

Restriktionsätze für  
getwistete Sub-Laplace-Operatoren und  
Anwendungen auf Rieszmittel

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von

Michael Kempe

Kiel 2002

Referent:  
Korreferent:  
Tag der mündlichen Prüfung:  
Zum Druck genehmigt:

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
Rieszmittel . . . . .	vii
Vorgehensweise . . . . .	viii
<b>1 Die Heisenberg-Gruppe</b>	<b>1</b>
1.1 Elementare Eigenschaften von $\mathbb{H}_n$ . . . . .	2
1.2 Automorphismen von $\mathbb{H}_n$ und Homogenität . . . . .	3
1.2.1 Von Automorphismen induzierte Operationen . . . . .	3
1.2.2 Die Automorphismen von $\mathbb{H}_n$ . . . . .	5
1.2.3 Homogene Differentialoperatoren . . . . .	7
1.3 Unitäre Darstellungen von $\mathbb{H}_n$ . . . . .	10
1.4 Getwistete Faltung und Weyltransformation . . . . .	12
1.5 Die Fourier-Wigner-Transformation . . . . .	19
1.6 Zusammenhang mit Laguerreentwicklungen . . . . .	21
<b>2 Die metaplektische Gruppe</b>	<b>25</b>
2.1 Hamiltonsche Vektorfelder . . . . .	25
2.2 Die metaplektische Darstellung . . . . .	28
2.3 Über Gaußsche Funktionen und die Oszillator-Halbgruppe . . . . .	32
2.4 Globale Formeln für $\gamma_{t,S}$ . . . . .	50
<b>3 Restriktionssätze</b>	<b>53</b>
3.1 Beispiele für Restriktionssätze . . . . .	55
3.2 Vorbereitungen . . . . .	56
3.3 Gebrochene Ableitungen und die $\Gamma$ -Funktion . . . . .	60
3.4 Interpolation analytischer Familien von Operatoren . . . . .	65
3.5 Anwendung auf Restriktionssätze . . . . .	67
3.6 Restriktionssätze für die Operatoren $L_S$ . . . . .	72
3.6.1 Der Fall definiten $SJ$ . . . . .	74
3.6.2 Der Fall indefiniten $SJ$ . . . . .	80
<b>4 Anwendungen auf Rieszmittel</b>	<b>87</b>
4.1 Beispiele . . . . .	90
4.2 Rieszmittel. Der allgemeine Teil . . . . .	91
4.3 Rieszmittel von $L_S$ . . . . .	102
4.3.1 Abschätzungen der Integralkerne . . . . .	103

<b>A Oszillierende Integrale</b>	<b>113</b>
A.1 Die Kettenregel für höhere Ableitungen . . . . .	113
A.2 Das Prinzip der stationären Phase . . . . .	116
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>

# Einleitung

Ein in der Harmonischen Analysis wohlbekanntes Theorem, welches unter dem Namen „Restriktionssatz von Tomas–Stein“ bekannt ist, besagt insbesondere, daß das Einschränken (die Restriktion)  $\widehat{f}|_{S^{n-1}}$  der Fouriertransformierten einer Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$  auf die Einheitssphäre  $S^{n-1}$  in  $\mathbb{R}^n$  für alle  $1 \leq p \leq 2\frac{n+1}{n+3}$  einen stetigen Operator von  $L^p(\mathbb{R}^n)$  nach  $L^2(S^{n-1})$  definiert, wobei die  $S^{n-1}$  mit dem Oberflächenmaß ausgestattet ist.

Daraus läßt sich beweisen, daß die Spektralprojektoren des Laplaceoperators  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$  als Operatoren von  $L^p(\mathbb{R}^n)$  nach  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gewisse Abschätzungen erfüllen, und zwar

$$\|\mathbb{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(-\Delta)f\|_2 \leq C\lambda^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\|f\|_p. \quad (1)$$

Dies suggeriert nun,  $\Delta$  durch einen anderen Operator zu ersetzen und zu untersuchen, ob ein analoges Ergebnis gilt.

Dieser Ansatz wurde für die verschiedensten Fälle teilweise sehr erfolgreich betrachtet. So zeigte C. Sogge, siehe [43], zum Beispiel ein zum Tomas–Steinschen Satz analoges Ergebnis für gewisse Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Erwähnenswert ist auch ein Resultat von G. Karadzhov [28] über den Hermite–Operator  $H := -\Delta + |x|^2$ , welches besagt, daß für diesen ein Restriktionssatz der Form (1) gilt, falls  $1 \leq p < \frac{2n}{n+2}$ . Dieses Ergebnis ist zwar schlechter als das für den Laplace–Operator, doch sind die dabei verwendeten Methoden für uns von großem Interesse. G. Karadzhov benutzt nämlich explizite Formeln für die Integralkerne der Operatoren  $e^{itH}$ , um das Problem dann mit Methoden aus der Theorie der oszillierenden Integrale anzugehen. Diese Vorgehensweise wird in dieser Arbeit ebenfalls gewählt, um einen Restriktionssatz für den sogenannten getwisteten Sub–Laplace–Operator zu zeigen.

Betrachte dazu die Heisenberggruppe  $\mathbb{H}_n$  der euklidischen Dimension  $2n+1$ . Deren Liealgebra  $\mathfrak{h}_n$  wird gerade von  $2n+1$  Vektorfeldern  $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n, U$  aufgespannt, welche die kanonischen Kommutatorrelationen  $[Q_j, P_j] = -U$  erfüllen. Als Algebra wird  $\mathfrak{h}_n$  also bereits von den  $2n$  Vektorfeldern  $Q_j, P_j$  erzeugt, wodurch nach einem Satz von L. Hörmander [20] folgt, daß der durch  $\mathcal{L} := -\sum_{j=1}^n (Q_j^2 + P_j^2)$  definierte Sub–Laplace–Operator als Differentialoperator auf  $\mathbb{H}_n$  hypoelliptisch ist, und einem Theorem von Nelson und Stinespring [37] zufolge ist  $\mathcal{L}$  dann wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{H}_n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{H}_n)$ .

D. Müller zeigte in [34] einen Restriktionssatz für  $\mathcal{L}$ , nämlich daß für  $1 \leq p \leq 2$

$$\|\mathbb{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(\mathcal{L})f\|_{L^2(\mathbb{H}_n)} \leq C\lambda^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|f\|_{L^p(\mathbb{H}_n)} \quad (2)$$

gilt und der Exponent auch optimal ist.

Die Faltung auf  $L^1(\mathbb{H}_n)$  induziert nun mittels einer Fouriertransformation in der zentralen Variablen eine nichtkommutative Faltungsstruktur auf  $\mathbb{R}^{2n}$ , die sogenannte getwistete Faltung. Auf diese Weise wird eine unitäre Darstellung  $\sigma$  von  $\mathbb{H}_n$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  definiert, die allerdings nicht irreduzibel ist. Sie besitzt für  $(z, u) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ ,  $z' \in \mathbb{R}^{2n}$  und  $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$  die explizite Gestalt

$$[\sigma(z, u)f](z') = e^{-i(u+\frac{1}{2}\omega(z', z))}f(z+z'),$$

wobei  $\omega$  die kanonische symplektische Form auf  $\mathbb{R}^{2n}$  bezeichnet. Das Bild von  $\mathcal{L}$  unter  $d\sigma$  nennt man den getwisteten Sub-Laplace-Operator  $L$ . Für diesen hat S. Thangavelu gezeigt, daß für  $1 \leq p \leq 2\frac{2n}{2n+2}$

$$\|\mathbb{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(L)f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq C\lambda^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{2n})} \quad (3)$$

gilt. Dies entspricht Karadzhovs Resultat für den Hermite-Operator, wenn man bedenkt, daß  $L$  ein Operator auf  $\mathbb{R}^{2n}$  ist.

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir nun das Ergebnis von Thangavelu verbessern und zeigen, daß (3) für  $1 \leq p < 2\frac{2n+1}{2n+3}$  gilt und damit (bis auf den Endpunkt) dem Tomas-Steinschen Resultat (1) für  $\Delta$  entspricht.

Allgemeiner werden Operatoren der folgenden Form betrachtet:

Bezeichne mit

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix der kanonischen symplektischen Form auf  $\mathbb{R}^{2n}$  und mit  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  die Liealgebra der symplektischen Gruppe  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Für  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  ist dann  $SJ$  eine symmetrische  $2n \times 2n$ -Matrix. Schreibt man für die Vektorfelder  $Q_j, P_j$  vereinheitlichend  $Z_j := Q_j$  und  $Z_{j+n} := P_j$ , dann definiert

$$\mathcal{L}_S := -\langle Z, SJZ \rangle$$

einen Differentialoperator zweiter Ordnung auf  $\mathbb{H}_n$ . Wir betrachten dessen Bild unter der getwisteten Darstellung  $\sigma$ , also  $L_S := d\sigma(\mathcal{L}_S)$ . Insbesondere gilt offenbar  $L = L_{-J}$ .

Es wird gezeigt, daß (3) mit  $L_S$  anstatt  $L$  gilt, falls  $SJ$  eine positiv definite Matrix ist.

Darüber hinaus erhalten wir, falls  $SJ$  indefinit, aber immerhin noch invertierbar ist, für  $2\frac{2n}{2n+2} < p < 2\frac{2n+1}{2n+3}$  ein lokales Resultat: Zu jedem  $K \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  kompakt existiert ein  $C_K > 0$  so, daß

$$\|\mathbb{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(L_S)f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq C_K \lambda^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^p(K)}, \quad f \in L^p(K),$$

wobei  $L^p(K)$  als kanonisch eingebettet in  $L^p(\mathbb{R}^{2n})$  aufgefasst wird. Solche lokalen Restriktionssätze wurden von Thangavelu z.B. auch für den Hermite-Operator gezeigt, siehe [52].

## Rieszmittel

Für  $\lambda > 0$  und  $\delta \geq 0$  ist der sogenannte Bochner-Riesz-Multiplikator die durch

$$m_\lambda^\delta(s) := \left(1 - \frac{|s|}{\lambda}\right)_+^\delta$$

definierte beschränkte Borelfunktion auf  $\mathbb{R}$ . Ist  $A$  dann ein selbstadjungierter Operator auf  $L^2(M)$ , so versteht man unter den Rieszmitteln von  $A$  mit Exponent  $\delta$  die Familie  $\{m_\lambda^\delta(A)\}_{\lambda>0}$  von auf  $L^2(M)$  beschränkten Operatoren. Aus dem Spektralsatz folgt die Konvergenz  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(A)f = f$  für alle  $f \in L^2(M)$ .

Falls nun zumindest für genügend großes  $\lambda$  durch  $m_\lambda^\delta(A)$  zusätzlich ein auf  $L^p(M)$  stetiger Operator gegeben ist, so liegt es nahe, nach der Konvergenz  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(A)f = f$  in  $L^p(M)$  zu fragen. Ist diese für alle  $f \in L^p(M)$  gegeben, so sagt man, daß die Rieszmittel von  $A$  auf  $L^p$  konvergieren.

Im Falle des Laplace-Operators  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$  folgt aus einem Theorem von C. Fefferman, [12], daß die Rieszmittel zum Exponenten  $\delta = 0$  für  $n \geq 2$  nur dann auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  konvergieren, wenn schon  $p = 2$  gilt. Dieses Ergebnis ist auch als Unbeschränktheit des sogenannten „disc multiplier“ bekannt.

In Wahrheit ist es sogar so, daß die Konvergenz der Rieszmittel von  $\Delta$  auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  für  $n \geq 2$  bereits die Bedingung  $\delta > \delta(p)$  impliziert, wobei der kritische Exponent durch

$$\delta(p) := \max\left\{n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}, 0\right\}$$

definiert ist.

Im Zweidimensionalen ist die Bedingung  $\delta > \delta(p)$  nach einem Theorem von L. Carleson und P. Sjölin für alle  $1 \leq p \leq \infty$  bereits hinreichend, und die Bochner-Riesz-Vermutung besagt, daß dies auch in höheren Dimensionen der Fall ist. Die Verbindung zu Restriktionssätzen wird nun durch einen ebenfalls von C. Fefferman stammenden Satz hergestellt, nach dem ein Restriktionssatz (1) die Konvergenz der Rieszmittel von  $\Delta$  auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  stets für alle  $\delta > \delta(p)$  impliziert.

Man fragt sich nun, inwieweit es möglich ist, die oben erwähnten Restriktionssätze für andere Operatoren auf das Problem der Konvergenz von Rieszmitteln anzuwenden.

Für den Fall kompakter Mannigfaltigkeiten wurde ebenfalls von Sogge [43] gezeigt, daß sich der oben angeführte Restriktionssatz dazu benutzen läßt, die Konvergenz der zugehörigen Rieszmittel zu beweisen.

Auch der Restriktionssatz (2) für den Sub-Laplace-Operator  $\mathcal{L}$  läßt sich auf die Konvergenz der Rieszmittel anwenden. D. Müller zeigte in [33], daß insbesondere  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(\mathcal{L})f = f$  für  $f \in L^p(\mathbb{H}_n)$  gilt, falls  $\delta > (2n+1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ .

Genauso verhält es sich mit den oben erwähnten Ergebnissen über die Operatoren  $H$  und  $L$  von G. Karadzhov und S. Thangavelu. Die Rieszmittel konvergieren für diese, falls  $\delta > \delta(p)$  und  $p$  in dem Bereich liegt, wo der entsprechende Restriktionssatz gültig ist.

Da uns nun ein besserer Restriktionssatz für  $L$  und allgemeiner für  $L_S$  mit  $JS > 0$  zur Verfügung steht, ist zu vermuten, daß sich mit diesem das Ergebnis von Thangavelu über die Rieszmittel von  $L$  ebenfalls verbessern läßt. Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, ist dies in der Tat der Fall. Dort wird gezeigt, daß die Rieszmittel von  $L_S$  mit  $SJ > 0$  für  $\delta > 2n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$  auf  $L^p(\mathbb{R}^{2n})$  konvergieren, falls  $1 \leq p \leq 2\frac{2n+1}{2n+3}$ .

Es sei noch erwähnt, daß die Konvergenz der Rieszmittel für genügend großes  $\delta$  oft aus allgemeinen Multiplikatorenansätzen folgt, da  $m_\lambda^\delta$  dann genügend oft differenzierbar ist. Dies liefert allerdings im allgemeinen (wenn überhaupt) nicht das optimale Ergebnis.

Außerdem gibt es durchaus „schöne“ Operatoren, für die es absolut unmöglich ist, Rieszmittel für  $p \neq 2$  überhaupt zu betrachten. Es sind dies z.B. die Operatoren, welche nur holomorphen  $L^p$ -Funktionalkalkül zulassen. M. Christ und D. Müller zeigten in [9], daß es sogar eine auflösbare Liegruppe gibt auf der ein Laplace-Operator existiert, der die Eigenschaft besitzt, daß für jede beschränkte stetige Funktion  $m$  auf  $[0, \infty[$  gilt: Ist  $m(L)|_{L^p \cap L^2}$  zu einem stetigen Operator auf  $L^p$  fortsetzbar, so läßt sich  $m$  bereits zu einer holomorphen Funktion auf eine Umgebung des  $L^2$ -Spektrums fortsetzen.

## Vorgehensweise

Im **ersten Kapitel** werden zunächst die von uns benötigten Sachverhalte aus der Theorie der Heisenberg-Gruppe zusammengestellt. Es werden dabei insbesondere die Automorphismen untersucht und der Begriff der Homogenität entwickelt.

Danach wird die sogenannte getwistete Faltung auf  $\mathbb{R}^{2n}$  entwickelt. Diese ist im Gegensatz zum euklidischen Faltungsprodukt nicht kommutativ, besitzt aber ansonsten viele der von Gruppenfaltungen her bekannten Eigenschaften. Die Operatoren  $L_S$  sind überdies Faltungsoperatoren bezüglich der getwisteten Faltung.

Am Ende des Kapitels wird noch kurz darauf eingegangen, inwieweit die Entwicklung in die Eigenfunktionen des getwisteten Sub-Laplace-Operators mit der Entwicklung in Laguerrefunktionen zusammenhängt. Damit ist eine Verbindung zur Theorie der speziellen Funktionen hergestellt. Mit Hilfe der getwisteten Faltung ergibt sich dadurch ein Kalkül für die Laguerrefunktionen, der unter dem Namen „Greinerscher Laguerrekalkül“ bekannt ist.



Das **zweite Kapitel** hat nun zum Ziel, die explizite Gestalt der von den Operatoren  $L_S$  erzeugten Gruppen unitärer Operatoren herzuleiten. Dies wurde von D. Müller und F. Ricci in [35] durchgeführt und man stößt dabei auf die schon von R. Howe eingehend untersuchte Oszillator–Halbgruppe [23]. Diese besteht aus getwisteten Faltungsoperatoren mit gewissen Gaußfunktionen, und es stellt sich heraus, daß sich die Operatoren  $e^{itL_S}$  im Rand der Oszillator–Halbgruppe befinden. Wir werden explizit eine lokale Darstellung der symplektischen Gruppe  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  durch getwistete Faltungsoperatoren im Rand der Oszillator–Halbgruppe konstruieren und dann zeigen, daß die  $L_S$  infinitesimale Erzeuger von lokalen Ein–Parameter–Untergruppen dieser Darstellung sind. Damit erhält man letztlich die explizite Gestalt der Operatoren  $e^{itL_S}$ .

Das **dritte Kapitel** ist ganz dem Beweis der oben erwähnten Restriktionssätze gewidmet. Es wird dabei versucht, zunächst möglichst allgemein vorzugehen und das Problem für nahezu beliebige Operatoren auf eine einfachere Fragestellung zurückzuführen. Dabei spielt insbesondere der Steinsche Interpolationssatz für analytische Familien von Operatoren eine Rolle. Damit gelingt es, den Beweis des Restriktionssatzes auf eine  $L^\infty$ –Abschätzung eines gewissen Integralkerns zurückzuführen. Mit Hilfe der im zweiten Kapitel entwickelten Formeln für die getwisteten Faltungskerne von  $e^{itL_S}$  kann das Problem auf die Betrachtung gewisser oszillierender Integrale reduziert werden, die man mit der sogenannten „Methode der stationären Phase“ abschätzen kann.

Im **vierten Kapitel** werden die Restriktionssätze dann auf das Problem der Konvergenz von Rieszmitteln angewandt. Wie oben bereits erwähnt, kann mit Hilfe des Restriktionssatzes aus Kapitel 3 für die  $L_S$  mit positiv definitem  $SJ$  auf die Konvergenz der zugehörigen Rieszmittel geschlossen werden. Man benötigt allerdings zusätzlich noch Abschätzungen gewisser Integralkerne. Diese werden wiederum mit Methoden aus der Theorie der oszillierenden Integrale gezeigt. Im Gegensatz zum Beweis des Restriktionssatzes lassen sich die hier auftretenden Integrale allerdings relativ leicht abschätzen.

Im **Anhang** sind letztlich noch einige wohlbekanntesätze aus der Theorie der oszillierenden Integrale zusammengestellt, die sowohl für den Beweis der Restriktionssätze als auch die Abschätzungen der Integralkerne im Kapitel 4 über die Rieszmittel benötigt werden. Da diese Aussagen in der Literatur üblicherweise nicht in der von uns benötigten Allgemeinheit zu finden sind, dies betrifft im wesentlichen die Abhängigkeit von Parametern, werden sie hier noch einmal entwickelt. Beweise und Aussagen sind allerdings zum Teil von recht technischer Natur, so daß der Leser es unter Umständen bevorzugen wird, auf die angegebene Literatur zurückzugreifen, da sich dort oft etwas suggestivere Formulierungen finden.

## Danksagung

Mein Dank gilt in allererster Linie natürlich Professor Dr. D. Müller für die Vergabe dieses sehr interessanten und vielschichtigen Themas und die ständige Diskussionsbereitschaft.

Weiterhin möchte ich auch Professor Dr. P. Sjögren von der Chalmers Tekniska Högskola in Göteborg meinen Dank aussprechen, wo ich im Rahmen des TMR-Projekts „Harmonic Analysis“ einen zweimonatigen Gastaufenthalt verbringen durfte und der mich sehr herzlich aufgenommen hat, sowie den Professores Dr. H. König und Dr. V. Wrobel, die sich freundlicherweise dazu bereit erklärten, die Aufgabe des Korreferenten zu übernehmen.

# Kapitel 1

## Die Heisenberg–Gruppe

Sowohl in der Mathematik als auch der Physik spielt die Heisenberg–Gruppe eine gewichtige Rolle. Als einfachstes Beispiel einer nichtkommutativen nilpotenten Liegruppe eignet sie sich z.B. in der Harmonischen Analysis als ein erster Kandidat zur Verallgemeinerung von Sätzen aus der euklidischen Theorie auf nichtkommutative Situationen.

Vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet realisiert die Heisenberg–Gruppe oder besser gesagt ihre Liealgebra auf abstrakte Weise die kanonischen Kommutatorrelationen der Quantenmechanik. Betrachtet man nämlich die Operatoren

$$D := \frac{1}{i} \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \quad X := (x_1, \dots, x_n),$$

so ist  $q \cdot X + p \cdot D + u \text{Id}$  für jede Wahl von  $p, q \in \mathbb{R}^n$  und  $u \in \mathbb{R}$  wesentlich selbstadjungiert auf  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (siehe Taylor [49], Proposition 1.1) und wird nach dem Satz von Stone von einer Ein–Parameter–Gruppe unitärer Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  erzeugt. Diese besitzen die Gestalt

$$e^{i\mu(u+q \cdot X + p \cdot D)} u(x) = e^{i(\mu u + \mu q x + \frac{\mu^2}{2} p q)} u(x + \mu p) \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Eine elementare Rechnung zeigt dann

$$e^{i(u+qX+pD)} e^{i(u'+q'X+p'D)} = e^{i(u+u'+\frac{1}{2}(pq'-p'q)+(q+q')X+(p+p')D)}, \quad (1.2)$$

so daß die  $e^{i(u+qX+pD)}$  eine Gruppe unitärer Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  bilden. Benutzen wir  $q, p, u$  als Koordinaten, so läßt sich diese als  $\mathbb{R}^{2n+1}$  mit der Verknüpfung

$$(z, u)(z', u') := (z + z', u + u' + \frac{1}{2}\omega(z, z')) \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n} \quad u, u' \in \mathbb{R} \quad (1.3)$$

realisieren, wobei  $\omega$  die kanonische symplektische Form

$$\omega((q, p), (q', p')) = pq' - p'q \quad p, p', q, q' \in \mathbb{R}^n \quad (1.4)$$

auf  $\mathbb{R}^{2n}$  bezeichnet. Den  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , ausgestattet mit dem durch (1.3) gegebenen Produkt, nennen wir die Heisenberg-Gruppe der Ordnung  $n$  und schreiben dafür  $\mathbb{H}_n$ . Ferner definiert

$$(q, p, u) \mapsto e^{i(u+q \cdot X+p \cdot D)}$$

eine unitäre Darstellung von  $\mathbb{H}_n$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Da die Observablen von Impuls und Ort im Schrödingerbild der Quantenmechanik gerade durch die Operatoren  $D$  und  $X$  realisiert werden, trägt diese auch den Namen „Schrödingerdarstellung“, deren Eigenschaften im Abschnitt 1.3, in dem alle irreduziblen unitären Darstellungen von  $\mathbb{H}_n$  charakterisiert werden, genauer beschrieben werden.

## 1.1 Elementare Eigenschaften von $\mathbb{H}_n$

- Das neutrale Element von  $\mathbb{H}_n$  ist  $0 \in \mathbb{R}^{2n+1}$  und das Inverse von  $(z, u) \in \mathbb{H}_n$  besitzt offenbar die Form  $(-z, -u)$ . Außerdem besteht das Zentrum aus den Elementen der Form  $(0, u)$  mit  $u \in \mathbb{R}$ .
- Nimmt man  $\text{Id}_{\mathbb{R}^{2n+1}}$  als Karte, so sieht man sofort, daß  $\mathbb{H}_n$  eine analytische Mannigfaltigkeit ist, und da die Verknüpfung (1.3) offenbar ebenfalls analytisch ist, handelt es sich bei  $\mathbb{H}_n$  um eine Liegruppe. Eine direkte Rechnung zeigt ferner, daß das Haarsche Maß auf  $\mathbb{H}_n$  mit dem Lebesgueschen Maß auf  $\mathbb{R}^{2n+1}$  identisch ist.
- Da die Heisenberg-Gruppe  $\mathbb{H}_n$  zusammenhängend, einfach zusammenhängend und nilpotent ist, kann man sie mit ihrer Liealgebra  $\mathfrak{h}_n$  (als Menge) identifizieren und als Exponentialfunktion die Identität wählen, siehe dazu [13], Proposition 1.2.
- Die explizite Gestalt der Gruppenfaltung  $f * g$  von  $f, g \in L^1(\mathbb{H}_n)$  ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} (f * g)(z, u) &= \int_{\mathbb{H}_n} f(z', u') g((z', u')^{-1}(z, u)) d(z', u') \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(z', u') g(z - z', u - u' + \frac{1}{2}\omega(z, z')) d(z', u'). \end{aligned}$$

Als nächstes sollen die linksinvarianten Vektorfelder auf  $\mathbb{H}_n$  explizit bestimmt werden:

**Lemma 1.1.** *Als Vektorraum wird die Liealgebra  $\mathfrak{h}_n$  von  $\mathbb{H}_n$ , aufgefaßt als Raum der linksinvarianten Vektorfelder, von*

$$Z_j := \partial_{e_j} + \frac{1}{2}\omega(z, e_j)\partial_u \quad 1 \leq j \leq 2n, \quad U := \partial_u \quad (1.5)$$

erzeugt, welche die Kommutatorrelationen  $[Z_j, Z_k] = \omega(e_j, e_k)U$  erfüllen. Wir notieren außerdem noch für  $1 \leq j \leq n$

$$Q_j := Z_j = \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{1}{2}p_j \frac{\partial}{\partial u} \quad P_j := Z_{n+j} = \frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{1}{2}q_j \frac{\partial}{\partial u}. \quad (1.6)$$

**Beweis.** Sei zunächst  $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$  und  $f \in C^\infty(\mathbb{H}_n)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f((z, u)(t(w, v))) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(z + tw, u + tv + \frac{t}{2}\omega(z, w)) \\ &= \langle \nabla f(z, u), (w, v + \frac{1}{2}\omega(z, w)) \rangle. \end{aligned}$$

Angewandt auf  $w = e_j$  und  $v = 0$  ergibt sich

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f((z, u)(te_j, 0)) = \frac{\partial f}{\partial j}(z, u) + \frac{1}{2}\omega(z, e_j) \frac{\partial f}{\partial u}(z, u),$$

also der erste Teil von (1.5).

Den zweiten Teil erhält man für den Fall  $(w, v) = (0, 1)$ :

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f((z, u)(0, t)) = \frac{\partial f}{\partial u}(z, u).$$

Die Kommutatorrelation rechnet man einfach nach.  $\square$

## 1.2 Automorphismen von $\mathbb{H}_n$ und Homogenität

Wir wollen in diesem Abschnitt die Automorphismen der Heisenberg-Gruppe  $\mathbb{H}_n$  vollständig charakterisieren. Von besonderer Bedeutung werden für uns dabei diejenigen sein, welche von den symplektischen Matrizen induziert werden, sowie die Dilatationen. Zuvor sollen noch einige allgemeine Sachverhalte über Automorphismen von Liegruppen erläutert werden, die sich für die Untersuchung homogener Differentialoperatoren auf der Heisenberg-Gruppe als nützlich erweisen.

### 1.2.1 Von Automorphismen induzierte Operationen

In diesem Unterabschnitt seien  $G$  eine Liegruppe, die höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt und  $\alpha$  ein stetiger Automorphismus von  $G$ . Dieser induziert dann bekanntlich auf der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  und somit auch auf deren universell Einhüllender  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  einen üblicherweise mit  $d\alpha$  bezeichneten Automorphismus. Als Literaturverweis zu dieser Thematik diene das Buch von J. Hilgert und K.-H. Neeb [19].

Wir wollen zeigen, daß in dieser Situation durch  $f \mapsto f \circ \alpha$  bis auf ein Vielfaches ein isometrischer Isomorphismus von  $L^p(G)$  definiert wird, der als Verkettungsoperator zwischen einem beliebigen  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , aufgefaßt als linksinvarianter

Differentialoperator auf  $G$ , und seinem Bild  $d\alpha(X)$  unter dem Automorphismus  $d\alpha$  fungiert.

Bezeichne im folgenden mit  $\lambda$  ein linksinvariantes Haarsches Maß auf  $G$ . Die Existenz von  $\lambda$  kann man z.B. bei P. Halmos [17] oder im Buch von E. Hewitt und K. Ross [18], §15 nachlesen.

**Lemma 1.2.** *Es existiert ein  $c_\alpha > 0$  so, daß für alle  $f \in L^1(G, d\lambda)$  gilt:*

$$\int_G f(\alpha(g)) d\lambda(g) = c_\alpha^{-1} \int_G f(g) d\lambda(g).$$

**Beweis.** Da  $\alpha^{-1}$  stetig und damit insbesondere Borelmeßbar ist, definiert

$$\tilde{\lambda}(A) := \lambda(\alpha A)$$

ein weiteres Borelmaß auf  $G$ . Dieses ist linksinvariant, da für  $h \in G$  gilt:  $\tilde{\lambda}(hA) = \lambda(\alpha(hA)) = \lambda(\alpha(h)\alpha(A)) = \lambda(\alpha(A)) = \tilde{\lambda}(A)$ . Da das Haarsche Maß bis auf Vielfache eindeutig bestimmt ist, existiert ein  $c_\alpha > 0$  mit  $\tilde{\lambda} = c_\alpha \lambda$ . Aufgrund der Definition von  $\tilde{\lambda}$  als Bildmaß von  $\lambda$  unter  $\alpha^{-1}$  gilt für alle  $f \in L^1(G, d\tilde{\lambda})$  schon:  $f \circ \alpha \in L^1(G, d\lambda)$  und

$$\int_G f(\alpha(g)) d\lambda(g) = \int_G f(g) d\tilde{\lambda}(g) = c_\alpha \int_G f(g) d\lambda(g).$$

Also gilt die Behauptung.  $\square$

Ein analoges Resultat gilt auch für rechtsinvariante Maße. Im Spezialfall  $G = \mathbb{R}^n$  ergibt sich offenbar die wohlbekannte Transformationsformel des Lebesgueschen Integrals für lineare Isomorphismen.

Wir sehen nun ein, daß  $\alpha$  auf natürliche Weise eine Isometrie von  $L^p(G, d\lambda)$  induziert. Dies läßt sich wiederum auf die rechtsinvariante Situation übertragen.

**Korollar 1.3.** *Sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann wird durch  $f \mapsto \sqrt[p]{c_\alpha} f \circ \alpha$  eine Isometrie von  $L^p(G, d\lambda)$  definiert.*

**Beweis.** Die Aussage ergibt sich sofort durch Anwendung von Lemma 1.2 auf  $|f|^p$ .  $\square$

**Satz 1.4.**

- (i) *Fassen wir  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  als linksinvarianten Differentialoperator auf  $G$  auf, so erhalten wir für  $f \in C^\infty(G)$ :*

$$[d\alpha(X)f] \circ \alpha = X(f \circ \alpha). \quad (1.7)$$

(ii) Ist  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  als auf  $C_0^\infty(G) \hookrightarrow L^2(G, d\lambda)$  dicht definierter Operator abschließbar, so ist auch  $d\alpha(X)$  abschließbar, und es gilt:  $f \in \mathcal{D}(\overline{d\alpha(X)}) \Leftrightarrow f \circ \alpha \in \mathcal{D}(\overline{X})$ . Ist dies der Fall, so erhalten wir  $(\overline{d\alpha(X)}f) \circ \alpha = \overline{X}(f \circ \alpha)$ . Folgendes Diagramm ist also kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(\overline{X}) & \xrightarrow{\overline{X}} & L^2(G, d\lambda) \\ \uparrow f \mapsto f \circ \alpha & & \uparrow f \mapsto f \circ \alpha \\ \mathcal{D}(\overline{d\alpha(X)}) & \xrightarrow{\overline{d\alpha(X)}} & L^2(G, d\lambda) \end{array}$$

**Beweis.** Um den ersten Teil zu zeigen, genügt es  $X \in \mathfrak{g}$  zu betrachten, da  $d\alpha$  ein Algebrenhomomorphismus ist und  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  nach dem Theorem von Poincaré–Birkhoff–Witt, siehe [27], V, Theorem 3, als Algebra mit Eins von  $\mathfrak{g}$  erzeugt wird.

Dann gilt für  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty(G)$  und  $g \in G$ :

$$f(e^{t d\alpha(X)} \alpha(g)) = f(\alpha(e^{tX} g)) = (f \circ \alpha)(e^{tX} g).$$

Durch Differenzieren in  $t = 0$  erhält man daraus (1.7).

Da  $f \mapsto \sqrt{c_\alpha} f \circ \alpha$  den Raum  $C_0^\infty(G)$  invariant läßt, folgt der zweite Teil „ohne Abschlüsse“ aus Teil (i). Die Behauptung ist dann eine Folge der Unitarität von  $f \mapsto \sqrt{c_\alpha} f \circ \alpha$ .  $\square$

### 1.2.2 Die Automorphismen von $\mathbb{H}_n$

Wie in Abschnitt 1.1 angemerkt, können wir für die Exponentialabbildung  $\exp = \text{Id}$  annehmen. Die Automorphismen von  $\mathbb{H}_n$  stimmen also mit denen von  $\mathfrak{h}_n$  überein. Wir schreiben deshalb für das Differential eines  $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{H}_n)$  anstatt von  $d\alpha$  wiederum  $\alpha$ .

**Definition 1.5 (Die symplektische Gruppe).** Bezeichnet  $\omega$  die durch (1.4) gegebene kanonische symplektische Form auf  $\mathbb{R}^{2n}$ , so ist die symplektische Gruppe  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  als die Menge aller  $T \in \text{Gl}(2n, \mathbb{R})$  definiert, welche die Bedingung

$$\omega(Tz, Tz') = \omega(z, z') \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n} \quad (1.8)$$

erfüllen. Sie ist also die Isometriegruppe von  $\omega$ . Ihre Liealgebra  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  kann man folglich mit der Menge aller  $S \in \text{L}(\mathbb{R}^{2n})$  identifizieren, für die

$$\omega(Sz, z') = -\omega(z, Sz'), \quad z, z' \in \mathbb{R}^{2n} \quad (1.9)$$

gilt. Wir definieren außerdem noch

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+ := \{S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) \mid \forall z \neq 0: \omega(z, S^t z) > 0\}.$$

**Bemerkung 1.6.** Notiert man mit  $J$  die  $2n \times 2n$ -Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

so gilt für alle  $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}$  gerade

$$\omega(z, z') = \langle Jz, z' \rangle.$$

- Offenkundig ist  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  äquivalent zu jeder der Bedingungen  $JS = -S^t J$ ,  $(JS)^t = JS$  und  $(SJ)^t = SJ$ .
- $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$  ist äquivalent zu  $SJ > 0$ .
- Ist  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$ , so gilt  $S^{-1}J < 0$ . Sei dazu  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ , und setze  $z' := (S^t)^{-1}z$ . Dann ergibt sich

$$\langle z, S^{-1}Jz \rangle = \langle S^t z', S^{-1}JS^t z' \rangle = \langle z', JS^t z' \rangle = -\langle z', SJz' \rangle < 0$$

Die Elemente der symplektischen Gruppe definieren nun eine wichtige Klasse von Automorphismen der Heisenberg-Gruppe  $\mathbb{H}_n$ .

**Lemma 1.7.** *Für jedes  $T \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  ist durch*

$$T \cdot (z, u) := (Tz, u) \quad (z, u) \in \mathbb{H}_n \quad (1.11)$$

*ein Automorphismus von  $\mathbb{H}_n$  gegeben. Ferner wird auf diese Weise eine Wirkung von  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  auf  $\mathbb{H}_n$  definiert.*

**Beweis.** Eine direkte Rechnung.  $\square$

**Lemma 1.8.** *Sei  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$ , d.h. es gelte  $SJ > 0$ . Dann existiert ein  $T \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  so, daß  $TST^{-1}$  die Gestalt*

$$TST^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

*besitzt, mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .*

**Beweis.** Siehe Howe, [23], Abschnitt 14 oder auch Hörmander [22].  $\square$

Eine vollständige Untersuchung, welche „Normalformen“ sich durch Konjugation eines allgemeinen  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  mit einer symplektischen Isometrie  $T \in \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  erreichen lassen, findet sich z.B. in einem Artikel von Hörmander [22].

Für uns werden außerdem noch die sogenannten Dilatationen eine Rolle spielen, die als nächstes definiert werden. Dies ist ein Konzept, welches sich auf die Situation sogenannter stratifizierter Liealgebren verallgemeinern läßt. Vergleiche dazu [13], Kapitel 1.



**Definition 1.9 (Dilatationen).** Sei  $r > 0$ . Dann definiert die Abbildung

$$\delta_r(z, u) := (rz, r^2u)$$

offenbar einen Automorphismus von  $\mathbb{H}_n$ .

Der nächste Satz charakterisiert nun sämtliche Automorphismen der Heisenberggruppe. Diese lassen sich stets als Hintereinanderausführung vier verschiedener Grundtypen schreiben.

**Satz 1.10.** Sei  $\sigma: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{H}_n$  ein Automorphismus. Dann ist  $\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ , wobei

(i)  $\sigma_1$  von der Form (1.11),

(ii)  $\sigma_2$  ein innerer Automorphismus,

(iii)  $\sigma_3 = \delta_r$  mit  $r > 0$  und

(iv)  $\sigma_4(q, p, u) = (p, q, -u)$  ist.

**Beweis.** Siehe [14], Theorem 1.22. □

### 1.2.3 Homogene Differentialoperatoren

Die Dilatationen des euklidischen  $\mathbb{R}^d$  ermöglichen es, dort den Begriff der Homogenität zu definieren. Dieses Konzept läßt sich kanonisch auf den Fall stratifizierter Liealgebren, siehe [13], erweitern, insbesondere also auf die Heisenberggruppe. Die oben definierte Dilatation  $\delta_r$  induziert einen Automorphismus der Liealgebra  $\mathfrak{h}_n$  und ihrer universell einhüllenden Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$ , den wir wiederum mit  $\delta_r$  bezeichnen. Nach Korollar 1.3 induziert  $\delta_r$  für  $1 \leq p \leq \infty$  auch eine Isometrie von  $L^p(\mathbb{H}_n)$ .

Damit ist es nun möglich, homogene Differentialoperatoren zu definieren und genauer zu untersuchen.

**Definition 1.11.** Ein  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$  heißt homogen vom Grade  $m \in \mathbb{N}_0$ , falls für alle  $r > 0$  die Identität  $\delta_r(X) = r^m X$  gilt.

*Anmerkung.* Offenbar sind die  $Z_j$  aus (1.5) homogen vom Grade eins, und  $U$  ist homogen vom Grade zwei.

Sei der auf  $C_0^\infty(\mathbb{H}_n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{H}_n)$  dicht definierte Operator  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$  symmetrisch und homogen vom Grade  $m$ . Dann ist  $X$  nach [38], Abschnitt VIII.2 auch abschließbar. Nach Satz 1.4 folgt also:

$$U^{-1}\overline{X}U = r^m\overline{X}, \tag{1.13}$$

wobei  $U$  die auf  $L^2(\mathbb{H}_n)$  unitäre Transformation  $Uf = r^{n+1}f \circ \delta_r$  bezeichnet. Daraus folgt im Falle  $m \geq 1$  für das Spektrum von  $\overline{X}$  bereits:

$$\text{spec}(\overline{X}) \in \{\mathbb{R}, ] - \infty, 0], [0, \infty[ \}.$$

Ist  $\overline{X}$  selbstadjungiert, so erhalten wir damit den folgenden Satz für den Funktionalkalkül von  $X$ .

**Satz 1.12.** *Sei  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$  selbstadjungiert und homogen vom Grade  $m \in \mathbb{N}$ . Dann sind für eine beschränkte Borelfunktion  $f: \text{spec}(X) \rightarrow \mathbb{C}$  und  $1 \leq p < \infty$  die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i)  $f(X)|_{L^p \cap L^2}$  läßt sich zu einem stetigen Operator auf  $L^p$  fortsetzen.
- (ii) Für alle  $r > 0$  läßt sich  $f(r \cdot)(X)|_{L^p \cap L^2}$  zu einem stetigen Operator auf  $L^p$  fortsetzen und die Normen aller dieser Operatoren stimmen überein.

**Beweis.** Aus (ii) folgt natürlich (i).

Es gelte also (i). Mit (1.13) folgt aufgrund der Unitarität von  $U$  die Gleichung  $U^{-1}f(X) \circ U = f(r \cdot)(X)$ . Da  $U$  nach Korollar 1.3 bis auf ein Vielfaches auch eine Isometrie von  $L^p$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Wir definieren nun eine wichtige Klasse homogener Operatoren auf  $\mathbb{H}_n$ . Analog zum klassischen Laplace-Operator  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$  definieren wir den sogenannten Sub-Laplace-Operator auf  $\mathbb{H}_n$  durch

$$\mathcal{L} = - \sum_{j=1}^n (Q_j^2 + P_j^2), \quad (1.14)$$

mit den Vektorfeldern aus (1.6). Explizit berechnet man

$$\mathcal{L} = -\Delta + \omega(z, \nabla) + \frac{1}{4} |z|^2 \partial_u^2. \quad (1.15)$$

Der Grund dafür, daß hier nicht der volle Laplace-Operator  $-(\sum_{j=1}^{2n} Z_j^2 + U^2)$  betrachtet werden soll, liegt darin, daß dieser im Gegensatz zu  $\mathcal{L}$  nicht homogen ist.

In der kommutativen Theorie ergibt sich eine etwas allgemeinere Situation, wenn man anstatt des Laplace-Operators  $\Delta$  den Operator  $\sum_{j,k} a_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}$  mit einer symmetrischen  $n \times n$ -Matrix  $A$  betrachtet. Analog kann man auf der Heisenberggruppe definieren:

**Definition 1.13.** Für  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  ist  $SJS$  gemäß der Bemerkung 1.6 eine symmetrische  $2n \times 2n$ -Matrix. Definiere den Operator

$$\mathcal{L}_S := \omega(S^t Z, Z) = -\langle Z, SJZ \rangle, \quad (1.16)$$

wobei  $Z = (Z_1, \dots, Z_{2n})$  und die  $Z_j$  die in (1.5) definierten Vektorfelder sind. Der in (1.14) definierte Sub-Laplace-Operator ist offenbar ein Spezialfall, es gilt  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{-J}$ .

Betrachte  $T \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Bezeichne mit  $\alpha_T$  den von  $T$  mittels  $\alpha_T(z, u) = (Tz, u)$  induzierten Automorphismus von  $\mathbb{H}_n$ . Offenbar ist  $\alpha_T$  auf  $\mathfrak{h}_n$  durch

$$\alpha_T(Z_j) = \sum_{l=1}^{2n} T_{lj} Z_l$$

gegeben. Zusammen mit der Abkürzung  $A := JS$  erhalten wir damit

$$\begin{aligned} \alpha_T(\mathcal{L}_S) &= - \sum_{j,k=1}^{2n} A_{jk} \alpha_T(Z_j) \alpha_T(Z_k) \\ &= - \sum_{l,m=1}^{2n} \left( \sum_{j,k=1}^{2n} T_{lj} A_{jk} T_{km}^t \right) Z_l Z_m \\ &= - \sum_{l,m=1}^{2n} (TAT^t)_{lm} Z_l Z_m = \mathcal{L}_{TST^{-1}}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

wobei die letzte Gleichheit aus  $JT^t = T^{-1}J$  folgt.

**Satz 1.14.** *Seien  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  und  $T \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Dann gelten:*

- (i)  $\mathcal{L}_S$  ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn dies für  $\mathcal{L}_{TST^{-1}}$  gilt.
- (ii) Ist  $SJ > 0$ , so ist  $\mathcal{L}_S$  wesentlich selbstadjungiert.
- (iii) Gilt (i) und ist  $1 \leq p < \infty$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte Borelfunktion, so induziert  $f(\mathcal{L}_S)$  genau dann einen stetigen Operator auf  $L^p(\mathbb{H}_n)$ , wenn dies auf  $f(\mathcal{L}_{TST^{-1}})$  zutrifft und in diesem Falle stimmen die Operatornormen überein, d.h.:  $\|f(\mathcal{L}_S)\|_{p \rightarrow p} = \|f(\mathcal{L}_{TST^{-1}})\|_{p \rightarrow p}$ .

**Beweis.** (i) folgt aus (1.17) und Satz 1.4 angewendet auf den Automorphismus  $\alpha_T$ .

Beim Beweis von (ii) kann man nach Lemma 1.8 und (i) o.B.d.A. davon ausgehen, daß  $SJ$  eine positiv definite Diagonalmatrix ist,  $\mathcal{L}_S$  also die Gestalt

$$\mathcal{L}_S = - \sum_{j=1}^n d_j (Z_j^2 + Z_{j+n}^2) \quad d_1, \dots, d_n > 0 \quad (1.18)$$

besitzt. Da  $\mathfrak{h}_n$  als Liealgebra bereits von den Vektorfeldern  $Z_1, \dots, Z_{2n}$  erzeugt wird, liefert ein Theorem von Hörmander [20], daß  $\mathcal{L}_S$  hypoelliptisch ist. Nach einem Satz von Nelson und Stinespring, siehe [37] Theorem 2.2, ist  $\mathcal{L}_S$  dann wesentlich selbstadjungiert. Dessen Beweis kann nämlich statt für elliptische Operatoren genauso für hypoelliptische durchgeführt werden.

Alternativ kann man Satz 3.2 aus der Dissertation von M. Gnewuch [15] direkt auf (1.18) anwenden. Dieser besagt nämlich, daß die Summe von Quadraten beliebiger Liealgebren-elemente bereits ein wesentlich selbstadjungierter Operator ist.

Den letzten Teil der Behauptung liefert der Satz 1.12. □

### 1.3 Unitäre Darstellungen von $\mathbb{H}_n$

Die Bestimmung aller irreduziblen unitären Darstellungen einer Liegruppe ist im allgemeinen eine recht aussichtslose Aufgabe. Im Falle der Heisenberg-Gruppe sind diese Darstellungen allerdings vollständig charakterisiert; dies ist der Inhalt des berühmten Theorems von Stone-von Neumann. Im wesentlichen sind dies die zu Beginn erwähnten Schrödingerdarstellungen, welche im folgenden definiert werden.

**Satz 1.15 (Schrödingerdarstellungen).** *Sei  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist durch  $\pi_\mu: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^n))$  mit*

$$\pi_\mu(q, p, u)f(x) := e^{-i\mu(xq + \frac{1}{2}pq + u)}f(x + p)$$

*eine irreduzible unitäre Darstellung von  $\mathbb{H}_n$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  gegeben. Für die zugehörige abgeleitete Darstellung  $d\pi_\mu$  gilt:*

$$\begin{aligned} d\pi_\mu(P_j) &= \frac{\partial}{\partial x_j} & d\pi_\mu(Q_j) &= -i\mu x_j \\ d\pi_\mu(U) &= -i\mu Id. \end{aligned}$$

**Beweis.** Folland [14]. □

Später werden wir nur noch  $\pi_1$  betrachten und setzen deshalb

$$\pi := \pi_1.$$

Die integrierte Darstellung von  $\pi$ , welche wir wie üblich wiederum mit  $\pi$  bezeichnen, hat dann die Form

$$\begin{aligned} [\pi(f)g](x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(q, p, u)[\pi(q, p, u)g](x)d(p, q, u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f(q, p, u)e^{-i(u+qx + \frac{1}{2}pq)}g(x + p)d(q, p, u). \end{aligned} \tag{1.19}$$

**Bemerkung 1.16.** Für  $w \in \mathbb{R}^{2n}$  ist die Abbildung

$$(z, u) \mapsto e^{-izw} \tag{1.20}$$

offenbar eine irreduzible (weil eindimensionale) unitäre Darstellung von  $\mathbb{H}_n$ .

Bis auf Äquivalenz kennt man damit allerdings auch bereits alle irreduziblen unitären Darstellungen der Heisenberg-Gruppe:

**Satz 1.17 (Stone-von Neumann).** *Sei  $D: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$  eine irreduzible unitäre Darstellung von  $\mathbb{H}_n$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $D$  entweder zu einer der Schrödingerdarstellungen  $\pi_\mu$  oder zu einer Darstellung der Form (1.20) unitär äquivalent.*

**Beweis.** Siehe z.B. im Buch von G. Folland [14], Theorem 1.59.  $\square$

Neben den Schrödingerdarstellungen interessieren uns später auch noch die von den zentralen Charakteren induzierten Darstellungen. Diese sind jedoch nicht irreduzibel. Bezeichne das Zentrum von  $\mathbb{H}_n$  mit  $\mathcal{C}(\mathbb{H}_n) := \{(0, 0, u) : u \in \mathbb{R}\}$ . Für  $\mu \in \mathbb{R}$  ist

$$(0, 0, u) \mapsto e^{-i\mu u}$$

eine Darstellung von  $\mathcal{C}(\mathbb{H}_n)$  auf  $\mathbb{C}$ . Nach dem in der Darstellungstheorie sehr bedeutsamen Untergruppentheorem von Mackey [31, 32] induziert diese eine unitäre Darstellung  $\sigma_\mu: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{H}_n/\mathcal{C}(\mathbb{H}_n), \mathbb{C}))$  der ganzen Gruppe. Identifiziert man  $\mathbb{H}_n/\mathcal{C}(\mathbb{H}_n)$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$ , so besitzt sie die Gestalt:

$$\sigma_\mu(z, u)f(z') = e^{-i\mu(u + \frac{1}{2}\omega(z', z))} f(z' + z). \quad (1.21)$$

Dies soll an dieser Stelle nicht näher ausgeführt werden, da im nächsten Abschnitt 1.4 über die getwistete Faltung die Darstellungen  $\sigma_\mu$  auf ganz natürliche Weise auftauchen. Ferner werden wir einsehen, daß  $\sigma_\mu$  in eine abzählbare direkte Summe von Schrödingerdarstellungen  $\pi_\mu$  zerfällt.

Für  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  bezeichnen wir die Bilder der in 1.16 definierten  $\mathcal{L}_S \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$  unter dem Differential  $d\pi$  der Schrödingerdarstellung durch:  $H_S := d\pi(\mathcal{L}_S)$ . Ist  $S$  von der Form  $S = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$  mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ , so gilt

$$H_S = \sum_{j=1}^n d_j \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 \right). \quad (1.22)$$

Im Spezialfall  $S = -J$  erhalten wir als Bild des Sub-Laplace-Operators insbesondere den Hermite-Operator:

$$H := \pi(\mathcal{L}) = -\Delta + |x|^2.$$

Dieser ist für sich genommen schon von großem Interesse, modelliert er doch den Hamiltonoperator des quantenmechanischen Harmonischen Oszillators. Die Spektralzerlegung von  $H$  läßt sich mit Hilfe der Hermitefunktionen ausdrücken: Bezeichnet man für  $k \in \mathbb{N}_0$  mit  $H_k$  das durch

$$H_k(x) := (-1)^k e^{x^2} \left( \frac{d}{dx} \right)^k (e^{-x^2})$$

definierte  $k$ -te Hermitepolynom und definiert für  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  die normalisierte Hermitefunktion  $h_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  durch

$$h_\alpha(x) := (2^{|\alpha|} \alpha! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} \prod_{j=1}^n H_{\alpha_j}(x_j), \quad (1.23)$$

so ist  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$  bekanntermaßen eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , welche aus Eigenfunktionen von  $H$  besteht, es gilt

$$H(h_\alpha) = (2|\alpha| + n)h_\alpha.$$

Wir betrachten nun etwas allgemeiner die Operatoren  $H_S$  der Form (1.22).  $H_S$  ist also unabhängige Kopplung von Vielfachen eindimensionaler Hermite-Operatoren. Da die  $n$ -dimensionalen Hermitefunktionen  $h_\alpha$  Tensorprodukte ihrer eindimensionalen Versionen sind, bildet  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$  auch ein vollständiges System von Eigenvektoren des Operators  $H_S$ . Explizit erhält man für diesen:  $H_S(h_\alpha) = \sum_{j=1}^n d_j(2\alpha_j + 1)h_\alpha$ , so daß der Funktionalkalkül von  $H_S$  durch

$$f(H_S)\varphi = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} f\left(\sum_{j=1}^n d_j(2\alpha_j + 1)\right) \langle h_\alpha, \varphi \rangle h_\alpha \quad (1.24)$$

gegeben ist.

## 1.4 Getwistete Faltung und Weyltransformation

**Definition 1.18.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{H}_n)$  und  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann ist die Fouriertransformierte  $f^\mu \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$  von  $f$  in der zentralen Variablen definiert durch

$$f^\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} f(z, u) e^{i\mu u} du. \quad (1.25)$$

Betrachtet man nun die Faltung  $f_1 * f_2$ , so ergibt sich, daß die zentrale Fouriertransformierte  $(f_1 * f_2)^\mu$  nur von  $f_1^\mu$  und  $f_2^\mu$  abhängt:

**Lemma 1.19.** *Seien nun  $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{H}_n)$ . Dann gilt*

$$(f_1 * f_2)^\mu = f_1^\mu \times_\mu f_2^\mu, \quad (1.26)$$

wobei  $\times_\mu$  die sogenannte  $\mu$ -getwistete Faltung bezeichne, welche für  $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$  durch

$$(h_1 \times_\mu h_2)(z) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} h_1(z') h_2(z - z') e^{-i\mu \frac{1}{2} \omega(z, z')} dz' \quad (1.27)$$

definiert ist.

**Beweis.** Direktes Nachrechnen liefert für  $z \in \mathbb{R}^{2n}$  und  $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
(f_1 * f_2)^\mu(z) &= \int_{\mathbb{R}} (f_1 * f_2)(z, u) e^{i\mu u} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f_1(z', u') f_2(z - z', u - u' + \frac{1}{2}\omega(z, z')) d(z', u') \right) e^{i\mu u} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} f_1(z', u') f_2(z - z', u) d(z', u') \right) e^{i\mu(u+u' - \frac{1}{2}\omega(z, z'))} du \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f_1^\mu(z') f_2^\mu(z - z') e^{-i\mu \frac{1}{2}\omega(z, z')} dz'
\end{aligned}$$

also die Behauptung.  $\square$

Für die Eigenschaften der getwisteten Faltung siehe auch [14]. Im Gegensatz zur herkömmlichen Faltung auf  $\mathbb{R}^{2n}$  ist sie nicht kommutativ. Es gilt aber z.B. auch für  $\times_\mu$  die Youngsche Ungleichung, und für  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$  ist sogar  $f_1 \times_\mu f_2 \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , eine Eigenschaft, welche die gewöhnliche Faltung nicht besitzt.

Durch die übliche Vorgehensweise läßt sich die getwistete Faltung nun auch für Distributionen erklären, insbesondere gilt auch hier:  $\mathcal{S}' \times_\mu \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}' \cap C^\infty$ , und  $\times_\mu$  ist als Abbildung von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  stetig. Explizit erhält man für  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  und  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ :

$$(\varphi \times_\mu u)(\psi) = u(\psi \times_\mu \varphi^\vee), \quad (1.28)$$

wobei  $\varphi^\vee(z) = \varphi(-z)$ . Da  $\varphi \times_\mu u$  und  $u \times_\mu \varphi$  überdies Funktionen sind, können auch punktweise Formeln hergeleitet werden. Diese besitzen die Gestalt

$$\begin{aligned}
(u \times_\mu \varphi)(z) &= u(\varphi(z - \cdot) e^{-i\frac{\mu}{2}\omega(z, \cdot)}), \\
(\varphi \times_\mu u)(z) &= u(\varphi(z - \cdot) e^{i\frac{\mu}{2}\omega(z, \cdot)}).
\end{aligned}$$

Interessant ist insbesondere die getwistete Faltung einer Funktion mit einer Dirac-Distribution  $\delta_z$ :

**Definition 1.20 (getwistete Translationen).** Für  $w \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  nennen wir  $\delta_w \times_\mu \varphi$  die getwistete Linkstranslation von  $\varphi$  um  $w$ . Man sieht sofort, daß

$$(\delta_w \times_\mu \varphi)(z) = \varphi(z - w) e^{-i\frac{\mu}{2}\omega(z, w)} \quad (1.29a)$$

gilt. Analog heißt  $\varphi \times_\mu \delta_w$  die getwistete Rechtstranslation von  $\varphi$  um  $w$ , für die man

$$(\varphi \times_\mu \delta_w)(z) = \varphi(z - w) e^{i \frac{\mu}{2} \omega(z, w)} \quad (1.29b)$$

erhält. Wie bei der gewöhnlichen Faltung gilt also auch in der getwisteten Situation:  $\varphi \times_\mu \delta_0 = \delta_0 \times_\mu \varphi = \varphi$ .

Wir führen ab jetzt die Notation

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial z_j} \quad 1 \leq j \leq 2n \quad (1.30)$$

ein.

Bildet man partielle Ableitungen eines Faltungsproduktes, so kann man diese allerdings nicht wie im euklidischen Fall einfach vor einen der Faktoren schreiben. Vielmehr erhält man aus der Definition (1.27)

$$\begin{aligned} \partial_j(\varphi \times_\mu u) &= \varphi \times_\mu \partial_j u - i \frac{\mu}{2} [\omega(e_j, \cdot) \varphi] \times_\mu u \\ \partial_j(\varphi \times_\mu u) &= \partial_j \varphi \times_\mu u + i \frac{\mu}{2} \varphi \times_\mu [\omega(e_j, \cdot) u]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Diese Formel bleibt selbverständlich gültig, wenn man mit den üblichen Methoden die getwistete Faltung zweier Distributionen mit kompaktem Träger erklärt.

**Beispiel 1.21.** Für  $1 \leq j, k \leq 2n$ , gilt:

$$\partial_k \delta_0 \times_\mu \partial_j \delta_0 = \partial_j \partial_k \delta_0 - \mu \frac{i}{2} \omega(e_j, e_k) \delta_0. \quad (1.32)$$

**Beweis.** Wendet man (1.31) auf  $\delta_0$  und  $\partial_k \delta_0$  an, so gilt

$$\partial_k \delta_0 \times_\mu \partial_j \delta_0 = \partial_j (\partial_k \delta_0 \times_\mu \delta_0) + \mu \frac{i}{2} \omega(e_j, \cdot) \partial_k \delta_0 \times_\mu \delta_0.$$

Benutzt man  $\partial_k \delta_0 \times_\mu \delta_0 = \partial_k \delta_0$  und bedenkt, daß aufgrund von  $\omega(e_j, 0) = 0$  und  $\partial_k \omega(e_j, \cdot) = \omega(e_j, e_k)$  auch noch  $\omega(e_j, \cdot) \partial_k \delta_0 = -\omega(e_j, e_k) \delta_0$  gilt, so ergibt sich (1.32).  $\square$

Folgende „infinitesimale Versionen“ der getwisteten Translationen, deren Gestalt sofort als Spezialfall aus (1.28) folgt, kann man als getwistete Richtungsableitungen auffassen:

Sei  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ . Dann gilt für  $j \in \{1, \dots, 2n\}$

$$(\varphi \times_\mu \partial_j \delta_0)(z) = \partial_j \varphi(z) - \mu \frac{i}{2} \omega(z, e_j) \varphi(z). \quad (1.33)$$



**Definition 1.22.** Unter einem getwisteten Faltungsoperator (von rechts) verstehen wir im folgenden einen Operator  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , der die Form

$$T\varphi = \varphi \times u$$

für ein gewisses  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  besitzt. Die Distribution  $u$  heißt dann der (rechts)–getwistete Faltungskern von  $T$ . Analog definiert man getwistete Faltungsoperatoren von links.

Aufgrund der Formel

$$(e^{-i\mu u'} \delta_{-z'}) \times_{\mu} (e^{-i\mu u} \delta_{-z}) = e^{-i\mu(u+u'+\frac{1}{2}\omega(z,z'))} \delta_{-(z+z')}$$

sieht man leicht ein, daß

$$\sigma_{\mu}(z, u)f := e^{-i\mu u} f \times_{\mu} \delta_{-z} \quad (z, u) \in \mathbb{H}_n, f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$$

eine unitäre Darstellung  $\sigma_{\mu}: \mathbb{H}_n \rightarrow \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$  von  $\mathbb{H}_n$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  definiert. Nach Gleichung (1.29b) ist dies konsistent mit (1.21). Sind  $f \in L^1(\mathbb{H}_n)$  und  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , so besitzt die integrierte Darstellung  $\sigma_{\mu}(f)$  die Form:

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu}(f)\varphi(z') &= \int_{\mathbb{R}^{2n+1}} \overset{\vee}{f}(z, u) e^{-i\mu u} (\varphi \times \delta_{-z}(z')) d(z, u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^{\mu}(-z) \varphi(z+z') e^{i\frac{\mu}{2}\omega(z',-z)} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(z) f^{\mu}(z'-z) e^{-i\frac{\mu}{2}\omega(z',z)} dz \\ &= (\varphi \times_{\mu} f^{\mu})(z'). \end{aligned}$$

Für die abgeleitete Darstellung  $d\sigma_{\mu}$  von  $\sigma_{\mu}$  berechnet man explizit:

$$\begin{aligned} d\sigma_{\mu}(P_j) &= \frac{\partial}{\partial p_j} + i\frac{\mu}{2}q_j & d\sigma_{\mu}(Q_j) &= \frac{\partial}{\partial q_j} - i\frac{\mu}{2}p_j \\ d\sigma_{\mu}(U) &= -i\mu \text{Id}. \end{aligned}$$

Von nun an werden wir uns wie auch bei den Schrödingerdarstellungen auf den Fall  $\mu = 1$  beschränken und setzen deshalb  $\times := \times_1$  und  $\sigma := \sigma_1$ .

**Definition 1.23.** Für  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  bezeichne

$$L_S := d\sigma(\mathcal{L}_S),$$

mit dem in (1.16) definierten  $\mathcal{L}_S$ . Im Spezialfall  $S = -J$  berechnet man explizit:

$$L := d\sigma(\mathcal{L}) = -\Delta + i\omega(\nabla, z) + \frac{1}{4}|z|^2.$$

Ist  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$ , so nennen wir  $L_S$  einen getwisteten Sub-Laplace-Operator.

Durch explizite Konstruktion als infinitesimale Erzeuger von Ein-Parameter-Gruppen auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  unitärer Operatoren, werden wir im nächsten Kapitel einsehen, daß  $L_S$  für jedes  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  ein auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  wesentlich selbstadjungierter Operator ist.

Die  $L_S$  sind getwistete Faltungsoperatoren. Nach Beispiel 1.21 erhalten wir explizit für  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ :  $d\sigma(Z_j Z_k)\varphi = \varphi \times (\partial_k \delta_0 \times \partial \delta_0) = \varphi \times (\partial_j \partial_k \delta_0 - \frac{i}{2}\omega(e_j, e_k)\delta_0)$ . Da  $SJ$  eine symmetrische Matrix und die symplektische Form  $\omega$  schiefsymmetrisch ist, erhält man somit

$$L_S \varphi = -\varphi \times \langle \nabla, SJ \nabla \rangle \delta_0. \quad (1.34)$$

Mittels der partiellen Fouriertransformation in der zentralen Variablen (1.25) kann die Darstellung  $\sigma$  besonders schön dargestellt werden:

**Lemma 1.24.** *Für jedes Element  $X \in \mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$  der einhüllenden Algebra von  $\mathfrak{h}_n$  und  $f \in C_0^\infty(\mathbb{H}_n)$  gilt:*

$$(Xf)^1 = d\sigma(X)f^1.$$

**Beweis.** Da  $X$  den Raum  $C_0^\infty(\mathbb{H}_n)$  invariant läßt und  $\mathcal{U}(\mathfrak{h}_n)$  als Algebra von  $\mathfrak{h}_n$  erzeugt wird, genügt es die Behauptung für  $X \in \mathfrak{h}_n$  zu zeigen. Nach (1.33) sind die Operatoren  $d\sigma(Z_j)$  explizit durch

$$d\sigma(Z_j)g = g \times \partial_j \delta_0$$

gegeben. Daraus folgt also, daß für  $f \in C_0^\infty(\mathbb{H}_n)$  gilt:  $(Z_j f)^1 = (f * \partial_j \delta_0)^1 = f^1 \times \partial_j \delta_0$  und damit die Behauptung für  $X = Z_j$ . Im Falle  $X = U$  erhält man die Aussage durch  $(Uf)^1(z) = \int e^{-iu} \partial_u f(z, u) du = if^1(z)$ .  $\square$

Damit erhält man nun, daß bei  $L^p$ -Abschätzungen für Funktionen von  $L_S$ , ebenso wie bei den Operatoren  $\mathcal{L}_S$  auf der Heisenberg-Gruppe, wiederum zu „Normalformen“ übergegangen werden kann. Dies zeigt das folgende Lemma, wenn man bedenkt, daß der Operator  $f \mapsto f \circ T$  für  $T \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  wegen  $|\det T| = 1$  eine Isometrie auf  $L^p(\mathbb{R}^{2n})$  definiert.

**Lemma 1.25.** *Seien  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  und  $T \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Dann gilt für alle  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ :*

$$L_S(f \circ T) = [L_{TST^{-1}}f] \circ T.$$

**Beweis.** Wähle  $g \in C^\infty(\mathbb{H}_n)$  so, daß  $g^1 = f$ . Mit der Definition  $\alpha_T g(z, u) := g(Tz, u)$  folgt aus (1.25) sofort  $(\alpha_T g)^{-1} = f \circ T$ , so daß wir unter Zuhilfenahme von (1.17) und Lemma 1.24 die Gleichungskette

$$\begin{aligned} L_S(f \circ T) &= L_S((\alpha_T g)^1) = [\mathcal{L}_S(\alpha_T g)]^1 = (\alpha_T[\mathcal{L}_{TST^{-1}}g])^1 \\ &= (\mathcal{L}_{TST^{-1}}g)^1 \circ T = [L_{TST^{-1}}f] \circ T \end{aligned}$$

und somit die Behauptung erhalten.  $\square$

**Korollar 1.26.** *Seien  $S, T$  wie in Lemma 1.25 und  $1 \leq p, q < \infty$ . Falls  $L_S$  selbstadjungiert (wir werden im nächsten Kapitel einsehen, daß dies für alle  $S$  stets gilt) und  $m$  eine beschränkte Borelfunktion ist, so gilt:*

$$\|m(L_S)\|_{p \rightarrow q} = \|m(L_{TST^{-1}})\|_{p \rightarrow q}.$$

*Anmerkung.* Die Darstellungen  $\sigma_\mu$  sind im Gegensatz zu den Schrödingerdarstellungen nicht irreduzibel. Es stellt sich vielmehr heraus, daß  $\sigma_\mu$  äquivalent zur direkten Summe abzählbar vieler Kopien von  $\pi_\mu$  ist. Dies werden wir im nächsten Abschnitt unter Benutzung der sogenannten Fourier–Wigner–Transformation einsehen.

Wir wollen uns nun der sogenannten Weyltransformation widmen, die bis auf eine Fouriertransformation identisch ist mit dem in der Theorie der Pseudodifferentialoperatoren und beim Problem der Quantisierung sehr bedeutsamen Weylkalkül. Genaueres findet sich wiederum bei Folland [14] oder Taylor [48]. Im folgenden setzen wir  $\mu := 1$  und  $\times := \times_1$ . Betrachte dann die integrierte Darstellung der Schrödingerdarstellung  $\pi := \pi_1$ . An (1.19) sieht man, daß  $\pi(f)$  in Wahrheit nur von der Fouriertransformierten  $f^{(-1)}$  von  $f$  in der zentralen Variablen abhängt. Es existiert also eine Abbildung  $\rho: L^1(\mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$  so, daß folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} (L^1(\mathbb{H}_n), *) & \xrightarrow{\pi} & (\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n)), \circ) \\ f \mapsto f^{(-1)} \downarrow & \nearrow \rho & \\ (L^1(\mathbb{R}^{2n}), \times) & & \end{array}$$

Dieses  $\rho$  ist per definitionem gerade die oben erwähnte Weyltransformation. Da  $f \mapsto f^{(-1)}$  den Raum  $L^1(\mathbb{H}_n)$  surjektiv auf  $L^1(\mathbb{R}^{2n})$  abbildet, sieht man anhand von (1.26) und da  $\pi$  ein Algebrenhomomorphismus ist:

$$\rho(f^{(-1)} \times g^{(-1)}) = \pi(f * g) = \pi(f) \circ \pi(g) = \rho(f^{(-1)}) \circ \rho(g^{(-1)}).$$

Somit ist auch  $\rho$  ein Homomorphismus von Banachalgebren. Es läßt sich leicht zeigen, daß  $\rho$  außerdem stetig ist, wenn man  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$  mit der starken Operator-topologie ausstattet.

*Anmerkung.* Es ist sogar so, daß sich  $\rho$  zu einer Bijektion von  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  auf den Raum aller stetigen Operatoren  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  fortsetzen läßt. Diese Fortsetzung bildet  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  isometrisch auf den Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren ab. Dies findet sich z.B. im Buch von Folland [14], man erkennt dies allerdings auch schnell an der expliziten Form von  $\rho$ , die wir als nächstes bestimmen werden.

Als nächstes wollen wir den Zusammenhang zwischen der Weyltransformation und dem Weylkalkül herleiten. Sei dazu  $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$ . Es gilt:

$$\begin{aligned} \rho(f^{(-1)}) = \pi(f) &= \int_{\mathbb{H}_n} f(q, p, u) \pi(q, p, u) d(q, p, u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_{\mathbb{R}} e^{iu} f(q, p, u) \pi(q, p, 0) du d(q, p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f^{(-1)}(q, p) \pi(q, p, 0) d(q, p). \end{aligned}$$

Es muß also stets

$$\rho(f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(q, p) \pi(q, p, 0) d(q, p) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(q, p) e^{-i(qX+pD)} d(q, p)$$

gelten. Dies motiviert die Definition des sogenannten Weylkalküls

$$\widehat{f}(X, D) := \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(q, p) e^{-i(qX+pD)} d(q, p) = \rho(f).$$

Man nennt  $f$  das Weylsymbol des Operators  $\widehat{f}(X, D)$ , vergleiche dazu auch Kapitel 1, Abschnitt 3 im Buch von M. Taylor [48]. Explizit rechnet man nach:

$$\begin{aligned} [\rho(f)g](x) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(q, p) e^{-i(xq+\frac{1}{2}pq)} g(x+p) d(q, p) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_1 f\left(x + \frac{p}{2}, p\right) g(x+p) dp \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_1 f\left(\frac{p+x}{2}, p-x\right) g(p) dp, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{F}_1 f$  die partielle Fouriertransformierte von  $f$  in der ersten Variable bezeichne. Der Integralkern von  $\rho(f)$  ist also gleich  $(\mathcal{F}_1 f) \circ T$ , wenn  $T$  die lineare Transformation

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\text{Id}}{2} & \frac{\text{Id}}{2} \\ -\text{Id} & \text{Id} \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Offenbar gilt:  $\det T = 1$ . Damit induziert  $T$  eine unitäre Transformation von  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , und es gilt  $\|(\mathcal{F}_1 f) \circ T\|_2 = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_2$ . Die Weyltransformation läßt sich also durch

$$[\rho(f)\varphi](\psi) = (2\pi)^n ((\mathcal{F}_1^{-1} f) \circ T)(\psi \otimes \varphi) \quad (1.35)$$

ausdrücken.

## 1.5 Die Fourier–Wigner–Transformation

Ist  $\tau$  eine unitäre Darstellung einer Gruppe  $G$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , so heißen die für festes  $x, y \in \mathcal{H}$  durch  $M_{x,y}(g) := \langle \tau(g)x, y \rangle$  definierten Funktionen  $M_{x,y}: G \rightarrow \mathbb{C}$  die Matrixkoeffizienten der Darstellung  $\tau$ . Im Falle der in 1.15 definierten Schrödingerdarstellung  $\pi$  der Heisenberg–Gruppe  $\mathbb{H}_n$  gilt also für  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  mit einer Variablentransformation  $x \mapsto x - \frac{p}{2}$

$$\begin{aligned} M_{f,g}(z, u) &= e^{iu} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(xq + \frac{1}{2}pq)} f(x+p) \overline{g(x)} dx \\ &= e^{-iu} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ixq} f(x + \frac{p}{2}) \overline{g(x - \frac{p}{2})} dx. \end{aligned}$$

**Definition 1.27.** Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dann definieren wir die sogenannte Fourier–Wigner–Transformierte  $V(f, g)$  von  $(f, g)$  durch

$$V(f, g) := \mathcal{F}_1[(f \otimes \bar{g}) \circ \tilde{T}], \quad (1.36)$$

wobei  $\tilde{T}$  die lineare Transformation

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \text{Id} & \frac{\text{Id}}{2} \\ \text{Id} & -\frac{\text{Id}}{2} \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

Mit dieser Definition gilt also

$$M_{f,g}(z, u) = e^{-iu} \langle \pi(z, 0)f, g \rangle = e^{-iu} V(f, g)(z).$$

$V$  ist eine sesquilineare Abbildung von  $L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ . Da  $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes L^2(\mathbb{R}^n) \simeq L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , können wir  $V$  mittels folgender Definition auch als linearen Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  auffassen.

$$\bar{V}(f \otimes g)(z) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} V(f, \bar{g})(z). \quad (1.37)$$

Dann erhält man für die Abbildungseigenschaften von  $\bar{V}$ :

**Lemma 1.28.**  $\bar{V}$  ist sowohl ein topologischer Isomorphismus von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  und  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  als auch eine unitäre Transformation von  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  auf sich.

**Beweis.** Dies folgt sofort aus der Formel (1.36) und der Definition von  $\bar{V}$ , da die (partielle) Fouriertransformation die behaupteten Eigenschaften besitzt und außerdem  $|\det \tilde{T}| = 1$  gilt.  $\square$

Mit Hilfe der „modifizierten Fourier–Wigner–Transformation“  $\bar{V}$  stellt sich der Zusammenhang zwischen den Darstellungen  $\pi$  und  $\sigma$  nun wie folgt dar:

**Lemma 1.29.** Für  $(z, u) \in \mathbb{H}_n$  und  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  gilt:

$$(\sigma(z, u) \circ \bar{V})(f \otimes g) = \bar{V}(\pi(z, u)f \otimes g).$$

**Beweis.** Eine direkte Rechnung zeigt für  $(z, u) \in \mathbb{H}_n$ ,  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $z' \in \mathbb{R}^{2n}$  unter Benutzung von  $\pi(z', 0)\pi(z, u) = \pi(z + z', u - \frac{1}{2}\omega(z, z')) = e^{-i(u - \frac{1}{2}\omega(z, z'))} \pi(z + z', 0)$ :

$$\begin{aligned} \sigma(z, u)(V(\tilde{f}, g))(z') &= e^{-iu} e^{\frac{i}{2}\omega(z, z')} V(f, g)(z + z') \\ &= e^{-iu} e^{\frac{i}{2}\omega(z, z')} \langle \pi(z + z', 0)f, g \rangle \\ &= \langle \pi(z', 0)\pi(z, u)f, g \rangle = V(\pi(z, u)f, g)(z'), \end{aligned}$$

also gilt die Behauptung.  $\square$

Diese Aussage zeigt, daß folgendes Diagramm für jedes  $g \in \mathbb{H}_n$  kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\pi(g) \otimes \text{Id}} & L^2(\mathbb{R}^{2n}) \\ \bar{V} \downarrow & & \downarrow \bar{V} \\ L^2(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\sigma(g)} & L^2(\mathbb{R}^{2n}) \end{array} \quad (1.38)$$

Die Darstellungen  $\pi \otimes \text{Id}$  und  $\sigma$  sind also unitär äquivalent. Da  $L^2(\mathbb{R}^n)$  separabel ist, kann man  $\sigma$  als direkte Summe von abzählbar vielen Kopien der Schrödingerdarstellung  $\pi$  auffassen.

Dieses Diagramm behält seine Gültigkeit auch, falls man die Darstellungen durch ihre Differentiale ersetzt. Insbesondere sind die getwisteten Sub-Laplace-Operatoren  $L_S$  mittels der modifizierten Fourier–Wigner–Transformation  $\bar{V}$  unitär äquivalent zu einer abzählbar direkten Summe  $H_S \otimes \text{Id}$  von Hermiteoperatoren  $H_S$ . Für das Spektrum von  $L_S$  gilt ferner:

$$\text{spec}(L_S) = \text{spec}(H_S).$$

Setzt man außerdem

$$\Phi_{\alpha,\beta} := \overline{V}(h_\alpha \otimes h_\beta) \quad (1.39)$$

für alle Multiindizes  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ , so bildet  $\{\Phi_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , welche aus Eigenfunktionen von  $L_S$  besteht, es gilt nämlich:

$$L(\Phi_{\alpha,\beta}) = (2|\alpha| + n)\Phi_{\alpha,\beta}.$$

Die  $\Phi_{\alpha,\beta}$  nennt man auch die „Speziellen Hermitefunktionen“.

**Bemerkung 1.30.** Indem man zu den integrierten Darstellungen übergeht, kann man auch zeigen, daß für alle  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  auch folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\rho(\check{u}) \otimes \text{Id}} & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \\ \overline{V} \downarrow & & \downarrow \overline{V} \\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi \times u} & \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \end{array} \quad (1.40)$$

## 1.6 Zusammenhang mit Laguerreentwicklungen

Es soll nun noch kurz auf den Zusammenhang zwischen den Eigenfunktionen des getwisteten Sub-Laplaceoperators  $L$  und den mit den Hermitefunktionen eng verwandten Laguerrefunktionen eingegangen werden. Man stößt dabei auf den sogenannten Greinerschen Laguerrekalkül. Vergleiche dazu auch Kapitel 1 im Buch von Thangavelu [51]. Eine ausführliche Diskussion von speziellen Funktionen findet sich bei Szegő [47], die Laguerrefunktionen werden dort ab Seite 99 behandelt, oder auch bei Lebedew [29].

Zunächst sei an die Definition der Laguerrepolynome erinnert. Seien dazu im folgenden  $\alpha > -1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist das Laguerrepolynom vom Typ  $\alpha$  und Grad  $k$  durch

$$L_k^\alpha: ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, r \mapsto \sum_{j=0}^k \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k - j + 1)\Gamma(j + \alpha + 1)} \frac{(-r)^j}{j!}. \quad (1.41)$$

Für festes  $\alpha$  bildet die Familie  $\{L_k^\alpha\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  aller Laguerrepolynome vom Typ  $\alpha$  ein Orthogonalsystem im Raum  $L^2(]0, \infty[, r^\alpha e^{-r} dr)$ , es gilt

$$\int_0^\infty L_j^\alpha(r) L_k^\alpha(r) r^\alpha e^{-r} dr = \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{\Gamma(k + 1)} \delta_{jk}.$$

Von Interesse sind die Laguerrepolynome deshalb, weil  $L_k^\alpha$  Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ky = 0.$$

ist und zwar die einzige, welche gleichzeitig ein Polynom ist. Die Hermitepolynome  $H_k$  sind im wesentlichen Spezialfälle der Laguerrepolynome vom Typ  $\frac{1}{2}$  und  $-\frac{1}{2}$ , genauer gilt für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ :

$$\begin{aligned} H_{2k}(x) &= (-1)^k 2^{2k} k! L_k^{-\frac{1}{2}}(x^2) \\ H_{2k+1}(x) &= (-1)^k 2^{2k} k! x L_k^{\frac{1}{2}}(x^2). \end{aligned}$$

Die Laguerrefunktionen, welche durch

$$\mathcal{L}_k^\alpha(r) := \sqrt{\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+\alpha+1)}} e^{-\frac{r}{2}} r^{\frac{\alpha}{2}} L_k^\alpha(r)$$

definiert sind, bilden also ein Orthonormalsystem in  $L^2(]0, \infty[, dr)$ . Der Zusammenhang zwischen den Laguerrefunktionen und der Spektralzerlegung des getwisteten Sub-Laplaceoperators  $L$  ergibt sich nun aus dem folgenden Satz.

**Satz 1.31.** *Die in (1.39) definierten Speziellen Hermitefunktionen lassen sich wie folgt durch Laguerrepolynome ausdrücken. Für alle  $\mu, m \in \mathbb{N}_0^n$  gilt:*

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu, \mu+m}(z) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-i)^{|m|} e^{im \cdot \theta} \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_{\mu_j}^{m_j} \left( \frac{r_j^2}{2} \right) \\ \Phi_{\mu+m, \mu}(z) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (-i)^{|m|} e^{-im \cdot \theta} \prod_{j=1}^n \mathcal{L}_{\mu_j}^{m_j} \left( \frac{r_j^2}{2} \right). \end{aligned} \tag{1.42}$$

mit  $z = (e^{im_1 \theta_1} r_1, \dots, e^{im_n \theta_n} r_n)$ .

**Beweis.** Thangavelu [51], Theorem 1.3.5. □

*Anmerkung.* Bezüglich der getwisteten Faltung erfüllen die speziellen Hermitefunktionen die Relation

$$\Phi_{\alpha\beta} \times \Phi_{\gamma\delta} = \delta_{\beta\gamma} \Phi_{\alpha\delta}. \tag{1.43}$$

Nach (1.42) erhält man dadurch Relationen für die Laguerrefunktionen, den sogenannten Greinerschen Laguerrekalkül, siehe [5, 6].

Die Formeln (1.42) motivieren die folgende Begriffsbildung.

**Definition 1.32 ( $m$ -homogene Funktionen).** Seien  $f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  und  $m \in \mathbb{Z}^n$ . Dann nennen wir  $f$  eine  $m$ -homogene Funktion, falls für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  und  $\theta \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$f(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) = e^{im \cdot \theta} f(z).$$



Die erste Beobachtung ist nun, daß  $\Phi_{\mu,\nu}$  eine  $(\nu - \mu)$ -homogene Funktion ist, falls man  $\mathbb{R}^{2n}$  via  $z = (q, p) \mapsto p + iq$  mit  $\mathbb{C}^n$  identifiziert. Dies ergibt sich sofort aus (1.42). Bezeichnet man mit  $L_m^2(\mathbb{C}^n)$  den Raum aller quadratintegrierbaren  $m$ -homogenen Funktionen, so ist

$$L^2(\mathbb{C}^n) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}^n} L_m^2(\mathbb{C}^n), \quad (1.44)$$

wobei die Summanden paarweise orthogonal sind, und  $\{\Phi_{\mu+m,\mu}\}_{\mu \in \mathbb{N}_0^n}$  ist eine Hilbertraumbasis von  $L_m^2(\mathbb{C}^n)$ . Aufgrund der Formel (1.43) macht die Zerlegung (1.44)  $L^2(\mathbb{C}^n)$  auch zu einer graduerten Algebra bezüglich der getwisteten Faltung.

Es soll jetzt erklärt werden, wie die Entwicklung in spezielle Hermitefunktionen, also die Eigenfunktionen von  $L$ , mit der in die Laguerrefunktionen zusammenhängt. Sei der Einfachheit halber  $n = 1$ . Betrachten wir dann eine Funktion  $f \in L_m^2(\mathbb{C})$ , so ist diese von der Gestalt  $f(z) = e^{im\cdot\theta} f(r)$  mit  $z = e^{i\theta} r$ . Man erhält aufgrund von (1.42) und durch Übergang zu Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \langle f, \Phi_{j,j+m} \rangle &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (-i)^m \int_0^{2\pi} \int_0^\infty e^{im\theta} f(r) \overline{\mathcal{L}_j^m\left(\frac{r^2}{2}\right)} r dr d\theta \\ &= \sqrt{2\pi} (-i)^m \int_0^\infty f(r) r \mathcal{L}_j^m\left(\frac{r^2}{2}\right) dr = c_m \int_0^\infty f(\sqrt{2r}) \mathcal{L}_j^m(r) dr \\ &= c_m \langle g, \mathcal{L}_j^m \rangle \end{aligned}$$

mit  $g(r) = f(\sqrt{2r})$  und  $c_m := (-i)^m \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

Bezeichnet  $f_k(z) := \sum_{j=0}^k \langle f, \Phi_{j,j+m} \rangle \Phi_{j,j+m}(z)$  die Entwicklung von  $f$  in Eigenfunktionen von  $L$  und  $g_k(r) := \sum_{j=0}^k \langle g, \mathcal{L}_j^m \rangle \mathcal{L}_j^m(r)$  die Entwicklung von  $g$  in Laguerrefunktionen vom Typ  $m$ , so gilt

$$f_k(z) = \frac{(-1)^m}{2} e^{im\theta} g_k\left(\frac{r^2}{2}\right).$$



## Kapitel 2

# Die metaplektische Gruppe

Man erinnere sich an die in Kapitel 1 definierten  $L_S$ . Ziel dieses Kapitels ist es, explizite Formeln für die von diesen erzeugten unitären Operatoren  $e^{itL_S}$  herzuleiten. Ein konkreter Zugang dazu ist der über Gaußsche Funktionen und die von R. Howe in [23] untersuchte sogenannte Oszillator-Halbgruppe, wie er auch bei D. Müller und F. Ricci in [35] Verwendung findet.

Im vorigen Kapitel wurde in Lemma 1.7 festgestellt, daß die symplektische Gruppe  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  in natürlicher Weise auf der Heisenberg-Gruppe operiert. Das dadurch entstehende semidirekte Produkt ist beim Problem der Quantisierung in der Physik von großer Bedeutung. Man fragt dabei insbesondere nach unitären Darstellungen von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ . Auf Ebene der Liealgebra existiert eine sehr natürliche Darstellung, die im wesentlichen durch den Weylkalkül gegeben ist. Es stellt sich dann aber heraus, daß sich diese nicht zu einer Darstellung von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  exponentieren läßt, jedoch zu einer ihrer zweifachen Überlagerung, der sogenannten metaplektischen Gruppe  $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$ . Diese Darstellung nennt man daher auch die metaplektische Darstellung, weitere Namen sind Segal-Shale-Weil-Darstellung oder Oszillator-Darstellung. Sie wurde von D. Shale in [41] konstruiert, der Zusammenhang mit der Heisenberg-Gruppe wird eingehend in den Büchern von M. Taylor [48] und G. Folland [14] untersucht.

Angemerkt sei noch, daß es sich bei  $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$  nicht um die universelle Überlagerung der symplektischen Gruppe handelt, vielmehr ist die Fundamentalgruppe von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  isomorph zu  $\mathbb{Z}$  und die universelle Überlagerung hat somit abzählbar viele Blätter. Ein Beweis davon findet sich z.B. bei G. Folland [14], Proposition 4.8.

### 2.1 Hamiltonsche Vektorfelder

Dieser Abschnitt soll den Zusammenhang zwischen der in 1.5 definierten symplektischen Gruppe und den sogenannten Hamiltonschen Vektorfeldern darstellen. In der klassischen Mechanik spielt dies eine große Rolle, als Klassiker gelten die Bücher von Arnol'd [2] und Abraham, Marsden [1]. Eine sehr ausführliche Behandlung symplektischer Strukturen ist auch das Werk von P. Libermann und J. Marle [30]. Die Struktur der symplektischen Gruppe wird hierbei leider überhaupt nicht untersucht. Dies findet sich jedoch z.B. im Buch von M. Taylor

[48].

Im weiteren bezeichne  $J$  die in (1.10) definierte Matrix der symplektischen Form, also

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definition 2.1 (Hamiltonsches Vektorfeld).** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  offen und  $f \in C^1(U)$ . Dann ist das zu gehörige Hamiltonsche Vektorfeld  $X_f: U \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  definiert durch

$$X_f(z) := J(\nabla f(z)). \quad (2.1)$$

**Bemerkung 2.2.** Es gilt in Koordinaten:

$$X_f(z) = \left( \frac{\partial f}{\partial p_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial p_n}(z), -\frac{\partial f}{\partial q_1}(z), \dots, -\frac{\partial f}{\partial q_n}(z) \right).$$

Faßt man Vektorfelder als Differentialoperatoren erster Ordnung auf, so erhält man die folgende ebenfalls wohlbekannt Form

$$X_f(z) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_j}(z) \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial f}{\partial q_j}(z) \frac{\partial}{\partial p_j} \right).$$

Als nächstes sei an die Definition der Poisson-Klammer erinnert, die in der Hamiltonschen Mechanik zentrale Verknüpfung auf den Observablen, also den  $C^\infty$ -Funktionen auf  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Definition 2.3 (Poisson-Klammer).** Seien wiederum  $U \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  offen und  $f, g \in C^1(U)$ . Die Poisson-Klammer  $\{f, g\}$  von  $f$  und  $g$  ist definiert durch:

$$\{f, g\}(z) := \langle X_f(z), \nabla g(z) \rangle = \omega(\nabla f(z), \nabla g(z)). \quad (2.2)$$

Explizit gilt dann offenbar

$$\{f, g\}(z) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial p_j}(z) \frac{\partial g}{\partial q_j}(z) - \frac{\partial f}{\partial q_j}(z) \frac{\partial g}{\partial p_j}(z) \right).$$

Die Poisson-Klammer stattet nun den Raum  $C^\infty(U)$  mit der Struktur einer Liealgebra aus.

**Lemma 2.4.** Die  $C^\infty$ -Funktionen auf  $U$  bilden zusammen mit der Poisson-Klammer eine Liealgebra. Die Räume

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_2 &:= \{P \mid P \text{ ist ein Polynom vom Grade höchstens zwei}\} \\ \mathfrak{p}_1 &:= \{P \mid P \text{ ist ein Polynom vom Grade höchstens eins}\} \\ \mathfrak{hp}_2 &:= \{P \mid P \text{ ist ein homogenes Polynom vom Grade zwei}\} \end{aligned}$$

sind Lie-Unteralgebren von  $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ .

**Beweis.** Die Antisymmetrie der Poisson-Klammer ergibt sich sofort aus deren Definition, die Jacobi-Identität rechnet man direkt nach. Die Aussage über die Unteralgebren ist ebenfalls eine einfache Überlegung.  $\square$

**Lemma 2.5.**

- (i) Für  $f, g \in C^\infty(U)$  gilt:  $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ .  
 (ii) Für  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$  und  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  gilt

$$X_{f \circ S} = -S \circ X_f \circ S.$$

**Beweis.** (i) ist wohlbekannt und eine direkte Rechnung.

Die zweite Aussage folgt ebenfalls sofort: Seien dazu  $z, z' \in \mathbb{R}^{2n}$ . Aus der Definition 2.1 und der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} \langle X_{f \circ S}(z), z' \rangle &= \langle J(\nabla(f \circ S)(z)), z' \rangle = -\langle \nabla(f \circ S)(z), Jz' \rangle \\ &= -Df(Sz)(SJz') = -\langle \nabla f(Sz), SJz' \rangle \\ &= \langle JS^t \nabla f(Sz), z' \rangle = -\langle SJ \nabla f(Sz), z' \rangle. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt wurde benutzt, daß wegen  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  die Gleichung  $JS^t = SJ$  gilt. Also erhalten wir die Behauptung  $X_{f \circ S} = -SX_f S$ .  $\square$

**Lemma 2.6.** Definiere zu jedem  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  das Polynom  $P_S \in \mathfrak{hp}_2$  durch

$$P_S(z) := -\frac{1}{2} \langle z, SJz \rangle = \frac{1}{2} \omega(S^t z, z). \quad (2.3)$$

Dann gelten

- (i)  $S \mapsto P_S$  ist ein Isomorphismus der Liealgebren  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  und  $\mathfrak{hp}_2$ .  
 (ii) Die Umkehrabbildung ist gegeben durch  $P \mapsto X_{P \circ J}$ .

**Beweis.** Da jedes homogene Polynom vom Grade zwei von der Form  $P(z) = \langle z, Az \rangle$  mit einer eindeutig bestimmten symmetrischen Matrix  $A$  ist und außerdem  $S \mapsto SJ$  eine Bijektion von  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  auf den Raum der symmetrischen Matrizen ist, handelt es sich bei  $S \mapsto P_S$  um einen linearen Isomorphismus.

Sei nun  $P \in \mathfrak{hp}_2$ . Nach Lemma 2.7 gilt:

$$P(z) = \frac{1}{2}DP(z)(z) = -\frac{1}{2}\langle JX_P(z), z \rangle = -\frac{1}{2}\langle X_{P \circ J}Jz, z \rangle,$$

woraus (ii) folgt. Da nun außerdem nach Lemma 2.5

$$\begin{aligned} [X_{P \circ J}, X_{Q \circ J}] &= [JX_PJ^{-1}, JX_QJ^{-1}] \\ &= J[X_P, X_Q]J^{-1} = JX_{\{P, Q\}}J^{-1} = X_{\{P, Q\} \circ J} \end{aligned}$$

gilt, liegt also auch ein Homomorphismus von Liealgebren vor.  $\square$

**Lemma 2.7.** *Seien  $X, Y$  Banachräume,  $U \subseteq X$  offen und  $f: U \rightarrow Y$  differenzierbar und homogen vom Grade  $\mu \in \mathbb{C}$ , d.h. es gelte für alle  $x \in U$  und  $\alpha > 0$  mit  $\alpha x \in U$ :*

$$f(\alpha x) = \alpha^\mu f(x). \quad (2.4)$$

Dann gelten

(i)  $Df: U \rightarrow L(X, Y)$  ist homogen vom Grade  $\mu - 1$  und

(ii) Für  $x \in U$  gilt:  $\mu f(x) = Df(x)(x)$ .

**Beweis.** Teil (i) erhält man durch differenzieren beider Seiten von Gleichung (2.4) nach  $x$ : Es ergibt sich:  $\alpha Df(\alpha x) = \alpha^\mu Df(x)$ , also  $Df(\alpha x) = \alpha^{\mu-1} Df(x)$  und damit die Behauptung.

Um Aussage (ii) zu zeigen, differenziere man (2.4) nach  $\alpha$ . Dann folgt

$$Df(x)(x) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} f(\alpha x) = \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=1} \alpha^\mu f(x) = \mu f(x).$$

$\square$

## 2.2 Die metaplektische Darstellung

Wir werden nun mit Hilfe der Bijektion (2.3) eine Darstellung der symplektischen Algebra durch Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  konstruieren. Diese kann dann mit Hilfe abstrakter Sätze zu einer Darstellung der universellen Überlagerung  $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n, \mathbb{R})$  von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  exponenziert werden. Dann sehen wir ein, daß sie in Wahrheit bereits eine Darstellung der zweifachen Überlagerung von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  induziert, der sogenannten metaplektischen Gruppe; daher auch die Bezeichnung als metaplektische Darstellung. Diesen Zugang wählt zum Beispiel auch Taylor in [48]. Eine andere Möglichkeit ist zunächst eine Darstellung auf der Gruppenebene zu definieren. Das scheitert allerdings in diesem Fall, man erhält aber eine sogenannte projektive unitäre Darstellung. Da  $\mathrm{sp}(n, \mathbb{R})$  halbeinfach

ist, wird diese nach einem berühmten Theorem von V. Bargmann [3] bereits von einer unitären Darstellung von  $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n, \mathbb{R})$  induziert.

Der Weylkalkül ermöglicht es, einem  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  einen selbstadjungierten Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  zuzuordnen, nämlich  $P_S(D, X)$ . Dies ist aufgrund von Lemma 2.6 und der Tatsache, daß der Weylkalkül zumindest für Polynome zweiten Grades die Poisson-Klammer in den Kommutator von Operatoren überführt (siehe G. B. Folland [14], Korollar 2.51), bereits eine Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ , wenn man den Begriff der Darstellung durch nicht überall definierte Operatoren richtig definiert (siehe unten).

Wir kommen nun zur Definition der Darstellung einer Liealgebra durch möglicherweise unbeschränkte Operatoren.

**Definition 2.8.** Seien  $\mathfrak{g}$  eine Liealgebra,  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbertraum und  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$  ein dichter Teilraum. Dann heißt eine Abbildung  $\delta: \mathfrak{g} \rightarrow \mathrm{End}(\mathcal{D})$ , die

- (i)  $\delta(X)$  ist für  $X \in \mathfrak{g}$  schiefsymmetrisch und
- (ii)  $\delta([X, Y]) = [\delta(X), \delta(Y)]$  für alle  $X, Y \in \mathfrak{g}$

erfüllt, eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathcal{H}$ .

Im Endlichdimensionalen kann man eine solche Darstellung immer zu einer unitären Darstellung der (bis auf Isomorphie eindeutigen) zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden Liegruppe, welche  $\mathfrak{g}$  als Liealgebra besitzt exponentieren. Es gilt in diesem Fall natürlich stets  $\mathcal{D} = \mathcal{H}$  und obige Definition entspricht der üblichen für die Darstellung einer Liealgebra auf einem endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum.

Unter zusätzlichen Annahmen ist es nun auch im unendlichdimensionalen Fall möglich, eine Darstellung im Sinne von Definition 2.8 zu exponentieren. Man erhält den folgenden Satz, welcher im Buch von M. Taylor [48] (Theorem D.4) bewiesen wird.

**Satz 2.9.** Sei  $G$  eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Liegruppe mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$  und sei  $\delta$  eine Darstellung von  $\mathfrak{g}$  auf  $\mathcal{H}$  im Sinne von Definition 2.8. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Es existieren linear unabhängige  $Y_1, \dots, Y_l \in \mathfrak{g}$ , die  $\mathfrak{g}$  als Liealgebra erzeugen und,  $i\delta(Y_j)$  besitze eine selbstadjungierte Erweiterung  $X_j$ , welche die Bedingung  $e^{itX_j}(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$  erfüllt.
- (ii)  $\mathcal{D}$  läßt sich mit einer Hausdorffschen lokalkonvexen Topologie so ausstatten, daß die Einbettung  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{H}$  stetig ist und die Operatoren  $X_j$  und  $e^{itX_j}$  den Raum  $\mathcal{D}$  stetig in sich abbilden.
- (iii) Für festes  $x \in \mathcal{D}$  und  $j \in \{1, \dots, l\}$  ist  $t \mapsto e^{itX_j}x$  als Abbildung nach  $\mathcal{D}$ , ausgestattet mit der Topologie aus (ii), stetig.

Dann existiert eine unitäre Darstellung  $\Delta$  von  $G$  auf  $\mathcal{H}$  derart, daß  $d\Delta = \delta$  gilt.

**Bemerkung 2.10.** Achtung: Es genügt im allgemeinen nicht zu fordern, daß die auftretenden Operatoren ein gemeinsames Core besitzen. Ein Gegenbeispiel dazu wurde von E. Nelson angegeben, siehe [36]. Eine ausführliche Behandlung der Problematik unendlichdimensionaler Darstellungen findet sich z.B. auch im Buch von A. O. Barut und R. Rączka [4].

Dieses Ergebnis ist nun anwendbar auf den Fall, daß die Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  durch  $S \mapsto iP_S(X, D)$  gegeben und  $\mathcal{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  der Raum der Schwartzfunktionen ist. Siehe dazu ebenfalls [48], Anhang D, Seite 312 unten.

**Satz 2.11.** *Definiert man für  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  mit Hilfe des Weyl-Kalküls*

$$d\nu(S) := iP_S(X, D),$$

*mit  $P_S$  aus (2.3), dann erfüllt  $d\nu$  die Voraussetzungen von Satz 2.9, angewendet auf  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$  und  $\mathcal{D} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und läßt sich somit zu einer unitären Darstellung  $\nu$  von  $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n, \mathbb{R})$  exponenzieren.*

Es sei darauf hingewiesen, daß  $\nu$  nicht zu einer Darstellung von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  faktorisiert, wie die Beobachtung in Taylor [48], Abschnitt 11.3 zeigt. Allerdings besteht noch die Möglichkeit, daß  $\nu$  eine Darstellung einer „kleineren“ Überlagerung als  $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n, \mathbb{R})$  induziert. Dies ist in der Tat der Fall. Bezeichne mit  $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$  die (bis auf Isomorphie eindeutige) zweifache Überlagerung von  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ , die sogenannte metaplektische Gruppe. Dann faktorisiert  $\nu$  zu einer Darstellung von  $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$ , die wir wiederum mit  $\nu$  bezeichnen und die als metaplektische Darstellung, Segal–Shale–Weil–Darstellung oder auch unter dem Namen Oszillator–Darstellung bekannt ist. Ein Beweis dazu findet sich ebenfalls bei Taylor [48], Kapitel 11, Theorem 3.2.

**Bemerkung 2.12.** Die metaplektische Darstellung ist nicht irreduzibel, sondern  $L^2(\mathbb{R}^n)$  zerfällt in zwei irreduzible Teilräume, nämlich den der geraden und den der ungeraden Funktionen. Die beiden irreduziblen Teile sind nicht äquivalent. Für einen Beweis siehe Folland [14], Theorem 4.56.

**Satz 2.13.** *Sei  $p: \mathrm{Mp}(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  die zweifache Überlagerung der symplektischen Gruppe. Dann ist die metaplektische Darstellung  $\nu$  die einzige unitäre Darstellung von  $\mathrm{Mp}(n, \mathbb{R})$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , für welche das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\pi(z,u)} & L^2(\mathbb{R}^n) \\ \nu(g) \downarrow & & \downarrow \nu(g) \\ L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{(\pi \circ p(g))(z,u)} & L^2(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad (2.5)$$

*Dabei ist  $(z, u) \in \mathbb{H}_n$ ,  $g \in \widetilde{\mathrm{Sp}}(n, \mathbb{R})$ , und  $p(g)$  bezeichne gleichzeitig den von  $p(g)$  gemäß Lemma 1.7 auf  $\mathbb{H}_n$  induzierten Automorphismus.*



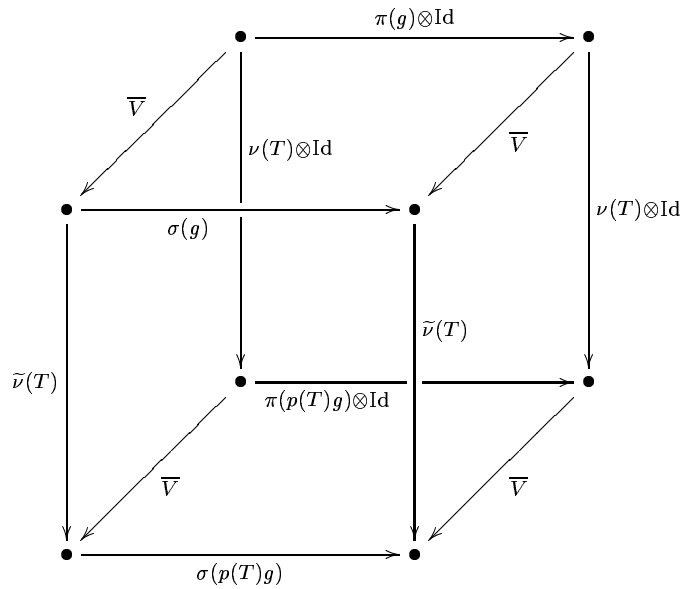
**Beweis.** Folland [14], Proposition 4.40. □

Die gerade konstruierte metaplektische Darstellung liefert nun allerdings nicht die Operatoren, die uns im folgenden interessieren sollen. In Kapitel 1 haben wir eine Darstellung der Heisenberggruppe konstruiert, die aus getwisteten Faltungsoperatoren besteht und mittels der Fourier–Wigner–Transformation in eine abzählbare direkte Summe von Schrödingerdarstellungen zerfällt. Analog dazu soll nun eine weitere Darstellung von  $\text{Mp}(n, \mathbb{R})$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  konstruiert werden, die aus getwisteten Faltungsoperatoren besteht und ebenfalls in obigem Sinne zu einer abzählbaren Summe von metaplektischen Darstellungen äquivalent ist.

Dazu definieren wir zu  $T \in \widetilde{\text{Mp}}(n, \mathbb{R})$  den Operator  $\tilde{\nu}(T) \in \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$  durch

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\nu(T) \times \text{Id}} & L^2(\mathbb{R}^{2n}) \\ \bar{\nu} \downarrow & & \downarrow \bar{\nu} \\ L^2(\mathbb{R}^{2n}) & \xrightarrow{\tilde{\nu}(T)} & L^2(\mathbb{R}^{2n}) \end{array}$$

Dann ist  $\tilde{\nu}$  ebenfalls eine unitäre Darstellung von  $\text{Mp}(n, \mathbb{R})$ , diesmal auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Fügt man dieses mit den Diagrammen (1.38) und (2.5) zusammen, so erhält man das folgende kommutative Diagramm:



Dabei stellt jede Ecke einen  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  dar. Die abgeleitete Darstellung von  $\tilde{\nu}$  liefert nun gerade die in Kapitel 1 definierten Operatoren  $L_S$ .

**Satz 2.14.** Für  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  gilt

$$-\frac{1}{2}L_S = \frac{1}{i}d\tilde{\nu}(S) = \bar{\nu} \circ (P_S(X, D) \otimes \text{Id}) \circ \bar{\nu}^{-1}. \quad (2.6)$$

**Beweis.** Nach Definition des Weylkalküls gilt  $P_S(X, D) = \rho(\mathcal{F}^{-1}P_S)$ . Eine einfache Rechnung zeigt nun  $[\langle \nabla, SJ\nabla \rangle \delta_0]^\wedge = -\langle \cdot, SJ\cdot \rangle$  und somit erhält man  $\mathcal{F}^{-1}(P_S) = \frac{1}{2}\langle \nabla, SJ\nabla \rangle \delta_0$ . Damit und aufgrund von  $\overset{\vee}{P}_S = P_S$  gilt also nach Diagramm (1.40)

$$\frac{1}{i}d\tilde{\nu}(S)\varphi = \frac{1}{2}\varphi \times \langle \nabla, SJ\nabla \rangle \delta_0.$$

Nach (1.34) gilt also die Behauptung.  $\square$

Damit ist nun auch klar, daß  $L_S$  für beliebige  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  wesentlich selbstadjungiert auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  ist.

Für unsere späteren Untersuchungen der Operatoren  $L_S$  benötigen wir explizite Formeln für die getwisteten Faltungskerne der zugehörigen unitären Gruppe  $e^{itL_S}$ . Diese werden im Rest dieses Kapitels entwickelt.

## 2.3 Über Gaußsche Funktionen und die Oszillator–Halbgruppe

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Der „Siegelsche rechte Halbraum“  $\mathfrak{S}_n$  ist definiert als der Kegel aller symmetrischen  $n \times n$ -Matrizen mit komplexen Einträgen deren Realteil positiv definit ist. Der Abschluß  $\overline{\mathfrak{S}}_n$  von  $\mathfrak{S}_n$  besteht also aus allen symmetrischen Matrizen mit positiv semidefinitem Realteil.

Wir notieren außerdem noch

$$\mathfrak{S}_{2n}^0 := \{A \in \mathfrak{S}_{2n} \mid \det(A + \frac{i}{2}J) \neq 0\}$$

und

$$\overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0 := \{A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n} \mid (\operatorname{Re} A > 0 \vee \operatorname{Re} A = 0) \wedge \det(A + \frac{i}{2}J) \neq 0\}.$$

Achtung: Es gilt  $\overline{\mathfrak{S}_{2n}^0} \neq \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$ .

**Bemerkung 2.15.** Der Ausdruck  $\langle z, w \rangle$  bezeichne in diesem Abschnitt auch für  $z, w \in \mathbb{C}^d$  stets das bilineare Skalarprodukt, also  $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^d z_j w_j$  und nicht die auf  $\mathbb{C}^d$  sonst übliche Sesquilinearform bei der die zweite Variable komplex konjugiert wird.

**Lemma 2.16.** *Jedes  $A \in \mathfrak{S}_n$  ist invertierbar, und es gilt auch  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ .*

**Beweis.** Da  $\operatorname{Re} A$  positiv definit und symmetrisch ist, ist  $(\operatorname{Re} A)^{\frac{1}{2}}$  ebenfalls symmetrisch und invertierbar. Definiere  $B := (\operatorname{Re} A)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Im} A (\operatorname{Re} A)^{-\frac{1}{2}}$ .  $B$  ist ebenfalls symmetrisch und es gilt

$$A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A = (\operatorname{Re} A)^{\frac{1}{2}} (1 + iB) (\operatorname{Re} A)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.7)$$

Nun ist aber  $1 + iB$  invertierbar, da es nur Eigenwerte der Form  $1 + ib$  besitzt, wobei  $b \in \mathbb{R}$  ein Eigenwert von  $B$  ist. Damit ist  $A$  als Produkt invertierbarer Matrizen selbst invertierbar.

Wegen  $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$  ist  $A^{-1}$  auch symmetrisch. Um nun einzusehen, daß  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_n$  gilt, benutzen wir wieder obige Gleichung (2.7). Da  $(\operatorname{Re} A)^{-\frac{1}{2}}$  symmetrisch ist, genügt es zu zeigen, daß

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Id} + iB)^{-1} > 0. \quad (2.8)$$

Sei  $O \in O(n, \mathbb{R})$  so, daß  $O^{-1}BO$  diagonal ist. Dann ist  $O^{-1}(\operatorname{Id} + iB)^{-1}O = (\operatorname{Id} + iO^{-1}BO)^{-1}$  eine Diagonalmatrix, mit Eigenwerten der Form  $(1 + ib)^{-1}$ , wobei  $b \in \mathbb{R}$ . Da offenbar  $\operatorname{Re}(1 + ib)^{-1} > 0$  gilt (2.8), also die Behauptung.  $\square$

Für  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_n$  definieren wir die sogenannte Gaußfunktion mit Exponent  $A$  durch

$$e_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}; e_A(x) := e^{-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle}. \quad (2.9)$$

Aufgrund der Polarisationsidentität ist  $e_A = e_B$  genau dann wenn  $A = B$ . Da  $\operatorname{Re} A \geq 0$  gilt außerdem  $e_A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , und  $e_A$  ist genau dann sogar eine Schwartz-Funktion, falls  $\operatorname{Re} A > 0$ . Man kann also stets die Fouriertransformierte eines solchen  $e_A$  bilden, zumindest im Distributionensinne. Wir werden einsehen, daß diese für invertierbares  $A$  und damit insbesondere für jedes  $A \in \mathfrak{S}_n$  wiederum von der Gestalt (2.9) also eine Gaußfunktion ist.

Dabei tritt insbesondere der Ausdruck  $\sqrt{\det A^{-1}}$  auf (siehe Formel (2.10) unten), der a priori nicht eindeutig bestimmt ist. Dazu folgendes:

Da  $\mathfrak{S}_n$  einfach zusammenhängend ist (es ist sogar konvex) und für  $A \in \mathfrak{S}_n$  stets  $\det A \neq 0$  gilt, existiert ein eindeutiger Zweig von  $\sqrt{\det}$  auf  $\mathfrak{S}_n$  so, daß für reelles  $A$  die Bedingung  $\sqrt{\det A} > 0$  erfüllt ist. Dieser Zweig sei von nun an stets gemeint, falls ein Ausdruck der Form  $\sqrt{\det A}$  auftaucht. Man kann dies nun auch auf  $\overline{\mathfrak{S}}_n$  stetig fortsetzen. Vergleiche dazu auch Hörmander [21], Abschnitt 3.4.

Damit sind wir nun in der Lage, die Formel für die Fouriertransformierte von  $e_A$  explizit zu notieren.

**Lemma 2.17.** *Sei  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_n$  invertierbar. Dann gilt*

$$\widehat{e}_A(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det A^{-1}} e_{A^{-1}}(\xi). \quad (2.10)$$

*Ist insbesondere  $A$  rein imaginär, so erhält man als Spezialfall:*

$$\widehat{e}_A(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(iA)} e_{A^{-1}}(\xi), \quad (2.11)$$

wobei  $\operatorname{sgn}(iA)$  die Anzahl der positiven minus die Anzahl der negativen Eigenwerte der reellen symmetrischen Matrix  $iA$  ist, gezählt mit den Vielfachheiten.

**Beweis.** Siehe Hörmander [21], Theorem 7.6.1.  $\square$

**Bemerkung 2.18.** Es sei noch darauf hingewiesen, daß für  $\operatorname{Re} A > 0$  das Fourierintegral in (2.10) auch für  $\xi \in \mathbb{C}^n$  existiert und beide Seiten analytisch in  $\xi$  sind, die Formel also auf  $\mathbb{C}^n$  gilt. Dies werden wir an späterer Stelle noch einmal benutzen.

Im Zusammenhang mit Gaußfunktionen ist es oftmals angenehmer anstatt mit der üblichen Fouriertransformation mit der sogenannte symplektische Fouriertransformation zu arbeiten, welche für  $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$  durch

$$\overset{\Delta}{f}(\xi) := (4\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(z) e^{-\frac{i}{2}\omega(\xi, z)} dz = (4\pi)^{-n} \widehat{f}\left(\frac{1}{2}J\xi\right) \quad (2.12)$$

und für alle Distributionen  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  analog durch

$$\overset{\Delta}{u} := (4\pi)^{-n} \widehat{u} \circ \frac{J}{2}$$

definiert ist. Dann gilt für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  gerade:

$$\overset{\Delta}{\varphi}(\xi) = (4\pi)^{-n} (\varphi \times 1)(\xi) = (4\pi)^{-n} (1 \times \varphi)(-\xi), \quad (2.13)$$

und die symplektische Fouriertransformation ist unitär auf  $L^2$ . Sie ist überdies eine Involution, d.h. es gilt

$$(\overset{\Delta}{u})^\Delta = u \quad u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \quad (2.14)$$

was sich sofort aus der Definition unter Zuhilfenahme der Fourierinversionsformel und des Transformationsatzes ergibt.

Letztlich folgt aufgrund der Assoziativität der getwisteten Faltung aus (2.13) noch die Eigenschaft

$$\varphi \times \overset{\Delta}{\psi} = (\varphi \times \psi)^\Delta = \overset{\Delta}{\varphi} \times \overset{\vee}{\psi}, \quad (2.15)$$

wobei  $\overset{\vee}{\psi}(z) := \psi(-z)$ .

Die symplektischen Fouriertransformierten der oben definierten Gaußfunktionen  $e_A$  haben dann nach Gleichung (2.10) für invertierbares  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}$  die Gestalt

$$\overset{\Delta}{e}_A(\xi) = 2^{-n} \sqrt{\det A^{-1}} e_{-\frac{1}{4}JA^{-1}J}(\xi) \quad (2.16a)$$

und im Falle, daß  $A$  zusätzlich rein imaginär ist

$$\overset{\Delta}{e}_A(\xi) = 2^{-n} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(iA)} e_{-\frac{1}{4}JA^{-1}J}(\xi). \quad (2.16b)$$

Betrachtet man nun die getwistete Faltung eines  $e_A$  mit einer Schwartzfunktion, so ergibt sich die folgende im weiteren Verlauf sehr wichtige algebraische Eigenschaft, die sich auch in [35], Lemma 1.2 findet.

**Lemma 2.19.** *Seien  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ . Dann gilt*

$$(\varphi \times e_A)(z) = e_A(z) \widehat{e_A \varphi} \left( \left( iA + \frac{J}{2} \right) z \right) = (4\pi)^n e_A(z) (e_A \varphi)^\Delta ((\text{Id} - 2iJA)z). \quad (2.17)$$

*Dazu sei angemerkt, daß das Fourierintegral von  $\widehat{e_A \varphi}$  für Argumente der Form  $(iA + \frac{J}{2})z$  stets existiert, die rechte Seite von (2.17) also Sinn macht.*

**Beweis.** Die Behauptung folgt direkt aus den Definitionen der getwisteten Faltung und der Fouriertransformation, sowie elementaren Umformungen und der Tatsache, daß  $A$  symmetrisch ist:

$$\begin{aligned} (\varphi \times e_A)(z) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(z') e^{-\frac{1}{2}\langle A(z-z'), z-z' \rangle} e^{-\frac{i}{2}\omega(z, z')} dz' \\ &= e_A(z) \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(z') e_A(z') e^{-i\langle iAz + \frac{J}{2}z, z' \rangle} dz' \\ &= e_A(z) \widehat{e_A \varphi} \left( \left( iA + \frac{J}{2} \right) z \right). \end{aligned}$$

□

Ist  $A \in \mathfrak{S}_{2n}$ , so läßt die getwistete Faltung von rechts mit  $e_A$  aufgrund der Eigenschaft  $e_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  sowohl  $L^2$  als auch  $\mathcal{S}$  invariant. Über die Operatornorm auf  $L^2$  werden wir weiter unten näheres erfahren. Für den Fall  $\text{Re } A = 0$  diese Eigenschaft allerdings a priori unklar, sie folgt aber aus Lemma 2.19, unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $iA + \frac{J}{2}$  invertierbar ist.

**Korollar 2.20.** *Sei  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$  mit  $\text{Re } A = 0$ . Dann gilt für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  auch  $\varphi \times e_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  und für  $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$  auch  $f \times e_A \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , genauer*

$$\|f \times e_A\|_2 = (2\pi)^n \left| \det \left( iA + \frac{J}{2} \right) \right|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_2. \quad (2.18)$$

**Beweis.** Die Abbildungseigenschaft für Schwartzfunktionen folgt aus der Beobachtung, daß  $e_A \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  gilt und der Tatsache, daß die Fouriertransformation  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  invariant läßt.

Die Aussage über die  $L^2$ -Funktionen erhält man aus der Formel von Plancherel und dem Transformationssatz. □

**Lemma 2.21.** *Seien  $A \in \mathfrak{S}_{2n}$  und  $B \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}$ . Dann gilt*

$$e_B \times e_A = (2\pi)^n \sqrt{\det(A+B)^{-1}} e_C, \quad (2.19a)$$

mit

$$C = (B + \frac{i}{2}J)(A+B)^{-1}(A + \frac{i}{2}J) - \frac{i}{2}J \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n} \quad (2.19b)$$

*Setzt man sogar  $B \in \mathfrak{S}_{2n}$  voraus, so gilt auch  $C \in \mathfrak{S}_{2n}$ .*

**Beweis.** Da  $A + B \in \mathfrak{S}_{2n}$  und somit invertierbar ist, liefert die Formel (2.17) zusammen mit (2.10) zunächst

$$e_B \times e_A = (2\pi)^n \sqrt{\det(A + B)^{-1}} e_{B + (iB - \frac{J}{2})(A + B)^{-1}(iB + \frac{J}{2})}.$$

Man sieht unmittelbar ein, daß  $C := B + (iB - \frac{J}{2})(A + B)^{-1}(iB + \frac{J}{2})$  symmetrisch ist. Da  $e_B \times e_A \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ , muß überdies auch  $\operatorname{Re} C \geq 0$  gelten, also  $C \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}$ . Man beobachtet nun, daß  $C = B - (B + i\frac{J}{2})(A + B)^{-1}(B - i\frac{J}{2})$ . Sind nun  $a, b, c$  beliebige Elemente einer Algebra mit Einselement  $e$  und ist  $a + b$  invertierbar, so gilt

$$\begin{aligned} b - (b + c)(a + b)^{-1}(b - c) &= (b + c)(e - (a + b)^{-1}(b - c)) - c \\ &= (b + c)(a + b)^{-1}((a + b) - (b - c)) - c = (b + c)(a + b)^{-1}(a + c) - c. \end{aligned}$$

Wendet man dies auf  $a = A, b = B$  und  $c = i\frac{J}{2}$  an, so ergibt sich die Behauptung. Im Falle  $B \in \mathfrak{S}_{2n}$  gilt sogar  $e_B \times e_A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ , also  $C \in \mathfrak{S}_{2n}$ .  $\square$

**Bemerkung 2.22.** Achtung, im allgemeinen wird  $\operatorname{Re} C$  nicht positiv definit sein. Sei z.B.  $B := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Id} \\ \operatorname{Id} & 0 \end{pmatrix}$ . Dann ist  $\operatorname{Re} B = 0$  und  $\det(iB + \frac{J}{2}) = 0$ . Sei  $z \in \mathbb{R}^{2n}$  so, daß  $(iB + \frac{J}{2})z = 0$ . Dann gilt

$$\operatorname{Re}\langle Cz, z \rangle = \operatorname{Re}\langle (iB - \frac{1}{2}J)(A + B)^{-1}(iB + \frac{1}{2}J)z, z \rangle = 0.$$

**Satz 2.23.** Sei  $A \in \mathfrak{S}_{2n}^0$ . Dann gilt für  $f \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$

$$\|f \times e_A\|_2 \leq (2\pi)^n \left| \det\left(iA + \frac{J}{2}\right) \right|^{-\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

**Beweis.** Siehe [23], Theorem in Abschnitt 15 auf Seite 82.  $\square$

Damit definiert also die Faltung mit  $e_A$  für eine große Klasse von  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}$  beschränkte Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ .

**Definition 2.24.** Sei  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$ . Dann definiert

$$T_A f := (2\pi)^{-n} f \times e_A$$

nach Satz 2.23 bzw. Korollar 2.20 einen beschränkten Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , der  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  invariant läßt und für dessen Operatornorm

$$\|T_A\|_{2 \rightarrow 2} \leq \left| \det\left(iA + \frac{J}{2}\right) \right|^{-\frac{1}{2}}$$

gilt.

**Lemma 2.25.** *Die Abbildung  $A \mapsto T_A$  ist injektiv auf  $\overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$ . Sind  $a, b \in \mathbb{C}$  und  $A, B \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$  mit  $aT_A = bT_B$  so gilt:  $a = b$  und  $A = B$ .*

**Beweis.** Sei allgemein  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  eine Distribution derart, daß für alle  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  gilt:  $\varphi \times u = 0$ . Dann folgt wegen  $u(\varphi) = (\tilde{\varphi} \times u)(0) = 0$  schon  $u = 0$ .

In unserer Situation bedeutet das also für  $A, B$  und  $a, b \in \mathbb{C}$  mit  $aT_A = bT_B$ , daß im Distributionensinne bereits

$$ae_A = be_B$$

gelten muß. Da  $e_A$  und  $e_B$  stetige Funktionen sind, gilt diese Gleichheit aber auch punktweise. Insbesondere erhält man also wegen  $e_A(0) = e_B(0) = 1$ , daß  $a = b$  erfüllt sein muß und somit  $e_A = e_B$  gilt. Nach der Bemerkung im Anschluß an die Definition (2.9) der Gaußfunktionen bedeutet das aber schon  $A = B$ .  $\square$

Das nächste Ziel ist es zu beweisen, daß die Zuordnung  $A \mapsto T_A$  auf  $\overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$  stetig ist, wenn man die beschränkten Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  mit der starken Operator-topologie ausstattet. Dabei ist es nützlich zu wissen, daß der Ausdruck  $T_A\varphi$  für festes  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  beschränkt ist, falls  $A$  eine kleine Umgebung in  $\overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$  durchläuft. Um dieses einzusehen, muß man wissen wie die Operatoren  $T_A$  mit partiellen Ableitungen und Multiplikation mit Polynomen vertauschen.

**Definition 2.26.** Sei  $w \in \mathbb{C}^{2n}$ . Wir definieren für alle  $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}$

$$M_w f(z) := \langle w, z \rangle f(z)$$

und falls  $f$  in  $z$  differenzierbar ist

$$\partial_w f(z) := \langle w, \nabla f(z) \rangle.$$

**Satz 2.27.**

(i) Für  $w \in \mathbb{C}^{2n}$ ,  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  gilt

$$(\partial_w - \frac{i}{2}M_{Jw})(\varphi \times u) = ((\partial_w - \frac{i}{2}M_{Jw})\varphi) \times u. \quad (2.20a)$$

(ii) Ist  $A \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}$  mit  $\det(A + i\frac{J}{2}) \neq 0$ , so gilt für  $w_1, w_2 \in \mathbb{C}^{2n}$  und  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$

$$(\partial_{w_1} + M_{w_2})(\varphi \times e_A) = ((\partial_{w'_1} + M_{w'_2})\varphi) \times e_A, \quad (2.20b)$$

wobei sich  $w'_1$  und  $w'_2$  aus  $w_1, w_2$  durch den Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + \frac{i}{2}J)^{-1}A & -(A + \frac{i}{2}J)^{-1} \\ (A - \frac{i}{2}J) - A(A + \frac{i}{2}J)^{-1}A & A(A + \frac{i}{2}J)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \quad (2.20c)$$

ergeben.

**Beweis.** Der erste Teil ergibt sich aus Gleichung (1.33) und aufgrund der Formel  $M_{Jw}(\varphi \times u) = M_{Jw}\varphi \times u + \varphi \times M_{Jw}u$ .

Den zweiten Teil erhält man aus einer etwas längeren aber direkten Rechnung: Sei dazu  $w \in \mathbb{C}^{2n}$  fest. Dann folgt mit der Definition (1.27) der getwisteten Faltung für  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ , der Gleichung  $\partial_w e_A(z) = -\langle Aw, z \rangle e_A(z)$  und partieller Integration

$$\begin{aligned}
(M_{Aw}\varphi \times e_A)(z) &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e_A(z - z') \langle Aw, z' \rangle \varphi(z') e^{-\frac{i}{2}\omega(z, z')} dz' \\
&= - \int_{\mathbb{R}^{2n}} \partial_w(e_A(z - \cdot))(z') \varphi(z') e^{-\frac{i}{2}\omega(z, z')} dz' \\
&\quad + \langle Aw, z \rangle \int_{\mathbb{R}^{2n}} e_A(z - z') \varphi(z') e^{-\frac{i}{2}\omega(z, z')} dz' \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2n}} e_A(z - z') \left( \partial_w \varphi(z') - \frac{i}{2} \omega(z, w) \varphi(z') \right) e^{-\frac{i}{2}\omega(z, z')} dz' \\
&\quad + M_{Aw}(\varphi \times e_A)(z) \\
&= ((\partial_w \varphi) \times e_A)(z) + \frac{i}{2} M_{Jw}(\varphi \times e_A)(z) + M_{Aw}(\varphi \times e_A)(z) \\
&= ((\partial_w \varphi) \times e_A)(z) + M_{(A + \frac{i}{2}J)w}(\varphi \times e_A)(z).
\end{aligned}$$

Man erhält als erstes Zwischenergebnis

$$M_{Aw}\varphi \times e_A = \partial_w \varphi \times e_A + M_{(A + \frac{i}{2}J)w}(\varphi \times e_A). \quad (2.21a)$$

Aus Teil (i) folgt nun  $(\partial_w \varphi) \times e_A = (\partial_w - \frac{i}{2} M_{Jw})(\varphi \times e_A) + \frac{i}{2} (M_{Jw} \varphi) \times e_A$ , und Einsetzen in (2.21a) ergibt

$$(\partial_w + M_{Aw})(\varphi \times e_A) = (M_{(A - \frac{i}{2}J)w} \varphi) \times e_A. \quad (2.21b)$$

Da  $A + \frac{i}{2}J$  invertierbar ist, können wir nun jedes  $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^{2n} \times \mathbb{C}^{2n}$  als

$$(w_1, w_2) = (w_1, Aw_1) + (0, (A + \frac{i}{2}J)(A + \frac{i}{2}J)^{-1}(w_2 - Aw_1)).$$

schreiben. Da die Gleichung (2.20b) linear in  $(w_1, w_2)$  ist, erhält man die Behauptung dann aus den Formeln (2.21a) und (2.21b).  $\square$

Damit steht das Werkzeug bereit, um die Stetigkeit von  $A \mapsto T_A$  zu etablieren:

**Satz 2.28.**



- (i) Sei  $\mathfrak{A} \subseteq \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$  beschränkt und so, daß auch  $\|(A + \frac{i}{2}J)^{-1}\|$  auf  $\mathfrak{A}$  beschränkt ist. Dann ist für eine beschränkte Teilmenge  $U$  von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  auch die Familie  $\{T_A\varphi\}_{A \in \mathfrak{A}, \varphi \in U}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  beschränkt.
- (ii) Die Abbildung  $A \mapsto T_A$  ist stetig auf  $\overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$ , wenn man die beschränkten Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  mit der starken Operortopologie ausstattet.

**Beweis.** Der erste Teil folgt direkt aus Satz 2.27, der Definition 2.24 der Operatoren  $T_A$ , sowie dem Satz 2.23 und Korollar 2.20. Da  $U$  beschränkt ist, existiert nämlich zu  $D > 0$  ein  $C > 0$  dergestalt, daß für alle  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^{2n}$  mit  $\|z_1\|, \|z_2\| \leq D$  und alle  $\varphi \in U$  gilt:  $\|(\partial_{z_1} + M_{z_2})\varphi\|_2 \leq C$ . Seien nun  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^{2n}$  mit  $\|w_1\| = \|w_2\| = 1$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \|(\partial_{w_1} + M_{w_2})T_A\varphi\|_2 &= \|T_A((\partial_{w'_1} + M_{w'_2})\varphi)\|_2 \\ &\leq \left| \det(A + i\frac{J}{2}) \right|^{-\frac{1}{2}} \|(\partial_{w'_1} + M_{w'_2})\varphi\|_2 \leq C', \end{aligned} \quad (2.22)$$

wobei die  $w'_1, w'_2$  sich nach (2.20c) berechnen und aufgrund der Voraussetzung über die Beschränktheit sowohl von  $\|(A + \frac{i}{2}J)^{-1}\|$  als auch von  $\|A\|$  einer beschränkten Teilmenge von  $\mathbb{C}^{2n}$  entstammen. Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man offenbar die Beschränktheit von  $\{T_A\varphi\}_{A \in \mathfrak{A}, \varphi \in U}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ .

Um nun (ii) zu beweisen, fixieren wir  $A_0$ . Da die Operatoren  $T_A$  wegen  $\|T_A\| \leq \left| \det(iA + \frac{J}{2}) \right|^{-\frac{1}{2}}$  in  $A$  lokal gleichmäßig beschränkt sind, genügt es, die  $L^2$ -Konvergenz  $\lim_{A \rightarrow A_0} T_A\varphi = T_{A_0}\varphi$  für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  zu zeigen. Da  $e_A \rightarrow e_{A_0}$  punktweise und außerdem  $\|e_A\|_\infty \leq 1$  gilt, folgt nach dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz für festes  $z \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\lim_{A \rightarrow A_0} (\varphi \times e_A)(z) = \lim_{A \rightarrow A_0} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(z') e_A(z - z') e^{-\frac{i}{2}\omega(z, z')} dz' = \varphi \times e_{A_0}(z).$$

Betrachte jetzt

$$\|\varphi \times (e_A - e_{A_0})\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\varphi \times (e_A - e_{A_0}))(z)|^2 dz.$$

Hierauf soll abermals der Satz von Lebesgue angewendet werden. Wir wissen bereits, daß punktweise  $\varphi \times (e_A - e_{A_0}) \rightarrow 0$  gilt. Um eine integrierbare Majorante zu erhalten, benutzen wir nun Teil (i) des Satzes. Danach ist insbesondere die Familie  $\{\varphi \times (e_A - e_{A_0})\}_A$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  beschränkt, falls  $A$  aus eine genügend kleine Umgebung von  $A_0$  durchläuft. Es existiert also zu  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C > 0$  dergestalt, daß

$$|(\varphi \times (e_A - e_{A_0}))(z)| \leq C(1 + |z|^2)^{-N}$$

gilt. Wählt man  $N$  genügend groß, so erhält man also die Konvergenz

$$\lim_{A \rightarrow A_0} \|\varphi \times (e_A - e_{A_0})\|_2^2 = 0$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Wir wollen nun untersuchen, welche Gestalt die Hintereinanderausführung zweier Operatoren  $T_A$  und  $T_B$  besitzt. Formel (2.19) aus Lemma 2.21 besagt, daß aufgrund der Assoziativität der getwisteten Faltung zumindest für den Fall  $\operatorname{Re} B > 0$  gilt:

$$T_A \circ T_B = \sqrt{\det(A+B)^{-1}} T_{(B+i\frac{J}{2})(A+B)^{-1}(A+i\frac{J}{2})-i\frac{J}{2}}. \quad (2.23)$$

Dies läßt die Vermutung zu, daß man eine Halbgruppe erhält, wenn man die Operatoren  $T_A$  noch geeignet normalisiert. Dies ist in der Tat der Fall.

**Satz 2.29.** *Die Menge*

$$\Omega^0 := \{cT_A \mid A \in \mathfrak{S}_{2n}^0 \text{ und } c^2 = \det\left(A + i\frac{J}{2}\right)\}$$

*ist eine Halbgruppe von Kontraktionen auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , die sogenannte normalisierte Oszillator-Halbgruppe (vgl. R. Howe [23]). Die Operatoren  $cT_A$  mit  $A \in \mathfrak{S}_{2n}^0$ ,  $\operatorname{Re} A = 0$  und  $c^2 = \det(iA + \frac{J}{2})$  sind im Abschluß von  $\Omega^0$  enthalten und unitär.*

**Beweis.** Die Halbgruppeneigenschaft folgt sofort aus (2.23) und folgender Rechnung, die zeigt, daß die Normalisierung in der Definition von  $\Omega^0$  gerade richtig gewählt wurde. Seien dazu  $c_A T_A, c_B T_B \in \Omega^0$ . Setze  $C := (B + i\frac{J}{2})(A + B)^{-1}(A + i\frac{J}{2}) - i\frac{J}{2}$ . Gemäß der Anmerkung im Anschluß an Lemma 2.21 gilt  $C \in \mathfrak{S}_{2n}$ . Außerdem erhält man:

$$c_A^2 c_B^2 \det(A+B)^{-1} = \det\left((B + i\frac{J}{2})(A+B)^{-1}(A + i\frac{J}{2})\right) = \det(C + i\frac{J}{2}).$$

Damit ist  $(c_A T_A) \circ (c_B T_B) \in \Omega^0$ . Daß die Elemente von  $\Omega^0$  überdies Kontraktionen sind folgt sofort aus Satz 2.23.

Sei nun also  $A \in \mathfrak{S}_{2n}^0$  mit  $\operatorname{Re} A = 0$  und  $c \in \mathbb{C}$  mit  $c^2 = \det(A + i\frac{J}{2})$ . Wähle auf einer genügend kleinen Umgebung von  $\det(A + i\frac{J}{2})$  den eindeutigen Zweig der Quadratwurzel mit der Eigenschaft:  $\det(A + i\frac{J}{2})^{\frac{1}{2}} = c$ . Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathfrak{S}_{2n}^0$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ . Nach Satz 2.28 gilt dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{A_n} = T_A$ , also letztlich

$$\Omega^0 \ni \det\left(A_n + i\frac{J}{2}\right)^{\frac{1}{2}} T_{A_n} \rightarrow \det\left(A + i\frac{J}{2}\right)^{\frac{1}{2}} T_A.$$

Die Unitarität von  $T_A$  folgt aus Korollar 2.20.  $\square$

*Anmerkung.*

- (i) Man kann zeigen, daß die Abbildung  $cT_A \mapsto A$  auf  $\Omega^0$  wohldefiniert und eine zweifache Überlagerungsabbildung von  $\mathfrak{S}_{2n}^0$  ist.
- (ii) Die Gruppe der unitären Operatoren in  $\partial\Omega^0$  ist in Wahrheit bereits eine konkrete Realisierung der metaplektischen Gruppe, deren abgeleitete Darstellung gerade die Darstellung  $S \mapsto L_S$  aus Abschnitt 2.2, Formel (2.6) ist. Wir interessieren uns im folgenden allerdings nur für eine lokale Version, d.h. wir wollen eine lokale Darstellung einer Einsumgebung in  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  durch unitäre Operatoren in  $\partial\Omega^0$  so finden, daß diese die Darstellung  $S \mapsto L_S$  der Liealgebra  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  lokal exponenzieren.

Die symplektische Fouriertransformation induziert jetzt auf natürliche Weise einen Isomorphismus auf dem Raum der beschränkten Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Dazu machen wir folgende Beobachtung: Sei  $T$  ein beschränkter Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Dann ist der durch

$$\tilde{T}f := i^n(Tf)^\Delta. \quad (2.24)$$

definierte Operator  $\tilde{T}$  aufgrund des Satzes von Plancherel ebenfalls auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  beschränkt, und es gilt

$$\|T\|_{2 \rightarrow 2} = \|\tilde{T}\|_{2 \rightarrow 2}.$$

Überdies ist die Zuordnung  $T \mapsto \tilde{T}$  offenbar ebenfalls in der starken Operatortopologie stetig und aufgrund der Eigenschaft (2.14) der symplektischen Fouriertransformierten jedenfalls bis auf Vorzeichen eine Involution, es gilt:  $\tilde{\tilde{T}} = (-1)^n T$ . Damit erhalten wir also

**Lemma 2.30.** *Die oben definierte Abbildung  $T \mapsto \tilde{T}$  ist ein isometrischer Isomorphismus von  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$  auf sich und ein Homöomorphismus, wenn man  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$  mit der starken Operatortopologie ausstattet.*

Läßt  $T$  den Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  invariant, so trifft dies auch auf  $\tilde{T}$  zu. Ist  $T$  ein getwisteter Faltungsoperator von rechts, also auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  durch  $\varphi \mapsto \varphi \times u$  mit einem  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  gegeben, so erhält man mit Formel (2.15), daß

$$\tilde{T}\varphi = i^n \varphi \times \overset{\Delta}{u} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$$

gilt. Angewandt auf die Operatoren der Form  $T_A$  mit invertierbarem  $A$  bedeutet das nach (2.16a):

$$\tilde{T}_A = \left(\frac{i}{2}\right)^n \sqrt{\det A^{-1}} T_{-\frac{1}{4}JA^{-1}J}. \quad (2.25)$$

Faltungsoperatoren mit Gaußfunktionen werden also zumindest für invertierbare Matrizen wieder auf solche abgebildet. Wir werden jetzt einsehen, daß  $T \mapsto \tilde{T}$  die Oszillator-Halbgruppe auf sich abbildet. Entscheidend dafür ist die Tatsache, daß  $J$  eine orthogonale Transformation ist.

**Satz 2.31.** *Die Abbildung  $T \mapsto \widetilde{T}$  läßt die normalisierte Oszillator-Halbgruppe  $\Omega^0$  invariant.*

**Beweis.** Seien  $A \in \mathfrak{S}_{2n}^0$  und  $c \in \mathbb{C}$  so, daß  $c^2 = \det(A + i\frac{J}{2})$ . Zunächst gilt auch  $A^{-1} \in \mathfrak{S}_{2n}$  und wegen  $J \in O(2n, \mathbb{R})$  und  $J^{-1} = -J$  erhält man  $-\frac{1}{4}JA^{-1}J \in \mathfrak{S}_{2n}$ . Nach Gleichung (2.25) bleibt also noch zu zeigen, daß

$$(-1)^{n2^{-2n}} \det(A + i\frac{J}{2}) \det A^{-1} = \det(-\frac{1}{4}JA^{-1}J + i\frac{J}{2})$$

gilt. Dies ist aber aufgrund von  $i\frac{J}{2}A^{-1}(A + i\frac{J}{2}) = i\frac{J}{2} - \frac{1}{4}JA^{-1}J$  und  $\det(-i\frac{J}{2}) = (-1)^{n2^{-2n}}$  klar.  $\square$

Da die Abbildung  $T \mapsto \widetilde{T}$  auf ganz  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$  stetig ist, folgt nun, daß sie auch  $\partial\Omega^0$  invariant läßt.

Wie sieht nun die Hintereinanderausführung von  $\widetilde{T}_A$  mit  $\widetilde{T}_B$  konkret aus?

Seien dazu  $A, B \in \mathfrak{S}_{2n}^0$ . Aufgrund von (2.14), (2.15) und der Tatsache, daß  $e_A$  eine gerade Funktion ist, gilt

$$((\varphi \times e_B)^\Delta \times e_A)^\Delta = (\varphi \times e_B) \times e_A^\vee = (\varphi \times e_B) \times e_A,$$

und damit erhalten wir also

$$\widetilde{T}_A \circ \widetilde{T}_B = T_A \circ T_B.$$

Nach der Formel (2.23) für die Hintereinanderausführung  $T_A \circ T_B$  und der Gleichung (2.25) über die Gestalt von  $\widetilde{T}_A$  erhält man weiter

$$\widetilde{T}_A \circ \widetilde{T}_B = c\widetilde{T}_C,$$

mit  $JCJ = -\frac{1}{4}((B + \frac{i}{2}J)(A + B)^{-1}(A + \frac{i}{2}J) - \frac{i}{2}J)^{-1}$  und einem gewissen  $c \in \mathbb{C}$ . Einige elementare Umformungen zeigen, daß

$$C = \frac{i}{2}J \left( (2iJB + \text{Id})(2iJ(A + B))^{-1}(2iJA + \text{Id}) - \text{Id} \right)^{-1}.$$

Das folgende algebraische Lemma liefert nun eine weitere Formel für  $C$ , die für unsere Zwecke besser geeignet sein wird.

**Lemma 2.32.** *Seien  $\mathcal{A}$  eine Algebra mit Einselement  $e$  und  $a, b \in \mathcal{A}$ . Dann gelten:*

(i) *Existiert  $(e + ab)^{-1}$ , so ist*

$$(a + b)(e + ab)^{-1} = (a + e)(b + e)(e + ab)^{-1} - e.$$

(ii) Existiert  $(a + b)^{-1}$ , so ist

$$(e + ab)(a + b)^{-1} = (a + e)(b + e)(a + b)^{-1} - e.$$

(iii) Sind sowohl  $e + ba$  als auch  $a + b$  invertierbar, so sind die Ausdrücke aus (i) und (ii) zueinander invers. Ist zusätzlich auch noch  $a + e$  invertierbar, so gilt

$$((b + e)(a + b)^{-1}(a + e) - e)^{-1} = (b + e)(e + ab)^{-1}(a + e) - e.$$

**Beweis.** Die Eigenschaften (i) und (ii) folgen sofort durch Multiplikation mit  $e + ab$  bzw.  $a + b$  von rechts; (iii) folgt durch Konjugation mit  $a + e$  aus (i) und (ii).  $\square$

Wendet man dies nun auf  $a = 2iJA$  und  $b = 2iJB$  an, so ergibt sich für obiges  $C$  die neue Formel:

$$C = \frac{i}{2}J \left( (2iJB + \text{Id})(\text{Id} + 2iJA2iJB)^{-1}(2iJA + \text{Id}) - \text{Id} \right). \quad (2.26)$$

Um den Vorfaktor  $c$  zu bestimmen, seien  $c_A, c_B \in \mathbb{C}$  mit  $c_A^2 = \det(A + \frac{i}{2}J)$  und  $c_B^2 = \det(A + \frac{i}{2}J)$ . Dann gilt  $c_A T_A, c_B T_B \in \Omega^0$ , also auch  $c_A \widetilde{T}_A, c_B \widetilde{T}_B \in \Omega^0$  und damit  $cc_A c_B T_C \in \Omega^0$ . Es muß somit

$$\begin{aligned} c^2 \det(A + \frac{i}{2}J) \det(B + \frac{i}{2}J) &= \det(C + \frac{i}{2}J) \\ &= \det(\frac{i}{2}J) \det((2iJB + \text{Id})(\text{Id} + 2iJA2iJB)^{-1}(2iJA + \text{Id})) \end{aligned}$$

gelten. Nutzt man aus, daß  $A + \frac{i}{2}J = \frac{i}{2}J(2iJA + \text{Id})$  und dasselbe auch für  $B$  gilt, so ergibt sich:

$$c^2 = (-1)^n 2^{2n} \det(\text{Id} + 2iJA2iJB)^{-1}. \quad (2.27)$$

Man kann sich fragen, inwieweit dies auch für  $A, B$  mit  $\text{Re } A = 0$  oder  $\text{Re } B = 0$  gilt. Mit Hilfe der Stetigkeit von  $A \mapsto T_A$  erhält man:

**Lemma 2.33.** Seien  $A, B \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$ . Außerdem sei  $\text{Id} - 4JAJB$  invertierbar. Dann gilt die Gleichung

$$\widetilde{T}_A \circ \widetilde{T}_B = c \widetilde{T}_C,$$

wobei  $C$  sich aus (2.26) ergibt und  $c$  die Bedingung  $c^2 = (-1)^n 2^{2n} \det(\text{Id} + 2iJA2iJB)^{-1}$  erfüllt.

**Beweis.** Seien  $A, B \in \overline{\mathfrak{S}}_{2n}^0$  wie in der Voraussetzung. Wähle Folgen  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{S}_{2n}^0$  mit  $A_n \rightarrow A$ ,  $B_n \rightarrow B$ . Aufgrund von Satz 2.28 gilt dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{T}_{A_n} = \widetilde{T}_A \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{T}_{B_n} = \widetilde{T}_B$$

in der starken Operortopologie. Da die beteiligten Operatoren alle aus einer beschränkten Teilmenge von  $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$  ausgestattet mit der Normtopologie stammen, folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{T}_{A_n} \circ \widetilde{T}_{B_n} = \widetilde{T}_A \circ \widetilde{T}_B$ . Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt nun aber nach obiger Diskussion,  $\widetilde{T}_{A_n} \circ \widetilde{T}_{B_n} = c_n \widetilde{T}_{C_n}$ , wobei sich  $C_n$  aus Gleichung (2.26) ergibt und die  $c_n$  die Bedingung (2.27) erfüllen. Da nach Voraussetzung  $\text{Id} - 4JBJA$  invertierbar ist, konvergiert  $C_n$  gegen  $C$ . Wendet man nochmals Satz 2.28 an, so erhält man  $\lim_{n \rightarrow \infty} \widetilde{T}_{C_n} = \widetilde{T}_C$ . Da zumindest die Quadrate der Vorfaktoren ebenfalls konvergieren, also  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = c^2$  gilt, muß insgesamt die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n \widetilde{T}_{C_n} = c \widetilde{T}_C$$

mit geeignetem  $c$  gelten. □

Die Formel (2.26) haben nun den großen Vorteil, daß sie für  $A, B$  aus einer Nullumgebung stets sinnvoll sind. Benutzt man nun auch noch, daß  $S \mapsto 2iJS$  ein linearer Isomorphismus von  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  auf die symmetrischen Matrizen mit verschwindendem Realteil ist, erhält man

**Satz 2.34.** *Sei  $V$  eine einfach zusammenhängende Nullumgebung in  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- (i) Für  $S \in V$  ist  $\det(S + \text{Id}) \neq 0$ ,
- (ii) für  $S_1, S_2 \in V$  ist  $\det(\text{Id} + S_1 S_2) \neq 0$ .

Auf  $\{ \frac{i}{2} J(S + \text{Id}) \mid S \in V \}$  existiert dann ein stetiger Zweig von  $\det^{\frac{1}{2}}$ . Wir wählen diesen so, daß  $(\det \frac{i}{2} J)^{\frac{1}{2}} = \left(-\frac{i}{2}\right)^n$  gilt und definieren für  $S \in V$

$$\widetilde{\Lambda}(S) := \det\left(\frac{i}{2} J(S + \text{Id})\right)^{\frac{1}{2}} \widetilde{T}_{\frac{i}{2} JS}. \quad (2.28)$$

Dann ist  $\widetilde{\Lambda}$  eine stark stetige Abbildung von  $V$  in  $\partial\Omega^0 \cap \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}^{2n}))$ , und es gilt für  $S_1, S_2 \in V$  mit  $S_3 := (S_1 + \text{Id})(\text{Id} + S_1 S_2)^{-1}(S_2 + \text{Id}) - \text{Id} \in V$ :

$$\widetilde{\Lambda}(S_1) \circ \widetilde{\Lambda}(S_2) = \widetilde{\Lambda}(S_3).$$

Außerdem gilt:  $\widetilde{\Lambda}(0) = \text{Id}$ .

Es gibt nun eine prominente Transformation zwischen der Gruppe der Isometrien einer Bilinearform und deren Liealgebra, die sogenannte Cayley-Transformation, unter der sich das Gruppenprodukt gerade auf die Form (2.26) transformiert. Um präzise zu sein, muß angeführt werden, daß diese Transformation im allgemeinen nicht auf der ganzen Gruppe definiert ist, allerdings immer auf einer genügend kleinen Umgebung des Einselements. Unsere Definition ist auch nicht unbedingt konsistent mit der sonst üblichen, siehe Anmerkung 2.37 unten.

**Definition 2.35.** Sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra mit Einselement  $e$ . Notiere mit  $\mathcal{D}(C)$  die Menge aller  $a \in \mathcal{A}$  derart, daß  $e + a$  invertierbar ist. Dann definieren wir für  $a \in \mathcal{D}(C)$ :

$$C(a) := (e - a)(e + a)^{-1}. \quad (2.29)$$

**Lemma 2.36.** Die Cayley-Transformation  $C$  bildet  $\mathcal{D}(C)$  bijektiv auf sich ab, und es gilt:  $C^{-1} = C$ .

**Beweis.** Sei  $a \in \mathcal{D}(C)$ . Es gilt:

$$e + C(a) = e + (e - a)(e + a)^{-1} = (e + a + (e - a))(e + a)^{-1} = 2(e + a)^{-1}$$

ist invertierbar, also erhält man  $C(a) \in \mathcal{D}$ , und es folgt weiter:

$$\begin{aligned} C(C(a)) &= (e - C(a))(e + (C(a)))^{-1} = \frac{1}{2}(e - C(a)(e + a)) \\ &= \frac{1}{2}(e - (e - a)(e + a)^{-1})(e + a) = \frac{1}{2}(e + a - (e - a)) = a, \end{aligned}$$

also die Behauptung. □

**Bemerkung 2.37.** In Howe [23] wird die Cayley-Transformation von  $a$  durch  $(a + e)(a - e)^{-1}$  definiert, was gerade unserem  $-C(a)^{-1}$  entspricht. Der Nachteil ist, daß diese dann ausgerechnet in der Identität eine Singularität besitzt. Dies entspricht dem Phänomen, daß die ursprünglich Definition der Verknüpfung (2.23) in einer Umgebung der Nullmatrix versagt und die Transformation  $T \mapsto T$  stellt ein Analogon zum Übergang zwischen den beiden Versionen der Cayley-Transformation dar.

$C$  besitzt nun die schöne Eigenschaft, die Isometrien einer Bilinearform in infinitesimale Isometrien abzubilden.

**Lemma 2.38.** Sei  $B: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine Bilinearform auf einem Vektorraum  $V$  und  $T \in L(V)$  so, daß  $T \in \mathcal{C}$ , also  $\text{Id} + T$  invertierbar ist. Dann ist  $T$  genau dann bezüglich  $B$  schiefadjungiert, d.h. es gilt für  $x, y \in V$

$$B(x, Ty) = -B(Tx, y),$$

wenn  $C(T)$  eine Isometrie bezüglich  $B$  ist, also für alle  $x, y \in V$  die Gleichung

$$B(C(T)x, C(T)y) = B(x, y)$$

gilt.

**Beweis.** Sei  $T$  schiefadjungiert bzgl.  $B$ . Da  $\text{Id} + T$  und  $\text{Id} - T$  miteinander vertauschen erhält man durch direktes Nachrechnen:

$$\begin{aligned} & B((\text{Id} - T)(\text{Id} + T)^{-1}x, (\text{Id} - T)(\text{Id} + T)^{-1}y) \\ &= B((\text{Id} + T)(\text{Id} - T)(\text{Id} + T)^{-1}x, (\text{Id} + T)^{-1}y) \\ &= B((\text{Id} - T)(\text{Id} + T)(\text{Id} + T)^{-1}x, (\text{Id} + T)^{-1}y) \\ &= B(x, (\text{Id} + T)(\text{Id} + T)^{-1}y) \\ &= B(x, y), \end{aligned}$$

also ist  $C(T)$  eine Isometrie.

Ist nun andererseits  $C(T)$  als Isometrie von  $B$  vorausgesetzt, und seien  $x_1, x_2 \in V$ . Setze  $\tilde{x}_j := (\text{Id} + T)x_j$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} & B((\text{Id} + T)x_1, (\text{Id} + T)x_2) \\ &= B(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \\ &= B((\text{Id} - T)(\text{Id} + T)^{-1}\tilde{x}_1, (\text{Id} - T)(\text{Id} + T)^{-1}\tilde{x}_2) \\ &= B((\text{Id} - T)x_1, (\text{Id} - T)x_2), \end{aligned}$$

also  $B(Tx_1, x_2) + B(x_1, Tx_2) = 0$ . Damit ist  $T$  also schiefadjungiert.  $\square$

Angewandt auf die symplektische Form und ihre Isometriegruppe  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  liefert dieses Ergebnis also:

**Korollar 2.39.** *Es existiert eine Umgebung  $U$  von  $\text{Id}$  in  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  so, daß  $C(U)$  eine Nullumgebung in  $\text{sp}(n, \mathbb{R})$  und  $C: U \rightarrow C(U)$  ein  $C^\omega$ -Diffeomorphismus ist.*

Für das weitere Vorgehen sei nun ein solches  $U$  fixiert und  $V := C(U)$  gesetzt. Offenbar können wir  $U$  so wählen, daß  $V$  die Voraussetzungen von Satz 2.34 erfüllt. Es soll jetzt untersucht werden, wie sich die Verknüpfung auf  $U \subseteq \text{Sp}(n, \mathbb{R})$  durch  $C$  auf  $V$  überträgt.

**Lemma 2.40.** *Sei  $\mathcal{A}$  eine Algebra mit Einselement  $e$ , und seien  $a, b \in \mathcal{A}$  so, daß  $e + a, e + b$  invertierbar sind. Dann gelten folgende Formeln:*

$$\begin{aligned} e - (e - a)(e + a)^{-1}(e - b)(e + b)^{-1} &= 2(e + a)^{-1}(a + b)(e + b)^{-1}, \\ e + (e - a)(e + a)^{-1}(e - b)(e + b)^{-1} + e &= 2(e + a)^{-1}(e + ab)(e + b)^{-1}. \end{aligned}$$



**Beweis.** Da  $(e + a)^{-1}$  mit  $e - a$  vertauscht erhält man die Behauptung durch Multiplizieren der folgenden beiden Gleichungen mit  $(e + a)^{-1}$  von links und  $(e + b)^{-1}$  von rechts.

$$\begin{aligned}(e + a)(e + b) - (e - a)(e - b) &= 2(a + b), \\ (e + a)(e + b) + (e - a)(e - b) &= 2(e + ab).\end{aligned}$$

□

**Lemma 2.41.** *Seien  $S_1, S_2 \in U$  so, daß auch  $S_1 S_2 \in U$ . Dann gilt*

$$C(S_1 S_2) = (\text{Id} + C(S_2))(\text{Id} + C(S_1)C(S_2))^{-1}(\text{Id} + C(S_1)) - \text{Id}. \quad (2.30)$$

*Insbesondere existiert  $(\text{Id} + S_1 S_2)^{-1}$ .*

**Beweis.** Nach Definition von  $C$ , mit Lemma 2.40 und aufgrund der Tatsache, daß  $C = C^{-1}$  gilt, erhält man für  $a := C(S_1)$ ,  $b := C(S_2)$ :

$$\begin{aligned}C(C(a)C(b)) &= C((e - a)(e + a)^{-1}(e - b)(e + b)^{-1}) \\ &= (e - (e - a)(e + a)^{-1}(e - b)(e + b)^{-1}) \\ &\quad (e + (e - a)(e + a)^{-1}(e - b)(e + b)^{-1})^{-1} \\ &= (e + a)^{-1}(a + b)(e + ab)^{-1}(e + a).\end{aligned} \quad (2.31)$$

Wendet man auf das Produkt der mittleren beiden Terme Lemma 2.32 (i) an, so erhält man

$$C(C(a)C(b)) = (e + b)(e + ab)^{-1}(e + a) - e$$

und damit die Behauptung. □

Es sind damit alle Voraussetzungen geschaffen, um die lokale Darstellung von  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  zu definieren. Für  $S \in U$  setzen wir

$$\Lambda(S) := \tilde{\Lambda}(C(S)). \quad (2.32)$$

**Satz 2.42.**  *$\Lambda$  ist eine lokale unitäre Darstellung von  $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ , d.h. für  $S_1, S_2 \in U$  mit  $S_1 S_2 \in U$  gilt:*

$$\Lambda(S_1) \circ \Lambda(S_2) = \Lambda(S_1 S_2). \quad (2.33)$$

**Beweis.** Nach Satz 2.34 ist  $\tilde{\Lambda}$  stark stetig. Da die Cayley-Transformation insbesondere stetig ist, trifft dies also auch auf  $\Lambda$  zu. Es ist also nur noch die Homomorphieeigenschaft (2.33) zu zeigen. Diese folgt aber aus (2.28) und (2.30). □

Es soll nun die explizite Form der Operatoren  $\Lambda(e^{tS})$  für hinreichend kleines  $t$  bestimmt werden. Sei also  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ . Wir berechnen dann zunächst die Cayley-Transformierte  $C(e^{tS})$ :

$$\begin{aligned} C(e^{tS}) &= (\text{Id} - e^{tS})(\text{Id} + e^{tS})^{-1} = -(e^{\frac{t}{2}S} - e^{-\frac{t}{2}S})(e^{\frac{t}{2}S} + e^{-\frac{t}{2}S})^{-1} \\ &= -\tanh\left(\frac{t}{2}S\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt auch:

$$C(e^{tS}) + \text{Id} = \text{Id} - \tanh\left(\frac{t}{2}S\right) = e^{-\frac{t}{2}S} \cosh\left(\frac{t}{2}S\right)^{-1},$$

so daß für  $t \in \mathbb{R}$  mit  $e^{tS} \in U$  also

$$\begin{aligned} \Lambda(e^{tS}) &= \tilde{\Lambda}(C(e^{tS})) \\ &= \det\left(\frac{i}{2}J(C(e^{tS}) + \text{Id})\right)^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_{\frac{i}{2}J(C(e^{tS}))} \\ &= (4\pi)^{-n} \det\left(\cosh\left(\frac{t}{2}S\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\cdot \times e^{-\frac{i}{2}J \tanh\left(\frac{t}{2}S\right)}\right). \end{aligned}$$

gilt. Man erhält somit für den getwisteten Faltungskern  $\gamma_{t,S}$  von  $\Lambda(e^{tS})$ :

$$\overset{\Delta}{\gamma}_{t,S}(z) = (4\pi)^{-n} \det\left(\cosh\left(\frac{t}{2}S\right)\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{4}\omega(z, \tanh\left(\frac{t}{2}S\right)z)}. \quad (2.34)$$

Vergleiche dies auch mit der Formel (2.5) aus [35].

Falls  $S$  invertierbar und  $t \neq 0$  klein genug ist, erhält man mit Formel (2.11) und der Definition (2.12) der symplektischen Fouriertransformierten auch eine Formel für die  $\gamma_{t,S}$  selbst. Dabei geht außerdem ein, daß  $\text{sgn}(J \tanh\left(\frac{t}{2}S\right)) = \text{sgn } t \text{sgn}(JS)$  gilt, was man schnell einsieht, wenn man bedenkt, daß  $\tanh$  sich in einer Nullumgebung wie die Identität verhält und  $S$  invertierbar ist. Siehe dazu auch Seite 551 in [35]. Man erhält nun für die  $\gamma_{t,S}$  für  $t \neq 0$  die folgende Formel:

$$\gamma_{t,S}(z) = (4\pi)^{-n} \left| \det \sinh\left(\frac{t}{2}S\right) \right|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \text{sgn}(JS) \text{sgn } t} e^{-\frac{i}{4}\omega(z, \coth\left(\frac{t}{2}S\right)z)}. \quad (2.35)$$

Der nächste Satz ist dem Artikel [35] von D. Müller und F. Ricci entlehnt und zeigt, daß die abgeleitete Darstellung  $d\Lambda$  tatsächlich mit der Liealgebren-Darstellung  $\tilde{\nu}$  aus Abschnitt 2.2 übereinstimmt.

**Satz 2.43.** *Für die Ableitung  $d\Lambda$  der oben definierten lokalen Darstellung  $\Lambda$  gilt:*

$$d\Lambda(S) = iL_S \quad S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}),$$

wobei  $L_S$  der in (2.6) definierte Operator ist. Insbesondere gilt dann für hinreichend kleines  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{itL_S}\varphi = \varphi \times \gamma_{t,S} \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}).$$

**Beweis.** Sei  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  fixiert. Definiere zu  $t \in U$  den unitären Operator  $T_t := \Lambda(e^{tS})$  und bezeichne mit  $A$  den infinitesimalen Erzeuger von  $T_t$ . Wir werden zeigen, daß für  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  gilt:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(T_t\varphi - \varphi) = iL_S\varphi$ , wobei der Grenzwert in  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  existiert. Da die Operatoren  $T_t$  nach Korollar 2.20  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  invariant lassen, folgt dann aus [35], Theorem 3.2, daß  $L_S$  bereits wesentlich selbstadjungiert auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  ist.

Sei  $\xi \in \mathbb{R}^{2n}$ . Da  $\cosh$  eine gerade Funktion ist, gilt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{t,S}^\Delta(\xi) &= (4\pi)^{-n} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \det\left(\cosh\left(\frac{t}{2}S\right)\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{i}{4}\omega(\xi, \tanh(\frac{t}{2}S)\xi)} \\ &= -(4\pi)^{-n} \frac{i}{8} \omega(\xi, S\xi) = (4\pi)^{-n} \frac{i}{8} \langle \xi, JS\xi \rangle. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes über das Differenzieren parameterabhängiger Integrale erhält man also

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{t,S}^\Delta = (4\pi)^{-n} \frac{i}{8} \langle \xi, JS\xi \rangle \quad \text{in } \mathcal{S}'.$$

Wie eine einfache Rechnung zeigt, gilt  $(\langle \nabla, SJ\nabla \rangle \delta_0)^\Delta = -\frac{(4\pi)^{-n}}{4} \langle \xi, JS\xi \rangle$  und damit  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_{t,S} = -\frac{i}{2} \langle \nabla, SJ\nabla \rangle \delta_0$  in  $\mathcal{S}'$ . Daraus folgt nun für  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} \langle T_t\varphi, \psi \rangle &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \langle T_t\varphi, T_{-t_0}\psi \rangle = \langle L_S\varphi, T_{-t_0}\psi \rangle \\ &= \langle T_{t_0}L_S\varphi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Wir haben also für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  mit  $\|\psi\|_2 = 1$  nach dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung:

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{1}{t}(T_t\varphi - \varphi) - L_S\varphi, \psi \right\rangle \right| &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} \langle T_s\varphi, \psi \rangle ds - \langle L_S\varphi, \psi \rangle \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \int_0^t \langle (T_s - \text{Id})L_S\varphi, \psi \rangle ds \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^t \|(T_s - \text{Id})L_S\varphi\|_2 ds. \end{aligned}$$

Da nun  $s \mapsto T_s$  stark stetig ist und für  $f \in L^2$  außerdem stets  $\|f\|_2 = \sup_{\{g \in \mathcal{S} : \|g\|_2=1\}} |\langle f, g \rangle|$  gilt, folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t \varphi - \varphi}{t} = L_S \varphi$$

in  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$ . Also erhalten wir  $\varphi \in \mathcal{D}(A)$  und  $L_S \varphi = A\varphi$  und damit die Behauptung.  $\square$

Es ist übrigens nicht möglich,  $\Lambda$  zu einer Darstellung auf ganz  $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$  fortzusetzen. Dann muß zur universellen Überlagerungsgruppe übergegangen werden. Da diese lokal zur ursprünglichen Gruppe isomorph ist hat man gleichzeitig auch eine lokale Darstellung der universellen Überlagerung, die man dann zu einer Darstellung auf ganz  $\widetilde{G}$  fortsetzen kann. Da die Liealgebren beider Gruppen isomorph sind (sie entscheiden sich lokal), erhält man aber trotzdem eine Darstellung von  $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ . Dazu könnte man im übrigen die lokale Darstellung auch direkt ableiten, ohne den Umweg über  $\widetilde{\mathrm{Sp}}(n, \mathbb{R})$  zu gehen.

## 2.4 Globale Formeln für $\gamma_{t,S}$

In [35] haben D. Müller und F. Ricci durch analytisches Fortsetzen der Formeln (2.34) und (2.35) die Form der getwisteten Faltungskerne  $\gamma_{t,S}$  bzw.  $\overset{\Delta}{\gamma}_{t,S}$  auch für „große“ Werte von  $t$  und auch für singuläres  $S$  explizit bestimmt. Für den Beweis der Restriktionssätze in Kapitel 3 werden wir diese allerdings nicht benötigen, es genügt dort die Kenntnis der  $\gamma_{t,S}$  für  $t$  aus einer beliebig kleinen Nullumgebung. In Kapitel 4 hingehen können wir eine Benutzung der „globalen“ Formeln allerdings nicht umgehen. Da dort aber nur der Fall  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$  behandelt wird, beschränken wir uns an dieser Stelle ebenfalls darauf, die Gestalt der  $\gamma_{t,S}$  nur für diese Situation zu notieren. Für den allgemeinen Fall konsultiere man wie gesagt [35].

**Voraussetzung 2.44.** Für den Rest des Abschnittes sei vorausgesetzt, daß  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$  von der Form  $S = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$  mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  ist.

Eine einfache Induktion zeigt nun, daß die Potenzen von  $S$  die Gestalt

$$S^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} D^{2k} & 0 \\ 0 & D^{2k} \end{pmatrix} \quad S^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -D^{2k+1} \\ D^{2k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

besitzen. Setzt man diese in die Potenzreihe der Exponentialfunktion ein, so ergibt sich

$$e^{tS} = \begin{pmatrix} \cos(tD) & -\sin(tD) \\ \sin(tD) & \cos(tD) \end{pmatrix},$$

woraus per Definition der hyperbolischen Winkelfunktionen

$$\cosh(tS) = \begin{pmatrix} \cos(tD) & 0 \\ 0 & \cos(tD) \end{pmatrix}, \quad \sinh(tS) = \begin{pmatrix} 0 & -\sin(tD) \\ \sin(tD) & 0 \end{pmatrix}$$

folgt und damit weiter

$$\begin{aligned} \coth(tS) &= \cosh(tS) \sinh(tS)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cot(tD) \\ -\cot(tD) & 0 \end{pmatrix} \\ \tanh(tS) &= \sinh(tS) \cosh(tS)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\tan(tD) \\ \tan(tD) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also für die quadratischen Formen  $\omega(z, \coth(tS)z)$  und  $\omega(z, \tanh(tS)z)$  der Konvention  $z_{(j)} = (q_j, p_j)$  für  $z = (q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \omega(z, \coth(tS)z) &= \sum_{j=1}^n \cot(\mu_j t) |z_{(j)}|^2 \\ \omega(z, \tanh(tS)z) &= - \sum_{j=1}^n \tan(\mu_j t) |z_{(j)}|^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

**Definition 2.45.** Seien  $f \in L^1(\mathbb{R}^{2n})$  und  $\tau \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Die partielle symplektische Fouriertransformierte  $\overset{\Delta_\tau}{f}$  von  $f$  bzgl.  $\tau$  ist dann definiert als die symplektische Fouriertransformierte in der Variablengruppe  $(z_{(j)})_{j \in \tau}$ . Aufgrund der etwas umständlichen Notation sei dies nur für den Fall, daß  $f$  die Gestalt  $f(z) = \prod_{j=1}^n f_j(z_{(j)})$  mit geeigneten Funktionen  $f_1, \dots, f_n \in L^1(\mathbb{R}^2)$  besitzt explizit angegeben. Dann gilt für  $z \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\overset{\Delta_\tau}{f}(z) := \prod_{j \in \tau} \overset{\Delta}{f_j}(z_{(j)}) \prod_{j \notin \tau} f_j(z_{(j)})$$

Außerdem gelte noch die Konvention  $\overset{\Delta_\emptyset}{f} := f$ .

**Bemerkung 2.46.** Wie üblich kann man  $\overset{\Delta_\tau}{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  natürlich auch für beliebige Distributionen  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$  definieren.

Die partiellen symplektischen Fouriertransformationen sind selbstinvers, da dies für die symplektische Fouriertransformation selbst gilt.

**Satz 2.47.** *Es gelten:*

- (i) *Ist  $t \in \mathbb{R}$  derart, daß für alle  $1 \leq j \leq n$  die Bedingung  $\sin(\frac{\mu_j}{2}t) \neq 0$  gilt, so besitzt  $\gamma_{t,S}$  punktweise die Form*

$$\gamma_{t,S}(z) = (4\pi)^{-n} i^n \prod_{j=1}^n \sin\left(\frac{\mu_j}{2}\right)^{-1} e^{-\frac{i}{4}\omega(z, \coth(\frac{t}{2}S)z)}. \tag{2.37a}$$

(ii) Seien  $t \in \mathbb{R}$  und  $\emptyset \neq \tau \subseteq \{1, \dots, n\}$  so, daß für  $j \in \tau$  gilt:  $\cos(\frac{\mu_j}{2}t) \neq 0$  und für  $j \notin \tau$  die Bedingung  $\sin(\frac{\mu_j}{2}t) \neq 0$  erfüllt ist. Dann besitzt die partielle symplektische Fouriertransformierte  $\overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{t,S}$  von  $\gamma_{t,S}$  bzgl.  $\tau$  punktweise die Form

$$\overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{t,S}(z) = (4\pi)^{-n} i^{n-|\tau|} \prod_{j \in \tau} \cos\left(\frac{\mu_j}{2}t\right)^{-1} e^{\frac{i}{4} \sum_{j=1}^k \tan(\frac{\mu_j}{2}t) |z_{(j)}|^2} \times \prod_{j \notin \tau} \sin\left(\frac{\mu_j}{2}t\right)^{-1} e^{-\frac{i}{4} \sum_{j=k+1}^n \cot(\frac{\mu_j}{2}t) |z_{(j)}|^2}. \quad (2.37b)$$

**Beweis.** Siehe D. Müller und F. Ricci, [35]. Die Behauptung folgt aus den dort angegebenen Gleichungen 4.7, 4.12, welche die globalen Formen von  $\gamma_{t,S}$  bzw.  $\overset{\Delta}{\gamma}_{t,S}$  angeben, zusammen mit 4.16, 4.17, die besagen, daß die  $\gamma_{t,S}$  in unserem Fall in Tensorprodukte von Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$  zerfallen.  $\square$

## Kapitel 3

# Restriktionssätze

Wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde, geht der Begriff des Restriktionssatzes auf das folgende Theorem über die Einschränkung der Fouriertransformierten auf die Sphäre zurück. Dieser wurde 1975 von P. Tomas in [53] gezeigt. Das Resultat für den „Endpunkt“  $p = 2\frac{n+1}{n+3}$  stammt von E. Stein [44]. Genauere Informationen finden sich in den Beispielen weiter unten.

**Satz 3.1 (Der Restriktionssatz von Tomas–Stein).** *Seien  $n \geq 2$  und außerdem  $1 \leq p \leq 2\frac{n+1}{n+3}$ , sowie  $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$ . Dann existiert eine Konstante  $C_{p,q} > 0$  so, daß für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  die Ungleichung*

$$\left( \int_{S^{n-1}} |\widehat{f}|^q(\omega) d\sigma(\omega) \right)^{\frac{1}{q}} \leq C_{p,q} \|f\|_p \quad (3.1)$$

gilt, wobei  $\sigma$  das Oberflächenmaß der Einheitskugel  $S^{n-1}$  in  $\mathbb{R}^n$  bezeichne.

Wir betrachten den Spezialfall  $q = 2$ . Dies ist stets möglich, da offenbar für alle  $1 \leq p \leq 2\frac{n+1}{n+3}$  die Bedingung  $2 \leq \frac{n-1}{n+1}p'$  gilt. Durch Skalierung erhält man dann zunächst entsprechende Abschätzungen für Sphären mit beliebigem Radius  $r > 0$ . Da die Spektralzerlegung des Laplace–Operators gerade durch die Fouriertransformation gegeben ist, kann man durch anschließende Integration über  $r$  die folgende Eigenschaft der Spektralprojektoren von Intervallen der Länge Eins zeigen:

**Lemma 3.2.** *Bezeichne  $\Delta$  den Laplace–Operator auf  $\mathbb{R}^n$ , und sei  $p$  so wie in der Voraussetzung von Satz 3.1. Dann existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\|\mathbf{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(-\Delta)f\|_2 \leq C(1 + |\lambda|)^{\beta(p)} \|f\|_p, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n),$$

wobei

$$\beta(p) := \frac{n}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

**Beweis.** Da  $-\Delta$  ein positiver Operator ist, können wir o.B.d.A.  $\lambda \geq 0$  voraussetzen. Bekanntermaßen ist der Funktionalkalkül für  $-\Delta$  explizit durch

$$[m(-\Delta)f](x) = \mathcal{F}^{-1}(m(|\xi|^2)\widehat{f})(x) \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

gegeben, wobei  $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte Borelmeßbare Funktion ist und  $\mathcal{F}^{-1}$  die inverse Fouriertransformation bezeichnet.

Angewendet auf die charakteristische Funktion  $\mathbf{1}_{[\lambda, \lambda+1]}$  erhalten wir also mit Satz 3.1

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(-\Delta)f\|_2^2 &= (2\pi)^{-n} \|\mathbf{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(|\xi|^2)\widehat{f}(\xi)\|_{2, \xi}^2 = (2\pi)^{-n} \int_{\lambda^{\frac{1}{2}} \leq |\xi| \leq (\lambda+1)^{\frac{1}{2}}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\lambda^{\frac{1}{2}}}^{(\lambda+1)^{\frac{1}{2}}} r^{n-1} \int_{S^{n-1}} |\widehat{f}(r\omega)|^2 d\sigma(\omega) dr \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\lambda^{\frac{1}{2}}}^{(\lambda+1)^{\frac{1}{2}}} r^{-n-1} \int_{S^{n-1}} |f\left(\frac{\cdot}{r}\right)(\omega)|^2 d\sigma(\omega) dr \leq C_p \int_{\lambda^{\frac{1}{2}}}^{(\lambda+1)^{\frac{1}{2}}} r^{-n-1} \|f\left(\frac{\cdot}{r}\right)\|_p^2 dr \\ &= C_p \int_{\lambda^{\frac{1}{2}}}^{(\lambda+1)^{\frac{1}{2}}} r^{2n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1} dr \|f\|_p^2. \end{aligned}$$

Da  $p \neq 2$  und sich die Länge des Integrationsweges wie  $\lambda^{-\frac{1}{2}}$  verhält, ergibt sich

$$\|\mathbf{1}_{[\lambda, \lambda+1]}(-\Delta)f\|_2^2 \leq C'_p \lambda^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1} \|f\|_p^2,$$

mit einer neuen Konstanten  $C'_p$ . Bildet man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so erhält man die Behauptung.  $\square$

Indem wir nun den Operator  $\Delta$  durch einen beliebigen selbstadjungierten Operator auf einem Raum quadratintegrierbarer Funktionen ersetzen, läßt sich die folgende Definition motivieren.

**Definition 3.3.** Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu$  ein Borelmaß auf  $M$  und  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf  $L^2(M, \mu)$  und  $1 \leq p \leq 2$ . Wir sagen,  $A$  besitze die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$ , falls  $C > 0$  so existiert, daß für  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\lambda - A)f\|_2 \leq C(1 + |\lambda|)^{\beta(p)} \|f\|_p, \quad f \in L^2 \cap L^p, \quad (3.3)$$

mit  $\beta(p)$  aus (3.2).



Bevor wir weitere Beispiele für Operatoren angeben, welche die Restriktionseigenschaft besitzen, soll noch der Begriff der „lokalen Restriktionseigenschaft“ eingeführt werden.

**Definition 3.4.** Seien  $M$ ,  $A$  und  $p$  wie in Definition 3.3. Wir sagen, daß  $A$  die lokale Restriktionseigenschaft  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  besitzt, falls zu jedem Kompaktum  $K \subseteq M$  ein  $C_K > 0$  existiert so, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\lambda - A)f\|_{L^2(M)} \leq C_K(1 + |\lambda|)^{\beta(p)} \|f\|_{L^p(K)} \quad f \in L^2(K)$$

erfüllt ist, wobei man ein  $f \in L^2(K)$  via der Einbettung  $L^2(K) \hookrightarrow L^2(M)$  gleichzeitig als Element von  $L^2(M)$  auffaßt. Bedenke ferner, daß aufgrund der Kompaktheit von  $K$  und  $p \leq 2$  die Inklusion  $L^2(K) \subseteq L^p(K)$  gilt.

### 3.1 Beispiele für Restriktionssätze

Zunächst einige Bemerkungen zum Restriktionssatz 3.1:

Für festes  $p$  läßt sich zeigen (siehe E. Stein [45] Seite 388), daß die Bedingung  $q \leq \frac{n-1}{n+1}p'$  auch notwendig ist. Außerdem kann (3.1) nicht gelten, falls  $p \geq \frac{2n}{n+1}$ . Auch dies findet sich bei E. Stein [45] in Kapitel IX, 6.19.

C. Fefferman zeigte bereits 1970 in [11], daß (3.1) im Falle  $n = 2$  sogar für alle  $1 \leq p < \frac{2n}{n+1} = \frac{4}{3}$  und  $1 \leq q \leq \frac{n-1}{n+1}p' = \frac{2}{3}$  erfüllt ist, und somit das optimale Resultat gilt.

Die Restriktionsvermutung besagt nun, daß dies auch in höheren Dimensionen  $n \geq 3$  der Fall ist.

Angemerkt sei noch, daß die Sphäre  $S^{n-1}$  in (3.1) durch eine beliebige kompakte Hyperfläche ersetzen werden kann, deren Gaußsche Krümmung in keinem Punkt verschwindet.

Dieses und viele weitere Bemerkungen, sowie zum Restriktionssatz verwandte Probleme, finden sich bei E. Stein [45] in den Kapiteln VIII und IX.

Als nächstes sollen Beispiele angegeben werden, für die Restriktionseigenschaften  $R(p \rightarrow 2)$  aus Definition 3.3 bzw. 3.4 gelten.

- (i) Ist  $P$  ein elliptischer selbstadjungierter Operator zweiter Ordnung auf einer zusammenhängenden, kompakten  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$ , so besitzt dieser die Eigenschaft

$$\|\mathbf{1}_{[\lambda^2, (\lambda+1)^2]}(P)f\|_{p \rightarrow 2} \leq \lambda^{n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}},$$

falls  $1 \leq p \leq 2\frac{n+1}{n+3}$ . Dieses Ergebnis stammt von C. Sogge [42]. Beachte dabei, daß hier Intervalle der Länge  $\lambda$  betrachtet werden. Dies liegt daran, daß dieses Resultat durch Übergang zu  $P^{\frac{1}{2}}$  auf einen Satz über Operatoren erster Ordnung zurückgeführt wird, bei denen dann aber die Spektralmultiplikatoren wiederum Intervalle der Länge Eins sind. Genauer findet sich im Buch von Sogge [43] (Theorem 5.1.1). Die dazugehörigen Originalarbeiten stammen von C. Sogge [42], A. Seeger und C. Sogge [40], sowie M. Christ und C. Sogge [8].

- (ii) In [51], Theorem 2.5.4 zeigte S. Thangavelu, daß der getwistete Sub-Laplace-Operator  $L$  auf  $\mathbb{R}^{2n}$  die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  für  $1 \leq p \leq \frac{2(2n)}{(2n)+2}$  besitzt und (3.3) sogar für  $1 \leq p \leq \frac{2(2n)}{(2n)+1}$  erfüllt ist, falls man die Abschätzung nur für radiale Funktionen betrachtet. Derselbe Autor hat ferner in [52] bewiesen, daß  $L$  die lokale Restriktionseigenschaft  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  im Bereich  $1 \leq p \leq 2\frac{(2n)+1}{(2n)+3}$  besitzt.
- (iii) Im Falle des Hermite-Operators  $H = -\Delta + |x|^2$  auf  $\mathbb{R}^n$  konnte von G. Karadzhev 1995 in [28] gezeigt werden, daß dieser die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  für  $1 \leq p < \frac{2n}{n+2}$  mit  $n \geq 3$  besitzt. S. Thangavelu zeigte bereits in [51], daß  $H$  für  $n \geq 2$  die Restriktionseigenschaft  $R(1 \rightarrow 2)$  besitzt. Im eindimensionalen ist bekannt, daß nicht einmal  $R(1 \rightarrow 2)$  gilt. Da man die Asymptotik der  $L^p$  Normen der Hermitefunktionen genau kennt, siehe z.B. [51] Lemma 1.5.2, gilt  $\|\mathbf{1}_{[0,1]}(H - \lambda)\|_{L^1 \rightarrow L^2} \sim \lambda^{-\frac{1}{12}}$  falls  $\lambda \rightarrow \infty$ . In [52] hat Thangavelu ferner bewiesen, daß  $H$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die lokale Restriktionseigenschaft  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  für  $1 \leq p \leq 2\frac{n+1}{n+3}$  besitzt.

An dieser Stelle soll nun das Hauptergebnis schon einmal formuliert werden. Wir werden zeigen:

**Satz 3.5 (Restriktionssatz).** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und setze  $d := 2n$ . Ist  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  dergestalt, daß  $SJ$  entweder positiv oder negativ definit ist und  $1 \leq p < 2\frac{d+1}{d+3}$ , dann existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\|\chi_{[0,1]}(\lambda - L_S)\|_{p \rightarrow 2} \leq C(1 + |\lambda|)^{\beta(p)}, \quad (3.4)$$

wobei  $\beta(p) = \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$  wie in (3.2) definiert ist (bedenke, daß  $L_S$  ein Operator auf  $\mathbb{R}^{2n}$  ist).  $L_S$  besitzt also die Eigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$ .

Dies verbessert das oben erwähnte Ergebnis von Thangavelu für  $L$  und verallgemeinert es außerdem auf die Operatoren der Form  $L_S$  mit  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$  bzw.  $-S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$ .

In Abschnitt 3.6.2 werden wir ferner den Satz 3.34 zeigen, der in etwa dem lokalen Resultat von Thangavelu entspricht, und dieses auf die Klasse  $L_S$  für beliebiges invertierbares  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  verallgemeinert.

## 3.2 Vorbereitungen

Daß man bei der Definition (3.3) der Restriktionseigenschaft gerade die charakteristische Funktion des Intervalls  $[0, 1]$  als Spektralmultiplikator auftaucht, ist übrigens ohne jede Bedeutung. Es stellt sich heraus, daß man jede Funktion benutzen kann, die in einem gewissen Sinne nicht identisch verschwindet und eine gewisse Wachstumseigenschaft erfüllt, ohne die Aussage der Restriktionseigenschaft zu ändern. Beim Beweis von Restriktionssätzen ist es z.B. meist sehr wünschenswert, daß der Spektralmultiplikator glatt ist oder seine Fouriertransformierte gewisse Eigenschaften besitzt. Die nun folgende Definition formuliert die Anforderungen an diese Funktionen.

**Definition 3.6.** Seien  $\kappa \in \mathbb{R}$  und  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine beschränkte Borelmeßbare Funktion. Wir nennen  $f$  einen Restriktionsmultiplikator für  $\kappa$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) Es gibt ein offenes  $U \subseteq \mathbb{R}$  mit:

$$\inf_{t \in U} |f(t)| > 0, \quad (\text{RM1})_\kappa$$

(ii) es existieren  $\varepsilon > 0$  und  $C > 0$  so, daß

$$|f(t)| \leq C(1 + |t|)^{-(\frac{1}{2} + |\kappa| + \varepsilon)} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (\text{RM2})_\kappa$$

Insbesondere ist also jedes nichttriviale  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ein Restriktionsmultiplikator für alle  $\kappa$ .

**Bemerkung 3.7.**

(i) Ist  $f$  ein Restriktionsmultiplikator für  $\kappa$ , so trifft dies offenbar auch auf alle Translationen von  $f$  und alle Vielfachen  $af$  mit  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  zu.

(ii)  $\mathbb{1}_{[0,1]}$  ist ein Restriktionsmultiplikator für alle  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

**Voraussetzung 3.8.** Im folgenden seien  $M, A$  stets wie in Definition 3.3.

Nun zeigen wir, daß man den Restriktionssatz mit jedem beliebigen Restriktionsmultiplikator formulieren kann. Dabei behandeln wir den globalen und den lokalen Fall zusammen:

**Lemma 3.9.** Seien  $\kappa \in \mathbb{R}$ ,  $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  Restriktionsmultiplikatoren für  $\kappa$  und  $1 \leq p < \infty$ . Bezeichne außerdem  $B \subseteq M$  eine meßbare Teilmenge von  $M$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i)

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left( (1 + |\lambda|)^{-\kappa} \|g(\lambda - A)\|_{L^p(B) \rightarrow L^2(M)} \right) < \infty, \quad (3.5a)$$

(ii)

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left( (1 + |\lambda|)^{-\kappa} \|h(\lambda - A)\|_{L^p(B) \rightarrow L^2(M)} \right) < \infty. \quad (3.5b)$$

**Beweis.** Da die Aussage völlig symmetrisch in  $g$  und  $h$  ist, kann man sich auf den Beweis von (i)  $\implies$  (ii) beschränken. Es gelte also (i). Sei  $f \in L^2 \cap L^p$  fest. Nach dem ersten Punkt von Bemerkung 3.7 können wir o.B.d.A. die Existenz eines  $N \in \mathbb{N}$  so annehmen, daß für  $|t| \leq \frac{1}{N}$  gilt:  $|g(t)| \geq 1$ .

Nun zerlegen wir den Spektralmultiplikator  $h$  in Teilstücke der Länge  $\frac{1}{N}$ . Definiere also zu  $k \in \mathbb{Z}$  die Funktion  $h_k$  durch  $h_k := \mathbb{1}_{[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[} h$ . Nach dem Spektralsatz, wie man ihn z.B. im Buch von M. Reed und B. Simon [38] findet, gilt insbesondere:

$$\|h(\lambda - A)f\|_2^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|h_k(\lambda - A)f\|_2^2.$$

Da  $h$  nach  $(\text{RM2})_\kappa$  im Unendlichen verschwindet, konvergiert  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k(A - \lambda)$  sogar in der von der Operatornorm auf  $\mathcal{B}(L^2)$  induzierten Topologie gegen  $h(\lambda - A)$ , wovon hier allerdings kein Gebrauch gemacht wird. Für die einzelnen Summanden gilt nun mit  $(\text{RM2})_\kappa$  und wegen  $\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{N}[} \leq |g|^2$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{|k|}{N}\right)^{1+2|\kappa|+2\varepsilon} \|h_k(\lambda - A)f\|_2^2 &\leq C \|\mathbb{1}_{[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[}(\lambda - A)f\|_2^2 \\ &= C \|\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{N}[}(\lambda - \frac{k}{N} - A)f\|_2^2 \\ &\leq C \|g(\lambda - \frac{k}{N} - A)f\|_2^2 \\ &\leq C' \left(1 + \left|\lambda - \frac{k}{N}\right|\right)^{2\kappa} \|f\|_p^2. \end{aligned}$$

Es bleibt also zu zeigen, daß die Summe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{|k|}{N}\right)^{-(1+2|\kappa|+2\varepsilon)} \left(1 + \left|\lambda - \frac{k}{N}\right|\right)^{2\kappa}$$

als Funktion in  $\lambda$  von der Größenordnung  $O((1 + |\lambda|)^{2\kappa})$  ist. Eine einfache Rechnung zeigt nun aber, daß für beliebiges  $s \in \mathbb{R}$  die folgende Ungleichungskette gilt:

$$(1 + |s|)^{-1}(1 + |\lambda|) \leq (1 + |\lambda + s|) \leq (1 + |\lambda|)(1 + |s|),$$

so daß man für jedes  $\kappa \in \mathbb{R}$  stets  $(1 + |\lambda + s|)^{2\kappa} \leq (1 + |\lambda|)^{2\kappa}(1 + |s|)^{2|\kappa|}$  erhält und sich daraus durch Anwendung auf  $s = -\frac{k}{N}$  die gewünschte Abschätzung

$$\|h(A - \lambda)f\|_2^2 \leq C'(1 + |\lambda|)^{2\kappa} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{|k|}{N}\right)^{-(1+2\varepsilon)} \|f\|_p^2$$

ergibt. Damit ist die Behauptung also bewiesen.  $\square$

Das nun folgende allgemeine Lemma ermöglicht es, mit Hilfe eines sogenannten  $T^*T$ -Arguments,  $L^p \rightarrow L^2$ -Abschätzungen auf solche von  $L^p$  nach  $L^{p'}$  zurückzuführen und umgekehrt.

**Lemma 3.10.** *Seien  $N_1, N_2$  Maßräume und  $T: L^2(N_1) \rightarrow L^2(N_2)$  stetig, sowie  $1 \leq p < \infty$ . Dann sind äquivalent:*

(i)  $T^*T$  ist beschränkt von  $L^p(N_1)$  nach  $L^{p'}(N_1)$

(ii)  $T$  ist beschränkt von  $L^p(N_1)$  nach  $L^2(N_2)$ .

Gilt eine der obigen Aussagen und damit auch die andere, so erfüllen die Operatornormen die Gleichung

$$\|T\|_{L^p(N_1) \rightarrow L^2(N_2)} = \|T^*T\|_{L^p(N_1) \rightarrow L^{p'}(N_2)}^{\frac{1}{2}}.$$

**Beweis.** Es gelte (i). Dann erhalten wir für  $f \in L^2(N_1) \cap L^p(N_2)$ :

$$\|Tf\|_2^2 = \langle Tf, Tf \rangle = \langle T^*Tf, f \rangle \leq \|T^*Tf\|_{p'} \|f\|_p \leq \|T^*T\|_{p \rightarrow p'} \|f\|_p^2.$$

Also bildet  $T$  den Raum  $L^p(N_1)$  stetig nach  $L^2(N_2)$  ab, und die Operatornorm läßt sich durch

$$\|T\|_{L^p(N_1) \rightarrow L^2(N_2)} \leq \|T^*T\|_{L^p(N_1) \rightarrow L^{p'}(N_1)}^{\frac{1}{2}}$$

abschätzen. Ist andererseits (ii) erfüllt, so gilt für  $f, g \in L^p(N_1)$ :

$$\langle T^*Tf, g \rangle = \langle Tf, Tg \rangle \leq \|T\|_{p \rightarrow 2}^2 \|f\|_p \|g\|_p.$$

Somit ist  $T^*Tf \in L^{p'}(N_1)$  und die Operatornorm erfüllt die Abschätzung

$$\|T^*T\|_{L^p(N_1) \rightarrow L^{p'}(N_1)} \leq \|T\|_{L^p(N_1) \rightarrow L^2(N_2)}^2.$$

□

Mit Hilfe der beiden Lemmata 3.9 und 3.10 läßt sich die Restriktionseigenschaft nun folgendermaßen äquivalent umformulieren:

**Satz 3.11.** Sei  $g \geq 0$  so, daß  $\sqrt{g}$  ein Restriktionsmultiplikator zu  $\beta(p)$  ist. Dann gelten:

(i) Der Operator  $A$  besitzt genau dann die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$ , falls ein  $C > 0$  so existiert, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\|g(\lambda - A)\|_{L^p(M) \rightarrow L^{p'}(M)} \leq C(1 + |\lambda|)^{2\beta(p)}.$$

(ii)  $A$  besitzt genau dann die lokale Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)_{\text{lok}}$ , wenn zu  $K \subseteq M$  kompakt ein  $C_K > 0$  so existiert, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Abschätzung

$$\|[g(\lambda - A)f]\Big|_K\|_{L^{p'}(K)} \leq C(1 + |\lambda|)^{2\beta(p)} \|f\|_{L^p(K)} \quad f \in L^2(K)$$

gilt.

**Beweis.** Kombiniere Lemma 3.9 mit Lemma 3.10 und Teil (ii) von Bemerkung 3.7. Bedenke außerdem, daß nach dem Spektralsatz  $g(\lambda - A)^* \circ g(\lambda - A) = |g|^2(\lambda - A)$  gilt. Im lokalen Fall benutzt man außerdem, daß die Adjungierte der Einbettungsabbildung  $L^p(K) \hookrightarrow L^p(M)$  gerade das Einschränken auf  $K$  ist. □

### 3.3 Gebrochene Ableitungen und die $\Gamma$ -Funktion

Der Begriff der gebrochenen Ableitung einer Funktion ist die Erweiterung des herkömmlichen Ableitungsbegriffs auf nicht-ganzzahlige Ableitungsordnungen. Zumindest für  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gelingt es zu jedem  $z \in \mathbb{C}$  die  $z$ -te Ableitung  $g^{(z)}$  zu definieren, und zwar so, daß diese im Falle  $z \in \mathbb{Z}$  mit der herkömmlichen Ableitung, bzw. Stammfunktion übereinstimmt. Letztere ist dabei so normiert, daß sie in  $-\infty$  verschwindet. Ausführlich erörtert wird dieser Themenbereich z.B. bei Hörmander [21], Kapitel 3.

In diesem Zusammenhang ist die  $\Gamma$ -Funktion von besonderer Bedeutung. Zunächst wird diese definiert und im Anschluß daran einige Eigenschaften zusammenfassend dargestellt.

**Definition 3.12 (Die  $\Gamma$ -Funktion).** Durch

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

wird eine holomorphe Funktion  $\Gamma$  auf  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$  definiert.

Damit ist die  $\Gamma$ -Funktion erst einmal auf der Halbebene  $\operatorname{Re} z > -1$  definiert. Sie läßt sich allerdings zu einer meromorphen Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  fortsetzen, die Pole erster Ordnung in den Punkten der Form  $-k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  besitzt. Eine derartige Fortsetzung ist natürlich nach dem Identitätssatz eindeutig. Ferner besitzt  $\Gamma$  keine Nullstellen auf ganz  $\mathbb{C}$ , so daß es sich also bei  $\frac{1}{\Gamma}$  um eine ganze Funktion handelt. Das folgende Lemma faßt diese Eigenschaften zusammen.

**Lemma 3.13.** *Die in 3.12 definierte Abbildung läßt sich zu einer nullstellenfreien, meromorphen Funktion  $\Gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  fortsetzen, deren Polstellenmenge aus den negativen ganzen Zahlen  $k \leq 0$  besteht. Alle diese Pole sind von erster Ordnung, für die Residuen gilt*

$$\operatorname{Res} \Gamma(-k) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

**Beweis.** Siehe dazu Hörmander [21], Abschnitt 3.2. auf den Seiten 68–73.  $\square$

Der Beweis des nächsten Lemmas wurde ebenfalls aus Hörmanders Buch [21] übernommen.

**Lemma 3.14.** *Seien  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} z, w > 0$ . Dann gilt*

$$\Gamma(z)\Gamma(w) = \Gamma(z+w)B(z, w), \quad (3.6)$$

wobei die „Beta“-Funktion  $B$  durch  $B(z, w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt$  definiert ist.

**Beweis.** Die Behauptung folgt einfach aus der Definition der  $\Gamma$ -Funktion und zwei geschickten Variablentransformationen. Für jedes  $s > 0$  gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \int_0^s (s-t)^{w-1} t^{z-1} dt &= s \int_0^1 (s-st)^{w-1} (st)^{z-1} dt \\ &= s^{z+w-1} \int_0^1 (1-t)^{w-1} t^{z-1} dt = s^{z+w-1} B(z, w). \end{aligned}$$

Integriert man beide Seiten dieser Gleichung gegen  $e^{-s}$  aus, so erhält man mit dem Satz von Fubini und durch die Variablentransformation  $s \mapsto s+t$ :

$$\begin{aligned} \Gamma(z+w)B(z, w) &= \int_0^\infty e^{-s} \int_0^s (s-t)^{w-1} t^{z-1} dt ds \\ &= \int_0^\infty \int_t^\infty e^{-s} (s-t)^{w-1} t^{z-1} ds dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(s+t)} s^{w-1} t^{z-1} ds dt = \Gamma(z)\Gamma(w), \end{aligned}$$

und somit ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

An späterer Stelle werden wir noch das folgende Lemma benötigen, welches das Wachstumsverhalten der  $\Gamma$ -Funktion entlang von Geraden konstanten Realteils angibt.

**Lemma 3.15.** *Bezeichne für eine beliebiges reelles  $r \in \mathbb{R}$  mit  $[r]$  die eindeutig bestimmte ganze Zahl, für welche  $r-1 < [r] \leq r$  gilt. Dann besitzt die  $\Gamma$ -Funktion die Eigenschaft, daß für  $r, \nu \in \mathbb{R}$*

$$\left| \frac{1}{\Gamma(r+i\nu)} \right| \leq C e^{\frac{\pi}{2}|\nu|} \begin{cases} \frac{1}{[r-1]!} & \text{falls } r \geq 2 \\ (1+\nu^2)^{-\frac{[r]-1}{2}} |[r]! & \text{falls } r < 2. \end{cases} \quad (3.7)$$

**Beweis.** Der Beweis beruht auf zwei wichtigen Identitäten für  $\Gamma$ . Zum einen gilt für jedes  $z \in \mathbb{C}$  die Gleichung

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi}. \quad (3.8)$$

Diese findet sich zum Beispiel bei Hörmander [21] in Abschnitt 3.4. Ferner gilt für alle  $z \in \mathbb{C}$  auch

$$\frac{z}{\Gamma(z+1)} = \frac{1}{\Gamma(z)}, \quad (3.9)$$

was sich sofort aus  $B(z, 1) = \frac{1}{z}$  und analytischer Fortsetzung der Gleichung (3.6) ergibt.

Wir betrachten zunächst den Fall  $r = \frac{1}{2}$ . Dann ergibt sich nämlich wegen  $\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}$  und  $\frac{1}{2} + i\nu = 1 - (\frac{1}{2} - i\nu)$  unter Benutzung von (3.8):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)} \right|^2 &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)\Gamma(\frac{1}{2} - i\nu)} = \frac{\sin(\pi(\frac{1}{2} + i\nu))}{\pi} \\ &= \frac{\cos(i\pi\nu)}{\pi} = \frac{\cosh(\pi\nu)}{\pi} \leq \frac{e^{\pi|\nu|}}{\pi}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

also die Behauptung in diesem Spezialfall.

Sei nun  $r \in [1, 2[$ . Die Identität (3.6) liefert dann

$$\frac{1}{\Gamma(r + i\nu)} = \frac{B(r - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + i\nu)}{\Gamma(r - \frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + i\nu)}. \quad (3.11)$$

Der erste Faktor läßt sich nach Definition von  $B$  wegen  $\frac{3}{2} > r - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$  durch

$$\left| \frac{B(r - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + is)}{\Gamma(r - \frac{1}{2})} \right| \leq C$$

mit  $C := \min\{\Gamma(s) \mid \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{2}\} \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt$  abschätzen.

Wendet man nun auf den zweiten Faktor von (3.11) die Abschätzung (3.10) an, so erhält man die Behauptung ebenfalls für  $r \in [1, 2[$ .

Sei nun  $r \in \mathbb{R}$  beliebig. Setze  $k := [r] - 1 \in \mathbb{Z}$ . Dann gilt  $r - k \in [1, 2[$ , und durch  $k$ -faches Anwenden von (3.9) erhält man:

$$\frac{1}{\Gamma(r + i\nu)} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r-k+i\nu)} \prod_{j=1}^k (r-j+i\nu)^{-1} & \text{falls } k > 0 \\ \frac{1}{\Gamma(r-k+i\nu)} \prod_{j=0}^{|k|-1} (r+j+i\nu) & \text{falls } k < 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Der erste Faktor läßt sich mit dem bereits bewiesenen Fall  $r \in [1, 2[$  behandeln. Für die Faktoren des Produktes stellen wir hingegen fest, daß für  $k > 0$  die Ungleichung  $|r-j+i\nu|^2 = (r-j)^2 + \nu^2 \geq (r-j)^2$  gilt, also wegen  $k+1 = [r]$  auch

$$\prod_{j=1}^k |r-j+i\nu|^{-2} \leq \prod_{j=1}^k (r-j)^{-2} \leq ([r-1]!)^{-2},$$

woraus die Behauptung für  $k > 0$  folgt.

Sei nun  $k < 0$ . Für  $j \leq |k| - 3$  gilt aufgrund der Definition von  $k$  stets  $r+j \leq -1$ , so daß man



$$|r + j + i\nu|^2 = (r + j)^2 + \nu^2 \leq (1 + \nu^2)(r + j)^2$$

erhält. Ist  $j = |k| - 2, |k| - 1$ , so wird wegen  $r + j \in [-1, 1[$  einfach die triviale Abschätzung  $|r + j + i\nu|^2 \leq 1 + \nu^2$  benutzt. Das Produkt in (3.12) kann also insgesamt durch

$$\prod_{j=0}^{|k|-1} |r + j + i\nu|^2 \leq (1 + \nu^2)^{|k|} \prod_{j=0}^{|k|-3} (r + j)^2 \leq (1 + \nu^2)^{|k|} |[r]|!^2$$

abgeschätzt werden. Die Behauptung ist damit auch in diesem Falle bewiesen.  $\square$

Es soll jetzt der Begriff der gebrochenen Ableitung entwickelt werden. Dazu definieren wir als erstes eine Familie temperierter Distributionen. Diese stellen sich dann als die Faltungskerne der gebrochenen Ableitungsoperatoren heraus.

**Definition 3.16.** Definiere für  $\operatorname{Re} z > -1$

$$\chi_+^z(t) := \begin{cases} \frac{t^z}{\Gamma(z+1)} & \text{falls } t > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Folgendes Lemma enthält die für uns wichtigen Eigenschaften der  $\chi_+^z$ . Für einen Beweis konsultiere man abermals Hörmander [21].

**Lemma 3.17.**  $\{\chi_+^z\}_{\operatorname{Re} z > -1}$  bildet eine analytische Familie in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , die sich zu einer solchen auf ganz  $\mathbb{C}$  so fortsetzen läßt, daß für  $z \in \mathbb{C}$  gilt:  $(\chi_+^z)' = \chi_+^{z-1}$ . Da  $\chi_+^0$  die Heavyside-Funktion ist, folgt daraus für  $k \in \mathbb{N}_0$  insbesondere:  $\chi_+^{-k-1} = \delta_0^{(k)}$ .

Ist nunmehr  $g$  eine Schwartzfunktionen, so kann man nun für  $z \in \mathbb{C}$  die gebrochene  $z$ -te Ableitung  $g^{(z)}$  von  $g$  durch

$$g^{(z)} := g * \chi_+^{-z-1}, \quad (3.14)$$

definieren. Dies ist offenbar konsistent mit dem gewöhnlichen Ableitungsbegriff. Für  $\operatorname{Re} z \geq -1$  ist  $g^{(z)}$  immerhin noch eine beschränkte Funktion: Sei dazu  $w \in \mathbb{C}$  mit  $0 < \operatorname{Re} w \leq 1$  und  $k := z + w \in \mathbb{N}_0$ . Dann erhält man aufgrund von  $\chi_+^{-z-1} = (\chi_+^{w-1})^{(k)}$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} |g^{(z)}(t)| &= |(g^{(k)} * \chi_+^{-1+w})(t)| \leq \frac{1}{|\Gamma(w)|} \int_0^\infty |g^{(k)}(t-s)| s^{-1+\operatorname{Re} w} ds \\ &\leq \frac{1}{|\Gamma(w)|} \left( \|g^{(k)}\|_\infty \int_0^1 s^{-1+\operatorname{Re} w} ds + \|g^{(k)}\|_1 \right) \\ &\leq \frac{1}{|\Gamma(w)|} \left( \frac{\|g^{(k)}\|_\infty}{\operatorname{Re} w} + \|g^{(k)}\|_1 \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

also ist  $g^{(z)}$  beschränkt.

**Lemma 3.18.** Sei  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \beta < 0$ . Dann gilt

$$g^{(\alpha+\beta)} = g^{(\alpha)} * \chi_+^{-\beta-1}.$$

Insbesondere existiert die rechte Seite punktweise als Faltungsintegral.

**Beweis.** Wähle ein  $k \in \mathbb{N}_0$  derart, daß  $w := \alpha - k$  die Eigenschaft  $\operatorname{Re} w < 0$  besitzt. Dann gilt  $g^{(\alpha)} = g^{(k)} * \chi_+^{-w-1}$ , und man erhält mit der Variablentransformation  $s' \rightarrow s' - s$  zusammen mit dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} (g^{(\alpha)} * \chi_+^{-\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \frac{1}{\Gamma(-w)} \int_0^\infty \int_0^\infty g^{(k)}(t-s-s')(s')^{-w-1} ds' s^{-\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \frac{1}{\Gamma(-w)} \int_0^\infty \int_s^\infty g^{(k)}(t-s')(s'-s)^{-w-1} s^{-\beta-1} ds' ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\beta)} \frac{1}{\Gamma(-w)} \int_0^\infty g^{(k)}(t-s') \int_0^{s'} (s'-s)^{-w-1} s^{-\beta-1} ds ds'. \end{aligned}$$

Auf die Existenz dieses Integrals und die Rechtfertigung für die Anwendbarkeit des Satzes von Fubini läßt sich durch die nun folgende Berechnung des inneren Integrals schließen. Durch eine weitere Variablentransformation ergibt sich für  $s' \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{s'} (s'-s)^{-w-1} s^{-\beta-1} ds &= (s')^{-(\beta+w)-1} \int_0^1 (1-s)^{-w-1} s^{-\beta-1} ds \\ &= (s')^{-(\beta+w)-1} B(-\beta, -w). \end{aligned}$$

Aufgrund der Identität (3.6) für die „Beta“-Funktion  $B$  folgt daraus

$$\begin{aligned} (g^{(\alpha)} * \chi_+^{-\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(-(\beta+w))} \int_0^\infty g^{(k)}(t-s')(s')^{-(\beta+w)-1} ds' \\ &= g^{(k)} * \chi_+^{-(\beta+w)-1}(t) = g^{(k+w+\beta)}(t) = g^{(\alpha+\beta)}(t) \end{aligned}$$

und damit die Behauptung.  $\square$

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll noch die explizite Form der Fouriertransformierten der Distributionen  $\chi_\pm^a$  präsentiert werden, da diese beim Beweis der Restriktionssätze benötigt wird. Ganz allgemein gilt:

**Lemma 3.19.** Sei  $a < 0$ . Für die Fouriertransformation von  $\chi_\pm^a$  gilt:

$$\widehat{\chi_\pm^a}(t) = e^{\mp i \frac{\pi}{2}(a+1) \operatorname{sgn} t} |t|^{-a-1}.$$

**Beweis.** Auch diese Formel findet sich bei Hörmander [21].  $\square$

Insbesondere benötigen wir später die Fouriertransformierte von  $\chi_{\pm}^{-\frac{d+1}{2}}$  für den Fall, in dem  $d \in \mathbb{N}$  eine gerade Zahl ist; deshalb soll diese hier zusätzlich noch einmal notiert werden:

$$\widehat{\chi_{\pm}^{-\frac{d+1}{2}}}(t) = e^{\pm i \frac{\pi}{4} (d-1) \operatorname{sgn} t} |t|^{\frac{d-1}{2}}. \quad (3.16)$$

### 3.4 Interpolation analytischer Familien von Operatoren

In diesem Abschnitt wird definiert, was unter einer analytischen Familie von Operatoren zu verstehen ist. Auf solche läßt sich dann unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen der Interpolationssatz von Stein anwenden. Mit Hilfe des oben entwickelten Begriffs der gebrochenen Ableitungen zeigen wir dann, daß  $\{g^{(z)}(A)\}_{\operatorname{Re} z > -1}$  für eine Schwartzfunktion  $g$  eine solche analytische Familie von Operatoren bildet. Im nächsten Abschnitt wird dann geklärt, wie diese Tatsache zum Beweis von Restriktionssätzen genutzt werden kann.

**Definition 3.20.** Seien  $U \subseteq \mathbb{C}$  und  $\{R_z\}_{z \in U}$  eine Familie von Operatoren auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ .

- (i) Falls  $U$  offen und für feste  $x, y \in \mathcal{H}$  der Ausdruck  $\langle x, R_z y \rangle$  als Funktion von  $z$  analytisch auf  $U$  ist, so nennen wir  $\{R_z\}_{z \in U}$  eine analytische Familie von Operatoren.
- (ii) Ist  $\langle x, R_z y \rangle$  für  $x, y \in \mathcal{H}$  stetig als Funktion von  $z$ , so nennen wir  $\{R_z\}_{z \in U}$  eine schwach-stetige Familie von Operatoren.

Seien nun  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum  $L^2(M)$  und  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Für  $\operatorname{Re} z \geq -1$  ist dann  $g^{(z)}$  nach der Rechnung vor Lemma 3.18 eine beschränkte Funktion, also definiert

$$T_z(\lambda) := g^{(z)}(\lambda - A) \quad (3.17a)$$

einen beschränkten Operator auf  $L^2(M)$ . Ist  $A$  so wie in Definition 3.3 und ferner  $B \subseteq M$  meßbar, so definieren wir außerdem den „lokalen“ Operator  $T_{z,B}(\lambda): L^2(B) \rightarrow L^2(B)$  durch

$$T_{z,B}(\lambda)f := [g^{(z)}(\lambda - A)f] \Big|_B \quad f \in L^2(B) \hookrightarrow L^2(M). \quad (3.17b)$$

Bildet  $T_z(\lambda)$  den Raum  $L^p(M)$  stetig nach  $L^q(M)$  ab, so folgt

$$\|T_{z,B}(\lambda)f\|_{L^q(B)} \leq \|T_z(\lambda)f\|_{L^q(M)} \leq \|T_z(\lambda)\|_{L^p(M) \rightarrow L^q(M)} \|f\|_{L^p(B)}.$$

Es gilt also stets

$$\|T_{z,B}(\lambda)\|_{L^p(B) \rightarrow L^q(B)} \leq \|T_z(\lambda)\|_{L^p(M) \rightarrow L^q(M)}, \quad (3.18)$$

insbesondere ist  $T_{z,B}(\lambda)$  ein auf  $L^2(B)$  beschränkter Operator. Da außerdem  $T_z(\lambda) = T_{z,M}(\lambda)$  gilt, werden von nun an nur noch Operatoren der Gestalt (3.17b) betrachtet. Als erstes stellen wir fest, daß es sich bei  $\{T_{z,B}(\lambda)\}_{\operatorname{Re} z \geq -1}$  stets um eine analytische Familie von Operatoren handelt.

**Lemma 3.21.** *Sei  $B \subseteq M$  meßbar. Dann ist  $\{T_{z,B}(\lambda)\}_{\operatorname{Re} z \geq -1}$  schwach stetig und auf  $\operatorname{Re} z > -1$  analytisch.*

**Beweis.** Bezeichne  $dE$  das Spektralmaß von  $A$ . Seien außerdem  $f_1, f_2 \in L^2(B)$ . Die Stetigkeit von

$$\langle f_1, T_{z,B}(\lambda) f_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}} (g * \chi_+^{-z-1})(\lambda - s) \langle dE(s) f_1, f_2 \rangle$$

in  $z$  folgt aus der Tatsache, daß  $\{\chi_+^z\}_{z \in \mathbb{C}}$  eine analytische Familie von Distributionen ist und dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. Dabei wird benutzt, daß die Funktionen  $g^{(z)}$  beschränkt sind und zwar lokal gleichmäßig in  $z$ , wie die Rechnung vor Lemma 3.18 zeigt.

Für einen geschlossenen  $C^1$ -Weg  $\gamma$  in  $\mathbb{C}$  folgt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle f_1, T_{z,B}(\lambda) f_2 \rangle dz &= \int_{\gamma} \int_{\mathbb{R}} (g * \chi_+^{-z-1})(\lambda - s) \langle dE(s) f_1, f_2 \rangle dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\gamma} (g * \chi_+^{-z-1})(\lambda - s) dz \langle dE(s) f_1, f_2 \rangle = 0, \end{aligned}$$

da es sich bei  $\{\chi_+^a\}_{a \in \mathbb{C}}$  um eine analytische Familie von Distributionen handelt.  $\{T_{z,B}(\lambda)\}_{\operatorname{Re} z > -1}$  ist also in der Tat analytisch.  $\square$

Es folgt nun der sogenannte Steinsche Interpolationsatz für analytische Familien von Operatoren:

**Satz 3.22 (Stein).** *Seien  $a < b$  reelle Zahlen. Bezeichne mit  $S$  den Streifen  $S := [a, b] \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ . Sei  $\{R_z\}_{z \in S}$  eine schwach-stetige Familie von Operatoren im Sinne von Definition 3.20, die analytisch auf  $\operatorname{int}(S) = ]a, b[ \times \mathbb{R}$  ist und außerdem die Bedingung erfüllt, daß ein  $\alpha < \pi$  so existiert, daß für alle  $f_1, f_2 \in L^2(M)$*

$$\sup_{z \in S} e^{-\alpha |\operatorname{Im} z|} \log |\langle f_1, R_z f_2 \rangle| < \infty \quad (3.19)$$

*gilt. Weiterhin seien  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$  so, daß für alle  $\nu \in \mathbb{R}$*

$$\|R_{a+i\nu}\|_{p_0 \rightarrow q_0} \leq M_0(\nu) \quad \|R_{b+i\nu}\|_{p_1 \rightarrow q_1} \leq M_1(\nu),$$

wobei die Operatornormen  $M_j(y)$  die Eigenschaft erfüllen, daß ein  $\beta < \pi$  existiert mit

$$\sup_{\nu \in \mathbb{R}} e^{-\beta|\nu|} \log M_j(\nu) < \infty.$$

Dann existiert für  $t \in [0, 1]$  ein nur von  $M_0$  und  $M_1$  abhängendes  $M_t > 0$  dergestalt, daß

$$\|R_t\|_{p_t \rightarrow q_t} \leq M_t,$$

wobei  $p_t$  und  $q_t$  durch  $\frac{1}{p_t} = \frac{t}{p_0} + \frac{1-t}{p_1}$  bzw.  $\frac{1}{q_t} = \frac{t}{q_0} + \frac{1-t}{q_1}$  gegeben sind.

**Beweis.** Ein Beweis findet sich z.B. in [46], Theorem 4.1, Seite 205ff. Dort ist dieser zwar nur für den Spezialfall  $a = 0, b = 1$  formuliert, aber durch Übergang zu der neuen Familie  $\{R_{a+z(b-a)}\}_{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1}$  erhält man auch den allgemeinen Fall. Man beachte, daß sich dabei die in [46] angegebenen Wachstumsbedingungen der Operatornormen  $M_0$  und  $M_1$ , sowie von  $\langle f_1, R_z f_2 \rangle$  nicht verändern. Daß überdies  $M_t$  nur von  $M_0$  und  $M_1$  abhängt wird dort zwar nicht behauptet, ergibt sich allerdings sofort, wenn man einen Blick auf den Beweis wagt.  $M_t$  wird dort nämlich explizit definiert, und zwar in Termen von  $M_0$  und  $M_1$ .  $\square$

**Bemerkung 3.23.** Es sei hier angemerkt, daß unsere in (3.17a) bzw. (3.17b) definierten Familien die Bedingung (3.19) erfüllen. Aus dem Spektralsatz folgt nämlich, daß für  $f_1, f_2 \in L^2(B)$  mit  $\|f_1\|_2 = \|f_2\|_2 = 1$  gilt:  $|\langle f_1, T_{z,B}(\lambda) f_2 \rangle| \leq \|g^{(z)}\|_\infty$ . Kombiniert man dieses mit (3.15) und der Abschätzung der  $\Gamma$ -Funktion (3.7), so ergibt sich

$$|\langle f_1, T_{z,B}(\lambda) f_2 \rangle| \leq C \sqrt{1 + \nu^2} e^{\frac{\pi}{2}|\nu|}.$$

### 3.5 Anwendung auf Restriktionssätze

Seien  $A, M$  für den Verlauf dieses Abschnitts wieder wie in Definition 3.3 vorausgesetzt. Fixiere außerdem ein meßbares  $B \subseteq M$  und ein  $0 \neq g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , also einen Restriktionsmultiplikator.  $\{T_{z,B}(\lambda)\}_{\operatorname{Re} z \geq -1}$  sei dann wie in (3.17b) definiert. Da  $T_{0,B}(\lambda)f = [g(\lambda - A)f]|_B$  gilt, ist es mit Hilfe des Steinschen Interpolationssatzes möglich, den Beweis der Restriktionseigenschaften  $R(p \rightarrow 2)$  bzw.  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  auf geeignete  $L^2 \rightarrow L^2$ - und  $L^1 \rightarrow L^\infty$ -Abschätzungen gewisser Operatoren in den Familien (3.17b) zurückzuführen.

Das folgende Lemma (und das sich daran anschließende Korollar) zeigt nun, daß eine geeignete  $L^2$ -Abschätzung für  $T_{z,B}(\lambda)$  stets gilt.

**Lemma 3.24.** Für  $\operatorname{Re} z = -1$  erhält man:  $\|T_{z,B}(\lambda)\|_{2 \rightarrow 2} \leq C e^{\frac{\pi}{2}|\operatorname{Im} z|} \|g\|_1$ .

**Beweis.** Sei  $\nu \in \mathbb{R}$  und  $z := -1 - i\nu$ . Aus (3.18), dem Spektralsatz und der Definition von  $g^{(z)}$  folgt zunächst

$$\|T_{z,B}(\lambda)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(B)} \leq \|T_z(\lambda)\|_{L^2(M) \rightarrow L^2(M)} = \|g * \chi_+^{i\nu}\|_\infty.$$

Die rechte Seite läßt sich nun aber sehr einfach abschätzen. Man erhält nämlich für jedes  $t \in \mathbb{R}$  nach Definition 3.16

$$|(g * \chi_+^{i\nu})(t)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+i\nu)} \int_0^\infty |g(t-s)| ds \leq \frac{1}{\Gamma(1+i\nu)} \|g\|_1.$$

Die Behauptung folgt daraus in Verbindung mit der Abschätzung (3.7) für die  $\Gamma$ -Funktion.  $\square$

Nun wollen wir untersuchen, wie man  $\gamma$  zu wählen hat, um mit Hilfe des Interpolationssatzes 3.22 aus der Beschränktheit der Operatoren  $T_{\gamma+i\nu,B}(\lambda)$  von  $L^1(B)$  nach  $L^\infty(B)$  die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  bzw.  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  für ein bestimmtes  $p$  zu erhalten.

**Lemma 3.25.** Sei  $\gamma \geq 0$  und  $p_\gamma$  durch  $\frac{1}{p_\gamma} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2(\gamma+1)}$  gegeben.

(i) Angenommen es existiert eine Konstante  $C > 0$  so, daß für alle  $\nu, \lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\|T_{\gamma+i\nu}\|_{L^1(M) \rightarrow L^\infty(M)} \leq C e^{C|\nu|} (1 + |\lambda|)^{\frac{n}{2}-1-\gamma}. \quad (3.20a)$$

Dann besitzt  $A$  die Eigenschaft  $R(p_\gamma \rightarrow 2)$ .

(ii) Existiert zu jedem  $K \subseteq M$  kompakt ein  $C_K > 0$  so, daß für alle  $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$

$$\|T_{\gamma+i\nu,K}\|_{L^1(K) \rightarrow L^\infty(K)} \leq C_K e^{C_K|\nu|} (1 + |\lambda|)^{\frac{n}{2}-1-\gamma} \quad (3.20b)$$

gilt, so besitzt  $A$  die lokale Restriktionseigenschaft  $R_{\text{lok}}(p_\gamma \rightarrow 2)$ .

**Beweis.** Setze  $p := p_\gamma$  und  $\tau := \frac{1}{\gamma+1}$ , so daß  $\tau \in ]0, 1]$  gilt. Wegen  $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} = \tau + (1-\tau)\frac{1}{2}$  und  $\tau\gamma - (1-\tau) = \tau(\gamma+1) - 1 = 0$ , folgt aus Lemma 3.24 und der Voraussetzung (3.20) unter Anwendung des Interpolationssatzes 3.22, daß der Operator  $T_{0,B}(\lambda)$  den Raum  $L^p(B)$  stetig nach  $L^{p'}(B)$  abbildet und für die Operatornorm außerdem wegen  $\tau(\frac{n}{2}-1-\gamma) = \frac{1}{\gamma+1}(\frac{n}{2} - (1+\gamma)) = n(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - 1 = 2\beta(p)$  gilt:

$$\|T_{0,B}\|_{L^p(B) \rightarrow L^{p'}(B)} \lesssim (1 + |\lambda|)^{2\beta(p)}.$$

Da  $T_{0,B}f = [g(\lambda - A)f]_B$ , besitzt  $A$  nach Satz 3.11 im Falle  $B = M$  die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$ , und es gilt  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$ , falls  $B = K$ .  $\square$

Wir können uns beim Beweis von Restriktionssätzen also auf Bedingungen der Form (3.20) beschränken. Sei  $n \in \mathbb{N}$ , und setze  $d := 2n$ . Im nächsten Abschnitt wird für die Operatoren  $L_S$  auf  $\mathbb{R}^d$  eine  $L^1 \rightarrow L^\infty$ -Abschätzung für  $T_{\frac{d-1}{2}}(\lambda)$  bewiesen, falls  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$ . Das zugehörige  $p_{\frac{d-1}{2}}$  erfüllt dann gerade die Bedingung  $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{d+1}$ , d.h.  $p = 2\frac{d+1}{d+3}$ . Man erhält also das zum Ergebnis 3.2 für den Laplace-Operator analoge Resultat. Allerdings benötigen wir als Vorbereitung noch einen weiteren Satz, der es ermöglicht sich im wesentlichen auf den Fall  $\nu = 0$  zu konzentrieren. Man verliert dadurch leider die Kontrolle über den Endpunkt  $p_\gamma$  selbst und erhält die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  nur noch für  $p < p_\gamma$ .

**Satz 3.26.** *Sei  $n > 1$  und  $B \subseteq M$  meßbar. Es existiere ein  $C > 0$  und ein  $\mu \geq \frac{1}{2}$  so, daß für alle  $\lambda > 0$*

$$\|T_{\frac{n-1}{2}, B}(\lambda)\|_{1 \rightarrow \infty} \leq C(1 + |\lambda|)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.21a)$$

*gilt und für  $\lambda < 0$ :*

$$\|T_{\frac{n-1}{2}, B}(\lambda)\|_{1 \rightarrow \infty} \leq C(1 + |\lambda|)^{-\mu}. \quad (3.21b)$$

*Dann gilt bereits (3.20) für  $\frac{n-1}{2} - \mu < \gamma < \frac{n-1}{2}$ . Ist insbesondere  $B = M$  oder gelten die Abschätzungen (3.21) für alle  $B$  kompakt (mit einer unter Umständen von  $B$  abhängigen Konstanten  $C$ ), so besitzt  $A$  für*

- (i)  $\mu = \frac{1}{2}$  die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  bzw.  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  für alle  $\frac{2n}{n+2} < p < 2\frac{n+1}{n+3}$  und falls
- (ii)  $\mu > \frac{n-1}{2}$ , die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  bzw.  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$  sogar für alle  $1 \leq p < 2\frac{n+1}{n+3}$ .

**Beweis.** Setze  $\gamma := \frac{n-1}{2}$ . Fixiere ferner  $x, y \in L^2(B) \cap L^1(B)$  mit  $\|x\|_{L^1(B)} = \|y\|_{L^1(B)} = 1$ , und bezeichne mit  $dE$  das projektionswertige Maß des Operators  $A$ . Nach Definition des Funktionalkalküls gilt für eine beschränkte Borelmeßbare Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\langle f(\lambda - A)x, y \rangle = (f * \langle dE(\cdot)x, y \rangle)(\lambda).$$

Sei  $0 < \varepsilon < \mu$ . Da  $g^{(\gamma+i\nu-\varepsilon)}$  eine beschränkte Borelfunktion ist und nach Lemma 3.18 die Gleichung  $g^{(\gamma+i\nu-\varepsilon)} = g^{(\gamma)} * \chi_+^{-1+\varepsilon-i\nu}$  gilt, erhalten wir durch Anwendung des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned}
\langle T_{\gamma+i\nu-\varepsilon,B}(\lambda)x, y \rangle &= \langle g^{(\gamma+i\nu-\varepsilon)}(\lambda - A)x, y \rangle \\
&= ((g^{(\gamma)} * \chi_+^{-1+\varepsilon-i\nu}) * \langle dE(\cdot)x, y \rangle)(\lambda) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varepsilon - i\nu)} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty g^{(\gamma)}(\lambda - t - s) s^{-1+\varepsilon-i\nu} \langle dE(t)x, y \rangle ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varepsilon - i\nu)} \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon-i\nu} \langle g^{(\gamma)}(\lambda - s - A)x, y \rangle ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varepsilon - i\nu)} \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon-i\nu} \langle x, T_{\gamma,B}(\lambda - s)y \rangle ds,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

vorausgesetzt, daß dieses Integral überhaupt existiert. Das werden wir aber gleich einsehen. Mit der Voraussetzung gilt nämlich für  $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |s^{-1+\varepsilon-i\nu} \langle x, T_{\gamma,B}(\lambda - s)y \rangle| ds &\leq C \int_0^\lambda s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\quad + C \int_\lambda^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\mu} ds
\end{aligned}$$

und im Falle  $\lambda \leq 0$ :

$$\int_0^\infty |s^{-1+\varepsilon-i\nu} \langle x, T_{\gamma,B}(\lambda - s)y \rangle| ds \leq \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\mu} ds.$$

Als erstes stellen wir fest, daß die Integrale auf den rechten Seiten offenbar stets existieren. Wir müssen zeigen, daß diese sich wie  $(1 + |\lambda|)^{\varepsilon - \frac{1}{2}}$  verhalten. Aus (3.22) und der Abschätzung  $\frac{1}{|\Gamma(\varepsilon - i\nu)|} \leq C(1 + \nu^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}|\nu|}$ , welche man aus (3.7) erhält, ergibt sich dann nämlich

$$\|T_{\frac{n-1}{2}-\varepsilon+i\nu,B}(\lambda)\|_{1 \rightarrow \infty} \leq C_\varepsilon (1 + \nu^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\pi}{2}|\nu|} (1 + |\lambda|)^{-\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

und somit erhält man die Behauptung.

Kommen wir also nun zur Abschätzung der obigen Integrale. Ist  $|\lambda| \leq 1$  so gilt mit  $\mu \geq \frac{1}{2}$



$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\mu} ds &\leq \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \sqrt{2} \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |s|)^{-\frac{1}{2}} ds. \end{aligned}$$

Im Falle  $\lambda > 1$  erhalten wir mit einer Variablentransformation  $s \mapsto \lambda s$ :

$$\int_0^\lambda s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\frac{1}{2}} ds \leq \lambda^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \int_0^1 s^{-1+\varepsilon} |1 - s|^{-\frac{1}{2}} ds,$$

und da  $\lambda|1 - s| \geq |1 - s|$  ist, erhalten wir für den globalen Teil ebenfalls mit obiger Transformation die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_\lambda^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\mu} ds &= \lambda^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \int_1^\infty s^{-1+\varepsilon} |1 - s|^{-\frac{1}{2}} (1 + \lambda|1 - s|)^{-\mu+\frac{1}{2}} ds \\ &\leq \lambda^{\varepsilon-\frac{1}{2}} \int_1^\infty s^{-1+\varepsilon} |1 - s|^{-\frac{1}{2}} (1 + |1 - s|)^{-\mu+\frac{1}{2}} ds, \end{aligned}$$

was für  $\varepsilon < \mu$  stets existiert. Im Falle  $\lambda < -1$  gilt nun letztlich:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + |\lambda - s|)^{-\mu} ds &\leq \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} |\lambda - s|^{-\mu} ds \\ &= |\lambda|^{\varepsilon-\mu} \int_0^\infty s^{-1+\varepsilon} (1 + s)^{-\mu} ds, \end{aligned}$$

und dieses Integral existiert ebenfalls für alle  $\varepsilon < \mu$ . Da  $\mu \geq \frac{1}{2}$  ist auch dieser Term höchstens von der Größenordnung  $|\lambda|^{\varepsilon-\frac{1}{2}}$ .  $\square$

**Bemerkung 3.27.** Ist die zweite Voraussetzung des obigen Satzes 3.26 erfüllt, so gewinnt man also insbesondere die Restriktionseigenschaft  $R(1 \rightarrow 2)$ , welche ansonsten gesondert bewiesen werden müßte, um dann mit Hilfe des Satzes von Riesz–Thorin die Eigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  für alle  $1 \leq p < 2\frac{n+1}{n+3}$  zu erhalten. Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß die Operatoren  $L_S$ , zumindest für den Fall, daß  $SJ$  positiv definit ist, die zweite Voraussetzung von Satz 3.26 in der Tat erfüllen. Das liegt daran, daß  $L_S$  in dieser Situation ein positiver Operator ist.

### 3.6 Restriktionssätze für die Operatoren $L_S$

In 2.6 wurde zu jedem  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  ein selbstadjungierter Operator  $L_S$  auf  $L^2(\mathbb{R}^{2n})$  definiert. Wir wollen jetzt Restriktionssätze für diese Operatoren untersuchen. Bezeichne  $J$  wieder die in 1.10 definierte Matrix der symplektischen Form. Es stellt sich dabei heraus, daß man im Fall positiv bzw. negativ definiten  $SJ$  mit Hilfe des Prinzips der stationären Phase aus der Theorie der oszillierenden Integrale das zu Satz 3.2 analoge Ergebnis erhält, also  $R(p \rightarrow 2)$  für  $1 \leq p < 2\frac{d+1}{d+3}$  gilt, wobei  $d := 2n$  die Dimension des Raumes ist, auf dem  $L_S$  definiert ist.

Ist  $SJ$  hingegen indefinit, so muß man feststellen, daß die auftretenden Integrale von komplizierterer Natur sind und sich der Beweis für definites  $SJ$  nicht einfach übertragen läßt. Es ist jedoch möglich, einen lokalen Restriktionssatz im Sinne von Definition 3.4 zu zeigen, der dem Ergebnis von Thangavelu über den Hermite-Operator, siehe die Beispiele in Abschnitt 3.1, nahekommt; man erhält hier  $R_{\text{lok}}(p \rightarrow 2)$ , für  $\frac{2d}{d+2} < p < 2\frac{d+1}{d+3}$ .

Als erstes müssen wir jedoch untersuchen, wie der Funktionalkalkül der Operatoren  $L_S$  allgemein aussieht. Dazu werden die Formeln für die von  $L_S$  erzeugte unitäre Gruppe aus Kapitel 2 benutzt. Zunächst gilt jedoch ganz allgemein:

**Lemma 3.28.** *Seien  $A$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  und  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann ist  $\widehat{f}$  insbesondere eine beschränkte Borelfunktion, und wir können den auf  $L^2$  beschränkten Operator  $\widehat{f}(A)$  betrachten. Für  $x \in \mathcal{H}$  gilt die folgende Identität:*

$$\widehat{f}(A)x = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itA}x dt. \quad (3.23)$$

**Beweis.** Zunächst sei angemerkt, daß das Integral aufgrund der Tatsache existiert, daß  $t \mapsto e^{itA}x$  stetig und damit insbesondere auch meßbar ist. Außerdem gilt natürlich  $\|e^{-itA}x\| \leq \|x\|$ , da die Operatoren  $e^{itA}$  unitär sind.

Bezeichne nun  $dE$  das zu  $A$  gehörige projektionswertige Maß. Dann folgt für  $x, y \in \mathcal{H}$  aus dem Spektralsatz und dem Satz von Fubini:

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-itA}x dt, y \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-its} dE_{x,y} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(s) dE_{x,y} ds = \langle \widehat{f}(A)x, y \rangle. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.29.** *Seien  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  und  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  so, daß  $\text{supp} f$  in einer Nullumgebung liegt, auf der die Formel (2.34) für die symplektischen Fouriertransformierten der getwisteten Faltungskerne  $\gamma_{t,S}$  der Operatoren  $e^{itL_S}$  gilt. Dann ist der getwistete Faltungskern  $K$  von  $\widehat{f}(L_S)$  als Distribution durch*

$$K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \gamma_{-t,S}(\varphi) dt \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}) \quad (3.24)$$

gegeben.

**Beweis.** Durch

$$K(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} f(t) \hat{\gamma}_{-t,S}(\hat{\varphi}^\vee) dt$$

wird nach Formel (2.34) und dem Satz von Fubini eine Distribution  $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$  definiert. Da die symplektische Fouriertransformation selbstinvers ist, folgt bereits  $K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \gamma_{-t,S}(\varphi) dt$ , und es gilt nach obigem Lemma, in Verbindung mit (1.28) für  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ :

$$\begin{aligned} (\varphi \times K)(\psi) &= K(\psi \times \varphi^\vee) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \gamma_{-t,S}(\psi \times \varphi^\vee) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) (\varphi \times \gamma_{-t,S})(\psi) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) \langle e^{-itL_S} \varphi, \psi \rangle dt \\ &= \langle \hat{f}(L_S) \varphi, \psi \rangle, \end{aligned}$$

so daß  $\varphi \times K = \hat{f}(L_S) \varphi$  gilt. Damit ist  $K$  der getwistete Faltungskern von  $\hat{f}(L_S)$  gemäß Definition 1.22.  $\square$

Für den weiteren Verlauf sei  $U$  stets eine Nullumgebung in  $\mathbb{R}$  und  $0 \neq g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  so, daß  $\text{supp } g \subseteq U$ . Den getwisteten Faltungskern von  $\hat{g}^{(\frac{d-1}{2})}(\lambda - L_S)$  bezeichnen wir mit  $K_\lambda$ . Dann definiert

$$\tilde{g}(t) := (4\pi)^{-n} \frac{1}{2\pi} g(t) |t|^n \left| \det(\sinh(\frac{t}{2}S)) \right|^{-\frac{1}{2}}$$

ein  $\tilde{g} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , zumindest falls  $U$  klein genug ist. Mit obigem Lemma, sowie der Formel (3.16) für die Fouriertransformierten der Distributionen  $\chi_\pm^z$  und Gleichung (2.35) erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_\lambda(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\left(g^{(\frac{d-1}{2})}\right)(t) e^{-i\lambda t} \gamma_{t,S}(\varphi) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(d-1-\text{sgn}(JS)) \text{sgn } t} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(\lambda t + \frac{1}{4}\omega(z, \coth(\frac{t}{2}S)z))} \varphi(z) dz dt. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Fubini folgt nun, daß die Distribution  $K_\lambda$  in diesem Falle sogar durch eine Funktion gegeben ist; es gilt:

$$K_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(d-1-\operatorname{sgn}(JS)) \operatorname{sgn} t} e^{-i(\lambda t + \frac{1}{4}\omega(z, \coth(\frac{1}{2}S)z))} dt. \quad (3.25)$$

Diese Funktion werden wir geeignet abschätzen, um einen Restriktionssatz für  $L_S$  zu erhalten. Wenden wir uns zunächst dem Fall zu, in dem die symmetrische Matrix  $SJ$  positiv definit ist.

### 3.6.1 Der Fall definiten $SJ$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zum Beweis des Hauptsatzes 3.5 schreiten. Dieser sei an dieser Stelle nochmals formuliert.

**Satz 3.30 (Restriktionssatz).** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und setze  $d := 2n$ . Ist  $S \in sp(n, \mathbb{R})$  dergestalt, daß  $SJ$  entweder positiv oder negativ definit ist und  $1 \leq p < 2\frac{d+1}{d+3}$ , dann existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\|\chi_{[0,1]}(\lambda - L_S)\|_{p \rightarrow 2} \leq C(1 + |\lambda|)^{\beta(p)}, \quad (3.26)$$

wobei  $\beta(p) = \frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$  wie in (3.2) definiert ist (bedenke, daß die Dimension hier  $2n$  ist).  $L_S$  besitzt also die Eigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$ .

Aufgrund von  $L_{-S} = -L_S$  können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $JS$  positiv definit ist. Außerdem genügt es nach Lemma 1.8 und Korollar 1.26 davon auszugehen, daß  $S = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$  mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $D = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

Nach Satz 3.26 genügt es, die Existenz eines  $0 \neq g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  zu zeigen, für welches es zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  so gibt, daß für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|\hat{g}^{(\frac{d-1}{2})}(\lambda - L_S)\|_{1 \rightarrow \infty} \leq C_N \begin{cases} (1 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} & \text{falls } \lambda > 0 \\ (1 + |\lambda|)^{-N} & \text{falls } \lambda \leq 0 \end{cases}$$

gilt. Wählen wir  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  so, daß (3.25) erfüllt ist, so ist dies wegen

$$\|\hat{g}^{(\frac{d-1}{2})}(\lambda - L_S)\|_{1 \rightarrow \infty} = \|K_\lambda\|_\infty$$

äquivalent zu folgender Aussage:

$$\|K_\lambda\|_\infty \leq C_N \begin{cases} (1 + \lambda)^{-\frac{1}{2}} & \text{falls } \lambda > 0, \\ (1 + |\lambda|)^{-N} & \text{falls } \lambda \leq 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

An (3.25) sieht man, daß  $\|K_\lambda\|_\infty \leq C$  mit einem von  $|\lambda| \leq 1$  unabhängigen  $C > 0$  gilt. Wir können uns also beim Beweis von (3.27) auf den Fall  $|\lambda| > 1$  beschränken.

Benutzt man für  $z \in \mathbb{R}^{2n}$  mit  $z = (q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  wiederum die Schreibweise  $z_{(j)} := (q_j, p_j) \in \mathbb{R}^2$ , so gilt mit der Konvention  $z' = (\sqrt{\mu_1}z_{(1)}, \dots, \sqrt{\mu_n}z_{(n)})$  für den gewisteten Faltungskern  $K_\lambda$  nach (2.36) die Identität:

$$K_\lambda(z') = \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t} e^{-i(\lambda t + \frac{|z|^2}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\mu_j |z_{(j)}|^2}{2|z|^2} \cot(\frac{\mu_j}{2} t))} dt, \quad z \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Definiere die kompakte Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  durch

$$M := \left\{ s \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \sum_{j=1}^n s_j = 1 \right\} \quad (3.28)$$

und für  $s \in M$  die Funktion  $K_{\lambda, s}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$K_{\lambda, s}(r) := \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t} e^{-i(\lambda t + \frac{r^2}{2t f_s(t)})} dt, \quad (3.29a)$$

mit

$$f_s(t) := \frac{1}{t \sum_{j=1}^n s_j \frac{\mu_j}{2} \cot(\frac{\mu_j}{2} t)}. \quad (3.29b)$$

Um (3.27) und damit Satz 3.30 zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  so existiert, daß für alle  $s \in M$  und  $|\lambda| > 1$  die Abschätzung

$$\|K_{\lambda, s}\|_\infty \leq C_N \begin{cases} \lambda^{-\frac{1}{2}} & \text{falls } \lambda \geq 0, \\ |\lambda|^{-N} & \text{falls } \lambda < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

gilt.

Bei geeigneter Wahl von  $U$  ist  $f_s \in C^\infty(U)$ . Wir stellen außerdem fest, daß die Funktionen  $f_s$  eine beschränkte Familie in  $C^\infty(U)$  bildet:

**Lemma 3.31.** *Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert eine kompakte Nullumgebung  $U$  in  $\mathbb{R}$  so, daß die Familie  $\{f_s\}_{s \in M}$  beschränkt in  $C^\infty(U)$  ist und außerdem für  $t \in U$  und  $s \in M$  gilt:*

$$f_s(t) \geq 1 - \varepsilon. \quad (3.31)$$

**Beweis.** Da  $\cot$  in 0 einen Pol erster Ordnung besitzt und für das Residuum  $\operatorname{Res}_0 \cot = 1$  gilt, ist der Nenner von (3.29b) für genügend kleines  $U$  eine unendlich oft differenzierbare Funktion beider Variablen  $t$  und  $s$ . Außerdem gilt für jedes  $s \in M$ :  $f_s(0) = 1$ . Da  $M$  kompakt ist, folgt daraus (3.31), und ferner sieht man, daß auch  $(t, s) \mapsto f_s(t)$  eine  $C^\infty$ -Funktion auf  $U \times M$  ist, deren Ableitungen natürlich auf Kompakta beschränkt sind.  $\square$

Wenden wir uns nun dem Beweis von (3.30) zu. Betrachte dazu  $K_{\lambda,s}$  als Funktional auf  $L^1(\mathbb{R})$ . Da  $\psi \mapsto |\lambda|^{-\frac{1}{2}} \psi(|\lambda|^{-\frac{1}{2}} \cdot)$  ein isometrischer Isomorphismus von  $L^1(\mathbb{R})$  ist, genügt es also für den Beweis von (3.30) zu zeigen, daß

$$|K_{\lambda,s}(\psi(|\lambda|^{\frac{1}{2}} \cdot))| \leq C_N \|\psi\|_1 \begin{cases} \lambda^{-1} & \lambda > 0 \\ |\lambda|^{-N} & \lambda < 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

Die Formel (2.11) für die Fouriertransformierten von Gaußschen Funktionen mit rein imaginärem Exponent liefert, daß für  $r \mapsto e^{-i\frac{r^2}{2if_s(t)}}$  wegen  $f_s > 0$  gilt:

$$\mathcal{F}_r^{-1}\left(e^{-i\frac{r^2}{2if_s(t)}}\right)(u) = \sqrt{\frac{f_s(t)}{2\pi}} |t|^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t} e^{itf_s(t)\frac{u^2}{2}}. \quad (3.33)$$

Fixiere jetzt ein  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dann erhält man nach Definition (3.29) der Funktionen  $K_{\lambda,s}$ , einer Fouriertransformation in  $r$  unter Zuhilfenahme obiger Formel (3.33) und einer anschließenden Variablentransformation  $u \mapsto \lambda^{\frac{1}{2}} u$

$$\begin{aligned} K_{\lambda,s}(\psi(|\lambda|^{\frac{1}{2}} \cdot)) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t} \tilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} t} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{r^2}{2if_s(t)}} \psi(|\lambda|^{\frac{1}{2}} r) dr dt \\ &= |\lambda|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i\lambda t} G(t) \hat{\psi}(|\lambda|^{-\frac{1}{2}} u) e^{i\frac{u^2}{2} t f_s(t)} d(t, u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} G(t) \hat{\psi}(u) e^{-i\lambda(t - \frac{u^2}{2} t f_s(t) \operatorname{sgn} \lambda)} d(t, u), \end{aligned} \quad (3.34)$$

mit  $G(t) := \sqrt{\frac{f_s(t)}{2\pi}} \tilde{g}(t)$ . Da  $f_s \sim 1$ , ist  $G \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

Wir betrachten nun zuerst den Fall  $\lambda < 0$ . Dieser stellt sich als sehr einfach heraus, da die Phasenfunktion dann keine kritischen Punkte besitzt. Dies ist auch durchaus plausibel, daß  $L_S$  für  $S \in \operatorname{sp}(n, \mathbb{R})^+$  ein positiver Operator ist.

**Satz 3.32.** *Es existiert eine kompakte Nullumgebung  $U$  in  $\mathbb{R}$  derart, daß zu jedem  $a \in C_0^\infty(U)$  und jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  mit folgender Eigenschaft existiert: Für alle  $s \in M$ ,  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\left| \int_{U \times \mathbb{R}} a(t) \hat{\psi}(u) e^{-i\lambda t(1 + \frac{u^2}{2} f_s(t))} d(t, u) \right| \leq C_N \|\psi\|_1 |\lambda|^{-N}.$$

**Beweis.** Definiere für jedes  $s \in M$ ,  $u \in \mathbb{R}$  die Funktion  $\varphi_{s,u}(t) := \frac{t(1 + \frac{u^2}{2} f_s(t))}{1 + u^2}$ . Es gilt

$$\varphi'_{s,u}(t) = \frac{1 + \frac{u^2}{2}(f_s(t) + t f'_s(t))}{1 + u^2}$$

Sei  $U$  gemäß Lemma 3.31 so gewählt, daß  $f_s(t) + tf'_s(t) \geq \frac{1}{2}$  für  $t \in U$  gilt, also

$$\varphi'_{s,u}(t) \geq \frac{1 + \frac{u^2}{4}}{1 + u^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Außerdem ist die Familie  $\{\varphi_{s,u}\}_{s \in M, u \in \mathbb{R}}$  ebenfalls nach Lemma 3.31 beschränkt in  $C^\infty(U)$ . Damit sind also die Voraussetzungen von Lemma A.6 erfüllt, und dieses liefert uns zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  die Existenz eines  $C_N > 0$  derart, daß für alle  $\lambda, u \in \mathbb{R}$  und  $s \in M$  die Abschätzung

$$\left| \int_U a(t) e^{-i\lambda(1+u^2)\varphi_{s,u}(t)} dt \right| \leq C_N |\lambda|^{-N} (1+u^2)^{-N}$$

gilt. Mit der Definition  $\tilde{C}_N := C_N \int_{\mathbb{R}} (1+u^2)^{-N} du$  ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \left| \int_{U \times \mathbb{R}} a(t) \hat{\psi}(u) e^{-i\lambda t(1 + \frac{u^2}{2} f_s(t))} d(t, u) \right| &\leq C_N |\lambda|^{-N} \int_{\mathbb{R}} (1+u^2)^{-N} |\hat{\psi}(u)| du \\ &\leq \tilde{C}_N \|\hat{\psi}\|_\infty |\lambda|^{-N} \leq \tilde{C}_N \|\psi\|_1 |\lambda|^{-N}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Widmen wir uns nun der Abschätzung von (3.34) für den Fall  $\lambda > 0$ . Hier treten die eigentlichen Probleme auf, da die Phasenfunktion nun kritische Punkte besitzt. Diese sind allerdings alle nicht–ausgeartet, so daß man nach dem Prinzip der stationären Phase gerade das gewünschte Verhalten erwartet, vergleiche Satz A.9 im Anhang. Da solche Ergebnisse immer per partieller Integration bewiesen werden, wird man im allgemeinen allerdings Ableitungen von  $\hat{\psi}$  erhalten, welche sich nur dann gegen  $\|\psi\|_1$  abschätzen lassen, wenn  $\psi$  in einem festen Kompaktum getragen ist. Wir werden allerdings einsehen, daß man sich auf diese Situation beschränken kann. Insbesondere erfüllt (3.34) die Voraussetzungen des folgenden Satzes.

**Satz 3.33.** *Seien  $V \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Nullumgebung,  $W \subseteq \mathbb{R}^l$  ebenfalls offen und  $K \subseteq W$  kompakt. Sei ferner  $b \in C^\infty(V \times W, \mathbb{R})$  so, daß ein  $D > 0$  existiert, mit  $b(t, s) \geq D$ , für alle  $t \in V$ ,  $s \in W$ . Dann existiert eine kompakte Nullumgebung  $U \subseteq V$  in  $\mathbb{R}$  derart, daß ein  $C > 0$  so existiert, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $s \in K$ ,  $a \in C_0^\infty(U)$  und  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  die Abschätzung*

$$\left| \int_{U \times \mathbb{R}} a(t) \hat{\psi}(u) e^{-i\lambda t(1 - u^2 b(t, s))} d(t, u) \right| \leq C \|\psi\|_1 (1 + |\lambda|)^{-1} \sum_{j=0}^3 (1 + |\lambda|)^{-\frac{j}{2}} \|a^{(j)}\|_\infty.$$

gilt.

**Beweis.** Durch eine Variablentransformation  $u \mapsto \frac{u}{\sqrt{D}}$  kann man o.B.d.A.  $D = 1$  annehmen. Wir zerlegen das Integral als erstes in zwei Teile. Sei dazu  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  eine „Abschneidefunktion“, d.h. es gelte

- (i)  $0 \leq h \leq 1$ ,
- (ii)  $h(u) = 1$  falls  $|u| \leq 2$  und
- (iii)  $\text{supp } h \subseteq [-4, 4]$ .

Definiere für  $s \in K$  und  $u \in \text{supp}(1 - h)$  die Funktion  $\varphi_{s,u}$  durch

$$\varphi_{s,u}(t) := t \left( \frac{1}{u^2} - b(t, s) \right).$$

und setze

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}^2} a(t)(1 - h)(u) \widehat{\psi}(u) e^{-i\lambda u^2 \varphi_{s,u}(t)} d(t, u).$$

Da für jedes  $u \in \text{supp}(1 - h)$  stets  $\frac{1}{u^2} \leq \frac{1}{4}$  gilt, kann man nach den Voraussetzungen über  $b$  ein  $U \subseteq V$  so wählen, daß für alle  $t \in U$ ,  $s \in K$  und  $u \in \text{supp}(1 - h)$ :

$$|\varphi'_{s,u}(t)| = \left| \frac{1}{u^2} - (b_s(t) + t b'_s(t)) \right| \geq \frac{1}{4}.$$

Die Familie  $\{\varphi_{s,u}\}_{s \in K, u \in \text{supp}(1-h)}$  ist nun aber in  $C^\infty(U)$  beschränkt, so daß die Voraussetzungen von Lemma A.6 erfüllt sind. Somit existiert also zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  derart, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $s \in K$ ,  $a \in C_0^\infty(U)$  und  $u \in \text{supp}(1 - h)$  die Abschätzung

$$\left| \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{-i\lambda u^2 \varphi_{s,u}(t)} dt \right| \leq C_N (1 + |\lambda|)^{-N} u^{-2N} \|a\|_{C^N}$$

gilt. Daraus folgt nun wie im Beweis von Satz 3.32

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \int_{\mathbb{R}} (1 - h)(u) \widehat{\psi}(u) \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{-i\lambda \varphi_{s,u}(t)} dt du \right| \\ &\leq C_N (1 + |\lambda|)^{-N} \|a\|_{C^N} \|\widehat{\psi}\|_\infty \int_{|u| \geq 2} u^{-2N} du \\ &\leq \widetilde{C}_N \|\psi\|_1 \|a\|_{C^N} (1 + |\lambda|)^{-N}, \end{aligned} \tag{3.35}$$

wenn  $\widetilde{C}_N := C_N \int_{|u| > 2} u^{-2N} du$  gesetzt wird.

Es muß nun noch der in  $u$  „lokale“ Teil



$$I_2 := \int_{\mathbb{R}^2} a(t)h(u)\widehat{\psi}(u)e^{-i\lambda t(1-u^2b(t,s))}d(t,u)$$

behandelt werden. Hier treten kritische Punkte der Phasenfunktion auf, die sich allerdings als nicht–ausgeartet herausstellen, so daß man nach dem „Prinzip der stationären Phase“ erwartet, daß sich  $|I_2|$  für  $|\lambda| \rightarrow \infty$  wie  $|\lambda|^{-1}$  verhält, da es sich dabei um ein zweidimensionales Integral handelt.

Ist  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ , so existieren Folgen  $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  und  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(\mathbb{R})$  so, daß  $\text{supp } \psi_j \subseteq [r_j - 2, r_j + 2]$ ,  $\sum_j \psi_j = \psi$  in  $L^1(\mathbb{R})$  und  $\|\psi\|_1 = \sum_j \|\psi_j\|_1$  gelten.

Da dann auch  $\sum_j \widehat{\psi}_j = \widehat{\psi}$  gleichmäßig gilt, können wir uns o.B.d.A. auf solche  $\psi$  beschränken, für die ein  $r_0 \in \mathbb{R}$  existiert mit  $\text{supp } \psi \subseteq [r_0 - 2, r_0 + 2]$ .

Setze dann  $\psi_0(r) := \psi(r + r_0)$ , so daß  $\text{supp } \psi_0 \subseteq [-2, 2]$  und außerdem gilt:  $\|\psi_0\|_1 = \|\psi\|_1$ . Wegen  $\widehat{\psi}(u) = e^{-iur_0}\widehat{\psi}_0(u)$  ist also folgendes zu zeigen:

Es existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $s \in K$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $a \in C_0^\infty(U)$  und  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \psi \subseteq [-2, 2]$  die Abschätzung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} a(t)\widehat{\psi}(u)h(u)e^{-i\lambda\varphi_{s,r}(t,u)}d(t,u) \right| \leq C(1 + |\lambda|)^{-1}\|\psi\|_1 \sum_{j=0}^3 (1 + |\lambda|)^{-\frac{j}{2}} \|a^{(j)}\|_\infty \quad (3.36)$$

gilt, wobei die Phasenfunktion  $\varphi_{s,r}$  für dieses Integral definiert ist durch

$$\varphi_{s,r}(t,u) := t(1 - u^2b(t,s)) - ur.$$

Dazu untersuchen wir als erstes, welche kritischen Punkte die Phasenfunktion  $\varphi_{s,r}$  besitzt. Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{s,r}}{\partial t}(t,u) &= 1 - u^2(b_s(t) + tb'_s(t)) \\ \frac{\partial \varphi_{s,r}}{\partial u}(t,u) &= -2utb_s(t) - r. \end{aligned}$$

Betrachte den Fall  $r = 0$ . Ist dann  $(t,u)$  ein kritischer Punkt von  $\varphi_{s,0}$ , so muß insbesondere  $0 = \frac{\partial \varphi_{s,0}}{\partial u}(t,u) = -2utb_s(t)$ , wegen  $b_s(t) \neq 0$  also entweder  $u = 0$  oder  $t = 0$  gelten. Da aber  $\frac{\partial \varphi_{s,0}}{\partial t}(t,0) = 1$ , ist letzteres der Fall. Zieht man nun noch die Gleichung  $\frac{\partial \varphi_{s,0}}{\partial t}(0,u) = 1 - u^2b(0,s)$  hinzu, so ergibt sich insgesamt, daß  $\varphi_{s,0}$  genau zwei kritische Punkte besitzt, nämlich  $(0, -\frac{1}{\sqrt{b(0,s)}})$  und  $(0, \frac{1}{\sqrt{b(0,s)}})$ . Diese sind nicht–ausgeartet, denn für die zweite Ableitung gilt:

$$D^2\varphi_{s,0}(0,u) = \begin{pmatrix} 0 & -2ub(0,s) \\ -2ub(0,s) & 0 \end{pmatrix},$$

also  $\det\left(D^2\varphi_{s,0}\left(0, \frac{1}{\sqrt{b(0,s)}}\right)\right) = \det\left(D^2\varphi_{s,0}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{b(0,s)}}\right)\right) = -4b(0,s) \neq 0$ .

Da  $K$  kompakt ist, existiert nach Lemma A.8 ein  $\varepsilon > 0$  so, daß die Familie  $\{\varphi_{s,r}\}_{s \in K, |r| \leq \varepsilon}$  die Voraussetzungen von Lemma A.7 erfüllt. Dann liefert Satz A.9 die Existenz eines  $C > 0$  derart, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $s \in K$ ,  $|r| \leq \varepsilon$ ,  $a \in C_0^\infty(U)$  und  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} a(t)h(u)\widehat{\psi}(u)e^{-i\lambda\varphi_{s,r}(t,u)}d(t,u) \right| \leq C\|\widehat{\psi}\|_{C^3}(1+|\lambda|)^{-1} \sum_{j=0}^3(1+|\lambda|)^{-\frac{j}{2}}\|a^{(j)}\|_\infty.$$

Da  $\text{supp } \psi \subseteq [-2, 2]$  gilt aber für  $l \in \mathbb{N}$ :  $\|\widehat{\psi}^{(l)}\|_\infty = \|\widehat{r^l \psi}\|_\infty \leq \|r^l \psi\|_1 \leq 2^l \|\psi\|_1$ . Damit ist die Behauptung (3.36) im Falle  $|r| \leq \varepsilon$  bewiesen. Ist nun  $|r| \geq \varepsilon$ , und wählt man  $U$  so, daß für  $t \in U$  und  $u \in \text{supp } h$  stets  $|2utb_s(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  erfüllt ist, so gilt

$$\left| \frac{\partial \varphi_{s,r}}{\partial u}(t,u) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Familie  $\{\varphi_{s,r}\}_{s \in K, |r| \geq \varepsilon}$  erfüllt also wiederum die Voraussetzungen von Lemma A.6, und wir erhalten für jedes  $N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} a(t)h(u)\widehat{\psi}(u)e^{-i\lambda\varphi_{s,r}(t,u)}d(t,u) \right| \\ \leq C_N(1+|\lambda|)^{-N}\|\widehat{\psi}\|_{C^N}\|a\|_{C^N} \leq C'_N(1+|\lambda|)^{-N}\|\psi\|_1\|a\|_{C^N} \end{aligned}$$

mit von  $\lambda$ ,  $\psi$ ,  $a$  und  $r$  unabhängigen Konstanten  $C'_N$  □

Die Sätze 3.32 und 3.33 liefern also zusammen (3.32) und damit den Beweis des Restriktionssatzes 3.30.

### 3.6.2 Der Fall indefiniten $SJ$

Wir werden nun den Fall betrachten, in dem die symmetrische Matrix  $SJ$  für  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  zwar immer noch invertierbar ist, allerdings sowohl positive als auch negative Eigenwerte besitzt. Es ist im Rahmen dieser Arbeit leider nicht gelungen, unter diesen Voraussetzungen das Analogon des Restriktionssatzes 3.30 zu beweisen. Dennoch können wir aber zumindest eine „lokale Version“ des Restriktionssatzes zeigen. Genauer gilt:

**Satz 3.34.** *Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  invertierbar. Setze  $d := 2n$ . Sei ferner  $\frac{2d}{d+2} < p < 2\frac{d+1}{d+3}$ . Dann existiert zu jedem Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{R}^{2n}$  ein  $C_K > 0$  so, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\|\mathbf{1}_{[0,1]}(\lambda - L_S)f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \leq C_K(1+|\lambda|)^{\beta(p)}\|f\|_{L^p(K)} \quad f \in L^2(K),$$

$L_S$  besitzt also die lokale Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)_{\text{lok}}$ .

Derartige Sätze wurden bereits von S. Thangavelu in [52] betrachtet. Dort wurde diese Aussage für den getwisteten Sublaplace-Operator  $L = L_{-J}$  und für den Hermite-Operator  $-\Delta + |x|^2$  gezeigt.

Wir können uns nach Satz 3.26 darauf beschränken, für jedes kompakte  $K$  die Existenz eines  $0 \neq g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  zu zeigen, für welches die Abschätzung

$$\left\| \left[ \widehat{g}^{\left(\frac{d-1}{2}\right)} (\lambda - L_S) f \right] \Big|_K \right\|_{L^\infty(K)} \leq C_K (1 + |\lambda|)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(K)} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

mit einem von  $\lambda$  unabhängigen  $C_K > 0$  erfüllt ist. Analog zum Fall definiten  $SJ$  gehen wir wiederum von der Formel (3.25) für den getwisteten Faltungskern  $K_\lambda$  von  $\widehat{g}^{\left(\frac{d-1}{2}\right)} (\lambda - L_S)$  aus. Es ist dann zu zeigen, daß zu jedem  $R > 0$  ein  $C_R > 0$  so existiert, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\|K_\lambda|_{\overline{B_0(R)}}\|_{L^\infty(\overline{B_0(R)})} \leq C_R (1 + |\lambda|)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

gilt. Seien also  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})$  invertierbar und  $R > 0$  fixiert. Setze  $K := \overline{B_0(R)}$ . Die Laurententwicklung des  $\coth$  in einer hinreichend kleinen Nullumgebung sei durch

$$\coth t = \frac{1}{t} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j t^j,$$

mit gewissen Koeffizienten  $c_j$  gegeben. Dies gilt auch weiterhin, falls man lineare Abbildungen bzw. Matrizen in  $\coth$  einsetzt, deren Spektrum noch ganz im Konvergenzgebiet obiger Laurentreihe liegt. Sei also  $|t|$  so klein, daß dies auf  $tS$  zutrifft. Dann gilt:

$$\coth(tS) = \frac{1}{t} S^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j (tS)^j.$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in die Formel (3.25) für  $K_\lambda$  ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} & K_\lambda(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(d-1-\text{sgn } JS) \text{sgn } t} e^{-i(\lambda t + \frac{1}{2t}\omega(z, S^{-1}z))} e^{-\frac{i}{4} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \omega(z, S^j z) \left(\frac{t}{2}\right)^j} dt. \end{aligned}$$

Definiert man für jedes  $z \in K$  die Funktion  $K_{\lambda, z, \pm} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$K_{\lambda, z, \pm}(r) := \int_{\mathbb{R}} \widetilde{g}(t) |t|^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}(d-1-\text{sgn } JS) \text{sgn } t} e^{-i(\lambda t \mp \frac{r^2}{4t})} e^{-\frac{i}{4} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \omega(z, S^j z) \left(\frac{t}{2}\right)^j} dt,$$

so genügt es zum Beweis von 3.37, die Abschätzung

$$\|K_{\lambda,z,\pm}\|_{\infty} \leq C |\lambda|^{-\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

gleichmäßig in den Parametern  $z \in K$  zu zeigen. Dabei gehen wir analog zum Beweis von 3.30 vor und fassen  $K_{\lambda,z}$  als Funktional auf  $L^1(\mathbb{R})$  auf. Definiert man

$$G_z(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{g}(t) e^{-\frac{i}{4} \sum_{j=1}^{\infty} c_j \omega(z, S^j z) (\frac{t}{2})^j},$$

so gilt für  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , wiederum mit einer Fouriertransformation,

$$K_{\lambda,z,\pm}(\psi) = |\lambda|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^2} G_z(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} e^{-i\lambda t(1 \pm u^2)} \widehat{\psi}(|\lambda|^{\frac{1}{2}} u) d(t, u), \quad (3.39)$$

mit  $\alpha := -\frac{\pi}{4}(d-1 - \operatorname{sgn} JS \pm 1)$ .

Im Prinzip hat dieses oszillierende Integral die gleiche Gestalt wie (3.34) im Beweis von 3.30, insbesondere besitzt die Phasenfunktion ausschließlich nicht-ausgeartete kritische Punkte. Auch sind alle Ableitungen der Funktionen  $G_z$  gleichmäßig in  $z$  beschränkt, da  $z$  aus dem Kompaktum  $K$  stammt. Allerdings verschwindet  $\alpha$  im allgemeinen nicht und deshalb besitzt die Amplitude in einigen Fällen eine Unstetigkeitsstelle in  $t = 0$ . Diese Singularität ist aber noch hinreichend harmlos, um das erwünschte Verhalten (3.38) zu erhalten.

Wir zerlegen (3.39) zunächst in zwei Teile. Sei dazu  $a \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  eine Abschneidefunktion in der Nähe des Ursprungs, es gelte also

- (i)  $a(t) = 1$  falls  $|t| \leq 1$ ,
- (ii)  $0 \leq a \leq 1$  und
- (iii)  $\operatorname{supp} a \subseteq [-2, 2]$ .

Jetzt definieren wir mit  $a_\lambda(t) := a(|\lambda|^{\frac{1}{2}} t)$

$$I_{1,\pm} := \int_{\mathbb{R}^2} a_\lambda(t) G_z(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} e^{-i\lambda t(1 \mp u^2)} \widehat{\psi}(|\lambda|^{\frac{1}{2}} u) d(t, u), \quad (3.40a)$$

$$I_{2,\pm} := \int_{\mathbb{R}^2} (1 - a_\lambda)(t) G_z(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} e^{-i\lambda t(1 \mp u^2)} \widehat{\psi}(|\lambda|^{\frac{1}{2}} u) d(t, u). \quad (3.40b)$$

Der zweite Summand besitzt nun wieder eine glatte Amplitude, und es stellt sich heraus, daß wie im Beweis von 3.30 die Voraussetzungen der „Methode der stationären Phase“ erfüllt sind. Für den ersten Summanden bemühen wir hier eine spezielle Methode:

**Satz 3.35.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}$  eine offene Nullumgebung,  $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Es gelte  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi'$  besitze auf  $U$  keine Nullstellen. Dann existiert ein  $C > 0$  dergestalt, daß für alle  $|\lambda| > 1$ ,  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $b \in C_0^\infty(U)$  gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} a_\lambda(t) b(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} \widehat{\psi}(u) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} d(t, u) \right| \leq C |\lambda|^{-1} \|b\|_{C^2} \|\psi\|_{L^1}. \quad (3.41)$$

**Beweis.** Es gelte o.B.d.A.  $\lambda > 0$ . Sei  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  eine Funktion, die wiederum die schon bekannten Eigenschaften  $0 \leq h \leq 1$ ,  $\operatorname{supp} h \subseteq [-1, 1]$  und  $h(u) = 1$  für  $|u| \leq \frac{1}{2}$  erfüllt.

Definiere  $h_\lambda$  für  $\lambda > 1$  durch  $h_\lambda(u) := h(\lambda^{\frac{1}{2}}u)$ , und setze außerdem noch  $H_\lambda(u) := h_\lambda(u+1) + h_\lambda(u-1)$ . Dann gilt offenbar

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} a_\lambda(t) b(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} H_\lambda(u) \widehat{\psi}(u) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} d(t, u) \right| \leq C |\lambda|^{-1} \|b\|_\infty \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Damit können wir uns also auf den in  $u$  „globalen“ Teil

$$\int_{\mathbb{R}^2} a_\lambda(t) b(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} (1 - H_\lambda(u)) \widehat{\psi}(u) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} d(t, u)$$

beschränken. Betrachtet man nun zunächst nur das  $t$ -Integral und definiert  $\Phi_\lambda(t) := \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\varphi'} \frac{d}{dt} \left( \frac{a_\lambda b}{\varphi'} \right) \right) (t)$ , so ergibt sich durch zweimalige partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty a_\lambda(t) b(t) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} dt &= \frac{ib(0)}{\lambda(1 \pm u^2)\varphi'(0)} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2(1 \pm u^2)^2} \left( \frac{b'(0)}{\varphi'(0)^2} - \frac{b(0)\varphi''(0)}{\varphi'(0)^3} \right) + \int_0^\infty \Phi_\lambda(t) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} dt \end{aligned}$$

und genauso für das Integral über  $] -\infty, 0]$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 a_\lambda(t) b(t) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} dt &= -\frac{ib(0)}{\lambda(1 \pm u^2)\varphi'(0)} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2(1 \pm u^2)^2} \left( \frac{b'(0)}{\varphi'(0)^2} - \frac{b(0)\varphi''(0)}{\varphi'(0)^3} \right) - \int_{-\infty}^0 \Phi_\lambda(t) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} dt, \end{aligned}$$

so daß sich mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
T_1 &:= \frac{b(0)}{\varphi'(0)}(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \\
T_2 &:= \left( \frac{b'(0)}{\varphi'(0)^2} - \frac{b(0)\varphi''(0)}{\varphi'(0)^3} \right) (e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}) \\
T_3(\lambda) &:= \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} \Phi_\lambda(t) e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} dt
\end{aligned}$$

insgesamt folgendes ergibt:

$$I_\pm := \int_{\mathbb{R}} a_\lambda(t) b(t) e^{i\alpha \operatorname{sgn} t} e^{i\lambda(1 \pm u^2)\varphi(t)} dt = \frac{iT_1}{\lambda(1 \pm u^2)} - \frac{T_2 + T_3(\lambda)}{\lambda^2(1 \pm u^2)^2}. \quad (3.42)$$

Der Fall  $I_+$  bereitet nun keine Probleme, man kann einfach über  $u$  integrieren und erhält dann wegen  $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\lambda(t)| dt \leq C \|b\|_{C^2} \lambda^{\frac{1}{2}}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^2} a_\lambda(t) b(t) (1 - H_\lambda)(u) \widehat{\psi}(u) e^{i\lambda(1+u^2)\varphi(t)} d(t, u) \right| \\
\leq C' \lambda^{-1} \|b\|_\infty \|\psi\|_1 + C'' \lambda^{-\frac{3}{2}} \|b\|_{C^2} \|\psi\|_1
\end{aligned}$$

und somit (3.41) für diesen Fall.

Betrachten wir  $I_-$ , so ist festzustellen, daß der zweite Summand von (3.42) sich aufgrund von  $\int_{\mathbb{R}} |\Phi_\lambda(t)| dt \leq C \|b\|_{C^2} \lambda^{\frac{1}{2}}$  und  $\operatorname{supp}(1 - H_\lambda) \subseteq \{|u| - 1| \geq \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{2}\}$  ebenfalls über  $u$  integrieren läßt, und zwar mit dem folgenden Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |T_2 + T_3(\lambda)| \frac{(1 - H_\lambda)(u) \widehat{\psi}(u)}{(u^2 - 1)^2} du &\leq C \lambda^{\frac{1}{2}} \|b\|_{C^2} \|\psi\|_1 \int_{|u|-1 \geq \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{2}} \frac{1}{|u| - 1|^2} du \\
&\leq C'' \lambda \|b\|_{C^2} \|\psi\|_1.
\end{aligned}$$

Der erste Term aus (3.42) führt hingegen auf ein Cauchy-Hauptwert-Integral:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - H_\lambda)(u) \widehat{\psi}(u)}{1 - u^2} du &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (1 - H_\lambda)(u) \widehat{\psi}(u) \left( \frac{1}{1 - u} + \frac{1}{1 + u} \right) du \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{[(1 - H_\lambda) \widehat{\psi}](u - 1) - [(1 - H_\lambda) \widehat{\psi}](u + 1)}{u} du \\
&= \frac{\pi}{2} \left( \text{p.v.} \frac{1}{u} [(1 - H_\lambda) \widehat{\psi}](\cdot - 1) - \text{p.v.} \frac{1}{u} [(1 - H_\lambda) \widehat{\psi}](\cdot + 1) \right).
\end{aligned}$$

Dieses läßt sich aber abschätzen, da für die Fouriertransformierte des Cauchy-Hauptwert  $\text{p.v.}\frac{1}{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  gilt:  $\widehat{\text{p.v.}\frac{1}{u}} = -i \text{sgn}$ . Daraus folgt nämlich für eine beliebige Schwartzfunktion  $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ :

$$\left| \text{p.v.}\frac{1}{u}(k) \right| = \frac{1}{2\pi} |\text{sgn}(\widehat{k})| \leq \frac{\|\widehat{k}\|_1}{2\pi}.$$

Ferner folgt aus der Identität  $\|\widehat{h_\lambda}\|_1 = \|\widehat{h}\|_1$  aufgrund der Definition von  $H_\lambda$  auch  $\|\widehat{H_\lambda}\|_1 \leq 2\|\widehat{h}\|_1$  und somit die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} \|[(1 - H_\lambda)\widehat{\psi}]^\wedge\|_1 &= 2\pi\|\psi - \widehat{H_\lambda} * \psi\|_1 \leq 2\pi(\|\psi\|_1 + \|\widehat{H_\lambda}\|_1\|\psi\|_1) \\ &\leq 4\pi(\|\widehat{h}\|_1 + 1)\|\psi\|_1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun endgültig auch die Abschätzung

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - H_\lambda)(u)\widehat{\psi}(u)}{1 - u^2} du \right| \leq 4\pi(\|\widehat{h}\|_1 + 1)\|\psi\|_1,$$

und damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Es verbleibt also noch die Abschätzung des zweiten Integrals

$$I_{2,\pm} = \int_{\mathbb{R}^2} (1 - a)(|\lambda|^{\frac{1}{2}} t) G_z(t) e^{i\alpha \text{sgn} t} e^{-i\lambda t(1 \mp u^2)} \widehat{\psi}(|\lambda|^{\frac{1}{2}} u) d(t, u)$$

aus (3.40). Für  $I_{2,-}$  ist dies sehr leicht: Da  $G_z$  unabhängig von  $z \in K$  gleichmäßig beschränkt ist, existiert nach Lemma A.6 zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  derart, daß für alle  $z \in K$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (1 - a)(|\lambda|^{\frac{1}{2}} t) G_z(t) e^{i\alpha \text{sgn} t} e^{-it(1+u^2)} dt \right| \leq C_N |\lambda|^{-\frac{N}{2}} |1 + u^2|^{-N}.$$

Falls  $\frac{N}{2} > d$ , ergibt sich somit:

$$|I_{2,-}| \leq C_N \|\psi\|_1 |\lambda|^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}} |1 + u^2|^{-N} du. \quad (3.43)$$

Wendet man sich  $I_{2,+}$  zu, so ist festzustellen, daß die Phasenfunktion kritische Punkte besitzt. Die „Methode der stationären Phase“ liefert aber das Gewünschte. Insbesondere erfüllt nämlich das Integral  $I_{2,+}$  die Voraussetzungen von Satz 3.33, der bereits für den Beweis des Restriktionssatzes bei definitem  $SJ$  Verwendung gefunden hat und dort etwas allgemeiner als nötig formuliert wurde, um ihn in dieser Situation ebenfalls anwenden zu können.

Zusammen mit (3.43) und (3.41) liefert dies also (3.38), und damit ist der lokale Restriktionssatz 3.34 bewiesen.





## Kapitel 4

# Anwendungen auf Rieszmittel

Das vorliegende Kapitel ist der Anwendung des im vorangegangenen gezeigten Restriktionssatzes 3.30 für die Operatoren  $L_S$  mit  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$  auf die Konvergenz der zugehörigen Rieszmittel gewidmet. Dabei versteht man unter den Rieszmitteln mit Exponent  $\delta \geq 0$  eines auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  selbstadjungierten Operators  $A$  die Familie  $\{m_\lambda^\delta(A)\}_{\lambda>0}$ , wobei der Bochner–Riesz–Multiplikator  $m_\lambda^\delta$  für  $\lambda > 0$  und  $\delta \geq 0$  die durch

$$m_\lambda^\delta(s) := \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right)_+^\delta$$

definierte Funktion auf  $\mathbb{R}$  ist. Da  $m_\lambda^\delta$  eine beschränkte Borelfunktion ist, handelt es sich bei  $m_\lambda^\delta(A)$  stets um einen beschränkten Operator. Aus dem Spektralsatz folgt sofort, daß für jedes  $x \in \mathcal{H}$  gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(A)x = x.$$

Im weiteren sei  $\mathcal{H} = L^2(M)$  ein Raum quadratintegrierbarer Funktionen. Falls sich die  $m_\lambda^\delta(A)|_{L^2(M) \cap L^p(M)}$  zu stetigen Operatoren auf  $L^p(M)$  fortsetzen lassen, so stellt sich die Frage, ob auch

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(A)f = f \quad \text{in } L^p(M) \tag{4.1}$$

für alle  $f \in L^p(M)$  gilt. Ist dies der Fall, so beobachtet man mit Hilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit:

**Lemma 4.1.** *Sei  $1 \leq p < \infty$ . Konvergieren die Rieszmittel von  $A$  für jedes  $f \in L^p(M)$ , d.h. gilt  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(A)f = f$ , so existieren  $\lambda_0, C > 0$  derart, daß für alle  $\lambda \geq \lambda_0$*

$$\|m_\lambda^\delta(A)\|_{p \rightarrow p} \leq C.$$

*Wir sagen dann, die Rieszmittel seien gleichmäßig beschränkt auf  $L^p(M)$ , obwohl dies aufgrund des oben auftretenden  $\lambda_0$  eigentlich nicht ganz korrekt ist.*

**Beweis.** Angenommen die Behauptung sei falsch. Dann findet man eine Folge  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}_{>0}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$  so, daß  $\|m_{\lambda_n}^\delta\|_{p \rightarrow p} \geq n$ . Da aber für jedes  $f \in L^p(M)$  stets  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_{\lambda_n}^\delta(A)f = f$  gilt, ist dies ein Widerspruch zum Satz von Banach–Steinhaus [39], Theorem 2.5.  $\square$

Die gleichmäßige Beschränktheit der Rieszmittel (ab einem gewissen  $\lambda_0$ ) ist also eine notwendige Voraussetzung für deren Konvergenz.

Ob auch die Umkehrung gilt, ist allerdings nicht klar. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß  $m_\lambda^\delta(A)$  aber schon von vornherein auf einer dichten Teilmenge von  $L^p(M)$  konvergiert, was in vielen Anwendungen ohnehin bekannt ist, kann man tatsächlich von der gleichmäßigen Beschränktheit auf die Konvergenz der Rieszmittel schließen. Dies ergibt sich als Spezialfall eines ganz allgemeinen und wohlbekannten Prinzips, welches hier der Vollständigkeit halber noch einmal formuliert werden soll:

**Lemma 4.2.** *Seien  $(X, d)$  und  $(Y, d')$  metrische Räume und  $\{f_\lambda\}_{\lambda > 0}$  eine gleichmäßig gleichgradig stetige Familie von Funktionen  $f_\lambda: X \rightarrow Y$ . Ist dann  $D := \{x \in X \mid f(x) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_\lambda(x) \text{ existiert}\}$  dicht in  $X$ , so gilt in Wahrheit schon:  $D = X$ . Außerdem ist  $f$  automatisch gleichmäßig stetig.*

**Beweis.** Zunächst ist  $f: D \rightarrow Y$  als punktweiser Grenzwert einer gleichmäßig gleichgradig stetigen Funktionenfamilie selbst gleichmäßig stetig und läßt sich somit zu einer ebenfalls gleichmäßig stetigen Funktion auf  $X$  fortsetzen, welche wir in üblicher Weise wiederum mit  $f$  bezeichnen.

Seien nun  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\delta > 0$  gemäß der gleichmäßig gleichgradigen Stetigkeit von  $\{f_\lambda\} \cup \{f\}$ . Für  $y \in D$  mit  $d(x, y) < \delta$  und  $\lambda$  so groß, daß  $d'(f(y), f_\lambda(y)) \leq \varepsilon$  erhalten wir dann nach der Dreiecksungleichung

$$d'(f(x), f_\lambda(x)) \leq d'(f(x), f(y)) + d'(f(y), f_\lambda(y)) + d'(f_\lambda(y), f_\lambda(x)) \leq 3\varepsilon.$$

Somit gilt  $x \in D$ .  $\square$

Als Korollar daraus erhalten wir die oben angekündigte „Umkehrung“ von Lemma 4.1:

**Korollar 4.3.** *Es existiere ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda > 0$  die Bedingung  $\|m_\lambda^\delta(A)\|_{L^p(M) \rightarrow L^p(M)} \leq C$  gilt und eine dichte Teilmenge  $D$  von  $L^p(M)$  derart, daß für alle  $f \in D$  gilt:  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} m_\lambda^\delta(A)f = f$  in  $L^p(M)$ . Dann konvergieren die Rieszmittel für alle  $f \in L^p(M)$ .*

Die Frage nach Konvergenz der Rieszmittel läßt sich somit stets folgendermaßen organisieren:

- (i) Gibt es eine dichte Teilmenge in  $L^p(M)$ , auf der die Konvergenz klar ist?
- (ii) Sind die Rieszmittel gleichmäßig beschränkt?

Die erste Frage läßt sich in vielen klassischen Fällen positiv beantworten. Man sieht z.B. leicht ein, daß dies beim Laplace-Operator zutrifft, wenn man als dichten Teilraum von  $L^p(\mathbb{R}^n)$  die Funktionen wählt, deren Fouriertransformierte in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  liegt. Im Falle der in 1.23 definierten getwisteten Sub-Laplace-Operatoren  $L_S$  mit  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$  erhalten wir:

**Satz 4.4.** *Für  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$  konvergieren die Rieszmittel von  $L_S$  und  $H_S$  auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  bzw.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

**Beweis.** Wir können davon ausgehen, daß  $S$  von der Form  $S = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$  mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$  ist. Bezeichne  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$  die in Gleichung (1.23) definierten Hermitefunktionen auf  $\mathbb{R}^n$ . Nach Theorem V.13 im Buch von M. Reed und B. Simon [38] ist die durch  $T\varphi := \langle \varphi, h_\alpha \rangle_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n}$  gegebene Abbildung  $T$  ein topologischer Isomorphismus von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  auf den Raum  $s(\mathbb{N}_0^n)$  der schnell fallenden Funktionen auf  $\mathbb{N}_0^n$ . Außerdem bildet  $T$  den Raum  $L^2(\mathbb{R}^n)$  unitär auf  $\ell^2(\mathbb{N}_0^n)$  ab.

Sei nun  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , und setze  $a := T\varphi$ . Für den Funktionalkalkül von  $H_S$  gilt nach (1.24)

$$T(m_\lambda^\delta(H_S)\varphi) = a_\lambda,$$

wobei  $a_\lambda(\alpha) := m_\lambda^\delta(\sum_{j=1}^n \mu_j(2\alpha_j + 1))a_\alpha$ . Da die Funktionen  $m_\lambda^\delta$  gleichmäßig beschränkt sind und außerdem punktweise gegen die Einsfunktion streben, sieht man leicht ein, daß  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a_\lambda = a$  in der Topologie von  $s(\mathbb{N}_0^n)$  gilt. Damit konvergiert aber  $T^{-1}a_\lambda = m_\lambda^\delta(H_S)\varphi$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  und damit insbesondere in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  gegen  $\varphi$ .

Die entsprechende Aussage für  $L_S$  erhält man mit Hilfe des Diagramms 1.38, angewendet auf die abgeleiteten Darstellungen. Danach gilt nämlich  $m_\lambda^\delta(L_S) = \bar{V} \circ (m_\lambda^\delta(H_S) \otimes \text{Id}) \circ \bar{V}^{-1}$ , mit der in 1.37 definierten modifizierten Fourier-Wigner-Transformation  $\bar{V}$ . Da diese ebenfalls ein topologischer Isomorphismus von  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Als Hauptergebnis dieses Kapitels werden wir den folgenden Satz beweisen:

**Satz 4.5 (Hauptsatz).** *Sei  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$ , und setze  $d := 2n$ . Falls dann  $1 \leq p < 2\frac{d+1}{d+3}$  und  $\delta > d(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ , so existieren  $\lambda_0, C > 0$  derart, daß für alle  $\lambda > \lambda_0$  gilt:*

$$\|m_\lambda^\delta(L_S)\|_{p \rightarrow p} \leq C.$$

Mit Korollar 4.3 und Satz 4.4 folgt dann, daß die Rieszmittel auf  $L^p(\mathbb{R}^d)$  konvergieren.

**Bemerkung 4.6.** Man muß bei der Beschränktheit von Rieszmitteln offenbar nur den Fall  $1 \leq p < 2$  betrachten, da die Beschränktheit auf  $L^{p'}$  dann per Dualität folgt.

Im nächsten Abschnitt folgen Beispiele, welche dieses Ergebnis zu einigen bekannten Resultaten in Beziehung setzen. In den darauffolgenden Abschnitten werden dann die nötigen Hilfsmittel zum Beweis von Satz 4.5 erarbeitet. Der eigentliche Beweis befindet sich am Beginn von Abschnitt 4.3.

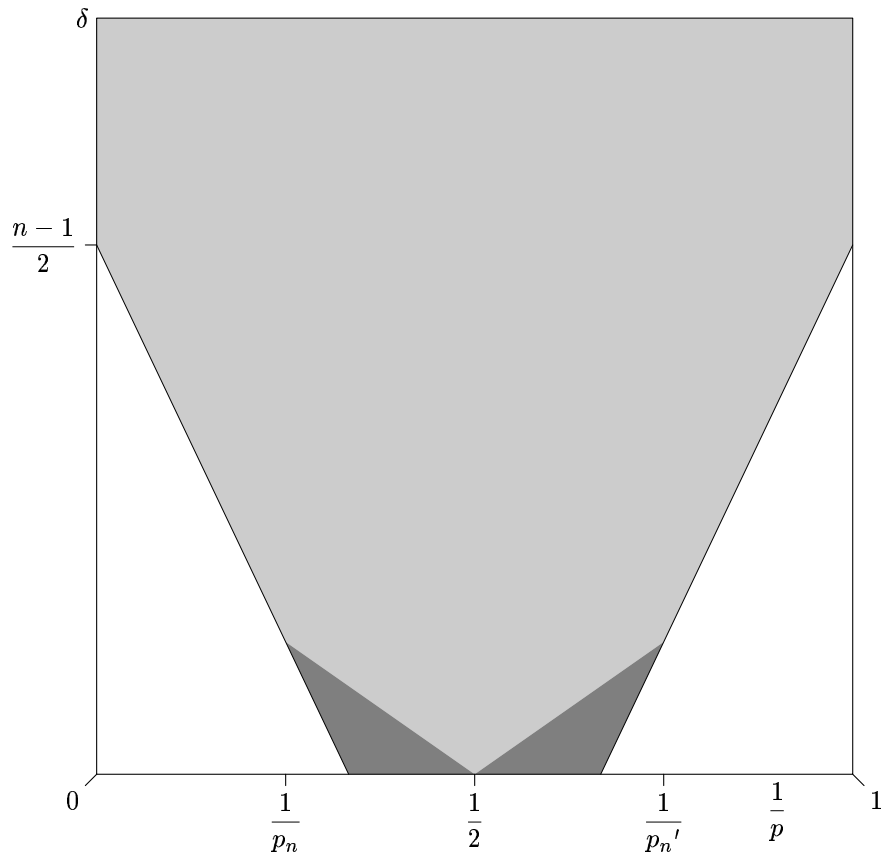


Abbildung 4.1: Die Bochner–Riesz–Vermutung  $p_n = 2 \frac{n+1}{n+3}$

## 4.1 Beispiele

Das wichtigste und ursprüngliche Beispiel ist die Betrachtung der Rieszmittel des Laplace–Operators  $\Delta$  auf  $\mathbb{R}^n$ . In diesem Fall spricht man auch von Bochner–Riesz–Mitteln. Mit Hilfe des Restriktionssatzes von Tomas–Stein (siehe 3.1) gelingt es zu beweisen, daß die Rieszmittel  $m_\lambda^\delta(\Delta)$  auf  $L^p(\mathbb{R}^n)$  konvergieren, falls  $1 \leq p \leq 2 \frac{n+1}{n+3}$  und  $\delta > \delta(p)$ , wobei

$$\delta(p) = \max \left\{ n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}, 0 \right\} \quad (4.2)$$

der sogenannte kritische Exponent ist.

Dies beruht auf einem Theorem von C. Fefferman [11], welches besagt, daß ein  $L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(S^{n-1})$ –Restriktionssatz für die Fouriertransformation (siehe 3.1) stets die Konvergenz der Rieszmittel des Laplace–Operators für alle  $\delta > \delta(p)$  impliziert.

In der eindimensionalen Situation ist aufgrund der Beschränktheit der Hilberttransformation ferner bekannt, daß die Rieszmittel für alle  $1 < p < \infty$  und  $\delta \geq 0$  konvergieren.

Im Falle  $n \geq 2$  konvergieren die Rieszmittel für  $\delta = 0$  allerdings nur dann,

wenn schon  $p = 2$  gilt. Dies ist auch als Unbeschränktheit des „disc multiplier“ bekannt und wurde wiederum von C. Fefferman in [12] gezeigt.

Es ist sogar so, daß die Bedingung  $\delta > \delta(p)$  für alle  $p \neq 2$  notwendig ist.

Die zweidimensionale Situation ist, wie auch beim Restriktionssatz, vollständig geklärt. Nach einem Satz von L. Carleson und P. Sjölin [7] konvergieren die Rieszmittel für  $1 \leq p < \infty$  und  $\delta > \delta(p)$  auf  $L^p(\mathbb{R}^2)$ .

Die Bochner–Riesz–Vermutung besagt nun analog zur Restriktionsvermutung, daß dies auch in den höheren Dimensionen  $n \geq 3$  der Fall ist. In Abbildung 4.1 ist dies graphisch dargestellt. Der hellgraue Bereich bezeichnet dabei die Werte von  $p$  und  $\delta$  für den die Beschränktheit der Bochner–Riesz–Mittel bekannt ist, während das dunklere Grau die Zone beschreibt, in der die Beschränktheit gemäß der Bochner–Riesz–Vermutung zu erwarten (und im zweidimensionalen Fall bewiesen) ist. Für Punkte des weißen Gebietes ist die Unbeschränktheit bekannt. Weitere Informationen finden sich im Buch von E. Stein [45], Kapitel IX.

Nun führen auch die Beispiele von Restriktionssätzen aus Abschnitt 3.2 zu Ergebnissen über die entsprechenden Rieszmittel. So folgt aus dem dort erwähnten Restriktionssatz von C. Sogge für Operatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  zu einem analogen Resultat über die Konvergenz von Rieszmitteln. Diese konvergieren für  $1 \leq p \leq \frac{2n+1}{n+3}$  und  $\delta > \delta(p)$  auf  $L^p$ , siehe dazu [50].

Beim Hermite–Operator kann man im Falle  $n \geq 3$  mit dem von G. Karadzhov bewiesenen Restriktionssatz zeigen, daß die Rieszmittel für  $\delta > \delta(p)$  konvergieren, allerdings nur auf dem kleineren Bereich  $1 \leq p < \frac{2n}{n+2}$ , da die Gültigkeit des Restriktionssatzes nur für solche  $p$  bekannt ist, vergleiche [28].

Letztlich soll noch erwähnt sein, daß S. Thangavelu für die Rieszmittel des getwisteten Sub–Laplace–Operators bereits in [51] ein Ergebnis zeigte, welches dem von G. Karadzhov beim Hermite–Operator entspricht. Dieses werden wir mit Hilfe von Satz 4.5 verbessern können und auf eine größere Klasse von Operatoren verallgemeinern.

## 4.2 Rieszmittel. Der allgemeine Teil

In diesem Abschnitt wird der Teil des Beweises von Satz 4.5 erarbeitet, der sich auf die Untersuchung der Rieszmittel einer großen Klasse von Operatoren verallgemeinern läßt. Sei dazu  $M$  ein Maßraum und  $A$  ein positiver selbstadjungierter Operator auf  $L^2(M)$ . Dann können wir den Multiplikator  $m_\lambda^\delta$  durch

$$M_\lambda^\delta(t) := \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)_+^\delta$$

ersetzen, mit anderen Worten gilt

$$M_\lambda^\delta(A) = m_\lambda^\delta(A).$$

Der Vorteil besteht darin, daß sich die Fouriertransformierte von  $M_\lambda^\delta$  nach Lemma 3.19 und einer Variablentransformation explizit zu

$$\widehat{M}_\lambda^\delta(s) = \lambda^{-\delta} \Gamma(\delta + 1) e^{i\pi \frac{\delta+1}{2} \operatorname{sgn} s} e^{-is\lambda} |s|^{-\delta-1} \quad (4.3)$$

berechnet.

Die weitere Vorgehensweise wird nun sein, den Multiplikator  $M_\lambda^\delta$ , besser gesagt seine Fouriertransformierte, dyadisch zu zerlegen und dann zu versuchen,  $L^p$ -Abschätzungen für die einzelnen Teile herzuleiten, die sich am Ende wieder aufsummieren lassen.

**Definition 4.7 (Zerlegung des Multiplikators).** Wir fixieren im folgenden eine Schwartzfunktion  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , deren Fouriertransformierte die „dyadische Eigenschaft“ besitzt, also die Bedingungen

- (i)  $0 \leq \widehat{g} \leq 1$ ,
- (ii)  $\operatorname{supp} \widehat{g} \subseteq [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$ ,
- (iii)  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(2^j s) = 1$  für alle  $s \neq 0$

erfüllt. Setze  $\widehat{g}_0(s) := 1 - \sum_{k \geq 2} \widehat{g}(2^{-k} s)$ . Fixiere ferner ein  $\varepsilon > 0$ . Wir werden später einsehen, wie dieses zu wählen ist. Sei dann  $\widehat{\eta} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  so, daß  $\widehat{\eta}$  die Eigenschaften  $0 \leq \widehat{\eta} \leq 1$ ,  $\operatorname{supp} \widehat{\eta} \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$  und  $\widehat{\eta}|_{[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]} \equiv 1$  besitzt, und definiere

$$\widehat{M}_{\lambda,0}(s) := \widehat{\eta}(s) \widehat{g}_0(\lambda s) \widehat{M}_\lambda^\delta(s), \quad (4.4a)$$

$$\widehat{M}_{\lambda,R}(s) := (1 - \widehat{\eta})(s) \widehat{M}_\lambda^\delta(s), \quad (4.4b)$$

sowie für  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ :

$$\widehat{M}_{\lambda,k}(s) := \widehat{\eta}(s) \widehat{g}(2^{-k} \lambda s) \widehat{M}_\lambda^\delta(s). \quad (4.4c)$$

Wie man sich leicht überzeugt, verschwindet  $M_{\lambda,k}$  für  $2^{k-1} \geq \lambda \varepsilon$  identisch, und  $M_\lambda^\delta$  läßt sich auf folgende Weise in eine endliche Summe zerlegen:

$$M_\lambda^\delta = M_{\lambda,0} + \sum_{\{k \in \mathbb{N}_{\geq 2} | 2^k \lambda^{-1} \leq 2\varepsilon\}} M_{\lambda,k} + M_{\lambda,R}. \quad (4.5)$$

Sowohl  $\delta > 0$  als auch  $\varepsilon > 0$  sind im folgenden fixiert. Wir werden später sehen, wie beide zu wählen sind, um die gleichmäßige Beschränktheit der Rieszmittel zu erreichen.

Für den Beweis von Satz 4.5 genügt es also zu zeigen, daß  $\nu, \lambda_0, C > 0$  so existieren, daß für alle  $\lambda > \lambda_0$  und  $k \geq 2$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|M_{\lambda,0}(L_S)\|_{p \rightarrow p} &\leq C, & \|M_{\lambda,k}(L_S)\|_{p \rightarrow p} &\leq C 2^{-k\nu}, \\ \|M_{\lambda,R}(L_S)\|_{p \rightarrow p} &\leq C \end{aligned}$$

gelten.

Zunächst wenden wir uns  $M_{\lambda,0}(L_S)$  zu. Dabei kann man ein recht allgemeines Prinzip nutzen, da  $L_S$  das Bild eines Sub-Laplace-Operators einer sogenannten stratifizierten Liegruppe unter einer unitären Darstellung (nämlich  $\sigma$ ) ist, welche zusätzlich noch die schöne Eigenschaft besitzt, auch aus  $L^p$ -Isometrien zu bestehen. Zunächst benötigen wir aber das folgende Resultat, welches besagt, daß  $M_{\lambda,0}$  eine Schwartzfunktion auf der positiven Halbachse und außerdem in  $\lambda$  homogen ist (zumindest für genügend großes  $\lambda$ ).

**Lemma 4.8.** *Zu  $N \in \mathbb{N}$  und  $l \in \mathbb{N}_0$  existiert  $C_{N,l} > 0$  dergestalt, daß für alle  $\lambda \geq \frac{4}{\varepsilon}$  und  $t \geq 0$  mit dem in (4.4) definierten  $M_{\lambda,0}$*

$$|M_{\lambda,0}^{(l)}(t)| \leq C_{N,l} \lambda^{-l} \left(1 + \frac{t}{\lambda}\right)^{-N} \quad (4.6a)$$

*gilt. Außerdem besitzt  $M_{\lambda,0}$  für solche  $\lambda$  die Form:*

$$M_{\lambda,0} = (g_0 * M_1^\delta) \left(\frac{\cdot}{\lambda}\right). \quad (4.6b)$$

**Beweis.** Man rechnet mit der Definition von  $g_0$  in 4.7 sofort die Inklusion  $\text{supp } \widehat{g_0} \subseteq [-2, 2]$  nach. Daraus folgt, daß für  $\lambda \geq \frac{4}{\varepsilon}$  und  $s \in \text{supp } \widehat{M_{\lambda,0}}$  offenbar  $\widehat{\eta}(s) = 1$  gilt, man erhält also

$$M_{\lambda,0} = \lambda^{-1} g_0 \left(\frac{\cdot}{\lambda}\right) * M_\lambda^\delta.$$

Durch explizite Umformung des Faltungsintegrals ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{\lambda,0}(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} g_0 \left(\frac{t-t'}{\lambda}\right) \left(1 - \frac{t'}{\lambda}\right)_+^\delta dt' = \int_{\mathbb{R}} g_0 \left(\frac{t}{\lambda} - t'\right) (1-t')_+^\delta dt' \\ &= (g_0 * M_1^\delta) \left(\frac{t}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

Also gilt der zweite Teil der Behauptung (4.6b). Sei nun  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Eine elementare Rechnung zeigt für  $N \in \mathbb{N}$  die Existenz eines  $C_N > 0$  so, daß für  $t \geq 0$

$$|h * M_1^\delta(t)| \leq C_N (1+t)^{-N}.$$

gilt. Wendet man dies auf  $h = g_0^{(l)}$  an, erhält man auch (4.6a).  $\square$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir ferner noch den Begriff der stratifizierten Liegruppe.

**Definition 4.9.** Wir nennen eine Liealgebra  $\mathfrak{g}$  stratifiziert, falls es Unterräume  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_k$  von  $\mathfrak{g}$  so gibt, daß

$$(i) \mathfrak{g} = \bigoplus_{j=1}^k \mathfrak{g}_j,$$

(ii)  $\mathfrak{g}$  von  $\mathfrak{g}_1$  als Algebra erzeugt wird und

$$(iii) [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subseteq \mathfrak{g}_{i+j}.$$

Dabei gilt für  $j > k$  die Konvention  $\mathfrak{g}_j = 0$ . Eine stratifizierte Liealgebra ist also automatisch nilpotent. Eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Liegruppe heißt stratifiziert, falls ihre Liealgebra diese Eigenschaft besitzt.

*Anmerkung.* Die Heisenberggruppe  $\mathbb{H}_n$  ist offenbar stratifiziert, man wähle dazu einfach  $\mathfrak{g}_1 := \langle P_1, \dots, P_n, Q_1, \dots, Q_n \rangle$  und  $\mathfrak{g}_2 := \mathbb{R}U$ .

**Lemma 4.10.** *Sei  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$ . Dann existieren  $C, \lambda_0 > 0$  so, daß für alle  $\lambda \geq \lambda_0$  gilt:*

$$\|M_{\lambda,0}(\mathcal{L}_S)\|_{p \rightarrow p} \leq C.$$

Außerdem besitzt  $M_{\lambda,0}(\mathcal{L}_S)$  einen Faltungskern  $k \in L^1(\mathbb{H}_n)$ .

**Beweis.** Mit Hilfe von Satz 1.14 (iii) können wir annehmen, daß  $S$  von der Normalform aus Lemma 1.8 ist. Eine direkte Anwendung des Theorems 1.12 von A. Hulanicki und J. Jenkins aus [26] liefert nun, daß  $M_{\lambda,0}(\mathcal{L}_S)$  einen Faltungskern  $k \in L^1(\mathbb{H}_n)$  besitzt und damit einen auf  $L^p(\mathbb{H}_n)$  beschränkten Operator definiert. Da  $\mathcal{L}_S$  homogen ist, folgt nun mit Satz 1.12 (ii) und der Gleichung (4.6b) die Behauptung.  $\square$

Um daraus ein entsprechendes Ergebnis für die Operatoren  $M_{\lambda,0}(L_S)$  zu erhalten, kann man von dem sogenannten „transference theorem“ Gebrauch machen. Dieses ermöglicht es, die Normen von Operatoren, welche als Bilder gewisser Darstellungen auftreten, gegen die Normen der entsprechenden Operatoren auf der Gruppe selbst abzuschätzen. In unserer Situation sind wir damit in der Lage,  $\|M_{\lambda,0}(L_S)\|_{p \rightarrow p}$  gegen  $\|M_{\lambda,0}(\mathcal{L}_S)\|_{p \rightarrow p}$  zu beschränken. Dies soll nun näher erläutert werden:

**Definition 4.11 (Mittelbare (engl. amenable) Gruppen).** Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe, ausgestattet mit einem Haarschen Maß  $\mu$ .  $G$  heißt mittelbar (engl.: amenable), falls für alle Kompakta  $K \subseteq G$  und  $\varepsilon > 0$  eine offene Umgebung  $U$  des neutralen Elements  $e$  von  $G$  so existiert, daß  $\mu(U) < \infty$  und

$$\mu(UK) \leq (1 + \varepsilon)\mu(U).$$

**Beispiel 4.12.** Offenbar ist jede kompakte Gruppe mittelbar, da man aufgrund von  $\mu(G) < \infty$  einfach  $U := G$  wählen kann.

Darüber hinaus ist auch jede auflösbare Liegruppe mittelbar, und damit besitzt insbesondere auch die Heisenberg-Gruppe  $\mathbb{H}_n$  diese Eigenschaft. Dies folgt aus



**Satz 4.13.**

- (i) *Jede abelsche Liegruppe ist mittelbar.*
- (ii) *Ist  $N$  ein abgeschlossener Normalteiler einer Liegruppe und sind sowohl  $N$  als auch die Faktorgruppe  $G/N$  mittelbar, so ist auch  $G$  selbst schon mittelbar.*

**Beweis.** Der erste Teil folgt aus F. Greenleaf [16], Theorem 3.2.1, zusammen mit der dem dortigen Theorem vorausgehenden Bemerkung.

Der zweite Teil ist genau die Aussage von Theorem 2.3.3, ebenfalls im Buch von Greenleaf [16].  $\square$

Es sei angemerkt, daß Greenleaf den Begriff der Mittelbarkeit (amenability) anders (und besser motiviert) definiert, die Äquivalenz zu unserer Definition ergibt sich jedoch aus den Ausführungen in [16], §3.6. Mit Hilfe des Satzes 4.13 beweist man nun

**Satz 4.14.** *Sei  $G$  eine auflösbare Liegruppe. Dann ist  $G$  mittelbar.*

**Beweis.** Der Beweis beruht auf einem Standardargument aus der Theorie auflösbarer Gruppen. Definiere  $G^1 := [G, G]$  und für alle  $j \geq 2$  induktiv:  $G^j := [G^{j-1}, G^{j-1}]$ .

Ist nun für ein  $j \in \mathbb{N}$  die Gruppe  $G^j$  mittelbar, so trifft die nach obigem Satz auch schon auf  $G^{j-1}$  zu, da  $G^j$  ein Normalteiler in  $G^{j-1}$  ist und die Faktorgruppe  $G^{j-1}/G^j = G^{j-1}/[G^{j-1}, G^{j-1}]$  abelsch und somit ebenfalls mittelbar ist.

Wegen der Auflösbarkeit von  $G$  existiert nun ein  $j \in \mathbb{N}$  so, daß  $G^j$  abelsch und damit mittelbar ist. Per Induktion erhält man, daß  $G$  selbst schon mittelbar sein muß.  $\square$

Betrachte eine lokalkompakte Gruppe  $G$  zusammen mit einer stark stetigen Darstellung  $\rho$  von  $G$  auf  $L^p(M)$ , wobei  $M$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum ist. Sind die Operatornormen von  $\rho(g)$  gleichmäßig beschränkt, so kann man die integrierte Darstellung von  $\rho$  auf  $L^1(G)$  definieren, und für jedes  $k \in L^1(G)$  ist  $\rho(k)$  ein beschränkter Operator auf  $L^p(M)$ . Es stellt sich die Frage, ob ein Zusammenhang zwischen der Operatornorm von  $\rho(k)$  auf  $L^p(M)$  und der von  $k$ , aufgefaßt als Faltungsoperator auf  $L^p(G)$ , besteht. Für mittelbare Gruppen ist dies in der Tat der Fall und Inhalt des sogenannten „transference theorem“ von Coifman und Weiss [10]:

**Satz 4.15 (Transference).** *Sei  $G$  eine mittelbare Liegruppe, und sei ferner  $\rho: G \rightarrow \mathcal{B}(L^p(M))$  eine stark stetige Darstellung mit der Eigenschaft*

$$\exists C > 0 \quad \forall g \in G : \|\rho(g)\|_{\mathcal{B}(L^p(M))} \leq C.$$

*Ist dann  $k \in L^1(G)$ , so gilt  $\|\rho(k)\|_{\mathcal{B}(L^p(M))} \leq C^2 \|k\|_{\text{conv},p}$ , wobei  $\|k\|_{\text{conv},p}$  die Norm des durch Faltung mit  $k$  gegebenen Operators auf  $L^p(G)$  bezeichnet.*

**Beweis.** Siehe [10], Theorem 2.4.  $\square$

**Bemerkung 4.16.** Vergleiche dazu auch Hulanicki [24]. Dort wird die Mittelbarkeit einer Gruppe gerade durch die „transference Eigenschaft“ definiert.

Nach Lemma 4.10 besitzt  $M_{\lambda,0}(\mathcal{L}_S)$  einen Faltungskern  $k \in L^1(\mathbb{H}_n)$ . Da die Darstellung  $\sigma$  aus Abschnitt 1.4 die Voraussetzungen von Satz 4.15 erfüllt, gilt also  $\|\sigma(k)\|_{p \rightarrow p} \leq \|M_{\lambda,0}(\mathcal{L}_S)\|_{p \rightarrow p}$ . Nun liegt es allerdings nahe zu vermuten, daß in Wahrheit schon  $\sigma(k) = M_{\lambda,0}(d\sigma(\mathcal{L}_S)) = M_{\lambda,0}(L_S)$  gilt. Dies ist in der Tat der Fall, wie Proposition 1.1 im Artikel von D. Müller [34] zeigt. Vergleiche dazu auch die Diskussion in den Arbeiten von A. Hulanicki und J. Jenkins [26], sowie A. Hulanicki [25]. Damit haben wir insgesamt gezeigt:

**Lemma 4.17.** *Sei  $S \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})^+$ . Dann existieren  $C, \lambda_0 > 0$  so, daß für alle  $\lambda \geq \lambda_0$*

$$\|M_{\lambda,0}(L_S)\|_{p \rightarrow p} \leq C.$$

Als nächstes wenden wir uns den Abschätzungen der  $L^p$ -Operatornormen von  $M_{\lambda,k}(L_S)$  und  $M_{\lambda,R}(L_S)$  zu. Dazu werden wiederum punktweise Abschätzungen der Multiplikatoren  $M_{\lambda,k}$  und  $M_{\lambda,R}$  benötigt. Diese sind Inhalt folgender Lemmata.

**Lemma 4.18.** *Zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  existiert ein  $C_N > 0$  derart, daß  $M_{\lambda,k}$  für alle  $\lambda > 0$ ,  $k \geq 2$  und  $t \in \mathbb{R}$  der Abschätzung*

$$|M_{\lambda,k}(t)| \leq C_N 2^{-k\delta} \left(1 + \frac{2^k}{\lambda} |\lambda - t|\right)^{-N} \quad (4.7)$$

genügt.

**Beweis.** Aus der Formel (4.3) für die Fouriertransformierte von  $M_\lambda^\delta$  und der Fourierinversionsformel berechnet man

$$\begin{aligned} M_{\lambda,k}(t) &= \frac{\lambda^{-\delta} \Gamma(\delta + 1)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{is(t-\lambda)} e^{i\frac{\pi}{2}(\delta+1) \operatorname{sgn} s} |s|^{-\delta-1} \widehat{\eta}(s) \widehat{g}(2^{-k}\lambda s) ds \\ &= \frac{2^{-k\delta} \Gamma(\delta + 1)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{is\frac{2^k}{\lambda}(t-\lambda)} e^{i\frac{\pi}{2}(\delta+1) \operatorname{sgn} s} |s|^{-\delta-1} \widehat{g}(s) \widehat{\eta}(2^k\lambda^{-1}s) ds \\ &= 2^{-k\delta} \Gamma(\delta + 1) \mathcal{F}^{-1}[\widehat{h} \cdot \widehat{\eta}(2^k\lambda^{-1}\cdot)] \left(\frac{2^k}{\lambda}(t - \lambda)\right) \\ &= 2^{-k\delta} \Gamma(\delta + 1) 2^{-k} \lambda (h * \eta(2^{-k}\lambda\cdot)) \left(\frac{2^k}{\lambda}(t - \lambda)\right), \end{aligned}$$

mit der durch  $\widehat{h}(s) := e^{i\frac{\pi}{2}(\delta+1) \operatorname{sgn} s} |s|^{-\delta-1} \widehat{g}(s)$  definierten Schwartzfunktion  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Nun ist die Familie  $2^{-k} \lambda \{h * \eta(2^{-k}\lambda\cdot)\}_{2^k\lambda^{-1} \leq 2^\varepsilon}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  beschränkt, woraus insbesondere die Behauptung folgt.  $\square$

Für den Multiplikator  $M_{\lambda,R}$  des „Restterms“ existiert ein analoges Resultat, welches sich formal aus (4.7) ergibt, wenn man  $2^k = \lambda$  setzt:

**Lemma 4.19.** *Es existiert zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  derart, daß für  $\lambda > 0$  und  $t \in \mathbb{R}$*

$$|M_{\lambda,R}(t)| \leq \lambda^{-\delta} C_N (1 + |t - \lambda|)^{-N}. \quad (4.8)$$

*gilt.*

**Beweis.** Wie im Beweis des vorangegangenen Lemmas liefert die Fourierinversionsformel in Verbindung mit der Formel (4.3) für  $\widehat{M_\lambda^\delta}$ :

$$\begin{aligned} M_{\lambda,R}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{its} (1 - \widehat{\eta})(s) \widehat{M_\lambda^\delta}(s) ds \\ &= \frac{\lambda^{-\delta} \Gamma(\delta + 1)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{is(t-\lambda)} (1 - \widehat{\eta})(s) |s|^{-\delta-1} e^{i\pi \frac{\delta+1}{2} \operatorname{sgn} s} ds. \end{aligned}$$

Da die Funktion  $s \mapsto (1 - \widehat{\eta})(s) |s|^{-\delta-1}$  selbst und auch alle ihre Ableitungen sowohl integrierbar sind als auch im Unendlichen verschwinden, erhält man die Behauptung durch genügend häufiges partielles Integrieren.  $\square$

Die punktweisen Abschätzungen der Multiplikatoren können nun in Verbindung mit einem Restriktionssatz dazu benutzt werden, die folgende  $L^p \rightarrow L^2$ -Abschätzung für die Operatoren  $M_{\lambda,k}(L_S)$  zu zeigen.

**Lemma 4.20.** *Sei  $1 \leq p < 2$ . Der positive selbstadjungierte Operator  $A$  auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  besitze die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  aus 3.3. Dann existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $k \geq 2$  und  $\lambda > 1$  mit dem in (4.2) definierten  $\delta(p)$  gilt:*

$$\|M_{\lambda,k}(A)f\|_2 \leq C 2^{-k(\delta-\delta(p))} (2^k \lambda^{-\frac{1}{2}})^{-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})} \|f\|_p, \quad f \in L^2 \cap L^p.$$

**Beweis.** Definiere zu  $l \in \mathbb{Z}$  das Intervall

$$I_l := \left[ \lambda + \frac{l}{2^k} \lambda, \lambda + \frac{l+1}{2^k} \lambda \right].$$

Für  $l \in \mathbb{Z}$  und  $t \in I_l$  gilt offenbar  $\frac{2^k}{\lambda}(t - \lambda) \in [l, l+1]$ , woraus sich sofort  $|\frac{2^k}{\lambda}(t - \lambda)| \geq |l|$  für  $l \geq 0$  und  $|\frac{2^k}{\lambda}(t - \lambda)| \geq |l+1|$  im Falle  $l < 0$  ergibt. Nach der Abschätzung (4.7) der Multiplikatoren  $M_{\lambda,k}$  existiert damit zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  derart, daß für alle  $l \in \mathbb{Z}$ ,  $k \geq 2$  und  $\lambda > 0$  gilt:

$$\sup_{t \in I_l} |M_{\lambda,k}(t)| \leq C_N 2^{-k\delta} (1 + |l|)^{-N}. \quad (4.9)$$

Wir betrachten jetzt zunächst  $\mathbf{1}_{[\frac{\lambda}{2}, \infty[} M_{\lambda, k}(A)$ . Da  $I_l \cap [\frac{\lambda}{2}, \infty[ \neq \emptyset$  die Bedingung  $l + 1 \geq -2^{k-1}$  impliziert, folgt mit dem Spektralsatz und (4.9)

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{1}_{[\frac{\lambda}{2}, \infty[} M_{\lambda, k})(A)f\|_2^2 &\leq \sum_{l \geq -2^{k-1}-1} \|\mathbf{1}_{I_l} M_{\lambda, k}\|_\infty^2 \|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2 \\ &\leq C_N^2 2^{-2k\delta} \sum_{l \geq -2^{k-1}-1} (1 + |l|)^{-2N} \|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2. \end{aligned}$$

Auf die Terme  $\|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2$  wird nun der Restriktionssatz angewendet. Dazu beobachtet man, daß wegen  $l + 1 \geq -2^{k-1}$  und  $k \geq 2$  die Ungleichung

$$\lambda + l2^{-k}\lambda \geq \frac{1}{2}(\lambda + (l + 1)2^{-k}\lambda)$$

gilt. Deshalb läßt sich das Intervall  $I_l$  der Länge  $|I_l| = 2^{-k}\lambda$  in höchstens  $\lfloor |I_l| + 1 \rfloor$  Intervalle der Länge Eins zerlegen, die allesamt in dem Intervall

$$\left[ \frac{1}{2}(\lambda + (l + 1)2^{-k}\lambda), \lambda + (l + 1)2^{-k}\lambda \right]$$

enthalten sind. Der Restriktionssatz liefert dann in Verbindung mit dem Spektralsatz die Existenz eines  $C > 0$  so, daß für alle  $l + 1 \geq -2^{k-1}$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2 &\leq C \lfloor |I_l| + 1 \rfloor (\lambda + (l + 1)2^{-k}\lambda)^{2\beta(p)} \|f\|_p^2 \\ &\leq C' \lfloor |I_l| + 1 \rfloor \lambda^{2\beta(p)} \|f\|_p^2 \begin{cases} (2 + |l|)^{2\beta(p)} & \text{falls } \beta(p) > 0 \\ 1 & \text{falls } \beta(p) \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Der zweite Schritt folgt dabei für positives  $\beta(p)$  einfach aus  $2^{-k} \leq 1$  und im Falle  $\beta(p) \leq 0$  aus  $1 + (l + 1)2^{-k} \geq 1 - 2^{k-1}2^{-k} = \frac{1}{2}$ .

Bedenkt man nun noch, daß aufgrund von  $2^{-k}\lambda \geq \frac{1}{2\varepsilon}$  für die Intervalllänge  $|I_l| + 1 = 2^{-k}\lambda + 1 < (1 + 2\varepsilon)2^{-k}\lambda$  gilt, so folgt durch Summation über  $l$ :

$$\|(\mathbf{1}_{[\frac{\lambda}{2}, \infty[} M_{\lambda, k})(A)f\|_2^2 \leq \tilde{C} 2^{-2k\delta} \lambda^{2\beta(p)} 2^{-k}\lambda \|f\|_p^2. \quad (4.10)$$

Um nun  $\|(\mathbf{1}_{[0, \frac{\lambda}{2}]} M_{\lambda, k})(A)f\|_2$  abzuschätzen, benutzen wir für  $M_{\lambda, k}$  die Abschätzung

$$\sup_{t \in [0, \frac{\lambda}{2}]} |M_{\lambda, k}(t)| \leq C_N 2^{-kN},$$

die sofort aus (4.7) folgt. Der Spektralsatz zusammen mit der Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  liefert dann

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{[0, \frac{\lambda}{2}]} M_{\lambda, k}(A) f\|_2^2 &\leq C_N^2 2^{-2kN} \|\mathbf{1}_{[0, \frac{\lambda}{2}]}(A) f\|_2^2 \\ &\leq C_N^2 2^{-2kN} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\lambda}{2} + 1 \rfloor} \|\mathbf{1}_{[j, j+1]}(A) f\|_2^2 \leq C_N^2 2^{-2kN} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\lambda}{2} + 1 \rfloor} (1+j)^{2\beta(p)} \|f\|_p^2. \end{aligned}$$

Durch das Integralvergleichskriterium kann die Summe durch

$$\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{\lambda}{2} + 1 \rfloor} (1+j)^{2\beta(p)} \leq \int_0^{\frac{\lambda}{2} + 3} t^{2\beta(p)} dt \leq \frac{(4\lambda)^{2\beta(p)+1}}{2\beta(p)+1}, \quad (4.11)$$

abgeschätzt werden, da stets  $\beta(p) > -\frac{1}{2}$  gilt und  $\lambda > 1$  vorausgesetzt ist. Also erhalten wir

$$\|\mathbf{1}_{[0, \frac{\lambda}{2}]} M_{\lambda, k}(A) f\|_2^2 \leq C'_N 2^{-2kN} \lambda^{2\beta(p)+1} \|f\|_p^2, \quad (4.12)$$

so daß (4.10) und (4.12) zusammen insbesondere

$$\|M_{\lambda, k}(A) f\|_p \leq C' 2^{-k\delta} \lambda^{\beta(p)} (2^{-k} \lambda)^{\frac{1}{2}} \|f\|_p$$

ergeben. Mit den Definitionen  $\beta(p) = \frac{n}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}$  und  $\delta(p) = \max\{n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2}, 0\}$  erhalten wir daraus die Behauptung.  $\square$

Völlig analog zeigen wir nun eine entsprechende Aussage für  $M_{\lambda, R}(A)$ , die wie schon im Falle der punktweisen Abschätzungen der Multiplikatoren formal aus der Setzung  $2^k = \lambda$  in der Behauptung des vorangegangenen Lemmas folgt.

**Lemma 4.21.** *Sei  $A$  wie in Lemma 4.20. Dann existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda > 1$*

$$\|M_{\lambda, R}(A) f\|_2 \leq C \lambda^{-(\delta - \delta(p))} \lambda^{-\frac{n}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right)} \|f\|_p, \quad f \in L^2 \cap L^p.$$

**Beweis.** Definiere diesmal für  $l \in \mathbb{Z}$  das Intervall

$$I_l := [\lambda + l, \lambda + l + 1]$$

der Länge Eins. Wie im Beweis von Lemma 4.20 ergibt sich für  $t \in I_l$ , daß  $|t - \lambda| \geq |l|$  falls  $l \geq 0$  und  $|t - \lambda| \geq |l + 1|$  für  $l < 0$  gilt, und damit folgt aus (4.8)

$$\|\mathbf{1}_{I_l} M_{\lambda, R}\|_\infty \leq C_N \lambda^{-\delta} (1 + |l|)^{-N}.$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \|M_{\lambda,R}(A)f\|_2^2 &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \|\mathbf{1}_{I_l} M_{\lambda,R}\|_\infty^2 \|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2 \\ &\leq C_N^2 \lambda^{-2\delta} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (1+|l|)^{-N} \|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2, \end{aligned}$$

und mit Hilfe der Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  folgt weiter:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{I_l}(A)f\|_2^2 &\leq C(1+|\lambda+l|)^{2\beta(p)} \|f\|_p^2 \\ &\leq C(1+\lambda)^{2\beta(p)} \|f\|_p^2 \begin{cases} (1+|l|)^{2\beta(p)} & \text{falls } \beta(p) > 0 \\ (2+|l|)^{2|\beta(p)|} & \text{falls } \beta(p) \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also durch Summation über  $l$ :

$$\|M_{\lambda,R}(A)f\|_2^2 \leq \tilde{C} \lambda^{-2(\delta-\beta(p))} \|f\|_p^2.$$

Die Behauptung folgt dann aus den Definitionen von  $\beta(p)$  und  $\delta(p)$ .  $\square$

Als nächstes folgt ein Überdeckungsargument, welches der Theorie der Räume vom homogenen Typ im Sinne von Coifman und Weiss entlehnt ist.

**Lemma 4.22.** *Sei  $(Q_l)_{l \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung des  $\mathbb{R}^n$  mit Quadern der Seitenlänge  $a > 0$  so, daß*

$$\sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{N}} |Q_{l_1} \cap Q_{l_2}| = 0.$$

*Für jedes  $l \in \mathbb{N}$  bezeichne  $Q'_l$  den Quader, der denselben Mittelpunkt aber die doppelte Seitenlänge wie  $Q_l$  besitzt.*

*Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , die nicht von  $a$ , sondern ausschließlich von der Raumdimension abhängt, mit der Eigenschaft, daß für alle Folgen  $(f_l)_{l \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n)$ , welche die Bedingung  $\text{supp } f_l \subseteq Q'_l$  erfüllen, gilt:*

$$\left\| \sum_{l \in \mathbb{N}} f_l \right\|_p \leq C^{\frac{1}{p'}} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \|f_l\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Beweis.** Die Quader  $Q'_l$  besitzen die sogenannte endliche Überdeckungseigenschaft, das heißt es existiert ein festes  $C \in \mathbb{N}$  so, daß jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  in höchstens  $C$  der Quader  $Q'_l$  liegt. Aufgrund der Hölderschen Ungleichung erhalten wir somit

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{l \in \mathbb{N}} f_l \right\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{l \in \mathbb{N}} f_l(x) \right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{Q_l'}(x) f_l(x) \right|^p dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\left( \sum_{l \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{Q_l'}(x) \right)^{\frac{p}{p'}}}_{\leq C^{\frac{p}{p'}}} \left( \sum_{l \in \mathbb{N}} |f_l(x)|^p \right) dx \leq C^{\frac{p}{p'}} \sum_{l \in \mathbb{N}} \|f_l\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Wir benutzen nun die Lemmata 4.20 und 4.21, um mit Hilfe gewisser punktweiser Abschätzungen der Integralkerne von  $M_{\lambda,k}(A)$  und  $M_{\lambda,R}(A)$  auf die gewünschte  $L^p$ -Beschränktheit dieser Operatoren zu schließen.

**Satz 4.23.** *Sei  $A$  ein positiver selbstadjungierter Operator auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , welcher die Restriktionseigenschaft  $R(p \rightarrow 2)$  für ein  $1 \leq p < 2$  besitze. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die  $M_{\lambda,k}(A)$  und  $M_{\lambda,R}(A)$  Integralkerne  $K_{\lambda,k}$  bzw.  $K_{\lambda,R}$  besitzen, für die gilt:*

*Es existiert  $D > 0$  so, daß es zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  gibt, daß für alle  $k \geq 2$  und  $\lambda > 1$*

$$|K_{\lambda,k}(x, y)| \leq C_N 2^{-k\delta} (2^k \lambda^{-1})^{N - \frac{n}{2}} |x - y|^{-2N} \quad |x - y| \geq D 2^k \lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

$$|K_{\lambda,R}(x, y)| \leq C_N \lambda^{-\delta} |x - y|^{-2N} \quad |x - y| \geq D \lambda^{\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

*Dann existiert  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda > 1$  und  $k \geq 2$*

$$\|M_{\lambda,k}(A)\|_{p \rightarrow p} \leq C 2^{-k(\delta - \delta(p))} \quad \|M_{\lambda,R}(A)\|_{p \rightarrow p} \leq C$$

*gilt.*

**Beweis.** Bezeichne mit  $T_{\lambda,k,1}$  den Integraloperator, welcher durch den Kern  $K_{\lambda,k,1} := K_{\lambda,k} \mathbb{1}_{\{|x-y| \leq D 2^k \lambda^{-\frac{1}{2}}\}}$  gegeben ist, und setze  $K_{\lambda,k,2} := K_{\lambda,k} - K_{\lambda,k,1}$ .

Zunächst folgt aus (4.13) die Existenz eines  $B > 0$  so, daß für alle  $y \in \mathbb{R}^n$  gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_{\lambda,k,2}(x, y)| dx = \int_{\{|x-y| \geq D 2^k \lambda^{-\frac{1}{2}}\}} |K_{\lambda,k}(x, y)| dx \leq B 2^{-k\delta}.$$

Da dies auch wahr bleibt, wenn man  $x$  und  $y$  vertauscht, folgt mit der Youngschen Ungleichung, siehe C. Sogge [43], Theorem 0.3.1, für den durch den Kern  $K_{\lambda,k,2}$  gegebenen Integraloperator  $T_{\lambda,k,2}$ :

$$\|T_{\lambda,k,2}\|_{p \rightarrow p} \leq B 2^{-k\delta}. \quad (4.15)$$

Sei  $(Q_l)_{l \in \mathbb{N}}$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R}^n$  wie in Lemma 4.22 mit Quadern der Seitenlänge  $2D2^k \lambda^{-\frac{1}{2}}$  und setze  $\tilde{C} := C^{\frac{p}{p-2}}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|T_{\lambda,k,1}(f)\|_p^p &= \|T_{\lambda,k,1}\left(\sum_{l \in \mathbb{N}} f \mathbf{1}_{Q_l}\right)\|_p^p = \left\| \sum_{l \in \mathbb{N}} T_{\lambda,k,1}(f \mathbf{1}_{Q_l}) \right\|_p^p \\ &\leq \tilde{C} \sum_{l \in \mathbb{N}} \|T_{\lambda,k,1}(f \mathbf{1}_{Q_l})\|_p^p = \tilde{C} \sum_{l \in \mathbb{N}} \|T_{\lambda,k,1}(f \mathbf{1}_{Q_l}) \mathbf{1}_{Q'_l}\|_p^p \\ &\leq \tilde{C} \sum_{l \in \mathbb{N}} \left( \|M_{\lambda,k}(A)(f \mathbf{1}_{Q_l}) \mathbf{1}_{Q'_l}\|_p + \|T_{\lambda,k,2}(f \mathbf{1}_{Q_l})\|_p \right)^p. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden erhält man nun wegen  $p < 2$  und mit Lemma 4.20 die Existenz eines  $C > 0$  so, daß für alle  $\lambda > 1$ ,  $k \geq 2$  und  $l \in \mathbb{N}$

$$\|M_{\lambda,k}(A)(f \mathbf{1}_{Q_l}) \mathbf{1}_{Q'_l}\|_p \leq \|\mathbf{1}_{Q'_l}\|_{\frac{2p}{2-p}} \|M_{\lambda,k}(A)(f \mathbf{1}_{Q_l})\|_2 \leq C 2^{-k(\delta-\delta(p))} \|f \mathbf{1}_{Q_l}\|_p.$$

Bedenke dabei  $\|\mathbf{1}_{Q'_l}\|_{\frac{2p}{2-p}} = (4D2^k \lambda^{-\frac{1}{2}})^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}$ .

Zusammen mit (4.15) folgt

$$\begin{aligned} \|T_{\lambda,k,1}(f)\|_p^p &\leq \tilde{C}(C 2^{-k(\delta-\delta(p))} + B 2^{-k\delta})^p \sum_{l \in \mathbb{N}} \|f \mathbf{1}_{Q_l}\|_p^p \\ &\leq \tilde{C}(C + B) 2^{-k(\delta-\delta(p))p} \|f\|_p^p, \end{aligned}$$

da  $\delta(p) \geq 0$ . Nochmaliges Ausnutzen von (4.15) und  $M_{\lambda,k}(A) = T_{\lambda,k,1} + T_{k,\lambda,2}$  liefert die Behauptung für  $M_{\lambda,k}(A)$ .

Der Beweis der Abschätzung für  $M_{\lambda,R}(A)$  verläuft völlig analog, deshalb wird auf ihn verzichtet.  $\square$

### 4.3 Rieszmittel von $L_S$

Dieser Abschnitt ist dem Beweis zweier Sätze gewidmet, in denen die Abschätzungen (4.13) über die Größenordnung der Integralkerne von  $M_{\lambda,k}(L_S)$  bzw.  $M_{\lambda,R}(L_S)$  in „gewisser Entfernung“ von der Diagonale gezeigt werden. Nehmen wir diese einmal als bereits bewiesen an, so kann nun endlich der Beweis des Hauptsatzes 4.5 geführt werden:

**Beweis von Satz 4.5.** Wir können wiederum nach Korollar 1.26 o.B.d.A. annehmen, daß  $S$  von der Normalform aus 1.8 ist. Definiere  $M_{\lambda,0}$ ,  $M_{\lambda,k}$  und  $M_{\lambda,R}$  wie in Definition 4.7. Wähle dabei  $\varepsilon > 0$  so klein, daß die Voraussetzungen des Satzes 4.24 erfüllt sind. Nach Lemma 4.17 existieren  $C > 0$  und  $\lambda_0 \geq 1$  so, daß für alle  $\lambda \geq \lambda_0$  die Abschätzung  $\|M_{\lambda,0}(L_S)\|_{p \rightarrow p} \leq C$  gilt.

Nach Satz 4.24 und Korollar 4.28, sowie dem Restriktionssatz 3.5 sind nun die Voraussetzungen von Satz 4.23 erfüllt. Damit erhält man die Existenz eines  $C' > 0$  so, daß für alle  $k \geq 2$  und  $\lambda \geq \lambda_0$



$\|M_{\lambda,k}(L_S)\|_{p \rightarrow p} \leq C' 2^{-k(\delta - \delta(p))}$  und  $\|M_{\lambda,R}(L_S)\|_{p \rightarrow p} \leq C'$  gilt. Wegen

$$M_\lambda^\delta = M_{\lambda,0} + \sum_{\{k \in \mathbb{N}_{\geq 2} | 2^k \lambda^{-1} \leq \varepsilon\}} M_{\lambda,k} + M_{\lambda,R}$$

folgt also die gleichmäßige Beschränktheit der Rieszmittel.  $\square$

### 4.3.1 Abschätzungen der Integralkerne

Als erstes wenden wir uns den Kernen der  $M_{\lambda,k}(L_S)$  zu. Diese werden durch oszillierende Integrale ausgedrückt, und die gewünschte Abschätzung folgt dann aus Lemma A.6 im Anhang. Der Beweis zeigt ferner, wie man  $\varepsilon$  in der Definition 4.7 der Multiplikatoren  $M_{\lambda,k}$  in Abhängigkeit von der Matrix  $S$  zu wählen hat. Es stellt sich im wesentlichen als das Inverse des größten Eigenwertes von  $S$  heraus.

**Satz 4.24.** *Sei  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$ . Bezeichne mit  $K_{\lambda,k}$  den getwisteten Faltungskern des Operators  $M_{\lambda,k}(L_S)$ . Ist  $\varepsilon$  in der Definition 4.7 hinreichend klein, existiert ein  $D > 0$  so, daß es zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  derart gibt, daß für alle  $\lambda > 0$ ,  $k \geq 2$  und  $z \in \mathbb{R}^{2n}$  mit  $|z| \geq D2^k \lambda^{-\frac{1}{2}}$  gilt:*

$$|K_{\lambda,k}(z)| \leq C_N 2^{-k\delta} (2^{-k}\lambda)^{n-N} |z|^{-2N}.$$

**Beweis.** Sei  $\varepsilon$  in der Definition der  $M_{\lambda,k}$  so klein, daß nach Lemma 3.29 die Formel

$$K_{\lambda,k}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{M}_{\lambda,k}(t) \gamma_{t,S}(\varphi) dt \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$$

gilt. Da nach (4.3) und der Definition von  $M_{\lambda,k}$  außerdem

$$\widehat{M}_{\lambda,k}(t) = \lambda^{-\delta} \Gamma(\delta + 1) e^{-it\lambda} e^{i\frac{\pi}{2}(\delta+1) \text{sgn } t} |t|^{-\delta-1} \widehat{\eta}(t) \widehat{g}(2^{-k}\lambda t)$$

gilt, also  $\widehat{M}_{\lambda,k}$  auf einer Nullumgebung identisch verschwindet, folgt aus der Formel (2.35) mit dem Satz von Fubini, daß  $K_{\lambda,k}$  punktweise durch

$$K_{\lambda,k}(z) = \frac{\lambda^{-\delta} \Gamma(\delta + 1)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\eta}(t) \widehat{g}(2^{-k}\lambda t) e^{i\frac{\pi}{2}(\delta+1) \text{sgn } t} |t|^{-\delta-1} e^{-i\lambda t} \gamma_{t,S}(z) dt$$

gegeben ist. Durch Einsetzen der Formel (2.35) für  $\gamma_{t,S}$  und eine Variablentransformation, ergibt sich daraus

$$K_{\lambda,k}(z) = 2^{-k\delta} (2^{-k}\lambda)^n \frac{\Gamma(\delta + 1)(4\pi)^{-n}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a_{\lambda,k}(t) e^{-i2^{-k}\lambda|z|^2 \varphi_{\lambda,k,z}(t)} dt,$$

mit den Bezeichnungen

$$a_{\lambda,k}(t) := \left(\frac{2^k}{\lambda}\right)^n \frac{\widehat{\eta}\left(\frac{2^k}{\lambda}t\right)\widehat{g}(t)|t|^{-\delta-1} e^{i\frac{\pi}{4}(2(\delta+1)+\operatorname{sgn}(JS))\operatorname{sgn}t}}{|\det(\sinh(2^k\lambda^{-1}tS))|^{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi_{\lambda,k,z}(t) := \frac{2^{2k}}{\lambda|z|^2}t + \frac{2^k}{4\lambda}\omega\left(\frac{z}{|z|}, \coth\left(\frac{2^k}{\lambda}tS\right)\frac{z}{|z|}\right).$$

Um dieses oszillierende Integral geeignet abzuschätzen, stellt man fest, daß die Amplitudenfunktion  $a_{\lambda,k}$ , ebenso wie alle ihre Ableitungen, aufgrund der Bedingung  $2^k\lambda^{-1} \leq 2\varepsilon$  unabhängig von den Parametern  $\lambda$  und  $k$  beschränkt ist. Für die Phasenfunktion gilt außerdem

$$|\varphi'_{\lambda,k,z}(t)| = \left| \frac{2^{2k}}{\lambda|z|^2} + \frac{2^{2k}}{4\lambda^2}\omega\left(\frac{z}{|z|}, S\frac{1}{\sinh^2\left(\frac{2^k}{\lambda}tS\right)}\frac{z}{|z|}\right) \right|.$$

Um eine geeignete Abschätzung dieses Ausdrucks nach unten zu erhalten, stellt man fest, daß die Identität

$$S\frac{1}{\sinh^2}(tS) = t^{-2}S^{-1}f(tS)$$

gilt, wobei  $f$  die durch  $f(s) := \frac{s^2}{\sinh^2 s}$  gegebene Funktion ist. Wegen  $f(0 \cdot S) = Id$  und da nach Bemerkung 1.6 auch  $JS^{-1} < 0$  gilt, existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $|z| = 1$ :

$$|\omega(z, S^{-1}f(0 \cdot S)z)| = |\langle z, JS^{-1}z \rangle| > C.$$

Wähle nun  $\varepsilon$  zusätzlich klein genug, daß für alle  $s \in \mathbb{R}$  mit  $|s| \leq \varepsilon$  und  $|z| = 1$  immer noch die Bedingung

$$|\omega(z, S^{-1}f(sS)z)| \geq C$$

erfüllt ist. Dann erhalten wir für alle  $t \in \operatorname{supp} a_{\lambda,k}$  wegen  $2^k\lambda^{-1}t \in \operatorname{supp} \widehat{\eta} \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$  und für alle  $|z| = 1$ :

$$\frac{2^{2k}}{4\lambda^2}|\omega(z, S\sinh^{-2}\left(\frac{2^k}{\lambda}tS\right)z)| = \frac{1}{4t^2}|\omega(z, S^{-1}f(2^k\lambda^{-1}tS)z)| \geq \frac{C}{16},$$

da aus  $t \in \operatorname{supp} a_{\lambda,k}$  insbesondere auch  $|t| \leq 2$  folgt. Falls nun  $|z|^2 \geq \frac{32}{C}2^{2k}\lambda^{-1}$  und damit  $\frac{2^{2k}}{\lambda|z|^2} \leq \frac{C}{32}$ , erhalten wir

$$|\varphi'_{\lambda,k,z}(t)| \geq \frac{C}{16} > 0.$$

Für die höheren Ableitungen von  $\varphi_{\lambda,k,z}$  gilt ferner

$$\varphi_{\lambda,k,z}^{(l)}(t) = \left(\frac{2^k}{\lambda}\right)^{l+1} \omega\left(\frac{z}{|z|}, S^l \coth^{(l)}\left(\frac{2^k}{\lambda}tS\right)\frac{z}{|z|}\right).$$

Diese sind gleichmäßig in allen Parametern beschränkt, da der Ausdruck  $\frac{2^k}{\lambda}$  beschränkt ist und für  $t \in \text{supp } a_{\lambda,k}$  auch  $2 \geq |t| \geq \frac{1}{2}$  gilt.

Nach Lemma A.6 im Anhang existiert somit zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C_N > 0$  derart, daß für  $|z| \geq \sqrt{\frac{32}{C}} 2^k \lambda^{-\frac{1}{2}}$  die Abschätzung

$$\left| \int_{\mathbb{R}} a_{\lambda,k}(t) e^{i2^{-k}\lambda|z|^2\varphi_{\lambda,k,z}(t)} dt \right| \leq C_N (2^{-k}\lambda)^{-N} |z|^{-2N}$$

gilt, woraus die Behauptung folgt.  $\square$

Die Abschätzung für den Kern des Operators  $M_{\lambda,R}(L_S)$  ist ein wenig aufwendiger und von recht technischer Natur. Dazu werden nun auch die globalen Formeln (2.37) für die Kerne  $\gamma_{t,S}$  von  $e^{itL_S}$  benutzt.

**Voraussetzung 4.25.** Für den restlichen Verlauf des Kapitels sei  $S \in \text{sp}(n, \mathbb{R})^+$  von der Form

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -D \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

aus Lemma 1.8 mit einer positiv definiten Diagonalmatrix  $D = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ . Setze  $\mu := \min(\mu_1, \dots, \mu_n)$ .

**Lemma 4.26.** Seien  $a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  und  $\tau \subseteq \{1, \dots, n\}$  so, daß die Funktionen  $\cos^{-1}(\frac{\mu_j}{2}\cdot)$  für  $j \in \tau$  und  $\sin^{-1}(\frac{\mu_j}{2}\cdot)$  für  $j \notin \tau$  auf  $\text{supp } a$  beschränkt sind. Dann gelten:

- (i) Die in 2.45 definierte partielle symplektische Fouriertransformation des gewisteten Faltungskerns  $K$  von  $\hat{a}(L_S)$  bezüglich  $\tau$  ist eine Funktion und punktweise durch die Gleichung

$$\overset{\Delta_\tau}{K}(z) = \int_{\mathbb{R}} a(t) \overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{-t,S}(z) dt \quad (4.16)$$

gegeben.

- (ii) Sei zusätzlich  $a \in C^\infty(\mathbb{R})$  dergestalt, daß für jedes  $l \in \mathbb{N}_0$  die Bedingung  $a^{(l)} \in L^1(\mathbb{R})$  erfüllt ist. Bezeichnet dann  $K_\lambda$  den gewisteten Faltungskern von  $\hat{a}(L_S - \lambda)$ , so existiert zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  und  $\kappa > 0$  ein  $C_{N,\kappa}$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $\lambda > 0$  die Abschätzung

$$|\overset{\Delta_\tau}{K}_\lambda(z)| \leq C_{N,\kappa}(1+|z|^2)^{-N} \quad |z|^2 \geq \frac{8(1+\kappa)\lambda}{\mu} \quad (4.17)$$

*gilt.*

**Beweis.** Aufgrund der Voraussetzung über  $a$  ist  $\overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{-t,S}$  für  $t \in \text{supp } a$  punktweise durch Gleichung (2.37) gegeben. Definieren wir

$$h(z) := \int_{\mathbb{R}} a(t) \overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{-t,S}(z) dt,$$

so gilt offenbar  $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ . Wir zeigen, daß  $\overset{\Delta_\tau}{h}$  der getwistete Faltungskern des Operators  $\widehat{a}(L_S)$  ist. Seien dazu  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ . Definiert man  $\varphi^{\vee\tau}$  als die Spiegelung von  $\varphi$  in den Variablen  $(z_{(j)})_{j \in \tau}$ , so erhält man mit einem Analogon von (2.15) für partielle symplektische Fouriertransformationen, Formel (1.28) und Lemma 3.28, sowie der Tatsache, daß  $h$  invariant unter Spiegelungen ist, da dies für die  $\gamma_{t,S}$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi \times \overset{\Delta_\tau}{h}, \psi \rangle_{L^2} &= \langle \overset{\Delta_\tau}{\varphi} \times h \rangle(\overline{\psi}) = h(\overline{\psi} \times (\overset{\Delta_\tau}{\varphi})^{\vee\tau}) = \int_{\mathbb{R}} a(t) \overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{-t,S}(\overline{\psi} \times (\overset{\Delta_\tau}{\varphi})^{\vee\tau}) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} a(t) (\overset{\Delta_\tau}{\varphi} \times \overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{-t,S})(\overline{\psi}) dt = \int_{\mathbb{R}} a(t) (\varphi \times \gamma_{-t,S})(\overline{\psi}) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} a(t) \langle e^{-itL_S} \varphi, \psi \rangle_{L^2} dt = \langle \widehat{a}(L_S) \varphi, \psi \rangle_{L^2}. \end{aligned}$$

Dies zeigt (i).

Um Teil (ii) zu zeigen, definiert man zunächst

$$\varphi_1(t) := \frac{\lambda t}{|z|^2} + \frac{1}{4|z|^2} \left( \sum_{j \notin \tau} |z_{(j)}|^2 \cot\left(\frac{\mu_j}{2} t\right) - \sum_{j \in \tau} |z_{(j)}|^2 \tan\left(\frac{\mu_j}{2} t\right) \right) \quad (4.18)$$

und stellt fest, daß aus (i) und der expliziten Gestalt (2.37b) für die  $\overset{\Delta_\tau}{\gamma}_{-t,S}$

$$\overset{\Delta_\tau}{K}_\lambda(z) = \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i|z|^2 \varphi_1(t)} dt$$

folgt. Um das Verhalten (4.17) zu beweisen, betrachten wir wie üblich die Ableitung der Phasenfunktion  $\varphi_1$ . Diese besitzt die Gestalt

$$\varphi_1'(t) = \frac{\lambda}{|z|^2} - \frac{1}{8|z|^2} \left( \sum_{j \notin \tau} \mu_j |z_{(j)}|^2 \sin^{-2} \left( \frac{\mu_j}{2} t \right) + \sum_{j \in \tau} \mu_j |z_{(j)}|^2 \cos^{-2} \left( \frac{\mu_j}{2} t \right) \right).$$

Da nun aber  $|z|^2 \geq 8 \frac{1+\kappa}{\mu} \lambda$  gilt, erhält man zusammen mit

$$\sum_{j \notin \tau} \mu_j |z_{(j)}|^2 \sin^{-2} \left( \frac{\mu_j}{2} t \right) + \sum_{j \in \tau} \mu_j |z_{(j)}|^2 \cos^{-2} \left( \frac{\mu_j}{2} t \right) \geq \mu |z|^2,$$

daß die Phasenfunktion  $\varphi_1$  keine kritischen Punkte auf  $\text{supp } a$  besitzt:

$$|\varphi_1'(t)| \geq \frac{\mu}{8} \left( 1 - \frac{1}{1+\kappa} \right) = \frac{\mu\kappa}{8(1+\kappa)} > 0.$$

Die höheren Ableitungen von  $\varphi_1$  sind außerdem auf  $\text{supp } a$  gleichmäßig in  $z$  beschränkt. Also gilt nach Lemma A.6 die Behauptung (4.17).  $\square$

**Satz 4.27.** *Sei  $a \in C^\infty(\mathbb{R})$  so, daß sowohl  $a$  selbst als auch alle Ableitungen von  $a$  absolut integrierbar sind. Bezeichne dann mit  $K_\lambda$  den gewichteten Faltungskern des Operators  $\widehat{a}(L_S - \lambda)$ .*

*Dann existiert zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  und  $\kappa > 0$  ein  $C_{N,\kappa} > 0$  derart, daß für alle  $\lambda > 0$  und  $|z|^2 \geq \frac{8(1+\kappa)}{\mu} \lambda$  gilt:*

$$|K_\lambda(z)| \leq C_{N,\kappa} (1 + |z|)^{-N}. \quad (4.19)$$

**Beweis.** Definiere zunächst die Mengen  $A := \{t \in \mathbb{R} \mid \forall j: |\tan(\frac{\mu_j}{2} t)| > \frac{1}{16}\}$  sowie  $\widetilde{A} := \{t \in \mathbb{R} \mid \forall j: |\tan(\frac{\mu_j}{2} t)| \geq \frac{1}{32}\}$ , und wähle zu  $1 \leq j \leq n$  ein periodisches  $f_j \in C^\infty(\mathbb{R})$  so, daß  $0 \leq f_j \leq 1$ ,  $f_j(t) = 1$  falls  $|\tan(\frac{\mu_j}{2} t)| > \frac{1}{16}$  und  $f_j(t) = 0$  falls  $|\tan(\frac{\mu_j}{2} t)| < \frac{1}{32}$  gelten. Dann besitzt

$$\chi := \prod_{j=1}^n f_j \in C^\infty(\mathbb{R})$$

die Eigenschaften

- (i)  $0 \leq \chi \leq 1$ ,
- (ii)  $\chi|_A = 1$ ,
- (iii)  $\text{supp } \chi \subseteq \widetilde{A}$  und
- (iv) alle Ableitungen von  $\chi$  sind beschränkt.

Der letzte Punkt folgt daraus, daß  $\chi$  das Produkt von endlich vielen periodischen Funktionen ist. Bezeichne ferner mit  $K_{\lambda,1}$  den getwisteten Faltungskern des Operators  $\widehat{a\chi}(L_S - \lambda)$ . Aus Lemma 4.26, angewendet auf  $\tau = \emptyset$  folgt nun, daß

$$|K_{\lambda,1}(z)| \leq C_{N,\kappa} |z|^{-2N} \quad |z|^2 \geq \frac{8(1+\kappa)}{\mu} \lambda. \quad (4.20)$$

Um ein entsprechendes Ergebnis auch für den Kern von  $[a(1-\chi)]^\wedge(L_S - \lambda)$  zu zeigen, werden wir den Multiplikator weiter zerlegen: Definiere dazu für jedes nichtleere  $\tau \subseteq \{1, \dots, n\}$

$$B_\tau := \left( \bigcap_{j \in \tau} \left\{ t: \left| \tan\left(\frac{\mu_j}{2}t\right) \right| < \frac{1}{8} \right\} \right) \cap \left( \bigcap_{j \notin \tau} \left\{ t: \left| \tan\left(\frac{\mu_j}{2}t\right) \right| > \frac{1}{16} \right\} \right)$$

$$\tilde{B}_\tau := \left( \bigcap_{j \in \tau} \left\{ t: \left| \tan\left(\frac{\mu_j}{2}t\right) \right| < \frac{1}{4} \right\} \right) \cap \left( \bigcap_{j \notin \tau} \left\{ t: \left| \tan\left(\frac{\mu_j}{2}t\right) \right| > \frac{1}{32} \right\} \right)$$

Dann ist  $\{B_\tau\}_\tau$  eine Überdeckung von  $\mathbb{R} \setminus A$  durch offene Mengen. Außerdem gilt die Inklusion  $\overline{B_\tau} \subseteq \tilde{B}_\tau$ . Bekanntermaßen existiert dann eine Familie  $\{\tilde{\chi}_\tau\}_\tau$  in  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  so, daß

$$\text{supp } \tilde{\chi}_\tau \subseteq \tilde{B}_\tau \quad \sum_{j \in \tau} \tilde{\chi}_\tau = 1 \quad \text{auf } \mathbb{R} \setminus A$$

gelten. Durch ähnliche Argumente wie bei dem oben definierten  $\chi$  können wir auch hier garantieren, daß alle Ableitungen der Funktionen  $\tilde{\chi}_\tau$  beschränkt sind. Setze  $\chi_\tau := (1-\chi)\tilde{\chi}_\tau$ . Dann gilt aufgrund von  $\text{supp}(1-\chi) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$  offenbar  $\sum_\tau \chi_\tau = (1-\chi)$ . Wir erhalten also die Zerlegung

$$a(\widehat{1-\chi})(L_S) = \sum_{\tau \neq \emptyset} \widehat{a\chi}_\tau(L_S).$$

Im folgenden werden nun die getwisteten Faltungskerne jedes einzelnen Summanden auf der rechten Seite abgeschätzt. Fixiere also ein  $\emptyset \neq \tau \subseteq \{1, \dots, n\}$  und setze  $k := |\tau|$ . Definiere

$$\tilde{a}(t) := \frac{(-i)^{n-k} (4\pi)^{-n} a(t) \chi_\tau(t)}{\prod_{j \in \tau} \cos\left(\frac{\mu_j}{2}t\right) \prod_{j \notin \tau} \sin\left(\frac{\mu_j}{2}t\right)}.$$

Für die partielle symplektische Fouriertransformation des getwisteten Faltungskern  $K_{\lambda,2}$  von  $\widehat{a\chi}_\tau(L_S)$  gilt mit der Definition der  $B_\tau$  nach (4.16) und der Formel (2.37b):

$$K_{\lambda,2}^{\Delta_\tau}(z) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(t) e^{i(\lambda t + \frac{1}{4} \sum_{j \notin \tau} \cot(\frac{\mu_j}{2}t) |z_{(j)}|^2 - \sum_{j \in \tau} \tan(\frac{\mu_j}{2}t) |z_{(j)}|^2)} dt, \quad (4.21)$$

wobei für  $z = (q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  wiederum die Konvention  $z_{(j)} := (q_j, p_j)$  verwendet wird.

Um nun  $K_{\lambda,2}$  wie gewünscht abzuschätzen, bemerken wir zunächst unter Benutzung der Tatsache, daß die partielle symplektische Fouriertransformation selbstinvers ist:

$$K_{\lambda,2}(u, v) = (4\pi)^{-k} \int_{\mathbb{R}^{2k}} \overset{\Delta_\tau}{K}_{\lambda,2}(\theta, v) e^{-\frac{i}{2}\omega(u, \theta)} d\theta, \quad u \in \mathbb{R}^{2k}, v \in \mathbb{R}^{2(n-k)}, \quad (4.22)$$

wobei das Einsetzen in die Funktionen so zu verstehen ist, daß man die Komponenten richtig „einsortiert“. Wir benötigen nun noch eine „Abschneidefunktion“, also ein  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2k})$ , welches die Eigenschaften

(i)  $0 \leq h \leq 1$ ,

(ii)  $\text{supp } h \subseteq B_2(0)$  und

(iii)  $h|_{B_1(0)} = 1$

besitzt. Das Integral aus (4.22) wird dann in einen bezüglich  $\theta$  lokalen und einen globalen Teil zerlegt, wir definieren also

$$I_1(u, v) := \int_{\mathbb{R}^{2k}} h\left(\frac{\theta}{|u|}\right) \overset{\Delta_\tau}{K}_{\lambda,2}(\theta, v) e^{-\frac{i}{2}\omega(u, \theta)} d\theta$$

$$I_2(u, v) := \int_{\mathbb{R}^{2k}} (1 - h)\left(\frac{\theta}{|u|}\right) \overset{\Delta_\tau}{K}_{\lambda,2}(\theta, v) e^{-\frac{i}{2}\omega(u, \theta)} d\theta,$$

so daß sich  $K_{\lambda,2} = (4\pi)^{-k}(I_1 + I_2)$  ergibt.

Als erstes wird nun  $I_2$  abgeschätzt. Da  $|u|^2 + |v|^2 \geq 8\frac{1+\kappa}{\mu}\lambda$ , erhalten wir für  $\theta \in \text{supp}(1 - h)$  aufgrund der Definition von  $h$ , daß  $|\theta| \geq |u|$ , also  $|v|^2 + |\theta|^2 \geq 8\frac{1+\kappa}{\mu}\lambda$ . Durch Ausnutzen von (4.17) ergibt sich somit

$$|I_2(u, v)| \leq C_N \int_{|\theta| \geq |u|} (1 + |v|^2 + |\theta|^2)^{-N} d\theta$$

$$\leq C_N (1 + |v|^2)^{-\frac{N}{2}} \int_{|\theta| \geq |u|} (1 + |\theta|^2)^{-\frac{N}{2}} d\theta$$

$$\leq C'_N (1 + |v|^2)^{-\frac{N}{2}} (1 + |u|^2)^{2k - \frac{N}{2}},$$

falls  $N$  genügend groß ist. Damit verbleibt die Aufgabe, ein entsprechendes Ergebnis für  $I_1$  zu zeigen.

Setze dazu  $\kappa' := 1 + \frac{2}{\kappa}$ . Als erstes soll nun der Fall  $|v|^2 \geq \kappa'|u|^2$  betrachtet werden soll. Eine elementare Rechnung zeigt, daß aufgrund der Voraussetzung

$|u|^2 + |v|^2 \geq \frac{8(1+\kappa)}{\mu}\lambda$  die Bedingung  $|v|^2 \geq \frac{8(1+\frac{\kappa}{2})}{\mu}\lambda$  erfüllt ist. Dann können wir  $I_1$  wiederum mit (4.17) durch

$$\begin{aligned} |I_1(u, v)| &\leq C_{N, \frac{\kappa}{2}} \int_{\mathbb{R}^{2k}} (1 + |v|^2 + |\theta|^2)^{-N} d\theta \\ &\leq (1 + |v|^2)^{-\frac{N}{2}} \underbrace{C_{N, \frac{\kappa}{2}} \int_{\mathbb{R}^{2k}} (1 + |\theta|^2)^{-\frac{N}{2}} d\theta}_{C'_{N, \kappa}} \leq C'_{N, \kappa} (1 + |v|^2)^{-\frac{N}{4}} (1 + |u|^2)^{-\frac{N}{4}}, \end{aligned}$$

abschätzen, wobei im letzten Schritt die Voraussetzung  $|v|^2 \geq \kappa' |u|^2$  ausgenutzt wird.

Im Fall  $|v|^2 \leq \kappa' |u|^2$  zeigt man als erstes

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2k}} h\left(\frac{\theta}{|u|}\right) e^{-i|u|\varphi_2(\theta)} d\theta \right| \leq C_N (1 + |u|)^{-N}, \quad N \in \mathbb{N} \quad (4.23)$$

wobei die Phasenfunktion  $\varphi_2$  diesmal durch die Definition

$$\varphi_2(\theta) := \frac{\omega(u, \theta)}{2|u|} + \frac{1}{4|u|} \sum_{j \in \tau} |\theta_{(j)}|^2 \tan\left(\frac{\mu_j}{2} t\right)$$

gegeben ist. Da nun für  $t \in \text{supp } \tilde{a}$  und  $j \in \tau$  die Bedingung  $|\tan(\frac{\mu_j}{2} t)| \leq \frac{1}{4}$  gilt, erhalten wir unter Ausnutzung von  $|\theta| \leq 2|u|$ , daß die Phasenfunktion  $\varphi_2$  keine kritischen Punkte besitzt:

$$|\nabla \varphi_2(\theta)| \geq \frac{1}{4}.$$

Die höheren Ableitungen von  $\varphi_2$  sind wiederum gleichmäßig in  $t$  und  $u$  beschränkt, da wir  $|u| > 1$  annehmen können. Aus Lemma A.6 folgt somit (4.23). Um daraus die gewünschte Abschätzung von  $I_1$  zu erhalten, integrieren wir dies nun über  $t$ :

$$\begin{aligned} |I_1(u, v)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{a}(t) e^{i(\lambda t + \frac{1}{4} \sum_{j \notin \tau} \cot(\frac{\mu_j}{2} t) |v_{(j)}|^2)} \int_{\mathbb{R}^{2k}} h\left(\frac{\theta}{|u|}\right) e^{-i|u|\varphi_2(\theta)} d\theta dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |\tilde{a}(t)| \left| \int_{\mathbb{R}^{2k}} h\left(\frac{\theta}{|u|}\right) e^{i|u|\varphi_2(\theta)} d\theta \right| dt \leq (1 + |u|)^{-N} C_N \int_{\mathbb{R}} |\tilde{a}(t)| dt \\ &\leq C'_{N, \kappa} (1 + |u|)^{-\frac{N}{2}} (1 + |v|)^{-\frac{N}{2}}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt von der Ungleichung  $|v|^2 \leq \kappa' |u|^2$  Gebrauch gemacht wird.

Damit ist die Behauptung endgültig bewiesen.  $\square$



Die gewünschte Abschätzung des getwisteten Faltungskerns von  $M_{\lambda,R}(L_S)$  ergibt sich nun aus gerade bewiesenem Satz als Korollar:

**Korollar 4.28.** *Bezeichne  $K_{\lambda,R}$  den getwisteten Faltungskern von  $M_{\lambda,R}(L_S)$ . Dann gibt es zu  $N \in \mathbb{N}$  und  $\kappa > 0$  ein  $C_{N,\kappa} > 0$  so, daß für  $\lambda > 0$  und  $|z|^2 \geq \frac{8(1+\kappa)}{\mu} \lambda$*

$$|K_{\lambda,R}(z)| \leq C_N \lambda^{-\delta} |z|^{-N}$$

*gilt.*

**Beweis.** Definiere  $a(s) := (1 - \widehat{\eta})(-s) |s|^{-\delta-1} e^{-\frac{\pi}{2}(\delta+1) \operatorname{sgn} s}$ . Dann erfüllt  $a$  die Voraussetzungen von Satz 4.27. Aufgrund der Formel

$$\widehat{M_{\lambda,R}}(s) = \lambda^{-\delta} \Gamma(\delta + 1) e^{-i\lambda s} a(-s)$$

erhalten wir also  $M_{\lambda,R}(t) = \frac{\lambda^{-\delta} \Gamma(\delta+1)}{2\pi} \widehat{ae^{i\lambda \cdot}}(t)$ , und die Behauptung folgt zusammen mit  $\widehat{ae^{i\lambda \cdot}}(L_S) = \widehat{a}(L_S - \lambda)$  aus Satz 4.27.  $\square$



# Anhang A

## Oszillierende Integrale

### A.1 Die Kettenregel für höhere Ableitungen

Im folgenden bezeichnen  $X, Y, Z$  stets Banachräume. Für  $j, k \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\mathbb{N}_k^j$  die Menge aller Multiindizes  $l$  der Länge  $j$ , für deren Ordnung  $|l| = k$  gilt, also

$$\mathbb{N}_k^j := \{l \in \mathbb{N}^j : |l| = k\}.$$

Weiterhin bezeichne  $S_k$  die Gruppe der Permutationen auf  $k$  Elementen. Das folgende Lemma liefert die Gestalt höherer Ableitungen der Hintereinanderausführung zweier Abbildungen. Der Beweis ist eine einfache, allerdings recht technische Induktion.

**Lemma A.1 (Die Kettenregel).** *Seien  $U \subseteq X, V \subseteq Y$  offen,  $f \in C^k(U, Y)$  und  $g \in C^k(V, Z)$ ,  $u \in \text{Dom}(g \circ f)$ . Dann besitzt  $D^k(g \circ f)(u)$  die Form*

$$\begin{aligned} & D^k(g \circ f)(u)(x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1}{j!} \sum_{l \in \mathbb{N}_k^j} \frac{1}{l!} \sum_{\pi \in S_k} [D^j g(f(u)) \circ (D^{l_1} f(u), \dots, D^{l_j} f(u))](x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(k)}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Im Spezialfall  $Y = \mathbb{R}$  und  $g(y) = \frac{1}{y}$  ergibt sich damit die folgende Formel für die höheren Ableitungen von  $\frac{1}{f}$ :

**Beispiel A.2.** Sei der Einfachheit halber  $U \subseteq \mathbb{R}$  offen, und besitze  $f \in C^k(U)$  in  $U$  keine Nullstelle. Dann gilt nach (1.1) wegen  $|S_k| = k!$  und  $\left(\frac{1}{y}\right)^{(j)} = (-1)^j j! y^{-(j+1)}$

$$D^k\left(\frac{1}{f}\right)(u) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \sum_{l \in \mathbb{N}_k^j} \frac{k!}{l!} \frac{\prod_{m=1}^j f^{(l_m)}(u)}{f(u)^{j+1}}.$$

Wir wenden uns nun einer weiteren speziellen Situation zu, die beim Beweis von Sätzen über das Verhalten oszillierender Integrale von Nutzen ist. Bezeichne  $g: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die durch

$$g(x) := \frac{x}{|x|^2}$$

definierte Abbildung. Dann erhalten wir als Korollar aus Lemma A.1:

**Korollar A.3.** *Besitze  $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)$  auf  $U$  keine Nullstellen. Dann gilt für  $u \in U$ :*

$$\left\| D^k \left( \frac{f}{|f|^2} \right) (u) \right\| \leq C_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{|f(u)|^{j+1}} \sum_{l \in \mathbb{N}_k^j} \|D^{l_1} f(u)\| \cdots \|D^{l_j} f(u)\|,$$

mit von  $f$  unabhängigen Konstanten  $C_k$ .

**Beweis.** Da es sich bei  $g$  um eine homogene Funktion vom Grade  $-1$  handelt, ist  $D^j g$  homogen vom Grade  $-1-j$ . Es gilt also

$$D^j g(f(u)) = D^j g \left( |f(u)| \frac{f(u)}{|f(u)|} \right) = |f(u)|^{-1-j} D^j g \left( \frac{f(u)}{|f(u)|} \right),$$

und damit  $\|D^j g(f(u))\| \leq \underbrace{\sup_{|h|=1} \|D^j g(h)\|}_{E_j} |f(u)|^{-1-j}$ . Wendet man nun Lemma

A.1 auf  $g \circ f$  an, so ergibt sich daraus durch triviales Abschätzen der Fakultäten im Nenner und mit  $|S_K| = k!$

$$\left\| D^k \left( \frac{f}{|f|^2} \right) (u) \right\| \leq k! \sum_{j=1}^k \frac{E_j}{|f(u)|^{j+1}} \sum_{l \in \mathbb{N}_k^j} \prod_{m=1}^j \|D^{l_m} f(u)\|,$$

also die Behauptung.  $\square$

Es folgen nun noch zwei weitere Lemmata, die wir zum Beweis der Aussagen über oszillierende Integrale im nächsten Abschnitt benötigen

**Lemma A.4.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ . Definiere den Operator  $L_g$  durch*

$$L_g f(x) = \operatorname{div}(gf)(x), \quad f \in C^\infty(U). \quad (1.2)$$

Dann gilt  $k \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$|L_g^k f(x)| \leq C_{k,1} \sum_{\{l \in \mathbb{N}_0^{k+1}; |l|=k\}} \|D^{l_{k+1}} f(x)\| \prod_{j=1}^k \|D^{l_j} g(x)\| \quad (1.3)$$

mit universellen, d.h. von  $f$  und  $g$  unabhängigen Konstanten  $C_{k,1} > 0$ .

**Beweis.** Per vollständiger Induktion: Für  $l \in \mathbb{N}_0$  gilt aufgrund der Definition (1.2) von  $L_g$  und der Leibniz-Formel

$$\begin{aligned} & \|D^l L_g f(u)\| \\ & \leq n \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} \left[ \|D^{j+1} g(u)\| \|D^{l-j} f(u)\| + \|D^j g(u)\| \|D^{l-j+1} f(u)\| \right] \quad (1.4) \end{aligned}$$

und damit insbesondere die Behauptung im Falle  $k = 1$ . Sei die Aussage also nun für ein  $k \in \mathbb{N}$  bewiesen. Dann erhalten wir mit der Induktionsvoraussetzung:

$$|L_g^{k+1} f(u)| = |L_g^k(L_g f)(u)| \leq C_{k,1} \sum_{\{l \in \mathbb{N}_0^{k+1} : |l|=k\}} \left( \prod_{j=1}^k \|D^{l_j} g(u)\| \right) \|D^{k+1} L_g f(u)\|.$$

Wendet man (1.4) auf den Term  $\|D^{k+1} L_g f(u)\|$  an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \|D^{k+1} L_g f(u)\| \\ & \leq n \sum_{m=0}^{k+1} \binom{k+1}{m} \left[ \|D^{m+1} g(u)\| \|D^{k+1-m} f(u)\| + \|D^m g(u)\| \|D^{k+1-m+1} f(u)\| \right], \end{aligned}$$

die Behauptung gilt also auch für  $k + 1$ . □

Insbesondere ist für uns der Spezialfall  $g = \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2}$  von Interesse. In dieser Situation kann man die Ableitungen von  $g$  mit Hilfe von Korollar A.3 in Termen von  $\varphi$  ausdrücken und erhält:

**Lemma A.5.** *Seien  $a \in C^k(U)$ ,  $\varphi \in C^{k+1}(U)$  dergestalt, daß  $D\varphi$  keine Nullstellen in  $U$  besitzt. Setzt man  $\Phi := \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|^2}$ , so ergibt sich*

$$|L_{\Phi}^k a(u)| \leq C_{k,2} \sum_{p=0}^k \|D^p a(u)\| \sum_{j=1}^{k-p} \frac{1}{\|D\varphi(u)\|^{k+j}} \sum_{l \in \mathbb{N}_{k-p}^j} \prod_{m=1}^j \|D^{l_m+1} \varphi(u)\|. \quad (1.5)$$

**Beweis.** Aus Lemma A.4 folgt zunächst

$$|L_{\Phi}^k a(u)| \leq C_{k,1} \sum_{p=0}^k \|D^p a(u)\| \sum_{\{l \in \mathbb{N}_0^k : |l|=k-p\}} \prod_{m=1}^k \|D^{l_m} \Phi(u)\|.$$

Die Ausdrücke  $\|D^{l_m} \Phi(u)\|$  lassen sich nun nach Korollar A.3 durch

$$\|D^{l_m}\Phi(u)\| \leq C_{l_m} \sum_{j_m=1}^{l_m} \frac{1}{\|D\varphi(u)\|^{j_m+1}} \sum_{q^m \in \mathbb{N}_{l_m}^{j_m}} \|D^{q_1^m+1}\varphi(u)\| \cdots \|D^{q_{j_m}^m+1}\varphi(u)\|$$

abschätzen. Für jede Wahl der Indizes gilt aber stets:  $j := j_1 + \cdots + j_m \leq |l| = k - p$ . Die Anzahl der Faktoren im Zähler beträgt ebenfalls  $j_1 + \cdots + j_k = j$ . Da außerdem  $\sum_{m=1}^k |q^m| = |l| = k - p$ , erhält man die Behauptung.  $\square$

## A.2 Das Prinzip der stationären Phase

Die hier zusammengestellten Ergebnisse über oszillierende Integrale finden sich im Prinzip auch in den Büchern von C. Sogge [43] und E. Stein [45]. Die bei den Abschätzungen entstehenden Konstanten sollen an dieser Stelle aber etwas genauer auf ihre Abhängigkeit von Amplitude und Phasenfunktion untersucht werden. Dies ist oftmals bei Situationen in denen die Amplitude oder auch die Phasenfunktion von Parametern abhängen äußerst nützlich.

Es sollen im folgenden zwei Aussagen über sogenannte oszillierende Integrale erläutert werden, die beim Beweis der Restriktionssätze in Kapitel 3 eine Rolle spielen. Dabei handelt es sich um Integrale der Form

$$\int_U a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx, \quad (1.6)$$

mit üblicherweise glatten Funktionen  $a \in C_0^\infty(U)$  und  $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ . Man interessiert sich für das Verhalten dieses Integrals, falls  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Ein erstes Ergebnis ist, daß sich (1.6) mindestens wie  $O(|\lambda|^{-N})$  für jedes  $N \in \mathbb{N}$  verhält, falls die Ableitung von  $\varphi$  auf dem Träger von  $a$  keine Nullstellen besitzt. Vergleiche dazu auch Lemma 0.4.7 im Buch von C. Sogge [43].

Der Beweis beruht im wesentlichen auf genügend häufiger partieller Integration. Dazu machen wir folgende Überlegung: Für den Exponentialterm gilt

$$e^{i\lambda\varphi(x)} = \frac{\langle \nabla e^{i\lambda\varphi}(x), \nabla\varphi(x) \rangle}{i\lambda |\nabla\varphi(x)|^2} = \frac{1}{i\lambda} T(e^{i\lambda\varphi})(x),$$

mit dem Operator  $Tf(x) = \frac{\langle \nabla f(x), \nabla\varphi(x) \rangle}{|\nabla\varphi(x)|^2}$ . Der zu  $T$  transponierte Operator besitzt nun die Gestalt

$$T^t f(x) = - \sum_{j=1}^n \partial_j \left( \frac{\partial_j \varphi}{|\nabla\varphi|^2} f \right) (x) = - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2} f \right) (x) = -L_\Phi f,$$

wobei  $\Phi = \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2}$  und  $L_\Phi$  wie in 1.2 definiert ist. Da  $\operatorname{supp} a$  kompakt ist, ergibt sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \left| \int_K a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| &= |\lambda|^{-N} \left| \int_K a(x) T^N(e^{i\lambda\varphi})(x) dx \right| \\ &\leq |\lambda|^{-N} \int_K |(L_\Phi)^N a(x)| dx. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Für den Ausdruck  $(L_\Phi)^N a$  liefert aber das Lemma A.5 eine für unsere Ergebnisse ausreichende Abschätzung.

Das erste Resultat ist eine Aussage über das Verhalten oszillierender Integrale deren Phasenfunktion keine kritischen Punkte besitzt.

**Lemma A.6.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $a \in C_0^\infty(U)$ . Setze  $K := \text{supp } a$ . Sei ferner  $\mathcal{B}$  eine Teilmenge von  $C^\infty(K, \mathbb{R})$  mit der Eigenschaft, daß  $\{D^2\varphi\}_{\varphi \in \mathcal{B}}$  in  $C^\infty(K, \mathbb{R})$  beschränkt ist und außerdem ein  $D > 0$  so existiert, daß für  $\varphi \in \mathcal{B}$  gilt:*

$$|\nabla\varphi(x)| \geq D, \quad x \in K.$$

*Dann existiert zu jedem  $N \in \mathbb{N}$  eine nur von  $\mathcal{B}$  und  $D$  abhängige Konstante  $C_N > 0$  so, daß für alle  $\varphi \in \mathcal{B}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\left| \int_K a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq C_N |K| \|a\|_{C^N(K)} (1 + |\lambda|)^{-N}. \quad (1.8)$$

**Beweis.** Für  $|\lambda| \leq 1$  ist dies trivial. Es gelte also  $|\lambda| > 1$ . Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus der diesem Lemma vorangegangenen Diskussion, also Formel (1.7), und natürlich aus Lemma A.5 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in (1.5) im Zähler nur zweite und höhere Ableitungen von  $\varphi$  auftauchen.  $\square$

Als nächstes wenden wir uns dem Fall zu, in dem die Phasenfunktion  $\varphi$  sogenannte kritische Punkte besitzt. Dabei heißt  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $\varphi$ , falls die erste Ableitung von  $\varphi$  in  $x_0$  verschwindet, also  $D\varphi(x_0) = 0$  gilt. Der Punkt  $x_0$  heißt ein nicht-ausgearteter kritischer Punkt von  $\varphi$ , falls zusätzlich  $D^2\varphi(x_0) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n*})$  ein Isomorphismus ist. Besitzt  $\varphi$  kritische Punkte in  $\text{supp } a$ , so ist das Verhalten des Integrals (1.6) für  $|\lambda| \rightarrow \infty$  im allgemeinen sehr viel schlechter als (1.8), siehe dazu auch E. Stein [45] Kapitel 8. Falls diese allerdings nicht-ausgeartet sind, gilt immerhin noch

$$\left| \int_{\text{supp } a} a(x) e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \lesssim \lambda^{-\frac{n}{2}}. \quad (1.9)$$

Man sagt auch, die Phase sei stationär und nennt die dabei übliche Beweismethode auch das Prinzip oder die Methode der „stationären Phase“. Wir werden nun (1.9) zeigen. Dabei soll außerdem untersucht werden, wie die in  $\lesssim$  „enthaltenen“ Konstanten von  $a$  und  $\varphi$  abhängen. Als Vorbereitung dient folgendes Lemma.

**Lemma A.7.** Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und  $K \subseteq U$  kompakt. Ferner seien  $M$  ein kompakter metrischer Raum und  $\{\varphi_y\}_{y \in M}$  eine Familie in  $C^2(U)$  so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Die Abbildungen  $(x, y) \mapsto D\varphi_y(x)$  und  $(x, y) \mapsto D^2\varphi_y(x)$  sind stetig auf  $U \times M$ .
- (b) Es existiert ein  $D > 0$  so, daß für jedes  $(x, y) \in K \times M$  mit  $D\varphi_y(x) = 0$  gilt:  $\min_{|h|=1} \|D^2\varphi_y(x)h\| \geq D$ .

Dann existieren  $N \in \mathbb{N}$  und  $\delta, \varepsilon > 0$  so, daß für alle  $y \in M$  gilt:

- (i) Die Funktion  $\varphi_y$  besitzt höchstens  $N$  kritische Punkte in  $K$ , welche alle nicht-ausgeartet sind.
- (ii) Ist  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $\varphi_y$ , so gilt für  $|x - x_0| \leq \delta$ :

$$\|D\varphi_y(x)\| \geq \frac{D}{2} |x - x_0|.$$

- (iii) Sei  $y \in M$ . Bezeichne  $x_1, \dots, x_m$  die kritischen Punkte von  $\varphi_y$ , so gilt für jedes  $x \in K_y := K \setminus \bigcup_{j=1}^m B_{\frac{\delta}{2}}(x_j)$ :

$$\|D\varphi_y(x)\| \geq \varepsilon.$$

**Beweis.** Aus Bedingung (b) folgt sofort, daß  $D^2\varphi_y(x)$  injektiv, also ein Isomorphismus ist. Also sind sämtliche auftretende kritischen Punkte nicht-ausgeartet. Wähle  $\delta > 0$  so, daß einerseits für alle  $x \in K$  die Inklusion  $B_\delta(x) \subseteq U$  gilt und außerdem für alle  $x \in K$ ,  $x' \in U$  und  $y \in L$  mit  $|x - x'| \leq \delta$  gilt:  $\|D^2\varphi_y(x) - D^2\varphi_y(x')\| \leq \frac{D}{2}$ . Sei dann  $y \in M$  und  $x_0 \in K$  ein kritischer Punkt von  $\varphi_y$ . Dann erhält man für  $|x - x_0| \leq \delta$ :

$$\begin{aligned} \|D\varphi(x)\| &= \left\| \int_0^1 D^2(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt \right\| \geq \underbrace{\|D^2\varphi(x_0)(x - x_0)\|}_{\geq D|x-x_0|} \\ &\quad - \underbrace{\left\| \int_0^1 (D^2\varphi(x_0 + t(x - x_0)) - D^2\varphi(x_0))(x - x_0) dt \right\|}_{\leq \frac{D}{2}|x-x_0|} \\ &\geq \frac{D}{2} |x - x_0|, \end{aligned}$$



es gilt also (ii). Außerdem vervollständigt dies auch den Beweis von (i), da der Abstand zweier kritischer Punkte von  $\varphi_y$  unabhängig von  $y$  nach unten durch  $\delta$  beschränkt ist.

Da  $M$  kompakt ist, können wir uns beim Beweis von (iii) darauf beschränken, zu  $y \in M$  eine Umgebung von  $y$  so zu finden, daß (iii) gilt.

Sei also  $y \in M$  fest. Bezeichne mit  $x_1, \dots, x_m$  die kritischen Punkte von  $\varphi_y$  in  $K$ . Es existiert ein  $C_y > 0$  so, daß für  $x \in \tilde{K} := K \setminus \bigcup_{j=1}^m B_{\frac{\delta}{4}}(x_j)$ :

$$\|D\varphi_y(x)\| \geq C_y.$$

Aufgrund der Stetigkeit von  $D\varphi$  existiert dann eine Umgebung  $U_y$  von  $y$  derart, daß für  $y' \in U_y$  und  $x \in \tilde{K}$  gilt:  $\|D\varphi_{y'}(x)\| \geq \frac{C_y}{2}$ . Damit ist insbesondere auch  $K_{y'} \subseteq \tilde{K} = K \setminus \bigcup_{j=1}^m B_{\frac{\delta}{4}}(x_j)$ , da die kritischen Punkte von  $\varphi_{y'}$  alle in  $\tilde{K}$  enthalten sind. Damit gilt also (iii), was den Beweis vervollständigt.  $\square$

**Lemma A.8.** *Seien  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $V \subseteq \mathbb{R}^l$  offen,  $K \subseteq U$  kompakt und  $\varphi: U \times V \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

- (a) *Für festes  $y \in V$  sei  $\varphi(\cdot, y)$  eine  $C^2$ -Funktion.*
- (b) *Die Abbildungen  $(x, y) \mapsto D\varphi(\cdot, y)(x)$  und  $(x, y) \mapsto D^2\varphi(\cdot, y)(x)$  seien stetig auf  $U \times V$ .*

*Ist dann  $y_0 \in V$  derart, daß  $\varphi(\cdot, y_0)$  höchstens nicht-ausgeartete kritische Punkte in  $K$  besitzt, so existiert eine kompakte Umgebung  $M$  von  $y_0$  in  $V$  so, daß die Familie  $\{\varphi(\cdot, y)\}_{y \in M}$  die Voraussetzungen von Lemma A.7 erfüllt.*

**Beweis.** Bezeichne mit  $x_1, \dots, x_m$  die kritischen Punkte von  $\varphi(\cdot, y_0)$ . Es existiert also ein  $D > 0$  so, daß für alle  $1 \leq j \leq m$  gilt:  $\min_{|h|=1} \|D^2\varphi(\cdot, y_0)(x_j)h\| \geq D$ .

Aufgrund von Voraussetzung (b) existieren also Umgebungen  $V'$  von  $y_0$  und  $U'$  von  $\{x_1, \dots, x_m\}$  so, daß für  $(x, y) \in U' \times V'$  gilt:

$$\min_{|h|=1} \|D^2\varphi(\cdot, y)(x)h\| \geq \frac{D}{2}. \quad (1.10)$$

Da  $K \setminus U'$  kompakt ist, muß ferner  $\min_{x \in K \setminus U'} \|D\varphi(\cdot, y_0)(x)\| > 0$  gelten. Wir können also wegen der Stetigkeit von  $(x, y) \mapsto D\varphi(\cdot, y)(x)$  die Umgebung  $V'$  so verkleinern, daß zusätzlich

$$\min_{(x, y) \in (K \setminus U') \times V'} \|D\varphi(\cdot, y)(x)\| > 0 \quad (1.11)$$

gilt. Wählt man  $V'$  außerdem kompakt, so ist die Behauptung bewiesen. Ist nämlich  $x \in K$  ein kritischer Punkt von  $\varphi(\cdot, y)$  mit einem  $y \in V'$ , so muß wegen (1.11) schon  $x \in U'$  gelten. Also ist aufgrund von (1.10) die Bedingung (b) aus Lemma A.7 erfüllt.  $\square$

Damit sind wir nun in der Lage den Satz über das Verhalten oszillierender Integrale mit stationärer Phase in einer Version zu zeigen, die besonders nützlich für die Anwendung auf die Beweise der Restriktionssätze in Kapitel 3 ist. Insbesondere zeigt sich, daß bei von  $\lambda$  abhängigen Amplitudenfunktionen  $a_\lambda$ , wie sie in Satz 3.34 auftreten, zugelassen werden kann, daß die Ableitungen von  $a_\lambda$  in  $\lambda$  ein gewisses Wachstum aufweisen. Wie bereits in Lemma A.6 werden wir die Aussage auch hier so formulieren, daß man eine gleichmäßige Abschätzung für ganze Familien von Phasenfunktionen erhält, die natürlich gewisse Voraussetzungen erfüllen müssen.

**Satz A.9 (Stationäre Phase).** *Seien  $a \in C_0^\infty(U)$  und  $K \subseteq U$  kompakt mit  $\text{supp } a \subseteq K$ . Sei  $M$  ein kompakter metrischer Raum und  $\{\varphi_y\}_{y \in M}$  eine Familie in  $C^\infty(U, \mathbb{R})$ , welche die Voraussetzungen von Lemma A.7 erfüllt und für die  $\{D^2\varphi_y\}_{y \in M}$  in  $C^\infty(K)$  beschränkt ist. Dann existiert ein  $C > 0$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $y \in M$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  die Abschätzung*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i\lambda\varphi_y(x)} dx \right| \leq C \left( \sum_{j=0}^{n+1} (1 + |\lambda|)^{-j} \|D^j a\|_\infty \right) (1 + |\lambda|)^{-\frac{n}{2}} \quad (1.12)$$

*gilt.*

**Beweis.** Wir können uns abermals auf den Fall  $|\lambda| > 1$  beschränken und außerdem o.B.d.A.  $\lambda > 0$  voraussetzen, da man andererseits die Familie  $\{\varphi_y\}_{y \in L}$  durch  $\{-\varphi_y\}_{y \in L}$  ersetzt.

Als erstes stellt man fest, daß aus Lemma A.7 folgt, daß ein  $\delta > 0$  so existiert, daß für  $y \in M$  und einen kritischen Punkt  $x_0 \in K$  von  $\varphi_y$  gilt:

$$\|D\varphi_y(x)\| \geq \frac{D}{2} |x - x_0|, \quad \text{falls } |x - x_0| \leq \delta.$$

Insbesondere existiert also ein  $m_0 \in \mathbb{N}$  so, daß die Anzahl der kritischen Punkte von  $\varphi \in \mathcal{B}$  nicht größer als  $m_0$  ist. Sei nun  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  so, daß

- (i)  $0 \leq \Psi \leq 1$
- (ii)  $\text{supp } \Psi \subseteq B_1(0)$  und
- (iii)  $\Psi(x) = 1$  falls  $|x| \leq \frac{1}{2}$ .

Setze für  $\eta \in \mathbb{R}$ :  $\Psi_\eta(u) := \Psi(\eta u)$ .

Bezeichnen  $x_1, \dots, x_m$  die kritischen Punkte von  $\varphi_y$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \int_K a(x) e^{i\lambda\varphi_y(x)} dx &= \sum_{j=1}^m \int_K a(x) \Psi\left(\frac{x - x_j}{\delta}\right) e^{i\lambda\varphi_y(x)} dx \\ &\quad + \int_K a(x) \left(1 - \sum_{j=1}^m \Psi\left(\frac{x - x_j}{\delta}\right)\right) e^{i\lambda\varphi_y(x)} dx. \end{aligned}$$

Der letzte Summand läßt sich mit Lemma A.6 wie gewünscht abschätzen und zwar gleichmäßig in  $y \in M$ . Es gilt nämlich für jedes  $x \in K$ , welches die Bedingung  $1 - \sum_{j=1}^m \Psi\left(\frac{x-x_j}{\delta}\right) \neq 0$  erfüllt, schon  $x \in K_y$  (siehe Lemma A.7 (iii)), also  $\|D\varphi_y(x)\| \geq \varepsilon$ .

Für die erste Summe bemerkt man, daß man nur einen einzigen Summanden betrachten muß da  $m$  unabhängig von  $y$  durch  $m_0$ , die maximale Anzahl kritischer Punkte, beschränkt ist. Ersetzt man  $a$  durch  $a(x)\Psi\left(\frac{x-x_j}{\delta}\right)$ , so kann also o.B.d.A. davon ausgegangen werden, daß

- (i)  $a$  nur einen einzigen kritischen Punkt  $x_0$  besitzt und
- (ii) für alle  $x \in K$  die Abschätzung

$$\|D\varphi_y(x)\| \geq \frac{D}{2}|x - x_0| \quad (1.13)$$

gilt.

Wir benutzen jetzt wieder unsere „universelle Abschneidefunktion“  $\Psi$  um die linke Seite von (1.12) in zwei Summanden aufzuspalten, nämlich

$$\int_K a(x)e^{i\lambda\varphi(x)} dx = \int_K a(x)\Psi(\lambda^{\frac{1}{2}}(x - x_0))e^{i\lambda\varphi(x)} dx + \underbrace{\int_K a(x)[1 - \Psi(\lambda^{\frac{1}{2}}(x - x_0))]e^{i\lambda\varphi(x)} dx}_I. \quad (1.14)$$

Bezeichne  $c_n$  das Volumen der Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$ . Dann läßt sich der ersten Summand trivial abschätzen:

$$\left| \int_K a(x)\Psi(\lambda^{\frac{1}{2}}(x - x_0))e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq c_n \|a\|_{\infty} \lambda^{-\frac{n}{2}},$$

da  $\text{supp } \Psi_{\lambda^{\frac{1}{2}}} \subseteq B_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(0)$ .

Nun müssen wir noch den zweiten Summanden  $I$  von (1.14) geeignet abschätzen. Dies geschieht wiederum mittels partieller Integration. Bezeichne dazu  $L_{\Phi}$  wiederum den Operator aus (1.2) mit  $\Phi := \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|^2}$ . Dann gilt genau wie in (1.7) mit  $N$ -facher partieller Integration

$$|I| \leq \lambda^{-N} \int_K |L_{\Phi}^N(a(1 - \Psi_{\lambda^{\frac{1}{2}})})(x)| dx.$$

Nach Lemma A.5 folgt nun aber insbesondere, da  $\{D^2\varphi_y\}_{y \in M}$  eine beschränkte Familie in  $C^{\infty}(K)$  ist:

$$|L^N(a(1 - \Psi_{\lambda^{\frac{1}{2}}})) (x)| \leq \sum_{j=0}^N C_j \frac{\|D^j a(x)\|}{\|D\varphi_y(x)\|^{2N-j}}.$$

Bezeichnet  $s_n$  die Oberfläche der Sphäre  $S^{n-1}$  in  $\mathbb{R}^n$ , und benutzt man die Abschätzung (1.13), so ergibt sich für  $N \geq n + 1$ :

$$\begin{aligned} |I| &\leq \lambda^{-N} \sum_{j=0}^N C_j \|D^j a(x)\| \int_{|x-x_0| \geq \lambda^{-\frac{1}{2}}} |x-x_0|^{-2N+j} dx \\ &= \lambda^{-N} \sum_{j=0}^N C_j \|D^j a(x)\| s_n \int_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}^{\infty} r^{n-2N+j-1} dr \\ &= \lambda^{-N} \sum_{j=0}^N C_j \|D^j a(x)\| \frac{s_n}{2N-n-j} \lambda^{-\frac{n+j}{2}+N} \\ &= \lambda^{-\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^N C'_j \lambda^{-\frac{j}{2}} \|D^j a(x)\|. \end{aligned}$$

Wählt man insbesondere  $N := n + 1$  minimal, so ergibt sich genau die Behauptung.  $\square$

# Literaturverzeichnis

- [1] Ralph Abraham und Jerrold E. Marsden, *Foundations of mechanics*, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978. (MR 81e:58025)
- [2] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1989. (MR 96c:70001)
- [3] V. Bargmann, *On unitary ray representations of continuous groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 1–46. (MR 15,397b)
- [4] Asim O. Barut und Ryszard Rączka, *Theory of group representations and applications*, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1986. (MR 88c:22013)
- [5] R. W. Beals, P. C. Greiner und J. Vauthier, *The Laguerre calculus on the Heisenberg group*, In: *Special functions: group theoretical aspects and applications*, Reidel, Dordrecht, 1984, S. 189–216. (MR 86g:22011)
- [6] Richard W. Beals, Bernard Gaveau, Peter C. Greiner und Jacques Vauthier, *The Laguerre calculus on the Heisenberg group. II*, Bull. Sci. Math. (2) **110** (1986), Nr. 3, 225–288. (MR 88a:22018)
- [7] Lennart Carleson und Per Sjölin, *Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc*, Studia Math. **44** (1972), 287–299. (errata insert). (MR 50 #14052)
- [8] F. M. Christ und C. D. Sogge, *The weak type  $L^1$  convergence of eigenfunction expansions for pseudodifferential operators*, Invent. Math. **94** (1988), Nr. 2, 421–453. (MR 89j:35096)
- [9] Michael Christ und Detlef Müller, *On  $L^p$  spectral multipliers for a solvable Lie group*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), Nr. 5, 860–876. (MR 98b:22017)
- [10] Ronald R. Coifman und Guido Weiss, *Transference methods in analysis*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976. (MR 58 #2019)
- [11] Charles Fefferman, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), 9–36. (MR 41 #2468)
- [12] ———, *The multiplier problem for the ball*, Ann. of Math. (2) **94** (1971), 330–336. (MR 45 #5661)

- [13] G. B. Folland und Elias M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1982. (MR 84h:43027)
- [14] Gerald B. Folland, *Harmonic analysis in phase space*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. (MR 92k:22017)
- [15] Michael Gnewuch, *Zum differenzierbaren  $L^p$ -Funktionalkalkül auf Liegruppen mit exponentiellem Wachstum*, Dissertation, Mathematisches Seminar der Universität Kiel, 2002.
- [16] Frederick P. Greenleaf, *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969. (MR 40 #4776)
- [17] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, N. Y., 1950. (MR 11,504d)
- [18] Edwin Hewitt und Kenneth A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1979. (MR 81k:43001)
- [19] Joachim Hilgert und Karl-Hermann Neeb, *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*, Vieweg, 1991.
- [20] Lars Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171. (MR 36 #5526)
- [21] ———, *The analysis of linear partial differential operators. I*, Springer-Verlag, Berlin, 1983. (MR 85g:35002a)
- [22] ———, *Symplectic classification of quadratic forms, and general Mehler formulas*, Math. Z. **219** (1995), Nr. 3, 413–449. (MR 96c:58172)
- [23] Roger Howe, *The oscillator semigroup*, In: *The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, S. 61–132. (MR 90f:22014)
- [24] A. Hulanicki, *Subalgebra of  $L_1(G)$  associated with Laplacian on a Lie group*, Colloq. Math. **31** (1974), 259–287. (MR 51 #8743)
- [25] ———, *Commutative subalgebra of  $L^1(G)$  associated with a subelliptic operator on a Lie group  $G$* , Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 121–124. (MR 50 #10694)
- [26] Andrzej Hulanicki und Joe W. Jenkins, *Almost everywhere summability on nilmanifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), Nr. 2, 703–715. (MR 85f:22011)
- [27] Nathan Jacobson, *Lie algebras*, Dover Publications Inc., New York, 1979. (MR 80k:17001)
- [28] G. E. Karadzhov, *Riesz summability of multiple Hermite series in  $L^p$  spaces*, Math. Z. **219** (1995), Nr. 1, 107–118. (MR 96g:42015)

- 
- [29] N. N. Lebedew, *Spezielle Funktionen und ihre Anwendung*, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1973. (MR 50 #2569)
- [30] Paulette Libermann und Charles-Michel Marle, *Symplectic geometry and analytical mechanics*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. (MR 88c:58016)
- [31] George W. Mackey, *Induced representations of locally compact groups. I*, Ann. of Math. (2) **55** (1952), 101–139. (MR 13,434a)
- [32] ———, *Induced representations of locally compact groups. II. The Frobenius reciprocity theorem*, Ann. of Math. (2) **58** (1953), 193–221. (MR 15,101a)
- [33] Detlef Müller, *On Riesz means of eigenfunction expansions for the Kohn-Laplacian*, J. Reine Angew. Math. **401** (1989), 113–121. (MR 90i:22017)
- [34] ———, *A restriction theorem for the Heisenberg group*, Ann. of Math. (2) **131** (1990), Nr. 3, 567–587. (MR 91k:22021)
- [35] Detlef Müller und Fulvio Ricci, *Analysis of second order differential operators on Heisenberg groups. I*, Invent. Math. **101** (1990), Nr. 3, 545–582. (MR 92d:22011)
- [36] Edward Nelson, *Analytic vectors*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), 572–615. (MR 21 #5901)
- [37] Edward Nelson und W. Forrest Stinespring, *Representation of elliptic operators in an enveloping algebra*, Amer. J. Math. **81** (1959), 547–560. (MR 22 #907)
- [38] Michael Reed und Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. I*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980. (MR 85e:46002)
- [39] Walter Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Co. Rudin, New York, 1973. (MR 51 #1315)
- [40] A. Seeger und C. D. Sogge, *Bounds for eigenfunctions of differential operators*, Indiana Univ. Math. J. **38** (1989), Nr. 3, 669–682. (MR 91f:58097)
- [41] David Shale, *Linear symmetries of free boson fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 149–167. (MR 25 #956)
- [42] Christopher D. Sogge, *Concerning the  $L^p$  norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds*, J. Funct. Anal. **77** (1988), Nr. 1, 123–138. (MR 89d:35131)
- [43] ———, *Fourier integrals in classical analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. (MR 94c:35178)
- [44] Elias M. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier analysis*, In: *Beijing lectures in harmonic analysis (Beijing, 1984)*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986, S. 307–355. (MR 88g:42022)

- [45] ———, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. (MR 95c:42002)
- [46] Elias M. Stein und Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. (MR 46 #4102)
- [47] Gábor Szegő, *Orthogonal polynomials*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1975. (MR 51 #8724)
- [48] Michael E. Taylor, *Noncommutative harmonic analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986. (MR 88a:22021)
- [49] ———, *Partial differential equations. I*, Springer-Verlag, New York, 1996. (MR 98b:35002b)
- [50] ———, *Partial differential equations. III*, Springer-Verlag, New York, 1997. (MR 98k:35001)
- [51] Sundaram Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre expansions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. (MR 94i:42001)
- [52] ———, *Hermite and special hermite expansions revisited*, Preprint, February 1997.
- [53] Peter A. Tomas, *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 477–478. (MR 50 #10681)