\beta} \right) . \quad (8.39)$$

Wiederum kann man die Masse m_{H^0} abschätzen. Für ausreichend große Massen m_{A^0} kann die Masse des Z-Bosons gegen m_{A^0} vernachlässigt werden. Vernachlässigt man weiterhin den Term mit $\cos 2\beta$ unter der Wurzel, so erhält man wiederum $m_{H^0}^2 \approx m_{A^0}^2$ für die Masse des Higgs-Bosons H^0 . Ein Vergleich der Verteilung der Massen und der Massenbereiche in Tabelle 8.3 bestätigt diese Abschätzungen. Im Gegensatz zu den Verteilungen der Massen m_{A^0} und m_{H^\pm} liegen für die Masse m_{H^0} im Bereich negativer Werte von μ_0 keine negativen Massenquadrate vor. Der graue Bereich kennzeichnet hier die Bereiche im Raum der freien Parameter, für die die untere Massenschranke von 62 GeV [41] nicht erfüllt ist.

Neben den dunkelgrauen Bereichen zeigen die Abbildungen A.29 und A.31 hellgraue Bereiche, die Bereiche im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, kennzeichnen, für die die untere Massenschranke von 62 GeV im Fall des A^0 und 54 GeV im Fall des H^\pm [41] nicht erfüllt ist. Diese Bereiche sind im Vergleich zu anderen, stärker einschränkenden Bedingungen nicht von Bedeutung, vergleiche Abbildung 9.2 und 9.1.

Die Masse des Higgs-Bosons des Standardmodells

In diesem Abschnitt soll die Betrachtung der Verteilung der Masse des leichtesten Higgs-Bosons m_{h^0} über den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, vorgenommen werden. Die Masse ist durch die negative Wurzel von (2.68, letzte Gleichung) zu

$$m_{h^0}^2 = \frac{1}{2} \left(m_{A^0}^2 + m_Z^2 - \sqrt{(m_{A^0}^2 + m_Z^2)^2 - 4 m_Z^2 m_{A^0}^2 \cos^2 2\beta} \right) \quad (8.40)$$

gegeben. In der Literatur wird das leichteste der sich aus den fünf massiven Freiheitsgraden des Higgs-Sektors ergebende Higgs-Boson, vergleiche Abschnitt 2.4.2, im allgemeinen als das Higgs-Boson des Standardmodells identifiziert. Es soll daher untersucht werden, inwieweit die im Rahmen dieser Arbeit durch Auswertung von Fixmannigfaltigkeiten berechneten Massen des Higgs-Bosons mit und ohne die in Abschnitt 2.4.2 angesprochenen Strahlungskorrekturen

	Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes	Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes
Auswertung bei m_S (Abb. 8.22)	m_{h^0} knapp unterhalb m_Z ; Massenschranke unterschritten (Abb. 8.25)	m_{h^0} im Bereich 45–50 GeV; Massenschranke unterschritten
Auswertung bei m_S + Strahlungskorrekturen	m_{h^0} für $m_{1/2} \gtrsim 60$ GeV oberhalb der Massenschranke (Abb. 8.23)	m_{h^0} für $m_{1/2} \gtrsim 250$ GeV oberhalb der Massenschranke (Abb. 8.26)
Auswertung bei m_S + SM-Evolution	m_{h^0} im gesamten Bereich oberhalb der Massenschranke (Abb. 8.24)	m_{h^0} im Bereich 70 bis 90 GeV; Massenschranke unterschritten (Abb. 8.27)
Auswertung bei m_S + Strahlungskorrekturen + SM-Evolution	m_{h^0} im gesamten Bereich oberhalb der Massenschranke (Abb. 8.24)	m_{h^0} für $m_{1/2} > 145$ GeV oberhalb der Massenschranke (Abb. 8.27)

Tabelle 8.4: Übersicht der Ergebnisse für die Berechnung der Masse des Higgs-Bosons m_{h^0} . Dieses Higgs-Boson wird im allgemeinen mit dem Higgs-Boson des Standardmodells identifiziert. Es liegt eine untere Massenschranke von ≈ 95 GeV vor. Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes bestehen keine Schwierigkeiten, diese untere Massenschranke zu erfüllen. Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes müssen zumindest die Stop-Korrekturen und die Renormierungsgruppenevolution im Standardmodell mit einbezogen werden, um die Massenschranke für angemessen große Bereiche im Raum der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ zu erfüllen. Trotz dessen stellt die Massenschranke für m_{h^0} eine der stärksten Einschränkungen für den Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar; vergleiche Abschnitt 9 und Abbildung 9.1.

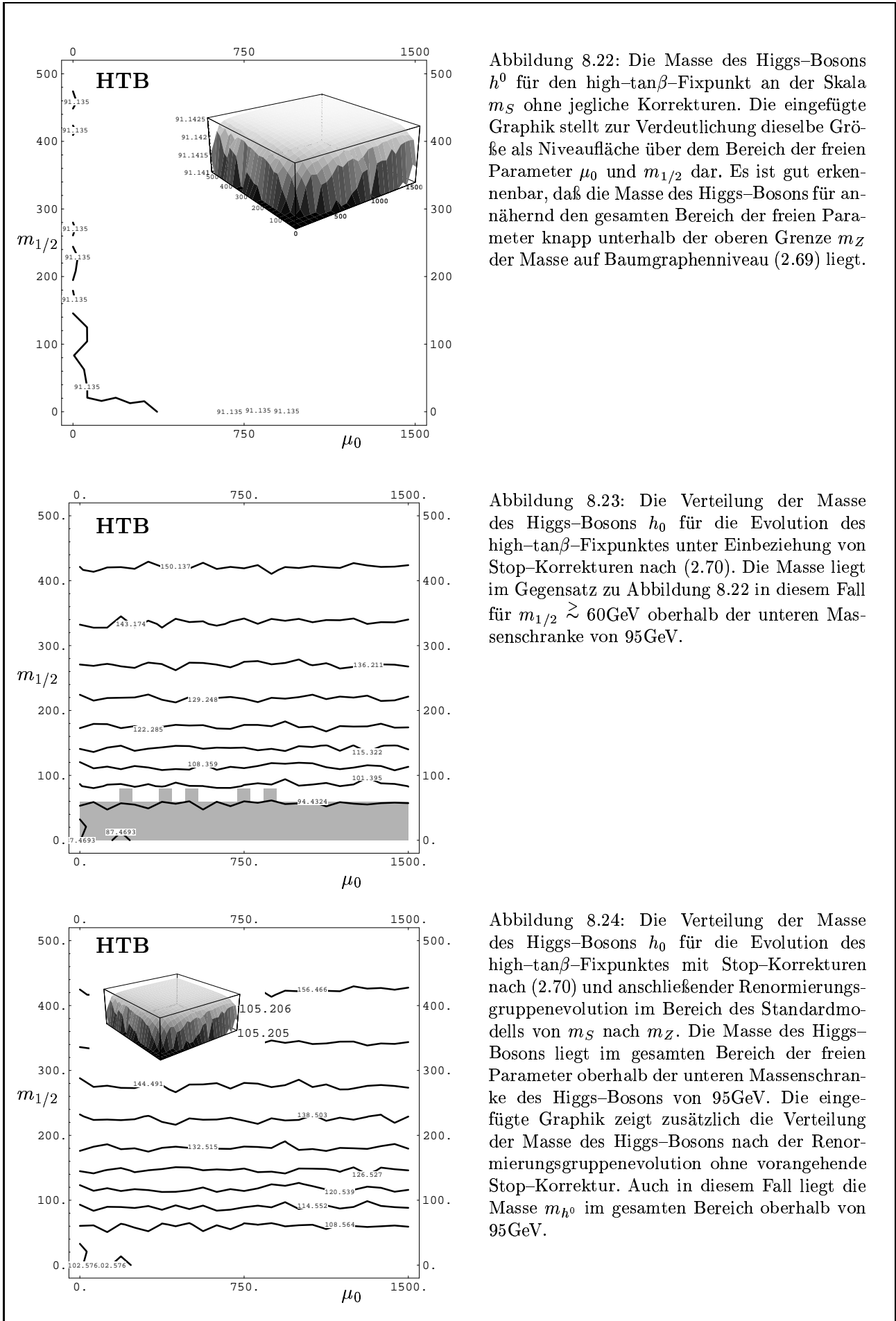


Abbildung 8.22: Die Masse des Higgs-Bosons h^0 für den high- $\tan\beta$ -Fixpunkt an der Skala m_S ohne jegliche Korrekturen. Die eingefügte Graphik stellt zur Verdeutlichung dieselbe Größe als Niveauläche über dem Bereich der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ dar. Es ist gut erkennbar, daß die Masse des Higgs-Bosons für annähernd den gesamten Bereich der freien Parameter knapp unterhalb der oberen Grenze m_Z der Masse auf Baumgraphenniveau (2.69) liegt.

Abbildung 8.23: Die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons h_0 für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes unter Einbeziehung von Stop-Korrekturen nach (2.70). Die Masse liegt im Gegensatz zu Abbildung 8.22 in diesem Fall für $m_{1/2} \gtrsim 60\text{GeV}$ oberhalb der unteren Massenschranke von 95GeV .

Abbildung 8.24: Die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons h_0 für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes mit Stop-Korrekturen nach (2.70) und anschließender Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells von m_S nach m_Z . Die Masse des Higgs-Bosons liegt im gesamten Bereich der freien Parameter oberhalb der unteren Massenschranke des Higgs-Bosons von 95GeV . Die eingefügte Graphik zeigt zusätzlich die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons nach der Renormierungsgruppenevolution ohne vorangehende Stop-Korrektur. Auch in diesem Fall liegt die Masse m_{h^0} im gesamten Bereich oberhalb von 95GeV .

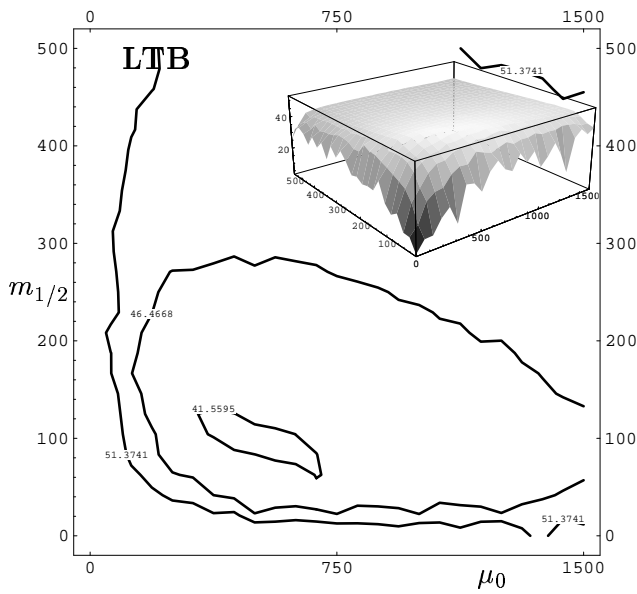


Abbildung 8.25: Masse des Higgs-Bosons h^0 im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes an der Skala m_S ohne Einbeziehung von Korrekturen. Die eingefügte Graphik stellt zur Verdeutlichung dieselbe Größe als Niveaufläche über dem Bereich der freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$ dar. Man erkennt leicht, daß sich die Masse im gesamten Bereich der freien Parameter unterhalb der unteren Massenschranke von 95GeV befindet.

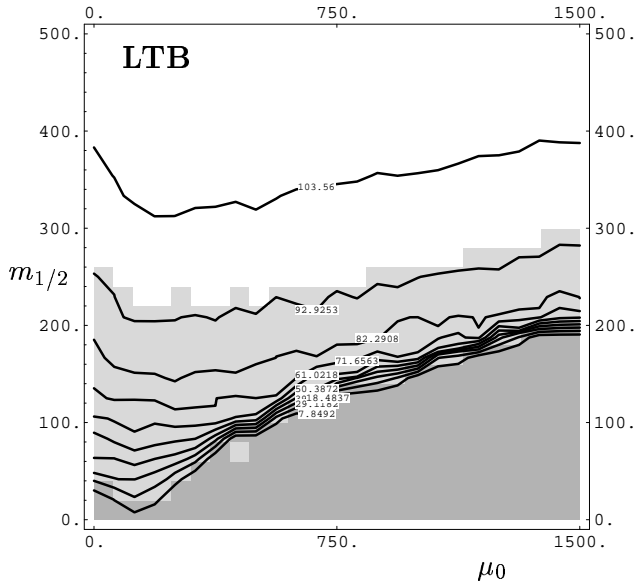


Abbildung 8.26: Die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes unter Einbeziehung von stop-Korrekturen nach (2.70). Der dunkelgraue Bereich kennzeichnet den Bereich der freien Parameter, in dem das Massenquadrat $m_{h^0}^2$ negativ und damit eine Berechnung der Masse m_{h^0} nicht möglich ist. Der hellgraue Bereich kennzeichnet den Bereich der freien Parameter, für den zwar ein positives Massenquadrat, jedoch eine Masse vorliegt, die unterhalb der unteren Massenschranke von 95GeV liegt. Um die Massenschranke zu erfüllen, muß $m_{1/2} \gtrsim 250\text{GeV}$ gelten.

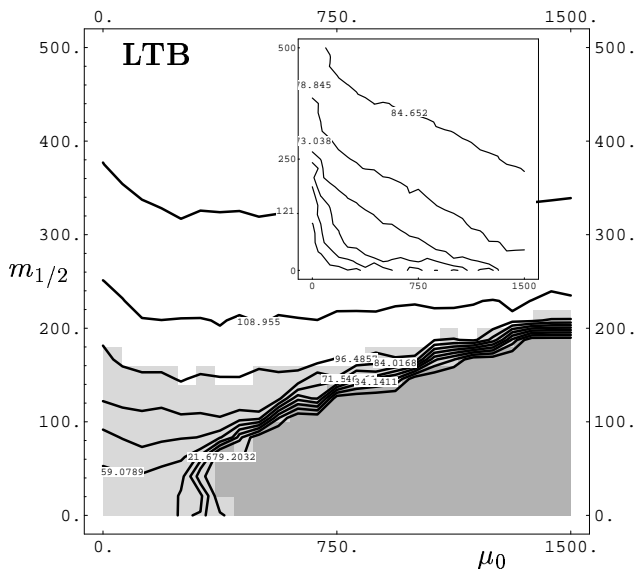


Abbildung 8.27: Die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes mit Stop-Korrekturen nach (2.70) und anschließender Evolution im Bereich des SM. Wie in Abbildung 8.26 kennzeichnet der dunkelgraue Bereich den Bereich der freien Parameter, in dem das Massenquadrat $m_{h^0}^2$ negativ ist, und der hellgraue Bereich den Bereich der freien Parameter, für den zwar ein positives Massenquadrat, jedoch eine Masse vorliegt, die unterhalb von 95GeV liegt. Um die Massenschranke zu erfüllen, muß in diesem Fall $m_{1/2} \gtrsim 145\text{GeV}$ gelten. Die eingefügte Graphik zeigt zusätzlich die Masse des Higgs-Bosons nach der Evolution ohne vorhergehende Stop-Korrektur. In diesem Fall liegt m_{h^0} im gesamten Bereich unterhalb von 95GeV.

und unter Einbeziehung der im Abschnitt 2.4.2 dargestellten Evolution im Standardmodell in der Lage sind, die untere Massenschranke von 95 GeV [41, 52] zu erfüllen.

Die Abbildung 8.22 zeigt die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons m_{h^0} über den verbleibenden freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$, die sich aus der Auswertung der Massenbeziehung auf Baumgraphen-Niveau (8.39, negative Wurzel) ergibt, für den Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die Abbildung 8.25 zeigt die Verteilung der Masse des Higgs-Bosons m_{h^0} für den Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die Massenbeziehung ist auf Baumgraphen-Niveau durch (2.69)

$$m_h < |\cos 2\beta| m_Z \quad (8.41)$$

nach oben beschränkt. Für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes ergibt diese obere Grenze mit den gewohnten Abschätzungen $m_{h^0} \lesssim 0.999 m_Z \approx 91$ GeV und für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes $m_{h^0} \lesssim 0.49 m_Z \approx 44$ GeV. Diese Abschätzungen spiegeln sich in den Massenverteilungen in den Abbildungen 8.22 und 8.25 wieder. Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes befindet sich die berechnete Masse m_{h^0} im annähernd gesamten Bereich im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ für positives μ_0 knapp unterhalb der gegebenen oberen Grenze, was durch die in Abbildung 8.22 eingefügte Graphik der Masse m_{h^0} als Niveau-Fläche über den freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ verdeutlicht wird. Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes zeigt sich ein äquivalentes Verhalten, die berechnete Masse befindet sich in einem Bereich von 45 bis 50 GeV. Die in Abbildung 8.25 eingefügte Graphik zeigt wiederum die Masse m_{h^0} als Niveau-Fläche.

Der Bereich negativer Werte des Parameters μ_0 wurde in den Abbildungen und folgenden Betrachtungen ausgeschlossen, da das sich aus den Berechnungen ergebende Massenquadrat $m_{H^0}^2$ — wie im Fall der Massenquadrate der Higgs-Bosonen A^0 und H^\pm — für den Fall $\mu_0 < 0$, negative Werte annimmt.

Wird die durch (2.70) gegebene Einschleifen-Strahlungskorrektur

$$\begin{aligned} m_{h^0}^2 &= m_{h^0(0)}^2 + \Delta m_{h^0}^2 \\ &= m_{h^0(0)}^2 + \frac{3}{4\pi^2} v^2 y_t^4 \sin^4 \beta \log \left(\frac{\sqrt{2} m_{\tilde{t}_1} m_{\tilde{t}_2}}{v^2 y_t^2 \sin^2 \beta} \right) \end{aligned} \quad (8.42)$$

bei der Berechnung der Masse m_{h^0} mit einbezogen, so vergrößert sich die Masse des Higgs-Bosons h^0 in weiten Bereichen. Im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes, Abbildung 8.23, befindet sich die Masse für $m_{1/2} \gtrsim 60$ GeV oberhalb der unteren Massenschranke und das Massenquadrat $m_{h^0}^2$ ist für alle möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ positiv. Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes liegen im Gegensatz dazu Bereiche im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ vor, in denen das Massenquadrat kleiner Null ist, Abbildung 8.26, dunkelgrauer Bereich. Weiterhin existieren hellgrau eingezeichnete Bereiche, in denen das Massenquadrat zwar positiv ist, die Masse aber unterhalb der unteren Massenschranke liegt. Die Massenschranke wird für $m_{1/2} \gtrsim 250$ erfüllt.

Wird zusätzlich die Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells mit einbezogen, so liegt die Masse m_{h^0} im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes im gesamten Bereich im Raum der freien Parameter oberhalb der unteren Massenschranke, siehe Abbildung 8.24. Im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes, Abbildung 8.27, existieren noch immer Bereiche im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, in denen das Massenquadrat negativ ist (dunkelgrau), und Bereiche im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ in denen die untere Massenschranke nicht erfüllt wird (hellgrau). Diese Bereiche sind gegenüber dem Fall ohne Renormierungsgruppenevolution jedoch zu kleineren Werten von $m_{1/2}$ verschoben, es muß $m_{1/2} \gtrsim 145$ GeV gelten, um die Massenschranke zu erfüllen.

Führt man die Renormierungsgruppenevolution im Standardmodell ohne Einbeziehung der Strahlungskorrekturen bei der Berechnung der Masse m_{h^0} durch, so befindet sich für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes die Masse für alle möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, siehe die in Abbildung 8.27 eingezeichnete Graphik, unterhalb der Massenschranke. Für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes befindet sie sich im Gegensatz dazu, siehe die in Abbildung 8.24 eingezeichnete Graphik, für alle möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ oberhalb der unteren Massenschranke.

Die Tabelle 8.4 zeigt die Ergebnisse der Berechnung der Masse des Higgs-Bosons m_{h^0} für die verschiedenen Vorgehensweisen im Zusammenhang: einmal ohne jegliche Korrektur, dann mit Strahlungskorrekturen und anschließend unter Einbeziehung der Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells.

Die oben angeführte Bedingung von $m_{1/2} \gtrsim 145$ GeV für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes zum Erfüllen der unteren Massenschranke für die Masse des Higgs-Bosons m_{h^0} stellt für kleine Werte von $m_{1/2}$ eine der entscheidenden Bedingungen bei der Einschränkung der möglichen Werte der verbleibenden freien Parameter des weich brechenden MSSM, μ_0 und $m_{1/2}$, für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes dar.

Kapitel 9

Abschließende Zusammenfassung

In diesem Abschnitt soll die abschließende Darstellung der Ergebnisse der Untersuchungen im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolgen. Im Verlauf der Untersuchungen war es möglich, durch Bestimmung und Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM die Anzahl der freien Parameter der Theorie auf zwei zu reduzieren und eine große Anzahl von Vorhersagen, wie zum Beispiel die Massen der Teilchen des weich brechenden Sektors, in Abhängigkeit dieser verbleibenden zwei freien Parameter zu berechnen.

Zentraler Gegenstand der Untersuchungen und gleichzeitig Ausgangspunkt der sich anschließenden Einzeluntersuchungen im Rahmen dieser Arbeit ist die *Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden minimal supersymmetrischen Standardmodells*. Die Renormierungsgruppengleichungen beschreiben die Kopplungen der Quarks und Leptonen der dritten Fermionen-Familie sowie die Kopplungen und Parameter des weich brechenden Sektors des minimal supersymmetrischen Standardmodells. Es konnte gezeigt werden, daß in den unphysikalischen Polstellen der Eichkopplungen g_3 ($g_3 \rightarrow \infty$; $g_3 \gg g_{1,2}$) und g_1 ($g_1 \rightarrow \infty$; $g_1 \gg g_{2,3}$), in denen jeweils die anderen Eichkopplungen gegenüber der singulären Eichkopplung vernachlässigt werden können, Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen der reduzierten Systeme vorliegen. Reduzierte Systeme sind in diesem Zusammenhang Systeme, die nur noch von der entsprechenden singulären Eichkopplung abhängen. Die Polstellen der Eichkopplungen beschränken dabei den mathematischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM. Der physikalische Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen ist im Gegensatz dazu durch die IR-Skala und die UV-Skala begrenzt und wird vom mathematischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen eingeschlossen. Die UV-Skala oder Unifizierungs-Skala befindet sich im Bereich von $Q \approx 2 \cdot 10^{16}$ GeV, die IR-Skala im Bereich der elektroschwachen Skala $Q = v/\sqrt{2} \approx 174$ GeV. Die Polstelle der Eichkopplung g_3 befindet sich unterhalb der IR-Skala, die Polstelle der Eichkopplung g_1 jenseits der UV-Skala.

Es konnte weiterhin gezeigt werden, daß die in den Polstellen vorliegenden Fixpunkte der Renormierungsgruppengleichungen durch Evolution in Anwesenheit aller drei Eichkopplungen durch Fixlinien verbunden werden. Diese sind damit im gesamten mathematischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen vollständig festgelegt. Da der mathematische Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen den physikalischen Gültigkeitsbereich einschließt, sind die bestimmten Fixlinien auch im physikalischen Gültigkeitsbereich zwischen der UV- und IR-Skala vollständig festgelegt. Die Werte der Kopplungen und Parameter des weich brechenden MSSM lassen sich an einer beliebigen Skala innerhalb des physikalischen Gültigkeitsbereichs durch Auswerten der Fixlinien bestimmen. Durch Kenntnis der Fixmannigfaltigkeiten

der Renormierungsgruppengleichungen liegen somit auch die Werte der durch sie beschriebenen Kopplungen und Parameter im gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich fest. Auf diese Weise konnte die große Anzahl der freien Parameter des weich brechenden MSSM auf zwei verbleibende freie Parameter reduziert werden, nämlich den Anfangswert des Higgs–Mischungsparameter μ_0 und den Wert der unifizierenden Gaugino–Masse $m_{1/2}$ an der UV–Skala.

$$\boxed{\mu_0, \quad m_{1/2}}$$

Verbleibende freie Parameter
des weich brechenden MSSM

Es konnte somit erreicht werden, die Parameter und Kopplungen des weich brechenden minimal supersymmetrischen Standardmodells im gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ vollständig festzulegen.

Bei der Untersuchung der Struktur der Renormierungsgruppengleichungen als gekoppeltes, nichtlineares Differentialgleichungssystem konnte festgestellt werden, daß eine *triangulare Kopplungsstruktur* vorliegt. Diese führt dazu, daß im vollständigen System der Renormierungsgruppengleichungen unabhängige Untersysteme vorhanden sind. So ist zum Beispiel das Eich–Yukawa–System unabhängig von den Kopplungen und Parametern des weich brechenden Sektors. Aus diesem Grund war es möglich, in den berechneten Fixmannigfaltigkeiten des weich brechenden MSSM die Fixmannigfaltigkeiten des Eich–Yukawa–Sektors und deren äußerst erfolgreiche Vorhersagen im Bereich der Massen der Quarks und Leptonen, siehe weiter unten, zu erhalten.

Von den in Abschnitt 6.1 berechneten Fixpunkten ist die Evolution von zwei Fixpunkten in der Lage, physikalisch sinnvolle Kombinationen für verschwindende und nicht–verschwindende Massen der Quarks und Leptonen zu ergeben. Diese Fixpunkte lassen sich durch den Wert des Parameters $\tan\beta$ charakterisieren, der das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte der beiden Higgs–Dubletts des MSSM angibt. Dies ist zum einen der *low– $\tan\beta$* –Fixpunkt, für den die Masse des Bottomquarks und des Tauleptons gegenüber der Masse des Topquarks vernachlässigt wird und der zu kleinen Werten von $\tan\beta \approx 1.5$ führt. Zum anderen ist es der *high– $\tan\beta$* –Fixpunkt, der nicht–verschwindende Massen für alle Fermionen der dritten Familie realisiert und zu Werten von $\tan\beta \approx 60$ führt. Die Evolution dieser beiden Fixpunkte wurde im Anschluß an die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten detaillierten Einzeluntersuchungen unterzogen, die von folgenden Fragestellungen motiviert wurden: Erlauben die gefundenen Fixmannigfaltigkeiten die radiative spontane elektroschwache Symmetriebrechung im skalaren Potential und erfüllen sie alle physikalischen Forderungen an das Potential längs des gesamten Evolutionsweges von der UV–Skala zur IR–Skala? Befinden sich weiterhin die Vorhersagen der Massen der Teilchen des weich brechenden Sektors in Übereinstimmung mit den aktuellen experimentellen Massenschranken?

Alle diese Untersuchungen und Vorhersagen konnten aufgrund der Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten in Abhängigkeit von nur zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, vorgenommen werden. Dabei führte die Auswertung der verschiedenen Bedingungen und die Kombination ihrer Ergebnisse zu einer weiteren Einschränkung der möglichen Werte der freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, und damit zu einer zusätzlichen Erhöhung der Aussagekraft der Theorie.

Anhand der Abbildungen 9.1 und 9.2 soll nun noch einmal eine ausführlichere Darstellung der entscheidenden Einschränkungen und Ergebnisse der Einzeluntersuchungen und ihrer Kombina-

tion zur Einschränkung der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ vorgenommen werden. Die möglichen Werte der verbleibenden freien Parameter der Theorie, μ_0 und $m_{1/2}$, wurden für die Untersuchungen im Bereich von $\mu_0 \in (-1500, 1500)$ und $m_{1/2} \in (0, 500)$ gewählt. Eine weitere Vergrößerung dieser Bereiche ist möglich, führt jedoch zu keinen neuen Erkenntnissen, da ein Großteil der Auswertungen zu Proportionalitäts-Beziehungen der Art $\mu_0 \propto m_{1/2}$ zwischen den freien Parametern führt.

Bestimmung der Symmetriebrechungsskala m_S

In Abschnitt 8.1 konnte gezeigt werden, daß die Symmetriebrechungsskala m_S im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes für alle möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ mit der Skala der Polmasse des Topquarks m_{top}^{pole} zusammenfällt. Diese wird im Rahmen dieser Arbeit aus dem Mittelwert der skalaren Massen des weich brechenden Sektors bestimmt. Dies geschieht mit der Zielsetzung, den Einfluß der Korrekturen höherer Ordnung im skalaren Potential zu minimieren. Die Symmetriebrechungsskala m_S gibt weiterhin die Skala zur Auswertung der Stationaritätsbedingungen (2.31) zur Minimierung des skalaren Potentials an. Die Skala m_{top}^{pole} stellt eine in der Literatur [7, 10, 36] häufig getroffene Wahl für diese Skala dar. Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes ergibt sich eine leichte Erhöhung des Wertes der Skala m_S in Abhängigkeit von den freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ (vergl. Abbildung 8.1). Die Skala nimmt Werte bis $m_S \approx 600$ GeV an und befindet sich damit unterhalb 1 TeV. Die Setzung $m_S \approx 1$ TeV stellt eine häufig verwendete obere Grenze für die Symmetriebrechungsskala dar, deren Wahl durch die Größenordnung der Massen der Superteilchen motiviert ist.

Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes (HTB)	Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes (LTB)
$m_S = m_{top}^{\text{pole}}$	$m_S \in (m_{top}^{\text{pole}}, 600 \text{ GeV})$

Radiative spontane elektroschwache Symmetriebrechung

In Abschnitt 8.2 konnte gezeigt werden, daß die Vorhersagen aus den Parametern und Kopplungen in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, unter Einschluß der Forderung der radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung eine klare Favorisierung der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes ergeben.

low- $\tan\beta$ -Fixpunkt

Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes liegt im Fall der Lösung der Minimierungsbedingung mit negativer Wurzel ein Bereich im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ (**II** in Abbildung 9.1) vor, in dem sowohl das Massenquadrat des Z-Bosons als auch der Wert des Parameters $\tan\beta$ ein positives Vorzeichen besitzen und die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ erfüllt ist. In diesem Bereich, der weiterhin auch nicht von all den anderen Bedingungen ausgeschlossen wird, ist somit die spontane radiative elektroschwache Symmetriebrechung möglich. Dies stellt ein gutes Ergebnis dar.

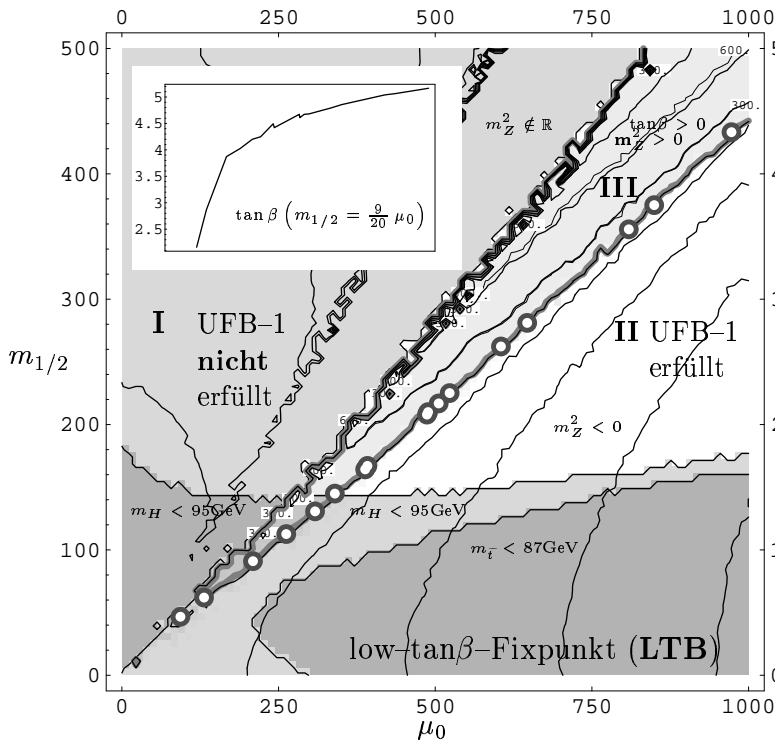


Abbildung 9.1: Entscheidende Einschränkungen im Bereich des Raumes der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Die Darstellung bezieht sich auf die negative Wurzel der Lösung (8.5) für m_Z^2 und $\tan\beta$. Im Bereich I ist die erste Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB-1) nicht erfüllt, vgl. Abb. 8.11, im Bereich II ist sie hingegen erfüllt. Im Bereich III ist sowohl die UFB-1- als auch die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ erfüllt, die elektroschwache Symmetriebrechung also möglich und das Massenquadrat des Z-Bosons positiv. Die eingezeichneten Kreise bezeichnen Kombinationen der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$, für die eine Masse des Z-Bosons berechnet werden kann, die den experimentellen Vorgaben entspricht.

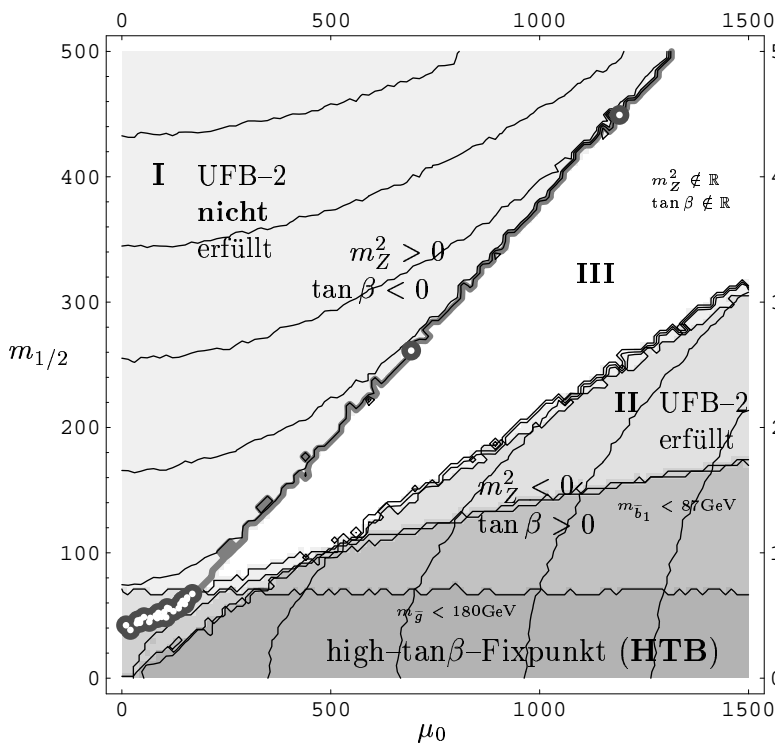


Abbildung 9.2: Entscheidende Einschränkungen im Bereich des Raumes des verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Es gilt weitestgehend das oben im Fall der Abbildung 9.1 Gesagte. Im Bereich I ist die zweite Bedingung zur Beschränktheit des Potential (UFB-2) nicht erfüllt, im Bereich II ist sie es. Dieser Bereich wird von unten durch die Massenschranken des Sbottom und der Gluinos begrenzt. Im Bereich III ist die Bedingung für die „Destabilisierung des Ursprungs“ erfüllt und so die elektroschwache Symmetriebrechung möglich. Dieser Bereich ist jedoch annähernd deckungsgleich mit dem Bereich, in dem die Masse des Z-Bosons und Wert des Parameter $\tan\beta$ keine reelle Lösung besitzen.

high-tan β -Fixpunkt

Im Fall der Evolution des high-tan β -Fixpunktes liegen im Gegensatz zum low-tan β -Fixpunkt keine Bereiche im Raum der freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, vor, die in der Lage sind, die elektroschwache Symmetriebrechung radiativ zu ermöglichen. Weiterhin besitzen das Massenquadrat des Z-Bosons und der Wert des Parameters tan β , die sich aus den Minimierungsbedingungen beziehungsweise Stationaritätsbedingungen des skalaren Potentials berechnen lassen, für alle Bereiche reeller Werte von m_Z und tan β (**I** und **II** in Abbildung 9.2) unterschiedliche Vorzeichen. Erschwerend kommt hinzu, daß die Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ ($b^2 > (m_{H_u}^2 + |\mu|^2) \cdot (m_{H_d}^2 + |\mu|^2)$), die ein Minimum im Ursprung der Felder des skalaren Potentials verhindert und damit die elektroschwache Symmetriebrechung ermöglicht, nur in den Bereichen nicht-reeller Werte von m_Z und tan β (**III** in Abbildung 9.2) im Raum der freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ erfüllt ist.

Evolution des high-tan β -Fixpunktes (HTB)	Evolution des low-tan β -Fixpunktes (LTB)
$m_Z^2 \gtrless 0$ und $\tan\beta \lesseqgtr 0$ sowie $b^2 \not> (m_{H_u}^2 + \mu ^2) \cdot (m_{H_d}^2 + \mu ^2)$ (Minimum im Ursprung)	Es existieren μ_0 und $m_{1/2}$ mit $m_Z^2 > 0$ und $\tan\beta > 0$ sowie $b^2 > (m_{H_u}^2 + \mu ^2) \cdot (m_{H_d}^2 + \mu ^2)$ (kein Minimum im Ursprung)
\Downarrow spontane radiative elektroschwache Symmetriebrechung nicht möglich	\Downarrow spontane radiative elektroschwache Symmetriebrechung möglich

Es konnte weiterhin gezeigt werden, daß das Gelingen beziehungsweise Mißlingen der radiativen elektroschwachen Symmetriebrechung im Fall der Evolution des low-tan β - beziehungsweise high-tan β -Fixpunktes durch die Struktur der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM verursacht wird.

low-tan β -Fixpunkt

Im Fall der Evolution des low-tan β -Fixpunktes besitzt der der Higgs-Massenparameter $m_{H_d}^2$ einen Infrarot-Fixpunkt im Positiven, aus dem ein positiver Wert bei der Auswertung an der IR-Skala folgt. Die aus diesem Grund vorliegenden unterschiedlichen Vorzeichen der Higgs-Massenparameter begünstigen die Erfüllung der Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ ($b^2 > (m_{H_u}^2 + |\mu|^2) \cdot (m_{H_d}^2 + |\mu|^2)$).

high-tan β -Fixpunkt

Im Gegensatz zur Evolution des low-tan β -Fixpunktes liegen im Fall des high-tan β -Fixpunktes für beide Higgs-Massenparameter $m_{H_u}^2$ und $m_{H_d}^2$ Infrarot-Fixpunkte mit negativen Werten

vor. Diese sorgen dafür, daß beide Higgs–Massenparameter bei der Auswertung an der IR–Skala negative Werte erhalten. Damit liegen gleiche Vorzeichen der Higgs–Massenparameter vor, weshalb die Bedingung $(b^2 > (m_{H_u}^2 + |\mu|^2) \cdot (m_{H_d}^2 + |\mu|^2))$ im allgemeinen nicht so leicht zu erfüllen ist.

Auf diese Weise konnte eine natürliche und theoretisch fundierte Erklärung für die in der Literatur bekannte Tatsache gegeben werden, daß die elektroschwache Symmetriebrechung kleine Werte von $\tan\beta$ favorisiert.

Physikalische Bedingungen an das Potential

In Abschnitt 8.3 konnte durch die Auswertung der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials (Unbeschränktheits–Bedingung) und zum Erhalt der Ladungs– und Farbsymmetrie (Ladungs– und Farbbrech–Bedingung) gezeigt werden, daß die Einschränkungen der möglichen Werte der beiden verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, weitestgehend mit den Vorhersagen zur Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung verträglich sind. Dabei wurde die Auswertung der Bedingungen in einer auf Casas et al. [20] zurückgehenden Form vorgenommen, die die Werte der Parameter im gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen miteinbezieht. Die Werte der Parameter liegen durch die Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen innerhalb des gesamten physikalischen Gültigkeitsbereiches von der UV–Skala bis zur IR–Skala in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ vollständig fest. Bei der Auswertung der dritten Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials, vergleiche Abschnitt 8.3.1, traten folgende Probleme auf:

low– $\tan\beta$ –Fixpunkt

Für die Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes kann die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB–3) nicht numerisch ausgewertet werden, da die beteiligten Potentiale aufgrund der verschwindenden Yukawa–Kopplungen des Bottomquarks und des Tauleptons für den gesamten Bereich von der UV–Skala bis zur IR–Skala singulär sind; vergleiche Abschnitt 8.3.1. In diesem Fall wurde eine analytische Grenzwertbetrachtung vorgenommen, die ergibt, daß die dritte Bedingung zur Beschränktheit des Potentials im Fall der Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes als erfüllt angesehen werden kann.

high– $\tan\beta$ –Fixpunkt

Analog ergibt die Auswertung der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials (UFB–3) im Fall der Evolution des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes, daß die Bedingung für alle möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ nicht erfüllt werden kann. Es konnte jedoch in Abschnitt 8.3.1 gezeigt werden, daß eine geringe rechtfertigbare Modifikation (ε –Effekt) der von Casas et al. [20] angegebenen Grenzen der Integration der Feldkomponenten im Bereich sehr kleiner Werte zu einer vollständigen Relaxation dieser Bedingung führt. Die Bedingung kann mit dieser Modifikation für alle möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ als erfüllt angesehen werden.

Unter Ausschluß der dritten Bedingung zur Beschränktheit des Potentials aus dem Algorithmus gehen für die Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes von der ersten Bedingung, vergleiche Abbildung 8.2, und im Fall der Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes von der ersten und zwei-

ten Bedingung die stärksten Einschränkungen der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus. Diese sind, wie Abbildung 9.1 zu entnehmen ist, für den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt vollständig mit dem Bereich im Raum der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ verträglich, der zur elektroschwachen Symmetriebrechung führt. Im Fall des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes schließen sie die Werte für μ_0 und $m_{1/2}$ aus, die oberhalb des Bereiches nicht-reeller Werte der Masse des Z-Bosons und des Wertes des Parameters $\tan\beta$ liegen. Die Einschränkungen durch die Bedingungen zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrien sind für alle betrachteten Fälle schwächer als die Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials.

Bestimmung der Massen der Quarks und Leptonen

Ein wichtiges Ergebnis der Einzeluntersuchungen im Rahmen der Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM stellt die Bestimmung der Massen der Quarks und Leptonen und der Teilchen des weich brechenden Sektors dar. Letztere beinhalten die fünf massiven Freiheitsgrade des Higgs-Sektors, die Gluinos, sowie die Charginos und Neutralinos. Auch die Vorhersagen der Massen konnten, wie alle anderen, in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern der Theorie, μ_0 und $m_{1/2}$, gewonnen werden.

high- $\tan\beta$ -Fixpunkt

Dabei war es im Fall der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes möglich (Abschnitt 8.4.1), die ausgesprochen guten Vorhersagen der Massen der Quarks und Leptonen des Eich-Yukawa-Sektors

$$m_{top}^{\text{pole}} \approx 180 \text{ GeV} \quad m_b \approx 4 \text{ GeV} \quad m_\tau = 1.7771 \text{ GeV} \quad (\text{bei } \tan\beta \approx 60) . \quad (9.1)$$

auch unter Einbeziehung des weich brechenden Sektors beizubehalten; vergleiche Abschnitt 8.4.1 für die experimentellen Werte der Massen der Quarks und Leptonen.

low- $\tan\beta$ -Fixpunkt

Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes konnte weiterhin eine Abschätzung des Wertes des Parameters $\tan\beta$ aus den Ergebnissen der Untersuchung des skalaren Potentials hinsichtlich der Möglichkeit der elektroschwachen Symmetriebrechung

$$\tan\beta \in (4, 5.2) \quad (9.2)$$

unter Berücksichtigung der unteren Massenschranke des Higgs-Bosons des Standardmodells vorgenommen werden. Siehe dazu auch die Abbildung 9.1 und die darin eingefügte Graphik für die Werte des Parameters $\tan\beta$, die für eine Masse des Z-Bosons angenommen werden, die mit den experimentellen Vorgaben verträglich ist. Mit diesem Wert ist unter Berücksichtigung der Polmassen-Korrektur eine Vorhersage der Masse des Topquarks von

$$m_{top}^{\text{pole}} \in (186, 189) \text{ GeV} \quad (9.3)$$

im Fall der Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes möglich. Die Massen des Bottomquarks und des Tauleptons sind für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes *per constructionem* Null.

Bestimmung der Massen des skalaren Sektors

Im Bereich der durch die Parameter und Kopplungen des weich brechenden Sektors beschriebenen Massen der supersymmetrischen Teilchen ist für große Bereiche der Werte der beiden freien Parametern der Theorie, μ_0 und $m_{1/2}$, die Berechnung eines mit den aktuellen experimentellen Massenschranken verträglichen Massenspektrums möglich. Die durch einen minimalen und maximalen Wert in Abhängigkeit der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ gegebenen Bereiche der Massen sind in Tabelle 8.3 abgebildet. Die Graphiken, die sich durch Auftragen der Massen über den freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ ergeben, sind im Anhang A abgebildet. Die im Verlauf des Abschnittes 8.4.2 diskutierten Abbildungen 8.16 bis 8.21 zeigen diejenigen Massenverteilungen, die zu Einschränkungen der möglichen Werte der freien Parametern μ_0 und $m_{1/2}$ führen.

high- $\tan\beta$ -Fixpunkt

Für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes sind diese Einschränkungen vor allen durch die Massenschranke des Stau $m_{\tilde{\tau}_1} \geq 76$ GeV, die Massenschranke des Sbottom $m_{\tilde{b}_1} \geq 82$ und die Massenschranke der Gluinos $m_{\tilde{g}} \geq 180$ GeV gegeben.

low- $\tan\beta$ -Fixpunkt

Für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes sind die Einschränkungen durch die Massenschranke des Stau $m_{\tilde{\tau}_1} \geq 76$ GeV und die Massenschranke des Stop $m_{\tilde{t}_1} \geq 87$ GeV gegeben. Für die Massenschranke des Stau ergeben sich dabei besonders weitreichende Einschränkungen der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$. Im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes schließt diese Massenschranke den gesamten Bereich der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ aus, da die Massenschranke für den ersten Masseneigenzustand einen Wert von $m_{1/2} \gtrsim 120$ und für den zweiten Masseneigenzustand einen Wert von $m_{1/2} \lesssim 120$ erfordert.

Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes (HTB)	Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes (LTB)
$m_{1/2} \gtrsim 80$ aufgrund $m_{\tilde{g}} \geq 180$ GeV	$m_{1/2} \gtrsim 120$ aufgrund $m_{\tilde{\tau}_1} \geq 76$ GeV
$m_{1/2} \gtrsim \frac{4}{7} \mu_0 + 300$ aufgrund $m_{\tilde{\tau}_1} \geq 76$ GeV	$m_{1/2} \lesssim 120$ aufgrund $m_{\tilde{\tau}_2} \geq 76$ GeV
$m_{1/2} \gtrsim \frac{11}{75} \mu_0 + 50$ aufgrund $m_{\tilde{b}_1} \geq 82$ GeV	$m_{1/2} \gtrsim \frac{1}{6} \mu_0 + 60$ aufgrund $m_{\tilde{t}_1} \geq 87$ GeV
\Downarrow	\Downarrow
Einhalten der Stau-Massenschranke nur für wenige Werte der freien Parameter möglich (siehe Abb. 8.18)	Einhalten der Stau-Massenschranke nicht möglich (siehe Abb. 8.20 und 8.21)

Für beide Fälle, die Evolution des high- $\tan\beta$ - und des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes, konnte gezeigt

werden, daß die in diesem Zusammenhang auftretenden Einschränkungen wie im Fall der Untersuchung der Bedingung zur „Destabilisierung des Ursprungs“ auf die Struktur der im Rahmen dieser Arbeit bestimmten Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM zurückzuführen sind; vergleiche Abschnitt 8.4.2.

Bestimmung der Massen des Higgs–Sektors

Es konnte weiterhin in Abschnitt 8.4.2 gezeigt werden, daß die Auswertung der Massen des Higgs–Sektors zur Ausschließung negativer Werte des freien Parameters μ_0 führt. Diese Ausschließung kommt vor allem dadurch zustande, daß für negative Werte von μ_0 negative Werte der Massenquadrate $m_{A^0}^2$ und $m_{H^\pm}^2$ auftreten.

low– $\tan\beta$ –Fixpunkt

Im Fall der Evolution des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes konnte gezeigt werden, daß aufgrund der Masse des leichtesten Higgs–Bosons, das normalerweise mit dem Higgs–Boson des Standardmodells identifiziert wird, unter Einbeziehung von Stop–Korrekturen und der Renormierungsgruppenevolution im Standardmodell eine weitere Einschränkung der freien Parameter vorliegt. Die Masse des Higgs–Bosons befindet sich unterhalb der Massenschranke von $m_H \geq 95$ GeV, und es gelingt auch unter Ausnutzung aller Korrekturen und der Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodell für Werte von $m_{1/2} \lesssim 150$ nicht, die Massenschranke des Higgs–Bosons zu erfüllen. Diese Massenschranke stellt die stärkste Einschränkung der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ dar.

high– $\tan\beta$ –Fixpunkt

Für die Evolution des high– $\tan\beta$ –Fixpunktes liegen auch ohne Einbeziehung der Renormierungsgruppenevolution im Bereich des Standardmodells keine bedeutenden Einschränkungen der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ durch Erfüllung der Massenschranke des Higgs–Bosons des Standardmodells vor.

Vor der Formulierung des abschließenden Ergebnisses im Hinblick auf den Vergleich der Vorhersagen der Evolution des high– $\tan\beta$ – und des low– $\tan\beta$ –Fixpunktes wird eine kurze Übersicht der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Teilaspekte und der erzielten Ergebnisse gegeben.

- Es wurde die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden minimal supersymmetrischen Standardmodells vorgenommen. Die Bestimmung beinhaltet die Berechnung der Fixpunkte in den unphysikalischen Polstellen der Eichkopplungen in den dort vorliegenden reduzierten Systemen, die nur von einer Eichkopplung abhängig sind, sowie die Bestimmung der Fixlinien, die die Fixpunkte in den Polen unter der Renormierungsgruppenevolution in Anwesenheit aller drei Eichkopplungen g_1 , g_2 und g_3 miteinander verbinden und damit auch die Fixlinien im physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM von der UV–Skala bis zur IR–Skala festlegen.
- Durch die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM konnte die große Anzahl der freien Parameter des weich brechenden MSSM auf nur zwei verbleibende freie Parameter, den Anfangswert des Higgs–Mischungs–Parameters μ_0 und den Wert der Unifizierenden Gaugino–Masse $m_{1/2}$ reduziert und damit die Aussagekraft der Theorie bedeutend erhöht werden. Alle weiteren

Untersuchungen konnten so in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, vorgenommen werden.

- Es wurde die Möglichkeit der Realisierung der radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ untersucht. Es konnte Bereiche im Raum der verbleibenden freien Parameter, μ_0 und $m_{1/2}$, bestimmt werden, die zur radiativen spontanen elektroschwachen Symmetriebrechung führen.
- Es wurden Auswertungen der Bedingungen zur Beschränktheit des Potentials und zum Erhalt der Ladungs- und Farbsymmetrie im skalaren Potential im Zusammenhang mit der elektroschwachen Symmetriebrechung in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ durchgeführt. Diese Auswertung bezog jeweils die Werte der eingehenden Parameter für den gesamten physikalischen Gültigkeitsbereich der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in die Berechnung mit ein und führte zu nicht-trivialen Einschränkungen der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ und damit einer weiteren Erhöhung der Aussagekraft der Theorie.
- Es wurden die Massen der Quarks und Leptonen und der durch die Parameter des weich brechenden Sektors beschriebenen Teilchen in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ berechnet. Die Auswertung der Massen und der Vergleich mit aktuellen experimentellen Massenschranken führte, wie im Fall der Auswertung der Bedingungen, zu weiteren Einschränkungen der möglichen Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ und damit ebenfalls zu einer weiteren Erhöhung der Aussagekraft der Theorie.

Im Zusammenhang mit der vergleichenden Untersuchung der Vorhersagen der Evolution des high- $\tan\beta$ - und des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes kann festgestellt werden, daß die Mehrheit der durchgeführten Untersuchungen zu guten Ergebnissen führt, beziehungsweise keine Einschränkungen beinhaltet, die zu einem vollkommenen Ausschluß der betrachteten Aspekte der untersuchten Theorie führen. Sowohl für die Auswertung der Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes als auch des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes liegen Ergebnisse von Teiluntersuchungen vor, die zu starken Einschränkungen der möglichen Werte der verbleibenden freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ führen. Diese Einschränkungen können jedoch teilweise durch geringfügige Modifikationen abgeschwächt werden, und man wird weiterhin durch die Kenntnis der Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen des weich brechenden MSSM in die Lage versetzt, eine theoretisch fundierte Begründung für das Auftreten der Einschränkungen in Abhängigkeit der beteiligten Parameter anzugeben.

Vergleicht man die Auswertungen für die Evolution des high- $\tan\beta$ - und des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes, so liegen für die entscheidenden Kriterien und Einschränkungen in Kurzform folgende Ergebnisse vor:

Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes (HTB)	Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes (LTB)
m_b und m_τ besitzen nicht-verschwindende Massen	$m_b = 0$ und $m_\tau = 0$
radiative spontane elektroschwache Symmetriebrechung nicht möglich	es existieren Wertebereiche der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ für die radiative spontane elektroschwache Symmetriebrechung möglich ist
wenig Einschränkungen durch die Erfüllung der (modifizierten) physikalischen Bedingung an das Potential	wenig Einschränkungen durch die Erfüllung der physikalischen Bedingungen an das Potential
wenig Einschränkung durch die Erfüllung von Massenschranken der Sfermionen	sämtliche Werte der freien Parameter μ_0 und $m_{1/2}$ durch Massenschranken der Stau ausgeschlossen
wenig Einschränkung durch die Erfüllung von Massenschranken des Higgs-Bosons des Standardmodells	Einschränkungen im Bereich kleiner Werte von $m_{1/2}$ durch die Massenschranke des Higgs-Bosons des Standardmodells

Es läßt sich leicht erkennen, daß sowohl für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes als auch für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes Bereiche existieren, die zu Einschränkungen führen. Diese sind im Fall des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes vor allem mit der Realisierung der radiativen elektroschwachen Symmetriebrechung im skalaren Potential und der Erfüllung der damit in Zusammenhang stehenden Bedingungen verknüpft. Im Fall des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes liegen die stärksten Einschränkungen vor allem im Bereich der Erfüllung der Massenschranken vor, so zum Beispiel im Bereich der Massenschranke des Stau und des Higgs-Bosons des Standardmodells sowie der Vorhersage der Massen der Quarks und Leptonen, in deren Zusammenhang die Massen des Bottomquarks und des Tauleptons als Null angenommen werden.

Würde man die Vorhersagen der beiden Fixpunkte gegeneinander abwägen, so würde zum gegenwärtigen Zeitpunkt vor allem die Möglichkeit der Realisierung der radiativen elektroschwachen Symmetriebrechung, die nicht unberechtigt einen der größten Erfolge des MSSM darstellt, für den low- $\tan\beta$ -Fixpunkt sprechen. Sollte es in zukünftigen Untersuchungen möglich sein, alternative Wege zur Beschreibung der Zusammenhänge der elektroschwachen Symmetriebrechung zu beschreiten und damit die Probleme des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes in diesem Bereich zu umgehen, dann würde dieser sicher aufgrund seiner Vorhersagen im Bereich der Massen die bessere Wahl darstellen.

Anhang A

Graphiken der Massenverteilungen

Dieser Anhang zeigt die Massen des weich brechenden und des Higgs-Sektors des minimal supersymmetrisch erweiterten Standardmodells aus Abschnitt 8.4.2. Diese wurden in Abhängigkeit von den zwei verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$, bestimmt und über diesen aufgetragen. Es liegen folgende Massen vor:

- Massen der Skalare, Charginos, Neutralinos und der Gluinos:

Stop $m_{\tilde{t}_1}, m_{\tilde{t}_2}$

Sbottom $m_{\tilde{b}_1}, m_{\tilde{b}_2}$

Stau $m_{\tilde{\tau}_1}, m_{\tilde{\tau}_2}$

Charginos $m_{\tilde{C}_1}, m_{\tilde{C}_2}$

Neutralinos $m_{\tilde{N}_1}, m_{\tilde{N}_2}, m_{\tilde{N}_3}, m_{\tilde{N}_4}$

Gluinos $m_{\tilde{g}}$

- Massen des Higgs-Sektors:

$m_{\tilde{A}^0} \quad m_{\tilde{H}^0} \quad m_{\tilde{H}^\pm}$

Die Abbildungen der Massen $m_{\tilde{h}^0}$ sind Abschnitt 8.4.2 zu finden.

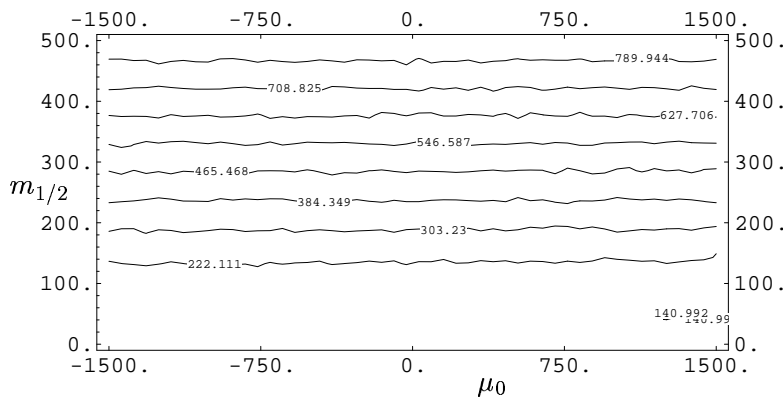


Abbildung A.1: Masse des Stop $m_{\tilde{t}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

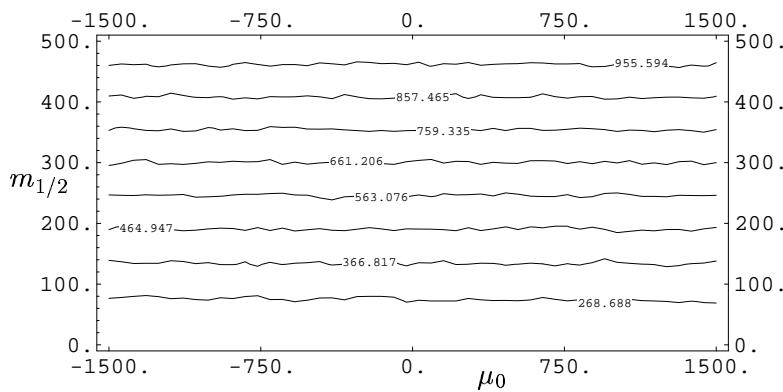


Abbildung A.2: Masse des Stop $m_{\tilde{t}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

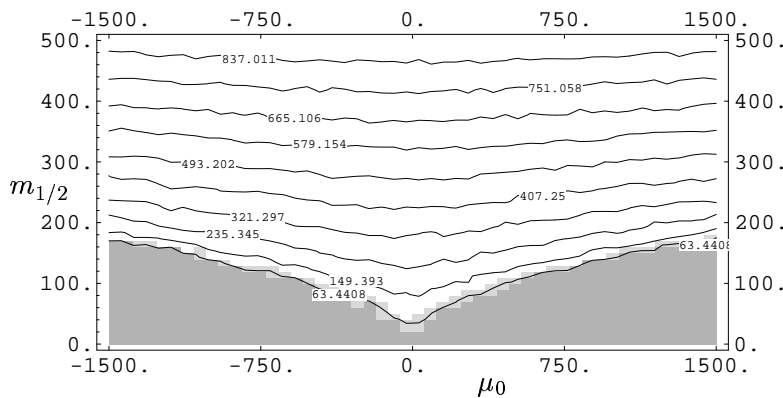


Abbildung A.3: Masse des Sbottom $m_{\tilde{b}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im dunkelgrauen Bereich gilt $m_{\tilde{b}_1} < 0$, im hellgrauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

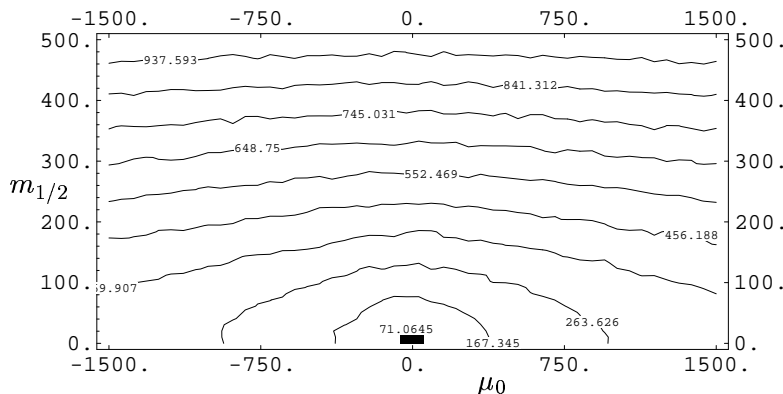


Abbildung A.4: Masse des Sbottom $m_{\tilde{b}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

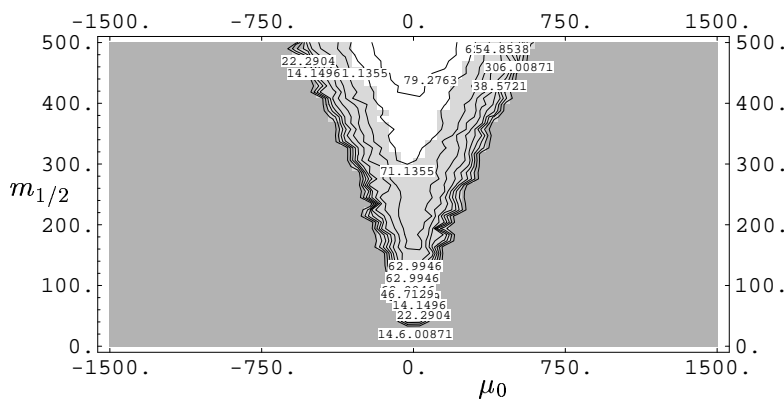


Abbildung A.5: Masse des Stau $m_{\tilde{\tau}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im dunkelgrauen Bereich gilt $m_{\tilde{\tau}_1} < 0$, im hellgrauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

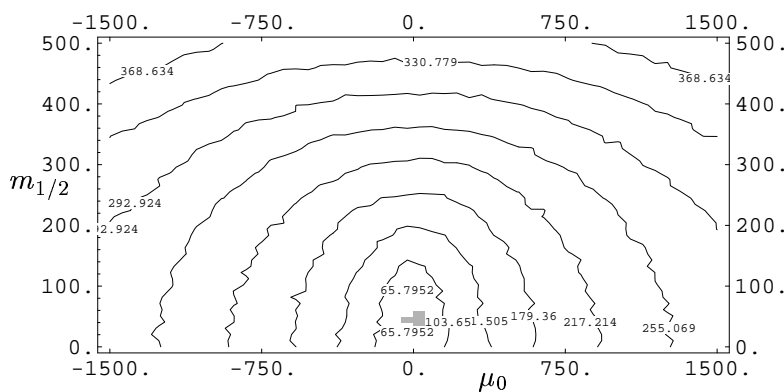


Abbildung A.6: Masse des Stau $m_{\tilde{\tau}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

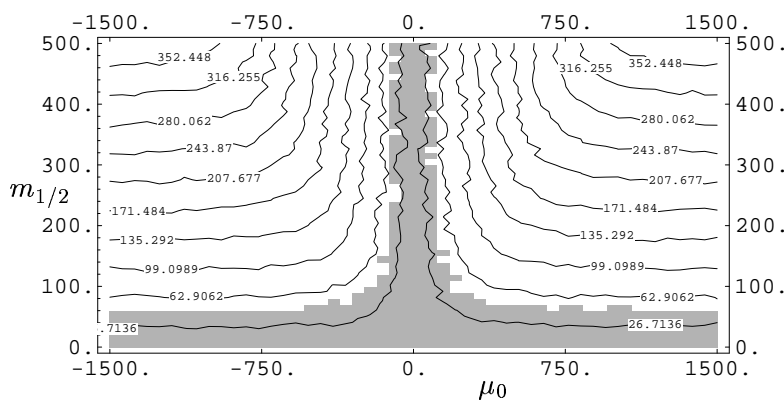


Abbildung A.7: Masse des ersten Charginos $m_{\tilde{C}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

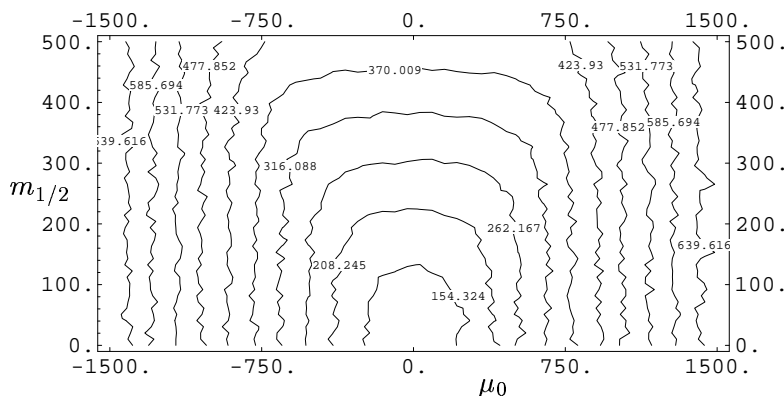


Abbildung A.8: Masse des zweiten Charginos $m_{\tilde{C}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

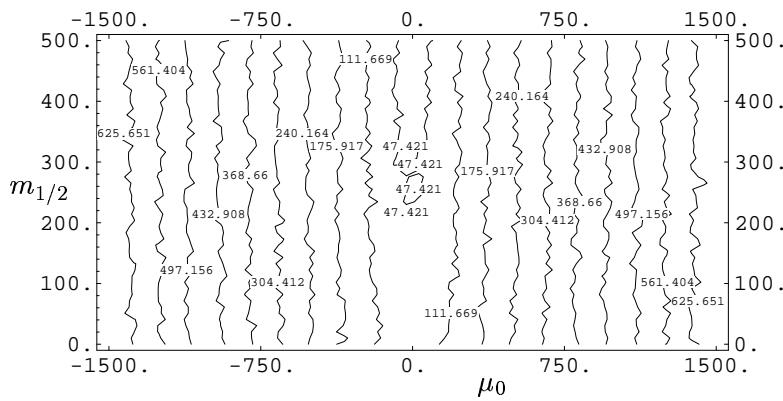


Abbildung A.9: Masse des ersten Neutralinos $m_{\tilde{N}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

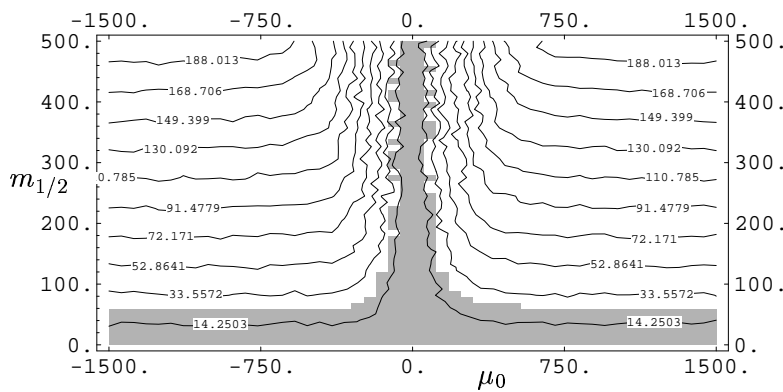


Abbildung A.10: Masse des zweiten Neutralinos $m_{\tilde{N}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

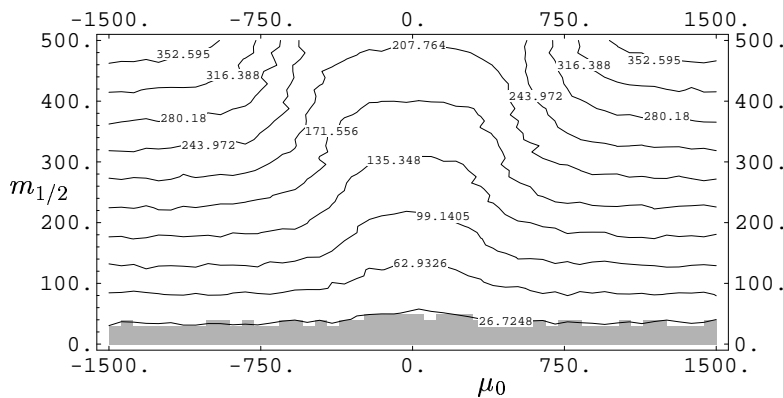


Abbildung A.11: Masse des dritten Neutralinos $m_{\tilde{N}_3}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

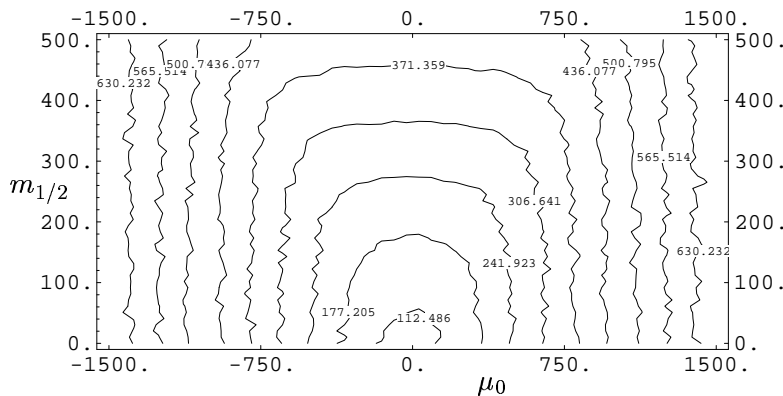


Abbildung A.12: Masse des vierten Neutralinos $m_{\tilde{N}_4}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

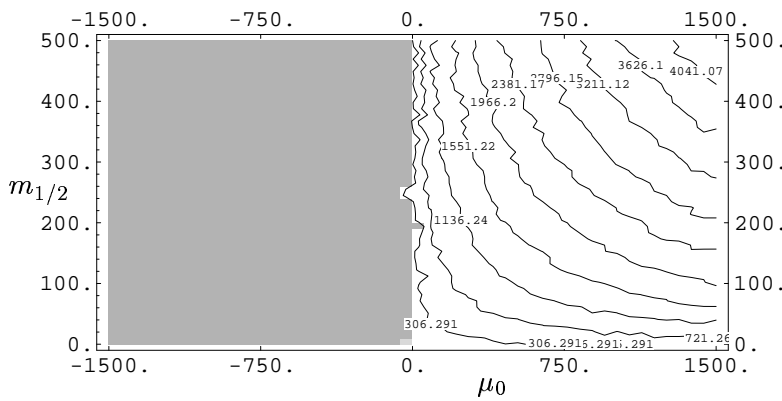


Abbildung A.13: Masse des ersten neutralen Higgs-Bosons $m_{\tilde{A}_0}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich gilt $m_{\tilde{A}_0} < 0$.

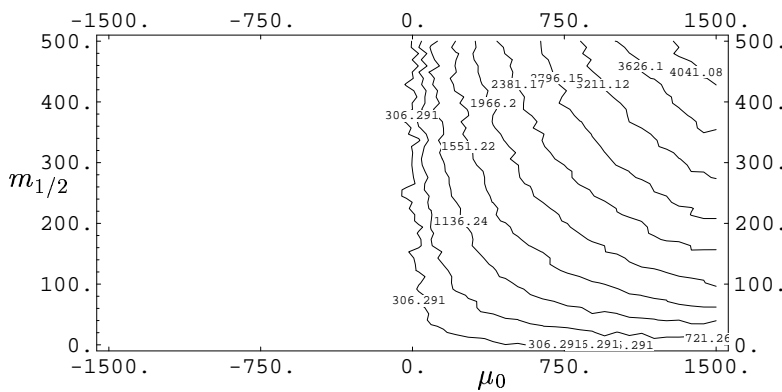


Abbildung A.14: Masse des neutralen Higgs-Bosons $m_{\tilde{H}^0}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

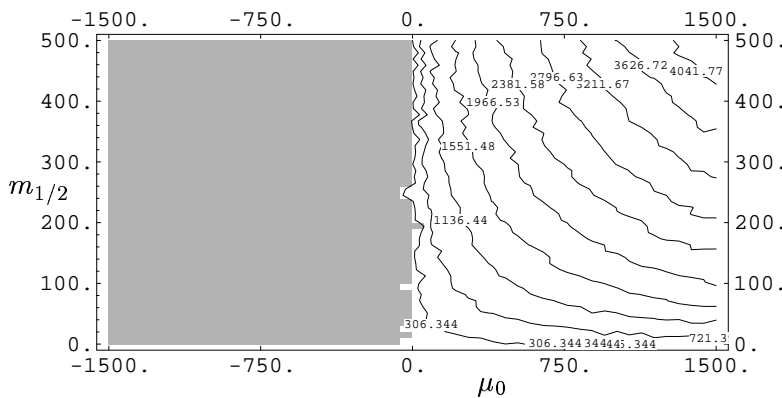


Abbildung A.15: Masse des geladenen Higgs-Bosons $m_{\tilde{H}^\pm}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich gilt $m_{\tilde{H}^\pm} < 0$.

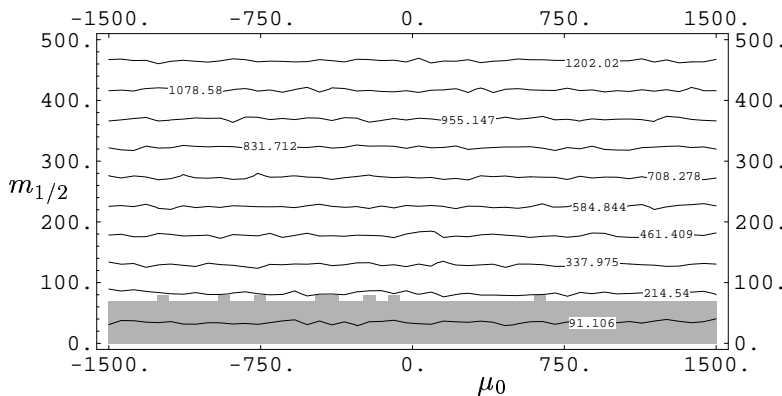


Abbildung A.16: Masse der Gluinos $m_{\tilde{g}}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des high- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

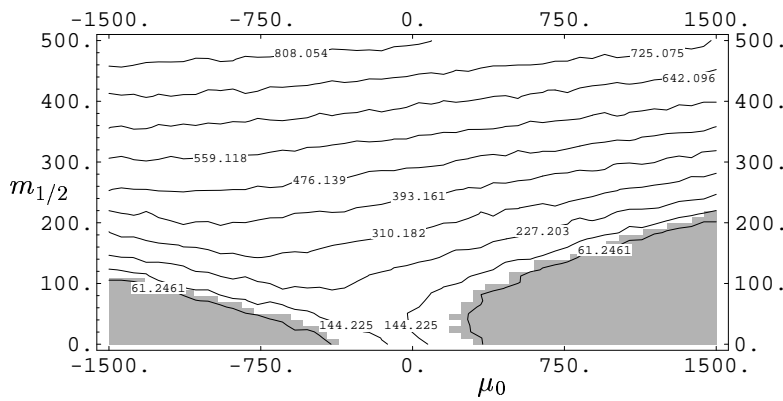


Abbildung A.17: Masse des Stop $m_{\tilde{t}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

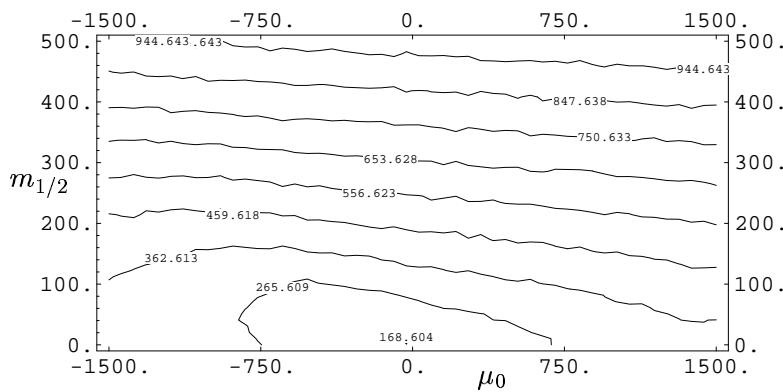


Abbildung A.18: Masse des Stop $m_{\tilde{t}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

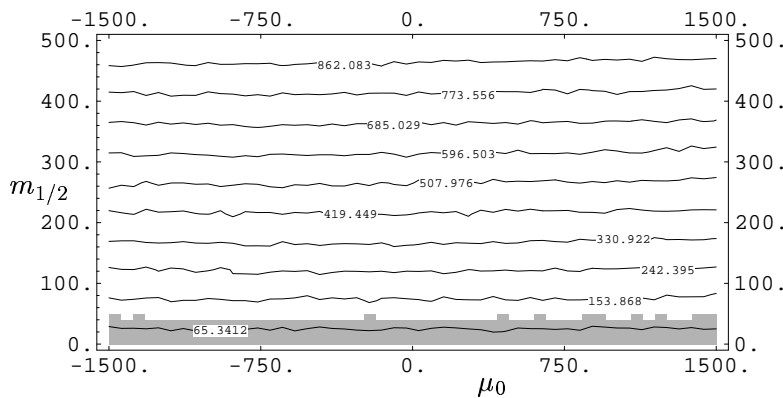


Abbildung A.19: Masse des Sbottom $m_{\tilde{b}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

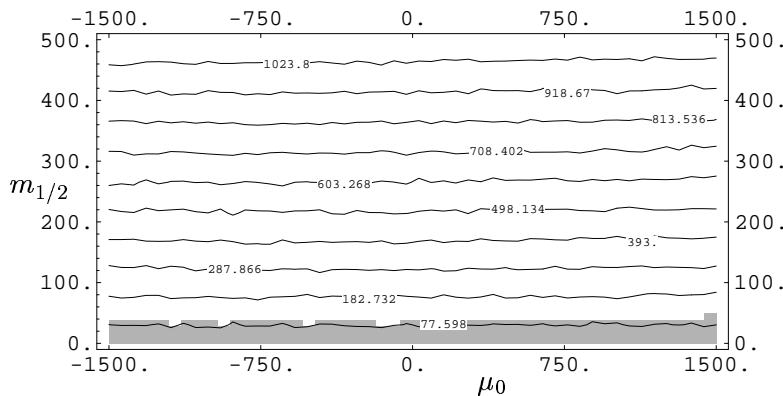


Abbildung A.20: Masse des Sbottom $m_{\tilde{b}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

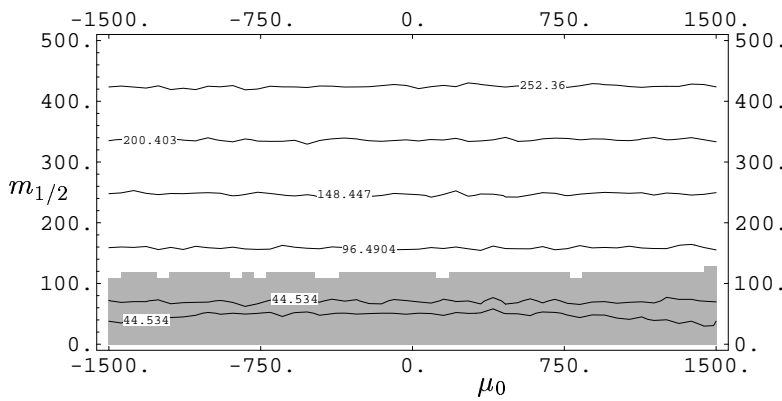


Abbildung A.21: Masse des Stau $m_{\tilde{\tau}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

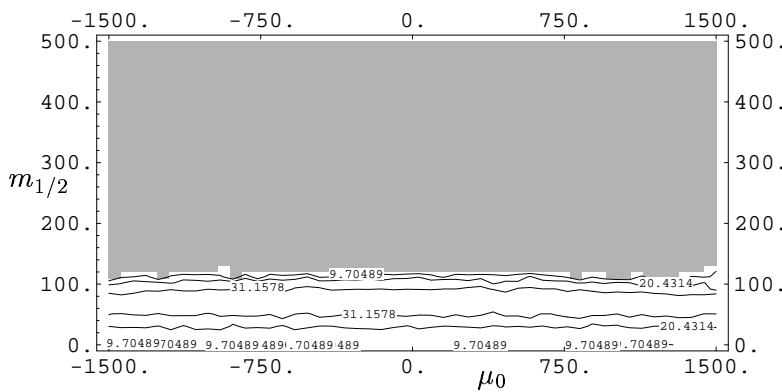


Abbildung A.22: Masse des Sbottom $m_{\tilde{\tau}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

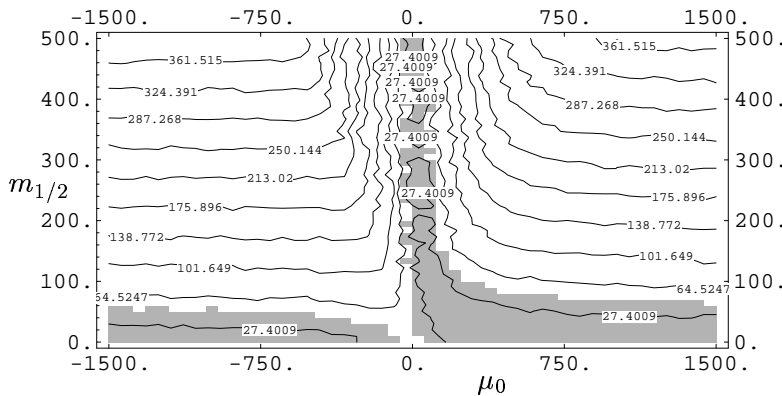


Abbildung A.23: Masse des ersten Charginos $m_{\tilde{C}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

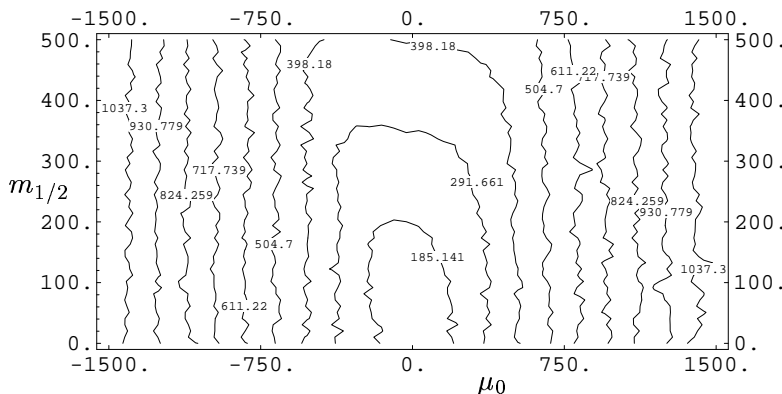


Abbildung A.24: Masse des zweiten Charginos $m_{\tilde{C}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

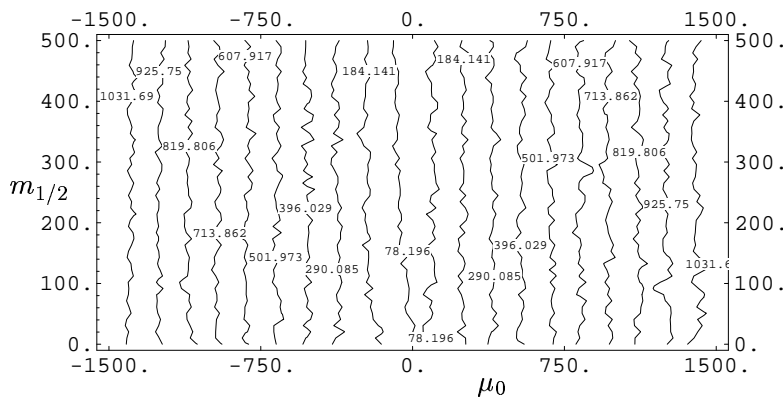


Abbildung A.25: Masse des ersten Neutralinos $m_{\tilde{N}_1}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

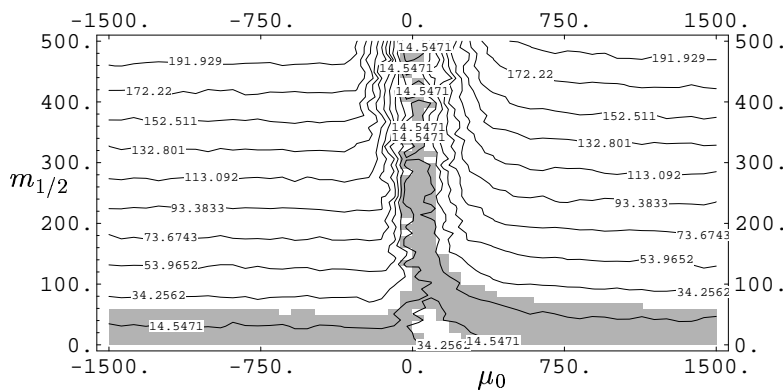


Abbildung A.26: Masse des zweiten Neutralinos $m_{\tilde{N}_2}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

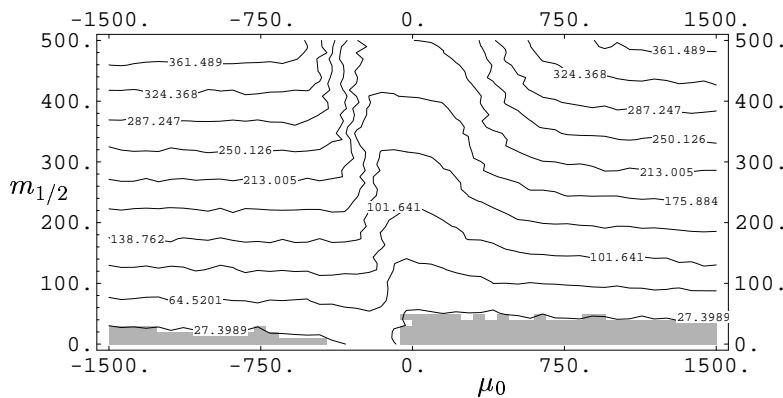


Abbildung A.27: Masse des dritten Neutralinos $m_{\tilde{N}_3}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

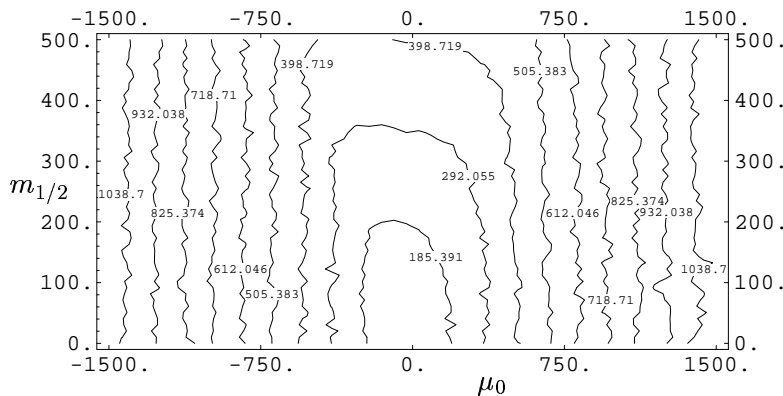


Abbildung A.28: Masse des vierten Neutralinos $m_{\tilde{N}_4}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes.

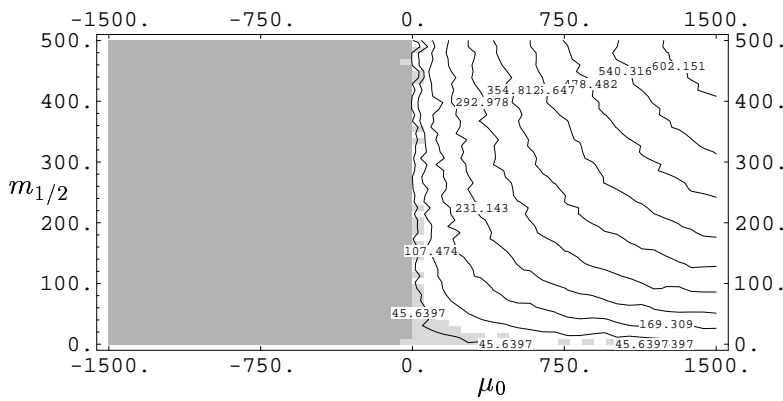


Abbildung A.29: Masse des ersten neutralen Higgs-Bosons $m_{\tilde{A}^0}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im dunkelgrauen Bereich gilt $m_{\tilde{A}^0} < 0$, im hellgrauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

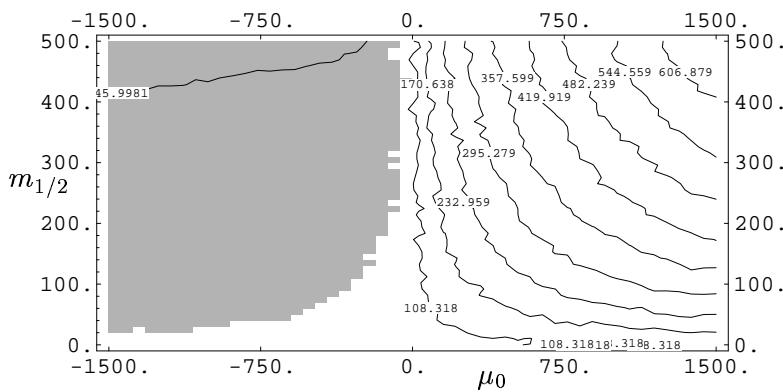


Abbildung A.30: Masse des neutralen Higgs-Bosons $m_{\tilde{H}^0}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

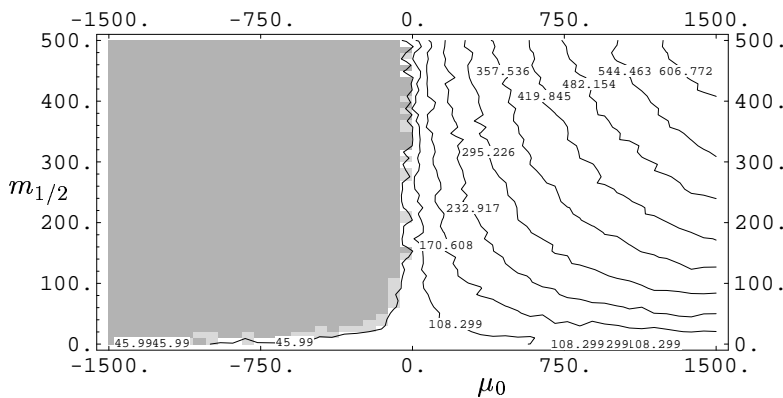


Abbildung A.31: Masse des geladenen Higgs-Bosons $m_{\tilde{H}^\pm}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im dunkelgrauen Bereich gilt $m_{\tilde{H}^\pm} < 0$, im hellgrauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

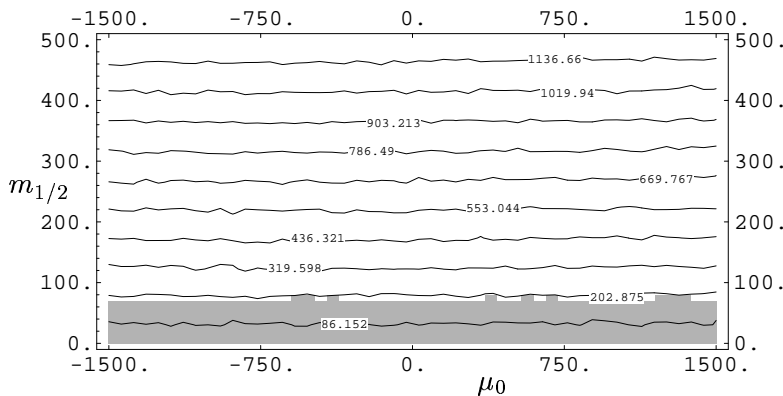


Abbildung A.32: Masse der Gluinos $m_{\tilde{g}}$, aufgetragen über den verbleibenden freien Parametern, μ_0 und $m_{1/2}$ für die Evolution des low- $\tan\beta$ -Fixpunktes. Im grauen Bereich ist die Massenschranke nicht erfüllt.

Literatur

An dieser Stelle sei Anmerkung zu den Literaturangaben angebracht. Viele Veröffentlichungen sind inzwischen auch oder ausschließlich als „Preprints“ bzw. „E-Prints“ über das Internet zugänglich. In diesen Fällen ist die Quelle als „hep-th/YYYYMMNN“ beziehungsweise „hep-ph/YYYYMMNN“ angegeben, was den Hochenergiephysik-Rubriken Theorie und Phänomenologie entspricht. Dabei ist „YY“ das Veröffentlichungsjahr, „MM“ der Monat und „NNN“ die laufende Nummer des Monats. Die Dokumente sind über das WWW unter der URL <http://xxx.lanl.gov> bzw. <http://babbage.sissa.it> zugänglich. Man beachte allerdings, daß die „Preprints“ sich in ihrem Inhalt teilweise leicht von ihren veröffentlichten Versionen unterscheiden, in manchen Fällen jedoch auch ‘Updates’ darstellten.

- [1] C.T. Hill, *Quark and lepton masses from renormalization-group fixed points*, Phys. Rev. D **24** (1981) 691–703
- [2] B. Pendleton, G.G. Ross, *Mass and mixing angle predictions from infrared fixed points*, Phys. Lett. B **98** (1981) 291–294
- [3] C. Wetterich, *Gauge hierarchy due to strong interactions?*, Phys. Lett. B **104** (1981) 269–276
- [4] J. W. Halley, E. Paschos, H. Usler, *Numerical Studies on the Renormalization of the Mass Matrices*, Phys. Lett. B **155** (1985) 107–111; J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Masso, *Heavy Families: Masses and Mixings*, Nucl. Phys. B **253** (1985) 397–420; J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Masso, *Renormalization Group Constraints in Two Higgs Theory*, Phys. Lett. B **156** (1985) 357–361; C. T. Hill, C. N. Leung, S. Rao, *Renormalization group fixed points and the higgs–boson spectrum*, Nucl. Phys. B **262** (1985) 517; J. Bagger, S. Dimopoulos, E. Masso, *Probing the Desert with Fermion Masses*, Phys.Rev. Lett. **55** (1985) 1450–1452
- [5] B. Schrempp, F. Schrempp, *A renormalization group invariant line and infrared attractive top – Higgs mass relation*. Phys. Lett. B **299** (1993) 321–328; B. Schrempp, *Infrared fixed points and fixed lines in the top bottom tau sector in supersymmetric grand unification*, Phys. Lett. **B344** (1995) 193–200, hep-ph/9411241
- [6] J. Kubo, K. Sibold, W. Zimmermann, *Higgs and top mass from reduction of couplings*, Nucl. Phys. B **259** (1985) 331; K. Sibold, W. Zimmermann, *Quark family mixing and reduction of couplings*, Phys. Lett. B **191** (1987) 427–430; J. Kubo, K. Sibold, W. Zimmermann, *Cancellation of divergences and reduction of couplings in the standard model*, Phys. Lett. B **220** (1989) 191–194; J. Kubo, K. Sibold, W. Zimmermann, *New results in the reduction of the standard model*, Phys. Lett. B **220** (1989) 185–190
- [7] B. Schrempp, M. Wimmer, *Top quark and Higgs boson masses: Interplay between infrared and ultraviolet physics*, Prog. Part. Nucl. Phys. **37** (1996) 1–90, hep-ph/9606386
- [8] M. Wimmer, *Massen der schweren Fermionen und des Higgs-Bosons aus infrarotattraktiven Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen*, Dissertation Universität Kiel, Januar 1997
- [9] V. Bardenhorst, J. Borgert, B. Schrempp, M. Wimmer, *The Top, Bottom, Tau Masses from Infrared Fixed Manifolds of the Renormalization Group Equations*, Manuskript kurz vor der Fertigstellung

- [10] J. Borgert, *Infrarot-attraktive Fixmannigfaltigkeiten und Untersuchung von Massen-Matrix-Ansätzen im vollen Yukawa-Sektor des minimal supersymmetrischen Standardmodells*, Diplomarbeit Universität Kiel, Januar 1997
- [11] V. Bardenhorst, *Infrarot-attraktive Fixmannigfaltigkeiten im Renormierungsgruppenfluß von Eichfeldtheorien*, Dissertation Universität Kiel, 2000
- [12] C. Wetterich, *The Mass of the Higgs Particle*, Proc. Trieste HEP Workshop (1987) 403, DESY-87-154 (1987)
- [13] C. D. Frogatt, I. G. Knowles, R. G. Moorhouse, *Third generation Masses from a Two Higgs Model Fixed Point*, Phys. Lett. B **249** (1990) 273–280; M. Carena, T. E. Clark, C. E. M. Wagner, W. A. Baedeen, K. Sasaki, *Dynamical Symmetry Breaking and the Top quark mass in the minimal Supersymmetric Standardmodel*, Nucl. Phys. B **369** (1992) 33–35
- [14] M. Lanzagorta, G. G. Ross, *Infrared Fixed Points Revisited*, Phys. Lett. B **349** (1995) 319–328; M. Lanzagorta, G. G. Ross, *Infra-red fixed point structure of soft supersymmetric breaking mass terms*, Phys. Lett. B **364** (1995) 163–174; G. G. Ross, R. G. Roberts, *Minimal supersymmetric unification predictions*, Nucl. Phys. B **377** (1992) 571–592
- [15] S. Dimopoulos, S. Raby, F. Wilczek, *Supersymmetry and the Scale of Unification*, Phys. Rev. D **24** (1981) 1681–1683; J. Polchinski, L. Susskind, *Breaking of Supermetry at Intermediate Scale*, Phys. Rev. D **26** (1982) 3661–3678; K. Inoue, A. Kakuto, H. Komatsu, S. Takeshita, *Aspects of Grand Unified Models with Softly Broken Supersymmetry*, Prog. Theo. Phys. **68** (1982) 927–946; L. Alvarez-Gaume, J. Polchinski, M. B. Wise, *Minimal Low-Energy Supergravity*, Nucl. Phys. B **221** (1983) 495–523; H. P. Nilles, M. Srednicki, D. Wyler, *Weak Interaction Breakdown Induced By Supergravity*, Phys. Lett. **120B** (1983) 346–348; J.-M. Frere, D. R. T. Jones, S. Raby, *Fermion Masses and Induction of the Weak Scale by Supergravity*, Nucl. Phys. B **222** (1983) 11–19; B. Gato, J. Leon, J. Perez-Mercader, M. Quirós, *Renormalization Group Analysis for a General Softly Broken Supersymmetric Gauge Theory*, Nucl. Phys. B **253** (1985) 285–307
- [16] G. L. Kane, C. Kolda, L. Roszkowski, J. D. Wells, *Study of Constrained Minimal Supersymmetry*, Phys. Rev. D **49** (1994) 6173–6210; S. F. King, P. L. White, *Resolving the Constrained and Next-To-Minimal Supersymmetric Standard Models*, Phys. Rev. D **52** (1995) 4183–4216; A. Dedes, A. B. Lahanas, J. Rizos, K. Tamvakis, *Threshold Effects and Radiative Electroweak Symmetry Breaking in $SU(5)$ Extensions of the MSSM*, Phys. Rev. D **55** (1997) 2955–2964; M. Carena, P. Chankowski, M. Olechowski, S. Pokorski, C. E. M. Wagner, *Bottom-up approach and supersymmetry breaking*, Nucl. Phys. B **491** (1997) 103–128;
- [17] L. E. Ibanez, G. G. Ross, *Low-Energy Predictions in Supersymmetric Grand unified Theories*, Phys. Lett. B **105** (1981) 439–442; L. E. Ibanez, C. Lopez, *$N=1$ Supergravity, the Breaking of $SU(2) \times U(1)$ and the Top-Quark Mass*, Phys. Lett. B **126** (1983) 54–58; L. E. Ibanez, G. G. Ross, *Electroweak Breaking in Supersymmetric Models*, CERN-TH.6412/92 (1992); V. Barger, M.S. Berger, P. Ohmann, *Supergravity Solutions in the low- $\tan\beta$ λ_t Fixed Point Region*, hep-ph/9404360; A. Dedes, A. B. Lahanas, K. Tamvakis, *Radiative electroweak symmetry breaking in the minimal supersymmetric standard model and low energy thresholds*, Phys. Rev. D **53** (1996) 3793–3807; A. Dedes, A. B. Lahanas, J. Rizos, K. Tamvakis, *Threshold effects and radiative electroweak symmetry breaking in $SU(5)$ extensions of the MSSM*, Phys. Rev. D **55** (1997) 2955–2964;

- A. Dedes, K. Tamvakis, *b- τ unification and neutrino masses in $SU(5)$ extensions of the MSSM with radiative electroweak breaking*, Phys. Rev. D **56** (1997) 1496–1503
- [18] M. Claudson, L. J. Hall, I. Hinchliffe, *Low-Energy Supergravity: False Vacua and Vacuum Predictions*, Nucl. Phys. B **228** (1983) 501–528; C. Kounnas, A. B. Lahanas, D. V. Nanopoulos, M. Quirós, *Low-Energy Behaviour of Realistic Locally-Supersymmetric Grand Unified Theories*, Nucl. Phys. B **236** (1984) 438–466; L. Alvarez-Gaume, J. Polchinski, M. B. Wise, *Minimal Low-Energy Supergravity*, Nucl. Phys. B **221** (1983) 495–523; J.-M. Frere, D. R. T. Jones, S. Raby, *Fermion Masses and Induction of the Weak Scale by Supergravity*, Nucl. Phys. B **222** (1983) 11–19
- [19] H. Komatsu, *New constraints of parameters in the minimal supersymmetric model*, Phys. Lett. B **215** (1988) 323–327
- [20] J. A. Casas, A. Lleyda, C. Muñoz, *Strong constraints on the parameter space of the MSSM from charge and color breaking minima*, Nucl. Phys. B **471** (1995) 3–58; J. A. Casas, S. Dimopoulos, *Stability bounds in flavour-violating trilinear soft terms in the MSSM*, Phys. Lett. B **387** (1996) 107–112; J. A. Casas, A. Lleyda, C. Muñoz, *Some implications of charge and color breaking in the MSSM*, Phys. Lett. B **389** (1996) 305–311; J. A. Casas, *Charge and color breaking*, hep-ph/9707475
- [21] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theorie*, McGraw-Hill, New York, 1980; P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, u.a., 1990; P. Ramond, *Journeys Beyond The Standard Model*, Perseus Book 1999; O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1992; C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, u.a., 1983
- [22] S.L. Glashow, *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22** (1961) 579–588
- [23] A. Salam, *in Elementary Particle Theory, S. 367–377*, Proc. Nobel Symposium, hg. N. Svartholm. Almqvist and Wiksell, Stockholm (1968).
- [24] S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264–1270
- [25] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, *Advantages of the color octet gluon picture*, Phys. Lett. **47B** (1973) 365–368
- [26] H.D. Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346–1349
- [27] D.J. Gross, F. Wilczek, *Ultraviolet behavior of nonabelian gauge theories*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343–1346
- [28] S. Weinberg, *Nonabelian gauge theories of the strong interactions*, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 494–497
- [29] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press (1983)
- [30] S. P. Martin, *A Supersymmetric Primer*, To appear in the book *Perspectives in Supersymmetry*, edited by G. L. Kane, World Scientific
- [31] R. N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetrie*, Springer Verlag, New York, 1986; G. F. Giudice, *Beyond the standard model*, hep-ph/9605390 (1996)

- [32] H.P. Nilles, *Supersymmetry, supergravity and particle physics*, Phys. Rept. **110** (1984) 1–162; H.P. Nilles, *Phenomenological aspects of supersymmetry*, hep-ph/9511313 (1995); J. L. Lopez, *Supersymmetrie: From the Fermi scale to the Plank scale*, hep-ph/9601208 (1996)
- [33] X. Tata, *Supersymmetry: Where it is and how to find it*, hep-ph/9510287 (1995); J. A. Bagger, *Weak-scale supersymmetry: theory and practice*, hep-ph/9604232 (1996)
- [34] J. F. Guinon, H. E. Haber, *Higgs Bosons in Supersymmetric Models (I)*, Nucl. Phys. B **272** (1986) 1–76; J. F. Guinon, H. E. Haber, *Higgs Bosons in Supersymmetric Models (II)*, *ibid.* **278** (1986) 449–492
- [35] M. Carena, M. Espinosa, M. Quirós, C. E. M. Wagner, *Analytical expressions for radiatively corrected Higgs masses and couplings in the MSSM*, Phys. Lett. B **355** (1995) 209–221; M. Carena, M. Quirós, C. E. M. Wagner, *Effective potential methods and the Higgs mass spectrum in the MSSM*, Nucl. Phys. B **461** (1996) 407–436; J. A. Casas, J. R. Espinosa, H. E. Haber, *The Higgs mass in the MSSM infrared fixed point scenario*, CERN-TH/98-12, hep-ph/9801365; J. R. Espinosa, M. Quirós, *Gauge Unification and the Supersymmetric Light Higgs Mass*, CERN-TH/98-115, hep-ph/9804235; M. Carena, P. Chankowski, S. Pokorski, C. E. M. Wagner, *The Higgs Boson Mass as a Probe of the Minimal Supersymmetric Standard Model*, CERN-TH/98-148, hep-ph/9805349; M. Masip, R. Muñoz-Tapia, A. Pomarol, *Limits on the Mass of the Lightest Higgs in Supersymmetric Models*, hep-ph/980137
- [36] V. Barger, M.S. Berger, P. Ohmann, *Supersymmetric grand unified theories: Two loop evolution of gauge and Yukawa couplings*, Phys. Rev. D **47** (1993) 1093–1113, hep-ph/9209232
- [37] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, 42, *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [38] M. Gell-Mann und F. E. Low, *Quantum Electrodynamics at Small Distances*, Phys. Rev. **95** (1954) 1300–1312
- [39] E. C. G. Stueckelberg, A. Petermann, *Normalization of constants in quanta theory*, Helvetica Physica Acta **26** (1953) 499–520; A. Petermann, *Renormalization group and the deep structure of the proton*, Phys. Rep. **53** (1979) 3633–3652
- [40] M. E. Machacek, M. T. Vaughn, *Two-Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory*, Nucl. Phys. B **236** (1984) 221–232; S. P. Martin, M. T. Vaughn, *Two-Loop Renormalization Group Equations for Soft Supersymmetric Breaking Couplings*, Phys. Rev. D **50** (1994) 2282–2292
- [41] C. Caso et. al. , *Review of Particle Physics; Particle Data Group*, Europ. Phys. Jour. C **3** (1998) 1–794, 1999; update for 2000: <http://pdg.lbl.gov/>
- [42] B. Ananthanarayan, G. Lazarides, Q. Shafi, *Top-Quark-Mass Predictions from Supersymmetric Grand Unified Theories*, Phys. Rev. D **44** (1991) 1613–1615
- [43] L. O. Stahlberg, *Sequentielle radiative Symmetriebrechung in links-rechts-symmetrischen Elementarteilchenmodellen*, Dissertation Universität Kiel, 1999
- [44] B. C. Allanach, S. F. King, *Infra-red stable fixed points of Yukawa-couplings in supersymmetric models*, Physics Letters B **407** (1997) 124–130; S. A. Abel, B. C. Allanach, *The quasi-fixed Minimal Supersymmetric Standard Model*, Physics Letters B **415**

- (1997) 371–382; S. A. Abel, C. A. Savoy, *On Metastability in Supersymmetric Models*, hep-ph/9803218; S. A. Abel, B. C. Allanach, *The MSSM at the low $\tan\beta$ fixed point is meta-stable*, hep-ph/9803476
- [45] I. Jack, D. R. T. Jones, *Infra-red stability of Yukawa and soft-breaking fixed points*, hep-ph/9809250 (1998)
- [46] A. Riotto, E. Roulet, *Vacuum decay along supersymmetric flat directions*, Phys. Lett. B **377** (1996) 60–66; A. Strumia, *Charge and colour breaking minima and constraints on the MSSM parameters*, Nucl. Phys. B **482** (1996) 24–38
- [47] S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, L. R. Surgaladze, *Three-loop QCD correction to the correlator of the quark scalar currents and $\Gamma_{\text{tot}}(H^0 \rightarrow \text{hadrons})$* , Mod. Phys. Lett. A **5** (1990) 2703–2711
- [48] L. Hall, *Grand unification of effective gauge theories*, Nucl. Phys. B **178** (1981) 75–124
- [49] W. J. Marciano, *Flavor thresholds and Λ in the modified minimal-subtraction scheme*, Phys. Rev. D **29** (1984) 580–582
- [50] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 4. Ausgabe, Cambridge University Press, 1999
- [51] P. H. Chankowski, J. Ellis, S. Pokorski, *The Fine-Tuning Price of LEP*, hep-ph/9712234; R. Barbieri, A. Strumia, *About the Fine-Tuning Price of LEP*, hep-ph/9801353
- [52] K. Desch, N. Wermes, *Das Higgs-Boson: wie nahe dran ist LEP?*, Phys. Blätt. **56** (2000) 35–39

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank
Frau Prof. Dr. B. Schrempp für die Vergabe des
interessanten Themas und ihre Betreuung.
Besonders hervorzuheben ist, daß auch für
'Randbereiche' der Promotion immer
Diskussionsbereitschaft bestand und hilfreiche
Ratschläge reichlich vorhanden waren.

Mein Dank gilt den Angehörigen des Instituts für
Theoretische Physik und Astrophysik der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel für
vielerlei Hilfestellung in allen Lebenslagen.
Namentlich erwähnen möchte ich vor allem Volker
Bardenhorst, Claus-Henning Solterbek, Philipp
Fleischmann und Michael Thomsen.

Für ihre unentbehrliche Hilfe danke ich Martin
(the incredible) Hülk, Thorsten Henning (THP)
Ptok, Volker (Volkman) Bardenhorst und Britta
Podgorsky sowie dem *Manicke-Team*.

Zu großem Dank bin ich dem Land
Schleswig-Holstein verpflichtet, das mich im
Rahmen eines Stipendiums zur Förderung des
wissenschaftlichen und künstlerischen
Nachwuchses für zwei Jahre bei meiner Promotion
unterstützte.

Besonderen Dank schulde ich meinen Eltern,
Dieter und Ingrid Unfug
und natürlich meiner Frau.
Ohne ihre Hilfe, ihren Beistand und ihren Verzicht
auf einen Teil meines zwischenmenschlichen
Daseins wäre alles
viel schwerer gewesen.

Dank auch Herbie Hancock für *Headhunter*,
Keith Jarrett für *Expectations* und Horst Janssen,
dem Großmeister der sozialen Inkompetenz;
trotzdem: wann wird sich jemand anschicken,
sein Werk zu übertreffen?

Lebenslauf

Name:	Jörn Borgert
Geburtsdatum:	26. Dezember 1969
Geburtsort:	Neumünster, SH
Wohnort:	Saldernstr. 3, 24118 Kiel
Staatsangehörigkeit:	Deutsch
Familienstand:	verheiratet
1976 – 1980	Grundschule in Wasbek, SH
1980 – 1982	Immanuel-Kant-Schule, Neumünster
1982 – 1990	Alexander-von-Humboldt-Schule, Neumünster
1990	Abitur
1991 – 1997	Studium der Physik in 11 Semestern:
1993	Vordiplom
1997	Hauptdiplom bei Prof. Dr. B. Schrempp am Institut für Theoretische Physik und Astrophysik, Universität zu Kiel. Thema der Diplomarbeit: <i>„Infrarot-attraktive Fixmannigfaltigkeiten und Untersuchungen von Massen-Matrix-Ansätzen im vollen Yukawa-Sektor des minimal supersymmetrischen Standardmodells.“</i>
März 1997	Beginn der Dissertation am Institut für Theoretische Physik und Astrophysik der Universität zu Kiel.
1998 – 1999	Stipendiat des Landes Schleswig-Holstein zur Förderung des wissenschaftlichen und künstlerischen Nachwuchses.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides Statt, keine weiteren als die in der Dissertation angegebenen Hilfsmittel für die Anfertigung meiner Arbeit verwendet zu haben.

Diese Arbeit hat noch nicht an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen.

Frühere Promotionsversuche wurden von mir nicht vorgenommen.

Jörn Borgert