

**Zum differenzierbaren  
 $L^p$ -Funktionalkalkül auf Lie-Gruppen  
mit exponentiellem Volumenwachstum**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von  
Michael Gnewuch

Kiel  
2002

Referent:

Korreferent:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Kiel,

Der Dekan

# Danksagung

Zunächst möchte ich Herrn Prof. Dr. D. Müller für die Vergabe des interessanten Dissertationsthemas und die Betreuung der Arbeit danken.

Herrn Prof. G. Mauceri von der Universität Genua möchte ich danken für die nette Aufnahme in seine Arbeitsgruppe im Rahmen des TMR-Projektes “Harmonic Analysis”, hilfreiche Hinweise und die Bereitstellung von Institutsmitteln.

Bei Herrn Prof. W. Hebisch möchte ich mich für die interessanten Diskussionen während seines letztjährigen Aufenthalts in Genua bedanken.

Des weiteren möchte ich Herrn Prof. P. Sjögren von der Universität Göteborg danken, daß er sich sofort bereit erklärt hat, diese Arbeit als Zweitgutachter zu bewerten.

Dann möchte ich die Gelegenheit nutzen, um hier allen Personen zu danken, die mir während meiner Studien- und Promotionszeit zu Stipendien (Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes, Stipendium des Landes Schleswig-Holstein zur Förderung des künstlerischen und wissenschaftlichen Nachwuchses, Stipendium der europäischen Gemeinschaft (TMR)) verholfen haben. Mein Dank gilt dabei neben Herrn Müller und Herrn Mauceri den Professoren und Dozenten O. v. Grudzinski, W. Hackbusch, H. Hähl, R. Schmidt und V. Wrobel.

Zu guter Letzt möchte ich mich noch bei den Herren Professoren und Dozenten O. v. Grudzinski, R. Schmidt und V. Wrobel für die mathematische Grundausbildung bedanken. Ihre motivierenden Vorlesungen, Proseminare und Arbeitsgemeinschaften haben in mir ein verstärktes Interesse für die Mathematik geweckt.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
Mathematischer Hintergrund . . . . .	2
Ausblick auf die weiteren Kapitel . . . . .	5
<b>1 <math>L^p</math>-Multiplikatoren auf <math>\sigma</math>-endlichen Maßräumen</b>	<b>9</b>
1.1 Ein hinreichendes Multiplikator Kriterium . . . . .	9
1.2 Integral- und Evolutionskerne . . . . .	14
<b>2 Hilfsmittel der Analysis auf Lie-Gruppen</b>	<b>18</b>
2.1 Haar-Maß, Faltung und Dirac-Folgen . . . . .	19
2.2 Semidirekte Summen und Produkte . . . . .	23
2.3 Linksinvariante Vektorfelder . . . . .	26
2.4 Linksinvariante Riemannsche Abstände . . . . .	32
2.5 Homogene Normen . . . . .	35
<b>3 Differentialoperatoren auf Lie-Gruppen</b>	<b>41</b>
3.1 Selbstadjungiertheit . . . . .	41
3.2 Holomorphe Operatorhalbgruppen auf exponentiell-gewichteten $L^2$ -Räumen . . . . .	44
3.3 Sub-Laplace-Operatoren und Wärmeleitungskerne . . . . .	49
3.4 Schrödinger-Operatoren und deren Evolutionskerne . . . . .	56
<b>4 Summen zweier nicht kommutierender Operatoren</b>	<b>64</b>
4.1 Der Schrödinger-Operator $A = -\partial_r^2 + ae^{2r}$ . . . . .	65
4.1.1 Selbstadjungiertheit . . . . .	65
4.1.2 Die Halbgruppe $e^{-zA}$ , ausgedrückt durch die Resolvente von $A$ . . . . .	66
4.1.3 Berechnung der Resolvente von $A$ . . . . .	70
4.1.4 Der Evolutionskern $q_z(a, \cdot, \cdot)$ . . . . .	72
4.1.5 Das Spektralmaß von $A$ . . . . .	79
4.2 Der Operator $-\partial_r^2 + e^{2r}L$ in $L^2(\mathbb{R} \times X)$ . . . . .	81
4.2.1 Spektralschar und Selbstadjungiertheit . . . . .	81

4.2.2	Eine Formel für die holomorphe Halbgruppe . . . . .	88
4.2.3	Multiplikatorsätze . . . . .	90
4.2.4	Eine einfache Verallgemeinerung . . . . .	94
4.3	Beispieloperatoren auf auflösbaren Lie-Gruppen . . . . .	95
4.3.1	Rockland-Operatoren . . . . .	95
4.3.2	Summen gerader Potenzen von Vektorfeldern . . . . .	97
4.3.3	Schrödinger-Operatoren . . . . .	98
4.4	Anmerkungen . . . . .	99
<b>5</b>	<b>Sub-Laplace-Operatoren auf mittelbaren Lie-Gruppen</b>	<b>106</b>
5.1	Semidirekte Produkte von auflösbaren und kompakten Lie-Gruppen . . . . .	106
5.2	$L^1$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns mit komplexem Zeitparameter . . . . .	111
5.2.1	Reduktion auf eine gewichtete $L^2$ -Abschätzung . . . . .	111
5.2.2	$L^2$ -Abschätzung des gewichteten Wärmeleitungskerns . . . . .	112
5.2.3	Ergebnisse des Kapitels . . . . .	121
<b>6</b>	<b>Sub-Laplace-Operatoren auf semidirekten Produkten <math>\mathbb{H}_1 \rtimes \mathbb{R}</math></b>	<b>122</b>
6.1	Semidirekte Produkte der Heisenberg-Gruppe $\mathbb{H}_1$ mit der reellen Achse . . . . .	123
6.2	$L^1$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns zu komplexen Zeiten . . . . .	124
6.2.1	Rückführung auf eine gewichtete $L^2$ -Abschätzung . . . . .	125
6.2.2	Allgemeine Hilfsaussagen . . . . .	126
6.2.3	Aufeinander aufbauende $L^2$ -Abschätzungen . . . . .	127
6.2.4	Resultate des Kapitels . . . . .	134
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>136</b>
A.1	Reelle Jordan-Normalformen . . . . .	136
A.2	Tensorprodukte . . . . .	137
A.2.1	Algebraisches Tensorprodukt zweier Vektorräume . . . . .	137
A.2.2	Tensorprodukt zweier Hilbert-Räume . . . . .	138
A.2.3	Tensorprodukt zweier Operatoren . . . . .	140
A.3	Operatorhalbgruppen . . . . .	141
A.4	Integration bzgl. komplexer Maße . . . . .	144
A.5	Core eines selbstadjungierten Operators . . . . .	146
A.6	Quadratische Formen und die Friedrichs-Erweiterung . . . . .	147
	<b>Verwendete Symbole</b>	<b>150</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>153</b>

# Einleitung

## Mathematischer Hintergrund

Sind  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  ein Maßraum und  $T$  ein selbstadjungierter Operator in  $L^2(X, \mu)$  mit Spektraldarstellung  $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$ , so liegt für jede beschränkte Borel-meßbare Funktion  $f$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)$  ein stetiger linearer Endomorphismus auf  $L^2(X, \mu)$  vor.

Eine derartige Abbildung  $f$  heißt  $L^p$ -Multiplikator bzgl.  $T$ , wenn sich die Einschränkung von  $f(T)$  auf  $L^2(X, \mu) \cap L^p(X, \mu)$  zu einem stetigen Operator auf  $L^p(X, \mu)$  fortsetzen läßt.

Ist nun  $p \neq 2$ , so wird i. allg. nicht jede beschränkte Borel-meßbare Funktion  $f$  bereits ein  $L^p$ -Multiplikator sein. Daher stellt sich die Frage, welchen hinreichenden Bedingungen  $f$  dazu genügen muß. Von besonderem Interesse sind dabei aus analytischer Sicht Bedingungen, die sich durch Glattheitseigenschaften und das Abklingverhalten von  $f$  ausdrücken lassen. So möchte man z. B. von einem gegebenem Operator  $T$  wissen, ob er *differenzierbaren  $L^p$ -Funktionalkalkül* besitzt, d. h. ob ein  $k \in \mathbb{N}$  derart existiert, daß alle  $f \in C_c^k(\mathbb{R})$  schon  $L^p$ -Multiplikatoren bzgl.  $T$  sind. Daß dies nicht notwendigerweise der Fall zu sein braucht, belegen Beispiele, in denen sich jeder stetige, im Unendlichen verschwindende  $L^p$ -Multiplikator zwangsläufig holomorph auf eine komplexe Umgebung eines nicht isolierten Punktes  $\lambda_0$  des  $L^2$ -Spektrums von  $T$  fortsetzen läßt. Solche Operatoren  $T$  nennt man *Operatoren vom holomorphen  $L^p$ -Typ*.

Eine wichtige Beispielklasse, an der sich die Schwierigkeit und Komplexität der Fragestellung veranschaulichen läßt, besteht aus den Sub-Laplace-Operatoren auf Lie-Gruppen. Auf diese soll nun ein wenig genauer eingegangen werden: Sei also  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe. Ihre Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  kann man mit der Menge aller reellen, linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  identifizieren, d. h. mit der Menge aller Derivationen  $\mathcal{X}$  der Algebra  $C^\infty(G, \mathbb{R})$ , die die zusätzliche Eigenschaft

$$\mathcal{X}(f(g \cdot)) = (\mathcal{X}f)(g \cdot) \quad \text{für alle } g \in G, f \in C^\infty(G, \mathbb{R})$$

besitzen. Die Lie-Klammer ist dann durch den Kommutator  $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{X}\mathcal{Y} - \mathcal{Y}\mathcal{X}$

gegeben. Das Symbol  $d^r g$  soll ein rechtsinvariantes Haar-Maß auf  $G$  bezeichnen. Ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt des Hilbert-Raumes  $L^2(G) := L^2(G, d^r g)$ , so erhält man  $\langle \mathcal{X}\varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, \mathcal{X}\psi \rangle$  für alle  $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(G)$ , i. e.,  $\mathcal{X}^* = -\mathcal{X}$  ist der zu  $\mathcal{X}$  formal adjungierte Operator.

Sei nun  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k\}$  ein System von Vektorfeldern, welches  $\mathfrak{g}$  als Lie-Algebra erzeugt. Dann ist ein Sub-Laplace-Operator  $\Delta$  auf  $\mathcal{D}(G)$  gegeben durch

$$\Delta := - \sum_{j=1}^k \mathcal{X}_j^2.$$

Die Bedingung, daß  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_k\}$  die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  erzeugt, ist auf Lie-Gruppen äquivalent zur sogenannten „Hörmander-Bedingung“ (die sich allgemeiner auf Mannigfaltigkeiten formulieren läßt). Sie stellt die Hypoelliptizität von  $\Delta$  sicher (vgl. [Hör67]).

Des weiteren ist  $\Delta$  positiv und wesentlich selbstadjungiert auf  $\mathcal{D}(G) \subset L^2(G)$ . (Dies folgt aus [NeS59]; in dem dort angeführten Theorem 2.2 läßt sich offenkundig die Voraussetzung „elliptisch“ durch „hypoelliptisch“ ersetzen. Ein Beweis, der die Hypoelliptizität nicht benötigt, wird in dieser Arbeit unter Satz 3.2 angegeben.) Der Abschluß von  $\Delta$  sei wieder mit  $\Delta$  bezeichnet.

Im klassischen euklidischen Fall, i. e.,  $G = \mathbb{R}^n$  und  $\Delta = -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$  der Laplace-Operator, erhält man aus den Sätzen vom Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander-Typ hinreichende Bedingungen an beschränkte Borel-Funktionen, die sicherstellen, daß diese  $L^p$ -Multiplikatoren sind.

Wählt man z. B. eine nicht triviale Abbildung  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, [0, \infty[)$  mit Träger im Intervall  $[1, 2]$  und definiert für  $\alpha > 0$

$$\|f\|_{loc, \alpha} := \sup_{r>0} \|\chi f(r \cdot)\|_{H^\alpha(\mathbb{R})},$$

wobei  $H^\alpha(\mathbb{R})$  der Sobolev-Raum der Ordnung  $\alpha$  ist (vgl. Def. 1.3), so lautet eine Formulierung, die im wesentlichen auf Hörmander zurückgeht (vgl. [Hör60], Thm. 2.5):

**Satz.** *Gilt  $\|f\|_{loc, \alpha} < \infty$  für ein  $\alpha > n/2$ , so ist  $f$  für jedes  $p \in ]1, \infty[$  ein  $L^p$ -Multiplikator bzgl.  $\Delta$ .*

Möchte man nun die allgemeine Situation auf zusammenhängenden Lie-Gruppen  $G$  studieren, so bietet es sich an, eine Fallunterscheidung vorzunehmen:

Ist  $d$  eine linksinvariante Riemann-Metrik auf  $G$  und bezeichnen  $B_r$  die Kugel um das Einselement  $1_G$  in  $G$  mit Radius  $r$  und  $|B_r|$  ihr Volumen bzgl. des rechtsinvarianten Haar-Maßes  $d^r g$ , so gibt es zwei Möglichkeiten (vgl. [Gui73], [Jen73]):

- (i)  $G$  besitzt *polynomiales Volumenwachstum*, d.h., es existieren ein  $Q > 0$  und ein  $C > 1$  mit

$$C^{-1}r^Q \leq |B_r| \leq Cr^Q \quad \text{für alle } r \geq 1.$$

- (ii)  $G$  besitzt *exponentielles Volumenwachstum*, d.h. es gilt

$$Ce^{\kappa r} \leq |B_r|$$

für geeignete  $\kappa > 0$ ,  $C > 0$  und alle  $r \geq 1$ .

Im ersten Fall sind Sätze vom Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander-Typ bewiesen worden (s. z. B. [Ale94], [Chr91], [Heb93b], [MaM90], [MüS94]). Mit  $(G, d)$  liegt ein Raum vom homogenen Typ im Sinne von Coifman und Weiss vor (s. [CoW71]), denn nach (i) besitzt  $G$  die sogenannte „Verdopplungseigenschaft“

$$\exists \gamma > 0 \forall g \in G \forall R > 0 : 0 < |B_R(g)| \leq \gamma |B_{R/2}(g)|.$$

Daher ist es möglich, die Calderon-Zygmund-Theorie der singulären Integrale einzusetzen, ein Hilfsmittel, das im Fall (ii) leider nicht mehr zur Verfügung steht.

Man kann i. allg. auch nicht erwarten, daß für einen Sub-Laplace-Operator auf einer Lie-Gruppe mit exponentiellem Volumenwachstum Sätze vom Marcinkiewicz-Mikhlin-Hörmander-Typ gelten; ein erstes Gegenbeispiel wurde in der Arbeit [ChM96] geliefert. Dort wird ein semidirektes Produkt der  $(2n + 1)$ -dimensionalen Heisenberg-Gruppe  $\mathbb{H}_n$  mit der reellen Achse untersucht; die Wirkung  $\theta$  ist dabei gegeben durch  $\theta(t)(x, y, u) = (e^t x, e^{-t} y, u)$  für alle  $t, u \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Für einen Sub-Laplace- bzw. Laplace-Operator auf diesem semidirekten Produkt wird gezeigt, daß er vom holomorphen  $L^p$ -Typ für alle  $p \neq 2$  ist. (Weiterführende Arbeiten in diese Richtung sind [LuM00] und [HLM01].)

Für einige Klassen von Sub-Laplace-Operatoren auf Lie-Gruppen exponentiellen Volumenwachstums wurde aber auch differenzierbarer Funktionalkalkül nachgewiesen, so z. B. in den Arbeiten [Ast95], [CGHM94], [Heb93a], [Heb97], [Heb98], [Mus97], [Mus98a] und [Mus98b].

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß im Fall (ii) noch kein allgemeingültiges Resultat bekannt ist. Vielmehr existieren einige Beispiele, die derzeit noch keine Klassifikation der Sub-Laplace-Operatoren vom differenzierbaren  $L^p$ -Typ zulassen.

Vor diesem Hintergrund erscheint es angebracht, weitere relevante Lie-Gruppen zu untersuchen. Dies würde zum einen ein breiteres Fundament für die noch ausstehende Charakterisierung der Gruppen und Operatoren mit differenzierbarem  $L^p$ -Funktionalkalkül legen, zum anderen wären die Ergebnisse natürlich auch von eigenständigem Interesse.

Die vorliegende Doktorarbeit verfolgt das Ziel, neue Beispiellklassen von Operatoren auf Lie-Gruppen exponentiellen Volumenwachstums mit differenzierbarem  $L^p$ -Funktionalkalkül anzugeben. Dabei werden nicht nur für Sub-Laplace-Operatoren neue Multiplikatorsätze hergeleitet (s. Theorem 5.20 und Theorem 6.22), sondern auch für bestimmte Schrödinger-Operatoren und gewisse Summen gerader Potenzen von Vektorfeldern (s. Abschnitt 4.3). Die Zielsetzung, möglichst große Klassen von Operatoren zu behandeln, wird auch dadurch deutlich, daß in Kapiteln, in denen die Argumentation keiner zugrundeliegenden Lie-Struktur bedarf, noch allgemeiner halbbeschränkte Operatoren auf  $\sigma$ -endlichen Maßräumen betrachtet werden (s. die Kapitel 1 und 4). Die dort angeführten Theoreme 4.20 und 4.21 sind in dieser Allgemeinheit sicherlich noch nicht bekannt.

Einzelheiten der erzielten Ergebnisse und ihre Beziehung zu bekannten Resultaten werden im nächsten Abschnitt erläutert.

## Ausblick auf die weiteren Kapitel

Den Artikeln [Heb97], [Heb98], [Mus98a] und [Mus98b] ist gemeinsam, daß sie das nachstehende Kriterium für differenzierbaren  $L^p$ -Funktionalkalkül eines Sub-Laplace-Operators  $\Delta$  heranziehen:

Existieren Konstanten  $C, \kappa > 0$  derart, daß für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  die Ungleichung

$$\|\phi_{1+i\xi}\|_{L^1(G)} \leq C(1 + |\xi|)^\kappa \quad (1)$$

für den Wärmeleitungskern  $\phi_z$  von  $\Delta$  gilt, so ist  $\Delta$  vom differenzierbaren  $L^p$ -Typ für alle  $p \in [1, \infty]$ .

In *Kapitel 1* wird eine verallgemeinerte Version dieser hinreichenden Bedingung für nach unten halbbeschränkte Operatoren auf  $\sigma$ -endlichen Maßräumen angegeben. Dabei übersetzt der Satz 1.8 das Kriterium in eine Bedingung an die vom Operator  $T$  erzeugte Halbgruppe  $e^{-zT}$ ,  $z$  aus der rechten offenen komplexen Halbebene  $\mathcal{H}_r$ . Besitzt die Halbgruppe einen Integrationskern  $(\kappa_z)_{z \in \mathcal{H}_r}$ , so findet sich in Satz 1.14 eine Bedingung an  $\kappa_z$ , die die Voraussetzung des Satzes 1.8 impliziert.

Die Sätze 1.8 und 1.14 bilden den Ausgangspunkt für alle in dieser Arbeit hergeleiteten Resultate über differenzierbaren Funktionalkalkül.

In *Kapitel 2* finden sich einige Resultate über Lie-Gruppen und die Analysis auf Lie-Gruppen, die dann in den darauffolgenden Kapiteln benutzt werden. Besonders erwähnenswert sind davon vielleicht zwei Ergebnisse:

In Lemma 2.17 werden nützliche Kriterien angegeben, um festzustellen, ob eine gegebene auflösbare Lie-Algebra bereits nilpotent ist. So setzt z. B. die Aussage (iii) des Lemmas einer Verallgemeinerung der Resultate des Kapitels 5 gewisse Grenzen (s. Bemerkung 5.21).

Im Abschnitt 2.5 werden die reellen Endomorphismen  $D$  charakterisiert, zu denen homogene Normen  $\|\cdot\|_D$  auf dem  $\mathbb{R}^m$  existieren, i. e. Funktionen  $\|\cdot\|_D$ , die (abgesehen von der Gültigkeit der Dreiecksungleichung) die analogen Eigenschaften wie Normen besitzen, nur daß sie anstelle der bei Normen üblichen Homogenität die Eigenschaft  $\|e^{tD}x\|_D = e^t\|x\|_D$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  erfüllen. Es wird gezeigt, daß es genau dann eine homogene Norm  $\|\cdot\|_D$  gibt, wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von  $D$  strikt positive Realteile besitzen. Für den Beweis werden lediglich elementare Argumente aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Theorie der Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^m$  verwendet.

Bei manchen der Aussagen des Kapitels ist aufgrund einer mangelnden Vorlage keine Referenz angegeben, was aber nicht heißen soll, daß das angeführte Material nicht in der einen oder anderen Form in der Literatur zu finden ist.

Das *Kapitel 3* behandelt Schrödinger-Operatoren auf Lie-Gruppen, deren differenzierbare Koeffizientenfunktionen keinerlei Wachstumsbeschränkungen zu genügen brauchen. Da keine  $C^\infty$ -Koeffizientenfunktionen vorausgesetzt werden, sind die betrachteten Differentialoperatoren i. allg. nicht hypoelliptisch. Die Klasse der Schrödinger-Operatoren umfaßt insbesondere die Sub-Laplace-Operatoren.

Zu Beginn des Kapitels wird in Satz 3.2 sichergestellt, daß die auf dem Raum der Testfunktionen  $\mathcal{D}(G)$  definierten Operatoren wesentlich selbstadjungiert in  $L^2(G)$  sind. Der Beweis nutzt, daß ein Schrödinger-Operator  $H$  immer schon eine selbstadjungierte Erweiterung (die sogenannte „Friedrichs-Erweiterung“) besitzt und zeigt, daß diese in der gegebenen Situation mit dem Abschluß des Operators übereinstimmt. Dieses Vorgehen besitzt praktische Vorteile gegenüber dem Versuch, direkt nachzuweisen, daß der adjungierte Operator  $H^*$  mit dem Abschluß von  $H$  identisch ist.

Des weiteren werden vier Lemmata aus der Arbeit [Heb97] mit detaillierten Beweisen angegeben. Die ersten beiden zeigen, daß sich die Halbgruppe  $(e^{-zH})_{z \in \mathcal{H}_r}$  eines Schrödinger-Operators  $H$  zu einer holomorphen Halbgruppe auf exponentiell-gewichteten  $L^2$ -Räumen einschränken (bzw., bei abfallenden Gewichtsfunktionen, fortsetzen) läßt (s. die Lemmata 3.7, 3.8). Das Resultat kann man z. B. verwenden, um zu zeigen, daß der Wärmeleitungskern  $(\phi_z)_{z \in \mathcal{H}_r}$  eines Sub-Laplace-Operators holomorph vom komplexen Zeitparameter  $z$  abhängt (aufgefaßt als Funktion mit Werten in  $L^2(G)$ ) und, daß das auch noch der Fall ist, wenn  $\phi_z$  mit einer Funktion  $f$  multipliziert wird, die maximal exponentiell in Abhängigkeit vom Riemannschen Abstand wächst (vgl. Lemma 3.14). Dies wird für die  $L^2$ -Abschätzungen von gewichteten Wärmeleitungskernen in den Kapiteln 5 und 6 von Nutzen sein.

Ein weiteres der Lemmata aus [Heb97] zeigt, daß die Halbgruppe eines Schrödinger-Operators  $H$  zu positiven reellen Zeiten in gewissem Sinne durch

die Halbgruppe des zugehörigen Sub-Laplace-Operators (d. h. des Hauptteils von  $H$ ) majorisiert wird (s. Lemma 3.21). Dieser Umstand wird genutzt, um mit dem Darstellungssatz von Riesz und dem Satz von Radon-Nikodym zu beweisen, daß die Schrödinger-Operatoren einen Evolutionskern besitzen (s. Lemma 3.22). Ferner kann das Resultat auch in Abschnitt 4.3.3 gewinnbringend angewendet werden.

Der Rest des Kapitels 3 stellt im wesentlichen bekannte Tatsachen über den Wärmeleitungskern zusammen, auf die später zurückgegriffen wird.

Das *Kapitel 4* ist motiviert durch eine Beobachtung aus [Mus98a]: Dort wurde unter Ausnutzung stochastischer Methoden eine Formel für die Wärmeleitungskerne  $\Phi_z$  von Sub-Laplace-Operatoren  $\Delta$  auf bestimmten semidirekten Produkten von nilpotenten Gruppen  $N$  mit der reellen Achse hergeleitet. Dabei läßt sich  $\Delta$  in der Form  $\Delta = -\partial_r^2 + e^{2r} S$ ,  $\partial_r$  die gewöhnliche Ableitung auf der reellen Achse,  $S$  ein Sub-Laplace-Operator auf  $N$ , darstellen. In der Integralformel für  $\Phi_z$  tritt dann neben elementaren Funktionen lediglich der Wärmeleitungskern  $(\phi_t)_{t>0}$  von  $S$  mit positivem reellem Zeitparameter auf (s. Gleichung (4.33)).

Diese Integraldarstellung ist von großem Interesse, da sich aus ihr u. a. relativ leicht Ergebnisse über differenzierbaren  $L^p$ -Funktionalkalkül folgern lassen.

In Kapitel 4 wird solch eine Formel für Operatoren  $T$  der Gestalt  $-\partial_r^2 + e^{2r} L$ ,  $L$  ein positiver selbstadjungierter Operator auf  $L^2(X)$ ,  $X$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum, bewiesen; zunächst für deren Operatorhalbgruppe (s. Satz 4.18 und Gleichung (4.25)) und dann unter bestimmten Zusatzbedingungen auch für den zu  $T$  gehörigen Evolutionskern (s. Theorem 4.21). Die Methoden zur Herleitung der Integralformeln unterscheiden sich gänzlich vom Vorgehen in [Mus98a]; anstelle stochastischer Prozesse werden Spektraltheorie und konkrete Darstellungen gewisser Resolventen durch Bessel-Funktionen genutzt.

Die durch diese Integraldarstellungen gewonnenen Multiplikatorsätze verallgemeinern die Resultate für Sub-Laplace-Operatoren aus [Mus98a]. So lassen sie sich nicht nur auf Sub-Laplace-Operatoren, sondern z. B. auch auf gewisse Klassen von Schrödinger-Operatoren und Summen gerader Potenzen von Vektorfeldern anwenden. Dadurch können in [Heb98] aufgeworfene Fragen teilweise beantwortet werden (vgl. Abschnitt 4.3).

Die ebenfalls in jenem Kapitel bewiesene Selbstadjungiertheit von  $T = -\partial_r^2 + e^{2r} L$  und die damit verbundene Berechnung der Spektralschar von  $T$  ist von eigenständigem Interesse. Eine Verallgemeinerung dieses Resultats für Operatoren  $\tilde{T} := T_1 \otimes I + T_2 \otimes \tilde{L}$ , wobei  $T_1, T_2$  (i. allg. nicht kommutierende) Operatoren auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_1$  und  $\tilde{L}$  ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}_2$  sind, findet sich neben einigen weiteren Anmerkungen im Abschnitt 4.4.

In *Kapitel 5* werden Sub-Laplace-Operatoren auf einer Klasse von semidirek-

ten Produkten betrachtet, in denen kompakte Gruppen  $K$  auf auflösbaren Lie-Gruppen  $H$  wirken. Aufbauend auf Methoden aus [Heb98] gelingt es hier ebenfalls, differenzierbaren Funktionalkalkül nachzuweisen (s. Theorem 5.20). Implizit wird das gleiche Endresultat auch für Sub-Laplace-Operatoren auf dem auflösbaren Gruppenanteil  $H$  gezeigt (indem man z. B.  $K = \{1_K\}$  setzt oder konsequent in den Rechnungen alle Terme, die von  $K$  herrühren, ignoriert); ein Ergebnis, auf das bereits W. Hebisch im Abschnitt “Improvements and open problems” in [Heb98] hingewiesen hat. Für nicht triviales  $K$  dürfte das erzielte Ergebnis aber vollkommen neu sein.

Die grundlegende Idee jenes Kapitels ist es, die  $L^1$ -Abschätzung (1) auf eine gewichtete  $L^2$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns zu reduzieren. Wie man auch im darauffolgenden Kapitel sehen wird, ist die Wahl einer geeigneten Gewichtsfunktion der zentrale Punkt dieser Methode.

Sub-Laplace-Operatoren auf bestimmten semidirekten Produkten der Heisenberg-Gruppe  $\mathbb{H}_1$  mit der reellen Achse sind Gegenstand des *Kapitels* 6. Die Wirkungen werden dabei von Derivationen auf der Heisenberg-Algebra induziert, die durch Diagonalmatrizen mit nicht negativen Einträgen gegeben sind. Das praktizierte Vorgehen zum Beweis von differenzierbarem  $L^p$ -Funktionalkalkül baut auf den Artikeln [Heb97] und [Mus98b] auf.

Wieder wird zu vorgegebenem Sub-Laplace-Operator  $\Delta$  eine Ungleichung der Form (1) über eine gewichtete  $L^2$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns bewiesen.

Am Ende des Kapitels stehen eine  $L^1$ -Abschätzung für den Wärmeleitungskern und ein Multiplikatorsatz, in denen die jeweils besten Resultate aus den Kapiteln 4, 5 und 6 für die verschiedenen semidirekten Produkte  $\mathbb{H}_1 \rtimes \mathbb{R}$  angegeben werden (s. Korollar 6.21 und Theorem 6.22).

Der qualitative Nachweis von differenzierbarem  $L^p$ -Funktionalkalkül ist lediglich für die semidirekten Produkte dieses Kapitels neu, deren wirkungsinduzierende Derivationen nicht invertierbar sind; die anderen Gruppen der Gestalt  $\mathbb{H}_1 \rtimes \mathbb{R}$  sind als Spezialfälle der Situation  $K = \{1_K\}$  in Kapitel 5 bereits mitbehandelt worden. Allerdings liefert das Kapitel 6 eine quantitative Verbesserung gegenüber den Resultaten des Kapitels 5: Der Exponent  $\kappa$  in der hier hergeleiteten Abschätzung der Form (1) ist für alle betrachteten Gruppen gleichmäßig beschränkt - ein Ergebnis, daß mit den Methoden aus Kapitel 5 nicht erzielt werden kann (s. auch die Ausführungen zu Beginn des Kapitels 6).

Einige in der vorliegenden Arbeit verwendete Aussagen, die eher den Bereichen lineare Algebra und Funktionalanalysis als der Analysis auf Lie-Gruppen zuzuordnen sind, finden sich im *Anhang* wieder.

# Kapitel 1

## $L^p$ -Multiplikatoren auf $\sigma$ -endlichen Maßräumen

Um für einen Sub-Laplace-Operator  $L$  auf einer auflösbaren Lie-Gruppe mit exponentiellem Volumenwachstum differenzierbaren Funktionalkalkül nachzuweisen, wurden von W. Hebisch  $L^1$ -Abschätzungen des zu  $L$  gehörigen Wärmeleitungskerns in Abhängigkeit von komplexen Zeitparametern genutzt (s. [Heb97], Thm. 1.5, 1.6). Dieses Vorgehen wurde im Laufe der Zeit wiederholt aufgegriffen (vgl. [Heb98], [Mus98a], [Mus98b]).

Da der Zugang unabhängig von der Tatsache ist, daß mit  $L$  ein Sub-Laplace-Operator vorliegt, und da eine zugrundeliegende Gruppenstruktur ebenfalls nicht von Nöten ist, soll er hier noch einmal in einem allgemeineren Rahmen vorgestellt werden (s. Satz 1.14).

Anstatt Bedingungen an den „Wärmeleitungskern“ von  $L$  zu stellen, lassen sich solche auch für die von  $L$  erzeugte Halbgruppe formulieren (s. Satz 1.8).

**Voraussetzung 1.1.** Es seien  $X$  eine Menge,  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  und  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$  ein  $\sigma$ -endliches positives Maß.  $T$  sei ein selbstadjungierter, nach unten halbbeschränkter Operator in  $L^2(X) := L^2(X, \mu)$ . Ferner soll  $\mathcal{H}_r$  die rechte offene komplexe Halbebene  $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$  bezeichnen. Setze  $I_{p,q} := [\min\{p, q\}, \max\{p, q\}]$  für  $p, q \in [1, \infty]$ . Zudem sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt auf  $L^2(X)$ .

### 1.1 Ein hinreichendes Multiplikator-kriterium

**Definition 1.2.** Sei  $p \in [1, \infty]$ . Eine beschränkte Borel-meßbare Funktion  $f$  heißt  $L^p$ -Multiplikator bzgl.  $T$ , wenn ein  $C > 0$  existiert mit

$$\|f(T)\varphi\|_{L^p(X)} \leq C\|\varphi\|_{L^p(X)} \quad \text{für alle } \varphi \in L^2(X) \cap L^p(X). \quad (1.1)$$

Die nächste Definition soll es möglich machen, Voraussetzungen an die Glattheit einer Funktion  $f$  durch die Forderung des Enthaltenseins von  $f$  in geeigneten Sobolev-Räumen auszudrücken.

**Definition 1.3.** Die Funktion  $v$  auf  $\mathbb{R}$  sei durch  $v(\xi) = 1 + |\xi|$  erklärt. Der zu  $\kappa \geq 0$  gehörige Sobolev-Raum  $H^\kappa(\mathbb{R})$  ist dann gegeben durch

$$H^\kappa(\mathbb{R}) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : v^\kappa \hat{f} \in L^2(\mathbb{R})\};$$

dabei soll  $\hat{f}$  die  $L^2$ -Fourier-Transformierte von  $f$  bezeichnen, d. h.,

$$\hat{f}(\xi) = L^2 - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

**Bemerkung 1.4.** (a) Sind  $\kappa > 1/2$  und  $f \in H^\kappa$ , so folgt  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ , denn es gilt  $\|\hat{f}\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|v^\kappa \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v^{-\kappa}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$ . Daraus läßt sich dann auch die wohlbekanntete Tatsache folgern, daß ein  $g \in C(\mathbb{R})$  existiert mit  $f = g$  fast überall. Ist nämlich  $\mathcal{F}^{-1}$  die  $L^2$ -Fourier-Inversion, so gilt  $f = \mathcal{F}^{-1} \hat{f}$  fast überall. Auf  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  ist  $\mathcal{F}^{-1}$  aber gerade die „übliche“ Fourier-Inversion, d. h.,

$$\mathcal{F}^{-1} \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) e^{ix\xi} dx \quad \text{für fast alle } \xi \in \mathbb{R},$$

und die rechte Seite der Gleichung liefert eine stetige Funktion.

(b) Ist  $\kappa \in \mathbb{N}^\times$ , so ist bekanntlich

$$H^\kappa(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \forall 1 \leq j \leq \kappa : f^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})\},$$

wobei  $f^{(j)}$  im Distributionensinne (oder auch „schwachen Sinne“) aufzufassen ist (s. [Wer], Satz V.2.14).

Um eine hilfreiche Beziehung zwischen den Eigenschaften einer Funktion  $f$  und dem Verhalten des Operators  $f(T)$  zu erlangen, nutzen wir die Fourier-Laplace-Transformierte von  $f$  und wenden darauf den beschränkten Funktionalkalkül von  $T$  an:

**Lemma 1.5.** Sei  $\kappa \in ]1/2, +\infty[$ , und sei  $f \in H^\kappa(\mathbb{R})$  stetig mit kompaktem Träger. Ferner setze  $F := f \cdot \exp$ . Dann gilt

$$f(T) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi) e^{-(1-i\xi)T} d\xi; \quad (1.2)$$

dabei ist der auf der rechten Seite der Gleichung auftretende Integrand aus  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(L^2(X)))$ .

Wie man im Beweis sehen wird, hat die Aussage des Lemmas nichts mit dem Umstand zu tun, daß der Hilbert-Raum, in dem  $T$  definiert ist,  $L^2(X)$  ist. Die Behauptung wäre auch gültig, wenn man  $L^2(X)$  durch einen beliebigen Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  ersetzen würde.

Bevor wir aber dieses Lemma verifizieren, werden wir noch kurz ein Hilfslemma anführen, dessen Aussage suggestiv klar ist, die aber nichts desto trotz bewiesen werden soll.

**Hilfslemma 1.6.** Sei  $\kappa > 1/2$  und  $f \in H^\kappa(\mathbb{R})$  kompakt getragen. Dann folgt  $F := f \cdot \exp \in H^\kappa(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Es seien  $f \in H^\kappa(\mathbb{R})$  kompakt getragen und  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $\text{ran}(\psi) \subset [0, 1]$  und  $\psi \equiv 1$  auf  $\text{supp}(f)$ . Dann gilt

$$\hat{F} = (f\psi \exp)^\wedge = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * (\psi \exp)^\wedge,$$

und  $\psi \exp$  sowie  $(\psi \exp)^\wedge$  sind Schwartz-Funktionen. Die Abbildung  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei gegeben durch  $v(\xi) := 1 + |\xi|$ . Mit  $C := \int_{\mathbb{R}} v^{-2} dx$  und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \|v^\kappa \hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi - x) (\psi \exp)^\wedge(x) dx \right|^2 v^{2\kappa}(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{C}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi - x) (\psi \exp)^\wedge(x)|^2 v^2(x) dx \right) v^{2\kappa}(\xi) d\xi \\ &\leq \frac{C}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 v^{2\kappa}(\xi + x) d\xi \right) |(\psi \exp)^\wedge(x)|^2 v^2(x) dx. \end{aligned}$$

Da  $v(\xi + x) \leq v(\xi)v(x)$ , können wir wie folgt abschätzen:

$$\|v^\kappa \hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{C}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 v^{2\kappa}(\xi) d\xi \int_{\mathbb{R}} |(\psi \exp)^\wedge(x)|^2 v^{2(\kappa+1)}(x) dx < \infty.$$

□

*Beweis des Lemmas 1.5.* Da  $f \in C_c(\mathbb{R}) \cap H^\kappa(\mathbb{R})$ , ist nach Hilfslemma 1.6  $F \in C_c(\mathbb{R}) \cap H^\kappa(\mathbb{R})$  und nach Bemerkung 1.4  $\hat{F} \in L^1(\mathbb{R})$ . Daher können wir die Fourier-Umkehrformel auf  $F$  anwenden:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi) e^{-(1-i\xi)\lambda} d\xi \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Seien nun  $\xi, a \in \mathbb{R}$  und das Spektrum  $\sigma(T)$  von  $T$  in  $[a, +\infty[$  enthalten. Nach dem Spektralsatz (vgl. [Wer], §VII.3) sind  $f(T)$  und  $e^{-(1-i\xi)T}$  normale, beschränkte Operatoren auf  $L^2(X)$ , und es gilt

$$\|e^{-(1-i\xi)T}\|_{op} \leq \sup\{|e^{-(1-i\xi)t}| : t \in \sigma(T)\} \leq e^{-a},$$

d. h. das Bochner-Integral in (1.2) ist wohldefiniert.

Sei  $x \in L^2(X)$ . Wenn  $E$  das Spektralmaß von  $T$  bezeichnet, so ist  $\langle E(\cdot)x, x \rangle$  ein endliches positives Borel-Maß auf  $\mathbb{R}$ . Ferner ist die Abbildung  $\mathbb{R} \times [a, +\infty[ \ni (\xi, \lambda) \mapsto \hat{F}(\xi)e^{-(1-i\xi)\lambda}$  Borel-meßbar und es gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_a^\infty |\hat{F}(\xi)e^{-(1-i\xi)\lambda}| d\langle E(\lambda)x, x \rangle d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_a^\infty |\hat{F}(\xi)e^{-\lambda}| d\langle E(\lambda)x, x \rangle d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)| \left( \int_a^\infty e^{-\lambda} d\langle E(\lambda)x, x \rangle \right) d\xi \leq e^{-a} \|x\|^2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)| d\xi < \infty. \end{aligned}$$

Deshalb folgt mit dem Spektralsatz, (1.3) und dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} \langle f(T)x, x \rangle &= \int_a^\infty f(\lambda) d\langle E(\lambda)x, x \rangle = \int_a^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)e^{-(1-i\xi)\lambda} d\xi d\langle E(\lambda)x, x \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi) \left( \int_a^\infty e^{-(1-i\xi)\lambda} d\langle E(\lambda)x, x \rangle \right) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi) \langle e^{-(1-i\xi)T} x, x \rangle d\xi \\ &= \left\langle \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)e^{-(1-i\xi)T} d\xi \right) x, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Mit der Polarisationsformel (vgl. [Wei], Thm. 1.1 oder S. 9) erhält man

$$\langle f(T)x, y \rangle = \left\langle \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)e^{-(1-i\xi)T} d\xi \right) x, y \right\rangle \quad \text{für alle } x, y \in L^2(X)$$

und daraus dann letztlich die Behauptung.  $\square$

Bevor wir uns dem ersten Multiplikator-kriterium zuwenden, soll noch ein Hilfssatz bewiesen werden:

**Hilfssatz 1.7.** Sei  $p \in [1, \infty]$  und  $\xi \in L^p(X)$ . Dann ist

$$\|\xi\|_{L^p(X)} = \sup\{|\langle \xi, \tau \rangle| : \tau \in L^2(X) \cap L^{p'}(X), \|\tau\|_{L^{p'}(X)} = 1\}. \quad (1.4)$$

*Beweis.* Für  $p \in ]1, \infty[$  folgt (1.4) aus der Isomorphie von  $L^{p'}(X)$  und dem Dualraum  $(L^p(X))'$  von  $L^p(X)$  (s. [Wer], Satz II.2.4), dem Satz von Hahn-Banach (vgl. [Wer], Kor. III.1.7) und der Dichtheit von  $L^2(X) \cap L^{p'}(X)$  in  $L^{p'}(X)$ .

In den Fällen  $p = 1, \infty$  erhält man mit der Hölderschen Ungleichung unmittelbar, daß die rechte Seite in (1.4) durch die linke majorisiert wird.

*Der Fall  $p = 1$ :* Sei  $0 \neq \xi \in L^1(X)$ . Da  $X$   $\sigma$ -endlich ist, existiert eine aufsteigende Folge  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Mengen endlichen Maßes, deren Vereinigung ganz

$X$  ist. Setze für  $n \in \mathbb{N}^\times$  dann  $U_n := V_n \cap \{x \in X : |\xi(x)| > 1/n\}$  und, sofern  $x \in U_n$ ,  $\eta_n(x) := \xi(x)|\xi(x)|^{-1}$ , andernfalls  $\eta_n(x) := 0$ . Dann ist  $\eta_n$  aus  $L^\infty(X) \cap L^2(X)$  und für genügend großes  $n$  gilt  $\|\eta_n\|_\infty = 1$ . Es folgt zudem  $|\langle \xi, \eta_n \rangle| = \int_{U_n} |\xi(x)| d\mu(x) \rightarrow \|\xi\|_1$  für  $n \rightarrow \infty$ .

*Der Fall  $p = \infty$ :* Sei  $0 \neq \xi \in L^\infty(X)$ . Setze  $c := \|\xi\|_\infty$ . Zu vorgegebenem  $c > \varepsilon > 0$  definieren wir  $M_\varepsilon := \{x \in X : c - \varepsilon \leq |\xi(x)| \leq c\}$ .  $M_\varepsilon$  besitzt von null verschiedenes Maß. Da  $X$   $\sigma$ -endlich ist, finden wir eine Teilmenge  $N_\varepsilon$  von  $M_\varepsilon$  mit endlichem Maß größer null. Die durch  $\eta_\varepsilon(x) = \xi(x)(\mu(N_\varepsilon)|\xi(x)|)^{-1}$  für  $x \in N_\varepsilon$ ,  $\eta_\varepsilon(x) = 0$  sonst, definierte Abbildung  $\eta_\varepsilon$  liegt in  $L^1(X) \cap L^2(X)$ , und es ist  $\|\eta_\varepsilon\|_1 = 1$ . Ferner gilt

$$|\langle \xi, \eta_\varepsilon \rangle| = \mu(N_\varepsilon)^{-1} \int_{N_\varepsilon} |\xi(x)| d\mu(x) \in [c - \varepsilon, c].$$

Es folgt also  $|\langle \xi, \eta_\varepsilon \rangle| \rightarrow c = \|\xi\|_\infty$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . □

Durch Ausnutzung der Identität (1.2) läßt sich nun leicht eine hinreichende Bedingung an eine beschränkte Borel-Funktion  $f$  nennen, die sicherstellt, daß  $f$  ein  $L^p$ -Multiplikator bzgl.  $T$  ist:

**Satz 1.8.** *Seien  $p \in [1, \infty]$ ,  $q \in I_{p,p'}$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig. Existieren Konstanten  $C, \kappa > 0$  mit*

$$\|e^{-(1+i\xi)T} \varphi\|_{L^p(X)} \leq C(1 + |\xi|)^\kappa \|\varphi\|_{L^p(X)}$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi \in L^2(X) \cap L^p(X)$ , so ist jedes stetige  $f \in H^{\kappa + \frac{1}{2} + \varepsilon}(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger ein  $L^q$ -Multiplikator bzgl.  $T$ , und für alle  $\psi \in L^2(X) \cap L^q(X)$  gilt die Abschätzung

$$\|f(T)\psi\|_{L^q(X)} \leq \frac{C}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} |(f \cdot \exp)^\wedge(x)| (1 + |x|)^\kappa dx \right) \|\psi\|_{L^q(X)}.$$

*Beweis.* Sei  $f$  wie im Satz. Mit den Bezeichnungen  $F := f \cdot \exp$  und  $v(\xi) := 1 + |\xi|$  gilt nach Lemma 1.5 für  $\varphi \in L^2(X) \cap L^p(X)$ :

$$\begin{aligned} \|f(T)\varphi\|_p &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)| \|e^{-(1-i\xi)T} \varphi\|_p d\xi \leq \frac{C}{2\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)| v(\xi)^\kappa d\xi \right) \|\varphi\|_p \\ &\leq \frac{C}{2\pi} \|v^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\|_2 \|v^{\kappa+\frac{1}{2}+\varepsilon} \hat{F}\|_2 \|\varphi\|_p < \infty \end{aligned}$$

(vgl. Hilfslemma 1.6). Ferner gilt nach (1.4)

$$\begin{aligned}
& \sup\{\|f(T)\psi\|_{p'} : \psi \in L^{p'} \cap L^2, \|\psi\|_{p'} = 1\} \\
&= \sup\{|\langle f(T)\psi, \tau \rangle| : \psi \in L^{p'} \cap L^2, \tau \in L^p \cap L^2, \|\psi\|_{p'} = 1 = \|\tau\|_p\} \\
&= \sup\{|\langle \psi, f^*(T)\tau \rangle| : \psi \in L^{p'} \cap L^2, \tau \in L^p \cap L^2, \|\psi\|_{p'} = 1 = \|\tau\|_p\} \\
&= \sup\{\|f^*(T)\tau\|_p : \tau \in L^p \cap L^2, \|\tau\|_p = 1\} \leq \frac{C}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)| v(\xi)^\kappa d\xi,
\end{aligned}$$

denn  $(f^* \cdot \exp)^{\wedge}(\xi) = \hat{F}(-\xi)^*$ . Die vollständige Aussage des Satzes folgt nun aus dem Interpolationssatz von Riesz-Thorin (siehe z. B. [Wer], Thm. II.4.2).  $\square$

## 1.2 Integral- und Evolutionskerne

Besitzt  $T$  einen Evolutionskern (vgl. Def. 1.9), so kann es durchaus von Interesse sein, die Anforderungen an die Halbgruppe  $(e^{-zT})_{z \in \mathcal{H}_r}$  aus Satz 1.8 durch Forderungen an den dazugehörigen Evolutionskern zu ersetzen. Dies soll in diesem Abschnitt geschehen.

**Definition 1.9.** (a) Wir sagen,  $T$  besitzt einen *Evolutionskern*  $p$ , falls eine Menge  $]0, +\infty[ \subset Z \subset \mathcal{H}_r$  und ein meßbares  $p : Z \times X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  existieren mit

$$e^{-zT} f(x) = \int_X p_z(x, y) f(y) d\mu(y)$$

für alle  $f \in L^2(X)$ ,  $z \in Z$  und  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ .

(b) Ein beschränkter Operator  $S$  auf  $L^2(X)$  besitzt einen *Integrationskern*, falls eine meßbare Funktion  $k : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  existiert mit

$$Sf(x) = \int_X k(x, y) f(y) d\mu(y)$$

für alle  $f \in L^2(X)$  und  $\mu$ -fast alle  $x \in X$ .

Das folgende Lemma wird sich in mehreren Beweisen als nützlich erweisen, so z. B. im Beweis von Lemma 1.12. Ist  $X'$  ein weiterer Maßraum, so sagt es, vereinfacht formuliert, aus, daß man (unter geeigneten Voraussetzungen) bei  $\mathcal{L}^p(X')$ -wertigen Funktionen auf  $X$  die Integration über  $X$  und das Einsetzen von Elementen aus  $X'$  vertauschen kann.

**Lemma 1.10.** Sei  $(X', \mathcal{M}', \mu')$  ein weiterer  $\sigma$ -endlicher Maßraum, und seien  $p \in [1, \infty]$  und  $F \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{L}^p(X'))$ . Die Funktion  $f : X \times X' \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(x, x') \mapsto (F(x))(x')$  sei  $\mu \otimes \mu'$ -meßbar. Dann ist für fast alle  $x' \in X'$  die Abbildung  $x \mapsto f(x, x')$  aus  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  und es gilt

$$\int_X f(x, x') dx = \left( \int_X F(x) dx \right) (x').$$

*Beweis.* Sei  $p'$  der zu  $p$  konjugierte Exponent, und sei  $h \in \mathcal{L}^{p'}(X')$ . Dann ist  $h$  insbesondere  $\mu'$ -meßbar, und da  $f$   $\mu \otimes \mu'$ -meßbar ist, folgt die  $\mu \otimes \mu'$ -Meßbarkeit von  $(x, x') \mapsto f(x, x')h(x')$ . Ferner ist für alle  $x \in X$  das Produkt  $F(x)h$  in  $\mathcal{L}^1(X')$ , und es folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \int_X \int_{X'} |f(x, x')h(x')| dx' dx &\leq \int_X \|F(x)\|_{L^p(X')} \|h\|_{L^{p'}(X')} dx \\ &= \|F\|_{L^1(X, L^p(X'))} \|h\|_{L^{p'}(X')}. \end{aligned}$$

Somit ist  $(x, x') \mapsto f(x, x')h^*(x')$  nach dem Satz von Fubini-Tonelli auf  $X \times X'$  integrierbar, und für fast alle  $x' \in X'$  ist die Abbildung  $x \mapsto f(x, x')h^*(x')$  in  $\mathcal{L}^1(X)$ . Besitzt nun  $A \subset X'$  endliches Maß und betrachtet man anstelle von  $h$  die charakteristische Funktion  $\chi_A$ , so folgt für fast alle  $x' \in A$ , daß  $x \mapsto f(x, x')\chi_A(x') = f(x, x')$  in  $\mathcal{L}^1(X)$  liegt. Dies impliziert aufgrund der  $\sigma$ -Endlichkeit von  $X'$ , daß für fast alle  $x' \in X'$  die Abbildung  $x \mapsto f(x, x')$  in  $\mathcal{L}^1(X)$  liegt. Fassen wir  $h$  als Element aus dem Dualraum von  $L^p(X')$  vermöge  $\langle \varphi, h \rangle = \int_{X'} \varphi(x')h(x')^* dx'$  auf, so gilt nach [Lan], Thm. VI.4.1, und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \left\langle \int_X F(x) dx, h \right\rangle &= \int_X \langle F(x), h \rangle dx = \int_X \int_{X'} f(x, x')h^*(x') dx' dx \\ &= \int_{X'} \int_X f(x, x') dx h^*(x') dx' = \left\langle \int_X f(x, \cdot) dx, h \right\rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber  $\int_X F(x) dx = (x' \mapsto \int_X f(x, x') dx)$  in  $L^p(X')$  (im Fall  $p = \infty$  sieht man dies z. B. mit Hilfssatz 1.7 ein), d. h., die Gleichung gilt insbesondere fast überall.  $\square$

**Definition 1.11.** Es seien  $p, q \in [1, \infty]$ . Für meßbares  $k : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  setzen wir formal

$$\|k\|_{p,q} := \| \|k(x, y)\|_{L^p(X, d\mu(x))} \|_{L^q(X, d\mu(y))}. \quad (1.5)$$

Liegt für fast alle  $y \in X$  die Funktion  $x \mapsto k(x, y)$  in  $\mathcal{L}^p(X)$  und ist dann die fast überall definierte Abbildung  $y \mapsto \|k(\cdot, y)\|_p$  eine  $\mathcal{L}^q$ -Funktion, so schreiben wir kurz  $\|k\|_{p,q} < \infty$ .

Für  $p \in [1, \infty]$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$  wollen wir nun die folgenden drei Aussagen betrachten:

$\mathcal{A}(p, z)$ : Es existiert eine Konstante  $c_{p,z} > 0$  mit  $\|e^{-zT}\varphi\|_{L^p(X)} \leq c_{p,z}\|\varphi\|_{L^p(X)}$  für alle  $\varphi \in L^2(X) \cap L^p(X)$ .

$\mathcal{B}(p, z)$ : Der beschränkte Operator  $e^{-zT}$  auf  $L^2(X)$  besitzt einen Integrationskern  $p_z : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , und es existiert ein  $C_{p,z}$  mit

$$\left\| \int_X |p_z(\cdot, y)|\varphi(y) d\mu(y) \right\|_{L^p(X)} \leq C_{p,z}\|\varphi\|_{L^p(X)}$$

für alle  $\varphi \in L^2(X) \cap L^p(X)$ .

$\mathcal{C}(p, z)$ : Der beschränkte Operator  $e^{-zT}$  auf  $L^2(X)$  besitzt einen Integrationskern  $p_z : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ , und es ist  $\|p_z\|_{p,p'} < \infty$ .

Das folgende Lemma soll einige einfache Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften des Operators  $T$  aufzeigen.

**Lemma 1.12.** *Es seien  $p \in [1, \infty]$  und  $z \in \mathcal{H}_r$ . Dann bestehen zwischen den oben genannten Aussagen folgende Implikationen:*

(i) *Die Aussage  $\mathcal{B}(p, z)$  impliziert  $\mathcal{A}(p, z)$  mit  $c_{p,z} := C_{p,z}$ .*

(ii) *Die Aussage  $\mathcal{C}(p, z)$  impliziert  $\mathcal{B}(p, z)$  mit  $C_{p,z} := \|p_z\|_{p,p'}$ .*

*Beweis.* (i) Diese Implikation ist trivial.

(ii) Es gelte  $\mathcal{C}(p, z)$ . Es bezeichne  $P_z$  die Abbildung  $P_z(y) = |p_z(\cdot, y)|$ . Indem wir  $P_z$  gegebenenfalls auf einer Menge vom Maß null abändern, gilt  $P_z \in L^p(X, \mathcal{L}^p(X))$ . Mit der Hölder-Ungleichung folgt für  $\varphi \in L^2(X) \cap L^p(X)$ :

$$\int_X \|P_z(y)\varphi(y)\|_p d\mu(y) = \int_X \|P_z(y)\|_p |\varphi(y)| d\mu(y) \leq \|p_z\|_{p,p'} \|\varphi\|_p,$$

also  $P_z\varphi \in L^1(X, \mathcal{L}^p(X))$ . Mit Lemma 1.10 erhält man dann

$$\left\| \int_X |p_z(\cdot, y)|\varphi(y) d\mu(y) \right\|_p \leq \int_X \|P_z(y)\|_p |\varphi(y)| d\mu(y) \leq \|p_z\|_{p,p'} \|\varphi\|_p.$$

□

Es soll noch kurz ein einfaches Beispiel zur Aussage  $\mathcal{C}(p, z)$  angegeben werden:

**Beispiel 1.13.** Es seien  $X = \mathbb{R}$ , ausgestattet mit dem Lebesgue-Maß, und  $T = -\partial_r^2$  der eindimensionale Laplace-Operator mit Definitionsbereich  $H^2(\mathbb{R})$  (siehe Satz 3.2 oder [Wer], Bsp. VII.2(d)). Der Evolutionskern  $(p_t)_{t>0}$  von  $T$  ist dann gegeben durch

$$p_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Für alle  $t > 0$  gilt dann  $\|p_t\|_{1,\infty} = 1$  und  $\|p_t\|_{2,2} = +\infty$ .

Aus dem Satz 1.8 und Lemma 1.12 erhalten wir unmittelbar:

**Satz 1.14.**  *$T$  besitze einen Evolutionskern  $k : \mathcal{H}_r \times X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ . Ferner seien  $p \in [1, \infty]$  und  $C, \kappa > 0$  mit*

$$\|k_{1+i\xi}\|_{p,p'} \leq C(1 + |\xi|)^\kappa \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

*Dann ist für alle  $\varepsilon > 0$  und alle  $q \in I_{p,p'}$  jedes stetige  $f \in H^{\kappa+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger bereits ein  $L^q$ -Multiplikator bzgl.  $T$ .*

# Kapitel 2

## Hilfsmittel der Analysis auf Lie-Gruppen

In diesem Kapitel sollen einige Aussagen über Lie-Gruppen und einige Methoden der Analysis auf Lie-Gruppen angegeben werden, die im weiteren Verlauf von Nutzen sind.

**Voraussetzung 2.1.** Es sei  $G$  eine  $n$ -dimensionale reelle Lie-Gruppe, i.e. eine analytische Mannigfaltigkeit über dem  $\mathbb{R}^n$  mit der Hausdorff-Eigenschaft, die zugleich eine Gruppe mit analytischer Gruppenmultiplikation ist. Wir wollen annehmen, daß  $G$  höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt.

Als Modell für die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  soll dann, solange im Text nicht explizit anderes behauptet wird, der  $\mathbb{R}^n$  mit einer geeigneten Lie-Klammer  $[\cdot, \cdot]$  dienen. Ferner sei  $\exp_G : \mathfrak{g} \rightarrow G$  die zu  $\mathfrak{g}$  und  $G$  gehörige Exponentialabbildung.

**Bemerkung 2.2.** Aus der Analytizität der Multiplikation auf  $G$  folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, daß auch die Gruppeninversion analytisch ist. Aus der Forderung, daß  $G$  höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten besitzt, folgt die  $\sigma$ -Kompaktheit (oder auch „Abzählbarkeit im Unendlichen“) von  $G$ , i. e.,  $G$  ist als Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen darstellbar. Dies läßt sich wie folgt einsehen:

Sei  $G_1$  die Zusammenhangskomponente des Einselements  $1_G$  von  $G$ ; offenbar ist  $G_1$  eine Untergruppe in  $G$ . Dann findet man eine offene Umgebung  $U$  von  $1_G$  in  $G_1$  so, daß  $U^{-1} = U$  gilt und der Abschluß von  $U$  kompakt ist. Das Gruppenerzeugnis  $\cup_{n \in \mathbb{N}} U^n$  von  $U$  ist dann offen und abgeschlossen und in  $G_1$  enthalten, also schon gleich  $G_1$ . Somit ist  $G_1$   $\sigma$ -kompakt. Da alle Zusammenhangskomponenten von  $G$  die Gestalt  $gG_1$ ,  $g \in G$ , haben, besitzt  $G$  die Eigenschaft der Abzählbarkeit im Unendlichen.

Die  $\sigma$ -Kompaktheit von  $G$  stellt insbesondere sicher, daß das im nächsten Abschnitt definierte Haar-Maß regulär (und nicht bloß  $\sigma$ -regulär) und  $G$ , versehen

mit dem Haar-Maß, ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum ist (s. [Lan], Kap. IX, §2, Remark 3 und Kap. XII, §§2, 3).

## 2.1 Haar-Maß, Faltung und Dirac-Folgen

**Definition 2.3.** (a) Ist  $X$  ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und  $\Sigma_X$  die  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen auf  $X$ , so heißt ein positives Maß  $\mu : \Sigma_X \rightarrow [0, +\infty]$  *regulär*, wenn  $\mu(K)$  für alle kompakten Mengen  $K \subset X$  endlich ist und für alle  $A \in \Sigma_X$  die Gleichungen

$$\mu(A) = \inf\{\mu(V) : A \subset V \subset X, V \text{ offen}\}$$

und

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A \text{ kompakt}\}$$

erfüllt sind.

- (b) Ein positives Maß  $\mu : \Sigma_G \rightarrow [0, +\infty]$  auf der Lie-Gruppe  $G$  heißt *linksinvariantes* (bzw. *rechtsinvariantes*) *Haar-Maß*, falls  $\mu$  regulär ist, nicht auf offenen Mengen  $U \neq \emptyset$  verschwindet und für alle  $A \in \Sigma_G$  und alle  $x \in G$  die Gleichung  $\mu(xA) = \mu(A)$  (bzw.  $\mu(Ax) = \mu(A)$ ) erfüllt. Ein Haar-Maß  $\mu$  auf  $G$  heißt *biinvariant*, wenn es sowohl linksinvariant als auch rechtsinvariant ist.

**Bemerkung 2.4.** Auf jeder Lie-Gruppe existiert ein linksinvariantes und ein rechtsinvariantes Haar-Maß. Sind  $\mu$  und  $\nu$  zwei linksinvariante (bzw. rechtsinvariante) Haar-Maße auf  $G$ , so gibt es eine Konstante  $c > 0$  mit  $\nu = c\mu$  (vgl. [HiN], Satz III.4.4 und Satz III.4.8, oder [Lan], Cor. XII.2.4 und §XII.3).

**Definition 2.5.** Sei  $d^r g$  ein rechtsinvariantes Haar-Maß auf der Lie-Gruppe  $G$ . Wir definieren den *modularen Faktor*  $m$  auf  $G$  durch

$$\int_G f(g) d^r g = m(h) \int_G f(hg) d^r g \quad \text{für alle } f \in C_c(G).$$

**Bemerkung 2.6.** Aus der Eindeutigkeitseigenschaft des rechtsinvarianten Haar-Maßes folgt, daß wir durch die obige Definition eine wohldefinierte stetige Funktion  $m : G \rightarrow ]0, +\infty[$  erhalten, die überdies ein Gruppenhomomorphismus ist, d. h. es gilt  $m(gh) = m(g)m(h)$  für alle  $g, h \in G$ .

Ferner ist durch  $d^l g := m^{-1} d^r g$  ein linksinvariantes Haar-Maß auf  $G$  gegeben. Es gilt für alle  $f \in L^1(G) := L^1(G, d^r g)$

$$\int_G f(g) d^r g = \int_G f(g^{-1}) d^l g \tag{2.1}$$

(siehe auch [HiN], Satz III.4.10).

**Definition 2.7.** (a) Für  $g \in G$  sei  $\rho_g : G \rightarrow G, h \mapsto hg$  die *Rechtstranslation* und  $\lambda_g : G \rightarrow G, h \mapsto g^{-1}h$  die *Linkstranslation um  $g$  auf  $G$* .

(b) Es seien  $p \in [1, \infty]$ ,  $\eta \in L^p(G)$  und  $\psi \in L^1(G)$ . Die *Faltung  $\eta * \psi$  von  $\eta$  und  $\psi$*  wird dann erklärt durch das  $L^p$ -wertige Bochner-Integral

$$\eta * \psi = \int_G (\eta \circ \rho_{g^{-1}}) \psi(g) d^r g. \quad (2.2)$$

(c) Es seien  $\varphi \in C_c(G)$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $f \in L^p(G)$ . Dann definieren wir die *Faltung  $\varphi * f$  von  $\varphi$  und  $f$*  über das  $L^p$ -wertige Bochner-Integral

$$\varphi * f = \int_G \varphi(g) (f \circ \lambda_g) d^l g. \quad (2.3)$$

**Bemerkung 2.8.** Es sei  $p \in [1, \infty]$ .

(i) Betrachte  $\eta \in L^p(G)$  und  $\psi \in L^1(G)$ . Da  $\|\eta \circ \rho_{g^{-1}}\|_{L^p(G)} = \|\eta\|_{L^p(G)}$  gilt, liegt der Integrand aus (2.2) in  $L^1(G, L^p(G))$ , und es ist

$$\|\eta * \psi\|_{L^p(G)} \leq \int_G \|\eta \circ \rho_{g^{-1}}\|_{L^p(G)} |\psi(g)| d^r g = \|\eta\|_{L^p(G)} \|\psi\|_{L^1(G)}. \quad (2.4)$$

Ferner ist die Funktion  $G \times G \ni (g, h) \mapsto \eta(hg^{-1})\psi(g)$  messbar bzgl.  $d^r g \otimes d^r h$ . Somit liegt nach Lemma 1.10 für fast alle  $h \in G$  die Abbildung  $g \mapsto \eta(hg^{-1})\psi(g)$  in  $L^1(G)$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \eta * \psi(h) &= \int_G \eta(hg^{-1})\psi(g) d^r g = \int_G \eta(g^{-1})\psi(gh) d^r g \\ &= \int_G \eta(g)\psi(g^{-1}h) d^l g. \end{aligned} \quad (2.5)$$

(ii) Für  $\varphi \in C_c(G)$ ,  $p \neq \infty$  und  $f \in L^p(G)$  gilt (mit der Konvention  $\frac{1}{\infty} = 0$ ):

$$\begin{aligned} \|\varphi * f\|_{L^p(G)} &\leq \int_G |\varphi(g)| \left( \int_G |f(g^{-1}h)|^p m(h) d^l h \right)^{1/p} d^l g \\ &= \int_G |\varphi(g)| \left( \int_G |f(h)|^p m(gh) d^l h \right)^{1/p} d^l g \\ &= \int_G |\varphi(g)| m(g)^{1/p} d^l g \left( \int_G |f(h)|^p d^r h \right)^{1/p} \\ &= \int_G |\varphi(g)| m(g)^{-1/p'} d^r g \|f\|_{L^p(G)} = \|m^{-1/p'} \varphi\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^p(G)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $p = \infty$  folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi * f\|_{L^\infty(G)} &\leq \int_G |\varphi(g)| \|f \circ \lambda_g\|_{L^\infty(G)} d^l g \\ &= \int_G |\varphi(g)| \|f\|_{L^\infty(G)} m(g)^{-1} d^r g = \|m^{-1}\varphi\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^\infty(G)}, \end{aligned}$$

also insgesamt für alle  $1 \leq p \leq \infty$ :

$$\|\varphi * f\|_{L^p(G)} \leq \|m^{-1/p'}\varphi\|_{L^1(G)} \|f\|_{L^p(G)}. \quad (2.6)$$

Wie in Teil (i) erhält man mit Lemma 1.10 für fast alle  $h \in G$ :

$$\varphi * f(h) = \int_G \varphi(g) f(g^{-1}h) d^l g = \int_G \varphi(hg^{-1}) f(g) d^r g,$$

i.e., für  $\varphi \in C_c(G)$ ,  $f \in L^1(G) \cap L^p(G)$  liefern die formal verschiedenen Definitionsgleichungen (2.2) und (2.3) die gleiche  $L^p$ -Funktion  $\varphi * f$ .

Ferner existiert die rechte Seite der letzten Gleichungskette punktweise und macht z. B. auch für  $f \in C(G)$ ,  $f$  nicht notwendigerweise beschränkt, als Definition von  $\varphi * f(h)$  durchaus Sinn.

Eine zentrale Eigenschaft der Faltung ist ihre glättende Wirkung:

**Lemma 2.9.** *Es seien  $k \in \mathbb{N}^\times$  und  $p \in [1, \infty]$ . Sind  $\varphi \in C_c^k(G)$  und  $f \in L^p(G)$ , so ist  $\varphi * f \in C^k(G) \cap L^p(G)$ .*

*Genauer: Die Abbildung  $G \ni h \mapsto \int_G \varphi(hg^{-1})f(g) d^r g$  ist eine  $C^k$ -Funktion.*

*Beweis.* Nach Bemerkung 2.8 gilt  $\varphi * f(h) = \int_G \varphi(hg^{-1})f(g) d^r g$ . Es sei nun  $h \in G$ ,  $U$  eine offene Umgebung von  $h$  in  $G$  und  $\psi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$  eine Karte. Ferner sei  $U_0$  eine offene Umgebung von  $h$ , deren Abschluß  $\overline{U_0}$  kompakt und in  $U$  enthalten ist, und es sei  $V_0 = \psi(U_0)$ .

Definiert man die Abbildung  $\Phi : G \times V \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\Phi(g, v) := \varphi(\psi^{-1}(v)g^{-1})$ , so liegt die Funktion  $g \mapsto \Phi(g, v)f(g)$  für alle  $v \in V$  in  $L^1(G)$ , und  $\Phi$  ist bzgl. der  $v$ -Variablen  $k$ -mal stetig differenzierbar. Für alle Multiindizes  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  mit  $|\alpha| \leq k$  ist also insbesondere  $\partial_v^\alpha \Phi$  stetig und auf  $G \times \overline{V_0}$  beschränkt, denn  $\text{supp}(\partial_v^\alpha \Phi|_{G \times \overline{V_0}})$  ist als Teilmenge von  $(\text{supp}(\varphi)^{-1}\overline{U_0}) \times \overline{V_0}$  kompakt.

Somit folgt aus dem Standardsatz über Differentiation parameterabhängiger Integrale (siehe z. B. [Lan], Lemma VIII.2.2), daß

$$V_0 \ni v \mapsto \int_G \Phi(g, v) f(g) d^r g = ((\varphi * f) \circ \psi^{-1})(v)$$

eine  $C^k$ -Funktion ist. Da sowohl  $h$  als auch die lokale Karte um  $h$  beliebig vorgegeben waren, folgt, daß  $\varphi * f$  eine  $C^k$ -Funktion (im Sinne der Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten) ist.  $\square$

**Definition 2.10.** Eine Folge reellwertiger Funktionen  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{D}(G)$  heißt *Dirac-Folge* auf  $G$ , falls die folgenden drei Bedingungen gelten:

- (i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\varphi_n \geq 0$ .
- (ii) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\int_G \varphi_n(x) d^l x = 1$ .
- (iii) Für jede Umgebung  $U$  von  $1_G$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\text{supp}(\varphi_n) \subset U$  für alle  $n \geq n_0$ .

Daß solche Dirac-Folgen auf jeder Lie-Gruppe  $G$  existieren, läßt sich z. B. mit [HiN], Lemma III.1.4, folgern.

**Lemma 2.11.** Sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge auf  $G$  und  $s \in \mathbb{R}$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|m^s \varphi_n\|_{L^1(G)} = 1$ . Sind ferner  $1 \leq p < \infty$  und  $f \in L^p(G)$ , so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n * f\|_{L^p(G)} = 0$ . Ist  $f \in C(G)$ , so gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f - \varphi_n * f|(g) = 0$  für alle  $g \in G$ , und der Limes ist gleichmäßig auf Kompakta.

*Beweis.* Es ist  $\|m^s \varphi_n\|_1 = \int_G \varphi_n(g) m(g)^{1+s} d^l g$ . Daher strebt  $\|m^s \varphi_n\|_1$  aufgrund der Definition der Dirac-Folge und der Stetigkeit des modularen Faktors  $m$  im Einselement für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $1 \in \mathbb{R}$ .

Ist  $f \in C_c(G)$ , so ist nach (2.3)

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_n * f\|_p &= \left\| \int_G \varphi_n(g) (f - f \circ \lambda_g) d^l g \right\|_p \leq \int_G \varphi_n(g) \|f - f \circ \lambda_g\|_p d^l g \\ &\leq \sup\{\|f - f \circ \lambda_g\|_p : g \in \text{supp}(\varphi_n)\} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ist nun  $f$  ein beliebiges Element aus  $L^p(G)$ , so findet man zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $h \in C_c(G)$  mit  $\|f - h\|_p < \varepsilon/2$  (vgl. [Lan], Thm. IX.3.1). Das impliziert unter Ausnutzung von (2.6) nach dem bereits Bewiesenen

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_n * f\|_p &\leq \|f - h\|_p + \|h - \varphi_n * h\|_p + \|\varphi_n * (h - f)\|_p \\ &\leq \varepsilon/2 + \|h - \varphi_n * h\|_p + \|m^{-1/p'} \varphi_n\|_1 \|h - f\|_p \longrightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben war, ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \varphi_n * f\|_p = 0$ . Sei jetzt  $f \in C(G)$  und  $K \subset G$  kompakt. Dann gilt nach Bemerkung 2.8 für alle  $h \in K$

$$\begin{aligned} |f - \varphi_n * f|(h) &\leq \int_G \varphi_n(g) |f(h) - f(g^{-1}h)| d^l g \\ &\leq \sup\{|f(\eta) - f(\gamma^{-1}\eta)| : \gamma \in \text{supp}(\varphi_n), \eta \in K\} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . □

## 2.2 Semidirekte Summen und Produkte

Die Wichtigkeit von semidirekten Produkten kann man schon daran ablesen, daß sich zusammenhängende und einfach zusammenhängende auflösbare Lie-Gruppen als iterierte semidirekte Produkte von eindimensionalen reellen Vektorräumen darstellen lassen.

In den Untersuchungen des Abschnitts 4.3 und der Kapitel 5 und 6 über differenzierbaren  $L^p$ -Funktionalkalkül selbstadjungierter Operatoren werden die zugrundeliegenden Lie-Gruppen eine semidirekte Produktstruktur aufweisen. In diesem Abschnitt sollen ein paar grundlegende Aussagen über semidirekte Summen und Produkte angegeben und Notation eingeführt werden.

**Definition 2.12.** (a) Sind  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{r}$  zwei Lie-Algebren und  $\alpha : \mathfrak{r} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{h})$  ein Lie-Algebrenhomomorphismus, so bezeichne die *semidirekte Summe*  $\mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}$  die äußere direkte Summe der Vektorräume  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{r}$ , ausgestattet mit der Klammer

$$[(H, R), (H', R')] := (\alpha(R)H' - \alpha(R')H + [H, H'], [R, R'])$$

für alle  $H, H' \in \mathfrak{h}$ ,  $R, R' \in \mathfrak{r}$ . Ist  $\mathfrak{r} = \mathbb{R}$ , so ist  $\alpha$  durch  $\alpha(1) =: D \in \text{der}(\mathfrak{h})$  festgelegt. Wir schreiben dann auch  $\mathfrak{h} \rtimes_D \mathbb{R}$  anstelle von  $\mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathbb{R}$ .

(b) Es seien  $H$  und  $R$  Lie-Gruppen und  $\theta : R \rightarrow \text{Aut}(H)$  ein Gruppenhomomorphismus derart, daß die Abbildung  $H \times R \rightarrow H$ ,  $(h, r) \mapsto \theta(r)h$  analytisch ist. Dann heißt  $H \times R$ , ausgestattet mit der Verknüpfung

$$(h, r)(h', r') := (h(\theta(r)h'), rr') \quad \text{für alle } h, h' \in H, r, r' \in R,$$

das *semidirekte Produkt*  $H \rtimes_{\theta} R$  der Lie-Gruppen  $H$  und  $R$ .

**Bemerkung 2.13.** (a) Die oben definierte semidirekte Summe  $(\mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}, [\cdot, \cdot])$  der Lie-Algebren  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{r}$  ist selbst wieder eine Lie-Algebra. Der Unterraum  $\{(H, 0) \in \mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}\}$  ist ein Ideal in  $\mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}$  und als Lie-Algebra isomorph zu  $\mathfrak{h}$  und wird deshalb von uns auch wieder mit  $\mathfrak{h}$  bezeichnet (s. [HiN], Prop. II.1.13). Der Teilraum  $\{(0, R) \in \mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}\}$  ist eine zu  $\mathfrak{r}$  isomorphe Unterálgebra von  $\mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}$  und wird deshalb auch mit  $\mathfrak{r}$  identifiziert.

(b) Das semidirekte Produkt  $H \rtimes_{\theta} R$  der Lie-Gruppen  $H$  und  $R$  ist ebenfalls eine Lie-Gruppe, und  $H$  ist ein Normalteiler in  $H \rtimes_{\theta} R$  (vgl. [HiN], §III.3).

Wir betrachten nun ein semidirektes Produkt  $H \rtimes_{\theta} R$ . Ferner seien  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{r}$  die Lie-Algebren von  $H$  bzw.  $R$ . Für alle  $r \in R$  bezeichne  $d\theta(r)$  den eindeutig bestimmten Lie-Algebrenautomorphismus, der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
H & \xrightarrow{\theta(r)} & H \\
\exp_H \uparrow & & \uparrow \exp_H \\
\mathfrak{h} & \xrightarrow{d\theta(r)} & \mathfrak{h}
\end{array}$$

Des weiteren sei  $\beta : R \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{h})$  der durch  $\beta(r) = d\theta(r)$  erklärte Lie-Gruppenhomomorphismus. Ferner seien  $\text{Exp}$  die Exponentialreihe auf  $\text{der}(\mathfrak{h}) \subset \text{End}(\mathfrak{h})$  und  $d\beta$  der eindeutig bestimmte Lie-Algebrenhomomorphismus, für den die Kommutativität des untenstehenden Diagramms gegeben ist.

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\beta} & \text{Aut}(\mathfrak{h}) \\
\exp_R \uparrow & & \uparrow \text{Exp} \\
\mathfrak{r} & \xrightarrow{d\beta} & \text{der}(\mathfrak{h})
\end{array}$$

Dann gilt die folgende Aussage:

**Satz 2.14.** *Die Lie-Algebra von  $H \rtimes_{\theta} R$  ist isomorph zu  $\mathfrak{h} \rtimes_{d\beta} \mathfrak{r}$ .*

Einen Beweis findet man in [HiN] unter Satz III.3.15. In gewisser Weise gilt auch die Umkehrung dieses Satzes:

**Satz 2.15.** *Sind  $\mathfrak{h}$  und  $\mathfrak{r}$  Lie-Algebren und ist  $G$  eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit Lie-Algebra  $\mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{r}$ , so ist  $G$  isomorph zu einem semidirekten Produkt  $H \rtimes_{\theta} R$ , wobei  $H, R$  zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppen über  $\mathfrak{h}$  bzw.  $\mathfrak{r}$  sind.*

Die Beziehung zwischen  $\theta$  und  $d\beta := \alpha$  ist dabei wie in Satz 2.14 (vgl. [HiN], Kor. III.3.16).

**Konvention 2.16.** Sei  $G := H \rtimes_{\theta} R$  ein semidirektes Produkt von Lie-Gruppen. In Hinblick auf Satz 2.14 betrachten wir von nun an als Lie-Algebra von  $G$  immer  $\mathfrak{h} \rtimes_{d\beta} \mathfrak{r}$  mit der Exponentialabbildung  $\exp_G$ , die für alle  $h \in \mathfrak{h}$  und  $r \in \mathfrak{r}$  die Gleichungen

$$\exp_G(h, 0) = (\exp_H(h), 1_R) \quad \text{und} \quad \exp_G(0, r) = (1_H, \exp_R(r))$$

erfüllt (dabei bezeichnen  $1_H$  bzw.  $1_R$  die neutralen Elemente in  $H$  bzw.  $R$ ).

In der zweiten Aussage des nachstehenden Lemmas kommt – im Gegensatz zu den Behauptungen (i) und (iv) – keine semidirekte Summe vor, sie läßt sich aber durch einen Umweg über eine semidirekte Summe beweisen. Beim Beweis der Aussage (iii) wird dann auf (ii) zurückgegriffen.

**Lemma 2.17.** (i) Sind  $\mathfrak{a}$  eine abelsche Lie-Algebra,  $\mathfrak{h}$  eine auflösbare Lie-Algebra und  $\alpha : \mathfrak{a} \rightarrow \text{der}(\mathfrak{h})$  ein Lie-Algebrenhomomorphismus, so ist die semidirekte Summe  $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \rtimes_{\alpha} \mathfrak{a}$  auflösbar. Zudem ist die Kommutatoralgebra  $\mathfrak{g}^1$  in  $\mathfrak{h}$  enthalten.

(ii) Ist  $\mathfrak{h}$  eine auflösbare Lie-Algebra und existiert eine Derivation  $D$  auf  $\mathfrak{h}$  mit  $D\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^1 = \mathfrak{h}$ , so ist  $\mathfrak{h}$  bereits nilpotent.

(iii) Sei  $\mathfrak{h}$  eine beliebige reelle Lie-Algebra. Existiert ein invertierbares  $D \in \text{der}(\mathfrak{h})$ , so ist  $\mathfrak{h}$  schon nilpotent.

(iv) Sei  $\mathfrak{h}$  eine nilpotente Lie-Algebra. Ist  $D \in \text{der}(\mathfrak{h})$  und besitzt das charakteristische Polynom von  $D$  eine von Null verschiedene Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , so ist die semidirekte Summe  $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \rtimes_D \mathbb{R}$  auflösbar, aber nicht nilpotent.

**Bemerkung 2.18.** (a) Definiere  $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}$  und induktiv mit  $D_j \in \text{der}(\mathfrak{g}_j)$  für  $j = 1, \dots, m-1$  die semidirekten Summen  $\mathfrak{g}_{j+1} = \mathfrak{g}_j \rtimes_{D_j} \mathbb{R}$ . Jede reelle auflösbare  $m$ -dimensionale Lie-Algebra ist von der Gestalt  $\mathfrak{g}_m$  mit geeigneten  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, m-1$  (siehe [HiN], Bem. II.4.10). Nach Lemma 2.17 hat nun höchstens ein  $D_j$  Rang  $j$ . Existiert ein solches  $D_j$ , so ist  $\mathfrak{g}_i$  nilpotent für  $i \leq j$  und auflösbar, aber nicht mehr nilpotent, für  $i > j$ .

(b) Im Gegensatz zu (iii) ist das Kriterium (ii) des Lemmas 2.17 i. allg. für nicht auflösbare Lie-Algebren nicht mehr wahr: Ist  $\mathfrak{h}$  eine nicht triviale halbeinfache Lie-Algebra, so gilt  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^1$  (vgl. [HiN], Korollar II.3.8), und die in (ii) angeführte Bedingung wird trivialerweise von allen Derivationen auf  $\mathfrak{h}$  erfüllt, aber  $\mathfrak{h}$  ist nicht nilpotent.

*Beweis des Lemmas 2.17.* (i) Für alle  $(H, A), (H', A') \in \mathfrak{g}$  gilt

$$[(H, A), (H', A')] = (\alpha(A)H' - \alpha(A')H + [H, H'], 0) \in \mathfrak{h},$$

d. h., die Kommutatoralgebra  $\mathfrak{g}^1$  ist in der auflösbaren Unter algebra  $\mathfrak{h}$  von  $\mathfrak{g}$  enthalten. Somit ist auch  $\mathfrak{g}$  auflösbar.

(ii) Es gilt für die semidirekte Summe  $\mathfrak{g} := \mathfrak{h} \rtimes_D \mathbb{R}$ :

$$\mathfrak{h} = D\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^1 \subset \{[H, R] : H \in \mathfrak{h}, R \in \mathbb{R}\} + \mathfrak{h}^1 \subset \mathfrak{g}^1,$$

somit folgt aus (i):  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^1$ . Nun sind auflösbare Lie-Algebren aber dadurch charakterisiert, daß ihre Kommutatoralgebra nilpotent ist (siehe [HiN], Korollar II.2.12).

(iii) Sei  $\mathfrak{r}$  das auflösbare Radikal von  $\mathfrak{h}$  (vgl. [HiN], S. 115). Für  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\theta(t) = e^{tD}$  ein Lie-Algebrenautomorphismus und bildet somit Ideale auf Ideale und auflösbare Unter algebren auf ebensolche ab, woraus  $\theta(t)\mathfrak{r} = \mathfrak{r}$  folgt. Deshalb gilt für  $R \in \mathfrak{r}$ :

$$DR = \partial_t \theta(t)R|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\theta(t)R - \theta(0)R}{t} \in \mathfrak{r}.$$

Somit liegt  $D|_{\mathfrak{r}}$  in  $\text{der}(\mathfrak{r})$  und ist invertierbar; nach (ii) ist  $\mathfrak{r}$  daher nilpotent. Angenommen,  $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{r}$ . Dann wird auf  $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$  durch  $\tilde{D}(L + \mathfrak{r}) = DL + \mathfrak{r}$  offenbar ein linearer Automorphismus  $\tilde{D}$  erklärt. Zudem verifiziert man leicht, daß  $\tilde{D}$  eine Derivation auf  $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$  ist. Nun ist  $\mathfrak{h}/\mathfrak{r}$  halbeinfach (siehe [HiN], Bemerkung II.4.1), und daher gilt  $\text{ad}(\mathfrak{h}/\mathfrak{r}) = \text{der}(\mathfrak{h}/\mathfrak{r})$  (siehe [HiN], Satz II.3.9). Aber da  $\mathcal{X} \in \ker(\text{ad } \mathcal{X}) \neq \{0\}$  für alle  $\mathcal{X} \in \mathfrak{h}/\mathfrak{r}$ , haben wir einen Widerspruch zur Injektivität von  $\tilde{D}$ .

(vi) Wir wählen eine Basis  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  von  $\mathfrak{h}$ , bzgl. der  $D$  reelle Jordan-Normalform (siehe Abschnitt A.1) besitzt. Mit der Notation aus Abschnitt A.1 sei o. B. d. A.  $J_1$  ein Jordan-Block mit  $\lambda_1 \neq 0$ . Ist  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ , so definieren wir  $V := \mathbb{R}\mathcal{X}_1$ ; ist  $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so setzen wir  $V = \text{span}\{\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\}$ . Dann gilt  $V = DV \subset \{[X, R] : X \in V, R \in \mathbb{R}\} \subset \mathfrak{g}^1$  und mit dem Induktionsschluß

$$\{0\} \neq V = DV \subset \{[X, R] : X \in V, R \in \mathbb{R}\} \subset [\mathfrak{g}^n, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}^{n+1}$$

folgt, daß  $\mathfrak{g}$  nicht nilpotent ist. □

**Lemma 2.19.** *Sei  $H$  eine Lie-Gruppe mit modularem Faktor  $\delta$  und  $K$  eine kompakte Lie-Gruppe, und sei ferner  $\gamma : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  ein Gruppenhomomorphismus derart, daß die Abbildung  $H \times K \rightarrow H$ ,  $(h, k) \rightarrow \gamma(k)h$  analytisch ist. Jedes Produktmaß von einem rechtsinvarianten Haar-Maß auf  $H$  und einem biinvarianten Haar-Maß auf  $K$  ist dann ein rechtsinvariantes Haar-Maß auf  $G := H \rtimes_{\gamma} K$ , und für den modularen Faktor  $m$  auf  $G$  gilt die Gleichung*

$$m(h, k) = \delta(h) \quad \text{für alle } (h, k) \in H \rtimes_{\gamma} K. \quad (2.7)$$

*Beweis.* Nach [Lan], Thm. IX.6.3 (bzw. Ex. IX.7.4), ist  $d^r h \otimes dk$  ein reguläres Maß auf  $G$ , und die Rechtsinvarianz ist schnell verifiziert.

Sei nun  $\varphi \in C_c(H)$  mit  $\int_H \varphi d^r h = 1$ . Ferner sei o. B. d. A.  $dk(K) = 1$ . Dann gilt für alle  $h' \in H$  nach Definition der Modularfunktion

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta(h')} &= \frac{1}{\delta(h')} \int_H \varphi d^r h = \int_H \varphi(h'h) d^r h = \int_K \int_H \varphi(h'h) d^r h dk \\ &= \frac{1}{m(h')} \int_K \int_H \varphi(h) d^r h dk = \frac{1}{m(h')}. \end{aligned}$$

Da  $m$  ein stetiger Homomorphismus ist, gilt  $m|_K \equiv 1$  und  $m(h, k) = m(h)m(k) = m(h)$  für alle  $h \in H$ ,  $k \in K$ . Somit folgt die Formel (2.7). □

## 2.3 Linksinvariante Vektorfelder

**Voraussetzung 2.20.** Sei  $d^r g$  ein rechtsinvariantes Haar-Maß auf der reellen Lie-Gruppe  $G$ . Es bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das Skalarprodukt in  $L^2(G) := L^2(G, d^r g)$ .

**Definition 2.21.** (i) Ein (reelles) *Vektorfeld*  $\mathcal{Y}$  auf  $G$  ist eine Derivation der Algebra  $C^\infty(G, \mathbb{R})$ , i. e.,  $\mathcal{Y}$  ist ein linearer Endomorphismus auf  $C^\infty(G, \mathbb{R})$ , und für alle  $\varphi, \psi \in C^\infty(G, \mathbb{R})$  gilt:

$$\mathcal{Y}(\varphi\psi) = (\mathcal{Y}\varphi)\psi + \varphi(\mathcal{Y}\psi).$$

(ii) Ein Vektorfeld  $\mathcal{Y}$  auf  $G$  heißt *linksinvariant*, wenn für alle  $\varphi \in C^\infty(G, \mathbb{R})$  und alle  $g, h \in G$  gilt:

$$\mathcal{Y}(\varphi \circ \lambda_h)(g) = (\mathcal{Y}\varphi)(\lambda_h(g)).$$

(iii) Für  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$  sei die *Liesche Ableitung*  $\mathcal{X}^G$  auf  $G$  entlang  $\mathcal{X}$  definiert durch

$$\mathcal{X}^G \varphi(g) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(g \cdot \exp_G(t\mathcal{X})) \right|_{t=0}$$

für alle  $\varphi \in C^1(G)$ ,  $g \in G$ .

**Bemerkung 2.22.** Offenbar ist für  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$  die Liesche Ableitung  $\mathcal{X}^G$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf  $G$ .

Andererseits existiert zu jedem linksinvarianten Vektorfeld  $\mathcal{Y}$  auf  $G$  genau ein  $\mathcal{X}$  aus  $\mathfrak{g}$  mit  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^G$  (vgl. [HiN], Kap. III, §2).

**Konvention 2.23.** Ist  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$ , so identifizieren wir  $\mathcal{X}$  mit dem linksinvarianten Vektorfeld  $\mathcal{X}^G$ .

Ist umgekehrt  $\mathcal{Y}$  ein linksinvariantes Vektorfeld auf  $G$ , so bezeichnen wir das eindeutig bestimmte Element  $\mathcal{X}$  in  $\mathfrak{g}$  mit  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^G$  ebenfalls mit  $\mathcal{Y}$ .

Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  (und somit selbst eine Lie-Gruppe bzgl. der von  $G$  induzierten Topologie, siehe [HiN], Satz III.2.33) und  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  die dazugehörige Lie-Unteralgebra von  $\mathfrak{g}$ . Wollen wir nun die Liesche Ableitung bzgl. eines Elementes  $\mathcal{X} \in \mathfrak{h}$  auf  $H$  betrachten, so bezeichnen wir diese, nach der Konvention aus Definition 2.21, mit  $\mathcal{X}^H$ , um Konfusionen zu vermeiden (i. allg. ist  $\mathcal{X}^H \neq \mathcal{X}^G$ , siehe Lemma 2.24).

**Lemma 2.24.** Sei  $G = H \rtimes_{\theta} R$ . Sind  $\mathcal{X} \in \mathfrak{h}$  und  $\mathcal{Y} \in \mathfrak{r}$ , so gilt

$$\mathcal{X}^G f(h, r) = ((d\theta(r)\mathcal{X})^H f(\cdot, r))(h) \quad \text{und} \quad \mathcal{Y}^G f(h, r) = (\mathcal{Y}^R f(h, \cdot))(r)$$

für alle  $f \in C^1(G)$  und alle  $h \in H$ ,  $r \in R$ .

*Beweis.* Es seien  $f \in C^1(G)$ ,  $\mathcal{X} \in \mathfrak{h}$ ,  $\mathcal{Y} \in \mathfrak{r}$  und  $h \in H$ ,  $r \in R$ . Dann verifiziert man mit Blick auf Definition 2.21, Konvention 2.16 und den davor plazierten

kommutativen Diagrammen die Umformungen

$$\begin{aligned}\mathcal{X}^G f(h, r) &= \frac{d}{dt} f((h, r) \exp_G(t\mathcal{X}))|_{t=0} = \frac{d}{dt} f((h, r)(\exp_H(t\mathcal{X}), 1_R))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(h(\theta(r) \exp_H(t\mathcal{X})), r)|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(h \exp_H(t d\theta(r)\mathcal{X}), r)|_{t=0} \\ &= ((d\theta(r)\mathcal{X})^H f(\cdot, r))(h)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}^R f(h, r) &= \frac{d}{dt} f((h, r) \exp_G(t\mathcal{Y}))|_{t=0} = \frac{d}{dt} f((h, r)(1_H, \exp_R(t\mathcal{Y})))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} f(h, r \exp_R(t\mathcal{Y}))|_{t=0} = (\mathcal{Y}^R f(h, \cdot))(r).\end{aligned}$$

□

**Lemma 2.25.** *Es seien  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$  und  $\varphi \in \mathcal{L}_{loc}^1(G)$  derart, daß für alle  $g \in G$  die Abbildung  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \varphi(g \exp(t\mathcal{X}))$  stetig differenzierbar und  $\mathcal{X}\varphi$  eine lokal beschränkte Borel-Funktion ist.*

(i) *Ist  $\psi \in C_c^1(G)$ , so gilt*

$$\int_G (\mathcal{X}\varphi)(g)\psi(g) d^r g = - \int_G \varphi(g)(\mathcal{X}\psi)(g) d^r g. \quad (2.8)$$

(ii) *Besitzt  $\varphi$  kompakten Träger, so ist  $\int_G \mathcal{X}\varphi(g) d^r g = 0$ .*

*Beweis.* Zu (i): Sei  $\varepsilon > 0$  so klein, daß  $[-\varepsilon, \varepsilon]\mathcal{X}$  in einer Exponentialumgebung der Null in  $\mathfrak{g}$  enthalten ist. Die Abbildung

$$\Phi : G \times ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow \mathbb{C}, (g, t) \mapsto \varphi(g \exp_G(t\mathcal{X}))$$

ist bei festgehaltenem  $g$  bzgl. der  $t$ -Variablen stetig differenzierbar, und aus  $\partial_t \Phi(g, t) = \mathcal{X}\varphi(g \exp(t\mathcal{X}))$  folgt

$$|(\partial_t \Phi)\psi| \leq \sup\{|\mathcal{X}\varphi(g)| : g \in \text{supp}(\psi) \exp([-\varepsilon, \varepsilon]\mathcal{X})\} |\psi|.$$

Ferner liegt  $g \mapsto \Phi(g, t)\psi(g)$  für jedes  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$  in  $L^1(G)$ . Daher gilt nach dem Standardsatz über Differentiation parameterabhängiger Integrale:

$$\begin{aligned}\int_G \mathcal{X}\varphi(g)\psi(g) d^r g &= \int_G \partial_t \Phi(g, t)|_{t=0} \psi(g) d^r g = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_G \Phi(g, t)\psi(g) d^r g \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_G \varphi(g \exp_G(t\mathcal{X}))\psi(g) d^r g = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_G \varphi(g)\psi(g \exp_G(-t\mathcal{X})) d^r g.\end{aligned}$$

Unter erneuter Ausnutzung des Satzes über Differentiation parameterabhängiger Integrale ergibt sich dann

$$\int_G \mathcal{X}\varphi(g)\psi(g) d^r g = \int_G \varphi(g) \frac{d}{dt} \psi(g \exp_G(-t\mathcal{X}))|_{t=0} d^r g = - \int_G \varphi(g) \mathcal{X}\psi(g) d^r g.$$

Zu (ii): Sei  $\psi \in \mathcal{D}(G)$  mit  $\psi|_{\text{supp}(\varphi)} \equiv 1$ . Dann folgt (ii) aus den Gleichungen  $\varphi = \varphi\psi$ ,  $\mathcal{X}\varphi = (\mathcal{X}\varphi)\psi$  und  $\varphi(\mathcal{X}\psi) \equiv 0$  sowie Aussage (i).  $\square$

Das Lemma 2.25 nehmen wir zum Anlaß für die folgende Definition:

**Definition 2.26.** Es seien  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$  linksinvariante Vektorfelder. Für jeden Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$  sei die Funktion  $f_\alpha$  aus  $C^{|\alpha|}(G)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ . Ist dann

$$T = \sum_{|\alpha|=0}^N f_\alpha \mathcal{X}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{X}_m^{\alpha_m}, \quad (2.9)$$

so bezeichnen wir den durch

$$T^* \varphi = \sum_{|\alpha|=0}^N (-1)^{|\alpha|} \mathcal{X}_m^{\alpha_m} \dots \mathcal{X}_1^{\alpha_1} (f_\alpha^* \varphi) \quad (2.10)$$

auf  $C^N(G)$  definierten Differentialoperator  $T^*$  als den zu  $T$  formal adjungierten Operator.

Gibt es zu  $f \in L^2(G)$  ein  $\tilde{f} \in L^2(G)$  mit  $\langle f, T^* \varphi \rangle = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle$  für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ , so sagen wir, daß  $Tf$  im schwachen Sinne existiert und setzen  $Tf := \tilde{f}$ .

Existiert  $Tf$  im schwachen Sinne, so drücken wir diesen Sachverhalt kurz durch die Schreibweise  $Tf \in L^2(G)$  aus.

Besitzt der Differentialoperator  $T$  die Form (2.9) mit konstanten Funktionen  $f_\alpha$  für alle Multiindizes  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq N$ , so nennen wir  $T$  einen linksinvarianten Differentialoperator.

Ist  $T$  wie in (2.9) und  $f \in C_c^N(G)$ , so erkennt man mit Lemma 2.25, daß  $Tf$  im klassischen Sinne gerade gleich  $Tf$  im schwachen Sinne ist.

**Lemma 2.27.** Es sei  $f \in L^2(G)$ ,  $T$  ein linksinvarianter Differentialoperator und  $Tf \in L^2(G)$ .

- (i) Für alle  $x \in G$  ist  $T(f \circ \lambda_x) \in L^2(G)$ , und es gilt  $T(f \circ \lambda_x) = (Tf) \circ \lambda_x$ .
- (ii) Ist  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ , so gilt  $T(\varphi * f) = \varphi * Tf$ .

*Beweis.* (i) Ist  $x \in G$ , so hat man

$$\|f \circ \lambda_x\|_2^2 = \int_G |f(x^{-1}g)|^2 m(g) d^l g = m(x) \int_G |f(g)|^2 m(g) d^l g = m(x) \|f\|_2^2,$$

also  $f \circ \lambda_x \in L^2(G)$ . Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$  gilt zudem

$$\begin{aligned} \langle f \circ \lambda_x, T^* \varphi \rangle &= \int_G f(x^{-1}g) (T^* \varphi(g))^* m(g) d^l g \\ &= \int_G f(g) (T^* \varphi(xg))^* m(xg) d^l g = m(x) \int_G f(g) (T^* (\varphi \circ \lambda_{x^{-1}})(g))^* d^r g \\ &= m(x) \int_G Tf(g) (\varphi \circ \lambda_{x^{-1}})(g)^* d^r g = m(x) \int_G Tf(x^{-1}g) \varphi(g)^* m(x^{-1}g) d^l g \\ &= \int_G Tf(x^{-1}g) \varphi(g)^* d^r g = \langle Tf \circ \lambda_x, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

(ii) Sei  $\psi \in \mathcal{D}(G)$ . Unter Ausnutzung des Satzes von Fubini folgt aus (i):

$$\begin{aligned} \langle \varphi * f, T^* \psi \rangle &= \int_G \left( \int_G \varphi(g) f(g^{-1}h) d^l g \right) (T^* \psi(h))^* d^r h \\ &= \int_G \varphi(g) \left( \int_G (f \circ \lambda_g)(h) (T^* \psi(h))^* d^r h \right) d^l g \\ &= \int_G \varphi(g) \left( \int_G T(f \circ \lambda_g)(h) \psi(h)^* d^r h \right) d^l g \\ &= \int_G \left( \int_G \varphi(g) Tf(g^{-1}h) d^l g \right) \psi(h)^* d^r h = \langle \varphi * Tf, \psi \rangle. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.28.** *Es existiert eine Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(G)$  mit den Eigenschaften*

- (i) *Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $0 \leq \psi_n \leq 1$ .*
- (ii) *Für jeden linksinvarianten Differentialoperator  $T$  gibt es ein von  $n \in \mathbb{N}$  unabhängiges  $C_T > 0$  mit  $|T\psi_n| \leq C_T$ .*
- (iii) *Die Familie  $(\psi_n^{-1}(\{1\}))_{n \in \mathbb{N}}$  bildet eine aufsteigende Folge von Mengen mit  $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} \psi_n^{-1}(\{1\})$ .*

*Beweis.* Es sei  $\psi \in \mathcal{D}(G)$  positiv und so normiert, daß  $\int_G \psi(g) d^r g = 1$  gilt. Da unsere Lie-Gruppe  $G$  nach Bemerkung 2.2  $\sigma$ -kompakt ist, findet sich eine aufsteigende Folge  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Kompakta in  $G$  mit  $G = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . O. B. d. A. können wir annehmen, daß  $K_n(\text{supp}(\psi)^{-1})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  in  $K_{n+1}$  enthalten

ist. Wir wählen nun Funktionen  $\varphi_n \in \mathcal{D}(G)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit  $0 \leq \varphi_n \leq 1$  und  $\varphi_n|_{K_n} \equiv 1$  (vgl. [HiN], Lemma III.1.4). Indem man notfalls die  $K_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , rekursiv vergrößert, kann man davon ausgehen, daß  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K_{n+1}$  gilt. Setzt man jetzt  $\psi_n := \varphi_{n+1} * \psi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so erfüllt diese Folge die gewünschten Bedingungen:

Für  $x \in G$  erhält man aufgrund der Positivität von  $\psi$  und  $\varphi_n$

$$0 \leq \psi_n(x) = \int_G \varphi_{n+1}(xg^{-1})\psi(g) d^r g \leq \int_G \psi(g) d^r g = 1.$$

Ist dabei  $x \in K_n$ , so gilt offenbar  $\psi_n(x) = 1$ , da  $K_n(\text{supp}(\psi)^{-1}) \subset K_{n+1}$ . Zudem ist  $\text{supp}(\psi_n) \subset \text{supp}(\varphi_{n+1})\text{supp}(\psi)$ , und somit folgt  $\psi_n \in \mathcal{D}(G)$  aus Lemma 2.9. Mit Hilfe von Lemma 2.27(ii) ergibt sich für einen linksinvarianten Differentialoperator  $T$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} |T\psi_n(x)| &= |\varphi_{n+1} * T\psi(x)| \leq \int_G \varphi_{n+1}(xg^{-1})|T\psi(g)| d^r g \\ &\leq \int_G |T\psi(g)| d^r g =: C_T < \infty \end{aligned}$$

für alle  $x \in G$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . □

Durch Verwendung von Dirac-Folgen und Lemma 2.28 läßt sich die Aussage des Lemmas 2.25 verbessern:

**Lemma 2.29.** *Es seien  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$  und  $\xi, \eta \in L^2(G)$  mit  $\mathcal{X}\xi, \mathcal{X}\eta \in L^2(G)$ . Dann folgt*

$$\langle \mathcal{X}\xi, \eta \rangle = -\langle \xi, \mathcal{X}\eta \rangle. \quad (2.11)$$

*Beweis.* Ist  $\xi \in \mathcal{D}(G)$ , so gilt (2.11) nach Definition 2.26 und Lemma 2.25. Sei nun  $\xi \in L^2(G)$  mit kompaktem Träger und  $\mathcal{X}\xi \in L^2(G)$ . Ist dann  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge, so hat man  $\varphi_n * \xi \in \mathcal{D}(G)$  und

$$\begin{aligned} \langle \xi, \mathcal{X}\eta \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n * \xi, \mathcal{X}\eta \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{X}(\varphi_n * \xi), \eta \rangle \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_n * \mathcal{X}\xi, \eta \rangle = -\langle \mathcal{X}\xi, \eta \rangle \end{aligned}$$

(vgl. die Lemmata 2.9, 2.11 und 2.27).

Sei nun allgemein  $\xi \in L^2(G)$  mit  $\mathcal{X}\xi \in L^2(G)$  und  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge wie in Lemma 2.28. Dann ist  $\mathcal{X}(\psi_n\xi) = (\mathcal{X}\psi_n)\xi + \psi_n(\mathcal{X}\xi) \in L^2(G)$  und aus den obigen Ausführungen und Lemma 2.28 folgt:

$$\begin{aligned} \langle \xi, \mathcal{X}\eta \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n\xi, \mathcal{X}\eta \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \mathcal{X}(\psi_n\xi), \eta \rangle \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n\mathcal{X}\xi, \eta \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\mathcal{X}\psi_n)\xi, \eta \rangle = -\langle \mathcal{X}\xi, \eta \rangle. \end{aligned}$$

□

## 2.4 Linksinvariante Riemannsche Abstände

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften von linksinvarianten Riemann-Abständen aufgeführt werden. Der hier gewählte Weg zur Definition der Riemannschen Abstandsfunktion kommt ohne abstrakte Differentialgeometrie aus und ist eher konkret.

**Voraussetzung 2.30.** Die Lie-Gruppe  $G$  sei von nun an zusammenhängend. Es sei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $\mathfrak{g}$  und  $\| \cdot \|$  die von  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  induzierte Norm.

**Definition 2.31.** Sei  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  eine  $C^1$ -Kurve. Wir definieren für alle  $t \in [a, b]$ :

$$\dot{\gamma}(t) := \frac{d}{ds}(\exp_G^{-1} \circ \lambda_{\gamma(t)} \circ \gamma)(s)|_{s=t}. \quad (2.12)$$

Es sei dann durch

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt \quad (2.13)$$

die *Länge von  $\gamma$*  erklärt.

**Bemerkung 2.32.** (i) Sei  $N$  eine Exponentialumgebung in  $\mathfrak{g}$ . Zu vorgegebenem  $t \in [a, b]$  existiert eine Umgebung  $U$  von  $t$  in  $[a, b]$  mit  $\gamma(\sigma)^{-1}\gamma(\tau) \in \exp_G(N)$  für alle  $\sigma, \tau \in U$ . Somit ist insbesondere die auf  $U \times U$  definierte Funktion  $(\sigma, \tau) \mapsto (\exp_G^{-1} \circ \lambda_{\gamma(\sigma)} \circ \gamma)(\tau)$  bzgl. der zweiten Variablen stetig differenzierbar, also  $\dot{\gamma}$  stetig auf  $[a, b]$  und  $L(\gamma)$  somit wohldefiniert.

(ii) Ist  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve (i. e.,  $\gamma$  ist stetig und es existieren  $a = a_0 < \dots < a_N = b$  derart, daß  $\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]}$  eine  $C^1$ -Kurve für jedes  $j \in \{1, \dots, N\}$  ist), so wird naheliegenderweise die Länge von  $\gamma$  durch  $L(\gamma) := \sum_{j=1}^N L(\gamma|_{[a_{j-1}, a_j]})$  definiert.

(iii) Ist  $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  ein  $C^1$ -Diffeomorphismus, so verifiziert man mit der Ketten- und der Substitutionsregel die Gleichung  $L(\gamma) = L(\gamma \circ \varphi)$ .

(iv) Die Definitionsgleichung (2.12) ist in folgendem Sinne linksinvariant: Ist  $\zeta = \lambda_g \circ \gamma$  für ein  $g \in G$ , so zieht dies  $\dot{\zeta}(t) = \dot{\gamma}(t)$  für alle  $t \in [a, b]$  nach sich.

(v) Faßt man für  $t \in [a, b]$  das Lie-Algebrenelement  $\dot{\gamma}(t)$  als linksinvariantes Vektorfeld auf, so gilt für alle  $f \in C^\infty(G)$

$$\begin{aligned} (\dot{\gamma}(t)f)(\gamma(t)) &= \frac{d}{ds} f(\gamma(t) \exp_G(s\dot{\gamma}(t)))|_{s=0} = D(f \circ \lambda_{\gamma(t)}^{-1} \circ \exp_G)(0)\dot{\gamma}(t) \\ &= D(f \circ \lambda_{\gamma(t)}^{-1} \circ \exp_G)(0) \frac{d}{ds} (\exp_G^{-1} \circ \lambda_{\gamma(t)} \circ \gamma)(s)|_{s=t} = (f \circ \gamma)'(t). \end{aligned}$$

Bezeichnet also  $[\gamma_t]$  den von  $\gamma$  induzierten Tangentialvektor aus  $T_{\gamma(t)}G$ , so ist  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t)^G$  das eindeutig bestimmte linksinvariante Vektorfeld mit  $(\dot{\gamma}(t)f)(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)'(t) = [\gamma_t]f$  für alle  $f \in C^\infty(G)$ . (Daraus liest man direkt ab, daß unsere Definition der Länge einer  $C^1$ -Kurve mit der entsprechenden Definition in [Hul74] überstimmt.)

- (vi) Die Eigenschaft, daß sich zwei beliebige Punkte aus  $G$  durch eine stückweise  $C^1$ -Kurve verbinden lassen, ist äquivalent dazu, daß  $G$  zusammenhängend ist:

Um jedes  $g \in G$  existiert eine Umgebung  $U$ , die durch eine Karte diffeomorph auf eine offene Kugel des  $\mathbb{R}^n$  abgebildet wird. Geradenstücke in der Kugel lassen sich vermöge der Karte in glatte Kurvenstücke auf  $U$  überführen. Daher ist für vorgegebenes  $h \in G$  die Menge  $V(h)$  der  $g \in G$ , die durch eine stückweise  $C^1$ -Kurve mit  $h$  verbunden werden können, nicht leer, offen und abgeschlossen. Ist also  $G$  zusammenhängend, so ist  $V(h) = G$ . Ist hingegen  $V(h) \neq G$ , so ist  $G$  schon gleich der zusammenhängenden Menge  $\cup\{\text{ran}(\gamma) : \gamma \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve, } h \in \text{ran}(\gamma)\}$ .

**Definition 2.33.** Für  $g, h \in G$  sei  $\mathscr{W}_{g,h}$  die Menge der stückweisen  $C^1$ -Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  mit  $\gamma(a) = g$  und  $\gamma(b) = h$ .

Der zum Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  gehörige *Riemann-Abstand*  $d : G \times G \rightarrow [0, \infty[$  auf  $G$  sei erklärt durch

$$d(g, h) := \inf\{L(\gamma) : \gamma \in \mathscr{W}_{g,h}\}.$$

Ist  $g \in G$ , so schreiben wir kürzer  $d(g)$  anstelle von  $d(1_G, g)$ . Ist  $r > 0$ , so bezeichne  $B_r = B_r^G$  die Menge  $\{g \in G : d(g) < r\}$ .

**Lemma 2.34.** *Der oben definierte Riemann-Abstand ist eine Metrik auf  $G$ . Die durch  $d$  auf  $G$  induzierte Topologie ist gerade die auf  $G$  gegebene Lie-Gruppentopologie.*

*Ferner ist  $d$  linksinvariant, i. e., für alle  $x, y, g \in G$  gilt  $d(gx, gy) = d(x, y)$ .*

*Beweis.* Die Aussage, daß  $d$  eine Metrik ist, die die auf  $G$  etablierte Topologie erzeugt, wird in [Hel] unter Cor. I.9.5 bewiesen. Die Linksinvarianz von  $d$  folgt aus Bemerkung 2.32(iv).  $\square$

**Lemma 2.35.** *Es sei  $r > 0$  und  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Ist  $g \in B_{nr}$ , so finden sich Elemente  $g_1, \dots, g_n \in B_r$  mit  $g = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$ .*

*Beweis.* Die Aussage wird mit vollständiger Induktion über  $n$  verifiziert:

Der Induktionsanfang  $n = 1$  ist offenbar trivial.

Die Aussage gelte nun für  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Ist  $g \in B_{(n+1)r} \setminus B_{nr}$ , so existiert zu kleinem  $\varepsilon > 0$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ , die  $1_G$  und  $g$  verbindet und

zudem  $L(\gamma) < (n+1)r - \varepsilon$  erfüllt. Aus Zusammenhangsgründen schneidet  $\gamma$  dann die Sphäre  $\{h \in G : d(h) = nr - \varepsilon\}$  in einem Punkt  $\tilde{g}$ . Es gilt  $d(\tilde{g}) < nr$  und, mit der Bezeichnung  $\tilde{\gamma} = \gamma|_{[\gamma^{-1}(\tilde{g}), 1]}$ ,

$$d(\tilde{g}^{-1}g) = d(\tilde{g}, g) \leq L(\tilde{\gamma}) \leq L(\gamma) - (nr - \varepsilon) < r.$$

Somit ist  $g_{n+1} := \tilde{g}^{-1}g \in B_r$  und nach Induktionsvoraussetzung gibt es  $g_1, \dots, g_n \in B_r$  mit  $\tilde{g} = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$ , also insgesamt  $g = g_1 \cdot \dots \cdot g_n g_{n+1}$ .  $\square$

**Korollar 2.36.** *Alle bzgl.  $d$  beschränkten und abgeschlossenen Mengen in  $G$  sind kompakt. Somit ist  $(G, d)$  ein vollständiger metrischer Raum.*

*Beweis.* Aus Lemma 2.35 folgt  $B_{rn} = (B_r)^n$  für alle  $r > 0$  und  $n \in \mathbb{N}^\times$ . Für genügend kleines  $r$  wird die Menge  $\overline{B_r}$  vermöge der Exponentialkarte homöomorph auf eine kompakte Menge im  $\mathbb{R}^n$  abgebildet. Dann ist  $\overline{B_{nr}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums  $(\overline{B_r})^n$  selbst kompakt. Daraus folgt sogleich die Behauptung.  $\square$

**Definition 2.37.** Wir sagen, daß  $G$  *exponentielles Volumenwachstum* besitzt, wenn ein  $C > 0$  so existiert, daß für alle  $r \geq 1$  die Abschätzung  $|B_r| := \int_{B_r} d^r g \geq Ce^{rC}$  erfüllt ist.

**Bemerkung 2.38.** (a) Da alle Normen auf  $\mathfrak{g} \simeq \mathbb{R}^n$  äquivalent sind, ist die obige Definition unabhängig von der speziellen Wahl des Skalarproduktes auf  $\mathfrak{g}$ . Besitzt  $G$  also exponentielles Volumenwachstum bzgl. einer festen linksinvarianten Riemannschen Abstandsfunktion, so auch bzgl. jeder weiteren.

(b) Für alle  $r > 0$  gilt offenbar  $B_r = (B_r)^{-1}$ . Somit ist es in der obigen Definition auch nicht von Belang, ob man das Volumen von  $B_r$  bzgl. des rechtsinvarianten oder des linksinvarianten Haar-Maßes betrachtet, denn für alle  $g \in G$  ist  $\chi_{B_r}(g) = \chi_{B_r}(g^{-1})$ , und für symmetrische Funktionen  $f$  (i.e.,  $f(g) = f(g^{-1})$  für alle  $g \in G$ ) gilt

$$\int_G f(g) d^r g = \int_G f(g^{-1}) d^l g = \int_G f(g) d^l g.$$

(c) Man findet immer ein  $K > 0$  mit  $|B_r| \leq Ke^{rK}$  für alle  $r > 0$ , i. e., das Volumen der Kugeln  $B_r$  wächst in Abhängigkeit von  $r$  höchstens exponentiell (vgl. z. B. [Hul74], Prop. 1.4).

**Satz 2.39.** *Ist  $G$  eine nicht unimodulare Lie-Gruppe (d.h. ist der modulare Faktor  $m$  nicht trivial), so besitzt  $G$  exponentielles Volumenwachstum.*

*Beweis.* Siehe [VSC], §IX.1.  $\square$

Die folgende Aussage wird im nächsten Kapitel beim Beweis des Lemmas 3.7 benötigt.

**Lemma 2.40.** *Es sei  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n\}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathfrak{g}$  bzgl. des Skalarproduktes  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Ferner sei  $\varphi \in \mathcal{D}(G, \mathbb{R})$  mit  $\int_G |\varphi| d^l g = 1$ . Dann gilt für alle  $g \in G$*

$$\sum_{j=1}^n |\mathcal{X}_j(\varphi * d)(g)|^2 \leq 1.$$

*Beweis.* In [Hul74], §1, wird gezeigt, daß für alle  $g \in G$  und alle  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}$  die Ungleichung

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} |d(g \exp_G(t\mathcal{X})) - d(g)| \leq \|\mathcal{X}\|$$

gilt. (Zunächst wird die Ungleichung im einfachen Fall  $g = 1_G$  gezeigt; dann wird allgemein für sogenannte subadditive Funktionen  $\rho$  auf  $G$  mit  $\rho(1_G) = 0$  bewiesen, daß der Limes Superior in  $1_G$  sein Maximum annimmt.) Deshalb ergibt sich

$$\begin{aligned} |\mathcal{X}(\varphi * d)(h)| &= \left| \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_G \varphi(g) (d(g^{-1}h \exp_G(t\mathcal{X})) - d(g^{-1}h)) d^l g \right| \\ &\leq \int_G |\varphi(g)| \|\mathcal{X}\| d^l g = \|\mathcal{X}\|. \end{aligned}$$

Für alle  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  ist also

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j \mathcal{X}_j(\varphi * d)(g) \right| \leq \left( \sum_{j=1}^n a_j^2 \right)^{1/2}.$$

Wählt man  $a_j = \mathcal{X}_j(\varphi * d)(g)$  für  $j = 1, \dots, n$ , so folgt daraus die Behauptung.  $\square$

## 2.5 Homogene Normen

Die hier vorgestellten mathematischen Objekte finden ihre Anwendung in Kapitel 5.

**Definition 2.41.** Sei  $D \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$ . Eine stetige Abbildung  $|\cdot|_D : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty[$  heißt *homogene Norm* bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$ , falls  $|\cdot|_D$  auf  $(\mathbb{R}^m)^\times$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist und für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ ,  $s \in \mathbb{R}$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $|x|_D = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ ,
- (ii)  $|-x|_D = |x|_D$  und
- (iii)  $|e^{sD}x|_D = e^s|x|_D$ .

Der folgende Satz gibt Aufschluß darüber, wann homogene Normen bzgl. einer linearen Abbildung  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$  existieren, und er zeigt, daß es sich bei den Niveaumengen dieser Abbildungen um glatte kompakte Untermannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^m$  handelt.

**Satz 2.42.** *Sei  $D \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$ . Dann gilt:*

- (i) *Es existieren genau dann homogene Normen bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$ , wenn die Realteile sämtlicher Eigenwerte von  $D$  strikt positiv sind.*
- (ii) *Gibt es eine homogene Norm  $|\cdot|_D$  bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$ , so ist für jedes  $s \in \mathbb{R}$  die Niveaufläche  $F_s := \{x \in \mathbb{R}^m : |x|_D = e^s\}$  eine kompakte  $C^\infty$ -Hyperfläche.*
- (iii) *Sind  $|\cdot|_D$  und  $|\cdot|_D^*$  zwei homogene Normen bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$ , so existieren  $c, C > 0$  mit  $c|\cdot|_D \leq |\cdot|_D^* \leq C|\cdot|_D$ .*

Bevor wir uns dem Beweis des Satzes zuwenden, sollen noch ein Hilfssatz und zwei Lemmata bewiesen und einige Notationen eingeführt werden.

**Definition 2.43.** Sei  $S_1$  die euklidische Einheitskugel im  $\mathbb{R}^m$ . Eine Menge  $F \subset \mathbb{R}^m$  heißt *Ellipsoid*, wenn ein  $T \in \text{Gl}(\mathbb{R}^m)$  existiert mit  $F = TS_1$ .

**Voraussetzung 2.44.** Für den Rest des Abschnitts bezeichne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^m$ . Zu gegebenem  $D \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$  sei  $V_1 \oplus \dots \oplus V_q$  eine Zerlegung des  $\mathbb{R}^m$  wie in Abschnitt A.1 und  $P_j : \mathbb{R}^m \rightarrow V_j$ ,  $v_1 + \dots + v_q \mapsto v_j$  die dazugehörige  $j$ -te Projektionsabbildung. Ferner sei  $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Lösungskurve des Anfangswertproblems  $(\partial_t - D)\gamma = 0$ ,  $\gamma(0) = x$ , i. e.,  $\gamma_x(t) = e^{tD}x$ .

**Hilfssatz 2.45.** Sei  $D \in \text{Gl}(m, \mathbb{R})$  mit Eigenwerten, die sämtlich strikt positiven Realteil besitzen. Dann existiert ein Ellipsoid  $F$  mit äußerem Normalenfeld  $n$  derart, daß für alle  $x \in F$  gilt:  $\langle n(x), Dx \rangle > 0$ .

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $D$  bzgl. der Standardorthonormalbasis des  $\mathbb{R}^m$  in der reellen Jordan-Normalform aus Abschnitt A.1 vorliegt. Wir setzen  $F := \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m a_i x_i^2 = 1\}$  und zeigen, daß  $F$  bei geeigneter Wahl der positiven Koeffizienten  $a_i$  der Bedingung aus Hilfssatz 2.45 genügt. Mit der Bezeichnung  $\alpha(x) = (a_1 x_1, \dots, a_m x_m)^T$  gilt  $n(x) = \alpha(x)/\|\alpha(x)\|$ . Ferner ist für  $x \in F$

$$\langle \alpha(x), Dx \rangle = \sum_{\nu=1}^q P_\nu(\alpha(x))^T J_\nu(P_\nu x). \quad (2.14)$$

Wir betrachten nun das Jordan-Kästchen  $J_1$  und ein beliebiges  $x \in \mathbb{R}^m$ . Der Einfachheit halber lassen wir in den folgenden Rechnungen bei den Größen  $J_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $d_1$  und  $P_1$  den Index 1 fort.

*Fall (a):*  $\lambda \in ]0, \infty[$  und  $J \in \mathbb{R}^{d \times d}$ . Wählt man z. B.  $a_j = (d/\lambda)^{2j}$  für  $j = 1, \dots, d$  und setzt  $c = c_1(x) := \sum_{i=1}^d a_i x_i^2$ , so ist

$$\begin{aligned} & P(\alpha(x))^T J(Px) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^d a_i x_i^2 + \sum_{j=1}^{d-1} a_j x_j x_{j+1} = \lambda c + \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\frac{a_j}{a_{j+1}}} \sqrt{a_j a_{j+1}} x_j x_{j+1} \\ &\geq \lambda c - \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\frac{a_j}{a_{j+1}}} \frac{1}{2} (a_j x_j^2 + a_{j+1} x_{j+1}^2) \geq \left( \lambda - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\frac{a_j}{a_{j+1}}} \right) c \geq 0; \end{aligned}$$

dabei gilt  $P(\alpha(x))^T J(Px) = 0$  genau im Fall  $Px = 0$ .

*Fall (b):*  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und  $J \in \mathbb{R}^{2d \times 2d}$ . Wählt man hier  $a_{2j} = (d/\Re(\lambda))^{2j} = a_{2j-1}$  für  $j = 1, \dots, d$  und definiert  $c = c_1(x) := \sum_{i=1}^{2d} a_i x_i^2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} P(\alpha(x))^T J(Px) &= \Re(\lambda) \sum_{i=1}^d a_{2i} (x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2) + \sum_{j=1}^{d-1} a_{2j} (x_{2j-1} x_{2j+1} + x_{2j} x_{2j+2}) \\ &= \Re(\lambda) c + \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\frac{a_{2j}}{a_{2(j+1)}}} \sqrt{a_{2j} a_{2(j+1)}} (x_{2j-1} x_{2j+1} + x_{2j} x_{2j+2}) \\ &\geq \Re(\lambda) c - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\frac{a_{2j}}{a_{2(j+1)}}} (a_{2j} (x_{2j-1}^2 + x_{2j}^2) + a_{2(j+1)} (x_{2j+1}^2 + x_{2j+2}^2)) \\ &\geq \left( \Re(\lambda) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d-1} \sqrt{\frac{a_{2j}}{a_{2(j+1)}}} \right) c \geq 0, \end{aligned}$$

und wieder gilt  $P(\alpha(x))^T J(Px) = 0$  nur, falls  $Px = 0$ .

Wählt man zu jedem weiteren Jordan-Kästchen  $J_\nu$  den Anteil  $P_\nu(a)$  des Koeffizientenvektors  $a = (a_1, \dots, a_m)^T$  analog, so folgt  $\langle n(x), Dx \rangle > 0$  für alle  $x \in F$  (denn für mindestens ein  $\nu \in \{1, \dots, q\}$  gilt  $P_\nu x \neq 0$ ).

Im allgemeinen Fall existiert nach Abschnitt A.1 ein  $S \in \text{Gl}(\mathbb{R}^m)$  so, daß  $\tilde{D} := SDS^{-1}$  die oben bereits behandelte reelle Jordan-Normalform bzgl. der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^m$  besitzt. Zu dieser Normalform konstruieren wir wie oben ein Ellipsoid  $\tilde{F}$  mit äußerem Normalenfeld  $\tilde{n}$  und  $\langle \tilde{n}(\xi), \tilde{D}\xi \rangle > 0$  für alle  $\xi \in \tilde{F}$ .

Setzt man nun  $F := S^{-1}\tilde{F}$ , so ist  $S^T \circ \tilde{n} \circ S$  ein (i. allg. nicht normiertes) äußeres

Normalenfeld von  $F$ , und es gilt für  $x \in F$  mit  $\kappa := \|(S^T \circ \tilde{n} \circ S)(x)\|^{-1}$ :

$$\langle n(x), Dx \rangle = \kappa \langle S^T(\tilde{n}(Sx)), S^{-1}(\tilde{D}(Sx)) \rangle = \kappa \langle \tilde{n}(Sx), \tilde{D}(Sx) \rangle > 0$$

nach dem bereits Bewiesenen, da  $Sx \in \tilde{F}$ . □

Die geometrische Interpretation von Hilfssatz 2.45 wird im nächsten Lemma geliefert:

**Lemma 2.46.** *Sei  $D \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$  mit Eigenwerten, die allesamt strikt positiven Realteil besitzen. Dann existiert ein Ellipsoid  $F$  in  $\mathbb{R}^m$  derart, daß für alle  $x \in (\mathbb{R}^m)^\times$  die Kurve  $\gamma_x$  die Hyperfläche  $F$  zu genau einem Zeitpunkt  $t_0 \in \mathbb{R}$  schneidet. Es gilt*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_x(t) = 0 \quad \text{und} \quad \|\gamma_x(t)\| \rightarrow \infty, \quad \text{falls } t \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Somit verläuft  $\gamma_x$  für  $t < t_0$  in der konvexen Hülle  $E$  von  $F$  und für  $t > t_0$  in  $\mathbb{R}^m \setminus E$ .

Führt man auf  $(\mathbb{R}^m)^\times$  die Relation  $x \sim y : \iff y \in \gamma_x(\mathbb{R})$  ein, so ist diese eine Äquivalenzrelation und die Äquivalenzklassen haben die Gestalt  $[x] = \gamma_x(\mathbb{R})$ . Zudem ist  $F$  ein Vertretersystem, i. e., für alle  $\xi \in (\mathbb{R}^m)^\times$  existiert genau ein  $x \in F$  mit  $\xi \sim x$ .

*Beweis.* Seien  $F$  wie in Hilfssatz 2.45 und  $x \in (\mathbb{R}^m)^\times$ . Wir wählen eine Basis so, daß  $D$  als Matrix in reeller Jordan-Normalform wie in Abschnitt A.1 vorliegt. Man liest aus (A.1) ab, daß für alle  $i = 1, \dots, q$  dann  $e^{tJ_i}(P_i(x)) \rightarrow 0$  folgt, falls  $t \rightarrow -\infty$ , und  $\|e^{tJ_i}(P_i(x))\| \rightarrow \infty$ , wenn  $t \rightarrow \infty$  und  $P_i(x) \neq 0$ . Somit ergibt sich (2.15).

Sei nun  $S_z := \{t \in \mathbb{R} : \gamma_x(t) \in F\}$ . Da die zusammenhängende Kurve  $\gamma_x$  nach (2.15) für kleine  $t$  in  $\text{Int}(E)$  und für große  $t$  in  $\mathbb{R}^m \setminus E$  verläuft, ist  $S_z \neq \emptyset$ . Für  $\tau \in S_z$  gilt nach Hilfssatz 2.45

$$\langle n(\gamma_x(\tau)), \partial_t \gamma_x(t)|_{t=\tau} \rangle = \langle n(\gamma_x(\tau)), D\gamma_x(\tau) \rangle > 0.$$

Somit existiert ein  $\varepsilon(\tau) > 0$  mit

$$\gamma_x(t) \in \begin{cases} \text{Int}(E) & \text{für } \tau - \varepsilon(\tau) < t < \tau \\ \mathbb{R}^m \setminus E & \text{für } \tau < t < \tau + \varepsilon(\tau). \end{cases} \quad (2.16)$$

Aus (2.16) folgt, daß  $S_z$  einelementig sein muß: Da  $S_z$  nach (2.15) kompakt ist, existiert  $t_0 = \min S_z$ . Angenommen, die kompakte Menge  $S_z \setminus \{t_0\} = S_z \setminus ]t_0 - \varepsilon(t_0), t_0 + \varepsilon(t_0)[$  wäre nicht leer, dann existiert  $t_1 = \min S_z \setminus \{t_0\}$ . Aufgrund des Zusammenhangs von  $\gamma_x(\mathbb{R})$  und (2.16), angewandt auf  $t_0$ , folgt  $\gamma_x(]t_0, t_1[) \in \mathbb{R}^m \setminus E$ . Das widerspricht allerdings (2.16) mit  $\tau = t_1$ .

Die Behauptungen zur angegebenen Relation auf  $\mathbb{R}^m$  folgen nun aus der Theorie der linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen und dem bereits Bewiesenen.  $\square$

**Lemma 2.47.** *Sei  $D \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$ . Existiert ein Eigenwert  $\lambda$  von  $D$  mit  $\Re(\lambda) < 0$ , so gibt es einen  $D$ -invarianten Unterraum  $V \neq \{0\}$  derart, daß für alle  $x \in V^\times$  gilt:*

$$\|\gamma_x(t)\| \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow -\infty \quad \text{und} \quad \gamma_x \rightarrow 0 \quad \text{für } t \rightarrow +\infty.$$

*Besitzt  $D$  einen Eigenwert  $\lambda \in i\mathbb{R}$ , so existiert ein  $D$ -invarianter Unterraum  $V \neq \{0\}$  mit:  $\gamma_x$  ist für alle  $x \in V^\times$  eine geschlossene (und somit insbesondere beschränkte) Kurve, die nicht durch 0 verläuft.*

*Beweis.* Wenn man eine Basis des  $\mathbb{R}^m$  wählt, bzgl. der die  $D$  darstellende Matrix reelle Jordan-Normalform im Sinne des Abschnitts A.1 hat, so lassen sich die Aussagen, ähnlich wie im Beweis von (2.15), aus (A.1) ablesen.  $\square$

*Beweis von Satz 2.42.* (i) Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $D$  einen Eigenwert  $\lambda$  besitzt mit  $\Re(\lambda) \leq 0$ . Angenommen, es gibt eine homogene Norm  $|\cdot|_D$  bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$ . Sei dann  $V$  wie in Lemma 2.47 und  $x \in V^\times$ . Aus der Stetigkeit von  $|\cdot|_D$  folgt nach Lemma 2.47 die Existenz eines  $M > 0$  mit  $|\gamma_x(t)|_D < M$  für alle  $t \geq 0$ . Andererseits gilt nach Definition der homogenen Norm  $|\gamma_x(t)|_D = e^t|x|_D \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ , und wir haben einen Widerspruch. Seien nun die Realteile aller Eigenwerte von  $D$  strikt positiv und  $F$  und  $E$  wie in Lemma 2.46.

*Konstruktion einer homogenen Norm:* Wir definieren  $|\cdot| : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, \infty[$  durch

$$|x| = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ e^s & \text{wenn } s \in \mathbb{R}, \xi \in F \text{ existieren mit } x = e^{sD}\xi. \end{cases} \quad (2.17)$$

Nach Lemma 2.46 ist  $|\cdot|$  rechtseindeutig und auf ganz  $\mathbb{R}^m$  erklärt.

Die Funktion  $|\cdot|$  ist  $C^\infty$  außerhalb der Null: Sei  $x \in (\mathbb{R}^m)^\times$  vorgegeben und  $\xi$  das eindeutig bestimmte Element in  $F$ , für das ein  $s \in \mathbb{R}$  mit  $x = e^{sD}\xi$  existiert. Sei  $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$  eine offene Nullumgebung und  $\psi : U \rightarrow F$  eine  $C^\infty$ -Immersion mit  $\psi(0) = \xi$ . Es gilt für die Abbildung  $\Psi : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $(u, t) \mapsto e^{tD}\psi(u)$ :

$$\partial_v \Psi(v)|_{v=(0,s)} = (\partial_u \Psi(u, s)|_{u=0}, \partial_t \Psi(0, t)|_{t=s}) = e^{sD} \circ (\partial_u \psi(u)|_{u=0}, D\xi).$$

Nun ist  $\partial_u \psi(u)|_{u=0} \mathbb{R}^{m-1} = T_\xi F$  und nach Hilfssatz 2.45  $D\xi \notin T_\xi F$ . Also hat  $\partial_v \Psi(v)|_{v=(0,s)}$  vollen Rang und ist somit nach dem Umkehrsatz ein lokaler  $C^\infty$ -Diffeomorphismus, d. h., es gibt Umgebungen  $0 \in V \subset \mathbb{R}^{m-1}$ ,  $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[ \subset \mathbb{R}$

und  $W$  von  $x$  in  $\mathbb{R}^m$  mit:  $\Psi|_{V \times ]s-\varepsilon, s+\varepsilon[}$  ist ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus auf  $W$ . Also ist auch  $\Psi^{-1} : W \rightarrow V \times ]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$  eine  $C^\infty$ -Abbildung und damit auch  $|\cdot|_W = \exp(\Psi_m^{-1})$ , wobei  $\Psi_m^{-1}$  die  $m$ -te Komponentenabbildung der Funktion  $\Psi^{-1}$  ist.

Die Funktion  $|\cdot|$  ist stetig in Null: Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann ist  $e^{\ln(\varepsilon)D}E$  eine Nullumgebung in  $\mathbb{R}^m$  und  $|e^{\ln(\varepsilon)D}E| \subset [0, \varepsilon]$ .

Ferner gilt offenbar  $|x| = 0$  genau dann, wenn  $x = 0$ , und  $F = -F$  impliziert  $|-x| = |x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ . Die Eigenschaft  $|e^{sD}x| = e^s|x|$  folgt aus (2.17) und Lemma 2.46.

(ii) Sei jetzt  $|\cdot|_D$  eine vorgegebene homogene Norm bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$ .

*$F_s$  ist eine glatte Hyperfläche:* Die Funktion  $f := |\cdot|_D - e^s$  ist eine  $C^\infty$ -Funktion auf der Umgebung  $(\mathbb{R}^m)^\times$  von  $F_s$ , und es gilt  $f^{-1}(\{0\}) = F_s$ . Ist  $x \in F_s$ , so finden wir ein  $\xi \in F_0$  mit  $x = e^{sD}\xi$ . Man kann dann aus  $\partial_t f(e^{tD}\xi)|_{t=s} = e^s$  folgern, daß der Gradient von  $f$  in  $x$  nicht verschwindet. Somit ist  $F_s$  eine  $C^\infty$ -Hyperfläche des  $\mathbb{R}^m$  (vgl. z. B. [For], §14).

*$F_s$  ist kompakt:* Sei  $|\cdot|$  die von uns unter (i) konstruierte homogene Norm und  $C := \max\{|\xi|_D : |\xi| = 1\}$ . Dann ist  $C > 0$ . Zu  $x \in (\mathbb{R}^m)^\times$  findet man ein  $s \in \mathbb{R}$  und ein  $\xi$  mit  $|\xi| = 1$  derart, daß  $x = e^{sD}\xi$ . Daraus ergibt sich

$$|x|_D = e^s|\xi|_D \leq Ce^s = Ce^s|\xi| = C|e^{sD}\xi| = C|x|. \quad (2.18)$$

Somit folgt aus der Beschränktheit der Mengen  $\{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq R\}$ ,  $R > 0$ , die Beschränktheit der abgeschlossenen Flächen  $F_s$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , also letztlich deren Kompaktheit.

(iii) Seien  $|\cdot|_D$  und  $|\cdot|$  wie unter (ii). Dort wurde bereits die Existenz eines  $C > 0$  mit  $|\cdot|_D \leq C|\cdot|$  gezeigt. Setzt man  $c := \min\{|\xi|_D : |\xi| = 1\}$ , so folgt, ähnlich wie in (2.18),  $|\cdot|_D \geq c|\cdot|$ . Das zeigt, daß alle homogenen Normen bzgl.  $D$  auf  $\mathbb{R}^m$  äquivalent sind.  $\square$

# Kapitel 3

## Differentialoperatoren auf Lie-Gruppen

Schrödinger-Operatoren, bzw. deren „Vorstufen“, stehen im Mittelpunkt des vorliegenden Kapitels. Diese Klasse linearer Differentialoperatoren auf Lie-Gruppen umfaßt insbesondere die Sub-Laplace-Operatoren.

Viele Eigenschaften von Sub-Laplace-Operatoren werden jedoch nicht von allen Schrödinger-Operatoren geteilt. Aussagen dieser Art sind in Abschnitt 3.3 aufgeführt, der ausschließlich Sub-Laplace-Operatoren und den dazugehörigen Wärmeleitungskernen gewidmet ist.

Der  $L^p$ -Funktionalkalkül von Sub-Laplace-Operatoren wird nachher in Abschnitt 4.3.2 und den Kapiteln 5 und 6 behandelt; auf Schrödinger-Operatoren, die i. allg. keine Sub-Laplace-Operatoren sind, trifft man in den Abschnitten 4.1 und 4.3.3.

**Voraussetzung 3.1.** Im gesamten Kapitel seien  $G$  eine zusammenhängende reelle Lie-Gruppe,  $d^r g$  ein rechtsinvariantes Haar-Maß auf  $G$  und  $L^2(G) := L^2(G, d^r g)$  der Raum der bzgl.  $d^r g$  quadratintegrierbaren Funktionen auf  $G$ .

### 3.1 Selbstadjungiertheit

In diesem Abschnitt zeigen wir die Selbstadjungiertheit von Differentialoperatoren, die man als „Prä-Schrödinger-Operatoren“ bezeichnen könnte. Den Operator  $\bar{T}$  aus Satz 3.2 würde man nämlich erst dann einen Schrödinger-Operator nennen, wenn zusätzlich die Vektorfelder  $\mathcal{X}_j$ ,  $j \in J$ , schon die ganze Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  erzeugen, d. h. die Hörmander-Bedingung erfüllen. Diese Voraussetzung wird im Beweis von Satz 3.2 aber nicht benötigt, und in der Tat wird der Satz 3.2 in der hier angegebenen allgemeinen Form später z. B. im Beweis des Lemmas 3.21 genutzt.

Bzgl. der in Satz 3.2 und im dazugehörigen Beweis verwendeten Notationen und Sprechweisen sei auf die Definition 2.26 und den Abschnitt A.6 verwiesen.

**Satz 3.2.** *Es seien  $J$  eine nicht leere, endliche Indexmenge,  $\mathcal{X}_j, j \in J$ , links-invariante Vektorfelder und  $V_j, j \in J$ , reellwertige  $C^1$ -Funktionen auf  $G$ . Dann ist der auf  $\mathcal{D}(G) \subset L^2(G)$  definierte positive Operator  $T = -\sum_{j \in J} (\mathcal{X}_j + iV_j)^2$  wesentlich selbstadjungiert. Sein Abschluß  $\bar{T}$  ist gegeben durch*

$$\text{dom}(\bar{T}) = \{f \in L^2(G) : Tf \in L^2(G)\} \quad \text{und} \quad \bar{T} = T^* .$$

Der Definitionsbereich der zu  $\bar{T}$  gehörigen quadratischen Form ist

$$\text{quad}(\bar{T}) = \{f \in L^2(G) : \forall j \in J : (\mathcal{X}_j + iV_j)f \in L^2(G)\}$$

und es gilt die Inklusion  $\text{dom}(\bar{T}) \subset \text{quad}(\bar{T})$ .

*Beweis.* Der oben im Satz beschriebene Operator hat auf dem dichten Unterraum  $\mathcal{D}(G)$  von  $L^2(G)$  die konkrete Gestalt

$$T\varphi = \sum_{j \in J} (-\mathcal{X}_j^2\varphi - 2iV_j(\mathcal{X}_j\varphi) + (V_j^2 - i(\mathcal{X}_jV_j))\varphi) .$$

Offenbar ist  $T$  positiv und symmetrisch auf  $\mathcal{D}(G)$  (vgl. Lemma 2.25). Nach Definition von  $T^*$  ist

$$\text{dom}(T^*) = \{f \in L^2(G) : \exists \tilde{f} \in L^2(G) \forall \varphi \in \mathcal{D}(G) : \langle f, T\varphi \rangle = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle\} .$$

Das bedeutet  $\text{dom}(T^*) = \{f \in L^2(G) : Tf \in L^2(G)\}$ .

Sei nun  $Q$  die Menge aller  $f \in L^2(G)$ , gegen die eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{D}(G)$  in  $L^2(G)$  konvergiert, welche zudem die Eigenschaft erfüllt, daß  $((\mathcal{X}_j + iV_j)f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $j \in J$  eine  $L^2$ -Cauchyfolge ist ( $Q$  ist der Definitionsbereich des Abschlußes der zu  $T$  gehörigen quadratischen Form, s. Abschnitt A.6). Offenbar gilt  $Q \subset \{f \in L^2(G) : \forall j \in J : (\mathcal{X}_j + iV_j)f \in L^2(G)\} =: \Lambda$ .

*Behauptung (a):* Es gilt auch die Inklusion  $\Lambda \subset Q$ .

Für den Beweis dieser Behauptung betrachten wir zuerst ein  $f \in \Lambda$  mit kompaktem Träger und eine Dirac-Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Dann ist  $(\varphi_n * f)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{D}(G)$  und nach Lemma 2.11 gilt  $\|f - \varphi_n * f\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei jetzt  $j \in J$ . Da  $V_j f$  in  $L^2(G)$  liegt, folgt aus  $f \in \Lambda$  schon  $\mathcal{X}_j f \in L^2(G)$ . Somit gilt nach Lemma 2.27 (ii)

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}_j + iV_j)(\varphi_n * f) &= \varphi_n * \mathcal{X}_j f + iV_j(\varphi_n * f) \\ &= \varphi_n * (\mathcal{X}_j + iV_j)f - i(\varphi_n * V_j f - V_j(\varphi_n * f)) . \end{aligned}$$

Daraus erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{X}_j + iV_j)(f - \varphi_n * f)\| \\ & \leq \|(\mathcal{X}_j + iV_j)f - \varphi_n * (\mathcal{X}_j + iV_j)f\| + \|\varphi_n * V_j f - V_j(\varphi_n * f)\|. \end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite strebt, wieder nach Lemma 2.11, gegen null für  $n \rightarrow \infty$ . Zudem gilt allgemein für  $\vartheta \in C(G)$  und kompakt getragenes  $\tilde{f} \in L^2(G)$ :

$$\begin{aligned} & \|\varphi_n * \vartheta \tilde{f} - \vartheta(\varphi_n * \tilde{f})\| \\ & \leq \sup\{|\vartheta(x^{-1}g) - \vartheta(g)| : x \in \text{supp}(\varphi_n), g \in \text{supp}(\varphi_n) \text{supp}(\tilde{f})\} \|\varphi_n * \tilde{f}\|; \end{aligned} \tag{3.1}$$

dabei geht der letzte Ausdruck gegen null für  $n$  gegen unendlich. Somit ist  $f$  ein Element aus  $Q$ .

Sei nun  $f \in \Lambda$  ohne weitere Einschränkungen und  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge wie in Lemma 2.28. Dann gilt im schwachen Sinne (wie man leicht durch Austesten an einem beliebigen  $\eta \in \mathcal{D}(G)$  verifiziert)

$$(\mathcal{X}_j + iV_j)(\psi_n f) = (\mathcal{X}_j \psi_n) f + \psi_n (\mathcal{X}_j + iV_j) f$$

für alle  $j \in J$ . Also liegt für alle  $n \in \mathbb{N}$  die kompakt getragene Funktion  $\psi_n f$  in  $\Lambda$  und somit nach dem bereits Gezeigten in  $Q$ . Ferner gilt offenbar  $\psi_n f \rightarrow f$  in  $L^2(G)$  und es folgt

$$\|(\mathcal{X}_j + iV_j)(f - \psi_n f)\| \leq \|(1 - \psi_n)(\mathcal{X}_j + iV_j)f\| + \|(\mathcal{X}_j \psi_n) f\|.$$

Die Wahl der Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  impliziert  $\|(\mathcal{X}_j + iV_j)(f - \psi_n f)\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daraus folgt, daß  $f$  in  $Q$  enthalten ist, d. h., die Behauptung (a) ist gezeigt. Als nächstes betrachten wir die Friedrichs-Erweiterung  $S$  von  $T$  (s. Theorem A.26); es ist  $\text{dom}(S) = \text{dom}(T^*) \cap Q$  und es gilt  $\overline{T} \subset S = S^* \subset T^*$ .

*Behauptung (b):*  $\text{dom}(S) \subset \text{dom}(\overline{T})$ .

Wir orientieren uns am Vorgehen des Beweises der Behauptung (a): Sei also  $f$  eine Funktion aus  $\text{dom}(S)$  mit kompaktem Träger. Dann ist  $V_j f \in L^2(G)$  für alle  $j \in J$  und  $\mathcal{X}_j f \in L^2(G)$ , da  $f$  insbesondere in  $Q$  liegt. Da ferner  $Tf$ ,  $V_j(\mathcal{X}_j f)$ ,  $V_j^2 f$  und  $(\mathcal{X}_j V_j) f$ ,  $j \in J$ , in  $L^2(G)$  liegen, folgt auch  $(\sum_{j \in J} \mathcal{X}_j^2) f \in L^2(G)$ .

Wir betrachten wieder eine Dirac-Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und setzen  $f_n := \varphi_n * f$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{D}(G)$ , die nach Lemma 2.11 in  $L^2(G)$  gegen  $f$  konvergiert. Die Gleichungen

$$Tf_n = \varphi_n * \left( - \sum_{j \in J} \mathcal{X}_j^2 \right) f - 2i \sum_{j \in J} V_j(\varphi_n * \mathcal{X}_j f) + \sum_{j \in J} (V_j^2 - i(\mathcal{X}_j V_j)) \varphi_n * f$$

und

$$\begin{aligned} & \varphi_n * Tf \\ = & \varphi_n * \left( - \sum_{j \in J} \mathcal{X}_j^2 \right) f - 2i \sum_{j \in J} \varphi_n * V_j(\mathcal{X}_j f) + \sum_{j \in J} \varphi_n * (V_j^2 - i(\mathcal{X}_j V_j))f \end{aligned}$$

implizieren

$$\begin{aligned} \|T(f - f_n)\| \leq & \|Tf - \varphi_n * Tf\| + \sum_{j \in J} (2\|\varphi_n * V_j(\mathcal{X}_j f) - V_j(\varphi_n * \mathcal{X}_j f)\| \\ & + \|\varphi_n * (V_j^2 - i(\mathcal{X}_j V_j))f - (V_j^2 - i(\mathcal{X}_j V_j))\varphi_n * f\|). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also  $Tf_n \rightarrow Tf$  in  $L^2(G)$  (vgl. (3.1)), d. h.  $f \in \text{dom}(\overline{T})$ . Sei nun  $f \in \text{dom}(S)$  beliebig und die Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wie im Beweis der Behauptung (a). Dann gilt

$$T(\psi_n f) = \left( - \sum_{j \in J} \mathcal{X}_j^2 \psi_n \right) f - 2 \sum_{j \in J} (\mathcal{X}_j \psi_n)(\mathcal{X}_j + iV_j)f + \psi_n(Tf) \in L^2(G).$$

Somit ist  $\psi_n f \in \text{dom}(T^*)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Da zudem  $\psi_n f \in \Lambda = Q$  gilt, folgt  $\psi_n f \in \text{dom}(S)$ , also nach dem bereits Gezeigten auch  $\psi_n f \in \text{dom}(\overline{T})$ . Ferner gilt  $\psi_n f \rightarrow f$  in  $L^2(G)$  und

$$\|T(f - \psi_n f)\| \leq \|(1 - \psi_n)Tf\| + \sum_{j \in J} (\|\mathcal{X}_j^2 \psi_n f\| + 2\|(\mathcal{X}_j \psi_n)(\mathcal{X}_j + iV_j)f\|).$$

Da  $f, Tf$  und  $(\mathcal{X}_j + iV_j)f \in L^2(G)$ , folgt aus der Definition der Folge  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :  $\|T(f - \psi_n f)\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $\text{dom}(\overline{T})$  bzgl. der Graphennorm abgeschlossen ist, haben wir also  $f \in \text{dom}(\overline{T})$ .

Insbesondere gilt somit  $\overline{T} = S$  und  $Q = \text{quad}(\overline{T})$ .  $\square$

## 3.2 Holomorphe Operatorhalbgruppen auf exponentiell-gewichteten $L^2$ -Räumen

**Voraussetzung 3.3.** Sei  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  ein System linear unabhängiger linksinvarianter Vektorfelder. Eine Riemannsche Abstandsfunktion  $d$  auf  $G$  sei so gewählt, daß sich  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  zu einer Orthonormalbasis bzgl. des  $d$  induzierenden Skalarproduktes auf  $\mathfrak{g}$  ergänzen läßt. Ferner betrachten wir für  $j = 1, \dots, m + 1$  reellwertige Funktionen  $V_j \in C^1(G)$  und setzen formal  $\mathcal{X}_{m+1} := 0$  und  $U_j := \mathcal{X}_j + iV_j$  für alle  $j$ . Es sei dann  $H$  der Abschluß des auf  $\mathcal{D}(G)$  definierten Operators  $-\sum_{j=1}^{m+1} U_j^2$ .

**Bemerkung 3.4.** Nach Satz 3.2 ist  $H$  ein positiver selbstadjungierter Operator mit Core  $\mathcal{D}(G)$ . (Der Begriff „Core“ wird in Definition A.21 erklärt.) Dabei gilt  $\text{dom}(H) = \{f \in L^2(G) : Hf \in L^2(G)\}$  und  $\text{quad}(H) = \{f \in L^2(G) : \forall j \in \{1, \dots, m+1\} : U_j f \in L^2(G)\}$ .

Die Verwendung der nächsten Definition bleibt auf dieses Kapitel beschränkt.

**Definition 3.5.** Für  $s \in \mathbb{R}$  bezeichnen wir mit  $L^2(e^{sd})$  den Hilbert-Raum  $L^2(G, e^{sd(g)} d^r g)$ . Das dazugehörige Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  ist für alle  $\varphi, \psi \in L^2(e^{sd})$  gegeben durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle_s = \int_G \varphi(g) \psi^*(g) e^{sd(g)} d^r g.$$

Die durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$  induzierte Norm sei  $\| \cdot \|_s$ . Ist  $s = 0$ , so wollen wir den Index 0 bei Skalarprodukt und Norm auf  $L^2(G)$  weglassen.

**Lemma 3.6.** *Der durch die Gleichung  $J_s(\varphi)\psi = \int_G \psi(g)\varphi^*(g) d^r g$  definierte Operator  $J_s : L^2(e^{sd}) \rightarrow (L^2(e^{-sd}))'$  ist für jedes  $s \in \mathbb{R}$  ein isometrischer Antiisomorphismus.*

*Beweis.* Sind  $f \in L^2(e^{sd})$  und  $h \in L^2(e^{-sd})$ , so folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|J_s(f)h| = \left| \int_G h(g) e^{-\frac{s}{2}d(g)} f(g)^* e^{\frac{s}{2}d(g)} d^r g \right| \leq \|f\|_s \|h\|_{-s},$$

und für  $h := f e^{sd}$  gilt Gleichheit. Somit ist  $J_s$  eine antilineare Isometrie.

Andererseits gibt es zu jedem  $\varphi \in (L^2(e^{-sd}))'$  ein  $h \in L^2(e^{-sd})$  mit  $\varphi = \langle \cdot, h \rangle_{-s} = \langle \cdot, h e^{-sd} \rangle$ , und  $h e^{-sd} \in L^2(e^{sd})$ , d. h.,  $J_s$  ist surjektiv.  $\square$

Die Lemmata 3.7 und 3.8 stammen aus der Arbeit [Heb97] und sollen hier noch einmal im Detail bewiesen werden. Das Lemma 3.7 dient dabei im wesentlichen nur zur Vorbereitung des Beweises von Lemma 3.8.

**Lemma 3.7.** *Für  $f \in \mathcal{D}(G)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  und  $\gamma \geq 0$  gilt*

$$\gamma |\Im \langle Hf, f \rangle_s| \leq \Re \langle Hf, f \rangle_s + \frac{1}{4} s^2 (1 + \gamma)^2 \|f\|_s^2.$$

*Beweis.* Es sei  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Dirac-Folge. Setzt man für  $n \in \mathbb{N}$  dann  $\psi_n := \varphi_n * d$ , so konvergiert nach Lemma 2.11 die Folge  $(e^{s\psi_n} f)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $e^{sd} f$ . Daher ist für  $j \in \{1, \dots, m+1\}$ :

$$\begin{aligned} \langle U_j^* U_j f, f \rangle_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_j^* U_j f, e^{s\psi_n} f \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle U_j f, U_j(e^{s\psi_n} f) \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\langle U_j f, e^{s\psi_n} (U_j f) \rangle + \langle U_j f, s(\mathcal{X}_j \psi_n) e^{s\psi_n} f \rangle) \\ &= \|U_j f\|_s^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} s \langle U_j f, (\mathcal{X}_j \psi_n) e^{s\psi_n} f \rangle. \end{aligned}$$

Somit folgt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} L_j &:= \left| \|U_j f\|_s^2 - \langle U_j^* U_j f, f \rangle_s \right| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} |s| \|e^{\frac{s}{2} \psi_n} U_j f\| \|e^{\frac{s}{2} \psi_n} (\mathcal{X}_j \psi_n) f\| \\ &\leq \frac{1}{1 + \gamma} \|U_j f\|_s^2 + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \gamma) s^2}{4} \|e^{\frac{s}{2} \psi_n} (\mathcal{X}_j \psi_n) f\|^2. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Lemma 2.40

$$\sum_{j=1}^{m+1} \|e^{\frac{s}{2} \psi_n} (\mathcal{X}_j \psi_n) f\|^2 = \int_G \left( \sum_{j=1}^m |\mathcal{X}_j \psi_n(g)|^2 \right) |f(g)|^2 e^{s \psi_n(g)} d^r g \leq \|e^{\frac{s}{2} \psi_n} f\|^2,$$

und der letzte Term konvergiert gegen  $\|f\|_s^2$  für  $n \rightarrow \infty$ . Daher folgt aus  $L_j \geq \|U_j f\|_s^2 - \Re \langle U_j^* U_j f, f \rangle_s$  und Summation über  $j$

$$\Re \langle H f, f \rangle_s + \frac{(1 + \gamma) s^2}{4} \|f\|_s^2 \geq \frac{\gamma}{1 + \gamma} \sum_{j=1}^{m+1} \|U_j f\|_s^2.$$

Aus dieser Ungleichung und  $L_j \geq |\Im \langle U_j^* U_j f, f \rangle_s|$  für  $j = 1, \dots, m + 1$  erhält man dann schließlich

$$\begin{aligned} \gamma |\Im \langle H f, f \rangle_s| &\leq \frac{\gamma}{1 + \gamma} \sum_{j=1}^{m+1} \|U_j f\|_s^2 + \frac{\gamma(1 + \gamma) s^2}{4} \|f\|_s^2 \\ &\leq \Re \langle H f, f \rangle_s + \frac{(1 + \gamma)^2 s^2}{4} \|f\|_s^2. \end{aligned}$$

□

**Lemma 3.8.** Für  $s \leq 0$  (bzw.  $s > 0$ ) läßt sich die auf  $L^2(G)$  definierte Halbgruppe  $e^{-zH}$ ,  $\Re(z) > 0$ , zu einer holomorphen Halbgruppe auf  $L^2(e^{sd})$  fortsetzen (bzw. einschränken). Ferner gilt für  $z \in \mathcal{H}_r$ :

$$\|e^{-zH}\|_{s \rightarrow s} \leq \exp \left( \Re(z) \left( 1 + \frac{|\Im(z)|}{\Re(z)} \right)^2 \frac{s^2}{4} \right). \quad (3.2)$$

*Beweis.* Der Fall  $s \leq 0$ : Hier ist  $L^2(G)$  eine dichte, stetig eingebettete Teilmenge von  $L^2(e^{sd})$ , und daher liegt auch  $\mathcal{D}(G)$  dicht in  $L^2(e^{sd})$ .

Seien nun  $z \in \mathcal{H}_r$  mit  $\gamma := |\Im(z)|/\Re(z)$  und  $c \geq s^2(1 + \gamma)^2/4$ .

Ist  $A$  die Einschränkung von  $-z(H + cI)$  auf  $\mathcal{D}(G)$ , so folgt nach Lemma 3.7 für  $\varphi \in \mathcal{D}(G)$

$$\Re \langle -A \varphi, \varphi \rangle_s = \Re(z) (\Re \langle H \varphi, \varphi \rangle_s + c \|\varphi\|_s^2 - \gamma \operatorname{sgn}(\Im(z)) \Im \langle H \varphi, \varphi \rangle_s) \geq 0. \quad (3.3)$$

Somit ist  $A$  nach Bemerkung A.9 abschließbar in  $L^2(e^{sd})$  und der Abschluß  $A_s$  ist dissipativ. Bezeichnet  $A_0$  den Abschluß von  $A$  als Operator in  $L^2(G)$  (i. e.,  $A_0 = -z(H + cI)$ ), so impliziert  $\|\cdot\|_s \leq \|\cdot\|$  die Inklusion  $A_0 \subset A_s$ .

Um den Satz von Lumer-Phillips (s. Theorem A.11) auf  $A_s$  anwenden zu können, soll nun gezeigt werden, daß für alle  $\lambda > 0$  schon  $\text{ran}(\lambda I - A_s) = L^2(e^{sd})$  gilt:

Aus der Dissipativität und der Abgeschlossenheit von  $A_s$  folgt, daß  $\text{ran}(\lambda I - A_s)$  abgeschlossen in  $L^2(e^{sd})$  ist, denn für jede Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\text{ran}(\lambda I - A_s)$ , die in  $L^2(e^{sd})$  gegen ein  $y$  konvergiert, gibt es eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $\text{dom}(A_s)$  mit  $y_n = (\lambda I - A_s)x_n$ , die nach (A.3) gegen ein  $x \in L^2(e^{sd})$  konvergiert. Folglich ist  $x \in \text{dom}(A_s)$  und  $y = (\lambda I - A_s)x$ , d. h.,  $y \in \text{ran}(\lambda I - A_s)$ .

Andererseits ist  $H + cI$  positiv und selbstadjungiert in  $L^2(G)$ , also ist insbesondere  $\sigma(H + cI) \subset [0, \infty[$ . Somit ist  $\lambda \notin \sigma(A_0)$  und deshalb gilt  $\text{ran}(\lambda I - A_0) = L^2(G)$ . Aus  $A_0 \subset A_s$  und der Dichtheit von  $L^2(G)$  in  $L^2(e^{sd})$  folgt  $\text{ran}(\lambda I - A_s) = L^2(e^{sd})$ .

Nach dem Satz von Lumer-Phillips ist  $A_s$  der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe  $T_s(t)$ ,  $t \geq 0$ , auf  $L^2(e^{sd})$ . Ferner induziert  $A_0$  eine  $C_0$ -Halbgruppe  $T_0(t) = e^{tA_0} = e^{-tz(H+cI)}$ ,  $t \geq 0$ , im Sinne des beschränkten Funktionalkalküls von  $H + cI$  auf  $L^2(G)$ . Ist nun  $\iota$  die Einbettungsabbildung von  $L^2(G)$  nach  $L^2(e^{sd})$ ,  $x \in \text{dom}(A_0)$  und  $u_0 : [0, \infty[ \rightarrow L^2(G)$  die durch  $u_0(t) = T_0(t)x$  definierte Funktion, so löst  $u_s := \iota \circ u_0$  das Anfangswertproblem  $(\partial_t - A_s)u(t) = 0$ ,  $u(0) = x$ . Somit ist  $u_s(t) = T_s(t)x$ . Aus der Stetigkeit der Abbildungen  $\iota \circ T_0(t)$ ,  $T_s(t) \circ \iota$  und der Dichtheit von  $\text{dom}(A_0)$  in  $L^2(G)$  folgt dann  $T_0(t) = T_s(t)|_{L^2(G)}$  für alle  $t \geq 0$ .

Man erhält für  $\varphi \in L^2(G)$

$$\|e^{-zH}\varphi\|_s = \|e^{-z(H+cI)}(e^{zc}\varphi)\|_s \leq e^{\Re(z)c}\|T_0(1)\varphi\|_s \leq e^{\Re(z)c}\|T_s(1)\|_{s \rightarrow s}\|\varphi\|_s,$$

d. h.,  $e^{-zH}$  läßt sich zu einem beschränkten Operator auf  $L^2(e^{sd})$  fortsetzen, und die dazugehörige Operatornorm  $\|e^{-zH}\|_{s \rightarrow s}$  erfüllt die Abschätzung (3.2) (man betrachte  $c = s^2(1 + \gamma)^2/4$ ).

Zur Holomorphie: Seien  $\gamma > 0$ ,  $c$  wie oben,  $M := (1 + \gamma)^2$  und  $\delta := \arctan \gamma$ . Es sei  $B$  der Abschluß von  $-(H + cI)$  in  $L^2(e^{sd})$ ; da  $c > s^2/4$ , ist  $B$  der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf  $L^2(e^{sd})$  und  $0 \in \rho(B)$ .

Um Theorem A.16 anwenden zu können, zeigen wir zunächst  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < 2\delta\} \subset \rho(B)$  und  $\|R(\lambda; B)\|_{s \rightarrow s} \leq M/|\lambda|$  für  $\lambda$  mit  $|\arg(\lambda)| < 2\delta$ :

Sei also  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  mit  $|\arg(\lambda)| < 2\delta$ . Dann existiert ein  $\mu$  mit  $|\arg(\mu)| < \delta$  und  $\mu^2 = \lambda$ . Es gilt  $|\arg(\mu^{-1})| = |\arg(\mu)| < \delta$ . Somit ist  $|\Im(\mu)|/\Re(\mu) < \gamma$  und  $\mu^{-1}B$  infinitesimaler Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf  $L^2(e^{sd})$  (vgl. (3.3)). Aus Satz A.13 folgt  $\mu \in \rho(\mu^{-1}B)$ . Daher ist  $\mu^{-1}(\lambda I - B) = \mu I - (\mu^{-1}B)$

invertierbar und folglich  $\lambda \in \rho(B)$ . Ferner hat man nach Satz A.13

$$\|R(\lambda; B)\|_{s \rightarrow s} = \frac{1}{|\mu|} \|R(\mu; \mu^{-1}B)\|_{s \rightarrow s} \leq \frac{1}{\Re(\mu)|\mu|} \leq \frac{1}{\Re(\mu)^2}.$$

Die Ungleichung  $\gamma \geq |\Im(\mu)|/\Re(\mu)$  impliziert  $(1 + \gamma)^2 \Re(\mu)^2 \geq |\lambda|$  und somit  $\|R(\lambda; B)\|_{s \rightarrow s} \leq (1 + \gamma)^2/|\lambda|$ .

Nach Theorem A.16 ist dann  $z \mapsto e^{zB} \in \mathcal{B}(L^2(e^{sd}))$  holomorph auf dem Sektor  $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < 2\delta - \pi/2\}$ , also auch die Abbildung  $z \mapsto e^{-zH} = e^{zc}e^{zB}$ . Durch den Übergang  $\gamma \rightarrow \infty$  (und somit  $\delta \rightarrow \pi/2$ ) erhält man die Holomorphie von  $z \mapsto e^{-zH}$  auf ganz  $\mathcal{H}_r$ .

*Der Fall  $s > 0$ :* Da  $L^2(e^{-sd})$  insbesondere reflexiv ist, ist nach Satz A.19 die adjungierte Halbgruppe  $(e^{-tH})' : (L^2(e^{-sd}))' \rightarrow (L^2(e^{-sd}))'$ ,  $t \geq 0$ , eine  $C_0$ -Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger  $H'$  in  $(L^2(e^{-sd}))'$ . Es gilt  $\rho(H) \subset \rho(H')$  und  $R(\lambda; H') = R(\lambda; H)'$  für alle  $\lambda \in \rho(H)$  (vgl. Lemma A.18). Da die Norm eines Operators gleich der seines adjungierten Operators ist, können wir wie oben im Fall  $s \leq 0$  mit Theorem A.16 schließen, daß  $(e^{-zH})'$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$ , eine holomorphe Halbgruppe auf  $(L^2(e^{-sd}))'$  ist.

Seien nun  $J_s$  wie in Lemma 3.6 und  $\varphi \in L^2(e^{sd})$ . Dann gilt für alle  $\psi \in L^2(G)$  die Gleichung

$$\begin{aligned} \langle \psi, (J_s^{-1} \circ (e^{-zH})' \circ J_s)\varphi \rangle &= (((e^{-zH})' \circ J_s)(\varphi))\psi = (J_s(\varphi) \circ e^{-zH})\psi \\ &= \langle e^{-zH}\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, e^{-z^*H}\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für fast alle  $g \in G$

$$((J_s^{-1} \circ (e^{-zH})' \circ J_s)\varphi)(g) = (e^{-z^*H}\varphi)(g),$$

also ist  $e^{-z^*H}\varphi \in L^2(e^{sd})$  und das untenstehende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} (L^2(e^{-sd}))' & \xrightarrow{(e^{-zH})'} & (L^2(e^{-sd}))' \\ J_s \uparrow & & \uparrow J_s \\ L^2(e^{sd}) & \xrightarrow{e^{-z^*H}} & L^2(e^{sd}) \end{array}$$

Da  $J_s^{-1}$  antilinear ist, folgt aus der Holomorphie der Halbgruppe  $(e^{-zH})'$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$ , die Holomorphie der Abbildung

$$\mathcal{H}_r \ni z \mapsto e^{-zH} = J_s^{-1} \circ (e^{-z^*H})' \circ J_s \in \mathcal{B}(L^2(e^{sd})).$$

Die Ungleichung (3.2) erhält man nun aus

$$\|e^{-zH}\|_{s \rightarrow s} = \|(e^{-z^*H})'\|_{(L^2(e^{-sd}))' \rightarrow (L^2(e^{-sd}))'} = \|e^{-z^*H}\|_{-s \rightarrow -s}$$

und dem Umstand, daß wir die Ungleichung im Fall  $s \leq 0$  bereits bewiesen haben.  $\square$

Zum Schluß des Abschnitts soll noch ein Ergebnis über Positivität von Operatorhalbgruppen angegeben werden, deren infinitesimale Erzeuger Summen von Quadraten von Vektorfeldern sind.

**Satz 3.9.** *Es seien  $V_1, \dots, V_{m+1} = 0$ , d. h.,  $H = -\sum_{i=1}^m \mathcal{X}_i^2$ . Dann existiert eine Faltungsguppe von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $(p_t)_{t \geq 0}$  mit*

$$e^{-tH} f = \int_G f \circ \rho_\sigma dp_t(\sigma) \quad (3.4)$$

für alle  $t \geq 0$ ,  $f \in L^2(G)$ . Insbesondere erhält man dann für fast alle  $x \in G$  die Abschätzung  $|e^{-tH} f(x)| \leq e^{-tH} |f|(x)$ .

Dieses Ergebnis läßt sich aus den in [Hun56] bewiesenen Ergebnissen herleiten. Dort werden die infinitesimalen Erzeuger positiver Halbgruppen auf dem Raum  $C_{u,b}(G)$  der (bzgl. einer linksinvarianten Riemannschen Metrik) gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen auf  $G$  charakterisiert. Bei dem Operator  $-H$  aus den Voraussetzungen des Satzes 3.9, eingeschränkt auf einen geeigneten Teilraum von  $C_{u,b}(G)$ , handelt es sich um einen solchen. Die von  $-H$  auf  $C_{u,b}(G)$  induzierte positive Operatorhalbgruppe  $(S_t)_{t \geq 0}$  ist dann durch die rechte Seite von (3.4) gegeben, welche aber andererseits auch eine  $C_0$ -Halbgruppe  $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$  auf  $L^2(G)$  definiert. Aus der Beziehung zwischen  $H$  und  $(S_t)_{t \geq 0}$  leitet man ab, daß der infinitesimale Erzeuger von  $(\tilde{S}_t)_{t \geq 0}$  auf dem Core  $\mathcal{D}(G)$  von  $H$  mit  $-H$  übereinstimmt, woraus dann mit Satz A.7  $\tilde{S}_t = e^{-tH}$  für alle  $t \geq 0$  folgt (vgl. [Hun56], Thm. 5.1, Thm. 6.1 und §7).

### 3.3 Sub-Laplace-Operatoren und Wärmeleitungskerne

Hier werden Aussagen über Sub-Laplace-Operatoren und die dazugehörigen Wärmeleitungskerne zusammengetragen, die später z. B. in den Kapiteln 5 und 6, in denen differenzierbarer  $L^p$ -Funktionalkalkül von Sub-Laplace-Operatoren nachgewiesen wird, Verwendung finden.

Sub-Laplace-Operatoren sind aber nicht nur als eigenständige Objekte von Interesse. Viele Eigenschaften eines Schrödinger-Operators lassen sich durch Untersuchung seines Hauptteils – eines Sub-Laplace-Operators – herleiten; siehe dazu den Abschnitt 3.4.

**Voraussetzung 3.10.** Das System  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  linear unabhängiger linksinvarianter Vektorfelder aus Voraussetzung 3.3 erfülle nun zusätzlich die Hörmander-Bedingung, d. h. erzeuge  $\mathfrak{g}$  als Lie-Algebra. Der *Sub-Laplace-Operator*  $\Delta$  sei der Abschluß des auf  $\mathcal{D}(G)$  definierten Operators  $-\sum_{j=1}^m \mathcal{X}_j^2$ .

**Satz 3.11.** *Der Sub-Laplace-Operator  $\Delta$  ist ein hypoelliptischer, positiver selbstadjungierter Operator mit*

$$\text{dom}(\Delta) = \{f \in L^2(G) : \Delta f \in L^2(G)\}.$$

Die durch  $-\Delta$  erzeugte Halbgruppe  $(e^{-t\Delta})_{t \geq 0}$  ist gegeben durch

$$e^{-t\Delta} f = f * \phi_t \quad \text{für alle } t > 0, f \in L^2(G);$$

dabei ist  $(\phi_t)_{t > 0}$  der sogenannte Wärmeleitungskern des Operators  $\Delta$ . Die Abbildung  $]0, \infty[ \times G \ni (t, x) \mapsto \phi_t(x)$  ist eine positive  $C^\infty$ -Funktion, und für alle  $t > 0$  gilt  $\|\phi_t\|_{L^1(G)} = 1$ . Ferner existieren für jedes  $t > 0$  Konstanten  $c_t, C_t > 0$  derart, daß die Abschätzung

$$\phi_t(x) \leq C_t \exp(-c_t d(x)^2) \tag{3.5}$$

für alle  $x \in G$  gilt.

Zum Beweis des Satzes 3.11. Daß  $\Delta$  ein positiver selbstadjungierter Operator in  $L^2(G)$  ist, folgt aus Satz 3.2. Die Hypoelliptizität erhält man aus [Hör67], Thm. 1.1.

Daß die Halbgruppe  $e^{-t\Delta}$ ,  $t > 0$ , durch Rechtsfaltung mit dem Wärmeleitungskern gegeben ist und daß dieser die Abschätzung (3.5) erfüllt, kann man in [VSC] nachlesen; die Abschätzung läßt sich dabei aus den Theoremen VIII.2.4, 4.3 und IX.1.2 herleiten.

Daß  $(t, x) \mapsto \phi_t(x)$  notwendigerweise eine glatte Funktion ist, ergibt sich aus dem Umstand, daß  $e^{-t\Delta} f$  für alle  $f \in L^2(G)$  die Wärmeleitungsgleichung  $(\partial_t + \Delta)u(t, x) = 0$  löst: daraus folgt  $(\partial_t + \Delta)\phi_t(x) = 0$  auf  $]0, \infty[ \times G$  und somit die Glattheit aus der Hypoelliptizität des Operators  $\partial_t + \Delta$  (s. wieder [Hör67]).

Die Aussagen über die Positivität und die  $L^1$ -Norm des Wärmeleitungskerns lassen sich sofort aus Satz 3.9 ableiten: Für  $t > 0$ ,  $f \in L^2(G)$  und fast alle  $h \in G$  gilt

$$\int_G f(hg)\phi_t(g^{-1}) d^l g = \int_G f(hg^{-1})\phi_t(g) d^r g = e^{-t\Delta} f(h) = \int_G f(hg) dp_t(g),$$

wobei  $p_t$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Somit ist  $\phi_t(g^{-1}) d^l g = dp_t(g)$ , also  $\phi_t$  positiv und

$$1 = \int_G dp_t(g) = \int_G \phi_t(g^{-1}) d^l g = \int_G \phi_t(g) d^r g = \|\phi_t\|_{L^1(G)}.$$

□

**Korollar 3.12.** *Definiert man für  $z \in \mathcal{H}_r$  mit  $\rho := \Re(z)/2$ ,  $\xi := \Im(z)$  die Funktion  $\phi_z \in L^2(G)$  durch*

$$\phi_z := e^{-(\rho+i\xi)\Delta}\phi_\rho,$$

*so liegt die Funktion  $\phi_z$  schon in  $\cap_{s \in \mathbb{R}} L^2(e^{sd}) \subset L^1(G)$ , und es folgt für alle  $\psi \in L^2(G)$  und fast alle  $x \in G$*

$$e^{-z\Delta}\psi(x) = \psi * \phi_z(x). \quad (3.6)$$

*Ferner gilt die Gleichung  $\phi_{\zeta+z} = \phi_\zeta * \phi_z$  für alle  $\zeta, z \in \mathcal{H}_r$ .*

*Beweis.* Zunächst ist  $e^{-(\rho+i\xi)\Delta}$  für alle  $s \in \mathbb{R}$  nach Lemma 3.8 ein beschränkter Operator auf  $L^2(e^{sd})$ , und die Funktion  $\phi_\rho$  liegt nach (3.5) in  $\cap_{s \in \mathbb{R}} L^2(e^{sd})$  (vgl. Bemerkung 2.38(c)). Somit liegt auch  $\phi_z$  in  $\cap_{s \in \mathbb{R}} L^2(e^{sd})$ . Nach Bemerkung 2.38(c) existiert ein  $s > 0$  mit  $\kappa := \int_G e^{-sd(g)} d^r g < \infty$ ; daraus folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|\phi_z\|_{L^1(G)} \leq \|e^{-\frac{s}{2}\Delta}\| \|\phi_z e^{\frac{s}{2}\Delta}\| = \kappa \|\phi_z\|_s < \infty.$$

Somit ist  $\phi_z \in L^1(G)$  und die rechte Seite in (3.6) wohldefiniert.

Sei nun  $\psi \in C_c(G)$ . Da mit  $\Delta$  auch der gesamte beschränkte Funktionalkalkül, also insbesondere  $e^{-(\rho+i\xi)\Delta}$ , linksinvariant ist, folgt aus Satz 3.11

$$\begin{aligned} e^{-z\Delta}\psi &= (e^{-(\rho+i\xi)\Delta} \circ e^{-\rho\Delta})\psi = e^{-(\rho+i\xi)\Delta}(\psi * \phi_\rho) \\ &= e^{-(\rho+i\xi)\Delta} \left( \int_G \psi(g)(\phi_\rho \circ \lambda_g) d^l g \right) = \int_G \psi(g)((e^{-(\rho+i\xi)\Delta}\phi_\rho) \circ \lambda_g) d^l g = \psi * \phi_z. \end{aligned}$$

Da  $C_c(G)$  dicht in  $L^2(G)$  liegt, folgt (3.6) (denn sowohl durch die linke als auch die rechte Seite von (3.6) werden beschränkte Operatoren auf  $L^2(G)$  definiert). Mit der Halbgruppeneigenschaft von  $(e^{-z\Delta})_{z \in \mathcal{H}_r}$  erhält man aus (3.6) die Gleichung  $\phi_{\zeta+z} = \phi_\zeta * \phi_z$ .  $\square$

**Lemma 3.13.** *Es existiert eine Konstante  $C > 0$  derart, daß für alle  $l, s \in \mathbb{R}$  die Abschätzung*

$$\|\phi_{1+il}\|_s \leq C \exp(C(1+l^2)s^2) \quad (3.7)$$

*durch den Wärmeleitungskern  $\phi_{1+il}$  erfüllt wird.*

Das Lemma ist ein Spezialfall des Lemmas (1.4) aus [Heb97]; eine allgemeinere Version wird später in Form des Lemmas 3.24 angegeben.

*Beweis.* Es ist nach Korollar 3.12 und Lemma 3.8:

$$\begin{aligned}\|\phi_{1+il}\|_s &= \|e^{-(\frac{1}{2}+il)\Delta}\phi_{\frac{1}{2}}\|_s \leq \|e^{-(\frac{1}{2}+il)\Delta}\|_{s \rightarrow s} \|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s \\ &\leq \exp\left((1+2|l|)^2 \frac{s^2}{8}\right) \|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s.\end{aligned}$$

Nach (3.5) existieren  $c, C > 0$  mit

$$\|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s^2 \leq C \int_G e^{-cd(g)^2+sd(g)} d^r g \leq C \left( \int_{d(g) \leq \frac{2s}{c}} e^{sd(g)} d^r g + \int_{d(g) > \frac{2s}{c}} e^{-\frac{c}{2}d(g)^2} d^r g \right).$$

Nach Bemerkung 2.38(c) gibt es ein von  $s$  unabhängiges  $K > 0$  so, daß weiter gilt:

$$\|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s^2 \leq C \left( K e^{\frac{2}{c}(K+s)s} + \int_G e^{-\frac{c}{2}d(g)^2} d^r g \right).$$

Somit erhält man mit einer geeigneten, von  $s$  unabhängigen, Konstanten  $k > 0$ :  $\|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s^2 \leq k e^{ks^2}$  und daraus letztlich die Behauptung.  $\square$

**Lemma 3.14.** *Für Borel-meßbare Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ , die für ein  $C > 0$  die Ungleichung  $|f(g)| \leq C e^{Cd(g)}$  für fast alle  $g \in G$  erfüllen, und für jedes  $s \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung*

$$\mathcal{H}_r \ni z \mapsto f\phi_z \in L^2(e^{sd})$$

*holomorph. Es gilt die Formel  $\partial_z(f\phi_z) = f(\partial_z\phi_z)$  für die Ableitung auf  $\mathcal{H}_r$ , und für alle  $\delta > R > 0$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(z) \geq \delta$  ist*

$$\|f\partial_z\phi_z\|_s \leq R^{-1} \sup\{\|f\phi_\zeta\|_s : |z - \zeta| < R\}. \quad (3.8)$$

*Beweis.* Wir betrachten zunächst den Fall  $f \equiv 1$ . Nach Lemma 3.8 ist für jedes  $s \in \mathbb{R}$  die Abbildung  $\mathcal{H}_r \ni z \mapsto e^{-z\Delta} \in \mathcal{B}(L^2(e^{sd}))$  holomorph. Insbesondere ist dann für  $\varphi \in L^2(e^{sd})$  die Abbildung  $\mathcal{H}_r \ni z \mapsto e^{-z\Delta}\varphi \in L^2(e^{sd})$  holomorph. Da nach Korollar 3.12 für alle  $z \in \mathcal{H}_r$  die Funktion  $\phi_z$  in  $L^2(e^{sd})$  liegt, ist für alle  $t > 0$  die Abbildung

$$z \mapsto \phi_z = \phi_t * \phi_{z-t} = e^{-(z-t)\Delta}\phi_t$$

holomorph in  $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > t\}$ , und es gilt  $\cup_{t>0}\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > t\} = \mathcal{H}_r$ .

Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Fall zu. Seien also  $f$  wie in der Voraussetzung des Lemmas und  $s \in \mathbb{R}$ . Da, wie bereits gezeigt, die Funktion  $\mathcal{H}_r \ni z \mapsto \phi_z \in L^2(e^{(2C+s)d})$  holomorph ist, gilt

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \int_G \left| \frac{\phi_{z+\zeta}(g) - \phi_z(g)}{\zeta} - \partial_z\phi_z(g) \right|^2 e^{(2C+s)d(g)} d^r g = 0,$$

und ferner liegt insbesondere  $f \cdot \phi_z$  in  $L^2(e^{sd})$ . Daraus folgt sofort die Holomorphie der Funktion  $\mathcal{H}_r \ni z \mapsto f\phi_z \in L^2(e^{sd})$  und die Formel  $\partial_z(f\phi_z) = f\partial_z\phi_z$  für deren Ableitung:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f\phi_{z+\zeta} - f\phi_z}{\zeta} - f\partial_z\phi_z \right\|_s^2 &= \left\| \left( \frac{\phi_{z+\zeta} - \phi_z}{\zeta} - \partial_z\phi_z(g) \right) f \right\|_s^2 \\ &\leq C^2 \int_G \left| \frac{\phi_{z+\zeta}(g) - \phi_z(g)}{\zeta} - \partial_z\phi_z(g) \right|^2 e^{(2C+s)d(g)} d^r g. \end{aligned}$$

Es braucht also nur noch die Ungleichung (3.8) gezeigt zu werden. Diese folgt jedoch für  $R > 0$  und  $z \in \mathcal{H}_r$  mit  $\Re(z) > R$  unter Ausnutzung der Cauchy-Integralformel:

$$\|f\partial_z\phi_z\|_s = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\zeta|=R} \frac{f\phi_\zeta}{(\zeta-z)^2} d\zeta \right\|_s \leq R^{-1} \sup\{\|f\phi_\zeta\|_s : |\zeta-z| < R\}.$$

□

**Lemma 3.15.** *Für jedes  $z \in \mathcal{H}_r$  liegt  $\phi_z$  in  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\Delta^n)$ . Ferner gelten auf  $\mathcal{H}_r$  die Differentialgleichungen  $(\partial_z + \Delta)e^{-z\Delta}f = 0$  für alle  $f \in L^2(G)$  und  $(\partial_z + \Delta)\phi_z = 0$ .*

*Beweis.* Sei  $f \in L^2(G)$ . Da  $t \mapsto e^{-t\Delta}f$  auf  $]0, \infty[$  differenzierbar ist, liegt  $e^{-t\Delta}f$  für alle  $t > 0$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  in  $\text{dom}(\Delta^n)$  (vgl. [Paz], Lemma 2.4.2). Ist  $z \in \mathcal{H}_r$  und  $\rho = \Re(z)/2$ ,  $\xi = \Im(z)$ , so folgt  $e^{-z\Delta}f = e^{-\rho\Delta}(e^{-(\rho+i\xi)\Delta}f) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\Delta^n)$ . Insbesondere erhält man daraus dann  $\phi_z = e^{-(\rho+i\xi)\Delta}\phi_\rho \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{dom}(\Delta^n)$ .

Ist  $E$  das Spektralmaß von  $\Delta$ , so folgt mit Differentiation unter dem Integralzeichen für alle  $f \in L^2(G)$

$$\begin{aligned} \langle \partial_z e^{-z\Delta}f, f \rangle &= \partial_z \int_0^\infty e^{-\lambda z} d\langle E(\lambda)f, f \rangle = \int_0^\infty -\lambda e^{-\lambda z} d\langle E(\lambda)f, f \rangle \\ &= \langle -\Delta e^{-z\Delta}f, f \rangle. \end{aligned}$$

Vermöge der Polarisationsformel impliziert dies  $\langle \partial_z e^{-z\Delta}f, \varphi \rangle = \langle -\Delta e^{-z\Delta}f, \varphi \rangle$  für alle  $f, \varphi \in L^2(G)$ , also  $(\partial_z + \Delta)e^{-z\Delta}f = 0$ . Ist  $0 < t < \Re(z)$ , so erhält man dann

$$(\partial_z + \Delta)\phi_z = (\partial_z + \Delta)e^{-(z-t)\Delta}\phi_t = 0.$$

□

Als nächstes wollen wir ein „Analogon“ des Schwarzschen Spiegelungsprinzips für holomorphe Funktionen mit Werten in Funktionenräumen angeben:

**Lemma 3.16.** *Sei  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet mit  $\Omega^* = \Omega$ . Ist  $\Omega \ni z \mapsto f_z \in L^2(e^{sd})$  eine holomorphe Abbildung und für alle  $r \in \mathbb{R}$  die Funktion  $f_r$  reellwertig, so gilt für jedes  $z \in \Omega$  schon  $f_{z^*} = f_z^*$  und somit insbesondere  $\|f_{z^*}\|_s = \|f_z\|_s$  für alle  $s \in \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Es sei  $\varphi \in C_0(G)$  reellwertig. Dann ist die Abbildung  $\Omega \ni z \mapsto \langle f_z, \varphi \rangle_s$  holomorph und reellwertig auf  $\Omega \cap \mathbb{R}$ . Nach dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip ist also

$$\langle f_{z^*}, \varphi \rangle_s = (\langle f_z, \varphi \rangle_s)^* = \langle f_z^*, \varphi \rangle_s.$$

Da diese Gleichung für alle reellwertigen stetigen Funktionen  $\varphi$  mit kompaktem Träger gilt, folgt  $f_{z^*}(g) = f_z^*(g)$  für fast alle  $g \in G$ .  $\square$

Aus Lemma 3.16, Satz 3.11 und Lemma 3.14 ergibt sich sogleich:

**Korollar 3.17.** *Für alle  $\alpha > 0$  und  $\beta \in \mathbb{R}$  gilt  $\phi_{\alpha-i\beta} = \phi_{\alpha+i\beta}^*$ .*

**Lemma 3.18.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Für alle  $\alpha > \beta > 0$  gilt  $\|\phi_\alpha\| \leq \|\phi_\beta\|$ .*
- (b) *Für alle  $r > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}$  ist  $\|\phi_{r+is}\| = \|\phi_r\|$ .*
- (c) *Für alle  $z \in \mathcal{H}_r$  und alle  $g \in G$  folgt  $\phi_z(g^{-1}) = m(g)\phi_z(g)$ .*
- (d) *Für jedes  $z$  in  $\mathcal{H}_r$  gilt die Gleichung  $\|\sqrt{m}\phi_z\| = \|\phi_z\|$ .*
- (e) *Für alle  $\delta > 0$  existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$  und alle  $z \in \mathcal{H}_r$  mit  $\Re(z) \geq \delta$  gilt:  $\|\mathcal{X}_j\phi_z\| \leq C$ .*

*Beweis.* (a) Die Behauptung folgt aus  $\phi_\alpha = \phi_\beta * \phi_{\alpha-\beta} = e^{-(\alpha-\beta)\Delta}\phi_\beta$  und Lemma 3.8.

(b) Durch Ausnutzung des Lemmas 3.15 ergibt sich

$$\begin{aligned} \partial_s \|\phi_{r+is}\|^2 &= 2\Re\langle \partial_s \phi_{r+is}, \phi_{r+is} \rangle = 2\Re(i\langle \partial_z \phi_z, \phi_z \rangle|_{z=r+is}) \\ &= 2\Im\langle \Delta \phi_z, \phi_z \rangle|_{z=r+is} = 2\Im \sum_{j=1}^m \|\mathcal{X}_j \phi_{r+is}\|^2 = 0. \end{aligned}$$

(c) Seien  $\varphi, \psi \in L^2(G)$ . Dann gilt für  $z \in \mathcal{H}_r$ :

$$\langle e^{-z\Delta}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi * \phi_z, \psi \rangle = \int_G \left( \int_G \varphi(hg^{-1})\phi_z(g) d^r g \right) \psi^*(h) d^r h.$$

Nach Korollar 3.17 und dem Satz von Fubini erhält man

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, e^{-z^* \Delta} \psi \rangle &= \langle \varphi, \psi * \phi_{z^*} \rangle = \int_G \varphi(g) \left( \int_G \psi(h) \phi_z^*(h^{-1}g) d^l h \right)^* d^r g \\
&= \int_G \int_G \varphi(g) \phi_z(h^{-1}g) \psi^*(h) d^r g d^l h \\
&= \int_G \left( \int_G \varphi(g) \phi_z(h^{-1}g) m(g) d^l g \right) \psi^*(h) d^l h \\
&= \int_G \left( \int_G \varphi(hg) \phi_z(g) m(hg) d^l g \right) \psi^*(h) \frac{d^r h}{m(h)} \\
&= \int_G \left( \int_G \varphi(hg^{-1}) \phi_z(g^{-1}) m(g^{-1}) d^r g \right) \psi^*(h) d^r h.
\end{aligned}$$

Da  $\langle e^{-z \Delta} \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, e^{-z^* \Delta} \psi \rangle$  gilt, folgt die Behauptung (c).

(d) Unter Ausnutzung von (c) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{m} \phi_z\|^2 &= \int_G |\phi_z(g)|^2 m(g) d^r g = \int_G |\phi_z(g)|^2 m(g)^2 d^l g \\
&= \int_G |\phi_z(g^{-1})|^2 d^l g = \int_G |\phi_z(g)|^2 d^r g = \|\phi_z\|^2.
\end{aligned}$$

(e) Für  $z \in \mathcal{H}_r$  ist  $\langle \partial_z \phi_z, \phi_z \rangle = -\langle \Delta \phi_z, \phi_z \rangle = -\sum_{j=1}^m \|\mathcal{X}_j \phi_z\|^2$ . Das liefert dann  $\sum_{j=1}^m \|\mathcal{X}_j \phi_z\|^2 \leq \|\phi_z\| \|\partial_z \phi_z\|$ . Nach (a) und (b) gilt  $\|\phi_z\| \leq \|\phi_\delta\|$ , nach Lemma 3.14 folgt schließlich (mit  $f \equiv 1$  und  $R = \delta/2$ )  $\|\partial_z \phi_z\| \leq (2/\delta) \|\phi_{\delta/2}\|$ .  $\square$

Es lohnt sich, den Satz 1.14 im Fall  $T = \Delta$  noch einmal neu zu formulieren. Aufgrund der Linksinvarianz von  $\Delta$  ist unter gewissen Voraussetzungen jeder Operator  $f(\Delta)$ ,  $f \in C_c(\mathbb{R})$  genügend glatt, durch Rechtsfaltung mit einer Funktion  $k_f$  gegeben, die sich konkret durch  $f$  und den Wärmeleitungskern ausdrücken läßt:

**Satz 3.19.** *Existieren Konstanten  $C, \kappa \geq 0$  mit*

$$\|\phi_{1+i\xi}\|_{L^1(G)} \leq C(1 + |\xi|)^\kappa \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R},$$

*so folgt für jedes  $\varepsilon > 0$  und alle stetigen  $f \in H^{\kappa + \frac{1}{2} + \varepsilon}(\mathbb{R})$  mit kompaktem Träger in  $\mathbb{R}$ , daß sich  $f(\Delta)$  für alle  $p \in [1, \infty]$  durch Rechtsfaltung mit einer Funktion  $k_f \in L^1(G)$  stetig auf  $L^p(G)$  fortsetzen läßt. Die Funktion  $k_f$  ist dabei durch das Integral*

$$k_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (f \cdot \exp)^\wedge(\xi) \phi_{1-i\xi} d\xi$$

*gegeben; der Integrand liegt in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, L^1(G))$ . Ist  $p \in [1, \infty]$ , so ist diese stetige Fortsetzung eindeutig.*

*Beweis.* Setze wieder  $v(\xi) = 1 + |\xi|$ . Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Es seien  $C$ ,  $\kappa$  und  $f$  wie in den Voraussetzungen des Satzes. Dann ist mit  $F := f \cdot \exp$  (vgl. Hilfssatz 1.6)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|\hat{F}(\xi)\phi_{1+i\xi}\|_{L^1(G)} d\xi &\leq C \int_{\mathbb{R}} |\hat{F}(\xi)|v(\xi)^\kappa d\xi \\ &\leq C \|v^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R})} \|v^{\kappa+\frac{1}{2}+\varepsilon}\hat{F}\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty. \end{aligned}$$

Somit ist das Integral

$$k_f := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)\phi_{1-i\xi} d\xi$$

eine  $L^1$ -Funktion auf  $G$ . Nach Satz 1.5 erhält man dann für  $\varphi \in L^2(G)$

$$f(\Delta)\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)e^{-(1-i\xi)\Delta}\varphi d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)(\varphi * \phi_{1-i\xi}) d\xi = \varphi * k_f,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen aufgrund der Beschränktheit der linearen Abbildung  $\varphi * \cdot : L^1(G) \rightarrow L^2(G)$  gerechtfertigt ist.

Somit läßt sich für alle  $p \in [1, +\infty]$  der Operator  $f(\Delta)$  durch die Abbildungsvorschrift  $f(\Delta)\psi = \psi * k_f$  stetig von  $L^2(G) \cap L^p(G)$  auf  $L^p(G)$  fortsetzen. Für  $p \in [1, +\infty[$  ist diese stetige Fortsetzung eindeutig, da  $L^2(G) \cap L^p(G)$  dicht in  $L^p(G)$  liegt.  $\square$

### 3.4 Schrödinger-Operatoren und deren Evolutionskerne

**Voraussetzung 3.20.** Wie schon in den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels sei  $G$  eine reelle zusammenhängende Lie-Gruppe. Es gelte ferner die Voraussetzung 3.3, wobei das System linear unabhängiger Vektorfelder  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  zudem die Hörmander-Bedingung erfüllen soll. Es sei  $\Delta$  der zu  $H$  gehörige Sub-Laplace-Operator, i. e.,  $\Delta = -\sum_{j=1}^m \mathcal{X}_j^2$  auf  $\mathcal{D}(G)$ .

Der Operator  $H$  aus Voraussetzung 3.3 soll bei Gültigkeit der zusätzlichen Bedingung aus Voraussetzung 3.20, nämlich daß  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  die Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  erzeuge, als *Schrödinger-Operator* bezeichnet werden.

**Lemma 3.21.** *Ist  $t > 0$  und  $f \in L^2(G)$ , so gilt  $|e^{-tH}f| \leq e^{-t\Delta}|f|$  punktweise fast überall.*

Das Lemma 3.21 findet sich ebenfalls in [Heb97]. Dort wird jedoch nur ein Beweis für Lie-Gruppen  $G$  mit injektiver Exponentialabbildung angegeben.

Hier soll die Aussage in voller Allgemeinheit gezeigt werden. Die zugrundeliegende Idee, von der Lie-Gruppe  $G$  zum direkten Produkt  $G \times \mathbb{R}$  und von Vektorfeldern  $\mathcal{X}$  zu Vektorfeldern  $\mathcal{X} + \varepsilon \partial_r$  überzugehen, stammt wiederum von W. Hebisch (mündliche Mitteilung).

*Beweis des Lemmas 3.21.* Sei  $\mathcal{X} \in \mathfrak{g}^\times$ ,  $V \in C^1(G)$  reellwertig und  $U := \mathcal{X} + iV$ . Wir betrachten nun die Gruppe  $\tilde{G} := G \times \mathbb{R}$  und zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein Vektorfeld  $\mathcal{X}_\varepsilon := \mathcal{X} + \varepsilon \partial_r$  auf  $G \times \mathbb{R}$ . Setze ferner  $U_\varepsilon := \mathcal{X}_\varepsilon + iV$ .

Nun läßt sich eine Abbildung  $W$  konstruieren, die im folgenden Sinne eine Stammfunktion von  $V$  bzgl.  $\mathcal{X}_\varepsilon$  darstellt:  $W$  ist meßbar und im Distributionensinne gilt  $\mathcal{X}_\varepsilon W = V$ .

Die Lie-Algebra  $\tilde{\mathfrak{g}}$  von  $\tilde{G}$  ist gerade  $\mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ . Daher können wir  $\exp_{\tilde{G}}(t\partial_r) = (1_G, \exp_{\mathbb{R}}(t\partial_r)) = (1_G, t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  setzen (s. auch Konvention 2.16). Sei  $N_0$  eine offene Nullumgebung in  $\mathfrak{g}$  und  $N$  eine offene Obermenge von  $\overline{N_0}$  so, daß die Einschränkung  $\exp_G|_N$  ein Diffeomorphismus auf ihr Bild ist. Identifiziert man  $\tilde{\mathfrak{g}}$  mit  $\mathfrak{g} \oplus \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon \simeq \tilde{\mathfrak{g}}$ , dann ist das „Koordinatensystem zweiter Art“

$$Z : N + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon \rightarrow \tilde{G}, u + r\mathcal{X}_\varepsilon \mapsto \exp_{\tilde{G}}(u) \exp_{\tilde{G}}(r\mathcal{X}_\varepsilon) = (\exp_G(u) \exp_G(r\mathcal{X}), \varepsilon r)$$

augenscheinlich eine injektive Abbildung, und  $Z(N + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$ ,  $Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$  sind offene Einsumgebungen in  $\tilde{G}$  (vgl. [HiN], Lemma III.2.12). Da  $\tilde{G}$  als zusammenhängende Lie-Gruppe  $\sigma$ -kompakt ist (s. Bemerkung 2.2), existieren Elemente  $g_k \in \tilde{G}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\tilde{G} = \cup_{k \in \mathbb{N}} g_k Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$ . Definiere nun rekursiv die Borel-Mengen  $A_0 := g_0 Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$  und  $A_{k+1} := g_{k+1} Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon) \setminus (\cup_{i=0}^k A_i)$ . Mit trivialer Induktion erkennt man, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  aus  $g \in A_k$  schon  $g \exp_{\tilde{G}}(\mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon) \subset A_k$  folgt.

Ist nun  $g \in \tilde{G}$  beliebig vorgegeben, so findet sich ein eindeutig bestimmtes  $k \in \mathbb{N}$  mit  $g \in A_k$ , und somit existieren aufgrund der Injektivität von  $Z$  eindeutig bestimmte  $u \in N_0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  mit  $g = g_k \exp_{\tilde{G}}(u) \exp_{\tilde{G}}(t\mathcal{X}_\varepsilon)$ . Wir erklären die Abbildung  $W$  in diesem Fall durch

$$W(g) = \int_0^t V(g_k \exp_{\tilde{G}}(u) \exp_{\tilde{G}}(\tau\mathcal{X}_\varepsilon)) d\tau.$$

Für alle  $s \in \mathbb{R}$  folgt dann

$$W(g \exp_{\tilde{G}}(s\mathcal{X}_\varepsilon)) = \int_0^{t+s} V(g_k \exp_{\tilde{G}}(u) \exp_{\tilde{G}}(\tau\mathcal{X}_\varepsilon)) d\tau;$$

die Abbildung  $s \mapsto W(g \exp_{\tilde{G}}(s\mathcal{X}_\varepsilon))$  ist also für alle  $g \in \tilde{G}$  stetig differenzierbar und es folgt

$$\mathcal{X}_\varepsilon W(g) = \frac{d}{ds} W(g \exp_{\tilde{G}}(s\mathcal{X}_\varepsilon))|_{s=0} = V(g).$$

Ferner ist für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Einschränkung  $W|_{A_k}$  eine stetige Funktion, daher ist  $W$  meßbar auf  $\tilde{G}$ .

Daß die Funktion  $W$  lokal integrierbar auf  $\tilde{G}$  ist, läßt sich z. B. folgendermaßen einsehen:

Zu vorgegebenem  $g \in A_k$  findet man eine relativ kompakte Umgebung  $U$  mit  $\bar{U} \subset g_k Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon) \subset \cup_{l=0}^k A_l$ . Für jedes  $l$  läßt sich die Funktion  $W|_{A_l}$  aber (auf offenkundige Weise) stetig auf  $g_l Z(N + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$  fortsetzen. Ist nun  $g$  ein Berührungspunkt von  $g_l Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$ , so verkleinere  $U$  derart, daß  $\bar{U} \subset g_l Z(N + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$  gilt. Ist  $g$  kein Berührungspunkt von  $g_l Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon)$ , dann verkleinere  $U$  in einer Weise, die  $\bar{U} \cap g_l Z(N_0 + \mathbb{R}\mathcal{X}_\varepsilon) = \emptyset$  gewährleistet. Für eine solche Umgebung  $U$  von  $g$  gilt dann  $\sup\{|W(h)| : h \in U\} < \infty$ .

Nach Lemma 2.25 gilt nun insbesondere  $\mathcal{X}_\varepsilon W = V$  im Distributionensinne.

Wir wollen nun den durch  $M\psi = e^{iW}\psi$  definierten Operator  $M$  auf  $L^2(\tilde{G})$  betrachten. Er ist offenbar unitär und somit ist der Operator  $M^* \circ (-\mathcal{X}_\varepsilon^2) \circ M$  selbstadjungiert mit Definitionsbereich  $\{\psi \in L^2(\tilde{G}) : \mathcal{X}_\varepsilon^2(M\psi) \in L^2(\tilde{G})\}$  (vgl. Satz 3.2). Nach Lemma 2.25 ist  $\mathcal{D}(\tilde{G}) \subset \text{dom}(M^* \circ (-\mathcal{X}_\varepsilon^2) \circ M)$ , und auf  $\mathcal{D}(\tilde{G})$  gilt  $M^* \circ (-\mathcal{X}_\varepsilon^2) \circ M = -U_\varepsilon^2$ . Da die beiden Operatoren der letzten Gleichung selbstadjungiert sind und nach Satz 3.2  $\mathcal{D}(\tilde{G})$  ein Core von  $-U_\varepsilon^2$  ist, folgt schon die Gleichheit  $-U_\varepsilon^2 = M^* \circ (-\mathcal{X}_\varepsilon^2) \circ M$ . Somit gilt für die von beiden Operatoren erzeugten  $C_0$ -Halbgruppen

$$e^{tU_\varepsilon^2} = M^* \circ e^{t\mathcal{X}_\varepsilon^2} \circ M.$$

Man erhält dann für alle  $\psi \in L^2(\tilde{G})$  mit Hilfe von Satz 3.9

$$|e^{tU_\varepsilon^2}\psi| = |e^{t\mathcal{X}_\varepsilon^2}(e^{iW}\psi)| \leq e^{t\mathcal{X}_\varepsilon^2}|\psi| \quad \text{fast überall.}$$

Auf dem Core  $\mathcal{D}(\tilde{G})$  von  $\mathcal{X}^2$  (aufgefaßt als Operator in  $L^2(\tilde{G})$ ) gilt

$$\mathcal{X}_\varepsilon^2\varphi - \mathcal{X}^2\varphi = 2\varepsilon\mathcal{X}\partial_r\varphi + \varepsilon^2\partial_r^2\varphi \longrightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \searrow 0.$$

Das zieht für alle  $\psi \in L^2(\tilde{G})$  dann  $e^{t\mathcal{X}_\varepsilon^2}|\psi| \rightarrow e^{t\mathcal{X}^2}|\psi|$  für  $\varepsilon \searrow 0$  nach sich (s. [Wei], Thm. 9.16, 9.18). Analog folgt aus

$$U_\varepsilon^2\varphi - U^2\varphi = 2\varepsilon\mathcal{X}\partial_r\varphi + \varepsilon^2\partial_r^2\varphi + 2i\varepsilon V\partial_r\varphi \longrightarrow 0 \quad \text{für } \varepsilon \searrow 0$$

für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\tilde{G})$  die starke Konvergenz von  $e^{tU_\varepsilon^2}$  gegen  $e^{tU^2}$  für  $\varepsilon \searrow 0$ . Das impliziert  $|e^{tU^2}\psi|(g, r) \leq e^{t\mathcal{X}^2}|\psi|(g, r)$  für  $\psi \in L^2(\tilde{G})$  und fast alle  $(g, r) \in \tilde{G}$ .

Ist nun  $f \in L^2(G)$ , so liegt  $\tilde{f} := f \otimes \chi_{[0,1]}$  in  $L^2(\tilde{G})$  und wir finden daher ein  $r \in [0, 1]$  derart, daß für fast alle  $g \in G$  gilt (vgl. [Lan], Lemma VI.8.3):

$$\begin{aligned} |e^{tU^2} f|(g) &= |e^{tU^2} f|(g) \chi_{[0,1]}(r) = |e^{tU^2} \tilde{f}|(g, r) \\ &\leq e^{t\mathcal{X}^2} |\tilde{f}|(g, r) = e^{t\mathcal{X}^2} |f|(g) \chi_{[0,1]}(r) = e^{t\mathcal{X}^2} |f|(g). \end{aligned}$$

Somit haben wir insbesondere für alle  $j \in \{1, \dots, m\}$  und alle  $f \in L^2(G)$  die Ungleichung

$$|e^{tU_j^2} f| \leq e^{t\mathcal{X}_j^2} |f| \quad \text{fast überall}$$

bewiesen. Im Fall  $j = m+1$  ist  $\mathcal{X}_{m+1} = 0$ , die Ungleichung also ebenfalls wahr. Die Aussage von Lemma 3.21 folgt nun durch Induktion unter Ausnutzung der Trotter-Formel für positive selbstadjungierte Operatoren ([Dav], §4.5):

Ist  $k \in \mathbb{N}^\times$ , so erhält man unter Berücksichtigung von Satz 3.9

$$|(e^{\frac{t}{k}U_1^2} e^{\frac{t}{k}U_2^2})^k f| \leq e^{\frac{t}{k}\mathcal{X}_1^2} |e^{\frac{t}{k}U_2^2} (e^{\frac{t}{k}U_1^2} e^{\frac{t}{k}U_2^2})^{k-1} f| \leq \dots \leq (e^{\frac{t}{k}\mathcal{X}_1^2} e^{\frac{t}{k}\mathcal{X}_1^2})^k |f|$$

fast überall, was dann

$$|e^{t(U_1^2+U_2^2)} f| = \lim_{k \rightarrow \infty} |(e^{\frac{t}{k}U_1^2} e^{\frac{t}{k}U_2^2})^k f| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} (e^{\frac{t}{k}\mathcal{X}_1^2} e^{\frac{t}{k}\mathcal{X}_1^2})^k |f| = e^{t(\mathcal{X}_1^2+\mathcal{X}_2^2)} |f|$$

auf dem Komplement einer Nullmenge impliziert.

Der Induktionsschritt für  $(\sum_{i=1}^j U_i^2) + U_{j+1}^2$  läßt sich nach demselben Schema durchführen. Das liefert letztlich dann  $|e^{-tH} f| \leq e^{-t\Delta} |f|$  fast überall.  $\square$

Mit Hilfe des letzten Lemmas läßt sich beweisen, daß  $H$  einen Evolutionskern besitzt:

**Lemma 3.22.** *Für  $t > 0$  besitzt  $e^{-tH}$  einen Integralkern  $p_t \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(G \times G)$ , der die Gleichung  $p_t(x, y)^* = p_t(y, x)$  und die Abschätzung*

$$|p_t(x, y)| \leq \phi_t(y^{-1}x) m(y^{-1}) \quad (3.9)$$

für alle  $x, y \in G$  erfüllt; hierbei sind  $\phi_t$  der zu  $\Delta$  gehörige Wärmeleitungskern und  $m$  der modulare Faktor der Gruppe  $G$ .

*Beweis.* Sei  $t > 0$ , und sei  $B \subset G$  offen und relativ kompakt. Wir betrachten nun die lineare Abbildung  $\lambda_B : C_c(B) \otimes C_c(B) \rightarrow \mathbb{C}$ , die durch die Abbildungsvorschrift

$$\lambda_B(\varphi \otimes \psi) = \int_B e^{-tH} \varphi(g) \psi(g) d^r g$$

festgelegt wird. Die Definition von  $\lambda_B$  hängt dabei nicht von der speziellen Darstellung der Elemente aus  $C_c(B) \otimes C_c(B)$  ab (s. Abschnitt A.2). Es soll zunächst gezeigt werden, daß sich diese Abbildung zu einem stetigen Funktional auf  $C_c(B \times B) \subset C_c(B) \hat{\otimes} C_c(B)$  fortsetzen läßt.

Dazu seien  $N \in \mathbb{N}^\times$  und  $\varphi_j, \psi_j \in C_c(B)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , vorgegeben. Dann findet man für alle  $j$  Folgen von Treppenfunktionen  $(\tau_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$ , die gleichmäßig gegen die  $\psi_j$  konvergieren. Wir können annehmen, daß sie eine Darstellung  $\tau_{n,j} = \sum_{i=1}^{k(n)} a_{n,j,i} \chi_{A_{n,i}}$  haben mit  $a_{n,j,i} \in \mathbb{C}$  und meßbaren Mengen  $A_{n,i} \subset B$ , welche  $A_{n,i} \cap A_{n,k} = \emptyset$  für  $i \neq k$  erfüllen. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \lambda_B \left( \sum_{j=1}^N \varphi_j \otimes \psi_j \right) &= \sum_{j=1}^N \int_B e^{-tH} \varphi_j(g) \psi_j(g) d^r g \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \int_B e^{-tH} \varphi_j(g) \tau_{n,j}(g) d^r g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \int_{A_{n,i}} e^{-tH} \left( \sum_{j=1}^N a_{n,j,i} \varphi_j \right)(g) d^r g. \end{aligned}$$

Es folgt mit Lemma 3.21:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{k(n)} \int_{A_{n,i}} e^{-tH} \left( \sum_{j=1}^N a_{n,j,i} \varphi_j \right)(g) d^r g \right| &\leq \sum_{i=1}^{k(n)} \int_{A_{n,i}} e^{-t\Delta} \left| \sum_{j=1}^N a_{n,j,i} \varphi_j \right|(g) d^r g \\ &= \sum_{i=1}^{k(n)} \int_{A_{n,i}} \int_B \phi_t(h^{-1}g) \left| \sum_{j=1}^N a_{n,j,i} \varphi_j(h) \right| d^l h d^r g \\ &= \int_B \int_B \phi_t(h^{-1}g) \left| \sum_{j=1}^N \varphi_j(h) \sum_{i=1}^{k(n)} a_{n,j,i} \chi_{A_{n,i}}(g) \right| d^l h d^r g \\ &= \int_{B \times B} \phi_t(h^{-1}g) m(h^{-1}) \left| \sum_{j=1}^N \varphi_j(h) \tau_{n,j}(g) \right| d^r h \otimes d^r g \\ &\leq \int_{B \times B} \phi_t(h^{-1}g) m(h^{-1}) d^r h \otimes d^r g \left\| \sum_{j=1}^N \varphi_j \otimes \tau_{n,j} \right\|_\infty. \end{aligned}$$

Da  $\left\| \sum_j \varphi_j \otimes \tau_{n,j} \right\|_\infty$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\left\| \sum_j \varphi_j \otimes \psi_j \right\|_\infty$  strebt, folgt insgesamt

$$\left| \lambda_B \left( \sum_{j=1}^N \varphi_j \otimes \psi_j \right) \right| \leq \int_{B \times B} \phi_t(h^{-1}g) m(h^{-1}) d^r h \otimes d^r g \left\| \sum_{j=1}^N \varphi_j \otimes \psi_j \right\|_\infty;$$

also ist das Funktional  $\lambda_B$  beschränkt auf  $(C_c(B) \otimes C_c(B), \|\cdot\|_\infty)$  und läßt sich eindeutig zu einem stetigen Funktional  $\bar{\lambda}_B$  auf  $C_c(B \times B)$  fortsetzen. Nach dem Darstellungssatz von Riesz (s. [Lan], Thm. IX.4.2) existiert ein eindeutig bestimmtes reguläres komplexes Borel-Maß  $d\lambda_B$  auf  $B \times B$  mit

$$\bar{\lambda}_B(f) = \int_{B \times B} f(\zeta) d\lambda_B(\zeta) \quad \text{für alle } f \in C_c(B \times B).$$

Aus den obigen Rechnungen läßt sich auch ersehen, daß

$$|\bar{\lambda}_B(f)| \leq \int_{B \times B} \phi_t(h^{-1}g)m(h^{-1})|f(h, g)| d^r h \otimes d^r g$$

gilt; daher ist  $d\lambda_B$  absolutstetig bzgl. des positiven Maßes  $d^r h \otimes d^r g|_{B \times B}$ . Deshalb findet sich nach dem Satz von Radon-Nikodym (s. [Lan], Cor. VII.4.2) eine Funktion  $p_{B,t} \in \mathcal{L}^1(B \times B, d^r h \otimes d^r g|_{B \times B})$  mit  $d\lambda_B = p_{B,t} d^r h \otimes d^r g|_{B \times B}$ . Für  $n \in \mathbb{N}^\times$  soll nun  $B_n$  die Kugel um  $1_G$  mit Radius  $n$  bzgl. einer (fest gewählten) linksinvarianten Riemann-Metrik auf  $G$  sein. Für  $m \leq n$  gilt dann offenbar  $p_{B_m,t} \subset p_{B_n,t}$  (indem man die Funktionen notfalls rekursiv auf einer Nullmenge abändert). Wir setzen  $p_t := \cup_{n \in \mathbb{N}^\times} p_{B_n,t}$ .

Für alle  $f \in C_c(G \times G)$  gilt dann nach dem bisher Gezeigten

$$\left| \int_{G \times G} p_t(g, h) f(h, g) d^r h \otimes d^r g \right| \leq \int_{G \times G} \phi_t(h^{-1}g)m(h^{-1})|f(h, g)| d^r h \otimes d^r g.$$

Angenommen, die Gleichung (3.9) gilt nicht für fast alle  $(x, y) \in G \times G$ . Dann gibt es ein  $\delta > 0$  und eine beschränkte meßbare Menge  $A \subset G \times G$  mit Maß  $c > 0$  derart, daß  $\phi_t(y^{-1}x)m(y^{-1}) + \delta < |p_t(x, y)|$  für alle  $(x, y) \in A$  gilt. Nach dem Satz von Lusin (s. [Lan], Thm. IX.3.3) existiert zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $f_\varepsilon \in C_c(G \times G)$  und eine meßbare Menge  $Z_\varepsilon$  vom Maß kleiner  $\varepsilon$  mit  $f_\varepsilon = \chi_A p_t^*/|p_t|$  auf  $G \times G \setminus Z_\varepsilon$ ; zudem läßt es sich so einrichten, daß  $\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1$  ist. Ist nun  $n \in \mathbb{N}^\times$  so groß, daß  $A$  in  $B_n \times B_n$  liegt, so können wir o. B. d. A.  $\text{supp}(f_\varepsilon) \subset B_{2n} \times B_{2n}$  und folglich auch  $Z_\varepsilon \subset B_{2n} \times B_{2n}$ , unabhängig von  $\varepsilon$ , annehmen. Dann folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{A \setminus Z_\varepsilon} |p_t(g, h)| d^r h \otimes d^r g - \int_{Z_\varepsilon} |p_t(g, h)| d^r h \otimes d^r g \\ & \leq \left| \int_{G \times G} p_t(g, h) f_\varepsilon(h, g) d^r h \otimes d^r g \right| \leq \int_{A \cup Z_\varepsilon} \phi_t(h^{-1}g)m(h^{-1}) d^r h \otimes d^r g, \end{aligned}$$

was im Übergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  letztlich zum Widerspruch führt.

Somit haben wir jetzt eine Funktion  $p_t \in \mathcal{L}_{\text{loc}}^1(G \times G)$ , die (nach eventueller Abänderung auf einer Nullmenge) punktweise die Ungleichung (3.9) erfüllt. Ferner gilt für alle  $\varphi, \psi \in C_c(G)$  die Gleichung  $\langle e^{-tH}\varphi, \psi \rangle = \int_G \left( \int_G p_t(g, h) \varphi(h) d^r h \right) \psi(g)^* d^r g$ , i. e.,  $e^{-tH}\varphi = \int_G p_t(\cdot, h) \varphi(h) d^r h$  in  $L^2(G)$ . Aus (3.9) und (3.5) folgt, daß die letzte Gleichung auch für beliebige  $\varphi \in L^2(G)$  gilt. Die Beziehung  $p_t(x, y)^* = p_t(y, x)$  folgt nun sofort aus der Selbstadjungiertheit des Operators  $e^{-tH}$  auf  $L^2(G)$ .  $\square$

Das nächste Lemma wird der Vollständigkeit halber angegeben, aber im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird nicht mehr darauf zurückgegriffen. Es handelt sich um die volle Aussage des Lemmas (1.4) aus [Heb97], die insbesondere das Lemma 3.13 verallgemeinert. Anstelle des Wärmeleitungskerns  $\phi_{1+il}$  wird „ $p_{1+il}(\cdot, 1_G)$ “ betrachtet; dieser Term wird in der folgenden Bemerkung auf einfache Art erklärt.

**Bemerkung 3.23.** Für  $t > 0$  sei  $p_t$  wie in Lemma 3.22. Aus (3.9) folgt dann, daß  $p_t(\cdot, y)$  für  $y \in G$  in  $\mathcal{L}^2(G)$  ist, denn

$$\begin{aligned} \|p_t(\cdot, y)\|^2 &\leq \int_G \phi_t(y^{-1}x)^2 m(y^{-1})^2 d^r x = \int_G \phi_t(y^{-1}x)^2 m(y^{-1})^2 m(x) d^l x \\ &= \int_G \phi_t(x)^2 m(y^{-1})^2 m(yx) d^l x = m(y^{-1}) \int_G \phi_t(x)^2 m(x) d^l x = m(y^{-1}) \|\phi_t\|^2. \end{aligned}$$

Somit läßt sich für alle  $z := 2\rho + i\xi \in \mathcal{H}_r$  und alle  $y \in G$  die Funktion  $p_z(\cdot, y)$  definieren durch

$$p_z(\cdot, y) := e^{-(\rho+i\xi)H} p_\rho(\cdot, y).$$

Für alle  $\varphi \in L^2(G)$  mit kompaktem Träger gilt dann unter Berücksichtigung von Lemma 3.22

$$\begin{aligned} e^{-zH}\varphi &= e^{-(\rho+i\xi)H} (e^{-\rho H}\varphi) = e^{-(\rho+i\xi)H} \left( \int_G p_\rho(\cdot, y) \varphi(y) d^r y \right) \\ &= \int_G (e^{-(\rho+i\xi)H} p_\rho(\cdot, y)) \varphi(y) d^r y = \int_G p_z(\cdot, y) \varphi(y) d^r y. \end{aligned}$$

Nun läßt sich die Verallgemeinerung von Lemma 3.13 formulieren:

**Lemma 3.24.** *Es existiert eine von den  $V_j$ ,  $j = 1, \dots, m+1$ , unabhängige Konstante  $C > 0$  derart, daß für alle  $l, s \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\|p_{1+il}(\cdot, 1_G)\|_s \leq C \exp(C(1+l^2)s^2); \quad (3.10)$$

dabei ist  $p_{1+il}$  wie in Bemerkung 3.23.

*Beweis.* Es ist nach Definition von  $p_{1+il}$ , Abschätzung (3.9) und Lemma 3.8:

$$\begin{aligned}\|p_{1+il}(\cdot, 1_G)\|_s &= \|e^{-(\frac{1}{2}+il)H} p_{\frac{1}{2}}(\cdot, 1_G)\|_s \leq \|e^{-(\frac{1}{2}+il)H}\|_{s \rightarrow s} \|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s \\ &\leq \exp\left(\left(1 + 2|l|\right)^2 \frac{s^2}{8}\right) \|\phi_{\frac{1}{2}}\|_s.\end{aligned}$$

Analog wie im Beweis von Lemma 3.13 folgt nun die Abschätzung (3.10).  $\square$

# Kapitel 4

## Summen zweier nicht kommutierender Operatoren

**Voraussetzung 4.1.** Es seien  $(X, dx)$  ein  $\sigma$ -endlicher Maßraum und  $L$  ein positiver selbstadjungierter Operator in  $L^2(X)$  mit Spektralmaß  $E$ . Ferner seien  $dr$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  und  $dr \otimes dx$  das Produktmaß auf  $\mathbb{R} \times X$ . Die Funktion  $r \mapsto e^{2r}$  auf  $\mathbb{R}$  werde kurz mit  $e^{2r}$  bezeichnet. Für  $a \geq 0$  betrachten wir den Schrödinger-Operator  $A = A(a) := -\partial_r^2 + ae^{2r}$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Sei  $F_a$  das Spektralmaß von  $A(a)$ . Ferner sei

$$\mathcal{A} := H^2(\mathbb{R}) \cap \{f \in L^2(\mathbb{R}) : e^{2r} f \in L^2(\mathbb{R})\},$$

und es sei  $T$  der Abschluß des auf  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  definierten positiven Operators  $-\partial_r^2 + e^{2r}L$  in  $L^2(\mathbb{R} \times X)$ .

Für  $n \in \mathbb{N}$  erklären wir Kurven  $\gamma_n$  in  $\mathbb{C}$  durch  $\gamma_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\theta \mapsto (\theta + i2^{-n})^2$ .

In diesem Kapitel sollen Multiplikatorsätze für Operatoren des oben definierten Typs  $T = -\partial_r^2 + e^{2r}L$  gezeigt werden. (Daß  $T$  ein selbstadjungierter Operator ist, wird übrigens in Satz 4.16 bewiesen.) Solche Operatoren treten in natürlicher Weise als Sub-Laplace- und Schrödinger-Operatoren oder Summen gerader Potenzen von Vektorfeldern auf bestimmten auflösbaren Lie-Gruppen mit exponentiellem Volumenwachstum auf; sie werden im Abschnitt 4.3 vorgestellt.

Die Idee, die dem Vorgehen in den nächsten beiden Abschnitten zugrunde liegt, ist die folgende:

Um einen der Sätze 1.8 oder 1.14 anwenden zu können, ist es von Nöten, etwas über die Halbgruppe  $(e^{-zT})_{z \in \mathcal{H}_r}$  oder über deren Integrationskern in Erfahrung zu bringen. Mit der folgenden Symbolmanipulation läßt sich das formal erreichen:

Man „ersetze“ zunächst den Operator  $L$  durch sein Spektrum, das soll heißen, man betrachte anstelle von  $e^{-zT} = e^{-z(-\partial_r^2 + e^{2r}L)}$  die Familie von Operatoren

$e^{-z(-\partial_r^2 + ae^{2r})} = e^{-zA(a)}$ ,  $a \in [0, \infty[$ . Diese Operatoren besitzen einen berechenbaren Integrationskern  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , der per definitionem dann die Gleichung

$$e^{-zA(a)}\varphi = \int_{\mathbb{R}} q_z(a, \cdot, s)\varphi(s) ds \quad \text{für alle } \varphi \in L^2(\mathbb{R})$$

erfüllt. Aus dieser Beziehung ergibt sich formal, indem man in Anlehnung an den Funktionalkalkül von  $L$  das  $a$  wieder durch  $L$  „ersetzt“:

$$e^{-zT}\varphi \otimes \psi = \int_{\mathbb{R}} (q_z(L, \cdot, s)\psi)\varphi(s) ds \quad \text{für alle } \varphi \in L^2(\mathbb{R}), \psi \in L^2(X).$$

Es läßt sich erahnen, daß man für diesen Schritt eine Darstellung der Funktion  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  benötigt, die in geeigneter Form von der Variablen  $a$  abhängt.

Das oben beschriebene Vorgehen ist in einer mathematisch korrekten Form realisierbar und liefert eine Formel für  $(e^{-zT})_{z \in \mathcal{H}_r}$  in Abhängigkeit von  $(e^{-tL})_{t>0}$  (s. Satz 4.18 und Lemma 4.17); der Umstand, daß in dieser Formel die von  $L$  erzeugte Halbgruppe nur mit *reellem* Zeitparameter auftritt, führt zu den Multiplikatorsätzen Theorem 4.20 und 4.21 mit einfach zu formulierenden Voraussetzungen an  $L$ .

Wie im Abschnitt 4.3.2 näher erläutert wird, sind die Hauptresultate dieses Kapitels, die Theoreme 4.20 und 4.21, Verallgemeinerungen eines Resultats von S. Mustapha (vgl. [Mus98a]). Jenes Ergebnis wurde mit stochastischen Methoden erzielt; in diesem Kapitel hingegen werden rein analytische Methoden verwendet.

## 4.1 Der Schrödinger-Operator $A = -\partial_r^2 + ae^{2r}$

Gemäß der Idee aus der Einleitung des Kapitels betrachten wir zunächst den Operator  $-\partial_r^2 + ae^{2r}$  und versuchen, den dazugehörigen Evolutionskern  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  zu berechnen.

### 4.1.1 Selbstadjungiertheit

Das nächste Lemma beschäftigt sich erst einmal mit der Frage der Selbstadjungiertheit der Operatoren  $A(a)$ ,  $a \geq 0$ , in  $L^2(\mathbb{R})$ . Die dort angeführte Ungleichung (4.1) wird später beim Nachweis der Selbstadjungiertheit des Operators  $T$  in  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  nützlich sein.

**Lemma 4.2.** *Sei  $a \in [0, +\infty[$ . Dann ist  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ein Core des positiven selbstadjungierten Operators  $A(a)$ . Es gilt  $\text{dom}(A(0)) = H^2(\mathbb{R})$ ; im Fall  $a > 0$  hat man  $\text{dom}(A(a)) = \mathcal{A}$ . Für alle  $\varphi \in \mathcal{A}$  gilt die Abschätzung:*

$$\|\varphi''\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq \|A(a)\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad (4.1)$$

*Beweis.* Nach Satz 3.2 ist  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ein Core des selbstadjungierten Operators  $A(a)$  und  $\text{dom}(A(a)) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : A(a)f \in L^2(\mathbb{R})\}$ ; insbesondere sind damit die Aussagen des Lemmas 4.2 im Fall  $a = 0$  gezeigt (vgl. Bemerkung 1.4(b)). Sei also ab jetzt  $a > 0$ .

Wir zeigen zunächst, daß die Ungleichung 4.1 gilt: Für  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  ist

$$\begin{aligned} a\Re\langle\varphi'', e^{2r}\varphi\rangle &= -a(\|e^r\varphi'\|^2 + 2\Re\langle e^r\varphi', e^r\varphi\rangle) \leq -a\|e^r\varphi'\|^2 + a(\|e^r\varphi'\|^2 + \\ &\quad + \|e^r\varphi\|^2) = a\|e^r\varphi\|^2 \leq a\|e^{2r}\varphi\|\|\varphi\| \leq \frac{1}{2}(a^2\|e^{2r}\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|A(a)\varphi\|^2 = \|\varphi''\|^2 + a^2\|e^{2r}\varphi\|^2 - 2a\Re\langle\varphi'', e^{2r}\varphi\rangle \geq \|\varphi''\|^2 - \|\varphi\|^2.$$

Sei nun  $f \in \text{dom}(A(a))$ . Da  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  ein Core von  $A(a)$  ist, existiert eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  mit  $f_n \rightarrow f$  und  $A(a)f_n \rightarrow A(a)f$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Da wir (4.1) schon auf  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  gezeigt haben, folgt, daß  $(f_n'')_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L^2(\mathbb{R})$  ist, die offenbar dann gegen  $f''$  im schwachen Sinne konvergiert. Somit ist  $f \in H^2(\mathbb{R})$  und (4.1) gilt auch für  $f$ . Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  haben wir ferner

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} (ae^{2r}f(r))\varphi(r) dr &= \int_{\mathbb{R}} f(r)(A(a)\varphi(r) + \varphi''(r)) dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} (A(a)f(r) + f''(r))\varphi(r) dr, \end{aligned}$$

also  $ae^{2r}f = A(a)f + f'' \in L^2(\mathbb{R})$ , i. e.,  $f \in \{h \in L^2(\mathbb{R}) : e^{2r}h \in L^2(\mathbb{R})\}$ . Somit haben wir gezeigt, daß  $f$  in  $\mathcal{A}$  liegt. Da ohnehin  $\mathcal{A} \subset \text{dom}(A(a))$  gilt, ist die Behauptung bewiesen.  $\square$

#### 4.1.2 Die Halbgruppe $e^{-zA}$ , ausgedrückt durch die Resolvente von $A$

Es soll nun darangegangen werden, den Evolutionskern von  $A(a)$  zu berechnen. Die Lemmata 4.3, 4.4 und die Gleichung (4.13) bringen dieses Unterfangen voran.

Liegt  $\lambda \in \mathbb{C}$  in der Resolventenmenge  $\rho(A)$  von  $A$ , so bezeichne  $R(\lambda; A)$  im weiteren die lineare Abbildung  $(\lambda - A)^{-1}$ .

**Lemma 4.3.** *Es sei  $a \in [0, \infty[$ . Für alle  $z \in \mathcal{H}_r$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt*

$$e^{-zA} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} e^{-z\lambda} R(\lambda; A) d\lambda; \quad (4.2)$$

dabei ist der Integrand der rechten Seite der Gleichung nach Parametrisierung, i. e. die Funktion  $s \mapsto \gamma'_n(s)e^{-z\gamma_n(s)}R(\gamma_n(s); A)$ , aus  $L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R})))$ , und das Integral ist insbesondere unabhängig vom gewählten  $n \in \mathbb{N}$ .

Gleichungen der Form (4.2) für Operatorhalbgruppen sind in der Literatur bekannt; eine Formel, die relativ allgemeine Integrationswege zuläßt, findet sich z. B. in [Paz], unter Theorem 1.7.7. Da aber die Voraussetzungen des Theorems in unserem Fall so nicht gegeben sind (unsere „Parabeln“  $\gamma_n$  erfüllen z. B. die „Winkelbedingung“ nicht), führen wir (4.2) auf eine andere Aussage aus [Paz] zurück.

*Beweis des Lemmas 4.3.* Sei  $n \in \mathbb{N}$  fest. Aus dem Funktionalkalkül folgt für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$  die Ungleichung  $\|R(\lambda; A)\|_{op} \leq \text{dist}(\lambda; \sigma(A))^{-1}$ ; somit erhält man für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  die Abschätzung  $\|R(\gamma_n(\theta); A)\|_{op} \leq 2^{2n}$ . Für alle  $\theta \in \mathbb{R}$  gilt dann

$$\begin{aligned} & \|\gamma'_n(\theta)e^{-z\gamma_n(\theta)}R(\gamma_n(\theta); A)\|_{op} \\ &= 2|\theta + i2^{-n}| \exp(-\Re(z)(\theta^2 - 2^{-2n}) + \Im(z)2^{-n+1}\theta) \|R(\gamma_n(\theta); A)\|_{op} \\ &\leq 2^{2n+1}(1 + |\theta|) \exp(-\Re(z)(\theta^2 - 2^{-2n}) + \Im(z)2^{-n+1}\theta). \end{aligned}$$

Somit ist für festes  $z \in \mathcal{H}_r$  die Funktion

$$\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \|\gamma'_n(\theta)e^{-z\gamma_n(\theta)}R(\gamma_n(\theta); A)\|_{op}$$

auf  $\mathbb{R}$  integrierbar und folglich die rechte Seite von Gleichung (4.2) ein beschränkter linearer Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$ . Man sieht ebenfalls schnell ein, daß sich die rechte Seite von Gleichung (4.2) unter dem Integralzeichen komplex differenzieren läßt, also holomorph in  $z$  ist.

Für  $R > 0$  definieren wir die Parametrisierung  $\Gamma_R : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $\Gamma_R(\theta) = -2^{-2n} + i\theta$ . Ist dann  $t > 0$  und  $\varphi \in \text{dom}(A^2)$ , so gilt nach Lemma A.14

$$e^{-tA}\varphi = - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} e^{-\lambda t} R(\lambda; A)\varphi d\lambda. \quad (4.3)$$

Für  $R > 0$  betrachten wir ferner die Wege

$$\gamma_{n,R} := \gamma_n|_{[-2^{n-1}R, 2^{n-1}R]} \quad \text{und} \quad \Gamma_R^\pm : [0, 2^{2n-2}R^2] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \theta \mapsto \theta - 2^{-2n} \pm iR.$$

Dann erhält man

$$\left\| \int_{\Gamma_R^\pm} e^{-\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda \right\|_{op} \leq \frac{e^{2^{-2n}t}}{R} \int_0^{2^{2n-2}R^2} e^{-t\theta} d\theta \leq \frac{e^{2^{-2n}t}}{tR}.$$

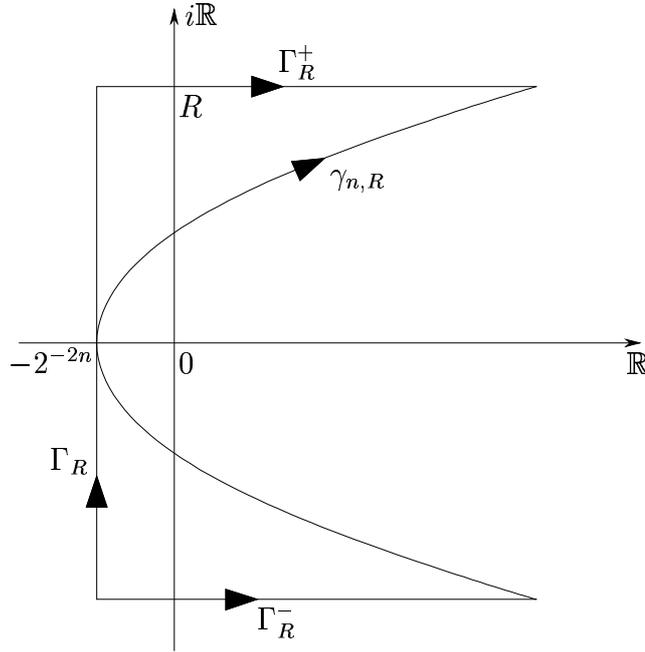


Abbildung 4.1: Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes

Somit folgt aus dem Cauchy-Integralsatz und (4.3)

$$e^{-tA}\varphi = -\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{n,R}} e^{-\lambda t} R(\lambda; A)\varphi d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} e^{-\lambda t} R(\lambda; A)\varphi d\lambda$$

für  $\varphi \in \text{dom}(A^2)$ . Da aber sowohl  $e^{-tA}$  als auch  $-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} e^{-\lambda t} R(\lambda; A) d\lambda$  beschränkte Operatoren auf  $L^2(\mathbb{R})$  sind und  $\text{dom}(A^2)$  als Obermenge von  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegt, gilt (4.2) für  $z = t > 0$ . Da beide Seiten von (4.2) holomorph auf  $\mathcal{H}_r$  sind (s. Lemma 3.8), folgt Gleichung (4.2) für alle  $z \in \mathcal{H}_r$  aus dem Identitätssatz der Funktionentheorie.  $\square$

**Lemma 4.4.** Für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$  und alle  $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$  sind  $R(\lambda; A)f$  und  $\mathbb{R} \times ]0, \infty[ \ni (r, t) \mapsto e^{-tA}f(r)$   $C^\infty$ -Funktionen. Für  $z \in \mathcal{H}_r$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt dann

$$e^{-zA}f(r) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} e^{-z\lambda} (R(\lambda; A)f)(r) d\lambda \quad \text{für fast alle } r \in \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

*Beweis.* Da die Operatoren  $\lambda - A$  und  $\partial_t + A$  hypoelliptisch sind (siehe z. B. [Rud], Thm. 8.12, und [Hör67]) und die Gleichungen  $(\lambda - A)(R(\lambda; A)f) = f$  sowie  $(\partial_t + A)(e^{-tA}f) = 0$  gelten, folgt, daß  $R(\lambda; A)f$  in  $C^\infty(\mathbb{R})$  und  $(r, t) \mapsto (e^{-tA}f)(r)$  in  $C^\infty(\mathbb{R} \times ]0, \infty[)$  liegen.

Mit Blick auf die Lemmata 4.3 und 1.10 wenden wir uns der Meßbarkeit der Funktion

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (s, r) \mapsto \gamma'_n(s) e^{-z\gamma_n(s)} (R(\gamma_n(s); A)f)(r),$$

zu: Sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$  und  $\rho := \frac{1}{2} \|R(\lambda; A)\|_{op}^{-1}$ . Betrachtet man die  $C^\infty$ -Funktionen

$$S_N : B_\rho(\lambda) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\nu, r) \mapsto \sum_{k=0}^N (\lambda - \nu)^k (R(\lambda; A)^{k+1} f)(r), \quad N \in \mathbb{N},$$

so konvergiert für festes  $\nu \in B_\rho(\lambda)$  die Folge  $(S_N(\nu, \cdot))_{N \in \mathbb{N}}$  in  $L^2(\mathbb{R})$  gegen  $R(\nu; A)f$  (s. [Wei], Thm. 5.14). Die Integrationstheorie liefert nun die Existenz einer Nullmenge  $\mathcal{N}_\nu \subset \mathbb{R}$  und einer (ebenfalls von  $\nu$  abhängenden) Teilfolge  $(S_{M_\nu(N)}(\nu, \cdot))_{N \in \mathbb{N}}$ , die punktweise auf  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}_\nu$  gegen  $R(\nu; A)f$  konvergiert.

Um die Lebesgue-Meßbarkeit von  $(\nu, r) \mapsto (R(\nu; A))(r)$  auf  $B_\rho(\lambda) \times \mathbb{R}$  zu beweisen, zeigen wir nun, daß für alle  $\nu \in B_\rho(\lambda)$  die Mengen  $\mathcal{N}_\nu$  schon so gewählt werden können, daß sie in einer festen Nullmenge  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$  liegen und daß die ganze Folge  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $B_\rho(\lambda) \times (\mathbb{R} \setminus \mathcal{N})$  punktweise gegen  $R(\cdot; A)f$  konvergiert (das umgeht die Diskussion der Frage, ob  $\cup_{\nu \in B_\rho(\lambda)} \{\nu\} \times N_\nu$  für beliebige Nullmengen  $N_\nu$  schon eine meßbare Menge in  $\mathbb{R}^2$  mit Maß null ist): Die Konvergenz der Reihe  $\sum_{k=0}^\infty \rho^k \|R(\lambda; A)^{k+1} f\|_{L^2(\mathbb{R})}$  impliziert die Konvergenz von  $\sum_{k=0}^\infty \rho^k |R(\lambda; A)^{k+1} f|$  in  $L^2(\mathbb{R})$ . Somit existiert eine Nullmenge  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$  derart, daß eine Teilfolge von  $(\sum_{k=0}^N \rho^k |R(\lambda; A)^{k+1} f|)_{N \in \mathbb{N}}$  (und aufgrund des monotonen Wachstums schon die ganze Folge) punktweise auf  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$  konvergiert; zudem existiert zu vorgegebenem  $m \in \mathbb{N}$  eine meßbare Menge  $A_m \subset \mathbb{R}$  mit Maß kleiner  $1/m$  derart, daß die Konvergenz auf  $\mathbb{R} \setminus A_m$  sogar gleichmäßig ist (s. [Lan], Thm. VII.1.4). Setze nun

$$NA_m := \{x \in \mathbb{R} \setminus A_m : \exists r > 0 : B_r(x) \cap (\mathbb{R} \setminus A_m) \text{ ist Nullmenge}\}.$$

Da  $\mathbb{R}$  separabel ist, ist  $NA_m$  eine Nullmenge. Wir können daher die  $A_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , so wählen, daß sie eine absteigende Folge von Mengen bilden und  $NA_m = \emptyset$  gilt. Zudem sei o. B. d. A.  $\mathcal{N} = \cap_{m \in \mathbb{N}} A_m$ . Dann konvergiert für alle  $(\nu, r) \in B_\rho(\lambda) \times \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$  die durch  $(\sum_{k=0}^N \rho^k |R(\lambda; A)^{k+1} f|(r))_{N \in \mathbb{N}}$  majorisierte Folge  $(S_N(\nu, r))_{N \in \mathbb{N}}$  gegen einen Wert  $F(\nu, r)$ , und die Konvergenz ist gleichmäßig auf  $\mathbb{R} \setminus A_m$ . Da die Funktionen  $S_N$  insbesondere stetig sind, ist  $F(\nu, \cdot)$  stetig auf  $\mathbb{R} \setminus A_m$ . Ferner gilt  $F(\nu, r) = (R(\nu; A)f)(r)$  für alle  $r \in \mathbb{R} \setminus (\mathcal{N} \cup A_m)$ . Sei nun  $x \in \mathbb{R} \setminus A_m$ . Da  $NA_m = \emptyset$ , existiert eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R} \setminus (A_m \cup \mathcal{N}_\nu)$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . Somit folgt

$$F(\nu, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(\nu, x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (R(\nu; A)f)(x_n) = (R(\nu; A)f)(x).$$

Da  $m$  ein beliebiges Element aus  $\mathbb{N}$  war, gilt  $F(\nu, r) = (R(\nu; A)f)(r)$  auf  $\mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$ . Somit konvergiert die Folge von  $C^\infty$ -Funktionen  $S_N$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , punktweise auf  $B_\rho(\lambda) \times \mathbb{R} \setminus \mathcal{N}$  gegen  $(\nu, r) \mapsto (R(\nu; A)f)(r)$ .

Da sich das Bild von  $\gamma_n$  durch abzählbar viele solcher Kugeln  $B_\rho(\lambda)$  überdecken läßt, folgt die Meßbarkeit der Abbildung  $J$  bzgl. des Lebesgue-Maßes auf  $\mathbb{R}^2$ . Lemma 4.3 und Lemma 1.10 liefern die Gültigkeit von Gleichung (4.4) fast überall.  $\square$

### 4.1.3 Berechnung der Resolvente von $A$

Die Beziehung (4.4) legt nahe, daß zur Berechnung des Evolutionskerns von  $A$  konkrete Formeln für die Resolvente  $R(\lambda; A)$  das adäquate Hilfsmittel wären. Solche Formeln lassen sich über Lösungen der gewöhnlichen linearen Differentialgleichung  $(\lambda - A)y = 0$  gewinnen (s. [Tit]; vgl. auch [Hul76]). Da es sich bei den Lösungen um sogenannte „Bessel-Funktionen mit imaginärem Argument“ handelt, soll nun näher auf diese eingegangen werden.

**Definition 4.5 (Bessel-Funktionen mit imaginärem Argument).** Für  $\nu \in \mathbb{C}$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  definieren wir die *modifizierte Bessel-Funktion der ersten Art* durch

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \quad (4.5)$$

und die *Macdonald-Funktion* über

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)} \quad \text{für } \nu \notin \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

und

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Die Reihe (4.5) ist für festes  $\nu$  und  $z$  absolut konvergent: Für  $\nu \in -\mathbb{N}^\times$  ist die Reihe so zu verstehen, daß sie erst bei  $k = -\nu$  beginnt, denn  $-\mathbb{N}$  ist die Polstellenmenge der Gammafunktion. Dann ist  $\Gamma(k + \nu + 1) = (k + \nu)!$  für  $k \geq -\nu$ . Ferner gilt die Gleichung  $\Gamma(k + 1 + \nu) = (k + \nu)(k - 1 + \nu) \dots \nu \Gamma(\nu)$  für  $\nu \notin -\mathbb{N}^\times$ , zudem besitzt die Gammafunktion keine Nullstellen in  $\mathbb{C}$  (vgl. [Leb], §1.2). Somit findet man eine Konstante  $C_\nu > 0$  derart, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z/2|^{\Re(\nu)+2k}}{k! |\Gamma(k + \nu + 1)|} \leq C_\nu |z/2|^{\Re(\nu)} \exp(|z/2|^2)$$

gilt. Ist  $\Re(\nu) > 0$ , so haben wir nach (4.5) für  $z \rightarrow 0$  die Asymptotik

$$I_\nu(z) = C(\nu)z^\nu + O(|z|^{\Re(\nu)+2}). \quad (4.8)$$

Für festen Index  $\nu$  sind die Funktionen  $I_\nu$  und  $K_\nu$  holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , und für festes  $z \in \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  sind  $\nu \mapsto I_\nu(z)$ ,  $K_\nu(z)$  ganze Funktionen (s. [Leb], §5.7). Aus (4.6) und (4.7) liest man die Formel

$$K_{-\nu} = K_\nu \quad (4.9)$$

ab. Ferner soll bei festem  $\nu \in \mathbb{C}$  die Asymptotik für  $\mathbb{R} \ni x \rightarrow +\infty$ , nämlich

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} (1 + O(|x|^{-1})) \quad (4.10)$$

(s. [Leb], (5.11.9)), angegeben werden.

Für  $a > 0$  und  $\theta \in \mathbb{C}$  erklären wir die Abbildung  $k_\theta^a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$k_\theta^a(r, s) = \begin{cases} -I_{-i\theta}(\sqrt{ae^r})K_{i\theta}(\sqrt{ae^s}) & \text{für } s \geq r, \\ -I_{-i\theta}(\sqrt{ae^s})K_{i\theta}(\sqrt{ae^r}) & \text{für } s < r. \end{cases} \quad (4.11)$$

Offenbar ist  $k_\theta^a$  eine stetige Abbildung auf  $\mathbb{R}^2$  und symmetrisch in den Variablen  $r$  und  $s$ , i. e.,  $k_\theta^a(r, s) = k_\theta^a(s, r)$ .

**Lemma 4.6.** *Es seien  $a > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $\vartheta := \vartheta(\lambda)$  die eindeutig bestimmte komplexe Zahl mit  $\vartheta^2 = \lambda$  und  $\arg(\vartheta) \in [0, \pi[$ .*

(a) *Die Funktionen  $\mathbb{R} \ni x \mapsto I_{-i\vartheta}(\sqrt{ae^x})$ ,  $K_{i\vartheta}(\sqrt{ae^x})$  sind linear unabhängige Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung*

$$y''(x) + (\lambda - ae^{2x})y(x) = 0. \quad (4.12)$$

(b) *Seien  $\Im(\vartheta) > 0$  und  $b \in \mathbb{R}$ . Dann liegt die Funktion  $\mathbb{R} \ni x \mapsto I_{-i\vartheta}(\sqrt{ae^x})$  in  $L^2(]-\infty, b])$  und die Abbildung  $\mathbb{R} \ni x \mapsto K_{i\vartheta}(\sqrt{ae^x})$  in  $L^2([b, \infty[)$ .*

(c) *Sei  $\lambda \notin [0, \infty[$ . Für  $f \in C_c(\mathbb{R})$  ist die durch  $r \mapsto \int_{\mathbb{R}} k_\theta^a(r, s)f(s) ds$  definierte Funktion zweimal stetig differenzierbar, und für alle  $r \in \mathbb{R}$  gilt*

$$R(\lambda; A(a))f(r) = \int_{\mathbb{R}} k_{\vartheta(\lambda)}^a(r, s)f(s) ds. \quad (4.13)$$

*Beweis.* (a) Die Aussage folgt direkt aus den elementaren Eigenschaften der Bessel-Funktionen mit imaginärem Argument (siehe z. B. [Leb], §§5.7, 5.9).

(b) Nach [Tit], S. 95, ist die Funktion  $x \mapsto I_{-i\vartheta}(e^x)$  aus  $L^2(]-\infty, 0])$  und die Abbildung  $x \mapsto K_{i\vartheta}(e^x)$  aus  $L^2([0, \infty[)$ . (Dies kann man natürlich auch an (4.8) und (4.10) ablesen.)

(c) Es seien  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ ,  $b > 0$  und  $f \in C_c(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp}(f) \subset [-b, b]$ . Definiere  $Tf$  durch  $Tf(r) := \int_{\mathbb{R}} k_{\vartheta}^a(r, s) f(s) ds$ . Dann gilt für  $r > b$

$$Tf(r) = -K_{i\vartheta}(\sqrt{a}e^r) \int_{-b}^b I_{-i\vartheta}(\sqrt{a}e^s) f(s) ds,$$

und für  $r < -b$  ist

$$Tf(r) = -I_{-i\vartheta}(\sqrt{a}e^r) \int_{-b}^b K_{i\vartheta}(\sqrt{a}e^s) f(s) ds.$$

Somit folgt aus (4.10) und (4.8)  $Tf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Man liest aus den obigen Ausführungen ebenfalls ab, daß auch die Abbildung  $r \mapsto e^{2r}Tf(r)$  in  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  liegt. Des weiteren ist  $Tf$  differenzierbar mit

$$\begin{aligned} \partial_r Tf(r) = & -z \left( \partial_z I_{-i\vartheta}(z) \int_r^{+\infty} K_{i\vartheta}(\sqrt{a}e^s) f(s) ds + \right. \\ & \left. + \partial_z K_{i\vartheta}(z) \int_{-\infty}^r I_{-i\vartheta}(\sqrt{a}e^s) f(s) ds \right) \Big|_{z=\sqrt{a}e^r}. \end{aligned}$$

Nun verifiziert man unter Berücksichtigung von (4.12) und der Gleichung (5.9.5) aus [Leb]

$$\partial_r^2 Tf(r) = (ae^{2r} - \lambda)Tf(r) + f(r).$$

Daher ist insbesondere  $\partial_r^2 Tf \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ . Somit folgt insgesamt  $Tf \in \text{dom}(A(a))$ , und es gilt  $(\lambda - A(a))Tf = f$ , und dies impliziert  $Tf = R(\lambda; A(a))f$ .  $\square$

#### 4.1.4 Der Evolutionskern $q_z(a, \cdot, \cdot)$

Um den Evolutionskern von  $A$  zu berechnen, braucht man nun prinzipiell in der Identität (4.4) nur die linke Seite aus Gleichung (4.13) durch die rechte Seite zu ersetzen.

Der Ausdruck, den man dann für den Evolutionskern  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  erhält, ist aber in dieser Form für unsere Zwecke (nämlich das Ersetzen von  $a$  durch den Operator  $L$  im Sinne des Funktionalkalküls) noch nicht recht geeignet.

Die Transformation in eine vorteilhaftere Darstellung findet in Satz 4.10 statt. Auch wenn die im Beweis aufgeführten Integraltransformationen zumindest nicht abwegig erscheinen, drängt sich doch der Eindruck auf, daß das Vorgehen nicht unbedingt auf der Hand liegt. Möchte man die Resultate dieses Kapitels auf ähnliche Summen nicht kommutierender Operatoren ausdehnen, so wird der zu Satz 4.10 analoge Schritt eine der wesentlichen Schwierigkeiten bilden.

Dieser Abschnitt ist ein wenig anders organisiert, als es der „rote Faden“ aus der Kapiteleinleitung und den vorhergehenden Absätzen nahelegt:

Die Gleichungen (4.4) und (4.13) werden erst im Beweis von Satz 4.12 zusammengefügt; die oben angesprochene Transformation der Funktion  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  wird (wie bereits erwähnt) in Satz 4.10 in die Wege geleitet und in Lemma 4.8 definieren wir  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  als das Resultat dieser Transformation, nicht aber als Evolutionskern von  $A(a)$ .

Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß es unter dem Gesichtspunkt des Notationsaufwands ökonomischer ist.

**Hilfslemma 4.7.** Für alle  $z \in \mathbb{C}^\times$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt  $|\sin(\frac{x}{z})| \leq \exp(|\frac{x\Im(z)}{z^2}|)$ .

*Beweis.* Es gilt die Gleichungskette

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{z}\right) &= \sin\left(\frac{xz^*}{|z|^2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x\Re(z)}{|z|^2}\right) \cos\left(i\frac{x\Im(z)}{|z|^2}\right) - \cos\left(\frac{x\Re(z)}{|z|^2}\right) \sin\left(i\frac{x\Im(z)}{|z|^2}\right) \\ &= \sin\left(\frac{x\Re(z)}{|z|^2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x\Im(z)}{|z|^2}\right) - i \cos\left(\frac{x\Re(z)}{|z|^2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x\Im(z)}{|z|^2}\right), \end{aligned}$$

da  $\cos(i\zeta) = \operatorname{ch}(\zeta)$  und  $\sin(i\zeta) = i \operatorname{sh}(\zeta)$  für alle  $\zeta \in \mathbb{C}$ . Das impliziert

$$\left|\sin\left(\frac{x}{z}\right)\right| \leq \operatorname{ch}\left(\frac{x\Im(z)}{|z|^2}\right) \leq \exp\left(\left|\frac{x\Im(z)}{z^2}\right|\right).$$

□

**Lemma 4.8.** Sei  $z \in \mathcal{H}_r$ . Definiert man die Funktion  $\Psi_z : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\Psi_z(\xi) := \frac{\xi^{-2}}{\sqrt{4\pi^3 z}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4z}\right) \int_0^\infty \operatorname{sh}(\vartheta) \sin\left(\frac{\pi\vartheta}{2z}\right) \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{4z} - \frac{\operatorname{ch}(\vartheta)}{\xi}\right) d\vartheta \quad (4.14)$$

und die Abbildung  $q_z : [0, \infty[ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  über

$$q_z(a, r, s) := \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\operatorname{ch}(r-s)}{\xi}\right) \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} a\right) d\xi, \quad (4.15)$$

so existiert eine Konstante  $C_z > 0$  mit  $|\Psi_z(\xi)| \leq C_z \xi^{-2}$  für alle  $\xi \in ]0, \infty[$  und

$$|q_z(a, r, s)| \leq C_z \operatorname{ch}(r-s)^{-1} \quad (4.16)$$

für alle  $a \in [0, \infty[$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$ . Ferner ist die Funktion  $q_z$  stetig auf  $[0, \infty[ \times \mathbb{R}^2$ .

*Beweis.* Sei  $z = \rho + i\sigma$  mit  $\rho > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Mit Hilfslemma 4.7 erhalten wir

$$\xi^2 |\Psi_z(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi^3|z|}} \exp\left(\frac{\rho\pi^2}{4|z|^2}\right) \int_0^\infty e^\vartheta \exp\left(\frac{\pi\vartheta|\sigma|}{2|z|^2}\right) \exp\left(-\frac{\rho\vartheta^2}{4|z|^2}\right) d\vartheta =: C_z.$$

Da  $\rho$  strikt positiv ist, ist das Integral in der letzten Abschätzung endlich. Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} |q_z(a, r, s)| &\leq C_z \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{\operatorname{ch}(r-s)}{\xi}\right) d\xi \\ &= C_z \int_0^\infty \exp\left(-\operatorname{ch}(r-s)u\right) du = C_z \operatorname{ch}(r-s)^{-1}. \end{aligned}$$

Ferner wird der Betrag des Integranden in (4.15) für alle  $a$ ,  $r$  und  $s$  durch die  $L^1$ -Funktion  $\xi \mapsto C_z \xi^{-2} \exp(-1/\xi)$  majorisiert. Die Stetigkeit von  $q_z$  folgt jetzt aus Standardsätzen über parameterabhängige Integrale, siehe z. B. [Lan], Lemma VIII.2.1.  $\square$

**Lemma 4.9.** *Es existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $a > 0$ ,  $r, s \in \mathbb{R}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Im(z) \geq 0$  gilt:*

$$|k_z^a(r, s)| \leq C a^{-1/4} e^{-(r+s)/4}. \quad (4.17)$$

*Beweis.* Da beide Seiten der Gleichung (4.17) symmetrisch in der  $r$ - und  $s$ -Variablen sind, können wir uns auf den Fall  $r \geq s$  beschränken. Es gilt mit (4.9) und [Leb], S.140:

$$\begin{aligned} &K_{iz}(\sqrt{a}e^r)I_{-iz}(\sqrt{a}e^s) \\ &= \frac{1}{2} \int_{r-s}^{+\infty} J_0(\sqrt{2ae^{r+s}} \sqrt{\operatorname{ch}(\sigma) - \operatorname{ch}(r-s)}) e^{iz\sigma} d\sigma; \end{aligned} \quad (4.18)$$

dabei ist  $J_0$  die Bessel-Funktion erster Art der Ordnung 0.  $J_0$  ist eine auf  $[0, \infty[$  beschränkte Funktion und nach [Leb], §5.16, findet man ein  $C > 0$  mit  $|J_0(x)| \leq C/\sqrt{x}$  für  $x \in [0, \infty[$ . Die nun folgenden Abschätzungen werden nebenbei beweisen, daß der Integrand auf der rechten Seite von (4.18) in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  liegt:

$$\begin{aligned} &|K_{iz}(\sqrt{a}e^r)I_{-iz}(\sqrt{a}e^s)| \\ &\leq \frac{C}{2} (2a)^{-1/4} e^{-(r+s)/4} \int_{r-s}^\infty (\operatorname{ch}(\sigma) - \operatorname{ch}(r-s))^{-1/4} d\sigma. \end{aligned}$$

Mit der Transformation  $\tau := \operatorname{ch}(\sigma)$ ,  $d\sigma = (\tau^2 - 1)^{-1/2} d\tau$ , erhält man dann

$$\begin{aligned} & \int_{r-s}^{\infty} (\operatorname{ch}(\sigma) - \operatorname{ch}(r-s))^{-1/4} d\sigma = \int_{\operatorname{ch}(r-s)}^{\infty} (\tau - \operatorname{ch}(r-s))^{-1/4} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2 - 1}} \\ &= \int_0^{\infty} \tau^{-1/4} \frac{d\tau}{\sqrt{(\tau + \operatorname{ch}(r-s))^2 - 1}} \leq \int_0^{\infty} \tau^{-3/4} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau + 2}} < \infty. \end{aligned}$$

□

**Satz 4.10.** Für alle  $a > 0$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$  und alle  $r, s \in \mathbb{R}$  ergibt sich

$$q_z(a, r, s) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \theta e^{-z\theta^2} k_{\theta}^a(r, s) d\theta; \quad (4.19)$$

dabei ist  $k_{\theta}^a$  wie in (4.11).

**Bemerkung 4.11.** Nach Lemma 4.9 liegt für feste  $a > 0$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  die Abbildung  $\theta \mapsto \theta e^{-z\theta^2} k_{\theta}^a(r, s)$  in  $L^1(\mathbb{R})$ ; das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (4.19) ist somit existent.

Die Beziehung (4.19) hätte man im Fall  $a > 0$  auch als Definitionsgleichung von  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  verwenden können. Dies hätte die Tatsache unterstrichen, daß wir, wie man bei genauer Betrachtung des nachfolgenden Beweises sieht, von der rechten Seite der Gleichung (4.19) ausgehend, die Formel (4.15) direkt ausrechnen.

Das hier gewählte Vorgehen hat hingegen den Vorteil, in Hinblick auf die sonst notwendige Fallunterscheidung  $a = 0$ ,  $a > 0$ , mit weniger Notationsaufwand verbunden und somit ein wenig übersichtlicher zu sein.

*Beweis des Satzes 4.10.* Es sei  $a > 0$  und  $z \in \mathcal{H}_r$ . Wir setzen

$$\tilde{q}_z(a, r, s) := -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \theta e^{-z\theta^2} k_{\theta}^a(r, s) d\theta.$$

Aus den Gleichungen (4.6) und (4.9) erhält man für  $r \geq s$

$$\begin{aligned} \tilde{q}_z(a, r, s) &= \frac{1}{\pi i} \int_0^{+\infty} \theta e^{-z\theta^2} K_{i\theta}(\sqrt{a}e^r) (I_{-i\theta}(\sqrt{a}e^s) - I_{i\theta}(\sqrt{a}e^s)) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) e^{-z\theta^2} K_{i\theta}(\sqrt{a}e^r) K_{i\theta}(\sqrt{a}e^s) d\theta. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Das Resultat (4.20) gilt offenbar auch im Fall  $r < s$ . Mit der Identität (4.9) und der Integraldarstellung (5.10.25) aus [Leb] für  $K_{i\theta}$  folgt weiter für  $r, s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tilde{q}_z(a, r, s) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) e^{-z\theta^2 + i\theta(r-s)} \left( \int_0^\infty \exp\left(-v - \frac{ae^{2r}}{4v}\right) v^{-i\theta-1} dv \right) \\ &\quad \cdot \left( \int_0^\infty \exp\left(-w - \frac{ae^{2s}}{4w}\right) w^{i\theta-1} dw \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \exp(-z\theta^2 + i\theta(r-s) + i\theta \ln(w/v)) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{a}{4}\left(\frac{e^{2r}}{v} + \frac{e^{2s}}{w}\right) - w - v\right) \frac{dv}{v} \frac{dw}{w} d\theta.\end{aligned}$$

Man nutzt die Gleichheit  $\tilde{q}_z(a, r, s) = \frac{1}{2}(\tilde{q}_z(a, r, s) + \tilde{q}_z(a, s, r))$  und erhält, daß man den Term  $\exp(i\theta(r-s + \ln(w/v)))$  im Integranden des letzten Dreifachintegrals durch

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\exp(i\theta(r-s + \ln(w/v))) + \exp(i\theta(s-r + \ln(v/w)))) \\ &= \cos(\theta(r-s + \ln(w/v)))\end{aligned}$$

ersetzen kann. Mittels der Substitutionen  $\nu := 2ve^{-r+s}$ ,  $\mu := 2we^{r-s}$  gilt dann

$$\begin{aligned}\tilde{q}_z(a, r, s) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \cos(\theta(s-r + \ln(\mu/\nu))) e^{-z\theta^2} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{a}{2}e^{r+s}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu}\right) - \frac{1}{2}(\nu e^{r-s} + \mu e^{s-r})\right) \frac{d\nu}{\nu} \frac{d\mu}{\mu} d\theta.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun den Diffeomorphismus

$$\Phi : \{(\xi, \eta) : \xi > 0, -\xi < \eta < \xi\} \rightarrow ]0, \infty[^2, \quad (\xi, \eta) \mapsto 2\left(\frac{1}{\xi + \eta}, \frac{1}{\xi - \eta}\right) =: (\mu, \nu).$$

Es ist

$$\det D\Phi(\xi, \eta) = -\frac{8}{(\xi + \eta)^2(\xi - \eta)^2} = -\frac{\mu^2\nu^2}{2},$$

also gilt

$$\frac{d\mu}{\mu} \frac{d\nu}{\nu} = 2 \frac{d\xi}{\xi^2 - \eta^2} \frac{d\eta}{\eta^2}. \quad \text{Zudem ist } \frac{1}{\nu} + \frac{1}{\mu} = \xi.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{q}_z(a, r, s) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\xi}^\xi \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \cos\left(\theta\left(s - r + \ln\left(\frac{\xi - \eta}{\xi + \eta}\right)\right)\right) e^{-z\theta^2} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{ae^{r+s}\xi}{2} - \frac{e^{r-s}}{\xi - \eta} - \frac{e^{s-r}}{\xi + \eta}\right) \frac{d\eta d\xi}{\xi^2 - \eta^2} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \cos\left(\theta\left(s - r + \ln\left(\frac{1-w}{1+w}\right)\right)\right) e^{-z\theta^2} \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{ae^{r+s}\xi}{2} - \frac{1}{\xi}\left(\frac{e^{r-s}}{1-w} + \frac{e^{s-r}}{1+w}\right)\right) \frac{dw d\xi}{\xi(1-w^2)} d\theta,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Variablentransformation  $w = \eta/\xi$ ,  $d\eta = \xi dw$  durchgeführt wurde. Mit der Substitution  $u := \operatorname{arth}(w)$ ,  $du = dw/(1-w^2)$ , ist

$$\ln\left(\frac{1-w}{1+w}\right) = -2 \operatorname{arth}(w) = -2u$$

(s. [Bro], 2.5.2.3) und zudem  $1-w^2 = 1 - \operatorname{th}(u)^2 = \operatorname{ch}(u)^{-2}$ . Ferner erhält man

$$\begin{aligned}\frac{e^{r-s}}{1-w} + \frac{e^{s-r}}{1+w} &= \frac{2}{1 - \operatorname{th}(u)^2} (\operatorname{ch}(r-s) + \operatorname{th}(u) \operatorname{sh}(r-s)) \\ &= 2 \operatorname{ch}(u) (\operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}(r-s) + \operatorname{sh}(u) \operatorname{sh}(r-s)) = 2 \operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}(r-s+u),\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt das Additionstheorem für den hyperbolischen Cosinus genutzt wurde. Dies führt schließlich zu

$$\begin{aligned}\tilde{q}_z(a, r, s) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \cos(\theta(s-r-2u)) e^{-z\theta^2} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{ae^{r+s}\xi}{2} - \frac{2}{\xi} \operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}(r-s+u)\right) du d\xi d\theta.\end{aligned}$$

Setzt man  $\vartheta := 2u + r - s$ , so ist die Gleichheit

$$\begin{aligned}2 \operatorname{ch}(u) \operatorname{ch}(r-s+u) &= 2 \operatorname{ch}((\vartheta - r + s)/2) \operatorname{ch}((\vartheta + r - s)/2) \\ &= \operatorname{ch}(r-s) + \operatorname{ch}(\vartheta)\end{aligned}$$

gegeben (s. z. B. [Bro], 2.5.2.3). Das impliziert die Gleichung

$$\begin{aligned}\tilde{q}_z(a, r, s) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \cos(\theta\vartheta) e^{-z\theta^2} d\theta \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{ae^{r+s}\xi}{2} - \frac{1}{\xi} (\operatorname{ch}(r-s) + \operatorname{ch}(\vartheta))\right) d\vartheta d\xi.\end{aligned}$$

Nun sieht man für  $z \in ]0, \infty[$  ein (z. B. mit partieller Integration und den Formeln unter 4.133 in [GRJ]), daß

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \theta \operatorname{sh}(\theta\pi) \cos(\theta\vartheta) e^{-z\theta^2} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}} \exp\left(\frac{\pi^2 - \vartheta^2}{4z}\right) \left(\frac{\pi}{2z} \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{2z}\right) - \frac{\vartheta}{2z} \sin\left(\frac{\pi\vartheta}{2z}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{z}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4z}\right) \partial_\vartheta \left(\exp\left(-\frac{\vartheta^2}{4z}\right) \sin\left(\frac{\pi\vartheta}{2z}\right)\right) \end{aligned}$$

gilt. Da aber alle Terme der obigen Gleichungskette holomorph in  $z$  sind, gilt die Gleichheit für alle  $z \in \mathcal{H}_r$ . Nach partieller Integration bzgl. der  $\vartheta$ -Variablen erhält man dann letztlich die Formel (4.19).  $\square$

**Satz 4.12.** Für  $a \geq 0$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$  und  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ist

$$e^{-zA(a)} f(r) = \int_{\mathbb{R}} q_z(a, r, s) f(s) ds \quad \text{fast überall,} \quad (4.21)$$

i. e.,  $q_z(a, \cdot, \cdot)$  ist der zum Operator  $e^{-zA(a)} \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$  gehörige Integralkern auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Der Fall  $a > 0$ : Es sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Nach Lemma 4.4 und Lemma 4.6(c) gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und fast alle  $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{-zA} f(r) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} e^{-z\lambda} \int_{\mathbb{R}} k_{\vartheta(\lambda)}^a(r, s) f(s) ds d\lambda \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\theta + i2^{-n}) \exp(-z(\theta + i2^{-n})^2) k_{\theta+i2^{-n}}^a(r, s) f(s) ds d\theta. \end{aligned}$$

Für festes  $r \in \mathbb{R}$  und  $n \rightarrow \infty$  konvergiert der Integrand des letzten Terms punktweise gegen die Funktion

$$(\theta, s) \mapsto \theta e^{-z\theta^2} k_\theta^a(r, s) f(s).$$

Zudem erhält man mit der Abschätzung (4.17) für alle  $n \in \mathbb{N}^\times$

$$\begin{aligned} & |(\theta + i2^{-n}) \exp(-z(\theta + i2^{-n})^2) k_{\theta+i2^{-n}}^a(r, s) f(s)| \\ & \leq \frac{C}{a^{1/4}} (1 + |\theta|) \exp(-\Re(z)(\theta^2 - 1) + 2|\Im(z)|\theta) e^{-(r+s)/4} |f(s)|, \end{aligned}$$

d. h., aus dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$e^{-zA} f(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \theta e^{-z\theta^2} k_\theta^a(r, s) f(s) ds d\theta.$$

Man darf nach dem Satz von Fubini die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhält aus Satz 4.10 für das vorgegebene  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  die Gleichung (4.21). Nach Abschätzung (4.16) gilt  $|q_z(a, r, s)| \leq C_z \operatorname{ch}(r - s)^{-1}$ . Somit steht aber auf der rechten Seite von Gleichung (4.21) ein beschränkter Integraloperator auf ganz  $L^2(\mathbb{R})$ , der dann natürlich auf  $\overline{\mathcal{D}(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$  mit dem beschränkten Operator  $e^{-zA}$  übereinstimmen muß.

*Der Fall  $a = 0$ :* Es seien  $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Aus dem bereits bewiesenen Fall und (4.16) folgt sofort mit dem Satz über majorisierte Konvergenz für  $a' > 0$

$$\begin{aligned} \langle e^{-zA(a')} \varphi, \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} q_z(a', r, s) \varphi(s) \psi(r)^* ds dr \\ &\longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} q_z(0, r, s) \varphi(s) \psi(r)^* ds dr \quad \text{für } a' \searrow 0. \end{aligned}$$

Es reicht nun aus, die Konvergenz  $e^{-zA(a')} \varphi \rightarrow e^{-zA(0)} \varphi$  für  $a' \searrow 0$  zu zeigen. Das läßt sich aber allgemein mit funktionalanalytischen Methoden (unabhängig von unseren explizit durchgeführten Rechnungen) zeigen und wird in Lemma 4.13 diskutiert.  $\square$

### 4.1.5 Das Spektralmaß von $A$

Die hier aufgeführten Aussagen über das Spektralmaß sind für die Berechnung der Spektralschar des Operators  $T$  von Belang, die im nächsten Abschnitt vorgenommen wird.

**Lemma 4.13.** (i) *Es sei  $a \in [0, \infty[$ . Dann besitzt der Operator  $A$  keine Eigenwerte, und für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt folglich  $F_a(\{t\}) = 0$ .*

(ii) *Es seien  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathcal{H}_r \cup i\mathbb{R}$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Dann sind die Abbildungen  $a \mapsto R(\lambda; A(a))$ ,  $a \mapsto e^{-zA(a)}$  und  $a \mapsto F_a([-\infty, t])$  stark stetig auf  $[0, \infty[$ .*

(iii) *Es sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ . Für ein beliebiges  $S \in \Sigma_{\mathbb{R}}$  ist die Abbildung*

$$[0, +\infty[ \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad a \mapsto F_a(S)\varphi,$$

*Borel-meßbar.*

*Beweis.* (i) Für alle  $t \in [0, \infty[$  ist der Operator  $t - A$  hypoelliptisch (s. [Hör67]). Das bedeutet, daß jede Distributionenlösung der Gleichung  $(t - A)\varphi = 0$  durch eine  $C^\infty$ -Funktion gegeben ist.

Wir betrachten zunächst den Fall  $a = 0$ : Dann ist der (klassische) Lösungsraum der gewöhnlichen Differentialgleichung der lineare Aufspann der Funktionen  $s \mapsto e^{is\sqrt{t}}$ ,  $e^{-is\sqrt{t}}$ , falls  $t \neq 0$ , und der Aufspann der Funktionen  $s \mapsto 1$ ,  $s$ ,

falls  $t = 0$ . Da all diese Funktionen nicht in  $L^2(\mathbb{R})$  liegen, besitzt  $A(0)$  keine Eigenwerte (denn jede  $L^2$ -Lösung der Gleichung  $(t - A)\varphi = 0$  besäße einen  $C^\infty$ -Repräsentanten, der eine klassische Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung wäre und somit im Lösungsraum liegen müßte).

Ist  $a > 0$ , so sind die Funktionen  $s \mapsto K_{i\sqrt{t}}(\sqrt{ae^s})$ ,  $I_{-i\sqrt{t}}(\sqrt{ae^s})$  nicht auf ganz  $\mathbb{R}$  quadratintegrierbar. Nach Lemma 4.6(a) besitzt also auch in diesem Fall  $A(a)$  keine Eigenfunktionen in  $L^2(\mathbb{R})$ .

Daraus folgt nun, daß für alle  $a$  das Spektralmaß  $F_a$  auf einpunktigen Mengen verschwindet.

(ii) Seien  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $a$  aus  $[0, \infty[$  mit  $a_n \rightarrow a$  für  $n \rightarrow \infty$ . Da  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  nach Lemma 4.2 ein Core von  $A(a)$  ist und für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  offenbar  $A(a_n)\varphi \rightarrow A(a)\varphi$  in  $L^2(\mathbb{R})$  gilt, folgt mit [Wei], Thm. 9.16(i) und Thm. 9.15, daß für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  und jedes  $f \in L^2(\mathbb{R})$  schon  $R(\lambda; A(a_n))f \rightarrow R(\lambda; A(a))f$  gilt. Aus [Wei], Thm. 9.17, ergibt sich dann  $e^{-zA(a_n)}f \rightarrow e^{-zA(a)}f$  für alle  $z \in \mathcal{H}_r \cup i\mathbb{R}$ . Sei  $t \in \mathbb{R}$ . Aus Teil (i) folgt  $F_a(\{t\}) = 0$ , also  $F_{a_n}(] - \infty, t])f \rightarrow F_a(] - \infty, t])f$  nach [Wei], Thm. 9.19.

(iii) Wir definieren die Menge

$$\mathcal{M} := \{S \in \Sigma_{\mathbb{R}} : \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}) : [0, \infty[ \ni a \mapsto \langle F_a(S)f, g \rangle \text{ ist meßbar} \}.$$

Offenbar sind  $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$ . Ist  $S \in \mathcal{M}$ , so folgt  $\langle F_a(\mathbb{R} \setminus S)f, g \rangle = \langle f, g \rangle - \langle F_a(S)f, g \rangle$ , i. e.,  $\mathbb{R} \setminus S \in \mathcal{M}$ . Es sei  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus  $\mathcal{M}$  und  $S := \cup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ . Aus der Definition „Spektralmaß“ folgt

$$\langle F_a(S)f, g \rangle = \left\langle \sum_{n \in \mathbb{N}} F_a(S_n)f, g \right\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \langle F_a(S_n)f, g \rangle.$$

Da der punktweise Limes einer Folge von meßbaren Funktionen wieder eine meßbare Funktion ist, liegt  $S$  in  $\mathcal{M}$ .

Somit liegt mit  $\mathcal{M}$  ein Dynkin-System vor. Ferner ist  $\mathcal{M}$  schnittstabil: Seien  $S$  und  $S'$  in  $\mathcal{M}$  und  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(\mathbb{R})$  (z. B. die Hermite-Funktionen). Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle F_a(S \cap S')f, g \rangle &= \langle F_a(S)F_a(S')f, g \rangle = \langle F_a(S')f, F_a(S)g \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle F_a(S')f, e_n \rangle \langle e_n, F_a(S)g \rangle, \end{aligned}$$

also  $S \cap S' \in \mathcal{M}$ . Somit ist  $\mathcal{M}$  eine  $\sigma$ -Algebra, die nach Aussage (ii) alle Intervalle der Form  $] - \infty, t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , enthält. Da diese aber die  $\sigma$ -Algebra  $\Sigma_{\mathbb{R}}$  der Borel-Mengen auf  $\mathbb{R}$  erzeugen, folgt  $\mathcal{M} = \Sigma_{\mathbb{R}}$ .

Sei nun  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  und  $S \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ . Dann wissen wir um die Meßbarkeit der Abbildung  $a \mapsto \langle F_a(S)\varphi, e_n \rangle e_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Aus  $F_a(S)\varphi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle F_a(S)\varphi, e_n \rangle e_n$  folgt die Meßbarkeit von  $a \mapsto F_a(S)\varphi$  als punktwiser Limes einer Folge meßbarer Funktionen.  $\square$

## 4.2 Der Operator $-\partial_r^2 + e^{2r}L$ in $L^2(\mathbb{R} \times X)$

### 4.2.1 Spektralschar und Selbstadjungiertheit

In diesem Abschnitt wird der noch ausstehende Beweis für die Selbstadjungiertheit des Operators  $T$  nachgeliefert. Dieser Beweis ist mit der Berechnung der Spektralschar von  $T$  verknüpft, die später die Beziehung zwischen den Operatorhalbgruppen  $(e^{-zA})_{z \in \mathcal{H}_r}$  und  $(e^{-zT})_{z \in \mathcal{H}_r}$  herstellen wird.

**Bemerkung 4.14.** Es bezeichne  $J_{\mathbb{R}}$  die Menge der endlichen Vereinigungen von Intervallen (beschränkten und unbeschränkten) aus  $\mathbb{R}$ . Jedes Element aus  $J_{\mathbb{R}}$  läßt sich dann offenbar als endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen darstellen. Nach Lemma 4.13 ist die Abbildung  $[0, \infty[ \ni a \mapsto F_a(S)$ ,  $S \in \Sigma_{\mathbb{R}}$ , stark stetig, falls  $S$  von der Form  $] - \infty, t]$  oder  $] - \infty, t[$  für ein  $t \in \mathbb{R}$  ist oder  $S \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$  gilt.

Sind nun  $S, S' \in \Sigma_{\mathbb{R}}$  disjunkt, so gilt  $F_a(S \cup S') = F_a(S) + F_a(S')$ . Ist  $S \subset S'$ , so erhält man  $F_a(S' \setminus S) = F_a(S') - F_a(S)$ . Das zeigt, daß  $F_a(S)$  für alle  $S \in J_{\mathbb{R}}$  eine stark stetige Funktion in Abhängigkeit vom Parameter  $a$  ist.

**Lemma 4.15.** *Für alle  $S \in J_{\mathbb{R}}$  existiert eine eindeutig bestimmte Orthogonalprojektion  $M(S)$  auf  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  mit*

$$\langle M(S)\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \xi \rangle_{L^2(\mathbb{R} \times X)} = \int_0^\infty \langle F_a(S)\varphi, \eta \rangle_{L^2(\mathbb{R})} d\langle E(a)\psi, \xi \rangle_{L^2(X)} \quad (4.22)$$

für alle  $\varphi, \eta \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\psi, \xi \in L^2(X)$ .

Die Familie  $M_t := M(] - \infty, t])$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist dann eine Spektralschar, und der Definitionsbereich des eindeutig bestimmten zu  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  gehörigen selbstadjungierten Operators umfaßt  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$ . Für alle  $\varphi \otimes \psi \in \mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  und alle  $\eta \otimes \xi \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  gilt dann

$$\langle T\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \xi \rangle_{L^2(\mathbb{R} \times X)} = \int_0^\infty \lambda d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \xi \rangle_{L^2(\mathbb{R} \times X)}. \quad (4.23)$$

Wie man bezüglich einer Spektralschar integriert, wird in [Wei], §7.2 beschrieben. Eine Version des Spektralsatzes, die die ein-eindeutige Beziehung zwischen selbstadjungierten Operatoren und Spektralscharen aufzeigt, findet sich in [Wei] unter Theorem 7.17 und 7.14.

*Beweis.* (i) Sei  $S \in J_{\mathbb{R}}$ . Es sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge von beschränkten Borel-Mengen mit  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = [0, \infty[$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  seien  $I_n$  eine endliche Indexmenge und  $A_{n,k}$ ,  $k \in I_n$ , eine Partition von  $A_n$ , bestehend aus Borel-Mengen mit  $\text{diam}(A_{n,k}) < \frac{1}{n}$ . Für  $k \in I_n$  sei ferner  $a_{n,k} \in A_{n,k}$ . Dann sind die linearen Operatoren  $F_{a_{n,k}}(S) \otimes E(A_{n,k})$  (zu Tensorprodukten von Operatoren siehe Anhang, Unterabschnitt A.2.3) offenbar Orthogonalprojektionen auf  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  mit  $\text{ran}(F_{a_{n,k}}(S) \otimes E(A_{n,k})) = \text{ran}(F_{a_{n,k}}(S)) \otimes \text{ran}(E(A_{n,k}))$ . Für Indizes  $i \neq j$  sind  $\text{ran}(E(A_{n,i}))$  und  $\text{ran}(E(A_{n,j}))$  zueinander senkrechte Unterräume in  $L^2(X)$ , deshalb stehen auch die Unterräume  $\text{ran}(F_{a_{n,i}}(S) \otimes E(A_{n,i}))$  und  $\text{ran}(F_{a_{n,j}}(S) \otimes E(A_{n,j}))$  senkrecht aufeinander in  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$ . Somit ist  $\sum_{k \in I_n} F_{a_{n,k}}(S) \otimes E(A_{n,k})$  eine Orthogonalprojektion auf  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$ , die sich zu einer eindeutig bestimmten Orthogonalprojektion  $\pi_n = \pi_n(S)$  auf  $L^2(\mathbb{R} \times X) = L^2(\mathbb{R}) \hat{\otimes} L^2(X)$  (vgl. Satz A.3) fortsetzen läßt.

Für  $\sigma = \sum_{I(\sigma)} \varphi_i \otimes \psi_i$  und  $\tau = \sum_{J(\tau)} \eta_j \otimes \xi_j$  aus  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  definieren wir die Form

$$\mu(\sigma, \tau) := \sum_{I(\sigma)} \sum_{J(\tau)} \int_0^\infty \langle F_a(S) \varphi_i, \eta_j \rangle d \langle E(a) \psi_i, \xi_j \rangle.$$

Man überzeugt sich schnell davon, daß  $\mu$  nicht von der speziellen Darstellung der  $\sigma, \tau$  durch Elementartensoren abhängt;  $\mu$  ist daher eine sesquilineare Abbildung auf  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} & |\mu(\sigma, \tau) - \langle \pi_n \sigma, \tau \rangle| \\ & \leq \sum_{I(\sigma)} \sum_{J(\tau)} \left| \int_0^\infty \left( \langle F_a(S) \varphi_i, \eta_j \rangle - \sum_{k \in I_n} \langle F_{a_{n,k}}(S) \varphi_i, \eta_j \rangle \chi_{A_{n,k}}(a) \right) d \langle E(a) \psi_i, \xi_j \rangle \right|. \end{aligned}$$

Für alle  $i, j$  strebt die Funktionenfolge  $\sum_{k \in I_n} \langle F_{a_{n,k}}(S) \varphi_i, \eta_j \rangle \chi_{A_{n,k}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , punktweise gegen  $a \mapsto \langle F_a(S) \varphi_i, \eta_j \rangle$  (vgl. Bemerkung 4.14). Deshalb folgt aus dem Satz über majorisierte Konvergenz, daß die rechte Seite der letzten Ungleichung im Übergang  $n \rightarrow \infty$  verschwindet (vgl. Anhang, Abschnitt A.4).

Da die Operatornormen aller  $\pi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , durch Eins beschränkt sind, liegt mit  $(\langle \pi_n f, g \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$  für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R} \times X)$  eine Cauchy-Folge vor. Das impliziert insbesondere die Konvergenz der Folge der Normen  $\|\pi_n f\| = \sqrt{\langle \pi_n f, f \rangle}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Da aus schwacher Konvergenz und Konvergenz der Normen schon Konvergenz im Hilbert-Raum selbst folgt, erhält man also für jedes  $f \in L^2(\mathbb{R} \times X)$  die Konvergenz der Folge  $(\pi_n f)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ein Element  $M(S)f$ . Offenbar ist die dadurch erklärte Abbildung  $M(S)$  eine Orthogonalprojektion auf  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  und es gilt

$$\langle M(S)\sigma, \tau \rangle = \mu(\sigma, \tau) \quad \text{für alle } \sigma, \tau \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X).$$

(ii) Die Familie  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ist eine Spektralschar: Ist  $s \leq t$ , so folgt für  $\sigma \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  offenbar

$$\langle M_t \sigma, \sigma \rangle - \langle M_s \sigma, \sigma \rangle = \langle M(\cdot|_s, t) \sigma, \sigma \rangle = \|M(\cdot|_s, t) \sigma\|^2 \geq 0.$$

Daraus ergibt sich  $M_s \leq M_t$ . Die Monotoniebedingung einer Spektralschar wird also von  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  erfüllt.

Seien  $\varphi, \eta \in L^2(\mathbb{R})$  und  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Für alle  $a$  gilt dann

$$\langle F_a(\cdot|_{-\infty}, t] \varphi, \eta \rangle \rightarrow \langle F_a(\cdot|_{-\infty}, t_0] \varphi, \eta \rangle \quad \text{für } t \searrow t_0$$

(denn  $F_a(\cdot|_{-\infty}, t]$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist eine Spektralschar). Somit folgt für alle  $\sigma, \tau \in L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  aus dem Satz über majorisierte Konvergenz  $\langle M_t \sigma, \tau \rangle \rightarrow \langle M_{t_0} \sigma, \tau \rangle$  für  $t \searrow t_0$ . Aus Dichtheitsgründen und dem Umstand, daß  $\|M_t\|_{op}$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  durch Eins beschränkt ist, hat man daher für beliebiges  $f \in L^2(\mathbb{R} \times X)$  schwache Konvergenz von  $M_t f$  gegen  $M_{t_0} f$  für  $t \searrow t_0$  und somit insbesondere Konvergenz der Normen:

$$\|M_t f\|^2 = \langle M_t f, f \rangle \rightarrow \langle M_{t_0} f, f \rangle = \|M_{t_0} f\|^2.$$

Das impliziert  $\lim_{t \searrow t_0} M_t f = M_{t_0} f$ .

Mit einer ähnlichen Argumentation verifiziert man auch  $M_t f \rightarrow f$ , falls  $t \nearrow +\infty$ . Daß  $M_t f \rightarrow 0$  für  $t \searrow -\infty$  gilt, ist trivial, da offenbar  $M_t$  für  $t < 0$  der Nulloperator ist.

Somit ist  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  eine Spektralschar.

(iii) Zur Formel (4.23): Es seien  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \text{dom}(L)$ . Man erhält dann

$$\begin{aligned} \langle T\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle &= \langle -\varphi'' \otimes \psi + e^{2r} \varphi \otimes L\psi, \varphi \otimes \psi \rangle \\ &= \langle -\varphi'', \varphi \rangle \langle \psi, \psi \rangle + \langle e^{2r} \varphi, \varphi \rangle \langle L\psi, \psi \rangle \\ &= \int_0^\infty \langle -\varphi'', \varphi \rangle d\langle E(a)\psi, \psi \rangle + \int_0^\infty a \langle e^{2r} \varphi, \varphi \rangle d\langle E(a)\psi, \psi \rangle \\ &= \int_0^\infty \langle A(a)\varphi, \varphi \rangle d\langle E(a)\psi, \psi \rangle \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty \lambda d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Es soll nun gezeigt werden, daß

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty \lambda d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle = \int_0^\infty \lambda d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle \quad (4.24)$$

gilt. Wir betrachten dazu die monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit

$$\tau_n(\lambda) = \begin{cases} j2^{-n} & \text{für } j = 0, \dots, 4^n - 1 \text{ und } j2^{-n} \leq \lambda < (j+1)2^{-n}, \\ 0 & \text{für } \lambda \notin [0, 2^n[. \end{cases}$$

Punktweise gilt auf  $[0, +\infty[$  dann  $\tau_n(\lambda) \nearrow \lambda$  für  $n \rightarrow \infty$  und offenbar ferner

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty \tau_n(\lambda) d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle = \int_0^\infty \tau_n(\lambda) d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle.$$

Nun wird die linke Seite dieser Gleichung für alle  $n \in \mathbb{N}$  durch die linke Seite von (4.24) majorisiert und strebt somit nach dem Satz über monotone Konvergenz für  $n \rightarrow \infty$  gegen diese. Daher ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  auch die rechte Seite der letzten Gleichung durch die linke Seite von (4.24) beschränkt, und es folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \tau_n(\lambda) d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle = \int_0^\infty \lambda d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle.$$

Das verifiziert die Identität (4.24). Die obige Argumentation hat insbesondere gezeigt, daß  $\int_0^\infty \lambda d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle < \infty$  gilt. Durch ein ähnliches Vorgehen läßt sich offenbar auch  $\int_0^\infty \lambda^2 d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle < \infty$  für alle  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $\psi \in \text{dom}(L)$  beweisen. Das bedeutet aber gerade, daß  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  im Definitionsbereich des eindeutig bestimmten zu  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  gehörigen selbstadjungierten Operators liegt (vgl. [Wei], Thm. 7.14, 7.17).

Die Gleichung (4.23) erhält man nun für alle  $\varphi, \eta \in \mathcal{A}$ ,  $\psi, \xi \in \text{dom}(L)$  mittels Polarisierung: Man polarisiere bei festgehaltenem  $\psi \in \text{dom}(L)$  zunächst bzgl. der  $\mathcal{A}$ -Variablen, und dann nutze man die Polarisationsformel bei festgehaltenen  $\varphi, \eta \in \mathcal{A}$  auf  $\text{dom}(L)$ . Aufgrund der Dichtheit von  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  in  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  hat dies die Gleichung (4.23) in voller Allgemeinheit zur Folge.  $\square$

**Satz 4.16.** *Ist  $\mathcal{C}$  ein Core des Operators  $A(1)$  und  $\mathcal{L}$  ein Core von  $L$ , so ist  $T|_{\mathcal{C} \otimes \mathcal{L}}$  wesentlich selbstadjungiert in  $L^2(\mathbb{R} \times X)$ . Insbesondere liegt mit  $T$  ein positiver selbstadjungierter Operator vor und  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ist die eindeutig bestimmte zu  $T$  gehörige Spektralschar.*

*Das Punktspektrum von  $T$  ist leer, i. e.,  $T$  besitzt keine Eigenwerte.*

*Beweis.* Es sei  $\tilde{T}$  der zur Spektralschar  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  gehörige eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operator, i. e.,

$$\text{dom } \tilde{T} = \{f \in L^2(\mathbb{R} \times X) : \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle M(\lambda)f, f \rangle < \infty\}$$

und

$$\langle \tilde{T}f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle M(\lambda)f, g \rangle \quad \text{für alle } f \in \text{dom}(\tilde{T}), g \in L^2(\mathbb{R} \times X).$$

Da  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  dicht in  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  liegt (s. Satz A.3), ist  $\tilde{T}$  nach Lemma 4.15 eine selbstadjungierte Erweiterung von  $T|_{\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)}$ ; also gilt  $T \subset \tilde{T}$ .

Sei  $S \in \Sigma_{\mathbb{R}}$  ein beschränktes Intervall. Wir zeigen nun, daß die Menge  $M(S)(\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L))$  in  $\text{dom}(T)$  enthalten ist; mit Satz A.22 folgt dann daraus  $T = \tilde{T}$ .

Für  $N \in \mathbb{N}^{\times}$  sei  $A_N := [\frac{1}{N}, N]$ . Die Intervalle  $A_{N,1}, \dots, A_{N,n(N)}$  seien dann eine solche Partition von  $A_N$ , daß für jedes  $j \in \{1, \dots, n(N)\}$  das Maß von  $A_{N,j}$  kleiner als  $\frac{1}{N}$  ist und für alle  $a, b \in A_{N,j}$  die Ungleichung  $|1 - \frac{a}{b}| < \frac{1}{N}$  gilt.

Setze  $a_{N,j} := \inf A_{N,j}$  für jedes  $j$ ; o. B. d. A. können wir  $a_{N,j} \in A_{N,j}$  annehmen. Da wir 0 als Eigenwert des Operators  $L$  nicht ausgeschlossen haben, ist es von Nutzen, für  $j = 0$  noch  $A_{N,0} := \{0\}$  und  $a_{N,0} := 0$  zu setzen.

Die eindeutig bestimmte Orthogonalprojektion, die  $\sum_{j=0}^{n(N)} F_{a_{N,j}}(S) \otimes E(A_{N,j})$  auf  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  fortsetzt, sei mit  $\pi_N$  bezeichnet.

*Behauptung (i):*  $\pi_N(L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)) \subset \text{dom}(T)$ .

Seien  $\eta \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\xi \in L^2(X)$ . Es soll nun  $\pi_N \eta \otimes \xi \in \text{dom}(T)$  gezeigt werden. Für alle  $j$  ist  $E(A_{N,j})\xi \in \text{dom}(L)$  und für  $j = 1, \dots, n(N)$  liegt  $F_{a_{N,j}}(S)\eta$  in  $\mathcal{A}$  (vgl. Lemma 4.2). Die Funktion  $F_0(S)\eta$  liegt in  $H^2(\mathbb{R}) = \text{dom}(\partial_r^2)$ ; es findet sich nach Lemma 4.2 daher eine Folge  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}$  mit

$$\|F_0(S)\eta - \eta_n\| + \|(F_0(S)\eta)'' - \eta_n''\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die Folge  $(\eta_n \otimes E(\{0\})\xi)_{n \in \mathbb{N}}$  liegt dann in  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$ , und es folgt

$$\|(F_0(S)\eta - \eta_n) \otimes E(\{0\})\xi\| = \|F_0(S)\eta - \eta_n\| \|E(\{0\})\xi\| \longrightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Unter Ausnutzung von  $LE(\{0\})\xi = 0$  erhält man für  $m, n \in \mathbb{N}$

$$\|T(\eta_n \otimes E(\{0\})\xi) - \eta_m \otimes E(\{0\})\xi\| = \|\eta_n'' - \eta_m''\| \|E(\{0\})\xi\| \longrightarrow 0$$

für  $n, m \rightarrow \infty$ . Aus der Abgeschlossenheit von  $T$  ergibt sich deshalb  $F_0(S)\eta \otimes E(\{0\})\xi \in \text{dom}(T)$ . Daher ist die Behauptung (i) bewiesen, und wir kommen zur

*Behauptung (ii):* Es gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{A}$  und alle  $\psi \in \text{dom}(L)$

$$\|(M(S) - \pi_N)\varphi \otimes \psi\| + \|(M(S) - \pi_N)(T\varphi \otimes \psi)\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Diese folgt direkt aus der starken Konvergenz von  $(\pi_N)_{N \in \mathbb{N}}$  gegen  $M(S)$ , die im Teil (i) des Beweises von Lemma 4.15 nachgewiesen wurde.

*Behauptung* (iii): Es gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{A}$  und alle  $\psi \in \text{dom}(L)$

$$\|\tilde{T}(M(S) - \pi_N)\varphi \otimes \psi\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Um dies zu zeigen, berechnen wir in Hinblick auf die Behauptung (ii) zunächst die Differenz zwischen  $T(\pi_N\varphi \otimes \psi)$  und  $\pi_N(T\varphi \otimes \psi)$ , wobei die Vertauschungseigenschaften eines selbstadjungierten Operators und seines Spektralmaßes genutzt werden:

Unter Verwendung von  $LE(\{0\})\psi = 0 = E(\{0\})L\psi$  erhält man zunächst

$$\begin{aligned} T(F_0(S)\varphi \otimes E(\{0\})\psi) &= -(F_0(S)\varphi)'' \otimes E(\{0\})\psi \\ &= F_0(S) \otimes E(\{0\})(-\varphi'' \otimes \psi) = F_0(S) \otimes E(\{0\})(T\varphi \otimes \psi). \end{aligned}$$

Da  $T|_{\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)} = A(a_{N,j}) \otimes a_{N,j}^{-1}L - \partial_r^2 \otimes (I - a_{N,j}^{-1}L)$  für  $j = 1, \dots, n(N)$  gilt, wird daraus

$$\begin{aligned} T(\pi_N\varphi \otimes \psi) &= T(F_0(S)\varphi \otimes E(\{0\})\psi) \\ &+ \sum_{j=1}^{n(N)} [A(a_{N,j}) \otimes a_{N,j}^{-1}L - \partial_r^2 \otimes (I - a_{N,j}^{-1}L)] F_{a_{N,j}}(S)\varphi \otimes E(A_{N,j})\psi \\ &= F_0(S) \otimes E(\{0\})(T\varphi \otimes \psi) + \sum_{j=1}^{n(N)} [F_{a_{N,j}}(S) \otimes E(A_{N,j})(A(a_{N,j})\varphi \otimes a_{N,j}^{-1}L\psi) \\ &\quad - (F_{a_{N,j}}(S)\varphi)'' \otimes E(A_{N,j})(I - a_{N,j}^{-1}L)\psi] \\ &= \pi_N(T\varphi \otimes \psi) + \sum_{j=1}^{n(N)} (F_{a_{N,j}}(S)\varphi'' - (F_{a_{N,j}}(S)\varphi)'') \otimes E(A_{N,j})(I - a_{N,j}^{-1}L)\psi. \end{aligned}$$

Die Differenz kann nun wie folgt unter Ausnutzung der Ungleichung (4.1) abgeschätzt werden (man beachte  $\text{ran}(E(A_{N,i})) \perp \text{ran}(E(A_{N,j}))$ , falls  $i \neq j$ ):

$$\begin{aligned} &\|(T \circ \pi_N - \pi_N \circ T)\varphi \otimes \psi\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n(N)} \|F_{a_{N,j}}(S)\varphi'' - (F_{a_{N,j}}(S)\varphi)''\|^2 \|E(A_{N,j})(I - a_{N,j}^{-1}L)\psi\|^2 \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{n(N)} (\|F_{a_{N,j}}(S)\varphi''\|^2 + \|(F_{a_{N,j}}(S)\varphi)''\|^2) \int_{A_{N,j}} \left(1 - \frac{a}{a_{N,j}}\right)^2 d\langle E(a)\psi, \psi \rangle \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^{n(N)} (\|\varphi''\|^2 + \|A(a_{N,j})F_{a_{N,j}}(S)\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2) \frac{1}{N^2} \|E(A_{N,j})\psi\|^2. \end{aligned}$$

Da  $A(a_{N,j})(F_{a_{N,j}}(S)\varphi) = F_{a_{N,j}}(S)(A(a_{N,j})\varphi)$  gilt, erhält man weiter

$$\begin{aligned}
& \|(T \circ \pi_N - \pi_N \circ T)\varphi \otimes \psi\|^2 \\
& \leq \frac{2}{N^2} \sum_{j=1}^{n(N)} (3\|\varphi''\|^2 + 2a_{N,j}^2 \|e^{2r}\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2) \|E(A_{N,j})\psi\|^2 \\
& \leq \frac{6}{N^2} \left( (\|\varphi''\|^2 + \|\varphi\|^2) \|E(A_N)\psi\|^2 + \|e^{2r}\varphi\|^2 \sum_{j=1}^{n(N)} \int_{A_{N,j}} a_{N,j}^2 d\langle E(a)\psi, \psi \rangle \right) \\
& \leq \frac{6}{N^2} \left( (\|\varphi''\|^2 + \|\varphi\|^2) \|\psi\|^2 + \|e^{2r}\varphi\|^2 \|L\psi\|^2 \right),
\end{aligned}$$

i. e.,  $\|(T \circ \pi_N - \pi_N \circ T)\varphi \otimes \psi\|$  verschwindet im Übergang  $N \rightarrow \infty$ . Mit Hilfe der Beziehung  $M(S) \circ T = T \circ M(S)|_{\text{dom}(T)}$  und der Behauptung (ii) folgt die Behauptung (iii).

Aus den Behauptungen (i) bis (iii) folgt dann, daß  $M(S)(\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L))$  im Abschluß von  $\text{dom}(T)$  bzgl. der Graphennorm von  $T$ , also in  $\text{dom}(T)$  selbst, liegt. Im speziellen ist dann nach Satz A.22  $\text{dom}(T)$  ein Core von  $\tilde{T}$ ; es folgt daher  $T = \tilde{T}$ .

Fazit:  $T$  ist ein selbstadjungierter Operator und  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  ist somit (nach Definition von  $T$ ) ein Core von  $T$ .

$\mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$  ist Core von  $T$ : Ist nun  $\mathcal{C}$  ein Core von  $A(1)$  und  $\mathcal{L}$  ein Core von  $L$ , so liegt offenbar  $\mathcal{C} \otimes \text{dom}(L)$  im Abschluß der Menge  $\mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$  bzgl. der Graphennorm von  $T$ .

Es seien nun  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \text{dom}(L)$ . Dann gibt es eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{C}$  mit  $\|\varphi_n - \varphi\| + \|A(1)(\varphi_n - \varphi)\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Es folgt  $\|\varphi_n \otimes \psi - \varphi \otimes \psi\| \rightarrow 0$  und mit Ungleichung (4.1)

$$\begin{aligned}
& \|T(\varphi_n \otimes \psi - \varphi \otimes \psi)\| \\
& \leq \|(\partial_r^2 \otimes (\mathbf{I} - L))(\varphi_n - \varphi) \otimes \psi\| + \|(A(1) \otimes L)(\varphi_n - \varphi) \otimes \psi\| \\
& \leq \|(\varphi_n - \varphi)''\| \|(\mathbf{I} - L)\psi\| + \|A(1)(\varphi_n - \varphi)\| \|\psi\| \\
& \leq (\|A(1)(\varphi_n - \varphi)\| + \|\varphi_n - \varphi\|) (\|(\mathbf{I} - L)\psi\| + \|\psi\|) \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Diese Überlegungen zeigen, daß mit  $\mathcal{C} \otimes \mathcal{L}$  ein Core von  $T$  vorliegt.

$T$  besitzt keine Eigenwerte: Als selbstadjungierter Operator kann  $T$  nur reelle Eigenwerte besitzen. Sei also  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gilt nach Lemma 4.13(i)  $F_a(\{t\}) = 0$  für alle  $a \in [0, \infty[$ . Nach Gleichung (4.22) ist daher  $M(\{t\})|_{L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)} = 0$ , woraus sich unmittelbar  $M(\{t\}) = 0$  ergibt. Somit ist  $t$  kein Eigenwert von  $T$  (s. [Wei], Thm. 7.23).  $\square$

## 4.2.2 Eine Formel für die holomorphe Halbgruppe

Das Ziel, die holomorphe Halbgruppe  $(e^{-zT})_{z \in \mathcal{H}_r}$  durch die Operatorhalbgruppe von  $L$  auszudrücken, wird in diesem Abschnitt erreicht. Die Identitäten (4.25) und (4.26) liefern die gewünschte Darstellung von  $e^{-zT}$ . Man beachte, daß auf der rechten Seite der Gleichung (4.25) die ganze  $z$ -Abhängigkeit in der Funktion  $\Psi_z$  steckt; die von  $L$  erzeugte Halbgruppe tritt nur mit reellem, von  $z$  unabhängigem Zeitparameter auf.

**Lemma 4.17.** *Es seien  $z \in \mathcal{H}_r$  und  $r, s \in \mathbb{R}$ . Die Funktion  $a \mapsto q_z(a, r, s)$  ist dann eine beschränkte Funktion auf  $[0, \infty[$ , und im Sinne des beschränkten Funktionalkalküls von  $L$  gilt*

$$q_z(L, r, s) = \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \operatorname{ch}(r-s)\right) \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} L\right) d\xi \quad (4.25)$$

mit  $\Psi_z$  wie in Gleichung (4.14). Der Integrand auf der rechten Seite von (4.25) liegt dabei in  $\mathcal{L}^1([0, \infty[, \mathcal{B}(L^2(X)))$ .

*Beweis.* Da  $L$  positiv ist, gilt  $\|\exp(-\frac{\xi e^r}{2} L)\|_{op} \leq 1$ , und nach Lemma 4.8 hat man  $\xi^2 |\Psi_z(\xi)| \leq C_z$ . Somit liegt die Funktion

$$\xi \mapsto \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \operatorname{ch}(r-s)\right) \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} L\right)$$

in  $\mathcal{L}^1([0, \infty[, \mathcal{B}(L^2(X)))$ . Da  $q_z(\cdot, r, s)$  nach (4.16) eine beschränkte Funktion auf  $[0, \infty[$  ist, gilt nach dem beschränkten Funktionalkalkül für alle  $\eta \in L^2(X)$ :

$$\begin{aligned} \langle q_z(L, r, s)\eta, \eta \rangle &= \int_0^\infty q_z(a, r, s) d\langle E(a)\eta, \eta \rangle \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \operatorname{ch}(r-s)\right) \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} a\right) d\xi d\langle E(a)\eta, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Der Betrag des Integranden im letzten Term ist offenbar bzgl. des Produktmaßes von  $d\xi$  und des positiven endlichen Maßes  $d\langle E(a)\eta, \eta \rangle$  auf  $[0, \infty[^2$  integrierbar; also gilt nach dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned} &\langle q_z(L, r, s)\eta, \eta \rangle \\ &= \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \operatorname{ch}(r-s)\right) \left( \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} a\right) d\langle E(a)\eta, \eta \rangle \right) d\xi \\ &= \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \operatorname{ch}(r-s)\right) \left\langle \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} L\right)\eta, \eta \right\rangle d\xi \\ &= \left\langle \left( \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \operatorname{ch}(r-s)\right) \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2} L\right) d\xi \right) \eta, \eta \right\rangle. \end{aligned}$$

Mittels Polarisierung sieht man die Gültigkeit der Gleichung (4.25) ein.  $\square$

**Satz 4.18.** *Es seien  $z \in \mathcal{H}_r$  und  $f \in L^2(\mathbb{R} \times X)$ . Für  $s \in \mathbb{R}$  bezeichne  $f_s$  die Funktion  $X \ni x \mapsto f(s, x)$ . Dann gilt*

$$e^{-zT} f(r, x) = \left( \int_{\mathbb{R}} q_z(L, r, s) f_s ds \right) (x) \quad (4.26)$$

für  $dr \otimes dx$ -fast alle  $(r, x) \in G$ .

*Beweis.* Seien zunächst  $z \in \mathcal{H}_r$ ,  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\psi \in L^2(X)$ . Wir zeigen als erstes die Gültigkeit der Beziehung

$$\langle e^{-zT} \varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle = \int_0^\infty \langle e^{-zA(a)} \varphi, \varphi \rangle d\langle E(a) \psi, \psi \rangle. \quad (4.27)$$

Nach Satz 4.16 folgt die Gleichung

$$\langle e^{-zT} \psi \otimes \varphi, \psi \otimes \varphi \rangle = \int_0^\infty e^{-z\lambda} d\langle M(\lambda) \psi \otimes \varphi, \psi \otimes \varphi \rangle.$$

Ähnlich wie beim Beweis der Identität (4.24) zeigt man nun mit Hilfe einer geeigneten Folge von Treppenfunktionen  $\tau_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , welche punktweise auf  $[0, \infty[$  gegen  $e^{-z\lambda}$  konvergiert, daß

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-z\lambda} d\langle M(\lambda) \varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-z\lambda} d\langle F_a(\lambda) \varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a) \psi, \psi \rangle \\ &= \int_0^\infty \langle e^{-zA(a)} \varphi, \varphi \rangle d\langle E(a) \psi, \psi \rangle \end{aligned}$$

gilt. Dies impliziert Formel (4.27).

Aus dieser folgt mit Hilfe des Satzes 4.12 dann die Gleichung

$$\langle e^{-zT} \varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle = \int_0^\infty \left( \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} q_z(a, r, s) \varphi(s) \varphi(r)^* ds dr \right) d\langle E(a) \psi, \psi \rangle.$$

Man sieht nun mit (4.16) und dem Satz von Fubini-Tonelli ein, daß sich die Integrationsreihenfolge vertauschen läßt. Somit ist

$$\begin{aligned} \langle e^{-zT} \varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^\infty q_z(a, r, s) d\langle E(a) \psi, \psi \rangle \right) \varphi(s) \varphi(r)^* ds dr \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \langle q_z(L, r, s) \psi, \psi \rangle \varphi(s) \varphi(r)^* ds dr \\ &= \left\langle \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (q_z(L, r, s) \psi) \varphi(s) \varphi(r)^* ds dr, \psi \right\rangle; \end{aligned}$$

dabei läßt sich das letzte Gleichheitszeichen durch den Umstand rechtfertigen, daß die Funktion  $\Lambda(r, s) := (q_z(L, r, s)\psi)\varphi(s)\varphi(r)^*$  nach (4.16) in  $L^1(\mathbb{R}^2, L^2(X))$  liegt.

Über Polarisierung (vgl. dazu den Kommentar nach Formel (4.24)) erhält man dann für alle  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  und alle  $\psi \in L^2(X)$

$$e^{-zT}\varphi \otimes \psi(r, x) = \left( \int_{\mathbb{R}} (q_z(L, r, s)\psi)\varphi(s) ds \right)(x)$$

für fast alle  $(r, x) \in \mathbb{R} \times X$ .

Die Gültigkeit von (4.26) ist also für den Fall, daß  $f$  in der dichten Teilmenge  $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(X)$  von  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  liegt, verifiziert. Zudem wissen wir um die Stetigkeit von  $e^{-zT}$  auf  $L^2(\mathbb{R} \times X)$ . Wir beweisen nun die allgemeine Gültigkeit von (4.26), indem wir zeigen, daß die rechte Seite der Gleichung die Abbildungsvorschrift eines beschränkten Operators auf  $L^2(\mathbb{R} \times X)$  darstellt:

Ist  $f \in L^2(\mathbb{R} \times X)$ , so liegt  $f_s$  nach dem Satz von Fubini für fast alle  $s \in \mathbb{R}$  in  $L^2(X)$ , und die Abbildung  $s \mapsto \|f_s\|_{L^2(X)}$  ist quadratintegrierbar. Es folgt aus der Abschätzung (4.16)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_X \left| \left( \int_{\mathbb{R}} q_z(L, r, s) f_s ds \right)(x) \right|^2 dx dr \leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \left\| q_z(L, r, s) f_s \right\|_{L^2(X)} ds \right)^2 dr \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_z}{\operatorname{ch}(s-r)} \|f_s\|_{L^2(X)} ds \right)^2 dr \leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_z}{\operatorname{ch}(s)} \|f_{s+r}\|_{L^2(X)} ds \right)^2 dr \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_z}{\operatorname{ch}(s)} \left( \int_{\mathbb{R}} \|f_{s+r}\|_{L^2(X)}^2 dr \right)^{1/2} ds \right)^2 \leq \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_z}{\operatorname{ch}(s)} ds \right)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R} \times X)}^2. \end{aligned}$$

□

### 4.2.3 Multiplikatorsätze

Die Formeln (4.25) und (4.26) sollen nun genutzt werden, um für den Operator  $T$  Aussagen über differenzierbaren Funktionalkalkül herzuleiten. Eine wichtige Ungleichung wird zunächst als Hilfssatz vorweggenommen:

**Hilfssatz 4.19.** Es existiert ein  $C > 0$  für alle  $z \in \mathcal{H}_r$  mit

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |\Psi_z(\xi)| \exp\left(-\frac{\operatorname{ch}(r)}{\xi}\right) d\xi dr \\ & \leq C(1 + \sqrt{\Re(z)}) \exp\left(\frac{\pi^2}{4\Re(z)}\right) \left(1 + \frac{|\Im(z)|}{\Re(z)}\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Der Beweis des Hilfssatzes ist im wesentlichen eine etwas detailliertere Ausführung von Abschätzungen aus dem Beweis von Theorem 2 in [Mus98a].

*Beweis.* Es sei  $z := \rho + i\sigma$  mit  $\rho > 0$  und  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Setze ferner  $b := |z|^2$ . Nach Definition von  $\Psi_z$  (s. Lemma 4.8) und Hilfslemma 4.7 haben wir mit einer geeigneten, von  $z$  unabhängigen Konstante  $C > 0$

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |\Psi_z(\xi)| \exp\left(-\frac{\operatorname{ch}(r)}{\xi}\right) d\xi dr \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\rho + |\sigma|}} \exp\left(\frac{\pi^2 \rho}{4b}\right) \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} e^\vartheta \exp\left(\frac{\pi \vartheta |\sigma|}{2b}\right) \exp\left(-\frac{\rho \vartheta^2}{4b}\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\frac{1}{\xi}(\operatorname{ch}(r) + \operatorname{ch}(\vartheta))\right) d\xi d\vartheta dr. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{1}{\xi}(\operatorname{ch}(r) + \operatorname{ch}(\vartheta))\right) d\xi &= \int_0^\infty \exp(-u(\operatorname{ch}(r) + \operatorname{ch}(\vartheta))) du \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch}(r) + \operatorname{ch}(\vartheta)} \leq \frac{2}{e^{|r|} + e^\vartheta} \end{aligned}$$

gilt und mit der Substitution  $u := e^r$ ,  $dr = \frac{1}{u} du$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^r + e^\vartheta} dr = \int_1^\infty \frac{1}{u(u + e^\vartheta)} du = e^{-\vartheta} \ln(1 + e^\vartheta) \leq e^{-\vartheta} (1 + \vartheta)$$

folgt, erhalten wir insgesamt

$$J \leq \frac{4C}{\sqrt{\rho + |\sigma|}} \exp\left(\frac{\pi^2 \rho}{4b}\right) \int_0^\infty (1 + \vartheta) \exp\left(-\frac{\vartheta^2 \rho}{4b} + \frac{\pi \vartheta |\sigma|}{2b}\right) d\vartheta =: I.$$

Führt man nun die Translation  $\eta := \vartheta - \pi|\sigma|/\rho$  durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= \frac{4C}{\sqrt{\rho + |\sigma|}} \exp\left(\frac{\pi^2 \rho}{4b}\right) \int_{-\frac{\pi|\sigma|}{\rho}}^\infty \left(1 + \eta + \pi \frac{|\sigma|}{\rho}\right) \exp\left(-\frac{\rho \eta^2}{4b}\right) \exp\left(\frac{\pi^2 \sigma^2}{4\rho b}\right) d\eta \\ &= \frac{4C}{\sqrt{\rho + |\sigma|}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4\rho}\right) \int_{-\frac{\pi|\sigma|}{\rho}}^\infty \left(1 + \eta + \pi \frac{|\sigma|}{\rho}\right) \exp\left(-\frac{\rho \eta^2}{4b}\right) d\eta \\ &\leq \frac{8C}{\sqrt{\rho + |\sigma|}} \exp\left(\frac{\pi^2}{4\rho}\right) \int_0^\infty \left(1 + \eta + \pi \frac{|\sigma|}{\rho}\right) \exp\left(-\frac{\rho \eta^2}{4b}\right) d\eta. \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $y := \sqrt{\rho}\eta/2\sqrt{b}$  und den Formeln  $\int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}/2$  und  $\int_0^\infty ye^{-y^2} dy = 1/2$  im Hinterkopf erhält man letztlich

$$J \leq 8C \exp\left(\frac{\pi^2}{4\rho}\right) \left(\frac{2}{\rho} + \frac{\pi^{3/2}}{\rho^{3/2}}\right) (\rho + |\sigma|)^{3/2}.$$

□

**Theorem 4.20.** *Es sei  $p \in [1, \infty]$ . Existiert eine reelle positive Konstante  $c$  mit  $\|e^{-tL}\psi\|_{L^p(X)} \leq c\|\psi\|_{L^p(X)}$  für alle  $t > 0$ ,  $\psi \in L^2(X) \cap L^p(X)$ , so gibt es ein  $C > 0$  für alle  $\rho > 0$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$  mit*

$$\|e^{-(\rho+i\sigma)T}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}\times X)} \leq C \exp\left(\frac{\pi^2}{4\rho}\right) (1 + \sqrt{\rho}) \left(1 + \frac{|\sigma|}{\rho}\right)^{3/2} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}\times X)} \quad (4.28)$$

für jedes  $\varphi \in L^2(\mathbb{R} \times X) \cap L^p(\mathbb{R} \times X)$ . Sind dann  $\varepsilon > 0$  und  $q \in I_{p,p'}$ , so ist jedes kompakt getragene stetige  $f \in H^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$  ein  $L^q$ -Multiplikator bzgl.  $T$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{R} \times X) \cap L^p(\mathbb{R} \times X)$ . Mit Satz 4.18 und Gleichung (4.25) folgt für  $z := \rho + i\sigma$ :

$$\begin{aligned} & \|e^{-zT}\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}\times X)} = \left\| \left\| e^{-zT}\varphi(r, x) \right\|_{L^p(X, dx)} \right\|_{L^p(\mathbb{R}, dr)} \\ & \leq \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left| \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(r-s)}{\xi}\right) \right| \left\| \exp\left(-\frac{\xi e^{r+s}}{2}L\right)\varphi_s \right\|_{L^p(X)} d\xi ds \right\|_{L^p(\mathbb{R}, dr)} \\ & \leq c \left\| \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left| \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(s)}{\xi}\right) \right| \|\varphi_{s+r}\|_{L^p(X)} d\xi ds \right\|_{L^p(\mathbb{R}, dr)} \\ & \leq c \left( \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left| \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(s)}{\xi}\right) \right| d\xi ds \right) \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}\times X)}, \end{aligned}$$

und mit Hilfssatz 4.19 erhält man (4.28). Mit Blick auf Satz 1.8 ist dann die Behauptung bewiesen.  $\square$

**Theorem 4.21.** *Der Operator  $L$  besitze einen Evolutionskern  $(p_t)_{t>0}$ . Werden durch die Vorschrift  $L^2(X) \ni \psi \mapsto \int_X |p_t(\cdot, y)|\psi(y) dy$  stetige lineare Operatoren  $(\Lambda_t)_{t>0}$  auf  $L^2(X)$  mit  $\|\Lambda_t\|_{L^2(X) \rightarrow L^2(X)} \leq \kappa$ ,  $\kappa$  unabhängig von  $t > 0$ , definiert, so besitzt  $T$  den für  $z \in \mathcal{H}_r$  durch*

$$P_z((r, x), (s, y)) := \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \text{ch}(r-s)\right) p_{\frac{\xi e^{r+s}}{2}}(x, y) d\xi \quad (4.29)$$

für fast alle  $((r, x), (s, y)) \in (\mathbb{R} \times X)^2$  erklärten Evolutionskern; dabei ist  $\Psi_z$  wie in (4.14). Gibt es überdies ein  $c > 0$  mit  $\|p_t(\cdot, x)\|_{L^1(X)} \leq c$  für alle  $t > 0$  und alle  $x \in X$ , so folgt die Existenz eines  $C > 0$  für alle  $z \in \mathcal{H}_r$  und alle  $g \in \mathbb{R} \times X$  mit

$$\|P_z(\cdot, g)\|_{L^1(\mathbb{R}\times X)} \leq C(1 + \sqrt{\Re(z)}) \exp\left(\frac{\pi^2}{4\Re(z)}\right) \left(1 + \frac{|\Im(z)|}{\Re(z)}\right)^{3/2}. \quad (4.30)$$

Insbesondere ist dann für alle  $\varepsilon > 0$  und alle  $p \in [1, \infty]$  jedes kompakt getragene stetige  $f \in H^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$  ein  $L^p$ -Multiplikator bzgl.  $T$ .

*Beweis.* Es gelte die erstgenannte Voraussetzung an  $(p_t)_{t>0}$ , und es seien  $\eta, \tau \in L^2(\mathbb{R} \times X)$ . Um bei der Umformung des Terms  $\langle e^{-zT}\eta, \tau \rangle$  Integrale nach Belieben vertauschen zu dürfen, zeigen wir zunächst, daß die Voraussetzung des Satzes von Tonelli-Fubini erfüllt ist:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \int_X \int_X \left| \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(r-s)}{\xi}\right) p_{\frac{\xi e^{r+s}}{2}}(x, y) \eta(s, y) \tau(r, x) \right| dy \\
& \qquad \qquad \qquad \cdot dx d\xi ds dr \\
& \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left| \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(r-s)}{\xi}\right) \right| |\langle \Lambda_{\frac{\xi e^{r+s}}{2}} | \eta_s \rangle, |\tau_r \rangle| d\xi ds dr \\
& \leq \kappa \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^\infty \left| \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(s)}{\xi}\right) \right| d\xi \right) \left( \int_{\mathbb{R}} \|\eta_{s+r}\|_{L^2(X)} \|\tau_r\|_{L^2(X)} dr \right) ds \\
& \leq \kappa C_z \|\eta\|_{L^2(\mathbb{R} \times X)} \|\tau\|_{L^2(\mathbb{R} \times X)}
\end{aligned}$$

nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und Hilfssatz 4.19. Der Satz von Tonelli-Fubini liefert nun zunächst einmal, daß das Integral in (4.29) für fast alle  $((r, x), (s, y)) \in (\mathbb{R} \times X)^2$  existiert und ferner, im Zusammenspiel mit den Gleichungen (4.26) und (4.25), die Beziehung

$$\begin{aligned}
\langle e^{-zT}\eta, \tau \rangle &= \int_X \int_{\mathbb{R}} \left( \int_X \int_{\mathbb{R}} \left( \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(r-s)}{\xi}\right) p_{\frac{\xi e^{r+s}}{2}}(x, y) d\xi \right) \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \cdot \eta(s, y) ds dy \Big) \tau(r, x)^* dr dx.
\end{aligned}$$

Somit ist die in (4.29) definierte Funktion  $P_z$  der Integrationskern von  $e^{-zT}$ . Gilt überdies noch  $\|p_t\|_{1, \infty} \leq c$ , so folgt für  $(s, y) \in \mathbb{R} \times X$ :

$$\begin{aligned}
& \|P_z(\cdot, (s, y))\|_{L^1(\mathbb{R} \times X)} \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_X \left| \int_0^\infty \Psi_z(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(r-s)}{\xi}\right) p_{\frac{\xi e^{r+s}}{2}}(x, y) d\xi \right| dx dr \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |\Psi_z(\xi)| \exp\left(-\frac{\text{ch}(r-s)}{\xi}\right) \left( \int_X |p_{\frac{\xi e^{r+s}}{2}}(x, y)| dx \right) d\xi dr \\
&\leq c \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |\Psi_z(\xi)| \exp\left(-\frac{\text{ch}(r)}{\xi}\right) d\xi dr.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung (4.30) erhält man nun aus Hilfssatz 4.19.

Da (4.30) die Ungleichung (4.28) für  $p = 1$  induziert (siehe Lemma 1.12), ergibt sich der Rest der Aussage des Theorems z. B. aus Theorem 4.20.  $\square$

#### 4.2.4 Eine einfache Verallgemeinerung

In Hinblick auf die in den Abschnitten 4.3.2 und 4.3.1 folgenden Beispiele ist es von Vorteil, die in der Kapitelvoraussetzung betrachtete Situation etwas zu verallgemeinern.

**Bemerkung 4.22.** Bei einem Operator der Form

$$A(\nu, a) := -\partial_r^2 + ae^{2\nu r}, \quad \nu \in \mathbb{R}^\times,$$

kann man den Integralkern  $q_z(\nu, a, r, s)$  von  $e^{-zA(\nu, a)}$  zu dem in (4.15) angegebenen Integralkern  $q_z(a, r, s) = q_z(1, a, r, s)$  von  $e^{-zA(a)} = e^{-zA(1, a)}$  in Beziehung setzen durch die Formel

$$q_z(\nu, a, r, s) = |\nu| q_{\nu^2 z}(a/\nu^2, \nu r, \nu s). \quad (4.31)$$

Dies läßt sich einsehen, indem man  $\rho := \nu r$  setzt und für  $\varphi \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  dann  $\varphi(r) = \varphi(\rho/\nu) =: \tilde{\varphi}(\rho)$  definiert. Es folgt  $e^{-zA(\nu, a)}\varphi(r) = e^{-\nu^2 z A(a/\nu^2)}\tilde{\varphi}(\rho)$ , und mit Formel (4.21) und dem Übergang von  $\tilde{\varphi}$  zu  $\varphi$  erhält man die Gleichung (4.31).

Bezeichnet nun  $T_\nu$  die selbstadjungierte Fortsetzung des Operators  $-\partial_r^2 + e^{2\nu r}L$  in  $L^2(\mathbb{R} \times X)$ , so leitet man aus (4.31) (oder durch eine Koordinatentransformation wie oben) die  $dr \otimes dx$ -fast überall geltende Identität

$$\begin{aligned} & e^{-zT_\nu} f(r, x) \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty |\nu| \Psi_{\nu^2 z}(\xi) \exp\left(-\frac{\text{ch}(\nu(r-s))}{\xi}\right) \exp\left(-\frac{\xi e^{\nu(r+s)}}{2\nu^2} L\right) f_s d\xi ds \right)(x) \end{aligned}$$

für alle  $z \in \mathcal{H}_r$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R} \times X)$  her.

Die Aussagen der Theoreme 4.20 und 4.21 gelten auch für  $T_\nu$  anstelle des Operators  $T$ , nur hängen die auftretenden Konstanten natürlich von  $\nu$  ab. So ergibt sich z. B. unter den Voraussetzungen des Theorems 4.20

$$\|e^{-(1+i\sigma)T_\nu} f\|_{L^p(\mathbb{R} \times X)} \leq C_\nu (1 + |\sigma|)^{3/2} \|f\|_{L^p(\mathbb{R} \times X)}, \quad (4.32)$$

mit  $C_\nu := C(1 + |\nu|) \exp(\pi^2/(4\nu^2))$ ,  $C > 0$  unabhängig von  $\nu$ ,  $\sigma$  und  $f$ . Daß die Konstante  $C_\nu$  im Übergang  $|\nu| \rightarrow 0$  gegen unendlich strebt, spiegelt die Tatsache wieder, daß für den Operator  $-\partial_r^2 + L$  i. allg. keine Abschätzung der Form (4.32) oder (4.30) mit von  $L$  unabhängigem Exponenten gelten kann.

Nimmt man z. B. für  $L$  einfach den Laplace-Operator auf  $\mathbb{R}^n$ , so gilt für den  $(n+1)$ -dimensionalen Wärmeleitungskern  $\Phi_z$  des Laplace-Operators  $-\partial_r^2 + L$  und alle  $\xi \in \mathbb{R}$

$$2^{-\frac{n+1}{4}} (1 + |\xi|)^{\frac{n+1}{2}} \leq \|\Phi_{1+i\xi}\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})} \leq (1 + |\xi|)^{\frac{n+1}{2}}.$$

Ist  $n > 2$ , so gilt die Abschätzung (4.30) offenbar nicht für  $P_z(\cdot, 0) := \Phi_z$ .

## 4.3 Beispieloperatoren auf auflösbaren Lie-Gruppen

Sei  $\mathfrak{n}$  eine reelle stratifizierte nilpotente Lie-Algebra, i. e., es existieren Unterräume  $V_1, \dots, V_q$  von  $\mathfrak{n}$  mit  $\mathfrak{n} = V_1 \oplus \dots \oplus V_q$  und  $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$  (mit der Konvention  $V_k = \{0\}$  für  $k > q$ ) und der Eigenschaft, daß  $V_1$  die Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$  erzeugt. Die Derivation  $D$  auf  $\mathfrak{n}$  sei gegeben durch  $Dv_j = jv_j$  für alle  $v_j \in V_j$  und der Gruppenhomomorphismus  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{n})$  sei definiert durch  $\theta(r) = e^{rD}$ . Ferner sei  $N$  die Menge  $\mathfrak{n}$ , ausgestattet mit der Campbell-Hausdorff-Multiplikation; somit ist  $N$  die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe über  $\mathfrak{n}$ . Die Exponentialabbildung  $\exp_N$  ist dann gerade die Identität  $I_{\mathfrak{n}}$  auf  $\mathfrak{n}$ . Das Lebesgue-Maß  $dn$  auf dem euklidischen Raum  $\mathfrak{n}$  ist ein biinvariantes Haar-Maß auf  $N$  (s. [FoS], Kap. 1A). Bezeichnet  $Q$  die *homogene Dimension* von  $N$  (i. e. die Spur von  $D$ ), so gilt die Beziehung

$$\int_N f(e^{rD}n) dn = e^{-rQ} \int_N f(n) dn \quad \text{für alle } f \in L^1(N).$$

Wir setzen  $G := N \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$ .  $G$  ist dann eine auflösbare Lie-Gruppe. Stellt  $dr$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  dar, so liegt mit  $dn \otimes dr$  ein rechtsinvariantes Haar-Maß auf  $G$  vor. Der modulare Faktor  $m$  auf  $G$  ist dann gegeben durch  $m(n, r) = e^{rQ}$ ; Satz 2.39 zufolge besitzt  $G$  deshalb exponentielles Volumenwachstum.

In [Heb98] stellt W. Hebisch im Abschnitt "Improvements and open problems" die Frage, ob für den Evolutionskern  $P_z$  von Summen gerader Potenzen von Vektorfeldern oder Schrödinger-Operatoren  $T$  auf  $G$  eine Abschätzung der Form  $\|P_{1+i\xi}(\cdot, 1_G)\|_{L^1(G)} \leq C(1 + |\xi|^{\frac{Q+4}{2}})$  gilt. (In [Heb98] wurde solch eine Abschätzung für den Wärmeleitungskern eines Sub-Laplace-Operators auf  $G$  bewiesen. Diese Abschätzung ist offenbar schlechter als die von der homogenen Dimension von  $X := N$  unabhängige Abschätzung (4.30), die im Fall des Sub-Laplace-Operators auf  $G$  schon von S. Mustapha in [Mus98a] verifiziert wurde (s. unten). Dafür lassen sich die von W. Hebisch verwendeten Methoden aber auf eine größere Klasse von Lie-Gruppen ausdehnen, wie wir im nächsten Kapitel sehen werden.)

Mit Hilfe des Theorems 4.21 kann man diese Frage in einigen Spezialfällen positiv (und unabhängig von der homogenen Dimension von  $N$ ) beantworten:

### 4.3.1 Rockland-Operatoren

Ein linksinvarianter Differentialoperator  $L$  auf  $N$  heißt *homogen vom Grad*  $d \in \mathbb{N}^{\times}$ , wenn für alle  $\varphi \in \mathcal{D}(N)$  und alle  $r \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $L(\varphi \circ \theta(r)) = e^{dr}(L\varphi) \circ \theta(r)$  gilt. Ist darüber hinaus für jede nicht triviale irreduzible unitäre

Darstellung  $\pi$  von  $N$  der Operator  $d\pi(L)$  injektiv auf dem Raum der  $C^\infty$ -Vektoren der Darstellung  $\pi$  (i. e. den Vektoren  $\varphi$  aus dem Darstellungsraum  $\mathcal{H}_\pi$ , für die  $N \ni x \mapsto \pi(x)\varphi$  eine  $C^\infty$ -Funktion ist), so nennt man  $L$  einen *Rockland-Operator* (vgl. [FoS], Kap. 4B). Nach einem Satz von B. Helffer und J. Nourrigat ist jeder Rockland-Operator schon hypoelliptisch (s. [HeN79]). Es soll nun ein Rockland-Operator  $L$  betrachtet werden, der zudem auf  $\mathcal{D}(N)$  positiv und formal selbstadjungiert ist;  $L|_{\mathcal{D}(N)}$  ist dann bereits wesentlich selbstadjungiert (vgl. [FoS]). Der Abschluß von  $L|_{\mathcal{D}(N)}$  sei wieder mit  $L$  bezeichnet.

Die von  $L$  erzeugte Operatorhalbgruppe ist durch  $e^{-tL}f = f * \phi_t$  für alle  $t > 0$  und alle  $f \in L^2(N)$  gegeben; dabei liegen die Funktionen  $\phi_t$  in  $C^\infty(N) \cap L^1(N)$  und besitzen die Eigenschaft

$$\phi_{e^{dr}t}(e^{rD}x) = e^{-rQ}\phi_t(x) \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R}, x \in N$$

(s. [FoS], Lemma 4.22, Thm. 4.25).

Sei nun  $t > 0$  vorgegeben und  $r \in \mathbb{R}$  mit  $t = e^{dr}$ . Dann folgt

$$\int_N |\phi_t(n)| dn = e^{-rQ} \int_N |\phi_1(e^{-rD}n)| dn = \int_N |\phi_1(n)| dn =: c.$$

In der Notation von Theorem 4.21 gilt offenbar  $p_t(x, y) = \phi_t(y^{-1}x)$  und das impliziert

$$\|p_t(\cdot, m)\|_{L^1(N)} = \int_N |\phi_t(m^{-1}n)| dn = \int_N |\phi_t(n)| dn = c.$$

Durch die Vorschrift

$$(\tilde{L}f)(n, r) := e^{rd}(Lf(\cdot, r))(n)$$

läßt sich aus  $L$  ein linksinvarianter Differentialoperator  $\tilde{L}$  auf  $G$  gewinnen. (Man kann  $L$  auch vermöge des Satzes von Poincaré-Birkhoff-Witt (vgl. [HiN], Satz II.6.8) durch linksinvariante Vektorfelder auf  $N$  darstellen; faßt man dann diese Vektorfelder als linksinvariante Vektorfelder auf  $G$  auf, so ist  $\tilde{L}$  gerade das auf diese Weise „neu gedeutete“  $L$ , vgl. Lemma 2.24.)

Definiert man den linksinvarianten Differentialoperator  $T$  auf  $G$  über  $T := -\partial_r^2 + \tilde{L}$ , so ist  $T = -\partial_r^2 + e^{rd}L$ .

Nach Bemerkung 4.22 und Theorem 4.21 erhält man für den Faltungskern  $(\Phi_z)_{z \in \mathcal{H}_r}$  von  $e^{-zT}$  mit  $\nu := d/2$  die Beziehung

$$\Phi_z(n, r) = P_z((n, r), 1_G) = \int_0^\infty \nu \Psi_{\nu^2 z}(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\xi} \text{ch}(\nu r)\right) \phi_{\frac{\xi e^{\nu r}}{2\nu^2}}(n) d\xi \quad (4.33)$$

und die Abschätzung

$$\|\Phi_{1+i\xi}\|_{L^1(G)} \leq C_\nu(1 + |\xi|)^{3/2}, \quad (4.34)$$

$C_\nu$  unabhängig von  $\xi$ . Nach Theorem 4.21 sind dann alle kompakt getragenen stetigen Funktionen  $f$  aus  $H^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $L^p$ -Multiplikatoren bzgl.  $T$  für jedes  $p \in [1, \infty]$ .

Das nachfolgende Beispiel wird sich als Spezialfall der soeben behandelten Klasse von Differentialoperatoren entpuppen:

### 4.3.2 Summen gerader Potenzen von Vektorfeldern

Seien  $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m$  Elemente aus  $\mathfrak{n}$ , deren Lie-Algebrenenerzeugnis schon ganz  $\mathfrak{n}$  ist, und  $k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}^\times$ . Der auf  $\mathcal{D}(N)$  definierte Differentialoperator

$$L := \sum_{j=1}^m (-1)^{k_j} (\mathcal{X}_j^N)^{2k_j}$$

sei homogen vom Grad  $2\nu$ ,  $\nu = \max\{k_j : 1 \leq j \leq m\}$ . Wenn also z. B.  $\mathcal{X}_j$  in  $V_l$  liegt, so muß zwangsläufig  $lk_j = \nu$  gelten.

Wir zeigen jetzt, daß  $L$  ein Rockland-Operator ist:

Seien also  $\pi$  eine nicht triviale irreduzible unitäre Darstellung von  $N$  mit Darstellungsraum  $(\mathcal{H}_\pi, \langle \cdot, \cdot \rangle_\pi)$  und  $x$  ein  $C^\infty$ -Vektor der Darstellung mit  $d\pi(L)x = 0$ . Dann ist

$$0 = \langle d\pi(L)x, x \rangle_\pi = \sum_{j=1}^m (-1)^{k_j} \langle d\pi(\mathcal{X}_j)^{2k_j} x, x \rangle_\pi = \sum_{j=1}^m \|d\pi(\mathcal{X}_j)^{k_j} x\|_\pi^2,$$

d. h.,  $d\pi(\mathcal{X}_j)^{k_j} x = 0$  für  $j = 1, \dots, m$ .

Für beliebiges  $k \in \mathbb{N}^\times$  und  $j \in \{1, \dots, m\}$  läßt sich aus  $d\pi(\mathcal{X}_j)^k x = 0$  nun folgendes herleiten:

Ist  $k$  gerade, so gilt

$$0 = \langle d\pi(\mathcal{X}_j)^k x, x \rangle_\pi = (-1)^{k/2} \|d\pi(\mathcal{X}_j)^{k/2} x\|_\pi^2,$$

also  $d\pi(\mathcal{X}_j)^{k/2} x = 0$ .

Ist  $k$  hingegen ungerade, so erhält man

$$0 = \langle d\pi(\mathcal{X}_j)^k x, d\pi(\mathcal{X}_j)x \rangle_\pi = (-1)^{\frac{k-1}{2}} \|d\pi(\mathcal{X}_j)^{\frac{k+1}{2}} x\|_\pi^2,$$

was wiederum  $d\pi(\mathcal{X}_j)^{\frac{k+1}{2}} x = 0$  nach sich zieht.

Durch rekursives Anwenden der beiden diskutierten Fälle gelangt man zu  $d\pi(\mathcal{X}_j)x = 0$  für  $j = 1, \dots, m$ . Da das Lie-Algebrenenerzeugnis der  $\mathcal{X}_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , ganz  $\mathfrak{n}$  ist, erhält man  $d\pi(\mathcal{X})x = 0$  für alle  $\mathcal{X} \in \mathfrak{n}$ . Somit ist  $x = 0$ , denn die unitäre Darstellung  $\pi$  wurde als nicht trivial und irreduzibel vorausgesetzt. Die auf dem semidirekten Produkt  $G$  definierte Summe gerader Potenzen von Vektorfeldern

$$T := -\partial_r^2 + \sum_{j=1}^m (-1)^{k_j} (\mathcal{X}_j^G)^{2k_j}$$

besitzt die Gestalt  $T = -\partial_r^2 + e^{2\nu r} L$  (vgl. Lemma 2.24).

Setzt man  $d = 2\nu$ , so gelten für  $T$  die im letzten Unterabschnitt hergeleiteten Aussagen.

Im Fall  $\nu = 1$  ist  $L$  ein Sub-Laplace-Operator auf  $N$ , bzw.  $T$  ein Sub-Laplace-Operator auf  $G$ . Für diese Situation wurden die Abschätzung (4.34) und die Aussage über  $L^p$ -Multiplikatoren bereits in [Mus98a] verifiziert. Der Beweis nutzt die Darstellung (4.33) des Wärmeleitungskerns  $\Phi_z$  von  $T$  durch den Wärmeleitungskern  $\phi_t$  von  $L$ , die S. Mustapha mit stochastischen Methoden und unter Verwendung einer Formel aus [Yor92] hergeleitet hat. In [Mus98a] wird auch gezeigt, daß die Potenz  $\frac{3}{2}$  in (4.34) insofern optimal ist, als daß im Fall  $N = \mathbb{R}^2$  und  $T$  der Laplace-Operator auf  $G = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  eine Konstante  $C$  so existiert, daß der zu  $T$  gehörige Wärmeleitungskern  $\Phi_z$  die Ungleichung

$$C^{-1}(1 + |\xi|)^{3/2} \leq \|\Phi_{1+i\xi}\|_{L^1} \leq C(1 + |\xi|)^{3/2}$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  erfüllt. Um das Wachstum der  $L^1$ -Norm in diesem speziellen Fall in Abhängigkeit von  $\xi$  zu berechnen, verwendet S. Mustapha nicht die von ihm hergeleitete Form der Beziehung (4.33), sondern eine konkretere Formel für den Wärmeleitungskern aus [Bou83].

### 4.3.3 Schrödinger-Operatoren

Es seien  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  eine Basis von  $V_1$ ,  $\mathcal{X}_{m+1} := 0$  und  $f_1, \dots, f_{m+1}$  reellwertige  $C^1$ -Funktionen auf  $N$ . Wir betrachten hier

$$L := -\sum_{j=1}^{m+1} (\mathcal{X}_j^N + if_j)^2.$$

Setzt man nun  $\mathcal{X}_0^G := \partial_r$ ,  $\tilde{f}_0 := 0$  und  $\tilde{f}_j := f_j \otimes e^r$  für  $j = 1, \dots, m+1$ , so hat der Schrödinger-Operator

$$T := -\sum_{j=0}^{m+1} (\mathcal{X}_j^G + i\tilde{f}_j)^2$$

die Form  $T = -\partial_r^2 + e^{2r}L$ . Ist  $(\phi_t)_{t>0}$  der zum Sub-Laplace-Operator  $\Delta := -\sum_{j=1}^m (\mathcal{X}_j^N)^2$  gehörige Wärmeleitungskern, so gilt nach (3.9) und nach Satz 3.11 für alle  $m \in N$

$$\|p_t(\cdot, m)\|_{L^1(N)} = \int_N |p_t(n, m)| dn \leq \int_N \phi_t(m^{-1}n) dn = 1.$$

Wir erhalten aus Theorem 4.21 für den Wärmeleitungskern  $(P_z)_{z \in \mathcal{H}_r}$  von  $T$  die Abschätzung

$$\sup\{\|P_{1+i\xi}(\cdot, g)\|_{L^1(G)} : g \in G\} \leq C(1 + |\xi|)^{3/2},$$

und alle kompakt getragenen stetigen Funktionen  $f$  aus  $H^{2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ ,  $\varepsilon > 0$ , sind für  $p \in [1, \infty]$  schon  $L^p$ -Multiplikatoren bzgl. des Schrödinger-Operators  $T$ . Da wir die Ungleichung (3.9) nur für  $t > 0$  bewiesen haben, ist es für dieses Beispiel essentiell, daß der Evolutionskern  $p_z$ ,  $z \in \mathcal{H}_r$ , von  $L$  nur mit reellem Parameter  $z = t$  in die Gleichung (4.29) hineinspielt.

## 4.4 Anmerkungen

Es sollen hier noch einige Bemerkungen zu den in diesem Kapitel angeführten Resultaten gemacht werden, die nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit der Zielsetzung dieses Kapitels stehen (nämlich dem Auffinden von  $L^p$ -Multiplikatorsätzen), aber die von gewissem eigenständigen Interesse sind.

**Zu Satz 4.10:** Führt man in (4.20) die Substitution  $\lambda = \theta^2$  durch, so erhält man für  $q_z$  die Darstellung

$$q_z(a, r, s) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty e^{-z\lambda} \operatorname{sh}(\pi\sqrt{\lambda}) K_{i\sqrt{\lambda}}(\sqrt{ae^r}) K_{i\sqrt{\lambda}}(\sqrt{ae^s}) d\lambda. \quad (4.35)$$

Hier läßt sich die Symmetrie von  $q_z$  in  $r$  und  $s$  ebenfalls einfach ablesen.

**Zu Satz 4.12:** Sei  $z \in \mathcal{H}_r$ . Da  $q_z(0, \cdot, \cdot)$  und der durch  $\phi_z^{\mathbb{R}}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \exp(-\frac{r^2}{4z})$  gegebene eindimensionale Wärmeleitungskern  $\phi_z^{\mathbb{R}}$  stetige Funktionen sind, folgt aus Gleichung (4.21)

$$q_z(0, r, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi z}} \exp\left(-\frac{(r-s)^2}{4z}\right)$$

für alle  $s, r \in \mathbb{R}$ . Dieses Resultat ist aus der Definitionsgleichung (4.15) von  $q_z(0, \cdot, \cdot)$  nicht sofort ersichtlich.

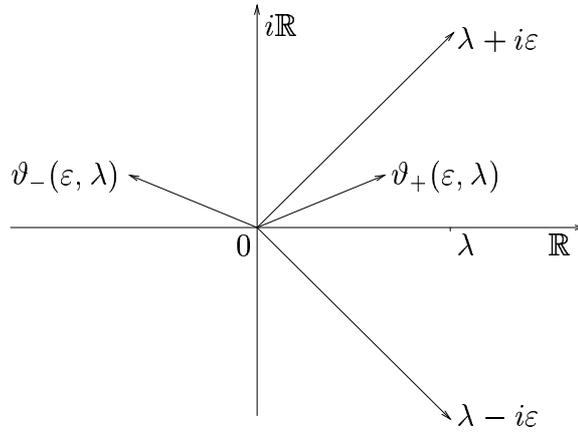


Abbildung 4.2:  $\vartheta_-$  und  $\vartheta_+$  in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  und  $\lambda$

Aus der Abschätzung (3.9) erhält man ferner für beliebige  $a \in [0, \infty[$ ,  $t > 0$  und  $r, s \in \mathbb{R}$  die Ungleichung

$$|q_t(a, r, s)| \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{(r-s)^2}{4t}\right).$$

**Zum Abschnitt 4.1.5:** Sei  $a > 0$ . Das Spektralmaß  $F_a$  des Operators  $A(a)$  läßt sich mit der Titchmarsh-Kodaira-Formel auch konkret ausrechnen:

Es sei  $I$  ein beschränktes Intervall in  $\mathbb{R}$  und  $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ . Mit der Titchmarsh-Kodaira-Formel (s. [Lan], Thm. XX.2.2) und der Beziehung (4.13) erhält man

$$\begin{aligned} \langle F_a(I)\varphi, \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_I \langle (R(A; \lambda - i\varepsilon) - R(A; \lambda + i\varepsilon))\varphi, \varphi \rangle d\lambda \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_I \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (k_{\vartheta_-}^a(r, s) - k_{\vartheta_+}^a(r, s)) \varphi(s) \varphi(r)^* ds dr d\lambda, \end{aligned}$$

wobei  $\vartheta_+ := \vartheta_+(\varepsilon, \lambda)$  und  $\vartheta_- := \vartheta_-(\varepsilon, \lambda)$  die eindeutig bestimmten komplexen Zahlen mit Imaginärteil größer null sind, die  $\vartheta_+^2 = \lambda + i\varepsilon$  und  $\vartheta_-^2 = \lambda - i\varepsilon$  erfüllen (s. Abbildung 4.2).

Ist  $\lambda < 0$ , so gilt offenbar  $\vartheta_+(\varepsilon, \lambda), \vartheta_-(\varepsilon, \lambda) \rightarrow i\sqrt{|\lambda|}$  für  $\varepsilon \searrow 0$ . Setzt man hingegen  $J := I \cap [0, \infty[$  und ist  $\lambda \in J$ , so gilt  $\vartheta_+(\varepsilon, \lambda) \rightarrow \sqrt{\lambda}$  und  $\vartheta_-(\varepsilon, \lambda) \rightarrow -\sqrt{\lambda}$  für  $\varepsilon \searrow 0$ . Somit konvergiert der Integrand des letzten Integrals im Grenzübergang  $\varepsilon \searrow 0$  punktweise gegen

$$\chi_J(\lambda) (k_{-\sqrt{\lambda}}^a(r, s) - k_{\sqrt{\lambda}}^a(r, s)) \varphi(s) \varphi(r)^*.$$

Mit Lemma 4.9 und dem Satz über majorisierte Konvergenz folgt

$$\langle F_a(I)\varphi, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_J \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (k_{-\sqrt{\lambda}}^a(r, s) - k_{\sqrt{\lambda}}^a(r, s)) \varphi(s) \varphi(r)^* ds dr d\lambda.$$

Daraus leitet man nun unter Ausnutzung der Beziehungen (4.11), (4.9), (4.6),  $\sin(iz) = i \operatorname{sh}(z)$  und anschließender Verwendung der Polarisationsformel die Gleichung

$$\langle F_a(I)\varphi, \psi \rangle = \frac{1}{\pi^2} \int_J \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \operatorname{sh}(\pi\sqrt{\lambda}) K_{i\sqrt{\lambda}}(\sqrt{a}e^s) K_{i\sqrt{\lambda}}(\sqrt{a}e^r) \varphi(s) \psi(r)^* ds dr d\lambda$$

für alle  $\varphi, \psi \in C_c(\mathbb{R})$  her (vgl. auch mit der Identität (4.35)).

**Zum Abschnitt 4.2.1:** Das Lemma 4.15 und der Satz 4.16 lassen sich unter allgemeineren Voraussetzungen als denen zu Beginn des Kapitels 4 beweisen.

**Voraussetzung 4.23.** Es seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  Hilbert-Räume und  $L$  ein selbstadjungierter Operator in  $\mathcal{H}_2$  mit Spektralmaß  $E$ . Ferner seien  $T_1, T_2$  Operatoren in  $\mathcal{H}_1$  derart, daß die Menge  $\mathcal{A} := \operatorname{dom}(T_1) \cap \operatorname{dom}(T_2)$  dicht in  $\mathcal{H}_1$  liegt. Für alle  $a \in \sigma(L)$  existiere eine selbstadjungierte Erweiterung  $A(a)$  des auf  $\mathcal{A}$  definierten Operators  $T_1 + aT_2$ . Bezeichnet  $F_a$  das Spektralmaß von  $A(a)$ , so möge für alle Intervalle der Form  $S := ]s, t]$ ,  $s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , eine abzählbare Menge  $\Gamma_S$  mit der Eigenschaft existieren, daß die Abbildung  $\sigma(L) \ni a \mapsto F_a(S)$  linksseitig (bzw. rechtsseitig) stark stetig in  $\sigma(L) \setminus \Gamma_S$  ist. Sei  $T$  der auf  $\mathcal{A} \otimes \operatorname{dom}(L)$  definierte Operator  $T_1 \otimes I + T_2 \otimes L$ ,  $I$  die Identität auf  $\mathcal{H}_2$ .

Unter diesen Voraussetzungen besitzt der Operator  $T$  eine selbstadjungierte Erweiterung  $\tilde{T}$ .

**Lemma 4.24.** Für alle Intervalle der Form  $S := ]s, t]$ ,  $s \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , existiert eine eindeutig bestimmte Orthogonalprojektion  $M(S)$  auf  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$  mit

$$\langle M(S)\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \xi \rangle = \int_{\sigma(L)} \langle F_a(S)\varphi, \eta \rangle d\langle E(a)\psi, \xi \rangle$$

für alle  $\varphi, \eta \in \mathcal{H}_1$ ,  $\psi, \xi \in \mathcal{H}_2$ . Die Familie  $M_t := M(]-\infty, t])$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist dann eine Spektralschar und der eindeutig bestimmte zu  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  gehörige selbstadjungierte Operator  $\tilde{T}$  ist eine Fortsetzung von  $T$ .

Insbesondere gilt für alle  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $\psi \in \operatorname{dom}(L)$ ,  $\eta \in \mathcal{H}_1$ ,  $\xi \in \mathcal{H}_2$ :

$$\langle T\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \eta \otimes \xi \rangle. \quad (4.36)$$

*Beweisskizze.* (a) Die Existenz der Orthogonalprojektion  $M(S)$  und die Spektralschareigenschaft der Familie  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  lassen sich ähnlich wie im Beweis von Lemma 4.15 verifizieren, wenn man nur die Folge von Orthogonalprojektion  $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ein wenig modifiziert:

Zu vorgegebenem Intervall  $S$  sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge von beschränkten Borel-Menge mit  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \sigma(L)$ , und für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n \cap \Gamma_S$  eine endliche Menge. Für  $n \in \mathbb{N}$  seien ferner  $I_n$  eine endliche Indexmenge und  $A_{n,k}$ ,  $k \in I_n$ , eine Partition von  $A_n$ , bestehend aus Borel-Mengen mit  $\text{diam}(A_{n,k}) < 1/n$ . Genauer soll für  $k \in I_n$  entweder  $A_{n,k} \cap \Gamma_S = \emptyset$  oder  $A_{n,k}$  eine einpunktige Menge sein. Ist die Abbildung  $\sigma(L) \ni a \mapsto F_a(S)$  linksseitig (bzw. rechtsseitig) stark stetig in  $\sigma(L) \setminus \Gamma_S$ , so setze  $a_{n,k} := \inf A_{n,k}$  (bzw.  $a_{n,k} := \sup A_{n,k}$ ).

Man definiert nun  $\pi_n = \pi_n(S) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2)$  als Fortsetzung der Orthonormalprojektion  $\sum_{k \in I_n} F_{a_{n,k}}(S) \otimes E(A_{n,k})$  auf  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

(b) Daß der Definitionsbereich des zur Spektralschar  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  gehörigen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operators  $\tilde{T}$  die Menge  $\text{dom}(T) = \mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  umfaßt, läßt sich folgendermaßen einsehen: Zunächst gilt für  $\varphi \in \mathcal{A}$ ,  $\psi \in \text{dom}(L)$

$$\int_{\sigma(L)} \left( \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle = \|T\varphi \otimes \psi\|^2 < \infty.$$

Setze  $U_{n,j} = ]j2^{-n}, (j+1)2^{-n}]$  für  $j = -4^n, \dots, 0, \dots, 4^n - 1$  und

$$\tau_n := \sum_{j=-4^n}^{4^n-1} \inf\{x^2 : x \in U_{n,j}\} \chi_{U_{n,j}}.$$

Dann ist  $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen und es gilt

$$\int_{\sigma(L)} \left( \int_{\mathbb{R}} \tau_n(\lambda) d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \tau_n(\lambda) d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle,$$

sowie

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma(L)} \left( \int_{\mathbb{R}} \tau_n(\lambda) d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle \\ & \longrightarrow \int_{\sigma(L)} \left( \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle F_a(\lambda)\varphi, \varphi \rangle \right) d\langle E(a)\psi, \psi \rangle \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Das zieht aber dann trivialerweise die Konvergenz der Folge  $\int_{\mathbb{R}} \tau_n(\lambda) d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , nach sich; insbesondere folgt aus dem

Satz über monotone Konvergenz  $\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle M(\lambda)\varphi \otimes \psi, \varphi \otimes \psi \rangle < \infty$ , i. e.,  $\varphi \otimes \psi \in \text{dom}(\tilde{T})$ .

Die Gleichung (4.36) läßt sich jetzt ähnlich wie die Gleichung (4.23) beweisen. Man kann allerdings nicht mehr davon ausgehen, daß man eine monoton wachsende Folge  $(\tau_n(\lambda))_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen und den Satz über monotone Konvergenz wie im Beweis von Lemma 4.15 nutzen kann, da die Spektralmaße  $F_a$ ,  $a \in \sigma(L)$ , nicht notwendigerweise auf einer nach unten beschränkten Teilmenge von  $\mathbb{R}$  getragen sind. Statt dessen konstruiert man eine punktweise gegen  $I_{\mathbb{R}}$  konvergierende Folge von Treppenfunktion  $(\tilde{\tau}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und nutzt die Ungleichung  $|\lambda| \leq 1 + \lambda^2$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und den Satz über majorisierte Konvergenz.  $\square$

Unter den folgenden zusätzlichen Voraussetzungen kann man zeigen, daß der Operator  $T$  wesentlich selbstadjungiert ist, also der Abschluß von  $T$  mit dem Operator  $\tilde{T}$  aus Lemma 4.24 übereinstimmt.

**Voraussetzung 4.25.** Neben der Voraussetzung 4.23 gelten die Bedingungen

- (1) Für alle  $a \in \sigma(L)$  sei  $\mathcal{A}$  ein Core von  $A(a)$ .
- (2)  $T_1$  sei abschließbar.
- (3) Es existiere eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$  mit

$$\|T_1\varphi\|_1 \leq f(a)(\|\varphi\|_1 + \|A(a)\varphi\|_1) \quad \text{für alle } a \in \sigma(L), \varphi \in \mathcal{A}.$$

**Bemerkung 4.26.** (a) Ist  $0 \in \sigma(L)$ , so ist die obige Bedingung (2) nach Voraussetzung 4.23 ohnehin schon erfüllt.

- (b) Die Bedingungen (1), (2) und (3) implizieren  $\text{dom}(A(a)) \subset \text{dom}(\overline{T_1})$  für alle  $a \in \sigma(L)$ .

Unter den Voraussetzungen 4.23 und 4.25 gilt der

**Satz 4.27.** *Der Operator  $T$  ist wesentlich selbstadjungiert und die Spektralschar  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  aus Lemma 4.24 ist die zu  $\overline{T}$  gehörige Spektralschar.*

*Zum Beweis.* Man kann grundsätzlich nach dem Schema des Beweises von Satz 4.16 verfahren.

Zu vorgegebenem beschränkten Intervall  $S = ]s, t]$  seien dabei die Orthonormalprojektion  $\pi_n = \pi_n(S)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wie im Beweis des Lemmas 4.24, unter den Zusatzannahmen, daß  $A_n \subset [-n, -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}, n]$  für  $n \in \mathbb{N}^\times$  gilt und für alle  $k \in I_n$ ,  $a, b \in A_{n,k}$  die Ungleichung  $|1 - \frac{a}{b}| < \frac{1}{n(1+\sigma(n))}$ ,  $\sigma(n) := \sup\{f(a) : a \in A_n\}$ , erfüllt ist.

Ist Null eine Eigenwert von  $L$ , so sei  $0 \in I_n$  und  $A_{n,0} := \{0\}$ , sowie  $a_{n,0} := 0$ . Man verifiziert nun die

Behauptung (i):  $\pi_n(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \subset \text{dom}(\overline{T})$ .

Im Gegensatz zum Beweis des Satzes 4.16 ist hier nicht sofort klar, daß für Vektoren  $\eta \in \mathcal{H}_1$ ,  $\xi \in \mathcal{H}_2$  und einen Index  $j \neq 0$  das Element  $F_{a_{n,j}}(S)\eta \otimes E(A_{n,j})\xi$  aus  $\text{dom}(\overline{T})$  stammt. Da  $F_{a_{n,j}}(S)\eta \in \text{dom}(A(a_{n,j}))$  gilt, existiert nach Bedingung (1) eine Folge  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{A}$  mit

$$\|F_{a_{n,j}}(S)\eta - \eta_k\| + \|A(a_{n,j})(F_{a_{n,j}}(S)\eta - \eta_k)\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \rightarrow \infty.$$

Die Folge  $(\eta_k \otimes E(A_{n,j})\xi)_{k \in \mathbb{N}}$  aus  $\mathcal{A} \otimes \text{dom}(L)$  konvergiert dann in  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$  gegen  $F_{a_{n,j}}(S)\eta \otimes E(A_{n,j})\xi$ , und ferner erhält man mit Hilfe der Bedingung (3)

$$\begin{aligned} & \|T((\eta_k - \eta_l) \otimes E(A_{n,j})\xi)\| \\ & \leq \|A(a_{n,j})(\eta_k - \eta_l) \otimes a_{n,j}^{-1}LE(A_{n,j})\xi\| + \|T_1(\eta_k - \eta_l) \otimes (I - a_{n,j}^{-1}L)E(A_{n,j})\xi\| \\ & \leq \|A(a_{n,j})(\eta_k - \eta_l)\|(\|a_{n,j}^{-1}L\xi\| + f(a_{n,j}))\|(I - a_{n,j}^{-1}L)\xi\| \\ & \quad + f(a_{n,j})\|\eta_k - \eta_l\|\|(I - a_{n,j}^{-1}L)\xi\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } k, l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Der Restbeweis des Satzes 4.16 läßt sich einfach an die Gegebenheiten des Satzes 4.27 anpassen (wobei anstelle der Ungleichung (4.1) naheliegenderweise die Voraussetzung 4.25 (3) zu verwenden ist).  $\square$

Aus Lemma 4.24 und Satz 4.27 läßt sich nun ohne großen Aufwand das nachstehende Korollar ziehen:

**Korollar 4.28.** *Sei  $\Phi_1$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_1$  mit Spektralschar  $(F_t)_{t \in \mathbb{R}}$ , und sei  $\Phi_2$  ein selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}_2$  mit Spektralschar  $(E_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . Dann ist  $\Phi := \Phi_1 \otimes I_{\mathcal{H}_2} + I_{\mathcal{H}_1} \otimes \Phi_2$  ein wesentlich selbstadjungierter Operator in  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ , und die zum Abschluß von  $\Phi$  gehörige Spektralschar  $(M_t)_{t \in \mathbb{R}}$  ist gegeben durch*

$$\langle M_t(\varphi \otimes \psi), \eta \otimes \xi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle F_{t-a}\varphi, \eta \rangle d\langle E(a)\psi, \xi \rangle$$

für alle  $\varphi, \eta \in \mathcal{H}_1$ ,  $\psi, \xi \in \mathcal{H}_2$ .

Die Aussagen des Korollars finden sich auch in [Wei] unter Theorem 8.33 und Theorem 8.34. Die Selbstadjungiertheit von  $\overline{\Phi}$  wird dort mit Hilfe von Nelsons Theorem über analytische Vektoren (s. [Wei], Thm. 8.31) bewiesen.

*Beweis.* Für alle  $a \in \mathbb{R}$  ist  $A(a) := \Phi_1 + aI_{\mathcal{H}_1}$  selbstadjungiert mit  $\text{dom}(A(a)) = \text{dom}(\Phi_1)$ . Sind  $t, a \in \mathbb{R}$ , so erhält man über die Eindeutigkeit der zu  $A(a)$  gehörigen Spektralschar  $(F_a([\!-\infty, s]))_{s \in \mathbb{R}}$  die Beziehung  $F_a([\!-\infty, t]) = F_{t-a}$ .

Da die Abbildung  $\mathbb{R} \ni a \mapsto F_{t-a}$  (nach Definition einer Spektralschar) linksseitig stark stetig ist, erkennt man, daß die Voraussetzung 4.23 für den Operator  $T := \Phi$  gegeben ist. Ferner gilt mit  $f(a) := 1 + |a|$  die Ungleichung

$$\|\Phi_1\varphi\| \leq \|(\Phi_1 + aI_{\mathcal{H}_1})\varphi\| + |a|\|\varphi\| \leq f(a)(\|\varphi\| + \|A(a)\varphi\|)$$

für alle  $\varphi \in \text{dom}(\Phi_1)$ . Somit ist in der Situation des Korollars 4.28 auch die Voraussetzung 4.25 erfüllt, und das Korollar folgt nun aus Lemma 4.24 und Satz 4.27.  $\square$

# Kapitel 5

## Sub-Laplace-Operatoren auf mittelbaren Lie-Gruppen

Eine strukturtheoretische Charakterisierung einer sogenannten *mittelbaren Gruppe*  $G$  (engl.: “amenable group”) ist, daß sich die Quotientengruppe, die durch Faktorisierung von  $G$  nach dem auflösbaren Radikal entsteht, als kompakt erweist. Zwar sind die in diesem Kapitel behandelten semidirekten Produkte von auflösbaren und kompakten Lie-Gruppen i. allg. nicht mehr auflösbar, sie fallen aber noch in die Kategorie der mittelbaren Gruppen.

Für diese semidirekten Produkte soll gezeigt werden, daß jeder beliebige Sub-Laplace-Operator schon vom differenzierbaren  $L^p$ -Typ für alle  $p \in [1, \infty]$  sein muß.

Die Methoden dieses Kapitels orientieren sich an den Ideen aus der Arbeit [Heb98], in der differenzierbarer  $L^1$ -Funktionalkalkül für Sub-Laplace-Operatoren auf den in Abschnitt 4.3 vorgestellten Gruppen  $G$  nachgewiesen wird.

Das Vorgehen ist dabei, eine  $L^1$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns wie in der Voraussetzung des Satzes 3.19 auf eine  $L^2$ -Abschätzung des Produkts einer geeigneten Gewichtsfunktion mit dem Wärmeleitungskern zurückzuführen. Der Schlüssel zur  $L^2$ -Abschätzung liegt dann in der Untersuchung der Ableitung der Gewichtsfunktion in Richtung eines beliebigen linksinvarianten Vektorfeldes.

### 5.1 Semidirekte Produkte von auflösbaren und kompakten Lie-Gruppen

**Voraussetzung 5.1.** Sei  $\mathfrak{n}$  eine reelle  $m$ -dimensionale nilpotente Lie-Algebra, und sei  $N$  die Lie-Gruppe, die entsteht, wenn man  $\mathfrak{n}$  mit der Campbell-Hausdorff-Multiplikation ausstattet. Das neutrale Element in  $N$  ist dann die  $0 \in \mathfrak{n}$ .

Sei  $D$  eine Derivation auf  $\mathfrak{n}$  mit paarweise verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , deren Realteile  $\rho_i$  sämtlich strikt positiv seien. Wir setzen  $\rho := \min\{\rho_j : j = 1, \dots, q\}$ .

Durch  $\theta(s) = e^{sD}$  wird ein Gruppenhomomorphismus  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{n}) = \text{Aut}(N)$  definiert. Es bezeichne  $H$  das semidirekte Produkt  $N \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  und  $Q$  die Spur von  $D$ .

Sei ferner  $K$  eine zusammenhängende kompakte Lie-Gruppe und  $\gamma : K \rightarrow \text{Aut}(H)$  ein Gruppenhomomorphismus derart, daß die Abbildung

$$H \times K \rightarrow H, (h, k) \mapsto \gamma(k)h,$$

analytisch ist. Setze  $G := H \rtimes_{\gamma} K$ .

Zudem seien  $dn$  und  $dr$  die Lebesgue-Maße auf  $N$  und  $\mathbb{R}$ , sowie  $dk$  das durch  $dk(K) = 1$  eindeutig bestimmte biinvariante Haar-Maß auf  $K$  (vgl. [HiN], Korollar III.4.13). Die zu  $K$  gehörige Lie-Algebra werde kurz mit  $\mathfrak{k}$  notiert.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß in diesem Kapitel insbesondere der Fall  $G = H$ , i. e.  $K = \{1_K\}$ , mitbehandelt wird.

**Bemerkung 5.2.** Das oben definierte  $N$  ist eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende nilpotente Lie-Gruppe, für die  $\exp_N = I_{\mathfrak{n}}$  gilt (siehe [HiN], Satz III.3.23).

Nach dem dritten Lieschen Fundamentalsatz ist  $N$  die (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte zusammenhängende und einfach zusammenhängende Lie-Gruppe mit zugehöriger Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$  (vergl. [HiN], III, §3).

Auch wenn es nach der letzten Bemerkung als „unnötiger Notationsaufwand“ gedeutet werden könnte, wollen wir in Rechnungen häufig das Kürzel  $\exp_N$  mitführen, um deutlicher zwischen der Lie-Gruppen- und der Lie-Algebenebene zu unterscheiden.

**Lemma 5.3.** *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (a) *Das Lebesgue-Maß  $dn$  ist ein biinvariantes Haar-Maß auf  $N$ .*
- (b) *Ein rechtsinvariantes Haar-Maß ist auf  $H$  durch  $d^r h := dn dr$  gegeben. Mit  $d^l h := e^{-rQ} dn dr$  liegt ein linksinvariantes Maß auf  $H$  vor. Somit ist der modulare Faktor  $\mu$  gegeben durch  $\mu(n, r) = e^{rQ}$ .*
- (c) *Auf  $G$  ist durch  $d^r g := dn dr dk$  ein rechtsinvariantes und durch  $d^l g := e^{-rQ} dn dr dk$  ein linksinvariantes Haar-Maß gegeben. Der modulare Faktor auf  $G$  ist daher  $m(n, r, k) = e^{rQ}$ .*

*Beweis.* (a) Siehe [FoS], Prop. 1.2, oder [VSC], Kapitel IV, §1.

(b) Man verifiziert leicht, daß die oben definierten Maße die angegebenen Invarianzeigenschaften haben.

Die Aussage (c) ergibt sich aus (b) und dem Lemma 2.19. □

**Voraussetzung 5.4.** Sei  $|\cdot|_D$  eine homogene Norm auf  $N$  (bzw.  $\mathfrak{n}$ ) bzgl.  $D$  (siehe Definition 2.41), und  $F_s$  bezeichne die Menge  $\{n \in N : |n|_D = e^s\}$  (vgl. Satz 2.42). Die Funktion  $w : G \rightarrow [0, \infty[$  sei definiert durch  $w(n, r, k) = |n|_D^Q$ . Da  $w$  nicht von den Variablen  $r$  und  $k$  abhängt, werden wir  $w$  auch gelegentlich als Funktion auf  $H$  oder  $N$  auffassen.

Sei  $d$  eine linksinvariante Riemannsche Metrik auf  $G$  und  $B_R$  die von  $d$  induzierte Kugel um  $1_G$  mit Radius  $R$ .

**Hilfslemma 5.5.** Zu  $R > 0$  gibt es ein  $C > 0$  so, daß für alle  $j \in \mathbb{N}^\times$  die folgende Inklusion gilt:

$$(B_R \cap H)^j \subset \{(n, r) \in H : |n|_D \leq Ce^{C(j-1)}, |r| \leq Cj\}.$$

*Beweis.* Da  $\overline{B_R} \cap H$  kompakt in  $H = N \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  ist (vgl. Korollar 2.36), existiert ein  $C > 0$  derart, daß  $\overline{B_R} \cap H \subset \{(n, r) : |n|_D < C, |r| < C\}$  gilt.

Sei für  $j \in \mathbb{N}^\times$  nun  $h_0 = (n_0, r_0) \in (B_R \cap H)^j$ . Dann existieren  $h_1 = (n_1, r_1), \dots, h_j = (n_j, r_j) \in B_R \cap H$  mit

$$h_0 = h_1 \cdot \dots \cdot h_j = (n_1 \cdot e^{r_1 D} n_2 \cdot \dots \cdot e^{(r_1 + \dots + r_{j-1}) D} n_j, r_1 + \dots + r_j).$$

Somit ist  $|r_0| = |r_1 + \dots + r_j| \leq Cj$ . Ferner ist aufgrund der Kompaktheit der Menge  $\{n \in N : |n|_D \leq 1\}$  die Größe  $M := \sup\{|n \cdot m|_D : |n|_D, |m|_D \leq 1\}$  endlich, und für  $n, m \in F_0, u \leq v$  gilt:

$$|(e^{uD}n)(e^{vD}m)|_D = e^v |(e^{(u-v)D}n)m|_D \leq e^v M.$$

Deshalb folgt für alle  $n, n' \in N$ :  $|n \cdot n'|_D \leq M \max\{|n|_D, |n'|_D\}$  und daraus mit trivialer Induktion

$$|n_0|_D \leq M^{j-1} \max\{|n_1|_D, \dots, e^{r_1 + \dots + r_{j-1}} |n_j|_D\} \leq CM^{j-1} e^{C(j-1)} \leq C' e^{C'(j-1)},$$

wobei  $C' = C + \ln(M)$  ist. □

**Lemma 5.6.** *Es existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $R > 0$  gilt:*

$$B_R \subset \{(n, r, k) \in G : |n|_D \leq Ce^{CR}, |r| \leq C(1+R)\}.$$

*Beweis.* Da  $\overline{B_1}$  kompakt ist, findet sich ein  $n \in \mathbb{N}^\times$  mit  $\overline{B_1} \subset (B_n \cap H) \times K$  (denn  $\cup_{n \in \mathbb{N}^\times} (B_n \cap H) \times K$  ist eine offene Überdeckung von  $G$ ). Da die Abbildung  $(h, k) \mapsto \gamma(k)h$  analytisch ist, findet sich insbesondere ein  $N \in \mathbb{N}^\times$  mit  $\gamma(K)(\overline{B_n} \cap H) \subset B_N \cap H$ . Nach Hilfslemma 5.5 gibt es ferner ein  $C > 0$  derart, daß  $(B_N \cap H)^l \subset \{(n, r) \in H : |n|_D \leq Ce^{C(l-1)}, |r| \leq Cl\}$  für alle  $l \in \mathbb{N}^\times$  gilt.

Sei nun  $j \in \mathbb{N}^\times$ . Zu  $g_0 = (h_0, k_0) \in B_j$  existieren nach Lemma 2.35  $g_i = (h_i, k_i) \in B_1$ ,  $i = 1, \dots, j$ , mit

$$g_0 = g_1 \cdot \dots \cdot g_j = (h_1 \cdot \gamma(k_1)h_2 \cdot \dots \cdot \gamma(k_1 \cdot \dots \cdot k_{j-1})h_j, k_1 \cdot \dots \cdot k_j).$$

Somit ist  $h_0 = (n_0, r_0)$  aus  $(B_N \cap H)^j$ , also folgt  $|n_0|_D \leq Ce^{C(j-1)}$ ,  $|r_0| \leq Cj$ . Sei jetzt  $R > 0$  vorgegeben. Dann existiert ein  $j \in \mathbb{N}$  mit  $j \leq R < j + 1$ . Für  $g = (n, r, k) \in B_R$  bedeutet dies

$$|r| \leq C(j + 1) \leq C(R + 1) \quad \text{und} \quad |n|_D \leq Ce^{Cj} \leq Ce^{CR}.$$

□

**Lemma 5.7.** *Es existiert ein  $C > 0$  derart, daß die beiden Ungleichungen*

$$\int_{d(g) < R} (1 + w(g))^{-1} d^r g \leq C(1 + R)^2 \quad (5.1)$$

und

$$\int_{d(g) < R} d^r g \leq Ce^{CR} \quad (5.2)$$

für alle  $R > 0$  gelten.

In Bemerkung 2.38(c) wurde bereits festgestellt, daß eine Ungleichung der Form (5.2) auf allen zusammenhängenden Lie-Gruppen gilt. Es bietet sich aber an dieser Stelle an, die Methoden und die Notation, die bei der Verifikation der Abschätzung (5.1) Verwendung finden, anschließend zu benutzen, um (5.2) ohne großen Mehraufwand mitzubeweisen.

*Beweis.* Sei  $R > 0$  vorgegeben. Nach Lemma 5.6 existiert ein von  $R$  unabhängiges  $C > 0$  mit

$$B_R \subset \{(n, r, k) \in G : |n|_D \leq Ce^{CR}, 2|r| \leq C(1 + R)\}.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \int_{d(g) < R} \frac{d^r g}{1 + w(g)} &\leq \int_K \int_{2|r| \leq C(1+R)} \left( \int_{|n|_D \leq Ce^{CR}} \frac{dn}{1 + w(n)} \right) dr dk \\ &= C(1 + R) \int_{|n|_D \leq Ce^{CR}} \frac{dn}{1 + |n|_D^Q}. \end{aligned}$$

Um das letzte Integral abzuschätzen, betrachten wir zunächst einmal den Fall, daß sich  $F_0$  bis auf eine Nullmenge durch eine Immersion (oder auch *Karte*,

vgl. [For], §14)  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m = \mathfrak{n}$ , mit  $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$  offen, parametrisieren läßt. (Konstruiert man z. B. die homogene Norm  $|\cdot|_D$  wie im Beweis des Satzes 2.42(i), so ist  $F_0$  gerade der Ellipsoid aus Hilfssatz 2.45. In diesem Fall findet man eine Nullmenge  $M$  von  $F_0$  derart, daß sich  $F_0 \setminus M$  durch eine Immersion parametrisieren läßt.) Sei  $R' := (CR + \ln(C))/Q$ . Die Abbildung  $e^{sD} \circ \varphi$  ist eine Parametrisierung von  $F_s$  und

$$\Phi : U \times ]-\infty, R'[ \rightarrow \{n \in N \setminus \{0\} : |n|_D < e^{R'Q}\}, (u, s) \mapsto e^{sD}(\varphi(u)),$$

ein Diffeomorphismus auf  $\text{ran}(\Phi)$  mit totaler Ableitung („Jacobi-Matrix“)

$$\partial_x \Phi(x)|_{x=(u,s)} = e^{sD} \circ (\partial_u \varphi(u), D(\varphi(u))).$$

Mit einem geeigneten  $C_0 > 0$  folgt

$$\begin{aligned} \int_{|n|_D \leq e^{R'Q}} \frac{dn}{1 + |n|_D^Q} &= \int_{U \times ]-\infty, R'[} \frac{|\det(\partial_x \Phi(x))|}{1 + |\Phi(x)|_D^Q} dx \\ &= \int_{-\infty}^{R'} \left( \int_U \frac{e^{sQ} |\det(\partial_u \varphi(u), D(\varphi(u)))|}{1 + e^{sQ}} du \right) ds \\ &= \int_U |\det(\partial_u \varphi(u), D(\varphi(u)))| du \cdot \int_0^{e^{R'}} \frac{s^{Q-1}}{1 + s^Q} ds \\ &= C_0 \left( \frac{1}{Q} \ln(1 + s^Q) \Big|_0^{e^{R'}} \right) = \frac{C_0}{Q} \ln(1 + e^{R'Q}). \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall, in dem  $F_0$  durch endlich viele Karten überdeckt wird, ist mit einem größeren Notationsaufwand verbunden (zur Definition des Oberflächenintegrals unter diesen Bedingungen siehe [For], §14), läßt sich aber im wesentlichen analog behandeln und liefert ebenfalls das Ergebnis

$$\int_{|n|_D \leq C e^{CR}} \frac{dn}{1 + |n|_D^Q} = C' \ln(1 + C e^{CR})$$

mit einer von  $R$  unabhängigen Konstante  $C'$ . Mit einer geeignet großen, von  $R$  unabhängigen Konstante  $c$  erhalten wir also insgesamt

$$\int_{d(g) < R} (1 + w(g))^{-1} d^r g \leq c(1 + R)^2.$$

Wir zeigen nun die Abschätzung (5.2) wie oben in dem Fall, daß sich  $F_0$  durch eine Karte parametrisieren läßt (modulo einer Nullmenge):

$$\begin{aligned} \int_{d(g) < R} d^r g &\leq C(1+R) \int_{|n|_D \leq e^{R'Q}} dn = C(1+R) \int_{U \times ]-\infty, R'[} |\det(\partial_x \Phi(x))| dx \\ &= C_0 C(1+R) \int_{-\infty}^{R'} e^{sQ} ds = \frac{C_0 C}{Q} (1+R) e^{R'Q} = \frac{C_0 C^2}{Q} (1+R) e^{CR}. \end{aligned}$$

□

## 5.2 $L^1$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns mit komplexem Zeitparameter

**Voraussetzung 5.8.** Es seien  $\mathcal{Y}_1, \dots, \mathcal{Y}_p$  linksinvariante Vektorfelder auf  $G$ , die die Hörmander-Bedingung erfüllen. Wir betrachten den Sub-Laplace-Operator

$$\Delta = - \sum_{j=1}^p \mathcal{Y}_j^2. \quad (5.3)$$

Sei  $(\phi_t)_{t>0}$  der zu  $\Delta$  gehörige Wärmeleitungskern.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß der Wärmeleitungskern die Voraussetzung des Satzes 3.19 erfüllt. Da es vorteilhafter ist, auf dem Hilbert-Raum  $L^2(G)$  als auf dem Banach-Raum  $L^1(G)$  zu rechnen, wird die  $L^1$ -Abschätzung von  $\phi_z$  auf eine gewichtete  $L^2$ -Abschätzung zurückgeführt.

### 5.2.1 Reduktion auf eine gewichtete $L^2$ -Abschätzung

Mit der Gewichtsfunktion  $w$  aus Voraussetzung 5.4 können wir die  $L^1$ -Norm des Wärmeleitungskerns für komplexe Zeiten folgendermaßen abschätzen:

**Satz 5.9.** *Es existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt*

$$\|\phi_{1+is}\|_{L^1(G)} \leq C(1+|s|)^2 (1 + \|w^{1/2} \phi_{1+is}\|_{L^2(G)}). \quad (5.4)$$

Der Beweis des Satzes 5.9 orientiert sich an einer ähnlich gearteten Abschätzung aus der Arbeit [Heb97].

*Beweis.* Setzen wir  $z := 1 + is$ , so gilt für beliebiges  $R > 0$

$$\|\phi_z\|_{L^1(G)} \leq \int_{d(g) < R} |\phi_z(g)| d^r g + \int_{d(g) \geq R} |\phi_z(g)| d^r g =: I_R + I^R.$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung verifiziert man

$$\begin{aligned} I^R &\leq e^{-R} \int_{d(g) \geq R} |\phi_z(g)| e^{d(g)} d^r g \leq e^{-R} \int_G |\phi_z(g)| e^{d(g)} d^r g \\ &\leq e^{-R} \left( \int_G e^{-2Cd(g)} d^r g \right)^{1/2} \left( \int_G |\phi_z(g)|^2 e^{2(1+C)d(g)} d^r g \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Für  $C$  genügend groß ist das Integral  $\int_G e^{-2Cd(g)} d^r g$  nach (5.2) beschränkt. Ferner gilt nach Lemma 3.13

$$\left( \int_G |\phi_z(g)|^2 e^{2(1+C)d(g)} d^r g \right)^{1/2} \leq C' \exp(C'(1+C)^2(1+s^2))$$

mit einer geeigneten Konstante  $C' > 0$ .

Setzt man nun  $R = R(s) := C'(1+C)^2 s^2$ , so folgt:  $I^R$  ist konstant in Abhängigkeit von  $s$ .

Dann ergibt sich unter Ausnutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, Lemma 3.18 und Lemma 5.7

$$\begin{aligned} I_R &\leq \left( \int_{d(g) < R} (1+w(g))^{-1} d^r g \right)^{1/2} \left( \int_G (1+w(g)) |\phi_z(g)|^2 d^r g \right)^{1/2} \\ &\leq C(1+s^2)(\|\phi_z\| + \|w^{1/2}\phi_z\|) = C(1+s^2)(\|\phi_1\| + \|w^{1/2}\phi_z\|) \end{aligned}$$

mit einem geeigneten, von  $s \in \mathbb{R}$  unabhängigen  $C > 0$ . □

Die Sätze 3.19 und 5.9 zeigen, daß die  $s$ -Abhängigkeit der Funktion  $w^{1/2}\phi_{1+is}$  von Interesse ist.

**Lemma 5.10.** *Die Abbildung  $\mathcal{H}_r \ni z \mapsto w^{1/2}\phi_z \in L^2(G)$  ist holomorph.*

*Beweis.* Seien  $g = (h, k) \in G = H \rtimes_\gamma K$  und  $R > 0$ . Ist  $d(g) < R$ , so folgt nach Lemma 5.6 schon  $w(g) \leq Ce^{CR}$  für ein von  $R$  und  $g$  unabhängiges  $C > 0$ . Also gilt ganz allgemein  $w(g) \leq Ce^{Cd(g)}$  für alle  $g \in G$ . Die Behauptung folgt nunmehr direkt aus Lemma 3.14. □

## 5.2.2 $L^2$ -Abschätzung des gewichteten Wärmeleitungs-kerns

Läßt sich die Derivation  $D$  über  $\mathbb{C}$  diagonalisieren, so wollen wir  $D$  im weiteren als *halbeinfach* bezeichnen.

**Satz 5.11.** Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C_\varepsilon > 0$  so, daß die Ungleichung

$$\|w^{1/2}\phi_{1+is}\|_{L^2(G)} \leq C_\varepsilon(1 + |s|)^{\frac{Q}{2p} + \varepsilon} \quad (5.5)$$

für alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt.

Ist  $D$  halbeinfach, so findet man ein  $C_0 > 0$ , mit welchem für alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt:

$$\|w^{1/2}\phi_{1+is}\|_{L^2(G)} \leq C_0(1 + |s|)^{\frac{Q}{2p}}. \quad (5.6)$$

Im Beweis dieses Satzes werden wir uns am Vorgehen von Hebisch im Artikel [Heb98] orientieren. Um mit (5.11) ein Äquivalent zu der von Hebisch verwendeten Schlüsselungleichung zu etablieren, ist aber in unserem Fall ein größerer technischer Aufwand nötig.

Für den Beweis ist es nützlich, eine Vektorraumbasis der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  zu betrachten. Seien dazu  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  eine Basis von  $\mathfrak{n}$ ,  $\mathcal{X}_0 = (0, 1, 0) \in \mathfrak{g}$  und  $\{\mathcal{X}_{-1}, \dots, \mathcal{X}_{-n}\}$  eine Vektorraumbasis von  $\mathfrak{k}$ .

Alle linearen Abbildungen auf  $\mathfrak{n}$  werden wir immer auch gleichzeitig als Matrizen bzgl.  $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_m\}$  auffassen. Für  $k \in K$  sei  $\tilde{\gamma}(k)$  die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die das untenstehende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\gamma(k)} & H \\ \exp_H \uparrow & & \uparrow \exp_H \\ \mathfrak{h} & \xrightarrow{\tilde{\gamma}(k)} & \mathfrak{h} \end{array}$$

In der Notation des Abschnitts 2.2 ist also  $\tilde{\gamma}(k) = d\gamma(k)$  für alle  $k \in K$ . Wir fassen  $\tilde{\gamma}(k)$  als Matrix bzgl. der Basis  $\{\mathcal{X}_0, \dots, \mathcal{X}_m\}$  von  $\mathfrak{h}$  auf.

Für die durch diese Elemente der Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  induzierten linksinvarianten Vektorfelder beweisen wir zunächst einige Hilfssätze.

**Hilfssatz 5.12.** Für die linksinvarianten Vektorfelder  $\mathcal{X}_j^H$ ,  $j = 0, \dots, m$ , auf  $H$  gelten die Formeln

$$\mathcal{X}_0^H = \partial_r \quad \text{und} \quad \mathcal{X}_i^H = (e^{rD} \mathcal{X}_i)^N \quad \text{für } i = 1, \dots, m. \quad (5.7)$$

Ferner ist für alle  $j \in \{0, \dots, m\}$  und  $n \in N^\times$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $k \in K$

$$(\mathcal{X}_j w)(n, r, k) = \sum_{i=1}^m \tilde{\gamma}(k)_{i,j} [(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w](n). \quad (5.8)$$

*Beweis.* Seien  $n \in N$ ,  $r \in \mathbb{R}$  und  $\varphi \in C^1(H)$ . Nach Konvention 2.16 gilt für  $t \in \mathbb{R}$  und  $i = 1, \dots, m$ :  $\exp_H(t\mathcal{X}_0) = (0, t)$  und  $\exp_H(t\mathcal{X}_i) = (\exp_N(t\mathcal{X}_i), 0)$ . Man erhält

$$(\mathcal{X}_0^H \varphi)(n, r) = \frac{d}{dt} \varphi((n, r)(0, t))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi((n, r+t))|_{t=0} = \partial_r \varphi(n, r)$$

und

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}_i^H \varphi)(n, r) &= \frac{d}{dt} \varphi((n, r)(\exp_N(t\mathcal{X}_i), 0))|_{t=0} = \frac{d}{dt} \varphi(n \cdot e^{rD} \exp_N(t\mathcal{X}_i), r)|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \varphi(n \cdot \exp_N(te^{rD}\mathcal{X}_i), r)|_{t=0} = (e^{rD}\mathcal{X}_i)^N \varphi(n, r). \end{aligned}$$

Aus Lemma 2.24, Formel (5.7) und der Tatsache, daß  $w$  unabhängig von der Variable  $r$  ist, folgt Formel (5.8).  $\square$

**Voraussetzung 5.13.** Sei nun  $\tilde{D}$  eine Jordansche Normalform von  $D$ , i. e.,  $\tilde{D}$  habe die Gestalt

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_q \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \delta_1^i & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \delta_{q_i}^i \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

für  $i = 1, \dots, q$ ,  $\delta_j^i \in \{0, 1\}$  für  $j = 1, \dots, q_i$ , und es existiere ein  $U = (u_{i,j}) \in \text{Gl}(m, \mathbb{C})$  mit  $\tilde{D} = UDU^{-1}$ .

**Hilfssatz 5.14.** Es existieren Funktionen  $P_{i,l,\nu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $i, l = 1, \dots, m$ ,  $\nu = 1, \dots, q$ , die für ein von  $s \in \mathbb{R}$  unabhängiges  $C > 0$  die Abschätzung

$$|P_{i,l,\nu}(s)| \leq C(1 + |s|^\mu), \quad \mu = \max\{q_i : i = 1, \dots, q\},$$

erfüllen, derart, daß für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $s \in \mathbb{R}$  gilt:

$$e^{sD} \mathcal{X}_i = \sum_{l=1}^m \left( \sum_{\nu=1}^q e^{s\rho_\nu} P_{i,l,\nu}(s) \right) \mathcal{X}_l. \quad (5.9)$$

Ist zudem  $D$  halbeinfach, so sind die Funktionen  $P_{i,l,\nu}$  beschränkt.

*Beweis.* Setze  $(\tilde{u}_{i,j}) := U^{-1}$ . Es gilt für  $\alpha = 1, \dots, m$

$$e^{s\tilde{D}} \mathcal{X}_\alpha = \sum_{i=1}^q e^{s\rho_i} \sum_{\beta=1}^{q_i+1} p_{i,\beta,\alpha}(s) \mathcal{X}_{i_\beta}$$

mit  $i_\beta = (q_1 + 1) + \dots + (q_{i-1} + 1) + \beta$  und Funktionen  $p_{i_\beta,\alpha} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$p_{i_\beta,\alpha}(s) \in \left\{ e^{is\Im(\lambda_i)} \frac{s^k}{k!} : k = 0, \dots, q_i \right\} \cup \{0\}.$$

Deshalb folgt

$$\begin{aligned}
e^{sD} \mathcal{X}_j &= (U^{-1} e^{s\tilde{D}} U) \mathcal{X}_j = (U^{-1} e^{s\tilde{D}}) \left( \sum_{\alpha=1}^m u_{\alpha,j} \mathcal{X}_\alpha \right) \\
&= U^{-1} \left( \sum_{\alpha=1}^m u_{\alpha,j} \sum_{i=1}^q e^{s\rho_i} \sum_{\beta=1}^{q_i+1} p_{i\beta,\alpha}(s) \mathcal{X}_{i\beta} \right) \\
&= \sum_{\alpha=1}^m u_{\alpha,j} \sum_{i=1}^q e^{s\rho_i} \sum_{\beta=1}^{q_i+1} p_{i\beta,\alpha}(s) \sum_{l=1}^m \tilde{u}_{l,i\beta} \mathcal{X}_l \\
&= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{i=1}^q e^{s\rho_i} \left( \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^{q_i+1} u_{\alpha,j} \tilde{u}_{l,i\beta} p_{i\beta,\alpha}(s) \right) \right) \mathcal{X}_l.
\end{aligned}$$

Offenbar erfüllen die Funktionen

$$P_{j,l,i} := \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^{q_i+1} u_{\alpha,j} \tilde{u}_{l,i\beta} p_{i\beta,\alpha} \quad (5.10)$$

die Bedingungen des Hilfssatzes 5.14.

Im Fall, daß  $D$  halbeinfach ist, liegt mit  $e^{s\tilde{D}}$  eine Diagonalmatrix vor. Folglich sind dann die Abbildungen  $p_{i\beta,\alpha}$  durch  $p_{i\beta,\alpha}(s) = e^{is\Im(\lambda_i)} \delta_{i\beta,\alpha}$  gegeben, also die in (5.10) definierten Funktionen  $P_{j,l,i}$  beschränkt.  $\square$

**Hilfssatz 5.15.** Für alle  $i \in \{-n, \dots, -1\}$  ist  $\mathcal{X}_i w \equiv 0$ .

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C_\varepsilon > 0$  derart, daß für alle  $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ ,  $n \in N^\times$ ,  $r \in \mathbb{R}$  und  $k \in K$  gilt:

$$|\mathcal{X}_i w|(n, r, k) \leq C_\varepsilon \sum_{\nu=1}^q \left\{ e^{r(\rho_\nu + \varepsilon)} w(n)^{\frac{Q - \rho_\nu - \varepsilon}{Q}} + e^{r(\rho_\nu - \varepsilon)} w(n)^{\frac{Q - \rho_\nu + \varepsilon}{Q}} \right\}. \quad (5.11)$$

Ist  $D$  halbeinfach, so kann man auf die einfachere Ungleichung

$$|\mathcal{X}_i w|(n, r, k) \leq C_0 \sum_{\nu=1}^q e^{r\rho_\nu} w(n)^{\frac{Q - \rho_\nu}{Q}}, \quad (5.12)$$

mit einer geeigneten Konstante  $C_0 > 0$ , zurückgreifen.

*Beweis.* Aus Lemma 2.24 folgt, daß für  $i = -n, \dots, -1$  die Funktionen  $\mathcal{X}_i w$  konstant null sind, da  $w$  nicht von der Variable  $k$  abhängt.

Wir wenden uns nun dem Beweis von Ungleichung (5.11) zu: aus der Formel (5.9) erhalten wir für  $n \in F_0$

$$\begin{aligned}
[(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w](e^{sD} n) &= \frac{d}{dt} w(e^{sD} n \cdot \exp_N(te^{rD} \mathcal{X}_i))|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} w(e^{sD} (n \cdot e^{-sD} \exp_N(te^{rD} \mathcal{X}_i)))|_{t=0} \\
&= e^{sQ} \frac{d}{dt} w(n \cdot \exp_N(te^{(r-s)D} \mathcal{X}_i))|_{t=0} \\
&= e^{sQ} (e^{(r-s)D} \mathcal{X}_i)^N w(n) \\
&= \sum_{\nu=1}^q e^{sQ+(r-s)\rho_\nu} \sum_{l=1}^m P_{i,l,\nu}(r-s) (\mathcal{X}_l^N w)(n).
\end{aligned}$$

Nach den Eigenschaften der Funktionen  $P_{i,l,\nu}$  aus Hilfssatz 5.14 existieren also für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $c_\varepsilon > 0$  mit

$$|(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w|(e^{sD} n) \leq \begin{cases} c_\varepsilon \sum_{\nu=1}^q e^{sQ+(r-s)(\rho_\nu+\varepsilon)} \sum_{l=1}^m |\mathcal{X}_l^N w|(n), & r \geq s, \\ c_\varepsilon \sum_{\nu=1}^q e^{sQ+(r-s)(\rho_\nu-\varepsilon)} \sum_{l=1}^m |\mathcal{X}_l^N w|(n), & r < s. \end{cases} \quad (5.13)$$

Setze nun  $C := c_\varepsilon \max\{\sum_{l=1}^m |\mathcal{X}_l^N w|(n) : n \in F_0\}$ . Dann folgt für  $n \in F_0$ ,  $r \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
& |(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w|(e^{sD} n) \\
& \leq C e^{sQ} \sum_{\nu=1}^q \{e^{(r-s)(\rho_\nu+\varepsilon)} w(n)^{\frac{Q-\rho_\nu-\varepsilon}{Q}} + e^{(r-s)(\rho_\nu-\varepsilon)} w(n)^{\frac{Q-\rho_\nu+\varepsilon}{Q}}\}.
\end{aligned}$$

Durch Ausnutzung der Homogenitätseigenschaft von  $w$  erhalten wir

$$|(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w|(e^{sD} n) \leq C \sum_{\nu=1}^q \{e^{r(\rho_\nu+\varepsilon)} w(e^{sD} n)^{\frac{Q-\rho_\nu-\varepsilon}{Q}} + e^{r(\rho_\nu-\varepsilon)} w(e^{sD} n)^{\frac{Q-\rho_\nu+\varepsilon}{Q}}\}. \quad (5.14)$$

Da  $N^\times = \{e^{sD} F_0 : s \in \mathbb{R}\}$ , folgt aus den Formeln (5.8) und (5.14) die Ungleichung (5.11), denn die Funktionen  $\tilde{\gamma}_{i,j}$  sind beschränkt auf  $K$ .

Im Fall, daß  $D$  halbeinfach ist, vereinfacht sich nach Hilfssatz 5.14 die Abschätzung (5.13) zu

$$|(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w|(e^{sD} n) \leq c_0 \sum_{\nu=1}^q e^{sQ+(r-s)\rho_\nu} \sum_{l=1}^m |\mathcal{X}_l^N w|(n)$$

mit einer geeigneten Konstante  $c_0 > 0$ . Man erhält dann

$$|(e^{rD} \mathcal{X}_i)^N w|(e^{sD} n) \leq C \sum_{\nu=1}^q e^{r\rho_\nu} w(e^{sD} n)^{\frac{Q-\rho_\nu}{Q}}$$

für alle  $n \in F_0$  und  $s \in \mathbb{R}$ . Somit folgt die Ungleichung (5.12).  $\square$

Da alle  $\mathcal{Y}_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , sich linear aus den  $\mathcal{X}_i$ ,  $i = -n, \dots, 0, \dots, m$ , kombinieren lassen, erhalten wir aus Hilfssatz 5.15 umgehend

**Korollar 5.16.** *Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C_\varepsilon > 0$  derart, daß für alle  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $n \in N^\times$ ,  $r \in \mathbb{R}$  und  $k \in K$  gilt:*

$$|\mathcal{Y}_i w|(n, r, k) \leq C_\varepsilon \sum_{\nu=1}^q \left\{ e^{r(\rho_\nu + \varepsilon)} w(n)^{\frac{Q-\rho_\nu - \varepsilon}{Q}} + e^{r(\rho_\nu - \varepsilon)} w(n)^{\frac{Q-\rho_\nu + \varepsilon}{Q}} \right\}. \quad (5.15)$$

Ist  $D$  halbeinfach, so gilt sogar die Ungleichung

$$|\mathcal{Y}_i w|(n, r, k) \leq C_0 \sum_{\nu=1}^q e^{r\rho_\nu} w(n)^{\frac{Q-\rho_\nu}{Q}} \quad (5.16)$$

mit einer geeigneten, von  $i$ ,  $n$ ,  $r$  und  $k$  unabhängigen Konstante  $C_0 > 0$ .

Um den eigentlichen Beweis von Satz 5.11 ein wenig übersichtlicher zu gestalten, beweisen wir vorher noch ein Lemma und einen Hilfssatz.

**Lemma 5.17.** *Für alle  $\delta > 0$  existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(z) \geq \delta$  die Ungleichung  $\|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\| \leq C$  erfüllt ist; dabei bezeichnet  $e^{r\frac{Q}{2}}$  die Funktion  $g = (n, r, k) \mapsto e^{r\frac{Q}{2}}$ .*

*Beweis.* Ist  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(z) \geq \delta$  und läßt sich  $\mathcal{Y}_j$  aus den  $\mathcal{X}_i$ ,  $i = -n, \dots, 0, \dots, m$ , linear in der Form  $\mathcal{Y}_j = \sum_{i=-n}^m a_{i,j} \mathcal{X}_i$  kombinieren, so ist mit  $\eta_j := \sum_{i=0}^m a_{i,j} \tilde{\gamma}_{0,i}$

$$\langle \Delta \phi_z, e^{rQ} \phi_z \rangle = \sum_{j=1}^p (\|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + \langle \mathcal{Y}_j \phi_z, \eta_j Q e^{rQ} \phi_z \rangle).$$

Daraus folgt mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung und Lemma 3.15

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^p \|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 \\
& \leq |\langle e^{r\frac{Q}{2}} \Delta \phi_z, e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z \rangle| + \sum_{j=1}^p |\eta_j|_\infty Q |\langle e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z, e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z \rangle| \\
& \leq |\langle e^{r\frac{Q}{2}} \partial_z \phi_z, e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z \rangle| + \sum_{j=1}^p \|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\| (|\eta_j|_\infty Q \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\|) \\
& \leq \|e^{r\frac{Q}{2}} \partial_z \phi_z\| \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\| + \sum_{j=1}^p \frac{1}{2} (\|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + |\eta_j|_\infty^2 Q^2 \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\|^2).
\end{aligned}$$

Somit existiert eine Konstante  $C > 0$  mit

$$\|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 \leq 2 \|e^{r\frac{Q}{2}} \partial_z \phi_z\| \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\| + C \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\|^2$$

für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$ . Nach Lemma 3.18 gilt  $\|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\| \leq \|\phi_\delta\|$ . Für  $g = (n, r, k)$  gilt nach Lemma 5.6:  $|r| \leq C(1 + d(g))$ . Das impliziert  $f(g) := e^{r\frac{Q}{2}} \leq \tilde{C} e^{\tilde{C}d(g)}$  für ein geeignetes  $\tilde{C} > 0$ .

Nach Lemma 3.14 ist  $\|e^{r\frac{Q}{2}} \partial_z \phi_z\| \leq C$ , z. B. mit  $C = \frac{2}{\delta} \|\phi_{\frac{\delta}{2}}\|$ .  $\square$

**Hilfssatz 5.18.** Seien  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $\delta > 0$ ,  $\eta > 0$  und  $\tilde{C} > 0$  vorgegeben.

(i) Ist  $Q \geq 2\eta$ , so existiert eine Konstante  $C > 0$  derart, daß für alle  $\alpha > 0$  und alle  $z$  mit  $\Re(z) \geq \delta$  gilt:

$$\langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, e^{r\eta} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} |\phi_z| \rangle \leq \frac{\alpha}{\tilde{C}} \|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + \frac{C}{\alpha} \|w^{1/2} \phi_z\|^{\frac{2Q-4\eta}{Q}}. \quad (5.17)$$

(ii) Gilt  $2Q > 2\eta > Q$ , so existiert ein  $C > 0$  mit

$$\langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, e^{r\eta} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} |\phi_z| \rangle \leq \frac{\alpha}{\tilde{C}} \|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + C \alpha^{\frac{\eta-Q}{\eta}} \quad (5.18)$$

für alle  $\alpha > 0$  und  $z$  mit  $\Re(z) \geq \delta$ . Es gilt offenbar  $0 > (\eta - Q)/\eta > -1$ .

*Beweis.* Es seien  $\alpha, \tilde{C}, \eta, \delta > 0$  vorgegeben. Ferner seien  $j \in \{1, \dots, p\}$  und  $z \in \mathcal{H}_r$  mit  $\Re(z) \geq \delta$ .

(i) Gilt  $Q \geq 2\eta$ , so folgt

$$\begin{aligned}
\langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, e^{r\eta} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} |\phi_z| \rangle & \leq \|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\| \|e^{r\eta} w^{\frac{Q-\eta}{Q} - \frac{1}{2}} \phi_z\| \\
& \leq \frac{\alpha}{\tilde{C}} \|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + \frac{\tilde{C}}{\alpha} \|e^{r\eta} w^{\frac{Q-2\eta}{2Q}} \phi_z\|^2.
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Hölderschen Ungleichung erhalten wir ferner:

$$\|e^{r\eta} w^{\frac{Q-2\eta}{2Q}} \phi_z\|^2 \leq \left( \int_G w |\phi_z|^2 d^r g \right)^{\frac{Q-2\eta}{Q}} \left( \int_G e^{rQ} |\phi_z|^2 d^r g \right)^{\frac{2\eta}{Q}} \leq C \|w^{1/2} \phi_z\|^{\frac{2Q-4\eta}{Q}}, \quad (5.19)$$

da nach Lemma 3.18

$$\int_G e^{rQ} |\phi_z|^2 d^r g = \|\sqrt{m} \phi_z\|^2 \leq \|\phi_\delta\|^2$$

gilt. Insgesamt erhalten wir also die Ungleichung (5.17).

(ii) Gilt andererseits  $2Q > 2\eta > Q$ , so kann man den Term  $\langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, e^{r\eta} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} |\phi_z| \rangle$  nicht wie im Fall (i) abschätzen, da  $\frac{Q-2\eta}{Q} < 0$  wäre und somit die Höldersche Ungleichung nicht mehr wie in (5.19) angewendet werden kann.

Daher verfahren wir wie folgt: Unter Verwendung von Lemma 3.18 und der Hölder-Ungleichung mit Exponenten  $p = Q/2(Q - \eta)$  und  $p' = Q/(2\eta - Q)$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, e^{r\eta} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} |\phi_z| \rangle &\leq \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\| \|e^{r(\eta-\frac{Q}{2})} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} \mathcal{Y}_j \phi_z\| \leq C \|e^{r(\eta-\frac{Q}{2})} w^{\frac{Q-\eta}{Q}} \mathcal{Y}_j \phi_z\| \\ &\leq C \|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^{\frac{2(Q-\eta)}{Q}} \|e^{\frac{rQ}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^{\frac{2\eta-Q}{Q}}. \end{aligned}$$

Da ein  $C > 0$  existiert mit  $\|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\| \leq C$  (siehe Lemma 5.17) und ferner für alle  $a, b > 0$  und  $r > 1$  die Ungleichung  $ab \leq a^r + b^{r'}$ ,  $r' = \frac{r}{r-1}$ , gilt, erhalten wir mit  $r = Q/(Q - \eta)$  für geeignetes  $C > 0$  die Ungleichung (5.18).  $\square$

*Beweis des Satzes 5.11.* Nach Korollar 3.17 genügt es, die Ungleichung (5.5) für  $s \geq 0$  zu beweisen. Für  $s \in [0, 1]$  folgt nach Lemma 5.10 insbesondere die Existenz eines von  $s$  unabhängigen  $C > 0$  mit  $\|w^{1/2} \phi_{1+is}\| \leq C$ .

Im weiteren betrachten wir also nur noch den Fall  $s \geq 1$ . Für  $0 < \alpha \leq 1$  setzen wir

$$\psi_\alpha(s) := \|w^{1/2} \phi_{\frac{1}{2}+(i+\alpha)s}\|^2.$$

Ferner setzen wir  $z := \frac{1}{2} + (i + \alpha)s$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \partial_s \psi_\alpha(s) &= 2\Re \langle \partial_s \phi_z, w \phi_z \rangle = 2\Re \langle (i + \alpha) \partial_z \phi_z, w \phi_z \rangle = -2\Re \langle (i + \alpha) \langle \Delta \phi_z, w \phi_z \rangle \rangle \\ &= -2\Re \left( (i + \alpha) \sum_{j=1}^p (\|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + \langle \mathcal{Y}_j \phi_z, (\mathcal{Y}_j w) \phi_z \rangle) \right) \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^p \left( -\alpha \|w^{1/2} \mathcal{Y}_j \phi_z\|^2 + 2 \langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, |\mathcal{Y}_j w| |\phi_z| \rangle \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Fall (1):  $\dim \mathbf{n} = 1$ . In diesem Fall ist  $D$  die reelle  $1 \times 1$ -Matrix ( $Q$ ). Mit der Abschätzung (5.16) erhalten wir für  $j \in \{1, \dots, p\}$  die Ungleichung  $|\mathcal{Y}_j w|(n, r, k) \leq C_0 e^{rQ}$ , also gilt

$$\langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, |\mathcal{Y}_j w| |\phi_z| \rangle \leq C_0 \|e^{r\frac{Q}{2}} \mathcal{Y}_j \phi_z\| \|e^{r\frac{Q}{2}} \phi_z\| \leq C$$

mit  $C > 0$  unabhängig von  $s, \alpha$  (vgl. Lemma 5.17 und Lemma 3.18).

Mit einer von  $s$  und  $\alpha$  unabhängigen Konstante  $C > 0$  folgt  $\partial_s \psi_\alpha(s) \leq C$ , also  $\psi_\alpha(s) \leq C(1+s)$  und somit (setze  $\alpha := \frac{1}{2s}$ )

$$\|w^{1/2} \phi_{1+is}\| \leq C \sqrt{1+|s|} \quad \text{für } s \geq 1.$$

Fall (2):  $\dim \mathbf{n} \geq 2$ . Für  $j = 1, \dots, p$  und  $\varepsilon > 0$  gilt nach Korollar 5.16

$$\langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, |\mathcal{Y}_j w| |\phi_z| \rangle \leq C_\varepsilon \sum_{\nu=1}^q \langle |\mathcal{Y}_j \phi_z|, (e^{r(\rho_\nu + \varepsilon)} w^{\frac{Q - (\rho_\nu + \varepsilon)}{Q}} + e^{r(\rho_\nu - \varepsilon)} w^{\frac{Q - (\rho_\nu - \varepsilon)}{Q}}) |\phi_z| \rangle. \quad (5.21)$$

(Im Fall, daß  $D$  halbeinfach ist, kann man getrost in (5.21) und im Rest des Beweises  $\varepsilon = 0$  setzen.) Wählt man  $\varepsilon < \rho$ , so erfüllt für jedes  $\nu \in \{1, \dots, q\}$  die Größe  $\rho_\nu + \varepsilon$  die Ungleichung  $Q > \rho_\nu + \varepsilon$ . Nach (5.20), (5.21), (5.17) und (5.18) (mit der Wahl von  $\tilde{C} := 4qC_\varepsilon$ ) können wir  $\partial_s \psi_\alpha$  gegen eine Summe über  $\eta \in \{\rho_\nu \pm \varepsilon : \nu = 1, \dots, q\}$ , bestehend aus Termen der Form

$$\frac{C}{\alpha} \|w^{1/2} \phi_z\|^{\frac{2Q-4\eta}{Q}} = \frac{C}{\alpha} \psi_\alpha^{\frac{Q-2\eta}{Q}} \quad \text{für } Q \geq 2\eta$$

und

$$C \alpha^{\frac{\eta-Q}{\eta}} \leq \frac{C}{\alpha} \quad \text{für } 2Q > 2\eta > Q,$$

abschätzen. Daher existiert ein  $C > 0$  mit

$$\partial_s \psi_\alpha(s) \leq \frac{C}{\alpha} (1 + \psi_\alpha(s))^{\frac{Q-2(\rho-\varepsilon)}{Q}} \quad \text{für alle } s \geq 1, \alpha \in ]0, 1]$$

( $C$  ist dabei abhängig von  $\varepsilon > 0$ , aber unabhängig von  $\alpha$  und  $s$ ).

Für alle  $s \geq 1$  wird  $\psi_\alpha$  von der Lösung  $u$  des Anfangswertproblems

$$u'(s) = \frac{C}{\alpha} (1 + u(s))^{\frac{Q-2(\rho-\varepsilon)}{Q}}, \quad u(1) = \psi_\alpha(1),$$

majorisiert. Es ist

$$u(s) = \left( \frac{2(\rho-\varepsilon)C}{Q\alpha} (s-1) + (1 + \psi_\alpha(1))^{\frac{2(\rho-\varepsilon)}{Q}} \right)^{\frac{Q}{2(\rho-\varepsilon)}} - 1,$$

und es existiert ein von  $\alpha \in ]0, 1]$  unabhängiges  $C$  mit  $\psi_\alpha(1) = \|w^{1/2} \phi_{\frac{1}{2} + \alpha i}\|^2 \leq C$ . Somit ergibt sich die Existenz eines  $c_\varepsilon > 0$  für  $\alpha = \frac{1}{2s}$  mit

$$\|w^{1/2} \phi_{1+is}\| = \sqrt{\psi_\alpha(s)} \leq c_\varepsilon (1 + |s|)^{\frac{Q}{2(\rho-\varepsilon)}}.$$

□

### 5.2.3 Ergebnisse des Kapitels

Aus Satz 5.9 und Satz 5.11 ergibt sich sofort das folgende Korollar:

**Korollar 5.19.** *Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $C_\varepsilon > 0$  so, daß für alle  $s \in \mathbb{R}$*

$$\|\phi_{1+is}\|_{L^1(G)} \leq C_\varepsilon(1 + |s|)^{\frac{Q}{2p}+2+\varepsilon} \quad (5.22)$$

*gilt. Ist  $D$  halbeinfach, so existiert ein  $C_0 > 0$  derart, daß die Ungleichung*

$$\|\phi_{1+is}\|_{L^1(G)} \leq C_0(1 + |s|)^{\frac{Q}{2p}+2} \quad (5.23)$$

*für alle  $s \in \mathbb{R}$  erfüllt ist.*

Mit Satz 3.19 und Korollar 5.19 läßt sich dann das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren:

**Theorem 5.20.** *Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger. Liegt  $f$  in  $H^\kappa(\mathbb{R})$  für ein  $\kappa > \frac{Q}{2p} + \frac{5}{2}$ , so läßt sich  $f(\Delta)$  für alle  $p \in [1, \infty]$  zu einem stetigen Endomorphismus auf  $L^p(G)$ , gegeben durch Rechtsfaltung mit einer Funktion aus  $L^1(G)$ , fortsetzen.*

*Ist  $p \in [1, \infty[$ , so ist die stetige Fortsetzung eindeutig.*

**Bemerkung 5.21.** In den Beweisschritten dieses Kapitels scheint die Nilpotenz der Gruppe  $N$  an keiner Stelle direkt einzugehen. So lassen sich nahezu alle Argumente auch auf zusammenhängende und einfach zusammenhängende exponentielle Lie-Gruppen  $N$  anwenden, die ein biinvariantes Haar-Maß besitzen. (Diese Klasse von Gruppen enthält die zusammenhängenden und einfach zusammenhängenden nilpotenten Lie-Gruppen als echte Teilmenge.)

Trotzdem wäre durch solch eine „verallgemeinerte Beweisführung“ nichts gewonnen: Damit zur linearen Abbildung  $D \in \text{der}(\mathfrak{n})$  homogene Normen existieren, muß  $D$  nach Satz 2.42 insbesondere invertierbar sein. In diesem Fall folgt aber aus Lemma 2.17(iii), daß die Lie-Algebra  $\mathfrak{n}$  (und somit auch die Gruppe  $N$ ) notwendigerweise schon nilpotent zu sein hat.

## Kapitel 6

# Sub-Laplace-Operatoren auf semidirekten Produkten $\mathbb{H}_1 \rtimes \mathbb{R}$

Auffällig an den Ergebnissen aus Korollar 5.19 und Theorem 5.20 ist, daß die Exponenten in den Ungleichungen (5.22), (5.23) und der Exponent  $\kappa$  aus Theorem 5.20 gegen unendlich streben, wenn dies gleichermaßen für das Verhältnis  $Q/\rho$  (i. e. Spur der Derivation  $D$ , geteilt durch den kleinsten Realteil aller Eigenwerte von  $D$ ) gilt.

Es gibt im Fall der trivialen kompakten Gruppe  $K = \{1_K\}$  Indikatoren, die vermuten lassen, daß dies lediglich an der hier verwendeten Beweismethode (oder genauer an der spezifischen Gewichtswahl) liegt, aber nicht notwendigerweise eine reale zugrundeliegende mathematische Gegebenheit widerspiegelt.

So wurden z. B. in der Arbeit [Mus98b] Gruppen der Form  $H = \mathbb{R}^2 \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  mit  $\theta(t) = e^{tD}$ ,  $D$  eine beliebige  $2 \times 2$ -Matrix, betrachtet und für (bestimmte) Sub-Laplace-Operatoren und deren Wärmeleitungskerne die Abschätzung

$$\|\phi_{1+i\xi}\|_{L^1(H)} \leq C(1 + |\xi|)^5 \quad (6.1)$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  bewiesen. (In einigen Fällen sind die dort erzielten Abschätzungen ein wenig besser; die Idee, die den aufwendigsten Fall behandelt, stammt dabei aus [Heb97].) Der Exponent ist hier unabhängig von der speziell betrachteten Wirkung  $e^{tD}$  – und somit unabhängig vom Verhältnis  $Q/\rho$  – beschränkt.

Betrachtet man nun semidirekte Produkte  $\mathbb{H}_1 \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  der dreidimensionalen Heisenberg-Gruppe mit der reellen Achse, so kann es nach dem bereits in der Einleitung erwähnten Artikel [ChM96] keine Abschätzung der Gestalt (6.1) mit von  $\theta$  unabhängigen Exponenten geben, denn es liegt nicht einmal für alle Wirkungen  $\theta$  differenzierbarer  $L^p$ -Funktionalkalkül des Sub-Laplace-Operators vor.

Beschränkt man sich bei den Gruppenhomomorphismen  $\theta$  auf solche, die von Derivationen  $D$  in Diagonalgestalt mit nicht negativen Einträgen herrühren,

so wird in diesem Kapitel gezeigt, daß dann für alle  $\theta$  eine Abschätzung der Form (6.1) mit Exponent 6 gilt (s. Korollar 6.21 und Theorem 6.22). Dies ist unabhängig davon, ob ein Diagonaleintrag gegen Null strebt oder gar selbst schon gleich Null ist.

Das Resultat wird durch Übertragung der Methoden aus [Heb97] und [Mus98b] auf die im vorliegenden Kapitel behandelte Situation erzielt.

Das grundlegende Vorgehen ist dabei wie in Kapitel 5. Wir werden hier aber eine andere Gewichtsfunktion  $w$  betrachten, die unabhängig von der konkreten Wirkung  $\theta$  ist. Deshalb bedarf es anderer Methoden, um eine gewichtete  $L^2$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns herzuleiten.

## 6.1 Semidirekte Produkte der Heisenberg-Gruppe $\mathbb{H}_1$ mit der reellen Achse

**Voraussetzung 6.1.** Die *Heisenberg-Gruppe*  $\mathbb{H}_1$  ist der  $\mathbb{R}^3$ , ausgestattet mit der Multiplikation

$$(x, y, u)(x', y', u') = \left( x + x', y + y', u + u' + \frac{1}{2}(xy' - yx') \right).$$

Das neutrale Element ist  $0 = (0, 0, 0)$  und das inverse Element zu  $h = (x, y, u)$  ist  $h^{-1} = (-x, -y, -u)$ .  $\mathbb{H}_1$  ist eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende stratifizierte nilpotente Lie-Gruppe.

Die dazugehörige Lie-Algebra ist die sogenannte *Heisenberg-Algebra*  $\mathfrak{h}_1 = \mathbb{R}^3$ , versehen mit der Lie-Klammer

$$[(p, q, t), (p', q', t')] = (0, 0, pq' - p'q).$$

Die Exponentialabbildung  $\exp_{\mathbb{H}_1} : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathbb{H}_1$  ist die Identität  $I_{\mathbb{R}^3}$ .

Seien  $\alpha, \beta \geq 0$  und  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{H}_1)$  der durch

$$\theta(r)(x, y, u) = (e^{\alpha r}x, e^{\beta r}y, e^{(\alpha+\beta)r}u)$$

definierte Gruppenhomomorphismus und  $G$  das semidirekte Produkt  $\mathbb{H}_1 \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$ . Die Multiplikation auf  $G$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & (x, y, u, r)(x', y', u', r') \\ &= \left( x + e^{\alpha r}x', y + e^{\beta r}y', u + e^{(\alpha+\beta)r}u' + \frac{1}{2}(e^{\beta r}xy' - e^{\alpha r}yx'), r + r' \right). \end{aligned}$$

Sei  $d$  eine linksinvariante Riemannsche Abstandsfunktion auf  $G$ .

Ist  $D$  die durch  $D(p, q, t) = (\alpha p, \beta q, (\alpha + \beta)t)$  definierte Derivation auf  $\mathfrak{h}_1$ , so gilt offenbar  $\theta(r) = e^{rD}$  für alle  $r \in \mathbb{R}$ . Für die Spur  $Q$  von  $D$  gilt dann:  $Q = 2(\alpha + \beta)$ .

Das neutrale Element  $1_G$  der Gruppe  $G$  ist durch  $(0, 0, 0, 0)$  gegeben. Das inverse Element zu  $g := (x, y, u, r)$  ist  $g^{-1} = (-e^{-\alpha r} x, -e^{-\beta r} y, -e^{-(\alpha+\beta)r} u, -r)$ . Analog wie in Lemma 5.3 ist das rechtsinvariante Haar-Maß  $d^r g$  dann das Lebesgue-Maß  $dx dy du dr$  auf  $\mathbb{R}^4$  und der modulare Faktor ist  $m(g) = m(x, y, u, r) = e^{2(\alpha+\beta)r}$  (dies gilt auch im Fall  $\alpha = 0$  oder  $\beta = 0$ ). Die durch die Lie-Algebren-elemente  $\mathcal{X}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathcal{X}_2 = (0, 1, 0, 0)$ ,  $\mathcal{X}_3 = (0, 0, 1, 0)$  und  $\mathcal{X}_0 = (0, 0, 0, 1)$  aus  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \rtimes_D \mathbb{R}$  induzierten linksinvarianten Vektorfelder auf  $G$  sind

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1 &= e^{\alpha r} \left( \partial_x - \frac{1}{2} y \partial_u \right), & \mathcal{X}_2 &= e^{\beta r} \left( \partial_y + \frac{1}{2} x \partial_u \right), \\ \mathcal{X}_3 &= e^{(\alpha+\beta)r} \partial_u, & \mathcal{X}_0 &= \partial_r.\end{aligned}$$

Der Operator

$$\begin{aligned}\Delta_S &= - \sum_{j=0}^2 \mathcal{X}_j^2 \\ &= -e^{2\alpha r} \left( \partial_x^2 - y \partial_x \partial_u + \frac{1}{4} y^2 \partial_u^2 \right) - e^{2\beta r} \left( \partial_y^2 + x \partial_y \partial_u + \frac{1}{4} x^2 \partial_u^2 \right) - \partial_r^2\end{aligned}$$

ist ein Sub-Laplace-Operator und

$$\begin{aligned}\Delta_L &= - \sum_{j=0}^3 \mathcal{X}_j^2 \\ &= -e^{2\alpha r} \left( \partial_x^2 - y \partial_x \partial_u + \frac{1}{4} y^2 \partial_u^2 \right) - e^{2\beta r} \left( \partial_y^2 + x \partial_y \partial_u + \frac{1}{4} x^2 \partial_u^2 \right) \\ &\quad - e^{2(\alpha+\beta)r} \partial_u^2 - \partial_r^2\end{aligned}$$

ein voller Laplace-Operator auf  $G$ .

Im weiteren soll  $\Delta$  sowohl den Sub-Laplace-Operator  $\Delta_S$ , als auch den vollen Laplace-Operator  $\Delta_L$  bezeichnen. Der Wärmeleitungskern von  $\Delta$  sei  $(\phi_t)_{t>0}$ . Wollen wir konkret den Wärmeleitungskern des vollen Laplace-Operators oder des Sub-Laplace-Operators betrachten, so schreiben wir  $\phi_t^L$  bzw.  $\phi_t^S$ . Ferner seien  $J(\Delta_S) := \{0, 1, 2\}$  und  $J(\Delta_L) := \{0, 1, 2, 3\}$ .

## 6.2 $L^1$ -Abschätzung des Wärmeleitungskerns zu komplexen Zeiten

Wie im Kapitel 5 soll auch hier der Satz 3.19 genutzt werden, um Aussagen über den differenzierbaren  $L^p$ -Funktionalkalkül von  $\Delta$  zu folgern.

## 6.2.1 Rückführung auf eine gewichtete $L^2$ -Abschätzung

**Voraussetzung 6.2.** Sei  $w : G \rightarrow \mathbb{R}$  die durch

$$w(x, y, u, r) = (1 + |x|)(1 + |y|)(1 + |u|)$$

definierte Gewichtsfunktion.

**Lemma 6.3.** *Es existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $g = (x, y, u, r) \in G$  die Abschätzungen  $|r| \leq C(1 + d(g))$  und  $|x| + |y| + |u| \leq Ce^{Cd(g)}$  gelten.*

*Beweis.* Im Fall  $\alpha, \beta > 0$  ist eine homogene Norm auf  $\mathbb{H}_1$  bzgl.  $D$  gegeben durch

$$|(x, y, u)|_D := ((x^2)^{1/\alpha} + (y^2)^{1/\beta} + (u^2)^{1/(\alpha+\beta)})^{1/2}, \quad (6.2)$$

und für beliebige  $C > 0$  ist  $\{(n, r) \in G : |n|_D \leq Ce^{CR}, |r| \leq C(1 + R)\}$  eine Teilmenge von  $\{(x, y, u, r) \in G : |x|, |y|, |u| \leq Ce^{C(\alpha+\beta)R}, |r| \leq C(1 + R)\}$ ; somit folgt die Behauptung aus Lemma 5.6 (mit  $K = \{1_K\}$ ).

Der allgemeine Fall (also inklusive  $\alpha = 0$  oder  $\beta = 0$ ) läßt sich nach einem ähnlichen Schema wie dem aus den Beweisen der Lemmata 5.5 und 5.6 zeigen.  $\square$

**Lemma 6.4.** *Es existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $R > 0$  gilt:*

$$\int_{d(g) \leq R} w(g)^{-1} d^r g \leq C(1 + R)^4.$$

*Beweis.* Mit Hilfe des Lemmas 6.3 ergibt sich für ein generisches  $C > 0$

$$\begin{aligned} \int_{d(g) \leq R} w(g)^{-1} d^r g &\leq C(1 + R) \int_0^{Ce^{CR}} \frac{dx}{1+x} \int_0^{Ce^{CR}} \frac{dy}{1+y} \int_0^{Ce^{CR}} \frac{du}{1+u} \\ &= C(1 + R) \ln(1 + Ce^{CR})^3 \leq C(1 + R)^4. \end{aligned}$$

$\square$

Mit Hilfe des Lemmas 6.4 läßt sich der folgende Satz praktisch genau wie der Satz 5.9 beweisen:

**Satz 6.5.** *Es existiert ein  $C > 0$  so, daß für alle  $\xi \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\|\phi_{1+i\xi}\|_{L^1(G)} \leq C(1 + |\xi|)^4 (1 + \|w^{1/2}\phi_{1+i\xi}\|_{L^2(G)}). \quad (6.3)$$

## 6.2.2 Allgemeine Hilfsaussagen

Für das hier behandelte semidirekte Produkt  $G = \mathbb{H}_1 \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$  soll eine analoge Aussage zu Lemma 3.18(d) für eine größere Menge von Funktionen hergeleitet werden:

**Lemma 6.6.** *Es seien  $l, p, q \in [0, \infty[$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine symmetrische Borel-Funktion mit  $|f(r)| \leq Ce^{C|r|}$  für ein von  $r$  unabhängiges  $C > 0$ . Dann liegt*

$$F_z : G \rightarrow \mathbb{C}, \quad g = (x, y, u, r) \mapsto |x|^p |y|^q |u|^l |f(r)| \phi_z(g),$$

in  $L^2(G)$  für alle  $z \in \mathcal{H}_r$ , und es gilt  $\|e^{((1-p-l)\alpha + (1-q-l)\beta)r} F_z\|_{L^2(G)} = \|F_z\|_{L^2(G)}$ .

*Beweis.* Aus Lemma 6.3 und Lemma 3.14 folgt, daß  $F_z$  eine  $L^2$ -Funktion ist. Mit Lemma 3.18(c) erhält man

$$\begin{aligned} \|F_z\|^2 &= \int_G e^{-2(\alpha+\beta)r} |x|^{2p} |y|^{2q} |u|^{2l} |f(r)|^2 |\phi_z(g)|^2 d^l g \\ &= \int_G e^{2((p+l-1)\alpha + (q+l-1)\beta)r} |e^{-\alpha r} x|^{2p} |e^{-\beta r} y|^{2q} |e^{-(\alpha+\beta)r} u|^{2l} |f(r)|^2 |\phi_z(g^{-1})|^2 d^l g \\ &= \int_G e^{2((1-p-l)\alpha + (1-q-l)\beta)r} |x|^{2p} |y|^{2q} |u|^{2l} |f(r)|^2 |\phi_z(g)|^2 d^r g. \end{aligned}$$

□

Das nächste Ergebnis fügen wir an, um in den weiteren Beweisen eine Wiederholung ständig gleicher Rechenschritte zu vermeiden:

**Hilfssatz 6.7.** Ist  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Borel-Funktion und existiert ein  $C > 0$  mit  $|f(g)| \leq Ce^{Cd(g)}$  für jedes  $g \in G$ , so gilt für alle  $z := \rho + i\xi \in \mathcal{H}_r$ :

$$\partial_\xi \|f \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)}^2 = 2\Im \langle \Delta \phi_{\rho+i\xi}, |f|^2 \phi_{\rho+i\xi} \rangle_{L^2(G)}. \quad (6.4)$$

*Beweis.* Nach Lemma 3.14 ist  $\mathcal{H}_r \ni z \mapsto f \phi_z$  holomorph und nach Lemma 3.15 gilt

$$\begin{aligned} \partial_\xi \|f \phi_z\|^2 &= \langle if \partial_z \phi_z, f \phi_z \rangle + \langle f \phi_z, if \partial_z \phi_z \rangle = 2\Re(i \langle \partial_z \phi_z, |f|^2 \phi_z \rangle) \\ &= -2\Im \langle \partial_z \phi_z, |f|^2 \phi_z \rangle = 2\Im \langle \Delta \phi_z, |f|^2 \phi_z \rangle. \end{aligned}$$

□

Mit der Hölderschen Ungleichung erhält man die nächste Aussage:

**Hilfssatz 6.8.** Für  $0 < \kappa \leq \lambda$  und Funktionen  $f \in L^2(G)$  gilt

$$\|e^{\kappa r} f\|_{L^2(G)} \leq \|f\|_{L^2(G)}^{1-\kappa/\lambda} \|e^{\lambda r} f\|_{L^2(G)}^{\kappa/\lambda}; \quad (6.5)$$

dabei bezeichnen  $e^{\kappa r}$  und  $e^{\lambda r}$  die Funktionen  $G \ni g = (x, y, u, r) \mapsto e^{\kappa r}, e^{\lambda r}$ .

### 6.2.3 Aufeinander aufbauende $L^2$ -Abschätzungen

Wir werden uns nun in sukzessiven Schritten der Abschätzung der vollen rechten Seite aus Ungleichung (6.3) annähern.

**Lemma 6.9.** *Für alle  $\delta > 0$  existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $j \in J(\Delta)$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(z) \geq \delta$  die Ungleichung  $\|e^{(\alpha+\beta)r} \mathcal{X}_j \phi_z\|_{L^2(G)} \leq C$  gilt.*

*Beweis.* Sind  $\alpha, \beta > 0$ , so folgt dies direkt aus Lemma 5.17 (im trivialen Fall  $K = \{1_K\}$ ). Man kann aber auch die allgemeine Aussage nach dem Schema des Beweises von Lemma 5.17 verifizieren.  $\square$

**Lemma 6.10.** *Für alle Kompakta  $K \subset ]0, \infty[$  findet man ein  $C > 0$  mit*

$$\| |x|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| |y|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^{1/2} \quad (6.6)$$

und

$$\| |x|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^{1/2} \quad (6.7)$$

für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und alle  $j \in J(\Delta)$ .

*Beweis.* Es ist mit  $z = \rho + i\xi$ :

$$\langle \Delta \phi_z, |y| \phi_z \rangle = \sum_{j \in J(\Delta)} \| |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z \|^2 + \langle \mathcal{X}_2 \phi_z, e^{\beta r} \operatorname{sgn}(y) \phi_z \rangle.$$

Auf der einen Seite erhält man aus dieser Gleichung mit (6.4), der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Hilfssatz 6.8 mit  $\kappa = \beta/2$ ,  $\lambda = \alpha + \beta$  und  $f = \phi_z$ , Lemma 3.18 und Lemma 6.9

$$|\partial_\xi \| |y|^{1/2} \phi_z \|^2| \leq 2 |\langle \mathcal{X}_2 \phi_z, e^{\beta r} \operatorname{sgn}(y) \phi_z \rangle| \leq 2 \| e^{\frac{\beta}{2} r} \phi_z \| \| e^{\frac{\beta}{2} r} \mathcal{X}_2 \phi_z \| \leq C.$$

Somit folgt

$$\| |y|^{1/2} \phi_z \|^2 \leq \| |y|^{1/2} \phi_\rho \|^2 + \left| \int_0^\xi \partial_\eta \| |y|^{1/2} \phi_{\rho+i\eta} \|^2 d\eta \right| \leq C(1 + |\xi|),$$

da die Abbildung  $K \ni \rho \mapsto \| |y|^{1/2} \phi_\rho \|^2$  nach Lemma 6.3 und Lemma 3.14 insbesondere stetig und somit beschränkt ist. Auf der anderen Seite folgt aus dem bereits Gezeigten, Lemma 3.15 und Lemma 3.14

$$\sum_{j \in J(\Delta)} \| |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z \|^2 \leq C + \| |y|^{1/2} \phi_z \| \| |y|^{1/2} \partial_z \phi_z \| \leq C(1 + |\xi|).$$

Der Rest der Behauptung folgt analog.  $\square$

Beim Beweis von (6.7) erkennt man, daß es nicht ausreicht, die Abschätzung (6.6) nur im Fall  $\rho = 1$  zu beweisen, denn für die Anwendung der Ungleichung (3.8) aus Lemma 3.14 benötigt man die Gültigkeit der Ungleichung (6.6) auf einer ganzen Umgebung von 1. Da wir (3.8) noch häufiger benutzen werden, beweisen wir alle Ungleichungen gleichmäßig auf Kompakta  $K \subset ]0, \infty[$ , anstatt uns auf den Fall  $\rho = 1$  zu beschränken.

**Lemma 6.11.** *Für alle Kompakta  $K \subset ]0, \infty[$  kann man ein  $C > 0$  so wählen, daß sich für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und alle  $j \in J(\Delta)$  die Abschätzung*

$$\|e^{(\frac{\alpha}{2} + \beta)r} |x|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi}\| + \|e^{(\alpha + \frac{\beta}{2})r} |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi}\| \leq C(1 + |\xi|)^{1/2} \quad (6.8)$$

erfüllen läßt.

*Beweis.* Sei wieder  $z := \rho + i\xi$ . Mit der Abkürzung  $\gamma(r) = \exp((\alpha + \frac{\beta}{2})r)$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_z, \gamma^2 |y| \phi_z \rangle &= \sum_{j \in J(\Delta)} \|\gamma |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z\|^2 + \langle \mathcal{X}_2 \phi_z, m \operatorname{sgn}(y) \phi_z \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{X}_0 \phi_z, (2\alpha + \beta) \gamma^2 |y| \phi_z \rangle; \end{aligned}$$

dabei läßt sich der Betrag des letzten Summanden majorisieren durch

$$\frac{1}{2} \|\gamma |y|^{1/2} \mathcal{X}_0 \phi_z\|^2 + \frac{(2\alpha + \beta)^2}{2} \|\gamma |y|^{1/2} \phi_z\|^2.$$

Somit folgt unter Zuhilfenahme der Gleichung  $\Delta \phi_z = -\partial_z \phi_z$  und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J(\Delta)} \|\gamma |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z\|^2 &\leq 2 \|\gamma |y|^{1/2} \phi_z\| \|\gamma |y|^{1/2} \partial_z \phi_z\| + 2 \|\sqrt{m} \phi_z\| \|\sqrt{m} \mathcal{X}_2 \phi_z\| \\ &\quad + (2\alpha + \beta)^2 \|\gamma |y|^{1/2} \phi_z\|^2 \leq C(1 + |\xi|) \end{aligned}$$

nach Lemma 6.6, (6.6) und Lemma 3.14, sowie Lemma 3.18 und Lemma 6.9. Der Rest der Behauptung läßt sich nach dem gleichen Schema zeigen.  $\square$

**Lemma 6.12.** *Zu jedem Kompaktum  $K \subset ]0, \infty[$  existiert ein  $C > 0$  mit*

$$\| |u|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| |u|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|) \quad (6.9)$$

für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $j \in J(\Delta)$ .

Wir verifizieren das Lemma nur im Fall  $\Delta = \Delta_L$ . Der Beweis für den Wärmeleitungskern des Sub-Laplace-Operators  $\Delta_S$  ist aber insofern eine Teilmenge des unten geführten Beweises, als daß man lediglich die Terme, in denen das Vektorfeld  $\mathcal{X}_3$  vorkommt, auszublenden braucht.

Auch im restlichen Kapitel werden wir bei  $L^2$ -Abschätzungen von Funktionen, welche als Faktor eine Potenz von  $|u|$  beinhalten, den Beweis lediglich im Fall des vollen Laplace-Operators niederschreiben.

*Beweis.* Mit  $z = \rho + i\xi$  erhält man

$$\begin{aligned} \langle \Delta_L \phi_z^L, |u| \phi_z^L \rangle &= \sum_{j=0}^3 \| |u|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L \|^2 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{\alpha r} y \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{\beta r} x \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle + \langle \mathcal{X}_3 \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt zunächst mit Hilfssatz 6.7

$$\begin{aligned} |\partial_\xi \| |u|^{1/2} \phi_z^L \|^2| &= |2\Im \langle \Delta_L \phi_z^L, |u| \phi_z^L \rangle| \leq |\langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{\alpha r} y \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle| \\ &\quad + |\langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{\beta r} x \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle| + 2|\langle \mathcal{X}_3 \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle| \\ &\leq \| |y|^{1/2} \phi_z^L \| \| e^{\alpha r} |y|^{1/2} \mathcal{X}_1 \phi_z^L \| + \| |x|^{1/2} \phi_z^L \| \| e^{\beta r} |x|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z^L \| \\ &\quad + 2\| \phi_z^L \| \| e^{(\alpha+\beta)r} \mathcal{X}_3 \phi_z^L \| \leq C(1 + |\xi|) \end{aligned}$$

nach (6.6), Hilfssatz 6.8, (6.7), (6.8), Lemma 3.18(b) und Lemma 6.9. Somit ergibt sich  $\| |u|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi}^L \|^2 \leq C(1 + |\xi|)^2$ . Ferner erhält man aus Lemma 3.15, Lemma 3.14 und dem bereits Gezeigten die Abschätzung

$$\sum_{j=0}^3 \| |u|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L \|^2 \leq C(1 + |\xi|) + \| |u|^{1/2} \phi_z^L \| \| |u|^{1/2} \partial_z \phi_z^L \| \leq C(1 + |\xi|)^2.$$

□

**Lemma 6.13.** *Für jedes  $K \subset ]0, \infty[$  kompakt findet sich eine Konstante  $C > 0$  mit*

$$\| e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|^2_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|) \quad (6.10)$$

für alle  $j \in J(\Delta)$ ,  $\rho \in K$  und  $\xi \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Sei  $z = \rho + i\xi$ . Es ist

$$\begin{aligned} \langle \Delta_L \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} |u| \phi_z^L \rangle &= \sum_{j=0}^3 \| e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L \|^2 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{(2\alpha+\beta)r} y \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{(\alpha+2\beta)r} x \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle + \langle \mathcal{X}_3 \phi_z^L, e^{2(\alpha+\beta)r} \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{X}_0 \phi_z^L, (\alpha + \beta) e^{(\alpha+\beta)r} |u| \phi_z^L \rangle. \end{aligned}$$

Der Betrag des letzten Summanden kann nach oben gegen

$$\frac{1}{2} \|e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \mathcal{X}_0 \phi_z^L\|^2 + \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} \|e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \phi_z^L\|^2$$

abgeschätzt werden. Daher folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \|e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L\|^2 &\leq (\alpha + \beta)^2 \|e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \phi_z^L\|^2 \\ &+ 2 \|e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \partial_z \phi_z^L\| + \|e^{(\alpha+\frac{\beta}{2})r} |y|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{(\alpha+\frac{\beta}{2})r} |y|^{1/2} \mathcal{X}_1 \phi_z^L\| \\ &+ \|e^{(\frac{\alpha}{2}+\beta)r} |x|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{(\frac{\alpha}{2}+\beta)r} |x|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z^L\| + 2 \|\sqrt{m} \phi_z^L\| \|\sqrt{m} \mathcal{X}_3 \phi_z^L\| \\ &\leq C(1 + |\xi|)^2 \end{aligned}$$

nach Rückgriff auf Lemma 6.6, (6.9) und Lemma 3.14, sowie (6.6), (6.8), Lemma 3.18 und Lemma 6.9.  $\square$

**Lemma 6.14.** *Ist  $K \subset ]0, \infty[$  kompakt, so existiert ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und alle  $j \in J(\Delta)$  gilt:*

$$\|x \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)} + \|y \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|) \quad (6.11)$$

und

$$\|x \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)} + \|y \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|). \quad (6.12)$$

*Beweis.* Mit  $z = \rho + i\xi$  ist

$$\langle \Delta \phi_z, y^2 \phi_z \rangle = \sum_{j \in J(\Delta)} \|y \mathcal{X}_j \phi_z\|^2 + 2 \langle \mathcal{X}_2 \phi_z, e^{\beta r} y \phi_z \rangle.$$

Somit folgt einerseits mit Hilfssatz 6.7

$$|\partial_\xi \|y \phi_z\|^2| \leq 2 |\langle \mathcal{X}_2 \phi_z, e^{\beta r} y \phi_z \rangle| \leq 2 \|e^{\frac{\beta}{2}r} |y|^{1/2} \phi_z\| \|e^{\frac{\beta}{2}r} |y|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z\| \leq C(1 + |\xi|)$$

nach Lemma 6.6, (6.6), (6.7) und (6.8). Man erhält also  $\|y \phi_z\|^2 \leq C(1 + |\xi|)^2$ . Andererseits gilt

$$\sum_{j \in J(\Delta)} \|y \mathcal{X}_j \phi_z\|^2 \leq C(1 + |\xi|) + \|y \phi_z\| \|y \partial_z \phi_z\| \leq C(1 + |\xi|)^2$$

nach Lemma 3.15, Lemma 3.14 und dem bereits Gezeigten. Der Rest des Beweises läßt sich ganz analog führen.  $\square$

**Lemma 6.15.** *Es existiert ein  $C > 0$  zu jedem Kompaktum  $K \subset ]0, \infty[$  mit*

$$\|e^{\beta r} x \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)} + \|e^{\alpha r} y \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi}\|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|) \quad (6.13)$$

für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und  $j \in J(\Delta)$ .

*Beweis.* Mit der Bezeichnung  $z = \rho + i\xi$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_z, e^{2\alpha r} y^2 \phi_z \rangle &= \sum_{j \in J(\Delta)} \|e^{\alpha r} y \mathcal{X}_j \phi_z\|^2 + \langle \mathcal{X}_2 \phi_z, 2e^{(2\alpha+\beta)r} y \phi_z \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{X}_0 \phi_z, 2\alpha e^{2\alpha r} y^2 \phi_z \rangle. \end{aligned}$$

Der letzte Summand ist dabei vom Betrag her majorisierbar durch

$$\frac{1}{2} \|e^{\alpha r} y \mathcal{X}_0 \phi_z\|^2 + 2\alpha^2 \|e^{\alpha r} y \phi_z\|^2.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J(\Delta)} \|e^{\alpha r} y \mathcal{X}_j \phi_z\|^2 &\leq 4 \|e^{\alpha r} y \phi_z\| \|\sqrt{m} \mathcal{X}_2 \phi_z\| + 4\alpha^2 \|e^{\alpha r} y \phi_z\|^2 \\ &\quad + 2 \|e^{\alpha r} y \phi_z\| \|e^{\alpha r} y \partial_z \phi_z\| \leq C(1 + |\xi|)^2 \end{aligned}$$

nach Lemma 6.9, Lemma 6.6 und (6.11) sowie Lemma 3.14.  $\square$

**Lemma 6.16.** *Für jedes kompakte  $K \subset ]0, \infty[$  findet sich solch ein  $C > 0$ , daß*

$$\| |xu|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| |yu|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^{3/2} \quad (6.14)$$

für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und alle  $j \in J(\Delta)$  gilt.

*Beweis.* Mit  $z = \rho + i\xi$  ist

$$\begin{aligned} \langle \Delta_L \phi_z^L, |yu| \phi_z^L \rangle &= \sum_{j=0}^3 \| |yu|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L \|^2 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{\alpha r} y |y| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{\beta r} x |y| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle + \langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{\beta r} \operatorname{sgn}(y) |u| \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{X}_3 \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} |y| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich mit Hilfssatz 6.7

$$\begin{aligned} |\partial_\xi \| |yu|^{1/2} \phi_z^L \|^2| &\leq \|y \phi_z^L\| \|e^{\alpha r} y \mathcal{X}_1 \phi_z^L\| + \|y \phi_z^L\| \|e^{\beta r} x \mathcal{X}_2 \phi_z^L\| + 2 \|e^{\frac{\beta}{2} r} |u|^{1/2} \phi_z^L\| \\ &\quad \cdot \|e^{\frac{\beta}{2} r} |u|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z^L\| + \|e^{\frac{\beta}{2} r} |y|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{(\alpha+\frac{\beta}{2})r} |y|^{1/2} \mathcal{X}_3 \phi_z^L\| \\ &\leq C(1 + |\xi|)^2 \end{aligned}$$

nach (6.11), (6.13) sowie Hilfssatz 6.8, Lemma 6.6, (6.9), (6.10), (6.6) und (6.8). Das liefert  $\| |yu|^{1/2} \phi_z^L \|^2 \leq C(1 + |\xi|)^3$ . Der Rest läßt sich auf gleiche Weise zeigen.  $\square$

**Lemma 6.17.** *Für  $K \in ]0, \infty[$  kompakt gibt es ein  $C > 0$  so, daß für alle  $j \in J(\Delta)$  und alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  gilt:*

$$\| e^{\frac{\beta}{2}r} |xu|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^{3/2}. \quad (6.15)$$

*Beweis.* Mit der Abkürzung  $z := \rho + i\xi$  berechnet man

$$\begin{aligned} \langle \Delta_L \phi_z^L, e^{\alpha r} |yu| \phi_z^L \rangle &= \sum_{j=0}^3 \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L \|^2 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{2\alpha r} y |y| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} x |y| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle + \langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} \operatorname{sgn}(y) |u| \phi_z^L \rangle \\ &\quad + \langle \mathcal{X}_3 \phi_z^L, e^{(2\alpha+\beta)r} |y| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle + \langle \mathcal{X}_0 \phi_z^L, \alpha e^{\alpha r} |yu| \phi_z^L \rangle. \end{aligned}$$

Dabei findet der Betrag des letzten Summanden in

$$\frac{1}{2} \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \mathcal{X}_0 \phi_z^L \|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \phi_z^L \|^2$$

eine obere Schranke. Daraus folgert man dann

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^3 \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_z^L \|^2 &\leq \| e^{\alpha r} y \phi_z^L \| \| e^{\alpha r} y \mathcal{X}_1 \phi_z^L \| + \| e^{\alpha r} y \phi_z^L \| \| e^{\beta r} x \mathcal{X}_2 \phi_z^L \| \\ &\quad + 2 \| e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \phi_z^L \| \| e^{\frac{\alpha+\beta}{2}r} |u|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z^L \| + 2 \| \sqrt{m} \phi_z^L \| \| e^{\alpha r} y \mathcal{X}_3 \phi_z^L \| \\ &\quad + \alpha^2 \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \phi_z^L \|^2 + 2 \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \phi_z^L \| \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \partial_z \phi_z^L \| \\ &\leq C(1 + |\xi|)^3 \end{aligned}$$

nach Lemma 6.6, (6.11), (6.13), (6.9), (6.10), Lemma 3.18 sowie (6.14) und Lemma 3.14.  $\square$

**Lemma 6.18.** *Zu jedem Kompaktum  $K \subset ]0, \infty[$  gibt es ein  $C > 0$  mit*

$$\| |x|y|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| |x|^{1/2} y \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^{3/2} \quad (6.16)$$

für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und alle  $j \in J(\Delta)$ .

*Beweis.* Mit der Abkürzung  $z := \rho + i\xi$  gilt

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_z, |x|y^2 \phi_z \rangle &= \sum_{j \in J(\Delta)} \| |x|^{1/2} y \mathcal{X}_j \phi_z \|^2 + \langle \mathcal{X}_1 \phi_z, e^{\alpha r} \operatorname{sgn}(x) y^2 \phi_z \rangle \\ &\quad + 2 \langle \mathcal{X}_2 \phi_z, e^{\beta r} |x| y \phi_z \rangle. \end{aligned}$$

Mit Hilfssatz 6.7 folgt daraus nach Lemma 6.6, (6.11) und (6.12)

$$|\partial_\xi \| |x|^{1/2} y \phi_z \|^2| \leq 2 \| e^{\alpha r} y \phi_z \| \| y \mathcal{X}_1 \phi_z \| + 4 \| e^{\beta r} x \phi_z \| \| y \mathcal{X}_2 \phi_z \| \leq C(1 + |\xi|)^2.$$

Daher ist  $\| |x|^{1/2} y \phi_z \|^2 \leq C(1 + |\xi|)^3$ .  $\square$

**Lemma 6.19.** Für  $K \subset ]0, \infty[$  kompakt gibt es ein  $C > 0$  derart, daß für alle  $\rho \in K$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$  und alle  $j \in J(\Delta)$  gilt:

$$\| e^{\frac{\beta}{2}r} x |y|^{1/2} \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} + \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \mathcal{X}_j \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^{3/2}. \quad (6.17)$$

*Beweis.* Mit  $z = \rho + i\xi$  erhält man

$$\begin{aligned} \langle \Delta \phi_z, e^{\alpha r} |x| y^2 \phi_z \rangle &= \sum_{j \in J(\Delta)} \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \mathcal{X}_j \phi_z \|^2 + \langle \mathcal{X}_1 \phi_z, e^{2\alpha r} \operatorname{sgn}(x) y^2 \phi_z \rangle \\ &\quad + 2 \langle \mathcal{X}_2 \phi_z, e^{(\alpha+\beta)r} |x| y \phi_z \rangle + \langle \mathcal{X}_0 \phi_z, \alpha e^{\alpha r} |x| y^2 \phi_z \rangle, \end{aligned}$$

wobei sich der letzte Summand betragsmäßig durch

$$\frac{1}{2} \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \mathcal{X}_0 \phi_z \|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \phi_z \|^2$$

majorisieren läßt. Somit folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J(\Delta)} \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \mathcal{X}_j \phi_z \|^2 &\leq 2 \| e^{\alpha r} y \phi_z \| \| e^{\alpha r} y \mathcal{X}_1 \phi_z \| + 4 \| e^{\alpha r} y \phi_z \| \| e^{\beta r} x \mathcal{X}_2 \phi_z \| \\ &\quad + \alpha^2 \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \phi_z \|^2 + 2 \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \phi_z \| \| e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \partial_z \phi_z \| \\ &\leq C(1 + |\xi|)^3 \end{aligned}$$

nach Lemma 6.6, (6.11), (6.13), (6.16) und Lemma 3.14. Der Rest der Behauptung kann analog verifiziert werden.  $\square$

**Satz 6.20.** Ist  $K \subset ]0, \infty[$  kompakt, so existiert ein  $C > 0$  mit

$$\| w^{1/2} \phi_{\rho+i\xi} \|_{L^2(G)} \leq C(1 + |\xi|)^2 \quad (6.18)$$

für alle  $\rho \in K$  und alle  $\xi \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Nach Hilfssatz 6.7 gilt mit der Notation  $z = \rho + i\xi$

$$\begin{aligned}
& |\partial_\xi| |xyu|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi}^L|^2 \\
& \leq 2|\langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{\alpha r} \operatorname{sgn}(x) |yu| \phi_z^L \rangle| + |\langle \mathcal{X}_1 \phi_z^L, e^{\alpha r} xy |y \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle| \\
& \quad + 2|\langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{\beta r} |xu| \operatorname{sgn}(y) \phi_z^L \rangle| + |\langle \mathcal{X}_2 \phi_z^L, e^{\beta r} x |xy| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle| \\
& \quad + 2|\langle \mathcal{X}_3 \phi_z^L, e^{(\alpha+\beta)r} |xy| \operatorname{sgn}(u) \phi_z^L \rangle| \\
& \leq 2 \|e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{\frac{\alpha}{2}r} |yu|^{1/2} \mathcal{X}_1 \phi_z^L\| + \|e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \phi_z^L\| \\
& \quad \cdot \|e^{\frac{\alpha}{2}r} |x|^{1/2} y \mathcal{X}_1 \phi_z^L\| + 2 \|e^{\frac{\beta}{2}r} |xu|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{\frac{\beta}{2}r} |xu|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z^L\| \\
& \quad + \|e^{\frac{\beta}{2}r} x |y|^{1/2} \phi_z^L\| \|e^{\frac{\beta}{2}r} x |y|^{1/2} \mathcal{X}_2 \phi_z^L\| + \|e^{\alpha r} y \phi_z^L\| \|e^{\beta r} x \mathcal{X}_3 \phi_z^L\| \\
& \leq C(1 + |\xi|)^3
\end{aligned}$$

nach Lemma 6.6, (6.14), (6.15), (6.16), (6.17), (6.11) und (6.13). Daraus folgt dann  $\| |xyu|^{1/2} \phi_{\rho+i\xi}^L \|^2 \leq C(1 + |\xi|)^4$ . In Hinblick auf die Abschätzungen aus Lemma 3.18(b), (6.6), (6.9), (6.14) und (6.11) ergibt sich dann letztlich (6.18).  $\square$

## 6.2.4 Resultate des Kapitels

Das nächste Korollar trägt für alle  $\alpha, \beta \geq 0$  die besten in dieser Arbeit erzielten Abschätzungen für  $\|\phi_{\rho+i\xi}\|_{L^1(G)}$ ,  $G = \mathbb{H}_1 \rtimes_{\theta} \mathbb{R}$ , zusammen:

**Korollar 6.21.** *Unter der Voraussetzung 6.1 gilt: Es existiert ein  $C > 0$  derart, daß für jedes  $\xi \in \mathbb{R}$  die Ungleichung*

$$\|\phi_{1+i\xi}\|_{L^1(G)} \leq C(1 + |\xi|)^\kappa \quad (6.19)$$

erfüllt ist; dabei ist

$$\kappa = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{\min\{\alpha,\beta\}} + 2, & \text{falls } \frac{\alpha}{\beta} \in [\frac{1}{3}, 3], \\ 6 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.20)$$

Ist  $\phi_z = \phi_z^S$  der Wärmeleitungskern des Sub-Laplace-Operators  $\Delta_S$ , so gilt im Fall  $\alpha = \beta > 0$  die Ungleichung (6.19) sogar mit  $\kappa = \frac{3}{2}$ .

*Beweis.* Nach Satz 6.5 und Satz 6.20 gilt die Abschätzung (6.19) mit Exponent  $\kappa = 6$  für alle  $\alpha, \beta \geq 0$ . Die verbesserte Aussage im Fall  $\frac{\alpha}{\beta} \in [\frac{1}{3}, 3]$  erhält man aus der Ungleichung (5.23) in Korollar 5.19. Daß die Ungleichung (6.19) mit  $\kappa = \frac{3}{2}$  gilt, wenn  $\phi_z = \phi_z^S$  und  $\frac{\alpha}{\beta} = 1$  ist, entnimmt man den Ausführungen in Abschnitt 4.3.2  $\square$

Satz 3.19 und Korollar 6.21 implizieren dann

**Theorem 6.22.** *Es seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion mit kompaktem Träger,  $\kappa$  wie in Korollar 6.21 und  $\varepsilon > 0$ . Ist  $f \in H^{\kappa+\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R})$ , so läßt sich  $f(\Delta)$  für alle  $p \in [1, \infty]$  zu einem beschränkten linearen Operator auf  $L^p(G)$ , gegeben durch Rechtsfaltung mit einer Funktion  $k_f \in L^1(G)$ , fortsetzen. Ist  $p \in [1, \infty[$ , so ist diese beschränkte Fortsetzung eindeutig.*

# Anhang A

## Anhang

### A.1 Reelle Jordan-Normalformen

Ist  $D \in \text{End}(\mathbb{R}^m)$ , so existieren eine Zerlegung  $\mathbb{R}^m = V_1 \oplus \dots \oplus V_q$  und Basen der Unterräume  $V_i$ , bzgl. derer  $D$  als Matrix die Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

annimmt. Dabei besitzen die sogenannten „Jordan-Blöcke“  $J_i$  die Form

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d_i \times d_i},$$

falls  $\lambda_i$  ein reeller Eigenwert von  $D$  ist, oder

$$J_i = \begin{pmatrix} L_i & I & \dots & 0 \\ 0 & L_i & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & I \\ 0 & 0 & \dots & L_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d_i \times 2d_i} \quad \text{mit} \quad L_i = \begin{pmatrix} \Re(\lambda_i) & \Im(\lambda_i) \\ -\Im(\lambda_i) & \Re(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

und  $I = I_{\mathbb{R}^2}$ , falls  $\lambda_i, \lambda_i^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  ein Eigenwertpaar von  $D$  darstellt (siehe [BFL], Esercizio 52).

Es ist

$$e^{tJ_i} = e^{t\Re(\lambda_i)} \begin{pmatrix} D_i & tD_i & \cdots & \frac{t^{d_i-1}}{(d_i-1)!} D_i \\ 0 & D_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & tD_i \\ 0 & 0 & \cdots & D_i \end{pmatrix}; \quad (\text{A.1})$$

dabei ist  $D_i = 1$ , falls  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , und

$$D_i = D_i(t) = \begin{pmatrix} \cos(t\Im(\lambda_i)) & \sin(t\Im(\lambda_i)) \\ -\sin(t\Im(\lambda_i)) & \cos(t\Im(\lambda_i)) \end{pmatrix},$$

falls  $\lambda_i, \lambda_i^* \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

## A.2 Tensorprodukte

Dieser Abschnitt orientiert sich am Vorgehen in [Wei], §§3.4, 8.5.

### A.2.1 Algebraisches Tensorprodukt zweier Vektorräume

Es seien  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume.  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  sei der Vektorraum aller formalen Linearkombinationen aus Paaren  $(x, y)$ ,  $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$ , also

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) = \left\{ \sum_{j=1}^n c_j(x_j, y_j) : n \in \mathbb{N}, c_j \in \mathbb{K}, x_j \in \mathcal{H}_1, y_j \in \mathcal{H}_2, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Sind  $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$  und  $c \in \mathbb{K}$  mit  $c = 1$ , so identifizieren wir  $c(x, y)$  mit  $(x, y)$ .

Ferner sei  $\mathcal{N}$  der  $\mathbb{K}$ -Untervektorraum von  $\mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ , der von den Elementen der Form

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j(x_i, y_j) - \left( \sum_{i=1}^m a_i x_i, \sum_{j=1}^n b_j y_j \right),$$

$m, n \in \mathbb{N}, a_i, b_j \in \mathbb{K}, x_i \in \mathcal{H}_1, y_j \in \mathcal{H}_2, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$ , aufgespannt wird.

Das *algebraische Tensorprodukt* der Vektorräume  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  ist dann der Quotientenraum  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 := \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) / \mathcal{N}$ .

Sind  $x \in \mathcal{H}_1$ ,  $y \in \mathcal{H}_2$ , so wird die Äquivalenzklasse  $(x, y) + \mathcal{N}$  mit  $x \otimes y$  notiert;  $x \otimes y$  ist ein sogenannter *Elementartensor*.

Nach Definition von  $\mathcal{N}$  und  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  ist ein Element  $f \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  genau dann null, wenn es eine Linearkombination aus Elementen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j x_i \otimes y_j - \left( \sum_{i=1}^m a_i x_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^n b_j y_j \right)$$

ist.

**Beispiel A.1.**  $X_1, X_2$  seien lokalkompakte Hausdorff-Räume und  $\mathcal{H}_i := C_c(X_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Durch

$$\Lambda \left( \sum_{j=1}^n c_j (f_j, g_j) \right) \mapsto \left( (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n c_j f_j(x) g_j(y) \right)$$

wird dann eine lineare Abbildung  $\Lambda : \mathcal{F}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \rightarrow C_c(X_1 \times X_2)$  definiert. Offenbar gilt  $\Lambda(\mathcal{N}) = \{0\}$ .

Ist andererseits  $\Lambda(\sum_{j=1}^n c_j (f_j, g_j)) = 0$ , so läßt sich (z. B. mit Induktion über  $n \in \mathbb{N}$ ) zeigen, daß  $\sum_{j=1}^n c_j (f_j, g_j)$  in  $\mathcal{N}$  liegt.

Dem Homomorphiesatz zufolge ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : C_c(X_1) \otimes C_c(X_2) &\rightarrow C_c(X_1 \times X_2), \\ \sum_{j=1}^n c_j f_j \otimes g_j &\mapsto \left( (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n c_j f_j(x) g_j(y) \right), \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv.

Vermöge  $\tilde{\Lambda}$  läßt sich also  $C_c(X_1) \otimes C_c(X_2)$  als Teilraum von  $C_c(X_1 \times X_2)$  auffassen. Stattet man das derart interpretierte Tensorprodukt  $C_c(X_1) \otimes C_c(X_2)$  mit der  $\|\cdot\|_\infty$ -Norm auf  $X_1 \times X_2$  aus, so ist  $C_c(X_1) \otimes C_c(X_2)$  ein dichter Teilraum von  $C_c(X_1 \times X_2)$  (s. [Lan], Lemma IX.6.1).

## A.2.2 Tensorprodukt zweier Hilbert-Räume

Sind nun  $(\mathcal{H}_1, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ ,  $(\mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  Hilbert-Räume über  $\mathbb{K}$ , so wird durch

$$\left\langle \sum_{i=1}^m a_i x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^n b_j \xi_j \otimes \eta_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_i b_j^* \langle x_i, \xi_j \rangle_1 \langle y_i, \eta_j \rangle_2$$

ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  definiert (s. [Wei], S. 47, 48). Dann ist  $(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Prä-Hilbert-Raum, dessen Vervollständigung als das (*vollständige*) *Tensorprodukt*  $\hat{\mathcal{H}}_1 \hat{\otimes} \hat{\mathcal{H}}_2$  der Hilbert-Räume  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  bezeichnet wird.

Das nächste Lemma findet sich in [Wei] als Theorem 3.12:

**Lemma A.2.** *Es seien  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  Hilbert-Räume.*

- (a) *Sind  $M_1 \subset \mathcal{H}_1$  und  $M_2 \subset \mathcal{H}_2$  mit  $\text{span } M_1$  dicht in  $\mathcal{H}_1$  und  $\text{span } M_2$  dicht in  $\mathcal{H}_2$ , so liegt  $\text{span}\{x \otimes y : x \in M_1, y \in M_2\}$  dicht in  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ .*
- (b) *Sind  $I, J$  Indexmengen,  $(e_i)_{i \in I}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}_1$  und  $(f_j)_{j \in J}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}_2$ , so ist  $(e_i \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$  eine Orthonormalbasis von  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ .*

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Beispiels aus [Wei], §3.4:

**Satz A.3.** *Es seien  $(X, \mathcal{M}, \mu), (X', \mathcal{M}', \mu')$   $\sigma$ -endliche Maßräume. Ferner sei dann  $\mu \otimes \mu'$  das eindeutig bestimmte positive Maß auf der von  $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'$ , das  $\mu \otimes \mu'(A \times B) = \mu(A)\mu'(B)$  für alle  $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}'$  mit endlichem Maß erfüllt.*

*Dann ist  $L^2(X, \mu) \hat{\otimes} L^2(X', \mu')$  isometrisch-isomorph zu  $L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$ .*

*Beweis.* Die lineare Abbildung

$$\Lambda : \mathcal{F} := \mathcal{F}(L^2(X, \mu), L^2(X', \mu')) \rightarrow L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$$

bilde ein beliebiges Element  $\sum_{j=1}^n c_j(f_j, g_j)$  aus  $\mathcal{F}$  auf die Funktion  $\sum_{j=1}^n c_j f_j(x)g_j(y)$  in  $L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$  ab. (Hierbei werden wieder  $\mathcal{L}^2$ -Funktionen und deren Äquivalenzklassen in  $L^2$  identifiziert; wie man sich aber leicht überzeugen kann, ist die Definition von  $\Lambda$  unabhängig von den konkret gewählten Repräsentanten  $f_j \in \mathcal{L}^2(X, \mu), g_j \in \mathcal{L}^2(X', \mu')$ .)

Als nächstes weist man  $\ker(\Lambda) = \mathcal{N}$  nach; dabei ist die Inklusion  $\Lambda(\mathcal{N}) \subset \{0\}$  trivial, und die Inklusion  $\Lambda^{-1}(\{0\}) \subset \mathcal{N}$  läßt sich z. B. beweisen, indem man mit vollständiger Induktion über die Anzahl der Summanden eines Elements  $F = \sum_{j=1}^n c_j(f_j, g_j)$  mit  $\Lambda(F) = 0$   $\mu \otimes \mu'$ -fast überall zeigt, daß  $F$  in  $\mathcal{N}$  liegt. Somit ist nach dem Homomorphiesatz die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda} : L^2(X, \mu) \otimes L^2(X', \mu') &\rightarrow L^2(X \times X', \mu \otimes \mu'), \\ \sum_{j=1}^n c_j f_j \otimes g_j &\mapsto \left( (x, y) \mapsto \sum_{j=1}^n c_j f_j(x)g_j(y) \right), \end{aligned}$$

wohldefiniert und injektiv. Bezeichnet  $\pi_{\mathcal{N}}$  die kanonische Projektion  $\pi_{\mathcal{N}}(F) = F + \mathcal{N}$ , so gilt  $\tilde{\Lambda} \circ \pi_{\mathcal{N}} = \Lambda$ .  $\tilde{\Lambda}$  ist nach Definition des Skalarprodukts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine isometrische Injektion, die sich somit zu einer Isometrie

$$\bar{\Lambda} : L^2(X, \mu) \hat{\otimes} L^2(X', \mu') \rightarrow L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$$

fortsetzen läßt. Um die Surjektivität von  $\bar{\Lambda}$  festzustellen, reicht es aus, die Dichtheit von  $\text{ran}(\tilde{\Lambda})$  in  $L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$  zu verifizieren.

Es sei  $\mathcal{E} := \{A \times B : A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{M}'; \mu(A), \mu'(B) < \infty\}$ . Endliche Summen der Form  $\sum_j c_j \chi_{E_j}$ ,  $c_j \in \mathbb{C}$ ,  $E_j \in \mathcal{E}$ , heißen *Treppenfunktionen bzgl.  $\mathcal{E}$* . Da die Treppenfunktionen bzgl.  $\mathcal{E}$  in  $\text{ran}(\tilde{\Lambda})$  enthalten sind und die Treppenfunktionen bzgl.  $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'$  dicht in  $L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$  liegen, können wir uns darauf beschränken, zu vorgegebenem  $U \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}'$  mit  $\mu \otimes \mu'(U) < \infty$  die Funktion  $\chi_U$  in  $L^2(X \times X', \mu \otimes \mu')$  beliebig gut durch Treppenfunktionen bzgl.  $\mathcal{E}$  zu approximieren.

Nun findet sich eine Folge  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Treppenfunktionen bzgl.  $\mathcal{E}$  mit  $\|\chi_U - \varphi_n\|_1 \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  (vgl. [Lan], Thm. VI.6.3 und §VI.8). Setze  $\psi_n := \min\{1, |\varphi_n|\}$ . Dann ist  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Treppenfunktionen bzgl.  $\mathcal{E}$ , und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{X \times X'} |\chi_U(z) - \psi_n(z)|^2 d\mu \otimes \mu'(z) &\leq \int_{X \times X'} |\chi_U(z) - \psi_n(z)| d\mu \otimes \mu'(z) \\ &\leq \int_{X \times X'} |\chi_U(z) - \varphi_n(z)| d\mu \otimes \mu'(z) \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

### A.2.3 Tensorprodukt zweier Operatoren

Es seien  $T_1, T_2$  lineare Operatoren in den Hilbert-Räumen  $\mathcal{H}_1$  bzw.  $\mathcal{H}_2$ . Der Operator  $T_1 \otimes T_2$  läßt sich dann auf  $\text{dom}(T_1) \otimes \text{dom}(T_2)$  vermöge der Abbildungsvorschrift

$$T_1 \otimes T_2 \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \otimes \psi_j \right) := \sum_{j=1}^n \lambda_j T_1 \varphi_j \otimes T_2 \psi_j, \quad (\text{A.2})$$

$\lambda_j \in \mathbb{K}$ ,  $\varphi_j \in \text{dom}(T_1)$ ,  $\psi_j \in \text{dom}(T_2)$ , erklären. Die Definitionsgleichung (A.2) induziert eine wohldefinierte Abbildung: Gilt  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \otimes \psi_j = 0$ , so ist dieser Vektor nach Definition des Tensorprodukts von Vektorräumen eine endliche Linearkombination aus Elementen der Form

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_i \beta_j (\eta_i \otimes \xi_j) - \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i \eta_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^l \beta_j \xi_j \right).$$

Wendet man nun  $T_1 \otimes T_2$  im Sinne von (A.2) auf solch ein Element an, so erhält man

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_i \beta_j (T_1 \eta_i \otimes T_2 \xi_j) - \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i T_1 \eta_i \right) \otimes \left( \sum_{j=1}^l \beta_j T_2 \xi_j \right) = 0.$$

Somit folgt  $T_1 \otimes T_2 \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \otimes \psi_j \right) = 0$ , und die Abbildungsvorschrift (A.2) ist unabhängig von der speziellen Darstellung der Vektoren aus  $\text{dom}(T_1) \otimes \text{dom}(T_2)$  durch Elementartensoren.

Offenbar ist  $T_1 \otimes T_2$  also ein linearer Operator in  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ .

**Bemerkung A.4.** Es seien  $T_1, T_2$  und  $T_1 \otimes T_2$  wie oben.

- (i)  $T_1 \otimes T_2$  ist genau dann von null verschieden, wenn dies für  $T_1$  und  $T_2$  der Fall ist.

Gilt  $T_1 \otimes T_2 \neq 0$ , so ist  $T_1 \otimes T_2$  genau dann beschränkt, wenn  $T_1$  und  $T_2$  beschränkte Operatoren sind. Ist dies erfüllt, so hat man  $\|T_1 \otimes T_2\|_{op} = \|T_1\|_{op} \|T_2\|_{op}$ .

- (ii) Sind  $T_1$  und  $T_2$  dicht definiert in  $\mathcal{H}_1$  bzw.  $\mathcal{H}_2$ , so ist  $T_1 \otimes T_2$  dicht definiert in  $\mathcal{H}_1 \hat{\otimes} \mathcal{H}_2$ , und es gilt  $T_1^* \otimes T_2^* \subset (T_1 \otimes T_2)^*$ .

Beweise für diese Aussagen finden sich in [Wei] unter Theorem 8.32.

## A.3 Operatorhalbgruppen

**Definition A.5.** Eine Familie  $T(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , von beschränkten Operatoren auf einem Banach-Raum  $X$  heißt  $C_0$ -Halbgruppe, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $T(0) = I$  (mit  $I = I_X$ ).
- (ii)  $T(t + s) = T(t) \circ T(s)$  für alle  $t, s \geq 0$ .
- (iii)  $\lim_{t \searrow 0} T(t)x = x$  für alle  $x \in X$ .

Gilt überdies  $\|T(t)\|_{op} \leq 1$  für alle  $t > 0$ , so heißt  $T(t)$  *Kontraktionshalbgruppe*. Der durch

$$\text{dom}(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existiert} \right\}$$

und

$$Ax = \lim_{t \searrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad \text{für } x \in \text{dom}(A)$$

definierte Operator  $A : \text{dom}(A) \rightarrow X$  heißt *infinitesimaler Erzeuger* der  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$ .

**Bemerkung A.6.** Ist  $A$  der infinitesimale Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$  auf  $X$ , so ist  $\text{dom}(A)$  dicht in  $X$  und  $A$  ein abgeschlossener linearer Operator ([Paz], Corollary 1.2.5). Überdies ist dann sogar schon  $\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{dom}(A^n)$  dicht in  $X$  ([Paz], Theorem 1.2.7).

**Satz A.7.** *Es seien  $(T(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger  $A$  und  $(S(t))_{t \geq 0}$  eine  $C_0$ -Halbgruppe mit infinitesimalem Erzeuger  $B$  auf  $X$ . Gilt  $A \subset B$ , so folgt  $T(t) = S(t)$  für alle  $t \geq 0$  (und daraus trivialerweise  $A = B$ ).*

Diese Aussage wird im Fall  $A = B$  in [Paz] unter Theorem 1.2.6 verifiziert. Sieht man sich den Beweis jedoch genauer an, so erkennt man, daß die Voraussetzung  $A \subset B$  ebenfalls hinreichend ist.

**Definition A.8.** Ist  $\mathcal{H}$  ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und ist  $A : \mathcal{H} \supset \text{dom}(A) \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator in  $\mathcal{H}$ , so heißt  $A$  *dissipativ*, wenn  $\Re \langle Ax, x \rangle \leq 0$  für alle  $x \in \text{dom}(A)$  gilt.

**Bemerkung A.9.** Sei  $A$  ein dissipativer Operator.

- (i) Ist  $\text{dom}(A)$  dicht in  $\mathcal{H}$ , so ist  $A$  abschließbar.
- (ii) Ist  $A$  abschließbar, so ist der Abschluß  $\bar{A}$  von  $A$  wiederum dissipativ.

Der Inhalt der Bemerkung wird in [Paz], Theorem 1.4.5, bewiesen.

**Satz A.10.** *Ein linearer Operator  $A$  in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  ist dissipativ genau dann, wenn*

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \quad \text{für alle } x \in \text{dom}(A), \lambda > 0. \quad (\text{A.3})$$

*Beweis.* Ist  $A$  dissipativ, so gilt trivialerweise (A.3). Die Rückrichtung wird in [Paz], Theorem 1.4.2, gezeigt.  $\square$

**Theorem A.11 (Lumer-Phillips).** *Der lineare Operator  $A$  sei dicht definiert im Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ .*

- (a) *Ist  $A$  dissipativ und existiert ein  $\lambda_0 > 0$  mit  $\text{ran}(\lambda_0 I - A) = \mathcal{H}$ , so ist  $A$  der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf  $\mathcal{H}$ .*
- (b) *Ist  $A$  der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf  $\mathcal{H}$ , so ist  $A$  dissipativ und für alle  $\lambda > 0$  ist  $\text{ran}(\lambda I - A) = \mathcal{H}$ .*

Den Beweis kann man in [Paz] unter Theorem 1.4.3 nachschlagen. Eine andere Charakterisierung des infinitesimalen Erzeugers einer Kontraktionshalbgruppe liefert das nächste Theorem.

**Theorem A.12 (Hille-Yosida).** *Ein linearer Operator  $A$  in einem Banach-Raum  $X$  ist genau dann der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf  $X$ , wenn die beiden folgenden Aussagen gelten:*

- (i)  *$A$  ist abgeschlossen und dicht definiert.*

(ii) Die Resolventenmenge  $\rho(A)$  enthält  $]0, \infty[$ , und für alle  $\lambda > 0$  gilt

$$\|R(\lambda; A)\|_{op} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Ein Beweis findet sich in [Paz] unter Theorem 1.3.1. Die Aussage des Satzes von Hille-Yosida läßt sich in eine Richtung noch verbessern (siehe [Paz], Corollary 1.3.6):

**Satz A.13.** Sei  $A$  der infinitesimale Erzeuger einer Kontraktionshalbgruppe auf dem Banach-Raum  $X$ . Dann liegt die offene rechte Halbebene  $\mathcal{H}_r$  in  $\rho(A)$ , und es gilt

$$\|R(\lambda; A)\|_{op} \leq \frac{1}{\Re(\lambda)}$$

für alle  $\lambda \in \mathcal{H}_r$ .

**Lemma A.14.** Sei  $A$  der infinitesimale Erzeuger einer  $C_0$ -Halbgruppe  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ , und seien  $M > 0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  mit  $\|T(t)\|_{op} \leq Me^{\omega t}$ . Sei ferner  $\gamma > \max\{0, \omega\}$ . Dann gilt für  $x \in \text{dom}(A^2)$ :

$$T(t)x = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{\lambda t} R(\lambda; A)x \, d\lambda,$$

und für alle  $\delta > 0$  konvergiert der Limes gleichmäßig in  $t \in [\delta, \delta^{-1}]$ .

Das obige Lemma wird in [Paz], §1.7, bewiesen. Dabei wird die Aussage zunächst (in etwas allgemeinerer Form) für beschränkte infinitesimale Erzeuger gezeigt, um dann mit Hilfe der sogenannten *Yosida-Approximation*  $A_\mu = \mu A R(\mu; A) \in \mathcal{B}(X)$  und einiger technischer Lemmata auf einen beliebigen infinitesimalen Erzeuger  $A$  übertragen zu werden.

**Definition A.15.** Sei  $\Delta_\delta := \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \delta\}$  und  $T(z)$ ,  $z \in \Delta_\delta$ , seien lineare beschränkte Operatoren auf einem Banach-Raum  $X$ . Die Familie  $T(z)$ ,  $z \in \Delta_\delta$ , heißt dann *holomorphe Halbgruppe in  $\Delta_\delta$* , falls

- (i)  $\Delta_\delta \ni z \mapsto T(z) \in \mathcal{B}(X)$  ist eine holomorphe Abbildung.
- (ii)  $T(0) = I$  und  $\lim_{\Delta_\delta \ni z \rightarrow 0} T(z)x = x$  für alle  $x \in X$ .
- (iii)  $T(z + z') = T(z) \circ T(z')$  für  $z, z' \in \Delta_\delta$ .

Bezüglich des nächsten Theorems siehe [Paz], Theorem 2.5.2, und die sich direkt an den Beweis des Theorems 2.5.2 anschließende Bemerkung:

**Theorem A.16.** Sei  $T(t)$ ,  $0 \leq t < \infty$ , eine gleichmäßig beschränkte  $C_0$ -Halbgruppe auf dem Banach-Raum  $X$ . Sei  $A$  der infinitesimale Erzeuger von  $T(t)$ , und es gelte  $0 \in \rho(A)$ . Sei ferner  $0 < \delta < \pi/2$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (a)  $T(t)$  kann in  $\Delta_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \delta\}$  zu einer holomorphen Halbgruppe fortgesetzt werden, und für alle  $0 < \delta' < \delta$  ist  $\|T(z)\|_{op}$  gleichmäßig beschränkt auf dem abgeschlossenen Sektor  $\overline{\Delta}_{\delta'}$ .
- (b) Die Menge  $\Sigma := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2} + \delta\} \cup \{0\}$  liegt in  $\rho(A)$ , und es existiert ein  $M > 0$  mit

$$\|R(\lambda; A)\|_{op} \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{für } \lambda \in \Sigma^\times.$$

**Definition A.17.** Sei  $X$  ein Banach-Raum mit Dualraum  $X'$ . Ist  $A$  ein dicht definierter Operator in  $X$ , so setzen wir

$$\text{dom}(A') := \{\alpha \in X' : \exists \beta \in X' \forall x \in \text{dom}(A) : \alpha(Ax) = \beta(x)\}$$

und erklären den zu  $A$  adjungierten Operator  $A'$  auf  $\text{dom}(A')$  durch  $A'(\alpha) = \beta$ , wenn  $\alpha(Ax) = \beta(x)$  für alle  $x \in \text{dom}(A)$  gilt.

Die Dichtheit von  $\text{dom}(A)$  in  $X$  stellt dabei in der Definition die Rechtseindeutigkeit von  $A'$  sicher.

**Lemma A.18.** Sei  $X$  ein Banach-Raum und  $A$  ein dicht definierter linearer Operator in  $A$ . Ist  $\lambda \in \rho(A)$ , so folgt  $\lambda \in \rho(A')$ , und es gilt  $R(\lambda; A') = R(\lambda; A)'$ .

Das obige Lemma findet man in [Paz] als Lemma 1.10.2; der nächste Satz wird dort als Corollary 1.10.6 geführt.

**Satz A.19.** Sei  $X$  ein reflexiver Banach-Raum und  $T(t)$ ,  $t \geq 0$ , eine  $C_0$ -Halbgruppe auf  $X$  mit infinitesimalem Erzeuger  $A$ . Dann ist die adjungierte Halbgruppe  $T(t)' : X' \rightarrow X'$ ,  $t \geq 0$ , ebenfalls eine  $C_0$ -Halbgruppe und ihr infinitesimaler Erzeuger ist gerade der adjungierte Operator  $A'$  von  $A$ .

## A.4 Integration bzgl. komplexer Maße

Eine Abbildung  $\nu : \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$  heiße *komplexes Maß auf  $\mathbb{R}$* , wenn  $\nu(\emptyset) = 0$  erfüllt ist und für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , bestehend aus paarweise disjunkten Mengen aus  $\Sigma_{\mathbb{R}}$ , gilt:  $\nu(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n)$ ; hierbei soll die rechte Seite „unbedingt konvergent“ sein, i. e. unabhängig von der Anordnung der Summanden gegen den gleichen Wert konvergieren.

Dem komplexen Maß  $\nu$  läßt sich ein positives Maß  $|\nu|$  zuordnen, die sogenannte *totale Variation von  $\nu$* . Dabei ist  $|\nu|$  durch

$$|\nu|(A) := \sup \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} |\nu(A_n)| : A_n \in \Sigma_{\mathbb{R}}, A_n \cap A_m = \emptyset \text{ für } n \neq m, \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A \right\}$$

definiert. Die Abbildung  $|\nu|$  ist dann ein endliches Maß (s. [Lan], Thm. VII.3.2). Sind  $A_1, \dots, A_n \in \Sigma_{\mathbb{R}}$  und  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ , so läßt sich für die einfache Funktion  $\tau := \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$  das Integral bzgl.  $\nu$  erklären durch

$$\int_{\mathbb{R}} \tau(x) d\nu(x) = \sum_{i=1}^n c_i \nu(A_i).$$

Es gilt nun der folgende Satz (s. [Lan], Thm. VII.3.5):

**Satz A.20.** *Es existiert eine  $|\nu|$ -meßbare Funktion  $h$  auf  $\mathbb{R}$  mit  $|h| \equiv 1$  derart, daß für alle einfachen Funktionen  $\tau$  gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}} \tau(x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} \tau(x) h(x) d|\nu|(x). \quad (\text{A.4})$$

Ist  $\tau$  allgemein eine Funktion aus  $L^1(\mathbb{R}, |\nu|)$ , so läßt sich offenbar (A.4) als Definitionsgleichung für das Integral von  $\tau$  über  $\mathbb{R}$  bzgl.  $\nu$  heranziehen. Man kann dann die bekannten Konvergenzsätze aus der Integrationstheorie für positive Maße anwenden:

Ist z. B.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $L^1(\mathbb{R}, |\nu|)$ , die punktweise  $|\nu|$ -fast überall gegen eine Funktion  $f$  konvergiert und existiert ein  $g \in L^1(\mathbb{R}, |\nu|)$  mit  $|f_n| \leq |g|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so ist nach dem Satz über majorisierte Konvergenz  $f \in L^1(\mathbb{R}, |\nu|)$ , und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\nu(x),$$

denn:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} (f_n(x) - f(x)) d\nu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| d|\nu|(x) = \|f_n - f\|_{L^1(\mathbb{R}, |\nu|)},$$

und der letzte Term geht nach dem Satz über majorisierte Konvergenz gegen null für  $n \rightarrow \infty$ .

Sei nun  $\mathcal{H}$  ein komplexer Hilbert-Raum, und sei  $E : \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  ein Spektralmaß. Sind  $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ , so ist die Abbildung  $\Sigma_{\mathbb{R}} \ni A \mapsto \langle E(A)\varphi, \psi \rangle$  ein komplexes Maß. Hier bietet sich die Möglichkeit, das Integral über  $\langle E(\cdot)\varphi, \psi \rangle$  mittels der Polarisationsformel durch Integrale über positive Maße auszudrücken:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E(\lambda)\varphi, \psi \rangle \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E(\lambda)(\varphi + \psi), \varphi + \psi \rangle - \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E(\lambda)(\varphi - \psi), \varphi - \psi \rangle \right. \\ & \quad \left. + i \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E(\lambda)(\varphi - i\psi), \varphi - i\psi \rangle - i \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E(\lambda)(\varphi + i\psi), \varphi + i\psi \rangle \right\} \end{aligned} \tag{A.5}$$

für beschränkte Borel-meßbare Funktionen  $f$  (oder andere Funktionen, für die die rechte Seite von (A.5) Sinn ergibt, vgl. [Wei], §7.2).

Da sich z. B. beschränkte Borel-meßbare Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig durch einfache Funktionen approximieren lassen, liefern die Gleichungen (A.4) und (A.5) den gleichen Wert für  $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle E(\lambda)\varphi, \psi \rangle$ .

## A.5 Core eines selbstadjungierten Operators

Hier wird ein einfaches, aber hilfreiches Kriterium angegeben, um zu überprüfen, ob es sich bei einem vorgegebenen Unterraum um ein Core eines selbstadjungierten Operators handelt.

Zuvor soll jedoch noch kurz definiert werden, was unter einem „Core“ zu verstehen ist:

**Definition A.21.** Sei  $T$  ein abgeschlossener Operator in einem Banach-Raum  $X$ . Ein Unterraum  $V$  von  $\text{dom}(T)$  heißt *Core von  $T$* , wenn der Abschluß der Einschränkung von  $T$  auf  $V$  schon  $T$  selbst ist.

**Satz A.22.** Sei  $T$  ein selbstadjungierter Operator in einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  mit Spektralmaß  $M : \Sigma_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Sei  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge beschränkter Borel-Mengen mit  $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ . Es seien ferner  $U$  eine dichte Teilmenge von  $\mathcal{H}$  und  $V$  der durch die Menge  $\cup_{n \in \mathbb{N}} M(A_n)U$  erzeugte Untervektorraum von  $\mathcal{H}$ . Dann ist  $V$  ein Core von  $T$ .

*Beweis.* Setze  $M_n := M(A_n)$  und  $\sigma_n := \sup |A_n|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Offenbar gilt  $M_n \mathcal{H} \subset \text{dom}(T)$ , daher ist insbesondere  $V$  ein Teilraum von  $\text{dom}(T)$ .

Sei nun  $f \in \text{dom}(T)$ . Da  $U$  dicht in  $\mathcal{H}$  liegt, findet sich eine Folge  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in

$U$  mit  $\|f_n - f\| \leq (1 + \sigma_n)^{-2}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$\|M_n f_n - f\| \leq \|M_n(f_n - f)\| + \|M(\mathbb{R} \setminus A_n)f\| \leq \frac{1}{(1 + \sigma_n)^2} + \|M(\mathbb{R} \setminus A_n)f\|,$$

und der letzte Term strebt im Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  gegen null. Somit konvergiert die Folge  $(M_n f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aus  $V$  in  $\mathcal{H}$  gegen  $f$ , und weiter gilt

$$\begin{aligned} \|T(M_n f_n - f)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle M(\lambda)(M_n f_n - f), M_n f_n - f \rangle \\ &= \int_{A_n} \lambda^2 d\langle M(\lambda)(f_n - f), f_n - f \rangle + \int_{\mathbb{R} \setminus A_n} \lambda^2 d\langle M(\lambda)f, f \rangle \\ &\leq \sigma_n^2 \|f_n - f\|^2 + \int_{\mathbb{R} \setminus A_n} \lambda^2 d\langle M(\lambda)f, f \rangle \leq \frac{1}{(1 + \sigma_n)^2} + \int_{\mathbb{R} \setminus A_n} \lambda^2 d\langle M(\lambda)f, f \rangle, \end{aligned}$$

und der letzte Ausdruck strebt für  $n \rightarrow \infty$  gegen null, d. h.  $f$  liegt im Abschluß von  $V$  bzgl. der Graphennorm von  $T$ .  $\square$

## A.6 Quadratische Formen und die Friedrichs-Erweiterung

Es seien  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Hilbert-Raum,  $\|\cdot\|$  die dazugehörige Hilbert-Norm auf  $\mathcal{H}$  und  $\mathcal{D}$  ein Unterraum von  $\mathcal{H}$ .

**Definition A.23.** (i) Eine Abbildung  $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *quadratische Form mit Definitionsbereich*  $\text{dom}(s) = \mathcal{D}$ , falls eine hermitesche Sesquilinearform  $s' : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $s(f) = s'(f, f)$  für alle  $f \in \mathcal{D}$  existiert.

(ii) Erfüllt eine quadratische Form  $s$  für alle  $f \in \text{dom}(s)$  die Ungleichung  $s(f) \geq 0$ , so wird  $s$  als *positive quadratische Form* bezeichnet.

(iii) Die positive quadratische Form  $s$  nennt man *abschließbar*, wenn für alle Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{dom}(s)$  aus  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0$  und  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} s(f_n - f_m) = 0$  schon  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f_n) = 0$  folgt.

(iv) Eine positive quadratische Form  $s$  heißt *abgeschlossen*, falls für alle Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\text{dom}(s)$  und alle  $f \in \mathcal{H}$  die Gleichungen  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  und  $\lim_{m, n \rightarrow \infty} s(f_n - f_m) = 0$  implizieren, daß  $f$  in  $\text{dom}(s)$  liegt und  $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f_n - f) = 0$  gilt.

Sei  $s$  eine positive quadratische Form. Besitzt  $s$  eine Erweiterung in Form einer abgeschlossenen quadratischen Form  $\tilde{s}$ , so muß  $s$  notwendigerweise abschließbar sein.

Sei nun  $s$  abschließbar. Bezeichnet  $\|\cdot\|_s$  die durch  $\|f\|_s = \sqrt{\|f\|^2 + s(f)}$  definierte Norm auf  $\text{dom}(s)$ , so läßt sich die Vervollständigung  $\mathcal{H}_s$  von  $\text{dom}(s)$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_s$  als Teilraum von  $\mathcal{H}$  auffassen: Per definitionem ist  $\mathcal{H}_s$  der Raum aller  $\|\cdot\|_s$ -Cauchy-Folgen in  $\text{dom}(s)$ , faktorisiert nach der Äquivalenzrelation

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (g_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff (f_n - g_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist } \|\cdot\|_s\text{-Nullfolge;}$$

die zu  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gehörige Äquivalenzklasse bzgl.  $\sim$  soll mit  $[(f_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  bezeichnet werden.

Durch  $\iota([(f_n)_{n \in \mathbb{N}}]) = \mathcal{H} - \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$  wird dann eine wohldefinierte Abbildung  $\iota : \mathcal{H}_s \rightarrow \mathcal{H}$  erklärt. Die Abschließbarkeit von  $s$  stellt die Injektivität von  $\iota$  sicher.

Setzt man auf  $\iota(\mathcal{H}_s)$  die Norm  $\|\cdot\|_s$  vermöge  $\|\iota([(f_n)_{n \in \mathbb{N}}])\|_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_s$  fort, so läßt sich  $\mathcal{H}_s$  über den isometrischen Isomorphismus  $\iota$  mit  $\iota(\mathcal{H}_s) \subset \mathcal{H}$  identifizieren.

Definiert man  $\tilde{s}(\iota([(f_n)_{n \in \mathbb{N}}])) := \lim_{n \rightarrow \infty} s(f_n)$  auf  $\mathcal{H}_s$ , so stellt  $\tilde{s}$  eine abgeschlossene quadratische Form mit  $\text{dom}(\tilde{s}) = \mathcal{H}_s$  dar und es gilt  $\tilde{s}|_{\text{dom}(s)} = s$ . Da der Definitionsbereich jeder abgeschlossenen positiven quadratischen Form, die  $s$  fortsetzt, augenscheinlich  $\mathcal{H}_s$  enthalten muß, ist  $\tilde{s}$  die kleinste abgeschlossene positive quadratische Formerweiterung von  $s$ . Deshalb wird  $\tilde{s}$  als der *Abschluß von  $s$*  bezeichnet.

**Definition A.24.** Sei  $T$  ein positiver selbstadjungierter Operator auf  $\mathcal{H}$ . Die *quadratische Form  $s$  von  $T$*  wird erklärt durch  $\text{dom}(s) := \text{dom}(T^{1/2})$  und  $s(f) := \langle T^{1/2}f, T^{1/2}f \rangle$  für alle  $f \in \text{dom}(s)$ . Der Definitionsbereich  $\text{dom}(s)$  von  $s$  wird auch mit  $\text{quad}(T)$  bezeichnet.

Offenbar gilt für einen positiven selbstadjungierten Operator  $T$  auf  $\mathcal{H}$  immer die Inklusion  $\text{dom}(T) \subset \text{quad}(T)$ .

Der Zusammenhang zwischen positiven selbstadjungierten Operatoren und dicht definierten abgeschlossenen positiven quadratischen Formen auf  $\mathcal{H}$  wird im nächsten Theorem benannt:

**Theorem A.25.** *Sei  $s$  eine positive quadratische Form mit dichtem Definitionsbereich  $\text{dom}(s)$  in  $\mathcal{H}$ . Dann sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:*

(i)  *$s$  ist die quadratische Form eines positiven selbstadjungierten Operators  $T$  auf  $\mathcal{H}$ .*

(ii)  *$s$  ist abgeschlossen.*

Ein Beweis der obigen Behauptung findet sich in [Dav] unter Theorem 4.12. Das nächste Theorem setzt sich aus den Aussagen in [Dav], Thm. 4.14, und [Wei], Thm. 5.38, zusammen.

**Theorem A.26 (Friedrichs-Erweiterung).** Sei  $S$  ein positiver symmetrischer Operator auf  $\mathcal{H}$  mit dichtem Definitionsbereich  $\text{dom}(S) = \mathcal{D}$ .

Dann ist die quadratische Form  $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, f \rightarrow \langle Sf, f \rangle$ , abschließbar und ihr Abschluß ist die quadratische Form einer positiven selbstadjungierten Erweiterung  $T$  von  $S$ .

Genauer: Bezeichnet  $\mathcal{H}_s$  wie oben die Vervollständigung von  $\mathcal{D}$  bzgl. der von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_s := \langle \cdot, \cdot \rangle + \langle S\cdot, \cdot \rangle$  induzierten Norm, so gilt  $\text{dom}(T) = \text{dom}(S^*) \cap \mathcal{H}_s$  und  $Tf = S^*f$  für alle  $f \in \text{dom}(T)$ . Ferner gilt  $\mathcal{H}_s = \text{quad}(T)$ .  $T$  ist die einzige selbstadjungierte Erweiterung von  $S$  mit der Eigenschaft  $\text{dom}(T) \subset \mathcal{H}_s$ .

# Verwendete Symbole

$\text{ad}(\mathfrak{g})$	Menge der Abbildungen $[x, \cdot]$ , $x \in \mathfrak{g}$
$\mathcal{B}(X)$	Menge der beschränkten linearen Operatoren auf dem normierten Raum $X$
$B_r$	offene Kugel bzgl. einer Riemann-Metrik um das Einselement einer Lie-Gruppe mit Radius $r$
$\mathbb{C}^\times$	Menge der komplexen Zahlen ohne die Null
$C_c(X)$	Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf dem lokalkompakten Hausdorff-Raum $X$ mit Werten in $\mathbb{C}$
$C_c^k(G)$	Raum der $k$ -fach differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger auf der Lie-Gruppe $G$ mit Werten in $\mathbb{C}$
$\text{ch}(\vartheta)$	Cosinus hyperbolicus im Punkt $\vartheta$
$\chi_A$	charakteristische Funktion der Menge $A$
$\mathcal{D}(G)$	Menge der $C^\infty$ -Funktionen mit kompaktem Träger auf der Lie-Gruppe $G$ mit Werten in $\mathbb{C}$ (Raum der Testfunktionen auf $G$ )
$d(g)$	s. Definition 2.33
$d(g, h)$	s. Definition 2.33
$d\theta(r)$	s. kommutatives Diagramm nach Bemerkung 2.13
$\text{der}(\mathfrak{g})$	Raum der Derivationen auf einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$
$\text{diam}(A)$	Durchmesser der Teilmenge $A$ eines metrischen Raumes
$\text{End}(V)$	Menge der linearen Endomorphismen auf einem Vektorraum $V$
$F_s$	s. Satz 2.42
$\mathfrak{g}^1$	linearer Aufspann aller Elemente $[x, y]$ , $x, y \in \mathfrak{g}$ (Kommutatoralgebra der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ )
$\text{Gl}(\mathbb{R}^d)$	Gruppe der invertierbaren $d \times d$ -Matrizen

$\gamma_x$	s. Voraussetzung 2.44
$\mathcal{H}_r$	Menge der komplexen Zahlen mit Realteil echt größer null
$I_\nu$	modifizierte Bessel-Funktion der ersten Art, s. Definition 4.5
$I_{p,q}$	s. Voraussetzung 1.1
$I_X$	identische Abbildung der Menge $X$
$\Im(z)$	Imaginärteil der komplexen Zahl $z$
$J_{\mathbb{R}}$	Menge der endlichen Vereinigungen von Intervallen aus $\mathbb{R}$
$\lambda_g$	Linksschiebung um $g \in G$ , siehe Definition 2.7
$K_\nu$	Macdonald-Funktion, s. Definition 4.5
$k_\theta^a$	s. Definitionsgleichung (4.11)
$\ker(A)$	Kern der linearen Abbildung $A$
$m$	modularer Faktor auf einer Lie-Gruppe $G$ , s. Definition 2.5
$\mu \otimes \mu'$	Produktmaß der Maße $\mu$ und $\mu'$ , siehe z. B. Satz A.3
$\mathbb{N}^\times$	Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null
$\Psi_z$	s. Lemma 4.8
$Q$	s. Voraussetzung 5.1
$q_z(a, \cdot, \cdot)$	s. Lemma 4.8
$\text{quad}(T)$	s. Definition A.24
$(\mathbb{R}^m)^\times$	der Vektorraum $\mathbb{R}^m$ ohne den Nullvektor
$\Re(z)$	Realteil der komplexen Zahl $z$
$R(\lambda; A)$	$:= (\lambda - A)^{-1}$ , $A$ ein linearer Operator
$\text{ran}(\psi)$	Bildbereich der Funktion $\psi$
$\rho$	s. Voraussetzung 5.1
$\rho_g$	Rechtsschiebung um $g \in G$ , s. Definition 2.7
$\rho(T)$	Resolventenmenge des linearen Operators $T$
$\text{sh}(\vartheta)$	Sinus hyperbolicus im Punkt $\vartheta$
$\text{span}(M)$	linearer Aufspann der Teilmenge $M$ eines Vektorraums $V$ in $V$
$\text{supp}(f)$	Träger der Funktion $f$ , i. e. Abschluß der Menge $f^{-1}(\mathbb{C}^\times)$
$\sigma(T)$	Spektrum des linearen Operators $T$

$\Sigma_X$	$\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen auf einem topologischen Raum $X$
$T_\xi F$	Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $F$ im Punkt $\xi \in F$
$\vartheta(\lambda)$	s. Lemma 4.6
$\mathcal{X}^G$	s. Definition 2.21 und Konvention 2.23
$ \cdot _D$	homogene Norm bzgl. $D$ , s. Definition 2.41
$\ \cdot\ _{p,q}$	s. Definition 1.11
$ \cdot _\infty$	Supremumsnorm

# Literaturverzeichnis

- [Ale94] G. Alexopoulos. *Spectral multipliers on Lie groups of polynomial growth*. Proc. of the AMS, Vol. 120, Nr. 3, 1994, S. 973 - 979.
- [Ast95] F. Astengo. *Multipliers for a distinguished Laplacean on solvable extensions of H-type groups*. Monatshefte f. Math. 120, 1995, S. 179 - 188.
- [Bou83] P. Bougerol. *Exemples de théorèmes locaux sur certains groupes résolubles*. Ann. Inst. H. Poincaré XIX, 1983, S. 369 - 391.
- [BFL] F. Broglia, E. Fortuna, D. Luminati. *Problemi Risolti Di Algebra Lineare*. Decibel editrice, Padova, 1995.
- [Bro] Bronstein, Semendjajew. *Handbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 25. Auflage, 1991.
- [Chr91] M. Christ.  *$L^p$  bounds for spectral multipliers on nilpotent groups*. Trans. Amer. Math. Soc., 328, 1991, S. 73-81.
- [ChM96] M. Christ, D. Müller. *On  $L^p$  spectral multipliers for a solvable Lie group*. Geom. and Funct. Analysis, Vol. 6, Nr. 5, 1996, S. 860 - 876.
- [CoW71] R. R. Coifman, G. Weiss. *Analyse harmonique non commutative sur certains espaces homogènes*. Lecture Notes in Math., 242, Springer-Verlag, 1971.
- [CGHM94] M. G. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki, G. Mauceri. *Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growths*. Studia Math. 111, 1994, S. 103 - 121.
- [Dav] E. B. Davies. *One-Parameter Semigroups*. Academic press, 1980.
- [FoS] G. B. Folland, E. M. Stein. *Hardy Spaces on Homogeneous Groups*. Princeton University Press, 1982.
- [For] O. Forster. *Analysis 3*. Vieweg, Braunschweig, 1984.

- [GRJ] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, A. Jeffrey (Editor). *Tables of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 5. Auflage, 1994.
- [Gui73] Y. Guivarc'h. *Croissance polynômiale et périodes des fonctions harmoniques*. Bull. Soc. Math. France 101, 1973, S. 333 - 379.
- [Heb93a] W. Hebisch. *The subalgebra of  $L^1(AN)$  generated by the Laplacian*. Proc. AMS 117, 1993, S. 547 - 549.
- [Heb93b] W. Hebisch. *Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups*. Colloq. Math., 65, 1993, S. 231 - 239.
- [Heb97] W. Hebisch. *Boundedness of  $L^1$  spectral multipliers for an exponential solvable Lie group*. Coll. Math., Nr. 73, 1997, S. 155 - 164.
- [Heb98] W. Hebisch. *Spectral multipliers on exponential growth solvable Lie groups*. Math. Zeitschr., Nr. 229, 1998, S. 435 - 441.
- [HLM01] W. Hebisch, J. Ludwig, D. Müller. *Sub-Laplacians of holomorphic  $L^p$ -type on exponential solvable groups*. Preprint (Berichtsreihe des Mathematischen Seminars Kiel Nr. 01-3, April 2001).
- [HeN79] B. Helffer, J. Nourrigat. *Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué*. Comm. Partial Diff. Eq. 4, 1979, S. 899 - 958.
- [Hel] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*. Academic Press, Orlando, 1978.
- [HiN] J. Hilgert, K. H. Neeb. *Lie-Gruppen und Lie-Algebren*. Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [Hör60] L. Hörmander. *Estimates for translation invariant operators in  $L^p$ -spaces*. Acta Math. 104, 1960, S. 93 - 140.
- [Hör67] L. Hörmander. *Hypoelliptic second order differential equations*. Acta Math. 119, 1967, S. 147 - 171.
- [Hul74] A. Hulanicki. *Subalgebra of  $L^1(G)$  associated with Laplacian on a Lie group*. Colloq. Math. 31, 1974, S. 259 - 287.
- [Hul76] A. Hulanicki. *On the spectrum of the Laplacian on the affine group of the real line*. Studia Math. 65, 1976, S. 199 - 204.
- [Hun56] G. A. Hunt. *Semi-groups of measures on Lie groups*. Trans. AMS 81, 1956, S. 264 - 293.

- [Jen73] J. W. Jenkins. *Growths of connected locally compact groups*. J. of Funct. Anal. 12, 1973, S. 113 - 127.
- [Lan] S. Lang. *Real and Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1993.
- [Leb] N. N. Lebedew. *Spezielle Funktionen und ihre Anwendung*. Bibliographisches Institut, Zürich, 1973.
- [LuM00] J. Ludwig, D. Müller. *Sub-Laplacians of holomorphic  $L^p$ -type on rank one AN-groups and related solvable groups*. J. of Funct. Anal. 170, 2000, S. 366 - 427.
- [NeS59] E. Nelson, W. F. Stinespring. *Representation of elliptic operators in an enveloping algebra*. Amer. J. Math. 81, 1959, S. 547 - 560.
- [MaM90] G. Mauceri, S. Meda. *Vector-valued multipliers on stratified groups*. Revista Mat. Iberoamer. 6, 1990, S. 141 - 154.
- [MüS94] D. Müller, E. M. Stein. *On spectral multipliers for Heisenberg and related groups*. J. Math. Pures et Appl., 73, 1994, S. 412 - 440.
- [Mus97] S. Mustapha. *Multiplicateurs spectraux sur certains groupes non-unimodulaires*. Harmonic Analysis and Number Theory, CMS Conf. Proc. Vol 21, 1997.
- [Mus98a] S. Mustapha. *Multiplicateurs de Mikhlin pour une classe particulière de groupes non-unimodulaires*. Ann. Inst. Fourier 48, Nr. 4, 1998, S. 957 - 966.
- [Mus98b] S. Mustapha. *Le problème de Mikhlin sur les groupes de Lie résolubles*. In: Habilitationsschrift, 1998.
- [Paz] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer Verlag, 1983.
- [Rud] W. Rudin. *Functional Analysis*. Tata McGraw-Hill, New Delhi, 16. Auflage, 1992.
- [Tit] E. C. Titchmarsh. *Eigenfunction Expansions Associated with Second-order Differential Equations, Part I*. Oxford University Press, 2. Auflage, 1962.
- [VSC] N. T. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon. *Analysis and Geometry on Groups*. Cambridge University Press, 1992.

- [Wat] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2. Auflage, 1958.
- [Wei] J. Weidmann. *Linear Operators in Hilbert Spaces*. Springer Verlag, 1980.
- [Wer] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer Verlag, 1995.
- [Yor92] M. Yor. *On some exponential functionals of Brownian motion*. Adv. Appl. Prob., 24, 1992, S. 509 - 531.