
Infrarot-attraktive Fixmannigfaltigkeiten
im Renormierungsgruppenfluß
von Eichfeldtheorien

DISSERTATION
ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES
DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN
FAKULTÄT
DER CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT
ZU KIEL

VORGELEGT VON
VOLKER BARDENHORST
KIEL 2000

Referentin: Prof. Dr. B. Schrempp

Korreferent: Priv.-Doz. Dr. G. Gensing

Tag der mündlichen Prüfung: 15. November 2000

Zum Druck genehmigt: Kiel, den 15. November 2000

Dekan: gez. Prof. Dr. Th. Bauer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
	Teil 1: Grundlagen	9
2	Klassische Eichfeldtheorie	10
2.1	Konstruktion und Symmetrien von Eichfeldtheorien	10
2.2	Masse von Eichbosonen und Symmetriebrechung	14
2.3	Supersymmetrische Eichfeldtheorien	17
2.4	Supersymmetrisierung eines Modells	24
3	Renormierung	26
3.1	Dimensionale Analyse	27
3.2	Regularisation	28
3.3	Renormierungsschema und Abhängigkeit vom Renormierungsschema	30
3.4	Renormierungsgruppengleichungen	31
3.5	Zur Bestimmung der Renormierungsgruppengleichungen und Renormierbarkeit eines Modells	32
3.6	Renormierungsgruppe	33
3.7	Renormierung von Modellen mit spontaner Symmetriebrechung, Stufeneffekte und die Masse von Teilchen	34
3.8	Ein-Schleifen Renormierungsgruppengleichungen	36
4	Physikalisch relevante Eichfeldtheorien	39
4.1	Das Standardmodell	40
4.2	Das Minimal Supersymmetrische Standardmodell	42
4.3	Unifizierung und superstring-inspirierte Modelle	44
4.4	Links-rechts-symmetrische Modelle	47
4.5	Modelle mit zusätzlichen abelschen Wechselwirkungen	50

5	Fixmannigfaltigkeiten im Renormierungsgruppenfluß	53
5.1	Ein einfacher Beispielsektor	54
5.2	Programm der Reduktion der Kopplungen	56
5.3	Bekannte numerische Ergebnisse zu Fixlinien und Fixflächen	57
	Teil 2: Ergebnisse	61
6	Renormierungsgruppe und Fixmannigfaltigkeiten	62
6.1	Fixmannigfaltigkeiten und Infrarot-Attraktivität	63
6.2	Bestimmungsgleichungen der allgemeinen Fixmannigfaltigkeiten	68
6.3	Eigenschaften in Ein-Schleifen-Ordnung	70
7	Explizite Bestimmung von Fixmannigfaltigkeiten in ausgewählten Sektoren in Ein-Schleifen-Ordnung	78
7.1	Reiner Eichsektor	79
7.2	Eine Yukawa- und N Eichkopplungen	82
7.3	Mehrere Yukawakopplungen und N Eichkopplungen	98
7.4	Weichbrechender Sektor der Supersymmetrie	103
7.5	Zur physikalischen Bedeutung von Symmetrien des RGFes	113
8	Infrarot-Attraktivität von supersymmetrischen Theorien	116
9	Erweiterung der Eichgruppe eines Modells	125
9.1	Erweiterung eines Modells um abelsche Eichgruppen	125
9.2	Approximation von Fixmannigfaltigkeiten	131
10	Anwendung auf das SM und dessen Erweiterungen	136
10.1	Standardmodell	139
10.2	Minimal Supersymmetrisches Standardmodell	143
10.3	Links-Rechts symmetrische Modelle	152

10.4 Erweiterung um eine abelsche Wechselwirkung	170
10.5 Vergleich mit anderen Teilchenmodellen	176
11 Zusammenfassung	178
Anhang	187
A Konventionen	188
A.1 Anmerkungen zu den Liegruppen	188
A.2 Spinorkonventionen	189
B Renormierungsgruppengleichungen	191
C Lie-Punktsymmetrien von Differentialgleichungen	198
D Zur anomalen Dimension einer Invarianten	200
E Explizite Integration für eine Yukawa- und N Eichkopplungen und die Rolle von Randbedingungen	201
F Glossar zur Lauricella-Funktion	211
G Abkürzungsverzeichnis	219
Literatur	220

1 Einleitung

Das *Standardmodell* (SM) der Elementarteilchenphysik beschreibt sehr erfolgreich die elektromagnetischen, schwachen und starken Kräfte der Natur im experimentell zugänglichen Bereich. Neben diesem quantitativen Erfolg hat es erheblich zum Verständnis dieser Wechselwirkungen beigetragen, indem es jede von diesen auf eine einfache (lokale) Symmetrieeigenschaft zurückführt, beschrieben durch eine Liegruppe. So wird die starke Wechselwirkung mit einer Liegruppe $SU(3)_C$ und die elektroschwache Wechselwirkung mit $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ in Verbindung gebracht, worauf sich die *Eichgruppe* des SMs ergibt:

$$\begin{array}{ccc} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ g_3 \quad \quad g_2 \quad \quad g_1 \end{array}$$

Die Stärke einer jeden Kraft wird auf die Werte der *Eichkopplungen* g_3 , g_2 oder g_1 reduziert, die zusammen mit den Massen der *Quarks* und *Leptonen*, den *Mischungswinkeln* und den Kopplungen der skalaren Bosonen die *freien Parameter* des SMs ergeben. Diese sind von Seiten der Theorie völlig unbestimmt und müssen dem Experiment entnommen werden, womit z.B. die Masse des Top-Quarks von $m_t = (174, 3 \pm 5, 1)$ GeV nicht erklärt werden kann.

Die Quantisierung und Renormierung von Feldtheorien wie dem SM macht die Einführung einer zusätzlichen Größe in Form einer Impulsskala μ notwendig. In der Folge sind alle freien Parameter keine Konstanten, sondern gehen in sogenannte mit der Impulsskala μ *gleitende* Parameter über:

$$\text{Parameter} \rightarrow \text{Parameter}(\mu).$$

Diesem Ergebnis liegt eine Symmetrie zugrunde, die *Renormierungsgruppeninvarianz*, beschrieben durch sogenannte *Renormierungsgruppengleichungen* (RGG). Diese geben die Änderungen der freien Parameter wieder, die den Wechsel von einer Skala μ_1 zu μ_2 kompensieren. Die RGG bilden ein nichtlineares, gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung und können im Rahmen der Störungstheorie bestimmt werden. Die Anfangswerte für diese Parameter sind nach wie vor freie Größen und müssen dem Experiment entnommen werden.

Die Eigenschaft der freien Parameter, in der quantisierten Theorie in Abhängigkeit von der Impulsskala μ zu gleiten, eröffnet auch Möglichkeiten, deren numerische Werte festzulegen oder zumindest einzugrenzen. Ein allgemeiner Rahmen könnte die Einbettung des SMs in eine *unifizierte Theorie* (GUT: Grand Unified Theory) sein, der Möglichkeit, daß sich die bekannten Wechselwirkungen im Ultraviolett (UV) für hohe Impulsskalen $\mu_{UV} = M_{GUT} \simeq 10^{15}$ GeV zu einer

(nunmehr) einzigen vereinigen. Beschrieben wird eine solche GUT durch eine einzelne einfache Eichgruppe wie der $SU(5)$ mit einer Eichkopplung $g_{\text{GUT}}(\mu)$. Die GUT-Bedingung

$$g_3(M_{\text{GUT}}) = g_2(M_{\text{GUT}}) = g_1(M_{\text{GUT}}) = g_{\text{GUT}}(M_{\text{GUT}})$$

liefert auf diesem Hintergrund Anfangswerte für das Gleiten der Eichkopplungen im Bereich der sogenannten *Großen Einöde*, dem riesigen Skalenbereich von 13 Größenordnungen zwischen UV-Skala und dem Niederenergiebereich der Impulsskala im Infraroten (IR): $\mu_{\text{IR}} \simeq m_t = 174,3 \text{ GeV}$. Dies ist das kleinste mögliche Brechungsszenario, das die Eichgruppe des SMs enthält. Zusätzlich wären GUT-Symmetrien mit anderen Gruppen als der $SU(5)$ denkbar. Solche Gruppen, wie z.B. die *superstring-inspirierten* $SO(10)$ oder E_6 , führen auf ein oder mehrere Zwischenmodelle, die die Große Einöde füllen könnten. Jedes dieser Modelle entspricht einem Ensemble von Wechselwirkungen, von denen einige bis in den nahen IR-Bereich hinein gültig sein könnten, bevor sie in das SM übergehen.

Für das SM bedeutet dies, daß trotz des angedeuteten Erfolgs dieses Modells einige technische Schwierigkeiten bestehen, was sich insbesondere in einem *Hierarchie-Problem* äußert, womit der Erhalt der Disparität der physikalischen Skalen im IR und UV in der quantisierten Theorie gemeint ist: Die Masse des Higgsteilchen m_h ist unter radiativen Korrekturen quadratisch divergent, muß jedoch von der Ordnung der Brechungsskala M_W der elektroschwachen Symmetrie sein: $m_h \simeq \mathcal{O}(M_W \simeq \mu_{\text{IR}} = m_t)$. Durch die Renormierung der Theorie wird zwar eine endliche Masse beschrieben; um jedoch keine Masse von der Größenordnung $m_h \simeq \mathcal{O}(\mu_{\text{UV}} = 10^{15} \text{ GeV})$ zu erhalten, muß eine Feinjustierung vorgenommen werden, die für jede Ordnung der Störungstheorie die Hierarchie der Skalen $m_h \ll 10^{15} \text{ GeV}$ gewährleistet.

In einer theoretisch sehr attraktiven Erweiterung des SMs wird dieses Modell um eine *Supersymmetrie* zwischen den beiden sehr unterschiedlichen Teilchenklassen der Fermionen und Bosonen ergänzt, die jedoch nicht innerhalb des Teilchengehalts des SMs realisiert werden kann. Aus diesem Grund wird der Materie- und Eichbosonengehalt, wobei letztere die Träger der Wechselwirkungen sind, jeweils durch einen bosonischen bzw. fermionischen Superpartner verdoppelt, was auf das *Minimal Supersymmetrische Standardmodell* (MSSM) führt. Die Anzahl der freien Parameter steigt bei diesem Übergang jedoch nicht in gleichem Maße an, sondern ist von derselben Größenordnung.

Die Supersymmetrie verbessert die Renormierungseigenschaften von Quantenfeldtheorien, was insbesondere das Hierarchie-Problem des SMs löst, womit kleine Higgsmassen in solchen Modellen *natürlicher* sind. Zusätzlich kann die spontane elektroschwache Brechung im MSSM durch radiative Korrekturen erklärt werden. Einer $SU(5)$ -GUT gelingt erst im supersymmetrischen Fall die Beschreibung einer mit dem Experiment zu vereinbarenden Protonenlebenszeit. Diesen theoretischen

schen Erfolgen steht die Tatsache gegenüber, daß die gleichschweren Superpartner des bekannten Teilchengehalts in den bisherigen Experiment nicht verifiziert werden konnten, so daß die Supersymmetrie unterhalb der Skala $\mu = M_{\text{SUSY}} \simeq \mathcal{O}(10^3 \text{ GeV})$ verletzt sein muß. Ein möglicher Brechungsmechanismus dieser Symmetrie ist durch sogenannte *weiche* Eigenschaften ausgezeichnet: Die Brechung erfolgt explizit durch zusätzliche Wechselwirkungen, die das Hierarchie-Problem gelöst lassen und die Superpartner mit hinreichend größeren Massen versehen. In der Folge wird die Zahl der freien Parameter, welches die Massen der Superpartner miteinschließt, erheblich erhöht. Diese zusätzlichen Wechselwirkungen werden im folgenden als der weichbrechende Sektor bezeichnet.

Ein weiterer Aspekt im Zusammenhang mit dem Gleiten der freien Parameter betrifft die Eigenschaften des *Renormierungsgruppenflusses* (RGFes), der Gesamtheit aller möglichen Verläufe der freien Parameter für alle denkbaren Anfangswerte in Abhängigkeit von der Impulsskala μ . Der RGF einiger Kopplungen zeichnet sich dadurch aus, daß er im IR wenig sensitiv für die Verhältnisse im UV ist, das heißt ein großes Intervall von UV-Anfangswerten verjüngt sich im IR auf einen kleinen Bereich von möglichen Parameterwerten. Dieser Umstand kommt einem *Erinnerungsverlust* gleich und ist ein zentraler Punkt der Untersuchungen in dieser Arbeit. Die Attraktion des RGFes bei der Evolution vom UV hin zum IR wird von speziellen Lösungen im Parameterraum vermittelt, die sich zusätzlich dadurch auszeichnen, daß sie unabhängig von ausgezeichneten Anfangswerten sind. Für die Abweichungen von den Fixmannigfaltigkeiten in Abhängigkeit von der Länge des Evolutionsweges lassen sich Schranken angeben [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], auf die in dieser Arbeit nicht eingegangen werden soll.

Solche Lösungen wurden erstmalig in Form von *Fixpunkten* für das SM [9, 10, 11, 12, 13, 14, 3, 15, 16, 17] und für das MSSM [18, 19, 20] bestimmt. Die Einbeziehung zusätzlicher Kopplungen [16, 8, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26] führte auf höherdimensionale Fixstrukturen in Form von Fixlinien, Fixflächen usw., die wichtige Beziehungen zwischen den freien Parametern des SMs oder MSSMs wiedergeben. Diese wurden mittlerweile in der zweiten Ordnung der Störungstheorie bestimmt [21, 22, 23, 24, 25, 26]. So wurden z.B. die Top-, Bottom- und Tau-Massen im MSSM für bestimmte Werte des Parameters β , der die Mischung der Vakuumerwartungswerte der Higgsfelder beschreibt, gut wiedergegeben [22, 23, 24, 25, 26].

Die analytische Bestimmung solcher IR-attraktiven *Fixmannigfaltigkeiten* sind ein zentrales Ziel in den sich anschließenden Untersuchungen. Die Fixmannigfaltigkeiten machen die nahezu anfangswertfreie Voraussage von physikalischen Größen möglich. Im Idealfall beschränkt sich der RGF auf die Fixmannigfaltigkeiten selbst, zumindest wird er sich im IR aufgrund der Attraktion in der Nähe befinden: Der RGF fließt während der *Top-Down-Evolution* vom UV zum IR zuerst auf die höchstdimensionale Fixmannigfaltigkeit und dann mit abnehmender Dimension auf die Untermannigfaltigkeiten bis zu den Fixflächen, -linien

und -punkten zu [21]. Die bisher in der Literatur durchgeführten Bestimmungen der Fixmannigfaltigkeiten jenseits der Fixpunkte wurden mit Hilfe numerischer Verfahren vorgenommen, was die Untersuchung von großen Parameterräumen möglich macht. Diese Betrachtungen wurden bisher auf das SM und MSSM beschränkt [19, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

Aus den vorangegangenen Bemerkungen ergeben sich somit die folgenden Fragestellungen und Zielsetzungen dieser Arbeit:

- Die Anmerkungen zu den GUT haben deutlich gemacht, daß neben dem SM und MSSM eine Vielzahl von Modellen existiert, die bis in den näheren IR-Bereich hinein noch phänomenologisch relevant sein könnten. Jede dieser Theorien könnte zusätzlich eine Supersymmetrie beinhalten. Daraus ergibt sich die Relevanz einer grundsätzlichen Untersuchung von Fixmannigfaltigkeiten für allgemeine Eichgruppen eines beliebigen Modells, mit einem physikalisch sinnvollen Materiegehalt in allgemeinen, nicht zu hochdimensionalen gruppentheoretischen Darstellungen bezüglich dieser Eichgruppen. Diese allgemeine Untersuchung ist ein zentraler Punkt dieser Arbeit.

Die Vorgehensweise für die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten muß gegenüber den numerischen Verfahren grundsätzlich anders erfolgen und ist in der Literatur noch nicht formuliert worden. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der Anwendung einer prinzipiellen mathematischen Methode zu ihrer Bestimmung. Es wurde ein Rückgriff auf ein Verfahren, das die Symmetrien einer Differentialgleichung ausnutzt, vorgenommen. Die Fixmannigfaltigkeiten stellen sich auf diesem Hintergrund als diejenigen Lösungen heraus, deren Symmetrie gegenüber dem gesamten RGF erhöht ist.

- Es sollen – soweit als möglich – die Fixmannigfaltigkeiten für den allgemeinen Fall mit der Zielsetzung bestimmt werden, die zugehörige *analytische* Form anzugeben, die über die einfache Struktur von Fixpunkten hinausgeht. Es eröffnet sich dann die Möglichkeit, ein beliebiges Modell oder ganze Modellklassen anhand ihrer Fixmannigfaltigkeiten simultan zu untersuchen.
- Ausgehend vom Befund [21, 22, 23, 24, 26], daß im MSSM die Fixmannigfaltigkeiten beim RGF vom UV zum IR systematischer attraktiver als die des SMs sind, wird untersucht, ob sich diese Aussage für beliebige Theorien verallgemeinern läßt. Insgesamt soll ein systematischer Vergleich von Modellen mit ihrer jeweiligen supersymmetrischen Erweiterung vorgenommen werden.
- Mit den Ergebnissen der ersten drei Fragestellungen sollen die gemachten Aussagen für konkrete Modelle und Modellklassen verifiziert werden. Dazu werden eine Reihe von Theorien untersucht, die häufig diskutierte

Erweiterungen des SMs bzw. MSSMs darstellen. Dies wird im wesentlichen superstring-inspirierte Theorien betreffen, etwa die Hinzunahme von abelschen Eichgruppen $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)^2$, sowie die paritätserhaltenden links-rechts-symmetrischen Modelle $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird in Kapitel 2 kurz die Struktur einer allgemeinen Eichfeldtheorie beschrieben, wobei besonders auf die Formulierung eines Modells sowie seiner supersymmetrischen Variante eingegangen wird. In Kapitel 3 wird der Prozeß der Renormierung geschildert, was als notwendige Voraussetzung für die Beschreibung der Fixmannigfaltigkeiten die Angabe der Renormierungsgruppe beinhaltet. Danach werden in Kapitel 4 einige physikalische und für diese Arbeit relevante Elementarteilchenmodelle vorgestellt. In Kapitel 5 wird der bisherige Stand der Literatur zu den Fixmannigfaltigkeiten wiedergegeben und die übliche Vorgehensweise für deren halbanalytische und numerische Bestimmung erläutert.

Im zweiten Teil werden darauf aufbauend die oben genannten Untersuchungen durchgeführt und die erzielten Ergebnisse dargestellt. Dies beinhaltet die Formulierung der grundlegenden mathematischen Eigenschaften und die Angabe der Bestimmungsgleichungen der Fixmannigfaltigkeiten einer beliebigen Eichfeldtheorie, wobei insbesondere die Bedeutung von Symmetrien des RGFes herausgestellt wird. Etwas spezieller wird dann der Eich-Yukawa-Sektor in Ein-Schleifen-Näherung für solche allgemeinen Modelle untersucht und die Bestimmungsgleichungen näher spezifiziert. Wichtige Konstruktionselemente für deren Lösung in Form der einfachsten Fixstrukturen wie Fixhyperebenen und -geraden werden im Anschluß bestimmt. Zusammen mit ihren hier ebenfalls ermittelten Attraktivitätskoeffizienten gehen diese Größen als alleinige Parameter in die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten dieses Sektors ein.

Hierauf aufbauend werden in Kapitel 7 die analytischen Lösungen dieser Bestimmungsgleichungen für ein weiterhin allgemeines Modell in einem möglichst großen Sektor des Parameterraums bestimmt. Dies beinhaltet den Fall einer Yukawa- und einer beliebigen Anzahl von Eichkopplungen. Dieses Ergebnis wird auf mehrere Yukawakopplungen erweitert: mit Einschränkungen kann auch hier die Integration der Bestimmungsgleichungen vorgenommen werden.

Mit Hilfe einer verallgemeinerten differentiellen Beziehung können aus den zuvor bestimmten Fixmannigfaltigkeiten direkt die der trilinearen Kopplungen und des Higgs-Mischungs-Parameters des weichbrechenden Sektors einer supersymmetrischen Theorie bestimmt werden. Mit diesen Ergebnissen werden sich einige, häufig getroffene Annahmen bezüglich der Unifizierung im weichbrechenden Sektor, auf der Fixmannigfaltigkeit als zwangsläufig realisiert herausstellen.

Dieses Kapitel schließt mit einigen Überlegungen zur physikalischen Natur von Fixmannigfaltigkeiten und Symmetrien des RGFes. Neben einer möglichen Verbindung zum Begriff der Natürlichkeit einer Theorie soll anhand von Beispielen motiviert werden, daß Fixmannigfaltigkeiten eine über die reine IR-Attraktion des RGFes hinausgehende physikalische Bedeutung haben könnten.

Das Kapitel 8 vergleicht die IR-Attraktivität einer Theorie mit seiner supersymmetrischen Entsprechung. Mit den dort vorgestellten Ergebnissen kann in einem Teil des Parameterraums geklärt werden, ob es sich bei dem im Einzelmodell festgestellten Befund einer stärker ausgeprägten IR-Attraktivität der supersymmetrischen Erweiterung um eine grundsätzliche Eigenschaft handelt.

Auf den zuvor bestimmten exakten Lösungen für die Fixmannigfaltigkeiten aufbauend, werden in Kapitel 9 Schranken für die Auswirkungen von Erweiterungen der Eichgruppe G eines Ausgangsmodells auf die Fermionenmassen bestimmt. Die Erweiterungen beinhalten die Hinzunahme von zusätzlichen abelschen Wechselwirkungen $G \rightarrow G \otimes U(1)^n$ bzw. eingeschränkt von nichtabelschen Wechselwirkungen $G \rightarrow G' \supset G$.

Die bestimmten Fixmannigfaltigkeiten werden in Kapitel 10 auf die im ersten Teil vorgestellten konkreten Modelle und Modellklassen angewendet. Neben der Ergänzung einiger bekannter numerischer Ergebnisse im SM und MSSM durch die neu bestimmten analytischen Zusammenhänge wird beim MSSM auf die Fixbeziehungen im weichbrechenden Sektor eingegangen. Es schließt sich eine Untersuchung der links-rechts-symmetrischen Modelle an, bei der im wesentlichen der Einfluß des skalaren Teilchengehalts auf die Top- und Bottommassen betrachtet wird. Die Auswirkungen einer zusätzlichen abelschen Wechselwirkung auf die Verhältnisse im SM bzw. MSSM wird im nachfolgenden Abschnitt untersucht. Das Kapitel schließt mit dem Vergleich einiger weiterer spezieller Modelle und den zuvor getroffenen Aussagen.

Teil 1: Grundlagen

2 Klassische Eichfeldtheorie

Um den grundsätzlichen Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit zu konkretisieren, werden in diesem Kapitel die allgemeinen konventionellen und supersymmetrischen Eichfeldtheorien geschildert. Deren Quantisierung führt auf die im Kapitel 3 erläuterten *Renormierungsgruppengleichungen*, die Ausgangspunkt für die Suche nach Beziehungen zwischen den Parametern dieser Theorien sind.

Die *Quantenelektrodynamik* (QED) der elektromagnetischen und die *Quantenchromodynamik* (QCD) der starken Wechselwirkung sind Beispiele für die Beschreibung eines Elementarteilchenmodells mit Hilfe von Eichtheorien, denen das sogenannte *Eichprinzip* zugrunde liegt. Die Verallgemeinerung der Konstruktionselemente dieser Modelle wird in diesem Kapitel erläutert. Den später diskutierten Elementarteilchenmodellen liegt eine solche allgemeine Eichfeldtheorie zu Grunde.

Von einer allgemeinen nichtwechselwirkenden Theorie von Fermionen ausgehend wird in Abschnitt 2.1 das Eichprinzip erläutert. In der Folge werden masselose *Eichbosonen* eingeführt, die dieses Prinzip gewährleisten. Um einige von ihnen auf eine quantisierbare Art und Weise mit Masse zu versehen, was für eine realistische Beschreibung der schwachen Wechselwirkung notwendig ist, wird der Materiegehalt um Spin-0-Bosonen erweitert, die mit Hilfe der *spontanen Symmetriebrechung* (SSB) Eichbosonenmassen konsistent erzeugen können. Die SSB wird in Abschnitt 2.2 erläutert. Diese allgemeine Eichtheorie kann noch mit einer zusätzlichen Symmetrie versehen werden, die die *Renormierbarkeit* des jeweiligen Modells verbessert und Fermionen und Bosonen in einen direkten Zusammenhang stellt. Eine solche *supersymmetrische* Eichtheorie und deren konzeptionellen Vorteile werden in Abschnitt 2.3 besprochen. Da die von der Supersymmetrie vorausgesagten zusätzlichen Teilchen experimentell bisher nicht verifiziert wurden, kann sie für die untersuchten Energiebereiche nicht exakt erfüllt sein. Mit einer *weichen Symmetriebrechung* wird sie jedoch für diesen infraroten Energiebereich zu einer realistischen Theorie, was zum Ende dieses Abschnitts erläutert wird. Ein wichtiger Punkt dieser Arbeit wird der Vergleich von konventionellen Eichtheorien und ihren *supersymmetrisierten Varianten* sein, eine Begrifflichkeit, die in Abschnitt 2.4 näher erklärt wird.

2.1 Konstruktion und Symmetrien von Eichfeldtheorien

In diesem Abschnitt werden die zuvor geschilderten Schritte zur Konstruktion einer allgemeinen lokalen Eichfeldtheorie explizit durchgeführt. Einige Erläuterungen zu den Liegruppen und den Spinorkonventionen finden sich im Anhang A. Alle Angaben beziehen sich auf den klassischen Fall.

2.1.1 Eichung der Fermionfelder

Ausgangspunkt einer Eichfeldtheorie ist die Festlegung auf eine bestimmte Liegruppe G und auf eine der möglichen zugehörigen endlichen Darstellung F . Der nächste Schritt ist die Wahl eines Ensembles von Fermionen, repräsentiert durch die Felder ψ_i , die einen Vektor bezüglich dieser Darstellung F bilden. Ein Element der N -dimensionalen Liegruppe G läßt sich mit Hilfe der Gruppenparameter ω_A parametrisieren:

$$U_F(\omega) = \exp \left(-i \sum_{A=1}^N \omega_A T_F^A \right). \quad (2.1)$$

Die Matrizen T_F^A sind hierbei die Generatoren von G in der Darstellung F , wobei aus Konventionsgründen ein Faktor $-i$ abgespalten wurde. Sie erfüllen die Liealgebra

$$[T_F^A, T_F^B] = i \sum_C f^{AB}_C T_F^C \quad (2.2)$$

mit den Strukturkonstanten f^{AB}_C . Die Fermionen transformieren sich wie folgt:

$$\psi \rightarrow \psi' = U_F \psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U_F^\dagger. \quad (2.3)$$

Eine lorentzinvariante reelle Lagrangedichte für nichtwechselwirkende Weylfermionen ist¹ (vgl. Anhang A.2):

$$\mathcal{L} = -i \bar{\psi} \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \psi. \quad (2.4)$$

Damit diese global invariant unter den Gruppentransformationen (2.3) ist, muß die Darstellung der Gruppe unitär sein, womit die Generatoren hermitesch sind: $(T_F^A)^\dagger = T_F^A$.

Transformieren sich die links- und rechtshändigen Fermionen identisch, so wären auch Massenterme denkbar, welche aber im folgenden nicht angenommen werden, da die hier untersuchten Modelle nicht von dieser Gestalt sind. Terme höherer Ordnung in den Fermionfeldern sind – aufgrund der Forderung nach der in Kapitel 3 zu schildernden Renormierbarkeit der Theorien – nicht möglich.

Die Transformationen (2.3) lassen die Lagrangedichte (2.4) invariant. Dabei sind die Parameter der Transformation nicht näher bestimmt und können frei gewählt werden. Damit die jeweilige Eichung der Felder keinen Einfluß auf die Meßgrößen hat, wird diese Wahlmöglichkeit zum Prinzip gemacht: die Parameter werden durch beliebige Funktionen von Zeit und Ort $\omega_A \rightarrow \omega_A(x)$ ersetzt und es wird

¹Aufgrund der bei der Formulierung der Supersymmetrie üblichen Verwendung der van-der-Waerden Notation bei den Weylspinoren, wird diese für den späteren Vergleich hier ebenfalls verwendet.

weiterhin Invarianz unter diesen *lokalen Eichtransformationen* verlangt (*Eichprinzip*).

Wegen der Differentiation ist (2.4) jedoch nicht lokal invariant. Dies kann durch die Einführung einer kovarianten Ableitung $\delta_{ij}\partial^\mu \rightarrow \mathcal{D}_{Fij}^\mu$ mit den *Eichbosonen-Potentialen* [27] in Form von

$$(\mathbf{A}_F)_{ij}^\mu(x) = \sum_A A_A^\mu(x) (T_F^A)_{ij} : \quad \mathcal{D}_F^\mu = \partial^\mu + i\mathbf{A}_F^\mu(x) \quad (2.5)$$

erreicht werden. Die Forderung nach lokaler Eichinvarianz ergibt das Transformationsverhalten:

$$\mathcal{D}'_F = U_F \mathcal{D}_F U_F^\dagger, \quad \mathbf{A}'_F = -i U_F \left(\partial U_F^\dagger \right) + U_F \mathbf{A}_F U_F^\dagger. \quad (2.6)$$

Um die Eichbosonenfelder mit einer Dynamik zu versehen, wird ein entsprechender eichinvarianter kinetischer Term ergänzt. Dazu wird zuerst der Feldstärke-tensor

$$\mathbf{F}_F^{\mu\nu} := -i[\mathcal{D}_F^\mu, \mathcal{D}_F^\nu] = \partial^\mu \mathbf{A}_F^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}_F^\mu + i[\mathbf{A}_F^\mu, \mathbf{A}_F^\nu] \quad (2.7)$$

definiert. Die Felder $F_{A\mu\nu}$ transformieren sich bezüglich der Eichgruppe in der adjungierten Darstellung. Ein invarianter kinetischer Term für die Eichbosonen lautet:

$$-\frac{1}{2} \text{Spur} (\mathbf{F}_{F\mu\nu} \mathbf{F}_F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \sum_{A,B} G_F^{AB} F_{A\mu\nu} F_B^{\mu\nu}, \quad G_F^{AB} := \text{Spur} (T_F^A T_F^B). \quad (2.8)$$

Die symmetrische Matrix G_F^{AB} muß als Bestandteil der Lagrangedichte reell und positiv definit sein, was nur für kompakte Liegruppen der Fall ist. In der Folge ist die Eichgruppe das direkte Produkt einer kompakten, halbeinfachen und einer abelschen Liegruppe [28]. Für diese beiden Anteile existieren weitere Struktursätze, so daß die Eichgruppe das direkte Produkt kommutierender, kompakter und einfacher Gruppen und einer Reihe von $U(1)$ Gruppen ist: $G = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots$. Insbesondere sind die Strukturkonstanten einer kompakten Liealgebra vollständig antisymmetrisch, womit bei den Indizes keine Unterscheidung mehr nötig ist: $f^{ABC} := f^{AB}{}_C$. Die zuvor im Zusammenhang mit (2.4) geforderte Unitarität ist für die endlichen Darstellungen von kompakten Liegruppen automatisch gegeben. Für jeden einfachen oder abelschen Anteil der Eichgruppe kann G_F^{AB} durch Transformation der Eichpotentiale diagonal gewählt werden. Indizierung der einzelnen Gruppenfaktoren mit $a, b = 1, \dots$ ergibt somit:

$$G_F^{(aA)(bB)} = \frac{1}{4g_a^2} \delta_{ab} \delta_{AB}, \quad (2.9)$$

wobei jeder dieser Untergruppen eine Eichkopplung g_a zugeordnet wird, die ein Maß für die Stärke der Wechselwirkung ist.

In dieser Notation wird die Lagrangedichte (2.4) zu:

$$\mathcal{L} = - \sum_{a,A} \frac{1}{4g_a^2} F_{(aA)\mu\nu} F_{(aA)}^{\mu\nu} - i \sum_{(a,i),(b,j)} \bar{\psi}_{ai} \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_{F(ai)(bj)}^\mu \psi_{bj}, \quad (2.10)$$

mit der kovarianten Differentiation

$$\mathcal{D}_{F(ai)(bj)}^\mu = \delta_{ab} \delta_{ij} \partial^\mu + i \sum_{c,A} A_{(cA)}^\mu \left(T_F^{(cA)} \right)_{(ai)(bj)}.$$

Auf die Indizierung der einzelnen Gruppenfaktoren wird im folgenden verzichtet.

2.1.2 Spin-0-Bosonen

Die Eichbosonen in (2.10) sind bisher masselos. Das Einführen eines Massenterms $\text{Spur}(\mathbf{A}_F M \mathbf{A}_F)$ würde die Eichsymmetrie brechen. Um dennoch zu massiven Eichbosonen zu gelangen, muß der Materiegehalt um Spin-0-Bosonen mit den Feldern ϕ^i in einer Darstellung S der Gruppe G ergänzt werden, was in diesem Unterabschnitt geschildert wird. Mit diesen Feldern ist es möglich, über den in Abschnitt 2.2 zu erläuternden Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung, entsprechende massive Felder zu erhalten und gleichzeitig die Eichinvarianz und Renormierbarkeit der Theorie zu gewährleisten.

Mit der kovarianten Ableitung in der Darstellung S mit den Generatoren T_S^A läßt sich entsprechend dem fermionischen Wechselwirkungsterm eine Lagrangedichte mit einem lokal invarianten kinetischen, bzw. mit dem Yang-Mills-Feld wechselwirkenden Anteil angeben:

$$-\frac{1}{2} (\mathcal{D}_S^\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_{S\mu} \phi) - V(\phi). \quad (2.11)$$

Es wird der Einfachheit halber eine reelle Darstellung der skalaren Teilchen gewählt. Damit sind die Generatoren $(T_S^A)^{ij}$ reell und antisymmetrisch. Komplexe Felder lassen sich durch eine entsprechende Kombination mehrerer reeller skalarer Felder erzeugen.

Die Gestalt des skalaren Potentials $V(\phi)$ ist durch mehrere Umstände stark beschränkt. Die Theorie soll renormierbar sein (vgl. Kapitel 3), womit das Potential maximal ein Polynom vierter Ordnung in den Feldern sein kann. Für eine einfache, kompakte Liegruppe existiert kein invarianter linearer Term [29]. Um ein eindeutiges Vakuum zu erhalten, wird auf einen trilinearen Term ebenfalls verzichtet. Mit diesen Einschränkungen hat das Potential die Gestalt:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (M^2)^{ij} \phi^i \phi^j + \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} \Lambda^{ijkl} \phi^i \phi^j \phi^k \phi^l. \quad (2.12)$$

Die Kopplungen M^2 und Λ müssen so gewählt werden, daß das Potential eichinvariant ist. Die Lagrangedichte (2.10) wird somit zu:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g^2} \sum_A F_{A\mu\nu} F_A^{\mu\nu} - i\bar{\psi}\bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_F^\mu \psi - \frac{1}{2} (\mathcal{D}_S^\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_{S\mu} \phi) - V(\phi). \quad (2.13)$$

2.1.3 Yukawakopplungen

Nachdem im letzten Unterabschnitt der Materiegehalt der Theorie um die skalaren Bosonen ergänzt wurde, besteht nun die Möglichkeit, renormierbare Wechselwirkungen zwischen diesen Spin-0-Bosonen und den Fermionen zu etablieren. Dies führt auf die Yukawakopplungen, die bilinear in den Fermionen und linear in den skalaren Feldern sind. Ein entsprechender Term der Lagrangedichte ist:

$$-\frac{1}{2} \sum_{i,j,k} Y_{jk}^i \phi^i \psi_j \psi_k - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} Y_{jk}^{\dagger i} \phi^i \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k. \quad (2.14)$$

Um die Eichinvarianz zu gewährleisten, müssen die Yukawamatrizen $(Y^i)_{jk} = Y_{jk}^i$ entsprechende Beziehungen erfüllen. Mit den Yukawatermen (2.14) ergibt sich die Lagrangedichte einer allgemeinen, nichtsupersymmetrischen und renormierbaren Eichtheorie, wobei die Ersetzungen $A_A \rightarrow g A_A$ vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \sum_A F_{A\mu\nu} F_A^{\mu\nu} - i\bar{\psi}\bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_F^\mu \psi \\ & -\frac{1}{2} (\mathcal{D}_S^\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_{S\mu} \phi) - \frac{1}{2} \phi^T M^2 \phi - \frac{1}{4!} \sum_{i,j,k,l} \Lambda^{ijkl} \phi^i \phi^j \phi^k \phi^l \\ & -\frac{1}{2} \sum_i \phi^i (\psi Y^i \psi) - \frac{1}{2} \sum_i \phi^i (\bar{\psi} Y^{\dagger i} \bar{\psi}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

mit den kovarianten Ableitungen (2.5) in den Darstellungen $R = F, S$ und dem entsprechenden Feldstärketensor (2.7). Den später angegebenen Renormierungsgruppengleichungen für den nichtsupersymmetrischen Fall liegt diese Lagrangedichte zugrunde.

2.2 Masse von Eichbosonen und Symmetriebrechung

Um kurzreichweitige Wechselwirkungen zu erhalten, müssen die zugehörigen Eichbosonen massiv sein. Dies ist in den bisher besprochenen Lagrangedichten nicht der Fall, da solche Massenterme die Eichsymmetrie brechen. Ein Ausweg aus dieser Situation ist die *Spontane Symmetriebrechung* (SSB). Mit Hilfe der SSB

werden ein Teil der Eichbosonen und über die Yukawakopplungen auch der Fermionen des Modells massiv. Im Gegenzug werden einige der skalaren Teilchen masselos (*Goldstone Theorem* [30]). Diese unphysikalischen Felder können mit Hilfe des *Higgs-Kibble-Mechanismus* [31, 32] vermieden werden: Durch die lokale Eichinvarianz können die unphysikalischen Nambu-Goldstone-Bosonen von den Eichpotentialen *geschluckt* werden, womit die Eichbosonen die notwendigen longitudinalen Freiheitsgrade erlangen. Zurück bleiben massive physikalische *Higgsbosonen*.

Der Grundzustand einer Eichtheorie ist die Feldkonfiguration, in der die zugehörigen Teilchen keine Dynamik besitzen. Somit ist die Diskussion auf das skalare Potential beschränkt; es ist invariant gegenüber einem beliebigen Element g der Eichgruppe G in der entsprechenden Darstellung $U(g)$: $V(U(g)\phi) = V(\phi)$. Existiert ein Element $g \in G$ mit $U(g)\phi_0 \neq \phi_0$ so ist das Vakuum ϕ_0 selbst nicht invariant und die Symmetrie *spontan gebrochen*. Dies kann nur eintreten, wenn $\phi_0 \neq 0$ ist, was nicht für alle Elemente der Eichgruppe gelten muß. Die entsprechenden Elemente bilden eine Untergruppe $H \subset G$: $U(H)\phi_0 = \phi_0$. Das Vakuum ϕ_0 ist nicht eindeutig, sondern bildet einen Orbit: $U(G)\phi_0$. SSB ist somit gleichbedeutend mit der Degeneration des Potentialminimums.

Die N Generatoren von G seien so angeordnet, daß die ersten M die Untergruppe H generieren. Infinitesimale Eichinvarianz des skalaren Potentials ist gleichbedeutend mit

$$\sum_{i,j} \frac{\partial V}{\partial \phi^i} (T_S^A)^{ij} \phi^j = 0, \quad A = 1, \dots, N$$

Erneute Differentiation und Auswerten für $\phi = \phi_0$ ergibt:

$$\sum_{j,k} (M_S^2)^{ij} (T_S^A)^{jk} \phi_0^k = 0, \quad (M_S^2)^{ij} := \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \right|_{\phi=\phi_0},$$

was für die ersten M Generatoren trivial erfüllt ist. Da die Eigenwerte der Massenmatrix M_S^2 die Teilchenmassen geben, folgt die Existenz von $N - M$ masselosen sogenannten Nambu-Goldstone-Bosonen $\zeta_A(x)$. Dies ist der Inhalt des Goldstone Theorems.

Die perturbative Quantenfeldtheorie ist die Entwicklung um die Vakuumkonfiguration. Deswegen ist es hilfreich, dieses Vakuum zum Ausgangspunkt zu machen und die skalaren Felder so zu transformieren, daß das Vakuum der neu einzuführenden Felder $\varphi(x)$ dem Wert Null entspricht: $\varphi_0 = 0$. Dazu muß das gesamte Vakuum parametrisiert werden: Für ein festes $\phi_0^i = v^i$ werden die Felder φ^i und ζ_A über die nichtlineare Transformation

$$\phi(x) =: \exp \left(\frac{i}{|v|} \sum_{A=1}^{N-M} \zeta_A(x) T_S^A \right) (\varphi(x) + v) \quad (2.16)$$

eingeführt.

Die lokale Eichinvarianz der Theorie ermöglicht, die Nambu-Goldstone-Bosonen im Exponenten von (2.16) durch eine entsprechende Transformation aus der Lagrangedichte zu entfernen:

$$\phi(x) \rightarrow \exp\left(-\frac{i}{|v|} \sum_{A=1}^{N-M} \zeta_A(x) T_S^A\right) \phi(x). \quad (2.17)$$

Die verbleibenden skalaren Teilchen sind die *Higgsbosonen*. Letztlich kann die Ersetzung $\phi(x) = \varphi(x) + v$ vorgenommen werden. Die Einführung dieses Feldes reduziert die Eichsymmetrie auf die Gruppe H , die Symmetrie der *symmetrischen Phase* mit der Eichgruppe G ist auf eine nichtlineare Weise *verborgen* [33], garantiert aber durch die obige Eichtransformation die Renormierbarkeit der *gebrochenen Phase* mit der Eichgruppe H .

Die Addition einer speziellen Vakuumkonfiguration zum skalaren Feld $\phi^i = \varphi^i + v^i$ führt in der Lagrangedichte (2.15) zu Massentermen für einige der Eichbosonen:

$$-\frac{1}{2} (\mathcal{D}_{S\mu} v)^\dagger (\mathcal{D}_S^\mu v) = \frac{1}{2} \sum_{A,B} m_{AB}^2 A_{A\mu} A_B^\mu, \quad m_{AB}^2 := g^2 v^T T_S^A T_S^B v.$$

Die ersten M der Eigenwerte der Massenmatrix sind Null und jedes Nambu-Goldstone-Boson erzeugt ein massives Eichfeld. Die zwei chiralen Freiheitsgrade eines masselosen Eichbosons ergeben zusammen mit dem einen Freiheitsgrad des unphysikalischen Nambu-Goldstone-Bosons die drei Spinfreiheitsgrade des massiven Eichbosons.

Die Transformation der skalaren Felder führt über die Yukawakopplungen ebenso zu einer Massenmatrix für die Fermionen:

$$-\frac{1}{2} \sum_i \phi^i (\psi Y^i \psi) \rightarrow -\frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} \psi_i \psi_j, \quad M_{ij} := \sum_k v^k Y_{ij}^k. \quad (2.18)$$

Die Gruppen G bzw. H und die Darstellungen der skalaren bzw. fermionischen Felder S und F bestimmen somit das Massenspektrum des Modells.

Die Namensgebung *symmetrische* oder *gebrochene Phase* deutet einen Phasenübergang zwischen den zugehörigen Modellen an. Das Potential einer massiven, skalaren und einkomponentigen ϕ^4 -Theorie

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

besitzt für $\phi_0(m^2) = 0$ eine symmetrische Phase mit der Masse $M = m$, solange $m^2 \geq 0$ gilt. Ist $m^2 < 0$, so wird die gebrochene Phase mit dem Vakuumerwartungswert

$$\phi_0(m^2) = \pm \sqrt{6 \frac{(-m^2)}{\lambda}}$$

und der Masse $M = \sqrt{-2m^2}$ erreicht. In $m^2 = 0$ ist die Funktion $\phi_0(m^2)$ somit nicht analytisch [34].

2.3 Supersymmetrische Eichfeldtheorien

Theoretisch sehr erfolgreiche Erweiterungen konventioneller Eichfeldtheorien sind solche mit einer zusätzlichen sogenannten *Supersymmetrie*; diese bilden die zweite große Klasse der in dieser Arbeit untersuchten Theorien und werden aus diesem Grund hier vorgestellt.

Die Supersymmetrie verbessert die Renormierungseigenschaften, womit neben der im weiteren geschilderten Lösung des Hierarchie-Problems die lokalen Supersymmetrien in Form der Supergravitation [35] oder den Superstring-Theorien [36] eine realistische Quantentheorie der Gravitation möglich werden könnte. Die Einbettung des Standardmodells in eine supersymmetrische unifizierte $SU(5)$ -Theorie führt im Gegensatz zur nichtsupersymmetrischen Version zu einer mit dem Experiment zu vereinbarenden Protonenlebenszeit.

Im folgenden wird die Supersymmetrie zuerst motiviert (Unterabschnitt 2.3.1) und anschließend explizit eingeführt (Unterabschnitt 2.3.2). Die Bestandteile einer supersymmetrischen Feldtheorie in Form der Superfelder werden in Abschnitt 2.3.3 erläutert und im Unterabschnitt 2.3.4 zur Konstruktion einer supersymmetrischen Eichfeldtheorie verwendet. Damit können im Abschnitt 2.4 dieses Kapitels die Lagrangedichten von nichtsupersymmetrischer und supersymmetrischer Theorie gegenübergestellt werden.

2.3.1 Motivation der Supersymmetrie

Die Attraktivität einer supersymmetrischen Feldtheorie fußt zum einen auf technischen Schwierigkeiten bei den nichtsupersymmetrischen Modellen und zum anderen auf einigen prinzipiellen Überlegungen zu den Eigenschaften einer Feldtheorie. Zwar konnte eine Supersymmetrie in den beobachteten Wechselwirkungen bisher nicht nachgewiesen werden, doch sind einige theoretische Folgen einer Supersymmetrie so bemerkenswert, daß dies allein die Untersuchung rechtfertigt und auf eine zukünftige Verifikation hoffen läßt.

Die Symmetrien einer Quantenfeldtheorie werden von der Poincarégruppe P der Raumzeit und der internen Symmetriegruppe G der auftretenden Felder gebildet: $P \otimes G$. Im Rahmen der *Großen Unifizierten Theorien* (GUT) liegt es nahe, eine sogenannte *Mastergruppe* M zu suchen, die nichttrivial diese beiden Gruppen inkorporiert: $P \otimes G \subset M$. Aufgrund der Nichtkompaktheit der Poincarégruppe kann die Mastergruppe ebenfalls nicht kompakt sein. Es existieren jedoch keine

endlichdimensionalen, unitären Darstellungen von nichtkompakten Liegruppen. Außerdem konnte unter recht allgemeinen Annahmen gezeigt werden, daß die größte mit physikalischen Anforderungen zu vereinbarende Gruppe nur die Form $P \otimes G'$, mit einer kompakten Liegruppe G' , haben kann (*Coleman-Mandula-Theorem* [37]). Eine Möglichkeit, dies zu umgehen, ist die Verwendung von anti-vertauschenden, *gradierten Algebren*. Es stellt sich heraus, daß die im folgenden näher erläuterte Supersymmetrie, die einzig mögliche Erweiterung der Poincarégruppe ist [38].

Die in der Natur auftretenden Elementarteilchen zerfallen in zwei Klassen mit bosonischer bzw. fermionischer Statistik, die völlig ohne Beziehung zueinander zu sein scheinen. Die Supersymmetrie stellt einen direkten Zusammenhang her und sagt aus, daß die Anzahl der fermionischen gleich der bosonischen Freiheitsgrade einer Theorie sein muß. Durch eine supersymmetrische Transformation Q wird ein Boson zu einem Fermion und umgekehrt:

$$Q|\text{Boson}\rangle = |\text{Fermion}\rangle, \quad Q|\text{Fermion}\rangle = |\text{Boson}\rangle.$$

Eine supersymmetrische Eichfeldtheorie hat gegenüber einem konventionellen Modell zusätzlich den Vorteil, daß das sogenannte *Hierarchie-Problem* [39] nicht auftritt. Dem Standardmodell (SM) sind zwei ausgezeichnete Impulsskalen eigen. Dabei handelt es sich zum einen um die Brechungsskala der elektroschwachen Wechselwirkung $M_W \simeq 10^2$ GeV und zum anderen um den Energiebereich, bei dem eine Unifizierung der auftretenden Wechselwirkungen vermutet wird: $M_{\text{GUT}} \simeq 10^{15}$ GeV. Die (quadratische) radiative Korrektur zur Higgsmasse m_h hat unter Verwendung eines *Abschneide-Impulses* Λ die Struktur [40]:

$$\delta m_h^2 \propto (\lambda - Y^2) \Lambda^2 \quad (2.19)$$

mit einer skalaren Selbstkopplung λ und einer Yukawakopplung Y . Die Skala Λ ist von der Ordnung M_{GUT} und folglich verursacht diese quadratische Divergenz Higgsmassen von derselben Ordnung. Um dies zu vermeiden, werden die Gegen-terme im Renormierungsprozeß entsprechend gewählt (vgl. Kapitel 3). Diese *Feinjustierung* muß Ordnung für Ordnung der Perturbation wiederholt werden, um die Hierarchie von 13 Größenordnungen unter radiativen Korrekturen zu gewährleisten. Eine kleine Higgsmasse ist im Standardmodell aufgrund der quadratischen Divergenzen nicht *natürlich* [41].

In einer supersymmetrischen Theorie treten diese Divergenzen nicht auf. Dort sind die Kopplungen λ und Y nicht unabhängig voneinander, sondern stehen so in Beziehung, daß die rechte Seite von (2.19) verschwindet. Die Supersymmetrie erhöht die Natürlichkeit eines Modells, was die Konsequenz des *Nicht-Renormierungstheorems* [42], der Abwesenheit von quadratischen Divergenzen im (Super)Potential, ist. Durch die Supersymmetrie werden also die *Spin* – 0 –

Bosonen stabilisiert, was eine direkte Folge dieser verbesserten Renormierungseigenschaften ist. Dies überträgt sich auch auf die lokale Supersymmetrie in Form der Supergravitation.

Da die Supersymmetrie in den möglichen Energiebereichen heutiger Beschleuniger nicht entdeckt wurde, muß sie eine gebrochene Symmetrie sein und das Wegheben der Divergenzen in (2.19) kann nicht mehr exakt erfolgen. Die Unifizierung der Eichkopplungen (vgl. Abschnitt 4.3) im Standardmodell bei ca. 10^{15} GeV ist nur angenähert gültig. Dagegen kann sie im Minimal Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) durch die Wahl der supersymmetrischen Brechungsskala M_{SUSY} exakt erreicht werden und tritt bei einer Skala von $2 \cdot 10^{16}$ GeV ein, einem Wert, der wesentlich besser mit der Protonenlebenszeit zu vereinbaren ist.

2.3.2 Supersymmetrie

Zur Vorbereitung auf den letzten Unterabschnitt zu den supersymmetrischen Eichfeldtheorien, wird hier auf diese Symmetrie eingegangen.

Um eine Supersymmetrie zu beschreiben, wird die vierdimensionale Raumzeit um nichtkommutierende Koordinaten in Form von zweikomponentigen Weylspinoren Θ_α und $\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}$, die die Relationen

$$\{\Theta_\alpha, \Theta_\beta\} = \{\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\Theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\Theta_\alpha, \bar{\Theta}_{\dot{\beta}}\} = [\Theta_\alpha, x_\mu] = [\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}, x_\mu] = 0$$

erfüllen, zum *Superraum* mit den Koordinaten $(x_\mu, \Theta_\alpha, \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}})$ erweitert. Die geschweiften Klammern stehen für den Anti-Kommutator. Desweiteren wird die Poincaréalgebra um einen ($\mathcal{N} = 1$) Supergenerator Q_α bzw. $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ folgendermaßen ergänzt² [43]:

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = 0, \\ \{Q_\alpha, Q_\beta\} &= \{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 0, \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} &= 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu P_\mu. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Näheres zu den Konventionen bezüglich der Weylspinoren findet sich im Anhang A. Eine mögliche Darstellung der Supergeneratoren lautet:

$$Q_\alpha = \partial_{\Theta^\alpha} - i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\Theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad \bar{Q}^{\dot{\alpha}} = \partial_{\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}} - i\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \Theta_\alpha \partial_\mu.$$

Zur Konstruktion von Feldtheorien wird eine supersymmetrische Differentiation benötigt. Eine Darstellung einer solchen kovarianten Differentiation ist:

$$\mathcal{D}_\alpha = \partial_{\Theta^\alpha} + i\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \bar{\Theta}^{\dot{\alpha}} \partial_\mu, \quad \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} = \partial_{\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}} + i\bar{\sigma}^{\mu\alpha\dot{\alpha}} \Theta_\alpha \partial_\mu.$$

²Hier sind nur die Kommutatoren bezüglich der Zeit- und Ortstranslation P_μ wiedergegeben. Auf die Einführung von mehr als einem ($\mathcal{N} > 1$) Generator Q_α wird nicht eingegangen.

2.3.3 Superfelder und Supereichtransformationen

Ein Superfeld ist die Verallgemeinerung eines Feldes auf die Superraumkoordinaten $(x_\mu, \Theta_\alpha, \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}})$. In diesem Unterabschnitt werden die chiralen und vektoriellen Superfelder, die Bestandteile einer Supereichtheorie, eingeführt.

Aufgrund der Antivertauschungseigenschaft ist die Taylorentwicklung eines Superfeldes nach Θ und $\bar{\Theta}$ endlich. Somit kann das Superfeld nach Komponentenfeldern entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \Theta, \bar{\Theta}) = & f(x) + \Theta\varphi(x) + \bar{\Theta}\bar{\chi}(x) + \Theta^2 m(x) + \bar{\Theta}^2 n(x) + \Theta\sigma^\mu\bar{\Theta}v_\mu(x) \\ & + \Theta^2\bar{\Theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\Theta}^2\Theta\psi(x) + \Theta^2\bar{\Theta}^2 d(x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

was die Spin-0-Bosonen f, m, n und d , die Spin- $\frac{1}{2}$ -Fermionen $\varphi, \bar{\chi}, \bar{\lambda}$ und ψ und das Spin-1-Boson v inkorporiert. Ein Superfeld steht also für ein ganzes Ensemble von Teilchen unterschiedlicher Statistik.

Die Darstellung des Superfeldes (2.21) ist reduzibel. Zur Beschreibung chiraler Fermionen werden Superfelder mit nur zwei fermionischen Freiheitsgraden benötigt. Als geeignete, invariante Bedingung für ein chirales bzw. antichirales Superfeld stellt sich

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{D}_\alpha\Phi^\dagger = 0$$

heraus. Durch hermitesche Konjugation eines chiralen Superfeldes wird ein antichirales erzeugt. Weiterhin sind Produkte chiraler Superfelder chiral.

Die Komponentenfeldzerlegung für das chirale Feld nimmt die Gestalt

$$\begin{aligned} \Phi(x, \Theta, \bar{\Theta}) = & \phi(x) + \sqrt{2}\Theta\psi(x) + \Theta^2 F(x) + i\Theta\sigma^\mu\bar{\Theta}\partial_\mu\phi(x) \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\Theta^2\bar{\Theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \frac{1}{4}\Theta^2\bar{\Theta}^2\Box\phi(x) \end{aligned} \quad (2.22)$$

an. Die Komponentenfelder transformieren sich mit $\delta_\xi = \xi Q + \bar{\xi}\bar{Q}$ gemäß:

$$\begin{aligned} \delta_\xi\phi &= \sqrt{2}\xi\psi, \\ \delta_\xi\psi &= -i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi + \sqrt{2}\xi F, \\ \delta_\xi F &= i\sqrt{2}\bar{\xi}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi, \end{aligned} \quad (2.23)$$

was die infinitesimalen Transformation der Fermionen in Bosonen und umgekehrt explizit wiedergibt. Insbesondere ist die Anzahl der fermionischen identisch mit der der bosonischen Freiheitsgrade.

Eine weitere irreduzible Klasse von Superfeldern sind die Vektorfelder $V(x, \Theta, \bar{\Theta})$. Diese werden durch die Forderung nach Hermitizität fixiert:

$$\mathbf{V}(x, \Theta, \bar{\Theta})^\dagger = \mathbf{V}(x, \Theta, \bar{\Theta}). \quad (2.24)$$

Diese Bedingung überträgt sich auf die Komponentenfelderzerlegung (2.21) folgendermaßen:

$$\mathbf{V}(x, \Theta, \bar{\Theta}) = \Theta \sigma^\mu \bar{\Theta} A_\mu(x) + i \Theta^2 \bar{\Theta} \bar{\lambda}(x) - i \bar{\Theta}^2 \Theta \lambda(x) + \frac{1}{2} \Theta^2 \bar{\Theta}^2 D(x). \quad (2.25)$$

Hierbei wurde die Wess-Zumino-Eichung [42] verwendet, in der einige der möglichen Komponenten des Vektorfeldes Null gesetzt werden, was einer Eichung der Supersymmetrie entspricht. In der Folge ist das Vektorfeld nilpotent: $V^3 = 0$. Die supersymmetrischen Komponententransformationen ergeben sich ganz ähnlich wie in (2.23).

Eine Verallgemeinerung von (2.1) und (2.3) einer lokalen Eichtransformation für chirale und antichirale Superfelder in einer Darstellung R der jeweiligen Eichgruppe, vermittelt von einem chiralen Superfeld

$$\omega_{Rij}(x, \Theta, \bar{\Theta}) = \sum_A \omega_A(x, \Theta, \bar{\Theta}) (T_R^A)_{ij} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \omega_R = 0,$$

um wiederum Superfelder mit entsprechender Chiralität zu erhalten, lautet:

$$\Phi \rightarrow e^{-i\omega_R} \Phi, \quad \Phi^\dagger \rightarrow \Phi^\dagger e^{i\omega_R^\dagger} \quad (2.26)$$

mit $\omega_R^\dagger := \sum_A \omega_A^\dagger T_R^A$. In Komponentenfeldern beinhaltet dies die gewöhnlichen Transformation für die Spinorfelder. Die eine Eichtransformation des Komponentenvektorpotentials entsprechende supersymmetrische Eichtransformation ergibt sich durch die Kombination

$$\mathbf{V}_R \rightarrow \frac{1}{2g} \ln \left(e^{-i\omega_R} e^{2g\mathbf{V}_R} e^{i\omega_R^\dagger} \right), \quad \mathbf{V}_R := \sum_A V_A T_R^A. \quad (2.27)$$

Weiterhin ist es möglich, zu diesen Superpotentialen entsprechende Superfeldstärken zu konstruieren, die auf der Ebene der Komponentenfelder das den Feldstärken (2.7) entsprechende Verhalten zeigen:

$$\mathbf{W}_{R\alpha} := -\frac{1}{4} \bar{\mathcal{D}}^2 e^{-2g\mathbf{V}_R} \mathcal{D}_\alpha e^{2g\mathbf{V}_R}, \quad \mathbf{W}_R := \sum_A W_A T_R^A, \quad (2.28)$$

Sie transformieren sich gemäß $\mathbf{W}_{R\alpha} \rightarrow e^{-i\omega_R} \mathbf{W}_{R\alpha} e^{i\omega_R^\dagger}$.

2.3.4 Konstruktion von Supereichtheorien

In diesem Abschnitt wird explizit die supersymmetrische Theorie angegeben und deren weiche Brechung skizziert. Mit den chiralen und vektoriellen Superfeldern sind alle Bestandteile zur Konstruktion von supersymmetrischen Eichtheorien

vorhanden. Es bleibt anzugeben, wie der unphysikalische Superraum auf den gewöhnlichen reduziert wird. Dazu ist es notwendig, ein Integrationsmaß aus anti-vertauschenden Größen zu konstruieren [44]. Die einzigen lorentz- und superinvarianten Integrationsmaße für die Superfelder sind:

$$\int d^2\Theta := \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\Theta_\alpha} \frac{\partial}{\partial\Theta^\alpha}, \quad \int d^2\bar{\Theta} := \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}^{\dot{\alpha}}} \frac{\partial}{\partial\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}}, \quad \int d^4\Theta := \int d^2\Theta d^2\bar{\Theta}.$$

Die Integration erhält die Supersymmetrie eines Integranden.

Um das Wirkungsprinzip im Superraum zu verankern, kann die Lagrangedichte auf dem Superraum selbst definiert werden:

$$S =: \int d^4x \int d^4\Theta \mathcal{L}(x, \Theta, \bar{\Theta}).$$

Mit diesen Vorbereitungen läßt sich die Lagrangedichte einer supersymmetrischen und renormierbaren Eichtheorie notieren:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, \Theta, \bar{\Theta}) = & \frac{1}{2} \text{Spur} \left(\mathbf{W}^\alpha \mathbf{W}_\alpha + \bar{\mathbf{W}}_{\dot{\alpha}} \bar{\mathbf{W}}^{\dot{\alpha}} \right) \bar{\Theta}^2 + \Phi^\dagger e^{2g} \mathbf{V} \Phi \quad (2.29) \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k} Y_{ijk} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right) \bar{\Theta}^2 + h.c. \right]. \end{aligned}$$

wobei auf die Einführung eines linearen Terms $\sum_i L_i \Phi_i$ verzichtet wurde.

Einsetzen der Komponentenfeldzerlegung in (2.29) ergibt, daß die Felder D_A und F_i keine Dynamik besitzen und somit Hilfsfelder sind. Mit Hilfe der sich ergebenden Feldgleichungen

$$F_i^\dagger = - \sum_j M_{ij} \phi_j - \sum_{j,k} Y_{ijk} \phi_j \phi_k, \quad D_A = g \sum_{i,j} \phi_i^\dagger (T_R^A)_{ij} \phi_j \quad (2.30)$$

können sie eliminiert werden. Dies ergibt die supersymmetrische Lagrangedichte, ausgedrückt durch die Komponentenfelder:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \sum_A F_{A\mu\nu} F_A^{\mu\nu} - i \sum_{A,B} \bar{\lambda}_A \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_{AB}^\mu \lambda_B - i \bar{\psi} \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_R^\mu \psi - (\mathcal{D}_R^\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_{R\mu} \phi) \\ & - \frac{1}{2} \psi M \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi} M^\dagger \bar{\psi} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} Y_{ijk} \phi_i \psi_j \psi_k - \sum_{i,j,k} Y_{ijk}^\dagger \phi_i^\dagger \bar{\psi}_j \bar{\psi}_k \\ & + i\sqrt{2} g \sum_{i,j,A} \left(\bar{\psi}_i (T_R^A)_{ij} \phi_j \bar{\lambda}_A - \psi_i (T_R^A)_{ij} \phi_j^\dagger \lambda_A \right) - V(\phi, \phi^\dagger). \quad (2.31) \end{aligned}$$

Die Parameter des skalaren Potentials sind keine freien Größen mehr, sondern ergeben sich aus:

$$V(\phi, \phi^\dagger) = \sum_i F_i F_i^\dagger + \frac{1}{2} \sum_A D_A D_A$$

zu:

$$\begin{aligned}
V(\phi, \phi^\dagger) = & \sum_{i,j} |M_{ij}|^2 \phi_i^\dagger \phi_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \phi_i^\dagger M_{ij}^\dagger Y_{jkl} \phi_k \phi_l + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \phi_i M_{ij} Y_{jkl}^\dagger \phi_k^\dagger \phi_l^\dagger \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} \left[\sum_m Y_{mij} Y_{mkl}^\dagger + 2g^2 \sum_A (T_R^A)_{ij} (T_R^A)_{kl} \right] \phi_i^\dagger \phi_j \phi_k^\dagger \phi_l. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

Die Komponentenform der Lagrangdichte ordnet dem Eichboson A_A (Spin 1) einen Superpartner in Form des Fermions λ_A (Spin 1/2) und dem skalaren Teilchen ϕ_i (Spin 0) ein Fermion ψ_i (Spin 1/2) zu. Entsprechendes gilt für die Fermionen und Bosonen des jeweiligen Modells. Die jeweiligen Partner besitzen dieselbe Masse und transformieren sich bezüglich derselben Darstellung. Sie unterscheiden sich nur durch ihre Statistik. Die Felder eines nichtsupersymmetrischen Modells lassen sich in der Regel nicht untereinander zu Supermultipletts zusammenfassen, womit der Teilchengehalt passend erweitert werden muß. Die Namen der fermionischen Partner der Eichbosonen oder Spin-0-Bosonen werden üblicherweise mit der Endung '-ino' versehen, während zu Fermionen korrespondierenden Spin-0-Bosonen ein 'S-' vorangestellt wird.

Die Masse der hinzugekommenen Superpartner ist identisch mit der der ursprünglichen Teilchen. Da sie bisher experimentell nicht verifiziert werden konnten, kann die Supersymmetrie im Infraroten nicht exakt sein, was die Brechung dieser Symmetrie notwendig macht. Dadurch können die nicht beobachteten Superpartikel mit abweichenden Massen versehen werden, was so geschehen muß, daß die geladenen unter ihnen schwerer als die heute zugänglichen Impulsskalen sind. Die Massen der neutralen Superpartner können durchaus von der Ordnung der bekannten Teilchenmassen sein und sind dann aus denselben Gründen wie bei dem Higgsteilchen des Standardmodells aufgrund ihrer geringen Wechselwirkung mit den anderen Teilchen bisher nicht nachweisbar. So liegt z.B. die untere Massenschranke für das Higgsino bei 95 GeV und die des Neutralinos bei 14 GeV [45].

Die Brechung kann so vorgenommen werden, daß sie *weich* ist, womit die Erhaltung der Natürlichkeit des jeweiligen Modells gemeint ist. Dazu werden explizit Terme zur Lagrangedichte hinzugenommen, die zwar die Supersymmetrie verletzen, aber eichinvariant sind. In der Folge haben sie für eine hinreichend kleine Brechungsskala M_{SUSY} keinen Einfluß auf die Verhältnisse im Ultraviolett und lassen damit das Hierarchie-Problem weiterhin gelöst. Für das MSSM bedeutet dieses die Addition von Termen, die aus den Superpartnern und Spin-0-Bosonen aufgebaut sind und die diese im Vergleich zu den ursprünglichen Teilchen der nichtsupersymmetrischen Theorie mit differierenden Massen versehen: Gaugino-, Higgs-, Sfermionmassen und trilineare Kopplungsterme, die Wechselwirkungen zwischen den Higgsteilchen und den Sfermionen generieren (vgl. Abschnitt 4.2).

2.4 Supersymmetrisierung eines Modells

In dieser Arbeit wird häufiger von der *supersymmetrisierten* Variante eines Modells die Rede sein. Dieser Begriff soll in diesem Abschnitt präzisiert werden. Anschließend werden die zugehörigen Lagrangedichten gegenübergestellt.

Aufgrund der konzeptionellen Vorteile wird häufig angenommen, daß ein bestimmtes physikalisch relevantes, nichtsupersymmetrisches Modell bis zu einer gewissen Skala gültig ist und daß oberhalb dieser Brechungsskala M_{SUSY} die Supersymmetrie streng erfüllt ist. In der Regel ist es nicht möglich, den vorhandenen Teilchengehalt in chiralen oder vektoriellen Supermultipletts zusammenzufassen. Folglich wird jedes Teilchen mit einem entsprechenden Superpartner versehen, was den Teilchengehalt verdoppelt.

Unter Supersymmetrisierung soll die folgende Vorgehensweise verstanden werden: Ausgehend von Teilchengehalt und Art der Wechselwirkungen eines nichtsupersymmetrischen Modells wird jedem Fermionenfeld ein chirales Superfeld mit neu hinzukommenden Sfermionen, jedem skalaren Feld ebenfalls ein chirales Superfeld mit zusätzlichen Bosinos und jedem Eichfeld ein Supervektorfeld mit neuen fermionischen *Gauginos* zugeordnet. Aus diesen Superfeldern wird dann, entsprechend des letzten Abschnitts, die supersymmetrische Eichtheorie konstruiert. Das Ergebnis enthält die ursprüngliche Lagrangedichte, ergänzt um die Wechselwirkungen der Superpartner. Diese *minimale* Ersetzungsvorschrift ist nicht hinreichend. Am Supermodell müssen häufig Modifikationen vorgenommen werden. Dies betrifft zum einen den skalaren Teilchengehalt, der oftmals erhöht werden muß, um die Anomaliefreiheit der Eichsymmetrie zu gewährleisten. Andere Abweichungen sind phänomenologischer Art oder geben das Verhältnis zu einer angenommen übergeordneten Theorie wieder. Das MSSM ist die supersymmetrische Variante des SMs, ergänzt um ein zusätzliches Superhiggsdublett.

Ohne Berücksichtigung eventueller phänomenologischer Randbedingungen oder Anomalien bedeutet Supersymmetrisieren im einzelnen, daß ausgehend von der nichtsupersymmetrischen Lagrangedichte³ (2.15) die Fermionen ψ_{F_i} um Sfermionen $\phi_{F_i}^i$, die Skalare ϕ_S^i um Bosinos ψ_S^i und die Eichbosonen A_A um Gauginos λ_A ergänzt werden. Dies ergibt ein masseloses chirales Superfeld $\Phi_F[\phi_F, \psi_F, F_F]$ in der Darstellung F , ein massives chirales Superfeld $\Phi_S[\phi_S, \psi_S, F_S]$ in der Darstellung S und ein vektorielles Superfeld $V_R[A, \lambda, D]$ in wechselnder Darstellung $R = F$ bzw. $R = S$. Mit (2.29) lautet die Superlagrangedichte:

$$\mathcal{L}(x, \Theta, \bar{\Theta}) = \frac{1}{2} \text{Spur} \left(\mathbf{W}^\alpha \mathbf{W}_\alpha + \overline{\mathbf{W}}_{\dot{\alpha}} \overline{\mathbf{W}}^{\dot{\alpha}} \right) \bar{\Theta}^2 + \Phi_F^\dagger e^{2g \mathbf{V}_F} \Phi_F + \Phi_S^\dagger e^{2g \mathbf{V}_S} \Phi_S$$

³Hier für eine komplexe Darstellung S . Im weiteren wird über doppelt auftretende Indizes summiert.

$$+ \left[\left(\frac{1}{2} M^{ij} \Phi_S^i \Phi_S^j + \frac{1}{2} Y_{jk}^i \Phi_S^i \Phi_{Fj} \Phi_{Fk} \right) \bar{\Theta}^2 + h.c. \right] \quad (2.33)$$

Integration über die fermionischen Raumkomponenten und Elimination der Hilfsfelder ergibt die Lagrangedichte der zugehörigen supersymmetrischen Theorie in Komponentenfeldern. Die nichtsupersymmetrische Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{A\mu\nu} F_A^{\mu\nu} - i \bar{\psi}_F \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_F^\mu \psi_F - (\mathcal{D}_S^\mu \phi_S)^\dagger (\mathcal{D}_{S\mu} \phi_S) - \phi_S^\dagger M^2 \phi_S \\ & - \frac{1}{4} \Lambda^{ijkl} \phi_S^{\dagger i} \phi_S^j \phi_S^{\dagger k} \phi_S^l - \frac{1}{2} \phi_S^i \psi_F Y^i \psi_F - \frac{1}{2} \phi_S^{\dagger i} \bar{\psi}_F Y^{\dagger i} \bar{\psi}_F \end{aligned} \quad (2.34)$$

hat damit die zugehörige supersymmetrische Version:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{susy}} = & -\frac{1}{4} F_{A\mu\nu} F_A^{\mu\nu} - i \bar{\psi}_F \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_F^\mu \psi_F - (\mathcal{D}_S^\mu \phi_S)^\dagger (\mathcal{D}_{S\mu} \phi_S) - \phi_S^\dagger |M|^2 \phi_S \\ & - \frac{1}{4} (2g^2 (T_S^A)^{ij} (T_S^A)^{kl}) \phi_S^{\dagger i} \phi_S^j \phi_S^{\dagger k} \phi_S^l - \frac{1}{2} \phi_S^i \psi_F Y^i \psi_F - \frac{1}{2} \phi_S^{\dagger i} \bar{\psi}_F Y^{\dagger i} \bar{\psi}_F \\ & - i \bar{\psi}_S \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}_S^\mu \psi_S - \frac{1}{2} \psi_S M \psi_S - \frac{1}{2} \bar{\psi}_S M^\dagger \bar{\psi}_S \\ & - (\mathcal{D}_F^\mu \phi_F)^\dagger (\mathcal{D}_{F\mu} \phi_F) - \frac{1}{4} \left(Y_{ij}^m Y_{kl}^{\dagger m} + 2g^2 (T_F^A)_{ij} (T_F^A)_{kl} \right) \phi_{Fi}^\dagger \phi_{Fj} \phi_{Fk}^\dagger \phi_{Fl} \\ & - \psi_S^i \psi_F Y^i \phi_F - \bar{\psi}_S^i \bar{\psi}_F Y^{\dagger i} \phi_F^\dagger - \frac{1}{2} \phi_S^{\dagger i} M^{\dagger ij} \phi_F Y^j \phi_F - \frac{1}{2} \phi_S^i M^{ij} \phi_F^\dagger Y^{\dagger j} \phi_F^\dagger \\ & - \left(Y_{im}^k Y_{mj}^{\dagger l} + g^2 (T_F^A)_{ij} (T_S^A)^{kl} \right) \phi_{Fi}^\dagger \phi_{Fj} \phi_S^{\dagger k} \phi_S^l \\ & - i \bar{\lambda} \bar{\sigma}_\mu \mathcal{D}^\mu \lambda \\ & + i \sqrt{2} g \left[\bar{\psi}_{Fi} (T_F^A)_{ij} \phi_{Fj} + \bar{\psi}_S^i (T_S^A)^{ij} \phi_S^j \right] \bar{\lambda}_A \\ & - i \sqrt{2} g \left[\psi_{Fi} (T_F^A)_{ij} \phi_{Fj}^\dagger + \psi_S^i (T_S^A)^{ij} \phi_S^{\dagger j} \right] \lambda_A. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die ersten zwei Zeilen in (2.35) entsprechen dem nichtsupersymmetrischen Fall (2.34), wobei der skalare Sektor modifizierte Parameter enthält, gefolgt von zwei Zeilen, die die entsprechenden Wechselwirkungen der Superpartner wiedergeben. Eine Durchmischung dieser Teilchenklassen wird in den Zeilen fünf und sechs beschrieben. Die letzten drei Zeilen koppeln die Gauginos an die Materiefelder. Die Lagrangedichte ist zwar durch den verdoppelten Teilchengehalt komplexer geworden, gleichzeitig hat sich die Zahl der Parameter verringert: (g, M^2, Y, Λ) wurde durch (g, M, Y) ersetzt.

3 Renormierung

Die Reduktion des Parameterraums eines Modells mit Hilfe von Fixmannigfaltigkeiten, die sich dadurch auszeichnen, daß sie unter den in diesem Kapitel erläuterten *Renormierungsgruppentransformation* und den Symmetrien des *Renormierungsgruppenflusses* in sich selbst übergeführt werden, wird Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen dieser Arbeit sein.

Der naheliegende Ansatz, eine konsistente Quantenfeldtheorie durch die Vereinigung von Quantenmechanik und klassischer Feldtheorie zu erreichen, scheiterte daran, daß alle radiativen Korrekturen mit scheinbar unüberwindbaren Divergenzen verbunden waren. Der Ausweg gelang durch die Entdeckung der *Renormierungsgruppeninvarianz* durch Stückelberg und Petermann 1953 [46]. Größere Aufmerksamkeit erlangte dies mit der Arbeit von Gell-Mann und Low [47], die 1954 die Divergenzen im Falle der *Quantenelektrodynamik* (QED) untersuchten. Die Renormierung konnte erfolgreich auf nichtabelsche Eichtheorien übertragen werden [48, 49, 50]. Neuere Darstellungen der Renormierungsgruppe finden sich in [51, 52, 53]. Die Anwendung der Renormierungsgruppe führte auf die Entdeckung der *asymptotischen Freiheit* der Quarks im Ultraviolett [54]; Fixstrukturen und Symmetrien der Renormierungsgruppengleichungen wurden als wichtige Hilfsmittel in der Teilchenphysik erkannt [55, 9, 10, 56, 57, 58].

Dieses Kapitel ist wie folgt gegliedert: Im ersten Abschnitt 3.1 wird mit Hilfe der dimensional Analysis eines Streuprozesses die Grundidee der Renormierung motiviert. Die verschiedenen Möglichkeiten die Divergenzen zu beschreiben werden in dem darauffolgenden Abschnitt 3.2 zur *Regularisation* diskutiert. Die Referenzskala und der Abbruch in einer bestimmten Ordnung der Perturbation bringen gewisse Willkürlichkeiten mit sich, die in 3.3 geschildert werden. Nach diesen Erläuterungen erfolgt in 3.4 die formale Angabe der *Renormierungsgruppengleichungen* (RGG), die die Verhältnisse zusammenfassen, und deren konkrete Bestimmung im nächsten Abschnitt 3.5 skizziert wird. Ein wichtiger Punkt dieses Kapitels wird in 3.6 erläutert, in dem angegeben wird, inwiefern es sich bei der Renormierungsgruppe um eine Liegruppe handelt. Diese Gruppe bestimmt die Fixmannigfaltigkeiten in den nachfolgenden Kapiteln. Es folgt in 3.7 die Beschreibung der Verhältnisse bei der spontanen Symmetriebrechung, bei denen einige technische Besonderheiten beachtet werden müssen, sowie die Definition der physikalischen Masse eines Elementarteilchens der quantisierten Theorie. Der letzte Abschnitt 3.8 gibt explizit die Renormierungsgruppengleichungen einer allgemeinen Eichtheorie in Ein-Schleifen-Ordnung an, wobei auch der supersymmetrische Fall beinhaltet ist.

3.1 Dimensionale Analyse

Die Notwendigkeit der Renormierung der quantisierten Theorie wird in diesem Abschnitt mit Hilfe der dimensionalen Analyse motiviert. Er soll erklären, warum es notwendig ist, über das Quantisieren hinaus, ein zusätzliches Prinzip einzuführen.

Im Kapitel 2 wurde die klassisch determinierte Lagrangedichte einer beliebigen Eichtheorie beschrieben. Die numerischen Werte der auftretenden Kopplungen sind zunächst völlig unbestimmt. Aufgrund der bei der Berechnung von Streuprozessen auftretenden Divergenzen kann diese Lagrangedichte, als Ausgangspunkt für die Quantisierung nur eine vorläufige Größe sein, die die Struktur des Modells wiedergibt; bei allen auftretenden Feldern und Kopplungen wird dies durch den Index B verdeutlicht. Betrachtet werden im folgenden Theorien, deren Lagrangedichten keine Kopplungen mit einer Massendimension aufweisen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_i^B, \phi_j^B, \partial\phi_k^B); \quad (3.1)$$

hier steht x_i^B für die dimensionslosen Kopplungen ($[x_i^B]_M = 0$) und ϕ_i^B für die vorhandenen Felder. Solche Theorien sind auf klassischer Ebene skalierungsinvariant: Die Ersetzungen $\phi_i^B \rightarrow \kappa \phi_i^B$ und $x_\mu \rightarrow x_\mu/\kappa$ führen nicht aus dem jeweiligen Modell heraus. Die Betrachtung solcher Theorien vereinfacht die Diskussion, ist aber keine Einschränkung, da die Argumentation im allgemeinen Fall ganz ähnlich läuft. Dies ist darin begründet, daß Parameter wie Teilchenmassen nackte und somit divergierende Größen sind und damit ebenfalls keine absolute Skala festlegen können [59]. Die Skalierungssymmetrie ist anomal, da sie in der quantisierten Theorie gebrochen wird. Das Verhältnis ρ zweier differentieller Streuquerschnitte bei der Streuung einiger, vorgegebener Teilchen ist eine dimensionslose Observable. Das Ergebnis einer solchen Streuung wird von einer typischen Energie Q , bei der der Prozeß stattfindet, abhängen: $\rho = \rho(Q)$ [59]. Dies führt zu einem Widerspruch: Eine dimensionslose Größe $f(x, y)$, die eindeutig durch zwei massive Parameter x und y bestimmt ist, läßt folgern, daß die Funktion von deren Verhältnis abhängt: $f(x, y) = f(x/y)$. Existiert nur ein Parameter mit der Dimension einer Masse, so muß die Funktion konstant sein: $\rho(Q) = const.$. Dieser Gegensatz zum Experiment läßt sich dadurch auflösen, daß ρ nicht eindeutig durch die Parameter bestimmt sein kann. Es ist notwendig, eine willkürliche Impulsskala μ einzuführen:

$$\rho(Q) =: F\left(\frac{Q}{\mu}, \rho(\mu)\right), \quad F(1, x) = x.$$

Die physikalischen Größen einer Theorie dürfen nicht von dieser Impulsskala μ abhängen.

Die Kopplungen und Felder der Lagrangedichte (3.1) hängen jedoch nicht von der Skala μ ab. Sie wird mit Hilfe eines weiteren dimensionslosen Parameters ε

und jeweils einer zu jeder Kopplung x_i^B korrespondierende Größe x_i bzw. ein zu jedem Feld ϕ_i^B gehörendes ϕ_i eingeführt [50]:

$$x_i^B(\varepsilon, x_k) = f_i(\mu, \varepsilon) \left(x_i(\varepsilon, \mu) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 1}}^{\infty} a_i^{(n)}(x_j) \varepsilon^{-n} \right), \quad (3.2)$$

womit die Divergenz der nackten Kopplungen im letzten Term sichtbar wird. Ähnliche Beziehungen gelten für die Felder. Die Kopplungen bzw. Felder mit dem Index B werden als *nackt*, die ohne zusätzliche Indizierung als *renormiert* bezeichnet. Während der Parameter μ in allen Kalkulationen mitgeführt wird und bei der Bestimmung von Observablen herausfällt, ist die Größe ε ein Regulator, der so gewählt ist, daß, wenn er auf Null zurückgeführt wird, der physikalische Fall eintritt.

Die Beschreibung der Theorie erfolgt nicht mehr direkt über die nackten Größen, die weiterhin unabhängig von μ sind, sondern über die renormierten von μ abhängigen Kopplungen und Felder. Den nackten Kopplungen kommt keine unmittelbare physikalische Bedeutung zu, insbesondere sind es für den zurückgeführten Regulator $\varepsilon \rightarrow 0$ divergierende Größen. Die physikalischen Kopplungen sind die renormierten Kopplungen für $\varepsilon \rightarrow 0$: $x_{\text{phys.}}(\mu) = x(0, \mu)$.

3.2 Regularisation

Im letzten Abschnitt wurde unter anderem die Einführung eines Regulators motiviert. Die Wahl eines geeigneten Regulators wird an dieser Stelle betrachtet, wobei auf ein Problem bei den Fermionen eingegangen wird. Der Abschnitt schließt mit der Beschreibung der besonderen Verhältnisse bei den supersymmetrischen Theorien.

Grundsätzlich sollte ein Regularisierungsverfahren gewählt werden, das alle Symmetrien eines Modells in jeder Ordnung der Störungstheorie intakt läßt. Dies ist nicht zwingend, da das Zurückführen des Regulators die verletzte Symmetrie wiederherstellen sollte, was jedoch durch das perturbative Vorgehen nicht immer gelingt. Zu den zu erhaltenden Symmetrien sollten die Invarianz unter Lorentztransformationen und die Eichsymmetrie zählen. Außerdem muß die Unitarität der einen Streuprozess beschreibenden sogenannten *S-Matrix* in jeder Ordnung gewährleistet sein, um die Wahrscheinlichkeitserhaltung zu garantieren.

Dies leistet die *Dimensionale Regularisation* (DREG), das am häufigsten verwendete Verfahren. Bei den nichtabelschen Symmetrien mit SSB ermöglichte die DREG erst die Renormierung [48, 49]. Das Verfahren setzt die Integration über die vierdimensionale Raumzeit in der Wirkung durch eine Integration über eine

beliebige Zahl $4 - 2\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ von Dimensionen fort. Insbesondere konnte gezeigt werden [60], daß die Integration auch für nicht natürliche ε wohldefiniert ist. Zurückführen des Regulators heißt Zurückkehren zur vierdimensionalen Integration. Die Wirkung geht über in:

$$S[\phi] = \int dV^{(4)} \mathcal{L} \quad \rightarrow \quad S[\phi](\varepsilon) = \int dV^{(4-2\varepsilon)} \mathcal{L}(\varepsilon);$$

sie soll weiterhin keine Massendimension besitzen: $[S[\phi](\varepsilon)]_M = 0$. Da die Integration über die Raumzeit nun für die Massendimension $[dV^{(4-2\varepsilon)}]_M = 2\varepsilon - 4$ steht, ändern sich die Dimensionen der Felder:

$$[\text{Bosonenfeld}]_M = 1 - \varepsilon, \quad [\text{Fermionenfeld}]_M = \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

Entsprechendes gilt für die Kopplungen; damit sie für beliebiges ε dimensionslos bleiben, werden in der Lagrangedichte die folgenden Ersetzungen vorgenommen:

$$\begin{aligned} \text{Eich-/Yukawakopplungen} &\quad \rightarrow \quad \mu^\varepsilon \times \text{Eich-/Yukawakopplungen}, \\ \text{skalare Selbstkopplung} &\quad \rightarrow \quad \mu^{2\varepsilon} \times \text{skalare Selbstkopplung}, \end{aligned}$$

der Vorfaktor in (3.2) ist also für Eich- und Yukawakopplungen $f_i(\mu, \varepsilon) = \mu^\varepsilon$ und für eine skalare Selbstkopplung (ϕ^4 -Term) $f_i(\mu, \varepsilon) = \mu^{2\varepsilon}$. Die Massen der Bosonen und Fermionen besitzen unverändert die Dimension eins.

Die DREG erhält die Symmetrien bis auf eine Ausnahme bei der Lorentzinvarianz der Fermionenfelder, die nur für $\varepsilon \rightarrow 0$ wieder hergestellt ist, da die Verallgemeinerung der Spinoralgebra auf $4 - 2\varepsilon$ Dimensionen nicht vollständig gelingt [49]. Die chirale Eichsymmetrie der Spinoren in Theorien, wie bei der schwachen Wechselwirkung, ist im allgemeinen eine anomale Symmetrie [61], die nur dann nicht auftritt, wenn der Teilchengehalt und die Ladungen entsprechend gewählt werden. Wird die Algebra in $4 - 2\varepsilon$ Dimensionen so eingeführt [34], daß nur die Definition der ersten vier Dimensionen lorentzinvariant bleibt, so hängt das Auftreten oder Verschwinden dieser Anomalie nicht mehr von der Regularisation ab.

Im Falle einer supersymmetrischen Theorie treten zusätzliche Komplikationen auf. Dadurch, daß im DREG Verfahren die bosonischen und fermionischen Freiheitsgrade unterschiedlich behandelt werden, erklärt sich das Versagen dieser Regularisation. In [62] wurde ein modifiziertes Verfahren eingeführt, die *Dimensionale Reduktion* (DRED). Hier lautet die Vorschrift: Die gesamte Lorentz- und Dirac-Algebra wird in vier Dimensionen, die Integration in $4 - 2\varepsilon$ Dimensionen durchgeführt. Dieses, gegenüber der DREG einfachere Vorgehen, kann nicht auf *nicht*supersymmetrische Modelle angewendet werden, da die Unitarität der Streumatrix verloren geht [63].

3.3 Renormierungsschema und Abhängigkeit vom Renormierungsschema

Die Beziehung (3.2) zwischen nackten und renormierten Kopplungen ist nicht eindeutig, da die endlichen Terme nicht näher bestimmt sind. Die Deutung dieses Sachverhalts wird im folgenden behandelt.

Um eine eindeutige Entwicklung nach renormierten Kopplungen zu erhalten, werden zusätzliche Forderungen gestellt. So wird beispielsweise verlangt, daß für bestimmte Impulse der ein- und ausgehenden Teilchen des Streuprozesses, Propagatoren oder Kopplungen in jeder Ordnung der Störungstheorie eine einfache Form erhalten oder mit physikalisch motivierten Werten identisch sind. Eine spezielle Wahl wird *Renormierungsschema* genannt. Es bestimmt die endlichen Terme in (3.2).

Die Unbestimmtheit der Entwicklung wird somit auf die willkürliche Wahl des Renormierungsschemas übertragen. Im Idealfall eines exakt gelösten Modells bleiben die Observablen hiervon unberührt. Jedoch bewirkt der perturbative Abbruch jenseits der führenden Ein-Schleifen-Ordnung der Störungsentwicklung [64], daß dies nicht mehr zutrifft.

Eine wichtige Klasse von Renormierungsschemata sind die der *Minimalen Subtraktion* (MS) [50, 65]. Die Schemavorschrift lautet hier, alle endlichen Terme Null zu setzen. Das MS-Schema ist ein nur gering physikalisch motiviertes Schema, besitzt aber zwei wichtige Vorteile:

- Die Bestimmung der endlichen Terme ist trivial.
- Per Konstruktion gibt es keine Probleme mit masselosen Theorien, in denen eine zusätzliche Behandlung von Infrarotdivergenzen notwendig wäre.

Oft wird die *modifizierte minimale Subtraktion* (\overline{MS}) verwendet [66]. Das MS-Schema erzeugt große Koeffizienten in der perturbativen Entwicklung, die in Form von Potenzen von $(\ln(4\pi) - \gamma_E)$ auftreten⁴. Diese werden durch die Ersetzung $\mu \rightarrow (e^{\gamma_E}/4\pi)^{1/2} \mu$ vermieden.

Die Renormierung eines Modells ist somit durch die Angabe des Renormierungsschemas unter Festlegung der Impulsskala μ gegeben.

⁴ γ_E ist die Euler-Mascheroni-Konstante.

3.4 Renormierungsgruppengleichungen

Es werden formal die zentralen Gleichungen des Renormierungsverfahrens für das MS-Schema angegeben. Diese bestimmen die Renormierungsgruppe, die wiederum auf die Fixmannigfaltigkeiten führt.

Um die Unabhängigkeit der nackten Kopplungen und Felder von der Skala μ explizit zu machen, müssen die Residuen auf der rechten Seite von (3.2) gewisse Eigenschaften erfüllen. (3.2) nimmt im MS-Schema die folgende Gestalt an:

$$x_i^B(\varepsilon, x) = \mu^\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} a_i^{(n)}(x) \varepsilon^{-n}. \quad (3.3)$$

mit $a_i^{(0)} := x_i$ an. Differentiation von (3.3) nach μ ergibt wegen $dx_i^B/d\mu = 0$:

$$\mu \frac{dx_i}{d\mu} + \sum_j \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial a_i^{(n)}}{\partial x_j} \mu \frac{dx_j}{d\mu} \varepsilon^{-n} = - \sum_{n=0}^{\infty} a_i^{(n)} \varepsilon^{-n+1}. \quad (3.4)$$

$\mu dx_i/d\mu$ muß für $\varepsilon \rightarrow 0$ endlich sein, was auf die Renormierungsgruppengleichungen (RGG) führt [67]:

$$\mu \frac{dx_i}{d\mu} = -\varepsilon x_i + \beta_i(x), \quad (3.5)$$

in denen die β -Funktionen

$$\beta_i := (\mathcal{S} - 1)a_i^{(1)}, \quad \mathcal{S} := \sum_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (3.6)$$

eingeführt wurden. Für die Residuen ergibt sich die Rekursionsbeziehung

$$(\mathcal{S} - 1)a_i^{(n+1)} = \mathcal{R}a_i^{(n)}, \quad \mathcal{R} := \sum_j \beta_j \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (3.7)$$

Das Verschwinden der nackten Kopplungen und damit der entsprechenden Wechselwirkung in (3.1) soll gleichbedeutend mit dem Verschwinden der renormierten Kopplungen sein. Dies ergibt die Bedingungen: $a_i^{(n)}(0) = 0$.

Bemerkenswerter Weise sind die RGG und die Residuen für $n > 1$ allein durch die Residuen des einfachen Pols $a_i^{(1)}$ bestimmt. Dieser unterliegt allerdings der perturbativen Entwicklung, ist somit eine Potenzreihe in \hbar und in der Regel nur für eine kleine Zahl von Ordnungen bekannt.

Die RGG bilden ein gewöhnliches, nichtlineares Differentialgleichungssystem. Die Rückkehr in physikalische Dimensionen ergibt (ohne Neubenennung der Kopplungen):

$$\mu \frac{dx_i}{d\mu} = \beta_i(x). \quad (3.8)$$

Die β -Funktionen auf der rechten Seite sind Potenzreihen in den Kopplungen ohne absoluten und linearen Term, die durch den perturbativen Abbruch nach einer vorgegebenen Ordnung zu Polynomen degenerieren.

Diese Gleichung gibt den folgenden Sachverhalt wieder: Ein Verbleiben in der Minimalen Subtraktion bei gleichzeitiger Änderung der Impulsskala $\mu \rightarrow \mu'$ bedeutet einen Wechsel des Renormierungsschemas $RS \rightarrow RS'$. Die RGG sagen aus, daß dieser Wechsel exakt durch eine Änderung der renormierten Parameter kompensiert werden kann. Die geänderten Parameter werden durch die RGG bestimmt, während die Ursprünglichen die Anfangsbedingungen stellen.

An den Betrachtungen dieses Abschnitts wird deutlich, daß es sich um eine zusätzliche Invarianz der jeweiligen Theorie handelt. Die Formulierung dieser Symmetrie in Form einer Liegruppe gibt der Abschnitt 3.6.

3.5 Zur Bestimmung der Renormierungsgruppengleichungen und Renormierbarkeit eines Modells

Vor der näheren Erläuterung der Renormierungsgruppe, wird in diesem Abschnitt die praktische Vorgehensweise für die perturbative Bestimmung der Renormierungsgruppengleichungen am Beispiel der masselosen ϕ^4 -Theorie

$$\mathcal{L}(\lambda^B, \phi^B) = -\frac{1}{2}(\partial\phi^B)^2 - \frac{\lambda^B}{4!}(\phi^B)^4$$

skizziert. Eine genaue Schilderung des Verfahrens findet sich in [44, 53].

Nach der Festlegung auf ein Regularisierungsverfahren (hier: DREG) und ein Renormierungsschema (hier: MS für ein bestimmtes μ) werden die nackten Kopplungen der Lagrangedichte in die renormierte Kopplung und einen sogenannten *Gegenterm* zerlegt:

$$\lambda^B = \frac{\mu^{2\varepsilon}(\lambda + \delta\lambda)}{(1 + \delta Z)^2}. \quad (3.9)$$

Die Größe $1 + \delta Z$ rührt von der Zerlegung der Felder, bei der etwas anders vorgegangen wird, da die renormierten Felder die Variablen der Funktionalintegration sind, also kein $\delta\phi$ verwendet werden darf:

$$\phi^B = (1 + \delta Z)^{1/2} \phi. \quad (3.10)$$

Die Lagrangedichte mit den nackten Einträgen kann in zwei Teile aufgespalten werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda^B, \phi^B) &= \mathcal{L}(\mu^{2\varepsilon} \lambda, \phi) + \delta Z \mathcal{L}(\mu^{2\varepsilon} \delta\lambda / \delta Z, \phi) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{\lambda}{4!} \mu^{2\varepsilon} \phi^4 - \frac{1}{2} \delta Z (\partial\phi)^2 - \frac{\delta\lambda}{4!} \mu^{2\varepsilon} \phi^4. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Der nächste Schritt ist die Festlegung auf den Parameter der Perturbation (hier: die Entwicklung nach der Schleifenzahl, d.h. nach Ordnungen in \hbar). Die Feynmanregeln beinhalten auch die Vertizes, die sich aus dem Lagrangedichtenanteil mit den Gegentermen ergeben. Für die perturbative Funktionalintegration der Greensfunktionen werden in $4 - 2\varepsilon$ Dimensionen bis zu einer vorgegebenen Anzahl von Schleifen die entsprechenden Diagramme gezeichnet und in die zugehörigen mathematischen Terme übersetzt. Das Ergebnis ist ein Ausdruck, der bis zu einer gewissen Ordnung Pole in ε enthält. Die Größen $\delta\lambda$ und δZ sind eindeutig dadurch bestimmt, daß sie alle Pole genau wegheben und keinen endlichen Anteil enthalten.

Einsetzen der Gegenterme in die rechte Seite von (3.9) und (3.10) und Ersetzen der linken Seite durch die Entwicklungen der nackten Größen nach den Polen (3.3), ergibt durch Vergleich eindeutig die Residuen der nackten Kopplungen. Aus dem Residuum $a_i^{(1)}$ ergibt sich mit (3.6) die Gestalt der β -Funktionen.

Anhand der Zerlegung der Lagrangedichte (3.11) wird ersichtlich, daß das Verfahren nur gelingen kann, wenn alle auftretenden Pole durch entsprechende Wahl der Gegenterme absorbiert werden können. Modelle, in denen dies gelingt, werden als *renormierbar* bezeichnet. Es konnte gezeigt werden, daß alle Eichtheorien renormierbar sind [50, 68]. Ein notwendiges, aber nicht hinreichendes Kriterium für die Renormierbarkeit ist, daß alle Kopplungen der Lagrangedichte eine Massendimension größer oder gleich Null besitzen: $[x_i]_M \geq 0$.

3.6 Renormierungsgruppe

Die schon mehrfach getroffene Feststellung, daß die RGG eine Liegruppe beschreiben, wird hier verifiziert. Die Renormierungsgruppe ist Ausgangspunkt für die für diese Arbeit wichtigen Begriffe des *Renormierungsgruppenflusses* (RGF) und der *-invarianten* (Abschnitt 6.1).

Ausgangspunkt sind die RGG für die renormierten Kopplungen:

$$\mu \frac{dx_i}{d\mu} = \beta_i(x).$$

Durch Skalierung der Impulsskala $\mu \rightarrow \bar{\mu} := e^s \mu$ lassen sie sich auf die dimensionslose abhängige Variable s umschreiben [52, 58]:

$$\frac{d\bar{x}_i}{ds} = -\varepsilon \bar{x}_i + \beta_i(\bar{x}), \quad \frac{d\bar{\mu}}{ds} = \bar{\mu}, \quad (3.12)$$

wobei die renormierten Kopplungen in die sogenannten *effektiven Kopplungen* $\bar{x}_i(s, x)$ übergehen. Die Beziehungen (3.12) lassen sich als Bestimmungsgleichun-

gen der endlichen Transformationen einer Liepunktsymmetrie auffassen (vgl Anhang C). Die zu einem Generator einer einparametrischen Liegruppe (Parameter: s)

$$v_R = \xi(\mu, x) \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \Phi^i(\mu, x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

gehörenden endlichen Transformation ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{x}_i}{ds} &= \Phi^i(\bar{\mu}, \bar{x}), & \bar{x}_i(s=0) &= x_i, \\ \frac{d\bar{\mu}}{ds} &= \xi(\bar{\mu}, \bar{x}), & \bar{\mu}(s=0) &= \mu. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Mit (3.12) hat der Generator der Renormierungsgruppe die Gestalt:

$$v_R = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_i \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mathcal{R}, \quad (3.14)$$

wobei der Operator \mathcal{R} (3.7) verwendet wurde. Im allgemeinen wirkt die Renormierungsgruppe im Raum der Kopplungen und der Felder, was aber im weiteren keine Rolle spielen wird. Die Renormierungsgruppe transformiert das Renormierungsschema mit der Skala μ_1 in das mit μ_2 , beide im MS-Schema.

3.7 Renormierung von Modellen mit spontaner Symmetriebrechung, Stufeneffekte und die Masse von Teilchen

Die im weiteren Verlauf dieser Arbeit bestimmten Beziehungen zwischen den Parametern eines Modells sollen dazu genutzt werden, Voraussagen über die Massen von Elementarteilchen zu treffen. Diese wurden in Abschnitt 2.2 für klassische Felder durch die spontane Symmetriebrechung erzeugt, während die zurückliegenden Betrachtungen dieses Kapitels die Renormierung der symmetrischen Phase beinhalteten. Dieser Abschnitt erläutert die Renormierbarkeit bzw. Renormierung der spontan gebrochenen Phase und definiert die Massen in einer quantisierten Theorie. Grundlegende Arbeiten zu diesem Thema finden sich in [65, 69, 70, 71].

In [48] wurde gezeigt, daß sich die Renormierbarkeit der symmetrischen Phase direkt auf die der spontan gebrochenen Phase überträgt, daß somit die Gegen-terme der symmetrischen Phase auch eine Beschreibung der gebrochenen Phase mit nicht divergierenden, renormierten Größen erlauben. Da die Renormierbarkeit der gebrochenen Phase somit gegeben ist, ist das von der symmetrischen Phase übertragene Renormierungsschema eine bestimmte Wahl unter vielen.

Spontane Symmetriebrechung findet statt, wenn das Minimum des skalaren Potentials degeneriert und insbesondere gilt:

$$\phi^B \Big|_{\text{Pot. min.}} = V^B \neq 0,$$

wobei V^B eine Funktion der auftretenden Kopplungen und Massen ist. Eine entsprechende Beziehung gilt für den Vakuumerwartungswert des renormierten Feldes:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = V = v + \delta v,$$

wobei v der Beitrag der klassischen Ordnung ist und δv alle radiativen Korrekturen zusammenfaßt. Störungstheorie ist nur möglich, wenn außer den Kopplungen zusätzlich der Beitrag δv klein gegen v ist.

Bei der Wahl des Renormierungsschemas der gebrochenen Phase bestehen zwei grundsätzliche Möglichkeiten:

1. Die Felder der gebrochenen Phase werden durch die Ersetzung $\varphi = \phi - v$ eingeführt und als Renormierungsschemabedingung wird $\delta v = 0$ verlangt. Dies ist die natürlichste Wahl bei der Berechnung von Prozessen in der gebrochenen Phase [72]. Es hat jedoch den Nachteil, daß eine große Anzahl von Diagrammen bestimmt werden muß. Hinzu kommt, daß dieses Renormierungsschema in jedem Fall ein anderes als in der symmetrischen Phase ist, insbesondere kann es sich um kein MS-Schema handeln.

2. Die Felder der gebrochenen Phase werden durch $\varphi = \phi - v - \delta v$ eingeführt. Eine Renormierungsschemabedingung kann lauten: $\langle 0|\varphi|0\rangle = 0$. Diese Bedingung ist immer mit dem Renormierungsschema der symmetrischen Phase verträglich, da sie dort $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$ entspricht. Die Wahl des Schemas ist somit nur leicht eingeschränkt und ermöglicht es, das der symmetrischen Phase zu übernehmen. Das hat zur Folge, daß die RGG in beiden Phasen identisch sind! Alle Prozesse können dann in der symmetrischen Phase berechnet werden.

Das Gleiten des Higgs-Vakuumerwartungswertes $v(\mu)$ wird in der Regel als gering erachtet und im folgenden vernachlässigt. Ein technisches Problem sind die sogenannten *Stufeneffekte* [73]. Massive Teilchen können nur in einen Prozeß eingehen, wenn dieser bei einer Energie stattfindet, die oberhalb der Teilchenmasse liegt. Unterhalb der jeweiligen Masse entkoppeln die Teilchen. Dies läßt sich in den RGG des massenunabhängigen MS-Schemas nur mit einigem Aufwand einführen [74, 75, 76]. Um in der Nähe dieser Stufen mit Hilfe der RGG Aussagen treffen zu können, wird entweder der zu untersuchende Skalenbereich auf ein stufenfreies Intervall beschränkt oder die Stufen werden als erste Näherung durch Theta-Funktionen im Teilchengehalt eingeführt.

Die Diskussion der SSB auf dem Niveau der klassischen Felder und Kopplungen hat in Abschnitt 2.2 zu einem Ausdruck für die Fermionmassen durch die Yukawakopplung und den Vakuumerwartungswert der symmetrischen Phase der skalaren Teilchen geführt (2.18):

$$M_{ij} := \sum_k v^k Y_{ij}^k.$$

Die Eigenwerte dieser Massenmatrix sind die Teilchenmassen in der sogenannten *Baumgraphenordnung*, d.h. ohne jegliche Quantenkorrekturen in Form von Schleifen in den Feynmandiagrammen. In einer quantisierten Theorie muß diese Beziehung entsprechend modifiziert werden.

Auf diesem Hintergrund sind die Teilchenmassen durch das *Massenschalenrenormierungsschema* (gekennzeichnet durch pol) definiert. Der Propagator eines Bosons lautet im Impulsraum mit Hilfe eines sogenannten *Selbstenergie*-Terms Σ :

$$\Delta(p^2) =: \frac{1}{p^2 - m_{\text{phys.}}^2 - \Sigma(p^2) + i\varepsilon}.$$

Damit nimmt die Renormierungsschemabedingung die folgende Gestalt an:

$$\Sigma(p^2) = \frac{\partial \Sigma(p^2)}{\partial p^2} = 0 \quad \text{für} \quad p^2 = m_{\text{phys.}}^2.$$

Dies ist gleichbedeutend damit, daß der Pol des Propagators auf der Massenschale des Teilchens die Teilchenmasse ergibt:

$$m_{\text{pol}}(\mu = m_{\text{pol}}) = m_{\text{phys.}}$$

Die Massen des MS-Schemas (ohne Index) lassen sich durch die des Massenschalenrenormierungsschemas ausdrücken:

$$m(\mu) = (1 + \delta(\mu)) m_{\text{pol}}(\mu),$$

wobei sich die Korrekturen $\delta(\mu)$ für das jeweilige Modell bestimmen lassen. Beispiele finden sich in [77, 78]. Es wird in dieser Arbeit eine übliche Näherung der Literatur übernommen, indem diese Korrektur vernachlässigt wird, so daß die physikalische Masse durch die MS-Masse an der eigenen Skala definiert ist:

$$m_{\text{phys.}} \simeq m(\mu = m).$$

Der Fehler, der hierbei entsteht, liegt in einer Größenordnung von bis zu zehn Prozent, was für die späteren Untersuchungen vertretbar ist.

3.8 Ein-Schleifen Renormierungsgruppengleichungen

Zur späteren Bestimmung von Fixmannigfaltigkeiten werden an dieser Stelle die allgemeinen Ein-Schleifen-RGG einer beliebigen lokalen Eichtheorie für die Eich- und Yukawakopplungen notiert, was dem in dieser Arbeit untersuchten Sektor entspricht. Die RGG wurden den Arbeiten [67, 79, 80, 81] entnommen. Dabei liegt bei den nichtsupersymmetrischen die DREG und bei den supersymmetrischen Modellen die DRED zugrunde. Weiterhin wird das \overline{MS} Renormierungsschema verwendet. Vorausgesetzt wird die Eichgruppe $G = G_1 \otimes G_2 \otimes \dots \otimes G_N$, wobei der Anteil G_a entweder für eine einfache oder eine abelsche Gruppe steht.

Eichkopplungen:

Die RGG der Eichkopplungen lauten:

$$(4\pi)^2 \mu \frac{dg_a}{d\mu} = -\frac{1}{2} b_a g_a^3, \quad a = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

Für eine nichtabelsche Wechselwirkung ergibt sich der Koeffizient im nichtsupersymmetrischen bzw. supersymmetrischen Fall für die jeweilige Kopplung durch:

$$b_a = \frac{1}{3} \left(22c^{(a)} - 4s_F^{(a)} - s_S^{(a)} \right), \quad (3.16)$$

$$b_a^{\text{SUSY}} = 2 \left(3c^{(a)} - s_F^{(a)} - s_S^{(a)} \right). \quad (3.17)$$

Der Koeffizient $c^{(a)}$ steht für die quadratische Casimirinvariante der adjungierten Darstellung und gibt den Beitrag der Eichbosonen wieder. $s_{F,S}^{(a)}$ ist der Dynkin-index für die Darstellung der Fermionen bzw. der Spin-0-Bosonen. Diese Anteile beinhalten die Summation über alle auftretenden Darstellungen, gewichtet mit der Zahl der Teilchen, die an dieser Wechselwirkung teilnehmen.

Für einen abelschen Eichgruppenanteil gilt jeweils:

$$b_a^{U(1)} = -\frac{2}{3} \kappa_{\text{GUT}}^{(a)} \left(2 \sum_F Q_{(a)}^2 + \sum_S Q_{(a)}^2 \right), \quad (3.18)$$

$$b_a^{\text{SUSY},U(1)} = -2 \kappa_{\text{GUT}}^{(a)} \left(\sum_F Q_{(a)}^2 + \sum_S Q_{(a)}^2 \right), \quad (3.19)$$

wobei über die zugehörigen fermionischen und bosonischen Ladungen summiert wird. Der Faktor κ_{GUT} steht für die konventionsbedingte Normierung im Zusammenhang mit den unifizierten Theorien. Eine Wahl ist möglich, da die Quantenzahlen im abelschen Fall nicht durch den Kommutator der Liealgebra geschützt sind. Es wird davon ausgegangen, daß sich der Teilchengehalt in Multipletts einer übergeordneten höherdimensionalen Eichgruppe anordnen läßt. Die Ladungen der Elemente dieser Multipletts werden in Übereinstimmung mit $\sum_F Q^2 := s_F$ gesetzt: $\kappa_{\text{GUT}} = s_F / \sum_F Q^2$.

Yukawakopplungen:

Für die Yukawamatrizen $(Y^i)_{jk}$, wobei der Index i für die Ankopplung an das skalare Bosonenfeld ϕ^i und die Indizes j und k für die Fermionen – im allgemeinen in unterschiedlichen Darstellungen – stehen, gelten die RGG:

$$(4\pi)^2 \mu \frac{dY^i}{d\mu} = \frac{a_1}{2} \sum_j (Y^j Y^{\dagger j} Y^i + Y^i Y^{\dagger j} Y^j) + 2e_1 \sum_j Y^j Y^{\dagger i} Y^j \quad (3.20)$$

$$+ \sum_j Y^j \text{Spur} (Y^{\dagger j} Y^i) - 3a_2 \sum_a g_a^2 \{c_F^{(a)}, Y^i\} - 2e_2 \sum_{a,j} g_a^2 c_S^{(a)ij} Y^j,$$

ergänzt um die RGG für die komplex konjugierten Yukawamatrizen. Die Koeffizienten für den nichtsupersymmetrischen und den supersymmetrischen Fall sind in der Tabelle 1 wiedergegeben. Im Anhang B wird die Bestimmung der RGG am Beispiel des Standardmodells und des Minimal Supersymmetrischen Standardmodells explizit vorgeführt.

	a_1	a_2	e_1	e_2
nicht SUSY	1	1	1	0
SUSY	2	2/3	0	1

Tabelle 1: Koeffizienten der RGG der Yukawakopplungen.

4 Physikalisch relevante Eichfeldtheorien

Ziel dieser Arbeit ist neben der analytischen Bestimmung der Fixstrukturen im Parameterraum einer allgemeinen Eichfeldtheorie die Auswertung deren physikalischer Implikationen für konkrete Modelle wie z.B. das SM oder MSSM. Diese und alle weiteren diskutierten Modelle werden nachfolgend vorgestellt, ihre Untersuchung erfolgt in Kapitel 10. Die Renormierungsgruppengleichungen des Eich-Yukawa-Sektors für die schwerste Generation der einzelnen Modelle werden im Anhang B angegeben, in dem auch am Beispiel des SMs und MSSMs deren Bestimmung vorgeführt wird. Die Auswahl ist auf solche Theorien beschränkt, die phänomenologisch im Infraroten gültig sein könnten, also ungefähr bis zur Skala der Masse des Top-Quarks von $\mathcal{O}(100 \text{ GeV})$. Unterhalb dieser Skala müssen sie die spontane Brechung zum SM mit starker und elektroschwacher Wechselwirkung erlauben. Bei einigen wird ihre supersymmetrische Variante diskutiert (vgl. Abschnitt 2.4), wobei angenommen wird, daß die Brechungsskala der Supersymmetrie ebenfalls von der Ordnung der Top-Masse ist. Die Angaben zum jeweiligen Modell beschränken sich auf die Nennung der Eichgruppe, des Teilchengehalts, des skalaren Potentials und der Yukawaterme bzw. des Superpotentials. Die übrigen Terme der Lagrangedichte ergeben sich entsprechend den Angaben in Kapitel 2, hier insbesondere der Lagrangedichten (2.34) im nichtsupersymmetrischen und (2.33) bzw. (2.35) im supersymmetrischen Fall. Bei Modellen mit nichtminimalem Teilchengehalt werden die Gründe für die Einführung der zusätzlichen Teilchen diskutiert. Diese entstammen oft der Idee einer *Großen Unifizierten Theorie* (GUT), was für die Annahme steht, daß sich die nichtgravitativen Wechselwirkungen an einer Skala M_{GUT} zu einer einzigen Wechselwirkung mit einer einfachen Eichgruppe vereinen. Andere Modelle sind Niederenergielimites von *Superstring-Theorien*. Eichgruppe und Teilchengehalt dieser *superstring-inspirierten* Theorien sind dann von den übergeordneten Theorien motiviert. Weitere Gründe sind die Anomaliefreiheit der Eichsymmetrie.

Das Kapitel beginnt mit der Schilderung des Standardmodells (SM) in Abschnitt 4.1 und des Minimal Supersymmetrischen Standardmodells (MSSM) in 4.2, wobei auf deren Verhältnis zueinander und auf die Brechung der Supersymmetrie, bei der das MSSM in das SM übergeht, eingegangen wird.

Es folgt der Abschnitt 4.3, der sich mit den grundsätzlichen Verhältnissen in einer GUT und mit den möglichen superstring-inspirierten Eichfeldtheorien auseinandersetzt. Als Beispiele für solche Niederenergiemodelle werden die *Links-Rechts-Modelle* (Abschnitt 4.4) und die Erweiterungen der Eichgruppe des SMs um eine oder zwei zusätzliche abelsche Wechselwirkungen betrachtet (Abschnitt 4.5).

4.1 Das Standardmodell

Das *Standardmodell* (SM) ist die erfolgreichste Eichtheorie und gibt sehr genau alle in Teilchenbeschleunigern durchgeführten Experimente [82] wieder. Es beschreibt die starke und die elektroschwache Wechselwirkung [83, 84, 85] und damit die drei heute bekannten nichtgravitativen Naturkräfte. Die Eichgruppe lautet:

$$G_{321} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y, \quad (4.1)$$

jeweils mit den Eichkopplungen g_3 , g_2 bzw. g_1 . An einer Skala $M_W \simeq 174$ GeV wird diese Eichgruppe spontan zu

$$G_{321} \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_{em} \quad (4.2)$$

gebrochen, was die ungebrochene starke und die elektromagnetische Wechselwirkung beinhaltet. Der Teilchengehalt wird mit den Quantenzahlen der symmetrischen Phase für eine der drei auftretenden Generationen des fermionischen Materiegehalts in Tabelle 2 wiedergegeben. Alle Fermionen sind linkshändig.

Teilchenart	Symbol	Darstellung/Hyperladung bezüglich $(SU(3)_C, SU(2)_L, Y)$
Lepton-Dublett	$L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1/2)$
Lepton-Singulett	\bar{e}	$(1, 1, 1)$
Quark-Dublett	$Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$(3, 2, 1/6)$
Quark-Singuletts	\bar{u}	$(\bar{3}, 1, -2/3)$
	\bar{d}	$(\bar{3}, 1, 1/3)$
Spin-0-Bosonen	$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 1/2)$
$SU(3)_C$ -Gluonen	$G_A^\mu, A = 1, \dots, 8$	$(8, 1, 0)$
$SU(2)_L$ -Bosonen	$W_A^\mu, A = 1, 2, 3$	$(1, 3, 0)$
$U(1)_Y$ -Boson	B^μ	$(1, 1, 0)$

Tabelle 2: Teilchengehalt des Standardmodells. Der Materiegehalt ist für eine Generation angegeben.

Die spontane Symmetriebrechung (4.2) wird über den Vakuumerwartungswert

$$\langle 0|H|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}$$

bezüglich des skalaren Potentials

$$V(H, H^\dagger) = \mu^2 H H^\dagger + \lambda (H H^\dagger)^2$$

generiert (vgl. Abschnitt 2.2), also für $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$. Die vier Generatoren von $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ werden zu dem einen Generator von $U(1)_{em}$ gebrochen. Die erzeugten $4 - 1 = 3$ Nambu-Goldstone-Bosonen werden von den Eichbosonen der $SU(2)_L$ geschluckt, was drei massive Eichbosonen und ein elektrisch neutrales Higgsboson $h = \sqrt{2}\text{Re } \phi^0 - \sqrt{2}v$ mit der Masse

$$m_h = 2\sqrt{\lambda} v \quad (4.3)$$

erzeugt. Die, sich durch die spontane Symmetriebrechung ergebenden elektrischen Ladungen Q der Teilchen stehen mit der dritten Isospinkomponente I_3 der $SU(2)_L$ und der Hyperladung Y wie folgt in Beziehung:

$$Q = I_3 + Y, \quad (4.4)$$

was den in Tabelle 3 für die gebrochene Phase wiedergegebenen Werten entspricht. Die letzten drei Einträge in Tabelle 3 geben die physikalischen Eichbosonen dieser Phase wieder:

$$W_\pm^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_1^\mu \pm iW_2^\mu), \quad (4.5)$$

$$Z^\mu = \cos \Theta_W W_3^\mu + \sin \Theta_W B^\mu, \quad (4.6)$$

$$A^\mu = -\sin \Theta_W W_3^\mu + \cos \Theta_W B^\mu, \quad (4.7)$$

wobei der *Weinbergwinkel* Θ_W über

$$\cos \Theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

eingeführt wurde. Diese Kombinationen sind die Eigenzustände der Massenmatrix der Eichbosonen, die auf reelle Massenquadrate für die geladenen W -Bosonen und das neutrale Z -Boson

$$m_W^2 = \frac{1}{2}v^2 g_2^2, \quad m_Z^2 = m_W^2 + \frac{1}{2}v^2 g_1^2 \quad (4.8)$$

führen. Durch die spontane Symmetriebrechung werden ebenfalls über den Yukawaterm der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}} = -H^\dagger L E \bar{e} - H^T \epsilon Q U \bar{u} - H^\dagger Q D \bar{d} + h.c.$$

Fermionenmassen generiert. Wird nur die schwerste Familie bestehend aus Top- und Bottom-Quark bzw. Tau-Lepton berücksichtigt, so ergeben sich die Baumgraphenmassen

$$m_t = v g_t, \quad m_b = v g_b, \quad m_\tau = v g_\tau, \quad (4.9)$$

Teilchen	I_3	Y	Q
ν	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
e	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
\bar{e}	0	1	1
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$
\bar{u}	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
d	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$
\bar{d}	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
h	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$G_A^\mu, A = 1, \dots, 8$	0	0	0
W_\pm^μ	± 1	0	± 1
Z^μ	0	0	0
A^μ	0	0	0

Tabelle 3: Elektrische Ladungen der Teilchen des Standardmodells.

mit den Yukawakopplungen $g_{t,b,\tau}$. Der numerische Wert von v ist über die sehr genau bekannte *Fermikonstante* bestimmt:

$$G_F = 1,16639(2) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \Rightarrow v = (2 G_F)^{-1/2} = 174,102(2) \text{ GeV}. \quad (4.10)$$

Bis auf das Higgsfeld sind alle Teilchen des SMs experimentell verifiziert. Ihre Massen sind von der Theorie her völlig unbestimmt.

4.2 Das Minimal Supersymmetrische Standardmodell

Das *Minimal Supersymmetrische Standardmodell* (MSSM) besitzt gegenüber dem SM den Vorteil, daß aufgrund der besseren Renormierungseigenschaften durch die Supersymmetrie eine kleine Masse der Higgsteilchen natürlich und somit das Hierarchie-Problem gelöst ist (vgl. Abschnitt 2.3). Ausführlichere Angaben zum MSSM finden sich in [82, 35, 86].

Die Eichgruppe des MSSMs ist mit der des SMs identisch, ergänzt um die Supersymmetrie zwischen den Fermionen und Bosonen. Hierbei entspricht der Teil-

chengehalt der Tabelle 2 im letzten Abschnitt 4.1. Jedes auftretende Feld f wird durch ein entsprechendes Superfeld Φ_f ersetzt. Ein zweites skalares Superdublett Φ_{H_d} zu $\Phi_{H_u} := \Phi_H$ mit entgegengesetzter Hyperladung kommt hinzu um die Anomaliefreiheit der Eichsymmetrie zu gewährleisten. Das MSSM ist damit die supersymmetrische Variante des SMs und ein Beispiel dafür, daß das beim Übergang zusätzliche Randbedingungen erfüllt werden müssen. Ein Modell, dessen direkte Übersetzung in seine supersymmetrische Variante das MSSM ergibt, ist das SM mit einem zusätzlichem Higgsdublett.

Das Superpotential, das den Yukawaanteil der Lagrangedichte und das skalare Potential enthält, hat die Gestalt:

$$\mathcal{W}^{\text{MSSM}} = \Phi_{H_d} \Phi_L E \Phi_{\bar{e}} + \Phi_{H_u} \Phi_Q U \Phi_{\bar{u}} + \Phi_{H_d} \Phi_Q D \Phi_{\bar{d}} + \mu \Phi_{H_u} \Phi_{H_d}. \quad (4.11)$$

Andere denkbare Terme würden die Baryonen- oder Leptonenzahl nicht erhalten und werden durch eine zusätzlich geforderte diskrete Symmetrie, die *R-Parität* [87], ausgeschlossen.

Da die schwache Wechselwirkung im MSSM bei intakter Supersymmetrie nicht spontan gebrochen werden kann, muß zuerst die Supersymmetrie gebrochen werden. Dies kann phänomenologisch akzeptabel nur in Form einer expliziten weichen Brechung geschehen, also durch Hinzunahme von Wechselwirkungstermen, die die Supersymmetrie verletzen, jedoch eichinvariant sind und die Natürlichkeit des Modells erhalten. Die allgemeinste weichbrechende Lagrangedichte⁵ ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{weich}} = & - \sum_{i,j} \left(m_{\tilde{Q}_{ij}}^2 \tilde{Q}_i^\dagger \tilde{Q}_j + m_{\tilde{u}_{ij}}^2 \tilde{u}_i^\dagger \tilde{u}_j + m_{\tilde{d}_{ij}}^2 \tilde{d}_i^\dagger \tilde{d}_j + m_{\tilde{L}_{ij}}^2 \tilde{L}_i^\dagger \tilde{L}_j + m_{\tilde{e}_{ij}}^2 \tilde{e}_i^\dagger \tilde{e}_j \right) \\ & - m_{H_u}^2 H_u^\dagger H_u - m_{H_d}^2 H_d^\dagger H_d - B(H_u^T H_d + H_u^* H_d^\dagger) \\ & - \sum_{i,j} \left(A_{u_{ij}} \tilde{u}_i H_u \tilde{Q}_j + A_{d_{ij}} \tilde{d}_i H_d \tilde{Q}_j + A_{e_{ij}} \tilde{e}_i H_d \tilde{L}_j + h.c. \right) \\ & - \frac{1}{2} \sum_A M_A \lambda_A \lambda_A - \frac{1}{2} \sum_A M_A^\dagger \overline{\lambda_A} \overline{\lambda_A}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nach der expliziten Supersymmetriebrechung wird die elektroschwache Wechselwirkung durch die Vakuumerwartungswerte der skalaren Dubletts $H_{u,d}$ der Superdubletts $\Phi_{H_{u,d}}$

$$\langle 0 | H_u | 0 \rangle = \begin{pmatrix} v_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 0 | H_d | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_d \end{pmatrix}$$

spontan gebrochen. Beide Vakuumerwartungswerte müssen eingeführt werden, um durchgängig massive Quarks zu erhalten. Die beiden Erwartungswerte stehen mit dem des SMs über

$$v_u^2 + v_d^2 = v^2$$

⁵Die Tilde indizieren die Superpartner.

in Beziehung, was die Einführung eines Mischungswinkels β mit $\tan\beta = v_d/v_u$ nahelegt. Durch die spontane Symmetriebrechung werden drei der acht Higgsfelder zu Nambu-Goldstone-Bosonen, die über den Higgsmechanismus fünf Higgsteilchen und drei massive schwache Eichbosonen erzeugen. Das leichteste und elektrisch neutrale Higgsteilchen h entspricht für eine große Masse m_A dem des SMs [82]. Aus diesem Grund kann $\tan\beta$ keine zu hohen Werte annehmen.

Die Massenbeziehungen für die schwachen Eichbosonen sind mit denen des SMs identisch (4.8), während sich bei Beschränkung auf die schwerste Generation die folgenden Quark- und Leptonenmassen ergeben:

$$m_t = v h_t \sin\beta, \quad m_b = v h_b \cos\beta, \quad m_\tau = v h_\tau \cos\beta, \quad (4.13)$$

mit den Yukawakopplungen $h_{t,b,\tau}$. Durch den weichbrechenden Sektor ist die Parameterzahl im Vergleich zum SM erheblich erhöht worden. Eine GUT-motivierte und häufig verwendete Annahme ist deshalb, daß alle skalaren und Gaugino Massen untereinander identisch und die weichen trilinearen Kopplungen proportional der jeweiligen Yukawakopplung, immer mit derselben Proportionalitätskonstanten, sind.

Das MSSM ohne weichbrechende Terme wird für Energien deutlich oberhalb der Massen der Superpartner als korrekt angenommen, während unterhalb das SM gilt. Der Zwischenbereich wird zum einen von den weichbrechenden Parametern und zum anderen durch *Stufeneffekte* bestimmt, d.h. daß nur solche Teilchen präsent sind, deren Massen unterhalb der betrachteten Impulsskala liegen. Eine häufig verwendete Näherung ist die Annahme, daß alle Effekte sich punktweise in der supersymmetrischen Brechungsskala M_{SUSY} zusammenfassen lassen und diese Skala sich in der Größenordnung der weichbrechenden Skala befindet $M_{\text{SUSY}} = \mathcal{O}(M_W)$. Genauere Angaben und Literaturverweise zu diesem Punkt finden sich in [21].

4.3 Unifizierung und superstring-inspirierte Modelle

Die grundsätzlichen Betrachtungen der nachfolgenden Kapitel werden sich mit einer allgemeinen Theorie mit beliebiger Eichgruppe und Darstellungen der Materie beschäftigen. Die hier näher erläuterten GUT und superstring-inspirierten Theorien liefern einen ganzen Katalog von möglicherweise physikalischen Modellen. Aus diesem Grund schildert dieser Abschnitt in knapper Form die Idee einer übergeordneten Theorie und schränkt die daraus folgenden Eichgruppen ein, die bis in den IR-Bereich hinein gültig sein könnten und im Rahmen dieser Arbeit relevant sind. Damit werden die Modelle, die im letzten Teil dieses Kapitels vorgestellt werden, motiviert.

Obschon sich die weiteren Betrachtungen mit der Physik im Infraroten von Eichfeldtheorien beschäftigen, bilden die Großunifizierten Theorien (GUT) [88, 89] wichtige Rahmenbedingungen. Die Annahme einer übergeordneten, im Ultravioletten angesiedelten Theorie beschränkt die überhaupt möglichen Niederenergiemodelle, den dort angenommenen Teilchengehalt und gibt Randbedingungen für den *Renormierungsgruppenfluß*.

Die Idee einer GUT beruht auf der Annahme, daß die Eichgruppe G_{321} das Ergebnis einer spontanen Symmetriebrechung einer größeren einfachen Eichgruppe an einer Unifizierungsskala M_{GUT} sein könnte. Die Eichkopplungen des SMs bzw. MSSMs erfüllen dann im Falle einer minimalen $SU(5) \supset G_{321}$ für $\mu = M_{\text{GUT}}$:

$$g_1(M_{\text{GUT}}) \simeq g_2(M_{\text{GUT}}) \simeq g_3(M_{\text{GUT}}).$$

Dies geschieht im SM angenähert für $M_{\text{GUT}} = 10^{15}$ GeV bzw. kann im MSSM für $2 \cdot 10^{16}$ GeV vollständig erreicht werden. Andere Möglichkeiten wären die $SO(10)$ oder die E_6 . SM und MSSM sind dann die effektiven Theorien weit unterhalb der GUT-Skala. Die spontane Symmetriebrechung muß nicht in einem Schritt erfolgen, sondern kann, wenn die GUT-Gruppe hinreichend groß ist, über mehrere *Zwischenmodelle* erfolgen, die die *große Einöde*, also den Skalenbereich von 14 Größenordnungen zwischen M_{GUT} und M_W , ausfüllen. Einige dieser Zwischenmodelle könnten in der Nähe des IR-Bereichs noch gültige Beschreibungen der Physik liefern. Die möglichen Brechungsszenarien von M_{GUT} bis zu M_W sind im wesentlichen durch die GUT-Eichgruppe, deren Untergruppen und Darstellungen bestimmt.

Während die nichtsupersymmetrische $SU(5)$ -GUT zu Schwierigkeiten insbesondere bei der Protonenlebenszeit führt, sind supersymmetrische $SU(5)$, $SO(10)$ oder E_6 durchaus verträglich mit den experimentellen Verhältnissen im Infraroten. Weiterhin haben manche GUT die interessante Eigenschaft, daß sie nicht nur die Eichkopplungen, sondern auch die Yukawakopplungen unifiziert beschreiben könnten, wie z.B. in einigen $SO(10)$ GUT:

$$g_t(M_{\text{GUT}}) \simeq g_b(M_{\text{GUT}}) \simeq g_\tau(M_{\text{GUT}}).$$

Ein Ansatz, der ohne zusätzliche Annahmen eine Unifizierung beinhaltet, sind die *Superstring-Theorien*. Ab der *Planck-Skala* $M_{\text{Planck}} \simeq 10^{19}$ GeV ist die Gravitation nicht mehr vernachlässigbar und muß quantisiert werden. Dies ist im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie jedoch bisher nicht gelungen, da die entsprechenden Ansätze auf nichtrenormierbare Modelle führen. Die einzigen Theorien, denen eine konsistente Beschreibung einer Quantengravitation gelingt, sind die Superstring-Theorien. Eine aktuelle Darstellung findet sich in [90, 91]. Das Basispostulat ist, daß die Elementarteilchen nicht punktförmig, sondern offene oder geschlossene eindimensionale Fäden sind, die sich über die charakteristische *Plancklänge* von ungefähr 10^{-33} cm ausdehnen. Die niedrigsten angeregten

Schwingungszustände dieser Fäden sollten dann den bekannten Elementarteilchen entsprechen.

Die Niederenergieapproximation der Superstring-Theorien führt zurück auf die Eichfeldtheorien und beinhaltet automatisch ein supersymmetrisches GUT Szenario [92], in das das MSSM und in der Folge das SM eingebettet werden kann. Am interessantesten hierbei sind die *heterotischen* Superstring-Theorien mit der internen Eichgruppe $E_8 \otimes E'_8$ oder $SO(32)$. Insbesondere die $E_8 \otimes E'_8$ kann so reduziert werden, daß eine $\mathcal{N} = 1$ Supereichtheorie mit der Eichgruppe $E_8 \otimes E_6$ zurückbleibt. Die mit der E_8 verbundenen Materie und deren Wechselwirkung ist hierbei *verborgen*, da sie ausschließlich gravitativ mit dem E_6 -Anteil wechselwirkt. Unterhalb der Planckskala verbleibt somit eine $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrische E_6 Eichtheorie, was einer der oben diskutierten GUT entspricht.

Die E_6 wird in einem oder mehreren Schritten spontan gebrochen, so daß im Infraroten eine bestimmte Eichgruppe zurückbleibt. Alle hierbei möglichen Fälle und einige der phänomenologischen Konsequenzen werden z.B. in [93, 94] wiedergegeben. Modelle, die nicht zu langlebigen Protonen oder nahezu masselosen Neutrinos führen, enthalten die Gruppenfaktoren $SU(5)$, $SU(6)$, $SO(10)$ oder die E_6 selbst und seien hier ebenso ausgeschlossen wie Modelle, die eine Erweiterung der starken Wechselwirkung $SU(4)_C$, $SU(5)_C$, $SU(6)_C$ beinhalten. Es verbleiben zwei Klassen von Modellen:

(A) Minimale Erweiterungen der Eichgruppe G_{321} : $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_L \otimes K$.

(B) Modelle mit erweiterter Flavour-Eichgruppe: $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes K$.

In beiden Fällen steht K für eine Gruppe aus der Liste:

- $$K : \quad \begin{aligned} (1) & \quad U(1)_R, \\ (2) & \quad U(1)_R \otimes U(1)_N, \\ (3) & \quad U(1)_R \otimes SU(2)_N, \\ (4) & \quad SU(2)_R \otimes U(1)_{R'}, \\ (5) & \quad SU(3)_R. \end{aligned}$$

Existiert noch eine weitere spontane Symmetriebrechung an einer Zwischenskala M_I mit hinreichend großen Vakuumerwartungswerten, so gehen die Modelle (A2), (A3), (A4) und (B2) in

$$(C) \quad SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_N$$

bzw. (A4), (A5), (B4) und (B5) in ein *links-rechts-symmetrisches Modell*

$$(D) \quad SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$$

über.

Exemplarisch wird das *links-rechts-symmetrische Modell* (D) im nächsten Abschnitt 4.4 und die Erweiterungen von G_{321} um eine (C) oder zwei $U(1)$ -Gruppen (A2) in Abschnitt 4.5 diskutiert.

4.4 Links-rechts-symmetrische Modelle

Das SM oder MSSM ist konstruktionsbedingt paritätsverletzend, was masselose Neutrinos impliziert. Die im folgenden vorgestellten links-rechts-symmetrischen Modelle (LR-Modelle) [89] erreichen eine paritätsverletzende Phase erst durch spontane Symmetriebrechung, was eine natürliche Erklärung für dieses Phänomen wäre. Die Darstellung beginnt mit den supersymmetrischen Modellen.

Die Eichgruppe eines LR-Modells lautet:

$$G_{3221} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}, \quad (4.14)$$

mit den Eichkopplungen g_C , g_L , g_R und g_{B-L} . Die spontane Brechung $SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L} \rightarrow U(1)_Y$ ermöglicht den Übergang zur Eichgruppe G_{321} . Durch die zusätzliche $SU(2)$ wird der Teilchengehalt entsprechend den drei elektroschwachen Eichbosonen $W_{LA}^\mu := W_A^\mu$ um drei weitere W_R -Bosonen ergänzt. Da die W_R -Bosonen bisher im Experiment nicht verifiziert wurden, müßten diese deutlich schwerer als die W_L sein.

Wird die G_{3221} spontan zur G_{321} gebrochen, so ergibt sich die elektrische Ladung Q eines Teilchens im Vergleich mit (4.4) aus den dritten Isospinkomponenten der beiden $SU(2)$ -Faktoren und der Ladung bezüglich $U(1)_{B-L}$ gemäß:

$$Q = T_{L3} + T_{R3} + (B - L).$$

Diese Beziehung bestimmt die $U(1)_{B-L}$ -Ladung gerade so, daß sie die Differenz von Baryonen- und Leptonenzahl ist. Die Zuweisung einer solchen unmittelbaren physikalischen Bedeutung für die $U(1)_Y$ -Quantenzahlen gelingt im SM oder MSSM nicht.

Durch die zusätzliche $SU(2)_R$ -Symmetrie sind die Neutrinos nicht mehr zwangsläufig masselos. Sehr kleine Neutrinomassen können in diesem Rahmen sehr natürlich über den sogenannten *Wipp-Mechanismus* [95] erklärt werden: $m_{\nu_L} \propto m_e^2/m_{W_R}$. Eine große Masse der W_R -Bosonen erzeugt kleine Neutrinomassen.

Hier werden LR-Modelle betrachtet, deren fermionischer Teilchengehalt minimal über den des SMs oder MSSMs hinausgeht. Weitere schwache Fermionendubletts oder -singuletts werden nicht angenommen. Das entspricht dem Teilchengehalt an Fermionen und Eichbosonen der Tabelle 4.

Symbol	$(SU(3)_C, SU(2)_L, SU(2)_R, B - L)$	$Q = I_{L3} + I_{R3} + B - L$
$L_L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}$	$(1, 2, 1, -1/2)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
$L_R = \begin{pmatrix} \bar{\nu} \\ \bar{e} \end{pmatrix}$	$(1, 1, 2, 1/2)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$(3, 2, 1, 1/6)$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$Q_R = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \end{pmatrix}$	$(\bar{3}, 1, 2, -1/6)$	$\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
$G_A^\mu, A = 1, \dots, 8$	$(8, 1, 1, 0)$	$0, \dots, 0$
$W_{LA}^\mu, A = \pm, 3$	$(1, 3, 1, 0)$	$\pm 1, 0$
$W_{RA}^\mu, A = \pm, 3$	$(1, 1, 3, 0)$	$\pm 1, 0$
B^μ	$(1, 1, 1, 0)$	0

Tabelle 4: Fermionischer Teilchengehalt für eine Generation und Eichbosonen der links-rechts-symmetrischen Modelle. Im supersymmetrischen Fall handelt es sich um Superfelder.

Der skalare Sektor ist wie beim SM oder MSSM nicht bekannt. Er muß so geartet sein, daß die spontane Brechung

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L} \rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

möglich ist und keine Anomalien auftreten. Die minimale Version dieser Randbedingungen ist nicht zwingend dergestalt, daß der links- und rechtshändige Teilchengehalt identisch ist. Modelle, in denen diese Symmetrie vorhanden ist, werden *manifest* links-rechts-symmetrisch genannt.

Um die spontane Brechung der elektroschwachen Wechselwirkung zu ermöglichen, wird zumindest ein Bidublett ϕ in der Darstellung $(1, 2, 2, 0)$ benötigt, das wie folgt mit einem Vakuumerwartungswert versehen wird [96]:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^0 \end{pmatrix} \sim (1, 2, 2, 0), \quad \langle 0|\phi|0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein nichttriviales Mischen der Generationen ist in diesem Fall nur mit einem weiterem Bidublett $\chi \sim (1, 2, 2, 0)$ realistisch:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_1^0 & \chi_1^+ \\ \chi_2^- & \chi_2^0 \end{pmatrix} \sim (1, 2, 2, 0), \quad \langle 0|\chi|0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix}.$$

Für die Brechung zur Eichgruppe G_{321} muß mindestens ein $SU(2)_R$ -Tripletts verfügbar sein. Zur Vermeidung von chiralen Anomalien ist im supersymmetrischen Fall die Einführung eines zweiten $SU(2)_R$ -Supertripletts mit entgegengesetzter $U(1)_{B-L}$ -Ladung zwingend.

Dies kann z.B. manifest links-rechts-symmetrisch geschehen:

$$\begin{aligned}\delta_L &= \begin{pmatrix} \delta^+/\sqrt{2} & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}_L \sim (1, 3, 1, 1), & \langle 0|\delta_L|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_L & 0 \end{pmatrix}, \\ \delta_R &= \begin{pmatrix} \delta^+/\sqrt{2} & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix}_R \sim (1, 1, 3, 1), & \langle 0|\delta_R|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_R & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

oder mit zwei Tripletts bezüglich der $SU(2)_R$:

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{pmatrix} \Delta^-/\sqrt{2} & \Delta^0 \\ \Delta^{--} & -\Delta^-/\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim (1, 1, 3, -1), & \langle 0|\Delta|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & v_\Delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \delta &= \begin{pmatrix} \delta^+/\sqrt{2} & \delta^{++} \\ \delta^0 & -\delta^+/\sqrt{2} \end{pmatrix} \sim (1, 1, 3, 1), & \langle 0|\delta|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_\delta & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Das zweite Beispiel kann durch die Einführung von zwei $SU(2)_L$ -Tripletts manifest links-rechts-symmetrisch erweitert werden.

Als Beispiel wird hier das minimale Modell mit den Tripletts Δ und δ und zwei Bidoublets angenommen. Das Superpotential hat die Gestalt:

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= h_{Q\phi} \Phi_{Q_L} \Phi_\phi \Phi_{Q_R} + h_{Q\chi} \Phi_{Q_L} \Phi_\chi \Phi_{Q_R} \\ &+ h_{L\phi} \Phi_{L_L} \Phi_\phi \Phi_{L_R} + h_{L\chi} \Phi_{L_L} \Phi_\chi \Phi_{L_R} \\ &+ h_\Delta \Phi_{L_R} \Phi_\Delta \Phi_{L_R} + h_\delta \Phi_{L_R} \Phi_\delta \Phi_{L_R} \\ &+ \mu_1 \text{Spur} (\Phi_\phi^T \varepsilon \Phi_\chi \varepsilon) + \mu_2 \text{Spur} (\Phi_\Delta \Phi_\delta).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Auf die Angabe des hier enthaltenden komplizierten skalaren Potentials wird verzichtet und auf [96, 97] verwiesen. Die Erhaltung der R-Parität braucht nicht wie im MSSM gefordert zu werden, da Baryonen- und Leptonenzahl verletzende Terme durch die links-rechts Eichsymmetrie ausgeschlossen sind.

Werden weitere links- und rechtshändigen Tripletts eingeführt, so muß deren Anzahl jeweils gerade sein und diese sich durch paarweise entgegengesetzte $U(1)_{B-L}$ -Ladungen ergänzen.

Im nichtsupersymmetrischen Fall ist diese Wahl von zwei Bidoublets nicht minimal. Alternativ könnte ein einziges Bidoublett mit einem Vakuumerwartungswert mit zwei nichtverschwindenden Diagonaleinträgen eingeführt werden. Der

Yukawaterm der zu (4.15) korrespondierenden nichtsupersymmetrischen Theorie lautet:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = & -g_{Q\phi} Q_L \phi Q_R - g_{Q\chi} Q_L \chi Q_R - g_{L\phi} L_L \phi L_R - g_{L\chi} L_L \chi L_R \\ & -g_{\Delta} L_R \Delta L_R - g_{\delta} L_R \delta L_R + h.c. . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Die siebendimensionale $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$ wird in beiden Fällen zur eindimensionalen $U(1)_{\text{em}}$ gebrochen, was sechs massive Eichbosonen mit den Massen

$$\begin{aligned} m_{W_L}^2 &= \frac{1}{2} v^2 g_L^2, & m_Z^2 &= m_{W_L}^2 + \frac{1}{2} v^2 g'^2, \\ m_{W_R}^2 &= \frac{1}{2} (v^2 + w^2) g_R^2, & m_{Z'}^2 &= \frac{1}{2} \left(v^2 \frac{g'^2}{g_{B-L}^2} + 2w^2 \frac{g_{B-L}^2}{g'^2} \right) g_R^2, \\ v^2 &:= \kappa_1^2 + \kappa_2^2, & w^2 &:= 2(v_{\Delta}^2 + v_{\delta}^2), & g'^2 &:= \left(\frac{2}{5} \frac{1}{g_{B-L}^2} + \frac{3}{5} \frac{1}{g_R^2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

zur Folge hat. Für die Fermionenmassen des Sektors der schwersten Generation mit $\tan \beta := \kappa_1^2 / \kappa_2^2$ gilt:

$$m_t = g_t v \sin \beta, \quad m_b = g_b v \cos \beta, \quad m_{\tau} = g_{\tau} v \cos \beta, \quad (4.18)$$

bzw. $g \rightarrow h$ im supersymmetrischen Fall.

4.5 Modelle mit zusätzlichen abelschen Wechselwirkungen

Die Erweiterung der G_{321} um ein oder zwei abelsche Wechselwirkungen wird in diesem Abschnitt vorgestellt, wobei ein minimaler fermionischer Teilchengehalt angenommen wird. Die Darstellung beruht auf den Artikeln [98, 99, 100, 101, 102], die übersichtlich in [103] wiedergegeben werden.

Das Brechungsszenario dieser Modelle startet an der GUT-Skala bei der E_6 -Eichgruppe, die in mehreren Schritten gebrochen wird:

$$\begin{aligned} E_6 &\longrightarrow SO(10) \otimes U(1)_{\psi}, \\ SO(10) &\longrightarrow SU(5) \otimes U(1)_{\chi}, \\ SU(5) &\longrightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \end{aligned}$$

Es bleibt die Eichgruppe

$$(A) : \quad SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)_{\psi} \otimes U(1)_{\chi} \quad (4.19)$$

mit den zusätzlichen Eichkopplungen g_{ψ} und g_{χ} zurück und damit zwei weitere abelsche Bosonen Z_{ψ} und Z_{χ} .

Werden die beiden zusätzlichen $U(1)$ -Gruppen in (4.19) an einer höheren Skala spontan zu einer einzigen abelschen Eichgruppe gebrochen,

$$U(1)_\psi \otimes U(1)_\chi \longrightarrow U(1)(\Theta)$$

so kann unterhalb dieser Skala nur ein leichtes durch den Mischungswinkel Θ charakterisiertes abelsches Boson existieren:

$$Z(\Theta) = Z_\psi \sin \Theta + Z_\chi \cos \Theta,$$

während der schwere Partner hier *ausgefroren* ist. Die entsprechende Eichgruppe ist dann:

$$(B_\Theta) : \quad SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)(\Theta).$$

Der, durch die E_6 diktierte Teilchengehalt der Modelle ist aufgrund der höherdimensionalen fundamentalen Darstellungen in Form des **27**-Multipletts für die Materie und des adjungierten **78**-Multipletts für die Eichbosonen erheblich erhöht. Diese zusätzlichen *exotischen* Teilchen werden für gewöhnlich für ein solches Modell, falls es noch im IR-Bereich ($\mathcal{O}(1 \text{ TeV})$) relevant ist, als erheblich schwerer angenommen. Ausnahmen sind neben den zusätzlichen abelschen Eichbosonen die skalaren Singulets, die insbesondere die spontane Symmetriebrechung der zusätzlichen $U(1)(\Theta)$ -Gruppe vermitteln.

Die Beschränkung auf den nichtexotischen Teilchengehalt ergibt die in Tabelle 5 wiedergegebenen Zerlegungen der Darstellungen in der Reihenfolge E_6 , $SO(10)$, $SU(5)$ bzw. $SU(3)_C \otimes SU(2)_L$. Für Modelle der Form (B_Θ) ergeben sich die Ladungen bezüglich $U(1)(\Theta)$ durch:

$$Q(\Theta) = \frac{1}{2\sqrt{6}}Q_\psi \cos \Theta - \frac{1}{2\sqrt{10}}Q_\chi \sin \Theta.$$

Die Mischungswinkel Θ der häufig diskutierten ψ -, χ -, η - und N -Modelle sind durch $\pi/2, 0, \pi - \arctan \sqrt{5/3}$ bzw. $\arctan \sqrt{15}$ gegeben. Das η -Modell ist ein Sonderfall, bei dem davon ausgegangen wird, daß die E_6 ohne Zwischenschritte direkt in die Rang 5 Eichgruppe G_{3211} übergeht, wobei dann der Mischungswinkel eindeutig bestimmt ist.

Nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte der schwachen Higgsdubletts bzw. -singulets brechen die elektroschwache bzw. die zusätzlichen abelschen Wechselwirkungen. Auch die linkshändigen können durch die rechtshändigen Neutrinos Diracmassen erhalten.

Bis auf die zusätzlichen freien Lagrangedichteanteile der zusätzlichen $U(1)_{\psi,\chi}$ -Eichbosonen, den erweiterten kovarianten Differentiationen

$$\mathcal{D}_R^\mu \rightarrow \mathcal{D}_R^\mu + i \sum g_\psi Q_\psi Z_\psi + i \sum g_\chi Q_\chi Z_\chi$$

und dem modifizierten Higgs-Sektor sind die Lagrangedichten mit denen des SMs bzw. MSSMs identisch, so daß die dort angegebenen Massenbeziehungen unverändert gültig bleiben.

E_6	$SO(10)$	$SU(5)$	$SU(3)_C \otimes SU(2)_L$	Y	Q_ψ	Q_χ	Q
27	16	10	$Q \sim (3, 2)$	1/6	1	-1	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
			$\bar{u} \sim (\bar{3}, 1)$	-2/3	1	-1	-2/3
			$\bar{e} \sim (1, 1)$	1	1	-1	1
		$\bar{5}$	$L \sim (1, 2)$	-1/2	1	3	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
			$\bar{d} \sim (\bar{3}, 1)$	1/3	1	3	1/3
27	10	5	$H_u \sim (1, 2)$	1/2	-2	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
		$\bar{5}$	$H_d \sim (1, 2)$	-1/2	-2	-2	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
	1	1	$S \sim (1, 1)$	0	4	0	0
78	45	24	$G_A \sim (8, 1)$	0	0	0	0
			$W_A \sim (1, 3)$	0	0	0	0
			$B \sim (1, 1)$	0	0	0	0
			1	$Z_\chi \sim (1, 1)$	0	0	0
		1	1	$Z_\psi \sim (1, 1)$	0	0	0

Tabelle 5: Teilchengehalt der um zwei zusätzliche abelsche Wechselwirkungen erweiterten Eichgruppe des SMs im Infraroten. Dabei werden alle Exoten als ausgefroren angenommen. Die Ladungen sind nicht GUT-normiert.

5 Fixmannigfaltigkeiten im Renormierungsgruppenfluß

In diesem Kapitel werden die Suche nach Fixmannigfaltigkeiten motiviert, die bisher in der Literatur verwandte Vorgehensweise geschildert und einige grundlegende Eigenschaften beschrieben (Abschnitt 5.1). Es folgen Angaben zu dem verwandten Programm der *Reduktion der Kopplungen* (Abschnitt 5.2) und dessen Einordnung in das zuvor beschriebene Schema. Bekannte Ergebnisse, auf die im Laufe des zweiten Teils der Arbeit Bezug genommen wird, werden im Anschluß kompakt zusammengestellt (Abschnitt 5.3).

Die in Kapitel 2 beschriebenen Lagrangedichten allgemeiner Eichtheorien besitzen eine Vielzahl von Parametern: Eich-, Yukawakopplungen und die Kopplungen des skalaren Potentials, was beispielsweise im Falle des Standardmodells 19 unabhängige Größen bedeutet. Diese sind von Seiten der Theorie völlig unbestimmt. In Kapitel 3 wurde rekapituliert, daß die Parameter keine Konstanten sind, sondern als Folge der Renormierung in Abhängigkeit von der Impulsskala μ gleiten. Das Experiment bestimmt die unbekanntenen Anfangswerte der RGG.

Während der Top-Down-Evolution von der UV-Skala $\mu_{UV} \simeq M_{GUT}$ zur IR-Skala $\mu_{IR} \simeq m_t$ fließt der RGF einiger Kopplungen des Parameterraums für ein großes Intervall von Anfangswerten im UV auf einen relativ kleinen Bereich im IR zu. Dieser Umstand entspricht dem in der Einleitung angedeuteten *Erinnerungsverlust* der nahezu von den Verhältnissen im UV entkoppelten IR-Physik. Die IR-Attraktion des RGFes wird von speziellen Lösungen in Gestalt von Fixmannigfaltigkeiten der RGG vermittelt, die insbesondere unabhängig von bestimmten Anfangswerten im Parameterraum sind. Der RGF fließt zunächst auf die höchstdimensionale Fixmannigfaltigkeit zu und dann mit abnehmender Dimension auf die Untermannigfaltigkeiten bis zu den Fixflächen, -linien und -punkten.

Infolgedessen wird sich der physikalische Teil des RGFes im IR-Bereich in der Nähe dieser Lösungen befinden. Dies eröffnet somit die Möglichkeit, die Werte der Kopplungen in diesem Teil der Impulsskala unabhängig von Anfangswerten vorauszusagen, was sich wiederum auf wichtige Observablen wie z.B. die Fermionenmassen und die Higgsbosonmasse überträgt. Sind die betrachteten Eichfeldtheorien in übergeordnete Modelle wie z.B. im Rahmen einer GUT eingebettet, so muß als notwendige Voraussetzung für die Güte der aus den Fixmannigfaltigkeiten gewonnenen Aussagen der Evolutionsweg im jeweils betrachteten Modell hinreichend lang sein.

In den letzten zwei Jahrzehnten stellte sich heraus, daß Fixmannigfaltigkeiten in vielen Anwendungsbereichen erfolgreich ausgewertet werden können:

- Erste explorative Auswertungen von Fixpunkten [9, 10, 11, 12, 13, 14, 3, 15, 16, 17, 8] belegten die Relevanz dieses Ansatzes und gaben z.B. eine erste Größenvorstellung für die Masse des Top-Quarks und des Higgs-Bosons im SM.
- Die Erweiterungen dieser Aussagen für das MSSM wurden in [18, 19, 20] vorgenommen.
- Unter Einbeziehung aller Eichkopplungen und der zweiten Ordnung der Störungstheorie konnten zusätzlich zu den Fixpunkten die höherdimensionalen Fixstrukturen wie Fixlinien, -flächen usw. sowohl für das SM als auch das MSSM erfolgreich ausgewertet werden. Insbesondere die Massen der Quarks und Leptonen der schwersten Generation für das MSSM konnten in guter Übereinstimmung mit dem Experiment beschreiben sowie Voraussagen für die Higgs-Masse im SM gewonnen werden [8, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26].
- Das von einigen GUT prognostizierte Unifizieren der Yukawakopplungen wird auch von Fixlösungen beschrieben [19, 21, 22].
- Der weichbrechende Sektor des MSSMs kann über die Fixmannigfaltigkeiten in guter Übereinstimmung mit dem Experiment wiedergegeben werden [104, 105, 25, 106].

Viele von diesen Gesichtspunkten werden umfassend in dem Übersichtsartikel [21] beschrieben.

Alle bisherigen Untersuchungen beruhen auf der Bestimmung von Fixpunkten, -linien und -flächen der RGG. Die Auswertungen von Fixlinien und -flächen wurden dabei numerisch vorgenommen und graphisch dargestellt. Analytische Lösungen für Fixmannigfaltigkeiten, die über Fixpunkte hinausgehen, waren bisher nicht bekannt.

5.1 Ein einfacher Beispielsektor

Am Beispiel des Sektors des MSSMs für die Top-Yukawakopplung $y := h_t^2/4\pi$ und der Eichkopplung der starken Wechselwirkung $\alpha := g_3^2/4\pi$ sollen hier die Bestimmung und die Eigenschaften von Fixlösungen verdeutlicht werden. Die zugehörigen RGG in Ein-Schleifen-Näherung mit $t := \frac{1}{4\pi} \ln(\mu/\mu_0)$ für ein willkürliches μ_0 lauten:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -6\alpha^2, \quad \frac{dy}{dt} = y \left(12y - \frac{32}{3}\alpha \right). \quad (5.1)$$

Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems mit den Anfangswerten $\alpha(0) = \alpha_0$ und $y(0) = y_0$ lautet [19]:

$$\alpha(t) = \frac{\alpha_0}{1 + 6\alpha_0 t}, \quad y(t) = \frac{7/18}{1 + \left(\frac{7/18}{y_0/\alpha_0} - 1\right) \left(\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}\right)^{-7/9}} \alpha(t). \quad (5.2)$$

Hieran läßt sich eine ausgezeichnete Lösung ablesen. Die Lösung (5.2) ergibt für $y_0 = \frac{7}{18}\alpha_0$ die Beziehung $y = \frac{7}{18}\alpha$. Gilt somit in einem Punkt $(\alpha_0, y_0) = (\alpha_0, \frac{7}{18}\alpha_0)$, so bleibt diese Relation für alle Skalen erhalten, und der zweidimensionale Parameterraum ist um eine Dimension reduziert.

Die Abbildung 1 gibt den *Fluß* der Lösungen in der Nähe dieser Fixgeraden wieder. Jede Trajektorie in diesem Diagramm stellt eine Stromlinie im Parameterraum für einen gemessenen Anfangswert (α_0, y_0) durch die Renormierungsschemaklasse der Minimalen Subtraktion (\overline{MS}) dar, gibt also ausgehend von den Kopplungsstärken an der Skala μ_0 die Werte an, die den Wechsel zur Skala μ kompensieren.

Offensichtlich hebt sich diese spezielle Lösung durch eine weitere Eigenschaft hervor. Die Fixgerade wirkt zum Infraroten hin attraktiv auf alle Lösungen⁶. Ein großes Intervall von Anfangswerten an der UV-Skala wird zu einem kleinen im Infraroten gebündelt, womit die IR-Physik relativ wenig sensitiv für die Verhältnisse bei hohen Energien ist.

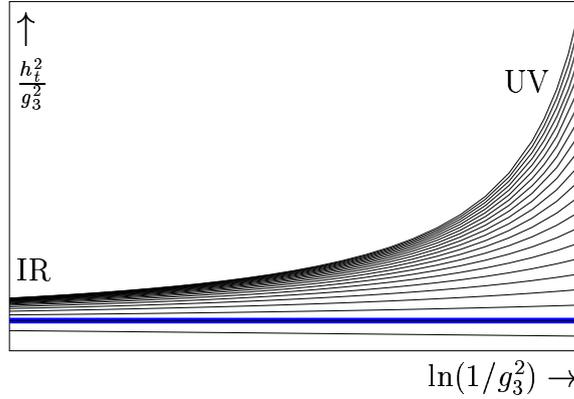
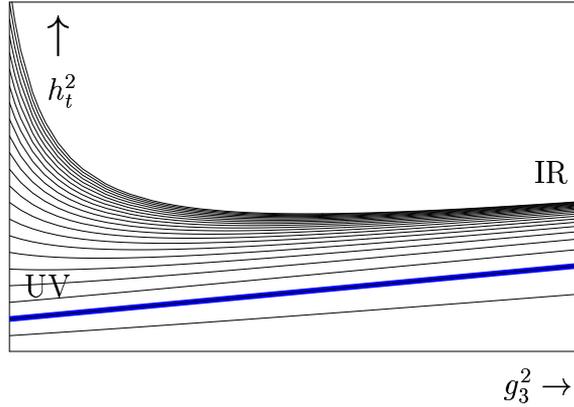


Abbildung 1: Lösungsfluß der RGG für die Top-Yukawakopplung und die Eichkopplung der starken Wechselwirkung im MSSM vom UV ($\mu \simeq M_{\text{GUT}}$) bis ins IR ($\mu \simeq m_t$), im zweiten Teil mit transformierten Parametern.

⁶Aus (5.2) folgt ebenfalls die Existenz eines Fixpunktes $(\alpha_0, y_0) = (0, 0)$ für den die Lösung für alle Skalen t in diesem Punkt verbleibt: $(\alpha(t), y(t)) = (0, 0)$. Dieser Fixpunkt ist infrarotrepulsiv und für die vorliegenden Fragestellungen nicht von Interesse

Es ist in der Literatur weithin üblich, die Fixlösung $y = \frac{7}{18}\alpha$ als Fixpunkt zu bezeichnen, was durch die Verwendung des Parameters $\rho := y/\alpha$ naheliegt, da die RGG für diese Größe zu

$$\frac{d\rho}{d\ln \alpha^{-1}} = 2\rho \left(\rho - \frac{7}{18} \right) \quad (5.3)$$

entkoppeln. Die untere Graphik in Abbildung 1 zeigt den Fluß für die neuen Variablen $(\ln \alpha^{-1}, \rho)$. In diesem Sinne wird sich im weiteren Verlauf die Namensgebung bei der Dimension der Fixmannigfaltigkeit immer auf die verwendeten Variablen beziehen. Weiterhin werden Fixlösungen für gewöhnlich zur Unterscheidung mit (...) gekennzeichnet.

Diese Betrachtungen lassen sich unmittelbar auf eine beliebige Zahl von n Kopplungen und vorgegebener Ordnung der Störungstheorie verallgemeinern. Unter Umständen existieren eine oder mehrere $(n - 1)$ -dimensionale Fixmannigfaltigkeiten. Schneiden sich zwei, so entstehen $(n - 2)$ -dimensionale Fixuntermannigfaltigkeiten, da die Lösungen in beiden ursprünglichen Fixmannigfaltigkeiten verbleiben. Sukzessiv betten sich alle weiteren niederdimensionalen Fixmannigfaltigkeiten in dieses Schema ein, was sich bis zu den Fixpunkten fortsetzen läßt. Einige von ihnen werden die Lösungen stärker anziehen als andere und insbesondere im Infraroten sammeln.

Mit diesem Bild wird der Begriff des *Renormierungsgruppenflusses* verbunden: Die Lösungen starten an der UV-Skala, fließen auf die höchstdimensionale Fixmannigfaltigkeit zu und nähern sich nach und nach den weniger attraktiven Untermannigfaltigkeiten, bis der Fluß in einem infrarot attraktiven Fixpunkt zum Erliegen kommt (gleichsam im *Tal*) [21, 22].

5.2 Programm der Reduktion der Kopplungen

Neben der Suche nach infrarot-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten wird in der Literatur eine weitere in einigen Punkten verwandte Vorgehensweise diskutiert: das *Programm der Reduktion der Kopplungen* [107, 108, 109, 110]. Einige der im weiteren Verlauf dieser Arbeit bestimmten Lösungen zeigen ähnliche Eigenschaften. Aus diesem Grund wird dieser Punkt hier kurz erläutert.

In diesem Programm wird ebenfalls für eine Reihe von Kopplungen $x_{1,2,\dots}$ und einer asymptotisch freien Eichkopplung g nach speziellen Lösungen der RGG gesucht, die nicht explizit von Anfangswerten abhängen und somit ebenfalls Fixmannigfaltigkeiten darstellen. Der Unterschied besteht jedoch darin, daß

- in der Regel von vorneherein nach Fixlinien und keinen höherdimensionalen Mannigfaltigkeiten gesucht wird, also die Reduktion auf eine einzelne

für gewöhnlich asymptotisch freie Eichkopplung g : $x_i = x_i(g)$, was der näherungsweise Lösung des Differentialgleichungssystems $\beta_g \frac{dx_i}{dg} = \beta_{x_i}$ entspricht,

- neben g auch von allen anderen Kopplungen x_i ein asymptotisch freies Verhalten verlangt wird,
- Infrarot-Attraktivität keine oder nur eine nachgeordnete Rolle spielt.

Das UV-Verhalten von speziellen Lösungen der RGG ist immer von Interesse. Viele Lösungen dieses Programms wirken jedoch UV-repulsiv auf den RGF, was gleichbedeutend mit der IR-Attraktivität der betrachteten Mannigfaltigkeit ist, und sind damit bezüglich des hier geforderten UV-Verhaltens nicht stabil. In diesen Fällen ist das Ergebnis während der Top-Down-Evolution von der UV-Skala M_{GUT} zur IR-Skala m_t in Ein-Schleifen-Ordnung identisch mit den IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten und gibt damit die angenäherte Entkopplung der IR- von der UV-Physik wieder [108, 111, 109].

Während eine grundsätzlich im UV für alle Kopplungen asymptotisch freie Theorie ein theoretisch reizvolles Konzept ist, ist die phänomenologische Übereinstimmung mit dem Experiment in einigen Fällen gering. So wurde in Ein-Schleifen-Näherung für die Top-Quarkmasse ein Wert von 90 GeV und für die Higgsmasse 50 GeV vorausgesagt [13, 17]. In anderen Modellen, wie im minimal supersymmetrischen und unifizierenden $SU(5)$ Modell, werden durchaus annehmbar Top-Quarkmassen von ca. 182 GeV vorausgesagt [111].

Ein Übersichtsartikel zu diesem Programm findet sich in [110] und eine ausführlichere Einordnung in das Konzept der infrarot-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten in [21]. Diejenigen Fixmannigfaltigkeiten, die den oben genannten Randbedingungen genügen, werden im folgenden kurz als *Zimmermann-artig* bezeichnet, ohne damit allen Mitarbeitern dieses Programms gerecht zu werden.

5.3 Bekannte numerische Ergebnisse zu Fixlinien und Fixflächen

Im folgenden werden bekannte numerische Ergebnisse, soweit sie im weiteren Verlauf angesprochen und durch die Lösungen vervollständigt werden, wiedergegeben.

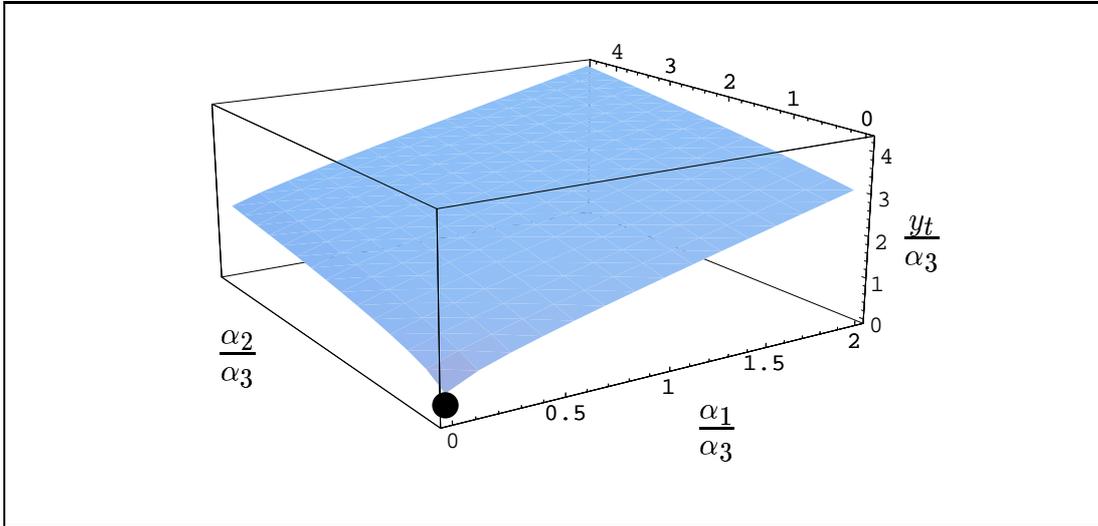


Abbildung 2: Nichttriviale Fixmannigfaltigkeit im SM für die Yukawa-Top-Kopplung und die drei Eichkopplungen, aufgetragen als Verhältnisse [21, 23].

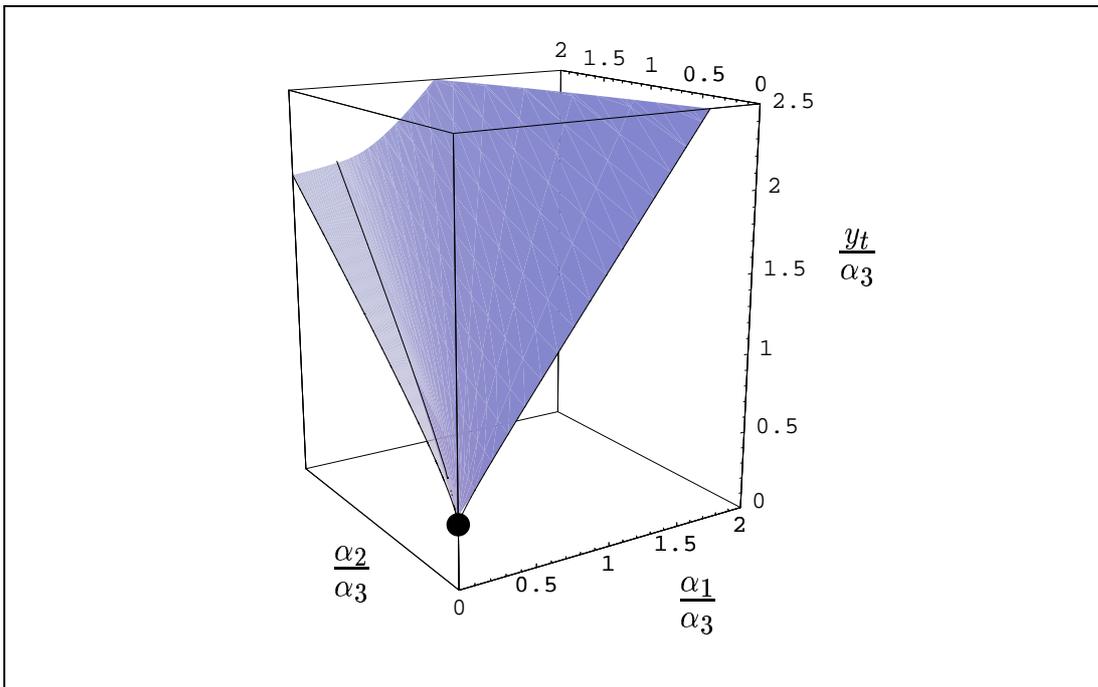


Abbildung 3: Nichttriviale Fixmannigfaltigkeit im MSSM für die Yukawa-Top-Kopplung und die drei Eichkopplungen, aufgetragen als Verhältnisse [21, 23].

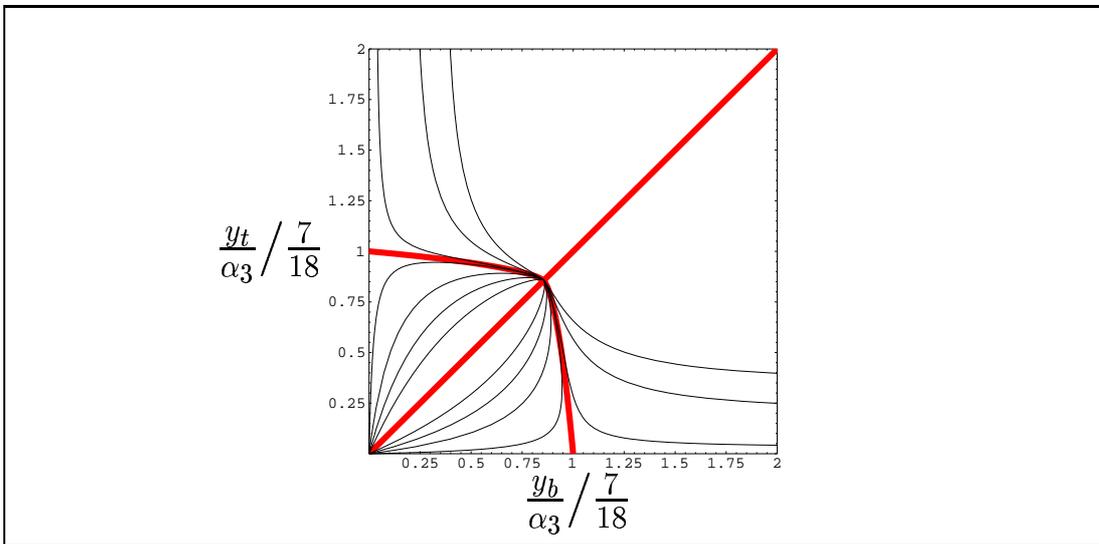


Abbildung 4: Die Abbildung zeigt die Fixlinien im MSSM für die Yukawa-Top- bzw. -Bottom-Kopplung und Eichkopplung α_3 , aufgetragen als Verhältnisse [19], die hier in Einheiten des Fixpunktes $(y_t/\alpha_3)^*|_{y_b=0} = 7/18$ aufgetragen wurden.

Teil 2: Ergebnisse

6 Renormierungsgruppe und Fixmannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel wird eine Schlüsselmöglichkeit der Bestimmung von Fixmannigfaltigkeiten geschildert, die von der Renormierungsgruppe selbst und den Symmetrien des Renormierungsgruppenflusses Gebrauch macht. Die geschilderte Methode wird sich im weiteren Verlauf als entscheidende Voraussetzung für die analytische Bestimmung der Fixmannigfaltigkeit herausstellen und demgemäß eine große Rolle spielen.

Von dem Beispiel in Abschnitt 5.1 ausgehend, werden in Abschnitt 6.1 die notwendigen mathematischen Begriffe eingeführt, einige nützliche Eigenschaften erläutert und vor diesem Hintergrund die Definition und die Bestimmungsgleichungen der infrarot-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten angegeben (Abschnitt 6.2). Im darauf folgenden Abschnitt 6.3 wird die Struktur der Ein-Schleifen-RGG für den allgemeinen Eich-Yukawa-Sektor einer beliebigen Eichtheorie untersucht. Die verwendeten mathematischen Methoden sind wohlbekannt, wurden jedoch in der Literatur nicht auf die geschilderte Fragestellung angewandt.

Die Fixlösung des in Abschnitt 5.1 behandelten Beispiels zeichnet sich dadurch aus, daß sie nicht in erster Linie durch bestimmte Anfangswerte charakterisiert ist, sondern daß sie für beliebige Skalen t ein ähnliches Verhalten zeigt. Die Beziehung $y_0 = \frac{7}{18}\alpha_0$ bleibt für alle Skalen erhalten: $y(t) = \frac{7}{18}\alpha(t)$. Es wird nun an diesem Beispiel gezeigt, daß das entscheidende Element die Symmetrien der RGG sind. Das später geschilderte Vorgehen wird sich direkt auf die Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten des Renormierungsgruppenflusses beziehen, deren Symmetrie größer als die des gesamten Flusses ist, woraus sich die Attraktivität dieser Mannigfaltigkeiten ergibt. In dem bisher betrachteten einfachen zweidimensionalen Beispiel werden jedoch die Symmetrien der Lösungen der Renormierungsgruppe untersucht, was in diesem Fall keine Einschränkung bedeutet.

Mit Hilfe des in Anhang C beschriebenen Verfahrens ergibt sich eine Invarianz unter den Transformationen einer Liegruppe mit den Elementen $S_s = \exp(s v_S)$ für den Gruppenparameter s und dem Generator ($t := \frac{1}{4\pi} \ln(\mu/\mu_0)$):

$$v_S := -t \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} := \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + y \frac{\partial}{\partial y}. \quad (6.1)$$

Die von dieser Gruppe vermittelten endlichen Transformationen ergeben sich aus (vgl. Abschnitt 3.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{t}(s)}{ds} &= -\bar{t}(s), & \bar{t}(0) &= t, \\ \frac{d\bar{\alpha}(s)}{ds} &= \bar{\alpha}(s), & \bar{\alpha}(0) &= \alpha(t), \end{aligned}$$

$$\frac{d\bar{y}(s)}{ds} = \bar{y}(s), \quad \bar{y}(0) = y(t). \quad (6.2)$$

zu:

$$S_s(t, \alpha, y) = (\bar{t}(s), \bar{\alpha}(s), \bar{y}(s)) = (e^{-s}t, e^s\alpha, e^s y). \quad (6.3)$$

Es handelt sich um eine Skalierungsinvarianz⁷. Die Transformationen (6.3) erzeugen aus einer Lösung (α, y) der RGG eine Schar von neuen Lösungen $(\bar{\alpha}(s), \bar{y}(s))$, bilden also Lösungen auf Lösungen ab (Abbildung 5). So erfüllt die Eichkopplung $\bar{\alpha}(s)[\alpha(t)]$ dieselbe RGG wie $\alpha(t)$, wie sich leicht überprüfen läßt, hat jedoch einen anderen Anfangswert:

$$\bar{\alpha}(s)[\alpha_0] = e^s \alpha_0.$$

Die Gesamtheit der von (α_0, y_0) ausgehenden Anfangswerte wird Orbit von (α_0, y_0) genannt. Die Graphen der Fixpunkte und -linien zeichnen sich vor diesem Hintergrund dadurch aus, daß sie von einer beliebigen Transformation S_s gerade auf sich selbst abgebildet werden, z.B. gilt für die nichttriviale Fixlinie:

$$S_s \Gamma = S_s \left\{ (\alpha, y) \mid y = \frac{7}{18} \alpha \right\} = \left\{ (e^s \alpha, e^s y) \mid y = \frac{7}{18} \alpha \right\} = \Gamma.$$

Die Fixlösung ist somit invariant gegenüber Skalierung, was gleichbedeutend mit dem Zusammenfallen von spezieller Lösung und Orbit eines beliebigen Punktes des Graphen ist. Allgemein sind alle Lösungen invariant unter der Renormierungsgruppentransformation, während die Fixmannigfaltigkeiten spezielle Lösungen beschreiben, die invariant unter einer größeren Symmetriegruppe sind. Das effiziente Ausnutzen dieser Eigenschaft wird den Schwerpunkt des restlichen Kapitels darstellen.

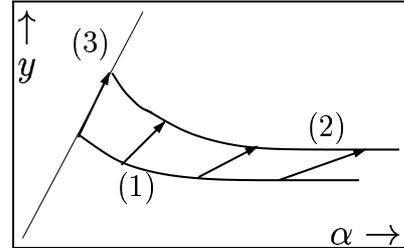


Abbildung 5: Die Abbildung zeigt die aus einer Lösung (1) durch Transformation gewonnene Lösung (2). Die Anfangswerte liegen auf dem Orbit (3) von (α_0, y_0) .

6.1 Fixmannigfaltigkeiten und Infrarot-Attraktivität

Dieser Abschnitt beschreibt den allgemeinen Fall der Fixmannigfaltigkeiten von RGG und deren Bestimmung. Dazu werden zunächst einige mathematische Begriffe und Definitionen erläutert [112, 113] und daraus folgend die wichtigsten Eigenschaften der Fixmannigfaltigkeiten abgeleitet [114].

⁷Die Vermutung, daß Skalierungssymmetrien der RGG eine Rolle im Zusammenhang mit den Fixmannigfaltigkeiten spielen könnten, wurde von M. Wimmer ausgesprochen [23].

Für ein Modell mit den Kopplungen x_i , $i = 1, \dots, n$ lauten die RGG:

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta_i(x), \quad (6.4)$$

wobei die β -Funktionen bis zu einer gewissen Schleifen-Ordnung als gegeben angenommen werden und $t = \frac{1}{4\pi} \ln(\mu/\mu_0)$ verwendet wurde. Die Lösungen von (6.4) beschreiben eindimensionale Kurven im Parameterraum der Kopplungen mit dem Kurvenparameter t .

Da Symmetrietransformationen von Differentialgleichungen Lösungen auf Lösungen abbilden und die Renormierungsgruppe eine Symmetrie einer jeden Lösung ist, bildet sie die RGG-Trajektorien $X_i(t)$ auf sich selbst ab. Eine triviale Symmetrie ist durch den autonomen Charakter der RGG (6.4) gegeben, wodurch die Anfangswerte immer für $t = 0$ gewählt werden können. Eine beliebige Lösung $X_i(t)$ mit Anfangswerten $x_i = X_i(0)$ ist somit mit den effektiven Kopplungen identisch:

$$\bar{t}(s) = F_s(t) \Big|_{t=0} = s := t, \quad \bar{x}_i(s) = X_i(t) = F_t(x_i) = e^{t\mathcal{R}} x_i. \quad (6.5)$$

Hierbei wurde der *Renormierungsgruppenfluß* (RGF) $F_s : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eingeführt [112], der für ein beliebiges reelles s von

$$F_s := e^{s v_R}, \quad v_R = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} := \sum_i \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (6.6)$$

generiert wird. Eine explizite Bestimmungsgleichung für den RGF läßt sich mit

$$\frac{d}{dt} F_t(x_i) = e^{t\mathcal{R}} \beta_i(x) \Leftrightarrow \mathcal{R} F_t(x_i) = \beta_i(F_t(x)), \quad F_0(x_i) = x_i \quad (6.7)$$

angeben. Für eine feste Kopplung x_i ist durch $t \rightarrow F_t(x_i)$ die zugehörige Lösungstrajektorie gegeben. Der RGF ist die Gesamtheit der Trajektorien.

Eine in der Umgebung eines Fixpunktes analytische Eigenfunktion $I(x_1, \dots, x_n)$ des Generators \mathcal{R}

$$\mathcal{R} I(x) = \gamma(x) I(x) \quad (6.8)$$

mit der ebenfalls analytischen Eigenwertfunktion oder auch *anomalen Dimension* $\gamma(x_1, \dots, x_n)$ beschreibt durch $I(x) = 0$ eine von einzelnen Lösungstrajektorien aufgespannte n -dimensionale *Invariante* der Renormierungsgruppe⁸, da wegen

$$I(X(t)) = F_t(I(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \gamma_n(x) I(x) =: \Gamma(t, x) I(x),$$

mit $\gamma_{n+1} = \mathcal{R} \gamma_n + \gamma \gamma_n, \quad \gamma_0 := 1,$

⁸Beispiele für Invariante sind die Greensfunktionen, also die Amplituden der perturbativen Reihe. Die anomale Dimension gibt dort die Abweichung vom naiv zu erwartenden Skalierungsverhalten (der technischen Dimension) [115].

diese Beziehung für alle Skalen t erfüllt ist:

$$I(x) \equiv 0 \Rightarrow I(X(t)) \equiv 0. \quad (6.9)$$

Insbesondere sind die Produkte und Quotienten von Invarianten $(I_1)^{n_1}(I_2)^{n_2}\dots$ wieder Invarianten mit den Eigenwerten: $n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2 + \dots$. Die *Fixmannigfaltigkeiten* sind die Invarianten, die nicht explizit von den Anfangswerten der RGG abhängen. Dies kann nur erreicht werden, wenn sie invariant gegenüber einer größeren Symmetriegruppe sind, wie das Beispiel des letzten Abschnitts gezeigt hat. Ausgangspunkt sind nicht mehr die ursprünglichen RGG (6.4), sondern das quasilineare, partielle Differentialgleichungssystem erster Ordnung (6.8) mit geeigneter Eigenwertfunktion, das direkt die Invarianten des RGFes beschreibt und nicht wie die RGG einzelne Lösungstrajektorien.

Wird die Liegruppe mit den Generatoren v_i , $i = 1, \dots, n_G$ aller kontinuierlichen Symmetrien von (6.8) mit G bezeichnet, so enthält sie insbesondere die Renormierungsgruppe selbst und unabhängig vom jeweiligen Modell und Schleifenordnung die Translationsinvarianz bezüglich der logarithmischen Impulsskala. Ist eine Mannigfaltigkeit unter einer Untergruppe $H \subset G$ mit den Generatoren v_i , $i = 1, \dots, n_H$ invariant, so muß die Invariante eine für jeden einzelnen Generator zu (6.8) äquivalente Beziehung mit einer entsprechenden Eigenwertfunktion erfüllen. Dabei sind die Eigenwertfunktionen γ_i des Generators v_i nicht unabhängig voneinander, sondern stehen über die Vertauschungsrelation der Liealgebra von H miteinander in Beziehung:

$$[v_i, v_j] = \sum_{k=1}^{n_H} h_{ij}^k v_k \Rightarrow v_i \gamma_j - v_j \gamma_i = \sum_{k=1}^{n_H} h_{ij}^k \gamma_k \text{ für } i, j = 1, 2, \dots, n_H, \quad (6.10)$$

wie sich durch Anwenden auf $I(x)$ ergibt. Die $n + 1$ Parameter der Lösungsmannigfaltigkeit, die den Anfangswertangaben $(0, x_i)$ entsprechen, werden somit auf eine geringere Zahl reduziert! Ist die Reduktion vollständig, so sind dies die für diese Arbeit relevanten Fixmannigfaltigkeiten, die ohne jegliche Angabe eines Anfangswertes definiert sind.

Wenn eine Lösung $X_i(t)$ für eine einzelne Skala t_1 die Bedingung $I(X(t_1)) = 0$ erfüllt ist, liegt die gesamte Lösung in dieser Mannigfaltigkeit: $I(X(t)) = 0$. Umgekehrt kann eine Lösung, die für einen Punkt im Parameterraum außerhalb der Mannigfaltigkeit verläuft, diese nur im Unendlichen erreichen, also im (mathematischen) ultravioletten oder infraroten Grenzfall. Solche Betrachtungen sind in der bisherigen Literatur immer als nützliche Grenzfälle sowohl für die numerische als auch halbanalytische Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten verwendet worden, da dann einige Kopplungen aufgrund der asymptotischen Freiheit vernachlässigt werden dürfen. Zwar liegen diese Limites in der Regel außerhalb des Gültigkeitsbereichs der jeweiligen Ordnung der Perturbation, sind aber dennoch legitim: Grundsätzlich darf eine Lösung von RGG nicht wie die RGG selbst

nach Ordnungen der Kopplungen entwickelt werden, da sich damit keine Renormierungsinvarianten, was auch Meßgrößen beinhaltet, in der jeweiligen Schleifenordnung einführen lassen. In der vorgegebenen Ordnung der Störungstheorie müssen die RGG somit als exakt behandelt werden und die physikalischen Folgerungen auf den Gültigkeitsbereich der Perturbation beschränkt werden. Bei der Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten über das im Vorangegangenen geschilderte Schema kann jedoch auf die Betrachtung der extremen Skalenlimites verzichtet werden.

Fixmannigfaltigkeiten wirken auf den RGF entweder im UV- oder IR-Grenzwert attraktiv und in der jeweils entgegengesetzten Richtung repulsiv. Bei der Entscheidung welcher Fall jeweils vorliegt, ist die anomale Dimension $\gamma(x)$, der Eigenwertfunktion der Renormierungsgruppe, eine nützliche Größe. Ist für ein $t < t_0$ und für alle $\tau \in [t, t_0]$ die anomale Dimension $\gamma(X(\tau))$ für eine Lösung $X_i(t)$ positiv, so gilt

$$\gamma(X(\tau)) > 0 \Rightarrow |I(X(\tau))| < |I(X(t_0))| \quad (6.11)$$

für diese Lösung, denn wäre $|I(X(t_0))| \leq |I(X(t))|$, so würde nach dem Mittelwertsatz ein $\tau \in [t, t_0]$ mit

$$0 \geq \frac{|I(X(t_0))| - |I(X(t))|}{t_0 - t} = \frac{d}{dt} |I(X(t))| \Big|_{t=\tau} = \gamma(X(\tau)) |I(X(\tau))| \quad (6.12)$$

existieren, und die anomale Dimension wäre zumindest in einem Fall nicht positiv. Damit kann entschieden werden, an welcher Stelle eine Attraktion vorliegt. Die Interpretation, ob es sich dabei jeweils um eine IR- oder UV-Attraktion handelt, muß durch die Zuordnung dieser Skalen geschehen.

Eine weitere wichtige Größe sind die *Charakteristiken* $C(t, x)$ der Renormierungsgruppe die durch

$$v_R C(t, x) = 0 \Rightarrow C(t, X(t)) = \text{const.} \quad (6.13)$$

und der Forderung nach Analytizität in der Nähe der Fixpunkte bestimmt sind. Diese Gleichung wird von jeder Lösung in der Umgebung der Fixpunkte erfüllt. Sind $n - 1$ linear unabhängige Charakteristiken bekannt, so können die Lösungen der RGG (6.4) mit $n - 1$ unabhängigen Parametern durch diese ausgedrückt werden.

Die Strategie zum Auffinden von infrarot-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten ist somit grundsätzlich wie folgt: Nach der Bestimmung der Symmetrien von $\mathcal{R}I = \gamma I$ wird für die bestimmten Generatoren wiederum die Erfüllung einer entsprechende Eigenwertgleichung für I gefordert. Dabei stehen die möglichen Eigenwertfunktionen über die Liealgebra der Symmetrien miteinander in Beziehung. Die Lösung dieses Differentialgleichungssystems ergibt, wenn die Symmetriegruppe

mächtig genug ist, die $(n - 1)$ -dimensionale Fixmannigfaltigkeit. Die Parameterbereiche, für die die anomale Dimension positiv ist, wirken infrarot-attraktiv auf den RGF. Die Schnitte dieser maximal dimensionalen Fixmannigfaltigkeiten bilden die Unterfixmannigfaltigkeiten, zu denen insbesondere die Fixpunkte zählen. Die Fixmannigfaltigkeiten besitzen somit gegenüber der allgemeine Lösung eine höhere Symmetrie.

Als Beispiel wird hier wiederum der Sektor $(\alpha = g_3^2/4\pi, y = h_t^2/4\pi)$ des MSSMs betrachtet. Die RGG lauten

$$\frac{d\alpha}{dt} = \beta_\alpha = -6\alpha^2, \quad \frac{dy}{dt} = \beta_y = y \left(12y - \frac{32}{3}\alpha \right).$$

Die mathematischen Grenzen dieser RGG sind im IR durch den Landau-Pol der Eichkopplung der starken Wechselwirkung ($\alpha \rightarrow \infty$) und im UV durch deren asymptotische Freiheit gegeben ($\alpha \rightarrow 0$). Der physikalisch auswertbare Bereich der Einschleifen-Näherung ist erheblich kleiner und durch die Skalen im IR ($\mu_{\text{IR}} \simeq m_t$) und UV ($\mu_{\text{UV}} \simeq M_{\text{GUT}}$) beschränkt.

Die Invarianten des Renormierungsgruppenflusses $I(\alpha, y)$ sind durch $\mathcal{R}I = \gamma I$ mit $\mathcal{R} = \beta_\alpha \partial_\alpha + \beta_y \partial_y$ bestimmt. Damit die schon beobachtete Skalierungstransformation nicht aus I herausführt, muß mit $[\mathcal{S}, \mathcal{R}] = \mathcal{R}$ wegen $\mathcal{R}(\mathcal{S}I) = \gamma(\mathcal{S}I) + I(\mathcal{S} - 1)\gamma$ die anomale Dimension γ und die Invariante I ebenfalls skalierungsinvariant sein: $\mathcal{S}\gamma = \gamma$ und $\mathcal{S}I \propto I$. Den Untersuchungen der nächsten Abschnitte vorausgreifend wird festgestellt, daß die Generatoren:

$$v_1 := \alpha \partial_\alpha + \phi_1(\alpha, y) \partial_y, \quad v_2 := \phi_2(\alpha, y) (\alpha \partial_\alpha + y \partial_y), \quad v_3 := \phi_3(\alpha, y) \partial_\alpha + y \partial_y,$$

ebenfalls Symmetrien des RGFes mit beliebigen Funktionen ϕ_1, ϕ_2 und ϕ_3 vermitteln. Insgesamt wird für diese ebenen Symmetrien der Ansatz einer Geradengleichung $I = I_\alpha \alpha + I_y y$ und $\gamma = \gamma_\alpha \alpha + \gamma_y y$ mit konstanten Koeffizienten nahegelegt. Einsetzen in $\mathcal{R}I = \gamma I$ führt auf die folgenden Fixlinien mit den zugehörigen Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} I_1 = \alpha, \quad \gamma_1 = -6\alpha & : \alpha = 0, \\ I_2 = y - \frac{7}{18}\alpha, \quad \gamma_2 = 12y - 6\alpha & : y = \frac{7}{18}\alpha, \\ I_3 = y, \quad \gamma_3 = 12y - \frac{32}{3}\alpha & : y = 0. \end{aligned}$$

Die einzige Fixuntermannigfaltigkeit als Schnitt der drei Fixlinien ist der Fixpunkt $(0, 0)$.

Für ein quantitatives Maß der Attraktivität einer Fixlinie, wird üblicherweise ein Wechsel zu den Variablen $\rho = y/\alpha$ und $\ln \alpha^{-1}$ vorgenommen:

$$\frac{d\rho}{d \ln \alpha^{-1}} = 2\rho \left(\rho - \frac{7}{18} \right).$$

Die Variable ρ ist bezüglich der Skalierungsgruppe eine Charakteristik ($\mathcal{S}\rho = 0$) und wird auch *Ähnlichkeitsvariable* genannt. Diese Wahl ist nicht eindeutig, da auch jede Funktion $f(\rho)$ eine Ähnlichkeitsvariable ist. Die Attraktivität eines Fixpunktes ist über die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix bestimmt, die sich durch das Linearisieren des Differentialgleichungssystems um diesen Fixpunkt ergibt. Der Wechsel der Variablen ermöglicht dieselbe Vorgehensweise für die Fixlinien, die für diese Größen Fixpunkten entsprechen.

Die Charakteristik der RGG in dem Beispielsektor ergibt sich mit dem Ansatz $C = I_1^{n_1} I_2^{n_2} I_3^{n_3}$ zu:

$$C(\alpha, y) = \alpha^{7/9} \left(y - \frac{7}{18}\alpha \right) y^{-1} = \alpha^{7/9} \left(\frac{y}{\alpha} - \frac{7}{18} \right) \left(\frac{y}{\alpha} \right)^{-1} = \text{const.}$$

Wird das Verhältnis von Yukawa- zur Eichkopplung als Funktion der Eich- oder Yukawakopplung aufgefaßt, so ergibt ein Linearisieren um die Fixgeraden bzw. Fixpunkte ein Maß η für die Attraktivität dieser Lösungen:

$$\begin{aligned} \eta_1 &:= - \frac{d}{d\frac{y}{\alpha}} \frac{d\frac{y}{\alpha}}{d \ln y} \Big|_{I_1=0} = -1, \\ \eta_2 &:= - \frac{d}{d\frac{y}{\alpha}} \frac{d\frac{y}{\alpha}}{d \ln \alpha} \Big|_{I_2=0} = \frac{7}{9}, \\ \eta_3 &:= - \frac{d}{d\frac{y}{\alpha}} \frac{d\frac{y}{\alpha}}{d \ln \alpha} \Big|_{I_3=0} = -\frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Diese Vorzeichenkonvention ordnet im Falle einer asymptotisch freien Eichkopplung der IR-Attraktivität einen positiven Koeffizienten zu. In diesem Beispiel ist die Fixlösung $y = \frac{7}{18}\alpha$ IR-attraktiv, während die anderen beiden $\alpha = 0$ bzw. $y = 0$ repulsiv sind, wobei dies im ersten Fall stärker ausgeprägt ist. Für gewöhnlich wird eine feste asymptotisch freie Invariante wie $I_1 = \alpha$ als Referenz gewählt.

6.2 Bestimmungsgleichungen der allgemeinen Fixmannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Bestimmungsgleichungen der Fixmannigfaltigkeiten im Fall eines beliebigen Parameterraums und einer nicht festgelegten Ordnung der Störungstheorie wiedergegeben. Dies ist Ausgangspunkt für das im nächsten Abschnitt genauer geschilderte Konstruktionsverfahren in der Ein-Schleifen-Ordnung des Eich-Yukawa-Sektors.

Eine Invariante $I(x)$ des RGFes erfüllt für eine geeignete anomale Dimensionen

$\gamma(x)$ die quasilineare und partielle Differentialgleichung:

$$\Delta := \sum_i \beta_i(x) \frac{\partial I(x)}{\partial x_i} - \gamma(x)I(x) = 0. \quad (6.14)$$

Ein Generator einer *projizierbaren* Symmetrie⁹

$$v = \sum_i \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \phi(x, I) \frac{\partial}{\partial I} \quad (6.15)$$

beschreibt genau dann eine Invarianz von (6.14), wenn die auf den Parameterraum $(x_i, I, \partial I/\partial x_j)$ fortgesetzte Form dieses Generators (vgl. Anhang C) die linke Seite von (6.14) unter der Randbedingung $\Delta = 0$ auf die Null abbildet, was mit

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \xi_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \beta_j \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} + \gamma I \frac{\partial \phi}{\partial I} - I \sum_i \xi_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} - \gamma \phi + \sum_i \beta_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

äquivalent ist. Die Beschränkung auf reine Parametertransformationen ($\phi = 0$) führt auf:

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \xi_j - \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \beta_j \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} = I \sum_i \xi_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \quad (6.16)$$

$$\text{und } \Delta = \sum_i \beta_i \frac{\partial I}{\partial x_i} - \gamma I = 0. \quad (6.17)$$

Als erstes wird nach solchen Symmetrien gesucht, die von jeder Invarianten erfüllt werden. In diesem Fall darf (6.16) nicht explizit von I abhängen. Dazu wird mit einer noch zu bestimmenden Funktion $s(x)$ der Term $-s(x)\Delta$ zu (6.16) addiert und gefordert, daß der Anteil mit den Differentiationen $\partial I/\partial x_i$ für sich allein verschwindet. Dies führt für diese Symmetrien auf die Bedingungen:

$$\sum_j \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \xi_j^s - \frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_j} \beta_j \right) = s(x) \beta_i \quad \text{und} \quad \sum_j \xi_j^s \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = s(x) \gamma. \quad (6.18)$$

Mit diesen beiden Gleichungen läßt sich die Gestalt der anomalen Dimension $\gamma(x)$ einschränken und bei der Untersuchung von (6.16) bzw. (6.17) entsprechend verwenden. Aus (6.18) folgt, daß für jede Symmetrie der RGG gilt:

$$[v_S, \mathcal{R}] = s(x) \mathcal{R}. \quad (6.19)$$

Die rechte Seite dieser Kommutatorbeziehung ist ein Element der Liealgebra der Symmetriegruppe des RGFes, das allerdings auf keine zusätzliche Eigenwertgleichung führt, sondern zu (6.14) äquivalent ist. Dies ist eine Eigenschaft aller Differentialgleichungen erster Ordnung und der Grund für eine unendliche Zahl der Symmetrien in diesem Fall. Aus diesem Grund kann ohne Einschränkung $s(x) = 1$ gewählt werden. Weitere Fixlösungen werden mit (6.16) und (6.17) bestimmt.

⁹Eine Symmetrie wird projizierbar genannt, wenn die Transformation der unabhängigen nicht von den abhängigen Variablen beeinflusst wird: $\xi(x, I) = \xi(x)$, was hier sinnvoll ist, da nach Transformationen im Parameterraum gesucht wird.

6.3 Eigenschaften in Ein-Schleifen-Ordnung

In diesem für die weiteren Betrachtungen zentralen Abschnitt wird die Struktur der Ein-Schleifen-RGG für den allgemeinen Eich-Yukawa-Sektor einer beliebigen Eichtheorie untersucht, die insbesondere auch supersymmetrisch sein kann. Die Gestalt der Bestimmungsgleichungen (6.16) und (6.17) läßt sich in der Folge weiter einschränken. Für die im nächsten Kapitel durchgeführte explizite Lösung dieser Gleichungen werden im Anschluß die wichtigen Konstruktionselemente in Form der Fixhyperebenen und -geraden bestimmt, die sich schon an dieser Stelle angeben lassen. Die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten werden durch diese einfacheren Lösungen in Untersektoren geteilt bzw. ergeben durch Schnittbildung die Fixuntermannigfaltigkeiten bis zu den Fixflächen, -linien und -punkten.

Die Bestimmung der Symmetrien des RGFes eines bestimmten Sektors ist von der Gestalt der RGG abhängig. In der Ein-Schleifen-Näherung hat zumindest die Skalierungssymmetrie einen globalen Charakter. Sie spiegelt eine Invarianz eines beliebigen Eich-Yukawa-Sektors wieder, was Folge der Homogenität des ersten Gliedes der Störungsreihe ist. Diese Symmetrie ist in Ein-Schleifen-Ordnung mächtig genug, um die spezielleren Fixmannigfaltigkeiten unter den Invarianten der Renormierungsgruppe zu bestimmen.

Die RGG eines Eich-Yukawa-Sektor mit n Kopplungen lauten in Ein-Schleifen-Ordnung [23]:

$$\frac{dx_i}{dt} = \beta_i(x) = x_i \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j \quad \text{für } i = 1, \dots, n, \quad (6.20)$$

wobei die Größen x_i für die quadrierten und auf 4π normierten Kopplungen stehen. Der Anteil der Koeffizientenmatrix c_{ij} , der den reinen Eichsektor wiedergibt, ist wegen $\alpha_i = -b_i \alpha_i^2$ diagonal. Nichttrivial wird das Gleichungssystem durch die anwesenden Yukawakopplungen. Der Ursprung des Parameterraums ist ein Fixpunkt der RGG, was trivial aus dem Verschwinden der β -Funktionen folgt. Ist die Matrix c_{ij} invertierbar, existieren keine weiteren Fixpunkte. Anderenfalls ergeben sie sich aus $\sum_j c_{ij} x_j = 0$, was in allen betrachteten Sektoren nicht der Fall ist. Der Fixpunkt im Ursprung ist überwiegend IR-repulsiv und für physikalische Anwendungen auch nicht als Grenzfallbetrachtung von Interesse.

Die Bestimmungsgleichungen für die von allen Invarianten erfüllten Symmetrien (6.18) lauten:

$$\sum_j \left(\frac{\partial \beta_i}{\partial x_j} \xi_j^s - \frac{\partial \xi_i^s}{\partial x_j} \beta_j \right) = \beta_i \quad \text{und} \quad \sum_j \xi_j^s \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = \gamma.$$

Die erste Gleichung wird von $\xi_i^s = x_i$ gelöst und führt auf die schon im Beispiel

des letzten Kapitels auftretende Skalierungsinvarianz:

$$v_S = -t \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{S}, \quad \mathcal{S} = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad [\mathcal{S}, \mathcal{R}] = \mathcal{R}. \quad (6.21)$$

Dies legt die anomale Dimension auf eine homogene Funktion vom Grade eins fest, für die ein möglichst einfacher Ansatz gewählt wird:

$$\xi_i^s = x_i \Rightarrow \mathcal{S}\gamma = \gamma : \quad \gamma := \sum_i \gamma_i x_i, \quad \gamma_j = \text{const.} \quad (6.22)$$

Diese Wahlmöglichkeit bei der anomalen Dimension wird in Anhang D erläutert. Eine Renormierungsgruppeninvariante I erfüllt entsprechend (6.17) die Eigenwertgleichung $\mathcal{R}I = \gamma I$ bzw. nun die weiter eingeschränkte Form:

$$\sum_{i,j} x_i c_{ij} x_j \frac{\partial I}{\partial x_i} = I \sum_i \gamma_i x_i. \quad (6.23)$$

Dies ist der Ausgangspunkt für alle im nächsten Kapitel bestimmten nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten. Hilfreich für deren Lösung und Konstruktion sind die nun weiter bestimmten ebenen Fixlösungen in Form von Fixhyperebenen und Fixgeraden.

Eine beliebiger Generator $v = \sum_i \xi_i \partial / \partial x_i$ einer Symmetrie von (6.17) erfüllt gemäß (6.16) die Beziehung

$$\sum_{i,j} \left(\xi_i c_{ij} x_j + x_i c_{ij} \xi_j - x_j \sum_k c_{jk} x_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} = I \sum_i \gamma_i \xi_i. \quad (6.24)$$

Bezüglich des Generators v erfüllt I wiederum eine Eigenwertgleichung

$$v I = \lambda I, \quad \mathcal{R} \lambda = 0, \quad (6.25)$$

wobei der Eigenwert λ wegen (6.24) eine Charakteristik der Renormierungsgruppe sein muß, also insbesondere für die Skalierungssymmetrie.

Jede einzelne Kopplung x_i ist aufgrund

$$\mathcal{R}x_i = \left(\sum_j c_{ij} x_j \right) x_i =: \bar{\gamma}_i x_i, \quad \mathcal{S}\bar{\gamma}_i = \bar{\gamma}_i$$

eine Invariante der Renormierungsgruppe mit der anomalen Dimension $\bar{\gamma}_i = \sum_j c_{ij} x_j$, was impliziert, daß die kartesischen Hyperflächen des Parameterraums

$x_i = 0$ für den Eich-Yukawa-Sektor immer Fixmannigfaltigkeiten darstellen, da sie nicht von Anfangsbedingungen abhängen. Dies gilt in jeder Ordnung der Perturbation, da die β_i in diesem Sektor in allen Ordnungen den globalen Faktor x_i besitzen. Dieses bekannte Ergebnis gibt die einfachste Struktur im Parameterraum wieder.

Insbesondere sind auch alle Schnitte der Hyperebenen Fixuntermannigfaltigkeiten, was sich bis zu den Fixgeraden in Form der Koordinatenachsen x_i und den Fixpunkten fortsetzen läßt.

Für die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten von besonderer Bedeutung sind die nichtkartesische Fixhyperebenen, die dann existieren, wenn sich die Koeffizienten einer Invarianten $I = \sum_i I_i x_i$ und der anomalen Dimension $\gamma = \sum_i \gamma_i x_i$ so bestimmen lassen, daß $\mathcal{R}I = \gamma I$ erfüllt ist. Die Existenz solcher weiteren Hyperflächen und der sich daraus ergebenden Schnittmannigfaltigkeiten ist von der Gestalt der anomalen Dimensionsmatrix c_{ij} abhängig:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \quad I_i(c_{ij} - \gamma_j) + I_j(c_{ji} - \gamma_i) = 0, \quad (6.26)$$

was für $2n$ Unbekannte $n(n+1)/2$ Bestimmungsgleichungen bedeutet und somit für mehr als drei Kopplungen überbestimmt ist. Die Symmetrie der Fixhyperebenen ist nur wenig eingeschränkt und folgt aus (6.24) mit (6.23):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i I_i \left(\xi_i \sum_j c_{ij} x_j + x_i \sum_j c_{ij} \xi_j - \mathcal{R} \xi_i \right) - I \sum_i \gamma_i \xi_i \\ &= \sum_i I_i \left(\xi_i \sum_j \gamma_j x_j - \mathcal{R} \xi_i \right). \end{aligned}$$

Damit bleibt der Generator für die verschwindenden I_k unbestimmt:

$$v = \sum_{j, I_j \neq 0} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k, I_k = 0} \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

was der erhöhten Symmetrie in diesen Ebenen entspricht.

Auf den Fixhyperebenen ist der RGF zweidimensional und damit aufgrund des *Poincaré-Bendixson-Theorems* (vgl. [116]) entweder in der Umgebung der Fixpunkte periodisch oder mündet immer mit identischer Steigung in den Ursprung, wobei der erste Fall in physikalischen Situationen nicht eintritt. In Ein-Schleifen-Ordnung sind die Asymptoten Fixgeraden mit einer entsprechenden Symmetrie des RGFes und identisch mit den Fixpunkten von Kopplungsverhältnissen x_i/x_j . In jeder Fixebene existiert somit immer eine Fixgerade. Diese Fixgeraden sind entweder das Ergebnis eines Schnittes zweier Fixebenen oder ergeben sich aus nichttrivialen zweidimensionalen Fixmannigfaltigkeiten. Ohne diese zu kennen,

sind alle Fixgeraden dadurch bestimmt, daß (x_1, x_2, \dots, x_n) und $\mathcal{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ linear abhängig sind:

$$\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} : \det \begin{pmatrix} x_i & x_j \\ \beta_i & \beta_j \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{bzw. : } x_i = 0 \quad \text{oder} \quad x_j = 0 \quad \text{oder} \quad \sum_k (c_{ik} - c_{jk})x_k = 0. \quad (6.27)$$

Die Fixgeraden (oder Fixpunkte für die Kopplungsverhältnisse) ergeben sich aus den Parameterachsen und den in der von zwei der Fixgeraden aufgespannten Ebene liegenden, wobei dies nicht zwingend eine Fixebene sein muß. Dies läßt sich sukzessiv fortsetzen, womit sich die Gesamtzahl der Fixgeraden zu

$$\#(\text{Fixgeraden}) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$$

ergibt [114]. Wird die jeweilige Fixgerade mit Hilfe der Kopplung $x_n \neq 0$ parametrisiert

$$x_i =: a_i x_n, \quad a_n = 1,$$

so sind die konstanten Koeffizienten a_i wegen (6.27) durch

$$\forall i < n, x_i \neq 0 : \sum_{j < n, x_j \neq 0} (c_{ij} - c_{nj})a_j = -(c_{in} - c_{nn}) \quad (6.28)$$

bestimmt. Ist \tilde{c}_{ij} die reduzierte Koeffizientenmatrix, die dadurch entsteht, daß eine gewisse Anzahl der Kopplungen identisch Null ist, so sind die nichtverschwindenden Kopplungen der Fixlinie wegen (6.28) durch

$$x_i = \frac{\sum_j \tilde{c}_{ij}^{\text{ad}}}{\sum_j \tilde{c}_{nj}^{\text{ad}}} x_n \quad (6.29)$$

gegeben, wobei \tilde{c}^{ad} für die transponierte und adjunkte Matrix steht. Insbesondere die Fixgeraden in den kartesischen Fixebenen ergeben sich zu:

$$x_i = \frac{c_{jj} - c_{ij}}{c_{ii} - c_{ji}} x_j, \quad \forall k \neq i, j : x_k = 0. \quad (6.30)$$

Die Parameter der im weiteren Verlauf der Arbeit bestimmten Fixmannigfaltigkeiten ergeben sich aus diesen Fixgeraden und den zugehörigen Attraktivitätskoeffizienten, die aus den Untersektoren von jeweils zwei nichtverschwindenden Kopplungen bestimmt sind. Wird eine der vorhandenen Kopplungen fest gewählt – hier die Kopplung x_n – so enthält der Untersektor für die i -te Kopplung drei Fixgeraden, äquivalent zum bisher beispielhaft diskutierten (g_3, h_t) -Sektor des MSSMs:

$$\left. \begin{array}{l} I_n = x_n, \\ I_{in} = x_i - \frac{c_{nn} - c_{in}}{c_{ii} - c_{ni}} x_n, \\ I_i = x_i, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \gamma_n = c_{ni}x_i + c_{nn}x_n, \\ \gamma_{in} = c_{ii}x_i + c_{nn}x_n, \\ \gamma_i = c_{ii}x_i + c_{in}x_n. \end{array}$$

Die durch diese Invarianten beschriebenen Fixgeraden sind Fixlösungen des gesamten Sektors. Die Charakteristik dieses Untersektors lautet:

$$C(x_i, x_n) = x_n^{c_{ii}(c_{nn}-c_{in})} \left(x_i - \frac{c_{nn} - c_{in}}{c_{ii} - c_{ni}} x_n \right)^{c_{in}c_{ni} - c_{ii}c_{nn}} x_i^{c_{nn}(c_{ii}-c_{ni})}. \quad (6.31)$$

Die Koeffizienten η der Fixgeraden $I = 0$ ergeben sich hieraus zu (vgl. Abschnitt 6.1):

$$\begin{aligned} \eta_{in} &:= - \frac{d}{d \frac{x_i}{x_n}} \frac{d \frac{x_i}{x_n}}{d \ln x_n} \Big|_{I_{in}=0} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta_i} - \frac{1}{\eta_n}}, \\ \eta_i &:= - \frac{d}{d \frac{x_i}{x_n}} \frac{d \frac{x_i}{x_n}}{d \ln x_n} \Big|_{I_i=0} = \frac{c_{nn} - c_{in}}{c_{nn}}. \end{aligned}$$

Für die Kopplungsverhältnisse

$$\rho_i := \frac{x_i}{x_n}, \quad \rho_i^* := \frac{c_{nn} - c_{in}}{c_{ii} - c_{ni}}$$

lauten die Koeffizienten der relativen Invarianten somit:

$$\rho_i = \rho_i^* : \quad \eta_{in} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\eta_i} - \frac{1}{\eta_n}}, \quad (6.32)$$

$$\rho_i = 0 : \quad \eta_i = \frac{c_{nn} - c_{in}}{c_{nn}}. \quad (6.33)$$

Wurde als feste Referenz x_n eine Kopplung gewählt, die im IR zunehmend größere Werte annimmt, so steht $\eta_i > 0$ für die IR-Attraktivität der Fixlinie $x_i = \rho_i^* x_n$ bzw. des Fixpunktes $\rho_i = \rho_i^*$. Für eine solche Kopplung x_n wird in der Regel eine asymptotisch freie Eichkopplung verwendet. Für mehrere Yukawakopplungen gehen auch die Koeffizienten in die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten ein, die diese Größen untereinander bilden. In diesem Fall werden die Attraktivitätsverhältnisse im IR gerade durch das entgegengesetzte Vorzeichen wiedergegeben.

Der erste Schritt zur Untersuchung der Fixstruktur von (6.23) besteht somit in der Bestimmung aller ebenen Fixhyperflächen und -geraden. Diejenigen unter diesen speziellen Lösungen, die nicht Schnitte von höherdimensionalen Hyperflächen sind, müssen sich aus nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten ergeben und gehen mit ihren Attraktivitätskoeffizienten als Parameter in die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten ein. In der Regel stellen sich diese als Flächen unendlicher Ordnung heraus, die nur in einigen Spezialfällen zu Lösungen mit endlicher Ordnung degenerieren.

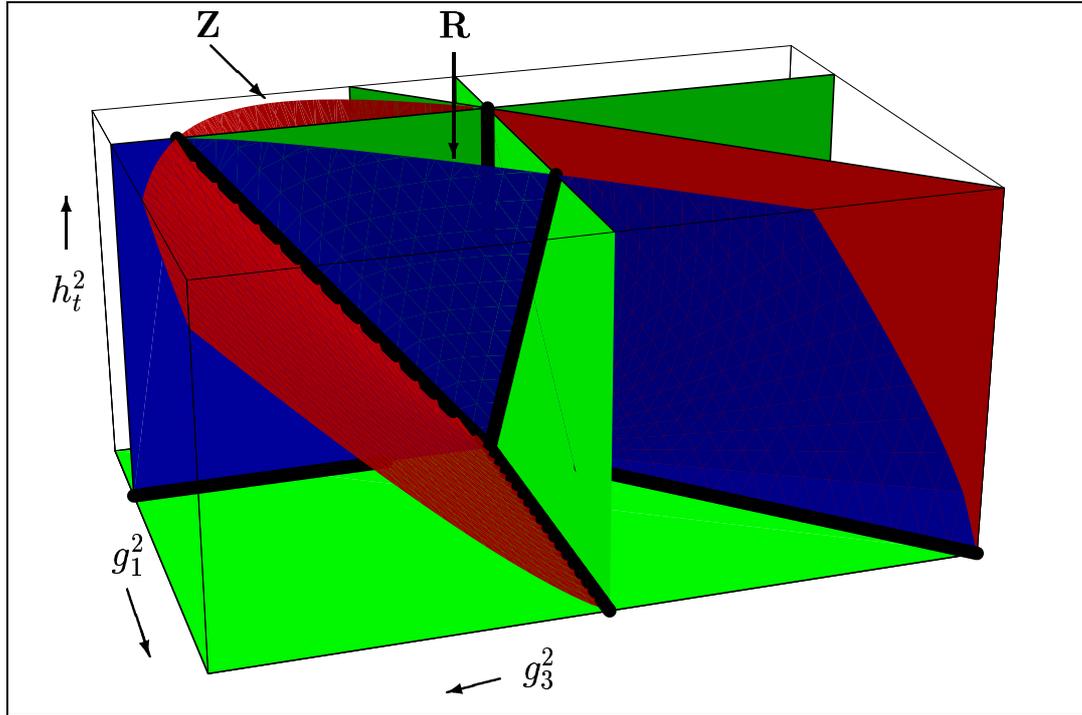


Abbildung 6: Fixstruktur für den Sektor (h_t, g_1, g_3) im MSSM. Neben den trivialen Fixebenen sind die zwei zusätzlichen Fixflächen eingezeichnet. Die Schnittflächen dieser zweidimensionalen Fixelemente ergeben die Fixgeraden (fett eingezeichnet). Die mit **R** gekennzeichnete Fixmannigfaltigkeit ist am attraktivsten, während die mit **Z** indizierte vom Programm der *Reduktion der Kopplungen* favorisiert wird und auf asymptotisch freie Yukawakopplungen im UV führt. Die Fixlinie im Schnitt von **R** und **Z** wird im IR-Limes und die Fixebene $g_3^2 = 0$ im UV-Limes vom Renormierungsgruppenfluß angestrebt.

Als Beispiel wird hier der Sektor (h_t, g_1, g_3) des MSSMs, der später exakt gelöst werden wird, betrachtet (vgl. Abbildung 6). Neben den drei kartesischen Fixebenen und den drei Fixgeraden in Form der Parameterachsen ergeben sich drei Fixgeraden, die nicht Schnitte von Fixebenen sind, sondern sich aus den zwei eingezeichneten nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten **R** und **Z** bestimmen. Insgesamt finden sich wie erwartet $2^3 - 1 = 7$ Fixgeraden in der Abbildung wieder. Eine nichttriviale kartesische Fixebene wird durch $b_1\alpha_1 = b_3\alpha_3$ beschrieben, die allerdings wegen $b_1 = -66/5 < 0$ und $b_3 = 6 > 0$ unphysikalisch ist.

In den üblicherweise in der Literatur verwendeten Ähnlichkeitsvariablen

$$\rho_1 := \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{g_1^2}{g_3^2}, \quad \rho_t := \frac{y_t}{\alpha_3} = \frac{h_t^2}{g_3^2}$$

geht der physikalische Teil der Abbildung 6 in die der Abbildung 7 über.

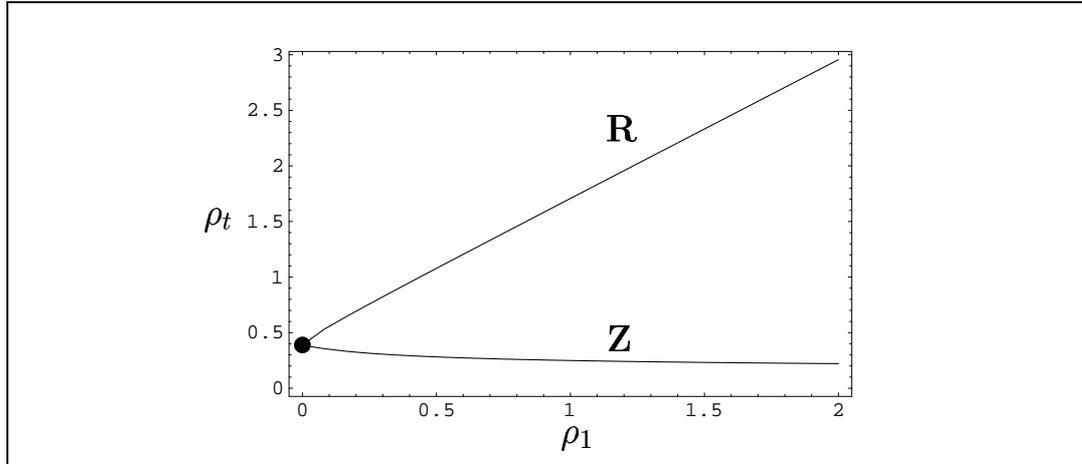


Abbildung 7: Diese Abbildung geht aus Abbildung 6 durch den Wechsel auf die Ähnlichkeitsvariablen $\rho_1 = g_1^2/g_3^2$ bzw. $\rho_t = h_t^2/g_3^2$ hervor.

Die Fixgeraden in Abbildung 6 entsprechen in der Darstellung in Abbildung 7 Fixpunkten, die nichttrivialen Fixflächen den aufgetragenen Fixlinien. Obwohl nicht die gesamte Informationen beim Wechsel zu den Ähnlichkeitsvariablen erhalten bleibt, wird der physikalische Sektor erheblich übersichtlicher abgebildet und die physikalische interessanten Informationen bleiben im wesentlichen erhalten. So findet sich von den sieben Fixlinien nach dem Wechsel nur eine in Form des in Abbildung 7 fett eingezeichneten Fixpunktes wieder, der der nichttrivialen Fixlinie in der $g_3^2 = 0$ Fixebene entspricht. Einige der fehlenden Fixpunkte finden sich, wie später noch näher untersucht wird, in der Asymptotik der Fixlinien **R** und **Z** der Abbildung 7 wieder. Offenbar sollten Kopplungsquadrate als Referenz – in diesem Beispiel g_3^2 – verwendet werden, die im Infraroten nicht verschwinden.

Eine weitere Möglichkeit der Darstellung ist die Verwendung von Ähnlichkeitsvariablen, die auch im Ultravioletten zu endlichen Größen führen und damit mehr von der dreidimensionalen Struktur in Abbildung 6 wiedergeben:

$$p := \frac{-b_1\alpha_1}{b_3\alpha_3 - b_1\alpha_1}, \quad q := \frac{a y_t}{b_3\alpha_3 - b_1\alpha_1}. \quad (6.34)$$

Die Koeffizienten b_1 , b_3 und a entstammen den RGG dieser drei Kopplungen und werden im nächsten Kapitel noch näher erläutert. Ähnliche Größen sind in [22, 23, 24] verwendet worden. Sie führen auf Darstellungen gemäß Abbildung 8. Eine geeignete Wahl von Variablen ist vom Einzelfall des betrachteten Kopplungssektors abhängig und kann sich bei Erweiterung des jeweiligen Sektors aus Anpassungsgründen ändern. Da die Variablen p und q außerdem bei Berechnungen umständliche Größen sind, werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit alle analytischen Betrachtungen in den quadrierten ursprünglichen Kopplungen

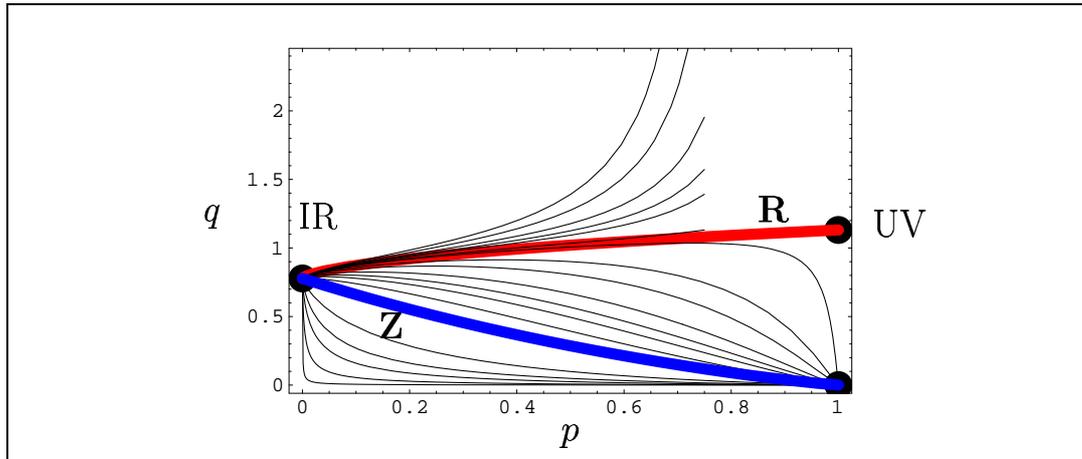


Abbildung 8: Diese Abbildung geht aus Abbildung 6 durch den Wechsel auf die Ähnlichkeitsvariablen in (6.34) mit den Koeffizienten $b_1 = -66/5$, $b_3 = 6$ und $a = 12$ hervor. Die Abbildung zeigt auch den Fluß einiger Lösungen in der Nähe der beiden nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten.

durchgeführt, was den Wechsel zu einer beliebigen Ähnlichkeitsvariablen leicht möglich macht, und die graphische Darstellung in den Variablen gemäß Abbildung 7 vorgenommen.

7 Explizite Bestimmung von Fixmannigfaltigkeiten in ausgewählten Sektoren in Ein-Schleifen-Ordnung

Mit Hilfe der im letzten Kapitel beschriebenen Vorgehensweise werden an dieser Stelle für einen relativ großen Teil des Eich-Yukawa-Sektors und für den die Supersymmetrie weichbrechenden Sektor die analytische Gestalt der jeweiligen Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppengleichungen in Ein-Schleifen-Ordnung hergeleitet. Damit sind erstmals nichttriviale Mannigfaltigkeiten analytisch bestimmt, die über die Dimension von Fixpunkten und -geraden hinausgehen.

Die bestimmten Sektoren sind mächtig genug, um einen nicht geringen Teil der bisher in der Literatur numerisch untersuchten Modelle und Kopplungsräume wiederzugeben, die festgestellten Eigenschaften zu erklären und neue herzuleiten. Durch die Kenntnis der analytischen Lösungen wird eine wichtige Zielsetzung dieser Arbeit erreicht: Die Lösungen sind allgemein; es können somit ganze Modellklassen simultan untersucht und insbesondere der Einfluß von Eichgruppe, Teilchengehalt und Supersymmetrie direkt beobachtet werden, was z.B. bei der Modellbildung hilfreich ist.

Die Fixmannigfaltigkeiten, die im weiteren bestimmt werden konnten, ergeben sich sukzessiv aus denen der Untersektoren, so daß im folgenden die betrachteten Sektoren in der Reihenfolge zunehmender Komplexität untersucht werden. Die Darstellung beginnt mit dem – aufgrund seiner vollständigen Entkopplung – reinen Eichsektor, in dem insbesondere wichtige Konventionen eingeführt, die mathematischen und physikalischen Grenzen des Definitionsbereichs der RGG erläutert und einige der auftretenden Koeffizienten durch ihre gruppentheoretischen Größen ausgedrückt werden. In den darauffolgenden Abschnitten wird der Eich-Yukawa-Sektor behandelt. Nach der Bestimmung der nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten in diesem Sektor und der Betrachtung einiger Sonderfälle können diese Ergebnisse durch die Verallgemeinerung einer differentiellen Beziehung mit Kopplungen des weichbrechenden Sektors einer supersymmetrischen Theorie direkt übertragen werden.

Die im einzelnen durchgeführten Herleitungen werden aufgrund ihres Umfangs zu Beginn skizziert, wobei auf die entscheidenden Konstruktionselemente, die damit weiter eingeschränkte Form der Bestimmungsgleichungen der nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten und auf die tabellarische Darstellung der Ergebnisse hingewiesen wird.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird auf eine mögliche zusätzliche physikalische Bedeutung der Fixmannigfaltigkeiten und ihrer Symmetrien eingegangen.

7.1 Reiner Eichsektor

Für ein eventuell auch supersymmetrisches Modell mit einer Eichgruppe G , die in ein Produkt von einfachen und abelschen Eichgruppen

$$G = G_1 \otimes \dots \otimes G_N \quad (7.1)$$

mit den Eichkopplungen

$$g_i \quad \text{bzw.} \quad \alpha_i := \frac{g_i^2}{4\pi}, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.2)$$

zerfällt, werden die ersten n dieser Kopplungen als asymptotisch nichtfrei, die übrigen als asymptotisch frei angenommen:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \tilde{t}_i} \alpha_i(t) &\rightarrow \infty, \quad i = 1, \dots, n, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_i(t) &= 0, \quad i = n + 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7.3)$$

wobei \tilde{t}_i , $i = 1, \dots, n$ für den jeweiligen Landau-Pol steht und die dimensionslose Impulsskala $t = \frac{1}{4\pi} \ln(\mu/\mu_0)$ mit einem beliebigen μ_0 verwendet wurde. Die asymptotisch freien Kopplungen besitzen ebenfalls Landau-Pole \tilde{t}_i , $i = n + 1, \dots, N$, die jedoch unterhalb des perturbativen Bereichs liegen (vgl. Abbildung 9). Der Definitionsbereich ist durch den kleinsten Landau-Pol oberhalb und den größten unterhalb des perturbativen Bereichs beschränkt:

$$t \in [t_{\text{IR}}, t_{\text{UV}}], \quad t_{\text{IR}} := \max \{-\infty, \tilde{t}_{n+1}, \dots, \tilde{t}_N\}, \quad t_{\text{UV}} := \min \{\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n, \infty\}. \quad (7.4)$$

Der Gültigkeitsbereich der RGG ist kleiner als das angegebene Intervall, da die Ein-Schleifen-Näherung schon vor den Landau-Polen an Gültigkeit verliert, so daß dort zunehmend höhere Ordnungen der Störungstheorie berücksichtigt werden müssen. Physikalische Aussagen sind deshalb auf dieses kleinere Intervall beschränkt. Weiterhin wird vorausgesetzt, daß die im folgenden diskutierten Impulsskalen jenseits aller auftretenden Teilchenmassen liegen, so daß Stufeneffekte nicht berücksichtigt werden müssen.

Die zugehörigen RGG in Ein-Schleifen-Approximation lauten:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -b_i \alpha_i^2, \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.5)$$

Diese Vorzeichenkonvention steht für:

- $b_i < 0$ für $i = 1, \dots, n$: asymptotisch nichtfreie Theorie,
- $b_i > 0$ für $i = n + 1, \dots, N$: asymptotisch freie Theorie.

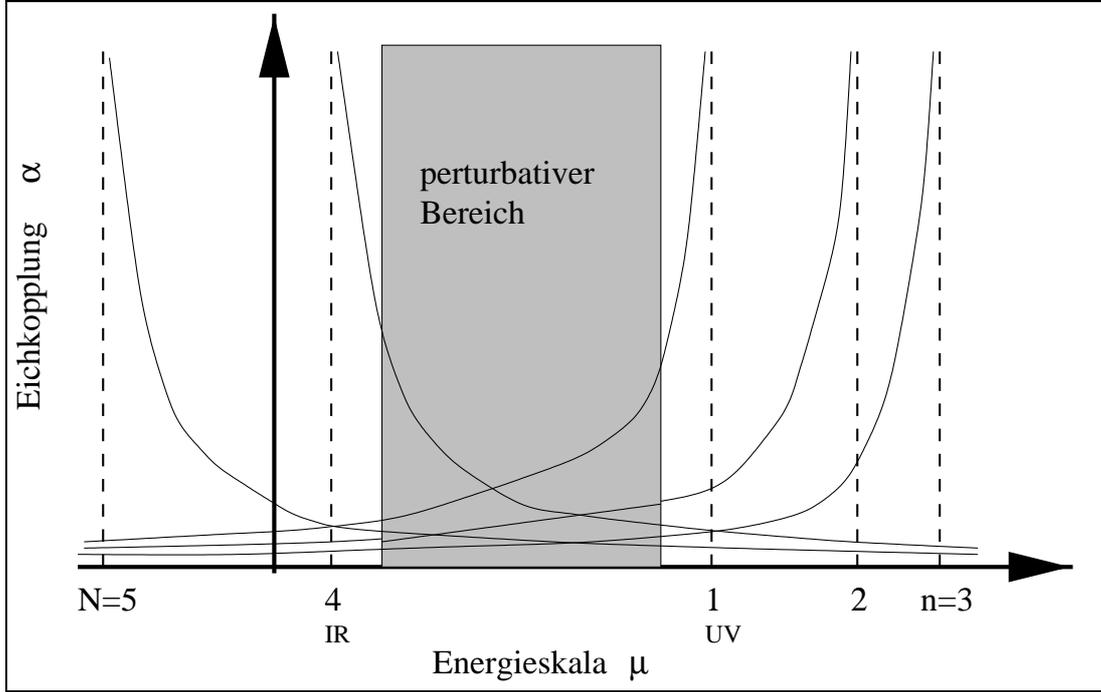


Abbildung 9: Beispielhafte schematische Darstellung zur Lage der Landau-Pole für $N = 5$ und $n = 3$.

Die Koeffizienten ergeben sich aus Abschnitt 3.8 zu:

$$\begin{array}{l|l}
 \text{nicht-SUSY:} & \text{SUSY:} \\
 \hline
 b_{i,\text{abelsch}} = -\frac{4}{3} \sum_F Q_{(i)}^2 - \frac{2}{3} \sum_S Q_{(i)}^2, & b_{i,\text{abelsch}}^{\text{SUSY}} = -2 \sum_F Q_{(i)}^2 - 2 \sum_S Q_{(i)}^2, \\
 b_i = \frac{22}{3} c^{(i)} - \frac{4}{3} s_F^{(i)} - \frac{1}{3} s_S^{(i)}, & b_i^{\text{SUSY}} = 6c^{(i)} - 2s_F^{(i)} - 2s_S^{(i)},
 \end{array}$$

wobei auf eine GUT-Normierung bei den abelschen Wechselwirkungen verzichtet wurde, da ein solcher Faktor in allen Parametern der im folgenden bestimmten Fixmannigfaltigkeiten herausfällt.

Die Lösungen der Eichkopplungs-RGG sind leicht bestimmbar:

$$\alpha_i(t) = \frac{\alpha_{i0}}{1 + \alpha_{i0} b_i t} = \frac{1/b_i}{t - \tilde{t}_i}, \quad \alpha_{i0} := \alpha_i(t(\mu_0) = 0), \quad \tilde{t}_i = -\frac{1}{b_i \alpha_{i0}}. \quad (7.6)$$

Der Fall einer nichtgleitenden Eichkopplung $b_i = 0$ ist ebenfalls möglich und wird beispielsweise in einigen *superstring-inspirierten* Erweiterungen des MSSMs für die starke Wechselwirkung in Ein-Schleifen-Ordnung oberhalb der Gaugino-Masse angenommen [99] und für den Augenblick ausgeschlossen.

Ein Teil der ebenen Fixlösungen der partiellen Differentialgleichung, die die Invarianten des Renormierungsgruppenflusses für die denkbar einfache Koeffizientenmatrix

$$c = \begin{pmatrix} -b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & -b_N \end{pmatrix}$$

beschreibt:

$$\mathcal{R} I(\alpha) = - \sum_i b_i \alpha_i^2 \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = I(\alpha) \sum_i \gamma_i \alpha_i, \quad (7.7)$$

ergibt sich aus den trivialen kartesischen Invarianten $\bar{I}_i^\alpha = -b_i \alpha_i$ mit $\bar{\gamma}_i^\alpha = -b_i \alpha_i$. Weitere Fixlösungen werden von

$$j \neq i: \quad I_{ij}^\alpha = -b_i \alpha_i + b_j \alpha_j, \quad \gamma_{ij}^\alpha = -b_i \alpha_i - b_j \alpha_j \quad (7.8)$$

beschrieben, was $N(N-1)/2$ Fixebenen der Form $b_i \alpha_i = b_j \alpha_j$ entspricht. Sind beide Kopplungen einer solchen Invarianten asymptotisch nichtfrei, so ist die Mannigfaltigkeit infrarot-attraktiv, während für zwei asymptotisch freie Kopplungen IR-Repulsivität vorliegt (6.33). Alle weiteren Fixlösungen sind unphysikalisch, da sie zu negativen Kopplungsquadraten α führen. Insgesamt ergibt sich das in der folgenden Tabelle wiedergegebene Bild der physikalisch relevanten Fixhyperbenen, die im nächsten Abschnitt als Parameter in die nichttrivialen Lösungen eingehen werden:

Attraktivität	Fixebene	Eigenfunktion
IR-attraktiv	$i, j = 1, \dots, n: \alpha_i = \frac{b_j}{b_i} \alpha_j,$	$-b_i \alpha_i - b_j \alpha_j$
IR-repulsiv	$i, j = n+1, \dots, N: \alpha_i = \frac{b_j}{b_i} \alpha_j,$	$-b_i \alpha_i - b_j \alpha_j$

Insbesondere das IR-attraktive Verhältnis von zwei asymptotisch nichtfreien Eichkopplungen wird bei der Auswertung der nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten in den konkreten Anwendungen von Nutzen sein.

Mit Hilfe der Charakteristiken für die sich hieraus ergebenden Fixgeraden

$$C_{ij}^\alpha(\alpha_i, \alpha_j) = (\bar{I}_i^\alpha)^{-1} I_{ij}^\alpha (\bar{I}_j^\alpha)^{-1} = \frac{1}{b_i \alpha_i} - \frac{1}{b_j \alpha_j} \quad (7.9)$$

folgen aus (6.32) und (6.33) des letzten Kapitels relative Attraktivitätskoeffizienten von $+1$ im attraktiven und -1 im repulsiven Fall.

7.2 Eine Yukawa- und N Eichkopplungen

In diesem Abschnitt werden die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten für eine Yukawakopplung und eine beliebige Zahl von Eichkopplungen exakt bestimmt. Wie sich herausstellen wird, gehen neben den im letzten Abschnitt bestimmten Fixhyperebenen die Attraktivitätskoeffizienten, die die Yukawakopplung mit jeweils einer der Eichkopplungen bildet, als Parameter in die Fixmannigfaltigkeit ein. Die Schnitte dieser einfachen Fixstrukturen mit dem nichttrivialen Fall ergeben die Fixuntermannigfaltigkeiten und teilen die Fixmannigfaltigkeiten wiederum in Sektoren, von denen einer die physikalischen Gegebenheiten wiedergeben wird. Aus diesem Grund werden diese Koeffizienten und die Fixgeraden in einem ersten Schritt bestimmt.

In der durch $I = 0$ beschriebenen Fixmannigfaltigkeit wird für die quadrierte Yukawakopplung $y = Y^2/4\pi$ ein möglichst einfacher Ansatz gewählt: $I = 1 - y F^{-1}(\alpha)$. Dadurch sind die Koeffizienten γ_i der anomalen Dimension γ dieser Invarianten in der Bestimmungsgleichung $\mathcal{R}I = I \sum_i \gamma_i x_i$ festgelegt, und die Differentialgleichung geht in eine symmetrische Form für die Eichkopplungen über (7.22). Für diese Gleichung wird in dieser Arbeit gezeigt, daß ein Spezialfall der hypergeometrischen Differentialgleichungen existiert, der sich mit dieser Gleichung identifizieren läßt, womit zwei aus der Literatur bekannten Lösungen übernommen werden können. Eine weitere, für die physikalische Anwendung entscheidende Lösung, wird in den nachfolgenden Betrachtungen bestimmt. Ein zusätzlicher homogener Term ist aufgrund der Skalierungsinvarianz ausgeschlossen. Damit ergeben sich als Endergebnis die in den Beziehungen (7.32), (7.33), (7.34) und (7.35) auf Seite 91 wiedergegebenen nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten.

Das vollständige Lösungssystem wird im Anschluß in Hinsicht auf die Einbettung der IR-attraktiven Fixuntermannigfaltigkeiten untersucht. Es stellt sich heraus, daß sie in zwei Klassen zerfallen: In die für diese Arbeit relevanten Fixmannigfaltigkeiten mit der am stärksten ausgeprägten IR-Attraktivität und solche, die im UV auf asymptotisch freie Yukawakopplungen führen und als Zimmermann-artig klassifiziert werden.

Der reine Eichsektor des letzten Abschnitts 7.1 wird nun um eine Yukawakopplung $y := Y^2/4\pi$ erweitert, so daß die zu untersuchenden RGG dem folgenden System entsprechen:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= -b_i \alpha_i^2, & \frac{dy}{dt} &= ay^2 - \Delta y, \\ i = 1, \dots, N, & & \Delta &:= \sum_{i=1}^N \chi_i \alpha_i, \end{aligned} \quad (7.10)$$

was auf die Koeffizientenmatrix

$$c = \left(\begin{array}{cccc|c} -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & & -b_N & 0 \\ \hline -\chi_1 & -\chi_2 & \cdots & -\chi_N & a \end{array} \right) \quad (7.11)$$

führt. Die Koeffizienten χ_i und a ergeben sich aus den allgemeinen RGG für die Yukawakopplungen (3.20) für eine nichtabelsche und eine abelsche Wechselwirkung zu:

$$\begin{aligned} \chi_i &= 6a_2 c_F^{(i)} + 4e_2 c_S^{(i)} > 0, \\ \chi_{i, \text{abelsch}} &= 6a_2 \sum' Q_F^{(i)2} + e_2 \sum' Q_S^{(i)2} > 0, \\ a &= a_1 N_F + 2N_F \Big|_{\text{Spur}} > 0, \end{aligned} \quad (7.12)$$

wobei wie im vorhergehenden Abschnitt o. B. d. A. auf eine GUT-Normierung der abelschen Anteile verzichtet wurde. \sum' steht für die Summation über die Felder, die über die zugehörige Yukawakopplung wechselwirken. Die Konstanten a_1 , a_2 und e_2 werden im nichtsupersymmetrischen und supersymmetrischen Fall entsprechend der Tabelle 1, Seite 38, gesetzt. Die Dimensionen N_F der Darstellungen der Fermionen beinhaltet die Summation über alle nichtabelschen Wechselwirkungen der jeweiligen Yukawakopplung entsprechend den Termen in (3.20).

Die Invarianten der RGG werden somit durch

$$\mathcal{R}I(\alpha, y) = - \sum_i b_i \alpha_i^2 \frac{\partial I}{\partial \alpha_i} + y(ay - \Delta) \frac{\partial I}{\partial y} = I(\alpha, y) \left(\sum_i \gamma_i \alpha_i + \gamma_y y \right) \quad (7.13)$$

beschrieben. Zusätzliche nichttriviale Fixhyperebenen existieren nicht, womit an weiteren ebenen Fixlösungen nur noch die Fixgeraden zu bestimmen sind. Die Eichkopplungen nehmen in diesem Fall entweder den Wert Null an oder stehen mit einer nichtverschwindenden Eichkopplung $\alpha_i \neq 0$ gemäß des letzten Abschnitts dem Verhältnis:

$$\forall j \neq i: \quad \alpha_j = 0 \vee \alpha_j = \frac{b_i}{b_j} \alpha_i.$$

Die Koeffizientenmatrix reduziert sich dann zu:

$$c = \left(\begin{array}{cc|c} & -b_i & 0 \\ -b_i & \sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) & a \end{array} \right),$$

wobei die Größen

$$\eta_i := \frac{\chi_i}{b_i} - 1 \quad (7.14)$$

eingeführt wurden. Entsprechend den in Abschnitt 6.3 durchgeführten allgemeinen Untersuchungen, lassen sich die drei Fixmannigfaltigkeiten und die zugehörigen anomalen Dimensionen dieses System unmittelbar notieren:

$$\begin{aligned} I_1 &= \alpha_i, & \gamma_1 &= -b_i\alpha_i, \\ I_2 &= y - \left(\sum_{b_j\alpha_j=b_i\alpha_i} (\eta_j + 1) - 1 \right) \frac{b_i\alpha_i}{a}, & \gamma_2 &= ay - b_i\alpha_i, \\ I_3 &= y, & \gamma_3 &= ay - b_i\alpha_i \sum_{b_j\alpha_j=b_i\alpha_i} (\eta_j + 1). \end{aligned}$$

Das Übersetzen dieser Fixlinien in die Fixpunkte der folgenden Kopplungsverhältnisse führt nach dem Schema (6.32) und (6.33), Seite 74, auf die entsprechenden Attraktivitätskoeffizienten:

$$\rho_{y,i} = \rho_{y,i}^{fix} : \quad \eta = \sum_{b_j\alpha_j=b_i\alpha_i} (\eta_j + 1) - 1, \quad (7.15)$$

$$\rho_{y,i} = 0 : \quad \bar{\eta} = -\eta, \quad (7.16)$$

$$\text{mit } \rho_{y,i} := \frac{y}{\alpha_i}, \quad \rho_{y,i}^{fix} := \frac{b_i}{a}\eta. \quad (7.17)$$

Ist die Fixlösung $\rho_{y,i} = \rho_{y,i}^{fix}$ IR-attraktiv ($\eta > 0$), so ist $\rho_{y,i} = 0$ IR-repulsiv und umgekehrt. Die Fixpunkte mit mehr als einer nichtverschwindenden Eichkopplung und deren Attraktivitätskoeffizienten ergeben sich additiv aus denen, die durch Nullsetzen aller Eichkopplungen mit Ausnahme von α_i entstehen. Die Koeffizienten η_i beschreiben die Attraktivität dieser Fixlösungen:

$$\rho_{y,i} = \rho_{y,i}^* := \frac{b_i}{a}\eta_i = \frac{\chi_i - b_i}{a}. \quad (7.18)$$

Die im weiteren bestimmten nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten werden sich vollständig durch die Parameter $\rho_{y,i}^*$ und η_i für eine feste Eichkopplung α_i charakterisieren lassen.

Nicht alle dieser Fixlinien bzw. Fixpunkte sind physikalisch realisierbar, da sie unter Umständen negativen Kopplungsquadraten entsprechen. So müssen die nichtverschwindenden Eichkopplungen entweder alle asymptotisch frei oder alle nichtfrei sein. Für den Attraktivitätskoeffizienten η_i des Fixpunktes $\rho_{y,i}^*$ gilt ($\chi_i > 0$) jeweils:

$$b_i > 0 \Rightarrow \eta_i > -1 \quad \text{bzw.} \quad b_i < 0 \Rightarrow \eta_i < -1, \quad (7.19)$$

womit der zugehörige Fixpunkt für eine asymptotisch nichtfreie Eichkopplung α_i immer physikalisch und IR-repulsiv ist:

$$b_i < 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_i < -1 \quad \Rightarrow \quad \rho_{y,i}^* = \frac{b_i}{a} \eta_i > 0,$$

während für eine asymptotisch freie Kopplung der Fixpunkt nur physikalisch ist, wenn er auch IR-attraktiv ist ($\eta_i > 0$):

$$\rho_{y,i}^* = \frac{b_i}{a} \eta_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_i > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \chi_i > b_i > 0.$$

Unphysikalische Fixpunkte $\rho_{y,i}^* < 0$ ergeben sich somit nur für asymptotisch freie Eichkopplungen, die schwach IR-repulsiv sind ($-1 < \eta_i < 0$). Dies ist im SM für die schwache Wechselwirkung mit der Top-Yukawakopplung der Fall.

Für die Fixpunkte $\rho_{y,i}^{fix} > 0$, die nicht in den kartesischen Fixhyperebenen liegen, gilt dasselbe. Die nichtverschwindenden Eichkopplungen sind entweder alle asymptotisch nichtfrei, was wegen $\eta < -1$ und

$$\rho_{y,i}^{fix} = \frac{b_i}{a} \left(\sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) - 1 \right) > -\frac{b_i}{a} > 0$$

immer physikalische und IR-repulsive Fixpunkte impliziert oder sind alle asymptotisch frei, was nur dann zu physikalischen Ergebnissen führen kann, wenn

$$\sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) > 1$$

gilt. Dies ist nur erfüllt, wenn der Anteil an schwach repulsiven Attraktivitätskoeffizienten so gering ist, daß der Fixpunkt insgesamt noch IR-attraktiv ist. Die physikalisch denkbaren Fixgeraden und ihre Attraktivitätskoeffizienten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Attraktivität	Fixgerade	Attraktivitätskoeffizient
IR-attraktiv	$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0, j > n :$ $\alpha_j = 0 \vee \alpha_j = \frac{b_i}{b_j} \alpha_i \neq 0,$	
&	$\sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) > 1 :$	
physikalisch	$y = \left(\sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) - 1 \right) \frac{b_i \alpha_i}{a},$	$\eta = \sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) - 1 > 0$
IR-repulsiv	$\alpha_{n+1} = \dots = \alpha_N = 0, j \leq n :$	
&	$\alpha_j = 0 \vee \alpha_j = \frac{b_i}{b_j} \alpha_i \neq 0 :$	
physikalisch	$y = \left(\sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) - 1 \right) \frac{b_i \alpha_i}{a},$	$\eta = \sum_{b_j \alpha_j = b_i \alpha_i} (\eta_j + 1) - 1 < 0$

Da keine weiteren Fixhyperebenen existieren, können sich diese Fixgeraden nicht als Schnitte zweier ebener Fixlösungen ergeben und sind somit Bestandteile der nichtrivialen Fixmannigfaltigkeiten.

Um diese zu bestimmen, wird für die Beziehung (7.13)

$$\mathcal{R}I = \sum_{i,j=1}^{N+1} x_i c_{ij} x_j \frac{\partial I}{\partial x_i} = I \sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i x_i,$$

$$x_i := -b_i \alpha_i, \quad x_{N+1} := \frac{a}{1 - \delta_\alpha} y, \quad \delta_\alpha := \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)$$

mit der Koeffizientenmatrix c (7.11) für die skalierten unabhängigen Variablen x_i

$$c = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 & 0 \\ \hline \eta_1 + 1 & \eta_2 + 1 & \cdots & \eta_N + 1 & 1 - \delta_\alpha \end{array} \right)$$

der Ansatz

$$I = 1 - x_{N+1} F(x_1, \dots, x_N)$$

gewählt, was wiederum $\mathcal{S}I = I$ erfüllen soll. Dies überträgt sich auf die Funktion

$F(x_1, \dots, x_N)$ in Form von

$$\mathcal{S}F = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = -F, \quad (7.20)$$

die wegen (7.13)

$$x_{N+1} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N+1} x_i c_{ij} x_j \frac{\partial F}{\partial x_i} + x_{N+1} F \sum_{i=1}^{N+1} c_{(N+1)i} x_i = (1 - x_{N+1} F) \sum_{i=1}^{N+1} \gamma_i x_i$$

erfüllt. Diese Gleichung muß für alle Potenzen von x_{N+1} separat gültig sein:

$$\begin{aligned} x_{N+1}^0 : \quad & \sum_{i=1}^N \gamma_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall i \in \{1, \dots, N\} : \gamma_i = 0, \\ x_{N+1}^2 : \quad & \sum_{i=1}^N x_i c_{i(N+1)} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 = (\gamma_{N+1} - c_{(N+1)(N+1)}) F \\ & \Rightarrow \quad \gamma_{N+1} = c_{(N+1)(N+1)} \\ x_{N+1}^1 : \quad & \sum_{i,j=1}^N x_i c_{ij} x_j \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\gamma_{N+1} - F \sum_{i=1}^N c_{(N+1)i} x_i. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Mit Hilfe von (7.20), (7.21), (7.11) und den Größen $z_i := 1 - x_i$ folgt:

$$\sum_{i=1}^N z_i (1 - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1) - 1 - \left(\sum_{i=1}^N (\eta_i + 1) - 1 - \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1) z_i \right) F. \quad (7.22)$$

Das Lösen dieser partiellen Differentialgleichung ist im Rahmen dieser Arbeit dadurch gelungen, daß gezeigt werden konnte, daß das System der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welches die *Lauricella-Funktionen* vierter Art F_D (vgl. hierzu und zu allen weiteren Angaben dieser Funktionen Anhang F und die dort angegebene Literatur) bestimmt, in einem Spezialfall in die Gleichung (7.22) übergeht (vgl. Anhang F, (F.26)). Diese Funktionen sind eine Verallgemeinerung der hypergeometrischen Funktion auf mehrere Parameter $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \gamma$ und Variablen z_1, z_2, \dots . Sie sind für zwei Variablen mit der *Funktion von Appell* erster Art und für eine Variable mit der *Gaussfunktion* identisch und erfüllen im allgemeinen das Gleichungssystem:

$$\forall i : (1 - z_i) \sum_j z_j \frac{\partial^2 F}{\partial z_i \partial z_j} - \beta_i \sum_j z_j \frac{\partial F}{\partial z_j} + (\gamma - (\alpha + 1) z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} = \alpha \beta_i F. \quad (7.23)$$

Für mehr als zwei Variablen ist es bisher nicht gelungen ein geschlossenes System von Lösungen anzugeben. Jedoch existieren für eine beliebige Zahl von n

Variablen immer zwei Lösungen von (7.23), die sich mit Hilfe der Funktion

$$F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| z_1, \dots, z_n \right) \\ = \sum \frac{(\alpha, m_1 + \dots + m_n)(\beta_1, m_1) \dots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \dots + m_n)} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!}$$

darstellen lassen. Sie unterscheiden sich dadurch, daß sie entweder in $(0, \dots, 0)$ oder in $(1, \dots, 1)$ schwach singular sind. Wie sich zeigen wird, ist die Reduktion der N Eichkopplungen auf $N - 1$ Eichkopplungsverhältnisse immer möglich, womit sich das Lösungssystem für bis zu drei Eichkopplungen vollständig angeben läßt. Für vier und mehr Wechselwirkungen geben die im folgenden bestimmten Lösungen alle verlangten Eigenschaften wieder.

Die Lösungen von (7.23) erfüllen für $\alpha = 1$ zusätzlich die Differentialgleichung (zum Beweis vgl. Anhang F):

$$\sum_i z_i(1 - z_i) \frac{\partial F}{\partial z_i} = \gamma - 1 - \left(\gamma - 1 - \sum_i \beta_i z_i \right) F, \quad (7.24)$$

was für die Setzungen $\beta_i = \eta_i + 1$ und $\gamma = \delta_\alpha = \sum(\eta + 1)$ mit (7.22) identisch ist. Damit lassen sich zum einen zwei, in der Literatur dokumentierten speziellen Lösungen angeben:

$$F = R^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| x_1, \dots, x_N \right), \quad (7.25)$$

$$F = (1 - \delta_\alpha) F_D^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1; 2 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| x_1, \dots, x_N \right), \quad (7.26)$$

wobei im ersten Fall ein weiterer, hier vorliegender Sonderfall der Lauricella-Funktionen im Form von $\gamma = \sum \beta$ ausgenutzt wurde, der auf die *Funktion R von Carlson* (F.27) führt. Diese ist in diesem Fall homogen vom Grad -1 . Zum anderen konnte in dieser besonderen Situation eine dritte, für beliebiges N gültige Lösungsschar bestimmt werden (o. B. d. A. wird hier die erste Eichkopplung ausgezeichnet):

$$F = \frac{\delta_\alpha - 1}{\eta_1} R^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 - \delta_\alpha, \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| x_1, x_1 - x_2, \dots, x_1 - x_N \right). \quad (7.27)$$

Daß dies tatsächlich eine Lösung von (7.22) ist, wird durch Einsetzen in (7.27) verifiziert:

$$z_1(1 - z_1) \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial z_i} - \sum_{i=2}^N (z_1 - z_i + 1)(z_i - z_1) \frac{\partial F}{\partial z_i}$$

$$\begin{aligned}
&= z_1(1-z_1)\frac{\partial F}{\partial z_1} - \sum_{i=2}^N z_i(1-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i} + 2z_1 \sum_{i=2}^N (1-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i} \\
&= -\sum_{i=1}^N z_i(1-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i} + 2z_1 \sum_{i=1}^N (1-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i} \quad \Big| \quad (F.28) \\
&= -\sum_{i=1}^N z_i(1-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i} + 2z_1 F \\
&= 1 - \delta_\alpha - \left[-\eta_1 - (2 - \delta_\alpha)z_1 - \sum_{i=2}^N (\eta_i + 1)(z_1 - z_i + 1) \right] F \\
&= 1 - \delta_\alpha - \left(1 - \delta_\alpha - 2z_1 + \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)z_i \right) F \\
\Leftrightarrow \quad &\sum_{i=1}^N z_i(1-z_i)\frac{\partial F}{\partial z_i} = \delta_\alpha - 1 - \left(\delta_\alpha - 1 - \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)z_i \right) F.
\end{aligned}$$

Diese Lösung bildet, wie später noch näher erläutert wird, einen Sektor der Mannigfaltigkeit. Die gesamte Fixlösung ist entweder durch die ersten n asymptotisch nichtfreien oder durch die $(N - n)$ asymptotisch freien Eichkopplungen gegeben. In jedem Sektor ist jeweils eine Eichkopplung, bzw. ihr Landau-Pol hervorgehoben.

Zu jeder, der insgesamt vier speziellen Lösungen kann die allgemeine Lösung $(I^\alpha)^{-1}$ des homogenen Problems von (7.22)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N z_i(1-z_i)\frac{\partial (I^\alpha)^{-1}}{\partial z_i} &= - \left(\delta_\alpha - 1 - \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)z_i \right) (I^\alpha)^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^N x_i^2 \frac{\partial I^\alpha}{\partial x_i} &= I^\alpha \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)x_i \quad (7.28)
\end{aligned}$$

hinzuaddiert werden:

$$(I^\alpha(x))^{-1} = \text{const.} \prod_{i=1}^N x_i^{-\eta_i-1}.$$

Zwar wurde die Skalierungsinvarianz (7.20) von F für die Herleitung von (7.22) verwendet, was sich jedoch nicht automatisch auf die vier Lösungen überträgt ($\mathcal{S}F = -F$ muß noch gefordert werden). Die Skalierungsinvarianz ist unmittelbar dadurch gegeben, daß sich die speziellen Lösungen (7.25) und (7.27) durch die Carlson Funktion ausdrücken lassen (vgl. (F.28)). Es können allenfalls skalierungsinvariante homogene Lösung addiert werden, was für $\mathcal{S}I^\alpha = \delta_\alpha I^\alpha \neq I^\alpha$ nicht möglich ist. Für $\delta_\alpha = 1$ wird (7.22) homogen mit der Lösung $F \propto \prod \alpha^{-\eta-1}$,

was für physikalische Parameter nicht verwirklicht ist. Die Lösungen (7.25) und (7.27) stellen deshalb die Fixmannigfaltigkeiten dar.

Die spezielle Lösung (7.26) ist nicht skalierungsinvariant, denn sie erfüllt aufgrund der *verwandtschaftlichen Beziehung* (F.14):

$$\mathcal{S}F = -F + F \Big|_{\gamma \rightarrow \gamma-1} = -F + \prod_{i=1}^N z_i^{-\eta_i-1}.$$

Der homogene Teil der allgemeinen Lösung $F \rightarrow F + \text{const.} (I^\alpha)^{-1}$ muß so eingeschränkt werden, daß die Skalierungssymmetrie erfüllt ist, was von

$$F = \frac{1 - \delta_\alpha}{s} F_D^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1; 2 \\ \eta_1 + 1, \dots \end{array} \middle| \frac{x_1}{s}, \dots \right) - \frac{1}{s} \prod_{i=1}^N \left(-\frac{x_i}{s} \right)^{-\eta_i-1} R^{(N)} \left(\begin{array}{c} \delta_\alpha - 1 \\ \eta_1 + 1, \dots \end{array} \middle| 1 - \frac{s}{x_1}, \dots \right) \quad (7.29)$$

mit einem beliebigen Skalierungsparameter s geleistet wird. Für zwei Eichkopplungen reduziert sich diese Lösung mit Hilfe der Wahl $s = x_1$ für $\eta_1 < 0$ (für $n = 0$ konvergiert die Lösung in keinem der Fixpunkte des Eichsektors) zusammen mit (F.11), (F.33) und (F.31) auf die schon bekannte Lösung (7.27). Für mehr als zwei Eichkopplungen sind Verallgemeinerungen der Transformationen (F.31) nicht bekannt. Die Summanden der Lösung (7.29) sind jedoch in dieser Form in jedem Fall nicht wohldefiniert. Da der Konvergenzradius der ersten Lauricella-Funktion auf $|x_i/s| < 1$ beschränkt ist, kann für die zweite s nicht so gewählt werden, daß für alle i gleichzeitig $|s/x_i| < 1$ erfüllt ist¹⁰. Aus diesen Gründen wird (7.29) im folgenden nicht weiter diskutiert.

Insgesamt ergeben sich somit zwei Mannigfaltigkeiten aus $I = 0$:

$$\frac{s}{y} = \frac{a}{1 - \delta_\alpha} R^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \frac{x_1}{s}, \dots, \frac{x_N}{s} \right), \quad (7.30)$$

$$\frac{s}{y} = -\frac{a}{\eta_1} R^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 - \delta_\alpha, \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \frac{x_1}{s}, \frac{x_1}{s} - \frac{x_2}{s}, \dots, \frac{x_1}{s} - \frac{x_N}{s} \right). \quad (7.31)$$

Der Parameter s ist beliebig, was bei der graphischen Darstellung ausgenutzt werden kann. Üblicherweise werden z.B. im Standardmodell $s = \alpha_3$ oder $s = \alpha_1 + \alpha_3$ gewählt [21].

O. B. d. A. ist im zweiten Fall die erste Eichkopplung hervorgehoben. Diese Lösung führt, wenn der Fixpunkt $\rho_{y,1}$ IR-attraktiv ist ($\eta_1 > 0$), auf physikalische Yukawakopplungen ($y > 0$), während dies für die erste nur gilt, wenn

¹⁰Für Argumente gleich eins sind die Lauricella-Funktionen unter Umständen schwach singular.

$\delta_\alpha = \sum(\eta + 1) > 1$ erfüllt ist. Die zweite Lösung (7.31) ist dann wohldefiniert, wenn $b_i\alpha_i/b_1\alpha_1 < 1$ ist, was bedeutet, daß der Landau-Pol \tilde{t}_1 der kleinste der asymptotisch nichtfreien bzw. der größte der asymptotisch freien Eichkopplungen ist.

Die möglichen nichttrivialen und physikalischen Fixlösungen werden im folgenden zusammengefaßt, nachdem mit Hilfe von (F.6) die Ordnung der Lauricella-Funktionen um eins reduziert wurde, wobei der Parameter s herausfällt¹¹:

(R') $n = 0, \quad \delta_\alpha > 1 :$

$$\frac{\alpha_N}{y} = \frac{a/b_N}{\delta_\alpha - 1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; \delta_\alpha \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b_1\alpha_1}{b_N\alpha_N}, \dots, 1 - \frac{b_{N-1}\alpha_{N-1}}{b_N\alpha_N} \right) \quad (7.32)$$

(Z') $n = N :$

$$\frac{\alpha_N}{y} = \frac{a/b_N}{\delta_\alpha - 1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; \delta_\alpha \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1 \end{matrix} \middle| 1 - \frac{b_1\alpha_1}{b_N\alpha_N}, \dots, 1 - \frac{b_{N-1}\alpha_{N-1}}{b_N\alpha_N} \right) \quad (7.33)$$

(R) $0 < n \leq N : n$ Sektoren $i \leq n$ jeweils für $b_i\alpha_i \leq b_1\alpha_1, \dots, b_n\alpha_n$

$$\frac{\alpha_i}{y} = \frac{a}{b_i\eta_i} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_i \\ \{\dots, \eta + 1, \dots\} / \{\eta_i + 1\} \end{matrix} \middle| \frac{b_1\alpha_1}{b_i\alpha_i}, \dots, \frac{b_N\alpha_N}{b_i\alpha_i} \right) \quad (7.34)$$

(Z) $0 \leq n < N : N - n$ Sektoren $i > n$ jeweils für $b_i\alpha_i \geq b_{n+1}\alpha_{n+1}, \dots, b_N\alpha_N$

$$\frac{\alpha_i}{y} = \frac{a}{b_i\eta_i} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_i \\ \{\dots, \eta + 1, \dots\} / \{\eta_i + 1\} \end{matrix} \middle| \frac{b_1\alpha_1}{b_i\alpha_i}, \dots, \frac{b_N\alpha_N}{b_i\alpha_i} \right) \quad (7.35)$$

¹¹Die Auszeichnung der Eichkopplung α_N in der aus (7.30) hervorgehenden Beziehung ist nur scheinbar. Mit (F.6) kann sie durch jede andere ersetzt werden.

Diese Lösungen zeichnen sich durch die folgenden Eigenschaften aus, wobei Fixmannigfaltigkeiten, die im UV auf asymptotisch freie Yukawakopplungen führen, entsprechend des Programms der Reduktion der Kopplungen (vgl. Abschnitt 5.2) als *Zimmermann-artig* (Z) und im anderen Fall als *regulär* (R) bezeichnet werden:

- **(R')**: Alle Fixlösungen des reinen Eichsektors sind in diesem Fall physikalisch und IR-repulsiv. Die nichtverschwindenden Fixgeraden, die die Eichkopplungen mit der Yukawakopplung eingehen, sind genau dann physikalisch, wenn sie auch IR-attraktiv wirken. Diese liegen alle in der nichttrivialen Fixmannigfaltigkeit, was sich am einfachsten an (7.30) ablesen läßt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{a}{1 - \delta_\alpha} F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 1; \sum (\eta + 1) \\ \sum_{\alpha=0} (\eta + 1), \sum_{b\alpha=b_i\alpha_i} (\eta + 1) \end{array} \middle| 1, 1 + b_i\alpha_i \right) \\ &= \frac{1}{\sum_{b\alpha=b_i\alpha_i} (\eta + 1) - 1} \frac{a}{b_i\alpha_i}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Die nichttrivialen und unphysikalischen Fixgeraden werden nicht erreicht. Stattdessen verschwinden die Yukawakopplungen identisch. Im UV strebt die Fixlösung gegen

$$b_1\alpha_1 = \dots = b_N\alpha_N, \quad y = \frac{a}{\delta_\alpha - 1} b_N\alpha_N$$

und ist somit regulär. Dagegen strebt die Lösung im IR, wenn z.B. der Landau-Pol \tilde{t}_N zuerst erreicht wird, entweder gegen $y \rightarrow \frac{b_N\eta_N}{a}\alpha_N$, falls dies physikalisch ist, oder gegen $y \rightarrow 0$.

- **(Z')**: In diesem Fall sind alle Fixgeraden des reinen Eichsektors physikalisch und IR-attraktiv, während die Fixgeraden mit $y \neq 0$ sämtlich physikalisch sind, jedoch bezüglich der Yukawakopplung IR-repulsiv. Diese Fixgeraden sind nicht in dieser Fixmannigfaltigkeit eingebettet, was sich ähnlich wie in (7.36) zeigen läßt, wobei berücksichtigt werden muß, daß die Funktion nur dann für $x_i = 1$ konvergiert, wenn $\gamma > \beta_i + 1$ gilt (vgl. Anhang F, (F.11)). Stattdessen verschwindet die Yukawakopplung dort identisch. Im IR ($b_1\alpha_1 = \dots = b_N\alpha_N$) verhält sich die Lösung wie $y \rightarrow \frac{\delta_\alpha - 1}{a} b_N\alpha_N$ bzw. führt im UV auf asymptotisch freie Yukawakopplungen, weswegen diese Lösung als Zimmermann-artig charakterisiert wird.
- **(R)**: Die stark IR-repulsiven ($\eta < -1$), physikalischen und nichttrivialen Fixgeraden liegen in diesem Fall immer in der Fixmannigfaltigkeit, was für die IR-attraktiven nur dann gilt, wenn sie in einem Sektor, der durch den Landau-Pol der i -ten Eichkopplung dominiert ist, die Ungleichung

$$-\eta_i > \sum_{b>0, b_j\alpha_j=b\alpha} (\eta_j + 1) > 1 \quad (7.37)$$

erfüllt, wodurch unter Umständen nicht alle nichttrivialen Fixgeraden sich als Schnitte dieser Fixmannigfaltigkeit mit den Fixhyperebenen ergeben. Ist dies der Fall, so muß noch eine weitere nichttriviale Fixmannigfaltigkeit existieren, eine Lücke, die von **(Z)** geschlossen wird. Die IR-attraktiven ($\eta > 0$), physikalischen und nichttrivialen Fixgeraden liegen in der Fixmannigfaltigkeit **(R)**. Im IR, wenn z.B. die N -te Eichkopplung singulär wird, strebt die Yukawakopplung, falls das Fixverhältnis $y = \frac{b_N \eta_N}{a} \alpha_N < 0$ unphysikalisch ist, gegen Unendlich, was mit (F.5) folgt oder erfüllt im physikalischen Fall gerade wegen (F.6):

$$\frac{y}{\alpha_N} \rightarrow \frac{\eta_i b_i \alpha_i}{a \alpha_N} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_i \alpha_i} \right) F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_i \\ -\eta_i - \eta_N \end{matrix} \middle| 1 \right)^{-1} \rightarrow \frac{\eta_i b_N \eta_N}{a \eta_i} = \frac{b_N \eta_N}{a}.$$

Für den UV ($\alpha_i \rightarrow \infty$) gilt dagegen $y \rightarrow \frac{b_i \eta_i}{a} \alpha_i$, was einer regulären Lösung entspricht.

- **(Z)**: Bei dieser Mannigfaltigkeit wird die Rolle der Landau-Pole des UV von denen des IR übernommen, was in gewisser Weise einen Tausch bei der Einbettung der Fixgeraden bedeutet. Die IR-repulsiven, mit $\eta < -1$, physikalischen und nichttrivialen Fixgeraden liegen genau dann in der Fixlösung, wenn sie im Sektor der i -ten Eichkopplung der folgenden Ungleichung genügen:

$$\eta_i < - \sum_{b < 0, b_j \alpha_j = b \alpha} (\eta_j + 1).$$

Anderenfalls werden die nichttrivialen Fixlinien nicht erreicht, stattdessen wird die Yukawakopplung asymptotisch frei. Die attraktiven, physikalischen und nichttrivialen Fixgeraden sind wie bei **(R)** Untermannigfaltigkeiten der hier betrachteten Fixmannigfaltigkeit. Im IR ist das Verhalten mit **(R)** identisch, während im UV die Yukawakopplung verschwindet, was die Kennzeichnung rechtfertigt.

Die nichttriviale N -dimensionale Fixmannigfaltigkeit besteht somit aus einem regulären und einem Zimmermann-artigen Anteil, deren Untermannigfaltigkeiten sich als Schnitte mit den zuvor bestimmten Fixhyperebenen ergeben. Praktisch bedeutet dies, daß die Argumente der unterschiedlichen Lösungen Null oder Eins werden, womit sich die Ordnung der Lauricella-Funktionen im ersten Fall trivial und im zweiten unter bestimmten Randbedingungen (vgl. Anhang F) um eins reduziert, was sich sukzessiv bis zum Fixpunkt im Ursprung fortsetzen läßt.

Damit sind alle Fixgeraden, die unabhängig von der Kenntnis der höherdimensionalen Fixmannigfaltigkeiten bestimmt werden konnten, verstanden und es gibt keinen unmittelbaren Hinweis auf unbekannte Fixmannigfaltigkeiten. Diese könnten für mehr als drei Eichkopplungen zwar durchaus existieren, da das vollständige System der Lösungen in diesem Fall aus der mathematischen Literatur nicht

bekannt ist; derartige zusätzliche Lösungen scheinen jedoch als folgenden Gründen unwahrscheinlich: in dem zuvor bestimmten Satz von Lösungen dominiert jeder Landau-Pol bzw. die unendlichen Impulsskalen für $n = 0$ und $n = N$ genau einen Sektor. Für diesen Teil des Parameterraums können die Lösungen mit Abstrichen direkt durch Integration über die Impulsskala t bestimmt werden (vgl. Anhang E), wobei die Fixmannigfaltigkeiten nur unvollständig durch Randbedingungen des UV bzw. IR charakterisierbar sind: Die homogenen Lösungen werden hierbei nicht fixiert.

Die Sektoren der Mannigfaltigkeit (\mathbf{R}) gehen stetig differenzierbar ineinander über, wie ausführlich in Anhang E gezeigt wird. Allerdings sind die Lösungen an den Grenzen ihrer Sektoren nicht beliebig oft differenzierbar. Für zwei aneinander grenzende Sektoren

$$f\left(x := \frac{b_1\alpha_1}{b_2\alpha_2}\right) := \frac{\rho_{y,2}^*}{\rho_{y,2}} = \begin{cases} x > 1 : & \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{1}{x} F_D^{(1)}\left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_1 \\ \eta_2+1 \end{matrix} \middle| \frac{1}{x}\right) \\ x < 1 : & F_D^{(1)}\left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_2 \\ \eta_1+1 \end{matrix} \middle| x\right) \end{cases},$$

wobei zur Vereinfachung alle anderen Eichkopplungen als in einer Fixhyperebene liegend angenommen werden, also $\eta_{1,2} + 1$ auch für die Summe von Attraktivitätskoeffizienten stehen kann. Die k -fache Differentiation und Grenzwertbildung an der Stelle $x \rightarrow 1^\pm$ ergibt mit Hilfe von (F.16) und (F.11), daß $f(x)$ an der Stelle $x = 1$ maximal $[-\eta_1 - \eta_2 - 1]_G$ -fach stetig differenzierbar ist. Die eckigen Klammern stehen hierbei für die Gaussklammern. Dies hat mehrere Konsequenzen:

- Die Mannigfaltigkeiten sind nicht beliebig glatt. Spätestens in der Ordnung $[-\eta_1 - \eta_2]_G$ wird die Differentiation unstetig. Im nächsten Kapitel werden die möglichen Wertebereiche der Attraktivitätskoeffizienten stark eingeschränkt.
- Der Übergang zwischen zwei Sektoren mit repulsiven Attraktivitätskoeffizienten $\eta_{1,2} \leq 0$ ist immer stetig, was sich insbesondere auf die Mannigfaltigkeit (\mathbf{R}) überträgt. Die Koeffizienten im Fall von (\mathbf{R}) führen aufgrund ihrer starken Repulsivität $\eta_{1,2} < -1$ zu einer mindestens einmal stetig differenzierbaren Mannigfaltigkeit, was sich mit dem Umstand deckt, daß die Fixebene $b_1\alpha_1 = b_2\alpha_2$ hier eine IR-attraktive physikalische Fixebene ist: Das Zusammenfallen der UV Landau-Pole wird bevorzugt.
- Entsprechend grenzen alle anderen Sektoren unstetig aneinander. In allen physikalischen Modellen, die im weiteren Verlauf dieser Arbeit untersucht werden, liegen die unstetigen Bereiche entweder im unphysikalischen Bereich oder die Zimmermann Lösung wird von einem einzigen Sektor aufgespannt.

Es existieren somit immer zwei Fixmannigfaltigkeiten, beide mit derselben Eigenfunktion $\gamma = ay > 0$, woraus sich ablesen läßt, daß beide IR-attraktiv sind. Um zu entscheiden, welche von beiden vom Renormierungsgruppenfluß bei der Evolution vom UV zum IR bevorzugt angestrebt wird, wird der Fall $0 < n < N$ betrachtet. Es genügt, einen Sektor mit einer einzelnen Eichkopplung α_i zu untersuchen, wobei dies nur Sinn macht, wenn die zugehörige nichttriviale Fixgerade physikalisch ist ($\eta_i < -1 \vee \eta_i > 0$). Ist sie attraktiv ($\eta_i > 0$), so sind die beiden sich ergebenden Untermannigfaltigkeiten, entsprechend den vorangegangenen Untersuchungen, identisch mit der Fixgeraden, was im übrigen für die später untersuchten Modelle im IR Grenzfall immer eintritt.

Unterschiedliches Verhalten der beiden Fixmannigfaltigkeiten ergibt sich im stark repulsiven Fall ($\eta_i < -1$). Die reguläre Mannigfaltigkeit reduziert sich auf:

$$I_R(\alpha_{\neq i} = 0) = 1 - \frac{a}{b_i \eta_i} \frac{y}{\alpha_i},$$

während im Zimmermann-artigen Fall für z.B. den von α_N dominierten Sektor die Invariante nicht konvergiert, wie mit (F.5) und (F.11) folgt:

$$\begin{aligned} I_Z(\alpha_{\neq i} = 0) &= 1 - \frac{a}{\eta_N} y \lim_{\alpha_N \rightarrow 0} \frac{1}{b_N \alpha_N} F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_N \\ \eta_i + 1 \end{matrix} \middle| \frac{b_i \alpha_i}{b_N \alpha_N} \right) \\ &= 1 - \frac{a}{\eta_N} y F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} -\eta_N; 1 - \eta_N \\ \eta_i + 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) \lim_{\alpha_N \rightarrow 0} \frac{1}{b_N \alpha_N} \left(1 - \frac{b_i \alpha_i}{b_N \alpha_N} \right)^{-\eta_i - 1} \\ &= \frac{a}{b_i \eta_i} \frac{y}{\alpha_i} \frac{\Gamma(-\eta_N) \Gamma(1 - \eta_i)}{\Gamma(-\eta_i - \eta_N)} \lim_{\alpha_N \rightarrow 0} \left(\frac{b_N \alpha_N}{b_i \alpha_i} \right)^{\eta_i}. \end{aligned}$$

Diese Möglichkeit ist somit mit der Invarianten $y = 0$ äquivalent:

$$I'_R = 1 - \frac{a}{b_i \eta_i} \frac{y}{\alpha_i}, \quad \gamma'_R = ay; \quad I'_Z = \frac{a}{b_i \eta_i} \frac{y}{\alpha_i}, \quad \gamma'_Z = ay - b_i \eta_i \alpha_i.$$

Diese System reproduziert mit den Invarianten α_i , $I'_R \alpha_i$ und $I'_Z \alpha_i$ den durch (6.3) beschriebenen Fall, womit sich die größere Attraktivität der Lösung (**R**) gegenüber (**Z**) ergibt.

Mit den Fixmannigfaltigkeiten (7.32), (7.33), (7.34) und (7.35) auf Seite 91 ist somit ohne Einschränkungen die gesamte Fixstruktur für eine Yukawakopplung und einer beliebigen Zahl von Eichkopplungen für ein allgemeines Modell mit Eichgruppe G bekannt.

7.2.1 Der Fall einer nichtgleitenden Eichkopplung

In den bisherigen Untersuchungen wurde der Fall einer zumindest in niedrigster Ordnung der Störungstheorie nichtgleitenden Eichkopplung $d\alpha/dt = 0$ bzw. $b = 0$ ausgelassen, da weder Fixgeraden existieren, für die diese Eichkopplung nicht verschwinden, noch sich Attraktivitätskoeffizienten einführen lassen. In einigen superstring-inspirierten Szenarien [99] wird dies z.B. für die starke Wechselwirkung für mittlere Skalenbereiche in Ein-Schleifen-Ordnung angenommen, weswegen an dieser Stelle kurz auf diese Möglichkeit eingegangen wird.

Für den Sektor der N -ten Eichkopplung einer der beiden Mannigfaltigkeiten ist im Falle $b_1 \rightarrow 0$ der folgende Grenzübergang zu bestimmen:

$$\frac{\alpha_N}{y} = \frac{a}{b_N \eta_N} \lim_{b_1 \rightarrow 0} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_N \\ \frac{\chi_1}{b_1}, \eta_2 + 1, \dots \end{array} \middle| \frac{b_1 \alpha_1}{b_N \alpha_N}, \frac{b_2 \alpha_2}{b_N \alpha_N}, \dots \right). \quad (7.38)$$

Dieser Limes entspricht genau dem Grenzübergang, der auf die sogenannte *konfluente Form* der Lauricella-Funktionen $\Phi_D^{(m,n)}$ führt (F.19). Unter Verwendung der Reihenentwicklung (F.1) ist dieser Grenzwert dem Übergang

$$\lim_{b_1 \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\chi_1}{b_1}, m_1 \right) \left(\frac{b_1 \alpha_1}{b_N \alpha_N} \right)^{m_1} \right] = \left(\frac{\chi_1 \alpha_1}{b_N \alpha_N} \right)^{m_1}$$

äquivalent¹². Insgesamt wird (7.38) damit zu:

$$\frac{\alpha_N}{y} = \frac{a}{b_N \eta_N} \Phi_D^{(N-1,1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_N \\ \eta_2 + 1, \dots \end{array} \middle| \frac{\chi_1 \alpha_1}{b_N \alpha_N}, \frac{b_2 \alpha_2}{b_N \alpha_N}, \dots \right). \quad (7.39)$$

Aufgrund des Ausnahmecharakters dieses Spezialfalles werden die Eigenschaften dieser Lösung nicht ausführlich diskutiert. Ein physikalisches Beispiel wird in Abschnitt 10.5 besprochen.

Als Beispiel für die Veränderungen, die durch das Nichtgleiten einer Eichkopplung entstehen, wird exemplarisch der Fall $\alpha_2 = \dots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \alpha_N = 0$ notiert, in dem die konfluente Lauricella Funktion mit der Kummer-Funktion ${}_1F_1$ identisch ist [117]:

$$\frac{\alpha_N}{y} = \frac{a}{b_N \eta_N} {}_1F_1 \left(1, 1 - \eta_N \middle| \frac{\chi_1 \alpha_1}{b_N \alpha_N} \right).$$

Für $\alpha_N \rightarrow \infty$ strebt die Yukawakopplung unverändert gegen die Fixgerade $y \rightarrow \frac{b_N \eta_N}{a} \alpha_N$, während für $\alpha_N \rightarrow 0$ der Fixpunkt $y \rightarrow \frac{\chi_N}{a} \alpha_N = \text{const.}$ erreicht wird.

¹² $(m, n) := \Gamma(m + n)/\Gamma(m)$ ist das sogenannte *Pochhammersymbol*.

7.2.2 Allgemeine Lösung und Bassin der Attraktion

Die allgemeine Lösung für beliebige Anfangswerte $(\alpha_1^{(0)}, \dots, \alpha_N^{(0)}, y^{(0)})$ läßt sich mit Hilfe der gewonnenen Fixmannigfaltigkeiten ausdrücken:

$$\frac{1}{y(\alpha)} - \frac{1}{y^*(\alpha)} = \left(\frac{1}{y(\alpha^{(0)})} - \frac{1}{y^*(\alpha^{(0)})} \right) \prod_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i^{(0)}} \right)^{-\eta_i-1}, \quad (7.40)$$

wobei $y^*(\alpha)$ wahlweise für die Fixmannigfaltigkeit $y_R^*(\alpha)$ (7.34) bzw. für den Zimmermann-artigen Fall $y_Z^*(\alpha)$ (7.35) steht. Anhand von (7.40) kann leicht das Verhalten des RGFes in der Nähe der Fixmannigfaltigkeiten studiert werden. Für

$$\prod_{i=1}^N \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_i^{(0)}} \right)^{-\eta_i-1} \simeq 0$$

ist jedoch an dieser Stelle klar, daß sich die Lösung in der Nähe der jeweiligen Fixmannigfaltigkeit befindet.

Ist der kleinste Landau-Pol im UV durch die Eichkopplung α_1 bzw. der größte im IR durch α_N bestimmt und der Evolutionsweg hinreichend lang, d.h. liegen die Anfangswerte weit im UV, so ergibt die Entwicklung um die jeweilige Fixlösung im IR, wenn der zugehörige Fixpunkt attraktiv ist ($\eta_N > 0$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &\simeq \frac{1}{y_R^*} + \frac{1}{y^{(0)}} \left(\frac{\alpha_N^0}{\alpha_1^{(0)}} \right)^{-\eta_1} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_N} \right)^{-\eta_1-1} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{\eta_1 - \eta_N - 1}, \\ \frac{1}{y} &\simeq \frac{1}{y_Z^*} + \frac{1}{y^{(0)}} \left(\frac{\alpha_N^0}{\alpha_1^{(0)}} \right)^{-\eta_1} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_N} \right)^{-\eta_1-1} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{\eta_1 - \eta_N - 1} \\ &\quad - \frac{\Gamma(-\eta_1 - \eta_N)}{\Gamma(\eta_1) \Gamma(1 - \eta_N)} \left(\frac{\alpha_N}{y} \right)^* \left(-\frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{\eta_1+1} \frac{1}{\alpha_N} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{-\eta_1 - \eta_N - 1}. \end{aligned}$$

Gilt $y^{(0)} > y_Z^*(\alpha^{(0)})$, so folgt mit (F.32) in beiden Fällen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &\simeq \frac{1}{y_Z^*} - \frac{\Gamma(-\eta_1 - \eta_N)}{\Gamma(\eta_1) \Gamma(1 - \eta_N)} \left(\frac{\alpha_N}{y} \right)^* \left(-\frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{\eta_1+1} \frac{1}{\alpha_N} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{-\eta_1 - \eta_N - 1} \\ &= \frac{1}{y_R^*}, \end{aligned}$$

d.h. der RGF strebt für die Parameterbereiche, für die die Anfangswerte der Yukawakopplung oberhalb der Zimmermann-artigen Lösung liegen, auf die attraktivere Fixlösung y_R^* zu. Im anderen Fall gilt dies für y_Z^* . Die diskutierten Parameterbereiche werden *Bassin der Attraktion* der zugehörigen Fixmannigfaltigkeit genannt [118].

7.3 Mehrere Yukawakopplungen und N Eichkopplungen

Aufbauend auf den Ergebnissen der Abschnitte 7.1 und 7.2 wird hier der Fall von M Yukawakopplungen und N Eichkopplungen untersucht. Die Hyperebenen des reinen Eichsektors sind auch in diesem größeren Sektor Fixmannigfaltigkeiten, nun der Dimension $N + M - 1$. Dies gilt jedoch im allgemeinen nicht für die in Abschnitt 7.2 bestimmten nichttrivialen Fixlösungen, die hier Fixuntermannigfaltigkeiten der Dimension N beschreiben, d.h. wenn bis auf eine alle Yukawakopplungen in ihren kartesischen Fixhyperebenen verbleiben. Trotzdem konnte die Fixmannigfaltigkeit eines eingeschränkten Teils dieses Sektors bestimmt werden, die für eine Vielzahl von physikalischen Fragestellungen relevante Teile des Parameterraums beschreibt.

Die Vorgehensweise ist wie folgt: Nach der Bestimmung der einfachsten, über den zuvor gelösten Fall einer einzelnen Yukawakopplung hinausgehenden Fixhyperebenen bzw. -geraden und deren Attraktivitätskoeffizienten, die auch hier als Parameter in die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeit eingehen, wird für diese Invariante der folgenden Ansatz gewählt: $I = 1 - R(y)/F(\alpha)$. Dabei werden die im letzten Abschnitt bestimmten Lauricella-Funktionen für die Eichkopplungen verwendet, die hier noch einmal in (7.46) wiedergegeben werden, womit sich die Bestimmungsgleichung formal von den α_i entkoppeln läßt. Die Invarianz der Fixmannigfaltigkeit unter \mathcal{S} überträgt sich nun auf die zu bestimmende Funktion R in Form einer spezielleren Skalierungsinvarianz, die die Yukawakopplungen unabhängig vom gesamten Parametersektor betrifft und die Konstante $k = 1$ festlegt, was auf die partielle Differentialgleichung (7.51) auf Seite 102 führen wird.

Diese letzte Beziehung ist formal identisch mit (7.22) des letzten Abschnitts auf Seite 87, womit die dort diskutierten Lösungen sofort übertragen werden können und es sich bei der Funktion R wiederum um eine Lauricella-Funktion handelt. Von den drei zuvor diskutierten Lösungen wird durch die vorliegenden Parameter eine eindeutige Wahl getroffen, womit sich das in (7.52) auf Seite 102 wiedergegebene Lösungssystem ergibt, deren einzelne Sektoren sich wiederum durch die zuvor bestimmten Fixhyperebenen dieses Sektors erschließen. Um eine Vorstellung der generellen Lösungsstruktur zu vermitteln, wird diese in (7.53) auf Seite 103 stilisiert notiert.

Die Beschränkungen der Gültigkeit dieser Lösungen bestehen in zwei Umständen. Zum einen werden Eichkopplungen betrachtet, die in den Yukawa-RGG identisch eingehen. Dies ist entweder in dem jeweiligen Modell verwirklicht und damit keine Einschränkung, wie z.B. in den links-rechts-symmetrischen Modellen, oder zumindest im IR gemäß Unterabschnitt 7.2.1 eine erste Näherung, wenn der kleinste Landau-Pol zu einer abelschen Wechselwirkung gehört, dieser weit oberhalb des IR liegt und der Evolutionsweg hinreichend lang ist. Hinzu kommt, daß die Kopplungen des reinen Eichsektors – wie weiter unten angegeben – gewählt werden

müssen. Damit bleibt für zwei Yukawakopplungen das Ergebnis allgemein gültig und für eine höhere Zahl zumindest in einer Vielzahl von Fällen anwendbar.

Es werden nun die folgenden RGG betrachtet:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -b_i \alpha_i^2, \quad \frac{dy_j}{dt} = y_j \left(\sum_{k=1}^M c_{jk} y_k - \Delta \right), \quad (7.41)$$

$$i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M, \quad \Delta := \sum_{i=1}^N \chi_i \alpha_i,$$

wobei die Koeffizienten b_i und χ_i sich aus den letzten beiden Abschnitten ergeben, während die c_{ij} des reinen Yukawa-Sektors die folgende Form besitzen:

$$c_{ij} = \begin{cases} a_j & : i = j \\ d_j & < a_j : i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1, \dots, M. \quad (7.42)$$

Dies entspricht für die Kopplungen $x = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, y_1, \dots, y_M)$ der Koeffizientenmatrix:

$$c = \left(\begin{array}{cccc|ccc} -b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -b_N & 0 & \cdots & 0 \\ \hline -\chi_1 & -\chi_2 & \cdots & -\chi_N & a_1 & \cdots & d_M \\ -\chi_1 & -\chi_2 & \cdots & -\chi_N & d_1 & \cdots & d_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\chi_1 & -\chi_2 & \cdots & -\chi_N & d_1 & \cdots & a_M \end{array} \right). \quad (7.43)$$

Neben den zusätzlichen kartesischen Fixhyperebenen der Yukawakopplungen existieren – ähnlich wie im reinen Eichsektor – Fixhyperebenen, die aus dem reinen Yukawasektor hervorgehen:

$$\begin{aligned} I_{ij}^y &= (a_i - d_i)y_i - (a_j - d_j)y_j, \\ \gamma_{ij}^y &= (a_i - d_i)y_i + (a_j - d_j)y_j + \sum_{k=1}^M d_k y_k - \sum_{k=1}^N \chi_k \alpha_k. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Diese sind wegen $a_i - d_i > 0$ immer physikalisch und die Schnitte mit allen anderen Fixmannigfaltigkeiten ergeben wiederum die ebenen Fixuntermannigfaltigkeiten.

Erneut können nicht alle $2^{N+M} - 1$ Fixgeraden mit diesen Fixhyperebenen erklärt werden, womit auch in diesem Sektor nichttriviale Fixmannigfaltigkeiten existieren müssen. Die Attraktivitätskoeffizienten für das auf zwei Yukawakopplungen y_i und y_j reduzierte System ergeben sich entsprechend den Ergebnissen aus Abschnitt 6.3 aus der Koeffizientenmatrix:

$$c = \begin{pmatrix} a_i & d_j \\ d_i & a_j \end{pmatrix}.$$

Für die Fixgeraden mit $i, j = 1, \dots, M$, $i \neq j$ gilt:

$$\begin{aligned} I_i^y &= (a_i - d_i)y_i, & \gamma_i^y &= ay_i + d_jy_j, & \eta_i^y &= \frac{d_i - a_i}{a_i}, \\ I_{ij}^y &= (a_i - d_i)y_i - (a_j - d_j)y_j, & \gamma_{ij}^y &= a_iy_i + a_jy_j, & \eta_{ij}^y &= -\frac{1}{\frac{1}{\eta_i^y} + \frac{1}{\eta_j^y} + 1}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Wegen $a_i > d_i$ sind die trivialen Fixgeraden alle schwach repulsiv $-1 < \eta_i^y < 0$ und die sich aus $I_{ij}^y = 0$ ergebenden, immer IR-attraktiv¹³: $0 < \eta_{ij}^y < 1$.

Unter den zu Beginn genannten Voraussetzungen kann für die nichttriviale Fixmannigfaltigkeit der folgende Separationsansatz gewählt werden:

$$I(x_1, \dots, x_{N+M}) = 1 - \frac{R(y_1, \dots, y_M)}{F(\alpha_1, \dots, \alpha_N)},$$

mit den Funktionen $F(\alpha)$ des letzten Abschnitts

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}', \mathbf{Z}') : F(\alpha) &= \frac{1}{\delta_\alpha - 1} \frac{1}{b_N \alpha_N} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; \delta_\alpha \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1 \end{array} \middle| 1 - \frac{b_1 \alpha_1}{b_N \alpha_N}, \dots \right), \\ (\mathbf{R}, \mathbf{Z}) : F(\alpha) &= \frac{1}{\eta_i} \frac{1}{b_i \alpha_i} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_i \\ \{\dots, \eta + 1, \dots\} / \{\eta_i + 1\} \end{array} \middle| \frac{b_1 \alpha_1}{b_i \alpha_i}, \dots \right), \end{aligned} \quad (7.46)$$

mit $\delta_\alpha := \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)$, deren Eigenschaft trotz des größeren Sektors aufgrund der Koeffizientenmatrix (7.43) gültig bleibt:

$$\mathcal{R}F(\alpha) = -1 + F(\alpha)\Delta(\alpha). \quad (7.47)$$

Die Wahl $\mathcal{S}I = 0$ überträgt sich wegen $\mathcal{S}F = -F$ auf die zu bestimmende Funktion in Form von $\mathcal{S}R = -R$. Damit läßt sich die Invariante wie folgt notieren:

$$I(x_1, \dots, x_{N+M}) = 1 - R\left((a_1 - d_1)y_1 F(\alpha), \dots, (a_M - d_M)y_M F(\alpha)\right), \quad (7.48)$$

¹³Alle Koeffizienten sind mit dem entgegengesetzten Vorzeichen wie in (6.33) versehen, da hier keine asymptotisch frei Eichkopplung als Referenz verwendet wird.

womit sie insbesondere unter dem folgenden spezielleren Skalierungsoperator invariant ist:

$$\mathcal{S}_y R\left((a-d)yF(\alpha)\right) := \sum_{i=1}^M y_i \frac{\partial}{\partial y_i} R\left((a-d)yF(\alpha)\right) = -R\left((a-d)yF(\alpha)\right). \quad (7.49)$$

Die anomale Dimension der Invarianten $\mathcal{R}I(x) = \gamma(x)I(x)$ muß auch in diesem größeren Sektor $\mathcal{S}\gamma(x) = \gamma(x)$ erfüllen, jedoch wird nicht mehr die Einschränkung auf eine lineare Funktion getroffen. In der Form (7.48) werden sämtliche Yukawakopplungen gleich behandelt, so daß die anomale Dimension nur von den Eichkopplungen abhängen kann: $\gamma = \gamma(\alpha)$.

Wie eingangs erwähnt, sind die Fixmannigfaltigkeiten des letzten Abschnitts für mehrere Yukawakopplungen keine Invarianten der selben Dimension mehr, sondern stellen Untermannigfaltigkeiten dar:

$$\mathcal{R}z_i := \mathcal{R}\left(1 - (a_i - d_i)y_i F\right) = \frac{1}{F} z_i (1 - z_i) - (1 - z_i) \sum_{j=1}^M d_j y_j.$$

Erst im Fall $y_{j \neq i} = 0$ ist auch dies eine Gleichung der Form $\mathcal{R}I = \gamma I$. Dadurch, daß die Summe im letzten Term für z_i nicht von i abhängt, führt (7.3) dennoch auf eine auswertbare Form:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}I(z) &= -\frac{1}{F(\alpha)} \sum_{i=1}^M z_i (1 - z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} R(z) + \sum_{i=1}^M d_i y_i \sum_{j=1}^M (1 - z_j) \frac{\partial}{\partial z_j} R(z) \\ &= -\frac{1}{F(\alpha)} \sum_{i=1}^M z_i (1 - z_i) \frac{\partial}{\partial z_i} R(z) + R(z) \sum_{i=1}^M d_i y_i \\ &= \gamma(\alpha) I(z) = \gamma(\alpha) (1 - R(z)), \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^M z_i (1 - z_i) \frac{\partial R(z)}{\partial z_i} &= \gamma(\alpha) F(\alpha) (R(z) - 1) - R(z) \left(\delta_y - \sum_{i=1}^M \frac{d_i}{d_i - a_i} z_i \right), \end{aligned} \quad (7.50)$$

wobei das Skalierungsverhalten (7.49) ausgenutzt und

$$\delta_y := \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{\eta_i^y} + 1 \right) = \sum_{i=1}^M \frac{d_i}{d_i - a_i}$$

eingeführt wurde. Durch (7.50) ist die anomale Dimension bis auf einen konstanten Faktor festgelegt:

$$\gamma(\alpha) = \frac{k}{F(\alpha)}, \quad \mathcal{S}\gamma(\alpha) = \gamma(\alpha),$$

womit die Abhängigkeit von den Eichkopplungen nicht mehr explizit ist:

$$\sum_{i=1}^M z_i(1 - z_i) \frac{\partial R}{\partial z_i} = -k - \left(\delta_y - k - \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{\eta_i^y} + 1 \right) z_i \right) R.$$

Diese Gleichung ist nur für $k = 1$ skalierungsinvariant unter (7.49), so daß sich für eine normierte Funktion \bar{R} die folgende Gleichung ergibt:

$$\bar{R} := (1 - \delta_y) R : \sum_{i=1}^M z_i(1 - z_i) \frac{\partial \bar{R}}{\partial z_i} = \delta_y - 1 - \left[\delta_y - 1 - \sum_{i=1}^M \left(\frac{1}{\eta_i^y} + 1 \right) z_i \right] \bar{R}, \quad (7.51)$$

die mit dem Fall einer einzelnen Yukawakopplung (7.22) formal identisch ist. Somit können die dort angegebenen Ergebnisse (7.25) und (7.27) (Seite 88), übernommen werden. Eine homogene Lösung wird wiederum durch eine Skalierungsinvarianz ausgeschlossen, in diesem Fall durch (7.49). Die Argumente der Fixmannigfaltigkeit sind wie dort Fixhyperebenen und nun durch die des reinen Yukawasektors (7.44) bestimmt. Die Koeffizienten der RGG des reinen Eichsektors zerfallen nicht wie dort in zwei Klassen, so daß nicht auf einen Zimmermannartigen Fall für den hier untersuchten Yukawa-Sektor eingegangen werden muß.

Die aus (7.25) hervorgehende Lösung konvergiert wegen $a_i > d_i > 0$ für keine der Fixuntermannigfaltigkeiten, die diesen Sektor auf eine einzelne Yukawakopplung ungleich Null zurückführt. Insgesamt bleibt eine einzelne Fixlösung $I(x) = 0$ zurück, die in M Untersektoren zerfällt:

$$1 = -\eta_1^y R^{(M)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 - \delta_y, \frac{1}{\eta_2^y} + 1, \dots, \frac{1}{\eta_M^y} + 1 \end{array} \middle| \begin{array}{l} (a_1 - d_1)y_1 F(\alpha), [(a_1 - d_1)y_1 - (a_2 - d_2)y_2] F(\alpha), \dots, \\ \dots, [(a_1 - d_1)y_1 - (a_M - d_M)y_M] F(\alpha) \end{array} \right),$$

was mit (F.6) in die $(N + M - 1)$ -dimensionale Fixmannigfaltigkeit übergeht:

$$\frac{1}{y_1} F_D^{(M-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \frac{1}{\eta_1^y} \\ \frac{1}{\eta_2^y} + 1, \dots, \frac{1}{\eta_M^y} + 1 \end{array} \middle| \frac{a_2 - d_2 y_2}{a_1 - d_1 y_1}, \dots, \frac{a_M - d_M y_M}{a_1 - d_1 y_1} \right) = a_1 F(\alpha) \quad (7.52)$$

Sie ist wegen (vgl. (6.11))

$$\gamma(\alpha) = \frac{1}{F(\alpha)} > 0$$

für den physikalischen Teil des Parameterraums immer IR-attraktiv. Alle anderen Untersektoren ergeben sich dadurch, daß anstelle von y_1 in (7.52) eine der anderen Yukawakopplungen diese ausgezeichnete Rolle übernimmt. Die Untersektoren der sich so ergebenden Fixmannigfaltigkeit gehen entsprechend den Betrachtungen im letzten Abschnitt wegen

$$\left[-\frac{1}{\eta_i^y} - \frac{1}{\eta_j^y} - 1 \right]_G = \left[-\frac{a_i}{d_i - a_i} - \frac{a_j}{d_j - a_j} - 1 \right]_G > 1$$

mindestens einmal stetig differenzierbar ineinander über. $[]_G$ steht hier wiederum für die Gaussklammer.

Die zusätzlichen Fixuntermannigfaltigkeiten werden durch die Schnitte mit den Fixhyperebenen des Yukawasektors erreicht, also entweder für $(a_i - d_i)y_i = 0$ oder $(a_i - d_i)y_i = (a_j - d_j)y_j$, ein Übergang, der wegen $a_i > d_i > 0$ immer konvergent ist und damit alle nichttrivialen unter den $2^{N+M} - 1$ Fixgeraden bzw. -punkten erklärt.

Um die Struktur der in den letzten beiden Abschnitten bestimmten Fixmannigfaltigkeiten zu verdeutlichen, wird die Lösung (7.52) stilisiert in ihrer Struktur wiedergegeben:

$$\begin{aligned} & \frac{\text{YUKAWAKOPPLUNG}}{\text{EICHKOPPLUNG}} \\ & \left(\frac{\text{YUKAWAKOPPLUNG}}{\text{EICHKOPPLUNG}} \right)^* \end{aligned} \tag{7.53}$$

$$= \frac{\mathbb{F}_{\text{Yukawasektor}} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1 + \frac{1}{\text{ATTRAKTIVITÄT}} & \frac{\text{Yukawak.-Verhältnis}}{(\text{Yukawak.-Verhältnis})^*} \\ \hline 1 - \frac{1}{\text{Attraktivität}} & \end{array} \right)}{\mathbb{F}_{\text{Eichsektor}} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1 + \text{ATTRAKTIVITÄT} & \frac{\text{Eichk.-Verhältnis}}{(\text{Eichk.-Verhältnis})^*} \\ \hline 1 - \text{Attraktivität} & \end{array} \right)}$$

Der Stern * deutet den zugehörigen Wert der Fixstruktur im jeweiligen Zähler an. Im Yukawasektor gehen die Attraktivitätskoeffizienten reziprok im Vergleich zum Eichsektor ein, was in der unterschiedlichen Stellung der jeweiligen Lauricella-Funktion begründet ist.

7.4 Weichbrechender Sektor der Supersymmetrie

In diesem Abschnitt werden die Fixmannigfaltigkeiten im weichbrechenden Sektor der Supersymmetrie, wie er z.B. für das MSSM oder ein supersymmetrisches links-rechts-symmetrisches Modell verwirklicht ist, in einem eingeschränkten Teil des Parameterraums bestimmt. Es ergeben sich daraufhin einige interessante Folgerungen, die die Unifizierung in diesem Sektor betreffen.

Zwar gilt der in Abschnitt 6.2 geschilderte allgemeine Ansatz auch für diesen Sektor. Die Aussagen in Abschnitt 6.3 wurden jedoch für den Eich-Yukawa-Sektor getroffen. Hinzu kommt, daß die ebenfalls vorhandene Skalierungssymmetrie für die neu auftretenden Kopplungen deren Skalierungsverhalten nicht festlegt, was neben der komplexeren Struktur der RGG in diesem Sektor, eine äquivalente Untersuchung schwierig macht. Aus diesen Gründen werden die Fixmannigfaltigkeiten im folgenden mit Hilfe von *Differentialinvarianten* bestimmt. Mit diesen Beziehungen werden die Fixmannigfaltigkeiten einiger Kopplungen dieses Sektors direkt durch die in den letzten beiden Abschnitten bestimmten Fixlösungen des Eich-Yukawa-Sektors und durch den Higgs-Mischungs-Parameter des Superpotentials, dessen Lösung der RGG leicht anzugeben ist, induziert.

Neben den Yukawakopplungen des letzten Abschnitts und einer Zahl N von beliebig gearteten Eichkopplungen treten die Größen des weichbrechenden Sektors, wie sie z.B. im MSSM auftreten (vgl. (4.12), Seite 43), hinzu:

- Gaugino-Massen $M_i \rightarrow (4\pi)^{-1/2} M_i$, $i = 1, \dots, N$, die Massen der fermionischen Superpartner der Eichbosonen,
- zu jeder Yukawakopplung eine trilineare Kopplung A_i , die die Wechselwirkungen zwischen Higgsteilchen und den skalaren Superpartnern der Quarks und Leptonen vermittelt,
- B -Kopplung, die quadratische Wechselwirkungen zwischen unterschiedlichen Higgsmultipletts vermittelt, also neben der Kopplung μ im Superpotential einen zusätzlichen Higgs-Mischungs-Parameter darstellt,
- die an dieser Stelle nicht untersuchten Massen der fermionischen Superpartner der Higgsteilchen.

Die zusätzlichen RGG nehmen die Gestalt an [81]:

$$\begin{aligned}
\frac{dM_i}{dt} &= -b_i \alpha_i M_i, \\
\frac{dA_j}{dt} &= \frac{1}{2} \frac{A_j}{y_j} \frac{dy_j}{dt} + y_j^{1/2} \sum_{k=1}^M c_{jk} y_k^{1/2} A_k - y_j^{1/2} \frac{d\Delta_M}{dt}, \\
\Delta_M &:= \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1) M_i, \\
\frac{dB}{dt} &= \frac{B}{\mu} \frac{d\mu}{dt} + 2\mu \left(\sum_{j=1}^M K_j A_j y_j^{1/2} + \sum_{i=1}^N \kappa_i \alpha_i M_i \right), \tag{7.54}
\end{aligned}$$

ergänzt um die RGG für den Higgs-Mischungs-Parameter des Superpotentials μ :

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu \left(\sum_{j=1}^M K_j y_j - \sum_{i=1}^N \kappa_i \alpha_i \right). \quad (7.55)$$

Die RGG wurden in dieser Form für die folgenden Untersuchungen dadurch aufbereitet, daß ihre rechten Seiten der RGG nach Möglichkeit durch die Differentiationen bekannter oder einfacher Größen ausgedrückt wurden. Es gehen die Koeffizienten $\eta_i = \frac{\chi_i}{b_i} - 1$ ein, die die Attraktivität der nichttrivialen Fixgeraden des Eich-Yukawa-Sektors beschreiben. Zusätzlich treten die Koeffizienten K_j und κ_i auf, deren numerische Werte hier nicht durch gruppentheoretische Größen ausgedrückt, sondern für das einzelne Modell der Literatur entnommen werden.

Diese RGG sind zwar skalierungsinvariant, jedoch läßt sich dies im einzelnen nicht eindeutig festlegen. Aus den RGG (7.54) folgt:

$$\left[\frac{d}{dt} \right]_S = [\alpha]_S = [y]_S = 1 \quad \Rightarrow \quad [A]_S = [M]_S + \frac{1}{2}, \quad [B]_S = [A]_S + [\mu]_S - \frac{1}{2},$$

wobei das Symbol $[\]_S$ die Potenz, mit der die jeweilige Kopplung unter endlichen Transformationen skaliert wird, wiedergibt. Trotzdem können ohne genaue Kenntnis dieser Werte skalierungsinvariante Größen gebildet werden, denen somit die folgende zusätzliche Symmetrie neben der Renormierungsgruppeninvarianz zugrunde liegt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & [M]_S \sum_{i=1}^N M_i \frac{\partial}{\partial M_i} + \left([M]_S + \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^M A_i \frac{\partial}{\partial A_i} + [\mu]_S \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \\ & + ([M]_S + [\mu]_S) B \frac{\partial}{\partial B} + \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} + \sum_{i=1}^M y_i \frac{\partial}{\partial y_i}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Geeignete Skalierungsinvariante werden im folgenden die Größen

$$\frac{A_j}{M_i y_j^{1/2}}, \quad \frac{B}{M_i \mu} : \quad \mathcal{S} \left(\frac{A_j}{M_i y_j^{1/2}} \right) = 0, \quad \mathcal{S} \left(\frac{B}{M_i \mu} \right) = 0 \quad (7.57)$$

sein, die Variablen der noch zu bestimmenden Fixmannigfaltigkeiten sind. Die RGG der Kopplungen μ und M_i stellen einen Sonderfall dar, da sie in die β -Funktionen linear und homogen eingehen. Dadurch bedingt sind μ und M_i nicht in der Lage, mit- und untereinander nichttriviale Fixmannigfaltigkeiten zu beschreiben und gehen in Ein-Schleifen-Ordnung grundsätzlich als freie Parameter in das jeweilige Modell ein. Da die RGG der zuvor bestimmten Fixmannigfaltigkeiten unabhängig von den weichbrechenden Parametern sind, wird vorausgesetzt, daß diese Sektoren auf ihren höchstdimensionalen Fixlösungen liegen. Eine ausführlichere Diskussion der Fixpunkte dieses Sektors findet sich in [25].

Eine Möglichkeit, zumindest die Gaugino-Massen M_i ohne Kenntnis von experimentellen Gegebenheiten einzuschränken, besteht in der häufig getroffenen Annahme, daß sich die gleitenden Gaugino-Massen an einer Skala Λ zu einem Wert $m_{1/2}$ unifizieren [82]:

$$M_1(\Lambda) = M_2(\Lambda) = \dots = m_{1/2}. \quad (7.58)$$

Der Wert von Λ ist nicht näher spezifiziert, liegt aber wahrscheinlich im tiefen Ultraviolett, was zu der Vermutung Anlaß gibt, daß es sich bei dieser Skala um die Unifizierungsskala einer übergeordneten Theorie handelt (GUT): $\Lambda = m_{\text{GUT}}$. In diesem Fall folgt:

$$\frac{d}{dt} \frac{M_i}{\alpha_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M_i}{\alpha_i} = \frac{M_i^{(0)}}{\alpha_i^{(0)}} = \frac{m_{1/2}}{\alpha_{\text{GUT}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_1}{\alpha_1} = \frac{M_2}{\alpha_2} = \dots \quad (7.59)$$

7.4.1 Trilineare Kopplung

Zu Beginn wird der Fall einer einzelnen Yukawa- und einer trilinearen Kopplung betrachtet und im Anschluß verallgemeinert. In [119] wurde für den Fall einer einzelnen Eichkopplung g , einer Gaugino-Masse M und einer Yukawakopplung Y die Gültigkeit der folgenden Beziehung für die trilineare Kopplung A gezeigt:

$$A(g, Y, M) = -Mg \frac{dY}{dg}. \quad (7.60)$$

Diese Differentialinvariante (7.60) legt wegen $y = y(\alpha_i)$ den folgenden Ansatz für den allgemeineren Fall (7.54) nahe:

$$A = -y^{-1/2} \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}. \quad (7.61)$$

Mit Hilfe der für eine beliebige Funktion $f = f(\alpha)$ gültigen Beziehung

$$\mathcal{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathcal{R} f(\alpha) + 2b_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \left[\mathcal{R}, M_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right] f(\alpha) = 0 \quad (7.62)$$

ergibt sich für (7.61):

$$\begin{aligned} \mathcal{R} A(\alpha, y, M) &= \frac{1}{2} y^{-3/2} \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} - y^{-1/2} \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathcal{R} y \\ &= -\frac{1}{2} A(ay - \Delta) - y^{-1/2} \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \left(2ay \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial y}{\partial \alpha_i} - \chi_i y \right) \\ &= \frac{1}{2} A \frac{\mathcal{R} y}{y} + aAy - y^{1/2} \mathcal{R} \Delta_M = \frac{d}{dt} A(t), \end{aligned} \quad (7.63)$$

womit dieser verallgemeinerte Ansatz korrekt und insbesondere für jede Lösung gültig ist. Da die Beziehung (7.61) zusätzlich frei von Anfangswerten ist, ergibt das Einsetzen der Fixmannigfaltigkeit $I = 1 - ayF(\alpha) = 0$ des Eich-Yukawa-Sektors die Fixlösung der trilinearen Kopplung:

$$\frac{1}{a} (Ay^{-3/2})^* = \frac{1}{a} Ay^{-3/2} \Big|_{I=0} = \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i}, \quad (7.64)$$

mit den möglichen Einsetzungen für die Funktion $F(\alpha)$ gemäß (7.46) (Seite 100). Unter Verwendung der Differentiationsformel (F.16) ist die Fixmannigfaltigkeit der trilineare Kopplung eine Funktion der Eichkopplungen und Gaugino-Massen:

$$(\mathbf{R}', \mathbf{Z}') : \quad (7.65)$$

$$\frac{1}{a} Ay^{-3/2} = \frac{1}{\delta_\alpha(1-\delta_\alpha)} \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1) \frac{M_i}{b_i \alpha_i} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; \delta_\alpha + 1 \\ \{\eta + 1\} / \{\eta_i + 1\} \end{array} \Big| 1 - \frac{b_1 \alpha_1}{b_i \alpha_i}, \dots \right)$$

$$(\mathbf{R}, \mathbf{Z}) : \quad (7.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} Ay^{-3/2} = & -\frac{1}{\eta_1} \frac{M_1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N)} \left(\begin{array}{c} 2; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{array} \Big| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\ & + \frac{1}{\eta_1(1-\eta_1)} \sum_{i=2}^N (\eta_i + 1) \frac{b_i \alpha_i}{b_1 \alpha_1} \frac{M_i}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_1 \\ \dots, \eta_i + 2, \dots \end{array} \Big| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \end{aligned}$$

Die Yukawakopplung in den Lösungen muß ebenfalls durch ihre Fixmannigfaltigkeit $y = 1/(aF(\alpha))$ ersetzt werden. Im zweiten Fall wurde der durch die Eichkopplung α_1 dominierte Untersektor wiedergegeben. Die Unterfixmannigfaltigkeiten ergeben sich wieder entsprechend den vorangegangenen Abschnitten durch die Schnitte mit den Fixhyperebenen $b_i \alpha_i = b_j \alpha_j$, $b_i \alpha_i = 0$ und $M_i = 0$. Die in den Fixmannigfaltigkeiten auftretenden Verhältnisse aus Gaugino-Massen und Eichkopplungen sind im übrigen wegen

$$\mathcal{R} \frac{M_i}{\alpha_i} = 0$$

Charakteristiken der Renormierungsgruppe und somit Konstanten.

Im Falle von mehreren Yukawa- und Eichkopplungen entsprechend den Einschränkungen in Abschnitt 7.3 folgt mit Hilfe der Verallgemeinerung von (7.62) für eine beliebige Funktion $f(\alpha, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \mathcal{R} f(\alpha, y) &= \mathcal{R} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(\alpha, y) + \sum_j \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i} \frac{\partial}{\partial x_j} f(\alpha, y), \\ \Rightarrow \left[\mathcal{R}, \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right] f(\alpha, y) &= 2b_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(\alpha, y) + \chi_i \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} f(\alpha, y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \left[\mathcal{R}, M_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right] f(\alpha, y) = \chi_i M_i \alpha_i \mathcal{S}_y f(\alpha, y), \\
&\Rightarrow \left[\mathcal{R}, \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right] f(\alpha, y) = -(\mathcal{R} \Delta_M) \mathcal{S}_y f(\alpha, y), \quad (7.67)
\end{aligned}$$

mit der Definition (7.49) für \mathcal{S}_y . Für die im folgenden ausgewerteten Fixmannigfaltigkeiten folgt insbesondere:

$$f = f(\alpha, y_i/y_1) \quad \Rightarrow \quad \left[\mathcal{R}, \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \right] f = 0. \quad (7.68)$$

Der Ansatz

$$A_i = -y_i^{-1/2} \sum_{j=1}^N M_j \alpha_j \frac{\partial y_i}{\alpha_j} \quad (7.69)$$

erfüllt in der Folge auch in diesem allgemeineren Fall die entsprechenden RGG:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} A_i &= -\frac{1}{2} A_i \frac{\mathcal{R} y_i}{y_i} - y_i^{-1/2} \sum_{j=1}^N M_j \alpha_j \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \mathcal{R} y_i \\
&= -\frac{1}{2} A_i \frac{\mathcal{R} y_i}{y_i} - y_i^{-1/2} \sum_{j=1}^N M_j \alpha_j \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_j} \frac{\mathcal{R} y_i}{y_i} + y_i \left[\sum_{k=1}^M c_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial \alpha_j} - \chi_j \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} A_i \frac{\mathcal{R} y_i}{y_i} + y_i^{1/2} \sum_{j=1}^M c_{ij} y_j^{1/2} A_j - y_i^{1/2} \mathcal{R} \Delta_M. \quad (7.70)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Fixlösung für den reinen Eich-Yukawa-Sektor in der Form (7.48)

$$R(z_i) = R(1 - (a_i - d_i) y_i F(\alpha)) = 1$$

und der Funktion $F(\alpha)$ gemäß (7.46) wird damit die Fixmannigfaltigkeit für die trilinearen Kopplungen induziert:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial R(z)}{\partial \alpha_i} &= \sum_{i=1}^M \left(A_i y_i^{-1/2} - \frac{1}{F(\alpha)} \sum_{j=1}^N M_j \alpha_j \frac{\partial F(\alpha)}{\alpha_j} \right) (1 - z_i) \frac{\partial R(z)}{\partial z_i} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^M A_i y_i^{-1/2} (1 - z_i) \frac{\partial R(z)}{\partial z_i} = \frac{1}{F(\alpha)} \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow - \sum_{i=1}^M \left(A_i y_i^{-1/2} \right) y_i \frac{\partial}{\partial y_i} R(1 - (a - d)y) = \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i}, \quad (7.71)$$

wobei im zweiten Schritt erneut (7.49) ausgenutzt wurde. Die rechte Seite von (7.71) wurde zuvor in (7.65) bzw. (7.66) bestimmt, entsprechend wird auf der linken Seite mit Hilfe der Differentiationsformel (F.16) vorgegangen. Im Ergebnis ergibt sich auf beiden Seiten eine Summe von Lauricella-Funktionen, hier für den Beispielsektor, bestehend aus zwei Yukawa- bzw. trilinearen Kopplungen und allen Eichkopplungen bzw. Gaugino-Massen, notiert:

$$\begin{aligned} & \frac{A_i y_i^{-1/2} [1 - (d_i y_i + a_j y_j) F(\alpha)] - A_j y_j^{-1/2} [1 - (d_j y_j + a_i y_i) F(\alpha)]}{(a_i - d_i) y_i - (a_j - d_j) y_j} \\ &= \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

Die Struktur dieser Lösung ist auch in dieser abkürzenden Schreibweise unter Verwendung der Funktionen $F(\alpha)$ aus (7.46) bzw. (7.64) mit (7.65) oder (7.66) von recht komplexer Gestalt. Dies wird jedoch in Anbetracht dessen, daß in physikalisch relevanten Sektoren wie dem Top-Bottom Fall in einer supersymmetrischen links-rechts-symmetrischen Theorie (vgl. Abschnitt 4.4), in der keine Einschränkungen dieser Lösungen bezüglich des Eichsektors bestehen, die zwölf-dimensionale Fixmannigfaltigkeit dieses Sektors analytisch beschrieben werden kann, relativiert.

Die Beziehung $(a_i - d_i) y_i = (a_j - d_j) y_j$ (7.44) ist eine im gesamten Parameterraum IR-attraktive Fixbeziehung, insbesondere auch im weichbrechenden Sektor. In dieser Hyperebene folgt mit (7.70):

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \left(A_i y_i^{-1/2} - A_j y_j^{-1/2} \right) &= (a_i - d_i) y_i \left(A_i y_i^{-1/2} \right) - (a_j - d_j) y_j \left(A_j y_j^{-1/2} \right) \\ &= (a_i - d_i) y_i \left(A_i y_i^{-1/2} - A_j y_j^{-1/2} \right), \end{aligned} \quad (7.73)$$

womit $A_i y_i^{-1/2} = A_j y_j^{-1/2}$ in der Fixhyperebene $(a_i - d_i) y_i = (a_j - d_j) y_j$ mit (6.11) eine IR-attraktive Fixbeziehung darstellt. Mit (7.69) folgt damit:

$$i, j = 1, 2, \dots : \frac{y_i}{y_j} = \left(\frac{y_i}{y_j} \right)^* = \frac{a_j - d_j}{a_i - d_i} \Rightarrow \frac{A_i}{A_j} = \left(\frac{A_i}{A_j} \right)^* = \sqrt{\frac{a_j - d_j}{a_i - d_i}}. \quad (7.74)$$

Interessant ist der Fall, daß sich die Gaugino-Massen M_i an der Skala Λ zu einem Wert $m_{1/2}$ unifizieren. Dann folgt ohne zusätzliche GUT-Annahme mit Hilfe der *verwandtschaftlichen Beziehungen* der Lauricella Funktionen in Anhang F (Seite 213) für die Lösung (7.66) im Falle einer einzelnen Yukawa- und trilinearen Kopplung:

$$\begin{aligned}
\mu = \Lambda : \\
\frac{1}{a} A y^{-3/2} &= -\frac{1}{\eta_1} \frac{m_{1/2}}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N)} \left(\begin{matrix} 2; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&+ \frac{1}{\eta_1} \frac{m_{1/2}}{b_1 \alpha_1} \sum_{i=2}^N \frac{\eta_i + 1}{1 - \eta_1} \frac{b_i \alpha_i}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 2; 2 - \eta_1 \\ \dots, \eta_i + 2, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&= -\frac{1}{\eta_1} \frac{m_{1/2}}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N)} \left(\begin{matrix} 2; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&+ \frac{1}{\eta_1} \frac{m_{1/2}}{b_1 \alpha_1} \left[F_D^{(N)} \left(\begin{matrix} 2; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \dots \right) - F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \dots \right) \right] \\
&= -m_{1/2} \frac{1}{\eta_1} \frac{1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&= -\frac{1}{a} m_{1/2} y^{-1}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A}(\Lambda) = -\mathbf{m}_{1/2} \mathbf{y}(\Lambda)^{1/2} \quad (7.75)$$

Dasselbe gilt für (R', Z') .

Dieses Ergebnis ist aus mehreren Gründen bemerkenswert:

- Neben der Unifizierung der Gaugino-Massen an der Skala Λ wird in der Literatur häufig angenommen, daß dort die trilinearen Kopplungen proportional zu den zugehörigen Yukawakopplungen sind: $A \propto y^{1/2}$. Dies ist durch die Fixmannigfaltigkeit jedoch automatisch gegeben und vor diesem Hintergrund keine zusätzliche Forderung. Insbesondere ist die Proportionalitätskonstante durch die unifizierte Gaugino-Masse bestimmt.
- Die Aussage ist unabhängig davon, ob es sich bei Λ um die Skala der Großen Unifizierung handelt.
- Da Zimmermann-artige Lösungen auf asymptotisch freie Yukawakopplungen führen, überträgt sich dies auch auf die trilinearen Kopplungen.
- Wird z.B. der UV-Bereich durch den Landau-Pol der Eichkopplung α_1 und

der IR-Bereich durch α_N begrenzt¹⁴, so strebt die Fixmannigfaltigkeit in die Fixpunkte $A = -M_1 y^{1/2}$ bzw. $A = -M_N y^{1/2}$, wie sich aus (7.61) ergibt:

$$A y^{-1/2} \Big|_{\alpha_j \neq i, y = \rho_i^* \alpha_i} = -\frac{1}{\rho_i^* \alpha_i} M_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\rho_i^* \alpha_i) = -M_i.$$

Das Ergebnis (7.75) entspricht damit, wenn sich die Skala Λ hinreichend weit im UV befindet, einem solchen Fixpunkt:

$$\alpha_{i < N} = 0, \quad \frac{A}{M_N y^{1/2}} = -1.$$

Im Falle von mehreren Yukawa- und trilinearen Kopplungen folgt für den vollständig attraktiven Fixpunkt des Yukawasektors $(a_1 - d_1)y_1 = (a_2 - d_2)y_2 = \dots$ mit (7.71) und (7.74):

$$A_1 y_1^{-1/2} = A_2 y_2^{-1/2} = \dots = \frac{1}{F(\alpha)} \sum_k M_k \alpha_k \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_k}. \quad (7.76)$$

Ebenso gilt für die Skala Λ der Unifizierung der Gaugino-Massen mit (7.71):

$$\mu = \Lambda : \sum_{i=1}^M \left(A_i y_i^{-1/2} \right) y_i \frac{\partial}{\partial y_i} R (1 - (a - d)y) = m_{1/2} F(\alpha). \quad (7.77)$$

Die Beziehung (7.76) ist an dieser Skala Lösung dieser Gleichung:

$$\mu = \Lambda : -m_{1/2} = -\frac{1}{F(\alpha)} \left(A_1 y_1^{-1/2} \right) \mathcal{S}_y R = \frac{1}{F(\alpha)} \left(A_1 y_1^{-1/2} \right) R = A_1 y_1^{-1/2}.$$

Anders ausgedrückt bedeutet dies: Wird an der Skala Λ der Gaugino-Massen Unifizierung der vollständig attraktive Fixpunkt des Yukawa-Sektors erreicht, so liegt, durch die Fixmannigfaltigkeit induziert, auch eine Unifizierung von $A_i y_i^{-1/2}$ vor:

$$\mu = \Lambda, \quad i = 1, 2, \dots : \quad M_i = m_{1/2}, \quad y_i = \frac{a_1 - d_1}{a_i - d_i} y_1 \Rightarrow A_i = -m_{1/2} y_i^{1/2}. \quad (7.78)$$

Ist die Fixbeziehung (7.74) an einer anderen Skala gegeben, so ist $A_i y_i^{-1/2}$ gemäß (7.76) durch die Eichkopplungen und Gaugino-Massen bestimmt.

¹⁴Dies sind die Grenzen des mathematischen Gültigkeitsbereichs, der perturbative physikalische ist kleiner.

7.4.2 Skalare Mischungsparameter

Dadurch, daß die RGG von μ homogen vom Grade eins in μ ist, existiert im Parameterraum (α_i, y_j, μ) keine nichttriviale Fixmannigfaltigkeit für $\mu \neq 0$. Die B -Kopplung geht zwar auch linear in ihre RGG ein, besitzt aber wie im Falle der trilinearen Kopplung A_i einen inhomogenen Term. In diesem Fall läßt sich, wie im letzten Abschnitt, eine Differentialinvariante angeben, die diese Kopplung mit dem Higgs-Mischungs-Parameter des Superpotentials in Beziehung setzt:

$$B = -2 \sum_{i=1}^N M_i \alpha_i \frac{\partial \mu}{\partial \alpha_i}. \quad (7.79)$$

Dies ist wiederum die Verallgemeinerung einer in [119] angegebenen Beziehung, deren Beweis äquivalent zum letzten Abschnitt verläuft.

Mit der leicht anzugebenden Lösung der RGG (7.55) der μ -Kopplung:

$$\mu = \text{const.} \prod_{j=1}^M y_j^{p_j} \prod_{i=1}^N \alpha_i^{q_i}, \quad p_j := \sum_{k=1}^M K_k c_{kj}^{-1}, \quad q_i := \frac{\kappa_i - \chi_i \sum_{j=1}^M p_j}{b_i}, \quad (7.80)$$

die zumindest durch die aus dem Vorangegangenen bekannten Fixlösungen um die Yukawakopplungen reduziert werden kann, kann die Fixlösung für die B -Kopplung durch Anwenden von (7.79) mit Hilfe von (7.61) bestimmt werden:

$$\frac{B}{2\mu} = \sum_{j=1}^M p_j A_j y_i^{-1/2} - \sum_{i=1}^N q_i M_i, \quad (7.81)$$

wobei, wie angekündigt, die μ -Kopplung als freier Parameter eingeht. Mit der Fixmannigfaltigkeit der trilinearen Kopplungen des letzten Abschnitts ist die B -Kopplung damit eine Funktion der Eichkopplungen, der Gaugino-Massen und des Higgs-Mischungs-Parameters des Superpotentials.

Die Lösung (7.80) für die μ -Kopplung belegt, daß das zu Beginn dieses Abschnitts erläuterte Problem bei der Festlegung des Skalierungsverhaltens der Kopplungen dieses Sektors sich nicht durch ein einfaches Rückschließen auflösen läßt:

$$\frac{\mathcal{S}\mu}{\mu} = \sum_{j=1}^M p_j + \sum_{i=1}^N q_i, \quad (7.82)$$

und von Modell zu Modell unterschiedlich ausfallen kann.

Im vollständig attraktiven Fixpunkt des letzten Abschnitts folgt aus (7.81):

$$\begin{aligned}
 \mu &= \Lambda, i = 1, 2, \dots : \\
 M_i &= m_{1/2}, \quad y_i = \frac{a_1 - d_1}{a_i - d_i} y_1 \Rightarrow A_i = -m_{1/2} y_i^{1/2} \\
 \Rightarrow \frac{B}{2\mu} &= - \left(\sum_{j=1}^M p_j + \sum_{i=1}^N q_i \right) m_{1/2}.
 \end{aligned} \tag{7.83}$$

Dies stellt keine der üblicherweise in der Literatur verwandten Unifizierungsannahmen des weichbrechenden Sektors dar, sondern ist eine zusätzliche Festlegung der Parameter durch die Fixmannigfaltigkeit.

Insbesondere gibt die Beziehung mit (7.82) in der diskutierten Fixmannigfaltigkeit den einfachen differentiellen Zusammenhang

$$S\mu = \frac{1}{2}B$$

wieder.

7.5 Zur physikalischen Bedeutung von Symmetrien des Renormierungsgruppenflusses

Die vorangegangenen Abschnitte haben in Ein-Schleifen-Ordnung gezeigt, daß sich auf den Fixmannigfaltigkeiten des RGFes die Symmetrie eines Modells erhöht. Vor diesem Hintergrund stellt sich unmittelbar die Frage, ob diese Auszeichnung der Fixmannigfaltigkeiten, über die Tatsache hinaus, daß für einen hinreichend langen Top-Down-Evolutionsweg für einige Kopplungen die Auswertung dieser speziellen Lösungen im IR-Bereich aufgrund der IR-Attraktion immer sinnvoll ist, von physikalischer Bedeutung sein könnte.

In Folge der Evolution des RGFes vom UV zum IR könnte die Veränderung eines oder mehrerer Parameter über die bloße numerische Variation hinausgehen und in ein spezielleres Modell als dem ursprünglich für jeden Teil des Parameterraums gültigen übergehen. Anhand von einigen Beispielen wird im folgenden belegt, daß die Fixmannigfaltigkeiten unmittelbar auf physikalisch interpretierbare Modelle führen können, die in die ursprünglichen eingebettet sind.

- Eine Theorie zweier skalarer Felder ϕ_1 und ϕ_2 kann den renormierbaren Wechselwirkungsterm

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{4!} \sum_{a,b,c,d=1}^2 \lambda_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d$$

enthalten. In Ein-Schleifen-Ordnung existiert im Parameterraum eine Fixgerade [107], die einer rotationssymmetrischen $O(2)$ -Theorie mit

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{4!} \lambda (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

entspricht, eine weitere, die für ein Zerfallen in zwei unabhängige skalare Theorien steht

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{4!} \lambda_1 \phi_1^4 + \frac{1}{4!} \lambda_2 \phi_2^4$$

und eine, die für eines der Felder auf ein freies Modell führt:

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{4!} \lambda_1 \phi_1^4.$$

- In einer nichtsupersymmetrischen Theorie mit einem Fermionenfeld ψ , einem skalaren Feld ϕ und einem pseudoskalaren Feld χ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial\chi)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + \ell_\phi\bar{\psi}\phi\psi + \ell_\chi\bar{\psi}\gamma^5\chi\psi - \frac{\lambda_\phi}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda_\chi}{4!}\chi^4 - \frac{\lambda_{\phi\chi}}{4}\phi^2\chi^2$$

existiert im Parameterraum in Zwei-Schleifen-Ordnung eine Fixlinie [120], die auf das supersymmetrische Wess-Zumino-Modell [42] führt, in dem die Kopplungen im skalaren Sektor durch eine einzelne Yukawakopplung bestimmt sind:

$$\mathcal{L}_{WZ} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial\chi)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi + \ell\bar{\psi} (\phi + \gamma^5\chi) \psi - \frac{\ell^2}{8} (\phi^2 + \chi^2)^2.$$

Für eine $SU(2)$ -Eichtheorie mit skalaren, pseudoskalaren Feldern und Fermionen in der adjungierten Darstellung ergibt sich ebenfalls in der Ein-Schleifen-Ordnung eine Fixlinie, die auf eine supersymmetrische $\mathcal{N} = 2$ Yang-Mills-Theorie führt (vgl. [107] und die hier genannten Referenzen).

- Andere Modelle, in denen die Fixmannigfaltigkeiten des Parameterraums eines Modells einer Theorie mit höherer Symmetrie der Lagrangedichte entsprechen, wurden in [121] untersucht. Insbesondere existiert im Parameterraum einer $\mathcal{N} = 1$ supersymmetrischen Eichtheorie mit Eichkopplung g und drei chiralen Superfeldern Σ_i in der adjungierten Darstellung mit dem Superpotential $W = h\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ eine Fixgerade $h = g$, die auf eine Supersymmetrie mit vier Generatoren $\mathcal{N} = 4$ führt. Diese Linie ist infrarot-attraktiv, was hier impliziert, daß die ursprüngliche $\mathcal{N} = 1$ Theorie im Infraroten auf eine $\mathcal{N} = 4$ Theorie *zufliießt*, welche insbesondere nichtperturbativ lösbar ist.

Diese Modelle führen auf Fixbeziehungen, die dem rotations- bzw. supersymmetrischen Grenzfall entsprechen oder die Supersymmetrie selbst weiter vergrößern.

Es besteht also die Möglichkeit, daß die Fixmannigfaltigkeit für einige Modelle über die Attraktion des RGFes hinaus, ein Modell mit größerer Symmetrie beinhaltet, wenn die beschriebene Fixbeziehung im Parameterraum exakt erfüllt ist.

Die Annäherung des gesamten RGFes an die Fixmannigfaltigkeit im IR-Bereich kann möglicherweise mit einem weiteren Aspekt in Verbindung gesetzt werden.

Bei der Motivation der Supersymmetrie in Abschnitt 2.3.1 wurde auf ein Problem bei den Hierarchien der Skalen eingegangen, das darin besteht, daß sich von Seiten einer nichtsupersymmetrischen Theorie physikalisch akzeptable Higgsmassen in der Perturbation nur durch eine *Feinjustierung* der Parameter realisieren lassen. Durch die Erhöhung der Symmetrie des jeweiligen Modells um die Supersymmetrie wird dieses Problem vermieden. Hierbei besteht ein direkter Zusammenhang zwischen den Symmetrien der Lagrangedichte und der Form der RGG.

Allgemeiner ist ein Modell mit dem experimentellen Ergebnis, daß ein Parameter, wie eine Eichkopplung g oder ein ganzer Teil des Parameterraums für eine bestimmte Impulsskala μ sehr kleine Werte annimmt, nur dann vereinbar, wenn sich die Symmetrie der Theorie für $g = 0$ erhöht [41]. Die Symmetrie eines Modells muß also, falls eine Diskrepanz mit dem Experiment besteht, so erweitert werden, daß diese Parameterwerte die *Natürlichkeit* der modifizierten Theorie vergrößert.

Im Falle der Fixmannigfaltigkeiten eines Modells ist zwar die Ausgangsposition anders gelagert, da hier auch für den gesamten RGF kein solcher Konflikt besteht. Jedoch werden im IR-Bereich der Impulsskala bestimmte Parameterbeziehungen gegenüber dem gesamten Parameterraum bevorzugt. Dadurch bedingt, daß sich in den zurückliegenden Untersuchungen herausgestellt hat, daß die Symmetrie des Parameterraums auf den Fixmannigfaltigkeiten gegenüber dem gesamten RGF erhöht ist, soll an dieser Stelle auf die Möglichkeit hingewiesen werden, daß in einem sehr ähnlichen Sinne die Parameter einer infrarot-attraktiven Fixbeziehung als der Teil des Parameterraums im IR-Bereich angesehen werden kann, auf dem sich die Natürlichkeit *innerhalb* des jeweiligen Modells erhöht.

8 Infrarot-Attraktivität von supersymmetrischen Theorien

Die bisherigen Untersuchungen in der Literatur haben beim Vergleich von SM und MSSM gezeigt, daß die IR-Attraktivität der Fixmannigfaltigkeiten des supersymmetrischen Modells im Eich-Yukawa-Sektor systematisch größer als die des nichtsupersymmetrischen Modells ist [21, 23]. In diesem Abschnitt soll geklärt werden, ob dies eine grundsätzliche Eigenschaft einer supersymmetrischen Theorie ist. Er wird zeigen, daß dies für alle Eichgruppen bis zum Rang sechs, also bis zur $SU(7)$, $SO(12)$ bzw. $SO(13)$ und der E_6 , mit wenigen Ausnahmen richtig ist. Diese diskutierten Eichgruppen beinhalten die wesentlichen, in der Literatur diskutierten Erweiterungen des SMs oder MSSMs bis hin zu den GUT.

Bei der Evolution vom UV zum IR fließt der RGF zuerst auf die attraktivste und höchstdimensionale Fixmannigfaltigkeit und dann mit abnehmender Dimension auf die Untermannigfaltigkeiten zu. Dies setzt sich solange fort, bis der Fluß in einem Fixpunkt zum Erliegen kommt. An diesem Punkt der Impulsskala sind alle Eichkopplungen bis auf die mit dem größten Landau-Pol im IR zunehmend vernachlässigbar. Wegen dieser Eigenschaft muß es sich um die Eichkopplung einer Wechselwirkung mit nichtabelscher Eichgruppe handeln. Unter den Yukawakopplungen wird diejenige dominierend, die mit dieser Eichkopplung den größten Attraktivitätskoeffizienten gemein hat, so daß die Diskussion im extremen IR auf diese beiden Kopplungen beschränkt werden kann. Zwar wird der von ihnen bestimmte Fixpunkt erst außerhalb des perturbativ Erlaubten erreicht. Am unteren Ende der erlaubten Impulsskala wird er jedoch die entscheidende Rolle spielen. Die Betrachtung eines Fixpunktes erlaubt es insbesondere, ein quantitatives Maß in Form der Attraktivitätskoeffizienten zur Untersuchung heranzuziehen.

In die im weiteren Verlauf dieses Abschnitts untersuchten Parameter gehen die gruppentheoretischen Größen, die sich aus der Eichgruppe und den verwendeten Darstellungen ergeben, und die Anzahl der im jeweiligen Modell verwendeten Multipletts ein, was neben deren Dimensionen den Teilchengehalt bestimmt. Letztere könnten in einer beliebig hohen Zahl eingeführt werden. Aus phänomenologischen Gründen wird aber hierbei in der Regel eine möglichst minimale Wahl getroffen. Wie sich im einzelnen dieser Teilchengehalt gestaltet, unterliegt keiner festen Gesetzmäßigkeit. Hinzu kommt, daß in den nachfolgenden Betrachtungen die Analyse auf der Ebene der RGG durchgeführt wird, d.h. über die genaue Gestalt der Lagrangedichte des Modells wird nicht verfügt.

Die Vorgehensweise ist deswegen wie folgt: Es werden Bedingungen für die Richtigkeit der Vermutung bestimmt, die nur von der Art der Eichgruppe und den Darstellungen der Multipletts abhängen, die unmittelbar über die untersuchte Kopplung wechselwirken, womit die Gültigkeit der Vermutung für den überwie-

genden Teil der Modelle gezeigt werden kann. Unter den Modellen, die diesen Kriterien nicht genügen, werden die speziellen Realisationen bestimmt, die die obige Behauptung nicht erfüllen.

Betrachtet wird somit der Fixpunkt einer (quadrierten) Yukawakopplung y und einer nichtabelschen Eichkopplung α , sowie sein zugehöriger Attraktivitätskoeffizient:

$$\left(\frac{y}{\alpha}\right)^* = \rho^* = \frac{b\eta}{a}, \quad \eta = \frac{\chi}{b} - 1. \quad (8.1)$$

Der Koeffizient b aus der RGG der Eichkopplung muß, da $\chi > 0$ immer erfüllt ist, positiv sein und somit einer asymptotisch freien Wechselwirkung entsprechen. Insgesamt muß gelten:

$$\eta > 0 \quad \Rightarrow \quad \chi > b > 0. \quad (8.2)$$

Der Fixpunkt ρ^* ist dann wegen $a > 0$ immer physikalisch in dem Sinne, daß $\rho^* > 0$ erfüllt ist.

Die Koeffizienten b und χ ergeben sich entsprechend dem letzten Kapitel für den nicht- bzw. supersymmetrischen Fall zu:

$$\begin{array}{l|l} \text{nicht-SUSY :} & \text{SUSY :} \\ b = \frac{22}{3}c - \frac{4}{3}s_F - \frac{1}{3}s_S & b^{\text{SUSY}} = 6c - 2s_F - 2s_S^{\text{SUSY}} \\ \chi = 6c_F & \chi^{\text{SUSY}} = 4c_F + 4c_S \end{array} \quad (8.3)$$

Das Symbol c steht für die quadratischen Casimir-Invarianten der hier angenommenen irreduziblen Darstellungen der Eichbosonen (adjungiert, ohne Index), der Fermionen (Index F) bzw. der skalaren Felder (Index S) und s für den entsprechenden Dynkin-Index, wobei im ersten Fall implizit die Summation über alle an den Yukawaterm ankoppelnden Teilchen und im letzten Fall über den gesamten Teilchengehalt zu erstrecken ist.

Für die Liegruppen $SU(n)$, $SO(2n+1)$ bzw. $SO(2n)$ ergeben sich diese Größen und die Dimension N_R für einen Teil der irreduziblen, sogenannten primitiven

Darstellungen R ohne Berücksichtigung des Teilchengehalts zu [29]:

	$SU(n)$	$SO(2n+1)$	$SO(2n)$	
N_k	$\binom{n}{k}$	$\binom{2n+1}{k}$	$\binom{2n}{k}$	
c_k	$\frac{n+1}{2n}k(n-k)$	$\frac{k}{2}(n+1-\frac{k}{2})$	$\frac{k}{2}(n-\frac{k}{2})$	
s_k	$\frac{1}{2}\binom{n-2}{k-1}$	$\frac{1}{2}\binom{2n-1}{k-1}$	$\frac{1}{2}\binom{2n-2}{k-1}$	(8.4)
N	$n^2 - 1$	$n(2n+1)$	$n(2n-1)$	
c	n	$n - \frac{1}{2}$	$n - 1$	
Rang	$n - 1$	n	n	

Die Größen ohne Index stehen für den Fall der adjungierten Darstellung, deren Dynkin-Index identisch mit der Casimir-Invarianten ist. Die restlichen Darstellungen sind mit k indiziert, wobei $k = 0$ für ein Singulett bzw. $k = 1$ für die Fundamentaldarstellung steht.

Das nichtsupersymmetrische und das supersymmetrische Modell sollen dabei in dem in Abschnitt 2.4 geschilderten Verhältnis stehen, was beinhaltet, daß der skalare Teilchengehalt evtl. aus phänomenologischen oder konzeptionellen Gründen erhöht werden muß, wie z.B. beim Übergang vom SM zum MSSM:

$$s_S^{\text{SUSY}} \geq s_S. \quad (8.5)$$

Die Behauptung, daß die Attraktivität des supersymmetrisierten Modells die des nichtsupersymmetrischen übersteigt, ist folglich mit dem folgenden Ausdruck äquivalent:

$$\eta^{\text{SUSY}} > \eta \quad \Leftrightarrow \quad \chi^{\text{SUSY}}b - \chi b^{\text{SUSY}} > 0. \quad (8.6)$$

Die Kombination der Beziehungen (8.2) führt auf:

$$\frac{1}{3}(s_F + s_S^{\text{SUSY}}) < c, \quad (8.7)$$

$$c < \begin{cases} 44c_S + 10s_F + 22s_S^{\text{SUSY}} - 3s_S > 10c_F : & \frac{1}{22}(18c_F + 4s_F + s_S) \\ 44c_S + 10s_F + 22s_S^{\text{SUSY}} - 3s_S \leq 10c_F : & \frac{1}{3}(2c_F + 2c_S + s_F + s_S^{\text{SUSY}}) \end{cases} \quad (8.8)$$

An dieser Stelle lassen sich bezüglich der möglichen Eichgruppen und Darstellungen einige Einschränkungen treffen. Zum einen muß die Yukawakopplung die Eichkopplung wahrnehmen ($\chi > 0$), womit zumindest eins der zugehörigen Fermionen kein Singulett sein darf. Die Eichinvarianz der Yukawakopplung Y_{jk}^i , wobei der Index i für die skalare S und j bzw. k für die fermionischen Darstellungen

F_L bzw. F_R steht, verlangt für alle Generatoren T_R der Symmetrie $A = 1, 2, \dots$:

$$T_{F_L}^A Y^i - Y^i T_{F_R}^A = \sum_j (T_S^A)^{ij} Y^j; \quad A = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Ist neben einem der Fermionenmultipletts auch die skalare Darstellung ein Singulett, so folgt hieraus wegen $T_{F_L}^A Y = 0$, daß die Yukawakopplung identisch Null ist, womit dieser Fall ebenfalls ausgeschlossen ist und es sich bei den koppelnden Teilchen maximal um ein Singulett der Fermionendarstellung handeln kann.

Die in Betracht kommenden Eichgruppen müssen *hinreichend* sein, womit gemeint ist, daß sie entweder mit einem der nichtabelschen Anteile von G_{321} identisch sind oder aber die $SU(3)$ bzw. $SU(2)$ als Untergruppen enthalten. Die Gruppen, die dies erfüllen, können sich dadurch auszeichnen, daß sie *sicher* sind, d.h. daß sie automatisch keine chiralen Anomalien erzeugen. Diese sind dann in allen Ordnungen der Perturbation nicht vorhanden, wenn die Größen

$$\mathcal{A}_{F_{L,R}}^{ABC} := \text{Spur} \left(T_{F_{L,R}}^A T_{F_{L,R}}^B T_{F_{L,R}}^C \right) \quad (8.10)$$

für beide Darstellungen identisch sind (vgl. z.B. [82]). Im Falle der sicheren Gruppen ist jeder dieser Anteile unabhängig von der gewählten Darstellung Null. Eichgruppen, die dies nicht erfüllen, sind die $SU(n)$ mit $n \geq 3$ und die E_6 . In diesen Fällen müssen die Darstellungen geeignet gewählt werden, beispielsweise durch ein $SU(3)_C$ Triplet und Antitriplet für die Fermionen im SM bzw. MSSM. Ein Fall, für den die Anomalien ebenfalls nicht auftreten, ist unabhängig von der Eichgruppe: Ist das Skalar in (8.9) ein Singulett und die Darstellung der Fermionen irreduzibel, so folgt mit (8.9) (vgl. z.B. [29]):

$$T_{F_L}^A Y = Y T_{F_R}^A \quad \Rightarrow \quad Y Y^\dagger \propto \text{id} \quad \Rightarrow \quad T_{F_L}^A \propto Y T_{F_R}^A Y^\dagger.$$

Solche äquivalenten Darstellungen führen dann aufgrund der Spur-Bildung in (8.10) ebenfalls zu gleich großen Termen $\mathcal{A}_{F_L}^{ABC} = \mathcal{A}_{F_R}^{ABC}$ und sind damit sicher. Dies gilt ebenfalls für alle reellen Darstellungen, wobei jedoch beachtet werden muß, daß die Darstellung der Fermionen für den Eichgruppenanteil, der auf die $SU(2)_L$ führt, komplex gewählt wird. Dies ist die einzige Möglichkeit, die Weyl-Fermionen zu beschreiben [82].

Aus (8.7) folgt insbesondere $3c > s_F$, was für mindestens zwei nichttriviale Darstellungen der Materie erfüllt sein muß. Dies schränkt die Möglichkeiten unter Berücksichtigung der zuletzt gemachten Bemerkungen erheblich ein und führt auf die folgenden Eichgruppen und Darstellungen, die durch ihre Dimensionalität N_R und den zugehörigen Dynkin-Index s_R (in Klammern) gekennzeichnet

sind [122]:

$SU(2)$:	$2 \left(\frac{1}{2}\right)$	$3(3)$						
$SU(3)$:	$3 \left(\frac{1}{2}\right)$	$6 \left(\frac{5}{2}\right)$	$8(3)$	$10 \left(\frac{15}{2}\right)$				
$SU(4)$:	$4 \left(\frac{1}{2}\right)$	$6(1)$	$10(3)$	$15(4)$	$20 \left(\frac{13}{2}\right)$	$20'(8)$	$20'' \left(\frac{21}{2}\right)$	$24(8)$
$SU(5)$:	$5 \left(\frac{1}{2}\right)$	$10 \left(\frac{3}{2}\right)$	$15 \left(\frac{7}{2}\right)$	$24(5)$	$35(14)$	$40(11)$	$45(12)$	
$SU(6)$:	$6 \left(\frac{1}{2}\right)$	$15(2)$	$20(3)$	$21(4)$	$35(6)$			
$SO(7)$:	$7 \left(\frac{1}{2}\right)$	$8 \left(\frac{1}{2}\right)$	$21 \left(\frac{5}{2}\right)$	$27 \left(\frac{9}{2}\right)$	$35(5)$			
$SO(8)$:	$8 \left(\frac{1}{2}\right)$	$28(3)$	$35(5)$	$56 \left(\frac{15}{2}\right)$				
$SO(9)$:	$9 \left(\frac{1}{2}\right)$	$16(1)$	$36 \left(\frac{7}{2}\right)$	$44 \left(\frac{11}{2}\right)$				
$SO(10)$:	$10 \left(\frac{1}{2}\right)$	$16(1)$	$45(4)$	$54(6)$				
E_6 :	$27 \left(\frac{1}{2}\right)$	$78(2)$						

Hinzu kommen jeweils die trivialen Singulett-Darstellungen. Die zugehörigen quadratischen Casimir-Invarianten c_R ergeben sich aus $c_R = N s_R/N_R$, wobei N für die Dimension der adjungierten Darstellung steht. Die erste Spalte steht jeweils für die Fundamentaldarstellung. Die einzig mögliche reduzible Darstellung ist die 24 der $SU(4)$, die sich aus $4 \otimes 6$ ergibt.

Mit (8.3) folgt:

$$b - \frac{11}{9}b^{\text{SUSY}} = \frac{11}{9}s_F + \frac{22}{9}s_S^{\text{SUSY}} - \frac{1}{3}s_S \geq \frac{11}{9}s_F + \frac{19}{9}s_S \geq 0, \quad (8.11)$$

womit der Koeffizient der RGG der Eichkopplung immer echt größer gegenüber dem supersymmetrischen Fall ist und es ergibt sich:

$$\chi^{\text{SUSY}}b - \chi b^{\text{SUSY}} \geq \frac{2}{9}b^{\text{SUSY}}(22c_S - 5c_F) > 0 \quad \text{falls} \quad 22c_S > 5c_F.$$

Somit ist für alle Modelle mit $22c_S > 5c_F$ die Behauptung unabhängig vom Teilchengehalt korrekt. Diese Bedingung ist nur von der Art der Gruppe und der Darstellung der Fermionen und Bosonen abhängig, die an dem betrachteten Yukawaterm mitwirken. Sie ist immer trivial erfüllt, wenn sich alle an dieser Kopplung beteiligten Felder in derselben Darstellung befinden.

Die Eingangsbehauptung könnte nur noch dann sensibel für den Teilchengehalt werden, wenn

$$\frac{22}{5}c_S \leq c_F = c_{F_L} + c_{F_R} \quad (8.12)$$

erfüllt ist, was von nun an gelten soll. Die Größen c_{F_L} bzw. c_{F_R} stehen für die beiden Fermionen, die über die Yukawakopplung miteinander in Wechselwirkung treten.

Diese Bedingung (8.12) ist trivial erfüllt, wenn es sich bei dem skalaren Anteil des Yukawaterms der Lagrangedichte um ein Singulett handelt. Ist eins der Fermionen ein Singulett, so kann sie nur durch ein skalares Triplett und ein Fermion in der Darstellung 10 der $SU(3)$ erfüllt werden. Sowohl für die erste Möglichkeit als auch für den Fall, daß keines der drei Multipletts ein Singulett¹⁵ ist, werden nun weitere einschränkende Bedingungen bestimmt.

Durch (8.8) läßt sich für den Fall $44c_S + 10s_F + 22s_S^{\text{SUSY}} - 3s_S > 10c_F$ abschätzen:

$$bb^{\text{SUSY}} (\eta^{\text{SUSY}} - \eta) > \frac{9}{22} c_F (44c_S + 10s_F + 22s_S^{\text{SUSY}} - 3s_S - 10c_F) > 0.$$

Dies führt auch für $22c_S \leq 5c_F$ auf die Richtigkeit der Behauptung (8.6). Diese Variante wird z.B. vom SM und MSSM für die starke Wechselwirkung verwirklicht: Das über die Top-Yukawakopplung wechselwirkende Higgsfeld ist ein Singulett bezüglich der $SU(3)_C$. Wegen $5c_F - 22c_S = 5 \cdot 8/3 - 0 \geq 0$ und $44c_S + 10s_F + 22s_S^{\text{SUSY}} - 3s_S - 10c_F = 0 + 10 \cdot 2n_G + 22 - 0 - 0 = 60 > 0$ ist das MSSM aufgrund des fermionischen Teilchengehalts IR-attraktiver als das SM. Dies ist weniger speziell, als es scheint, da die letzte Ungleichung für eine beliebige Generationenzahl und für alle Fermionendarstellungen mit Ausnahme der des Singuletts gilt. Die letzte Möglichkeit scheidet jedoch ebenfalls aus, da dann weder im SM noch im MSSM die Top-Yukawakopplung sensitiv für die starke Wechselwirkung wäre (abgesehen von der phänomenologischen Unmöglichkeit).

Die Behauptung $\eta^{\text{SUSY}} > \eta$ ist damit für den Fall

$$\begin{aligned} 44c_S + 10s_F + 22s_S^{\text{SUSY}} - 3s_S &\leq 10c_F \\ \Leftrightarrow c_F - s_F &\geq \frac{22}{5}c_S + \frac{11}{5}s_S^{\text{SUSY}} - \frac{3}{10}s_S \end{aligned} \quad (8.13)$$

noch nicht geklärt. Der fermionische und skalare Teilchengehalt, der implizit in die Dynkin-Indizes s eingeht, ist durch (8.13) stark reglementiert. Insbesondere muß für solche Modelle gelten:

$$c_F > s_F, \quad \text{bzw. für } c_S=0: \quad c_F \geq s_F, \quad (8.14)$$

oder, wenn s_F explizit in die Anteile, die von den Fermionen der betrachteten Yukawakopplung (\bar{s}_F) und allen anderen Fermionen (Δs_F) herrühren, zerlegt wird:

$$c_F - \bar{s}_F > \Delta s_F \geq 0, \quad \text{bzw. für } c_S=0: \quad c_F - \bar{s}_F \geq \Delta s_F \geq 0. \quad (8.15)$$

Mit dieser Bedingung bleiben für den Fall, daß keines der drei relevanten Felder ein Singulett ist, nur die folgenden Möglichkeiten, wobei sich die Angaben

¹⁵ $22c_2 \leq 5c_F$ begrenzt auch hier – wenn auch weniger reglementierend – die mögliche Anzahl von Modellen.

allein auf die Darstellung der unmittelbar mit der Yukawakopplung in Beziehung stehenden Fermionen beziehen, zurück:

Gruppe	N_S	N_{F_L}	N_{F_R}
$SU(2)$	2	3	2
$SU(3)$	3	6	6, 8
$SU(4)$	4	10	15
$SU(6)$	6	21	21, 35
	15	21	21

(8.16)

Durch die zusätzliche Beschränkung auf komplexe Darstellungen der Fermionen im Falle der $SU(n)$, fallen aus dieser Liste alle adjungierten Möglichkeiten heraus, d.h. die mit den Dimensionen 3, 8, 15 und 35. Dies soll auch im weiteren berücksichtigt werden.

Für den Fall eines skalaren Singulettts folgt mit (8.8) und (8.13) zusätzlich:

$$\begin{aligned}
c &< \frac{2}{3}c_F + \frac{1}{3}s_F + \frac{1}{3}s_S^{\text{SUSY}} \leq \frac{2}{3}c_F + \frac{1}{3}s_S^{\text{SUSY}} + \frac{1}{3} \left(c_F - \frac{11}{5}s_S^{\text{SUSY}} + \frac{3}{10}s_S \right) \\
&= c_F - \frac{2}{5}s_S^{\text{SUSY}} + \frac{1}{10}s_S \leq c_F - \frac{3}{10}s_S^{\text{SUSY}} \leq c_F.
\end{aligned}
\tag{8.17}$$

Da die Behauptung (8.6) $\eta^{\text{SUSY}} > \eta$ in diesem Fall gleichbedeutend mit

$$X := s_F - c + \frac{9}{5}s_S^{\text{SUSY}} - \frac{1}{5}s_S > 0 \tag{8.18}$$

ist und dies für $c < s_F$ wegen $\frac{9}{5}s_S^{\text{SUSY}} - \frac{1}{5}s_S \geq \frac{8}{5}s_S \geq 0$ wiederum gültig ist, werden die Modelle, die möglicherweise $\eta^{\text{SUSY}} > \eta$ nicht erfüllen, durch $c \geq s_F \geq \bar{s}_F$ und $c \leq c_F$ eingeschränkt, was zusammen mit den aus (8.16) verbleibenden ergibt:

Gruppe	N_S	N_{F_L}	N_{F_R}
$SU(3)$	3	6	6
$SU(5)$	1	10	10
$SU(6)$	1	20	20
	6, 15	21	21
$SO(7)$	1	7	7, 8
$SO(8)$	1	8	8
$SO(9)$	1	9	9, 16
		16	16
$SO(10)$	1	10	10, 16
		16	16
E_6	1	27	27

(8.19)

Hierbei wurden diejenigen Modelle nicht berücksichtigt, deren Fermionendarstellungen nicht auf anomaliefreie Theorien führen, d.h. die nicht durch ein entsprechendes Anti-Multiplett ergänzt werden. Für diejenigen Modelle, die kein skalares Singulett in (8.19) besitzen, läßt sich das Ungleichungssystem (8.7) und (8.8) nicht erfüllen, womit diese Modelle ebenfalls herausfallen.

Die Modelle aus (8.19) mit einem skalaren Singulett müssen unter Berücksichtigung des vollen Teilchengehalts die Ungleichungen (8.7), (8.8), (8.13), (8.14), (8.17) und $c \geq s_F$ erfüllen:

$$3c - \bar{s}_F > \Delta s_F + \Delta s_S^{\text{SUSY}} > 3c - \bar{s}_F - 2c_F, \quad (8.20)$$

$$c_F - \bar{s}_F \geq \Delta s_F + \frac{11}{5} \Delta s_S^{\text{SUSY}} - \frac{3}{10} \Delta s_S \geq 0. \quad (8.21)$$

Das Symbol Δ steht hierbei wiederum für den Anteil des Teilchengehalts, der über die reine Wechselwirkung mit der betrachteten Yukawakopplung hinausgeht.

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (8.20) und (8.21) werden nun die Modelle bestimmt, für die $\eta^{\text{SUSY}} \leq \eta$ bzw. (8.18) gilt:

$$\eta^{\text{SUSY}} \leq \eta \Leftrightarrow X = \bar{s}_F - c + \Delta s_F + \frac{9}{5} \Delta s_S^{\text{SUSY}} - \frac{1}{5} \Delta s_S \leq 0. \quad (8.22)$$

Da die Größen Δs nur ganzzahlige Vielfache der Dynkin-Indizes der Multipletts in (8.19) annehmen können, ist die Zahl der Möglichkeiten stark beschränkt. Wird zusätzlich berücksichtigt, daß der Yukawaterm als Teil der Lagrangedichte ein Singulett sein muß [122], so ergeben sich die folgenden Modelle, in denen $\eta^{\text{SUSY}} > \eta$ nicht erfüllt ist:

Gruppe	N_S	N_{F_L}	N_{F_R}	Δs_F	$\Delta s_S = \Delta s_S^{\text{SUSY}}$
$SU(5)$	1	10	$\overline{10}$	2	0
				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$SU(6)$	1	20	20	0	0
$SO(8)$	1	8	8	2	0
				1	$\frac{1}{2}$
$SO(9)$	1	9	9	2	0
		16	16	0, 1	0
				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$SO(10)$	1	16	$\overline{16}$	1, 2	0
E_6	1	27	$\overline{27}$	0, 1	0

Das skalare Teilchen, welches über die Yukawakopplung wechselwirkt, ist in allen Fällen ein Singulett. Der mögliche zusätzliche Multiplettgehalt an Fermionen

Δs_F und Skalaren Δs_S ist in den letzten beiden Spalten notiert. In der supersymmetrischen Erweiterung des Modells darf in keinem der Fälle der skalare Teilchengehalt größer als der des nichtsupersymmetrischen Modells sein. Anderenfalls würde wieder die Gültigkeit von $\eta^{\text{SUSY}} > \eta$ folgen.

Mit Ausnahme der $SO(9)$ und $SO(10)$ handelt es sich bei allen Fermionen ausschließlich um die Fundamentaldarstellung. Hier ist noch die nächsthöhere Darstellung möglich. Der zusätzliche skalare Anteil besteht entweder ausschließlich aus Singulettts oder ist in einigen Fällen fundamental. Das obige $SU(6)$ -Modell stellt einen Extremfall dar, da in diesem Modell für $\eta^{\text{SUSY}} \leq \eta$ neben den drei Multipletts, die zur betrachteten Yukawakopplung gehören, kein weiteres Multiplett außer trivialen Singulettts vorhanden sein darf. Der Gehalt an Singulettts kann in jedem Fall beliebig hoch ausfallen.

Insgesamt bleibt als Ergebnis festzuhalten:

Die supersymmetrisierten Modelle sind im hier untersuchten Eich-Yukawa-Sektor für einen beliebigen Teilchengehalt und unabhängig von den realisierten Darstellungen der Materie für Faktoren der Eichgruppe mit Rang kleiner vier immer stärker IR-attraktiv als das jeweilige nichtsupersymmetrische Modell. Für Eichgruppenfaktoren mit größerem Rang (bis zu dem hier untersuchten Rang sechs) ist dies bis auf wenige Ausnahmen ebenfalls erfüllt.

Aufgrund ihres geringen skalaren und fermionischen Teilchengehalts stellen die Ausnahmemodelle physikalisch unattraktive Möglichkeiten dar.

9 Erweiterung der Eichgruppe eines Modells

Mit den in Kapitel 7 bestimmten Fixlösungen der RGG ist es nun möglich, die Untersuchungen für ganze Theorieklassen durchzuführen. Bevor dies im Kapitel 10 für konkrete Modelle demonstriert wird, soll an dieser Stelle auf die grundsätzlichen Eigenschaften der Fixmannigfaltigkeiten dieser Theorien eingegangen werden.

Im Abschnitt 9.1 wird untersucht, wie Fixlösungen und die zugehörigen Observablen einer Theorie durch Hinzunahme von zusätzlichen Wechselwirkungen mit abelscher Eichgruppe beeinflusst werden. Insbesondere die bewirkten Korrekturen für z.B. die Top-Masse werden sich dabei von der Größenordnung weniger GeV heraus stellen. Im zweiten Abschnitt 9.2 wird die Fixmannigfaltigkeit einer Yukawakopplung und den Eichkopplungen eines allgemeinen Modells approximiert. Die sich dabei ergebenden oberen und unteren Grenzen dieser Yukawakopplung lassen zum einen die bestimmenden Parameter der Fixlösung erkennen und erklären zum anderen, warum auch bei den nichttrivialen Erweiterungen der Eichgruppe G_{321} , wie z.B. im Falle der links-rechts-symmetrischen Modelle, die aus den Fixmannigfaltigkeiten gewonnenen Observablen wie z.B. die Top-Massen in ein verhältnismäßig kleines Intervall von ungefähr 100 bis 300 GeV fallen.

Die in diesem Kapitel getroffenen Aussagen zu den Massen der Fermionen respektive des Top-Quarks dürfen nicht als absolut angesehen werden, da die Auswertung der Yukawakopplungen in Ein-Schleifen-Ordnung vollzogen und spätestens durch die Übersetzung der Yukawakopplungen in diese Massen auf Baumgraphenniveau eine erste Näherung darstellen. Werden Modelle verglichen, die durch spontane Symmetriebrechung ineinander übergehen, so stellen die folgenden Betrachtungen eine grobe Abschätzung dar. Diese Anmerkungen werden zu Beginn des Kapitels 10 ausführlicher erläutert.

9.1 Erweiterung eines Modells um abelsche Eichgruppen

Häufig stellt sich bei der Untersuchung eines speziellen Elementarteilchenmodells die Frage, wie sich die Eigenschaften dieser Theorie durch Hinzunahme von zusätzlichen Wechselwirkungen verändern. Motiviert ist diese Fragestellung entweder durch die Hoffnung, daß eine Verbesserung einiger Eigenschaften des Ausgangsmodells eintritt, oder daß übergeordnete Modelle im Rahmen der GUT oder Superstring-Theorien solche Erweiterungen voraussagen. Ein Beispiel hierfür sind die Modelle mit der Eichgruppe

$$G_{321} \rightarrow G_{32111} = G_{321} \otimes U(1)^2,$$

die von den Superstring-Theorien als Modifikation der Eichgruppe G_{321} des SMs oder MSSMs vorausgesagt werden. Die Möglichkeit, daß das betrachtete Modell die Eichgruppe G_{321} nichttrivial enthält ($G_{123} \subset G$), wird zum Ende des nächsten Abschnitts untersucht.

Für eine solche Situation wird in diesem Abschnitt, ausgehend von einem allgemeinen Modell mit der Eichgruppe G , der Einfluß der mit der Eichgruppe $g = U(1)^m$ hinzukommenden Wechselwirkungen

$$G \rightarrow G \otimes g$$

auf eine Fermionenmasse wie z.B. die des Top-Quarks untersucht. Sinnvoll ist dies nur, wenn die Modelle mit den Eichgruppen G und $G \otimes g$ bezüglich Teilchengehalt und Quantenzahlen der einzelnen Gruppenfaktoren vergleichbar bleiben. Das bedeutet, daß davon ausgegangen wird, daß die Klassifikation der Materie bezüglich des Anteils G unverändert ist und sich der Teilchengehalt nur gering ändert. Dies kann insbesondere für den Fall $g = U(1)^m$ angenommen werden und wird an dieser Stelle diskutiert. Die Erweiterung um einen nichtabelschen Anteil erfüllt in der Regel nicht diese Voraussetzungen, so daß für diese Möglichkeit größere Veränderungen zu erwarten sind.

Als erster Schritt wird $g = U(1)$ gesetzt und im Anschluß auf mehrere abelsche Gruppen verallgemeinert. Die IR-attraktivsten Fixmannigfaltigkeiten für den Sektor einer Yukawakopplung und N Eichkopplungen, darunter die ersten asymptotisch nichtfrei, wurden mit (7.34) in Abschnitt 7.2 für das Modell mit der Eichgruppe G zu

$$\frac{1}{y_G} = \frac{a}{\eta_1} \frac{1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \left| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots, \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right. \right) \quad (9.1)$$

bestimmt. Es wird angenommen, daß mindestens eine asymptotisch nichtfreie Wechselwirkung $n \geq 1$ im Ausgangsmodell existiert und daß es sich bei dem kleinsten Landau-Pol im UV um den der Eichkopplung α_1 handelt.

Mit der Eichkopplung α der zusätzlichen Wechselwirkung lautet die Fixlösung, wenn nach wie vor der Sektor von α_1 bestimmend ist:

$$\frac{1}{y_{G \otimes g}} = \frac{a}{\eta_1} \frac{1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta + 1, \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \left| \frac{b \alpha}{b_1 \alpha_1}, \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots, \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right. \right), \quad (9.2)$$

oder wenn diese Rolle von α übernommen wird:

$$\frac{1}{y_{G \otimes g}} = \frac{a}{\eta} \frac{1}{b \alpha} F_D^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta \\ \eta_1 + 1, \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \left| \frac{b_1 \alpha_1}{b \alpha}, \frac{b_2 \alpha_2}{b \alpha}, \dots, \frac{b_N \alpha_N}{b \alpha} \right. \right). \quad (9.3)$$

Hierbei ist b der Koeffizient aus der RGG der Eichkopplung und η der Attraktivitätskoeffizient bezüglich der Yukawakopplung $y_{G\otimes g}$.

Im ersten Fall (9.2) gilt aufgrund der Landau-Pol Reihenfolge für die abelschen Eichkopplungen α_1 und α :

$$0 \leq \frac{b \alpha}{b_1 \alpha_1} \leq 1. \quad (9.4)$$

Der Wert 0 bzw. 1 wird gerade auf den kartesischen bzw. IR-attraktiven Fixhypercipelen erreicht. Damit folgt mit der Euler'schen Integraldarstellung (F.5) der Lauricella-Funktion

$$F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots \end{matrix} \middle| x_1, \dots \right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx_1)^{-\beta_1} \dots$$

in diesem Fall für einen der Faktoren im Integranden:

$$(1-t)^{-(\eta+1)} \leq \left(1-t \frac{b \alpha}{b_1 \alpha_1}\right)^{-(\eta+1)} \leq 1,$$

und damit für die Yukawakopplung $y_{G\otimes g}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_G} \geq \frac{1}{y_{G\otimes g}} &\geq \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta + 1} \frac{a}{\eta_1} \frac{1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 1; -\eta - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\ &= \frac{\Gamma(-\eta_1 - \eta - 1)}{\Gamma(-\eta_1)\Gamma(-\eta - 1)} \int_0^1 du u^{-\eta_1} (1-u)^{-\eta-2} \frac{1}{y_G(u \alpha_{>1})}, \quad (9.5) \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Beziehung (F.21) auf Seite 215 ausgenutzt wurde. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \frac{1}{y_G(u \alpha_{>1})} &= \frac{a}{\eta_1} \frac{1}{b_1 \alpha_1} \sum_{i=2}^N \frac{\eta_i + 1}{1 - \eta_1} \frac{b_i \alpha_i}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{matrix} 2; 2 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \Big|_{\eta_i \rightarrow \eta_i + 1} \\ &= \frac{1}{\eta_1} \underbrace{\sum_{i=2}^N \frac{a \chi_i}{1 - \eta_1} \frac{\alpha_i}{(b_1 \alpha_1)^2} F_D^{(N-1)} \left(\dots \right) \Big|_{\eta_i \rightarrow \eta_i + 1}}_{>0} < 0 \end{aligned}$$

ist die Funktion $1/y_G(u\alpha)$ streng monoton fallend in u und es ergibt sich aus (9.5):

$$\frac{1}{y_G} \geq \frac{1}{y_{G\otimes g}} \geq \frac{\Gamma(-\eta_1 - \eta - 1)}{\Gamma(-\eta_1)\Gamma(-\eta - 1)} \frac{1}{y_G} \int_0^1 du u^{-\eta_1} (1-u)^{-\eta-2} = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta + 1} \frac{1}{y_G}. \quad (9.6)$$

Im Falle von (9.3) folgt durch mehrfaches Verwenden von

$$0 \leq \frac{b_1 \alpha_1}{b \alpha} \leq 1 \quad (9.7)$$

und der gleichen Vorgehensweise wie zuvor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_G} \geq \frac{1}{y_{G \otimes g}} &\geq \frac{\eta}{\eta + \eta_1 + 1} \frac{a}{\eta b} \frac{1}{\alpha} F_D^{(N-1)} \left(1; -\eta - \eta_1 \left| \frac{b_1 \alpha_1}{b \alpha} \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right. \right) \\ &\geq \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta + 1} \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(1; 1 - \eta_1 \left| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \dots \right. \right) \\ &= \frac{\eta_1}{\eta_1 + \eta + 1} \frac{1}{y_G}, \end{aligned} \quad (9.8)$$

was formal identisch mit (9.6) ist. Der Unterschied besteht darin, daß in diesem Fall die Mannigfaltigkeit (9.3) statt auf den Sektor der Eichkopplung α_1 auch auf jeden der anderen $\alpha_2, \dots, \alpha_N$ reduziert werden kann, es sei denn die gesamte Landau-Pol Reihenfolge ist bekannt.

Beinhaltet die Gruppe g mehrere $U(1)$ Faktoren, so ergibt die mehrfache Anwendung der obigen Herleitung in beiden Fällen:

$$y_G \leq y_{G \otimes g} \leq \frac{\eta_1 + \sum_g (\eta + 1)}{\eta_1} y_G, \quad (9.9)$$

wobei im Zähler auf der rechten Seite alle abelschen Anteile, die über das ursprüngliche Modell hinausgehen, summiert werden. Unter Verwendung der Baumgraphenbeziehungen für die Masse des zur betrachteten Yukawakopplung korrespondierenden Fermions folgt:

$$1 \leq \frac{m_{G \otimes g}(\mu)}{m_G(\mu)} \leq \sqrt{\frac{\eta_1 + \sum_g (\eta + 1)}{\eta_1}}. \quad (9.10)$$

Die Eichkopplung mit dem kleinsten Landau-Pol im UV des ursprünglichen Modells mit der Eichgruppe G wurde hier wiederum mit α_1 identifiziert. Das Ergebnis gilt für den gesamten RGF an einer beliebigen Impulsskala, so daß durch die Evolution des RGFes vom UV zum IR die Abweichung von der ursprünglichen Masse im UV am größten sein und dem Wurzelausdruck auf der rechten Seite entsprechen wird. Insbesondere wird sich die Masse durch Hinzunahme von abelschen Wechselwirkungen vergrößern.

Die Attraktivitätskoeffizienten von Wechselwirkungen mit abelscher Eichgruppe ergeben sich aus Abschnitt 3.8 zu:

$$\eta = -9 \frac{\sum' Q_F^2}{2 \sum Q_F^2 + \sum Q_S^2} - 1, \quad \eta^{\text{SUSY}} = -2 \frac{\sum' Q_F^2 + \sum' Q_S^2}{\sum Q_F^2 + \sum Q_S^2} - 1. \quad (9.11)$$

Der Strich an der Summe im Zähler steht hierbei für die ausschließliche Summation über die Teilchen, die an der Wechselwirkung der betrachteten Yukawakopplung teilnehmen. Insbesondere gilt wegen $0 < \sum' Q^2 \leq \sum Q^2$:

$$-1 > \eta \geq -\frac{11}{2}, \quad -1 > \eta^{\text{SUSY}} \geq -3. \quad (9.12)$$

Die Koeffizienten können somit unabhängig vom jeweiligen Modell keine beliebig kleinen Werte annehmen.

Die maximal denkbaren Korrekturen sind mit diesem Ergebnis für eine zusätzliche $U(1)$ wie folgt beschränkt:

$$1 \leq \frac{m_{G \otimes g}(\mu)}{m_G(\mu)} \leq \sqrt{\frac{\eta_1 + \eta + 1}{\eta_1}} \leq \sqrt{-\eta} \leq \begin{cases} 2, 35 & : \text{nicht-SUSY} \\ 1, 73 & : \text{SUSY} \end{cases}. \quad (9.13)$$

In konkreten Anwendungen liegen die Koeffizienten η sehr nahe bei -1 , so daß sich Abweichungen bis zu 10% im gesamten RGF ergeben. Bei der Evolution zum IR wird dies auf wenige einstellige Prozentzahlen schrumpfen, wie sich am Beispiel in Abschnitt 10.4 zeigen wird.

Wird mehr als eine Yukawakopplung entsprechend den im letzten Kapitel exakt gelösten Fällen berücksichtigt, so folgt mit (7.52) auf Seite 102 aus (9.8):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{y_{1,G}} F_D^{(M-1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta_1^y} \left| \frac{a_2 - d_2 y_{2,G}}{a_1 - d_1 y_{1,G}}, \dots \right. \right) \\ & \geq \frac{1}{y_{1,G \otimes g}} F_D^{(M-1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta_1^y} \left| \frac{a_2 - d_2 y_{2,G \otimes g}}{a_1 - d_1 y_{1,G \otimes g}}, \dots \right. \right) \\ & \geq \frac{\eta_1}{\eta_1 + \sum_g (\eta + 1)} \frac{1}{y_{1,G}} F_D^{(M-1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta_1^y} \left| \frac{a_2 - d_2 y_{2,G}}{a_1 - d_1 y_{1,G}}, \dots \right. \right) \end{aligned}$$

Einsetzen der Potenzreihenentwicklung (F.1) und Vergleich der einzelnen Summanden ergibt, daß diese Beziehung nur gelten kann, wenn (9.9) für jede einzelne Yukawakopplung erfüllt ist.

Mit der Beziehung (9.10) ist also gelungen, die Auswirkungen der Erweiterung eines Modells mit allgemeiner Eichgruppe und beliebig gearteter Darstellung der Materie um zusätzliche abelsche Wechselwirkungen auf die aus den Fixmannigfaltigkeiten gewonnenen Yukawakopplungen des ursprünglichen Modells über die gesamte Impulsskala zu begrenzen. Die Übersetzung in die Baumgraphenbeziehung einer Fermionenmasse überträgt dieses Ergebnis direkt auf diese (genäherte) Größe (9.10). Die Korrekturen erfolgen in beiden Beziehungen immer zu größeren Werten und die obere Grenzen sind allein durch die Attraktivitätskoeffizienten der hinzutretenden Eichkopplungen mit abelscher Eichgruppe und der mit dem kleinsten UV-Landau-Pol im ursprünglichen Modell gegeben. Als Parameter gehen in diese Größen die zugehörigen Ladungen der Teilchenfelder ein.

Diese Attraktivitätskoeffizienten sind in ihrem Wertebereich modellunabhängig begrenzt (9.12). Dadurch bedingt läßt sich die überhaupt mögliche Korrektur über die gesamte Impulsskala ebenfalls für das Verhältnis von ursprünglicher und Fermionenmasse des erweiterten Modells übertragen. Für die die Hinzunahme einer einzelnen abelschen Wechselwirkung ergibt sich damit für die aus der Fixmannigfaltigkeit gewonnene (genäherte) Fermionenmasse für jedes Paar von Modellen, die in dem zuvor geschilderten Verhältnis stehen, eine maximale Korrektur von 135% bzw. 73% Prozent im supersymmetrischen Fall (9.13), womit im zweiten Fall etwa um die Hälfte kleinere Abweichungen zu erwarten sind. Dies ist in Hinsicht auf die Vielzahl der denkbaren physikalischen Situationen an den unterschiedlichsten Impulsskalen, vorausgesetzt der Evolutionsweg im jeweiligen Modell ist für die Attraktion auf die Fixmannigfaltigkeit hinreichend lang, ein erstaunlich kleiner Bereich. Da diese Abweichungen die gesamte Impulsskala betreffen, wird die Korrektur hin zu kleineren μ durch die Auswertung der Fixmannigfaltigkeit je nach Evolutionslänge kleiner ausfallen.

Die Attraktivitätskoeffizienten nehmen in allen später besprochenen Anwendungen Werte nur wenig kleiner als -1 an und führen damit z.B. für Erweiterungen des SMs bzw. MSSMs um eine abelsche Eichgruppe zu maximal möglichen Veränderungen der Top-Masse von ca. 10% über den gesamten erlaubten Skalenbereich des erweiterten Modells. Dieses speziellere Ergebnis ist deswegen von Interesse, da für die Werte der zusätzlichen Eichkopplung keine experimentellen Ergebnisse vorliegen. Voraussetzung für diesen direkten Vergleich der Massen ist in einer solchen Situation, daß die Brechungsskala des übergeordneten Modells nicht zu weit von der Top-Masse entfernt ist und das Gleiten der freien Parameter im Zwischenbereich gering ausfällt.

Solche Betrachtungen der Top-Masse sind trotz der mittlerweile erfolgten experimentellen Verifikation für die Modellbildung deswegen von Interesse, da übergeordnete Theorien mit der Physik im IR-Bereich verträglich sein müssen.

9.2 Approximation von Fixmannigfaltigkeiten

Die Untersuchung der unterschiedlichen Modelle, die alle auf die eine oder andere Art Erweiterungen des SMs darstellen, wird ergeben, daß z.B. die bestimmte Masse des Top-Quarks unabhängig vom Teilchengehalt, der intakten Supersymmetrie und Modifikation der Eichgruppe des SMs G_{321} ungefähr von derselben Größenordnung $m_t(174, 3 \text{ GeV}) \sim (100 - 300) \text{ GeV}$ ist. Dies wurde im Falle von Erweiterungen $G = G_{321} \otimes U(1)^m$ im letzten Abschnitt geklärt. Die Beobachtung ist jedoch auch für Eichgruppen, die die G_{321} in Form von $G = SU(3)_C \otimes g$ mit nichtabelschen g enthalten, gültig und wird an dieser Stelle am Beispiel der links-rechts-symmetrischen Modelle mit beliebigen skalaren Teilchengehalt untersucht.

Dazu wird, ähnlich dem letzten Abschnitt, die Fixmannigfaltigkeit einer Yukawakopplung $y = Y^2/4\pi$ und N Eichkopplungen $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ mit Hilfe der Fixmannigfaltigkeiten abgeschätzt. Der Unterschied besteht darin, daß dies nun innerhalb des Modells vorgenommen wird. Dadurch wird der aus der Fixmannigfaltigkeit bestimmte Wert der Yukawakopplung allein durch die Kenntnis der Eichkopplungen mit dem größten Landau-Pol im IR (hier $\tilde{\mu}_N$) und kleinsten im UV (hier $\tilde{\mu}_1$) beschränkt. Als Parameter gehen nur noch wenige Koeffizienten ein, die im wesentlichen gruppentheoretisch bestimmt sind. Das bestimmte Intervall begrenzt wiederum die gesamte Impulsskala und wird aufgrund der Attraktion des RGFes für die untersuchten IR-Massen deutlich geringer ausfallen.

Die Faktoren der Integraldarstellung (F.5) erfüllen für durch Null und Eins beschränkte Argumente x die Ungleichungen:

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 1 - t \leq 1 - tx \leq 1.$$

Dies bedeutet im einzelnen für die im weiteren auftretenden Verhältnisse der Eichkopplungen:

$$\begin{aligned} i = 1, \dots, n; b_i < 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_i + 1 < 0 : (1 - t)^{-\eta_i - 1} \leq (1 - tx)^{-\eta_i - 1} \leq 1, \\ 0 \leq \frac{b_i \alpha_i}{b_1 \alpha_1} \leq 1 \text{ für } \tilde{\mu}_1 \leq \tilde{\mu}_i, \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} i = n + 1, \dots, N; b_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_i + 1 > 0 : (1 - t)^{-\eta_i - 1} \geq (1 - tx)^{-\eta_i - 1} \geq 1, \\ 0 \leq \frac{b_N \alpha_N - b_i \alpha_i}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1} \leq 1 \text{ für } \tilde{\mu}_i \leq \tilde{\mu}_N. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Die in Kapitel 7 bestimmte attraktivste Fixmannigfaltigkeit (7.34)

$$\frac{1}{y} = \frac{a}{\eta_1} \frac{1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \eta_3 + 1, \dots \end{array} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \quad (9.16)$$

erfüllt mit (9.14) und (9.15) und der Abkürzung

$$\delta_k^l := \sum_{i=k}^l (\eta_i + 1)$$

die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} &\leq \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1} F_D^{(N-n-1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_{n+1} + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_{n+1} \alpha_{n+1}}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&= \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1} F_D^{(N-n-1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_{n+1} + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1, 1 - \eta_1 - \delta_{n+1}^N \end{matrix} \middle| \right. \\
&\quad \left. \frac{b_N \alpha_N - b_2 \alpha_2}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1}, \dots, \frac{b_N \alpha_N}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1} \right) \\
&\leq \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1 - b_N \alpha_N} F_D^{(2)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \delta_{n+1}^{N-1}, 1 - \eta_1 - \delta_{n+1}^N \end{matrix} \middle| 1, \frac{b_N \alpha_N}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1} \right).
\end{aligned}$$

Je nachdem, ob der Parameter $1 - \eta_1 - \delta_{n+1}^N$ positiv oder negativ ist, läßt sich mit (9.14) oder (9.15) das letzte Argument weiter abschätzen. Für Eins-Einträge konvergiert die Lauricella-Funktion $F_D \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \dots, \beta, \dots \end{matrix} \right)$ nur, wenn $\gamma > \alpha + \beta$ erfüllt ist:

$$A) \quad 1 > \eta_1 + \delta_{n+1}^N : \quad (9.17)$$

$$\frac{1}{y} \leq \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1 - b_N \alpha_N} F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ -\eta_1 - \eta_N \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{a}{\eta_N b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1},$$

$$B) \quad 1 \leq \eta_1 + \delta_{n+1}^N < \eta_N + 1 : \quad (9.18)$$

$$\frac{1}{y} \leq \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1 - b_N \alpha_N} F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \delta_{n+1}^{N-1} \end{matrix} \middle| 1 \right) = -\frac{a}{\eta_1 + \delta_{n+1}^{N-1}} \frac{1}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1}.$$

Der Fall A) deckt alle im nächsten Kapitel ausgewerteten Modelle ab. Ganz ähnlich ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y} &\geq \frac{a}{\eta_1 b_1 \alpha_1} F_D^{(N-n)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \delta_2^n, \eta_{n+1} + 1, \dots \end{matrix} \middle| 1, \frac{b_{n+1} \alpha_{n+1}}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&= \frac{a}{\delta_1^n - 1 b_1 \alpha_1} F_D^{(N-n-1)} \left(\begin{matrix} 1; 2 - \delta_1^n \\ \eta_{n+1} + 1, \dots \end{matrix} \middle| \frac{b_{n+1} \alpha_{n+1}}{b_1 \alpha_1}, \dots \right) \\
&= \frac{a}{\delta_1^n - 1 b_1 \alpha_1} \left(1 - \frac{b_N \alpha_N}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1} F_D^{(N-n-1)} \left(\begin{matrix} 1; 2 - \delta_1^n \\ \eta_{n+1} + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1, 2 - \delta_1^N \end{matrix} \middle| \right. \\
&\quad \left. \frac{b_N \alpha_N - b_2 \alpha_2}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1}, \dots, \frac{b_N \alpha_N}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1} \right) \\
&\geq \frac{a}{\delta_1^n - 1 b_1 \alpha_1 - b_N \alpha_N} F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 2 - \delta_1^n \\ 2 - \delta_1^N \end{matrix} \middle| \frac{b_N \alpha_N}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1} \right).
\end{aligned}$$

Wie bei der letzten Grenzfallbetrachtung, muß wieder unterschieden werden, ob

der Parameter $2 - \delta_1^N$ positiv oder negativ ist. Unter Berücksichtigung der Konvergenzbedingung folgt:

$$C) \quad 2 > \delta_1^N : \tag{9.19}$$

$$\frac{1}{y} \geq \frac{a}{1 - \delta_1^n b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1},$$

$$D) \quad 2 \leq \delta_1^N, 1 < \delta_{n+1}^N : \tag{9.20}$$

$$\frac{1}{y} \geq \frac{a}{1 - \delta_1^n b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1} F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 2 - \delta_1^n \\ 2 - \delta_1^N \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{a}{\delta_{n+1}^N - 1} \frac{1}{b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1}.$$

Der relevante Fall A) wird wegen $\delta_1^N = \delta_1^n + \delta_{n+1}^N < \delta_1^n - \eta_1 + 1 = \delta_2^n + 2 < 2$ durch die Möglichkeit C) ergänzt, so daß sich insgesamt die folgenden relevanten oberen und unteren Grenzfälle ergeben:

$$\underline{\eta_1 + \delta_{n+1}^N < 1 :}$$

$$\frac{\eta_N}{a} (b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1) \leq y \leq \frac{1 - \delta_1^n}{a} (b_N \alpha_N - b_1 \alpha_1), \tag{9.21}$$

$$\Leftrightarrow \rho_y^* \left(1 - \frac{b_1}{b_N} \rho_1 \right) \leq \rho_y \leq \frac{1 - \delta_1^n}{\eta_N} \rho_y^* \left(1 - \frac{b_1}{b_N} \rho_1 \right). \tag{9.22}$$

Die letzte Zeile gibt den Wechsel zu den Variablen $\rho_y = y/\alpha_N$ bzw. $\rho_1 = \alpha_1/\alpha_N$ mit $\rho_y^* = b_N \eta_N/a$ wieder. Der Wertebereich der aus der Fixmannigfaltigkeit gewonnenen Yukawakopplung läßt sich somit über den gesamten Evolutionsweg allein durch die zwei bestimmenden Eichkopplungen, deren Landau-Pole den mathematischen Gültigkeitsbereich der RGG beschränken, den IR-attraktiven Fixpunkt und den Attraktivitätskoeffizienten der asymptotisch nichtfreien Wechselwirkungen bzw. η_N begrenzen.

Das Ergebnis (9.21) ermöglicht es, für die in Kapitel 4 vorgestellten Modifikation des SMs bzw. MSSMs in Form der links-rechts-symmetrischen Modelle (LR-Modelle), den Wert der Top-Masse ohne detaillierte Analyse abzuschätzen. Diese Modelle setzen alle eine Eichgruppe der Form

$$G = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$$

voraus. Anhand der RGG in Anhang B ergibt sich, daß die Koeffizienten der starken Wechselwirkung b_3 und η_3 jeweils unverändert in (9.21) eingehen und der Koeffizient $a_{LR} = 10$ statt $a = 9$ bzw. $a_{LR}^{\text{SUSY}} = 14$ statt $a^{\text{SUSY}} = 12$ lautet. Mit

(9.22) gilt dann:

$$\frac{a}{a_{\text{LR}}}\rho_t^* \left(1 - \frac{b_{B-L}}{b_3}\rho_1\right) \leq \rho_{t,\text{LR}} \leq \frac{a}{a_{\text{LR}}}\frac{1 - \delta_1^n|_{\text{LR}}}{\eta_3}\rho_t^* \left(1 - \frac{b_{B-L}}{b_3}\rho_1\right), \quad (9.23)$$

wobei angenommen wurde, daß es sich bei dem kleinsten Landau-Pol im UV jeweils um den der Eichkopplung α_{B-L} handelt und daß in etwa $\alpha_{B-L} \simeq \alpha_1$ an der betrachteten Impulsskala gilt. Die Größen ohne Index LR stehen für die entsprechenden Werte im SM bzw. MSSM. Im nichtsupersymmetrischen Fall ergibt sich der Zähler der rechten Seite zu:

$$1 - \delta_1^n|_{\text{LR}} = -\eta_{B-L} = 1 + \frac{1/2}{8 + 3n_L + 3n_R} < \frac{29}{28},$$

wobei n_L bzw. n_R für die jeweilige Anzahl der $SU(2)$ Triplets steht und im zweiten Fall zur Brechung der LR-Symmetrie mindestens zwei Triplets vorhanden sein müssen. Im supersymmetrischen Fall gilt, da nun drei asymptotisch nichtfreie Eichkopplungen auftreten:

$$\begin{aligned} 1 - \delta_1^n|_{\text{LR}}^{\text{SUSY}} &= -\eta_{B-L} - \eta_L - \eta_R - 2 \\ &= \frac{1/9}{4 + 3n_L + 3n_R} + \frac{3}{2n_L + n_B} + \frac{3}{2n_R + n_B} + 1 < \frac{271}{90}. \end{aligned}$$

In diesem Fall geht die Anzahl der Bidoublets ein, die mindestens zwei betragen muß, um die elektroschwache Brechung und eine nichttriviale Mischung im Fermionensektor zu erlauben.

Mit diesen Werten ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{LR} \quad (n = 1) : \quad 106 \text{ GeV} &\leq m_t(174, 3 \text{ GeV}) \leq 287 \text{ GeV}, \\ \text{SUSY-LR} \quad (n = 3) : \quad 157 \text{ GeV} &\leq m_t(174, 3 \text{ GeV})/\sin\beta : \leq 309 \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Das Intervall ist im nichtsupersymmetrischen Fall auf ungefähr 190 GeV und im supersymmetrischen etwas kleiner auf 150 GeV beschränkt. Interessanterweise ergibt die Hinzunahme von zwei $SU(2)_L$ -Triplets z.B. für die obere Grenze im supersymmetrischen Fall 260 GeV, während die untere in etwa unverändert bleibt. Ein hoher skalarer Teilchengehalt schränkt somit den möglichen Wertebereich der aus der Fixmannigfaltigkeit gewonnenen Top-Masse weiter ein.

Die einzelnen Fixhyperebenen grenzen die aus der attraktivsten Fixmannigfaltigkeit gewonnenen Observablen stark ein. Den entscheidenden Einfluß haben hierbei die Eichkopplungen, deren Landau-Pole den mathematischen Gültigkeitsbereich der Lösung bestimmen, und deren zugehörigen Attraktivitätskoeffizienten.

Dies ist insbesondere dann von Bedeutung, wenn ein Modell betrachtet wird, in dem die unbekanntes, über das SM und MSSM hinausgehenden Eichkopplungen

an keiner Skala bekannt sind. Die asymptotisch nichtfreien unter ihnen lassen sich über die IR-attraktiven Beziehungen des reinen Eichsektors festlegen (7.1), was für die asymptotisch freien nicht möglich ist. Damit kann z.B. die Untersuchung einer supersymmetrischen LR-Theorie mit Hilfe der exakt bestimmten Fixmannigfaltigkeiten leicht durchgeführt werden. Im nichtsupersymmetrischen Fall kann zumindest durch die Approximation (9.21) eine Abschätzung vorgenommen werden.

10 Anwendung auf das SM und dessen Erweiterungen

In diesem Kapitel wird die Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten für die in Kapitel 4 motivierten Elementarteilchenmodelle vorgenommen. Dabei werden die in Kapitel 7 analytisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten für die einzelnen Modelle angegeben und die gefundenen Beziehungen zwischen den Kopplungen anhand von Graphiken verdeutlicht. Aus Darstellungsgründen geben die Abbildungen in der Regel einen kleineren Sektor als den nun mathematisch zugänglichen wieder.

Mit Hilfe der experimentell bestimmten Eichkopplungen $g_{1,2,3}$ lassen sich dadurch die zugehörigen sich aus den Fixmannigfaltigkeiten ergebenden Werte der Yukawakopplungen und im supersymmetrischen Fall der trilinearen Kopplung und des Higgs-Mischungs-Parameters bestimmen. Die Auswahl der Yukawakopplungen ist aufgrund der aus Kapitel 7 zugänglichen analytischen Lösungen (und zugehörigen trilinearen Kopplungen im supersymmetrischen Fall) auf die der Top- und Bottom-Quarks beschränkt. Da sie in der Übersetzung auf die schwersten Fermionenmassen führen, ist ihnen der größte Einfluß auf den RGF zuzuweisen¹⁶.

Die analytischen Lösungen in Kapitel 7 erlauben im SM und MSSM nur die Berücksichtigung der Top-Yukawakopplung und allen Eichkopplungen bzw. der Top- und Bottom-Yukawakopplungen und den Eichkopplungen $\alpha_{2,3}$. Entsprechendes gilt für die trilinearen Kopplungen im supersymmetrischen Fall. Aus diesem Grund erfolgt in diesen Fällen die Darstellung verkürzt, insbesondere da für das SM und MSSM detaillierte numerische Studien im $(y_{t,b,\tau}, \alpha_{1,2,3})$ - und dem Higgs-Sektor in Zwei-Schleifen-Ordnung vorliegen [21, 22, 23, 24, 25]. Für die trilinearen Kopplungen A_t und A_b im MSSM wird die Näherung $\alpha_3 \gg \alpha_1 \simeq 0$ im IR-Bereich verwendet, da hier äquivalente Untersuchungen nicht vorliegen und diese Lösungen zumindest Fixuntermannigfaltigkeiten darstellen. Im Falle der links-rechts-symmetrischen Modelle bestehen diese Beschränkungen nicht.

In den Modellen, die Erweiterungen des SMs und MSSMs darstellen, werden neben den einzelnen Sektoren der Fixmannigfaltigkeiten¹⁷ im folgenden die nicht-trivialen IR-attraktiven Fixuntermannigfaltigkeiten angegeben, die insbesondere deswegen von Interesse sind, da die Werte der zusätzlichen Eichkopplungen nicht bekannt sind und dies eine Möglichkeit bietet, sie über IR-attraktive Beziehungen zum Teil festzulegen. Bei den betrachteten Theorien handelt es sich im wesentlichen um eine Klasse von links-rechts-symmetrischen Modellen mit minimalen

¹⁶Die Berücksichtigung der Tau-Yukawakopplung ist in der Literatur numerisch gelungen [21]. Eine analytische Lösung für alle drei Yukawakopplungen der Fermionen dieser Generation wurde nicht gefunden.

¹⁷Im Gegensatz zum SM und MSSM ist in diesen Modellen über die Reihenfolge der Landau-Pole der Ein-Schleifenordnung nichts bekannt.

fermionischen Teilchengehalt und um die Erweiterungen des SMs bzw. MSSMs um eine zusätzliche abelsche Wechselwirkung (vgl. Abschnitt 4).

Läßt der Gültigkeitsbereich dieser Modelle einen hinreichend langen Evolutionsweg zu, so könnten die IR-attraktiven Fixbeziehungen für kleine Impulsskalen in guter Näherung erfüllt sein. In den ersten Abschnitten zum SM und MSSM wird ein letztes Mal auf die Zimmermann-artigen Fixmannigfaltigkeiten eingegangen, die geringer IR-attraktiv sind.

Dieser Teil der Darstellung gibt damit die exakten Verhältnisse für die Fixmannigfaltigkeiten in Ein-Schleifen-Ordnung der zugrunde liegenden RGG wieder und kann in dieser Form in zukünftige Untersuchungen unter den unterschiedlichsten Prämissen verwendet werden.

Bei den Erweiterungen des SMs und MSSMs werden zusätzlich Auswertungen der Fixmannigfaltigkeiten für die Massen des Top- und Bottom-Quarks vorgenommen und mit dem Experiment verglichen. Dies ist als erste Näherung anzusehen, da dieser Analyse mehrere Annahmen zugrunde liegen:

- In der Zwei-Schleifen-Ordnung gehen bei der Übersetzung der Yukawakopplungen in die Polmassen m_f^{pol} neben den Fermionenmassen $m_f(\mu)$, die sich aus den Baumgraphenbeziehungen ergeben (vgl. Abschnitt 3.7), die sogenannten Polmassenkorrekturen ein (vgl. z.B. [21] und die dort angegebenen Referenzen):

$$\frac{m_f^{\text{pol}}}{m_f(\mu = m_f^{\text{pol}})} = 1 + \delta_f(\mu = m_f^{\text{pol}}).$$

Der größte Einfluß ist dem Korrekturterm

$$\delta_f(m_f^{\text{pol}}) \simeq \frac{4}{3\pi} \alpha_3(m_f^{\text{pol}}),$$

zuzuschreiben, da er vom QCD-Anteil herrührt. Er ist für die Top-Masse mit $\alpha_3(m_t^{\text{pol}}) \simeq 0,109$ von der Größenordnung 5%.

Die Zwei-Schleifen-Ordnung wird im folgenden nicht berücksichtigt und damit insbesondere die Polmassenkorrektur vernachlässigt. Die Teilchenmassen werden stattdessen durch $m_f^{\text{pol}} \simeq m_f(\mu = m_f)$ bzw. durch die nur gering abweichende Angabe $m_f(\mu = m_t \simeq 174 \text{ GeV})$ genähert, was aufgrund des explorativen Charakters dieser Auswertungen gerechtfertigt ist.

- Stufeneffekte werden bei der gesamte Evolution nicht miteingeschlossen.
- Dementsprechend wird die supersymmetrische Brechungsskala M_{SUSY} im Falle des MSSMs der Einfachheit halber mit der experimentell bestimmten Top-Masse gleichgesetzt: $M_{\text{SUSY}} \simeq m_t^{\text{pol}} \simeq 174 \text{ GeV}$, da dies auf die Bestimmung der relevanten Größen nur einen geringen Einfluß hat.

Über den Wert der Brechungsskala M eines dem SM oder MSSM übergeordneten Modells ist nur bekannt, daß sie oberhalb des Gültigkeitsbereichs dieser beiden Modelle liegen muß. In diesem Kapitel wird der im Zusammenhang mit den Fixmannigfaltigkeiten interessante Fall betrachtet, daß M Werte nicht weit oberhalb der Skala der Top-Masse annimmt. Falls das Gleiten der Kopplungen im SM oder MSSM von M bis zu m_t^{pol} gering ausfällt, werden dann die Ein-Schleifen-RGG des übergeordneten Modells zur Vereinfachung an der Skala m_t^{pol} ausgewertet.

- Der Evolutionsweg im übergeordneten Modell von der oberen Impulsskala des Gültigkeitsbereichs bis zu M muß für die IR-Attraktion des RGFes durch die Fixmannigfaltigkeit hinreichend lang sein.

Alle Massenangaben müssen auf diesem Hintergrund als eine ungefähre Einordnung angesehen werden. Allerdings ist der Vergleich der unterschiedlichen Modelle *untereinander* insofern aufschlußreich, da der Einfluß von z.B. der gewählten Eichgruppe und dem skalaren Teilchengehalt studiert werden kann.

Genauere Angaben zu den jeweiligen Modellen und ihren RGG finden sich in Kapitel 4 bzw. Anhang B. Als experimentelle Parameter gehen im folgenden ein [45]:

Z-Boson Masse	$m_Z(m_Z)$	=	$92,1882 \pm 0,0022 \text{ GeV}$
Higgs-Vakuum-Erwartungswert	v	=	$174,102 \pm 0,001 \text{ GeV}$
Top-Masse	$m_t(m_t)$	=	$174,3 \pm 5,1 \text{ GeV}$
Bottom-Masse	$m_b(m_b)$	=	$4,0 - 4,4 \text{ GeV}$
Eichkopplungen	$\alpha_1(m_Z)$	=	$0,016966 \pm 0,000013$
	$\alpha_2(m_Z)$	=	$0,033717 \pm 0,000036$
	$\alpha_3(m_Z)$	=	$0,1192 \pm 0,0028$

Die Eichkopplungen an der Skala der Top-Masse wurden unter Berücksichtigung höherer Schleifenkorrekturen in [25] berechnet:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(m_t) &= 0,017085 \pm 0,000013 \\
 \alpha_2(m_t) &= 0,033192 \pm 0,000036 \\
 \alpha_3(m_t) &= 0,1085 \pm 0,0028
 \end{aligned}
 \tag{10.1}$$

Ebenfalls angegeben wird dort der Massenzuwachsfaktor für das Bottom-Quark:

$$\frac{m_b(\mu = m_b)}{m_b(\mu = m_t^{\text{pol}})} = 1,54458.
 \tag{10.2}$$

Es werden im folgenden nur die physikalischen Bereiche der Fixlösungen wiedergegeben, d.h. die Lösungen, die auf positive Kopplungsquadrate führen.

10.1 Standardmodell

Die Eichkopplungen des SMs zerfallen in die asymptotisch nichtfreie Wechselwirkung der $U(1)_Y$, in die asymptotisch freie der $SU(2)_L$, sowie der starken Wechselwirkung $SU(3)_C$. Für $y_b := g_b^2/4\pi = 0$ sind die Fixmannigfaltigkeiten des $(y_t := g_t^2/4\pi, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ -Sektors durch die Parameter in den RGG der Eichkopplungen und der Top-Yukawakopplung im Anhang B vollständig bestimmt:

Eichgruppe	Eich-RGG	Yukawa-RGG	η -Koeffizient	Fixpunkt
$U(1)_Y$	$b_1 = -\frac{41}{5}$	$\chi_1 = \frac{17}{10}$	$\eta_1 = -\frac{99}{82}$	$\left(\frac{y_t}{\alpha_1}\right)^* = \frac{11}{10}$
$SU(2)_L$	$b_2 = \frac{19}{3}$	$\chi_2 = \frac{9}{2}$	$\eta_2 = -\frac{11}{38}$	$\left(\frac{y_t}{\alpha_2}\right)^* = -\frac{11}{54}$
$SU(3)_C$	$b_3 = 14$	$\chi_3 = 16$	$\eta_3 = \frac{1}{7}$	$\left(\frac{y_t}{\alpha_3}\right)^* = \frac{2}{9}$

Hinzu kommt der Parameter $a = 9$ aus der RGG der Top-Yukawakopplung. Die wohlbekannten Fixpunkte und deren Attraktivitätskoeffizienten lassen sich entsprechend dem Schema im Abschnitt 7.2 mit

$$\left(\frac{y_t}{\alpha_i}\right)^* = \frac{\chi_i - b_i}{a}, \quad \eta_i = \frac{\chi_i}{b_i} - 1. \quad (10.3)$$

reproduzieren. Im allgemeinen Fall zerfallen die Fixmannigfaltigkeiten in Untersektoren, die jeweils durch die Eichkopplung mit dem kleinsten Landau-Pol im UV bzw. im Zimmermann-artigen Fall von der Eichkopplung mit dem größten im IR bestimmt sind. Im Falle des SMs (und auch MSSMs) sind diese Eichkopplungen durch α_1 bzw. α_3 gegeben.

Damit ergibt sich nach (7.34) (Seite 91) die IR-attraktivste, vierdimensionale Fixmannigfaltigkeit zu:

$$\frac{y_t}{\alpha_1} = \left(\frac{y_t}{\alpha_1}\right)^* F_D^{(2)} \left(1; 1 - \eta_1 \mid \frac{b_2\alpha_2}{b_1\alpha_1}, \frac{b_3\alpha_3}{b_1\alpha_1} \right)^{-1} \quad (10.4)$$

Dies ist die kompakteste Darstellung. Mit Hilfe der Transformation im Anhang F lassen sich äquivalente Formen bestimmen, wie sie bei der allgemeinen Untersuchung in Kapitel 9 schon verwendet wurden. Explizit vorgeführt wird dies für das SM und MSSM im Anhang E. An dieser Form (10.4) läßt sich besonders leicht die Einbettung des UV-Fixpunktes $(y_t/\alpha_1)^* = 11/10$ im unphysikalischen Grenzfall $\alpha_1 \rightarrow \infty$ ablesen, da die Argumente in der Lauricella-Funktion gegen Null streben und sie den Wert Eins annimmt.

Eine zu (10.4) äquivalente Form ergibt sich mit (F.6):

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{\alpha_3} &= \frac{\eta_1}{\eta_3} \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* \left(\frac{b_1 \alpha_1}{b_3 \alpha_3} - 1 \right) \\ &\times F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, -\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - 1 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3 - b_2 \alpha_2}{b_3 \alpha_3 - b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_3 \alpha_3 - b_1 \alpha_1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

die im extremen IR für $\alpha_3 \rightarrow \infty$ auf den IR-Fixpunkt $(y_t/\alpha_3)^* = 2/9$ [9, 10] führt.

Hinzu kommen die Fixebenen $\alpha_{1,2,3} = 0$ bzw. $b_2 \alpha_2 = b_3 \alpha_3$, deren Schnitte mit (10.4) auf die folgenden dreidimensionalen Fixuntermannigfaltigkeiten führen (mit Hilfe der Transformationen und Reduktionsbeziehungen des Anhangs F):

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{\alpha_3} \Big|_{\alpha_1=0} &= \frac{\eta_2 + \eta_3 + 1}{\eta_3} \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; \eta_2 + \eta_3 + 2 \\ \eta_2 + 1 \end{array} \middle| 1 - \frac{b_2 \alpha_2}{b_3 \alpha_3} \right)^{-1}, \\ \frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{\alpha_2=0} &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_3 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}, \\ \frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{\alpha_3=0} &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}, \\ \frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{b_2 \alpha_2 = b_3 \alpha_3} &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + \eta_3 + 2 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Deren Schnitte untereinander und mit den Fixebenen $\alpha_{1,2,3}$ führen wiederum auf physikalische Fixgeraden bzw. Fixpunkte, wenn entsprechende Kopplungsverhältnisse gewählt werden, und ihre zugehörigen Attraktivitätskoeffizienten, wobei hier nur die wiedergegeben werden, die auf positive Kopplungsquadrate führen:

$$\begin{aligned} (1) : \quad y_t &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* \alpha_1 = \frac{11}{10} \alpha_1, & \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0 & : \eta_1 = -\frac{99}{82}, \\ (2) : \quad y_t &= \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* \alpha_3 = \frac{2}{9} \alpha_3, & \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0 & : \eta_3 = \frac{1}{7}, \\ (3) : \quad y_t &= \frac{\eta_2 + \eta_3 + 1}{\eta_3} \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* \alpha_3 = \frac{227}{171} \alpha_3, & \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{b_3}{b_2} \alpha_3 & : \eta_2 + \eta_3 + 1 = \frac{227}{266}. \end{aligned}$$

Alle anderen der $2^4 - 1 = 15$ Fixgeraden/-punkte liegen in unphysikalischen Parameterbereichen oder sind trivial. Es gilt für die Landau-Pole im IR

$$\tilde{\mu}_3 > \tilde{\mu}_2 \quad \Leftrightarrow \quad b_3 \alpha_3 > b_2 \alpha_2,$$

weswegen der RGF im extremen IR auf den attraktiven Fixpunkt (2) [9, 10] zustrebt.

Die Zimmermann-artige Lösung ergibt sich aus (7.35) für den hier vorliegenden Untersektor $b_3\alpha_3 > b_2\alpha_2$:

$$\frac{y_t}{\alpha_3} = \left(\frac{y_t}{\alpha_3}\right)^* F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1 - \eta_3 & \frac{b_1\alpha_1}{b_3\alpha_3}, \frac{b_2\alpha_2}{b_3\alpha_3} \\ \hline \eta_1 + 1, \eta_2 + 1 & \end{array} \right)^{-1}. \quad (10.6)$$

Die Fixuntermannigfaltigkeiten folgen entsprechend. Der wesentliche Unterschied besteht in der Tatsache, daß diese Lösung im UV auf asymptotisch freie Yukawakopplungen führt, was sich insbesondere darin zeigt, daß hier für die zu den Fixgeraden (1) und (3) gehörenden Lösungen gilt: $y_t = 0$. Gemeinsam ist den beiden nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten der IR-attraktive Fixpunkt (2): $(y_t/\alpha_3)^* = 2/9$. Insgesamt ergibt sich das in Abbildung 10 wiedergegebene Bild.

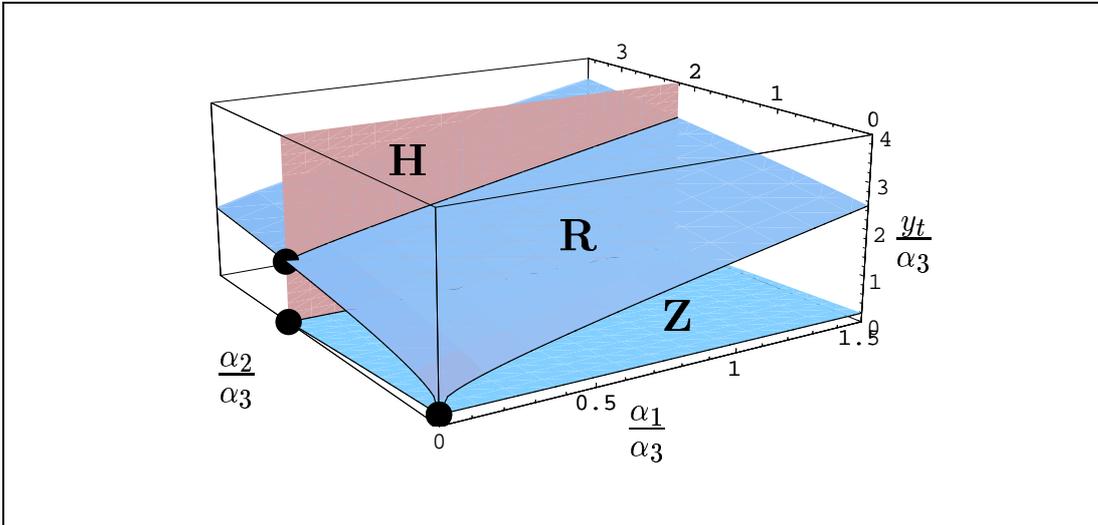


Abbildung 10: Die Abbildung zeigt die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten und deren Untermannigfaltigkeiten (hervorgehobene Linien und Punkte) im SM für die Top-Yukawakopplung und die drei Eichkopplungen, aufgetragen als Verhältnisse. In dieser Darstellung gehen z.B. die im Text besprochen Fixgeraden in die hervorgehobenen Punkte über. Dargestellt sind insbesondere die Fixhyperebene $b_2\alpha_2 = b_3\alpha_3$ (H), die attraktivste Fixmannigfaltigkeit (R) und der Zimmermann-artige Fall (Z). Die Lösung (R) wurde in [21, 23] numerisch bestimmt und in Abbildung 2, Seite 58 dargestellt.

Bei der Betrachtung des Top-Bottom-Sektors kann entsprechend dem Abschnitt 7.3 mit den Beziehungen (7.52) die analytische Lösung nur für $\alpha_1 = 0$ angegeben werden. Die Auswertung dieser Fixmannigfaltigkeit führt jedoch für die Top- und Bottom-Massen im Vergleich zur numerisch in Zwei-Schleifen-Ordnung bestimm-

ten Fixmannigfaltigkeit mit $\alpha_1 \neq 0$ [21, 22, 23, 24, 25, 26] nur zu einer groben Näherung.

Für das reine Top-Bottom-System mit der Koeffizientenmatrix

$$c = \begin{pmatrix} a_t & d_b \\ d_t & a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

ergeben sich die folgenden Fixpunkte und zugehörigen Attraktivitäten dieses Untersektors¹⁸:

$$\begin{aligned} (1') : y_b = 0 & \quad : \eta_t =: \eta = \frac{d-a}{a} = -\frac{2}{3} \\ (2') : y_t = 0 & \quad : \eta_b = \eta \\ (3') : y_t = y_b & \quad : \eta_{tb} = -\frac{1}{\frac{1}{\eta_t} + \frac{1}{\eta_b} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die Fixgeraden (1') und (2') sind beide gleich IR-repulsiv, während das Zusammenfallen der Yukawakopplungen offensichtlich IR-attraktiv ist. Alle drei Fälle sind insbesondere Fixhyperebenen des vollen Systems, deren Schnitte mit der hier bestimmten Fixuntermannigfaltigkeit mit $\alpha_1 = 0$ (vgl. (7.52), Seite 102)

$$\frac{y_t}{\alpha_3} F_D^{(1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta} \left| \frac{y_b}{y_t} \right. \right)^{-1} = \frac{\eta_2 + \eta_3 + 1}{\eta_3} \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* F_D^{(1)} \left(1; \eta_2 + \eta_3 + 2 \left| 1 - \frac{b_2 \alpha_2}{b_3 \alpha_3} \right. \right)^{-1} \quad (10.7)$$

bzw. mit der Zimmermann-artigen Lösung

$$\frac{y_t}{\alpha_3} F_D^{(1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta} \left| \frac{y_b}{y_t} \right. \right)^{-1} = \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* F_D^{(1)} \left(1; 1 - \eta_3 \left| \frac{b_2 \alpha_2}{b_3 \alpha_3} \right. \right)^{-1} \quad (10.8)$$

auf (10.4) bzw. (10.6) führen: im Falle von $y_t = y_b$ (3') muß in diesen beiden Beziehungen die Ersetzung $a \rightarrow a + d$ vorgenommen werden.

Im extremen IR-Bereich $\alpha_2 \ll \alpha_3$ gehen beide Fixuntermannigfaltigkeiten in die gemeinsame Fixbeziehung

$$\frac{y_t}{\alpha_3} = \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* F_D^{(1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta} \left| \frac{y_b}{y_t} \right. \right) \quad (10.9)$$

¹⁸Die Fixpunkte der Bottom-Yukawakopplung bezüglich der Eichkopplungen sind mit dem Top-Fall identisch.

mit $(y_t/\alpha_3)^* = (\chi_3 - b_3)/a = 2/9$ über. Die beiden Untersektoren $y_b < y_t$ und $y_b \geq y_t$ lassen sich aufgrund der Ordnung Eins der Lauricella-Funktion mit Hilfe von quadratischen Transformationen [117] gemeinsam beschreiben:

$$\frac{y_t + y_b}{\alpha_3} = \frac{2}{9} F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} 1; 5/2 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{4y_b y_t}{(y_t + y_b)^2} \right).$$

Graphische Darstellungen von (10.7), (10.8) bzw. (10.9) entsprechenden Beziehungen werden im nächsten Abschnitt am Beispiel des MSSMs wiedergegeben.

10.2 Minimal Supersymmetrisches Standardmodell

Neben den numerisch anders gearteten Koeffizienten für $y_b := h_b^2/4\pi = 0$ im Sektor $(y_t := h_t^2/4\pi, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ (vgl. Anhang B)

Eichgruppe	Eich-RGG	Yukawa-RGG	η -Koeffizient	Fixpunkt
$U(1)_Y$	$b_1 = -\frac{66}{5}$	$\chi_1 = \frac{26}{15}$	$\eta_1 = -\frac{112}{99}$	$\left(\frac{y_t}{\alpha_1}\right)^* = \frac{56}{45}$
$SU(2)_L$	$b_2 = -2$	$\chi_2 = 6$	$\eta_2 = -4$	$\left(\frac{y_t}{\alpha_2}\right)^* = \frac{2}{3}$
$SU(3)_C$	$b_3 = 6$	$\chi_3 = \frac{32}{3}$	$\eta_3 = \frac{7}{9}$	$\left(\frac{y_t}{\alpha_3}\right)^* = \frac{7}{18}$

besteht ein wesentlicher Unterschied des MSSMs gegenüber dem SM von Seiten der Fixmannigfaltigkeiten darin, daß nun zwei der drei Landau-Pole $\tilde{\mu}_1$ und $\tilde{\mu}_2$ im UV liegen. Der Landau-Pol $\tilde{\mu}_1$ begrenzt auch hier den (mathematischen) UV-Bereich der Ein-Schleifen-Ordnung: $\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$.

Da es im MSSM notwendig ist, neben H_u noch ein zweites schwaches Higgsdublett H_d (vgl. Abschnitt 4.2) einzuführen, existiert ein zusätzlicher Parameter β , der das Mischen der Vakuumerwartungswerte dieser beiden Dubletts beschreibt:

$$\langle 0|H_u|0\rangle = \begin{pmatrix} v_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 0|H_d|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_d \end{pmatrix}, \quad v_u^2 + v_d^2 = v^2 \quad : \quad \tan \beta := \frac{v_d}{v_u}. \quad (10.10)$$

Die attraktivste Fixmannigfaltigkeit ergibt sich ähnlich wie im SM aus (7.34) (Seite 91) zu:

$$\frac{y_t}{\alpha_1} = \left(\frac{y_t}{\alpha_1}\right)^* F_D^{(2)} \left(\begin{matrix} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \eta_3 + 1 \end{matrix} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}. \quad (10.11)$$

Dies ist wie im SM die kompakteste Form, die für Grenzfallbetrachtungen im UV am günstigsten ist. Mit Hilfe der Transformation (F.6) auf Seite 211 werden Auswertungen im IR-Bereich durch die folgende äquivalente Beziehung erleichtert:

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{\alpha_3} &= \frac{\eta_1}{\eta_3} \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* \left(\frac{b_1 \alpha_1}{b_3 \alpha_3} - 1 \right) \\ &\times F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, -\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 - 1 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3 - b_2 \alpha_2}{b_3 \alpha_3 - b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_3 \alpha_3 - b_1 \alpha_1} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Durch die zwei im MSSM vorhandenen asymptotisch nichtfreien Eichkopplungen α_1 und α_2 existiert im Gegensatz zum SM eine zusätzliche IR-attraktive Beziehung $b_1 \alpha_1 = b_2 \alpha_2$, die sich allerdings in der Beschreibung der Verhältnisse im IR, also in etwa bis zu Masse des Top-Quarks, als wenig erfolgreich herausstellt [23].

Die Fixuntermannigfaltigkeiten sind durch die veränderten Parameter zum Teil von anderer Gestalt als im SM, was darin begründet ist, daß die Konvergenz der Lauricella-Funktionen für Argumente $b_i \alpha_i / b_j \alpha_j = 1$ abhängig von den Attraktivitätskoeffizienten η_i ist (vgl. Anhang F, insbesondere (F.11)):

$$\begin{aligned} \frac{y_t}{\alpha_2} \Big|_{\alpha_1=0} &= \left(\frac{y_t}{\alpha_2} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_2 \\ \eta_3 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3}{b_2 \alpha_2} \right)^{-1}, \\ \frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{\alpha_2=0} &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_3 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}, \\ \frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{\alpha_3=0} &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}, \\ \frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{b_2 \alpha_2 = b_1 \alpha_1} &= \frac{\eta_1 + \eta_2 + 1}{\eta_1} \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c} 1; -\eta_1 - \eta_2 \\ \eta_3 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Es existieren vier nichttriviale Fixgeraden, die auf positive Kopplungsquadrate führen:

$$\begin{aligned} (1) : \quad y_t &= \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* \alpha_1 = \frac{56}{45} \alpha_1, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= 0 : \eta_1 = -\frac{112}{99} \\ (2) : \quad y_t &= \left(\frac{y_t}{\alpha_2} \right)^* \alpha_2 = \frac{2}{3} \alpha_2, & \alpha_1 &= 0, & \alpha_3 &= 0 : \eta_2 = -4, \\ (3) : \quad y_t &= \left(\frac{y_t}{\alpha_3} \right)^* \alpha_3 = \frac{7}{18} \alpha_3, & \alpha_1 &= 0, & \alpha_2 &= 0 : \eta_3 = \frac{7}{9}, \\ (4) : \quad y_t &= \frac{\eta_1 + \eta_2 + 1}{\eta_1} \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* \alpha_1 = \frac{409}{90} \alpha_1, & \alpha_2 &= \frac{b_1}{b_2} \alpha_1, & \alpha_3 &= 0 : \eta_1 + \eta_2 + 1 \\ & & & & & = -\frac{409}{99}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Die Fixpunkte (1) und (3) der entsprechenden Fixverhältnisse wurden erstmals in [19] diskutiert, s.a. [22]. Für die physikalischen Gegebenheiten ($\tilde{\mu}_1 < \tilde{\mu}_2$) fließt der

RGF auf der Fixmannigfaltigkeit vom IR-repulsiven Fixpunkt im UV $(y/\alpha_1)^* = 56/45$ (1) in den IR-attraktiven Fixpunkt im IR $(y/\alpha_3)^* = 7/18$ (3).

Im MSSM besteht die Zimmermann-artige Fixmannigfaltigkeit aus einem einzigen Sektor, der bis auf die veränderten Parameter formal identisch mit (10.6) ist. Die Lösungen reduzieren sich wiederum durch Schnitte mit den Fixhyperebenen, was sich bis zu den Fixgeraden fortsetzen läßt, die jedoch mit Ausnahme des IR-attraktiven Falles (3) wiederum auf eine asymptotisch freie Yukawakopplung $y_t = 0$ führt. Beide Fixmannigfaltigkeiten zusammen mit ihren Untermannigfaltigkeiten sind in Abbildung 11 für entsprechende Kopplungsverhältnisse bzw. für $\alpha_2 = 0$ in Abbildung 6 (Seite 75) wiedergegeben.

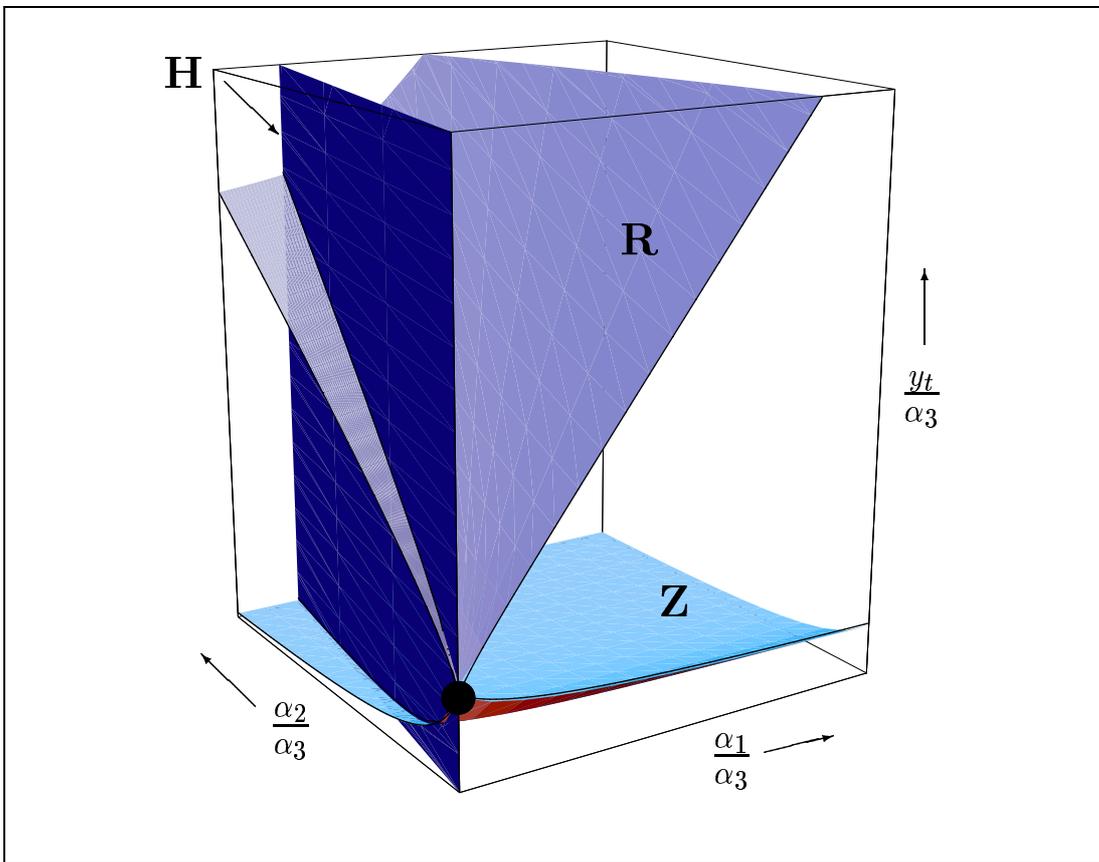


Abbildung 11: Die Abbildung zeigt die nichttrivialen Fixmannigfaltigkeiten und deren Untermannigfaltigkeiten (hervorgehobene Linien und Punkte) im MSSM für die Top-Yukawakopplung und die drei Eichkopplungen, aufgetragen als Verhältnisse. Insbesondere sind die Fixhyperebene $b_1\alpha_1 = b_2\alpha_2$ (H), die attraktivste Fixmannigfaltigkeit (R) und der Zimmermann-artige Fall (Z) dargestellt. Die Lösung (R) wurde in [21, 23] numerisch bestimmt und in Abbildung 3, Seite 58, wiedergegeben.

Der bisher betrachtete Sektor $(y_t, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1)$ kann ohne Einschränkungen um die trilineare Kopplung A_t , den Higgs-Mischungs-Parameter B und die Gaugino-Massen $M_{1,2,3}$ des weichbrechenden Sektors erweitert werden, deren allgemeine Gestalt in den Unterabschnitten 7.4.1 und 7.4.2 bestimmt wurde. Alle nicht genannten Kopplungen werden damit weiterhin als vernachlässigbar angenommen, also insbesondere die Yukawakopplungen¹⁹ y_b bzw. y_τ und die trilinearen Kopplungen A_b bzw. A_τ .

Für die trilineare Kopplung A_t des weichbrechenden Sektors ergibt sich in diesem Sektor aus (7.66) auf Seite 107 für die attraktivste Fixmannigfaltigkeit²⁰:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} A_t y_t^{-3/2} &= -\frac{1}{\eta_1} \frac{M_1}{b_1 \alpha_1} F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 2; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \eta_3 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right) \\ &+ \frac{\eta_2 + 1}{\eta_1 (1 - \eta_1)} \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1} \frac{M_2}{b_1 \alpha_1} F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_1 \\ \eta_2 + 2, \eta_3 + 1 \end{array} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right) \\ &+ \frac{\eta_3 + 1}{\eta_1 (1 - \eta_1)} \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \frac{M_3}{b_1 \alpha_1} F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \eta_3 + 2 \end{array} \middle| \frac{b_2 \alpha_2}{b_1 \alpha_1}, \frac{b_3 \alpha_3}{b_1 \alpha_1} \right). \end{aligned} \quad (10.14)$$

Die Top-Yukawakopplung ist hierbei über (10.11) bestimmt, so daß auf den Fixmannigfaltigkeiten die Kopplungen y_t und A_t allein als Funktionen der Eichkopplungen α_i und Gaugino-Massen M_i aufgefaßt werden können. Diese Mannigfaltigkeit ist aus Darstellungsgründen für $\alpha_2 = 0$ in Abbildung 12 wiedergegeben.

Wie im Abschnitt 7.4 erläutert, gehen die Gaugino-Massen keine Fixbeziehungen ein, so daß sich die einzige nichttriviale Fixuntermannigfaltigkeit von (10.14) aus $b_1 \alpha_1 = b_2 \alpha_2$ ergibt. Diese ist jedoch, wie zuvor erwähnt, im Falle des MSSM für die Beschreibung der IR-Physik nur wenig geeignet [23], so daß auf deren Angabe verzichtet wird. Interessant sind die mathematischen Grenzfälle im IR bzw. im UV (vgl. Unterabschnitt 7.4.1), die auf die folgenden Fixpunkte führen:

$$\lim_{\mu \rightarrow \tilde{\mu}_3} \frac{A_t}{M_3 y_t^{1/2}} = -1 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu \rightarrow \tilde{\mu}_1} \frac{A_t}{M_1 y_t^{1/2}} = -1, \quad (10.15)$$

oder unter Verwendung der IR und UV Fixbeziehungen (3) bzw. (1) in (10.13):

$$\lim_{\mu \rightarrow \tilde{\mu}_3} \frac{A_t}{M_3 \alpha_3^{1/2}} = -\sqrt{\frac{7}{18}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu \rightarrow \tilde{\mu}_1} \frac{A_t}{M_1 \alpha_1^{1/2}} = -\sqrt{\frac{56}{45}}. \quad (10.16)$$

¹⁹Für den Sektor mit allen drei Yukawakopplungen $h_{t,b,\tau} \neq 0$ und allen Eichkopplungen $\alpha_{1,2,3} \neq 0$ steht die analytische Bestimmung der Fixmannigfaltigkeit noch aus. Diese wurde numerisch in [21, 22, 23, 24, 25] angegeben und führte auf eine erfolgreiche Beschreibung der Massen des Top- und Bottom-Quarks bzw. des Tau-Leptons.

²⁰Auf den weniger IR-attraktiven Zimmermann-artigen Fall wird hier nicht mehr eingegangen.

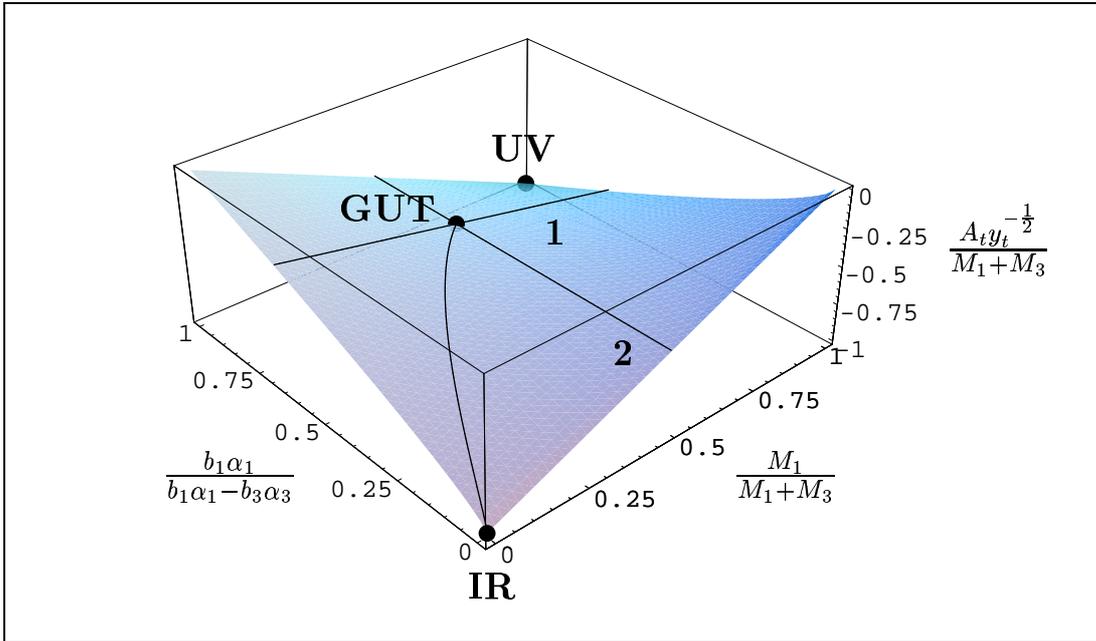


Abbildung 12: Fixmannigfaltigkeit der trilinearen Kopplung A_t im MSSM. Neben den Fixpunkten im IR und UV sind keine weiteren vorhanden. Linie 1 steht für unifizierte Eichkopplungen, Linie 2 für Gaugino-Massen.

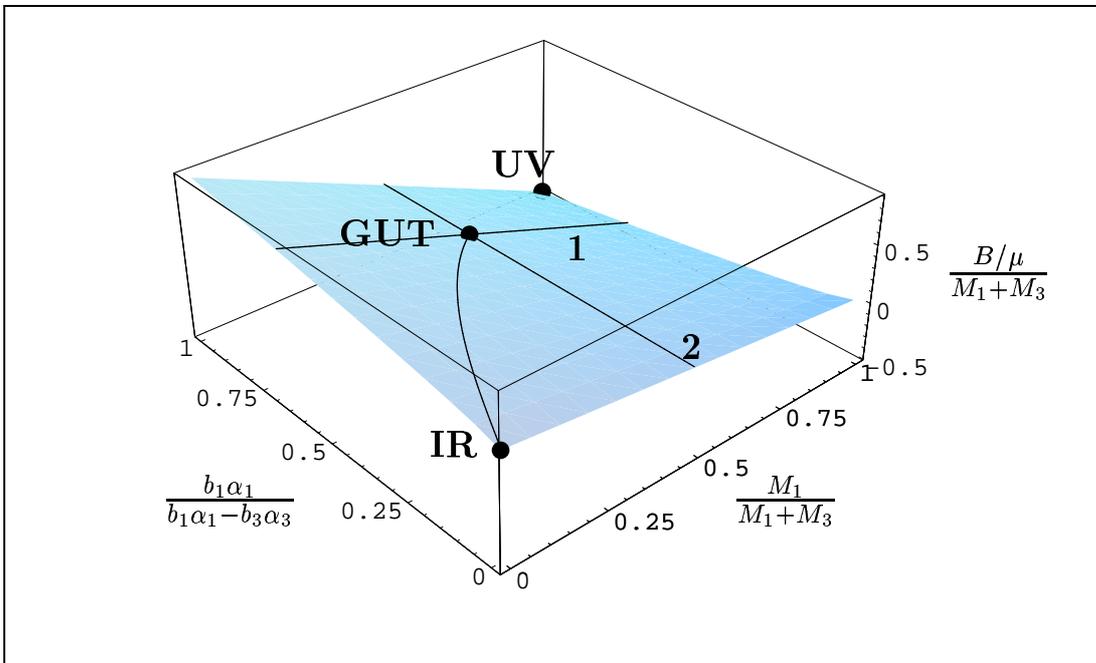


Abbildung 13: Fixmannigfaltigkeit des Higgs-Mischungs-Parameters B im MSSM. Die Linien und Punkte entsprechen den denen der Abbildung 12.

Die Fixmannigfaltigkeit des skalaren Mischungsparameters B lässt sich anhand der allgemeinen Beziehung (7.81) auf Seite 112 durch die Fixmannigfaltigkeiten von y_t (10.11) und A_t (10.14) ausdrücken²¹:

$$\frac{B}{\mu} = \frac{1}{2}A_t y_t^{-1/2} + \frac{5}{198}M_1 + \frac{3}{2}M_2 + \frac{8}{9}M_3. \quad (10.17)$$

Diese Fixmannigfaltigkeit ist ebenfalls aus Darstellungsgründen für $\alpha_2 = 0$ in Abbildung 13 auf Seite 147 wiedergegeben.

Die extremen IR- und UV-Grenzfälle führen auch für die B -Kopplung auf entsprechende Fixpunkte, die sich mit (10.15) und (10.17) leicht angeben lassen:

$$\lim_{\mu \rightarrow \bar{\mu}_3} \frac{B}{M_3 \mu} = -\frac{1}{2} + \frac{8}{9} = \frac{7}{18} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\mu \rightarrow \bar{\mu}_1} \frac{B}{M_1 \mu} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{198} = -\frac{47}{99}. \quad (10.18)$$

Eine vollständige Bestimmung aller Fixpunkte im weichbrechenden Sektor des MSSMs findet sich in [25].

Insgesamt wird mit den bisher angegebenen Fixmannigfaltigkeiten der neundimensionale Parameterraum $(y_t, \alpha_{1,2,3}, A_t, M_{1,2,3}, B)$ beschrieben.

Die beiden in den Abbildungen (12) und (13) aufgetragenen Flächen besitzen keine Fixuntermannigfaltigkeiten. Eingezeichnet sind zum einen die Parametergeraden, die die Anfangswerte für eine Unifizierung der Gaugino-Massen bzw. für eine Unifizierung der Eichkopplungen im Rahmen einer GUT stellen. Für den speziellen Fall, daß diese Skalen identisch sind, wurde die zugehörige Lösungstrajektorie eingezeichnet. Die Gerade der Gaugino-Unifizierung ist dadurch ausgezeichnet, daß für sie im gesamten Parameterraum $A_t y_t^{-1/2} / (M_1 + M_3) = -1/2$ gilt.

Die im Abschnitt 7.3 bestimmten Fixmannigfaltigkeiten können im Falle des MSSMs für $y_b \neq 0$ und $A_b \neq 0$ nur dann verwendet werden, wenn gleichzeitig $\alpha_1 = 0$ erfüllt ist. Dies ergibt zwar ebenfalls eine IR-attraktive Fixuntermannigfaltigkeit, ist jedoch für den physikalischen IR Grenzfalle $\mu = m_t^{\text{exp}}$ nur eine Näherung. Im reinen Eich-Yukawa-Sektor wird deswegen auf die entsprechenden numerischen Untersuchungen verwiesen [21, 23, 24]. Da für den um A_b erweiterten Sektor auch numerisch keine höherdimensionalen Fixmannigfaltigkeiten bestimmt wurden, wird im folgenden ein solcher Fall zumindest für die IR-attraktive Fixuntermannigfaltigkeit des Sektors $(y_{t,b}, \alpha_{2,3}, A_{t,b}, M_{2,3})$ wiedergegeben. Dazu wird in einem ersten Schritt der Sektor $(y_{t,b}, \alpha_{2,3})$ beschrieben.

²¹Der skalare Mischungsparameter des Superpotentials μ ist nicht mit der Impulsskala μ zu verwechseln, was jedoch die übliche Konvention darstellt.

Für den reinen Top-Bottom-Sektor mit der Koeffizientenmatrix

$$c = \begin{pmatrix} a_t & d_b \\ d_t & a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d \\ d & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

ergeben sich die folgenden zusätzlichen Fixpunkte und deren Attraktivitäten:

$$\begin{aligned} (1') : y_b = 0 & \quad : \eta_t =: \eta = \frac{d-a}{a} = -\frac{5}{6} \\ (2') : y_t = 0 & \quad : \eta_b = \eta \\ (3') : y_t = y_b & \quad : \eta_{tb} = -\frac{1}{\frac{1}{\eta_t} + \frac{1}{\eta_b} + 1} = \frac{5}{7} \end{aligned} .$$

Die Attraktivität des symmetrischen Fixpunktes $y_t/y_b = 1$ (3') ist wiederum viel stärker ausgeprägt als im nichtsupersymmetrischen Fall in Gestalt des SMs, während die Repulsivität im UV geringer ausfällt. Die attraktivste Fixmannigfaltigkeit lautet in diesem Fall für $\alpha_1 = 0$:

$$\frac{1}{y_t} F_D^{(1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta} \left| \frac{y_b}{y_t} \right. \right) = \frac{a}{\eta_2} \frac{1}{b_2 \alpha_2} F_D^{(1)} \left(1; 1 - \eta_2 \left| \frac{b_3 \alpha_3}{b_2 \alpha_2} \right. \right) \quad (10.19)$$

bzw. ist im Zimmermann-artigen Fall formal identisch mit (10.8). Die Untermannigfaltigkeiten ergeben sich wie beim SM erläutert.

Das Ergebnis (10.9) aus dem letzten Abschnitt zum SM für den Fall $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$ bleibt im IR ebenfalls in dieser Form gültig und läßt sich in diesem Spezialfall durch

$$\frac{y_t + y_b}{\alpha_3} = \frac{7}{18} F_D^{(1)} \left(1; 5/2 \left| \frac{4y_b y_t}{(y_t + y_b)^2} \right. \right) \quad (10.20)$$

ausdrücken. Diese Fixmannigfaltigkeit wurde erstmals in [19, 21] beschrieben und wie im Falle des SMs numerisch bestimmt (vgl. Abbildung 4, Seite 59 und [21]). Der größere Sektor entsprechend (10.19) bzw. die Zimmermann-artige Lösung wird in Abbildung 14 dargestellt.

Mit dem allgemeinen Ergebnis (7.72) aus Abschnitt 7.4.1 folgt für den Sektor $(y_{t,b}, \alpha_{2,3}, A_{t,b}, M_{2,3})$ im Falle dieser Fixuntermannigfaltigkeit:

$$\begin{aligned} & \frac{A_t y_t^{-1/2} [1 - (d y_t + a y_b) F(\alpha)] - A_b y_b^{-1/2} [1 - (d y_b + a y_t) F(\alpha)]}{(a - d)(y_t - y_b)} \\ & = \sum_{i=1}^2 M_i \alpha_i \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha_i}, \quad F(\alpha) = \frac{1}{\eta_2} \frac{1}{b_2 \alpha_2} F_D^{(1)} \left(1; 1 - \eta_2 \left| \frac{b_3 \alpha_3}{b_2 \alpha_2} \right. \right). \end{aligned}$$

Die explizit durchgeführten Differentiationen ergeben die rechte Seite in (10.14).

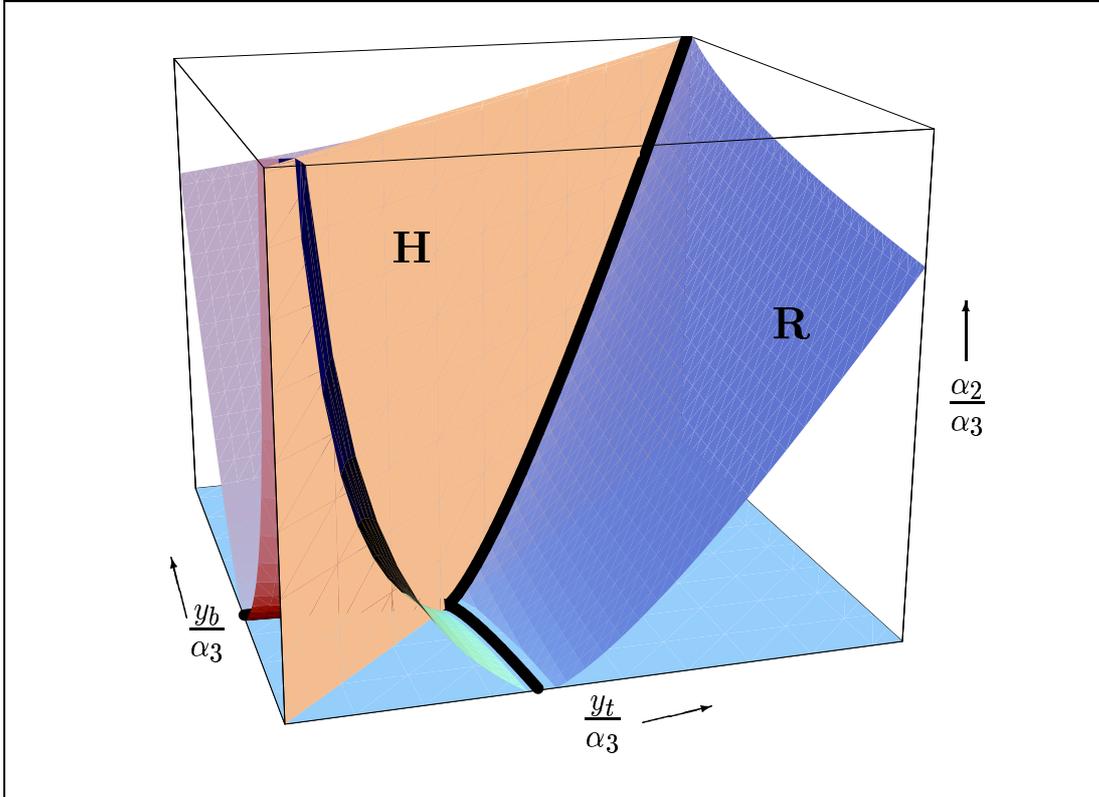


Abbildung 14: Die Abbildung zeigt die Fixmannigfaltigkeiten und deren Untermannigfaltigkeiten (hervorgehobene Linien) im MSSM für die Yukawa-Top- und Bottom-Kopplung und die Eichkopplungen α_2 und α_3 ($\alpha_1 = 0$), aufgetragen als Verhältnisse. Insbesondere sind die Fixhyperebene $y_t = y_b$ (H), die attraktivste Fixmannigfaltigkeit (R) und ohne Kennzeichnung die Zimmermann-artige Mannigfaltigkeit, die sich im Vordergrund befindet, dargestellt. Die letztere führt wiederum im UV für $\alpha_2/\alpha_3 \gg 0$ auf asymptotisch freie Yukawakopplungen. Die Fixlinie (10.20) in der Top-Bottom-Ebene wurde in [19, 21] erstmals beschrieben und ist bereits explizit in der Abbildung 4 (Seite 59) bzw. in [19, 21] wiedergegeben.

Die Abbildungen 15 und 16 geben die durch (10.21) bestimmte Fixmannigfaltigkeit der trilinearen Kopplungen $A_{t,b}$, der zugehörigen Yukawakopplungen $y_{t,b}$, der Eichkopplungen $\alpha_{2,3}$ und der Gaugino-Massen $M_{2,3}$ für zwei ausgewählte Impulsskalen wieder. In Abbildung 15 wurde eine Unifizierung der Gaugino-Massen angenommen. An der Skala der Z-Bosonen-Masse $\mu = m_Z \simeq 91$ GeV ergibt sich mit Hilfe der experimentellen Parameter auf Seite 138 die Abbildung 16. Hierbei wurden das Gauginomassenverhältnis durch die Annahme einer gemeinsamen Unifizierung von Eichkopplungen und Gaugino-Massen an der GUT-Skala festgelegt: $M_2/M_3 = \alpha_2/\alpha_3$ (vgl. Beziehung (7.59) auf Seite 106).

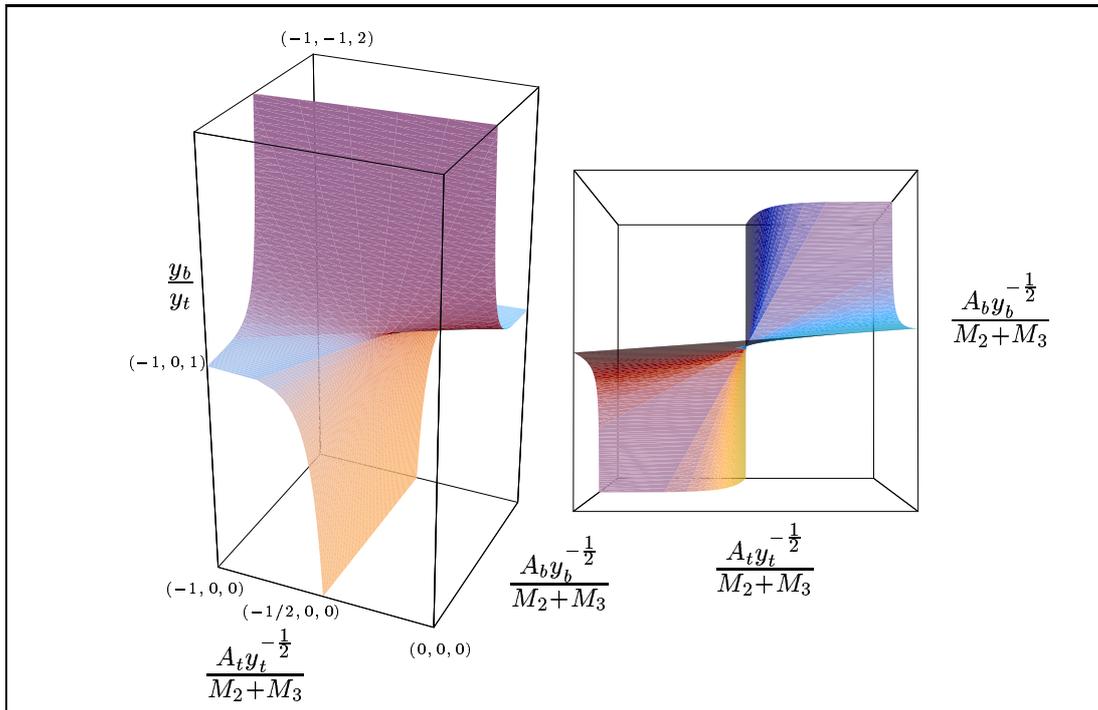


Abbildung 15: Die Abbildung zeigt die Fixmannigfaltigkeit der trilinearen Kopplung $A_{t,b}$ und der zugehörigen Yukawakopplungen im MSSM (rechts in der Aufsicht), ausgewertet an der Skala der Unifizierung der Gaugino-Massen.

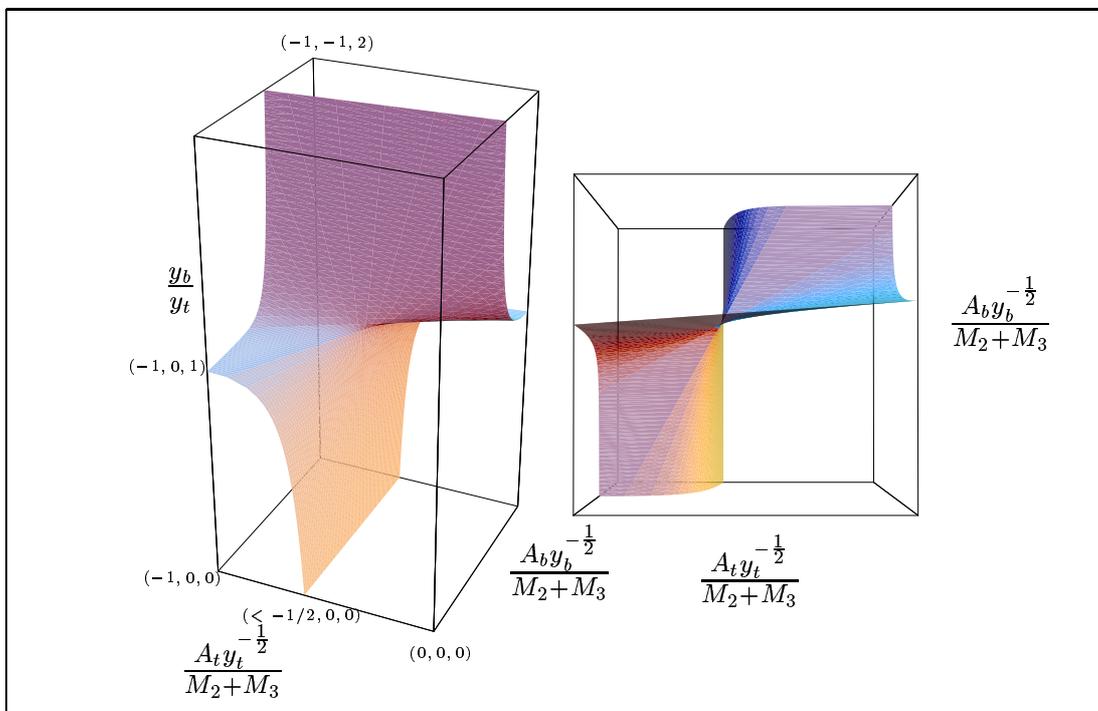


Abbildung 16: ... und an der Skala der Z-Bosonen-Masse.

10.3 Links-Rechts symmetrische Modelle

Häufig diskutierte Erweiterungen der Eichgruppe G_{321} des SMs bzw. MSSM sind die in Abschnitt 4.4 geschilderten links-rechts-symmetrischen Modelle (LR-Modelle) mit der Eichsymmetrie $G_{3221} := SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L}$. Diese Theorien könnten in ihrer supersymmetrischen Variante für Skalenbereiche oberhalb des MSSMs Gültigkeit besitzen oder im nichtsupersymmetrischen Fall Erweiterungen des SMs darstellen.

Der fermionische Materiegehalt der im folgenden diskutierten Modelle ist minimal, d.h. er geht abgesehen von der Erweiterung der Leptonendarstellungen bezüglich G_{3221} nicht über den des SMs bzw. des MSSMs hinaus. Über den skalaren Sektor, der in den betrachteten Modellen aus einer Anzahl n_B von schwachen Bidubletts, n_L $SU(2)_L$ -Tripletts und n_R $SU(2)_R$ -Tripletts besteht, ist nichts bekannt, außer, daß er eine elektroschwache Brechung ($n_B \geq 1$) und eine Brechung der Parität ($n_R \geq 1$) erlauben muß. Zusätzlich muß für die in Abschnitt 4.4 vorgestellten Modelle ein zweites Bidublett ($n_B \geq 2$) eingeführt werden, um eine triviale Mischungsmatrix im Fermionen-Sektor zu vermeiden. Im Supersymmetrischen Fall können die (Super)Tripletts nur in Paaren mit entgegengesetzter $U(1)_{B-L}$ -Ladung auftreten, womit entsprechende chirale Anomalien vermieden werden und insbesondere $n_R \geq 2$ erfüllt sein muß.

Der Abschnitt beginnt mit der Darstellung der Fixmannigfaltigkeiten im Sektor der Top- und Bottom-Kopplungen $y_{t,b}$ und aller Eichkopplungen $\alpha_{C,L,R,B-L}$, α_L ²², im supersymmetrischen Fall ergänzt um die trilinearen Kopplungen $A_{t,b}$ und allen Gaugino-Massen $M_{C,L,R,B-L}$ des weichbrechenden Sektors. Damit kann in diesem Modell der größte Kopplungssektor der im vorliegenden Kapitel betrachteten Theorien durch die in Kapitel 7 analytisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten berücksichtigt werden, was in der symmetrischen Struktur der RGG von $y_{t,b}$ in diesen Modelle (Anhang B) begründet ist. Für den leptonischen Anteil der schwersten Generationen ist dies nach wie vor nicht möglich. Da jedoch auch numerisch von Seiten der Fixmannigfaltigkeiten bisher keine Untersuchungen vorliegen, stellt dies einen wichtigen Schritt zur Bestimmung der IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten im vollen Parameterraum dar, insbesondere da es sich um analytische Beziehungen handelt.

Im zweiten Teil dieses Abschnitts werden die Top- und Bottom-Massen und der Mischungsparameter $\tan\beta$ des Higgs-Sektors der elektroschwachen Brechung für den supersymmetrischen Fall aus den Fixmannigfaltigkeiten in einer ersten Näherung bestimmt. Dabei wird davon ausgegangen, daß die LR-Modelle bis oberhalb des IR-Bereichs (1-10 TeV) Gültigkeit besitzen. Erläuterungen zu den hierbei getroffenen Annahmen finden sich in der Einleitung dieses Kapitels auf Seite 39.

²²Gemeint sind wie zuvor jeweils die quadrierten und auf 4π normierten Kopplungen.

10.3.1 Fixmannigfaltigkeiten von links-rechts-symmetrischen Modellen

In diesem Unterabschnitt werden die Fixmannigfaltigkeiten der diskutierten LR-Theorien, soweit sie durch die in Kapitel 7 bestimmten allgemeinen Beziehungen wiedergegeben werden können, analytisch angegeben und graphisch dargestellt. Letzteres muß aus Gründen der Darstellung für Fixuntermannigfaltigkeiten vorgenommen werden und beschränkt sich auf den supersymmetrischen Fall, da dieser Möglichkeit in der Literatur ein größerer Stellenwert zukommt. Allen Angaben beruhen auf den im Anhang B notierten RGG in $n_G = 3$ Generationen und gehen in diesem Abschnitt von einer beliebigen Zahl n_B von Bidoublets, n_L $SU(2)_L$ -Triplets und n_R $SU(2)_R$ -Triplets aus. Für die Abbildungen werden dabei folgende Beispiele gewählt:

Modell	n_B	n_L	n_R
I	2	0	2
II	2	2	2
III	2	0	4

(10.21)

Das Modell II ist manifest links-rechts-symmetrisch, d.h. auch der skalare Teilchengehalt orientiert sich an dieser Symmetrie. Untersuchungen bezüglich der Möglichkeit von radiativ vermittelten Brechungsszenarien wurden im supersymmetrischen Fall in [97] für das Modell I durchgeführt²³.

Über die Reihenfolge der Landau-Pole der Ein-Schleifen-Ordnung ist nichts bekannt, so daß hier alle Sektoren der jeweiligen Fixmannigfaltigkeit relevant sein könnten (vgl. Abschnitt 7.2).

Als wichtige Parameter gehen die Koeffizienten b_i der RGG der Eichkopplungen $d\alpha_i/dt = -b_i\alpha_i^2$ in die Fixmannigfaltigkeiten ein:

nicht-SUSY :	SUSY :	
$b_C = 14,$	$b_C = 6,$	
$b_R = \frac{1}{3}(20 - n_B - 2n_R),$	$b_R = -2(n_B + 2n_R),$	(10.22)
$b_L = \frac{1}{3}(20 - n_B - 2n_L),$	$b_L = -2(n_B + 2n_L),$	
$b_{B-L} = -(3n_L + 3n_R + 8),$	$b_{B-L} = -3(3n_L + 3n_R + 4).$	

Wird im nichtsupersymmetrischen Fall für $b_{L,R}$ ein nicht ungewöhnlich hoher

²³Zusätzlich wurde in der Arbeit [97] noch der Fall eines einzigen Bidoublets betrachtet.

skalärer Teilchengehalt angenommen, so setzt sich der Anteil der Fixmannigfaltigkeiten, in die die Eichkopplungen eingehen, aus einem einzigen Sektor, bestimmt durch den Landau-Pol von α_{B-L} und im supersymmetrischen Fall aus drei Sektoren, jeweils dominiert von α_L , α_R und α_{B-L} , zusammen. Die RGG der Eichkopplung der starken Wechselwirkung α_C ist mit der des SMs bzw. MSSMs identisch.

Die Fixpunkte und Koeffizienten, die die Attraktivität zwischen der Top- bzw. der Bottom-Yukawakopplung bezüglich dieser Eichkopplungen beschreiben (vgl. Abschnitt 7.2, insbesondere (7.14) und (7.18)), ergeben sich zu:

nicht-SUSY :

$$\begin{aligned}
(y_{t,b}/\alpha_C)^* &= \frac{1}{5} : & \eta_C &= \frac{1}{7}, \\
(y_{t,b}/\alpha_R)^* &= \frac{n_B+4n_R-13}{60} : & \eta_R &= \frac{27/2}{20-n_B-2n_R} - 1, \\
(y_{t,b}/\alpha_L)^* &= \frac{n_B+4n_L-13}{60} : & \eta_R &= \frac{27/2}{20-n_B-2n_L} - 1, \\
(y_{t,b}/\alpha_{B-L})^* &= \frac{6(n_L+n_R)+17}{20} : & \eta_{B-L} &= -\frac{1/2}{3n_L+3n_R+8} - 1,
\end{aligned} \tag{10.23}$$

SUSY :

$$\begin{aligned}
(y_{t,b}/\alpha_C)^* &= \frac{1}{3} : & \eta_C &= \frac{7}{9}, \\
(y_{t,b}/\alpha_R)^* &= \frac{n_B+2n_R+3}{7} : & \eta_R &= -\frac{3}{n_B+2n_R} - 1, \\
(y_{t,b}/\alpha_L)^* &= \frac{n_B+2n_L+3}{7} : & \eta_R &= -\frac{3}{n_B+2n_L} - 1, \\
(y_{t,b}/\alpha_{B-L})^* &= \frac{27(n_L+n_R)+37}{42} : & \eta_{B-L} &= -\frac{1/9}{3n_L+3n_R+4} - 1.
\end{aligned}$$

Aufgrund des minimal möglichen skalaren Teilchengehalts $n_B \geq 2$ und $n_R \geq 1$ bzw. $n_R \geq 2$ gilt insbesondere im supersymmetrischen $\eta_L + \eta_R + 1 < 0$ bzw. im nichtsupersymmetrischen Fall $\eta_L + \eta_R + 1 > 0$, was bei der Bestimmung der Fixuntermannigfaltigkeiten eine Rolle spielt.

Im supersymmetrischen Fall sind alle Fixpunkte im Sinne von positiven Kopplungsquadraten physikalisch und bis auf den der starken Wechselwirkung unabhängig vom Teilchengehalt IR-repulsiv. Eine solche generelle Aussage kann für den nichtsupersymmetrischen Fall nicht getroffen werden. Die Fixpunkte, die mit der Eichkopplung α_{B-L} eingegangen werden, sind immer IR-repulsiv. Bezüglich der starken Wechselwirkung gilt dasselbe wie bei der supersymmetrischen Variante. Die Verhältnisse bezüglich der Eichkopplungen $\alpha_{L,R}$ sind hier stark sensitiv für die Gegebenheiten des skalaren Teilchengehalts.

Die im folgenden angegebenen Beziehungen sind IR-attraktive Fixmannigfaltigkeiten und ergeben durch Schnittbildung mit den nichttrivialen Möglichkeiten deren Fixuntermannigfaltigkeiten.

Für den nicht- als auch den supersymmetrischen Fall stellt

$$y_t = y_b$$

eine solche Beziehung dar (vgl. (7.45)). Der relative Attraktivitätskoeffizient ergibt sich mit $a = 10$ bzw. $a^{\text{SUSY}} = 14$ und $d = 6$ (7.45) zu:

$$\bar{\eta} = \frac{1}{4}, \quad \bar{\eta}^{\text{SUSY}} = \frac{2}{5}, \quad (10.24)$$

womit der supersymmetrische Fall erneut IR-attraktiver ist. Im Gegensatz zum SM oder MSSM bleibt dies auch für nichtverschwindende Eichkopplungen mit abelscher Eichgruppe gültig. Erst durch $y_\tau \neq 0$ wird dies verletzt. Im supersymmetrischen Fall besteht für die trilinearen Kopplungen eine äquivalente Fixbeziehung (7.74) in dieser zuletzt genannten Fixebene:

$$A_t = A_b, \quad \text{für } y_t = y_b.$$

Die asymptotisch nichtfreien Eichkopplungen können ebenfalls IR-attraktive Fixbeziehungen eingehen (vgl. Abschnitt 7.1, insbesondere (7.1)). Im nichtsupersymmetrischen Fall für einen nicht ungewöhnlich großen Teilchengehalt besteht diese Möglichkeit nicht, da dann nur die Eichkopplung α_{B-L} asymptotisch frei ist. In einer supersymmetrischen Theorie dagegen existieren die folgenden – für die späteren Anwendungen – besonders wichtigen Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \text{SUSY:} & \hspace{20em} (10.25) \\ \frac{\alpha_L}{\alpha_R} = \frac{n_B + 2n_R}{n_B + 2n_L}, \quad \frac{\alpha_L}{\alpha_{B-L}} = \frac{3}{2} \frac{3n_L + 3n_R + 4}{n_B + 2n_L}, \quad \frac{\alpha_R}{\alpha_{B-L}} = \frac{3}{2} \frac{3n_L + 3n_R + 4}{n_B + 2n_R}. \end{aligned}$$

Insbesondere können auch mehrere dieser Fixhyperebenen vom RGF für eine hinreichend lange Top-Down-Evolution im Gültigkeitsbereich des jeweiligen Modells für kleine Impulsskalen angenähert erfüllt sein.

Die Werte der Eichkopplungen sind an keinem Punkt der Impulsskala experimentell bekannt. Bedingungen für das Gleiten dieser Kopplungen ergeben sich im Rahmen der Unifizierung [123].

Für einen langen Evolutionsweg könnte die IR-attraktive Fixhyperebene $b_L \alpha_L = b_R \alpha_R$ aus (10.25) für einen beliebigen skalaren Teilchengehalt im supersymmetrischen Fall in etwa verwirklicht sein, was im unteren Bereich der Impulsskala der Modelle die Eichkopplung $\alpha_{L,R}$ in ihrem Wertebereich einschränkt.

Für die manifest links-rechts-symmetrischen Modelle wird in der Literatur häufig die Annahme $\alpha_R(\mu) = \alpha_L(\mu)$ getroffen (vgl. z.B. [89]), was einer diskreten LR -Symmetrie entspricht und sich mit (10.25) und

$$n_R = n_L \quad \Rightarrow \quad b_R = b_L \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha_L}{\alpha_R} = \frac{b_R}{b_L} = 1 \quad (10.26)$$

als IR-attraktive Fixbeziehung des gesamten Parameterraums herausstellt. Diese zur Vereinfachung getroffene Annahme ist somit von Seiten der Fixmannigfaltigkeiten im supersymmetrischen Fall natürlich. Für die nichtsupersymmetrische Möglichkeit und den in der Regel nicht zu groß gewählten Teilchengehalt dagegen, ist eine zu (10.26) äquivalente Annahme IR-repulsiv (vgl. (7.1)) und damit insbesondere in diesem Bereich der Impulsskala instabil.

Es folgt die Darstellung der nichttrivialen IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten, mit deren analytischer Form²⁴ nun die Möglichkeit besteht – vorausgesetzt der Evolutionsweg ist ausreichend für diese Interpretation – die Parameter des zwölf-dimensionalen Sektors $(y_{t,b}, \alpha_{C,R,L,B-L}, A_{t,b}, M_{C,R,L,B-L})$ unabhängig von Anfangswerten untereinander in Beziehung zu setzen. Auf den (weniger) IR-attraktiven Fixuntermannigfaltigkeiten [21, 22] sind diese Zusammenhänge zwischen den freien Parametern entsprechend stärker ausgeprägt.

Zur besseren Übersicht wird zuerst der Fall $y_b = 0$ wiedergegeben. Für ein supersymmetrisches Modell ergibt sich die Fixmannigfaltigkeit des Eich-Yukawa-Sektors mit ihren durch die UV-Landau-Pole $\tilde{\mu}_i$ bestimmten Untersektoren aus (7.34) in Abschnitt 7.2 (Seite 91):

$$y_t = \begin{cases} \left(\frac{y_t}{\alpha_{B-L}} \right)^* \alpha_{B-L} F_D^{(3)} \left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_{B-L} \\ \eta_L+1, \eta_R+1, \eta_C+1 \end{matrix} \middle| \frac{b_L \alpha_L}{b_{B-L} \alpha_{B-L}}, \frac{b_R \alpha_R}{b_{B-L} \alpha_{B-L}}, \frac{b_C \alpha_C}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} \right)^{-1} & : \mu < \tilde{\mu}_{B-L}, \\ \left(\frac{y_t}{\alpha_L} \right)^* \alpha_L F_D^{(3)} \left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_L \\ \eta_{B-L}+1, \eta_R+1, \eta_C+1 \end{matrix} \middle| \frac{b_{B-L} \alpha_{B-L}}{b_L \alpha_L}, \frac{b_R \alpha_R}{b_L \alpha_L}, \frac{b_C \alpha_C}{b_L \alpha_L} \right)^{-1} & : \mu < \tilde{\mu}_L, \\ \left(\frac{y_t}{\alpha_R} \right)^* \alpha_R F_D^{(3)} \left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_R \\ \eta_{B-L}+1, \eta_L+1, \eta_C+1 \end{matrix} \middle| \frac{b_{B-L} \alpha_{B-L}}{b_R \alpha_R}, \frac{b_L \alpha_L}{b_R \alpha_R}, \frac{b_C \alpha_C}{b_R \alpha_R} \right)^{-1} & : \mu < \tilde{\mu}_R. \end{cases} \quad (10.27)$$

Der erste Sektor wird von $L \leftrightarrow R$ auf sich selbst abgebildet, während die letzten beiden durch diese Transformation die Rollen tauschen. In sich links-rechts-symmetrische Lösungen können somit nur in dem Sektor existieren, in dem der Landau-Pol der Eichkopplung α_{B-L} den (mathematischen) UV-Bereich begrenzt. Im nichtsupersymmetrischen Fall wird die Fixlösung allein von der ersten Zeile beschrieben.

²⁴Die Lauricella-Funktionen sind bis zur Ordnung zwei z.B. in *Mathematica* implementiert. Die hier vorliegende maximale Ordnung drei, kann mit Hilfe der im Anhang F beschriebenen C-Routine mit hoher Geschwindigkeit bestimmt werden.

Diese Fixmannigfaltigkeit ergibt für den supersymmetrischen Fall im Schnitt mit der IR-attraktiven Fixebene $b_R\alpha_R = b_L\alpha_L$ die folgende Fixuntermannigfaltigkeit:

$$\begin{aligned} & \underline{b_L\alpha_L = b_R\alpha_R} : \\ & y_t = \left(\frac{y_t}{\alpha_{B-L}} \right)^* \alpha_{B-L} F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_{B-L} \\ \eta_L + \eta_R + 2, \eta_C + 1 \end{array} \middle| \frac{b_L\alpha_L}{b_{B-L}\alpha_{B-L}}, \frac{b_C\alpha_C}{b_{B-L}\alpha_{B-L}} \right)^{-1} \\ & \text{für } \mu < \tilde{\mu}_{B-L} \quad (\alpha_{B-L}\text{-Sektor}), \end{aligned} \quad (10.28)$$

$$\begin{aligned} & y_t = \frac{\eta_L + \eta_R + 1}{\eta_L} \left(\frac{y_t}{\alpha_L} \right)^* \alpha_L F_D^{(2)} \left(\begin{array}{c} 1; -\eta_L - \eta_R \\ \eta_{B-L} + 1, \eta_C + 1 \end{array} \middle| \frac{b_{B-L}\alpha_{B-L}}{b_L\alpha_L}, \frac{b_C\alpha_C}{b_L\alpha_L} \right)^{-1} \\ & \text{für } \mu < \tilde{\mu}_L \quad (\alpha_L\text{-Sektor}). \end{aligned} \quad (10.29)$$

Im nichtsupersymmetrischen Fall ist die Fixbeziehung $b_L\alpha_L = b_R\alpha_R$ aufgrund der asymptotischen Freiheit dieser Kopplungen IR-repulsiv. Damit ist diese Möglichkeit ausgeschlossen.

Fixmannigfaltigkeiten für die Modelle I, II und III in dieser Fixhyperebene sind für den supersymmetrischen Fall in Abbildung 17 wiedergegeben.

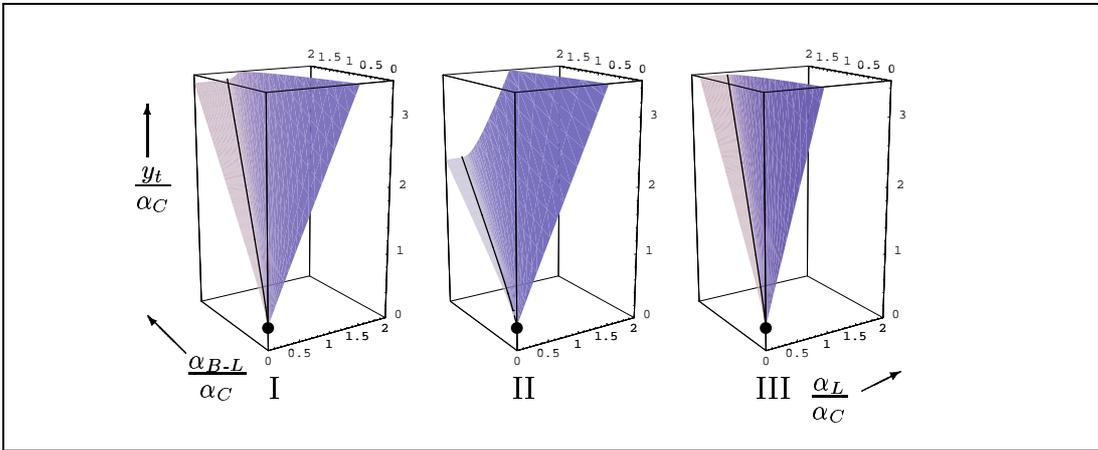


Abbildung 17: Die Abbildung zeigt im SUSY-Fall die Fixuntermannigfaltigkeiten von drei möglichen links-rechts-symmetrische Modelle (vgl. (10.21), Seite 153), die durch $b_R\alpha_R = b_L\alpha_L$ um eine Dimension verringert wurden.

Ebenfalls im SUSY-Fall kann die Eichkopplung α_{B-L} nach diesem Schema durch $b_{B-L}\alpha_{B-L} = b_L\alpha_L$ festgelegt werden, was auf die folgende IR-attraktive Fixuntermannigfaltigkeit führt:

$$\frac{y_t}{\alpha_L} = \frac{\eta_L + \eta_R + \eta_{B-L} + 2}{\eta_L} \left(\frac{y_t}{\alpha_L} \right)^* F_D^{(1)} \left(1; -\eta_L - \eta_R - \eta_{B-L} - 1 \left| \frac{b_C \alpha_C}{b_L \alpha_L} \right. \right)^{-1},$$

für : $b_L \alpha_L = b_R \alpha_R = b_{B-L} \alpha_{B-L}$ (10.30)

und in diesem Sektor die größtmögliche Reduktion darstellt.

Für die LR-Modelle kann ohne Einschränkungen bei den Eichkopplungen die Fixmannigfaltigkeit für $y_b \neq 0$ mit Hilfe der bestimmten allgemeinen Beziehungen (7.52) auf Seite 102 sowohl für den nicht- als auch den supersymmetrischen Fall angegeben werden:

$$(10.27) : \quad y_t \rightarrow y_t F_D^{(1)} \left(1; 1 - \frac{1}{\eta} \left| \frac{y_b}{y_t} \right. \right)^{-1}, \quad (10.31)$$

wobei $\eta = (d - a)/a$ den Koeffizienten (7.45) (Seite 100) wiedergibt, also

$$\text{nicht-SUSY: } \eta = -\frac{2}{5}, \quad \text{SUSY: } \eta = -\frac{4}{7}.$$

Für $y_t < y_b$ muß in (10.31) die Vertauschung $y_t \leftrightarrow y_b$ vorgenommen werden. Alle möglichen Fixuntermannigfaltigkeiten folgen entsprechend.

Die Fixmannigfaltigkeit der trilinearen Kopplungen $A_{t,b}$ ergeben für den durch die Eichkopplung α_{B-L} bestimmten Sektor in (10.27) aus (8.20) und (8.21):

$$\begin{aligned} & \frac{A_t y_t^{-1/2} [1 - (6y_t + 14y_b) F(\alpha)] - A_b y_b^{-1/2} [1 - (6y_b + 14y_t) F(\alpha)]}{8(y_t - y_b)} \\ &= -\frac{1}{\eta_{B-L} b_{B-L} \alpha_{B-L}} F_D^{(3)} \left(2; 1 - \eta_{B-L} \left| \frac{b_L \alpha_L}{b_{B-L} \alpha_{B-L}}, \frac{b_R \alpha_R}{b_{B-L} \alpha_{B-L}}, \frac{b_C \alpha_C}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} \right. \right) \\ &+ \frac{\eta_L + 1}{\eta_{B-L} (1 - \eta_{B-L})} \frac{b_L \alpha_L}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} \frac{M_L}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} F_D^{(3)} \left(2; 2 - \eta_{B-L} \left| \dots \right. \right) \\ &+ \frac{\eta_R + 1}{\eta_{B-L} (1 - \eta_{B-L})} \frac{b_R \alpha_R}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} \frac{M_R}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} F_D^{(3)} \left(2; 2 - \eta_{B-L} \left| \dots \right. \right) \\ &+ \frac{\eta_C + 1}{\eta_{B-L} (1 - \eta_{B-L})} \frac{b_C \alpha_C}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} \frac{M_C}{b_{B-L} \alpha_{B-L}} F_D^{(3)} \left(2; 2 - \eta_{B-L} \left| \dots \right. \right), \quad (10.32) \end{aligned}$$

mit

$$F(\alpha) := \left(\frac{\alpha_{B-L}}{y_t} \right)^* \frac{1}{\alpha_{B-L}} F_D^{(3)} \left(1; 1 - \eta_{B-L} \left| \dots \right. \right).$$

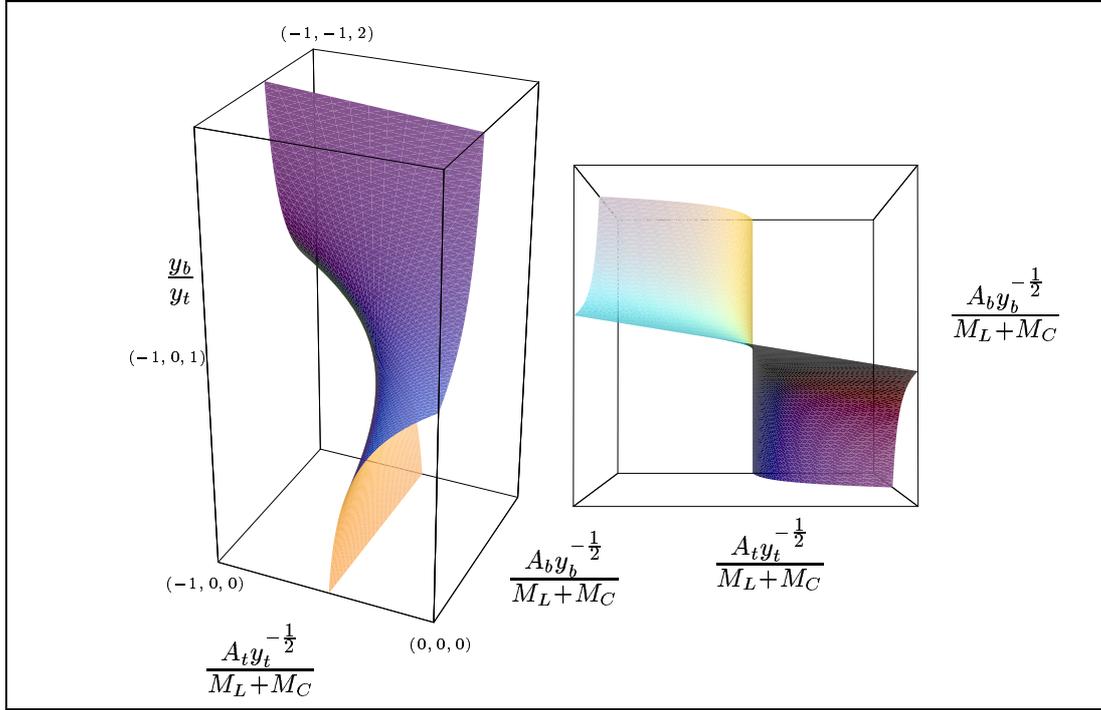


Abbildung 18: Die Abbildung zeigt eine Fixuntermannigfaltigkeit der trilinearen Kopplung $A_{t,b}$ und der zugehörigen Yukawakopplungen im supersymmetrischen LR-Modell II mit jeweils zwei Bidoublets bzw. $SU(2)_{L,R}$ -Triplets (rechts in der Aufsicht) für $b_L \alpha_L = b_R \alpha_R = b_{B-L} \alpha_{B-L}$. Zur Festlegung der nicht dargestellten Kopplungen des gelösten Sektors ($y_{t,b}, \alpha_{C,R,L,B-L}, A_{t,b}, M_{C,R,L,B-L}$) werden Angaben im Text gemacht.

Diese Fixfläche ist aus Gründen der Darstellung für die Untermannigfaltigkeit $b_R \alpha_R = b_L \alpha_L = b_{B-L} \alpha_{B-L}$ für das manifest links-rechts-symmetrische Modell II mit $(n_B, n_L, n_R) = (2, 2, 2)$ in Abbildung 18 an der Skala der Top-Masse dargestellt, was – wenn auch an dieser Skala unrealistisch – eine Vorstellung von den von der Fixmannigfaltigkeit beschriebenen Zusammenhängen der Parameter in (10.32) vermittelt. Das nichtfestgelegte Eichkopplungsverhältnis wurde dabei durch $\alpha_C(m_t)/\alpha_L(m_t) := \alpha_3(m_t)/\alpha_2(m_t) \simeq 3,27$ genähert und die Gaugino-Massen-Verhältnisse unter der Annahme einer für höhere Impulsskalen vorhandenen GUT-Unifizierung von Eichkopplungen und Gaugino-Massen festgelegt, was zusammen mit den hier angenommenen Fixbeziehungen des Eichsektors die folgenden Beziehungen ergibt (vgl. 7.59):

$$\begin{aligned} \frac{M_L}{M_{B-L}} = \frac{\alpha_L}{\alpha_{B-L}} = \frac{b_{B-L}}{b_L} = 4, & \quad \frac{M_R}{M_{B-L}} = \frac{\alpha_R}{\alpha_{B-L}} = \frac{b_{B-L}}{b_R} = 4, \\ \frac{M_L}{M_R} = \frac{\alpha_L}{\alpha_R} = \frac{b_R}{b_L} = 1, & \quad \frac{M_C}{M_L} = \frac{\alpha_C}{\alpha_L} \simeq \frac{\alpha_3(m_t)}{\alpha_2(m_t)} \simeq 3,27. \end{aligned}$$

Die Abbildung (18) zeigt, daß für Werte von y_b/y_t , die deutlich von der vollständig attraktiven Fixbeziehung $y_t/y_b = 1$ abweichen, die Größen

$$\frac{A_t y_t^{-\frac{1}{2}}}{M_L + M_C}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{A_t y_t^{-\frac{1}{2}}}{M_L + M_C}$$

voneinander entkoppeln und jeweils eine von ihnen nahezu festgelegt ist (vgl. Abschnitt 7.4.1).

10.3.2 Einfluß des skalaren Teilchengehalts auf Top- und Bottom-Masse

Wird die Möglichkeit in Betracht gezogen, daß das MSSM in ein supersymmetrisches LR-Modell eingebettet ist, so ist über die Brechungsskala M_R der Parität $SU(2)_R \otimes U(1)_{B-L} \rightarrow U(1)_Y$ nichts bekannt. Sie könnte an jedem Punkt der Impulsskala in der *Großen Einöde* vorliegen.

Untere experimentelle Schranken für die Massen der W_R -Bosonen von 720 GeV [45] legen zumindest fest, daß solche paritätserhaltende Modelle erst oberhalb von etwa 1 TeV verwirklicht sein könnten. In diesem Abschnitt wird angenommen, daß eine supersymmetrische LR-Theorie an dieser relativ kleinen Skala vorliegt, da dieser Fall von Seiten der IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeit von größerem Interesse ist.

Die Massen der Fermionen, also insbesondere die der hier betrachteten Top- und Bottom-Quarks, sind dann, unter der Annahme eines nur noch geringen Gleitens der Parameter von der Skala 1 TeV bis zu der Top-Masse $\mu = m_t^{\text{exp.}} \simeq 174$ GeV, im wesentlichen von den Verhältnissen im LR-Modell bestimmt.

Unter den in der Einleitung dieses Abschnittes erläuterten zusätzlichen Annahmen (Seite 136) werden in diesem Abschnitt Top- und Bottom-Masse genähert. Dies beinhaltet insbesondere die Verwendung der Ein-Schleifen-Ordnung und die Bestimmung der Quark-Massen aus den Baumgraphen-Beziehungen:

$$m_t(\mu) = h_t(\mu) v \sin \beta, \quad m_b(\mu) = h_b(\mu) v \cos \beta. \quad (10.33)$$

β ist wie im MSSM der (unbekannte) Mischungswinkel zwischen den beiden Higgs-Vakuumerwartungswerten, die zur elektroschwachen Brechung führen. Ein Gleiten dieses Parameters wird vernachlässigt.

Die im folgenden angegebenden Massen sind qualitativ zu werten. Deren Vergleich für unterschiedlichen skalaren Teilchengehalt beinhaltet jedoch wertvolle Informationen, die im folgenden bestimmt werden.

Die Eichkopplungen $\alpha_{L,R,B-L}$ der supersymmetrischen Modelle sind unabhängig vom skalaren Teilchengehalt asymptotisch nichtfrei und bieten damit die Möglichkeit, neben der Auswertung der höchstdimensionalen Fixmannigfaltigkeit, für einen hinreichend langen Evolutionsweg oberhalb von M_R , deren unbekannte numerische Werte über die IR-attraktiven Fixbeziehungen, die diese Kopplungen untereinander eingehen können (10.25), zu nähern.

Zur Auswertung des Sektors ($y_{t,b} := h_{t,b}^2/4\pi, \alpha_{C,L,R,B-L}$) wird in einem ersten Schritt $y_b = 0$ gesetzt. Die Eichkopplung α_R wird über die IR-attraktive Fixhyperebene

$$b_R \alpha_R = b_L \alpha_L$$

bestimmt, was die Fixuntermannigfaltigkeit (10.28) ergibt. Zur Festlegung der Eichkopplung α_{B-L} wird als eine Möglichkeit die aus der Paritäts-Brechung an der Skala $\mu = M_R$ [124] folgende Beziehung

$$\mu = M_R : \frac{1}{\alpha_{B-L}} = \frac{5}{2} \frac{1}{\alpha_Y} - \frac{3}{2} \frac{1}{\alpha_R} = \frac{5}{2} \frac{1}{\alpha_Y} - \frac{3}{2} \frac{b_R}{b_L} \frac{1}{\alpha_L}, \quad (10.34)$$

für die beiden Sektoren der Fixmannigfaltigkeit (10.28) bzw. (10.29), die zur Unterscheidung mit α_{B-L} - bzw. α_L -Sektor benannt werden, verwendet. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, statt (10.34) die weitere IR-attraktive Beziehung

$$b_{B-L} \alpha_{B-L} = b_L \alpha_L$$

auszunutzen, was auf die kleinstdimensionale Fixmannigfaltigkeit (10.30) führt. Dieser Sektor stellt den höchsten Grad der Reduktion der freien Parameter dar und wird deswegen im folgenden als *R-Sektor* bezeichnet.

In allen drei Fällen werden die Eichkopplungen α_L und α_C bei der Auswertung an der Skala $\mu = m_t^{\text{exp.}} \simeq 174$ GeV durch die Anfangswerte von α_2 und α_3 (10.1) bestimmt.

Für die drei speziellen Modelle (10.21) ergeben sich in diesen drei Sektoren die folgenden normierten, genäherten Top-Massen $m_t(174 \text{ GeV})/\sin\beta$:

$\simeq \frac{m_t(174 \text{ GeV})}{\sin\beta}$	α_{B-L} -Sektor (10.28)	R-Sektor (10.30)	α_L -Sektor (10.29)
I	307 GeV	173 GeV	-
II	203 GeV	202 GeV	202 GeV
III	-	170 GeV	170 GeV

Nicht jeder der Sektoren führt vor diesem Hintergrund zu endlichen Werten. In den übrigen Fällen wird mit Ausnahme des Modells I im α_{B-L} -Sektor (307 GeV) die richtige Größenordnung wiedergegeben.

Die weitere Variation des skalaren Teilchengehalts ergibt das in Abbildung 19 dargestellte Bild für den α_{B-L} - und α_L -Sektor. Im oberen Teil sind die Werte der Top-Yukawakopplung, ausgewertet an der Skala 174 GeV, aufgetragen, die sich mit (10.33) in die im zweiten Teil notierten genäherten und auf $\tan \beta$ normierten Top-Massen an dieser Skala übersetzen. Die konkreten Modelle sind durch Punkte eingezeichnet, wobei die Versionen I, II und III rot markiert sind. Die Auswahl ist dabei auf eine gerade Zahl von $SU(2)_L$ - bzw. $SU(2)_R$ Triplets beschränkt, um die eingangs erwähnten chiralen Anomalien zu vermeiden.

Bis auf den Fall $n_L = 0$ im α_L -Sektor, in dem die Anzahl der rechtshändigen Triplets noch beliebig erhöht werden kann, werden alle Modelle bezüglich ihres Triplettgehalts wiedergegeben, die nicht auf verschwindende oder unendlich große Top-Massen führen. Für diesen Ausnahmefall ist die genäherte Top-Masse für einen festen Wert n_B nur wenig sensitiv für eine wachsende Anzahl von rechtshändigen Triplets.

Im α_{B-L} -Sektor fällt für $n_B = 2$, $n_L = 0$ und $n_R = 2$ (Modell I) das Ergebnis relativ zu den anderen Top-Massen hoch aus, erreicht aber für mehr als zwei Bidubletts entsprechende Werte. Die Bidublettanzahl hat für einen festen Triplettgehalt einen nur sehr geringen Einfluß. Die abgeschätzten Top-Massen, die sich aus dem R-Sektor (10.30) ergeben, führen auf vergleichbare Werte.

Unter Hinzunahme der Bottom-Yukawa-Kopplung $h_b \neq 0$ wird nun untersucht wie sich dies auf die genäherte Top-Masse für den unterschiedlichen skalaren Teilchengehalt relativ zueinander auswirkt. Dazu wird die experimentell bestimmte Bottom-Masse

$$m_b(m_b) = (4, 0 - 4, 4) \text{ GeV} \simeq 4.2 \text{ GeV},$$

bzw. der an der Skala von 174 GeV mit Hilfe des Massenzuwachsfaktors (10.2) gewonnene Wert

$$m_b(174 \text{ GeV}) \simeq 2.7 \text{ GeV}$$

als Eingangsparameter verwendet und die sich daraus ergebenden Top-Massen in Abhängigkeit vom Parameter $\tan \beta$ bestimmt.

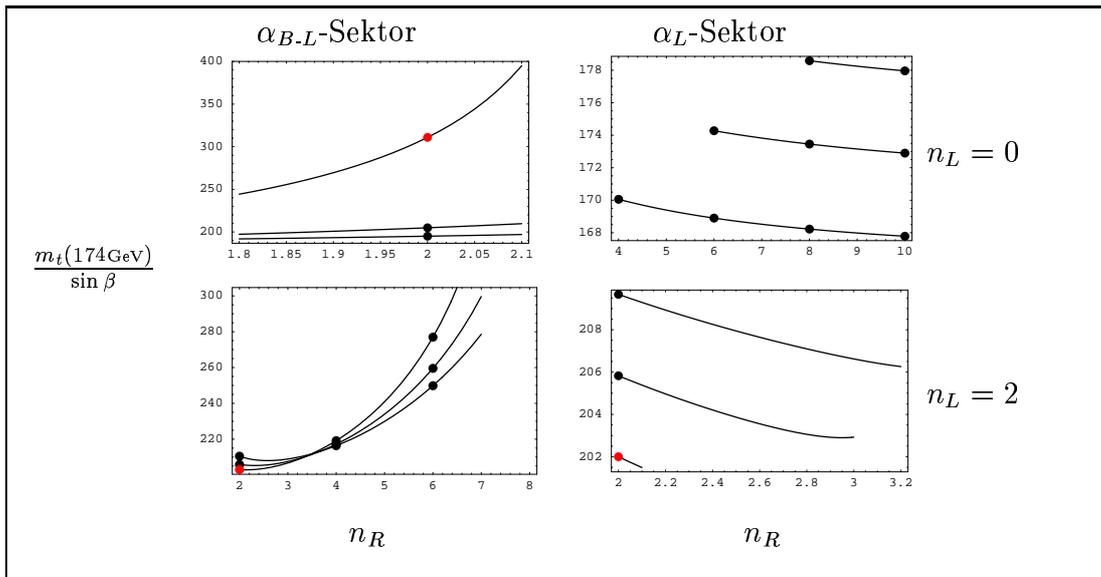
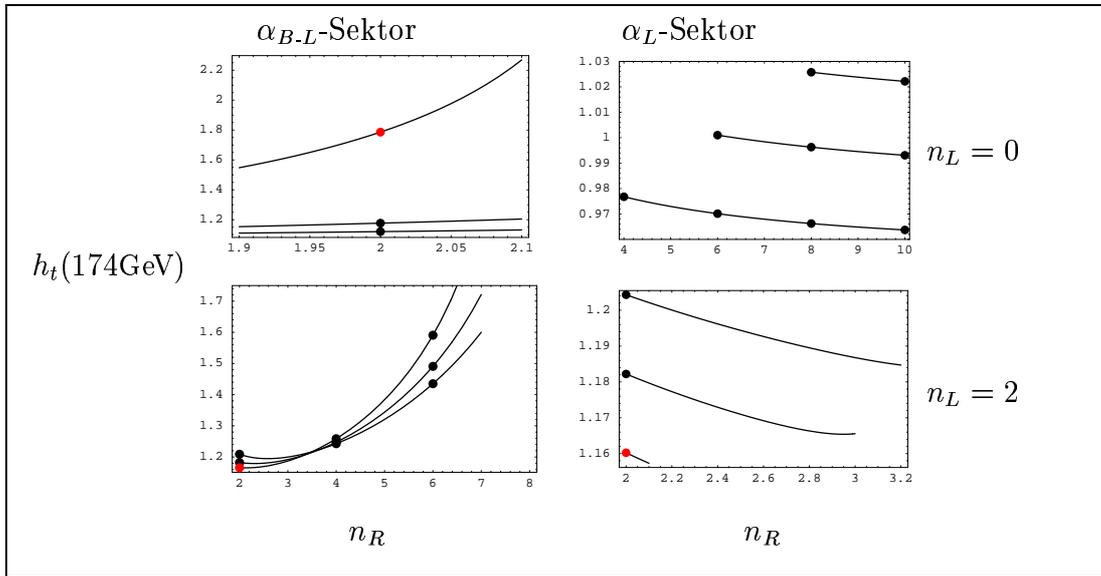


Abbildung 19: Die Abbildung gibt die Abhängigkeit der aus der IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeit bestimmten Top-Yukawakopplung $h_t(m_t^{\text{exp}})$ (oben) für $y_b = 0$ und die sich daraus ergebende genäherte normierte Top-Masse $m_t(m_t^{\text{exp}})/\sin\beta$ vom skalaren Teilchengehalt der links-rechts-symmetrischen Modelle für den α_{B-L} -Sektor bzw. den α_L -Sektor wieder. Variiert wird jeweils bei festgehaltener Bidublett- n_B bzw. $SU(2)_L$ Tripletts-Anzahl n_L der Gehalt an rechtshändigen Tripletts n_R . Im α_L -Sektor und im α_{B-L} -Sektor für $n_L = 2$ steigt die Masse proportional mit $n_B = 2, 3, 4$. Für $n_L = 0$ im α_{B-L} Sektor sinkt die Top-Masse im Gegensatz dazu mit steigender Bidublett-Anzahl.

Die Abbildung 20 gibt die Werte der Yukawakopplungen $h_{t,b}$ an der Skala 174 GeV, die aus den Fixuntermannigfaltigkeiten (10.28), (10.30) und (10.29) gewonnen wurden, für einen unterschiedlichen skalaren Teilchengehalt in den einzelnen Sektoren der Fixlösungen wieder.

Dabei läßt sich nicht jeder Teilchengehalt für die einzelnen Sektoren der Fixmannigfaltigkeiten realisieren, was darin begründet liegt, daß die verwendeten Festlegungen für die Eichkopplungen an der Skala 174 GeV in diesen Fällen der für den jeweiligen Sektor angenommenen Landau-Pol Reihenfolge der Ein-Schleifen-Ordnung nicht entsprechen. Die vollständig attraktive Fixbeziehung²⁵ $h_t = h_b$ ist dabei jeweils durch einen Punkt gekennzeichnet.

Die Übersetzung dieser Yukawakopplungen in die genäherte Top-Masse an derselben Skala wird in Abbildung 21 in Abhängigkeit vom Mischungsparameter $\tan\beta$ der Higgs-Vakuumerwartungswerte der elektroschwachen Brechung durchgeführt.

Die nicht manifest links-recht-symmetrischen Modell liegen entsprechend dieser Abbildung entweder in dem jeweiligen Sektor nicht vor oder erreichen den experimentellen Wert der Top-Masse in Abhängigkeit von $\tan\beta$ nicht bzw. nur in einem sehr kleinen $\tan\beta$ -Intervall. Obwohl es sich nur um eine Abschätzung im Rahmen der Ein-Schleifen-Ordnung handelt, scheinen die IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten dieser Modelle nicht bevorzugt zu sein.

Die manifest links-rechts-symmetrischen Modelle führen alle auf eine mögliche Übereinstimmung mit dem Experiment für $\tan\beta$ -Werte von 1–2 bzw. 55–70. In diesen Modellen führt der vollständig attraktive Fixpunkt der Top- und Bottom-Yukawakopplungen in allen Fällen auf Top-Massen von 160–180 GeV. Die Anzahl der Bidoublets hat offenbar nur einen geringen Einfluß auf die Verhältnisse.

Werden die Top- und Bottom-Massen $m_t(174\text{ GeV}) \simeq 174\text{ GeV}$ bzw. $m_b(174\text{ GeV}) \simeq 2,7\text{ GeV}$ als Eingangsparameter verwendet, so ergeben sich die in den Abbildungen 22 und 23 wiedergegebenen qualitativ zu wertenden Abhängigkeiten des $\tan\beta$ -Parameters vom skalaren Teilchengehalt, hier wiedergeben für den R-Sektor, also der Fixmannigfaltigkeit, bei der alle IR-attraktiven Fixbeziehungen des reinen Eichsektors ausgenutzt wurden.

Die Abbildung 22 gibt die Verhältnisse für kleine $\tan\beta$ -Werte wieder und zeigt für eine festgehaltene Differenz von $SU(2)_R$ - und $SU(2)_L$ -Tripletts bzw. Bidoublets den Verlauf der $\tan\beta$ -Werte in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Tripletts. In allen Fällen bewirkt eine kleinere Gesamttripllettzahl ein Anwachsen des $\tan\beta$ -Wertes, während die Bidoublettzahl wiederum einen nur geringen Einfluß besitzt. Kleine Differenzen $n_R - n_L > 0$ führen ebenfalls zu einem größeren $\tan\beta$.

²⁵ $y_t = y_b$ stellt im betrachteten Sektor eine IR-attraktive Fixhyperebene dar. Dies gilt jedoch nicht mehr für $y_\tau \neq 0$.

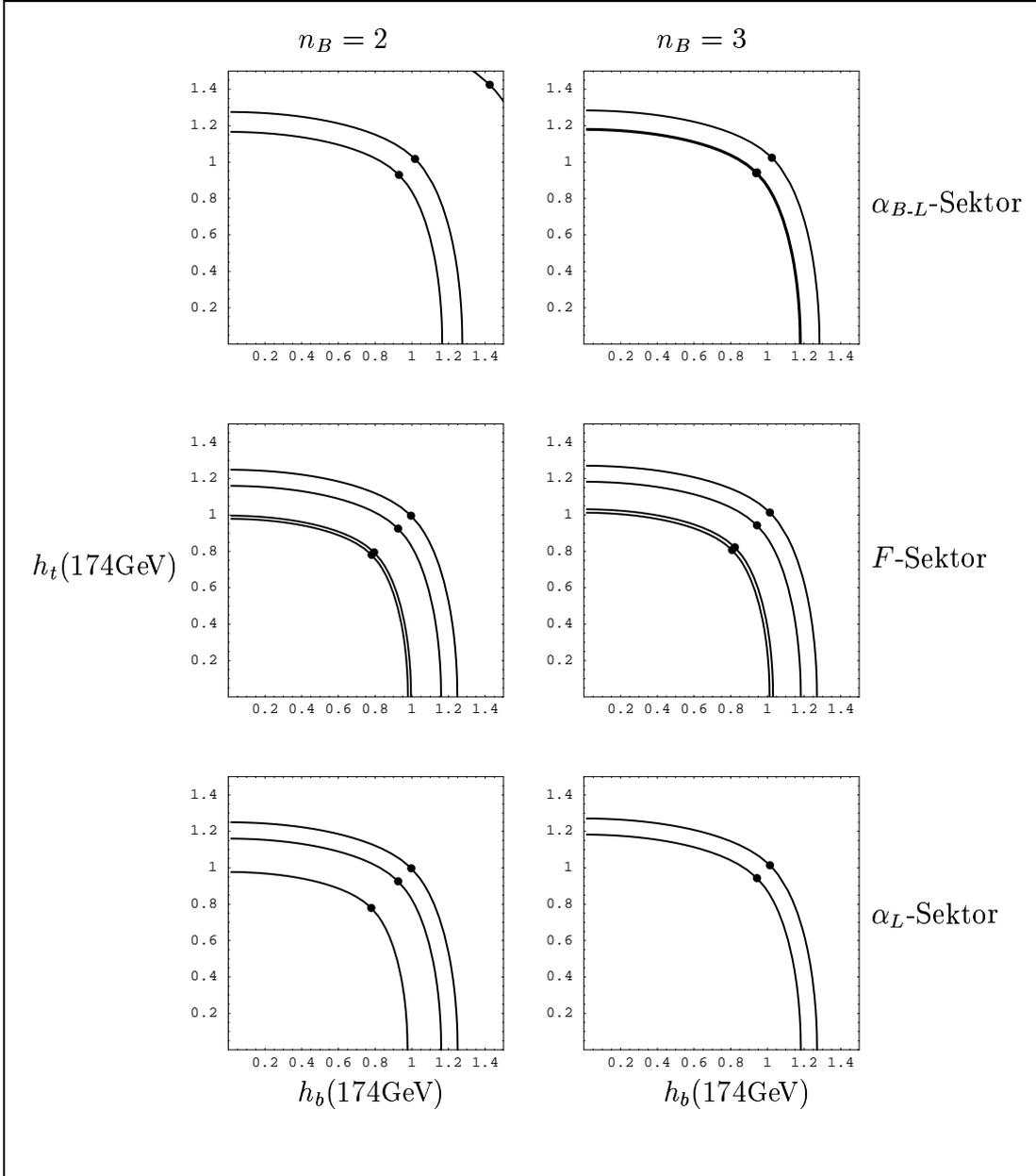


Abbildung 20: Die Abbildung gibt die Auswertung der IR-attraktiven Fixmanigfaltigkeit für die Top- und Bottom-Yukawakopplung an der Skala 174 GeV in den Sektoren (s. Text) $\alpha_{B-L,L}$ und dem mit zusätzlich $b_{B-L}\alpha_{B-L} = b_L\alpha_L$ und durch F gekennzeichneten für zwei bzw. drei Bidoublets ($n_B = 2, 3$) wieder. Die vollständig attraktiven Fixpunkte $y_t = y_b$ sind fett wiedergegeben. Vom Ursprung ausgehend entsprechen die einzelnen Linien dem Tripletgehalt $(n_L, n_R) = (0, 2), (0, 4), (2, 2)$ bzw. $(4, 4)$, wobei im α_{B-L} -Sektor die Wahlen $(n_B, n_L, n_R) = (2, 0, 2)$ bzw. $(2/3, 0, 4)$ und α_L -Sektor $(2/3, 0, 2)$ durch die Fixlösungen nicht realisierbar sind.

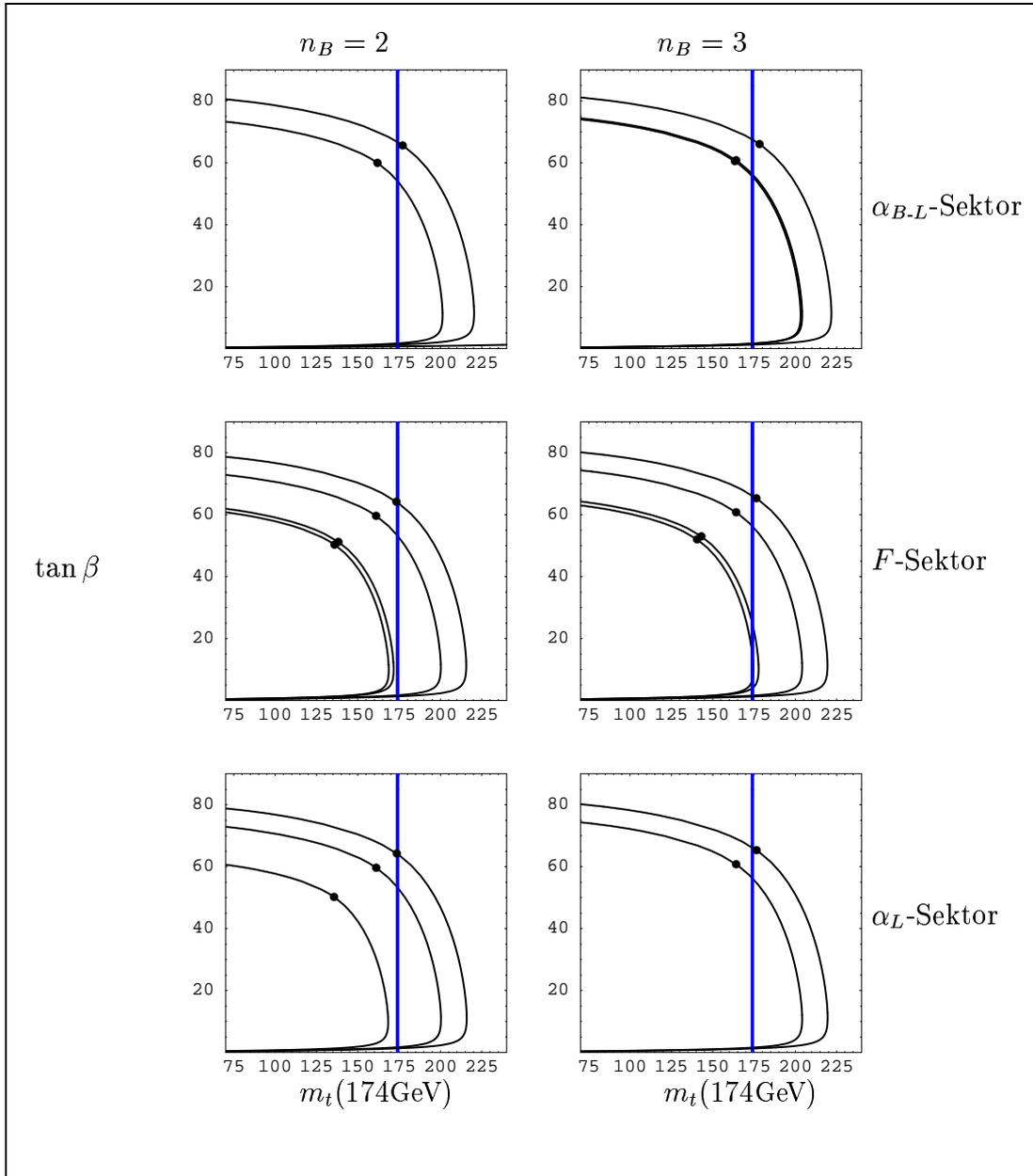


Abbildung 21: Entspricht der Abbildung 20 in der Übersetzung der Yukawakopplungen $h_{t,b}(174\text{ GeV})$ in die genäherten Top-Massen an der Skala 174 GeV in Abhängigkeit von $\tan \beta$. Die vollständig attraktiven Fixpunkte übersetzen sich in die hier gekennzeichneten Punkte. Die Bottom-Masse $m_b(174\text{ GeV}) \simeq 2,7\text{ GeV}$ wurde hierbei als Eingangsparameter verwendet. Der experimentelle Wert der Top-Masse ist durch eine senkrechte Gerade wiedergegeben.

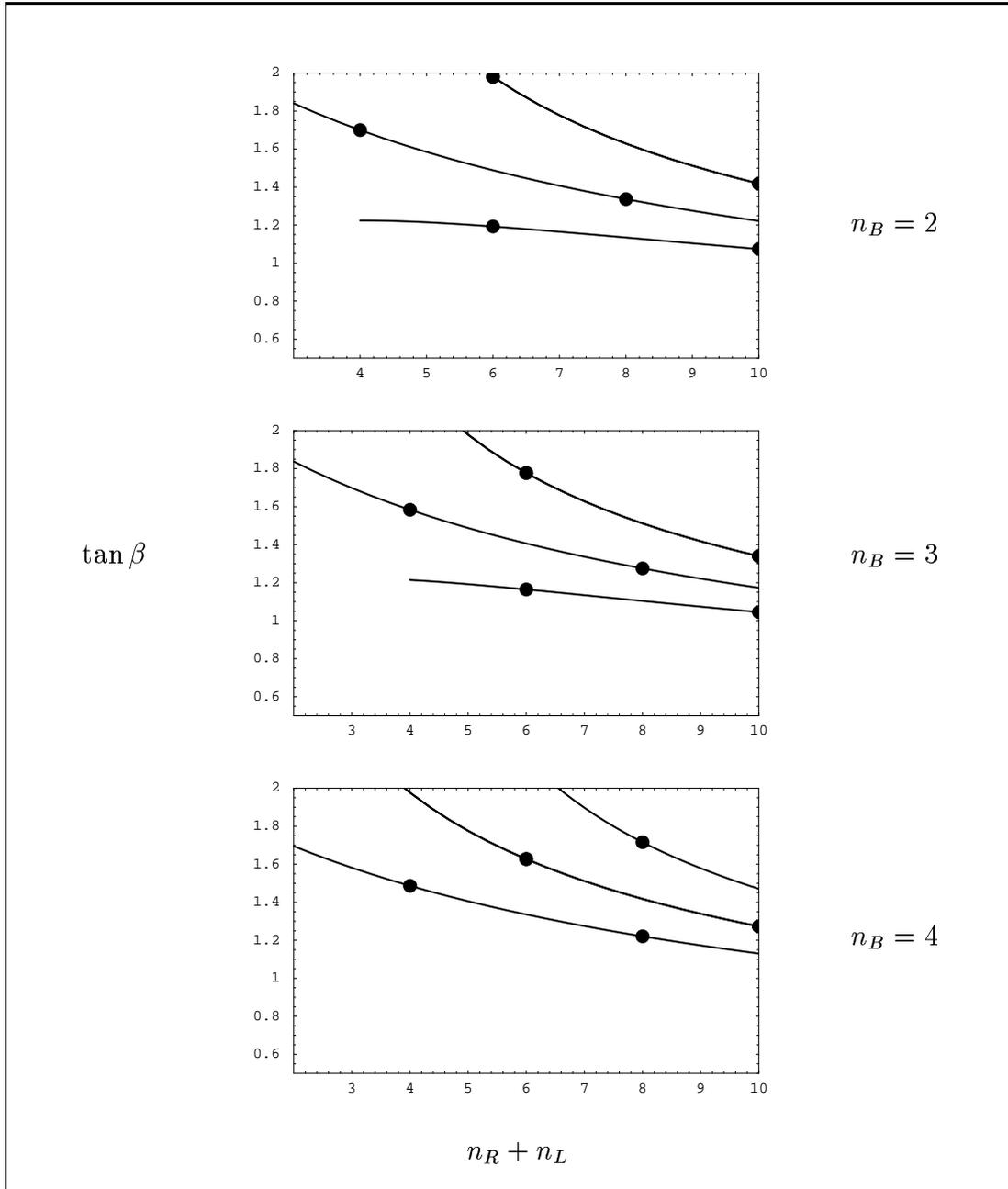


Abbildung 22: Die Abbildung gibt qualitativ die Sensitivität des Parameters $\tan \beta$ in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Triplets $n_R + n_L$ für die Bidoublettanzahlen $n_B = 2, 3$ und 4 für kleine $\tan \beta$ im R-Sektor (s. Text) wieder. Die einzelnen Linien in den Diagrammen entsprechen für anwachsende $\tan \beta$ -Werte der Differenz von $SU(2)_R$ - bzw. $SU(2)_L$ -Triplets $n_R - n_L = -2, 2, 0$ für $n_B = 2$ und 3 bzw. $n_R - n_L = 0, 2, 4$ für $n_B = 4$. Als Eingangsparameter wurde die Wahl $m_t(174\text{GeV}) \simeq 174 \text{ GeV}$ bzw. $m_b(174\text{GeV}) = 2,7 \text{ GeV}$ getroffen. Nichteingezeichnete Teilchengehalt führt auf Werte $\tan \beta \simeq 0$.

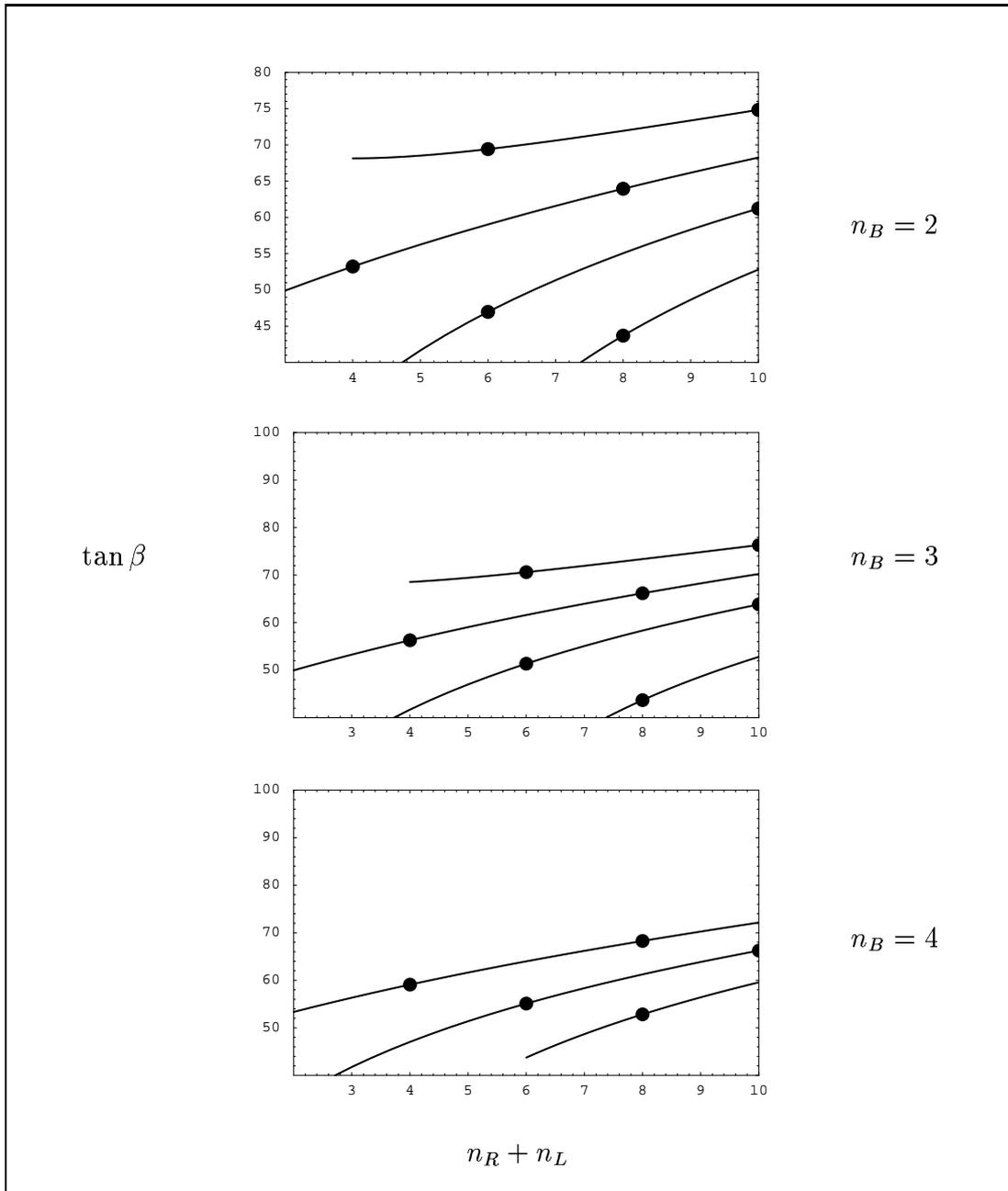


Abbildung 23: Die Abbildung gibt qualitativ die Sensitivität des Parameters $\tan \beta$ in Abhängigkeit von der Gesamtzahl der Triplets $n_R + n_L$ für die Bidoublettanzahlen $n_B = 2, 3$ und 4 für große $\tan \beta$ wieder. Die einzelnen Linien in den Diagrammen entsprechen für anwachsende $\tan \beta$ -Werte der Differenz von rechts- und linkshändigen Triplets $n_R - n_L = 0, -2, 2$ für $n_B = 2, 3$ und $n_R - n_L = 0, 2, 4$ für $n_B = 4$. Als Eingangsparameter wurde die Wahl $m_t(174\text{GeV}) \simeq 174 \text{ GeV}$ bzw. $m_b(174\text{GeV}) \simeq 2,7 \text{ GeV}$ getroffen. Nichteingezeichneter Teilchengehalt führt auf Werte von $\tan \beta > 1000$.

Nahezu dasselbe ergibt sich aus der Abbildung 22, in der der Fall eines großen $\tan \beta$ wiedergegeben ist. Im Gegensatz zur Möglichkeit eines kleinen $\tan \beta$ -Wertes ist das Verhalten bezüglich der Triplet-Differenz nicht signifikant.

Die Ergebnisse bezüglich der genäherten Top-Masse decken sich mit der in Abschnitt 9.2 getroffenen Aussage. Anhand der dort bestimmten Approximation der Fixmannigfaltigkeit konnte der Wert der Top-Yukawakopplung im wesentlichen durch die Eichkopplungen α_C und z.B. α_{B-L} – falls es sich bei letzterem um den bestimmenden Sektor der Fixmannigfaltigkeit handelt – unabhängig vom skalaren Teilchengehalt beschränkt werden, was sich unter den gleichen einschränkenden Annahmen in

$$\begin{aligned} \text{LR :} \quad & 106 \text{ GeV} \leq m_t(174, 3 \text{ GeV}) \leq 287 \text{ GeV}, \\ \text{SUSY-LR :} \quad & 157 \text{ GeV} \leq m_t(174, 3 \text{ GeV})/\sin \beta \leq 309 \text{ GeV} \end{aligned}$$

übersetzt. Damit kann auch im nichtsupersymmetrischen Fall zumindest die Größenordnung der aus der Fixmannigfaltigkeit bestimmten Top-Masse wiedergegeben werden.

Die Ergebnisse belegen, wenn auch unter vereinfachenden Voraussetzungen, daß die Annahme eines supersymmetrischen Niederenergiemodells bei der Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten unabhängig vom skalaren Teilchengehalt zumindest zu keinen Widersprüchen führt.

Manifest links-rechts-symmetrische Modelle werden von Seiten der IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten deutlich bevorzugt und führen in allen Sektoren dieser speziellen Lösungen für die Massen der beiden schweren Quarks auf die richtige Größenordnung.

Die in Kapitel 7 bestimmten analytischen Lösungen haben offensichtlich eine effiziente Untersuchung von Modellparametern, wie z.B. in diesem Fall den Einfluß des skalaren Teilchengehalts, erlaubt.

Die diskutierten Modelle schöpfen den möglichen Rahmen einer Links-Rechts-Symmetrie nicht aus, sondern stellen im Zusammenhang mit IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten besonders ergiebige Varianten dar, so daß nur in diesem Zusammenhang Untersuchungen gemacht wurden. Auf andere Aspekte, wie z.B. die dynamische Brechung einer Links-Rechts-Symmetrie [125, 97] und vieles andere wurde nicht eingegangen.

10.4 Erweiterung um eine abelsche Wechselwirkung

Eine große Klasse von superstring-inspirierten Modellen erweitern die Eichgruppe des SMs bzw. MSSMs $G_{321} = SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ um zwei oder eine zusätzliche abelsche Wechselwirkungen, die die Brechung zum SM bzw. MSSM erlauben:

$$G_{32111} := G_{321} \otimes U(1)_\psi \otimes U(1)_\chi \rightarrow G_{3211} := G_{321} \otimes U(1)(\Theta) \rightarrow G_{321}.$$

Solche Theorien wurden in Abschnitt 4.3 motiviert und in Abschnitt 4.5 näher erläutert. Oberhalb des Gültigkeitsbereichs des SMs bzw. MSSMs könnten Modelle mit der Eichgruppe G_{3211} in der Nähe des IR ($\mathcal{O}(1 \text{ TeV})$) zurückbleiben und eine gültige Beschreibung der Physik liefern, was insbesondere eine zusätzliche Wechselwirkung mit abelscher Eichgruppe beinhaltet, beschrieben durch den Mischungswinkel Θ der spontanen Symmetriebrechung $U(1)_\psi \otimes U(1)_\chi \rightarrow U(1)(\Theta)$. Da diese Möglichkeit unter dem Aspekt von IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten von größerem Interesse ist, wird im folgenden angenommen, daß die untere Grenze des Gültigkeitsbereichs von der Ordnung 1 TeV ist. Weit oberhalb des SMs bzw. MSSMs werden alle exotischen Fermionen des jeweiligen Modells als ausgefroren betrachtet. Beibehalten werden in den RGG nur ein skalares Singulett, das die Brechung zur Eichgruppe G_{321} vermittelt, und das Eichboson der zusätzlichen $U(1)(\Theta)$.

Die RGG, die den folgenden Untersuchungen zugrunde liegen, finden sich im Anhang B und sind unter diesen Voraussetzungen abgesehen von der zusätzlichen Eichkopplung α_Θ mit denen des SMs bzw. MSSMs identisch.

Es werden im folgenden die über das SM und MSSM hinausgehenden Fixpunkte und deren Attraktivitäten wiedergegeben, die dann zusammen mit den Ergebnissen aus dem SM bzw. MSSM (vgl. Abschnitt 10.1 und 10.2) als Parameter in die exakt bestimmte Fixmannigfaltigkeit des Sektors $(y_t, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_\Theta)$ eingehen. Der Fall $y_b \neq 0$ kann im Gegensatz zu den links-rechts-symmetrischen Modellen nur für $\alpha_1 = \alpha_\Theta = 0$ angegeben werden, was trivial auf den Fall des SMs bzw. MSSMs zurückführt und deswegen hier nicht betrachtet wird²⁶ (vgl. Kapitel 7, insbesondere die Abschnitte 7.2 und 7.3).

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird der Einfluß der zusätzlichen Wechselwirkung auf die durch die Fixmannigfaltigkeiten bestimmte Top-Masse für den nichtsupersymmetrischen und supersymmetrischen Fall untersucht.

In einem ersten Schritt wird anhand der Ergebnisse aus Abschnitt 9.1 gezeigt, daß die Korrektur der durch die Fixmannigfaltigkeit des erweiterten Modells bestimmten Top-Masse für beliebige Werte der Eichkopplungen 10 % nicht über-

²⁶Der Fall $y_\tau \neq 0$ konnte grundsätzlich nicht bestimmt werden.

steigt. Darauffolgend wird die exakte Form der Fixmannigfaltigkeit verwendet und die Evolution der Parameter für diese speziellen Lösungen berücksichtigt.

Der Auswertung liegen wiederum die grundsätzlichen Annahmen und Einschränkungen zugrunde, die in der Einleitung zu diesem Kapitel (Seite 136) erläutert wurden, also insbesondere die Vernachlässigung der Polmassenkorrekturen ($\simeq 5\%$), die Verwendung der Ein-Schleifen-Näherung und die Annahme, daß das Gleiten der Parameter unterhalb von 1 TeV bis zur Skala der Top-Masse gering ausfällt, womit die Auswertung der RGG des erweiterten Modells an dieser Skala vorgenommen wird.

Für ein Modell mit der Eichgruppe G_{3211} und dem Mischungswinkel Θ ergeben sich mit (7.14) und (7.18) bzw. den RGG aus Anhang B die folgenden zusätzlichen Fixpunkte und deren Attraktivitätskoeffizienten für die Top-Yukawakopplung und die Eichkopplung α_Θ :

$$\begin{array}{l}
 \text{nicht-SUSY: } \left(\frac{y_t}{\alpha_\Theta} \right)^* = \frac{16}{135} \frac{216 - 51 \cos 2\Theta - \sqrt{15} \sin 2\Theta}{24 - 9 \cos 2\Theta - \sqrt{15} \sin 2\Theta}, \\
 \eta_\Theta = -\frac{432 - 120 \cos 2\Theta - 2\sqrt{15} \sin 2\Theta}{396 - 111 \cos 2\Theta - 11\sqrt{15} \sin 2\Theta} < -1, \\
 \text{SUSY: } \left(\frac{y_t}{\alpha_\Theta} \right)^* = \frac{512 - 67 \cos 2\Theta - (15\sqrt{15} - 16) \sin 2\Theta}{15(24 - 9 \cos 2\Theta - \sqrt{15} \sin 2\Theta)}, \\
 \eta_\Theta = -\frac{512 - 67 \cos 2\Theta - (15\sqrt{15} - 16) \sin 2\Theta}{464 - 79 \cos 2\Theta - 15\sqrt{15} \sin 2\Theta} < -1
 \end{array} \tag{10.35}$$

Sie sind in jedem Fall IR-repulsiv und physikalisch ($(y_t/\alpha_\Theta)^* > 0$). Die Fixpunkte in Abhängigkeit vom Mischungswinkel sind in Abbildung 24 a) für den nicht- bzw. supersymmetrischen Fall wiedergegeben und liegen zwischen den Werten Eins und Zwei. Die supersymmetrische Möglichkeit fällt systematisch größer aus. Die speziellen Modelle

$$\begin{aligned}
 \chi : \quad & \Theta = 0, \\
 N : \quad & \Theta = \arctan \sqrt{15}, \\
 \psi : \quad & \Theta = \pi/2, \\
 \eta : \quad & \Theta = \pi - \arctan \sqrt{5/3},
 \end{aligned}$$

sind jeweils markiert. Sie geben unterschiedlich motivierte Wahlen für den Mischungswinkel wieder. Das η -Modell stellt einen Sonderfall dar, bei dem davon ausgegangen wird, daß die superstring-inspirierte E_6 -GUT direkt durch spontane Symmetriebrechung in die Eichgruppe G_{3211} mit dem Rang fünf übergeht, was den Mischungswinkel festlegt.

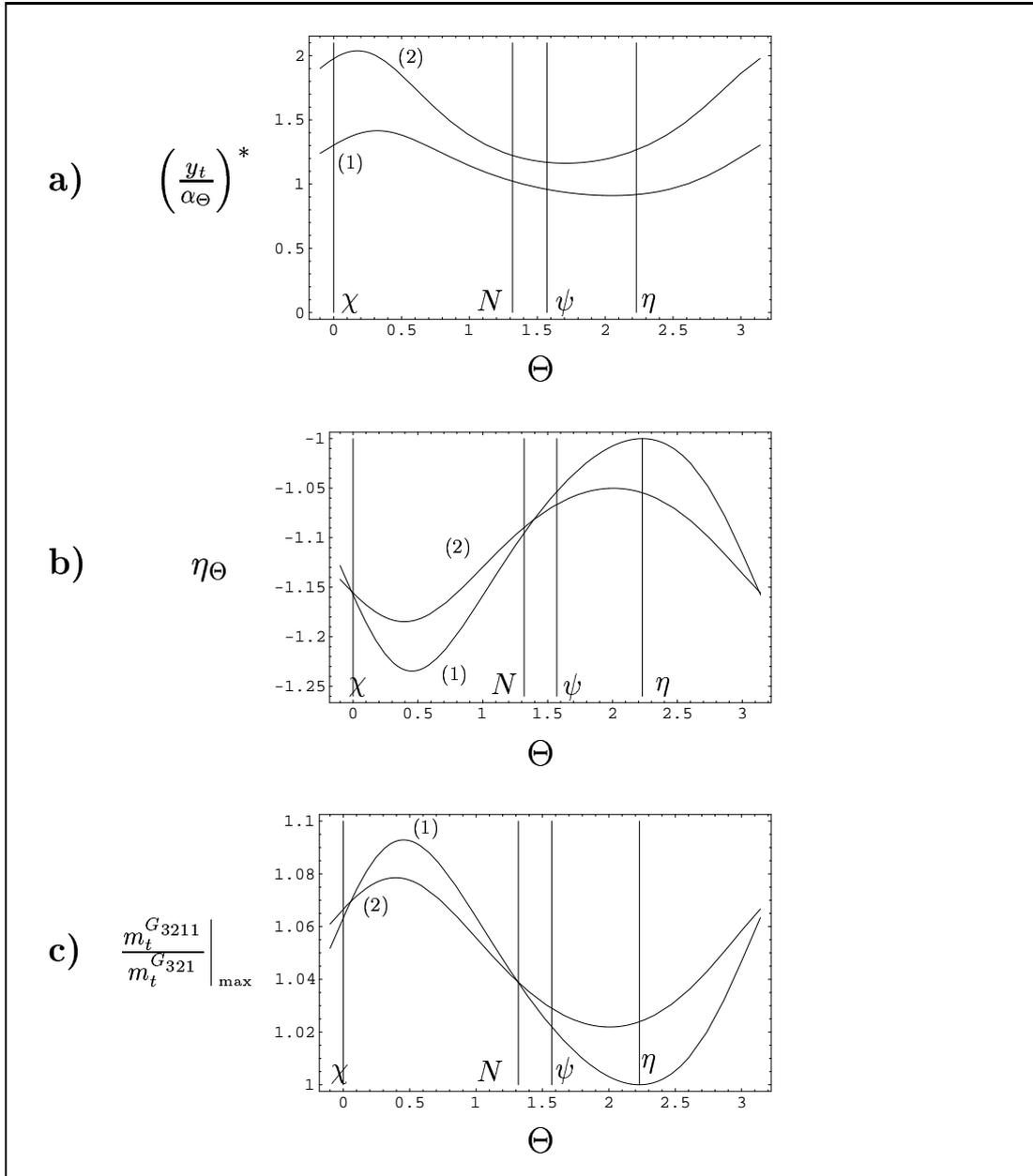


Abbildung 24: a) Zusätzlicher UV-Fixpunkt für die Erweiterung des SMs (1) bzw. MSSMs (2) um eine Wechselwirkung $U(1)(\Theta)$ in Abhängigkeit vom Mischungswinkel Θ . Die speziellen im Text diskutierten Modelle sind markiert. b) Die Attraktivität des jeweiligen Fixpunktes. c) Die maximalen Abweichungen der aus den Fixmannigfaltigkeiten gewonnenen und genäherten Top-Quarkmasse gegenüber dem auf das SM bzw. MSSM reduzierten Fall im gesamten möglichen Skalenbereich.

Die zu den Fixpunkten gehörenden Attraktivitätskoeffizienten sind in Abbildung 24 b) dargestellt. Erwartungsgemäß sind sie stark repulsiv $\eta_\Theta < -1$, was für jede abelsche Wechselwirkung gilt (vgl. Abschnitt 7.2) und nehmen minimal den folgenden Wert an: $\eta_\Theta \geq -1, 23465$.

Die Fixmannigfaltigkeit des Sektors $(y_t, \alpha_{3,2,1,\Theta})$ ergibt sich mit (7.34) zu:

$$y_t = \begin{cases} \left(\frac{y_t}{\alpha_\Theta} \right)^* \alpha_\Theta F_D^{(3)} \left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_\Theta \\ \eta_1+1, \eta_2+1, \eta_3+1 \end{matrix} \middle| \frac{b_1\alpha_1}{b_\Theta\alpha_\Theta}, \frac{b_2\alpha_2}{b_\Theta\alpha_\Theta}, \frac{b_3\alpha_3}{b_\Theta\alpha_\Theta} \right)^{-1} : \mu < \tilde{\mu}_\Theta, \\ \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* \alpha_1 F_D^{(3)} \left(\begin{matrix} 1; 1-\eta_1 \\ \eta_\Theta+1, \eta_2+1, \eta_3+1 \end{matrix} \middle| \frac{b_\Theta\alpha_\Theta}{b_1\alpha_1}, \frac{b_2\alpha_2}{b_1\alpha_1}, \frac{b_3\alpha_3}{b_1\alpha_1} \right)^{-1} : \mu < \tilde{\mu}_1. \end{cases} \quad (10.36)$$

Die Sektoren sind dadurch bestimmt, daß der hinzutretende Landau-Pol $\tilde{\mu}_\Theta$ der zusätzlichen $U(1)(\Theta)$ entweder oberhalb oder unterhalb von $\tilde{\mu}_1$ liegt, wobei letzterer sowohl für das SM als auch das MSSM den mathematischen Gültigkeitsbereich der jeweiligen RGG im UV beschränkt.

In der IR-attraktiven Fixhyperebene

$$b_\Theta\alpha_\Theta = b_1\alpha_1 \quad (10.37)$$

schneiden sich diese beiden Sektoren in der Fixuntermannigfaltigkeit:

$$\frac{y_t}{\alpha_1} \Big|_{b_\Theta\alpha_\Theta=b_1\alpha_1} = \left(\frac{y_t}{\alpha_1} \right)^* \frac{\eta_1 + \eta_\Theta + 1}{\eta_1} F_D^{(2)} \left(\begin{matrix} 1; -\eta_1 - \eta_\Theta \\ \eta_2 + 1, \eta_3 + 1 \end{matrix} \middle| \frac{b_2\alpha_2}{b_1\alpha_1}, \frac{b_3\alpha_3}{b_1\alpha_1} \right)^{-1}. \quad (10.38)$$

Diese Fixuntermannigfaltigkeit ist wegen $\eta_\Theta \simeq -1$ nahezu identisch mit den Fixmannigfaltigkeiten im SM (10.4) bzw. MSSM (10.11), womit schon an dieser Stelle verständlich ist, warum die Auswertung im erweiterten Modell zu ähnlichen Ergebnissen führt.

Mit Hilfe des Ergebnisses (9.10) aus Abschnitt 9.1

$$1 \leq \frac{m_t^{G_{3211}}(\mu)}{m_t^{G_{321}}(\mu)} \leq \sqrt{\frac{-\eta_1 - \eta_\Theta - 1}{-\eta_1}} \quad (10.39)$$

folgen die in Abbildung 24 c) wiedergegebenen maximalen Korrekturen für die aus der Baumgraphenbeziehung (10.33) genäherte und über die Fixmannigfaltigkeit (10.36) vermittelte Top-Masse gegenüber dem SM bzw. MSSM.

Ausgewählte Mischungswinkel und die zugehörigen prozentualen Abweichungen sind in Tabelle 6 für die vier Modelle χ , N , ψ bzw. η und die jeweils maximal

und minimal möglichen Abweichungen wiedergegeben. Die exemplarisch notierten relativen Korrekturen dieser Näherung liegen in allen Modellen unterhalb von 10% und fallen z.B. im ψ - und η -Modell deutlich geringer aus ($\simeq 2\%$). Alle Werte geben den gesamten Skalenbereich im Gültigkeitsbereich dieser Modelle wieder. Aufgrund der IR-Attraktion des RGFes – einen hinreichend langen Evolutionsweg vorausgesetzt – wird der Einfluß im IR-Bereich geringer ausfallen.

Modell	Mischungswinkel Θ	nicht-SUSY	SUSY
χ	0	-1,15789 $\leq \mathbf{6,3\%}$	-1,15584 $\leq \mathbf{6,7\%}$
N	$\arctan \sqrt{15}$	-1,09524 $\leq \mathbf{3,9\%}$	-1,0896 $\leq \mathbf{3,0\%}$
ψ	$\pi/2$	-1,05325 $\leq \mathbf{2,2\%}$	-1,0663 $\leq \mathbf{2,0\%}$
η	$\pi - \arctan \sqrt{5/3}$	-1 $\mathbf{0\%}$	-1,05464 $\leq \mathbf{2,4\%}$
min.	2,00573		-1,05012 $\leq \mathbf{2,2\%}$
max.	0,453767	-1,23465 $\leq \mathbf{9,3\%}$	
max.	0,393999		-1,18471 $\leq \mathbf{7,6\%}$

Tabelle 6: Attraktivitätskoeffizienten für ausgewählte Mischungswinkel der Modelle mit der Eichgruppe G_{3211} . Die Prozentzahlen geben die mögliche Abweichung von der aus den Fixmannigfaltigkeiten näherungsweise gewonnenen Top-Masse im SM bzw. MSSM für den gesamten Skalenbereich an. Neben den speziellen Modellen in den ersten vier Zeilen sind die Mischungswinkel angegeben, die auf maximale bzw. minimale Prozentzahlen führen (vgl. Abbildung 24 c)).

In der nichtsupersymmetrischen Entsprechung des η -Modells verschwindet die Korrektur. Dies liegt darin begründet, daß die Eichkopplung α_Θ wegen $\chi_\Theta = 0$ (vgl. Anhang B) nicht in die RGG der Top-Yukawakopplung und somit nicht in die Fixmannigfaltigkeit eingeht. Dies entspricht dem Fall $\eta_\Theta = -1$ in (10.38).

Zur Auswertung der Fixmannigfaltigkeiten an der IR-Skala $\mu = m_t^{\text{exp.}} = 174,3$ GeV wird der unbekannte Wert für die Eichkopplungen α_Θ durch die Fixhyperebene des reinen Eichsektors (10.37) festgelegt, was der Fixmannigfaltigkeit (10.38) entspricht. Aufgrund der IR-Attraktivität dieser Flächen werden diese Fixbeziehungen im Infraroten nahezu verwirklicht sein. Die übrigen Anfangswerte für die

Eichkopplungen $\alpha_{3,2,1}(174 \text{ GeV})$ ergeben sich aus (10.1).

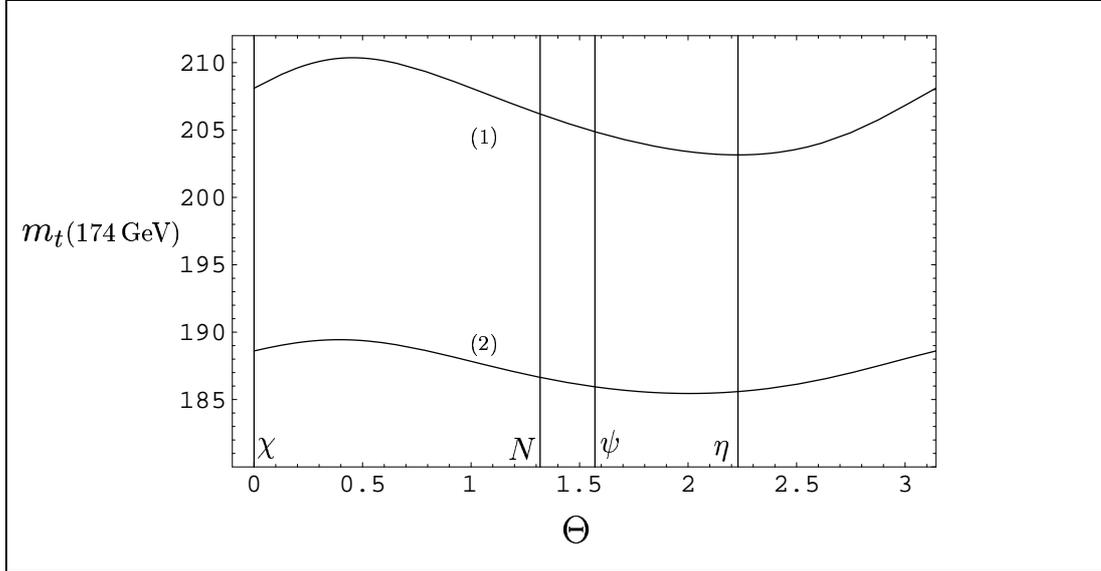


Abbildung 25: Es wird die aus den Fixmannigfaltigkeiten für die Top-Yukawa-Kopplung und die Eichkopplungen an der Skala $\mu = m_t^{\text{exp.}}$ näherungsweise gewonnene Top-Masse für das um eine $U(1)_\Theta$ erweiterte SM bzw. MSSM, aufgetragen über den Mischungswinkel Θ , dargestellt. Im supersymmetrischen Fall muß der $\tan \beta$ -Parameter berücksichtigt werden: $m_t \rightarrow m_t / \sin \beta$. Der Wert der hinzugekommenen Eichkopplung α_Θ wurde über die IR-attraktive Fixbeziehung $b_\Theta \alpha_\Theta = b_1 \alpha_1$ festgelegt. Dem SM entspricht die Linie (1) und dem MSSM (2).

Die genäherte Top-Masse gibt in allen Fällen an der betrachteten Skala die richtige Größenordnung wieder. Die Ergebnisse für die unterschiedlichen Mischungswinkel Θ sind in der Abbildung 25 beschrieben. Im supersymmetrischen Fall entsprechen die angegebenen Werte $m_t / \sin \beta$. In Abhängigkeit vom Mischungswinkel Θ schwanken die Werte insgesamt um 7 GeV im nichtsupersymmetrischen und um 5 GeV im supersymmetrischen Fall. Die Tabelle auf Seite 176 gibt die expliziten Zahlen für die vier speziellen Modelle und die maximalen bzw. minimalen Werte an.

Die Abweichungen liegen insgesamt unter 4% im Vergleich zur zuvor bestimmten oberen Grenze von 10%. In [126] sind die aus Randbedingungen im UV gewonnenen Werte diesem Ergebnis für die Auswertung der Fixpunkt-Masse sehr ähnlich: Die Unterschiede betragen dort maximal 5 GeV.

Die Auswertung der genäherten Top-Masse läßt somit von der Erweiterung des SMs bzw. MSSMs um eine zusätzliche Wechselwirkung mit abelscher Eichgruppe einen nur geringen Einfluß erwarten. Dabei geben die hier abgeschätzten absolu-

Modell	nicht-SUSY	SUSY
χ	208 GeV 2,5%	189 GeV 3,3%
N	206 GeV 1,5%	187 GeV 2,2%
ψ	205 GeV 1,0%	186 GeV 1,6%
η	203 GeV 0%	186 GeV 1,6%
$\Theta_{\min.}$	203 GeV 0%	185 GeV 1,1%
$\Theta_{\max.}$	210 GeV 3,5%	185 GeV 1,6%

ten Werte die richtige Größenordnung wieder.

10.5 Vergleich mit anderen Teilchenmodellen

In diesem Abschnitt werden in Form einer Aufzählung die Ergebnisse einiger weiterer Modelle wiedergegeben, und mit den zurückliegenden verglichen. Die einzelnen Theorien werden dabei kurz geschildert. Auch hier liegen die analytisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten aus Kapitel 7 und die vereinfachenden in der Einleitung dieses Kapitels (Seite 136) geschilderten Annahmen zugrunde.

- **Nichtsupersymmetrisches Zwischenskalen-Modell:**

In diesem Fall wird angenommen, daß zwischen MSSM und SM ein Skalenbereich existiert, in dem noch nicht alle zusätzlichen Higgsteilchen und deren Superpartner des MSSMs ausgefroren sind [124]. In dem Intervall zwischen $m_Z \leq \mu \leq m_{\text{SUSY}}$ könnte ein nichtsupersymmetrisches effektives Zwischenmodell mit der Eichgruppe G_{321} und dem fermionischen Teilchengehalt des Standardmodells mit zwei schwachen Higgsdoublets h und H und den Higgsinos \tilde{h} und \tilde{H} relevant sein. Die RGG sind denen im Anhang B für das SM mit zwei Higgsteilchen wiedergegeben sehr ähnlich. Die Unterschiede betreffen im wesentlichen den reinen Eichsektor. Die Eichkopplung der $U(1)_{Y'}$ ist genau wie im SM asymptotisch nichtfrei, während die RGG der Eichkopplung der starken Wechselwirkung unverändert bleibt, was insbesondere bedeutet, daß der IR-Bereich vom Fixpunkt $y_t/\alpha_3 = 2/9$ mit dem Attraktivitätskoeffizienten $1/7$ wie im reinen SM dominiert wird. Die

genäherte Top-Masse der Fixmannigfaltigkeit $(y_t, \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha_3)$ ergibt sich zu:

$$m_t(\mu = m_t^{\text{exp.}} \simeq 174 \text{ GeV}) = 205 \text{ GeV},$$

was den zuvor bestimmten Größenordnungen entspricht.

- **Standardmodell mit zwei schwachen Higgsdoublets**

Dieses Modell, dessen RGG in Anhang B wiedergegeben sind, entspricht dem nichtsupersymmetrischen Zwischenskalen-Modell mit zusätzlich ausgefrorenen Higgsinos. Ein Supersymmetrisieren dieses Modells führt direkt auf das MSSM (vgl. Abschnitt 2.4). Da der skalare Teilchengehalt nur geringfügig vom zuletzt diskutierten Modell abweicht, wird für die Top-Masse ein sehr ähnliches Ergebnis erwartet. Die Analyse der Fixmannigfaltigkeit ergibt für die Top-Masse: $m_t(\mu = m_t^{\text{exp.}} \simeq 174 \text{ GeV}) / \sin \beta = 207 \text{ GeV}$.

- **Supersymmetrisches Zwischenskalen-Modell:**

Dies ist eine weitere Möglichkeit für ein superstring-inspiriertes Modell, das in der *Große Einöde* oberhalb des MSSMs beheimatet sein könnte [127, 128]. Der Fermionengehalt ist in diesem Modell nicht minimal. Die Eichgruppe ist wiederum die des SMs bzw. MSSMs G_{321} , wobei die Besonderheit auftritt, daß die starke Wechselwirkung in Ein-Schleifen-Näherung kein Gleiten zeigt: $b_3 = 0$. Damit geht die in den Fixmannigfaltigkeiten auftretende Lauricella-Funktion in eine konfluente Form über (vgl. Abschnitt 7.2.1 und Anhang F). Die Koeffizienten b_i der RGG der Eichkopplungen und a bzw. χ_i der Top-Yukawakopplung lauten für drei Generationen:

$$b_1 = -18, \quad b_2 = -6, \quad b_3 = 0; \quad a = 12, \quad \chi_1 = \frac{26}{15}, \quad \chi_2 = 6, \quad \chi_3 = \frac{32}{3}.$$

Das Modell führt auf den folgenden genäherten Wert für die Top-Masse an der Skala $\mu = m_t^{\text{exp.}}$:

$$m_t(m_t^{\text{exp.}}) = 219 \text{ GeV} \sin \beta.$$

Durch die nichtgleitende Eichkopplung der starken Wechselwirkung existiert im IR in der Ein-Schleifen-Ordnung kein Landau-Pol, und die Impulsskala ist von Seiten der RGG nicht begrenzt. Im Grenzfall $\mu \rightarrow 0$ ergibt sich:

$$y_t \rightarrow \frac{\chi_3}{a} \alpha_3 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad m_t(m_t^{\text{exp.}}) = 192 \text{ GeV} \sin \beta.$$

Diese Skala liegt zwar außerhalb des perturbativ erlaubten Bereichs, gibt aber eine Vorstellung von der Größe der Attraktion im IR.

Statt der Erweiterung der Eichgruppe, wird in diesen Modellen der Teilchengehalt für eine unveränderte $G = G_{321}$ modifiziert.

11 Zusammenfassung

Bei der Beschreibung eines Elementarteilchenmodells gehen als freie Parameter z.B. die Massen der Teilchen und die Eichkopplungen, die die Stärke der Wechselwirkungen wiedergeben, ein. Durch die Quantisierung und Renormierung bedingt, handelt es sich dabei um mit der Impulsskala μ *gleitende* Kopplungen. Dieses Eigenschaft wird von den sogenannten *Renormierungsgruppengleichungen* (RGG) zusammengefaßt, deren Anfangswerte von Seiten der Theorie völlig unbestimmt sind.

Die Gesamtheit aller möglicher Lösungen der RGG in Gestalt des *Renormierungsgruppenflusses* (RGFes) gibt für viele dieser Parameter ein Entkoppeln der Verhältnisse im Infraroten (IR) $\mu_{\text{IR}} \simeq \mathcal{O}(100 \text{ GeV})$ von den Startwerte im Ultraviolett (UV) $\mu_{\text{UV}} \simeq \mathcal{O}(10^{15} \text{ GeV})$ wieder: Ein großer Bereich von Startwerten im UV verzüngt sich im IR auf einen kleinen Teil des Parameterraums, womit die IR-Physik in diesen Fällen relativ wenig sensitiv auf die Anfangsbedingungen im UV ist.

Vermittelt wird diese Attraktion des RGFes vom UV- zum IR-Bereich der Impulsskala von speziellen Lösungen der RGG. Diese *IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten* beschreiben unabhängig von den Anfangswerten feste Beziehungen, die die freien Parameter im IR-Bereich untereinander – einen hinreichend langen Evolutionsweg vorausgesetzt – angenähert eingehen oder unter Umständen exakt erfüllen. Der RGF fließt in diesem Bild vom UV zum IR zunächst auf die höchstdimensionale und IR-attraktivste Fixmannigfaltigkeit und dann mit abnehmender Dimension auf die Fixflächen, -linien und -punkte zu.

Da neben dem Standardmodell (SM) oder Minimal Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) Erweiterungen dieser speziellen Theorien in bestimmten Bereichen der Impulsskala möglich sein könnten, ergab sich als zentrale Motivation dieser Arbeit eine Untersuchung der Fixmannigfaltigkeiten für Modelle mit beliebiger Eichgruppe und einem Materiegehalt in allgemeinen gruppentheoretischen Darstellungen. Dies beinhaltet insbesondere, daß solche Theorien auch von supersymmetrischer Natur sein könnten und daß die Anzahl der Wechselwirkungen sowie der Teilchengehalt sich erhöht.

Als zweites wichtiges Ziel sollten die Eigenschaften der von den Fixmannigfaltigkeiten vermittelten Beziehungen zwischen den freien Parametern eines solchen allgemeinen Modells untersucht und auf spezielle Modelle übertragen werden.

Zur Bearbeitung dieser Fragestellung waren zunächst zwei Schritte notwendig:

1. Die Beschreibung einer mathematischen Methode, mit der es in diesem allgemeinen Fall gelingt, die IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten zu be-

schreiben.

Als Voraussetzung hierfür wurde gezeigt, daß die bestimmenden Elemente dieser Lösungen die Symmetrien des RGFes sind, womit die Aufgabenstellung vom nichtlinearen und gewöhnlichen Differentialgleichungssystem der RGG auf eine partielle und quasilineare Differentialgleichung reduziert werden konnte. Die Fixmannigfaltigkeiten sind damit die Teile des RGFes, die unter diesen Transformationen auf sich selbst abgebildet werden, was eine einfache geometrische Interpretation darstellt und im speziellen zeigt, daß auf den Fixlösungen die Symmetrie gegenüber dem allgemeinen Fall des RGFes erhöht ist, was als ein Anwachsen der Natürlichkeit des jeweiligen Modells interpretiert werden könnte.

2. Die analytische Bestimmung der Fixmannigfaltigkeiten für diesen allgemeinen Rahmen.

Vor diesem Hintergrund ist es erstmals gelungen, für einen solch allgemeinen Fall die exakte analytische Gestalt in interessanten Fällen des Eich-Yukawa-Sektors, der die Wechselwirkung der Fermionen und skalaren Felder einer Theorie auf der Ebene der Renormierung beschreibt, in Ein-Schleifen-Ordnung zu bestimmen, was bisher auch in spezielleren Fällen nicht möglich war, und diese Ergebnisse im supersymmetrischen Fall auf die entsprechenden Größen im weichbrechenden Sektor zu übertragen.

Die aus dem ersten Schritt folgende partielle Differentialgleichung konnte in den einzelnen betrachteten Sektoren des Kopplungsraums mit einem bisher nicht bekannten Spezialfall der Differentialgleichung von verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen identifiziert werden. Die teilweise bekannten Lösungen dieser Gleichung wurden um eine weitere und für die physikalischen Anwendungen entscheidende ergänzt.

Diese Lösungen berücksichtigen die Reihenfolge der Landau-Pole der Eichkopplungen eines Modells, die den mathematischen Gültigkeitsbereich in der Ein-Schleifen-Ordnung begrenzen. Obwohl der physikalisch auswertbare Skalenbereich deutlich geringer ist, konnten durch diese Tatsache die Parameter, die den entscheidenden Einfluß auf die Voraussagen nehmen, identifiziert werden.

Die bestimmten Lösungen des reinen Eich-Yukawa-Sektors konnten durch Verallgemeinerung von aus der Literatur bekannten differentiellen Beziehung direkt auf die trilinearen Kopplungen und den Higgs-Mischungsparameter des weichbrechenden Sektors eines supersymmetrischen Modells übertragen werden.

Alle Lösungen stellen die höchstdimensionale Fixmannigfaltigkeit im jeweils gelösten Sektor dar. Durch die ebenfalls bestimmten Untermannigfaltigkeiten ist damit die Fixstruktur bis zu den Fixgeraden bzw. Fixpunkten vollständig be-

kannt. Im IR-attraktiven Fall sind diese Lösungen mit geringerer Dimension geeignet, die Anzahl der Parameter weiter zu reduzieren, was bei den spezielleren Anwendungen ausgenutzt wurde.

Mit diesen allgemeinen Ergebnissen war es möglich, modellunabhängige Aussagen zu den von den Fixmannigfaltigkeiten induzierten physikalischen Eigenschaften zu treffen:

- Im supersymmetrischen Fall ergibt sich für einen eingeschränkten Teil des Eich-Yukawa-Sektors und den trilinearen Kopplungen des weichbrechenden Sektors aus der bestimmten IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeit die Proportionalität von trilinearen und Yukawakopplungen, vorausgesetzt die Massen der Gauginos M_i unifizieren an einer Skala $\mu = \Lambda$ und Top- und Bottom-Yukawakopplung stehen in der IR-attraktiven Fixbeziehung $h_t^2 = h_b^2$.

Insbesondere ist die Proportionalitätskonstante festgelegt und identisch mit der unifizierten Gaugino-Masse $m_{1/2}$:

$$\mu = \Lambda : M_{1,2,3}(\Lambda) = m_{1/2}, \quad h_t^2(\Lambda) = h_b^2(\Lambda) \Rightarrow A_{t,b}(\Lambda) = -m_{1/2}h_{t,b}(\Lambda).$$

Dies deckt sich in diesem eingeschränkten Sektor mit einer in der Literatur häufig getroffenen Annahme, daß, neben einer Unifizierung der Gaugino-Massen $M_{1,2,3}$, die trilinearen Kopplungsmatrizen $A_{t,b,\tau}$ des weichbrechenden Sektors an einer Impulsskala $\mu = \Lambda$ mit den Yukawakopplungen $h_{t,b,\tau}$ eine Proportionalitätsbeziehung eingehen:

$$\mu = \Lambda : M_{1,2,3}(\Lambda) = m_{1/2}, \quad A_{t,b,\tau}(\Lambda) = a_{t,b,\tau}h_{t,b,\tau}(\Lambda).$$

Dieses Ergebnis ist unabhängig davon, ob es sich bei der Impulsskala Λ um die der großen Unifizierung M_{GUT} im Rahmen einer GUT handelt. Da ohne Berücksichtigung der Yukawakopplung des Tau-Neutrinos die Beziehung $h_t^2 = h_b^2$ eine Fixuntermannigfaltigkeit im gesamten Parameterraum darstellt, bleibt in diesem Fall $h_t^2 = h_b^2$ und $A_t = A_b$ an allen Skalen erhalten.

- Ein weiteres zentrales Ergebnis mit allgemeinem Charakter betrifft den Grad der IR-Attraktivität eines Fixpunktes im Eich-Yukawa-Sektor im Vergleich eines allgemeinen Modells mit seiner supersymmetrischen Erweiterung. Es konnte gezeigt werden, daß – mit Ausnahme einiger phänomenologisch unattraktiver Modelle – die IR-Attraktivität einer supersymmetrischen Theorie im Vergleich größer ist.

Handelt es sich hierbei um den attraktivsten Fixpunkt, der in einer Fixmannigfaltigkeit eingebettet ist, so bestimmt dies die Attraktion im gesamten IR-Bereich des jeweiligen Modells.

Die physikalische Bedeutung besteht darin, daß aufgrund der größeren Attraktivität im IR in diesem Sektor, auch allen Angaben, die mit Hilfe der

Fixmannigfaltigkeiten im supersymmetrischen Fall getroffen werden, eine größere Aussagekraft im Vergleich zum jeweiligen nichtsupersymmetrischen Modell zukommt: Der gesamte RGF wird für eine supersymmetrische Theorie für kleine Impulsskalen im Gültigkeitsbereich des jeweiligen Modells stärker gebündelt.

- Weiterhin konnte für eine Klasse von Modellen mit Eichgruppe G gezeigt werden, daß sowohl im supersymmetrischen als auch nichtsupersymmetrischen Fall die Erweiterung dieser Theorie um Wechselwirkungen mit abelscher Eichgruppe $G \rightarrow G \otimes U(1)^n$ einen nur geringen Einfluß auf die Yukawakopplungen hat und daß dies ebenso für die aus Fixmannigfaltigkeiten näherungsweise gewonnenen Fermionenmassen $m_G(\mu)$ gilt.

Die Korrekturen erfolgen immer zu größeren Werten und sind insbesondere nach oben für den gesamten Skalenbereich beschränkt:

$$1 \leq \frac{m_{G \otimes U(1)^n}}{m_G} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{\eta_G} \sum_{U(1)^n} (\eta_i + 1)} . \quad (11.1)$$

Die eingehenden Attraktivitätskoeffizienten η_i bzw. η_G , die sich auf die zusätzlichen $U(1)$ -Gruppen bzw. auf den abelschen Anteil der ursprünglichen Eichgruppe mit der kleinsten Landau-Pol-Stelle im UV-Bereich beziehen, sind allein durch die Ladungen der Teilchen bestimmt und in physikalischen Anwendungen nur wenig geringer als -1 , womit sich insgesamt Abweichungen von ungefähr 10% ergeben.

- Durch die exakt bestimmte Fixmannigfaltigkeit einer Yukawa- und einer Anzahl von Eichkopplungen konnte der Wertebereich dieser Yukawakopplung begrenzt werden. Als einschränkende Parameter gehen die Attraktivitätskoeffizienten aller asymptotisch nichtfreien Eichkopplungen ein.

Am Beispiel der links-rechts-symmetrischen Modelle konnte mit diesem Ergebnis gezeigt werden, daß die näherungsweise bestimmte Masse des Top-Quarks in Theorien, die die Eichgruppe des SMs bzw. MSSMs um einen nichtabelschen Anteil erweitern, von derselben Größenordnung wie im Ausgangsmodell sind. Der beschriebene und vom skalaren Teilchengehalt unabhängige Wertebereich für die Masse des Top-Quarks erklärt, warum bei der späteren Untersuchung dieser Modelle unter Variation der Anzahl der skalaren Felder die Ergebnisse in ein relativ kleine Intervall fallen.

Da gerade für Modelle mit zusätzlichen Wechselwirkungen die Werte der hinzutretenden Eichkopplungen nicht bekannt ist, stellen die letzten beiden Ergebnisse eine wichtige erste Möglichkeit zur Abschätzung der zu erwartenden Effekte dar.

Die in den eingeschränkten Sektoren des Kopplungsraums bestimmten allgemeinen Fixmannigfaltigkeiten wurden im Anschluß an diese grundsätzlichen Betrachtungen für das SM, MSSM und für Modelle, die häufig diskutierte Erweiterungen darstellen, diskutiert.

- In einem ersten Schritt wurden die am besten untersuchten Modelle in Form des SMs und MSSMs betrachtet und die für diese Modelle in der Zwei-Schleifen-Ordnung vorliegenden numerisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten [21, 23, 24] – so weit möglich – durch die analytisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten der Ein-Schleifen-Ordnung ergänzt.

Für das MSSM wurde die Fixmannigfaltigkeit des weichbrechenden Sektors für die trilinearen Kopplungen $A_{t,b} \neq 0$ und den Higgs-Mischungsparameter $B \neq 0$ im Falle von $h_{t,b} \neq 0$ bzw. $g_{2,3} \neq 0$ angegeben und graphisch dargestellt. Insbesondere $g_1 = 0$ ist eine Näherung, da jedoch auch keine numerisch bestimmten höherdimensionalen Fixmannigfaltigkeiten in diesem Sektor bekannt sind, kann mit diesem Ergebnis eine gute Vorstellung von den auf den Fixmannigfaltigkeiten verwirklichten Parameterbeziehungen wiedergegeben werden.

- Die links-rechts-symmetrischen Modelle (LR-Modelle) sind die Theorien, für die mit den zuvor analytisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten der größte Parameterraum beschreiben werden.

Bei deren Untersuchung wurde der fermionische Materiegehalt minimal gewählt und die Auswirkungen des skalaren Teilchengehalts an links- bzw. rechtshändigen Triplets und Bidoublets auf die exakt bestimmten Fixmannigfaltigkeiten im zwölfdimensionalen Sektor

$$(h_{t,b}, g_{C,L,R,B-L}, A_{t,b}, M_{C,L,R,B-L})$$

und zusätzlich im supersymmetrischen Fall auf die genäherten Top- und Bottommassen – falls die LR-Modelle bis zur Skala $\mu \simeq (\mathcal{O}(1\text{TeV}))$ gelten sollten – bestimmt.

Im supersymmetrischen Fall können einige der unbekanntenen Werte der Eichkopplungen über IR-attraktive Fixbeziehungen festgelegt werden, was im nichtsupersymmetrischen Fall nicht möglich ist. Insbesondere die in der Literatur für die manifest links-rechts-symmetrischen Modelle häufig getroffene Annahme $g_R = g_L$ stellte sich vor diesem Hintergrund als IR-attraktive Fixbeziehung heraus. Im nichtsupersymmetrischen Fall ist sie dagegen IR-repulsiv.

Auch für $b_L g_L^2 = b_R g_R^2$ ist die Reihenfolge der Landau-Pole, die als bestimmendes Element in die Sektoren der Fixmannigfaltigkeiten eingehen, von g_{B-L}^2 und g_L^2 noch offen, so das beide Möglichkeiten, neben $b_L g_L^2 = b_R g_R^2 =$

$b_{B-L}g_{B-L}^2$, diskutiert wurden. Diese Fixlösungen sind zusätzlich links-rechts-symmetrisch ($L \leftrightarrow R$).

Die angegebenen Fixmannigfaltigkeiten des weichbrechenden Sektors bestätigen die zuvor getroffenen allgemeinen Aussagen. Für die Fixebene der Top- und Bottom-Yukawakopplung $h_t^2 = y_b^2$ wird unter der gleichzeitigen Unifizierung der Gaugino-Massen die obige Beziehung für die trilinearen Kopplungen wiedergegeben. Insbesondere nehmen in diesem Fall, aufgrund der symmetrischen Kopplung von Top- und Bottom-Quark in den RGG, die trilinearen Kopplungen ebenfalls identische Werte an: $A_t = A_b$. Für $h_b^2 < h_t^2$ entkoppeln die Kombinationen A_t/h_t und A_b/h_b nahezu.

Der Bestimmung der Massen bzw. des Mischungsparameters $\tan\beta$ liegen einige sehr vereinfachende Näherungen zugrunde: Neben der Verwendung der Ein-Schleifen-Ordnung und der Bestimmung der Fermionenmassen aus Baumgraphenbeziehungen wurde angenommen, daß das Gleiten unterhalb der Paritätsbrechungsskala gering ausfällt und die Massen mit den RGG der LR-Modelle bestimmt werden können.

Werden die Bottom-Masse und $\tan\beta$ als Eingangsparameter verwendet, so ist die durch die Fixmannigfaltigkeiten genäherte Top-Masse für Modelle, deren skalarer Teilchengehalt ebenfalls links-rechts-symmetrisch gewählt wird, von der Größenordnung $\simeq (170 - 220)$ GeV bei mit dem MSSM vergleichbaren $\tan\beta$ -Werten. Dagegen führten Modelle mit asymmetrischen skalaren Teilchengehalt zu deutlich schlechteren Ergebnissen und müssen z.B. im minimalen Fall mit ausschließlich zwei Bidoublets und zwei $SU(2)_R$ -Tripletts vor diesem Hintergrund ausgeschlossen werden ($\simeq 300$ 300).

Durch die analytisch bestimmten Fixmannigfaltigkeiten konnte der Einfluß der unterschiedlichen skalaren Teilchensorten auf diese Observablen unmittelbar untersucht werden, wobei sich insgesamt von Seiten der Fixstrukturen im Parameterraum eine deutliche Präferenz der Modelle mit manifest links-rechts-symmetrischen Teilchengehalt ergab.

Die Analyse der genäherten Top-Masse bzw. des $\tan\beta$ -Parameters in Abhängigkeit vom skalaren Teilchengehalt machte deutlich, daß sowohl die Wahl des Lösungssektors der Fixmannigfaltigkeit als auch die genaue Anzahl der jeweiligen Tripletts und der Bidoublets diese Observable stark beeinflusst. In den manifest links-rechts-symmetrischen Fällen stellt sich die IR-attraktive Fixbeziehung $h_t^2 = h_b^2$ bei dieser Übersetzung in die Fermionenmassen als angenähert verwirklicht heraus.

- Als zweite große Klasse von Modellen wurde die Erweiterung des SMs oder MSSMs um eine abelsche Wechselwirkung betrachtet, die zu der Klasse der superstring-inspirierten Theorien zählen, und analytisch zugängliche Fixmannigfaltigkeiten in Abhängigkeit von dem hier auftretenden Mischungswinkel Θ angeben.

Für die zusätzliche Wechselwirkung mit abelscher Eichgruppe wurde deren Eichkopplung g_Θ wiederum durch eine Fixbeziehung in Form von $b_\Theta g_\Theta^2 = b_1 g_1^2$ festgelegt.

Durch die Beziehung (11.1) konnte die zu erwartende Korrektur – unter denselben Annahmen wie bei den LR-Modellen – der aus den Fixmannigfaltigkeiten näherungsweise gewonnenen Top-Masse unabhängig vom speziellen Modell auf unter 10% begrenzt werden. Diese Werte werden durch die Evolution des RGFes weiter verringert, was zu maximalen Abweichungen von 3,8% im Vergleich zur Masse des Top-Quarks im SM bzw. MSSM führte.

Anhang

A Konventionen

A.1 Anmerkungen zu den Liegruppen

In werden einige Angaben zu den *Liegruppen* gemacht, wobei weniger auf eine Darstellung der Theorie, sondern mehr auf die Schilderung der verwendeten Konventionen und Begriffe Wert gelegt wird. Ausgezeichnete Darstellungen der Liethorie finden sich in [29, 129].

Fast alle Eigenschaften einer Liegruppe G lassen sich anhand ihrer *Liealgebra* \mathcal{G} feststellen. Eine N -dimensionale Liealgebra kann mit Hilfe ihrer *Generatoren* t^A , $A = 1, \dots, N$, die ihre Basis bilden, parametrisiert werden. Diese erfüllen die *Kommutatorbeziehung*:

$$[t^A, t^B] = i \sum_C f^{AB}_C t^C, \quad (\text{A.1})$$

wobei der Faktor i Konvention ist und die *Strukturkonstanten* f^{AB}_C eingeführt wurden. Das *Lieprodukt* $[\cdot, \cdot]$ ist durch die Liegruppe induziert und entspricht in der Regel dem gewöhnlichen Kommutator. Ein Element der Liealgebra ist durch $-i \sum_{A=1}^N \omega_A t^A$, mit reellen Parametern ω_A , gegeben. Zu jeder Liegruppe lassen sich eine oder mehrere *Exponentialabbildungen* konstruieren, die die Liealgebra in die Liegruppe abbilden, womit ein Element der Gruppe durch $\exp(-i \sum_{A=1}^N \omega_A t^A)$ gegeben ist.

Eine *Darstellung* R von \mathcal{G} (und damit von G) ist eine lineare Transformation von \mathcal{G} , die auf einen Vektorraum \mathcal{V} , den Darstellungsraum, wirkt und für die Generatoren $T_R^A := R(t^A)$ die Beziehung (A.1) erfüllen (in G muß die Gruppenverknüpfung respektiert werden). Die Darstellung ist *irreduzibel*, wenn kein Untervektorraum von \mathcal{V} existiert, der von R in sich selbst abgebildet wird, sonst wird die Darstellung *reduzibel* genannt. Die Gruppenkonjugation Ad mit $\text{Ad}(h)(g) = h^{-1}g h$ für $g, h \in G$ ist die *adjungierte Darstellung* der Gruppe, ihr entspricht ad mit $\text{ad}(a)(b) = [a, b]$ mit $a, b \in \mathcal{G}$ auf der Ebene der Algebra. Zwischen Ad und ad gilt die Beziehung: $\text{Ad} \exp = \exp \text{ad}$. Die kleinste endliche Darstellung wird *Fundamentaldarstellung* genannt.

Eine Unterliealgebra \mathcal{H} von \mathcal{G} ist ein unter dem Lieprodukt (A.1) abgeschlossener Untervektorraum von \mathcal{G} . Sie wird *invariant* genannt, wenn gilt: $[\mathcal{H}, \mathcal{G}] \subset \mathcal{H}$. Eine Liealgebra ist *einfach*, wenn sie keine invarianten Unterliealgebren enthält, und *halbeinfach*, wenn zumindest keine abelschen invarianten Unterliealgebren existieren. Halbeinfache Liealgebren (-gruppen) sind die direkten Summen (Produkte) von einfachen Liealgebren (-gruppen). Eine Liealgebra ist *kompakt*, wenn ihre *Cartan-Metrik*

$$g^{AB} = \text{Spur}(T^A T^B) = \sum_{C,D} f_D^{AC} f_C^{DB}, \quad T := \text{ad} \quad (\text{A.2})$$

positiv definit ist, was dann in jeder Darstellung erfüllt ist und umgekehrt. Hierbei wurde $(T^A)_{BC} = -i f^{AC}_B$ ausgenutzt. Für eine irreduzible Darstellung gilt:

$$\text{Spur} (T^A_R T^B_R) = s_R \delta_{AB}; \quad (\text{A.3})$$

s_R ist der *Dynkin-Index* der Darstellung R . Der Dynkin-Index der Fundamentaldarstellung wird üblicherweise zu $1/2$ normiert.

Kompakte Liegruppen sind das Produkt einer kompakten halbeinfachen und einer abelschen Liegruppe, insbesondere sind die Strukturkonstanten vollständig antisymmetrisch und alle endlich dimensionalen Darstellungen unitär.

Eine Größe C_R , die mit allen Elementen der Liealgebra in einer bestimmten Darstellung vertauscht $[C_R, R(\mathcal{G})] = 0$, wird *Casimir-Invariante* genannt. Ein Beispiel sind die quadratischen Casimir-Invarianten

$$C_R = \sum_A T^A_R T^A_R, \quad (\text{A.4})$$

die für eine irreduzible Darstellung ein Vielfaches der Einheit sind:

$$(C_R)_{ij} = c_R \delta_{ij}. \quad (\text{A.5})$$

Damit folgt unmittelbar $N s_R = N_R c_R$, wobei N_R die Dimension der jeweiligen Darstellung ist.

A.2 Spinorkonventionen

Die Konventionen bezüglich der Spinordarstellung der Lorentzgruppe werden beschrieben. Diese Darstellung beruht auf der Isomorphie zwischen $SO(3, 1)$ und $SL(2)$ im Verhältnis $1 : 2$. Es existieren somit zwei Darstellungsräume, deren *Weylspinoren* zweikomponentige, antivertauschende Vektoren sind: ψ_α bzw. $\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}$ [43]. Komplexe Konjugation entspricht dem Wechsel zwischen diesen Darstellungen.

Um das Skalarprodukt der $SL(2)$ kompakt schreiben zu können, werden kovariante Spinoren eingeführt:

$$\psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \bar{\psi}_{\dot{\beta}}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta} := \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Das Skalarprodukt ist symmetrisch:

$$\begin{aligned} \psi\chi &:= \psi^\alpha \chi_\alpha = -\chi_\alpha \psi^\alpha = \chi^\alpha \psi_\alpha = \chi\psi, \\ \bar{\psi}\bar{\chi} &:= \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi}, \end{aligned}$$

und zeigt das folgende einfache Verhalten unter hermitescher Konjugation:

$$(\psi\chi)^\dagger = (\psi^\alpha\chi_\alpha)^\dagger = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}\bar{\psi} = \bar{\psi}\bar{\chi}.$$

Die Verbindung zu den Lorentzvektoren wird mit $\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu$ möglich:

$$v_{\alpha\dot{\alpha}} = \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu v_\mu, \quad v_\mu = -\frac{1}{2}\bar{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\alpha} v_{\alpha\dot{\alpha}},$$

wobei es sich um die Paulimatrizen σ^i , $i = 1, 2, 3$ bzw. um die negative Einheitsmatrix σ^0 handelt und

$$\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} := \varepsilon^{\dot{\alpha}\beta}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\beta}}^\mu.$$

eingeführt wurde. Die vierkomponentigen *Dirac-* bzw. *Majoranaspinoren* und die γ -Matrizen lassen sich aus den Weylfermionen und den σ -Matrizen konstruieren:

$$\Psi_D = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \Psi_M = \begin{pmatrix} \chi_\alpha \\ \bar{\chi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

Nützliche Beziehungen, insbesondere bei der Herleitung der Komponentenfeldzerlegung der supersymmetrischen Lagrangedichte, sind unter Verwendung der Metrik $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(-1, 1, 1, 1)$:

$$\begin{aligned} \text{Spur } \sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu &= -2g^{\mu\nu}, \\ \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu\sigma_{\mu\dot{\beta}}^{\beta\dot{\beta}} &= -2\delta_\alpha^\beta\delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \\ \Theta^\alpha\Theta^\beta &= -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta}\Theta^2, \\ \bar{\Theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\Theta}_{\dot{\beta}} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\Theta}^2, \\ (\Theta\sigma^\mu\bar{\Theta})(\Theta\sigma^\nu\bar{\Theta}) &= -\frac{1}{2}\Theta^2\bar{\Theta}^2g^{\mu\nu}, \\ (\Theta\psi)(\Theta\chi) &= -\frac{1}{2}\Theta^2(\psi\chi), \\ (\bar{\Theta}\bar{\psi})(\bar{\Theta}\bar{\chi}) &= -\frac{1}{2}\bar{\Theta}^2(\bar{\psi}\bar{\chi}), \\ \chi\sigma^\mu\bar{\psi} &= -\bar{\psi}\bar{\sigma}^\mu\chi, \\ (\chi\sigma^\mu\bar{\psi})^\dagger &= \psi\sigma^\mu\bar{\chi}, \\ \int d^2\Theta\Theta^2 &= 1, \\ \int d^2\bar{\Theta}\bar{\Theta}^2 &= 1. \end{aligned} \tag{A.7}$$

B Renormierungsgruppengleichungen

Bestimmung von RGG: SM und MSSM

Um die Anwendung der allgemeinen RGG zu demonstrieren, werden hier das SM und das MSSM diskutiert. Die RGG der folgenden Modelle sind nach diesem Schema abgeleitet worden. Ausgangspunkt ist der Teilchengehalt der Tabelle 2 (Seite 40), dem im MSSM Superfelder entsprechen und der Higgs-Sektor um ein zusätzliches Dublett ergänzt wird.

Eichkopplungen

Für die Anteile der RGG (3.15), die von den Eichbosonen stammen, gilt für die adjungierte Darstellung einer $SU(n)$: $c = n$. Der fermionische Anteil für die $SU(3)_C$ lautet

$$s_F^{(3)} \rightarrow n_G \cdot 2 \cdot (1[3] + 1[\bar{3}]) \cdot \frac{1}{2} = 2n_G,$$

da pro Generation zwei Quarks existieren²⁷, die jeweils in den Fundamentaldarstellungen als Triplet und Antitriplett auftreten ($s_F = 1/2$). Entsprechend folgt für die $SU(2)_L$ mit n_G Generationen, jeweils mit zwei fundamentalen Dubletts, davon eins in den drei Farben der $SU(3)_C$:

$$s_F^{(2)} \rightarrow n_G \cdot (1[2] + 3[3] \cdot 1[2]) \cdot \frac{1}{2} = 2n_G.$$

Für die $U(1)_Y$ ergibt die Summe über die fermionischen Hyperladungen:

$$\begin{aligned} \sum_F Y^2 &= n_G \cdot \left[2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 [L] + 1^2 [e] \right. \\ &\quad \left. + 3[3] \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 [Q] + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 [u] + \left(\frac{1}{3}\right)^2 [d] \right) \right] = \frac{10}{3} n_G, \end{aligned}$$

und damit die GUT Normierung:

$$\kappa_{\text{GUT}} = \frac{s_F}{\sum_F Y^2} = \frac{2n_G}{10/3 n_G} = \frac{3}{5}.$$

Der skalare Anteil verschwindet für die starke Wechselwirkung $s_S^{(3)} = 0$, da hier nur Singulets vorhanden sind; dagegen ergibt sich für die $SU(2)_L$:

$$s_S^{(2)} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

²⁷Die Leptonen tragen hier nicht bei, da sie bezüglich der $SU(3)_C$ ein Singulett bilden.

Der Faktor zwei rührt im SM von einem Dublett, das in zwei reellen Darstellungen vorliegt [67], und im MSSM von zwei Dubletts in komplexer Darstellung [81]. Für die Summe über die skalaren Hyperladungen folgt ähnlich wie im fermionischen Fall:

$$\sum_S Y^2 \Big|_{\text{SM}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad \sum_S Y^2 \Big|_{\text{MSSM}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1,$$

wobei zuletzt das zweite Dublett eingeht. Einsetzen in (3.16) und (3.17) ergibt die folgenden Koeffizienten der RGG für die Eichkopplungen (3.15):

Modell	Eichgruppe	RGG Koeffizient	für drei Generationen
SM	$U(1)_Y$	$b_1 = -\frac{8}{3}n_G - \frac{1}{5}$	$b_1 = -\frac{41}{5}$
	$SU(2)_L$	$b_2 = -\frac{8}{3}n_G + \frac{43}{3}$	$b_2 = \frac{19}{3}$
	$SU(3)_C$	$b_3 = -\frac{8}{3}n_G + 22$	$b_3 = 14$
MSSM	$U(1)_Y$	$b_1 = -4n_G - \frac{6}{5}$	$b_1 = -\frac{66}{5}$
	$SU(2)_L$	$b_2 = -4n_G + 10$	$b_2 = -2$
	$SU(3)_C$	$b_3 = -4n_G + 18$	$b_3 = 6$

Yukawakopplungen

Der Lagrangedichtenanteil der Yukawakopplungen im SM lautet

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{SM}} = -H^\dagger L E \bar{e} - H^T \epsilon Q U \bar{u} - H^\dagger Q D \bar{d} + h.c. \quad (\text{B.1})$$

und für den entsprechenden Sektor im MSSM:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{MSSM}} = -H_d^\dagger L E \bar{e} - H_u^T Q U \bar{u} - H_d^\dagger Q D \bar{d} + h.c.. \quad (\text{B.2})$$

In beiden Modellen gilt:

$$\begin{aligned} -3 \sum_a g_a^2 \{c_F^{(a)}, E\} &= -3 \left(\kappa_{\text{GUT}} \left(1 + \frac{1}{4}\right) g_1^2 + \left(0 + \frac{3}{4}\right) g_2^2 \right) E, \\ &= - \left(\frac{9}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 \right) E \\ -3 \sum_a g_a^2 \{c_F^{(a)}, U\} &= -3 \left(\kappa_{\text{GUT}} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{36}\right) g_1^2 + \frac{3}{4} g_2^2 + \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) g_3^2 \right) U \\ &= - \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8 g_3^2 \right) U, \\ -3 \sum_a g_a^2 \{c_F^{(a)}, D\} &= -3 \left(\kappa_{\text{GUT}} \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{36}\right) g_1^2 + \frac{3}{4} g_2^2 + \frac{8}{3} g_3^2 \right) D \\ &= - \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8 g_3^2 \right) U. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (3.20) folgen für das SM die RGG:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{dE}{d\mu} &= \frac{3}{2} E E^\dagger E + E \text{ Spur} (E^\dagger E + 3U^\dagger U + 3D^\dagger D) - \left(\frac{9}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 \right) E, \\
\mu \frac{dU}{d\mu} &= \frac{3}{2} U (U^\dagger U - D^\dagger D) + U \text{ Spur} (E^\dagger E + 3U^\dagger U + 3D^\dagger D) \\
&\quad - \left(\frac{17}{20} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right) U, \\
\mu \frac{dD}{d\mu} &= \frac{3}{2} D (D^\dagger D - U^\dagger U) + D \text{ Spur} (E^\dagger E + 3U^\dagger U + 3D^\dagger D) \\
&\quad - \left(\frac{1}{4} g_1^2 + \frac{9}{4} g_2^2 + 8g_3^2 \right) D.
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Der Faktor drei in der Spur entsteht durch die drei Farbladungen. Das relative Minuszeichen der U - und D -Terme wird durch das Skalarprodukt der $SU(2)$, vermittelt durch den vollständig antisymmetrischen Tensor ϵ in der Yukawa-Lagrangedichte (B.1), erzeugt.

Für das MSSM folgt ähnlich mit dem zusätzlichen Anteil

$$-2 \sum_a g_a^2 \sum_j (c_S^{(a)})^{ij} Y^j = -2 \left(\kappa_{\text{GUT}} \cdot \frac{1}{4} g_1^2 + \frac{3}{4} g_2^2 \right) Y^i = - \left(\frac{3}{10} g_1^2 + \frac{3}{2} g_2^2 \right) Y^i$$

für die RGG der Yukawakopplungen:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{dE}{d\mu} &= 3E E^\dagger E + E \text{ Spur} (E^\dagger E + 3D^\dagger D) - \left(\frac{9}{5} g_1^2 + 3g_2^2 \right) E, \\
\mu \frac{dU}{d\mu} &= U (3U^\dagger U + D^\dagger D) + U \text{ Spur} (3U^\dagger U) - \left(\frac{13}{15} g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3} g_3^2 \right) U, \\
\mu \frac{dD}{d\mu} &= D (3D^\dagger D + U^\dagger U) + D \text{ Spur} (E^\dagger E + 3D^\dagger D) \\
&\quad - \left(\frac{7}{15} g_1^2 + 3g_2^2 + \frac{16}{3} g_3^2 \right) D.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Standardmodell

Die Ein-Schleifen-RGG (B.3) des Eich-Yukawa-Sektors reduzieren sich für die schwerste Generation mit $\alpha_i := g_i^2/4\pi$, $y_j := g_j^2/4\pi$, $j = t, b, \tau$ und $t = \frac{1}{4\pi} \ln(\mu/\mu_0)$ auf:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_a}{dt} &= -b_a \alpha_a^2; \quad b_1 = -\frac{41}{5}, \quad b_2 = \frac{19}{3}, \quad b_3 = 14; \\
\frac{dy_t}{dt} &= y_t \left(9y_t + 3y_b + 2y_\tau - \frac{17}{10}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 - 16\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_b}{dt} &= y_b \left(3y_t + 9y_b + 2y_\tau - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 - 16\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_\tau}{dt} &= y_\tau \left(6y_t + 6y_b + 5y_\tau - \frac{9}{2}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 \right). \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Minimal Supersymmetrisches Standardmodell

Die dem SM (B.5) entsprechenden RGG ergeben sich mit $y_k := h_k^2/4\pi$ zu:

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_a}{dt} &= -b_a \alpha_a^2, \quad b_1 = -\frac{66}{5}, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = 6; \\
\frac{dy_t}{dt} &= y_t \left(12y_t + 2y_b - \frac{26}{15}\alpha_1 - 6\alpha_2 - \frac{32}{3}\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_b}{dt} &= y_b \left(2y_t + 12y_b + 2y_\tau - \frac{14}{15}\alpha_1 - 6\alpha_2 - \frac{32}{3}\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_\tau}{dt} &= y_\tau \left(6y_b + 8y_\tau - \frac{18}{5}\alpha_1 - 6\alpha_2 \right). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

Standardmodell mit zwei Higgsdoublets

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha_a}{dt} &= -b_a \alpha_a^2; \quad b_1 = -\frac{42}{5}, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 14, \\
\frac{dy_t}{dt} &= y_t \left(9y_t + y_b - \frac{17}{10}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 - 16\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_b}{dt} &= y_b \left(y_t + 9y_b + 2y_\tau - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 - 16\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_\tau}{dt} &= y_\tau \left(6y_b + 5y_\tau - \frac{9}{2}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 \right). \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Links-rechts-symmetrische Modelle

Die Koeffizienten der RGG der Eichkopplungen $d\alpha_i/dt = -b_i\alpha_i^2$, $i = C, L, R, B-L$ mit n_B Bidoublets, n_L linkshändigen und n_R rechtshändigen Triplets für n_G Generationen sind im nichtsupersymmetrischen Fall:

$$\begin{aligned}
 b_C &= -\frac{8}{3}n_G + 22, \\
 b_L &= -\frac{8}{3}n_G + \frac{44}{3} - \frac{1}{3}(2n_L + n_B), \\
 b_R &= -\frac{8}{3}n_G + \frac{44}{3} - \frac{1}{3}(2n_R + n_B), \\
 b_{B-L} &= -\frac{8}{3}n_G - 3(n_L + n_R);
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

bzw. für ein supersymmetrisches Modell:

$$\begin{aligned}
 b_C^{\text{SUSY}} &= -4n_G + 18, \\
 b_L^{\text{SUSY}} &= -4n_G + 12 - 4n_L - 2n_B, \\
 b_R^{\text{SUSY}} &= -4n_G + 12 - 4n_R - 2n_B, \\
 b_{B-L}^{\text{SUSY}} &= -4n_G - 9(n_L + n_R).
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Die Werte dieser Koeffizienten für einige Modelle in drei Generationen werden in Tabelle 7 wiedergegeben.

n_B	n_L	n_R	b_C	b_L	b_R	b_{B-L}	b_C^{SUSY}	b_L^{SUSY}	b_R^{SUSY}	b_{B-L}^{SUSY}
1	1	1	14	17/3	17/3	-14	6	-6	-6	-30
1	0	2	14	19/3	5	-14	6	-2	-10	-30
1	2	2	14	5	5	-20	6	-10	-10	-48
2	1	1	14	16/3	16/3	-14	6	-8	-8	-30
2	0	2	14	6	14/3	-14	6	-4	-12	-30
2	2	2	14	14/3	14/3	-20	6	-12	-12	-48

Tabelle 7: Koeffizienten der Eich-RGG einiger LR-Modelle und ihrer supersymmetrischen Varianten.

Die RGG der Quark- und Leptonen-Yukawakopplungen für die schwerste Generation im Sektor der Bidoublets sind mit $y_{Qi} := g_{Qi}^2/4\pi$, $y_{Li} := g_{Li}^2/4\pi$, $i = 1, \dots, n_B$

bzw. $g \rightarrow h$ im supersymmetrischen Fall:

$$\begin{aligned}
\frac{dy_{Qi}}{dt} &= y_{Qi} \left(4a_1 \sum_{j=1}^{n_B} y_{Qj} + 2y_{Li} + 6y_{Qi} \right. \\
&\quad \left. - 16a_2\alpha_C + \left(\frac{9}{2}a_2 + 3e_2 \right) (\alpha_L + \alpha_R) + \frac{a_2}{2}\alpha_{B-L} \right), \\
\frac{dy_{Li}}{dt} &= y_{Qi} \left(4a_1 \sum_{j=1}^{n_B} y_{Lj} + 2y_{Li} + 6y_{Qi} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{9}{2}a_2 + 3e_2 \right) (\alpha_L + \alpha_R) + \frac{9}{2}a_2\alpha_{B-L} \right) \quad (B.10)
\end{aligned}$$

mit den Koeffizienten aus Tabelle 1. Die RGG für die hier beinhalteten supersymmetrischen Modelle und den weichbrechenden Sektor wurden in [97] hergeleitet.

Modelle mit zusätzlichen abelschen Wechselwirkungen

Die $U(1)_{\psi,\chi}$ bzw. $U(1)(\Theta)$ modifizieren die Renormierungsgruppengleichungen des SMs bzw. MSSMs. Im nichtsupersymmetrischen Fall gilt:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{41}{5}, \quad b_2 = \frac{19}{3}, \quad b_3 = 14; \quad b_\psi = -8 - 16\kappa_\psi, \quad b_\chi = -8 - \frac{16}{3}\kappa_\chi; \\
b(\Theta) &= -8 - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{4}{5} \sin^2 \Theta + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin(2\Theta) \right) \kappa_\Theta; \\
\frac{dy_t}{dt} &= y_t \left(9y_t + 3y_b + 2y_\tau - 12\kappa_\psi\alpha_\psi - 12\kappa_\chi\alpha_\chi - \frac{17}{10}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 - 16\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_b}{dt} &= y_b \left(3y_t + 9y_b + 2y_\tau - 12\kappa_\psi\alpha_\psi - 60\kappa_\chi\alpha_\chi - \frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 - 16\alpha_3 \right), \\
\frac{dy_\tau}{dt} &= y_\tau \left(6y_t + 6y_b + 5y_\tau - 12\kappa_\psi\alpha_\psi - 60\kappa_\chi\alpha_\chi - \frac{9}{2}\alpha_1 - \frac{9}{2}\alpha_2 \right); \quad (B.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots - 12\kappa_\psi\alpha_\psi - 12\kappa_\chi\alpha_\chi \dots &\rightarrow - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \sin^2 \Theta + \frac{3}{2\sqrt{15}} \sin(2\Theta) \right) \kappa_\Theta \alpha(\Theta), \\
\dots - 12\kappa_\psi\alpha_\psi - 60\kappa_\chi\alpha_\chi \dots &\rightarrow - \left(\frac{1}{2} + \sin^2 \Theta - \frac{3}{2\sqrt{15}} \sin(2\Theta) \right) \kappa_\Theta \alpha(\Theta).
\end{aligned}$$

bzw. im supersymmetrischen Fall:

$$b_1 = -\frac{66}{5}, \quad b_2 = -2, \quad b_3 = 6; \quad b_\psi = -12 - 64\kappa_\psi, \quad b_\chi = -12 - 32\kappa_\chi;$$

$$\begin{aligned}
b(\Theta) &= -12 - \frac{4}{3} \left(2 - \frac{7}{5} \sin^2 \Theta \right) \kappa_\Theta; \\
\frac{dy_t}{dt} &= y_t \left(12y_t + 2y_b - 24\kappa_\psi \alpha_\psi - 24\kappa_\chi \alpha_\chi - \frac{26}{15} \alpha_1 - 6\alpha_2 - \frac{32}{3} \alpha_3 \right), \\
\frac{dy_b}{dt} &= y_b \left(2y_t + 12y_b + 2y_\tau - 24\kappa_\psi \alpha_\psi - 24\kappa_\chi \alpha_\chi - \frac{14}{15} \alpha_1 - 6\alpha_2 - \frac{32}{3} \alpha_3 \right), \\
\frac{dy_\tau}{dt} &= y_\tau \left(6y_b + 8y_\tau - 24\kappa_\psi \alpha_\psi - 56\kappa_\chi \alpha_\chi - \frac{18}{5} \alpha_1 - 6\alpha_2 \right); \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dots - 24\kappa_\psi \alpha_\psi - 24\kappa_\chi \alpha_\chi \dots &\rightarrow - \left(1 - \frac{2}{5} \sin^2 \Theta + \frac{4}{\sqrt{15}} \sin(2\Theta) \right) \kappa_\Theta \alpha(\Theta), \\
\dots - 24\kappa_\psi \alpha_\psi - 56\kappa_\chi \alpha_\chi \dots &\rightarrow - \left(1 + \frac{2}{5} \sin^2 \Theta - \frac{1}{\sqrt{15}} \sin(2\Theta) \right) \kappa_\Theta \alpha(\Theta).
\end{aligned}$$

Die GUT-Normierungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}
\kappa_\psi^{-1} &= \frac{15}{2}, \quad \kappa_\chi^{-1} = \frac{55}{2}; \\
\kappa_\Theta^{-1} &= \frac{1}{24} \kappa_\psi^{-1} \cos^2 \Theta + \frac{1}{40} \kappa_\chi^{-1} \sin^2 \Theta - \frac{\sqrt{15}}{48} \sin(2\Theta). \tag{B.13}
\end{aligned}$$

C Lie-Punktsymmetrien von Differentialgleichungen

Die Definition und Bestimmung von Lie-Punktsymmetrien einer Differentialgleichung wird hier kurz geschildert. Ein Standardwerk zu diesem Themenkreis ist [113].

Sei S_Δ die Lösungsmannigfaltigkeit eines Systems $\Delta(\mu, x, \partial x, \dots) = 0$ von Differentialgleichungen mit den unabhängigen $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ bzw. abhängigen Variablen $x = (x_1, \dots, x_q)$. Die Lösung des Systems ist eine Funktion $(M := \mathbb{R}^p) \rightarrow (X := \mathbb{R}^q) : \mu \rightarrow x = x(\mu)$. Eine Symmetriegruppe G von S vermittelt eine Transformation auf der Mannigfaltigkeit $M \times X$, die die Lösungen von S_Δ wieder auf Lösungen abbildet. Die p -dimensionale Untermannigfaltigkeit $\Gamma_f := \{(\mu, f(\mu)); \mu \in \Omega\} \subset M \times X$ für eine Lösung f von S_Δ geht für ein $g \in G$ in $g \cdot \Gamma_f = \{(\mu', x') = g \cdot (\mu, x); (\mu, x) \in \Gamma_f\}$ über. Für jedes $g(s) \in G$ mit dem kontinuierlichem Gruppenparameter s werden die expliziten Transformationen

$$(\mu', x') = g(s) \cdot (\mu, x) =: (\bar{\mu}(s, \mu, x), \bar{x}(s, \mu, x)) \quad (\text{C.1})$$

eingeführt.

Die Differentialgleichungen hängen nicht nur von μ und x ab, sondern auch bis zu einer gewissen Ordnung n von den Differentiationen von x , so daß die Symmetrietransformationen auf diesen Raum *fortgesetzt* oder *prolongiert* werden müssen. Für die Lösung $f : M \rightarrow X$ wird die n -te Prolongation eingeführt:

$$x^{(n)} = \text{pr}^{(n)} f(\mu) : M \rightarrow X^{(n)} \quad (\text{C.2})$$

mit

$$x_i^{(n)} := \partial_J f_i(\mu) \quad J = (j_1, \dots, j_k), \quad 1 \leq j_k \leq p \quad (\text{C.3})$$

und

$$X^{(n)} := X_1 \times \dots \times X_n, \quad X_k := \mathbb{R}^q \binom{p+k+1}{k}. \quad (\text{C.4})$$

Der Raum $M \times X^{(n)}$ wird der *Jetraum* von $M \times X$ genannt. Die prolongierte Lösungsmannigfaltigkeit lautet:

$$S_\Delta^{(n)} = \{(\mu, x^{(n)}) : \Delta(\mu, x^{(n)}) = 0\} \subset M \times X^{(n)}. \quad (\text{C.5})$$

Ist v der infinitesimale Generator der Symmetrie über $M \times X$

$$v = \sum_{i=1}^p \xi_i(\mu, x) \frac{\partial}{\partial \mu_i} + \sum_{j=1}^q \phi_j(\mu, x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (\text{C.6})$$

mit

$$\xi_i(\mu, x) := \left. \frac{d}{ds} \bar{\mu}_i(s, \mu, x) \right|_{s=0}, \quad \phi_j(\mu, x) := \left. \frac{d}{ds} \bar{x}_j(s, \mu, x) \right|_{s=0}, \quad (\text{C.7})$$

so lautet der prolongierte Generator der Ordnung n über $M \times X^{(n)}$:

$$\text{pr}^n v = v + \sum_{j=1}^q \sum_{|J| \geq 1} \phi_j^J(\mu, x^{(n)}) \frac{\partial}{\partial x_{j,J}}, \quad (\text{C.8})$$

mit den Abkürzungen:

$$x_{j,J} := \frac{\partial^{|J|} x_j}{\partial \mu_{j_1} \dots \partial \mu_{j_{|J|}}},$$

$$\phi_j^J(\mu, x^{(n)}) := D_J \left(\phi_j - \sum_{i=1}^p \xi_i x_{j,i} \right) + \sum_{i=1}^p \xi_i x_{j,iJ}.$$

Hierbei steht D für die totale Differentiation, also insbesondere:

$$D_J := D_{j_1} \dots D_{j_{|J|}}, \quad D_i f = \frac{\partial f}{\partial \mu_i} + \sum_{j=1}^q \sum_{|J|} x_{j,iJ} \frac{\partial f}{\partial x_{j,J}}. \quad (\text{C.9})$$

Die Symmetrie der Differentialgleichung $\Delta(\mu, x^{(n)}) = 0$ ist letztlich durch die Funktionen ξ_i und ϕ_j bestimmt. Deren Bestimmungsgleichungen ergeben sich aus der Forderung nach infinitesimaler Invarianz:

$$(\text{pr}^{(n)} v) \Delta_i(\mu, x^{(n)}) \Big|_{\Delta=0} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Als einfaches Beispiel wird hier die Differentialgleichung mit

$$\Delta(\mu, x) = x' - x, \quad x' := \frac{dx}{dt}$$

betrachtet. Der Generator bzw. prolongierte Generator

$$v = \xi \frac{\partial}{\partial \mu} + \phi \frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{pr}^{(1)} v = v + \phi^\mu \frac{\partial}{\partial x'},$$

$$\phi^\mu = D_\mu(\phi - \xi x') + \xi x'' = \phi_{,\mu} + x'(\phi_{,x} - \xi_{,\mu}) - x'^2 \xi_{,x}$$

führt auf

$$(\text{pr}^{(1)} v) \Delta(\mu, x^{(1)}) \Big|_{\Delta=0} = \phi_{,\mu} + x(\phi_{,x} - \xi_{,\mu}) - x^2 \xi_{,x} - \phi = 0$$

$$\Rightarrow \xi_{,x} = 0, \quad \phi_{,x} = \xi_{,\mu}, \quad \phi_{,\mu} = \phi.$$

Diese Gleichungen ergeben die drei unabhängigen Generatoren:

$$v_1 = \partial_\mu, \quad v_2 = e^\mu \partial_x, \quad v_3 = e^\mu \partial_\mu + x e^\mu \partial_x,$$

die die Liealgebra

$$[v_1, v_2] = v_2, \quad [v_1, v_3] = v_3, \quad [v_2, v_3] = 0$$

erfüllen.

D Zur anomalen Dimension einer Invarianten

Die gemeinsame Invariante der Generatoren

$$\mathcal{R} = \sum_i \beta_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \mathcal{S} \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (\text{D.1})$$

genügt den Eigenwertgleichungen:

$$\mathcal{R} \bar{I} = \bar{\gamma} \bar{I}, \quad \mathcal{S} \bar{I} = \bar{\lambda} \bar{I},$$

ergänzt um die durch die Liealgebra induzierte Beziehung:

$$[\mathcal{S}, \mathcal{R}] = \mathcal{R} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} \bar{\lambda} = (\mathcal{S} - 1) \bar{\gamma}. \quad (\text{D.2})$$

Das Skalierungsverhalten des RGFes legt fest:

$$\mathcal{S} \bar{\gamma} = \bar{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{R} \bar{\lambda} = 0. \quad (\text{D.3})$$

Die Einführung einer Funktion $h(x)$ über die Größe

$$I := \bar{I} \exp h$$

führt ebenfalls auf ein System von Eigenwertgleichungen:

$$\mathcal{R} I = (\mathcal{R} h + \bar{\gamma}) I =: \gamma I, \quad \mathcal{S} I = (\mathcal{S} h + \bar{\lambda}) I =: \lambda I,$$

deren Eigenwerte wiederum (D.2) erfüllen:

$$(\mathcal{S} - 1) \gamma - \mathcal{R} \lambda = (\mathcal{S} - 1) (\mathcal{R} h + \bar{\gamma}) - \mathcal{R} (\mathcal{S} h + \bar{\lambda}) = ([\mathcal{S}, \mathcal{R}] - \mathcal{R}) h = 0.$$

Da die denkbare Forderung $\gamma = 0$ mit $\mathcal{R} h = -\bar{\gamma}$ äquivalent ist, was nicht ohne weiteres gelöst werden kann, wird über die Funktion h zur Vereinfachung von (D.1) wie folgt verfügt:

$$\lambda := \text{const.} = c \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{S} h = c - \bar{\lambda},$$

was sich mit einer beliebigen Funktion C lösen läßt:

$$h = C \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots \right) + \int_0^1 \frac{ds}{s} (c - \bar{\lambda}(sx_1, sx_2, \dots)).$$

Dann folgt für die neuen Eigenwertfunktionen (vgl (D.3)):

$$\mathcal{R} \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S} \gamma = \gamma.$$

Über die Konstante c kann weiterhin frei verfügt werden; die Setzung $c = 0$ führt nicht immer auf das formal einfachste Differentialgleichungssystem, so daß im Text auch $c = 1$ gesetzt wurde:

$$\mathcal{R} I = \gamma I, \quad \mathcal{S} I = I, \quad \mathcal{S} \gamma = \gamma.$$

E Explizite Integration für eine Yukawa- und N Eichkopplungen und die Rolle von Randbedingungen

In diesem Anhang wird die explizite Integration der RGG für eine beliebige Zahl von Eichkopplungen und einer Yukawakopplung vorgenommen und gezeigt, daß die Fixmannigfaltigkeiten durch Randbedingungen, was die übliche Vorgehensweise darstellt, nur unvollständig bestimmt sind. Trotzdem sind diese Grenzfallbetrachtungen aufschlußreich, da sie die einzelnen Sektoren der Fixlösungen einem bestimmten maximalen oder minimalen Landau-Pol zuordnen. Es werden die RGG der Ein-Schleifen-Approximation untersucht und somit im ersten Schritt die Lösungstrajektorien als Funktionen der Impulsskala und nicht die Mannigfaltigkeiten bestimmt, die sich jedoch im Anschluß ablesen lassen.

Zwar sind die bestimmten Lösungen in diesem Beispiel in ihrer Integraldarstellung schon von Hill [10] gefunden und später vielfach diskutiert (z.B. [13]) worden, jedoch war bisher die Lösung dieser Integrale nur für den Spezialfall einer einzigen Eichkopplung gegeben; die zugehörige Fixstruktur ist in diesem Fall ein trivialer Fixpunkt.

Die RGG lauten mit $t = \frac{1}{4\pi} \ln(\mu/\mu_0)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i}{dt} &= -b_i \alpha_i^2, & \frac{dy}{dt} &= ay^2 - \Delta y, \\ i = 1, \dots, N, & & \Delta &:= \sum_i \chi_i \alpha_i. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Die Lösung von (E.1) für die Yukawakopplung lautet:

$$y = \frac{e^{-\int \Delta}}{\text{const.} - a \int e^{-\int \Delta}}. \quad (\text{E.2})$$

Der Zähler läßt sich unter Verwendung von $d\alpha_i/dt = -b_i \alpha_i^2$ integrieren:

$$e^{-\int \Delta} = \exp \sum_i \chi_i \int dt \alpha_i = \exp \sum_i \chi_i \int d\alpha_i \frac{\alpha_i}{\dot{\alpha}_i} = \prod_i (\alpha_i)^{\eta_i+1}, \quad (\text{E.3})$$

wobei η_i für die Attraktivität des jeweiligen Fixpunktes $\rho_{y,i}^* = (y/\alpha_i)^*$ – alle anderen Eichkopplungen verschwinden – steht:

$$\eta_i = \frac{\chi_i}{b_i} - 1, \quad \rho_{y,i}^* = \frac{\chi_i - b_i}{a}. \quad (\text{E.4})$$

Damit gilt für einen beliebigen Anfangswert μ_0 :

$$y = \frac{\prod \alpha^{\eta+1}}{\frac{\prod \alpha_0^{\eta+1}}{y_0} - a \int_0^t dt \prod \alpha^{\eta+1}}. \quad (\text{E.5})$$

Die möglichen Anfangsskalen μ_0 sind durch die Landau-Pole $\tilde{\mu}_i$ bzw. $\tilde{t}_i = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\tilde{\mu}_i}{\mu_0}$ beschränkt. Ohne experimentelle Daten läßt sich über deren Lage nur feststellen ob sie sich oberhalb oder unterhalb des perturbativen Bereichs befinden. Es gilt:

$$\mathcal{I} := \frac{1}{\prod \alpha^{\eta+1}} \int_0^t ds \prod \alpha(s)^{\eta+1} = \int_0^t ds \prod_{i=1}^N \left(\frac{s - \tilde{t}_i}{t - \tilde{t}_i} \right)^{-\eta_i - 1}.$$

Die Substitution

$$\frac{\tau}{(1-\lambda)\tau + \lambda} := \frac{s-t}{-t}, \quad (t > 0 \wedge \lambda < 0) \quad \vee \quad (t < 0 \wedge \lambda > 0)$$

führt mit $\delta_\alpha := \sum_{i=1}^N (\eta_i + 1)$ auf:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{t}{\lambda} \int_0^1 d\tau \left(1 - \frac{\lambda-1}{\lambda} \tau \right)^{\delta_\alpha - 2} \prod_{i=1}^N \left(1 - \left[1 - \frac{1 - \tilde{t}_i}{\lambda t - \tilde{t}_i} \right] \tau \right)^{-\eta_i - 1} \\ &= \frac{t}{\lambda} R^{(N+1)} \left(\begin{matrix} 1 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1, 2 - \delta_\alpha \end{matrix} \middle| \frac{1 - \tilde{t}_1}{\lambda t - \tilde{t}_1}, \dots, \frac{1 - \tilde{t}_N}{\lambda t - \tilde{t}_N}, \frac{1}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde die Euler'sche Integraldarstellung der Lauricella Funktion vierter Art (zu den Eigenschaften dieser Funktion vgl. Anhang F, hier insbesondere (F.5))

$$\begin{aligned} &F_D^{(N)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_N \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_N \right) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx_1)^{-\beta_1} \dots (1-tx_N)^{-\beta_N}, \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

ausgenutzt, die für den Spezialfall $\gamma = \sum \beta$ in die hier verwendete Funktion R von Carlson (F.27) übergeht. Diese Funktion ist homogen vom Grad -1 (F.28), womit sich schreiben läßt:

$$\mathcal{I} = R^{(N+1)} \left(\begin{matrix} 1 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1, 2 - \delta_\alpha \end{matrix} \middle| \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \tilde{t}_1}, \dots, \frac{1}{t} - \frac{1}{t - \tilde{t}_N}, \frac{1}{t} \right). \quad (\text{E.7})$$

Durch das Herausfallen von λ muß über diese Konstante nicht weiter verfügt werden.

Wenn die ersten n der Eichkopplungen asymptotisch nichtfreien Wechselwirkungen entsprechen und als Anfangswerte die Verhältnisse an den Grenzen des Definitionsbereichs verwendet werden sollen, lassen sich drei Möglichkeiten unterscheiden:

Randbedingungen für	IR	UV
$n = 0$	$\mu_0 \rightarrow \tilde{\mu}_N$	$\mu_0 \rightarrow \infty$
$N > n > 0$	$\mu_0 \rightarrow \tilde{\mu}_N$	$\mu_0 \rightarrow \tilde{\mu}_1$
$n = N$	$\mu_0 \rightarrow 0$	$\mu_0 \rightarrow \tilde{\mu}_1$

Die Auszeichnung der ersten und N-ten Eichkopplung in dieser Tabelle ist willkürlich. Für den ersten Term in der allgemeinen Lösung (E.5)

$$\frac{1}{y^*} = \frac{1}{y_0} \frac{\prod \alpha_0^{\eta+1}}{\prod \alpha^{\eta+1}} - a \mathcal{I} \quad (\text{E.8})$$

kann nur festgehalten werden, daß der Zähler an den Grenzen des Definitionsbereichs von μ sich in allen drei Fällen wie folgt verhält:

$$\lim_{\mu_0 \rightarrow \mu_{\text{IR}}} \prod \alpha_0^{\eta+1} \rightarrow \infty, \quad \lim_{\mu_0 \rightarrow \mu_{\text{UV}}} \prod \alpha_0^{\eta+1} = 0.$$

Wie sich der Limes

$$\lim_{y_0} \frac{\prod \alpha_0^{\eta+1}}{y_0}$$

in den drei Fällen verhält kann nicht geschlossen werden, da weder mathematisch noch physikalisch das Verhalten der Yukawakopplung im IR oder UV festgelegt ist. Das einzige Kriterium an dieser Stelle ist das der Skalierungsinvarianz, das in der vorangestellten Arbeit verwendet wurde und die hier – ohne dies von dieser Warte aus näher begründen zu können – diesen Term mit Ausnahme des Falles $\delta_\alpha = 1$ ausschließt:

$$\frac{1}{y^*} = -a \mathcal{I} \Big|_{\mu_0 \rightarrow (\mu_{\text{IR}}, \mu_{\text{UV}})}.$$

UV Randbedingung:

Vollständig asymptotisch freie Theorie ($n = 0$):

Der einfachste Fall in diesem Zusammenhang ist eine Theorie mit nur asymptotisch freien Wechselwirkungen, wobei hier die Randbedingungen im UV untersucht werden. Für

$$\mu_0 \rightarrow \infty : \quad \frac{1}{t - \tilde{t}_i} = \frac{4\pi}{\ln(\mu/\tilde{\mu}_i)} = \frac{4\pi}{t - \tilde{t}_i}, \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln(\mu/\mu_0)} \rightarrow 0$$

wird (E.8) mit (E.7) und (F.11) für $\delta_\alpha > 1$ zu:

$$\frac{1}{y^*} = -a R^{(N+1)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1, 2 - \delta_\alpha \end{array} \left| -\frac{1}{t - \tilde{t}_1}, \dots, -\frac{1}{t - \tilde{t}_N}, 0 \right. \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a}{1 - \delta_\alpha} R^{(N)} \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\frac{1}{t - \tilde{t}_1}, \dots, -\frac{1}{t - \tilde{t}_N} \end{array} \right) \\
&= \frac{a}{1 - \delta_\alpha} R^{(N)} \left(\begin{array}{c|c} 1 & -b_1 \alpha_1, \dots, -b_N \alpha_N \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Ausnutzen der Homogenitätseigenschaft (F.28) und Verwenden der relativen Größen

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_N) := \frac{y}{\alpha_N}, \quad \rho_i := \frac{\alpha_i}{\alpha_N}, \quad \rho_i^* := \frac{b_N}{b_i},$$

wobei die Wahl von α_N als Referenz willkürlich ist, ergibt die auf die Ordnung $N - 1$ reduzierte Fixlösung:

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) = \frac{\frac{\sum(\eta+1)-1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; \sum(\eta+1) & 1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*}, \dots, 1 - \frac{\rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^*} \end{array} \right)}. \quad (\text{E.9})$$

Im IR-Grenzfall $t \rightarrow t_{\text{IR}} = \tilde{t}_N$ bzw. $\rho_i = 0$ folgt mit (F.9) falls $\eta_N > 0$:

$$\rho_{y,N}^*(0, \dots, 0) = \frac{\frac{\sum(\eta+1)-1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; \sum(\eta+1) & 1, \dots, 1 \end{array} \right)} = \rho_{y,N}^*,$$

anderenfalls ($\eta_N \leq 0$) wird der triviale Fixpunkt $\rho_{y,N}^*(0, \dots, 0) = 0$ erreicht. Im UV, d.h. für $t \rightarrow \infty$ bzw. $\rho_i \rightarrow \rho_i^*$, strebt (E.9) gegen:

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1^*, \dots, \rho_{N-1}^*) = \frac{\frac{\sum(\eta+1)-1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; \sum(\eta+1) & 0, \dots, 0 \end{array} \right)} = \frac{\sum(\eta+1) - 1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*.$$

Die Eichkopplungen werden von nun an als unabhängige Variablen betrachtet. Die Trajektorien (E.9) gehen dann in eine Fixmannigfaltigkeit über, ein Schritt, der letztlich nur durch die vorangegangenen Untersuchungen dieser Arbeit zu rechtefertigen ist.

Teilweise asymptotisch nichtfreie Theorie ($N > n > 0$):

Für $\mu_{\text{UV}} = \tilde{\mu}_1$ gilt in diesem Fall:

$$\mu_0 \rightarrow \tilde{\mu}_1 : \quad \frac{1}{t - \tilde{t}_i} = \frac{4\pi}{\ln(\mu/\tilde{\mu}_i)} = \frac{1}{t - \tilde{t}_i}, \quad \frac{1}{t} = \frac{4\pi}{\ln(\mu/\mu_0)} = \frac{1}{t - \tilde{t}_1}.$$

Damit geht (E.8) mit Hilfe von (E.7) und (F.11) über in:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^*} &= -a R^{(N+1)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_N + 1, 2 - \delta_\alpha \end{array} \middle| \right. \\
&\quad \left. \left| 0, \frac{1}{t - \tilde{t}_1} - \frac{1}{t - \tilde{t}_2}, \dots, \frac{1}{t - \tilde{t}_1} - \frac{1}{t - \tilde{t}_N}, \frac{1}{t - \tilde{t}_1} \right. \right) \\
&= -\frac{a}{\eta_1} R^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 - \delta_\alpha, \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \right. \\
&\quad \left. \left| \frac{1}{t - \tilde{t}_1}, \frac{1}{t - \tilde{t}_1} - \frac{1}{t - \tilde{t}_2}, \dots, \frac{1}{t - \tilde{t}_1} - \frac{1}{t - \tilde{t}_N} \right. \right) \\
&= -\frac{a}{\eta_1} R^{(N)} \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 - \delta_\alpha, \eta_2 + 1, \dots \end{array} \middle| b_1 \alpha_1, b_1 \alpha_1 - b_2 \alpha_2, \dots, b_1 \alpha_1 - b_N \alpha_N \right).
\end{aligned}$$

Erneutes Ausnutzen der Homogenität (F.28) führt auf:

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) = \frac{\rho_{y,1}^* \rho_1}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \frac{\rho_1^* \rho_2}{\rho_2^* \rho_1}, \dots, \frac{\rho_1^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_1}, \frac{\rho_1^*}{\rho_1} \right)}. \quad (\text{E.10})$$

Die Darstellung wird einfacher, wenn α_1 als Referenzkopplung verwendet wird.

Zur Konsistenzprüfung wird der Limes $\rho_1 \rightarrow 0$ betrachtet, der zwar für kein t im perturbativen Bereich erreicht wird, da aber $\rho_1 \equiv 0$ ebenfalls Fixlösung der zugehörigen RGG ist, ist dieses sektorielle *Abschalten* der Eichkopplung ein sinnvoller Grenzfall. Dann muß der hier betrachtete Fall sich auf $n = 0$ reduzieren, der im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde. Falls $\sum_{i \neq 1} (\eta_i + 1) > 1$ gilt, liefern (F.6) und (F.11):

$$\begin{aligned}
&\rho_{y,N}^*(0, \rho_2, \dots, \rho_{N-1}) \\
&= \lim_{\rho_1 \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_1^*} - 1 \right) \frac{\eta_1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1, 2 - \sum(\eta+1) \end{array} \middle| \frac{1 - \frac{\rho_2}{\rho_2^*}}{1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*}}, \dots, \frac{1 - \frac{\rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^*}}{1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*}}, \frac{1}{1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*}} \right)} \\
&= \frac{-\frac{\eta_1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1 - \eta_1 \\ \eta_2 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1, 2 - \sum(\eta+1) \end{array} \middle| 1 - \frac{\rho_2}{\rho_2^*}, \dots, 1 - \frac{\rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^*}, 1 \right)} \\
&= \frac{\frac{\sum_{\neq 1} (\eta+1) - 1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-2)} \left(\begin{array}{c} 1; \sum_{\neq 1} (\eta+1) \\ \eta_2 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1 \end{array} \middle| 1 - \frac{\rho_2}{\rho_2^*}, \dots, 1 - \frac{\rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^*} \right)}, \quad (\text{E.11})
\end{aligned}$$

was das korrekte Ergebnis ist (vgl. (E.9)); für $\sum_{i \neq 1} (\eta_i + 1) < 1$ verschwindet die Fixlösung identisch.

Im UV $t \rightarrow \tilde{t}_1$ bzw. $\rho_1 \rightarrow \infty$ mit $\rho_{i \neq 1} < \infty$ wird die folgende Asymptotik angestrebt:

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{t}_1} \rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) \rightarrow \frac{\rho_{y,1}^* \rho_1}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1-\eta_1 & 0, \dots, 0 \\ \hline \eta_2+1, \dots, \eta_N+1 & \end{array} \right)} \rightarrow \rho_{y,1}^* \rho_1. \quad (\text{E.12})$$

Dagegen wird im IR $t \rightarrow \tilde{t}_N$ bzw. $\rho_i \rightarrow 0$ mit (F.6), (F.8) und (F.33) falls $\eta_N > 0$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \tilde{t}_N} \rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) &= \frac{-\rho_{y,1}^* \rho_1^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1-\eta_1 & 1, \dots, 1 \\ \hline \eta_2+1, \dots, \eta_{N-1}+1, 2-\delta_\alpha & \end{array} \right)} \\ &= \frac{-\rho_{y,1}^* \rho_1^*}{F_D^{(1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1-\eta_1 & 1 \\ \hline -\eta_1 - \eta_N & \end{array} \right)} = \frac{\eta_N}{\eta_1} \rho_{y,1}^* \rho_1^* = \rho_{y,N}^* \end{aligned}$$

erreicht. Ist dieser Fixpunkt repulsiv ($\eta_N < 0$), so wird stattdessen der triviale Fixpunkt $\rho_{y,N}^* = 0$ angestrebt.

Vollständig asymptotisch nichtfreie Theorie (n=N):

Die UV-Randbedingung ergibt hier eine mit dem Fall $N > n > 1$ formal identische Gestalt:

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) = \frac{\rho_{y,1}^* \rho_1}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c|c} 1; 1-\eta_1 & \frac{\rho_1^* \rho_2}{\rho_2^* \rho_1}, \dots, \frac{\rho_1^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_1}, \frac{\rho_1^*}{\rho_1} \\ \hline \eta_2+1, \dots, \eta_N+1 & \end{array} \right)}.$$

Der Unterschied besteht darin, daß diese Mannigfaltigkeit in jedem Fall im IR wegen $\eta_N < 0$ auf den trivialen Fixpunkt führt.

Insgesamt zeichnen sich die Fixmannigfaltigkeiten, die mit den zu Beginn diskutierten Einschränkungen durch die UV-Randbedingung charakterisiert sind, dadurch aus, daß sie im UV auf nichtfreie Yukawakopplungen führen. Diese IR-attraktivste Fixmannigfaltigkeit ist abschnittsweise definiert, wobei die einzelnen Sektoren jeweils durch einen Landau-Pol des UV-Bereichs bestimmt sind²⁸. Äquivalent zur Annahme, daß der i -te Pol ($i \leq n$) unterhalb aller anderen liegt, ist die Bedingung:

$$b_i \rho_i = \min\{b_1 \rho_1, \dots, b_n \rho_n\}. \quad (\text{E.13})$$

²⁸Für $n = 0$ existiert nur ein einzelner Sektor und es ist kein Landau-Pol im UV vorhanden. Das entscheidene Element ist dann die asymptotische Freiheit aller Eichkopplungen.

Dies gilt auch im Falle $n = N$, wobei dann jedoch $\rho_N = 1$ beachtet werden muß. Diese Auszeichnung der N -ten Eichgruppe ist nur scheinbar, sie rührt von ihrer Wahl als Referenzkopplung. Die Fix-Lösung dieses Systems ist somit aus n Sektoren zusammengesetzt (vgl. Abbildung 26).

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) \Big|_{n=0} = \frac{\frac{\sum(\eta+1)-1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; \sum(\eta+1) \\ \eta_1+1, \dots, \eta_{N-1}+1 \end{array} \middle| 1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*}, \dots, 1 - \frac{\rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^*} \right)}$$

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) \Big|_{n>0} = \begin{cases} \frac{\rho_{y,i}^* \rho_i}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1-\eta_i \\ \eta_1+1, \dots, \eta_{i-1}+1, \eta_{i+1}+1, \dots, \eta_N+1 \end{array} \middle| \frac{\rho_1^*}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right)} \\ i = 1, \dots, n : b_i \rho_i = \min\{b_j \rho_j; j \leq n\} \end{cases}$$

Abbildung 26: Allgemeine IR-attraktive Fixmannigfaltigkeit in Einschleifen Approximation.

IR-Bedingung:

Die sich in diesem Fall ergebenden Fixmannigfaltigkeiten sind formal identisch mit dem UV-Grenzfall, wobei die Rolle der Landau-Pole des UV von denen des IR übernommen wird. Aufgrund dieser Überlegung und den bisherigen Ergebnissen läßt sich die Fixlösung unmittelbar angeben, wobei die Bedingung, die die einzelnen Sektoren bestimmt, nun in eine Maximumsforderung übergeht (vgl. Abbildung 27).

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) \Big|_{n=N} = \frac{\frac{\sum(\eta+1)-1}{\eta_N} \rho_{y,N}^*}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; \sum(\eta+1) \\ \eta_1+1, \dots, \eta_{N-1}+1 \end{array} \middle| 1 - \frac{\rho_1}{\rho_1^*}, \dots, 1 - \frac{\rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^*} \right)}$$

$$\rho_{y,N}^*(\rho_1, \dots, \rho_{N-1}) \Big|_{n<N} = \begin{cases} \frac{\rho_{y,i}^* \rho_i}{F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 1; 1-\eta_i \\ \eta_1+1, \dots, \eta_{i-1}+1, \eta_{i+1}+1, \dots, \eta_N+1 \end{array} \middle| \frac{\rho_1^*}{\rho_1}, \dots, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right)} \\ i = n+1, \dots, N : b_i \rho_i = \max\{b_j \rho_j; j > n\} \end{cases}$$

Abbildung 27: Allgemeine Zimmermann-artige Mannigfaltigkeit in Ein-Schleifen-Approximation.

Diese Fixlösungen zeichnen sich dadurch aus, daß sie im IR in den Fixpunkt $\rho_{y,N}^*$ und im UV immer in asymptotisch freie Yukawakopplungen münden.

Stetige Differenzierbarkeit der attraktivsten Fixmannigfaltigkeit

Die Stetigkeit an den Nahtstellen der abschnittsweise definierten Fixlösungen folgt durch Einsetzen für zwei Sektoren $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$ von $\rho_i = \rho_i^* \rho_j / \rho_j^*$. Die Grenzmannigfaltigkeit ist dann durch:

$$\begin{aligned} & \rho_{y,N}^* \left(\rho_1, \dots, \rho_i, \dots, \rho_j = \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i, \dots, \rho_{N-1} \right) \Big|_{b_i \rho_i = b_j \rho_j = \min\{b_1 \rho_1, \dots, b_n \rho_n\}} \\ &= \frac{\frac{\eta_i + \eta_j + 1}{\eta_N} \rho_{y,N}^* \frac{\rho_i}{\rho_i^*}}{F_D^{(N-2)} \left(\begin{array}{c} 1; -\eta_i - \eta_j \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{i-1} + 1, \eta_{i+1} + 1, \dots, \eta_{j-1} + 1, \eta_{j+1} + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \frac{\rho_i^* \rho_1}{\rho_1^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right)} \end{aligned}$$

gegeben. Alle Sektoren haben die folgende Mannigfaltigkeit gemeinsam:

$$\begin{aligned} & \rho_{y,N}^* \left(\rho_1, \rho_2 = \frac{\rho_2^*}{\rho_1^*} \rho_1, \dots, \rho_n = \frac{\rho_n^*}{\rho_1^*} \rho_1, \rho_{n+1}, \dots, \rho_{N-1} \right) \\ &= \frac{\frac{\sum_{\leq n} (\eta+1) - 1}{\eta_N} \rho_{y,N}^* \frac{\rho_i}{\rho_i^*}}{F_D^{(N-n)} \left(\begin{array}{c} 1; 2 - \sum_{\leq n} (\eta+1) \\ \eta_{n+1} + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \frac{\rho_i^* \rho_{n+1}}{\rho_{n+1}^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right)} \end{aligned}$$

Diese Lösung entspricht dem Fall, daß alle Landau-Pole des UV-Bereichs zusammenfallen.

Zum Beweis der Glätte der Fixmannigfaltigkeit wird die Stetigkeit der ersten Ableitungen gezeigt. Diese folgt mit (F.16) (und entsprechend für ρ_j):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho_i} \rho_{y,N}^* \left(\rho_1, \dots, \rho_j \geq \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i, \dots, \rho_{N-1} \right) \Big|_{\rho_j = \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i} \\ &= \frac{1}{\rho_i} \rho_{y,N}^* \left(\dots, \rho_j = \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i, \dots \right) \\ &+ \frac{\rho_{y,N}^* (\dots)^2}{\rho_{y,i}^* \rho_i^3} \frac{b_N \eta_N + 1}{b_i (1 - \eta_i)} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_i \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{N-1} + 1, \eta_N + 2 \end{array} \middle| \dots \right) \\ &+ \frac{\rho_{y,N}^* (\dots)^2}{\rho_{y,i}^* \rho_i^2} \frac{\eta_j + 1}{1 - \eta_i} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_i \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_j + 2, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \dots \right) \\ &+ \frac{\rho_{y,N}^* (\dots)^2}{\rho_{y,i}^* \rho_i^3} \sum_{k \neq i, j, N} \frac{b_k}{b_i} \rho_k \frac{\eta_k + 1}{1 - \eta_i} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_i \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_k + 2, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \middle| \dots \right). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von (F.13) gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \rho_i} \rho_{y,N}^* \left(\rho_1, \dots, \rho_j \geq \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i, \dots, \rho_{N-1} \right) \Big|_{\rho_j = \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i} \\
&= \frac{\rho_{y,N}^*(\dots)^2}{\rho_{y,i}^* \rho_i^2} F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; 1 - \eta_i \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{i-1} + 1, \eta_{i+1} + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \right) \\
& \quad \left(\frac{\rho_i^* \rho_1}{\rho_1^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{j-1}}{\rho_{j-1}^* \rho_i}, 1, \frac{\rho_i^* \rho_{j+1}}{\rho_{j+1}^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right) \\
&= \frac{\eta_i(\eta_i + 1)}{(\eta_i + \eta_j + 1)(\eta_i + \eta_j + 2)} \frac{\rho_{y,N}^*(\dots)^2}{\rho_{y,i}^* \rho_i^2} \\
& \times F_D^{(N-2)} \left(\begin{array}{c} 2; -\eta_i - \eta_j \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{i-1} + 1, \eta_{i+1} + 1, \dots, \eta_{j-1} + 1, \eta_{j+1} + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \right) \\
& \quad \left(\frac{\rho_i^* \rho_1}{\rho_1^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{j-1}}{\rho_{j-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^* \rho_{j+1}}{\rho_{j+1}^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right).
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis muß unter Verwendung von (F.11) mit dem folgenden Ausdruck identisch sein:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \rho_i} \rho_{y,N}^* \left(\rho_1, \dots, \rho_j \leq \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i, \dots, \rho_{N-1} \right) \Big|_{\rho_j = \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i} \\
&= - \frac{\rho_{y,N}^*(\dots)^2}{\rho_{y,j}^* \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i} \times \\
& \times F_D^{(N-1)} \left(\begin{array}{c} 2; 2 - \eta_j \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_i + 2, \dots, \eta_{j-1} + 1, \eta_{j+1} + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \right) \\
& \quad \left(\frac{\rho_i^* \rho_1}{\rho_1^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{i-1}}{\rho_{i-1}^* \rho_i}, 1, \frac{\rho_i^* \rho_{i+1}}{\rho_{i+1}^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right) \frac{1}{\rho_i} \frac{1 + \eta_i}{1 - \eta_j} \\
&= - \frac{\rho_{y,N}^*(\dots)^2}{\rho_{y,i}^* \rho_i^2} \frac{\eta_i}{\eta_j} \frac{(1 + \eta_i)(-\eta_j)}{(\eta_i + \eta_j + 1)(\eta_i + \eta_j + 1)} \\
& \times F_D^{(N-2)} \left(\begin{array}{c} 2; -\eta_i - \eta_j \\ \eta_1 + 1, \dots, \eta_{i-1} + 1, \eta_{i+1} + 1, \dots, \eta_{j-1} + 1, \eta_{j+1} + 1, \dots, \eta_N + 1 \end{array} \right) \\
& \quad \left(\frac{\rho_i^* \rho_1}{\rho_1^* \rho_i}, \dots, \frac{\rho_i^* \rho_{N-1}}{\rho_{N-1}^* \rho_i}, \frac{\rho_i^*}{\rho_i} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial \rho_i} \rho_{y,N}^* \left(\rho_1, \dots, \rho_j \geq \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i, \dots, \rho_{N-1} \right) \Big|_{\rho_j = \frac{\rho_j^*}{\rho_i^*} \rho_i},
\end{aligned}$$

womit die erste Ableitung stetig ist. Setzt man dies für höhere Ableitungen fort,

so stellt sich mit Hilfe der Differentiationsformel (F.16) heraus, daß der Übergang vom i -ten Sektor (d.h. vom Landau-Pol \tilde{t}_i bestimmt) in den j -ten Sektor maximal $[-\eta_i - \eta_j - 1]_G$ mal stetig differenzierbar ist, wobei die Gauss-Klammern verwendet wurden. Damit ist der Fall von zwei asymptotisch nichtfreien Kopplungen mindestens zweimal differenzierbar und für zwei abelsche Eichgruppen in einem nichtsupersymmetrischen Modell spätestens in der elften Ableitung (wegen $1 \leq -\eta \leq 11/2$) und in einem supersymmetrischen Modell in der fünften Ableitung (wegen $1 \leq -\eta \leq 3$) unstetig.

F Glossar zur Lauricella-Funktion

Definition, Reihen- und Integraldarstellung:

Die Lauricella-Funktion vierter Art besitzt die Reihendarstellung [130, 131]

$$F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) = \sum \frac{(\alpha, m_1 + \dots + m_n)(\beta_1, m_1) \dots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \dots + m_n)} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!}, \quad (\text{F.1})$$

mit dem Pochhammersymbol

$$(\lambda, \kappa) = \frac{\Gamma(\lambda + \kappa)}{\Gamma(\lambda)}. \quad (\text{F.2})$$

Die Variablen und Parameter sind im allgemeinen komplexwertig. Der Konvergenzbereich ist durch

$$|x_1| < 1, \dots, |x_n| < 1 \quad (\text{F.3})$$

gegeben. Die Integraldarstellung in sogenannter Euler'scher Form lautet:

$$F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-tx_1)^{-\beta_1} \dots (1-tx_n)^{-\beta_n}. \quad (\text{F.4})$$

Transformationen:

Es gelten die folgenden Transformationen [130]:

$$F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) = (1-x_1)^{-\beta_1} \dots (1-x_n)^{-\beta_n} F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \gamma - \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| \frac{x_1}{x_1-1}, \dots, \frac{x_n}{x_n-1} \right) \quad (\text{F.5})$$

$$= (1-x_1)^{-\alpha} \quad (\text{F.6})$$

$$\times F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \gamma - \beta_1 - \dots - \beta_n, \beta_2, \dots, \beta_n \end{array} \middle| \frac{x_1}{x_1-1}, \frac{x_1-x_2}{x_1-1}, \dots, \frac{x_1-x_n}{x_1-1} \right)$$

$$= (1-x_1)^{\gamma-\alpha-\beta_1} (1-x_2)^{-\beta_2} \dots (1-x_n)^{-\beta_n}$$

$$\times F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \gamma - \alpha; \gamma \\ \gamma - \beta_1 - \dots - \beta_n, \beta_2, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x_1, \frac{x_2 - x_1}{x_2 - 1}, \dots, \frac{x_n - x_1}{x_n - 1} \right) \quad (\text{F.7})$$

Reduktionsbeziehungen:

Neben den trivialen Reduktionen durch die Setzungen $\beta_i = 0$ oder $x_i = 0$ ²⁹ existieren weitere wichtige Reduktionsbeziehungen [130]:

$$F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x, x, \dots, x \right) = F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n \end{matrix} \middle| x \right), \quad (\text{F.8})$$

$$F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| 1, 1, \dots, 1 \right) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta_1 - \dots - \beta_n)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_1 - \dots - \beta_n)}, \quad (\text{F.9})$$

wobei zuletzt $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta_1 - \dots - \beta_n) > 0$ angenommen wurden. Außerdem, falls $\mathcal{R}(\gamma - \alpha - \beta_m) > 0$:

$$\begin{aligned} & F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_{m-1}, 1, x_{m+1}, \dots, x_n \right) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta_m)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta_m)} \\ &\times F_D^{(n-1)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma - \beta_m \\ \beta_1, \dots, \beta_{m-1}, \beta_{m+1}, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n \right). \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Mit (F.1) und $(\lambda, m)(\lambda + m, \kappa) = (\lambda, \kappa + m)$ gilt:

$$\begin{aligned} & F_D^{(n+1)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_{n+1} \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_{n+1} \right) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta_{n+1}, m)}{(\gamma, m)} \frac{x_{n+1}^m}{m!} F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha + m; \gamma + m \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_n \right). \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Verwandtschaftliche Beziehungen:

Verwandt werden Relationen zwischen hypergeometrischen Funktionen der selben Ordnung genannt, deren Parameter um eins differieren [131]. Zur besseren Übersicht sind nur die sich ändernden Parameter wiedergegeben, die Argumente

²⁹In diesen Fällen fallen die zugehörigen Komponenten in (F.1) heraus.

bleiben gleich.

$$F_D^{(n)} = \frac{\alpha}{1 + \alpha - \gamma} F_D^{(n)}(\alpha + 1) + \frac{1 - \gamma}{1 + \alpha - \gamma} F_D^{(n)}(\gamma - 1) \quad (\text{F.12})$$

$$\begin{aligned} &= F_D^{(n)}(\alpha - 1) + \frac{\beta_1}{\gamma} x_1 F_D^{(n)}(\gamma + 1, \beta_1 + 1) \\ &\quad + \dots + \frac{\beta_n}{\gamma} x_n F_D^{(n)}(\gamma + 1, \beta_n + 1) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

$$\begin{aligned} &= F_D^{(n)}(\gamma - 1) + \frac{\alpha\beta_1}{\gamma(1 - \gamma)} x_1 F_D^{(n)}(\alpha + 1; \gamma + 1, \beta_1 + 1) \\ &\quad + \dots + \frac{\alpha\beta_n}{\gamma(1 - \gamma)} x_n F_D^{(n)}(\alpha + 1; \gamma + 1, \beta_n + 1).. \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

Die folgende Behauptung wurde in [130] für die Ordnung zwei gezeigt und im nächsten Abschnitt im allgemeinen Fall bewiesen:

$$\begin{aligned} &(\gamma - \alpha) F_D^{(n)}(\alpha - 1) \quad (\text{F.15}) \\ &= \left(\gamma - \alpha - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right) F_D^{(n)} + \frac{\alpha}{\gamma} \sum_{i=1}^n \beta_i x_i (1 - x_i) F_D^{(n)}(\alpha + 1, \gamma + 1, \beta_i + 1). \end{aligned}$$

Differentiation, Additions- und Subtraktionstheorem:

Es gilt die Differentiationsformel [131]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \\ &= \frac{(\alpha, k_1 + \dots + k_n)(\beta_1, k_1) \dots (\beta_n, k_n)}{(\gamma, k_1 + \dots + k_n)} \\ &\quad \times F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha + k_1 + \dots + k_n; \gamma + k_1 + \dots + k_n \\ \beta_1 + k_1, \dots, \beta_n + k_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right). \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

Hiermit lassen sich das Additions- und Multiplikationstheorem beweisen:

$$\begin{aligned} &F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n \right) \\ &= \sum \frac{(\alpha, m_1 + \dots + m_n)(\beta_1, m_1) \dots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \dots + m_n)} \frac{y_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{y_n^{m_n}}{m_n!} \\ &\quad \times F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha + m_1 + \dots + m_n; \gamma + m_1 + \dots + m_n \\ \beta_1 + m_1, \dots, \beta_n + m_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right), \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

$$\begin{aligned}
& F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1 y_1, \dots, x_n y_n \right) \\
&= \sum \frac{(\alpha, m_1 + \dots + m_n)(\beta_1, m_1) \dots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \dots + m_n)} \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \\
&\times (y_1 - 1)^{m_1} \dots (y_n - 1)^{m_n} \\
&\times F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha + m_1 + \dots + m_n; \gamma + m_1 + \dots + m_n \\ \beta_1 + m_1, \dots, \beta_n + m_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right). \quad (\text{F.18})
\end{aligned}$$

Zum Beweis von (F.16) wird die Integraldarstellung (F.5), (F.16) und (F.13) verwendet:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \{x_i(1-x_i)\partial_i - \beta_i x_i\} F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \\
&= -\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 dt t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha} \prod_j (1-t x_j)^{-\beta_j} \sum_i \frac{\beta_i x_i}{1-t x_i} \\
&= \frac{\alpha-\gamma}{\gamma} \sum_i \beta_i x_i F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma+1 \\ \beta_1, \dots, \beta_i+1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \\
&= (\alpha-\gamma) \left\{ F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) - F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha-1; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Konfluente Form der Lauricella-Funktion:

Durch die folgenden Grenzübergänge folgt die sogenannte konfluente Form der Lauricella-Funktion:

$$\begin{aligned}
& \Phi_D^{(n,i)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, 1/\varepsilon, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon x_i, x_{i+1}, \dots, x_n \right) \\
&= \sum \frac{(\alpha, m_1 + \dots + m_n)(\beta_1, m_1) \dots (\beta_{i-1}, m_{i-1})(\beta_{i+1}, m_{i+1}) \dots (\beta_n, m_n)}{(\gamma, m_1 + \dots + m_n)} \\
&\times \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \\
&= F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \infty, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right). \quad (\text{F.19})
\end{aligned}$$

Eine nützliche Integralbeziehung [131]:

$$F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \quad (\text{F.20})$$

$$= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\delta)\Gamma(\gamma-\delta)} \int_0^1 du u^{\delta-1} (1-u)^{\gamma-\delta-1} F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \delta \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| u x_1, \dots, u x_n \right)$$

System der partiellen Differentialgleichungen:

Die Lauricella-Funktion vierter Art und n-ter Ordnung erfüllt das folgende System von partiellen Differentialgleichungen $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$$(1-x_i) \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} - \beta_i \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial F}{\partial x_j} + (\gamma - (\alpha+1)x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i} = \alpha \beta_i F. \quad (\text{F.21})$$

Mit Ausnahme der Fälle $n = 1, 2$ ist es bisher nicht gelungen ein geschlossenes System von Lösungen anzugeben. Für ein beliebiges n existieren die Lösungen

$$F = F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| x_1, \dots, x_n \right) \quad (\text{F.22})$$

mit schwacher Singularität in $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$ und

$$F = F_D^{(n)} \left(\begin{array}{c} \alpha; \alpha + \beta_1 + \dots + \beta_n - \gamma + 1 \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{array} \middle| 1 - x_1, \dots, 1 - x_n \right) \quad (\text{F.23})$$

mit schwacher Singularität in $(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$. Mit Hilfe von (F.15) und (F.16) folgt:

$$(\gamma - \alpha)F(\alpha - 1) = \left(\gamma - \alpha - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right) F + \sum_{i=1}^n x_i (1 - x_i) \frac{\partial F}{\partial x_i}. \quad (\text{F.24})$$

und mit (F.1)

$$(0, m) = \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(0)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = 0 \\ 0 & \text{falls } m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{F.25})$$

für $\alpha = 0$: $F(\alpha = 0) = 1$. Aus (F.24) folgt für den Spezialfall $\alpha = 1$ eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, die bisher nicht in der Literatur diskutiert wurde:

$$\gamma - 1 - \left(\gamma - 1 - \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right) F(\alpha = 1) = \sum_{i=1}^n x_i (1 - x_i) \frac{\partial F(\alpha = 1)}{\partial x_i}. \quad (\text{F.26})$$

Die Funktion von Carlson:

Ein Sonderfall der Lauricella-Funktion ist die Funktion von Carlson [132]:

$$R^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_n \right) := F_D^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha; \beta_1 + \dots + \beta_n \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| 1 - x_1, \dots, 1 - x_n \right). \quad (\text{F.27})$$

Diese Funktion ist homogen vom Grade $-\alpha$:

$$R^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| t x_1, \dots, t x_n \right) = t^{-\alpha} R^{(n)} \left(\begin{matrix} \alpha \\ \beta_1, \dots, \beta_n \end{matrix} \middle| x_1, \dots, x_n \right). \quad (\text{F.28})$$

Spezialfälle

Die Lauricella-Funktion vierter Art wird für zwei Variablen auch Appellfunktion erster Art genannt [130, 133]:

$$F_D^{(2)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta_1, \beta_2 \end{matrix} \middle| x_1, x_2 \right) = F_1 \left(\alpha, \beta_1, \beta_2; \gamma \middle| x_1, x_2 \right) \quad (\text{F.29})$$

und für eine Variable auch Gaussfunktion genannt [117]:

$$F_D^{(1)} \left(\begin{matrix} \alpha; \gamma \\ \beta \end{matrix} \middle| x \right) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma | x). \quad (\text{F.30})$$

Für diese Funktion sind weitere Transformationen bekannt [117]:

$$\begin{aligned} & {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma | x) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} {}_2F_1(\alpha, \beta; \alpha + \beta - \gamma + 1 | 1 - x) \end{aligned} \quad (\text{F.31})$$

$$\begin{aligned} &+ (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} {}_2F_1(\gamma - \alpha, \gamma - \beta; \gamma - \alpha - \beta + 1 | 1 - x) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-x)^{-\alpha} {}_2F_1 \left(\alpha, 1 - \gamma + \alpha; 1 - \beta + \alpha \middle| \frac{1}{x} \right) \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)} (-x)^{-\beta} {}_2F_1 \left(\beta, 1 - \gamma + \beta; 1 - \alpha + \beta \middle| \frac{1}{x} \right). \end{aligned} \quad (\text{F.32})$$

Nützlich ist die Eigenschaft:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \beta | x) = (1 - x)^{-\alpha}. \quad (\text{F.33})$$

Computerroutine zur Berechnung der Lauricella-Funktion

Die Gaussfunktion ist ab *Version 3.x*, die Appellfunktion ab *Version 4.x* in *Mathematica* implementiert.

Die, in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen von expliziten Werten der Lauricella-Funktionen beruhen auf einer in *Fortran* geschriebenen Routine, die [131] entnommen wurde. Sie wurde in *C* übersetzt und mittels der *MathLink*-Schnittstelle in das Programm *Mathematica* eingelesen. Diese Vorgehensweise garantiert eine hohe Geschwindigkeit.

Die *MathLink* Schnittstelle kann z.B. in der Datei *fd2.tm* ablegt werden und enthält die für *Mathematica* notwendigen Angaben (vgl. Abbildung 28).

```
:Evaluate:      fd2::usage = "F_D^(2)"
:Begin:
:Function:      FD2
:Pattern:       fd2[a_Real,b1_Real,b2_Real,c_Real,x_Real,y_Real]
:Arguments:     {a, b1, b2, c, x, y}
:ArgumentTypes:{Real, Real, Real, Real, Real, Real}
:ReturnType:   Real
:End:
```

Abbildung 28: *MathLink* Schnittstelle zur Lauricella-Funktion.

Es wird davon ausgegangen, daß das *C*-Programm mit *fd2.c* benannt wurde. Zur genauen Vorgehensweise wird auf [134] verwiesen. Das *C*-Listing ist in Abbildung 29 für die Lauricella-Funktionen zweiter Ordnung angegeben, es läßt sich leicht auf höhere Ordnungen erweitern. Es werden die ersten $m = 2000$ Terme der Reihe berechnet, was in der Regel eine hinreichende Genauigkeit ergibt. Dieser Wert kann selbstverständlich beliebig erhöht werden.

```

#include "mathlink.h"
double FD2(double a,double b1,double b2,double c,
           double x,double y)
{ int    m = 2000;
  double t1 = 1.0, t2, a1, a2, an1, an2, c1, c2, s = 0.0;
  int    n1, n2;
  for( n1 = 1; n1 <= m; n1++ ) {
    an1 = n1;
    a1 = a + an1 - 1.0;
    c1 = c + an1 - 1.0;
    t2 = t1;
    for( n2 = 1; n2 <= m; n2++ ) {
      an2 = n2;
      a2 = a1 + an2 - 1.0;
      c2 = c1 + an2 - 1.0;
      s += t2;
      t2 *= a2*(b2 + an2 - 1.0)*y/(c2*an2); }
    t1 *= a1*(b1 + an1 - 1.0)*x/(c1*an1); }
  return s; }
int main(int argc,char *argv[]){return MLMain(argc,argv); }

```

Abbildung 29: C-Routine zur Berechnung der Lauricella-Funktion vierter Art und zweiter Ordnung.

G Abkürzungsverzeichnis

DRED	Dimensionale Reduktion
DREG	Dimensionale Regularisation
GUT	Groß Unifizierte Theorie
IR	Infrarot
LR-Modell	Links-rechts-symmetrisches Modell
MS	Minimale Subtraktion
$\overline{\text{MS}}$	Modifizierte Minimale Subtraktion
MSSM	Minimal Supersymmetrisches Standardmodell
QCD	Quantenchromodynamik
QED	Quantenelektrodynamik
QFT	Quantenfeldtheorie
RGF	Renormierungsgruppenfluß
RGG	Renormierungsgruppengleichungen
RS	Renormierungsschema
SM	Standardmodell
SSB	Spontane Symmetriebrechung
SUSY	Supersymmetrie
UV	Ultraviolett

Literatur

- [1] L. Maiani, G. Parisi, and R. Petronzio. Bounds on the number and masses of quarks and leptons. *Nuclear Physics B*, 136:115–132, 1978.
- [2] N. Cabbibo, L. Maiani, G. Parisi, and R. Petronzio. Bounds on the fermion and higgs boson masses in grand unified theories. *Nuclear Physics B*, 158:295–308, 1979.
- [3] C. T. Hill, C. N. Leung, and S. Rao. Renormalization group fixed points and the Higgs boson spectrum. *Nuclear Physics B*, 262:517–537, May 1985.
- [4] M. Lindner. Implications of triviality for the SM. *Zeitschrift für Physik C*, 31:295–334, 1986.
- [5] M. Sher. Electroweak higgs potentials and vacuum stability. *Physics Report*, 179:273–418, 1989.
- [6] M. Lindner, M. Sher, and H. Zaglauer. Probing vacuum stability bounds at the fermilab collider. *Physics Letter B*, 228:139–150, 1989.
- [7] C. Ford, D.R.T. Jones, P.W. Stephenson, and M.B. Einhorn. The effective potential and the renormalization group. *Nuclear Physics B*, 395:17–34, 1993.
- [8] B. Schrempp and F. Schrempp. A renormalization group invariant line and infrared attractive top-Higgs mass relation. *Physics Letters B*, 299:321–328, 1993.
- [9] B. Pendleton and G. G. Ross. Mass and mixing angle predictions from infrared fixed points. *Physics Letters B*, 98(4):291–294, January 1981.
- [10] C. T. Hill. Quark and lepton masses from renormalization-group fixed points. *Physical Review D*, 24(3):691–703, August 1981.
- [11] C. Wetterich. Gauge hierarchy due to strong interactions? *Physics Letters B*, 104:269–276, 1981.
- [12] E. Paschos. The fermion mass matrices near a fixed points. *Zeitschrift für Physik C*, 28:235–250, 1984.
- [13] J. Kubo, K. Sibold, and W. Zimmermann. Higgs and top mass from reduction of couplings. *Nuclear Physics B*, 259:331, 1985.
- [14] J. W. Halley, E. Paschos, and H. Usler. Numerical studies on the renormalization of the mass matrices. *Physics Letters B*, 155:107–111, 1985.

- [15] J. A. Bagger, S. Dimopoulos, and E. Massó. Probing the desert with fermion masses. *Physical Review Letters*, 55(14):1450–1452, September 1985.
- [16] C. Wetterich. The mass of the Higgs particle. In *Trieste HEP Workshop*, page 403, 1987.
- [17] J. Kubo, K. Sibold, and W. Zimmermann. New results in the reduction of the standard model. *Physics Letters B*, 220(1, 2):185–190, March 1989.
- [18] M. Carena, T. E. Clark, C. E. M. Wagner, W. A. Bardeen, and K. Sasaki. Dynamical symmetry breaking and the top quark mass in the minimal supersymmetric standard model. *Nuclear Physics B*, 369:33–35, 1992.
- [19] B. Schrempp. Infrared fixed points and fixed lines in the top bottom tau sector in supersymmetric grand unification. *Physics Letters B*, 344:193–200, 1995. [hep-ph/9411241].
- [20] M. Lanzagorta and G. G. Ross. Infra-red fixed points revisited. *Physics Letters B*, 349:319–328, April 1995. hep-ph/9501394.
- [21] B. Schrempp and M. Wimmer. Top quark and Higgs boson masses: interplay between infrared and ultraviolet physics. *Progress in Particle Nuclear Physics*, 37:1–90, 1996. [hep-ph/9606386].
- [22] B. Schrempp. Particle masses from infra-red fixed points, lines, surfaces of the renormalization group equations. In *Beyond the desert 1997: Accelerator and Non-Accelerator Approaches*, pages 87–107, 1997.
- [23] M. Wimmer. *Massen der schweren Fermionen und des Higgs-Bosons aus infrarotattraktiven Fixmannigfaltigkeiten der Renormierungsgruppen-gleichungen*. PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität, Inst. f. Theoretische Physik und Astrophysik, December 1997.
- [24] J. Borgert. Infrarot-attraktive Fixmannigfaltigkeiten und Untersuchungen von Massen-Matrix-Ansätzen im vollen Yukawa-Sektor des MSSM. *Diploma thesis, CAU Kiel, Germany*, 1997.
- [25] J. Borgert. *Vorhersagen für das MSSM aus IR-attraktiven Fixmannigfaltigkeiten der RGG*. PhD thesis, CAU Kiel, Germany, April 2000.
- [26] V. Bardenhorst, J. Borgert, B. Schrempp, and M. Wimmer. The top, bottom, tau masses from infrared fixed manifolds of the renormalization group equations. *Manuskript kurz vor der Fertigstellung*, 2000.
- [27] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotropic spin and isotropic gauge invariance. *Physical Review*, 96:191–195, 1954.

- [28] S. Weinberg. *The quantum theory of fields II: Modern Applications*, volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [29] L. O’Raifeartaigh. *Group structure of gauge theories*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [30] J. Goldstone. Broken symmetries. *Physical Review*, 127:965–970, 1962.
- [31] P. W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Physical Review Letters*, 13:508–509, 1964.
- [32] T. W. B. Kibble. Symmetry breaking in nonabelian gauge theories. *Physical Review*, 155:1554–1561, 1967.
- [33] S. Coleman. *Aspects of symmetry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [34] J. Collins. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [35] H. P. Nilles. Supersymmetry and supergravity and particle physics. *Physics Reports*, 110:1–162, 1984.
- [36] J. Polchinski. What is string theory ? *hep-th/9411028*, 1994.
- [37] S. Coleman and J. Mandula. All possible symmetries of the s-matrix. *Physical Review*, 159:1251–1256, 1967.
- [38] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius. All possible generators of supersymmetries of the s-matrix. *Nuclear Physics B*, 88:257–301, 1975.
- [39] E. Gildener. Gauge symmetry hierarchies. *Physical Review D*, 14:1667–1689, 1976.
- [40] J. A. Bagger. Weak-scale supersymmetry: theory and practice. *hep-ph/9604232*, April 1996.
- [41] G. ’t Hooft. Naturalness, chiral symmetry, and spontaneous chiral symmetry breaking. In *Recent Developments in Gauge Theories*, pages 135–157, New York, 1980. NATO Advanced Study Institut, Plenum Press.
- [42] J. Wess and B. Zumino. A langrangian model invariant under supergauge transformations. *Physics Letters B*, 49:52–60, 1974.
- [43] J. Wess and J. A. Bagger. *Supersymmetry and Supergravity*. Princeton University Press, second edition, 1992.
- [44] P. Ramond. *Field theory: a modern primer*. Benjamin/Cummings, 1981.

- [45] C. Casa et al. Review of particle properties. *European Physical Journal C*, 13(1), 1998.
- [46] E. C. G. Stueckelberg and A. Petermann. Normalization of constants in quanta theory. *Helvetica Physica Acta*, 26:499–520, 1953.
- [47] M. Gell-Mann and F. E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Physical Review*, 95(5):1300–1312, September 1954.
- [48] G. 't Hooft. Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills fields. *Nuclear Physics B*, 35:167–188, July 1971.
- [49] G. 't Hooft and M. Veltman. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 44:189–213, February 1972.
- [50] G. 't Hooft. Dimensional regularization and the renormalization group. *Nuclear Physics B*, 61:455–468, May 1973.
- [51] C. Becchi, A. Rouet, and R. Stora. Renormalization of gauge theories. *Annals of Physics*, 98:287–321, 1976.
- [52] A. Petermann. Renormalization group and the deep structure of the proton. *Physics Reports*, 53(3):157–248, June 1979.
- [53] J. Collins. The problem of scales: renormalization and all that. *hep-ph/9510276*, 1995.
- [54] D. J. Gross and F. Wilczek. Asymptotically free gauge theories i. *Physical Review D*, 8(10):3633–3652, November 1973.
- [55] I. F. Ginsburg. Über das Verlassen des Bereichs geringer Bindung in den Mesonentheorien mit zwei Kopplungen. *Vorträge der Akademie der Wissenschaft UDSSR*, 110(4):535–538, 1956.
- [56] P. K. Jha and K. C. Tripathy. Symmetries of the renormalization group equations. *Journal of Mathematical Physics*, 33(8):2675–2681, August 1992.
- [57] P. K. Jha and K. C. Tripathy. Symmetries of the renormalization group equations and the scaling law revisited. *Modern Physics Letters A*, 8(32):3017–3023, 1993.
- [58] V. F. Kovalev, V. V. Pustovalov, and D. V. Shirkov. Group analysis and renormgroup symmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 39(2):1170–1188, February 1998.
- [59] P. M. Stevenson. Dimensional analysis in field theory. *Annals on Physics*, 132:383, April 1981.

- [60] K. G. Wilson. Quantum field theory models in less than four dimensions. *Physical Review D*, 7:2911–2926, 1973.
- [61] S. L. Adler. Axial vector vertex in spinor electrodynamics. *Physical Review*, 177:2526–2438, 1969.
- [62] W. Siegel. Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction. *Physics Letters B*, 84:193–202, 1979.
- [63] R. van Damme and G. 't Hooft. Breakdown of unitarity in the dimensional reduction scheme. *Physics Letters B*, 150:133–148, 1985.
- [64] A. N. J. J. Schellekens. *Perturbative QCD and Lepton Pair Production*. PhD thesis, Katholieke Universiteit te Nijmegen, Nijmegen, Netherlands, June 1981.
- [65] S. Weinberg. New approach to the renormalization group. *Physical Review D*, 8:3497–3509, 1973.
- [66] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke, and T. Muta. Deep inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories. *Physical Review D*, 18:3998–4060, 1978.
- [67] M. E. Machacek and M. T. Vaughn. Two loop renormalization group equations in a general quantum field theory. 1. wave function renormalization. *Nuclear Physics B*, 222:83–103, 1983.
- [68] G. 't Hooft. Combinatorics of gauge fields. *Nuclear Physics B*, 50:436–353, 1972.
- [69] B. W. Lee and J. Zinn-Justin. Spontaneously broken gauge symmetries. i. preliminaries. *Physical Review D*, 5(12):3121–3137, June 1972.
- [70] B. W. Lee and J. Zinn-Justin. Spontaneously broken gauge symmetries. ii. perturbation theory and renormalization. *Physical Review D*, 5(12):3137–3155, June 1972.
- [71] B. W. Lee and J. Zinn-Justin. Spontaneously broken gauge symmetries. iii. equivalence. *Physical Review D*, 5(12):3155–3160, June 1972.
- [72] J. Fleischer and F. Jegerlehner. Radiative corrections to Higgs-boson decays in the weinberg-salam model. *Physical Review D*, 23(9):2001–2026, May 1981.
- [73] A. B. Lahanas and K. Tamvakis. Low-energy thresholds and the renormalization group in the MSSM. *Physics Letters B*, 348:451–456, 1995. [hep-ph/9412281].

- [74] B. A. Ovrut and H. J. Schnitzer. Gauge theories with minimal subtraction and the decoupling theorem. *Nuclear Physics B*, 179:381–416, 1981.
- [75] B. A. Ovrut and H. J. Schnitzer. Decoupling theorem for effective field theories. *Physical Review D*, 22(10):2518–2533, November 1981.
- [76] W. I. Weisberger. Renormalization-group-improved matching conditions for decoupling calculations. *Physical Review D*, 24(6):1617–1621, September 1981.
- [77] A. Sirlin and R. Zucchini. Dependence of the Higgs coupling $\bar{h}_{\overline{m_s}}(m)$ on m_h and the possible onset of new physics. *Nuclear Physics B*, 266:389–409, July 1985.
- [78] R. Hempfling and B. A. Kniehl. On the relation between the fermion pole mass and MS Yukawa coupling in the standard model. *Physical Review D*, 51:1386–1394, 1995.
- [79] M. E. Machacek and M. T. Vaughn. Two loop renormalization group equations in a general quantum field theory. 2. Yukawa couplings. *Nuclear Physics B*, 236:221–232, 1984.
- [80] M. E. Machacek and M. T. Vaughn. Two loop renormalization group equations in a general quantum field theory. 3. scalar quartic couplings. *Nuclear Physics B*, 249:70–92, 1985.
- [81] S. P. Martin and M. T. Vaughn. Two loop renormalization group equations for soft supersymmetry breaking couplings. *Physical Review D*, 50(3):2282–2292, August 1994. [hep-ph/9311340].
- [82] P. Ramond. *Journeys Beyond the Standard Model*. Frontiers in Physics. Perseus Press, Cambridge, Massachusetts, 1999.
- [83] S. L. Glashow. Partial symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, 22:579, 1961.
- [84] A. Salam and J. C. Ward. Electromagnetic and weak interactions. *Physics Letters*, 13:168–171, 1964.
- [85] S. Weinberg. A model of leptons. *Physical Review Letters*, 19:1264–1266, 1967.
- [86] J. Louis, I. Brunner, and S. J. Huber. The supersymmetric standard model. *hep-ph/9811341*, pages 1–37, November 1998.
- [87] P. Fayet. Supergauge invariant extension of the Higgs mechanism and a model for the electron and its neutrino. *Nuclear Physics B*, 90:104–124, 1975.

- [88] G. G. Ross. *Grand unified theories*, volume 60 of *Frontiers in Physics*. Benjamin/Cummings, 1984.
- [89] R. N. Mohapatra. *Unification and supersymmetry*. Springer-Verlag, 2 edition, 1992.
- [90] J. Polchinski. *String Theory Volume I: An Introduction to the Bosonic String*, volume I. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [91] J. Polchinski. *String Theory Volume II: Superstrings*, volume II. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [92] M. B. Green and J. H. Schwarz. $n = 4$ Yang-Mills and $n = 8$ supergravity as limits of string theories. *Nuclear Physics B*, 198:474–492, 1982.
- [93] M. Dine, V. Kaplunovsky, M. Mangano, and C. Nappi. Superstring model building. *Nuclear Physics B*, 259:549–571, March 1985.
- [94] J. Sladkowski. The superstring-inspired generalizations of the glashow-weinberg-salam model. *Fortschritte der Physik*, 38(7):477–505, 1990.
- [95] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic. Neutrino masses and mixing in gauge models with spontaneous parity violation. *Physical Review D*, 23:165, 1981.
- [96] K. Huitu and J. Maalampi. The Higgs sector of a supersymmetric left-right model. *Physics Letters B*, 344:217–236, 1995.
- [97] L.-O. Stahlberg. *Sequentielle radiative Symmetriebrechung in links-rechts-symmetrischen Elementarteilchenmodellen*. PhD thesis, Universität zu Kiel, Institut für Theoretische Physik und Astrophysik, Mai 1999.
- [98] E. Cohen, J. Ellis, K. Enqvist, and D. V. Nanopoulos. Experimental predictions from the superstring. *Physics Letters B*, 165(1, 2, 3):76–82, December 1985.
- [99] J. Ellis, K. Enqvist, D. V. Nanopoulos, and F. Zwirner. Aspects of the super-unification of strong electroweak and gravitational interactions. *Nuclear Physics B*, 276:14–70, January 1986.
- [100] N. Nakamura, I. Umemura, and K. Yamamoto. Superstring inspired models and the top quark mass. *Progress of Theoretical Physics*, 79(2):502–518, February 1988.
- [101] J. Hewett and T. G. Rizzo. Low-energy phenomenology of superstring-inspired e_6 models. *Physics Reports*, 183(5, 6):193–381, March 1989.
- [102] E. Ma. New low-energy realization of the superstring-inspired e_6 model. *hep-ph/9601238*, January 1996.

- [103] L. S. Durkin and P. Langacker. Neutral-current constraints on heavy Z bosons. *Physics Letters B*, 166(4):436, 1986.
- [104] G. G. Ross. Fermion mass prediction from infra-red fixed points. *Physics Letters B*, 364:216–226, December 1995. [hep-ph/9507368].
- [105] M. Lanzagorta and G. G. Ross. Infra-red fixed point structure of soft supersymmetric breaking mass terms. *hep-ph/9507366*, July 1995.
- [106] V. Bardenhorst, J. Borgert, and B. Schrempp. Predictions from infra-red attractive fixed manifolds in the soft-breaking sector of the MSSM. *Manuscript in Vorbereitung*, 2000.
- [107] W. Zimmermann. Renormalization group and symmetries in quantum field theory. *XIV. Intern. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics*, pages 1–10, September 1985.
- [108] D. Kapetanakis, M. Mondragon, and C. Zoupanos. Finite unified models. *Zeitschrift für Physik C*, 60:181–186, 1993.
- [109] M. Mondragon and C. Zoupanos. Finite unified theories and the top quark mass. *Nuclear Physics B (Proc. Suppl.)*, 37 C:98–105, 1995.
- [110] J. Kubo. Applications of the reduction of couplings. *hep-ph/9903482*, March 1999.
- [111] J. Kubo, M. Mondragon, and G. Zoupanos. Reduction of couplings and heavy top quark in the minimal SUSY GUT. *Nuclear Physics B*, 424:291–307, 1994.
- [112] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Non-linear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Appl. Math. Sciences*. Springer, New York, 1983.
- [113] P. J. Olver. *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, New York, 1986.
- [114] W. Gröbner and H. Knapp. *Contributions to the method of Lie series*. Bibliographisches Institut - Hochschulschriften, Mannheim, 1967.
- [115] C. G. Callan. Broken scale invariance in scalar field theory. *Physical Review D*, 2(8):1541–1547, October 1970.
- [116] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, Dover, 1982.
- [117] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of mathematical tables*. Dover Publications, Inc., Dover, September 1972.

- [118] N. Goldenfeld. *Lectures on phase transitions and the renormalization group*. Frontiers in Physics. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, June 1992.
- [119] I. Jack and D. R. T. Jones. RG invariant solutions for the soft supersymmetry breaking parameters. *Physics Letters B*, 465:148–154, 1999.
- [120] D. I. Kazakov and D. V. Shirkov. Singular solutions of renormalization group equations and the symmetry of the langrangian. In *Proceedings of Smolenice Conference*, June 1975.
- [121] R. G. Leigh and M. J. Strassler. Exactly marginal operators and duality in four dimensional $n=1$ supersymmetric gauge theory. *hep-th/9503121*, *Nuclear Physics B*, March 1995.
- [122] R. Slansky. Group theory for unified model building. *Physics Reports*, 79(1):1–128, April 1981.
- [123] M. Lindner and M. Weiser. Gauge coupling unification in left-right symmetric models. *Physics Letters B*, 383:405–414, September 1996.
- [124] F. del Aguila, J. A. Gonzales, and M. Quiros. Spreading of gauge coupling constants in minimal LR models. *Physic Letters B*, 201:325–341, 1988.
- [125] E. Akhmedov, M. Lindner, and E. Schnapka. Dynamical lr symmetry breaking. *Physical Review D*, 53:2752–2780, 1996.
- [126] G. Holstermann. Der Einfluss von superstringinspirierten $u(1)$ Eichgruppen auf die infrarotattraktive Fixpunktmasse des Top-Quarks. *Diploma thesis, CAU Kiel, Germany*, 1998.
- [127] F. Gabbiani. Low-energy consequences of superstring-inspired models with intermediate-mass scales. *Il Nuovo Cimento*, 98(1):1–23, July 1987.
- [128] F. Gabbiani. Intermediate mass scales and one-loop correlations in superstring-inspired models. *Nuovo Cimento A*, 99:285, 1988.
- [129] R. N. Cahn. *Semi-simple Liealgebras and their representation*. Advanced Book Program. Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts, 1984.
- [130] P. Appell and J. Kampe de Fariet. *Fonctions hypergeometriques et hyperspheriques et polynomes d' Hermite*. Gauthier-Villars, Paris, August 1926.
- [131] H. Exton. *Multiple hypergeometric functions and applications*. Ellis Horwood ltd., Coll House, England, 1976.
- [132] B. C. Carlson. Lauricella's hypergeometric function f_d . *J. Math. Anal. Appl.*, 7:452–470, 1963.

- [133] Bateman. *Higher transcendental functions*, volume 1. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [134] S. Wolfram. *Das Mathematica Buch*. Addison Wesley, Bonn, Germany, third edition, December 1997.

Danksagungen

Frau Prof. Dr. B. Schrempp danke ich für die ausgezeichnete Betreuung meiner Promotion und die Auswahl des aktuellen und interessanten Themas. Neben den vielen fruchtbaren wissenschaftlichen Diskussionen ist die freundliche und menschliche Atmosphäre in ihrer Arbeitsgruppe hervorzuheben.

Michael Wimmer sei dafür gedankt, daß eine von ihm ausgesprochene Vermutung sich als wichtiger erster Anstoß für die dargestellten Untersuchungen erwies.

Die vielen freundschaftlichen und wissenschaftlichen Diskussionen mit Jörn Borgert, Lorns Stahlberg, Philipp Fleischmann und Martin Hülk und den Mitarbeitern des Instituts für Theoretische Physik und Astrophysik, insbesondere Claus-Henning Solterbeck und Jesper Heide, waren erfreuliche Beiträge.

Meine treuen Lesern Martin Hülk, Anett Jensen und Daniela Fachin gebührt höchster Respekt für ihr Durchhaltevermögen und Dank für ihre vielen wertvollen Hinweise und Kritiken. Für das Übersetzen eines Artikels aus dem Russischen danke ich Friedrich Ungefug und Birgit Katz und für die zur Verfügungstellung von Literatur Herrn Prof. Dr. H. Koppe.

Ohne die Unterstützung meiner Frau und meiner Familie wäre diese Arbeit nicht entstanden. Für ihre Bereitschaft, in manchen Phasen meiner Promotion meine nur sehr eingeschränkte Anwesenheit hinzunehmen, danke ich sehr.

All meinen Freunden sei für die vielen schönen Momente, die auch Voraussetzung für ein fruchtbares Arbeiten sind, gedankt.

Für die Finanzierung meiner Promotion und die begleitende Betreuung bedanke ich mich ausdrücklich bei der Friedrich-Ebert-Stiftung, insbesondere bei Herrn Adalbert Schlag.

Lebenslauf

Name: Volker Bardenhorst
Geburtsdatum: 24. Oktober 1969
Geburtsort: Bad Bentheim
Staatsangehörigkeit: deutsch
Familienstand: verheiratet
Wohnort: Vennweg 20a
48529 Nordhorn

Vater: Bernhard Bardenhorst
geb. 18. Januar 1937
Pensionär

Mutter: Henderika Bardenhorst,
geborene Bütergerds
geb. 22. Oktober 1939
Rentnerin

August 1976 - Mai 1980 Grundschule Gildehaus
August 1980 - Mai 1989 Missionsgymnasium
St. Antonius Bardel

10. Mai 1989 Allgemeine Hochschulreife
Juni 1989 - August 1991 Zeitsoldat bei der
Bundeswehr

Oktober 1991 - Dezember 1996 Physikstudium an der CAU Kiel
in 10 Semestern
Diplom bei Prof. Dr. K. O. Thielheim
am Institut für Reine und
Angewandte Kernphysik,
Thema der Diplomarbeit:
*Die Herleitung der Lorentz-Dirac-Gleichung
aus der Quantenelektrodynamik*

Mai 1997 Beginn der Promotion am Institut
für Astrophysik und Theoretische Physik,
gefördert durch die
Friedrich-Ebert-Stiftung

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides Statt, daß die Dissertation – abgesehen von der Beratung durch meine akademische Lehrerin Frau Prof. Dr. Schrempp – nach Inhalt und Form meine eigene Arbeit ist.

Diese Arbeit hat weder ganz noch zum Teil in einem früheren Prüfungsverfahren vorgelegen und ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden.

Frühere Promotionsversuche sind von mir nicht vorgenommen worden.

Volker Bardenhorst