

Portfoliooptimierung unter Transaktionskosten

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von

Jörn Saß

Kiel

2001

Referent: Prof. Dr. A. Irle
Korreferent: Prof. Dr. U Rösler
Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 2001
Zum Druck genehmigt: 25. Juli 2001

Der Dekan

Für

Maria und Kolya

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Zusammenfassung	7
1.2	Abstract	8
1.3	Inhaltsübersicht	9
1.4	Danksagung	15
1.5	η , π und R	16
2	Methoden und Resultate der Portfoliotheorie	19
2.1	Überblick	19
2.2	Handel im Black-Scholes-Modell	20
2.3	Nutzenfunktionen und Optimierungsaufgaben	21
2.4	Portfoliooptimierung ohne Transaktionskosten	24
2.5	Berücksichtigung von Transaktionskosten	29
2.6	Proportionale Transaktionskosten	32
2.7	Fixe Transaktionskosten	34
2.8	Konstante und proportionale Kosten	35
2.9	Vergleich der Transaktionskostenmodelle	38
3	In einer Periode	41
3.1	Überblick	41
3.2	Handel unter Transaktionskosten	42
3.3	Arbitragefreiheit und Martingalmaß	51
3.4	Die Optimierungsaufgabe	55
3.5	Optimierung ohne Transaktionskosten	58

3.6	Optimaler Kauf und Verkauf	59
3.7	Existenz einer optimalen Aktion	64
3.8	Handelsbereiche	65
3.9	Spezielle Transaktionskosten	76
4	Im Binomialmodell	81
4.1	Überblick	81
4.2	Handel im Binomialmodell	82
4.3	Optimierungsaufgaben	89
4.4	Markovsch kontrollierte Prozesse	92
4.5	Das Binomialmodell als Kontrollmodell	102
4.6	Optimierung ohne Transaktionskosten	105
4.7	Optimierung unter Transaktionskosten	111
4.8	Asymptotische Rendite unter Transaktionskosten	121
5	Fixe und proportionale Transaktionskosten	127
5.1	Überblick	127
5.2	Diffusionsprozesse und ihre Erzeuger	129
5.3	Wertentwicklung ohne Handel	132
5.4	Transaktionen	137
5.5	Handelsart und neuer Wertanteil	145
5.6	Die asymptotische Rendite	152
5.7	Ein Problem des optimalen Stoppens	171
5.8	Optimale Kontrollstrategien	176
5.9	Beispiele	187
	Literaturverzeichnis	199

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Zusammenfassung

Die Portfoliotheorie versucht, in Finanzmarktmodellen Anlagestrategien zu bestimmen, die zu einer optimalen Entwicklung eines Portfolios führen. Ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten vermag die moderne Portfoliotheorie im Black-Scholes-Modell für eine große Klasse von Nutzenfunktionen befriedigende Antworten zu geben.

Zur Berücksichtigung von Transaktionskosten wurden in den 90er Jahren zahlreiche technisch sehr ausgereifte Arbeiten veröffentlicht, in denen die Transaktionskosten auf drei unterschiedliche Arten modelliert werden: proportional zum Handelsvolumen (proportionale Kosten), proportional zum Portfoliowert (fixe Kosten) oder bestehend aus einer konstanten Komponente und proportionalen Kosten (konstante und proportionale Kosten).

Alle drei Ansätze führen zu Strategien, die aufgrund der jeweiligen Kostenstruktur plausibel sind. Allerdings sind die Ergebnisse aus Sicht der Anwendung unbefriedigend, da entweder die vorausgesetzte Kostenstruktur unrealistisch ist oder die resultierenden optimalen Strategien als nicht praktikabel erscheinen bzw. nicht bestimmt werden können.

Nach einem Überblick über den Stand der Forschung beginnen wir unsere Untersuchungen für den logarithmischen Nutzen mit der Analyse einer allgemeinen Transaktionskostenstruktur im Einperioden-Binomialmodell. Wegen seiner einfachen Gestalt ist das Modell gut geeignet, eine Intuition für die komplexeren Modelle zu erwerben.

Anschließend zeigen wir im Binomialmodell, dass durch die Einführung einer neuen Kontrollstruktur eine Faktorisierung des Wertprozesses möglich ist. Diese Darstellung ist wesentlich, um unter logarithmischen Nutzen zu einer additiven Darstellung zu gelangen. Auf diesem Wege ist eine Einbettung in die Theorie der markovsch kontrollierten Prozesse in diskreter Zeit möglich, so dass deren Resultate zur Verfügung stehen. Ohne Transaktionskosten können wir mehrere klassische Optimierungsproble-

me explizit lösen. Unter der Berücksichtigung von Transaktionskosten geben wir einige Existenzresultate und sind im Fall fixer und proportionaler Kosten in der Lage, einen Algorithmus zu formulieren, der den Algorithmus der dynamischen Programmierung deutlich verbessert.

Schließlich wenden wir uns im letzten Kapitel der Maximierung der asymptotischen Rendite im Black-Scholes-Modell unter fixen und proportionalen Kosten zu. Mit einer der Faktorisierung im Binomialmodell entsprechenden Zerlegung des Wertprozesses gelingt es uns in einer geeigneten Menge von Kontrollstrategien, das Problem unter Ausnutzung erneuerungstheoretischer Resultate auf eine Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten zu reduzieren.

Das Resultat erweitert das Ergebnis von Morton und Pliska (1995) für rein fixe Kosten auf die Kombination von fixen und proportionalen Kosten. Der wesentliche Unterschied ist, dass wir die neuen Wertanteile nach einem Verkauf und nach einem Kauf unterscheiden müssen und deshalb gleichzeitig mit der Lösung des resultierenden Stoppproblems eine zu optimierende Anfangsverteilung zu betrachten haben.

1.2 Abstract

Generally speaking, portfolio optimization is the determination of investment strategies that lead to an optimal development of the portfolio value achieving optimization within the scope of mathematically defined criteria, in particular by use of specific utility functions. In the nineties, numerous technically very elaborate papers dealing with transaction costs were published in which the transaction costs are defined in three different ways: Proportionally to volume of trade (proportional costs), proportionally to portfolio value (fixed costs) or consisting of a constant component and proportional costs (constant plus proportional costs).

All approaches lead to plausible optimal strategies in view of the used transaction costs. But the results are not satisfying in so far as either the transaction cost structure seems to be unrealistic or the optimal strategies are not practicable and hardly determinable. Consequently, our goal is to derive optimal strategies for utility functions with clear interpretation - we limit to logarithmic utility - in an eventually restricted class of strategies with suitable transaction costs.

First, we analyze the CRR model in one period, i.e. only a deterministically interest-bearing bond and a stock whose value increases by a certain amount with probability p and decreases with probability $(1-p)$. We introduce a general cost structure containing the transaction cost models described above. Because of the simple structure, this model can be analyzed in a fairly complete way. It also provides insight in what may be expected in more complex models

In the CRR model we are able to derive a factorization of the wealth process for general transaction costs. Hence we are able to embed our model in the theory of Markov

controlled processes in discrete time. We solve some classical optimization problems without transaction costs. For the case that transaction costs are considered we prove several existence results and we construct under extensive use of various properties of the optimal control strategy an efficient algorithm for fixed and proportional costs that clearly improves the algorithm of dynamic programming.

Finally, we turn to the objective of maximizing the asymptotic growth rate in the continuous-time Black-Scholes model under fixed and proportional costs. As in the CRR model we are able to prove a factorization of the wealth process. Using this factorization and renewal theory arguments we can reduce the problem of maximizing the asymptotic growth rate in a suitable class of control strategies to a period between two trading times.

This result extends the results achieved by Morton and Pliska (1995) for fixed costs to combined fixed and proportional costs. The main difference is that we have to distinguish the new proportion of wealth after selling from the proportion of wealth after buying and hence the maximization has to be carried out over an initial distribution.

1.3 Inhaltsübersicht

Eine Portfolio bezeichnet eine Zusammenstellung verschiedener Finanzgüter. Die Portfoliotheorie versucht, in Finanzmarktmodellen Anlagestrategien zu bestimmen, die zu einer optimalen Entwicklung eines Portfolios führen.

Unter einer Strategie verstehen wir hier einfach eine Beschreibung der Portfoliozusammensetzung, die einer Investorin eine Handlungsanweisung gibt, sei es durch Angabe der zu haltenden Werte in den einzelnen Finanzgütern, sei es einfach durch Angabe ihrer Stückzahl, durch den Portfoliogesamtwert und die Wertanteile oder auch in Form von Aktionszeitpunkten und Handelsvolumen.

Eine optimale Entwicklung kann zum Beispiel über die Maximierung des erwarteten Nutzens des Portfoliowertes zu einem Endzeitpunkt, über die Maximierung der asymptotischen Rendite, über die Maximierung der diskontierten durch Nutzenfunktionen bewerteten Auszahlungen oder durch eine Kombination dieser Kriterien definiert sein.

So wie wir es gerade getan haben, werden wir abkürzend stets von *einer Investorin* sprechen, anstatt länglich 'ein Investor oder eine Investorin' zu schreiben.

Stand der Forschung

Wir geben in Kapitel 2 einen Überblick über die Methoden und einige Resultate der Portfoliotheorie im Black-Scholes-Modell. Dieses umfasst als Finanzgüter einen Bond mit deterministischer Verzinsung und eine Aktie, deren Wertentwicklung einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Ohne Transaktionskosten ist in diesem Modell

für eine große Klasse von Nutzenfunktionen die explizite Angabe optimaler Strategien möglich.

Zur Berücksichtigung von Transaktionskosten wurden in den 90er Jahren zahlreiche technisch sehr ausgereifte Arbeiten veröffentlicht, in denen die Transaktionskosten auf drei unterschiedliche Arten modelliert werden: proportional zum Handelsvolumen, proportional zum Portfoliowert oder bestehend aus einer konstanten Komponente und proportionalen Kosten.

Wir stellen in den Abschnitten 2.5 bis 2.8 die grundlegenden Arbeiten zu den verschiedenen Kostenarten vor und geben hier nur einen kurzen Überblick.

Der naheliegendste und früheste Ansatz nimmt proportionale Kosten an, d.h. bei jedem Handel ist ein Betrag proportional zum gehandelten Volumen zu zahlen. Die optimale Strategie kann durch einen Kegel in der Wertebene beschrieben werden. Im Inneren dieses Kegels wird nicht gehandelt und bei Erreichen des Randes wird gerade so infinitesimal klein gehandelt, dass der Kegel nicht verlassen wird. Bei dem optimalen Wertprozess handelt es sich daher um einen an den Rändern des Kegels reflektierten Diffusionsprozess, dessen erster theoretischer Nachweis Davis und Norman (1990) gelingt. Das Ergebnis ist mathematisch ansprechend, erscheint aus Anwendersicht aber wenig praktikabel.

Während beim ersten Ansatz nur die Höhe des Handelsvolumens geahndet wird, bestraft der Ansatz fixer Transaktionskosten die Häufigkeit des Handels, indem bei jedem Kauf oder Verkauf ein fester Prozentsatz des Gesamtportfoliowertes zu zahlen ist. Durch diese einfache Kostenstruktur zerfällt der Wertprozess multiplikativ – unter dem Logarithmus additiv – und das Problem lässt sich auf ein Problem des optimalen Stoppens zurückführen. Zur Lösung der Aufgabe der Maximierung der asymptotischen Rendite können Morton und Pliska (1995) auch einen Kegel in der Wertebene bestimmen, in dessen Innerem nicht gehandelt wird. Bei Erreichen des Randes wird jetzt aber so gehandelt, dass sich der neue Startpunkt in der Nähe des optimalen Wertanteils ohne Transaktionskosten befindet. Die Grenzen des Kegels sind numerisch bestimmbar, so dass sich eine gut zu praktizierende Strategie ergibt. Allerdings leidet dieser Ansatz der fixen Kosten an der unrealen Kostenstruktur und führt zu langen handelsfreien Zeiten.

Von dem Ansatz der Kosten her erscheint eine Kombination aus einem festen Betrag für eine Transaktion und proportionalen Kosten für das Transaktionsvolumen realen Kostenstrukturen recht nahe zu kommen. Hier geben Eastham und Hastings (1988) sowie Korn (1998) unter Benutzung von Methoden der sogenannten Impuls-Kontroll-Theorie den Nachweis der Existenz von Lösungen, können sie aber nur für linearen Nutzen bzw. approximativ unter Benutzung einer exponentiellen Nutzenfunktion bestimmen. Gerade diese Nutzenfunktionen führen zu sehr schlecht interpretierbaren Ergebnissen. Die Lösungen zeigen aber, dass als ein weiteres Strukturelement hinzukommt, dass es nicht optimal zu sein scheint, nach einem Verkauf und nach einem Kauf mit demselben Wertanteil neu zu starten: Nach einem Verkauf liegt vielmehr der op-

timale neue Startpunkt oberhalb des optimalen Wertanteils ohne Transaktionskosten und für einen Kauf unterhalb.

Alle drei Ansätze führen also zu Strategien, die aufgrund der jeweiligen Kostenstruktur plausibel sind. Im Fall proportionaler Kosten ist die resultierende Strategie aber nicht praktikabel, im Fall fixer Kosten ist dagegen die Kostenstruktur unrealistisch und beim Ansatz konstanter plus proportionaler Kosten scheint eine Bestimmung einer optimalen Strategie für gut interpretierbare Nutzenfunktionen aufgrund der Struktur des Problems kaum möglich zu sein.

Zielsetzung

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass alle Ergebnisse zu Transaktionskosten vom Standpunkt der Interpretation oder der Anwendung unbefriedigend sind und somit in der praktischen Anwendung als kaum nutzbar erscheinen.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, die bestehenden Forschungsergebnisse so zu ergänzen, dass einem Investor, der Transaktionskosten ausgesetzt ist, in der Portfoliotheorie begründete gute Strategien angeboten werden können.

Dabei halten wir eine Strategie für einen Investor für gut, wenn sie sich aus einem für den Investor nachvollziehbaren Optimierungskriterium ergibt, die vorausgesetzte Kostenstruktur in etwa der Struktur realer Kosten entspricht und die Strategie zumindest approximativ berechenbar ist.

Ansatz

Als gut interpretierbare und handhabbare Nutzenfunktion werden wir den Logarithmus wählen, unter dem die Optimierungsaufgaben auch als Maximierung der Rendite der Anlage gedeutet werden können. Die wesentlichen Resultate werden wir für die Kombination von fixen und proportionalen Kosten erhalten. Für diese Kostenkombination liegen unseres Wissens noch keine Resultate vor.

Diese Kostenstruktur verbessert den Ansatz rein fixer Kosten hinsichtlich der Interpretation, da auch die Höhe des Handelsvolumens bestraft wird und der fixe Kostenanteil sehr klein gewählt werden kann. Dieser Anteil garantiert, dass andererseits keine so schwer zu praktizierende Strategie wie bei rein proportionalen Kosten resultiert. Im Vergleich zu der Kombination von proportionalen und konstanten Kosten liegt der Vorteil darin, dass durch die einfachere Kostenstruktur eine optimale Strategie für den logarithmischen Nutzen eher bestimmbar zu sein scheint.

Die vorliegenden Arbeiten zeigen, dass sich zur Einführung von Transaktionskosten die Unterscheidung von Wertprozess im Bond und Wertprozess in der Aktie anbietet. Andererseits bietet sich aber ohne Transaktionskosten und bei den einfachen fixen

Kosten auch die Betrachtung des Wertanteilprozesses an, um die Resultate einfacher zu erhalten und zu beschreiben.

Wir werden in Definition 3.2.2 Transaktionskosten in einer Form einführen, die als Spezialfälle die drei bisher üblichen Modellierungen proportionaler, fixer und konstanter Kostenanteile umfaßt, aber auch Spielraum für andere Kostenstrukturen läßt.

Für diese führen wir im Einperioden-Binomialmodell (Kapitel 3), im Binomialmodell (Kapitel 4) und im Black-Scholes-Modell (nur fixe und proportionale Kosten, Kapitel 5) jeweils bei Unterscheidung des Bond- und des Aktienwertprozesses die Kontrolle der Wertentwicklung durch die Wahl des Transaktionsvolumens in den Handelszeitpunkten ein.

Von diesem üblichen und natürlichen Ansatz ausgehend zeigen wir anschliessend jeweils, dass bei Beschreibung der Kontrolle durch die sogenannte Handelsart (Kauf, Halten, Verkauf) und die Wahl des neuen Wertanteils der Aktien eine Faktorisierung des Gesamtwertprozesses erreicht werden kann. Das bedeutet, dass sich der Wert in einem Handelszeitpunkt als Produkt des Wertes zum letzten Handelszeitpunkt und des Wertzuwachses zwischen den Handelszeitpunkten ergibt. So läßt sich induktiv der Wert als Produkt des Startwertes und der Wertzuwächse in den Handelsperioden darstellen.

Auf diese Weise gelangen wir in allen Modellen bei Verwendung des logarithmischen Nutzens zu einer gut behandelbaren additiven Darstellung. Im Einzelnen können wir in den verschiedenen Modellen Folgendes nachweisen.

In einer Periode

Das Ein-Perioden-Binomialmodell beschreibt die Kursentwicklung eines Bonds (oder Verzinsung eines Kontos) und einer Aktie mit der denkbar einfachsten stochastischen Entwicklung: Mit Wahrscheinlichkeit p steigt der Kurs in der betrachteten Periode und mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ fällt der Kurs. Gerade wegen dieser einfachen Struktur ist das Modell gut geeignet, sich mit den wichtigen Begriffsbildungen vertraut zu machen und eine gute Intuition zu erwerben, welche Gestalt der Lösung wir bei den entsprechenden Optimierungsaufgaben in komplexeren Modellen zu erwarten haben.

In Abschnitt 3.2 werden wir, nachdem wir den Handel bei Transaktionskosten in natürlicher Weise durch Angabe der Transaktionen eingeführt haben, zeigen, wie eine neue Formulierung über Angabe der Handelsart (Kauf, Halten oder Verkauf) und des neuen Wertanteils nach der Transaktion möglich ist. Diese Begriffsbildung ermöglicht zum einen eine sehr prägnante Darstellung der Ergebnisse, zum anderen gelangen wir aber auch zu einigen Resultaten, die von sich aus von Interesse sind.

So werden wir in Theorem 3.6.2 zeigen, dass es bei gegebener Verkauf oder Kaufentscheidung optimal ist, so zu handeln, dass ein ganz bestimmter Wertanteil $\hat{\eta}_{-1}$ bzw. $\hat{\eta}_{+1}$ erreicht wird. Dieser Wertanteil hängt dabei nur von den Parametern des Modells

und den proportionalen Transaktionskosten ab und ist somit unabhängig von dem Kapital und dem Wertanteil in den Aktien, mit dem gestartet wird.

Nach einer Existenzaussage in Satz 3.7.2 werden wir in Abschnitt 3.8 die Bereiche charakterisieren, in denen jeweils eine der Handelsarten optimal ist. Dabei wird sich in Theorem 3.8.5 und den Sätzen 3.8.6 und 3.8.8 zeigen, dass auch für die allgemeinen Transaktionskosten sehr genaue Strukturaussagen über diese Verkauf-, Halten- und Kaufbereiche getroffen werden können. In Abschnitt 3.9 fassen wir diese Resultate für rein proportionale Kosten, für fixe Kosten und für konstante Kosten jeweils zusammen. Die dort zu erkennende Struktur entspricht den Aussagen in kontinuierlicher Zeit der oben angesprochenen Arbeiten.

Binomialmodell

Wir werden unsere Betrachtungen in Kapitel 4 auf das sogenannte CRR-Modell oder Binoialmodell ausdehnen, in dem über mehrere Perioden gehandelt wird.

Wir beginnen in 4.2 mit der Einführung des Modells und der Motivation der Begriffe der Handelsart und des Wertanteils. Hier ist der neue Zugang wesentlich, um eine Einbettung in die Theorie der markovsch kontrollierten Prozesse zu erreichen und deren Ergebnisse nutzen zu können. In 4.4 geben wir einen kurzen Überblick über die von uns benötigten Definitionen und Resultate dieser Theorie.

In Abschnitt 4.6 werden wir mehrere klassische Optimierungsaufgaben für den Fall lösen, dass keine Transaktionskosten vorliegen. Unter Transaktionskosten scheinen keine expliziten Lösungen mehr möglich zu sein. Wir formulieren in 4.7 Existenzresultate und geben für fixe und proportionale Kosten bei endlichem Zeithorizont einen sehr effizienten Algorithmus zur Bestimmung einer optimalen Kontrollstrategie an.

Zum Abschluss stellen wir in Abschnitt 4.8 im Vorgriff auf das folgende Kapitel 5 einen Ansatz vor, wie eine gute Handelsstrategie für das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite gefunden werden kann. Dieser Zugang basiert nicht mehr auf den Resultaten der Theorie der markovsch kontrollierten Prozesse, sondern benötigt für die wesentlichen Aussagen erneuerungstheoretische Argumente.

Fixe und proportionale Kosten im Black-Scholes-Modell

In Kapitel 5 werden wir im Black-Scholes-Modell das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite bei Vorliegen von fixen und proportionalen Transaktionskosten untersuchen. Wesentlich für die Rückführung auf ein Problem des optimalen Stoppens mit linearen Kosten bei fixen Kosten ist in Morton und Pliska (1995), dass aufgrund der einfachen Kosten der Wertprozess in den Handelszeitpunkten sich als Produkt der Wertzuwächse zwischen den Handelszeitpunkten darstellen lässt, was bei Verwendung des Logarithmus zu einer gut behandelbaren additiven Darstellung führt.

Ohne eine gründliche Untersuchung ist nicht erkennbar, ob solch eine Faktorisierung auch bei der zusätzlichen Berücksichtigung von proportionalen Transaktionskosten möglich ist.

Wie im Binomialmodell können wir zeigen, dass uns die Einführung von Handelsart und neuem Wertanteil solch eine Darstellung ermöglicht.

Das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite ist insofern schwierig, als dass es kein Resultat gibt, das die Existenz einer optimalen stationären Kontrollstrategie in unserer Situation sichern würde. Wir geben in 5.6 einige Referenzen an. Deshalb werden wir gewisse Stationaritätsannahmen an die Kontrollstrategie stellen, wie es Morton und Pliska (1995) implizit auch getan haben, wobei in unserer Situation die neuen Wertanteile η_{-1} nach einem Verkauf und η_{+1} nach einem Kauf zu unterscheiden sind. Betrachten wir von diesen Kontrollstrategien nur solche, in deren Handelszeitpunkten nur gekauft oder verkauft wird (d.h. kein Halten der Aktien stattfindet), so gelangen wir zu der Klasse der Handelsstrategien.

Für diese lässt sich dann zeigen, dass eine regenerative Struktur vorliegt, die zu einer Reduktion des Problems auf eine Periode zwischen zwei Verkäufen führt (Theorem 5.6.13). Unter Ausnutzung des invarianten Maßes der eingebetteten Markovkette der Handelsarten (siehe Satz 5.6.8) lässt sich diese Darstellung auf eine einzige Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten zurückführen, wenn wir als Startverteilung das invariante Maß verwenden. Dieses Theorem 5.6.14 ist das wichtigste neue Resultat in diesem Kapitel.

Unter seiner Ausnutzung lässt sich in der Klasse der Handelsstrategien mit festen Stoppgrenzen numerisch sehr leicht die optimale asymptotische Rendite und eine optimale Handelsstrategie bestimmen, siehe Theorem 5.8.3.

Zur Untersuchung der Frage, ob eine optimale Handelsstrategie in der Klasse der stark stationären Kontrollstrategien konstante Stoppgrenzen π_{-1} und π_{+1} hat, unternehmen wir in 5.7 einen Exkurs in die Theorie des optimalen Stoppens bei linearen Kosten. Anschliessend können wir in 5.8 einen Verifikationsatz angeben, unter dem das auftretende optimale Stoppproblem zu konstanten Stoppgrenzen führt. Der Nachweis, dass dies immer gilt, ist aber schwer zu erbringen.

Wir beenden den theoretischen Teil mit Theorem 5.8.10, das uns garantiert, dass bei Existenz einer optimalen Handelsstrategie diese auch eine mit konstanten Stoppgrenzen sein muss, so dass eine Maximierung nach Theorem 5.8.3 in vier Parametern $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}$ und π_{+1} möglich ist. Abschließend folgen in Abschnitt 5.9 verschiedene Beispiele.

Da die Maximierung numerisch gut handhabbar ist, liegt in einer Menge gut interpretierbarer Strategien ein Verfahren vor, die optimale Handelsstrategie in einfacher Weise zu bestimmen.

1.4 Danksagung

Ganz besonders möchte ich Herrn Prof. Dr. A. Irle für die gute Betreuung, das Vertrauen, die Geduld und für die zahlreichen Anregungen danken. Außerdem freue ich mich, dass er sich so früh der stochastischen Finanzmathematik zuwandte und mir es somit ermöglichte, mich mit dieser interessanten Themenstellung auseinanderzusetzen.

Allen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Stochastik an der Universität Kiel danke ich für die gute Arbeitsatmosphäre und die zahlreichen Einblicke in die Stochastik, die ich durch sie in den letzten Jahren erwerben durfte.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Frau und meinem Sohn, ohne deren Motivation, Geduld und Unterstützung diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

1.5 η , π und R

Aufgrund der Untersuchungen in den drei verschiedenen Modellen und der Komplexität der Begriffsbildung, sind die Bezeichnungen in dieser Arbeit leider nicht immer ganz zu trennen, wobei sich in den Bezeichnungsweisen im Wesentlichen aber nur Überschneidungen mit den Überblickskapiteln 2, 4.4, 5.2 ergeben.

Zur Referenz geben wir in diesem Abschnitt eine Auswahl der speziell in dieser Arbeit verwendeten Bezeichnungen wieder.

Wertanteil vor dem Handel

π_0	Wertanteil der Aktien bei Handelsbeginn 5.3.2
$\pi(n)$	Wertanteil zum Zeitpunkt n (vor dem Handel), 4.3.2 und S. 90
$\tilde{\pi}(n)$	Wertanteilprozess ohne Handel zur Zeit n , 4.8.1
π_n	Neuer Wertanteil im Handelszeitpunkt τ_n , 5.4.4
$\pi(t)$	Wertanteil zur Zeit t (vor einem Handel), 5.4.4, 5.5.1
$\tilde{\pi}(t)$	Wertanteilprozess ohne Handel zur Zeit t , 5.3.2
π_{-1}, π_{+1}	Konstante Stoppgrenzen, 5.8.5 und S. 122
$\hat{\pi}_{-1}, \hat{\pi}_{+1}$	Grenzen des Verkauf- und Kaufbereiches, 3.8.3
π_{-1}^*, π_{+1}^*	Optimale konstante Stoppgrenzen, 5.8.3, 5.8.5

Neuer Wertanteil nach dem Handel

η, η_n	Neuer Wertanteil, im Handelszeitpunkt n bzw. τ_n , 3.4.1, S. 89, 5.5.1
η_0	Wertanteil zu Handelsbeginn, 5.5.1
η_{opt}	Optimaler Wertanteil ohne Transaktionskosten, 2.4.6
$\hat{\eta}$	Optimaler Wertanteil ohne Transaktionskosten, 3.5.1
$\hat{\eta}_{-1}, \hat{\eta}_{+1}$	Optimaler Wertanteil nach Verkauf bzw. Kauf, 3.6.3
$\eta_{-1,k}, \eta_{+1,k}$	Optimaler Wertanteil nach Verkauf bzw. Kauf, 4.7.3
η_{-1}, η_{+1}	Wertanteil nach Verkauf bzw. Kauf, 5.6.4 und S. 122
η_{-1}^*, η_{+1}^*	Optimaler Wertanteil nach Verkauf bzw. Kauf, 5.8.3

Die asymptotische Rendite (AR)

R	Opimale AR, S. 4.3.3
R_{opt}	Optimale AR ohne Transaktionskosten, 2.4.6
R^*	Optimale AR in \mathcal{Z} , 5.6.1
R_s^*	Optimale AR in \mathcal{Z}_s , 5.6.4
R_{sc}^*	Optimale AR in \mathcal{H}_c , 5.8.2
$R^{(\tau, A, \eta)}$	AR der Kontrollstrategie (τ, A, η) , 5.6.1
$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)}$	AR der Kontrollstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ aus \mathcal{Z}_s , 5.6.4
$f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$	Zu maximierende Funktion zur Bestimmung der AR der Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$, 5.8.2

Einige weitere Bezeichnungen

a, A_n	Handelsart, 3.4.1, S. 89, 5.5.1
$\mathcal{A}, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_{-1}, \mathcal{A}_{+1}$	Zulässige Aktionen, zulässige neue Wertanteile, 3.4.1
$\mathcal{A}^o, \mathcal{A}^+$	Zulässige Aktionen, 4.2.9, 4.3.1, 5.5.3
\mathcal{A}_c	Wertanteile, denen Handelstrategie in \mathcal{H}_c entspricht, 5.8.2
B_n	Neuer Wert im Bond in τ_n , 5.4.2
$B(n), B(t)$	Bondkurse, 3.2.1, 4.2.1, S. 133
C	Konstanter Kostenanteil, S. 44
γ	Proportionaler Kostenanteil, 3.2.2, S. 82, 5.4.2
Γ	Wertabhängiger Kostenanteil, 3.2.2, S. 82
$\mathcal{D}, \mathcal{D}_{-1}, \mathcal{D}_{+1}$	Zulässige Transaktionen, 3.2.4
\mathcal{D}^o	Zulässige Transaktionen, 4.2.5, 5.4.5
Δ, Δ_n	Transaktionen zur Handelszeit n bzw. τ_n , S. 43, 4.2.2, 5.4.2
δ	Fixe Kosten, S. 44, 5.4.2
\mathcal{E}	Mögliche neue Wertanteile, 3.4.1
f_a, f_η, f_Δ	Siehe 3.2.6, 4.2.7, 5.4.6, 5.5.5
g	Wertzuwachs, 5.6.6
g, g_0, g_N	Anfangswert, Auszahlungsfunktionen, S. 103
\tilde{g}	Auszahlungsfunktion im Stoppproblem, S. 179
\mathcal{H}	Handelsstrategien, 5.6.9
\mathcal{H}_c	Handelsstrategien mit konstanten Stoppgrenzen, 5.8.2
M_0, M_{-1}, M_{+1}	Verkauf-, Halten- und Kaufbereich, 3.8.1
p	Wahrscheinlichkeit für wachsenden Kurs, 3.2.1, 4.2.1
$p_{--}, p_{-+}, p_{+-}, p_{++}$	Übergangswahrscheinlichkeiten, 5.6.8, 4.8.3
p_{-1}, p_{+1}	Invariantes Maß, 5.6.8, 4.8.3
q	Parameter des Martingalmaßes, 3.3.3
q_{-1}, q_{+1}	Parameter der Martingalmaße bei Verkauf bzw. Kauf, 3.3.3
S_n	Neuer Wert in der Aktie in τ_n , 138
$S(n), S(t)$	Aktienkurse, 3.2.1, 4.2.1, S. 133
ν	Invariantes Maß, 5.6.11
τ_n	Handelszeitpunkt, 5.4.1
$X, X(n), X(t)$	Endwert, Wert zur Zeit n, t , 3.2.4, 4.2.2, S. 90, 5.4.4, 5.5.1
X_n	Neuer Gesamtwert, 5.4.4, 5.5.1
$X_B(n), X_B(t)$	Wert im Bond zur Zeit n bzw. t , 4.2.2, 5.4.2
$X_S(n), X_S(t)$	Wert in der Aktie zur Zeit n bzw. t , 4.2.2, 5.4.2
$\tilde{X}(n), \tilde{X}(t)$	Wert ohne Handel bis n bzw. t , 4.8.2, 5.3.2
\mathcal{X}_0	Erlaubte Startwerte, 3.2.2
Y, Y_n	Kurssprung der Aktie, 3.2.1, 4.2.1
\mathcal{Z}	Zulässige Kontrollstrategien, 5.5.3
\mathcal{Z}_s	Stark stationäre Kontrollstrategien, 5.6.4

Kapitel 2

Methoden und Resultate der Portfoliotheorie

2.1 Überblick

In diesem Kapitel wollen wir einen kurzen Überblick über die grundsätzlichen Methoden der Portfoliotheorie geben sowie kurz die historische Entwicklung und den aktuellen Stand der Forschung bei der Berücksichtigung von Transaktionskosten aufzeigen.

Um eine einheitliche Darstellung zu gewährleisten, beschränken wir uns auf das Black-Scholes-Modell mit konstanten Koeffizienten. Dieses und die Modellierung des Handels ohne Transaktionskosten führen wir im folgenden Abschnitt ein. Anschliessend erläutern wir in 2.3 den Begriff der Nutzenfunktion und stellen einige typische Optimierungsaufgaben vor. In Abschnitt 2.4 gehen wir nach einem kurzen historischen Überblick auf die Methoden der punktwweisen Maximierung, der stochastischen Kontrolltheorie und auf die Martingalmethode ein. Am Ende des Abschnitts werden wir einige Lösungen für konstante Koeffizienten und verschiedene Nutzenfunktionen angeben. Diese resultieren bei logarithmischen und isoelastischen Nutzen in der sogenannten Merton-Linie, die veranschaulicht, dass ein optimaler Wertanteilprozess einem konstanten Wertanteil identisch ist.

Den Wertanteil der Aktien konstant zu halten erfordert aber zeitstetiges Handeln und ist daher bei der Einführung von Transaktionskosten so nicht mehr möglich, da diese Strategie zum sofortiger Ruin führte. Das macht die Notwendigkeit deutlich, Modelle mit Transaktionskosten zu untersuchen. Es gibt im wesentlichen drei Modellierungsansätze. In 2.5 geben wir wieder einen knappen Überblick über die historische Entwicklung und gehen auf den aktuellen Stand der Forschung ein. Anschließend stellen wir die drei Modellierungsansätze und die sich ergebenden Resultate detaillierter dar.

2.2 Handel im Black-Scholes-Modell

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) , ein Standard-Wiener-Prozess $(W(t))_{t \geq 0}$ unter P , und es bezeichne $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ die von $(W(t))_{t \geq 0}$ erzeugte rechtsseitig stetige und vervollständigte Filtration.

Zu Parametern $r > 0$ (Zinsrate), $s_0 > 0$ (Anfangskurs), $\mu \in \mathbb{R}$ (Trend) und $\sigma > 0$ (Volatilität) werden der Kurs $(B(t))_{t \geq 0}$ eines Bonds mit Zinsrate r und der Kurs einer Aktie $(S(t))_{t \geq 0}$ mit Trend μ und Volatilität σ wie folgt eingeführt. Ihre Dynamik ist gegeben durch

$$dB(t) = B(t) r dt, \quad B(0) = 1,$$

und

$$dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad S(0) = s_0,$$

d.h. es sind für $t \geq 0$

$$B(t) = e^{rt}$$

und

$$S(t) = s_0 e^{\mu t} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Wir werden der Übersichtlichkeit halber *konstante* Koeffizienten μ und σ verwenden, wie wir sie hier eingeführt haben. Bei der Vorstellung der Resultate werden wir auf mögliche Verallgemeinerungen für *deterministische* und *stochastische* Koeffizienten hinweisen. Dabei können deterministische Koeffizienten zusätzlich eine Zeitabhängigkeit aufweisen und stochastische Koeffizienten als adaptierte stochastische Prozesse gegeben sein.

Der Handel einer Investorin wird beschrieben durch

- das Startkapital $x > 0$,
- den Portfolioprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$, der angibt, welchen Wertanteil die zur Zeit t gehaltenen Aktien ausmachen,
- und einen Konsumprozess $(c(t))_{t \geq 0}$, der die Rate angibt, mit der dem Portfolio Wert entzogen wird.

An diese Prozesse sind je nach Optimierungsaufgabe unterschiedliche Anforderungen modelltheoretischer und technischer Art zu stellen, auf die wir in diesem Überblickskapitel in der Regel nicht eingehen werden. Wesentlich ist die Forderung, dass diese Prozesse adaptiert zu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ sein müssen, d.h. dass nur die zum jeweiligen Zeitpunkt vorliegenden Informationen aus der Kursentwicklung für eine Entscheidung heranzuziehen sind.

Der zugehörige Wertprozess ohne Transaktionskosten ist zum Startkapital x durch folgende stochastische Differentialgleichung gegeben

$$\begin{aligned} X(0) &= x, \\ dX(t) &= ((1-\pi(t))X(t)r - c(t))dt + \pi(t)X(t)(\mu dt + \sigma dW(t)). \end{aligned}$$

Mit P_x bezeichnen wir das Wahrscheinlichkeitsmaß unter der Bedingung $X(0) = x$, d.h. es sei $P_x = P(\cdot | X(0) = x)$, und mit E_x den Erwartungswert unter P_x . Die unter geeigneten Bedingungen eindeutig bestimmte Lösung mit stetigen Pfaden bezeichnen wir mit $X^{\pi,c}$. Für $c \equiv 0$ lautet sie unter P_x

$$X^{\pi,0}(t) = x \exp \left[\int_0^t \left(r + \pi(s)(\mu - r) - \frac{1}{2}(\pi(s)\sigma)^2 \right) ds + \int_0^t \pi(s) \sigma dW(s) \right].$$

Ferner bezeichnen

$$X_B(t) = (1 - \pi(t))X(t) \quad \text{und} \quad X_S(t) = \pi(t)X(t).$$

den in den Bond bzw. in die Aktie investierten Wert.

2.3 Nutzenfunktionen und Optimierungsaufgaben

Je nach Optimierungsaufgabe können nur bestimmte Wertanteil- und Konsumprozesse zugelassen werden. So werden wir zum Beispiel bei der Verwendung des Logarithmus des Wertes darauf zu achten haben, dass der Wertprozess auch immer strikt positiv ist. Hinzu kommen Messbarkeits-, Integrierbarkeits- und Beschränktheitsbedingungen. Wir wollen diese in diesem Übersichtskapitel nicht alle aufführen, sondern sprechen kurz von *zulässigen* Wertanteil- und Konsumprozessen und verweisen für die Einzelheiten auf die angegebenen Referenzen.

Wir wollen uns jetzt den Optimierungsaufgaben zuwenden. Eine nicht sehr sinnvolle Problemstellung ist die Maximierung von

$$E_x [X^\pi(T)] \quad \text{über alle zulässigen} \quad (\pi(t))_{t \geq 0}.$$

Denn die Maximierung des erwarteten Endwertes führt konsequenterweise zur Auswahl desjenigen Finanzgutes mit der höchsten erwarteten Auszahlung, so dass das Risiko solch einer Anlage unberücksichtigt bleibt. Deshalb wird eine sogenannte Nutzenfunktion eingeführt, die eine Bewertung des ausgezahlten Wertes liefert.

Definition 2.3.1

Eine Abbildung $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Intervall $D_U \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion*, falls sie im Inneren von D_U zweimal stetig differenzierbar ist, $\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0$ gilt und sie streng monoton wachsend und strikt konkav ist.

$U(x)$ wird als Nutzen einer Auszahlung x interpretiert: Die strenge Monotonie besagt, dass eine größere Auszahlung auch einen größeren Nutzen hat. Aus der Konkavität folgt für alle $x > 0$

$$U(x+1) - U(x) < U(1) - U(0),$$

d.h. jede weitere Einheit hat einen geringeren Nutzen als die erste Einheit.

Beispiel 2.3.2

Häufig verwendete Nutzenfunktionen sind beispielsweise

(i) der *logarithmische Nutzen*

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

(ii) zu $\gamma \in (0, 1)$ der *isoelastische Nutzen* (oder die *Power-Utility*)

$$U_\gamma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \frac{x^\gamma}{\gamma},$$

(iii) und zu $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$ der *exponentielle Nutzen*

$$U_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \alpha - e^{-\beta x}.$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass diese Funktionen die Bedingungen aus Definition 2.3.1 erfüllen.

Für bestimmte Probleme lassen sich günstige Klassen von Nutzenfunktionen einführen, so dass die Aufgabe für die ganze Klasse lösbar ist; verwiesen sei zum Beispiel auf die sogenannten *HARA-Nutzenfunktionen*, die als Spezialfälle den logarithmischen und den isoelastischen Nutzen umfassen.

2.3.3 Prinzip vom erwarteten Nutzen

Hat eine Investorin die Wahl zwischen einer risikofreien, d.i. deterministischen, Auszahlung x und einer risikoreichen, modelliert durch eine Zufallsvariable X , so wird angenommen, dass sie den erwarteten Nutzen vergleicht, d.h. gilt $U(x) = E[U(X)]$, so ist sie unentschlossen, ist $U(x) > E[U(X)]$, so zieht sie die risikofreie Anlage vor, und im Fall $U(x) < E[U(X)]$ die risikoreiche.

Eine große Bedeutung kommt dem erwarteten logarithmischen Nutzen zu, da er zum einen als erwartete Rendite interpretiert werden kann und die Lösungen der im Folgenden vorgestellten Optimierungsaufgaben häufig eine ansprechende Gestalt besitzen. Letzteres trifft auch auf den isoelastischen Nutzen zu.

Unangenehm erscheint bei diesen Nutzenfunktionen aber der eingeschränkte Definitionsbereich. Dazu sei angemerkt, dass die Möglichkeit besteht, nur solche Wertprozesse mit strikt positivem Wert zuzulassen oder sich wie folgt zu behelfen:

Bemerkung 2.3.4

Eine Nutzenfunktion $U : (d_U, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ kann vermöge

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \inf \{ x > d_U \mid U(x) > -\infty \} \\ U(\bar{x}) &= U(\bar{x}+) \quad \text{und} \quad U(x) = -\infty \text{ für } x < \bar{x}\end{aligned}$$

als Funktion von \mathbb{R} nach $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ aufgefasst werden, wobei die Eigenschaften aus Definition 2.3.1 auf $\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \bar{x} \}$ erhalten bleiben.

2.3.5 Klassische Optimierungsaufgaben

Sei U eine Nutzenfunktion. Unter der *Aufgabe der Portfoliooptimierung* verstehen wir die Maximierung des erwarteten Nutzens des Endwertes oder/und des diskontierten Konsums und die Angabe einer optimalen Strategie.

Eine *optimale Strategie* sei dabei eine Handlungsanweisung zur Erreichung des maximalen erwarteten Nutzens, zum Beispiel durch Angabe der in 2.2 eingeführten Wertanteil- und Konsumprozesse $(\pi(t))_{t \geq 0}$ und $(c(t))_{t \geq 0}$ oder durch Angabe einer Folge von Handelszeiten mit den zugehörigen Käufen und Verkäufen.

Ohne die erforderlichen Zulässigkeitsbedingungen zu präzisieren, geben wir im folgenden einige sinnvolle Optimierungsprobleme an. Im ersten Kriterium bezeichnet $t \mapsto U(t, \cdot)$ eine zeitabhängige Nutzenfunktion.

- Optimierung des Konsums und des Endwertes

$$J_T(x) = \sup_{(\pi(t), c(t))_{t \in [0, T]}} \mathbb{E}_x \left[\int_0^T U(t, c(t)) dt + U(X^{\pi, c}(T)) \right]$$

- Optimierung der asymptotischen Rendite

$$R = \sup_{(\pi(t))_{t \geq 0}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}_1 [\log(X^\pi(T))]}{T}$$

- Optimierung der Konsumrate zur Diskontierungsrate $\alpha \in (0, 1)$

$$V_\alpha(x) = \sup_{(\pi(t), c(t))_{t \geq 0}} \mathbb{E}_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} U(c(t)) dt \right]$$

Dabei sind wir an der Bestimmung der *optimalen Werte* J_T, R, V_α und mehr noch an der Gestalt optimaler Strategien interessiert, die durch die Wertanteil- und Konsumprozesse gegeben sind, unter denen der optimale Wert erreicht wird.

2.4 Portfoliooptimierung ohne Transaktionskosten

2.4.1 Zur Geschichte

Die moderne Portfoliotheorie in zeitstetigen Modellen beginnt mit der Arbeit von Merton (1969), in der er im Black-Scholes-Modell mit konstanten Koeffizienten mit den Methoden der stochastischen Kontrolltheorie das Problem der Wahl eines optimalen Portfolios unter verschiedenen Nutzenfunktionen löst. Dabei ist im Fall einer Aktie unter logarithmischen oder isoelastischen Nutzen so zu handeln, dass die Paare aus dem im Bond und dem in die Aktie investierten Wert auf einer Geraden in der Wertebene liegen, die ihm zu Ehren Merton-Linie genannt wird.

Harrison und Kreps (1979) sowie Harrison und Pliska (1981, 1983) stellen in ihren Arbeiten die Bedeutung der Martingalthorie in Mehrperioden-Modellen bzw. in zeitstetigen Modellen heraus. Die sich daraus entwickelnde Martingalmethode zur Portfoliooptimierung in vollständigen Märkten ermöglicht auch für Preisprozesse mit stochastischen Koeffizienten für eine große Klasse von Nutzenfunktionen die Bestimmung des optimalen Portfoliowertes und den Nachweis der Existenz optimaler Strategien, siehe zum Beispiel Karatzas, Lehoczky und Shreve (1987). Eine Angabe dieser Strategien ist allerdings nur in Modellen mit deterministischen Koeffizienten explizit möglich. Für eine umfassende Darstellung der Entwicklung der Portfoliooptimierung verweisen wir auf Karatzas und Shreve (1998, Seiten 153-158, 318-321).

Wir stellen im Folgenden die Lösungsansätze der punktweisen Maximierung, der stochastischen Kontrolltheorie und die Martingalmethode kurz vor.

2.4.2 Punktweise Maximierung

Bei konstanten Koeffizienten ist das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite leicht lösbar. Wir erinnern daran, dass

$$dX(t) = X(t) \left((r + \pi(t)(\mu - r))dt + \pi(t)\sigma dW(t) \right)$$

und somit unter P_x

$$X(t) = x \exp \left(\int_0^t r + \pi(s)(\mu - r) - \frac{1}{2}(\pi(s)\sigma)^2 ds + \int_0^t \pi(s)\sigma dW(s) \right)$$

gilt. Zu maximieren ist also bei Start in x

$$\begin{aligned} & E_x [\log(X(T))] \\ &= \log(x) + E_x \left[\int_0^T r + \pi(t)(\mu - r) - \frac{1}{2}(\pi(t)\sigma)^2 dt + \int_0^T \pi(t)\sigma dW(t) \right] \\ &= \log(x) + E_x \left[\int_0^T r + \pi(t)(\mu - r) - \frac{1}{2}(\pi(t)\sigma)^2 dt \right], \end{aligned}$$

falls π so gewählt wird, dass $(\int_0^t \pi(s)\sigma dW(s))_t$ nicht nur ein lokales Martingal, sondern sogar ein Martingal ist.

Als *Prinzip der punktweisen Maximierung* formulieren wir: Wenn der Wertanteilprozess $(\pi^*(t))_{t \in [0, T]}$ so gewählt wird, dass zu jedem $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ der Wert $\pi^*(t, \omega)$ den Integranden maximiert und $(\pi^*(t))_{t \in [0, T]}$ die geforderten Eigenschaften besitzt, so maximiert $(\pi^*(t))_{t \in [0, T]}$ den Nutzen des Endwertes und damit auch die asymptotische Rendite.

Hier ist einfach

$$\pi \mapsto r + \pi(\mu - r) - \frac{1}{2}\pi^2\sigma^2$$

zu maximieren, so dass sich als optimale Lösung der konstante Wertanteilprozess

$$\pi^*(t) = \hat{\eta}, \quad t \geq 0 \quad \text{für} \quad \hat{\eta} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

ergibt. Für $\mu > r$ und $\mu - r < \sigma^2$ liegt dieser zwischen 0 und 1. Da er konstant ist, bildet $(\int_0^t \pi(s)\sigma dW(s))_t$ wie gefordert auch ein Martingal unter P_x . Die optimale asymptotische Rendite bestimmt sich zu

$$\begin{aligned} R_{opt} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} [\log(X(T))] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T r + \hat{\eta}(\mu - r) - \frac{1}{2}(\hat{\eta}\pi^*\sigma)^2 dt \right) \\ &= r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Die Berechnung zeigt, dass dieser Ansatz nur für deterministische Koeffizienten und ganz spezielle Optimierungsaufgaben geeignet ist, in denen die Nutzenfunktion auf die Struktur der Aufgabe zugeschnitten ist.

2.4.3 Stochastische Kontrolltheorie

Die Untersuchung komplexerer Probleme lässt der Ansatz der stochastischen Kontrolltheorie zu. Diese erfordert eine markovsche Struktur, in der Regel also deterministische Koeffizienten, führt dann aber für eine große Klasse von Nutzenfunktionen zu expliziten Lösungen. Die systematische Anwendung der stochastischen Kontrolltheorie durch Merton (1969) auf Probleme der Portfoliooptimierung im Black-Scholes-Modell mit konstanten Koeffizienten sehen wir als Beginn der modernen Portfoliotheorie zeitsteiger Prozesse.

Gesucht sind für $\alpha \in (0, 1)$ Kontrollen $\pi(t)$ (Wertanteil der Aktien) und $c(t)$ (Konsumrate), $t \in [0, T]$, des Markov-Prozesses $(X^{\pi, c}(t))_{t \in [0, T]}$, die zum Beispiel bei endlichem Zeithorizont eine optimale Lösung von

$$J_T(x) = \sup_{(\pi(t), c(t))_{t \in [0, T]}} \mathbb{E}_x \left[\int_0^T e^{-\alpha t} U(c(t)) dt + U(X^{\pi, c}(T)) \right]$$

bilden. Sei

$$V(t, x) = \sup_{(\pi(s), c(s))_{s \in [t, T]}} \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\alpha s} U(c(s)) ds + U(X^{x, \pi, c}(T)) \right].$$

Das Bellmann-Prinzip besagt

$$V(t, x) = \sup_{(\pi(s), c(s))_{s \in [t, u]}} \mathbb{E}_x \left[\int_t^u e^{-\alpha s} U(c(s)) ds + V(u, X^{\pi, c}(u)) \right].$$

Die Ito-Formel und ein Grenzübergang liefern die Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB)-Gleichung

$$\begin{aligned} \sup_{\pi, c} \left[\frac{1}{2} (x \pi \sigma)^2 V_{xx}(t, x) + \left((1 - \pi)xr + \pi x \mu - c \right) V_x(t, x) \right. \\ \left. + V_t(t, x) - r V(t, x) + U(c) \right] = 0, \\ \text{wobei } V(T, X) = U(x), \quad V(t, 0) = U(0). \end{aligned}$$

Die Lösung des Maximierungsproblems in der HJB-Gleichung liefert π, c in Abhängigkeit von V_t, V_x, V_{xx} . Einsetzen dieser Lösung liefert eine Differentialgleichung für V .

Zum Nachweis, dass die so bestimmte Lösung tatsächlich optimal ist, sind sogenannte Verifikationssätze notwendig, deren Voraussetzungen nur sehr aufwendig zu überprüfen sind.

Sollte das aber möglich sein, so folgt $J_T(x) = V(0, x)$.

2.4.4 Martingalmethode

Einen eleganteren Zugang zur Portfoliooptimierung liefert die Martingalmethode. Sie nutzt aus, dass in vollständigen Märkten jede Auszahlung, die gewissen Integrierbarkeitsbedingungen genügt, durch eine zulässige Strategie auch erreicht werden kann. Somit lässt sich das Optimierungsproblem in zwei Schritte aufteilen. Im ersten wird eine Auszahlung mit optimalem erwarteten Nutzen unter der Nebenbedingung bestimmt, dass die unter dem sogenannten äquivalenten Martingalmaß bzw. der entsprechenden Martingaldichte erwartete diskontierte Auszahlung nicht das Startkapital übersteigt. Dann folgt die Existenz einer optimalen Strategie zu diesem Startkapital aus einem sogenannten Repräsentationssatz, im Einzelnen:

Zu maximieren sei

$$\sup_{(\pi(t), c(t))_{t \in [0, T]}} \mathbb{E}_x \left[\int_0^T U(t, c(t)) dt + U(X^{\pi, c}(T)) \right].$$

Es bezeichne

$$\vartheta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

und

$$Z(t) = \exp[-\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t], \quad t \geq 0,$$

die Martingaldichte. Die Nützlichkeit der Methode beruht im Wesentlichen auf dem folgenden Resultat (siehe zum Beispiel Karatzas und Shreve (1998), Theorem 3.5).

Repräsentationssatz

Sei $x > 0$. Zu einem Konsumprozess $(c(t))_{t \in [0, T]}$ und einer \mathcal{F}_T -messbarer Zufallsvariablen Y mit

$$\mathbb{E}_x \left[\int_0^T e^{-rt} Z(t) c(t) dt + e^{-rT} Z(T) Y \right] = x$$

existiert unter P_x ein Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \in [0, T]}$ mit

$$X^{\pi, c}(T) = Y.$$

Damit ergibt sich zur Optimierung des Endwertes das folgende Verfahren, das als *Martingalmethode* bekannt ist.

- (1) Zu Startkapital x bestimme Y als Lösung von

$$\sup_{Y \mathcal{F}_T\text{-mb.}} \mathbb{E}_x [U(Y)] \quad \text{unter} \quad \mathbb{E}_x [e^{-rT} Z(T) Y] \leq x.$$

- (2) Der Repräsentationssatz liefert einen Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \in [0, T]}$ mit

$$P_x(X^\pi(T) = Y) = 1.$$

Wollen wir nur den Endwert maximieren, d.h. zu maximieren sei

$$\sup_{(\pi(t))_{t \in [0, T]}} \mathbb{E}_x [U(X^\pi(T))],$$

so vereinfacht sich die Methode wie folgt. Zu

$$\vartheta = \frac{\mu - r}{\sigma}, \quad Z(T) = \exp[-\vartheta W(T) - \frac{1}{2}\vartheta^2 T].$$

sei das Wahrscheinlichkeitsmaß Q gegeben durch

$$Q(A) = \mathbb{E} [1_A Z(T)], \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

Der Repräsentationssatz liefert dann wieder zu einer \mathcal{F}_T -messbaren Zufallsvariablen Y mit $\mathbb{E}_{Q_x} [e^{-rT} Y] = x$ einen Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \in [0, T]}$ mit $X^\pi(T) = Y$ unter P_x .

Damit ergibt sich der folgende Ansatz:

(1) Zu Startkapital x bestimme Y als Lösung von

$$\sup_{Y \mathcal{F}_T\text{-mb.}} E_x [U(Y)] \quad \text{unter} \quad E_{Q_x} [e^{-rT}Y] \leq x.$$

(2) Der Repräsentationssatz liefert $(\pi(t))_{t \in [0, T]}$ mit $P_x(X^\pi(T) = Y) = 1$.

Die Martingalmethode liefert die Existenz einer Lösung auch in recht allgemeinen Modellen mit stochastischen Koeffizienten, also auch bei nicht-markovscher Entwicklung. Allerdings ist eine explizite Angabe des optimalen Wertanteilprozesses dann kaum noch möglich.

2.4.5 Resultate bei konstanten Koeffizienten

Die hier angegebenen Ergebnisse haben wir für die asymptotische Rendite bereits in 2.4.2 bestimmt. Für die anderen Optimierungsprobleme finden sie sich in den zitierten Arbeiten oder lassen sich aus den allgemeinen Lösungen in Karatzas und Shreve (1998, Kapitel 3) herleiten.

Es bezeichne weiterhin

$$\vartheta = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

und

$$Z(t) = \exp(-\vartheta W(t) - \frac{1}{2}\vartheta^2 t), \quad t \geq 0.$$

Im Black-Scholes-Modell gelten bei konstanten Koeffizienten

- Für logarithmischen Nutzen wird der optimale Nutzen J_T erreicht durch

$$\pi(t) = \frac{\mu - r}{\sigma^2} = \frac{\vartheta}{\sigma} \quad \text{und} \quad c(t) = \frac{1}{T+1} \frac{x e^{rt}}{Z(t)}$$

bei optimalem Wertprozess

$$X(t) = \frac{T+1-t}{T+1} \frac{x e^{rt}}{Z(t)}.$$

- Der optimale Wert der asymptotischen Rendite wird für logarithmischen Nutzen erreicht durch

$$\pi(t) = \frac{\vartheta}{\sigma} \quad \text{und beträgt} \quad R = r + \frac{1}{2}\vartheta^2.$$

- Die optimale Konsumrate zu V_α , $\alpha \in (0, 1)$, ist für logarithmischen Nutzen gegeben durch

$$c(t) = \alpha X(t), \quad \text{wiederum bei} \quad \pi(t) = \frac{\vartheta}{\sigma}$$

und für isoelastischen Nutzen $x \mapsto \frac{x^\gamma}{\gamma}$ durch

$$c(t) = \left(\frac{\alpha - \gamma r}{1 - \gamma} - \frac{\gamma, \vartheta^2}{2(1 - \gamma)^2} \right) X(t) \quad \text{bei} \quad \pi(t) = \frac{\vartheta}{(1 - \alpha)\sigma}.$$

Dass ein konstanter Wertanteilprozess optimal ist, ist charakteristisch für den logarithmischen und isoelastischen Nutzen.

2.4.6 Definition

Wir nennen fortan

$$\eta_{opt} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad \text{und} \quad R_{opt} = r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2}$$

den *optimalen Wertanteil* bzw. die *optimale asymptotische Rendite ohne Transaktionskosten* (bei logarithmischen Nutzen).

2.4.7 Die Merton-Linie

In 2.4.5 haben wir gesehen, dass für $U = \log$ der optimale Wertanteilprozess stets durch

$$\pi^*(t) = \eta_{opt}, \quad t \geq 0, \quad \eta_{opt} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} = \frac{\vartheta}{\sigma},$$

gegeben ist. Also gilt für den im Bond und in den Aktien investierten Wert

$$X_B(t) = (1 - \pi(t))X(t) \quad \text{und} \quad X_S(t) = \pi(t)X(t)$$

für die optimale Wertentwicklung

$$X_S(t) = \frac{\eta_{opt}}{1 - \eta_{opt}} X_B(t), \quad t \geq 0,$$

d.h. für alle $t \geq 0$ liegt das optimale Wertepaar $(X_S(t), X_B(t))$ auf der Ursprunggeraden mit Steigung $\frac{\eta_{opt}}{1 - \eta_{opt}}$. Diese wird Merton zu Ehren heute als *Merton-Linie* bezeichnet.

2.5 Berücksichtigung von Transaktionskosten

2.5.1 Notwendigkeit von Transaktionskostenmodellen

Die moderne Portfoliotheorie vermag es also, im Black-Scholes-Modell ohne Transaktionskosten umfassende Antworten zu geben. Die optimale Lösung bei logarithmischen

Nutzen, wie sie bildlich in 2.4.7 in der Merton-Linie zum Ausdruck kommt, ist wegen ihrer einfachen Gestalt mathematisch sehr ansprechend.

Allerdings bedeutet ein konstanter Wertanteilprozess, dass zeitstetiges Handeln erforderlich ist. Da der Aktienkurs Pfade von nicht beschränkter Variation hat, ist auch der notwendige Handel von nicht beschränkter Variation, so dass nicht zu erwarten ist, dass diese Strategie noch optimal ist, falls die Investorin für ihren Handel Transaktionskosten zu zahlen hat.

Diese beiden Punkte, der zeitstetige Handel und der sofortige Ruin bei Berücksichtigung von Transaktionskosten, führen dazu, dass solch eine Strategie praktisch nicht durchführbar ist. Dies liefert die Motivation, Modelle mit Transaktionskosten zu untersuchen, in denen Strategien ganz anderer Struktur zu erwarten sind.

2.5.2 Arten von Transaktionskosten

In der Literatur werden drei unterschiedliche Arten von Transaktionskosten und deren Kombinationen betrachtet. Die Terminologie ist nicht immer ganz einheitlich.

Fallen Transaktionskosten proportional zum Handelsvolumen an, so bezeichnen wir diese als *proportionale* Kosten. Werden die Gebühren bei einem Kauf oder Verkauf proportional zum Gesamtwert des Portfolios erhoben, so sprechen wir von *fixen* Transaktionskosten. Ist bei einer Transaktion ein konstanter Betrag zu zahlen, so bezeichnen wir die anfallenden Kosten als *konstant*.

2.5.3 Stand der Forschung

Der naheliegendste und früheste Ansatz nimmt proportionale Kosten an, d.h. bei jedem Handel ist ein Betrag proportional zum gehandelten Volumen zu zahlen. Die optimale Strategie, deren Gestalt in Magill und Constantinides (1976) bereits vermuten, kann durch einen Kegel in der Wertebene beschrieben werden, der die Merton-Linie umfasst. Im Inneren dieses Kegels wird nicht gehandelt und bei Erreichen des Randes wird gerade so infinitesimal klein gehandelt, dass der Kegel nicht verlassen wird. Bei dem optimalen Wertprozess handelt es sich um einen an den Rändern des Kegels reflektierten Diffusionsprozess. Ein erster theoretischer Nachweis gelingt Davis und Norman (1990). Shreve und Soner (1994) können die restriktiven Bedingungen von Davis und Norman abschwächen und führen den Nachweis rigoros, indem sie zeigen, dass der vermutete optimale Wertprozess eine Viskositäts-Lösung der auftretenden Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung liefert. Das Verhalten an den Rändern scheint aus Anwendersicht aber vollkommen unreal und dürfte somit kaum zu beobachten sein.

Während beim ersten Ansatz nur die Höhe des Handelsvolumens geahndet wird, bestraft der Ansatz fixer Transaktionskosten die Häufigkeit des Handels, in dem bei jedem Kauf oder Verkauf ein fester Prozentsatz des Gesamtportfoliowertes zu zahlen

ist. Durch diese einfache Kostenstruktur zerfällt der Wertprozess multiplikativ, und das Problem lässt sich unter dem Logarithmus auf ein Problem des optimalen Stoppens in einer Handelsperiode zurückführen. Zur Lösung der Aufgabe der Maximierung der asymptotischen Rendite können Morton und Pliska (1995) auch einen Kegel in der Wertebene bestimmen, in dessen Innerem nicht gehandelt wird. Bei Erreichen des Randes wird jetzt aber so gehandelt, dass sich der neue Startpunkt in der Nähe der Merton-Linie im Inneren des Kegels befindet. Die Grenzen des Kegels sind numerisch bestimmbar, so dass sich eine gut zu praktizierende Strategie ergibt. Außerdem geben in einer Folgearbeit Atkinson und Wilmott (1995) ein Verfahren an, wie sich die optimale Strategie approximativ sehr gut bestimmen lässt, so dass sich auch für Portfolios aus vielen Aktien gute numerische Ergebnisse erzielen lassen. Allerdings leidet dieser Ansatz der fixen Kosten an der unrealen Kostenstruktur und führt zu langen handelsfreien Zeiten.

Von dem Ansatz der Kosten her erscheint eine Kombination aus einem festen Betrag für einen Handel und proportionalen Kosten für das Handelsvolumen realen Kostenstrukturen recht nahe zu kommen. Hier geben Eastham und Hastings (1988) sowie Korn (1998) unter Benutzung von Methoden der sogenannten Impuls-Kontroll-Theorie den Nachweis der Existenz von Lösungen, können sie aber nur für linearen Nutzen bzw. approximativ unter Benutzung einer exponentiellen Nutzenfunktion bestimmen. Aufgrund pathologischer Eigenschaften des linearen und des exponentiellen Nutzens bei der Bewertung von Auszahlungen sind die sich ergebenden Strategien praktisch nicht verwertbar. Doch es bleibt die Einsicht, dass es optimal zu sein scheint, bei Erreichen einer Stoppgrenze mit strikt positivem Handelsvolumen zu handeln, aber nicht ganz bis auf die Kurve des optimalen Handels ohne Transaktionskosten zurückzuhandeln.

Zur Anwendung der Martingalmethode sei erwähnt, dass die Einführung von Transaktionskosten zu unvollständigen Märkten führt, die Martingalmethode also nicht ohne weiteres anwendbar ist. Allerdings haben He und Pearson (1991) in einem diskreten Mehr-Perioden-Modell gezeigt, dass sich dort ein bestimmtes Martingalmaß auswählen lässt, unter dem die Martingalmethode den optimalen Wert liefert. Cvitanic und Karatzas (1996) übertragen Resultate zum Hedging in unvollständigen Märkten auf das Problem proportionaler Transaktionskosten und erhalten so im Black-Scholes-Modell mit konstanten Koeffizienten mit Hilfe von Martingalmethoden die Existenz einer optimalen Strategie.

In den folgenden Abschnitten werden wir genauer auf die Ansätze zur Behandlung der verschiedenen Transaktionskostenarten eingehen. Dabei werden wir noch weitere aktuelle Arbeiten angeben, die die hier beschriebenen ergänzen.

2.6 Proportionale Transaktionskosten

Wir folgen bei der Darstellung in diesem Abschnitt den Arbeiten von Davis und Norman (1990), Shreve und Soner (1994) und dem Überblick in Korn (1997).

Betrachtet werden Kosten der Form

$$\lambda \cdot \text{Kaufvolumen} + \nu \cdot \text{Verkaufvolumen}, \quad \lambda, \nu \in (0, 1).$$

Seien $L(t)$ und $N(t)$ die kumulierten Werte der Aktienkäufe bzw. -verkäufe bis zur Zeit t . Als Wertentwicklung im Bond und in der Aktie ist dann anzusetzen,

$$dX_B(t) = (X_B(t)r - c(t))dt - (1 + \lambda)dL(t) + (1 - \nu)dN(t)$$

$$dX_S(t) = X_S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) + dL(t) - dN(t).$$

Für $(L(t))_{t \geq 0}$ und $(N(t))_{t \geq 0}$ wird eine Gestalt der Form

$$L(t) = \int_0^t l(s) ds, \quad N(t) = \int_0^t n(s) ds, \quad \text{wobei } l(t), n(t) \geq 0$$

angenommen, um einen Ansatz für eine Lösung zu haben und den stochastischen Differentialgleichungen einen Sinn zu geben. Weiter darf der Prozess $(X_B(t), X_S(t))_{t \geq 0}$ den sogenannten Solvenzbereich

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + (1 - \nu)y \geq 0, x + (1 + \lambda)y \geq 0 \}$$

nicht verlassen. Bestimmt werden soll zu $\alpha \in (0, 1)$

$$V(x, y) = \sup_{(l(t), n(t), c(t))_{t \geq 0}} \mathbb{E}_{(x, y)} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} U(c(t)) dt \right]$$

Unter der Annahme einer markovschen Entwicklung ist das Bellmann-Prinzip

$$V(x, y) = \sup_{(l(t), n(t), c(t))_{t \in [0, \tau]}} \mathbb{E}_{(x, y)} \left[\int_0^\tau e^{-\alpha s} U(c(s)) ds + e^{-\alpha \tau} V(X_B(\tau), X_S(\tau)) \right]$$

für eine Stoppzeit τ und daraus unter Benutzung der Ito-Formel für V und eines Grenzüberganges folgende Hamilton-Jacobi-Bellmann (HJB)-Gleichung ableitbar.

$$\begin{aligned} \sup_{c, l, n} & \left[\frac{1}{2} y^2 \sigma^2 V_{yy} + (x r - c) V_x + \mu y V_y + U(c) \right. \\ & \left. + (V_y - (1 + \lambda) V_x) l + ((1 - \nu) V_x - V_y) n - \alpha V \right] = 0. \end{aligned}$$

Von c, l, n wird gefordert:

$$c \geq 0, \quad 0 \leq l, n \leq \kappa,$$

wobei κ die maximale Handelsrate bezeichne, deren Existenz auch angenommen werden muss. Das Allgemeine Vorgehen zur Bestimmung von V ist, zuerst durch Lösen des Maximierungsproblems in der HJB-Gleichung

$$c, l, n \quad \text{in Abhängigkeit von} \quad V, V_x, V_y, V_{yy}$$

zu bestimmen und dann diese Lösungen wieder einzusetzen, um danach die resultierende partielle Differentialgleichung zu lösen. In Abhängigkeit von V ist die Maximalösung hier von der Gestalt

$$\begin{aligned} c &= (U')^{-1}(V_x), \\ l &= \kappa 1_{\{V_y \geq (1+\lambda)V_x\}}, \\ n &= \kappa 1_{\{V_y \leq (1-\nu)V_x\}}. \end{aligned}$$

Um eine genauere Bestimmung zu ermöglichen, sind weitere Eigenschaften von V auszunutzen. Es kann zum Beispiel gezeigt werden, dass V konkav ist und die folgende Homogenitätseigenschaft erfüllt:

$$V(\lambda x, \lambda y) = U'(\lambda)V(x, y) \text{ für } \lambda > 0, \quad \text{analog für } V_x, V_y.$$

Gilt $V_y = (1 + \lambda)V_x$ in (x, y) , so gilt dies somit auf dem ganzen Strahl - beginnend in 0. Dadurch erfolgt die Trennung des Solvenzgebietes in Kauf-, Halten- und Verkauf-Bereich.

Zu zeigen bleibt:

- Es gibt nur zwei dieser Strahlen, die den Solvenzgebiet trennen.
- Zu gegebenen Bereichen existieren eindeutig bestimmte Prozesse L, N der Gestalt

$$\begin{aligned} L(t) &= \int_0^t 1_{\{(X_B(s), X_S(s)) \in \partial \text{Kaufbereich}\}}(s) dL(s) \\ N(t) &= \int_0^t 1_{\{(X_B(s), X_S(s)) \in \partial \text{Verkaufbereich}\}}(s) dN(s) \end{aligned}$$

so dass die stochastischen Differentialgleichungen für X_B, X_S erfüllt sind.

- Es ist ein Verifikationssatz zu beweisen, der garantiert, dass eine Lösung unter den zahlreichen gemachten Annahmen auch noch optimal für das ursprüngliche Problem wäre.
- Schließlich ist noch ein Existenzsatz nachzuweisen, der aussagt, dass die Annahmen des Verifikationssatzes auch erfüllbar sind.

Shreve und Soner (1994) führen den Nachweis rigoros, indem sie zeigen, dass der vermutete optimale Wertprozess eine Viskositäts-Lösung der auftretenden Hamilton-Jacobi-Bellmann-Gleichung liefert. Der optimale Wertprozess $(X_B(t), X_S(t))_{t \geq 0}$ hat die Gestalt eines an den Rändern des oben motivierten Kegels reflektierten Diffusionsprozesses.

Im Vergleich zur zusätzlichen Berücksichtigung von konstanten Kosten, müssen die proportionalen Kosten noch als gut behandelbar angesehen werden.

So gibt es auch zahlreiche aktuelle Arbeiten zu proportionalen Transaktionskosten. Wir erwähnten bereits die Arbeit von Cvitanic und Karatzas (1996), in der mit einem Martingalansatz unter anderem eine Aussage über die Existenz einer optimalen Strategie bei proportionalen Transaktionskosten erfolgt. Benth, Karlsen und Reikvam (2000) betrachten die Auswirkung proportionaler Transaktionskosten für Levy-Prozesse. Akian, Sulem und Taksar (2000) bestimmen numerisch die optimale asymptotische Rendite als Grenzwert der optimalen Werte einer Folge von Diskontierungsproblemen.

2.7 Fixe Transaktionskosten

Wir orientieren uns an der Arbeit von Morton und Pliska (1995) und deren Zusammenfassung in Korn (1997) und Schneider (1999).

Betrachtet werden jetzt fixe Kosten, d.h. zu einem Handelszeitpunkt fallen Kosten der Form

$$\delta \cdot \text{Portfoliogesamtwert}, \quad \delta \in (0, 1)$$

an. Gesucht ist eine Folge $(\tau_n, \pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von

Stoppzeiten $\tau_1 < \tau_2 < \dots$ (Handelszeitpunkte) und von

Wertanteilen π_1, π_2, \dots in $(0, 1)$ (neue Wertanteile nach der Aktion),

die

$$R = \sup_{(\tau_n, \pi_n)_{n \in \mathbb{N}}} \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} [\log(X^{(\tau, \pi)}(T))]}{T}$$

erreicht. Dabei ist der Wertprozess $(X^{(\tau, \pi)}(t))_{t \geq 0}$ bestimmt dadurch, dass in einem Handelszeitpunkt τ_n der Wert um den Faktor $1 - \delta$ fällt und mit einem neuen Wertanteil π_n der Aktien gestartet wird. Zwischen diesen Handelszeitpunkten folgt die Wertentwicklung einem Wertprozess ohne Handel, d.h. der Anteil im Bond verzinst sich mit Zinsrate r und der Anteil in den Aktien entwickelt sich der Dynamik der Aktie entsprechend. Aufgrund der einfachen Transaktionskostenstruktur zerfällt dabei der Wertprozess in angenehmer Weise wie folgt:

$$\begin{aligned} X(\tau_{n+1}) &= (1 - \delta)X(\tau_n) \left((1 - \pi_n)e^{r(\tau_{n+1} - \tau_n)} + \pi_n \frac{S(\tau_{n+1})}{S(\tau_n)} \right) \\ &= (1 - \delta) \frac{1 - \pi_n}{1 - \pi(\tau_{n+1})} X(\tau_n) e^{r(\tau_{n+1} - \tau_n)}, \end{aligned}$$

wobei die zweite Gleichheit daraus folgt, dass ohne Handel gemäß

$$(1 - \pi(\tau_n + t))X(\tau_n + t) = (1 - \pi_n)X(\tau_n)e^{rt}$$

durch Beobachtung des Wertanteils im Bond auf den Gesamtwert geschlossen werden kann. Unter naheliegenden Stationaritätsannahmen an die Handelszeiten und dem Ansatz eines konstanten Startpunktes η^* , d.h. $\eta^* = \pi_1 = \pi_2 = \dots$, lässt sich das Problem unter Ausnutzung der dann vorliegenden Unabhängigkeitsstruktur der Handelsperioden auf eine Handelsperiode reduzieren. Zu bestimmen ist dann nur dieser optimale Wertanteil η^* und eine optimale Stoppzeit τ^* mit

$$R = \sup_{\tau, \eta} \frac{E_{\eta} [g(\eta, \tau)]}{E_{\eta} [\tau]} = \frac{E_{\eta^*} [g(\eta^*, \tau^*)]}{E_{\eta^*} [\tau^*]}$$

zu

$$g(\eta, \tau) = \log(1 - \delta) + \log(1 - \eta) + r \tau - \log(1 - \pi(\tau)).$$

Damit kann das Optimierungsproblem auf ein Problem des optimalen Stoppens mit linearen Kosten für den Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ zurückgeführt werden, da gelten

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{\eta} (\log(1 - \delta) + \log(1 - \eta) + f(\eta)), \\ f(\eta) &= \sup_{\tau} (-E_{\eta} \log(1 - \pi(\tau)) - (R - r)E_{\eta} [\tau]), \end{aligned}$$

wobei das Supremum durch τ^* und η^* angenommen wird. Dabei ist wesentlich, dass der Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ ohne Handel ein Diffusionsprozess mit bekannter Dynamik

$$d\pi(t) = (1 - \pi(t))\pi(t)((\mu - r - \sigma^2 \pi(t))dt + \sigma dW(t)),$$

ist, so dass sich über den zugehörigen Erzeuger die benötigten Erwartungswerte der Stoppzeiten gut bestimmen lassen. Die Untersuchung des zugehörigen freien Randwertproblem zeigt, dass die optimalen Strategien eine Struktur der folgenden Form aufzuweisen scheinen:

$$\tau^* = \inf \{ t > 0 \mid \pi(\tau) = \pi_{-1} \text{ oder } \pi(\tau) = \pi_{+1} \},$$

wobei gilt

$$\pi_{-1} > \eta^* > \pi_{+1} \quad \text{und} \quad \eta^* \approx \eta_{opt}.$$

Morton und Pliska (1995) erhalten ihr Resultat auch für mehr Aktien, und Atkinson und Wilmott (1995) zeigen, dass auch dann das Problem numerisch noch gut behandelbar ist. Paulsen (2000) zeigt für den symmetrischen Fall $\eta_{opt} = \frac{1}{2}$, dass eine Lösung auch wirklich existiert und diese Gestalt haben muss.

2.8 Konstante und proportionale Kosten

Hier folgen wir den Arbeiten von Eastham und Hastings (1988) und Korn (1997, 1998).

Die Kosten haben jetzt die Gestalt

$$C + \gamma \cdot \text{Transaktionsvolumen}, \quad C > 0, \gamma \in (0, 1)$$

Das Problem wird in die sogenannte Impuls-Kontrolltheorie eingebettet. Eine Impuls-Kontrollstrategie ist eine Folge $(\tau_n, \Delta_n)_n$ mit

$\tau_1 < \tau_2 < \dots$ Stoppzeiten (Aktionszeitpunkte),

Δ_n Aktion zur Zeit τ_n : Wert der gekauften Aktien.

Dabei interpretieren wir τ_n als den n -ten Handelszeitpunkt und Δ_n als das Transaktionsvolumen, genauer als den Wert, der zusätzlich in die Aktien investiert wird. Wir sprechen auch kurz von einer *Transaktion*. Für eine Transaktion Δ sind Transaktionskosten der Form

$$C 1_{\{\Delta \neq 0\}} + \gamma |\Delta|$$

zu zahlen.

Unter der Annahme $r = 0$ hat der Wertprozess zum Startkapital (x, y) die Dynamik

$$\begin{aligned} X_B(0) &= x, & X_S(0) &= y, \\ dX_B(t) &= 0, & dX_S(t) &= X_S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad t \neq \tau_n \end{aligned}$$

und in den Handelszeitpunkten erfolgt durch die Transaktion folgende Wertverschiebung:

$$\begin{aligned} X_B(\tau_{n+1}) &= X_B(\tau_n) - \Delta_n - \gamma |\Delta_n| - \Gamma 1_{\{\Delta_n \neq 0\}}, \\ X_S(\tau_{n+1}) &= (X_S(\tau_n) + \Delta_n) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(\tau_{n+1} - \tau_n)} e^{\sigma(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n})}, \end{aligned}$$

wobei in der ersten Gleichung zu beachten ist, dass zur Vereinfachung der Analyse eine Zinsrate $r = 0$ vorausgesetzt wurde.

Es bezeichne zu $T > 0$ und Startkapital (x, y)

$$v(t, x, y) = \sup_{(\tau_n, \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}} \mathbb{E}_{(t, x, y)} [U(X_B(t) + X_S(t))], \quad t \in [0, T],$$

den optimalen Endwert bei Start in $t \in [0, 1]$ mit Werten x, y . Ziel ist die Bestimmung einer Impuls-Kontroll-Strategie, für die $v(0, x, y)$ erreicht wird. Insbesondere gilt $v(T, x, y) = U(x + y)$. Für

$$Mv(t, x, y) = \begin{cases} \sup_{\Delta} v(t, x - \Delta - \gamma |\Delta| - \Gamma, y + \Delta), & t > 0 \\ U(x + y), & t = T \end{cases}$$

gilt

$$\begin{aligned} v(t, x, y) &\geq Mv(t, x, y) \\ &(\quad = \quad, \text{ falls } \Delta \neq 0 \text{ optimal oder } t = T) \\ &(\quad > \quad, \text{ sonst, d.h. } \Delta = 0 \text{ optimal in } t \neq T) \end{aligned}$$

und das Bellmann-Prinzip lautet

$$v(t, x, y) = \sup_{\tau} \mathbb{E}_{(t, x, y)} [Mv(\tau, X_B(\tau), X_S(\tau))].$$

Ein Lösungsansatz bildet die Iteration

$$\begin{aligned} v_0(t, x, y) &= E_{(t,x,y)} [U(X_B(t) + X_S(t))], \\ v_{n+1}(t, x, y) &= \sup_{\tau} E_{(t,x,y)} [Mv_n(\tau, X_B(\tau), X_S(\tau))], \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Theorem 3.1 mit Bemerkung 5 (a) in Korn (1998) zeigt, dass die Iteration tatsächlich monoton wachsend gegen den optimalen Wert konvergiert.

Ein anderer Ansatz kann über den Versuch erfolgen, eine Lösung der sogenannten Quasi-Variations-Ungleichungen (qvis) zu bestimmen. Zu

$$Lv(t, x, y) = \frac{1}{2} \sigma^2 y^2 v_{yy}(t, x, y) + \mu y v_y(t, x, y) + v_t(t, x, y)$$

lauten diese

- (1) $Lv(t, x, y) \leq 0$,
- (2) $v(t, x, y) \geq Mv(t, x, y)$,
- (3) $(v(t, x, y) - Mv(t, x, y))Lv(t, x, y) = 0$,
- (4) $v(T, x, y) = U(x+y)$.

Zu einer stetigen Lösung existiert dann eine Impuls-Kontroll-Strategie, die den Wert liefert. Unter geeigneten Regularitätsbedingungen gelten (Theorem 4.2 und Bemerkung 5 (a) in Korn (1998))

- (i) Ist \hat{v} Lösung der qvis, so folgt $v \leq \hat{v}$.
- (ii) Existiert eine zugehörige Impuls-Kontroll-Strategie, so folgt sogar $v = \hat{v}$.

Lösungen und Lösungsansätze gibt es für den einfachen Erwartungswert (Identität als Nutzenfunktion) und für den exponentiellen Nutzen $U(x) = e^{-\beta x}$, $\beta > 0$. Für letzteren gilt

$$v(t, x, y) = e^{-\beta x} v(t, 0, y).$$

Durch diese Separation erfolgt eine Vereinfachung der Quasi-Variations-Ungleichungen, die einen Ansatz möglich macht, der zu einer approximativen Lösung führt.

Bereits in einem einfache Einperiodenmodell kann beobachtet werden, dass bei exponentiellen Nutzen der optimal in den Aktien zu investierende Wert unabhängig vom Gesamtwert ist, siehe Bemerkung 3.5.3. Eine ebenso pathologische Strategie resultiert hier. Es zeigt sich, dass es in der Regel unter dem exponentiellen Nutzen optimal zu sein scheint, niemals Aktien zu kaufen.

Die optimale Lösung zeigt aber zumindest insofern eine vernünftige Struktur, als dass neben einem Bereich, in dem die Aktien nur gehalten werden, jetzt auch in diesem

Bereich zwei Kurven für Kauf und Verkauf hinzukommen, zu denen so gehandelt wird, dass der Wert nach einem Kauf oder Verkauf genau auf der jeweiligen Kurve liegt.

Øksendal und Sulem (2001) untersuchen bei gleicher Kostenstruktur für unendlichen Zeithorizont und isoelastischen Nutzen eine Kombination aus einem stochastischen Kontroll- und einem Impuls-Kontrollproblem. Und zwar nehmen sie eine kontinuierliche Entnahme durch einen Konsumpress an, gehen aber gleichzeitig davon aus, dass die Handelszeiten nur durch eine Folge von Stoppzeiten gegeben sind. Sie zeigen, dass der optimale Wert die eindeutig bestimmte Lösung der zugehörigen Quasi-Variations-Ungleichungen ist und präsentieren numerische Ergebnisse, die aufzeigen, dass nicht die pathologische Struktur wie bei exponentiellem Nutzen vorliegt. Die numerische Methoden zu Behandlung dieser Ungleichungen werden in Chancelier, Øksendal und Sulem (2000) entwickelt. In dieser Arbeit wird auch die Kombination eines optimalen Stoppproblems (zufälliger Zeithorizont) und eines stochastischen Kontrollproblems (kontinuierliche Entnahme unter isoelastischem Nutzen) untersucht.

2.9 Vergleich der Transaktionskostenmodelle

In den letzten drei Abschnitten haben sich im Wesentlichen die folgenden Charakteristika der verschiedenen Transaktionskostenansätze ergeben:

Für proportionale Kosten scheint eine reale Kostenstruktur vorzuliegen und die Resultate liefern die Einsicht, dass es einen Bereich gibt, in dem das Halten der Aktien optimal ist. Allerdings liegt am Rand dieses Bereiches ein so am Markt nicht beobachtbares Verhalten vor. Außerdem ist das Problem numerisch und für mehr Aktien nicht gut behandelbar.

Bei fixe Kosten liegt eine irrealer Kostenstruktur vor, die aber noch gerechtfertigt werden kann. Die resultierende optimale Strategie ist praktisch durchführbar. Außerdem ist das Problem numerisch gut behandelbar, auch für mehr Aktien. Allerdings ist der Lösungsansatz nur bei einem unendlichen Zeithorizont möglich. Ferner sind die hohen erwarteten Zwischenhandelszeiten als kritisch anzusehen.

Schließlich entspricht die Kombination von konstanten und proportionalen Kosten am ehesten einer realen Kostenstruktur. Allerdings sind die resultierenden Variationsungleichungen kaum noch behandelbar. Nur für sehr fragwürdige Nutzenfunktionen scheint eine Lösung möglich zu sein. Die Ergebnisse für diese geben aber eine Einsicht in die zu erwartende Struktur bei einer Kombination von verschiedenen Transaktionskosten.

Zusammenfassend können wir sagen, dass alle drei Ansätze zu Strategien führen, die aufgrund der jeweiligen Kostenstruktur plausibel sind. Im Fall proportionaler Kosten ist die resultierende Strategie aber irreal, im Fall fixer Kosten ist dagegen die Kostenstruktur irreal und beim Ansatz konstanter plus proportionaler Kosten scheint eine Bestimmung einer optimalen Strategie für gut interpretierbare Nutzenfunktionen

aufgrund der Struktur des Problems kaum möglich zu sein.

Nach unseren Untersuchungen in einer und in mehr Perioden werden wir in Kapitel 5 für eine Aktie eine Verallgemeinerung der Resultate von Morton und Pliska (1995) erreichen, indem wir zusätzlich proportionale Kosten zulassen werden. Durch Annahme einer Feinstruktur, wie sie sich in der Arbeit von Korn (1998) andeutet, können wir in einer vernünftigen Klasse von Kontrollstrategien die optimalen Strategien charakterisieren und liefern ein Verfahren, wie diese numerisch sehr gut zu bestimmen sind.

Kapitel 3

In einer Periode

3.1 Überblick

Das Ein-Perioden-Binomialmodell beschreibt die Kursentwicklung eines Bonds (oder Verzinsung eines Kontos) und einer Aktie. Dabei wird nur die denkbar einfachste stochastische Entwicklung für den Aktienkurs angenommen: Mit Wahrscheinlichkeit p steigt der Kurs in der betrachteten Periode und mit der Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ fällt der Kurs.

Wegen dieser einfachen Struktur ist das Modell gut geeignet, sich mit den wichtigen Begriffsbildungen vertraut zu machen und ein gute Intuition zu erwerben, welche Gestalt der Lösung wir bei den entsprechenden Optimierungsaufgaben in komplexeren Modellen zu erwarten haben.

Wir führen in Definition 3.2.2 Transaktionskosten in einer Form ein, die als Spezialfälle die drei bisher betrachteten Modellierungen proportionaler, fixer und konstanter Kostenanteile umfasst, aber auch Spielraum für andere Kostenstrukturen lässt.

In Abschnitt 3.2 werden wir, nachdem wir den Handel unter Transaktionskosten in natürlicher Weise durch Angabe der Transaktionen eingeführt haben, zeigen, wie eine neue Formulierung über Angabe der Handelsart (Kauf, Halten oder Verkauf) und des neuen Wertanteils nach der Transaktion möglich ist.

Diese Begriffsbildung, in der wir in Abschnitt 3.4 die Optimierungsaufgabe formulieren – die Maximierung des erwarteten logarithmischen Nutzens des Endwertes, ermöglicht eine sehr prägnante Darstellung der Ergebnisse. In den folgenden beiden Kapiteln werden wir Handelsart und Wertanteil im Mehrperiodenmodell und für fixe und proportionale Transaktionskosten auch im Black-Scholes-Modell einführen. Dort wird genau diese Darstellungsmöglichkeit wesentlich sein, um überhaupt zu Ergebnissen zu gelangen. Dieses Kapitel hat somit zum einen die Aufgabe, in diesem einfachen Modell die neue Modellierung zu motivieren. Zum anderen gelangen wir aber auch zu einigen Resultaten, die von sich aus von Interesse sind.

So werden wir in Theorem 3.6.2 zeigen, dass es bei gegebener Kauf oder Verkaufentscheidung optimal ist, so zu handeln, dass ein ganz bestimmter Wertanteil $\hat{\eta}_{-1}$ bzw. $\hat{\eta}_{+1}$ erreicht wird. Dieser Wertanteil hängt dabei nur von den Parametern des Modells und den proportionalen Transaktionskosten ab und ist somit unabhängig von dem Kapital und dem Wertanteil in den Aktien, mit dem gestartet wird.

Nach einer Existenzaussage in Satz 3.7.2 werden wir in Abschnitt 3.8 die Bereiche charakterisieren, in denen jeweils eine der Handelsarten optimal ist. Dabei wird sich in Theorem 3.8.5 und den Sätzen 3.8.6 und 3.8.8 zeigen, dass auch für die allgemeinen Transaktionskosten sehr genaue Strukturaussagen über diese Verkauf-, Halten- und Kaufbereiche getroffen werden können. In Abschnitt 3.9 werden wir diese Resultate dann für rein proportionale Kosten, für fixe Kosten und für konstante Kosten zusammenfassen. Die dort zu erkennende Struktur entspricht den Aussagen in kontinuierlicher Zeit der in Kapitel 2 vorgestellten Arbeiten.

3.2 Handel unter Transaktionskosten

Modelliert werden soll der Kurs eines Bonds und der einer Aktie, die nur am Anfang (zur Zeit 0) und am Ende (zur Zeit 1) einer Periode beobachtet werden.

Definition 3.2.1

Seien zu reellen Konstanten $r \geq 1$, s_0 , $u, d > 0$ mit $u > r > d$ und $p \in (0, 1)$ ein Prozess $(B(n))_{n=0,1}$ durch

$$B(0) = 1 \quad \text{und} \quad B(1) = r,$$

und ein stochastischer Prozess $(S(n))_{n=0,1}$ durch

$$S(0) = s_0 \quad \text{und} \quad S(1) = s_0 Y,$$

gegeben, wobei $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) mit $\mathcal{F} = \sigma(Y)$ binomial gemäß

$$p = P(Y = u) = 1 - P(Y = d)$$

verteilt sei. Das so gegebene Modell bezeichnen wir als *Einperioden-Binomialmodell*. Die Prozesse $(B(n))_{n=0,1}$ und $(S(n))_{n=0,1}$ heißen *Bondkurs* bzw. *Aktienkurs*.

Wie die Namen bereits andeuten, interpretieren wir $(B(n))_{n=0,1}$ als Kurs eines Bonds mit Zinssatz $r - 1 \geq 0$ und $(S(n))_{n=0,1}$ als Kurs einer Aktie. Dabei ist nur die Entwicklung des Aktienkurses stochastisch und das auch nur in der denkbar einfachsten Weise. Diese minimale Dynamik zeigt Abbildung 3.1.

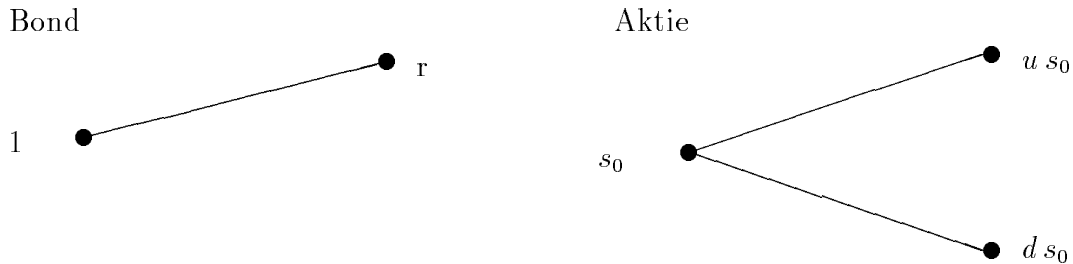


Abbildung 3.1: Dynamik im Ein-Perioden-Binomialmodell

Den Besitz in Bonds und Aktien einer Investorin bezeichnen wir als ihr *Portfolio*. Es gibt mehrere Möglichkeiten, dieses zu beschreiben. Zum einen durch Angabe der Anzahlen der gehaltenen Finanzgüter, zum zweiten über den in den Finanzgütern gehaltenen Wert, oder über das Startkapital und den in die Aktie investierten Wertanteil.

Egal welchen der Ansätze wir verfolgten, würde sich zeigen, dass für die Darstellung der Ergebnisse die letzte Art der Beschreibung besonders günstig ist, da viele unserer Aussagen in den folgenden Abschnitten sich deutlich prägnanter formulieren lassen, wenn wir das Portfolio der Investorin durch den Anteil beschreiben, den die Aktien am Gesamtportfoliowert haben.

Ausgegangen wird von einem *Startkapital* $x > 0$ zur Zeit 0, das aufgeteilt ist in das in den Bond investierte Kapital $(1 - \pi)x$ und in das in die Aktie investierte Kapital πx , d.h. π ist der Wertanteil der Aktien. Da die Wertverteilung zu Anfang durch x und π bestimmt ist, sprechen wir auch von den *Startwerten* x und π .

Die möglichen *Transaktionen* (kurz: *Aktionen*) der Investorin bestehen darin, den Wert $\Delta \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, um den sie den in die Aktien investierten Wert πx ändern möchte. $\Delta > 0$ entspricht einem *Kauf* und $\Delta < 0$ einem *Verkauf* von Aktien und $\Delta = 0$ dem *Halten* der sich bereits im Besitz der Investorin befindenden Aktien.

Für eine Transaktion $\Delta \neq 0$ hat eine Investorin üblicherweise Transaktionskosten zu bezahlen. Wir werden Kosten der folgenden Art betrachten.

Definition 3.2.2

Unter *Transaktionskosten* verstehen wir ein Paar (γ, Γ) , bestehend aus einer Konstanten $\gamma \in [0, 1)$ und einer Abbildung $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$(1) \quad \frac{\gamma}{1-\gamma} \leq \frac{(u-r)(r-d)}{2ur}.$$

(2) Die Menge

$$\mathcal{X}_0 = \begin{cases} \{x > 0 \mid \Gamma(x) < \frac{d}{r}\}, & \text{falls } \gamma = 0, \\ \{x > 0 \mid \Gamma(x) < \min\{\gamma, \frac{d}{r}\}\}, & \text{falls } \gamma > 0. \end{cases}$$

ist nicht leer.

Zu $\Delta \in \mathbb{R}$ nennen wir

$$\gamma|\Delta| + x\Gamma(x)1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta)$$

die *Kosten der Transaktion* Δ .

Unter einem *Einperioden-Binomialmodell mit Transaktionskosten* verstehen wir ein Einperioden-Binomialmodell, in dem Transaktionskosten (γ, Γ) im Sinne dieser Definition gegeben sind. Zur Charakterisierung der Transaktionskosten sprechen wir von

$$\begin{aligned} & \textit{proportionalen (Transaktions-)Kosten}, & \text{falls } \gamma > 0, \\ & \textit{fixen (Transaktions-)Kosten}, & \text{falls } \Gamma(x) = \delta \text{ mit } \delta \in (0, 1), \\ & \textit{konstanten (Transaktions-)Kosten}, & \text{falls } \Gamma(x) = \frac{C}{x} \text{ f\"ur ein } C > 0, \end{aligned}$$

und lassen auch die m\u00f6glichen Kombinationen der Begriffe zu, sprechen also zum Beispiel im Fall $\gamma > 0$ und konstantem $\Gamma > 0$ von *fixen und proportionalen Kosten*.

In dieser Terminologie haben Davis und Norman (1994) und Soner und Shreve (1997) proportionale Kosten, Morton und Pliska (1995) fixe Kosten, Eastham und Hastings (1994) und Korn (1997) konstante und proportionale Kosten betrachtet.

Die Bedingungen an (γ, Γ) in Definition 3.2.2 sind technischer Natur und stellen kaum eine Einschr\u00e4nkung dar. Sie besagen nur, dass die proportionalen Kosten nicht zu gro\u00df und das Startkapital x , dass wir sp\u00e4ter aus \mathcal{X}_0 w\u00e4hlen werden, nicht zu klein im Vergleich zu dem Kostenanteil $\Gamma(x)$ gew\u00e4hlt werden darf. Im Laufe dieses Kapitels werden wir einige Absch\u00e4tzungen f\u00fcr γ ben\u00f6tigen, die in dem folgenden Lemma zusammengefasst sind.

Lemma 3.2.3

Im Ein-Perioden-Binomialmodell mit Transaktionskosten gelten

- (i) $\frac{\gamma}{1-\gamma} < \min\left\{\frac{u-r}{2u}, \frac{r-d}{2r}\right\}$,
- (ii) $\gamma < \frac{1}{3}$,
- (iii) $d < (1-\gamma)r$ und $(1+\gamma)r < u$,

$$(iv) (u - r)(r - d) > \gamma r(u + d).$$

Beweis: (i) Nach Definition 3.2.2 gilt

$$\frac{\gamma}{1 - \gamma} < \frac{(u - r)(r - d)}{2ru}.$$

Daraus folgt wegen $\frac{u-r}{u} < 1$ und $\frac{r-d}{r} < 1$ die Behauptung.

(ii) Mit (i) gilt

$$\gamma < \frac{r - d}{2r}(1 - \gamma) < \frac{1 - \gamma}{2},$$

woraus $\gamma < \frac{1}{3}$ folgt.

(iii) Aus

$$\frac{r - d}{r} > \frac{\gamma}{1 - \gamma} \geq \gamma$$

folgt $(r - d) > \gamma r$, also $r(1 - \gamma) > d$, und aus

$$\frac{u - r}{u} > \frac{\gamma}{1 - \gamma}$$

ergibt sich $u - (1 - \gamma)r > 2\gamma u$, so dass wegen $2\gamma u \geq 2\gamma r$ folgt

$$u - (1 + \gamma)r > 0.$$

(iv) Für $\gamma = 0$ ist die Behauptung evident, für $\gamma > 0$ erhalten wir mit Hilfe der Bedingung (1) aus Definition 3.2.2

$$\begin{aligned} (u - r)(r - d) &> 2\gamma r u + \gamma(u - r)(r - d) \\ &= \gamma(ur - r^2) + \gamma u(r - d) + \gamma r(u + d) \\ &\geq \gamma r(u + d). \end{aligned}$$

□

Wenn nicht anders spezifiziert, sei ab jetzt ein Einperioden-Binomialmodell mit Transaktionskosten (γ, Γ) gegeben.

Zu optimieren ist der Endwert, der sich bei gegebenen Startwerten x, π aus der Wahl der Transaktion Δ und der stochastischen Entwicklung, die nur in Y zum Ausdruck kommt, ergibt. Wir gehen von einem sich *selbstfinanzierenden* Handel aus, d.h. die Kosten der Transaktion und der Handel mit den Aktien werden nur mit dem Bond verrechnet, es gibt keine weiteren Entnahmen oder Zuflüsse. Dann ergibt sich zum Endzeitpunkt der folgende Portfoliowert.

Definition 3.2.4

Seien $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$.

(i) Die Zufallsvariable

$$X^{x,\pi,\Delta} = \left((1 - \pi)x - \Delta - \gamma |\Delta| - x\Gamma(x) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta) \right) r + (\pi x + \Delta) Y$$

bezeichnen wir als *Endwert* (zu x, π, Δ) und schreiben bei gegebenen x, π auch kurz X^Δ .

(ii) Eine Transaktion $\Delta \in \mathbb{R}$ heißt *zulässig* zu x und π , falls $P(X^{x,\pi,\Delta} > 0) = 1$ gilt.

(iii) Es seien

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{-1}(x, \pi) &= \left\{ \Delta < 0 \mid -\frac{r-\Gamma(x)r+\pi(u-r)}{u-(1-\gamma)r} x < \Delta < \frac{r-\Gamma(x)r-\pi(r-d)}{(1-\gamma)r-d} x \right\}, \\ \mathcal{D}_{+1}(x, \pi) &= \left\{ \Delta > 0 \mid -\frac{r-\Gamma(x)r+\pi(u-r)}{u-(1+\gamma)r} x < \Delta < \frac{r-\Gamma(x)r-\pi(r-d)}{(1+\gamma)r-d} x \right\} \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{D}(x, \pi) = \{0\} \cup \mathcal{D}_{-1}(x, \pi) \cup \mathcal{D}_{+1}(x, \pi).$$

Bei der Untersuchung des Endwertes sind die Fallunterscheidung $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, $\Delta > 0$ notwendig. Zur Referenz geben wir Teil (i) des folgenden Lemmas an. Im zweiten Teil zeigen wir, dass eine Transaktion genau dann zulässig ist, wenn sie zu einem strikt positiven Endwert führt. Das benötigen wir, da wir den Logarithmus des Endwertes betrachten wollen.

Lemma 3.2.5 Seien $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$.

(i) Für jede Transaktion $\Delta \in \mathbb{R}$ hat der Endwert die Darstellung

$$X^\Delta = \begin{cases} \left((1 - \pi)x - \Gamma(x)x - (1 - \gamma)\Delta \right) r + (\pi x + \Delta) Y & \text{für } \Delta < 0, \\ \left((1 - \pi)x - \Gamma(x)x - (1 + \gamma)\Delta \right) r + (\pi x + \Delta) Y & \text{für } \Delta > 0, \\ ((1 - \pi)r + \pi Y)x & \text{für } \Delta = 0. \end{cases}$$

(ii) Eine Transaktion $\Delta \in \mathbb{R}$ ist genau dann zulässig zu x und π , wenn Δ in $\mathcal{D}(x, \pi)$ liegt.

(iii) Liegt x in \mathcal{X}_0 , so gelten

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{-1}(x, \pi) &= \left\{ \Delta < 0 \mid -\frac{r-\Gamma(x)r+\pi(u-r)}{u-(1-\gamma)r} x < \Delta \right\} \neq \emptyset, \\ \mathcal{D}_{+1}(x, \pi) &= \left\{ \Delta > 0 \mid \Delta < \frac{r-\Gamma(x)r-\pi(r-d)}{(1+\gamma)r-d} x \right\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{D}(x, \pi) = \left\{ \Delta \in \mathbb{R} \mid -\frac{r-\Gamma(x)r+\pi(u-r)}{u-(1-\gamma)r} x < \Delta < \frac{r-\Gamma(x)r-\pi(r-d)}{(1+\gamma)r-d} x \right\}.$$

(iv) Liegt x in \mathcal{X}_0 , so sind für alle zulässigen Transaktionen Δ die Kosten niedriger als das Startkapital, d.h. es gilt

$$x - \gamma|\Delta| - x \Gamma(x) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta) > 0.$$

Beweis: (i) Die Darstellung ergibt sich durch die angegebene Fallunterscheidung direkt aus der Definition.

(ii) Sei $X^\Delta > 0$. Umformen von (i) liefert

$$X^\Delta = \begin{cases} (r - \Gamma(x)r + \pi(Y - r))x + (Y - (1 - \gamma)r)\Delta & \text{für } \Delta < 0, \\ (r - \Gamma(x)r + \pi(Y - r))x + (Y - (1 + \gamma)r)\Delta & \text{für } \Delta > 0, \\ (r + \pi(Y - r))x & \text{für } \Delta = 0, \end{cases}$$

so dass sich $X^D \geq r + (d - r) = d > 0$ im Fall $\Delta = 0$ ergibt. In den anderen Fällen folgt die Behauptung durch Auflösen nach Δ auf den Ereignissen $\{Y = d\}$ und $\{Y = u\}$ sofort aus der Darstellung von \mathcal{D}_{-1} und \mathcal{D}_{+1} in Definition 3.2.4.

Die umgekehrte Rechnung, ausgehend von $\Delta \in \mathcal{D}$, liefert die behauptete Äquivalenz.

(iii) Sei $x \in \mathcal{X}_0$. Dann gelten

$$r - \Gamma(x)r + \pi(u - r) > 0 \quad \text{und} \quad r - \Gamma(x)r - \pi(r - d) \geq d - \Gamma(x)r > 0,$$

da $\Gamma(x) < \frac{d}{r}$ gilt. Ferner gelten nach Lemma 3.2.3 $u - (1 + \gamma)r > 0$ und $(1 - \gamma)r - d > 0$, so dass aus der Darstellung in Definition 3.2.4 folgt, dass \mathcal{D}_{-1} und \mathcal{D}_{+1} nicht leer sind und die behauptete Gestalt haben. Da $\Delta = 0$ in \mathcal{D} liegt, folgt auch die Intervallgestalt von \mathcal{D} .

(iv) Wegen $\pi \in [0, 1]$ können wir für die Randpunkte von \mathcal{D} abschätzen

$$x - \Gamma(x)x - \gamma \frac{r - \Gamma(x)r + \pi(u - r)}{u - (1 - \gamma)r} x = \frac{(1 - \Gamma(x) - \gamma\pi)(u - r)}{u - (1 - \gamma)r} x > 0$$

und

$$x - \Gamma(x)x - \gamma \frac{r - \Gamma(x)r - \pi(r - d)}{(1 + \gamma)r - d} x = \frac{(1 - \Gamma(x) + \gamma\pi)(r - d)}{(1 + \gamma)r - d} x > 0,$$

da $1 - \Gamma(x) - \gamma\pi > 0$ für $x \in \mathcal{X}_0$ gilt. Mit der Monotonie der Kosten auf \mathcal{D}_{-1} und auf \mathcal{D}_{+1} folgt die Behauptung. \square

Wir erwähnten bereits, dass die Modellierung über die Wertanteile zu einer viel kompakteren Darstellung der Ergebnisse führt. Diese Aussage bezieht sich nicht nur auf den Wertanteil π vor der Transaktion, sondern es zeigt sich, dass auch die Betrachtung des neuen Wertanteils der Aktien nach der Transaktion zur Zeit 0 von Nutzen ist.

Definition 3.2.6

Seien die Abbildungen $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ und

$$f_\eta : \{(x, \pi, \Delta) \mid x \in \mathcal{X}_0, \pi \in [0, 1], \Delta \in \mathcal{D}(x, \pi)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

gegeben durch $f_a(\Delta) = \text{sign}(\Delta)$ und

$$f_\eta(x, \pi, \Delta) = \frac{\pi x + \Delta}{x - x\Gamma(x)1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta) - \gamma|\Delta|}.$$

Wir bezeichnen $f_a(\Delta)$ als die *Handelsart von Δ* und $f_\eta(x, \pi, \Delta)$ als den *neuen Wertanteil nach der Transaktion Δ* (gegeben x und π).

Satz 3.2.7

Seien zu $x \in \mathcal{X}_0$, $\pi \in [0, 1]$ und $\Delta \in \mathcal{D}(x, \pi)$ abkürzend $a = f_a(\Delta)$ und $\eta = f_\eta(x, \pi, \Delta)$. Dann gilt $1 + a\gamma\eta > 0$ und die Transaktion Δ hat die Darstellung

$$\Delta = \frac{(1 - a^2\Gamma(x))\eta - \pi}{1 + a\gamma\eta} x.$$

mit Kosten $a^2\Gamma(x)x + a\Delta$. Ferner lässt sich der Endwert darstellen als

$$X^\Delta = \frac{1 - a^2\Gamma(x) + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\eta} (r + \eta(Y - r)) x.$$

Beweis: Seien x, π, Δ, a, η wie im Satz angegeben gewählt. Im Fall $\Delta = 0$ oder $\gamma = 0$ gilt $1 + a\gamma\eta = 1 > 0$. Sei nun $\gamma > 0$. Da der Nenner von f_η in der Definition 3.2.6 nach Lemma 3.2.5 (iv) strikt positiv ist, ist f_η auf \mathcal{D}_{-1} bzw. auf \mathcal{D}_{+1} streng monoton wachsend, so dass für $\Delta < 0$ folgt

$$\eta < \frac{\pi x}{x - \Gamma(x)x} < \frac{1}{1 - \Gamma(x)} < \frac{1}{1 - \gamma}$$

und damit

$$1 + a\gamma\eta > 1 - \frac{\gamma}{1 - \gamma} = \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma} > 0,$$

da nach Lemma 3.2.3 $\gamma < \frac{1}{3}$ gilt. Ebenso folgt für $\Delta > 0$ mit $\eta > \frac{1}{1-\gamma}$ die erste Behauptung.

Auflösen von $\eta = f_\eta(x, \pi, \Delta)$ unter Ausnutzung der Definition von a liefert

$$\Delta = \frac{(1 - a^2\Gamma(x))\eta x - \pi x}{1 + a\gamma\eta} = \frac{(1 - a^2\Gamma(x))\eta - \pi}{1 + a\gamma\eta} x.$$

Die Darstellung der Kosten folgt sofort aus der Definition von a . Für den Endwert erhalten wir

$$\begin{aligned}
X^\Delta &= ((1 - \pi)x - \Delta - x \Gamma(x) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta) - \gamma |\Delta|)r + (\pi x + \Delta)Y \\
&= ((1 - \pi)x - \Delta - a \gamma \Delta - a^2 \Gamma(x)x)r + (\pi x + \Delta)Y \\
&= (Y - r)(\pi x + \Delta) + (1 - a^2 \Gamma(x))x r - a \gamma \Delta r \\
&= (Y - r)x \frac{\pi(1 + a \gamma \eta) + (1 - a^2 \Gamma(x))\eta - \pi}{1 + a \gamma \eta} \\
&\quad + x r \frac{(1 - a^2 \Gamma(x))(1 + a \gamma \eta) - a \gamma (1 - a^2 \Gamma(x))\eta + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} \\
&= (Y - r)\eta x \frac{1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} + x r \frac{1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} \\
&= \frac{1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} (r + \eta(Y - r))x.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.7 zeigt, dass wir unter Benutzung von Handelsart und neuem Wertanteil zu einer kompakteren Darstellung für den Endwert gelangen können, so dass sich diese zur Formulierung des Optimierungsproblems anbieten. Davor ist aber zu klären, dass auch jede Transaktion eindeutig durch Handelsart a und neuen Wertanteil η bestimmt ist und welche Paare (a, η) einer Transaktion entsprechen. Eine befriedigende Antwort liefert

Satz 3.2.8

Für alle $x \in \mathcal{X}_0$ und $\pi \in [0, 1]$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(x, \pi) &\rightarrow \{(0, \pi)\} \cup \{(-1, \eta) \mid -\frac{r}{u-r} < \eta < \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}\} \cup \{(+1, \eta) \mid \frac{\pi}{1-\Gamma(x)} < \eta < \frac{r}{r-d}\}, \\
\Delta &\mapsto (f_a(\Delta), f_\eta(x, \pi, \Delta))
\end{aligned}$$

bijektiv.

Beweis: Es bezeichne $\Delta_- = -\frac{r+\pi(u-r)-\Gamma(x)r}{u-(1-\gamma)r}x$ den unteren Randpunkt von \mathcal{D} . Auf $\mathcal{D}_{-1} = (\Delta_-, 0)$ ist $f_a(\cdot)$ identisch -1 und $f_\eta(x, \pi, \cdot)$ streng monoton wachsend und stetig. Es gelten

$$\lim_{\Delta \nearrow 0} f_\eta(x, \pi, \Delta) = \frac{\pi}{1 - \Gamma(x)}$$

und

$$\lim_{\Delta \searrow \Delta_-} f_\eta(x, \pi \Delta) = \frac{\pi x + \Delta_-}{x - \Gamma(x)x + \gamma \Delta_-} = -\frac{r}{u - r}.$$

Damit werden für die Handelsart -1 genau die Werte zwischen $-\frac{r}{u-r}$ und $\frac{\pi}{1-\Gamma(x)}$ angenommen. Eine entsprechende Argumentation zeigt, dass bei Handelsart $+1$ genau die Werte zwischen $\frac{\pi}{1-\Gamma(x)}$ und $\frac{r}{r-d}$ angenommen werden. Schließlich gilt $f_a(0) = 0$ und $f_\eta(x, \pi, 0) = \pi$. Also ist die Abbildung surjektiv.

Seien nun $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{D}$, $\Delta_1 \neq \Delta_2$, und $(a_i, \eta_i) = f(\Delta_i)$, $i = 1, 2$. Stimmen die Handelsarten a_1 und a_2 nicht überein, so ist $(a_1, \eta_1) \neq (a_2, \eta_2)$ evident. Gilt dagegen $a_1 = a_2$, so ist $a_1 \neq 0$ und wir befinden uns in einem Bereich, in dem $f_\eta(x, \pi, \cdot)$ streng monoton wachsenden ist, also $\eta_1 = f_\eta(x, \pi, \Delta_1) \neq f_\eta(x, \pi, \Delta_2) = \eta_2$ gilt, so dass die Injektivität und damit insgesamt die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 3.2.9

In der Preistheorie ist es üblicher, das Portfolio der Investorin durch die Anzahl der gehaltenen Aktien und Bonds zu beschreiben: Bezeichnen $H_B(0)$ und $H_S(0)$ die vor dem ersten Handel gehaltenen Bonds bzw. Aktien, und $H_B(1)$ und $H_S(1)$ die nach dem Handel (und damit auch zur Zeit 1) gehaltenen Stückzahlen, so ist die Beziehung zu der von uns bevorzugten Modellierung gegeben durch

$$H_B(0) = \frac{(1 - \pi)x}{s_0}, \quad H_S(0) = \frac{\pi x}{s_0}, \quad H_S(1) = H_S(0) + \frac{\Delta}{s_0}$$

und beispielsweise bei einem Kostenanteil Γ der Form $\Gamma(x) = \frac{C}{x}$, $C > 0$,

$$H_B(1) = \begin{cases} H_B(0) - C + \gamma(H_S(1) - H_S(0))s_0 & \text{für } H_S(1) < H_S(0), \\ H_B(0) - C - \gamma(H_S(1) - H_S(0))s_0 & \text{für } H_S(1) > H_S(0), \\ H_B(0) & \text{für } H_S(1) = H_S(0). \end{cases}$$

Für die Wertentwicklung ergäbe sich

$$x = H_B(0) + H_S(0)s_0 \quad \text{und zur Zeit 1} \quad X = H_B(1)r + H_S(1)S(1).$$

Diese Darstellung für den Wertprozess ist sicher ansprechender als die in Lemma 3.2.3 angegebene, doch werden die notwendigen Fallunterscheidungen nur in die Handelsstrategie verlagert.

Die von uns gewählte Modellierung hat gegenüber der eben vorgestellten den Vorzug, dass sich in ihr die Transaktionskosten leichter beschreiben lassen.

3.3 Arbitragefreiheit und Martingalmaße

Als eine Arbitragemöglichkeit wird eine risikolose Gewinnmöglichkeit bezeichnet. Das ist eine Transaktion, die mit Sicherheit zu keinem Verlust führen wird, aber mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit einen echten Gewinn zulässt.

Existieren Arbitragemöglichkeiten, so kann in einem vernünftigen Sinne keine optimale Aktion existieren, da sie immer noch um die Arbitragemöglichkeit verbessert werden könnte. Deshalb ist es sinnvoll, von vornherein nur arbitragefreie Modelle zu betrachten. Wir werden zeigen, dass das in diesem Kapitel eingeführte Einperioden-Binomialmodell arbitragefrei ist. Dabei sind die in der Definition 3.2.1 an die Konstanten des Modells gestellten Bedingungen wesentlich.

Definition 3.3.1

Als eine *Arbitragemöglichkeit* zu Startwerten x und π wird eine Aktion $\Delta \in \mathbb{R}$ bezeichnet, für die

$$X^\Delta \geq x r \quad \text{und} \quad P(X^\Delta > x r) > 0$$

gelten. Existiert zu keiner Anfangsverteilung eine Arbitragemöglichkeiten, so heißt das Modell *arbitragefrei*.

Satz 3.3.2

Das Ein-Perioden-Binomialmodell mit Transaktionskosten ist arbitragefrei.

Beweis: Seien $x, \pi \in \mathbb{R}$ und zur Abkürzung

$$G(\Delta) = X^\Delta - x r, \quad \Delta \in \mathbb{R}.$$

Dann existiert keine Arbitragemöglichkeit zu (x, π) , falls für alle $\Delta \in \mathbb{R}$

$$G(\Delta) = 0 \quad \text{oder} \quad P(G(\Delta) < 0) > 0$$

gilt. Da $G(\Delta)$ in Abhängigkeit von dem Kostenanteil Γ maximal für die Wahl $\Gamma \equiv 0$ ist, genügt es, die Behauptung unter dieser Annahme zu zeigen.

Sei also $\Gamma \equiv 0$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$G(\Delta) = \begin{cases} \gamma \Delta r + (\pi x + \Delta)(Y - r) < (\pi x + \Delta)(Y - r) & \text{für } \Delta < 0, \\ -\gamma \Delta r + (\pi x + \Delta)(Y - r) < (\pi x + \Delta)(Y - r) & \text{für } \Delta > 0, \\ \pi x (Y - r) & \text{für } \Delta = 0. \end{cases}$$

Es gelten $P(Y > r) = p$ und $P(Y < r) = 1 - p$. Somit ist im Fall $\Delta = 0$ stets $P(G(\Delta) < 0) > 0$ für $\pi x \neq 0$ und $G(\Delta) = 0$ für $\pi x = 0$.

Im Fall $\Delta \neq 0$ und $\pi x + \Delta \neq 0$ folgt ebenfalls stets $P(G(\Delta) < 0) > 0$. Ist $\pi x + \Delta = 0$, so folgt auch $P(G(\Delta) < 0) > 0$ falls $\gamma > 0$ und $G(\Delta) = 0$ falls $\gamma = 0$.

Somit können in keinem Fall Arbitragemöglichkeiten existieren. \square

In den Berechnungen der folgenden Kapitel werden die drei folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße von besonderer Bedeutung sein.

Definition 3.3.3

Mit Q bezeichnen wir das durch

$$q = Q(Y = u) = \frac{r - d}{u - d} = 1 - Q(Y = d)$$

bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß, und mit Q_{-1} und Q_{+1} die durch

$$q_a = Q_a(Y = u) = \frac{(1 + a\gamma)r - d}{u - d} = 1 - Q_a(Y = d), \quad a \in \{-1, +1\}.$$

gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaße.

Aufgrund der Voraussetzungen an u , d und γ sind $q, q_{-1}, q_{+1} \in (0, 1)$, d.h. Q, Q_{-1} und Q_{+1} sind zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße. Für $\gamma = 0$ stimmen Q, Q_{-1} und Q_{+1} überein, für $\gamma > 0$ gilt aber $q_{-1} < q < q_{+1}$. Später benötigen wir

Lemma 3.3.4

Für $\gamma > 0$ gilt unter der in Definition 3.2.2 gemachten Voraussetzung

$$0 < q_{-1} < q_{+1} < \frac{q_{-1}u}{(1 - \gamma)r} < \frac{q_{+1}u}{(1 + \gamma)r} < 1.$$

Beweis: Die erste und letzte Ungleichung folgen aus der Bedingung (iii) in Lemma 3.2.3, die mittlere entspricht ausgeschrieben

$$(1 - \gamma)((1 + \gamma)r - d)r < ((1 - \gamma)r - d)u,$$

also $\gamma^2 r^2 - \gamma r(u + d) + (u - r)(r - d) > 0$, und folgt somit aus Lemma 3.2.3 (iv). Die verbleibenden beiden Ungleichungen lassen sich durch einfaches Umformen verifizieren.

\square

Satz 3.3.5

Der diskontierte Aktienkurs $(r^{-n}S(n))_{n=0,1}$ bildet ein Martingal unter Q . Genau dann ist $(r^{-n}S(n))_{n=0,1}$ ein Martingal (Submartingal, Supermartingal) unter P , wenn $p = q$ ($p \geq q$, $p \leq q$) gilt.

Beweis: Zum Nachweis des ersten Teils der Behauptung berechnen wir

$$E_Q [S(1)] = s_0 E_Q [Y] = r s_0.$$

Für die Charakterisierung im zweiten Teil ist nur zu beachten, dass

$$E_P [S(1)] = (p u + (1-p)d)s_0 > r s_0 \quad (=, <)$$

genau dann gilt, wenn

$$p > \frac{r-d}{u-d} = q \quad (=, <)$$

erfüllt ist. □

Bei Q handelt es sich also um das aus der Preistheorie bekannte zu P äquivalente Martingalmaß für $(S(n))_{n=0,1}$, dessen Existenz bereits aus der Arbitragefreiheit folgt. Da die Maße Q_{-1} und Q_{+1} in Form ihrer Parameter q_{-1} und q_{+1} in den folgenden Abschnitten häufig auftreten werden, stellt sich die Frage, ob eine Satz 3.3.5 entsprechende Interpretation der Maße Q_{-1} und Q_{+1} möglich ist. Solch eine Interpretation wird tatsächlich durch den Übergang zu folgendem Modell ermöglicht.

Sei zu $\Delta \in \mathbb{R}$ und $a = \text{sign}(\Delta) \in \{-1, 0, +1\}$

$$x_a = (1 - a^2\Gamma(x) + a\gamma\pi)x, \quad \pi_a = \frac{(1 + a\gamma)\pi}{1 - a^2\Gamma(x) + a\gamma\pi}x$$

und

$$\Delta_a = (1 + a\gamma)\Delta, \quad Y_a = \frac{Y}{1 + a\gamma},$$

so ergibt sich mit

$$\pi_a x_a = (1 + a\gamma)\pi x \quad \text{und} \quad (1 - \pi_a)x_a = (1 - \pi - a^2\Gamma(x))x$$

für den Endwert nach Lemma 3.2.3 die Darstellung

$$\begin{aligned} X^\Delta &= ((1 - \pi)x - a^2\Gamma(x)x - (1 + a\gamma)\Delta)r + (\pi x + \Delta)Y \\ &= ((1 - \pi_a)x_a - \Delta_a)r + (\pi_a x_a + \Delta_a)Y_a. \end{aligned}$$

Wir können den Handel unter Transaktionskosten also als ein Handel ohne Transaktionskosten interpretieren, bei dem wir bei Handelsart a mit Startwerten x_a, π_a in eine Aktie mit Kurs

$$S_a(0) = (1 + a\gamma)s_0, \quad S_a(1) = S_a(0)Y_a = S(1)$$

investieren. Dabei ist zu beachten, dass die Anzahl $H_S(0)$ der gehaltenen Aktien in allen drei Fällen übereinstimmt:

$$H_S(0) = \frac{\pi x}{S(0)} = \frac{\pi_{-1}x_{-1}}{S_{-1}(0)} = \frac{\pi_{+1}x_{+1}}{S_{+1}(0)},$$

die Interpretation also durchaus sinnvoll ist. Dieses Modell werden wir als *äquivalentes transaktionskostenfreies Modell* (zur Handelsart a) bezeichnen.

Tatsächlich erhalten wir die gewünschte Interpretation:

Satz 3.3.6

Für $a \in \{-1, +1\}$ bildet der diskontierte Kurs $(r^{-n}S_a(n))_{n=0,1}$ im äquivalenten transaktionskostenfreien Modell zur Handelsart a ein Martingal unter Q_a .

Beweis: Einfaches Nachrechnen ergibt für $a \in \{-1, +1\}$ die Gleichung

$$q_a u + (1 - q_a)d = (1 + a\gamma)r,$$

die bei Multiplikation mit s_0 der Martingaleigenschaft $E_{Q_a} [S_a(1)] = r S_a(0)$ entspricht. \square

Die Bedeutung der Maße Q_{-1} und Q_{+1} liegt in Satz 3.3.6. Praktisch folgt daraus, dass wir die im Modell ohne Transaktionskosten benutzte Martingalmethode zur Portfoliooptimierung (siehe Pliska (1997), Kapitel 2.3) auch im Modell mit Transaktionskosten verwenden könnten, allerdings nur zur Bestimmung eines optimalen Kaufs oder Verkaufs nach der Entscheidung für einen Kauf bzw. einen Verkauf. Das ist möglich, da durch die oben angegebene äquivalente Darstellung für den Endwert ein Wechsel zwischen einem Modell mit Transaktionskosten und dem äquivalenten transaktionskostenfreien Modell möglich ist, daher auch die Bezeichnung als *äquivalentes Modell*.

Wir wollen diese Betrachtungen hier nicht weiter vertiefen, da die Martingalmethode unter Transaktionskosten durch die notwendigen Fallunterscheidungen zu keiner Vereinfachung bei den Berechnungen führt und wir deshalb auf das äquivalente transaktionskostenfreie Modell nicht mehr zurückgreifen werden.

Allerdings werden uns die Maße Q_{-1} und Q_{+1} in Form der Parameter q_{-1} und q_{+1} in der Darstellung der Resultate in den folgenden Abschnitten ständig begegnen.

3.4 Die Optimierungsaufgabe

Nach Satz 3.2.7 ergibt sich zu gegebenen Startwerten $x \in \mathcal{X}_0$ und $\pi \in [0, 1]$ für eine zulässige Transaktion der Endwert zu

$$X^\Delta = \frac{1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} (r + \eta(Y - r)) x,$$

wobei a und η die Handelsart und den neuen Wertanteil zu Δ im Sinne von Definition 3.2.6 bezeichnen. Nach Satz 3.2.8 ist es auch möglich, die Kontrolle des Endwertes anstatt über die Transaktion Δ direkt über Handelsart a und neuen Wertanteil η zu beschreiben. Dabei ist nur zu beachten, dass die Aktion (a, η) im Bildbereich der in 3.2.8 angegebenen Bijektion liegen muss, damit die Aktion auch mit einer Transaktion identifiziert werden kann.

Wir werden ab jetzt die Kontrolle des Endwertes in diesem Sinne betrachten, d.h. der nach einem noch zu definierenden Kriterium optimale Endwert soll durch die optimale Wahl einer Aktion (a, η) erreicht werden.

In der folgenden Definition fassen wir die neuen Sprechweisen zusammen.

Definition 3.4.1

- (i) Eine *Handelsart* a ist ein Element aus $a \in \{-1, +1\}$ und ein *neuer Wertanteil* η ein Element aus \mathcal{E} , wobei

$$\mathcal{E} = \{ \eta \in \mathbb{R} \mid -\frac{r}{u-r} < \eta < \frac{r}{r-d} \}$$

die Menge der *erlaubten Wertanteile* bezeichne. Eine *Aktion* ist ein Paar (a, η) , bestehend aus Handelsart a und neuem Wertanteil η .

- (ii) Seien $x \in \mathcal{X}_0$ und $\pi \in [0, 1]$. Zu jeder Handelsart $a \in \{-1, 0, +1\}$ bezeichne

$$\mathcal{A}_a(x, \pi) = \{ \eta \in \mathcal{E} \mid \text{sign}((1 - \Gamma(x))\eta - \pi) = a \}$$

die Menge der *zulässigen Wertanteile bei Handelsart* a und

$$\mathcal{A}(x, \pi) = \{ (a, \eta) \in \{-1, 0, +1\} \times \mathcal{E} \mid \eta \in \mathcal{A}_a(x, \pi) \}$$

die Menge der *zulässigen Aktionen*. Dementsprechend nennen wir eine Aktion (a, η) *zulässig* (zu x, π), wenn (a, η) in $\mathcal{A}(x, \pi)$ liegt.

- (iii) Zu $x \in \mathcal{X}_0$, $\pi \in [0, 1]$ und (a, η) in $\mathcal{A}(x, \pi)$ nennen wir

$$X^{x, \pi, (a, \eta)} = \frac{1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} (r + \eta(Y - r)) x.$$

den *Endwert* zu Startwerten x, π unter der Aktion (a, η) . Bei gegebenen Startwerten x, π schreiben wir auch kurz $X^{a, \eta}$.

Zu beachten ist, dass für $a = 0$ einfach $\mathcal{A}_0 = \{\pi\}$ gilt. Im folgenden Lemma nutzen wir aus, dass die so eingeführten Begriffe in der Tat den in Definition 3.2.6 über die Transaktionen eingeführten Begriffen entsprechen.

Lemma 3.4.2

Sei $x \in \mathcal{X}_0$, $\pi \in [0, 1]$. Für alle $a \in \{-1, 0, +1\}$ gilt $\mathcal{A}_a \neq \emptyset$. Für $(a, \eta) \in \mathcal{A}(x, \pi)$ ist

$$P(X^{a,\eta} > 0) = 1.$$

und durch (a, η) eine zulässige Transaktion Δ eindeutig bestimmt. Diese hat die Darstellung

$$\Delta = \frac{(1 - a^2\Gamma(x))\eta - \pi}{1 + a\gamma\eta} x.$$

und es gilt $X^\Delta = X^{a,\eta}$.

Beweis: Sei $x \in \mathcal{X}_0$, $\pi \in [0, 1]$. Dass durch $(a, \eta) \in \mathcal{A}(x, \pi)$ eine Transaktion eindeutig bestimmt ist, folgt aus Satz 3.2.8, da $\mathcal{A}(x, \pi)$ gleich der Bildmenge der dort angegebenen Bijektion ist. Da diese Abbildung sich mit der Bezeichnung $\mathcal{D}_0(x, \pi) = \{0\}$ aus drei Bijektionen $\mathcal{D}_a(x, \pi) \rightarrow \mathcal{A}_a(x, \pi)$, $a \in \{-1, 0, +1\}$ zusammensetzt, folgt mit Lemma 3.2.5 (iii) die erste Behauptung. Mit der Bijektion und Satz 3.2.7 folgen die Darstellung für Δ und die Gleichheit der Endwerte und mit dieser nach der Definition 3.2.4 (ii) der Zulässigkeit von Δ auch $P(X^{a,\eta} > 0) = 1$. \square

Es ist üblich den Endwert durch eine sogenannte Nutzenfunktion U zu bewerten, um dann als Optimierungskriterium den erwarteten Nutzen $E[U(X^{a,\eta})]$ über die zulässigen Aktionen (a, η) zu maximieren. Wie in 2.3 ausgeführt, sollte solch eine Nutzenfunktion konkav, monoton wachsend und differenzierbar sein.

Wir beschränken uns hier auf den Logarithmus, d.h. auf $U = \log$, da dieser in der Regel zu gut interpretierbaren Ergebnissen führt. In Bemerkung 3.5.3 zeigen wir, dass zum Beispiel der sogenannte exponentielle Nutzen zu im Sinne der Anwendung pathologischen Ergebnissen führt – ebenso wie eine Maximierung ganz ohne Nutzenfunktion.

Bei der Verwendung des Logarithmus ist gerade darauf zu achten, dass wir nur solche Aktionen (a, η) erlauben, die zu einem strikt positiven Endwert führen. Das sind gerade die im Sinne von Definition 3.4.1 (ii) zulässigen Aktionen

Definition 3.4.3 (Die Optimierungsaufgabe)

Gegeben seien Startkapital $x \in \mathcal{X}_0$ und Wertanteil $\pi \in [0, 1]$. Zu maximieren ist der (erwartete) Nutzen des Endwertes

$$v(x, \pi, \cdot, \cdot) : \{-1, 0, +1\} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (a, \eta) \mapsto E[\log(X^{a,\eta})]$$

auf $\mathcal{A}(x, \pi)$. Es bezeichnen $v_0(x, \pi) = v(x, \pi, 0, \pi)$ und

$$v_a(x, \pi) = \sup_{\eta \in \mathcal{A}_a(x, \pi)} v(x, \pi, a, \eta), \quad a \in \{-1, +1\},$$

den *optimalen (erwarteten) Nutzen zur Handelsart a* , und

$$v^*(x, \pi) = \sup_{(a, \eta) \in \mathcal{A}(x, \pi)} \mathbb{E} [\log(X^{a, \eta})].$$

den *optimalen (erwarteten) Nutzen*. Eine Aktion (a^*, η^*) heißt optimal zu x, π , falls $(a^*, \eta^*) \in \mathcal{A}(x, \pi)$ und

$$v^*(x, \pi) = v(x, \pi, a^*, \eta^*)$$

gelten.

Aus der Darstellung von $X^{a, \eta}$ in Definition 3.4.1 (iii) ergeben sich

$$\begin{aligned} v_0(x, \pi) &= v(0, \pi) \\ &= \log(x) + p \log(r + \pi(u - r)) + (1 - p) \log(r - \pi(r - d)) \end{aligned}$$

und für $a \in \{-1, +1\}$

$$\begin{aligned} v(x, \pi, a, \eta) &= \log(x) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) - \log(1 + a \gamma \eta) \\ &\quad + p \log(r + \eta(u - r)) + (1 - p) \log(r - \eta(r - d)). \end{aligned}$$

Lemma 3.4.4

Für $x \in \mathcal{X}_0$ und $\pi \in [0, 1]$ gilt

$$v^*(x, \pi) = \max_{a \in \{-1, 0, +1\}} v_a(x, \pi).$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Definitionen in 3.4.3. □

Der optimale Nutzen v_a zu einer Handelsart a lässt sich auf übliche Weise bestimmen. Der optimale Nutzen v^* ergibt sich dann durch eine einfache Fallunterscheidung. Da \mathcal{A}_{-1} und \mathcal{A}_{+1} offen sind, kann aber nicht auf die Existenz einer optimalen Aktion geschlossen werden. Dazu müssen wir in Abschnitt 3.7 die Struktur der Lösungen genauer betrachten.

Wir wollen für die folgenden Untersuchungen die Darstellung wie folgt vereinfachen.

Voraussetzung 3.4.5

Ab jetzt bis einschließlich Abschnitt 3.7 setzen wir immer Startwerte $x \in \mathcal{X}_0$ und $\pi \in [0, 1]$ als gegeben voraus. Dementsprechend werden wir die Notation in diesen Abschnitten zu

\mathcal{A} , \mathcal{A}_a für $a \in \{-1, 0, +1\}$, $v(a, \eta)$, v_a für $a \in \{-1, 0, +1\}$ und v^* vereinfachen, anstatt $\mathcal{A}(x, \pi)$ usw. zu schreiben.

3.5 Optimierung ohne Transaktionskosten

Zum Vergleich bestimmen wir erst das Ergebnis der Optimierung ohne Transaktionskosten. Im Modell ohne Transaktionskosten, d.h. falls $\gamma = 0$ und $\Gamma \equiv 0$ gilt, ist

$$\mathcal{A} = \{(0, \pi)\} \cup \{(-1, \eta) \mid -\frac{r}{u-r} < \eta < \pi\} \cup \{(+1, \eta) \mid \pi < \eta < \frac{r}{r-d}\}.$$

und für alle $a \in \{-1, 0, +1\}$ ist

$$v(a, \eta) = \log(x) + p \log(r + \eta(u - r)) + (1 - p) \log(r - \eta(r - d))$$

unabhängig von a .

Definition 3.5.1

Der Wertanteil

$$\hat{\eta} = \frac{(p - q)r}{q(u - r)}$$

heißt *optimaler Wertanteil ohne Transaktionskosten*.

Die Namensgebung rechtfertigt der folgende Satz.

Satz 3.5.2

Sei $\gamma = 0$ und $\Gamma \equiv 0$. Dann ist die eindeutig bestimmte optimale Aktion (a^*, η^*) gegeben durch $(a^*, \eta^*) = (\text{sign}(\hat{\eta} - \pi), \hat{\eta})$ und als optimaler erwarteter Nutzen ergibt sich

$$v^* = \log(xr) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1 - p) \log\left(\frac{1 - p}{1 - q}\right).$$

Beweis: Es gilt

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(a, \eta) = \frac{p(u - r)}{r + \eta(u - r)} + \frac{(1 - p)(r - d)}{r - \eta(r - d)} = 0$$

genau dann, wenn

$$\eta = \frac{(p(u - r) - (1 - p)(r - d))r}{(r - d)(u - r)} = \frac{(p(1 - q) - (1 - p)q)r}{q(u - r)} = \hat{\eta}.$$

Wegen der strikten Konkavität von $v(a, \cdot)$ gilt

$$\max_{\eta \in \mathcal{E}} v(a, \eta) = v(a, \hat{\eta}) \quad \text{für} \quad a \in \{-1, 0, +1\},$$

also

$$v^* = v(-1, \hat{\eta}) = v(0, \hat{\eta}) = v(+1, \hat{\eta}),$$

wobei $\hat{\eta}$ zulässig zur Handelsart $a \in \{-1, 0, +1\}$ ist, falls $a = \text{sign}(\hat{\eta} - \pi)$ gilt. Einsetzen von $\hat{\eta}$ liefert schließlich

$$\begin{aligned} v^* &= v(0, \hat{\eta}) \\ &= \log(x) + p \log(r + \hat{\eta}(u - r)) + (1 - p) \log(r - \hat{\eta}(r - d)) \\ &= \log(xr) + p \log\left(1 + \frac{p-q}{q}\right) + (1 - p) \log\left(1 - \frac{p-q}{1-q}\right) \\ &= \log(xr) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1 - p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right), \end{aligned}$$

wobei wir $q(u - r) = (1 - q)(r - d)$ benutzt haben. \square

Bemerkung 3.5.3

Bei Verwendung einer exponentiellen Nutzenfunktion $U(x) = -\exp(-\beta x)$, $\beta > 0$, anstatt des Logarithmus können wir als optimalen erwarteten Nutzen

$$x r + \frac{1}{\beta} \left(\log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) - \log\left(\frac{q}{p}\right) \right)$$

und als optimalen Wertanteil nach Verkauf

$$\hat{\eta}_\beta = \frac{\log\left(\frac{1-q}{1-p}\right) - \log\left(\frac{q}{p}\right)}{\beta x(u - d)}.$$

berechnen. Somit ist für exponentiellen Nutzen der in die Aktien investierte Wert $\hat{\eta}_\beta x$ unabhängig vom Startkapital x und der Wertanteil $\hat{\eta}_\beta$ konvergiert gegen 0 für $x \rightarrow \infty$. Das entspricht einer sehr ungewöhnlichen Strategie und ist real eher nicht zu beobachten, so dass die Verwendung des exponentiellen Nutzens als Nutzenfunktion sehr fraglich erscheint.

3.6 Optimaler Kauf und Verkauf

In diesem Abschnitt bestimmen wir den optimalen Wertanteil bei gegebener Handelsart und werden im folgenden Abschnitt damit die Existenz einer optimalen Aktion nachweisen.

Satz 3.6.1

Für

$$\hat{\eta}_a = \frac{(p - q_a)r}{q_a(u - r) - p a \gamma r}, \quad a \in \{-1, +1\}$$

gelten

$$v(a, \hat{\eta}_a) = \max_{\eta \in \mathcal{E}} v(a, \eta),$$

und

$$v(a, \hat{\eta}_a) = \log(xr) + \log(1 - \Gamma(x) + a\gamma\pi) + \log\left(\left(\frac{p}{q_a}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-q_a}\right)^{1-p}\right).$$

Beweis: Sei $a \in \{-1, +1\}$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \eta}(a, \eta) &= -\frac{a\gamma}{1+a\gamma\eta} + \frac{p(u-r)}{r+\eta(u-r)} - \frac{(1-p)(r-d)}{r-\eta(r-d)} \\ &= p \frac{(u-r)(1+a\gamma\eta) - a\gamma(r+\eta(u-r))}{(1+a\gamma\eta)(r+\eta(u-r))} \\ &\quad - (1-p) \frac{(r-d)(1+a\gamma\eta) + a\gamma(r-\eta(r-d))}{(1+a\gamma\eta)(r-\eta(r-d))} \\ &= p \frac{u - (1+a\gamma)r}{(1+a\gamma\eta)(r+\eta(u-r))} - (1-p) \frac{(1+a\gamma)r - d}{(1+a\gamma\eta)(r-\eta(r-d))}. \end{aligned}$$

Damit gilt $\frac{\partial v}{\partial \eta}(a, \eta) = 0$ genau dann, wenn

$$p(u - (1+a\gamma)r)(r - \eta(r-d)) = (1-p)((1+a\gamma)r - d)(r + \eta(u-r))$$

erfüllt ist. Auflösen ergibt

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{(p(1-q_a) - (1-p)q_a)r}{p(1-q_a)(r-d) + (1-p)q_a(u-r)} \\ &= \frac{(p-q_a)r}{q_a(u-r) + p(r - \mathbb{E}_{Q_a}[Y])} \\ &= \frac{(p-q_a)r}{q_a(u-r) - p\gamma r} = \hat{\eta}_a, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\mathbb{E}_{Q_a}[Y] = q_a u + (1-q_a)d = (1+a\gamma)r$$

benutzt haben. Unter Ausnutzung von Lemma 3.2.3 (i) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}(a, \eta) &= \frac{(a\gamma)^2}{(1+a\gamma\eta)^2} - \frac{p(u-r)^2}{(r+\eta(u-r))^2} - \frac{(1-p)(r-d)^2}{(r-\eta(r-d))^2} \\ &\leq \frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} - \frac{p(u-r)^2}{u^2} - \frac{(1-p)(r-d)^2}{r^2} \\ &= p\left(\frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} - \frac{(u-r)^2}{u^2}\right) + (1-p)\left(\frac{\gamma^2}{(1-\gamma)^2} - \frac{(r-d)^2}{r^2}\right) \\ &< 0. \end{aligned}$$

Somit ist $v(a, \cdot)$ strikt konkav und $\hat{\eta}_a$ in der Tat die eindeutig bestimmte Maximalstelle. Schließlich berechnet sich

$$\begin{aligned}
v(a, \hat{\eta}_a) &= \log(x) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) - \log\left(1 + a \gamma \frac{(p - q_a)r}{q_a(u - r) - p a \gamma r}\right) \\
&\quad + p \log\left(r + \frac{(p - q_a)r(u - r)}{q_a(u - r) - p a \gamma r}\right) + (1 - p) \log\left(r - \frac{(p - q_a)r(r - d)}{q_a(u - r) - p a \gamma r}\right) \\
&= \log(x) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) \\
&\quad - \log(q_a(u - r) - p a \gamma r + p a \gamma r - q_a a \gamma r) \\
&\quad + p \log(q_a(u - r)r - p a \gamma r^2 + p r(u - r) - q_a r(u - r)) \\
&\quad + (1 - p) \log(q_a(u - r)r - p a \gamma r^2 - (p - q_a)r(r - d)) \\
&= \log(x r) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) - \log(q_a(u - (1 + a \gamma)r)) \\
&\quad + p \log(p r(u - (1 + a \gamma)r)) \\
&\quad + (1 - p) \log(q_a(u - d) - p((1 + a \gamma)r - d)) \\
&= \log(x r) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) + p \log\left(\frac{p}{q_a}\right) + (1 - p) \log\left(\frac{1 - p}{1 - q_a}\right).
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.6.2

(i) Es gelten

$$\hat{\eta}_{-1} = \hat{\eta} = \hat{\eta}_{+1} \quad \text{im Fall} \quad \gamma = 0$$

und

$$\hat{\eta}_{-1} > \hat{\eta} > \hat{\eta}_{+1} \quad \text{im Fall} \quad \gamma > 0.$$

(ii) Für $a \in \{-1, +1\}$ gilt

$$v_a = v(a, \hat{\eta}_a), \quad \text{falls} \quad \hat{\eta}_a \in \mathcal{A}_a.$$

Dabei ist $\hat{\eta}_a$ die eindeutig bestimmte Maximalstelle.

Beweis:

(i) Für $c \in [-\gamma, \gamma]$ sei

$$q(c) = \frac{(1-c)r - d}{u - d}.$$

Dann gelten $q(\gamma) = q_{-1}$, $q(0) = q$ und $q(-\gamma) = q_{+1}$. Ein Blick auf die Darstellungen zeigt, dass für $\gamma = 0$ sofort $\hat{\eta}_{-1} = \hat{\eta} = \hat{\eta}_{+1}$ folgt. Für $\gamma > 0$ betrachten wir

$$f : [-\gamma, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}, \quad c \mapsto \frac{p - q(c)r}{q(c)(u - r) + pcr}.$$

An der Darstellung der Wertanteile erkennen wir leicht, dass $f(\gamma) = \hat{\eta}_{-1}$, $f(0) = \hat{\eta}$ und $f(-\gamma) = \hat{\eta}_{+1}$ gelten. Zu zeigen ist, dass f streng monoton wachsend ist. Nun ist f aber stetig und auf $(-\gamma, \gamma)$ differenzierbar mit (beachte $q'(c) = \frac{-r}{u-d}$)

$$\begin{aligned} f'(c) &= \frac{q(c)(u - r) + pcr)r^2 - (pr(u - d) - r(u - r))(p - q(c))r}{(u - d)(q(c)(u - r) + pcr)^2} \\ &= \frac{pcr^3 + pq(c)(u - d)r^2 - p^2(u - d)r^2 + p(u - r)r^2}{(u - d)(q(c)(u - r) + pcr)^2} \\ &= \frac{pcr^3 + p((1 - c) - d)r^2 - p^2(u - d)r^2 + p(u - r)r^2}{(u - d)(q(c)(u - r) + pcr)^2} \\ &= \frac{p(1 - p)r^2}{(q(c)(u - r) + pcr)^2} > 0. \end{aligned}$$

Also ist f streng monoton wachsend, so dass $\hat{\eta}_{-1} > \hat{\eta} > \hat{\eta}_{+1}$ folgt.

(ii) Die Behauptung folgt aus Satz 3.6.1. □

Die Aussage des Theorems 3.6.2 ist recht beachtlich, da $\hat{\eta}_a$ unabhängig von dem Wertanteil π , von dem Startkapital x und damit auch von dem Kostenanteil Γ ist. Es ist nach einer Verkauf- oder Kaufentscheidung also immer optimal, so zu handeln, dass der feste Wertanteil $\hat{\eta}_{-1}$ bzw. $\hat{\eta}_{+1}$ erreicht wird. Wir halten deshalb fest:

Definition 3.6.3

Wir nennen die Wertanteile

$$\hat{\eta}_{-1} = \frac{(p - q_{-1})r}{q_{-1}(u - r) + p\gamma r} \quad \text{und} \quad \hat{\eta}_{+1} = \frac{(p - q_{+1})r}{q_{+1}(u - r) - p\gamma r}$$

die *optimalen Wertanteile nach Verkauf* bzw. *nach Kauf*.

Dabei ist ein Verkauf oder Kauf auf einen dieser optimalen Wertanteile nur dann möglich, wenn die entsprechende Aktion auch zulässig ist. Im nächsten Abschnitt werden wir bei der Bestimmung einer optimalen Aktion aber sehen, dass ein in diesem Sinne optimaler zulässiger Kauf (Verkauf) dazu führt, dass der optimale Verkauf (Kauf) nicht zulässig ist und auch kein anderer Verkauf (Kauf) optimal ist.

Bei Betrachtung von $\hat{\eta}_{-1}$ und $\hat{\eta}_{+1}$ bietet sich die folgende Charakterisierung der Aktie an:

Definition 3.6.4

Die Aktie im Ein-Perioden-Binomialmodell mit Transaktionskosten heißt

$$\begin{aligned} & \textit{b}{\ddot{a}}\textit{r}\textit{i}g, & \text{falls } p \leq q_{+1}, \\ & \textit{m}o\textit{d}e\textit{r}a\textit{t}, & \text{falls } q_{+1} < p < \frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r} \quad \text{und} \\ & \textit{b}u\textit{l}\textit{l}\textit{i}g, & \text{falls } p \geq \frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r}. \end{aligned}$$

Gilt sogar $p < q_{+1}$, so nennen wir die Aktie *total b\u00e4rig*, gilt $p \geq \frac{q_{-1}u}{(1+\gamma)r}$, so nennen wir die Aktie *total bullig*.

Wir bemerken, dass nach Lemma 3.3.4 Aktien jeder Gattung bei geeigneter Wahl von p existieren. Die Rechtfertigung f\u00fcr die Namensgebung gibt

Satz 3.6.5

- (i) Ist die Aktie moderat, so liegen $\hat{\eta}_{-1}$ und $\hat{\eta}_{+1}$ in $(0, 1)$.
- (ii) Ist die Aktie b\u00e4rig, so ist $\hat{\eta}_{+1} \leq 0$ und ist sie gar total b\u00e4rig, so ist auch $\hat{\eta}_{-1} \leq 0$.
- (iii) Ist die Aktie dagegen bullig, so folgt $\hat{\eta}_{-1} \geq 1$ und f\u00fcr den Fall, dass sie total bullig ist, auch $\hat{\eta}_{+1} \geq 1$.

Beweis: Wegen $q_{-1}(u - r) + p\gamma r > 0$ und

$$\begin{aligned} q_{+1}(u - r) - p\gamma r &> q_{+1}(u - r) - \gamma r \\ &= \frac{((1 + \gamma)r - d)(u - r) - \gamma r(u - d)}{u - d} \\ &= \frac{(r - d)(u - (1 + \gamma)r)}{u - d} > 0 \end{aligned}$$

ist f\u00fcr $a \in \{-1, +1\}$ der Nenner von $\hat{\eta}_a$ strikt positiv und die Behauptungen folgen mit den angegebenen Fallunterscheidungen unter Beachtung von

$$q_a(u - r) - p a \gamma r = (p - q_a)r + q_a u - (1 + a \gamma)p.$$

□

Ist die Aktie moderat, so f\u00fchrt ein optimaler Kauf oder Verkauf stets zu einem Wertanteil, der in $(0, 1)$ liegt, d.h. es ist sowohl in den Aktien als auch in den Bonds ein strikt positiver Wert investiert. Ist die Aktie aber b\u00e4rig (oder sogar total b\u00e4rig), so w\u00fcrde die Investorin nur so kaufen (und verkaufen), dass sie danach short in den Aktien w\u00e4re. Umgekehrt w\u00fcrde sie bei bulligen (total bulligen) Aktien nur so verkaufen (und kaufen), dass sie nach der Aktion short im Bond w\u00e4re, d.h. die Aktie w\u00e4re so reizvoll, dass sie Geld leihen w\u00fcrde.

3.7 Existenz einer optimalen Aktion

Theorem 3.6.2 liefert zu einer gegebenen Handelsart Verkauf oder Kauf den optimalen Wertanteil. Dabei handelt es sich aber in der Regel nicht um optimale Aktionen, deren Existenz wir uns jetzt zuwenden wollen. Dazu sind nach Lemma 3.4.4 v_{-1} , v_0 und v_{+1} zu vergleichen und es ist sicherzustellen, dass $\hat{\eta}_a$ im Fall $a \in \{-1, +1\}$ zulässig ist. Gemäß Voraussetzung 3.4.5 führen wir die Untersuchungen weiterhin zu gegebenen Startwerten $x \in \mathcal{X}_0$, $\pi \in [0, 1]$ durch und vereinfachen die Notation entsprechend.

Lemma 3.7.1

(i) Sei $a \in \{-1, +1\}$. Aus $\hat{\eta}_a \notin \mathcal{A}_a$ folgt

$$v(a, \eta) < v(a, \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}) \quad \text{für alle } \eta \in \mathcal{A}_a.$$

(ii) Es gilt für $a \in \{-1, +1\}$

$$v(a, \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}) \begin{cases} = v_0, & \text{falls } \Gamma(x) = 0, \\ < v_0, & \text{falls } \Gamma(x) > 0. \end{cases}$$

Beweis: (i) Sei $a \in \{-1, +1\}$. Aus $\hat{\eta}_a \notin \mathcal{A}_a$ folgt für alle $\eta \in \mathcal{A}_a$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{-1} &\geq \frac{\pi}{1-\Gamma(x)} > \eta, & \text{falls } a = -1, \\ \hat{\eta}_{+1} &\leq \frac{\pi}{1-\Gamma(x)} < \eta, & \text{falls } a = +1 \end{aligned}$$

und somit in beiden Fällen wegen $v(a, \hat{\eta}_a) > v(a, \eta)$ aus der strikten Konkavität

$$v(a, \eta) < v(a, \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}).$$

(ii) Ferner gilt

$$\begin{aligned} v(a, \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}) &= \log(x) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) - \log(1 + a \gamma \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}) \\ &\quad + p \log(r + \frac{\pi(u-r)}{1-\Gamma(x)}) + (1-p) \log(r - \frac{\pi(r-d)}{1-\Gamma(x)}) \\ &= \log(x) + p \log((1 - \Gamma(x))r + \pi(u-r)) \\ &\quad + (1-p) \log((1 - \Gamma(x))r - \pi(r-d)) \\ &\leq \log(x) + p \log(r + \pi(u-r)) + (1-p) \log(r - \pi(r-d)) \\ &= v_0. \end{aligned}$$

Dabei ist die Ungleichung genau dann strikt, wenn $\Gamma(x) > 0$ gilt. □

Satz 3.7.2

Für den optimalen erwarteten Nutzen gilt

$$v^* = \begin{cases} \max\{v_{-1}, v_0\}, & \text{falls } \hat{\eta}_{-1} \in \mathcal{A}_{-1}, \\ \max\{v_{+1}, v_0\}, & \text{falls } \hat{\eta}_{+1} \in \mathcal{A}_{+1}, \\ v_0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine optimale Aktion ist gegeben durch

$$(a^*, \eta^*) = \begin{cases} (-1, \hat{\eta}_{-1}), & \text{falls } \hat{\eta}_{-1} \in \mathcal{A}_{-1} \text{ und } v_{-1} > v_0, \\ (+1, \hat{\eta}_{+1}), & \text{falls } \hat{\eta}_{+1} \in \mathcal{A}_{+1} \text{ und } v_{+1} > v_0, \\ (0, \pi), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Nach Lemma 3.4.4 ist

$$v^* = \max\{v_{-1}, v_0, v_{+1}\}.$$

Liegt $\hat{\eta}_{-1}$ in \mathcal{A}_{-1} , so folgt mit Theorem 3.6.2 (i)

$$\hat{\eta}_{+1} \leq \hat{\eta}_{-1} < \frac{\pi}{1-\Gamma(x)},$$

also $\hat{\eta}_{+1} \notin \mathcal{A}_{+1}$, so dass sich nach Lemma 3.7.1

$$v(+1, \eta) < v(+1, \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}) \leq v_0 \quad \text{für alle } \eta \in \mathcal{A}_{+1}$$

ergibt. Damit ist in diesem Fall $v_{+1} \leq v_0$ und somit $v^* = \max\{v_{-1}, v_0\}$.

Entsprechend läuft die Argumentation für $\hat{\eta}_{+1} \in \mathcal{A}_{+1}$. Ist andererseits weder $\hat{\eta}_{-1} \in \mathcal{A}_{-1}$ noch $\hat{\eta}_{+1} \in \mathcal{A}_{+1}$, so folgt nach Lemma 3.7.1 $\max\{v_{-1}, v_{+1}\} \leq v_0$.

Dass die angegebene Aktion optimal ist, ist evident. \square

Bemerkung 3.7.3

Wegen der Eindeutigkeit von $\hat{\eta}_{-1}$ und $\hat{\eta}_{+1}$ als Maximalstellen sind neben der in Theorem 3.7.2 angegebenen Aktion genau noch jene Aktionen optimal, die in den Fällen $v_{-1} = v_0$ oder $v_{+1} = v_0$ gemäß $(-1, \hat{\eta}_{-1})$ bzw. $(+1, \hat{\eta}_{+1})$ handeln.

3.8 Handelsbereiche

Ziel ist es jetzt, die Bereiche in der (x, π) -Ebene genauer zu bestimmen, in denen ein Verkauf, das Halten bzw. ein Kauf optimal sind. Dazu werden wir den erwarteten

Nutzen zu einer Handelsart und den optimalen erwarteten Nutzen jetzt wieder als Funktionen auf $\mathcal{X}_0 \times [0, 1]$ auffassen und für die Werte $v(a, \eta, x, \pi)$, $v_a(x, \pi)$ und $v^*(x, \pi)$ schreiben.

Wir gehen dabei so vor, dass wir zu gegebenem Startkapital x die Wertanteile π bestimmen, für die ein Verkauf, ein Kauf bzw. das Halten optimal sind. Dazu definieren wir:

Definition 3.8.1

Die Mengen

$$M_a(x) = \{ \pi \in [0, 1] \mid v_a(x, \pi) > v_0(x, \pi) \}, \quad a \in \{-1, +1\},$$

nennen wir im Fall $a = -1$ *Verkauf-* und im Fall $a = +1$ *Kaufbereich* (zu Startkapital x).

$$M_0(x) = \{ \pi \in [0, 1] \mid v_0(x, \pi) \geq \max\{v_{-1}(x), v_{+1}(x)\} \}$$

heißt *Haltenbereich* (zu Startkapital x).

Lemma 3.8.2

Es sind

$$\begin{aligned} M_{-1}(x) &= \{ \pi \in (\hat{\eta}_{-1}(1 - \Gamma(x)), 1] \mid v(-1, \hat{\eta}_{-1}, x, \pi) > v_0(x, \pi) \}, \\ M_{+1}(x) &= \{ \pi \in [0, \hat{\eta}_{+1}(1 - \Gamma(x)) \mid v(+1, \hat{\eta}_{+1}, x, \pi) > v_0(x, \pi) \}, \\ M_0(x) &= [0, 1] \setminus (M_{-1}(x) \cup M_{+1}(x)). \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\pi \in M_{-1}(x)$. Wäre $\pi \leq \hat{\eta}_{-1}(1 - \Gamma(x))$, d.h. $\hat{\eta}_{-1} \notin \mathcal{A}_{-1}(x, \pi)$, so folgte nach Lemma 3.7.1

$$v(-1, \eta, x, \pi) \leq v(-1, \hat{\eta}_{-1}, x, \pi) < v_0$$

für alle η mit $\eta(1 - \Gamma(x)) < \pi$.

Also muß $\pi > \hat{\eta}_{-1}(1 - \Gamma(x))$ gelten. Das entspricht aber $\hat{\eta}_{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(x, \pi)$, so dass

$$v_{-1}(x, \pi) = v(-1, \hat{\eta}_{-1}, x, \pi)$$

gilt. Liegt π umgekehrt in der im Lemma angegebenen Menge, so folgt sofort $\pi \in M_{-1}(x)$.

Die Argumentation für $M_{+1}(x)$ läuft analog und die Behauptung für $M_0(x)$ ist evident. \square

Definition 3.8.3

Die durch

$$\hat{\pi}_{-1}(x) = \inf(M_{-1}(x) \cup \{1\}) \quad \text{und} \quad \hat{\pi}_{+1}(x) = \sup(M_{+1}(x) \cup \{0\})$$

gegebenen Abbildungen $\hat{\pi}_a : \mathcal{X}_0 \rightarrow [0, 1]$, $a \in \{-1, +1\}$ nennen wir *Grenze des Verkaufsbzw. Grenze des Kaufbereiches*.

Zur Untersuchung der Grenzen ist folgendes Lemma wesentlich.

Lemma 3.8.4

Sei $a \in \{-1, +1\}$. Für $g_a : \mathcal{X}_0 \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g_a(x, \pi) = v(a, \hat{\eta}_a, x, \pi) - v_0(x, \pi)$$

gelten

(i) $g_a(x, \cdot)$ hat die eindeutig bestimmte Minimalstelle

$$\pi_{0,a}(x) = \frac{(p - q_a)(u - d)r - \Gamma(x)(a \gamma r + (p - q_a)(u - d))r}{(q_a(u - r) - p a \gamma r)(u - d) - \Gamma(x)(u - r)(r - d)}$$

und ist auf $(-\frac{r}{u-r}, \pi_{0,a}(x)]$ streng monoton fallend und auf $[\pi_{0,a}(x), \frac{r}{r-d})$ streng monoton wachsend in π .

(ii) Es gilt

$$g_a(x, \hat{\eta}_a) \begin{cases} < 0, & \text{falls } \Gamma(x) > 0, \\ = 0, & \text{falls } \Gamma(x) = 0. \end{cases}$$

(iii) Ebenso gilt im Fall $\Gamma(x) > 0$

$$g_a(x, (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_a) < 0.$$

Beweis: Sei $x \in \mathcal{X}_0$ und $a \in \{-1, +1\}$.

(i) (a) Es ist

$$\begin{aligned} g_a(x, \pi) &= \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q_a}\right) + (1 - p) \log\left(\frac{1-p}{1-q_a}\right) + \log(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi) \\ &\quad - p \log(r + \pi(u - r)) - (1 - p) \log(r - \pi(r - d)) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_a}{\partial \pi}(x, \pi) &= \frac{a \gamma}{1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi} - \frac{p(u - r)}{r + \pi(u - r)} + \frac{(1 - p)(r - d)}{r - \pi(r - d)} \\ &= \frac{\varphi_a(x, \pi)}{\psi_a(x, \pi)} \end{aligned}$$

mit

$$\psi_a(x, \pi) = (1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi)(r + \pi(u - r))(r - \pi(r - d)) > 0$$

und

$$\varphi_a(x, \pi)$$

$$\begin{aligned} &= a \gamma (r + \pi(u - r))(r - \pi(r - d)) \\ &\quad - p(u - r)(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi)(r - \pi(r - d)) \\ &\quad + (1 - p)(1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi)(r + \pi(u - r)) \\ &= a \gamma r^2 - p(u - r)(1 - \Gamma(x))r + (1 - p)(r - d)(1 - \Gamma(x))r \\ &\quad + \left(a \gamma r((u - r) - (r - d)) - p(u - r)(a \gamma r - (1 - \Gamma(x))(r - d)) \right. \\ &\quad \left. + (1 - p)(r - d)(a \gamma r + (1 - \Gamma(x))(u - r)) \right) \pi \\ &\quad + \left(-a \gamma (u - r)(r - d) + p(u - r)a \gamma (r - d) + (1 - p)(r - d)a \gamma (u - r) \right) \pi^2 \\ &= a \gamma \Gamma(x)r^2 - (1 - \Gamma(x))r \left(p(u - (1 + a \gamma)r) - (1 - p)((1 + a \gamma)r - d) \right) \\ &\quad + \left((1 - p)a \gamma r(u - r) - p a \gamma r(r - d) \right. \\ &\quad \left. + (p + (1 - p))(1 - \Gamma(x))(r - d)(u - r) \right) \pi \\ &= a \gamma \Gamma(x)r^2 - (1 - \Gamma(x))r(u - d) \left(p(1 - q_a) - (1 - p)q_a \right) \\ &\quad + \left((1 - p)((1 + a \gamma)r - d)(u - r) + p(u - (1 + a \gamma)r)(r - d) \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(x)(u - r)(r - d) \right) \pi \\ &= -(p - q_a)(u - d)r + \Gamma(x)(a \gamma r + (p - q_a)(u - d))r \\ &\quad + \left(((1 - p)q_a(u - r) + p(1 - q_a)(r - d))(u - d) - \Gamma(x)(u - r)(r - d) \right) \pi \\ &= -(p - q_a)(u - d)r + \Gamma(x)(a \gamma r + (p - q_a)(u - d))r \\ &\quad + \left((q_a(u - r) + p r - p E_{Q_a}(Y))(u - d) - \Gamma(x)(u - r)(r - d) \right) \pi \\ &= -(p - q_a)(u - d)r + \Gamma(x)(a \gamma r + (p - q_a)(u - d))r \\ &\quad + \left((q_a(u - r) - p a \gamma r)(u - d) - \Gamma(x)(u - r)(r - d) \right) \pi. \end{aligned}$$

(b) Wir zeigen

$$(q_a(u - r) - p a \gamma r)(u - d) - \Gamma(x)(u - r)(r - d) > 0.$$

Ist $\gamma = 0$, so gilt $\Gamma(x) < 1$ und es folgt

$$\begin{aligned} & (q_a(u-r) - p a \gamma r)(u-d) - \Gamma(x)(u-r)(r-d) \\ &= (r-d)(u-r - \Gamma(x)(u-r))(r-d) > 0. \end{aligned}$$

Sei jetzt $\gamma > 0$. Dann gilt $\Gamma(x) < \gamma$. Wir betrachten zuerst den Fall $a = -1$:

$$\begin{aligned} & (q_{-1}(u-r) + p \gamma r)(u-d) - \Gamma(x)(u-r)(r-d) \\ &> (q_{-1}(u-r) + q_{+1} \gamma r)(u-d) - \gamma(u-r)(r-d) \\ &= ((1-\gamma)r-d)(u-r) + ((1+\gamma)r-d)\gamma r - \gamma(u-r)(r-d) \\ &= (1-\gamma)(u-r)(r-d) - \gamma r(u-r) + \gamma r(r-d) + \gamma^2 r^2 \\ &> \gamma r(r-d) + \gamma^2 r^2 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Abschätzung $(1-\gamma)(r-d) > \gamma r$ nach Lemma 3.2.3 (i) benutzt haben.

Für $a = +1$ gilt mit Lemma 3.3.4

$$\begin{aligned} & (q_{+1}(u-r) - p \gamma r)(u-d) - \Gamma(x)(u-r)(r-d) \\ &> \left(q_{+1}(u-r) - \frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r} \gamma r \right) (u-d) - \gamma(u-r)(r-d) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \left((1-\gamma)((1+\gamma)r-d)(u-r) - \gamma((1-\gamma)r-d)u \right. \\ &\quad \left. - \gamma(1-\gamma)(u-r)(r-d) \right) \\ &= \frac{1}{1-\gamma} \left((1-\gamma)(r-d)(u-r) + (1-\gamma)\gamma r(u-r) - \gamma(r-d)u + \gamma^2 r u \right. \\ &\quad \left. - \gamma(1-\gamma)(u-r)r + \gamma(1-\gamma)(u-r)d \right) \\ &> \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\gamma r u + (1-\gamma)(u-r)d \right) \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir für die Abschätzung des ersten Summanden in der drittletzten Zeile gemäß Lemma 3.2.3 (i) $(1-\gamma)(u-r) > \gamma u$ benutzt haben.

(c) Aus Teil (b) und (a) folgt, dass $\varphi_a(x, \cdot)$ streng monoton wachsend ist mit eindeutig bestimmter Nullstelle

$$\pi_{0,a} = \frac{(p-q_a)(u-d)r - \Gamma(x)(a\gamma r + (p-q_a)(u-d)r}{(q_a(u-r) - p a \gamma r)(u-d) - \Gamma(x)(u-r)(r-d)}.$$

Daraus folgt mit Teil (a) die Minimalstelleneigenschaft von $\pi_{0,a}$ und die behaupteten Monotonieeigenschaften.

(ii) Wir schätzen ab

$$\begin{aligned}
g_a(x, \hat{\eta}_a) &= \log(r) + p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
&\quad + \log\left(1 - \Gamma(x) + \frac{(p-q_a)a\gamma r}{q_a(u-r) - pa\gamma r}\right) \\
&\quad - p \log\left(r + \frac{(p-q_a)(u-r)r}{q_a(u-r) - pa\gamma r}\right) \\
&\quad - (1-p) \log\left(r - \frac{(p-q_a)(r-d)r}{q_a(u-r) - pa\gamma r}\right) \\
&\leq p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
&\quad + \log(q_a(u-r) - pa\gamma r + (p-q_a)a\gamma r) \\
&\quad - p \log(q_a(u-r) - pa\gamma r + p(u-r) - q_a(u-r)) \\
&\quad - (1-p) \log(q_a(u-r) - pa\gamma r - p(r-d) + q_a(r-d)) \\
&= p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
&\quad + \log(q_a(u - (1+a\gamma)r)) \\
&\quad - p \log(p(u - (1+a\gamma)r)) \\
&\quad - (1-p) \log(q_a(u-d) - p((1+a\gamma)r-d)) \\
&= p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
&\quad + \log(q_a(1-q_a)) + \log(u-d) \\
&\quad - p \log(p(1-q_a)) - p \log(u-d) \\
&\quad - (1-p) \log(q_a(1-p)) - (1-p) \log(u-d) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Für $\Gamma(x) = 0$ gilt bei der einen Ungleichung Gleichheit, für $\Gamma(x) > 0$ gilt die strikte Ungleichung.

(iii) Wir schätzen wieder ab:

$$\begin{aligned}
&g_a(x, (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_a) \\
&= \log(r) + p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
&\quad + \log(1 - \Gamma(x) + a\gamma(1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_a) - p \log(r + (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_a(u-r))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-p) \log(r - (1-\Gamma(x))\hat{\eta}_a(r-d)) \\
= & \log(r) + p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
& + \log(1 + a\gamma\hat{\eta}_a) - p \log\left(\frac{r}{1-\Gamma(x)} + \hat{\eta}_a(u-r)\right) \\
& + (1-p) \log\left(\frac{r}{1-\Gamma(x)} - \hat{\eta}_a(r-d)\right) \\
< & \log(r) + p \log(p/q_a) + (1-p) \log((1-p)/(1-q_a)) \\
& + \log(1 + a\gamma\hat{\eta}_a) - p \log(r + \hat{\eta}_a(u-r)) + (1-p) \log(r - \hat{\eta}_a(r-d)) \\
= & 0,
\end{aligned}$$

wobei die gleiche Rechnung wie in Teil (ii) die letzte Gleichheit liefert. \square

Mit Hilfe von Lemma 3.8.4 können wir jetzt für unsere allgemeine Kostenstruktur einige wichtige Strukturaussagen machen. Diese sind zum einen, dass die Grenzen des Verkauf- bzw. Kaufbereiches für ein $x \in \mathcal{X}_0$ genau dann mit dem optimalen Wertanteil nach dem Verkauf bzw. Kauf zusammenfallen, wenn $\Gamma(x) = 0$ gilt. Zum anderen können wir die Intervallgestalt der Bereiche herleiten. Diese Aussage wird durch Satz 3.8.6 ergänzt werden, der genau die Bedingungen formuliert, unter denen der Verkaufsbereich bzw. der Kaufbereich nicht leer sind. Die letzte Aussage des Theorems gibt schließlich zu den in Lemma 3.8.4 eingeführten Funktionen eine Gleichung an, mit deren Hilfe sich die Grenzen des Kauf- und Verkaufbereiches numerisch bestimmen lassen.

Theorem 3.8.5

Sei die Aktie moderat und $x \in \mathcal{X}_0$.

(i) Ist $\Gamma(x) = 0$, so gilt

$$\hat{\pi}_a(x) = \hat{\eta}_a, \quad a \in \{-1, +1\}.$$

(ii) Ist $\Gamma(x) > 0$, so folgt

$$\hat{\pi}_{-1}(x) > \hat{\eta}_{-1} \quad \text{und} \quad \hat{\pi}_{+1}(x) < \hat{\eta}_{+1}.$$

(iii) Es sind

$$M_{-1}(x) = (\hat{\pi}_{-1}(x), 1] \quad \text{und} \quad M_{+1}(x) = [0, \hat{\pi}_{+1}(x)).$$

(iv) Ist $M_{-1}(x) \neq \emptyset$, so ergibt sich $\hat{\pi}_{-1}(x)$ als die eindeutig bestimmte Lösung von

$$g_{-1}(x, \pi) = 0, \quad 1 > \pi > \hat{\eta}_{-1}.$$

Entsprechend ist $\hat{\pi}_{+1}(x)$ im Fall $M_{+1}(x) \neq \emptyset$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$g_{+1}(x, \pi) = 0, \quad 0 < \pi < (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1}.$$

Beweis: (i) Ist $\Gamma(x) = 0$, so gilt nach Lemma 3.8.4 (ii) $g_a(x, \hat{\eta}_a) = 0$. Ein Vergleich liefert ferner $\pi_{0,a} = \hat{\eta}_a$, so dass weiter

$$g_a(x, \eta) > 0 \quad \text{und} \quad \eta \neq \hat{\eta}_a,$$

folgt. Damit ergibt sich nach Lemma 3.8.2

$$M_{-1}(x) = (\hat{\eta}_{-1}, 1] \quad \text{und} \quad M_{+1} = [0, \hat{\eta}_{+1})$$

und daher

$$\hat{\pi}_{-1}(x) = \inf M_{-1}(x) = \hat{\eta}_{-1} \quad \text{und} \quad \hat{\pi}_{+1}(x) = \sup M_{+1}(x) = \hat{\eta}_{+1}.$$

(ii) Sei $\Gamma(x) > 0$.

Wir betrachten zuerst $a = +1$. Liege π in $M_{+1}(x)$, d.h.

$$\pi < (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1} \quad \text{und} \quad g_{+1}(x, \pi) > 0.$$

Nach Lemma 3.8.4 ist $g_{+1}(x, (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1}) < 0$, so dass π sich im absteigenden Bereich von $g_{+1}(x, \cdot)$ befindet, d.h.

$$g_{+1}(x, \pi') > 0 \quad \text{für alle} \quad 0 \leq \pi' \leq \pi.$$

Somit gilt $M_{+1}(x) = [0, \hat{\pi}_{+1}(x))$. Wäre nun $\hat{\pi}_{+1}(x) = (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1}(x)$, so folgte aus der Stetigkeit von g_{+1} der Widerspruch $g_{+1}(x, \hat{\pi}_{+1}) = \inf_{\pi' < \hat{\pi}_{+1}(x)} g_{+1}(x, \pi') \geq 0$. Also gilt $\hat{\pi}_{+1}(x) < (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1}$.

Für $a = -1$ liege π in $M_{-1}(x)$. Dann gilt

$$\pi > (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{-1} \quad \text{und} \quad g_{-1}(x, \pi) > 0.$$

Da sowohl $g_{-1}(x, \hat{\eta}_{-1})$ als auch $g_{-1}(x, (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{-1}) < 0$ gelten, folgt wegen der Monotonieeigenschaften von g_{-1} aus Lemma 3.8.4 (i)

$$g_{-1}(x, \nu) < 0 \quad \text{für alle} \quad \nu \in [(1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{-1}, \hat{\eta}_{-1}].$$

Also muss $\pi > \hat{\eta}_{-1}$ gelten. Wegen $g_{-1}(x, \hat{\eta}_{-1}) < 0$ und $g(x, \pi) > 0$ liegt π im aufsteigenden Bereich von $g_{-1}(x, \cdot)$, so dass für alle $\pi' > \pi$ auch $g_{-1}(x, \pi') > 0$ gilt, d.h.

$$M_{-1}(x) = (\hat{\pi}_{-1}(x), 1].$$

Aus der Stetigkeit von g_{-1} folgt auch hier $\hat{\pi}_{-1}(x) > \hat{\eta}_{-1}$.

(iii) wurde bereits in den Beweisteilen (i) und (ii) gezeigt.

(iv) Wir haben bereits gezeigt, dass im Fall $M_{+1} \neq \emptyset$

$$g_{+1}(x, \hat{\pi}_{+1}(x)) = \sup_{\pi < \hat{\pi}_{+1}(x)} g_{+1}(x, \pi) \geq 0$$

folgt. Ebenso gilt wegen der strikten Ungleichung $\hat{\pi}_{+1}(x) < (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1}$

$$g_{+1}(x, \hat{\pi}_{+1}(x)) = \lim_{\pi \searrow \hat{\pi}_{+1}(x)} g_{+1}(x, \pi) \leq 0,$$

also zusammen $g_{+1}(x, \hat{\pi}_{+1}(x)) = 0$. Wegen der Monotonieeigenschaften von g_{+1} ist $\hat{\pi}_{+1}(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$g_{+1}(x, \pi) = 0, \quad 0 < \pi < (1 - \Gamma(x))\hat{\eta}_{+1}.$$

Entsprechend ist $\hat{\pi}_{-1}(x)$ im Fall $M_{-1}(x) \neq \emptyset$ die eindeutig bestimmte Lösung von

$$g_{-1}(x, \pi) = 0, \quad 1 > \pi > \hat{\eta}_{-1}.$$

□

Satz 3.8.6

Sei $x \in \mathcal{X}_0$. Es ist genau dann $M_{-1}(x) \neq \emptyset$, wenn gilt

$$\Gamma(x) < (1 - \gamma) \frac{p^p(1-p)^{1-p} - \left(\frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r}\right)^p \left(1 - \frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r}\right)^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p}},$$

und $M_{+1}(x) \neq \emptyset$, wenn gilt

$$\Gamma(x) < \frac{p^p(1-p)^{1-p} - q_{+1}^p(1-q_{+1})^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p}}.$$

Beweis: (a) Wegen $\hat{\eta}_{-1} < 1$ und der Monotonieeigenschaften von $g_{-1}(x, \cdot)$ nach Lemma 3.8.4 gilt $M_{-1}(x) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $g_{-1}(x, 1) > 0$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} g_{-1}(x, 1) &= \log(r) + \log(1 - \Gamma(x) - \gamma) + \log(p^p(1-p)^{1-p}) - \log(q_{-1}^p(1-q_{-1}^{1-p})) \\ &\quad - p \log(u) - (1-p) \log(d) \\ &= \log(r) + \log(1 - \gamma) + \log\left(1 - \frac{\Gamma(x)}{1-\gamma}\right) + \log(p^p(1-p)^{1-p}) \\ &\quad - \log((q_{-1}u)^p((1-q_{-1})d)^{1-p}) \\ &= \log\left(1 - \frac{\Gamma(x)}{1-\gamma}\right) + \log(p^p(1-p)^{1-p}) \\ &\quad - \log\left(\left(\frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r}\right)^p \left(\frac{(1-q_{-1})d}{(1-\gamma)r}\right)^{1-p}\right) \\ &= \log\left(1 - \frac{\Gamma(x)}{1-\gamma}\right) + \log\left(\left(\frac{p}{\hat{q}}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-\hat{q}}\right)^{1-p}\right) \end{aligned}$$

mit $\hat{q} = \frac{q-1u}{(1-\gamma)r}$ und

$$1 - \hat{q} = \frac{(1-\gamma)r - q_{-1}d}{(1-\gamma)r} = \frac{(1-q_{-1})d}{(1-\gamma)r}.$$

Auflösen von $g_{-1}(x, 1) > 0$ liefert

$$\left(1 - \frac{\Gamma(x)}{1-\gamma}\right) \left(\frac{p}{\hat{q}}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-\hat{q}}\right)^{1-p} > 1$$

und damit die Behauptung.

(b) Wegen $\hat{\eta}_{+1} > 0$ und der Monotonieeigenschaften von $g_{+1}(x, \cdot)$ gilt ebenso $M_{+1}(x) \neq \emptyset$ genau dann, wenn $g_{+1}(x, 0) > 0$ gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} g_{+1}(x, 0) &= \log(r) + \log(1 - \Gamma(x)) + \log\left(\left(\frac{p}{q_{+1}}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-q_{+1}}\right)^{1-p}\right) \\ &\quad - p \log(r) - (1-p) \log(r) \\ &= \log(1 - \Gamma(x)) + \log\left(\left(\frac{p}{q_{+1}}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-q_{+1}}\right)^{1-p}\right). \end{aligned}$$

Auflösen von $g_{+1}(x, 0) > 0$ liefert

$$(1 - \Gamma(x)) \left(\frac{p}{q_{+1}}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-q_{+1}}\right)^{1-p} > 1,$$

also

$$\Gamma(x) < \frac{p^p(1-p)^{1-p} - q_{+1}^p(1-q_{+1})^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p}}.$$

□

Zur Darstellung in Satz 3.8.6 bemerken wir

Bemerkung 3.8.7

Auf $(0, 1)$ ist p die eindeutig bestimmte Maximalstelle von $x \mapsto x^p(1-x)^{1-p}$, also gilt

$$p^p(1-p)^{1-p} > q^p(1-q)^{1-p} \quad \text{für alle } q \in [0, 1], \quad q \neq p.$$

Schließlich können wir im folgenden Satz noch eine Konvergenzaussage für die Grenzen des Verkauf- und des Kaufbereiches treffen. Die Voraussetzung ist zum Beispiel für konstante Kosten erfüllt.

Satz 3.8.8

Gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = 0,$$

so folgt für $a \in \{-1, +1\}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\pi}_a(x) = \hat{\eta}_a.$$

Beweis: Es gelte $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = 0$. Dann existiert ein $x_0 > 0$, so dass $x \in \mathcal{X}_0$ für alle $x \geq x_0$ gilt. Deshalb können wir im Beweis ohne Einschränkung $x \in \mathcal{X}_0$ annehmen.

(a) Sei $a \in \{-1, +1\}$ und $\pi \in [0, 1]$. Wir zeigen zuerst, dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g_a(x, \pi) \begin{cases} = 0, & \text{falls } \pi = \hat{\eta}_a, \\ > 0, & \text{falls } \pi \neq \hat{\eta}_a. \end{cases}$$

Mit der Stetigkeit von g_a erhalten wir

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g_a(x, \pi) &= \log(r) + \log\left(\left(\frac{p}{q_a}\right)^p \left(\frac{1-p}{1-q_a}\right)^{1-p}\right) \\ &\quad + \log(1+a\pi) - p \log(r + \pi(u-r)) - (1-p) \log(r - \pi(r-d)) \\ &= \log\left(p^p(1-p)^{1-p}\right) + \log(r(1+a\gamma\pi)) \\ &\quad - p \log(q_a(r + \pi(u-r))) - (1-p) \log((1-q_a)(r - \pi(r-d))). \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung von

$$\begin{aligned} (1-q_a)(r - \pi(r-d)) &= (1-q_a)(1-\pi)r + \pi(1-q_a)d \\ &= (1-q_a)(1-\pi)r + \pi((1+a\gamma)r - q_a u) \\ &= (1+a\gamma\pi) - q_a(r - \pi(u-r)) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g_a(x, \pi) &= \log\left(p^p(1-p)^{1-p}\right) \\ &\quad - \log\left(\left(\frac{q_a(r + \pi(u-r))}{r(1+a\gamma\pi)}\right)^p \left(1 - \frac{q_a(r + \pi(u-r))}{r(1+a\gamma\pi)}\right)^{1-p}\right). \end{aligned}$$

Somit gilt nach Bemerkung 3.8.7 $\lim_{x \rightarrow \infty} g_a(x, \pi) \geq 0$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn

$$p = \frac{q_a(r + \pi(u-r))}{r(1+a\gamma\pi)},$$

gilt, d.h. falls

$$\pi = \frac{(p-q_a)r}{q_a(u-r) - p\gamma r} = \hat{\eta}_a.$$

(b) Sei $a = -1$. Wir weisen nun die im Satz behauptete Konvergenz nach. Wegen der Konvergenz $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) = 0$ existiert nach Satz 3.8.6 ein x_{-1} , so dass für alle $x > x_{-1}$ nach Theorem 3.8.5 gilt

$$1 > \hat{\pi}_{-1}(x) > \hat{\eta}_{-1}.$$

Angenommen, $\hat{\pi}_{-1}(x)$ konvergierte nicht gegen $\hat{\eta}_{-1}$. d.h. es gäbe ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x_0 \in \mathcal{X}_0$ ein $x > x_0$ existierte mit $\hat{\pi}_{-1}(x) \geq \hat{\eta}_{-1} + \varepsilon$.

Wir könnten zu diesem ε ein $\pi \in (0, 1)$ so wählen, dass $\hat{\eta}_{-1} < \pi < \hat{\eta}_{-1} + \varepsilon$. Dann folgte nach Teil (a), dass $\lim_{x \rightarrow \infty} g_{-1}(x, \pi) > 0$. Also existiert ein x_1 , so dass gilt

$$g_{-1}(x, \pi) > 0 \quad \text{für alle } x > x_1.$$

Somit muss $\hat{\pi}_{-1}(x) \leq \pi < \hat{\eta}_{-1} + \varepsilon$ für alle $x > x_1$ gelten. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme. Also konvergiert $\hat{\pi}_{-1}(x)$ gegen $\hat{\eta}_{-1}$. Die Behauptung für $a = +1$ folgt analog. \square

3.9 Spezielle Transaktionskosten

In diesem Abschnitt werden wir die erzielten Resultate aus den Abschnitten 3.6 und 3.8 auf verschiedene spezielle Kostenstrukturen übertragen.

Korollar 3.9.1 (Rein proportionale Transaktionskosten)

Ist $\Gamma \equiv 0$, so sind $\hat{\pi}_{-1}$ und $\hat{\pi}_{+1}$ konstant und es gilt

$$1 > \hat{\pi}_{-1} = \hat{\eta}_{-1} = \hat{\eta} = \hat{\eta}_{+1} = \hat{\pi}_{+1} > 0, \quad \text{falls } \gamma = 0,$$

und

$$1 > \hat{\pi}_{-1} = \hat{\eta}_{-1} > \hat{\eta} > \hat{\eta}_{+1} = \hat{\pi}_{+1} > 0, \quad \text{falls } \gamma > 0.$$

Insbesondere sind $M_{-1}(x) \neq \emptyset$ und $M_{+1}(x) \neq \emptyset$.

Beweis: Die Behauptung folgt aus den Theoremen 3.6.2, 3.8.5 und Satz 3.8.6. \square

Korollar 3.9.2 (Fixe Transaktionskosten)

Sei $\delta \in (0, \gamma)$ für $\gamma > 0$ und $\delta \in (0, \frac{d}{r})$ für $\gamma = 0$. Für $\Gamma \equiv \delta$ ist $\mathcal{X}_0 = (0, \infty)$ und wir erhalten:

(i) Es sind $\hat{\pi}_{-1}$ und $\hat{\pi}_{+1}$ konstant und es gilt

$$\hat{\pi}_{-1} > \hat{\eta}_{-1} = \hat{\eta} = \hat{\eta}_{+1} > \hat{\pi}_{+1}, \quad \text{falls } \gamma = 0,$$

und

$$\hat{\pi}_{-1} > \hat{\eta}_{-1} > \hat{\eta} > \hat{\eta}_{+1} > \hat{\pi}_{+1}, \quad \text{falls } \gamma > 0.$$

(ii) Ist

$$\delta < (1 - \gamma) \frac{p^p(1-p)^{1-p} - \left(\frac{q-1u}{(1-\gamma)r}\right)^p \left(1 - \frac{q-1u}{(1-\gamma)r}\right)^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p}}$$

so gilt $\hat{\pi}_{-1} < 1$, d.h. $M_{-1}(x) \neq \emptyset$ für alle $x > 0$. Ist

$$\delta < \frac{p^p(1-p)^{1-p} - q_{+1}^p(1-q_{+1})^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p}}$$

so gilt $\hat{\pi}_{+1} > 0$, d.h. $M_{+1}(x) \neq \emptyset$ für alle $x > 0$.

Beweis: Sei $\delta \in (0, \gamma)$ für $\gamma > 0$ und $\delta \in (0, \frac{d}{r})$ für $\gamma = 0$. Dann folgt für $\Gamma \equiv \delta$ aus der Definition 3.2.2 $\mathcal{X}_0 = (0, \infty)$.

(i) Nach Theorem 3.8.5 (iv) bestimmt sich $\hat{\pi}_a$, $a \in \{-1, +1\}$, für $x > 0$ als Lösung von

$$g_a(x, \hat{\pi}_a(x)) = 0.$$

Diese Gleichung ist für $\Gamma(x) = \delta$ aber unabhängig von x , so dass $\hat{\pi}_{-1}$ und $\hat{\pi}_{+1}$ konstant sind. Die Ungleichungen folgen aus den Theoremen 3.6.2 und 3.8.5.

(ii) Die Behauptung folgt mit $\Gamma \equiv \delta$ aus Satz 3.8.6. □

Korollar 3.9.3 (Konstante Transaktionskosten)

Sei $C > 0$ und $\Gamma(x) = \frac{C}{x}$.

(i) Für alle $x \in \mathcal{X}_0$ gilt

$$\hat{\pi}_{-1}(x) > \hat{\eta}_{-1} = \hat{\eta} = \hat{\eta}_{+1} > \hat{\pi}_{+1}(x), \quad \text{falls } \gamma = 0,$$

und

$$\hat{\pi}_{-1}(x) > \hat{\eta}_{-1} > \hat{\eta} > \hat{\eta}_{+1} > \hat{\pi}_{+1}(x), \quad \text{falls } \gamma > 0.$$

(ii) Für alle

$$x > x_{-1} = \frac{C}{1 - \gamma} \frac{p^p(1-p)^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p} - \left(\frac{q-1u}{(1-\gamma)r}\right)^p \left(1 - \frac{q-1u}{(1-\gamma)r}\right)^{1-p}}$$

gilt $\hat{\pi}_{-1}(x) < 1$, d.h. $M_{-1}(x) \neq \emptyset$, und für alle

$$x > x_{+1} = \frac{C p^p(1-p)^{1-p}}{p^p(1-p)^{1-p} - q_{+1}^p(1-q_{+1})^{1-p}}$$

gilt $\hat{\pi}_{+1}(x) > 0$, d.h. $M_{+1}(x) \neq \emptyset$.

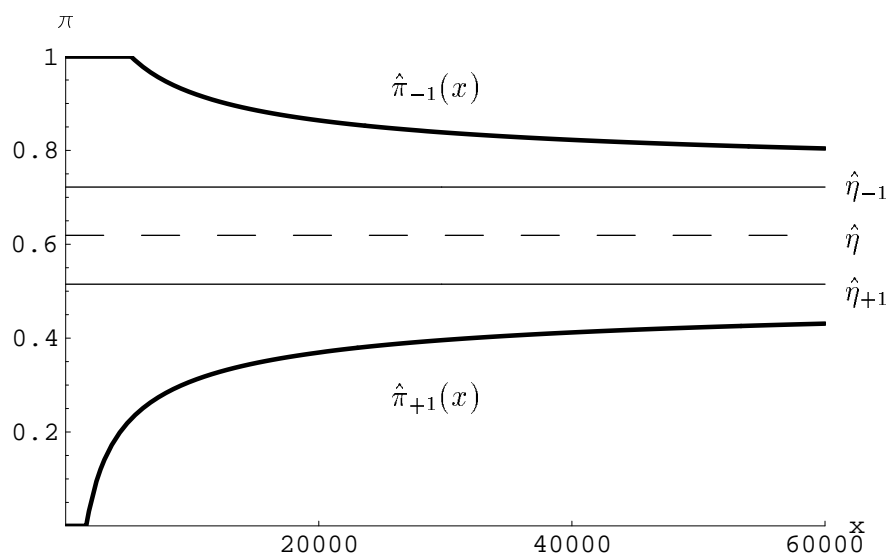


Abbildung 3.2: Kauf-,Halten- und Verkaufsbereich bei proportionalen plus konstanten Kosten

(iii) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\pi}_a(x) = \hat{\eta}_a, \quad a \in \{-1, +1\}.$$

Beweis: Teil (i) folgt wieder aus den Theoremen 3.6.2 und 3.8.5, (ii) aus Satz 3.8.6 und (iii) wegen $\Gamma(x) = \frac{C}{x} \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \infty$ aus Satz 3.8.8. \square

Beispiel 3.9.4

Wir betrachten das Ein-Perioden-Binomialmodell mit den Parametern

$$r = 1.04, \quad u = 1.25, \quad d = 0.8 \quad \text{und} \quad p = 0.6.$$

Als proportionale Kosten setzen wir $\gamma = 0.005$ an. Die Bedingungen in 3.2.1 und 3.2.2 sind erfüllt und die Aktie ist moderat. Für die optimalen Wertanteile berechnen wir

$$\hat{\eta}_{-1} = 0.722, \quad \hat{\eta} = 0.619 \quad \text{und} \quad \hat{\eta}_{+1} = 0.515.$$

Für fixe Kosten $\Gamma \equiv \delta$ mit $\delta = 0.0002$ ergibt sich numerisch

$$\hat{\pi}_{-1} = 0.812 \quad \text{und} \quad \hat{\pi}_{+1} = 0.423.$$

Schließlich erhalten wir bei konstanten Kosten $\Gamma(x) = \frac{C}{x}$ mit $C = 10$ die Handelsbereiche entsprechend Abbildung 3.2. Die fetten Linien bilden die Grenze des Verkauf- bzw. des Kaufbereiches, die gestrichelte entspricht dem optimalen Wertanteil ohne Transaktionskosten und die anderen beiden Linien entsprechen den optimalen Anteilen nach Verkauf (obere) bzw. nach Kauf (untere). Wir können die Werte x_{-1} und x_{+1} aus Korollar 3.9.3 berechnen zu

$$x_{-1} = 5164.84 \quad \text{und} \quad x_{+1} = 1623.69.$$

Ab x_{-1} liegen $\hat{\pi}_{-1}(x)$ und $\hat{\pi}_{+1}(x)$ in $(0, 1)$, d.h. ab einem für das Problem recht geringen Wert sind der Verkauf- und der Kaufbereich nicht leer.

Kapitel 4

Im Binomialmodell

4.1 Überblick

Wir werden unsere Betrachtungen in diesem Kapitel auf Modelle ausdehnen, in denen über mehrere Perioden gehandelt wird. Dabei werden wir uns auf das sogenannte Binomialmodell beschränken, das in Würdigung der Arbeit von Cox, Ross und Rubinstein (1979) auch als CRR-Modell bezeichnet wird. Da viele zeitstetige Modelle, wie zum Beispiel das Black-Scholes-Modell, durch eine Folge von Binomialmodellen approximiert werden können, ist diese Einschränkung als eher gering zu erachten.

Wir beginnen in 4.2 mit der Einführung des Modells und der Motivation der Begriffe der Handelsart und des neuen Wertanteils. In Abschnitt 4.3 werden wir die standardmäßig behandelten Optimalitätskriterien vorstellen, die über eine durch Handelsart und neue Wertanteile gesteuerte Wertentwicklung zu erreichen sind. Es bietet sich eine Einbettung in die Theorie der markovsch kontrollierten Prozesse an, um deren Ergebnisse nutzen zu können. In 4.4 geben wir einen kurzen Überblick über die von uns benötigten Definitionen und Resultate dieser Theorie.

Anschließend folgt in 4.5 die Einbettung des Binomialmodells. In Abschnitt 4.6 werden wir die in 4.3 vorgestellten Optimierungsaufgaben für den Fall lösen, dass keine Transaktionskosten vorliegen. Unter Transaktionskosten scheinen keine expliziten Lösungen mehr möglich zu sein. Wir formulieren in 4.7 mehrere Existenzresultate und geben für fixe und proportionale Kosten bei endlichem Zeithorizont einen sehr effizienten Algorithmus zur Bestimmung einer optimalen Kontrollstrategie an.

Zum Abschluss stellen wir in Abschnitt 4.8 einen Ansatz vor, wie eine gute Handelsstrategie für das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite gefunden werden kann. Diesen Zugang werden wir im folgenden Kapitel im Black-Scholes Modell ausführlich untersuchen. Er nutzt nicht mehr die Resultate der Theorie der markovsch kontrollierten Prozesse, sondern benötigt für die wesentlichen Aussagen erneuerungstheoretische Argumente. Hier im Binomialmodell erfolgt nur ein knapper Überblick

4.2 Handel im Binomialmodell

Nach der natürlichen Modellierung des Handels über das Transaktionsvolumen in Definition 4.2.2 führen wir nachfolgend den Begriff der Handelsart und des neuen Wertanteils ein und zeigen in Satz 4.2.9 die Äquivalenz der beiden Zugänge. Eine Möglichkeit der Faktorisierung des Wertprozesses in der neuen Modellierung geben wir in Satz 4.2.8 an. Diese Faktorisierung wird in den folgenden Abschnitten unter Verwendung des logarithmischen Nutzens zu einer gut behandelbaren additiven Darstellung führen.

Definition 4.2.1

Seien $r \geq 1$, $s_0 > 0$, $u, d > 0$ mit $u > r > d$ und $p \in (0, 1)$ reelle Konstanten und $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch gemäß

$$p = P(Y_n = u) = 1 - P(Y_n = d), \quad n \in \mathbb{N},$$

verteilter Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) . Die zugehörige Filtration bezeichnen wir mit

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n) \subseteq \mathcal{F}.$$

Prozesse $(B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S(n))_{n \in \mathbb{N}}$ seien durch

$$B(0) = 1 \quad \text{und} \quad B(n) = r^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

bzw. durch

$$S(0) = s_0 \quad \text{und} \quad S(n) = s_0 Y_1 \dots Y_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegeben. Dieses Modell bezeichnen wir als *Binomialmodell*. Betrachten wir ein Binomialmodell nur bis zu einem festen Endzeitpunkt $N \in \mathbb{N}$, so sprechen wir auch von einem *N-Perioden-Binomialmodell*. Wie schon im Einperioden-Binomialmodell bezeichnen wir die Prozesse $(B(n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(S(n))_{n \in \mathbb{N}}$ als *Bondkurs* bzw. *Aktienkurs*.

Im Folgenden werden wir die im letzten Kapitel eingeführten Begriffe auf das allgemeine Binomialmodell ausdehnen. Da die Motivation der Begriffe der Motivation in einer Periode entspricht, werden wir uns an dieser Stelle knapper fassen.

Zu Startwerten x und π , bestehend aus dem Startkapital x und dem zu Anfang in die Aktie investierten Wertanteil π , werden die Aktionen des Investors durch eine zu $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ adaptierte *Transaktionsfolge* $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben. Dabei gibt $\Delta_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ den zur Zeit n nach dem Bekanntwerden von $S(n)$ gehandelten Aktienwert an. Eine Transaktion unterliegt wie in Kapitel 3 wieder Transaktionskosten (γ, Γ) , bestehend aus proportionalen Kosten $\gamma \in [0, 1)$ und einem wertabhängigen Kostenanteil $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$.

In Anbetracht der jetzt vorliegenden zeitlichen Entwicklung erscheint es angebracht, den Kostenanteil Γ zeitabhängig wählen zu können. Eine sinnvolle Wahl wäre zum Beispiel zu einer Konstanten $C > 0$ gegeben durch

$$\Gamma(n, x) = \frac{C e^{r n}}{x}, \quad n \in \mathbb{N}_0, x > 0.$$

Dies entspräche konstanten Kosten $C e^{r n}$ zur Zeit n . Eine Zeitabhängigkeit des proportionalen Anteils γ erscheint hingegen nicht sinnvoll. Unsere Darstellung erfolgt für zeitunabhängige Transaktionskosten. Von dieser ausgehend ist durch Ersetzung von $\Gamma(x)$ durch $\Gamma(n, x)$ in der Darstellung der Wertprozesse der Übergang zu den entsprechenden Darstellungen bei dem zeitabhängigen Ansatz möglich.

Definition 4.2.2

Zu Startwerten $x, \pi \in \mathbb{R}$ und einer *Transaktionsfolge* $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ seien durch

$$X_B(0) = (1 - \pi)x, \quad X_S = \pi x$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} X_B(n+1) &= (X_B(n) - \Delta_n - \gamma|\Delta_n| - \Gamma(X(n))X(n)1_{\{\Delta_n \neq 0\}})r, \\ X_S(n+1) &= (X_S(n) + \Delta_n)Y_{n+1}, \end{aligned}$$

der *Bondwertprozess* $(X_B(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und der *Aktienwertprozess* $(X_S(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben. Weiter führen wir durch

$$X(n) = X_B(n) + X_S(n) \quad \text{und} \quad \pi(n) = \frac{X_S(n)}{X(n)}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$, also insbesondere $X(0) = x$ und $\pi(0) = \pi$, den (*Gesamt-*)*Wertprozess* $(X(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und den *Wertanteilsprozess (vor der Aktion)* $(\pi(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein.

Auf die notwendige Indizierung dieser Prozesse mit (x, π, Δ) werden wir verzichten, sofern die zugehörigen Werte (x, π, Δ) aus dem Zusammenhang hervorgehen. Sollten Zweifel möglich sein oder eine besondere Betonung notwendig erscheinen, so werden wir vereinzelt aber doch $X_B^\Delta(n)$ oder sogar $X_B^{x, \pi, \Delta}(n)$ schreiben und entsprechend für die Prozesse $(X_S(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$, $(X(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\pi(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ verfahren.

Eine Transaktionsfolge $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt *Arbitragemöglichkeit* zu den Startwerten x und π , falls ein $N \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$X^{x, \pi, \Delta}(N) - x r^N \geq 0 \quad \text{und} \quad P(X^{x, \pi, \Delta}(N) - x r^N > 0) > 0.$$

Satz 4.2.3

Im Binomialmodell mit Transaktionskosten existieren zu keinen Startwerten Arbitragemöglichkeiten, d.h. das Modell ist arbitragefrei.

Beweis: Es bezeichne $\tilde{X}^{x,\pi,\Delta}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, den Wertprozess ohne Transaktionskosten. Unter der Bedingung $u > r > d$ aus Definition 4.2.1 ist die Arbitragefreiheit des Binomialmodells ohne Transaktionskosten bekannt (siehe Irle (1998), 3.8). Somit folgt sie auch hier wegen

$$\tilde{X}^{x,\pi,\Delta}(n) \leq X^{x,\pi,\Delta}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Wir können auch die in Definition 3.3.3 im Einperiodenmodell definierten Maße Q , Q_{-1} und Q_{+1} auf das Binomialmodell ausdehnen: Sie werden auf $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n)$ durch die Forderung eingeführt, dass Y_1, Y_2, \dots auch unabhängig und identisch verteilt unter diesen Maßen sind mit

$$Q(Y_1 = u) = q = 1 - Q(Y_1 = d) \quad \text{und} \quad Q_a(Y_1 = u) = q_a = 1 - Q_a(Y_1 = d)$$

für $a \in \{-1, +1\}$, wobei wie im Kapitel 3

$$q = \frac{r-d}{u-d} \quad \text{und} \quad q_a = \frac{(1+a)r-d}{u-d}, \quad a \in \{-1, +1\},$$

seien. Allerdings liegt die Bedeutung dieser Maße auch hier im Wesentlichen nur in den Parametern q, q_{-1}, q_{+1} .

Definition 4.2.4

Der Aktienkurs im Binomialmodell heißt *moderat*, falls gilt

$$q_{+1} < p < \frac{q_{-1}u}{(1-\gamma)r}.$$

Zur Vereinfachung der Analyse werden wir uns auf moderate Aktien beschränken und auch nur jene Transaktionsfolgen betrachten, für die der Wertprozess strikt positiv bleibt und – im Unterschied zu unseren Betrachtungen im Einperiodenmodell – kein Short Selling von Aktien oder Bonds erfolgt. Deshalb führen wir ein:

Definition 4.2.5

Zu $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ sei

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^0(x, \pi) = \{ & 0\} \cup \{ \Delta \in \mathbb{R} \mid x - x\Gamma(x) - \gamma|\Delta| > 0, \\ & (1-\pi)x - \Delta - x\Gamma(x) - \gamma|\Delta| \geq 0, \pi x + \Delta \geq 0 \} \end{aligned}$$

Eine Transaktionsfolge $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir *zulässig* zu den Startwerten $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$, falls für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\Delta_n \in \mathcal{D}^0(X^{x,\pi,\Delta}(n), \pi^{x,\pi,\Delta}(n)).$$

Lemma 4.2.6

Seien $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$. Für eine Transaktionsfolge $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind äquivalent

(1) Δ ist zulässig zu x und π .

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten

$$X^{x,\pi,\Delta}(n) > 0, \quad X_B^{x,\pi,\Delta}(n) \geq 0 \quad \text{und} \quad X_S^{x,\pi,\Delta}(n) \geq 0$$

(3) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten

$$X^{x,\pi,\Delta}(n) > 0 \quad \text{und} \quad \pi^{x,\pi,\Delta}(n) \in [0, 1].$$

Beweis: Seien $x_0 > 0, \pi_0 \in [0, 1]$ und $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Transaktionsfolge. Wir schreiben kurz $X(n)$ für $X^{x,\pi,\Delta}(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, und ebenso auch $\pi(n), X_B(n), X_S(n)$.

Es gelte (1). Wir zeigen (3): Sei Δ zulässig zu x_0, π_0 . Es gilt $X(0) = x_0 > 0$ und $\pi(0) = \pi_0 \in [0, 1]$. Sei $\omega \in \Omega$ mit $x_n = X(n, \omega) > 0$, $\pi_n = \pi(n, \omega) \in [0, 1]$ und $d_n = \Delta_n(\omega) \in \mathcal{D}^o(x_n, \pi_n)$. Dann gilt im Fall $d_n = 0$

$$X(n+1, \omega) = (1 - \pi_n)x_n r + \pi_n x_n Y_{n+1}(\omega) > 0,$$

da $\pi_n > 0$ oder $1 - \pi_n > 0$ gilt, und somit auch

$$\pi(n+1, \omega) = \frac{\pi_n x_n Y_{n+1}(\omega)}{X(n+1, \omega)} \in [0, 1].$$

Ist $d_n \neq 0$ so impliziert $d_n \in \mathcal{D}_+(x_n, \pi_n)$

$$(1 - \pi_n)x_n - d_n - x_n \Gamma(x_n) - \gamma |d_n| \geq 0 \quad \text{und} \quad \pi_n x_n + d_n \geq 0$$

mit einer echten Ungleichung, da sonst die dritte Bedingung verletzt wäre. Es folgt also

$$\begin{aligned} X(n+1, \omega) &= ((1 - \pi_n)x_n - d_n - x_n \Gamma(x_n) - \gamma |d_n|)r + (\pi_n x_n + d_n)Y_{n+1}(\omega) \\ &> 0 \end{aligned}$$

und wegen $0 \leq (\pi_n x_n + d_n)Y_{n+1}(\omega) \leq X(n+1, \omega)$ auch

$$\pi(n+1, \omega) = \frac{(\pi_n x_n + d_n)Y_{n+1}}{X(n+1, \omega)} \in [0, 1].$$

Damit folgt die Behauptung mit der Induktion auch fast sicher.

Gilt (3), so folgt die Behauptung (2) wegen

$$X_B(n) = (1 - \pi(n))X(n) \geq 0 \quad \text{und} \quad X_S(n) = \pi(n)X(n) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Es gelte schließlich (2). Wir weisen die Baupfung (1) nach: Da mit $X(n+1) > 0$ auch $X_B(n+1) > 0$ oder $X_S(n+1) > 0$ gilt, erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} (1 - \pi(n))X(n) - \Delta_n - X(n)\Gamma(X(n)) - \gamma|\Delta_n| &= \frac{X_B(n+1)}{r} \geq 0, \\ \pi(n)X(n) + \Delta_n &= \frac{X_S(n+1)}{Y_{n+1}} \geq 0, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &X(n) - X(n)\Gamma(X(n)) - \gamma|\Delta_n| \\ &= (1 - \pi(n))X(n)n - \Delta_n - X(n)\Gamma(X(n)) - \gamma|\Delta_n| + \pi(n)X(n) + \Delta_n \\ &= \frac{X_B(n+1)}{r} + \frac{X_S(n+1)}{Y_{n+1}} \\ &> 0, \end{aligned}$$

d.h. $\Delta_n \in \mathcal{D}^\circ(X(n), \pi(n))$. □

Definition 3.2.6 entsprechend führen wir wieder die Handelsart und den neuen Wertanteil (den Wertanteil nach der Aktion) ein.

Definition 4.2.7

Seien $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$. Der *neue Wertanteil* $f_\eta(x, \pi, \Delta)$ nach der Transaktion Δ und die *Handelsart* $f_a(\Delta)$ von Δ sind gegeben durch die Abbildungen

$$f_\eta(x, \pi, \cdot) : \mathcal{D}^\circ(x, \pi) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_\eta(x, \pi, \Delta) = \frac{\pi x + \Delta}{x - x\Gamma(x) 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta) - \gamma|\Delta|}$$

und

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, +1\}, \quad a(\Delta) = \text{sign}(\Delta).$$

Der folgende Satz beschreibt, wie sich die Wertentwicklung durch die neu eingeführten Begriffe beschreiben lässt.

Satz 4.2.8

- (i) Seien $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ und $\Delta \in \mathcal{D}^\circ(x, \pi)$. Mit $a = f_a(x, \pi, \Delta)$ und $\eta = f_\eta(x, \pi, \Delta)$ hat Δ die Darstellung

$$\Delta = \frac{(1 - a^2 \Gamma(x))\eta - \pi}{1 + a \gamma \eta} x.$$

mit Kosten $a^2 \Gamma(x)x + a \gamma \Delta$. Außerdem gilt

$$\text{sign}((1 - a^2 \Gamma(x))\eta - \pi) = a.$$

(ii) Für eine zulässige Transaktionsfolge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ zu Startwerten x und π hat die Wertentwicklung die Darstellung

$$\begin{aligned} X(0) &= x, \quad \pi(0) = \pi, \\ X(n+1) &= \frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} (r + \eta_n (Y_{n+1} - r)) X(n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \pi(n) &= \frac{\eta_n Y_{n+1}}{r + \eta_n (Y_{n+1} - r)}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

wobei $\eta_n = f_\eta(X(n), \pi(n), \Delta_n)$ und $A_n = f_a(X(n), \pi(n), \Delta_n)$ seien.

Beweis: Wir bemerken zuerst, dass

$$f_\eta(x, \pi, \Delta) \in [0, 1] \quad \text{für alle } x > 0, \pi \in [0, 1], \Delta \in \mathcal{D}^\circ(x, \pi)$$

gilt, da $f_\eta(x, \pi, 0) = \frac{\pi x}{x} = \pi$ in $[0, 1]$ liegt und für $\Delta \neq 0$ aus $\Delta \in \mathcal{D}^\circ(x, \pi)$

$$0 \leq \pi x + \Delta \leq \pi x + \Delta + (1 - \pi)x - x \Gamma(x) - \gamma |\Delta| = x - x \Gamma(x) - \gamma |\Delta|$$

und damit auch $f_\eta(x, \pi, \Delta) \in [0, 1]$ folgt.

Für $\eta \in [0, 1]$ gilt auch $1 + a \gamma \eta > 0$ für $a \in \{-1, 0, +1\}$.

Zum Nachweis von (i) beachten wir

$$f_\eta(x, \pi, \Delta) = \frac{\pi x + \Delta}{x - a^2 x \Gamma(x) - a \gamma \Delta},$$

so dass Auflösen nach Δ die behauptete Darstellung liefert. Aus dieser folgt unter Beachtung von $a = \text{sign}(\Delta)$ auch der zweite Teil der Behauptung.

Sei nun $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine zulässige Folge zu Startwerten $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$. Für die zugehörige Wertentwicklung gilt für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} X(n+1) &= X_B(n+1) + X_S(n+1) \\ &= ((1 - \pi(n))X(n) - \Delta_n - X(n)\Gamma(X(n))1_{\{\Delta_n \neq 0\}} - \gamma |\Delta_n|)r \\ &\quad + (\pi(n)X(n) + \Delta_n)Y_{n+1} \\ &= ((1 - \pi(n))X(n) - \Delta_n - A_n^2 X(n)\Gamma(X(n)) - A_n \gamma \Delta_n)r \\ &\quad + (\pi(n)X(n) + \Delta_n)Y_{n+1}, \end{aligned}$$

so dass die behauptete Darstellung unter Ausnutzung von (i) mit den identischen Rechnungen wie im Beweis von Satz 3.2.7 folgt.

Unter Beachtung von (i) erhalten wir auch

$$\begin{aligned}
\pi(n)X(n) + \Delta_n &= \pi(n)X(n) + \frac{(1 - A_n^2 \Gamma(X(n)))\eta_n - \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(n) \\
&= \frac{\pi(n)(1 + A_n \gamma \eta_n) + 1 - A_n^2 \Gamma(X(n))\eta_n - \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(n) \\
&= \frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} \eta_n X(n),
\end{aligned}$$

so dass mit der Darstellung für $X(n+1)$ folgt

$$\begin{aligned}
\pi(n+1) &= \frac{X_S(n+1)}{X(n+1)} \\
&= \frac{(\pi(n)X(n) + \Delta_n)Y_{n+1}}{X(n+1)} \\
&= \frac{\eta_n Y_{n+1}}{r + \eta_n(Y_{n+1} - r)}.
\end{aligned}$$

□

Wir können jetzt ein Satz 3.2.8 entsprechendes Eindeutigkeitsresultat formulieren. Da wir kein Short Selling zugelassen haben und keine den Bedingungen in Definition 3.2.2 entsprechenden Voraussetzungen an die Transaktionskosten gestellt haben, ergeben sich hier aber einige Abweichungen von der Formulierung im Einperiodenmodell.

Satz 4.2.9

Es seien $\mathcal{A}_0^\circ(x, \pi) = \{ \pi \}$ und für $a \in \{-1, +1\}$

$$\mathcal{A}_a^\circ(x, \pi) = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } 1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi \leq 0, \\ \{ \eta \in [0, 1] \mid \text{sign}((1 - \Gamma(x))\eta - \pi) = a \} & \text{falls } 1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi > 0, \end{cases}$$

sowie

$$\mathcal{D}^\circ(x, \pi) = \{ (a, \eta) \in \{-1, 0, +1\} \times [0, 1] \mid \eta \in \mathcal{A}_a^\circ(x, \pi) \}.$$

Dann ist für $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$ die Abbildung

$$\mathcal{D}^\circ(x, \pi) \rightarrow \mathcal{A}(x, \pi), \quad \Delta \mapsto (f_a(\Delta), f_\eta(x, \pi, \Delta))$$

bijektiv.

Beweis: Seien $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ und

$$f : \mathcal{D}^\circ(x, \pi) \rightarrow \mathcal{A}^\circ(x, \pi), \quad f(\Delta) = (f_a(\Delta), f_\eta(x, \pi, \Delta)).$$

Für $\Delta \in \mathcal{D}^\circ(x, \pi)$ erkennen wir an der Darstellung des Wertes in Satz 4.2.8 (ii), dass

$$1 - (f_a(\Delta))^2 \Gamma(x) + f_a(\Delta) \gamma \pi > 0$$

gelten muss, da ansonsten ein Widerspruch zu Lemma 4.2.6 (3) folgte. Da nach Satz 4.2.8 (i) auch

$$\text{sign}((1 - (f_a(\Delta))^2 \Gamma(x)) f_\eta(\Delta) - \pi) = a.$$

gilt, folgt bereits $f(\Delta) \in \mathcal{A}^\circ(x, \pi)$.

Für $\Delta = 0$ gelten $f_a(\Delta) = 0$ und $f_\eta(x, \pi, \Delta) = \pi$, also $f(\{0\}) = \{0\} \times \mathcal{A}_0^\circ(x, \pi)$.

Sei $\Delta \neq 0$ und $a = f_a(\Delta) \in \{-1, +1\}$. Mit Satz 4.2.8 (ii) und Lemma 4.2.6 (3) folgt wieder, dass $1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi > 0$ gelten muss. Damit ist $f_\eta(x, \pi, \cdot)$ auf $\{d \in \mathcal{D}^\circ(x, \pi) \mid f_a(d) = a\}$ differenzierbar mit

$$\frac{\partial f_\eta(x, \pi, \Delta)}{\partial \Delta} = \frac{1 - x \Gamma(x) + a \gamma \pi}{(x - x \Gamma(x) - a \gamma \Delta)^2} > 0$$

d.h. $f_\eta(x, \pi, \cdot)$ ist streng monoton wachsend. Damit ist f injektiv.

Ferner gilt

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, \Delta \neq 0} f_\eta(x, \pi, \Delta) = \frac{\pi}{1 - \Gamma(x)}$$

und für die minimale Transaktion $-x \pi$ und die maximale Transaktion $\frac{(1-\pi)x - x \Gamma(x)}{1+\gamma}$ sind

$$f_\eta(x, \pi, -x \pi) = 0 \quad \text{und} \quad f_\eta(x, \pi, \frac{(1-\pi)x - x \Gamma(x)}{1+\gamma}) = 1,$$

so dass f auch surjektiv ist. \square

Die Bedeutung dieses Satzes liegt darin, dass wir uns wieder auf eine Darstellung der Wertentwicklung durch die Handelsart und den neuen Wertanteil zurückziehen können.

In dieser Darstellung ist nach Satz 4.2.8 (ii) eine Faktorisierung des Wertes möglich, die bei Anwendung des Logarithmus in einer Summendarstellung des Nutzens resultiert. Damit wird die Behandlung von Optimierungsaufgaben überhaupt erst vernünftig handhabbar.

4.3 Optimierungsaufgaben

Die Definitionen und Sätze 4.2.7, 4.2.8 und 4.2.9 ermöglichen es uns, anstatt der Transaktionsfolge $\Delta = (\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ohne Einschränkung eine Folge von Handelsarten und

neuen Wertanteilen $(A, \eta) = (A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ anzusetzen, die wir kurz als *Aktionsfolge* bezeichnen wollen. Als Wertentwicklung ist dann Satz 4.2.8 (ii) entsprechend zu Anfangswerten x und π

$$X(0) = x, \quad \pi(0) = \pi$$

und für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} X(n+1) &= \frac{(1 - A_n^2 \Gamma(x) + A_n \gamma \pi(n))(r + \eta_n(Y_{n+1} - r))}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(n), \\ \pi(n+1) &= \frac{\eta_n Y_{n+1}}{r + \eta_n(Y_{n+1} - r)} \end{aligned}$$

zu betrachten, wobei natürlich eine Indizierung der Art $X^{x, \pi, (A, \eta)}$, $\pi^{x, \pi, (A, \eta)}$ oder zumindestens $X^{(A, \eta)}$, $\pi^{(A, \eta)}$ notwendig wäre, auf die wir aber verzichten werden, falls die betrachtete Aktionsfolge aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.

Definition 4.3.1

Zu $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$ seien $\mathcal{A}^+(x, \pi)$ und $\mathcal{A}_a^+(x, \pi)$, $a \in \{-1, +1\}$, jeweils der Abschluss der in Satz 4.2.9 definierten Mengen $\mathcal{A}^o(x, \pi)$ bzw. $\mathcal{A}_a^o(x, \pi)$.

Eine Aktionsfolge $(A, \eta) = (A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt *zulässig*, falls zu allen Startwerten $x > 0$ und $\pi \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(A_n, \eta_n) \in \mathcal{A}^+(X^{(A, \eta)}(n), \pi^{(A, \eta)}(n))$$

und *transaktionenäquivalent*, falls sogar gilt

$$(A_n, \eta_n) \in \mathcal{A}^o(X^{(A, \eta)}(n), \pi^{(A, \eta)}(n))$$

Dass wir die Zulässigkeit über \mathcal{A}^+ und nicht über \mathcal{A}^o definieren, bedeutet, dass es jetzt im Gegensatz zur Einführung in 4.2 auch erlaubt ist, nicht zu handeln aber trotzdem Transaktionskosten zu zahlen. Eine optimale Kontrollstrategie wird diese Möglichkeit in der Regel nicht nutzen und somit transaktionenäquivalent sein. Die Kompaktheit von $\mathcal{A}^+(x, \pi)$ wird uns im Abschnitt 4.7 in einfacher Weise die Existenz einer optimalen Aktion garantieren.

Lemma 4.3.2

Sei $(A, \eta) = (A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine zulässige Aktionsfolge. Dann gilt zu allen Startwerten $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$X^{(A, \eta)}(n) > 0 \quad \text{und} \quad \pi^{(A, \eta)} \in [0, 1].$$

Ist (A, η) auch transaktionenäquivalent, so ist eine zu $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ zulässige Transaktionsfolge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eindeutig bestimmt gemäß

$$\Delta_n = \frac{(1 - A_n^2 \Gamma(X(n)))\eta_n - \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(n).$$

Beweis: Die Behauptung folgt sofort mit der Bijektion aus Satz 4.2.9, aus Lemma 4.2.7 und Satz 4.2.8, wobei zu beachten ist, dass die entsprechenden Darstellungen auch für zulässige Aktionenfolgen gelten. \square

Im Folgenden stellen wir einige typische Optimierungsprobleme vor, die wir ohne Transaktionskosten in 4.6 lösen werden und in den Abschnitten 4.7 und 4.8 unter der Berücksichtigung von Transaktionskosten untersuchen werden

Definition 4.3.3

Zu einer zulässigen Aktionenfolge $(A, \eta) = (A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir zu $N \in \mathbb{N}$

$$J_N^{(A, \eta)}(x, \pi) = \mathbb{E}_{(x, \pi)} [\log(X^{(A, \eta)}(N))]$$

den *Nutzen zur Zeit N*. Dabei bezeichnet $\mathbb{E}_{(x, \pi)}$ den Erwartungswert unter der Bedingung, dass Startwerte x und π vorliegen.

Zu $\alpha \in (0, 1)$ heißt

$$V_\alpha^{(A, \eta)}(x, \pi) = \mathbb{E}_{(x, \pi)} \left[\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha^n \log \left(\frac{X^{(A, \eta)}(n)}{X^{(A, \eta)}(n-1)} \right) \right]$$

der α -diskontierte Gewinn. Dabei handelt es sich genauer um den erwarteten mit α diskontierten logarithmischen Nutzen der Zwischengewinne. Schließlich nennen wir

$$R^{(A, \eta)}(x, \pi) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{(x, \pi)} [\log(X^{(A, \eta)}(N))]$$

die *asymptotische Rendite* zu (A, η) .

Zu bestimmen sind die *optimalen Werte*

$$\begin{aligned} J_N^*(x, \pi) &= \sup_{(A, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)} J_N^{(A, \eta)}(x, \pi), \\ V_\alpha^*(x, \pi) &= \sup_{(A, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)} V_\alpha^{(A, \eta)}(x, \pi), \\ R^*(x, \pi) &= \sup_{(A, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)} R^{(A, \eta)}(x, \pi) \end{aligned}$$

und insbesondere die zugehörigen optimalen Aktionen. Eine Aktionenfolge $(A, \eta)^* = (A_n^*, \eta_n^*)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir *optimal* für eine Optimierungsaufgabe, wenn sie zulässig ist und unter ihr der entsprechende optimale Wert angenommen wird, also zum Beispiel gilt

$$J_N^*(x, \pi) = J_N^{(A, \eta)^*}(x, \pi).$$

4.4 Markovsch kontrollierte Prozesse

In der Sprache der Kontrolltheorie wird die Wertentwicklung $(X^{(A,\eta)}(n), \pi^{(A,\eta)}(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch die Aktionenfolge $(A, \eta) = (A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ kontrolliert oder gesteuert. Ziel ist es, die Kontrolle (A, η) so zu wählen, dass eines der oben angeführten Kriterien maximiert wird.

Die Schwierigkeit in unserer Situation besteht darin, dass wir weder einen abzählbaren Zustandsraum für den kontrollierten Prozess, noch einen abzählbaren Aktionenraum für die Kontrolle vorliegen haben.

Wir zitieren im Wesentlichen aus Hernández-Lerma und Lasserre (1995) die folgenden uns betreffenden Definitionen und Resultate.

Definition 4.4.1 (Markovsches Kontrollmodell)

Ein *Markovsches Kontrollmodell* $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}(x) | x \in \mathcal{X}\}, Q, g)$ besteht aus:

- (1) Einer Borelschen Menge \mathcal{X} , dem *Zustandsraum*, dessen Elemente *Zustände* heißen.
- (2) Einer Borelschen Menge \mathcal{A} , der *Aktionenmenge* oder *Kontrollmenge*, deren Elemente wir *Aktionen* oder *Kontrollen* nennen.
- (3) Einer Familie $\{\mathcal{A}(x) | x \in \mathcal{X}\}$ nicht-leerer messbarer Teilmengen von \mathcal{A} , wobei $\mathcal{A}(x)$ die im Zustand $x \in \mathcal{X}$ *zulässigen Aktionen* bezeichnet und die Eigenschaft hat, dass die Menge

$$\mathcal{Z} = \{ (x, a) \mid x \in \mathcal{X}, a \in \mathcal{A}(x) \}$$

der *zulässigen Zustands-Aktionen-Paare* messbar in $\mathcal{X} \times \mathcal{A}$ ist.

Ferner wird angenommen, dass eine messbare Auswahlfunktion $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $f(x) \in \mathcal{A}(x)$, $x \in \mathcal{X}$, existiert, d.h. dass \mathcal{Z} den Graph einer messbaren Funktion enthält.

- (4) Einem stochastischen Kern Q auf \mathcal{X} gegeben \mathcal{Z} , dem *Übergangskern*.
- (5) Einer messbaren Funktion $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, der (*Einperioden-*) *Auszahlungsfunktion*, und bei Bedarf messbaren Funktionen $g_0 : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, dem *Anfangswert*, und $g_n : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, den *terminalen Auszahlungsfunktionen* bei Stopp zum Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$.

In einem markovschen Kontroll-Modell werden durch $\mathcal{H}_0 = \mathcal{X}$ und für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$\mathcal{H}_n = \mathcal{Z}^n \times \mathcal{X}$$

die Mengen der *zulässigen Vergangenheiten* definiert. Diese sind Teilmengen der *möglichen Vergangenheiten*

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{X}, \quad \tilde{\mathcal{H}}_n = (\mathcal{X} \times \mathcal{A})^n \times \mathcal{X}.$$

Eine *Kontrollstrategie* oder *Kontrollpolitik* ist eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ stochastischer Kerne K_n auf \mathcal{A} gegeben \mathcal{H}_n , so dass gilt

$$K_n(A(x_n), h_n) = 1 \quad \text{für alle } h_n = (x_0, a_0, \dots, x_{n-1}, a_{n-1}, x_n) \in \mathcal{H}_n.$$

Die Menge aller Kontrollstrategien bezeichnen wir mit \mathcal{K} .

Bemerkung 4.4.2 (Kanonische Konstruktion)

Die kanonische Konstruktion nach Ionescu-Tulcea zeigt, dass zu jeder Kontrollstrategie ein Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, das eine Konstruktion von Prozessen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ wie folgt ermöglicht:

Es wird die kanonische Ergebnismenge $\Omega = (\mathcal{X} \times \mathcal{A})^\infty$ versehen mit der zugehörigen Produkt- σ -Algebra \mathcal{F} betrachtet. Die Elemente von Ω sind einfach von der Gestalt $(x_0, a_0, x_1, a_1, \dots)$. Die Zufallsvariablen X_n und A_n , $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen die Projektionen auf die entsprechenden Komponenten. Die Vergangenheit zur Zeit n kann durch eine Zufallsvariable $H_n = (X_0, A_0, \dots, X_{n-1}, A_{n-1}, X_n)$ beschrieben werden. Zu einer Startverteilung ν für X_0 und einer Kontrollstrategie $K = (K_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ existiert nun nach Ionescu-Tulcea ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß $P_{\nu, K}$ auf (Ω, \mathcal{F}) mit

$$\begin{aligned} P_{\nu, K}(\mathcal{H}_\infty) &= 1, \quad \text{wobei } \mathcal{H}_\infty = \mathcal{Z}^\infty, \\ P_{\nu, K}(X_0 \in B) &= \nu(B) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}), \\ P_{\nu, K}(A_n \in C \mid H_n = h_n) &= K_n(C, h_n) \quad \text{für alle } C \in \mathcal{B}(\mathcal{A}), \\ P_{\nu, K}(X_{n+1} \in B \mid X_n = a_n, A_n = a_n) &= Q(B, (x_n, a_n)) \quad \text{für alle } B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}). \end{aligned}$$

Der Zusammenhang zu unserer Notation bei der Formulierung der Optimierungsaufgaben in Definition 4.3.3 ist gegeben durch

$$P_x(X^K(n) \in B) = P_{\delta_x, K}(X(n) \in B), \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{B}.$$

Definition 4.4.3

- (i) Die beiden in Bemerkung 4.4.3 eingeführten Prozesse $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P_{\nu, K})$ heißen (*durch K*) *markovsch kontrollierter Prozess* bzw. *Aktionsfolge (zu K) zur Startverteilung ν* . Die Familie der markovsch kontrollierten Prozesse

$$(\Omega, \mathcal{F}, P_{x, K}, (X_n)_{n \in \mathbb{N}})_{x \in \mathcal{X}, K \in \mathcal{K}}$$

in Verbindung mit einem Optimierungskriterium bezeichnen wir als *markovsches Kontrollproblem (in diskreter Zeit)*. Dabei bezeichnet $P_{x, K}$ das Maß zur Startverteilung $\nu = \delta_x$.

(ii) Eine Kontrollstrategie K heißt

- *markovsch*, falls eine Folge stochastischer Kerne $(R_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ auf \mathcal{A} gegeben \mathcal{X} mit $R_n(\mathcal{A}(x), x) = 1$ existiert, so dass $K_n(\cdot, h_n) = R_n(\cdot, x_n)$ für alle $h_n = (x_0, a_0, \dots, x_n) \in \mathcal{H}_n$.
- *stationär*, falls sie markovsch ist und ein stochastischer Kern S auf \mathcal{A} gegeben \mathcal{X} mit $R(\mathcal{A}(x), x) = 1$ existiert, so dass $K_n(\cdot, h_n) = R(\cdot, x_n)$ für alle $h_n = (x_0, a_0, \dots, x_n) \in \mathcal{H}_n$.
- *deterministisch*, falls eine Folge $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Abbildungen $\xi_n : \mathcal{H}_n \rightarrow \mathcal{A}$ existiert, für die $\xi_n(h_n) \in \mathcal{A}(x_n)$ für alle $h_n = (x_0, a_0, \dots, x_n) \in \mathcal{H}_n$ und $K_n(C, h_n) = 1_C(\xi_n(h_n))$ für alle $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.
- *deterministisch und markovsch*, falls eine Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Auswahlfunktionen existiert, so dass $K_n(C, x_n) = 1_C(\psi_n(x_n))$ für alle $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.
- *deterministisch und stationär* falls eine Auswahlfunktion φ existiert, so dass $K_n(C, x_n) = 1_C(\varphi(x_n))$ für alle $C \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$.

Dabei verstehen wir unter einer *Auswahlfunktion* eine messbare Abbildung $\psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ für die $\psi_n(x) \in \mathcal{A}(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt.

Ist K zum Beispiel deterministisch und markovsch mit zugehörigen Auswahlfunktionen $\psi = (\psi_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, so schreiben wir $K = (\psi_0, \psi_1, \dots)$ oder suggestiv K_ψ . Bei den anderen Charakterisierungen verfahren wir entsprechend. Bezeichnen wir die Menge der markovschen, stationären, deterministischen, deterministischen und markovschen sowie der deterministischen und stationären Kontrollstrategien mit $\mathcal{K}_m, \mathcal{K}_s, \mathcal{K}_d, \mathcal{K}_{dm}$ bzw. \mathcal{K}_{ds} , so ist evident, dass gelten

$$\mathcal{K}_s \subseteq \mathcal{K}_m \subseteq \mathcal{K} \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_{ds} \subseteq \mathcal{K}_{dm} \subseteq \mathcal{K}_d \subseteq \mathcal{K}.$$

Satz 4.4.4

Ein durch eine markovsche Kontrollstrategie K markovsch kontrollierter Prozess ist ein Markovprozess. Ist K stationär, so ist dieser auch zeitlich homogen.

Beweis: Siehe Proposition 2.3.5 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995). \square

Häufig liegt die Situation vor, dass die stochastische Entwicklung durch eine Folge unabhängig und identisch verteilter Zufallsvariablen $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben werden kann. In solch einem Fall ergeben sich einige Vereinfachungen. Dazu ist allgemein folgende Begriffsbildung hilfreich.

Definition 4.4.5

Sei ein markovsches Kontrollmodell $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}(x)|x \in \mathcal{X}\}, Q, g)$ mit markovsch kontrolliertem Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und Aktionenfolge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben. Existiert eine Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen, unabhängig von X_0 , mit Werten in einer borelschen Menge \mathcal{Y} , so dass sich der Übergang von X_{n-1} zu X_n in der Form

$$X_n = f(X_{n-1}, A_{n-1}, Y_n), \quad n \in \mathbb{N}$$

mit messbarem $f : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ darstellen lässt, so sprechen wir von einem *markovschen Kontrollmodell* mit *Bildungsgesetz* f .

Bemerkung 4.4.6

- (i) Bezeichne P^Y die gemeinsame Verteilung von Y_1, Y_2, \dots in Definition 4.4.5, so ergibt sich der Übergangskern einfach zu

$$Q(B, (x, a)) = \int_{\mathcal{Y}} 1_B(f(x, a, y)) P^Y(dy), \quad (x, a) \in \mathcal{Z}, B \in \mathcal{B}(\mathcal{X}).$$

- (ii) Zusätzlich können auch messbare Auszahlungsfunktionen der Gestalt

$$g : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R},$$

betrachtet werden, so dass

$$G_n = g(X_{n-1}, A_{n-1}, Y_n)$$

die Auszahlung in der n -ten Periode bezeichnet.

Voraussetzung 4.4.7

Ab jetzt sei ein markovsches Kontrollmodell $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \{\mathcal{A}(x)|x \in \mathcal{X}\}, Q, g)$ mit Bildungsgesetz f und zugehöriger Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen gegeben. Es bezeichne Y eine Zufallsvariable mit der Verteilung von Y_1 .

Die nun zitierten Resultate sind den Bemerkungen in Abschnitt 2.3 und Abschnitt 3.4 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995) folgend gleich für den Fall formuliert, dass ein Bildungsgesetz existiert. Außerdem haben wir zusätzlich den Anfangswert g_0 eingeführt und betrachten die Maximierung anstatt der Minimierung. Die vorgenommenen Modifikationen sind offenkundig und erleichtern die Übertragung in 4.5 auf das Binomialmodell mit Transaktionskosten.

Endlicher Zeithorizont

Zu $N \in \mathbb{N}$ werde als Optimierungsaufgabe die Maximierung von

$$J_N^K(x) = g_0(x) + \mathbb{E}_{x,K} \left[\sum_{n=0}^{N-1} g(X_n, A_n, Y_{n+1}) + g_N(X_N) \right], \quad x \in \mathcal{X},$$

über \mathcal{K} betrachtet. Es bezeichne

$$J_N^*(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} J_N^K(x), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Ziel ist die Bestimmung des *optimalen Wertes* J_N^* und einer Kontrollstrategie $K^* = (K_0^*, \dots, K_{N-1}^*)$, die diesen Wert erreicht, d.h. für die gilt

$$J_N^*(x) = J_N^{K^*}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X}.$$

Theorem 4.4.8 (Algorithmus der dynamischen Programmierung)

Seien J_0, \dots, J_N Funktionen auf \mathcal{X} , definiert durch

$$J_N(x) = g_N(x)$$

und absteigend für $n = N-1, \dots, 0$ durch

$$J_n(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + J_{n+1}(f(x, a, Y))].$$

Angenommen J_0, \dots, J_{N-1} seien messbar und es existierten für $n = 0, \dots, N-1$ messbare Abbildungen $\varphi_n : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ mit $\varphi_n(x) \in \mathcal{A}(x)$ und

$$J_n(x) = \mathbb{E} [g(x, \varphi_n(x), Y) + J_{n+1}(f(x, \varphi_n(x), Y))], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Dann ist die Kontrollstrategie $K^* = (\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}) \in \mathcal{K}_{dm}$ optimal und für den optimalen Wert K_N^* gilt

$$J_N^*(x) = g_0(x) + J_0(x) = J_N^{K^*}(x), \quad x \in \mathcal{X}.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von J_n wird auch als *Gleichung der Dynamischen Programmierung* bezeichnet, kurz *DP-Gleichung*. Ohne Bildungsgesetz f hätte diese allgemein die Gestalt

$$J_n(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \left(g(x, a) + \int_{\mathcal{X}} J_{n+1}(y) Q(dy, (x, a)) \right).$$

Des öfters ist es angenehmer, die Iteration über die Restlaufzeit zu indizieren, zum Beispiel um Werte in Problemen mit unendlichem Zeithorizont zu approximieren. So gelangen wir zu der sogenannten *Vorwärtsform der Gleichung der Dynamischen Programmierung*.

Bemerkung 4.4.9 (DP-Vorwärtsgleichungen)

Seien J_0, \dots, J_N die über die DP-Gleichung definierten Funktionen. Durch $v_n = J_{N-n}$, $n = 0, \dots, N$ erhalten wir die *DP-Vorwärtsgleichungen*

$$\begin{aligned} v_0(x) &= g_N(x), \\ v_n(x) &= \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + v_{n-1}(f(x, a, Y))], \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Unter den Voraussetzungen des Theorems ist dann zu einer Folge von maximierenden Auswahlfunktionen ψ_1, \dots, ψ_N eine optimale deterministische Kontrollstrategie durch $K^* = (\psi_N, \dots, \psi_1)$ gegeben und es gilt $J_N^* = g_0 + v_N$.

Ist eine Lösung der DP-Gleichung nicht explizit bestimmbar, an der die Voraussetzungen von Theorem 4.4.8 zu verifizieren wären, so kann die Existenz einer Lösung unter den folgenden Annahmen garantiert werden.

Annahme 4.4.10

$\mathcal{A}(x)$ sei für alle $x \in \mathcal{X}$ kompakt, g sei oberhalbstetig und nach oben beschränkt, $x \mapsto \mathcal{A}(x)$ sei oberhalbstetig und Q sei schwach stetig, d.h. für alle stetigen beschränkten Funktionen $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$(x, a) \mapsto \mathbb{E} [h(f(x, a, Y))]$$

beschränkt und stetig auf \mathcal{Z} .

Theorem 4.4.11

Sei u oberhalbstetig und

$$u^*(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + u(f(x, a, Y))], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Ist Annahme 4.4.10 erfüllt, so ist u^* oberhalbstetig und es existiert eine Auswahlfunktion φ ($\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}$ messbar mit $\varphi(x) \in \mathcal{A}(x)$ für alle $x \in \mathcal{X}$), die das Supremum annimmt, d.h.

$$u^*(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, \varphi(x), Y) + u(f(x, \varphi(x), Y))], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Beweis: Das ist die Aussage von Theorem 3.3.5 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995) für die dort formulierten Bedingung 3.3.3 (a),(b),(c1) unter Berücksichtigung der nachfolgenden Bemerkung. \square

Diskontierte Gewinne

In einem markovschen Kontrollmodell gemäß Voraussetzung 4.4.7 soll jetzt zu einem Diskontfaktor $\alpha \in (0, 1)$ der *diskontierte Gewinn*

$$V_\alpha^K(x) = g_0(x) + \mathbb{E}_{x,K} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n g(X_n, A_n, Y_{n+1}) \right]$$

maximiert werden. Zu bestimmen ist also

$$V_\alpha^*(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} V_\alpha^K(x), \quad x \in \mathcal{X}$$

und eine Kontrollstrategie K^* , die diesen Wert erreicht, d.h. für die $V_\alpha^* = V_\alpha^{K^*}$ gilt. Dabei nennen wir V_α^* den *optimalen α -Diskont-Wert* und K^* eine *α -Diskont-optimale* Kontrollstrategie. Ferner werden wir den diskontierten Gewinn in den ersten N Perioden mit

$$V_{\alpha,N}^K(x) = g_0(x) + \mathbb{E}_{x,K} \left[\sum_{n=0}^N \alpha^n g(X_n, A_n, Y_{n+1}) \right]$$

bezeichnen. Weiter heißt eine messbare Funktion $v : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ *Lösung der α -Diskont-Maximierungsgleichung*, falls gilt

$$v(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + \alpha v(f(x, a, Y))], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Theorem 4.4.12

Sei die Annahme 4.4.10 erfüllt. Ferner sei $\alpha \in (0, 1)$ und es existiere eine Kontrollstrategie K , so dass $V_\alpha^K(x) > -\infty$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt. Dann gelten:

- (i) Der optimale Wert $(V_\alpha^* - g_0)$ ergibt sich als die maximale oberhalbstetige Lösung der α -Diskont-Maximierungsgleichung

$$V_\alpha^*(x) = g_0(x) + \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + \alpha(V_\alpha^* - g_0)(f(x, a, Y))], \quad x \in \mathcal{X}.$$

- (ii) Es existiert eine Auswahlfunktion φ , für die das Supremum angenommen wird, d.h.

$$V_\alpha^*(x) = g_0(x) + \mathbb{E} [g(x, \varphi(x), Y) + \alpha(V_\alpha^* - g_0)(f(x, \varphi(x), Y))], \quad x \in \mathcal{X}$$

und die zugehörige Kontrollstrategie $K^* = (\varphi, \varphi, \dots) \in \mathcal{K}_{ds}$ ist α -Diskont-optimal. Umgekehrt erfüllt jede α -Diskont-optimale Kontrollstrategie die Gleichung.

- (iii) Existiert eine α -Diskont optimale Kontrollstrategie, so existiert auch eine α -Diskont-optimale Kontrollstrategie, die in \mathcal{K}_{ds} liegt.

Beweis: Das ist Theorem 4.2.3 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995). Dabei ist zu beachten, dass sie an dieser Stelle fordern, dass Q stark stetig sein muss, d.h. dass die in Annahme 4.4.10 angegebene Bedingung für alle messbaren und beschränkten v erfüllt ist. Das benötigen sie, da sie die Aussage von Theorem 4.4.11 für messbare u nutzen wollen. Laut den Bemerkungen vor Annahme 4.2.1 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995) genügen in unserer Situation aber die Bedingungen, wie wir sie in Annahme 4.4.10 formuliert haben. \square

Da eine Lösung der α -Diskont-Maximierungsgleichung in den meisten Fällen nur schwer zu bestimmen sein wird, ist das folgende Lemma recht nützlich. Es besagt, dass die Lösungen der DP-Vorwärtsgleichungen für das α -Diskont-Problem bei endlichem Zeithorizont gegen den optimalen Wert konvergieren.

Lemma 4.4.13

Seien die Annahmen von Theorem 4.4.12 erfüllt. Sei $v_0 \equiv 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$v_{n+1} = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + \alpha v_n(f(x, a, Y))], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Dann gilt

$$V_\alpha^*(x) = g_0(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x), \quad x \in \mathcal{X},$$

und V_α^* erfüllt die α -Diskont-Maximierungsgleichung.

Beweis: Da die v_1, v_2, \dots unter Annahme 4.4.10 oberhalbstetig sind, folgt die Behauptung aus Lemma 4.2.8 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995). \square

Durchschnittgewinnkriterium

In einem markovschen Kontrollmodell gemäß Voraussetzung 4.4.7 bezeichne für $K \in \mathcal{K}$ und $N \in \mathbb{N}$

$$J_N^K(x) = g_0(x) + \mathbb{E}_{x,K} \left[\sum_{n=0}^{N-1} g(X_n, A_n) \right], \quad x \in \mathcal{X}.$$

Im Unterschied zum endlichen Zeithorizont ist $g_N \equiv 0$. Als Optimierungskriterium werden wir jetzt die Maximierung des *asymptotischen Durchschnittgewinns*

$$J^K(x) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{J_N^K(x)}{N}$$

betrachten. Gesucht ist also zu jedem $x \in \mathcal{X}$ der optimale Wert

$$J^*(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} J^K(x),$$

kurz DG-Wert, und eine *Durchschnittsgewinn-optimale (DG-optimale)* Strategie K^* mit $J^* = J^{K^*}$. Dieses Kriterium ist schwerer zu handhaben als die Optimierung des Endwertes oder des diskontierten Gewinnes. Es existiert eine große Sammlung von Beispielen, in denen keine optimale Strategie existiert oder eine optimale existiert, aber keine stationäre optimal ist.

Wir nehmen an, dass eine Kontrollstrategie $K \in \mathcal{K}$ existiert, so dass $J^K(x) > -\infty$ für $x \in \mathcal{X}$ gilt.

Definition 4.4.14 (Kanonisches Tripel)

Zu einer oberhalbstetigen Funktion $h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ seien

$$J_0^K(x, h) = g_0(x) + h(x)$$

und für $n \in \mathbb{N}$

$$J_N^K(x, h) = g_0(x) + \mathbb{E}_{x, K} \left[\sum_{n=0}^{N-1} g(X_n, A_n) + h(X_n) \right],$$

so dass $J_N^K(x) = J_N^K(x, 0)$ in obiger Notation. Die zugehörigen optimalen Werte seien

$$J_N^*(x, h) = \sup_{K \in \mathcal{K}} J_N^K(x, h) \quad \text{und} \quad J_N^*(x) = J_N^*(x, 0).$$

Seien nun ρ und h oberhalbstetige Funktionen auf \mathcal{X} und φ eine Auswahlfunktion. Dann heißt (ρ, h, φ) *kanonisches Tripel*, falls für alle $x \in \mathcal{X}$ und $N \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$J_N^{K_\varphi}(x, h) = J_N^*(x, h) = N \rho(x) + h(x),$$

wobei K_φ die durch φ gegebene stationäre und deterministische Kontrollstrategie sei.

Satz 4.4.15

(ρ, h, φ) ist genau dann ein kanonisches Tripel, wenn für alle $x \in \mathcal{X}$

(a) $\rho(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [\rho(f(x, a, Y))],$

(b) $\rho(x) + h(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, a, Y) + h(f(x, a, Y))]$

(c) und das Supremum in (a) und (b) durch $\varphi(x)$ angenommen wird.

Beweis: Siehe Theorem 4.2.8 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995). \square

Eine Kontrollstrategie K^* heiße *stark DG-optimal*, falls gilt

$$J^{K^*}(x) \geq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{J_N^K(x)}{N} \quad \text{fur alle } K \in \mathcal{K}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

Theorem 4.4.16

Es gelte Annahme 4.4.10 und es existiere eine Kontrollstrategie K mit $J^K(x) > -\infty$ fur $x \in \mathcal{X}$. Sei (ρ, h, φ) ein kanonisches Tripel.

(i) Gilt fur alle $K \in \mathcal{K}$, $x \in \mathcal{X}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{x,K} [h(X_N)]}{N} = 0,$$

so ist K_φ DG-optimal und ρ ist der optimale DG-Wert, d.h. $\rho = J^*$.

(ii) Erfüllt h fur alle $x \in \mathcal{X}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{K \in \mathcal{K}} \frac{E_{x,K} [h(X_N)]}{N} = 0,$$

so ist K_φ sogar stark DG-optimal.

Beweis: Siehe Theorem 5.2.4 in Hernández-Lerma und Lasserre (1995). \square

Die Gleichungen in Satz 4.4.15 werden *kanonische Gleichungen* genannt. In dem Fall, dass ρ konstant ist, $\rho \equiv \rho^* \in \mathbb{R}$, vereinfachen sich diese zu

$$\rho^* + h(x) = \sup_{a \in \mathcal{A}(x)} E [g(x, a, Y) + h(f(x, a, Y))],$$

$$\rho^* + h(x) = E [g(x, \varphi(x), Y) + h(f(x, \varphi(x), Y))],$$

von denen die erste *Durchschnittsgewinn-Maximierungsgleichung* genannt wird.

Leider ist ein kanonisches Tripel – auch im Fall, dass ρ konstant ist – ohne weiteres Wissen nur sehr schwer bestimmbar. Außerdem liefert nicht jede DG-optimale Kontrollstrategie ein kanonisches Tripel, d.h. die Gleichungen sind unter den angegebenen Voraussetzungen nicht notwendig. Es zeigt sich aber, dass es fur manche Zwecke auch genugt, nur die Ungleichungen anstatt der obigen Gleichungen zu betrachten.

Unter weiteren Beschrnktheitsbedingungen ist es auch möglich, den optimalen DG-Wert durch die optimalen α -Diskont-Werte $(1 - \alpha)V_\alpha^*$ fur $\alpha \nearrow 1$ zu approximieren.

Bei noch mehr Beschrnktheits- und Stetigkeitsannahmen ist es möglich, ein Theorem nachzuweisen, dass die Existenz eines konstanten ρ^* sichert und garantiert, dass eine stationäre Kontrollstrategie, die die Durchschnittsgewinn-Maximierungsgleichung erfüllt, auch optimal ist (siehe Hernández-Lerma und Lasserre (1995), Kapitel 5).

4.5 Das Binomialmodell als Kontrollmodell

Um unsere in Definition 4.3.3 formulierten Aufgabenstellungen in der eben vorgestellten Theorie der markovsch kontrollierten Prozesse bearbeiten zu können, werden wir jetzt eine Möglichkeit beschreiben, wie sich diese in ein markovsches Kontrollmodell einbetten lassen.

Da im Binomialmodell die stochastische Entwicklung einfach durch die Kurssprünge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschrieben wird und sich Wert und Wertanteil funktional aus dem Wert, dem Wertanteil und den Aktionen zum vorangehenden Zeitpunkt ergeben, lässt sich die Wertentwicklung über ein Bildungsgesetz beschreiben. Es sei Y stets eine Zufallsvariable mit der Verteilung von Y_1 , d.h. es sei

$$p = P(Y = u) = 1 - P(Y = d) \in (0, 1).$$

Als Zustandsraum werden wir

$$\mathcal{X} = (0, \infty) \times [0, 1]$$

betrachten. Dabei entspricht die erste Komponente dem Wert des Portfolios und die zweite Komponente dem Wertanteil (beide vor der Aktion). Als Aktionenmenge bietet sich

$$\mathcal{A} = \{-1, 0, +1\} \cup [0, 1]$$

an. Im Zustand (x, π) seien gemäß Definition 4.3.1 die Aktionen

$$\mathcal{A}^+(x, \pi) = \{(a, \eta) \in \mathcal{A} \mid \eta \in \mathcal{A}_a^+(x, \pi)\}$$

erlaubt. Dabei entspricht die erste Komponente der Handelsart und die zweite dem neuen Wertanteil. Für eine genauere Darstellung verweisen wir auf den Beweis von Lemma 4.5.1. Wir bemerken, dass die Forderung der Existenz einer messbaren Auswahlfunktion in $\mathcal{Z} = \{(x, a) \mid x \in \mathcal{X}, a \in \mathcal{A}^+(x)\}$ erfüllt ist, da zum Beispiel

$$\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{A}, \quad (x, \pi) \mapsto (0, \pi)$$

messbar ist und $(0, \pi)$ in $\mathcal{A}^+(x, \pi)$ liegt.

Zur Definition der Vergangenheiten bemerken wir, dass ein Element $h_n \in \mathcal{H}_n$ die Gestalt

$$h_n = (x_0, \pi_0, a_0, \eta_0, \dots, x_{n-1}, \pi_{n-1}, a_{n-1}, \eta_{n-1}, x_n, \pi_n)$$

hat. Beachten wir weiter, dass nach Satz 4.2.8 (ii)

$$X(n+1) = \frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} (r + \eta_n (Y_{n+1} - r)) X(n)$$

und

$$\pi(n+1) = \frac{\eta_n Y_{n+1}}{r + \eta_n (Y_{n+1} - r)},$$

gelten, so erkennen wir, dass durch $f = (f_x, f_\pi) : \mathcal{X} \times \mathcal{A} \times \{u, d\} \rightarrow \mathcal{X}$ mit

$$f_x(x, \pi, a, \eta, y) = \frac{(1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi)}{1 + a \gamma \eta} (r + \eta(y - r)),$$

und

$$f_\pi(x, \pi, a, \eta, y) = \frac{\eta y}{r + \eta(y - r)}.$$

ein Bildungsgesetz gegeben ist. Damit hat der Übergangskern Q die einfache Gestalt

$$Q(B, (x, \pi, a, \eta)) = p 1_B(f(x, \pi, a, \eta, u)) + (1 - p) 1_B(f(x, \pi, a, \eta, d)).$$

Ferner gilt zu einem Startwert $x > 0$

$$\log(X(N)) = \log(x) + \sum_{n=0}^{N-1} \log \left(\frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} (r + \eta_n(Y_{n+1} - r)) \right),$$

so dass sich als Anfangswert und Auszahlungsfunktionen

$$\begin{aligned} g_0(x, \pi) &= \log(x), \\ g(x, \pi, a, \eta, y) &= \log(1 - a^2 \Gamma(x) + a \gamma \pi) - \log(1 + a \gamma \eta) + \log(r + \eta(y - r)), \\ g_N(x, \pi) &\equiv 0, \quad N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

anbieten.

Damit sind alle Bedingungen erfüllt, die in den Definitionen 4.4.1 und 4.4.5 an ein markovsches Kontrollmodell mit Bildungsgesetz f gestellt wurden, und wir können zu einer Aktionenfolge $(A, \eta) = (A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(X(n), \pi(n))_{n \in \mathbb{N}_0} = (X^{(A, \eta)}(n), \pi^{(A, \eta)}(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$$

als einen durch die Kontrollstrategie $K = (A, \eta)$ markovsch kontrollierten Prozess auffassen und damit die in 4.4 vorgestellten Resultate nutzen.

Zu der Auszahlungsfunktion g bemerken wir noch, dass in

$$g(X(n), \pi(n), A_n, \eta_n, Y_{n+1}) = \log \left(\frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} \right) + \log(r + \eta_n(Y_{n+1} - r))$$

der erste Summand als Kostenanteil zur Zeit n und der zweite Summand als Wachstumsanteil in der $(n+1)$ -ten Periode interpretiert werden kann. Außerdem gilt für alle Startwerte $x > 0$

$$\begin{aligned} \log(X(N)) &= \log(x) + \sum_{n=0}^{N-1} \log \left(\frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} (r + \eta_n(Y_{n+1} - r)) \right) \\ &= \log(x) + \sum_{n=0}^{N-1} g(X(n), \pi(n), A_n, \eta_n, Y_{n+1}) \\ &= \log(x) + \sum_{n=1}^N G_n. \end{aligned}$$

mit $G_n = g(X(n-1), \pi(n-1), A_{n-1}, \eta_{n-1}, Y_n)$, so dass eine gut zu interpretierende Gestalt vorliegt.

Abschliessend wollen wir noch nachweisen, dass die für uns wesentlichen, in Annahme 4.4.10 formulierten, Bedingungen erfüllt sind.

Lemma 4.5.1

Im Binomialmodell mit (und ohne) Transaktionskosten ist die Annahme 4.4.10 erfüllt.

Beweis:

Für alle $x > 0, \pi \in [0, 1]$ erhalten wir mit geeigneten Fallunterscheidungen aus der Darstellung in Satz 4.2.9 und Definition 4.3.1

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0^+(x, \pi) &= \{ \pi \} \\ , [2mm] \mathcal{A}_{-1}^+(x, \pi) &= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } 1 - \Gamma(x) - \gamma \pi \leq 0, \\ [0, \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}], & \text{falls } 1 - \Gamma(x) - \gamma \pi > 0, \pi \leq 1 - \Gamma(x), \\ [0, 1], & \text{falls } 1 - \Gamma(x) - \gamma \pi > 0, \pi > 1 - \Gamma(x), \end{cases} \\ \mathcal{A}_{+1}^+(x, \pi) &= \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } 1 - \Gamma(x) \leq 0, \\ [\frac{\pi}{1-\Gamma(x)}, 1], & \text{falls } 1 - \Gamma(x) > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

so dass die Kompaktheit von

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^+(x, \pi) &= \{ (a, \eta) \in \mathcal{A} \mid \eta \in \mathcal{A}_a^+(x, \pi) \} \\ &= \{(0, \pi)\} \cup (\{-1\} \times \mathcal{A}_{-1}^+(x, \pi)) \cup (\{+1\} \times \mathcal{A}_{+1}^+(x, \pi)) \end{aligned}$$

deutlich zu erkennen ist. Aus der einfachen Intervallgestalt ergibt sich auch die Stetigkeit von $(x, \pi) \mapsto \mathcal{A}^+(x, \pi)$, siehe Anhang D in Hern'andez-Lerma und Lasserre (1995) für eine Definition.

Ferner ist g stetig und für alle $(x, \pi) \in \mathcal{X}$, $(a, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)$, $y \in \{u, d\}$ gemäß

$$\begin{aligned} g(x, \pi, a, \eta, y) &= \log\left(\frac{1 - a^2\Gamma(x) + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\eta}\right) + \log(r + \eta(y - r)) \\ &\leq \log(1 - a^2\delta) + \log(r + (u - r)) \\ &\leq \log(u), \end{aligned}$$

nach oben beschränkt. Die Abschätzung des ersten Terms kann wie im Beweis von Lemma 5.5.4 (iv) erfolgen.

Schließlich bleibt nur nachzuweisen, dass Q schwach stetig ist. Auch das gilt, da in unserer Situation nur zu beachten ist, dass für alle stetigen beschränkten Funktionen

$h : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ wegen der Stetigkeit von f auch

$$\begin{aligned} (x, \pi, a, \eta) &\mapsto \mathbb{E} [h(f(x, \pi, a, \eta, Y))] \\ &= p h(f(x, \pi, a, \eta, u)) + (1 - p) h(f(x, \pi, a, \eta, d)) \end{aligned}$$

auf \mathcal{Z} stetig und beschränkt ist. □

4.6 Optimierung ohne Transaktionskosten

Im Binomialmodell ohne Transaktionskosten vereinfacht sich die soeben dargestellte Einbettung in ein Markovsches Kontrollmodell erheblich. Seien also $\Gamma \equiv 0$ und $\gamma = 0$.

Im Modell ohne Transaktionskosten erkennen wir an der Darstellung des Wertes $X(n+1)$ in Satz 4.2.8 (ii), dass dieser nur von $X(n)$ und dem neuen Wertanteil η_n abhängt, nicht aber von der Handelsart A_n oder dem Wertanteil $\pi(n)$ vor der Aktion. Wir können also das folgende vereinfachte Kontrollmodell betrachten:

Als Zustände betrachten wir den Portfoliowert, d.h. der Zustandsraum sei $\mathcal{X} = (0, \infty)$. Als Aktionen wollen wir auch hier nur die Wertanteile betrachten, die zu keinem Short Selling führen, d.h. die Aktionenmenge sei $\mathcal{A} = [0, 1]$. Die zulässigen Aktionen zu gegebenem Wert x seien ebenso $\mathcal{A}^+(x) = [0, 1]$. Als Bildungsgesetz liegt

$$f_x : (0, \infty) \times [0, 1] \times \{u, d\} \rightarrow (0, \infty), \quad f_x(x, \eta, y) = (r + \eta(y - r))x$$

vor, d.h. $X(n+1) = f_x(X(n), \eta_n, Y_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$. Der Anfangswert und die Auszahlungsfunktionen sind gegeben durch $g_0(x) = \log(x)$ und

$$g(x, \eta, y) = (r + \eta(y - r))$$

Wir nehmen in diesem Kapitel eine moderate Aktie an, d.h. es sei

$$q < p < \frac{qu}{r} \quad \text{mit} \quad q = \frac{r-d}{u-d}.$$

Endlicher Zeithorizont

Wir betrachten zuerst das Problem der Bestimmung des optimalen Nutzens bei endlichem Zeithorizont $N \in \mathbb{N}$. Es sei $J_N \equiv 0$. Für alle $n = N-1, \dots, 1, 0$ ist die DP-Gleichung

$$J_n(x) = \sup_{\eta \in [0,1]} \mathbb{E} [g(x, \eta, Y_{n+1}) + J_{n+1}(f(x, \eta, Y_{n+1}))], \quad x \in \mathcal{X}$$

zu lösen.

Zur Darstellung der Ergebnisse führen wir für $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, die Dichten

$$Z_{k,n} = \frac{dQ^{Y_k \otimes \dots \otimes Y_n}}{dP^{Y_k \otimes \dots \otimes Y_n}} = \prod_{l=k}^n \left(\frac{p}{q} 1_{\{Y_l=u\}} + \frac{1-p}{1-q} 1_{\{Y_l=d\}} \right)$$

ein.

Satz 4.6.1

Der optimale Nutzen ist

$$J_N^*(x) = \log(x r^N) - \mathbb{E} [\log(Z_{1,N})] .$$

Die eindeutig bestimmte optimale Kontrollstrategie $K^ = K_\varphi$ ist deterministisch und stationär mit*

$$\varphi(x) = \frac{(p-q)r}{q(u-r)} \in (0,1),$$

ist also mit dem optimalen Wertanteil $\hat{\eta}$ ohne Transaktionskosten aus 3.5.1 identisch.

Beweis: Wir werden durch Induktion zeigen, dass für alle $n = N-1, \dots, 0$ jeweils die deterministische und stationäre Kontrolle $\varphi_n = \varphi \equiv \hat{\eta}$ optimal ist und

$$J_n(x) = (N-n) \log(r) - \mathbb{E} [\log(Z_{n+1,N})]$$

gilt. Insbesondere sind $J_0(x), \dots, J_N(x)$ konstant, also unabhängig von x .

Zum Induktionsanfang haben wir einfach

$$\begin{aligned} J_{N-1}(x) &= \sup_{\eta \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, \eta, Y_N)] \\ &= \sup_{\eta \in [0,1]} \mathbb{E} [\log(r + \eta(Y_N - r))] \\ &= \sup_{\eta \in [0,1]} (p \log(r + \eta(Y_N - r)) + (1-p) \log(r + \eta(Y_N - r))) \end{aligned}$$

zu bestimmen. Das entspricht aber genau dem Optimierungsproblem im Einperiodenmodell, so dass wir nach Satz 3.5.2 die Lösung mit der Kontrolle $\varphi_{N-1} \equiv \hat{\eta} = \frac{(p-q)r}{q(u-r)}$ und dem optimalen Wert

$$\begin{aligned} J_{N-1}(x) &= \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \\ &= \log(r) - \mathbb{E}_P [\log(Z_{N,N})] \end{aligned}$$

angeben können. Habe jetzt J_n die behauptete Gestalt. Dann erhalten wir J_{n-1} aus

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) &= \sup_{\eta \in [0,1]} \mathbb{E} [g(x, \eta, Y_n) + J_n(f_x(x, \eta, Y_n))] \\ &= (N - n) \log(r) - \mathbb{E} [\log(Z_{n+1,N})] + \sup_{\eta \in [0,1]} \mathbb{E} [r + \eta(Y_n - r)], \end{aligned}$$

so dass der für die Maximierung relevante Teil analog zum Induktionsanfang eine optimale deterministische, stationäre und sogar von x unabhängige Kontrolle $\varphi_{n-1} = \hat{\eta}$ liefert. Damit gilt

$$\sup_{\eta \in [0,1]} \mathbb{E} [r + \eta(Y_n - r)] = \log(r) - \mathbb{E} [\log(Z_{n,n})]$$

und somit

$$\begin{aligned} J_{n-1}(x) &= (N - n) \log(r) - \mathbb{E} \log(Z_{n+1,N}) + \log(r) - \mathbb{E} \log(Z_{n,n}) \\ &= (N - n + 1) \log(r) - \mathbb{E} \log(Z_{n,n} Z_{n+1,N}) \\ &= (N - (n - 1)) \log(r) - \mathbb{E} \log(Z_{n,N}). \end{aligned}$$

Damit haben wir die Induktionsbehauptung gezeigt. Es folgt also insbesondere $J_0(x) = N \log(r) - \mathbb{E} [\log(Z_{1,N})]$ und daher nach Theorem 4.4.8

$$J^*(x) = g_0(x) + J_0(x) = \log(x r^N) - \mathbb{E} [\log(Z_{1,N})]$$

mit der optimalen Kontrolle $R^* = (\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1}) = R_\varphi$, gegeben durch $\varphi \equiv \hat{\eta}$, da wir die Existenz einer Auswahlfunktion nachgewiesen haben und J_N, \dots, J_0 offensichtlich messbar sind. Die Eindeutigkeit resultiert daraus, dass wie in einer Periode $\hat{\eta}$ jeweils die eindeutig bestimmte Maximalstelle ist und jede optimale Lösung die DG-Gleichung erfüllen muss. Da wir eine moderate Aktie vorausgesetzt haben liegt $\hat{\eta}$ und damit auch φ in $(0, 1)$ \square

Der in Satz 4.6.1 bestimmte optimale Nutzen

$$J_N^*(x) = \log(x r^N) - \mathbb{E} [\log(Z_{1,N})] .$$

lässt die folgende gute Interpretation zu. Der erste Summand entspricht der Wertentwicklung, wenn das ganze Startkapital im Bond angelegt wird. Beachten wir, dass der Aktienkurs genau dann ein echtes Submartingal bildet, wenn $p > q$ gilt und berechnen wir, dass in diesem Fall

$$\mathbb{E} [\log(Z_{1,N})] = N \mathbb{E} [\log(Z_{1,1})] < 0$$

gilt, so ist zu erkennen, dass eine Investorin den erwarteten Nutzen genau dann gegenüber der reinen Anlage in den Bond verbessern kann, wenn die Aktie ein Submartingal bildet.

Bemerkung 4.6.2

In einem sogenannten *vollständigen* Modell, in dem jede \mathcal{F}_N -messbare Endauszahlung durch eine Handelsstrategie auch erreicht werden kann, bietet sich eher die Verwendung der Martingalmethode an. Bei dieser wird im ersten Schritt durch einen Laplace-Ansatz zu Startkapital $x > 0$ die Maximierungsaufgabe

$$\text{maximiere } E_P [\log(X)] \quad \text{unter } E_Q [e^{-rN} X] = x, \quad X \text{ } \mathcal{F}_N\text{-messbar}$$

gelöst, wobei Q das zu P äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaß ist, unter dem der diskontierte Preisprozess ein Martingal bildet. Auf diese Weise erhalten wir eine optimale Endauszahlung X^* die aufgrund der Nebenbedingung durch das Startkapital erreichbar ist, d.h. es existiert eine Handelsstrategie, die ausgehend vom Startwert x genau den Endwert X^* liefert. Im zweiten Schritt kann die Handelsstrategie dann einfach durch Rückwärtsinduktion bestimmt werden. Dieses Vorgehen führt auch bei anderen Nutzenfunktionen als dem Logarithmus zu expliziten Lösungen, wir verweisen auf Pliska (1997), Kapitel 5.2.

Da die Martingalmethode unter Transaktionskosten aber nur schwer einsetzbar ist, sind wir im folgenden Kapitel auf den Ansatz über die DP-Gleichung angewiesen. Deshalb wollten wir deren Anwendung schon in dieser relativ einfachen Situation demonstrieren.

Diskontierte Gewinne

Als nächstes betrachten wir die diskontierten Gewinne. Dazu sei $\alpha \in (0, 1)$. Zu lösen ist die α -Diskont-Maximierungsgleichung

$$V_\alpha^*(x) = g_0(x) + \sup_{\eta \in [0,1]} E [g(x, \eta, Y) + \alpha (V_\alpha^*(f_x(x, \eta, Y)) - g_0(f_x(x, \eta, Y)))] .$$

Nach Lemma 4.4.13 haben wir dazu nur die Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $v_0 = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$v_n(x) = \sup_{\eta \in [0,1]} E [g(x, \eta, Y) + \alpha v_{n-1}(f(x, \eta, Y))] .$$

zu bestimmen. Dann gilt unter geeigneten Bedingungen

$$V_\alpha^*(x) = g_0(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x), \quad x > 0.$$

Satz 4.6.3

Eine Lösung des α -Diskontierungsproblems ist gegeben durch den optimalen Wert

$$V_\alpha^*(x) = \log(x) + \frac{1}{1-\alpha} \left(\log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \right)$$

bei optimaler deterministischer und stationärer Kontrollstrategie $K^ = K_\varphi$ mit $\varphi \equiv \hat{\eta}$.*

Beweis: Wie im Beweis von Satz 4.6.1 zeigt man durch Induktion, dass $\hat{\eta}$ optimal ist für die Bestimmung von v_0, v_1, \dots , so dass für alle $N \in \mathbb{N}$

$$v_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \left(\log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \right)$$

folgt. Da für die durch $\hat{\eta}$ gegebene Kontrollstrategie $K_{\hat{\eta}}$ direkt nachgerechnet werden kann, dass $V_{\alpha}^{K_{\hat{\eta}}}(x) > -\infty$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt, und die weiteren Voraussetzungen von Theorem 4.4.12 nach Lemma 4.5.1 erfüllt sind, erhalten wir mit Lemma 4.4.13 für alle $x \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} V_{\alpha}^*(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left(\log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \right). \end{aligned}$$

□

Die asymptotische Rendite

Schließlich wenden wir uns noch dem Durchschnittsgewinnkriterium zu. Wir wollen für

$$J_N^K(x) = g_0(x) + \mathbb{E}_{x,R} \left[\sum_{n=0}^{N-1} g(X_n, \eta_n, Y_{n+1}) \right], \quad x \in \mathcal{X},$$

als Optimierungskriterium

$$J^K(x) = \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{J_N^K(x)}{N}$$

maximieren. Gesucht ist also zu jedem $x \in \mathcal{X}$ der optimale Wert

$$R^*(x) = \sup_{K \in \mathcal{K}} J^K(x)$$

Dazu haben wir nach Theorem 4.4.16 ein kanonisches Tripel zu bestimmen, also nach Satz 4.4.15 Funktionen (ρ, h, φ) , für die

$$\rho(x) = \sup_{\eta \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [\rho(f(x, \eta, Y))]$$

und

$$\rho(x) + h(x) = \sup_{\eta \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, \eta, Y) + h(f(x, \eta, Y))]$$

gelten und das Supremum jeweils durch $\varphi(x)$ angenommen wird.

In unserer Situation ist ein kanonisches Tripel sogar bestimmbar, da wir seine Gestalt aus dem Grenzwert der Lösung für den endlichen Zeithorizont erahnen können. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} J_N^*(x) &= \frac{1}{N} \mathbb{E} [\log(x r^N) - \log(Z_{1,N})] \\ &= \frac{1}{N} \log(x) + \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \\ &\longrightarrow \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \quad (N \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\rho^* = \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right),$$

so liegt der Ansatz

$$\rho \equiv \rho^*, \quad h \equiv 0 \quad \text{und} \quad \varphi \equiv \hat{\eta}$$

nahe. Dass dieser tatsächlich zum Ziel führt, zeigen wir im Beweis des folgenden Satzes.

Satz 4.6.4

Eine optimale Kontrollstrategie $K^ = (\varphi, \varphi, \dots)$ zur Maximierung des durchschnittlichen Gewinns ist gegeben durch $\varphi \equiv \hat{\eta}$. Sie ist also deterministisch und stationär. Ferner ergibt sich die optimale asymptotische Rendite zu*

$$R^*(x) = \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right).$$

Beweis: Die Rechnungen vor Satz 4.6.4 zeigen, dass eine Kontrollstrategie existiert, deren asymptotische Rendite stets endlich ist. Die weiteren Voraussetzungen von Theorem 4.4.16 sind nach Lemma 4.5.1 erfüllt. Nach Theorem 4.4.16 (i) haben wir nur zu zeigen, dass $(\rho^*, 0, \hat{\eta})$ ein kanonisches Tripel bildet, weil die dort formulierte Bedingung für $h \equiv 0$ trivialerweise gilt. Die erste der charakteristischen Gleichungen in Satz 4.4.15 ist erfüllt, da ρ^* konstant ist. Zum Nachweis der zweiten bestimmen wir

$$\begin{aligned} &\sup_{\eta \in \mathcal{A}(x)} \mathbb{E} [g(x, \eta, Y) + h(f(x, \eta, Y))] \\ &= \mathbb{E} [\log(r + \hat{\eta}(Y - r))] \\ &= \log(r) + p \log\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p) \log\left(\frac{1-p}{1-q}\right) \\ &= \rho^* + h(x). \end{aligned}$$

Also ist $(\rho^*, 0, \hat{\eta})$ ein kanonisches Tripel für unser Problem und es folgt

$$R^*(x) = \rho^* \quad \text{für alle} \quad x > 0.$$

□

4.7 Optimierung unter Transaktionskosten

Wir wollen jetzt zusätzlich Transaktionskosten berücksichtigen. Ein Blick auf die zu lösenden Maximierungsgleichungen in den Theoremen 4.4.8, 4.4.12 und Satz 4.4.15 und auf die Komplexität der Auszahlungsfunktion g und des Bildungsgesetzes f in Abschnitt 4.5 zeigen, dass kaum mit expliziten Lösungen zu rechnen ist, wie wir sie ohne Transaktionskosten noch erhalten haben.

Wir werden uns im Wesentlichen auf einen endlichen Zeithorizont beschränken. Dort ist es möglich, zumindest eine Existenzaussage zu treffen, so dass über die Gleichung der dynamischen Programmierung rekursiv eine optimale Kontrollstrategie bestimmt werden kann.

Da auch bei den rekursiven Aufrufen stets Maximierungsaufgaben zu lösen sind, ist der entsprechende Algorithmus äußerst langsam. Unter geeigneten Annahmen werden wir für fixe und proportionale Kosten einen im Vergleich sehr schnellen Algorithmus angeben.

Am Ende dieses Abschnittes werden wir dann noch kurz auf die Existenz einer optimalen Kontrollstrategie für die diskontierten Gewinne eingehen. Einen Ansatz zur Behandlung der asymptotischen Rendite stellen wir dann im folgenden Abschnitt 4.8 vor.

Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.5 und nehmen eine moderate Aktie im Sinne von Definition 4.2.4 an.

Endlicher Zeithorizont

Es bezeichne $N \in \mathbb{N}$ den endlichen Zeithorizont, zu dem der erwartete logarithmische Nutzen maximiert werden soll.

Sind die Voraussetzungen von Theorem 4.4.8 erfüllt, so können wir zur Bestimmung einer optimalen Kontrollstrategie zur Maximierung des erwarteten Nutzens bei endlichem Zeithorizont eine Rückwärtsinduktion der folgenden Art durchführen:

$$J_N(x, \pi) = 0 \quad \text{und für } n = N - 1, \dots, 0$$

$$J_n(x, \pi) = \sup_{(a, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)} \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta, Y) + J_{n+1}(f(x, \pi, a, \eta, Y))],$$

wobei $f = (f_x, f_\pi)$ das Bildungsgesetz mit

$$f_x(x, \pi, a, \eta, y) = \frac{1 - a^2\delta + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\eta} (r + \eta(y - r))x, \quad f_\pi(x, \pi, a, \eta, y) = \frac{\eta y}{r + \eta(y - r)}$$

und

$$g(x, \pi, a, \eta, y) = \log \left(\frac{1 - a^2\delta + a\gamma\pi}{1 + a\gamma\eta} \right) + \log(r + \eta(y - r))$$

die Auszahlungsfunktion bezeichnen.

Der Lösungsansatz besteht darin, zu allen Zeitpunkten $n = N - 1, \dots, 0$ eine messbare Auswahlfunktion

$$\varphi_n = (\varphi_{a,n}, \varphi_{\eta,n}) : (0, \infty) \times [0, 1] \rightarrow \{-1, 0, +1\} \times [0, 1]$$

mit $\varphi_n(x, \pi) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)$ zu bestimmen, so dass

$$J_n(x, \pi) = \mathbb{E} [g(x, \pi, \varphi_{a,n}(x, \pi), \varphi_{\eta,n}(x, \pi), Y) + J_{n+1}(f(x, \pi, \varphi_{a,n}(x, \pi), \varphi_{\eta,n}(x, \pi), Y))]$$

gilt und J_N, \dots, J_0 messbar sind. Dass das auch in unserer Situation immer möglich ist, weisen wir in Theorem 4.7.1 nach.

Die Wertentwicklung zu einer aus den Auswahlfunktionen gebildeten deterministischen und markovschen Kontrollstrategie $K = (\varphi_{a,n}, \varphi_{\eta,n})_{n=0, \dots, N-1}$ ist dabei zu Startwerten $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ gegeben durch

$$X(0) = x \quad \text{und} \quad \pi(0) = \pi$$

und für $n = 0, \dots, N - 1$ durch

$$A_n = \varphi_{a,n}(X(n), \pi(n)), \quad \eta_n = \varphi_{\eta,n}(X(n), \pi(n))$$

sowie

$$\begin{aligned} X(n+1) &= \frac{1 - A_n^2 \Gamma(X(n)) + A_n \gamma \pi(n)}{1 + A_n \pi(n)} (r + \eta_n (Y_{n+1} - r)) X(n), \\ \pi(n+1) &= \frac{\eta_n Y_{n+1}}{r + \eta_n (Y_{n+1} - r)}. \end{aligned}$$

Dabei gelten

$$\begin{aligned} (A_n, \eta_n) &\in \mathcal{A}^+(X(n), \pi(n)), \quad n = 0, \dots, N - 1, \\ X(n) &> 0 \quad \text{und} \quad \pi(n) \in [0, 1], \quad n = 0, \dots, N, \end{aligned}$$

und, falls die Messbarkeitsvoraussetzung in Theorem 4.4.8 erfüllt ist, auch

$$J_N^*(x, \pi) = \mathbb{E}_{(x, \pi)} [\log(X(N))] .$$

Theorem 4.7.1

Es existieren Auswahlfunktionen $\varphi_n = (\varphi_{a,n}, \varphi_{\eta,n})$, $n \in \mathbb{N}$, so dass für die zugehörige markovsche Kontrollstrategie $K = (\varphi_n)_{n=0, \dots, N-1}$ für alle $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$

$$J_N^*(x, \pi) = \log(x) + J_N^K(x, \pi)$$

gilt, d.h. K ist eine optimale markovsche Kontrollstrategie. Ferner bildet die zugehörige Wertentwicklung $(X^K(n), \pi^K(n))_{n=0, \dots, N}$ einen Markovprozess.

Beweis: Nach Lemma 4.5.1 gelten die Aussagen in Annahme 4.4.10, so dass aus Theorem 4.4.11 die Existenz der Auswahlfunktionen und die Messbarkeitsaussage in Theorem 4.4.8 folgt. Damit ergibt sich der erste Teil der Behauptung. Die Markoveigenschaft folgt aus Satz 4.4.4. \square

Für uns interessanter sind die zugehörigen Vorwärtsgleichungen. Nach Bemerkung 4.4.9 erhalten wir sie durch Setzen von $v_k = J_{N-k}$ für $k = 0, \dots, N$. Sie lauten also

$$\begin{aligned} v_0(x, \pi) &= 0 \quad \text{und für } k = 1, \dots, N \\ v_k(x, \pi) &= \sup_{(a, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)} \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta, Y) + v_{k-1}(f(x, \pi, a, \eta, Y))] . \end{aligned}$$

Mit einer entsprechenden Umindizierung der Auswahlfunktionen erhalten wir für diese natürlich auch die Aussage von Theorem 4.7.1, d.h. es gilt für alle $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$

$$J_N^*(x, \pi) = \log(x) + J_0(x, \pi) = \log(x) + v_N(x).$$

Die Vorwärtsgleichungen sind häufig besser zu deuten, da der optimale Wertzuwachs bei Vorliegen von Auswahlfunktionen nur von dem aktuellen Wert und Wertanteil und der Restlaufzeit abhängt und die Werte v_0, \dots, v_N gerade durch die Restlaufzeit indiziert sind.

Leider lassen sich bei der Berücksichtigung von Transaktionskosten die optimalen J_{N-1}, \dots, J_0 bzw. v_1, \dots, v_N nicht in expliziter Form angeben und sind im allgemeinen nicht differenzierbar.

Eine Bestimmung von $J_N^*(x, \pi)$ ist aber im komplexen Fall proportionaler plus konstanter Transaktionskosten durch rekursive Programmierung entsprechend der Gleichung der dynamischen Programmierung noch möglich. Allerdings sind bei jedem rekursiven Aufruf die Maxima neu zu bestimmen, da stets unterschiedliche Werte von x, π zu berücksichtigen sind. Dadurch wird der Algorithmus äußerst langsam.

Wollen wir mehrere Probleme in einem Modell lösen, so mag eine Abhilfe darin bestehen, wie in einer Periode Kauf- und Verkaufbereiche zu bestimmen und nach einer einfachen Gestalt für die Auswahlfunktionen zu suchen. Eine Vereinfachung ist auf der Grundlage der folgenden Annahmen 4.7.2 und 4.7.4 möglich.

Annahme 4.7.2

Für alle $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$, $a \in \{-1, +1\}$, $k = 1, \dots, N$, existiere eine eindeutig bestimmte Maximalstelle von

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta, Y) + v_{k-1}(f(x, \pi, a, \eta, Y))] .$$

Wir bemerken, dass die Annahme nicht so stark ist, wie sie erscheint, da nach Lemma 4.5.1 und Theorem 4.4.11 die zu maximierende Funktion oberhalbstetig ist und das

Maximum einer oberhalbstetigen Funktion auf einer kompakten Menge auch angenommen wird. Die Annahme besteht also in der Eindeutigkeit, wie wir sie für eine Periode in Satz 3.6.1 auch nachgewiesen haben.

Definition 4.7.3

Unter Annahme 4.7.2 sei für $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$, $k = 1, \dots, N$

$$\eta_{0,k}(x, \pi) = \pi$$

und für $a \in \{-1, +1\}$ bezeichnen wir mit $\eta_{a,k}(x, \pi)$ die eindeutig bestimmte Maximalstelle von

$$[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \eta \mapsto \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta, Y) + v_{k-1}(f(x, \pi, a, \eta, Y))] .$$

Ferner sei für alle $a \in \{-1, 0, +1\}$

$$v_{a,k}(x, \pi) = \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta_{a,k}(x, \pi), Y) + v_{k-1}(f(x, \pi, a, \eta_{a,k}(x, \pi), Y))] .$$

Wir erinnern daran, dass wir bei den Untersuchungen im Einperiodenmodell für alle erlaubten Transaktionskosten nachgewiesen haben, dass für $a \in \{-1, +1\}$

$$\eta_{a,1}(x, \pi) = \hat{\eta}_a = \frac{(p - q_a)r}{q_a(u - r) - p a \gamma r}$$

gilt, also insbesondere Unabhängigkeit von den Startwerten vorliegt. Wir werden zu untersuchen haben, ob sich solch eine einfache Struktur auf mehr Perioden übertragen lässt.

Unter Definition 3.2.2 entsprechenden Annahmen an die Transaktionskosten sollten sich auch im Binomialmodell die folgenden Eigenschaften nachweisen lassen, die den Aussagen von Theorem 3.6.2 und Satz 3.7.2 im Einperiodenmodell entsprechen und deren Vorliegen sich im Einzelfall durch numerischen Berechnungen bestätigen lässt. Um den Umfang dieser Arbeit zu begrenzen, wollen wir uns an dieser Stelle wie bereits in 4.7.2 darauf beschränken, diese Eigenschaften als Annahmen formulieren.

Annahme 4.7.4

Für alle $x > 0$, $\pi \in [0, 1]$ und $k = 1, \dots, N$ gelten

$$(1) \quad \hat{\eta}_{-1} \geq \eta_{-1,k}(x, \pi) \geq \hat{\eta} \geq \eta_{+1,k}(x, \pi) \geq \hat{\eta}_{+1}.$$

$$(2) \quad v_k(x, \pi) = \max \{ v_{a,k}(x, \pi) \mid \eta_{a,k}(x, \pi) \in \mathcal{A}_a^+(x, \pi) \}.$$

Satz 4.7.5

Unter den Annahmen 4.7.2 und 4.7.4 wird induktiv durch

$$a_k(x, \pi) = \begin{cases} -1, & \text{falls } v_{-1,k}(x, \pi) \geq v_{0,k}(x, \pi), \eta_{-1,k}(x, \pi) \in \mathcal{A}_{-1}(x, \pi) \\ +1, & \text{falls } v_{+1,k}(x, \pi) \geq v_{0,k}(x, \pi), \eta_{+1,k}(x, \pi) \in \mathcal{A}_{+1}(x, \pi) \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\eta_k(x, \pi) = \begin{cases} \eta_{-1,k}(x, \pi), & \text{falls } a_k(x, \pi) = -1, \\ \pi, & \text{falls } a_k(x, \pi) = 0, \\ \eta_{+1,k}(x, \pi), & \text{falls } a_k(x, \pi) = +1, \end{cases}$$

und

$$v_k(x, \pi) = \begin{cases} v_{-1,k}(x, \pi), & \text{falls } a_k(x, \pi) = -1, \\ v_{0,k}(x, \pi), & \text{falls } a_k(x, \pi) = 0, \\ v_{+1,k}(x, \pi), & \text{falls } a_k(x, \pi) = +1, \end{cases}$$

jeweils für alle $(x, \pi) \in \mathcal{X}$, eine zulässige Kontrollstrategie $(a_k, \eta_k)_{k=1, \dots, N}$ aus \mathcal{K}_{dm} definiert, und es gilt

$$J_N^*(x, \pi) = \log(x) + v_N(x, \pi) \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Beweis: Beachte, dass a_k wohldefiniert ist, da die beiden Zulässigkeitsbedingungen $\eta_{-1,k}(x, \pi) \in \mathcal{A}_{-1}(x, \pi)$ und $\eta_{+1,k}(x, \pi) \in \mathcal{A}_{+1}(x, \pi)$ gemeinsam nur dann erfüllt sind, wenn $\eta_{-1,k}(x, \pi) = \eta_{+1,k}(x, \pi) = \frac{\pi}{1-\Gamma(x)}$ gilt. In diesem Fall kann aber wie in einer Periode $v_{0,k}(x, \pi) > \max\{v_{-1,k}(x, \pi), v_{+1,k}(x, \pi)\}$ gezeigt werden.

Außerdem kann wie im Beweis von Theorem 4.4.11 gezeigt werden, dass die so definierten $\eta_{a,k}$ messbar sind, da eine Maximierung einer oberhalbstetigen Funktion über eine kompakte Menge vorliegt.

Damit überträgt sich die Messbarkeit durch die einfache Maximumsbildung auf η_k , a_k und insbesondere auf v_k , $k = 1, \dots, N$, so dass die Behauptung aus Theorem 4.4.8 folgt. \square

Bei der Behandlung des endlichen Zeithorizontes gehen wir im Folgenden immer davon aus, dass die Annahmen 4.7.2 und 4.7.4 erfüllt sind.

Wir bemerken, dass sich bei den anfangs eingeführten Rückwärtsgleichungen die Auswahlfunktionen zu

$$\varphi_{a,n} = a_{N-n} \quad \text{und} \quad \varphi_{\eta,n} = \eta_{N-n}, \quad n = 0, \dots, N-1$$

ergeben. Im Einperiodenmodell haben wir für η_1 und a_1 in den Theoremen 3.6.2 und 3.8.5 die folgende einfache Struktur nachgewiesen, die auch für eine Restlaufzeit 1

gültig bleibt. Es ist also

$$\eta_1(x, \pi) = \begin{cases} \eta_{-1,1} & \text{falls } a_1(x, \pi) = -1, \\ \pi & \text{falls } a_1(x, \pi) = 0, \\ \eta_{+1,1} & \text{falls } a_1(x, \pi) = +1, \end{cases}$$

mit

$$a_1(x, \pi) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \pi \geq \pi_{-1}(x), \\ +1 & \text{falls } \pi \leq \pi_{+1}(x), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\pi_{-1}(x) \geq \eta_{-1,1}$ und $\pi_{+1}(x) \leq \eta_{+1,1}$ von der Art des Kostenanteils Γ abhängen und die neuen Wertanteile $\eta_{-1,1} = \hat{\eta}_{-1}$ und $\eta_{+1,1} = \hat{\eta}_{+1}$ unabhängig von x und π sind.

Könnten wir solch eine Struktur auch im Binomialmodell mit mehr Perioden ermitteln, ließe sich der Algorithmus der dynamischen Programmierung deutlich verbessern, da nur noch Vergleiche und keine Maximierungsaufgaben mehr zu bewältigen wären.

Das folgende Beispiel mit konstanten und proportionalen Kosten zeigt, dass wir im allgemeinen keine dem Einperiodenmodell analoge Vereinfachung der optimalen Wertanteile nach Kauf oder Verkauf erwarten dürfen. Es besteht sowohl eine Abhängigkeit vom Wertanteil sowie vom Wert. Im Binomialmodell kommt sogar die Zeitabhängigkeit noch hinzu, wie das nachfolgende Beispiel 4.7.7 verdeutlicht.

Beispiel 4.7.6

Die folgenden Werte haben wir mit Hilfe einer rekursiven Programmierung ermittelt, die dem Algorithmus der dynamischen Programmierung entsprechend Theorem 4.4.8 bzw. Theorem 4.7.1 folgt. Damit haben wir für diese Berechnungen nicht die Annahmen 4.7.2 und 4.7.4 voraussetzen müssen.

Für die Parameter

$$r = 1.04, \quad u = 1.25, \quad d = 0.8, \quad p = 0.6$$

und bei proportionalen und konstanten Transaktionskosten

$$\gamma = 0.003, \quad \text{und} \quad \Gamma(x) = \frac{10}{x}, \quad x > 0,$$

bestimmen wir in den folgenden vier Szenarien die optimale Handelsart und den optimalen neuen Wertanteil.

Szenario	I	II	III	IV
x	100000	90000	10000	100000
π	0.4	0.4	0.45	0.4
k	4	4	4	3
a_k^*	1	1	1	1
η_k^*	0.579018	0.578998	0.579488	0.578924

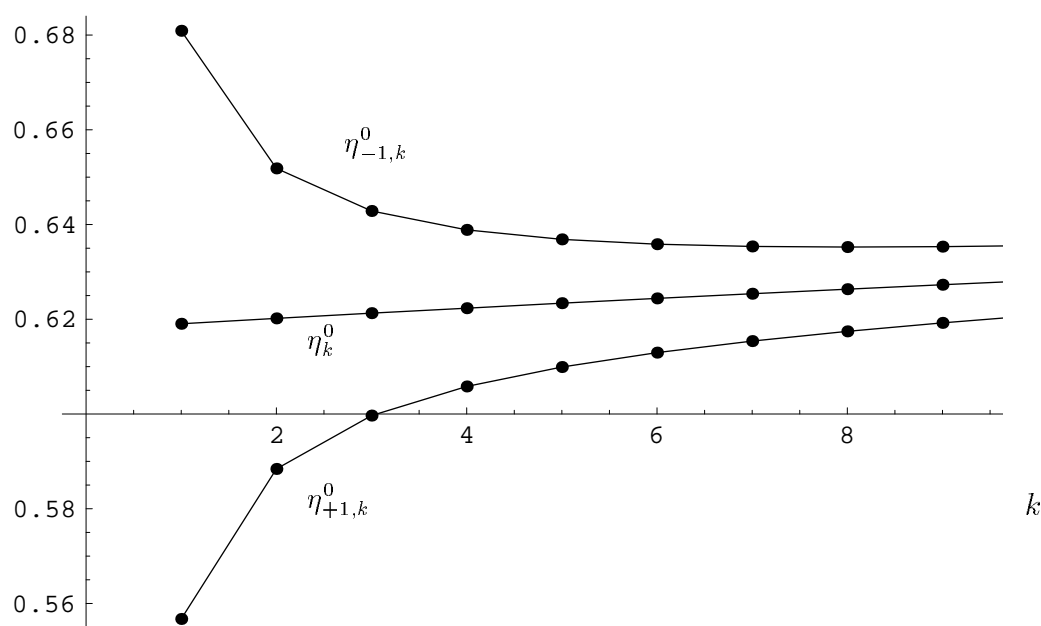


Abbildung 4.1: Optimale Wertanteile ohne weiteren Handel, Beispiel 4.7.7

Mit der Bemerkung, dass die angegebenen Stellen signifikant sind, ist zu erkennen, dass der optimale neue Wertanteil nach einem Kauf sowohl von der Restlaufzeit als auch von dem aktuellen Gesamtwert und dem aktuellen Wertanteil abhängt.

Beispiel 4.7.7

Die Abhängigkeit der optimalen neuen Wertanteile nach einem Kauf oder Verkauf von der Restlaufzeit, können wir für solche Kontrollstrategien einfach untersuchen, die zum aktuellen Zeitpunkt handeln und dann die Aktien bis zum Schluss halten.

Es bezeichne $\eta_{a,k}^0$ diesen optimalen Wertanteil zur Handelsart a bei Restlaufzeit $k \in \mathbb{N}$. Dieser ergibt sich dann bei Startwerten x , π und Restlaufzeit k als Maximalstelle von

$$\eta \mapsto \log \left(\frac{1 - \Gamma(x) + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} \right) + \mathbb{E} [\log ((1 - \eta)r^k + \eta Y_1, \dots, Y_k)] .$$

An dieser Darstellung ist zu erkennen, dass die Maximalstellen $\eta_{-1,k}^0$ und $\eta_{+1,k}^0$ nicht von x und π abhängen. In dieser Situation, in der bis zum Ende nicht mehr gehandelt wird, ist zu beachten, dass auch die optimalen Wertanteile ohne Transaktionskosten zeitabhängig sind. Wir bezeichnen diese mit η_k^0 , $k \in \mathbb{N}$. In Abbildung 4.1 haben wir $\eta_{-1,k}^0$, $\eta_{+1,k}^0$ und η_k^0 zu den Parametern aus Beispiel 4.7.6 über die Restlaufzeiten $k = 1, \dots, 10$ aufgetragen.

Es ist schön zu erkennen, dass bei geringerer Restlaufzeit weniger oder zumindest mit geringerem Handlevolumen gehandelt wird.

Für fixe und proportionale Kosten ist aber eine Vereinfachung der Berechnungen möglich, die wir im Folgenden angeben und ausnutzen wollen. Sei dazu für die weiteren Betrachtungen zum endlichen Zeithorizont ab jetzt $\Gamma \equiv \delta \geq 0$.

Satz 4.7.8

Unter fixen und proportionalen Transaktionskosten (γ, δ) gelten für alle $k \in \mathbb{N}$

- (i) $v_k(\cdot, \pi)$ ist konstant für alle $\pi \in [0, 1]$.
- (ii) $\eta_{-1,k}$ und $\eta_{+1,k}$ sind konstant.

Beweis: (i) Es gilt $v_0 \equiv 0$, so dass induktiv auch die Unabhängigkeit von

$$v_k(x, \pi) = \sup_{(a, \eta) \in \mathcal{A}^+(x, \pi)} \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta, Y) + v_{k-1}(f(x, \pi, a, \eta, Y))]$$

von x folgt, da für fixe Kosten $\Gamma(x) \equiv \delta$ auch

$$g(x, \pi, a, \eta, y) = \log \left(\frac{1 - a^2 \delta + a \gamma \pi}{1 + a \gamma \eta} \right) + \log(r + \eta(y - r))$$

und

$$\mathcal{A}^+(x, \pi) = \{(0, \pi)\} \cup \{-1\} \times \left[\frac{\pi}{(1-\delta)}, 1 \right] \cup \{+1\} \times \left[0, \frac{\pi}{(1-\delta)} \right]$$

unabhängig von x sind.

(ii) Nach (i) können wir ohne Einschränkung die Abhängigkeit von x in der Notation von $v_k, g, \mathcal{A}^+, f_\pi$ vernachlässigen. Sei nun $a \in \{-1, +1\}$. Es ist nur zu beachten, dass wegen

$$\begin{aligned} & \sup_{\eta \in [0, 1]} \mathbb{E} [g(\pi, a, \eta, Y) + v_{k-1}(f_\pi(\pi, a, \eta, Y))] \\ &= \log(1 - \delta + a \gamma \pi) \\ & \quad + \sup_{\eta \in [0, 1]} \left(-\log(1 + a \gamma \eta) + \mathbb{E} [\log(r + \eta(Y - r)) + v_{k-1}\left(\frac{\eta Y}{r + \eta(Y - r)}\right)] \right) \end{aligned}$$

eine Maximalstelle sowohl unabhängig von x als auch von π ist. □

Somit können wir wie bereits im zweiten Beweisteil geschehen unsere Notation zu

$$g(\pi, a, \eta, y), \quad v_k(\pi), \quad \mathcal{A}^+(\pi), \quad \eta_{-1,k}, \quad \dots$$

vereinfachen. Es ist aber zu beachten, dass η_k und a_k weiterhin von π abhängen und f_x natürlich auch von x abhängt.

Die Vereinfachung nach Satz 4.7.8 ermöglicht es uns, den folgenden Algorithmus zu formulieren.

Theorem 4.7.9 (Algorithmus)

Sei $N \in \mathbb{N}$ und seien die Annahmen 4.7.2 und 4.7.4 erfüllt.

- (1) Setze $w_{-1,0} = 0$, $w_{+1,0} = 0$ und $v_0 = 0$.
 (2) Bestimme für $k = 1, 2, \dots, N$ und $a \in \{-1, +1\}$

$$\eta_{a,k} = \arg \max_{\eta \in [0,1]} \mathbb{E} \left[g(\pi, a, \eta, Y) + v_{k-1} \left(\frac{\eta Y}{r + \eta(Y-r)} \right) \right],$$

und setze

$$w_{a,k} = -\log(1 + a \gamma \eta_{a,k}) + \mathbb{E} \left[\log(r + \eta_{a,k}(Y - r)) + v_{k-1} \left(\frac{\eta_{a,k} Y}{r + \eta_{a,k}(Y-r)} \right) \right].$$

Dabei kann v_{k-1} zu den bereits bestimmten $\eta_{a,j}, w_{a,j}$, $j = 1, \dots, k-1$ gemäß (3) bestimmt werden.

- (3) Sind η_j^a, w_j^a für $j = 1, \dots, k$ bestimmt, so kann $v_k(\pi)$ für $\pi \in (0, 1)$ rekursiv wie folgt berechnet werden. Bestimme

$$\begin{aligned} v_{a,k}(\pi) &= \log(1 - \delta + a \gamma \pi) + w_{a,k}, \quad a \in \{-1, +1\}, \\ v_{0,k}(\pi) &= \mathbb{E} \left[g(\pi, 0, \pi, Y) + v_{k-1}(\pi) \right] \end{aligned}$$

und setze

$$v_k(\pi) = \begin{cases} v_{-1,k}(\pi), & \text{falls } v_{-1,k}(\pi) \geq v_{0,k}(\pi), \eta_{-1,k} \leq \pi \\ v_{+1,k}(\pi), & \text{falls } v_{+1,k}(\pi) \geq v_{0,k}(\pi), \eta_{+1,k} \geq \pi \\ v_{0,k}(\pi), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt

$$J_N^*(x, \pi) = \log(x) + v_N(\pi).$$

Beweis: Die Behauptung erfolgt unter den Annahmen 4.7.2 und 4.7.4 direkt aus Satz 4.7.5 unter Ausnutzung von Satz 4.7.8. \square

Zu beachten ist, dass die Rekursion zur Bestimmung von $v_{0,k}(\pi)$ auch keine Supremumbildung erfordert, sondern rekursiv mit Hilfe der bereits bestimmten η_j^a und w_j^a durch Vergleiche erfolgt, und zwar auch nur bis zum ersten Zeitpunkt, in dem gekauft oder verkauft wird.

Dadurch ist dieser Algorithmus sehr schnell im Vergleich zur direkten Umsetzung des Algorithmus', wie er durch die Gleichung der dynamischen Programmierung vorgegeben ist.

Sind die η_j^a und w_j^a für $j = 1, \dots, N$ bereits tabelliert, so erfolgt die Bestimmung von $v_N(\pi)$ für jedes $\pi \in (0, 1)$ noch deutlich schneller. So lassen sich dann auch Kauf- und Verkaufsbereiche numerisch gut bestimmen.

Beispiel 4.7.10

Mit Hilfe des Algorithmus 4.7.9 können wir für fixe und proportionale Kosten bei Restlaufzeit $k \in \mathbb{N}$ die optimalen Wertanteile $\eta_{-1,k}$, $\eta_{+1,k}$ bestimmen. Mit Kenntnis dieser lassen sich auch die optimalen Werte v_k^* schnell berechnen, so dass wir wie in einer Periode die *Grenzen des Verkauf- und des Kaufberieches*, die wir mit $\pi_{-1,k}$ und $\pi_{+1,k}$ bezeichnen wollen, numerisch bestimmen können.

Wir verwenden die Parameter aus Beispiel 4.7.6, wobei wir die konstanten Kosten durch fixe Kosten $\Gamma \equiv \delta = 0.0002$ ersetzen. Bei diesen Parametern wären im Modell ohne Transaktionskosten die optimalen Wertanteile in einer Periode gegeben durch

$$\hat{\eta}_{-1} = 0.6809, \quad \hat{\eta} = 0.6190, \quad \hat{\eta}_{+1} = 0.5567.$$

Mit den fixen und proportionalen Kosten erhalten wir hier für Restlaufzeiten $k = 1, \dots, 6$ die in der folgenden Tabelle zusammengefassten Werte.

k	$\pi_{-1,k}$	$\eta_{-1,k}$	$\eta_{+1,k}$	$\pi_{+1,k}$
1	0.7712	0.6809	0.5567	0.4651
2	0.7165	0.6519	0.5884	0.5199
3	0.7143	0.6428	0.5997	0.5170
4	0.7193	0.6314	0.5953	0.5193
5	0.7122	0.6501	0.5735	0.5157
6	0.7164	0.6307	0.5952	0.5155

Erstaunlich ist hier, dass keine Monotonie vorliegt. Bei einer genauen Betrachtung des – hier nicht wiedergegebenen – nachfolgenden Handels scheint ein Grund darin zu liegen, dass die optimalen Wertanteile wesentlich davon abhängen, wie weiter gehandelt wird, d.h. an welchen Stellen des Baumes der Kursentwicklung wirklich gekauft oder verkauft wird.

Diskontierte Gewinne

Betrachten wir die zu lösenden Gleichungen in Theorem 4.4.12 und Satz 4.4.15, so ist zu erkennen, dass es kaum zu erwarten ist, auf diesem Wege für die Maximierung der diskontierten Gewinne oder der asymptotischen Rendite eine Lösung zu finden.

Für das Diskontierungsproblem lässt sich aber auf folgende Weise noch der optimale Wert approximativ bestimmen.

Satz 4.7.11

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Dann gilt für die Folge $v_0 \equiv 0$,

$$v_k^\alpha(x, \pi) = \sup_{(a, \eta) \in \mathcal{A}(x, \pi)} \mathbb{E} [g(x, \pi, a, \eta) + \alpha v_{k-1}^\alpha(f(x, \pi, a, \eta, Y))], \quad k \in \mathbb{N},$$

für alle $x > 0, \pi \in [0, 1]$

$$V_\alpha^*(x, \pi) = \log(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n^\alpha(x, \pi).$$

Beweis: Nach Lemma 4.4.13 folgt die Behauptung, da wir die Gültigkeit der Annahme 4.4.10 bereits in Lemma 4.5.1 nachgewiesen haben und sich nachrechnen lässt, dass der α -diskontierte Gewinn der durch die Aktionen $((0, \pi(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ gegebenen Kontrollstrategie endlich ist. \square

Für fixe und proportionale Kosten, sollte eine Lösung approximativ gut zu bestimmen sein, da zur Berechnung der $v_k^\alpha, k = 1, 2, \dots$ ein dem Algorithmus 4.7.9 entsprechender Algorithmus verwendet werden kann.

4.8 Asymptotische Rendite unter Transaktionskosten

Für die Bestimmung der asymptotischen Rendite ist für fixe und proportionale Kosten (γ, δ) mit $\delta > 0$ ein Zugang möglich, wie wir ihn im folgenden Kapitel in kontinuierlicher Zeit beschreiben werden. Wir wollen das Vorgehen im Binomialmodell kurz skizzieren. Die notwendigen Beweise ergeben sich ähnlich wie in Kapitel 5. Der Zugang baut nicht mehr auf den Methoden der markovsch kontrollierten Prozesse auf, sondern nutzt Resultate der Erneuerungstheorie.

Somit würde der Beweis der Aussage in Bemerkung 4.8.3, aus der sich ein Verfahren zur Bestimmung der optimalen asymptotischen Rendite in einer eingeschränkten Menge von Kontrollstrategien ergibt, einen ganz neuen Zugang erfordern, als wir ihn in diesem Kapitel über die Darstellung der Wertentwicklung als markovsch kontrollierten Prozess gewählt haben. Aus diesem Grunde und zur Begrenzung des Umfangs der Ausführungen, verweisen wir nur knapp auf die Resultate des folgenden Kapitels. Die hier beschriebenen Resultate ließen sich aber natürlich auch – weitestgehend analog zu dem Vorgehen in kontinuierlicher Zeit – direkt hier im Binomialmodell nachweisen.

Die Ergebnisse für fixe und proportionale Kosten in einer Periode und die Untersuchungen im folgenden Kapitel legen es nahe, dass eine Kontrollstrategie der Form

$$a_k(\pi) = \begin{cases} -1 & \text{falls } \pi \geq \pi_{-1}, \\ +1 & \text{falls } \pi \leq \pi_{+1}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \eta_k(\pi) = \begin{cases} \eta_{-1} & \text{falls } a_1(\pi) = -1, \\ \pi & \text{falls } a_1(\pi) = 0, \\ \eta_{+1} & \text{falls } a_1(\pi) = +1 \end{cases}$$

mit Paramtern $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1} \in (0, 1)$,

$$\eta_{-1} \geq \eta_{+1}, \quad \pi_{-1} > \eta_{-1}, \quad \pi_{+1} < \eta_{+1},$$

gut ist. Solch eine stationäre Kontrollstrategie nennen wir eine *Kontrollstrategie mit konstanten Wertanteilen*.

Es liegt eine Beschreibung durch eine Folge von Stoppzeiten nahe, die den jeweils nächsten Zeitpunkt angeben, zu dem gekauft oder verkauft wird. Die Bestimmung der asymptotischen Rendite lässt sich dann auf eine Periode zwischen zwei solchen Handelszeiten zurückführen. Da in diesen Perioden nicht gehandelt wird, benötigen wir eine Beschreibung des Wert- und Wertanteilprozesses ohne Handel, die wir im Kontrollmodell wie folgt einführen können.

Definition 4.8.1

Die durch die Kontrollstrategie $(a_k(\pi), \eta_k(\pi)) = (0, \pi)$, $k \in \mathbb{N}$, gegebenen Prozesse $(\tilde{\pi}(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(\tilde{X}(n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennen wir *Wertanteilprozess ohne Handel* und *Wertprozess ohne Handel*.

Lemma 4.8.2

Zu Startwerten $(x, \pi) \in \mathcal{X}$ gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\pi}(n) = \frac{\pi Y_1 \cdots Y_n}{(1 - \pi)r^n + Y_1 \cdots Y_n}$$

und

$$\tilde{X}(n) = \frac{1 - \pi}{1 - \tilde{\pi}(n)} x r^n.$$

Beweis: Für die Kontrollstrategie $(a_k(\pi), \eta_k(\pi)) = (0, \pi)$, $k \in \mathbb{N}$ gilt zu Startwerten $\tilde{\pi}(0) = \pi$ und $\tilde{X}(0) = x$ für den Wertanteilprozess

$$\tilde{\pi}(1) = f_\pi(x, \pi, 0, \pi, Y_1) = \frac{\pi Y_1}{r + \pi(Y_1 - r)} = \frac{\pi Y_1}{(1 - \pi)r + \pi Y_1}$$

und induktiv für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(n+1) &= \frac{\tilde{\pi}(n) Y_{n+1}}{r + \tilde{\pi}(n)(Y_{n+1} - r)} \\ &= \frac{\frac{\pi Y_1 \cdots Y_n}{(1 - \pi)r^n + \pi Y_1 \cdots Y_n} Y_{n+1}}{r + \frac{\pi Y_1 \cdots Y_n}{(1 - \pi)r^n + \pi Y_1 \cdots Y_n} (Y_{n+1} - r)} \\ &= \frac{\pi Y_1 \cdots Y_n Y_{n+1}}{(1 - \pi)r^{n+1} + \pi Y_1 \cdots Y_n Y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\tilde{\pi}(n+1) = \frac{\tilde{\pi}(n)Y_{n+1}}{(1 - \tilde{\pi}(n))r + \tilde{\pi}(n)Y_{n+1}}$$

ergibt sich durch einfache Umformung

$$r + \tilde{\pi}(n)(Y_{n+1} - r) = \frac{1 - \tilde{\pi}(n)}{1 - \tilde{\pi}(n+1)} r, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und damit teleskopartig für den Wertprozess ohne Handel

$$\tilde{X}(n) = x(r + \pi(Y_1 - r)) \cdots (r + \tilde{\pi}(n-1)(Y_n - r)) = x r^n \frac{1 - \pi}{1 - \tilde{\pi}(n)}.$$

□

Bemerkung 4.8.3

Sei eine Kontrollstrategie K mit konstanten Wertanteilen $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1} \in (0, 1)$ und zugehörigen Aktionen $(A_n, \eta_n) = (0, \tilde{\pi}(n))$ gegeben.

(i) Seien $\tau_1 = \inf\{n \geq 0 \mid A_n \in \{-1, +1\}\}$ und

$$\tau_{k+1} = \inf\{n > \tau_k \mid A_n \in \{-1, +1\}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann kann gezeigt werden, dass $(A_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\{-1, +1\}$, Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{-+} = P_\pi(A_2 = +1 \mid A_1 = -1)$ und entsprechend p_{--}, p_{+-} und p_{++} , gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{--} &= P_{\eta_{-1}}(A_{\tau_1} = -1), & p_{-+} &= 1 - p_{--}, \\ p_{+-} &= P_{\eta_{+1}}(A_{\tau_1} = -1), & p_{++} &= 1 - p_{+-}, \end{aligned}$$

und invarianter Verteilung (p_{-1}, p_{+1}) , gegeben durch

$$p_{-1} = \frac{p_{+-}}{p_{+-} + 1 - p_{--}} \quad \text{und} \quad p_{+1} = 1 - p_{-1} = \frac{1 - p_{--}}{p_{+-} + 1 - p_{--}}$$

bildet.

(ii) Ferner sei

$$\tau_{\pi_{-1}, \pi_{+1}} = \inf\{n \geq 0 \mid \tilde{\pi}(n) \notin (\pi_{+1}, \pi_{-1})\}.$$

Dann lässt sich analog zu der Argumentation im Abschnitt 5.6 nachweisen, dass die asymptotische Rendite der Kontrollstrategie K unter Ausnutzung der Bezeichnungen aus (i) gegeben ist durch

$$R^K = \frac{p_{-1} \mathbb{E}_{\eta_{-1}}[\log(\tilde{X}(\tau))] + p_{+1} \mathbb{E}_{\eta_{+1}}[\log(\tilde{X}(\tau))]}{p_{-1} \mathbb{E}_{\eta_{-1}}[\tau_{\pi_{-1}, \pi_{+1}}] + p_{+1} \mathbb{E}_{\eta_{+1}}[\tau_{\pi_{-1}, \pi_{+1}}]}.$$

Ein Nachweis hätte mit offenkundigen Variationen annähernd analog zu dem Vorgehen im folgenden Kapitel in dem Abschnitt 5.6 zu erfolgen. Wir verweisen insbesondere auf die Sätze und Theoreme 5.6.8, 5.6.12, 5.6.13 und 5.6.14.

Die so bestimmte asymptotische Rendite ist wegen der notwendigen Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{\eta a_0}(A_1 = a_1)$, $a_0, a_1 \in \{-1, +1\}$, und der auftretenden Overshoots $\tilde{\pi}(\tau) - \pi_{-1}$ und $\pi_{+1} - \tilde{\pi}(\tau)$ recht unangenehm zu behandeln. Wir stellen im Folgenden eine mögliche Vereinfachung vor.

Lemma 4.8.4

Bei Start in $\tilde{\pi}(0) = \eta_0$ gilt

$$\tau_{\pi_{-1}, \pi_{+1}} = \inf \left\{ n \geq 0 \mid \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{Y_i}{r} \right) \geq \log \left(\frac{\pi_{-1}(1 - \eta_0)}{\eta_0(1 - \pi_{-1})} \right) \right. \\ \left. \text{oder} \sum_{i=1}^n \log \left(\frac{Y_i}{r} \right) \leq \log \left(\frac{\pi_{+1}(1 - \eta_0)}{\eta_0(1 - \pi_{+1})} \right) \right\}$$

Beweis: Es gilt nach Lemma 4.8.2

$$\tilde{\pi}(\tau) = \frac{\eta_0 Y_1 \dots Y_\tau}{(1 - \eta_0)r^\tau + \eta_0 Y_1 \dots Y_\tau} = 1 - \frac{(1 - \eta_0)r^\tau}{(1 - \eta_0)r^\tau + \eta_0 Y_1 \dots Y_\tau},$$

so dass $\tilde{\pi}(\tau) \geq \pi_{-1}$ genau dann gilt, wenn

$$\frac{Y_1 \dots Y_\tau}{r^\tau} \geq \log \left(\frac{\pi_{-1}(1 - \eta_0)}{\eta_0(1 - \pi_{-1})} \right)$$

gilt. Mit der entsprechenden Ungleichung für $\tilde{\pi}(\tau) \leq \pi_{+1}$ folg die Behauptung. \square

Da $\log\left(\frac{u}{r}\right) > 0$, $\log\left(\frac{d}{r}\right) < 0$ und unter der Bedingung $0 < \pi_{+1} < \eta_{+1} \leq \eta_{-1} < \pi_{-1} < 1$

$$\log \left(\frac{\pi_{-1}(1 - \eta_0)}{\eta_0(1 - \pi_{-1})} \right) > 0, \quad \log \left(\frac{\pi_{+1}(1 - \eta_0)}{\eta_0(1 - \pi_{+1})} \right) < 0$$

gelten, sind wir bei der Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten in der Situation, Ruinwahrscheinlichkeiten für einen generalisierten Random Walk zu ermitteln. Das ist immer noch keine angenehme Aufgabe. Der folgende Satz zeigt, dass wir uns unter der Bedingung $\frac{u}{r} = \frac{r}{d}$ auf die bekannten Lösungen des klassischen Ruinproblems zurückziehen können. Die Bedingung stellt natürlich eine große Einschränkung dar, doch ist gerade eine Approximation des Black-Scholes Modells mit einer Folge von Binomialmodellen möglich, deren Parameter diese Bedingung erfüllen. Wir befinden uns also noch in einem bedeutsamen Fall.

Satz 4.8.5

Es gelte $\frac{u}{r} = \frac{r}{d}$. Wir definieren für $i \in \mathbb{N}$

$$X_i = \begin{cases} +1, & \text{falls } Y_i = u, \\ -1, & \text{falls } Y_i = d \end{cases}$$

und

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

sowie zu $\eta_0 \in [\pi_{+1}, \pi_{-1}]$

$$s_{-1} = \lceil (\log(\frac{u}{r})^{-1} \log(\frac{\pi_{-1}(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\pi_{-1})})) \rceil \quad \text{und} \quad s_{+1} = \lfloor (\log(\frac{u}{r})^{-1} \log(\frac{\pi_{+1}(1-\eta_0)}{\eta_0(1-\pi_{+1})})) \rfloor.$$

Dann gelten

(i) $P_{\eta_0}(\tilde{\pi}(\tau) \geq \pi_{-1}) = P_{\eta_0}(S_\tau = s_{-1})$ und $P_{\eta_0}(\tilde{\pi}(\tau) \leq \pi_{+1}) = 1 - P_{\eta_0}(S_\tau = s_{-1})$.

(ii) Im Fall $p \neq \frac{1}{2}$ ist

$$P_{\eta_0}(S_\tau = s_{-1}) = \frac{(1-p)^{-s_{+1}} p^{s_{-1}} - p^{s_{-1}-s_{+1}}}{(1-p)^{s_{-1}-s_{+1}} - p^{s_{-1}-s_{+1}}}$$

und im Fall $p = \frac{1}{2}$

$$P_{\eta_0}(S_\tau = s_{-1}) = \frac{-s_{+1}}{s_{-1} - s_{+1}}.$$

(iii) Für $\tau = \tau_{\pi_{-1}, \pi_{+1}}$ gilt

$$\tau = \inf \{ n \geq 0 \mid S_n = s_{-1} \text{ oder } S_n = s_{+1} \}$$

mit

$$E_{\eta_0}[\tau] = -\frac{(s_{-1} - s_{+1})P_{\eta_0}(S_\tau = s_{-1}) + s_{+1}}{2p - 1}$$

im Fall $p \neq \frac{1}{2}$ und $E_{\eta_0}[\tau] = -s_{-1}s_{+1}$ im Fall $p = \frac{1}{2}$.

Beweis: Unter der Bedingung $\frac{u}{r} = \frac{r}{d}$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$X_i = \left(\log\left(\frac{u}{r}\right) \right)^{-1} \log\left(\frac{Y_i}{r}\right).$$

Damit folgt aus Lemma 4.8.4 die behauptete Gestalt von τ in (iii). Aus dieser Darstellung ergibt sich (i). Die angegebenen Berechnungsformeln entsprechen den Gewinnwahrscheinlichkeiten und der Spieldauer im klassischen Ruinproblem, siehe zum

Beispiel Feller (1968), Kapitel XIV. □

Mit Satz 4.8.5 lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten und der Erwartungswert der Stoppzeiten bestimmen, die wir zur Bestimmung der asymptotischen Rendite zu eine Kontrollstrategie mit konstanten Wertanteilen gemäß Bemerkung 4.8.3 benötigen. Wegen der Definition von s_{-1} und s_{+1} ist aber die Maximierung in den vier Parametern $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}$ schlechter zu handhaben als im kontinuierlichen Fall, sie ist aber immerhin möglich.

Somit liegt ein im Vergleich zur Bestimmung eines kanonischen Tripels doch recht brauchbares Verfahren vor, um in der Klasse der Kontrollstrategien mit konstanten Wertanteilen eine optimale zu finden.

Kapitel 5

Fixe und proportionale Transaktionskosten

5.1 Überblick

In diesem Kapitel werden wir im Black-Scholes-Modell das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite bei Vorliegen von fixen und proportionalen Transaktionskosten untersuchen. In Abschnitt 2.7 haben wir die Arbeit von Morton und Pliska (1995) vorgestellt, die dieses Problem für rein fixe Transaktionskosten untersucht haben. Aufgrund der einfachen Kostenstruktur sind sie in der Lage, unter gewissen Stationaritätsannahmen die Aufgabenstellung auf ein Problem des optimalen Stoppens mit linearen Kosten für den Wertanteilprozess ohne Handel zurückzuführen. Wesentlich für diese Vereinfachung ist, dass aufgrund der einfachen Kosten der Wertprozess in den Handelszeitpunkten sich als Produkt der Wertzuwächse zwischen den Handelszeitpunkten darstellen lässt, was bei Verwendung des Logarithmus zu einer gut behandelbaren additiven Darstellung führt. Ohne eine gründliche Untersuchung ist nicht erkennbar, ob solch eine Faktorisierung auch bei der zusätzlichen Berücksichtigung von proportionalen Transaktionskosten möglich ist.

Ein großer Teil dieses Kapitels wird die Möglichkeit solch einer Darstellung untersuchen, die wir dann in den verschiedenen Modellierungen in Satz 5.4.8 und Satz 5.5.7 angeben können. Wie in einer Periode und im Binomialmodell werden wir zeigen, dass uns die Einführung von Handelsart und neuem Wertanteil solch eine Darstellung ermöglicht.

Dazu gehen wir in 5.4 von der bei der Berücksichtigung von Transaktionskosten üblichen Modellierung aus. Diese unterscheidet den Aktienwertprozess und den Bondwertprozess und ermöglicht so eine natürliche Einführung auch komplexer Transaktionskosten. In dieser Modellierung werden wir die notwendigen Begriffe motivieren und zeigen, dass sie zu der erwünschten Faktorisierung des Wertprozesses führen. Dieser

Zugang bietet sich an, da bei einer direkten Modellierung, wie wir sie nachfolgend beschreiben werden, die verwendeten Ausdrücke unverständlich blieben. In 5.5 werden wir dann die Wertentwicklung wieder als durch Handelsart und neuen Wertanteil kontrollierte Prozesse einführen. In Satz 5.5.6 zeigen wir die Äquivalenz der beiden Zugänge.

Das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite ist insofern schwierig, als dass es kein Resultat gibt, das die Existenz einer optimalen stationären Kontrollstrategie in unserer Situation sichern würde. Wir geben in 5.6 einige Referenzen an. Deshalb werden wir gewisse Stationaritätsbedingungen an die Kontrollstrategie stellen, wie es Morton und Pliska (1995) implizit auch getan haben, wobei in unserer Situation die neuen Wertanteile η_{-1} nach einem Verkauf und η_{+1} nach Kauf zu unterscheiden sind. Betrachten wir von diesen Kontrollstrategien nur solche, in deren Handelszeitpunkten nur gekauft oder verkauft wird (d.h. kein Halten der Aktien stattfindet), so gelangen wir zu der Klasse der Handelsstrategien.

Für diese lässt sich dann zeigen, dass eine regenerative Struktur vorliegt, die zu einer Reduktion des Problems auf eine Periode zwischen zwei Verkäufen führt (Theorem 5.6.13). Unter Ausnutzung des invarianten Maßes der eingebetteten Markovkette der Handelsarten lässt sich diese Darstellung auf eine einzige Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten zurückführen, wenn wir als Startverteilung das invariante Maß verwenden. Die resultierende Darstellung für die optimale asymptotische Rendite wird damit numerisch sehr gut behandelbar. Dieses Theorem 5.6.14 ist das wichtigste neue Resultat in diesem Kapitel.

Unter seiner Ausnutzung lässt sich in der Klasse der Handelsstrategien mit festen Stoppgrenzen sehr leicht die optimale asymptotische Rendite und eine optimale Handelsstrategie bestimmen, siehe Theorem 5.8.3.

Zur Untersuchung der Frage, ob eine optimale Handelsstrategie in der Klasse der stark stationären Kontrollstrategien konstante Stoppgrenzen π_{-1} und π_{+1} hat, unternehmen wir in 5.7 einen Exkurs in die Theorie des optimalen Stoppens bei linearen Kosten. Anschliessend können wir in 5.8 einen Verifikationssatz angeben, unter dem das auftretende optimale Stoppproblem zu konstanten Stoppgrenzen führt. Zum Nachweis, dass dies immer gilt, wären aber die Gültigkeit der Voraussetzungen des Verifikationssatzes für alle Wertanteile η_{-1}, η_{+1} und alle in Frage kommenden Werte R für die optimale asymptotische Rendite nachzuweisen. Ein eventuell mögliches, in jedem Fall technisch aber äußerst aufwändiges Unterfangen.

Wir schließen den theoretischen Teil mit Theorem 5.8.10, das uns garantiert, dass bei Existenz einer optimalen Handelsstrategie diese auch eine mit konstanten Stoppgrenzen sein muss, so dass eine einfache Maximierung nach Theorem 5.8.3 in vier Parametern $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}$ und π_{+1} möglich ist. Anschließend folgen in Abschnitt 5.9 noch verschiedene Beispiele.

Wir beginnen das Kapitel mit der Zusammenfassung einiger weniger Resultate zu

Diffusionsprozessen und ihren Erzeugern. Anschliessend werden wir in Abschnitt 5.3 den Wert- und Wertanteilprozess ohne Handel untersuchen. Für letzteren werden wir die Aufgabe des optimalen Stoppens formulieren, auf die wir die Bestimmung der optimalen asymptotischen Rendite reduzieren können.

5.2 Diffusionsprozesse und ihre Erzeuger

Gegeben sei ein geeigneter Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) und auf diesem ein Standard-Wiener-Prozess $(W(t))_{t \geq 0}$ mit kanonischer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, d.h. diese sei vervollständigt und rechtsseitig stetig.

Definition 5.2.1

Ein zu $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptierter stochastischer Prozess $(X(t))_{t \geq 0}$ mit Werten in \mathbb{R} heiße (*zeitlich homogener*) *Diffusionsprozess*, falls er stetige Pfade besitzt und eine stochastische Differentialgleichung der Form

$$dX(t) = f_\mu(X(t))dt + f_\sigma(X(t))dW(t)$$

erfüllt, in der f_μ und f_σ messbar sind und eine Konstante $c > 0$ existiert mit

$$|f_\mu(x) - f_\mu(y)| + |f_\sigma(x) - f_\sigma(y)| \leq c|x - y| \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Es bezeichnen für alle $t \geq 0, x \in \mathbb{R}$

$$P_{t,x} = P(\cdot | X(t) = x) \text{ und insbesondere } P_x = P_{0,x}.$$

Unter P_x ist $(X(t))_{t \geq 0}$ somit als eindeutig bestimmte starke Lösung von

$$dX(t) = f_\mu(X(t))dt + f_\sigma(X(t))dW(t), \quad X(0) = x$$

auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ mit stetigen Pfaden gegeben.

Ist insbesondere der Startwert $X(0)$ durch eine Zufallsvariable $X_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die unabhängig von $(W(t))_{t \geq 0}$ ist, so ist $P_x = P(\cdot | X_0 = x)$, und es wäre genauer die Filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(\sigma(X_0) \cup \mathcal{F}_t), t \geq 0$, zu betrachten.

Theorem 5.2.2

Ein Diffusionsprozess ist ein starker Markovprozess.

Beweis: Siehe Theorem 7.2.4 in Øksendal (2000). □

Aufgrund des von uns zu betrachtenden Wertanteilprozesses, der nur Werte in $(0, 1)$ annimmt, beschränken wir unsere Darstellung im folgenden Teil auf Prozesse mit diesem Wertebereich.

Als einen Diffusionsprozess mit Werten in $(0, 1)$ bezeichnen wir einen stochastischen Prozess $(Y(t))_{t \geq 0}$, der die Bedingungen in Definition 5.2.1 für alle Startwerte $y \in (0, 1)$ erfüllt, der jeden Punkt aus $(0, 1)$ mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit erreicht und für den gilt

$$P_y(Y(t) \in (0, 1) \text{ für alle } t \geq 0) = 1 \text{ für alle } y \in (0, 1).$$

Es bezeichne jetzt $(Y(t))_{t \geq 0}$ einen Diffusionsprozess mit Werten in $(0, 1)$, so dass unter P_y , $y \in (0, 1)$, für geeignete f_μ, f_σ gilt

$$dY(t) = f_\mu(Y(t))dt + f_\sigma(Y(t))dW(t), \quad Y(0) = y.$$

Definition 5.2.3

Der *infinitesimale Erzeuger* \mathcal{L}_Y von $(Y(t))_{t \geq 0}$ wird definiert durch

$$\mathcal{L}_Y h(x) = \lim_{t \searrow 0} \frac{E_y [h(Y(t))] - h(y)}{t}, \quad y \in (0, 1).$$

$D_{\mathcal{L}_Y}$ bezeichne die Menge der Funktionen $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, für die der Grenzwert für alle y existiert.

Mit \mathcal{C}_K^2 bezeichnen wir die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in $(0, 1)$.

Theorem 5.2.4

Für alle $h \in \mathcal{C}_K^2$ liegt h in $D_{\mathcal{L}_Y}$ und es gilt $\mathcal{L}_Y = L_Y$ mit

$$L_Y h(y) = f_\mu(y)h'(y) + \frac{1}{2}f_\sigma^2(y)h''(y), \quad y \in (0, 1).$$

Beweis: Siehe Theorem 7.3.3 in Øksendal (2000). □

Den elliptischen Differentialoperator L_Y in Theorem 5.2.4 werden wir auch kurz *Erzeuger von $(Y(t))_{t \geq 0}$* nennen.

Theorem 5.2.5 (Dynkins Gleichung)

Für alle $h \in \mathcal{C}_K^2$, $y \in (0, 1)$ und Stoppzeiten τ mit $E_x [\tau] < \infty$ gilt

$$E_y [h(Y(\tau))] = h(y) + E_y \left[\int_0^\tau L_Y h(Y(t))dt \right].$$

Beweis: Siehe Theorem 7.4.1 in Øksendal (2000). \square

Folgerung 5.2.6

Für alle $h \in \mathcal{C}_K^2$ bildet

$$\left(h(Y(t)) - \int_0^t L_Y h(Y(s)) ds \right)_{t \geq 0}$$

ein Martingal mit Anfangswert $h(Y(0))$.

Beweis: Siehe Proposition VII.1.6 in Revuz und Yor (1991). \square

Mit Folgerung 5.2.6 erhalten wir den folgenden Satz, der es uns ermöglicht, in einfacher Weise die Austrittswahrscheinlichkeiten und den Erwartungswert für Stoppzeiten der Form

$$\tau_{a,b} = \inf \{ t \geq 0 \mid Y(t) = a \text{ oder } Y(t) = b \}$$

zu $0 < a < b < 1$ zu berechnen.

Satz 5.2.7

Seien h_0 eine Lösung von $L_Y h_0 = 0$ und h_1 eine Lösung von $L_Y h_1 = 1$ in $\mathcal{C}^2((0,1))$.

Für $a, b \in (0,1)$, $a < b$, gilt für $\tau = \tau_{a,b}$ und alle $y \in [a, b]$

$$(i) \quad P_y(Y(\tau) = b) = \frac{h_0(y) - h_0(a)}{h_0(b) - h_0(a)},$$

$$(ii) \quad E_y[\tau] = \frac{h_0(y) - h_0(a)}{h_0(b) - h_0(a)}(h_1(b) - h_1(a)) - (h_1(y) - h_1(a)).$$

Beweis:

Seien $a, b \in (0,1)$, $a < b$ und ζ eine Funktion in \mathcal{C}_K^2 , die auf $[a, b]$ identisch 1 ist. Ferner seien h_0 eine Lösung von $L_Y h_0 = 0$ sowie h_1 eine Lösung von $L_Y h_1 = 1$. Dann bilden nach Folgerung 5.2.6

$$M_i(t) = h_i(Y(t))\zeta(Y(t)) - \int_0^t L_Y(h_i \zeta)(Y(s)) ds, \quad t \geq 0$$

für $i = 0, 1$ Martingale. Für $\tau = \tau_{a,b}$ folgt wegen

$$\begin{aligned} h_0(y) &= \mathbb{E}_y [M_0(\tau)] \\ &= \mathbb{E}_y [h_0(Y(\tau))] \\ &= h_0(a)P_y(Y(\tau) = a) + h_0(b)P_y(Y(\tau) = b) \end{aligned}$$

und $P_y(Y(\tau) = a) + P_y(Y(\tau) = b) = 1$ die erste Behauptung. Unter Ausnutzung dieser ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \mathbb{E}_y [M_1(\tau)] \\ &= \mathbb{E}_y [h_1(Y(\tau)) - \tau] \\ &= h_1(a)P_y(Y(\tau) = a) + h_1(b)P_y(Y(\tau) = b) - \mathbb{E}_y [\tau] \\ &= h_1(a) + \frac{h_0(y) - h_0(a)}{h_0(b) - h_0(a)}(h_1(b) - h_1(a)) - \mathbb{E}_y [\tau] \end{aligned}$$

auch die Bestimmungsgleichung für den Erwartungswert. □

Definition 5.2.8

Der *Raum-Zeit-Prozess* $(Z(t))_{t \geq 0}$ zu Y mit Startwert $z = (y, s)$, $s \geq 0$, $y \in (0, 1)$, ist gegeben durch

$$Z(t) = \begin{pmatrix} Y(t) \\ s + t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \quad Y(0) = y.$$

Er kann aufgefasst werden als Diffusionsprozess in $(0, 1) \times [0, \infty)$ mit Dynamik

$$\begin{aligned} dZ_1(t) &= dY(t), \quad Z_1(0) = y \\ dZ_2(t) &= dt, \quad Z_2(0) = s \end{aligned}$$

unter $P_{(s,y)} = P_{0,(s,y)}$, $s \geq 0$, $y \in (0, 1)$. Der Erzeuger von $(Z(t))_{t \geq 0}$ ist auf \mathcal{C}_K^2 gegeben durch

$$L_Z = L_Y + \frac{\partial}{\partial t}.$$

5.3 Wertentwicklung ohne Handel

Wir werden in diesem Kapitel die Wertentwicklung im Black-Scholes-Modell betrachten, in dem wir auch den Überblick in Kapitel 2 gegeben haben. Wir fassen die Notationen noch einmal zusammen.

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{F}, P) sowie ein Standard-Wiener-Prozess $(W(t))_{t \geq 0}$ unter P und die von diesem erzeugte rechtsseitig stetige und vervollständigte Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

Zu Parametern $r > 0$ (Zinsrate), $s_0 > 0$ (Anfangskurs), $\mu \in \mathbb{R}$ (Trend) und $\sigma > 0$ (Volatilität) seien der Kurs $(B(t))_{t \geq 0}$ eines Bonds mit Zinsrate r und der Kurs einer Aktie $(S(t))_{t \geq 0}$ mit Trend μ und Volatilität σ bestimmt durch

$$dB(t) = B(t)r dt, \quad B(0) = 1 \quad \text{bzw.} \quad dS(t) = S(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad S(0) = s_0,$$

d.h. es sind für $t \geq 0$

$$B(t) = e^{rt} \quad \text{und} \quad S(t) = s_0 e^{\mu t} e^{\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t}.$$

Wir werden die folgende Annahme an die Parameter stellen.

Annahme 5.3.1

Der optimale Wertanteil ohne Transaktionskosten liege in $(0, 1)$, d.h. es gelte

$$\eta_{opt} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \in (0, 1).$$

Eine Aktie, für die $\eta_0 \in (0, 1)$ gilt, könnte Definition 3.6.4 entsprechend als *moderat* (zur Zinsrate r) bezeichnet werden. Nur unter dieser Annahme ist es sinnvoll, sich auf Wertanteilprozesse mit Werten in $(0, 1)$ zu beschränken, wie wir es in diesem Kapitel tun werden.

Definition 5.3.2

Seien X_0 und π_0 von $(W(t))_{t \geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $(0, \infty)$ bzw. $(0, 1)$. Wir führen den *Wertprozess ohne Handel* $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ und den *Wertanteilprozess ohne Handel* $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ zu Startwerten X_0, π_0 wie folgt ein. Für $t \geq 0$ seien

$$\tilde{X}(t) = (1 - \pi_0)X_0 e^{rt} + \pi_0 X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)},$$

und

$$\tilde{\pi}(t) = \frac{\pi_0 X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}}{\tilde{X}(t)}.$$

Ferner bezeichne $P_{(x, \pi)} = P(\cdot | X_0 = x, \pi_0 = \pi)$ für alle $x > 0, \pi \in (0, 1)$.

Die Interpretation von $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ und $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ ist leicht: Zum Anfangszeitpunkt wird ein Wert $\pi_0 X_0$ in die Aktie investiert, der sich in der Zeit entsprechend der Entwicklung der Aktie vermehrt oder vermindert. Der Rest $(1 - \pi_0)X_0$ wird in den Bond investiert und verzinst sich. Somit gibt $\tilde{X}(t)$ den Portfoliowert zur Zeit $t \geq 0$ an, wenn bis zu

diesem Zeitpunkt nicht gehandelt wurde. Entsprechend gibt $\tilde{\pi}(t)$ den Wertanteil der gehaltenen Aktien am gesamten Portfoliowert an, wenn nicht gehandelt wurde. Wegen

$$\tilde{\pi}(t) = \frac{\pi_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}}{\pi_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} + (1 - \pi_0)e^{rt}}$$

hängt $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ nicht vom Startwert X_0 ab, so dass wir bei der Betrachtung von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ häufig nur die Maße $P_\pi = P(\cdot | \pi_0 = \pi)$ betrachten werden.

Eine wichtige Darstellung für $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ durch $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ liefert das folgend Lemma.

Lemma 5.3.3

Für alle $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ gilt unter $P_{(x, \pi)}$

$$\tilde{X}(t) = \frac{1 - \pi}{1 - \tilde{\pi}(t)} x e^{rt}.$$

Beweis: Für $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ ergibt sich unter $P_{(x, \pi)}$ direkt für alle $t \geq 0$ aus der Definition

$$\begin{aligned} \tilde{X}(t) &= (1 - \pi)x e^{rt} + \pi x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \\ &= (1 - \pi)x e^{rt} + \tilde{\pi}(t)\tilde{X}(t), \end{aligned}$$

so dass Auflösen nach $\tilde{X}(t)$ die Behauptung liefert. \square

Um die Theorie des optimalen Stoppens anwenden zu können, ist wesentlich, dass wir die Dynamik von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ kennen, die uns folgender Satz liefert.

Satz 5.3.4

$(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ und $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ sind Diffusionsprozesse in $(0, \infty)$ bzw. in $(0, 1)$. Ihre Dynamik ist für alle $x > 0$, $\pi \in (0, 1)$ gegeben durch

$$d\tilde{X}(t) = \tilde{X}(t) \left(r dt + \tilde{\pi}(t) \left((\mu - r) dt + \sigma dW(t) \right) \right), \quad \tilde{X}(0) = x, \tilde{\pi}(0) = \pi$$

unter $P_{(x, \pi)}$ und durch

$$d\tilde{\pi}(t) = \tilde{\pi}(t)(1 - \tilde{\pi}(t)) \left((\mu - r - \tilde{\pi}(t)\sigma^2) dt + \sigma dW(t) \right), \quad \tilde{\pi}(0) = \pi$$

unter P_π .

Beweis: Seien $x > 0$ und $\pi \in (0,1)$. Dann liefert die Anwendung der Ito-Formel unter $P_{(x,\pi)}$

$$\begin{aligned} d\tilde{X}(t) &= \left((1-\pi)x r e^{rt} + \pi x \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \right) dt \\ &\quad + \pi x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \left(\sigma dW(t) + \frac{\sigma^2}{2} dt \right) \\ &= (1-\pi)x r e^{rt} dt + \pi x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} \left(\mu dt + \sigma dW(t) \right), \end{aligned}$$

so dass mit

$$\pi x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} = \tilde{\pi}(t) \tilde{X}(t)$$

und

$$(1-\pi)x r e^{rt} = (1-\tilde{\pi}(t)) \tilde{X}(t)$$

die behauptete Darstellung folgt.

Zur Bestimmung der Dynamik von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ beachten wir, dass unter P_π

$$\tilde{\pi}(t) = \frac{\pi e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}}{\pi e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)} + (1-\pi)e^{rt}}$$

für

$$Y(t) = e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

die Darstellung

$$\tilde{\pi}(t) = \frac{\pi Y(t)}{\pi Y(t) + (1-\pi)}.$$

hat. Unter Beachtung von

$$1 - \tilde{\pi}(t) = \frac{1-\pi}{\pi Y(t) + (1-\pi)}$$

und von

$$dY(t) = Y(t) \left((\mu - r) dt + \sigma dW(t) \right), \quad d[Y](t) = (Y(t)\sigma)^2 dt$$

folgt mit der Ito-Formel

$$\begin{aligned} d\tilde{\pi}(t) &= \frac{(1-\pi)\pi dY(t)}{(\pi Y(t) + (1-\pi))^2} + \frac{1}{2}(-2) \frac{(1-\pi)\pi^2 d[Y](t)}{(\pi Y(t) + (1-\pi))^3} \\ &= \frac{(1-\pi)\pi Y(t)}{(\pi Y(t) + (1-\pi))^2} \left((\mu - r) dt + \sigma dW(t) - \frac{\pi Y(t)\sigma^2 dt}{\pi Y(t) + (1-\pi)} \right) \\ &= (1-\tilde{\pi}(t))\tilde{\pi}(t) \left((\mu - r) dt + \sigma dW(t) - \tilde{\pi}(t)\sigma^2 dt \right). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.3.5

Liegt η_{opt} in $(0, 1)$, so ist $(\tilde{\pi}_t)_{t \geq 0}$ *mean-reverting* bzgl. η_{opt} .

Beachten wir, dass wegen $\eta_{opt} = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned} d\tilde{\pi}(t) &= \tilde{\pi}(t)(1 - \tilde{\pi}(t))\left((\mu - r - \sigma^2\tilde{\pi}(t))dt + \sigma dW(t)\right) \\ &= \tilde{\pi}(t)(1 - \tilde{\pi}(t))\left(\sigma^2(\eta_{opt} - \tilde{\pi}(t))dt + \sigma dW(t)\right) \end{aligned}$$

gilt, so erkennen wir, dass der Driftanteil zur Zeit $t \geq 0$ die Gestalt

$$\sigma^2\tilde{\pi}(t)(1 - \tilde{\pi}(t))(\eta_{opt} - \tilde{\pi}(t))$$

hat. Da $\tilde{\pi}(t)$ für alle $t \geq 0$ in $(0, 1)$ liegt, hat $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ somit in t negative Drift, falls $\tilde{\pi}(t) > \eta_{opt}$ und positive Drift, falls $\tilde{\pi}(t) < \eta_{opt}$ gilt. Daraus folgt wegen $\eta_{opt} \in (0, 1)$ die sogenannte mean-reverting-Eigenschaft.

Um später die Austrittswahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte von bestimmten Stoppzeiten gemäß Satz 5.2.7 berechnen zu können, benötigen wir die im folgenden Lemma angegebenen Lösungen der in Satz 5.2.7 benutzten Differentialgleichungen.

Lemma 5.3.6

Der Erzeuger von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ ist auf \mathcal{C}_K^2 gegeben durch

$$L_\pi h(x) = (1-x)x((\mu-r) - \sigma^2x)h'(x) + \frac{1}{2}(1-x)^2x^2\sigma^2h''(x).$$

- (i) Lösungen von $L_\pi h_0 = 0$ und $L_\pi h_1 = 1$ auf $(0, 1)$ sind im Fall $\eta_{opt} \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\eta_{opt}-1}, \\ h_1(x) &= -\frac{2 \log\left(\frac{1-x}{x}\right)}{\sigma^2(2\eta_{opt}-1)} \end{aligned}$$

und im Fall $\eta_{opt} = \frac{1}{2}$ durch

$$\begin{aligned} h_0(x) &= \log\left(\frac{1-x}{x}\right), \\ h_1(x) &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\log\left(\frac{1-x}{x}\right)\right)^2. \end{aligned}$$

- (ii) Die Lösungen von $L_\pi h = c$, $c \in \mathbb{R}$, haben im Fall $\eta_{opt} \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und im Fall $\eta_{opt} = \frac{1}{2}$ jeweils die Gestalt

$$h(x) = c_0 + c_1 h_0(x) + c h_1(x), \quad c_0, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Nach Theorem 5.2.4 hat der Erzeuger L_π von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ auf \mathcal{C}_K^2 die behauptete Gestalt. Dass die angegebenen Funktionen die Differentialgleichungen lösen, lässt sich direkt nachrechnen oder den Arbeiten von Morton und Pliska (1995) und Schneider (1999) entnehmen. \square

5.4 Transaktionen

Gegeben sei das Black-Scholes-Modell unter der Annahme 5.3.1, wie wir es im vorangehenden Abschnitt eingeführt haben.

Wir gehen davon aus, dass die Investorin zur Zeit 0 mit einem Anfangskapital X_0 starte, von dem der Anteil π_0 in die Aktie investiert sei. Dabei seien X_0 und π_0 von $(W(t))_{t \geq 0}$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $(0, \infty)$ bzw. $(0, 1)$ und es bezeichne wie gewohnt $P_{(x,\pi)} = P(\cdot | X_0 = x, \pi_0 = \pi)$ für alle $x > 0, \pi \in (0, 1)$. Schreiben wir, dass eine Aussage 'unter allen $P_{(x,\pi)}$ gilt', so meinen wir, dass sie $P_{(x,\pi)}$ -f.s. für alle $x > 0, \pi \in (0, 1)$ erfüllt ist.

Ist $\mathcal{G} = \sigma(X_0, \pi_0)$, so haben wir die Filtration $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$, zu betrachten.

Jeder Handel der Investorin wird Transaktionskosten nach sich ziehen, die sich aus proportionalen Kosten $\gamma \geq 0$ und fixen Kosten $\delta > 0$ zusammensetzen. Aufgrund des fixen Anteils ist es naheliegend, dass es genügt, als Handelszeitpunkte eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tau_n \rightarrow \infty$ anzusetzen, da bis zu einem endlichen Zeithorizont T nur endlich oft gehandelt werden kann. Denn bei jeder Transaktion verringert sich der Wert um den Faktor $1 - \delta$ und für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$P(S(T)(1 - \delta)^n > \varepsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

so dass auch bei bester Entwicklung der Aktie mit Wahrscheinlichkeit 1 ein Ruin erfolgte.

Die anderen Voraussetzungen in folgender Definition sind entsprechend gut begründbar und werden uns die Notation etwas erleichtern.

Definition 5.4.1

Eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzgl. $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ nennen wir (eine Folge von) *Handelszeiten*, falls $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter allen $P_{(x,\pi)}$ eine Folge von endlichen Stoppzeiten bildet, die streng monoton wachsend und ausschöpfend ist, d.h. es gelten

$$(i) \quad P_{(x,\pi)}(\tau_n < \infty) = 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(ii) \quad 0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots \text{ unter } P_{(x,\pi)} \text{ und}$$

(iii) $P_{(x,\pi)}(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty) = 1$.

Die Aktionen der Investorin, aus denen sich die Wertentwicklung ihres Portfolios ergibt, beschreiben wir in diesem Abschnitt erst wieder durch die Handelsvolumina, die sie zu den Handelszeitpunkten in der Aktie umsetzt.

Definition 5.4.2

Seien $\gamma = 0$ und $\delta \in (0, 1)$ oder $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ und $\delta \in (0, \gamma)$. Weiter seien Handelszeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine Folge von \mathcal{G}_{τ_n} -messbaren Zufallsvariablen $\Delta_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben.

Zu der Folge $(\tau_n, \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind der *Bondwertprozess* $(X_B(t))_{t \geq 0}$ und der *Aktienwertprozess* $(X_S(t))_{t \geq 0}$ unter $P_{(x,\pi)}$ wie folgt bestimmt. Startwerte sind

$$X_B(0) = (1 - \pi)x \quad \text{und} \quad X_S(0) = \pi x.$$

Mit $B_0 = X_B(0)$, $S_0 = X_S(0)$ und $\tau_0 = 0$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_B(t) &= B_{n-1} e^{r(t-\tau_{n-1})}, \\ X_S(t) &= S_{n-1} \frac{S(t)}{S(\tau_{n-1})} \end{aligned}$$

für alle $t \in (\tau_{n-1}, \tau_n]$ und

$$\begin{aligned} B_n &= X_B(\tau_n) - \Delta_n - \gamma |\Delta_n| - \delta (X_B(\tau_n) + X_S(\tau_n)) 1_{\{\Delta_n \neq 0\}}, \\ S_n &= X_S(\tau_n) + \Delta_n. \end{aligned}$$

Dabei nennen wir B_n und S_n die *neuen Werte im Bond* bzw. *in der Aktie*, $n \in \mathbb{N}$.

Bei Bedarf machen wir die Abhängigkeit von $(\tau, \Delta) = (\tau_n, \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch Indizierung kenntlich, d.h. wir schreiben $B_n^{(\tau, \Delta)}$, $S_n^{(\tau, \Delta)}$, $X_B^{(\tau, \Delta)}(t)$ und $X_S^{(\tau, \Delta)}(t)$.

Wir nennen $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *Transaktionen*, γ *proportionale Kosten* und δ *fixe Kosten*. Die *Kosten der Transaktion* Δ_n sind

$$\gamma |\Delta_n| + \delta (X_B(\tau_n) + X_S(\tau_n)) 1_{\{\Delta_n \neq 0\}}.$$

Dabei können die neuen Werte B_n und S_n grob gesprochen als Startwerte der in τ_n mit der Dynamik des Bonds bzw. der Aktie neu startenden Prozesse $(X_B(\tau_n + t))_{t \geq 0}$ und $(X_S(\tau_n + t))_{t \geq 0}$ aufgefasst werden. Eine genauere Ausführung in der kanonischen Darstellung in $\mathcal{C}([0, \infty))$, die sich auch auf diese Modellierung übertragen lässt, geben wir vor der Einführung des Kontrollmodells in Bemerkung 5.4.9.

Wir wollen uns auf strikt positive Wertprozesse beschränken:

Definition 5.4.3

Eine Transaktionsfolge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *zulässig* zu einer Folge von Handelszeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls für die zugehörigen neuen Werte $B_n > 0$ und $S_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und unter allen $P_{(x,\pi)}$ gilt.

Die Wertentwicklung wie in Definition 5.4.2 über die Unterscheidung des Bond- und des Aktienwertprozesses zu beschreiben, ist der übliche Ansatz bei der Berücksichtigung von Transaktionskosten, siehe zum Beispiel Shreve und Soner (1994) oder Korn (1998). Wir haben aber bereits in den vorangehenden Kapiteln gesehen, dass sich für eine gefälligere Beschreibung wie in Morton und Pliska (1995) oft der Gesamtwert und der Wertanteil der Aktien anbieten. Deshalb führen wir ein:

Definition 5.4.4

Seien $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Handelszeiten und die Transaktionen $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zulässig zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch

$$X(t) = X_B(t) + X_S(t), \quad t \geq 0,$$

und

$$\pi(t) = \frac{X_S(t)}{X_B(t) + X_S(t)}, \quad t \geq 0,$$

sind der Wertprozess $(X(t))_{t \geq 0}$ bzw. der Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ gegeben. Ferner setzen wir

$$X_n = B_n + S_n \quad \text{und} \quad \pi_n = \frac{S_n}{B_n + S_n}.$$

Bei Bedarf erfolgt auch eine Indizierung durch (τ, Δ) .

Wie in den vorangehenden Kapiteln auch entspricht $X(t)$ dem Gesamtwert des Portfolios und $\pi(t)$ dem Wertanteil der Aktien am Gesamtwert zur Zeit t vor einer möglichen Transaktion.

Lemma 5.4.5

Seien $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Handelszeiten.

- (i) Es existiert eine zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zulässige Folge von Transaktionen.
- (ii) Für jede zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zulässige Folge von Transaktionen $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind die Prozesse $(X_B(t))_{t \geq 0}$, $(X_S(t))_{t \geq 0}$, $(X(t))_{t \geq 0}$ und $(\pi(t))_{t \geq 0}$ adaptiert zu $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ und unter jedem Maß $P_{(x,\pi)}$ gilt für alle $t \geq 0$

$$X_B(t) > 0, \quad X_S(t) > 0, \quad X(t) > 0 \quad \text{und} \quad \pi(t) \in (0, 1).$$

(iii) Eine Folge \mathcal{G}_{τ_n} -messbarer Zufallsvariablen $\Delta_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann zulässig zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wenn für alle $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$

$$\Delta_n \in \mathcal{D}^\circ(X(\tau_n), \pi(\tau_n)) \quad P_{(x, \pi)}\text{-f.s.} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt, wobei $\mathcal{D}^\circ(x, \pi) = \{0\} \cup \{\Delta \in \mathbb{R} \mid 0 < \pi x + \Delta < (1 - \delta)x - \gamma|\Delta|\}$ sei.

Beweis: (i) Zu einer Folge von Handelszeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist stets die Transaktionsfolge $\Delta_n \equiv 0$, $n \in \mathbb{N}$, zulässig.

(ii) Die Messbarkeitseigenschaften folgen direkt aus den Definitionen und der \mathcal{G}_{τ_n} -Messbarkeit von Δ_n . Ebenso folgen die Ungleichungen für $(X_B(t))_{t \geq 0}$ und $(X_S(t))_{t \geq 0}$ aus der Definition der Prozesse und der Zulässigkeit von $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, da zum einen ohne Handel die Prozesse bei strikt positivem Startwert positiv bleiben und zum anderen in den Handelszeitpunkten nur so gehandelt wird, dass die neuen Werte strikt positiv bleiben. Für die Prozesse $(X(t))_{t \geq 0}$ und $(\pi(t))_{t \geq 0}$ folgt die Behauptung dann direkt aus ihrer Definition.

(iii) Die Behauptung folgt unter Beachtung von

$$S_n = \pi(\tau_n)X(\tau_n) + \Delta_n$$

und von

$$\begin{aligned} B_n + S_n &= X_B(\tau_n) - \Delta_n - \gamma|\Delta_n| - \delta X(\tau_n) + X_S(\tau_n) + \Delta_n \\ &= (1 - \delta)X(\tau_n) - \gamma|\Delta_n| \end{aligned}$$

für $\Delta_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, unter Beachtung der Definition der Zulässigkeit. \square

Nach Lemma 5.4.5 (ii) liegt der Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ für zulässige Transaktionen in $(0, 1)$. Da wir in 5.3.1 angenommen haben, dass der optimale Wertanteil ohne Transaktionskosten η_{opt} in $(0, 1)$ liegt, ist zu vermuten, dass - nach einem sinnvollen Kriterium bestimmte - optimale Transaktionen zu neuen Wertanteilen in $(0, 1)$ führen. Im Fall $\eta_{opt} < 1$ müssten wir Short Selling der Aktien und im Fall $\eta_{opt} > 1$ Short Selling des Bonds zulassen, um optimale Transaktionsfolgen bestimmen zu können, d.h. unter den im Sinne von Definition 5.4.3 zulässigen Transaktionen wären in der Regel keine optimalen zu finden.

Da die Betrachtung von Wertanteilprozessen, die nur Werte in $(0, 1)$ annehmen, aber eine große technische Erleichterung darstellt, beschränken wir uns hier auf solche Aktien, die wir entsprechend Definition 3.6.4 als *moderat* bezeichnen könnten.

Für das Problem der Maximierung der asymptotischen Rendite, das wir in diesem Kapitel betrachten wollen, beruht beim Vorgehen von Morton und Pliska (1995), siehe

auch Abschnitt 2.7, die Möglichkeit der Reduktion auf ein Stoppproblem wesentlich auf der Darstellung der Wertentwicklung durch den Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$.

Es ist nicht offensichtlich, ob solch eine Darstellung auch bei zusätzlichen proportionalen Kosten auf das Handelsvolumen existiert, die das gleiche leistet, d.h. den Wertprozess $(X(t))_{t \geq 0}$ faktorisiert. Wir haben aber bereits in einer Periode und im Binomialmodell gezeigt, wie solch eine Zerlegung auszusehen hat und dass sich dafür die Einführung von Handelsart und neuem Wertanteil, der dem Wertanteil der Aktien nach einer Transaktion entspricht, anbietet.

Wir können diese in der in Definition 5.4.2 beschriebenen bisherigen Modellierung mit Hilfe der im folgenden Lemma eingeführten Funktionen einführen. Im nächsten Abschnitt werden wir dann, durch die jetzt folgenden Betrachtungen motiviert, die Wertentwicklung wieder als einen durch eine Folge von Handelsarten und neuen Wertanteilen kontrollierten Prozess auffassen.

Definition 5.4.6

Die Funktionen

$$\begin{aligned} f_a &: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\} \quad \text{und} \\ f_\eta &: \{(x, \pi, \Delta) \mid x > 0, \pi \in (0, 1), \Delta \in \mathcal{D}^\circ(x, \pi)\} \rightarrow (0, 1) \end{aligned}$$

seien gegeben durch $f_a(\Delta) = \text{sign}(\Delta)$ und durch

$$f_\eta(x, \pi, \Delta) = \frac{\pi x + \Delta}{x - \delta x 1_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}(\Delta) - \gamma |\Delta|}.$$

Dabei bezeichnet $\mathcal{D}^\circ(x, \pi)$ die in Lemma 5.4.5 (iii) eingeführte Menge. Wir nennen $f_a(\Delta)$ die *Handelsart von Δ* und $f_\eta(x, \pi, \Delta)$ den *neuen Wertanteil nach Δ bei x und π* .

Dass die Werte von f_η tatsächlich in $(0, 1)$ liegen, ist direkt nachrechenbar, folgt aber auch aus Teil (i) des folgenden Lemmas. Die dort definierten Zufallsvariablen A_n und η_n , $n \in \mathbb{N}$, entsprechen Handelsart und neuem Wertanteil, wie wir sie im folgenden Abschnitt einführen werden.

Lemma 5.4.7

Seien $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Handelszeiten und $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine zulässige Folge von Transaktionen zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Seien ferner

$$A_n = f_a(\Delta_n) \quad \text{und} \quad \eta_n = f_\eta(X(\tau_n), \pi(\tau_n), \Delta_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann sind A_n und η_n \mathcal{G}_{τ_n} -messbar für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gelten die Darstellungen

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \eta_n = \pi_n &= \frac{\pi(\tau_n)X(\tau_n) + \Delta_n}{(1 - A_n^2\delta)X(\tau_n) - A_n\gamma\Delta_n}, \\
\text{(ii)} \quad \text{sign}\left((1 - A_n^2\delta)\eta_n - \pi(\tau_n)\right) &= A_n, \\
\text{(iii)} \quad \Delta_n &= \frac{(1 - A_n^2\delta)\eta_n - \pi(\tau_n)}{1 + A_n\gamma\eta_n}X(\tau_n), \\
\text{(iv)} \quad X_n &= \frac{1 - A_n^2\delta + A_n\gamma\pi(\tau_n)}{1 + A_n\gamma\eta_n}X(\tau_n).
\end{aligned}$$

Beweis: Die Messbarkeitseigenschaften folgen für alle $n \in \mathbb{N}$ direkt aus der \mathcal{G}_{τ_n} -Messbarkeiten von $X(\tau_n)$, $\pi(\tau_n)$ und Δ_n , da auch f_a und f_η messbar sind.

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten $S_n = \pi(\tau_n)X(\tau_n) + \Delta_n$ und

$$\begin{aligned}
X_n &= B_n + S_n \\
&= X_B(\tau_n) - \Delta_n - \gamma|\Delta_n| - \delta X(\tau_n)1_{\{\Delta_n \neq 0\}} + X_S(\tau_n) + \Delta_n \\
&= (1 - \delta 1_{\{\Delta_n \neq 0\}})X(\tau_n) - \gamma|\Delta_n|,
\end{aligned}$$

so dass durch einfaches Einsetzen $\eta_n = \frac{S_n}{X_n} = \pi_n$ folgt. Wegen $|\Delta_n| = A_n\Delta_n$ folgt damit auch die zweite Darstellung

$$\eta_n = \frac{S_n}{X_n} = \frac{\pi(\tau_n)X(\tau_n) + \Delta_n}{(1 - A_n^2\delta)X(\tau_n) - A_n\gamma\Delta_n}.$$

Auflösen von dieser Darstellung ergibt (iii)

$$\Delta_n = \frac{(1 - A_n^2\delta)\eta_n - \pi(\tau_n)}{1 + A_n\gamma\eta_n}X(\tau_n),$$

woraus bei geeigneter Fallunterscheidung (ii) folgt, da der Nenner wegen $\eta_n \in (0, 1)$ strikt positiv ist und ebenso $X(\tau_n) > 0$ gilt. Schließlich ergibt sich durch Einsetzen von (iii) in die am Anfang des Beweises abgeleitete Darstellung die Behauptung (iv):

$$\begin{aligned}
X_n &= (1 - A_n^2\delta)X(\tau_n) - \gamma|\Delta_n| \\
&= (1 - A_n^2\delta)X(\tau_n) - A_n\gamma\Delta_n \\
&= \frac{(1 - A_n^2\delta)(1 + A_n\gamma\eta_n) - A_n\gamma((1 - A_n^2\delta)\eta_n - \pi(\tau_n))}{1 + A_n\gamma\eta_n}X(\tau_n) \\
&= \frac{1 - A_n^2\delta + A_n\gamma\pi(\tau_n)}{1 + A_n\gamma\eta_n}X(\tau_n).
\end{aligned}$$

□

Die Darstellungen in Lemma 5.4.7 geben die Interpretation von Handelsart und neuem Wertanteil, wie wir sie im folgenden Abschnitt einführen werden. So entspricht $A_n = 1$ einem Kauf $\Delta_n > 0$ zum Handelszeitpunkt τ_n , $A_n = -1$ einem Verkauf und $A_n = 0$ dem Halten der Aktien. Dabei sei angemerkt, dass wir im folgenden Abschnitt auch Käufe und Verkäufe mit Handelsvolumen 0 zulassen werden.

Lemma 5.4.7 (i) sagt aus, dass der neue Wertanteil η_n seinem Namen gerecht wird, d.h. der Wertanteilprozess startet in τ_n mit diesem Wert. Lemma 5.4.7 (iv) gibt schließlich den Faktor an, um den der Gesamtwert bei einer Transaktion fällt.

Damit können wir den Wert zu einem Handelszeitpunkt auch als Produkt aus dem Wert zum vorangehenden Handelszeitpunkt und aus dem weiteren Wertzuwachs darstellen. Wegen ihrer Bedeutung halten wir diese Möglichkeit der Darstellung gesondert im folgenden Satz fest.

Satz 5.4.8

Seien $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Handelszeiten und $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine zulässige Folge von Transaktionen zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie

$$A_n = f_a(\Delta_n) \quad \text{und} \quad \eta_n = f_\eta(X(\tau_n), \pi(\tau_n), \Delta_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$X(\tau_1) = \frac{(1 - \pi_0)}{(1 - \pi(\tau_1))} x e^{r \tau_1}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$X(\tau_{n+1}) = \frac{(1 - \eta_n)(1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n))}{(1 - \pi(\tau_{n+1}))(1 + A_n \gamma \eta_n)} X(\tau_n) e^{r(\tau_{n+1} - \tau_n)}.$$

Beweis: Für τ_1 gilt die Behauptung nach Lemma 5.3.3. Entsprechend ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1 - \pi(\tau_{n+1}))X(\tau_{n+1}) = (1 - \eta_n)X_n e^{r(\tau_{n+1} - \tau_n)},$$

so dass mit Lemma 5.4.7 (iv) folgt

$$\begin{aligned} X(\tau_{n+1}) &= \frac{1 - \eta_n}{1 - \pi(\tau_{n+1})} X_n e^{r(\tau_{n+1} - \tau_n)} \\ &= \frac{(1 - \eta_n)(1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n))}{(1 - \pi(\tau_{n+1}))(1 + A_n \gamma \eta_n)} X(\tau_n) e^{r(\tau_{n+1} - \tau_n)}. \end{aligned}$$

□

Die Darstellung des Wertprozesses nach Satz 5.4.8 ist wesentlich, da sie es uns ermöglichen wird, das Problem der Bestimmung der optimalen asymptotischen Rendite unter logarithmischen Nutzen auf ein Problem des optimalen Stoppens zurückzuführen.

Zur Vorbereitung auf Definition 5.5.1 wollen wir noch die folgende Bemerkung machen, die Aufschluss über die genaue Struktur des Wertanteilprozesses gibt.

Bemerkung 5.4.9 (Kanonische Darstellung)

- (i) Der Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ kann zusammengesetzt aus unabhängiger Kopien des Wertanteilprozesses ohne Handel $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ aufgefasst werden, die in τ_n jeweils mit dem Anfangswert π_n starten. Wir präzisieren diese Aussage im Folgenden in der kanonischen Darstellung in $\mathcal{C}([0, \infty), (0, 1))$.

Sei $f_\pi : (0, 1) \times \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, \infty), (0, 1))$ eine messbare Abbildung, für die

$$(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0} = f_\pi(\pi_0, (W(t))_{t \geq 0})$$

bei Startwert π_0 gilt. Seien nun Kopien von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ gegeben durch

$$(\tilde{\pi}_n(t))_{t \geq 0} = f_\pi(\pi_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0}).$$

Dann hat der Wertanteilprozess $(\pi(t))_{t \geq 0}$ die Darstellung

$$\pi(t) = 1_{[0, \tau_1]}(t)\tilde{\pi}(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(\tau_n, \tau_{n+1}]}(t)\tilde{\pi}_n(t - \tau_n), \quad t \geq 0.$$

- (ii) Dass die Darstellung in (i) korrekt ist, kann wie folgt hergeleitet werden. Sei

$$f_x : (0, 1) \times (0, \infty) \times \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, \infty), (0, \infty))$$

eine messbare Abbildung, so dass der Wertprozess ohne Handel $(\tilde{X}(t))_{t \geq 0}$ gegeben ist durch

$$(\tilde{X}(t))_{t \geq 0} = f_x(\pi_0, X_0, (W(t))_{t \geq 0}).$$

Beachten wir, dass für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} X(t) &= 1_{[0, \tau_1]}(t)X_0 \left((1 - \pi_0)e^{rt} + \pi_0 \frac{S(t)}{s_0} \right) \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(\tau_n, \tau_{n+1}]}(t)X_n \left((1 - \pi_n)e^{r(t-\tau_n)} + \pi_n \frac{S(t)}{S(\tau_n)} \right) \end{aligned}$$

gilt, so erkennen wir, dass

$$X(t) = 1_{[0, \tau_1]}(t)\tilde{X}(t) + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(\tau_n, \tau_{n+1}]}(t)\tilde{X}_n(t - \tau_n)$$

mit den in (X_n, π_n) startenden Kopien

$$(\tilde{X}(t))_{t \geq 0} = f_x(\pi_n, X_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0})$$

vorliegt. Aus der Definition 5.4.4 von $(\pi(t))_{t \geq 0}$ kann dann analog wie bei der Untersuchung in Abschnitt 5.3 gezeigt werden, dass $(\pi(t))_{t \geq 0}$ die in (i) behauptete Struktur hat.

(iii) Der Wertprozess $(X(t))_{t \geq 0}$ hat Lemma 5.3.3 entsprechend auch die Darstellung

$$X(t) = 1_{[0, \tau_1]}(t) \frac{1 - \pi_0}{1 - \pi(t)} X_0 e^{r \tau_1} + \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{(\tau_n, \tau_{n+1}]}(t) \frac{1 - \pi_n}{1 - \pi(t)} X_n e^{r(t - \tau_n)}, \quad t \geq 0$$

5.5 Handelsart und neuer Wertanteil

Nachdem wir im vorangehenden Abschnitt unsere Begriffe von der üblichen Modellierung her motiviert haben, wollen wir die Kontrolle des Wertprozesses von $(X(t))_{t \geq 0}$ und des Wertanteilprozesses $(\pi(t))_{t \geq 0}$ direkt unter der Benutzung von Handelsart und neuem Wertanteil einführen.

Die Vorstellung ist dabei die folgende: Anstatt zu einem Handelszeitpunkt den Handel durch eine Transaktion zu beschreiben, erfolgt die Festlegung des Handels jetzt im Handelszeitpunkt τ_n durch Angabe der Handelsart A_n (für Kauf, Verkauf oder Halten) und durch Angabe des neuen Wertanteils η_n , den die Aktien nach dem Handel am Gesamtwert haben sollen. Dies entspricht auch einer praktisch umsetzbaren Handelsanweisung. Ohne die Überlegungen des vorangehenden Abschnittes wäre es aber nicht offensichtlich, wie die Wertverschiebung in den Handelszeitpunkten zu erfolgen hat.

Motiviert durch die Darstellungen in Lemma 5.4.7 und die Ausführungen in Bemerkung 5.4.9 können wir die Kontrolle jetzt wie in der folgenden Definition angeben einführen. Dieser neue Zugang ist auch die Begründung dafür, dass wir in der Notation des letzten Abschnittes π_n und η_n unterschieden haben. Während π_n den Wertanteil nach dem Handel beschreibt, wie er sich in Definition 5.4.4 aus dem Bond- und dem Aktienwertprozess ergibt, verstehen wir unter η_n den neuen Wertanteil, wie er sich durch aktive Wahl des neuen Wertanteils als Aktion ergibt. Mathematisch besteht kein Unterschied.

Nach der Einführung werden wir zu untersuchen haben, ob die in 5.5.1 definierten Wertprozesse auch tatsächlich Wertprozessen entsprechen, die sich durch Steuerung mit einer zulässigen Transaktionsfolge ergeben. Diese Untersuchungen werden wir in Satz 5.5.6 mit dem Nachweis der Äquivalenz der Modelle abschliessen. Ab dem folgenden Abschnitt werden wir dann nur noch in der in Definition 5.5.1 eingeführten Modellierung unter den am Anfang des Abschnittes 5.4 gemachten Voraussetzungen

arbeiten. Diese Modellierung ist einer der wesentlichen Schritte, um zu den grundlegenden Resultaten in Abschnitt 5.6 zu gelangen, da diese auf der Faktorisierung des Gesamtwertes beruhen, wie wir sie in Satz 5.5.7 angeben werden.

Definition 5.5.1

Zu Handelszeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Folgen von \mathcal{G}_{τ_n} -messbaren Zufallsvariablen

$$A_n : \Omega \rightarrow \{-1, 0, +1\} \quad \text{und} \quad \eta_n : \Omega \rightarrow (0, 1), \quad n \in \mathbb{N},$$

seien unter $P_{(x, \pi)}$, $x > 0$, $\pi \in (0, 1)$, Wert- und Wertanteilprozess $\pi(t)_{t \geq 0}$ bzw. $(X(t))_{t \geq 0}$ in der kanonischen Darstellung wie folgt gegeben. Es bezeichne f_π die in Bemerkung 5.4.9 (i) eingeführte Abbildung, d.h. es sei für den Wertanteilprozess ohne Handel

$$(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0} = f_\pi(\pi_0, (W(t))_{t \geq 0}).$$

Startwerte sind

$$X(0) = x \quad \text{und} \quad \pi(0) = \pi,$$

und für $n \in \mathbb{N}$ sind mit $\tau_0 = 0$ und $\eta_0 = \pi(0)$

$$\begin{aligned} \pi(t) &= f_\pi(\eta_{n-1}, (W_{\tau_{n-1}+t} - W_{\tau_{n-1}})_{t \geq 0})(t - \tau_{n-1}) \\ X(t) &= X_{n-1} \frac{1 - \eta_{n-1}}{1 - \pi(t)} e^{r(t - \tau_n)} \end{aligned}$$

für alle $t \in (\tau_{n-1}, \tau_n]$ sowie

$$X_n = \frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(\tau_n).$$

Wir nennen A_n die *Handelsart* und η_n den *neuen Wertanteil* (auch *Wertanteil nach der Aktion*) zur Zeit τ_n . Die Folge $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnen wir als *Kontrollstrategie*.

Bei Bedarf wird eine Indizierung von $(X(t))_{t \geq 0}$ und $(\pi(t))_{t \geq 0}$ durch (τ, A, η) erfolgen, um die Abhängigkeit zu verdeutlichen.

Bemerkung 5.5.2 Eine anschaulichere aber weniger korrekte Definition für den Wert- und Wertanteilprozess wäre die folgende: Zu Startwerten $X(0) = x$ und $\pi(0) = \pi$ seien $\pi(t)_{t \geq 0}$ bzw. $(X(t))_{t \geq 0}$ in allen $t \geq 0$ mit $t \neq \tau_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig mit Dynamik

$$d\pi(t) = \pi(t)(1 - \pi(t))((\mu - r)dt + \sigma dW(t) - \pi(t)\sigma^2 dt)$$

und

$$dX(t) = X(t)(r dt + \pi(t)((\mu - r) dt + \sigma dW(t)))$$

und in den Handelszeitpunkten seien

$$\pi(\tau_n) = \pi(\tau_n -), \quad \pi(\tau_n +) = \eta_n$$

und

$$X(\tau_n) = X(\tau_n-), \quad X(\tau_n+) = \frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(\tau_n).$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\eta_0 = \pi(0)$ zu setzen ist. Dabei werden $\pi(\tau_n+)$ und $X(\tau_n+)$ als neue Startpunkte interpretiert.

Wir wollen nur solche Kontrollstrategien betrachten, bei denen die Paare (A_n, η_n) zulässigen Transaktionen entsprechen. Allerdings werden wir erlauben, dass bei Handelsart -1 oder $+1$ (Kauf oder Verkauf) auch das Halten der Aktien erlaubt ist. Das erfolgt aus technische Gründen, damit wir in Abschnitt 5.8 ein Stoppproblem mit unterhalbstetiger Auszahlungsfunktion erhalten, und mag als die kostenpflichtige Stornierung von Aufträgen interpretiert werden. In der Regel werden optimale Strategien dies vermeiden, im Sinne der folgenden Definition also transaktionenäquivalent sein.

Definition 5.5.3

Seien für alle $\pi \in (0, 1)$

$$\mathcal{A}^\circ(\pi) = \{ (0, \pi) \} \cup (\{-1\} \times (\frac{\pi}{1-\delta}, 1)) \cup (\{+1\} \times (0, \frac{\pi}{1-\delta}))$$

und $\mathcal{A}^+(\pi)$ der Abschluss von $\mathcal{A}^\circ(\pi)$ in $(0, 1)$, d.h. $\mathcal{A}^+(\pi)$ enthalte zusätzlich die Randpunkte $(-1, \frac{\pi}{1-\delta})$ und $(+1, \frac{\pi}{1-\delta})$.

Eine Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *zulässig*, falls für alle $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ gilt

$$P_{(x, \pi)}((A_n, \eta_n) \in \mathcal{A}^+(\pi)) = 1,$$

und *transaktionenäquivalent*, falls für alle $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ gilt

$$P_{(x, \pi)}((A_n, \eta_n) \in \mathcal{A}^\circ(\pi)) = 1.$$

Die Menge der zulässigen Kontrollstrategien bezeichnen wir mit \mathcal{Z} .

Lemma 5.5.4

- (i) *Es existiert eine transaktionenäquivalente Kontrollstrategie, für die zu jeder Handelszeit die Handelsart fast sicher in $\{-1, +1\}$ liegt, d.h. bei jedem Stopp wird wirklich gehandelt.*
- (ii) *Zu jeder zulässigen Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind Wert- und Wertanteilprozess zu $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert, ist der Wertprozess strikt positiv und nimmt der Wertanteilprozess nur Werte in $(0, 1)$ an.*

(iii) Eine Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann zulässig, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{sign}\left((1 - A_n^2 \delta) \eta_n - \pi(\tau_n)\right) \in \{0, A_n\},$$

und genau dann transaktionenäquivalent, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\text{sign}\left((1 - A_n^2 \delta) \eta_n - \pi(\tau_n)\right) = A_n$$

unter allen $P_{(x, \pi)}$ gilt.

(iv) Für jede zulässige Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt unter allen $P_{(x, \pi)}$

$$\frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(t)}{1 + A_n \gamma \eta_n} \leq 1 - A_n^2 \delta \leq 1,$$

also insbesondere $X_n \leq (1 - A_n^2 \delta) X(\tau_n)$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: (i) Eine transaktionenäquivalente Kontrollstrategie ist zum Beispiel gegeben durch

$$\begin{aligned} \tau_n &= \inf\{t \geq \tau_{n-1} \mid \pi(\tau_n) \notin (\varepsilon, 1 - \varepsilon)\}, \\ A_n &= 1_{\{\pi(\tau_n) = \varepsilon\}} - 1_{\{\pi(\tau_n) = 1 - \varepsilon\}}, \\ \eta_n &= \eta_{opt} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $\tau_0 \equiv 0$ und $0 < \varepsilon < \min\{\eta_{opt}, 1 - \eta_{opt}\}$ seien. Dass diese die Behauptung erfüllt, kann leicht verifiziert werden.

(ii) Seien $(X(t))_{t \geq 0}$ und $(\pi(t))_{t \geq 0}$ der Wert- bzw. Wertanteilprozess zu einer zulässigen Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Die Messbarkeitseigenschaften folgen direkt aus der Definition der Prozesse und der \mathcal{G}_{τ_n} -Messbarkeit von A_n und η_n , $n \in \mathbb{N}$. Dass $(\pi(t))_{t \geq 0}$ in $(0, 1)$ liegt, folgt, da zu jeder Handelszeit τ_n der neue Wertanteil η_n , der Startpunkt von $(\pi(\tau_n + t))_{t > 0}$, in $(0, 1)$ liegt. Damit folgt wegen der Bedingungen an γ, δ auch

$$X_n = \frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X(\tau_n) > 0,$$

da Nenner und Zähler strikt positiv sind, so dass die Behauptung mit einer induktiven Argumentation folgt.

(iii) Die Darstellung ergibt sich direkt aus der Definition 5.5.3 durch die Fallunterscheidung nach den Handelsarten.

(iv) Sei eine zulässige Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Aus der Zulässigkeitsbedingung in (iii) folgt unter alle $P_{(x, \pi)}$

$$A_n \left((1 - A_n^2 \delta) \eta_n - \pi(\tau_n) \right) \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

so dass folgt

$$\begin{aligned} 1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n) &= (1 - A_n^2 \delta) - A_n \gamma \left((1 - A_n^2 \delta) \eta_n - \pi(\tau_n) \right) + (1 - A_n^2 \delta) A_n \gamma \eta_n \\ &\leq (1 - A_n^2 \delta) + (1 - A_n^2 \delta) A_n \gamma \eta_n \\ &= (1 - A_n^2 \delta) (1 + A_n \gamma \eta_n). \end{aligned}$$

Somit gilt der erste Teil der Behauptung. Der zweite Teil folgt aus der Festlegung von X_n in Definition 5.5.1. \square

Im Satz 5.5.6 werden wir zeigen, dass die Funktion f_Δ in der folgenden Definition uns zu einer gegebenen Aktion (a, η) aus Handelsart und neuem Wertanteil die entsprechende Transaktion Δ bei vorliegendem Wert x und Wertanteil π liefert.

Definition 5.5.5

Die reellwertige Funktion f_Δ sei auf

$$\{(x, \pi, a, \eta) \mid x > 0, \pi \in (0, 1), a \in \{-1, 0, +1\}, \eta \in (0, 1)\}$$

gegeben durch

$$f_\Delta(x, \pi, a, \eta) = \frac{(1 - a^2 \delta) \eta - \pi}{1 + a \gamma \eta} x.$$

Wir nennen den Wert $f_\Delta(x, \pi, a, \eta)$ die *Transaktion zu a, η bei x, π* .

Satz 5.5.6

Zu einer transaktionenäquivalenten Kontrollstrategie $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird durch

$$\Delta_n = f_\Delta(X^{(\tau, A, \eta)}(\tau_n), \pi^{(\tau, A, \eta)}(\tau_n), A_n, \eta_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

eine zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zulässige Folge von Transaktionen definiert.

Ist umgekehrt $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Handelszeiten, und $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine zulässige Folge von Transaktionen zu $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so wird zu $(\tau, \Delta) = (\tau_n, \Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$A_n = f_a(\Delta_n) \quad \text{und} \quad \eta_n = f_\eta(X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n -), \pi^{(\tau, \Delta)}(\tau_n), \Delta_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

eine transaktionenäquivalente Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert.

Bei beiden Betrachtungsweisen gilt für alle $x > 0, \pi \in (0, 1)$ unter $P_{(x, \pi)}$

$$(X^{(\tau, A, \eta)}(t), \pi^{(\tau, A, \eta)}(t)) = (X^{(\tau, \Delta)}(t), \pi^{(\tau, \Delta)}(t)) \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Beweis:

Zu gegebenen $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ ist die Abbildung

$$f = (f_a(\cdot), f_\eta(x, \pi, \cdot)) : \mathcal{D}^\circ(x, \pi) \rightarrow \mathcal{A}^\circ(\pi)$$

bijektiv mit Umkehrabbildung

$$f_\Delta(x, \pi, \cdot, \cdot) : \mathcal{A}^\circ(\pi) \rightarrow \mathcal{D}^\circ(x, \pi).$$

Der Nachweis kann ganz analog zum Nachweis im Binomialmodell in Satz 4.2.9 erfolgen, da hier bis auf die Randpunkte 0 und 1 die gleichen Mengen und Funktionen vorliegen. Aus der Bijektivität und den Zulässigkeitskriterien in Definition 5.5.3 und Lemma 5.4.5 (iii) folgt die behauptete Beziehung zwischen den transaktionenäquivalenten Kontrollstrategien und den zur selben Folge von Handelszeiten zulässigen Transaktionen.

Die Gleichheit der Werte erhalten wir induktiv. Unter jedem $P_{(x, \pi)}$ wird mit den gleichen Werten gestartet. Wird nicht gehandelt, so sind die Prozesse als stetige Lösungen der stochastischen Differentialgleichungen zu den Startwerten eindeutig bestimmt. Gelte nun $X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) = X^{(\tau, A, \eta)}(\tau_n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Ausgehend von (τ, Δ) gilt für den Wertprozess mit Lemma 5.4.7 (iv)

$$\begin{aligned} X_n^{(\tau, \Delta)} &= \frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) \\ &= \frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} X^{(\tau, A, \eta)}(\tau_n) \\ &= X_n^{(\tau, A, \eta)} \end{aligned}$$

und nach der Definition 5.4.4 von $(\pi(t))_{t \geq 0}$ und der Darstellung von η_n in Lemma 5.4.7 (i) für den Wertanteilprozess

$$\begin{aligned} \pi_n^{(\tau, \Delta)} &= \frac{\pi^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) + \Delta_n}{(1 - \delta 1_{\{\Delta_n \neq 0\}}) X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) - \gamma |\Delta_n|} \\ &= \frac{\pi^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) + \Delta_n}{(1 - A_n^2 \delta) X^{(\tau, \Delta)}(\tau_n) - A_n \Delta_n} \\ &= \eta_n. \end{aligned}$$

Damit liefert eine induktive Argumentation die Gleichheit der Prozesse. Auch umgekehrt, d.h. ausgehend von (τ, A, η) , ist die Gleichheit der Prozesse nachrechenbar. \square

Durch dieses Resultat gerechtfertigt werden wir ab sofort nur noch Kontrollstrategien und keine Transaktionen mehr betrachten und deshalb auf die Indizierung von

$(X(t))_{t \geq 0}$ und $(\pi(t))_{t \geq 0}$ verzichten, sofern aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgeht, welche Kontrollstrategie gerade betrachtet wird.

Zu beachten ist bei der folgenden Darstellung, dass die Faktoren nicht denen in Satz 5.4.8 entsprechen. Diese Darstellung wird für das Stoppproblem günstig sein, da die Faktoren jetzt dem Wertzuwachs in einer Periode zwischen zwei Handelszeiten entsprechen, wenn mit dem Wertanteil η_{n-1} gestartet wird und der Wert am Ende der Periode nach dem Handel betrachtet wird.

Satz 5.5.7

Für jede zulässige Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt mit

$$M(t) = \sup \{ m \in \mathbb{N}_0 \mid \tau_m < t \}, \quad \sup \emptyset = 0,$$

für $t \geq 0$ die Darstellung

$$X(t) = X_0 e^{rt} \left(\prod_{n=1}^{M(t)} \frac{(1 - \eta_{n-1})(1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n))}{(1 - \pi(\tau_n))(1 + A_n \gamma \eta_n)} \right) \frac{1 - \eta_{M(t)}}{1 - \pi(t)}.$$

Beweis:

Aus Definition 5.5.1 erhalten wir mit analoger Argumentation wie im Beweis von Satz 5.4.8 zu einer zulässigen Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wieder

$$X(\tau_n) = \frac{(1 - \eta_{n-1})(1 - A_{n-1}^2 \delta + A_{n-1} \gamma \pi(\tau_{n-1}))}{(1 - \pi(\tau_n))(1 + A_{n-1} \gamma \eta_{n-1})} X(\tau_{n-1}) e^{r(\tau_n - \tau_{n-1})}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wenn wir $\tau_0 = 0$, $\eta_0 = \pi_0$ und $A_0 = 0$ setzen. Es folgt für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} X(\tau_{M(t)}) &= X_0 e^{r \tau_{M(t)}} \left(\prod_{n=1}^{M(t)} \frac{(1 - \eta_{n-1})(1 - A_{n-1}^2 \delta + A_{n-1} \gamma \pi(\tau_{n-1}))}{(1 - \pi(\tau_n))(1 + A_{n-1} \gamma \eta_{n-1})} \right) \\ &= X_0 e^{r \tau_{M(t)}} \frac{1 - A_0^2 \delta + A_0 \gamma \pi(0)}{1 + A_0 \gamma \eta_0} \\ &\quad \cdot \left(\prod_{n=1}^{M(t)} \frac{(1 - \eta_{n-1})(1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n))}{(1 - \pi(\tau_n))(1 + A_n \gamma \eta_n)} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1 + A_{M(t)} \gamma \eta_{M(t)}}{1 - A_{M(t)}^2 \delta + A_{M(t)} \gamma \pi(\tau_{M(t)})}, \end{aligned}$$

so dass wegen

$$\frac{1 - A_0^2 \delta + A_0 \gamma \pi(0)}{1 + A_0 \gamma \eta_0} = 1$$

und

$$\begin{aligned} X(t) &= X_{M(t)} \frac{1 - \eta_{M(t)}}{1 - \pi(t)} e^{r(t - \tau_{M(t)})} \\ &= X(\tau_{M(t)}) \frac{1 - A_{M(t)}^2 \delta + A_{M(t)} \gamma \pi(\tau_{M(t)})}{1 + A_{M(t)} \gamma \eta_{M(t)}} \frac{1 - \eta_{M(t)}}{1 - \pi(t)} e^{r(t - \tau_{M(t)})} \end{aligned}$$

die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 5.5.8

Wie im Binomialmodell hätten wir auch hier die Wertentwicklung für allgemeinere Kosten $\Gamma(x)$ beschreiben können. Es wären dann - wie in Satz 4.2.9 - mehr Bedingungen für die Zulässigkeit einer Strategie zu formulieren, da zum Beispiel kein Kauf oder Verkauf erlaubt sein kann, wenn der Gesamtwert des Portfolios geringer ist als die Höhe der Kosten. Da bei fixen und proportionalen Kosten immer relativ zum Vermögen bzw. zum Handelsvolumen gezahlt wird, genügen verhältnismäßig einfache Bedingungen, wie wir sie in Definition 5.5.3 formuliert haben, um sicherzustellen, dass der Wertanteil nicht den Bereich $(0, 1)$ verlässt.

5.6 Die asymptotische Rendite

Es ist unser Ziel, in dem in 5.5.1 eingeführten Modell die asymptotische Rendite zu maximieren.

Definition 5.6.1

Zu einer zulässigen Kontrollstrategie $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird die *asymptotische Rendite* zu Startwerten $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ definiert durch

$$R^{(\tau, A, \eta)}(x, \pi) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_{(x, \pi)} [\log(X(T))],$$

wobei $\mathbb{E}_{(x, \pi)}$ den Erwartungswert unter $P_{(x, \pi)}$ bezeichnet. Unter der *optimalen asymptotischen Rendite* verstehen wir

$$R^*(x, \pi) = \sup_{(\tau, A, \eta) \in \mathcal{Z}} R^{(\tau, A, \eta)}(x, \pi)$$

und eine zulässige Kontrollstrategie $(\tau, A, \eta)^* = (\tau_n^*, A_n^*, \eta_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ nennen wir *optimal*, falls

$$R^{(\tau, A, \eta)^*}(x, \pi) = R^*(x, \pi)$$

für alle $x > 0, \pi \in (0, 1)$ gilt.

Lemma 5.6.2

Für alle $\pi \in (0, 1)$ ist $R^*(\cdot, \pi)$ konstant und es gilt $R^*(\cdot, \pi) \leq R_{opt}$, wobei $R_{opt} = r + \frac{(\mu-r)^2}{2\sigma^2}$ die optimale asymptotische Rendite im Modell ohne Transaktionskosten bezeichne.

Beweis: Seien $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Kontrollstrategie und $\pi \in (0, 1)$. Sei ferner $x > 0$. Gemäß der Darstellung in Satz 5.5.7 ist $\frac{X(T)}{x}$ unter $P_{(x, \pi)}$ unabhängig von x , so dass wegen

$$\begin{aligned} R^{(\tau, A, \eta)}(x, \pi) &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_{(x, \pi)} [\log(X(T))] \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\log(x) + \mathbb{E}_{(x, \pi)} [\log(X(T)) - \log(x)] \right) \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \mathbb{E}_{(x, \pi)} \left[\log \left(\frac{X(T)}{x} \right) \right], \end{aligned}$$

über einen Ausdruck zu maximieren ist, der nicht mehr explizit von x abhängt. Damit kann eine Folge von Kontrollstrategien, die $R^*(x, \pi)$ erreicht, unabhängig von x gewählt werden, so dass die erste Behauptung folgt.

Da in jedem Handelszeitpunkt τ_n für die Faktoren bei der Bildung von X_n nach Lemma 5.5.4 (iv)

$$\frac{1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n)}{1 + A_n \gamma \eta_n} \leq 1$$

gilt und diese Faktoren ohne Transaktionskosten identisch 1 wären, führte die gleiche Kontrollstrategie ohne Transaktionskosten zu einer mindestens eben so hohen asymptotischen Rendite, wie ohne Transaktionskosten. Daraus folgt bereits die Behauptung, wenn man beachtet, dass diese Kontrollstrategie im Modell ohne Transaktionskosten eine geringere Rendite hätte als die optimale Strategie. \square

Zu beachten ist bei der zweiten Aussage in Lemma 5.6.2, dass die optimale Strategie im Modell ohne Transaktionskosten in unserem Modell mit Transaktionskosten nicht eingeführt werden kann, da sie zeitstetiges Handeln erfordert.

Die erste Aussage besagt insbesondere, dass

$$R^*(1, \pi) = R^*(x, \pi) \quad \text{für alle } x > 0, \quad \pi \in (0, 1)$$

gilt. Wegen dieser Aussage ist es ohne Einschränkung möglich, dass wir zur Bestimmung der asymptotischen Rendite und einer optimalen Kontrollstrategie fortan nur Kontrollstrategien betrachten, die vom Startwert x unabhängig sind und wir uns auf den Startwert $x = 1$ beschränken.

Annahme 5.6.3

Fortan sei ohne Einschränkung $X_0 \equiv 1$.

Wir brauchen also nur noch die Maße

$$P_\pi = P_{(1,\pi)}, \quad \pi \in (0,1)$$

mit den zugehörigen Erwartungswerten E_π zu betrachten. Entsprechend schreiben wir für alle Kontrollstrategien $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$R^{(\tau, A, \eta)}(\pi) = R^{(\tau, A, \eta)}(1, \pi) = \liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_\pi [\log(X(T))]$$

und setzen

$$R^*(\pi) = \sup_{(\tau, A, \eta) \in \mathcal{Z}} R^{(\tau, A, \eta)}(\pi).$$

Sollte eine optimale Kontrolle existieren, so ist evident, dass sie nicht eindeutig bestimmt sein wird. Da es sich um ein asymptotisches Optimalitätskriterium handelt, kann die Investorin endlich viele Stoppzeiten und die zugehörigen Aktionen beliebig wählen, vorausgesetzt die Kontrolle bleibt zulässig und der Wert integrierbar, ohne dass sich die asymptotische Rendite ändern würde.

Das mag der Grund dafür sein, dass es bisher noch nicht gelungen ist, in kontinuierlicher Zeit mit kompakter Aktionenmenge unter schwachen Voraussetzungen ein in unserer Situation anwendbares Kriterium zu liefern, dass es unter den optimalen Strategien eine stationäre gibt. Dies wäre aber der erste Schritt, um die Bestimmung der optimalen asymptotischen Rendite auf eine Periode zwischen zwei bestimmten Handelszeitpunkten zurückführen zu können. Wir werden deshalb die Menge der zulässigen Kontrollen in Definition 5.6.4 auf eine sinnvolle Teilmenge einschränken.

Ein Überblick und Gegenbeispiele finden sich in Dynkin und Yushkevich (1975). Einfache Gegenbeispiele im Fall eines abzählbaren Aktionenraums gibt Ross (1970) und, genaue Ausführungen, was bereits im abzählbaren Fall für Problem auftreten, sowie weitere Verweise finden sich in Bierth (1990) und Araposthatis et al. (1993).

Es gibt unterschiedliche Resultate, die die Existenz einer stationären optimalen Strategie liefern. Sie setzen aber in der Regel entweder voraus, dass in gewisser Weise bereits eine stationäre Situation vorliegt, oder aber, dass ein rekurrenter Zustand existiert. Eine Annahme der ersten Art erfolgt zum Beispiel in Bhattacharya und Majumdar (1989) und ist so formuliert, dass jede Stoppzeit nur von dem Zustand und der Aktion zur letzten Handelszeit abhängt. Eine Annahme der zweiten Art wird beispielsweise in Lippmann (1971) gemacht. Da in diesen und anderen Arbeiten aber noch sehr viele weitere technische Annahmen erforderlich sind, erscheinen die schon recht eingeschränkten Resultate in unserer Situation nur schwer anwendbar.

Wir werden deshalb im Folgenden nur eine eingeschränkte Klasse von Kontrollstrategien betrachten, deren Voraussetzungen in gewisser Weise mit den beiden soeben vorgestellten Annahmen vergleichbar ist.

Und zwar betrachten wir nur Aktionen, die funktional von den Werten zum Handelszeitpunkt abhängen und nehmen identisch verteilte Zwischenhandelszeiten an. Das entspricht der Stationaritätsannahme. Ferner nehmen wir motiviert durch die vorliegenden Resultate und die Untersuchungen in einer Periode an, dass ein Verkauf oder Kauf jeweils immer auf einen festen Wertanteil η_{-1} bzw. η_{+1} erfolgt. Diese Forderung ist durchaus naheliegend und ist eine starke Form der zweiten der soeben angesprochenen Annahmen.

In diesem Sinne werden wir die im Folgenden definierten Kontrollstrategien als *stark stationär* bezeichnen.

Definition 5.6.4

- (i) Zu zwei Wertanteilen $\eta_{-1}, \eta_{+1} \in (0, 1)$ mit $\eta_{-1} \geq \eta_{+1}$ seien die Funktionen

$$\varphi_a : (0, 1) \rightarrow \{-1, 0, +1\} \quad \text{und} \quad \varphi_\eta : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$$

durch

$$\varphi_\eta(\pi) = \begin{cases} \eta_{-1}, & \text{falls } \pi \geq (1 - \delta)\eta_{-1} \\ \pi, & \text{falls } (1 - \delta)\eta_{+1} < \pi < (1 - \delta)\eta_{-1} \\ \eta_{+1}, & \text{falls } \pi \leq (1 - \delta)\eta_{+1}, \end{cases}$$

und

$$\varphi_a(\pi) = \begin{cases} -1, & \text{falls } \pi \geq (1 - \delta)\eta_{-1} \\ 0, & \text{falls } (1 - \delta)\eta_{+1} < \pi < (1 - \delta)\eta_{-1} \\ +1, & \text{falls } \pi \leq (1 - \delta)\eta_{+1}. \end{cases}$$

gegeben.

- (ii) Wir nennen eine zulässige Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *stark stationär*, falls $\eta_{-1}, \eta_{+1} \in (0, 1)$ mit $\eta_{-1} \geq \eta_{+1}$ existieren, so dass für die zugehörigen Funktionen φ_η, φ_a aus (i)

$$\eta_n = \varphi_\eta(\pi(\tau_n)) \quad \text{und} \quad A_n = \varphi_a(\pi(\tau_n)), \quad n \in \mathbb{N},$$

gelten und die Zwischenhandelszeiten

$$(\tau_{n+1} - \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

zu gegebenem $\eta_n = \eta$ die Verteilung unabhängig und identisch verteilter Kopien der Stoppzeit τ_1 gegeben $\pi_0 = \eta$ besitzen. Genauer bedeutet das in der kanonischen Darstellung, dass für eine Stoppzeit τ bezüglich $(\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ mit der Darstellung $\tau = f_\tau(\pi_0, (W(t))_{t \geq 0})$ durch messbares

$$f_\tau : (0, 1) \times \mathcal{C}([0, \infty), \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty)$$

τ_1 identisch τ und für $n \in \mathbb{N}$

$$\tau_{n+1} - \tau_n = f_\tau(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0})$$

zu setzen ist.

- (iii) Da für eine stark stationäre Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Aktienfolge $(A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur von den Wertanteilen η_{+1} , η_{-1} und der Verteilung von $\tau = \tau_1$ abhängt, notieren wir stark stationäre Kontrollstrategien auch mit $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$.
- (iv) Die Menge der stark stationären Kontrollstrategien bezeichnen wir mit \mathcal{Z}_s und die *optimale asymptotische Rendite* in \mathcal{Z}_s mit R_s^* , d.h. zu Startwerten $\pi \in (0, 1)$ sei

$$R_s^*(\pi) = \sup_{(\tau, A, \eta) \in \mathcal{Z}_s} R^{(\tau, A, \eta)}(\pi).$$

Bemerkung 5.6.5

Sei $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine durch Wertanteile η_{-1}, η_{+1} mit zugehörigen Abbildungen φ_η, φ_a gegebene stark stationäre Kontrollstrategie.

- (i) Wie durch eine Fallunterscheidung gut zu sehen ist, sind die Abbildungen φ_η und φ_a gerade so formuliert, dass $(\varphi_a(\pi), \varphi_\eta(\pi))$ für alle $\pi \in (0, 1)$ in $\mathcal{A}^+(\pi)$ liegt. Somit erfüllt die durch φ_η und φ_a definierte Kontrollstrategie (τ, A, η) die Zulässigkeitsbedingung in Definition 5.5.3. Außerdem gilt Lemma 5.5.4 (iii) entsprechend für alle $\pi \in (0, 1)$

$$\text{sign}\left((1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta) \varphi_\eta(\pi) - \pi\right) \in \{0, \varphi_a(\pi)\}.$$

- (ii) Ferner überträgt sich die Abschätzung in Lemma 5.5.4 (iv), d.h. es gilt für alle $\pi \in (0, 1)$

$$\frac{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi(t)) \gamma \pi(t)}{1 + \varphi_a(\pi(t)) \gamma \varphi_\eta(\pi(t))} \leq 1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta \leq 1.$$

- (iii) Es ist zu beachten, dass aus der Bedingung $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ an die Handelszeiten in Definition 5.4.1 folgt, dass τ bei Start in η_{-1} oder η_{+1} nicht sofort stoppt. Denn sonst würde auch nach τ_1 immer wieder sofort gestoppt werden, da $(\pi(t))_{t \geq 0}$ nach der Aktion in τ_1 mit Startwert $\varphi_\eta(\pi(\tau_1)) \in \{\eta_{-1}, \eta_{+1}\}$ erneut startet, d.h. es wäre $P_\pi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \infty) = 0$ für alle $\pi \in (0, 1)$ im Widerspruch zur Bedingung (iii) in Definition 5.4.1.

Um die Darstellung des Logarithmus des Wertes, wie sie in Satz 5.5.7 gegeben ist, zu vereinfachen, bietet sich die folgende Definition an.

Definition 5.6.6

Zu einer stark stationären Kontrollstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ nennen wir die durch

$$g(\eta, \pi) = \log \left(\frac{(1 - \eta)(1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi)}{(1 - \pi)(1 + \varphi_a(\pi) \gamma \varphi_\eta(\pi))} \right)$$

gegebene Abbildung $g : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ Wertzuwachs. Dabei bezeichnen φ_η und φ_a die zu η_{-1}, η_{+1} in Definition 5.6.4 gegebenen Abbildungen.

Oft werden wir die folgenden Abschätzungen und Darstellungen benötigen.

Lemma 5.6.7

Sei g der Wertzuwachs zu einer stark stationären Kontrollstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(i) Mit $\eta_0 = \pi_0$ und

$$M(t) = \sup \{ m \in \mathbb{N}_0 \mid \tau_m < t \}, \quad \sup \emptyset = 0,$$

gilt für alle $t \geq 0$ die Darstellung

$$\log(X(t)) = \log(X_0) + r t + \sum_{n=1}^{M(t)} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)) + \log \left(\frac{1 - \eta_{M(t)}}{1 - \pi(t)} \right).$$

(ii) Für alle $\eta, \pi \in (0, 1)$ gelten die Abschätzungen

$$\log(1 - \delta - \gamma) - \log(1 + \gamma) + \log(1 - \eta) \leq g(\eta, \pi) \leq -\log(1 - \pi).$$

(iii) Für alle $\eta \in (0, 1)$ ist

$$\mathbb{E}_\eta [|g(\eta, \pi(\tau_1))|] < \infty.$$

Beweis: Sei $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ eine stark stationäre Kontrollstrategie mit zugehörigen Abbildungen φ_η, φ_a .

(i) Die Behauptung folgt unter Beachtung von

$$\begin{aligned} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)) &= \log \left(\frac{(1 - \eta_{n-1})(1 - (\varphi_a(\pi(\tau_n)))^2 \delta + \varphi_a(\pi(\tau_n)) \gamma \pi(\tau_n))}{(1 - \pi(\tau_n))(1 + \varphi_a(\pi(\tau_n)) \gamma \varphi_\eta(\pi(\tau_n)))} \right) \\ &= \log \left(\frac{(1 - \eta_{n-1})(1 - A_n^2 \delta + A_n \gamma \pi(\tau_n))}{(1 - \pi(\tau_n))(1 + A_n \gamma \eta_n)} \right) \end{aligned}$$

direkt aus der Darstellung in Satz 5.5.7.

(ii) Für alle $\eta, \pi \in (0, 1)$ gilt

$$\begin{aligned} g(\eta, \pi) &= \log \left(\frac{(1 - \eta)(1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi)}{(1 - \pi)(1 + \varphi_a(\pi) \gamma \varphi_\eta(\pi))} \right) \\ &\leq \log \left(\frac{1 - \eta}{1 - \pi} \right) \\ &\leq -\log(1 - \pi), \end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung Bemerkung 5.6.5 (ii) ausgenutzt haben. Eine Abschätzung nach unten ergibt

$$\begin{aligned} g(\eta, \pi) &\geq \log \left(\frac{(1 - \delta - \gamma)(1 - \eta)}{(1 + \gamma)(1 - \pi)} \right) \\ &\geq \log(1 - \delta - \gamma) - \log(1 + \gamma) + \log(1 - \eta). \end{aligned}$$

(iii) Sei $\eta \in (0, 1)$. Nach (ii) ist $\pi \mapsto g(\eta, \pi)$ nach unten beschränkt. Somit existiert der Erwartungswert und es genügt $E_\eta [g(\eta, \pi(\tau_1))] < \infty$ zu zeigen. Der Zwischenschritt im Beweis von (ii) liefert $g(\eta, \pi) \leq \log(1 - \eta) - \log(1 - \pi)$ für alle $\pi \in (0, 1)$. Da $(\pi(t))_{t \geq 0}$ auf $[0, \tau_1]$ mit dem Wertanteilprozess ohne Handel $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ übereinstimmt, können wir nach Lemma 5.3.3 bei Start in $\tilde{\pi}(0) = \eta$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} g(\eta, \pi(\tau_1)) &\leq \log(1 - \eta) - \log(1 - \pi(\tau_1)) \\ &= \log \left(\frac{(1 - \eta)e^{r \tau_1}}{1 - \pi(\tau_1)} \right) - r \tau_1 \\ &= \log \left((1 - \eta)e^{r \tau_1} + \eta e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau_1 + \sigma W(\tau_1)} \right) - r \tau_1 \\ &= \log \left((1 - \eta) + \eta e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r)\tau_1 + \sigma W(\tau_1)} \right) \\ &\leq \log \left(\max \left\{ 2(1 - \eta), 2\eta e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r)\tau_1 + \sigma W(\tau_1)} \right\} \right) \\ &\leq 2 \log(2) + \left| \mu - \frac{\sigma^2}{2} - r \right| \tau_1 + \sigma |W(\tau_1)| \end{aligned}$$

Da τ_1 eine Handelszeit ist, gilt $E_\eta [\tau_1] < \infty$, so dass wegen $P(\tau_1 < \infty) = 1$ und der Martingaleigenschaft von $((W(t))^2 - t)_{t \geq 0}$ auch

$$\begin{aligned} E_\eta [(W(\tau_1))^2] &= E_\eta \left[\liminf_{t \rightarrow \infty} (W(\tau_1 \wedge t))^2 \right] \\ &\leq \liminf_{t \rightarrow \infty} E_\eta [(W(\tau_1 \wedge t))^2] \\ &= \liminf_{t \rightarrow \infty} E_\eta [\tau_1 \wedge t] \\ &= E_\eta [\tau_1] \end{aligned}$$

und damit

$$E_\eta [|W(\tau_1)|] \leq (E_\eta [(W(\tau_1))^2])^{\frac{1}{2}} \leq (E_\eta [\tau_1])^{\frac{1}{2}} < \infty$$

folgt, so dass wir aus

$$\mathbb{E}_\eta [g(\eta, \pi(\tau_1))] \leq 2 \log(2) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2} - r) \mathbb{E}_\eta [\tau_1] + \sigma \mathbb{E}_\eta [|W(\tau_1)|] < \infty$$

die Behauptung erhalten. \square

Betrachten wir die Darstellung in (i), so erkennen wir, dass bei den Summanden zwar keine Unabhängigkeit, aber zumindest doch eine markovsche Abhängigkeit vorzuliegen scheint, da in der n -ten Handelsperiode der neue Startwert η_n aufgrund der Stationarität der Kontrollstrategie nur vom Wert von $\pi(\tau_n)$ abhängt. Wir formulieren diese Beobachtung im folgenden Satz genauer.

Satz 5.6.8

- (i) Sei $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine stark stationäre Kontrollstrategie. Setzen wir $\eta_0 = \pi$ und $\tau_0 = 0$, so bildet $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unter P_π einen zu $(\mathcal{G}_{\tau_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ adaptierten homogenen Markovprozess mit Werten in $(0, 1)$.
- (ii) Sei $\pi \in (0, 1)$ und gelte zusätzlich

$$P_\pi(A_n \in \{-1, +1\}) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann bildet $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unter P_π eine homogene Markovkette mit Zustandsraum $\{-1, +1\}$ und Startverteilung $P_\pi(A_1 \in \cdot)$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{-+} = P_\pi(A_2 = +1 \mid A_1 = -1)$ und entsprechend p_{--} , p_{+-} und p_{++} sind gegeben durch

$$\begin{aligned} p_{--} &= P_{\eta_{-1}}(A_1 = -1), & p_{-+} &= 1 - p_{--}, \\ p_{+-} &= P_{\eta_{+1}}(A_1 = -1), & p_{++} &= 1 - p_{+-}. \end{aligned}$$

Ferner ist die invariante Verteilung (p_{-1}, p_{+1}) von $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gegeben durch

$$p_{-1} = \frac{p_{+-}}{p_{+-} + 1 - p_{--}} \quad \text{und} \quad p_{+1} = 1 - p_{-1} = \frac{1 - p_{--}}{p_{+-} + 1 - p_{--}}.$$

- (iii) Gilt für ein $\pi \in (0, 1)$ zusätzlich zu $P_\pi(A_n \in \{-1, +1\}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, auch

$$P_{\eta_{-1}}(A_1 = +1) > 0,$$

so sind die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{--}, p_{-+}, p_{+-}, p_{++}$ bei Start in π alle strikt positiv.

Beweis:

(i) In der kanonischen Darstellung gemäß den Ausführungen in Bemerkung 5.4.9, Definition 5.5.1 und Definition 5.6.4 sind für $n \in \mathbb{N}$ Darstellungen

$$(\pi(\tau_n + t))_{t \geq 0} = f_\pi(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0})$$

und

$$\tau_{n+1} - \tau_n = f_\tau(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0})$$

mit messbaren f_π und f_τ möglich. Wegen

$$\begin{aligned} \pi(\tau_{n+1}) &= \pi(\tau_n + \tau_{n+1} - \tau_n) \\ &= f_\pi(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(t))_{t \geq 0})(\tau_{n+1} - \tau_n) \\ &= f_\pi(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(t))_{t \geq 0})(f_\tau(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0})) \end{aligned}$$

hat auch $\pi(\tau_{n+1})$ eine Darstellung

$$\pi(\tau_{n+1}) = f_{\pi, \tau}(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(t))_{t \geq 0}),$$

wobei $f_{\pi, \tau}$ durch obige Gleichung gegeben ist. Daran erkennen wir, dass für alle $B \in \mathcal{B}_{(0,1)}$ gilt

$$\begin{aligned} P_\pi(\pi(\tau_{n+1}) \in B \mid \mathcal{G}_{\tau_n}) &= P_\pi(f_{\pi, \tau}(\eta_n, (W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0}) \in B \mid \mathcal{G}_{\tau_n}) \\ &= P_\pi(f_{\pi, \tau}(\cdot, (W(t))_{t \geq 0}) \in B) \circ \eta_n \\ &= P_\pi(\pi(\tau_1) \in B) \circ \eta_n, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass η_n unabhängig von $(W(\tau_n + t) - W(\tau_n))_{t \geq 0}$ ist. Damit folgt insbesondere für $C \in \mathcal{B}_{(0,1)}$

$$\begin{aligned} P_\pi(\eta_{n+1} \in C \mid \eta_n, \eta_{n-1}, \dots, \eta_1) &= P_\pi(\varphi_\eta(\pi(\tau_{n+1})) \in C \mid \eta_n, \eta_{n-1}, \dots, \eta_1) \\ &= P_\pi(\pi(\tau_{n+1}) \in \varphi_\eta^{-1}(C) \mid \eta_n, \eta_{n-1}, \dots, \eta_1) \\ &= P_\pi(\pi(\tau_{n+1}) \in \varphi_\eta^{-1}(C) \mid \eta_n) \\ &= P_\pi(\pi(\tau_1) \in \varphi_\eta^{-1}(C)) \circ \eta_n \\ &= P_\pi(\varphi_\eta(\pi(\tau_1)) \in C) \circ \eta_n \\ &= P_\pi(\eta_1 \in C) \circ \eta_n, \end{aligned}$$

also für geeignete $\eta, y_{n-1}, \dots, y_1 \in (0, 1)$

$$P_\pi(\eta_{n+1} \in C \mid \eta_n = \eta, \eta_{n-1} = y_{n-1}, \dots, \eta_1 = y_1) = P_\pi(\eta_1 \in C).$$

Da ebenso $P_\pi(\eta_{n+1} \in C \mid \eta_n = \eta) = P_\pi(\eta_1 \in C)$ gilt, folgt die behauptete Markoveigenschaft und auch die Homogenität.

(ii) Sei $\pi \in (0, 1)$ Gilt $P_\pi(A_n \in \{-1, +1\}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sind die neuen Wertanteile $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wegen

$$\eta_n = \varphi_\eta(\pi(\tau_n)) = \begin{cases} \eta_{-1}, & \text{falls } A_n = \varphi_a(\pi(\tau_n)) = -1 \\ \eta_{+1}, & \text{falls } A_n = \varphi_a(\pi(\tau_n)) = +1 \end{cases}$$

durch die Handelsarten $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt. Das gilt umgekehrt genauso, so dass wir mit der entsprechenden Gleichungskette wie im Beweisteil (i) für a_0, a_1 und $\alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1$ aus $\{-1, +1\}$ erhalten

$$\begin{aligned} P_\pi(A_{n+1} = a_1 \mid A_n = a_0, A_{n-1} = \alpha_{n-1}, \dots, A_1 = \alpha_1) \\ &= P_\pi(\eta_{n+1} = \eta_{a_1} \mid \eta_n = \eta_{a_0}, \eta_{n-1} = \eta_{\alpha_{n-1}}, \dots, \eta_1 = \eta_{\alpha_1}) \\ &= P_{\eta_{a_0}}(\eta_1 = \eta_{a_1}) \\ &= P_{\eta_{a_0}}(A_1 = a_1). \end{aligned}$$

Da sich entsprechend $P_\pi(A_{n+1} = a_1 \mid A_n = a_0) = P_{\eta_{a_0}}(A_1 = a_1)$ berechnet, zeigt das die Markoveigenschaft und die zeitliche Homogenität. Das invariante Maß ist mit den Bezeichnungen aus der Behauptung gegeben durch

$$(p_{-1} \ p_{+1}) \begin{pmatrix} p_{--} & p_{-+} \\ p_{+-} & p_{++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{-1} \\ p_{+1} \end{pmatrix},$$

d.h.

$$p_{-1} = p_{-1}p_{--} + p_{+1}p_{+-} \quad \text{und} \quad p_{+1} = p_{-1}p_{-+} + p_{+1}p_{++}.$$

Auflösen nach p_{-1} und p_{+1} liefert die Behauptung.

(iii) Laut Voraussetzung ist $p_{-+} > 0$ gegeben. Angenommen, es wäre $p_{--} = 0$, d.h.

$$P_{\eta_{-1}}(\pi(\tau_1) \geq (1 - \delta)\eta_{-1}) = P_{\eta_{-1}}(A_1 = -1) = p_{--} = 0.$$

Es würde also niemals oberhalb von $(1 - \delta)\eta_{-1}$ gestoppt werden. Somit wäre

$$E_{\eta_{-1}}[\tau_1] \geq E_{\eta_{-1}}[\tau_{(1-\delta)\eta_{-1}, 1}] = \infty$$

im Widerspruch zu $E_{\eta_{-1}}[\tau_1] < \infty$. Dass $\tau_{(1-\delta)\eta_{-1}, 1} = \inf\{t \geq 0 \mid \pi(t) \leq (1 - \delta)\eta_{-1}\}$ keinen endlichen Erwartungswert hat, ist wie folgt zu erkennen: Für $\varepsilon > 0$ kann der Erwartungswert von $E_{\eta_{-1}}[\tau_{(1-\delta)\eta_{-1}, 1-\varepsilon}]$ gemäß der Darstellung in Satz 5.2.7 über den Erzeuger von $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ bestimmt werden. Betrachten wir die Lösungen der benötigten Differentialgleichungen in Lemma 5.3.6, so ist gut zu erkennen, dass $E_{\eta_{-1}}[\tau_{(1-\delta)\eta_{-1}, 1-\varepsilon}]$ für $\varepsilon \searrow 0$ unbeschränkt ist. Damit muss $p_{--} > 0$ gelten. Die Behauptung für p_{+-} und p_{++} folgt mit einer entsprechenden Argumentation. \square

Zu beachten ist im ersten Teil der Behauptung, dass für stark stationäre Kontrollstrategien die Handelsarten für sich noch keine Markovkette bilden, da sie im Fall, dass ohne Verkauf oder Kauf gestoppt wird, den neuen Startwert für den Wertanteilprozess nicht eindeutig bestimmen.

Definition 5.6.9

Eine stark stationäre Kontrollstrategie $(\tau, A, \eta) = (\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Handelsstrategie*, falls für alle $\pi \in (0, 1)$

$$P_\pi(A_n \in \{-1, +1\}) = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und

$$P_{\eta_{-1}}(A_1 = +1) > 0$$

gelten. Die Menge der Handelsstrategien bezeichnen wir mit \mathcal{H} . Wir nennen eine Handelsstrategie *optimal in \mathcal{Z}_s* , wenn sie für alle Startwerte $\pi \in (0, 1)$ die optimale asymptotische Rendite $R_s^*(\pi)$ in der Menge \mathcal{Z}_s der stark stationären Kontrollstrategien erreicht.

Handelsstrategien beschreiben also Kontrollstrategien, bei denen zu jeder Handelszeiten gekauft oder verkauft wird. Die Beschränkung auf Handelsstrategien wird es erst ermöglichen, die Reduzierung auf die Betrachtung einer Stoppzeit in Theorem 5.6.14 zu erreichen. Dass die Beschränkung auf diese Klasse in der Regel keine große Einschränkung darstellt, erläutern wir in der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 5.6.10

- (i) Es kann gezeigt werden, dass für eine Folge von Handelsarten $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer stark stationären Kontrollstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$

$$P_\pi(\inf \{ n \geq 0 \mid A_n \in \{-1, +1\} \} < \infty) = 1$$

für alle $\pi \in (0, 1)$ gilt. Die Argumentation kann dabei wie folgt erfolgen: Würde mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit nie gehandelt werden, so würde auf diesem Ereignis mit strikt positiver Wahrscheinlichkeit ein Punkt oberhalb von $(1 - \delta)\eta_{-1}$ erreicht werden, da die Entwicklung des Wertanteilprozesses nur durch Kauf oder Verkauf abgebrochen werden kann. Von diesem Punkt ausgehend ist die erwartete Dauer bis zum Verlassen des Verkaufsbereiches $[(1 - \delta)\eta_{-1}, 1)$ unendlich, so dass ein Widerspruch zu der Definition der Handelszeiten abgeleitet werden könnte.

- (ii) Unter Ausnutzung von (i) kann weiter wegen der starken Stationarität unter Ausnutzung der Eigenschaften der Handelszeiten gezeigt werden, dass bei Start in η_{-1} oder η_{+1} der nächste Handelszeitpunkt auch immer mit endlicher erwarteter Dauer erreicht wird. Ist zusätzlich die Bedingung $P_{\eta_{-1}}(A_1 = +1) > 0$ erfüllt, so kann daher eine Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tilde{\tau})$ eingeführt werden, die genau an den Handelszeitpunkten der Kontrollstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ stoppt, in denen gekauft oder verkauft wird. Da zu den anderen Handelszeitpunkten keine Wertänderung erfolgt, hat die neue Handelsstrategie die gleiche asymptotische Rendite, d.h. es gelten

$$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tilde{\tau})}(\eta_{+1}) = R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tilde{\tau})}(\eta_{+1}) \quad \text{und} \quad R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tilde{\tau})}(\eta_{-1}) = R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tilde{\tau})}(\eta_{-1}).$$

- (iii) Die zweite Bedingung in Definition 5.6.9 ist erforderlich, um Strategien auszuschließen, bei denen ab dem ersten Verkauf nur noch verkauft wird, bei denen der Zustand -1 also absorbierend für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Solch eine Strategie kann bei ungünstiger Vorgabe von η_{-1} und η_{+1} durchaus zulässig sein und Sinn machen. Liegt zum Beispiel der optimale Wertanteil ohne Transaktionskosten η_{opt} weit oberhalb von η_{-1} so ist es vorstellbar, dass es günstig ist, vor Verlassen des möglichen Stoppgebietes zwischen $(1 - \delta)\eta_{-1}$ und η_{-1} zu stoppen, um sich nicht zu weit vom optimalen Wertanteil zu entfernen, in dessen Nähe sich die Rendite auch ohne Handel am besten entwickelt. Mit einer weiteren Stoppgrenze oberhalb von η_{opt} wäre solch eine Kontrollstrategie auch zulässig. Vermutlich lässt sich aber zeigen, dass Strategien dieser Art nicht optimal sind, da eine bessere Wahl von η_{-1} und η_{+1} möglich sein sollte.

Nach Satz 5.6.8 (ii) und (iii) bilden zu einer Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ die Handelsarten $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\{-1, +1\}$ und strikt positiven Übergangswahrscheinlichkeiten. Ebenso bilden zu einer Handelsstrategie die Wertanteile $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\{\eta_{-1}, \eta_{+1}\}$ und den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten wie in Satz 5.6.8 (ii), falls $\eta_{-1} > \eta_{+1}$ gilt. Im Fall $\eta_{-1} = \eta_{+1}$ sind die Übergangswahrscheinlichkeiten für diese Markovkette identisch 1, während die Übergangswahrscheinlichkeiten für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die gleichen bleiben. Da die Handelsarten in diesem Sinne informativer sind, haben wir sie für die Darstellung in Satz 5.6.8 gewählt. Benötigen werden wir die invariante Verteilung für die Darstellung in Theorem 5.6.14 in der folgenden Form.

Definition 5.6.11

Zu einer Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ sei das Maß ν auf $\{\eta_{-1}, \eta_{+1}\}$ gegeben durch

$$\nu(\{\eta_{-1}\}) = p_{-1} \quad \text{und} \quad \nu(\{\eta_{+1}\}) = p_{+1} \quad \text{falls } \eta_{-1} > \eta_{+1},$$

wobei (p_{-1}, p_{+1}) die invariante Verteilung gemäß Satz 5.6.8 (ii) bezeichne. Wir nennen ν das *invariante Maß* zu $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$. Ferner sei

$$P_\nu = p_{-1}P_{\eta_{-1}} + p_{+1}P_{\eta_{+1}}.$$

Damit berechnet sich der Erwartungswert unter P_ν bei Startwert π_0 für $t \geq 0$ und messbare Funktionen h , für die $h(\eta, \pi(t))$ für $\eta \in \{\eta_{-1}, \eta_{+1}\}$ jeweils P_η -integrierbar ist, zu

$$E_\nu [h(\pi_0, \pi(t))] = p_{-1}E_{\eta_{-1}} [h(\eta_{-1}, \pi(t))] + p_{+1}E_{\eta_{+1}} [h(\eta_{+1}, \pi(t))].$$

Zu beachten ist, dass sich im Fall $\eta_{-1} = \eta_{+1}$ einfach

$$P_\nu = p_{-1}P_{\eta_{-1}} + (1 - p_{-1})P_{\eta_{+1}} = P_{\eta_{-1}} = P_{\eta_{+1}}$$

ergibt.

Satz 5.6.12

Zu einer Handelsstrategie $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien $N_0 = 0$ und

$$N_k = \inf \{ n > N_{k-1} \mid A_n = -1 \}, \quad k \in \mathbb{N},$$

sowie mit $\eta_0 = \pi_0$

$$Y_k = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dann gelten:

(i) Unter $P_{\eta_{-1}}$ bildet mit $\tau_0 = 0$

$$(Y_k, \tau_{N_k} - \tau_{N_{k-1}})_{k \in \mathbb{N}}$$

eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen.

(ii) Für alle $\pi \in (0, 1)$ gelten

$$\mathbb{E}_\pi [N_1] < \infty, \quad \mathbb{E}_\pi [\tau_{N_1}] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}_\pi [|Y_1|] < \infty.$$

(iii) Bezeichnet $\nu = (p_{-1}, p_{+1})$ das invariante Maß zu $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so gelten

$$p_{-1} \mathbb{E}_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}] = \mathbb{E}_\nu [\tau_1] \quad \text{und} \quad p_{-1} \mathbb{E}_{\eta_{-1}} [Y_1] = \mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \pi(\tau_1))].$$

Beweis: (i) In der kanonischen Darstellung gemäß Bemerkung 5.5.2 und Definition 5.6.4 (ii) folgt für $k \in \mathbb{N}$ mit einer entsprechenden Argumentation wie im Beweis von Satz 5.6.8 (i) und unter Berücksichtigung von $\eta_{N_k} = \eta_{-1}$, dass $\tau_{N_{k+1}} - \tau_{N_k}$ verteilt ist wie τ_{N_1} unter $P_{\eta_{-1}}$ und Y_k verteilt ist wie Y_1 unter $P_{\eta_{-1}}$ und Unabhängigkeit vorliegt.

(ii) Unter Beachtung von

$$\sum_{n=2}^{\infty} n p^{n-2} = \frac{2-p}{(1-p)^2} \quad \text{für} \quad p \in (0, 1)$$

erhalten wir zu allen $\pi \in (0, 1)$ mit den Bezeichnungen aus Satz 5.6.8

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_\pi [N_1] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} n P(N_n = n) \\ &= P_\pi(A_1 = -1) \\ &\quad + P_\pi(A_1 = +1) \sum_{n=2}^{\infty} n P_\pi(A_n = -1, A_{n-1} = \dots = A_2 = +1 \mid A_1 = +1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_\pi(A_1 = -1) + P_\pi(A_1 = +1) \sum_{n=2}^{\infty} \left(n P_\pi(A_n = -1 \mid A_{n-1} = +1) \right. \\
&\quad \left. \cdot \prod_{k=2}^{n-1} P_\pi(A_k = +1 \mid A_{k-1} = +1) \right) \\
&= P_\pi(A_1 = -1) + P_\pi(A_1 = +1) p_{+-} \sum_{n=2}^{\infty} n p_{++}^{n-2} \\
&= P_\pi(A_1 = -1) + P_\pi(A_1 = +1) p_{+-} \frac{2 - p_{++}}{(1 - p_{++})^2} \\
&= P_\pi(A_1 = -1) + P_\pi(A_1 = +1) \frac{1 + p_{+-}}{p_{+-}}.
\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $E_\pi [N_1] < \infty$.

Wir betrachten jetzt τ_{N_1} . Es gelten

$$E_\pi [\tau_{N_1} \mid N_1 = 1] = E_\pi [\tau_1 \mid A_1 = -1]$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}
E_\pi [\tau_{N_1} \mid N_1 = n] &= E_\pi [\tau_n \mid A_1 = \cdots = A_{n-1} = +1, A_n = -1] \\
&= E_\pi [\tau_1 \mid A_1 = \cdots = A_{n-1} = +1, A_n = -1] \\
&\quad + \sum_{k=2}^n E_\pi [\tau_k - \tau_{k-1} \mid A_1 = \cdots = A_{n-1} = +1, A_n = -1] \\
&= E_\pi [\tau_1 \mid A_1 = -1] + E_\pi [\tau_n - \tau_{n-1} \mid A_{n-1} = +1, A_n = -1] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} E_\pi [\tau_k - \tau_{k-1} \mid A_{k-1} = +1, A_k = +1] \\
&= E_\pi [\tau_1 \mid A_1 = -1] + E_\pi [\tau_n - \tau_{n-1} \mid \eta_{n-1} = +1, A_n = -1] \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n-1} E_\pi [\tau_k - \tau_{k-1} \mid \eta_{k-1} = \eta_{+1}, A_k = +1] \\
&= E_\pi [\tau_1 \mid A_1 = -1] + E_{\eta_{+1}} [\tau_1 \mid A_1 = -1] \\
&\quad + (n - 2) E_{\eta_{+1}} [\tau_1 \mid A_1 = +1].
\end{aligned}$$

Ferner sind für $n = 1$

$$E_\pi [1_{\{N_1=1\}} \tau_{N_1}] = E_\pi [\tau_1 \mid A_1 = -1] P_\pi(A_1 = -1)$$

und für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
E_\pi [1_{\{N_1=n\}} \tau_{N_1}] &= E_\pi [\tau_{N_1} \mid N_1 = n] P_\pi(N_1 = n) \\
&= E_\pi [\tau_{N_1} \mid N_1 = n] P_\pi(A_1 = \cdots = A_{n-1} = +1, A_n = -1) \\
&= E_\pi [\tau_{N_1} \mid N_1 = n] P_\pi(A_1 = +1) p_{++}^{n-2} p_{+-}.
\end{aligned}$$

Damit liefert eine ähnliche Rechnung wie oben für N_1 unter Ausnutzung von

$$p_{+-} \sum_{n=2}^{\infty} (n-2) p_{++}^{n-2} = \frac{p_{+-} p_{++}}{(1-p_{++})^2} = \frac{p_{++}}{p_{+-}}$$

für den Erwartungswert

$$\begin{aligned} E_{\pi} [\tau_{N_1}] &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{\pi} [1_{\{N_1=n\}} \tau_{N_1}] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{\pi} [\tau_{N_1} | N_1 = n] P_{\pi}(N_1 = n) \\ &= P_{\pi}(A_1 = -1) E_{\pi} [\tau_1 | A_1 = -1] \\ &\quad + P_{\pi}(A_1 = +1) \sum_{n=2}^{\infty} p_{+-} p_{++}^{n-2} \left(E_{\pi} [\tau_1 | A_1 = +1] + E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_n = -1] \right. \\ &\quad \quad \quad \left. + (n-2) E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = +1] \right) \\ &= P_{\pi}(A_1 = -1) E_{\pi} [\tau_1 | A_1 = -1] + P_{\pi}(A_1 = +1) E_{\pi} [\tau_1 | A_1 = +1] \\ &\quad + P_{\pi}(A_1 = +1) E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = -1] \\ &\quad + P_{\pi}(A_1 = +1) \frac{p_{++}}{p_{+-}} E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = +1]. \end{aligned}$$

Insbesondere folgt wegen $E_{\pi} [\tau_1], E_{\eta_{-1}} [\tau_1], E_{\eta_{+1}} [\tau_1] < \infty$ auch $E_{\pi} [\tau_{N_1}] < \infty$.

Da $g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n))$ in der kanonische Darstellung wie $\tau_n - \tau_{n-1}$ auch – vergleiche Definition 5.6.4 – als Funktion von $(\eta_{n-1}, (W(\tau_{n-1} + t) - W(\tau_{n-1}))_{t \geq 0})$ aufgefasst werden kann und somit für $\sum_{n=1}^{N_1} [|g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n))|]$ die gleiche Struktur wie für $\tau_{N_1} = \sum_{n=1}^{N_1} (\tau_n - \tau_{n-1})$ vorliegt, kann mit den analogen Rechnungen wie für $E_{\pi} [\tau_{N_1}]$

$$E_{\pi} [|Y_1|] \leq E_{\pi} \left[\sum_{n=1}^{N_1} |g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n))| \right] < \infty$$

nachgewiesen werden, da wir in Lemma 5.6.7 (iii) die Integrierbarkeit von $g(\eta, \pi(\tau_1))$, $\eta \in (0, 1)$, bereits bewiesen haben. Mit den analogen Rechnung ohne Beträge erhalten wir dann die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} E_{\pi} [Y_1] &= P_{\pi}(A_1 = -1) E_{\pi} [g(\pi, \pi(\tau_1)) | A_1 = -1] \\ &\quad + P_{\pi}(A_1 = +1) E_{\pi} [g(\pi, \pi(\tau_1)) | A_1 = +1] \\ &\quad + P_{\pi}(A_1 = +1) E_{\eta_{+1}} [g(\eta_{+1}, \pi(\tau_1)) \tau_1 | A_1 = -1] \\ &\quad + P_{\pi}(A_1 = +1) \frac{p_{++}}{p_{+-}} E_{\eta_{+1}} [g(\eta_{+1}, \pi(\tau_1)) | A_1 = +1], \end{aligned}$$

die wir im folgenden Beweisteil benötigen werden.

(iii) Bei Start in η_{-1} sind $P_{\eta_{-1}}(A_1 = -1) = p_{--}$ und $P_{\eta_{+1}}(A_1 = -1) = p_{+-}$. Damit gilt mit der im Beweisteil (i) berechneten Darstellung bei Start in η_{-1}

$$\begin{aligned} p_{-1} E_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}] &= p_{-1} p_{--} E_{\eta_{-1}} [\tau_1 | A_1 = -1] + p_{-1} p_{-+} E_{\eta_{-1}} [\tau_1 | A_1 = +1] \\ &\quad + p_{-1} p_{-+} E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = -1] + p_{-1} p_{-+} \frac{p_{++}}{p_{+-}} E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = +1] \end{aligned}$$

Beachten wir $p_{-1} p_{-+} = p_{+1} - p_{+1} p_{++} = p_{+1} p_{+-}$ und die Definition der Übergangswahrscheinlichkeiten in Satz 5.6.8 (ii), so folgt schließlich

$$\begin{aligned} p_{-1} E_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}] &= p_{-1} p_{--} E_{\eta_{-1}} [\tau_1 | A_1 = -1] + p_{-1} p_{-+} E_{\eta_{-1}} [\tau_1 | A_1 = +1] \\ &\quad + p_{+1} p_{+-} E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = -1] + p_{+1} p_{++} E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = +1] \\ &= p_{-1} \left(E_{\eta_{-1}} [\tau_1 | A_1 = -1] P_{\eta_{-1}}(A_1 = -1) \right. \\ &\quad \left. + E_{\eta_{-1}} [\tau_1 | A_1 = +1] P_{\eta_{-1}}(A_1 = +1) \right) \\ &\quad + p_{+1} \left(E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = -1] P_{\eta_{+1}}(A_1 = -1) \right. \\ &\quad \left. + E_{\eta_{+1}} [\tau_1 | A_1 = +1] P_{\eta_{+1}}(A_1 = +1) \right) \\ &= p_{-1} E_{\eta_{-1}} [\tau_1] + p_{+1} E_{\eta_{+1}} [\tau_1] \\ &= E_\nu [\tau_1]. \end{aligned}$$

Da für $E_\pi [Y_1]$ nach Beweisteil (ii) die analoge Darstellung gilt, folgt mit den identischen Rechnungen

$$p_{-1} E_\pi [Y_1] = E_\nu [g(\pi_0, \pi(\tau_1))].$$

□

Damit liegt eine regenerative Struktur vor, die es uns im folgenden Theorem ermöglichen wird, das Problem der Bestimmung der asymptotischen Rendite auf eine Periode zwischen zwei Verkäufen zurückzuführen.

Theorem 5.6.13

Sei $(\tau_n, A_n, \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Handelsstrategie. Dann gilt für $N_1 = \inf \{ n > 0 \mid A_n = -1 \}$

$$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)}(\pi) = r + \frac{E_{\eta_{-1}} [\sum_{n=1}^{N_1} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n))]}{E_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}]}, \quad \pi \in (0, 1),$$

insbesondere ist $R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)}(\pi)$ konstant.

Beweis: Seien $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ eine Handelsstrategie mit invarianter Verteilung ν , $\eta_0 = \pi_0$ und wie im Satz 5.6.12 $N_0 = 0$ und

$$N_k = \inf \{ n > N_{k-1} \mid A_n = -1 \}, \quad k \in \mathbb{N},$$

sowie

$$Y_k = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Für

$$M(t) = \sup \{ n \geq 0 \mid \tau_n < t \}, \quad t > 0, \quad \sup \emptyset = 0,$$

haben wir in Lemma 5.6.7 (i) gezeigt, dass für $t > 0$ und $X_0 \equiv 1$

$$\log(X(t)) = r t + \sum_{n=1}^{M(t)} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)) + \log \left(\frac{1 - \eta_{M(t)}}{1 - \pi(t)} \right).$$

gilt. Um später Stoppzeiten und nach Satz 5.6.12 Unabhängigkeit zu erhalten, betrachten wir jetzt

$$N(t) = \sup \{ k \geq 0 \mid \tau_{N_k} \leq t \}, \quad t \geq 0,$$

und erhalten zu $\pi \in (0, 1)$ für $t \geq 0$ die folgende Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\pi [\log(X(t))] &= r t + \mathbb{E}_\pi [Y_1] - \mathbb{E}_{\eta_{-1}} \pi [Y_1] \\ &\quad + \mathbb{E}_{\eta_{-1}} \left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \right] - \mathbb{E}_\pi [Y_{N(t)+1}] \\ &\quad + \mathbb{E}_\pi \left[\sum_{n=N_{N(t)}+1}^{M(t)} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)) \right] + \mathbb{E}_\pi \left[\frac{1 - \eta_{M(t)}}{1 - \pi(t)} \right] \end{aligned}$$

Wir werden diese Summanden mit 'Term 1' bis 'Term 7' bezeichnen. Für Term 1 gilt

$$\frac{r t}{t} = r \longrightarrow r \quad (t \rightarrow \infty).$$

Die Terme 2 und 3 sind nach Satz 5.6.12 (ii) endlich und unabhängig von t , so dass für diese die Konvergenzen

$$\frac{\mathbb{E}_\pi [Y_1]}{t} \longrightarrow 0, \quad \text{und} \quad \frac{\mathbb{E}_{\eta_{-1}} [Y_1]}{t} \longrightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

folgen. Diese beiden Terme haben wir eingeschoben, um in Term 4 die Erwartung bezüglich η_{-1} betrachten zu können. Dies ist durch die unabhängigen Zuwächse und den Start in η_{-1} zur Zeit τ_{N_1} gerechtfertigt. Damit können wir für Term 4 ausnutzen, dass $(\tau_{N_k} - \tau_{N_{k-1}})_{k \in \mathbb{N}}$ unter $P_{\eta_{-1}}$ nach Satz 5.6.12 (i) eine Folge unabhängiger, integrierbarer und identisch verteilter Zufallsvariablen ist. Damit befinden wir uns in der Situation der Erneuerungstheorie, wobei der Erneuerungsprozess $((N(t))_{t \geq 0})$ jeweils die

Erneuerungen bis zur Zeit t zählt. Ein elementares Resultat ist, dass $E [N(t)] < \infty$ für alle $t \geq 0$ gilt.

Beachten wir ferner, dass auch $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nach Satz 5.6.12 (ii) unter $P_{\eta_{-1}}$ eine Folge unabhängiger, integrierbarer und identisch verteilter Zufallsvariablen bildet und dass $N(t) + 1$ eine Stoppzeit für $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist, so liefert die Waldsche Identität

$$E_{\eta_{-1}} \left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \right] = E_{\eta_{-1}} [N(t) + 1] E_{\eta_{-1}} [Y_1] .$$

Wenden wir ferner das elementare Erneuerungstheorem an, so folgt für Term 4 schließlich

$$\frac{1}{t} E_{\eta_{-1}} \left[\sum_{k=1}^{N(t)+1} Y_k \right] = E_{\eta_{-1}} [Y_1] \left(\frac{E_{\eta_{-1}} [N(t)]}{t} + \frac{1}{t} \right) \longrightarrow \frac{E_{\eta_{-1}} [Y_1]}{E_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}]} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Während Term 4 der wesentliche Term ist, ist Term 5 am schwersten zu behandeln. Zu beachten ist, dass $Y_{N(t)+1}$ nicht die Verteilung von Y_1 besitzt. Wir verweisen auf den Beweis von Theorem 3.16 in Ross (1970), in dem in exakt unserer Situation die Konvergenz von $\frac{1}{t} E_{\pi} [Y_{N(t)+1}]$ gegen 0 mit Hilfe der Erneuerungsgleichung nachgewiesen wird.

Für den Term 6 ist zu beachten, dass die Wertzuwächse nur in einer Periode zwischen zwei Verkäufen betrachtet werden, d.h. zu jedem Endzeitpunkt der betrachteten Perioden wird auf den Wertanteil η_{+1} gekauft, ausgehend von einem Wertanteil aus $(0, (1-\delta)\eta_{+1})$, so dass mit Lemma 5.6.7 (ii) zu den entsprechenden Handelszeitpunkten folgt

$$\log(1 - \delta - \gamma) - \log(1 + \gamma) + \log(1 - \eta_{-1}) \leq g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n)) \leq -\log(1 - (1 - \delta)\eta_{+1}),$$

so dass wir mit einer geeigneten Schranke $K > 0$

$$E_{\pi} \left[\sum_{n=N_{N(t)+1}}^{M(t)} |g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n))| \right] \leq K E_{\pi} [M(t)] < \infty$$

erhalten. Für den letzten Term zeigt man die Integrierbarkeit analog zum Nachweis der Integrierbarkeit von $g(\eta, \pi(\tau_1))$ im Beweis von Lemma 5.6.7 (iii). Damit liegt auch für die letzten beiden Terme, multipliziert mit $\frac{1}{t}$ Konvergenz gegen 0 vor, so dass insgesamt folgt

$$\frac{1}{t} E_{\pi} [\log(X(t))] \longrightarrow r + \frac{E_{\eta_{-1}} [Y_1]}{E_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}]} = r + \frac{E_{\eta_{-1}} [\sum_{n=1}^{N_1} g(\eta_{n-1}, \pi(\tau_n))]}{E_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}]} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Somit gilt auch die Unabhängigkeit vom Startwert π . □

Die asymptotische Rendite in der Menge \mathcal{H} der Handelsstrategien ist also unabhängig von den Startwerten, so dass wir für $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) \in \mathcal{H}$ einfach

$$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)} = R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)}(\eta_{-1})$$

setzen.

Theorem 5.6.13 ist wegen der Verwendung der Stoppzeit N_1 zur Bestimmung von R_s^* noch recht unhandlich. Eine Abhilfe schafft das folgende Resultat, das unter Ausnutzung des invarianten Maßes der Handelsstrategie zu einer wesentlich besser handhabbaren Form führt, da nur noch eine Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten (nicht mehr zwischen zwei Verkäufen) bei nur zwei möglichen Startpunkten zu betrachten ist.

Theorem 5.6.14

Sei $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ eine Handelsstrategie mit invariantem Maß ν . Dann gilt für $\tau = \tau_1$

$$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)} = r + \frac{\mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau))]}{\mathbb{E}_\nu [\tau]}.$$

Beweis:

Mit den Bezeichnungen aus Satz 5.6.12 folgt unter Ausnutzung von Satz 5.6.12 (iii) aus Theorem 5.6.13 und der Übereinstimmung von $(\pi(t))_{t \geq 0}$ und $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$ auf $[0, \tau_1]$

$$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)} = \frac{\mathbb{E}_{\eta_{-1}} [Y_1]}{\mathbb{E}_{\eta_{-1}} [\tau_{N_1}]} = \frac{\frac{1}{p-1} \mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau_1))]}{\frac{1}{p-1} \mathbb{E}_\nu [\tau_1]} = \frac{\mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau))]}{\mathbb{E}_\nu [\tau]}.$$

□

Damit haben wir das Problem so weit reduziert, dass wir es ähnlich wie in Morton und Pliska (1995) auf ein Problem des optimalen Stoppens mit linearen Kosten zurückführen können. Da wir mit einer ebenfalls zu optimierenden Startverteilung ν beginnen müssen, ergeben sich aber doch einige gravierende Abweichungen.

Zu bestimmen ist also für den Wertanteilprozess ohne Handel $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$

$$R_s^* = r + \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) \in \mathcal{H}} \frac{\mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau))]}{\mathbb{E}_\nu [\tau]}$$

und eine optimale Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ mit invariantem Maß ν^* , so dass gilt

$$R_s^* = r + \frac{\mathbb{E}_{\nu^*} [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau^*))]}{\mathbb{E}_{\nu^*} [\tau^*]}.$$

Damit ist

$$0 \geq E_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau))] - (R_s^* - r)E_\nu [\tau]$$

für jede Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ und

$$0 = \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) \in \mathcal{H}} (E_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau))] - (R_s^* - r)E_\nu [\tau]),$$

wobei eine optimale Handelsstrategie die Gleichheit erfüllt. Ausgeschrieben ergibt die letzte Gleichung

$$0 = \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) \in \mathcal{H}} \left(p_{-1} E_{\eta_{-1}} [g(\eta_{-1}, \tilde{\pi}(\tau))] - (R_s^* - r)\tau \right) \\ + p_{+1} E_{\eta_{+1}} [g(\eta_{+1}, \tilde{\pi}(\tau))] - (R_s^* - r)\tau \Big).$$

An dieser Stelle ist erst einmal keine Separierung der Optimierungsaufgabe wie in Morton und Pliska (1995) möglich, da auch die Startverteilung ν von τ abhängt. Da aber bekannt ist und in 5.7 und 5.8 auch nachgewiesen wird, dass unter geeigneten Bedingungen zu gegebenen Startwerten η_{-1} und η_{+1} die gleichen Erstaustrittszeiten optimal sind, wird sich das Problem in 5.8 in die Bestimmung der optimalen Stoppzeit in Abhängigkeit von η_{-1}, η_{+1} und in die Maximierung über diese Wertanteile trennen lassen.

5.7 Ein Problem des optimalen Stoppens

Bei der Reduktion des Problems der Bestimmung der optimalen asymptotischen Rendite am Ende von Abschnitt 5.6 haben wir ein Problem des optimalen Stoppens zu linearen Kosten bei verschiedenen Startwerten zu lösen.

Dieses Problem wollen wir in diesem Abschnitt allgemein betrachten, um es dann anschließend in unserer Situation anzuwenden. Der übliche Zugang, der darin besteht, nur das freie Randwertproblem zu formulieren und zu lösen, birgt die Gefahr, dass eine Lösung des freien Randwertproblems keine Lösung des optimalen Stoppproblems sein muss. Es sind an dieser Stelle Verifikationssätze notwendig, die zahlreiche technische Voraussetzungen verlangen. Ein Beispiel ist Theorem 9 in Grigelionis und Shiryaev (1966). Von dessen acht Voraussetzungen lassen sich sieben in unserer relativ einfachen Situation gut nachweisen, eine (Nummer 4) ist aber erst nachweisbar, sobald man die Lösung explizit kennt.

Das ist bei dem von uns vorgestellten Zugang im Prinzip nicht anders. Wir werden keine allgemeine Existenzaussage treffen können, sondern im nächsten Abschnitt einen Verifikationssatz formulieren, der in Abhängigkeit von einer Lösung die gewünschte Aussage liefert. Doch sind bei diesem Zugang die zu berücksichtigenden Bedingungen natürlicher und es lässt sich unter diesen gut die Intervallgestalt des Fortsetzungsgebietes und des Stoppgebietes nachweisen.

Wir orientieren uns hier an dem Zugang zum optimalen Stoppen bei linearen Kosten, wie er in Paulsen (2000) für einen symmetrischen Prozess dargestellt ist, und übertragen diesen auf den unsymmetrischen Fall.

Wir stellen den Zugang wieder allgemein für einen Diffusionsprozess $(Y(t))_{t \geq 0}$ in $(0, 1)$ mit Erzeuger L_Y dar. Es bezeichne \mathcal{S} die Menge aller Stoppzeiten zur von $(Y(t))_{t \geq 0}$ erzeugten vervollständigten, rechtsseitig stetigen Filtration.

Zu bestimmen ist der Wert

$$v(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_y [g(Y(\tau)) - c\tau], \quad y \in (0, 1),$$

und eine optimale Stoppzeit τ^* mit

$$v(y) = \mathbb{E}_y [g(Y(\tau^*)) - c\tau^*], \quad y \in (0, 1).$$

Dabei sei die Auszahlungsfunktion $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und die linearen Kosten $c \in \mathbb{R}$ strikt positiv.

Annahme 5.7.1

Wir werden die folgenden Annahmen machen:

(A1) Für jedes $y \in (0, 1)$ existiere ein $\varepsilon_y > 0$, so dass gilt

$$\mathbb{E}_y \left[\sup_{t \geq 0} (g(Y(t)) - (c - \varepsilon)t) \right] < \infty.$$

(A2) Es existiert eine Folge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \searrow 0$, so dass für die Stoppzeiten

$$\rho_n = \inf \{t \geq 0 \mid Y(t) \notin (\varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n)\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $y \in (\varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n)$ gilt

$$\mathbb{E}_y [\rho_n] < \infty \quad \text{und} \quad P_y(\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \infty) = 1.$$

(A3) Es existiere eine Lösung $f_c \in \mathcal{C}^2((0, 1))$ von $L_Y f = c$, die erfüllt:

- (i) Es gilt $g - f_c \leq 0$ und es existieren genau zwei Nullstellen $0 < \varphi(c) < \psi(c) < 1$, d.h. $(g - f_c)(\varphi(c)) = (g - f_c)(\psi(c)) = 0$.
- (ii) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass g eingeschränkt auf $(0, \varphi(c) + \varepsilon)$ bzw. auf $(\psi(c) - \varepsilon, 1)$ eine \mathcal{C}^2 -Funktion ist.
- (iii) Für alle $y \in (0, 1) \setminus [\varphi(c), \psi(c)]$ gilt $L_Y g(y) \leq c$.

Lemma 5.7.2

Unter Bedingung (A1) gelten

$$v(y) < \infty \quad \text{und} \quad v(y) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}_\varepsilon(y)} \mathbb{E} [g(Y(\tau)) - c \tau]$$

für alle $y \in (0,1)$. Dabei bezeichnet

$$\mathcal{S}_\varepsilon(y) = \{ \tau \in \mathcal{S} \mid \mathbb{E}_y [\tau] < \infty \}.$$

Beweis: Sei $y \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\mathbb{E}_y [\sup_{t \geq 0} (g(Y(t)) - (c - \varepsilon)t)] < \infty.$$

Dann gilt insbesondere

$$\mathbb{E}_y [\sup_{t \geq 0} (g(Y(t)) - ct)] \leq \mathbb{E}_y [\sup_{t \geq 0} (g(Y(t)) - (c - \varepsilon)t)] < \infty.$$

Somit folgt für jede Stoppzeit $\tau \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{E}_y [g(Y(\tau)) - c \tau] < \mathbb{E}_y [\sup_{t \geq 0} (g(Y(t)) - ct)] < \infty$$

und damit $v(y) < \infty$. Sei nun τ eine Stoppzeit mit $\mathbb{E}_y [\tau] = \infty$. Dann gilt

$$\mathbb{E}_y [g(Y(\tau)) - c \tau] \leq \mathbb{E}_y [\sup_{t \geq 0} (g(Y(t)) - (c - \varepsilon)t)] - \varepsilon \mathbb{E}_y [\tau] = -\infty.$$

Somit genügt es, Stoppzeiten aus $\mathcal{S}_\varepsilon(y)$ zu betrachten. □

Lemma 5.7.3

Ist (A2) erfüllt, so gilt für alle $y \in (0,1)$ für jede Stoppzeit τ mit $\mathbb{E}_y [\tau] < \infty$ und jede nach unten beschränkte Lösung $f_c \in \mathcal{C}^2$ von $L_Y f = c$

$$\mathbb{E}_y [f_c(Y(\tau))] \leq f_c(y) + c \mathbb{E}_y [\tau].$$

Existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\tau \leq \tau_{\varepsilon, 1-\varepsilon}$ gilt, so ist die Gleichheit erfüllt.

Beweis: Seien $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen im Sinne von (A2) und τ eine Stoppzeit aus $\mathcal{S}_\varepsilon(y)$. Dann folgt für alle $y \in [\varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n]$ aus Dynkins Gleichung 5.2.5

$$\mathbb{E}_y [f_c(Y(\tau \wedge \rho_n))] = f_c(y) + c \mathbb{E}_y [\tau \wedge \rho_n].$$

Insbesondere ergibt sich so der zweite Teil der Behauptung. Im Allgemeinen folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y f_c(Y(\tau)) &= \mathbb{E}_y [\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_c(Y(\tau \wedge \rho_n))] \\ &\leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}_y [f_c(Y(\tau \wedge \rho_n))] \\ &= f_c(y) + c \mathbb{E}_y [Y(\tau)]. \end{aligned}$$

□

Theorem 5.7.4

Seien g nach unten beschränkt und $c > 0$. Sind die Annahmen (A1), (A2) und (A3) erfüllt, so wird für das Intervall

$$\mathcal{C}^* = (\varphi(c), \psi(c))$$

durch

$$\tau^* = \inf \{ t \geq 0 \mid Y(t) \notin \mathcal{C}^* \}$$

eine optimale Stoppzeit definiert. Für den optimalen Wert ergibt sich

$$v(y) = \begin{cases} f_c(y), & \text{falls } y \in \mathcal{C}^* \\ g(y), & \text{falls } y \in (0,1) \setminus \mathcal{C}^*. \end{cases}$$

Beweis: Es mögen (A1) bis (A3) mit den entsprechenden Notationen gelten. Seien ferner \mathcal{C}^* und τ^* wie in der Behauptung angegeben definiert. Wegen (A2) gilt auch $\mathbb{E}_y [\tau^*] < \infty$ für alle $y \in (0,1)$. Wir zeigen zuerst, dass τ^* optimal für alle $y \in \mathcal{C}^*$ ist.

Für jede Stoppzeit τ mit $\mathbb{E}_y [\tau] < \infty$ gilt nach Lemma 5.7.3 und (A3) (i)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y [g(Y(\tau)) - c\tau] &= \mathbb{E}_y [g(Y(\tau)) - f_c(Y(\tau)) + f_c(Y(\tau)) - c\tau] \\ &\leq 0 + f_c(y) \\ &= f_c(y). \end{aligned}$$

Da ein $\varepsilon > 0$ existiert, für das $0 < \varepsilon < \varphi(c) < \psi(c) < 1 - \varepsilon$ gilt, erhalten wir nach Lemma 5.7.3

$$\mathbb{E}_y [f_c(Y(\tau^*))] = f_c(y) + c \mathbb{E}_y [\tau^*]$$

und damit die Gleichheit in der vorherigen Abschätzung. Somit ist τ^* optimal und der optimale Wert

$$v(y) = \mathbb{E}_y [g(Y(\tau^*)) - c\tau^*] = f_c(y)$$

Als nächstes ist zu zeigen, dass ausserhalb von \mathcal{C}^* sofortiges Stoppen optimal ist. Sei also $y \in \mathcal{C}^*$. Sei $\tau \in \mathcal{S}_c(y)$ und $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stoppzeiten gemäß (A2). Dann gilt

$$g(Y(\tau \wedge \rho_n)) - c(\tau \wedge \rho_n) \geq \inf_{y \in (0,1)} g(y) - c\tau,$$

so dass wir unter (A1) mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\mathbb{E}_y [g(Y(\tau)) - c\tau] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n)) - c(\tau \wedge \rho_n)]$$

erhalten. Es sei nun $y > \psi(c)$. Zu der Stoppzeit

$$\rho = \inf \{ t \geq 0 \mid Y_t = \psi(c) \}$$

folgt nach Lemma 5.7.3, da nur $f_c 1_{[\psi(c), 1-\varepsilon_n]}$ zu betrachten ist,

$$\mathbb{E}_y [f_c(Y(\tau \wedge \rho_n \wedge \rho))] = f_c(y) + c \mathbb{E}_y [\tau \wedge \rho_n \wedge \rho].$$

Da ρ an einer Maximalstelle von $g - f_c$ stoppt, folgt ferner mit Lemma 5.7.3

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n)) - c(\tau \wedge \rho_n)] \\ & \leq \mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n)) - f_c(Y(\tau \wedge \rho_n))] + f_c(y) \\ & \leq \mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n \wedge \rho)) - f_c(Y(\tau \wedge \rho_n \wedge \rho))] + f_c(y) \\ & = \mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n \wedge \rho)) - c(\tau \wedge \rho_n \wedge \rho)]. \end{aligned}$$

Beschränktheit von g und $L_Y g \leq c$ auf $[\psi(c), 1 - \varepsilon_n]$ liefern

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n \wedge \rho))] & = g(y) + \int_0^{\tau \wedge \rho_n \wedge \rho} L_Y g(Y(t)) dt \\ & \leq g(y) + c \mathbb{E}_y [\tau \wedge \tau_n \wedge \rho]. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathbb{E}_y [g(Y(\tau \wedge \rho_n)) - c(\tau \wedge \rho_n)] \leq g(y)$$

und damit $v(y) \leq g(y)$. Also ist für $y \in (\psi(c), 1)$ sofortiges Stoppen optimal. Eine analoge Argumentation für $y \in (0, \varphi(c))$ liefert, dass auch für diese y sofortiges Stoppen optimal ist. Also gilt in diesen Bereichen

$$v(y) = \mathbb{E}_y [g(Y(0)) - c0] = g(y).$$

□

5.8 Optimale Kontrollstrategien

Wir wollen jetzt untersuchen, inwieweit wir Aussagen zur Optimalität von Kontrollstrategien in den von uns betrachteten Klassen der stark stationären Kontrollstrategien \mathcal{Z}_s und der Handelsstrategien \mathcal{H} machen können.

Theorem 5.6.14 ermöglicht es uns in der Menge der Handelsstrategien mit konstanten Stoppgrenzen, die wir in Definition 5.8.2 einführen werden, in einfacher Weise ein optimale zu bestimmen. Im folgenden Lemma geben wir die Bedingungen an, unter denen wir aus vier Parametern, zwei festen Wertanteile η_{-1} nach Verkauf und η_{+1} nach Kauf und zwei konstanten Stoppgrenzen π_{-1}, π_{+1} eine Handelsstrategie erhalten.

Lemma 5.8.1

Zu $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1} \in (0, 1)$ kann genau dann eine Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ definiert werden, wenn

$$\eta_{-1} \geq \eta_{+1}, \quad \pi_{-1} > \eta_{-1} \quad \text{und} \quad (1 - \delta)\eta_{+1} \geq \pi_{+1}$$

gelten.

Beweis: Mögen $\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1} \in (0, 1)$ die angegebenen Bedingungen erfüllen. Da π_{-1} und π_{+1} ausserhalb von $[\eta_{+1}, \eta_{-1}]$ liegen, erfolgt kein sofortiger Stopp nach einem Handel und die als Summe von Kopien von $\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}$ gegebene Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt. Da andererseits auch $1 > \pi_{-1}$ und $\pi_{+1} > 0$ gelten, sind die Erwartungswerte beschränkt. Es liegt also eine Folge von Handelszeiten im Sinne von Definition 5.4.1 vor.

Damit kann zu η_{-1}, η_{+1} und $\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}$ eine stark stationäre Kontrollstrategie der Form $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ nach Definition 5.6.4 eingeführt werden. Da auch $\pi_{-1} > (1 - \delta)\eta_{-1}$ und $\pi_{+1} \leq (1 - \delta)\eta_{+1}$ gelten, erfolgt beim Stopp in π_{-1} stets ein Verkauf und beim Stopp in π_{+1} stets ein Kauf. Es liegt also eine Handelsstrategie vor, da auch $P_{\eta_{-1}}(\pi(\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}) = \pi_{+1}) > 0$ gilt.

Ist umgekehrt eine der Bedingungen verletzt, so liegt keine Handelsstrategie vor. Ist nämlich $\eta_{-1} < \eta_{+1}$, so steht dies im Widerspruch zur Definition 5.6.4 einer stark stationären Kontrollstrategie. Gilt $\pi_{-1} \leq \eta_{-1}$, so würde nach einem Verkauf sofort immer wieder zu einem Verkauf gestoppt werden, da η_{-1} im Stoppgebiet läge. Da in diesem Fall alle folgenden Stoppzeiten zusammenfielen, wäre aber die Bedingung (ii) in der Definition 5.4.1 der Handelszeiten verletzt, d.h. es läge keine Kontrollstrategie vor. Ist schließlich $(1 - \delta)\eta_{+1} < \pi_{+1}$, so würde bei einem Stopp bei π_{+1} nach Definition 5.6.4 einer stark stationären Kontrollstrategie nicht gekauft werden, d.h. es läge keine Handelsstrategie vor. Damit sind die Bedingungen auch notwendig. \square

Durch das Lemma gerechtfertigt führen wir die folgenden Bezeichnungsweisen ein.

Definition 5.8.2

(i) Es bezeichne

$$\mathcal{A}_c = \{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) \in (0, 1) \mid \eta_{-1} \geq \eta_{+1}, \pi_{-1} > \eta_{-1}, (1 - \delta)\eta_{+1} \geq \pi_{+1}\}.$$

(ii) Eine *Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen* ist eine Handelsstrategie der Form $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$, für die $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$ in \mathcal{A}_c liegt.

Wir bezeichnen mit \mathcal{H}_c die Menge der Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen.

(iii) Ferner sei

$$R_{sc}^* = \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}) \in \mathcal{H}_c} R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})}$$

die *optimale asymptotische Rendite* in \mathcal{H}_c .

(iv) Zu $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) \in \mathcal{A}_c$ sei

$$f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) = r + \frac{\mathbb{E}_\nu [g(\eta_0, \tilde{\pi}(\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}))]}{\mathbb{E}_\nu [\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}]}$$

wobei ν das invariante Maß zur Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ bezeichne.

Die Wertanteile in \mathcal{A}_c entsprechen nach Lemma 5.8.1 also genau den Handelsstrategien mit konstanten Stoppgrenzen. Für diese lässt sich der Ausdruck in (iv) mit Hilfe des Satzes 5.2.7 und des Lemmas 5.3.6 sehr gut bestimmen. Er lässt sich mit Hilfe dieser beiden Resultate sogar in expliziter Gestalt angeben.

Von diesem Ausdruck haben wir aber in Theorem 5.6.14 gezeigt, dass er der asymptotischen Rendite der Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ entspricht. Somit erhalten wir als Korollar zu Theorem 5.6.14 das folgende Theorem.

Theorem 5.8.3

Existiert $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*) \in \mathcal{A}_c$ so, dass

$$f_R(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*) = \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) \in \mathcal{A}_c} f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$$

gilt, so ist $R_{sc}^* = f_R(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*)$, d.h.

$$R_{sc}^* = r + \frac{\mathbb{E}_{\nu^*} [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*}))]}{\mathbb{E}_{\nu^*} [\tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*}]}$$

wobei ν^* das invariante Maß zur Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*})$ bezeichne.

Beweis: Sei $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*) \in \mathcal{A}_c$ mit

$$f_R(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*) = \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) \in \mathcal{A}_c} f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$$

Nach Lemma 5.8.1 können wir \mathcal{A}_c mit \mathcal{H}_c identifizieren. Somit gilt auch für die zugehörige Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*})$ nach Theorem 5.6.14

$$\begin{aligned} R^{(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*})} &= f_R(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*) \\ &= \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) \in \mathcal{A}_c} f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) \\ &= \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}) \in \mathcal{H}_c} R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})} \\ &= R_{sc}^*, \end{aligned}$$

so dass die Behauptung folgt. \square

Wie bereits angemerkt, lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{--} , p_{-+} bei Start in η_{-1} und p_{+-} , p_{++} bei Start in η_{+1} , durch die das invariante Maß ν nach Satz 5.6.8 bestimmt ist, nach Satz 5.2.7 mit Hilfe der Darstellungen in Lemma 5.3.6 numerisch gut bestimmen, so dass $f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$ gut berechenbar ist.

Damit können wir durch Maximierung dieses Ausdrucks wie in Theorem 5.8.3 angeben die optimale asymptotische Rendite in der Menge der Handelsstrategien mit konstanten Stoppgrenzen in handhabbarer Weise bestimmen. Darin liegt die Bedeutung der Theoreme 5.6.14 und 5.8.3.

Angemerkt sei, dass wir für dieses Resultat die Überlegungen des vorherigen Abschnittes nicht benötigt hätten. Es stellt sich jetzt aber natürlich die Frage, ob wir durch die Bestimmung von R_{sc}^* und $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*)$ gemäß Theorem 5.8.3 bereits die optimale asymptotische Rendite in der Menge \mathcal{Z}_s der stark stationären Kontrollstrategien und eine optimale Handelsstrategie in \mathcal{Z}_s gefunden haben. Für die Untersuchung dieser Fragestellung nutzen wir die Resultate aus Abschnitt 5.7.

Wie am Ende von Abschnitt 5.6 gezeigt, haben wir bei der Suche nach der optimalen asymptotischen Rendite wie folgt vorzugehen. Es ist R_s^* und eine Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ so zu bestimmen, dass

$$R_s^* = r + \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) \in \mathcal{H}} \frac{\mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau))] }{\mathbb{E}_\nu [\tau]} = r + \frac{\mathbb{E}_{\nu^*} [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau^*))]}{\mathbb{E}_{\nu^*} [\tau^*]},$$

gilt, wobei ν^* die invariante Verteilung zu $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ bezeichne.

Wir haben auch gezeigt, dass sich das Problem wie folgt umschreiben lässt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sup_{(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) \in \mathcal{H}} \left(p_{-1} \mathbb{E}_{\eta_{-1}} [g(\eta_{-1}, \tilde{\pi}(\tau)) - (R_s^* - r)\tau] \right. \\ &\quad \left. + p_{+1} \mathbb{E}_{\eta_{+1}} [g(\eta_{+1}, \tilde{\pi}(\tau)) - (R_s^* - r)\tau] \right), \end{aligned}$$

wobei eine Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ so zu bestimmen ist, dass die Gleichheit gilt. Wir haben somit als Teilaufgabe zu gegebenen η_{-1}, η_{+1} und R für den Wertanteilprozess ohne Handel $(\tilde{\pi}(t))_{t \geq 0}$, einem Diffusionsprozess in $(0, 1)$ mit nach Satz 5.3.4 und Lemma 5.3.6 bekannter Dynamik und bekanntem Erzeuger L_π , ein Problem des optimalen Stoppens der Form

$$v(\pi) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_\pi [\tilde{g}(\tilde{\pi}(\tau)) - (R - r)\tau], \quad \eta_0 \in (0, 1),$$

mit linearen Kosten $R - r$ und unterhalbstetiger Auszahlungsfunktion

$$\tilde{g} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}(\pi) = \log \left(\frac{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi}{(1 - \pi)(1 + \varphi_a(\pi) \gamma \varphi_\eta(\pi))} \right)$$

zu lösen. Dabei ist $g(\eta, \pi) = \tilde{g}(\pi) + \log(1 - \eta)$ für $\eta, \pi \in (0, 1)$.

Das Theorem 5.7.4 erlaubt uns, Bedingungen zu formulieren, unter denen eine Lösung h_{R-r} von $L_\pi h = R - r$ eine Lösung dieses Stoppproblems liefert.

Satz 5.8.4

Seien $\eta_{-1}, \eta_{+1} \in (0, 1)$, $\eta_{+1} \leq \eta_{-1}$, und $R > \max\{r, \mu - \frac{\sigma^2}{2}\}$. Angenommen, $\pi_{-1}, \pi_{+1} \in (0, 1)$ erfüllen die folgenden Bedingungen:

- (i) $\pi_{-1} > (1 - \delta)\eta_{-1}$ und $(1 - \delta)\eta_{+1} > \pi_{+1}$.
- (ii) Es existiert eine Lösung h_{R-r} von $L_\pi h = R - r$, für die

$$(\tilde{g} - h_{R-r})(\pi_{-1}) = (\tilde{g} - h_{R-r})(\pi_{+1}) = 0$$

und

$$h_{R-r} \geq \tilde{g} \quad \text{auf} \quad (0, 1)$$

erfüllt sind.

- (iii) $L_\pi \tilde{g}(\pi) \leq R - r$ für alle $\pi \in (0, 1) \setminus [\pi_{+1}, \pi_{-1}]$.

Dann ist die Stoppzeit

$$\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}} = \inf \{ t \geq 0 \mid \tilde{\pi}(t) \notin (\pi_{-1}, \pi_{+1}) \}$$

optimal, d.h.

$$v(\pi) = \sup_{\tau \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_\pi [\tilde{g}(\tilde{\pi}(\tau)) - (R - r)\tau] = \mathbb{E}_\pi [\tilde{g}(\tilde{\pi}(\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})) - (R - r)\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}]$$

für alle $\pi \in (0, 1)$.

Beweis: Seien η_{-1} , η_{+1} und R wie gefordert gegeben und die Bedingungen (i) - (iii) erfüllt. Wir haben die Voraussetzungen von Theorem 5.7.4 für die Kosten $c = R - r$ und die Auszahlungsfunktion \tilde{g} nachzuprüfen.

Nach Bemerkung 5.6.5 (iii) gilt für alle $\pi \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\pi) &= \log \left(\frac{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi}{(1 - \varphi_a(\pi) \gamma \varphi_\eta(\pi))(1 - \pi)} \right) \\ &\leq -\log(1 - \pi).\end{aligned}$$

Die Bedingung (A1) ist erfüllt, da laut Voraussetzung $R > \max\{r, \mu - \frac{\sigma^2}{2}\}$ gilt, so dass ein $\varepsilon > 0$ mit $\min\{R - r, R - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\} > \varepsilon$ existiert. Zu diesem ε erhalten wir unter P_π mit der Abschätzung für \tilde{g} unter Beachtung von Lemma 5.3.3

$$\frac{1 - \pi}{1 - \tilde{\pi}(t)} e^{rt} = (1 - \pi) e^{rt} + \pi e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)}$$

für $t \geq 0$ und damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\pi}(t)) - (R - r - \varepsilon)t + \log(1 - \pi) &\leq \log \left(\frac{(1 - \pi) e^{-(R - r - \varepsilon)t}}{1 - \tilde{\pi}(t)} \right) \\ &= \log \left((1 - \pi) e^{-(R - r - \varepsilon)t} + \pi e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - R + \varepsilon)t + \sigma W(t)} \right) \\ &\leq \log \left(2 \max\{e^{-(R - r - \varepsilon)t}, e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - R + \varepsilon)t + \sigma W(t)}\} \right) \\ &\leq \log(2) + \max\{0, (\mu - \frac{\sigma^2}{2} - R + \varepsilon)t + \sigma W(t)\} \\ &= \log(2) + \left((\mu - \frac{\sigma^2}{2} - R + \varepsilon)t + \sigma W(t) \right)^+.\end{aligned}$$

Wegen $\mu - \frac{\sigma^2}{2} - R + \varepsilon < 0$ folgt damit

$$E_\pi \left[\sup_{t \geq 0} (\tilde{g}(\tilde{\pi}(t)) - (R - r - \varepsilon)t) \right] < \infty$$

für alle $\pi \in (0, 1)$.

Auch (A2) ist in unserer Situation erfüllt: Da nach Lemma 5.3.6 Lösungen von $L_\pi h_0 = 0$ und von $L_\pi h_1 = 1$ existieren, können wir die Erwartungswerte der Stoppzeiten $\tau_{\varepsilon, 1 - \varepsilon}$ zu jedem $\varepsilon > 0$ nach Satz 5.2.7 bestimmen. Unter Ausnutzung der Eigenschaften von h_0 folgt für alle $\pi \in (0, 1)$ auch $P_\pi(\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_{\varepsilon_n, 1 - \varepsilon_n} = \infty) = 1$ für $\varepsilon_n \searrow 0$.

Mit $\varphi(R - r) = \pi_{+1}$ und $\psi(R - r) = \pi_{-1}$ und $h_{R-r} \geq \tilde{g}$ folgt (A3)(i) und ebenso folgt (A3)(iii) direkt aus den Voraussetzungen. (A3)(ii) ergibt sich schließlich aus $\pi_{-1} > (1 - \delta)\eta_{-1}$ und $\pi_{+1} < (1 - \delta)\eta_{+1}$, da \tilde{g} eingeschränkt auf $(0, (1 - \delta)\eta_{+1})$ bzw. auf $((1 - \delta)\eta_{-1}, 1)$ eine \mathcal{C}^2 Funktion ist.

Ferner ist \tilde{g} nach unten beschränkt:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\pi) &= \log \left(\frac{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi}{(1 + \varphi_a(\pi) \gamma \varphi_\eta(\pi))(1 - \pi)} \right) \\ &\geq \log(1 - \delta - \gamma) - \log(1 + \gamma).\end{aligned}$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Theorem 5.7.4 erfüllt. \square

Definition 5.8.5

Erfüllen η_{-1}, η_{+1}, R und π_{-1}, π_{+1} die Voraussetzungen von Satz 5.8.4 und liegt auch $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$ in \mathcal{A}_c , so nennen wir π_{-1} und π_{+1} die *optimalen Stoppgrenzen zu η_{-1}, η_{+1} und R* .

Existieren optimale Stoppgrenzen π_{-1}, π_{+1} , so sind diese unabhängig vom Startwert, d.h. τ^* hat sowohl unter $P_{\eta_{-1}}$ als auch unter $P_{\eta_{+1}}$ die Gestalt $\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}$. Somit führt das Problem der Bestimmung einer optimalen Strategie in \mathcal{H} zu gegebenen η_{-1} und η_{+1} auf eine Handelsstrategie mit konstanten Wertanteilen, falls optimale Stoppgrenzen π_{-1}, π_{+1} zu allen η_{-1}, η_{+1} und geeigneten R existieren.

Bemerkung 5.8.6

Zum direkten Nachweis, dass eine Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen für R_s^* optimal ist, wäre zu zeigen, dass zu allen in Frage kommenden Werten η_{-1}, η_{+1} und R optimale Stoppgrenzen existieren, um sich dann auf die Maximierung in \mathcal{H}_c gemäß Theorem 5.8.3 zurückziehen zu können. Dazu wären die Lösungsscharen von $L_\pi f = R - r$ für alle geeigneten R genau zu untersuchen und zu zeigen, dass jeweils eine Lösung bestimmbar ist, die die Bedingungen in Satz 5.8.4 erfüllt. Dass dies möglich ist, legt ein Ansatz in Paulsen (2001) nahe, durch Wahl zweier geeigneter Lösungen eine mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren. Das Verfahren würde in unserer Situation aber dadurch erschwert, dass der Nachweis für alle geeigneten η_{-1}, η_{+1} und R zu erbringen wäre, wobei auch noch zu klären wäre, was *geeignet* bedeutet.

Die Voraussetzungen von Satz 5.8.4 legen den Ansatz zur Bestimmung einer Lösung über ein freies Randwertproblem nahe. Der Ansatz hätte bei fixen und proportionalen Kosten wie in Teil (ii) der folgenden Bemerkung beschrieben zu erfolgen. In Teil (i) werden wir diesen Zugang mit dem von uns in Theorem 5.8.3 gewählten Zugang vergleichen.

Bemerkung 5.8.7

- (i) Zu geeignetem R bezeichne h_{c_0, c_1} die durch Parameter $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ (vergleiche Lemma 5.3.6) charakterisierte Lösung von $L_\pi h = R - r$. Dann sind $c_0, c_1, \eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}$ so zu bestimmen, dass gelten

$$\begin{aligned} h_{c_0, c_1}(\pi_{-1}) &= \tilde{g}(\pi_{-1}), & h'_{c_0, c_1}(\pi_{-1}) &= \tilde{g}'(\pi_{-1}), \\ h_{c_0, c_1}(\pi_{+1}) &= \tilde{g}(\pi_{+1}), & h'_{c_0, c_1}(\pi_{+1}) &= \tilde{g}'(\pi_{+1}), \\ h_{c_0, c_1}((1 - \delta)\eta_{-1}) &= \tilde{g}((1 - \delta)\eta_{-1}) & \left(= -\log(1 - (1 - \delta)\eta_{-1}) \right), \\ h_{c_0, c_1}((1 - \delta)\eta_{+1}) &= \tilde{g}((1 - \delta)\eta_{+1}). \end{aligned}$$

Kann eine Lösung zu jedem geeignetem R gefunden werden, die auch die Voraussetzungen von Satz 5.8.4 erfüllt, und bezeichne v_R die Lösung des zugehörigen Stoppproblems, so kann die optimale Rendite als Lösung von

$$0 = \sup_R \left(p_{-1}(\log(1 - \eta_{-1}) + v_R(\eta_{-1})) + p_{+1}(\log(1 - \eta_{+1}) + v_R(\eta_{+1})) \right)$$

bestimmt werden, wobei η_{-1}, η_{+1} jeweils die Wertanteile mit invarianter Verteilung (p_{-1}, p_{+1}) bezeichnen, die zu R im ersten Lösungsschritt bestimmt wurden.

Da die Lösung eines geeigneten freien Randwertproblems noch nicht hinreichend für die Lösung des optimalen Stoppproblems ist, ist die Formulierung eines Verifikationsssatzes wie Satz 5.8.4 bzw. Theorem 5.7.4 nötig, um eine Optimalitätsaussage treffen zu können.

Durch den Ansatz des Randwertproblems wird implizit bereits angenommen, dass sich als Lösung eine Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen ergibt. Um ohne weitere Annahmen wirklich die Existenz einer optimalen Strategie in \mathcal{Z}_s nachzuweisen, ist ein entsprechendes und ebenso schwieriges Vorgehen wie in Bemerkung 5.8.6 erforderlich.

- (ii) Der in (i) beschriebene Ansatz über die Lösung des freien Randwertproblems führt somit zu keinen Verbesserungen. Damit ist der von uns in Theorem 5.8.3 beschriebene Weg vorzuziehen. Dort ist nur die Maximierung einer explizit angebbaren Funktion in vier Variablen durchzuführen. Diese liefert bei erfolgreicher Maximierung optimale Werte $\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*$ und R_{sc}^* , zu denen sich eine Lösung von $L_\pi h = R_{sc}^* - r$ durch Lösung von

$$h_{c_0, c_1}(\pi_{-1}^*) = \tilde{g}(\pi_{-1}^*) \quad \text{und} \quad h_{c_0, c_1}(\pi_{+1}^*) = \tilde{g}(\pi_{+1}^*)$$

in c_0, c_1 bestimmen lässt, für die sich die Voraussetzungen von Satz 5.8.4 dann im konkreten Fall nachprüfen lassen. Dieses Vorgehen ist numerisch deutlich einfacher als die direkte Lösung der in (i) angegebenen 7 Gleichungen.

Unter einer sehr schwachen Voraussetzung an die Transaktionskosten können wir noch festhalten, dass der optimale Wertanteil ohne Transaktionskosten unter Annahme 5.3.1 im Fortsetzungsgebiet liegen muss.

Lemma 5.8.8

Gilt für eine Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$

$$\frac{\sigma^2}{8} \left(\frac{\gamma}{(1 - \delta - \gamma)} \right)^2 < r \quad \text{und} \quad \eta_{opt} \notin \{(1 - \delta)\eta_{-1}, (1 - \delta)\eta_{+1}\},$$

so liegt der optimale Wertanteil ohne Transaktionskosten $\eta_{opt} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$ im Fortsetzungsgebiet, d.h. Stoppen in η_{opt} ist nicht optimal.

Beweis: Seien φ_a, φ_η die im Sinne von Definition 5.6.4 zur Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ gehörigen Funktionen. Für die Auszahlungsfunktion

$$\tilde{g} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi \mapsto \log \left(\frac{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi}{(1 - \pi)(1 + \varphi_a(\pi) \gamma \varphi_\eta(\pi))} \right)$$

in unserem Stoppproblem bestimmen sich auf $(0, 1) \setminus \{(1 - \delta)\eta_{-1}, (1 - \delta)\eta_{+1}\}$ die Ableitungen zu

$$\tilde{g}'(\pi) = \frac{1}{1 - \pi} + \frac{\varphi_a(\pi) \gamma}{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi}$$

und

$$\tilde{g}''(\pi) = \frac{1}{(1 - \pi)^2} - \frac{\gamma^2}{(1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi)^2}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} L_\pi \tilde{g}(\pi) &= \sigma^2 \pi (\eta_{opt} - \frac{1}{2} \pi) \\ &\quad + \gamma \sigma^2 \pi (1 - \pi) \left(\frac{\varphi_a(\pi) (\eta_{opt} - \pi)}{1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\gamma (1 - \pi) \pi}{(1 - (\varphi_a(\pi))^2 \delta + \varphi_a(\pi) \gamma \pi)^2} \right), \end{aligned}$$

und wir erhalten insbesondere für $\eta_{opt} = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$

$$\begin{aligned} L_\pi \tilde{g}(\eta_{opt}) &= \frac{1}{2} \sigma^2 \eta_{opt}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \sigma (1 - \eta_{opt}) \eta_{opt}}{1 - (\varphi_a(\eta_{opt}))^2 \delta + \varphi_a(\eta_{opt}) \gamma \eta_{opt}} \right)^2 \\ &\geq R_{opt} - \frac{1}{8} \left(\frac{\gamma \sigma}{1 - \delta - \gamma} \right)^2, \end{aligned}$$

wobei wir die optimale asymptotische Rendite ohne Transaktionskosten $R_{opt} = \frac{\mu-r}{\sigma^2}$ eingesetzt und $\eta_{opt} \in (0, 1)$, $\eta_{opt}(1 - \eta_{opt}) \leq \frac{1}{4}$ ausgenutzt haben. Wegen $R_{opt} \geq R_s^*$ folgt unter der Voraussetzung an die Transaktionskosten

$$L_\pi \tilde{g}(\eta_{opt}) > R_s^* - r.$$

Somit liegt η_{opt} im Fortsetzungsgebiet, siehe z.B. die Bemerkung nach Theorem 10.1.12 in Øksendal (2000). \square

Bemerkung 5.8.9 (Konstante Kosten)

Wie in Bemerkung 5.5.8 erwähnt, können wir bei der Berücksichtigung konstanter Kosten auch eine Faktorisierung der Wertentwicklung erreichen. Allerdings hängt der Wertzuwachs dann nicht nur vom Wertanteil sondern auch vom Wert selber ab - ganz in Analogie zum Binomialmodell.

Daher würde eine sinnvolle Formulierung stark stationärer Kontrollstrategien vom Wert und vom Wertanteil abhängen. Damit wäre nicht mehr garantiert, dass eine Rekurrenzbedingung erfüllt ist, wie wir sie zum Beweis von Theorem 5.6.13 ausgenutzt haben. Deshalb ist auch nicht davon auszugehen, dass Kontrollstrategien mit nur zwei festen Wertanteilen η_{-1}, η_{+1} für Verkauf und Kauf optimal wären. Da die Bedeutung des konstanten Anteils mit dem wachsenden Gesamtwert abnimmt, ist zu vermuten, dass zeitabhängige Strategien zu betrachten sind.

Setzt man doch zwei feste Wertanteile η_{-1}, η_{+1} an, so lässt sich das Problem entsprechend bis zur Darstellung in Theorem 5.6.14 vereinfachen. Allerdings ist das an dieser Stelle dann auftretende Stoppproblem ein Stoppproblem mit nichtlinearen Kosten, da im Wertzuwachs anstatt der fixen Kosten δ ein Term der Form

$$\frac{C}{\tilde{X}(t)} = \frac{(1 - \tilde{\pi}(t)) C e^{-r t}}{x(1 - \pi)}$$

bei Start in $x > 0$ und $\pi \in (0, 1)$ auftritt, also eine explizite Zeitabhängigkeit vorliegt. Somit wird auch hier eine zeitabhängige optimale Kontrollstrategie zu erwarten sein.

Schließlich könnten wir die 'konstanten' Kosten so modellieren, dass sie sich mit der Zeit verzinsen. In diesem Fall würde dann wegen

$$\frac{C e^{r t}}{\tilde{X}(t)} = \frac{(1 - \tilde{\pi}(t)) C}{x(1 - \pi)}$$

keine explizite Zeitabhängigkeit vorliegen, so dass in der Klasse der Strategien mit festen Wertanteilen nach Kauf bzw. Verkauf eine optimale Strategie mit konstanten Stoppgrenzen zu erwarten wäre, die aber wie oben ausgeführt in der Klasse der stationären Kontrollstrategien sicher nicht mehr optimal wäre.

Bei fixen und proportionalen Kosten liegt es im Hinblick auf Satz 5.8.4 aber in jedem Fall nahe, Kontrollstrategien mit konstanten Stoppgrenzen zu betrachten. Abschließend zeigen wir, dass im Fall der Existenz einer optimalen Handelsstrategie, diese tatsächlich eine Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen ist, d.h. gemäß Theorem 5.8.3 bestimmt werden kann.

Theorem 5.8.10

Existiert eine optimale Handelsstrategie in \mathcal{Z}_s und ist $R_s^ > \max\{r, \mu - \frac{\sigma^2}{2}\}$, so gilt*

$$R_s^* = R_{sc}^*$$

und R_s^ wird von einer Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen angenommen.*

Beweis: Seien $R_s^* > \max\{r, \mu - \frac{\sigma^2}{2}\}$ und $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ eine Handelsstrategie mit

$$R^{(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)} = R_s^*.$$

Dann löst τ^* nach den Ausführungen vor Satz 5.8.4 für die Startwerte η_{-1}^* und η_{+1}^* das Stoppproblem

$$v(\pi_0) = \sup_{\tau} E_{\pi} [\tilde{g}(\tilde{\pi}(\tau)) - (R_s^* - r)\tau].$$

Dieses Stoppproblem kann zu

$$G : (0, 1) \times [0, \infty), \quad G(\pi, t) = \tilde{g}(\pi) - (R - r)t$$

als Spezialfall der Aufgabe des optimalen Stoppens

$$V(\pi, s) = \sup_{\tau} E_{\pi} [G(\tilde{\pi}(\tau), s + \tau)] = \sup_{\tau} E_{(\pi, s)} [G(Z(\tau))], \quad \pi \in (0, 1), \quad s \geq 0$$

für den Raum-Zeit-Prozess $(Z(t))_{t \geq 0}$ aufgefasst werden. Dieser hat unter allen $P_{(\pi, s)}$ die Gestalt

$$Z(0) = (\pi, s) \quad \text{und} \quad Z(t) = (\tilde{\pi}(t), s + t), \quad t \geq 0.$$

Wie in Lemma 5.6.7 (ii) erhalten wir unter allen $P_{(\eta_0, s)}$ für G die Abschätzungen

$$G(Z(t)) \leq -\log(1 - \pi(t)) - (R - r)(s + t),$$

und wie im Beweis von Satz 5.8.4 gilt wegen $R_s^* > \max\{r, \mu - \frac{\sigma^2}{2}\}$ für alle $\pi \in (0, 1)$, $s \geq 0$

$$E_{(\pi, s)} [\sup_{t \geq 0} (G(Z(t)))] < \infty,$$

so dass das Stoppproblem wohldefiniert ist. Beachten wir

$$\begin{aligned} V(\pi, s) &= \sup_{\tau} E_{\pi} [G(\tilde{\pi}(\tau), s + \tau)] \\ &= \sup_{\tau} E_{\pi} [G(\tilde{\pi}(\tau), \tau)] - (R - r)s, \end{aligned}$$

so erkennen wir, dass V die Gestalt

$$V(\pi, s) = v(\pi) - (R - r)s$$

haben muss. Da g unterhalbstetig und nach unten beschränkt ist, hat das Fortsetzungsgebiet bei Start in s die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ (\pi, t) \in (0, 1) \times [0, \infty) \mid V(\pi, t + s) > G(\pi, t + s) \} \\ &= \{ (\pi, t) \in (0, 1) \times [0, \infty) \mid v(\pi) - (R - r)(t + s) > \tilde{g}(\pi) - (R - r)(t + s) \} \\ &= \{ \pi \in (0, 1) \mid v(\pi) > \tilde{g}(\pi) \} \times [0, \infty). \end{aligned}$$

Also gilt für $\mathcal{C}^* = \{ \pi \in (0, 1) \mid v(\pi) > \tilde{g}(\pi) \}$, dass

$$\tau_{\mathcal{C}^*} = \inf \{ t \geq 0 \mid \tilde{\pi}(t) \notin \mathcal{C}^* \} = \inf \{ t \geq 0 \mid Z(t) \notin \mathcal{C} \}$$

optimal für das Stoppproblem ist. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass τ^* für alle Startwerte (nicht nur für η_{-1}^*, η_{+1}^*) mit $\tau_{\mathcal{C}^*}$ übereinstimmt.

Da wir wissen, dass $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ eine Handelsstrategie ist, gilt

$$((1 - \delta)\eta_{+1}^*, (1 - \delta)\eta_{-1}^*) \subseteq \mathcal{C}^*.$$

Außerdem liegt wegen der Bedingung an die Handelszeiten, dass kein sofortiger Stopp erfolgt, und da \mathcal{C}^* offen ist, eine Umgebung von η_{-1}^* in \mathcal{C}^* . Setzen wir

$$\begin{aligned} \pi_{-1} &= \inf \{ \pi > \eta_{-1}^* \mid \pi \notin \mathcal{C}^* \} \wedge 1, \\ \pi_{+1} &= \sup \{ \pi \leq (1 - \delta)\eta_{+1}^* \mid \pi \notin \mathcal{C}^* \} \vee 0, \end{aligned}$$

so gelten $\pi_{+1} > 0$ und $\pi_{-1} < 1$, da ansonsten $E_{\eta_{+1}}[\tau^*] = \infty$ bzw. $E_{\eta_{-1}}[\tau^*] = \infty$ im Widerspruch zu der Definition der Handelszeiten folgen würde. Also gilt insgesamt

$$0 < \pi_{+1} \leq (1 - \delta)\eta_{+1}^* \leq \eta_{-1}^* < \pi_{-1} < 1$$

Damit liegt $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}, \pi_{+1})$ in \mathcal{A}_c , d.h. es kann nach Lemma 5.8.1 eine zugehörige Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ mit festen Stoppgrenzen gebildet werden. Es bleibt zu zeigen, dass das Fortsetzungsgebiet zwischen π_{+1} und π_{-1} zusammenhängend ist. Nach den bisherigen Ausführungen wissen wir, dass ein $\varepsilon > 0$ derart existiert, dass gilt

$$(\pi_{+1}, (1 - \delta)\eta_{-1}^*) \cup (\eta_{-1}^* - \varepsilon, \pi_{-1}) \subseteq \mathcal{C}^*.$$

Sei η_0 aus $[(1 - \delta)\eta_{-1}^*, \eta_{-1}^* - \varepsilon]$. Angenommen η_0 läge nicht in \mathcal{C}^* . Dann wäre aber für die Handelsart A_1 der Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{\eta_{-1}}(A_1 = +1) = 0$ im Widerspruch zur Definition einer Handelsstrategie. Somit gilt

$$(\pi_{+1}, \pi_{-1}) \subseteq \mathcal{C}^*.$$

Da auch η_{-1}^* und η_{+1}^* in \mathcal{C}^* liegen, führt die Stoppzeit $\tau_{\pi_{-1}, \pi_{+1}}$ zu dem gleichen optimalen Wert und den gleichen Übergangswahrscheinlichkeiten wie τ^* , so dass die Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ mit konstanten Stoppgrenzen und die optimale Handelsstrategie $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)$ die gleiche asymptotische Rendite besitzen. Damit folgt

$$R_{sc}^* \leq R_s^* = R^{(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau^*)} = R^{(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})} \leq R_{sc}^*$$

und damit die Behauptung. \square

5.9 Beispiele

Wir wollen in diesem Abschnitt zur Veranschaulichung die Resultate dieses Kapitels um verschieden Beispiele ergänzen. Wir bestimmen jeweils die optimale Lösung in der Menge der Handelsstrategien mit konstanten Stoppgrenzen, indem wir Theorem 5.8.3 folgend

$$f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}) = r + \frac{\mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}))]}{\mathbb{E}_\nu [\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}]}$$

über \mathcal{A}_c maximieren. Für eine Maximalstelle $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*) \in \mathcal{A}_c$ gilt dann

$$R_{sc}^* = f_R(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \pi_{-1}^*, \pi_{+1}^*).$$

Die auf diese Weise bestimmten optimalen Handelsstrategien mit konstanten Stoppgrenzen werden wir auch kurz als optimale Handelsstrategie bezeichnen.

Dass wir eine optimale Handelsstrategie numerisch gut bestimmen können, liegt daran, dass $f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$ in expliziter Gestalt vorliegt. Der Zähler ergibt sich mit den Bezeichnungen aus Satz 5.6.8 (ii) zu

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\nu [g(\pi_0, \tilde{\pi}(\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}))] &= p_{-1}p_{--} \frac{(1 - \eta_{-1})(1 - \delta - \gamma \pi_{-1})}{(1 - \pi_{-1})(1 - \gamma \eta_{-1})} \\ &\quad p_{-1}p_{-+} \frac{(1 - \eta_{-1})(1 - \delta + \gamma \pi_{+1})}{(1 - \pi_{+1})(1 + \gamma \eta_{+1})} \\ &\quad p_{+1}p_{+-} \frac{(1 - \eta_{+1})(1 - \delta - \gamma \pi_{-1})}{(1 - \pi_{-1})(1 - \gamma \eta_{-1})} \\ &\quad p_{+1}p_{++} \frac{(1 - \eta_{+1})(1 - \delta + \gamma \pi_{+1})}{(1 - \pi_{+1})(1 + \gamma \eta_{+1})}. \end{aligned}$$

Für den Nenner gilt

$$\mathbb{E}_\nu [\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}] = p_{-1} \mathbb{E}_{\eta_{-1}} [\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}] + p_{+1} \mathbb{E}_{\eta_{+1}} [\tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}] .$$

Dabei liegen die Übergangswahrscheinlichkeiten und die erwarteten Stoppzeiten gemäß Satz 5.2.7 – ausgedrückt durch die in Lemma 5.3.6 angegebenen Funktionen h_0 und h_1 – in expliziter Form vor.

Zur Vergleichbarkeit werden wir im gesamten Kapitel dasselbe Black-Scholes Modell betrachten, gegeben durch die folgenden Parameter.

Voraussetzung 5.9.1

Es seien

$$\mu = 0.131, \quad \sigma = 0.4, \quad \text{und} \quad r = 0.035.$$

Zu den Werten in 5.9.1 berechnen sich im Modell ohne Transaktionskosten der optimale Wertanteil und die optimale asymptotische Rendite zu

$$\eta_{opt} = \frac{\mu - r}{\sigma^2} = 0.600 \quad \text{und} \quad R_{opt} = r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} = 0.638.$$

Im ersten Beispiel werden wir die optimale Handelsstrategie in einem Modell mit rein fixen Transaktionskosten, d.h. mit proportionalen Kosten $\gamma = 0$, und in einem Modell mit fixen plus proportionalen Kosten bestimmen und den Zusammenhang zur Lösung des freien Randwertproblems aus Bemerkung 5.8.7 aufzeigen.

Beispiel 5.9.2

- (i) Zu fixen Transaktionskosten $\delta_0 = 0.0001$ und ohne proportionale Kosten, d.h. $\gamma = 0$, ergeben sich als Lösung der Maximierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \pi_{-1}^o &= 0.6887, \\ \eta_{-1}^o = \eta_{+1}^o &= 0.6002, \\ \pi_{+1}^o &= 0.5076, \end{aligned}$$

und, da $(\eta_{-1}^o, \eta_{+1}^o, \pi_{-1}^o, \pi_{+1}^o)$ in \mathcal{A}_c liegt, gilt nach Theorem 5.8.3 auch

$$R_{sc}^* = R^{(\eta_{-1}^o, \eta_{+1}^o, \tau_{\pi_{+1}^o, \pi_{-1}^o})} = 0.06358.$$

Mit Satz 5.2.7 können wir zu $\eta^o = \eta_{-1}^o = \eta_{+1}^o$ die erwartete Zwischenhandelszeit bestimmen:

$$E_{\eta^o} [\tau_{\pi_{+1}^o, \pi_{-1}^o}] = 0.9110.$$

Die Höhe dieses Erwartungswertes kann als ein wichtiger Kritikpunkt am Modell mit rein fixen Transaktionskosten angesehen werden.

Die optimalen Parameter im zugehörigen freien Randwertproblem sind

$$c_0 = -5.739 \quad \text{und} \quad c_1 = 6.432$$

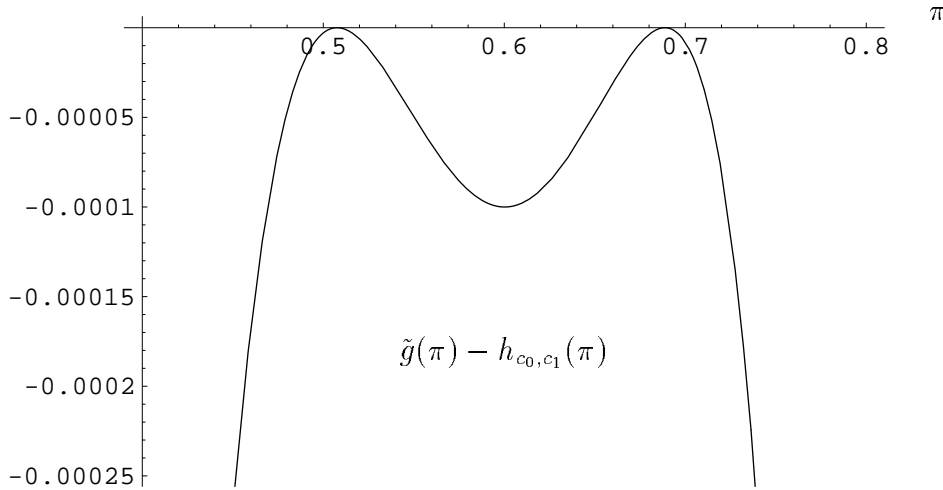


Abbildung 5.1: Zum Randwertproblem im Beispiel 5.9.2 (i)

und Abbildung 5.1 zeigt die Differenz $g^\circ - h_{c_0, c_1}$ zur Auszahlungsfunktion $g^\circ : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g^\circ(\pi) = \begin{cases} \log(1 - \pi) & \pi \in ((1 - \delta_0)\eta_{+1}^0, (1 - \delta_0)\eta_{-1}^0), \\ \log(1 - \delta_0) - \log(1 - \pi) & \text{sonst} . \end{cases}$$

Die Gültigkeit der Voraussetzungen von Satz 5.8.4 lässt sich gut erkennen.

- (ii) Führen wir zusätzlich zu den fixen Kosten $\delta_0 = 0.0001$ proportionale Transaktionskosten $\gamma = 0.003$ ein, so erhalten wir die optimalen Werte

$$\begin{aligned} \pi_{-1}^* &= 0.7081, \\ \eta_{-1}^* &= 0.6338, \\ \eta_{+1}^* &= 0.5680, \\ \pi_{+1}^* &= 0.4876, \\ R_{sc}^* &= 0.06335 \end{aligned}$$

und zur invarianten Verteilung ν^* zu $(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*})$ für die erwartete Zwischenhandelszeit

$$E_{\nu^*} [\tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*}] = 1.2501.$$

Da wir eine zusätzliche Kostenbelastung im Vergleich zu (i) eingeführt haben, verwundert es nicht, dass die erwartete Zwischenhandelszeit hier noch größer und die Rendite kleiner als in (i) sind.

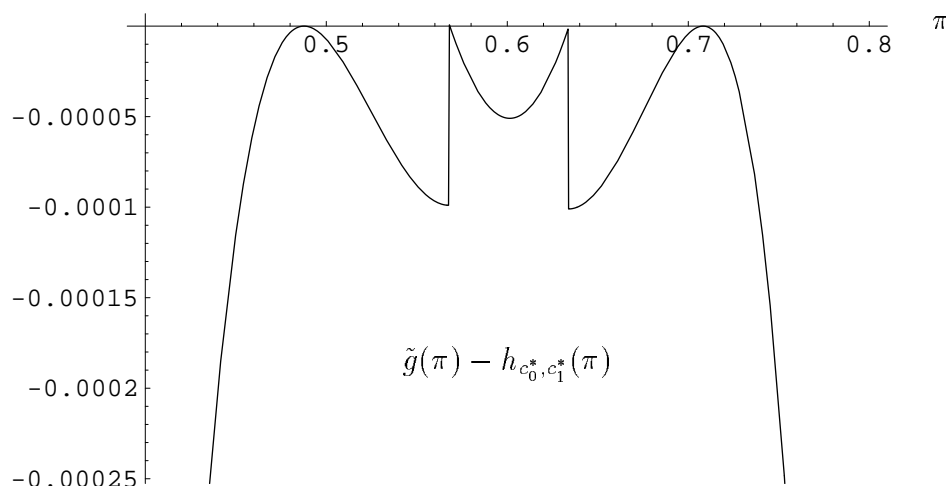


Abbildung 5.2: Zum Randwertproblem im Beispiel 5.9.2 (ii)

Im hier betrachteten Beispiel ergeben sich die optimalen Parameter im zugehörigen freien Randwertproblem zu

$$c_0^* = -5.663 \quad \text{und} \quad c_1^* = 6.356$$

und Abbildung 5.2 zeigt für die Auszahlungsfunktion $g^* : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g^*(\pi) = \begin{cases} -\log(1 - \pi) + \log\left(\frac{1 - \delta_0 - \gamma \pi}{1 - \gamma \eta_{-1}^*}\right) & \text{falls } \pi \in [(1 - \delta_0)\eta_{-1}^*, 1), \\ -\log(1 - \pi) + \log\left(\frac{1 - \delta_0 + \gamma \pi}{1 + \gamma \eta_{+1}^*}\right) & \text{falls } \pi \in (0, (1 - \delta_0)\eta_{+1}^*], \\ -\log(1 - \pi) & \text{sonst} \end{cases}$$

die Differenz $g^* - h_{c_0^*, c_1^*}$. Zu beachten ist, dass g^* unterhalbstetig ist, so dass g^* die Achse in $(1 - \delta_0)\eta_{+1}^*$ und $(1 - \delta_0)\eta_{-1}^*$ nicht berührt, wie es in der Grafik den Anschein hat. Damit lassen sich auch hier die Voraussetzungen von Satz 5.8.4 numerisch gut verifizieren.

Wir haben in Beispiel 5.9.2 (ii) gesehen, dass die zusätzliche Einführung von proportionalen Transaktionskosten auch zu einer höheren erwarteten Zwischenhandelszeit führt. Wir werden uns im Folgenden mit der Frage auseinandersetzen, unter welcher Bedingung wir zwei Modelle mit unterschiedlichen Transaktionskosten sinnvoll vergleichen können. In Beispiel 5.9.4 (ii) zeigen wir anschließend in einem zu 5.9.2 (i) vergleichbaren Modell mit fixen und proportionalen Kosten, dass wir dort eine deutlich niedrigere erwartete Zwischenhandelszeit erhalten.

Definition 5.9.3

(i) Zu einer Handelsstrategie $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau)$ mit invarianter Verteilung ν nennen wir

$$c(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau) = E_\nu \left[e^{-r\tau} X(\tau) \left(1 - \frac{1 - \delta + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \pi(\tau)}{1 + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \varphi_\eta(\pi(\tau))} \right) \right]$$

die *erwarteten diskontierten Kosten*.

(ii) Zwei Transaktionskostenmodelle mit fixen und proportionalen Kosten nennen wir *bezüglich der Kosten vergleichbar*, wenn die erwarteten diskontierten Kosten von zwei optimalen Handelsstrategien aus den verschiedenen Modellen übereinstimmen.

Die Interpretation ist eindeutig. $X(\tau)$ gibt den Wert zur Zeit τ an und

$$X(\tau) \frac{1 - \delta + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \pi(\tau)}{1 + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \varphi_\eta(\pi(\tau))}$$

den Wert nach dem Handel in τ , so dass die Transaktionskosten genau der Differenz entsprechen. Um diese vergleichbar zu machen, muss noch diskontiert werden.

Für eine Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}})$ können wir die erwarteten diskontierten Kosten gut berechnen. Es gelten

$$1 - \frac{1 - \delta + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \pi(\tau)}{1 + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \varphi_\eta(\pi(\tau))} = \frac{\delta + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma(\varphi_\eta(\pi(\tau)) - \pi(\tau))}{1 + \varphi_a(\pi(\tau))\gamma \varphi_\eta(\pi(\tau))}$$

und nach Lemma 5.3.3

$$X(\tau) = \frac{1 - \pi_0}{1 - \pi(\tau)} e^{r\tau},$$

so dass mit den Bezeichnungen aus Satz 5.6.8 (ii) folgt

$$\begin{aligned} c(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \tau_{\pi_{+1}, \pi_{-1}}) &= p_{-1}p_{--} \frac{(1 - \eta_{-1})(\delta + \gamma(\pi_{-1} - \eta_{-1}))}{(1 - \pi_{-1})(1 - \gamma \eta_{-1})} \\ &\quad p_{-1}p_{-+} \frac{(1 - \eta_{-1})(\delta + \gamma(\eta_{+1} - \pi_{+1}))}{(1 - \pi_{+1})(1 + \gamma \eta_{+1})} \\ &\quad p_{+1}p_{+-} \frac{(1 - \eta_{+1})(\delta + \gamma(\pi_{-1} - \eta_{-1}))}{(1 - \pi_{-1})(1 - \gamma \eta_{-1})} \\ &\quad p_{+1}p_{++} \frac{(1 - \eta_{+1})(\delta + \gamma(\eta_{+1} - \pi_{+1}))}{(1 - \pi_{+1})(1 + \gamma \eta_{+1})}. \end{aligned}$$

Beispiel 5.9.4

- (i) In Beispiel 5.9.2 betragen die erwarteten diskontierten Kosten der optimalen Handelsstrategie in (i) bei rein fixen Kosten $\delta_0 = 0.0001$

$$c(\eta_{-1}^o, \eta_{+1}^o, \tau_{\pi_{+1}^o, \pi_{-1}^o}) = 0.0001053$$

und in (ii) bei zusätzlichen proportionalen Kosten $\gamma = 0.003$

$$c(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*}) = 0.0003540.$$

Die Modelle sind also bezüglich ihrer Kosten nicht vergleichbar.

- (ii) Ein zum Modell in Beispiel 5.9.2 (i) bezüglich der Kosten annähernd vergleichbares Modell mit fixen und proportionalen Kosten ergibt sich zum Beispiel für Transaktionskosten $\delta = 0.1\delta_0 = 0.00001$ und $\gamma = 0.0025$. In diesem ergeben sich die optimalen Werte zu

$$\begin{aligned} \pi_{-1}^* &= 0.6803, \\ \eta_{-1}^* &= 0.6437, \\ \eta_{+1}^* &= 0.5573, \\ \pi_{+1}^* &= 0.5181, \\ R_{sc}^* &= 0.06349 \end{aligned}$$

mit Kosten

$$c(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*, \tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*}) = 0.0001072.$$

und einer erwarteten Zwischenhandelszeit von

$$E_{\nu^*} [\tau_{\pi_{+1}^*, \pi_{-1}^*}] = 0.5234,$$

die deutlich unter der des vergleichbaren Modells in 5.9.2 (i) mit rein fixen Kosten liegt.

Wir bemerken, dass in Modellen mit fixen und proportionalen Kosten, die zu demselben Modell mit rein fixen Transaktionskosten bezüglich der Kosten vergleichbar sind, die erwarteten Zwischenhandelszeiten in der Regel nicht übereinstimmen. Aber im folgenden Beispiel werden wir sehen, dass die fixen Kosten die erwartete Zwischenhandelszeit stärker beeinflussen, als die proportionalen Kosten, so dass wegen der geringeren fixen Kosten in einem vergleichbaren Modell mit zusätzlichen proportionalen Kosten davon auszugehen ist, dass die erwartete Zwischenhandelszeit in allen diesen vergleichbaren Modellen geringer ist und zwar um so deutlicher, je höher die proportionalen Kosten sind.

Beispiel 5.9.5

In Abbildung 5.3 haben wir die erwartete Zwischenhandelszeit der jeweils optimalen Handelsstrategie mit konstanten Stoppgrenzen über die proportionalen Kosten γ bei

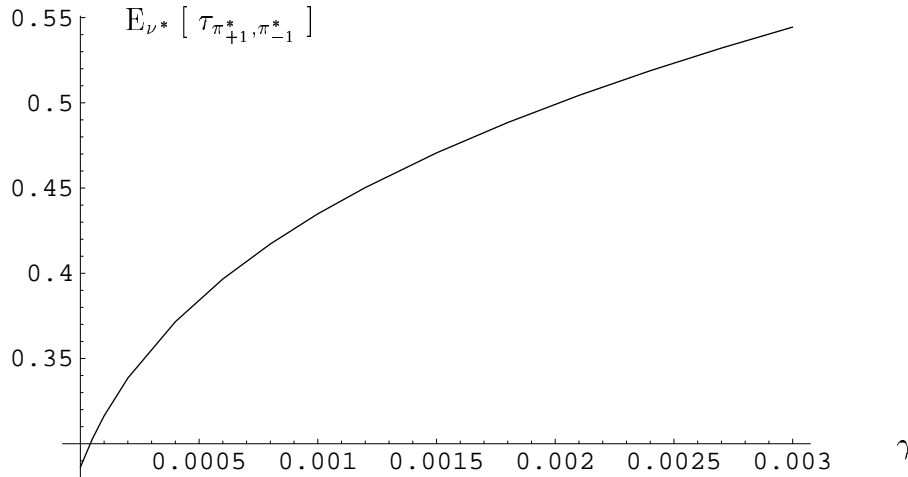


Abbildung 5.3: Erwartete Zwischenhandelszeit in Abhängigkeit von den proportionalen Kosten γ , Beispiel 5.9.5

fixen Kosten $\delta = 0.1\delta_0 = 0.00001$ aufgetragen und in Abbildung 5.4 umgekehrt über die fixen Kosten δ bei gleichzeitig festen proportionalen Kosten $\gamma = 0.003$. Es fällt auf, dass die erwartete Zwischenhandelszeit im Vergleich zur Anhebung der fixen Kosten bei Erhöhung der proportionalen Kosten eher moderat wächst.

Beispiel 5.9.6 (Wandernde Stoppgrenzen)

Für Transaktionskosten $(\gamma, \delta) = (0.003, 0.0001)$ wollen wir zeigen, wie sich die asymptotische Rendite verhält, wenn immer später gestoppt wird. Und zwar sei

$$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1})} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, (1 - \lambda)\eta_{-1} + \lambda, (1 - \lambda)\eta_{+1}).$$

$R^{(\eta_{-1}, \eta_{+1})}(\lambda)$ entspricht also der Rendite der Handelsstrategie mit neuen Wertanteilen η_{-1}, η_{+1} und Stoppgrenzen $\pi_{-1} = (1 - \lambda)\eta_{-1} + \lambda$ und $\pi_{+1} = (1 - \lambda)\eta_{+1}$. Abbildung 5.5, in der wir $R^{(\eta_{-1}^*, \eta_{+1}^*)}$ mit den optimalen η_{-1}^*, η_{+1}^* über $(0, 1)$ aufgetragen haben, zeigt sehr schön, dass weder ein zu früher noch ein zu später Stopp optimal ist.

Beispiel 5.9.7 (Wandernde neue Wertanteile)

Ähnlich wie in Beispiel 5.9.6 betrachten wir jetzt in Abhängigkeit von Wertanteilen $\eta_{-1}, \eta_{+1} \in (0, 1)$, $\eta_{-1} \geq \eta_{+1}$ die zugehörige optimale asymptotische Rendite. Dazu definieren wir

$$R^*(\eta_{-1}, \eta_{+1}) = \sup_{\pi_{-1}, \pi_{+1}} f_R(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1}),$$

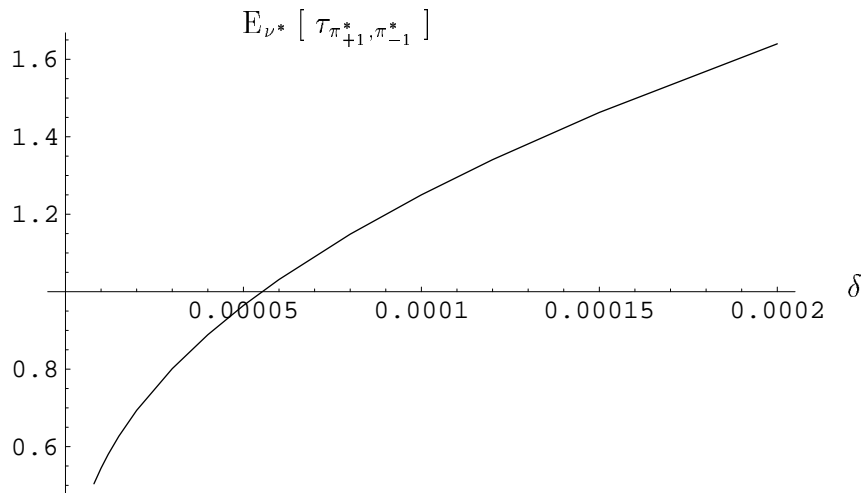


Abbildung 5.4: Erwartete Zwischenhandelszeit in Abhängigkeit von den fixen Kosten δ , Beispiel 5.9.5

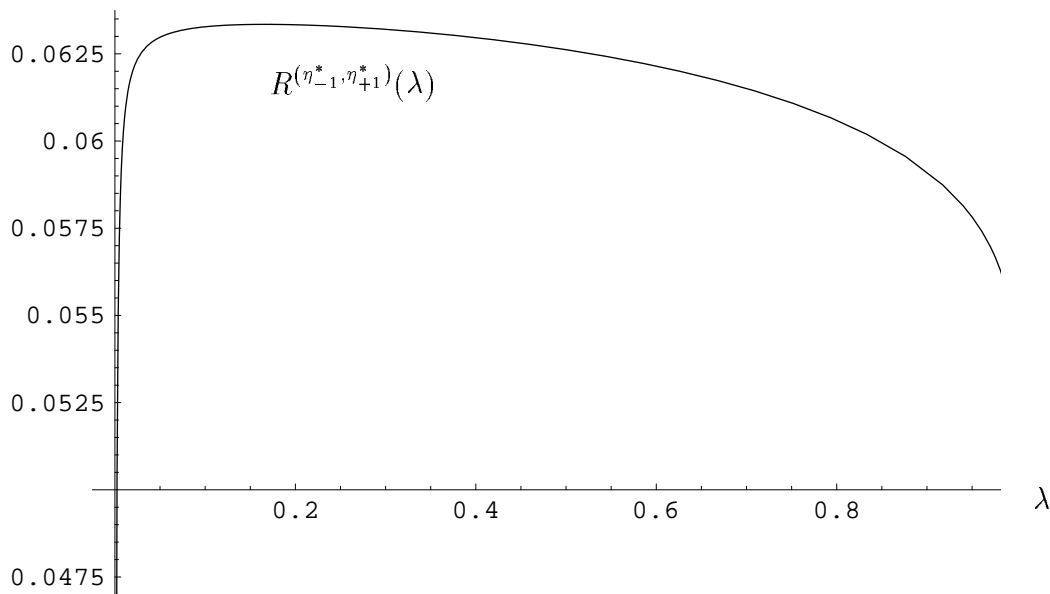


Abbildung 5.5: Asymptotische Rendite bei wandernden Stoppgrenzen, Beispiel 5.9.6

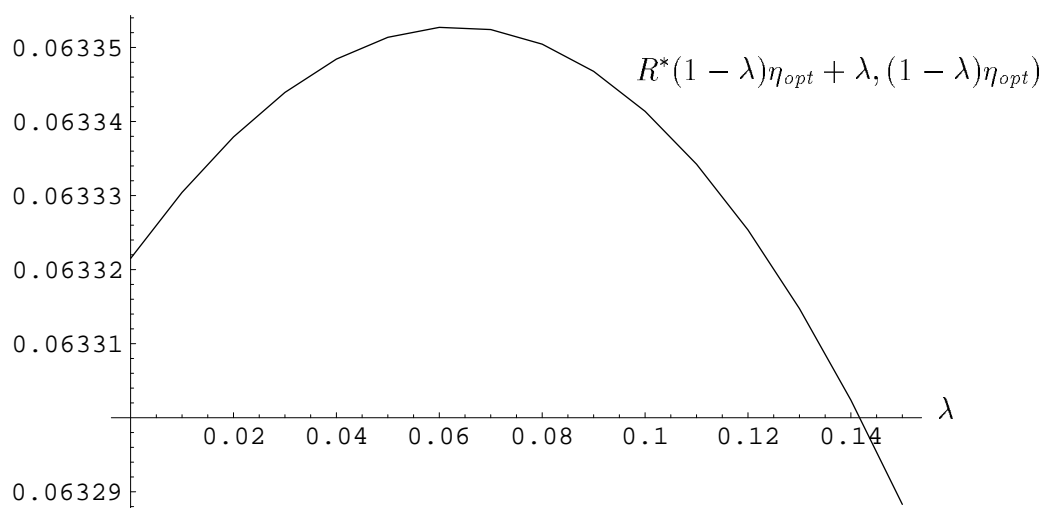


Abbildung 5.6: Asymptotische Rendite bei wandernden neuen Wertanteilen, Beispiel 5.9.7

wobei das Supremum nur über diejenigen π_{-1}, π_{+1} erfolgt, für die $(\eta_{-1}, \eta_{+1}, \pi_{-1}, \pi_{+1})$ in \mathcal{A}_c liegt. In Abbildung 5.9.6 haben wir

$$\lambda \mapsto R^*(1 - \lambda)\eta_{opt} + \lambda(1 - \lambda)\eta_{opt}$$

über $[0, 0.15)$ aufgetragen. Es ist auch hier sehr schön zu sehen, dass es nicht optimal ist, immer auf den neuen Wertanteil η_{opt} zurückzukaufen, sondern die Wahl zweier neuer Wertanteile η_{-1}, η_{+1} in einem gewissen Abstand von η_{opt} einen Vorteil verschafft.

Beispiel 5.9.8

In Abbildung 5.7 zeigen wir den über 2 Jahre simulierten Verlauf eines Aktienkurses zu den Parametern aus 5.9.1. Die Abbildung 5.8 zeigt bei fixen Kosten $\delta = 0.00001$ und proportionalen Kosten $\gamma = 0.0025$ den Verlauf des in Beispiel 5.9.4 (ii) bestimmten zugehörigen optimalen Wertanteilprozesses.

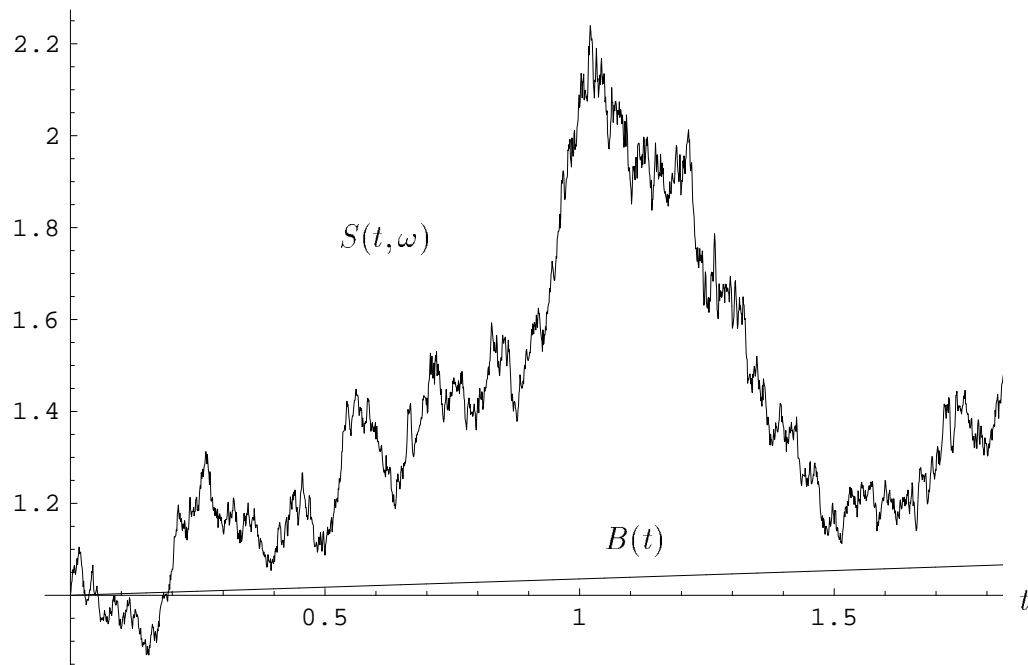


Abbildung 5.7: Simulierter Aktien- und Bondkurs, Beispiel 5.9.8

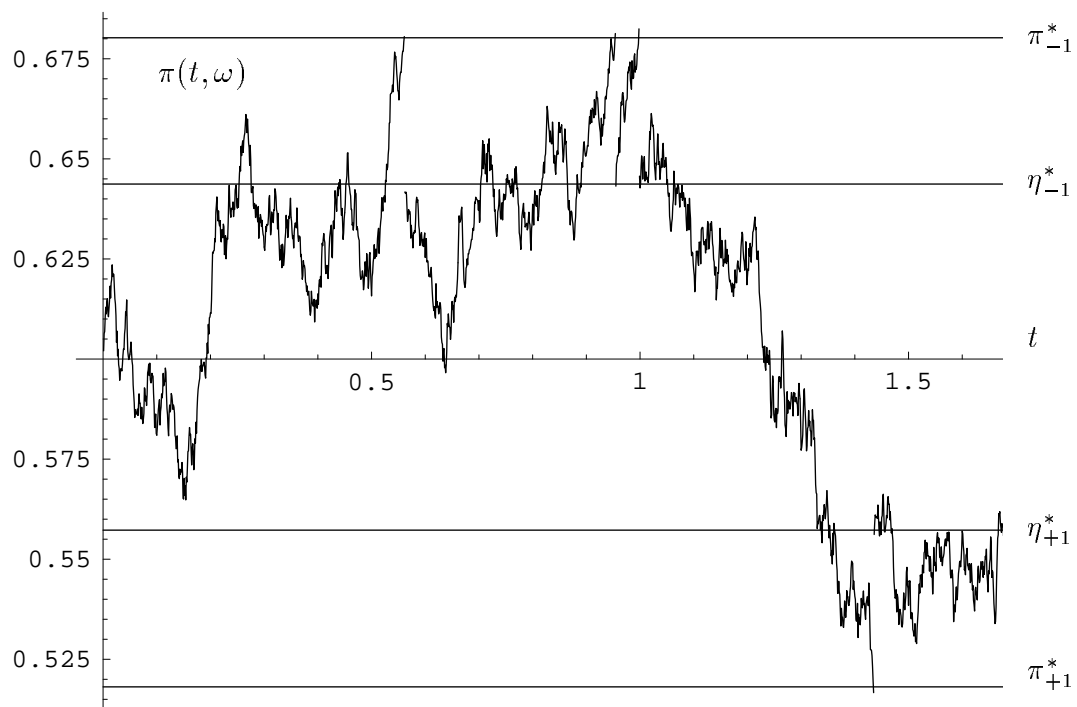


Abbildung 5.8: Optimaler Wertanteilprozess zu dem Kursverlauf in Abbildung 5.7, Beispiel 5.9.8

Literaturverzeichnis

Akian, M., A. Sulem, M.I. Taksar, 2001: *Dynamic optimization of a long-term growth rate for a portfolio with transaction costs and logarithmic utility*, *Mathematical Finance* 11, 153–188.

Atkinson, C., P. Wilmott, 1995: *Portfolio management with transaction costs: An asymptotic analysis of the Morton and Pliska model*, *Mathematical Finance* 5, 357–368.

Arapostathis, A., V.S. Borkar, E. Fernández-Gaucherand, M.K. Ghosh, S.I. Marcus, 1993: *Discrete-time controlled Markov processes with average cost criterion: A survey*, *SIAM Journal of Control and Optimization* 31, 282–344.

Bhattacharya, R.N., M. Majumdar, 1989: *Controlled semi-Markov models under long-run average rewards*, *Journal of Statistical Planning and Inference* 22, 223–242.

Benth, F.E., K.H. Karlsen, K. Reikvam, 2000: *On the existence of optimal controls for a singular stochastic control problem in finance*, preprint.

Bierth, K.-J., 1990: *Durchschnittsgewinnkriterien in Semi-Markoffschen Entscheidungsmodellen*, *Bonner Mathematische Schriften* 210.

Chancelier, J.-P., B. Øksendal, A. Sulem, 2000: *Combined stochastic control and optimal stopping, and application to numerical approximation of combined stochastic and impulse control*, preprint.

Cox, J., S. Ross, M. Rubinstein, 1979: *Option pricing: a simplified approach*, *Journal of Financial Economics* 7 (1979), 229–263.

Cvitanić, J., I. Karatzas, 1996: *Hedging and portfolio optimization under transaction costs: A martingale approach*, *Mathematical Finance* 6, 133–166.

Davis, M.H.A., A.R. Norman, 1990: *Portfolio selection with transaction costs*, *Mathematics of Operations Research* 15, 676–713.

Dynkin, E.B., A.A. Yushkevich, 1979: *Controlled Markov Processes*, Springer, Berlin.

Eastham, J.E., K.J. Hastings, 1988: *Optimal impulse control of portfolios*, *Mathematics of Operations Research* 13, 588–605.

- Feller, W., 1968: *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Volume I*, 3rd edition, Wiley, New York.
- Grigelionis, B.I., A.N. Shiryaev, 1966: *On Stefan's problem and optimal stopping rules for Markov processes*, Theory of Probability and its Applications 11, 541–558.
- Harrison, J.M., D.M. Kreps, 1979: *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, Journal of Economic Theory 20, 381–408.
- Harrison, J.M., S.R. Pliska, 1981: *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading*, Stochastic Processes and their Applications 11, 215–260.
- Harrison, J.M., S.R. Pliska, 1983: *A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets*, Stochastic Processes and their Applications 15, 313–316.
- He, H., N.D. Pearson, 1991: *Consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: The finite-dimensional case*, Mathematical Finance 1, 1–10.
- Hernández-Lerma, O., J.B. Lasserre, 1995: *Discrete-Time Markov Control Processes: Basic Optimality Criteria*, Springer, New York.
- Irle, A., 1998: *Finanzmathematik: Die Bewertung von Derivaten*, Teubner, Stuttgart.
- Karatzas, I., J.P. Lehoczky, S.E. Shreve, 1987: *Optimal portfolio and consumption decisions for a 'small investor' on a finite horizon*, SIAM Journal on Control and Optimization 25, 1557–1586.
- Karatzas, I., S.E. Shreve, 1998: *Methods in Mathematical Finance*, Springer, Berlin.
- Korn, R., 1997: *Optimal Portfolios: Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*, World Scientific, Singapore.
- Korn, R., 1998: *Portfolio optimisation with strictly positive transaction costs and impulse control*, Finance and Stochastics 2, 85–114.
- Lippmann, S.A., 1971: *Maximal average-reward policies for semi-Markov decision processes with arbitrary state and action space*, The Annals of Mathematical Statistics 42, 1717–1726.
- Magill, M.J.P., M. Constantinides, 1976: *Portfolio selection with transaction costs*, Journal of Economic Theory 13, 245–263.
- Merton, R.C., 1969: *Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case*, Review of Economics and Statistics 51, 247–257.
- Morton, A.J., S.R. Pliska, 1995: *Optimal portfolio management with fixed transaction costs*, Mathematical Finance 5, 337–356.
- Øksendal, B., 2000: *Stochastic Differential Equations*, 5th edition, corrected second printing, Springer, Berlin.

- Øksendal, B., A. Sulem, 2001: *Optimal consumption and portfolio with both fixed and proportional transaction costs*, to appear in SIAM Journal of Control and Optimization.
- Paulsen, V., 2001: *On optimal stopping and its applications to mathematical finance*, working paper.
- Paulsen, V., 2000: *On optimal stopping rules of one-dimensional diffusions with non-linear costs of observations*, Habilitationsschrift, Universität Kiel.
- Pliska, S.R., 1997: *Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models*, Blackwell, Malden.
- Revue, D., M. Yor, 1991: *Continuous Martingales and Brownian Motion*, Springer, Berlin.
- Ross, S.M., 1970: *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, San Francisco.
- Schneider, D., 1999: *Optimales Portfoliomanagement bei festen Transaktionskosten*, Diplomarbeit am Mathematischen Seminar, Universität Kiel.
- Shreve, S.E., H.M. Soner, 1994: *Optimal investment and consumption with transaction costs*, Annals of Applied Probability 4, 609–692.