

**Präparation und Registrierung:
Günther Ludwigs Neubegründung der
Quantenmechanik**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel
vorgelegt von

André Freter

Kiel
2004

Referent:

Priv.-Doz. Dr. Albrecht Huber

Korreferent/in:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt:

Kiel, den

Der Dekan

Zusammenfassung

Günther Ludwig faßt die Quantenmechanik als eine spezielle Wechselwirkungstheorie zwischen zwei Typen von Makrosystemen auf, denjenigen der Präparation und denjenigen der Registrierung. Mit Makrosystemen werden dabei Objekte bezeichnet, die durch unmittelbare Handlungsanweisungen oder mit Hilfe der Begriffe der klassischen Physik beschreibbar sind. Die Quantenmechanik wird so in radikaler Weise auf ein realistisches Fundament gestellt, das ausschließlich auf die makroskopisch-phänomenologische Realität Bezug nimmt. Eine mikroskopische Realität wird nicht unterstellt.

In der hier vorgelegten Arbeit werden die zentralen Aspekte des Ludwigschen Zugangs zu einer Neubegründung der Quantenmechanik dargestellt. Die Neubegründung erweist sich in zwei Bereichen als leistungsfähig. Zum einen gewinnt man einen axiomatischen Aufbau der Quantenmechanik mit Hilfe physikalisch motivierter Aussagen. Zum anderen können Probleme der Interpretation überwunden werden.

Die mit den Konzepten der Präparation und Registrierung gewonnene Struktur erlaubt es, die beiden für die Theorie zentralen Begriffe des Zustandes und des Effektes sowie die aus ihnen abgeleiteten Beschreibungselemente etwa des Mikrosystems und der Observablen in einer Weise zu definieren, die eine eindeutige physikalische Interpretation ermöglicht. Hierfür stellt Ludwig ausführliche Überlegungen zum Aufbau physikalischer Theorien im allgemeinen an. Von besonderer Bedeutung ist dabei der in der Regel nicht exakt durchführbare Vergleich der experimentellen Aussagen mit denjenigen der mathematischen Theorie. Den damit zusammenhängenden Problemen kann man begegnen, indem man mathematische Strukturen einführt, die Aussagen über Meßungenauigkeiten auch im mathematischen Bild erlauben. Ludwig wählt dafür uniforme Räume, die sich für den Aufbau der Quantenmechanik als besonders fruchtbar erweisen. So offenbart sich etwa, daß die Heisenbergschen Unschärferelationen eine viel tieferliegende Struktur der Mikrosysteme zum Ausdruck bringen als nur Ungenauigkeiten bei der Messung. Ferner dienen sie zur Formulierung einer Gruppe zentraler Postulate, den sogenannten „Hauptaxiomen des Messens“.

Im einzelnen wird gelegentlich von der kanonischen Axiomatik Günther Ludwigs abgewichen. Im Gegensatz zu den Originalarbeiten wird das Konzept der Kombinierbarkeit von makroskopischen Präparier- und Registriervorrichtungen nicht einfach durch mathematische Definition festgelegt, sondern durch realitätsbezogene axiomatische Aussagen in die mathematische Theorie eingeführt. Um eines plausibleren Aufbaus willen werden gewisse Umstellungen in der Axiomatik zur Präparier-Registrier-Struktur vorgenommen. Eines der Axiome, die den Definitionen der Begriffe des Zustands und des Effekts zugrunde liegen, wird so modifiziert, daß in der Folge vereinfachte Konvexitätsaxiome verwendet werden können.

Abstract

Günther Ludwig regards quantum mechanics to be a special interaction theory between two types of macrosystems, one of these is preparation and the other one is registration. Macrosystems are objects which can be described by immediate instructions or by terms of classical physics. Thus quantum mechanics is grounded in a radical way on a realistic basis which refers entirely to the macroscopic-phenomenological reality. A microscopic reality is not assumed.

The current thesis discusses the central aspects of Ludwig's approach towards a new foundation of quantum mechanics. This new foundation shows to be efficient in two fields. On the one hand it is possible to gain an axiomatic construction of quantum mechanics by physically motivated statements. On the other hand problems of interpretation can be circumvented.

The structure achieved by preparation and registration allows the definition of the two central terms state and effect as well as derivated elements of description, e.g. microsystems and observables, which makes clear physical interpretation possible. To this end Ludwig considers the construction of physical theories in general. Here, the usually not exactly performable comparison of the experimental results to those predicted by the mathematical theory is especially important. Problems connected with this can be encountered by introducing mathematical structures which allow assertions of experimental inaccuracies even on the side of mathematics. Ludwig chooses uniform spaces which prove to be especially suitable for the construction of quantum mechanics. From this point of view Heisenberg's uncertainty relations reveal a much more deeper insight into the structure of microsystems than just experimental inaccuracies. Furthermore they are used to postulate the „Main Laws of Preparation and Registration“.

In special cases deviations from Günther Ludwig's axiomatics are discussed. In contrast to his original studies, the concept of combinability of the macroscopic preparation and registration devices is not only determined by the mathematical definition, but is also introduced into the mathematical theory by reality-related mathematical theory. To achieve a more plausible structure certain changes in the axiomatics of the preparation-registration-structure are made. One of the axioms, on which the definitions of the terms state and effect are based is modified to allow the usage of simplified convexity axioms.

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|------------|
| Zusammenfassung | iii |
| Einleitung | 1 |
| I Interpretationsprobleme der Quantenmechanik | 3 |
| 1 Fragen zur herkömmlichen Interpretation | 5 |
| 2 Ansatzpunkte zur Überwindung der Probleme | 11 |
| 3 Günther Ludwigs Programm einer Neubegründung der Quantenmechanik | 17 |
| II Der Ludwigsche Neuaufbau der Quantenmechanik | 23 |
| 4 Der prinzipielle Aufbau der Quantenmechanik | 25 |
| 4.1 Der prinzipielle Aufbau einer physikalischen Theorie | 26 |
| 4.2 Unschärfe Abbildungsprinzipien | 32 |
| 4.3 Die Endlichkeit der Physik | 39 |
| 4.4 Folgerungen für das Ludwigsche Programm einer realistischen Begründung der Quantenmechanik | 42 |
| 5 Die Präparier-Registrier-Struktur | 47 |
| 5.1 Der Ausgangspunkt des Ludwigschen Zuganges | 48 |
| 5.2 Einzelexperimente — Präparier- und Registrierereignisse | 51 |
| 5.3 Einzelprozesse und Auswahlverfahren | 57 |
| 5.4 Einfache mathematische Konsequenzen | 61 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.5 | Präparierverfahren | 66 |
| 5.6 | Registriermethoden und Registrierprozeduren | 70 |
| 5.7 | Die Abhängigkeit der Registrierung von der Präparation | 79 |
| 5.7.1 | Allgemeine Überlegungen zur Kombinierbarkeit | 79 |
| 5.7.2 | Ja-Nein-Experimente mit reproduzierbaren Häufigkeiten | 84 |
| 5.7.3 | Das Verhältnis der Abbildung $\bar{\mu}$ zum Wahrscheinlichkeitsbegriff aus Abschnitt 5.3 | 92 |
| 5.8 | Die Präparier-Registrier-Struktur | 98 |
| 6 | Zustände und Effekte | 101 |
| 6.1 | Kombinierbarkeit von Präparierverfahren und Registriermethoden | 102 |
| 6.2 | Rationale Konvexität | 121 |
| 6.3 | Die Zustands-Effekt-Struktur | 132 |
| 7 | Initiale Uniformitäten und zugehörige Topologien | 133 |
| 7.1 | Unschärfemengen für Zustände und Effekte | 134 |
| 7.2 | Uniforme Vervollständigungen | 137 |
| 8 | Einbettung in Banachraum-Strukturen | 151 |
| 8.1 | Konstruktion geeigneter Räume | 153 |
| 8.2 | Formulierung der Theorie im Kontext normierter Räume | 180 |
| 8.3 | Konvexe Strukturen von K und $\hat{\mathcal{L}}$ | 192 |
| 8.4 | Eine Halbordnung auf Δ und ein Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ | 213 |
| 9 | Hauptaxiome des Messens | 221 |
| 9.1 | Hauptaxiome der Empfindlichkeitssteigerung von Effekten | 222 |
| 9.1.1 | Empfindlichkeitssteigerung bezüglich zweier Effekte | 222 |
| 9.1.2 | Empfindlichkeitssteigerung bezüglich eines Effektes | 229 |
| 9.2 | Der Verband G der Entscheidungseffekte | 235 |
| 9.3 | Hauptaxiom über die Entmischung von Zuständen | 244 |
| 9.4 | Die Ludwigschen Darstellungssätze für $\overline{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ | 250 |
| 9.4.1 | Der Darstellungssatz für $\hat{\mathcal{L}}$ | 250 |
| 9.4.2 | Der Darstellungssatz für $\overline{\mathcal{K}}$ | 252 |
| 9.5 | Die Orthomodularität des Verbandes G und sein Verhältnis zu $\hat{\mathcal{L}}$ | 255 |
| 9.6 | Koexistenz von Effekten | 268 |
| 9.6.1 | Der Begriff der Koexistenz | 268 |
| 9.6.2 | Mathematisch äquivalente Formulierungen der Koexistenz | 275 |

| | | |
|------------|--|------------|
| 9.6.3 | Hauptaxiom für nicht-koexistente Entscheidungseffekte | 280 |
| 9.7 | Hauptaxiom der Quantisierung | 294 |
| 9.8 | Weitere Eigenschaften des Verbandes der Entscheidungseffekte | 297 |
| 9.9 | Der Begriff des Mikrosystems | 304 |
| III | Anwendungen des Ludwigschen Zugangs | 307 |
| 10 | Darstellung durch Hilberträume | 309 |
| 10.1 | Zerlegung in irreduzible Teile | 310 |
| 10.2 | Die Darstellung des Verbandes G der Entscheidungseffekte | 316 |
| 10.3 | Die Darstellung der Zustände und Effekte | 322 |
| 10.4 | Nicht-Trivialität der bisherigen Axiomatik | 349 |
| 10.5 | Die Koexistenz von Effektpaaren im Kontext des Hilbertraumes | 366 |
| 11 | Die Galilei-Gruppe – Dynamik, Masse und Spin | 373 |
| 11.1 | Darstellung durch p - und r -Automorphismen | 374 |
| 11.2 | Darstellung durch Mischungs- und Effekt-Automorphismen | 386 |
| 11.3 | Darstellung der gesamten Galilei-Gruppe | 392 |
| 11.4 | Unitäre Darstellungen bis auf einen Faktor | 398 |
| 11.5 | Dynamik, Masse und Spin | 406 |
| 12 | Das Verhältnis zur verbandstheoretischen Axiomatik | 419 |
| 13 | Die Überwindung von unzulässigen Vorstellungen und Interpretationsproblemen | 433 |
| 13.1 | Welle-Teilchen-Dualismus | 434 |
| 13.2 | Reduktion des Wellenpakets und Subjektivismus | 436 |
| 13.3 | Das Gedanken-Experiment von Einstein, Podolsky und Rosen | 439 |
| 13.3.1 | Der Artikel von Einstein, Podolsky und Rosen | 439 |
| 13.3.2 | Die Erörterung des Artikels von Einstein, Podolsky und Rosen im Lichte des Ludwigschen Zuganges | 441 |
| 13.4 | Ungenauigkeitsrelationen für Entscheidungseffekte | 453 |
| 13.5 | Die Forderung nach einer neuen Logik | 462 |
| 13.6 | Eine Bemerkung zur Bohr-Einstein-Debatte | 463 |
| 14 | Ergänzungen und ein Ausblick auf die Quanteninformationstheorie | 465 |
| 14.1 | Das Gedanken-Experiment von Schrödinger | 465 |

| | | |
|--------------------------|--|------------|
| 14.2 | Das Konzept der Observablen | 469 |
| 14.3 | Quanteninformationstheorie | 474 |
| Schlußbetrachtung | | 483 |
| Anhänge | | |
| A | Auszüge aus der Theorie uniformer Räume | 485 |
| A.1 | Grundlegende Definitionen | 485 |
| A.2 | Gleichmäßige Stetigkeit und Isomorphismus | 491 |
| A.3 | Initiale Uniformität und initiale Topologie | 493 |
| A.4 | Hausdorff-Vervollständigung | 497 |
| A.5 | Metrisierbarkeit | 503 |
| A.6 | Kompaktheit | 505 |
| B | Die Ludwigschen Konvexitätsaxiome | 513 |
| C | Hilfsaussagen zu Kapitel 7 | 517 |
| C.1 | Zum Beweis der Eigenschaften von $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. . | 517 |
| C.2 | Zum Beweis der Eigenschaften von $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. . | 519 |
| C.3 | Aussagen zum Verhältnis der verschiedenen Uniformitäten | 521 |
| C.4 | Hilfsaussagen zur Konvexität von $\overline{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ bezüglich $\hat{\mu}$ | 523 |
| D | Hilfsaussagen zu Kapitel 8 | 531 |
| D.1 | Hilfsaussage bezüglich der Einbettung von \mathcal{K} und \mathcal{L} in topologische Vektorräume | 531 |
| D.2 | Aussagen bezüglich der konvexen Strukturen von K und $\hat{\mathcal{L}}$ | 532 |
| D.3 | Ein Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ | 533 |
| E | Hilfsaussagen zu Kapitel 9 | 559 |
| E.1 | Die physikalische Gleichwertigkeit von A_1 und A'_1 zur Motivation des Axioms AV 1.1 | 559 |
| E.2 | Die physikalische Gleichwertigkeit von A_3 und A'_3 zur Motivation des Axioms AV 1.2 | 562 |
| E.3 | Die Identität der Mengen $\overline{\overline{L}}$ und $[0, 1]_\Delta$ | 563 |
| E.4 | Die Äquivalenz von A'_5 und AV 2s | 573 |
| E.5 | Eine Aussage zum Beweis von Satz 9.2.2 | 574 |
| E.6 | Aussagen zum Beweis des Darstellungssatzes für $\hat{\mathcal{L}}$ | 575 |

| | | |
|----------|---|------------|
| E.7 | Aussagen zum Beweis des Darstellungssatzes für $\overline{\mathcal{K}}$ | 579 |
| E.8 | Zur Koexistenz bei Effekten und zur Motivation von Axiom AV 3 | 586 |
| E.9 | Lemma zur Formulierung von Aussage AV 4 | 592 |
| F | Auszüge aus der Verbandstheorie | 597 |
| G | Hilfsaussagen zu Kapitel 10 | 617 |
| G.1 | Aussagen zur Zerlegung von G in irreduzible Teile | 617 |
| G.2 | Aussagen zum Beweis des Darstellungssatzes 10.2.1 für G | 629 |
| G.3 | Die Sätze von L.S. Pontrjagin, V.S. Varadarajan und C. Piron | 653 |
| G.4 | Der Verband der Projektionsoperatoren eines \mathbb{C} -Hilbertraumes | 665 |
| H | Theoreme zur unitären Darstellung in Kapitel 11 | 673 |
| H.1 | Die Theoreme von E.P. Wigner und R.V. Kadison | 673 |
| H.2 | Das Theorem von M.H. Stone | 674 |
| I | Aussagen zur verbandstheoretischen Axiomatik in Kapitel 12 | 677 |
| | Liste der Axiome | 683 |
| | Symbolverzeichnis | 687 |
| | Literaturverzeichnis | 699 |
| | Danksagungen | 713 |
| | Lebenslauf | 715 |
| | Eidesstattliche Erklärung | 717 |

Einleitung

Die berühmte Diskontinuitätshypothese von Max Planck aus dem Jahre 1900 markiert den Beginn der Entwicklung einer neuen physikalischen Theorie, die als Quantenmechanik bezeichnet wird. Sie wurde geschaffen, um einer Vielzahl von Phänomenen, die dem Verständnis der klassischen Physik nicht zugänglich sind, einen ordnenden Rahmen zu geben. Die zentralen Elemente des mathematischen Teils der Quantenmechanik konnten in kurzer Zeit entwickelt werden. Dagegen gibt die Interpretation der dabei vorkommenden mathematischen Symbole bis heute Anlaß zu intensiven Diskussionen.

Günther Ludwig hat sich den dadurch aufgeworfenen Fragen von einem neuen Standpunkt aus genähert. Ausgangspunkt der quantenmechanischen Beschreibung sind in dieser Auffassung nicht die sogenannten quantenmechanischen Systeme selbst, sondern die makroskopischen Vorrichtungen, die zur Präparation und Registrierung dienen. Daß die Lösung der Interpretationsprobleme auf einem solchen Wege zu finden seien, kann man bereits Aussagen von Niels Bohr und Werner Heisenberg entnehmen. Günther Ludwig hat aber als erster den so vorgezeichneten Weg in konsequenter Weise beschritten und dabei alle Aspekte des Neuaufbaus gründlich durchdacht.

Die vorliegende Arbeit stellt den Ludwigschen Zugang im Zusammenhang dar. Dazu werden in Teil I nach einer kurzen Darstellung häufig vorgebrachter Interpretationsprobleme erste auf Niels Bohr und Werner Heisenberg zurückgehende Ansatzpunkte zu ihrer Überwindung genannt. Danach wird der Ludwigsche Zugang in programmatischer Weise vorgestellt. Dem folgt in Teil II die Realisierung des Ludwigschen Programms in der gebotenen Ausführlichkeit. Teil III erörtert das Spektrum von Anwendungsmöglichkeiten der in Teil II gewonnenen physikalischen Theorie einerseits hinsichtlich der Begründung zentraler quantenmechanischer Strukturen, wie etwa denen des Hilbertraumes oder der Schrödingergleichung, und andererseits bezüglich einer Neubewertung der in Teil I aufgeführten Interpretationsprobleme.

Insgesamt konzentriert sich die vorliegende Arbeit auf die Bereitstellung aller Instrumente, die benötigt werden, um den Ludwigschen Zugang zur Quantenmechanik sowohl mathematisch als auch interpretatorisch zu erschließen. Demgegenüber wird die so entwickelte physikalische Theorie selbst nicht in allen Strukturfeinheiten erkundet, sondern auf das Wesentliche reduziert. Insbesondere wird es im Rahmen der mathematischen Theorie vermieden, Aussagen zu präsentieren, die im weiteren Verlauf nicht mehr benötigt werden. Zu den Zielen der Arbeit gehört es jedoch, die in der benutzten Literatur häufig nur flüchtig angedeuteten Beweise so sorgfältig durchzuführen, daß sie in allen Einzelschritten nachvollziehbar werden. Die dafür notwendigen mathematischen Hilfsmittel werden in Anhängen bereitgestellt.

Eine Übersicht der vorkommenden axiomatischen Relationen findet man ab Seite 683. Mit Rücksicht auf die große Anzahl vorkommender Symbole steht beginnend ab Seite 687 ein Symbolverzeichnis zur Verfügung.

Zum Zwecke des übersichtlichen Verweisens werden die vorkommenden Definitionen, Lemmata und mathematischen Sätze durch Angabe dreier Ziffern gekennzeichnet. Die dem Kapitel und dem Abschnitt folgende dritte Zahl numeriert alle in dem betreffenden Abschnitt vorkommenden mathematischen Aussagen und Begriffsbildungen in der Reihenfolge ihrer Nennung.

Teil I

Interpretationsprobleme der Quantenmechanik

Kapitel 1

Fragen zur herkömmlichen Interpretation

Seit dem Beginn der Entwicklung der Quantenmechanik stellten sich die Interpretationsfragen in besonderer Weise. Dabei stieß man immer wieder auf vermeintliche Probleme und sogar scheinbare innere Widersprüche der Theorie. Es wird hier auf eine ausführliche historische Erörterung verzichtet, da es derartige Darstellungen in großer Zahl gibt. Als Beispiele seien [Jam66, Jam74, WZ83, BS87, MR01] genannt. Stattdessen skizziert die folgende Liste kurz prominente Überlegungen zur Interpretation der Quantenmechanik, die in der Regel als problematisch oder gar als paradox aufgefaßt werden.

(i) **„Welle-Teilchen-Dualismus“**

Als eine der ersten Irritationen in der sich neu entwickelnden Quantenmechanik tauchte ein Phänomen auf, das üblicherweise mit dem Stichwort Welle-Teilchen-Dualismus belegt wird. Betrachtet man etwa den bekannten Versuchsaufbau, in dem Licht von einer Quelle ausgehend nach Passieren eines Doppelspaltens auf eine Photoplatte trifft, dann findet man nach einiger Zeit ein Interferenzmuster, das sich bei genauer Analyse der Photoplatte aus einer Vielzahl einzelner geschwärtzter Punkte zusammensetzt. Man hat somit in demselben experimentellen Aufbau zwei scheinbar widersprüchliche Eigenschaften des Lichtes beobachtet. Einerseits scheint es wellenförmiger Natur zu sein, da es zu Interferenzmustern kommt. Andererseits scheint es korpuskulären Charakter zu haben, da das Muster auf dem Schirm sich aus einer Vielzahl einzelner Punkte zusammensetzt. Analoge Beobachtungen gewinnt man etwa auch mit Elektronenquellen. Wonach aber entscheidet sich, welches Verhalten

das quantenmechanische System zeigt? Wie kann es wissen, daß es sich in einer experimentellen Situation befindet, die Wellen- oder Teilchenverhalten verlangt?

(ii) **„Zustandsänderung durch Messung“**

Üblicherweise werden in der Quantenmechanik zwei Typen der Zustandsänderung quantenmechanischer Systeme betrachtet, zum einen die Änderung gemäß der Schrödingergleichung und zum anderen die Änderung durch die Messung. Beide Typen unterscheiden sich grundsätzlich. Während die Schrödingergleichung für eine stetige Veränderung des Zustandes steht, stellt die Messung einen unstetigen Vorgang dar, der sich in der sogenannten Reduktion des Wellenpakets äußert. Hat man zum Beispiel den Impuls eines Elektrons bestimmt, so gibt die Quantenmechanik nur Wahrscheinlichkeitswerte für den Ort des Elektrons an, das heißt die Wellenfunktion dehnt sich über ein gewisses Raumgebiet aus. Führt man nun eine Messung des Ortes durch, ist der Ort nach der Messung auf ein kleines Raumgebiet beschränkt. Der experimentelle Aufbau hat das Elektron dazu bewogen, in kürzester Zeit seine Wellenfunktion auch in beliebig großer Entfernung sprunghaft zu ändern. So spricht W. Heisenberg etwa in [Hei59], S. 38 von einer „unstetigen Änderung unserer Kenntnis“, von einem „Übergang vom Möglichen zum Faktischen“ sowie von einem „Quantensprung“. Der Terminus der Reduktion des Wellenpakets deutet sich bereits in [Hei27] an:

Jede Ortsbestimmung reduziert also das Wellenpaket [...].

Warum aber gibt es in der Quantenmechanik neben der auch in der klassischen Physik bekannten stetigen Zustandsänderung noch einen weiteren, völlig andersartigen Prozeß? Und auch hier muß man wieder die Frage stellen, wie ein quantenmechanisches System beurteilen kann, daß es sich in der einen oder der anderen Situation befindet? Wie kann es entscheiden, daß ein apparativer Aufbau zu einer Messung führt oder nur einer stetigen Zustandsänderung dient?

(iii) **Meßprozeß und Subjektivismus**

Dem Meßprozeß in der Quantenmechanik wird offenbar eine besondere Rolle zugeordnet, die J. von Neumann zu einer ausführlichen Analyse veranlaßt hat. Von Neumann verlangt, daß es möglich sein muß, die Grenze zwischen beobachtetem Objekt und Beobachter auf beliebige Weise zu ziehen. Er spricht dabei

in seinem 1932 erschienenen Werk *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* von einem psychophysikalischen Parallelismus. Dazu bemerke man die Aussage aus [vN68], S. 224, einem unveränderten Nachdruck des oben genannten Werkes:

Daß diese Grenze beliebig tief ins Innere des Körpers des wirklichen Beobachters verschoben werden kann, ist der Inhalt des Prinzips vom psychophysikalischen Parallelismus – dies ändert aber nichts daran, daß sie bei jeder Beschreibungsweise irgendwo gezogen werden muß, wenn dieselbe nicht leer laufen, d.h. wenn ein Vergleich mit der Erfahrung möglich sein soll.

Zur Erörterung betrachtet von Neumann drei Systeme. Mit I benennt er das Meßobjekt, mit II den Meßapparat und mit III den Beobachter. Nun stößt von Neumann auf ein zentrales Problem, denn die Kopplung des Meßobjektes I an die Meßapparatur II führt keineswegs zur erstrebten Reduktion des Wellenpakets. Stattdessen bleibt der Gesamtzustand im allgemeinen in einer Superposition mehrerer Zustände. Daher führen derartige Überlegungen auf einen unendlichen Regreß, denn, wenn man das zusammengesetzte System zur Festlegung des Meßergebnisses mit einem weiteren Meßapparat untersuchen müßte, würde man das Problem nur um eine weitere Stufe ohne absehbares Ende verschieben. Von Neumann sieht die Lösung des Meßproblems offenbar in der subjektiven Komponente, denn auf S. 234 in [vN68] sagt er:

[...] es genügt II „anzusehen“, und A in I ist gemessen.

Dabei soll A eine physikalische Größe des Systems I bezeichnen. Durch die von Neumannschen Überlegungen ist eine subjektive Komponente in die Quantenphysik eingedrungen, denn nach von Neumannscher Sichtweise ist es für das weitere Verhalten der betrachteten Systeme entscheidend, ob der Beobachter eines Meßergebnisses gewahr wird oder nicht. Das heißt, das Bewußtsein des Beobachters soll eine entscheidende Rolle spielen.

Aber ist die Einbeziehung des Bewußtseins wirklich die einzige Möglichkeit, um das Verhältnis des Meßprozesses zur Quantenmechanik in widerspruchsfreier Weise zu formulieren?

J. von Neumann ist nicht der einzige prominente Vertreter einer subjektiven Komponente zur Interpretation der Quantenmechanik. Neben anderen hat auch E.P. Wigner hat in dem Artikel „Remarks on the mind-body question“,

den man etwa als Nachdruck in [WZ83], Abschnitt I.12, S.168-181 findet, eine ausführliche Argumentation zur Rolle des Bewußtseins aufgebaut. So schreibt er dort zum Beispiel:

When the province of physical theory was extended to encompass microscopic phenomena, through the creation of quantum mechanics, the concept of consciousness came to the fore again: it was not possible to formulate the laws of quantum mechanics in a fully consistent way without reference to the consciousness. [...] it will remain remarkable, in whatever way our future concepts may develop, that the very study of external world led to the conclusion that the content of the consciousness is an ultimate reality.

Ist es wirklich unmöglich, die Quantenmechanik aufzubauen, ohne das Bewußtsein des Beobachters zu berücksichtigen ?

(iv) **„Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon“**

In dem Artikel [EPR35] präsentieren A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen ein berühmtes Gedanken-Experiment. Schon die Formulierung „Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon“, mit dem das Gedanken-Experiment zumeist titulierte wird, bringt die Meinung zum Ausdruck, daß es sich hierbei um einen experimentellen Aufbau handelt, der die innere Widersprüchlichkeit oder zumindest die Unzulänglichkeit der Quantenmechanik nachweist.

Ist der Begriff Paradoxon wirklich angebracht ?

(v) **Interpretation der Unschärferelationen**

In vielen Darstellungen der Quantenmechanik nehmen die Unschärferelationen im Zusammenhang mit der Interpretation eine wichtige Rolle ein. Dabei werden häufig drei verschiedene Interpretationen genannt. Die erste Interpretationsvariante sieht die Unschärferelationen als mathematischen Ausdruck für eine unkontrollierbare Störung des Mikrosystems durch die Messung. Dabei wird zumeist auf das Elektronen-Mikroskop verwiesen, das W. Heisenberg in [Hei27] diskutiert. Die zweite Interpretationsvariante versteht die Unschärferelationen als Ausdruck für Meßungenauigkeiten prinzipieller Natur. Als dritte Variante wird geäußert, daß die Unschärferelationen eine Aussage über die Unmöglichkeit einer gleichzeitigen Messung der vorkommenden Größen machen.

Wie passen die drei Interpretationen zusammen ? Einmal sollen die Ungleichungen eine Eigenschaft von Mikrosystemen ausdrücken. Ein anderes Mal

geben sie aber eine Auskunft über Genauigkeitsprobleme bei der Messung, die aus prinzipiellen Gründen nicht überwunden werden können. Im dritten Fall machen sie eine Aussage über physikalische Größen. Damit gibt es offenbar zumindest drei Interpretationen für dieselben mathematischen Relationen. Das scheint nicht unproblematisch. Wie kann zentralen Symbolen der Theorie mehr als eine Interpretation zukommen? Wenn sie im Zusammenhang mit den Unschärferelationen auf verschiedene Weisen interpretiert werden können, stellt sich die Frage, ob in anderen Bereichen derartige Mehrdeutigkeiten nicht auch vorkommen? Wie kann man dann entscheiden, wie die vorkommenden mathematischen Symbole zu interpretieren sind?

(vi) „**Quanten-Logik**“

Als eine weitere Konsequenz aus den Erfahrungen mit der Quantenmechanik wurde die Notwendigkeit formuliert, daß zu einer neuen Logik überzugehen sei. Als Ursprung ist dafür der Artikel [BN36] von G. Birkhoff und J. von Neumann zu nennen. Die Überlegungen zu mehrwertigen Logikkalkülen wurden in der Folge von vielen verschiedenen Autoren aufgenommen und weiterentwickelt. Als illustrativ für den dabei vertretenen Standpunkt werden die Überlegungen C.F. Weizsäckers in [vW44], S. 90ff. genannt.

Aber ist es tatsächlich zwingend, zu einer neuen Logik überzugehen? Wieso trägt dann das mathematische Gerüst des Hilbertraumes, das doch auf der herkömmlichen zweiwertigen Logik basiert? Wie kann es sein, daß die zweiwertige Logik für eine solche Fülle physikalischer Vorgänge ein geeignetes Konzept ist, aber im Falle der Quantenmechanik nicht mehr angebracht ist?

Damit liegt jetzt eine Liste von Problempunkten als Referenz vor. Nach der Entwicklung des Ludwigschen Zuganges in Teil II und zugehörigen Erweiterungen in Teil III soll in Kapitel 13 diskutiert werden, in welcher Form obige Probleme vom Ludwigschen Standpunkt als überwunden einzuschätzen sind.

Kapitel 2

Ansatzpunkte zur Überwindung der Probleme

Zur Überwindung der in Kapitel 1 aufgeführten Probleme ist es wichtig, sich auf das experimentelle Ausgangsmaterial zu besinnen. In eine solche Richtung gingen viele Überlegungen, die schon von den Protagonisten der Entwicklung der Quantenmechanik, wie Niels Bohr und Werner Heisenberg, betont wurden. Die folgende Zusammenstellung einiger Zitate zunächst Heisenbergs und dann Bohrs soll das untermauern. Zudem soll damit ein erstes gedankliches Fundament für die Erläuterung des Ludwigschen Programms gelegt werden. Es handelt sich dabei aber keinesfalls um einen historischen Abriß der Entwicklung der Ideenwelt Bohrs und Heisenbergs. Solchen ausführlichen und wissenschaftstheoretisch unbedingt interessanten Darlegungen kann hier kein Platz eingeräumt werden. Stattdessen wird nur stellvertretend für eine ungeheure Fülle von zugehörigen Betrachtungen neben der Literatur, die in der Einleitung zu Kapitel 1 genannt wurde, auch auf [d'E76] verwiesen. Eine interessante Darstellung insbesondere der Entwicklung der Bohrschen Ideen von philosophischer Seite liefert [Hel98].

Als Ausgangspunkt einer in sich konsistenten Interpretation der Quantenmechanik dient eine rein statistische Deutung. Die prinzipielle Erwägung eines statistischen Standpunktes geht auf eine Fußnote von M. Born in seinem Artikel [Bor26] zurück. Dabei sei betont, daß nur die prinzipielle Idee der statistischen Deutung zum Zuge kommen soll, keineswegs die anderen Überlegungen, die M. Born in dem erwähnten Artikel vorstellt.

Von N. Bohr und W. Heisenberg wird immer wieder in den Vordergrund gestellt, daß man sich mehr auf das zu konzentrieren habe, was man eigentlich beobachtet. So schreibt Heisenberg bereits in [Hei25]:

Bei dieser Sachlage scheint es geratener, jene Hoffnung auf eine Beobachtung der bisher unbeobachtbaren Größen (wie Lage, Umlaufzeit des Elektrons) ganz aufzugeben, gleichzeitig also einzuräumen, daß die teilweise Übereinstimmung der genannten Quantenregeln mit der Erfahrung mehr oder weniger zufällig sei, und zu versuchen, eine der klassischen Mechanik analoge quantentheoretische Mechanik auszubilden, in welcher nur Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen vorkommen.

Bemerkenswert scheint auch die Aussage, die Heisenberg in [Hei31] festhält.

Die moderne Atomphysik handelt also nicht vom Wesen und Bau der Atome, sondern von den Vorgängen, die wir beim Beobachten des Atoms wahrnehmen; das Gewicht liegt also stets auf dem Begriff „Beobachtungsprozeß“.

Allerdings verbindet Heisenberg mit dem „Beobachtungsprozeß“ in Verletzung der obigen Vorgehensweise nicht nur die makroskopischen Vorgänge, sondern eine Vorstellung über ein Objekt, das durch den Meßvorgang in unkontrollierbarer Weise gestört wird.

In [Hei59] finden sich weitere Aussagen, die für sich eine Neubegründung der Quantenmechanik eignen. So wird auf S. 27 gesagt:

Jedes physikalische Experiment, gleichgültig, ob es sich auf Erscheinungen des täglichen Lebens oder auf Atomphysik bezieht, muß in den Begriffen der klassischen Physik beschrieben werden. Diese Begriffe der klassischen Physik bilden die Sprache, in der wir die Anordnung unserer Versuche angeben und die Ergebnisse festlegen. Wir können sie nicht durch andere ersetzen.

Auf S. 33f. desselben Werkes findet man Aussagen von Heisenberg in bezug auf die sogenannte Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik:

Ein Hemmnis für das Verständnis dieser Deutung ergibt sich allerdings stets, wenn man die bekannte Frage stellt: Aber was geschieht denn „wirklich“ in einem Atomvorgang? Zunächst ist schon vorher gesagt worden, daß man die Messung und die Ergebnisse der Beobachtung stets in den Begriffen der klassischen Physik beschreiben muß.

Auch auf S. 40 von [Hei59] weist Heisenberg mit Nachdruck auf die Notwendigkeit der Verwendung der klassischen Begriffswelt hin, indem er dem Vorschlag, daß „eine radikale Änderung unserer Begriffe bei einer Beschreibung der Experimente zu einer nichtstatistischen, völlig objektiven Beschreibung der Natur“ führen könnte, entgegnet:

Dieser Vorschlag beruht aber auf einem Mißverständnis. Die Begriffe der klassischen Physik sind nur die Verfeinerung der Begriffe des täglichen Lebens und bilden einen wesentlichen Teil der Sprache, die die Voraussetzung für alle Naturwissenschaften bildet. Unsere wirkliche Lage in der Naturwissenschaft ist so, daß wir tatsächlich die klassischen Begriffe für die Beschreibung unserer Experimente benützen und benützen müssen; denn sonst können wir uns nicht verständigen. Und die Aufgabe der Quantentheorie bestand eben darin, die Experimente auf dieser Grundlage theoretisch zu deuten.

Besonders prägnant wird Heisenberg in [Hei69], S. 171 bei der Wiedergabe eines Gesprächs mit der Philosophin Grete Hermann zu Beginn der dreißiger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts. Auf die Frage, was Atome seien, gibt Heisenberg die folgende Antwort wieder:

Dafür wird es kaum einen sprachlichen Ausdruck geben können, denn unsere Sprache hat sich an den täglichen Erfahrungen gebildet, und die Atome sind ja gerade nicht Gegenstände der täglichen Erfahrung. Aber wenn Sie mit Umschreibungen zufrieden sind: Sie sind Bestandteile von Beobachtungssituationen, Bestandteile, die für eine physikalische Analyse der Phänomene einen hohen Erklärungswert besitzen.

In den genannten Zitaten Heisenbergs kommt deutlich zum Ausdruck, daß die eigentliche experimentelle Situation im Mittelpunkt der Beschreibung durch die Physik stehen sollte. Zudem sollte man die Beschreibung mittels der Instrumente tun, die durch die klassische Physik, also im Endeffekt durch die Alltagssprache, zur Verfügung stehen.

Die Überlegungen von Niels Bohr gehen in eine ähnliche Richtung. So findet man etwa in [Boh66] auf S. 1:

[...] beruht jede Beschreibung physikalischer Erfahrungen letztlich auf der Umgangssprache, die unserer Orientierung in der Umwelt und der Aufspürung von Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung angepaßt

ist. So hat sich Galileis Programm, wonach die Beschreibung physikalischer Phänomene auf meßbaren Größen beruhen muß, als zuverlässige Grundlage für die Ordnung eines immer größeren Erfahrungsbereiches erwiesen.

Auf S. 3f. desselben Werkes findet man weiter:

Der entscheidende Punkt ist die Erkenntnis, daß die Beschreibung der Versuchsanordnung und die Registrierung von Beobachtungen in der mit der gewöhnlichen physikalischen Terminologie passend verfeinerten Umgangssprache zu erfolgen haben. Dies ist eine einfache logische Forderung, da mit dem Wort Experiment nur ein Verfahren gemeint sein kann, über das wir anderen mitteilen können, was wir getan und was wir gelernt haben. [...]

Die Beschreibung atomarer Phänomene hat in dieser Hinsicht einen vollkommen objektiven Charakter in dem Sinne, daß nicht ausdrücklich auf einen individuellen Beobachter Bezug genommen wird und daß deshalb, bei gebührender Berücksichtigung relativistischer Forderungen keinerlei Mehrdeutigkeit in der Mitteilung der Erfahrung enthalten ist.

Bezüglich aller solcher Punkte unterscheidet sich das Beobachtungsproblem der Quantenphysik in keiner Weise von der klassischen physikalischen Betrachtungsweise. [...]

Demgemäß muß die eindeutige Beschreibung eigentlicher Quantenphänomene prinzipiell die Angaben aller relevanten Züge der Versuchsanordnung umfassen.

In Hinsicht auf die Notwendigkeit der Verwendung einer vielwertigen Logik, nimmt Bohr auf S. 6 von [Boh66] in der folgenden Weise Stellung:

Aus der vorausgehenden Argumentation geht jedoch hervor, daß jede Abweichung von der Umgangssprache und der gewöhnlichen Logik vollkommen vermieden werden kann, wenn das Wort „Phänomen“ einzig und allein dem Hinweis auf eindeutig mitteilbare Beobachtungsergebnisse vorbehalten bleibt, in deren Beschreibung das Wort „Messung“ in seiner einfachen Bedeutung von standardisiertem Vergleich gebraucht wird. Solche Vorsicht in der Wahl der Terminologie ist besonders wichtig bei der Erforschung eines neuen Erfahrungsbereiches, wo die Aufschlüsse nicht in dem wohlbekanntem Rahmen zusammengefaßt werden können, der in der klassischen Physik so uneingeschränkt Anwendbarkeit findet.

Heisenberg präsentiert in [Hei69], S. 124 noch eine weitere im Zusammenhang mit dem Ludwigschen Zugang interessante Aussage Bohrs:

Was wir mit einer objektivierenden Sprache im Sinne der früheren Physik übertragen können, das sind doch nur Aussagen über das Faktische. Etwa: Hier ist die photographische Platte geschwärzt, oder: Hier haben sich Nebeltröpfchen gebildet. Über die Atome wird dabei nicht geredet.

Die genannten Zitate Bohrs und Heisenbergs liefern erste Ansätze für einen neuen Zugang zur Quantenmechanik, denen auch die Ludwigschen Überlegungen folgen, wie sich bereits im nächsten Kapitel zeigen wird.

Kapitel 3

Günther Ludwigs Programm einer Neubegründung der Quantenmechanik

Wie die im vorhergehenden Kapitel aufgeführten Aussagen zeigen, ordnen Bohr und Heisenberg der Berücksichtigung des experimentellen Aufbaus und dabei der Verwendung der üblichen klassischen Terminologie zu seiner Charakterisierung eine zentrale Rolle hinsichtlich einer in sich konsistenten Interpretation der Quantenmechanik zu. Allerdings wird derartigen Überlegungen noch nicht konsequent genug nachgegangen. Stattdessen werden immer wieder Vorstellungen bewußt oder unbewußt hinzugezogen, die im Bereich makroskopischen Geschehens völlig gerechtfertigt sind, die aber den mikrophysikalischen Vorgängen nicht angemessen sind.

Als Antwort auf die Interpretationsprobleme entwirft und realisiert G. Ludwig ein Programm, mit dem der Quantenmechanik ein neues Fundament gegeben wird. Am Anfang stehen dabei Betrachtungen hinsichtlich der Rolle des Subjekts in der Quantenmechanik, die schließlich in der Entwicklung eines eigenen Zugangs zur Quantenmechanik münden. Es wird nun dargelegt, daß Ludwig die zentralen Ideen des Programms bereits in den fünfziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts entworfen hat. Dem schließt sich ein knapper historischer Abriss über die Realisierung des Programms an. Die dabei entstandene Formulierung der Quantenmechanik sowie ihre Implikationen sind dann Inhalt von Teil II und III der hier vorgestellten Arbeit.

In dem Artikel [Lud53] läßt G. Ludwig erste Ansätze zu einer Neubegründung der Quantenmechanik erkennen, denn es wird der Bedeutung der makroskopischen Phänomene eine besondere Rolle zuerkannt. Im Rahmen des ersten Buches [Lud54a],

das G. Ludwig über Quantentheorie verfaßt, wird die Vorsicht im Umgang mit den quantenmechanischen Phänomenen noch etwas deutlicher. So wird dort zum Beispiel auf S. 170 gesagt:

Die mikroskopischen Objekte existieren für die Physik geradezu nur durch ihre Wirkungen im Makroskopischen. Ein Elektron ist das, was im Makroskopischen die und die Effekte hervorruft. [...]

Eines aber ist innerhalb der makroskopischen Vorgänge immer erlaubt: aus der Form der Wirkung auf die Form des wirkenden Objektes zu schließen. [...]

Im Makroskopischen gilt also die Äquivalenz von Form der Wirkung und Form des Wirkenden. Dies gilt nicht mehr für die Wirkungen des Mikrokosmos.

Um also überhaupt über die sogenannten „mikroskopischen Objekte“ Aussagen treffen zu können, bedarf es der Betrachtung ihrer Wirkung auf die makroskopische Welt. Eine übersichtsartige Zusammenfassung des damaligen Ludwigschen Standpunktes hinsichtlich der Rolle des Subjekts und der Notwendigkeit eines neuen Logikkalküls liegt mit [Lud54b] vor. In der Folge entwickelt Ludwig seinen Ansatz weiter, dessen prinzipielle Aspekte er in rein verbaler Form mit [Lud55] vorstellt:

Jede Aussage der Quantenmechanik bezieht sich daher auf einen makroskopischen Effekt, der als solcher durch die klassische Physik beschrieben werden kann. [...]

[...] die Quantenmechanik beschäftigt sich mit makroskopischen und daher objektivierbaren Effekten, die von mikroskopischen Objekten hervorgerufen werden. Sie macht *nur* Aussagen über das Auftreten solcher Effekte und *keine* Aussagen über ein mikroskopisches Objekt an sich, wenn wir darunter ein solches verstehen, das von der übrigen Welt isoliert ist. [...]

Die Quantenmechanik betrachtet thermodynamisch irreversible Prozesse an makroskopischen Dingen, als deren Ursache sie mikroskopische Objekte ansieht. Sie beschreibt die Korrelationen im Auftreten solcher Effekte, das heißt die Häufigkeitsbeziehungen zwischen solchen Effekten.

Es wird nun deutlich, daß die Quantenmechanik nur auf der Basis makroskopischer Phänomene formuliert werden soll. Mithin wird verneint, von mikroskopischen Objekten zu sprechen, ohne den experimentellen Zusammenhang zu berücksichtigen.

Bestandteilen der mikroskopischen Welt kommt nur vermittels ihrer Manifestation innerhalb der makroskopischen Welt Realität zu.

Bei der Umsetzung derartiger Überlegungen spielt eine Klarstellung des Zustandsbegriffs eine besondere Rolle. Diesbezüglich notiert G. Ludwig ebenfalls in [Lud55]:

[...] sei betont, daß ein quantenmechanischer Zustand keine Eigenschaft eines einzigen mikroskopischen Objektes ist. Ein bestimmter Zustand ist immer eine Eigenschaft einer *sehr großen Zahl* von mikroskopischen Objekten, einer sogenannten statistischen Gesamtheit. [...]

Entscheidend für den Zustand ist die Art, auf welche die mikroskopischen Objekte gewonnen werden, d. h. präpariert werden, mit denen man eine Experimentreihe durchführen will.

Der Zustand vermag die Phänomene im Zusammenhang mit Mikrosystemen nicht ausreichend zu fassen. Vielmehr ist ihm mit der Betrachtung des eigentlichen Präparationsprozesses ein Fundament zu geben, das sich stärker am Experiment orientiert.

Das Verhältnis der Quantenmechanik zur Makrophysik wird in dem folgenden Zitat aus [Lud61], S. 152 nochmals auf den Punkt gebracht. Das dabei verwendete Symbol a bezeichnet einen Effekt, der an einer makroskopischen Apparatur auftreten kann, wie etwa Blasen in einer Nebelkammer oder Schwärzungen auf einer Photoplatte.

Die Entscheidung über das Auftreten von a bedarf keiner subjektiven Entscheidung mehr. Über das Auftreten von a wird in der Sprache der klassischen Beschreibung objektiver Tatbestände gesprochen. Um die Quantenmechanik zu interpretieren, muß also die *klassische* Physik als Beschreibungsform im Bereich der makroskopischen Objekte vorausgesetzt werden. Ist erst einmal ein makroskopischer Effekt eingetreten, so kann dieser rein nach den Methoden der klassischen Physik weiterverarbeitet werden.

Das so charakterisierte Programm wird durch G. Ludwig und Mitglieder seiner Arbeitsgruppe in einer Serie von Artikeln [Lud64, Lud67a, Lud67b, Lud67c, Lud68, Däh68, Sto69] ausgearbeitet, auf deren Basis mit dem Buch *Deutung des Begriffs „physikalische Theorie“ und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens*, [Lud70], das erste umfassende Werk zu obigem Zugang entsteht. Dabei gelingt es, die Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik mit Hilfe physikalisch motivierter Axiome zu erschließen. Es ist dafür auch der Artikel [Sto71] zu nennen.

In der Folgezeit erfährt die Theorie weitere Veränderungen, bei denen in erster Linie die stärkere Repräsentation des Verfahrenskonzeptes auch in der mathematischen Theorie erwähnt werden muß. Damit einher geht eine immer explizitere Betonung des weiter oben angesprochenen Bezugs auf die makroskopischen Vorgänge. Während in [Lud64], S. 235, zu Beginn der oben genannten Artikelreihe die Begriffe Objekt, Messung und der mit dem Zustand als gleichwertig genutzte Begriff der Gesamtheit als Ausgangspunkt gewählt werden, stellen in [Lud72] bereits nur noch die Präparierverfahren, die Effektverfahren sowie die aus ihnen aufgebauten Experimente das Fundament dar. Es werden also keine Aussagen über Mikrosysteme, -objekte oder dergleichen mehr vorausgesetzt. Im Gegenteil besteht jetzt gemäß [Lud72] die Möglichkeit, auf Basis der rein makroskopisch erfaßbaren Verfahren und Experimente den Begriff des Mikroobjektes zu begründen. Man beachte, daß Ludwig im Laufe der siebziger Jahre des zwanzigsten Jahrhunderts den Begriff des Mikroobjektes aufgibt, um ihn durch den noch vorsichtigeren Begriff des Mikrosystems zu ersetzen.

Ebenso werden die Axiome weiterentwickelt. Für die einzelnen Entwicklungsschritte der Theorie wird stellvertretend auf [Lud73, Lud77, Lud81a, Lud81d, Lud83a] sowie auf die drei Bände [Lud80a, Lud80b, Lud80c] der Reihe *Notes in Mathematical Physics* hingewiesen. Darauf basierend erlangt die Axiomatik im Rahmen des zweibändigen Werkes *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics*, [Lud85a, Lud87], eine gewisse finale Form. Im Lichte der so neu begründeten Quantenmechanik diskutiert Ludwig in dem ebenfalls zweibändigen Werk *Foundations of Quantum Mechanics*, [Lud83b, Lud85c], die enorme Vielfalt von Strukturen, die aus der Quantenmechanik bekannt sind. Es sind dabei etwa Gruppenstrukturen, Atomphysik oder auch die Streutheorie zu nennen.

Rein verbal kann man den Ludwigschen Standpunkt, wie folgt, zusammenfassen: Die Quantenmechanik ist eine physikalische Theorie, die sich einer ganz speziellen Form der Wechselwirkung zwischen Makrosystemen widmet. Die dabei betrachtete Wechselwirkung kann nur auf statistischem Wege beschrieben werden.

G. Ludwig nutzt die Auseinandersetzung mit der Quantenmechanik zu einer tiefgehenden Analyse über den prinzipiellen Aufbau physikalischer Theorien im allgemeinen. Ersten Überlegungen, die unter anderem in [Lud64] und [Lud69] dargelegt werden, folgt eine weitgediehene Erörterung in [Lud70]. Darauf aufbauende Fragestellungen, die sich vor allem mit einer Begründung eines allgemeinen Realitätsbegriffes im Zusammenhang mit physikalischen Theorien befassen, münden schließlich in das Buch *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie*, [Lud78a]. Weitergehende Überlegungen, für die etwa auf [Lud81b] hingewiesen sei, führen zu einer

Überarbeitung und zur Publikation einer erweiterten zweiten Auflage [Lud90b]. Ob ihrer Zugehörigkeit zum Themenkreis der eben genannten Werke beachte man auch [Lud79b, Lud81c, Lud84b, Lud89, Lud94].

Schließlich wird die vierbändige, teilweise in zweiter Auflage erschienene Reihe *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik*, [Lud78b, Lud74, Lud84a, Lud79a] erwähnt, in der sich die Erfahrungen im Umgang mit der Quantenmechanik in Anwendung auf eine Vielzahl anderer physikalischer Theorien auf vereinfachtem Niveau wiederfinden.

Die oben genannten prinzipiellen Aussagen weisen den Weg zu einem Neuaufbau der Quantenmechanik. Der Realisierung durch Günther Ludwig widmet sich der nun folgende zweite Teil der vorliegenden Arbeit.

Teil II

Der Ludwigsche Neuaufbau der Quantenmechanik

Kapitel 4

Der prinzipielle Aufbau der Quantenmechanik

Nachdem im ersten Teil der Arbeit die Probleme der herkömmlichen Formulierung der Quantenmechanik deutlich gemacht worden sind und ebenso die prinzipiellen Erwägungen von Bohr, Heisenberg und Ludwig zur ihrer Überwindung, ist es das Ziel der nächsten Kapitel, die Ludwigsche Formulierung der Quantenmechanik vorzustellen. Sie stellt die konsequente Umsetzung der in den Kapiteln 2 und 3 angegebenen Ansätze dar.

Für das Ziel einer in sich widerspruchsfreien Formulierung der Quantenmechanik ist es wichtig, den Aufbau einer solchen Theorie auch in ihrer Gesamtstruktur möglichst durchsichtig zu halten. Dafür bedarf es einer Formalisierung des Aufbaus einer physikalischen Theorie im allgemeinen. G. Ludwig hat dafür etwa in [Lud90b], Kapitel 2-8, S. 6-103 ein Programm angegeben, das in stark verkürzter Form Inhalt der Abschnitte 4.1 - 4.3 sein wird. Als Referenz werden auch [Lud78b], Kapitel III und [Lud81c] genannt. Dabei wird insbesondere das Verhältnis der einer physikalischen Theorie zugehörigen mathematischen Theorie zum experimentellen Ausgangsmaterial betont. Im Rahmen der Darlegungen werden in knapper Form die Begriffe des Grund- und Wirklichkeitsbereiches sowie der unscharfen Abbildungsprinzipien mit Bedeutung belegt. Im Zusammenhang mit den unscharfen Abbildungsprinzipien wird insbesondere das Konzept der sogenannten Uniformitäten der physikalischen Unschärfe eingeführt. Abschließend wird in Abschnitt 4.4 der Ludwigsche Zugang an die Quantenmechanik im Sinne der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen als physikalische Theorie entworfen. Die nachfolgenden Kapitel stellen dann die zugehörigen Konkretisierungen der so angedeuteten prinzipiellen Vorgehensweise dar.

4.1 Der prinzipielle Aufbau einer physikalischen Theorie

Das Ziel der Entwicklung einer physikalischen Theorie besteht darin, die Struktur eines Teils der Realität durch mathematische Strukturen zu erfassen. Eine physikalische Theorie in ihrer Gesamtheit wird deshalb aufgefaßt als Komposition der folgenden drei Grundbausteine:

- (i) einer mathematischen Theorie \mathcal{MT} ,
- (ii) eines Wirklichkeitsbereiches \mathcal{W} ,
- (iii) Anwendungsvorschriften, die eine Verknüpfung zwischen \mathcal{MT} und \mathcal{W} herstellen und die formal mit \longleftrightarrow bezeichnet werden sollen.

Abkürzend soll für eine physikalische Theorie \mathcal{PT} auch $\mathcal{PT} = \mathcal{MT} \longleftrightarrow \mathcal{W}$ geschrieben werden. Die explizite Berücksichtigung der Anwendungsvorschriften soll es ermöglichen, genau zwischen der mathematischen Theorie, die als solche völlig selbstständig ist, und ihrer Verwendung als Bild der Realität zu unterscheiden. Eine solche Unterscheidung ist wichtig, da es durchaus nicht immer klar ist, was ein Term einer mathematischen Theorie in der Realität repräsentieren soll. So ist es hinlänglich bekannt, daß dieselbe mathematische Theorie für physikalisch völlig verschiedene Bereiche verwendet werden kann.

Der Wirklichkeitsbereich als Ganzes ist nicht unabhängig von \mathcal{MT} und \longleftrightarrow , sondern im Gegenteil gerade Ausdruck dessen, was durch \mathcal{MT} und \longleftrightarrow als Realität erfaßt werden kann¹. Der Wirklichkeitsbereich muß allerdings einen Anteil besitzen, der ebenfalls völlig unabhängig dasteht. Dabei handelt es sich um die Gesamtheit der konkreten, realen experimentellen Vorgänge und Sachverhalte, die Eingang in die physikalische Theorie finden, und die als solche die experimentelle Grundlage einer physikalischen Theorie bilden. Der so erfaßte Teil von \mathcal{W} wird als **Grundbereich \mathcal{G} der realen Gegebenheiten** bezeichnet. Es sei hervorgehoben, daß zum Grundbereich die experimentellen Vorgänge und Sachverhalte selber und **nicht** Aussagen über sie gehören. Beispielsweise ist der ganz konkrete Vorgang des Fallens eines konkreten Gegenstandes auf den Boden selber Teil des Grundbereiches für eine Theorie der Gravitation, nicht aber die Aussage, daß der Gegenstand auf den Boden fällt, nicht einmal die Aussage, daß der betrachtete fallende Gegenstand etwa ein Stein

¹Was genau der Wirklichkeitsbereich einer physikalischen Theorie ist, läßt sich nicht exakt in einer nur übersichtsartigen Beschreibung des Ludwigschen Standpunktes erörtern. Für eine detaillierte Analyse der Fragestellung siehe [Lud90b], Kapitel 10, S. 125-211.

ist. Zur genauen begrifflichen Trennung zwischen den Sachverhalten selber und dem Formulieren von Aussagen über die Sachverhalte führt Ludwig einen eigenen Namen ein. Dazu zieht er einen Vergleich zum Lesen eines Buches. Eine konkrete geschwärzte Stelle auf einer ganz bestimmten Seite eines ganz bestimmten Buches entspricht dem konkreten realen Sachverhalt. Daher werden die konkreten realen Sachverhalte als Teile oder Stücke des **Realtextes** bezeichnet. Dem Lesen des Buches und damit auch dem Erkennen, daß die geschwärzte Stelle ein Buchstabe ist, der zu einem Wort gehört, entspricht dann das Formulieren von Aussagen über die realen Sachverhalte. Die Aussage etwa, daß es sich bei obigem fallendem Gegenstand um einen Stein handelt, stellt eine Aussage dar, die durch das Lesen des Realtextes gewonnen wird. Die realen Sachverhalte, die den Grundbereich einer physikalischen Theorie bilden, müssen offensichtlich bereits vor der Formulierung der Theorie vorhanden sein. Das heißt, sie sind unabhängig von mathematischer Theorie und Anwendungsvorschriften. Das meint aber nicht, daß prinzipiell die experimentelle Grundlage nicht auch auf physikalische Theorien zurückgreift. Zur Vermeidung eines Zirkels darf aber kein Rückgriff auf die gerade formulierte physikalische Theorie vorgenommen werden. Für das bereits verwandte Beispiel des Grundbereiches einer Gravitationstheorie illustriert sich das in dem Umstand, daß man zwecks Gewinnung einer geeigneten experimentellen Grundlage Zeit- und Abstandsmessungen vornehmen müßte. Es wäre also günstig, wenn eine physikalische Theorie des Messens räumlicher und zeitlicher Abstände bereits zur Verfügung stünde. Ebenso sollte man sich zur Gewinnung experimenteller Fakten zur Formulierung des Elektromagnetismus durchaus auf den Kraftbegriff der Newtonschen Mechanik beziehen dürfen. Allerdings darf man sicher keinen Bezug auf Begriffe nehmen, die durch die gerade zu erstellende physikalische Theorie erst begründet werden. Im Falle der Elektrodynamik dürfte man also keinen Bezug auf Begriffe wie den elektrischen Strom nehmen. Im Falle der Thermodynamik darf man Begriffe wie Druck und Volumen verwenden, aber nicht auf denjenigen der Temperatur. Um nämlich dem Begriff des elektrischen Stromes einen Sinn zu geben, benötigt man bereits eine Theorie des Elektromagnetismus. Genauso liegt der Fall bei der Temperatur, dessen Begründung eine vorliegende physikalische Theorie der Thermodynamik benötigt. Der Umstand, daß eine physikalische Theorie auf dem Wirklichkeitsbereich einer anderen Theorie aufbaut, kommt häufig vor. Deshalb führt man einen geeigneten Terminus ein. Falls eine physikalische Theorie \mathcal{PT}_1 auf dem Wirklichkeitsbereich einer anderen physikalischen Theorie \mathcal{PT}_2 aufbaut, soll \mathcal{PT}_2 als **Vortheorie** zu \mathcal{PT}_1 bezeichnet werden. Beim Verwenden von Vortheorien darf es nicht zu Zirkeln kommen. Das heißt, schließlich muß man auf physikalische Theorien zurückgreifen, die ausschließlich mit unmittelbar vorgegebenen Tatsachen arbeiten.

Nutzt man nun in der eben erläuterten Weise die Begriffe Realtext und Vorthorie, dann kann man den Grundbereich als die Zusammenfassung aller unmittelbar oder mit Hilfe von Vorthorien vorzeigbaren Realtextstücke bezeichnen. Dabei handelt es sich lediglich um eine begriffliche Zusammenfassung und nicht etwa um eine Menge, da keine definierende Eigenschaft für eine Mengenzugehörigkeit definiert werden kann. Der Grundbereich ist, außer vielleicht in trivialen Fällen, nie abgeschlossen in dem Sinne, daß nicht immer neue Erfahrungen hinzugefügt werden könnten. Nutzt man wiederum das Beispiel des fallenden Gegenstandes, sieht man sofort ein, daß es keine prinzipielle Begrenzung für Wurfexperimente mit ihm gibt, so daß man auch keine prinzipielle Grenze für experimentelle Eingangsdaten findet.

Es wurde bereits betont, daß es sich bei Realtextstücken um konkrete reale Sachverhalte und nicht um Aussagen über sie handelt. Die Sachverhalte selber können natürlich keinen Eingang in die mathematische Theorie haben, also muß man ein Verfahren angeben, auf welche Weise eine Repräsentation der Realtextstücke in der mathematischen Theorie durchgeführt werden soll. Es ist also der Vorgang der Verknüpfung der mathematischen Theorie mit dem Wirklichkeitsbereich zu diskutieren, für den eingangs der Begriff der Anwendungsvorschriften geprägt wurde. Dazu muß zunächst geklärt sein, wie für einen Realtext aus dem Grundbereich Übersetzungsvorschriften, die sogenannten **Abbildungsprinzipien**, formuliert werden. Genauso wie der Grundbereich die begriffliche Zusammenfassung aller Realtexte ist, werden dann die Anwendungsvorschriften als begriffliche Zusammenfassung aller Abbildungsprinzipien aufgefaßt.

Zur weiteren Erläuterung betrachte man nun einen vorgegebenen Realtext aus dem Grundbereich. Der erste Schritt des Verknüpfungsprozesses zwischen dem so vorgegebenen Realtext und der mathematischen Theorie wird als **Normierung des Realtextes** bezeichnet. Er besteht in der Benennung ausgezeichneter Realtextstücke. Als Namen werden in Zukunft zumeist Buchstaben wie a_1, a_2 verwendet. Dabei sind in der Regel geeignete Anweisungen zu geben, wie die Benennung ganz konkret abzulaufen hat. Ein Beispiel dazu aus dem Bereich der hier entwickelten Form der Quantenmechanik findet sich in Abschnitt 5.2. Es gibt aber einige Abmachungen, die sinnvollerweise immer gelten sollten. Zum Beispiel sollte jede reale Gegebenheit, die im Rahmen der Normierung zu benennen ist, einen und nur einen Namen erhalten. Der so gewählte Name sollte für kein anderes Realtextstück benutzt werden. Ebenso ist es ökonomisch, nur die Sachverhalte mit Namen zu versehen, die auch tatsächlich weiter verwandt werden sollen. Die Normierung des Realtextes, also die Benennung ausgezeichneter Realtextstücke, stellt den ersten Schritt des Lesens des Realtextes dar. Der zweite Schritt besteht in der sprachlichen Formulierung festgestellter Sachverhalte.

Die beiden Schritte lassen sich wiederum am Beispiel des fallenden Gegenstandes erläutern. Die Normierung bestünde darin, daß man dem Gegenstand einen Namen, etwa a , gibt. Der zweite Schritt bestünde im Aufstellen von Aussagen wie „Der Gegenstand mit Namen a ist ein Stein“ oder „Der Gegenstand mit Namen a und der Gegenstand mit Namen b haben einen Abstand von $2m$.“ Dabei illustriert das zweite Beispiel wiederum die Situation, daß man bereits vorhandene Vorthorien, wie hier einer Theorie des Messens von räumlichen Abständen, verwendet. Hätte man eine solche Theorie noch nicht vorliegen, müßte man die Aussage grundlegender formulieren, indem man auf die unmittelbaren realen Gegebenheiten ohne Verwendung einer Theorie des physikalischen Raumes zurückgreift. So wäre beispielsweise eine Aussage der folgenden Art zu formulieren: „Bei Anlegen eines Maßbandes mit Nullpunkt bei Gegenstand a wurde der Gegenstand b bei einer bestimmten Stelle des Maßbandes gefunden.“ Es ist wichtig zu betonen, daß stets nur einfache logische Formulierungen verwendet werden. Es kommen ganz bewußt keine Formulierungen wie „alle Gegenstände einer Art“ zur Verwendung, da nur gesicherte Aussagen in den gelesenen Realtext aufgenommen werden sollen. Sollte bei einem Sachverhalt ein Zweifel über sein Zutreffen bestehen, etwa ob der betrachtete Gegenstand wirklich ein Stein ist, wird der Sachverhalt nicht in den gelesenen Realtext aufgenommen. Nach Durchführen der beiden Schritte des Lesens des Realtextes besteht der nächste Schritt in der Formulierung von Vorschriften, wie der benannte und gelesene Realtext in Aussagen im Rahmen der mathematischen Theorie übersetzt werden soll. Für derartige Vorschriften wurde bereits weiter oben der Begriff der Abbildungsprinzipien geprägt. Bei den Abbildungsprinzipien handelt es sich nicht um mathematische Aussagen, sondern um Vorschriften zur Gewinnung mathematischer Aussagen auf der Basis gelesenen Realtextes. Die so gewonnenen mathematischen Aussagen werden axiomatisch der mathematischen Theorie \mathcal{MT} hinzugefügt. Daher werden sie auch als **Abbildungssaxiome** bezeichnet. Die Abbildungsprinzipien bestehen aus drei Punkten.

Erstens werden in der mathematischen Theorie Mengen Q_1, Q_2, \dots, Q_n ausgezeichnet, die als **Bildmengen** bezeichnet werden.

Zweitens werden in der mathematischen Theorie Relationen R_1, R_2, \dots, R_m ausgezeichnet, die **Bildrelationen** genannt werden. Wie man an ihrer Verwendung zur Notierung der Abbildungsaxiome weiter unten sehen wird, sind die Bildrelationen stets von der Form $R_i(x_{\alpha_i}, x_{\beta_i}, \dots, \gamma_i)$ mit $i \in \{1, \dots, m\}$, wobei die $x_{\alpha_i}, x_{\beta_i}, \dots$ Platzhalter für Elemente aus den zugehörigen Bildmengen sind, es gilt also $x_{\alpha_i} \in Q_{\alpha_i}, x_{\beta_i} \in Q_{\beta_i}, \dots$ mit $\alpha_i, \beta_i, \dots \in \{1, \dots, n\}$. Das Symbol γ_i soll für eine oder mehrere reelle Zahlen stehen, die Eingang in eine Bildrelation finden können. Also definiert eine Bildrelation eine Teilmenge eines endlichen kartesischen Produkts, das sich aus

Bildmengen und der Menge der reellen Zahlen zusammensetzt. Das heißt, eine Bildrelation kann stets in der Form $R \subseteq Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \cdots \times \mathbb{R}$ geschrieben werden, wobei die Indizes ν_1, ν_2, \dots für Zahlen aus $\{1, \dots, n\}$ stehen und wobei \mathbb{R} entsprechend der Anzahl der durch γ_i repräsentierten reellen Zahlen vorkommt.

Der dritte Punkt der Abbildungsprinzipien besteht aus den eigentlichen Übersetzungsvorschriften. Dabei wird den im Rahmen der Normierung verwendeten endlich vielen Namen a_1, a_2, \dots neben ihrer Eigenschaft, Name eines realen Sachverhaltes zu sein, eine zweite Bedeutung, nämlich auch Teil der mathematischen Theorie zu sein, zugeordnet. Daher bestehen die eigentlichen Abbildungsvorschriften aus zwei Teilen. Zunächst muß man die verwendeten Zeichen erst einmal in den Rahmen der mathematischen Theorie einbinden, indem man angibt, zu welcher Menge sie gehören. Der Übersetzungsvorgang führt mithin zu endlich vielen **Typisierungsrelationen** der Form „ $a_i \in Q_{\nu_i}$ “ mit $i = 1, 2, \dots$ und $\nu_i \in \{1, \dots, n\}$, die zusammengefaßt werden zu:

$$\longleftrightarrow_r (1) : \quad a_1 \in Q_{\nu_1} \text{ und } a_2 \in Q_{\nu_2} \text{ und } \dots$$

$\longleftrightarrow_r (1)$ wird als Name für alle Typisierungsrelationen verwandt. Dabei soll \longleftrightarrow andeuten, daß es sich um mathematische Relationen handelt, die mit Hilfe der Abbildungsprinzipien gewonnen wurden. Der Index r symbolisiere, daß dabei Bezug auf einen bestimmten Realtext r genommen wurde. Der Zusatz (1) soll die Typisierungsrelationen nur von denjenigen Relationen unterscheiden, die durch den nun zu erläuternden zweiten Teil der Abbildungsvorschriften gewonnen werden. Der zweite Teil der Abbildungsvorschriften besteht in der Übersetzung der beim Lesen des Realtextes gewonnenen Realrelationen, also der festgestellten Sachverhalte, in die gewählten Bildrelationen. Dabei kommt man zu endlich vielen Relationen des Typs „ $R_{\mu_1}(a_{i_1}, a_{j_1}, \dots, a_{t_1})$ “ und „[nicht $R_{\nu_1}(a_{u_1}, a_{v_1}, \dots, a_{z_1})$]“, die zusammengefaßt werden zur Aussage:

$$\begin{aligned} \longleftrightarrow_r (2) : \quad & R_{\mu_1}(a_{i_1}, a_{j_1}, \dots, a_{t_1}, \gamma_{\mu_1}) \text{ und } R_{\mu_2}(a_{i_2}, a_{j_2}, \dots, a_{t_2}, \gamma_{\mu_2}) \dots \\ & \text{und [nicht } R_{\nu_1}(a_{u_1}, a_{v_1}, \dots, a_{z_1}, \gamma_{\nu_1})] \dots \end{aligned}$$

Für die dabei vorkommenden Indizes gelte dabei $i_1, i_2, j_1, j_2, \dots, t_1, t_2 \in \{1, \dots, n\}$ und $\mu_1, \mu_2 \in \{1, \dots, m\}$. Den obigen Erörterungen zum Aussehen der Bildrelationen folgend, kann man statt der Aussagen $R_{\mu_1}(a_{i_1}, a_{j_1}, \dots, a_{t_1}, \gamma_{\mu_1})$ in völlig äquivalenter Weise auch $(a_{i_1}, a_{j_1}, \dots, a_{t_1}, \gamma_{\mu_1}) \in R_{\mu_1}$ notieren. Die Bezeichnungsweise „ $\longleftrightarrow_r (2)$ “ verstehe man analog zum Symbol „ $\longleftrightarrow_r (1)$ “. Die Relationen $\longleftrightarrow_r (1)$

und \longleftrightarrow_r (2) werden zusammenfassend mit \longleftrightarrow_r bezeichnet. Sie bilden die Abbildungsaxiome, die durch Übersetzen des durch r indizierten Realtextes gewonnen wurden.

Weiter oben wurde betont, daß beim Lesen stets nur einfache logische Formulierungen verwendet werden. Auf dem Niveau der mathematischen Relationen innerhalb von \longleftrightarrow_r spiegelt sich das darin wieder, daß lediglich die logischen Verknüpfungen „und“ und „nicht“ auftreten. Den gesamten Vorgang des Aufstellens und Anwendens von Abbildungsvorschriften erläutere das folgende Beispiel.

Der Realtext bestehe aus einer Reihe von ausgezeichneten Punkten mit Namen a_1, a_2, \dots, a_n im physikalischen Raum. Zwischen je zwei Punkten wurde ein Maßband mit der Null bei einem Punkt gespannt, und in der Folge wurde beim anderen Punkt eine Zahl auf dem Maßband abgelesen. Als Bildmenge würde man nun einfach eine Menge M wählen. Als Bildrelation böte sich die Wahl einer Funktion $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ an. Im Rahmen der Typisierungsrelationen hätte man dann $a_1 \in M, a_2 \in M, \dots, a_n \in M$ zu notieren. Genau einen solchen Vorgang bezeichnet man oft abkürzend mit Formulierungen wie „ M die Bildmenge aller physikalischen Raumpunkte“ oder „ M ist die Menge der Raumpunkte“. Es sei aber darauf hingewiesen, daß bei derartigen Abkürzungen durchaus die Gefahr besteht, daß der eigentliche Hintergrund hinter der geschilderten Vorgehensweise verloren geht. Denn es ist nicht realistisch, von der Menge „aller Raumpunkte“ in dem Sinne zu sprechen, daß man sie im Realtext auszeichnen könnte. Es handelt sich bei solchen Formulierungen eben nur um abkürzende Sprechweisen für das obige Abbildungsprinzip, das besagt:

Immer wenn ein physikalischer Raumpunkt ausgezeichnet und mit einem Namen, etwa a , versehen wird, dann ist dafür in der mathematischen Theorie $a \in M$ zu notieren.

Damit kommt man zum nächsten Schritt im Rahmen des Beispiels, der Übersetzung der Realrelationen. Man würde sinnvollerweise vereinbaren, daß für eine am Realtext abgelesene Aussage der Form „Das Maßband wurde mit der Null bei einem bestimmten Punkt angehalten und bei einem anderen Punkt auf dem Maßband der Wert α abgelesen.“ die Relation „ $d(a_i, a_j) = \alpha$ “ innerhalb der mathematischen Theorie zu notieren ist, wobei a_i und a_j die Namen der betrachteten Punkte sein sollen.

4.2 Unscharfe Abbildungsprinzipien

Mit der in Abschnitt 4.1 dargestellten Vorgehensweise hat man zumindest im Prinzip die Verknüpfung von Realität und mathematischem Bild formalisiert.

Es bleibt aber das Phänomen unberücksichtigt, daß eine solch scharfe Zuordnung zwischen Realität und mathematischer Theorie, wie sie das obige Programm der Abbildungsprinzipien vorsieht, in der Regel gar nicht möglich ist. Als Beispiel nehme man etwa den physikalischen Raum, der, wie es häufig geschieht, durch die mathematische Theorie des Euklidischen Raumes abgebildet werden soll. Dann erkennt man sofort, daß die mathematische Theorie des Euklidischen Raumes im Vergleich mit dem physikalischen Raum viel zu reichhaltig ist, denn in der mathematischen Theorie sind Punkte unendlich genau ausgezeichnet. Offensichtlich ist eine solche Form der Auszeichnung in der Realität aber nicht möglich. Eine mathematische Theorie, die ein exaktes Abbild der Realität wäre, würde gar nicht „so viele“ Möglichkeiten anbieten, eine ausgezeichnete Raumstelle wie etwa eine Tischecke abzubilden. Aber welche mathematische Theorie sollte man dafür nehmen ?

Man kann zwar in der Realität Raumpunkte immer nur mit endlicher Genauigkeit festlegen, aber die Erfahrung hat keine Informationen über eine prinzipielle Begrenzung der möglichen Genauigkeit geliefert. Also wäre es auch nicht gerechtfertigt, irgendeine solche Grenze willkürlich festzulegen, zumal völlig unklar wäre, welche man nehmen sollte. Es ist dagegen viel naheliegender in idealisierender Weise anzunehmen, daß man ohne Grenze Schritt für Schritt eine immer genauere Auszeichnung von physikalischen Raumpunkten vornehmen kann. Damit wäre man aber wiederum beim Euklidischen Raum angekommen, der, wie oben bereits gesagt, als Abbild für den Realtext zu reichhaltig ist. Das ist ein Phänomen, dem man häufig beim Vergleich der mathematischen Bildtheorien und dem zugehörigen Realtext begegnet. Dabei fungieren die Idealisierungen stets als Möglichkeit, prinzipielle Unkenntnisse von Begrenzungen realer Strukturen zu umgehen. Im obigen Beispiel des Euklidischen Raumes wurde bereits die Kontinuumseigenschaft erwähnt. In derselben Weise ist aber auch die Unbegrenztheit des Euklidischen Raumes nur eine Idealisierung der prinzipiellen Unkenntnis über die Begrenztheit des physikalischen Raumes. Man kann eben Schritt für Schritt immer größere Abstände zwischen Punkten realisieren, ohne daß bisher etwas über eine Begrenzung bekannt geworden wäre. Auch in der hier entwickelten Formulierung der Quantenmechanik wird an mehreren Stellen, wie etwa im Kapitel 9, die Idealisierung der adäquate Ausweg aus derartiger Unkenntnis sein. In derselben Weise stellt auch die Funktionseigenschaft der Bildrelation des Abstandes zweier Punkte eine Idealisierung dar. Wenn man zwei Punkte des physikalischen Raumes auszeichnet, mit a_1, a_2 benennt und zwischen ihnen den

Abstand zu α vermißt, dann würde man geneigt sein, dafür, wie im Beispiel des vorigen Abschnitts erläutert, die Relation $d(a_1, a_2) = \alpha$ in der mathematische Theorie zu notieren. Derartige Relationen können aber schnell zum Widerspruch gelangen, wenn man etwa den Abstand mit zwei verschiedenen Methoden mißt und wenn man dabei geringfügig verschiedene Werte erhält. Ebenso kann es schnell zu Widersprüchen mit Aussagen der mathematischen Theorie als solcher kommen, etwa mit dem Satz des Pythagoras bei Betrachtung von drei Punkten.

Folglich kollidiert die in Abschnitt 4.1 eingeführte scharfe Form der Abbildungsprinzipien mit der zum Aufstellen relevanter physikalischer Theorien zwingend notwendigen Möglichkeit zur Idealisierung. Um nun aber die realen Sachverhalte in sinnvoller Weise widerspruchsfrei in die mathematische Theorie abbilden zu können, muß man dem idealisierten mathematischen Bild noch eine weitere Struktur zur Seite stellen, die genau diese Idealisierungen beim Vergleich von Realtext und mathematischer Theorie wiederum in gewünschtem Maße korrigiert. Der Weg, den Ludwig dafür vorschlägt, besteht im Formulieren sogenannter **unscharfer Abbildungsprinzipien** anstatt der Abbildungsprinzipien des Typs aus Abschnitt 4.1. Bevor die so nur grob angedeutete Vorgehensweise in Allgemeinheit dargelegt wird, soll sie anhand des obigen Beispiels der Theorie des physikalischen Raumes illustriert werden.

Die erste Problemquelle im Kontext der Idealisierung war die nur bis zu einer gewissen Genauigkeit mögliche Auszeichnung von Raumpunkten. Das heißt, es gibt um einen ausgezeichneten Raumpunkt herum eine Reihe anderer Raumpunkte, die vom Ausgangspunkt auf Basis der vorhandenen experimentellen Möglichkeiten nicht zu unterscheiden sind. Das stellt aber wiederum eine Realrelation dar, also einen beim Lesen des Realtextes gefundenen Sachverhalt. Dazu wähle man eine neue Bildmenge $U \subseteq M \times M$ verbunden mit dem Abbildungsprinzip, daß für zwei Punkte mit Namen a_1 und a_2 , die nicht unterscheidbar sind, die Relation $(a_1, a_2) \in U$ zu notieren ist. Eine solche Menge wird als Unschärfemenge bezeichnet. Der Bildmenge der physikalischen Raumpunkte wird also eine geeignete Unschärfemenge an die Seite gestellt.

In derselben Weise ist bei der anderen Problemquelle, der Genauigkeit der Abstandsmessung, zu verfahren. Wenn man den Abstand zwischen zwei ausgezeichneten Raumstellen bestimmt, dann hat man einerseits das obige Problem der unscharfen Auszeichnung der Raumpunkte und andererseits das Problem einer gewissen Unschärfe bei der Messung des Abstandes selber. Daher bezeichnet man zwei Tripel (a_1, a_2, α) und (a'_1, a'_2, α') aus jeweils zwei ausgezeichneten Raumstellen und einem gemessenen Abstand als voneinander nicht unterscheidbar, wenn die Raumstellen a_1 und a'_1 und die Raumstellen a_2 und a'_2 sowie die Abstandswerte α und α' physikalisch nicht voneinander zu unterscheiden sind. Dementsprechend ist auch für die

Abstandsrelation d eine Unschärfemenge U aus $(M \times M \times \mathbb{R}) \times (M \times M \times \mathbb{R})$ zu wählen, wobei dann $((a_1, a_2, \alpha), (a'_1, a'_2, \alpha')) \in U$ geschrieben werden soll, wenn die eben erläuterte Ununterscheidbarkeitsbedingung gilt. In einer solchen Weise kann jede Bildrelation mit einer Unschärfemenge ausgestattet werden. Die unscharfen Abbildungsprinzipien bestehen nun in der Anweisung, anstelle der Relation $d(a_1, a_2) = \alpha$, wie man sie durch die scharfen Abbildungsprinzipien gewinnt, die folgende Relation zu notieren:

$$(a_1, a_2, \alpha) \in \widetilde{R}_d^U \iff \exists a'_1 \in M \exists a'_2 \in M \exists \beta \in \mathbb{R} : d(a'_1, a'_2) = \beta \text{ und} \\ ((a_1, a_2, \alpha), (a'_1, a'_2, \beta)) \in U.$$

Die Stärke eines solchen Zuganges wird deutlich, wenn man sich das folgende etwas vereinfachte Beispiel vor Augen führt. Es sei angenommen, daß man zwei Raumstellen mit Namen a_1 und a_2 beliebig genau auszeichnen könnte und daß man durch zwei Abstandsmessungen die Werte α und α' erhalten hätte. Dann würde man entsprechend dem unscharfen Abbildungsprinzip notieren:

$$(a_1, a_2, \alpha) \in \widetilde{R}_d^U \quad \text{und} \quad (a_1, a_2, \alpha') \in \widetilde{R}_d^U. \quad (4.1)$$

Wenn man für U nun die Menge $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |\alpha - \beta| < \varepsilon\}$ wählte, dann würde die Relation (4.1) zur Aussage

$$\alpha - \varepsilon < d(a_1, a_2) < \alpha + \varepsilon \quad \text{und} \quad \alpha' - \varepsilon < d(a_1, a_2) < \alpha' + \varepsilon \quad (4.2)$$

werden. Wenn ε hinreichend groß gewählt ist, führt das Hinzufügen der Relation (4.1) zur mathematischen Theorie des Euklidischen Raumes nicht mehr zu einem Widerspruch. Durch ein derartiges „Verschmieren“ der scharfen Relationen mit Hilfe einer vorzugebenden Unschärfemenge kann man also den gelesenen Realtext in die mathematische Theorie in widerspruchsfreier Form übernehmen. Welche Unschärfemenge man im einzelnen nehmen kann, hängt von den experimentellen Möglichkeiten und dem Anspruch des Physikers ab. Denn manchmal ist es günstiger, eine mathematisch einfachere Theorie einer genaueren auf Kosten größerer Unschärfemengen den Vorzug zu geben. Bevor die hier begonnenen Überlegungen weitergetrieben werden, soll eine Verallgemeinerung der bisher gewonnenen Einsichten auf allgemeine Bildrelationen formuliert werden.

Dazu sei zunächst noch eine Vorbemerkung gemacht. Formal beinhaltet natürlich \longleftrightarrow_r (1) genauso Relationen wie \longleftrightarrow_r (2). Die Unterscheidung wurde nur aus Anschauungsgründen zugunsten eines geordneten Aufbaus der Relationen gewählt. Damit könnte man die Relationen, die unter \longleftrightarrow_r (1) notiert werden, genauso behandeln, wie es beispielhaft im vorigen Absatz für die Abstandsrelation gemacht wurde.

Allerdings sind Realtextstücke, bei denen man nicht mit Sicherheit weiß, ob sie zu einem gewissen Typ gehören oder nicht, gar nicht zum gelesenen Realtext zugelassen. Der Umstand der Zugehörigkeit darf nicht in Frage stehen. Das wird am obigen Beispiel des physikalischen Raumes deutlich. Denn man hinterfragt nicht, ob man einen Raumpunkt ausgezeichnet hat, sondern nur welchen genau. Außerdem würde eine unscharfe Formulierung der Relation $a \in M$, mit den Bezeichnungen im Sinne des obigen Beispiels und mit a als Namen einer ausgezeichneten Raumstelle, auch nicht viel Gewinn bringen, denn man hätte dann eine Relation $\exists a' \in M : (a, a') \in U$ zu notieren. Eine solche Relation ist aber überflüssig, zudem impliziert sie ohnehin die scharfe Aussage $a \in M$, sonst wäre sie gar nicht definiert. Für den Fall des Abbildens der beim Lesen des Realtextes erhaltenen Realrelationen kann man sich fernerhin auf Relationen beschränken, die zu \longleftrightarrow_r (2) gehören.

Damit kann man jetzt zu der angekündigten Verallgemeinerung der unscharfen Abbildungsprinzipien auf beliebige Bildrelationen übergehen. Es wird wie im vorigen Abschnitt bei der Formulierung der scharfen Abbildungsprinzipien von n Bildmengen mit den Namen Q_1, Q_2, \dots, Q_n ausgegangen. Genügt ein Tupel $(a_1, a_2, \dots, \alpha)$ von ausgezeichneten Realtextstücken einer Realrelation, die durch die Bildrelation $R \subseteq Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}$ mit $\nu_1, \nu_2, \dots \in \{1, \dots, n\}$ abgebildet werden soll, dann soll **nicht** $(a_1, a_2, \dots, \alpha) \in R$ notiert werden, wie es die scharfen Abbildungsprinzipien vorschreiben, sondern es soll stattdessen die folgende Relation gewählt werden:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2, \dots, \alpha) \in \tilde{R}^U & : \iff \exists a'_1 \in Q_{\nu_1} \exists a'_2 \in Q_{\nu_2} \dots \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \\ & \left[(a'_1, a'_2, \dots, \alpha') \in R \right. \\ & \left. \text{und } ((a'_1, a'_2, \dots, \alpha'), (a_1, a_2, \dots, \alpha)) \in U \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Dabei bezeichne die als **Unschärfemenge** benannte Menge U eine Teilmenge von $(Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}) \times (Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R})$. Die Unschärfemenge ist selber eine Bildmenge, und sie umfaßt alle die Paare von Tupeln aus $Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}$, die als ununterscheidbar betrachtet werden. Das heißt, wenn man am Realtext zwei Tupel $(a'_1, a'_2, \dots, \alpha')$ und $(a_1, a_2, \dots, \alpha)$ des Typs $Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}$ ausgezeichnet hat und wenn man diese beiden Tupel nicht voneinander unterscheiden kann, dann schreibt man dafür in der mathematischen Theorie $((a'_1, a'_2, \dots, \alpha'), (a_1, a_2, \dots, \alpha)) \in U$ auf.

Damit steht nun durch (4.3) die angestrebte Verallgemeinerung zur Verfügung. Die vorhergehenden Betrachtungen haben die Notwendigkeit offenbart, für einen adäquaten Vergleich von Theorie und Experiment, also zum Übersetzen von Realtext in Relationen innerhalb der mathematischen Theorie, neben den exakten Konzepten im Rahmen der mathematischen Theorie, die als Abbild der Realität dienen sollen,

auch noch Unschärfemengen zu betrachten. Die Unschärfemengen sind notwendig, um die durch Idealisierungen im Rahmen der mathematischen Theorie vorhandene, zu reichhaltige Struktur beim Vergleich mit den realen Strukturelementen wieder hinreichend abzuschwächen. Dabei ist sowohl den Bildmengen als auch den Bildrelationen jeweils eine eigene Unschärfemenge zuzuordnen. Die Unschärfemengen sind natürlich zumeist nicht unabhängig voneinander. Das wurde am Beispiel des physikalischen Raumes deutlich, bei dem sich die Unschärfemenge für den Abstand zusammensetzte aus den Unschärfemengen bezüglich der Bestimmung der Raumpunkte und derjenigen bezüglich der Unschärfe des Abstandswertes selber.

Da man im Laufe der Entwicklung der Physik immer bessere experimentelle Methoden, wie etwa bei der Abstandsmessung, entwickelt hat, kann man einer Bildmenge oder Bildrelation auch immer feinere Unschärfemengen zuordnen, oftmals ohne bei Anwendung der unscharfen Abbildungsprinzipien mit der mathematischen Theorie in Widerspruch zu geraten. Das heißt, man kann Schritt für Schritt immer kleinere Unschärfemengen zum Vergleich von Theorie und Experiment im Sinne der unscharfen Abbildungsprinzipien heranziehen. Demzufolge kann man einer Bildrelation $R \subseteq X \times X$ ein ganzes System \mathcal{N} von Teilmengen von $X \times X$ zuordnen, die, angewandt als Unschärfemenge, nicht zu widersprüchlichen mathematischen Theorien führen. X stehe abkürzend für ein kartesisches Produkt aus Bildmengen und der Menge der reellen Zahlen, wie es weiter oben betrachtet wurde, also eine Menge des Typs $Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Das Produkt X kann dabei auch nur aus einem Faktor bestehen.

Die mathematische Theorie \mathcal{MT} alleine ohne hinzugefügten, übersetzten Realtext kann in der Regel keine Unschärfemenge konkret auszeichnen, denn dafür müßte sie Teile der Strukturen umfassen, deren Unkenntnis man gerade durch Einführung der Idealisierungen umgehen wollte. Es soll aber dennoch von der mathematischen Theorie \mathcal{MT} verlangt werden, daß es möglich ist, für jede Bildmenge und jede Bildrelation ein System von Unschärfemengen in \mathcal{MT} auszuzeichnen, das einerseits die zum Vergleich von Theorie und Experiment benötigten Unschärfemengen umfaßt und das andererseits in idealisierender Weise die Erfahrung der Existenz immer feinerer Unschärfemengen widerspiegelt. Dabei soll im Falle der Bildrelationen das zugehörige System von Unschärfemengen dergestalt sein, daß im „Limes immer feinerer Unschärfemengen“ die im Sinne der unscharfen Abbildungsprinzipien verschmierten Bildrelationen in die scharfen Bildrelationen übergehen. Dadurch wird lediglich der folgende Umstand zum Ausdruck gebracht. Wenn man immer kleinere Unschärfemengen verwenden kann, ohne daß es zu Widersprüchen kommt, dann bedeutet das, daß die exakten Konzepte der mathematischen Theorie immer genauer auf die abgebildete Realität angewandt werden können. Die angedeuteten Forderungen an

die Systeme von Unschärfemengen für Bildmengen und Bildrelationen müssen jetzt konkretisiert werden.

Zunächst ist für ein solches System von Unschärfemengen die Forderung der folgenden drei Eigenschaften naheliegend:

- (i) Alle Elemente U aus \mathcal{N} enthalten die Menge $\{(x, x) \mid x \in X\}$.
- (ii) Für beliebige Teilmengen U_1, U_2 der Menge $X \times X$ folgt die Zugehörigkeit von U_2 zu \mathcal{N} , wenn U_1 in \mathcal{N} liegt und wenn U_1 Teilmenge von U_2 ist.
- (iii) Für alle U aus \mathcal{N} liegt die Menge $U^{-1} := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid (x_2, x_1) \in U\}$ in \mathcal{N} .

Der erste Punkt ist nur natürlich, da sicher jedes Realtextstück und damit auch jedes endliche Tupel aus Realtextstücken und reellen Zahlen im Falle von Bildrelationen nicht von sich selber unterschieden werden kann. Zur Motivation des zweiten Punktes sei bedacht, daß für eine Unschärfemenge U bezüglich einer Bildrelation $R \subseteq X$, die nicht zu einer widersprüchlichen mathematischen Theorie führt, sicher auch eine Menge U' mit $U \subseteq U' \subseteq X \times X$ eine Unschärfemenge ist, die nicht zu einer widersprüchlichen mathematischen Theorie führt. Denn die Relationen der Art (4.3) werden dadurch schwächer, das heißt, wenn sie für U gelten, dann gelten sie auch für U' . Offensichtlich ist mit U auch U^{-1} eine Unschärfemenge, die zu einer in sich widerspruchsfreien mathematischen Theorie führt, wenn das auch für die Menge U der Fall ist.

Bis jetzt sind die Forderungen ein direktes Bild der Situation des Vergleiches von Theorie und Experiment. Wie oben bereits angedeutet, ist es aber Teil der Erfahrung im Umgang mit physikalischen Theorien, daß man immer bessere Genauigkeiten und entsprechend immer kleinere Unschärfemengen verwenden kann. Da für eine solche Verfeinerungsmöglichkeit auf Basis der betrachteten Theorie kein prinzipielles Ende angegeben werden kann, soll idealisierend davon ausgegangen werden, daß solche Verbesserungen unbegrenzt möglich sind. Mit einer solchen Forderung soll aber nicht behauptet werden, daß beim wirklichen Vergleich von Theorie und Experiment stets eine beliebige Verfeinerung möglich ist. Es handelt sich nur um eine Idealisierung zur Umgehung einer Unkenntnis in demselben Sinne, wie es weiter oben schon im Abstandsbeispiel illustriert wurde. Auch dort wird durch die Kontinuumsannahme nicht behauptet, daß man beliebige Abstände physikalisch unterscheiden könnte, sondern sie stellt nur die Idealisierung der Beobachtung dar, daß eine solche Grenze nicht angegeben werden kann und daß man schrittweise immer kleinere Abstände realisieren kann. Es wird also verlangt, daß man zu einer vorgegebenen Unschärfemenge stets eine feinere angeben kann. Das sollen die nächsten beiden axiomatischen

Forderungen an \mathcal{N} zum Ausdruck bringen. Allerdings ist es sicher nicht zwingend, genau die angegebenen Formen der Verfeinerungsmöglichkeiten zu wählen.

(iv) Verfeinerungsbedingung:

Bezeichnen U_1, U_2 Elemente aus \mathcal{N} , dann gehört auch die Menge $U_1 \cap U_2$ zu \mathcal{N} .

(v) Bedingung der unbegrenzten Verfeinerung:

Zu jedem Element U aus \mathcal{N} existiert ein Element V in \mathcal{N} , so daß U die Menge $V^2 := \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x_1, z) \in V \text{ und } (z, x_2) \in V\}$ umfaßt.

Die für \mathcal{N} verlangten Eigenschaften (i) - (v) sind gerade die definierenden Eigenschaften einer uniformen Struktur. Eine knappe Zusammenstellung der Theorie der uniformen Räume liefert Anhang A.

Die Forderung an die mathematische Theorie besteht also darin, daß man jeder Bildmenge und jeder Bildrelation eine uniforme Struktur als idealisiertes Bild des unscharfen Vergleiches von Theorie und Experiment zuordnen kann. Die so ausgezeichnete uniforme Struktur wird als **Uniformität der physikalischen Unschärfe** bezeichnet. Wenn von einer „physikalischen Approximation“ gesprochen wird, so ist dann genau die Struktur aus idealisiertem Bild und zugehöriger idealisierter Struktur zum Vergleich von experimentellem Befund und exaktem mathematischem Konzept gemeint. Mit der Uniformität der physikalischen Unschärfe wird gewissermaßen die Art der Approximation mitgeliefert, die zum Vergleich von Theorie und Experiment verwendet werden soll.

Wie bereits weiter oben angedeutet, wird es häufig so sein, daß sich die Uniformitäten der physikalischen Unschärfe bezüglich der Bildmengen direkt in den Unschärfe-Uniformitäten der die Bildmengen verwendenden Bildrelationen wiederfinden. Das ist am Beispiel des Abstandes gut einsichtig. Die Abstandsfunktion ist eine Relation auf $M \times M \times \mathbb{R}$. Stattet man nun \mathbb{R} mit einer geeigneten Uniformität \mathcal{N}_d der physikalischen Unschärfe aus, die die Unschärfe bei der Abstandsmessung wiedergibt, dann ist die Uniformität für die Gesamtrelation einfach die Produktuniformität aus der Unschärfeuniformität der Bildmenge M (zweimal) und \mathcal{N}_d . Als \mathcal{N}_d würde sich die durch die Metrik $d(\alpha_1, \alpha_2) := \arctan \frac{|\alpha_1 - \alpha_2|}{D}$ mit beliebigem von 0 verschiedenem reellem D erzeugte uniforme Struktur eignen, da sie sowohl zu kleine als auch zu große Abstände mit geeigneten Unschärfemengen versieht.

4.3 Die Endlichkeit der Physik

Im vorigen Abschnitt wurde von der mathematischen Theorie die Existenz einer Uniformität der physikalischen Unschärfe für jede Bildmenge und jede Bildrelation gefordert. Gerade für die Uniformitäten der Bildmengen, die, wie bereits mehrfach erwähnt, auch für die Bildrelationen von entscheidender Bedeutung sind, kann man noch weitere Überlegungen bezüglich der Eigenschaften der Uniformitäten anstellen. Denn mit den im vorigen Abschnitt betrachteten Forderungen hat man noch nicht alle Erfahrungen des Vergleiches von Theorie und Experiment verarbeitet. Dafür ist die folgende grundlegende Feststellung zentral:

Endlichkeit der Physik:

Die Anzahl der experimentellen Tatsachen ist stets endlich !

Daraus leiten sich die folgenden drei wichtigen Idealisierungen im mathematischen Bild ab:

- (A) Die Verbesserung der experimentellen Genauigkeit kann immer nur Schritt für Schritt vorstatten gehen. Da man aber im Prinzip kein Ende angeben kann, wann die Verfeinerungsmöglichkeit aufhört, wurde bereits oben die idealisierende Forderung des unbegrenzten Verfeinerns aufgestellt. Das bedeutet aber, daß man für die Uniformität mindestens ein abzählbares Fundamentalsystem benötigt. Für den Begriff des Fundamentalsystems siehe Anhang A, Definition A.1.7. Ein überabzählbares Fundamentalsystem würde allerdings eine Struktur bedeuten, die in nicht überprüfbarer Weise über jede Erfahrung hinausgeht. Also verlangt man als weitere Eigenschaft für \mathcal{N} :

Bedingung der sukzessiven Verfeinerung: \mathcal{N} hat ein abzählbares Fundamentalsystem.

- (B) Es kann im Prinzip den Fall geben, daß es nur eine endliche Zahl von Sachverhalten einer bestimmten Art gibt. Das heißt, daß alle Sachverhalte der betrachteten Art experimentell erzeugt wurden und daß keine weiteren Erfahrungen mehr hinzukommen. In einem solchen Falle kann man die Bildmenge mit endlicher Mächtigkeit ansetzen, und man kann scharfe Abbildungsprinzipien verwenden. Doch der Regelfall besteht darin, daß man mit dem Durchführen von Experimenten immer neue Sachverhalte einer bestimmten Art hinzugewinnt, ohne ein prinzipielles Ende angeben zu können. Dann liegt es nahe, wiederum in idealisierender Weise anzunehmen, daß die Mächtigkeit einer Bildmenge abzählbar ist. Das heißt, sie ist weder endlich noch überabzählbar. Der Ausschluß

der Überabzählbarkeit ist wie in Punkt (i) durch die prinzipielle Endlichkeit der Anzahl der Experimente motiviert. Somit wird verlangt:

Bedingung der Unkenntnis der Grenze der Erfahrung:

Jeder Bildterm, der mit Hilfe unscharfer Abbildungsprinzipien verwendet wird, ist von abzählbarer Mächtigkeit.

- (C) Der mathematischen Theorie \mathcal{MT} kann man nur endlich viele gelesene und übersetzte Realtextstücke hinzufügen. Aufgrund einer derartigen Endlichkeit muß die oben geforderte Idealisierung der Abzählbarkeit des Bildterms wiederum dadurch kompensiert werden, daß man von der für die unscharfen Abbildungsprinzipien verwendeten Uniformität \mathcal{N} verlangt, daß für jede aus \mathcal{N} gewählte Unschärfemenge endlich viele Erfahrungen genügen, um die Theorie auf ihre Widersprüchlichkeit zu überprüfen. Das heißt, man fordert, daß für jedes U aus \mathcal{N} ein endlicher Satz $(x_i)_{i=1}^n$ von Elementen der Menge X so existiert, daß für jedes Element x aus X ein Element k der Menge $\{1, \dots, n\}$ mit $(x, x_k) \in U$ existiert. Das ist aber gemäß Lemma A.6.16 gleichbedeutend mit der Präkompaktheit der Uniformität \mathcal{N} , so daß die Forderung lautet:

Bedingung der Endlichkeit der Erfahrungen : \mathcal{N} ist präkompakt.

Zusammenfassend fordert man also in (A) - (C) von der mathematischen Theorie im Rahmen einer physikalischen Theorie außer für den Ausnahmefall, daß eine bestimmte Sorte von Sachverhalten endlich ist:

Jede Bildmenge besitzt abzählbare Mächtigkeit. Sie ist ausgestattet mit einer metrisierbaren, präkompakten uniformen Struktur, die das idealisierte Bild des unscharfen Vergleiches von Realtext und exakten Konzepten innerhalb der mathematischen Theorie darstellt.

Eine wichtige Aussage aus der Theorie der uniformen Räume liefert Satz A.4.8. Demzufolge kann man jedem uniformen Raum auf kanonische Weise einen vollständigen Hausdorffraum zuordnen, der als Hausdorff-Vervollständigung bezeichnet wird. Ist der uniforme Ausgangsraum mit (X, \mathcal{N}) benannt, dann soll die Hausdorff-Vervollständigung von X bezüglich \mathcal{N} mit \hat{X} bezeichnet werden. Die \hat{X} zugehörige Uniformität erhalte den Namen $\hat{\mathcal{N}}$. Häufig ist es günstig, nicht nur mit den eigentlichen Bildmengen und ihren uniformen Strukturen zu arbeiten, sondern auch mit den ihnen zugeordneten Hausdorff-Vervollständigungen. Wenn eine Bildmenge bezüglich ihrer Uniformität der physikalischen Unschärfe hausdorffsch ist, dann kann man sie nach Lemma A.4.10 im Sinne einer uniformen Isomorphie mit einem dichten

Unterraum der ihr zugeordneten Hausdorff-Vervollständigung identifizieren. Daher spricht man auch nur von der Vervollständigung. In einem solchen Falle geht man beim Übergang zur Vervollständigung lediglich zu einer größeren Menge über, in der die ursprüngliche physikalische Bildmenge in dichter Weise enthalten ist. Liegt die Hausdorff-Eigenschaft nicht vor, dann werden beim Übergang zur Hausdorff-Vervollständigung, also durch die kanonische Abbildung i , lediglich diejenigen Elemente zum selben Element in der Hausdorff-Vervollständigung zusammengeführt, die durch keine Menge der uniformen Struktur unterschieden werden können. Also sind die Elemente ohnehin nicht physikalisch voneinander zu unterscheiden, denn eine Unterscheidung geschähe gerade mit einem Element der Uniformität. Daher erscheint es sogar physikalisch sinnvoller, gleich mit der Hausdorff-Vervollständigung zu arbeiten. Verwendet man anstatt der eigentlichen Bildmengen mit ihren Uniformitäten der physikalischen Unschärfe die Hausdorff-Vervollständigungen, dann geht man also im Grunde nur zu größeren Mengen über, in denen sich die physikalische relevanten Strukturen in unproblematischer Weise wiederfinden.

Zum Abschluß des Abschnitts folgt eine tabellarische Übersicht über den Aufbau einer physikalischen Theorie einschließlich der Verwendung unscharfer Abbildungsprinzipien. Dabei sei der Sonderfall endlicher Bildmengen ausgeschlossen.

Übersicht über den Aufbau einer physikalischen Theorie:

- (i) Auszeichnen eines Grundbereiches durch Auszeichnen von Realtexten, das heißt von physikalischen Gegenständen und Sachverhalten eventuell unter Verwendung von Vortheorien, die als Gesamtheit den Grundbereich bilden,
- (ii) Wahl einer geeigneten mathematischen Theorie \mathcal{MT} ,
- (iii) Auszeichnen und Lesen bestimmter Realtexte, das heißt:
 - (a) Normierung des ausgewählten Realtextes, also Namensgebung für die Realtextstücke, etwa a_1, a_2, \dots, a_n ,
 - (b) sprachliche Formulierung realer Sachverhalte, also der Realrelationen,
- (iv) Aufstellen der unscharfen Abbildungsprinzipien, also der Vorschriften, nach denen Realtextstücke und Realrelationen mathematischen Termen und Relationen zuzuordnen sind; dabei werden die folgenden Schritte durchlaufen:
 - (a) Auswählen von Bildmengen mit abzählbarer Mächtigkeit: Q_ν
 - (b) Auswahl der Bildrelationen: R_μ mit $R_\mu \subseteq Q_{\nu_1} \times Q_{\nu_2} \times \dots \times \mathbb{R}$

- (c) Bestimmung geeigneter uniformer Strukturen der physikalischen Unschärfe für jede Bildmenge und jede Bildrelation,
- (d) Auswahl geeigneter Unschärfemengen aus den zugehörigen Uniformitäten,
- (e) Festlegung der eigentlichen Abbildungsprinzipien, die dann zu den Abbildungsaxiomen führen:

$$\begin{aligned} \longleftrightarrow_r (1) : & \quad a_j \in Q_{\nu_j}, \dots, \\ \longleftrightarrow_r (2) : & \quad (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \in \tilde{R}_{\mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}}^U, \dots \end{aligned}$$

4.4 Folgerungen für das Ludwigsche Programm einer realistischen Begründung der Quantenmechanik

Der Ludwigsche Zugang zur Quantenmechanik besteht im Prinzip in der Formulierung einer physikalischen Theorie in der Form, wie sie in den Abschnitten 4.1 - 4.3 dargelegt wurde. Der Schwerpunkt der hier vorliegenden Arbeit wird aber auf der Entwicklung der mathematischen Theorie liegen, die zur physikalischen Theorie der Quantenmechanik gehören soll. Da es das Ziel ist, eine realistisch begründete Quantenmechanik zu formulieren, soll die zu entwickelnde mathematische Theorie aber eine über die bisherigen Erläuterungen hinausgehende wichtige Eigenschaft haben. Alle Axiome sollen sich nur auf im physikalischen Sinne eindeutig interpretierbare Mengen, Relationen und Uniformitäten beziehen. Das sind zunächst einmal die Bildmengen und die Bildrelationen. Aber auch die Uniformitäten der physikalischen Unschärfe oder uniforme Vervollständigungen der Bildmengen, wie sie in Abschnitt 4.3 erläutert wurden, und kanonische Erweiterungen der Bildrelationen, wie etwa gleichmäßig stetige Fortsetzungen von Abbildungen, gehören dazu. Die Interpretation derartiger mathematischer Objekte im Zusammenhang mit einer physikalischen Theorie wird gerade durch die Abbildungsprinzipien in eindeutiger Weise festgelegt. Darüber hinausgehend verträgt es sich mit dem Anspruch eines realistischen Fundamentes für eine physikalische Theorie, noch eine weitere Gruppe von Termen zur Formulierung der Axiome zuzulassen, deren physikalische Bedeutung sich in eindeutiger und kanonischer, aber indirekter Weise aus den vorhandenen Abbildungsprinzipien ergibt. Wenn etwa durch X_1 und X_2 zwei Bildmengen oder -relationen gegeben sind, dann stellt auch das kartesische Produkt eine Menge dar, die sich in

natürlicher Weise nur auf eine Art interpretieren läßt nämlich dahingehend, daß ein Paar von Realtextstücken mit Namen x_1 und x_2 zu $X_1 \times X_2$ gehört, wenn x_1 Name eines Realtextstückes der Art X_1 ist und wenn x_2 Name eines Realtextstückes der Art X_2 ist. Ebenso ist die Potenzmenge einer Bildmenge oder -relation X in natürlicher Weise eindeutig interpretierbar, denn eine Teilmenge von X ist Bildmenge von Realtextstücken der Art X , die über die Eigenschaft hinaus, von der Art X zu sein, noch weitere Eigenschaften besitzen, die eben genau die vorliegende Teilmenge auszeichnen. Analog lassen sich auch Mengen in eindeutiger Weise interpretieren, die sich ausgehend von einem Satz von Bildmengen durch endliche Hintereinanderausführung von kartesischer Produkt- und Potenzmengenbildung gewinnen lassen. Derartige Terme sollen als **innere Terme** bezeichnet werden². Die inneren Terme erhalten anhand der Art, wie sie aus den Bildmengen und -relationen gewonnen werden, ihre physikalische Bedeutung auf kanonische und eindeutige Weise aus der physikalischen Bedeutung der verwendeten Bildmengen und -relationen. Zur Erläuterung betrachte man ein Beispiel, das in Abschnitt 6.1 auch im Rahmen der Quantenmechanik genutzt wird.

Sei X eine Bildmenge. Als Bildrelation möge die Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ Verwendung finden. Man nehme nun an, die mathematische Theorie sei derart, daß durch folgende Relation \rightsquigarrow eine Äquivalenzrelation gegeben ist:

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \rightsquigarrow x_2 :\iff f(x_1) = f(x_2).$$

Dann kann man die Quotientenmenge $\mathcal{K} := X / \rightsquigarrow$ betrachten. Offensichtlich liegt \mathcal{K} in der Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ ³. Somit handelt es sich um einen inneren Term. Man sieht sofort ein, wie \mathcal{K} physikalisch zu interpretieren ist. Zu einem Element aus \mathcal{K} gehören offensichtlich solche Realtextstücke des Typs X , die bei Bestimmung der f entsprechenden Realrelation einen bestimmten Wert geliefert haben.

Das Beispiel macht deutlich, daß innere Terme zwar mit der Realität verknüpft sind, aber daß die Verknüpfung nicht scharf sein kann außer für den Fall, daß alle verwandten Bildmengen und -relationen vermittelt scharfer Abbildungsprinzipien notiert werden können. Wenn nämlich der f zukommende Wert für ein Realtextstück der Art X nicht scharf ist, kann man auch keine scharfe Zuordnung zu einer

²G. Ludwig bezeichnet derartige Mengen zunächst nur als **Leitermengen**. Eine kleine mathematische Erweiterung des Begriffes, die hier nicht weiter erläutert werden muß, macht Leitermengen, die auf Basis von Bildmengen und Bildrelationen gewonnen werden, dann zu **inneren Termen**. Für die allgemeinen Konzepte, die hinter den genannten Begriffen stehen und die über das bisher Gesagte hinausgehen, siehe man [Lud90b], Kapitel 7, S. 56-92.

³Wie hier wird im folgenden für eine beliebige Menge M mit $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M , das heißt die Menge aller Teilmengen von M , bezeichnet.

Klasse vornehmen. Das heißt, auch für den Vergleich von inneren Termen mit den zugehörigen Realtextstücken ist es notwendig, eine Uniformität der physikalischen Unschärfe anzugeben. Das wird im Fall der Quantenmechanik für Zustände und Effekte in Kapitel 7 auch durchgeführt werden. Innere Terme sind also im gewissen Sinne auch Bildmengen und -relationen. Wählt man die physikalische Theorie, auf deren Basis die inneren Terme innerhalb der mathematischen Theorie definiert worden sind, als Vorthorie, dann kann man die inneren Terme auch in korrekter Weise als Bildmengen und -relationen bezeichnen, denn dann werden eben diese Mengen und Relationen innerhalb der Abbildungsprinzipien als solche auszuzeichnen sein. Im obigen Beispiel wäre folglich die physikalische Theorie, zu der X, f und \leftrightarrow gehören, eine Vorthorie, und \mathcal{K} könnte als Bildmenge realer Sachverhalte in Relation zu dieser Vorthorie aufgefaßt werden. Daher wird auch im Zusammenhang mit inneren Termen, wie etwa den erwähnten Zuständen und Effekten, von Bildmengen gesprochen.

Die mathematische Theorie, die im weiteren Verlauf entwickelt werden wird, verwendet Axiome, die sich auf auf Bildmengen, Bildrelationen, innere Terme, die zugehörigen Uniformitäten der physikalischen Unschärfe sowie uniforme Vervollständigungen der Mengen und Erweiterungen der Bildrelationen, in erster Linie gleichmäßig stetige Fortsetzungen, beziehen. Da alle derartigen Terme eine eindeutige physikalische Bedeutung haben, soll deshalb eine physikalische Theorie mit einer solchen mathematischen Theorie auch als **realistisch fundiert** bezeichnet werden⁴.

Der Ludwigsche Zugang zur Quantenmechanik, wie er hier entwickelt werden wird, besteht mithin in der Formulierung einer realistisch fundierten physikalischen Theorie. Auf Seite 41 war der Vorgang zum Aufbau einer physikalischen Theorie tabellarisch zusammengestellt worden. Zugunsten einer besseren Übersicht und zugunsten eines besseren Verständnisses der einzelnen Axiome bietet es sich allerdings nicht an, die dort dargestellten Schritte jeweils vollständig zu durchlaufen. Stattdessen werden die dort genannten Punkte immer wieder durchlaufen, indem bei jedem Schritt der Grundbereich weiter eingeschränkt und damit besser herausgearbeitet wird. Das kann jeweils nur auf verbalem Wege geschehen. Parallel dazu wird jeweils die mathematische Theorie durch physikalisch interpretierbare Axiome aufgebaut.

⁴Würde man dem Ludwigschen Programm in vollem Umfang folgen, wäre es hier zwingend, den allgemeinen Begriff der **axiomatischen Basis mit physikalisch interpretierbaren Naturgesetzen** einzuführen. Da die zugehörigen Überlegungen aber recht umfangreich sind und da zum Verständnis der Quantenmechanik das oben Gesagte ausreichend ist, wenn auch nicht von derselben konzeptionellen Klarheit, soll eine weitere Analyse vermieden werden. Für die tiefergehenden Überlegungen sei wiederum auf [Lud90b], Kapitel 7, S. 56-92 verwiesen. Ein einfacher Einstieg zur Problematik steht mit [Lud79b] zur Verfügung.

Beim ersten Durchlauf in Kapitel 5 wird ein erster Schritt hinsichtlich der Auszeichnung der experimentellen Situationen entwickelt, die den Grundbereich der Quantenmechanik bilden. Es werden dabei zugehörige Bildmengen und Bildrelationen eingeführt. Die dargestellte allgemeine experimentelle Situation wird mathematisch abgebildet. Im darauffolgenden Kapitel 6 wird der Grundbereich weiter herausgearbeitet, indem weitere Bedingungen an die in Kapitel 5 erläuterten Experimente gestellt werden. Wiederum gilt es, die neuen Bedingungen im mathematischen Bild zu verarbeiten. Dabei werden die zentralen Mengen der Zustände und Effekte als innere Terme definiert. Obwohl es eigentlich zugunsten der Vollständigkeit einer physikalischen Theorie im Sinne zurückliegenden Kapitels wünschenswert wäre, werden die Uniformitäten der physikalischen Unschärfe nur für die Mengen der Zustände und Effekte eingeführt, da sie sich für die Weiterentwicklung der Theorie als besonders geeignet herausstellen werden. Die besagten Uniformitäten der physikalischen Unschärfe für die Mengen der Zustände und Effekte werden auf physikalisch eingängige Art in Kapitel 7 als solche motiviert. Dabei werden sich die Eigenschaften, die im Rahmen von Abschnitt 4.3 für Uniformitäten der physikalischen Unschärfe gefordert werden, als unmittelbar erfüllt herausstellen. Das Weglassen der anderen Uniformitäten rechtfertigt sich dadurch, daß im Zentrum der vorliegenden Arbeit die Formulierung einer Axiomatik der Quantenmechanik steht. Das heißt, es soll die der Quantenmechanik zugehörige mathematische Theorie entwickelt werden. Es soll aber nicht diskutiert werden, wie gut die so entwickelte mathematische Theorie dann in der Praxis die einzelnen Ergebnisse widerspiegelt. Im Wortgebrauch von Abschnitt 4.2 heißt das, daß nicht diskutiert werden soll, welcher Art die Approximation der hier entwickelten mathematischen Theorie im Verhältnis zur Realität ist. Deshalb genügt es auch, in Kapitel 5 nur die scharfen Abbildungsprinzipien, also nur die prinzipielle Zuordnung zwischen realem Gegenstand und mathematischem Bild zu formulieren. Die bis einschließlich des Kapitels 7 entwickelte mathematische Theorie wird sich als recht unhandlich herausstellen. Dem wird in Kapitel 8 durch Einbettung in eine Banachraum-Struktur begegnet, die die Formulierung der sogenannten Hauptaxiome des Messens in Kapitel 9 dann deutlich vereinfacht. Das Einführen immer neuer Axiome stellt stets eine indirekte Verkleinerung des möglichen Grundbereiches der Theorie dar. Man stellt damit gewissermaßen Voraussetzungen an den Grundbereich, nämlich daß überhaupt ein Grundbereich existiert, der durch die formulierte mathematische Theorie unter Berücksichtigung der unscharfen Abbildungsprinzipien erfaßt wird. Das heißt, man muß durch Abgleich mit dem Experiment sicherstellen, daß es überhaupt Experimente gibt, die durch entwickelte mathematische Theorie befriedigend beschrieben werden. Auch das soll nicht Teil der vorliegenden Arbeit sein. Da sich im dritten Teil der Arbeit in Kapitel 10 unter

Forderung weiterer Axiome die bekannte Hilbertraumformulierung als strukturisomorph zu der hier entwickelten mathematischen Theorie herausstellen wird, ist es aber bekannt, daß es einen reichhaltigen Grundbereich experimenteller Aufbauten gibt, die durch die entwickelte Theorie erfaßt werden. In Kapitel 11 schließlich wird die Galilei-Gruppe in der Quantenmechanik untersucht. Dabei wird insbesondere eine abstrakte Form der Schrödingergleichung gewonnen werden.

Kapitel 5

Die Präparier-Registrier-Struktur

Im folgenden Kapitel erfolgt eine erste Charakterisierung des Grundbereiches der Quantenmechanik als begriffliche Zusammenfassung von Experimenten, bei denen eine gerichtete Wechselwirkung von einem Präparierapparat hin zu einem Registrierapparat übergeht.

Die so nur grob formulierte Aussage wird im ersten Abschnitt zunächst verbal weiter konkretisiert, um im zweiten Abschnitt den ersten Schritt hin zu einer mathematischen Repräsentation der anvisierten Strukturen vorzunehmen. Dabei werden die Begriffe Einzelexperiment, Präparier- und Registrierereignis erläutert. Die anschließenden Abschnitte 5.3 und 5.4 widmen sich in allgemeiner Weise den sogenannten Auswahlverfahren, die insbesondere dazu dienen werden das in der vorliegenden Arbeit durchgehend angewandte Wahrscheinlichkeitskonzept darzulegen. In Anwendung kommen die so zur Verfügung stehenden Konzepte zur Begründung der Begriffe des Präparierverfahrens, der Registriermethode und der Registrierprozedur in den Abschnitten 5.5 und 5.6, die die Bausteine der eingangs erwähnten Experimente aufgebaut aus Präparation und Registrierung darstellen. Der Modellierung des gerichteten Wirkungsübergangs von der Präparation zur Registrierung dient der Abschnitt 5.7, in dem insbesondere die Termini des Effektverfahrens und des Ja-Nein-Experiments realistisch begründet werden können. Am Ende des Kapitels erfolgt dann die Definition der Präparier-Registrier-Struktur und des Begriffes des Wechselwirkungsträgers.

Der hier vorgestellte Weg zur Begründung einer Präparier-Registrier-Struktur als Ausgangspunkt zur Formulierung der Quantenmechanik unterscheidet sich in einigen Punkten von den Formulierungen, die Ludwig zum einen in [Lud83b] und zum anderen in [Lud85a] vorstellt. In [Lud83b] wird bereits von der Wirklichkeit der Mikrosysteme ausgegangen, und es wird ihnen eine Bildmenge zugeordnet, die dann

durch Axiome strukturiert wird. In [Lud85a] dagegen wird die Quantenmechanik vollständig auf der Basis gekoppelter Makrosysteme bestehend aus Makrosystemen zur Präparation einerseits und Makrosystemen zur Registrierung andererseits aufgebaut. Es werden jeweils Bildmengen für die Makrosysteme der Präparation und diejenigen der Registrierung eingeführt und axiomatisch strukturiert. Dabei formuliert Ludwig eine ganz allgemeine Theorie von Makrosystemen, die sich aus zwei gekoppelten Makrosystemen zusammensetzen. Entsprechend aufwendig gestaltet sich daher die Axiomatik, bis schließlich die für die Quantenmechanik interessante Präparier-Registrier-Struktur zur Verfügung steht. Da sich die vorliegende Arbeit zum Ziel setzt, den Ludwigschen Zugang insbesondere hinsichtlich ihrer Möglichkeiten zur Umgehung von Interpretationsproblemen dazulegen, wäre es unbefriedigend mit einer Bildmenge der Mikrosysteme zu starten. Zum Erreichen des eben genannten Ziels ist es aber auch nicht notwendig, eine allgemeine Theorie der gekoppelten Makrosysteme in der enormen Ausführlichkeit vorzustellen, wie es Ludwig in [Lud85a] getan hat. Stattdessen wird im folgenden Kapitel eine „Mischform“ beider Zugänge präsentiert. Das bedeutet, daß zwar gekoppelte Makrosysteme betrachtet werden, aber die Axiomatik wird in Hinsicht auf die Bedürfnisse zur Formulierung der Quantenmechanik deutlich reduziert, so daß viele Ähnlichkeiten zur Formulierung der Axiomatik in [Lud83b] hervortreten. Es sei noch darauf hingewiesen, daß Ähnlichkeiten zu den Überlegungen bestehen, die Ludwig in [Lud85a], Kapitel III, §4 vorlegt, aber daß der hier vorgeschlagene Weg sich dennoch von den dortigen Erläuterungen unterscheidet. Alle weiteren Abweichungen zur üblichen Vorgehensweise Ludwigs werden an entsprechender Stelle diskutiert.

5.1 Der Ausgangspunkt des Ludwigschen Zuganges zur Quantenmechanik

Das Ziel des Ludwigschen Zuganges besteht im Aufstellen einer realistisch fundierten physikalischen Theorie im Sinne von Abschnitt 4.4. Das bedeutet, daß als Ausgangspunkt nur künstlich hergestellte oder natürlich vorhandene experimentelle Anordnungen herangezogen werden, die konkret, also unmittelbar oder mit Hilfe nicht-quantenmechanischer Vortheorien, vorliegen und über deren Existenz kein Zweifel besteht. Von einem derart radikalen Standpunkt aus haben Begriffe wie Effekt, Observable, Zustand, Teilchen, Welle, Masse, Spin oder auch nur Mikrosystem, elementar oder zusammengesetzt, keinen Eingang in den Grundbereich der Quantenmechanik. Derartige Begriffe sind unklar, weil sie nicht eindeutig im Realtext

ausgezeichnet sind. Mithin besteht die Gefahr, daß mit solchen Begriffen verschiedene Vorstellungen verbunden werden und daß somit verdeckt Eigenschaften in die Theorie miteinfließen. Als Grundlage einer physikalischen Theorie im allgemeinen und der Quantenmechanik im besonderen sollen aber keine Vorstellungen genommen werden, sondern konkrete vorzeigbare physikalische Prozesse und Objekte. Eine Uranprobe gehört zum Grundbereich der Quantenmechanik, ebenso ein Teilchenbeschleuniger und die Nebeltropfen in einer Nebelkammer, aber nicht ein Zustand eines α -Teilchens.

Allerdings soll nicht behauptet werden, daß Begriffe wie die oben aufgelisteten prinzipiell unsinnig sind, sondern nur, daß es schwer möglich scheint, ihnen einen Sinn zuzuordnen, ohne eine realistisch fundierte physikalische Theorie der Quantenmechanik bereits zur Verfügung zu haben. Bei der Theorie, wie sie auch in der hier vorliegenden Arbeit entwickelt wird, steht eine Basis zur Verfügung, obigen Konzepten eine konkrete physikalische Bedeutung zu geben. In späteren Kapiteln wird das insbesondere am Beispiel der Begriffe des Zustandes, des Effektes und des Mikrosystems, elementar wie zusammengesetzt, sowie des Spins und der Masse deutlich werden.

Um eine realistisch fundierte physikalische Theorie aufzustellen, ist es notwendig, in möglichst klarer sprachlicher Form darzulegen, welche experimentellen Situationen als Ausgangsbasis für die Theorie dienen sollen. Ein derartiger Vorgang kann nicht exakt im Sinne einer mathematischen Theorie geschehen, sondern muß auf verbalem Wege vonstatten gehen. Den sich daraus ergebenden eventuellen Unklarheiten, ob etwas noch zum Grundbereich der Quantenmechanik gehört oder nicht, muß derart begegnet werden, daß im Zweifelsfalle das betreffende Realtextstück nicht hinzugenommen werden darf. Dabei ist es möglich, daß sich erst im Laufe des Umgangs mit einer speziellen experimentellen Problematik herausstellt, ob sie von der Quantenmechanik erfaßt wird oder nicht.

G. Ludwig faßt die Quantenmechanik als eine spezielle Wechselwirkungstheorie zwischen makroskopischen Gegenständen auf. Unter makroskopischen Gegenständen sind dabei im obigen Sinne konkrete vorzeigbare Teile der Realität gemeint, die entweder mit Hilfe der unmittelbaren Sinneswahrnehmung oder durch nicht-quantenmechanische Vorthorien bereitgestellt werden können. Zum Beispiel denke man an den Kraftbegriff im Rahmen der klassischen Mechanik oder den Strombegriff im Rahmen der Maxwellschen Elektrodynamik. Jedes für die Quantenmechanik relevante Experiment ist aus zwei Teilen zusammengesetzt: einem Präpariervorgang an einem makroskopischen Gegenstand und einem Registriervorgang an einem anderen makroskopischen Gegenstand, der an ihm zu einer Veränderung führt oder nicht. Es sei hier eine kleine Bemerkung zur Wortwahl gemacht. Der Ausdruck Gegenstand

wurde verwendet, um auch die Möglichkeit der Verwendung natürlich gegebener experimenteller Anordnungen miteinzuschließen. Im weiteren wird aber der Einfachheit halber meist das Wort Apparat gewählt, ohne damit besagte natürliche Anordnungen auszuschließen.

Vom Präparierapparat wird eine Wirkung in gerichteter Form auf den Registrierapparat vermittelt. Damit sollen zwei Punkte umschrieben sein. Zunächst sei der Umstand gemeint, daß das Durchführen einer Präparation das Ergebnis der Registrierung beeinflussen kann. Eine solche Beeinflussung muß im allgemeinen nicht existieren, aber Experimente sind meist nur dann von besonderem Interesse, wenn es eine derartige Beeinflussung gibt. Der andere Punkt ist das eigentliche Kriterium für eine gerichtete Wechselwirkung, das besagt, daß Wahl und Anwendung eines Registrierapparates keinen Einfluß auf den Präpariervorgang haben. Die notwendige Präzisierung der vorläufig noch etwas ungenau formulierten Anforderung wird in den nächsten Abschnitten erfolgen. Vorerst sei auf einige Beispiele verwiesen:

- (i) eine Lichtquelle als Präpariergegenstand, die eine Photoplatte als Registriergegenstand schwärzt,
- (ii) eine Uranprobe in einer Bleikammer ausgestattet mit einer Verschlusvorrichtung als Präpariergegenstand, vom dem bei Öffnen der Verschlusvorrichtung eine Wirkung ausgeht, die zur Tröpfchenbildung in einer Nebelkammer führt,
- (iii) ein Teilchenbeschleuniger mit einem Target als Präpariergegenstand, der zu Reaktionen in einer um das Target angebrachten Detektorbatterie führt.

Es ist klar, daß das Konzept der gerichteten Wechselwirkung nicht auf die Quantenmechanik beschränkt ist, sondern ein allgemeines Konzept darstellt. So ist auch ein Gewehrschuß ein Präpariervorgang, der in Form einer gerichteten Wechselwirkung auf einer Zielscheibe als Registriergegenstand einen Abdruck hinterläßt. Es ist somit bei der Quantenmechanik von einer speziellen Wechselwirkungstheorie zu sprechen, da sie sich nur um Formen der gerichteten Wechselwirkung bemüht, die nicht einer klassischen Beschreibungsweise zugänglich sind. Es ist im weiteren das Ziel, die besondere Struktur der quantenmechanischen Wirkungsvermittlung im Realtext genauer zu fassen und geeignet mathematisch abzubilden.

Man bemerke, wie vorsichtig der bisher eingenommene Standpunkt ist. Es wird lediglich von gerichteter Wechselwirkung zwischen makroskopischen Gegenständen gesprochen und nicht davon, wie die Wechselwirkung vonstatten geht. Es wird nochmals explizit darauf hingewiesen, daß Begriffe wie Teilchen, Welle oder auch nur Mikrosystem nicht verwendet werden.

5.2 Einzelexperimente — Präparier- und Registrierereignisse

Der erste Schritt in der Beschreibung der Realexperimente, die den Grundbereich der Quantenmechanik bilden sollen, besteht in der Auszeichnung von Teilen der Realität, die als Präparier- und Registrierereignisse bezeichnet werden sollen. Darauf aufbauend gelangt man zu den sogenannten Einzelexperimenten.

Als **Präparierereignis** bezeichne man einen konkreten technisch kontrollierbaren und raum-zeitlich begrenzten Prozeß, der charakterisiert wird durch:

- ein Fast-Inertialsystem als raum-zeitliches Bezugssystem, auf das sich alle Angaben beziehen,
- seinen technischen Aufbau,
- seine Durchführung.

Beispiele:

- eine ganz bestimmte Uranprobe in einer ganz konkreten Bleikammer mit einer ganz bestimmten Öffnung, die durch eine ganz bestimmte Verschlusvorrichtung verschlossen werden kann:

Charakteristika:

- Auszeichnen eines Fast-Inertialsystems als raum-zeitliches Bezugssystem,
- Bauanleitung für diesen einen Kasten und Angaben zur Bereitstellung dieser einen Uranprobe,
- Durchführungsanweisung: Verschlusvorrichtung zu bestimmtem Zeitpunkt öffnen und wieder schließen.

- ein ganz bestimmter Glühdraht in einer ganz bestimmten Abschirmkammer mit Schlitz versehen mit einer bestimmten Verschlusvorrichtung:

Charakteristika:

- Auszeichnen eines Fast-Inertialsystems als raum-zeitliches Bezugssystem,
- Bauanleitung inklusive Angaben über verwandte Materialien, Art der Spannungsversorgung, wo genau an der Kammer und auf welche Weise die Verschlusvorrichtung angebracht ist und analoge Bestimmungsstücke für diese eine Apparatur,

- Durchführungsanweisung: Verschlussvorrichtung zu bestimmtem Zeitpunkt öffnen und wieder schließen.

Als **Registrierereignis** sei ein konkreter technisch kontrollierbarer und raum-zeitlich begrenzter Prozeß bezeichnet, der charakterisiert ist durch:

- ein Fast-Inertialsystem als raum-zeitliches Bezugssystem, auf das sich alle Angaben beziehen,
- seinen technischen Aufbau,
- seine Anwendung,
- eine Festlegung, was eine interessante Veränderung ist, die auftreten kann oder nicht,
- die Feststellung, ob die als interessant ausgezeichnete Veränderung aufgetreten ist oder nicht.

Beispiele:

- eine konkrete Verwendung einer ganz bestimmten Nebelkammer
Charakteristika:
 - Auszeichnen eines Fast-Inertialsystems als raum-zeitliches Bezugssystem,
 - Bauanleitung zur Gewinnung dieser einen Nebelkammer,
 - Benutzungsanweisung zur Durchführung dieser einen betrachteten Durchführung
 - Auszeichnen eines bestimmten Raumgebiets in der Nebelkammer als interessantes Gebiet in dem Sinne, daß ein Auftauchen von Nebeltröpfchen in dem ausgezeichneten Gebiet als Eintreten einer interessierenden Veränderung definiert sei,
 - Feststellung, ob bei der konkreten Durchführung Nebeltröpfchen in besagtem Raumgebiet aufgetaucht sind oder nicht.
- eine konkrete Verwendung eines ganz bestimmten Zählrohrs
Charakteristika:
 - Auszeichnen eines Fast-Inertialsystems als raum-zeitliches Bezugssystem,

- Bauanleitung zur Gewinnung dieses einen Zählrohrs,
- Benutzungsanweisung zur Durchführung dieser einen betrachteten Durchführung,
- Auszeichnen der interessierenden Veränderung: das Zählrohr schlägt an, das heißt, es wird ein Strom einer gewissen Mindeststromstärke gemessen,
- Feststellung, ob bei der einen konkreten Durchführung die Mindeststromstärke aufgetreten ist oder nicht.

Unter einem **Einzelexperiment** wird ein Paar aus einem Präparierereignis und einem Registrierereignis verstanden. Ein Einzelexperiment ist somit ein Gesamtprozeß, der aus zwei einzelnen Prozessen aufgebaut ist.

Nur zur Verdeutlichung soll nochmals betont werden, daß mit den Präparier- und Registrierereignissen nicht etwa nur die Apparate gemeint sind, sondern ganz konkrete Durchführungen an ganz konkreten Apparaten. Das heißt, daß identische Durchführungen am selben Apparat zu verschiedenen Zeiten oder an verschiedenen Orten verschiedene Ereignisse darstellen.

Nach der ersten Charakterisierung der Teile der Realität, die als Grundlage für die Quantenmechanik dienen sollen, muß jetzt deutlich gemacht werden, wie die einzelnen Realtextteile mit Namen zu versehen sind.

Es gelten dabei folgende Regeln:

- Jedes Präparierereignis und jedes Registrierereignis bekommt einen und nur einen Namen.
- Jedes Einzelexperiment bekommt einen und nur einen Namen.
- Jeder Name wird nur einmal verwandt.
- Es werden nur Präparierereignisse mit Namen versehen, zu denen es ein Registrierereignis so gibt, daß sie als Paar ein Einzelexperiment darstellen. Ebenso werden nur Registrierereignisse mit einem Namen versehen, zu denen es ein Präparierereignis so gibt, daß sie als Paar ein Einzelexperiment darstellen.
- Es kommt häufig vor, daß ein Registrierapparat aus mehreren Teilen besteht, die unabhängig voneinander Veränderungen aufweisen können, dann soll jeder Teil für sich mit einem Namen versehen werden. Dabei werden mit demselben Präparierereignis im obigen strengen Sinne verschiedene Registrierereignisse „gleichzeitig“ in Kontakt gebracht. Es wird jetzt die Vereinbarung getroffen,

daß für jedes einzelne Registrierereignis das Präparierereignis mit einem eigenen Namen versehen wird. Man gelangt also zum Beispiel für 100 Detektoren, die bei einem einzelnen experimentellen Vorgang auf ein Präparierereignis angewandt werden, zu 100 Einzelexperimenten mit jeweils eigenem Namen für Präparierereignis wie Registrierereignis, obwohl es sich streng genommen um dasselbe Präparierereignis handelt ¹. Der Ausdruck „gleichzeitig“ ist absichtlich in Anführungsstriche gesetzt, denn die Aussage soll nicht nur Bezug nehmen auf Registrierereignisse, die zum selben Zeitpunkt abgeschlossen wurden, sondern auf alle Registrierereignisse, die zum selben experimentellen Ablauf gehören. So kann es sein, daß verschiedene Registrierereignisse, die sich im gleichen Experiment auf denselben Präpariervorgang beziehen, zu verschiedenen Zeiten stattfinden. Ein Beispiel sind Detektoren, die an verschiedenen Orten stehen und sich ausbreitendes Licht in einem bestimmten Medium registrieren. Hierbei können die Zeitunterschiede gerade besonders interessant sein.

Obige Abmachung erlaubt es, die vereinfachende Konvention einzuführen, daß jedem Präparierereignis nur ein Registrierereignis zur Bildung eines Einzelexperimentes zukommt. Naheliegenderweise soll aber auch umgekehrt die Namensgebung derart sein, daß jedem Registrierereignis nur ein Präparierereignis zur Bildung eines Einzelexperimentes zukommt.

- Ebenso handelt es sich um verschiedene Präparier- und Registrierereignisse und damit auch um verschiedene Einzelexperimente, wenn man verschiedene Veränderungen am selben Apparat interessant findet. Zum Beispiel betrachte man bei einem Drehspulinstrument verschiedene Zeigerstellungen, bei der Blaskammer verschiedene Gebiete, in denen Tröpfchen auftauchen oder bei einer Photoplatte verschiedene Gebiete, in denen Schwärzung auftritt.
- Ein wichtiges Problem besteht noch darin, inwieweit die Technik der „selbstregistrierenden Experimente“ mit der hier erläuterten Auffassung und Bezeichnungsweise vereinbar ist. Mit selbstregistrierenden Experimenten ist dabei die folgende Situation gemeint. Häufig werden Einzelexperimente in großer Anzahl wiederholt. Statt jedes der Einzelexperimente im obigen Sinne einzeln durchzuführen, das heißt die Durchführung explizit von vorne bis hinten gemäß der Information zu wiederholen, die alle mit einem Präparier- oder Registrierereignis verbunden werden sollen, bleiben die Apparate durchgehend angeschaltet. So werden von einem Glühdraht mit Abdeckkammer natürlich

¹Bei derartigem Vorgehen lassen sich die von Ludwig in [Lud70] als z-Gruppen bezeichneten Konstrukte umgehen.

dauernd Photonen emittiert, zumindest wenn die Verschlusvorrichtung geöffnet ist. Damit solche Experimente aber zum experimentellen Ausgangsmaterial der hier entwickelten Quantenmechanik gehören, müssen sie derart sein, daß garantiert ist, daß man ohne Veränderung der Versuchsergebnisse auch hätte dauernd an- und ausschalten können. Dabei dürfen sich natürlich die die Präparier- oder Registrierereignisse definierenden Charakteristika durch ein „Angeschaltetsein“ nicht verändern. Zum Beispiel muß beim Zählrohr die Relaxationszeit berücksichtigt werden, bevor es erneut für ein Registrierereignis verwandt werden darf, oder es darf durch den Dauerbetrieb nicht etwa durch thermische Effekte zu einer entscheidenden Änderung des Präparier- oder Registrierapparates kommen. Entsprechende Betrachtungen nehmen Experimentalphysiker aber ohnehin vor, so daß derartige Forderungen durchaus als natürlich gewertet werden können.

Nach den Abmachungen zur Namensgebung, also zur Normierung des Realtextes, kann begonnen werden, die Abbildungsprinzipien aufzustellen:

Abbildungsprinzipien Teil 1:

Es werden drei Mengen M_1, M_2, M als Bildmengen ausgezeichnet, wobei $M \subseteq M_1 \times M_2$ zudem für eine Bildrelation steht. M_1, M_2, M sollen im folgenden Sinne verwandt werden:

| | | |
|---|-----------------------|---------------------------------------|
| x_1 ist Name eines Präparierereignisses | \longleftrightarrow | $x_1 \in M_1,$ |
| x_2 ist Name eines Registrierereignisses | \longleftrightarrow | $x_2 \in M_2,$ |
| x ist Name eines Einzelexperimentes | \longleftrightarrow | $x \in M,$ |
| x ist Name eines Einzelexperimentes, das zusammengesetzt ist aus einem Präparierereignis mit Namen x_1 und einem Registrierereignis mit Namen x_2 | } | $\longleftrightarrow x = (x_1, x_2).$ |

Die obigen Abmachungen zur Normierung können nun dafür verwandt werden, zwei Axiome für die Struktur von M zu wählen, die sich in [Lud85a], Kapitel III, §1, S. 48 finden:

AZ 1 Seien x_1, x'_1 Elemente aus M_1 , und seien x_2, x'_2 Element aus M_2 , dann gilt:

- (i) Gehören (x_1, x_2) und (x'_1, x_2) zu M , dann gilt $x_1 = x'_1$.
- (ii) Liegen (x_1, x_2) und (x_1, x'_2) in M , dann gilt $x_2 = x'_2$.

AZ 2 Zu jedem Element x_1 aus M_1 existiert ein Element x_2 der Menge M_2 mit $(x_1, x_2) \in M$. Bezeichnet x_2 ein Element aus M_2 , dann existiert ein Element x_1 in M_1 mit $(x_1, x_2) \in M$.

Einer Bemerkung Ludwigs in [Lud85a], Kapitel III, §1, S. 48 folgend, kann man in äquivalenter Weise auch fordern:

AZ* Es existiert eine Bijektion $j : M_1 \longrightarrow M_2$, so daß gilt:

$$M = \{(x_1, j(x_1)) \mid x_1 \in M_1\}.$$

Dabei ist j dann die Abbildung, die Präparier- und Registrierereignisse einander zuordnet. Wie bereits angedeutet wurde und wie weiter unten bewiesen wird, ist die Relation „AZ 1 und AZ 2“ der Relation AZ gleichwertig. Folglich ist es beliebig, welche Aussage axiomatisch gefordert wird. Zumeist wird hier „AZ 1 und AZ 2“ gewählt werden. Um deutlich zu machen, daß mithin die Aussage AZ gilt, wurde oben an AZ ein * angehängt. Die oben angesprochene Äquivalenz liefert

Lemma 5.2.1 *Die Aussage AZ ist äquivalent zu der Aussage (AZ 1 und AZ 2).*

Beweis:

„(AZ 1 und AZ 2) \implies AZ:“ Man definiere folgende Abbildung:

$$j : M_1 \longrightarrow M_2, \quad x_1 \longmapsto j(x_1) := \text{dasjenige } x_2, \text{ für das } (x_1, x_2) \in M.$$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt aus der zweiten Zeile von AZ 1. Die erste Zeile von AZ 2 liefert, daß der Definitionsbereich von j durch M_1 gegeben ist. Mit der ersten Zeile von AZ 1 folgt Injektivität und mit der zweiten Zeile von AZ 2 die Surjektivität.

„AZ \implies (AZ 1 und AZ 2):“ Analog zur anderen Beweisrichtung folgt aus der Abbildungseigenschaft von j die zweite Zeile von AZ 1, aus der Injektivität ergibt sich die erste Zeile von AZ 1. Aus dem Umstand, daß M_1 der Definitionsbereich von j ist, folgt die erste Zeile von AZ 2, während die zweite Zeile von AZ 2 Konsequenz der Surjektivität ist. ■

Zum Abschluß des Abschnitts soll noch erwähnt werden, daß die Forderung der Abzählbarkeit der Mengen M_1 , M_2 und M im Sinne der Endlichkeitsüberlegungen aus Abschnitt 4.3 nicht explizit als Axiom aufgenommen wird, da sie Konsequenz der später eingeführten Axiome APS 1 und 2 sein wird.

5.3 Einzelprozesse und Auswahlverfahren

Nachdem nun erläutert wurde, welche Teile der Realität mit den Begriffen Einzelexperiment, Präparier- und Registrierereignis bezeichnet werden sollen, ist es für den Aufbau der Quantenmechanik im Sinne von G. Ludwig notwendig, noch weitere Teile der Realität, die als Auswahlverfahren und statistische Auswahlverfahren bezeichnet werden, in die physikalische Theorie einzuführen. Dabei wird auch das durchgängig in vorliegenden Arbeit verwandte Wahrscheinlichkeitskonzept unter besonderer Berücksichtigung des Verhältnisses zum Realtext entwickelt. Um Wiederholungen und damit einen Mangel an Übersichtlichkeit zu vermeiden, werden die Konzepte hier zunächst allgemein eingeführt.

Man betrachte einen Teil der Wirklichkeit, an dem ein Realtext ausgezeichnet sei. Der Realtext möge physikalische Prozesse bestimmter Art umfassen, die als Einzelprozesse bezeichnet werden sollen. Der Terminus des Einzelprozesses wird verwendet, um zu betonen, daß auch hier analog zu den Präparierereignissen, Registrierereignissen und Einzelexperimenten stets ganz konkrete Prozesse gemeint sind. Die Bildmenge für die Prozesse heiße M . Als Abbildungsprinzip wird dabei gewählt, daß $x \in M$ dann notiert wird, wenn x Name eines Einzelprozesses der obigen Art ist. Die physikalischen Einzelprozesse der interessierenden Art sind im allgemeinen nicht einfach vorgegeben, sondern Resultat einer bestimmten Verfahrensweise zu ihrer Gewinnung. Unter Verfahren sei eine Anleitung zum Erhalt von Einzelprozessen mit bestimmten Eigenschaften verstanden. Die einzelnen Verfahren sollen ebenfalls mit Namen versehen werden. Als Bildmenge für die Verfahren wird die Menge \mathcal{S} gewählt, so daß $a \in \mathcal{S}$ die Realrelation „ a ist Name eines Verfahrens zur Gewinnung von Einzelprozessen der ausgezeichneten Art“ abbildet. Ein solches Verfahren kann man als Verfahren zur Auswahl bestimmter Einzelprozesse auffassen. Daher liegt es nahe, ein Verfahren a aus \mathcal{S} mit der Teilmenge derjenigen Einzelprozesse $x \in M$ zu identifizieren, die nach dem Verfahren a gewonnen und damit ausgewählt werden. Daher wird gefordert, daß \mathcal{S} Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M ist. Damit verknüpft wird die Relation $x \in a$ als Bildrelation dafür eingeführt, daß der Einzelprozeß x den Charakteristika des Verfahrens a genügt.

Ein Verfahren a heiße **feiner** als ein anderes Verfahren b und b heiße **gröber** als a , wenn für den vorgelegten Realtext gilt, daß jeder Einzelprozeß, der den Charakteristika von a genügt, auch den Charakteristika von b genügt. In der mathematischen Theorie soll dafür $a \subseteq b$ notiert werden.

Es wird nun festgelegt:

Definition 5.3.1

Sei M eine Menge. Dann heißt eine nicht-leere Teilmenge \mathcal{S} der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M eine **Menge von Auswahlverfahren auf M** , wenn gilt:

AS 1.1 Sind a, b Elemente aus \mathcal{S} mit $a \subseteq b$, dann liegt $b \setminus a$ in \mathcal{S} .

AS 1.2 Für alle Elemente a, b aus \mathcal{S} liegt $a \cap b$ in \mathcal{S} .

Analog soll eine Menge M , die Bildmenge von Verfahren zur Auswahl von physikalischen Prozessen ist, als **Bildmenge von physikalischen Auswahlverfahren** bezeichnet werden, wenn die Eigenschaften AS 1.1 und AS 1.2 in sinnvoller Weise gefordert werden dürfen, also wenn die Ausstattung der mathematischen Theorie mit AS 1.1 und AS 1.2 als Axiomen bei adäquatem unscharfem Vergleich mit der Erfahrung im Sinne von Abschnitt 4.2 nicht auf einen Widerspruch führt. Dabei besagt AS 1.1, daß ausgehend von zwei Auswahlverfahren a und b , wobei a feiner als b sein soll, auch durch $b \setminus a$ wieder ein Auswahlverfahren gegeben ist. Also ist das Kriterium, zu b , aber nicht zu a zu gehören, ein Kriterium, das ein Auswahlverfahren definiert. AS 1.2 verlangt, daß zu je zwei Auswahlverfahren a, b auch $a \cap b$ ein Auswahlverfahren ist. Das Auswahlverfahren $a \cap b$ umfaßt dann diejenigen Einzelprozesse, die sowohl den Gesichtspunkten, die a ausmachen, als auch den Gesichtspunkten, die b ausmachen, genügen. Es sei darauf hingewiesen, daß nicht $M \in \mathcal{S}$ gefordert wird, wie sich am Beispiel der Präparier- und Registrierereignisse aus Abschnitt 5.2 unmittelbar illustriert. Denn einem Ausdruck wie „alle Anschaltvorgänge eines bestimmten Apparates“ kann kein Äquivalent im Realtext zugewiesen werden.

In der Quantenmechanik kommt dem Begriff der Wahrscheinlichkeit eine zentrale Rolle zu. Daher bedarf es einer Klarstellung, was damit verbunden wird. Insbesondere soll das Verhältnis des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zum Realtext deutlich werden. Als Ausgangspunkt wird eine Bildmenge \mathcal{S} von physikalischen Auswahlverfahren gewählt. Mit a und a' mögen zwei Verfahren zur Gewinnung von Einzelprozessen aus \mathcal{S} derart bezeichnet sein, daß a' feiner als a ist. Wählt man nun N Einzelprozesse entsprechend dem Verfahren a , und sucht man unter den N Einzelprozessen diejenigen N' Prozesse heraus, die auch den Charakteristika von a' genügen, dann erhält man eine relative Häufigkeit $h = \frac{N'}{N}$. Wiederholt man ein solches Vorgehen n Mal, erhält man n relative Häufigkeiten $h_i = \frac{N'_i}{N_i}$ mit $i = 1, \dots, n$. Die derart gewonnenen relativen Häufigkeiten stellen interessante Teile des Realtexes dar, die in das mathematische Bild durch Abbildungsprinzipien entsprechend der allgemeinen Betrachtungen aus Kapitel 4 aufgenommen werden sollen. Als Bildrelation wird eine Funktion $\lambda_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rightarrow [0, 1]$ mit $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \{(a, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid a \supseteq b, a \neq \emptyset\}$ gewählt, auf die

wird der Einfachheit halber die Angabe der Unschärfemenge, bezüglich derer die Aussage überhaupt gilt, weggelassen. Wenn im Laufe der folgenden Erläuterungen von reproduzierbaren Häufigkeiten oder im Zusammenhang mit relativen Häufigkeiten von physikalischer Approximation gesprochen wird, ist damit stets der oben dargestellte Zusammenhang für eine geeignete Unschärfemenge gemeint. Was unter einer geeigneten Unschärfemenge zu verstehen ist, hängt dann im einzelnen von der betrachteten Theorie ab.

Hat man zwischen den obigen Auswahlverfahren a und a' reproduzierbare Häufigkeiten im Realtext gefunden, dann soll a' **statistisch abhängig** von a heißen.

Nachdem nun dargestellt worden ist, welche Realtextteile auf welche Weise mit der Funktion $\lambda_{\mathcal{S}}$ verglichen werden sollen, bedarf es in der Folge der Definition einer geeigneten mathematischen Struktur. Dafür wird gewählt:

Definition 5.3.2

Sei M eine Menge. Dann heißt eine Teilmenge \mathcal{S} der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M eine **Menge von statistischen Auswahlverfahren auf M** , wenn gilt:

- (i) \mathcal{S} ist Menge von Auswahlverfahren auf M .
- (ii) Auf $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \{(a, b) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid a \supseteq b, a \neq \emptyset\}$ ist eine Abbildung $\lambda_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rightarrow [0, 1]$ so definiert, daß gilt:

AS 2.1 Seien a_1, a_2 Elemente der Menge \mathcal{S} derart, daß zum einen der Durchschnitt von a_1 und a_2 leer ist und daß zum anderen die Vereinigung $a_1 \cup a_2$ zu den nicht-leeren Elementen der Menge \mathcal{S} gehört, dann gilt:

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a_1 \cup a_2, a_1) + \lambda_{\mathcal{S}}(a_1 \cup a_2, a_2) = 1.$$

AS 2.2 Seien a_1, a_2, a_3 Elemente der Menge \mathcal{S} derart, daß zum einen die Mengeninklusionskette $a_1 \supseteq a_2 \supseteq a_3$ gilt und daß zum anderen a_2 nicht-leer ist, dann gilt:

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_3) = \lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2)\lambda_{\mathcal{S}}(a_2, a_3).$$

AS 2.3 Seien a_1, a_2 Elemente der Menge \mathcal{S} derart, daß zum einen a_1 die Menge a_2 umfaßt und daß zum anderen a_2 nicht-leer ist, dann gilt $\lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2) \neq 0$.

Das mathematische Bild der reproduzierbaren Häufigkeiten $\lambda_{\mathcal{S}}$ wird als **Wahrscheinlichkeitsfunktion** bezeichnet, während man $\lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2)$ als **Wahrscheinlichkeit von a_2 relativ zu a_1** nennt. Die Abbildungsprinzipien, wie sie im Vorfeld

der Definition erläutert wurden, motivieren die oberen Eigenschaften AS 2.1 und AS 2.2 unmittelbar. Betrachte dazu zwei disjunkte Auswahlverfahren a_1 und a_2 , so daß die Vereinigung ein nicht-leeres Auswahlverfahren ist. Darüber hinaus seien N Einzelprozesse entsprechend $a_1 \cup a_2$ ausgewählt. Von den N Einzelprozessen mögen N_1 auch den Kriterien von a_1 und N_2 den Kriterien von a_2 genügen. Dann folgt wegen der vorausgesetzten Disjunktheit der beiden Mengen die Identität $N = N_1 + N_2$, so daß AS 2.1 gilt. Seien nun die Voraussetzungen für drei Auswahlverfahren a_1 , a_2 und a_3 entsprechend AS 2.2 erfüllt. Man wähle nun N_1 Einzelprozesse gemäß a_1 . Unter den N_1 Einzelprozessen suche man diejenigen N_2 Stück heraus, die auch a_2 genügen. Von den N_2 Einzelprozessen wiederum wähle man diejenigen N_3 Stück, die auch a_3 genügen. Dann gilt sofort $\frac{N_3}{N_1} = \frac{N_3}{N_2} \frac{N_2}{N_1}$. Die nicht unmittelbar eingängige Forderung nach AS 2.3 nützt vor allem der mathematischen Bequemlichkeit. Es besagt, daß zu jedem Auswahlverfahren a_1 und jedem relativ dazu feineren Auswahlverfahren a_2 immer endlich viele Prozesse existieren, die auch wirklich a_2 genügen. Hat man eine Bildmenge physikalischer Auswahlverfahren und bezüglich dieser reproduzierbare relative Häufigkeiten vorliegen, so daß für das mathematische Bild AS 2.1 - AS 2.3 als Axiome gefordert werden dürfen, dann soll von einer **Bildmenge statistischer Auswahlverfahren** gesprochen werden.

Der Abschnitt schließt mit zwei Anmerkungen. Das oben begründete Wahrscheinlichkeitskonzept wird der üblichen Kolmogoroffschen Grundlegung der Wahrscheinlichkeit vorgezogen, da es sich, wie die weiteren Untersuchungen zeigen werden, für die physikalischen Problemstellungen erheblich besser eignet. Überlegungen zu verallgemeinerten Wahrscheinlichkeitskonzepten werden hier aber nicht vorgestellt. Hinsichtlich des Verhältnisses des dargestellten Konzeptes zur Kolmogoroffschen Struktur und einer geeigneten Erweiterung der axiomatischen Eigenschaften AS 2.1 - 2.3 beachte etwa [Neu83], [Lud81d], S. 361ff., [Lud83b], Kapitel II, S. 20ff., [Lud85a], Kapitel II, S. 18 und [Lud90b], Kapitel 11 sowie die dort zitierte Literatur.

Als zweiter Punkt sei besonders betont, daß das oben erläuterte Konzept der Wahrscheinlichkeit nur Bezug auf den Realtext nimmt und somit bereits vor der Quantenmechanik existiert. Es wird für alle Theorien genau das oben erläuterte Konzept verwandt, so daß für die Quantenmechanik „kein neues“ Konzept notwendig ist.

5.4 Einfache mathematische Konsequenzen

Es werden nun einige einfache mathematische Aussagen zu den neu gewonnenen Begriffen der Menge von Auswahlverfahren und der Menge von statistischen Auswahlverfahren auf einer Menge formuliert.

Da das erste Lemma offensichtlich ist, wird dafür kein Beweis notiert.

Lemma 5.4.1 *Sei M eine Menge, dann ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ eine Menge von Auswahlverfahren auf M .*

Lemma 5.4.2 *Sei M eine Menge, und sei \mathcal{S} eine Menge von Auswahlverfahren auf M . Im weiteren bezeichne a ein Element aus \mathcal{S} und $(a_i)_{i=1}^n$ eine Familie von Elementen der Menge \mathcal{S} . Gilt nun für jedes i aus $\{1, \dots, n\}$ die Mengeninklusion $a_i \subseteq a$, dann ist die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n a_i$ ein Element aus \mathcal{S} .*

Beweis:

Es mögen die Voraussetzungen für a und $(a_i)_{i=1}^n$ erfüllt sein. Es gilt also insbesondere

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \subseteq a.$$

Also erhält man für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Zugehörigkeit von $a \setminus a_i$ zu \mathcal{S} . Damit folgt aber auch, daß $a \setminus (\bigcup_{i=1}^n a_i) = \bigcap_{i=1}^n (a \setminus a_i)$ in \mathcal{S} liegt. Das heißt, es gilt:

$$\bigcup_{i=1}^n a_i = a \setminus (a \setminus (\bigcup_{i=1}^n a_i)) \in \mathcal{S}.$$

■

Definition 5.4.3

Sei \mathcal{S} eine Menge von Auswahlverfahren auf einer Menge M . Seien ferner σ ein Element aus \mathcal{S} und $(\sigma_i)_{i=1}^n$ eine Familie aus \mathcal{S} , deren Mitglieder paarweise disjunkt sind und für die $\sigma = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i$ gilt. Dann heißt σ die **Mischung** der Familie $(\sigma_i)_{i=1}^n$, und $(\sigma_i)_{i=1}^n$ heißt eine **disjunkte Zerlegung** von σ .

Definition 5.4.4

Sei \mathcal{S} eine Menge von Auswahlverfahren auf einer Menge M , und sei a Element von \mathcal{S} , dann wird definiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(a) &:= \{b \in \mathcal{S} \mid b \subseteq a\}, \\ \mathcal{S}' &:= \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}. \end{aligned}$$

In Ausführung und teilweiser Erweiterung einiger Anmerkungen Ludwigs in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 3, S. 19f. ergibt sich:

Lemma 5.4.5 *Sei \mathcal{S} eine Menge von statistischen Auswahlverfahren auf einer Menge M mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $\lambda_{\mathcal{S}}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) Für jedes a aus \mathcal{S}' gelten die Relationen $\lambda_{\mathcal{S}}(a, a) = 1$ und $\lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset) = 0$.
- (ii) Für jedes a aus \mathcal{S}' und jede Familie $(a_i)_{i=1}^n$ aus $\mathcal{S}(a)$, deren Mitglieder paarweise disjunkt sind, ergibt sich:

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_i)$$

- (iii) Für jedes a_1 aus \mathcal{S}' und alle a_2, a_3 aus \mathcal{S} , die der Inklusionskette $a_1 \supseteq a_2 \supseteq a_3$ genügen, folgt:

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2) \geq \lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_3).$$

Beweis:

zu (i): Betrachte ein a aus \mathcal{S}' . Dann folgt mit AS 2.1:

$$1 = \lambda_{\mathcal{S}}(a \cup \emptyset, a) + \lambda_{\mathcal{S}}(a \cup \emptyset, \emptyset) = \lambda_{\mathcal{S}}(a, a) + \lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset)$$

Mit AS 2.2 ergibt sich zudem

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset) = \lambda_{\mathcal{S}}(a, a) \lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset).$$

Also gilt

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset) = (1 - \lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset)) \lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset),$$

woraus sich dann unmittelbar $\lambda_{\mathcal{S}}(a, \emptyset) = 0$ und $\lambda_{\mathcal{S}}(a, a) = 1$ ergibt.

zu (ii): Zunächst wird die Wohldefiniertheit der linken Seite der Aussage gezeigt. Dazu betrachte man ein Element $a \in \mathcal{S}'$ und eine Familie $(a_i)_{i=1}^n$ aus $\mathcal{S}(a)$, deren Mitglieder paarweise disjunkt sind. Mit Lemma 5.4.2 folgt aus den obigen Voraussetzungen, daß die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^n a_i$ zu \mathcal{S} gehört. Da aber alle Mitglieder der Familie $(a_i)_{i=1}^n$ Teilmengen von a sind, ist auch ihre Vereinigung eine Teilmenge von a . Folglich ist der Ausdruck $\lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^n a_i)$ wohldefiniert.

Der Beweis wird nun durch vollständige Induktion geführt. Sei $a \in \mathcal{S}'$ gewählt. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Gelte die Aussage also für ein $n \in \mathbb{N}$. Sei $(a_i)_{i=1}^{n+1}$ eine Familie aus $\mathcal{S}(a)$, deren Mitglieder paarweise disjunkt sind. Dann lautet die Induktionsvoraussetzung $\lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^n a_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_i)$.

Gilt nun $\bigcup_{i=1}^n a_i = \emptyset$, erhält man mit der Induktionsvoraussetzung und Punkt

(i) dieses Lemmas $\sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_i) = 0$. Zudem gilt $\bigcup_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1}$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^{n+1} a_i) &= \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_{n+1}) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_i) + \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_i). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Gelte nun $\bigcup_{i=1}^n a_i \neq \emptyset$. Dann folgt, daß $\bigcup_{i=1}^{n+1} a_i$ in $\mathcal{S}(a)$ liegt, denn $(a_i)_{i=1}^{n+1}$ ist eine Familie von Elementen aus \mathcal{S} , deren Mitglieder allesamt Teilmengen von a sind. Also folgt, da sich mit Lemma 5.4.2 die Zugehörigkeit der Vereinigungsmenge zu \mathcal{S} ergibt, auch ihre Zugehörigkeit zu $\mathcal{S}(a)$. Im weiteren ergibt sich mit AS 2.1 die Identität

$$\lambda_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} a_i, \bigcup_{i=1}^n a_i) + \lambda_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} a_i, a_{n+1}) = 1. \quad (5.3)$$

Damit erhält man nun die Behauptung:

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^{n+1} a_i) &= \lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^{n+1} a_i) \cdot 1 \\ &\stackrel{(5.3)}{=} \lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^{n+1} a_i) \lambda_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} a_i, \bigcup_{j=1}^n a_j) + \lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^{n+1} a_i) \lambda_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i=1}^{n+1} a_i, a_{n+1}) \\ &\stackrel{\text{AS 2.2}}{=} \lambda_{\mathcal{S}}(a, \bigcup_{i=1}^n a_i) + \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_{n+1}) \stackrel{(5.2)}{=} \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_{\mathcal{S}}(a, a_j). \end{aligned}$$

zu (iii): Im Falle $a_2 \neq \emptyset$ erhält man:

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_3) \stackrel{\text{AS 2.2}}{=} \lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2) \underbrace{\lambda_{\mathcal{S}}(a_2, a_3)}_{\leq 1} \leq \lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2).$$

Für $a_2 = \emptyset$ gilt mit $a_2 \supseteq a_3$ sofort auch $a_3 = \emptyset$. Daher erhält man nach (i) $\lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_3) = \lambda_{\mathcal{S}}(a_1, a_2) = 0$.

■

Als Nächstes folgt Th. 2.1. aus [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 2, S. 17:

Lemma 5.4.6 *Bezeichne M eine Menge. Benenne I eine Indexmenge beliebiger Mächtigkeit, und symbolisiere $(\mathcal{S}_i)_{i \in I}$ eine Familie von Mengen von Auswahlverfahren auf M , dann ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$ eine Menge von Auswahlverfahren auf M .*

Beweis:

zu AS 1.1: Seien a, b Elemente aus $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$ mit $a \subseteq b$. Dann liegen a, b in \mathcal{S}_i für jedes $i \in I$. Daraus ergibt sich durch Anwendung von AS 1.1 für jedes der \mathcal{S}_i , daß für alle $i \in I$ auch $b \setminus a$ Element von \mathcal{S}_i ist. Also gehört $b \setminus a$ auch zu den Elementen aus $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$.

zu AS 1.2: Man betrachte Elemente a, b aus $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$, dann gilt $a, b \in \mathcal{S}_i$ für alle $i \in I$. Daraus ergibt sich mit Anwendung von AS 1.2 die Zugehörigkeit von $a \cap b$ zu \mathcal{S}_i für alle $i \in I$. Also liegt auch $a \cap b$ in $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$. ■

Schließlich wird noch Th. 2.2. aus [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 2, S. 18 genannt:

Satz und Definition 5.4.7 *Sei M eine Menge, und bezeichne Θ eine nicht-leere Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$. Dann existiert eine kleinste Menge von Auswahlverfahren auf M , die Θ umfaßt. Sie wird mit $\tau(\Theta)$ symbolisiert, und sie heißt die von Θ erzeugte Menge von Auswahlverfahren auf M .*

Beweis:

Mit Lemma 5.4.1 ist $\mathcal{P}(M)$ eine Menge von Auswahlverfahren auf M , also ist die Menge aller Θ umfassenden Mengen von Auswahlverfahren von M nicht-leer. Somit handelt es sich auch beim Durchschnitt aller Mengen von Auswahlverfahren, die Θ umfassen, ebenfalls um eine nicht-leere Menge. Mit Lemma 5.4.6 ist aber der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Mengen von Auswahlverfahren auf M wiederum auch eine Menge von Auswahlverfahren von M . ■

Lemma 5.4.8 *Sei M Menge, und seien V_1, V_2 Teilmengen von M . Wenn V_2 die Menge V_1 umfaßt, dann ist $\tau(V_1)$ eine Teilmenge von $\tau(V_2)$.*

Beweis:

Der Beweis folgt unmittelbar, wenn man die Konstruktion der erzeugten Mengen von Auswahlverfahren entsprechend dem Beweis zu Satz 5.4.7 bedenkt. ■

5.5 Präparierverfahren

Wie in Abschnitt 5.3 im Kontext der Einzelprozesse in allgemeiner Form angesprochen wurde, sind auch die Präparierereignisse in der Regel nicht einfach vorgegeben, sondern müssen mit manchmal technisch aufwendigen Verfahren gewonnen werden. Derartige Verfahren zur Gewinnung von Präparierereignissen werden charakterisiert durch die Angabe aller makroskopischen Vorgänge, die bezüglich eines vorgegebenen raum-zeitlichen Bezugssystems zum Bau und zur Anwendung der betreffenden Apparatur stattfinden, wobei die Gesamtheit der so erfaßten makroskopischen Vorgänge in einem raum-zeitlich begrenzten Gebiet liegen soll. Unter makroskopischen Vorgängen verstehe man dabei Vorgänge, die unmittelbar oder mit Hilfe der Vortheorien zur Quantenmechanik beschreibbar sind. Also ist ein solches Verfahren vollständig durch unmittelbare Erfahrung und die Vortheorien erfaßt.

Nun eignen sich aber nicht alle derartigen Verfahren als Fundament der Quantenmechanik. Ein Verfahren zur Gewinnung von Präparierereignissen lasse man nur dann zum Grundbereich der Quantenmechanik zu, wenn alle bezüglich dieses Verfahrens feineren Verfahren zur Gewinnung von Präparierereignissen statistisch von ihm abhängig sind. Derartige Verfahren sollen als **Präparierverfahren** bezeichnet werden. Die Forderung nach Reproduzierbarkeit ergibt sich unmittelbar, wenn man sich die Situation vor Augen führt, wenn sie nicht erfüllt wäre. Dann lägen zwei Verfahren a, a' zur Gewinnung von Präparierereignissen mit a' feiner als a vor. Wählte man nun Präparierereignisse entsprechend Verfahren a , dann wäre bei Nicht-Reproduzierbarkeit nicht klar, wieviele davon auch den Charakteristika von a' entsprechen würden. Das könnten dann mal alle sein oder gar keines. Eine solche Situation stellt offensichtlich keine geeignete Ausgangslage für aussagekräftige Experimente dar. Liegt aber Reproduzierbarkeit der Häufigkeiten vor, dann kann man zumindest im Rahmen der Unschärfemenge, bezüglich derer die Reproduzierbarkeit am Realtext festgestellt worden ist, den Anteil derjenigen Präparierereignisse angeben, der auch zu a' gehört. In die Motivation der Forderung nach Reproduzierbarkeit fließt allerdings noch ein weiterer wichtiger Punkt ein, der die experimentellen Situationen auszeichnet, die den Grundbereich der Quantenmechanik bilden sollen, und

der in Abschnitt 5.1 als gerichtete Wechselwirkung bezeichnet wurde. Dort wurde als zentrales Kriterium für gerichtete Wechselwirkung die Unabhängigkeit des Präpariervorgangs von Wahl und Anwendung des Registrierapparates genannt. Dabei handelt es sich um eine notwendige Voraussetzung dafür, überhaupt die Reproduzierbarkeit in der obigen Form fordern zu können. Läge nämlich eine Abhängigkeit von den Registrierapparaten vor, dann könnte man nicht davon ausgehen, daß die relative Häufigkeit zwischen einem gröberen und einem feineren Präparierverfahren nur durch die Präparierverfahren selbst bestimmt ist.

Präparierereignisse sind also konkrete Realisierungen der Präparierverfahren. Demzufolge soll ein Präparierereignis als „durch ein bestimmtes Präparierverfahren gewonnen“ bezeichnet werden, wenn bezüglich des durch das Präparierereignis vorgegebenen Bezugssystems das Präparierereignis eben genau durch die Abfolge der das Präparierverfahren definierenden makroskopischen Vorgänge erhalten wurde. In Anlehnung an die Beispiele für Präparierereignisse betrachte man als Beispiele für Präparierverfahren:

- Uranprobe in Bleikammer mit Verschlusvorrichtung:

Charakteristika:

- Bauanleitung für einen Kasten und Angaben zur Bereitstellung einer Uranprobe bestimmter Art, also mit bestimmter Masse, Form, Zusammensetzung und dergleichen bezüglich eines raum-zeitlichen Bezugssystems,
- Durchführungsanweisung.

- Glühdraht in Abschirmkammer mit Verschlusvorrichtung:

Charakteristika:

- Bauanleitung inklusive Angaben über verwandte Materialien, Art der Spannungsversorgung, wo genau an der Kammer und auf welche Weise die Verschlusvorrichtung angebracht ist und analoge Bestimmungsstücke bezüglich eines raum-zeitlichen Bezugssystems,
- Durchführungsanweisung.

Man bedenke bei den Beispielen, daß in den Aufzählungen entsprechend der Ausführungen zu Beginn des Abschnitts alle makroskopischen Vorgänge vorkommen müssen, die sich auf den Bau und die Art der Durchführung beziehen. Die obigen

Angaben sollen nur einen Eindruck vermitteln, was zur ausreichenden Festlegung eines Präparierverfahrens angegeben werden muß. Die genannten Aufzählungen können also in strengen Sinne nicht als vollständig bezeichnet werden. Um aber die Übersichtlichkeit zu bewahren, werden in Zukunft stets nur abkürzende Redeweisen wie „Glühdraht in Abschirmkammer mit Verschlussvorrichtung“ verwandt, wenn es darum geht, prinzipielle Ideen zu erläutern, und wenn es nicht darauf ankommt, wie die betrachtete Apparatur bis ins Detail aussieht. In Sinne eines derartigen knappen Sprachstils nehme man als weitere Beispiele für Präparierverfahren:

- Beschleunigerringe,
- Laser.

Das Beispiel des Lasers eignet sich gut dazu, einen wichtigen Gesichtspunkt des hier verfolgten Zuganges nochmals deutlich zum Ausdruck zu bringen. Denn es mag zunächst verwundern, daß ein Laser, den man doch nur mit Hilfe einer bereits formulierten physikalischen Theorie der Quantenmechanik erklären kann, zum realistischen Fundament der Quantenmechanik gehört. Dazu muß aber bedacht werden, daß auch ein Laser Produkt einer Abfolge makroskopischer Vorgänge ist, denn schließlich handelt es sich auch bei Lasern um vom Menschen gebaute Maschinen. Als solche gehören sie unabhängig von ihrer inneren Funktionsweise zum Grundbereich der Quantenmechanik.

Für die Präparierverfahren wird eine neue Bildmenge \mathcal{Q} mittels der folgenden Abbildungsprinzipien eingeführt:

Abbildungsprinzipien Teil 2:

Es bezeichne \mathcal{Q} eine Bildmenge, und es bezeichne $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(M_1)$ eine Bildrelation. Sie sollen in dem folgenden Sinne verwandt werden:

| | | |
|---|-----------------------|-----------------------|
| a ist ein Präparierverfahren | \longleftrightarrow | $a \in \mathcal{Q}$, |
| x_1 ist ein durch das Präparierverfahren a gewonnenes Präparierereignis | \longleftrightarrow | $x_1 \in a$. |

Dabei soll bezüglich der Normierung, also der Benennung der Realexperimente, in Analogie zur Abmachung für die Ereignisse und Einzelexperimente vereinbart werden, daß jedes Präparierverfahren einen und nur einen Namen bekommt und daß der so verwandte Name auch nur einmal verwandt wird. Ferner belege man auch solche Präparierverfahren mit verschiedenen Namen, die sich in einer der oben erläuterten definierenden Eigenschaften unterscheiden. Anhand des Beispiels des Glühdrahtes etwa bedeutet das Verwenden eines anderen Materials für den Glühdraht auch die

Verwendung eines anderen Präparierverfahrens, so daß für beide ein eigener Name zu wählen ist. $x_1 \in a$ bedeutet, daß die Eigenschaften, die x_1 gemäß der Definition von Präparierereignissen charakterisieren, den Charakteristika genügen müssen, die das Präparierverfahren a definieren.

Nachdem nun durch Beschreibung und Beispiele erläutert worden ist, welcher Teil der Realität als Präparierverfahren zu bezeichnen ist und wie die realen Sachverhalte bezüglich der Präparierverfahren in die mathematische Sprache zu übersetzen sind, sollen nun Strukturaussagen für den Bildterm \mathcal{Q} durch reale Strukturen nahegelegt werden.

Zur Motivation von AS 1.1 betrachte man einen Glühdraht in einer Abschirmkammer mit einem Austrittsloch und einem vorgestellten Blendensystem, das direkt in eine Stern-Gerlach-Apparatur mündet. Das Blendensystem sei dergestalt, daß seine Vorzugsrichtung parallel zur gedachten Verbindungslinie zwischen Austrittsloch und Eingang der Stern-Gerlach-Apparatur verläuft. Die Vorzugsrichtung des inhomogenen Magnetfeldes innerhalb der Stern-Gerlach-Apparatur verlaufe senkrecht zur Vorzugsrichtung des Blendensystems. Stellt man hinter einer solchen Apparatur eine Photoplatte auf, erhält man zwei schmale geschwärzte Bereiche in einigem Abstand. Man kann jetzt drei Präparierverfahren angeben, denn man hat drei Möglichkeiten, den beschriebenen Apparat mit Registrierapparaten in Kontakt zu bringen. Einmal betrachte man den Kontakt mit dem gesamten Ausgang, der die Stern-Gerlach-Apparatur verläßt. Das so erfaßte Präparierverfahren nenne man a . Im weiteren kann man den Kontakt auf jeweils einen der beiden Bündel beschränken, indem man die Apparate zur Registrierung in hinreichendem räumlichen Abstand zur obigen Präparierapparatur aufstellt, um eine ausreichende räumliche Trennung der beiden Bündel zu erreichen. Die beiden letzteren Präparierverfahren mögen die Namen a' und a'' erhalten. Offensichtlich ist a' feiner als a , da jedes Präparierereignis, das a' genügt, auch die Charakteristika von a berücksichtigt. Fordert man nun die Gültigkeit von AS 1.1, dann heißt das auf physikalischer Ebene lediglich, daß auch a'' zu den Präparierverfahren gezählt werden soll. Das ist aber genauso offensichtlich der Fall wie bei a' .

Zur Erläuterung von AS 1.2 wird als Präparierverfahren a eine abgeschirmte Lichtquelle mit Blendensystem gewählt. Letzteres sei so beschaffen, daß das aus der Quelle austretende Licht auf eine Blende mit drei Spalten treffe. Die Spalte mögen mit A, B und C benannt sein. Verwendet man die Apparate zur Registrierung nun in einiger Entfernung, so daß die austretenden drei Lichtkegel sich räumlich hinreichend voneinander getrennt haben, dann kann man auf die folgende Weise zwei Präparierverfahren definieren. Man betrachte zum einen dasjenige Präparierverfahren, das nur die aus den Spalten A und B austretende Licht verwendet, und zum anderen

betrachte man dasjenige, das nur die aus den Spalten B und C austretende Licht nutzt. Dann besteht die Forderung nach AS 1.2 darin, daß auch die Vorschrift, nur das aus Spalt B austretende Licht zu verwenden, ein Präparierverfahren definiert. Die soeben angestellten Überlegungen zusammen mit der obigen Forderung nach reproduzierbaren Häufigkeiten und den in Abschnitt 4.3 vorgestellten Überlegungen zur Abzählbarkeit von Bildmengen legen das folgende Axiom nahe:

APS 1 \mathcal{Q} ist abzählbare Menge statistischer Auswahlverfahren über M_1 .

Abmachung: Die zu \mathcal{Q} gehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion erhalte den Namen $\lambda_{\mathcal{Q}}$.

Das Axiom APS 1 entspricht dem gleichnamigen Axiom in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.1, S. 22.

Für die Abbildung $\lambda_{\mathcal{Q}}$ gilt dabei das folgende Abbildungsprinzip:

Abbildungsprinzipien Teil 3:

Das Bild der relativen Häufigkeit des Präparierverfahrens a_2 bezüglich des größeren Präparierverfahrens a_1 wird durch $\lambda_{\mathcal{Q}}(a_1, a_2)$ abgebildet.

Eine solche Formulierung soll als Abkürzung für den in Abschnitt 5.3 ausführlich geschilderten Zusammenhang zwischen relativen Häufigkeiten des Realtextes und der Wahrscheinlichkeitsfunktion verstanden werden.

Da es wenig sinnvoll ist, Präparierereignisse zu betrachten, die nicht durch Präparierverfahren gewonnen werden können, wird noch das folgende Axiom genannt, das dem gleichnamigen Axiom in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.4, S. 28 entspricht:

APS 8.1 $M_1 = \bigcup_{a \in \mathcal{Q}} a$

Das Axiom APS 8.1 stellt keine besondere Anforderung an den vorliegenden Realtext dar, weil man von einem beliebigen Realtext durch Streichen der betreffenden Stücke stets zu einem Realtext übergehen kann, der dem obigen Axiom genügt.

5.6 Registriermethoden und Registrierprozeduren

Den Vorgang der Registrierung charakterisieren grundsätzlich zwei Schritte:

- (i) Bau und Anwendung eines Apparates bezüglich eines vorgegebenen raumzeitlichen Bezugssystems,

- (ii) Festlegung, welche Veränderungen des Apparates als interessant gelten, und Feststellung, ob die ausgezeichneten Veränderungen eingetreten sind.

Wie durch den in Abschnitt 5.2 definierten Begriff des Registrierereignisses unmittelbar naheliegt, handelt es sich bei der Registrierung um einen Vorgang zur Gewinnung von Registrierereignissen, den die obigen beiden Punkte charakterisieren. Daher faßt man den gesamten Registrierprozeß als ein Verfahren zur Gewinnung von Registrierereignissen auf.

Zur weiteren Analyse des Registriervorganges sollen jetzt die dafür zentralen Begriffe der Registrierprozedur und der Registriermethode eingeführt und diskutiert werden. Unter einer **Registrierprozedur** wird ein Verfahren zur Gewinnung von Registrierereignissen verstanden, das charakterisiert ist durch die Angabe aller makroskopischen Vorgänge, die relativ zu einem vorgegebenen Fast-Inertialsystem zum Bau und zur Anwendung der betreffenden Apparatur durchzuführen sind, und durch Festlegung einer interessierenden Veränderung, die eingetreten sein muß! Dabei soll die Gesamtheit der relevanten makroskopischen Vorgänge in einem raum-zeitlich begrenzten Gebiet liegen. Mit makroskopischen Vorgängen werden wie im Falle der Präparierverfahren Abläufe bezeichnet, die unmittelbar oder mit Hilfe der Vortheorien zur Quantenmechanik angegeben werden können. Ein Registrierereignis soll als „durch eine bestimmte Registrierprozedur gewonnen“ bezeichnet werden, wenn es durch Durchführung der die Registrierprozedur charakterisierenden makroskopischen Vorgänge bezüglich des durch das Registrierereignis vorgegebenen Bezugssystems erhalten wurde und wenn bei dem Registrierereignis auch die die Registrierprozedur definierende Veränderung gefunden wurde.

Ebenso wie für die Präparierverfahren soll auch für die Registrierprozeduren eine abkürzende Sprechweise verwandt werden. Das heißt, es soll nicht jedesmal die gesamte Information entsprechend der oben genannten Merkmale genannt werden, sondern nur die in dem Moment interessierenden Eigenschaften der betrachteten apparativen Aufbauten. In derart abkürzender Sprechweise werden als Beispiele genannt:

- das Geiger-Müller-Zählrohr, bei dem ein bestimmter Spannungsimpuls als interessante Veränderung definiert ist,
- die Nebel- oder Blaskammer oder auch eine Photoplatte, bei der ein bestimmtes Raumgebiet innerhalb der Kammer oder auf der Photoplatte als Bereich der interessanten Veränderung gilt,
- Detektoren beliebiger Bauart, wie etwa Auftreffzähler, Szintillationszähler, Driftkammern, zusammen mit den Abmachungen über die interessanten Veränderungen.

Für die Registrierprozeduren wird die Bildmenge \mathcal{R} mit folgenden Abbildungsprinzipien eingeführt:

Abbildungsprinzipien Teil 4:

Es bezeichne \mathcal{R} eine Bildmenge, und es bezeichne $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(M_2)$ eine Bildrelation. Sie sollen in dem folgenden Sinne verwandt werden:

| | | |
|--|-----------------------|----------------------|
| b ist ein Registrierprozedur | \longleftrightarrow | $b \in \mathcal{R},$ |
| x_2 ist ein durch die Registrierprozedur b gewonnenes Registrierereignis | \longleftrightarrow | $x_2 \in b.$ |

Völlig analog zu den Präparierverfahren soll bezüglich der Normierung der Realtextteile jede Registrierprozedur einen und nur einen Namen bekommen. Der Name findet nur einmal Verwendung. Genauso bedeutet ein Unterschied in den definierenden Eigenschaften auch verschiedene Benennung. Insbesondere sind identische apparative Aufbauten mit verschiedenen Auszeichnungen der Veränderung auch verschiedene Registrierprozeduren, denn die Auszeichnung der interessierenden Veränderung muß als integraler Bestandteil einer Registrierprozedur aufgefaßt werden. Ebenfalls analog zu den Präparierverfahren bedeutet $x_2 \in b$, daß die Eigenschaften, die x_2 entsprechend der Definition von Registrierereignissen charakterisieren, den Charakteristika genügen müssen, die die Registrierprozedur b definieren. Das heißt insbesondere, daß x_2 auch die Veränderung an dem betrachteten Apparat aufweisen muß, die zu den definierenden Merkmalen von b gehört.

Um die eingangs dargelegte Struktur des Registrierens geeignet abzubilden, führt man neben dem Begriff der Registrierprozedur auch noch denjenigen der Registrieremethode ein. Um aber eine möglichst große begriffliche Klarheit zu erreichen, wird dem Begriff der Registrieremethode der etwas allgemeinere Terminus einer „Methode zur Registrierung“ vorausgeschickt, der aber nach Erläuterung des Terminus der Registrieremethode nicht weiter verwendet wird.

Mit der bereits mehrfach erwähnten Abmachung, Vorgänge als makroskopisch zu bezeichnen, die unmittelbar oder mit Hilfe der Vortheorien zur Quantenmechanik beschreibbar sind, wird unter einer „Methode zur Registrierung“ die Information verstanden, die in der Aufzählung zu Beginn des Abschnitts nur den ersten Punkt erfaßt. Das heißt, eine „Methode zur Registrierung“ bezeichnet die Gesamtheit aller makroskopischen Vorgänge, die bezüglich eines vorgegebenen raum-zeitlichen Bezugssystems zum Bau und zur Anwendung einer Apparatur stattfinden, die zur Gewinnung von Registrierereignissen genutzt werden kann. Auch hier soll die Gesamtheit der makroskopischen Vorgänge in einem raum-zeitlich begrenzten Gebiet liegen. Somit stellt eine „Methode zur Registrierung“ den apparativen Anteil am

Registriervorgang dar, und insofern handelt es sich um ein Verfahren zur Auswahl von Registrierereignissen. Bei der Definition des Begriffes Präparierverfahren wurde bereits die Forderung der statistischen Abhängigkeit der feineren Verfahren vom betrachteten Verfahren diskutiert. Eine ähnliche Überlegung kann man auch für die „Methoden zur Registrierung“ anstellen. Betrachtet man zwei „Methoden zur Registrierung“ b_0 und b'_0 , wobei b'_0 feiner als b_0 ist, und nimmt man an, daß keine statistische Abhängigkeit vorliegt, dann ist die gröbere keine geeignete Methode, um Experimente durchzuführen. Denn man weiß auch bei häufigen Wiederholungen nicht, welcher Anteil auch der feineren Methode genügt, und somit weiß man nicht genau, welche Methode eigentlich gerade verwandt wird. Zur endgültigen Rechtfertigung ist es aber notwendig, als weitere Forderung zu formulieren, daß die „Methoden zur Registrierung“ (nicht die Registrierprozeduren !) unabhängig sind von den Präparierverfahren. Das ist eine natürliche Forderung, denn ein experimenteller Aufbau ist sicher nur dann geeignet zur Untersuchung einer gerichteten Wechselwirkung zwischen Präparation und Registrierung, wenn die Präparation keinen Einfluß auf Wahl oder Anwendung des Registrierapparates hat. Zum Bau kontrollierter Experimente sollte sich der Einfluß der Präparation auf die Veränderung am Registrierapparat beschränken. Als **Registriermethode** definiert man jetzt eine „Methode zur Registrierung“, wenn alle ihr gegenüber feineren „Methoden zur Registrierung“ statistisch von ihr abhängig sind.

Bevor nun einige Beispiele für Registriermethoden genannt werden, soll das Verhältnis der obigen Forderung nach Unabhängigkeit der Registriermethoden von den Präparierverfahren mit der Forderung nach gerichteter Wechselwirkung untersucht werden. Dazu wird die in Abschnitt 5.1 gewählte Formulierung zur gerichteten Wechselwirkung mit Hilfe der hier und dem letzten Abschnitt eingeführten Termini präzisiert. Als zentrales Kriterium für die Gerichtetheit der Wechselwirkung von der Präparation hin zur Registrierung wurde dort angeführt, daß Wahl und Anwendung des Registrierapparates keinen Einfluß auf den Präpariervorgang haben. Das heißt aber gerade, daß die Präparierverfahren unabhängig von den Registriermethoden sind. Damit sind aber die Forderung nach gerichteter Wechselwirkung und die obige Forderung völlig symmetrisch. Das mutet widersprüchlich an, da doch die Forderung einer gerichteten Wechselwirkung gerade eine Forderung nach Asymmetrie ist, nämlich vom Präparieren zum Registrieren und nicht umgekehrt. Dazu muß allerdings berücksichtigt werden, daß die Begriffe Präparierverfahren und Registriermethode im Realtext nicht etwas bezeichnen, das symmetrisch zueinander steht. Mit dem Präparierverfahren ist der gesamte Präparierprozeß umfaßt, während mit der Registriermethode nur ein Teil des Registrierprozesses, nämlich Bau und Durchführung, gemeint ist. Die Asymmetrie steckt also bereits in der Art der Bezeichnung,

denn der gesamte Registrierprozeß, das heißt inklusive der Definition der interessanten Veränderung und der Feststellung ihres Eintretens oder Nicht-Eintretens, ist nicht unabhängig von Wahl und Anwendung der Präparierapparates.

Als Beispiele ergeben sich aus den obigen Beispielen für die Registrierprozeduren in abkürzender Formulierung das Geiger-Müller-Zählrohr, die Nebel- oder Blaskammer, eine Photoplatte, Auftreffzähler, Szintillationszähler, Driftkammern und dergleichen mehr ohne eine Festlegung, welche Veränderung die relevante sein soll. Für die Registriermethoden wird der Bildterm \mathcal{R}_0 eingeführt mit den Vorschriften:

Abbildungsprinzipien Teil 5:

Es bezeichne \mathcal{R}_0 eine Bildmenge, und es bezeichne $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{P}(M_2)$ eine Bildrelation. Sie sollen in dem folgenden Sinne verwandt werden:

| | | |
|--|-----------------------|--------------------------|
| b_0 ist eine Registriermethode | \longleftrightarrow | $b_0 \in \mathcal{R}_0,$ |
| Das Registrierereignis x_2 ist mit Hilfe der Registriermethode b_0 gewonnen worden | \longleftrightarrow | $x_2 \in b_0.$ |

Auch hier gilt, wie stets, daß jede Registriermethode einen und nur einen Namen bekommt und daß der Name auch nur einmal verwandt wird. Genauso bedeutet ein Unterschied in den definierenden Eigenschaften auch verschiedene Benennung. Dazu sei hier betont, daß zwei Registriermethoden, die vom „inneren“ Aufbau völlig identisch sind, dennoch verschieden zu benennen sind, wenn sie relativ zu einem gemeinsamen Bezugssystem an verschiedenen Raum-Zeit-Gebieten verwendet werden. Derartige Überlegungen spielen eine wichtige Rolle zur wohlinterpretierten Darstellung der Galilei-Gruppe in der Quantenmechanik, wie sich in Kapitel 11 zeigen wird. Die Aussage „das Registrierereignis x_2 wurde durch die Registriermethode b_0 gewonnen“, die durch $x_2 \in b_0$ abzubilden ist, soll im Realtext beschreiben, daß x_2 bezüglich des durch x_2 festgelegten Bezugssystems genau durch die Abfolge von makroskopischen Vorgängen erhalten wurde, die b_0 definieren.

Es ist nun deutlich gemacht worden, welche Teile der Realität als Registriermethoden und welche als Registrierprozeduren bezeichnet werden und wie die Übersetzung in das mathematische Bild vorzunehmen ist. Der nächste Schritt besteht darin, die zugehörigen Bildmengen über ihre Mengeneigenschaft hinaus weiter mit Struktur auszustatten. Dazu soll zunächst motiviert werden, daß \mathcal{R} als Bildmenge physikalischer Auswahlverfahren aufgefaßt wird. Die definierenden Eigenschaften AS 1.1 und AS 1.2 aus Definition 5.3.1 sollen wie im Falle der Präparierverfahren anhand eines Beispiels nahegelegt werden.

Als Registrierprozedur b nehme man eine Nebelkammer, in der ein bestimmtes Raumgebiet als Bereich interessanter Veränderung ausgezeichnet ist. Kommt es in

dem ausgezeichneten Raumgebiet zur Nebelbildung, soll davon gesprochen werden, daß die Veränderung eingetreten ist, andernfalls nicht. Mit b' bezeichne man eine weitere Registrierprozedur, die in derselben Nebelkammer ein anderes Raumgebiet als interessierenden Bereich bestimmt. Sicher ist aber auch eine dritte Registrierprozedur gegeben, wenn man wiederum in derselben Nebelkammer den Schnitt der durch b und b' festgelegten Raumgebiete auszeichnet, die in sinnvoller Weise mit $b \cap b'$ zu identifizieren ist. Ist das Raumgebiet von b' in demjenigen von b enthalten, dann ist b' feiner als b . Nimmt man nun in der Nebelkammer dasjenige Raumgebiet als interessant, das dasjenige von b aber nicht dasjenige von b' umfaßt, liegt eine Registrierprozedur vor, die mit $b \setminus b'$ abzubilden ist.

Derartige Überlegungen zusammen mit der Forderung nach Abzählbarkeit, die sich aus den Endlichkeitsüberlegungen in Abschnitt 4.3 ergeben haben, münden im dem folgenden Axiom, das dem gleichnamigen Axiom in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.2, S. 22 entspricht:

APS 2 \mathcal{R} ist abzählbare Menge von Auswahlverfahren über M_2 .

Wie bei Präparierverfahren und Registriermethoden soll auch für die Registrierprozeduren das Verhältnis zur angestrebten Beschreibung einer gerichteten Wechselwirkung diskutiert werden. Hier findet man den Punkt darin wieder, daß ganz bewußt **nicht** verlangt wird, daß \mathcal{R} Menge statistischer Auswahlverfahren ist. Das läßt sich am besten an einem Beispiel illustrieren. Als Registrierprozeduren nehme man wieder die obigen Nebelkammern, die mit b und b' bezeichnet worden waren, und man nehme an, daß das zu b gehörige Raumgebiet innerhalb der Nebelkammer das b' zugehörige Raumgebiet enthält. Somit ist b' feiner als b . Die Forderung nach reproduzierbarer Häufigkeit würde nun bedeuten, daß unabhängig davon, was außerhalb der Nebelkammer geschieht, in physikalischer Approximation immer derselbe Anteil von Nebeltropfenereignissen, die zu b gehören, auch zu b' gehört. Es ist aber gerade eine zentrale Beobachtung, daß dies nicht der Fall ist. Im Gegenteil hängt die Nebelbildung in der Kammer entscheidend davon ab, was in der Umgebung der Kammer geschieht. Es ist gerade der entscheidende experimentelle Ansatz zur Untersuchung der quantenmechanischen Phänomene, daß man bei der Registrierung Ereignisse feststellt, die in einer gewissen Verknüpfung zu dem stehen, was bei der Präparation geschieht. Durch das Fortlassen der Forderung nach reproduzierbaren Häufigkeiten in bezug auf die Registrierprozeduren alleine, ohne Beachtung der Präparierverfahren, bleibt in der Theorie genügend Raum für die Möglichkeit der Beeinflussung des Ausgangs einer Registrierung durch die Präparation. Der so zur Verfügung stehende

Raum wird im Abschnitt 5.7 und den darauffolgenden Kapiteln weiter diskutiert und mathematisch ausgefüllt werden.

Zuvor werden die grundlegenden Überlegungen für die Struktur der Menge der Registriermethoden und das Verhältnis von Registriermethoden und Registrierprozeduren zueinander mathematisch abgebildet.

Auch die Menge der Registriermethoden soll als Bildmenge physikalischer Auswahlverfahren aufgefaßt werden. Man stelle sich dafür etwa ein Geiger-Müller-Zählrohr vor. Die Funktionsweise hängt im gewissen Maße auch von der umgebenden Raumtemperatur ab, so daß man sich an dem Zählrohr auch ein Thermometer angebracht denke. Zur Registriermethode b_0 sollen Registriervorgänge gehören, bei der die Temperatur in einem gewissen Intervall I bleibt. Ein zur Registriermethode b_0 gehöriges Registrierereignis hat im Prinzip die Form: „Es wurde bezüglich eines bestimmten Bezugssystems ein Geiger-Müller-Zählrohr bestimmter Bauart in bestimmter Weise raum-zeitlich positioniert und angewendet; dabei wurde am Thermometer ein bestimmter Wert innerhalb des vorgegeben Intervalls abgelesen, und am Zählrohr sind bestimmte Veränderungen eingetreten und andere nicht.“ Nun kann man sicher statt des obigen Temperaturintervalls I auch ein Intervall I' wählen, das im obigen enthalten ist, etwa statt $20.0^\circ C \leq T \leq 20.4^\circ C$ das Intervall $20.2^\circ C \leq T \leq 20.3^\circ C$. So erhält man wiederum eine Registriermethode, die den Namen b'_0 erhalte. Offensichtlich ist b'_0 feiner als b_0 , denn alle Registrierereignisse, die zu b'_0 gehören, gehören auch zu b_0 . Die Forderung von AS 1.1 besteht nun darin, daß durch einen apparativen Aufbau, der dem obigen von b_0 und b'_0 entspricht, wobei die Temperatur aber im Intervall $I \setminus I'$ liegen soll, auch eine Registriermethode gegeben ist. Eine solche Forderung ist unmittelbar einleuchtend. Bezeichnen nun I_1 und I_2 Temperaturintervalle, dann kommt mit obigem apparativen Aufbau beiden Intervallen eine Registriermethode zu. Offensichtlich kommt dem eventuell auch leeren Durchschnitt der Temperaturintervalle mit demselben apparativen Aufbau ebenfalls eine Registriermethode zu. Das ist aber genau die Forderung von AS 1.2.

Zusammen mit der obigen Forderung nach reproduzierbaren Häufigkeiten für die Registriermethoden und der Abzählbarkeit von Bildmengen nach Abschnitt 4.3 lautet das Axiom für die Bildmenge der Registriermethoden:

APS 3 \mathcal{R}_0 ist abzählbare Menge statistischer Auswahlverfahren über M_2 .

Abmachung: Die zu \mathcal{R}_0 gehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion wird mit $\lambda_{\mathcal{R}_0}$ benannt.

Für die Abbildung $\lambda_{\mathcal{R}_0}$ gilt wie im Falle der Abbildung $\lambda_{\mathcal{Q}}$ bei den Präparierverfahren das in Abkürzung formulierte Abbildungsprinzip:

Abbildungsprinzipien Teil 6:

Das Bild der relativen Häufigkeit der Registriermethode b_{02} bezüglich der größeren Registriermethode b_{01} wird durch $\lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02})$ abgebildet.

Eine Registriermethode kann auch als triviale Registrierprozedur aufgefaßt werden, wenn man jede Registriermethode einfach um die Vorschrift erweitert, daß das Verwenden bereits die interessierende Veränderung darstellt. Damit ist in jedem Falle die Feststellung, daß die Veränderung nämlich das Verwenden auch aufgetreten ist, evident. Eine um derartige triviale Bestandteile erweiterte Registriermethode ist eine Registrierprozedur. Aus ihr kann man durch einfaches Streichen der trivialen Zusätze sofort wieder die zugehörige Registriermethode gewinnen.

Darüber hinaus wird vereinbart, daß man nur Registrierprozeduren zum Grundbereich hinzuzieht, zu denen es auch zugehörige Registriermethoden gibt. Dabei handelt es sich um eine Selbstverständlichkeit, denn jede Registrierung bedarf eines Aufbaus, der irgendwie konkret vorgegeben ist. Das ist aber gerade das, was oben als Registriermethode eingeführt wurde. Somit kann man folgende Aussagen fordern, die den gleichnamigen Aussagen aus [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.2, S. 22 entsprechen:

APS 4.1 Die Menge \mathcal{R}_0 ist Teilmenge der Menge \mathcal{R} .

APS 4.2* Zu jedem Element b aus \mathcal{R} existiert ein Element b_0 aus \mathcal{R}_0 , das b umfaßt.

Das später noch einzuführende Axiom APS 5.2 wird das obige Axiom 4.2 implizieren. Daher wurde Axiom APS 4.2 mit einem * versehen. APS 4.2 wird hier aber explizit aufgeführt, um das Verhältnis zwischen Registriermethoden und Registrierprozeduren jetzt möglichst anschaulich zu halten.

Genau wie bei den Präparierereignissen erscheint es wenig sinnvoll, mit Registrierereignissen zu arbeiten, die nicht durch eine Registrierprozedur gewonnen werden können. Daher wählt man das nachfolgende Axiom, das dem ebenfalls APS 8.2 genannten Axiom in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.4, S. 28 gleichwertig ist:

APS 8.2 $M_2 = \bigcup_{b \in \mathcal{Q}} b$

Zu Axiom APS 8.2 kann man stützend eine analoge Argumentation wie im Falle der Präparierereignisse und Axiom APS 8.1 führen. Denn, von einem beliebigen Realtext ausgehend, kann man stets durch Streichung der störenden Realtextstücke zu einem Realtext übergehen, der APS 8.2 respektiert. Erwähnenswert ist noch die folgende Aussage, die einer Anmerkung Ludwigs in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.4, S. 28 folgt:

Lemma 5.6.1 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) APS 8.2,

(ii) $M_2 = \bigcup_{b_0 \in \mathcal{R}_0} b_0$.

Beweis:

Die Implikation „(i) \Leftarrow (ii)“ folgt sofort mit APS 4.1.

Zum Beweis der anderen Richtung „(ii) \Leftarrow (i)“ betrachte man ein $x \in M_2$. Dann existiert mit APS 4.2 ein $b_0 \in \mathcal{R}_0$ mit $x \in b \subseteq b_0$. APS 1-3 garantieren, daß $\mathcal{Q}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R} \neq \emptyset$. ■

Obiges Lemma bringt die physikalisch naheliegende Aussage zum Ausdruck, daß es zu jedem Registrierereignis auch eine Registrieremethode zu seiner Herstellung geben muß.

Zum Abschluß des Abschnitts wird noch ein weiterer Begriff begründet.

Definition 5.6.2

Die Elemente der Menge $\mathcal{F} := \{(b_0, b) \in \mathcal{R}'_0 \times \mathcal{R} \mid b \subseteq b_0\}$ werden als **Effektverfahren** bezeichnet.

Mit der Abzählbarkeit von \mathcal{R} und \mathcal{R}_0 entsprechend Axiom APS 2 und 3 gilt das offensichtliche

Lemma 5.6.3 \mathcal{F} ist abzählbare Menge.

Die Interpretation von \mathcal{F} läßt sich auf der Basis der Abbildungsprinzipien für die Mengen \mathcal{R}_0 und \mathcal{R} sowie für die Bildrelation \subseteq unmittelbar erfassen. Bezeichne (b_0, b) ein Element aus \mathcal{F} . Dann ist dadurch ein mit b_0 benannter apparativer Aufbau gegeben. Die zweite Komponente b repräsentiert nun die Information, welche Veränderungen an dem apparativen Aufbau b_0 als interessant ausgezeichnet und eingetreten sein sollen. Daher repräsentiert das Effektverfahren (b_0, b) die vollständigen Informationen eines Registriervorganges im Sinne der Aufzählung vom Beginn

des Abschnitts. Man denke auch an die Erörterungen hinsichtlich innerer Terme in Abschnitt 4.4.

Nachdem nun in den Effektverfahren das Registrier-Gegenstück zu den Präparierverfahren wohldefiniert und realistisch fundiert herausgearbeitet worden ist, kann nun im nächsten Abschnitt dazu übergegangen werden, die gesamte experimentelle Situation, die sich aus Präparation und Registrierung zusammensetzt, mathematisch abzubilden.

5.7 Die Abhängigkeit der Registrierung von der Präparation

Eine zentrale Beobachtung und letztendlich auch die eigentliche Motivation überhaupt Physik zu betreiben, besteht in dem Umstand, daß man durch eindeutig festgelegte Handlungsabläufe wohldefinierte Veränderungen an Gegenständen und Sachverhalten der dem Menschen durch Sinneserfahrung zugänglichen Welt erzeugen kann. Bekanntermaßen führt derselbe vorausgehende Handlungsablauf nicht stets zur selben Konsequenz, aber dennoch kommt es in vielen Fällen dazu, daß die relative Häufigkeit der einzelnen Ergebnisse im Sinne von Abschnitt 5.3 reproduzierbar ist. Mit den in den vorhergehenden Abschnitten geprägten Begriffen sind die eindeutig festgelegten Handlungsabläufe gerade durch die Präparierverfahren gegeben, während die wohldefinierten Veränderungen gerade durch die Effektverfahren charakterisierbar sind. Daher stellt sich für den hier gewählten Zugang die Aufgabe, die reproduzierbaren Häufigkeiten, die im Zusammenhang mit verknüpften Präparier- und Effektverfahren im Rahmen einer gerichteten Wechselwirkung auftauchen, eingehender zu untersuchen und geeignet mathematisch wiederzugeben. Wie bereits zu Beginn des Kapitels erwähnt, bleibt die nun entwickelte Struktur aber noch so allgemein, daß sie sich nicht allein auf die Quantenmechanik beschränkt. Sie dient aber als fundamentale Struktur, auf deren Basis im Laufe der nächsten Kapitel die physikalische Theorie weiterentwickelt werden wird.

5.7.1 Allgemeine Überlegungen zur Kombinierbarkeit

Der erste Schritt besteht darin, den Begriff der Kombinierbarkeit eines Präparierverfahrens und einer Registriermethode in die Theorie einzuführen. Das **Problem der Kombinierbarkeit** befaßt sich damit, zu formulieren, wie Präparierverfahren und Registriermethoden raum-zeitlich zueinander orientiert sein sollen, um die für

die Theorie grundlegenden Experimente zu bilden. Es ist zum Beispiel offensichtlich, daß sich zwei Apparate räumlich nicht so in ihrer Arbeitsweise behindern dürfen, daß man gar keine Einzelexperimente gewinnen kann. Derartige Überlegungen kann man auch bezüglich des zeitlichen Verhältnisses von Präparierverfahren und Registriermethode zueinander anstellen. In solchen Fällen spräche man sinnvollerweise davon, daß die beteiligten Apparate und damit die dahinterstehenden Präparierverfahren und Registriermethoden nicht kombinierbar sind. Derartige Überlegungen legen es nahe, im Realtext als Realrelation das **gegenseitige Ausschließen** eines Präparierverfahrens mit Namen a und einer Registriermethode mit Namen b_0 dadurch zu definieren, daß man keine Einzelexperimente gewinnen kann, bei denen das Präparierereignis durch a und das Registrierereignis durch b_0 gewonnen wird. Man könnte nun einfach die Kombinierbarkeit als die logische Negation des gegenseitigen Ausschließens definieren. In die Realrelation der Kombinierbarkeit soll aber im allgemeinen noch mehr eingehen, als der bloße Umstand, daß die Verfahren in der durch sie implizit festgelegten raum-zeitlichen Orientierung zueinander auch zusammen verwendet werden können. Der Kombinierbarkeitsbegriff soll darüber hinausgehend vielmehr dazu verwandt werden, diejenigen Experimente unter den real vorkommenden weiter auszuzeichnen, die das experimentelle Ausgangsmaterial bilden, deren theoretische Beschreibung angestrebt wird. Die damit zusammenhängenden Erwägungen können aber nicht erschließend für alle Fälle durchgeführt werden, für die der Begriff der Präparier-Registrier-Struktur sinnvolle Anwendung finden soll.

Für die Quantenmechanik in der hier dargestellten Form sind die Überlegungen zur Kombinierbarkeit von besonderer Bedeutung, so daß es adäquat erscheint, sie ausführlich in einem eigenen Abschnitt zu behandeln, wie es in Abschnitt 6.1 auch geschieht. Hier sollen nur einige Eigenschaften aufgeführt werden, die dem am Ende des Kapitels zu begründenden Begriff der Präparier-Registrier-Struktur eine ausreichende Allgemeinheit sichern und die für den Fall der Quantenmechanik im bereits erwähnten Abschnitt 6.1 gesondert diskutiert werden.

In jedem Falle muß bezüglich des Realtextes eine Vorschrift formuliert sein, nach der die Kombinierbarkeit von Präparierverfahren und Registriermethoden entschieden werden kann. Man erinnere als Beispiel für eine solche Kombinierbarkeitsvorschrift die bereits einführend erwähnte Bedingung, daß sich Präparierverfahren und Registriermethode räumlich nicht behindern dürfen. Eine solche Bedingung stellt sich für den Fall der Quantenmechanik als ungeeignet heraus, um die wirklich interessierenden Experimente auszuzeichnen. Will man nun den später definierten Begriff der Präparier-Registrier-Struktur verwenden, bedarf es einerseits einer ausreichenden Reichhaltigkeit des zugrundegelegten Realtextes und andererseits einer geeignet

gewählten Kombinierbarkeitsvorschrift, so daß die beiden nachfolgend notierten Bedingungen durch das vorliegende experimentelle Material motiviert sind.

Bezeichne a ein Präparierverfahren, das nach einer im Realtext ausgezeichneten Vorschrift mit einer Registriermethode b_0 als kombinierbar erkannt wurde. Dann soll gelten:

- (i) a und b_0 schließen sich nicht gegenseitig aus, es gibt also Einzelexperimente, bei denen das Präparierereignis nach a und das Registrierereignis nach b_0 gewonnen werden kann.
- (ii) Jedes bezüglich a feinere nicht-leere Präparierverfahren ist mit jeder bezüglich b_0 feineren nicht-leeren Registriermethode kombinierbar.

Die erste Bedingung ist auch ohne Wissen um das konkrete Aussehen der Kombinierbarkeitsvorschrift naheliegend, und sie sollte bei jeder Kombinierbarkeitsbedingung erfüllt sein. Denn es scheint wenig sinnvoll, von Kombinierbarkeit zu sprechen, wenn man gar keine zugehörigen Einzelexperimente gewinnen kann.

Als Bildrelation für die Realrelation der Kombinierbarkeit wird eine Menge C im Zusammenhang mit dem folgenden Abbildungsprinzip verwendet:

Abbildungsprinzipien Teil 7:

Bezeichne $C \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{R}_0$ eine Bildrelation in dem folgenden Sinne:

ein Präparierverfahren a und eine Registrier- $\longleftrightarrow (a, b_0) \in C$
methode b_0 sind kombinierbar

Die Menge C kann auf der Basis des obigen Abbildungsprinzips als Menge der Paare aus kombinierbaren Präparierverfahren und Registriermethoden interpretiert werden. Im Sinne eines inneren Termes, wie in Abschnitt 4.4 eingeführt, ließe sich C auch als Bildmenge auffassen.

Es bedarf nun der axiomatischen Umsetzung der oben genannten Eigenschaften. Dafür wird verlangt:

APS 5A Für alle Elemente a aus \mathcal{Q} und b_0 aus \mathcal{R}_0 mit $(a, b_0) \in C$ gilt:

- (i) Die Menge $a \times b_0 \cap M$ ist nicht-leer.
- (ii) Bezeichnet a' ein Element der Menge $\mathcal{Q}(a) \setminus \{\emptyset\}$, und bezeichnet b'_0 ein Element der Menge $\mathcal{R}_0(b_0) \setminus \{\emptyset\}$, dann liegt das Paar (a', b'_0) in C .

Zur Definition von $\mathcal{Q}(a)$ und $\mathcal{R}_0(b_0)$ erinnere man dabei Definition 5.4.4.

Für eine Begründung der Bezeichnung des Axioms als APS 5A sei auf die weiter unten folgende Diskussion des Verhältnisses zu Ludwigs kanonischer Axiomatik verwiesen.

Punkt (i) von Axiom APS 5A beweist unmittelbar das nachfolgende Lemma, das im weiteren ohne expliziten Verweis verwendet wird:

Lemma 5.7.1 *Bezeichnet (a, b_0) ein Element der Menge C , dann sind sowohl a als auch b_0 nicht-leere Mengen.*

Über die in APS 5A formulierten Anforderungen hinaus, sollen noch zwei weitere Forderungen gestellt werden, die auch ohne konkrete Kombinierbarkeitsvorschrift eingängig sind. Vom vorliegenden normierten Realextext wird verlangt, daß es zu jedem Präparierverfahren auch eine kombinierbare Registriermethode gibt. Eine solche Forderung ist nur ökonomisch. Denn Präparierverfahren, die präparieren, ohne daß man die Möglichkeit hat, zugehörige Wirkungen mit kombinierbaren Registriermethoden zu registrieren, erübrigen sich. Notfalls könnte man die Forderung durch Streichen der betreffenden Präparierverfahren aus dem Realextext erfüllen. Ebenso verlangt man umgekehrt, daß es für jede Registrierprozedur eine Registriermethode und ein Präparierverfahren so gibt, daß die Registriermethode und -prozedur zusammen ein Effektverfahren bilden und daß die Registriermethode mit dem Präparierverfahren kombinierbar ist. Auch hier handelt es sich um eine natürliche Forderung, denn eine Registriermöglichkeit ohne Präparation zu ihrer Verwendung erscheint ebenfalls uninteressant. Die beiden soeben angestellten Überlegungen münden in den folgenden beiden Axiomen, die den gleichnamigen Aussagen in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.3, S. 24 folgen. Zur Definition von \mathcal{Q}' und \mathcal{R}'_0 bedenke man wiederum Definition 5.4.4.

APS 5.1.1* Zu jedem Element a aus \mathcal{Q}' existiert ein Element b_0 in \mathcal{R}_0 , so daß das Paar (a, b_0) in C liegt.

APS 5.2 Zu jedem Element b aus \mathcal{R}' existieren Elemente a aus \mathcal{Q} und b_0 aus \mathcal{R}_0 in der Form, daß erstens das Paar (a, b_0) zu C gehört, daß zweitens die Menge b in der Menge b_0 enthalten ist und daß drittens die Menge $a \times b \cap M$ nicht-leer ist.

Wie bereits bei der Einführung von APS 4.2 erwähnt wurde, impliziert APS 5.2 das Axiom APS 4.2. Aus demselben Grunde wie bei APS 4.2 wurde auch APS 5.1.1 mit einem * versehen, denn APS 5.1.1 wird durch das Axiom 5.1.3 eingeschlossen, das erst im Abschnitt 6.1 erläutert wird. APS 5.1.1 wird hier eingeführt, da es ein

wichtiger Baustein zur Begründung des Begriffs der Präparier-Registrier-Struktur in Abschnitt 5.8 darstellt.

Weil sich die zur Motivation der Axiome APS 5.1.1 und APS 5.2 angestellten Überlegungen unabhängig von der konkreten Formulierung der Kombinierbarkeitsbedingung motivieren lassen, sollen die Axiome APS 5.1.1 und APS 5.2 insbesondere auch für die Quantenmechanik gefordert werden.

Die Auszeichnung der Menge C als Teilmenge von $\mathcal{Q} \times \mathcal{R}_0$ und APS 5.1.1 liefern sofort:

Lemma 5.7.2 *C ist eine abzählbare Menge.*

Bevor mit dem Aufbau der Theorie weiter fortgefahren wird, soll eine Bemerkung zur typischen Vorgehensweise von Ludwig in Relation zu dem hier vorgeschlagenen Weg gemacht werden. Anstatt der Forderungen, wie sie oben formuliert wurden und wie sie für den Fall der Quantenmechanik später noch physikalisch erklärt werden sollen, geht Ludwig etwas anders vor. Er definiert etwa mit D 4.3.1 in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.3, S. 24 die Kombinierbarkeit in der folgenden Weise:

$$(a, b_0) \in C :\iff \forall a' \in \mathcal{Q}(a) \setminus \{\emptyset\} \forall b'_0 \in \mathcal{R}_0(b_0) \setminus \{\emptyset\} : a' \times b'_0 \cap M \neq \emptyset. \quad (5.4)$$

Der Vorgehensweise soll hier nicht gefolgt werden, da die Rückrichtung in obiger Definition in der Allgemeinheit nicht gut einzusehen ist. Zudem erweist sie sich für die Theorie der Quantenmechanik als nicht notwendig. Stattdessen werden in Kapitel 6 die obigen Forderungen APS 5A und noch weitere motiviert, die sich für den weiteren Fortgang der hier präsentierten Axiomatik als ausreichend herausstellen. Die in APS 5A formulierten Forderungen kommen also bei Ludwig nicht direkt vor, sondern nur indirekt als offensichtliche Folgerungen der obigen Definition. Daher wurde der Name APS 5A gewählt, wobei APS 5 andeuten soll, daß es sich wie im Falle der Axiome APS 5.1.1 und APS 5.2 um Aussagen im Zusammenhang mit der Kombinierbarkeit handelt. Der Zusatz „A“ soll für „Alternativ“ stehen. Man benötigt allerdings die obige Definition, um aus von Ludwig verwandten Konvexitätsaxiomen die in Abschnitt 6.2 motivierten Konvexitätsaxiome AR 1A, AP 1A abzuleiten. Die Diskussion der so nur angedeuteten Problematik wird in Abschnitt 6.2 und Anhang B erfolgen. Nach den kurzen Erläuterungen zum Verhältnis zur kanonischen Ludwigschen Axiomatik soll nun die Theorie weiterentwickelt werden.

5.7.2 Ja-Nein-Experimente mit reproduzierbaren Häufigkeiten

Ausgehend vom Begriff der Kombinierbarkeit kann ein weiterer Begriff definiert werden.

Definition 5.7.3

Ein Element $(a, (b_0, b))$ aus der Menge $\mathcal{Q}' \times \mathcal{F}$ heißt **Ja-Nein-Experiment**, wenn a und b_0 kombinierbar sind. Die Menge der Ja-Nein-Experimente wird mit \mathcal{C} bezeichnet, das heißt, es gilt:

$$\mathcal{C} := \{(a, (b_0, b)) \in \mathcal{Q}' \times \mathcal{F} \mid (a, b_0) \in C\}.$$

Damit wird in dem hier dargelegten Zugang dem Begriff des Ja-Nein-Experiments eine vermittels der Abbildungsprinzipien realistische und eindeutige Bedeutung zugeschrieben. Denn unter einem Ja-Nein-Experiment wird lediglich ein Paar aus einem Präparierverfahren und einem Effektverfahren verstanden, bei dem Präparierverfahren und Registriermethode kombinierbar sein müssen. Da aber \mathcal{Q} , \mathcal{R}_0 , \mathcal{R} und C allesamt zu den Bildmengen oder -relationen gehören, ist eine eindeutige Interpretation gegeben. Anschaulich steht hinter einem Ja-Nein-Experiment genau die interessierende experimentelle Situation, in der ein Präpariervorgang, repräsentiert durch ein Präparierverfahren a , und ein Registriervorgang, repräsentiert durch ein Effektverfahren $f = (b_0, b)$, kombiniert werden. Es ist klar, daß auch für \mathcal{C} gilt:

Lemma 5.7.4 *\mathcal{C} ist abzählbare Menge.*

Doch es interessieren nicht einfach nur für Paare von Präparier- und Effektverfahren, sondern zwischen den zugehörigen makroskopischen Gegenständen soll eine Wechselwirkung gerichtet von der Präparation zur Registrierung übergehen, die sich in der Reproduzierbarkeit der im folgenden erläuterten Häufigkeiten äußert. Man betrachtet also nur solche Ja-Nein-Experimente, denen eine reproduzierbare Häufigkeit zukommt. Das bedeutet also eine Einschränkung des Grundbereichs der physikalischen Theorie, in dem mit Ja-Nein-Experimenten genauer Ja-Nein-Experimente mit reproduzierbaren Häufigkeiten gemeint sind. Beispiele dafür, daß der anvisierte Grundbereich auch existiert, wurden bereits mehrfach erwähnt. Man denke etwa an die Uranprobe und die Nebelkammer oder das Zählrohr, den Beschleunigerring mit Target und die Detektorbatterie. Dabei handelt es sich bekanntermaßen nur um Vertreter einer unübersehbaren Fülle von Experimenten.

Die oben gewählte Formulierung „Ja-Nein-Experimente, denen eine reproduzierbare Häufigkeit zukommt“ muß auf dem bisherigen Niveau als nicht hinreichend geklärt

gelten, da der Begriff der Reproduzierbarkeit in Abschnitt 5.3 im Kontext von Mengen von Auswahlverfahren eingeführt wurde. Bei der Menge \mathcal{C} handelt es sich aber nicht um eine solche Menge von Auswahlverfahren. Der Begriff der Reproduzierbarkeit wurde oben lediglich verwendet, um in gewisser anschaulicher Form zum Ausdruck zu bringen, in welche Richtung die physikalische Theorie weiterentwickelt werden soll. Es bedarf also einer Konkretisierung.

Zur Erläuterung bezeichne $(a, (b_0, b))$ ein Ja-Nein-Experiment. Seien zudem N Einzelerperimente so ausgewählt, daß die zugehörigen Präparierereignisse zum Präparierverfahren a und die zugehörigen Registrierereignisse zur Registrieremethode b_0 gehören. Man suche nun unter den N Registrierereignissen diejenigen N_1 Stück heraus, die zusätzlich zur Registrieremethode b_0 auch noch zur Registrierprozedur b gehören, also diejenigen, die nicht nur mittels der Apparatur, für die b_0 steht, gewonnen wurden, sondern auch noch die durch b repräsentierte Veränderung am Apparat b_0 aufweisen. Dann erhält man eine relative Häufigkeit $h_{(a, (b_0, b))} = \frac{N_1}{N}$ für das Auftreten der Veränderung b am Apparat b_0 , wenn man mittels a präpariert hat. Um nun im Zusammenhang mit den relativen Häufigkeiten des Typs $h_{(a, (b_0, b))}$ von Reproduzierbarkeit im Sinne von Abschnitt 5.3 sprechen zu können, bedarf es der Verknüpfung der eben erläuterten experimentellen Situation mit einer geeigneten Menge von Auswahlverfahren. Dafür liegt es nahe, die folgende Menge zu definieren:

Definition 5.7.5 $\Theta := \{a \times b \cap M \mid \exists b_0 \in \mathcal{R}_0 : (a, (b_0, b)) \in \mathcal{C}\}$

Bevor die Menge θ physikalisch interpretiert wird, soll vorher das folgende kleine Lemma erwähnt werden, das aus APS 2 und APS 5.2 folgt:

Lemma 5.7.6 *Die Menge $\Theta \setminus \{\emptyset\}$ ist eine nicht-leere Teilmenge $\mathcal{P}(M)$.*

Zur Veranschaulichung betrachte man zunächst allgemein eine Menge der Form $a \times b \cap M$ mit $a \in \mathcal{Q}$ und $b \in \mathcal{R}$. Die eventuell leere Menge umfaßt alle diejenigen Einzelerperimente, und damit Paare von zusammengehörenden Präparier- und Registrierereignissen, bei denen das Präparierereignis entsprechend dem Präparierverfahren a und das Registrierereignis entsprechend der Registrierprozedur b gewonnen wurde. Die Zugehörigkeit der Menge $a \times b \cap M$ zur Menge Θ bedeutet im weiteren, daß es ein Element b_0 in \mathcal{R}'_0 so gibt, daß das Paar $(a, (b_0, b))$ in der Menge der Ja-Nein-Experimente liegt. Dabei umfaßt die Menge $a \times b \cap M$ alle Einzelerperimente, die im Rahmen der aus a und b_0 aufgebauten experimentellen Situation die

durch b bestimmte Veränderung an b_0 aufweisen. Der Term $a \times b \cap M$ stellt somit gewissermaßen den „Ja - Anteil“ des Ja-Nein-Experiments $(a, (b_0, b))$ dar.

Wegen Lemma 5.7.6 und Satz 5.4.7 ist die von Θ erzeugte Menge von Auswahlverfahren über M wohldefiniert. Vom Standpunkt der physikalischen Theorie aus kann man ohne weiteres von einer Bildmenge zu einer größeren Bildmenge übergehen. Also kann man von Θ zur von ihr erzeugten Menge von Auswahlverfahren übergehen.

Definition 5.7.7 Die von Θ erzeugte Menge von Auswahlverfahren auf M erhält den Namen \mathcal{S} . Das heißt mit dem Symbol τ aus Definition 5.4.7: $\mathcal{S} := \tau(\Theta)$.

Mit \mathcal{S} liegt eine Menge von Auswahlverfahren von Einzelexperimenten vor, die nach der Übereinkunft von Abschnitt 5.2 als zusammengesetzte Prozesse von Präparier- und Registrierereignissen aufzufassen sind.

Die im Zusammenhang mit Θ erläuterte experimentelle Situation findet man nun in \mathcal{S} in der folgenden Form wieder. Betrachtet man wieder das obige Ja-Nein-Experiment $(a, (b_0, b))$, dann liegen offensichtlich sowohl das Element $a \times b_0 \cap M$ als auch das Element $a \times b \cap M$ in der Teilmenge Θ von \mathcal{S} . Außerdem ist offensichtlich $a \times b \cap M$ feiner als $a \times b_0 \cap M$, da es sich bei (b_0, b) um ein Effektverfahren handelt. Also findet sich die oben diskutierte relative Häufigkeit $h_{(a, (b_0, b))}$ als diejenige relative Häufigkeit wieder, die in Abschnitt 5.3 zwischen einem gröberen und einem feineren Verfahren betrachtet wurde. Daher kann die eingangs verwandte Formulierung des „Ja-Nein-Experiments, dem eine reproduzierbare Häufigkeit zukommt“ im Sinne von Abschnitt 5.3 verstanden werden. Im weiteren kann man auch in sinnvoller Weise davon sprechen, daß der Grundbereich der physikalischen Theorie auf diejenigen Ja-Nein-Experimenten eingeschränkt wird, die auf reproduzierbare Häufigkeiten führen. Auf Eigenschaften der zugehörigen mathematischen Theorie, die im Rahmen von Abschnitt 5.3 mit reproduzierbaren Häufigkeiten assoziiert werden, wird im Anschluß an das nächste Axiom und seine Motivation eingegangen.

In der Struktur der physikalischen Theorie spiegelt sich die Einschränkung auf Ja-Nein-Experimente mit reproduzierbaren Häufigkeiten zunächst darin wider, daß eine neue Bildrelation $\bar{\mu}$ als Bild der relativen Häufigkeiten gemäß dem nun folgenden Abbildungsprinzip ausgezeichnet wird. Obwohl derartige Eigenschaften erst durch das weiter unten formulierte Axiom APS 6A gesichert werden, sollen dabei der Term $\bar{\mu}$ schon in Form einer Funktion $\bar{\mu} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ verwendet werden, um die Notation zu vereinfachen. Korrekterweise müßte man $\bar{\mu}$ im Sinne des Programms aus Kapitel 4 zunächst als Bildrelation formal auszeichnen, ohne weitergehende Eigenschaften wie die Funktionseigenschaft zu nutzen.

Abbildungsprinzipien Teil 8:

Das Bild der relativen Häufigkeit bezüglich des Ja-Nein-Experiments $(a, (b_0, b))$ wird durch $\bar{\mu}(a, (b_0, b))$ abgebildet.

In Entsprechung von Teil 3 und von Teil 6 der Abbildungsprinzipien verstehe man auch obigen Teil 8 als Abkürzung im Sinne von Abschnitt 5.3.

Im Zusammenhang mit den reproduzierbaren Häufigkeiten gibt es nun eine Reihe von Strukturen, die in der mathematischen Theorie zu repräsentieren sind. Dazu wird zunächst das Axiom notiert, um dann Motivationen folgen zu lassen.

APS 6A Es existiert eine Abbildung $\bar{\mu} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ mit den Eigenschaften:

- (i) Für ein Element a aus \mathcal{Q}' , für eine disjunkte Zerlegung $(a_i)_{i=1}^n$ von a in \mathcal{Q}' und für ein Element f in \mathcal{F} gilt

$$\bar{\mu}(a, f) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \bar{\mu}(a_i, f),$$

wenn das Paar (a, f) zur Menge \mathcal{C} gehört.

- (ii) Bezeichnet b ein Element aus \mathcal{R} , und sind b_{01}, b_{02} zwei Elemente aus \mathcal{R}'_0 , die der Mengeneinklusionskette $b \subseteq b_{02} \subseteq b_{01}$ genügen, dann gilt für alle Elemente a aus \mathcal{Q}' die Identität

$$\bar{\mu}(a, (b_{01}, b)) = \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}) \bar{\mu}(a, (b_{02}, b)),$$

wenn das Paar $(a, (b_{01}, b))$ zur Menge \mathcal{C} gehört.

- (iii) Für ein Paar (a, b_0) aus \mathcal{C} und für eine disjunkte Zerlegung $(b_i)_{i=1}^n$ von b_0 in \mathcal{R} gilt:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\mu}(a, (b_0, b_i)) = 1.$$

- (iv) Sei $(a, (b_0, b))$ ein Element der Menge \mathcal{C} . Dann gilt die Identität $\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = 0$ genau dann, wenn die Menge $a \times b \cap M$ leer ist.

Bemerkung: Wie bereits im Axiom wird auch in Zukunft vereinfachend $\bar{\mu}(a, (b_0, b))$ der korrekten Formulierung $\bar{\mu}((a, (b_0, b)))$ vorgezogen. Die Erläuterung des Zusatzes „A“ findet sich hinter Satz 5.7.12.

Bevor APS 6A motiviert wird, soll die Aussage in APS 6A (i) ergänzt werden um eine Aussage, die Th. 4.5.3. (iv) in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.5 entspricht:

Lemma 5.7.8 *Für ein Element a aus \mathcal{Q}' und für eine disjunkte Zerlegung $(a_i)_{i=1}^n$ von a in \mathcal{Q}' gilt $0 < \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \leq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Zudem gilt die Identität $\sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) = 1$.*

Beweis:

Einerseits handelt es sich bei $\lambda_{\mathcal{Q}}$ um eine Abbildung, die nach APS 1 eine Abbildung nach $[0, 1]$ ist. Andererseits gilt $a_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß mit AS 2.3 auch die Ungleichungskette $0 < \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \leq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ folgt. Die Identität $\sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) = 1$ erhält man sofort mit Lemma 5.4.5 (i) und (ii). ■

Auf der Basis von Teil 8 der Abbildungsprinzipien sollen nun die in Axiom APS 6A gemachten Forderungen motiviert werden:

- zu APS 6A (i): Die Aussage beruht im Kern auf der intendierten Gerichtetheit der Wechselwirkung. Dazu erinnere man die Diskussion von Abschnitt 5.6. Als entscheidendes Kriterium für die Gerichtetheit der Wechselwirkung von der Präparation hin zur Registrierung wurde dort angeführt, daß die Präparierverfahren unabhängig von den Registriermethoden sind. Man betrachte nun ein Ja-Nein-Experiment $(a, (b_0, b))$, und man wähle N Einzelexperimente derart, daß die zugehörigen Präparier- und Registrierereignisse zu a und b_0 gehören. Das heißt, die Bilder der N Einzelexperimente gehören zu $a \times b_0 \cap M$. Von den N Einzelexperimenten bezeichne man die Anzahl derjenigen, bei denen das zugehörige Registrierereignis auch die durch b charakterisierte Veränderung aufweist, mit N_b . Die durch $\bar{\mu}(a, (b_0, b))$ abzubildende relative Häufigkeit ist folglich durch $\frac{N_b}{N}$ gegeben. Man betrachte nun im weiteren ein bezüglich a feineres Präparierverfahren a_1 , dann ist auch $a \setminus a_1$ Element in \mathcal{Q} , da \mathcal{Q} eine Menge von Auswahlverfahren ist. Außerdem folgt mit Axiom APS 5A, daß sowohl $(a_1, (b_0, b))$ als auch $(a \setminus a_1, (b_0, b))$ Ja-Nein-Experimente bezeichnen. Man suche nun unter den N Einzelexperimenten diejenigen N_{a_1} heraus, deren zugehöriges Präparierereignis auch a_1 genügt. Mit $N_{a \setminus a_1}$ benenne man die Anzahl derjenigen unter den N anfänglichen Einzelexperimente, die nicht zusätzlich zu a auch a_1 genügen. Dann gilt offensichtlich: $N = N_{a_1} + N_{a \setminus a_1}$. Da

aber gerichtete Wechselwirkungen betrachtet werden sollen, sind die Präparierverfahren unabhängig von den verwandten Registriermethoden. Somit ist durch $\frac{N_{a_1}}{N}$ genau die relative Häufigkeit gegeben, die durch $\lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_1)$ abgebildet werden soll. Entsprechendes gilt für $a \setminus a_1$ und die relative Häufigkeit $\frac{N_{a \setminus a_1}}{N}$. Man benenne ferner mit N'_b die Anzahl von den N_{a_1} Einzelexperimenten, bei dem das zugehörige Registrierereignis b genügt. Und analog benenne man mit N''_b diejenige Anzahl von den $N_{a \setminus a_1}$ Einzelexperimenten, bei dem das zugehörige Registrierereignis b genügt. Dann ist durch $\frac{N'_b}{N_{a_1}}$ die relative Häufigkeit gegeben, die durch $\bar{\mu}(a_1, (b_0, b))$ abzubilden ist. Dagegen stellt $\frac{N''_b}{N_{a \setminus a_1}}$ diejenige relative Häufigkeit dar, die durch $\bar{\mu}(a \setminus a_1, (b_0, b))$ abzubilden ist. Natürlich gilt $N'_b + N''_b = N_b$ wegen $N = N_{a_1} + N_{a \setminus a_1}$. Mit den so gewählten Bezeichnungen gilt aber sofort:

$$\frac{N_{a_1}}{N} \frac{N'_b}{N_{a_1}} + \frac{N_{a \setminus a_1}}{N} \frac{N''_b}{N_{a \setminus a_1}} = \frac{N_b}{N}.$$

Das gewonnene Ergebnis, das entscheidend auf der Gerichtetheit der Wechselwirkung beruht, wird durch APS 6A (i) wiedergegeben. Dabei stellt die Erweiterung auf endliche Familien kein Problem dar. Formal könnte man sich auch mit der Forderung für zweielementige Familien begnügen und dann durch vollständige Induktion auf endliche Familien schließen. Das soll der Übersicht halber aber nicht gemacht werden.

- zu APS 6A (ii): Wähle ein Element b aus \mathcal{R} , ein Element a aus \mathcal{Q}' und zwei Elemente b_{01}, b_{02} aus \mathcal{R}'_0 mit den Eigenschaften

$$b \subseteq b_{02} \subseteq b_{01} \text{ und } a \in \mathcal{Q}' \text{ und } (a, (b_{01}, b)) \in \mathcal{C}.$$

Dann gehört mit Axiom APS 5A (ii) auch $(a, (b_{02}, b))$ zur Menge \mathcal{C} . Man betrachte nun N Einzelexperimente des Ja-Nein-Experiments $a \times b_{01} \cap M$, und man bezeichne mit N_b die Anzahl derjenigen Einzelexperimente unter den N Einzelexperimenten, deren zugehöriges Registrierereignis auch zu b gehört. Dann ist bekanntermaßen durch $\frac{N_b}{N}$ die relative Häufigkeit gegeben, die durch $\bar{\mu}(a, (b_{01}, b))$ abgebildet wird. Wählt man aber andererseits von den obigen N Einzelexperimenten diejenigen N_2 Stück heraus, bei denen das zugehörige Registrierereignis auch b_{02} genügt, bekommt man eine relative Häufigkeit $\frac{N_2}{N}$, die gerade durch $\lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02})$ abzubilden ist, da die Registriermethode unabhängig vom Präparierverfahren ist, wie bereits in Abschnitt 5.6 erörtert wurde. Wegen der Mengeninklusion $b \subseteq b_{02} \subseteq b_{01}$ finden sich unter den N_2 Einzel-

experimenten auch die N_b Einzelexperimente, bei denen das Registrierereignis zu b gehört. Damit erhält man sofort:

$$\frac{N_2}{N} \frac{N_b}{N_2} = \frac{N_b}{N}.$$

Dabei handelt es sich genau um die Aussage, die durch APS 6A (ii) zum Ausdruck gebracht wird.

- zu APS 6A (iii): Die Forderung liegt unmittelbar nahe. Sind N Einzelexperimente gemäß $a \times b_0 \cap M$ gewählt, und bezeichnet man mit N_i die Anzahl derjenigen der N Einzelexperimente, die auch b_i genügen, dann gilt $N = \sum_{i=1}^n N_i$.

Also erhält man $\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{N} = 1$.

- zu APS 6A (iv): Die hier geforderte Aussage bringt lediglich zum Ausdruck, daß die durch $\bar{\mu}(a, (b_0, b))$ abgebildete relative Häufigkeit bezüglich eines Ja-Nein-Experiments $(a, (b_0, b))$ genau dann 0 ist, wenn es keine Einzelexperimente gibt, die vermittels $a \times b_0 \cap M$ gewonnen wurden und die die Veränderung b an b_0 aufweisen. Eine solche Forderung scheint unmittelbar eingängig.

Nachdem nun die Forderungen in Axiom 6A auf natürliche Forderungen an die interessierenden Experimente zurückgeführt worden sind, sollen einige Konsequenzen aus den Forderungen gezogen werden. Zunächst ergibt sich entsprechend [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.5, Th. 4.5.3. (ii) und (iii):

Definition und Lemma 5.7.9 *Für jedes Element b_0 aus \mathcal{R}_0 wird definiert*

$$\mathbf{1}_{b_0} := (b_0, b_0) \quad \text{und} \quad \mathbf{0}_{b_0} := (b_0, \emptyset).$$

Damit ergeben sich die folgenden Aussagen:

- (i) *Für jedes Element b_0 in \mathcal{R}'_0 liegen $\mathbf{0}_{b_0}$ und $\mathbf{1}_{b_0}$ in \mathcal{F} .*
- (ii) *Für jedes Element a in \mathcal{Q}' existiert ein Element f_0^a aus \mathcal{F} mit $\bar{\mu}(a, f_0^a) = 0$.*
- (iii) *Für alle Elemente a aus \mathcal{Q}' existiert ein Element f_1^a in \mathcal{F} mit $\bar{\mu}(a, f_1^a) = 1$.*

Beweis:

Punkt (i) folgt mit APS 4.1 und der Definition von \mathcal{F} . Bei (ii) ist zu bedenken, daß es mit APS 5.1.1 zu jedem $a \in \mathcal{Q}'$ ein kombinierbares $b_0 \in \mathcal{R}'_0$ gibt. Die Aussage folgt dann für $f_0^a := \mathbf{0}_{b_0}$ aus APS 6A (iv). Für (iii) nutzt man wieder APS 5.1.1 und schließt für das damit gewonnene b_0 aus APS 6A (iii) und dem vorigen Punkt (ii): $1 = \bar{\mu}(a, \mathbf{0}_{b_0}) + \bar{\mu}(a, \mathbf{1}_{b_0}) = \bar{\mu}(a, \mathbf{1}_{b_0})$. Die Aussage folgt also für: $f_1^a := \mathbf{1}_{b_0}$. ■

Die Interpretation obiger Aussagen liegt auf der Hand. Zu jedem nicht-leeren Präparierverfahren gibt es eine Registrierapparatur und eine an ihr festgelegte Veränderung, die bei keinem Einzelexperiment vorkommt. Dafür denke man etwa an eine Lichtquelle als Präparierapparat und eine vollständig abgedeckte Photoplatte als Registrierapparat. Wenn man als Veränderung die „Schwärzung der Photoplatte“ definiert, wird eine derartige Veränderung nicht eintreten. Also hat man ein Effektverfahren, das niemals eintritt. Es gibt aber auch zu jedem Präparierverfahren eine Registrierapparatur mit einer Veränderung, die bei jedem Einzelexperiment eintritt. Dafür denke man einfach an dieselbe Argumentation, die dazu geführt hat, Registriermethoden auch als Registrierprozeduren aufzufassen. Zu einem Präparierapparat stelle man einfach ein Registriergerät, an dem als interessante Veränderung lediglich das Anwenden festgelegt wird. Eine solche „Anzeige“ tritt jedesmal ein.

Wenn man die Definition der Menge der Ja-Nein-Experimente betrachtet, stellt man fest, daß dort auch Elemente der Form $(a, (b_{01}, b_{02}))$ mit $b_{01}, b_{02} \in \mathcal{R}_0$ und $b_{01} \supseteq b_{02}$ enthalten sind. Im Abschnitt 5.6 wurde aber festgehalten, daß die relative Häufigkeit zwischen einer feineren und einer gröberen Registriermethode nicht von den Präparierverfahren abhängen darf. Der folgende Satz zeigt, daß sich ein solcher Sachverhalt auf konsistente Weise im mathematischen Bild wiederfindet. Die Abbildung $\lambda_{\mathcal{R}_0}$ ist vollständig durch $\bar{\mu}$ festgelegt, denn es gilt in Isolierung und Ausführung eines Punktes aus Th. 4.5.4. in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.5, S. 34ff.:

Satz 5.7.10 *Für alle Elemente b_{01}, b_{02} aus \mathcal{R}'_0 mit $b_{01} \subseteq b_{02}$ existiert ein Element a in \mathcal{Q}' , so daß gilt:*

$$\lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}) = \bar{\mu}(a, (b_{01}, b_{02})).$$

Beweis:

Seien $b_{01}, b_{02} \in \mathcal{R}'_0$ mit $b_{01} \supseteq b_{02}$. Dann existiert mit APS 4.1, APS 5A (ii) und APS 5.2 ein $a \in \mathcal{Q}'$, so daß $(a, b_{01}) \in C$ gilt. Mit APS 5A (ii) folgt daraus

insbesondere $(a, b_{02}) \in C$. Mit derselben Überlegung wie im Beweis zu Lemma 5.7.9 (iii) folgt $\bar{\mu}(a, (b_{02}, b_{02})) = 1$. Damit gilt nun mit APS 6A (ii):

$$\bar{\mu}(a, (b_{01}, b_{02})) = \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}) \bar{\mu}(a, (b_{02}, b_{02})) = \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}).$$

■

5.7.3 Das Verhältnis der Abbildung $\bar{\mu}$ zum Wahrscheinlichkeitsbegriff aus Abschnitt 5.3

Im Vorfeld der Formulierung des Axioms APS 6A wurde erörtert, wie die relativen Häufigkeiten von Ja-Nein-Experimenten im Zusammenhang mit dem Begriff der Reproduzierbarkeit von relativen Häufigkeiten im Sinne des Abschnitts 5.3 zu verstehen sind. Da aber auch der Begriff der Wahrscheinlichkeit durchgängig im Sinne des Abschnitts 5.3 verwendet werden soll, darf bei $\bar{\mu}(a, (b_0, b))$ außer in den durch den vorigen Satz benannten Fällen noch nicht von Wahrscheinlichkeiten gesprochen werden. Es gilt aber der folgende Satz, dessen langer, aber nicht schwerer Beweis hier nicht vorgeführt werden soll. Dazu sei auf [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.5, S. 28ff. verwiesen.

Satz 5.7.11 *Auf $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \{(c, c') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid c \supseteq c', c \neq \emptyset\}$ existiert genau eine Abbildung $\lambda_{\mathcal{S}} : \mathcal{T}_{\mathcal{S}} \rightarrow [0, 1]$, durch die \mathcal{S} zu einer Menge statistischer Auswahlverfahren wird und die für jedes Element $(a, (b_0, b))$ aus \mathcal{C} der folgenden Identität genügt:*

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times b \cap M) = \bar{\mu}(a, (b_0, b)). \quad (5.5)$$

Die Werte der Abbildung $\lambda_{\mathcal{S}}$ sind vollständig durch $\bar{\mu}$ und $\lambda_{\mathcal{Q}}$ festgelegt. Für das Verhältnis von $\lambda_{\mathcal{Q}}$, $\lambda_{\mathcal{R}_0}$ und $\lambda_{\mathcal{S}}$ ergeben sich dabei die folgenden Aussagen:

(i) *Für alle Elemente a_1, a_2 aus \mathcal{Q} und für alle Elemente b_0 aus \mathcal{R}_0 mit den Eigenschaften $(a_1, b_0) \in C$ und $a_1 \supseteq a_2$ gilt:*

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a_1 \times b_0 \cap M, a_2 \times b_0 \cap M) = \lambda_{\mathcal{Q}}(a_1, a_2).$$

(ii) *Für alle Elemente a aus \mathcal{Q}' und für alle Elemente b_{01}, b_{02} in \mathcal{R}_0 mit den Eigenschaften $(a, b_{01}) \in C$ und $b_{01} \supseteq b_{02}$ gilt:*

$$\lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_{01} \cap M, a \times b_{02} \cap M) = \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}).$$

Damit ist die Abbildung $\bar{\mu}$ auf das hier gewählte Wahrscheinlichkeitskonzept aus Abschnitt 5.3 zurückgeführt worden. Das berechtigt, auch bei $\bar{\mu}(a, (b_0, b))$ von Wahrscheinlichkeiten zu sprechen.

Anschaulich gibt die Abbildung $\lambda_S(c, c')$ die relativen Häufigkeiten wieder, die man beobachtet, wenn man unter den nach c präparierten Einzelexperimenten diejenigen herausgreift, die auch zu c gehören. Die Abbildung λ_S stellt also die Fortsetzung der Abbildung $\bar{\mu}$, die den physikalisch besonders interessanten Fällen ihre Wahrscheinlichkeit zuordnet, auf ganz \mathcal{T}_S dar. Der Umstand, daß λ_Q und $\bar{\mu}$ die Abbildung λ_S bereits vollständig festlegen, rechtfertigt es, daß man sich im Experiment und auch in der weiteren Entwicklung der Theorie nur noch mit $\bar{\mu}$ beschäftigt. Auf eine ausführliche Diskussion der Funktion λ_Q soll hier verzichtet werden, da es immer das Bestreben der Experimentalphysik sein muß, derartige Anteile an einem Experiment so klein wie möglich zu machen. Deshalb soll im weiteren davon ausgegangen werden, daß die Funktion λ_Q durch das Experiment als bekannt gegeben ist. Somit kann man sich in den folgenden Überlegungen ganz auf die Funktion $\bar{\mu}$ konzentrieren. Der physikalische Hintergrund, der sich in den beiden Aussagen (i) und (ii) wiederfindet, entspricht demjenigen, der auch die Punkte (i) und (ii) des Axiom APS 6A nahegelegt hat. Die erste Aussage bringt genau das zum Ausdruck, was bisher nur durch Worte umschrieben als Gerichtetheit der Wechselwirkung von der Präparation zur Registrierung bezeichnet wurde. Der zweite Punkt bringt die in Abschnitt 5.6 formulierte und auch für APS 6A (ii) verwandte Unabhängigkeit der Registriermethoden von den Präparierverfahren zum Ausdruck.

Der Satz 5.7.11 zieht in natürlicher Weise die Frage nach einer möglichen Umkehrung nach sich, die man als Th. 4.5.3. (iv)-(vii) in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.5, S. 32ff. findet.

Satz 5.7.12 *Seien M_1, M_2 zwei Mengen. Seien im weiteren Mengen $M \subseteq M_1 \times M_2$, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(M_1)$, $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{P}(M_2)$ und $C \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{R}_0$ mit den Eigenschaften APS 1, 2, 3, 5.2 und APS 5A gegeben. Handelt es sich darüber hinaus bei der in Definition 5.7.7 definierten Menge \mathcal{S} um eine Menge statistischer Auswahlverfahren auf M , so daß die zu \mathcal{S} gehörende Wahrscheinlichkeitsfunktion λ_S die Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 5.7.11 erfüllt, dann ist durch*

$$\bar{\mu} : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 1], \quad (a, (b, b_0)) \longmapsto \bar{\mu}(a, (b, b_0)) := \lambda_S(a \times b_0 \cap M, a \times b \cap M)$$

eine Abbildung definiert, die dem Axiom APS 6A genügt. Dabei gewinne man die Menge \mathcal{C} im Sinne der Definition 5.7.3 aus den Mengen $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0$ und C .

Bemerkung: Die Wohldefiniertheit von \mathcal{S} unter besagten Voraussetzungen ist Inhalt von Lemma 5.7.6 und Konsequenz von APS 2 und APS 5.2. Das Axiom APS 4.2 braucht nicht explizit gefordert zu werden, denn es wird bekanntermaßen durch APS 5.2 garantiert. APS 4.1 und 5.1.1 werden für die obige Behauptung nicht benötigt.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit von $\bar{\mu}$ ergibt sich aus folgenden Überlegungen. Wähle ein Element $(a, (b_0, b))$ aus \mathcal{C} , dann gehören offensichtlich sowohl $a \times b_0 \cap M$ als auch $a \times b \cap M$ zu $\Theta \subseteq \mathcal{S}$, wobei Θ entsprechend Definition 5.7.5 gewonnen wird. Außerdem ist $a \times b_0 \cap M$ nicht-leer, da (a, b_0) zur Menge \mathcal{C} gehört. Schließlich garantiert die Zugehörigkeit von (b_0, b) zu \mathcal{F} , daß auch $a \times b_0 \cap M$ die Menge $a \times b \cap M$ umfaßt. Damit ergibt sich die Wohldefiniertheit des Ausdrucks $\lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times b \cap M)$.

Die weiteren Eigenschaften ergeben sich folgendermaßen:

zu APS 6A (i): Sei $a \in \mathcal{Q}'$, und sei $(a_i)_{i=1}^n$ eine disjunkte Zerlegung von a in \mathcal{Q}' . Ferner bezeichne $f = (b_0, b)$ ein Element aus \mathcal{F} mit $(a, f) \in \mathcal{C}$. Dann folgt mit (i) aus Satz 5.7.11 sowie dem Umstand, daß $\lambda_{\mathcal{S}}$ der Eigenschaft AS 2.2 aus Definition 5.3.2 genügt, und mit Lemma 5.4.5 (ii):

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \bar{\mu}(a_i, f) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \lambda_{\mathcal{S}}(a_i \times b_0 \cap M, a_i \times b \cap M) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a_i \times b_0 \cap M) \lambda_{\mathcal{S}}(a_i \times b_0 \cap M, a_i \times b \cap M) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a_i \times b \cap M) \\
&= \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, \bigcup_{i=1}^n (a_i \times b \cap M)) \\
&= \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times b \cap M) = \bar{\mu}(a, (b_0, b)) = \bar{\mu}(a, f).
\end{aligned}$$

zu APS 6A (ii): Seien $b \in \mathcal{R}$, und seien $b_{01}, b_{02} \in \mathcal{R}'_0$, so daß $b \subseteq b_{02} \subseteq b_{01}$ gilt. Dann erhält man für alle $a \in \mathcal{Q}'$ mit $(a, (b_{01}, b)) \in \mathcal{C}$ wegen des Axioms APS 5A (ii) auch $(a, (b_{02}, b)) \in \mathcal{C}$. Also ist $\bar{\mu}(a, (b_{02}, b))$ wohlde-

finierter Ausdruck, und es gilt weiter vermittelt (ii) aus Satz 5.7.11 und vermittelt der Eigenschaft AS 2.2 aus Definition 5.3.2:

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}) \bar{\mu}(a, (b_{02}, b)) \\
&= \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{01}, b_{02}) \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_{02} \cap M, a \times b \cap M) \\
&= \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_{01} \cap M, a \times b_{02} \cap M) \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_{02} \cap M, a \times b \cap M) \\
&= \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_{01} \cap M, a \times b \cap M) = \bar{\mu}(a, (b_{01}, b)).
\end{aligned}$$

zu APS 6A (iii): Die Wohldefiniertheit der linken Seite der Gleichung ist trivial, da nach Voraussetzung $(a, (b_0, b_i))$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ zu \mathcal{C} gehört. Lemma 5.4.5 liefert weiter:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \bar{\mu}(a, (b_0, b_i)) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times b_i \cap M) \\
&= \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times (\bigcup_{i=1}^n b_i) \cap M) \\
&= \lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times b_0 \cap M) = 1.
\end{aligned}$$

zu APS 6A (iv): Sei $(a, (b_0, b)) \in \mathcal{C}$ mit $\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = 0$, dann gilt definitionsgemäß auch $\lambda_{\mathcal{S}}(a \times b_0 \cap M, a \times b \cap M) = 0$. Die Kontraposition von AS 2.3 liefert dann $a \times b \cap M = \emptyset$. Die andere Richtung folgt mit Lemma 5.4.5(i). ■

Die Möglichkeit durch den zuerst vorgestellten Weg vermittelt APS 6A von $\bar{\mu}$ zu $\lambda_{\mathcal{S}}$ zu gelangen und durch die Möglichkeit auf umgekehrtem Weg in Sinne des Satzes 5.7.12 von einer Wahrscheinlichkeitsfunktion $\lambda_{\mathcal{S}}$ zu einer Funktion $\bar{\mu}$ zu gelangen, die APS 6A genügt, wirft die Frage nach der Konsistenz der beiden Vorgänge auf. Sie ist aber deshalb gewährleistet, weil die Definition von $\bar{\mu}$ aus Satz 5.7.12 und die Beziehung (5.5) aus Satz 5.7.11 identische Aussagen machen. $\lambda_{\mathcal{S}}$ ist durch $\bar{\mu}$ und $\lambda_{\mathcal{Q}}$ vollständig bestimmt. Man wechselt somit durch die beiden Prozesse nur von der eingeschränkten, aber doch die ganze Situation vollständig charakterisierenden „ $\bar{\mu}$ -Formulierung“ über zur vollständigen „ $\lambda_{\mathcal{S}}$ -Formulierung“ und durch Einschränkung wieder zurück. Die physikalische Äquivalenz der beiden Vorgehensweisen ergibt sich, wenn man bei der Vorgehensweise gemäß Satz 5.7.12 die Mengen $M_1, M_2, M, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0$ mit den bisherigen Abbildungsprinzipien verbindet und wenn man für $\lambda_{\mathcal{S}}$ das naheliegende Abbildungsprinzip wählt, das bereits nach Satz 5.7.11 als Veranschaulichung von $\lambda_{\mathcal{S}}$ erläutert wurde.

Die Strukturen \mathcal{S} und $\lambda_{\mathcal{S}}$ als Ausgangspunkt zu wählen, besitzt den Vorzug, daß man schnell die hier entwickelte Theorie zur Verfügung hat. Sie stellt auch die übliche Vorgehensweise von G. Ludwig dar, wie man etwa [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.3, S. 24ff. entnimmt. Dabei benennt er die axiomatische Forderung, nach der \mathcal{S} eine Menge statistischer Auswahlverfahren ist, mit APS 6 und die Forderungen (i) und (ii) mit APS 7.1 und APS 7.2. In der vorliegenden Arbeit wird aber der Weg über APS 6A favorisiert, da es im Vorfeld schwerer zu motivieren ist, warum relative Häufigkeiten auch für zwei beliebige Verfahren σ, σ' aus der insgesamt unanschaulichen Menge \mathcal{S} reproduzierbar sein sollen, wenn σ' feiner als σ ist. Auf dem zuerst gewählten Weg geht man nur von den üblichen experimentellen Situationen aus, wie sie durch den Begriff der Ja-Nein-Experimente gefaßt werden, und man fordert dafür geeignete Axiome. Zusammen mit $\lambda_{\mathcal{Q}}$ strukturiert das die Theorie bereits so weitgehend, daß eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf ganz $\lambda_{\mathcal{S}}$ etabliert werden kann. Der Zusatz „A“ beim Namen des Axioms APS 6A soll wie schon bei APS 5A andeuten, daß von der kanonischen Axiomatik von G. Ludwig abgewichen wird.

Zum Abschluß des Abschnitts sollen noch zwei Eigenschaften von $\bar{\mu}$ bezüglich der disjunkten Zerlegung von Registriermethoden und -prozeduren gezeigt werden, von denen der erste Punkt als Th. 4.5.3. (viii) in [Lud83b], Kapitel II, Abschnitt 4.5, S. 32ff. folgt:

Satz 5.7.13 *Seien M_1, M_2 zwei Mengen. Seien ferner Mengen $M \subseteq M_1 \times M_2$, $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}(M_1)$, $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{P}(M_2)$ und $C \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{R}_0$ mit den Eigenschaften AZ 1, AZ 2, APS 1, 2, 3, 4.1, 5A, 5.1.1, 5.2, 6A, 8.1 und 8.2 gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Sei b_0 ein Element aus \mathcal{R}'_0 , und sei $(b_{0i})_{i=1}^n$ eine disjunkte Zerlegung von b_0 in \mathcal{R}'_0 . Dann gilt für alle Elemente a aus \mathcal{Q}' und für alle Elemente b aus \mathcal{R} mit der Eigenschaft $(a, (b_0, b)) \in \mathcal{C}$:*

$$\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_0, b_{0i}) \bar{\mu}(a, (b_{0i}, b \cap b_{0i})).$$

Dabei gilt $0 < \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_0, b_{0i}) \leq 1$ für jedes i in $\{1, \dots, n\}$. Zudem gilt die Identität

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_0, b_{0i}) = 1.$$

(ii) Sei b_0 ein Element aus \mathcal{R}'_0 , und sei a ein Element in \mathcal{Q} mit der Eigenschaft $(a, b_0) \in C$. Im weiteren sei b ein Element aus $\mathcal{R}(b_0)$. Bezeichnet nun $(b_i)_{i=1}^n$ eine disjunkte Zerlegung von b in $\subseteq \mathcal{R}(b_0)$, dann gilt:

$$\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(a, (b_0, b_i)).$$

Beweis:

zu (i): Axiom APS 5A (ii) liefert die Zugehörigkeit von $(a, (b_{0i}, b_{0i} \cap b))$ zu \mathcal{C} für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ ob der Gültigkeit der Inklusionskette $b \cap b_{0i} \subseteq b_{0i} \subseteq b_0$. Damit steht die Wohldefiniertheit der Ausdrücke auf der rechten Seite des ersten Teils der Behauptung fest.

Weiter folgt mit (ii) aus Satz 5.7.11, AS 2.2 für λ_S und 5.4.5(ii):

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_0, b_{0i}) \bar{\mu}(a, (b_{0i}, b_{0i} \cap b)) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_S(a \times b_0 \cap M, a \times b_{0i} \cap M) \lambda_S(a \times b_{0i} \cap M, (a \times (b_{0i} \cap b)) \cap M) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_S(a \times b_0 \cap M, (a \times (b_{0i} \cap b)) \cap M) \\ &= \lambda_S(a \times b_0 \cap M, (a \times (b_0 \cap b)) \cap M) \stackrel{b \subseteq b_0}{\cong} \bar{\mu}(a, (b_0, b)). \end{aligned}$$

Der Beweis für die restlichen Aussagen ergibt sich in zum Beweis von Lemma 5.7.8 analoger Weise.

zu (ii): Mit APS 6A (iii) gilt

$$1 = \bar{\mu}(a, (b_0, b)) = \bar{\mu}(a, (b_0, b)) + \bar{\mu}(a, (b_0, b_0 \setminus b)).$$

Somit ergibt sich $\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = 1 - \bar{\mu}(a, (b_0, b_0 \setminus b))$. Da wiederum mit APS 6A (iii) auch $1 = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(a, (b_0, b_i)) + \bar{\mu}(a, (b_0, b_0 \setminus b))$ gilt, erhält man die Behauptung:

$$\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = \sum_{i=1}^n \bar{\mu}(a, (b_0, b_i)).$$

■

5.8 Die Präparier-Registrier-Struktur

Nachdem nun die grundlegende experimentelle Situation, die auch für die Quantenmechanik das Fundament darstellt, einerseits in der Realität ausgezeichnet und andererseits mathematisch abgebildet worden ist, bietet es sich an, einen geeigneten Namen für die so charakterisierte Struktur zu definieren.

Definition 5.8.1

Sei durch einen Teil der Wirklichkeit, eine mathematische Theorie \mathcal{MT} und durch Anwendungsvorschriften \longleftrightarrow eine physikalische Theorie \mathcal{PT} gegeben.

Bezüglich \mathcal{PT} mögen einerseits $M_1, M_2, M, \mathcal{Q}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}$ Bildmengen und andererseits $\lambda_{\mathcal{Q}}, \lambda_{\mathcal{R}_0}$ und $\bar{\mu}$ Bilder relativer Häufigkeiten bezeichnen. Zudem möge durch eine Menge C eine Bildrelation charakterisiert werden. Gelten nun in der mathematischen Theorie für die durch $M_1, M_2, M, \mathcal{Q}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}, C$ und $\lambda_{\mathcal{Q}}, \lambda_{\mathcal{R}_0}, \bar{\mu}$ erfaßte Teil-Theorie die Aussagen AZ 1, AZ 2 und APS 1, 2, 3, 4.1, 5A, 5.1.1, 5.2, 6A, 8.1 und 8.2, dann spricht man sowohl für den so erfaßten Teil der mathematischen Theorie als auch für den durch $M_1, M_2, M, \mathcal{Q}, \mathcal{R}_0, \mathcal{R}, C$ und $\lambda_{\mathcal{Q}}, \lambda_{\mathcal{R}_0}, \bar{\mu}$ mittels der Abbildungsvorschriften \longleftrightarrow erfaßten Teil der Wirklichkeit von einer **Präparier-Registrier-Struktur**. Dabei werden Realtextstücke der Art M_1 , also diejenigen, deren mathematische Bilder entsprechend der Abbildungsprinzipien zu M_1 gehören, als Präparierereignisse, die der Art M_2 als Registrierereignisse, die der Art \mathcal{Q} als Präparierverfahren, die der Art \mathcal{R}_0 als Registriermethoden und die der Art \mathcal{R} als Registrierprozeduren bezeichnet. Die Realtextstücke, deren Bilder Elemente von M sind, nennt man Einzelexperimente oder **Wechselwirkungsträger**.

Im zurückliegenden Kapitel wurde also nahegelegt, daß derjenige Teil der Wirklichkeit, der mit Quantenmechanik bezeichnet wird, eine noch nicht weiter spezifizierte Form einer Präparier-Registrier-Struktur darstellt, wenn man von der noch ausstehenden Diskussion des Axioms APS 5A in Abschnitt 6.1 absieht. Die Einzelexperimente sollen als Wechselwirkungsträger bezeichnet werden. Es ist wichtig, den Begriff des Wechselwirkungsträgers genauer zu diskutieren.

Der Wechselwirkungsträgerbegriff, wie er in der obigen Definition angegeben wird, ist zunächst einmal abstrakt. Ein Wechselwirkungsträger ist ein Paar aus einem Präparier- und einem Registrierereignis. Damit nimmt man einen radikalen Standpunkt ein, da mit ihm keine weiteren Vorstellungen verbunden sind, als eben die durch die Abbildungsprinzipien festgelegte Interpretation als Paar aus zwei Ereignissen. Das heißt, um einen Teil der Wirklichkeit als Wechselwirkungsträger bezeichnen zu dürfen, werden keine darüber hinausgehenden Eigenschaften verlangt, wie zum Beispiel die Vorzeigbarkeit im unmittelbaren Sinne, Teilchen- oder Welleneigenschaf-

ten, Impuls, Bahnkurve und dergleichen. Damit ist nicht gemeint, daß es nicht auch Wechselwirkungsträger gibt, die noch über die obige Definition hinausgehende Eigenschaften haben. Es wurde bereits mehrfach angesprochen, daß die Präparier-Registrier-Struktur nicht nur in der Quantenmechanik auftaucht, sondern auch in der klassischen Physik vorkommt, etwa bei einer Tennisballkanone als Präparier- und dem Spielfeld als Registrierapparat. Dabei ist ein Wechselwirkungsträger zunächst einmal abstrakt im Sinne der obigen Definition nur ein Paar aus einer konkreten Benutzung der Tennisballkanone und dem Abdruck des Balles irgendwo auf dem Feld. Die Erfahrung berechtigt, den Wechselwirkungsträger mit dem Ball zu identifizieren und ihm Eigenschaften wie etwa Impuls und Bahnkurve zuzuschreiben. Das scheint zunächst etwas kompliziert und unhandlich, da man sofort intuitiv Tennisballkanone, Abdruck und Ball miteinander verquickt. Die Erfahrung rechtfertigt durchaus ein solches Vorgehen. Im Falle der Quantenmechanik muß aber vorsichtiger vorgegangen werden, da dort so etwas wie ein Tennisball nicht in demselben Maße existiert, denn man kann die Wechselwirkungsvermittler, die in der Quantenmechanik von Relevanz sind, nicht wie im klassischen Falle vorzeigen. Also gilt es, einen möglichst vorsichtigen Standpunkt einzunehmen. Eine Definition obigen Typs gewährleistet das.

Ausgehend vom Begriff der Präparier-Registrier-Struktur kann man nun schrittweise die Theorie weiterentwickeln, um so die Wechselwirkungsträger der Quantenmechanik durch eine ihnen angepaßte Struktur im mathematischen Bild abzubilden.

Kapitel 6

Zustände und Effekte

Die Quantenmechanik beschäftigt sich mit einer besonderen Form der Wechselwirkung zwischen makroskopischen Gegenständen. Zu ihrer Untersuchung wird man sich auf Experimente konzentrieren, die die Eigenschaften besagter Wechselwirkung hervortreten lassen, und man wird solche Experimente verwerfen, die Aussagen über Aufbau und Funktionsweise der dazu verwendeten Apparaturen sammeln. Beim Aufbau eines mathematischen Modells der quantenmechanischen Wechselwirkung stellt sich die Frage nach der Möglichkeit einer Abstraktion von den Apparaten, die die Experimente konkret realisieren. Es wäre denkbar, daß die quantenmechanische Wechselwirkung dermaßen stark mit den sie erzeugenden und manifestierenden Apparaten verwoben ist, daß überhaupt keine eigenständigen Züge erfaßt werden können. Das heißt, daß eine Trennung von der Funktionsweise der Apparate nicht möglich ist. Der Umstand, daß eine solche Trennbarkeit bei der quantenmechanischen Wechselwirkung in gewissem Umfang aber dennoch erlaubt ist, gepaart mit der Erfahrung, die man mit anderen Formen der Wechselwirkung zwischen makroskopischen Gegenständen wie etwa der elektromagnetischen gesammelt hatte, muß als Grund dafür angesehen werden, daß man von vornherein die Möglichkeit einer vollständigen Loslösbarkeit der Wechselwirkung von den sie erzeugenden und manifestierenden Gegenständen postuliert hat. Die quantenmechanischen Wechselwirkungsträger besitzen aber im Gegensatz zu vielen klassischen Wechselwirkungsträgern wie etwa in der Elektrodynamik oder der Mechanik der Massenpunkte keine volle Eigenständigkeit. Man kann sie nicht vollständig aus dem experimentellen Kontext ihrer Erzeugung und Manifestation herauslösen. G. Ludwig spricht in [Lud85a], Kapitel III, §5.1, S. 76 von einer „gewissen Autonomie“ der quantenmechanischen Wechselwirkungsträger. Die derart charakterisierten Besonderheiten der Abstraktion von der Apparateebene im Falle der Quantenmechanik hat zu bekannten Problemen geführt,

wie etwa dem sogenannten Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon, denen sich Kapitel 13 widmet.

Ein erster Schritt zur Repräsentation einer der Quantenmechanik angemessenen Form der Unabhängigkeit ihrer Wechselwirkungsträger vom experimentellen Umfeld wird sich im Rahmen der mathematischen Theorie zunächst durch die Möglichkeit einer Klassenbildung in den Mengen der Präparier- und Effektverfahren widerspiegeln. Der erste Teil des Kapitels zielt darauf ab, die genannten Überlegungen präziser zu formulieren. Dabei wird eine auch für die Quantenmechanik geeignete Bedingung der Kombinierbarkeit eines Präparierverfahrens und einer Registriermethode im Sinne von Abschnitt 5.7 verbal formuliert, um mit ihrer Hilfe das Axiom APS 5A aus Abschnitt 5.7 sowie weitere Axiome zu motivieren. Die so ausgebauten Axiomatik erlaubt es dann, die Begriffe Zustand und Effekt auf realistische Weise als Klassen von Präparier- und Effektverfahren einzuführen. Ausgehend von $\bar{\mu}$ kann man in kanonischer Weise eine Abbildung μ auf den Mengen der Zustände und Effekte definieren. Im zweiten Abschnitt werden dann Überlegungen zur Möglichkeit konvexer Kombinationen von Präparierverfahren und Effektverfahren diskutiert. Darauf basierend kann man Aussagen auch für Zustände und Effekte formulieren. Da es sich aber bei den neu eingeführten Mengen von Zuständen und Effekten um noch gering strukturierte Mengen handelt, die noch nicht in einen linearen Raum eingebettet sind, bedarf es zur Formulierung der Konvexitätseigenschaften der Abbildung μ .

6.1 Kombinierbarkeit von Präparierverfahren und Registriermethoden

In das mathematische Abbild des von der Quantenmechanik anvisierten Teils der Wirklichkeit sollen nur diejenigen experimentellen Konstellationen aufgenommen werden, die Informationen über die zu betrachtende Wechselwirkung liefern, aber nicht diejenigen, die Aufbau oder Funktionsweise der dazu verwandten Apparate untersuchen. Eine derartige Forderung soll allerdings nicht zum Ausdruck bringen, daß andere experimentelle Konstellationen nicht vorkommen oder daß sie nicht einer Untersuchung wert sind, sondern nur, daß sie hier nicht theoretisch beschrieben werden sollen. Die hier zu formulierende Theorie zielt nur darauf ab, die Wechselwirkung zwischen den beteiligten Apparaten im mathematischen Bild zu fassen. Es werden folglich besondere Anforderungen an die Kombinierbarkeit von Präparierverfahren und Registriermethoden gestellt. Man wählt im Sinne von Abschnitt 5.7

für die Quantenmechanik als

Kombinierbarkeitsbedingung:

Ein Präparierverfahren und eine Registriermethode heißen kombinierbar genau dann, wenn das Präparierverfahren und die Registriermethode **raum-zeitlich so zueinander orientiert** sind, daß die folgenden beiden Punkte gelten:

- (i) Es gibt Einzelexperimente so, daß das zugehörige Präparierereignis durch das Präparierverfahren und das zugehörige Registrierereignis durch die Registriermethode gewonnen wurde.
- (ii) Es werden weder Informationen über die Prozesse zur Erzeugung der Wechselwirkung innerhalb des zum Präparierverfahren gehörigen Apparates noch Informationen über die Prozesse zur Manifestation, die innerhalb des zur Registriermethode gehörigen Apparates ablaufen, gesammelt.

In der Folge werden zur Illustration kurze Beispiele erwähnt. Betrachtet man etwa einen Laser als Präpariervorrichtung, dann müssen zur Erfüllung der obigen Kombinierbarkeitsbedingung die verwendeten Registrierapparate so zum Laser positioniert sein, daß damit Informationen über das vom Laser ausgesandte Licht gesammelt werden und nicht über die im Laser zu seiner Erzeugung ablaufenden Prozesse. So würde eine lichtleitende Sonde, die während des Erzeugungsprozesses der Photonen in den Laser eindringt, ungeeignet. Ebenso sollen als experimentelles Ausgangsmaterial nicht Untersuchungen einfließen, wie es zu einem Tropfen in einer Nebelkammer kommt. Nur der Umstand, daß er auftritt, und die Tatsache, wo er auftritt, werden aufgenommen. Eine Forderung, wie sie in der obigen Kombinierbarkeitsbedingung ausgedrückt wird, eignet sich offensichtlich nicht allein für Experimente im Rahmen der Quantenmechanik. So kann man genauso leicht Experimente mit klassischen Wechselwirkungen angeben, die obiger Forderung genügen. Man betrachte etwa Experimente, die sich mit der durch elektromagnetische Wellen übertragenen Wechselwirkung befassen. Um der obigen Kombinierbarkeitsbedingung zu genügen, gälte es, sich auf Experimente zu beschränken, die sich nicht mit der Erzeugung und Manifestation der elektromagnetischen Wellen beschäftigen. Man würde sich also auf Experimente beschränken, die durch die homogenen Maxwell-Gleichungen beschrieben werden. Bei der im vorigen Kapitel als Beispiel erwähnten Tennisballkanone würde man sich nicht um Experimente bemühen, die untersuchen, warum der Ball aus dem Apparat kommt, auf welche Art er das tut und wie er den Abdruck auf dem Tennisplatz hinterläßt. Experimente, die den obigen Anforderungen genügen,

untersuchen nur den Flug des Tennisballs von dem Zeitpunkt, an dem er die Kanone verlassen hat, bis zu dem Zeitpunkt, an dem er den Tennisplatz berührt.

Es steht nun eine Kombinierbarkeitsbedingung zur Verfügung. Bevor in der Entwicklung der Theorie vorangeschritten wird, bedarf es zunächst des Nachweises, daß obige Kombinierbarkeitsbedingung auch die Eigenschaften impliziert, die Axiom APS 5A im Abschnitt 5.7.1 zum Ausdruck gebracht hat. Damit wäre es auch im Rahmen der Quantenmechanik gerechtfertigt, das Axiom APS 5.2 zu fordern. Insbesondere schliesse das den in Abschnitt offengelassenen Punkt ab, daß die hier verfolgte Darstellung der Quantenmechanik auf einer Präparier-Registrier-Struktur basiert.

Wenn man eine mit einem Präparierverfahren im obigen Sinne kombinierbare Registriermethode im Realexperiment gefunden hat, dann liefert der erste Punkt der Kombinierbarkeitsforderung in trivialer Weise den Inhalt von APS 5A (i).

Die Motivation der Aussage APS 5A (ii) bedarf einiger Vorüberlegungen. Da nach Abmachung die Präparierverfahren und Registriermethoden nur raum-zeitlich begrenzte Abläufe bezeichnen, gibt es zu jedem nicht-leeren Präparierverfahren a bezüglich eines vorgegebenen raum-zeitlichen Bezugssystems einen endlichen Zeitpunkt T_a und ein begrenztes Raumgebiet G_a dergestalt, daß alle Registriermethoden, die nach T_a beginnen und die außerhalb von G_a stattfinden, mit a kombinierbar sind. Ein solcher Tatbestand begründet sich darin, daß die Kombinierbarkeitsbedingung nur verletzt werden kann, wenn man entweder bezüglich der zeitlichen Komponente zu früh registriert oder gleichbedeutend der Präparationsvorgang zu spät endet oder wenn man bezüglich der räumlichen Komponente die Apparate einander zu stark annähert, etwa mit dem Registrierapparat in den Präparierapparat eindringt. Zur Verdeutlichung betrachte man die folgenden zwei Beispiele.

Zunächst wähle man als nicht-quantenmechanisches Beispiel das Gewehr und die Zielscheibe. Der Gewehrschuß sei im Zeitraum von t_1 bis t_2 bezüglich eines vorgegebenen Bezugssystems ausgelöst worden. Verwendete man nun die Zielscheibe vor dem Zeitpunkt t_1 als Registriermethode für den obigen Präparationsvorgang, dann ließe ein solches Vorgehen eine Abschätzung über den zeitlichen Verlauf des Vorgänge bei der Präparation zu. Damit würden aber Informationen über den Erzeugungsprozeß der Wechselwirkung, also das Geschloß, im Widerspruch zur Kombinierbarkeitsbedingung gesammelt, so daß kein kombinierbares Paar aus Präparierverfahren und Registriermethode vorläge. Liegt aber der Zeitpunkt der Verwendung der Zielscheibe zum Beispiel nach t_2 , dann kann keine Aussage über den zeitlichen Verlauf des Geschehens bei der Präparation, also des Auslösens des Gewehrschusses, mehr gemacht werden, da er schon beendet ist. Es kann auch sein, daß eine Verwendung auch vor t_2 schon möglich ist, etwa wenn das Geschloß den Lauf des Gewehres be-

reits verlassen hat, aber dennoch noch Prozesse im Gewehr ablaufen, die auf das Geschosß keinen Einfluß mehr haben. Bezüglich der räumlichen Komponente sollte es keine Kombinierbarkeitsprobleme geben, da in der Regel die Zielscheibe groß ist im Vergleich zum Gewehr und da man mit ihr dementsprechend nicht die Prozesse innerhalb des Gewehres untersuchen könnte.

Bevor ein weiteres Beispiel diskutiert wird, bemerke man, daß sich die eben angestellten Überlegungen zu den zeitlichen Abläufen von Präparation und Registrierung verallgemeinern lassen. Denn damit eine Registriermethode keine Informationen über den Ablauf der Präparation selber sammelt, müssen zumindest alle wesentlichen Vorgänge am Präparierapparat abgelaufen sein. Das heißt, die Wirkung die vom Präparierapparat in Richtung der Registrierung ausgesandt wurde, darf nicht mehr durch Vorgänge am Präparierapparat beeinflusst werden. In jedem Falle muß daher der Vorgang der Präparation stets vor dem mit ihm kombinierbaren Registriervorgang begonnen haben. Durch die oben eingeführte Kombinierbarkeitsbedingung in der Verbindung mit der Festlegung, was unter Präparierverfahren und Effektverfahren zu verstehen ist, wurde also implizit eine **Zeit-Richtung von der Präparation hin zur Registrierung** in der Theorie verankert.

Als quantenmechanisches Beispiel nehme nun man einen Beschleunigerring und einen Detektor. Mit einem geeigneten Detektor könnte man Untersuchungen innerhalb des Ringes während des Beschleunigungsvorganges vornehmen, ohne daß man von einer räumlichen Behinderung der beiden Apparate sprechen könnte. Aber solche experimentellen Untersuchungen gehören nicht zum Grundbereich der hier aufgebauten Formulierung der Quantenmechanik. Auch hier tritt offen zutage, daß nach Abschluß des Beschleunigungsvorganges und außerhalb eines endlichen Raumgebietes keine Informationen mehr über den Präparationsvorgang innerhalb des Ringes gesammelt werden.

Nach der Veranschaulichung durch die obigen Beispiele sollen die allgemeinen Erörterungen zu dem Präparierverfahren a , die im Vorfeld der Beispiele angestellt wurden, weitergeführt werden. Zugunsten einer kompakteren Formulierung wird zunächst die folgende Bezeichnung eingeführt. Bezeichnet α einen endlichen Zeitpunkt und ein begrenztes Raumgebiet bezüglich eines vorgegebenen Bezugssystems, dann symbolisiere $\mathcal{R}_{0\alpha}$ die Menge aller Registriermethoden, die nach t und außerhalb von G stattfinden. Wenn man also α so wählt, daß damit einen endlicher Zeitpunkt $t \geq T_a$ und ein begrenztes, G_a umfassendes Raumgebiet G ausgezeichnet wird, dann folgt mit obiger Überlegung, daß alle Registriermethoden aus $\mathcal{R}_{0\alpha}$ auch mit a kombinierbar sind. Mit $\mathcal{R}_{0\alpha}$ liegt eine nicht-leere Menge vor, da die Erfahrung keine Aussagen über eine prinzipielle Begrenzung von Raum und Zeit aufweist. Zu jedem Zeitpunkt, der als Grenze genannt würde, könnte man eben einen Registriervorgang

danach beginnen lassen. Für die Menge aller Mengen des Typs $\mathcal{R}_{0\alpha}$ wird das Symbol Γ verwendet.

Die eben angestellten Überlegungen sind von großer Bedeutung. Sie werden etwas weiter unten zur Motivation von Axiom APS 5.1.2 noch weitere Anwendungsmöglichkeiten finden. Zuvor soll aber noch der Umstand der raum-zeitlichen Begrenztheit der Präparier- und Registriervorgänge zur Nahelegung von APS 5A (ii) genutzt werden. Hat man zwei nicht-leere Präparierverfahren a und a' , so daß a' feiner als a ist, dann umfaßt a' nur Präparierereignisse, die auch mit a gewonnen werden, nur daß sie noch weitere Eigenschaften haben. Also findet der raum-zeitliche Vorgang von a' im selben begrenzten Raum-Zeit-Gebiet statt wie der von a . Dasselbe gilt auch für zwei Registriermethoden b_0, b'_0 , wenn b'_0 sich gegenüber b_0 als feiner erweist. Verletzen nun a und b_0 nicht die Kombinierbarkeitsbedingung, dann müssen auch a' und b'_0 raum-zeitlich derartig zueinander orientiert sein, daß sie beiden Punkten der Kombinierbarkeitsbedingung genügen. Das heißt, a' und b'_0 erfüllen beide Punkte für die Kombinierbarkeit, wenn auch a und b_0 es tun.

Obwohl in Abschnitt 5.7 bereits hinreichend motiviert, lohnt es sich, hier APS 5.2 nochmals zu betrachten. APS 5.2 erscheint im Lichte der obigen Betrachtungen besonders eingängig, denn es sollte stets möglich sein, zu einem Effektverfahren ein Präparierverfahren zu finden, das hinreichend weit weg stattfindet und das hinreichend früh endet, ohne daß es dabei zu einem Widerspruch mit der zweiten Anforderung der Kombinierbarkeitsbedingung kommt.

Die soeben angestellten Überlegungen, um insbesondere die Aussagen aus APS 5A (ii) zu rechtfertigen, erweisen sich als so fruchtbar, daß auf ihrer Basis weitere Axiome motiviert werden können. Wie oben festgestellt, gibt es bezüglich eines vorgegebenen Bezugssystems zu jedem Präparierverfahren a einen endlichen Zeitpunkt t und ein begrenztes Raumgebiet G so, daß alle Registriermethoden, die nach t und außerhalb von G stattfinden, mit a kombinierbar sind. Verwendet man wiederum die Mengen $\mathcal{R}_{0\alpha}$ und Γ in der oben geschilderten Bedeutung, dann heißt das also, daß es für jedes nicht-leere Präparierverfahren a eine Menge von Registrierverfahren $\mathcal{R}_{0\alpha}$ aus Γ so gibt, daß a mit allen Elementen aus $\mathcal{R}_{0\alpha}$ kombinierbar ist. Damit betrachtet man eine Realstruktur, die nun auch axiomatisch in die mathematische Theorie implementiert werden soll. Doch erweist es sich als günstig, noch eine naheliegende Eigenschaft der Menge Γ zu erläutern. Dazu wähle man zwei Elemente $\mathcal{R}_{0\alpha}$ und $\mathcal{R}_{0\beta}$ aus Γ . α und β charakterisieren zwei endliche Zeitpunkte t_1 und t_2 sowie zwei begrenzte Raumgebiete G_1 und G_2 . Man kann ohne Probleme einen endlichen Zeitpunkt t sowie ein begrenztes Raumgebiet G derart angeben, daß t einen Zeitpunkt nach t_1 und t_2 beschreibt und daß G die Gebiete G_1 und G_2 umfaßt. Benennt man nun das Paar t und G mit γ , dann liegt $\mathcal{R}_{0\gamma}$ offensichtlich in Γ . Aber sicher

gehören auch alle Registriermethoden aus $\mathcal{R}_{0\gamma}$ zu den $\mathcal{R}_{0\alpha}$ und $\mathcal{R}_{0\beta}$. Das heißt aber, daß sich Γ als ein bezüglich der Mengeninklusion abwärts gerichtetes Mengensystem auffassen läßt. Auf einen expliziten Einbau der Raum-Zeit-Struktur in die Theorie kann hier verzichtet werden, da davon vorerst kein Gebrauch mehr gemacht werden würde. Erst in Kapitel 11 werden weiterführende Erörterungen zur Bedeutung raum-zeitlicher Strukturen erfolgen. Dennoch sei auch hier schon auf Erörterungen des Kapitels VII in [Lud83b] sowie die Artikel [GNW81], [NW83] verwiesen. Statt des expliziten Einbaus der raum-zeitlichen Struktur können die obigen Überlegungen auch in abstrakter Form in die Theorie übernommen werden. An geeigneter Stelle wird immer wieder auf die „Anschauung“ der betrachteten Menge Γ und ihrer Elemente verwiesen.

Zugunsten einer übersichtlichen Formulierung trifft man noch die folgende Abmachung:

Definition 6.1.1 Für ein Element Λ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{R}'_0)$ wird gesetzt:

$$\mathcal{F}_\Lambda := \{(b_0, b) \in \mathcal{F} \mid b_0 \in \Lambda\}.$$

Damit legen die vorhergehenden Diskussionen nun das folgende Axiom APS 5.1.2 nahe, das dem gleichnamigen Axiom in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 1, S. 44 entspricht:

APS 5.1.2* Es existiert ein bezüglich der Mengeninklusion nach unten gerichtetes nicht-leeres Mengensystem Γ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Γ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{R}'_0) \setminus \{\emptyset\}$.
 - (ii) Zu jedem Element a aus \mathcal{Q}' existiert ein Element Λ in Γ , so daß das Paar (a, f) für alle Elemente f aus \mathcal{F}_Λ in der Menge \mathcal{C} liegt.
-

Es ergibt sich unmittelbar, daß aus APS 5.1.2 das Axiom APS 5.1.1 aus Abschnitt 5.7 folgt. Der * soll wie stets darauf hinweisen, daß das so bezeichnete Axiom durch ein späteres Axiom eingeschlossen wird. Genauer erweist sich APS 5.1.2 als Teil des nächsten Axioms APS 5.1.3. Um aber schrittweise die Übertragung der physikalischen Überlegungen in die mathematische Struktur darlegen zu können, wurde APS 5.1.2 zunächst noch alleinstehend formuliert.

Es stellt sich jetzt die Frage, wieviel die einzelnen Elemente aus Γ über die Wechselwirkung aussagen. Nutzt man auch weiterhin die Bedeutung der Elemente aus Γ , die zur Motivation von APS 5.1.2 verwendet wurden, bedarf es also der Diskussion,

wieviel man über ein Präparierverfahren a noch erfahren kann mit Hilfe derjenigen Registriermethoden, die später als ein beliebiger, aber endlicher Zeitpunkt $t \geq T_a$ und außerhalb eines beliebigen, aber begrenzten Raumgebiets $G \supseteq G_a$ stattfinden. Es soll diesbezüglich verlangt werden:

Die quantenmechanische Wechselwirkung verliert sich nicht in Raum oder Zeit.

Das heißt, es soll keine zeitlichen oder räumlichen Abstände zwischen Präparation und Registrierung derart geben, daß bei kleineren Abständen Wirkungen nachzuweisen sind, die man bei größeren Abständen nicht mehr aufzufinden vermag. Das heißt aber nicht, daß man unabhängig von Anwendungszeit und -gebiet immer mit denselben Apparaten arbeiten kann. Von technischer Seite kann es sein, daß man bei großen Zeit- oder Raumabständen ganz andere Geräte konzipieren muß als bei kleinen Abständen. Ebenfalls soll damit nicht behauptet werden, daß zwei Registriermethoden, die sich nur durch den Zeitpunkt der Verwendung relativ zum betrachteten Präparierverfahren unterscheiden, dieselben relativen Häufigkeiten für analog ausgezeichnete Veränderungen liefern. Eine derartige Form der zeitlichen Veränderung wird sinnvoller Weise nicht ausgeschlossen.

Mit der obigen Forderung wird der quantenmechanischen Wechselwirkung eine „gewisse Autonomie“ zuerkannt. Dabei darf die Einschränkung „gewisse“ keinesfalls in ihrer Bedeutung unterschätzt werden, denn die Eigenständigkeit der quantenmechanischen Wechselwirkung und damit auch der Wechselwirkungsträger im Sinne von Abschnitt 5.8 ist nicht zu verwechseln mit einer Objektivierbarkeit wie in einer klassischen Theorie. Dort liegt eine vollständige Eigenständigkeit im Sinne einer Vorzeigbarkeit der Wechselwirkungsträger unabhängig von den sie präparierenden und registrierenden Apparaten vor. Für damit zusammenhängende Fragen sei auf Kapitel 13 verwiesen.

Offenbar zeichnet aber die obige Forderung einer „gewissen Eigenständigkeit“ wie auch schon die Kombinierbarkeitsbedingung nicht nur die Quantenmechanik aus, sondern sie gilt erst recht für viele klassische Wechselwirkungstheorien. Man denke etwa an die Elektrodynamik oder auch das Tennisballbeispiel aus Abschnitt 5.8. Die oben formulierte Eigenständigkeits-Forderung an die Wechselwirkungsträger stellt gewissermaßen eine untere Grenze dar, die alle Wechselwirkungstheorien erfüllen, deren Wechselwirkungsträger eben diesen gewissen Grad an Eigenständigkeit besitzen. Betrachtet zum Beispiel irreversible Prozesse, sieht man, daß einer solchen Forderung durchaus nicht immer entsprochen wird, denn dort geht im Laufe der Zeit die Wirkung verloren.

Um nun die Aussage, daß sich die Wirkung nicht in Raum oder Zeit verliert, unter der erwähnten Prämisse, die Raum-Zeit-Struktur nicht explizit einzuführen, zu formulieren, soll eine äquivalente Formulierung gefunden werden, die sich einfacher in das mathematische Bild übersetzen läßt. Dazu dienen die nachfolgenden Erörterungen.

Wenn man annimmt, daß sich die Wirkung in Raum und Zeit nicht verliert, dann ist es gleichgültig, wann und wie weit entfernt man mit der Untersuchung eines Präparierverfahrens durch Registriermethoden beginnt. Man wird stets alle Informationen erhalten. Das heißt, es gilt folgende Überlegung:

Man betrachte zwei Präparierverfahren. Man nehme nun an, daß sich die beiden Präparierverfahren nicht durch Registriermethoden unterscheiden lassen, die derart nach einem endlichen Zeitpunkt beginnen und die derart außerhalb eines begrenzten Raumgebietes stattfinden, daß die zu Beginn des Abschnitts erläuterte Kombinierbarkeitsbedingung bezüglich beider Präparierverfahren erfüllt ist. Dann kann man die Präparierverfahren überhaupt nicht voneinander unterscheiden.

Gilt nun in der Umkehrung letztere Aussage, dann ergibt sich offensichtlich, daß es keine Abstände räumlicher oder zeitlicher Art gibt, die als Wirkungsgrenze betrachtet werden können. Damit wurde die gesuchte äquivalente Aussage gefunden. Verwendet man die Mengen $\mathcal{R}_{0\alpha}$ und Γ in derselben Weise wie im Vorfeld zu Axiom APS 5.1.2, dann übersetzt sich die soeben gewonnene Aussage im mathematischen Bild folgendermaßen:

Seien a_1, a_2 Elemente aus \mathcal{Q}' , und sei $\mathcal{R}_{0\alpha}$ ein Element in Γ . Des weiteren möge gelten:

- (i) Für alle Elemente b_0 aus $\mathcal{R}_{0\alpha}$ liegen die Paare (a_1, b_0) und (a_2, b_0) in der Menge C .
- (ii) Für alle Elemente f aus \mathcal{F}_Λ gilt $\bar{\mu}(a_1, f) = \bar{\mu}(a_2, f)$.

Dann ergibt sich $\bar{\mu}(a_1, f) = \bar{\mu}(a_2, f)$ für alle Elemente f aus \mathcal{F} , für die die Paare $(a_1, f), (a_2, f)$ zu \mathcal{C} gehören.

Zunächst nur zugunsten einer kompakteren Formulierung werden die folgenden Relationen eingeführt:

Definition 6.1.2

Für alle Elemente a_1, a_2 in \mathcal{Q}' und alle Elemente f_1, f_2 in \mathcal{F} wird festgelegt:

- (i) $a_1 \sim a_2 : \iff [\forall f \in \mathcal{F} : [(a_1, f), (a_2, f) \in \mathcal{C}] \implies \bar{\mu}(a_1, f) = \bar{\mu}(a_2, f)],$
- (ii) $f_1 \approx f_2 : \iff [\forall a \in \mathcal{Q}' : [(a, f_1), (a, f_2) \in \mathcal{C}] \implies \bar{\mu}(a, f_1) = \bar{\mu}(a, f_2)].$

Im Verlaufe des Abschnitts wird sich aber noch herausstellen, daß den Relationen \sim und \approx eine besondere Relevanz zukommt.

Läßt man, wie bei der Formulierung von APS 5.1.2, die Verknüpfung mit der Raum-Zeit-Struktur weg, und geht man ersatzweise einfach zu abstrakten Mengen über, motiviert die oben formulierte Aussage zusammen mit dem Axiom APS 5.1.2 das folgende Axiom APS 5.1.3, das dem gleichnamigen Axiom in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 1, S. 44 entspricht:

APS 5.1.3 Es existiert ein bezüglich der Mengeninklusion nach unten gerichtetes nicht-leeres Mengensystem Γ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) (a) Γ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathcal{R}'_0) \setminus \{\emptyset\}$.
 - (b) Zu jedem Element a aus \mathcal{Q}' existiert ein Element Λ in Γ , so daß das Paar (a, f) für alle Elemente f aus \mathcal{F}_Λ in der Menge \mathcal{C} liegt.
 - (ii) Bezeichne mit a_1, a_2 Elemente aus \mathcal{Q}' , und bezeichne mit Λ ein Element aus Γ , so daß für alle b_0 aus Λ die Paare (a_1, f) und (a_2, f) zu \mathcal{C} gehören. Gilt nun für beliebige Elemente f aus \mathcal{F}_Λ die Identität $\bar{\mu}(a_1, f) = \bar{\mu}(a_2, f)$, dann ergibt sich das Zutreffen der Relation $a_1 \sim a_2$.
-

Dabei wird mit Punkt (i) das Axiom APS 5.1.2 wiederholt, so daß sich APS 5.1.2 insbesondere als Folge von APS 5.1.3 darstellt.

Aus der Definition 6.1.2 ergibt sich sofort, daß es sich bei \sim auf \mathcal{Q}' und bei \approx auf \mathcal{F} um reflexive und symmetrische Relationen handelt. Sowohl \sim als auch \approx besitzen aber in einer allgemeinen Präparier-Registrier-Struktur im Sinne von Abschnitt 5.8, das heißt nur auf Basis der Axiome AZ 1 bis APS 8.2, nicht die Eigenschaft der Transitivität. Somit liegen im allgemeinen weder mit \sim noch mit \approx Äquivalenzrelationen vor. Gilt allerdings die Aussage APS 5.1.3, wie sie oben für den Fall der Quantenmechanik motiviert wurde, dann erhält man gemäß Th. 1.3. in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 1, S. 45 zumindest:

Lemma 6.1.3 *Die Relation \sim ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis:

Es bleibt, die Transitivität zu zeigen. Dafür wähle $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{Q}'$ mit $a_1 \sim a_2$ und $a_2 \sim a_3$. Mit APS 5.1.3 (i) folgt sofort aufgrund der Gerichtetheit von Γ , daß es ein $\Lambda \in \Gamma$ so gibt, daß für alle $b_0 \in \Lambda$ gilt:

$$(a_1, b_0), (a_2, b_0), (a_3, b_0) \in C.$$

Wegen $a_1 \sim a_2$ und $a_2 \sim a_3$ gilt damit für alle $f \in \mathcal{F}_\Lambda$:

$$\bar{\mu}(a_1, f) = \bar{\mu}(a_2, f) \text{ und } \bar{\mu}(a_2, f) = \bar{\mu}(a_3, f).$$

Damit erhält man für jedes $f \in \mathcal{F}_\Lambda$ auch $\bar{\mu}(a_1, f) = \bar{\mu}(a_3, f)$, woraus sich mit APS 5.1.3 (ii) die Relation $a_1 \sim a_3$ ergibt. ■

Um nun auch die Transitivität von \approx beweisen zu können, benötigt man noch weitere Eigenschaften in der mathematischen Theorie, die durch ein weiteres Axiom bereitgestellt werden sollen.

Dafür wird zunächst die physikalische Grundaussage formuliert, die dann in ein Axiom übersetzt werden wird.

Wenn ein nicht-leeres Präparierverfahren a und eine nicht-leere Registriermethode b_0 nicht miteinander kombinierbar sind, dann kann man ein anderes nicht-leeres Präparierverfahren a' mit den folgenden Eigenschaften finden:

- (i) a' läßt sich von a nicht durch Registriermethoden unterscheiden, die sowohl mit a als auch mit a' kombinierbar sind.
- (ii) a' beginnt in bezug auf b_0 so viel früher, und a' ist räumlich so weit von b_0 entfernt, daß die Kombinierbarkeitsbedingung für a' und b_0 erfüllt wird.

Es stellt sich wie immer bei solchen Forderungen die Frage einer geeigneten Motivation. Dafür sollen nur einige Bemerkungen gemacht werden. Man könnte sich die angesprochene Situation am schon häufiger zitierten Beispiel Beschleunigungsapparatur mit Nebelkammer verbildlichen. Man nehme an, daß die beiden Apparate nicht kombinierbar sind. Nun wäre es zum Beispiel denkbar, eine ganz ähnlich gebaute

Beschleunigungsapparatur als Präparierverfahren a' zu verwenden, die man mit einem geeigneten Blendensystem versehe, das die Wirkung räumlich so stark bündelt, daß die so gewonnene neue Beschleunigungsapparatur bei allen mit beiden Präparierverfahren kombinierbaren Registriermethoden dieselben Reaktionen auslöst wie die anfängliche Beschleunigungsapparatur, obwohl sie räumlich weiter entfernt steht. Wenn man beispielsweise die Beschleunigungsapparatur nur zu spät verwendet und wenn somit die Präparation im Verhältnis zum Beginn des Registriervorganges mit der Nebelkammer zu spät endet, ist es sicher denkbar, daß man mit einer baugleichen Beschleunigungsapparatur, die nur geeignet früher gestartet wird und die entsprechend der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung weit genug entfernt ist, bei allen Registriermethoden, die mit der anfänglichen Beschleunigungsapparatur kombinierbar sind, dieselben relativen Häufigkeiten erzielt.

Man kann die obigen Überlegungen in völlig analoger Weise auch von der Präparierung auf die Registrierkomponente verlagern.

Wenn ein nicht-leeres Präparierverfahren a und eine nicht-leere Registriermethode b_0 nicht miteinander kombinierbar sind, dann kann man eine andere nicht-leere Registriermethode b'_0 mit den folgenden Eigenschaften finden:

- (i) b'_0 läßt sich von b_0 nicht durch Präparierverfahren unterscheiden, die sowohl mit b_0 als auch mit b'_0 kombinierbar sind.
- (ii) b'_0 beginnt in bezug auf a so viel später, und b'_0 ist räumlich so weit von b_0 entfernt, daß die Kombinierbarkeitsbedingung für b'_0 und a erfüllt wird.

Nach der physikalischen Formulierung der Forderungen und nach einigen intuitiven Hinweisen zu ihrer Motivation bedarf es nun der Übersetzung in die mathematische Theorie. Die Übersetzung fällt aber mit Hilfe der Relationen aus Definition 6.1.2 leicht. Für zwei Präparierverfahren a, a' entspricht die Gültigkeit der Relation $a \sim a'$ gerade dem Umstand, daß sie nicht durch Registriermethoden unterschieden werden können, die sowohl mit a als auch mit a' kombinierbar sind. Analoges gilt auch für die Registriermethoden und die Relation \approx . Damit kommt man zu der Forderung des folgenden Axioms, wie es in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 1, S. 45 vorgestellt wird:

APS 5.1.4* Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle Elemente b_0 aus \mathcal{R}'_0 und alle Elemente a aus \mathcal{Q}' existiert ein Element a' in \mathcal{Q}' derart, daß zum einen das Paar (a', b_0) in C liegt und daß zum anderen die Relation $a \sim a'$ gilt.
 - (ii) Für alle Elemente a aus \mathcal{Q}' und alle Elemente f aus \mathcal{F} existiert ein Element f' in \mathcal{F} derart, daß zum einen das Paar (a, f') in \mathcal{C} liegt und daß zum anderen die Relation $f \approx f'$ gilt.
-

Das Axiom APS 5.1.4 ist Teil der Ludwigschen Axiomatik der Quantenmechanik, denn außer an der im Vorfeld von APS 5.1.4 zitierten Stelle präsentiert Ludwig das Axiom insbesondere auch in [Lud85a], Kapitel III, §5.1, S. 77. Es soll hier allerdings über APS 5.1.4 hinausgegangen werden. Deshalb wurde hier das Axiom mit einem * versehen.

Das im folgenden dargestellte, in bezug auf APS 5.1.4 etwas erweiterte Axiom wird es in Abschnitt 6.2 erlauben, einfachere Axiome zur Konvexität zu formulieren.

Zur Erläuterung des weiterführenden Axioms gehe man nun von zwei nicht-leeren Registriermethoden b_{01}, b_{02} und einem nicht-leeren Präparierverfahren a aus. Dann kann man nach der oben formulierten Forderung ein nicht-leeres Präparierverfahren a' so angeben, daß a' mit b_{01} kombinierbar ist und daß die Relation $a \sim a'$ gilt. Genauso kann man ein Präparierverfahren a'' finden, daß a'' mit b_{02} kombinierbar ist und daß die Relation $a \sim a''$ gilt. Nun weiß man, daß \sim die Eigenschaft der Transitivität besitzt, so daß man von der Gültigkeit der Relationskette $a \sim a' \sim a''$ ausgehen kann. Auf Basis der bisherigen mathematischen Struktur kann man aber nicht darauf schließen, daß auch eines der Paare (a'', b_{01}) und (a', b_{02}) zu C gehört. Das heißt, APS 5.1.4 liefert nicht die Existenz eines „gemeinsamen“ Präparierverfahrens, das sowohl mit b_{01} als auch b_{02} kombinierbar ist und das bezüglich \sim mit a äquivalent ist. Genau eine solche Forderung soll nun aber aufgestellt werden. Sie liegt nicht fern, wenn man die oben erläuterten intuitiven Hinweise wiederum verwendet. Man müßte dabei etwa die Beschleunigungsapparatur mit einem anderen Blendensystem derart versehen, daß einerseits die so gebildete gesamte Apparatur \bar{a} in hinreichender räumlicher und zeitlicher Entfernung sowohl zu b_{01} als auch zu b_{02} steht und daß andererseits \bar{a} bei den mit a und \bar{a} kombinierbaren Registriermethoden dieselben relativen Häufigkeiten hervorruft wie a . Wie auch bei APS 5.1.4 wird eine analoge Aussage für die andere Komponente gefordert, so daß in die hier aufgebaute Axiomatik das folgende Postulat aufgenommen wird:

APS 5.1.4A Es gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Für alle Elemente b_{01}, b_{02} aus \mathcal{R}'_0 und alle Elemente a aus \mathcal{Q}' existiert ein Element a' in \mathcal{Q}' derart, daß zum einen die Paare (a', b_{01}) und (a', b_{02}) in C liegen und daß zum anderen die Relation $a \sim a'$ gilt.
 - (ii) Für alle Elemente a_1, a_2 aus \mathcal{Q}' und alle Elemente f aus \mathcal{F} existiert ein Element f' in \mathcal{F} derart, daß zum einen die Paare (a_1, f') und (a_2, f') in \mathcal{C} liegen und daß zum anderen die Relation $f \approx f'$ gilt.
-

Das Axiom APS 5.1.4A wurde auch von C. Ott in [Ott02] vorgeschlagen. Ganz offensichtlich impliziert APS 5.1.4A das vorhergehende Axiom APS 5.1.4. Im weiteren erlaubt es APS 5.1.4A, eine zu Lemma 6.1.3 analoge Aussage zu formulieren:

Lemma 6.1.4 *Die Relation \approx ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis:

Auch hier bleibt es, die Transitivität zu zeigen. Wähle $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}$ mit $f_1 \approx f_2$ und $f_2 \approx f_3$. Es gilt also für alle $a \in \mathcal{Q}'$

$$\bar{\mu}(a, f_1) = \bar{\mu}(a, f_2), \quad (6.1)$$

wenn (a, f_1) und (a, f_2) in \mathcal{C} liegen. Ebenso gilt für alle $a \in \mathcal{Q}'$

$$\bar{\mu}(a, f_2) = \bar{\mu}(a, f_3), \quad (6.2)$$

wenn (a, f_2) und (a, f_3) zu \mathcal{C} gehören.

Sei nun $a \in \mathcal{Q}'$ mit $(a, f_1) \in \mathcal{C}$ und $(a, f_3) \in \mathcal{C}$. Unter Verwendung von APS 5.1.4A (i) und der Darstellungen $f_i = (b_{0i}, b_i)$ für $i = 1, 2, 3$ gilt

für b_{01}, b_{02} und a :

Es existiert ein $a' \in \mathcal{Q}'$, so daß $a \sim a'$, $(a', b_{01}), (a', b_{02}) \in C$ gilt. Mit (6.1) folgt weiter:

$$\bar{\mu}(a', f_1) = \bar{\mu}(a', f_2), \quad (6.3)$$

und für b_{02}, b_{03} und a :

Es existiert ein $a'' \in \mathcal{Q}'$, so daß $a \sim a''$, $(a'', b_{02}), (a'', b_{03}) \in C$ und mit (6.2) gilt:

$$\bar{\mu}(a'', f_2) = \bar{\mu}(a'', f_3). \quad (6.4)$$

Da \sim mit Lemma 6.1.3 transitiv ist, gilt $a' \sim a''$. Damit folgt nun für alle f aus \mathcal{F} mit $(a', f), (a'', f) \in \mathcal{C}$:

$$\bar{\mu}(a', f) = \bar{\mu}(a'', f). \quad (6.5)$$

$a \sim a'$, (6.3), (6.5), (6.4) und $a'' \sim a$ liefern die Behauptung, denn es gilt damit:

$$\bar{\mu}(a, f_1) \stackrel{a \sim a'}{=} \bar{\mu}(a', f_1) \stackrel{(6.3)}{=} \bar{\mu}(a', f_2) \stackrel{(6.5)}{=} \bar{\mu}(a'', f_2) \stackrel{(6.4)}{=} \bar{\mu}(a'', f_3) \stackrel{a'' \sim a}{=} \bar{\mu}(a, f_3).$$

■

Man kann das Fazit ziehen, daß die Axiome APS 5.1.3 und APS 5.1.4A die Relationen \sim und \approx zu Äquivalenzrelationen machen. Es erscheint daher nützlich, für die Mengen der Äquivalenzklassen und die kanonischen Abbildungen in selbige eigene Namen einzuführen.

Definition 6.1.5

Mit \mathcal{K} wird die Quotientenmenge von \mathcal{Q}' bezüglich \sim bezeichnet. Die Quotientenmenge von \mathcal{F} bezüglich \approx heißt \mathcal{L} . Bei den Elementen von \mathcal{K} soll von **Zuständen** oder **Gesamtheiten** gesprochen werden, während die Elemente von \mathcal{L} als **Effekte** bezeichnet werden sollen. Die kanonische Abbildung von \mathcal{Q}' nach \mathcal{K} erhält den Namen φ , und die kanonische Abbildung von \mathcal{F} nach \mathcal{L} erhält den Namen ψ .

Bemerkungen:

- (i) Es soll für die korrekte Schreibweise $\psi((b_0, b))$ für ein Element (b_0, b) aus \mathcal{F} in Zukunft vereinfachend $\psi(b_0, b)$ geschrieben werden.
- (ii) Manchmal wird zur Unterscheidung des oben eingeführten Zustandsbegriffes vom herkömmlichen, im Rahmen klassischer Theorien verwandten Zustandbegriff auch von einem statistischen Zustand gesprochen. Bezüglich einer genauen Analyse der Unterschiede siehe [Lud90a].

Wie bei den Ja-Nein-Experimenten in Abschnitt 5.7 muß betont werden, daß im Zuge des hier verfolgten Zuganges den Ausdrücken Zustand, Gesamtheit und Effekt eine realistisch fundierte Bedeutung zugeordnet wird. Es handelt sich dabei um Klassen von Präparier- und Effektverfahren, die wiederum im Verlauf der Betrachtungen des Kapitels 5 realistisch begründet wurden. Mit Definition 6.1.5 wurde ein wichtiger Schritt durchgeführt. Denn eine Definition läßt keinen Raum mehr, um einen Begriff durch weitere „Vorstellungen“ zu verwässern.

Zur Unterscheidung von alternativen Zugängen muß betont werden, daß hier den Zuständen und Effekten keine elementare Bedeutung in dem Sinne zukommt, daß sie

die zentralen Elemente des Vergleiches zwischen Experiment und Theorie darstellen. Dafür sind die Präparierverfahren, Registriermethoden und Registrierprozeduren zu verwenden. Bei Zuständen und Effekten handelt es sich um Konzepte, die im Sinne innerer Terme auf den Ausgangsbildmengen aufbauen und die sich im weiteren zur Analyse der Strukturen der Quantenmechanik als besonders geeignet herausstellen werden. Zum Begriff des inneren Termes wird an Abschnitt 4.4 erinnert.

Mit den Bezeichnungen aus der obigen Definition läßt sich APS 5.1.4A in eine für spätere Betrachtungen noch günstigere Form bringen.

Lemma 6.1.6 *Es gelten die folgenden beiden Äquivalenzaussagen:*

(i) *Es sind äquivalent:*

(a) *APS 5.1.4A (i)*

(b) *Für beliebige Elemente b_{01}, b_{02} in \mathcal{R}'_0 und alle Elemente w aus \mathcal{K} existiert ein Element a' in w , so daß die Paare (a, b_{01}) und (a, b_{02}) zu der Menge \mathcal{C} gehören.*

(ii) *Es sind ebenfalls äquivalent:*

(a) *APS 5.1.4A (ii)*

(b) *Für beliebige Elemente a_1, a_2 in \mathcal{Q}' und alle Elemente g in \mathcal{L} existiert ein Element f' in g , so daß die Paare (a_1, f') und (a_2, f') in \mathcal{C} liegen.*

Die Äquivalenzklassenbildung erlaubt es, ausgehend von $\bar{\mu}$ die folgende Abbildung auf den Quotientenmengen zu erklären:

Definition 6.1.7

$$\mu : \mathcal{K} \times \mathcal{L} \longrightarrow [0, 1], \quad (w, g) \longmapsto \mu(w, g) := \bar{\mu}(a, f) \quad \begin{array}{l} \text{für ein beliebiges } a \in w \\ \text{und ein beliebiges } f \in g \\ \text{mit } (a, f) \in \mathcal{C}. \end{array}$$

Die Wohldefiniertheit von μ wird durch das nachfolgende Lemma garantiert, dessen erster Punkt Th. 1.3. in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 1, S. 45 wiedergibt. Man bemerke insbesondere, daß der Definitionsbereich von μ durch $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ gegeben ist.

Lemma 6.1.8

(i) *Für alle Elemente w in \mathcal{K} und alle Elemente g in \mathcal{L} existieren Elemente a in w und f in g , so daß das Paar (a, f) in \mathcal{C} liegt.*

- (ii) Sei w ein Element aus \mathcal{K} , und sei g ein Element aus \mathcal{L} . Seien ferner a_1, a_2 zwei Elemente aus w und f_1, f_2 zwei Elemente aus g . Wenn die Paare (a_1, f_1) und (a_2, f_2) zu \mathcal{C} gehören, dann gilt

$$\bar{\mu}(a_1, f_1) = \bar{\mu}(a_2, f_2).$$

- (iii) Für alle Elemente w aus \mathcal{K} und für alle Elemente g aus \mathcal{L} gilt:

$$0 \leq \mu(w, g) \leq 1.$$

Beweis:

zu (i): Seien $w \in \mathcal{K}, g \in \mathcal{L}$, dann existiert ein $f = (b_0, b) \in g$. Mit APS 5.1.4A (i) existiert ein $a \in w$ mit $(a, b_0) \in \mathcal{C}$. Also existiert ein $(a, f) \in \mathcal{C}$.

zu (ii): Wähle $w \in \mathcal{K}, g \in \mathcal{L}, a_1, a_2 \in w, f_1, f_2 \in g$ mit $(a_1, f_1), (a_2, f_2) \in \mathcal{F}$. Dann folgt mit APS 5.1.4A (i), daß es ein $a \in w$ mit $(a, f_1), (a, f_2) \in \mathcal{C}$ gibt. Die drei Relationen $a_1 \sim a, f_1 \approx f_2$ und $a \sim a_2$ liefern dann

$$\bar{\mu}(a_1, f_1) = \bar{\mu}(a, f_1) = \bar{\mu}(a, f_2) = \bar{\mu}(a_2, f_2).$$

zu (iii): Die Aussage ist aufgrund der Konstruktion von μ trivial. ■

Anschaulich beschreibt $\mu(w, g)$ für $w \in \mathcal{K}$ und $g \in \mathcal{L}$ die relative Häufigkeit aller Ja-Nein-Experimente, deren Präparierverfahren zu w und deren Effektverfahren zu g gehört. Abkürzend werden dafür in Zukunft Formulierungen wie „Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Effektes g im Zustand w “ verwendet. Es sei aber betont, daß damit stets der zuvor genannte Zusammenhang gemeint ist.

Der nächste Satz, der sich ohne Beweis zum Teil als Th. 1.1. in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 1, S. 43 und vollständig als T 5.1.4 in [Lud85a], Kapitel III, §5.1, S. 78 findet, stellt die ersten wichtigen Eigenschaften für μ zusammen.

Satz 6.1.9 (zentraler Satz über die Eigenschaften von μ) *Es gilt:*

- (i) Für alle Elemente w aus \mathcal{K} , für alle Elemente g aus \mathcal{L} , für alle Elemente a aus w und für alle Elemente f aus g gilt $\mu(w, g) = \bar{\mu}(a, f)$, wenn das Paar (a, f) zu \mathcal{C} gehört.
- (ii) Zwei Elemente w_1, w_2 aus \mathcal{K} sind genau dann identisch, wenn für alle Elemente g aus \mathcal{L} die Identität $\mu(w_1, g) = \mu(w_2, g)$ gilt.

- (iii) Zwei Elemente g_1, g_2 aus \mathcal{L} sind genau dann identisch, wenn für alle Elemente w aus \mathcal{K} die Identität $\mu(w, g_1) = \mu(w, g_2)$ gilt.
- (iv) Es existiert genau ein Element g_0 in \mathcal{L} , so daß für alle w aus \mathcal{K} die Relation $\mu(w, g_0) = 0$ gilt.
- (v) Es existiert genau ein Element g_1 in \mathcal{L} , so daß für alle w aus \mathcal{K} die Relation $\mu(w, g_1) = 1$ gilt.
- (vi) Zu jedem Element g in \mathcal{L} existiert genau ein Element g' in \mathcal{L} , so daß

$$\mu(w, g) + \mu(w, g') = 1$$

für alle w aus \mathcal{K} gilt.

Beweis:

zu (i): Die Aussage folgt sofort aus der Definition von μ .

zu (ii) und (iii): (iii) läuft völlig analog zu (ii). Deshalb soll hier nur Punkt (ii) gezeigt werden. Die eine Richtung folgt aus der bereits bewiesenen Abbildungseigenschaft von μ . Es bleibt, die andere Richtung zu zeigen.

Seien dafür $w_1, w_2 \in \mathcal{K}$ gewählt, und gelte $\mu(w_1, g) = \mu(w_2, g)$ für alle $g \in \mathcal{L}$. Seien ferner $a_1 \in w_1, a_2 \in w_2$ und $f \in \mathcal{F}$ so gewählt, daß $(a, f_1), (a, f_2) \in \mathcal{C}$ gilt. Dann folgt mit (i):

$$\bar{\mu}(a_1, f) = \mu(\varphi(a_1), \psi(f)) = \mu(w_1, \psi(f)) = \mu(w_2, \psi(f)) = \bar{\mu}(a_2, f).$$

Also sind a_1 und a_2 äquivalent bezüglich \sim . Da aber Äquivalenzklassen entweder identisch oder elementfremd sind, bedeutet das die Identität von w_1 und w_2 .

zu (iv): Sei $b_0 \in \mathcal{R}'_0$, dann gehört (b_0, \emptyset) zu \mathcal{F} . Offenbar liegt $g_0 := \psi(b_0, \emptyset)$ in \mathcal{L} . Sei $w \in \mathcal{K}$, dann existiert mit APS 5.1.4A (i) ein $a \in w$ mit $(a, b_0) \in \mathcal{C}$. Das heißt, es gilt $\mu(w, g_0) = \bar{\mu}(a, (b_0, \emptyset)) = 0$. Die Eindeutigkeit folgt mit obigem Punkt (iii).

zu (v): Der Beweis läuft analog zum Beweis von (iv) nur mit der Definition $g_1 := \psi(b_0, b_0)$ für ein beliebiges $b_0 \in \mathcal{R}'_0$.

zu (vi): Sei $g \in \mathcal{L}$, dann existiert ein $f = (b_0, b) \in \mathcal{F}$ mit $\psi(f) = g$. Da mit APS 2 und APS 4.1 durch \mathcal{R} eine Menge von Auswahlverfahren mit $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$ vorliegt, liegt auch $b_0 \setminus b$ in \mathcal{R} . Damit gehört $(b_0, b_0 \setminus b)$ zu \mathcal{F} . Man setze

$g' := \psi(b_0, b_0 \setminus b)$. Mit APS 5.1.4A (i) existiert nun zu jedem $w \in \mathcal{K}$ ein $a \in w$, so daß $(a, b_0) \in C$ gilt. Also erhält man

$$\mu(w, g) + \mu(w, g') = \bar{\mu}(a, (b_0, b)) + \bar{\mu}(a, (b_0, b_0 \setminus b)) = 1.$$

Dabei ergibt sich das letzte Gleichheitszeichen vermittelt APS 6A (i). Die Eindeutigkeit von g' liefert obiger Punkt (iii). ■

Zu Beginn des Kapitels wurde im Sinne einer Vorschau erläutert, daß ein gewisser Grad von Unabhängigkeit der quantenmechanischen Wechselwirkung vom apparativen Kontext seinen Ausdruck in der Möglichkeit zur Klassenbildung findet. Auf der Basis der im bisherigen Verlauf des Abschnitts angestellten Überlegungen kann man das konkretisieren. Dazu soll deutlich gemacht werden, wie die Überlegungen zum Grad der Autonomie der Wechselwirkungsträger mit der Möglichkeit der Klassenbildung zusammenhängen.

Man bedenke zunächst, daß zwei Präparierverfahren derselben Klasse nicht anhand der Wirkung, die sie auf mit beiden kombinierbare Registriermethoden ausüben, unterschieden werden können. Um zwei Präparierverfahren gegeneinander abzugrenzen, müßte man schon die apparativen Aufbauten oder die raum-zeitliche Orientierung zueinander direkt untersuchen. Also kommt allen Präparierverfahren derselben Klasse sozusagen dasselbe Wirkmuster bezüglich der Registriermethoden in Form der relativen Häufigkeiten zu, wenn man davon absieht, daß nicht alle Präparierverfahren einer Klasse mit denselben Registriermethoden kombinierbar sind. Letzteres stellt aber keine besondere Einschränkung dar, denn, wenn zwei Präparierverfahren derselben Klasse mit einer Registriermethode kombinierbar sind, dann liefern sie dieselben relativen Häufigkeiten. Man hat folglich eine Unabhängigkeit des Wirkmusters vom konkreten apparativen Aufbau eines Präparierverfahrens, solange man in derselben Klasse bleibt. Die relative Häufigkeit mit der ein Effektverfahren auf ein Präparierverfahren reagiert, hängt mithin neben der Frage nach der Kombinierbarkeit lediglich von der Klasse ab, zu der das Präparierverfahren gehört. Dieselben Überlegungen kann man auch für die Effektseite anstellen. Auch hier kommt jedem Effekt gewissermaßen sein eigenes Reaktionsmuster auf die Präparierverfahren und damit auch auf die Zustände zu. Das stellt einen gewissen Grad an Unabhängigkeit der quantenmechanischen Wechselwirkung von den sie produzierenden und manifestierenden apparativen Aufbauten dar, der genau durch die Möglichkeit zur Klassenbildung ausgedrückt wird. So scheint es im Nachhinein auch gerechtfertigt, die jeweiligen Klassen als Zustände und als Effekte zu bezeichnen. Wählt man ein Präparierverfahren aus einer bestimmten Klasse, dann legt man so bereits das Spektrum der Wirkmöglichkeiten auf Registriermethoden und damit auf die Effekte fest. Man

könnte daher mit großer Vorsicht davon sprechen, daß man die quantenmechanische Wechselwirkung in einem gewissen Zustand präpariert hat. Für den Fall der Effekte gilt wiederum eine ähnliche Überlegung, denn durch die Wahl eines Effektverfahrens aus einer bestimmten Klasse legt man ebenfalls für jedes Präparierverfahren und damit jeden Zustand fest, welche Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Effektes an der betrachteten Apparatur besteht. Insofern kann man für einen Zustand w und einen Effekt g bei $\mu(w, g)$ von der Wahrscheinlichkeit sprechen, im Zustand w den Effekt g auszulösen.

Es sei hier noch ein wichtiger Punkt erwähnt. Im Rahmen der Kombinierbarkeitsbedingung wurde gefordert, daß keine Informationen über die Prozesse während der Präparierens und des Registrierens gesammelt werden. Das heißt, man beschränkt den Grundbereich. Somit beschränkt man natürlich auch den Anwendungsbereich der entwickelten physikalischen Theorie. Allerdings gewinnt man auf der anderen Seite die Möglichkeit zur Klassenbildung entsprechend der Möglichkeit zum Ausblenden allzu vieler konkreter experimenteller Details der apparativen Aufbauten. Der Preis ist aber offensichtlich, daß man nichts über die Prozesse zur Gewinnung und Manifestation der Wechselwirkung sagen kann. Versteht man also unter Quantenmechanik eine physikalische Theorie, die insbesondere den bisher dargelegten Strukturen entspricht, und versteht man unter „Meßprozeß“ den Prozeß, der im Zusammenhang mit dem Registriervorgang im Registrierapparat abläuft, dann ist von vornherein die Möglichkeit ausgeschlossen, mit der Quantenmechanik den sogenannten Meßprozeß zu beschreiben.

Auf Basis der Axiome APS 5.1.3 und APS 5.1.4A kann man die vorgestellte Klasseneinteilung auf \mathcal{Q}' und \mathcal{F} durchführen. Im weiteren Verlauf der hier formulierten Theorie wird die konkrete Formulierung der Axiome APS 5.1.3 und 5.1.4A nur noch an wenigen Stellen benötigt, wie etwa bei den Beweisen von Satz 6.2.3, Lemma 9.6.2 und Satz 11.1.5. Es kommt zumeist nur auf die Möglichkeit zur Klassenbildung bezüglich \sim und \approx und die Möglichkeit zur wohldefinierten Begründung der Abbildung μ auf den Quotientenmengen im Sinne von Definition 6.1.7 an. Mathematisch würde es also für die meisten Betrachtungen ausreichen, ein Axiom zu verwenden, in dem nur die Transitivität von \sim und \approx einerseits und der Inhalt von Lemma 6.1.8 (i) und (ii) andererseits gefordert würde. Derartige Forderungen sind aber physikalisch nicht einfach einzusehen, so daß die Axiome APS 5.1.3 und 5.1.4A vorgezogen werden. Die Möglichkeit zur Klassenbildung mit Hilfe der Relationen \sim und \approx und der dadurch ermöglichte Übergang zu Zuständen, Effekten und μ erschließt einen Teil der Theorie, der erheblich einfacher und übersichtlicher strukturiert ist als die gesamte Theorie mit Ereignissen und Verfahren. Das liegt in erster Linie daran, daß man kein Kombinierbarkeitsproblem zwischen Zuständen und Effekten berück-

sichtigen muß, denn Lemma 6.1.8 garantiert, daß man jedem Paar von Zuständen und Effekten in physikalisch wohldefinierter Weise, eine Wahrscheinlichkeit zuordnen kann. In der gesamten Theorie muß man, wie oben geschehen, etwas aufwendigere Betrachtungen darüber anstellen, was unter Kombinierbarkeit zu verstehen ist und wie man Kombinierbarkeitsüberlegungen geeignet mathematisch übersetzt.

Des weiteren ist der Umstand zu würdigen, daß mit Satz 6.1.9 (ii) und (iii) Kriterien für die Identität von Zuständen einerseits und Effekten andererseits zur Verfügung stehen. Ein solch einfaches Kriterium hat man auf dem Niveau der Präparier- und Registrierstrukturen nicht vorliegen. Insbesondere muß man hierbei erwähnen, daß offenbar aus der Zugehörigkeit zweier Präparierverfahren zu einer Klasse noch nicht die Identität der Präparierverfahren folgt. Es reicht auf dem Niveau der Präparierverfahren nicht aus, daß das statistische Verhalten bezüglich aller mit beiden kombinierbaren Registriermethoden dasselbe ist. Bei einem Übergang von einer Theorie der Verfahren zu einer Theorie der Zustände und Effekte werden eben viele Informationen aufgegeben. Es stellt sich die Frage, ob es sich dabei um relevante Informationen handelt oder ob derartige Informationen Details der Realität in die Theorie einführen, die für die Quantenmechanik gar nicht von Bedeutung sind. Anhand des sogenannten Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxons wird sich in Abschnitt 13.3 herausstellen, daß die Verfahren im Vergleich zu den aus ihnen gewonnenen Klassen durchaus relevante Informationen bergen. Dennoch stellt der Teil der Theorie, der durch Zustände und Effekte erreicht wird, einen wichtigen Teil dar, der im Laufe der folgenden Kapitel noch ausführlich diskutiert werden wird. Trotz der besonderen Bedeutung, die Zuständen und Effekten innerhalb der Quantenmechanik zukommt, darf ihr Ursprung aus den Präparier- und Effektverfahren nicht vergessen werden. Die Punkte (iv) - (vi) aus Satz 6.1.9 werden sich in den nachfolgenden Kapiteln noch als geeignete Ansatzpunkte für die Weiterentwicklung der Theorie herausstellen. Insbesondere werden sie sich zur Begründung von Verbandseigenschaften eignen.

6.2 Rationale Konvexität

Durch die Definition 5.4.3 wurde erklärt, was bei Auswahlverfahren unter Mischungen und disjunkten Zerlegungen zu verstehen ist. Also stehen die Begriffe für Präparierverfahren, Registriermethoden und Registrierprozeduren zur Verfügung. Es stellt sich jetzt in natürlicher Weise die Frage nach analogen Bezeichnungen für die Mengen der Zustände und Effekte. Um geeignete sprachliche Instrumente für den Inhalt des folgenden Abschnitts, aber auch für weiterführende Betrachtungen insbesonde-

re in Abschnitt 7.2 zur Verfügung zu haben, werden die folgenden, zunächst noch abstrakten Konvexitätsbegriffe eingeführt.

Definition 6.2.1

Sei X eine Menge, und sei I eine Indexmenge beliebiger Mächtigkeit. Bezeichne ferner $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung.

- (i) Für endliche Familien $(x_j)_{j=1}^m$ von Elementen der Menge X , und endliche Familien von Zahlen $(\alpha_j)_{j=1}^m$ des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ heißt ein Element x aus X eine $(f_i)_{i \in I}$ -**Konvexkombination** der Familie $(x_j)_{j=1}^m$ bezüglich der **Gewichte** $(\alpha_j)_{j=1}^m$, wenn für alle $i \in I$ gilt:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f_i(x_j).$$

- (ii) Für eine abzählbare Familie $(x_j)_{j=1}^\infty$ von Elementen der Menge X und für einen Satz $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ von Zahlen des reellen Zahl $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$ wird ein Element x der Menge X als σ - $(f_i)_{i \in I}$ -**Konvexkombination der Familie** $(x_j)_{j=1}^\infty$ **bezüglich der Gewichte** $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ bezeichnet, wenn für jedes $i \in I$ gilt:

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j f_i(x_j).$$

- (iii) Eine Teilmenge A von X heißt **reell** (oder **rational**) $(f_i)_{i \in I}$ -**konvex**, wenn es zu jedem endlichen Satz $(x_j)_{j=1}^m$ aus der Menge A und jedem endlichen Satz $(\alpha_j)_{j=1}^m$ von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ (oder des rationalen Intervalls $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$) mit $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ genau eine $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexkombination x der Familie $(x_j)_{j=1}^m$ bezüglich der Gewichte $(\alpha_j)_{j=1}^m$ in A gibt.

Eine Teilmenge A der Menge X heißt **reell** (oder **rational**) σ - $(f_i)_{i \in I}$ -**konvex**, wenn sie reell (oder rational) konvex ist und wenn zusätzlich zu jedem abzählbaren Satz $(x_j)_{j=1}^\infty$ von Elementen der Menge A und jedem Satz $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ (oder des rationalen Intervalls $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$) mit $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$ genau eine σ - $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexkombination x der Familie $(x_j)_{j=1}^\infty$ bezüglich der Gewichte $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ in A existiert.

Bemerkung:

Beim zweiten Teil von Punkt (iii) der Definition beachte man die Forderung nach Eindeutigkeit. Für den allgemeinen Fall von $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexkombinationen kann es

vorkommen, daß zum selben Satz von Elementen und Gewichten auch zwei verschiedene $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexkombinationen existieren, so daß dann für alle $i \in I$ insbesondere die Identität $f_i(x') = f_i(x)$ gilt. Satz A.3.3 offenbart, daß eine solche Problematik nur für Nicht-Hausdorffräume Relevanz besitzt. Wie sich noch zeigen wird, liegen in den physikalischen Fällen, die im Verlaufe der vorliegenden Arbeit betrachtet werden, in der Regel Hausdorffräume vor, so daß die Existenz einer $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexkombination auch mit ihrer Eindeutigkeit einhergeht. Zu den σ -Konvexkombinationen sei noch angemerkt, daß die vorkommenden Reihen im Falle ihrer Konvergenz aufgrund der Voraussetzungen auch unbedingt konvergieren. Das heißt, daß die Reihen auch unabhängig von der Reihenfolge der Glieder stets gegen denselben Grenzwert konvergieren.

Für den vorliegenden physikalischen Fall bedeutet die abstrakte Begriffsbildung aus Definition 6.2.1 die naheliegende Bezeichnungsweise:

- (i) Bezeichnet $(w_i)_{i=1}^n$ eine Familie in \mathcal{K} , und bezeichnet $(\lambda_i)_{i=1}^n$ eine Familie von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, dann heißt ein Element w aus \mathcal{K} eine $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -**Konvexkombination** der Familie $(w_i)_{i=1}^n$ bezüglich der **Gewichte** $(\lambda_i)_{i=1}^n$, wenn für alle Elemente g der Menge \mathcal{L} die Identität $\mu(w, g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(w_i, g)$ gilt.

Ist eine solche Darstellung möglich, wird w auch als **Mischung** der Familie $(w_i)_{i=1}^n$ bezüglich der Gewichte $(\lambda_i)_{i=1}^n$ bezeichnet. Umgekehrt wird dann auch von einer **Entmischung** von w bezüglich der Familie $(w_i)_{i=1}^n$ und der Gewichte $(\lambda_i)_{i=1}^n$ gesprochen.

- (ii) Bezeichnet $(g_i)_{i=1}^n$ eine Familie in \mathcal{L} , und bezeichnet $(\lambda_i)_{i=1}^n$ eine Familie von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, dann heißt ein Element g in \mathcal{L} eine $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -**Konvexkombination** der Elemente $(g_i)_{i=1}^n$ bezüglich der **Gewichte** $(\lambda_i)_{i=1}^n$, wenn für alle Elemente w der Menge \mathcal{K} die Identität $\mu(w, g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(w, g_i)$ gilt.

Analog zur Situation bei den Zuständen wird g auch gelegentlich als **Mischung** der $(g_i)_{i=1}^n$ bezüglich $(\lambda_i)_{i=1}^n$ bezeichnet, und umgekehrt wird dann gelegentlich von einer **Entmischung** von g bezüglich $(g_i)_{i=1}^n$ und der Gewichte $(\lambda_i)_{i=1}^n$ gesprochen. Zumeist bleiben die Begriffe der Mischung und Entmischung aber auf die Betrachtung von Zuständen beschränkt.

Die Formulierungen für den abzählbaren Fall sehen dann entsprechend aus. Es wird hier absichtlich von $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexkombinationen und $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{X}}$ -Konvexkombinationen gesprochen und nicht nur von Konvexkombinationen, da sowohl \mathcal{X} wie auch \mathcal{L} bisher nur abstrakte Mengen sind. Beide Menge stehen noch in keinem Verhältnis zu einem linearen Raum. Der Begriff der Konvexität wird aber dennoch eingeführt, denn im Laufe des kommenden Abschnitts wird sich herausstellen, daß man mit Konstruktionen, die der oben definierten Form entsprechen, physikalisch eben genau das trifft, was üblicherweise auch mit Konvexität begrifflich gefaßt werden soll. In Kapitel 8 wird die Einbettung in einen linearen Raum vollzogen. Dort wird für den endlichen Fall in zufriedenstellender Weise die obige Form der Konvexität in die herkömmliche übergehen. Bei den abzählbaren Fällen wird das zumindest für die physikalisch relevanten Mengen der Fall sein.

Mit den obigen Bezeichnungen beweist sich schnell das folgende Lemma, dessen ersten Punkt man als Th. 2.1. in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 2, S. 48 findet und dessen zweiter Punkt ohne Beweis als Th. 2.3. in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 2, S. 52 notiert wird:

Lemma 6.2.2

- (i) Für jedes Element a aus \mathcal{Q}' und jede disjunkte Zerlegung $(a_i)_{i=1}^n$ von a in \mathcal{Q}' ist $\varphi(a)$ eine $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexkombination der $(\varphi(a_i))_{i=1}^n$ bezüglich der Gewichte $(\lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i))_{i=1}^n$.
- (ii) Für jedes Element b_0 aus \mathcal{R}'_0 , jede disjunkte Zerlegung $(b_{0i})_{i=1}^n$ von b_0 in \mathcal{R}'_0 und jedes Element b aus $\mathcal{R}(b_0)$ ist $\psi(b_0, b)$ eine $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{X}}$ -Konvexkombination der $(\psi(b_{0i}, b_{0i} \cap b))_{i=1}^n$ bezüglich der Gewichte $(\lambda_{\mathcal{R}_0}(b_0, b_{0i}))_{i=1}^n$.

Beweis:

zu (i): Mit Lemma 6.1.8 (i) folgt die Existenz eines Elementes $f \in g$ mit $\overline{(a, f)} \in \mathcal{C}$. Damit erhält man auch für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Zugehörigkeit von (a_i, f) zu \mathcal{C} . Satz 6.1.9 (i) und APS 6A (i) liefern dann:

$$\begin{aligned} \mu(\varphi(a), g) &= \mu(\varphi(a), \psi(f)) = \bar{\mu}(a, f) = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \bar{\mu}(a_i, f) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{Q}}(a, a_i) \mu(\varphi(a_i), g). \end{aligned}$$

Die zusätzlichen Bedingungen sind Inhalt von Lemma 5.7.8.

zu (ii): Der Beweis läuft völlig analog zum Beweis von (i) bei Verwendung von Satz 5.7.13. ■

Lemma 6.2.2 beantwortet die Frage, wie sich aus Mischungen auf Ebene der Präparierverfahren und Registriermethoden zugehörige $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexkombinationen und $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -Konvexkombinationen auf der Ebene der Zustände und Effekte ergeben. Nun muß physikalisch diskutiert werden, ob es ausgehend von endlich vielen Zuständen oder Effekten und einem beliebigen Satz von Gewichten stets eine zugehörige $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexkombination oder $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -Konvexkombination gibt. Sollten derartige Konvexkombinationen möglich sein, stellt sich zudem die Frage ihrer Eindeutigkeit. Es muß also erörtert werden, ob es sich bei \mathcal{K} um eine $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -konvexe Menge handelt und ob es sich bei \mathcal{L} um eine $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -konvexe Menge handelt. Dabei beschränkt man sich auf rationale Gewichte aus $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$, denn mit APS 1 und Lemma 5.6.3 folgt die Abzählbarkeit von \mathcal{Q} und \mathcal{F} . Also können auch \mathcal{K} und \mathcal{L} nur höchstens abzählbar sein.

Um die genannten Konvexitäts-Fragen zu beantworten, bedarf es geeigneter physikalisch motivierter Axiome. Für eine physikalische Argumentation bietet es sich an, auf der Ebene der Präparierverfahren oder Effektverfahren zu diskutieren. Auch hier macht es die Abzählbarkeit von \mathcal{Q} und \mathcal{F} notwendig, sich zur Konsistenz der bisherigen Axiomatik auf rationale Gewichte zu beschränken.

Man betrachte zwei nicht-leere Präparierverfahren a_1, a_2 und eine Zahl α aus dem rationalen Intervall $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$. Des weiteren sei ein Zufallsgenerator gegeben, der nach endlicher Arbeitszeit als Ergebnis (+) oder (−) ausgibt. Die Anzeige (+) trete dabei mit der Wahrscheinlichkeit α auf. Entsprechend erscheint (−) dann mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \alpha$. Wie im vorigen Abschnitt ausführlich diskutiert, beschreiben a_1, a_2 raum-zeitlich begrenzte Vorgänge. Man betrachte nun den folgenden Aufbau. Als Bezugssystem stehe ein Fast-Inertialsystem zur Verfügung. Zu einem festen Zeitpunkt wird der Zufallsgenerator gestartet. Nach endlicher Zeit beendet er seine Arbeit, und er gibt ein Ergebnis aus. Zeigt nun der Zufallsgenerator (+) an, soll ein Verfahren gestartet werden, das in Aufbau, Durchführung und raum-zeitlicher Orientierung a_1 gleicht. Im Falle einer (−)-Anzeige soll ein a_2 gleichendes Verfahren gestartet werden. Es sei angemerkt, daß diese a_1 und a_2 in obigen Punkten gleichenden Verfahren nicht mit a_1 und a_2 verwechselt werden dürfen. a_1 und a_2 stellen eigenständige Verfahren dar, die nicht Teil der obigen Gesamtapparatur mit Zufallsgenerator sind. Die Feinheit in der Namensgebung des Realtextes bedarf hier also besonderer Berücksichtigung. Dabei soll unter Berücksichtigung der Informationsübermittlungsgeschwindigkeit das Ende der Arbeitszeit des Zufallsgenerators so vor dem Beginn der a_1 und a_2 entsprechenden Verfahren enden, daß die Nachricht zu

ihrer Durchführung oder Nicht-Durchführung rechtzeitig ankommt. Den Zufallsgenerator denke man sich derart konstruiert, daß er nach außen mit Ausnahme der Informationsübermittlung, welches Verfahren durchgeführt werden soll, völlig neutral ist. Das soll heißen, weder die a_1 und a_2 entsprechenden Verfahren, mit Ausnahme der angesprochenen Start- oder Nicht-Start-Information, noch irgendeine mit a_1 und a_2 kombinierbare Registriermethode soll in ihrer Arbeit durch ihn beeinflusst werden. Dies ließe sich dadurch am Realtext ablesen, daß die relevanten Registriermethoden bezüglich des Zufallsgenerators so reagieren, als sei überhaupt kein Präpariergerät vorhanden. Es kann vorkommen, daß sich die Apparate entsprechend a_1 und a_2 in raum-zeitlicher Hinsicht behindern. Es soll aber dennoch angenommen werden, daß es stets möglich ist, einen Apparat mit der oben beschriebenen Arbeitsweise zu bauen. Es handelt sich bei dem dargestellten Aufbau mit Hilfe des Zufallsgenerators wieder um ein Präparierverfahren, das im weiteren den Namen a erhalte. Betrachtet man nun eine Registriermethode b_0 , die sowohl mit a_1 als auch mit a_2 kombinierbar ist, dann gibt es gemäß der Kombinierbarkeitsbedingung Einzelexperimente sowohl entsprechend a_1 und b_0 als auch entsprechend a_2 und b_0 . Außerdem sind die Verfahren raum-zeitlich so zueinander orientiert, daß sie aneinander keine Informationen über die Prozesse während der Präparation und der Registrierung sammeln. Der Zufallsgenerator kann sicher stets so gedacht werden, daß er für beide Seiten störungsfrei vollständig im apparativen Aufbau eines der beiden a konstituierenden Teilapparate verschwindet und daß a nicht mehr Raum in Anspruch nimmt als die a_1 und a_2 zugehörigen Apparate alleine. Zeitlich ist die Operation des Zufallsgenerators bereits beendet, bevor die Präparierverfahren überhaupt beginnen, also sollte es auch für a und b_0 zugehörige Einzelexperimente geben. Auch a und b_0 sammeln keine Informationen über die in den Apparaten ablaufenden Prozesse aneinander. Das heißt aber gerade, daß auch a und b_0 kombinierbar sind, wenn a_1 und a_2 jeweils mit b_0 kombinierbar sind.

Es stellt sich nun die interessante Frage nach dem Verhältnis der relativen Häufigkeiten, die man mit a , a_1 und a_2 bezüglich derjenigen Effektverfahren erhält, die mit allen drei Präparierverfahren Ja-Nein-Experimente bilden. Wähle dazu ein Effektverfahren $f = (b_0, b)$ so, daß b_0 mit a_1 und mit a_2 kombinierbar ist. Nach den obigen Überlegungen ist b_0 dann auch mit a kombinierbar. Man betrachte nun N Einzelexperimente derart, daß die zugehörigen Präparierereignisse nach a und die zugehörigen Registrierereignisse nach b_0 gewonnen werden. Mit N_+ bezeichne man die Anzahl der Einzelexperimente, für die beim zugehörigen Präparierereignis am Zufallsgenerator (+) angezeigt wurde. Auf analoge Weise verwende das Symbol N_- . Man bezeichne im weiteren mit N_b^+ die Anzahl der Einzelexperimente von den N_+ Einzelexperimenten, die bei b_0 die Veränderung b hervorgerufen haben. Wiederum

nutze man in analoger Weise das Symbol N_b^- . Wenn man mit N_b diejenige Anzahl von Einzelexperimenten unter allen N Einzelexperimenten benennt, die an b_0 die Veränderung b hervorgerufen haben, gilt offensichtlich: $N_b^+ + N_b^- = N_b$. Mit den gewählten Bezeichnungen erhält man nun sofort:

$$\frac{N_+}{N} \frac{N_b^+}{N_+} + \frac{N_-}{N} \frac{N_b^-}{N_-} = \frac{N_b^+ + N_b^-}{N} = \frac{N_b}{N}.$$

Die nachfolgenden Verfahren haben keinen Einfluß auf den Zufallsgenerator, so daß $\frac{N_+}{N}$ und $\frac{N_-}{N}$ durch α und $1 - \alpha$ abzubilden sind. Da der Zufallsgenerator aber auch keinen Einfluß auf die nachfolgenden Verfahren haben soll, außer sie zu starten, und da die in a verwandten Teilverfahren den Verfahren a_1 und a_2 bis auf den Umstand gleichen, daß sie Teil einer größeren Apparatur sind, bildet $\bar{\mu}(a_1, f)$ die relative Häufigkeit $\frac{N_b^+}{N_+}$ ab. In analogem Verhältnis stehen $\frac{N_b^-}{N_-}$ durch $\bar{\mu}(a_2, f)$ zueinander. Damit hat man das folgende Axiom motiviert:

AP 1A Seien a_1, a_2 Elemente aus \mathcal{Q}' , und sei α eine Zahl aus $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$. Dann existiert ein Element a in \mathcal{Q}' derart, daß für jedes Element f der Menge \mathcal{F} , für das die Paare (a_1, f) und (a_2, f) in \mathcal{C} liegen, gilt:

- (i) Das Paar (a, f) gehört zur Menge \mathcal{C} .
 - (ii) $\bar{\mu}(a, f) = \alpha \bar{\mu}(a_1, f) + (1 - \alpha) \bar{\mu}(a_2, f)$.
-

Das Axiom AP 1A wurde auch von C. Ott in [Ott02] vorgeschlagen.

Der Zusatz „A“ soll wiederum bedeuten, daß mit obigem Axiom vom Ludwigschen Weg abgewichen wird. Zugehörige Erörterungen findet man nach der Formulierung des nächsten Axioms AR 1A auf Seite 129.

Es besteht jetzt die Möglichkeit, ähnliche Überlegungen auch für die Registrierung durchführen. Zu zwei vorgegebenen Effektverfahren $f_1 = (b_{01}, b_1)$, $f_2 = (b_{02}, b_2)$ konstruiert man eine neue Registriermethode b_0 , indem man beide Registriervorgänge gemäß den Registriermethoden b_{01} und b_{02} parallel durchführt und indem man nach dem Ende der beiden Registrierverfahren feststellt, ob die b_1 und b_2 entsprechenden Veränderungen eingetreten sind oder nicht. Danach wird durch Verwenden des Zufallsgenerators aus den beiden Ergebnissen eines ausgewählt. Von prinzipiellen Einschränkungen abgesehen, die weiter unten noch gesondert diskutiert werden, erhält man so ein wohldefiniertes Verfahren, insbesondere weil die beteiligten Registrierprozesse sowie die Verwendung des Zufallsgenerators raum-zeitlich begrenzte Vorgänge darstellen. An b_0 wird nun auf folgende Weise die interessierende Veränderung b

definiert. b gilt genau dann als eingetreten, wenn der durch den Zufallsgenerator ausgewählte Registrierprozeß das Eintreten der zugehörigen Veränderung aufweist, also b_1 an b_{01} oder b_2 an b_{02} . Das heißt, wenn der zu b_{01} analoge Registriervorgang die durch b_1 charakterisierte Veränderung aufweist und wenn der Zufallsgenerator auch das Eintreten von b_1 an b_{01} als Ergebnis abfragt, dann gilt auch an b_0 die Veränderung b als eingetreten.

Durch das „Nachschalten“ des Zufallsgenerators gibt es keine zeitlichen Konflikte mit Präparierverfahren, die mit beiden Registriermethoden kombinierbar sind. Mit derselben Argumentation wie im obigen Fall kann man darauf schließen, daß die Kombinierbarkeit eines Präparierverfahrens mit beiden Ausgangsregistriermethoden auch die Kombinierbarkeit mit der neuen Registriermethode b_0 impliziert.

Die bisher dargelegte Vorgehensweise wird allerdings dann problematisch, wenn die verwendeten Ausgangs-Registriermethoden b_{01} und b_{02} sich gegenseitig in ihrer Arbeit behindern, etwa im selben Raumgebiet stehen sollen. Darüber hinaus zeichnet sich der Grundbereich der Quantenmechanik auch dadurch aus, daß es bestimmte Registriermethoden gibt, die aus prinzipiellen Gründen nicht gemeinsam durchgeführt werden können. Als Beispiel stelle man sich als Registriermethoden etwa Stern-Gerlach-Apparaturen vor, die, bis auf die Vorzugsrichtung des inhomogenen Magnetfeldes völlig identisch aufgebaut, am selben Ort und zur selben Zeit verwandt werden sollen. Dann erweist es sich nach den gesammelten experimentellen Erfahrungen als nicht möglich, Registrierereignisse zu produzieren, die den Charakteristika beider Stern-Gerlach-Apparaturen entsprechen. In einem solchen Fall könnte man den gesuchten Apparat nicht einfach durch „Nachschalten“ eines Zufallsgenerators aus den Ausgangsapparaten aufbauen, da nicht beide Registrierprozesse parallel durchgeführt werden können. Dahinter steckt ein Phänomen, das in Abschnitt 9.6 unter dem Begriff der Nicht-Koexistenz noch ausführlicher studiert werden soll. Für die hier diskutierten Konvexitätsüberlegungen soll das Problem aber umgangen werden. Denn es wird angenommen, daß es für Registriermethoden, die sich raum-zeitlich behindern oder die aus besagten prinzipiellen Gründen nicht parallel angewendet werden können, möglich ist, durch geeignetes „Vorschalten“ des Zufallsgenerators einen Apparat mit den gewünschten Kombinierbarkeitseigenschaften zu bauen. Für das obige Beispiel der beiden Stern-Gerlach-Apparaturen könnte man etwa eine Stern-Gerlach-Apparatur derart abwandeln, daß man im Prinzip denselben Aufbau nimmt, aber eben für die beiden Vorzugsrichtungen der inhomogenen Magnetfelder gemäß den beiden Ausgangsapparaturen b_{01} und b_{02} zwei Polschuhpaare senkrecht zur Einfallrichtung positioniert. Mit dem Einschalten der Gesamtapparatur soll dann auch der Zufallsgenerator starten, der dann hinreichend schnell eine Auswahl treffen soll, welches Polschuhpaar verwendet wird. Aber auch für derart

besondere Situationen scheint es im Prinzip völlig unproblematisch, aus der Kombierbarkeit eines Präparierverfahrens a mit den Registriermethoden b_{01} und b_{02} auf die Kombierbarkeit von a mit der Gesamtapparatur b_0 zu schließen, da man sich die Arbeit des Zufallsgenerators stets hinreichend schnell vorstellen darf.

Man kann nun wie im Falle der Präparierverfahren eine charakteristische Beziehung zwischen den relativen Häufigkeiten finden, so daß gefordert wird:

AR 1A Seien f_1, f_2 Elemente aus \mathcal{F} , und sei α eine Zahl aus $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$. Dann existiert ein Element f in \mathcal{F} derart, daß für jedes Element a der Menge \mathcal{Q}' , für das die Paare (a, f_1) und (a, f_2) in \mathcal{C} liegen, gilt:

- (i) Das Paar (a, f) gehört zur Menge \mathcal{C} .
 - (ii) $\bar{\mu}(a, f) = \alpha \bar{\mu}(a, f_1) + (1 - \alpha) \bar{\mu}(a, f_2)$.
-

Das Axiom AR 1A wurde auch von C. Ott in [Ott02] vorgeschlagen.

Das nachgestellte „A“ bei AP 1A und AR 1A soll wie bei APS 6A und APS 5.1.4A andeuten, daß von Ludwigs kanonischer Axiomatik abgewichen wird. G. Ludwig verwendet hier etwas weitreichendere Axiome, die die beiden obigen Axiome implizieren. Die weiterführenden Eigenschaften werden aber nicht benötigt, wenn man, wie im vorigen Abschnitt dargestellt, APS 5.1.4A statt APS 5.1.4 fordert, so daß fürderhin die obigen Axiome AP 1A und AR 1A vorausgesetzt werden. Eine Diskussion der Ludwigschen Axiome und der Beweis der Implikation der obigen Axiome als Theoreme werden in Anhang B dargestellt.

Mit Hilfe der beiden Axiome AP 1A und AR 1A kann man nun das angestrebte Ziel formulieren. Die folgenden Aussagen benennt Ludwig in [Lud85a], Kapitel III, §5.3, S. 84 mit APK und ARK. Die Beweise werden dort aber ob der unterschiedlich gewählten Axiome anders geführt.

Satz 6.2.3 *Sei durch die Mengen $M_1, M_2, M, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0, C$ und die Abbildungen $\lambda_{\mathcal{Q}}, \lambda_{\mathcal{R}_0}, \bar{\mu}$ eine Präparier-Registrier-Struktur derart gegeben, daß die Aussagen APS 5.1.3, 5.1.4A sowie die Aussagen AP 1A und AR 1A erfüllt sind. Dann gilt bei Verwendung der Symbole \mathcal{K}, \mathcal{L} und μ gemäß den Definitionen 6.1.5 und 6.1.7:*

- (i) \mathcal{K} ist rational $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -konvexe Menge,
- (ii) \mathcal{L} ist rational $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{X}}$ -konvexe Menge.

Beweis:

zu (i): Der Beweis wird mit vollständiger Induktion durchgeführt. Die Aussage gilt offensichtlich für $n = 1$. Gelte nun die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$. Wähle eine Familie $(w_i)_{i=1}^{n+1}$ aus der Menge \mathcal{K} , und wähle eine Familie $(\alpha_i)_{i=1}^{n+1}$ aus dem rationalen Intervall $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$. Setze $\alpha := \sum_{i=1}^n \alpha_i$, und für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ definiere $\eta_i := \frac{\alpha_i}{\alpha}$. Dann gehört offensichtlich für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ auch η_i zum rationalen Intervall $\mathbb{Q} \cap (0, 1]$. Des weiteren gilt $\sum_{i=1}^n \eta_i = 1$. Also existiert mit der Induktionsvoraussetzung genau ein $w \in \mathcal{K}$, so daß für alle $g \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\mu(w, g) = \sum_{i=1}^n \eta_i \mu(w_i, g).$$

Zu w und w_{n+1} existieren Elemente $a \in w$ und $a_{n+1} \in w_{n+1}$. Damit und mit AP 1A existiert auch ein $a' \in \mathcal{Q}'$, so daß für alle $f \in \mathcal{F}$ mit $(a, f), (a_{n+1}, f) \in \mathcal{C}$ gilt:

$$(a', f) \in \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \bar{\mu}(a', f) = \alpha \bar{\mu}(a, f) + (1 - \alpha) \bar{\mu}(a_{n+1}, f).$$

Setzt man nun $w' := \varphi(a')$, und wählt ein $g \in \mathcal{L}$, dann gibt es mit APS 5.1.4A (ii) in der Formulierung von Lemma 6.1.6 ein $f \in g$ mit $(a, f), (a_{n+1}, f) \in \mathcal{C}$. Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} \mu(w', g) &= \mu(\varphi(a'), \psi(f)) = \bar{\mu}(a', f) \\ &= \alpha \bar{\mu}(a, f) + (1 - \alpha) \bar{\mu}(a_{n+1}, f) \\ &= \alpha \mu(w, g) + \alpha_{n+1} \mu(w_{n+1}, g) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\alpha} \mu(w_i, g) + \alpha_{n+1} \mu(w_{n+1}, g) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \mu(w_i, g). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit von w folgt sofort aus dem zentralen Satz 6.1.9 (ii) über μ .

zu (ii): Der Beweis läuft völlig analog zu (i) unter Verwendung von APS 5.1.4A (i) in der Formulierung von Lemma 6.1.6, von AR 1A und von Satz 6.1.9 (iii). ■

Mit Satz 6.2.3 liegen die für die weitere Entwicklung der Theorie wichtigen Konvexitätseigenschaften der Zustände und Effekte vor.

Die Konvexitätsaxiome ermöglichen es nun, Aussagen zur Mächtigkeit der Mengen \mathcal{K} und \mathcal{L} zu machen. Es wird angemerkt, daß Ludwig den Umstand der Abzählbarkeit von \mathcal{K} und \mathcal{L} etwa in [Lud85a], Kapitel III, §5.1, S. 77f. oder in [Lud83b],

Kapitel III, Abschnitt 3, S. 56 allein auf die Abzählbarkeit der Mengen \mathcal{Q}' und \mathcal{F} zurückführt, die durch APS 1 und Lemma 5.6.3 garantiert werden. Dadurch wird aber nur garantiert, daß \mathcal{K} und \mathcal{L} höchstens abzählbar sind. Zum Nachweis, daß sie auch mindestens abzählbar sind, benötigt man weitere Eigenschaften der Mengen. So kann man in beiden Fällen auf die Abzählbarkeit schließen, wenn man ausgehend von den Konvexitätseigenschaften noch garantieren kann, daß die Mengen \mathcal{K} und \mathcal{L} jeweils mindestens zwei verschiedene Elemente besitzen, wie weiter unten gezeigt werden wird. Während aber mit Satz 6.1.9 (iv) und (v) die Existenz derartiger Elemente für \mathcal{L} schon gesichert ist, soll es für \mathcal{K} axiomatisch gefordert werden:

APSabz Die Menge \mathcal{K} enthält mindestens zwei verschiedene Elemente.

Die Motivation fällt nicht schwer, denn bekanntermaßen gibt es quantenmechanische Experimente, die für verschiedene Effektverfahren zu deutlich verschiedenen relativen Häufigkeiten führen. Entsprechend der Definition der Äquivalenzrelation auf \mathcal{Q}' , die die Zustände liefert, bedeutet das aber gerade, daß es verschiedene Zustände gibt.

Damit kann nun zum Nachweis der Abzählbarkeitsaussagen von \mathcal{K} und \mathcal{L} übergegangen werden:

Lemma 6.2.4 \mathcal{K} und \mathcal{L} sind abzählbare Mengen.

Beweis:

Mit APS 1 und Lemma 5.6.3 handelt es sich bei den Mengen \mathcal{Q} und \mathcal{F} um abzählbare Mengen. Also können auch \mathcal{K} und \mathcal{L} nur höchstens abzählbar sein. Es muß jetzt noch gezeigt werden, daß \mathcal{L} und \mathcal{K} mindestens abzählbar sind.

Mit Satz 6.1.9 weiß man, daß \mathcal{L} mindestens die zwei Elemente g_0 und g_1 enthält. Mit Satz 6.2.3 existiert zu jedem $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ein $g_\alpha \in \mathcal{L}$, so daß für jedes $w \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\mu(w, g_\alpha) = \alpha \mu(w, g_1) + (1 - \alpha) \mu(w, g_0) = \alpha.$$

Es gibt also zu jedem $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ einen Effekt g_α , der für alle $w \in \mathcal{K}$ die relative Häufigkeit α hat. Verschiedene α führen so auch auf verschiedene Effekte. Da $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ abzählbar viele Elemente enthält, gibt es somit mindestens abzählbar viele Effekte.

Für \mathcal{K} kann, wie folgt, argumentiert werden. Mit Axiom APSabz gibt es zwei verschiedene Zustände. Für die weiteren Betrachtungen innerhalb des Beweises

verwende für sie die Namen w_1 und w_2 . Da es sich um verschiedene Zustände handelt, folgt mit Satz 6.1.9, daß es ein $\bar{g} \in \mathcal{L}$ mit $\mu(w_1, \bar{g}) \neq \mu(w_2, \bar{g})$ geben muß. Mit Satz 6.2.3 weiß man, daß es zu jedem $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ein $w_\alpha \in \mathcal{K}$ gibt, so daß für alle $g \in \mathcal{L}$ gilt:

$$\mu(w_\alpha, g) = \alpha \mu(w_1, g) + (1 - \alpha) \mu(w_2, g). \quad (6.6)$$

Wählt man jetzt $\alpha, \beta \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ mit $\alpha \neq \beta$, dann gilt auch $w_\alpha \neq w_\beta$. Denn wäre $w_\alpha = w_\beta$, folgte mit (6.6) insbesondere für \bar{g} :

$$(\alpha - \beta) (\mu(w_1, \bar{g}) - \mu(w_2, \bar{g})) = 0. \quad (6.7)$$

Wegen $\mu(w_1, \bar{g}) \neq \mu(w_2, \bar{g})$ erzwänge (6.7) die Identität von α und β im Widerspruch zur Voraussetzung. Also führen, wie im Falle der Effekte, verschiedene α auf verschiedene Zustände, womit aufgrund der Abzählbarkeit von $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ der Nachweis gelungen ist, daß \mathcal{K} mindestens abzählbarer Mächtigkeit ist. ■

6.3 Die Zustands-Effekt-Struktur

Wie bereits in Abschnitt 6.1 ausführlich diskutiert wurde, spielen die Begriffe der Zustände und Effekte insbesondere im Rahmen der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Daher wird in Entsprechung zum Begriff der Präparier-Registrier-Struktur in Definition 5.8.1 auch der Begriff der Zustands-Effekt-Struktur geprägt. Man definiert also:

Definition 6.3.1

Sei durch einen Teil der Wirklichkeit, eine mathematische Theorie \mathcal{MT} und durch Anwendungsvorschriften \longleftrightarrow eine physikalische Theorie gegeben.

Sei weiter bezüglich dieser physikalischen Theorie eine Präparier-Registrier-Struktur im Sinne von Definition 5.8.1 derart gegeben, daß in der mathematischen Theorie \mathcal{MT} die Aussagen APS 5.1.3, APS 5.1.4A, AP 1A, AR 1A und APSabz gelten. Wählt man die Symbole \mathcal{K} , \mathcal{L} und μ gemäß den Definitionen 6.1.5 und 6.1.7, dann bezeichnet man sowohl den durch das Tripel $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ erfaßten Teil der Wirklichkeit als auch das Tripel selbst als eine **Zustands-Effekt-Struktur**.

Der Teil der Wirklichkeit, der mit Quantenmechanik bezeichnet werden soll, stellt eine noch genauer zu spezifizierende Zustands-Effekt-Struktur dar. Der nächste Schritt besteht mithin darin, die Besonderheiten der quantenmechanischen Zustands-Effekt-Struktur genauer herauszuarbeiten.

Kapitel 7

Initiale Uniformitäten und zugehörige Topologien

Im Kapitel 4 wurde ausführlich erläutert, daß zu einem geeigneten Vergleich von mathematischer Theorie und experimentellen Erfahrungen unscharfe Abbildungsprinzipien verwendet werden sollen. Die konkrete Angabe der Unschärfemengen für den Vergleich von Theorie und Experiment ist für den physikalisch motivierten Aufbau der mathematischen Theorie nicht zwingend notwendig, da man sich bei ihrem Aufbau mit physikalisch motivierten Axiomen auf die Formulierung scharfer Abbildungsprinzipien beschränken kann in dem Vertrauen darauf, daß befriedigende Unschärfemengen für den Vergleich angegeben werden können. Erst für den direkten Vergleich von Theorie und Experiment erweist sich dann die Angabe der Unschärfemengen als unumgänglich. Zuweilen stellt es sich allerdings als günstig heraus, die Einführung der mit den Unschärfemengen verknüpften mathematischen Strukturen nicht erst bis zum Punkt des Vergleiches von Theorie und Experiment hinauszuzögern. Denn zuweilen eignen sich gerade die uniformen Strukturen der physikalischen Unschärfe zur Weiterentwicklung der mathematischen Theorie mit Hilfe physikalisch motivierter Axiome. In gewissem Maße gilt das auch für diejenigen Teile der Wirklichkeit, die durch die bisher dargestellte Theorie zufriedenstellend beschrieben werden können. Also gilt das insbesondere für die Quantenmechanik in der hier dargestellten Form. Da der Umgang mit uniformen Strukturen zunächst etwas ungewohnt ist, werden die zugehörigen Betrachtungen im nun folgenden Kapitel ausführlich dargelegt. Für eine grundlegende Einführung zum Gebiet der uniformen Strukturen sei auf die Angaben in Anhang A verwiesen.

Im ersten Abschnitt des Kapitels werden Uniformitäten als Mengensysteme der physikalischen Unschärfen jeweils für die Menge der Zustände wie auch für die Menge

der Effekte physikalisch motiviert. In der Folge werden die ersten wichtigen Eigenschaften sowohl der uniformen Strukturen als der zugehörigen Topologien bewiesen. Im zweiten Abschnitt werden das Problem der Vervollständigung der gewonnenen uniformen Räume und das Problem der gleichmäßig stetigen Fortsetzbarkeit von μ auf die vervollständigten Räume diskutiert. Dabei wird sich herausstellen, daß man im allgemeinen Falle μ nicht zugleich auf die ganzen Vervollständigungen der beiden Räume fortsetzen kann. Daher wählt man für den Zustandsraum nur eine Teilmenge $\overline{\mathcal{K}}$ der Vervollständigung, während für den Effektraum die gesamte Vervollständigung $\hat{\mathcal{L}}$ verwandt wird. Im Anschluß wird μ auf die so gewählte Menge fortgesetzt. Die Fortsetzung erhält den Namen $\hat{\mu}$. Der Rest des Abschnitts widmet sich den relevanten Eigenschaften der neuen Räume und der Abbildung $\hat{\mu}$.

7.1 Unschärfemengen für Zustände und Effekte

Um überhaupt bei Zuständen und bei Effekten sowie der Abbildung μ sinnvoll von physikalischen Unschärfemengen reden zu können, muß daran erinnert werden, daß die in Abschnitt 6.1 eingeführten Mengen der Zustände und der Effekte keine Bildmengen im direkten Sinne sind, sondern innerhalb der mathematischen Theorie unter der ausschließlichen Verwendung von Bildmengen und Bildrelationen definiert werden. In Abschnitt 4.4 wurde dafür der Ausdruck des inneren Terms gewählt. Dort wurde ebenfalls gezeigt, warum auch solchen inneren Termen für den Vergleich mit der Realität Uniformitäten der physikalischen Unschärfe zuzuordnen sind. Im Falle der Menge der Zustände und derjenigen der Effekte liegt das schon darin begründet, daß die Bildterme, auf denen \mathcal{K} , \mathcal{L} und μ aufbauen, selbst keine scharfen Abbilder der Realität darstellen.

Zur Ausrüstung einer Zustands-Effekt-Struktur $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ im Sinne der Definition 6.3.1 mit geeigneten Unschärfemengen bedarf es geeigneter Bilder einer physikalischen Ununterscheidbarkeit zweier Zustände oder zweier Effekte. Das Problem läßt sich auf eine eingängige Art lösen.

Gemäß Definition 6.1.5 können Zustände nur mit Hilfe der Abbildung μ voneinander unterschieden werden. Eine analoge Aussage gilt für die Effekte. Bevor also die Frage einer physikalischen Unterscheidbarkeit von Zuständen oder Effekten diskutiert werden kann, muß man erörtern, mit welcher Unschärfe ein Vergleich verschiedener Messungen der Größe μ vorgenommen werden soll. Bei μ handelt es sich um eine reellwertige Abbildung. Es erscheint sinnvoll, die Werte von μ für zwei Paare (w_1, g_1) und (w_2, g_2) aus $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ als ununterscheidbar zu bezeichnen, wenn der Betrag der Differenz einen gewissen vorgegebenen Wert ε unterschreitet. Welchen Wert ε man

dort nehmen kann, ist natürlich im Vorfeld des Tests einer Theorie nicht klar. Verallgemeinerte Überlegungen hatten in Abschnitt 4.2 gerade auf die Motivation der uniformen Strukturen als idealisierte Bilder der physikalischen Unschärfe geführt. Im weiteren soll für den Bildbereich von μ die durch die Absolutbetragsmetrik festgelegte natürliche Uniformität der reellen Zahlen als Bild der physikalischen Unschärfe verwendet werden. Damit kann man zur Diskussion der Unterscheidbarkeit von Zuständen und Effekten zurückkehren.

Dafür wähle man etwa zwei Zustände w_1 und w_2 . Dann kann man die beiden Zustände durch die Wahrscheinlichkeiten $\mu(w_1, g)$ und $\mu(w_2, g)$ bezüglich der Effekte $g \in \mathcal{L}$ voneinander unterscheiden. In der Realität kann man immer nur endlich viele Effekte für einen solchen Vergleich heranziehen. Zudem kann man die Wahrscheinlichkeiten nur mit endlicher Genauigkeit bestimmen. Dafür wurde oben als geeignetes Unschärfemengensystem die der Absolutbetragsmetrik zugehörige Uniformität gewählt, so daß zur Charakterisierung der Unschärfe bei der Bestimmung von $\mu(\cdot, g)$ zu jedem Effekt g eine Zahl ε_g zu wählen ist entsprechend dem physikalischen Umstand, daß man zu jedem Effekt eine eigene Genauigkeit der Messung entwickeln kann. Damit kann man formulieren:

w_1 und w_2 sind bezüglich einer endlichen Teilmenge J von \mathcal{L} und dem Genauigkeitsniveau $(\varepsilon_g)_{g \in J}$ als ununterscheidbar zu bezeichnen, wenn für alle Elemente g aus J gilt: $|\mu(w_1, g) - \mu(w_2, g)| < \varepsilon_g$.

Definiert man für jedes g aus J die Menge $V_{\varepsilon_g} := \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |\alpha_1 - \alpha_2| < \varepsilon_g\}$, dann läßt sich die eben formulierte mathematische Aussage äquivalent umformen zu der Aussage:

$$(w_1, w_2) \in \bigcap_{g \in J} (\mu(\cdot, g) \times \mu(\cdot, g))^{-1}(V_{\varepsilon_g}). \quad (7.1)$$

Dabei wird auf Formel (A.2) aus Anhang A zur Verwendung von Symbolen des Typs $(f_1 \times f_2)^{-1}(W)$ hingewiesen. Der rechte Term von (7.1) ist nach Satz A.3.1 gerade ein Element des Fundamentalsystems der initialen uniformen Struktur auf \mathcal{K} bezüglich der Familie der Abbildungen $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ und der auf \mathbb{R} festgelegten Uniformität der Absolutbetragsmetrik. Damit ergibt es sich in völlig natürlicher Weise, als Bilder der physikalischen Unschärfe auf \mathcal{K} diese induzierte Uniformität zu wählen, die in der Folge mit $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ bezeichnet wird. Völlig analog kann man auf \mathcal{L} die initiale Uniformität bezüglich $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ als System physikalischer Unschärfemengen motivieren. Es wird dafür das Symbol $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ verwendet. Bei den durch die uniformen Strukturen $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ auf kanonische Weise auf \mathcal{K} und auf \mathcal{L} induzierten Topologien handelt es sich um die bekannten initialen Topologien

bezüglich $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ für \mathcal{K} und $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ für \mathcal{L} . Zur Wahrung der Übersichtlichkeit werden die so gewonnenen initialen Topologien ebenfalls mit $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ bezeichnet. Ob sich die Symbole $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ auf die Topologien oder uniformen Strukturen beziehen, entscheidet dann der Kontext. Man kann somit in zusammenfassender Weise das folgende Abbildungsprinzip formulieren:

Abbildungsprinzipien Teil 9:

Als Bilder der physikalischen Unschärfe werden für die Menge \mathcal{K} der Zustände die Uniformität $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und für die Menge \mathcal{L} der Effekte die Uniformität $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ gewählt.

Im Abschnitt 4.3 wurden für den allgemeinen Fall einige Eigenschaften für die Mengensysteme physikalischer Unschärfe gefordert. Für die hier betrachteten Systeme physikalischer Unschärfemengen sind die betreffenden Eigenschaften aufgrund der Konstruktion der Theorie auf ganz natürlichem Wege erfüllt. Mit der Tatsache, daß \mathcal{K} und \mathcal{L} gemäß Lemma 6.2.4 abzählbar sind, und mit der Tatsache, daß mit μ eine Abbildung in das reelle Intervall $[0, 1]$ mit den Eigenschaften (ii) und (iii) aus Satz 6.1.9 vorliegt, gewinnt man die folgende Aussage, indem man Überlegungen Ludwigs in [Lud90b], Kapitel 8, Abschnitt 8.2, S. 97f. und [Lud85a], Kapitel IV, §2, S. 103 umsetzt:

Satz 7.1.1 *($\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$) und ($\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$) sind separable, metrisierbare, präkompakte, uniforme Hausdorffräume. Wird das reelle Intervall mit der kanonischen Uniformität der Absolutbetragsmetrik versehen, dann ist zum einen die Abbildung $\mu(\cdot, g)$ für jedes Element g aus \mathcal{L} auf $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ gleichmäßig stetig, und zum anderen ist für jedes Element w aus \mathcal{K} die Abbildung $\mu(w, \cdot)$ auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ gleichmäßig stetig.*

Beweis:

Beide Räume können vollständig symmetrisch behandelt werden. Deshalb soll der Beweis nur für \mathcal{K} durchgeführt werden. Die Abzählbarkeit von \mathcal{K} bedeutet trivialerweise die Separabilität, denn eine Menge liegt stets in sich selbst dicht unabhängig von der verwendeten Topologie.

Die Menge \mathcal{L} besitzt die Eigenschaft der Abzählbarkeit. Zudem handelt es sich bei dem reellen Intervall $[0, 1]$ um einen uniformen Hausdorffraum mit abzählbarem Fundamentalsystem, denn die betrachtete Uniformität auf $[0, 1]$ entstammt einer Metrik. Satz 6.1.9 (ii) liefert daher mit Satz C.1.4 (i) die Metrisierbarkeit von $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, woraus sich insbesondere auch die Hausdorffeigenschaft von $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ ergibt.

Die Tatsache, daß $[0, 1]$ eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ist, liefert die Präkompaktheit von $[0, 1]$. Da definitionsgemäß $\mu(\cdot, g)$ für jedes $g \in \mathcal{L}$ in das reelle Intervall $[0, 1]$ abbildet, ergibt sich mit Lemma A.6.18 für jedes g aus \mathcal{L} die Präkompaktheit der Teilmenge $\mu(\mathcal{K}, g)$ von $[0, 1]$. Mit Satz C.1.4 (ii) erhält man so die Präkompaktheit der Uniformität $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$. Die Eigenschaften der gleichmäßigen Stetigkeit ergeben sich in trivialer Weise aufgrund der Definition der initialen uniformen Strukturen mittels μ . ■

Man kann also auf der Basis der physikalischen Theorie, wie sie in den Kapiteln 5 und 6 dargestellt wurde, in einfacher Weise uniforme Strukturen als Bilder der physikalischen Unschärfe motivieren, so daß sowohl die Menge \mathcal{K} der Zustände als auch die Menge \mathcal{L} der Effekte zu relativ strukturreichen uniformen Räumen werden und so daß μ in der jeweiligen Komponente auf den so gewonnenen uniformen Räumen gleichmäßig stetig ist.

7.2 Uniforme Vervollständigungen

Gemäß den Ausführungen in Anhang A kann jedem uniformen Raum ein vollständiger Hausdorffraum zugeordnet werden, der als Hausdorff-Vervollständigung bezeichnet wird. Dafür sei insbesondere auf Satz A.4.8 hingewiesen. Wenn der uniforme Ausgangsraum schon die Hausdorffeigenschaft besitzt, kann der Raum im Sinne einer uniformen Isomorphie mit einer dichten Teilmenge der ihm zugeordneten Hausdorff-Vervollständigung identifiziert werden, so daß man in einem solchen Falle auch nur von der Vervollständigung spricht. Ist der Ausgangsraum mit (X, \mathcal{N}) benannt, dann sollen die Hausdorff-Vervollständigung mit \hat{X} und die zugehörige Uniformität mit $\hat{\mathcal{N}}$ bezeichnet werden. Daher werden mit $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ die Vervollständigungen der uniformen Räume $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ symbolisiert.

Wie im Falle metrischer Räume liegt es nahe, die Theorie mit Hilfe der Vervollständigungen zu formulieren. Denn die Vervollständigungen erweisen sich als noch strukturreicher, wobei die physikalisch relevanten Strukturen dicht darin eingebettet sind. Also ist insbesondere jedes Element aus der Vervollständigung beliebig genau durch Elemente der Ausgangsmenge approximierbar. Unter Verwendung der Interpretation der eingeführten Uniformitäten als Bild der physikalischen Unschärfe liegt es nahe, die Uniformität der Vervollständigung als Uniformität der physikalischen Unschärfe der vervollständigten Menge aufzufassen. Der Umstand des Dicht-Liegens bedeutet also, daß man die Elemente der Vervollständigung gar nicht physikalisch von den Elementen der Ausgangsmenge unterscheiden kann.

Als erstes soll nun die Frage beantwortet werden, welche Eigenschaften den Vervollständigungen $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ auf der Basis der Eigenschaften der uniformen Räume $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ aus Satz 7.1.1 zukommen. In Ausführung einiger Bemerkungen in in [Lud90b], Kapitel 8, Abschnitt 8.2, S. 97f. und in [Lud85a], Kapitel IV, §2, S. 104 wird festgehalten:

Satz 7.2.1 *Die Vervollständigungen $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ der uniformen Räume $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ sind separable, metrisierbare, kompakte, vollständige, uniforme Hausdorffräume. Insbesondere gibt es Isomorphismen der Räume $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ auf dichte Teilmengen der zugehörigen Vervollständigungen.*

Bemerkung: Vermittels obiger Isomorphismen werden in Zukunft die Elemente von \mathcal{K} und \mathcal{L} mit den zugehörigen dichten Teilmengen identifiziert.

Beweis:

Wie bereits in Beweis zu Satz 7.1.1 können auch hier die beiden Räume völlig analog untersucht werden, so daß es hier genügt, nur die Situation für \mathcal{K} zu untersuchen.

Aussagen über die Vollständigkeit und die Hausdorffeigenschaft der Vervollständigung beinhaltet Satz A.4.8 über die Hausdorff-Vervollständigung. Da der uniforme Raum $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ nach Satz 7.1.1 zu den Hausdorffräumen gehört, kann man entsprechend Lemma A.4.10 die Identifikation mit einem dichten uniformen Unterraum der Vervollständigung vornehmen. Aus der Abzählbarkeit von \mathcal{K} folgt daher sofort die Separabilität der Vervollständigung. Die Kompaktheit erhält man mit Satz A.6.17, während sich die Metrisierbarkeit aus Lemma C.2.2 ergibt. ■

Während Satz 7.2.1 zeigt, daß man bei den Räumen problemlos zu den Vervollständigungen mit den ihnen zukommenden attraktiven Eigenschaften übergehen kann, stößt man auf Probleme, wenn man versucht, in kanonischer Weise die Abbildung μ auf die Vervollständigungen gleichmäßig stetig fortzusetzen. Die Art der dabei auftretenden Probleme soll durch die folgenden Überlegungen erläutert werden.

Bekanntermaßen umfaßt der Definitionsbereich der Abbildung μ die gesamte Menge $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$. Somit charakterisiert μ die zwei Abbildungsfamilien $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ und $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$. Mit Satz 7.1.1 sind die Mitglieder von $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ gleichmäßig stetig auf $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$, während sich diejenigen von $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ als gleichmäßig stetig

auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ erweisen. Also kann man unter Verwendung von Satz A.4.7 eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Fortsetzungen auf die Vervollständigungen finden. Es bietet sich an, neue Namen für die betrachteten Funktionen einzuführen:

- (i) Für $g \in \mathcal{L}$ wird die Abbildung $h_g(\cdot) := \mu(\cdot, g)$ definiert.
Die zugehörige Fortsetzung heiße

$$\hat{h}_g : \hat{\mathcal{K}} \longrightarrow [0, 1]. \quad (7.2)$$

- (ii) Für $w \in \mathcal{K}$ wird die Abbildung $s_w(\cdot) := \mu(w, \cdot)$ definiert.
Die zugehörige Fortsetzung heiße $\hat{s}_w : \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow [0, 1]$.

Offensichtlich ist \hat{h}_g für jedes g aus \mathcal{L} gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$. Aber wie bei μ erhält man auch hier eine zweite Abbildungsfamilie, wenn man $\hat{h}_g(x)$ für festes $x \in \hat{\mathcal{K}}$ als Abbildung in g auffaßt. Über die gleichmäßige Stetigkeit läßt sich vorerst nur etwas für den Fall $x \in \mathcal{K}$ sagen, denn dann gilt $\hat{h}_g(x) = h_g(x)$ für alle Elemente g der Menge \mathcal{L} . Also ist $\hat{h}_g(x)$ als Abbildung in g gleichmäßig stetig auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. In analoger Weise stellt sich $\hat{s}_w(y)$ zum einen für jedes w aus \mathcal{K} als gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ heraus und zum anderen erweist sich $\hat{s}_w(y)$ für jedes y aus \mathcal{L} als gleichmäßig stetig auf $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$.

Man hat somit zwei Fortsetzungen von μ gefunden:

$$\begin{aligned} \mu_1 : \hat{\mathcal{K}} \times \mathcal{L} &\longrightarrow [0, 1], & (x, g) &\longmapsto \mu_1(x, g) := \hat{h}_g(x), \\ \mu_2 : \mathcal{K} \times \hat{\mathcal{L}} &\longrightarrow [0, 1], & (w, y) &\longmapsto \mu_2(w, y) := \hat{s}_w(y). \end{aligned}$$

μ_1 ist im allgemeinen nicht für alle Elemente x aus $\hat{\mathcal{K}} \setminus \mathcal{K}$ gleichmäßig stetig auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. Entsprechendes gilt auch für μ_2 und die Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$, so daß man auf beiden Wegen nicht zu einer Abbildung gelangt, die auf $\hat{\mathcal{K}} \times \hat{\mathcal{L}}$ definiert ist und die in beiden Komponenten für alle Werte der jeweils anderen Komponente gleichmäßig stetig ist. Die maximale Forderung der Fortsetzbarkeit kann somit im allgemeinen nicht erfüllt werden.

Dennoch sollte sowohl aus physikalischen als auch aus mathematischen Gründen in einer bestimmten Weise über das von \mathcal{K}, \mathcal{L} und μ Erfaste hinausgegangen werden. Bevor dazu Erläuterungen folgen, werden die notwendigen mathematischen Untersuchungen zur Verfügung gestellt. Es wird aber hier bereits betont, daß es sich bei der nachfolgend erläuterten Fortsetzung, wie schon die obige parallele Betrachtung der zwei Fälle nahelegt, nicht um die einzig mögliche handelt. Man wählt vielmehr unter den möglichen Fortsetzungen eine solche heraus, die sich für die späteren Ludwigschen Hauptaxiome des Messens, die in Kapitel 9 ausführlich dargelegt werden,

besonders eignet. Auch muß bedacht werden, daß es in der vorliegenden Arbeit nicht das Ziel ist, die entwickelte Theorie in allen Strukturfeinheiten zu untersuchen und darzulegen. Es findet stattdessen eine Konzentration auf alle notwendigen Instrumente statt, die physikalisch wie mathematisch benötigt werden, um die Hauptaxiome des Messens und ihre wichtigsten Implikationen verstehen zu können.

Zur Entwicklung der interessierenden Fortsetzung wird zunächst ein neues Symbol eingeführt. Für jedes Element x der Menge $\hat{\mathcal{K}}$ und jedes Element g der Menge \mathcal{L} wird definiert:

$$H_x(g) := \hat{h}_g(x). \quad (7.3)$$

Da es sich im Grunde nur um eine Umbenennung von Abbildungen handelt, die bereits untersucht wurden, ergeben sich die Aussagen zur gleichmäßigen Stetigkeit unmittelbar. $H_x(g)$ ist für jedes Element x aus \mathcal{K} als Funktion in g gleichmäßig stetig auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. Außerdem ist $H_x(g)$ als Funktion in x für jedes Element g aus \mathcal{L} gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$. Mit Hilfe der Namensgebung in (7.3) wird nun definiert:

$$\overline{\mathcal{K}} := \left\{ x \in \hat{\mathcal{K}} \mid H_x \text{ gleichmäßig stetig auf } (\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})) \right\}. \quad (7.4)$$

Offensichtlich handelt es sich bei \mathcal{K} um eine Teilmenge von $\overline{\mathcal{K}}$, und man kann H_x für jedes Element x aus $\overline{\mathcal{K}}$ eindeutig gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ fortsetzen. Somit erhält man eine Abbildungsfamilie:

$$\hat{H}_x : \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow [0, 1], \quad x \in \overline{\mathcal{K}}.$$

Als Fortsetzung von μ wird nun gewählt:

$$\hat{\mu} : \overline{\mathcal{K}} \times \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow [0, 1], \quad (x, y) \longmapsto \hat{\mu}(x, y) := \hat{H}_x(y). \quad (7.5)$$

Die Eigenschaften von $\hat{\mu}$ hinsichtlich gleichmäßiger Stetigkeit ergeben sich direkt aus denjenigen der Mitglieder Funktionenfamilie $\{\hat{H}_x \mid x \in \overline{\mathcal{K}}\}$. Folglich besitzt $\hat{\mu}(x, \cdot)$ für jedes Element x aus $\overline{\mathcal{K}}$ die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. Für ein Element g aus \mathcal{L} und ein Element x aus $\overline{\mathcal{K}}$ erhält man die Identität

$$\hat{H}_x(g) = H_x(g) = \hat{h}_g(x).$$

Ob der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildung \hat{h}_g auf $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ für jedes Element g aus \mathcal{L} folgt mit Lemma A.3.7 (ii) auch die gleichmäßige Stetigkeit der Restriktion auf dem Unterraum $(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}})$. Somit ergibt sich die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung $\hat{\mu}(\cdot, g)$ auf dem Unterraum $(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}})$ für jedes Element g aus \mathcal{L} . Der hier geschilderte Prozeß zur Gewinnung von $\hat{\mu}$ faßt Abbildung 7.1 schematisch zusammen.

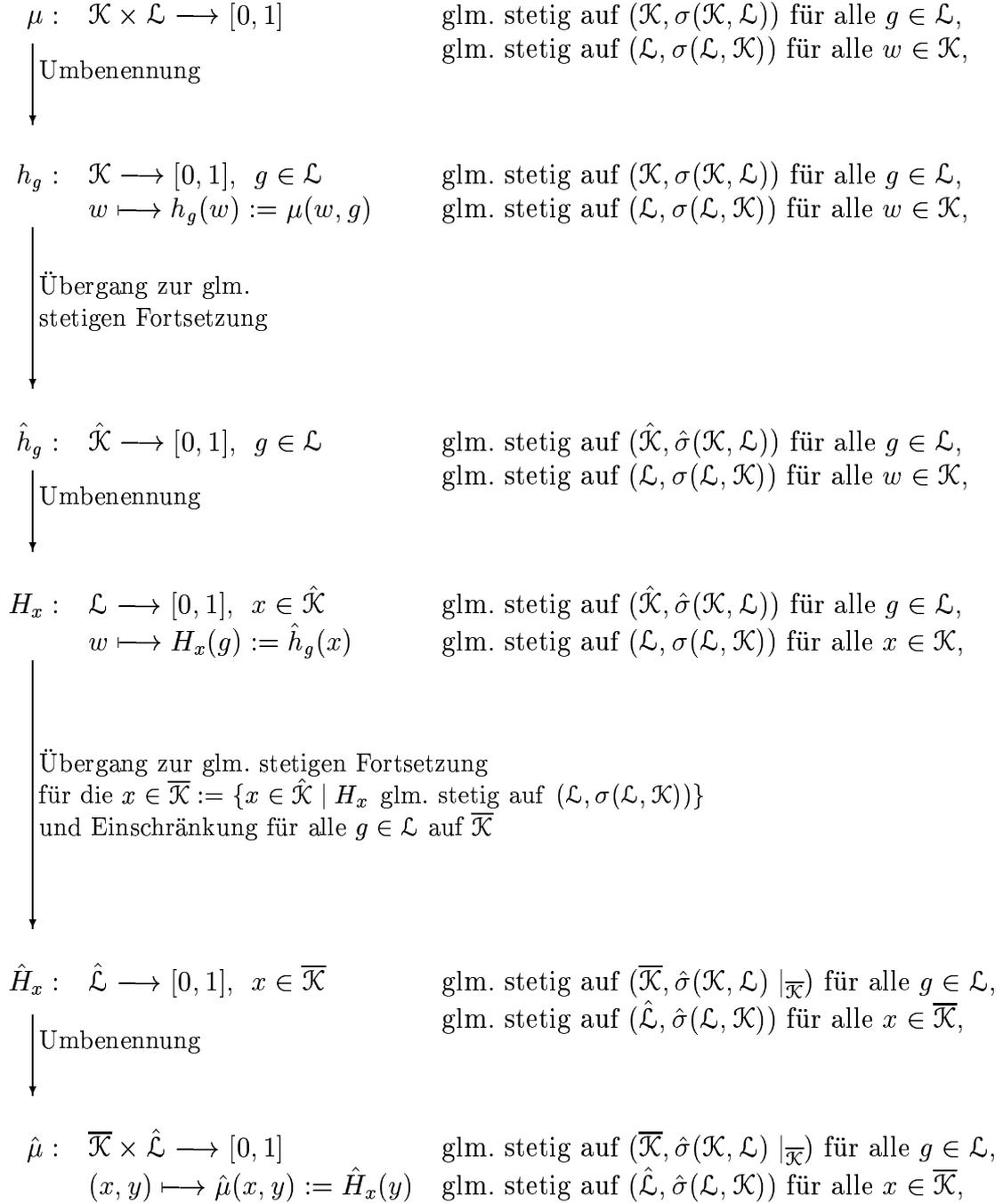


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung der Vorgehensweise zur Gewinnung der Fortsetzung $\hat{\mu}$ zur Abbildung μ . Die Abkürzung glm. stehe für gleichmäßig.

Die zentralen Bausteine für die Theorie liefern somit einerseits die beiden uniformen Räume $(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}) |_{\overline{\mathcal{K}}})$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ und andererseits die Abbildung $\hat{\mu} : \overline{\mathcal{K}} \times \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow [0, 1]$. Zur Vereinfachung der Sprechweise sei vereinbart, daß alle Elemente von $\overline{\mathcal{K}}$ als **Zustände** und alle Elemente von $\hat{\mathcal{L}}$ als **Effekte** bezeichnet werden. Als wichtig muß der Umstand erachtet werden, daß es bei $\hat{\mu}$ nicht mehr die Symmetrie zwischen den beiden Faktoren des Urbildraumes gibt, die für μ vorliegt. Das macht sich außer in der Struktur-Asymmetrie der Räume selber, die sich weiter unten im Fehlen der Vollständigkeit von $(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}) |_{\overline{\mathcal{K}}})$ zeigen wird, vor allem in der Asymmetrie der komponentenweisen gleichmäßigen Stetigkeit bemerkbar. Denn $\hat{\mu}(\cdot, g)$ ist nur für die Elemente g aus \mathcal{L} , aber nicht für die Elemente g aus $\hat{\mathcal{L}}$ gleichmäßig stetig. Die volle Rechtfertigung für den Übergang zur Fortsetzung $\hat{\mu}$ erschließt sich erst Schritt für Schritt in den nachfolgenden Untersuchungen. Es kann hier allerdings ein erster physikalischer Gesichtspunkt gezeigt werden, der die Wahl der Fortsetzung gemäß (7.5) motiviert. Dafür erinnere man, daß in Abschnitt 4.3 die zentrale Feststellung gemacht wurde, daß es stets nur endlich viele experimentelle Tatsachen gibt. Daher kommt es in \mathcal{K} und \mathcal{L} physikalisch nur auf endliche, wenn auch unbestimmt große Teilmengen an. Der Unbestimmtheit wurde in mathematischer Idealisierung durch Forderung nach der Abzählbarkeit der Bildmengen begegnet. Der Umstand der Endlichkeit der Erfahrungen und damit der Festlegung der Bildmengen nur auf endlichem Niveau macht klar, daß im allgemeinen die gewählten abzählbaren Idealisierungen nicht vollständig festgelegt sind. Die Endlichkeit der Physik läßt also einen gewissen Spielraum in der Wahl der Mengen \mathcal{K} und \mathcal{L} . Das zeigt sich beispielsweise bei der Zustandsmenge darin, daß man \mathcal{K} auf physikalischem Wege nicht in $\hat{\mathcal{K}}$ auszeichnen kann, denn jede abzählbare Teilmenge $\tilde{\mathcal{K}}$ von $\hat{\mathcal{K}}$, die auf \mathcal{L} bezüglich der Familie $\{H_x \mid x \in \tilde{\mathcal{K}}\}$ eine mit $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ identische Uniformität induziert, ist physikalisch von \mathcal{K} nicht zu unterscheiden. Somit kann $\tilde{\mathcal{K}}$ ebenso gut wie \mathcal{K} als Bildmenge Verwendung finden. Aufgrund des nachfolgenden Lemmas nimmt $\overline{\mathcal{K}}$ bezüglich dieser Mengen eine ausgezeichnete Stellung ein, denn es gilt in Ausführung einer Anmerkung Ludwigs in [Lud85a], Kapitel IV, §2, S. 104:

Lemma 7.2.2 *$\overline{\mathcal{K}}$ ist bezüglich der Mengeninklusion das größte Element des folgenden Mengensystems:*

$$\left\{ \tilde{\mathcal{K}} \subseteq \hat{\mathcal{K}} \mid \text{die initiale Uniformität auf } \mathcal{L} \text{ bezüglich } \{H_x \mid x \in \tilde{\mathcal{K}}\} \text{ ist gleich } \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}) \right\}.$$

Beweis:

Zunächst wird bewiesen, daß $\overline{\mathcal{K}}$ selbst die notwendigen Eigenschaften besitzt. Offensichtlich gilt $\overline{\mathcal{K}} \subseteq \hat{\mathcal{K}}$.

Die von der Familie $\{H_x \mid x \in \overline{\mathcal{K}}\}$ auf \mathcal{L} erzeugte initiale Uniformität ist gröber als $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$, denn definitionsgemäß umfaßt $\overline{\mathcal{K}}$ alle die $x \in \hat{\mathcal{K}}$, für die H_x auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ gleichmäßig stetig ist. Mit Satz A.3.1 bezeichnet $\sigma(\mathcal{L}, \overline{\mathcal{K}})$ aber gerade die größte Uniformität, so daß alle H_x mit $x \in \overline{\mathcal{K}}$ gleichmäßig stetig sind. Andererseits wurde weiter oben bereits bemerkt, daß $\mathcal{K} \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ gilt. Somit folgt mit Lemma A.3.2 sogar die Identität der beiden Uniformitäten.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß $\overline{\mathcal{K}}$ die größte Menge ist, die die geforderten Eigenschaften besitzt. Sei dazu eine Menge $\tilde{\mathcal{K}} \subseteq \hat{\mathcal{K}}$ gewählt, so daß die initiale Uniformität bezüglich der Abbildungsfamilie $\{H_x \mid x \in \tilde{\mathcal{K}}\}$ auf \mathcal{L} eine mit $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ identische Uniformität induziert. Da $\sigma(\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{K}})$ die größte Uniformität auf \mathcal{L} ist, so daß alle Mitglieder der Familie $\{H_x \mid x \in \tilde{\mathcal{K}}\}$ gleichmäßig stetig sind, sind sie aufgrund der vorausgesetzten Identität der beiden Uniformitäten auch gleichmäßig stetig bezüglich $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$. Da aber $\overline{\mathcal{K}}$ definitionsgemäß alle $x \in \hat{\mathcal{K}}$ enthält, für die H_x gleichmäßig stetig auf $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ ist, umfaßt $\overline{\mathcal{K}}$ die Menge $\tilde{\mathcal{K}}$. ■

Also sind abzählbare Teilmengen von $\hat{\mathcal{K}}$, die auf \mathcal{L} eine mit $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ zusammenfallende Uniformität erzeugen, in jedem Falle auch Teilmengen von $\overline{\mathcal{K}}$. Da man sich nun aus physikalischen Erwägungen auf keine der so charakterisierten Teilmengen von $\overline{\mathcal{K}}$ festlegen kann, liegt es nahe, zur Formulierung weiterer physikalisch relevanter Axiome gleich mit der Menge $\overline{\mathcal{K}}$ weiterzuarbeiten. Ob der recht unhandlichen Definition von $\overline{\mathcal{K}}$ muß dabei allerdings mit gewissen Problemen gerechnet werden. Der Problematik widmet sich das Kapitel 8.

Eine völlig analoge Untersuchung kann man auch für \mathcal{L} anstellen, die auf die Definition einer Menge $\overline{\mathcal{L}}$ führt. Da aber ohnehin schon ganz $\hat{\mathcal{L}}$ verwendet werden soll, erübrigt sich eine weitere Diskussion.

Ein weiterer physikalischer Gesichtspunkt, der einen Übergang von \mathcal{K}, \mathcal{L} und μ zu einer Fortsetzung von μ und geeigneten Teilmengen der uniformen Vervollständigungen von \mathcal{K} und \mathcal{L} motiviert, besteht darin, daß man die sogenannten Hauptaxiome des Messens in Kapitel 9 in kompakter Form formulieren kann. Dafür muß auf Kapitel 9 verwiesen werden.

Neben den physikalischen Beweggründen gibt es eine Reihe mathematischer Vorteile des Überganges zu $\overline{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mu}$. Einen solchen Vorteil liefert die bereits in Satz 7.2.1 diskutierte Struktur von $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$, die sich gegenüber $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ durch die Vollständigkeit und die dadurch ebenfalls gewonnene Kompaktheit auszeichnet. Um noch weitere Erkenntnisse zu erlangen und um insbesondere die Struktur von $(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \mid_{\overline{\mathcal{K}}})$ zu analysieren, erweist sich der nächste Satz als wichtig. Zu seinem Beweis benötigt man allerdings zunächst das folgende Lemma:

Lemma 7.2.3 *Es gilt für alle w aus \mathcal{K} und alle y aus $\hat{\mathcal{L}}$ die Identität $\hat{s}_w(y) = \hat{\mu}(w, y)$.*

Beweis:

Nach Konstruktion ist $\hat{\mu}(w, \cdot)$ insbesondere für alle $w \in \mathcal{K}$ gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. Außerdem gilt für alle $w \in \mathcal{K}$ und für alle $g \in \mathcal{L}$ die Gleichung $\hat{\mu}(w, g) = \mu(w, g)$. Also ist $\hat{\mu}(w, \cdot)$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung von $\mu(w, \cdot)$, und somit muß $\hat{\mu}(w, \cdot)$ aufgrund der Eindeutigkeit der Fortsetzung mit \hat{s}_w zusammenfallen. ■

Lemma 7.2.3 besagt, daß für alle w aus \mathcal{K} die eindeutig existierende gleichmäßig stetige Fortsetzung von $\mu(w, \cdot)$ auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$, also \hat{s}_w , auf ganz $\hat{\mathcal{L}}$ identisch ist mit $\hat{\mu}(w, \cdot)$.

Damit kann nun die Aussage formuliert werden:

Satz 7.2.4 *Es gelten die nachfolgenden Beziehungen zwischen den Uniformitäten. Dabei steht unterhalb der Klammer jeweils die Abbildungsfamilie, bezüglich derer die initiale Uniformität gewonnen wird.*

$$(i) \quad \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) \quad = \quad \underbrace{\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K})}_{\{\hat{\mu}(w, \cdot) \mid w \in \mathcal{K}\}} \quad = \quad \underbrace{\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})}_{\{\hat{\mu}(x, \cdot) \mid x \in \overline{\mathcal{K}}\}}$$

$$(ii) \quad \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \big|_{\overline{\mathcal{K}}} \quad = \quad \underbrace{\sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L})}_{\{\hat{\mu}(\cdot, g) \mid g \in \mathcal{L}\}} \quad \subseteq \quad \underbrace{\sigma(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{L}})}_{\{\hat{\mu}(\cdot, y) \mid y \in \hat{\mathcal{L}}\}}$$

Beweis:

zu (i): Mit Satz C.3.2 und Lemma 7.2.3 folgt sofort $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) = \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K})$. Da die Menge $\overline{\mathcal{K}}$ die Menge \mathcal{K} umfaßt, folgt mit Lemma A.3.2 die Mengeninklusion $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K}) \subseteq \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$. Andererseits bezeichnet $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ die größte Uniformität, so daß $\hat{\mu}(x, \cdot)$ für alle $x \in \overline{\mathcal{K}}$ gleichmäßig stetig ist. Nach Konstruktion ist auch $\hat{\mu}(x, \cdot)$ gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})) = (\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K}))$ für alle $x \in \overline{\mathcal{K}}$. Somit folgt $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K}) \supseteq \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$.

zu (ii): Mit Satz C.3.2 folgt sofort, daß $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ mit der initialen Uniformität auf $\overline{\mathcal{K}}$ bezüglich $(\hat{h}_g)_{g \in \mathcal{L}}$ zusammenfällt. Damit fallen auch die Unterraumuniformitäten dieser beiden Uniformitäten auf $\overline{\mathcal{K}}$ zusammen, so daß sie wegen Satz C.3.1 auch mit der initialen Uniformität auf $\overline{\mathcal{K}}$ bezüglich $(\hat{h}_g \big|_{\overline{\mathcal{K}}})_{g \in \mathcal{L}}$ identisch sind. Es gilt nun für alle g in \mathcal{L} und alle x in $\overline{\mathcal{K}}$:

$$\hat{h}_g \big|_{\overline{\mathcal{K}}}(x) = H_x(g) = \hat{H}_x(g) = \hat{\mu}(x, g).$$

Also sind für jedes $g \in \mathcal{L}$ die Abbildungen $\hat{h}_g|_{\overline{\mathcal{K}}}(\cdot)$ und $\hat{\mu}(\cdot, g)$ identisch. Damit ist die Aussage bewiesen, die mit durch das Gleichheitszeichen repräsentiert wird. Die andere Aussage der Mengeninklusion folgt mit Lemma A.3.2 unmittelbar aus dem Umstand, daß $\mathcal{L} \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ gilt. ■

Mit Satz 7.2.4 ist es gelungen, die etwas unhandlichen Uniformitäten $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ und $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}}$ auf rein initiale Uniformitäten zurückzuführen. Damit und mit den Erkenntnissen über $\hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mathcal{K}}$ entsprechend Satz 7.2.1 läßt sich die folgende Aussage gewinnen:

Lemma 7.2.5 *Es gilt:*

- (i) \mathcal{L} liegt bezüglich $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ dicht in $\hat{\mathcal{L}}$,
- (ii) \mathcal{K} liegt sowohl bezüglich $\sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L})$ dicht in $\overline{\mathcal{K}}$ als auch bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ dicht in $\hat{\mathcal{K}}$.

Beweis:

zu (i): Mit Satz 7.2.1 liegt \mathcal{L} dicht in $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. Mit Satz 7.2.4 (i) gilt aber gerade die Identität $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) = \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$.

zu (ii): Die zweite Aussage folgt analog zu (i). Daraus folgt aber auch sofort, daß der $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}}$ -Abschluß von \mathcal{K} mit $\overline{\mathcal{K}}$ zusammenfällt. Man siehe dafür etwa [Bou66a], Kapitel I, §3.1, Prop. 1, S. 36. Satz 7.2.4 (ii) liefert dann die erste Aussage. ■

Damit kann man nun zusammenfassend über die Eigenschaften der betrachteten Räume sagen.

Satz 7.2.6 *Es gilt:*

- (i) $(\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}}))$ ist ein vollständiger, metrisierbarer, kompakter, separabler, uniformer Hausdorffraum,
- (ii) $(\overline{\mathcal{K}}, \sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L}))$ ist ein metrisierbarer, präkompakter, separabler, uniformer Hausdorffraum.

Beweis:

zu (i): Die Aussage ergibt sich offensichtlich mit Satz 7.2.4 (i) und Satz 7.2.1.

zu (ii): Mit Satz 7.2.4 (ii) gilt die Identität $(\overline{\mathcal{K}}, \sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L})) = (\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}})$. Also ist der zu untersuchende Raum ein uniformer Unterraum des entsprechend Satz 7.2.1 vollständigen, metrisierbaren, kompakten, separablen, uniformen Hausdorffraumes $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$. Die Unterraumeigenschaft liefert zum ersten mit Lemma A.6.18 die Präkompaktheit, zum zweiten die Hausdorffeigenschaft gemäß Satz 6.11 in [vQ01], Kapitel 6, Abschnitt B, S. 88 und zum dritten mit Lemma A.5.4 die Metrisierbarkeit. Ob der Abzählbarkeit von \mathcal{L} folgt die Separabilität mit Lemma 7.2.5 (ii). ■

Folglich hat man durch den Übergang zur Fortsetzung $\hat{\mu}$ bezüglich der verwandten Urbildräume $(\overline{\mathcal{K}}, \sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L}))$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}}))$ im Vergleich mit der „ μ -Situation“ in der Zustandskomponente dasselbe Strukturniveau wie vorher, während man in der Effektkomponente einen vollständigen Raum gewonnen hat. Es stellt sich die Frage, wie sich Aussagen über die Identität von Zuständen und Effekten aus Satz 6.1.9 bei Verwendung von $\hat{\mu}$ darstellen. Da es sich im Grunde nur um Aussagen über die Hausdorffeigenschaften handelt, kann die Frage schnell beantwortet werden.

Satz 7.2.7 *Es gilt:*

(i) *Für beliebige Elemente y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ sind äquivalent:*

(a) *Es gilt die Identität $y_1 = y_2$.*

(b) *Für alle Elemente w aus \mathcal{K} gilt die Gleichung $\hat{\mu}(w, y_1) = \hat{\mu}(w, y_2)$.*

(c) *Für alle Elemente x aus $\overline{\mathcal{K}}$ gilt die Gleichung $\hat{\mu}(x, y_1) = \hat{\mu}(x, y_2)$.*

(ii) *Für beliebige Elemente x_1, x_2 aus $\overline{\mathcal{K}}$ sind äquivalent:*

(a) *Es gilt die Identität $x_1 = x_2$.*

(b) *Für alle Elemente g aus \mathcal{L} gilt die Gleichung $\hat{\mu}(x_1, g) = \hat{\mu}(x_2, g)$.*

(c) *Für alle Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}}$ gilt die Gleichung $\hat{\mu}(x_1, y) = \hat{\mu}(x_2, y)$.*

Beweis:

zu (i): Mit Satz 7.2.6 (i) ist $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ hausdorffsch, außerdem folgt mit Punkt (i) von Satz 7.2.4 die Identität $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}}) = \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K})$. Die Aussage folgt dann sofort mit Satz A.3.3.

zu (ii): Mit Satz 7.2.6 (ii) ist $\sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L})$ hausdorffsch, und es folgt mit Satz A.3.3 die erste Aussage. Bedenkt man nun die Mengeninklusion $\mathcal{L} \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ erhält man die Implikationen: $x_1 = x_2 \implies [\forall y \in \hat{\mathcal{L}} : \hat{\mu}(x_1, y) = \hat{\mu}(x_2, y)]$
 $\implies [\forall g \in \mathcal{L} : \hat{\mu}(x_1, g) = \hat{\mu}(x_2, g)] \implies x_1 = x_2.$ ■

Ein weiterer Punkt, der den Übergang zur Fortsetzung $\hat{\mu}$ und den beteiligten Räumen attraktiv macht, offenbart sich, wenn man das Problem der Konvexität erneut untersucht. Mit Satz 6.2.3 wurden die Eigenschaften der rationalen $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexität von \mathcal{K} und der rationalen $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -Konvexität von \mathcal{L} erkannt. Der nächste Satz zeigt nun, daß man davon ausgehend für die „neuen Bildmengen“ $\overline{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ zu einer reellen Konvexität kommt. Dabei muß allerdings der vorhandenen Asymmetrie in der komponentenweisen gleichmäßigen Stetigkeit von $\hat{\mu}$ Rechnung getragen werden.

Satz 7.2.8 (i) $\hat{\mathcal{L}}$ ist reell σ - $(\hat{\mu}(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -konvex,
(ii) $\overline{\mathcal{K}}$ ist reell $(\hat{\mu}(\cdot, y))_{y \in \hat{\mathcal{L}}}$ -konvex.

Beweis:

zu (i): Die Aussage folgt mit Satz C.4.2 und mit Lemma 7.2.3 aus der rationalen $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -Konvexität von \mathcal{L} gemäß Satz 6.2.3 (ii).

zu (ii): Mit Satz C.4.2 und den Bezeichnungen von Seite 139 folgt aus der rationalen $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexität von \mathcal{K} entsprechend Satz 6.2.3 (i), daß $\hat{\mathcal{K}}$ reell $(\hat{h}_g)_{g \in \mathcal{L}}$ -konvex ist. Man bezeichne die $(\hat{h}_g)_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexkombination einer Familie $(x_j)_{j=1}^m \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ bezüglich einer reellen Gewichts familie $(\alpha_j)_{j=1}^m \subseteq (0, 1]$ mit x . Dann gehört x zu $\hat{\mathcal{K}}$, und es gilt für alle Elemente g aus \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} H_x(g) &= \hat{h}_g(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{h}_g(x_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j H_{x_j}(g) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{H}_{x_j}(g) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{\mu}(x_j, g) \end{aligned}$$

Für das oben gewählte x stellt sich also H_x als eine reell gewichtete Summe gleichmäßig stetiger reellwertiger Funktionen dar, so daß mit Lemma C.4.3 ebenfalls die gleichmäßige Stetigkeit von H_x folgt. Das heißt, x liegt in $\overline{\mathcal{K}}$. Mithin ist auch $\overline{\mathcal{K}}$ reell $(\hat{h}_g)_{g \in \mathcal{L}}$ -konvex, woraus sich insbesondere die reelle $(\hat{h}_g |_{\overline{\mathcal{K}}})_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexität ergibt. Nun gilt aber für alle $x \in \overline{\mathcal{K}}$ und für alle $g \in \mathcal{L}$

$$\hat{h}_g |_{\overline{\mathcal{K}}}(x) = \hat{h}_g(x) = H_x(g) = \hat{H}_x(g) = \hat{\mu}(x, g).$$

Folglich erhält man auch die $(\hat{\mu}(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexität von $\overline{\mathcal{K}}$. Mit Satz 7.2.1 liegt \mathcal{L} dicht in $(\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}}))$. Darüber hinaus folgt mit den Sätzen 7.2.1 und 7.2.4 die Metrisierbarkeit von $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$. Also existiert mit Satz A.5.6 eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$, die bezüglich $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ gegen y konvergiert. Da aber $\hat{\mu}(x, \cdot)$ für jedes $x \in \mathcal{K}$ stetig ist, gilt für jedes x aus $\overline{\mathcal{K}}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}(x, g_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{\mu}(x_j, g_n) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}(x_j, g_n) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{\mu}(x_j, y). \end{aligned}$$

Damit ist $\overline{\mathcal{K}}$ auch $(\hat{\mu}(\cdot, y))_{y \in \hat{\mathcal{L}}}$ -konvex. ■

Satz 7.2.8 zeigt also, daß man physikalisch nicht die Konvexität für reelle Gewichte fordern muß, sondern daß die Forderung für rationale Gewichte bereits ausreicht. Ein einfacher Übergang zu einer geeigneten Fortsetzung auf geeignete Teilmengen der Vervollständigungen von Zustands- und Effektraum bezüglich der physikalisch interpretierten Uniformität liefert dann schon die Konvexität für reelle Gewichte, ohne daß weitere Axiome notwendig sind. Dabei sei nochmals betont, daß man bei einem solchen Übergang nur Elemente hinzunimmt, die beliebig genau durch Elemente der ursprünglichen Menge approximiert werden können. Da man im Falle der Effekte zur ganzen Vervollständigung übergeht, hat man sogar schon die σ -Konvexität vorliegen. Eine gleichwertige Aussage kann man hier für die Zustandsmenge noch nicht treffen, da man die Zugehörigkeit von σ - $(\hat{\mu}(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexkombinationen zu $\overline{\mathcal{K}}$ auf dem bisherigen Niveau der Theorie noch nicht beweisen kann. Das wird erst durch einen Darstellungssatz möglich, der im Abschnitt 9.4 mit Hilfe der Hauptaxiome des Messens gewonnen werden kann. Mathematisch besteht das Problem darin, daß man Lemma C.4.3 nicht einfach auf abzählbare Familien erweitern kann.

Die Ausstattung der Bildmenge der Zustände und Effekte mit Uniformitäten der physikalischen Unschärfe sowie der hier beschrittene Weg der Vervollständigung bieten nun eine geeignete Basis zur Formulierung weiterer physikalisch motivierter Axiome. Wegen der mathematischen eher unhandlichen Menge $\overline{\mathcal{K}}$ ist es aber lohnend, zunächst eine Reihe mathematischer Vorarbeiten zu leisten, die die Formulierung der angestrebten Axiome in adäquater Weise ermöglicht.

Kapitel 8

Einbettung in Banachraum-Strukturen

Beschränkt man sich bei der bisher entwickelten Theorie auf denjenigen Teil, der sich mit Zuständen und Effekten auseinandersetzt, und vergißt man zunächst einmal die „vorgeschaltete“ Theorie der Präparation und Registrierung, wird die Theorie durch die drei Größen \mathcal{K} , \mathcal{L} und μ sowie durch die Uniformitäten der physikalischen Unschärfe $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ charakterisiert. Der naheliegende Wunsch, zu den zugehörigen Vervollständigungen überzugehen, kann Kapitel 7 zufolge nur partiell befriedigend durchgeführt werden. Stattdessen wird eine unter gewissen Aspekten „größtmöglichen“ Vervollständigung übergegangen, die dann durch die Größen $\overline{\mathcal{K}}$, $\overline{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mu}$ sowie die uniformen Strukturen der physikalischen Unschärfe $\hat{\sigma}(\overline{\mathcal{K}}, \overline{\mathcal{L}})$ und $\hat{\sigma}(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ gefaßt wird. Kapitel 7 hat bereits eine Reihe von Vorteilen einer solchen Formulierung gegenüber derjenigen ohne Vervollständigungen aufgeführt. Dabei sind auf mathematischer Ebene insbesondere die Kompaktheit von $\overline{\mathcal{L}}$ bezüglich $\hat{\sigma}(\overline{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ und die Ausweitung der Konvexitätseigenschaften auf die reellen Gewichte zu nennen. Auf physikalischer Ebene wird die Überwindung einer gewissen Willkür in der Wahl der Bildmengen durch einen derartigen Übergang beseitigt. Ein weiterer wichtiger Aspekt besteht in der Möglichkeit einer mathematisch kompakteren und damit vorteilhafteren Formulierung weiterer Axiome im Rahmen der Quantenmechanik, der sich Kapitel 9 widmet. Dennoch hat eine solche Formulierung offensichtliche Mängel. Dabei sind in erster Linie die entstandene Asymmetrie und die außerordentlich unhandliche Definition der Menge $\overline{\mathcal{K}}$ zu nennen.

Der Problematik wird dadurch begegnet werden, daß man zumindest zunächst doch nicht mit $\overline{\mathcal{K}}$ weiterarbeitet, sondern mit einer anderen Menge K , die mathematisch attraktiver ist als $\overline{\mathcal{K}}$. Die Menge K wird dabei derart gewählt, daß der Mengeninklu-

sionskette $\mathcal{K} \subseteq K \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ entsprochen wird. Daß K die Menge \mathcal{K} enthält, garantiert, daß alle physikalischen Zustände erfaßt werden, also physikalisch keine Einschränkung des beschriebenen Wirklichkeitsbereiches stattfindet. Ob des Lemmas 7.2.2 muß K als Teilmenge von $\overline{\mathcal{K}}$ gewählt werden, denn die initiale Uniformität der physikalischen Unschärfe, die auf \mathcal{L} induziert wird, soll nicht verändert werden. Das folgende Kapitel soll zeigen, daß man eine solche Menge K derart finden kann, daß die sich daraus ergebende Formulierung der Theorie mathematisch günstiger ist, ohne die mathematischen Vorteile der Formulierung aus Kapitel 7 zu verlieren. Dazu wird K als der Normabschluß von \mathcal{K} in einem geeignet zu wählenden Banachraum definiert werden. Der Banachraum wird dergestalt sein, daß man gleichzeitig die andere zentrale Menge $\hat{\mathcal{L}}$ im zugehörigen Norm-Dualraum wiederfindet und daß $\hat{\mu}$ auf $K \times \hat{\mathcal{L}}$ mit der kanonischen Bilinearität dieses normierten Raumes und seines Norm-Dualraumes zusammenfällt. Außerdem werden sich die uniformen Strukturen der physikalischen Unschärfe für die Elemente der Mengen K und $\hat{\mathcal{L}}$ als initiale Strukturen bezüglich des obigen Dualsystems formulieren lassen. Erst in Kapitel 9 wird man dann aufgrund der dort gewählten weiteren Axiome dazu kommen, daß sich K als Darstellung von $\overline{\mathcal{K}}$ erweist. Genauer ergibt sich die Identität der Mengen $\overline{\mathcal{K}}$ und K . Daher hat man mit der Formulierung, wie sie im nun folgenden Kapitel erläutert wird, dieselbe Theorie wie in Kapitel 7 vorliegen.

Um nun zu der oben skizzierten Formulierung der Theorie zu gelangen, werden im ersten Abschnitt des Kapitel zunächst eine Reihe mathematischer Vorarbeiten geleistet, die in erster Linie in der Konstruktion geeigneter Familien normierter Räume bestehen. Ausgehend von den so gewonnenen normierten Räumen gelangt man auf kanonischem Wege zu Familien uniformer und zugehöriger topologischer Räume, indem man zu den normierten Räumen noch ihre Norm-Dualräume hinzuzieht.

Im zweiten Abschnitt werden dann zwei spezielle Räume \mathcal{D} und Δ der erwähnten Familien herausgegriffen und gesondert untersucht. Dabei wird sich herausstellen, daß man in den zugehörigen Dualsystemen aus normiertem Raum und Norm-Dualraum die uniformen Räume $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ in eingebetteter Form wiederfindet. Der Raum Δ wird dann der Ausgangspunkt für das oben beschriebene Dualsystem sein.

In der Folge werden im dritten Abschnitt die konvexen Strukturen auf K und $\hat{\mathcal{L}}$ diskutiert, da sie ein wichtiger Ausgangspunkt für die Formulierung der Axiome in Kapitel 9 sind. Nach der Vorstellung der notwendigen Begriffe erfolgt die Einordnung in den Rahmen der Konvexitätsbetrachtungen aus den Abschnitten 7.2 und 6.2.

Im letzten Abschnitt des Kapitels wird Δ und damit insbesondere auch $\hat{\mathcal{L}}$ in natürlicher Weise mit einer Halbordnung ausgestattet. Abschließend wird eine Aussage

zum Verhältnis von K und B_Δ zur Verfügung gestellt, die zur Formulierung eines Darstellungstheorems für die Elemente von B_Δ durch die Elemente von K führt.

8.1 Konstruktion geeigneter normierter, uniformer und topologischer Räume

Um geeignete mathematische Strukturen zur Überwindung der mit der Menge $\overline{\mathcal{K}}$ verknüpften Problematik zu erhalten, werden \mathcal{K} und \mathcal{L} zunächst in Vektorräume eingebettet. Dazu wird festgelegt:

Definition 8.1.1

Mit B wird die Menge aller Abbildungen $x : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, für die man eine Familie $(w_i)_{i=1}^n$ von Elementen der Menge \mathcal{K} und eine Familie reeller Zahlen $(\alpha_i)_{i=1}^n$ so angeben kann, daß für jedes g aus \mathcal{L} gilt:

$$x(g) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(w_i, g).$$

Mit D wird die Menge aller Abbildungen $y : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ benannt, für die man eine Familie $(g_i)_{i=1}^n$ von Elementen der Menge \mathcal{L} und eine Familie reeller Zahlen $(\beta_i)_{i=1}^n$ derart finden kann, daß für alle Elemente w der Menge \mathcal{K} gilt:

$$y(w) = \sum_{i=1}^n \beta_i \mu(w, g_i).$$

Die Eigenschaften der Mengen B und D und ihr Verhältnis zu \mathcal{K} und \mathcal{L} werden erschöpfend durch den nachfolgenden Satz behandelt, dessen Aussagen sich teilweise als Bemerkungen und teilweise als Theorem T 1.2 in [Lud85a], Kapitel IV, §§1 bis 3, S. 101-104 finden:

Satz und Definition 8.1.2 *Es gilt:*

- (i) B, D sind lineare \mathbb{R} -Vektorräume.
- (ii) Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\longrightarrow B, & w &\longmapsto \mu(w, \cdot), \\ \mathcal{L} &\longrightarrow D, & g &\longmapsto \mu(\cdot, g) \end{aligned}$$

definieren Injektionen. Werden \mathcal{K} und \mathcal{L} mittels dieser Injektionen mit Teilmengen von B und D identifiziert, ergeben sich die Relationen: $\mathcal{K} \subseteq B$ und $\mathcal{L} \subseteq D$.

(iii) Werden die Identifikationen aus (ii) vorgenommen, dann ist B der lineare Aufspann von \mathcal{K} , und D ist der lineare Aufspann von \mathcal{L} .

(iv) Die Vorschrift

$$\xi : B \times D \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \xi(x, y) := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mu(w_i, g_j)$$

definiert die einzige bilineare Fortsetzung von μ auf $B \times D$. Dabei seien die Darstellungen $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ und $y = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j$ entsprechend (iii) verwandt.

(v) $\langle B, D, \xi \rangle$ bezeichnet ein Dualsystem.

(vi) Mit $\sigma(B, \mathcal{L})$ wird die initiale Uniformität auf B bezüglich $(\xi(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ bezeichnet, und mit $\sigma(B, D)$ wird die initiale Uniformität auf B bezüglich $(\xi(\cdot, y))_{y \in D}$ benannt. Analog seien $\sigma(D, \mathcal{K})$ und $\sigma(D, B)$ definiert.

Es fallen zum einen $\sigma(B, \mathcal{L})$ und $\sigma(B, D)$ und zum anderen $\sigma(D, \mathcal{K})$ und $\sigma(D, B)$ zusammen. Die Unterraumuniformität $\sigma(B, \mathcal{L})|_{\mathcal{K}}$ ist mit $\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ identisch. Ferner ist die Unterraumuniformität $\sigma(D, \mathcal{K})|_{\mathcal{L}}$ identisch mit $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$.

(vii) $(B, \sigma(B, D))$ und $(D, \sigma(D, B))$ sind topologische Vektorräume. Damit sind $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ insbesondere in topologische Vektorräume eingebettet.

Bemerkung: Die Identifikation aus Punkt (ii) wird in der Folge zumeist ohne weiteren Kommentar vorausgesetzt.

Beweis:

Punkt (i) ist offensichtlich. Punkt (ii) folgt direkt aus den Punkten (ii) und (iii) des zentralen Satzes 6.1.9 über μ . Punkt (iii) ist direkte Folge der Definition von B und D in Definition 8.1.1. Die Abbildung ξ in (iv) ist wohldefiniert, da nach Punkt (iii) für jedes $x \in B$ und jedes $y \in D$ die benötigte Darstellung existiert und da $\xi(x, y)$ unabhängig von der Darstellung ist, wie sich leicht nachrechnen läßt. Die Bilinearität von ξ ist offensichtlich ebenso wie die Fortsetzungseigenschaft bezüglich μ . Es bleibt also noch, die Eindeutigkeit zu

beweisen. Man nehme dafür an, daß es noch eine weitere bilineare Fortsetzung $\phi : B \times D \rightarrow \mathbb{R}$ von μ gibt. Seien $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$ und $y = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j$ gewählt, dann liefern Bilinearität und Fortsetzungseigenschaft sofort:

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \phi(w_i, g_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j \mu(w_i, g_j) = \xi(x, y).$$

Für Punkt (v) müssen die Trennungseigenschaften gezeigt werden. Wähle dafür Elemente $x_1, x_2 \in B$ mit $\xi(x_1, y) = \xi(x_2, y)$ für alle $y \in D$, dann gilt auch $x_1(g) = \xi(x_1, g) = \xi(x_2, g) = x_2(g)$ für alle $g \in \mathcal{L}$. Also gilt $x_1 = x_2$. Analoges folgt für D . Die Aussagen $\sigma(B, \mathcal{L}) = \sigma(B, D)$ und $\sigma(D, \mathcal{K}) = \sigma(D, B)$ in (vi) folgen mit Lemma D.1.1 aus (ii), während die Aussagen $\sigma(B, \mathcal{L})|_{\mathcal{K}} = \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und $\sigma(D, \mathcal{K})|_{\mathcal{L}} = \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ mit Satz C.3.1 folgen. Punkt (vii) schließlich ist eine bekannte Tatsache aus der Theorie der topologischen Vektorräume, man siehe etwa [SW99], Kapitel IV, §1.1 S. 124. ■

Das so gewonnene Dualsystem $\langle B, D, \xi \rangle$ kann mit einem anderen Dualsystem verknüpft werden. Dafür sei zunächst die folgende Festlegung gemacht.

Definition 8.1.3

Mit B^* wird der algebraische Dualraum zu B bezeichnet, und mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird die kanonische Bilinearität auf $B \times B^*$ benannt, das heißt, es wird definiert:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : B \times B^* \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x, y \rangle := y(x).$$

Der Umstand, daß $\langle B, D, \xi \rangle$ eine Dualität darstellt, erlaubt es, $\langle B, D, \xi \rangle$ als von dem Dualsystem $\langle B, B^*, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ induziert aufzufassen, wie man [SW99], Kapitel IV, Einleitung, S. 124 entnehmen kann. Das heißt, D kann mit einem Untervektorraum von B^* identifiziert werden. Unter Verwendung der so gearteten Identifikation erhält man die Identität:

$$\xi = \langle \cdot, \cdot \rangle|_{B \times D}.$$

Insbesondere gilt also für alle Elemente w aus \mathcal{K} und alle Elemente g aus \mathcal{L} :

$$\xi(w, g) = \langle w, g \rangle = \mu(w, g). \quad (8.1)$$

Außerdem sind die durch den zentralen Satz 6.1.9 über μ eindeutig bestimmten Elemente g_0 und g_1 mit obiger Identifikation auch Elemente von D . Also kann man sie auch als Elemente von B^* auffassen.

Definition und Lemma 8.1.4 *Das neutrale Element bezüglich der Addition von B^* wird $\mathbf{0}$ genannt. Die Elemente $\mathbf{0}$ und g_0 sind identisch.*

Beweis:

Die Aussage folgt direkt aus der definierenden Eigenschaft von g_0 , der Definition von D und den Trennungseigenschaften des Dualsystems $\langle B, B^*, \langle \cdot, \cdot \rangle$. ■

Da mit dem zentralen Satz 6.1.9 über μ die Relation $\langle w, g_1 \rangle = 1$ für alle Elemente w aus \mathcal{K} gilt, soll in Zukunft g_1 mit $\mathbf{1}$ bezeichnet werden. Die Wahl eines solchen Namens wird sich erst später in einem noch zu erläuternden verbandstheoretischen Kontext vollständig rechtfertigen.

Es ist jetzt naheliegend, die Menge

Definition 8.1.5

$$R := \{y \in B^* \mid \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y \rangle| < \infty\}$$

zu betrachten und auf ihr die nachfolgende Abbildung

Definition 8.1.6

$$\|\cdot\| : R \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto \|y\| := \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y \rangle|$$

zu untersuchen.

Die Abbildung $\|\cdot\|$ macht R zu einem normierten Raum. Darüber hinaus gilt einer Bemerkung in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 105 folgend:

Satz 8.1.7 *R bezeichnet einen Untervektorraum von B^* , und bei $(R, \|\cdot\|)$ handelt es sich um einen Banachraum.*

Beweis:

Die Untervektorraumeigenschaft und auch die Normeigenschaften von $\|\cdot\|$ folgen unmittelbar aus den Definitionen. Es bleibt also, die Vollständigkeit zu beweisen. Sei dazu durch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge aus $(R, \|\cdot\|)$ gewählt, dann gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon) : \|y_n - y_m\| < \varepsilon. \quad (8.2)$$

Es ist jetzt das Ziel, ein Element in R explizit anzugeben, das Grenzwert der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ ist.

Um ein solches Element definieren zu können, wird zunächst gezeigt, daß für jedes $x \in B$ durch $(\langle x, y_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} gegeben ist. Für

$x = 0$ ist die Aussage trivial. Seien daher $\varepsilon > 0$ und $x \in B \setminus \{0\}$ gewählt, dann existiert, da B von \mathcal{K} linear aufgespannt wird, eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i w_i$. Damit gilt für jedes $y \in B^*$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p \alpha_i \langle w_i, y \rangle. \quad (8.3)$$

Wählt man $n_0(\varepsilon / (\sum_{i=1}^p |\alpha_i|))$ entsprechend (8.2), dann ergibt sich für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon / (\sum_{i=1}^p |\alpha_i|))$:

$$\begin{aligned} |\langle x, y_n \rangle - \langle x, y_m \rangle| &= |\langle x, y_n - y_m \rangle| \\ &\stackrel{(8.3)}{=} \left| \sum_{i=1}^p \alpha_i \langle w_i, y_n - y_m \rangle \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^p |\alpha_i| \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y_n - y_m \rangle| \\ &= \sum_{i=1}^p |\alpha_i| \|y_n - y_m\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Aufgrund der Vollständigkeit von \mathbb{R} ist damit die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, y_n \rangle.$$

Da $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bilinear ist, liefern die Grenzwertsätze für reelle Folgen die Linearität von f , so daß f zu B^* gehört.

Als Nächstes ist zu zeigen, daß f auch in R liegt. Dafür soll erst die folgende Hilfsaussage zur Verfügung gestellt werden:

Hilfsaussage: Wählt man $n_0(\varepsilon/2)$ gemäß (8.2), dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$, jedes $w \in \mathcal{K}$ und jedes $n \geq n_0(\varepsilon/2)$:

$$|\langle w, y_n \rangle - f(w)| < \varepsilon. \quad (8.4)$$

Zum Beweis der Hilfsaussage wähle ein beliebiges $\varepsilon > 0$, und wähle $n_0(\varepsilon/2)$ gemäß (8.2). Dann existiert für jedes $w \in \mathcal{K}$ aufgrund der Konvergenz von $(\langle w, y_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $f(w)$ eine natürliche Zahl $\bar{n}_0(w, \varepsilon) \geq n_0(\varepsilon/2)$, so daß

der Ungleichung $|\langle w, y_{\overline{n}_0}(w, \varepsilon) \rangle - f(w)| < \frac{\varepsilon}{2}$ entsprechen wird. Es folgt für $n \geq n_0(\varepsilon/2)$:

$$\begin{aligned} |\langle w, y_n \rangle - f(w)| &\leq |\langle w, y_n \rangle - \langle w, y_{\overline{n}_0}(w, \varepsilon) \rangle| \\ &\quad + |\langle w, y_{\overline{n}_0}(w, \varepsilon) \rangle - f(w)| \\ &\leq \|y_n - y_{\overline{n}_0}(w, \varepsilon)\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Hilfsaussage bewiesen, und man kann jetzt die Zugehörigkeit von f zu R beweisen. Wähle dafür ein $\varepsilon > 0$, $n_0(\varepsilon/2)$ wiederum mit (8.2) und ein beliebiges $n > n_0(\varepsilon/2)$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} \sup_{w \in \mathcal{K}} |f(w)| &\leq \sup_{w \in \mathcal{K}} (|\langle w, y_n \rangle - f(w)| + |\langle w, y_n \rangle|) \\ &\leq \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y_n \rangle - f(w)| + \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y_n \rangle| \\ &\stackrel{(8.4)}{<} \varepsilon + \underbrace{\|y_n\|}_{< \infty} < \infty. \end{aligned}$$

f liegt somit in R . Der Beweis der Behauptung ist abgeschlossen, wenn man zeigt, daß die eingangs gewählte Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|$ gegen f konvergiert. Die Konvergenz folgt aber unmittelbar aus (8.4), denn für $n \geq n_0(\varepsilon/2)$ erhält man:

$$\|y_n - f\| = \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y_n - f \rangle| \stackrel{(8.4)}{<} \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Über die Norm der Elemente von \mathcal{L} läßt sich sofort die folgende Aussage treffen, die man als Teil von Theorem T 3.3 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 106 findet:

Lemma 8.1.8 *Für alle Elemente g aus \mathcal{L} gilt die Ungleichung $\|g\| \leq 1$.*

Beweis:

$$\text{Mit (8.1) folgt: } \|g\| = \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, g \rangle| = \sup_{w \in \mathcal{K}} \underbrace{|\mu(w, g)|}_{\in [0,1]} \leq 1. \quad \blacksquare$$

Für das Verhältnis von D und R gilt

Lemma 8.1.9 *D ist Untervektorraum von R .*

Beweis:

Da für $y \in D$ eine Darstellung $y = \sum_{j=1}^m \beta_j g_j$ mit einer Familie $(g_j)_{j=1}^m$ aus \mathcal{L} und einer Familie reeller Zahlen $(\beta_j)_{j=1}^m$ existiert, gilt für alle $w \in \mathcal{K}$:

$$\langle w, y \rangle = \xi(w, y) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(w, g_j).$$

Aufgrund der Beschränktheit von $\mu(\cdot, g)$ folgt daher, daß auch $|\langle \cdot, y \rangle|$ beschränkt ist. Also liegt y in der Menge R . Das heißt, mit D liegt eine Teilmenge von R vor. Als solche kann man auf die Elemente von D auch die Vektorraumoperationen der Addition und Skalarmultiplikation bezüglich des Vektorraumes R anwenden.

Mit Satz 8.1.2 ist D aber bereits für sich stehend als Vektorraum erkannt und mit Operationen der Addition und Skalarmultiplikation ausgestattet worden. Es ist nun offensichtlich, daß jeweils die beiden Formen der Addition und Skalarmultiplikation auf D zusammenfallen. ■

D und R bilden zwei Grenzüntervektorräume von B^* derart, daß man mit Hilfe von Untervektorräumen, die D enthalten und die selber in R enthalten sind, eine Norm auch auf B definieren kann. Zur übersichtlichen Formulierung weiterer Aussagen wird deshalb zunächst definiert:

Definition 8.1.10

\mathcal{V}_R bezeichne die Menge aller D umfassenden Untervektorräume von R , jeweils ausgestattet mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Norm.

Bemerkung: Die Norm $\|\cdot\|$ ist in Definition 8.1.6 als Abbildung auf ganz R eingeführt worden. Mit \mathcal{V}_R werden jetzt auch Untervektorräume \tilde{R} von R betrachtet, die jeweils mit der von $\|\cdot\|$ induzierten Norm ausgestattet sein sollen. Die auf \tilde{R} induzierte Norm ist die Restriktion $\|\cdot\|_{\tilde{R}}$ von $\|\cdot\|$ auf \tilde{R} , so daß man in formal richtiger Weise den entstehenden normierten Raum mit $(\tilde{R}, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$ bezeichnen müßte. Vereinfachend sei aber für die weiteren Erörterungen die Schreibweise $(\tilde{R}, \|\cdot\|)$ vereinbart.

Damit kann man die oben umschriebenen Aussagen formulieren, indem einer Bemerkung in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 106 gefolgt wird:

Definition und Lemma 8.1.11 Für ein Element \tilde{R} von \mathcal{V}_R ist durch

$$\|\cdot\|_{\tilde{R}} : B \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|_{\tilde{R}} := \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq 0} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|}$$

eine Norm auf B gegeben. Für alle Elemente x aus B und alle Elemente y aus \tilde{R} ergibt sich die Ungleichung:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\tilde{R}} \|y\|.$$

Beweis:

Alle Eigenschaften folgen direkt aus der Definition bis auf die Aussage:

$$\forall x \in B : \|x\|_{\tilde{R}} = 0 \implies x = 0.$$

Dafür muß auf die Eigenschaft zurückgegriffen werden, daß $\langle B, D, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ ein Dualsystem ist. Damit folgt obige Implikation wegen $D \subseteq \tilde{R}$. Das zeigt auch, warum man mindestens D mit \tilde{R} umfassen muß. Die Ungleichung folgt in trivialer Weise aus der Definition der Norm. ■

Damit gilt also insbesondere für ein Element \tilde{R} aus \mathcal{V}_R :

- (i) Für jedes Element y in \tilde{R} besitzt die Abbildung $\langle \cdot, y \rangle$ die Eigenschaft der Stetigkeit auf B bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{\tilde{R}}$.
- (ii) Für jedes Element x aus B besitzt die Abbildung $\langle x, \cdot \rangle$ die Eigenschaft der Stetigkeit auf \tilde{R} bezüglich der Norm $\|\cdot\|$.

Wie bereits im Falle der uniformen Räume kann man auch im Falle der jetzt betrachteten normierten Räume zu Vervollständigungen übergehen. Das folgende Lemma führt zu einem, um kleinere Aussagen erweitert, Anmerkungen in [Lud85a], Kapitel IV, §, S. 106 aus, und zum anderen beinhaltet es Teile des ebendort notierten Theorems T 3.3:

Definition und Lemma 8.1.12 *Es bezeichne \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R . Die Vervollständigung von B bezüglich $\|\cdot\|_{\tilde{R}}$ erhalte den Namen $B_{\tilde{R}}$. Mit $\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}$ wird die zugehörige Norm der Vervollständigung benannt. Sie fällt auf B mit $\|\cdot\|_{\tilde{R}}$ zusammen. Für jedes Element y aus \tilde{R} kann die Abbildung $\langle \cdot, y \rangle$ in eindeutiger Weise linear und bezüglich $\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}$ stetig auf $B_{\tilde{R}}$ fortgesetzt werden. Die Fortsetzung wird mit $\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)$ bezeichnet. $\xi_{\tilde{R}}$ ist Bilinearform auf $B_{\tilde{R}} \times \tilde{R}$, und es gilt für alle Elemente x aus $B_{\tilde{R}}$ und alle Elemente y aus \tilde{R} :*

$$|\xi_{\tilde{R}}(x, y)| \leq \|x\|_{B_{\tilde{R}}} \|y\|.$$

Für jedes Element x aus $B_{\tilde{R}}$ gehört die Abbildung $\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot)$ zum Norm-Dualraum $((\tilde{R})', \|\cdot\|_{(\tilde{R})'})$ von $(\tilde{R}, \|\cdot\|)$, wobei $\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}$ die kanonische Norm des Norm-Dualraumes

bezeichnen soll. Für jedes x aus $B_{\tilde{R}}$ ist die Abbildung $\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot)$ insbesondere stetig auf $(\tilde{R}, \|\cdot\|)$.

Es gilt für jedes Element w aus \mathcal{K} die Gleichungskette: $\|w\|_{\tilde{R}} = \|w\|_{B_{\tilde{R}}} = 1$.

Beweis:

Mit Lemma 8.1.11 ist für $y \in \tilde{R}$ die Abbildung $\langle \cdot, y \rangle$ linear und stetig auf $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$. Da B auch bezüglich $\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}$ dicht in seiner Vervollständigung liegt, existiert mit [Wer97], Satz II.1.5, S. 48 die gesuchte lineare und stetige Fortsetzung auf $(B_{\tilde{R}}, \|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}})$ in eindeutiger Weise. Die Linearität von $\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)$ ist damit für jedes $y \in \tilde{R}$ gegeben.

Seien $x \in B_{\tilde{R}}$, $y_1, y_2 \in \tilde{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ gewählt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ mit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}} x$. Die Vektorraumeigenschaft von \tilde{R} garantiert die Zugehörigkeit von $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ zur Menge \tilde{R} . Und da definitionsgemäß für jedes $y \in \tilde{R}$ die Funktion $\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)$ stetig auf $(B_{\tilde{R}}, \|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}})$ ist, folgt nun:

$$\begin{aligned} \xi_{\tilde{R}}(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tilde{R}}(x_n, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \langle x_n, y_1 \rangle + \lambda_2 \langle x_n, y_2 \rangle) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_1 \xi_{\tilde{R}}(x_n, y_1) + \lambda_2 \xi_{\tilde{R}}(x_n, y_2)) \\ &= \lambda_1 \xi_{\tilde{R}}(x, y_1) + \lambda_2 \xi_{\tilde{R}}(x, y_2). \end{aligned}$$

Also ist die Bilinearität der Abbildung $\xi_{\tilde{R}}$ auf $B_{\tilde{R}} \times \tilde{R}$ nachgewiesen.

Da der Fall $y = \mathbf{0}$ trivial ist, wähle man jetzt $x \in B_{\tilde{R}}$ und $y \in \tilde{R}$ mit $y \neq \mathbf{0}$.

Dann existiert wiederum eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ mit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}} x$. Da eine Norm stets bezüglich ihrer selbst stetig ist, gilt

$$\|x_n\|_{B_{\tilde{R}}} = \|x_n\|_{\tilde{R}} \longrightarrow \|x\|_{B_{\tilde{R}}}.$$

Und da für jedes $y \in \tilde{R}$ die Funktion $\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)$ auch bezüglich $\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}$ stetig ist, folgt mit Lemma 8.1.11

$$\frac{|\langle x_n, y \rangle|}{\|y\|} \longrightarrow \frac{|\xi_{\tilde{R}}(x, y)|}{\|y\|}.$$

Damit erhält man $|\xi_{\tilde{R}}(x, y)| \leq \|x\|_{B_{\tilde{R}}} \|y\|$.

Mit der so gewonnenen Ungleichung folgt für jedes $x \in B_{\tilde{R}}$ ob ihrer Linearität

auch die Stetigkeit der Abbildung $\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot)$. Folglich gehört $\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot)$ insbesondere zum Norm-Dualraum $(\tilde{R})'$ von $(\tilde{R}, \|\cdot\|)$.

Es bleibt, die letzte Aussage zu beweisen. Sei dazu ein $w \in \mathcal{K}$ gewählt, dann gilt einerseits

$$\|w\|_{\tilde{R}} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\langle w, y \rangle|}{\|y\|} \leq 1,$$

denn es gilt $|\langle w, y \rangle| \leq \sup_{w' \in \mathcal{K}} |\langle w', y \rangle| = \|y\|$. Andererseits gilt für das Element $\mathbf{1}$, das in der Folge zu Lemma 8.1.4 definiert wurde,

$$\langle w, \mathbf{1} \rangle = \mu(w, g_1) = 1,$$

womit sich $\|w\|_{\tilde{R}} \geq 1$ ergibt. ■

Es besteht eine wichtige Verknüpfung zwischen den Banachräumen $B_{\tilde{R}}$ und den Norm-Dualräumen $(\tilde{R})'$, der in den folgenden Lemmata 8.1.13, 8.1.15 und Satz 8.1.16 erarbeitet wird. Bei den genannten drei mathematischen Aussagen handelt es sich um Verallgemeinerungen einiger Bemerkungen Ludwigs im Vorfeld von T 3.3 und im Beweis von T 3.10 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 106 und S. 109 auf beliebige Elemente aus \mathcal{V}_R .

Bevor der angestrebte Zusammenhang zwischen $B_{\tilde{R}}$ und $(\tilde{R})'$ vollständig formuliert werden kann, muß zunächst das Verhältnis von $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$ zu $(\tilde{R})'$ untersucht werden, das Inhalt des nächsten Lemmas ist.

Lemma 8.1.13 *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , dann definiert die Vorschrift*

$$(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}}) \longrightarrow ((\tilde{R})', \|\cdot\|_{(\tilde{R})'}), \quad x \longmapsto \langle x, \cdot \rangle|_{\tilde{R}} \quad (8.5)$$

eine lineare Isometrie.

Wird der normierte Raum $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$ mittels (8.5) mit einem Unterraum von $((\tilde{R})', \|\cdot\|_{(\tilde{R})'})$ identifiziert, gilt insbesondere die Mengeninklusion $B \subseteq (\tilde{R})'$, und es ergibt sich bezüglich des Verhältnisses der Normen für jedes Element x aus B :

$$\|x\|_{B_{\tilde{R}}} = \|x\|_{\tilde{R}} = \|x\|_{(\tilde{R})'}.$$

Beweis:

Die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt mit Lemma 8.1.12, denn für $x \in B$, $y \in \tilde{R}$ gilt $\xi_{\tilde{R}}(x, y) = \langle x, y \rangle$. Somit gehört $\langle x, \cdot \rangle|_{\tilde{R}}$ zur Menge $(\tilde{R})'$. Die Linearität der Abbildung aus (8.5) folgt aus den Linearitätseigenschaften von

$\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zum Beweis der Aussagen über die Norm sei die Abbildung aus der Behauptung mit t benannt. Für jedes $x \in B$ ergibt sich:

$$\|x\|_{\tilde{R}} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|t(x)(y)|}{\|y\|} = \|t(x)\|_{(\tilde{R})'}.$$

■

Also kann man $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$ stets in $(\tilde{R})'$ einbetten. Um eine derartige Aussage auch für die Vervollständigung von B formulieren zu können, bedarf es noch einiger Aussagen. Dafür wird zunächst festgelegt:

Definition 8.1.14

Die kanonische Bilinearform zum Dualsystem $\langle \tilde{R}, (\tilde{R})' \rangle$ für ein Element \tilde{R} aus \mathcal{V}_R wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{R}}$ benannt. Sie wird definiert durch die Vorschrift:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{R}}: \tilde{R} \times (\tilde{R})' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (y, x) \longmapsto \langle y, x \rangle_{\tilde{R}} := x(y).$$

Bezüglich der Norm auf $(\tilde{R})'$ erhält man für jedes Element x aus $(\tilde{R})'$:

$$\|x\|_{(\tilde{R})'} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\langle y, x \rangle_{\tilde{R}}|}{\|y\|}.$$

Somit folgt insbesondere für jedes Element x der Menge $(\tilde{R})'$ und jedes Element y der Menge \tilde{R} :

$$|\langle y, x \rangle_{\tilde{R}}| \leq \|x\|_{(\tilde{R})'} \|y\|. \quad (8.6)$$

Man kann zumindest zunächst für die Elemente aus B eine einfache Verknüpfung der drei Bilinearitäten $\xi_{\tilde{R}}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{R}}$ angeben, wenn man die identifizierende Abbildung aus Lemma 8.1.13 verwendet.

Lemma 8.1.15 *Bezeichnet \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , dann gilt für alle Elemente x der Menge B und alle Elemente y der Menge \tilde{R} die Gleichungskette:*

$$\langle y, x \rangle_{\tilde{R}} = \langle x, y \rangle = \xi_{\tilde{R}}(x, y).$$

Beweis:

Es bleibt, das erste Gleichheitszeichen zu beweisen. Es möge t die lineare Isometrie aus Lemma 8.1.13 bezeichnen. Dann gilt für $x \in B$ und $y \in \tilde{R}$:

$$\langle x, y \rangle = t(x)(y) = \langle y, t(x) \rangle_{\tilde{R}}.$$

Nimmt man jetzt die Identifikation vor, erhält man die Behauptung. \blacksquare

Damit stehen jetzt die Instrumente und Tatsachen zur Verfügung, um auch das Verhältnis von $(B_{\tilde{R}}, \|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}})$ mit $(\tilde{R})'$ zu klären.

Satz 8.1.16 *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R . Wenn B im Sinne von Lemma 8.1.13 als Teilmenge von $(\tilde{R})'$ aufgefaßt wird, dann existiert ein isometrischer Isomorphismus von $(B_{\tilde{R}}, \|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}})$ nach $(\overline{B}^{\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}}, \|\cdot\|_{(\tilde{R})'})$. Werden die beiden Räume so identifiziert, ergibt sich:*

$$B_{\tilde{R}} = \overline{B}^{\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}} \subseteq (\tilde{R})'.$$

Für jedes Element x der Menge $B_{\tilde{R}}$ und jedes Element y der Menge \tilde{R} gilt:

$$\xi_{\tilde{R}}(x, y) = \langle y, x \rangle_{\tilde{R}}.$$

Bezüglich des Verhältnisses der Normen ergibt sich für jedes Element x aus $B_{\tilde{R}}$:

$$\|x\|_{B_{\tilde{R}}} = \|x\|_{(\tilde{R})'} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_{\tilde{R}}(x, y)|}{\|y\|}.$$

$B_{\tilde{R}}$ wird durch \tilde{R} getrennt, das heißt, daß ein Element x aus $B_{\tilde{R}}$ mit dem Null-Element des Vektorraumes $B_{\tilde{R}}$ identisch ist, wenn für jedes Element y der Menge \tilde{R} die Identität $\xi_{\tilde{R}}(x, y) = 0$ gilt.

Beweis:

$(\tilde{R})'$ besitzt bezüglich der kanonischen Norm die Banachraum-Eigenschaft, und mit der Identifikation gemäß Lemma 8.1.13 ist $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$ Unterraum von $(\tilde{R})'$. Also liegt mit dem Abschluß von $B \subseteq (\tilde{R})'$ bezüglich $\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}$, ebenfalls ein Banachraum vor. Bei $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}})$ handelt es sich um einen dichten Unterraum des Banachraumes $(\overline{B}^{\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}}, \|\cdot\|_{(\tilde{R})'})$. Die Vervollständigung eines normierten Raumes ist etwa mit Satz 4.1.3 in [Heu92], S. 251 bis auf isometrische Isomorphie eindeutig bestimmt, so daß $(\overline{B}^{\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}}, \|\cdot\|_{(\tilde{R})'})$ und $(B_{\tilde{R}}, \|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}})$

bis auf isometrische Isomorphie identisch sind. So folgt insbesondere die erste Gleichheits-Beziehung zwischen den Normen.

Seien nun $x \in B_{\tilde{R}}$ und $y \in \tilde{R}$ gewählt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, so daß die Konvergenz $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}} x$ gilt. Dazu äquivalent ist wegen der obigen Isomorphie die Konvergenz $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}} x$. Aufgrund der Stetigkeit von $\langle y, \cdot \rangle_{\tilde{R}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}$ nach (8.6) und mit Lemma 8.1.15 gilt:

$$\langle y, x \rangle_{\tilde{R}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle y, x_n \rangle_{\tilde{R}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tilde{R}}(x_n, y) = \xi_{\tilde{R}}(x, y).$$

Also erhält man schließlich für alle $x \in B_{\tilde{R}}$:

$$\|x\|_{B_{\tilde{R}}} = \|x\|_{(\tilde{R})'} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\langle y, x \rangle_{\tilde{R}}|}{\|y\|} = \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_{\tilde{R}}(x, y)|}{\|y\|}.$$

Die Trennungseigenschaft folgt mit obiger Identität sofort aus dem Umstand, daß $(\tilde{R})'$ die Menge $B_{\tilde{R}}$ umfaßt und daß $\langle \tilde{R}, (\tilde{R})', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{R}} \rangle$ Dualsystem ist. ■

Umgekehrt stellt sich die Frage, wie \tilde{R} mit dem Norm-Dualraum von $B'_{\tilde{R}}$ zusammenhängt. Die Antwort darauf liefert die nächste Aussage, die sich ohne Beweis als Teil von T 3.4 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 106 findet:

Satz 8.1.17 *Bezeichnet \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , dann definiert die Vorschrift*

$$(\tilde{R}, \|\cdot\|) \longrightarrow (B'_{\tilde{R}}, \|\cdot\|_{B'_{\tilde{R}}}), \quad y \longmapsto \xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)$$

eine lineare Isometrie. Dabei soll $\|\cdot\|_{B'_{\tilde{R}}}$ die kanonische Norm des Norm-Dualraumes bezeichnen. Die zugehörige Umkehrabbildung auf dem Bildbereich obiger linearer Isometrie ist die Restriktion auf B .

Identifiziert man die beiden Räume mittels obiger Abbildung, ergibt sich die Mengeneinklusion $\tilde{R} \subseteq B'_{\tilde{R}}$.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit der Abbildung erhält man direkt aus der Definition von $\xi_{\tilde{R}}$. Die Linearität ergibt sich in trivialer Weise, da $\xi_{\tilde{R}}$ mit Lemma 8.1.12 eine Bilinearform darstellt. Mithin muß noch die Isometrie gezeigt werden.

Man wähle dafür ein $y \in \tilde{R}$. Die untersuchte Abbildung sei für den weiteren Verlauf des Beweises mit t benannt. Mit Lemma 8.1.12 gilt die Ungleichung $|\xi_{\tilde{R}}(x, y)| \leq \|x\|_{B_{\tilde{R}}} \|y\|$ für jedes $x \in B_{\tilde{R}}$, so daß man erhält

$$\|t(y)\|_{B'_{\tilde{R}}} = \sup_{x \in B_{\tilde{R}}, x \neq 0} \frac{|t(y)(x)|}{\|x\|_{B_{\tilde{R}}}} = \sup_{x \in B_{\tilde{R}}, x \neq 0} \frac{|\xi_{\tilde{R}}(x, y)|}{\|x\|_{B_{\tilde{R}}}} \leq \|y\|.$$

Mit Lemma 8.1.12 gilt aber auch die Beziehung $\|w\|_{B_{\tilde{R}}} = 1$ für alle $w \in \mathcal{K}$, mit deren Hilfe sich die folgende Ungleichungskette ergibt:

$$\|t(y)\|_{B'_{\tilde{R}}} \geq \sup_{w \in \mathcal{K}} |\xi_{\tilde{R}}(w, y)| = \sup_{w \in \mathcal{K}} |\langle w, y \rangle| = \|y\|.$$

Für die Aussage über die Umkehrabbildung sei $y \in \tilde{R}$ gewählt, dann ergibt sich

$$(\cdot|_B \circ t)(y) = \xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)|_B = \langle \cdot, y \rangle = y(\cdot) = y.$$

■

Es besteht also für jedes Element \tilde{R} der Menge \mathcal{V}_R die Möglichkeit einer Identifikation mit einem Unterraum des Norm-Dualraumes von $B_{\tilde{R}}$ im isometrisch isomorphen Sinne. Offenbar ist es besonders günstig, wenn die identifizierende Abbildung aus Satz 8.1.17 auch surjektiv ist, so daß eine vollständige Identifikation der beiden Räume miteinander vorgenommen werden kann. Deshalb soll dafür ein eigener Name eingeführt werden.

Definition 8.1.18

Ein Element \tilde{R} der Menge \mathcal{V}_R heißt **symmetrisch**, wenn die lineare Isometrie aus Satz 8.1.17 surjektiv ist.

Für ein symmetrisches Element \tilde{R} aus \mathcal{V}_R wird die Abbildung aus Satz 8.1.17 zu einem isometrischen Isomorphismus, und man kann in identifizierender Weise $\tilde{R} = B'_{\tilde{R}}$ notieren. Die Frage nach der Existenz symmetrischer Elemente in \mathcal{V}_R beantwortet der nächste Satz, der einen Sonderfall eines Teils von T 3.4 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 106 darstellt:

Satz 8.1.19 *R ist symmetrisch im Sinne von Definition 8.1.18.*

Beweis:

Es sei ein $f \in B'_R$ gewählt, dann liegt $f|_B$ in B^* . Außerdem existiert ein $C \geq 0$, so daß für alle $x \in B_R$ gilt: $|f(x)| \leq C \|x\|_{B_R}$. Mit Lemma 8.1.12 gilt $\|w\|_{B_R} = 1$ für alle $w \in \mathcal{K}$, so daß für alle $w \in \mathcal{K}$ auch

$|f(w)| = |f|_B(w)| \leq C$ gilt. Somit gehört $f|_B$ zu R . Es bleibt noch, die Identität $f = \xi_R(\cdot, f|_B)$ zu zeigen. Für jedes $x \in B$ ergibt sich die Gleichungskette $\xi_R(x, f|_B) = \langle x, f|_B \rangle = f(x)$. Außerdem liegen f und $\xi_R(\cdot, f|_B)$ in B'_R . Also bezeichnen f und $\xi_R(\cdot, f|_B)$ zwei lineare und normstetige Fortsetzungen von $f|_B$, die wegen Satz II.1.5 in [Wer97], S. 48 zusammenfallen. ■

Es ist gerade zur späteren Betrachtung initialer Strukturen sinnvoll, auch für die Dualsysteme $\langle B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}} \rangle$ die kanonische Bilinearität mit einem eigenen Namen zu versehen. Dazu wird gewählt:

Definition 8.1.20

Für jedes Element \tilde{R} der Menge \mathcal{V}_R wird die kanonische Bilinearität zum Dualsystem $\langle B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}} \rangle$ mit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_{\tilde{R}}}$ bezeichnet. Sie ist definiert durch die Vorschrift:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_{\tilde{R}}}: B_{\tilde{R}} \times B'_{\tilde{R}} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}} := y(x).$$

Völlig analog zum Fall in (8.6) für das Dualsystem $\langle \tilde{R}, (\tilde{R})' \rangle$ folgt für alle Elemente x der Menge $B_{\tilde{R}}$ und alle Elemente y der Menge $B'_{\tilde{R}}$:

$$|\langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}}| \leq \|x\|_{B_{\tilde{R}}} \|y\|_{B'_{\tilde{R}}}. \quad (8.7)$$

Mit der Identifikation entsprechend Satz 8.1.17 folgt zudem für alle Elemente y der Menge \tilde{R} :

$$\|y\| = \|y\|_{B'_{\tilde{R}}} = \sup_{x \in B_{\tilde{R}}, x \neq 0} \frac{|\langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}}|}{\|x\|_{B_{\tilde{R}}}} \quad (8.8)$$

Insbesondere erhält man damit für alle Elemente x der Menge $B_{\tilde{R}}$ und alle Elemente y der Menge \tilde{R}

$$|\langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}}| \leq \|x\|_{B_{\tilde{R}}} \|y\|. \quad (8.9)$$

In Ergänzung zu Lemma 8.1.15 läßt sich notieren:

Lemma 8.1.21 *Bezeichnet \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , dann gilt bei Identifizierung mittels der Abbildung aus Satz 8.1.17 für alle Elemente x der Menge $B_{\tilde{R}}$ und alle Elemente y der Menge \tilde{R} :*

$$\langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}} = \xi_{\tilde{R}}(x, y) = \langle y, x \rangle_{\tilde{R}}.$$

Beweis:

Seien $x \in B, y \in \tilde{R}$ gewählt, dann folgt, wenn man die identifizierende Abbildung aus Satz 8.1.17 mit t benennt:

$$\langle x, y \rangle = \xi_{\tilde{R}}(x, y) = \underbrace{t(y)}_{\in B'_{\tilde{R}}}(x) = \langle x, t(y) \rangle_{B_{\tilde{R}}}.$$

Nimmt man jetzt die Identifikation vor, dann folgt: $\xi_{\tilde{R}}(x, y) = \langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}}$. Außerdem liegt wegen (8.9) mit $\langle \cdot, y \rangle_{B_{\tilde{R}}}$ eine Abbildung aus $B'_{\tilde{R}}$ vor, so daß die Identität auf $B_{\tilde{R}}$ mit [Wer97], Satz II.1.5, S. 48 folgt. ■

Es sei betont, daß das eben formulierte Lemma für den Fall symmetrischer Elemente aus \mathcal{V}_R besagt, daß die kanonische Bilinearität $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_{\tilde{R}}}$ und die Abbildung $\xi_{\tilde{R}}$ zusammenfallen.

Wie im Kapitel 7 ausführlich diskutiert wurde, haben initiale uniforme Strukturen und die von ihnen induzierten initialen Topologien eine besondere Relevanz für die in der vorliegenden Arbeit dargestellte Theorie, so daß es nach der erfolgten Einführung geeigneter normierter Räume auch der Betrachtung initialer Strukturen bedarf.

Zunächst sollen die verwendeten Symbole ausführlich erläutert werden. Dabei sei darauf hingewiesen, daß die Namensgebung für die initialen Strukturen im Prinzip der Namensgebung derartiger Strukturen in Kapitel 7 folgt, so daß sich die dort gewählten Bezeichnungen nahtlos in die folgenden Erläuterungen einfügen.

Es bezeichne \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R . Sei A eine Teilmenge zu $(\tilde{R})'$, dann wird mit $\sigma(\tilde{R}, A)$ die initiale uniforme Struktur auf \tilde{R} bezüglich $(\langle \cdot, x \rangle_{\tilde{R}})_{x \in A}$ benannt. Die Uniformität $\sigma(\tilde{R}, A)$ induziert auf \tilde{R} die initiale Topologie bezüglich $(\langle \cdot, x \rangle_{\tilde{R}})_{x \in A}$. Um nicht unnötig viele Symbole einzuführen, soll vereinfachend $\sigma(\tilde{R}, A)$ auch für die Topologie verwandt werden. Welche Struktur dann gerade gemeint ist, ergibt sich aus dem Zusammenhang. In völlig analoger Weise sei für eine Teilmenge A von \tilde{R} das Symbol $\sigma((\tilde{R})', A)$ als initiale Struktur auf $B_{\tilde{R}}$ bezüglich $(\langle y, \cdot \rangle_{\tilde{R}})_{y \in A}$ definiert.

Wählt man nun zu \tilde{R} die Teilmengen $A_1 \subseteq (\tilde{R})'$ und $A_2 \subseteq \tilde{R}$, dann ist mit Satz C.3.1 die Unterraumuniformität $\sigma((\tilde{R})', A_2) |_{A_1}$ identisch mit der initialen Uniformität auf A_1 bezüglich der Restriktionen $(\langle y, \cdot \rangle_{\tilde{R}} |_{A_1})_{y \in A_2}$. Deshalb wird für $\sigma((\tilde{R})', A_2) |_{A_1}$ auch das Symbol $\sigma(A_1, A_2)$ verwendet. Entsprechendes gilt für die Verwendung des Symbols $\sigma(A_2, A_1)$.

Neben den initialen Strukturen, die sich auf das Dualsystem $\langle \tilde{R}, (\tilde{R})' \rangle$ beziehen, bedarf es noch der initialen Strukturen, die sich auf das Dualsystem $\langle B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}} \rangle$

beziehen. In analoger Weise sei dabei für eine Teilmenge A von $B'_{\tilde{R}}$ mit $\sigma(B'_{\tilde{R}}, A)$ die initiale Struktur auf $B'_{\tilde{R}}$ bezüglich $(\langle \cdot, y \rangle_{B'_{\tilde{R}}})_{y \in A}$ bezeichnet. Ebenso sei für eine Teilmenge A der Menge $B_{\tilde{R}}$ mit $\sigma(B_{\tilde{R}}, A)$ die initiale Struktur auf $B_{\tilde{R}}$ bezüglich $(\langle x, \cdot \rangle_{B_{\tilde{R}}})_{x \in A}$ benannt. Wie im obigen Falle kann man auch hier wieder Unterraumuniformitäten und -topologien der Form $\sigma(A_1, A_2)$ und $\sigma(A_2, A_1)$ für Teilmengen A_1 von $B'_{\tilde{R}}$ und Teilmengen A_2 von $B_{\tilde{R}}$ untersuchen.

Es muß erörtert werden, warum es bei den gewählten Bezeichnungen nicht zu Konsistenzproblemen kommt. Welche initiale Struktur mit einem Ausdruck wie $\sigma(A_1, A_2)$ gerade gemeint, ergibt sich zunächst aus den beteiligten Mengen A_1, A_2 selbst, denn im allgemeinen handelt es sich mit Satz 8.1.16 bei $B_{\tilde{R}}$ um eine Teilmenge von $(\tilde{R})'$, und mit Satz 8.1.17 bezeichnet \tilde{R} eine Teilmenge zu $B'_{\tilde{R}}$. Für den Fall aber, daß A_1 eine Teilmenge von $B_{\tilde{R}}$ bezeichnet und daß A_2 für eine Teilmenge von \tilde{R} steht, fallen die beiden oben betrachteten initialen Strukturen auf A_1 bezüglich $(\langle \cdot, y \rangle_{B_{\tilde{R}}})_{y \in A_2}$ einerseits und bezüglich $(\langle y, \cdot \rangle_{\tilde{R}})_{y \in A_2}$ andererseits wegen Lemma 8.1.21 zusammen. Somit ist der sich aus den obigen Betrachtungen ergebende gemeinsame Name $\sigma(A_1, A_2)$ berechtigt. Es gelten dieselben Überlegungen auch für den umgedrehten Fall $\sigma(A_2, A_1)$.

Für die so eingeführten initialen Strukturen kann man zunächst das folgende Lemma notieren:

Lemma 8.1.22 *Es gelten die Aussagen:*

- (i) *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , sei A_1 eine Teilmenge $B_{\tilde{R}}$, und sei A_2 eine Teilmenge von $B'_{\tilde{R}}$. Dann sind $(A_1, \sigma(A_1, A_2))$ und $(A_2, \sigma(A_2, A_1))$ lokalkonvexe Räume, sie sind damit insbesondere topologische Vektorräume. Dasselbe gilt für die entstehenden Räume bei Wahl einer Teilmenge A_1 von \tilde{R}' und einer Teilmenge A_2 von \tilde{R} .*

Bilden A_1, A_2 zusammen mit der Restriktion der zugehörigen kanonischen Bilinearität auf $A_1 \times A_2$ ein Dualsystem, dann handelt es sich bei den obigen lokalkonvexen Räume um Hausdorffräume.

- (ii) *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , sei A_1 eine Teilmenge von $B_{\tilde{R}}$, und sei A_2 eine Teilmenge von \tilde{R} . Dann ist zum einen $\sigma(A_1, A_2)$ als Uniformität (als Topologie) identisch mit der initialen Uniformität (Topologie) auf A_1 bezüglich $(\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y))_{y \in A_2}$. Zum anderen ist $\sigma(A_2, A_1)$ als Uniformität (als Topologie) identisch mit der initialen Uniformität (Topologie) auf A_2 bezüglich $(\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot))_{x \in A_1}$.*

Beweis:

zu (i): Zur Eigenschaft der Lokalkonvexität siehe [Bou87], Kapitel II, §4, Proposition 4 oder [Heu92], Satz 63.1, S. 352 und Beispiel 64.3, S. 356. Die Hausdorff-Eigenschaft bei vorliegendem Dualsystem ist trivial.

zu (ii): Die Aussage folgt direkt aus Lemma 8.1.21. ■

Auch die jeweilige Norm induziert eine Topologie auf \tilde{R} und $B_{\tilde{R}}$, so daß sich die Frage nach dem Verhältnis der bisher betrachteten Topologien zueinander stellt.

Satz 8.1.23 *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R . Es bezeichne in der Folge das indizierte Symbol \mathcal{O}_{\dots} die Topologie bezüglich der im Index stehenden Norm. Dann gilt:*

- (i) *Die auf \tilde{R} von der Norm $\|\cdot\|$ induzierte Topologie ist feiner als die initiale Topologie $\sigma(\tilde{R}, (\tilde{R})')$. Letztere ist feiner als die initiale Topologie $\sigma(\tilde{R}, B_{\tilde{R}})$. Das bedeutet, es gilt die folgende Mengeneinklusionskette:*

$$\mathcal{O}_{\|\cdot\|} \supseteq \sigma(\tilde{R}, (\tilde{R})') \supseteq \sigma(\tilde{R}, B_{\tilde{R}}).$$

- (ii) *Die auf der Menge $B_{\tilde{R}}$ durch die Norm $\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}$ erzeugte Topologie ist feiner als die initiale Topologie $\sigma(B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}})$, welche feiner ist als die Topologie $\sigma(B_{\tilde{R}}, \tilde{R})$. Das heißt:*

$$\mathcal{O}_{\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}}}} \supseteq \sigma(B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}}) \supseteq \sigma(B_{\tilde{R}}, \tilde{R}).$$

- (iii) *Die auf der Menge $(\tilde{R})'$ von der Norm $\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}$ erzeugte Topologie ist feiner als die initiale Topologie $\sigma((\tilde{R})', \tilde{R})$, das heißt:*

$$\mathcal{O}_{\|\cdot\|_{(\tilde{R})'}} \supseteq \sigma((\tilde{R})', \tilde{R}).$$

Ist \tilde{R} symmetrisch, dann gilt die Identität $\sigma(B_{\tilde{R}}, \tilde{R}) = \sigma(B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}})$. Bei Identifikation von \tilde{R} mit $B'_{\tilde{R}}$ mittels der Abbildung aus Satz 8.1.17 ergibt sich die Identität $\sigma(\tilde{R}, B_{\tilde{R}}) = \sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$.

Beweis:

Nach Satz A.3.1 (iv) ist die initiale Topologie auf einer Menge bezüglich einer Funktionenfamilie, die jeweils in einen vorgegebenen topologischen Raum abbilden, die größte Topologie, so daß die Funktionen dieser Familie allesamt stetig sind. Deshalb folgt die jeweils erste Mengeninklusion der drei Punkte aus den Stetigkeitseigenschaften der beteiligten Bilinearformen, wie sie aus (8.6) und (8.7) hervorgehen.

Als Nächstes werden die jeweils zweiten Mengeninklusionen der Punkte (i) und (ii) gezeigt. Dafür betrachte man zunächst die Aussage in Punkt (i). Mit Satz 8.1.16 kann man $B_{\tilde{R}}$ mit einer Teilmenge von $(\tilde{R})'$ derart identifizieren, daß $\xi_{\tilde{R}}(x, y) = \langle y, x \rangle_{\tilde{R}}$ für alle $x \in B_{\tilde{R}}$ und alle $y \in \tilde{R}$ gilt. Mithin erhält man:

$$\{\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot) \mid x \in B_{\tilde{R}}\} \subseteq \{\langle \cdot, x \rangle_{\tilde{R}} \mid x \in (\tilde{R})'\}.$$

Damit ist wegen Lemma A.3.2 auf \tilde{R} die initiale Struktur bezüglich der Funktionenfamilie $\{\langle \cdot, x \rangle_{\tilde{R}} \mid x \in (\tilde{R})'\}$ feiner als die initiale Struktur bezüglich der Funktionenfamilie $\{\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot) \mid x \in B_{\tilde{R}}\}$. Mit den Festlegungen der Bezeichnungen für die initialen Strukturen ab Seite 168 und Lemma 8.1.22 (ii) ist aber $\sigma(\tilde{R}, (\tilde{R})')$ gerade die initiale Struktur auf \tilde{R} bezüglich der Funktionenfamilie $\{\langle \cdot, x \rangle_{\tilde{R}} \mid x \in (\tilde{R})'\}$, während $\sigma(\tilde{R}, B_{\tilde{R}})$ gerade die initiale Struktur auf \tilde{R} bezüglich der Funktionenfamilie $\{\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot) \mid x \in B_{\tilde{R}}\}$ bezeichnet. Also gilt die zweite Mengeninklusion in Punkt (i).

Die zweite Mengeninklusion in Punkt (ii) kann in ganz analoger Weise gezeigt werden. Mit Satz 8.1.17 und Lemma 8.1.21 kann man \tilde{R} mit einer Teilmenge von $B'_{\tilde{R}}$ so identifizieren, daß $\langle x, y \rangle_{B_{\tilde{R}}} = \xi_{\tilde{R}}(x, y)$ für alle $x \in B_{\tilde{R}}$ und alle $y \in \tilde{R}$ gilt. Folglich ergibt sich:

$$\{\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y) \mid y \in \tilde{R}\} \subseteq \{\langle \cdot, y \rangle_{B_{\tilde{R}}} \mid y \in B'_{\tilde{R}}\}. \quad (8.10)$$

Also ist mit Lemma A.3.2 auf $B_{\tilde{R}}$ die initiale Struktur bezüglich der Funktionenfamilie $\{\langle \cdot, y \rangle_{B_{\tilde{R}}} \mid y \in B'_{\tilde{R}}\}$ feiner als die initiale Struktur bezüglich der Funktionenfamilie $\{\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y) \mid y \in \tilde{R}\}$. Mit den Festlegungen der Bezeichnungen für die initialen Strukturen ab Seite 168 und Lemma 8.1.22 (ii) ist aber $\sigma(B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}})$ gerade die initiale Struktur auf $B_{\tilde{R}}$ bezüglich der Funktionenfamilie $\{\langle \cdot, y \rangle_{B_{\tilde{R}}} \mid y \in B'_{\tilde{R}}\}$, während $\sigma(B_{\tilde{R}}, \tilde{R})$ gerade die initiale Struktur auf $B_{\tilde{R}}$ bezüglich der Funktionenfamilie $\{\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y) \mid y \in \tilde{R}\}$ bezeichnet. Damit ist die noch fehlende Aussage in Punkt (ii) bewiesen.

Es bedarf nun noch des Nachweises der beiden Zusatzaussagen. Die Identität der initialen Strukturen $\sigma(B_{\tilde{R}}, \tilde{R})$ und $\sigma(B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}})$ ergibt sich direkt aus den

obigen Überlegungen. Denn die Symmetrie von \tilde{R} bedingt insbesondere, daß die Abbildung, die \tilde{R} mit einer Teilmenge von $B'_{\tilde{R}}$ identifiziert, eine Surjektion ist. Also wird aus der Mengeninklusion in (8.10) sogar eine Identität der Mengen, und somit erhält man eine Identität der zugehörigen initialen Strukturen $\sigma(B_{\tilde{R}}, \tilde{R})$ und $\sigma(B_{\tilde{R}}, B'_{\tilde{R}})$.

Schließlich soll noch die zweite Identität bewiesen werden. Lemma 8.1.22 (ii) besagt, daß $\sigma(\tilde{R}, B_{\tilde{R}})$ für die initiale Struktur auf \tilde{R} bezüglich der Funktionenfamilie $\{\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot) \mid x \in \tilde{R}\}$ steht. Das Symbol $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$ bezeichnet im Sinne der Festlegungen ab Seite 168 die initiale Struktur auf $B'_{\tilde{R}}$ bezüglich der Funktionenfamilie $\{\langle x, \cdot \rangle_{B_{\tilde{R}}} \mid x \in B_{\tilde{R}}\}$. Nimmt man nun die Identifikation von \tilde{R} und $B'_{\tilde{R}}$ durch die Abbildung aus Satz 8.1.17 vor, dann fallen die die initialen Strukturen generierenden Funktionenfamilien und damit die initialen Strukturen selber aufgrund von Lemma 8.1.21 zusammen. ■

Für die späteren Betrachtungen muß auch der Fall untersucht werden, in dem zwei Elemente \tilde{R}_1 und \tilde{R}_2 aus \mathcal{V}_R so vorliegen, daß die Menge \tilde{R}_2 die Menge \tilde{R}_1 umfaßt. Zunächst folgt sofort aus der Definition für die korrespondierenden Normen auf B :

Lemma 8.1.24 *Seien \tilde{R}_1 und \tilde{R}_2 zwei Elemente der Menge \mathcal{V}_R , so daß die Menge \tilde{R}_2 die Menge \tilde{R}_1 umfaßt. Dann gilt für alle Elemente x aus B die Ungleichung:*

$$\|x\|_{\tilde{R}_1} \leq \|x\|_{\tilde{R}_2}.$$

In Anlehnung an Überlegungen im Beweis zu T 3.5 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S.107 kann man auch Aussagen über das Verhältnis der beiden Vervollständigungen von B bezüglich $\|\cdot\|_{\tilde{R}_1}$ und $\|\cdot\|_{\tilde{R}_2}$ machen:

Satz 8.1.25 *Seien \tilde{R}_1 und \tilde{R}_2 zwei Elemente der Menge \mathcal{V}_R , so daß die Menge \tilde{R}_2 die Menge \tilde{R}_1 umfaßt. Dann existiert zu jedem Element x' der Menge $B_{\tilde{R}_2}$ genau ein Element x aus der Menge $B_{\tilde{R}_1}$, so daß für alle y aus \tilde{R}_1 gilt:*

$$\xi_{\tilde{R}_2}(x', y) = \xi_{\tilde{R}_1}(x, y). \quad (8.11)$$

Beweis:

Sei $x' \in B_{\tilde{R}_2}$ gewählt, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ mit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_{\tilde{R}_2}}} x'$.

Damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere eine Cauchy-Folge auf $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}_2})$. Wegen

Lemma 8.1.24 ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber auch Cauchy-Folge auf $(B, \|\cdot\|_{\tilde{R}_1})$. Das heißt, es existiert ein $x \in B_{\tilde{R}_1}$ mit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\tilde{R}_1}} x$. Für jedes y aus \tilde{R}_1 gilt nun:

$$\xi_{\tilde{R}_1}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tilde{R}_1}(x_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\tilde{R}_2}(x_n, y) = \xi_{\tilde{R}_2}(x', y).$$

Es bleibt, die Eindeutigkeit von x zu zeigen. Dazu sei bedacht, daß mit Satz 8.1.16 \tilde{R}_1 die Menge $B_{\tilde{R}_1}$ mittels $\xi_{\tilde{R}_1}$ trennt. Mithin folgt bei Annahme zweier Elemente $x_a, x_b \in B_{\tilde{R}_1}$ mit der Eigenschaft, daß für alle $y \in \tilde{R}_1$ die Identität

$$\xi_{\tilde{R}_1}(x_a, y) = \xi_{\tilde{R}_2}(x', y) = \xi_{\tilde{R}_1}(x_b, y)$$

gilt, die Identität $x_a = x_b$. ■

Offensichtlich liefert Satz 8.1.25 die Existenz einer Abbildung von $B_{\tilde{R}_2}$ nach $B_{\tilde{R}_1}$, die dem Verhältnis (8.11) zwischen den zugehörigen ξ -Funktionen genügt. Erweitert man die Voraussetzungen aus Satz 8.1.25 noch etwas, ist die so gewonnene Abbildung sogar eine Injektion. Das läßt somit eine nur mengenmäßige Identifikation von $B_{\tilde{R}_2}$ mit einer Teilmenge von $B_{\tilde{R}_1}$ zu. In Verallgemeinerung und Erweiterung eines Teils von T 3.10 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 109 ergibt sich:

Satz 8.1.26 *Seien \tilde{R}_1 und \tilde{R}_2 zwei Elemente der Menge $\mathcal{V}_{\mathbb{R}}$, so daß die Menge \tilde{R}_2 die Menge \tilde{R}_1 umfaßt. Existiert eine Teilmenge \bar{R} von \tilde{R}_1 dergestalt, daß die Topologie $\sigma(B_{\tilde{R}_2}, \bar{R})$ hausdorffsch ist, dann wird die Abbildung, die durch Satz 8.1.25 definiert wird, zu einer Injektion von $B_{\tilde{R}_2}$ nach $B_{\tilde{R}_1}$. Wird die Menge $B_{\tilde{R}_2}$ bezüglich dieser Injektion mit einer Teilmenge von $B_{\tilde{R}_1}$ identifiziert, ergeben sich die folgenden Aussagen:*

- (i) *Für alle Elemente x der Menge $B_{\tilde{R}_2}$ gilt die Ungleichung $\|x\|_{B_{\tilde{R}_1}} \leq \|x\|_{B_{\tilde{R}_2}}$.*
- (ii) *Für alle Elemente x der Menge $B_{\tilde{R}_2}$ und alle Elemente y der Menge \tilde{R}_1 gilt die Identität*

$$\xi_{\tilde{R}_1}(x, y) = \xi_{\tilde{R}_2}(x, y).$$

Beweis:

Die Abbildung $B_{\tilde{R}_2} \rightarrow \tilde{R}_1$ aus Satz 8.1.25 sei für den nun folgenden Beweis mit t benannt. Zum Beweis der Injektivität von t seien $x'_1, x'_2 \in B_{\tilde{R}_2}$ mit $t(x'_1) = t(x'_2)$ gewählt. Dann gilt für jedes $y \in \tilde{R}_1$:

$$\xi_{\tilde{R}_2}(x'_1, y) = \xi_{\tilde{R}_1}(t(x'_1), y) = \xi_{\tilde{R}_1}(t(x'_2), y) = \xi_{\tilde{R}_2}(x'_2, y).$$

Die Hausdorff-Eigenschaft von $\sigma(B_{\tilde{R}_2}, \overline{R})$ liefert mit Satz A.3.3 dann $x'_1 = x'_2$. Das Verhältnis der Normen in Punkt (i) ergibt sich mit Satz 8.1.16, der definierenden Eigenschaft von t aus Satz 8.1.25 und schließlich der Identifikation vermöge der Abbildung t auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned} \|x'_1\|_{B_{\tilde{R}_2}} &= \sup_{y \in \tilde{R}_2, y \neq 0} \frac{|\xi_{\tilde{R}_2}(x'_1, y)|}{\|y\|} \geq \sup_{y \in \tilde{R}_1, y \neq 0} \frac{|\xi_{\tilde{R}_2}(x'_1, y)|}{\|y\|} \\ &= \sup_{y \in \tilde{R}_1, y \neq 0} \frac{|\xi_{\tilde{R}_1}(t(x'_1), y)|}{\|y\|} = \|x'_1\|_{B_{\tilde{R}_1}}. \end{aligned}$$

Punkt (ii) folgt ebenfalls aus der Identifikation mit Hilfe von t und der definierenden Eigenschaft von t aus Satz 8.1.25. ■

Bisher wurden alle Aussagen für beliebige Elemente von \mathcal{V}_R formuliert. Für den weiteren Aufbau der mathematischen und damit auch der physikalischen Theorie werden später nur zwei bestimmte Elemente aus \mathcal{V}_R relevant sein. Bevor die angesprochenen beiden Räume im nächsten Abschnitt definiert und genauer untersucht werden, sollen noch zwei dafür wichtige Aussagen formuliert werden, die in einem Symmetriekriterium für Elemente aus \mathcal{V}_R münden werden. Zunächst wird T 3.5 aus [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 107 notiert:

Satz 8.1.27 *Sei \tilde{R} ein symmetrisches Element der Menge \mathcal{V}_R , und sei T ein bezüglich $\sigma(\tilde{R}, B_{\tilde{R}})$ abgeschlossener Unterraum von \tilde{R} . Dann ist T bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossen in R .*

Beweis:

Die Hauptidee für den Beweis besteht in der Verwendung des folgenden Korollars von [SW99], Kapitel IV, §6.4, S. 152:

Sei E Banachraum, und sei M Unterraum zu E' , dann folgt aus der $\sigma(E', E)$ -Abgeschlossenheit von $M \cap E'_{|1|}$ in E' schon die $\sigma(E', E)$ -Abgeschlossenheit von M in E' .

Dabei bezeichne E' den Norm-Dualraum zu E . Des weiteren möge $E'_{|1|}$ die abgeschlossene Einheitskugel in E' symbolisieren, und $\sigma(E', E)$ stehe für die initiale Topologie auf E' bezüglich der kanonischen Bilinearität.

Zum Beweis der Behauptung seien mit $B'_{R|1|}$ und $B'_{\tilde{R}|1|}$ die abgeschlossenen Einheitskugeln in B'_R und $B'_{\tilde{R}}$ bezeichnet. Bedenkt man die Gültigkeit der

Inklusionskette $T \subseteq \tilde{R} \subseteq R$ und die Symmetrie von R und \tilde{R} , dann folgt die Identität $T \cap B'_{R|1} = T \cap B'_{\tilde{R}|1}$.

Also genügt zum Beweis der Behauptung, daß $T \cap B'_{\tilde{R}|1}$ bezüglich $\sigma(B'_R, B_R)$ abgeschlossen in B'_R ist. Um das zu zeigen, wird zunächst bewiesen, daß auf topologischem Niveau gilt:

$$\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}}) |_{T \cap B'_{\tilde{R}}} = \sigma(B'_R, B_R) |_{T \cap B'_{\tilde{R}}}. \quad (8.12)$$

Mit $X := T \cap B'_{\tilde{R}|1}$, $\mathcal{O} := \sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}}) |_{T \cap B'_{\tilde{R}}}$ und $\mathcal{O}_1 := \sigma(B'_R, B_R) |_{T \cap B'_{\tilde{R}}}$ folgt (8.12) aus Satz A.6.9, denn es gelten die drei Voraussetzungen:

- (i) $T \cap B'_{\tilde{R}|1}$ ist kompakt bezüglich $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$. Denn mit dem Satz von Alaoglu [Wer97], Korollar VIII.3.12, S. 344, ist $B'_{\tilde{R}|1}$ kompakt bezüglich $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$. Da T aber bezüglich $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$ abgeschlossen ist, handelt es sich auch bei $T \cap B'_{\tilde{R}|1}$ um eine bezüglich $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$ abgeschlossene Teilmenge von $B'_{\tilde{R}|1}$. Somit besitzt auch $T \cap B'_{\tilde{R}|1}$ die Eigenschaft der Kompaktheit bezüglich $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}})$.
- (ii) Die Unterraumtopologie $\sigma(B'_R, B_R) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}}$ ist hausdorffsch, denn bei $\langle B_R, B'_R \rangle$ handelt es sich um ein Dualsystem, so daß auch $\sigma(B'_R, B_R)$ hausdorffsch ist.
- (iii) Es gilt die Mengeninklusion $\sigma(B'_R, B_R) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}} \subseteq \sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}}) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}}$, denn mit Satz 8.1.25 folgt, daß die Menge $\{\xi_{\tilde{R}}(x, \cdot) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}} \mid x \in B_{\tilde{R}}\}$ die Menge $\{\xi_R(x, \cdot) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}} \mid x \in B_R\}$ umfaßt. Mit Satz A.3.2 ist dann die Topologie $\sigma(B'_R, B_R) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}}$ gröber als die Topologie $\sigma(B'_{\tilde{R}}, B_{\tilde{R}}) |_{T \cap B'_{\tilde{R}|1}}$.

Also gilt (8.12) auf topologischem Niveau, und somit ist unter erneuter Verwendung von Punkt (i) der obigen Aufzählung $T \cap B'_{\tilde{R}|1}$ auch kompakt bezüglich $\sigma(B'_R, B_R)$. Damit folgt insbesondere auch die Abgeschlossenheit von $T \cap B'_{\tilde{R}|1}$ in R bezüglich $\sigma(R, B_R)$. ■

Der Beweis des nächsten Satzes bedarf einer Aussage, die zunächst in Form eines Lemmas zur Verfügung gestellt wird. Dabei gehe man von dem Dualsystem $\langle B_R, B'_R, \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_R} \rangle$ aus, auf das sich auch das Bilden orthogonaler Räume be-

ziehen soll. Somit ist für eine Teilmenge V von B'_R der zugehörige Orthogonalraum gegeben durch:

$$\begin{aligned} V^\perp &= \{x \in B_R \mid \xi_R(x, y) = 0 \quad \forall y \in V\} \\ &= \{x \in B_R \mid \langle x, y \rangle_{B_R} = 0 \quad \forall y \in V\} \subseteq B_R. \end{aligned}$$

Es läßt sich nun die folgende Aussage beweisen, die Ludwig im Beweis zu T 3.6 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 107 skizziert:

Lemma 8.1.28 *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R , das bezüglich $\sigma(B'_R, B_R)$ abgeschlossen ist. Dann gilt:*

- (i) *Bezeichnet $w : B_R \longrightarrow B_R/\tilde{R}^\perp$ die Quotientenabbildung und symbolisiert $(B_R/\tilde{R}^\perp)'$ den Norm-Dualraum von B_R/\tilde{R}^\perp , dann definiert die Vorschrift*

$$(B_R/\tilde{R}^\perp)' \longrightarrow \tilde{R}, \quad f \longmapsto (f \circ w)|_B,$$

einen isometrischen Isomorphismus.

- (ii) *Die Vorschrift*

$$\begin{aligned} B_{\tilde{R}} &\longrightarrow B_R/\tilde{R}^\perp, \\ x &\longmapsto \left\{ x' \in B_R \mid \text{für alle } y \text{ aus } \tilde{R} \text{ gilt: } \xi_R(x', y) = \xi_{\tilde{R}}(x, y) \right\} \end{aligned}$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus.

Beweis:

Zunächst erfolgen zwei Bemerkungen zur Wohldefiniertheit der verwandten Terme. Nach Voraussetzung ist \tilde{R} Teilmenge von R . Mit der Symmetrie von R muß dann aber \tilde{R} auch in B'_R enthalten sein, so daß der Ausdruck B_R/\tilde{R}^\perp wohldefiniert ist. Außerdem bedingt die Abgeschlossenheit von \tilde{R}^\perp bezüglich $\|\cdot\|_{B_R}$, daß die kanonische Halbnorm auf dem Quotientenraum auch wirklich eine Norm ist. Man siehe dafür etwa [Köt66], §14.4(1), S. 131. Letzteres ist zwar auch Folge des Lemmas, das unten im Beweis zum Teil (i) zitiert wird. Die Norm-Eigenschaft soll hier aber bereits kurz erwähnt werden, um dem Leser zu versichern, daß der Ausdruck des Norm-Dualraumes von (B_R/\tilde{R}^\perp) auch sinnvoll ist.

zu (i): Mit [Köt66], §22.3, S. 282, definiert die Vorschrift

$$(B_R/\tilde{R}^\perp) \longrightarrow \tilde{R}^{\perp\perp} \subseteq B'_R, \quad f \longmapsto f \circ w$$

einen isometrischen Isomorphismus. Bedenkt man den isometrischen Isomorphismus zwischen R und B'_R , dann ist die Abbildung

$$(B_R/\tilde{R}^\perp) \longrightarrow \tilde{R}^{\perp\perp} \subseteq R, \quad f \longmapsto (f \circ w)|_B$$

ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus, denn die Umkehrabbildung des isometrischen Isomorphismus aus Satz 8.1.17 ist gerade die Restriktion auf B . Da auch $\langle R, B_R, \xi_R \rangle$ ein Dualsystem ist und da \tilde{R} Untervektorraum zu R ist, fällt die Bipolare der Menge \tilde{R} mit ihrer Biorthogonalen zusammen. Es gilt also:

$$(\tilde{R})^{oo} = \tilde{R}^{\perp\perp}.$$

Der Bipolarensatz, wie er in [Köt66], §20.8 (5), S. 248 präsentiert wird, liefert dann aufgrund der Abgeschlossenheit von \tilde{R} bezüglich $\sigma(R, B_R)$ die Identität:

$$\tilde{R}^{\perp\perp} = (\tilde{R})^{oo} = \tilde{R}.$$

Damit ist Teil (i) bewiesen.

zu (ii):

- (a) Wohldefiniertheit der Abbildung: Es sei $x \in B_{\tilde{R}}$ gewählt. Setze des weiteren

$$M_x := \{x' \in B_R \mid \xi_R(x', y) = \xi_{\tilde{R}}(x, y) \quad \forall y \in \tilde{R}\}.$$

Dann gilt für alle $x'_1, x'_2 \in M_x$ und alle $y \in \tilde{R}$:

$$\xi_R(x'_1 - x'_2, y) = \xi_R(x'_1, y) - \xi_R(x'_2, y) = \xi_{\tilde{R}}(x, y) - \xi_{\tilde{R}}(x, y) = 0.$$

Also liegt $x'_1 - x'_2$ in der Menge \tilde{R}^\perp , das heißt x'_1 und x'_2 sind äquivalent bezüglich der kanonischen Äquivalenzrelation. Damit ist M_x Teilmenge einer Restklasse aus B_R/\tilde{R}^\perp . Es bleibt noch zu zeigen, daß M_x die gesamte Restklasse bildet. Seien dafür $x' \in B_R$ und $x'_1 \in M_x$ so gewählt, daß $x' - x'_1$ zu \tilde{R}^\perp gehört. Dann gilt für alle $y \in \tilde{R}$:

$$\begin{aligned} \xi_R(x', y) &= \xi_R(x'_1, y) + \underbrace{\xi_R(x' - x'_1, y)}_{x'_1 \in M_x} \stackrel{x'_1 \in M_x}{=} \xi_{\tilde{R}}(x, y). \\ &= 0, \text{ da} \\ &x' - x'_1 \in \tilde{R}^\perp \end{aligned}$$

Also liegt x' in M_x , so daß die Wohldefiniertheit der Abbildung folgt. Im weiteren Verlauf des Beweises wird die Abbildung mit t bezeichnet.

- (b) Linearität: Es seien $x_1, x_2 \in B_{\tilde{R}}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gewählt. Dann existieren Elemente $x'_1 \in t(x_1)$ und $x'_2 \in t(x_2)$, so daß gilt:

$$t(x_1) = x'_1 + \tilde{R}^\perp, \quad t(x_2) = x'_2 + \tilde{R}^\perp.$$

Somit erhält man

$$\alpha t(x_1) + \beta t(x_2) = (\alpha x'_1 + \beta x'_2) + \tilde{R}^\perp.$$

Bezeichne nun x' ein Element der Menge $\alpha t(x_1) + \beta t(x_2)$, dann existiert ein $x'_0 \in \tilde{R}^\perp$ derart, daß man die Darstellung $x' = \alpha x'_1 + \beta x'_2 + x'_0$ erhält. Damit gilt für jedes $y \in \tilde{R}$:

$$\begin{aligned} \xi_R(x', y) &= \alpha \xi_R(x'_1, y) + \beta \xi_R(x'_2, y) + \underbrace{\xi_R(x'_0, y)}_{= 0, \text{ da } x'_0 \in \tilde{R}^\perp} \\ &= \alpha \xi_{\tilde{R}}(x_1, y) + \beta \xi_{\tilde{R}}(x_2, y) = \xi_{\tilde{R}}(\alpha x_1 + \beta x_2, y). \end{aligned}$$

Also ist x' ein Element von $t(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Geht man umgekehrt von einem Element x' der Menge $t(\alpha x_1 + \beta x_2)$ aus, dann erhält man für jedes $y \in \tilde{R}$:

$$\begin{aligned} \xi_R(x' - (\alpha x'_1 + \beta x'_2), y) &= \xi_R(x', y) - \alpha \xi_R(x'_1, y) - \beta \xi_R(x'_2, y) \\ &= \xi_{\tilde{R}}(\alpha x_1 + \beta x_2, y) - \alpha \xi_{\tilde{R}}(x_1, y) - \beta \xi_{\tilde{R}}(x_2, y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet die Zugehörigkeit von x' zur Menge $\alpha t(x_1) + \beta t(x_2)$. Also sind die Mengen $t(\alpha x_1 + \beta x_2)$ und $\alpha t(x_1) + \beta t(x_2)$ identisch.

- (c) Isometrie: Zur Wahrung der Übersichtlichkeit sei für den Rest des Beweises die Norm des Norm-Dualraumes von B_R/\tilde{R}^\perp mit $\|\cdot\|_1$ benannt. Ausgehend von der bekannten Darstellung einer Norm mit Hilfe des Dualraumes, wofür etwa [Wer97], Korollar III.1.7, S. 98 genannt sei, erhält man für jedes $x \in B_{\tilde{R}}$:

$$\|t(x)\|_{B_R/\tilde{R}^\perp} = \sup_{\substack{f \in (B_R/\tilde{R}^\perp)' \\ \|f\|_1 \neq 0}} \frac{|f(t(x))|}{\|f\|_1}. \quad (8.13)$$

Man wähle $f \in (B_R/\tilde{R}^\perp)'$. Dann liegt $(f \circ w)$ in B'_R , denn gemäß [Wer97], Definition II.1.7 bis Satz II.1.8 ist w stetig bezüglich der Norm auf B_R

und der Quotientenraumnorm, woraus sich auch die Stetigkeit $f \circ w$ ergibt. Die Linearität erhält man unmittelbar. Da mit den Sätzen 8.1.17 und 8.1.19 die Restriktion auf B gerade die Umkehrabbildung zu

$$(R, \|\cdot\|) \longrightarrow (B'_R, \|\cdot\|_{B'_R}), \quad y \longmapsto \xi_R(\cdot, y)$$

darstellt, kommt man für $k \in B_R/\tilde{R}^\perp$ und $x' \in k$ zu der Gleichungskette:

$$f(k) = (f \circ w)(x') = \xi_R(x', (f \circ w)|_B). \quad (8.14)$$

Also folgt für die Norm von $t(x)$ unter weiterer Verwendung des isometrischen Isomorphismus aus Teil (i) dieses Satzes bei Wahl eines beliebigen Elementes $x' \in t(x)$:

$$\begin{aligned} \|t(x)\|_{B_R/\tilde{R}^\perp} &\stackrel{(8.13), (8.14)}{=} \sup_{\substack{f \in (B_R/\tilde{R}^\perp)' \\ \|f\|_1 \neq 0}} \frac{|\xi_R(x', (f \circ w)|_B)|}{\|f\|_1} \\ &= \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_R(x', y)|}{\|y\|} \\ &\stackrel{x' \in t(x)}{=} \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_{\tilde{R}}(x, y)|}{\|y\|} = \|x\|_{B_{\tilde{R}}}. \end{aligned}$$

- (d) Surjektivität: Es sei ein Element $\bar{x} + \tilde{R}^\perp$ der Menge B_R/\tilde{R}^\perp gewählt. Dann existiert mit Satz 8.1.25 ein Element $x \in B_{\tilde{R}}$, so daß für alle $y \in \tilde{R}$ gilt:

$$\xi_R(\bar{x}, y) = \xi_{\tilde{R}}(x, y).$$

Definitionsgemäß ergibt sich

$$t(x) = \{x' \in B_R \mid \xi_R(x', y) = \xi_{\tilde{R}}(x, y) \quad \forall y \in \tilde{R}\},$$

also liegt \bar{x} in $t(x)$. Da es sich bei $t(x)$ um ein Element der Menge B_R/\tilde{R}^\perp handelt und da Äquivalenzklassen identisch oder elementfremd sind, erhält man somit auch die Identität $t(x) = \bar{x} + \tilde{R}^\perp$. ■

Damit kann man jetzt zügig die folgende Aussage beweisen, die man als T 3.6 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 107 findet.

Satz 8.1.29 *Sei \tilde{R} ein Element der Menge \mathcal{V}_R . Ist \tilde{R} bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossen, dann ist \tilde{R} symmetrisch.*

Beweis:

Wiederum erhalte die Abbildung aus Lemma 8.1.28 (ii) für den folgenden Beweis den Namen t . Mit t stellt auch die zu t adjungierte Abbildung

$$t' : (B/\tilde{R}^\perp)' \longrightarrow B'_{\tilde{R}}$$

einen isometrischen Isomorphismus dar.

Sei nun außerdem der isometrische Isomorphismus aus Lemma 8.1.28 (i) mit s bezeichnet. Dann ist auch $t' \circ s^{-1}$, also die Hintereinanderausführung von der zu s inversen Abbildung und von t' , ein isometrischer Isomorphismus. Es bleibt somit noch, zu zeigen, daß der so gewonnene isometrische Isomorphismus gerade die Abbildung aus Satz 8.1.17 ist. Dazu sei $y \in \tilde{R}$ gewählt, dann existiert ein $f \in (B_R/\tilde{R}^\perp)'$ mit $s(f) = (f \circ w)|_B = y$. Es gilt nun für $x \in B_{\tilde{R}}$:

$$\begin{aligned} (t' \circ s^{-1})(y)(x) &= t'(f)(x) = f(t(x)) \stackrel{x' \in t(x)}{=} (f \circ w)(x') \\ &\stackrel{(8.14)}{=} \xi_R(x', (f \circ w)|_B) = \xi_R(x', y) \stackrel{x' \in t(x)}{=} \xi_{\tilde{R}}(x, y). \end{aligned}$$

■

Mit den Erörterungen des zurückliegenden Abschnitts stehen die relevanten mathematischen Instrumente zur Verfügung, um den Problemen der mathematischen Theorie, die in Kapitel 7 aufgeführt werden, zu begegnen.

8.2 Formulierung der Theorie im Kontext eines normierten Raumes und seines Norm-Duals

Zur Überwindung der Probleme der mathematischen Theorie aus Kapitel 7 werden als erstes zwei spezielle Elemente aus \mathcal{V}_R ausgewählt.

Definition 8.2.1

Mit \mathcal{D} sei der Normabschluß von D in R bezeichnet. Das heißt, es wird $\mathcal{D} := \overline{D}^{\|\cdot\|}$ gesetzt.

Mit Δ wird das bezüglich der Mengeninklusion kleinste unter den Elementen aus \mathcal{V}_R benannt, die bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossen sind.

Die Definition verlangt eine Bemerkung zur Wohldefiniertheit von Δ . Offensichtlich liegt mit R ein Element aus \mathcal{V}_R vor, das bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossen ist, so daß die Menge aller bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossenen Elemente aus \mathcal{V}_R nicht-leer

ist. Bekanntermaßen bezeichnet der Durchschnitt beliebig vieler bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossener und D umfassender Unterräume von R wieder einen D umfassenden und bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossenen Unterraum zu R . Damit folgt die Wohldefiniertheit von Δ .

Ausgehend von der obigen Definition kann man ohne Beweis sofort das folgende Lemma notieren.

Lemma 8.2.2 \mathcal{D} und Δ sind Elemente der Menge \mathcal{V}_R , und \mathcal{D} ist bezüglich $\|\cdot\|$ ein Banachraum.

Einige wichtige Eigenschaften von Δ , die sich als Teil von T 3.7 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 107 finden, kann man bereits jetzt formulieren.

Satz 8.2.3 Es gelten die folgenden Aussagen:

(i) Δ ist der Abschluß von D bezüglich $\sigma(R, B_R)$ in R , das heißt in Symbolen:

$$\Delta = \overline{D}^{\sigma(R, B_R)}.$$

(ii) Δ ist symmetrisch im Sinne der Definition 8.1.18.

(iii) Δ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ abgeschlossen in R . Bei $(\Delta, \|\cdot\|)$ handelt es sich um einen Banachraum.

(iv) Die Topologie $\sigma(B_\Delta, \mathcal{L})$ besitzt die Hausdorffeigenschaft.

Beweis:

zu (i): Dafür reicht es zu zeigen, daß $\overline{D}^{\sigma(R, B_R)}$ zu \mathcal{V}_R gehört. In einem solchen Falle gehört $\overline{D}^{\sigma(R, B_R)}$ nämlich auch zur Menge aller bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossenen Elemente von \mathcal{V}_R . Damit ist $\overline{D}^{\sigma(R, B_R)}$ aber identisch mit Δ , denn $\overline{D}^{\sigma(R, B_R)}$ ist offensichtlich die kleinste D umfassende bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossene Teilmenge von R .

Nun liegt aber $\overline{D}^{\sigma(R, B_R)}$ in \mathcal{V}_R , da mit D auch der topologische Abschluß bezüglich der Topologie des topologischen Vektorraumes $(R, \sigma(R, B_R))$ ein Untervektorraum von R ist, wie man etwa [Köt66], §10.2 (6), S. 87 entnehmen kann.

zu (ii) und (iii): Punkt (ii) folgt mit Satz 8.1.29. Die Abgeschlossenheitsaussage in Punkt (iii) ergibt sich mit Satz 8.1.23. Das impliziert unmittelbar die

Banachraumeigenschaft von $(\Delta, \|\cdot\|)$, da $(R, \|\cdot\|)$ mit Lemma 8.1.7 Banachraum ist. Die Banachraumeigenschaft folgt aber auch schon direkt aus der Symmetrie, denn die besagt eine isometrische Isomorphie zwischen $(\Delta, \|\cdot\|)$ und dem Banachraum B'_Δ .

zu (iv): Aufgrund des Satzes A.3.3 und aufgrund der Bilinearität von ξ_Δ genügt zum Beweis der Behauptung der Nachweis der folgenden Aussage:

Liegt ein $x \in B_\Delta$ derart vor, daß $\xi_\Delta(x, g) = 0$ für jedes $g \in \mathcal{L}$ gilt, dann ist $x = 0$.

Wähle $x \in B_\Delta$ mit $\xi_\Delta(x, g) = 0$ für jedes $g \in \mathcal{L}$. Dann gilt auch $\xi_\Delta(x, y) = 0$ für alle $y \in D$, da D der lineare Aufspann von \mathcal{L} ist. Damit folgt mit Hilfe der Stetigkeit von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ für alle y aus $\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$

$$\xi_\Delta(x, y) = 0. \quad (8.15)$$

Mit Punkt (ii) dieses Satzes gilt die Symmetrie von Δ , das heißt, es gilt mit Satz 8.1.23 die Identität $\sigma(B_\Delta, B'_\Delta) = \sigma(B_\Delta, \Delta)$. Aufgrund der Dualität der beteiligten Räume ist die Topologie $\sigma(B_\Delta, B'_\Delta)$, und damit auch die Topologie $\sigma(B_\Delta, \Delta)$, hausdorffsch.

Damit kann man nun zeigen, daß $x = 0$ gelten muß. Zum Nachweis sei der Fall $x \neq 0$ angenommen. Es sind zwei Fälle zu betrachten:

1.Fall: Es gilt $\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} = \Delta$. Dann nimmt (8.15) die folgende Form an:

$$\text{Für alle } y \in \Delta \text{ gilt: } \xi_\Delta(x, y) = 0.$$

Satz A.3.3 aber würde damit aufgrund der besagten Hausdorffeigenschaft erzwingen, daß $x = 0$ gilt. Es liegt also ein Widerspruch vor.

2.Fall: Es gilt $\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \subsetneq \Delta$. Wegen $D \subseteq \overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$ gilt auch:

$$\overline{D}^{\sigma(R, B_R)} \subseteq \overline{\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}^{\sigma(R, B_R)}}.$$

Mit Satz 8.1.27 ist $\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$ aber auch bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossen. Das heißt, es gilt die Inklusionskette

$$\Delta = \overline{D}^{\sigma(R, B_R)} \subseteq \overline{\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}^{\sigma(R, B_R)}} = \overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)},$$

womit man auch für den Fall $\overline{D}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \subsetneq \Delta$ zu einem Widerspruch kommt.

Also führt die Annahme $x \neq 0$ stets zu einem Widerspruch, so daß $x = 0$ gelten muß. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Nach den ersten wichtigen Eigenschaften der beiden Räume Δ und \mathcal{D} , bedarf es nun einer Untersuchung des Verhältnisses von Δ und \mathcal{D} zueinander. Dafür kann man den folgenden Satz formulieren, dessen zentraler Punkt Inhalt von T 3.7 (7) in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 107 ist:

Satz 8.2.4 *Es gilt die Mengeninklusionskette:*

$$D \subseteq \mathcal{D} \subseteq \Delta \subseteq R \subseteq B^*.$$

Dabei kann jede Menge aus der Inklusionskette bezüglich einer sie umfassenden Menge aus der Kette als Untervektorraum aufgefaßt werden.

Beweis:

Mit Satz 8.1.7 ist R Untervektorraum zu B^* , und mit Lemma 8.1.9 ist D Untervektorraum zu R . Lemma 8.2.2 garantiert, daß \mathcal{D} und Δ Untervektorräume zu R sind. \mathcal{D} und Δ umfassen D derart, daß D auch jeweils Untervektorraum ist. Es bleibt also zu zeigen, daß \mathcal{D} Untervektorraum von Δ ist. Dafür genügt der Nachweis der Inklusion $\Delta \supseteq \mathcal{D}$, denn die Vektorraumoperationen sind stets dieselben wie bei B^* . Da sowohl \mathcal{D} als auch Δ die Menge D umfassen und da mit Satz 8.1.23 die Normtopologie feiner als die schwache Topologie $\sigma(R, B_R)$ ist, folgt sofort die Mengeninklusion $\mathcal{D} \subseteq \Delta$ mit der Darstellung von Δ aus Satz 8.2.3 (i). ■

Nachdem mit dem letzten Satz Aussagen über das Verhältnis von Δ und \mathcal{D} zueinander gefunden wurden, stellt sich als Nächstes die Frage nach dem Verhältnis der zugeordneten $B_{\tilde{R}}$ -Räume. Die ersten beiden Punkte des folgenden Satzes sind Inhalt von T 3.10 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 109:

Satz 8.2.5 *Wird von den Identifizierungen gemäß der Sätze 8.1.16 und 8.1.26 ausgegangen, dann ergeben sich die folgenden Aussagen:*

(i) *Es gilt die Mengeninklusionskette:*

$$B_{\Delta} \subseteq B_{\mathcal{D}} \subseteq \mathcal{D}'.$$

(ii) *Für alle Elemente x der Menge B_{Δ} gilt:*

$$\|x\|_{\mathcal{D}'} = \|x\|_{B_{\mathcal{D}}} \leq \|x\|_{B_{\Delta}}.$$

(iii) Für alle Elemente x der Menge B_Δ und für alle Elemente y der Menge \mathcal{D} gilt:

$$\xi_\Delta(x, y) = \xi_{\mathcal{D}}(x, y) = \langle y, x \rangle_{\mathcal{D}} .$$

Beweis:

zu (i): Die Sätze 8.2.3 (iv) und 8.2.4 sowie die Definitionen von Δ und \mathcal{D} liefern die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Folgerung aus Satz 8.1.26, so daß die erste Inklusion gerechtfertigt ist. Die zweite Inklusion ergibt sich mit Satz 8.1.16.

zu (ii) und (iii): Beide Aussagen folgen wiederum mittels der Sätze 8.1.16 und 8.1.26. ■

Zur mit der Formulierung von Einbettungssätzen für $\hat{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ ein erstes Ziel des Abschnitts zu erreichen, bedarf es noch der folgenden noch des folgenden Lemmas.

Lemma 8.2.6 $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ und $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})$ sind hausdorffsch.

Beweis:

Die Hausdorffeigenschaft von $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ folgt aus der Dualität der beteiligten Räume.

Zum Beweis der Hausdorffeigenschaft von $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})$ seien $x_1, x_2 \in \mathcal{D}'$ mit der Eigenschaft gewählt, daß $\langle g, x_1 \rangle_{\mathcal{D}} = \langle g, x_2 \rangle_{\mathcal{D}}$ für alle $g \in \mathcal{L}$ gilt. Die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ und der Umstand, daß \mathcal{L} den Vektorraum D linear aufspannt, liefern für alle Elemente y der Menge D :

$$\langle y, x_1 \rangle_{\mathcal{D}} = \langle y, x_2 \rangle_{\mathcal{D}} .$$

Da mit (8.6) für alle $x \in \mathcal{D}'$ die Abbildungen $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ stetig auf $(\mathcal{D}, \|\cdot\|)$ sind, erhält man weiter für alle Elemente y der Menge $\overline{D}^{\|\cdot\|} = \mathcal{D}$:

$$\langle y, x_1 \rangle_{\mathcal{D}} = \langle y, x_2 \rangle_{\mathcal{D}} .$$

Die Hausdorffeigenschaft von $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ liefert dann $x_1 = x_2$, und somit erhält man wiederum auch die Hausdorffeigenschaft von $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})$ mit Satz A.3.3. ■

Damit gelten nun die folgenden Einbettungsaussagen. Der erste Punkt wird als T 3.13 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 110 bewiesen, während der zweite Punkt als T 3.9 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 109 vorliegt:

Satz 8.2.7 (Einbettungssatz für $\hat{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$) *Es gilt:*

- (i) $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ ist im uniformen Sinne isomorph zu $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ ausgestattet mit der zugehörigen Unterraumuniformität bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$.

Unter Verwendung der so ermöglichten Identifikation der uniformen Räume ergibt sich:

$$(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})) = (\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}, \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}}).$$

- (ii) $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ ist im uniformen Sinne isomorph zu $\overline{\mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$ ausgestattet mit der Unterraumuniformität bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$.

Unter Verwendung der so ermöglichten Identifikation der uniformen Räume ergibt sich:

$$(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})) = (\overline{\mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}, \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\overline{\mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}}).$$

Beweis:

zu (i): Für den ganzen Beweis wird davon ausgegangen, daß $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ mit der Unterraumuniformität bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ ausgestattet ist, so daß sich alle Aussagen bezüglich $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ auf die Unterraumuniformität $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}}$ beziehen.

Mit dem Satz von Alaoglu, für den etwa auf [Wer97], Korollar VIII.3.12, S. 344 verwiesen sei, ist die abgeschlossene Dualraum-Einheitskugel $\mathcal{D}'_{|1|}$ bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ kompakt. Mit Lemma 8.1.12 gilt $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{D}'_{|1|}$. Also ist $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ gemäß Satz A.6.6 kompakt, und somit ist $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ vermittels Satz A.6.17 insbesondere ein vollständiger uniformer Raum.

Als Nächstes wird gezeigt, daß $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ ein dichter uniformer Unterraum zu $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ ist. Die Eigenschaft des Dicht-Liegens ergibt sich offensichtlich, so daß nur zu zeigen ist, daß für die uniformen Strukturen die Identität

$$\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\mathcal{K}}$$

gilt. Zunächst beachte man, daß die Topologien $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\mathcal{D}'_{|1|}}$ und $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})|_{\mathcal{D}'_{|1|}}$ zusammenfallen. Das ergibt sich aus Satz A.6.9, denn zum ersten garantiert, wie bereits erwähnt, der Satz von Alaoglu die Kompaktheit von $\mathcal{D}'_{|1|}$ bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$, zum zweiten liefert Lemma 8.2.6 die Hausdorffeigenschaft von $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})$ und zum dritten bedingt der Umstand $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{D}$ mit Lemma A.3.2, daß $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D}) \supseteq \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})$ gilt.

Aus der Identität der Topologien folgt aber mit Satz A.6.13 auch für die Uniformitäten:

$$\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\mathcal{D}'_{|1|}} = \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})|_{\mathcal{D}'_{|1|}} .$$

Lemma 8.1.15 liefert $\langle g, w \rangle_{\mathcal{D}} = \langle w, g \rangle = \mu(w, g)$ für alle $w \in \mathcal{K}$ und alle $g \in \mathcal{L}$. Damit gilt für die Uniformitäten:

$$\sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\mathcal{K}} = \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{L})|_{\mathcal{K}} .$$

zu (ii): Der Beweis läuft aufgrund der Symmetrie von Δ laut Satz 8.2.3 völlig analog zu Teil (i). Dabei sind aber etwas andere Voraussetzungen zu nutzen. Für die Vollständigkeit von $\overline{\mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_{\Delta})}$ wird Lemma 8.1.8 verwandt. Die Hausdorffeigenschaft von $\sigma(B'_{\Delta}, \mathcal{K}) = \sigma(\Delta, \mathcal{K})$ ergibt sich mit folgender Überlegung. Mit Lemma 8.1.21 und der Definition von ξ_{Δ} erhält man für alle Elemente w der Menge \mathcal{K} und alle Elemente y der Menge Δ :

$$\langle w, y \rangle_{B_{\Delta}} = \langle w, y \rangle . \quad (8.16)$$

Also ist $\sigma(\Delta, \mathcal{K})$ identisch mit der uniformen Struktur auf Δ bezüglich der Abbildungsfamilie $(\langle w, \cdot \rangle)_{w \in \mathcal{K}}$. Da \mathcal{K} den Vektorraum B linear aufspannt, ist $\sigma(\Delta, \mathcal{K})$ gemäß Lemma D.1.1 auch identisch mit der uniformen Struktur auf Δ bezüglich der Familie $(\langle x, \cdot \rangle)_{x \in B}$. Nun handelt es sich aber bei $\langle B, B^*, \langle \cdot, \cdot \rangle$ um ein Dualsystem, und es gilt die Inklusion $\Delta \subseteq B^*$, also ist $\sigma(\Delta, \mathcal{K})$ hausdorffsch. Für den letzten Teil des Beweises muß dann auf den Sonderfall von (8.16) für $y \in \mathcal{L}$ zurückgegriffen werden, denn es gilt für jedes $w \in \mathcal{K}$ und jedes $g \in \mathcal{L}$ die Identität $\langle w, g \rangle_{B_{\Delta}} = \mu(w, g)$. ■

Mit Satz 8.2.7 wurde ein wichtiges Ziel erreicht. Man hat die uniformen Vervollständigungen der Zustands- und der Effektmenge in den Dualsystemen normierter Räume wiedergefunden. Insbesondere sind die Uniformitäten der physikalischen Unschärfe auf $\hat{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ durch die zugehörigen Unterraumuniformitäten von $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ und $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ ausgedrückt. Dies stellt aber lediglich die Ausgangsbasis dar, die Probleme der Theorie aus Kapitel 7 zu überwinden. Wie man an der Wahl der verschiedenen Räume Δ und \mathcal{D} sieht, kann man natürlich die Fortsetzungsproblematik von μ , der man durch die Einführung der Menge $\overline{\mathcal{K}}$ entsprochen hat, nicht durch eine solche Einbettung beseitigen. Denn durch den Aufbau einer mathematischen Rahmentheorie kann nicht der Umstand verändert werden, daß die Axiome nicht ausreichen, um zu garantieren, daß es eine in beiden Komponenten gleichmäßig stetige Fortsetzung von μ auf $\hat{\mathcal{K}} \times \hat{\mathcal{L}}$ gibt. Es soll auch gar nicht versucht werden, dies axiomatisch sicherzustellen. Stattdessen wird der Weg beschritten, nicht mit $\overline{\mathcal{K}}$ zu arbeiten, sondern eine andere Menge K zur mathematischen Abbildung der Zustände

zu verwenden, für die einerseits die Mengeinklusionskette $\mathcal{K} \subseteq K \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ gilt, um physikalisch denselben Wirklichkeitsbereich zu erfassen, und die andererseits zusammen mit $\hat{\mathcal{L}}$, $\hat{\mu}$ und den zugehörigen uniformen Strukturen der physikalischen Unschärfe in einem Dualsystem bestehend aus einem normierten Raum, seinem Norm-Dual und der zugehörigen kanonischen Bilinearität erfaßt werden kann. Dafür wird erst die Menge K definiert, um danach die eben aufgezählten Eigenschaften im einzelnen zu diskutieren.

Definition 8.2.8 Der Abschluß von \mathcal{K} in der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ wird mit K bezeichnet, das heißt, es wird gesetzt: $K := \overline{\mathcal{K}}^{\|\cdot\|_{B_\Delta}}$.

Offensichtlich umfaßt K die Menge \mathcal{K} , so daß sich K prinzipiell als mathematisches Abbild der Zustandskomponente eignet. Es bleibt aber noch unklar, in welchem Verhältnis K zu den Mengen $\hat{\mathcal{K}}$ und $\overline{\mathcal{K}}$ steht. Die Frage ist relevant, denn K muß Teilmenge von $\overline{\mathcal{K}}$ sein, damit vermöge Lemma 7.2.2 auf \mathcal{L} dieselbe Uniformität der physikalischen Unschärfe induziert wird wie durch $\overline{\mathcal{K}}$. Dadurch wäre dann die physikalische Gleichwertigkeit beim Vergleich mit dem Realtext gewährleistet.

Bevor die Frage nach dem Verhältnis von K zu den Mengen $\hat{\mathcal{K}}$ und $\overline{\mathcal{K}}$ beantwortet werden kann, müssen erst einige Überlegungen angestellt werden.

Betrachtet man zwei isomorphe uniforme Räume, dann ist der eine Raum genau dann metrisierbar, wenn es der andere ist. Also liefert Satz 8.2.7 aufgrund der aus Satz 7.2.1 bekannten Metrisierbarkeit von $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ und $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, daß sowohl $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\hat{\mathcal{K}}}$ als auch $\sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}$ metrisierbar sind. Insbesondere folgt damit aus Satz A.5.6:

Lemma 8.2.9 Für jedes Element y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ kann eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} so angegeben werden, daß $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}$ gegen y konvergiert. Insbesondere konvergiert $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen y . Das heißt in Symbolen:

$$g_n \xrightarrow{\sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}} y \quad \text{und} \quad g_n \xrightarrow{\sigma(\Delta, B_\Delta)} y.$$

Damit kann man nun den folgenden Satz beweisen, der eine Verbindung zu den in (7.2) und (7.3) eingeführten Abbildungen herstellt.

Satz 8.2.10 Für alle Elemente x der Menge $\hat{\mathcal{K}}$ und für alle Elemente g der Menge \mathcal{L} gilt:

$$\hat{h}_g(x) = H_x(g) = \langle g, x \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Beweis:

Vermittels Satz 8.2.7 wird $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ mit $\hat{\mathcal{K}}$ identifiziert. Trivialerweise ist für alle $g \in \mathcal{L}$ die Abbildung $\langle g, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ gleichmäßig stetig bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$. Deshalb ist für jedes $g \in \mathcal{L}$ die Restriktion auf $\hat{\mathcal{K}}$ gleichmäßig stetig bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\hat{\mathcal{K}}}$. Da mit Satz 8.2.7 die Uniformitäten $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ und $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_{\hat{\mathcal{K}}}$ zusammenfallen, heißt das also für alle $g \in \mathcal{L}$:

$$\langle g, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}|_{\hat{\mathcal{K}}} \text{ ist gleichmäßig stetig bezüglich } \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}).$$

Mit Satz 8.1.16 gilt aber für alle $g \in \mathcal{L}$:

$$\langle g, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{K}} = \langle \cdot, g \rangle|_{\mathcal{K}} = \mu(\cdot, g) = h_g(\cdot).$$

Also ist für jedes $g \in \mathcal{L}$ die Abbildung $\langle \cdot, g \rangle_{\mathcal{D}}|_{\hat{\mathcal{K}}}$ eine bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ gleichmäßig stetige Fortsetzung von h_g . Das bedeutet aber mit Satz A.4.7, daß man für alle Elemente g der Menge \mathcal{L} und alle Elemente x der Menge $\hat{\mathcal{K}}$ erhält:

$$\hat{h}_g(x) = \langle g, x \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Die Beziehung zwischen \hat{h}_g und H_x gilt definitionsgemäß (7.3). ■

Jetzt kann man das oben angesprochene Verhältnis zwischen K und $\overline{\mathcal{K}}$ formulieren. Die Aussage findet man als T 3.17 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 112. Allerdings wird er Beweis alternativ geführt.

Satz 8.2.11 *K ist eine Teilmenge der Menge $\overline{\mathcal{K}}$.*

Beweis:

Sei $x \in K$, dann existiert eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ mit $w_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B\Delta}} x$. Mithin liegt x wegen Satz 8.2.5 (i) auch in der Menge \mathcal{D}' . Wegen Punkt (ii) von Satz 8.2.5 folgt zudem die Konvergenz $w_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{D}'}} x$. Damit ergibt sich aus Satz 8.1.23 auch die Konvergenz $w_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} x$. Also gehört x zu $\overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} = \hat{\mathcal{K}}$. Es bleibt nur noch, zu zeigen, daß H_x auch gleichmäßig stetig ist bezüglich $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$. Dafür wird zunächst gezeigt, daß $(H_{w_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen H_x konvergiert. Ob der Konvergenz $w_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{D}'}} x$ gilt die Aussage:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) : \|w_n - x\|_{\mathcal{D}'} = \sup_{y \in \mathcal{D}, y \neq 0} \frac{|\langle y, w_n - x \rangle_{\mathcal{D}}|}{\|y\|} \leq \varepsilon.$$

Damit erhält man mit Lemma 8.1.8 die Aussage:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) \forall g \in \mathcal{L} : |\langle g, w_n \rangle_{\mathcal{D}} - \langle g, x \rangle_{\mathcal{D}}| \leq \varepsilon \|g\| \leq \varepsilon.$$

Mit Satz 8.2.10 ergibt sich deshalb auch die gleichmäßige Konvergenz:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0(\varepsilon) \forall g \in \mathcal{L} : |H_{w_n}(g) - H_x(g)| \leq \varepsilon. \quad (8.17)$$

Jetzt kann man auch die gleichmäßige Stetigkeit von H_x bezüglich $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ beweisen, wenn man berücksichtigt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung H_{w_n} auch bezüglich $\sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ gleichmäßig stetig ist.

Das heißt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$ ein Element $V(n, \varepsilon) \in \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ so existiert, daß für alle $y_1, y_2 \in V(n, \varepsilon)$ gilt:

$$|H_{w_n}(y_1) - H_{w_n}(y_2)| < \varepsilon. \quad (8.18)$$

Wählt man nun $\varepsilon > 0$, $n \geq n_0(\varepsilon/3)$ mittels (8.17) und $V(n, \varepsilon/3)$ entsprechend (8.18), dann gilt für alle $y_1, y_2 \in V(n, \varepsilon/3)$:

$$\begin{aligned} |H_x(y_1) - H_x(y_2)| &= |H_x(y_1) - H_{w_n}(y_1)| + |H_{w_n}(y_1) - H_{w_n}(y_2)| \\ &\quad + |H_{w_n}(y_2) - H_x(y_2)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt die gesuchte gleichmäßige Stetigkeit. ■

Somit umfaßt K nicht nur die physikalische Bildmenge der Zustände, sondern ist auch noch Teil von $\hat{\mathcal{K}}$. Daher besteht K insbesondere nur aus Elementen, die durch Elemente aus \mathcal{K} beliebig genau bezüglich der physikalischen Unschärfe approximiert werden können. Also kann auch K zum Abbilden der Zustände gewählt werden ebenso wie $\hat{\mathcal{K}}$ oder $\overline{\mathcal{K}}$. Die Hauptaxiome, wie sie im nächsten Kapitel vorgestellt werden, erlauben es aber sogar, in Abschnitt 9.4 die Identität von K und $\overline{\mathcal{K}}$ zu folgern. Also arbeitet man im Endeffekt sogar mit derselben Menge, so daß man auch den physikalischen Aspekten, die eine Betrachtung von $\overline{\mathcal{K}}$ in Kapitel 7 nahegelegt haben, gerecht wird. Außerdem weiß man bereits aus Satz 8.2.7, daß die Relation $\hat{\mathcal{L}} \subset \Delta = B'_\Delta$ gilt. Für die $\hat{\mathcal{L}}$ zugehörige uniforme Struktur der physikalischen Unschärfe liefert Satz 8.2.7 zudem die Identität der Uniformitäten $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ und $\sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}$. Somit fehlen für das angestrebte Ziel, alle physikalisch relevanten Größen in einem Dualsystem wiederzufinden, noch zwei Untersuchungen. Als erstes muß diskutiert werden, wie die Uniformität der physikalischen Unschärfe für die Menge K aussieht und wo sie in dem Dualsystem $\langle B_\Delta, \Delta \rangle$ zu finden ist. Als zweites muß noch die Abbildung $\hat{\mu}$ in diesen Zusammenhang eingeordnet werden.

Die Frage nach der Uniformität der physikalischen Unschärfe für K läßt sich einfach beantworten. Denn K stellt eine Teilmenge von $\hat{\mathcal{K}}$ dar, und somit ist die uniforme

Struktur genau wie bei $\overline{\mathcal{K}}$ einfach die zugehörige Unterraumuniformität der vervollständigten Uniformität, also $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_K$. Zu der Frage, wo sich die uniforme Struktur $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_K$ im Rahmen des Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta \rangle$ wiederfindet, gibt der nachfolgende Satz die Antwort:

Lemma 8.2.12 *Die Uniformitäten $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_K$ und $\sigma(B_\Delta, \Delta)|_K$ sind identisch.*

Beweis:

Der Einbettungssatz Satz 8.2.7 liefert $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_K = \sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_K$. Der Satz C.3.1 besagt, daß $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_K$ identisch ist mit der initialen Uniformität auf K bezüglich der Restriktionen der Abbildungen aus $(\xi_{\mathcal{D}}(\cdot, y))_{y \in \mathcal{D}}$ auf K . Mit Satz 8.1.26 folgt nun unter Verwendung der Hausdorffeigenschaft aus Satz 8.2.3 (iv) für alle $x \in B_\Delta$ und alle $y \in \mathcal{D}$:

$$\xi_{\mathcal{D}}(x, y) = \xi_\Delta(x, y).$$

Also folgt die Identität $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})|_K = \sigma(B_\Delta, \Delta)|_K$. ■

Um aufzuklären, wo $\hat{\mu}$ in dem betrachteten Dualsystem erscheint, sollen zunächst einige Aussagen gesammelt werden, die man als Theorem T 3.8 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 109 findet:

Lemma 8.2.13 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für alle Elemente x der Menge K gilt:*

$$\|x\|_{B_\Delta} = 1 \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1.$$

(ii) *Für alle Elemente y der Menge Δ gilt:*

$$\|y\| = \sup_{w \in \mathcal{K}} |\xi_\Delta(w, y)| = \sup_{x \in K} |\xi_\Delta(x, y)|.$$

(iii) *Für alle Elemente y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ gilt die Relation $\|y\| \leq 1$.*

Beweis:

Die erste Aussage von (i) folgt aufgrund der Stetigkeit der Norm aus Lemma 8.1.12, und die zweite Aussage ergibt sich aufgrund der Stetigkeit von $\xi_\Delta(\cdot, \mathbf{1})$ aus (8.1) und Satz 6.1.9.

Das erste Gleichheitszeichen bei (ii) ist direkte Folge der Definition von $\|\cdot\|$ und ξ_Δ . Zum Beweis des zweiten Gleichheitszeichens wähle man ein Element x der Menge $K \subseteq B_\Delta$. Dann liefern Lemma 8.1.12 und Punkt (i) für $y \in \Delta$:

$$|\xi_\Delta(x, y)| \leq \|x\|_{B_\Delta} \|y\| \leq \|y\|.$$

Also gilt $\sup_{x \in K} |\xi_\Delta(x, y)| \leq \|y\|$. Die umgekehrte Richtung erhält man wegen $\mathcal{K} \subseteq K$ ohnehin.

Für Punkt (iii) sei $y \in \hat{\mathcal{L}}$ gewählt. Dann existiert mit Lemma 8.2.9 aufgrund der Metrisierbarkeit eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ mit $g_n \xrightarrow{\sigma(\Delta, B_\Delta)} y$. Für $w \in \mathcal{K}$ gilt aber auch:

$$\xi_\Delta(w, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_\Delta(w, g_n)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{|\mu(w, g_n)|}_{\leq 1} \leq 1.$$

Also folgt mit Punkt (ii) dieses Lemmas die Behauptung. ■

Mit den nun gewonnenen Aussagen kann man die Frage nach dem Verhältnis von $\hat{\mu}$ zum Dualsystem $\langle B_\Delta, \Delta \rangle$ beantworten.

Satz 8.2.14 *Für alle Elemente x der Menge K und alle Elemente y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ gilt:*

$$\langle x, y \rangle_{B_\Delta} = \xi_\Delta(x, y) = \hat{\mu}(x, y).$$

Beweis:

Zunächst sei erwähnt, daß mit den Sätzen 8.2.7 (ii) und 8.2.11 die Wohldefiniertheit aller Ausdrücke gesichert ist, denn es gelten die Mengeninklusionen $\hat{\mathcal{L}} \subseteq \Delta$ und $K \subseteq \overline{\mathcal{K}}$.

Es reicht, das zweite Gleichheitszeichen zu untersuchen, denn das erste gilt bereits mit Lemma 8.6. Sei dafür $x \in K$ gewählt, dann ist $\xi_\Delta(x, \cdot)$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gleichmäßig stetig. Damit ist auch die Restriktion von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ auf $\hat{\mathcal{L}}$ gleichmäßig stetig bezüglich der Unterraumuniformität von $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ auf $\hat{\mathcal{L}}$. Die Unterraumuniformität fällt aber wegen Satz 8.2.7 (ii) mit $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ zusammen. Das heißt, die Restriktion von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ auf $\hat{\mathcal{L}}$ ist auch bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$

gleichmäßig stetig. Also reicht es wegen der Eindeutigkeit der gleichmäßig stetigen Fortsetzung laut Satz A.4.7 aus, zu zeigen, daß für $x \in K$ die Abbildung $\xi(x, \cdot)$ auf \mathcal{L} mit H_x identisch ist. Wählt man ein $x \in K$, dann existiert eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ mit $w_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$. Damit gilt aber als Folge der Sätze 8.2.5 und 8.1.23 auch $w_n \xrightarrow{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} x$, wie schon im Beweis zu Satz 8.2.11 erläutert wurde. Man gewinnt damit für jedes $g \in \mathcal{L}$ unter Ausnutzung von Satz 8.2.5 (iii) und Satz 8.2.10 die gesuchte Aussage:

$$\xi_\Delta(x, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\Delta(w_n, g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle g, w_n \rangle_{\mathcal{D}} = \langle g, x \rangle_{\mathcal{D}} = H_x(g).$$

■

Auf der Basis der Untersuchungen des zurückliegenden Abschnitts kann von der durch

$$(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}}) \times (\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})) \xrightarrow{\hat{\mu}} [0, 1]$$

charakterisierten Theorie übergegangen werden zu der Struktur:

$$(K, \sigma(B_\Delta, \Delta)|_K) \times (\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}) \xrightarrow{\xi_\Delta = \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\Delta}} [0, 1].$$

8.3 Konvexe Strukturen von K und $\hat{\mathcal{L}}$

Bevor ausgehend von dem im vorigen Abschnitt neu gewonnenen $(K, \hat{\mathcal{L}}, \xi_\Delta)$ -Standpunkt der Theorie weitere Axiome formuliert werden, sollen noch einige dafür wichtige Instrumente aus dem Bereich der konvexen Analysis dargelegt und im Zusammenhang der vorliegenden Theorie erörtert werden.

Zunächst wird der Begriff der σ -Konvexität im Kontext normierter Räume erörtert. Zusätzlich dazu wird zur Vereinheitlichung der Sprechweise die übliche Definition der Konvexität in Vektorräumen aufgeführt.

Definition 8.3.1

(i) Sei X ein Vektorraum.

Sei $(x_j)_{j=1}^n$ eine Familie von Elementen der Menge X , und sei $(\alpha_j)_{j=1}^n$ eine Familie von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$, dann nennt man

das Element $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ aus X die **Konvexkombination der $(x_j)_{j=1}^n$ bezüglich der Gewichte $(\alpha_j)_{j=1}^n$** .

Eine Teilmenge A von X heißt **reell (oder rational) konvex**, wenn für jeden endlichen Satz $(x_j)_{j=1}^n$ von Elementen der Menge A und für jede Familie $(\alpha_j)_{j=1}^n$ von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ (oder von rationalen Zahlen des Intervalls $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$) mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ die zugehörige Konvexkombination

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j \text{ in } A \text{ liegt.}$$

(ii) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum.

Es bezeichne $(x_j)_{j=1}^\infty$ eine Familie von Elementen der Menge X , und es bezeichne $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ eine Familie von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ derart, daß zum einen $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$ gilt und daß zum anderen die Reihe $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j$ unbedingt bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ konvergiert. Dann heißt der Grenzwert der Reihe $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j x_j$ die **σ -Konvexkombination der $(x_j)_{j=1}^\infty$ bezüglich der Gewichte $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$** .

Eine Teilmenge A der Menge X heißt **reell (oder rational) σ -konvex bezüglich $(X, \|\cdot\|)$** , wenn A reell (oder rational) konvex ist und wenn für jeden Satz $(x_j)_{j=1}^\infty$ von Elementen der Menge A und für jeden Satz $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ (oder von rationalen Zahlen des Intervalls $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$) mit $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$ die σ -Konvexkombination in A existiert.

Es seien zur obigen Definition der σ -Konvexität zunächst einige Punkte angemerkt. Die geforderte unbedingte Konvergenz der beteiligten Reihe bedeutet, daß die Reihe unabhängig von der gewählten Reihenfolge stets gegen denselben Grenzwert konvergiert. Also kann man für beliebige, aber höchstens abzählbare Indextmengen I die σ -Konvexkombination einer Familie von Elementen $(x_j)_{j \in I}$ der Menge A und einer Familie von Zahlen $(\alpha_j)_{j \in I}$ des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{j \in I} \alpha_j = 1$ auch das Symbol $\sum_{j \in I} \alpha_j x_j$ verwenden, ohne eine explizite Reihenfolge angeben zu müssen.

Letzteres gilt natürlich nur, wenn für eine bestimmte Reihenfolge die unbedingte Konvergenz feststeht. Einen derartigen Sachverhalt sichert im Zusammenhang mit σ -Konvexkombinationen auf Banachräumen bereits die absolute Konvergenz der zugehörigen Reihe, wie sich etwa mit [Heu91b], Satz 109.13, S. 21 ergibt. Es ist auch die natürliche Forderung erfüllt, daß die reelle (oder rationale) σ -Konvexität einer Teilmenge eines normierten Raumes die reelle (oder rationale) Konvexität derselben Menge nach sich zieht.

Nach der Definition 6.2.1 steht mit obiger Definition der Konvexität bereits der zweite Konvexitätsbegriff zur Verfügung. Zumindest für die hier relevanten Fälle kann man bezüglich des Verhältnisses der beiden Konvexitäts-Begriffe zunächst den folgenden Satz formulieren.

Satz 8.3.2 *Es gilt:*

(i) *Sei X ein Vektorraum, und sei I eine Teilmenge des algebraisch dualen Raumes X^* , so daß I die Menge X trennt. Sei ferner H eine Teilmenge von X . Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die kanonische Bilinearität der Dualität $\langle X, X^* \rangle$, dann gilt:*

H ist reell (oder rational) konvex genau dann, wenn H reell (oder rational) $(\langle \cdot, y \rangle)_{y \in I}$ -konvex ist.

(ii) *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, und sei H eine Teilmenge von X . Bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die kanonische Bilinearität der Dualität $\langle X, X' \rangle$, dann gilt:*

Wenn H bezüglich $(X, \|\cdot\|)$ reell (oder rational) σ -konvex ist, dann ist H reell (oder rational) σ - $(\langle \cdot, x' \rangle)_{x' \in X'}$ -konvex.

Beweis:

zu (i): Man kann sich auf den reellen Fall beschränken. Seien dafür $(x_j)_{j=1}^n \subseteq H$

und $(\alpha_j)_{j=1}^n \subset (0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1$ gewählt.

„ \implies “ : Die Summe $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$ liegt in H , und damit gilt für alle $y \in I$:

$$\left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, y \right\rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle x_j, y \rangle .$$

Die Eindeutigkeit folgt dann aus der Trennungseigenschaft.

„ \Leftarrow “ : Es existiert genau ein $x \in H$, so daß man für alle $y \in I$ erhält:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle x_j, y \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j, y \right\rangle .$$

Mit der Trennungseigenschaft folgt dann $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$.

zu (ii): Die Konvexität folgt mit Punkt (i). Für abzählbare Familien $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ aus der Menge H und $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$ folgt aus den Stetigkeitseigenschaften von $\langle \cdot, x' \rangle$ für jedes $x' \in X'$ die zu beweisende Eigenschaft:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j x_j, x' \right\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \langle x_j, x' \rangle .$$

Die Eindeutigkeit folgt wiederum mit der Trennungseigenschaft. \blacksquare

Man sieht an Punkt (ii), daß im allgemeinen die Konvexitätsbegriffe nicht vollständig ineinander übergehen. Das liegt daran, daß die σ - $(\langle \cdot, x' \rangle)_{x' \in X'}$ -Konvexität nicht für die unbedingte Konvergenz der beteiligten Reihen sorgt. Für die hier vorliegende Arbeit wird die Umkehrung aber nur für den Fall der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ benötigt und dort wird sie sich als möglich erweisen, da $\hat{\mathcal{L}}$ noch weitere über die Voraussetzungen aus Punkt (ii) hinausgehende Eigenschaften besitzt. Man kann sich also auf die Untersuchung von $\hat{\mathcal{L}}$ und K auf Konvexität im Sinne der obigen Definition beschränken. Zunächst sei aber die Entsprechung zum Satz 6.2.3 über die rationale $(\mu(\cdot, g))_{g \in \mathcal{L}}$ -Konvexität von \mathcal{K} und die rationale $(\mu(w, \cdot))_{w \in \mathcal{X}}$ -Konvexität von \mathcal{L} genannt, wie man sie als T 1.2 in [Lud85a], Kapitel IV, §1, S. 103 findet:

Lemma 8.3.3 \mathcal{K} und \mathcal{L} sind rationale konvexe Mengen.

Beweis:

Der Beweis läuft für beide Mengen parallel, so daß hier die Beschränkung auf den \mathcal{K} -Fall erlaubt ist. Setzt man $X := B$ und $I := \mathcal{L}$, dann folgt die Behauptung mit Satz 8.3.2 (i), denn mit Satz 8.1.2 (iii) und (v) trennt \mathcal{L} die Menge B bezüglich des kanonischen Bilinearsystems. Und mit (8.1) fällt die kanonische Bilinearität mit μ zusammen, so daß mit der rationalen Konvexitätseigenschaft aus Satz 6.2.3 den notwendigen Voraussetzungen entsprochen wird. \blacksquare

Damit können jetzt die Konvexitätseigenschaften von K und $\hat{\mathcal{L}}$ formuliert werden. Auf die Konvexität weist Ludwig in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 108 hin. Darüber hinaus können aber auch weitergehende Aussagen getroffen werden:

Satz 8.3.4 *Es gilt:*

- (i) K ist reell σ -konvexe Menge bezüglich $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$,
- (ii) $\hat{\mathcal{L}}$ ist reell σ -konvexe Menge bezüglich $(\Delta, \|\cdot\|)$.

Beweis:

zu (i): Der Umstand der reellen Konvexität der Menge K folgt direkt daraus, daß einerseits K der Normabschluß einer rational konvexen Menge ist und daß andererseits die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen. Es bleibt also, die reelle σ -Konvexität zu zeigen. Seien dafür zwei Familien $(x_i)_{i=1}^\infty$ aus K und $(\alpha_i)_{i=1}^\infty$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = 1$ gewählt. Dann ergibt sich aus der Ungleichungskette

$$\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\|_{B_\Delta} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \|x_i\|_{B_\Delta} \stackrel{\text{Satz 8.2.13}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1,$$

daß die Reihe $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_i$ absolut und damit auch unbedingt konvergiert. Bezeichnet man den Grenzwert der Reihe $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i x_i$ mit x , dann liegt x in B_Δ . Es bedarf also noch des Nachweises, daß x auch in K liegt. Man betrachte dazu die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert gemäß der Vorschrift

$$z_n := \sum_{i=1}^n \eta_n \alpha_i x_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

wobei $\eta_n := (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ gesetzt sei. Da K reell konvex ist, liegt die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offensichtlich in der Menge K . Außerdem impliziert die Konvergenz $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i = 1$ auch die Konvergenz $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Seien nun $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|\eta_n - 1| \leq \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - x \right\|_{B_\Delta} \leq \varepsilon/2.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \|z_n - x\|_{B_\Delta} &\leq \sum_{i=1}^n |\eta_n - 1| \alpha_i \underbrace{\|x_i\|_{B_\Delta}}_{=1} + \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - x \right\|_{B_\Delta} \\ &\leq |\eta_n - 1| \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i}_{\leq 1} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist x Grenzwert einer bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ konvergenten Folge aus K . Die definitionsgemäße Abgeschlossenheit von K bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ liefert dann die Zugehörigkeit von x zu K .

zu (ii): Der endliche Fall folgt sofort aus der aus Satz 7.2.8 hervorgehenden reellen $(\hat{\mu}(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -Konvexität von $\hat{\mathcal{L}}$. Es fehlt also noch der Beweis des abzählbaren Falles. Seien dafür $(y_j)_{j=1}^\infty$ aus $\hat{\mathcal{L}}$ und $(\alpha_j)_{j=1}^\infty$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j = 1$ gewählt, dann gilt wegen Lemma 8.2.13 (iii) für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ die Ungleichung

$$\sum_{j=m}^n \|\alpha_j y_j\| \leq \sum_{j=m}^n \alpha_j,$$

und somit ist $(\sum_{j=1}^n \alpha_j y_j)_{n \in \mathbb{N}}$ absolut konvergent. Die aus Satz 8.2.3 bekannte Banachraumeigenschaft von $(\Delta, \|\cdot\|)$ liefert dann auch die unbedingte Konvergenz. Also existiert die σ -Konvexkombination in Δ . Der zugehörige Grenzwert der Reihe, also die σ -Konvexkombination, sei mit \bar{y} bezeichnet. Damit muß man jetzt noch zu zeigen, daß \bar{y} auch in $\hat{\mathcal{L}}$ liegt. Es folgt mit Satz 7.2.8 über die reelle σ - $(\hat{\mu}(w, \cdot))_{w \in \mathcal{K}}$ -Konvexitätseigenschaft von $\hat{\mathcal{L}}$ die Existenz eines $y \in \hat{\mathcal{L}}$ derart, daß für alle $w \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\hat{\mu}(w, y) = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \hat{\mu}(w, y_j).$$

Das heißt, es gilt mit Satz 8.2.14 und mit der Definition von ξ_Δ für alle $w \in \mathcal{K}$

$$\langle w, y \rangle = \sum_{j=1}^\infty \alpha_j \langle w, y_j \rangle.$$

Daraus ergibt sich aufgrund der Stetigkeit von $\langle x, \cdot \rangle$ auf R bezüglich $\|\cdot\|$ für jedes $w \in \mathcal{K}$:

$$\langle w, y \rangle = \langle w, \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j y_j \rangle = \langle w, \bar{y} \rangle .$$

Die Bilinearität von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ergibt dann für jedes $x \in B$:

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \bar{y} \rangle .$$

Die Dualität von B und B^* zueinander liefert dann $y = \bar{y}$. Also fallen beide σ -Konvexkombinationen zusammen, so daß insbesondere auch \bar{y} zu $\hat{\mathcal{L}}$ gehört. ■

Bevor weitere konvexe Strukturen eingeführt und untersucht werden, soll noch die folgende Aussage notiert werden, die sich aus der Konvexität von $\hat{\mathcal{L}}$ zusammen mit den Aussagen des zentralen Satzes 6.1.9 über μ ergeben und die Ludwig in [Lud85a], Kapitel VI, §1.4, S. 162 anmerkt:

Lemma 8.3.5 *Es gilt:*

- (i) Sei α eine reelle Zahl mit $0 \leq \alpha \leq 1$, und sei y ein Element in $\hat{\mathcal{L}}$, dann gehört αy zu $\hat{\mathcal{L}}$.
- (ii) Für jedes Element y von $\hat{\mathcal{L}}$ liegt $\mathbf{1} - y$ in $\hat{\mathcal{L}}$.

Beweis:

zu (i): Mit Satz 8.3.4 ist $\hat{\mathcal{L}}$ insbesondere konvex, und mit den Sätzen 6.1.9 und 8.1.4 liegt $\mathbf{0}$ in $\hat{\mathcal{L}}$. Also liegt für ein $y \in \hat{\mathcal{L}}$ und ein reelles α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ auch αy in $\hat{\mathcal{L}}$, denn man kann notieren:

$$\alpha y = \alpha y + (1 - \alpha)\mathbf{0}.$$

zu (ii): Mit Satz 6.1.9 weiß man, daß es zu jedem Element g der Menge \mathcal{L} ein Element g' in \mathcal{L} derart gibt, daß für alle Elemente w der Menge \mathcal{K} gilt:

$$\langle w, g' \rangle = \mu(w, g') = 1 - \mu(w, g) = \mu(w, \mathbf{1}) - \mu(w, g) = \langle w, \mathbf{1} - g \rangle .$$

Da Δ Vektorraum ist, gehört insbesondere $\mathbf{1} - g$ zu Δ . Und da \mathcal{K} den Raum B linear aufspannt, folgt aus den Trennungseigenschaften von $\langle B, B^* \rangle$ die Behauptung zumindest für alle Elemente aus \mathcal{L} , das heißt:

$$\forall y \in \mathcal{L} : \mathbf{1} - g \in \mathcal{L}. \quad (8.19)$$

Sei nun $y \in \hat{\mathcal{L}}$, dann existiert mit Lemma 8.2.9 die Existenz einer Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ mit $g_n \xrightarrow{\sigma(\Delta, B_\Delta)} y$. Da mit $\Delta = B_\Delta$ der Raum $(\Delta, \sigma(\Delta, B_\Delta))$ insbesondere ein topologischer Vektorraum ist, definiert die Abbildung

$$t: \Delta \longrightarrow \Delta, \bar{y} \longmapsto \mathbf{1} - \bar{y}$$

einen Homöomorphismus, wie man etwa mit [SW99], Kapitel I, §1.1, S. 13 folgern kann. Also ist t stetig, womit sich die folgende Konvergenz ergibt:

$$\mathbf{1} - g_n \xrightarrow{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \mathbf{1} - y.$$

Mit (8.19) gewinnt man damit, daß $\mathbf{1} - y$ zu $\overline{\mathcal{L}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}} = \hat{\mathcal{L}}$ gehört. ■

Die Konvexität der Zustandsmenge K motiviert eine weitergehende Diskussion der konvexen Struktur von K . Dafür ist es wichtig, weitere Konzepte einzuführen. Zunächst wird der Begriff der Dimension einer konvexen Menge definiert.

Definition 8.3.6

Sei X ein reeller Vektorraum, und sei C eine konvexe Teilmenge von X , dann wird unter der **Dimension** von C , in Zeichen $\dim C$, die Dimension der affinen Hülle verstanden.

Bemerkung: In Abschnitt D.2 sind einige der wichtigsten Aussagen zur Theorie affiner Mengen zusammengestellt.

Nach der Abklärung des Dimensionsbegriffes konvexer Mengen kommt man mit der nächsten Definition zu einem Begriff, der dazu dient, die innere Struktur einer konvexen Menge weiter zu untersuchen.

Definition 8.3.7

Sei X ein Vektorraum, und sei C eine konvexe Teilmenge von X .

- (i) Eine Teilmenge F von C heißt **Seite** oder auch **Extremalmenge** von C , wenn die F die folgenden Eigenschaften besitzt:
 - (a) F ist konvexe Menge.
 - (b) Sind x_1, x_2 zwei beliebige Elemente aus C , und ist mit α eine beliebige Zahl aus dem reellen Intervall $(0, 1)$, dann folgt aus der Zugehörigkeit von $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$ zu F , daß x_1 und x_2 in F liegen.

- (ii) Ein Element x der Menge C heißt **Extremalpunkt** von C , wenn die einelementige Menge $\{x\}$ eine Seite von C ist. Das heißt, gilt für beliebige Elemente x_1, x_2 der Menge C und eine beliebige Zahl α des reellen Intervalls $(0, 1)$ die Identität $\alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2 = x$, dann folgt, daß x und x_1 zusammenfallen. Die Menge aller Extremalpunkte von C wird mit $\partial_e C$ bezeichnet.

Bei einem Extremalpunkt einer konvexen Menge handelt es sich also um einen Punkt, der sich nicht als echte Konvexkombination schreiben läßt. Seiten bezeichnen dahingehend extremale Mengen, die nicht nur abgeschlossen gegenüber endlichen Konvexkombinationen ihrer Elemente sind, sondern in Anlehnung an den Sprachgebrauch aus Abschnitt 6.2 auch abgeschlossen gegenüber endlichen Entmischungen in Konvexkombinationen sind. Eine Seite einer konvexen Menge ist mithin vom konvexen Standpunkt aus „eigenständig“. Für die Zustandsmenge K ergibt sich genau daraus die physikalische Relevanz der Seiten von K . Es ist zu erwarten, daß derartige im konvexen Sinne „eigenständige“ Segmente von K die eigentlichen Träger der wichtigen Strukturen sind, die insbesondere die Quantenmechanik ausmachen.

Da man im Umgang mit Bildmengen zumeist auch die zugeordnete Uniformität der physikalischen Unschärfe zu berücksichtigen hat, liegt es nahe, derartige Teilmengen der Bildmengen oder ihrer Hausdorff-Vervollständigungen zu betrachten, die neben der Eigenschaft der Abgeschlossenheit gegenüber Konvexkombinationen und -entmischungen auch die der Abgeschlossenheit bezüglich der Topologie der physikalischen Unschärfe besitzen. Dazu erinnere man, daß sich die Elemente aus dem Rand nicht auf physikalischem Wege, das heißt mit endlicher Genauigkeit, von denen der Ausgangsmenge unterscheiden lassen. Deswegen werden im weiteren vor allem die abgeschlossenen Seiten von K wichtig sein.

Bezüglich der Seiten konvexer Teilmengen gelten die folgenden Transitivitätseigenschaften:

Lemma 8.3.8 *Sei X ein Vektorraum, und sei C eine konvexe Teilmenge von X . Bezeichnet F eine Seite von C , und bezeichnet G eine Seite von F , dann ist auch G eine Seite von C . Insbesondere gilt bezüglich der Extremalpunkte die Identität:*

$$\partial_e F = \partial_e C \cap F. \quad (8.20)$$

Beweis: Siehe Lemma VIII.4.2 in [Wer97], Kapitel VIII, S. 349.

Man braucht in Zusammenhang der Seiten von K nicht explizit zu erwähnen, ob man sich bei der Abgeschlossenheitsaussage auf die Topologie der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ oder auf die Topologie $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ bezieht, denn es gilt gemäß einer Anmerkung in [Lud85a], Kapitel IV, §5, S. 121:

Lemma 8.3.9 *Eine Seite von K ist genau dann bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ abgeschlossen, wenn sie bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ abgeschlossen ist.*

Beweis:

Daß die Abgeschlossenheit bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ die Abgeschlossenheit bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ impliziert, ist schon bekannt, denn die Normtopologie ist mit Satz 8.1.23 (ii) feiner als $\sigma(B_\Delta, \Delta)$. Die umgekehrte Richtung ergibt sich aus [SW99], Kapitel II, §9.2, Korollar 2, S. 65, demnach insbesondere auf normierten Räumen X der Normabschluß und der Abschluß bezüglich $\sigma(X, X')$ von konvexen Mengen zusammenfallen. ■

Im Falle endlichdimensionaler Seiten von K braucht man überhaupt nicht auf die Abgeschlossenheit einzugehen, da sie mit dem nachfolgenden Lemma stets gegeben ist:

Lemma 8.3.10 *Sei F eine endlichdimensionale Seite von K , dann ist F abgeschlossene Seite von K .*

Beweis:

Der Fall $\dim F = 0$ ist trivial, da in Hausdorffräumen Einpunktmengen stets abgeschlossen sind. Sei daher $\dim F = m > 0$ mit $m \in \mathbb{N}$ gewählt. Dann existieren ein m -dimensionaler Untervektorraum V von B_Δ und ein $x_0 \in B_\Delta$ in der Form, daß $x_0 + V$ die affine Hülle von F ist. Endlichdimensionale Unterräume von normierten Räumen sind stets normabgeschlossen, also ist V auch bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ abgeschlossen. Sei nun $x \in B_\Delta$, und sei $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ eine Folge, die bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen x konvergiert. Dann konvergiert auch die Folge $(\bar{x}_n - x_0)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq V$ gegen $x - x_0$, und somit liegt x in der Menge $x_0 + V$. Da aber auch K normabgeschlossen ist und da F eine Teilmenge von K ist, gehört x zu K . Die Menge $x_0 + V$ ist die affine Hülle von F , also läßt sich x als Affinkombination von Elementen aus F schreiben. Das heißt, es existieren Familien $(x_i)_{i=1}^n$ in F und $(\alpha_i)_{i=1}^n$ aus dem reellen Intervall \mathbb{R} mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, so daß $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ gilt. Man kann ohne Beschränkung annehmen, daß alle α_i von 0 verschieden sind. Ob der Beziehung $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ muß es aber in der Familie $(\alpha_i)_{i=1}^n$ mindestens ein echt positives Mitglied geben. Also kann man

ein $n_1 > 0$ so angeben kann, daß für alle $i \leq n_1$ die Relation $\alpha_i > 0$ gilt und daß für alle $i > n_1$ die Ungleichung $\alpha_i < 0$ gilt. Man erhält damit:

$$x + \sum_{i=n_1+1}^n |\alpha_i| x_i = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i x_i.$$

Also ergibt sich weiter:

$$\frac{x}{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i} + \sum_{j=n_1+1}^n \frac{|\alpha_j|}{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i} x_j = \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\alpha_j}{\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i} x_j.$$

Nun steht auf der rechten Seite der Gleichung offensichtlich eine Konvexkombination von Elementen aus F , die aufgrund der Konvexität von F wiederum in F liegt. Außerdem liegt auf der linken Seite der Gleichung eine Konvexkombination von Elementen aus K vor, so daß mit der definitionsgemäßen Abgeschlossenheit gegenüber konvexen Entmischungen insbesondere x in F liegt. Damit folgt die Abgeschlossenheit von F . ■

Es gibt Seiten und Extrempunkte, die sich durch die Eigenschaft der sogenannten Exponiertheit auszeichnen. Den damit zusammenhängenden Konzepten widmet sich die folgende Definition:

Definition 8.3.11

Sei X ein topologischer reeller Vektorraum.

- (i) Sei f eine lineare reellwertige Abbildung auf X , der nicht auf ganz X der Funktionswert 0 zukommt. Sei ferner α eine reelle Zahl, dann heißt die Menge

$$H := \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$$

eine **Hyperebene** in X . Die Menge

$$\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$$

wird **Halbraum** in X genannt.

- (ii) Sei M Teilmenge von X . Dann heißt eine Hyperebene $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ **Stützhyperebene** von M bezüglich des topologischen Vektorraumes X , wenn H bezüglich der Topologie von X abgeschlossen ist, wenn H mindestens einen Punkt aus M enthält und wenn die Menge M vollständig in einem der beiden Halbräume $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ oder $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ liegt. Die Abbildung f bezeichnet wird dabei als **Stützfunktional** bezeichnet. Ein Punkt von M , der zu einer Stützhyperebene von M gehört, heißt **Stützpunkt** von M .

- (iii) Sei C eine konvexe Teilmenge von X , dann heißt eine Teilmenge F der Menge C eine **exponierte Seite** von C bezüglich des topologischen Vektorraumes X , wenn es eine Stützhyperebene H von C so gibt, daß $F = H \cap C$ gilt. Die leere Menge wird explizit als exponierte Seite definiert. Ein Element x der Menge C heißt **exponierter Punkt** von C bezüglich des topologischen Vektorraumes X , wenn die einelementige Menge $\{x\}$ eine exponierte Seite ist.

Die obige Definition der exponierten Seite läßt sich in folgender Weise in eine für die vorliegende Arbeit günstigere Form bringen, denn, Überlegungen in [Roc70], Kapitel 18, S. 162 folgend, gilt das Lemma:

Lemma 8.3.12 *Bezeichnet X einen topologischen reellen Vektorraum, und bezeichnet C eine konvexe Teilmenge von X , dann sind die beiden folgenden Aussagen für eine nicht-leere Teilmenge F von C äquivalent:*

- (i) F ist eine exponierte Seite von C bezüglich des topologischen Vektorraumes X .
(ii) Es existiert eine lineare und bezüglich der Topologie von X stetige reellwertige Abbildung f auf X so, daß gilt:

$$F = \{x \in C \mid f(x) = \max_{x' \in C} f(x')\}.$$

Beweis:

„ \implies “ : Sei F eine exponierte Seite von C , dann existiert eine Stützhyperebene H von C bezüglich X mit $F = H \cap C$. Das heißt, es existiert eine stetige, lineare Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß $H = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\}$ gilt, und so, daß C entweder in $\{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\}$ oder $\{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}$ liegt. Also hat man in f oder $-f$ die gesuchte Abbildung gefunden.

„ \impliedby “ : Liege F in der Form $F = \{x \in C \mid f(x) = \max_{x' \in C} f(x')\}$ mit einer den Voraussetzungen genügenden Abbildung f vor. Dann bezeichnet die Menge $H := \{x \in X \mid f(x) = \max_{x' \in C} f(x')\}$ eine Stützhyperebene von C . Die Abgeschlossenheit folgt aus der Stetigkeit von f mit [SW99], Kapitel I, §4.2, S. 24. Da $H \cap C = F \neq \emptyset$ gilt, gibt es offensichtlich Punkte aus C in H . Zudem liegt C in einem Halbraum bezüglich H , denn es ergibt sich für alle $x \in C$ natürlich $f(x) \leq \max_{x' \in C} f(x')$. ■

Bezüglich der Wohldefiniertheit bemerke man, daß jede exponierte Seite insbesondere eine Seite ist, wie sich leicht aus obigem Lemma 8.3.12 ergibt. Außerdem sieht

man leicht ein, daß exponierte Punkte auch Extrempunkte sind. Darüber hinaus ist mit Lemma 8.3.12 ob der Stetigkeit von f offensichtlich, daß jede exponierte Seite auch abgeschlossen ist bezüglich der betrachteten Vektorraumtopologie.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden vor allem die Seiten von K relevant sein, so daß es sich lohnt, dazu einige Überlegungen anzustellen. Zunächst muß wie bei den abgeschlossenen Seiten erörtert werden, ob sich die exponierten Seiten von K bezüglich der Normtopologie $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ von denjenigen bezüglich der Topologie $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ unterscheiden. Außerdem stellt sich die Frage, ob sich für die nun betrachtete spezielle Situation die Aussage des Lemmas 8.3.12 noch weiter konkretisieren läßt. Bezüglich der beiden Punkte gilt das nachfolgende Lemma, das entscheidend auf der Symmetrie von Δ im Sinne von Definition 8.1.18 beruht:

Lemma 8.3.13 *Sei F eine nicht-leere Teilmenge von K , dann sind äquivalent:*

- (i) F ist eine exponierte Seite von K bezüglich $(B_\Delta, \sigma(B_\Delta, \Delta))$.
- (ii) Es existiert ein Element y der Menge Δ , das für alle Elemente x der Menge K der Relation $\xi_\Delta(x, y) \geq 0$ genügt, so daß gilt:

$$F = \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 0\}.$$

- (iii) F ist eine exponierte Seite von K bezüglich $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$.

Beweis:

(i) \implies (ii): Sei F eine exponierte Seite von K bezüglich $(B_\Delta, \sigma(B_\Delta, \Delta))$. Dann existiert mit Lemma 8.3.12 eine lineare und bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ stetige Abbildung $f : B_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $F = \{x \in K \mid f(x) = \max_{x' \in K} f(x')\}$ gilt. Da nach Satz 8.2.3 (ii) die Identität $\Delta = B'_\Delta$ gilt und da somit $\langle B_\Delta, \Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\Delta} \rangle$ ein Dualsystem ist, existiert mit [SW99], Kapitel IV, §1.2, S. 124, ein $y \in \Delta$, so daß wegen Lemma 8.2.5 für alle $x \in B_\Delta$ gilt:

$$\xi_\Delta(x, y) = \langle x, y \rangle_{B_\Delta} = f(x).$$

Man setze

$$\bar{y} := -y + \left(\max_{x' \in C} f(x')\right) \cdot \mathbf{1},$$

dann gehört \bar{y} zu Δ , und man erhält für alle $x \in K$ die Ungleichung $\xi_\Delta(x, \bar{y}) \geq 0$. Zudem ergibt sich die Identität $F = \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, \bar{y}) = 0\}$.

(ii) \implies (i): Die Richtung ist offensichtlich, wenn man $f(x) := -\xi_\Delta(x, y)$ für alle $x \in B_\Delta$ setzt und wenn man dann Lemma 8.3.12 anwendet.

(i) \iff (iii): Es gilt $B'_\Delta = \Delta$, so daß wegen [SW99], Kapitel IV, §1.2, S. 124, der Norm-Dualraum und der Dualraum bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ von B_Δ identisch gleich Δ sind. Das heißt insbesondere, eine lineare Abbildung auf B_Δ ist genau dann normstetig, wenn sie auch bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ stetig ist. Also gilt die Behauptung offensichtlich, wenn man die Darstellung von F gemäß Lemma 8.3.12 ausnutzt. ■

Lemma 8.3.13 rechtfertigt es, in Zukunft bei Betrachtung exponierter Seiten von K den Zusatz, auf welche der beiden Topologien man sich bezieht, wegzulassen. Um den weiteren Umgang mit den neu eingeführten Begriffen in der Zukunft etwas zu erleichtern, seien zunächst die in der Folge wichtigsten Mengen mit eigenen Namen versehen:

Definition 8.3.14

(i) $W := \{F \subseteq K \mid F \text{ ist eine abgeschlossene Seite von } K\}$.

(ii) Für jede Teilmenge N der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ sei definiert:

$$K_0(N) := \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 0 \ \forall y \in N\}.$$

(iii) $W_{\hat{\mathcal{L}}} := \{K_0(N) \mid N \subseteq \hat{\mathcal{L}}\}$.

(iv) Für jede Teilmenge k der Menge K sei definiert:

$$\hat{\mathcal{L}}_0(k) := \{y \in \hat{\mathcal{L}} \mid \xi_\Delta(x, y) = 0 \ \forall x \in k\}.$$

(v) $U_K := \{\hat{\mathcal{L}}_0(k) \mid k \subseteq K\}$.

Bemerkung: Bei Einpunktteilmengen $\{y\}$ von $\hat{\mathcal{L}}$ soll vereinfachend $K_0(y)$ anstatt $K_0(\{y\})$ geschrieben werden. Entsprechendes sei für $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ vereinbart. Eine Vereinfachung der Schreibweise wird auch im folgenden Zusammenhang eingeführt. Für eine Teilmenge k der Menge K bezeichnet $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ definitionsgemäß eine Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$, so daß der Ausdruck $K_0(\hat{\mathcal{L}}_0(k))$ sinnvoll ist. Es wird nun für den Ausdruck $K_0(\hat{\mathcal{L}}_0(k))$ die vereinfachte Schreibweise $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ vereinbart. Analog komme die Vereinbarung wiederum auch für den umgedrehten Fall zur Anwendung. Für die Definition von W erinnere man nochmals Lemma 8.3.9. Demnach hat die Wahl zwischen Normtopologie und σ -Topologie keinen Einfluß auf W .

Mit der Namensgebung aus Definition 8.3.14 können die ersten Eigenschaften der verwendeten Größen notiert werden. Dafür ist zunächst das Verhältnis zu den oben in Definition 8.3.11 eingeführten Begriffen zu klären. Es gilt das Lemma gemäß T 5.2 und einiger Anmerkungen Ludwigs in [Lud85a], Kapitel IV, §5, S. 121 und S. 123:

Lemma 8.3.15 *Die Elemente von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ sind exponierte Seiten von K , das heißt, es gilt die Mengeninklusion $W_{\hat{\mathcal{L}}} \subseteq W$. Die Elemente von U_K sind bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossene Seiten von $\hat{\mathcal{L}}$.*

Beweis:

Zunächst ist zu zeigen, daß für jedes $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ durch $K_0(N)$ eine exponierte Seite von K gegeben ist. Dafür sei bemerkt, daß $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, also $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ eine abzählbare Basis besitzt. Dies folgt, da mit Satz 7.2.4 (i) die Identität $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}) = \sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K})$ gilt und da \mathcal{K} abzählbar ist. Also folgt mit [Dug66], Kapitel VIII, Theorem 7.3, S. 176 die Separabilität jedes Unterraumes von $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$. Damit existiert zu $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ eine bezüglich der Unterraumtopologie auf N abzählbare dichte Teilmenge $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von N . Also folgt insbesondere, daß N Teilmenge des Abschlusses von $\{y_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ bezüglich $\hat{\sigma}(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}$ ist. Man wähle nun eine Familie $(\lambda_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1)$ mit $\sum_{\nu \in \mathbb{N}} \lambda_\nu = 1$, dann ist wegen der mit Satz 8.3.4 (ii) bekannten σ -Konvexität von $\hat{\mathcal{L}}$ bezüglich $(\Delta, \|\cdot\|)$ auch die σ -Konvexkombination $y_0 := \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \lambda_\nu y_\nu$ ein

Element aus $\hat{\mathcal{L}}$. Sei nun $x \in K$ derart, daß $\xi_\Delta(x, y) = 0$ für alle $y \in N$ gilt, dann folgt aufgrund der Stetigkeit von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ bezüglich $\|\cdot\|$ und aufgrund der unbedingten Konvergenz der Reihe:

$$\xi_\Delta(x, y_0) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\nu} \lambda_n \underbrace{\xi_\Delta(x, y_n)}_{=0} = 0.$$

Also erhält man die Mengeninklusion $K_0(N) \subseteq K_0(y_0)$.

Umgekehrt ergibt sich für ein $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, y_0) = 0$ sofort $\xi_\Delta(x, y_\nu) = 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$, da $\lambda_\nu \neq 0$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ angesetzt wurde. Weil N aber Teilmenge des Abschlusses von $\{y_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ bezüglich $\hat{\sigma}(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}$ ist, erhält man damit auch $\xi_\Delta(x, y) = 0$ für jedes $y \in N$. Das heißt, es gilt $K_0(N) \supseteq K_0(y_0)$. Also folgt mit Lemma 8.3.13, daß $K_0(N)$ exponierte Seite ist.

Das behauptete Verhältnis der Mengen $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ und W zueinander folgt dann direkt aus den allgemeinen Überlegungen zu exponierten Seiten und Seiten, die im Anschluß an die Definition der exponierten Seite gemacht wurden.

Abschließend muß damit nur noch gezeigt werden, daß für jede Teilmenge k der Menge K durch $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ eine bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossene Seite von $\hat{\mathcal{L}}$ gegeben ist. Konvexität und Abgeschlossenheit gelten offensichtlich. Seien $y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}}$ und $\alpha \in (0, 1)$ derart, daß $\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2$ in $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ liegt, dann gilt also für jedes $x \in k$:

$$\alpha \xi_\Delta(x, y_1) + (1 - \alpha) \xi_\Delta(x, y_2) = 0.$$

Da aber α und $1 - \alpha$ im offenen reellen Intervall $(0, 1)$ liegen, bedeutet das auch $\xi_{\Delta}(x, y_1) = \xi_{\Delta}(x, y_2) = 0$ für jedes $x \in k$. Also sind y_1 und y_2 Elemente von $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$. ■

Nach der Einordnung der neuen Mengen folgen im nächsten Lemma die ersten interessanten strukturellen Aussagen, die im weiteren Verlauf der Axiomatik immer wieder von Bedeutung sein werden und die zum einen als Anmerkungen und zum anderen als T 5.3 und T 5.4 in [Lud85a], Kapitel IV, §5, S. 121f. präsentiert werden:

Lemma 8.3.16

(i) *Bezeichnen N_1, N_2 zwei Teilmengen der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ derart, daß N_1 eine Teilmenge von N_2 ist, dann gilt die Mengeninklusion $K_0(N_1) \supseteq K_0(N_2)$.*

Bezeichnen k_1, k_2 zwei Teilmengen der Menge K derart, daß k_1 eine Teilmenge der Menge k_2 ist, dann ergibt sich die Mengeninklusion $\hat{\mathcal{L}}_0(k_1) \supseteq \hat{\mathcal{L}}_0(k_2)$.

(ii) *Bezeichnet y ein Element der Menge $\hat{\mathcal{L}}$, dann gehört y zu $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(y)$.*

Bezeichnet x ein Element der Menge K , dann gehört x zu $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x)$.

(iii) *Sei $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von $\hat{\mathcal{L}}$ mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit, und sei $(k_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen von K , dann gelten die folgenden Identitäten:*

$$\begin{aligned} K_0\left(\bigcup_{i \in I} N_i\right) &= \bigcap_{i \in I} K_0(N_i), \\ \hat{\mathcal{L}}_0\left(\bigcup_{i \in I} k_i\right) &= \bigcap_{i \in I} \hat{\mathcal{L}}_0(k_i). \end{aligned}$$

(iv) *$W, W_{\hat{\mathcal{L}}}$ und U_K sind vollständige Verbände bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung. Das Infimum fällt dabei jeweils mit dem Mengendurchschnitt zusammen.*

Bei $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ handelt es sich um eine Teilmenge von W , so daß $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ einen Subverband von W darstellt. Für W und $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ liefert die leere Menge jeweils das Null-Element, während mit K das Eins-Element gegeben ist. In U_K handelt es sich bei $\hat{\mathcal{L}}$ um das Eins-Element, und $\{\mathbf{0}\}$ ist das Null-Element.

(v) *Die Vorschrift*

$$U_K \longrightarrow W_{\hat{\mathcal{L}}}, \quad \hat{\mathcal{L}}_0(k) \longmapsto K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$$

definiert einen dualen Verbandisomorphismus. Die Umkehrabbildung ist durch $\hat{\mathcal{L}}_0$ gegeben. Es gilt insbesondere für beliebige Teilmengen k von K und beliebige Teilmengen N von $\hat{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{L}}_0 K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k) &= \hat{\mathcal{L}}_0(k), \\ K_0 \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(N) &= K_0(N).\end{aligned}$$

Beweis:

zu (i) - (iii): Die Punkte ergeben sich unmittelbar.

zu (iv): Dafür erinnere man zunächst, daß es sich bei $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ gemäß Lemma 8.3.15 um eine Teilmenge von W handelt. Es werden nun die Verbandseigenschaften von W bewiesen. Die Halbordnungseigenschaften sind dabei offensichtlich. Bezeichne $(F_i)_{i \in I}$ eine Familie beliebiger Mächtigkeit von Elementen aus W . Man muß nur zeigen, daß der Mengendurchschnitt der Mitglieder der Familie wiederum in W liegt. Bekanntermaßen ist der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener, konvexer Mengen wiederum abgeschlossen und konvex, wie man etwa [Köt66], §16.1, S. 177 entnehmen kann. Der Abschluß gegenüber den konvexen Entmischungen läßt sich ebenfalls schnell einsehen. Seien $x_1, x_2 \in K$, sei $x_0 \in \bigcap_{i \in I} F_i$, und sei $\alpha \in (0, 1)$ mit $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$. Da für $j \in I$ nach Voraussetzung F_j in W liegt und da $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq F_j$ gilt, gehören für jedes $j \in I$ auch x_1, x_2 zu F_j . Also ist auch der Mengendurchschnitt gegenüber konvexen Entmischungen abgeschlossen. Somit existiert zu beliebigen Teilmengen von W das Infimum.

Für jedes Element $x \in K$ gilt mit Lemma 8.2.13 (i) die Identität $\xi_{\Delta}(x, \mathbf{1}) = 1$. Also ist für jede Teilmenge N von $\hat{\mathcal{L}}$, die $\mathbf{1}$ als Element enthält, die Menge $K_0(N)$ leer. Da bekanntermaßen die Mengeninklusionskette $\{\mathbf{1}\} \subseteq \mathcal{L} \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ gilt, erhält man somit auch die Inklusion $\emptyset \in W_{\hat{\mathcal{L}}} \subseteq W$. Da außerdem K mit der Menge $K_0(\emptyset)$ zusammenfällt, handelt es sich bei K um das Eins-Element sowohl in $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ als auch in W . Damit folgt vermittels Satz F.7 aber auch die Existenz des Supremums für beliebige Teilmengen von W . Also liegt mit W ein Verband vor. Die Verbandseigenschaften von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ und U_K folgen direkt aus obigem Punkt (iii). Mit der Identität $\hat{\mathcal{L}}_0(\emptyset) = \hat{\mathcal{L}}$ folgt die Aussage zum Eins-Element. Offensichtlich enthält für jede Teilmenge k von K die Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ das Element $\mathbf{0}$. Damit gilt $\{\mathbf{0}\} \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0(k)$. Für $y \in \hat{\mathcal{L}}_0(\mathcal{K})$ ergibt sich aufgrund der Trennungseigenschaften des Dualsystems $\langle B, B^* \rangle$ und aufgrund der aus Lemma 8.1.15 bekannten Identität von ξ_{Δ} und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $B \times \Delta$ die Identität $y = \mathbf{0}$. Das bedeutet aber, daß $\{\mathbf{0}\}$ in U_K liegt. Es gilt aber auch $\xi_{\Delta}(x, \mathbf{0}) = 0$ für alle $x \in K$, so daß es sich bei $\{\mathbf{0}\}$ um das Null-Element handeln muß.

zu (v): Es werden zunächst die folgenden beiden Hilfsaussagen bewiesen:

$$\forall k' \subseteq K : \quad k' \subseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k'), \quad (8.21)$$

$$\forall N' \subseteq \hat{\mathcal{L}} : \quad N' \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(N'). \quad (8.22)$$

Der Nachweis von (8.22) läuft in völlig analoger Weise zu demjenigen von (8.21), so daß nur (8.21) betrachtet wird. Sei dafür $k' \subseteq K$ gewählt. Mit obigem Punkt (ii) gilt $x \in K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x)$ für jedes $x \in k'$. Mit obigem Punkt (i) gilt ebenso für alle $x \in k'$ die Mengeninklusion $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x) \subseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k')$. Also erhält man für jedes $x \in k'$ die Zugehörigkeit von x zu $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k')$, woraus sich unmittelbar (8.21) ergibt.

Mit (8.21) und (8.22) kann man nun zum Beweis der beiden in der Behauptung explizit erwähnten Aussagen übergehen:

$$\forall k \subseteq K : \quad \hat{\mathcal{L}}_0 K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k) = \hat{\mathcal{L}}_0(k), \quad (8.23)$$

$$\forall N \subseteq \hat{\mathcal{L}} : \quad K_0 \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(N) = K_0(N). \quad (8.24)$$

Wiederum verläuft der Beweis von (8.24) analog zu demjenigen von (8.23), so daß man sich hier auf den Nachweis von (8.23) beschränken darf. Es sei eine Teilmenge $k \subseteq K$ gewählt. Dann erhält man mit (8.21) die Relation $k \subseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$, woraus mit obigem Punkt (i) die Inklusion $\hat{\mathcal{L}}_0(k) \supseteq \hat{\mathcal{L}}_0 K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ folgt. Wendet man nun (8.22) für den Fall $N' = \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ an, erhält man die umgekehrte Mengeninklusion $\hat{\mathcal{L}}_0(k) \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0 K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$, womit (8.23) bewiesen wäre.

Nach der Bereitstellung der Eigenschaften aus (8.23) und (8.24) kann man den Nachweis führen, daß die in der Behauptung angegebene Abbildung einen dualen Verbandisomorphismus darstellt. Nur für die folgenden Betrachtungen sei die Abbildung mit s benannt.

Zunächst wird gezeigt, daß eine Bijektion vorliegt. Dabei ist die Wohldefiniertheit auf ganz U_K offensichtlich, so daß noch Injektivität und Surjektivität zu zeigen sind. Zum Beweis der Injektivität wähle man zwei Teilmengen k_1, k_2 von K mit $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k_1) = K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k_2)$. Es ergibt sich mit Hilfe von (8.23) unmittelbar:

$$\hat{\mathcal{L}}_0(k_1) = \hat{\mathcal{L}}_0 K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k_1) = \hat{\mathcal{L}}_0 K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k_2) = \hat{\mathcal{L}}_0(k_2),$$

und somit ist die Injektivität von s bewiesen. Die Surjektivität von s ergibt sich mit der folgenden Überlegung. Es sei ein $K_0(N)$ aus $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ gewählt, dann gilt mit (8.24) die Identität $K_0(N) = K_0 \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(N)$. Also ist mit $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(N)$ ein Element aus U_K derart gewonnen, daß das zugehörige Bildelement $s(\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(N))$ mit $K_0(N)$ zusammenfällt. Also ist s auch surjektiv, und die Umkehrabbildung ist durch $\hat{\mathcal{L}}_0$ gegeben.

Da mit Punkt (iv) dieses Satzes U_K und $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ Verbände sind, folgt mit Punkt (i) schließlich, daß es sich bei s tatsächlich um einen dualen Verbandisomorphismus im Sinne von Definition F.11 handelt. ■

Mit Punkt (iv) von Lemma 8.3.16 kann man den Begriff der erzeugten abgeschlossenen Seite von K prägen, denn zum einen ist K das Eins-Element in W , so daß es zu jeder Teilmenge $k \subseteq K$ eine k umfassende abgeschlossene Seite von K gibt, und zum anderen ist der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Seiten von K wiederum eine abgeschlossene Seite von K . Daher wird die folgende Definition gewählt:

Definition 8.3.17 Für $k \subseteq K$ sei mit $F(k)$ die kleinste k umfassende abgeschlossene Seite von K bezeichnet. Bei $F(k)$ soll auch von der **von k erzeugten abgeschlossenen Seite von K** gesprochen werden.

Es ergibt sich unmittelbar aus den einleitenden Überlegungen das folgende Lemma, dessen Aussage in [Lud85a], Kapitel IV, §5, S. 121 angemerkt wird:

Lemma 8.3.18 *Bezeichne k eine beliebige Teilmenge von K , dann gilt die Identität:*

$$F(k) = \bigcap_{F \in W, k \subseteq F} F.$$

Bemerkung: Für den Ausdruck $F(k)$ soll im Falle von Einpunktmengen $k = \{x\}$ abkürzend der Ausdruck $F(x)$ der korrekten Schreibweise $F(\{x\})$ vorgezogen werden.

Zum Abschluß des Abschnitts folgen noch vier Aussagen, auf die später mehrfach zurückgegriffen werden wird.

Dabei wird zunächst die Separabilität von B_{Δ} untersucht, die Ludwig ohne Beweis als T 3.14 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 111 formuliert:

Lemma 8.3.19 $(B_{\Delta}, \|\cdot\|_{B_{\Delta}})$ ist ein separabler Banachraum.

Beweis:

B_{Δ} ist die Vervollständigung des Vektorraumes B , der der lineare Aufspann von \mathcal{K} ist. \mathcal{K} ist aber abzählbar, so daß sich B_{Δ} als der Normabschluß des linearen Aufspann einer abzählbaren Menge darstellt. Damit folgt die Separabilität aus Lemma I.2.9 in [Wer97], S. 28. ■

Die abgeschlossenen Seiten von K haben die folgenden Eigenschaften, die im Beweis zu T 5.6 in [Lud85a], Kapitel IV, §5, S. 123 zum Ausdruck kommen:

Lemma 8.3.20 *Jedes Element F der Menge W ist sowohl separabel bezüglich der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Unterraumtopologie als auch reell σ -konvex bezüglich $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$.*

Beweis:

Mit Lemma 8.3.19 ist B_Δ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ separabler Banachraum, also handelt es sich bei $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ insbesondere um einen separablen metrisierbaren topologischen Raum. Ob der Inklusionskette $F \subseteq K \subseteq B_\Delta$ und ob des Lemmas A.5.8 ist F bei Ausstattung mit der zugehörigen Unterraumtopologie ebenfalls ein separabler metrisierbarer topologischer Raum. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

F ist definitionsgemäß reell konvex, also bleibt es, die reellen σ -Konvexkombinationen zu untersuchen. Seien dafür mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit die Familien $(x_i)_{i \in I}$ aus F und $(\alpha_i)_{i \in I}$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$ gewählt. Dann konvergiert $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ absolut in K , denn K ist laut Satz 8.3.4 (i) reell σ -konvex. Der Grenzwert $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ ist aber, wie in Be-

weis zu Satz 8.3.4 (i) gezeigt, auch der Grenzwert der Folge $(\sum_{i=1}^n \eta_n \alpha_i x_i)_{n \in \mathbb{N}}$

mit $\eta_n := (\sum_{i=1}^n \alpha_i)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\sum_{i=1}^n \eta_n \alpha_i x_i)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert aufgrund der reellen Konvexität und aufgrund der Abgeschlossenheit von F bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ in F . Somit gehört $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$ zu F . ■

In den folgenden beiden Aussagen illustriert sich die wichtige Aussage, daß es für die abgeschlossenen Seiten von K und im besonderen für die Elemente aus $W_{\hat{L}}$ gewisse charakteristische Element gibt. Die erste Aussage ist Teil von T 5.6 in [Lud85a], Kapitel IV, §5, S. 123.

Lemma 8.3.21 *Zu jedem nicht-leeren Element F der Menge W existiert ein Element x_0 der Menge F , so daß F mit der im Sinne von Definition 8.3.17 erzeugten Seite $F(x_0)$ zusammenfällt.*

Beweis:

Mit Lemma 8.3.20 ist F separabel bezüglich der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Unterraumtopologie. Damit gibt es eine abzählbare Teilmenge $\{x_i \mid i \in I\}$ von F , die bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ dicht in F liegt. Wähle eine Familie von Gewichten $(\alpha_i)_{i \in I}$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, und setze $x_0 := \sum_{i \in I} \alpha_i x_i$. Dann liegt

x_0 in F , da F mit Lemma 8.3.20 reell σ -konvex ist. Damit handelt es sich definitionsgemäß bei $F(x_0)$ um eine Teilmenge von F . Es bleibt also, die andere Inklusion zu zeigen. Dafür wird zunächst die folgende Aussage bewiesen:

$$\forall F' \in \mathcal{W} : x_0 \in F' \implies [\forall i \in I : x_i \in F']. \quad (8.25)$$

Zum Beweis seien $F' \in \mathcal{W}$ mit $x_0 \in F'$ und $i_0 \in I$ gewählt. Für den Fall $\alpha_{i_0} = 1$ liegt der Fall einfach, denn dann sind I und damit auch F einelementig. Somit erhält man sofort die Mengeninklusion $F' \subseteq F(x_0)$. Es kann also für den restlichen Beweis $\alpha_{i_0} \in (0, 1)$ vorausgesetzt werden. Man setze nun $\bar{\alpha}_i := \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{i_0}}$ für jedes $i \in I \setminus \{i_0\}$, dann gilt:

$$\{\bar{\alpha}_i \mid i \in I \setminus \{i_0\}\} \subseteq (0, 1] \text{ und } \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \bar{\alpha}_i = 1.$$

Da x_i für jedes $i \in I \setminus \{i_0\}$ auch in F liegt, folgt mit der aus Lemma 8.3.20 bekannten reellen σ -Konvexität von F die Zugehörigkeit von $\sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \bar{\alpha}_i x_i$ zu

$F \subseteq K$. Außerdem gilt:

$$x_0 = \alpha_{i_0} x_{i_0} + (1-\alpha_{i_0}) \left(\frac{1}{1-\alpha_{i_0}} \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \alpha_i x_i \right) = \alpha_{i_0} x_{i_0} + (1-\alpha_{i_0}) \sum_{i \in I \setminus \{i_0\}} \bar{\alpha}_i x_i.$$

Also hat man x_0 dargestellt als Konvexkombination zweier Elemente aus K , und damit folgt aus der Seiteneigenschaft der Abgeschlossenheit gegenüber endlichen konvexen Entmischungen, daß x_{i_0} in F' liegt. Folglich ist die Behauptung in (8.25) bewiesen.

Jetzt kann man zum Beweis der eigentlichen Aussage zurückkehren. Mit Lemma 8.3.21 ist $F(x_0)$ der Durchschnitt aller Elemente aus \mathcal{W} , die x_0 enthalten. Die Aussage aus (8.25) besagt nun aber, daß alle Elemente aus \mathcal{W} , die x_0 enthalten, auch die Familie $\{x_i \mid i \in I\}$ umfassen. Die Normabgeschlossenheit von F liefert damit die fehlende Inklusionsaussage $F \subseteq F(x_0)$. ■

Es erweist sich als günstig, eine zu Lemma 8.3.21 verwandte Aussage explizit anzugeben:

Lemma 8.3.22 *Bezeichne $K_0(N)$ ein nicht-leeres Element der Menge $\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{L}}}$, dann existiert ein Element x_0 in $K_0(N)$, so daß gilt*

$$K_0(N) = \bigcap_{\substack{N' \subseteq \hat{\mathcal{L}} \\ x_0 \in K_0(N')}} K_0(N').$$

Beweis:

Sei ein Element $K_0(N) \in W_{\hat{\mathcal{L}}}$ gewählt, dann existiert ob der Zugehörigkeit von $K_0(N)$ zu W und wegen Lemma 8.3.21 ein $x_0 \in K_0(N)$ derart, daß man $F(x_0) = K_0(N)$ erhält. Mit den Bezeichnungen

$$M := \{K_0(N') \in W_{\hat{\mathcal{L}}} \mid x_0 \in K_0(N')\} \quad \text{und} \quad T := \{F \in W \mid x_0 \in F\}$$

ergibt sich sofort:

$$K_0(N) = F(x_0) = \bigcap_{F' \in T} F' \subseteq \bigcap_{K_0(N') \in M} K_0(N').$$

Andererseits liegt aber auch x_0 in $K_0(N)$, und somit gehört $K_0(N)$ zu M . Also gilt die Mengeninklusion

$$K_0(N) \supseteq \bigcap_{K_0(N') \in M} K_0(N'),$$

und damit gilt auch die Behauptung. ■

8.4 Eine Halbordnung auf Δ und ein Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ

Für eine Reihe wichtiger Anwendungen im Zusammenhang mit den im nächsten Kapitel diskutierten Hauptaxiomen des Messens ist es hilfreich, auf Δ und damit auch auf $\hat{\mathcal{L}}$ eine bestimmte Halbordnung zu etablieren.

Auf Δ wird dafür zunächst eine Relation definiert.

Definition 8.4.1 Für alle Elemente y_1, y_2 der Menge Δ wird die Relation $y_1 \geq y_2$ genau dann notiert, wenn für alle x aus K die Ungleichung $\xi_\Delta(x, y_1) \geq \xi_\Delta(x, y_2)$ gilt.

Sind g_1, g_2 Elemente der Menge \mathcal{L} , also aus der Menge der Effekte, dann soll für die Relation $g_1 \geq g_2$ auch gesagt werden, daß g_1 **empfindlicher** sei als g_2 .

Man erhält unmittelbar die Aussagen:

Lemma 8.4.2 *Es gilt:*

- (i) (Δ, \leq) ist eine Halbordnung.

(ii) Bezeichnen y_1, y_2 Elemente der Menge $\hat{\mathcal{L}}$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $y_1 \geq y_2$.

(b) Für alle Elemente x der Menge K gilt die Ungleichung $\hat{\mu}(x, y_1) \geq \hat{\mu}(x, y_2)$.

(c) Für alle Elemente w der Menge \mathcal{K} gilt die Ungleichung $\hat{\mu}(w, y_1) \geq \hat{\mu}(w, y_2)$.

(iii) Bei $\mathbf{0}$ handelt es sich um das kleinste Element von $\hat{\mathcal{L}}$, während mit $\mathbf{1}$ das größte Element von $\hat{\mathcal{L}}$ vorliegt.

Beweis:

zu (i): Es müssen die Halbordnungseigenschaften überprüft werden. Dabei sind Reflexivität und Transitivität evident. Somit muß noch die Antisymmetrie überprüft werden. Man wähle dafür Elemente $y_1, y_2 \in \Delta$ mit $y_1 \geq y_2$ und $y_1 \leq y_2$. Das heißt, es gilt für alle $x \in K$ die Identität $\xi_\Delta(x, y_1) = \xi_\Delta(x, y_2)$. Damit erhält man aber insbesondere $\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$ für alle $x \in B$, denn zum ersten ist $\mathcal{K} \subseteq K$, zum zweiten spannt \mathcal{K} den Raum B linear auf und zum dritten gilt Lemma 8.1.15. Da Δ eine Teilmenge von B^* ist und da es sich bei $\langle B, B^*, \langle \cdot, \cdot \rangle$ um ein Dualsystem handelt, folgt die Identität $y_1 = y_2$.

zu (ii): Die erste Äquivalenz folgt sofort mit Satz 8.2.14. Zum Beweis der zweiten Äquivalenz braucht wegen der Inklusion $\mathcal{K} \subseteq K$ nur noch die Rückrichtung gezeigt werden. Seien dafür $y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $\hat{\mu}(w, y_1) \geq \hat{\mu}(w, y_2)$ für alle $w \in \mathcal{K}$ gewählt. Außerdem sei ein Element $x \in K$ gewählt. Dann existiert eine Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$ mit $w_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B\Delta}} x$. Damit gilt dann aufgrund der Stetigkeit von ξ_Δ :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x, y_1) &= \xi_\Delta(x, y_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\Delta(w_n, y_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}(w_n, y_1) \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\mu}(w_n, y_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_\Delta(w_n, y_2) = \xi_\Delta(x, y_2) = \hat{\mu}(x, y_2). \end{aligned}$$

zu (iii): Mit Lemma 6.1.9 weiß man, daß $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zu der Menge \mathcal{L} gehören. Also gehören sie auch zur Menge $\hat{\mathcal{L}} \supseteq \mathcal{L}$. Für die Bezeichnungen $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sei nochmals an Lemma 8.1.4 und die Bemerkung danach erinnert. Offensichtlich gelten aber für jedes $y \in \hat{\mathcal{L}}$ und für jedes $x \in K$ die Ungleichungen $\hat{\mu}(x, y) \geq 0 = \hat{\mu}(x, \mathbf{0})$ und $\hat{\mu}(x, y) \leq 1 = \hat{\mu}(x, \mathbf{1})$. Bezüglich der zweiten Ungleichung bedenke man Lemma 8.2.13 (i). ■

Also hat man auf Δ in einfacher Weise mittels ξ_Δ eine Halbordnung definieren. Insbesondere wird durch Punkt (ii) des obigen Lemma deutlich, warum man für Elemente g_1, g_2 aus \mathcal{L} die Relation $g_1 \geq g_2$ durch den Begriff „empfindlicher“ verbalisiert hat. Denn die Relation $g_1 \geq g_2$ gilt genau dann, wenn für jeden Zustand die Wahrscheinlichkeit eines Anschlages des Effektes g_1 größer ist als die Wahrscheinlichkeit des Anschlages bei Effekt g_2 .

Da auch $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ Elemente von Δ sind, kann man in sinnvoller Weise in Δ das folgende Intervall definieren:

Definition 8.4.3 $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta := \{y \in \Delta \mid \mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}\}$.

Als grundlegende Eigenschaften erhält man das folgende Lemma, bei dem Punkt (i) Inhalt von T 4.5 in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 115 ist:

Lemma 8.4.4 *Das Intervall $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

(i) *Es gilt die Mengeninklusionskette:*

$$\hat{\mathcal{L}} \subseteq [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta \subseteq \Delta_{|\cdot|}.$$

(ii) $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ *ist abgeschlossen bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$.*

(iii) $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ *ist konvexe Menge.*

Beweis:

zu (i): Die erste Mengeninklusion folgt direkt aus Punkt (iii) des Lemmas 8.4.2. Die zweite ergibt sich unmittelbar aus der Definition von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, denn für ein $y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ gilt für alle $x \in K$:

$$0 \leq \xi_\Delta(x, y) \leq 1.$$

Also muß auch das Supremum von $|\xi_\Delta(x, y)|$ über alle $x \in K$ kleiner oder gleich 1 sein. Das heißt aber gerade $\|y\| \leq 1$, also ist y Element der Normeinheitskugel von Δ bezüglich $\|\cdot\|$.

zu (ii): Sei $(y_i)_{i \in I}$ ein Netz aus $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, das gegen ein Element $y \in \Delta$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ konvergiert. Offenbar ergibt sich dann für alle $i \in I$ und alle $x \in K$:

$$0 \leq \xi_\Delta(x, y_i) \leq 1.$$

Da für jedes Element x aus K die Abbildung $\xi_\Delta(x, \cdot)$ stetig bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ ist, folgt sofort für alle $x \in K$:

$$0 \leq \xi_\Delta(x, y) \leq 1.$$

Damit ist aber gerade die gesuchte Abgeschlossenheit gewonnen.

zu (iii): Seien y_1, y_2 Elemente aus $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, und sei λ aus dem reellen Intervall $(0, 1)$ gewählt, dann gehört $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ aufgrund der Vektorraumeigenschaft zu Δ . Außerdem gilt aufgrund der Zugehörigkeit von y_1 und y_2 zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ für jedes $x \in K$ die Ungleichungskette:

$$0 \leq \lambda \xi_\Delta(x, y_1) + (1 - \lambda) \xi_\Delta(x, y_2) \leq \lambda + (1 - \lambda) \leq 1.$$

Also gilt $\mathbf{0} \leq \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 \leq \mathbf{1}$, und somit gehört auch $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$. ■

Da $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ die Menge $\hat{\mathcal{L}}$ umfaßt, kann man in sinnvoller Weise die Definition 8.3.14 von $\hat{\mathcal{L}}$ auf $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ erweitern.

Definition 8.4.5

Für eine beliebige Teilmenge N von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ wird definiert:

$$K_0(N) := \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 0 \ \forall y \in N\}.$$

Nachdem nun auf Δ und $\hat{\mathcal{L}}$ eine Halbordnung zur Verfügung steht und nachdem mit $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ein Ordnungsintervall in Δ definiert wurde, soll zum zweiten Teil des Abschnitts übergegangen werden.

Mit der Bereitstellung des Konvexitätsbegriffes aus Definition 8.3.1 kann man gemäß T 4.2 aus [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 115 ein Charakteristikum für das Verhältnis von K zu B_Δ formulieren:

Lemma 8.4.6 *Die Norm-Einheitskugel $B_{\Delta|\mathbf{1}|}$ von B_Δ ist zum einen identisch mit dem Abschluß der konvexen Hülle der Menge $K \cup (-K)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$, und zum anderen fällt $B_{\Delta|\mathbf{1}|}$ mit dem Abschluß der konvexen Hülle von $K \cup (-K)$ bezüglich der Topologie $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ zusammen. Das heißt, es gilt die folgende Gleichungskette:*

$$\overline{co}^{\|\cdot\|_{B_\Delta}}(K \cup (-K)) = \overline{co}^{\sigma(B_\Delta, \Delta)}(K \cup (-K)) = B_{\Delta|\mathbf{1}|}.$$

Dabei sei mit co die konvexe Hülle bezeichnet, also der Durchschnitt aller konvexen Teilmengen von B_Δ , die $K \cup (-K)$ umfassen. Mit $\overline{co}^{\sigma(B_\Delta, \Delta)}$ sei der Abschluß der konvexen Hülle bezüglich der im Superskript bezeichneten Topologie gemeint.

Beweis:

Die Identität der beiden Abschlüsse der konvexe Hüllen von $K \cup (-K)$ folgt mit [SW99], Kapitel II, Abschnitt 9.2, Korollar 2, S. 65. Der zweiten Identität gelten die folgenden Überlegungen.

Das zugrundeliegende Dualsystem für die nun angestellten Betrachtungen ist stets das Norm-Dualsystem $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$. Dabei ist zu bedenken, daß Δ laut Satz 8.1.17 mittels eines isometrischen Isomorphismus mit ganz B'_Δ identifiziert werden kann, denn Δ ist mit Satz 8.2.3 (iv) symmetrisch. Identifiziert man so Δ und B_Δ , wie es bisher schon öfters getan wurde, fallen ξ_Δ und die kanonische Bilinearität $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\Delta}$ des Norm-Dualsystems $\langle B_\Delta, B'_\Delta \rangle$ gemäß Lemma 8.1.21 zusammen. Damit fallen auch die beiden Dualsysteme insgesamt zusammen. Bezeichnet M eine Teilmenge von B_Δ , dann bezeichnet man die Menge $\{y \in \Delta \mid |\xi_\Delta(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in M\}$ als die M zugehörige absolutpolare Menge. Sie soll mit dem Symbol $M^{|\circ|}$ belegt werden. Einer Teilmenge N von Δ wird dagegen die Menge $\{x \in B_\Delta \mid |\xi_\Delta(x, y)| \leq 1 \ \forall y \in N\}$ als absolutpolare Menge zugeordnet. Sie erhält den Namen $N^{|\circ|}$. Für Teilmengen M von B_Δ und N von Δ wird $M^{|\circ||\circ|} := (M^{|\circ|})^{|\circ|}$ und $N^{|\circ||\circ|} := (N^{|\circ|})^{|\circ|}$ definiert. Mengen des Typs $M^{|\circ||\circ|}$ nennt man absolutbipolare Mengen.

Zum Beweis der Behauptung werden zunächst zwei Hilfsaussagen formuliert und bewiesen.

Hilfsaussagen:

- (i) $\Delta_{|1|}$ ist gleich der absolutpolaren Menge zu $K \cup (-K)$,
- (ii) die absolutpolare Menge zu $\Delta_{|1|}$ ist identisch mit $B_{\Delta_{|1|}}$.

$$\begin{aligned} \text{zu (i): Es gilt: } (K \cup (-K))^{|\circ|} &= \{y \in \Delta \mid |\xi_\Delta(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in K \cup (-K)\} \\ &= \{y \in \Delta \mid |\xi_\Delta(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in K\} = \Delta_{|1|}. \end{aligned}$$

Für die letzte Identität sei an Lemma 8.2.13 (ii) erinnert.

$$\begin{aligned} \text{zu (ii): Es gilt: } \Delta_{|1|}^{|\circ|} &= \{x \in B_\Delta \mid |\xi_\Delta(x, y)| \leq 1 \ \forall y \in \Delta_{|1|}\} \\ &= \{x \in B_\Delta \mid \frac{|\xi_\Delta(x, y)|}{\|y\|} \leq 1 \ \forall y \in \Delta \setminus \{\mathbf{0}\}\} \\ &= \{x \in B_\Delta \mid \sup_{y \in \Delta, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_\Delta(x, y)|}{\|y\|} \leq 1\} \\ &= \{x \in B_\Delta \mid \|x\|_{B_\Delta} \leq 1\} = B_{\Delta_{|1|}}. \end{aligned}$$

Mit den Hilfsaussagen (i) und (ii) erhält man zunächst $B_{\Delta_{|1|}} = (K \cup (-K))^{|\circ||\circ|}$. Der Bipolarensatz, vergleiche etwa [Köt66], §20.8 (5), S. 248, besagt jetzt, daß

die absolutbipolare Menge zu $K \cup (-K)$, also $(K \cup (-K))^{|o||o|}$, gleich dem Abschluß der absolutkonvexen Hülle von $K \cup (-K)$ bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ ist. Dabei bezeichnet die absolutkonvexe Hülle von $K \cup (-K)$ den Durchschnitt aller absolutkonvexen Teilmengen von B_Δ , die $K \cup (-K)$ umfassen. Gemäß [Köt66], Kapitel 3, §15.10, S. 164 nennt man eine Teilmenge A eines reellen Vektorraumes X absolutkonvex, wenn sie mit x_1 und x_2 stets auch $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ enthält, wobei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 1$ gilt.

Damit bleibt also nur noch zu zeigen, daß für $K \cup (-K)$ die konvexe und die absolutkonvexe Hülle zusammenfallen. Trivialerweise ist die konvexe Hülle Teilmenge der absolutkonvexen Hülle, so daß man sich auf den Nachweis der umgekehrten Mengeninklusion beschränken kann. Sei dafür x aus der absolutkonvexen Hülle von $K \cup (-K)$ gewählt, dann existieren eine Familie $(\alpha_i)_{i=1}^n$ aus dem reellen Intervall $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq 1$ und eine Familie $(\bar{x}_i)_{i=1}^n$ aus der Menge $K \cup (-K)$ so, daß $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i$ gilt. Es werden zwei Fälle betrachtet.

Gilt $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 0$, dann folgt auch $x = 0$. Nun handelt es sich bei 0 aber um ein Element von $\text{co}(K \cup (-K))$, denn man erhält $0 = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}(-x')$ für ein beliebiges $x' \in K \cup (-K)$. Folglich gehört im Fall $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| = 0$ das Element x zur konvexen Hülle von $(K \cup (-K))$.

Sei nun $\sum_{i=1}^n |\alpha_i| > 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann von $|\alpha_i| \neq 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ausgegangen werden. Ob ihrer Endlichkeit kann man die Summe $\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{x}_i$ derart umsortieren, daß für ein geeignet zu wählendes $n_1 \leq n$ gilt:

$$\forall i \leq n_1 : \quad \alpha_i < 0,$$

$$\forall i > n_1 : \quad \alpha_i > 0.$$

Setzt man dann noch

$$\lambda_i := \begin{cases} -\alpha_i & \text{für } i \in \{1, \dots, n_1\} \\ \alpha_i & \text{für } i \in \{n_1 + 1, \dots, n\} \end{cases} \quad \text{und} \quad x_i := \begin{cases} -\bar{x}_i & \text{für } i \in \{1, \dots, n_1\} \\ \bar{x}_i & \text{für } i \in \{n_1 + 1, \dots, n\} \end{cases},$$

dann kann man die folgenden Umformungen vornehmen:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i \bar{x}_i + \sum_{i=n_1+1}^n \alpha_i \bar{x}_i \\
 &= \sum_{i=1}^{n_1} (-\alpha_i)(-\bar{x}_i) + \sum_{i=n_1+1}^n \alpha_i \bar{x}_i \\
 &= \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \right)} x_i \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \right)} x_i + \left(1 - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \right) \cdot 0.
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, so daß man auch $0 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \leq 1$ erhält. Außerdem liegt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ mit \bar{x}_i auch $-\bar{x}_i$ in $K \cup (-K)$. Ebenso ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ das zugehörige λ_i positiv. Also stellt $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\left(\sum_{l=1}^n \lambda_l \right)} x_i$

eine Konvexkombination von Elementen aus $K \cup (-K)$ dar, und somit ist $\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right)} x_i$ auch Element von $\text{co}(K \cup (-K))$. Wie weiter oben bereits er-

läutert wurde, liegt auch 0 in der Menge $\text{co}(K \cup (-K))$. Demnach zeigt die obige Gleichungskette, daß x sich als eine Konvexkombination von Elementen aus $\text{co}(K \cup (-K))$ darstellen läßt, wodurch die Zugehörigkeit von x zu $\text{co}(K \cup (-K))$ gesichert ist. ■

Im Rahmen der Theorie der geordneten normierten Räume führt die durch Lemma 8.4.6 zur Verfügung stehende Aussage bezüglich des Verhältnisses von K zu B_Δ zur sogenannten Basis-Normiertheit von B_Δ . Die Basis-Normiertheit von B_Δ ist von zentraler Bedeutung, um das nachfolgende Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ durch die Elemente von K zu beweisen. Da die Darlegung des angedeuteten Zusammenhangs zur Theorie der geordneten normierten Räume und der anschließende Beweis des Darstellungstheorems außerordentlich umfangreich sind, werden im Interesse der Übersichtlichkeit die zugehörigen Erörterungen in Anhang D.3 durchgeführt. Es wird hier nur das Theorem formuliert, das einen Teil von T 4.10 in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 117 darstellt:

Satz 8.4.7 (Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ)

Zu jedem Element x der Menge B_Δ und zu jeder echt positiven reellen Zahl ε existieren zwei reelle Zahlen $\alpha, \beta \geq 0$, zwei Elemente x_1, x_2 der Menge K sowie zwei Elemente y_0, y'_0 der Menge $\Delta_{|1|}$ so, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} x = \alpha x_1 - \beta x_2 \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_1, y_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \xi_\Delta(x_1, y'_0) = 1, \\ \text{sowie} \quad \xi_\Delta(x_2, y_0) = -1, \quad \xi_\Delta(x_2, y'_0) \leq -1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Beweis:

Siehe Anhang D.3. Die obige Behauptung ist dort identisch mit Satz D.3.19. ■

Das Darstellungstheorem 8.4.7 erweist seine Nützlichkeit im nächsten Kapitel an mehreren Stellen. Zum einen wird es benötigt, um die zwei wichtigen Darstellungssätze $\bar{\mathcal{K}} = K$ und $\hat{\mathcal{L}} = [0, 1]_\Delta$ in Abschnitt 9.4 zu beweisen. Zum anderen geht es in den Beweis hinsichtlich des Verhältnisses einer besonderen Teilmenge der Effekte zur gesamten Menge $\hat{\mathcal{L}}$ in Satz 9.5.1 ein.

Damit stehen nun alle wichtigen Instrumente und Aussagen zur Motivation weiterer Axiome in Kapitel 9 zur Verfügung. Dabei kann die Theorie, von der für die nächsten Schritte ausgegangen wird, zusammenfassend durch das folgende Schema charakterisiert werden:

| | Menge | Uniformität der physikalischen Unschärfe |
|--|---------------------|--|
| Zustände | K | $\sigma(B_\Delta, \Delta) _K$ |
| Effekte | $\hat{\mathcal{L}}$ | $\sigma(\Delta, B_\Delta) _{\hat{\mathcal{L}}}$ |
| Wahrscheinlichkeitsfunktion: $\hat{\mu} _{K \times \hat{\mathcal{L}}} = \xi_\Delta _{K \times \hat{\mathcal{L}}} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\Delta} _{K \times \hat{\mathcal{L}}}$ | | |

Kapitel 9

Hauptaxiome des Messens

In Kapitel 5 wurde die Präparier-Registrier-Struktur und darauf aufbauend in Kapitel 6 die Zustands-Effekt-Struktur vorgestellt. Es wurde dort auch motiviert, warum es sich bei dem Wirklichkeitsbereich, der durch die Quantenmechanik erfaßt werden soll, um eine besondere Form einer Zustands-Effekt-Struktur handelt. Im Anschluß an die Einführung geeigneter uniformer Strukturen der physikalischen Unschärfe in Kapitel 7 und an die Einbettung der Theorie in geeignete Banachraum-Strukturen im vorhergehenden Kapitel ist es das Ziel des nachfolgenden Kapitels, die bisher gewonnene Struktur zur Begründung des Begriffs des Mikrosystems weiterzuentwickeln. Dadurch kommt der in Kapitel 5 begonnene Prozeß der immer genaueren Charakterisierung des Grundbereichs der Quantenmechanik hier zu einem ersten Abschluß. Basierend auf dem Begriff des Mikrosystems wird dann die Quantenmechanik in realistisch fundierter Weise als diejenige physikalische Theorie definiert, die die durch Mikrosysteme vermittelte Wechselwirkung beschreibt.

Dazu werden zunächst die zwei Axiome AV 1.1 und AV 1.2 vorgestellt, die sich mit der Konstruktionsmöglichkeit von Effekten auf der Basis vorgegebener Effekte bestimmter Eigenschaften befassen. Bereits AV 1.1 wird sich als ausreichend erweisen, in der Menge der Effekte die sogenannten Entscheidungseffekte auszuzeichnen, die für die gesamte Theorie eine wichtige Rolle einnehmen. Insbesondere wird sich herausstellen, daß die mit G bezeichnete Menge der Entscheidungseffekte bezüglich der durch Definition 8.4.1 gegebenen Halbordnung ein vollständiger Verband ist.

Die darauffolgenden Axiome AV 2 und AV 2f setzen Überlegungen um, inwieweit die Elemente einer Seite von K von anderen Zuständen, die nicht zu derselben Seite gehören, unterschieden werden können. Das Axiom AV 2 erweist sich im Verbund mit Axiom AV 1.2 als geeignet, die Darstellungstheoreme $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$ und $\overline{\mathcal{K}} = K$ zu beweisen. Außerdem stellt sich heraus, daß der bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ gebildete

Abschluß der konvexen Hülle der Menge G der Entscheidungseffekte mit der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ zusammenfällt. Also kann die Menge aller Effekte $\hat{\mathcal{L}}$ vollständig durch den Verband der Entscheidungseffekte charakterisiert werden.

Das in der Folge formulierte Axiom AVid, das sich als rein mathematische Idealisierung erweisen wird, ermöglicht es, in natürlicher Weise eine Orthokomplementation auf dem Verband der Entscheidungseffekte zu definieren. Auch wird sich die Orthomodularität des so orthokomplementierten Verbandes zeigen lassen.

Im Anschluß daran wird der Einführung des Begriffes der Koexistenz im Zusammenhang mit Effekten ein Axiom folgen, das die apparative Realisierbarkeit von Mengen koexistenter Effekte zum Ausdruck bringt. Bei Betrachtung von Entscheidungseffekten führen Betrachtungen zu ihrer Nicht-Koexistenz auf das Axiom AV 3. Zusammen mit dem danach motivierten Hauptaxiom der Quantisierung AV 4s werden Aussagen in die mathematische Theorie integriert, die typische Erfahrungen mit quantenmechanischen Experimenten wiedergeben. Daher werden AV 3 und AV 4s zur Begründung des Begriffes des Mikrosystems führen. Mathematisch wird sich der Verband der Entscheidungseffekte insbesondere als atomarer Verband mit Überdeckungseigenschaft darstellen.

Bei der Formulierung der genannten Axiome wird sich an vielen Stellen die besondere Leistungsfähigkeit der mathematischen Strukturen erweisen, die das Kapitel 8 zur Verfügung stellt.

9.1 Hauptaxiome der Empfindlichkeitssteigerung von Effekten

Die Weiterentwicklung der mathematischen Theorie beginnt mit der Formulierung der Axiome der Empfindlichkeitssteigerung der ersten und zweiten Art.

Dabei wird zunächst motiviert, daß man unter bestimmten Voraussetzungen relativ zu zwei vorgegebenen Effekten auf die Konstruktionsmöglichkeit eines weiteren Effektes mit bestimmten Eigenschaften schließen kann. Anschließend wird eine verwandte Situation untersucht, in der auf die Konstruktionsmöglichkeit eines Effektes bezüglich eines einzelnen vorgegebenen Effektes eingegangen wird.

9.1.1 Empfindlichkeitssteigerung bezüglich zweier Effekte

Mit Lemma 8.4.2 (iii) wurde bereits festgestellt, daß man ohne weitere Nebenbedingungen durch $\mathbf{1}$ in \mathcal{L} stets ein größtes Element angeben kann. Physikalisch ist das aber trivial, denn $\mathbf{1}$ gewinnt man für jede Registriermethode b_0 als zugehörigen

Effekt des Effektverfahrens (b_0, b_0) . Im weiteren Verlauf soll nun auch die Forderung nach der Existenz eines größten Elementes unter gewissen Nebenbedingungen formuliert und dann anhand einiger Beispiele diskutiert werden. Anschließend wird dann noch der wichtige Schritt der Idealisierung zu einer auch mathematisch zufriedenstellenden Aussage führen, die dann das zum Abschluß des Unterabschnittes geforderte Axiom liefert.

Eine physikalisch interessante Nebenbedingung besteht in der Beschränkung auf Effektverfahren, die mit Sicherheit zu „echter Wechselwirkung“ in der Lage sind. Darunter seien Effektverfahren f aus der Menge \mathcal{F} verstanden, für die es Zustände w aus \mathcal{K} so gibt, daß die relative Häufigkeit bei Präparation entsprechend w verschwindend gering wird. Ist das der Fall, weiß man, daß das Effektverfahren nicht ohnehin stets mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit anschlägt. Wenn es aber zu einer signifikanten Häufigkeit bei einem Präparierverfahren a kommt, dann weiß man, daß eine Wechselwirkung von a nach f stattgefunden hat. Für solche Effektverfahren soll das Folgende verlangt werden:

Zu je zwei Effektverfahren f_1, f_2 der Menge \mathcal{F} , für die es einen Zustand w_0 aus \mathcal{K} so gibt, daß die relative Häufigkeit des Eintretens sowohl von f_1 als auch von f_2 bei Präparation entsprechend dem Zustand w_0 klein ist, existiert ein drittes Effektverfahren f aus der Menge \mathcal{F} derart, daß f in jedem Zustand w aus \mathcal{K} in physikalischer Approximation, also unter Berücksichtigung der gewählten physikalischen Unschärfemengen, mit größerer relativer Häufigkeit anschlägt als f_1 und f_2 , aber bei Präparation im Zustand w_0 ebenfalls eine kleine relative Häufigkeit liefert.

Die Aussage ist zunächst recht abstrakt und vor allem durch die Formulierungen „klein“ vom mathematischen Standpunkt noch nicht exakt genug gefaßt, so daß die obige Formulierung noch nicht die geeignete Form eines Axioms hat. Bevor dem mit Hilfe eines Idealisierungsprozesses begegnet wird, werden einige Beispiele erörtert, die die obige Aussage illustrieren und damit auch motivieren.

Dazu eignen sich einige bereits früher verwandte experimentelle Aufbauten. Als Registriermethode b_0 wird ein Auftreffzähler gewählt, der durch die sensible Fläche F charakterisiert sei und der darüber hinaus derart abgeschirmt sei, daß die Nullrate verschwindend gering ist. Man teile nun die Fläche F in zwei disjunkte Teilflächen F_1 und F_2 . Die den Flächen F_1 und F_2 zukommenden Registrierprozeduren werden mit b_1 und b_2 benannt. Zu den sich ergebenden Effektverfahren (b_0, b_1) und (b_0, b_2) läßt sich problemlos ein Präparierverfahren und damit ein Zustand konstruieren, der beide Effektverfahren nur mit vernachlässigbarer relativer Häufigkeit ansprechen läßt. Man wähle dazu etwa eine Uranprobe mit einem Blendensystem, das

derart konstruiert ist, daß die Vorzugsrichtung des Probenblendensystems nicht auf die Fläche F zeigt. Dann ergeben sich relative Häufigkeiten, die verschwindend gering sind, da die Nullrate nach Voraussetzung abgeschirmt sein soll. Um der oben formulierten Forderung zu genügen, muß jetzt ein weiteres Effektverfahren mit den geforderten Eigenschaften angegeben werden. Das ist aber in einfacher Weise möglich. Der Fläche F bestehend aus F_1 und F_2 kommt ebenfalls eine Registrierprozedur b zu. Offensichtlich ist für jeden Zustand w die relative Häufigkeit des Eintretens von (b_0, b) größer als diejenige des Eintretens von (b_0, b_1) oder (b_0, b_2) . Und ebenso leicht einsichtig ist der Umstand, daß (b_0, b) auch bei Präparationen gemäß dem Zustande w_0 verschwindend geringe relative Häufigkeiten liefert. Völlig analoge Überlegungen kann man anstellen, wenn man als Registrierapparatur eine Nebelkammer wählt und wenn man dort geeignete Raumgebiete auszeichnet. Oder man nimmt als Registriermethode einen fluoreszierenden Schirm und als Zustand w_0 etwa die Klasse, die dem Präparierverfahren zukommt, das aus einem bestimmten Laser und einem bestimmten Doppelspalt besteht. Man kann auf dem Schirm gewisse Gebiete auszeichnen, bei denen es nie leuchtet. So gewinnt man dann wiederum ein Effektverfahren mit geringer relativer Häufigkeit, und die Vereinigung der Flächen liefert in derselben Weise ein Effektverfahren mit den geforderten Eigenschaften wie im obigen Falle des Auftreffzählers.

Die Aufzählung von Beispielen soll mit einer etwas komplizierteren Situation abschließen. Dazu werden zwei baugleiche Auftreffzähler verwandt. Vor den beiden Auftreffzählern positioniere man jeweils einen Filter. Die beiden Filter mögen mit T_1 und T_2 benannt sein, und sie mögen sich unterscheiden. Als Beispiel denke man etwa an verschieden gefärbte Glasscheiben. Es sei vereinfachend angenommen, daß bei beiden Filtern keine Reflexion, sondern nur Absorption und Transmission vorkommt. Damit hat man nun zwei Registriermethoden gewonnen. Trifft man die Abmachung, daß bei beiden das Nicht-Eintreten eines Zählimpulses auf der sensiblen Fläche als interessante Veränderung gilt, liegen zwei Effektverfahren f_1 und f_2 vor, die jeweils das Absorptionsverhalten des Filters untersuchen. Durch $\mu(w, \psi(f_1))$ und $\mu(w, \psi(f_2))$ werden jeweils die Absorptionskoeffizienten im Zustande w abgebildet. Die Filter sollen derart gewählt sein, daß es möglich ist, einen Zustand w_0 durch ein Präparierverfahren zu realisieren, bei dem bei beiden Filtern nahezu keine Absorption stattfindet. Bei Präparation im Zustand w_0 werden also die relativen Häufigkeiten sowohl von f_1 als auch f_2 verschwindend gering sein. Im Falle der gefärbten Glasscheiben hieße das einfach, daß es einen beiden Scheiben gemeinsamen Spektralbereich für die Transmission geben soll. Nun stellt sich die Frage, in welcher Weise ein Apparat zu bauen ist und in welcher Weise an ihm eine Veränderung zu definieren ist, so daß die Anforderungen der obigen Aussage erfüllt sind.

Häufig besteht eine Möglichkeit darin, daß man vor einen Auftreffzähler einen Filterblock der Form „ $T_1T_2T_1T_2 \cdots T_1T_2$ “ plaziert, wobei der Auftreffzähler baugleich zu den bei f_1 und f_2 verwandten Auftreffzählern sein möge. Warum ein derartiger apparativer Aufbau den Anforderungen genügt, sollen die folgenden Überlegungen plausibel machen. Wenn im Zustand w_0 sowohl bei T_1 als auch bei T_2 kaum Absorption stattfindet, dann sollte auch bei häufiger Aneinanderreihung beider Filter wenig Absorption stattfinden. Je geringer die Absorption bei T_1 und T_2 ist, desto geringer ist sie es auch am Filterblock. Andererseits sollte bei Zuständen, in denen an T_1 oder T_2 nennenswerte Absorption stattfindet, auch beim Filterblock mindestens genauso hohe Absorption stattfinden, so daß die relative Häufigkeit des Nicht-Eintretens eines Zählimpulses für das Effektverfahren mit Filterblock stets größer ist als die relative Häufigkeit für einen der Filter alleine. Allerdings muß angemerkt werden, daß es entscheidend ist, hinreichend viele T_1T_2 -Blöcke hintereinanderschalten, wie das folgende Beispiel zeigt. Als Filter T_1 und T_2 werden zwei baugleiche Polarisationsfilter für Licht gewählt, wobei der eine Filter gegenüber dem anderen um 45° gedreht ist. Mit Hilfe eines dritten ebenfalls baugleichen Polarisationsfilters wird Licht so präpariert, daß bezüglich T_2 volle Absorption vorliegt, also $\mu(w, \psi(f_2)) \sim_p 1$ gilt. Die Polarisationssebene des zur Präparation verwandten Filters ist somit senkrecht zu derjenigen von T_2 . Zur Illustration siehe man Abbildung 9.1 auf Seite 226. Dann erhält man für einen Filterblock mit n -facher Aneinanderreihung von T_1T_2 im Zustand w eine Wahrscheinlichkeit von $1 - (\frac{1}{2})^{2n}$. Das heißt, wenn n nicht hinreichend groß ist, erhält man auch bei Berücksichtigung der physikalischen Unschärfe einen signifikant kleineren Absorptionskoeffizienten für den Filterblock als für den Filter T_2 alleine.

Nachdem nun einige Beispiele und Überlegungen zur Motivation dargestellt worden sind, sollen die nächsten Schritte zur Formulierung eines Axioms durchgeführt werden.

In einem ersten Schritt soll die obige Formulierung etwas mehr in das mathematische Bild übersetzt werden. Die so gewonnene Aussage wird mit A_1 benannt:

$\boxed{A_1}$ Gibt es zwei Effekte g_1, g_2 in \mathcal{L} , einen Zustand w_0 in \mathcal{K} und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\mu(w_0, g_1) < \varepsilon_1$ und $\mu(w_0, g_2) < \varepsilon_2$, dann gibt es einen weiteren Effekt g in \mathcal{L} sowie zwei echt positive und ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits der Ungleichung $\mu(w_0, g) < \delta$ entsprochen wird und daß andererseits $\mu(w, g_i) - \eta \leq \mu(w, g)$ für jedes w aus \mathcal{K} und $i \in \{1, 2\}$ gilt.

Von der Aussage A_1 kann zu der folgenden physikalisch gleichwertigen Aussage übergegangen werden:

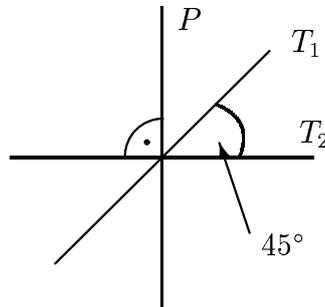


Abbildung 9.1: Erläuternde Darstellung der relativen Stellung der Polarisierungsebenen für die im Text geschilderte Situation, bei der der Filterblock T_1T_2 nicht stärker absorbiert als der Filter T_2 alleine. P steht dabei für die Polarisierungsebene des Filters, der für die Präparation verwendet wird. Die Ausbreitungsrichtung des Lichtes stehe dabei senkrecht auf der Seite und zeige in die Seite hinein.

A'_1

Gibt es zwei Effekte g_1, g_2 in \mathcal{L} , einen Zustand x_0 in K und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\hat{\mu}(x_0, g_1) < \varepsilon_1$ und $\hat{\mu}(x_0, g_2) < \varepsilon_2$, dann gibt es einen weiteren Effekt g in \mathcal{L} sowie zwei echt positive und ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits der Ungleichung $\hat{\mu}(x_0, g) < \delta$ entsprochen wird und daß andererseits $\hat{\mu}(x, g_i) - \eta \leq \hat{\mu}(x, g)$ für jedes x in K und $i \in \{1, 2\}$ gilt.

Wie angedeutet, handelt es sich bei A_1 und A'_1 um physikalisch gleichwertige Aussagen. Die zugehörige Diskussion birgt aber keine neuen physikalischen Einsichten, so daß sie hier ausgespart wird. Es sei dafür auf Abschnitt E.1 verwiesen.

Da man aus der Erfahrung heraus keine genaue Grenze angeben kann, wie klein die in der Formulierung A'_1 vorkommenden Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$ und η werden können, und da auch kein physikalischer Umstand bekannt ist, der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta$ und η prinzipiell nach unten begrenzt, ist der Weg der Idealisierung geboten. Das heißt, wenn man ohne Begrenzung Schritt für Schritt immer kleinere ε_1 und ε_2 experimentell realisieren kann, dann sollte man auch ohne Begrenzung Schritt für Schritt immer kleinere δ und η verwirklichen können. Das Realisieren immer kleinerer Abschätzungen ε_1 und ε_2 wird sicher dadurch vonstatten gehen, daß man immer bessere Effektapparaturen baut, die im Zustand w_0 zu immer kleiner abschätzbaren Wahrscheinlichkeiten $\mu(w_0, g)$ führen. Wenn man idealisierend davon ausgeht, daß das

beliebig gut gemacht werden kann, dann heißt das mathematisch, daß man zwei Folgen $(g_{1n})_{n \in \mathbb{N}}, (g_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} findet, für die bezüglich eines Zustandes x_0 aus K die Konvergenzen $\hat{\mu}(x_0, g_{1n}) \rightarrow 0$ und $\hat{\mu}(x_0, g_{2n}) \rightarrow 0$ gelten. Die Forderung ohne Idealisierung bestand nun darin, daß man zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Effekt g_n angeben kann, für den $\mu(w_0, g_n)$ durch eine kleine Zahl δ_n abgeschätzt werden kann und der bis auf eine kleine Zahl η_n empfindlicher als g_{1n} und g_{2n} ist. Idealisiert man nun, heißt das, daß man verlangt, daß $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolgen sind. Dabei kann man die Forderung nach der Nullfolgeneigenschaft von $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch gleich durch die Forderung $\hat{\mu}(x_0, g_n) \rightarrow 0$ ersetzen.

Also erhält man aus der Aussage A'_1 durch Idealisierung die folgende Aussage:

A_2 Für zwei Folgen $(g_{1n})_{n \in \mathbb{N}}, (g_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} und einen Zustand x_0 in K mit $\hat{\mu}(x_0, g_{1n}) \rightarrow 0$ und $\hat{\mu}(x_0, g_{2n}) \rightarrow 0$ existieren eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} und eine positive reelle Nullfolge $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ derart, daß einerseits $(\hat{\mu}(x_0, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß andererseits für jedes x in K , jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $i \in \{1, 2\}$ die Ungleichung $\hat{\mu}(x, g_{in}) - \eta_n \leq \hat{\mu}(x, g_n)$ gilt.

Damit ist jetzt eine mathematisch exakte Aussage gewonnen. A_2 ist aber noch recht unhandlich. Deshalb soll stattdessen eine mathematisch ansprechendere Aussage AV 1.1 gefordert werden, die von A_2 impliziert wird. Wie bereits mehrfach in Kapitel 8 angedeutet, bietet die dort aufgebaute mathematische Rahmentheorie gerade die Möglichkeit mathematisch attraktiverer Formulierungen. Die Aussage AV 1.1, die identisch ist mit der gleichnamigen Aussage in [Lud85a], Kapitel VI, §1.1, S. 155, lautet:

AV 1.1 Hauptaxiom der Effekt-Empfindlichkeitssteigerung der 1. Art:

Seien y_1, y_2 zwei Elemente der Menge $\hat{\mathcal{L}}$, dann existiert ein Element y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$, so daß zum einen die Relationen $y \geq y_1, y_2$ gelten und daß zum anderen die Mengeninklusion

$$K_0(y) \supseteq K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$$

erfüllt wird.

Das besagte Verhältnis von AV 1.1 zu der Aussage A_2 ist Inhalt nachfolgenden Satzes, das Ludwig als T 1.1.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §1.1, S. 155 notiert:

Satz 9.1.1 Die Aussage A_2 impliziert die Aussage AV 1.1.

Beweis:

Seien $y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}}$, dann existieren mit Lemma 8.2.9 zwei Folgen $(g_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} , so daß für $i \in \{1, 2\}$ die Konvergenzen $g_{in} \rightarrow y_i$ bezüglich der Topologie $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ gelten. Man betrachte die zwei Fälle:

- 1.Fall: Sei $K_0(y_1) \cap K_0(y_2) = \emptyset$. Dann ist in **1** das gesuchte Element gefunden, denn zum einen gelten mit Lemma 8.4.2 (iii) die Beziehungen $y_1, y_2 \leq \mathbf{1}$ und zum anderen folgt mit Lemma 8.2.13 die Identität $K_0(\mathbf{1}) = \emptyset$.
- 2.Fall: Sei nun $x_0 \in K_0(y_1) \cap K_0(y_2) \neq \emptyset$, dann ist $\hat{\mu}(x_0, g_{in}) \rightarrow 0$ für $i \in \{1, 2\}$, da $\hat{\mu}(x_0, \cdot)$ bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ stetig ist. Also existieren mit A_2 eine Folge $(g_n^{x_0})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ und eine positive reelle Nullfolge $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so daß gilt:

$$\hat{\mu}(x_0, g_n^{x_0}) \rightarrow 0, \quad (9.1)$$

$$\forall x \in K \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall i \in \{1, 2\} : \quad \hat{\mu}(x, g_{in}) - \eta_n \leq \hat{\mu}(x, g_n^{x_0}). \quad (9.2)$$

Da $\hat{\mathcal{L}}$ nach Satz 7.1.1 bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ kompakter, metrisierbarer uniformer Raum ist, ergibt sich mit Lemma A.6.5 insbesondere die Folgenkompaktheit. Also existiert eine konvergente Teilfolge von $(g_n^{x_0})_{n \in \mathbb{N}}$, die der Übersicht halber wiederum mit $(g_n^{x_0})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet werden soll. Der zugehörige Grenzwert sei mit y^{x_0} bezeichnet.

(9.1) liefert offensichtlich $\hat{\mu}(x_0, y^{x_0}) = 0$, und mit (9.2) erhält man die Ungleichungen $y^{x_0} \geq y_1, y_2$. Mit den Lemmata 8.3.16 und 8.3.22 folgt die Existenz eines Elementes $\bar{x}_0 \in K$ derart, daß $K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$ das kleinste Element aus $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ ist, das \bar{x}_0 umfaßt. Die bisherigen Betrachtungen waren aber völlig unabhängig davon, welches x_0 man aus $K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$ gewählt hat, und somit sind sie auch für alle $x_0 \in K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$ gültig. Somit kann man auch $x_0 = \bar{x}_0$ wählen. Wie oben errechnet, gilt dann $y^{\bar{x}_0} \geq y_1, y_2$ und $\hat{\mu}(\bar{x}_0, y^{\bar{x}_0}) = 0$. Also liegt \bar{x}_0 in $K_0(y^{\bar{x}_0})$. Da nun aber $K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$ das kleinste Element aus $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ ist, das \bar{x}_0 als Element besitzt, folgt also auch $K_0(y^{\bar{x}_0}) \supseteq K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$, wodurch auch der letzte Teil der Behauptung bewiesen ist. ■

Damit ist die Aussage AV 1.1 als Konsequenz der physikalisch motivierten Aussage A_2 erkannt. Wenn nicht explizit etwas anderes gesagt wird, soll AV 1.1 ab jetzt vorausgesetzt werden.

Bereits hier sei erwähnt, daß AV 1.1 in enger Verknüpfung mit der sogenannten Jauch-Piron-Eigenschaft steht, die im Rahmen der sogenannten verbandstheoretischen Formulierung der Quantenmechanik eine prominente Rolle spielt, ohne jedoch

eine tiefergehende physikalische Motivation zu erfahren. Es sei etwa auf [PP91], S. 41 und [Giu91], S. 37 verwiesen. Um die kanonische Form der Jauch-Piron-Eigenschaft aber auch in der hier dargestellten Theorie wiederzufinden, müssen noch einige Untersuchungen angestellt werden, und die Theorie muß um weitere Axiome angereichert werden. Da es lohnenswert ist, das Verhältnis zwischen der verbandstheoretischen Formulierung und dem hier präsentierten Ludwigschen Standpunkt auch in einer gewissen Gesamtheit zu untersuchen, wurde die zugehörige Analyse in einem eigenen Kapitel durchgeführt. Dafür und insbesondere für den erwähnten Zusammenhang zwischen AV 1.1 und der Jauch-Piron-Eigenschaft sei auf Kapitel 12 verwiesen.

Der Unterabschnitt soll enden mit dem folgenden Lemma, das die Form von AV 1.1 noch etwas vereinfacht und das einer Erläuterung in [Lud85a], Kapitel VI, §1.1, S. 155 folgt:

Lemma 9.1.2 *Seien y_1, y_2 zwei Elemente der Menge $\hat{\mathcal{L}}$, dann existiert ein Element y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$, so daß zum einen die Relationen $y \geq y_1, y_2$ gelten und daß zum anderen die Identität*

$$K_0(y) = K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$$

gilt.

Beweis:

Mit der Gültigkeit von AV 1.1 muß lediglich gezeigt werden, daß unter den gegebenen Voraussetzungen auch $K_0(y) \subseteq K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$ gilt. Seien dafür $y_1, y_2, y \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y \geq y_1, y_2$ gewählt. Dann gilt mit $i \in \{1, 2\}$ aber, daß für alle $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, y) = 0$ auch $\xi_\Delta(x, y_i) = 0$ folgt, das heißt:

$$K_0(y) = \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 0\} \subseteq \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y_i) = 0\} = K_0(y_i).$$

Damit folgt dann die gesuchte Aussage. ■

9.1.2 Empfindlichkeitssteigerung bezüglich eines Effektes

Im vorigen Unterabschnitt 9.1.1 wurden die experimentellen Erfahrungen im Zusammenhang mit Filterblöcken der Form $T_1 T_2 T_1 T_2 \dots$ untersucht. Dabei wurde stillschweigend davon ausgegangen, daß T_1 und T_2 verschieden sind. Der Sonderfall der Identität von T_1 und T_2 wurde allerdings nicht explizit ausgeschlossen, da die zugehörige Aussage, die mit dem Axiom AV 1.1 korrespondiert, trivial wird. In einem solchen Falle wären g_1 und g_2 identisch, und somit würde durch $g_1 = g_2$ das

gesuchte Element aus \mathcal{L} auch gefunden. Dennoch birgt die Situation der Identität von T_1 und T_2 , also die Betrachtung eines einzelnen Filters T_1 , im Verhältnis zu einem Filterblock der Form $T_1 T_1 \dots$ noch physikalische Erfahrungswerte, die nicht im Axiom AV 1.1 verarbeitet wurden.

Dazu sei ein Filter T betrachtet, der vor einem Auftreffzähler steht. Das zugehörige Effektverfahren sei wiederum derart definiert, daß die ausgezeichnete Veränderung darin besteht, daß kein Zählimpuls am Auftreffzähler stattgefunden hat. Der zugehörige Effekt sei mit g benannt. Bei Präparation im Zustande w aus \mathcal{K} beschreibt also $\mu(w, g)$ wiederum die Absorption. Schaltet man nun den Filter n -mal hintereinander und benennt man den damit gewonnenen Effekt mit \bar{g} , dann ergibt sich im Zustand w in der Regel die Wahrscheinlichkeit

$$\mu(w, \bar{g}) = 1 - (1 - \mu(w, g))^n. \quad (9.3)$$

Dabei soll wie stets der Einfachheit halber von der Reflexion abgesehen werden. Wenn man in Zuständen w aus \mathcal{K} präpariert, die an g zu geringer Absorption führen, wenn also $\mu(w, g)$ relativ klein ist und wenn man von der obigen Wahrscheinlichkeitsfunktion (9.3) ausgeht, dann liegt bei \bar{g} eine größere Absorption vor, denn es gilt offenbar $\mu(w, g) \leq \mu(w, \bar{g})$ für alle Elemente w aus der Menge \mathcal{K} . Aber wenn n nicht zu groß ist und wenn $\mu(w, g)$ hinreichend klein ist, dann ist auch für $\mu(w, \bar{g})$ mit einer entsprechend kleinen Zahl zu rechnen. Präpariert man allerdings in Zuständen mit deutlich von 0 abweichender Eintrittswahrscheinlichkeit des Effektes g , hat man auch schon bei recht kleinem n für die Eintrittswahrscheinlichkeit von \bar{g} einen Wert nahe bei 1 zu erwarten. Das ist insbesondere der Fall, wenn man einen Zustand w' derart wählt, daß die Wahrscheinlichkeit $\mu(w', g)$ in der Nähe des Maximalwertes von $\mu(w, g)$ über alle Zustände w aus \mathcal{K} liegt und wenn g sich deutlich von $\mathbf{0}$ unterscheidet.

Motiviert durch derartige Überlegungen soll verlangt werden:

Zu jedem von $\mathbf{0}$ verschiedenen Effekt g , für den ein Zustand w mit verschwindend geringer Wahrscheinlichkeit $\mu(w, g)$ angegeben werden kann, existiert ein anderer Effekt \bar{g} , der für w ebenfalls mit verschwindend geringer Wahrscheinlichkeit anspricht, der aber in Zuständen, in denen die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von g nahe des Maximums über alle w aus \mathcal{K} liegt, eine Ansprechwahrscheinlichkeit $\mu(w, \bar{g})$ nahe der 1 besitzt.

Um aus einer solchen Forderung ein vollwertiges Axiom zu erhalten, sind noch einige Schritte der Präzisierung und Idealisierung notwendig.

Zu jedem Element g aus \mathcal{L} und jedem Element w_0 aus \mathcal{K} mit sehr kleinem $\mu(w_0, g)$ liegt mit $g/\|g\|$ ein Element aus Δ vor, das die geforderten Eigenschaften besitzt.

Es ist allerdings nicht gesichert, daß $g/\|g\|$ auch zu \mathcal{L} oder zumindest zu $\hat{\mathcal{L}}$ gehört. Man bedenke nun, daß mit Lemma 8.2.13 (ii) das Maximum von $\mu(w, g)$ über die Elemente von \mathcal{K} gerade durch $\|y\|$ gegeben ist. Daher könnte man, einem Vorschlag von H. Neumann in [Neu03] folgend, die obige Motivation dazu nutzen, ein Axiom der Form

„Für alle Elemente y der Menge $\hat{\mathcal{L}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gehört $\frac{y}{\|y\|}$ zur Menge $\hat{\mathcal{L}}$.“

zu fordern. Eine solche Aussage ist sicher mathematisch attraktiv, aber durch die einleitenden Überlegungen scheint eine derartig weitreichende Aussage nicht hinreichend motiviert. Stattdessen soll ausgehend von der obigen Forderung etwas vorsichtiger vorgegangen werden.

In einem ersten Präzisierungsschritt, bei dem derselbe Sprachgebrauch wie in Unterabschnitt 9.1.1 im Zusammenhang mit der Aussage A_1 angewandt werden soll, lautet die Forderung:

A_3 Gibt es einen Effekt g aus $\mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, einen Zustand w_0 aus \mathcal{K} und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\mu(w_0, g) < \varepsilon_1$, dann gibt es einen weiteren Effekt \bar{g} aus \mathcal{L} sowie echt positive, ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits die Relation $\mu(w_0, \bar{g}) < \delta$ erfüllt ist und daß andererseits für jedes w aus \mathcal{K} mit $\mu(w, g) \geq \|g\| - \varepsilon_2$ auch $\mu(w, \bar{g}) \geq 1 - \eta$ gilt.

Dabei sei nochmals daran erinnert, daß mit Lemma 8.2.13 (ii) die Norm von g das mathematische Äquivalent für das oben verwandte Maximum der Wahrscheinlichkeit von $\mu(w, g)$ über alle Zustände w aus \mathcal{K} ist.

Entsprechend dem Übergang von der Aussage A_1 zu der Aussage A'_1 im vorigen Unterabschnitt kann die folgende der Aussage A_3 physikalisch gleichwertige Aussage A'_3 gewonnen werden. Für die zugehörige Diskussion sei auf Abschnitt E.2 verwiesen.

A'_3 Gibt es einen Effekt g in $\mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, einen Zustand x_0 in K und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\hat{\mu}(x_0, g) < \varepsilon_1$, dann gibt es einen weiteren Effekt \bar{g} in \mathcal{L} sowie zwei echt positive, ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits die Relation $\hat{\mu}(x_0, \bar{g}) < \delta$ erfüllt ist und daß andererseits für jedes x aus K mit $\hat{\mu}(x, g) \geq \|g\| - \varepsilon_2$ auch $\hat{\mu}(x, \bar{g}) \geq 1 - \eta$ gilt.

Da, wie bei A'_1 , auch im Falle von A'_3 keine Aussage über eine prinzipielle Begrenzung der vorkommenden Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \eta$ gemacht werden kann und da vielmehr die Erfahrung zeigt, daß es schrittweise möglich ist, immer kleinere Zahlen experimentell zu realisieren, soll wiederum der Weg der Idealisierung beschritten werden.

Wenn man zu einem vorgegebenen Effekt g aus $\mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ schrittweise Zustände dergestalt realisieren kann, daß die zugehörige Wahrscheinlichkeit des Eintretens von g immer kleiner wird, dann soll es möglich sein, einen anderen Effekt \bar{g} aus \mathcal{L} mit den folgenden beiden Eigenschaften anzugeben. Einerseits soll \bar{g} für dieselbe Folge von Zuständen ebenfalls mit immer geringerer Wahrscheinlichkeit eintreten. Andererseits soll für den Effekt \bar{g} die Wahrscheinlichkeit $\hat{\mu}(x', \bar{g})$ seines Eintretens im Zustand x' aus K umso besser gegen 1 abgeschätzt werden können, je näher man mit $\hat{\mu}(x', g)$ bei $\|g\|$ liegt. In mathematisch präziser Form fordert man somit von A_3' ausgehend in idealisierender Weise:

Zu jedem Effekt g aus $\mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und jeder Folge von Zuständen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K mit $\hat{\mu}(x_n, g) \rightarrow 0$ existieren ein weiterer Effekt \bar{g} in \mathcal{L} und eine Abbildung δ aus der Menge $\{t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0\}$ derart, daß einerseits $(\hat{\mu}(x_n, \bar{g}))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß andererseits für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Zustand x' aus K mit $\hat{\mu}(x', g) \geq \|g\| - \varepsilon$ auch $\hat{\mu}(x', \bar{g}) \geq 1 - \delta(\varepsilon)$ gilt.

Da die Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ von den Elementen aus \mathcal{L} physikalisch nicht unterscheidbar sind, soll die obige Forderung erweitert werden auf alle Elemente von $\hat{\mathcal{L}}$. Dabei kann man sich im weiteren auf Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ beschränken, die bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ konvergieren. Das ist nicht zwingend, aber für das angestrebte Axiom ist eine derartige Beschränkung ausreichend. Es wird somit als eine echte Erweiterung der vorigen Aussage gefordert:

A_4 Zu jedem Effekt y_0 aus $\hat{\mathcal{L}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und jeder bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ konvergenten Folge von Zuständen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K$ mit $\hat{\mu}(x_n, y_0) \rightarrow 0$ existieren ein weiterer Effekt \bar{y} in $\hat{\mathcal{L}}$ und eine Abbildung δ aus der Menge $\{t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0\}$ derart, daß einerseits $(\hat{\mu}(x_n, \bar{y}))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß andererseits für jedes $\varepsilon > 0$ und jeden Zustand x' aus K mit $\hat{\mu}(x', y_0) \geq \|y_0\| - \varepsilon$ auch $\hat{\mu}(x', \bar{y}) \geq 1 - \delta(\varepsilon)$ gilt.

Man bedenke jetzt erstens Satz 8.2.14, zweitens die Tatsache, daß K bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ abgeschlossen ist, und drittens den Umstand, daß mit y_0 nicht zwangsläufig auch $y_0/\|y_0\|$ Element von $\hat{\mathcal{L}}$ sein muß und daß somit $y_0/\|y_0\|$ nicht im Definitionsbereich

von $\hat{\mu}$, sondern nur im Definitionsbereich von ξ_Δ liegt. Dann ist A_4 offensichtlich äquivalent zur nachfolgenden Aussage A'_4 :

A'_4 Zu jedem Element y_0 der Menge $\hat{\mathcal{L}} \setminus \{\mathbf{0}\}$ und jedem Element x_0 der Menge $K_0(y_0)$ existieren ein weiterer Effekt \bar{y} der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ und eine Abbildung δ in der Menge $\{t : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \mid t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0\}$ derart, daß einerseits x_0 zu $K_0(\bar{y})$ gehört und daß andererseits die nachfolgende Aussage gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x' \in K : \left[\xi_\Delta(x', \frac{y_0}{\|y_0\|}) \geq 1 - \varepsilon \right] \implies [\hat{\mu}(x', \bar{y}) \geq 1 - \delta(\varepsilon)]. \quad (9.4)$$

Wählt man nun bei Verwendung der Bezeichnungen aus A'_4 ein y aus der Menge $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit $y \leq y_0/\|y_0\|$, dann gilt mit Hilfe von (9.4) die folgenden Implikationen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x' \in K : [\xi_\Delta(x', y) \geq 1 - \varepsilon] \implies [\hat{\mu}(x', \bar{y}) \geq 1 - \delta(\varepsilon)].$$

Da außerdem mit der Zugehörigkeit von x_0 zu $K_0(y_0)$ auch die Zugehörigkeit von x_0 zu $K_0(y)$ folgt, erhält man ausgehend von A'_4 :

A''_4 Zu jedem Element y_0 der Menge $\hat{\mathcal{L}} \setminus \{\mathbf{0}\}$, zu jedem Element x_0 der Menge $K_0(y_0)$ und zu jedem Element y der Menge $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit $y \leq y_0/\|y_0\|$ und x_0 in $K_0(y)$ gibt es ein Element \bar{y} aus $\hat{\mathcal{L}}$ und eine Abbildung δ in der Menge $\{t : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \mid t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0\}$ derart, daß einerseits x_0 zu $K_0(\bar{y})$ gehört und daß andererseits für alle $\varepsilon > 0$ und x' in K mit $\xi_\Delta(x', y) \geq 1 - \varepsilon$ auch $\hat{\mu}(x', \bar{y}) \geq 1 - \delta(\varepsilon)$ gilt.

Es stellt sich nun die Frage, ob man die Aussage A''_4 auf besagte Elemente y aus $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit $y \leq y_0/\|y_0\|$ beschränken muß oder ob man auch eine größere Teilmenge von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ wählen kann. G. Ludwig fordert die Ausweitung auf die Menge $\overline{\overline{L}}$, die definiert ist als die kleinste konvexe und bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossene Teilmenge von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) $\hat{\mathcal{L}}$ ist Teilmenge von $\overline{\overline{L}}$.
- (ii) Sei y Element in $\overline{\overline{L}}$, und bezeichne λ eine echt positive reelle Zahl. Dann folgt aus der Gültigkeit der Relation $\|\lambda y\| \leq 1$ die Zugehörigkeit von λy zu $\overline{\overline{L}}$.
- (iii) Für jedes y der Menge $\overline{\overline{L}}$ gehört $\mathbf{1} - y$ zur Menge $\overline{\overline{L}}$.

Der Nachweis der Wohldefiniertheit von $\overline{\overline{L}}$ wird in Anhang E.3 geklärt. Jenseits der mathematischen Eignung für den Fortgang der Theorie wird für die Wahl von $\overline{\overline{L}}$ allerdings keine weitergehende Motivation angeführt, so daß eine derartige Wahl als physikalisch nicht ausreichend motiviert bezeichnet werden muß. Da aber das durch die Wahl von $\overline{\overline{L}}$ im weiteren Verlauf gewonnene Axiom AV 1.2 von besonderer Bedeutung für die Weiterentwicklung der Theorie ist, soll die Ausweitung der obigen Aussage auf die Menge $\overline{\overline{L}}$ auch hier nachvollzogen werden. Unter Verwendung der Identität $\overline{\overline{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ aus Lemma E.3.4 kommt man somit zu dem folgenden Axiom, das mit der gleichnamigen Aussage [Lud85a], Kapitel VI, §1.4, S. 162 zusammenfällt:

AV 1.2 Hauptaxiom der Effekt-Empfindlichkeitssteigerung der 2.Art:

Sei y_0 Element der Menge \hat{L} , sei x_0 Element der Menge $K_0(y_0)$ und sei y Element der Menge $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit x_0 in $K_0(y)$. Dann gibt es ein \overline{y} in \hat{L} und eine Abbildung δ aus der Menge $\{t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid t(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0\}$ derart, daß zum einen x_0 zu $K_0(\overline{y})$ gehört und daß zum anderen für alle $\varepsilon > 0$ und alle x' aus K mit $\xi_\Delta(x', y) \geq 1 - \varepsilon$ die Ungleichung $\hat{\mu}(x', \overline{y}) \geq 1 - \delta(\varepsilon)$ gilt.

Zunächst sei angemerkt, daß man die Aussage von AV 1.2 für $y_0 = \mathbf{0}$ und beliebiges y aus $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ in trivialer Weise erfüllen kann, indem man $\overline{y} := y$ und $\delta(t) := t$ für alle echt positiven reellen Zahlen t setzt. Somit besteht also eigentlich keine Notwendigkeit, den Fall $y_0 = \mathbf{0}$ in obigem Axiom zu berücksichtigen. Die Aufnahme des Falles $y_0 = \mathbf{0}$ in obige Formulierung geschieht nur aus Bequemlichkeit. Formal korrekt wäre die Forderung von AV 1.2 für y_0 aus $\hat{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gefolgt von einem gleichlautenden Satz, der den Fall $y_0 = \mathbf{0}$ dann unter Verwendung obiger Argumentation miteinschließt.

Neben dem oben angeführten Motivationsproblem für die endgültige Formulierung von AV 1.2 muß aus prinzipiellen Erwägungen noch ein weiterer Kritikpunkt angesprochen werden, denn mit $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ und ξ_Δ kommen Größen vor, deren physikalische Interpretation nicht unproblematisch ist. Eigentlich sind nur die Größen K , \hat{L} und $\hat{\mu}$ als physikalisch interpretiert anzusehen. Allerdings umfaßt $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ die Menge \hat{L} gemäß Lemma 8.4.4 (i), und die Restriktion von ξ_Δ auf $K \times \hat{L}$ fällt dem Satz 8.2.14 zufolge gerade mit $\hat{\mu}$ zusammen, so daß man davon sprechen könnte, daß es sich bei $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ und ξ_Δ lediglich um Erweiterungen einer Bildmenge und einer Bildrelation handelt. Der Übergang von Bildtermen zu sie umfassenden Bildtermen wurde in Kapitel 4 als prinzipiell unproblematisch eingeordnet. Es ist aber etwas unbefriedigend, da man bei allen anderen Axiomen dieses Kapitels mit K , \hat{L} und $\hat{\mu}$ auskommen wird. Dennoch wird wegen der oben bereits angedeuteten besonderen

Bedeutung von AV 1.2 für die Fortentwicklung der Theorie an der genannten Form von AV 1.2 festgehalten.

9.2 Der Verband G der Entscheidungseffekte

Das Axiom AV 1.1 erlaubt es, in wohldefinierter Weise den für die weitere Theorie wichtigen Begriff des Entscheidungseffektes zu begründen. Es muß aber betont werden, daß für die Erörterungen des folgenden Abschnitts tatsächlich das Axiom AV 1.1 bereits völlig ausreichend ist. Die Motivation und Einführung des Axioms AV 1.2 wurde den nun folgenden Erörterungen lediglich aufgrund der physikalischen Nähe zum Axiom AV 1.1 vorgezogen.

Zunächst bedarf es der beiden nachfolgenden Lemmata, die Inhalt von T 1.3.1 (ii) und (iv) in [Lud85a], Kapitel VI, §1.3, S. 160 sind. Die Beweise weichen allerdings ab.

Lemma 9.2.1 *Für jede Teilmenge k von K bezeichnet $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ eine aufwärts gerichtete Menge.*

Beweis:

Seien für eine Teilmenge $k \subseteq K$ Elemente $y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gewählt, dann existiert mit AV 1.1 ein $y \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y \geq y_1, y_2$ und $K_0(y) = K_0(y_1) \cap K_0(y_2)$. Das heißt:

$$\forall x \in K : \xi_{\Delta}(x, y) = 0 \iff [\xi_{\Delta}(x, y_1) = 0 \text{ und } \xi_{\Delta}(x, y_2) = 0].$$

$y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ impliziert also, daß für alle $x \in k$ auch $\xi_{\Delta}(x, y) = 0$ gilt. Damit liegt y in $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$. ■

Satz 9.2.2 *Für jede Teilmenge k von K existiert ein größtes Element von $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ in $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$.*

Beweis:

Mit $X := \hat{\mathcal{L}}$, $\mathcal{O} := \sigma(\Delta, B_{\Delta})|_{\hat{\mathcal{L}}}$, $J := K$ und Lemma 9.2.1 sind die Voraussetzungen von Satz E.5.1 erfüllt. Damit folgt dann die Behauptung, da $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ insbesondere auch $\sigma(\Delta, B_{\Delta})|_{\hat{\mathcal{L}}}$ -abgeschlossen ist. ■

Mit Hilfe der Aussagen der letzten beiden Lemmata lassen sich in der Menge der Effekte besondere Elemente auszeichnen. Dafür wird definiert:

Definition 9.2.3

Sei k eine Teilmenge von K , dann wird das größte Element von $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ bezeichnet. Die Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ von der Form $e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ sollen **Entscheidungseffekte** heißen. Mit G sei die Menge aller Entscheidungseffekte benannt, das heißt:

$$G := \{e\hat{\mathcal{L}}_0(k) \mid k \subseteq K\}.$$

Entscheidungseffekte sind also diejenigen Effekte, die bezüglich einer Menge k von Zuständen nicht ansprechen, aber ansonsten mit höherer Wahrscheinlichkeit eintreten als alle anderen Effekte, die ebenfalls bei allen Zuständen aus k nicht ansprechen. Wenn es also bei einem Zustand x aus K für einen Entscheidungseffekt $e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ zu einer Wahrscheinlichkeit $\hat{\mu}(x, e\hat{\mathcal{L}}_0(k)) = 0$ kommt, dann ist damit „entschieden“, daß $\hat{\mu}(x, y) = 0$ auch für alle Effekte y aus $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gilt. Daher wurden die Elemente von G auch als Entscheidungseffekte bezeichnet. Die prinzipielle Situation im Verhältnis von Effekten und Entscheidungseffekten illustriert Abbildung 9.2. Dazu sei angemerkt, daß nicht alle Entscheidungseffekte so steile Graphen haben müssen. Ihre Wahrscheinlichkeitsfunktion in Abhängigkeit von den Zuständen muß nur stets über denjenigen aller anderen Graphen von Effekten liegen, die im k -Bereich auf der K -Achse liegen. Außerdem ist klar, daß K im allgemeinen nicht eindimensional ist.

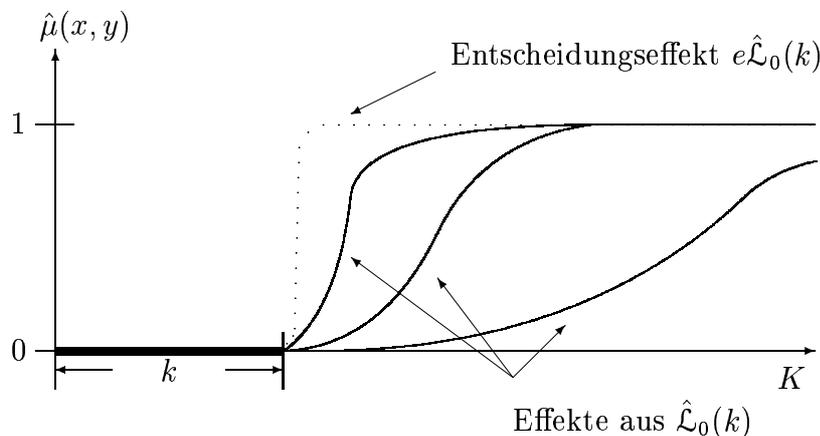


Abbildung 9.2: Illustration des Begriffes des Entscheidungseffektes

Wie die Definition zeigt, ist ein Entscheidungseffekt ein Element aus $\hat{\mathcal{L}}$ und somit nicht unbedingt aus der ursprünglichen Bildmenge \mathcal{L} der Effekte. Es handelt sich also im allgemeinen um ideale Effekte in dem bekannten Sinne, daß sie durch eine

Folge von Effekten aus \mathcal{L} bezüglich der Topologie der physikalischen Unschärfe beliebig genau approximierbar sind. Man kann sich den Begriff des Entscheidungseffektes auch anhand des Beispiels der beiden Filter aus Unterabschnitt 9.1.1 veranschaulichen. Dazu sei daran erinnert, daß bei dem dort verwendeten Beispiel Filter, wie etwa gefärbte Glasscheiben als Filter für Licht, vor einem Auftreffzähler aufgebaut sind. Wenn man nun zwei Filter T_1 und T_2 entsprechend zweier Effekte g_1 und g_2 verwendet, die einen gemeinsamen Zustandsbereich der Transmission haben, dann hat auch eine häufige Hintereinanderschaltung eines Filterblockes $T_1 T_2$ in demselben Bereich in physikalischer Approximation ein hohes Maß an Transmission. Bei Zuständen aber, die bei T_1 oder bei T_2 zu signifikanter Absorption führen, kommt es bei der Hintereinanderschaltung vieler Filterblöcke zu noch größerer Absorption als bei den Filtern alleine. Bezeichnet n die Anzahl der einzelnen $T_1 T_2$ -Blöcke im Gesamtfilterblock, dann sieht man sofort, daß man sich bei steigendem n in Abbildung 9.2 immer mehr der Stufenfunktion annähert, die im k -Bereich bei Null bleibt, aber außerhalb des k -Bereiches bei 1 liegt. Dabei wäre der k -Bereich im Prinzip, wenn man also von der physikalischen Ungenauigkeit einmal absieht, durch $K_0(g_1) \cap K_0(g_2)$ gegeben. Zu einem Entscheidungseffekt käme man hier, wenn man den Filterblock unendlich oft hintereinanderschalten würde. Das ist natürlich nicht konkret, sondern stets nur annäherungsweise realisierbar. Das Beispiel illustriert in anschaulicher Weise, daß im allgemeinen ein Entscheidungseffekt eben nur ein idealer Effekt ist, also physikalisch nur beliebig genau, aber nicht exakt realisierbar ist.

Für die weiteren Untersuchungen sei zunächst die folgende Aussage bewiesen, die T 1.3.2 aus [Lud85a], Kapitel VI, §1.3, S. 160 wiedergibt:

Lemma 9.2.4 *Für eine Teilmenge k von K gilt:*

$$(i) \hat{\mathcal{L}}_0(k) = \{y \in \hat{\mathcal{L}} \mid y \leq e\hat{\mathcal{L}}_0(k)\},$$

$$(ii) K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k) = K_0(e\hat{\mathcal{L}}_0(k)),$$

$$(iii) \hat{\mathcal{L}}_0(k) = \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e\hat{\mathcal{L}}_0(k)).$$

Für jedes Element e aus G gilt:

$$(iv) \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e) = \{y \in \hat{\mathcal{L}} \mid y \leq e\}.$$

Beweis:

zu (i): „ \subseteq “ ist offensichtlich. Zum Beweis der anderen Inklusion seien $x \in k$ und $y \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y \leq e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gewählt. Man erhält dann $0 = \xi_\Delta(x, e\hat{\mathcal{L}}_0(k)) \geq \xi_\Delta(x, y)$, da $e\hat{\mathcal{L}}_0(k) \in \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gilt. Damit ergibt sich aber auch $\xi_\Delta(x, y) = 0$, also $y \in \hat{\mathcal{L}}_0(k)$.

zu (ii): Wiederum ausgehend von $e\hat{\mathcal{L}}_0(k) \in \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ ergibt sich $\{e\hat{\mathcal{L}}_0(k)\} \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0(k)$, und damit erhält man $K_0(e\hat{\mathcal{L}}_0(k)) \supseteq K_0\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ ob des Lemmas 8.3.16 (i). Andererseits gilt aber auch $\xi_\Delta(x, e\hat{\mathcal{L}}_0(k)) = 0$ für jedes $x \in K_0(e\hat{\mathcal{L}}_0(k))$, und damit gilt $\xi_\Delta(x, y) = 0$ für alle $y \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y \leq e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$. Mit Punkt (i) dieses Satzes heißt das sogar, daß $\xi_\Delta(x, y) = 0$ für alle $y \in \hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gilt. Also ergibt sich die Zugehörigkeit von x zu $K_0\hat{\mathcal{L}}_0(k)$.

zu (iii): Mit Punkt (ii) gilt: $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e\hat{\mathcal{L}}_0(k)) = \hat{\mathcal{L}}_0 K_0\hat{\mathcal{L}}_0(k) = \hat{\mathcal{L}}_0(k)$. Dabei ist das letzte Gleichheitszeichen Folge von Lemma 8.3.16 (v).

zu (iv): Sei $e \in G$, dann existiert definitionsgemäß ein $k \subseteq K$ so, daß $e = e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gilt. Damit ergibt sich $\{y \in \hat{\mathcal{L}} \mid y \leq e\} \stackrel{(i)}{=} \hat{\mathcal{L}}_0(k) \stackrel{(iii)}{=} \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$. ■

Damit kann man nun im folgenden Lemma erste Eigenschaften von G , insbesondere die tiefe Verknüpfung von G zu den bereits in Definition 8.3.14 eingeführten Mengen U_K und $W_{\hat{\mathcal{L}}}$, zeigen, wie sie in T 1.3.3 und T 1.3.4 in [Lud85a], Kapitel VI, §1.3, S. 160 festgehalten werden:

Lemma 9.2.5 *Es gilt:*

- (i) G ist bezüglich \leq ein vollständiger Verband. Er besitzt $\mathbf{0}$ als kleinstes und $\mathbf{1}$ als größtes Element.
- (ii) Die Abbildung $U_K \rightarrow G$, $\hat{\mathcal{L}}_0(k) \mapsto e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ ist ein Verbandsisomorphismus.
- (iii) Die Abbildung $G \rightarrow W_{\hat{\mathcal{L}}}$, $e \mapsto K_0(e)$ ist ein dualer Verbandsisomorphismus.

Beweis:

zu (i) und (ii): Die Eigenschaft, daß G vollständiger Verband ist, folgt mit den Lemmata 8.3.16 (iv) und F.13, wenn man zeigen kann, daß die Abbildung aus Punkt (ii) eine in beide Richtungen ordnungserhaltende Surjektion ist. Dabei ist die Eigenschaft, eine surjektive Abbildung zu sein, bereits bekannt, denn sie ist gerade Inhalt des Satzes 9.2.2.

Zum Beweis der ordnungserhaltenden Eigenschaften seien zunächst $k_1, k_2 \subseteq K$ mit $\hat{\mathcal{L}}_0(k_1) \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0(k_2)$ gewählt, dann folgt mit Lemma 9.2.4 (i), daß $y \leq e\hat{\mathcal{L}}_0(k_2)$

für alle $y \in \hat{\mathcal{L}}_0(k_1)$ gilt. Es ist also insbesondere $e\hat{\mathcal{L}}(k_1) \leq e\hat{\mathcal{L}}(k_2)$. Wählt man jetzt andersherum $e\hat{\mathcal{L}}_0(k_1), e\hat{\mathcal{L}}_0(k_2) \in G$ mit $e\hat{\mathcal{L}}_0(k_1) \leq e\hat{\mathcal{L}}_0(k_2)$, dann folgt ebenfalls mit Lemma 9.2.4 (i) die Inklusion $\hat{\mathcal{L}}_0(k_1) \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0(k_2)$.

Zum Beweis der Aussagen über $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ wähle man zuerst $k = K$. Dann erhält man aufgrund der Antisymmetrie der Halbordnung \leq auf $\hat{\mathcal{L}}$ gemäß Lemma 8.4.2 (i) die Identität $\hat{\mathcal{L}}_0(k) = \{\mathbf{0}\}$. Damit ergibt sich $\mathbf{0} = e\hat{\mathcal{L}}(K)$. Für $k = \emptyset$ folgt $\hat{\mathcal{L}}_0(\emptyset) = \hat{\mathcal{L}}$, so daß $\mathbf{1} = e\hat{\mathcal{L}}(\emptyset)$ gilt, da mit Lemma 8.4.2 (iii) das Element $\mathbf{1}$ das größte Element von $\hat{\mathcal{L}}$ ist. Somit hat man gezeigt, daß $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ Elemente von G sind. Die Aussagen über $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ als kleinstes und größtes Element von G ergeben sich dann durch erneutes Verwenden aus Lemma 8.4.2 (iii).

zu (iii): Mit Lemma 8.3.16 (v) definiert die Vorschrift

$$U_K \longrightarrow W_{\hat{\mathcal{L}}}, \hat{\mathcal{L}}_0(k) \longmapsto K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$$

einen dualen Verbandsisomorphismus. Die Umkehrabbildung der Abbildung aus Punkt (ii) ist ein Verbandsisomorphismus von G nach U_K , so daß die Hintereinanderausführung beider Abbildungen einen dualen Verbandsisomorphismus von G nach $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ liefert. Man kann die Behauptung nun beweisen, indem man zeigt, daß die derart zusammengesetzte Abbildung mit der betrachteten Abbildung identisch ist.

Sei dafür $e \in G$ gewählt, dann gibt es mit Hilfe der Abbildung aus Punkt (ii) eine Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(k) \in U_K$ mit $e = e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$. Also ist das Bild von e bezüglich der oben betrachteten Hintereinanderausführung gegeben durch $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k)$. Mit Lemma 9.2.4 (ii) gilt aber gerade $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(k) = K_0(e\hat{\mathcal{L}}(k)) = K_0(e)$. Also ist die obige zusammengesetzte Abbildung identisch mit der Abbildung aus der Behauptung. ■

Zwei besonders wichtige Konsequenzen von Punkt (iii) des Lemmas 9.2.5 sollen explizit hervorgehoben werden. Die zweite Aussage findet man als T 1.3.7 in [Lud85a], Kapitel VI, §1.3, S. 161:

Lemma 9.2.6 *Seien e_1, e_2 Elemente der Menge G , dann gilt:*

- (i) e_1 und e_2 sind identisch genau dann, wenn die Mengen $K_0(e_1)$ und $K_0(e_2)$ identisch sind.
- (ii) $K_0(e_1) \cap K_0(e_2) = K_0(e_1 \vee e_2)$.

Beweis:

Punkt (i) folgt direkt aus 9.2.5 (iii). Für Punkt (ii) sei daran erinnert, daß mit Lemma 8.3.16 (iv) Mengendurchschnitt und Infimum auf $\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{L}}}$ zusammenfallen. ■

Als Nächstes werden die folgenden drei Aussagen gezeigt, von denen die ersten beiden T 1.3.5 in [Lud85a], Kapitel VI, §1.3, S. 161 wiedergeben.

Lemma 9.2.7 *Es gilt:*

- (i) *Für alle Elemente y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ und alle Elemente e aus G gilt die Relation $y \leq e$ genau dann, wenn die Mengeninklusion $K_0(y) \supseteq K_0(e)$ gilt.*
- (ii) *Zu jeder Teilmenge N von $\hat{\mathcal{L}}$ existiert genau ein e in G mit $K_0(N) = K_0(e)$. Das Element e ist das kleinste Element aus G mit $y \leq e$ für alle y aus N .*
- (iii) *Bezeichnet e ein Element aus G mit $e \neq \mathbf{1}$, dann ist $K_0(e)$ eine nicht-leere Menge.*

Beweis:

zu (i): Seien $y \in \hat{\mathcal{L}}$ und $e \in G$ gewählt. Ist $y \leq e$, dann gilt mit Lemma 9.2.4 (iv) auch $y \in \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$. Damit erhält man wegen Lemma 8.3.16 (i) und (v):

$$K_0(y) \supseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e) = K_0(e).$$

Ist andersherum $K_0(y) \supseteq K_0(e)$, folgt mit Lemma 8.3.16 (i) die Inklusion $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(y) \subseteq \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$, und damit gilt insbesondere $y \in \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$. Wiederum kann man jetzt Lemma 9.2.4 (iv) verwenden, und man erhält so $y \leq e$.

zu (ii): Sei $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$, dann existiert mit 9.2.5 (iii) genau ein Element e in G mit $K_0(e) = K_0(N)$. Weiter kann man zeigen, daß e obere Schranke der Elemente aus N ist, denn es gilt für alle $y' \in N$:

$$K_0(e) = K_0(N) = \bigcap_{y \in N} K_0(y) \subseteq K_0(y').$$

Punkt (i) dieses Satzes liefert dann die Schranken-Eigenschaft. Wenn es noch eine andere obere Schranke $e' \in G$ gibt, dann folgt wiederum mit obigem Punkt (i), daß $K_0(e') \subseteq K_0(y)$ für alle $y \in N$ gilt. Damit erhält man nun:

$$K_0(e') \subseteq \bigcap_{y \in N} K_0(y) = K_0(N) = K_0(e).$$

Das liefert bei erneuter Verwendung von obigem Punkt (i) die Ungleichung $e \leq e'$.

zu (iii): Sei $e \in G \setminus \{\mathbf{1}\}$ mit $K_0(e) = \emptyset$, dann gilt $K_0(e) = \emptyset = K_0(\mathbf{1})$. Lemma 9.2.6 liefert damit $e = \mathbf{1}$, also einen Widerspruch. ■

Zu Punkt (ii) sei angemerkt, daß das dort betrachtete Element e aus G nicht als Supremum aufgefaßt werden kann, da es sich bei e um das kleinste Element aus G handelt, das obere Schranke einer Menge von Elementen aus $\hat{\mathcal{L}}$ ist. Also ist e kein Supremum bezüglich G und auch keines bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$, denn dafür müßte man entweder N auf G beschränken oder für e ganz $\hat{\mathcal{L}}$ und nicht nur G zulassen. Man muß offensichtlich genau beachten, in welchem Kontext man sich bewegt. Es wird deutlich, daß es einer genaueren Betrachtung des Verhältnisses von Suprema und Infima einerseits bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$ und andererseits bezüglich G bedarf. Zumindest für den Fall der Infima kann man schon eine allgemeine Antwort geben. Für den Fall der Suprema sei auf Satz 9.5.9 verwiesen, der sich erst als Konsequenz weiterer noch zu diskutierender Axiome erweisen wird.

Der folgende Satz stellt T 1.3.9 aus [Lud85a], Kapitel VI, §1.3, S. 161 dar:

Satz 9.2.8 *Für jede Teilmenge A von G existiert das Infimum bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$, und es fällt mit dem Infimum $\bigwedge_{e \in A} e$ von A bezüglich G zusammen.*

Ist A eine abwärts gerichtete Teilmenge von G , dann konvergiert das Netz $(e)_{e \in A}$ bei Ausstattung von A mit der zu \leq inversen Ordnung bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen $\bigwedge_{e \in A} e$.

Bemerkung: In Zukunft wird nicht mehr zwischen den Infima bezüglich G und $\hat{\mathcal{L}}$ für Teilmengen aus G unterschieden. Es wird dabei stets das Symbol $\bigwedge_{e \in A} e$ verwandt.

Beweis:

Sei $A \subseteq G$. Mit Lemma 9.2.5 (i) existiert das Infimum von A bezüglich G , also ist $\bigwedge_{e \in A} e$ Element von G . Da $G \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ ist, ist $\bigwedge_{e \in A} e$ auch Element von $\hat{\mathcal{L}}$, und somit gibt es mit $\bigwedge_{e \in A} e$ auch in $\hat{\mathcal{L}}$ eine untere Schranke von A . Es bleibt also zu zeigen, daß $\bigwedge_{e \in A} e$ auch in $\hat{\mathcal{L}}$ größte untere Schranke ist. Sei dafür ein $y \in \hat{\mathcal{L}}$ derart gewählt, daß $y \leq e$ für alle $e \in A$ gilt. Mit Lemma 9.2.7 (i) gilt dann

$K_0(y) \supseteq K_0(e)$ für alle $e \in A$. Da $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ mit Lemma 8.3.16 ein vollständiger Verband ist, folgt mit Hilfe von Lemma 9.2.5 (iii):

$$K_0(y) \supseteq \bigvee_{e \in A} K_0(e) = K_0\left(\bigwedge_{e \in A} e\right).$$

Wiederum mit Lemma 9.2.5 (iii) gilt somit $y \leq \bigwedge_{e \in A} e$, also ist $\bigwedge_{e \in A} e$ in der Tat auch bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$ größte untere Schranke.

Damit kann zum Beweis des zweiten Teils der Behauptung übergegangen werden. Sei A abwärts gerichtete Teilmenge von G . Die Relation \leq_2 , definiert durch die Vorschrift

$$\forall e, f \in G : e \leq_2 f \iff e \geq f,$$

ist auf G ebenfalls eine Halbordnung, bezüglich der A aber eine aufwärts gerichtete Menge ist. Deshalb ist durch $(e)_{e \in A}$ auch ein Netz in Δ gegeben. Es wird nun zunächst gezeigt, daß $(e)_{e \in A}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ konvergiert. In einem zweiten Schritt wird dann gezeigt, daß der Grenzwert mit $\bigwedge_{e \in A} e$ identisch ist.

Zum Nachweis der Konvergenz von $(e)_{e \in A}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ werden zuerst einige Eigenschaften zusammengestellt:

- Da $A \subseteq G \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ gilt und da $\hat{\mathcal{L}}$ kompakt bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ ist, folgt mit Lemma A.6.2 die Existenz eines in $\hat{\mathcal{L}}$ konvergenten Teilnetzes $(e_i)_{i \in I}$ von $(e)_{e \in A}$. Der zugehörige Grenzwert sei mit y bezeichnet.
- Für jedes $x \in B_\Delta$ ist durch $(\xi_\Delta(x, e))_{e \in A}$ ein Netz in \mathbb{R} gegeben. Mit $e, f \in A$ und $e \leq_2 f$ folgt definitionsgemäß $e \geq f$, und damit gilt $\xi_\Delta(x, e) \geq \xi_\Delta(x, f)$. Das heißt, $(\xi_\Delta(x, e))_{e \in A}$ ist für jedes $x \in B_\Delta$ ein monoton fallendes Netz. $(\xi_\Delta(x, e))_{e \in A}$ ist für jedes $x \in B_\Delta$ aber auch nach unten beschränkt, denn für $e' \in A$ ist $e' \geq \bigwedge_{e \in A} e$, und damit ergibt sich für jedes $x \in B_\Delta$ auch $\xi_\Delta(x, e') \geq \xi_\Delta(x, \bigwedge_{e \in A} e) > -\infty$. Also konvergieren die Netze $(\xi_\Delta(x, e))_{e \in A}$ gegen ihr Infimum, das heißt, für jedes $x \in B_\Delta$ konvergiert $(\xi_\Delta(x, e))_{e \in A}$ gegen $\inf_{e \in A} \xi_\Delta(x, e)$.
- Mit dem obigen Teilnetz $(e_i)_{i \in I}$ ist für jedes $x \in B_\Delta$ durch $(\xi_\Delta(x, e_i))_{i \in I}$ auch ein Teilnetz von $(\xi_\Delta(x, e))_{e \in A}$ gegeben. Da aber bei konvergenten Netzen alle konvergenten Teilnetze gegen denselben Grenzwert wie das Netz konvergieren, gilt für alle $x \in B_\Delta$:

$$\xi_\Delta(x, y) = \lim_{i \in I} \xi_\Delta(x, e_i) = \inf_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) = \lim_{e \in A} \xi_\Delta(x, e). \quad (9.5)$$

Aus (9.5) folgt jetzt mit Satz 5.18, [vQ01], Kapitel 5, Abschnitt C, S. 79, daß $(e)_{e \in A}$ gegen y konvergiert.

Somit bleibt es nur noch, $y = \bigwedge_{e \in A} e$ zu zeigen. Einerseits gilt $e' \geq \bigwedge_{e \in A} e$ für jedes $e' \in A$, und damit erhält man auch $\xi_\Delta(x, e') \geq \xi_\Delta(x, \bigwedge_{e \in A} e)$ für jedes $x \in K$ und jedes $e' \in A$. Also folgt mit (9.5) für jedes $x \in K$:

$$\xi_\Delta(x, y) = \inf_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) \geq \xi_\Delta(x, \bigwedge_{e \in A} e).$$

Das heißt aber gerade $y \geq \bigwedge_{e \in A} e$. Andererseits gilt für jedes $x \in K$ und jedes $e' \in A$:

$$\xi_\Delta(x, y) = \inf_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) \leq \xi_\Delta(x, e').$$

Somit ist $y \leq e'$ für alle $e' \in A$. Also gilt auch $y \leq \bigwedge_{e \in A} e$. ■

Mit der Menge G der Entscheidungseffekte hat man in $\hat{\mathcal{L}}$ eine für die Theorie wichtige Teilmenge von Effekten explizit herausgegriffen. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach dem Verhältnis von G und $\hat{\mathcal{L}}$. Auch ohne weitere axiomatische Forderungen kann man bereits das folgende Lemma beweisen, das T 1.3.6 in [Lud85a], Kapitel VI, §1.1, S. 155 wiedergibt.

Lemma 9.2.9 *Die Entscheidungseffekte sind Extrempunkte von $\hat{\mathcal{L}}$, das heißt, es gilt die Inklusion $G \subseteq \partial_e \hat{\mathcal{L}}$.*

Beweis:

Seien $e \in G$, $y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}}$ und $\alpha \in (0, 1)$ derart gewählt, daß $e = \alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2$ gilt. Für $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, e) = 0$ erhält man $\xi_\Delta(x, y_1) = \xi_\Delta(x, y_2) = 0$, das heißt, es gelten die Mengeninklusionen $K_0(e) \subseteq K_0(y_1), K_0(y_2)$. Mit Lemma 9.2.7 (i) ergibt sich daraus, daß $e \geq y_1, y_2$ gilt. Weiter erhält man damit für $x \in K$:

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x, e) &= \alpha \xi_\Delta(x, y_1) + (1 - \alpha) \xi_\Delta(x, y_2) \\ &\leq \alpha \xi_\Delta(x, y_1) + (1 - \alpha) \xi_\Delta(x, e). \end{aligned}$$

Also ist $\xi_\Delta(x, e) \leq \xi_\Delta(x, y_1)$. Da $x \in K$ beliebig gewählt war, gilt damit auch $e \leq y_1$. Insgesamt folgt somit $e = y_1$. ■

Das Axiom, das im nächsten Abschnitt diskutiert werden wird, wird es ermöglichen, eine noch weitergehende Aussage zum Verhältnis von G und $\hat{\mathcal{L}}$ zueinander zu machen. Dafür sei auf Satz 9.5.1 verwiesen.

9.3 Hauptaxiom über die Entmischung von Zuständen

Die abgeschlossenen Seiten von K sind im konvexen Sinne „eigenständig“, denn man kann durch Bilden endlicher konvexer Kombinationen oder Entmischungen von Elementen aus F nicht aus F herausgelangen. Ebenso gibt es kein Element aus K , das durch Zustände aus F beliebig genau approximierbar wäre, aber nicht schon zu F gehörte, denn F ist bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ abgeschlossen. Eine solche „Eigenständigkeit“ sollte sich experimentell zeigen. Man sollte stets die Mitglieder einer Seite F von allen anderen Zuständen, die nicht zu F gehören, auf experimentellem Wege unterscheiden können. Sicher kann man bei einem vorliegenden Zustand w aus \mathcal{K} ob der physikalischen Unschärfe nie beliebig genau feststellen, ob er zu einer abgeschlossenen Seite F gehört oder nicht. Deshalb muß man die vorhergehend formulierte Unterscheidungsmöglichkeit „aufweichen“, und damit zunächst unpräzise formulieren:

Zu jeder abgeschlossenen Seite F von K , jedem Zustand w_0 aus \mathcal{K} , der nahe an der Seite F liegt, und jedem Zustand w aus \mathcal{K} , der nicht nahe an F liegt, existieren ein Effekt g in \mathcal{L} , eine echt positive, kleine reelle Zahl ε und eine echt positive, deutlich von 0 verschiedene reelle Zahl δ derart, daß sowohl $\mu(w_0, g) < \varepsilon$ als auch $\mu(w, g) > \delta$ gilt.

Eine solche Formulierung stellt nur einen ersten Schritt in Richtung eines Axioms dar, denn sowohl die Formulierungen „nahe“ als auch „klein“ sind nicht präzise. Wie im Falle der Motivation der Axiome AV 1.1 und AV 1.2 wird deshalb ein geeigneter Idealisierungsprozeß durchgeführt. Dabei soll gemeinsamen Erörterungen mit H. Neumann in [Neu03] gefolgt werden, die die Herkunft des Ludwigschen Axioms AV 2s, wie es weiter unten gewonnen wird, im Vergleich zu den Diskussionen in [Lud85a], Kapitel VI, §2, S. 165 durchsichtiger gestalten.

Zunächst soll aber konkretisiert werden, was unter „nahe“ im Falle der Zustände zu verstehen ist. Wenn man zwei Zustände vergleicht, dann muß ein solcher Vergleich mit Hilfe der Uniformität der physikalischen Unschärfe vorgenommen werden, denn sie ist das einzige Instrument, um zu beurteilen, ob zwei Zustände physikalisch unterscheidbar sind oder nicht. Wenn man nun verlangt, daß zwei Zustände nahe beieinander liegen sollen, dann soll damit gemeint sein, daß sie bezüglich einer ausgewählten Unschärfemenge nicht unterscheidbar sind.

Nun kann die Idealisierung vorgenommen werden. Dabei wird die Situation betrachtet, daß man sich schrittweise immer besser einem Element aus F annähert und daß

man sich ebenso schrittweise immer besser an ein Element aus $K \setminus F$ annähert. Es liegen also zwei Folgen $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K} und zwei Elemente x_0 aus F und x aus $K \setminus F$ derart vor, daß bezüglich der Uniformität der physikalischen Unschärfe $\sigma(B_\Delta, \Delta)|_K$ die Konvergenzen $w_{0n} \rightarrow x_0$ und $w_n \rightarrow x$ gelten. In einem solchen Falle wird in idealisierender Weise verlangt, daß man immer bessere Effekte und eine echt positive Zahl δ angeben kann, so daß einerseits die zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten der Effekte in den Zuständen w_{0n} immer mehr an die 0 heranreichen und daß andererseits die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Effekte in den Zuständen w_n nie kleiner werden als δ . Man verlangt also die Existenz einer Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{L} und die Existenz einer echt positiven Zahl δ derart, daß einerseits die Konvergenz $\mu(w_{0n}, g_n) \rightarrow 0$ gilt und daß andererseits für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit $\mu(w_n, g_n)$ echt größer als δ bleibt. Die Forderung wird in der folgenden mit A_5 benannten Aussage zusammengefaßt:

A_5 Sei F eine abgeschlossene Seite von K , sei x_0 ein Element von F , und sei x als Element von $K \setminus F$ gewählt. Seien weiter $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in \mathcal{K} derart, daß bezüglich der Uniformität der physikalischen Unschärfe $\sigma(B_\Delta, \Delta)|_K$ die Konvergenzen $w_{0n} \rightarrow x_0$ und $w_n \rightarrow x$ vorliegen. Dann existieren eine echt positive reelle Zahl δ und eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} so, daß zum einen die Folge $(\mu(w_{0n}, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß zum anderen $\mu(w_n, g_n) > \delta$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wie schon bei der Gewinnung der Axiome AV 1.1 und AV 1.2 hat man damit durch Idealisierung eine mathematisch exakte Aussage gewonnen, die in ihrer Form noch recht unhandlich ist. Wegen Satz 8.1.23 ist bekanntermaßen die Normtopologie auf K feiner als die schwache Topologie der physikalischen Unschärfe. Wenn man also die Voraussetzung nach schwacher Konvergenz der Folgen in A_5 durch $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Konvergenz ersetzt, hat man eine gegenüber A_5 schwächere Aussage gewonnen. Ludwig beschränkt sich in seiner Axiomatik auf eine derart abgeschwächte Aussage:

A'_5 Sei F eine abgeschlossene Seite von K , sei x_0 ein Element von F , und sei x Element von $K \setminus F$. Seien weiter $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen in \mathcal{K} derart, daß bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ die Konvergenzen $w_{0n} \rightarrow x_0$ und $w_n \rightarrow x$ vorliegen. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} so, daß einerseits die Folge $(\mu(w_{0n}, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß andererseits $\mu(w_n, g_n) > \delta$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wie in Anhang E.4 dargelegt, kann man A'_5 in äquivalenter Weise in die folgende mathematisch ansprechendere Form bringen, die Ludwig in [Lud85a], Kapitel VI, §2.1, S. 165 präsentiert:

AV 2s Hauptaxiom über die Entmischung von Zuständen (scharfe Form):

Sei F eine abgeschlossene Seite von K , sei x_0 ein Element von F , und sei x ein Element von $K \setminus F$, dann existieren eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} und eine echt positive reelle Zahl δ derart, daß zum einen $(\hat{\mu}(x_0, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß zum anderen $\hat{\mu}(x, g_n) > \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Der Zusatz „s“ sowie der Zusatz „(scharfe Form)“ erklären sich mit Hilfe des nachfolgenden Satzes, der Erläuterungen Ludwigs in [Lud85a], Kapitel VI, §2.1, S. 165 ausführt:

Satz 9.3.1 *Gilt AV 2s, dann ist jede abgeschlossene Seite von K exponiert.*

Beweis:

Sei F eine abgeschlossene Seite von K , dann kann man mit Lemma 8.3.21 ein $x_0 \in F$ so angeben, daß $F = F(x_0)$ gilt. Zu x_0 und zu einem beliebigen $x \in K \setminus F$ liefert AV 2s eine Folge $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ und ein $\delta > 0$, so daß sowohl $\hat{\mu}(x_0, g_\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0$ als auch $\hat{\mu}(x, g_\nu) > \delta$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ gilt. Da $\hat{\mathcal{L}}$ wegen Satz 7.1.1 bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ kompakter und metrisierbarer uniformer Raum ist und da somit $\hat{\mathcal{L}}$ wegen Lemma A.6.5 bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ auch folgenkompakter Raum ist, existiert eine konvergente Teilfolge von $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, die der Übersicht halber wiederum mit $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ bezeichnet werden soll. Der zugehörige Grenzwert sei mit y_{xx_0} bezeichnet, so daß gilt:

$$y_{xx_0} \in \hat{\mathcal{L}}, \quad \hat{\mu}(x_0, y_{xx_0}) = 0 \quad \text{und} \quad \hat{\mu}(x, y_{xx_0}) \neq 0.$$

Damit erhält man dann:

$$\forall x \in K \setminus F \quad \exists y_{xx_0} \in \hat{\mathcal{L}} : y_{xx_0} \in \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) \quad \text{und} \quad \hat{\mu}(x, y_{xx_0}) \neq 0.$$

Das heißt also mit Lemma 8.3.16 (i), daß für jedes $x \in K \setminus F$ ein $y_{xx_0} \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) \subseteq K_0(y_{xx_0})$ existiert. Damit folgt weiter mit Lemma 8.3.16 (iii):

$$K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) \subseteq \bigcap_{x \in K \setminus F} K_0(y_{xx_0}) = K_0(\{y_{x'x_0} \in \hat{\mathcal{L}} \mid x' \in K \setminus F\}). \quad (9.6)$$

Da aber auch $\hat{\mu}(x, y_{xx_0}) \neq 0$, und somit $x \notin K_0(\{y_{x'x_0} \in \hat{\mathcal{L}} \mid x' \in K \setminus F\})$, für alle $x \in K \setminus F$ gilt, erhält man $K_0(\{y_{x'x_0} \in \hat{\mathcal{L}} \mid x' \in K \setminus F\}) \subseteq F$. Zusammen mit (9.6) liefert das $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) \subseteq F$.

Es gilt aber sogar die Identität $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) = F$. Dazu bedenke man, daß erstens F die kleinste x_0 enthaltende abgeschlossene Seite von K ist, daß zweitens x_0 mit Lemma 8.3.16 (ii) ein Element von $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0)$ ist und daß drittens $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0)$ mit Lemma 8.3.15 insbesondere eine Seite von K ist. Also ergibt sich $F \subseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0)$.

Mit der so gewonnenen Identität $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) = F$ sowie mit Lemma 9.2.4 (ii) folgt schließlich $F = K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(x_0) = K_0(e\hat{\mathcal{L}}_0(x_0))$, und damit ist dann wegen Lemma 8.3.15 gezeigt, daß F exponierte Seite von K ist. ■

Die Aussage des letzten Satzes läßt vermuten, daß das Axiom AV 2s eventuell doch zu scharf in dem Sinne ist, daß es zu viel Struktur fordert. So erscheint es naheliegend, die Theorie mit einem etwas abgeschwächten Axiom weiterzuentwickeln, das keine Probleme im Sinne des obigen Satzes impliziert. Das einfachste Axiom eines solchen Typs erhält man, wenn man sich von vornherein auf die exponierten Seiten beschränkt. Daher wird als Axiom eine Aussage gefordert, die Ludwig in [Lud85a], Kapitel VI, §2.1, S. 165 vorstellt:

AV 2 Hauptaxiom über die Entmischung von Zuständen (1. Teil):

Sei F eine exponierte Seite von K , sei x_0 ein Element von F , und sei x ein Element von $K \setminus F$, dann existieren eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} und eine echt positive reelle Zahl δ derart, daß zum einen $(\hat{\mu}(x_0, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß zum anderen $\hat{\mu}(x, g_n) > \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bleibt.

Allerdings dürfte die Beschränkung auf die exponierten Seiten zu vorsichtig sein, wie die folgende Betrachtung endlichdimensionaler Seiten von K nahelegt, wobei zum Begriff der Dimension von Seiten auf Definition 8.3.6 verwiesen sei. Es bezeichne F eine n -dimensionale Seite von K , dann kann man ein Element \bar{x}_0 in F und einen n -dimensionalen Untervektorraum V von B_Δ so angeben, daß $\bar{x}_0 + V$ die affine Hülle von F darstellt. Als Basis von V kann man eine Familie $(\bar{x}_i)_{i=1}^n$ so finden, daß $(\bar{x}_0 + \bar{x}_i)_{i=1}^n$ in F liegt. Wäre dem nicht so, wäre $\bar{x}_0 + V$ nicht mehr die kleinste F umfassende affine Teilmenge von B_Δ . Also sind alle Elemente einer endlichdimensionalen Seite F von K durch einen festen endlichen Satz von Elementen aus F in vollständiger Weise charakterisierbar. Also sollte es stets möglich sein, durch „endliche Anstrengungen“ die Elemente von F von denjenigen, die nicht zu F gehören, zu unterscheiden. Das heißt, man fordert auch für endlichdimensionale Seiten eine Aussage in der Art von AV 2s. Da aber mit Lemma 8.3.10 endlichdimensionale Seiten abgeschlossen sind, ergibt sich mit Satz 9.3.1 auch ihre Exponiertheit. Daher

wird unmittelbar das von Ludwig in [Lud85a], Kapitel VI, §2.1, S. 165 aufgestellte Axiom gefordert:

AV 2f Hauptaxiom über die Entmischung von Zuständen (2. Teil):

Jede endlichdimensionale Seite von K ist auch exponiert.

AV 2f stellt im gewissen Sinne eine Umkehrung von AV 2 dar, da man eine Aussage zur Hand hat, die nicht von der Exponiertheit ausgeht, sondern auf sie schließen läßt. Physikalisch lag es nahe, das Axiom AV 2f bereits jetzt aufzuführen, mathematisch wird es allerdings erst in Satz 9.8.3 seine erste Verwendung finden, so daß zunächst also nur mit den Axiomen AV 1.1, AV 1.2 und AV 2 gearbeitet wird.

Bereits an mehreren Stellen wurde in den zurückliegenden Erörterungen die Eigenschaft der Folgenkompaktheit von $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ verwandt, die sich aus der Kompaktheit und der Metrisierbarkeit von $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ durch Lemma A.6.5 ergibt. Mit ihrer Hilfe kann man AV 2 in für manche Anwendungen geeignetere Formen bringen. Der folgende Satz beinhaltet Teile von T 2.1.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.1, S. 165:

Satz 9.3.2 *Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) AV 2

(ii) *Zu jeder exponierten Seite von K und jedem Element x aus $K \setminus F$ existiert ein Element y der Menge $\hat{\mathcal{L}}$ derart, daß die Inklusion $K_0(y) \supseteq F$ und die Relation $\hat{\mu}(x, y) \neq 0$ gilt.*

(iii) $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ ist identisch mit der Menge aller exponierten Seiten von K .

Beweis:

(i) \implies (ii): Sei F exponierte Seite von F , sei $x \in K \setminus F$, und sei x_0 entsprechend Lemma 8.3.21 gewählt, so daß $F = F(x_0)$ gilt. Gelte nun AV 2. Dann existieren eine Folge $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$ und ein $\delta > 0$ derart, daß gilt:

$$(\hat{\mu}(x_0, g_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow 0 \quad (9.7)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \hat{\mu}(x, g_n) > \delta. \quad (9.8)$$

Aufgrund der Folgenkompaktheit von $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ besitzt $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine in $\hat{\mathcal{L}}$ konvergente Teilfolge, die wiederum mit $(g_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ bezeichnet sei. Der zugehörige

Grenzwert heiße y . Die Stetigkeit von $\hat{\mu}(x_0, \cdot)$ bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ liefert mit (9.7) und (9.8):

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(x_0, y) &= 0 \\ \hat{\mu}(x, y) &\neq 0.\end{aligned}$$

Da x_0 derart gewählt wurde, daß $F = F(x_0)$ gilt und da somit F die kleinste x_0 umfassende abgeschlossene Seite von K ist, muß deshalb $F \subseteq K_0(y)$ sein.

(ii) \implies (iii): Mit Lemma 8.3.15 ist bekannt, daß $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ Teilmenge der Menge aller exponierten Seiten von K ist. Sei jetzt andersherum F eine exponierte Seite von K , dann ist F insbesondere Teilmenge von K , und somit gilt unter Verwendung der Punkte (i) - (iii) von Lemma 8.3.16 auch $F \subseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F)$. Man kann nun aber die Identität von F und $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F)$ nachweisen. Nimmt man nämlich an, es gälte $F \neq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F)$, dann existierte ein $x \in K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F) \setminus F$, und somit existierte mit dem vorausgesetzten Punkt (ii) ein $y \in \hat{\mathcal{L}}$ dergestalt, daß $x \notin K_0(y)$ und $K_0(y) \supseteq F$ gälte. Aus der Relation $K_0(y) \supseteq F$ ergäbe sich mit Lemma 8.3.16 (i) und (v) sofort $K_0(y) = K_0 \hat{\mathcal{L}}_0 K_0(y) \supseteq K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F)$. Also wäre auch $x \in K_0(y)$, und es läge ein Widerspruch vor. Es muß also $F = K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F)$ gelten. Da aber mit Lemma 8.3.16 (v) die Menge $K_0 \hat{\mathcal{L}}_0(F)$ zu $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ gehört, sind auch alle exponierten Seiten von K Elemente der Menge $W_{\hat{\mathcal{L}}}$.

(iii) \implies (i): Sei F exponierte Seite von K , sei $x \in K \setminus F$, und sei $x_0 \in F$. Nach Voraussetzung existiert eine Menge $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ mit $F = K_0(N)$.

Es sei ein $y \in N$ derart gewählt, daß $\hat{\mu}(x, y) \neq 0$ gilt. Das ist möglich, da nach Voraussetzung $x \notin F$ gilt.

Da $\hat{\mathcal{L}}$ mit dem $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ -Abschluß von \mathcal{L} zusammenfällt und da $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ metrisierbar ist, existiert zu y eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$, die bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ gegen y konvergiert. Man setze nun $2\delta := \hat{\mu}(x, y)$. Wegen $\hat{\mu}(x, y) \neq 0$ gilt $\delta > 0$. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, daß gilt:

$$\forall n \geq n_0 : \hat{\mu}(x, g_n) > \delta. \quad (9.9)$$

Betrachtet man jetzt anstatt der bisher verwendeten Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Restfolge von $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab dem n_0 -ten Glied und bezeichnet man die Restfolge der Einfachheit halber wieder mit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann konvergiert weiterhin $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$ gegen y . Damit gilt aber auch die Konvergenz $\hat{\mu}(x_0, g_n) \longrightarrow \hat{\mu}(x_0, y) = 0$. Mit (9.9) erhält jetzt man $\hat{\mu}(x, g_n) > \delta > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

9.4 Die Ludwigschen Darstellungssätze für die Zustandsmenge $\overline{\mathcal{K}}$ und die Effektmenge $\hat{\mathcal{L}}$

Durch die im zurückliegenden Teil des Kapitels neu gewonnenen Axiome AV 1.2 und AV 2 ist es möglich, zwei wichtige Darstellungssätze zu beweisen. Es sei bemerkt, daß die nachfolgenden Erörterungen nicht auf die Axiome AV 1.1 und AV 2f zurückgreifen.

Zunächst wird diskutiert, daß $\hat{\mathcal{L}}$ mit der Menge $[0, 1]_{\Delta}$ identisch ist. Das liefert eine einfache Möglichkeit, zu überprüfen, ob ein Element y in Δ auch zu $\hat{\mathcal{L}}$ gehört oder nicht. In der Folge wird sich die im Kapitel 8 bereits angesprochene Aussage beweisen lassen, daß K und $\overline{\mathcal{K}}$ zusammenfallen.

9.4.1 Der Darstellungssatz für $\hat{\mathcal{L}}$

Zum Beweis der angestrebten Darstellungssatzes ist es notwendig, zunächst eine Reihe von Hilfsaussagen zu diskutieren. Dafür sei auf Abschnitt E.6 verwiesen. Mit Hilfe der dort gewonnenen Aussagen läßt sich das folgende zentrale Theorem formulieren, das die Aussage von T 2.2.2 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 167 darlegt:

Satz 9.4.1 (Darstellungssatz für $\hat{\mathcal{L}}$) *Die Aussagen AV 1.2 und AV 2 gelten genau dann, wenn die Mengen $\hat{\mathcal{L}}$ und $[0, 1]_{\Delta}$ identisch sind.*

Beweis:

Das zugrundeliegende Dualsystem für die hier vorgelegten Betrachtungen ist stets das Norm-Dualsystem $\langle B_{\Delta}, \Delta, \xi_{\Delta} \rangle$. Innerhalb des Beweises sei zugunsten einer besseren Übersicht die absolutpolare Menge zu $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ mit $(\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}})^{|o|}$ bezeichnet. Analog sei die absolutpolare Menge zu $B_{\Delta|1|}$ mit $(B_{\Delta|1|})^{|o|}$ benannt. Es wird nochmals auf die ausführlichere Erörterung der Begriffe im Beweis zu Lemma 8.4.6 hingewiesen.

„ \implies “ : Zunächst gilt mit Lemma E.6.1

$$\begin{aligned} B_{\Delta|1|} &= \{x \in B_{\Delta} \mid \|x\|_{B_{\Delta}} \leq 1\} = \{x \in B_{\Delta} \mid |\xi_{\Delta}(x, y)| \leq 1 \ \forall y \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}\} \\ &= (\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}})^{|o|}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Aufgrund des Bipolarensatzes, vergleiche [Köt66], §20.8 (5), S. 248, und aufgrund des Lemmas E.6.2 fallen $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ und die ihr zugehörige absolutbipolare Menge zusammen, so daß man wegen (9.10) und Lemma 8.4.6 erhält:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}} &= (B_{\Delta_{|1|}})^{|o|} = \{y \in \Delta \mid |\xi_{\Delta}(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in B_{\Delta_{|1|}}\} \\ &= \{y \in \Delta \mid |\xi_{\Delta}(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in \overline{\text{co}}^{\|\cdot\|_{B_{\Delta}}}(K \cup (-K))\} \\ &= \{y \in \Delta \mid |\xi_{\Delta}(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in K \cup (-K)\} \\ &= \{y \in \Delta \mid |\xi_{\Delta}(x, y)| \leq 1 \ \forall x \in K\} = \Delta_{|1|}. \end{aligned}$$

Damit folgt aber sofort $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$, wie die folgenden Erörterungen zeigen. Mit Lemma 8.4.4 (i) gilt ohnehin schon $\hat{\mathcal{L}} \subseteq [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$. Wählt man nun umgekehrt ein $y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$, dann ist $\mathbf{1} - 2y \in \Delta_{|1|}$, und somit muß mit dem obigen Ergebnis ein $\bar{y} \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $\mathbf{1} - 2y = \mathbf{1} - 2\bar{y}$ existieren. Das bedeutet aber sofort, daß $y = \bar{y}$ gilt, und damit erhält man $y \in \hat{\mathcal{L}}$.

„ \longleftarrow “ :

zu AV 1.2: Sei $y_0 \in \hat{\mathcal{L}}$, sei $y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$, und sei $x_0 \in K_0(y_0) \cap K_0(y)$. Man setze $\bar{y} := y$, und man definiere die Abbildung

$$\delta : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad \varepsilon \longmapsto \delta(\varepsilon) := \varepsilon.$$

Dann gelten die Aussagen $x_0 \in K_0(\bar{y}) = K_0(y)$ und $\delta(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$. Außerdem gilt für ein $x' \in K$ mit $\xi_{\Delta}(x', y) \geq 1 - \varepsilon$:

$$\xi_{\Delta}(x', \bar{y}) = \xi_{\Delta}(x', y) \geq 1 - \varepsilon = 1 - \delta(\varepsilon).$$

zu AV 2: Sei F eine exponierte Seite von K , dann existiert unter Berücksichtigung von Lemma 8.3.13 ein $y \in \Delta$ mit $F = \{x \in K \mid \xi_{\Delta}(x, y) = 0\}$ derart, daß $\xi_{\Delta}(x, y) \geq 0$ für alle $x \in K$ gilt. Setzt man $\bar{y} := y/\|y\|$, dann gilt $\bar{y} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$, wie die folgenden Überlegungen zeigen. Man erhält zunächst aufgrund der obigen Eigenschaft von y , daß $\xi_{\Delta}(x, \bar{y}) \geq 0$ für jedes $x \in K$ ist. Außerdem ergibt sich für jedes $x \in K$ mit Lemma 8.2.13 (ii):

$$\xi_{\Delta}(x, \bar{y}) = |\xi_{\Delta}(x, \bar{y})| \leq \sup_{x' \in K} |\xi_{\Delta}(x', \bar{y})| = \|\bar{y}\| = 1.$$

Also gilt $\bar{y} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta} = \hat{\mathcal{L}}$. Trivialerweise ist auch $K_0(\bar{y}) = F$, so daß man für ein beliebiges $\bar{x} \in K \setminus F$ erhält: $\xi_{\Delta}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$. Also folgt mit Satz 9.3.2 die Gültigkeit von AV 2. ■

Da künftig die Axiome AV 1.2 und AV 2 gefordert werden, darf also im weiteren von $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$ ausgegangen werden. Bereits der nächste Unterabschnitt greift darauf zurück.

9.4.2 Der Darstellungssatz für $\overline{\mathcal{K}}$

Auch zum Beweis des nun anvisierten Darstellungssatzes ist es im Interesse einer gewissen Übersichtlichkeit vonnöten, eine Reihe kleinerer Aussagen in den Abschnitt E.7 auszugliedern. Es gilt dann der folgende Satz, der einen Teil von T 2.2.3 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 167 darstellt und dessen Beweis auf T 3.18 und T 3.19 sowie Anmerkungen in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 113 beruht:

Satz 9.4.2 (Darstellungssatz für $\overline{\mathcal{K}}$) *Die Mengen $\overline{\mathcal{K}}$ und K fallen zusammen.*

Beweis:

Zunächst werden zwei Hilfsaussagen bewiesen.

Hilfsaussagen:

- (i) Es gilt : $\overline{\mathcal{K}} \subseteq B_\Delta$.
- (ii) Es gilt : $B_\Delta \cap \overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} = B_\Delta \cap \hat{\mathcal{K}} = K$.

zu (i): Es wird für die Betrachtungen innerhalb des Beweises gesetzt:

$$\tilde{B} := \{x \in \mathcal{D}' \mid \langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{L}} \text{ ist gleichmäßig stetig bezüglich } \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})\}.$$

Dabei bezeichne $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{L}}$ die Restriktion von $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}$ auf \mathcal{L} . Man erinnere, daß wegen Lemma 8.1.15 die Identität $\langle g, w \rangle_{\mathcal{D}} = \mu(w, g)$ für $w \in \mathcal{K}$ und $g \in \mathcal{L}$ gilt. Somit erhält man weiter

$$\tilde{B} = \{x \in \mathcal{D}' \mid \langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{L}} \text{ ist gleichmäßig stetig bezüglich } \sigma(\mathcal{D}, \mathcal{K})|_{\mathcal{L}}\},$$

wobei $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{K})|_{\mathcal{L}}$ wie üblich die zugehörige Unterraumuniformität bezeichnen soll. Bedenkt man jetzt die Definition von $\overline{\mathcal{K}}$ in (7.4), dann gilt wegen des Einbettungssatzes 8.2.7 und des Satzes 8.2.10:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{K}} &= \{x \in \hat{\mathcal{K}} \mid H_x \text{ ist gleichmäßig stetig bezüglich } \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})\} \\ &= \{x \in \overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} \mid H_x \text{ ist gleichmäßig stetig bezüglich } \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K})\} \\ &= \{x \in \overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} \mid \langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{L}} \text{ ist gleichmäßig stetig bezüglich } \sigma(\mathcal{D}, \mathcal{K})|_{\mathcal{L}}\}. \end{aligned}$$

Man sieht unmittelbar, daß $\overline{\mathcal{K}} \subseteq \tilde{B}$ gilt. Der Beweis der Hilfsaussage (i) ist deshalb geglückt, wenn man zeigen kann, daß $\tilde{B} \subseteq B_\Delta$ gilt.

Sei dafür ein $x \in \tilde{B}$ gewählt, also liegt x in \mathcal{D}' , und $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{L}}$ ist gleichmäßig stetig bezüglich $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{K})|_{\mathcal{L}}$. Die Abbildung $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}|_{\mathcal{L}}$ kann mit Satz A.4.7 in eindeutiger Weise gleichmäßig stetig auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ fortgesetzt werden.

Mit den Lemmata E.7.1 und E.7.2 kann man diese Fortsetzung aber noch weiter in kanonischer Weise eindeutig auf ganz Δ fortsetzen. Die so gewonnene Fortsetzung von $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}|\mathcal{L}}$ auf ganz Δ trage für die weiteren Betrachtungen den Namen l . Nach Konstruktion ist $l|_{\hat{\mathcal{L}}}$ auf $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ stetig, und damit ist wegen Lemma E.7.3 auch die Restriktion $l|_{\mathbf{1}-2\hat{\mathcal{L}}}$ stetig. Wegen der Identität $\Delta_{|1|} = \mathbf{1}-2\hat{\mathcal{L}}$ gemäß Lemma E.7.1 ist also auch $l|_{\Delta_{|1|}}$ bezüglich der zugehörigen Unterraumtopologie stetig. Man setze:

$$S := \{y \in \Delta_{|1|} \mid l(y) = 0\}.$$

Es wird zunächst gezeigt, daß S bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ abgeschlossen ist. Dafür betrachte man ein Element $y \in \Delta$ und ein Netz $(y_i)_{i \in I}$ in S derart, daß $(y_i)_{i \in I}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ gegen y konvergiert. Der Satz von Alaoglu, vergleiche [Wer97], Korollar VIII.3.12, S. 344, besagt, daß $\Delta_{|1|}$ kompakt ist bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$, denn mit Satz 8.2.3 (ii) und mit Lemma 8.1.23 folgt die Identifizierbarkeit von Δ und B'_{Δ} in der Form, daß die Identität $\sigma(\Delta, B_{\Delta}) = \sigma(B'_{\Delta}, B_{\Delta})$ gilt. Damit ist $\Delta_{|1|}$ auch bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ abgeschlossen, so daß $y \in \Delta_{|1|}$ sein muß. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $l(y) = 0$ gilt. Mit der vorausgesetzten Konvergenz $y_i \xrightarrow{\sigma(\Delta, B_{\Delta})} y$ folgt aber auch die Konvergenz von $(y_i)_{i \in I}$ gegen y bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})|_{\Delta_{|1|}}$, und deshalb ergibt sich aus der Stetigkeit von $l|_{\Delta_{|1|}}$ die gesuchte Beziehung $l(y) = 0$. Folglich ist S bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ abgeschlossen.

S kann man aber auch, wie folgt, darstellen:

$$S = \{y \in \Delta \mid l(y) = 0\} \cap \Delta_{|1|}.$$

Mit dem Korollar aus [SW99], Kapitel IV, §6.4, S. 152, das im Beweis von 8.1.27 wiedergegeben wurde, folgt deshalb aus der $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ -Abgeschlossenheit von S auch die $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ -Abgeschlossenheit von $\{y \in \Delta \mid l(y) = 0\}$. Daraus erhält man mit §4.2 in [SW99], Kapitel I, S. 24 die Stetigkeit von l bezüglich $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$. Mit §1.2 aus [SW99], Kapitel IV, S. 124 ist damit die Existenz eines $x' \in B_{\Delta}$ derart garantiert, daß für alle $y \in \Delta$ gilt:

$$l(y) = \langle x', y \rangle_{B_{\Delta}} = \xi_{\Delta}(x', y).$$

l ist aber eine Fortsetzung von $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}|\mathcal{L}}$, so daß für alle $g \in \mathcal{L}$ gilt:

$$l(g) = \xi_{\Delta}(x', g) = \langle g, x' \rangle_{\mathcal{D}} = \langle g, x \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Da \mathcal{D} der $\|\cdot\|$ -Abschluß des linearen Aufspans von \mathcal{L} ist und da $\langle \cdot, x \rangle_{\mathcal{D}}$ und $\langle \cdot, x' \rangle_{\mathcal{D}}$ normstetige Abbildungen sind, erhält man sogar für alle $y \in \mathcal{D}$

die Identität $\langle y, x' \rangle_{\mathcal{D}} = \langle y, x \rangle_{\mathcal{D}}$. Nun ist aber $\langle \mathcal{D}, \mathcal{D}', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}} \rangle$ ein Dualsystem, und somit folgt daraus $x = x' \in B_{\Delta}$.

zu (ii): Die Kette $K \subseteq B_{\Delta} \cap \hat{\mathcal{K}} \subseteq B_{\Delta} \cap \overline{K}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ stellt kein Problem dar, da die Relationen $K \subseteq \hat{\mathcal{K}}$, $K \subseteq B_{\Delta}$ und $K \subseteq \overline{K}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ bereits bekannt oder trivial sind. Es bleibt somit noch, $B_{\Delta} \cap \overline{K}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})} \subseteq K$ zu zeigen.

Sei dafür $x \in B_{\Delta} \cap \overline{K}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ gewählt. Da x insbesondere Element aus $\overline{K}^{\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})}$ ist, existiert ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in K , das bezüglich $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$ gegen x konvergiert. Mit Satz 8.2.5 (iii) erhält man deshalb für alle $i \in I$ und alle $y \in \mathcal{D}$:

$$\xi_{\mathcal{D}}(x_i, y) = \xi_{\Delta}(x_i, y). \quad (9.11)$$

Da auch $x \in B_{\Delta}$ gilt, ergibt sich ebenfalls mit Satz 8.2.5 (iii) für jedes $y \in \mathcal{D}$:

$$\xi_{\Delta}(x, y) = \xi_{\mathcal{D}}(x, y) = \lim_{i \in I} \xi_{\mathcal{D}}(x_i, y). \quad (9.12)$$

Aus (9.11) und (9.12) folgt mit Hilfe von Lemma 8.2.13 (i) insbesondere $\xi_{\Delta}(x, \mathbf{1}) = 1$. Wegen der Lemmata E.7.7 und E.7.8 ist deshalb der Beweis der Hilfsaussage (ii) abgeschlossen, falls man die Aussage

$$\forall y \in \overline{\mathcal{D} \cap B'_+}^{\sigma(\Delta, B_{\Delta})} : \xi_{\Delta}(x, y) \geq 0 \quad (9.13)$$

zeigt, wobei $B'_+ = \{y' \in \Delta \mid \xi_{\Delta}(x, y') \geq 0 \forall x \in K\}$ gilt. Zum Nachweis wähle man zunächst ein $y \in \mathcal{D} \cap B'_+$. Da y insbesondere in B'_+ liegt, gilt $\xi_{\Delta}(x_i, y) \geq 0$ für alle $i \in I$. Mit (9.11) erhält man damit $\xi_{\mathcal{D}}(x_i, y) \geq 0$ für alle $i \in I$. Also liefert (9.12), daß $\xi_{\Delta}(x, y) \geq 0$ gilt. Somit hat man die zu zeigende Aussage (9.13) für alle $y \in \mathcal{D} \cap B'_+$ bewiesen. Die Erweiterung auf den Abschluß ist dann offensichtlich aufgrund der $\sigma(\Delta, B_{\Delta})$ -Stetigkeit von $\xi_{\Delta}(x, \cdot)$, so daß die Hilfsaussage (ii) bewiesen ist.

Damit stehen die beiden Hilfsaussagen zur Verfügung, und man kann zum Beweis der eigentlichen Aussage kommen. Mit Satz 8.2.11 ist bereits die eine Richtung bekannt, denn es gilt dort $K \subseteq \overline{\mathcal{K}}$. Andererseits gilt aber mit obiger Hilfsaussage (i) die Mengeninklusion $\overline{\mathcal{K}} \subseteq B_{\Delta}$. Der Einbettungssatz 8.2.7 liefert aber zudem $\hat{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\Delta, B_{\Delta})}$. Nach Definition gilt $\overline{\mathcal{K}} \subseteq \hat{\mathcal{K}}$. Also ist $\overline{\mathcal{K}} \subseteq B_{\Delta} \cap \overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\Delta, B_{\Delta})}$. Punkt (ii) der obigen Hilfsaussagen besagt aber gerade, daß $B_{\Delta} \cap \overline{\mathcal{K}}^{\sigma(\Delta, B_{\Delta})} = K$ ist, so daß man also insbesondere $\overline{\mathcal{K}} \subseteq K$ findet. ■

Mit dem letzten Satz ist ein Ziel erreicht worden, das bei der Einführung der Menge K in Abschnitt 8.2 bereits erwähnt wurde. Erweitert man nämlich die mathematische Theorie, wie sie im Rahmen der Kapitel 5 bis einschließlich 8 formuliert wurde,

um die Axiome AV 1.2 und AV 2, dann gewinnt man die Identität der physikalisch relevanten Menge $\overline{\mathcal{K}}$ und der mathematisch günstigen Menge K .

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, daß sich vom Standpunkt des obigen Darstellungssatzes auch der Name $\overline{\mathcal{K}}$ rechtfertigt, denn es handelt sich bei $\overline{\mathcal{K}}$ offenbar um einen Abschluß, nämlich den Normabschluß, von \mathcal{K} .

9.5 Die Orthomodularität des Verbandes G und sein Verhältnis zu $\hat{\mathcal{L}}$

In Lemma 9.2.9 war bereits eine erste Aussage zum Verhältnis von G und $\hat{\mathcal{L}}$ dahingehend formuliert worden, daß die Entscheidungseffekte Extrempunkte der Menge aller Effekte $\hat{\mathcal{L}}$ sind. Stellt man aber auf axiomatischem Wege sicher, daß $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ gilt, wie es durch die Axiome AV 1.2 und AV 2 gemäß Satz 9.4.1 der Fall ist, kann man die besondere Rolle der Entscheidungseffekte im Verhältnis zur Menge $\hat{\mathcal{L}}$ aller Effekte noch weiter konkretisieren. Die folgende Aussage findet sich als Teil von T 3.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 168:

Satz 9.5.1 *Der bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gebildete Abschluß der konvexen Hülle von G ist identisch mit $\hat{\mathcal{L}}$, das heißt, es gilt:*

$$\overline{co}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} G = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}.$$

Die Extrempunkte von $\hat{\mathcal{L}}$ liegen im Abschluß von G bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$, das heißt in Symbolen: $\partial_e \hat{\mathcal{L}} \subseteq \overline{G}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$.

Beweis:

Zunächst wird die folgende Hilfsaussage bewiesen:

$$\forall x \in B_\Delta : \sup_{e \in G} \xi_\Delta(x, e) = \sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y). \quad (9.14)$$

Da $G \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ gilt, ist trivialerweise $\sup_{e \in G} \xi_\Delta(x, e) \leq \sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y)$.

Für die andere Richtung sei $x \in B_\Delta$ gewählt. Mit dem Darstellungstheorem 8.4.7 für die Elemente von B_Δ erhält man für jedes $\varepsilon > 0$ zwei reelle Zahlen $\alpha, \beta \geq 0$, zwei Elemente $x_1, x_2 \in K$ und ein Element $y_0 \in \Delta_{|1}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x_1 - \beta x_2, \\ \xi_\Delta(x_1, y_0) &\geq 1 - \varepsilon, \\ \xi_\Delta(x_2, y_0) &= -1. \end{aligned}$$

Man betrachte nun $g_0 := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + y_0) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$. Da $\xi_\Delta(u, \mathbf{1}) = 1$ für alle $u \in K$ gilt, erhält man:

$$\xi_\Delta(x, g_0) = \alpha \xi_\Delta(x_1, g_0) \geq \alpha(1 - \frac{\varepsilon}{2}).$$

Mit Lemma 9.2.7 (ii) existiert zu g_0 ein $e_0 \in G$ mit $e_0 \geq g_0$. Also gilt insbesondere

$$\xi_\Delta(x, e_0) \geq \xi_\Delta(x, g_0) \geq \alpha(1 - \frac{\varepsilon}{2}). \quad (9.15)$$

Außerdem erhält man für jedes $y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$:

$$\xi_\Delta(x, y) = \alpha \xi_\Delta(x_1, y) - \beta \xi_\Delta(x_2, y) \leq \alpha \xi_\Delta(x_1, y) \leq \alpha.$$

Damit ergibt sich

$$\sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y) \leq \alpha. \quad (9.16)$$

Mit (9.15) und (9.16) erhält man somit:

$$\sup_{e \in G} \xi_\Delta(x, e) \geq \xi_\Delta(x, e_0) \geq \alpha(1 - \frac{\varepsilon}{2}) \geq (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y).$$

Da die so gewonnene Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt und da die Terme $\sup_{e \in G} \xi_\Delta(x, e)$ und $\sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y)$ unabhängig von ε sind, ergibt sich:

$$\sup_{e \in G} \xi_\Delta(x, e) \geq \sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y),$$

also ist der Beweis der Hilfsaussage (9.14) gelungen.

Zum Beweis der eigentlichen Aussagen legt man $\langle B_\Delta, \Delta, \langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\Delta} \rangle$ als Dualsystem zugrunde, dann folgt mit dem Bipolarensatz, wie er sich bei [Köt66], §20.8 (5), S. 248 findet,

$$\overline{\text{co}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} G = G^{oo}, \quad (9.17)$$

da $\mathbf{0}$ mit Lemma 9.2.5 in G liegt. Für die polare Menge zu G folgt mit (9.14):

$$\begin{aligned} G^o &= \{x \in B_\Delta \mid \xi_\Delta(x, e) \leq 1 \ \forall e \in G\} = \{x \in B_\Delta \mid \sup_{e \in G} \xi_\Delta(x, e) \leq 1\} \\ &= \{x \in B_\Delta \mid \sup_{y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta} \xi_\Delta(x, y) \leq 1\} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta^o = \hat{\mathcal{L}}^o. \end{aligned}$$

Damit ist dann auch $G^{oo} = \hat{\mathcal{L}}^{oo}$. Da aber $\hat{\mathcal{L}}$ eine konvexe und $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossene Menge ist, die die $\mathbf{0}$ enthält, folgt mit erneuter Anwendung des Bipolarensatzes $\hat{\mathcal{L}}^{oo} = \hat{\mathcal{L}}$. Also ergibt sich damit aus (9.17) die Behauptung. ■

Damit sind die wichtigsten Aussagen zum Verhältnis der Entscheidungseffekte zur Gesamtmenge der Effekte aufgeführt worden.

Ausgangspunkt der Rechtfertigung eines neuen Axioms besteht in der folgenden Beobachtung, die T 3.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 168 wiedergibt:

Lemma 9.5.2 *Für jedes Element e der Menge $G \setminus \{\mathbf{0}\}$ ergibt sich $\|e\| = 1$.*

Beweis:

Sei $e \in G$ mit $e \neq \mathbf{0}$, dann ist $\|e\| \neq \mathbf{0}$. Damit ergibt sich $e/\|e\| \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta} = \hat{\mathcal{L}}$. Außerdem erhält man trivialerweise $K_0(e) = K_0(e/\|e\|)$. Deshalb folgt mit Lemma 9.2.7 auch $e \geq e/\|e\|$. Also ist $\|e\| \xi_{\Delta}(x, e) \geq \xi_{\Delta}(x, e)$ für alle $x \in K$, das heißt $\|e\| \geq 1$. Andererseits liefert Lemma 8.2.13 (iii) wegen $e \in G \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ auch $\|e\| \leq 1$. ■

Das heißt offenbar, daß man für jeden Entscheidungseffekt e aus G und zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ einen Zustand w aus \mathcal{K} angeben kann, so daß $\hat{\mu}(w, e) > 1 - \varepsilon$ gilt. Das ist aber physikalisch nicht von der Aussage zu unterscheiden, daß es für jedes e aus $G \setminus \{\mathbf{0}\}$ auch tatsächlich ein x in K mit $\hat{\mu}(x, e) = 1$ gibt, also der Wert 1 von $\hat{\mu}(\cdot, e)$ auch tatsächlich angenommen wird. Denn würde man für ein e aus $G \setminus \{\mathbf{0}\}$ fordern, daß $\hat{\mu}(x, e) \neq 1$ für alle x aus K gälte, dann würde es nach Lemma 9.5.2 ein w in \mathcal{K} mit $1 > \hat{\mu}(w, e) > 1 - 10^{-100}$ geben. Um solche Feinheiten experimentell überhaupt erfassen zu können, brauchte man schon Versuchsreihen mit 10^{100} Einzelereignissen, die gar nicht realisierbar sind. Also ist die Forderung des folgenden Axioms AVid, wie es Ludwig in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 169 vorstellt, im Vergleich zur Aussage von Lemma 9.5.2 physikalisch irrelevant.

AVid Zu jedem Element e aus $G \setminus \{\mathbf{0}\}$ existiert ein Element x aus K mit $\hat{\mu}(x, e) = 1$.

AVid stellt nur eine Idealisierung der mathematischen Theorie dar. Es muß lediglich beachtet werden, ob AVid nicht im Widerspruch zu den bisherigen oder künftigen Idealisierungen steht. Bisher sind allerdings keine Widersprüche zu Tage getreten. Der Umstand des Charakters einer rein mathematischen Idealisierung wird im Namen des Axioms durch den Zusatz „id“ zum Ausdruck gebracht.

Auf der Basis der bisherigen Axiomatik kann AVid in eine Reihe äquivalenter Formen gebracht werden, die man als T 3.3 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 169 findet:

Lemma 9.5.3 *Gelten die Aussagen AV 1.1, AV 1.2 und AV 2, dann sind äquivalent:*

- (i) *AVid*
- (ii) *Für jedes e aus G liegt $\mathbf{1} - e$ in G .*
- (iii) *Es gilt: $\mathbf{1} - G = G$.*
- (iv) *Für jedes Element e aus $G \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist die Menge $K_0(\mathbf{1} - e)$ nicht-leer.*
- (v) *Gilt für zwei Elemente e_1, e_2 in G die Relation $e_1 \leq e_2$, dann liegt $e_2 - e_1$ in G .*

Beweis:

(ii) \iff (iii): Punkt (ii) ist äquivalent zur Aussage $\mathbf{1} - G \subseteq G$. Damit gilt aber auch $G = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - G) \subseteq \mathbf{1} - G$.

(i) \iff (iv): Offensichtlich ist $\xi_\Delta(x, e) = 1 \iff K_0(\mathbf{1} - e) \neq \emptyset$.

(ii) \implies (iv): Sei $e \in G$ mit $e \neq \mathbf{0}$, dann ist $\mathbf{1} - e \neq \mathbf{1}$, und mit Punkt (ii) dieses Lemmas folgt $\mathbf{1} - e \in G$. Mit Lemma 9.2.6 ist dann $K_0(\mathbf{1} - e) \neq K_0(\mathbf{1}) = \emptyset$.

(iv) \implies (v): Seien $e_1, e_2 \in G$ mit $e_1 \leq e_2$, dann ist $e_2 \geq e_2 - e_1 \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$. Mit Lemma 9.2.7 erhält man ein $e' \in G$, so daß die folgende Kette gilt:

$$K_0(e') = K_0(e_2 - e_1) \supseteq K_0(e_2).$$

Daraus folgt wiederum mit Lemma 9.2.7 sowohl $e' \leq e_2$ als auch $e' \geq e_2 - e_1$. Da $e_2 - e_1 \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ gilt, ergibt sich

$$\mathbf{0} \leq e' - (e_2 - e_1) \leq e' \tag{9.18}$$

$$e' - (e_2 - e_1) \leq e_2 - (e_2 - e_1) = e_1. \tag{9.19}$$

Setzt man $g := e' - (e_2 - e_1)$, dann impliziert (9.18) gerade

$$\mathbf{0} \leq g \leq e', e_1,$$

so daß mit Satz 9.2.8 folgt: $g \leq e' \wedge e_1 \in G$. Es gilt aber $e' \wedge e_1 = \mathbf{0}$, denn wäre dem nicht so, dann wäre mit Punkt (iv) $K_0(\mathbf{1} - e' \wedge e_1) \neq \emptyset$, und somit existierte ein $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, e' \wedge e_1) = 1$. Damit gälte $\xi_\Delta(x, e') = \xi_\Delta(x, e_1) = 1$. Aber $\xi_\Delta(x, e_1) = 1$ bedingt auch $\xi_\Delta(x, e_2) = 1$, da $e_2 \geq e_1$ gilt. Also liegt x in $K_0(e_2 - e_1) = K_0(e')$. Das ist aber ein Widerspruch, so daß also $e' \wedge e_1 = \mathbf{0}$ gelten muß.

Da aber $g \leq e' \wedge e_1$ gilt, ist also auch $g = \mathbf{0}$, und damit ergibt sich $e_2 - e_1 = e' \in G$.

(v) \implies (ii): Es seien $e_1 = e$ und $e_2 = \mathbf{1}$ gewählt, dann liefert (v) wegen $e \leq \mathbf{1}$ sofort $\mathbf{1} - e \in G$. ■

Von nun an sollen AVid und damit alle Aussagen des vorigen Lemmas axiomatisch gefordert werden. AVid ermöglicht es insbesondere, auf G eine wichtige Struktur zu etablieren, wie das nächste Lemma, entsprechend T 3.5 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 169f., zeigt:

Lemma 9.5.4 *Die Abbildung*

$$\perp : G \longrightarrow G, \quad e \longmapsto e^\perp := \mathbf{1} - e$$

ist eine Orthokomplementation auf G .

Beweis:

Zunächst muß gesagt werden, daß erst AVid die Wohldefiniertheit der obigen Abbildung als Abbildung auf ganz G garantiert, wie aus Lemma 9.5.3 (ii) hervorgeht. Somit fehlt noch der Nachweis der Eigenschaften einer Orthokomplementation.

Seien dafür $e_1, e_2 \in G$ gewählt, dann gilt:

- (i) Ist $e_1 \leq e_2$ ergibt sich unmittelbar $\mathbf{1} - e_1 \geq \mathbf{1} - e_2$. Das ist aber gerade äquivalent zur Relation $e_1^\perp \geq e_2^\perp$.
- (ii) $e_1^{\perp\perp} = \mathbf{1} - (\mathbf{1} - e_1) = e_1$.
- (iii) Es gilt mit Lemma 9.2.6:

$$K_0(e_1 \wedge e_1^\perp) = K_0(e_1) \cup K_0(\mathbf{1} - e_1) = K = K_0(\mathbf{0}),$$

und damit folgt $e_1 \wedge e_1^\perp = \mathbf{0}$. ■

Eine Orthokomplementation auf einer Halbordnung bedingt, daß Supremum und Infimum nicht mehr unabhängig sind, denn es gelten die bekannten de Morganschen Regeln aus Lemma F.9. Verbandstheoretisch bringen sie zum Ausdruck, daß eine Orthokomplementation ein dualer Verbandisomorphismus auf sich selbst ist. Da G ein vollständiger Verband ist, nehmen sie die folgenden einfachen Formen an:

Lemma 9.5.5 Sei $(e_i)_{i \in I}$ eine Familie aus G mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit, dann gilt:

$$\left(\bigwedge_{i \in I} e_i\right)^\perp = \bigvee_{i \in I} e_i^\perp \quad \text{und} \quad \left(\bigvee_{i \in I} e_i\right)^\perp = \bigwedge_{i \in I} e_i^\perp.$$

Ein nützliches Instrument nach Einführung einer Orthokomplementation besteht in der Einführung einer Orthogonalitätsrelation, wie sie durch die nächste Definition bereitgestellt wird:

Definition 9.5.6

Zwei Elemente e_1, e_2 der Menge G heißen **orthogonal**, wenn sie der nachfolgenden Relation genügen:

$$e_1 \perp e_2 : \iff e_1 \leq e_2^\perp.$$

Außerdem eignet sich für spätere Betrachtungen die folgende Abmachung:

Definition 9.5.7

Für eine Teilmenge N von $\hat{\mathcal{L}}$ wird festgelegt:

$$K_1(N) := \{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 1 \ \forall y \in N\}.$$

Man kann einige Eigenschaften notieren, die Anmerkungen in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 170 ausführen:

Lemma 9.5.8 Die Abbildung

$$G \longrightarrow W_{\hat{\mathcal{L}}}, \quad e \longmapsto K_1(e)$$

ist ein Verbandsisomorphismus. Dabei gilt für alle $e \in G$:

$$K_1(e) = K_0(e^\perp).$$

Insbesondere gilt für die Menge aller exponierten Seiten von K :

$$W_{\hat{\mathcal{L}}} = \{K_1(e) \mid e \in G\}.$$

Beweis:

Es wird zunächst der erste Zusatz gezeigt. Sei dafür $e \in G$ gewählt, dann gilt offensichtlich $K_1(e) = K_0(\mathbf{1} - e) = K_0(e^\perp)$. Also ist die oben definierte Abbildung die Hintereinanderausführung der dualen Verbandsisomorphismen K_0 aus Lemma 9.2.5 und \perp . Daher ist die betrachtete Abbildung selber ein Verbandsisomorphismus. Der zweite Zusatz ergibt sich aus dem Gezeigten mit Lemma 9.2.5 (iii) und Satz 9.3.2. ■

Obiges Lemma hat einige interessante Konsequenzen.

Mit Lemma 9.2.5 (iii) wurde auf Basis von AV 1.1 festgestellt, daß durch K_0 ein dualer Verbandsisomorphismus von G nach $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ führt. Die Hinzunahme der Axiome AV 1.2, AV 2 und AVid ermöglicht es nun, eine analoge Aussage für K_1 zu formulieren. Außerdem ist es beliebig, ob man mit den Mengen aller $K_0(N)$ oder aller $K_1(N)$ mit Teilmengen N von $\hat{\mathcal{L}}$ oder mit den Mengen aller $K_0(e)$ oder aller $K_1(e)$ mit e aus G arbeitet, denn es gilt:

$$\begin{aligned} W_{\hat{\mathcal{L}}} &= \{K_0(N) \mid N \subseteq \hat{\mathcal{L}}\} = \{K_1(N) \mid N \subseteq \hat{\mathcal{L}}\} \\ &= \{K_0(e) \mid e \in G\} = \{K_1(e) \mid e \in G\}. \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf wird häufig von den verschiedenen Darstellungen der Elemente von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ Gebrauch gemacht, ohne explizit immer wieder auf ihre Gleichwertigkeit hinzuweisen.

Außerdem besagt Lemma 9.5.8, daß für zwei Entscheidungseffekte e_1, e_2 aus G gilt:

$$e_1 \leq e_2 \iff K_1(e_1) \subseteq K_1(e_2).$$

Die „Zustandsordnung“, wie sie in Definition 8.4.1 mit \leq festgelegt wurde, fällt also mit einer gewissen Form einer „Implikationsordnung“ zusammen, denn es gilt

$$e_1 \leq e_2 \iff [\forall x \in K : \hat{\mu}(x, e_1) = 1 \implies \hat{\mu}(x, e_2) = 1].$$

Eine solche „Implikationsordnung“ könnte man auch an den Anfang stellen, und entsprechend würde G durch sie zu einer Halbordnung. Eine solche Ordnung fand bei der Entwicklung der verbandstheoretischen Formulierung der Quantenmechanik vor allem in J.M. Jauch und C. Piron prominente Vertreter. Es sei dafür etwa auf die Bücher [Jau68] und [Pir76] verwiesen. Eine ausführliche Würdigung des verbandstheoretischen Ansatzes befindet sich in Kapitel 12.

Es sollen nun weitere Konsequenzen des Axioms AVid erörtert werden. In Satz 9.2.8 war das Verhältnis der Infima bezüglich G und $\hat{\mathcal{L}}$ analysiert worden. Der nächste Satz, der T 3.8 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 170 folgt, erfaßt nun die Situation für die Suprema:

Satz 9.5.9 Für jede Teilmenge A von G existiert das Supremum bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$, und es fällt mit dem Supremum $\bigvee_{e \in A} e$ von A bezüglich G zusammen.

Ist A eine aufwärts gerichtete Teilmenge von G , dann konvergiert das Netz $(e)_{e \in A}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen das Supremum $\bigvee_{e \in A} e$.

Bemerkung: In Zukunft wird nicht mehr zwischen den Suprema bezüglich G und $\hat{\mathcal{L}}$ für Teilmengen aus G unterschieden, und es wird stets das Symbol $\bigvee_{e \in A} e$ verwendet.

Beweis:

Im Kern besteht der Beweis darin, Satz 9.2.8 auf die Menge $A^\perp := \{e^\perp \mid e \in A\}$ anzuwenden.

Sei $y \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y \geq a$ für alle $a \in A$, dann ist auch $\mathbf{1} - y \leq a^\perp$ für alle $a \in A$. Also folgt mit Satz 9.2.8, daß $\mathbf{1} - y \leq \bigwedge_{a \in A} a^\perp$ gilt. Somit erhält man:

$$y \geq \left(\bigwedge_{a \in A} a^\perp \right)^\perp = \bigvee_{a \in A} a. \quad (9.20)$$

Dabei ist die letzte Identität Folge der de Morganschen Regeln aus Lemma 9.5.5, und sie ist eine Aussage, die gänzlich innerhalb des orthokomplementierten vollständigen Verbandes G formuliert ist.

Da $\bigvee_{a \in A} a$ auch Element von $\hat{\mathcal{L}}$ ist, folgt mit (9.20), daß $\bigvee_{a \in A} a$ auch die kleinste obere Schranke von A bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$ ist.

Sei A aufwärts gerichtete Menge, dann ist A^\perp abwärts gerichtet, und Satz 9.2.8 besagt, daß $(e^\perp)_{e \in A}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen $\bigwedge_{e \in A} e^\perp$ konvergiert. Damit folgt aber aus Stetigkeitsgründen, daß auch $(\mathbf{1} - e^\perp)_{e \in A}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen $\mathbf{1} - \left(\bigwedge_{e \in A} e^\perp \right)$ konvergiert. Es gilt aber mit Lemma 9.5.5:

$$\mathbf{1} - \left(\bigwedge_{e \in A} e^\perp \right) = \left(\bigwedge_{e \in A} e^\perp \right)^\perp = \bigvee_{e \in A} e.$$

Also konvergiert $(e)_{e \in A}$ gegen $\bigvee_{e \in A} e$. ■

Es bestehen wichtige Beziehungen zwischen der Orthogonalität von Entscheidungseffekten und der Additionsoperation innerhalb des zugrundeliegenden Vektorraumes Δ . Für zwei Entscheidungseffekte gilt die folgende Aussage, die T 3.7 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 170 wiedergibt:

Lemma 9.5.10 *Für zwei Elemente e_1, e_2 von G mit $e_1 \neq e_2$ gilt die Äquivalenz:*

$$e_1 \perp e_2 \iff e_1 + e_2 \leq \mathbf{1}.$$

Außerdem erhält man für zwei Elemente e_1, e_2 aus G mit $e_1 \perp e_2$:

$$e_1 + e_2 = e_1 \vee e_2.$$

Beweis:

Die erste Aussage folgt unmittelbar, denn es gilt:

$$e_1 + e_2 \leq \mathbf{1} \iff e_1 \leq \mathbf{1} - e_2 = e_2^\perp.$$

Für die zweite Aussage weiß man nun, daß aus $e_1 \perp e_2$ die Relation $e_1 + e_2 \leq \mathbf{1}$ folgt. Da e_1 und e_2 Elemente aus G sind, gilt außerdem $e_1 + e_2 \geq \mathbf{0}$. Wegen $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ liegt $e_1 + e_2$ also in $\hat{\mathcal{L}}$. Man erhält nun mit Lemma 9.2.6 die Identität

$$K_0(e_1 + e_2) = K_0(e_1) \cap K_0(e_2) = K_0(e_1 \vee e_2),$$

und damit ergibt sich mit Lemma 9.2.7 auch $e_1 + e_2 \leq e_1 \vee e_2$. Andererseits ist wegen $e_1 \leq e_2^\perp$ mit Lemma 9.5.3 auch $\mathbf{1} - (e_2^\perp - e_1) \in G$. Da $e_1, e_2 \leq e_1 + e_2$ gilt und da G Verband ist, ergibt sich somit auch $e_1 \vee e_2 \leq e_1 + e_2$. ■

Das letzte Lemma macht Aussagen über zwei Entscheidungseffekte. Der nächste Satz, der T 3.9 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 170f. folgt, zeigt eine Verallgemeinerung, die insbesondere auf die verbandstheoretisch interessante Eigenschaft der Separabilität von G führt.

Satz 9.5.11 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Sei A eine Teilmenge von G so, daß für alle Elemente x der Menge K die ungeordnete reellwertige Reihe $\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e)$ im Sinne eines Netzes konvergiert¹.*

Gelte ferner für den Grenzwert der Reihe die Relation $\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) \leq 1$. Dann kann A höchstens abzählbar viele von $\mathbf{0}$ verschiedene Elemente enthalten. Alle von $\mathbf{0}$ verschiedenen Elemente sind paarweise orthogonal.

Insbesondere für den Fall einer n -elementigen Familie $(e_i)_{i=1}^n$ von $G \setminus \{\mathbf{0}\}$ gilt:

Existiert ein Element e aus G mit $\sum_{i=1}^n e_i \leq e$, müssen die Mitglieder der Familie $(e_i)_{i=1}^n$ paarweise orthogonal sein.

¹Zum Begriff der ungeordneten Reihe siehe man etwa [Kel55], Kapitel 2, Problem G, S. 77-78.

(ii) G ist im verbandstheoretischen Sinne separabel, das heißt:

Bezeichnet A eine Teilmenge von G , deren Elemente paarweise orthogonal sind, dann kann A höchstens abzählbar viele von $\mathbf{0}$ verschiedene Elemente enthalten.

Es gilt dabei für alle Elemente x aus K :

$$\sum_{e \in A} \xi_{\Delta}(x, e) = \xi_{\Delta}(x, \bigvee_{e \in A} e).$$

Der Ausdruck $\sum_{e \in A} \xi_{\Delta}(x, e)$ soll dabei die ungeordnete Reihe bezeichnen. Die ungeordnete Reihe fällt mit der geordneten Reihe bezüglich einer beliebigen Reihenfolge der Elemente von A zusammen.

Umfaßt A endlich viele Elemente, ergibt sich insbesondere:

$$\sum_{e \in A} e = \bigvee_{e \in A} e.$$

Beweis:

zu (i): Die Voraussetzung, daß die ungeordneten Reihen von $\xi_{\Delta}(x, e)$ über A für jedes $x \in K$ konvergieren sollen, impliziert, daß es für jedes $x \in K$ höchstens abzählbar viele $e \in A$ geben kann, für die $\xi_{\Delta}(x, e) > 0$ gilt.

Um das einzusehen, wird einer Anregung von J.L. Kelley in [Kel55], Kapitel 2, Problem G (d), S. 78 gefolgt. Man nehme an, daß für ein Element x aus K die Menge $\{e \in A \mid \xi_{\Delta}(x, e) > 0\}$ überabzählbarer Mächtigkeit sei. Damit wäre insbesondere A überabzählbarer Mächtigkeit. Es gälte offensichtlich

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ e \in A \mid \xi_{\Delta}(x, e) > \frac{1}{n} \right\}. \quad (9.21)$$

Das hieße, A ließe sich als Vereinigung abzählbar vieler Mengen darstellen. Da, etwa [Heu91a] Satz 19.2, S. 139 folgend, die Vereinigung höchstens abzählbar vieler höchstens abzählbarer Mengen wiederum höchstens abzählbar ist, müßte es ob der angenommenen Überabzählbarkeit von A ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so geben, daß die Menge

$$\left\{ e \in A \mid \xi_{\Delta}(x, e) > \frac{1}{n_0} \right\}$$

überabzählbarer Mächtigkeit wäre. Wenn es aber eine derartige Menge gäbe, könnte die ungeordnete Reihe $\sum_{e \in A} \xi_{\Delta}(x, e)$ nicht mehr konvergieren. Es läge

somit ein Widerspruch vor. Damit ist gezeigt, daß für jedes $x \in K$ durch $\{e \in A \mid \xi_\Delta(x, e) > 0\}$ eine Menge höchstens abzählbarer Mächtigkeit gegeben ist.

Da $\xi_\Delta(\cdot, e)$ für ein e aus G stetig bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ ist und da K der Abschluß von \mathcal{K} bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ ist, kann e nur dann von $\mathbf{0}$ verschieden sein, wenn es ein w in \mathcal{K} gibt mit $\xi_\Delta(w, e) > 0$. Also hat man alle $e \in A$ mit $e \neq \mathbf{0}$ erfaßt, wenn man alle diejenigen $e \in A$ zusammennimmt, die bei einem $w \in \mathcal{K}$ zu $\xi_\Delta(w, e) > 0$ führen. Wie oben gezeigt, sind das für jedes $w \in \mathcal{K}$ aber nur höchstens abzählbar viele. Da aber auch \mathcal{K} nach Lemma 6.2.4 abzählbar ist und da die Vereinigung höchstens abzählbar vieler höchstens abzählbarer Mengen wiederum höchstens abzählbar ist, wie man [Heu91a], Satz 19.2, S. 139 entnehmen kann, ist damit auch die Menge der $e \in A$ mit $e \neq \mathbf{0}$ höchstens abzählbar.

Somit bleibt noch zu zeigen, daß die Elemente aus $A \setminus \{\mathbf{0}\}$ paarweise orthogonal sind. Da nun $\xi_\Delta(x, e) \geq 0$ für jedes $x \in K$ und jedes $e \in A$ gilt, ist $\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e)$ für jedes $x \in K$ Grenzwert eines monoton wachsenden Netzes. Man erhält deshalb für $e_1, e_2 \in A \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $e_1 \neq e_2$ und jedes $x \in K$:

$$\xi_\Delta(x, e_1) + \xi_\Delta(x, e_2) \leq \sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) \leq 1.$$

Also ergibt sich $e_1 + e_2 \leq \mathbf{1}$, und aus Lemma 9.5.10 folgt daher die Orthogonalität.

zu (ii): Als erstes wird die Separabilität bewiesen. Dazu betrachte man eine Teilmenge A von G , deren Elemente paarweise orthogonal sind. Es ist zu zeigen, daß A höchstens abzählbar viele von $\mathbf{0}$ verschiedene Elemente enthalten kann. Dafür betrachte man erst den Fall endlicher Teilmengen von A , um dann durch Betrachtung der ungeordneten Reihen $\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e)$ für $x \in K$ mit Hilfe von Punkt (i) dieses Satzes auf die Abzählbarkeit der von $\mathbf{0}$ verschiedenen Elemente aus A zu schließen.

Mit Hilfe vollständiger Induktion läßt sich die zweite Aussage aus Lemma 9.5.10 auf beliebige endliche Familien aus G ausdehnen, deren Mitglieder paarweise orthogonal sind. Sei jetzt mit A_f die Menge der endlichen Teilmengen von A benannt. Dann gilt für jedes $a_f \in A_f$:

$$\sum_{e \in a_f} e = \bigvee_{e \in a_f} e \leq \bigvee_{e \in A} e \leq \mathbf{1}. \tag{9.22}$$

Dabei ergibt sich die letzte Ungleichung aus dem Umstand, daß G gemäß Lemma 9.2.5 (i) vollständiger Verband mit $\mathbf{1}$ als größtem Element ist.

Für jedes $x \in K$ ist in bekannter Weise durch die Vorschrift

$$A_f \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a_f \longmapsto \sum_{e \in A_f} \xi_\Delta(x, e) \quad (9.23)$$

ein Netz definiert, das bei Konvergenz den Grenzwert $\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e)$ hat. Da nun $\xi_\Delta(x, e) \geq 0$ für jedes $x \in K$ und $e \in A$ gilt, ist für jedes $x \in K$ das Netz aus (9.23) monoton wachsend und wegen (9.22) nach oben beschränkt. Also konvergiert das Netz aus (9.23) für jedes $x \in K$ tatsächlich, und es gilt etwa mit [Kel55], Kapitel 2, Problem F, S. 77 für jedes $x \in K$

$$\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) = \sup_{a_f \in A_f} \sum_{e \in a_f} \xi_\Delta(x, e) \leq 1,$$

wobei die letzte Ungleichung wiederum aus (9.22) folgt.

Somit bleibt jetzt noch die zweite Aussage zu zeigen. Ob der Abzählbarkeit von A kann man eine Reihenfolge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Elemente von A festlegen. Definiert man $E := \{\sum_{j=1}^n e_j \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\bigvee_{j=1}^n e_j \mid n \in \mathbb{N}\}$, dann ist E offensichtlich eine aufwärts gerichtete Menge in G . Also konvergiert $(f)_{f \in E}$ mit Satz 9.5.9 gegen $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n e_j = \bigvee_{e \in A} e$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$. Damit konvergiert für jedes $x \in K$ aus Stetigkeitsgründen das Bildnetz $(\xi_\Delta(x, f))_{f \in E}$ gegen $\xi_\Delta(x, \bigvee_{e \in A} e)$.

Die Konvergenz ist offensichtlich sogar absolut, so daß die geordnete und die ungeordnete Reihe entsprechend [Kel55], Kapitel 2, Problem F (g), S. 77 zusammenfallen. Und somit gilt auch für die zugehörigen Grenzwerte die Identität, das heißt:

$$\sum_{e \in A} \xi_\Delta(x, e) = \xi_\Delta(x, \bigvee_{e \in A} e). \quad (9.24)$$

Ist A nun endlicher Mächtigkeit, dann handelt es sich bei dem linken Term in (9.24) um eine endliche Summe, so daß man mit Hilfe der Linearitätseigenschaften von ξ_Δ für alle $x \in K$ erhält:

$$\xi_\Delta(x, \sum_{e \in A} e) = \xi_\Delta(x, \bigvee_{e \in A} e).$$

Daraus ergibt sich dann $\sum_{e \in A} e = \bigvee_{e \in A} e$ mit Hilfe der Antisymmetrie der Halbordnung \leq , die in Lemma 8.4.2 (i) bewiesen wurde. ■

Abschließend folgt der Beweis der Orthomodularität von G , die durch T 5.2 in [Lud85a], Kapitel VI, §3, S. 170f. zum Ausdruck gebracht wird:

Satz 9.5.12 *G ist bezüglich der Halbordnung \leq und der Orthokomplementation \perp orthomodular. Das heißt insbesondere, daß für alle Elemente e_1, e_2 aus G mit $e_1 \leq e_2$ die Orthomodularitätsidentität gilt:*

$$e_2 = e_1 \vee (e_2 \wedge e_1^\perp).$$

Beweis:

Da G bereits als vollständiger Verband erkannt ist, ist die Bedingung der σ -Orthovollständigkeit erfüllt, so daß nur noch die Orthomodularitätsidentitäten gezeigt werden müssen. Dafür seien $e_1, e_2 \in G$ mit $e_1 \leq e_2$ gewählt. Dann ist $e_1 \perp e_2^\perp$, und somit folgt mit Lemma 9.5.10:

$$e_2 \wedge e_1^\perp = (e_2^\perp \vee e_1)^\perp = (e_2^\perp + e_1)^\perp = \mathbf{1} - ((\mathbf{1} - e_2) + e_1) = e_2 - e_1.$$

Außerdem gilt $e_1 \leq e_2^\perp \vee e_1 = (e_2 \wedge e_1^\perp)^\perp = (e_2 - e_1)^\perp$, also folgt $e_1 \perp (e_2 - e_1)$, so daß bei erneuter Anwendung von Lemma 9.5.10 die Orthomodularitätsidentität gilt:

$$e_1 \vee (e_2 \wedge e_1^\perp) = e_1 \vee (e_2 - e_1) = e_1 + e_2 - e_1 = e_2.$$

■

Mit den Überlegungen, die im nächsten Abschnitt angestellt werden, kann die Orthomodularitätsidentität auch auf eine gewisse Weise veranschaulicht werden. Dafür wird auf S. 280 verwiesen.

Man kann also zusammenfassend sagen, daß durch die Axiome AV 1.1, AV 1.2, AV 2 und AVid eine Teilmenge G von $\hat{\mathcal{L}}$ ausgezeichnet werden kann, die einerseits vermöge Satz 9.5.1 ganz $\hat{\mathcal{L}}$ charakterisiert und die andererseits bezüglich der in gewisser Weise natürlichen Ordnung durch die Zustände und der Zuordnung $e \mapsto 1 - e$ ein vollständiger, orthomodularer und separabler Verband ist. Mithin liegt ein Verband besonderer Effekte vor, der einerseits die Gesamtheit aller Effekte in charakteristischer Weise erfaßt und andererseits eine ganze Reihe von Eigenschaften hat, die im Zusammenhang mit der bekannten verbandstheoretischen Formulierung der Quantenmechanik diskutiert werden. Zur Aufhellung des angedeuteten Zusammenhanges sei nochmals auf Kapitel 12 verwiesen.

9.6 Koexistenz von Effekten

Im nachfolgenden Abschnitt wird zunächst das Konzept der Koexistenz im Zusammenhang mit Mengen von Effekten in experimentell wohldefinierter Weise begründet. Damit wird eine experimentell fundierte Alternative zum häufig verwendeten, aber inhaltlich völlig unklaren Begriff des „gleichzeitigen Messens physikalischer Größen“ gelegt. Im Anschluß daran wird ein Axiom motiviert, das für den Fall des Vorkommens von Paaren nicht-koexistenter Entscheidungseffekte eine Erweiterung der mathematischen Theorie darstellt.

9.6.1 Der Begriff der Koexistenz

Im Wirklichkeitsbereich, der mit Quantenmechanik gefaßt werden soll, beobachtet man ein im Rahmen der klassischen Physik ungewohntes Phänomen, das üblicherweise durch Formulierungen wie

„Unmöglichkeit des gleichzeitigen Messens bestimmter physikalischer Größen“

oder

„Es gibt Meßvorgänge, die gleichzeitig durchgeführt werden können, und es gibt Meßvorgänge, die nicht gleichzeitig durchgeführt werden können“

umschrieben wird. Alle derartigen Formulierungen sind unbefriedigend, denn es ist nicht deutlich, was sie zum Ausdruck bringen sollen. Um dem Phänomen, dem obige Formulierungen gelten, gerecht zu werden, muß es deshalb zunächst das Ziel sein, eine geeignete begriffliche Grundlage zu schaffen, so daß darauf aufbauend der experimentelle Befund in geeigneter Weise präzise wiedergegeben werden kann. Es zeigt sich wiederum, wie wichtig das umsichtige Vorgehen ist, das bisher verfolgt wurde. Denn im Kapitel 5 wurde ein geeignetes Bild für die konkreten experimentellen Vorgänge entworfen, mit dessen Hilfe man die nachfolgende Abmachung treffen kann:

Definition 9.6.1

Eine Menge A von Registrierprozeduren heißt Menge **koexistenter Registrierprozeduren**, wenn es eine Registriermethode b_0 aus \mathcal{R}'_0 so gibt, daß A Teilmenge von $\mathcal{R}(b_0)$ ist. Eine Menge $\{(b_{0i}, b_i) \mid i \in I\}$ von Effektverfahren aus \mathcal{F} heißt Menge **koexistenter Effektverfahren**, wenn alle Elemente der Menge dieselbe erste Komponente haben, das heißt, wenn $b_{0i} = b_{0j}$ für alle i, j aus I gilt.

Bemerkung: Man beachte, daß die Koexistenz keine intrinsische Eigenschaft einzelner Effektverfahren darstellt, sondern daß damit eine Beziehung der Elemente einer ganzen Menge von Effektverfahren zueinander zum Ausdruck gebracht wird. Der Extremfall einer einelementigen Menge von Effektverfahren wird zwar der Einfachheit halber in obiger Definition nicht ausgeschlossen, bringt aber lediglich zum Ausdruck, daß das betrachtete Effektverfahren mit sich selbst koexistiert. Das stellt aber mathematisch wie physikalisch eine triviale Aussage dar. Um auch im Falle von zwei Effektverfahren f_1, f_2 aus \mathcal{F} deutlich zu machen, daß es sich bei der Koexistenz um eine Relation der beiden Effektverfahren zueinander handelt, wird von der Koexistenz des Paares (f_1, f_2) gesprochen.

Die Definition soll am Beispiel der Nebelkammer illustriert werden. Wenn man mit ihr einen Registriervorgang vornimmt, also ein Registrierereignis gewinnt, dann kommt es an bestimmten Orten innerhalb der Kammer zur Tröpfchenbildung oder nicht. Es ist klar, daß die Tröpfchenbildung völlig unabhängig von der konkreten Auszeichnung interessanter Veränderungen im Sinne der Definition von Registrierprozeduren vor sich geht. Da ein Registrierereignis ein raum-zeitlich begrenzter Vorgang ist, kann nach endlicher Zeit festgestellt werden, zu welchen Veränderungen es gekommen ist und zu welchen Veränderungen es nicht gekommen ist. Also kann bezüglich jeder möglichen Auszeichnung interessanter Veränderungen, das heißt bezüglich jeder der Nebelkammer zugehörigen Registrierprozedur, festgestellt werden, ob das vorliegende Registrierereignis dazugehört oder nicht. In diesem Sinne kann man alle Registrierprozeduren, die sich auf dieselbe Registrieremethode beziehen, „gemeinsam“ durchführen. Daher sollen auch gerade die Registrierprozeduren, die einer gemeinsamen Registrieremethode zugeordnet werden können, als miteinander koexistent bezeichnet werden. Ebenso scheint es dann angebracht, eine Menge von Effektverfahren als eine Menge koexistenter Effektverfahren zu bezeichnen, wenn sie zu derselben Registrieremethode gehören, wenn sie also Effektverfahren am selben Apparat darstellen. Andere einfache Beispiele stellen der Szintillationsschirm oder das Zählrohr dar, bei denen der Begriff der Koexistenz in analoger Weise veranschaulicht werden kann.

Bezüglich obiger Definition 9.6.1 muß ein wichtiger Punkt hervorgehoben werden. In das Konzept der Koexistenz geht der Zeitbegriff nicht direkt ein. Es kommt nicht darauf an, ob die Registrierprozeduren alle zum selben Zeitpunkt durchgeführt werden können oder nicht. Es ist im Gegenteil sogar manchmal Inhalt des experimentellen Aufbaus gewisse zeitliche Auflösungen zu verwenden. Man stelle sich dafür eine große Nebelkammer vor, bei der ein zeitlicher Verlauf der Entwicklung der Tröpfchenbahn zu beobachten ist. Der Koexistenzbegriff steht vielmehr für ein „zusammen

Registrieren“, und er soll anstelle des eingangs erwähnten ungenauen und mißverständlichen „Gleichzeitigkeitsbegriffes“ zur Anwendung kommen.

Wegen der besonderen Bedeutung der Effekte für die vorliegende Theorie ist ein Koexistenzbegriff auf dem Niveau der Effektverfahren noch nicht ausreichend. Daher muß in einem nächsten Schritt ein entsprechender Begriff auch für den Bereich der Effekte geprägt werden.

Ein Effekt ist eine Klasse äquivalenter Effektverfahren. In direkter Analogie zum Koexistenzbegriff bei den Effektverfahren liegt es nahe, ein Paar (g_1, g_2) von Effekten aus \mathcal{L} als koexistent zu bezeichnen, wenn g_1 und g_2 jeweils ein Effektverfahren so entnommen werden kann, daß ein Paar koexistenter Effektverfahren vorliegt, wenn es also eine Registriermethode b_0 und zwei ihr zugehörige Registrierprozeduren b_1, b_2 in $\mathcal{R}(b_0)$ so gibt, daß $g_1 = \psi(b_0, b_1)$ und $g_2 = \psi(b_0, b_2)$ gilt. Eine solche Festlegung läßt sich ohne Probleme auf beliebige Familien von Effekten aus \mathcal{L} ausdehnen. Sie ist allerdings nicht geeignet, um den Begriff der Koexistenz von Effekten auch auf die Menge \mathcal{L} auszudehnen, bei der im allgemeinen nicht alle Elemente in der Form $\psi(b_0, b)$ geschrieben werden können. Man kann aber die charakteristische Struktur einer Effektfamilie $(\psi(b_0, b_i))_{i \in I}$ mit b_0 aus \mathcal{R}'_0 und einer Familie $(b_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{R}(b_0)$ auch in anderer Form fassen, und man kann davon ausgehend die erwünschte Erweiterung des Koexistenzbegriffes auf Teilmengen von \mathcal{L} formulieren. Dafür sollen zunächst einige Beobachtungen im Kontext von Effekten aus \mathcal{L} notiert werden, die Bemerkungen Ludwigs in [Lud85a], Kapitel II, §2.3, S. 23, Kapitel V, §1.2, S. 127f. und Kapitel VI, §6.1, S. 177 ausführen und teilweise verallgemeinern.

Lemma 9.6.2 *Für alle b_0 aus \mathcal{R}_0 bildet $\mathcal{R}(b_0)$ bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung und der Mengendifferenz bezüglich b_0 als Orthokomplementation einen Booleschen Verband. Dabei ist die leere Menge das Null-Element, und b_0 liefert das Eins-Element. Das Supremum endlich vieler Elemente aus $\mathcal{R}(b_0)$ fällt mit der Mengenvereinigung zusammen, und das Infimum endlich vieler Elemente aus $\mathcal{R}(b_0)$ ist identisch mit dem Mengendurchschnitt.*

Für beliebige Elemente b, b' aus $\mathcal{R}(b_0)$ gelten die folgenden Aussagen:

(i) *Ist b Teilmenge von b' , dann folgt die Identität*

$$\psi(b_0, b' \setminus b) = \psi(b_0, b') - \psi(b_0, b).$$

(ii) *Wenn b eine Teilmenge von b' ist, dann gilt: $\psi(b_0, b) \leq \psi(b_0, b')$.*

(iii) *Sind b und b' disjunkt, ergibt sich: $\psi(b_0, b \cup b') = \psi(b_0, b) + \psi(b_0, b')$.*

(iv) *Es gilt $\psi(b_0, b) = \mathbf{0}$ genau dann, wenn b leere Menge ist.*

Beweis:

Die Aussagen bezüglich des Booleschen Verbandes folgen mittels APS 2 aus Lemma F.19, so daß noch die vier zusätzlichen Aussagen eines Nachweises bedürfen. Dafür wähle man ein $b_0 \in \mathcal{R}_0$.

zu (i): Sei $w \in \mathcal{K}$, dann existiert mit Lemma 6.1.6 ein $a \in \mathcal{Q}$ mit $(a, b_0) \in C$.
Damit liefert Lemma 5.7.13 (ii):

$$\bar{\mu}(a, (b_0, b')) = \bar{\mu}(a, (b_0, b' \setminus b)) + \bar{\mu}(a, (b_0, b)).$$

Also gilt für alle $w \in \mathcal{K}$:

$$\mu(w, \psi(b_0, b' \setminus b)) = \mu(w, \psi(b_0, b')) - \mu(w, \psi(b_0, b)).$$

Daraus ergibt sich mit den bekannten Stetigkeitsgründen, daß auch für jedes $x \in K$ gilt:

$$\xi_\Delta(x, \psi(b_0, b' \setminus b)) = \xi_\Delta(x, \psi(b_0, b')) - \psi(b_0, b).$$

Mit der Antisymmetrie der Halbordnung \leq folgt somit die Behauptung.

zu (ii): Punkt (i) liefert $\psi(b_0, b') = \psi(b_0, b' \setminus b) + \psi(b_0, b)$, und damit erhält man die Behauptung, da $0 \leq \hat{\mu}(x, \psi(b_0, b' \setminus b)) \leq 1$ für alle $x \in K$ gilt.

zu (iii): Man wende Punkt (i) an auf b_0, b und $b \cup b'$, dann folgt:

$$\psi(b_0, b') = \psi(b_0, (b \cup b') \setminus b) = \psi(b_0, b \cup b') - \psi(b_0, b).$$

zu (iv): Sei $\psi(b_0, b) = \mathbf{0}$, dann ist $\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = 0$ für alle $a \in \mathcal{Q}'$ mit $(a, b_0) \in C$. Damit folgt mit APS 6A (iv) auch:

$$\forall a \in \mathcal{Q}' : (a, b_0) \in C \implies a \times b \cap M = \emptyset. \quad (9.25)$$

Es wird nun $b \neq \emptyset$ angenommen. Dann existieren mit APS 5.2 zu b Elemente $\bar{a} \in \mathcal{Q}'$ und $\bar{b}_0 \in \mathcal{R}_0$ so, daß $(\bar{a}, \bar{b}_0) \in C$, $b \subseteq \bar{b}_0$ und $\bar{a} \times b \cap M \neq \emptyset$ gilt. Man erhält wegen APS 6A (iv) insbesondere

$$\bar{\mu}(\bar{a}, (\bar{b}_0, b)) \neq 0. \quad (9.26)$$

Mit APS 5.1.4A existiert zu \bar{a}, b_0, \bar{b}_0 ein weiteres Präparierverfahren a' mit $(a', b_0), (a', \bar{b}_0) \in C$ und $\bar{a} \sim a'$.

Also liegen jetzt zwei äquivalente Präparierverfahren a' und \bar{a} sowie ein Effektverfahren (\bar{b}_0, b) mit $(a', (\bar{b}_0, b)), (\bar{a}, (\bar{b}_0, b)) \in \mathcal{C}$ vor, so daß entsprechend der Definition 6.1.2 gilt:

$$\bar{\mu}(a', (\bar{b}_0, b)) = \bar{\mu}(\bar{a}, (\bar{b}_0, b)) \stackrel{(9.26)}{\neq} 0. \quad (9.27)$$

Wiederum mit APS 6A (iv) liefert (9.27) die Relation $a' \times b \cap M \neq \emptyset$, womit man aber in einem Widerspruch zu (9.25) gerät, denn es gilt $(a', b_0) \in C$. Somit impliziert $\psi(b_0, b) = \mathbf{0}$ die Identität $b = \emptyset$.

Die andere Richtung der Behauptung folgt direkt mit APS 6A (iv). Ist b die leere Menge, dann erhält man für alle $a \in \mathcal{Q}'$ mit $(a, b_0) \in C$ auch $\bar{\mu}(a, (b_0, b)) = 0$. Damit folgt dann $\mu(w, \psi(b_0, b)) = \mu(w, \mathbf{0})$. Der zentrale Satz 6.1.9 über μ liefert die gesuchte Aussage. ■

Um nun das Charakteristische, das im obigen Lemma 9.6.2 zum Ausdruck kommt, besser begrifflich fassen zu können, definiert man zunächst:

Definition 9.6.3

Sei Σ ein Boolescher Verband bezüglich der Halbordnung \leq und der Orthokomplementation \perp . Sei ε sein Eins-Element, und sei 0 sein Null-Element. Dann heißt eine Abbildung $F : \Sigma \rightarrow [0, 1]_{\Delta}$ ein **additives Maß** auf Σ , wenn gilt:

- (i) $F(\varepsilon) = \mathbf{1}$.
- (ii) Für alle Elemente σ_1, σ_2 von Σ mit $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \mathbf{0}$ gilt $F(\sigma_1 \vee \sigma_2) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2)$.

Das Maß heißt **effektiv**, wenn zusätzlich noch gilt:

- (iii) Für alle Elemente σ von Σ mit $F(\sigma) = \mathbf{0}$ folgt $\sigma = 0$.

Bemerkung: Wenn in Zukunft in abstrakter Weise von einem Booleschen Verband gesprochen wird, das heißt kein Bezug auf einen konkreten Booleschen Verband genommen wird, dann sollen die Namen für Halbordnung, Orthokomplementation, Null- und Eins-Element wie in obiger Definition gewählt sein.

Bevor in der Entwicklung des Begriffs der Koexistenz im Kontext der Effekte vorangeschritten wird, soll noch das folgende Lemma notiert werden:

Lemma 9.6.4 *Sei F ein additives Maß auf einem Booleschen Verband Σ , dann gilt:*

- (i) *Bezeichnet σ ein Element aus Σ , dann ergibt sich $F(\sigma^{\perp}) = \mathbf{1} - F(\sigma)$.*
- (ii) *Seien σ_1, σ_2 zwei Elemente aus Σ mit $\sigma_1 \leq \sigma_2$, dann gilt $F(\sigma_1) \leq F(\sigma_2)$.*

Beweis:

Punkt (i) ergibt sich aus folgender Betrachtung. Da \perp eine Orthokomplementation ist, gilt für jedes $\sigma \in \Sigma$: $\sigma \wedge \sigma^\perp = \mathbf{0}$ und $\sigma \vee \sigma^\perp = \varepsilon$. Also folgt $\mathbf{1} = F(\varepsilon) = F(\sigma \vee \sigma^\perp) = F(\sigma) + F(\sigma^\perp)$, womit Punkt(i) bewiesen wäre.

Für Punkt (ii) sei nun $\sigma_1 \leq \sigma_2$ vorausgesetzt. Dann ist $\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp \leq \sigma_2 \wedge \sigma_2^\perp = \mathbf{0}$. Also folgt $F(\sigma_1 \vee \sigma_2^\perp) = F(\sigma_1) + F(\sigma_2^\perp) = F(\sigma_1) + \mathbf{1} - F(\sigma_2)$. Da aber $F(\sigma_1 \vee \sigma_2^\perp)$ in $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ liegt, folgt $F(\sigma_1) \leq F(\sigma_2)$. ■

Mit dem nun begründeten Begriff des effektiven Maßes läßt sich die Aussage von Lemma 9.6.2, gemäß [Lud85a], Kapitel V, §1.2, S. 128, zusammenfassen durch

Lemma 9.6.5 *Für alle Elemente b_0 aus \mathcal{R}_0 definiert die Vorschrift*

$$\psi(b_0, \cdot) : \mathcal{R}(b_0) \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta, \quad b \longmapsto \psi(b_0, b)$$

ein additives, effektives Maß.

Also besteht ein zentrales Merkmal einer Familie von Effekten, die einer gemeinsamen Registrierprozedur b_0 entstammen, darin, daß man die Effekte im Bildbereich eines additiven, effektiven Maßes auf einem Booleschen Verband wiederfinden kann. Davon geleitet wird der Koexistenzbegriff für Mengen von Effekten in der folgenden Weise definiert:

Definition 9.6.6

Eine Teilmenge A der Effektmenge $\hat{\mathcal{L}}$ heißt Menge **koexistenter Effekte**, wenn es einen Booleschen Verband Σ mit einem additiven Maß F so gibt, daß A im Bildbereich des Maßes liegt, wenn also $A \subseteq F(\Sigma)$ gilt.

Bemerkung: Wie bei Mengen koexistenter Effektverfahren bezeichnet die Koexistenz auch bei Effekten keine intrinsische Eigenschaft der betrachteten Effekte, sondern eine Beziehung der Elemente einer ganzen Menge von Effekten zueinander. Auch im Falle der Effekte soll daher bei Betrachtung von zwei Effekten y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ zur Verdeutlichung von der Koexistenz des Paares (y_1, y_2) oder auch von dem koexistenten Paar (y_1, y_2) gesprochen werden.

In obiger Definition vermißt man die Forderung nach der Effektivität des Maßes. Man kann aber ausgehend von einem additiven Maß auf einem Booleschen Verband durch Bildung der zugehörigen Quotientenalgebra und -abbildung stets zu einem effektiven, additiven Maß auf einem eventuell anderen Booleschen Verband übergehen, in dessen Bildbereich ebenso alle betrachteten Effekte liegen, wenn sie es auch bei dem Ausgangsmaß bezüglich des Ausgangsverbandes getan haben. Zum Beweis

siehe man [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.2, Th. 1.2.2., S. 87. Da nun aber in der Definition 9.6.6 der Boolesche Verband nicht weiter konkretisiert wird, kann man im Koexistenzfalle immer davon ausgehen, daß ein Boolescher Verband mit additivem, effektivem Maß vorliegt, ohne daß die Effektivität explizit gefordert werden muß.

Mit Definition 9.6.6 ist es gelungen, ausgehend von der naheliegenden Definition der Koexistenz von Teilmengen von \mathcal{L} zu einer abstrakten Definition für Teilmengen aus der uniformen Vervollständigung $\hat{\mathcal{L}}$ zu kommen. Dennoch soll von der ursprünglichen Idee, Effekte als miteinander koexistent zu bezeichnen, wenn sie miteinander koexistente Effektverfahren umfassen, nicht grundsätzlich abgewichen werden. Dazu erinnere man, daß sich die Elemente aus $\hat{\mathcal{L}} \setminus \mathcal{L}$ physikalisch nicht von den Elementen aus \mathcal{L} unterscheiden lassen. Es soll in Erweiterung eines unbenannten Axioms aus [Lud84a], Kapitel XIII, §5, S. 435 deshalb verlangt werden:

AkEff Zu jeder Menge A koexistenter Effekte aus $\hat{\mathcal{L}}$ und jedem Genauigkeitsniveau des Vergleiches zwischen Theorie und Experiment existiert eine Registriermethode b_0 in \mathcal{R}_0 derart, daß es zu jedem y aus A ein Element b in $\mathcal{R}(b_0)$ so gibt, daß y physikalisch auf dem gewählten Genauigkeitsniveau nicht von $\psi(b_0, b)$ zu unterscheiden ist.

Man verlangt also, daß sich die Elemente einer Menge koexistenter Effekte mit beliebiger Genauigkeit als ψ -Klassen einer Menge koexistenter Effektverfahren darstellen lassen. Dadurch wird also nachträglich wiederum die Unbestimmtheit korrigiert, die durch die Abstraktion in der Definition der Koexistenz zugelassen wurde.

AkEff stellt kein Axiom auf dem Niveau der bisher vorgestellten Axiome dar, da es mit Ausdrücken wie „physikalisch nicht unterscheidbar“ arbeitet. Es soll aber an einer solchen Formulierung festgehalten werden, um einen möglichst zügigen Zugang zum Begriff der Koexistenz zu ermöglichen. Von diesem ausgehend wird im übernächsten Unterabschnitt das Axiom AV 3 für nicht-koexistente Entscheidungseffekte motiviert. Die ganze Problematik läßt sich aber auch in exakter Weise fassen. Sie ist Inhalt des Kapitels V in [Lud85a], S. 126-151. Dort wird auch das Konzept der Observable aufbauend auf dem Konzept der Mengen koexistenter Effekte eingeführt. Einen kurzen Überblick dazu liefert Abschnitt 14.2. Da es aber in den hier vorgestellten Überlegungen lediglich um eine grundlegende Axiomatik der Quantenmechanik gehen soll und da bei dem hier verfolgten Zugang der Observablenbegriff kein grundlegender, sondern ein abgeleiteter Begriff ist, soll auf die ausführliche Darlegung der zugehörigen Zusammenhänge zugunsten einer etwas vereinfachten Axiomatik verzichtet werden. Das obige Axiom AkEff wird auch nur an einer Stelle auf dem Weg

der Motivation zum Axiom AV 3 benötigt, so daß es einerseits auf physikalischer Ebene keinen allzu großen Raum einnimmt und andererseits aber vom mathematischen Standpunkt aus auch weggelassen werden kann, ohne die Theorie zu berühren. Nachdem nun eine experimentell wohlfundierte Grundlage durch die Einführung geeigneter Koexistenz-Begriffe für Registrierprozeduren, Effektverfahren und Effekte gelegt worden ist, kann zur Motivation eines Axioms übergegangen werden, das für den Fall des Vorkommens nicht-koexistenter Paare von Entscheidungseffekten eine Erweiterung der Theorie darstellt. Zuvor werden im nächsten Unterabschnitt noch eine Reihe nützlicher mathematischer Instrumente im Zusammenhang mit der Koexistenz von Mengen von Effekten und Entscheidungseffekten bereitgestellt.

9.6.2 Mathematisch äquivalente Formulierungen der Koexistenz

Die mathematische Struktur, die entsprechend Definition 9.6.6 eine Menge koexistenter Effekte auszeichnet, ist noch recht unhandlich. Es ist daher erstrebenswert, über ein Kriterium zu verfügen, das ohne Booleschen Verband und additives Maß auskommt. Da für die späteren Überlegungen im Zusammenhang mit der Motivation des Axioms AV 3 lediglich die Entscheidungseffekte von Interesse sind, soll eine Aussage für beliebige Effekte hier nur genannt werden. Der Satz findet sich als Th. 1.2.4. in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.2, S. 89, und der zugehörige Beweis wird in Anhang E.8 geführt.

Satz 9.6.7 *Für alle Elemente y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ sind äquivalent:*

- (i) (y_1, y_2) ist ein Paar koexistenter Effekte.
- (ii) Es existieren drei Elemente y'_1, y'_2, y_{12} in $\hat{\mathcal{L}}$ derart, daß die beiden Relationen $y_1 = y'_1 + y_{12}$ und $y_2 = y'_2 + y_{12}$ gelten und daß $y'_1 + y'_2 + y_{12}$ in $\hat{\mathcal{L}}$ liegt.

Beweis: Siehe Satz E.8.1.

Im nächsten Satz werden für den Fall eines Paares koexistenter Entscheidungseffekte einige wichtige Eigenschaften angegeben, die man als Teil von Th. 1.3.2 in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.3, S. 92f. findet. Die so gewonnenen Aussagen können in der Folge genutzt werden, im Falle von Mengen von Entscheidungseffekten ein gegenüber Satz 9.6.7 noch einfacheres Kriterium zu formulieren.

Satz 9.6.8 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Ist (e_1, e_2) ein Paar koexistenter Elemente aus G , dann gibt es genau einen Satz y_1, y_2, y_3 von Elementen aus $\hat{\mathcal{L}}$ so, daß die beiden Beziehungen $e_1 = y_1 + y_3$ und $e_2 = y_2 + y_3$ gelten und daß $y_1 + y_2 + y_3$ in $\hat{\mathcal{L}}$ liegt. Die Elemente y_1, y_2, y_3 liegen insbesondere in G , und sie können explizit angegeben werden. Es gilt:*

$$y_1 = e_1 \wedge e_2^\perp, \quad y_2 = e_1^\perp \wedge e_2, \quad y_3 = e_1 \wedge e_2.$$

(ii) *Sei (e_1, e_2) ein Paar koexistenter Elemente von G , sei weiter Σ ein Boolescher Verband, und sei schließlich $F : \Sigma \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ein additives Maß in der Form, daß es Elemente σ_1, σ_2 aus Σ mit $F(\sigma_1) = e_1$ und $F(\sigma_2) = e_2$ gibt. Dann gilt:*

$$F(\sigma_1 \wedge \sigma_2) = e_1 \wedge e_2, \quad F(\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2) = e_1^\perp \wedge e_2 \quad \text{und} \quad F(\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) = e_1 \wedge e_2^\perp.$$

Beweis:

zu (i): Zunächst wird gezeigt, daß durch $e_1 \wedge e_2^\perp$, $e_1^\perp \wedge e_2$ und $e_1 \wedge e_2$ tatsächlich drei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ derart gefunden sind, daß die drei geforderten Eigenschaften $e_1 = (e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1 \wedge e_2)$, $e_2 = (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2)$ sowie $(e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2) \in \hat{\mathcal{L}}$ erfüllt sind.

Dabei ist die Zugehörigkeit von $(e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2)$ zu $\hat{\mathcal{L}}$ trivial, denn mit $e_1 \wedge e_2^\perp$, $e_1^\perp \wedge e_2$ und $e_1 \wedge e_2$ sind drei Elemente aus G gegeben, die paarweise orthogonal sind. Mit Lemma 9.5.10 gilt daher die Identität:

$$(e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2) = (e_1 \wedge e_2^\perp) \vee (e_1^\perp \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e_2).$$

Da G aber Verband ist, liegt $(e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2)$ somit in $G \subseteq \hat{\mathcal{L}}$.

Damit können die beiden anderen Eigenschaften bewiesen werden. Mit Satz E.8.2 existiert genau ein Satz y_1, y_2, y_3 von Elementen aus $\hat{\mathcal{L}}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} y_1 &\leq e_2^\perp, & y_3 &\leq e_1, & e_1 &= y_1 + y_3, \\ y_2 &\leq e_1^\perp, & y_3 &\leq e_2, & e_2 &= y_2 + y_3. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Also gelten insbesondere die Relationen $y_1 = e_1 - y_3 \leq e_1$ und $y_2 = e_2 - y_3 \leq e_2$. Wegen $y_1 \leq e_2^\perp$ und $y_2 \leq e_1^\perp$ erhält man also mit Satz 9.2.8 die Beziehungen

$$\begin{aligned} y_1 &\leq e_1 \wedge e_2^\perp, \\ y_2 &\leq e_1^\perp \wedge e_2. \end{aligned}$$

Vermittels der Beziehungen $y_3 \leq e_1$ und $y_3 \leq e_2$ ergibt sich zudem:

$$y_3 \leq e_1 \wedge e_2.$$

Da $e_1 \wedge e_2^\perp$, $e_1^\perp \wedge e_2$ und $e_1 \wedge e_2$ paarweise orthogonal sind, folgt mit schließlich mit Lemma 9.5.10:

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 + y_3 \leq (e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1 \wedge e_2) \leq e_1 \vee e_1 = e_1, \\ e_2 &= y_2 + y_3 \leq (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2) \leq e_2 \vee e_2 = e_2. \end{aligned}$$

Damit folgt also $e_1 = (e_1 \wedge e_2^\perp) + (e_1 \wedge e_2)$ und $e_2 = (e_1^\perp \wedge e_2) + (e_1 \wedge e_2)$. Weil außerdem trivialerweise die Relationen $e_1 \wedge e_2^\perp \leq e_2^\perp$, $e_1^\perp \wedge e_2 \leq e_1^\perp$, $e_1 \wedge e_2 \leq e_1$ und $e_1 \wedge e_2 \leq e_2$ gelten, haben $e_1 \wedge e_2^\perp$, $e_1^\perp \wedge e_2$ und $e_1 \wedge e_2$ Eigenschaften entsprechend (9.28). Da es nach Satz E.8.2 aber nur einen einzigen derartigen Satz gibt, ergeben sich die Identitäten $y_1 = e_1 \wedge e_2^\perp$, $y_2 = e_1^\perp \wedge e_2$ und $y_3 = e_1 \wedge e_2$.

Somit wurde also gezeigt, daß es mit $e_1 \wedge e_2^\perp$, $e_1^\perp \wedge e_2$ und $e_1 \wedge e_2$ Elemente in $\hat{\mathcal{L}}$ gibt, die die geforderten Eigenschaften haben. Ihre Zugehörigkeit zu G ist ob der Verbandseigenschaft von G trivial, so daß nur noch die Eindeutigkeitsaussage bewiesen werden muß.

Seien mit y'_1 , y'_2 und y'_3 drei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ mit $e_1 = y'_1 + y'_3$, $e_2 = y'_2 + y'_3$ und $y'_1 + y'_2 + y'_3 \in \hat{\mathcal{L}}$ gegeben. Insbesondere mit der Zugehörigkeit von $y'_1 + y'_2 + y'_3$ zu $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ergibt sich:

$$y'_1 = y'_1 + y'_2 + y'_3 - y'_2 - y'_3 \leq \mathbf{1} - e_2 = e_2^\perp.$$

In analoger Weise ergibt sich $y'_2 \leq e_1^\perp$. Außerdem erhält wegen $y'_3 = e_1 - y'_1 \leq e_1$ und $y'_3 = e_2 - y'_2 \leq e_2$ durch Satz 9.2.8 die Relation $y'_3 \leq e_1 \wedge e_2$. Da nach Voraussetzung $e_1 = y'_1 + y'_3$, $e_2 = y'_2 + y'_3$ gilt, hat man offensichtlich in y'_1 , y'_2 und y'_3 drei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ vorliegen, die genau die Eigenschaften gemäß (9.28) haben. Ob der Eindeutigkeitsaussage aus Satz E.8.2 muß damit $y'_1 = e_1 \wedge e_2^\perp$, $y'_2 = e_1^\perp \wedge e_2$ und $y'_3 = e_1 \wedge e_2$ gelten, womit die Eindeutigkeitsaussage gezeigt wäre.

zu (ii): Da Σ Boolescher Verband ist, folgt aus der Distributivität:

$$\sigma_1 = (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee (\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) \text{ und } \sigma_2 = (\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee (\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2).$$

Da außerdem $\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2$, $\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp$ und $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ paarweise orthogonal sind, folgt mit der Additivität von F :

$$\begin{aligned} e_1 &= F(\sigma_1) = F(\sigma_1 \wedge \sigma_2) + F(\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp), \\ e_2 &= F(\sigma_2) = F(\sigma_1 \wedge \sigma_2) + F(\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2). \end{aligned}$$

Schließlich gilt wiederum mit der Additivität von F und dem Umstand, daß der Bildbereich von F durch $[0, 1]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$ gegeben ist:

$$F(\sigma_1 \wedge \sigma_2) + F(\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) + F(\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2) = F((\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee (\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) \vee (\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2)) \in \hat{\mathcal{L}}.$$

Also sind $F(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$, $F(\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp)$, $F(\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2)$ gerade drei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$, die die Eigenschaften aus (i) besitzen, so daß die Behauptung aus der dort bewiesenen Eindeutigkeit folgt. ■

Hat man es im Zusammenhang mit der Koexistenz ausschließlich mit Entscheidungseffekten zu tun, kann man nun entsprechend Th. 1.3.6 in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.3, S. 94 notieren:

Satz 9.6.9 *Für eine Teilmenge A von G sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *A ist eine Menge koexistenter Entscheidungseffekte.*
- (ii) *Je zwei Elemente aus A bilden ein Paar koexistenter Entscheidungseffekte.*
- (iii) *Für alle e_1, e_2 aus A gilt $e_1 = (e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e_2^\perp)$, das heißt, e_1 und e_2 sind im verbandstheoretischen Sinne kommutierbar.*
- (iv) *Der von A in G erzeugte orthokomplementierte Unterverband Γ_A ist ein Boolescher Verband.*

Beweis:

(i) \implies (ii): Nach Voraussetzung gibt es einen Booleschen Verband Σ mit einem additiven Maß $F : \Sigma \rightarrow [0, 1]_\Delta$, so daß $A \subseteq F(\Sigma)$ gilt. Also gibt es für $e_1, e_2 \in A$ entsprechende Elemente $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ mit $F(\sigma_1) = e_1$ und $F(\sigma_2) = e_2$. Bezeichnet man mit Σ' den von σ_1 und σ_2 erzeugten Booleschen Subverband von Σ , dann ist durch die Restriktion $F|_{\Sigma'}$ ein additives Maß auf Σ' mit $e_1, e_2 \in F|_{\Sigma'}(\Sigma')$ gegeben. Also ist (e_1, e_2) ein Paar koexistenter Elemente aus G .

(ii) \implies (iii): Siehe Satz 9.6.8 (i).

(iii) \implies (iv): Siehe etwa Theorem 3.8 in [Gud79], Abschnitt 3.3, S. 47.

(iv) \implies (i): Man wähle als Booleschen Verband Γ_A , und als additives Maß wähle man die identische Abbildung $id : \Gamma_A \rightarrow G$. Dann gilt $A \subseteq \Gamma_A = id(\Gamma_A)$. Also ist A auch Menge koexistenter Entscheidungseffekte. ■

Aus dem eben notierten Satz lassen sich die folgenden praktischen Koexistenzkriterien ableiten, die Bemerkungen in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 174 folgen:

Lemma 9.6.10 *Gilt für zwei Elemente e_1, e_2 aus G eine der beiden Relationen $e_1 \leq e_2$ oder $e_1 \perp e_2$, dann ist (e_1, e_2) ein Paar koexistenter Entscheidungseffekte.*

Beweis:

Für den Fall $e_1 \leq e_2$ wird Punkt (iii) aus Satz 9.6.9 gezeigt. Zunächst bemerke man, daß wegen $e_1 \leq e_2$ gilt:

$$e_1 \wedge e_2^\perp \leq e_2 \wedge e_2^\perp = \mathbf{0}.$$

Damit folgt nun sofort:

$$(e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e_2^\perp) = e_1 \vee (e_1 \wedge e_2^\perp) = e_1 \vee \mathbf{0} = e_1.$$

Ist nun $e_1 \perp e_2$, dann folgt mit dem eben Gesagten, daß (e_1, e_2^\perp) eine koexistentes Paar ist. Also gilt

$$e_1 = (e_1 \wedge e_2^\perp) \vee (e_1 \wedge e_2^{\perp\perp}) = (e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e_2^\perp),$$

und somit folgt die Koexistenz des Paares (e_1, e_2) unter erneuter Verwendung von Satz 9.6.9 (iii). ■

Die bisher angestellten Überlegungen erlauben nun das folgende Lemma, das zeigt, daß für Entscheidungseffekte die Aussage aus Lemma 9.6.2 (ii) auch in umgekehrter Richtung gilt. Dabei handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Aussagen in [Lud85a] Kapitel VI, §6.1, S. 177:

Lemma 9.6.11 *Sei b_0 ein Element aus \mathcal{R}'_0 , und seien b, b' Elemente von $\mathcal{R}(b_0)$, so daß $\psi(b_0, b), \psi(b_0, b')$ in G liegen, dann gilt:
 b ist eine Teilmenge von b' genau dann, wenn die Relation $\psi(b_0, b) \leq \psi(b_0, b')$ gilt.*

Beweis:

Die „ \implies “ : -Richtung ist bereits aus Lemma 9.6.2 bekannt.

„ \impliedby “ : $\mathcal{R}(b_0)$ ist bekanntermaßen ein Boolescher Verband, und $\psi(b_0, \cdot)$ ist mit Lemma 9.6.5 ein additives, effektives Maß auf $\mathcal{R}(b_0)$. Da $\psi(b_0, b), \psi(b_0, b')$ in G liegen und da nach Voraussetzung $\psi(b_0, b) \leq \psi(b_0, b')$ gilt, folgt mit Lemma 9.6.10 die Koexistenz des Paares $(\psi(b_0, b), \psi(b_0, b'))$. Also kann man Satz 9.6.8 (ii) anwenden, und man erhält:

$$\psi(b_0, b) \wedge (\psi(b_0, b'))^\perp = \psi(b_0, b \cap (b_0 \setminus b')).$$

Dabei sei daran erinnert, daß gemäß Lemma 9.6.2 die Orthokomplementation in $\mathcal{R}(b_0)$ gerade die Mengendifferenz bezüglich b_0 ist und daß Infimum und Mengendurchschnitt von Familien von Elementen aus $\mathcal{R}(b_0)$ zusammenfallen.

Wegen $\psi(b_0, b) \leq \psi(b_0, b')$ folgt auch

$$\psi(b_0, b) \wedge (\psi(b_0, b'))^\perp \leq \psi(b_0, b') \wedge (\psi(b_0, b'))^\perp = \mathbf{0}.$$

Zusammenfassend erhält man somit $\mathbf{0} = \psi(b_0, b \cap (b_0 \setminus b'))$, woraus sich vermittle der Effektivität von $\psi(b_0, \cdot)$ die Relation $b \cap (b_0 \setminus b') = \emptyset$ ergibt. Das heißt aber gerade $b \subseteq b'$. ■

Als eine erste Anwendung der Betrachtungen des zurückliegenden Unterabschnittes soll eine gewisse Veranschaulichung der Orthomodularitätsidentität erläutert werden.

Seien dafür zwei Entscheidungseffekte e_1, e_2 mit $e_1 \leq e_2$ gewählt. Mit Lemma 9.6.10 ist (e_1, e_2) ein koexistentes Paar, und man kann mit Axiom AkEff e_1 und e_2 beliebig gut durch Anzeigen an einem gemeinsamen Apparat, also durch zwei Registrierprozeduren b_1, b_2 relativ zu einer gemeinsamen Registriermethode b_0 , realisieren. Die Genauigkeit kann im Prinzip beliebig gut werden, so daß für die weiteren Betrachtungen von $e_1 = \psi(b_0, b_1)$ und $e_2 = \psi(b_0, b_2)$ ausgegangen wird. Mit obigem Lemma 9.6.11 folgt aus der Voraussetzung $e_1 \leq e_2$ die Mengeninklusion $b_1 \subseteq b_2$. Damit stellt sich die Orthomodularitätsidentität einfach als eine andere Form der disjunkten Zerlegung $b_2 = b_1 \cup (b_2 \setminus b_1)$ dar. Denn es gilt mit Lemma 9.6.2

$$e_1 \vee (e_1^\perp \wedge e_2) = e_1 + (e_2 - e_1) = \psi(b_0, b_1) + \psi(b_0, b_2 \setminus b_1) = \psi(b_0, b_1 \cup (b_2 \setminus b_1)),$$

so daß die Orthomodularitätsidentität die folgende Form annimmt:

$$\psi(b_0, b_2) = \psi(b_0, b_1 \cup (b_2 \setminus b_1)).$$

Nachdem nun einige nützliche mathematische Instrumente im Zusammenhang mit der Koexistenz insbesondere von Entscheidungseffekten zur Verfügung stehen, kann im nächsten Unterabschnitt zur Motivation eines weiteren Axioms übergegangen werden.

9.6.3 Hauptaxiom für nicht-koexistente Entscheidungseffekte

Nach der begrifflichen Klarstellung der Koexistenz ist es nun sinnvoll, danach zu fragen, ob es im Falle der Quantenmechanik Mengen nicht-koexistenter Effekte gibt,

und wie man gegebenenfalls das Phänomen der Existenz solcher Mengen nicht-koexistenter Effekte geeignet axiomatisch in die Theorie einfließen lassen kann.

Dafür wird zunächst ein Beispiel diskutiert, auf das dann in der darauffolgenden allgemeinen Diskussion veranschaulichend zurückgegriffen werden kann. Als Registriermethoden werden zwei Stern-Gerlach-Apparaturen ausgewählt, die bezüglich eines vorgegebenen kartesischen Koordinatensystems beide die x -Achse als Apparat-Vorzugsrichtung haben. Unter Apparat-Vorzugsrichtung verstehe man dabei die gedachte Linie zwischen Eingang und Ausgang der Stern-Gerlach-Apparatur. Innerhalb der einen Apparatur verlaufe die Vorzugsrichtung des inhomogenen Magnetfeldes entlang der z -Achse, während innerhalb der anderen Apparatur die Vorzugsrichtung des inhomogenen Magnetfeldes entlang einer mit r bezeichneten Richtung in der yz -Ebene verlaufe. Hinter der Stern-Gerlach-Apparatur, deren Magnetfeld in z -Richtung verläuft, denke man sich in einem gewissen räumlichen Abstand zwei Auftreffzähler. Die Verbindungslinie der beiden Auftreffzähler möge einerseits parallel zur z -Achse sein und andererseits in der Mitte die x -Achse kreuzen. Ebenso denke man sich auch hinter der anderen Stern-Gerlach-Apparatur zwei Auftreffzähler positioniert, deren Verbindungslinie einerseits parallel zur r -Richtung verlaufen möge, und andererseits in der Mitte ebenfalls die x -Achse treffen möge. Außerdem seien beide Apparaturen derart konstruiert, daß die Energie der aus der Apparatur austretenden Wechselwirkung bestimmt wird. Die Stern-Gerlach-Apparatur, deren Magnetfeld in z -Richtung verläuft, zusammen mit der zugehörigen Energiebestimmungsapparatur und den beiden Auftreffzählern wird im weiteren mit b_0 bezeichnet. Die andere Stern-Gerlach-Apparatur, deren Magnetfeld in r -Richtung verläuft, samt Energiebestimmungsapparatur und Auftreffzähler benenne man mit \tilde{b}_0 .

An den apparativen Aufbauten b_0 und \tilde{b}_0 sollen nun bestimmte Veränderungen als interessant ausgezeichnet werden, es werden also den Registriermethoden b_0 und \tilde{b}_0 zugehörige Registrierprozeduren definiert. Um den weiteren Sprachgebrauch übersichtlich zu halten, sollen gewisse abkürzende Sprechweisen vereinbart werden. Die Formulierung „ $(+z)$ spricht an“ wird für den Fall verwendet, das bei Durchführung eines Registriervorganges mittels b_0 der hinter der zu b_0 gehörigen Stern-Gerlach-Apparatur auf dem positiven Ast der z -Achse positionierte Auftreffzähler einen Zählimpuls vermeldet hat. In analoger Weise verwende man auch die drei Formulierungen „ $(-z)$ spricht an“, „ $(+r)$ spricht an“ und „ $(-r)$ spricht an“. Wenn man an den Apparaten b_0 und \tilde{b}_0 zugehörige Registrierprozeduren auszeichnet, soll davon ausgegangen werden, daß alle dadurch gewonnenen Effektverfahren zu Entscheidungseffekten gehören. Eine derartige Forderung ist von einem formalen Standpunkt schwierig, denn man kann eigentlich nur auf der Basis eines realistischen

Fundaments der Quantenmechanik, wie es durch die vorliegende Arbeit formuliert wird, überhaupt beurteilen, ob ein Effekt ein Entscheidungseffekt ist. Dennoch soll obige Annahme gemacht werden, denn das Beispiel wird nur zur Illustration der später durchgeführten allgemeinen Überlegungen verwendet, bei denen dann keine derartigen Probleme auftauchen werden.

Zunächst seien an b_0 die folgenden Auszeichnungen vorgenommen.

$$\begin{aligned} b_2 &\hat{=} [(+z) \text{ spricht an}] \text{ und [Energie größer als } \varepsilon] &\longrightarrow e_2 &:= \psi(b_0, b_2), \\ b_3 &\hat{=} [(+z) \text{ spricht an}] \text{ und [Energie kleiner als } \varepsilon] &\longrightarrow e_3 &:= \psi(b_0, b_3). \end{aligned}$$

Offensichtlich haben b_2 und b_3 eine leere Schnittmenge, es gilt also $b_2 \cap b_3 = \emptyset$, denn bei Durchführung eines Registriervorganges, also beim Gewinnen eines Registrierereignisses, kann nicht ein Energiewert angezeigt werden, der sowohl größer als auch kleiner als der angegebene Schwellenwert ε ist. Daraus ergibt sich mit Punkt (iii) von Lemma 9.6.2:

$$e_2 + e_3 = \psi(b_0, b_2) + \psi(b_0, b_3) = \psi(b_0, b_2 \cup b_3). \quad (9.29)$$

Außerdem folgt aus der Disjunktheit von b_2 und b_3 die Orthogonalität von e_2 und e_3 , wie die folgende Überlegung zeigt. Wenn nämlich bei einer Präparation die Anzeige entsprechend e_2 an b_0 mit Sicherheit anspricht, dann spricht die Anzeige, die zu e_3 gehört, mit Sicherheit nicht an. Im mathematischen Bild gilt also die Mengeneinklusion $K_1(e_2) \subseteq K_0(e_3)$, was gleichbedeutend mit obiger Orthogonalität ist. Damit liefert das Lemma 9.5.10 die Identität $e_2 \vee e_3 = e_2 + e_3$, so daß man mit (9.29) erhält:

$$e_2 \vee e_3 = \psi(b_0, b_2) + \psi(b_0, b_3) = \psi(b_0, b_2 \cup b_3).$$

Also kann dem Effekt $e_2 \vee e_3$ die Anzeige „(+z) spricht an“ am Apparat b_0 zugeordnet werden. Unter Anwendung von Punkt (i) des Lemmas 9.6.2 kommt man so zu den folgenden Entscheidungseffekten:

$$\begin{aligned} e_2 + e_3 &: (+z) \text{ spricht an,} \\ \mathbf{1} - (e_2 + e_3) &: (-z) \text{ spricht an.} \end{aligned}$$

An dem anderen Apparat \tilde{b}_0 wird die folgende Festlegung vorgenommen:

$$\tilde{b}_1 \hat{=} (+r) \text{ spricht an} \longrightarrow e_1 := \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_1).$$

Auf der Basis der Definition von \tilde{b}_1 und damit auf Basis der Definition von e_1 kann man nun ermitteln, welche Anzeige an \tilde{b}_0 dem Effekt $e_1 \vee e_2$ entspricht. Dazu verwende man den folgenden Namen:

$\tilde{b}_2 \hat{=} [(+r) \text{ spricht an}] \text{ oder } [\text{Energie größer als } \varepsilon]$.

Bedenkt man die Voraussetzung, daß durch $\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)$ wiederum ein Entscheidungseffekt ausgezeichnet wird, erhält man $e_1 \vee e_2 = \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)$, wie im folgenden gezeigt werden soll.

Man wähle dafür zunächst ein Element x aus K mit $\hat{\mu}(x, \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)) = 0$. Daraus ergibt sich mit Lemma 9.6.2 (iii) sofort $\hat{\mu}(x, \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \setminus \tilde{b}_2)) = 1$. Das heißt, daß man bei Präparation im Zustand x an der Apparatur \tilde{b}_0 mit Sicherheit die Anzeige „ $(-r)$ spricht an“ und „[Energie kleiner als ε]“ findet. Also ergibt sich im Zustand x bei \tilde{b}_0 mit Sicherheit nicht die Anzeige \tilde{b}_1 , denn dafür müßte der Auftreffzähler $(+r)$ ansprechen. Das heißt, es stellt sich bei \tilde{b}_0 mit Sicherheit die Anzeige $\tilde{b}_0 \setminus \tilde{b}_1$ ein. Aber ebenso findet man bei b_0 im Zustand x mit Sicherheit nicht die Anzeige b_2 , denn dafür wäre eine Energie größer als ε nötig. Man findet demnach bei b_0 mit Sicherheit die Anzeige $b_0 \setminus b_2$. Im mathematischen Bild kommt man somit zu den beiden Inklusionen:

$$\begin{aligned} K_0(\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)) &\subseteq K_1(\psi(b_0, b_0 \setminus b_2)) = K_1(e_2^\perp), \\ K_0(\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)) &\subseteq K_1(\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \setminus \tilde{b}_1)) = K_1(e_1^\perp). \end{aligned}$$

Damit folgt unmittelbar mit Lemma 9.5.8:

$$K_0(\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)) \subseteq K_1(e_1^\perp) \cap K_1(e_2^\perp) = K_1(e_1^\perp \wedge e_2^\perp) = K_0(e_1 \vee e_2).$$

Erneute Anwendung von Lemma 9.5.8 liefert damit die Relation $\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2) \geq e_1 \vee e_2$.

Wählt man jetzt andersherum ein Element x aus $K_0(e_1 \vee e_2)$, dann liegt x auch in $K_0(e_1) \cap K_0(e_2)$. Somit gilt $\hat{\mu}(x, e_1) = 0$ und $\hat{\mu}(x, e_2) = 0$. Das heißt also, daß am Apparat \tilde{b}_0 bei Präparation im Zustand x mit Sicherheit der Auftreffzähler $(-r)$ einen Impuls vermeldet, während am Apparat b_0 bei Präparation im Zustand x mit Sicherheit die Anzeige „ $(-z)$ spricht an“ oder „[Energie kleiner als ε]“ erscheint.

Hier kommt jetzt eine zentrale experimentelle Erfahrung zum Tragen, die man im Umgang mit Stern-Gerlach-Apparaturen gesammelt hat. Außer im Falle, daß positiver Arm der z -Achse und positiver Arm der r -Richtung zusammenfallen, ist es nicht möglich, in einer Weise zu präparieren, daß sowohl an b_0 der Zähler $(-z)$ mit Sicherheit anspricht, als auch an \tilde{b}_0 der Zähler $(-r)$ mit Sicherheit anspricht. Es ist vielmehr so, daß bei Präparation in einem Zustand, bei dem der Zähler $(-z)$ an b_0 mit Sicherheit anspricht, am Apparat \tilde{b}_0 beide Zähler $(-r)$ und $(+r)$ weder mit Sicherheit ansprechen noch mit Sicherheit nicht ansprechen. Man denke beispielsweise an die Situation, wenn r senkrecht auf der z -Achse steht, also entlang der y -Achse

verläuft. In Zuständen, die bei b_0 mit Sicherheit den Zähler $(-z)$ auslösen, lassen bei \tilde{b}_0 die Zähler $(+r)$ und $(-r)$ jeweils mit einer relativen Häufigkeit von $\frac{1}{2}$ ansprechen. Fallen also positiver Arm der z -Achse und positiver Arm der r -Richtung nicht zusammen, gelten somit die folgenden Relationen:

$$K_1(\mathbf{1} - (e_2 + e_3)) \cap K_1(e_1) = \emptyset \quad \text{und} \quad K_1(\mathbf{1} - (e_2 + e_3)) \cap K_1(\mathbf{1} - e_1) = \emptyset.$$

Mit Lemma 9.5.8 ist das gleichwertig zu der Gültigkeit der Relationen:

$$(e_2 + e_3)^\perp \wedge e_1 = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad (e_2 + e_3)^\perp \wedge e_1^\perp = \mathbf{0}.$$

Also gilt:

$$((e_2 + e_3)^\perp \wedge e_1) \vee ((e_2 + e_3)^\perp \wedge e_1^\perp) = \mathbf{0} \neq (e_2 + e_3)^\perp.$$

Das ist mit Lemma 9.6.9 aber gerade äquivalent zur Nicht-Koexistenz des Paares $(e_1, e_2 + e_3)$. Hinter einem prominenten Vertreter aus der Reihe der quantenmechanischen Experimente verbirgt sich also in der hier verfolgten Begriffswelt die Nicht-Koexistenz eines Paares dabei vorkommender Effekte.

Damit soll zur Betrachtung des obigen Zustandes x zurückgekehrt werden. Da an \tilde{b}_0 bei Präparation im Zustand x mit Sicherheit der Zähler $(-r)$ einen Impuls vermeldet, folgt aus den eben angestellten Überlegungen, daß an b_0 der Auftreffzähler $(-z)$ nicht mit Sicherheit ansprechen kann. Das heißt also, an b_0 muß stets die Anzeige „Energie kleiner als ε “ auftreten, damit an b_0 , wie vorausgesetzt, die Anzeige „ $(-z)$ spricht an“ oder „[Energie kleiner als ε]“ mit Sicherheit eintritt. Also wird mit Sicherheit $\tilde{b}_0 \setminus \tilde{b}_2$ an \tilde{b}_0 gefunden, so daß mit Hilfe von Lemma 9.6.2 (iii) gilt

$$K_0(e_1 \vee e_2) \subseteq K_1(\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \setminus \tilde{b}_2)) = K_0(\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)),$$

woraus sich mit Lemma 9.5.8 die Beziehung $e_1 \vee e_2 \geq \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)$ ergibt. Damit kommt man zur behaupteten Identität $e_1 \vee e_2 = \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2)$.

Also kann man nun in Analogie zu den bisher aufgeführten Entscheidungseffekten notieren:

$$e_1 \vee e_2 \quad : \quad [(+r) \text{ spricht an}] \text{ oder } [\text{Energie größer als } \varepsilon],$$

$$\mathbf{1} - e_1 \vee e_2 \quad : \quad [(-r) \text{ spricht an}] \text{ und } [\text{Energie kleiner als } \varepsilon].$$

Damit steht für den nun zu diskutierenden allgemeinen Fall ein geeignetes „Anschauungsobjekt“ zur Verfügung.

Für den allgemeinen Fall werden drei Elemente e_1, e_2, e_3 aus der Menge der Entscheidungseffekte G mit $e_2 \perp e_3$ und $e_1, e_3 \neq \mathbf{0}$ betrachtet. Die Voraussetzung der Orthogonalität von e_2 und e_3 garantiert mit Lemma 9.6.10 die Koexistenz des Paares (e_2, e_3) . Somit existiert mit Axiom AkEff eine Registrieremethode b_0 und ihr zugehörig zwei Registrierprozeduren b_2, b_3 , so daß gilt: $e_2 \sim_p \psi(b_0, b_2)$, $e_3 \sim_p \psi(b_0, b_3)$. Dabei bezeichnet das Symbol \sim_p , daß es sich lediglich um eine ungefähre Gleichheit auf dem Niveau der gewählten Unschärfemenge handelt. Entsprechend Axiom AkEff kann man die Approximation durch geeignete Wahl von b_0 beliebig genau werden lassen, so daß für die weiteren Betrachtungen die \sim_p -Symbole durch ein Gleichheitszeichen ersetzt werden:

$$e_2 = \psi(b_0, b_2), \quad e_3 = \psi(b_0, b_3).$$

Wegen Lemma 9.6.10 ist ebenso $(e_1, e_1 \vee e_2)$ ein Paar koexistenter Entscheidungseffekte. Mit analoger Argumentation kann von der Existenz einer Registrieremethode \tilde{b}_0 mit zwei \tilde{b}_0 zugehörigen Registrierprozeduren \tilde{b}_1, \tilde{b}_2 ausgegangen werden, so daß gilt:

$$e_1 = \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_1), \quad e_1 \vee e_2 = \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2).$$

Da Entscheidungseffekte vorliegen, folgt mit Lemma 9.6.11, daß $b_2 \subseteq b_0 \setminus b_3$, also $b_2 \cap b_3 = \emptyset$, gilt. Lemma 9.6.2 (i) und (iii) liefern damit nun

$$\begin{aligned} \psi(b_0, b_0 \setminus (b_2 \cup b_3)) &= \mathbf{1} - (\psi(b_0, b_2) + \psi(b_0, b_3)) = \mathbf{1} - (e_2 + e_3), \\ \psi(b_0, b_2 \cup b_3) &= e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Außerdem folgt wiederum mit Lemma 9.6.2 (i):

$$\psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_0 \setminus \tilde{b}_2) = \mathbf{1} - \psi(\tilde{b}_0, \tilde{b}_2) = \mathbf{1} - e_1 \vee e_2.$$

Damit liegt eine allgemeine Situation vor, die mit derselben Namensgebung arbeitet, wie das weiter oben erläuterte Beispiel der zwei Stern-Gerlach-Apparaturen. Die bisher verwandten Entscheidungseffekte $e_1, e_2, e_3, \mathbf{1} - e_1 \vee e_2, \mathbf{1} - (e_2 + e_3)$ und $e_2 + e_3$ wurden dort mit konkreter Anschauung belegt.

Es wird zunächst im Rahmen der allgemeinen Betrachtung der Extremfall der Orthogonalität von e_1 und $(e_2 + e_3)$ erörtert. Aus der Orthomodularitätsgleichung gemäß Satz 9.5.12 ergibt sich unmittelbar:

$$e_1 \vee e_2 \leq (e_2 + e_3)^\perp = e_2 \vee (e_2^\perp \wedge e_3^\perp) = e_3^\perp.$$

Es gelten somit die Relationen $K_1(e_1 \vee e_2) \subseteq K_0(e_3)$ und $K_1(e_3) \subseteq K_0(e_1 \vee e_2)$. Man erhält also im Falle $e_1 \perp (e_2 + e_3)$ die folgenden Implikationen:

$$x \in K_1(e_3) \implies \hat{\mu}(x, e_1 \vee e_2) = 0, \quad (9.30)$$

$$x \in K_1(e_1 \vee e_2) \implies \hat{\mu}(x, e_3) = 0. \quad (9.31)$$

Überlegungen zum Verhalten genau der Beziehungen (9.30) und (9.31) bei Verlassen der Extremsituation $e_1 \perp (e_2 + e_3)$ werden im weiteren als Quelle eines neuen Axioms dienen. Doch zuvor soll der obige Extremfall der Orthogonalität am Beispiel der zwei Stern-Gerlach-Apparaturen veranschaulicht werden. Eine solche Orthogonalitäts-Situation wäre beispielsweise gegeben, wenn der positive Arm der r -Richtung mit dem negativen Arm der z -Achse zusammenfallen würde. Wenn man dann einen Zustand aus $K_1(e_3)$ durch ein Präparierverfahren realisierte, wenn also mit Sicherheit die Anzeige „ $[(+z)$ spricht an] und [Energie kleiner als ε]“ an der Apparatur b_0 vorläge, dann zeigt die Erfahrung, daß sich an der Apparatur \tilde{b}_0 mit Sicherheit die Anzeige „ $[(-r)=(+z)$ spricht an] und [Energie kleiner als ε]“, entsprechend dem Effekt $\mathbf{1} - (e_1 \vee e_2)$, einstellte. Das besagt aber gerade Relation (9.30). Ebenso kann der zweite, der Relation (9.31) zugehörige Fall illustriert werden.

Nun soll das Verhalten der Relationen (9.30) und (9.31) untersucht werden, wenn die Orthogonalität nicht mehr garantiert ist. e_1 und $e_2 + e_3$ sollen aber auch nicht zu nahe beieinander liegen. Eine solche Aussage muß sicher zunächst konkretisiert werden. Dazu betrachte man den Fall, daß e_1 und $e_2 \vee e_3$ nicht identisch sind. Es gilt $K_1(e_1) \neq K_1(e_2 + e_3)$, und das ist äquivalent zur Existenz eines Elementes x in K mit der Eigenschaft:

$$[\hat{\mu}(x, e_1) = 1 \text{ und } \hat{\mu}(x, e_2 + e_3) \not\leq 1] \text{ oder } [\hat{\mu}(x, e_1) \not\leq 1 \text{ und } \hat{\mu}(x, e_2 + e_3) = 1]. \quad (9.32)$$

Damit man sinnvollerweise davon sprechen kann, daß e_1 und $e_2 + e_3$ „nicht nahe beieinander“ liegen, muß man über die Forderung der Nicht-Identität hinausgehen. Aber durch (9.32) motiviert wird die folgende Festlegung getroffen:

e_1 und $e_2 + e_3$ gelten als „nicht nahe beieinander“, wenn sie die folgende Eigenschaft haben:

$$\sup_{x \in K_1(e_2 + e_3)} \hat{\mu}(x, e_1) \not\leq 1 \quad \text{oder} \quad \sup_{x \in K_1(e_1)} \hat{\mu}(x, e_2 + e_3) \not\leq 1. \quad (9.33)$$

Das heißt, für die Zustände, für die der eine Effekt mit Sicherheit eintritt, soll der jeweils andere stets deutlich zu einer Häufigkeit kleiner 1 führen, denn man soll nicht einmal im Supremum der 1 nahekommen. Es sei nur angemerkt, daß hier zur Garantie der Wohldefiniertheit der betrachteten Suprema die Voraussetzungen $e_1 \neq \mathbf{0}$ und $e_2 + e_3 \neq \mathbf{0}$ eingehen.

Zugunsten einer etwas kompakteren Formulierung im Laufe der weiteren Überlegungen wird die folgende Größe eingeführt:

Definition 9.6.12

Für alle von $\mathbf{0}$ verschiedenen Entscheidungseffekte \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 wird definiert:

$$\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) := \max \left\{ \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2), \quad \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1) \right\}.$$

Das neu eingeführte Symbol hat die folgenden grundlegenden Eigenschaften, die die Theoreme T 6.2.1, T 6.2.2, T 6.3.2 sowie einige Bemerkungen aus [Lud85a], Kapitel VI, §§6.2 und 6.3, S. 179, 181, 183 zusammenfaßt:

Lemma 9.6.13 *Seien $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ drei von $\mathbf{0}$ verschiedene Entscheidungseffekte. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Für \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 gilt die Aussage in (9.33) genau dann, wenn $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \neq 0$ ist.*

(ii) *Es gelten die folgenden Implikationen:*

$$\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \neq 0 \implies \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2 = \mathbf{0} \implies \tilde{e}_1 \not\leq \tilde{e}_2 \text{ und } \tilde{e}_2 \not\leq \tilde{e}_1.$$

(iii) *Gilt die Relation $\tilde{e}_2 \leq \tilde{e}_3$, folgt die Ungleichung: $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \geq \Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3)$.*

(iv) *Es gilt $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 1$ genau dann, wenn \tilde{e}_1 und \tilde{e}_2 orthogonal sind.*

(v) *Ist das Paar $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ koexistent, dann ist $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ entweder gleich 0 oder gleich 1.*

Beweis:

Seien stets $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3 \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$ gewählt.

zu (i): Es ist offensichtlich:

$$\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 1 - \min \left\{ \sup_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \tilde{e}_1), \quad \sup_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \tilde{e}_2) \right\}.$$

Damit folgt unmittelbar die Aussage.

zu (ii): Ist $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \neq 0$, dann ist:

$$\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2) \neq 0 \text{ oder } \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1) \neq 0.$$

Also folgt $K_1(\tilde{e}_1) \cap K_1(\tilde{e}_2) = \emptyset$, und damit erhält man mit Lemma 9.5.8, daß $\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2 = \mathbf{0}$ gilt. Daraus folgen dann unmittelbar die weiteren Aussagen.

zu (iii): Wegen $\tilde{e}_2 \leq \tilde{e}_3$ ergibt sich aus Lemma 9.5.8 die Mengeninklusion $K_1(\tilde{e}_2) \subseteq K_1(\tilde{e}_3)$. Es gilt aber auch $\mathbf{1} - \tilde{e}_2 \geq \mathbf{1} - \tilde{e}_3$, und damit erhält man $\hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2) \geq \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_3)$ für alle $x \in K$. Also ergibt sich:

- (a) $\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2) \geq \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_3),$
 (b) $\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1) \geq \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_3)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1).$

Das bedeutet aber gerade $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \geq \Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_3).$

zu (iv): Sei $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 1$, dann ist

$$\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2) = 1 \text{ oder } \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1) = 1.$$

Also gilt entweder $K_1(\tilde{e}_1) \subseteq K_0(\tilde{e}_2) = K_1(\tilde{e}_2^\perp)$ oder $K_1(\tilde{e}_2) \subseteq K_0(\tilde{e}_1) = K_1(\tilde{e}_1^\perp)$.
 Damit ergibt sich $\tilde{e}_1 \perp \tilde{e}_2$. Ist umgekehrt $\tilde{e}_1 \perp \tilde{e}_2$, gilt $\tilde{e}_1 \leq \tilde{e}_2^\perp$. Damit folgt mit
 Punkt (iii) dieses Satzes $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \geq \Delta(\tilde{e}_2, \tilde{e}_2^\perp) = 1$. Da aber definitionsgemäß
 $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) \leq 1$ gilt, ergibt sich $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 1$.

zu (v): Sei das Paar $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ koexistent, dann gilt mit Satz 9.6.9 die Darstellung
 $\tilde{e}_1 = (\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2) \vee (\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2^\perp)$. Falls $\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2 = \mathbf{0}$ gilt, folgt daher $\tilde{e}_1 = \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2^\perp$. Also
 gilt $\tilde{e}_1 \perp \tilde{e}_2$, so daß man mit Punkt (iv) dieses Satzes zu $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 1$ kommt.

Ist dagegen $\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2 \neq \mathbf{0}$, dann existiert ein $x \in K_1(\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2)$. Es gilt also
 $\hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2) = 0$. Damit ergibt sich $\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2) = 0$. Da aber
 $\tilde{e}_1 \wedge \tilde{e}_2 \leq \tilde{e}_1$ gilt, bedeutet das insbesondere, daß $\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1) = 0$ gilt.

In analoger Weise erhält man auch $\inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2) = 0$, so daß insgesamt
 $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2) = 0$ gilt. ■

Nutzt man Punkt (i) von Lemma 9.6.13, ist die Forderung von (9.33) also äquivalent
 der Forderung $\Delta(e_1, e_2 + e_3) \neq 0$. Das bedeutet aber mit den Punkten (iv) und (v)
 von Lemma 9.6.13 gerade, daß e_1 und $e_2 + e_3$ entweder zueinander orthogonal sind
 oder ein nicht-koexistentes Paar bilden. Der Fall der Orthogonalität wurde bereits als
 triviale Situation erkannt, so daß man also im weiteren die Situation zu diskutieren
 hat, in der $(e_1, e_2 + e_3)$ ein Paar nicht-koexistenter Entscheidungseffekte darstellt.
 Dabei liefert die Forderung $\Delta(e_1, e_2 + e_3) \neq 0$ zwei verschiedene Voraussetzungen,
 die jeweils gesondert betrachtet werden sollen:

- 1.) Der Fall $\sup_{x \in K_1(e_2 + e_3)} \hat{\mu}(x, e_1) \not\leq 1$ im Zusammenhang mit Relation (9.30):

Man wähle ein Element x aus $K_1(e_3)$, und setze $\alpha := 1 - \sup_{x \in K_1(e_2 + e_3)} \hat{\mu}(x, e_1)$.

Dann ist x auch Element von $K_1(e_2 + e_3)$, und somit kann nach Voraussetzung

auch $\hat{\mu}(x, e_1)$ nicht größer als $1 - \alpha < 1$ werden. Andererseits gilt aber auch die Inklusion $K_1(e_3) \subseteq K_0(e_2)$ wegen $e_2 \perp e_3$. Rein intuitiv formuliert, bedeutet das, daß im Zustand x sozusagen nichts „ e_2 -Relevantes“ mehr präpariert wird, denn es gilt $\hat{\mu}(x, e_2) = 0$. Also kann im Zustande x bei Anwendung auf den Effekt $e_1 \vee e_2$ nur über den „ e_1 -Anteil“ des Effektes etwas zur relativen Häufigkeit beigetragen werden. Nach Voraussetzung gilt aber $\hat{\mu}(x, e_1) \leq 1 - \alpha < 1$, so daß man auch $\hat{\mu}(x, e_1 \vee e_2) < 1$ zu erwarten hätte. Bedenkt man, daß die Aussagen

- (i) $[\forall x \in K : x \in K_1(e_3) \implies x \notin K_1(e_1 \vee e_2)]$,
- (ii) $K_1(e_3) \cap K_1(e_1 \vee e_2) = \emptyset$

äquivalent sind, kommt man damit zu der Forderung:

$$\sup_{x \in K_1(e_2 + e_3)} \hat{\mu}(x, e_1) \not\leq 1 \implies K_1(e_3) \cap K_1(e_1 \vee e_2) = \emptyset. \quad (9.34)$$

Es ist jetzt hilfreich, sich die allgemein geschilderte Situation am eingangs erläuterten Beispiel der zwei Stern-Gerlach-Apparaturen vorzustellen. Wenn man die r -Richtung derart wählt, daß der positive Arm der r -Richtung mit dem positiven Arm der z -Achse zusammenfällt, dann sind die beiden Apparate im Prinzip identisch. Dann gilt aber $e_1 = e_2 + e_3$, und somit ergibt sich $\Delta(e_1, e_2 + e_3) = 0$. Die Voraussetzung $\sup_{x \in K_1(e_2 + e_3)} \hat{\mu}(x, e_1) \not\leq 1$ erzwingt also,

daß der positive Arm der r -Richtung nicht mit dem positiven Arm der z -Achse identisch sein kann. Es soll auch der Fall ausgeschlossen werden, daß der negative Arm der r -Richtung mit dem positiven Arm der z -Achse identisch ist, denn das stellt den bereits weiter oben auch bezüglich des Beispiels erläuterten Extremfall der Orthogonalität von e_1 und $e_2 + e_3$ dar. Bei Ausschluß dieser beiden Fälle zeigt das Experiment, daß für Präparationen zu Zuständen aus $K_1(e_3)$ stets sowohl für den Zähler ($+r$) als auch für den Zähler ($-r$) die Anschlags-Wahrscheinlichkeit echt kleiner 1 und echt größer 0 ist. Demzufolge ist auch die relative Häufigkeit des Effektes $\mathbf{1} - e_1 \vee e_2$, der der Anzeige „ $(-r)$ spricht an] und [Energie kleiner als ε]“ entspricht, weder gleich 0 noch gleich 1. Dasselbe gilt selbstverständlich auch für den Effekt $e_1 \vee e_2$, und damit stellt sich die Forderung (9.34) im Falle der beiden Stern-Gerlach-Apparaturen als ganz typisches Phänomen der Quantenmechanik dar.

- 2.) Der Fall $\sup_{x \in K_1(e_1)} \hat{\mu}(x, e_2 + e_3) \not\leq 1$ im Zusammenhang mit Relation (9.31):

Wählt man nun ein Element x aus der Menge $K_1(e_1 \vee e_2)$, und setzt man $\beta := 1 - \sup_{x \in K_1(e_2 + e_3)} \hat{\mu}(x, e_1)$, dann geht, wiederum rein intuitiv formuliert, von einem Präparierverfahren a aus x eine Wirkung aus, die gewissen „ e_1 - und e_2 -artigen“ Charakter trägt. Falls x zu $K_1(e_2)$ gehörte, folgte aufgrund der Orthogonalität zu e_3 sofort $\hat{\mu}(x, e_3) = 0$. Also würde man annehmen können, daß nur der „ e_1 -Anteil“ des gewählten Zustandes x von Null verschiedene Beiträge zur Häufigkeit $\hat{\mu}(x, e_3)$ beisteuert. Aber selbst, wenn x rein „ e_1 -artig“ wäre, und somit x zu $K_1(e_1)$ gehörte, erhielte man nach Voraussetzung stets eine Häufigkeit $\hat{\mu}(x, e_3) \leq \hat{\mu}(x, e_2 + e_3) \leq 1 - \beta < 1$. Bedenkt man nun auch hier, daß die Aussagen

- (i) $[\forall x \in K : x \in K_1(e_1 \vee e_2) \implies x \notin K_1(e_3)]$,
- (ii) $K_1(e_3) \cap K_1(e_1 \vee e_2) = \emptyset$

äquivalent sind, kommt man damit zu der Forderung:

$$\sup_{x \in K_1(e_1)} \hat{\mu}(x, e_2 + e_3) \not\leq 1 \implies K_1(e_1 \vee e_2) \cap K_1(e_3) = \emptyset. \quad (9.35)$$

Wiederum soll zur Illustration das Beispiel der zwei Stern-Gerlach-Apparaturen herangezogen werden. Mit derselben Argumentation wie im ersten Fall seien die beiden Fälle, daß der positive Arm der r -Richtung oder der negative Arm der r -Richtung mit dem positiven Arm der z -Richtung zusammenfällt, ausgeschlossen, denn der eine Fall entspricht der Orthogonalität von e_1 und $e_2 + e_3$, und der andere Fall widerspricht der Voraussetzung. Bei Ausschluß der beiden Fälle zeigt das Experiment, daß für Präparationen zu Zuständen aus $K_1(e_1 \vee e_2)$ am Apparat b_0 sowohl für den Zähler ($+z$) als auch für den Zähler ($-z$) eine von 0 verschiedene Anschlags-Wahrscheinlichkeit registriert wird, denn es kommt nur auf die relative Orientierung der r -Richtung und der z -Achse zueinander an. Der experimentelle Befund, der hier in den zweiten Punkt eingeht, ist also derselbe wie im ersten Punkt. Daher hat man bei b_0 für einen Zustand aus $K_1(e_1 \vee e_2)$ weder mit einer Wahrscheinlichkeit gleich 0 noch mit einer Wahrscheinlichkeit gleich 1 zu rechnen. Wie im ersten Fall stellt sich also auch der zweite Punkt im Falle der beiden Stern-Gerlach-Apparaturen als abstraktes Abbild eines der berühmtesten Phänomene der Quantenmechanik dar.

Damit stehen also mit (9.34) und (9.35) zwei Relationen zur Verfügung, die nun axiomatisch gefordert werden sollen. Dabei wird allerdings anstatt der Aussage

$K_1(e_1 \vee e_2) \cap K_1(e_3) = \emptyset$ die äquivalente Aussage $e_3 \wedge (e_1 \vee e_2) = \mathbf{0}$ verwendet. Bedenkt man noch die Festsetzung von $\Delta(e_1, e_2 + e_3)$ gemäß Definition 9.6.12, so nimmt das Axiom „(9.34) und (9.35)“ die folgende Form an, die derjenigen in [Lud85a], Kapitel VI, §6.3, S. 182 entspricht:

AV 3 Hauptaxiom für nicht-koexistente Entscheidungseffekte:

Seien e_1, e_2, e_3 drei Elemente der Menge G , die den Relationen $e_1 \neq \mathbf{0}$, $e_2 + e_3 \neq \mathbf{0}$ und $\Delta(e_1, e_2 + e_3) \neq \mathbf{0}$ genügen. Wenn e_2 und e_3 zueinander orthogonal sind, dann gilt $e_3 \wedge (e_1 \vee e_2) = \mathbf{0}$.

Eine Beobachtung, die im Verlaufe der Motivation des Axioms AV 3 für die dort betrachteten Entscheidungseffekte gemacht wurde, kann hier allgemeiner wiederholt werden. Betrachtet man drei Entscheidungseffekte e_1, e_2, e_3 , so daß $(e_1, e_2 + e_3)$ ein koexistentes Paar bildet, können die Voraussetzungen in AV 3 wegen Lemma 9.6.13 (iv) und (v) nur erfüllt werden, wenn e_1 und $e_2 + e_3$ zueinander orthogonal sind. Dann ist die Konsequenz $e_3 \wedge (e_1 \vee e_2) = \mathbf{0}$ aber trivial, so daß AV 3 in solchen Fällen ohnehin schon erfüllt ist. In analoger Weise kann man das Ergebnis auf G übertragen. Das heißt, es gilt der folgende Satz, der auf einen Kommentar in [Lud85a], Kapitel VI, §6.3, S. 182 zurückgeht:

Satz 9.6.14 *Seien für eine Zustands-Effekt-Struktur die Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2 und AVid erfüllt. Ist die zugehörige Menge der Entscheidungseffekte eine Menge koexistenter Effekte, gilt die Aussage AV 3.*

Also stellt AV 3 nur dann eine echte Forderung dar, wenn es Paare nicht-koexistenter Entscheidungseffekte gibt. Daher wurde AV 3 auch als Axiom für nicht-koexistente Entscheidungseffekte bezeichnet.

Auch im Falle von Axiom AV 3 ist es günstig, einige äquivalente Formulierungen festzuhalten, wie sie T 6.2.3 in [Lud85a], Kapitel VI, §6.3, S. 182 vorstellt. Dabei werden im unten notierten Satz, die Voraussetzungen etwas präzisiert, indem stets genau angegeben wird, welche der vorkommenden Entscheidungseffekte von $\mathbf{0}$ verschieden sein müssen.

Lemma 9.6.15 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) AV 3
- (ii) Für Elemente e_1, e_2, e_3 aus G , die den Relationen $e_1, e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_1 \vee e_2 = e_1 \vee e_3$, $e_2 \leq e_3$ und $\Delta(e_1, e_3) \neq \mathbf{0}$ genügen, gilt $e_2 = e_3$.

- (iii) Für Elemente e_1, e_2, e_3 aus G , die den Relationen $e_1 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \vee e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \perp e_3$, $e_3 \leq e_1 \vee e_2$ und $\Delta(e_1, e_2 \vee e_3) \neq \mathbf{0}$ genügen, gilt $e_3 = \mathbf{0}$.
- (iv) Gelten für Elemente e_1, e_2, e_3 der Menge G die Relationen $e_1 \wedge (e_2 \vee e_3) \neq \mathbf{0}$, $e_3 - e_1 \wedge e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \leq e_1$ und $\Delta(e_1 \wedge (e_2 \vee e_3), e_3 - e_1 \wedge e_3) \neq \mathbf{0}$, dann folgt die Identität $e_1 \wedge (e_2 \vee e_3) = e_2 \vee (e_3 \wedge e_1)$.
- (v) Genügen drei Elemente e_1, e_2, e_3 der Menge G den Relationen $e_1, e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \leq e_1 \leq e_2 \vee e_3$ und $\Delta(e_1, e_3) \neq \mathbf{0}$, dann ergibt sich die Identität $e_1 = e_2$.

Beweis:

Seien stets $e_1, e_2, e_3 \in G$ gewählt.

(i) \implies (ii): Gelte $e_1, e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \leq e_3$, $e_1 \vee e_2 = e_1 \vee e_3$ und $\Delta(e_1, e_3) \neq \mathbf{0}$. Dann erhält man $e_3 = (e_3 - e_2) + e_2$, wobei $e_3 - e_2$ ob des Lemmas 9.5.3 zu G gehört. Außerdem gilt $e_3 \leq \mathbf{1} = e_2 + e_2^\perp$, das heißt, es gilt $(e_3 - e_2) \perp e_2$. Also folgt mit (i) (in Anwendung auf $e_1, e_2, e_3 - e_2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (e_3 - e_2) \wedge (e_1 \vee e_2) = (e_3 - e_2) \wedge (e_1 \vee e_3) \\ &\geq (e_3 - e_2) \wedge (e_1 \vee (e_3 - e_2)) = e_3 - e_2. \end{aligned}$$

Und damit erhält man die Behauptung $e_2 = e_3$.

(ii) \implies (iii): Es mögen die Relationen $e_1 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \vee e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_3 \leq e_1 \vee e_2$, $e_2 \perp e_3$ und $\Delta(e_1, e_2 \vee e_3) \neq \mathbf{0}$ gelten. Man setze $e_4 := e_2 \vee e_3$, dann erhält man offenbar mit (ii) in Anwendung auf e_1, e_2, e_4 : $e_2 = e_4 = e_2 \vee e_3$. Das heißt aber $e_3 \leq e_2$. Die Orthogonalitätsrelation $e_2 \perp e_3$ liefert dann $e_3 = \mathbf{0}$.

(iii) \implies (iv): Es mögen die Relationen $e_1 \wedge (e_2 \vee e_3) \neq \mathbf{0}$, $e_3 - e_1 \wedge e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \leq e_1$ und $\Delta(e_1 \wedge (e_2 \vee e_3), e_3 - e_1 \wedge e_3) \neq \mathbf{0}$ gelten. Man setze nun:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &:= e_3 - e_3 \wedge e_1, \\ \tilde{e}_2 &:= e_2 \vee (e_3 \wedge e_1), \\ \tilde{e}_3 &:= (e_2 \vee e_3) \wedge e_1 - e_2 \vee (e_3 \wedge e_1). \end{aligned}$$

Es wird jetzt gezeigt, daß \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 und \tilde{e}_3 die Voraussetzungen von (iii) erfüllen.

Dafür wird zunächst abgeklärt, daß \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 und \tilde{e}_3 in G liegen. Mit Lemma 9.5.3 liegt \tilde{e}_1 in G , da $e_3 \geq e_3 \wedge e_1$ gilt. $\tilde{e}_1 \neq \mathbf{0}$ ergibt sich unmittelbar aus den Voraussetzungen. Aber auch \tilde{e}_3 liegt in G , denn einerseits gilt die Relation $e_2 \vee (e_3 \wedge e_1) \leq e_1 \vee (e_3 \wedge e_1) = e_1$, und andererseits gilt auch die Relation $e_2 \vee (e_3 \wedge e_1) \leq e_2 \vee e_3$. Also erhält man $(e_2 \vee e_3) \wedge e_1 \geq e_2 \vee (e_3 \wedge e_1)$, woraus

sich dann mittels Lemma 9.5.3 die behauptete Zugehörigkeit von \tilde{e}_3 zu G ergibt. Schließlich liegt auch \tilde{e}_2 in G , da G Verband ist.

Wäre $\tilde{e}_2 = \mathbf{0}$, gälte $e_2 = e_3 \wedge e_1 = \mathbf{0}$, und somit gälte $e_1 \wedge (e_2 \vee e_3) = e_1 \wedge e_3 = \mathbf{0}$, womit man zu einem Widerspruch zu den Voraussetzungen gelangt wäre. Also liegt \tilde{e}_2 sogar in $G \setminus \{\mathbf{0}\}$, woraus sich unmittelbar $\tilde{e}_2 \vee \tilde{e}_3 \neq \mathbf{0}$ ergibt.

Zur Anwendung der Aussage (iii) auf die Elemente \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 und \tilde{e}_3 bleiben damit noch die drei Aussagen innerhalb der Klammer von Aussage (iii) zu klären:

Zunächst gilt $\tilde{e}_3 = (e_2 \vee e_3) \wedge e_1 - \tilde{e}_2 \leq \mathbf{1} - \tilde{e}_2$, und damit ist $\tilde{e}_2 \perp \tilde{e}_3$. Im weiteren gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_3 &\leq (e_2 \vee e_3) \wedge e_1 \leq e_2 \vee e_3 = e_2 \vee (e_3 - (e_3 \wedge e_1) + (e_3 \wedge e_1)) \\ &= e_2 \vee \tilde{e}_1 \vee (e_3 \wedge e_1) = \tilde{e}_1 \vee \tilde{e}_2. \end{aligned}$$

Schließlich gilt wegen $\tilde{e}_2 \perp \tilde{e}_3$ die Relation $\tilde{e}_2 \vee \tilde{e}_3 = e_1 \wedge (e_2 \vee e_3)$, wenn man Lemma 9.5.10 ausnutzt. Also folgt direkt aus den Voraussetzungen, daß $\Delta(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \wedge \tilde{e}_3) \neq \mathbf{0}$ gilt.

Es sind mithin die Voraussetzungen von Punkt (iii) erfüllt, und es gilt deshalb $\tilde{e}_3 = \mathbf{0}$. Bedenkt man die Definition von \tilde{e}_3 , hat man damit gerade die Behauptung gezeigt.

(iv) \implies (v): Gelte $e_1, e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \leq e_1 \leq e_2 \vee e_3$ und $\Delta(e_1, e_3) \neq \mathbf{0}$. Dann ergibt sich $e_1 = e_1 \wedge (e_2 \vee e_3) \neq \mathbf{0}$. Mit den Lemmata 9.5.3 und 9.6.13 (ii) sowie der Voraussetzung $e_3 \neq \mathbf{0}$ folgt zudem $e_3 - e_1 \wedge e_3 \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Außerdem liefert die Identität $e_1 = e_1 \wedge (e_2 \vee e_3)$ zusammen mit Lemma 9.6.13 (iii):

$$0 \neq \Delta(e_1, e_3) = \Delta(e_1 \wedge (e_2 \vee e_3), e_3) \leq \Delta(e_1 \wedge (e_2 \vee e_3), e_3 - e_1 \wedge e_3).$$

Also folgt mit (iv) in Anwendung auf e_1, e_2, e_3 :

$$e_1 = (e_2 \vee e_3) \wedge e_1 = e_2 \vee (e_3 \wedge e_1). \quad (9.36)$$

Da nun aber nach Voraussetzung $\Delta(e_1, e_3) \neq \mathbf{0}$ gilt, und somit wegen Lemma 9.6.13 (ii) $e_1 \wedge e_3 = \mathbf{0}$ gilt, bedeutet (9.36) gerade $e_1 = e_2$.

(v) \implies (ii): Sei $e_1, e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \leq e_3$, $e_1 \vee e_2 = e_1 \vee e_3$ und $\Delta(e_1, e_3) \neq \mathbf{0}$. Man setze $\tilde{e}_1 := e_3$, $\tilde{e}_3 := e_1$, dann gewinnt man mit (v) in Anwendung auf \tilde{e}_1, e_2 und \tilde{e}_3 die Identität $\tilde{e}_1 = e_2$. Also gilt $e_3 = e_2$.

(ii) \implies (i): Sei $e_1 \neq \mathbf{0}$, $e_2 + e_3 \neq \mathbf{0}$, $e_2 \perp e_3$ und $\Delta(e_1, e_2 + e_3) \neq \mathbf{0}$. Sei weiter ein $e_4 \in G$ mit $\mathbf{0} \neq e_4 \leq e_3$ gewählt, dann gilt mit Lemma 9.6.13 (iii): $\Delta(e_1, e_2 + e_4) \geq \Delta(e_1, e_2 + e_3) \neq \mathbf{0}$. Damit erhält man $e_4 \not\leq e_1 \vee e_2$.

Zum Nachweis der letzteren Relation nehme man an, daß $e_4 \leq e_1 \vee e_2$ sei. Dann wäre $e_1 \vee e_2 = e_1 \vee e_2 \vee e_4 = e_1 \vee (e_2 + e_4)$, und es folgte dann mit (ii) in Anwendung auf die drei Elemente e_1, e_2 und $e_2 + e_4$ die Gleichungskette $e_2 = e_2 + e_4 = e_2 \vee e_4$. Also erhielte man $e_4 \leq e_2$. Nach Voraussetzung ist aber $e_4 \neq \mathbf{0}$ und $e_4 \leq e_2^\perp$. Das stellt einen Widerspruch dar. Also muß $e_4 \not\leq e_1 \vee e_2$ gelten.

Wenn man also ein Element $e_4 \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $e_4 \leq e_3$ wählt, dann folgt unmittelbar $e_4 \not\leq e_1 \vee e_2$, und somit gibt es keine von $\mathbf{0}$ verschiedene untere Schranke von e_3 und $e_1 \vee e_2$. Folglich ist $\mathbf{0}$ auch die größte untere Schranke, das heißt, es gilt $e_3 \wedge (e_1 \vee e_2) = \mathbf{0}$. ■

9.7 Hauptaxiom der Quantisierung

Im vorigen Abschnitt wurde mit der Nicht-Koexistenz von Effekten und Entscheidungseffekten bereits eine wichtige experimentelle Erfahrung mit quantenmechanischen Experimenten diskutiert und in Axiom AV 3 auch axiomatisch umgesetzt. Darüber hinaus gibt es noch weitere bisher noch unberücksichtigte Beobachtungen. Bei quantenmechanischen Experimenten offenbart sich eine gewisse Form von „Diskontinuität“ der beteiligten Wechselwirkung, für die beispielsweise Begriffe wie der des Grundzustandes geprägt wurden. Sicher ist gerade vor dem Hintergrund der Erörterungen von Kapitel 6 die Verwendung des Ausdruckes Zustand mit großer Vorsicht zu verwenden. Aber jenseits dessen repräsentiert der Begriff des „Grundzustandes“ eine für die Quantenmechanik typische Form des Zustandes, die vom Standpunkt der klassischen Physik gänzlich unerwartet ist. Es zeigt sich nämlich, daß es in einfacher Weise, also mit tatsächlich realisierbarem experimentellem Aufwand, möglich ist, in Zuständen zu präparieren, die sich nicht mehr als echte Konvexkombination anderer Zustände auffassen lassen. Es gibt also Extrempunkte von K , die konkret experimentell vorgezeigt werden können. Die Grundzustände sind besondere Beispiele solcher Zustände. Sie sind nicht nur Idealisierungen wie im Falle der Experimente, die sich durch die klassische Physik fassen lassen. Man denke dafür beispielsweise an eine Tennisballkanone als Präparierapparat. Ein Tennisball verläßt die Kanone mit einem Impuls, der nur bis zu einer gewissen endlichen Genauigkeit festgelegt ist. Man kann nur sagen, daß der Impuls einem gewissen endlichen Raumwinkel und betragsmäßig einem bestimmten endlichen reellen Intervall zugehörig ist. Es gibt allerdings keine prinzipielle Beschränkung für den Bau einer alternativen Tennisballkanone, bei der der Impuls des präparierten Tennisballs einem kleineren, aber immer noch endlichen Raumwinkel und entsprechend betragsmäßig einem klei-

neren, aber ebenfalls immer noch endlichen Intervall entstammt. In einer solchen Weise kann man Schritt für Schritt immer kleinere Raumwinkel und Intervalle realisieren, ohne jemals eine Raumrichtung und einen Betrag beliebiger Exaktheit zu erreichen. Es ist ein Charakteristikum des Wirklichkeitsbereiches, der der klassischen Physik zuzuordnen ist, daß ein derartiger Prozeß niemals darin mündet, daß ein Zustand realisiert wird, der nicht noch weiter im Sinne einer echten Konvexkombination weiterer Zustände aufgefaßt werden kann. Im zugehörigen mathematischen Bild des kontinuierlichen Phasenraumes findet man einen solchen Vorgang darin wieder, daß man sich schrittweise immer näher einem Punktmaß annähert, ohne es jemals zu erreichen. Die Punktmaße, also die Extrempunkte des Zustandsraumes im klassischen Kontext, stellen lediglich Idealisierungen dar. Damit ist ein grundlegender Unterschied zwischen Quantenmechanik und klassischer Physik qualitativ erfaßt. Der nächste Schritt soll nun darin bestehen, obige Einsicht in geeigneter Form vermittels der Seiten von K , also der zentralen konvexen Strukturen von K , zum Ausdruck zu bringen. Die Möglichkeit der Realisierbarkeit eines Extrempunktes x_0 von K durch endlich viele Manipulationen impliziert, daß Seiten, die x_0 als Element besitzen, zumindest im Sinne der Mengeninklusion eine andere x_0 enthaltende Seite F' umfassen müssen, deren Elemente man durch endlich viele experimentelle Fragestellungen voneinander unterscheiden kann. Experimentelles Unterscheiden von Zuständen kann nur mit Hilfe von Effekten bei Betrachtung der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\hat{\mu}$ durchgeführt werden, so daß die Forderung zunächst, wie folgt, formuliert werden kann:

Es gibt Seiten F von K mit der folgenden Eigenschaft:

F umfaßt eine andere Seite F' von K , deren Elemente bezüglich einer endlichen Menge von Effekten aus $\hat{\mathcal{L}}$ trennbar sind.

Der Begriff der Trennbarkeit sei dabei gemäß der nachfolgenden Definition verwandt:

Definition 9.7.1

Eine Seite F' von K heißt **trennbar bezüglich einer Teilmenge l von $\hat{\mathcal{L}}$** , wenn für alle Elemente x_1 und x_2 von F' die folgende Aussage gilt:

Gilt $\hat{\mu}(x_1, y) = \hat{\mu}(x_2, y)$ für alle Elemente y aus l , dann folgt die Identität von x_1 und x_2 .

Eine derartige Forderung ist noch kein vollwertiges Axiom, da sie keine wirkliche Strukturaussage bezüglich der mathematischen Theorie macht. Schließlich würde die Existenz einer einzigen Seite F von K bereits genügen, um obige Forderung zu

erfüllen. Dadurch wäre aber sicher innerhalb der Theorie keine grundlegende Struktur zum Ausdruck gebracht. Es stellt sich also die Frage, für welche Seiten man die obige Forderung nach dem Enthalten einer anderen Seite besagten endlichen Typs fordern soll. Man kann sicher nicht erwarten, daß ein Axiom, das die gänzlich ungewohnte Natur der Quantenphänomene erfassen soll, in irgendeiner Weise intuitiv zugänglich ist. Es ist eher das Gegenteil zu erwarten, so daß ein gewisses Maß des „Probierens“ zum Auffinden der richtigen Zusammenhänge nahezu unumgänglich ist. Als Ansatz wird gewählt:

Jede exponierte Seite F von K umfaßt eine Seite F' , deren Elemente bezüglich einer endlichen Menge von Effekten aus $\hat{\mathcal{L}}$ trennbar sind.

Zur endgültigen Formulierung des Axioms eignet sich der in Definition 8.3.6 begründete Dimensionsbegriff. Unter Verwendung des Lemmas E.9.1 lautet somit die Forderung gemäß [Lud85a], Kapitel VI, §7.1, S. 185:

AV 4* Hauptaxiom der Quantisierung (schwache Form):

Jede exponierte Seite von K umfaßt eine endlichdimensionale Seite von K .

Wie der Zusatz „schwache Form“ andeutet, kann AV 4 noch zu der weiter unten angegebenen Aussage AV 4s verschärft werden. Da AV 4 insbesondere durch AV 4s impliziert wird, erhält AV 4 ein ergänzendes *.

Bevor die der Verschärfung von AV 4 dienenden Überlegungen angestellt werden, sei zunächst noch angemerkt, daß man in AV 4 nicht fordern muß, daß die endlichdimensionale Seite auch exponiert ist, denn die Exponiertheit endlichdimensionaler Seiten ist mit AV 2f bereits gefordert worden.

Die Überlegungen, die zu Aussage AV 4 geführt haben, können noch weitergeführt werden. Es stellt sich etwa die Frage, warum man nicht von vornherein fordert, daß ganz K und damit auch jede Seite von K endlicher Dimension ist. Gegen ein solches Axiom ließe sich vom experimentellen Standpunkt nichts einwenden, aber die Forderung nach der Endlichkeit der Dimension von K zöge in natürlicher Weise die Frage nach ihrer konkreten Angabe nach sich. Darauf geben die Experimente aber keinen Hinweis, so daß die Frage nach dem Wert der Dimension nicht beantwortet werden kann. Daher ist wie bereits an anderen Stellen beim Aufbau der Theorie auch hier der Weg der Idealisierung zu beschreiten, das heißt, es ist die Unendlichkeit der Dimension von K zu fordern. Ein ähnlicher Weg wurde beispielsweise im Falle der Mächtigkeit einer Bildmenge in Kapitel 4 beschritten. Dort wurde verlangt, daß die Bildmengen ob der Unkenntnis ihrer Mächtigkeit in idealisierender Weise als Mengen unendlicher Mächtigkeit anzusehen sind. Da aber die Überabzählbarkeit

einer Bildmenge über jede Erfahrung hinausgeht, wurde die Abzählbarkeit verlangt. In entsprechender Weise soll auch für K und jede andere exponierte Seite von K eine gewisse Form der Abzählbarkeit gefordert werden. Ludwig verlangt in [Lud85a], Kapitel VI, §7.1, S. 185 dafür das nachfolgende Axiom:

AV 4s Hauptaxiom der Quantisierung (scharfe Form):

Jede exponierte Seite von K ist das Supremum einer monoton wachsenden Folge endlichdimensionaler Seiten von K . Das heißt, es existiert eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlichdimensionaler Seiten von K derart, daß zum einen für jedes n aus \mathbb{N} die Seite F_n in der Seite F_{n+1} enthalten ist und daß zum anderen $F = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} F_n$ gilt.

Bezüglich der Exponiertheit der endlichdimensionalen Seiten sei nochmals an Axiom AV 2f erinnert.

AV 4s bringt zum Ausdruck, daß jede exponierte Seite von F in gewisser Weise beliebig genau durch endlichdimensionale Seiten von K approximiert werden kann. Damit kommt also eine gewisse Form der Abzählbarkeit zum Ausdruck. Es muß allerdings bemerkt werden, daß in AV 4s noch keine konkrete Forderung der Unendlichdimensionalität von K aufgestellt wird. Für die Weiterführung der oben begonnenen Diskussion wird auf Abschnitt 10.2 verwiesen.

Offensichtlich folgt die Aussage AV 4 aus der Aussage AV 4s, so daß bei Forderung von AV 4s die Aussage AV 4 nicht mehr explizit als Axiom eingeführt werden muß. Da aber eine Reihe mathematischer Folgerungen, wie etwa diejenigen des nachfolgenden Abschnitts lediglich der Aussage AV 4 bedürfen, wurde explizit AV 4 eingeführt. Um allerdings zur „Hilbertraumstruktur“ vorzudringen, ist AV 4s notwendig. Daher ist für die weiteren Erörterungen AV 4s als Bezeichnung eines Axioms zu verstehen, während AV 4 lediglich als Name für obige Aussage steht.

9.8 Weitere Eigenschaften des Verbandes der Entscheidungseffekte

Die vom Axiom AV 4s mit eingeschlossene Aussage Axiom AV 4 stattet den Verband G der Entscheidungseffekte mit weiteren wichtigen Eigenschaften aus, die in den nächsten Kapiteln ihre Bedeutung zeigen werden. Zunächst findet man in Ausführung einer Feststellung in [Lud85a], Kapitel VI, §6.3, S. 183, daß die Endlichdimensionalität einer exponierten Seite von K schon ihre Kompaktheit impliziert.

Lemma 9.8.1 *Sei e ein Element aus G . Ist $K_1(e)$ endlichdimensional, dann ist $K_1(e)$ kompakt sowohl bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ als auch bezüglich der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Topologie.*

Beweis:

Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\dim K_1(e) = n$. Also existieren ein n -dimensionaler Untervektorraum V_e von B_Δ und ein Element $x_e \in B_\Delta$, so daß $K_1(e) \subseteq x_e + V_e$ gilt. Da aber für alle $e \in G$ die Menge $K_1(e)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ abgeschlossen ist, ergibt sich auch die Abgeschlossenheit von $K_1(e) - x_e$ in V_e bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$. Mit Lemma 8.2.13 gilt nun $\|x\|_{B_\Delta} = 1$ für alle $x \in K$, so daß man für $K_1(e) - x_e$ auch die $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Beschränktheit erhält. Damit liegt nun aber mit $K_1(e) - x_e$ eine normabgeschlossene und normbeschränkte Teilmenge des endlichdimensionalen normierten Raumes V_e vor, und als solche besitzt $K_1(e) - x_e$ auch die Eigenschaft der Kompaktheit. Wegen der intrinsischen Natur der Kompaktheit ist $K_1(e) - x_e$ auch in $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ kompakt, und somit ist auch $K_1(e)$ kompakt in $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$.

Mit Satz 8.1.23 ist die Normtopologie feiner als die $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Topologie, woraus sich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Kompaktheit von $K_1(e)$ ergibt. ■

Im nächsten Lemma stellt sich die Dimension, aufgefaßt als Funktion auf $W_{\hat{\mathcal{L}}}$, als streng monotone Funktion dar, wie im Beweis zu T 7.2.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §7.2, S. 186 angedeutet wird:

Lemma 9.8.2 *Für beliebige Elemente e, e' von G mit $K_1(e) \subsetneq K_1(e')$ gilt für die Dimensionen die Beziehung $\dim K_1(e) < \dim K_1(e')$.*

Beweis:

Seien $e, e' \in G$ mit $K_1(e) \subsetneq K_1(e')$ gewählt, dann enthält die affine Hülle von $K_1(e')$ die affine Hülle von $K_1(e)$. Damit ergibt sich $\dim K_1(e) \leq \dim K_1(e')$.

Wäre nun $\dim K_1(e) = \dim K_1(e')$, dann müßten die affinen Hüllen von $K_1(e)$ und $K_1(e')$ zusammenfallen, wie jetzt gezeigt wird. Da $K_1(e) \subsetneq K_1(e')$ gilt, kann man ein $x_0 \in K_1(e)$ und zwei Untervektorräume V_e und $V_{e'}$ von B_Δ so finden, daß zum einen die affine Hülle von $K_1(e)$ durch $x_0 + V_e$ gegeben ist und daß zum anderen die affine Hülle von $K_1(e')$ gerade mit $x_0 + V_{e'}$ vorliegt. Dabei müßten nach obiger Annahme V_e und $V_{e'}$ dieselbe Dimension haben, und somit wären sie algebraisch isomorph. Da aber $x_0 + V_e$ in $x_0 + V_{e'}$ enthalten ist, und somit auch $V_e \subseteq V_{e'}$ gilt, ergäbe sich eben $V_e = V_{e'}$. Die affinen Hüllen wären also identisch.

Wäre jetzt $x \in K_1(e')$, dann wäre $x \in x_0 + V_e = x_0 + V_{e'}$. Also ließe sich x als Affinkombination von Elementen aus $K_1(e)$ darstellen. Das heißt, es existierten eine Familie $(x_i)_{i=1}^n \subseteq K_1(e)$ und eine Familie $(\alpha_i)_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, so daß $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ gälte. Damit erhielte man $\xi_\Delta(x, e) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_\Delta(x_i, e) = 1$, und somit gehörte x auch zu $K_1(e)$. Die Mengen $K_1(e)$ und $K_1(e')$ wären also im Widerspruch zur Voraussetzung identisch. ■

Mit Hilfe der beiden Lemmata kann man jetzt zeigen, daß der Verband G die wichtige verbandstheoretische Eigenschaft der Atomizität besitzt. In Zusammenfassung von T 7.2.1 und T 7.2.2 aus [Lud85a], Kapitel VI, §7.2, S. 186 ergibt sich:

Satz und Definition 9.8.3 *Die Verbände G und $W_{\hat{K}}$ sind atomar. Es gilt für die Menge $A(W_{\hat{K}})$ der Atome von $W_{\hat{K}}$:*

$$A(W_{\hat{K}}) = \{ \{x\} \mid x \in \partial_e K \}. \quad (9.37)$$

Für jedes Atom p von G enthält die Seite $K_1(p)$ genau ein Element. Dabei handelt es sich um einen Extrempunkt von K . Die Vorschrift

$$A(G) \longrightarrow \partial_e K, \quad p \longmapsto x \text{ mit } x \in K_1(p) \quad (9.38)$$

definiert eine Bijektion von der Menge der Atome von G in die Menge der Extrempunkte von K .

Beweis:

Zunächst wird der Verband $W_{\hat{K}}$ betrachtet. Es sei dafür ein Element $K_1(e)$ aus $W_{\hat{K}}$ gewählt, dann existiert mit AV 4 ein endlichdimensionales Element $K_1(e')$ von $W_{\hat{K}}$ mit $K_1(e') \subseteq K_1(e)$. Entweder ist $K_1(e')$ dann schon Atom oder aber es enthält noch eine echt kleinere Menge $K_1(e'') \in W_{\hat{K}}$, die dann aber auch wegen Lemma 9.8.2 eine echt kleinere Dimension haben muß. So kommt man in endlich vielen Schritten bei einem Element aus $W_{\hat{K}}$ an, das außer \emptyset kein weiteres Element mehr aus $W_{\hat{K}}$ umfaßt. Damit ist die Atomizität von $W_{\hat{K}}$ und die Endlichdimensionalität der Atome gezeigt.

Es muß jetzt gezeigt werden, daß die Atome von $W_{\hat{K}}$ gerade durch die Menge $\{ \{x\} \mid x \in \partial_e K \}$ gegeben sind. Mit AV 2f ist jede endlichdimensionale Seite von K auch exponiert. Also enthält $W_{\hat{K}}$ insbesondere alle endlichdimensionalen Seiten von K , denn mit Satz 9.3.2 fällt $W_{\hat{K}}$ mit der Menge aller exponierten Seiten von K zusammen. Für einen Extrempunkt x von K bildet $\{x\}$ eine

0-dimensionale Seite, und somit liegt $\{x\}$ auch in $W_{\hat{\mathcal{L}}}$. Trivialerweise ist $\{x\}$ dann auch Atom von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$. Es bleibt somit nur noch zu zeigen, daß auch alle Atome von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ die Form $\{x\}$ mit $x \in \partial_e K$ haben.

Jedes Atom von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ ist, wie oben gezeigt, endlichdimensional und trivialerweise nicht-leer. Wenn jede nicht-leere, endlichdimensionale Seite von K einen Extrempunkt enthielte, wäre der Beweis gelungen, denn in einem solchen Falle müßte das Atom mit der Menge, die nur den entsprechenden Extrempunkt enthielte, zusammenfallen.

Es wird daher jetzt der Nachweis erbracht, daß jede endlichdimensionale, nicht-leere Seite von K einen Extrempunkt enthält. Es sei dafür ein $e \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit endlichdimensionalem $K_1(e)$ gewählt. Wegen $e \neq \mathbf{0}$ ist $K_1(e)$ nicht-leer, zudem ist $K_1(e)$ mit Lemma 9.8.1 auch $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -kompakt. $K_1(e)$ enthält damit einen Extrempunkt x von $K_1(e)$, wie sich etwa mit [Val64], Kapitel XI, Theorem 11.4, S. 138 ergibt. Nun ist x auch Extrempunkt von K , denn betrachtet man $x_1, x_2 \in K$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha) x_2$, dann liegen x_1, x_2 aufgrund der Seiteneigenschaft von $K_1(e)$ auch in $K_1(e)$, und damit gilt aufgrund der Extrempunkteigenschaft von x bezüglich $K_1(e)$ auch $x = x_1$. Also ist x auch Extrempunkt von K .

Damit wurde die Atomizität des Verbandes $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ und die Aussage (9.37) bewiesen.

Da entsprechend Lemma 9.5.8 durch die Abbildung

$$G \longrightarrow W_{\hat{\mathcal{L}}}, \quad e \longrightarrow K_1(e) \quad (9.39)$$

ein Verbandsisomorphismus vorliegt, folgt aus der Atomizität von $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ auch die Atomizität von G . Insbesondere werden durch obige Abbildung die Atome der Verbände $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ und G in bijektiver Weise einander zugeordnet. Das heißt, daß für jedes Atom p von G die Seite $K_1(p)$ nur aus einem einzelnen Element besteht, das daher ein Extrempunkt von K sein muß. Somit ist auch die Abbildung

$$t: A(G) \longrightarrow \partial_e K, \quad p \longmapsto x \text{ mit } x \in K_1(p) \quad (9.40)$$

auf ganz $A(G)$ wohldefiniert. Bezüglich der Injektivität gelte $t(p_1) = t(p_2)$ für zwei Atome $p_1, p_2 \in G$. Dann erhält man offenbar

$$K_1(p_1) = \{t(p_1)\} = \{t(p_2)\} = K_1(p_2),$$

woraus sich mittels der Verbandsisomorphie (9.39) die Identität von p_1 und p_2 ergibt. Der Beweis schließt mit dem Nachweis der Surjektivität von t . Es sei ein $x \in \partial_e K$ gewählt, dann liegt entsprechend (9.37) mit $\{x\}$ ein Atom von

$W_{\hat{L}}$ vor. Wiederum mit dem Wissen, daß es sich bei der Abbildung in (9.39) um einen Verbandsisomorphismus handelt, kann man darauf schließen, daß es ein Atom p von G mit $K_1(p) = \{x\}$ gibt. Trivialerweise gilt dann $t(p) = x$, so daß sich t auch als surjektiv erweist. ■

Der vollständige Verband G besitzt also die Eigenschaft der Atomizität. Zusammen mit seiner Orthomodularität ergibt sich vermittels Lemma F.28, daß er insbesondere auch atomistisch ist. Bei atomaren Verbänden stellt sich die Frage der Gültigkeit der Überdeckungseigenschaft. Der nachfolgende, T 7.2.3 und T 7.2.4 in [Lud85a], Kapitel VI, §7.2, S. 186 entsprechende Satz wird zeigen, daß G Eigenschaften besitzt, die über die Überdeckungseigenschaft im Sinne der Definition F.29 hinausgehen. Daher wird im weiteren von erweiterten Überdeckungseigenschaften gesprochen werden.

Satz 9.8.4 (Erweiterte Überdeckungseigenschaften) *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Sei p ein Atom von G , und sei e ein Element aus G mit $p \not\leq e$. Dann ist $e \vee p$ oberer Nachbar von e .*

G besitzt insbesondere die Überdeckungseigenschaft, das heißt, daß für jedes Atom p von G und jedes Element e von G mit $e \wedge p = \mathbf{0}$ das Element $e \vee p$ oberer Nachbar von e ist.

(ii) *Bezeichnet e ein Element aus $G \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ und bezeichnet p ein Atom von G , dann existieren zwei Atome q_1, q_2 von G mit $q_1 \leq e$, $q_2 \leq e^\perp$ und $p \leq q_1 \vee q_2$.*

Beweis:

zu (i): Zunächst bedarf es der folgenden Aussage:

Hilfsaussage:

Ist für $e_1, e_2 \in G \setminus \{\mathbf{0}\}$ entweder $K_1(e_1)$ oder $K_1(e_2)$ kompakt bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$, dann gilt:

$$\Delta(e_1, e_2) \neq \mathbf{0} \iff e_1 \wedge e_2 = \mathbf{0}.$$

Zum Beweis der Hilfsaussage betrachte man als erstes den Fall „ \implies “ gefolgt vom umgekehrten Fall „ \impliedby “.

„ \implies “ : $\Delta(e_1, e_2) \neq \mathbf{0}$ bedeutet:

$$\inf_{x \in K_1(e_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - e_2) \neq 0 \text{ oder } \inf_{x \in K_1(e_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - e_1) \neq 0.$$

Das heißt aber:

$$\sup_{x \in K_1(e_1)} \hat{\mu}(x, e_2) \neq 1 \text{ oder } \sup_{x \in K_1(e_2)} \hat{\mu}(x, e_1) \neq 1.$$

Also ist $K_1(e_1) \cap K_1(e_2) = \emptyset$, womit man durch Lemma 9.5.8 zu $e_1 \wedge e_2 = \mathbf{0}$ kommt.

„ \Leftarrow “ : Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man von der $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Kompaktheit von $K_1(e_1)$ ausgehen. Außerdem setze man $e_1 \wedge e_2 = \mathbf{0}$ voraus.

Wäre jetzt $\inf_{x \in K_1(e_1)} \xi_\Delta(x, \mathbf{1} - e_2) = 0$, dann käme man zu einem Widerspruch, wie die nachfolgenden Überlegungen zeigen werden. Aufgrund der $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Stetigkeit von $\xi_\Delta(\cdot, \mathbf{1} - e_2)$ existiert mit dem Theorem von Weierstraß, wie es etwa mit Theorem 1 in [Bou66a], Kapitel IV, §6.1, S. 359 gegeben ist, ein $x_0 \in K_1(e_1)$ mit $\xi_\Delta(x_0, \mathbf{1} - e_2) = 0$. Damit gilt aber $x_0 \in K_1(e_1) \cap K_1(e_2)$, also $K_1(e_1) \cap K_1(e_2) \neq \emptyset$. Lemma 9.5.8 liefert damit $e_1 \wedge e_2 \neq \mathbf{0}$ im Widerspruch zu den Voraussetzungen, womit die Hilfsaussage bewiesen wäre.

Damit kann zum Beweis der eigentlichen Aussage übergegangen werden. Da nach Voraussetzung $p \not\leq e$ gilt, muß nur noch gezeigt werden, daß zwischen e und $e \vee p$ kein weiteres Element von G mehr liegt. Man wähle dafür ein Atom p in G und zwei Elemente $e, e_1 \in G$ mit $e \leq e_1 \leq e \vee p$. Dann ist $e \vee p$ oberer Nachbar von e , denn es gilt stets einer der drei Fälle:

- (i) Gilt $p \leq e_1$, dann ist $p \vee e \leq e_1 \leq e \vee p$, also $e_1 = e \vee p$.
- (ii) Gilt $p \not\leq e_1$ und $e_1 = \mathbf{0}$, dann ist auch $e = \mathbf{0}$, da nach Voraussetzung $e \leq e_1$ gilt. Also ist offensichtlich $e_1 = e$.
- (iii) Gilt $p \not\leq e_1$ und $e_1 \neq \mathbf{0}$, dann ist $p \wedge e_1 = \mathbf{0}$ aufgrund der Atom-Eigenschaft von p . Damit ergibt sich mit der obigen Hilfsaussage aber auch $\Delta(e_1, p) \neq 0$. Daraus folgt nun mit AV 3 mittels Lemma 9.6.15 (v) gerade, daß $e_1 = e$ gilt.

zu (ii): Gilt $p \leq e$, dann folgt die Aussage unmittelbar, wenn man $q_1 := p$ setzt und wenn man für q_2 ein beliebiges Atom wählt, das kleiner als e^\perp ist. Dabei ist die Existenz eines solchen Atoms aufgrund der Atomizität von G garantiert. Dann folgt trivialerweise $p \leq p \vee q_2$. Entsprechendes gilt im Falle $p \leq e^\perp$, so daß man für die weiteren Betrachtungen von $p \not\leq e$ und $p \not\leq e^\perp$ ausgehen kann. Das bedeutet aber $e \neq e \vee p$ und $e^\perp \neq e^\perp \vee p$. Man wähle nun

$$q_1 := e^\perp \vee p - e^\perp,$$

dann ergibt sich zunächst wegen $e^\perp \leq e^\perp \vee p$ aus der Orthomodularität von G die Identität $q_1 = (e^\perp \vee p) \wedge e$, so daß damit die Zugehörigkeit von q_1 zu G gesichert ist. Da sich mit obigem Punkt (i) das Element $e^\perp \vee p$ als oberer Nachbar von e^\perp darstellt, muß auch $e^\perp \vee p - e^\perp$ oberer Nachbar von $\mathbf{0}$ sein. Also handelt es sich bei q_1 um ein Atom von G . Trivialerweise gilt zudem $q_1 \leq \mathbf{1} - e^\perp = e$.

Nun erhält man für

$$q_2 := e \vee p - e$$

die Relation $q_2 = (e \vee p) \wedge e^\perp$, so daß die Zugehörigkeit von q_2 zu G gesichert ist. Außerdem ergibt sich auf analogem Wege die Atom-Eigenschaft und die Relation $q_2 \leq e^\perp$, so daß lediglich $p \leq q_1 \vee q_2$ zu zeigen bleibt.

Aus den Relationen $q_1 \leq e$ und $q_2 \leq e^\perp$ ergibt sich mit Lemma F.22 die Kommutierbarkeit von q_1 mit e , von q_2 mit e , sowie von q_1 mit e^\perp und von q_2 mit e^\perp . Also handelt es sich mit Satz F.23 bei (q_1, q_2, e) und (q_1, q_2, e^\perp) um zwei distributive Tripel. Bedenkt man nun noch, daß aufgrund der Orthomodularität von G aus $e \leq e \vee p$ und $e^\perp \leq e^\perp \vee p$ die Relationen

$$\begin{aligned} e \vee p &= e \vee ((e \vee p) \wedge e^\perp) = e \vee q_2, \\ e^\perp \vee p &= e^\perp \vee ((e^\perp \vee p) \wedge e) = e^\perp \vee q_1. \end{aligned}$$

folgen, erhält man die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} p &\leq (e \vee p) \wedge (e^\perp \vee p) = (e \vee q_2) \wedge (e^\perp \vee q_1) \\ &= ((e \vee q_2) \wedge e^\perp) \vee ((e \vee q_2) \wedge q_1) \\ &= (\underbrace{(e \wedge e^\perp)}_{=\mathbf{0}}) \vee (q_2 \wedge e^\perp) \vee ((e \wedge q_1) \vee \underbrace{(q_2 \wedge q_1)}_{=\mathbf{0}}) \\ &= (q_2 \wedge e^\perp) \vee (e \wedge q_1) \\ &\leq q_1 \vee q_2. \end{aligned}$$

■

Die Erörterung, die am Ende des Abschnitts 9.5 bezüglich der Eigenschaften von G begonnen wurde, kann nun noch etwas fortgeführt werden. Zusammenfassend kann man sagen, daß durch die Axiome AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AVid, AV 3 und AV 4s eine Teilmenge G von $\hat{\mathcal{L}}$ ausgezeichnet werden kann, die zum einen bezüglich der Ordnung durch die Zustände mittels $\hat{\mu}$ und der Zuordnung $e \mapsto 1 - e$ ein vollständiger, orthomodularer, separabler, atomarer Verband mit Überdeckungseigenschaft ist, und die zum anderen entsprechend Satz 9.5.1 ganz $\hat{\mathcal{L}}$ charakterisiert.

Man hat durch Aufzählung obiger Eigenschaften sicher noch nicht die volle Struktur von G erfaßt, denn G besitzt beispielsweise nicht nur die Überdeckungseigenschaft, sondern sogar eine etwas verallgemeinerte Form, wie sie in Satz 9.8.4 angegeben wurde. Dennoch erfaßt man dadurch eine ganze Reihe entscheidender Strukturmerkmale, die in den nächsten Kapiteln von besonderer Bedeutung sein werden. Es sei nochmals auf das Kapitel 12 hingewiesen, das sich mit dem Verhältnis zur verbandstheoretischen Formulierung der Quantenmechanik nach G.W. Mackey, J.M. Jauch, C. Piron und anderen befaßt, und in dem die oben aufgezählten Eigenschaften ebenfalls von besonderer Bedeutung sind.

9.9 Der Begriff des Mikrosystems

Zum Abschluß des Kapitels kann ein wichtiges Ziel realisiert werden, das in der realistischen Begründung des Begriffes des Mikrosystems und in der Definition der Quantenmechanik als physikalische Theorie besteht.

Basierend auf dem Begriff der Zustands-Effekt-Struktur und den Uniformitäten der physikalischen Unschärfe kann man jetzt mit Hilfe der in den zurückliegenden Abschnitten erarbeiteten Axiome dem Wort „Mikrosystem“ eine konkrete Bedeutung gegeben werden.

Definition 9.9.1

Sei durch einen Teil der Wirklichkeit, eine mathematische Theorie \mathcal{MT} und durch Anwendungsvorschriften \longleftrightarrow eine physikalische Theorie gegeben. Sei weiter durch $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur bezüglich dieser physikalischen Theorie im Sinne von Definition 6.3.1 gegeben, wobei M die zugehörige Menge von Wechselwirkungsträgern bezeichnen möge. Wenn in der mathematischen Theorie \mathcal{MT} die Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3 und AV 4s gelten, dann werden sowohl die Elemente der Menge M als auch die zugehörigen Realtextteile als **Mikrosysteme** bezeichnet.

Definiert man den Terminus Mikrosystem in der eben dargestellten Weise hat man den zentralen Schritt getan, um in exakter und realistisch fundierter Weise zu definieren, was unter Quantenmechanik zu verstehen ist.

Definition 9.9.2

Die Quantenmechanik ist die physikalische Theorie der Wechselwirkung, die durch Mikrosysteme als Wechselwirkungsträger im Sinne einer Präparier-Registrier-Struktur vermittelt wird.

Es steht jetzt eine Formulierung der Quantenmechanik zur Verfügung, die sich auf physikalisch eindeutig interpretierte Terme stützt und deren Axiome größtenteils physikalisch motiviert sind. Von dem so völlig neu begründeten Zugang zur Quantenmechanik ausgehend kann man sich nun in Teil III der Arbeit zentraler Fragestellungen insbesondere auch interpretatorischer Art widmen.

Teil III

Anwendungen des Ludwigschen Zugangs

Kapitel 10

Darstellung durch Hilberträume

In Kapitel 9 wurde dem Begriff des „Mikrosystems“ ein realistisches Fundament gegeben. Darauf aufbauend wurde in Definition 9.9.2 festgelegt, daß mit Quantenmechanik die Theorie der Wechselwirkung bezeichnet wird, die durch Mikrosysteme im Sinne einer Präparier-Registrier-Struktur vermittelt wird. Üblicherweise assoziiert man mit Quantenmechanik einen mathematischen Apparat, der sich in erster Linie mit Operatoren auf Hilberträumen beschäftigt. Es stellt sich somit die Frage, inwieweit auf der Basis bisher entwickelten mathematischen Theorie ein Zusammenhang mit Strukturen auf Hilberträumen erreicht werden kann. Es ist Inhalt des folgenden Kapitels, einen derartigen Zusammenhang durch Forderung zweier weiterer Axiome herzustellen.

Dazu wird in einem ersten Abschnitt am Beispiel des Verbandes G illustriert, daß sich die mathematische Struktur, wie sie bis einschließlich des Kapitels 9 entwickelt wurde, aus Teilstrukturen zusammensetzt, die einerseits den axiomatischen Relationen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3 und AV 4s genügen, die aber andererseits einen verbandstheoretisch irreduziblen Verband der Entscheidungseffekte besitzen. Daraus erwächst die Rechtfertigung für den Rest des Kapitels, den Verband G der Entscheidungseffekte als irreduzibel im verbandstheoretischen Sinne anzunehmen. So wird es ermöglicht, daß sich im zweiten Abschnitt des Kapitels durch Hinzunahme zweier weiterer Axiome der Verband der Entscheidungseffekte als orthoisomorph zu dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume eines separablen und unendlichdimensionalen Hilbertraumes \mathcal{H} über dem komplexen Zahlenkörper erweist. Die so gewonnene Orthoisomorphie kann im dritten Abschnitt dazu genutzt werden, die Verknüpfung mit Hilbertraumstrukturen sowohl auf die Menge aller Effekte, als auch die Menge der Zustände zu erweitern. Dabei wird sich herausstellen, daß die Menge aller Effekte gerade mit der Menge aller selbstadjungierten Operatoren A auf \mathcal{H} iden-

tifiziert werden kann, die für alle Elemente φ aus \mathcal{H} der Relation $0 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1$ genügen, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf \mathcal{H} bezeichnen soll. Die Menge der Zustände dagegen kann mit der Menge der Dichteoperatoren auf \mathcal{H} identifiziert werden. Die dritte physikalisch relevante Größe, die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\hat{\mu}$, wird sich dabei als Spur über Operatorprodukten darstellen lassen.

Im vierten Abschnitt gelingt der Nachweis, daß die bisher entwickelte Axiomatik nicht-leer ist. Das heißt, daß es mathematisch nicht-triviale Strukturen gibt, die allen bisher formulierten Axiomen genügen. Im letzten Abschnitt schließlich wird die Koexistenz von Effekten im Lichte der Hilbertraum-Darstellung betrachtet.

10.1 Zerlegung in irreduzible Teile

In Abschnitt 9.6 wurde der Begriff der Koexistenz im Zusammenhang mit Effekten geprägt. Dabei zeigt Satz 9.6.9, daß bei Beschränkung auf die Entscheidungseffekte die Koexistenz mit der verbandstheoretischen Kommutierbarkeit zusammenfällt. Mit dem Begriff der Kommutierbarkeit hängen eine Reihe anderer verbandstheoretischer Strukturen zusammen, die sich für die weitere Diskussion als nützlich erweisen. Sie werden daher zur Verfügung gestellt. Es sei aber auch auf Anhang F verwiesen.

Definition 10.1.1

Sei L eine orthomodulare Halbordnung, und sei X eine Teilmenge von L . Dann heißt die Menge aller Elemente a aus L , die mit allen Elementen b aus X kommutieren, die **Kommutante von X** . Die Kommutante von L wird als **Zentrum von L** bezeichnet. Es wird dafür das Symbol $Z(L)$ verwendet.

Existieren in einer orthomodularen Halbordnung ein Null-Element $\mathbf{0}$ und ein Eins-Element $\mathbf{1}$ im Sinne von Definition F.5, dann gehören $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ offensichtlich zum Zentrum der orthomodularen Halbordnung. Zur begrifflichen Unterscheidung der Fälle, ob noch weitere Elemente im Zentrum liegen, wählt man die Namen:

Definition 10.1.2

Besteht das Zentrum einer orthomodularen Halbordnung L mit Null-Element $\mathbf{0}$ und Eins-Element $\mathbf{1}$ ausschließlich aus $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$, dann heißt die Halbordnung **irreduzibel**. Andernfalls nennt man sie **reduzibel**.

Mit Satz F.35 (ii) erhält man für das Zentrum des Verbandes G der Entscheidungseffekte die folgende Aussage:

Lemma 10.1.3 $Z(G)$ ist ein atomarer, vollständiger Boolescher Unterverband von G , wenn auf $Z(G)$ die Restriktion von \perp auf $Z(G)$ als Orthokomplementation verwendet wird.

Beweis: Siehe Satz F.35 sowie Lemma 9.2.5 (i), Satz 9.5.12 und Satz 9.8.3.

Im Sinne der Definition F.27 wird mit $A(Z(G))$ die Menge der Atome des Verbandes $Z(G)$ bezeichnet. Bezüglich der Mächtigkeit von $A(Z(G))$ erhält man als Teil von T 5.4.2 in [Lud85a], Kapitel VII, §5, S. 203:

Lemma 10.1.4 Die Menge $A(Z(G))$ der Atome des Zentrums von G enthält höchstens abzählbar viele Elemente.

Beweis:

Das Zentrum $Z(G)$ von G ist als Boolescher Verband insbesondere distributiv. Also folgt für beliebige Atome $z_1, z_2 \in A(Z(G))$ mit $z_1 \neq z_2$, da sie definitionsgemäß miteinander kommutieren:

$$z_1 = \underbrace{(z_1 \wedge z_2)}_{= \mathbf{0}} \vee (z_1 \wedge z_2^\perp).$$

Also erhält man $z_1 \leq z_2^\perp$. Das bedeutet somit, daß es sich bei $A(Z(G))$ um eine Teilmenge von G handelt, deren Elemente paarweise orthogonal sind. Ob der Separabilität von G , wie sie mit Satz 9.5.11 (ii) gilt, kann $A(Z(G))$ höchstens abzählbar sein. ■

Durch die Axiome, wie sie im Rahmen der Kapitel 5 bis 9 erörtert wurden, kann keine Aussage darüber getroffen werden, ob G reduzibel oder irreduzibel ist. Aber man kann zeigen, daß sich G als ein „unabhängiges Nebeneinander“ irreduzibler Unterverbände auffassen läßt, wie der folgende Satz beweist. Als entscheidend erweist sich dabei die Atomizität von $Z(G)$, die sich im Rahmen des Beweises von Lemma 10.1.3 als Konsequenz der Atomizität von G herausgestellt hat. Da die Atomizität von G , wie aus dem Beweis von Satz 9.8.3 bekannt, auf dem Axiom AV 4s fußt, muß die Bedeutung von AV 4s für den folgenden Zerlegungssatz hervorgehoben werden.

Satz 10.1.5 (Zerlegungssatz für G)

(i) Sei z ein Element aus $A(Z(G))$, und es sei definiert

$$G[\mathbf{0}, z] := \{e \in G \mid e \leq z\}.$$

Bezüglich der induzierten Halbordnung und der relativen Orthokomplementation im Sinne Definition F.38 ist $G[\mathbf{0}, z]$ ein vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler und irreduzibler Unterverband von G , für den die erweiterten Überdeckungseigenschaften im Sinne von Satz 9.8.4 gelten.

(ii) **(Inneres Produkt)**

Jedes Element von e aus G läßt sich auf eindeutige Weise in der Form

$$e = \bigvee_{z \in A(Z(G))} e_z$$

darstellen, wobei für jedes z aus $A(Z(G))$ mit e_z ein Element aus $G[\mathbf{0}, z]$ bezeichnet sei.

Zu jedem e aus G kann die zugehörige Familie $(e_z)_{z \in A(Z(G))}$ konkret angegeben werden, denn es gilt für jedes z aus $A(Z(G))$:

$$e_z = e \wedge z.$$

(iii) **(Äußeres Produkt)**

Es bezeichne $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ für eine höchstens abzählbare Indermenge I eine Familie vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler, irreduzibler Verbände, für die die erweiterten Überdeckungseigenschaften gemäß Satz 9.8.4 gelten. Dann ist die Menge

$$\tilde{G} := \{(e_i)_{i \in I} \mid \forall i \in I : e_i \in G_i\}$$

bezüglich der Relation

$$\forall \tilde{e}, \tilde{f} \in \tilde{G} : \tilde{e} \leq \tilde{f} \iff [\forall i \in I : e_i \leq_i f_i]$$

als Halbordnung und der Abbildung

$$\tilde{\perp} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}, \tilde{e} \longmapsto \tilde{e}^{\tilde{\perp}} := (e_i^{\perp_i})_{i \in I}$$

als Orthokomplementation ein vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler Verband, für den die erweiterten Überdeckungseigenschaften entsprechend Satz 9.8.4 gelten.

(iv) (Konsistenzbetrachtungen)

(a) Der im Sinne von Punkt (iii) aus der Familie $(G[\mathbf{0}, z])_{z \in A(Z(G))}$ gewonnene Verband $(\tilde{G}, \tilde{\leq}, \tilde{\perp})$ ist orthoisomorph zum Verband (G, \leq, \perp) bezüglich der Abbildung:

$$G \longrightarrow \tilde{G}, \quad e \longmapsto (a \wedge z)_{z \in A(Z(G))}.$$

(b) Sei $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ für eine höchstens abzählbare Indexmenge I eine Familie vollständiger, orthomodularer, atomarer, irreduzibler Verbände. Ferner bezeichne $(\tilde{G}, \tilde{\leq}, \tilde{\perp})$ den entsprechend Punkt (iii) aus der Familie $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ gewonnenen Verband. Dann existiert eine Bijektion

$$f : A(Z(\tilde{G})) \longrightarrow I,$$

so daß für jedes $z \in A(Z(\tilde{G}))$ durch die Abbildung

$$\tilde{G}[\mathbf{0}, z] \longrightarrow G_{f(z)}, \quad (e_i)_{i \in I} \longrightarrow e_{f(z)}$$

der Verband $\tilde{G}[\mathbf{0}, z]$ orthoisomorph ist zu dem Verband $G_{f(z)}$.

Beweis: Siehe Satz G.1.2.

Obiger Zerlegungssatz zeigt, daß sich die für G als zentral erkannten Eigenschaften in beide Richtungen „vererben“. Das heißt, wenn G sie besitzt, dann haben auch die irreduziblen Bausteine die betrachteten Eigenschaften. Aber auch umgekehrt besitzt ein Gesamtverband, der sich aus einer Familie irreduzibler Bestandteile im Sinne von Satz 10.1.5 (iii) generiert, die entsprechenden Eigenschaften, wenn sie für alle irreduziblen Bestandteile gelten. Insbesondere rechtfertigt es Punkt (iv), daß es zur weiteren Strukturanalyse des Verbandes ausreichend ist, die Familie der irreduziblen Bausteine $(G[\mathbf{0}, z])_{z \in A(Z(G))}$ zu untersuchen.

Nun besteht die mathematische Theorie, wie sie im Rahmen der Kapitel 8 und 9 entwickelt wurde, nicht nur aus dem Verband der Entscheidungseffekte, sondern wird durch den Satz der Größen

$$\mathcal{S}_{\text{ges}} := (B_{\Delta}, \Delta, \xi_{\Delta}, K, \hat{\mathcal{L}}, \hat{\mu}, G)$$

charakterisiert. Man kann aber in derselben Weise, wie es für G in Satz 10.1.5 dargelegt wurde, zeigen, daß man auch die mit \mathcal{S}_{ges} bezeichnete Struktur als ein

„unabhängiges Nebeneinander“ einer höchstens abzählbaren Familie von Teilstrukturen auffassen kann. Das heißt, zu jedem Atom z des Zentrums von G kann man Teilmengen $B_{\Delta z}$ von B_{Δ} und Δ_z von Δ mit

$$K_1(z) \subseteq B_{\Delta z}$$

und

$$\{y \in \hat{\mathcal{L}} \mid y \leq z\} =: \hat{\mathcal{L}}[\mathbf{0}, z] \subseteq \Delta_z$$

so angeben, daß die durch

$$\mathcal{S}_z := (B_{\Delta z}, \Delta_z, \xi_{\Delta} \upharpoonright_{B_{\Delta z} \times \Delta_z}, K_1(z), \hat{\mathcal{L}}[\mathbf{0}, z], \hat{\mu} \upharpoonright_{K_1(z) \times \hat{\mathcal{L}}[\mathbf{0}, z]}, G[\mathbf{0}, z]) \quad (10.1)$$

charakterisierte Struktur dieselben Eigenschaften hat, wie die Gesamtstruktur \mathcal{S}_{ges} . Dabei bezeichnen $\xi_{\Delta} \upharpoonright_{B_{\Delta z} \times \Delta_z}$ und $\hat{\mu} \upharpoonright_{K_1(z) \times \hat{\mathcal{L}}[\mathbf{0}, z]}$ Restriktionen der Abbildungen ξ_{Δ} und $\hat{\mu}$. Der zugehörige Verband der Entscheidungseffekte $G[\mathbf{0}, z]$ ist irreduzibel. Benennt umgekehrt I eine höchstens abzählbare Indexmenge, und liegt für jedes i aus I eine Struktur des Typs

$$\mathcal{S}_i := (B_{\Delta i}, \Delta_i, \xi_{\Delta i}, K_i, \hat{\mathcal{L}}_i, \hat{\mu}_i, G_i)$$

vor, die den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3 und AV 4s genügt und für die G_i irreduzibel ist, dann kann man ein zugehöriges äußeres Produkt bilden, das den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3 und AV 4s entspricht. Schließlich kann man auch Konsistenzaussagen in einer zu Punkt (iv) von Satz 10.1.5 analogen Weise formulieren, die es schließlich rechtfertigen, für die weiteren Betrachtungen davon auszugehen, daß der Verband der Entscheidungseffekte irreduzibel ist.

Die ausführliche Darstellung der so nur verbal erfaßten und dem Satz 10.1.5 analogen Aussage für \mathcal{S}_{ges} wird hier nicht vorgeführt, da hier der Schwerpunkt auf Darstellung der grundlegenden Axiomatik des Ludwigschen Zugangs zur Quantenmechanik gelegt wird. Eine Darlegung bedürfte neben dem Beweis der oben diskutierten Aussagen noch einer ausführlichen Diskussion geeigneter Zerlegungsaussagen auf dem Niveau der Präparierverfahren, Registriermethoden und Registrierprozeduren. Es wird dafür auf Ludwigs Originalarbeiten verwiesen. Im Zusammenhang mit der oben geschilderten Aussage der Zerlegung der Struktur \mathcal{S}_{ges} betrachte man die Abschnitte §5.2 und §5.4 des Kapitels VII in [Lud85a], S. 193-199 und S. 202-205, während eine Diskussion der Erweiterung der Betrachtungen auf die Präparier- und Registrier-Strukturen im Rahmen der Abschnitte 8.1 und 8.2 des Kapitels IV in [Lud83b], S. 173-181 stattfindet.

In dem oben erläuterten Zusammenhang gibt es zwei Begriffe, die hier zumindest erwähnt werden sollen. Es wurde erläutert, daß man die gesamte mathematische Struktur als ein „unabhängiges Nebeneinander“ irreduzibler Segmente desselben Strukturniveaus, wie es der Gesamtstruktur zukommt, auffassen kann. Dabei werden die irreduziblen Segmente durch die Menge der Atome des Verbandes der Entscheidungseffekte indiziert. Das heißt, jedes Atom des Verbandes der Entscheidungseffekte vertritt genau ein derartiges Segment. Den einzelnen Segmenten kommen dabei irreduzible Verbände der Entscheidungseffekte zu. Man identifiziert nun die einzelnen Segmente mit den verschiedenen **Sorten von Mikrosystemen**, so daß etwa der Sorte der Mikrosysteme der Elektronen ebenso ein einzelnes Segment zukommt, wie etwa der Sorte der Mikrosysteme der Wasserstoffatome. Letzteres Beispiel zeigt, daß der Begriff der Sorte eines Mikrosystems nicht mit dem Begriff des elementaren Mikrosystems zu verwechseln ist, der erst in Abschnitt 11.5 definiert werden wird. Die für die einzelnen Sorten verwendeten Namen wie Elektron oder Neutron verstehen sich dabei im Grunde als Abkürzungen für weitere experimentelle Eigenschaften, die die einzelnen Sorten voneinander trennen. Derartige experimentelle Unterschiede muß es geben, sonst hätte man gar keine unterschiedlichen Namen eingeführt. Will man innerhalb der Theorie weitere Strukturen bestimmter Sorten untersuchen, dann muß man versuchen, der anvisierten Sorte angepaßte weiterführende Axiome zu formulieren. Im weiteren wird auf das Konzept der **Superauswahlregel** verwiesen, das im Zusammenhang mit der parallelen Betrachtung verschiedener Sorten von Mikrosystemen wichtig ist. Der Begriff der Superauswahlregel geht auf die Betrachtungen von G.C. Wick, A.S. Wightman und E.P. Wigner in [WWW52] zurück. Dort wird allerdings auf Basis des Hilbertraumes diskutiert, so daß für die hier vorliegende allgemeinere Situation etwas anders argumentiert werden muß. G. Ludwig stellt in den oben genannten Zitaten die benötigten Aussagen zur Verfügung.

Die bisher in diesem Abschnitt angestellten Überlegungen rechtfertigen es, bei vielen der noch folgenden Betrachtungen vereinfachend voranzusetzen:

AV 4i Mit Ausnahme von $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ gibt es in G kein weiteres Element, das mit jedem anderen Element aus G ein Paar koexistenter Entscheidungseffekte bildet.

Wegen Satz 9.6.9 bedeutet AV 4i gerade die Irreduzibilität von G . Das heißt, es wird nur eine Sorte von Mikrosystemen betrachtet. Mit Hilfe der so gerechtfertigten Annahme der Irreduzibilität von G , kann man nun im Rahmen des nächsten Abschnitts einen wichtigen Satz formulieren, der es ermöglicht, den Verband G mit Hilbertraumstrukturen zu verknüpfen.

10.2 Die Darstellung des Verbandes G der Entscheidungseffekte im Falle der Irreduzibilität

Basierend auf der Forderung nach der Irreduzibilität von G mittels AV 4i wird zum weiteren Ausbau der Axiomatik eine Überlegung aus Abschnitt 9.7 wieder aufgenommen. Wie dort erläutert, gibt es vom experimentellen Standpunkt keine Einwände gegen eine Forderung der Endlichdimensionalität von K . Da die Experimente aber keine Mutmaßungen bezüglich der konkreten Größe der Dimension von K zulassen, wird der Unkenntnis mittels einer Idealisierung begegnet. In Ergänzung zum Axiom AV 4s wird gefordert:

AV 4a K ist unendlichdimensional.

Ob der vorausgesetzten Irreduzibilität von G gestaltet sich das Axiom AV 4a gegenüber dem Ludwigschen Originalaxiom gleichen Namens etwas vereinfacht. Denn betrachtet man mehrere Sorten von Mikrosystemen parallel, betrachtet man also eine Theorie, die sich aus mehreren Segmenten des Typs (10.1) zusammensetzt, fordert G . Ludwig in konsequenter Weise die Unendlichdimensionalität jedes Zustandssegments $K_1(z)$.

Damit kommt man nun zu der folgenden Aussage, die gegenüber T 4.1.5 in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.1, S. 216 bereits etwas konkreter auf die vorliegende physikalische Situation eingeht:

Satz 10.2.1 (Darstellungstheorem für G) *Es bezeichne $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur, die den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s und AV 4a genügt. Der zugehörige Verband der Entscheidungseffekte möge mit (G, \leq, \perp) symbolisiert sein.*

Im Falle der Irreduzibilität des Verbandes (G, \leq, \perp) existiert ein separabler, unendlichdimensionaler Hilbertraum \mathcal{H} entweder über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen, dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder dem Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen dergestalt, daß (G, \leq, \perp) orthoisomorph ist zu dem Verband $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ der normabgeschlossenen Unterräume von \mathcal{H} bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung und der Abbildung

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}), \quad F \longmapsto F^\perp$$

als Orthokomplementation.

Bemerkung: Zum Begriff eines Hilbertraumes \mathcal{H} über \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} wird auf Satz und Definition G.3.23 verwiesen. Zum Begriff des zugehörigen Verbandes der normabgeschlossenen Untervektorräume von \mathcal{H} siehe Satz G.3.24.

Im Verlaufe des Beweises werden Strukturen der linearen Algebra verwandt, die bisher noch nicht erläutert wurden. Die zum Verständnis benötigten Begriffe werden in Anhang G.3 bereitgestellt.

Beweis:

Mit Lemma 9.2.5 (i), Satz 9.5.12 und Satz 9.8.3 ist (G, \leq, \perp) ein vollständiger, orthomodularer, atomarer Verband. Darüber hinaus gelten die Aussagen in Satz 9.8.4 (ii) und Lemma G.2.6. Bedenkt man zudem, daß $K = K_1(\mathbf{1})$ gilt, folgt mit Satz G.2.5 aus AV 4a, daß $\mathbf{1}$ verbandstheoretisch nicht endlicher Länge sein kann. Das heißt unter Verwendung der Definition F.32 aber gerade, daß auch der gesamte Verband nicht endlicher Länge sein kann. Damit sind die Voraussetzungen des Darstellungssatzes G.3.25 (i) von Varadarajan erfüllt. Also existiert ein hermitescher Raum im Sinne der Definition G.3.18, bestehend aus einem Schiefkörper S , einem Links-Vektorraum \mathcal{H} über S , einem involutivem Anti-Automorphismus α auf S und einer α -hermiteschen Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathcal{H} , so daß die Menge

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) := \{U \subseteq \mathcal{H} \mid U^{\perp\perp} = U\}$$

ausgestattet mit der Mengeninklusion \subseteq als Halbordnung und der Abbildung

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}), \quad F \longmapsto F^\perp$$

als Orthokomplementation orthoisomorph zu dem Verband (G, \leq, \perp) ist.

Nun geht die zu zeigende Behauptung aber darüber hinaus, denn es soll gezeigt werden, daß (G, \leq, \perp) zu dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume eines separablen, unendlichdimensionalen Hilbertraumes \mathcal{H} entweder über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen oder dem Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder dem Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen orthoisomorph ist.

Der Nachweis der Behauptung kann auf der Basis der obigen durch S , \mathcal{H} , α und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gekennzeichneten mathematischen Struktur mit Hilfe des auf C. Piron, [Pir64], zurückgehenden Darstellungstheorems G.3.25 (ii) geleistet werden. Mit Ausnahme der Aussage über die Unendlichdimensionalität des Hilbertraumes, die am Ende des Beweises diskutiert wird, genügt es entsprechend dem Piron'schen Theorem, die folgenden Eigenschaften zu zeigen:

- (i) der Schiefkörper S fällt mit \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} zusammen,

- (ii) der involutive Anti-Automorphismus α auf S ist stetig bezüglich der kanonischen Topologie auf S , also bezüglich der jeweiligen natürlichen Topologie auf \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} , wie sie in Beispiel G.3.10 erläutert wird,
- (iii) der Verband G ist separabel.

zu (i): Um die Eigenschaften in (i) und (ii) zeigen zu können, muß zunächst genauer angegeben werden, wie die Struktur $(S, \mathcal{H}, \alpha, < \cdot, \cdot >)$ im Rahmen des oben verwandten Varadarajanschen Darstellungstheorems G.3.25 (i) gewonnen wird.

Die Menge aller endlichen Elemente aus G im Sinne von Definition F.32 stellt eine sogenannte verallgemeinerte Geometrie mit einer Dimension echt größer als 3 dar, wie in [Var85], Kapitel II, Abschnitt 5, S. 29 erläutert wird. Das heißt mit Satz G.2.6, daß für jedes endliche Element e aus G der Subverband $G[\mathbf{0}, e]$ ein irreduzibler, modularer Verband endlicher Länge ist. Bei derartigen Unterverbänden spricht man auch von Geometrien. Das Vorliegen von Geometrien ermöglicht die Anwendung eines fundamentalen Theorems der klassischen Geometrie, demzufolge jede Geometrie einer endlichen Dimension echt größer als 3 isomorph zu dem Verband der linearen Untervektorräume eines Linksvektorraumes über einem bis auf Isomorphie festgelegten Schiefkörper ist. Man siehe dafür [Var85], Kapitel II, Abschnitt 1, S. 20. Dabei wird der Schiefkörper auf konstruktivem Wege gewonnen, indem man ein Element a der Länge 3 und ein Element t der Länge 2 mit $t \leq a$ aus G herausgreift. a bezeichnet man auch als Ebene, während man t Gerade nennt; die Relation $t \leq a$ drückt dann geometrisch aus, daß die Gerade t in der Ebene a liegt. In der Menge

$$A(t) := A(G) \cap G[\mathbf{0}, t],$$

also der Menge aller Atome p aus G mit $p \leq t$, zeichnet man nun drei voneinander verschiedene Elemente O, E, W aus. Der Punkt W wird dabei auch als Punkt der Unendlichkeit bezeichnet. Bezüglich W kann man nun ebenfalls auf konstruktivem Wege auf der Menge $A(t) \setminus \{W\}$ zwei Operationen $+$ und \cdot derart definieren, daß $(A(t) \setminus \{W\}, +, \cdot)$ zu einem Schiefkörper wird. Dabei übernimmt O die Rolle des neutralen Elementes bezüglich der Operation $+$, während E als neutrales Element bezüglich der Operation \cdot fungiert. Da die Konstruktionen besonderen Aufwand erfordern, kann einer genauen Darstellung der Vorgänge hier kein Platz eingeräumt werden. Stattdessen wird auf [Var85], Kapitel II, Abschnitt 5, S. 30f. oder auch [Pon57], Kapitel I, §7, S. 58-61 verwiesen. Die so angedeutete Konstruktion eines Schiefkörpers erweist sich, bis auf Isomorphie, als unabhängig sowohl von der Wahl der gewählten Elemente a und t aus G als auch der Atome O, E, W aus $A(t)$. Es wird dafür auf [Var85], Kapitel II, Abschnitt 5, S. 31f. verwiesen.

Nachdem damit nun Einsicht in die Konstruktion des Schiefkörpers gewonnen wurde, kann man obige Konstruktionsvorschrift für den Fall des physikalischen Verbandes G nachvollziehen. Da G mittels AV 4a unendlicher Länge ist, enthält G auch ein Element a der Länge 3. Gemäß Lemma G.2.2 existieren daher drei unterschiedliche Atome p_0, p_1, p_2 von G mit $a = p_0 + p_1 + p_2$. Also umfaßt a das Element $t = p_0 + p_1 = p_0 \vee p_1$. Das heißt, es gilt $t \leq a$. Offenbar hat t mit Lemma G.2.2 die Länge 2. Die Menge $A(t)$ enthält mindestens drei Elemente, denn neben p_0 und p_1 , die trivialerweise zu $A(t)$ gehören, existiert mit Satz F.31 aufgrund der Irreduzibilität von G noch mindestens ein weiteres Element r in $A(t)$. Also kann man $O := p_0$, $E := p_1$ und $W := r$ setzen. Den obigen Ausführungen folgend kann man daher den Schiefkörper S mit der folgenden Menge identifizieren:

$$A(p_0 \vee p_1) \setminus \{r\} = \{q \in G \setminus \{r\} \mid q \text{ ist Atom von } G \text{ mit } q \leq p_0 \vee p_1\}.$$

Mit einer derartigen Wahl kann man den Schiefkörper in natürlicher Weise durch Ausstattung mit der Unterraumtopologie bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ zu einem topologischen Raum machen. Dadurch wird der Schiefkörper ob der Sätze G.2.9 und G.2.11 zu einem kompakten, damit insbesondere lokalkompakten, und zusammenhängenden Raum. Um nun mit Hilfe des Satzes G.3.28 von L.S. Pontrjagin folgern zu können, daß der betrachtete Schiefkörper zu dem Körper der reellen Zahlen, dem Körper der komplexen Zahlen oder dem Schiefkörper der Quaternionen isomorph ist, bedarf es also noch des Nachweises, daß der Schiefkörper im Sinne der Definition G.3.26 auch ein topologischer Schiefkörper ist. Da, wie bereits weiter oben angedeutet wurde, die aufwendigen Konstruktionsverfahren der beiden Operationen $+$ und \cdot nicht dargestellt werden, kann auch auf den Nachweis ihrer Stetigkeit hier nicht eingegangen werden. Es wird stattdessen auf das Theorem T 4.1.2 in [Lud85a], Kapitel VIII, S. 216 oder auf Lemma 2.9 und das folgende Korollar in [Zie61], S. 1162f. verwiesen.

zu (ii): Man kann also davon ausgehen, daß es sich bei dem Schiefkörper S bei Ausstattung mit der zugehörigen Unterraumtopologie von $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ bis auf Isomorphie entweder um den Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} , den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder den Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen handelt jeweils ausgestattet mit der natürlichen Topologie. Es muß gezeigt werden, daß sich der involutive Anti-Automorphismus α , auf den sich der Varadarajansche Satz G.3.25 (i) bezieht, in jedem der drei Fälle \mathbb{R} , \mathbb{C} oder \mathbb{H} bei Ausstattung mit der natürlichen Topologie als stetig erweist. Es handelt sich somit um eine mathematische Aussage, die keinen Bezug mehr auf die hier vorgestellte Axiomatik nimmt. Ihr Nachweis wurde von Zierler in [Zie66] (Punkt 1. auf S. 583) basierend auf [Zie61] erbracht.

zu (iii): Die Separabilität von G ist Inhalt von Satz 9.5.11 (ii).

Damit sind die drei Voraussetzungen erfüllt, die zur Anwendung des Pironischen Theorems, wie man es in Satz G.3.25 (ii) vorfindet, in der oben dargestellten Weise berechtigen.

Zum Abschluß muß noch der Nachweis der Unendlichdimensionalität des Hilbertraumes \mathcal{H} erbracht werden. Sie ergibt sich aus der unendlichen Länge des Verbandes G mit folgender Überlegung. Man nehme an, daß \mathcal{H} eine endliche Dimension $n \in \mathbb{N}$ besitze. Dann existiert eine Orthonormalbasis $(\varphi)_{i=1}^n$ bezüglich des Hilbertraumes \mathcal{H} . Man setze nun $M_0 := \{0\}$, wobei 0 das Null-Element des Hilbertraumes bezeichnen möge. Im weiteren setze man für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$M_i := M_{i-1} \oplus \langle \varphi_i \rangle,$$

wobei \oplus die direkte Summe symbolisieren soll. $\langle \varphi_i \rangle$ stehe für den linearen Aufspann von φ_i in \mathcal{H} . Dann liegt folgende Ungleichungskette in $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ vor:

$$M_0 \leq M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_n = \mathcal{H}.$$

Nun ist \mathcal{H} gerade das Eins-Element des Verbandes $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, so daß $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ offenbar die Länge n besitzt. Da $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ und G aber zueinander orthoisomorph sind, steht das im Widerspruch zu der unendlichen Länge von G . ■

Es gibt eine enorme Vielfalt experimenteller Erfahrungen im Bereich der Quantenmechanik, die sich allesamt in ausgezeichneter Weise im Rahmen der Hilbertraumformulierung über dem komplexen Zahlenkörper fassen lassen. Es scheint daher, daß von den drei durch Satz 10.2.1 zur Auswahl stehenden Möglichkeiten dem Fall der komplexen Zahlen in der Natur eine besondere Bedeutung zukommt. Also wäre es erstrebenswert, ein physikalisch einsichtiges Axiom zu formulieren, daß \mathbb{C} gegenüber \mathbb{R} und \mathbb{H} auszeichnet. Ein derartiges Axiom steht allerdings heute noch aus. Es soll hier keine ausführliche Diskussion der Problematik der Wahl des Schiefkörpers erfolgen. Stattdessen wird der Körper der komplexen Zahlen hier favorisiert werden. Bezüglich der Wahl des reellen oder quaternionischen Schiefkörpers sei allerdings auf die folgenden Punkte und Arbeiten verwiesen.

- (i) Für Untersuchungen im Zusammenhang mit der Formulierung der Quantenmechanik auf reellen Hilberträumen wird exemplarisch auf die Arbeit [Stu60] von E.C.G. Stueckelberg und Kapitel 18 im Buch [Mac78] von G.W. Mackey hingewiesen.
- (ii) Die Beschreibung „zusammengesetzter Systeme“ durch Hilbertraumtensorprodukte ist für den quaternionischen Fall zumindest nicht in einfacher Weise

möglich. In Abschnitt 4 des Artikels [FJSS62] von D. Finkelstein, J.M. Jauch, S. Schiminovich und D. Speiser wird eine Analyse der Problematik zusammengesetzter Systeme bei Betrachtung quaternionischer Hilberträume durchgeführt. Dort wird auch auf die Problematik eingegangen, daß es im Rahmen einer quaternionischen Formulierung der Quantenmechanik Probleme mit der Betrachtung unabhängiger Systeme gibt. Es sei außerdem auf Kapitel XI, §2 in [Lud87], S. 4ff. hingewiesen.

Weitere ausführliche Betrachtungen im Falle der Wahl der Quaternionen als Schiefkörper werden auch in den beiden Artikel [Emc63a] und [Emc63b] von G. Emch durchgeführt.

Eine direkte Forderung nach \mathbb{C} als zugrundeliegendem Schiefkörper im Sinne eines Axioms „ $S = \mathbb{C}$ “ genügt nicht den Anforderungen an ein Axiom, wie sie in Abschnitt 4.4 formuliert wurden. Bei einem solchen Vorgehen nähme man nicht ausschließlich Bezug auf die physikalisch interpretierten Größen $K, \hat{\mathcal{L}}, \hat{\mu}$ und die zugehörigen Uniformitäten der physikalischen Unschärfe. Da aber, wie eingangs erläutert, bisher keine tiefere physikalische Struktur erkannt wurde, um aus ihr eine axiomatische Relation zu motivieren, die dann auf \mathbb{C} führt, wird als Axiom eine Aussage verwandt, die einerseits nur Bezug auf die drei Größen $K, \hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mu}$ nimmt und die andererseits die komplexen Zahlen auszeichnet.

AV 4b Für zwei orthogonale Atome p_1, p_2 von G ist die zugehörige Seite $K_1(p_1 \vee p_2)$ weder zwei- noch fünfdimensional.

Für den Nachweis, daß durch AV 4b tatsächlich nur noch der Fall der komplexen Zahlen eintreten kann, wird auf das folgende Theorem Ludwigs verwiesen, das mit T 4.1.6 in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.1, S. 217 vorliegt:

Lemma 10.2.2 *Es gilt:*

- (i) *Sei G orthoisomorph zu dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume eines separablen, unendlichdimensionalen reellen Hilbertraumes, dann besitzt die Seite $K_1(p_1 \vee p_2)$ für Atome p_1, p_2 von G , die paarweise orthogonal sind, die Dimension 2.*
- (ii) *Sei G orthoisomorph zu dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume eines separablen, unendlichdimensionalen quaternionischen Hilbertraumes, dann besitzt die Seite $K_1(p_1 \vee p_2)$ für Atome p_1, p_2 von G , die paarweise orthogonal sind, die Dimension 5.*

Offenbar ermöglicht Lemma 10.2.2 die experimentelle Überprüfung der Gültigkeit von AV 4b, indem man zwei beliebige orthogonale Atome von G dahingehend untersucht, ob die zugehörige Seite $K_1(p_1 \vee p_2)$ weder Dimension 2 noch Dimension 5 besitzt.

Zusammenfassend kann man nun notieren, daß der Verband der Entscheidungseffekte einer Zustands-Effekt-Struktur $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$, die den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a und AV 4b genügt, zu dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ eines separablen, unendlichdimensionalen \mathbb{C} -Hilbertraumes \mathcal{H} orthoisomorph ist.

Folgt man den Erläuterungen aus Anhang G.4, kann man den Verband der normabgeschlossenen Unterräume eines separablen, unendlichdimensionalen \mathbb{C} -Hilbertraumes \mathcal{H} in orthoisomorpher Weise mit dem Verband der Projektionsoperatoren auf die normabgeschlossenen Untervektorräume von \mathcal{H} identifizieren. Ob der engen Verknüpfung zwischen den beiden Verbänden wird üblicherweise auch für beide derselbe Name $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ verwendet. Im weiteren wird zumeist der Verband der Projektionsoperatoren auf die normabgeschlossenen Untervektorräume von \mathcal{H} verwendet.

Zum Zwecke der besseren Übersicht soll der Orthoisomorphismus, der den Verband G mit dem Verband der Projektionsoperatoren auf die normabgeschlossenen Untervektorräume des zugeordneten Hilbertraumes \mathcal{H} verknüpft, mit dem Symbol σ belegt werden:

$$\sigma : G \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}). \quad (10.2)$$

Nachdem nun mit der Abbildung σ eine Verknüpfung der Entscheidungseffekte mit Hilbertraumstrukturen gelungen ist, stellt sich auch die Frage einer Verknüpfung der Menge aller Effekte einerseits und der Menge der Zustände andererseits mit Strukturen auf dem Hilbertraum. Die zugehörigen Untersuchungen folgen im nächsten Abschnitt.

10.3 Die Darstellung der Zustände und Effekte

Innerhalb des folgenden Abschnitts wird weiterhin die Irreduzibilität von G vorausgesetzt. Außerdem werden die Axiome AV 4a und AV 4b gefordert, so daß G orthoisomorph dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume eines separablen, unendlichdimensionalen \mathbb{C} -Hilbertraumes \mathcal{H} ist. Die zugehörige Abbildung möge wie in (10.2) mit dem Namen σ bezeichnet werden.

Zur Verhinderung von Mißverständnissen wird darauf hingewiesen, daß die kanonische Konjugation bezüglich des Körpers der komplexen Zahlen mit $*$ bezeichnet

wird. Außerdem wird darauf hingewiesen, daß das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf \mathcal{H} gemäß Definition G.3.18 in der ersten Komponente linear und der zweiten Komponente anti-linear ist. Das heißt, daß für drei beliebige Elemente $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ aus \mathcal{H} und beliebige komplexe Zahlen λ_1, λ_2 gilt:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2, \psi \rangle &= \lambda_1 \langle \varphi_1, \psi \rangle + \lambda_2 \langle \varphi_2, \psi \rangle \\ \langle \psi, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle &= \lambda_1^* \langle \psi, \varphi_1 \rangle + \lambda_2^* \langle \psi, \varphi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Um nun das Verhältnis der Zustände aus K und der Effekte aus $\hat{\mathcal{L}}$ zu dem Hilbertraum \mathcal{H} formulieren zu können, eignen sich die folgenden Bezeichnungen und Aussagen, bezüglich derer auch auf den Anhang IV in [Lud83b], S. 366-414 hingewiesen wird:

Definition und Lemma 10.3.1 Sei \mathcal{H} ein komplexer separabler Hilbertraum mit kanonischer Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.

- (i) Mit $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ wird die Menge der linearen und stetigen Abbildungen von $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ nach $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ bezeichnet. Die Elemente aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ werden auch als **Operatoren** bezeichnet. Bezüglich der punktweise definierten Addition und Skalarmultiplikation besitzt $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ die Vektorraumeigenschaft über dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen (!). Wird im weiteren von $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ als Vektorraum gesprochen, ist damit der Vektorraum über \mathbb{R} gemeint.

$\mathbb{L}(\mathcal{H})$ wird zu einem Banachraum bei Ausstattung mit der Operatornorm

$$\|A\|_{Op} := \sup_{\varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1} \|A\varphi\|$$

für jedes Element A aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$.

Die Abbildung, die jedem Element aus \mathcal{H} das Null-Element aus \mathcal{H} zuordnet, gehört zu $\mathbb{L}(\mathcal{H})$. Sie erhält den Namen $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$. Die identische Abbildung von \mathcal{H} nach \mathcal{H} liegt in $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, sie erhält den Namen $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$.

- (ii) Mit der Menge aller selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ ¹ liegt ein Untervektorraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ vor, der bezüglich $\|\cdot\|_{Op}$ zu einem Banachraum wird.

Bezüglich der Relation \leq auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, die für alle Elemente A_1, A_2 aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ definiert sei durch die Vorschrift

$$A_1 \leq A_2 \quad :\Leftrightarrow \quad [\forall \varphi \in \mathcal{H} : \langle A_1 \varphi, \varphi \rangle \leq \langle A_2 \varphi, \varphi \rangle], \quad (10.3)$$

¹Um die Anzahl der Symbole zu reduzieren, gibt es hier für die Menge der selbstadjungierten Operatoren kein eigenes Symbol.

wird die Menge aller selbstadjungierten Elemente aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ zu einer Halbordnung.

Es bezeichne $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ die Menge der selbstadjungierten Spur-Klasse-Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})^2$. Mit $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ liegt ein Untervektorraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ vor, der bei Ausstattung mit der Norm

$$\|A\|_{Sp} := Sp | A |$$

für jedes Element A aus $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ zu einem Banachraum wird. Dabei symbolisiere Sp die Spur.

Es bezeichne Φ die durch die Vorschrift

$$A \longmapsto Sp(A \cdot)$$

definierte Abbildung aus dem reellen Vektorraum

$$\{ A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ selbstadjungiert} \} \quad (10.4)$$

in den reellen Vektorraum

$$\left\{ f : \mathbb{S}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear und stetig auf } (\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp}) \right\}. \quad (10.5)$$

Stattet man (10.4) mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$ aus, und versieht man (10.5) mit der kanonischen Dualraum-Norm, indem man jedem Element f aus der Menge (10.5) die reelle Zahl

$$\|f\|_1 := \sup_{B \in \mathbb{S}(\mathcal{H}), \|B\|_{Sp} \leq 1} |f(B)| \quad (10.6)$$

zuordnet, dann ist Φ ein isometrischer Isomorphismus.

(iii) Mit $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ wird die Menge der Operatoren D aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ bezeichnet, die selbstadjungiert und positiv sind und für die $Sp D = 1$ gilt, wobei Sp die Spur bezeichnen möge. Die Elemente von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ werden **Dichteoperatoren** genannt.

Die Menge der Dichteoperatoren ist eine Teilmenge von $\mathbb{S}(\mathcal{H})$. Der reelle lineare Aufspann von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ in dem reellen Vektorraum $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ fällt mit $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ zusammen.

²Die Operatoren der Spur-Klasse werden auch als **nukleare Operatoren** bezeichnet, siehe [Wer97], Abschnitt VI.5, S. 238-249. Es handelt sich dabei gerade um die Elemente aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, für die die Spur wohldefiniert ist.

Bemerkungen:

- (i) Es soll nochmals betont werden, daß man hier $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ über \mathbb{R} betrachtet, obwohl der verwendete Hilbertraum \mathcal{H} über \mathbb{C} operiert. Das führt in der Regel zu keinen Problemen, erfordert aber dennoch eine gewisse Vorsicht im Umgang mit der mathematischen Literatur, bei der stets vom üblichen Fall ausgegangen wird, daß der Hilbertraum und die zugehörigen Operatorräume über demselben Körper arbeiten. Alle vorkommenden Untervektorräume von $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ sind ebenfalls als Vektorraum über den reellen Zahlen aufzufassen.
- (ii) Die Relation, die (10.3) auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ definiert, wird in etwas unkorrekter Weise mit demselben Symbol versehen, wie die Halbordnung auf Δ . Ein solches Vorgehen rechtfertigt sich erst im Laufe des folgenden Abschnitts. Es wird sich in Satz 10.3.5 herausstellen, daß Δ mit der Menge der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ identifiziert werden kann und daß dabei die Halbordnungen ineinander übergehen.

Beweis:

zu (i): Die Vektorraumeigenschaften sind offensichtlich. Für die Normeigenschaft von $\|\cdot\|_{O_p}$ und die Banachraumeigenschaft von $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ bezüglich $\|\cdot\|_{O_p}$ ist es irrelevant, ob man $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ als \mathbb{R} -Vektorraum oder als \mathbb{C} -Vektorraum auffaßt. Daher folgen die beiden Eigenschaften mit [Wer97], Abschnitt II.1, S. 45-47.

zu (ii): Wenn man $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ als reellen Vektorraum auffaßt, wie es entsprechend Punkt (i) gemacht werden soll, dann ergibt sich die Untervektorraumeigenschaft der Menge aller selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ unmittelbar aus den grundlegenden Eigenschaften selbstadjungierter beschränkter Operatoren. Dafür sei auf [Wer97], Abschnitt V.5, S. 191f. verwiesen.

Zum Beweis der Banachraumeigenschaft bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{O_p}$ genügt der Nachweis der $\|\cdot\|_{O_p}$ -Abgeschlossenheit in $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{O_p})$, da entsprechend obigem Punkt (i) der Vektorraum $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ bezüglich $\|\cdot\|_{O_p}$ ein Banachraum ist. Man wähle also eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, die bezüglich $\|\cdot\|_{O_p}$ gegen ein Element A aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ konvergiert. Daraus ergibt sich für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ die Konvergenz von $(A_n \varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $A \varphi$ bezüglich der Hilbertraumnorm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Da jedes A_n selbstadjungiert ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$:

$$\langle A_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, A_n \varphi_2 \rangle .$$

Also gilt für alle $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{H}$ aufgrund der Stetigkeit des Skalarproduktes und aufgrund der Stetigkeit der komplexen Konjugation:

$$\langle A\varphi_1, \varphi_2 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_1, A_n \varphi_2 \rangle = \langle \varphi_1, A\varphi_2 \rangle .$$

Damit ergibt sich mit dem Satz von Hellinger-Toeplitz, der als Satz V.5.5 in [Wer97], Kapitel V, S. 193 zu finden ist, die Selbstadjungiertheit von A .

Die Transitivität und Reflexivität der Relation aus (10.3) sind offensichtlich, so daß es zum Nachweis der Halbordnungseigenschaften noch der Antisymmetrie bedarf. Dafür seien zwei selbstadjungierte Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ mit $A_1 \leq A_2$ und $A_2 \leq A_1$ gewählt. Es gilt folglich $\langle A_1 \varphi, \varphi \rangle = \langle A_2 \varphi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Die Identität von A_1 und A_2 folgt dann aufgrund der Selbstadjungiertheit von A_1 und A_2 aus Korollar V.5.8 in [Wer97], Kapitel V, S. 195.

Für die weiteren Betrachtungen innerhalb des nachfolgenden Beweises erhalte die Menge aller Spur-Klasse-Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ den Namen $N(\mathcal{H})$. Für die Untervektorraumeigenschaft von $N(\mathcal{H})$ bezüglich des Vektorraumes $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ ist es unerheblich, ob man $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ als \mathbb{R} - oder als \mathbb{C} -Vektorraum betrachtet, da zum Beweis der relevanten Eigenschaften nur die Definition der Spur eingeht. Die Definition der Spur ist unberührt vom verwandten Körper innerhalb der Operatorenräume, aber natürlich nicht unabhängig vom verwandten Körper in \mathcal{H} . Dasselbe gilt auch für die Normeigenschaften von $\|\cdot\|_{Sp}$ auf $N(\mathcal{H})$ sowie die Banachraumeigenschaft von $N(\mathcal{H})$ bezüglich $\|\cdot\|_{Sp}$. Daher ergeben sich die besagten Eigenschaften mit Hilfe der Theoreme VI.19 (a) und VI.20 in [RS80], Kapitel VI, S. 207 und S. 209.

Also handelt es sich sowohl bei der Menge aller selbstadjungierten Operatoren als auch bei der Menge aller Spur-Klasse-Operatoren um einen Untervektorraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{L}(\mathcal{H})$. Damit ergibt sich unmittelbar, daß auch der Schnitt der beiden Mengen, also $\mathbb{S}(\mathcal{H})$, ein Untervektorraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ ist. Zum Nachweis der Banachraumeigenschaft von $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ bezüglich $\|\cdot\|_{Sp}$ bedarf es also nur noch des Nachweises der $\|\cdot\|_{Sp}$ -Abgeschlossenheit von $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ in $N(\mathcal{H})$. Man wähle dafür eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ und einen Spur-Klasse-Operator A derart, daß A_n bezüglich $\|\cdot\|_{Sp}$ gegen A konvergiert. Mit Theorem VI.20 in [RS80], Kapitel VI, S. 209 folgt $\|A_n - A\|_{Sp} \geq \|A_n - A\|_{Op}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dabei kommt wiederum eine reine Spureigenschaft zur Anwendung. Also konvergiert $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch bezüglich $\|\cdot\|_{Op}$ gegen A . Da, wie oben gezeigt wurde, der Untervektorraum der selbstadjungierten Operatoren in $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$ abgeschlossen in $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ liegt, muß A selbstadjungiert sein. Da A als Spur-Klasse-Operator vorausgesetzt wurde, muß A zur Menge $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ gehören. Also liegt

$\|\cdot\|_{Sp}$ -Abgeschlossenheit von $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ in der Menge aller Spur-Klasse-Operatoren auf \mathcal{H} vor, und $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$ besitzt die Banachraumeigenschaft.

Jetzt soll die Abbildung Φ betrachtet werden. Zunächst wird die Wohldefiniertheit der Abbildung gezeigt. Es sei dafür ein selbstadjungiertes $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ gewählt. Mit Theorem VI.19 (b) in [RS80], Kapitel VI, S. 207 ist das Produkt eines Spur-Klasse-Operators mit einem linearen, stetigen Operator wiederum ein Spur-Klasse-Operator, so daß für jedes $B \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$ der Ausdruck $Sp(AB)$ wohldefiniert ist. Mit Theorem VI.26 (a) in [RS80], Kapitel VI, S. 212 hat $Sp(A \cdot)$ die Eigenschaft der \mathbb{C} -Linearität auf dem \mathbb{C} -Vektorraum der Spur-Klasse-Operatoren. Also ist $Sp(A \cdot)$ auch \mathbb{R} -linear auf $N(\mathcal{H})$. Außerdem gilt mit Theorem VI.5.4 in [Wer97], Kapitel VI, S. 242 und Theorem VI.5.8 (a) in [Wer97], Kapitel VI, S. 248 für jedes $B \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$ die Ungleichungskette

$$|Sp(AB)| \leq \|AB\|_{Sp} \leq \|A\|_{Op} \|B\|_{Sp},$$

woraus sich die Stetigkeit von $Sp(A \cdot)$ auf $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$ ergibt. Zum Nachweis der Wohldefiniertheit bleibt es also zu zeigen, daß für jedes $B \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$ durch $Sp(AB)$ eine reelle Zahl gegeben ist. Da aber nach Voraussetzung A und B beide selbstadjungiert sind, gilt $A = A^\dagger$ und $B = B^\dagger$, wobei mit dem Superskript \dagger die Hilbertraumadjungierte des betreffenden Operators bezeichnet sein möge. Also folgt mit Theorem VI.25 (b) und (c) in [RS80], Kapitel VI, S. 212:

$$Sp(AB) = Sp(A^\dagger B^\dagger) = Sp(B^\dagger A^\dagger) = Sp((AB)^\dagger) = (Sp(AB))^*,$$

und somit ist $Sp(AB)$ reell.

Die Linearität von Φ ergibt sich, wie schon die obige Linearität von $Sp(A \cdot)$, aus Theorem VI.25 (a) in [RS80], Kapitel VI, S. 212.

Zum Nachweis der Surjektivität wähle man ein Element f aus der Menge in (10.5). Angeregt durch Darlegungen in [Lud83b], Anhang IV, Abschnitt 11, S.393ff. wird nun die Abbildung

$$\tilde{f}: N(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad B \longmapsto \tilde{f}(B) := f\left(\frac{1}{2}(B + B^\dagger)\right) + i f\left(\frac{1}{2i}(B - B^\dagger)\right)$$

betrachtet. Mit ihr erhält man eine \mathbb{C} -lineare Fortsetzung von f auf $N(\mathcal{H})$, wenn man $N(\mathcal{H})$ gemäß Theorem VI.19 in [RS80], Kapitel VI, S. 207 als Vektorraum über \mathbb{C} auffaßt. Für die weiteren Betrachtungen in bezug auf den Surjektivitätsnachweis liegt eine Situation vor, in der ausschließlich über dem Körper \mathbb{C} gearbeitet wird, denn man betrachtet den \mathbb{C} -Vektorraum der Spur-Klasse-Operatoren über dem komplexen Hilbertraum \mathcal{H} . Mit Theorem VI.19

(c) in [RS80], Kapitel VI, S. 207 gehört mit einem Spur-Klasse-Operator auch seine Hilbertraum-Adjungierte zu den Spur-Klasse-Operatoren. Damit und mit der \mathbb{C} -Vektorraumeigenschaft von $N(\mathcal{H})$ folgt die Zugehörigkeit von $\frac{1}{2}(B+B^\dagger)$ und $\frac{1}{2i}(B-B^\dagger)$ zu $N(\mathcal{H})$. Ob der evidenten Selbstadjungiertheit von $\frac{1}{2}(B+B^\dagger)$ und $\frac{1}{2i}(B-B^\dagger)$ gewinnt man so die Wohldefiniertheit von \tilde{f} .

Die Abbildung \tilde{f} ist aber auch stetig auf $(N(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$, wie die nachfolgende Überlegung zeigt. Es gilt wegen der Stetigkeit von f auf $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$, wenn man für die Norm $\|\cdot\|_1$ die Formel (10.6) bedenkt:

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(B)| &\leq |f(\frac{1}{2}(B+B^\dagger))| + |f(\frac{1}{2i}(B-B^\dagger))| \\ &\leq \frac{1}{2}\|f\|_1(\|B+B^\dagger\|_{Sp} + \|B-B^\dagger\|_{Sp}) \\ &\leq \|f\|_1(\|B\|_{Sp} + \|B^\dagger\|_{Sp}) = 2\|f\|_1\|B\|_{Sp}. \end{aligned}$$

Also gehört \tilde{f} offenbar zum Norm-Dualraum von $(N(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$, wenn man $N(\mathcal{H})$ als \mathbb{C} -Vektorraum auffaßt.

Da man, wie oben bereits gesagt, für den Surjektivitätsnachweis vollständig über dem Körper \mathbb{C} operiert, ist die Anwendung von Satz VI.6.4 (b) in [Wer97], Kapitel VI, S. 255 erlaubt, nach dem durch die Vorschrift

$$A \longrightarrow Sp(A \cdot) \tag{10.7}$$

ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, aufgefaßt als Vektorraum über \mathbb{C} und ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{Op}$, und dem Norm-Dualraum von $(N(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$ erklärt ist, wobei auch $N(\mathcal{H})$ als \mathbb{C} -Vektorraum aufzufassen ist. Also existiert zu \tilde{f} ein linearer und beschränkter Operator $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ so, daß für alle $B \in N(\mathcal{H})$ gilt:

$$Sp(AB) = \tilde{f}(B).$$

Zum Beweis der Surjektivität muß folglich nur noch gezeigt werden, daß A auch selbstadjungiert ist. Man bezeichne für ein Element φ aus \mathcal{H} mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ den Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} mit P^φ . Nutzt man etwa das Korollar in [RS80], Kapitel VI, S. 209, ergibt sich für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ die Zugehörigkeit des Operators P^φ zur Menge der selbstadjungierten Spur-Klasse-Operatoren. Also gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$:

$$\langle A\varphi, \varphi \rangle = Sp(AP^\varphi) = \tilde{f}(P^\varphi) = f(P^\varphi).$$

Definitionsgemäß ist f aber eine reellwertige Abbildung, also liegt $\langle A\varphi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ in \mathbb{R} , womit vermittels Satz V.5.6 in [Wer97], Kapitel V, S. 194 unmittelbar die Selbstadjungiertheit von A folgt. Damit ist der Beweis der Surjektivität gelungen, so daß man den reinen \mathbb{C} -Fall wieder verlassen kann.

Es bleibt, die Isometrie von Φ zu beweisen. Zunächst werden reine Spureigenschaften ausgenutzt, die unberührt davon bleiben, über welchem Körper man die Operatorenräume betrachtet. Für $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{N}(\mathcal{H})$ gilt mit Satz VI.5.8 (a) in [Wer97], Kapitel VI, S. 249 und Satz VI.5.4 in [Wer97], Kapitel VI, S. 242 die Ungleichungskette:

$$|Sp(AB)| \leq \|AB\|_{Sp} \leq \|A\|_{Op} \|B\|_{Sp}.$$

Bedenkt man die Definition der Norm $\|\cdot\|_1$ in (10.6) ergibt sich daraus unmittelbar $\|\Phi(A)\|_1 \leq \|A\|_{Op}$. Andererseits ergibt sich mit der Isometrie-eigenschaft der Abbildung aus (10.7) für jedes $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$:

$$\|A\|_{Op} = \sup_{\substack{C \in \mathcal{N}(\mathcal{H}) \\ \|C\|_{Sp}=1}} |Sp(AC)|. \quad (10.8)$$

Da nun $\mathbb{S}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{N}(\mathcal{H})$ gilt, erhält man mit (10.8):

$$\|A\|_{Op} = \sup_{\substack{C \in \mathcal{N}(\mathcal{H}) \\ \|C\|_{Sp} \leq 1}} |Sp(AC)| \geq \sup_{\substack{B \in \mathbb{S}(\mathcal{H}) \\ \|B\|_{Sp} \leq 1}} |Sp(AB)| = \|\Phi(A)\|_1.$$

Also liegt Isometrie vor, und die Behauptung ist bewiesen.

zu (iii): Dichteoperatoren sind definitionsgemäß positive, selbstadjungierte Elemente D aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ mit $Sp D = 1$. Die Bedingung $Sp D = 1$ impliziert natürlich insbesondere die Existenz der Spur über D , also ist D insbesondere Spur-Klasse-Operator, so daß D auch zu $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ gehört.

Damit liegt auch der reelle lineare Aufspann von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ in $\mathbb{S}(\mathcal{H})$, denn mit Punkt (ii) ist $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ reeller linearer Raum. Also steht noch der Beweis aus, daß sich jedes Element aus $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ als reelle Linearkombination von Elementen aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ schreiben läßt.

Man wähle dazu ein Element A aus $\mathbb{S}(\mathcal{H})$. Es wird zunächst gezeigt, daß A sich als reelle Linearkombination zweier (σ) -Konvexkombinationen von Projektionsoperatoren darstellen läßt.

Mit Theorem VI.21 in [RS80], Kapitel VI, S. 209 bedingt die Spur-Klasse-Operator-Eigenschaft von A insbesondere die Kompaktheit von A als Operator. Die Selbstadjungiertheit von A garantiert zudem, daß A auch normal

ist. Mit dem Spektralsatz für kompakte normale Operatoren in der Form des Korollars VI.3.3 in [Wer97], Kapitel VI, S. 225 findet man für A die folgende Darstellung

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P^{\varphi_k}. \quad (10.9)$$

Dabei sind die λ_k die von 0 verschiedenen Eigenwerte von A . Sie sollen entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit vorkommen, also so oft, wie der Kern des Operators $\lambda_k \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - A$ Dimensionen hat. Mit $(\varphi_i)_{i=1}^{\infty}$ wird ein Orthonormalsystem in \mathcal{H} derart beschrieben, daß φ_k Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_k ist. P^{φ_k} bezeichne den Projektionsoperator auf den durch φ_k charakterisierten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} . Die Reihe in (10.9) konvergiert in der Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$. Es sei hier nur angemerkt, daß die Reihe im Falle, daß A nur endlich viele von 0 verschiedene Eigenwerte hat, abbricht. Der sodann vorliegende „endliche Fall“ läuft im Prinzip völlig analog zum „unendlichen Fall“ ab, so daß im weiteren nur der Fall unendlich vieler Eigenwerte betrachtet wird.

Da A nach Voraussetzung Spur-Klasse-Operator ist, folgt mit Korollar VI.5.9 in [Wer97], Kapitel VI, S. 248:

$$\infty > \|A\|_{Sp} = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|. \quad (10.10)$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\|\lambda_k P^{\varphi_k}\|_{Op} = |\lambda_k|$, so daß sich mit (10.10) und mit Satz 109.13 in [Heu91b], S. 21 die unbedingte Konvergenz der Reihe aus (10.9) ergibt.

Lemma VI.3.1 in [Wer97], Kapitel VI, S. 223 bringt die bekannte Tatsache zum Ausdruck, daß selbstadjungierte kompakte Operatoren reelle Eigenwerte haben. Die unbedingte Konvergenz erlaubt es nun, die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P^{\varphi_k}$ folgendermaßen darzustellen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P^{\varphi_k} = \sum_{k \in I_1} \lambda_k P^{\varphi_k} + \sum_{k \in I_2} \lambda_k P^{\varphi_k}.$$

Dabei möge I_1 die Menge aller echt positiven Elemente aus $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ indizieren, während I_2 alle echt negativen Elemente aus $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ erfaßt.

Die unbedingte Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|$ garantiert auch die Konvergenz der Reihen $V_1 := \sum_{k \in I_1} |\lambda_k|$ und $V_2 := \sum_{k \in I_2} |\lambda_k|$, so daß man zu der folgenden Darstellung von A kommt:

$$A = \underbrace{V_1 \sum_{k \in I_1} \frac{\lambda_k}{V_1} P^{\varphi_k}}_{\text{Reihe 1}} - \underbrace{V_2 \sum_{k \in I_2} \frac{(-\lambda_k)}{V_2} P^{\varphi_k}}_{\text{Reihe 2}}. \quad (10.11)$$

Da mit Satz G.4.7 (i) die Projektionsoperatoren auf eindimensionale Untervektorräume von \mathcal{H} insbesondere Dichteoperatoren sind, stellen die Reihen 1 und 2 jeweils entsprechend der Mächtigkeit der Indexmenge Konvexkombinationen oder σ -Konvexkombinationen von Elementen aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ dar.

Mit Satz G.4.7 (ii) ist die Menge der Dichteoperatoren aber σ -konvex bezüglich $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Op})$, also liegen die Reihen 1 und 2 in $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Das heißt, man hat in (10.11) den Operator A dargestellt als reelle Linearkombination von Elementen aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. ■

Damit stehen nun die notwendigen Aussagen aus der Theorie der Operatoren auf Hilberträumen zur Verfügung, um die angestrebten Aussagen zur Darstellung der Zustandsmenge K sowie der gesamten Effektemenge $\hat{\mathcal{L}}$ im Kontext des Hilbertraumes formulieren zu können. Zur Identifikation von K mit der Menge der Dichteoperatoren auf \mathcal{H} notiere man zunächst das folgende Lemma, das einen Teil des Beweises von T 4.2.1 in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.2, S. 218 aufgreift:

Lemma 10.3.2 *Für jedes x aus K gehört die Abbildung*

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0, 1], \quad E \longmapsto \hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(E))$$

zur Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ im Sinne der Definition F.20.

Beweis:

Das Eins-Element von $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ ist mit Satz G.4.5 durch $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ gegeben. Da σ ein Orthoisomorphismus ist, gilt daher $\sigma^{-1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) = \mathbf{1}$. So ergibt sich:

$$\hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}})) = \hat{\mu}(x, \mathbf{1}) = 1.$$

Sei nun $(E_i)_{i \in I}$ eine höchstens abzählbare Familie aus $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, deren Mitglieder paarweise orthogonal sind. Dann ist wiederum wegen der Eigenschaft der

Orthoisomorphie von σ durch $(\sigma^{-1}(E_i))_{i \in I}$ eine Familie aus G gegeben, deren Mitglieder paarweise orthogonal sind. Wählt man nun noch eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ reeller Zahlen aus dem Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, dann erhält man unter erneuter Verwendung der Orthoisomorphieeigenschaft von σ und mit Satz 9.5.11 (ii):

$$\hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\bigvee_{i \in I} E_i)) = \hat{\mu}(x, \bigvee_{i \in I} \sigma^{-1}(E_i)) = \sum_{i \in I} \hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(E_i)).$$

Damit sind die Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ im Sinne von Definition F.20 bewiesen. ■

Mit Lemma 10.3.2 kann man den folgenden Darstellungssatz für die Zustände beweisen, der T 4.2.1 und T 4.2.3 in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.2, S. 218 wiedergibt, aber in Teilen auch darüber hinausgeht:

Satz und Definition 10.3.3 (Hilbertraum-Darstellung der Zustände)

Für jedes x aus K sei $\hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\cdot))$ im Sinne des Lemmas 10.3.2 als Abbildung auf $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ verstanden. Außerdem bezeichne ϑ im Sinne von Satz G.4.7 die Abbildung von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ in die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathcal{W}_{\mathbb{P}(\mathcal{H})}$ auf $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Dann definiert die Vorschrift

$$\rho : K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{H}), \quad x \longmapsto \vartheta^{-1}\left(\hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\cdot))\right)$$

eine Bijektion so, daß für alle e aus G und alle x aus K die Beziehung

$$\hat{\mu}(x, e) = Sp(\rho(x) \sigma(e)) \tag{10.12}$$

gilt, wobei mit Sp die Spur gemeint sei. ρ ist σ -Konvexkombinationen erhaltend, das heißt, daß für jede höchstens abzählbare Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen aus K und jede Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ gilt:

$$\rho\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \rho(x_i). \tag{10.13}$$

Dabei bezeichnet $\sum_{i \in I} \lambda_i \rho(x_i)$ den Reihengrenzwert bezüglich $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$, der identisch ist mit demjenigen bezüglich $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Op})$. In beiden Fällen liegt unbedingte Konvergenz vor.

Beweis:

Da die Dimension von \mathcal{H} echt größer als zwei ist, folgt mit Lemma 10.3.2 und Satz G.4.7 (v) und (vi) die Wohldefiniertheit von ρ .

Zum Nachweis der Injektivität wähle man zwei Elemente x_1 und x_2 aus K mit $\rho(x_1) = \rho(x_2)$. Dann gilt für jedes E aus $\mathbb{P}(\mathcal{H})$:

$$\hat{\mu}(x_1, \sigma^{-1}(E)) = \hat{\mu}(x_2, \sigma^{-1}(E)).$$

Da σ ein Orthoisomorphismus ist, folgt insbesondere $\hat{\mu}(x_1, e) = \hat{\mu}(x_2, e)$ für alle $e \in G$. Daraus ergibt sich dann mit Satz 9.5.1 und den Stetigkeitseigenschaften von ξ_Δ , daß $\xi_\Delta(x_1, y) = \xi_\Delta(x_2, y)$ für alle $y \in \hat{\mathcal{L}}$ gilt. Da aber mit Satz 8.2.3 (iv) die Topologie $\sigma(B_\Delta, \mathcal{L})$ hausdorffsch ist, ergibt sich mit Satz A.3.3 die Identität von x_1 und x_2 .

Seien x aus K und e aus G gewählt, dann gewinnt man die Relation aus (10.12) folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x, e) &= \hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\sigma(e))) \\ &= \hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\cdot))(\sigma(e)) \\ &= \vartheta \circ \vartheta^{-1}(\hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(\cdot)))(\sigma(e)) \\ &= \vartheta(\rho(x))(\sigma(e)) \\ &= Sp(\rho(x) \cdot)(\sigma(e)) \\ &= Sp(\rho(x) \sigma(e)). \end{aligned}$$

Damit kann zum Beweis übergegangen werden, daß mit ρ eine σ -Konvexkombinationen erhaltende Abbildung gegeben ist. Dabei kann man sich auf den Fall einer abzählbaren Indexmenge I beschränken, denn die Argumentation für den „endlichen Fall“ verläuft entsprechend. Es seien eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus K und eine Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$ gewählt. Dann existiert wegen Satz 8.3.4 (i) die σ -Konvexkombination $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j$ in K . Das heißt, die Folge $(\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert unbeding in $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$. Da nun gemäß Lemma 8.1.12 für jedes $y \in \Delta$ mit $\xi_\Delta(\cdot, y)$ eine lineare und bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ stetige Abbildung auf B_Δ vorliegt, gilt für jeden Projektionsoperator $P^E \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ insbesondere die Konvergenz:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_\Delta(x_j, \sigma^{-1}(P^E)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi_\Delta\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j, \sigma^{-1}(P^E)\right).$$

Damit erweist sich nun die folgende Identität zweier Abbildungen über $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, das heißt im Sinne einer punktweisen Konvergenz:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_{\Delta}(x_j, \sigma^{-1}(\cdot)) = \xi_{\Delta}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j, \sigma^{-1}(\cdot)\right). \quad (10.14)$$

Daraus ergibt sich dann mit Satz G.4.7 (v) unter Ausnutzung von (G.55) und der Bijektivität von ϑ :

$$\begin{aligned} \rho\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j\right) &= \vartheta^{-1}\left(\xi_{\Delta}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j x_j, \sigma(\cdot)\right)\right) \\ &\stackrel{(10.14)}{=} \vartheta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_{\Delta}(x_j, \sigma^{-1}(\cdot))\right) \\ &= \vartheta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \hat{\mu}(x_j, \sigma^{-1}(\cdot))\right) \\ &= \vartheta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \vartheta\left(\vartheta^{-1}(\hat{\mu}(x_j, \sigma^{-1}(\cdot)))\right)\right) \\ &= \vartheta^{-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \vartheta(\rho(x_j))\right) \\ &\stackrel{(G.55)}{=} \vartheta^{-1}\left(\vartheta\left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \rho(x_j)\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \rho(x_j). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j \rho(x_j)$ mit Satz G.4.7 (v) die Konvergenz der Reihe bezüglich des reellen Banachraumes $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Op})$. Der Umstand, daß in Satz G.4.7 (v) die Konvergenz bezüglich des komplexen Banachraumes $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Op})$, also bezüglich des Vektorraumes über den komplexen Zahlen, verwandt wird, ist für die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_{Op}$ unerheblich. Die Unbedingtheit der Konvergenz der Reihe erhält man mit Punkt (ii) von Satz G.4.7. Zum Beweis der angegebenen Aussagen bezüglich Relation in (10.13) bedarf es nun noch des Nachweises der unbedingten Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j \rho(x_j)$ bezüglich des reellen Banachraumes $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$. Da $\rho(x_j)$ für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein Dichteoperator ist, liegt also für jedes $j \in \mathbb{N}$ in $\rho(x_j)$ ein positiver selbstadjungierter Operator mit $Sp(\rho(x_j)) = 1$ vor. Bedenkt man nun, daß

mit Satz VI.3.4 in [Wer97], Kapitel VI, S. 226 für positive selbstadjungierte Operatoren A insbesondere $A = |A|$ gilt, dann folgt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|\lambda_j \rho(x_j)\|_{Sp} &\leq |\lambda_j| \|\rho(x_j)\|_{Sp} \\ &= \lambda_j Sp |\rho(x_j)| \\ &= \lambda_j \underbrace{Sp(\rho(x_j))}_{=1} \\ &= \lambda_j. \end{aligned}$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j \rho(x_j)$ absolut und damit auch unbedingt bezüglich $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$, denn nach Voraussetzung konvergiert $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j$ unbedingt gegen 1.

Abschließend muß jetzt noch die Surjektivität von ρ gezeigt werden. Dafür wird zuerst gezeigt, daß die Projektionsoperatoren auf die eindimensionalen Untervektorräume von \mathcal{H} als ρ -Bilder von Extrempunkten von K dargestellt werden können. Es bezeichne dafür E einen eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} . Den zugehörigen Projektionsoperator nenne man P^E . Mit Satz G.4.5 handelt es sich bei P^E um ein Atom des Verbandes $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, so daß $\sigma^{-1}(P^E)$ zu den Atomen von G gehört. Also existiert mit Satz 9.8.3 ein Extrempunkt x von K mit

$$\{x\} = K_1(\sigma^{-1}(P^E)). \quad (10.15)$$

Mit x liegt nun ein Kandidat für ein Urbild von P^E bezüglich ρ vor. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $\rho(x) = P^E$ gilt. Wie oben gezeigt wurde, erhält ρ Konvexkombinationen. Das heißt, $\rho(x)$ ist Extrempunkt von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Wegen Satz G.4.7 (iii) muß $\rho(x)$ daher ein Projektionsoperator $P^{\tilde{E}}$ auf einen eindimensionalen Untervektorraum \tilde{E} von \mathcal{H} sein. Mit (10.15) erhält man nun aber:

$$1 = \hat{\mu}(x, \sigma^{-1}(P^E)) \stackrel{(10.12)}{=} Sp(\rho(x) P^E) = Sp(P^{\tilde{E}} P^E).$$

Das bedeutet gerade die Identität von P^E und $P^{\tilde{E}}$. Also lassen sich die Projektionsoperatoren auf eindimensionale Untervektorräume von \mathcal{H} als ρ -Bilder von Extrempunkten von K auffassen. Folglich liegen sie insbesondere im Bildbereich von ρ .

Damit kann man jetzt den Beweis der Surjektivität abschließen. Man wähle einen beliebigen Dichteoperator D aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Mit Satz G.4.7 (iv) gibt es eine

höchstens abzählbare Indexmenge I , eine Familie von eindimensionalen Untervektorräumen $(E_i)_{i \in I}$ von \mathcal{H} , die paarweise orthogonal sind, und eine Familie von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ derart, daß gilt:

$$D = \sum_{i \in I} \lambda_i P^{E_i}. \quad (10.16)$$

Dabei bezeichne P^{E_i} für jedes $i \in I$ den Projektionsoperator auf den Untervektorraum E_i . Wie meist kann man sich auch hier auf den Fall einer abzählbaren Indexmenge I beschränken, da der „endliche Fall“ entsprechend verläuft. Im Falle einer abzählbaren Indexmenge bezeichnet die rechte Seite von (10.16) mit Satz G.4.7 (iv) die unbedingte Konvergenz bezüglich des Banachraumes $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{op})$.

Wie oben bereits gezeigt wurde, existiert zu der Familie $(P^{E_i})_{i \in I}$ eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ von Extrempunkten von K dergestalt, daß $P^{E_i} = \rho(x_i)$ für jedes $i \in I$ gilt. Da aber gezeigt wurde, daß σ -Konvexkombinationen von der Abbildung ρ erhalten werden und daß wegen der σ -Konvexität von K die Reihe $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$ in K liegt, ergibt sich:

$$D = \sum_{i \in I} \lambda_i \rho(x_i) = \rho\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right).$$

Also liegt auch D im Bildbereich von ρ , womit die Surjektivität von ρ bewiesen ist. ■

Offenbar erlaubt es die Axiomatik, wie sie bis einschließlich der Axiome AV 4a und AV 4b entwickelt wurde, die Zustände aus K mit den Dichteoperatoren des zugehörigen Hilbertraumes \mathcal{H} zu identifizieren.

Es bleibt also noch zu untersuchen, wie die Effekte aus $\hat{\mathcal{L}}$ mit dem Hilbertraum verknüpft sind. Dazu dehnt man die Abbildung ρ von K auf ganz B_Δ aus unter Ausnutzung der folgenden Darstellung

$$B_\Delta = \left(\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K\right) - \left(\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K\right), \quad (10.17)$$

die mit Lemma D.3.14 zur Verfügung steht.

So kann man nun die folgende Aussage beweisen, die T 4.2.4 in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.2, S. 219 feststellt.

Definition und Lemma 10.3.4 *Die Vorschrift*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}: B_{\Delta} &\longrightarrow \mathbb{S}(\mathcal{H}), \quad x \longmapsto \tilde{\rho}(x) := \lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2) \\ &\text{mit einer beliebigen Darstellung} \quad (10.18) \\ x &= \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 \text{ gemäß (10.17)} \end{aligned}$$

definiert einen isometrischen Isomorphismus zwischen den reellen Banachräumen $(B_{\Delta}, \|\cdot\|_{B_{\Delta}})$ und $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{S\rho})$. Die Abbildung $\tilde{\rho}$ ist die einzige lineare Fortsetzung von ρ auf B_{Δ} .

Beweis:

Zunächst muß die Wohldefiniertheit von $\tilde{\rho}$ erörtert werden. Mit (10.17) existiert zu jedem $x \in B_{\Delta}$ eine Darstellung der Form $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$, wobei x_1, x_2 Elemente aus K und λ_1, λ_2 positive reelle Zahlen sind. Gibt es noch eine andere Darstellung $x = \lambda'_1 x'_1 - \lambda'_2 x'_2$ mit $x'_1, x'_2 \in K$ und $\lambda'_1, \lambda'_2 \geq 0$, muß zum Nachweis der Wohldefiniertheit gezeigt werden, daß gilt:

$$\lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2) = \lambda'_1 \rho(x'_1) - \lambda'_2 \rho(x'_2). \quad (10.19)$$

Aus der Identität $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = \lambda'_1 x'_1 - \lambda'_2 x'_2$ folgt unmittelbar

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda'_1 - \lambda'_2, \quad (10.20)$$

da $\hat{\rho}(x, \mathbf{1}) = 1$ für alle $x \in K$ gilt. Betrachtet man den Fall $x = 0$, gilt

$$0 = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = \lambda'_1 x'_1 - \lambda'_2 x'_2. \quad (10.21)$$

Aus den Linearitätseigenschaften von ξ_{Δ} erhält man $\xi_{\Delta}(0, y) = 0$ für alle $y \in \Delta$. Daraus ergibt sich nun:

$$0 = \xi_{\Delta}(0, \mathbf{1}) = \lambda_1 \xi_{\Delta}(x_1, \mathbf{1}) - \lambda_2 \xi_{\Delta}(x_2, \mathbf{1}) = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Also sind λ_1 und λ_2 identisch. Falls nun $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ gilt, ergibt sich unmittelbar $\lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2) = 0$. Sollte $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ gelten, liefert (10.21) die Identität $x_1 = x_2$. Das heißt aber $\lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2) = \lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_1 \rho(x_1) = 0$. In analoger Weise erhält man dasselbe Ergebnis auch für die gestrichenen Größen $\lambda'_1, \lambda'_2, x'_1, x'_2$, so daß $\tilde{\rho}$ an der Stelle $x = 0$ in wohldefinierter Weise den Funktionswert 0 hat. Gilt nun $x \neq 0$, kann man davon ausgehen, daß $\lambda_1 + \lambda'_2 \neq 0$ gilt. Wäre nämlich $\lambda_1 + \lambda'_2 = 0$, erhielte man $\lambda_1 = \lambda'_2 = 0$, da λ_1, λ'_2 nach Voraussetzung positive reelle Zahlen sind. Wegen (10.20) erhielte man aber

in analoger Weise auch $\lambda'_1 = \lambda_2 = 0$, womit sich $x = 0$ ergäbe. Also gilt $\lambda_1 + \lambda'_2 \neq 0$, woraus sich mit (10.20) auch $\lambda'_1 + \lambda_2 \neq 0$ ergibt. Daher erhält man wegen $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 = \lambda'_1 x'_1 - \lambda'_2 x'_2$ und (10.20):

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda'_2} x_1 + \frac{\lambda'_2}{\lambda_1 + \lambda'_2} x'_2 = \frac{\lambda'_1}{\lambda'_1 + \lambda_2} x'_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda'_1 + \lambda_2} x_2. \quad (10.22)$$

Damit erhält man nun:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2) - (\lambda'_1 \rho(x'_1) - \lambda'_2 \rho(x'_2)) \\ &= (\lambda_1 + \lambda'_2) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda'_2} \rho(x_1) + \frac{\lambda'_2}{\lambda_1 + \lambda'_2} \rho(x'_2) \right) \\ & \quad - (\lambda'_1 + \lambda_2) \left(\frac{\lambda'_1}{\lambda'_1 + \lambda_2} \rho(x'_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda'_1 + \lambda_2} \rho(x_2) \right) \\ & \stackrel{(10.13), (10.20)}{=} (\lambda_1 + \lambda'_2) \left(\rho \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda'_2} x_1 + \frac{\lambda'_2}{\lambda_1 + \lambda'_2} x'_2 \right) \right. \\ & \quad \left. - \rho \left(\frac{\lambda'_1}{\lambda'_1 + \lambda_2} x'_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda'_1 + \lambda_2} x_2 \right) \right) \\ & \stackrel{(10.22)}{=} 0. \end{aligned}$$

Also gilt die Relation aus (10.19) auch für den Fall $x \neq 0$, und es steht mit $\tilde{\rho}$ eine wohldefinierte Abbildung zur Verfügung.

Als Nächstes muß die Linearität von $\tilde{\rho}$ nachgewiesen werden. Dafür wähle man zwei Elemente x_1, x_2 aus B_Δ und zwei reelle Zahlen α_1, α_2 . Der Einfachheit halber wird im weiteren davon ausgegangen, daß sowohl $x_1, x_2 \neq 0$ als auch $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ gilt, denn die ausgeschlossenen Fälle folgen in trivialer Weise. Dann existieren mit (10.17) positive Zahlen λ_{ij} mit $i, j \in \{1, 2\}$ und Elemente x_{ij} aus K mit $i, j \in \{1, 2\}$, so daß für $i \in \{1, 2\}$ gilt:

$$x_i = \lambda_{i1} x_{i1} - \lambda_{i2} x_{i2}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man jetzt davon ausgehen, daß α_1 und α_2 positive Zahlen sind, da sich die anderen Fälle in völlig analoger Weise ergeben. Dann liefert

$$\begin{aligned} & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ &= (\alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{21}) \left(\frac{\alpha_1 \lambda_{11}}{\alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{21}} x_{11} + \frac{\alpha_2 \lambda_{21}}{\alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{21}} x_{21} \right) \\ & \quad - (\alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22}) \left(\frac{\alpha_1 \lambda_{12}}{\alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22}} x_{12} + \frac{\alpha_2 \lambda_{22}}{\alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22}} x_{22} \right) \end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Konvexität von K eine Darstellung der Linearkombination $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ in der Form von (10.17). Mit der so gewonnenen Darstellung von $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ergibt sich unter Verwendung der definierenden Vorschrift von $\tilde{\rho}$ die Linearität, wie folgt:

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= (\alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{21}) \rho \left(\frac{\alpha_1 \lambda_{11}}{\alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{21}} x_{11} + \frac{\alpha_2 \lambda_{21}}{\alpha_1 \lambda_{11} + \alpha_2 \lambda_{21}} x_{21} \right) \\ & \quad - (\alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22}) \rho \left(\frac{\alpha_1 \lambda_{12}}{\alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22}} x_{12} + \frac{\alpha_2 \lambda_{22}}{\alpha_1 \lambda_{12} + \alpha_2 \lambda_{22}} x_{22} \right) \\ & \stackrel{(10.13)}{=} \alpha_1 \lambda_{11} \rho(x_{11}) + \alpha_2 \lambda_{21} \rho(x_{21}) - (\alpha_1 \lambda_{12} \rho(x_{12}) + \alpha_2 \lambda_{22} \rho(x_{22})) \\ &= \alpha_1 (\lambda_{11} \rho(x_{11}) - \lambda_{12} \rho(x_{12})) + \alpha_2 (\lambda_{21} \rho(x_{21}) - \lambda_{22} \rho(x_{22})) \\ &= \alpha_1 \tilde{\rho}(x_1) + \alpha_2 \tilde{\rho}(x_2). \end{aligned}$$

Als Nächstes wird die Injektivität der Abbildung $\tilde{\rho}$ erörtert. Aufgrund der Linearität von $\tilde{\rho}$ genügt es, zu zeigen, daß für ein Element x aus B_Δ mit $\tilde{\rho}(x) = 0$ die Identität $x = 0$ folgt. Betrachte also ein Element x aus B_Δ mit $\tilde{\rho}(x) = 0$. Dann existiert wegen (10.17) eine Darstellung $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ und $x_1, x_2 \in K$, so daß gemäß der Definition der Abbildung $\tilde{\rho}$ gilt:

$$0 = \tilde{\rho}(x) = \lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2). \quad (10.23)$$

Also folgt $\lambda_1 \rho(x_1) = \lambda_2 \rho(x_2)$. Da $\rho(x_1)$ und $\rho(x_2)$ mit Satz 10.3.3 jeweils Dichteoperatoren sind, gilt also $Sp \rho(x_1) = Sp \rho(x_2) = 1$, womit sich dann ob der Linearitätseigenschaften der Spur $\lambda_1 = \lambda_2$ ergibt. Man betrachte nun den

Fall $\lambda_1 = 0$, dann ergibt sich auch $\lambda_2 = 0$, und somit muß x identisch mit 0 sein. Gilt aber $\lambda_1 \neq 0$, dann ergibt sich mit (10.23) ob der Identität von λ_1 und λ_2 auch die Identität von $\rho(x_1)$ und $\rho(x_2)$. Aus der Bijektivität von ρ erhält man damit $x_1 = x_2$, woraus sich mit Hilfe der Identität von λ_1 und λ_2 ebenfalls $x = 0$ ergibt. Also folgt stets $x = 0$, wenn $\tilde{\rho}(x) = 0$ gilt. Damit ist die Injektivität gezeigt worden.

Zum Nachweis der Isometrie wähle man ein x aus B_Δ . Ob der Linearität von $\tilde{\rho}$ gilt $\tilde{\rho}(0) = 0$. Also ist der Fall $x = 0$ trivial, so daß im weiteren von $x \neq 0$ ausgegangen wird. Das heißt insbesondere, daß λ_1 und λ_2 nicht beide gleich 0 sein können. Mit Lemma D.3.14 und Hilfsaussage I aus dem Beweis von Lemma D.3.14 gilt

$$\|x\|_{B_\Delta} = \inf \{ \alpha + \beta > 0 \mid \alpha, \beta \geq 0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K, x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 \}. \quad (10.24)$$

Wie in [Lud70], S. 420 erläutert, kann man nun auch für alle Elemente A aus $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ zeigen:

$$\|A\|_{S_p} = \inf \{ \alpha + \beta > 0 \mid \alpha, \beta \geq 0, A_1, A_2 \in \mathbb{D}(\mathcal{H}), A = \alpha A_1 - \beta A_2 \}. \quad (10.25)$$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung $\tilde{\rho}$ wurde weiter oben bereits erörtert. Also erhält man $\tilde{\rho}(x) = \lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2)$ für jede Zerlegung $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$ und $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$. Für jede derartige Darstellung erhält man mit (10.25)

$$\|\tilde{\rho}(x)\|_{S_p} \leq \lambda_1 + \lambda_2,$$

da mit Satz 10.3.3 in ρ eine Bijektion von K auf die Menge der Dichteoperatoren $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ vorliegt. Also gilt mit (10.24):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\rho}(x)\|_{S_p} &\leq \inf \{ \alpha + \beta > 0 \mid \alpha, \beta \geq 0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K, x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 \} \\ &= \|x\|_{B_\Delta}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Umgekehrt gilt

$$\|x\|_{B_\Delta} \leq \lambda_1 + \lambda_2 \quad (10.27)$$

für jede Darstellung $\tilde{\rho}(x) = \lambda_1 A_1 - \lambda_2 A_2$ mit $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ und $A_1, A_2 \in \mathbb{D}(\mathcal{H})$. Wenn eine derartige Darstellung von $\tilde{\rho}(x)$ vorliegt, dann erhält man ob der Bijektivität von ρ und Linearität von $\tilde{\rho}$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(x) &= \lambda_1 \rho(\rho^{-1}(A_1)) - \lambda_2 \rho(\rho^{-1}(A_2)) \\ &= \tilde{\rho}(\lambda_1 \rho^{-1}(A_1) - \lambda_2 \rho^{-1}(A_2)). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit der Injektivität von $\tilde{\rho}$ und der Bijektivität von ρ eine Darstellung

$$x = \lambda_1 \rho^{-1}(A_1) - \lambda_2 \rho^{-1}(A_2)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ und $\rho^{-1}(A_1), \rho^{-1}(A_2) \in K$. Das liefert mit (10.24) die Relation in (10.27). Damit folgt dann aus (10.25) die zu (10.26) umgekehrte Beziehung zu

$$\|x\|_{B_\Delta} \leq \|\tilde{\rho}(x)\|_{S_p},$$

so daß die Isometrie bewiesen ist.

Der Beweis der Eigenschaften von $\tilde{\rho}$ ist abgeschlossen, wenn die Surjektivität nachgewiesen wird. Dafür wird ein A aus $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ gewählt. Dann kann man A nach Lemma 10.3.1 (iii) als Linearkombination $\sum_{i=1}^n \alpha_i D_i$ einer Familie $(D_i)_{i=1}^n$ von Dichteoperatoren und reellen Vorfaktoren $(\alpha_i)_{i=1}^n$ darstellen. Da $\tilde{\rho}$ auf K mit ρ zusammenfällt und da ρ als Bildbereich gerade die Dichteoperatoren besitzt, gibt es für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein Element x_i aus K mit $D_i = \rho(x_i)$. Also erhält man mit Hilfe der Linearität von $\tilde{\rho}$:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^n \lambda_i D_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde{\rho}(x_i) = \tilde{\rho}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right). \end{aligned}$$

Also kann man offenbar A als Bild von $\tilde{\rho}$ auffassen, so daß sich die Surjektivität von $\tilde{\rho}$ zeigt.

Es bedarf zum Abschluß noch des Beweises der Eindeutigkeitsaussage. Dafür bezeichne l eine lineare Fortsetzung von ρ auf B_Δ . Für ein $x \in B_\Delta$ existiert in bekannter Weise eine Darstellung der Form $x = \lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$ und positiven reellen Zahlen λ_1, λ_2 . Dann gilt:

$$l(x) = \lambda_1 l(x_1) - \lambda_2 l(x_2) = \lambda_1 \rho(x_1) - \lambda_2 \rho(x_2) = \tilde{\rho}(x).$$

Also handelt es sich bei l gerade um die Abbildung $\tilde{\rho}$. ■

Mit $\tilde{\rho}$ liegt also ein isometrischer Isomorphismus zwischen den reellen Banachräumen $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ und $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{S_p})$ vor. Das eröffnet die Möglichkeit, eine entsprechende Abbildung auch für den Dualraum von $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$, also den reellen Banachraum $(\Delta, \|\cdot\|)$, zu untersuchen. Das nächste Lemma faßt das Ergebnis solcher Überlegungen zusammen. Dabei fließen Bemerkungen ein, die Ludwig im Anschluß an T 4.2.4 in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.2, S. 219 anstellt:

Definition und Lemma 10.3.5 *Zwischen dem Banachraum $(\Delta, \|\cdot\|)$ und dem mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$ ausgestatteten reellen Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ vermittelt die Vorschrift*

$$y \longmapsto \Phi^{-1}\left(\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y)\right)$$

einen isometrischen Isomorphismus, der mit χ benannt sein möge. Dabei bezeichnet Φ den isometrischen Isomorphismus aus Lemma 10.3.1 (ii).

Für jedes x aus B_{Δ} und jedes y aus Δ gilt:

$$\xi_{\Delta}(x, y) = Sp(\tilde{\rho}(x) \chi(y)). \quad (10.28)$$

Bezüglich der Halbordnung \leq auf der Menge Δ , gemäß Definition 8.4.1, und der Halbordnung \leq auf der Menge der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, gemäß (10.3), erhält χ in beide Richtungen die Ordnung. Das heißt, man erhält für alle Elemente y_1, y_2 aus Δ die Äquivalenz:

$$y_1 \leq y_2 \iff \chi(y_1) \leq \chi(y_2). \quad (10.29)$$

Beweis:

Die Wohldefiniertheit von χ ergibt sich zwanglos, denn für jedes $y \in \Delta$ liegt durch $\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y)$ offensichtlich eine \mathbb{R} -lineare Abbildung auf $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ vor, da $\xi_{\Delta}(\cdot, y)$ und $\tilde{\rho}^{-1}(\cdot)$ geeignete Linearitätseigenschaften besitzen. Außerdem ergibt sich die Stetigkeit auf $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$, denn es gilt für alle $S \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$:

$$|\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(S), y)| \leq \|\tilde{\rho}^{-1}(S)\|_{B_{\Delta}} \|y\| = \|S\|_{Sp} \|y\|.$$

Für das Ungleichheitszeichen in obiger Kette bedenke man das Lemma 8.1.12. In das Gleichheitszeichen geht die Isometrieeigenschaft von $\tilde{\rho}$ aus Lemma 10.3.4 ein. Bedenkt man nun die Definition der Abbildung Φ aus Lemma 10.3.1 (ii), dann ergibt sich die Wohldefiniertheit von χ .

Die Linearität von χ ergibt sich aus den Linearitätseigenschaften der χ konstituierenden Abbildungen.

Zum Nachweis der Isometrie erinnere man zunächst, daß aufgrund der Symmetrie von Δ nach Satz 8.2.3 (ii), mit Formel (8.8) und Lemma 8.1.21 für alle $y \in \Delta$ gilt:

$$\|y\| = \sup_{x \in B_{\Delta}, x \neq 0} \frac{|\xi_{\Delta}(x, y)|}{\|x\|_{B_{\Delta}}}.$$

Damit ergibt sich nun für jedes $y \in \Delta$ mit Lemma 10.3.1 (ii) und Lemma 10.3.4 die Isometrie:

$$\begin{aligned} \|\Phi^{-1}(\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y))\|_{Op} &= \|\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y)\|_1 \\ &\stackrel{(10.6)}{=} \sup_{B \in \mathbb{S}(\mathcal{H}), \|B\|_{Sp} \leq 1} |\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(B), y)| \\ &= \sup_{x \in B_{\Delta}, \|x\|_{B_{\Delta}} \leq 1} |\xi_{\Delta}(x, y)| = \|y\|. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Surjektivität wähle man einen selbstadjungierten Operator A aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$. Mit Lemma 10.3.1 (ii) existiert dann eine \mathbb{R} -lineare, stetige und reellwertige Abbildung f auf $(\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$ mit $\Phi^{-1}(f) = A$. Wegen Lemma 10.3.4 liegt mit $f(\tilde{\rho}(\cdot))$ ein Element aus B'_{Δ} vor. Da $(\Delta, \|\cdot\|)$ und $(B'_{\Delta}, \|\cdot\|_{B'_{\Delta}})$ gemäß den Überlegungen aus Definition 8.1.18 und Satz 8.2.3 (ii) bezüglich der Abbildung

$$\Delta \longrightarrow B'_{\Delta}, y \longmapsto \xi_{\Delta}(\cdot, y)$$

isometrisch isomorph sind, gibt es zu $f(\tilde{\rho}(\cdot))$ ein Element $y \in \Delta$, so daß für alle $x \in B_{\Delta}$ gilt:

$$f(\tilde{\rho}(x)) = \xi_{\Delta}(x, y).$$

Also ergibt sich für alle $S \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$:

$$f(S) = \xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(S), y).$$

Damit erhält man schließlich:

$$A = \Phi^{-1}(f) = \Phi^{-1}(\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y)) = \chi(y).$$

Zum Beweis der Aussage über den Ordnungserhalt von χ wird zunächst die Aussage (10.28) bewiesen.

Man wähle dafür ein Element y aus Δ , dann gilt ob der Definition der Abbildung χ :

$$\chi(y) = \Phi^{-1}(\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y)).$$

Daraus ergibt sich unmittelbar unter Verwendung der Definition der Abbildung Φ aus Lemma 10.3.1 (ii):

$$\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(\cdot), y) = \Phi(\chi(y)) = Sp(\chi(y) \cdot). \quad (10.30)$$

Dabei bezeichnet (10.30) die Identität zweier Abbildungen auf $\mathbb{S}(\mathcal{H})$. Das heißt, es gilt für alle $S \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$:

$$\xi_{\Delta}(\tilde{\rho}^{-1}(S), y) = Sp(\chi(y) S).$$

Weil $\tilde{\rho}(\cdot)$ nach Lemma 10.3.4 eine Bijektion zwischen B_Δ und $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ darstellt, erhält man also für alle $x \in B_\Delta$

$$\xi_\Delta(x, y) = Sp(\chi(y) \tilde{\rho}(x)),$$

womit die Aussage aus (10.28) bewiesen wäre.

Damit folgt nun auch die Aussage zum Ordnungserhalt. Es seien mit y_1 und y_2 zwei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ bezeichnet. Unter Verwendung der Bijektion $\tilde{\rho}$ aus Lemma 10.3.4 ergibt sich damit

$$\begin{aligned} y_1 \leq y_2 &\iff [\forall x \in K : \xi_\Delta(x, y_1) \leq \xi_\Delta(x, y_2)] \\ &\iff [\forall D \in \mathbb{D}(\mathcal{H}) : \xi_\Delta(\tilde{\rho}^{-1}(D), y_1) \leq \xi_\Delta(\tilde{\rho}^{-1}(D), y_2)] \\ &\stackrel{(10.28)}{\iff} [\forall D \in \mathbb{D}(\mathcal{H}) : Sp(D \chi(y_1)) \leq Sp(D \chi(y_2))] \\ &\iff \chi(y_1) \leq \chi(y_2). \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Äquivalenz aus der Definition der Ordnung gemäß (10.3) und Lemma G.4.8. \blacksquare

Mit der so gewonnenen Abbildung, die Δ mit den selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ verknüpft, liegt eine geeignete Abbildung vor, um den Orthoisomorphismus σ aus Abschnitt 10.2 in geeigneter Weise auf die Menge aller Effekte aus $\hat{\mathcal{L}}$ fortzusetzen. Dies bringt der nachfolgende Satz, der eine Feststellung Ludwigs in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.2, S. 219 umsetzt, zum Ausdruck:

Satz 10.3.6 (Hilbertraum-Darstellung der Effekte) *Die Restriktion der Abbildung χ aus Lemma 10.3.5 auf $\hat{\mathcal{L}}$ liefert eine Bijektion auf die Menge*

$$\{A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ selbstadjungiert und } \mathbf{0}_\mathcal{H} \leq A \leq \mathbf{1}_\mathcal{H}\}. \quad (10.31)$$

Dabei bezeichnen $\mathbf{0}_\mathcal{H}$ und $\mathbf{1}_\mathcal{H}$ im Sinne der Definition 10.3.1 (i) die Nullabbildung und die identische Abbildung. Insbesondere ergibt sich $\chi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}_\mathcal{H}$ und $\chi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_\mathcal{H}$. χ fällt auf G mit der Abbildung σ aus (10.2) zusammen, und für alle x aus K und alle y aus $\hat{\mathcal{L}}$ gilt:

$$\hat{\mu}(x, y) = Sp(\rho(x) \chi(y)). \quad (10.32)$$

Beweis:

Zunächst folgt mit (10.28) aus Lemma 10.3.5 unmittelbar, daß für alle $x \in K$ und alle $y \in \hat{\mathcal{L}}$ gilt:

$$\hat{\mu}(x, y) = Sp(\chi(y) \rho(x)) = Sp(\rho(x) \chi(y)). \quad (10.33)$$

Daraus ergeben sich auch die Aussagen bezüglich $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$, denn für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ erhält man, wenn man mit P^φ den Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} bezeichnet:

$$\langle \chi(\mathbf{0})\varphi, \varphi \rangle \stackrel{(10.33)}{=} Sp(\chi(\mathbf{0})P^\varphi) = \hat{\mu}(\rho^{-1}(P^\varphi), \mathbf{0}) = 0. \quad (10.34)$$

Dabei bedenke man beim vorletzten Gleichheitszeichen, daß P^φ insbesondere Dichteoperator ist und daß somit $\rho^{-1}(P^\varphi)$ zu K gehört. Die Relation in (10.34) besagt nun gerade, daß $\langle \chi(\mathbf{0})\varphi, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt. Also muß $\chi(\mathbf{0})$ gerade der Nulloperator sein, wie man etwa mit [Wer97], Korollar V.5.8, Kapitel V, S. 195 erhält. In analoger Weise ergibt sich die Identität von $\chi(\mathbf{1})$ und $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$, denn man erhält für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$:

$$\begin{aligned} \langle \chi(\mathbf{1})\varphi, \varphi \rangle &\stackrel{(10.33)}{=} Sp(\chi(\mathbf{1})P^\varphi) = \hat{\mu}(\rho^{-1}(P^\varphi), \mathbf{1}) = 1 \\ &= \langle \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\varphi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Das heißt, für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt $\langle (\chi(\mathbf{1}) - \mathbf{1}_{\mathcal{H}})\varphi, \varphi \rangle = 0$. Somit ergibt sich die Identität von $\chi(\mathbf{1})$ und $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ wiederum [Wer97], Korollar V.5.8, Kapitel V, S. 195.

Als Nächstes wird die Restriktion von χ auf $\hat{\mathcal{L}}$ untersucht. Dafür sei ein Element y aus $\hat{\mathcal{L}}$ gewählt. Bezeichnet man für ein auf 1 normiertes Element φ aus dem Hilbertraum \mathcal{H} den Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} mit P^φ , dann gilt mit (10.28) für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$:

$$\langle \chi(y)\varphi, \varphi \rangle = Sp(\chi(y)P^\varphi) = \xi_{\Delta}(\rho^{-1}(P^\varphi), y) = \hat{\mu}(\rho^{-1}(P^\varphi), y).$$

Dabei sei bezüglich des vorletzten Gleichheitszeichens daran erinnert, daß P^φ insbesondere auch zur Menge $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ gehört und daß somit $\tilde{\rho}^{-1}(P^\varphi) = \rho^{-1}(P^\varphi)$ gilt. Für das letzte Gleichheitszeichen bedenke, daß $\rho^{-1}(P^\varphi)$ mit Satz 10.3.3 zu K gehört.

Die obige Gleichheitskette zeigt nun, daß $\langle \chi(y)\varphi, \varphi \rangle = \hat{\mu}(\rho^{-1}(P^\varphi), y)$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt. Da aber bekanntermaßen $\hat{\mu}$ in das reelle Intervall $[0, 1]$ abbildet, hat man also für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ die folgende Aussage gewonnen:

$$\langle \mathbf{0}_{\mathcal{H}}\varphi, \varphi \rangle = 0 \leq \langle \chi(y)\varphi, \varphi \rangle \leq 1 = \langle \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\varphi, \varphi \rangle.$$

Ob der Definition der Halbordnung \leq in (10.3) ist das gleichbedeutend mit der Relation $\mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq \chi(y) \leq \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. Das heißt, die Bilder der Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ bezüglich χ vollständig in der Menge (10.31) liegen.

Also bleibt zum Beweis der Aussagen über die Restriktion von χ auf $\hat{\mathcal{L}}$ nur noch zu zeigen, daß tatsächlich jeder selbstadjungierte Operator A aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ in den Bildbereich der Restriktion von χ auf $\hat{\mathcal{L}}$ gehört, wenn $0 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1$ für alle φ aus \mathcal{H} mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt.

Es bezeichne also A einen selbstadjungierten Operator aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, der für alle φ aus \mathcal{H} mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ die Bedingung $0 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1$ erfüllt.

Die Zugehörigkeit von A zu den selbstadjungierten Elementen aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ garantiert mittels Lemma 10.3.5 die Existenz eines Elementes y aus Δ mit $\chi(y) = A$. Es soll nun gezeigt werden, daß die weiteren Eigenschaften, die für A gefordert wurden, hinreichend dafür sind, daß y zu $\hat{\mathcal{L}}$ gehört. Das heißt, wegen Definition 8.4.3 und Satz 9.4.1 muß man zeigen:

$$\forall x \in K : \quad 0 \leq \hat{\mu}(x, y) \leq 1. \quad (10.35)$$

Sei $x \in K$, dann kann man mit Satz G.4.7 (iv) den Dichteoperator $\rho(x)$ als (σ -)Konvexkombination von Projektionsoperatoren auf eindimensionale Untervektorräume von \mathcal{H} darstellen. Der Einfachheit halber beschränke man sich im weiteren auf den abzählbaren Fall. Es gibt also eine Darstellung der Form:

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P^{E_n}. \quad (10.36)$$

Dabei bezeichnet $(\lambda_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Familie von Zahlen aus dem reellen Intervall $[0, 1]$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ benennt P^{E_n} einen Projektionsoperator auf einen eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} . Die Reihe auf der rechten Seite von (10.36) konvergiert in unbedingter Weise bezüglich $\|\cdot\|_{OP}$. Also konvergiert auch $A \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P^{E_n}$ gegen $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A P^{E_n}$ bezüglich $\|\cdot\|_{OP}$. Mit Satz VI.5.4 in [Wer97], Kapitel VI, S. 242 handelt es sich sowohl bei

$A \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P^{E_n}$ als auch bei den AP^{E_n} mit $n \in \mathbb{N}$ um Spur-Klasse-Operatoren. Aufgrund der Stetigkeit von Φ gemäß Lemma 10.3.1 (ii) gilt

$$\begin{aligned}
 \xi_{\Delta}(x, y) &\stackrel{(10.28)}{=} Sp(A\rho(x)) = Sp(A\rho(x)\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \\
 &= Sp\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n AP^{E_n}\right)\mathbf{1}_{\mathcal{H}}\right) \\
 &= \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n AP^{E_n}\right)(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi(AP^{E_n})\right)(\mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Sp(AP^{E_n}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle A\varphi_n, \varphi_n \rangle,
 \end{aligned}$$

wobei φ_n ein auf 1 normiertes Element aus E_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen möge. Aus den Voraussetzungen, daß $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = 1$ gilt und daß der Relation $0 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1$ für alle φ aus \mathcal{H} mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ entsprochen wird, folgt somit (10.35).

Abschließend bleibt zu zeigen, daß $\chi(e) = \sigma(e)$ für alle $e \in G$ gilt. Bezeichne dafür e ein Element aus G , dann ergibt sich mit (10.33) und mit (10.12) für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$, wobei P^{φ} für den Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} stehen möge:

$$\begin{aligned}
 \langle \chi(e)\varphi, \varphi \rangle &= Sp(\chi(e)P^{\varphi}) = \xi_{\Delta}(\rho^{-1}(P^{\varphi}), e) = \hat{\mu}(\rho^{-1}(P^{\varphi}), e) \\
 &= Sp(\sigma(e)P^{\varphi}) = \langle \sigma(e)\varphi, \varphi \rangle.
 \end{aligned}$$

Also gilt $\langle \chi(e)\varphi, \varphi \rangle = \langle \sigma(e)\varphi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$. Vermittels [Wer97], Korollar V.5.8, Kapitel V, S. 195 ergibt sich so die Identität der selbstadjungierten Operatoren $\chi(e)$ und $\sigma(e)$. ■

Damit ist das Ziel des Abschnitts erreicht. Es ist gelungen, die Menge der Zustände aus K mit der Menge der Dichteoperatoren auf \mathcal{H} und die Menge der Effekte $\hat{\mathcal{L}}$ mit

der Menge derjenigen selbstadjungierten Operatoren A auf \mathcal{H} , die für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ der Relation $0 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1$ genügen, so zu identifizieren, daß die Wahrscheinlichkeitsfunktion $\hat{\mu}$ auf $K \times \hat{\mathcal{L}}$ gerade durch die Spur wiedergegeben wird.

Da es sich dabei um ein zentrales Ergebnis handelt, wird es nochmals in einem Satz zusammenfassend gewürdigt.

Satz 10.3.7 *Es sei $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur, die den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4a und AV 4b genügt. Ferner sei der zugehörige Verband der Entscheidungseffekte irreduzibel.*

Dann existieren ein separabler, unendlichdimensionaler komplexer Hilbertraum \mathcal{H} , eine σ -Konvexkombinationen erhaltende Bijektion

$$\rho : K \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{H})$$

aus der Menge der Zustände in die Menge der Dichteoperatoren von \mathcal{H} und eine in beide Richtungen ordnungserhaltende Bijektion

$$\chi : \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow \{A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ selbstadjungiert und } \mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq A \leq \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\}$$

auf der Menge der Effekte, so daß für alle Elemente x aus K und alle Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}}$ gilt:

$$\hat{\mu}(x, y) = Sp(\rho(x)\chi(y)).$$

Der obige Satz kann als besonderer Erfolg des hier dargestellten Zugangs aufgefaßt werden, denn üblicherweise beginnt eine „Erläuterung“ der Theorie der Quantenmechanik mit den Hilbertraumstrukturen. Dabei werden solchen Begriffen wie dem des Zustandes und dem des Ja-Nein-Experiments oder auch dem der Observablen Hilbertraumstrukturen zugeordnet, ohne deutlich zu machen, welche realen Strukturen damit wiedergegeben werden sollen. Daher entbehrt eine solche Vorgehensweise auch einer nachvollziehbaren Motivation.

Bei dem hier beschrittenen Weg dagegen wird von den experimentell vorhandenen Aufbauten ausgegangen, und darauf basierend wird durch physikalisch motivierte Axiome eine mathematische Bildtheorie gewonnen, die sich schließlich durch Strukturen auf einem Hilbertraum im Sinne von Satz 10.3.7 darstellen lassen. Es handelt sich aber lediglich um eine Darstellung der Bildterme K , $\hat{\mathcal{L}}$, G und $\hat{\mu}$ durch Hilbertraumstrukturen. Satz 10.3.7 darf man nicht dahingehend mißverstehen, daß K und $\hat{\mathcal{L}}$ mit den dort angegebenen angegebenen Mengen von Operatoren auf dem Hilbertraum in allen Belangen identisch sind. K , $\hat{\mathcal{L}}$, G und $\hat{\mu}$ übernehmen neben ihrer Zugehörigkeit zur mathematischen Theorie noch die Rolle von Bildtermen im Sinne

innerer Terme, wie in Abschnitt 4.4 ausgeführt wird. Die Menge der Dichteoperatoren ist lediglich auf mathematischer Ebene mit K identifizierbar. Ein Element $D = \rho(x)$ aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ ist nicht das Bild des mit x symbolisierten Zustandes, sondern lediglich der mit dem Bild x eines Zustandes assoziierte Dichteoperator. Dasselbe gilt für die Menge der selbstadjungierten Operatoren A mit $\mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq A \leq \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ im Verhältnis zur Menge der Effekte. Besonders prägnant wird der Unterschied, wenn man die Menge der Projektionsoperatoren aus $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ betrachtet, die auf eindimensionale Untervektorräume von \mathcal{H} projizieren. Einerseits wird $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ mittels der Abbildung ρ mit einer Teilmenge der Zustände identifiziert, nämlich den Extrempunkten von K . Andererseits wird $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ aber auch mittels der Abbildung χ mit einer Teilmenge der Entscheidungseffekte identifiziert, nämlich den Atomen von G . Würde man also davon ausgehen, daß die Menge der Projektionsoperatoren einerseits mit einer gewissen Teilmenge der Bildmenge der Zustände und andererseits mit einer gewissen Teilmenge der Bildmenge der Entscheidungseffekte in allen Belangen, also insbesondere auch den physikalischen, identisch ist, käme man zu dem paradoxen Ergebnis, daß ein Projektionsoperator sowohl für einen Zustand als auch für einen Entscheidungseffekt steht.

Die obigen Überlegungen zeigen, daß es neben etwaigen Problemen zur Motivation der „üblichen“ Vorgehensweise im Zusammenhang mit der „Erläuterung“ der Quantenmechanik auch für das tiefergehende Verständnis des Aufbaus der Theorie der Quantenmechanik von enormer Bedeutung ist, den hier vorgestellten vorsichtigen Weg zu beschreiten.

10.4 Nicht-Trivialität der bisherigen Axiomatik

Bei der großen Anzahl der Axiome, die im Laufe der vorgestellten Axiomatik verwendet werden, stellt sich die Frage, ob es überhaupt eine nicht-triviale mathematische Struktur gibt, die allen Axiomen genügt. Die Antwort liefert der nachfolgende Satz, der eine Vielzahl von Überlegungen darstellt, die Ludwig in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.2, S. 219ff. vorlegt.

Satz 10.4.1 (Nicht-Trivialität der bisherigen Axiomatik) *Sei \mathcal{H} ein unendlichdimensionaler separabler komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und kanonischer Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Es seien die folgenden Bezeichnungen gewählt:*

$$K := \mathbb{D}(\mathcal{H}),$$

$$\hat{\mathcal{L}} := \{A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ selbstadjungiert und}$$

$$0 \leq \langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1 \text{ für alle } \varphi \text{ aus } \mathcal{H} \text{ mit } \|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1\}.$$

Wird ferner die folgende Abbildung

$$\hat{\mu} : K \times \hat{\mathcal{L}} \longrightarrow [0, 1], \quad (D, A) \longmapsto Sp(DA),$$

definiert, dann genügen $K, \hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mu}$ den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3 und AV 4s.

Beweis:

Zunächst werden einige Bemerkungen und Abmachungen formuliert.

In den Voraussetzungen werden die drei Größen $K, \hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mu}$ definiert. Die Ausdrücke $K_0(A), K_1(A)$ für $A \in \hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ für $k \subseteq K$ sollen daher im Sinne der Definition 8.3.14 (ii) und (iv) sowie der Definition 9.5.7 verstanden werden.

Außerdem sei die Abmachung getroffen, daß für jedes Element φ aus der Menge $\{\varphi' \in \mathcal{H} \mid \|\varphi'\|_{\mathcal{H}} = 1\}$ mit P^φ der Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum bezeichnet wird. Ebenso wird für einen abgeschlossenen Untervektorraum M der zugehörige Projektionsoperator durch P^M symbolisiert.

Jedes Element $D \in K = \mathbb{D}(\mathcal{H})$ läßt sich mit Satz G.4.7 (iv) in der nachfolgenden Form darstellen:

$$D = \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D P^{\varphi_i}. \quad (10.37)$$

Dabei wird mit I_D eine höchstens abzählbare Indexmenge bezeichnet, mit $(\varphi_i)_{i \in I_D}$ wird ein Orthonormalsystem aus \mathcal{H} benannt und $(\lambda_i^D)_{i \in I_D}$ steht für eine Familie von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I_D} \lambda_i^D = 1$. Falls

I_D abzählbarer Mächtigkeit sein sollte, handelt es sich beim Term auf der rechten Seite von (10.37) um eine Reihe, die im unbedingten Sinne sowohl bezüglich der Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$ als auch bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{Sp}$ konvergiert. Im weiteren Verlauf des Beweises werden die Darstellungen in der Form von (10.37) immer wieder verwendet, ohne daß die obigen Eigenschaften stets explizit wiederholt werden.

Damit kann nun zum Beweis des Satzes übergegangen werden.

Es stellt sich zunächst die Frage nach der Wohldefiniertheit der mit $\hat{\mu}$ benannten Abbildung. Dafür wähle man ein $D \in K$ und ein $A \in \hat{\mathcal{L}}$. Verwendet man für D eine Darstellung der Form (10.37), dann erhält man für alle $i \in I_D$:

$$0 \leq \langle A\varphi_i^D, \varphi_i^D \rangle \leq 1. \quad (10.38)$$

Mit Satz VI.5.8 in [Wer97], Kapitel VI, S. 248 ist außerdem die $\|\cdot\|_{Sp}$ -Stetigkeit der Spur auf der Menge aller Spur-Klasse-Operatoren bekannt, so daß man erhält:

$$\begin{aligned} Sp(DA) &= \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D Sp(DP\varphi_i^D) \\ &= \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D \langle A\varphi_i^D, \varphi_i^D \rangle. \end{aligned}$$

Bedenkt man $\sum_{i \in I_D} \lambda_i = 1$, dann ergibt sich daraus mit (10.38):

$$0 \leq Sp(DA) \leq 1.$$

Also handelt es sich bei $\hat{\mu}$ um eine wohldefinierte Abbildung.

Somit wird im Sinne von Definition 8.4.1 auf $\hat{\mathcal{L}}$ eine Relation \leq definiert. Es gilt für alle $A_1, A_2 \in \hat{\mathcal{L}}$:

$$A_1 \leq A_2 \iff [\forall D \in \mathbb{D}(\mathcal{H}) : Sp(DA_1) \leq Sp(DA_2)].$$

Daß damit eine Halbordnung vorliegt und daß es sich dabei um die herkömmliche Halbordnung auf der Menge der selbstadjungierten Operatoren handelt, folgt aus Lemma G.4.8 und Satz 10.3.1 (ii). Es gilt daher:

$$A_1 \leq A_2 \iff [\forall \varphi \in \mathcal{H} \text{ mit } \|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1 : \langle A_1 \varphi, \varphi \rangle \leq \langle A_2 \varphi, \varphi \rangle]. \quad (10.39)$$

Damit kann jetzt der Beweis der einzelnen AV-Aussagen durchgeführt werden.

zu AV 1.1:

Es werden als erstes die Mengen $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $k \subseteq K$ betrachtet. Bezeichnet man mit M den Normabschluß des von der Menge $\{\varphi_i^D \mid D \in k, i \in I_D\}$ aufgespannten Untervektorraumes von \mathcal{H} , dann kann man zeigen, daß $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ größtes Element von $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ ist und daß $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ in $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ liegt. Da es sich bei $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ um einen Projektionsoperator handelt, offenbart sich die Zugehörigkeit von $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ zu $\hat{\mathcal{L}}$ unmittelbar. Man betrachte nun ein $D \in k$. Im weiteren wird von einer Darstellung gemäß (10.37) ausgegangen. Bezeichne mit B eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , die das System $\{\varphi_i^D \mid i \in I_D\}$ umfaßt;

die Existenz eines solchen Systems ist gesichert, wofür etwa auf Satz V.4.9 in [Wer97], Kapitel V, S. 189 verwiesen sei. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)) &= 1 - Sp(DP^M) \\
 &= 1 - \sum_{\varphi \in B} \langle DP^M \varphi, \varphi \rangle \\
 &= 1 - \sum_{i \in I_D} \langle DP^M \varphi_i^D, \varphi_i^D \rangle \\
 &= 1 - \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Also gehört $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ auch zu $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$, so daß noch gezeigt werden muß, daß es sich bei $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ auch tatsächlich um das größte Element von $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ handelt. Es sei dafür ein A aus $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ gewählt. Dann erhält man für jedes $D \in k$ unter Ausnutzung der Darstellung (10.37):

$$0 = Sp(AD) = \sum_{i \in I_D} \langle AD\varphi_i^D, \varphi_i^D \rangle = \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D \langle A\varphi_i^D, \varphi_i^D \rangle.$$

Da nach Voraussetzung $\langle A\varphi, \varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt und da $(\lambda_i^D)_{i \in I_D}$ eine Familie echt positiver reeller Zahlen ist, erhält man somit für alle $i \in I_D$ die Identität $\langle A\varphi_i^D, \varphi_i^D \rangle = 0$. Obige Betrachtungen gelten für alle $D \in k$, so daß sich $\langle A\varphi, \varphi \rangle = 0$ für alle φ aus dem linearen Aufspann der Menge $\{\varphi_i^D \mid D \in k, i \in I_D\}$ ergibt. Die Stetigkeit von A liefert die entsprechende Aussage auch für alle $\varphi \in M$, woraus sich unter Verwendung von Korollar V.5.8 in [Wer97], Kapitel V, S. 195 die folgende Aussage ergibt:

$$\forall \varphi \in M : A\varphi = 0. \quad (10.40)$$

Dabei sei daran erinnert, daß auch M ein Hilbertraum ist. Damit kann man jetzt $A \leq \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ zeigen. Sei φ ein Element aus \mathcal{H} mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$, dann

gilt:

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi, \varphi \rangle &= \langle AP^M\varphi, \varphi \rangle + \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, \varphi \rangle \\
&\stackrel{(10.40)}{=} \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, \varphi \rangle \\
&= \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, P^M\varphi \rangle \\
&\quad + \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \rangle \\
&= \langle A\varphi, P^M\varphi \rangle - \langle AP^M\varphi, P^M\varphi \rangle \\
&\quad + \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \rangle \\
&\stackrel{(10.40)}{=} \langle AP^M\varphi, \varphi \rangle + \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \rangle \\
&\stackrel{(10.40)}{=} \langle A(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Gilt nun $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi = 0$, erhält man damit:

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi, \varphi \rangle &= \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \rangle \\
&= \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, \varphi \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Gilt $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \neq 0$, erhält man bei Verwendung der Voraussetzung, daß $\langle A\varphi, \varphi \rangle \leq 1$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi, \varphi \rangle &= \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \left\langle A \frac{(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi}{\|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi\|_{\mathcal{H}}}, \frac{(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi}{\|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi\|_{\mathcal{H}}} \right\rangle \\
&\leq \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi \rangle \\
&= \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Dabei gehen in das letzte Gleichheitszeichen die Projektionsoperator-Eigenschaften der Selbstadjungiertheit und Idempotenz von $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ ein. Man erhält somit $\langle A\varphi, \varphi \rangle \leq \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)\varphi, \varphi \rangle$ für alle φ aus \mathcal{H} mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$, woraus sich mit (10.39) die gesuchte Relation $A \leq \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ ergibt.

Damit ist nun gezeigt, daß mit $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ tatsächlich das größte Element der Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ vorliegt und daß $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$ in $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ liegt. Jetzt kann AV 1.1 nachgewiesen werden.

Man wähle zwei Elemente A_1, A_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$. Dann gibt es zwei Fälle zu betrachten. Gilt $K_0(A_1) \cap K_0(A_2) = \emptyset$, dann kann man durch die Wahl $A := \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$

den Anforderungen von AV 1.1 genügen, wie das Folgende zeigt. Man erhält offensichtlich einerseits $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \geq A_1, A_2$ und andererseits

$$K_0(A) = \emptyset \supseteq \emptyset = K_0(A_1) \cap K_0(A_2).$$

Für den Fall $K_0(A_1) \cap K_0(A_2) \neq \emptyset$ möge A das größte Element der Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(K_0(A_1) \cap K_0(A_2))$ bezeichnen. Dann gilt trivialerweise $A \geq A_1, A_2$. Außerdem erhält man ob der Zugehörigkeit von A zu $\hat{\mathcal{L}}_0(K_0(A_1) \cap K_0(A_2))$ die Relation $Sp(AD) = 0$ für alle $D \in K_0(A_1) \cap K_0(A_2)$. Das heißt, es gilt die Inklusion $K_0(A_1) \cap K_0(A_2) \subseteq K_0(A)$, womit dann die Aussage AV 1.1 bewiesen ist.

zu AVid:

Wie oben gezeigt wurde, enthält jede Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $k \subseteq K$ ein größtes Element. Die Menge der größten Elemente der Mengen des Typs $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $k \subseteq K$ soll im Sinne der Definition 9.2.3 mit G bezeichnet werden. Man kann zeigen, daß G gerade mit der Menge $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ der Projektionsoperatoren auf \mathcal{H} zusammenfällt. Dabei ergibt sich aus den obigen Betrachtungen zu den größten Elementen der Mengen $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $k \subseteq K$, daß alle Elemente aus G Projektionsoperatoren sind. Es fehlt somit noch der Nachweis, daß es zu allen Projektionsoperatoren auch eine Menge des Typs $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $k \subseteq K$ gibt. Man wähle dafür einen abgeschlossenen Untervektorraum M von \mathcal{H} . Dann existiert wegen der Separabilität von \mathcal{H} eine höchstens abzählbare Orthonormalbasis $(\varphi_i)_{i \in I}$ von M , wie man etwa Korollar V.4.10 in [Wer97], Kapitel V, S. 190 entnehmen kann. Man setze für eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$:

$$D := \sum_{i \in I} \lambda_i P^{\varphi_i}.$$

Die Punkte (ii) und (iii) von Satz G.4.7 garantieren die Existenz von D und die Zugehörigkeit zu $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Offensichtlich ist der Projektionsoperator P^M gerade das größte Element von $\hat{\mathcal{L}}_0(D)$, wie sich durch Nachvollziehen der obigen Überlegungen für den Fall $k = \{D\}$ ergibt. Damit hat man das Ergebnis

$$G = \mathbb{P}(\mathcal{H})$$

erhalten, und man kann unmittelbar die Aussage AVid zeigen. Man betrachte dazu ein Element $P \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}_{\mathcal{H}}\}$. Entsprechend den gerade eben angestellten Überlegungen kann man einen Dichteoperator D , also ein Element von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$, in der Form

$$D := \sum_{i \in I} \lambda_i P^{\varphi_i}$$

angeben. Dabei beschreibt I eine höchstens abzählbare Indexmenge, mit $(\varphi_i)_{i \in I}$ wird eine Orthonormalbasis des Bildbereiches $P\mathcal{H}$ von P symbolisiert, und $(\lambda_i)_{i \in I}$ stehe für eine Familie von Zahlen des reellen Intervalls $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Für D und P ergibt sich nun

$$Sp(DP) = Sp\left(\left(\sum_{i \in I} \lambda_i P^{\varphi_i}\right) P\right) = Sp\left(\sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{P^{\varphi_i} P}_{= P^{\varphi_i}}\right) = Sp D = 1,$$

womit dann AVid bewiesen wäre.

Bevor zur nächsten AV-Aussage übergegangen wird, soll noch gezeigt werden, daß die durch (10.39) auf G induzierte Halbordnung mit derjenigen aus (G.51) zusammenfällt. Das heißt, es gilt für alle $P_1, P_2 \in G$:

$$P_1 \leq P_2 \iff P_1\mathcal{H} \subseteq P_2\mathcal{H}, \quad (10.41)$$

wobei $P_1\mathcal{H}, P_2\mathcal{H}$ die Bildbereiche von P_1 und P_2 bezeichnen.

Zum Beweis von (10.41) wähle $P_1, P_2 \in G$ mit $P_1 \leq P_2$. Also gilt gemäß (10.39) für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ die Ungleichung $\langle P_1 \varphi, \varphi \rangle \leq \langle P_2 \varphi, \varphi \rangle$. Insbesondere erhält man für alle auf 1 normierten $\varphi \in P_1\mathcal{H}$:

$$\langle P_2 \varphi, \varphi \rangle \geq \langle P_1 \varphi, \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle = 1.$$

Die vorausgesetzte Normiertheit von φ erzwingt somit $\langle P_2 \varphi, \varphi \rangle = 1$. Damit erhält man $\langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_2) \varphi, \varphi \rangle = 0$, woraus folgt, daß φ im Orthogonalraum zum Bildbereich von $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_2$ liegt. Der Orthogonalraum zum Bildbereich von $\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_2$ ist aber gerade mit $P_2\mathcal{H}$ identisch.

Für die umgekehrte Richtung wähle man zwei Projektionsoperatoren P_1, P_2 aus G mit $P_1\mathcal{H} \subseteq P_2\mathcal{H}$, das heißt, es gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$P_2 P_1 \varphi = P_1 \varphi. \quad (10.42)$$

Damit erhält man nun mit Hilfe der Idempotenz und der Selbstadjungiertheit der beteiligten Projektionsoperatoren:

$$\begin{aligned}
\|P_2 \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle P_2 \varphi, P_2 \varphi \rangle \\
&= \langle P_2 (P_1 + (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1)) \varphi, P_2 (P_1 + (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1)) \varphi \rangle \\
&= \langle P_2 P_1 \varphi, P_2 P_1 \varphi \rangle \\
&\quad + \langle P_2 (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi, P_2 (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi \rangle \\
&\quad + \langle P_2 (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi, P_2 P_1 \varphi \rangle \\
&\quad + \langle P_2 P_1 \varphi, P_2 (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi \rangle \\
&\stackrel{(10.42)}{=} \underbrace{\|P_1 \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 + \|P_2 (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2}_{\geq 0} \\
&\quad + \underbrace{\langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi, P_1 \varphi \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle P_1 \varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P_1) \varphi \rangle}_{=0} \\
&\geq \|P_1 \varphi\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann mit (10.39) die Relation $P_1 \leq P_2$, womit der Beweis von (10.41) abgeschlossen ist.

zu AV 1.2 und AV 2:

Um AV 1.2 zu zeigen, muß erst angegeben werden, was im vorliegenden Kontext unter dem Term $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$ verstanden wird. Das heißt, es muß geklärt werden, welcher Raum mit $(\Delta, \|\cdot\|)$ gemeint wird. Das klärt sich aber nicht durch Angabe der Terme $K, \hat{\mathcal{L}}$ und der Abbildung $\hat{\mu}$ alleine, sondern muß explizit gesetzt werden. Es sei hier auch nochmals auf die Anmerkungen zum Axiom AV 1.2 auf Seite 234 hingewiesen. Motiviert durch die Ergebnisse von Lemma 10.3.5 wird gesetzt:

$$(\Delta, \|\cdot\|) := (\{A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ ist selbstadjungiert}\}, \|\cdot\|_{Op}). \quad (10.43)$$

Dann folgt aus der Definition von $\hat{\mathcal{L}}$ unmittelbar:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}} &= \{A \in \mathbb{L}(\mathcal{H}) \mid A \text{ selbstadjungiert mit } \mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq A \leq \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\} \\
&= [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}.
\end{aligned}$$

Aus der Identität $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$ folgen die Aussagen AV 1.2 und AV 2 in derselben Weise, wie sie im Beweis zu Satz 9.4.1 verfolgt wurde.

zu AV 2f und AV 4s:

Zum Beweis der beiden Aussagen AV 2f und AV 4s erweist es sich als günstig, die abgeschlossenen Seiten von K bestimmen. Dazu muß analog zum Setzen

von Δ auch der Raum B_Δ gesetzt werden. Man legt motiviert durch Lemma 10.3.4 fest:

$$(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta}) := (\mathbb{S}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp}). \quad (10.44)$$

Es wird zudem angemerkt, daß die Räume aus (10.43) und (10.44) alle die Eigenschaften besitzen, die im Kapitel 8 für die Räume Δ und B_Δ erörtert wurden. Die zugehörige Untersuchung wird hier aber nicht durchgeführt.

Es sei nun eine bezüglich $\|\cdot\|_{Sp}$ abgeschlossene Seite $F \neq \emptyset$ von K gewählt. Man kann nun Überlegungen anstellen, die zu denen aus Lemma 8.3.21 analog verlaufen. Damit existiert dann ein Dichteoperator D aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$, so daß $F = F(D)$ gilt, wobei $F(D)$ den Durchschnitt aller $\|\cdot\|_{Sp}$ -abgeschlossenen Seiten von K beschreiben soll, die F umfassen. Betrachtet man eine Darstellung von D gemäß (10.37)

$$D = \sum_{\nu \in I_D} \lambda_\nu^D P^{\varphi_\nu^D} \quad (10.45)$$

und bezeichnet man mit M den Abschluß des linearen Aufspans der Menge $\{\varphi_\nu^D \mid \nu \in I_D\}$ in \mathcal{H} , dann kann man zeigen:

$$F = K_0(\mathbf{1}_\mathcal{H} - P^M). \quad (10.46)$$

Zunächst wird die Inklusion $F \subseteq K_0(\mathbf{1}_\mathcal{H} - P^M)$ nachgewiesen. Für für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt

$$D P^M \varphi = D \varphi, \quad (10.47)$$

denn jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ läßt sich mit dem Projektionstheorem, Satz G.4.4, in der Form $\varphi = \varphi_M + \varphi^\perp$ schreiben, wobei φ_M in M liegt und wobei φ^\perp zur Orthogonalmenge von M gehört. Letzteres heißt, es gilt $\langle \varphi^\perp, \psi \rangle = 0$ für alle $\psi \in M$. Damit folgt dann (10.47) für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ mit der folgenden Überlegung:

$$\begin{aligned} D P^M \varphi &= D P^M \varphi_M = D \varphi_M = D \varphi_M + \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{\langle \varphi^\perp, \varphi_i^D \rangle}_{=0} \varphi_i^D \\ &= D \varphi_M + D \varphi^\perp = D \varphi. \end{aligned}$$

Mit (10.47) erhält man $Sp(D(\mathbf{1}_\mathcal{H} - P^M)) = 0$. Mithin liegt D auch in der Menge $K_0(\mathbf{1}_\mathcal{H} - P^M)$. Da auch $K_0(\mathbf{1}_\mathcal{H} - P^M)$ eine abgeschlossene Seite von K ist, erhält man die gesuchte Inklusion:

$$F = F(D) \subseteq K_0(\mathbf{1}_\mathcal{H} - P^M).$$

Um die Mengeninklusion auch in der anderen Richtung zu beweisen, wird die folgende Aussage zur Verfügung gestellt:

$$\forall \psi \in M \text{ mit } \|\psi\|_\mathcal{H} = 1 : P^\psi \in F. \quad (10.48)$$

Dafür benötigt man zwei Beobachtungen.

1.) Aufgrund der Abgeschlossenheit von F gegenüber konvexen Entmischungen, einer Seiteneigenschaft entsprechend Definition 8.3.7, erhält man aus (10.45) die Zugehörigkeit von $P^{\varphi_j^D}$ zu F für jedes $j \in I_D$, denn für alle $j \in I_D$ kann man D als Konvexkombination schreiben:

$$\begin{aligned} D &= \lambda_j P^{\varphi_j^D} + \sum_{i \in I_D \setminus \{j\}} \lambda_i^D P^{\varphi_i^D} \\ &= \lambda_j P^{\varphi_j^D} + \alpha \sum_{i \in I_D \setminus \{j\}} \frac{\lambda_i^D}{\alpha} P^{\varphi_i^D}. \end{aligned}$$

Dabei sei $\alpha := \sum_{i \in I_D \setminus \{j\}} \lambda_i^D$ gesetzt.

2.) Wegen der Konvexität der Seite F folgt mit 1.), daß auch der Operator $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P^{\varphi_{\nu_j}^D}$ für eine beliebige Teilfamilie $(\varphi_{\nu_j})_{j=1}^n$ von Mitgliedern der Familie $(\varphi_j^D)_{j \in I_D}$ in der Seite F liegt. Da für ein beliebiges anderes vollständiges Orthonormalsystem $(\psi_j)_{j=1}^n$ des von $(\varphi_{\nu_j})_{j=1}^n$ aufgespannten Untervektorraumes von \mathcal{H} die Identität

$$\sum_{j=1}^n P^{\varphi_{\nu_j}^D} = \sum_{j=1}^n P^{\psi_j}$$

gilt, wie sich durch unmittelbares Ausrechnen und Verwendung des Satzes über die Orthogonalprojektion ergibt, folgt aus der Zugehörigkeit von $\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n P^{\varphi_{\nu_j}^D}$

zu F mit Hilfe der Seiteneigenschaften von F die Zugehörigkeit aller P^{ψ_j} mit $j \in \{1, \dots, n\}$. Also liegt auch der Projektionsoperator P^ψ bezüglich einer beliebigen Linearkombination ψ von Elementen der Menge $\{\varphi_{\nu_j} \mid j = 1, \dots, n\}$ mit $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$ in der Seite F , denn ψ kann als Teil eines vollständigen Orthonormalsystems des linearen Aufspansns von $\{\varphi_{\nu_j} \mid j = 1, \dots, n\}$ aufgefaßt werden.

Damit kann zum Beweis der Aussage (10.48) zurückgekehrt werden. Man wähle dafür $\psi \in M$ mit $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$, dann läßt sich ψ ob der Definition von M als $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ -Grenzwert einer Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher Linearkombinationen von Elementen der Menge $\{\varphi_j^D \mid j \in I_D\}$ auffassen. Wegen $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$ kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen werden, daß die Folgenglieder allesamt auf 1 normiert sind. Mit Hilfe des obigen Punktes 2.) liegt für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Projektionsoperator P^{ψ_n} in $F(D)$. Also bedarf es zum Beweis von (10.48) aufgrund der $\|\cdot\|_{S_p}$ -Abgeschlossenheit von F lediglich noch des Nachweises, daß die Folge $(P^{\psi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{S_p}$ gegen P^ψ konvergiert.

Dazu stelle man zunächst für ein beliebiges $\varphi \in \mathcal{H}$ die folgende Überlegung an:

$$\begin{aligned} \langle (P^{\psi_n} - P^\psi)\varphi, \varphi \rangle &= \langle \varphi, \psi_n \rangle \langle \psi_n, \varphi \rangle - \langle \varphi, \psi \rangle \langle \psi, \varphi \rangle \\ &= |\langle \varphi, \psi_n \rangle|^2 - |\langle \varphi, \psi \rangle|^2. \end{aligned}$$

Da $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ gegen ψ konvergiert und da das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ komponentenweise stetig auf $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ ist, erhält man somit:

$$\langle (P^{\psi_n} - P^\psi)\varphi, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Es gilt nun aber bei Verwendung des Betragsoperators $|P^{\psi_n} - P^\psi|$:

$$\begin{aligned} \langle (P^{\psi_n} - P^\psi)\varphi, \varphi \rangle &= \langle |P^{\psi_n} - P^\psi| \varphi, |P^{\psi_n} - P^\psi| \varphi \rangle \\ &= \| |P^{\psi_n} - P^\psi| \varphi \|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Also konvergiert $|P^{\psi_n} - P^\psi| \varphi$ gegen 0 für alle $\varphi \in \mathcal{H}$, und somit konvergiert insbesondere $\|P^{\psi_n} - P^\psi\|_{Sp} = Sp |P^{\psi_n} - P^\psi|$ gegen 0 , so daß $(P^{\psi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{Sp}$ gegen P^ψ konvergiert. Damit wäre die Aussage (10.48) bewiesen, mit deren Hilfe man jetzt den Nachweis der Mengeninklusion $K_0(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M) \subseteq F$ führen kann.

Dafür sei ein D' aus $K_0(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M)$ gewählt. Für D' gehe man wiederum von einer Darstellung in der Form (10.37) aus:

$$D' = \sum_{i \in I_{D'}} \lambda_i^{D'} P^{\varphi_i^{D'}}. \quad (10.49)$$

Da $D' \varphi = 0$ für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt, das orthogonal zu allen Elementen der Menge $\{\varphi_i^{D'} \mid i \in I_{D'}\}$ steht, ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} 1 &= Sp(D') = Sp(D' P^M) = \sum_{i \in I_{D'}} \langle P^M \varphi_i^{D'}, D' \varphi_i^{D'} \rangle \\ &= \sum_{i \in I_{D'}} \lambda_i^{D'} \langle P^M \varphi_i^{D'}, \varphi_i^{D'} \rangle = \sum_{i \in I_{D'}} \lambda_i^{D'} \|P^M \varphi_i^{D'}\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Da $\|P^M \varphi_i^{D'}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 1$ für jedes $i \in I_{D'}$ gelten muß und da nach Voraussetzung $\sum_{i \in I_{D'}} \lambda_i^{D'} = 1$ gilt, ergibt sich somit $\|P^M \varphi_i^{D'}\|_{\mathcal{H}} = 1$ für jedes $i \in I_{D'}$. Das

bedeutet aber gerade $\varphi_i^{D'} \in M$ für jedes $i \in I_{D'}$. Mit (10.48) und (10.49) stellt sich D' offenbar als reelle σ -Konvexkombination von Elementen aus F dar. Da F aber reell σ -konvex ist, wie sich analog zum Beweis von Lemma 8.3.20

ergibt, gehört D' zu F . Damit ist dann der Beweis der Darstellungsaussage (10.46) von F gelungen.

Damit steht eine geeignete Aussage zur Verfügung, um AV 2f und AV 4s zu zeigen. AV 2f folgt unmittelbar mit den folgenden Überlegungen. (10.46) zeigt, daß jede abgeschlossene Seite von K eine exponierte Seite von K ist, denn Mengen der Form $K_0(N)$ mit $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ sind exponierte Seiten von K , wie sich mit einem zum Beweis von Lemma 8.3.15 analogen Vorgehen nachweisen läßt. Also gilt insbesondere auch AV 2f.

Bezüglich AV 4s bezeichne F eine exponierte Seite von K . Den obigen Überlegungen folgend, existiert ein $D \in \mathbb{D}(\mathcal{H})$ mit $F = F(D)$. Gemäß (10.37) kann man D darstellen. Es wird im weiteren nur der Fall betrachtet, daß I_D abzählbar ist. Da die Konvergenz der Reihe aus (10.37) unbedingst ist, kann man sich für eine Reihenfolge der Glieder entscheiden und schreiben:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^D P^{\varphi_i^D}. \quad (10.50)$$

Bezeichnet man mit M den Abschluß des linearen Aufspans von $\{\varphi_i^D \mid i \in \mathbb{N}\}$ in \mathcal{H} , dann ergibt sich mit (10.46):

$$F = F(D) = K_0(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M) = K_1(P^M). \quad (10.51)$$

Es gilt aber auch $P^M = \sum_{i=1}^{\infty} P^{\varphi_i^D}$ im Sinne einer punktweisen und unbedingten Konvergenz. Man siehe dafür etwa Satz V.4.8 (b) in [Wer97], Kapitel V, S. 187. Setzt man nun für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$E_n := \sum_{i=1}^n P^{\varphi_i^D},$$

dann bezeichnet $K_1(E_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endlichdimensionale exponierte Seite von K . Die Endlichdimensionalität der $K_1(E_n)$ erschließt sich dabei folgendermaßen. Offensichtlich liegen für ein $n \in \mathbb{N}$ die Projektionsoperatoren $\{P^{\varphi_i^D} \mid i = 1, \dots, n\}$ in $K_1(E_n)$, so daß die Dimension mindestens n beträgt, denn $(\varphi_i^D)_{i=1}^n$ ist ein Orthonormalsystem. Wäre nun aber die Dimension echt größer als n , dann müßte es ein auf 1 normiertes Element $\varphi \in \mathcal{H}$ geben, das orthogonal zu allen Elementen aus $(\varphi_i^D)_{i=1}^n$ stünde, so daß P^φ in $K_1(E_n)$ läge. Die Zugehörigkeit zu $K_1(E_n)$ bedeutete:

$$1 = Sp(E_n P^\varphi) = \sum_{i=1}^n Sp(P^{\varphi_i^D} P^\varphi) = \sum_{i=1}^n |\langle \varphi, \varphi_i^D \rangle|^2. \quad (10.52)$$

Da aber $\langle \varphi, \varphi_i^D \rangle = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gälte, erhielte man die Identität $\sum_{i=1}^n |\langle \varphi, \varphi_i^D \rangle|^2 = 0$, womit ein Widerspruch zu (10.52) vorläge. Also gilt $\dim K_1(E_n) = n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Der Beweis von AV 4s schließt nun damit, daß man zeigt, daß die Familie $(K_1(E_n))_{n \in \mathbb{N}}$ endlichdimensionaler exponierter Seiten von K auch die gewünschte Eigenschaft hat. Dafür kann man ausnutzen, daß sich mit Formel (G.49) aus Satz G.4.3 und Formel (G.53) aus Satz G.4.5 ergibt:

$$P^M = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} P^{\varphi_i^D}. \quad (10.53)$$

Damit gilt weiter:

$$F = K_1(P^M) = K_1\left(\bigvee_{i \in \mathbb{N}} P^{\varphi_i^D}\right) = \bigvee_{i \in \mathbb{N}} K_1(P^{\varphi_i^D}).$$

Dabei folgt das letzte Gleichheitszeichen mit Lemma 9.5.8, das sich in entsprechender Weise für die oben gewählten Mengen $K, \hat{\mathcal{L}}$ und die Abbildung $\hat{\mu}$ beweisen läßt, da die notwendigen AV-Aussagen bereits weiter oben nachgewiesen wurden.

zu AV 3:

Es ist das Ziel, die Relation aus Satz (9.6.15) (ii) zu beweisen. Das heißt, es soll gezeigt werden, daß für alle Elemente E_1, E_2, E_3 aus G mit $E_1, E_3 \neq \mathbf{0}_{\mathcal{H}}$, $E_2 \leq E_3$, $E_1 \vee E_2 = E_1 \vee E_3$ und $\Delta(E_1, E_3) \neq 0$ die Identität $E_2 = E_3$ gilt.

Dabei ist $\Delta(E_1, E_3)$ durch die Definition 9.6.12 festgelegt:

$$\Delta(E_1, E_3) = \max \left\{ \inf_{D \in K_1(E_1)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)), \quad \inf_{D \in K_1(E_3)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_1)) \right\}.$$

Man wähle also drei Projektionsoperatoren E_1, E_2, E_3 aus $\mathbb{P}(\mathcal{H}) (= G)$ mit obigen Eigenschaften. Die zugehörigen Untervektorräume von \mathcal{H} , auf die die Projektionsoperatoren abbilden, sind durch $E_i \mathcal{H}$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben. Aus der Aussage $\Delta(E_1, E_3) \neq 0$ ergibt sich, daß der Projektionsoperator $E_1 \vee E_3$ auf die Menge

$$\{\chi + \eta \mid \chi, \eta \in \mathcal{H} \text{ mit } E_1 \chi = \chi, E_3 \eta = \eta\} \quad (10.54)$$

projiziert. Um das zu zeigen, wird als erstes nachgewiesen, daß die Menge aus (10.54) ein $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ -abgeschlossener Untervektorraum von \mathcal{H} ist. Dabei liegt die Untervektorraumeigenschaft auf der Hand. Zum Nachweis der Abgeschlossenheit bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ wähle man eine Folge $(\chi_n + \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus der Menge

aus (10.54), die bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ gegen ein Element $\varphi \in \mathcal{H}$ konvergiert. Die Voraussetzung $\Delta(E_1, E_3) \neq 0$ bedeutet, daß entweder

$$\inf_{D \in K_1(E_1)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) \neq 0$$

oder

$$\inf_{D \in K_1(E_3)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_1)) \neq 0$$

gilt. Die beiden Aussagen können in eine etwas geeignetere Form überführt werden. Es wird zunächst der Term $\inf_{D \in K_1(E_1)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3))$ betrachtet.

Wählt man ein $D \in K_1(E_1)$ und verwendet man eine Darstellung für D in der Form von (10.37), dann ergibt sich aus der Zugehörigkeit von D zu $K_1(E_1)$:

$$1 = Sp(DE_1) = \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D Sp(P^{\varphi_i^D} E_1).$$

Da die Familie $(\lambda_i^D)_{i \in I_D}$ ausschließlich echt positive reelle Zahlen umfaßt und da $\sum_{i \in I_D} \lambda_i^D = 1$ gilt, ergibt sich somit $Sp(P^{\varphi_i^D} E_1) = 1$ für alle $i \in I_D$. Also läßt sich jedes Element aus $K_1(E_1)$ als (σ -)Konvexkombination von Projektionsoperatoren auf eindimensionale Untervektorräume von \mathcal{H} darstellen, die paarweise orthogonal sind und die zum anderen auch Elemente von $K_1(E_1)$ sind. Damit ergibt sich nun

$$\inf_{D \in K_1(E_1)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) = \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} Sp(P^\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)), \quad (10.55)$$

denn einerseits handelt es sich bei $\{P^\varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1 \text{ und } P^\varphi \in K_1(E_1)\}$ um eine Teilmenge von $K_1(E_1)$ und andererseits gilt für jedes $D \in K_1(E_1)$:

$$\begin{aligned} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) &= \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D Sp(P^{\varphi_i^D}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) \\ &\geq \underbrace{\left(\sum_{i \in I_D} \lambda_i^D \right)}_{=1} \left(\inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} Sp(P^\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) \right) \\ &= \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} Sp(P^\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)). \end{aligned}$$

Im weiteren gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$:

$$\begin{aligned}
 P^\varphi \in K_1(E_1) &\iff Sp(P^\varphi E_1) = 1 \\
 &\iff \langle E_1 \varphi, \varphi \rangle = 1 \\
 &\iff \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_1) \varphi, \varphi \rangle = 0 \\
 &\iff \varphi \in ((\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_1)\mathcal{H})^\perp = E_1\mathcal{H} \\
 &\iff E_1\varphi = \varphi.
 \end{aligned}$$

Also ergibt sich mit (10.55) :

$$\begin{aligned}
 \inf_{D \in K_1(E_1)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) &= \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} Sp(P^\varphi(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)) \\
 &= \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \underbrace{\langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi, \varphi \rangle}_{= \langle (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi, (\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi \rangle} \\
 &= \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2.
 \end{aligned}$$

Da offensichtlich

$$\inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \neq 0 \iff \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi\|_{\mathcal{H}} \neq 0$$

gilt und da man für den Ausdruck $\inf_{D \in K_1(E_3)} Sp(D(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_1)) \neq 0$ in völlig analoger Weise vorgehen kann, bedeutet die Voraussetzung $\Delta(E_1, E_3) \neq 0$, daß entweder

$$\delta_1 := \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3) \varphi\|_{\mathcal{H}} \neq 0 \quad (10.56)$$

oder

$$\delta_2 := \inf_{\substack{P^\varphi \in K_1(E_1) \\ \varphi \in \mathcal{H}, \|\varphi\|_{\mathcal{H}}=1}} \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_1) \varphi\|_{\mathcal{H}} \neq 0 \quad (10.57)$$

gilt. Man kann mit der so gewonnenen alternativen Form für die Aussage $\Delta(E_1, E_3) \neq 0$ zeigen, daß sich aus der Gültigkeit einer der beiden Relationen

(10.56) oder (10.57) die Konvergenz der beiden Folgen $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt.

Dafür gehe man zunächst von $\delta_1 \neq 0$ aus, um dann zu zeigen, daß es sich bei $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um eine Cauchy-Folge handelt. Aus der Konvergenz der Folge $(\chi_n + \eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhält man die folgende Cauchy-Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0(\varepsilon) \forall n, m \geq N_0(\varepsilon) : \|\chi_n + \eta_n - \chi_m - \eta_m\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon. \quad (10.58)$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gewählt. Man betrachte nun $n, m \geq N_0(\varepsilon \delta_1)$, wobei $N_0(\varepsilon \delta_1)$ entsprechend (10.58) gewonnen sei. Mit der Bezeichnung

$$\rho_{nm} := \frac{\eta_n - \eta_m}{\|\eta_n - \eta_m\|_{\mathcal{H}}}$$

gilt $P^{\rho_{nm}} \leq E_3$, wenn man (10.41) verwendet und wenn man bedenkt, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Relation $E_3 \eta_n = \eta_n$ gilt. Bedenkt man zudem, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ die Relation $E_1 \chi_n = \chi_n$ gilt, erhält man:

$$\begin{aligned} \delta_1 \|\chi_n - \chi_m\|_{\mathcal{H}} &\leq \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - E_3)(\chi_n - \chi_m)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^{\rho_{nm}})(\chi_n - \chi_m)\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \left(\|(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^{\rho_{nm}})(\chi_n - \chi_m)\|_{\mathcal{H}}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|P^{\rho_{nm}}(\chi_n - \chi_m) + (\eta_n - \eta_m)\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\chi_n - \chi_m + \eta_n - \eta_m\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \varepsilon \delta_1. \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich das Gleichheitszeichen an vorletzter Stelle der obigen Ungleichungskette aus der Tatsache, daß die Vektoren $(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^{\rho_{nm}})(\chi_n - \chi_m)$ und $P^{\rho_{nm}}(\chi_n - \chi_m) + (\eta_n - \eta_m)$ orthogonal zueinander sind.

Da nun $\delta_1 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, folgt $\|\chi_n - \chi_m\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon$. Somit ist die Cauchy-Eigenschaft der Folge $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nachgewiesen, woraus sich aufgrund der Vollständigkeit von \mathcal{H} ihre Konvergenz gegen einen Grenzwert ergibt, der χ heißen möge. Aus der Konvergenz von $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen χ ergibt sich die Konvergenz $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\varphi - \chi$, denn es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\eta_n - (\varphi - \chi)\|_{\mathcal{H}} \leq \|\eta_n + \chi_n - \varphi\|_{\mathcal{H}} + \|\chi_n - \chi\|_{\mathcal{H}}.$$

Setzt man also (10.56) voraus, dann ergibt sich die Konvergenz der beiden Folgen $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Durch eine völlig analoge Argumentation erhält

man dasselbe Ergebnis auch bei Gültigkeit von (10.57). Damit kann nun der Beweis der $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ -Abgeschlossenheit der Menge aus (10.54) beendet werden. Denn konvergieren die Folgen $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen die Grenzwerte χ und η , dann folgt aus der Stetigkeit der Operatoren E_1 und E_3 insbesondere $E_1\chi = \chi$ und $E_3\eta = \eta$. Also gehört $\varphi = \chi + \eta$ zur Menge aus (10.54), womit dann auch ihre $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ -Abgeschlossenheit folgt.

Mit Hilfe der $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ -Abgeschlossenheit kann nun auch die angestrebte Aussage gezeigt werden, daß die Menge aus (10.54) mit dem Bildbereich $(E_1 \vee E_3) \mathcal{H}$ zusammenfällt, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
 & \{\chi + \eta \mid \chi, \eta \in \mathcal{H} \text{ mit } E_1\chi = \chi, E_3\eta = \eta\} \\
 &= \{\chi \in \mathcal{H} \mid E_1\chi = \chi\} + \{\eta \in \mathcal{H} \mid E_3\eta = \eta\} \\
 &= E_1\mathcal{H} + E_3\mathcal{H} \\
 &= \overline{E_1\mathcal{H} + E_3\mathcal{H}}^{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} \\
 &\stackrel{(G.49)}{=} (E_1 \vee E_3)\mathcal{H}. \tag{10.59}
 \end{aligned}$$

Die bisher gezeigten AV-Aussagen garantieren die Gültigkeit der Aussagen des Lemmas 9.6.13. Da nach Voraussetzung $E_2 \leq E_3$ gilt, ergibt sich daher mit Punkt (iii) von Lemma 9.6.13:

$$\Delta(E_1, E_2) \geq \Delta(E_1, E_3) \neq 0.$$

In völlig analoger Weise zu den obigen Erörterungen für den Bildbereich von $E_1 \vee E_3$ erhält man:

$$(E_1 \vee E_2)\mathcal{H} = \{\tau + \rho \mid \tau, \rho \in \mathcal{H} \text{ mit } E_1\tau = \tau, E_2\rho = \rho\}. \tag{10.60}$$

Damit kann jetzt der Beweis von AV 3 durch Zeigen der Relation $E_2 = E_3$ abgeschlossen werden. Da bereits nach Voraussetzung $E_2 \leq E_3$ gilt, bedarf es also noch des Nachweises der Relation $E_2 \geq E_3$. Wegen (10.41) reicht es, zu zeigen, daß $E_2\varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in E_3\mathcal{H}$ gilt. Man wähle daher ein Element φ aus $E_3\mathcal{H}$. Dann gehört $\varphi + 0$ ob der Identität (10.59) offenbar zu $(E_1 \vee E_3)\mathcal{H}$. Wegen der vorausgesetzten Identität $E_1 \vee E_3 = E_1 \vee E_2$ gehört φ auch zu $(E_1 \vee E_2)\mathcal{H}$, so daß es wegen (10.60) Elemente $\tau, \rho \in \mathcal{H}$ mit $E_1\tau = \tau$, $E_2\rho = \rho$ und $\varphi = \tau + \rho$ gibt. Vermittels $E_2 \leq E_3$ folgt mit (10.41) aus $E_2\rho = \rho$ auch $E_3\rho = \rho$. Man erhält so:

$$E_3\tau = E_3(\varphi - \rho) = E_3\varphi - E_3\rho = \varphi - \rho = \tau.$$

Also gehört τ sowohl zum Bildbereich von E_1 als auch zum Bildbereich von E_3 , woraus sich mit (G.48) die Zugehörigkeit von τ zum Bildbereich von $E_1 \wedge E_3$ ergibt. Da aber wegen $\Delta(E_1, E_3) \neq 0$ mittels Lemma 9.6.13 (iii) auch $E_1 \wedge E_3 = \mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ gilt, erhält man also $\tau = 0$. Mithin gilt

$$E_2 \varphi = E_2 \rho = \rho = \varphi,$$

und AV 3 ist bewiesen. ■

Im Anschluß an die bisherigen allgemeinen Untersuchungen zur Darstellung der zentralen Bausteine der Theorie durch Strukturen auf einem Hilbertraum, soll nun zum Abschluß des Kapitels erörtert werden, wie sich der zentrale Begriff der Koexistenz von Effektpaaren im Verhältnis zu den Hilbertraumstrukturen darstellt.

10.5 Die Koexistenz von Effektpaaren im Kontext des Hilbertraumes

Bekannterweise spielt die Vertauschbarkeit von Operatoren in der Hilbertraum-Darstellung der Quantenmechanik eine besondere Rolle. Es wird nun dargelegt, daß im Zusammenhang mit der Koexistenz von Entscheidungseffektpaaren derartige Vertauschbarkeiten von Operatoren auftreten.

Man kann den folgenden Satz beweisen, der einen Teil von [Lud83b], Kapitel IV, §1.3, S. 91 darstellt:

Satz 10.5.1 *Sei y ein Element aus $\hat{\mathcal{L}}$, und liege e in G , dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *(y, e) bildet ein Paar koexistenter Effekte.*
- (ii) *Die Operatoren $\chi(y)$ und $\sigma(e)$ kommutieren im Sinne beschränkter Operatoren, das heißt, auf ganz \mathcal{H} gilt die folgende Operatoridentität:*

$$\chi(x) \sigma(e) = \sigma(e) \chi(x).$$

Beweis:

Mit Lemma E.8.2 ist Punkt (i) äquivalent zur folgenden Aussage:

$$\begin{aligned} &\text{Es existiert genau ein Paar von Elementen } y_1, y_3 \in \hat{\mathcal{L}}, \\ &\text{so daß gilt: } y_1 \leq e^\perp, y_3 \leq e \text{ und } y = y_1 + y_3. \end{aligned} \tag{10.61}$$

Daher reicht es aus, die Äquivalenz von (10.61) und von obigem Punkt (ii) nachzuweisen. Zunächst wird daran erinnert, daß für zwei Elemente y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ mit Satz 10.3.6 und Definition 8.4.1 gilt:

$$y_1 \leq y_2 \iff [\forall x \in K : Sp(\rho(x)\sigma(y_1)) \leq Sp(\rho(x)\sigma(y_2))].$$

Die Überlegungen, die zur Formel (10.41) geführt haben, gelten auch im vorliegenden Zusammenhang, so daß gilt:

$$y_1 \leq y_2 \iff [\forall \varphi \in \mathcal{H} \text{ mit } \|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1 : \langle \chi(y_1)\varphi, \varphi \rangle \leq \langle \chi(y_2)\varphi, \varphi \rangle]. \quad (10.62)$$

Zum Beweis des Satzes wähle man jetzt ein $y \in \hat{\mathcal{L}}$ und ein $e \in G$.

Gilt nun (10.61) für y und e , dann folgt wegen $y_1 \leq e^\perp$ mit (10.62) für alle $\varphi \in \sigma(e)\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle \chi(y_1)\varphi, \varphi \rangle &\leq \langle \sigma(e^\perp)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle (\mathbf{1} - \sigma(e))\varphi, \varphi \rangle \\ &= \underbrace{\langle \varphi - \sigma(e)\varphi, \varphi \rangle}_{= 0} = 0. \end{aligned}$$

Man bedenke für die nächsten Überlegungen, daß $\sigma(e)\mathcal{H}$ der Projektionsraum von $\sigma(e)$ ist und daß somit $\sigma(e)\mathcal{H}$ insbesondere abgeschlossener Untervektorraum von \mathcal{H} ist. Also ist auch $\sigma(e)\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Da auch die Restriktion von $\chi(y_1)$ auf den Hilbertraum $\sigma(e)\mathcal{H}$ die Eigenschaft der Selbstadjungiertheit besitzt, folgt mit Korollar V.5.8 in [Wer97], Kapitel V, S. 195, daß $\chi(y_1)\varphi = 0$ für alle $\varphi \in \sigma(e)\mathcal{H}$ gilt. Somit ergibt sich für alle $\varphi \in \mathcal{H}$:

$$\chi(y_1)\varphi = \chi(y_1)(\sigma(e) + \sigma(e^\perp))\varphi = \chi(y_1)\sigma(e^\perp)\varphi.$$

Es gilt also die folgende Operatoridentität auf ganz \mathcal{H} :

$$\chi(y_1) = \chi(y_1)\sigma(e^\perp).$$

Da $\chi(y_1)$ aber auch selbstadjungiert ist, erhält man außerdem

$$\chi(y_1) = (\chi(y_1))^\dagger = (\chi(y_1)\sigma(e^\perp))^\dagger = \sigma(e^\perp)\chi(y_1),$$

so daß zusammenfassend gilt:

$$\chi(y_1) = \chi(y_1)\sigma(e^\perp) = \sigma(e^\perp)\chi(y_1). \quad (10.63)$$

In analoger Weise erhält man auch die auf ganz \mathcal{H} geltende Operatoridentität:

$$\chi(y_3) = \chi(y_3)\sigma(e) = \sigma(e)\chi(y_3). \quad (10.64)$$

Mit (10.63) und (10.64) ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
 \chi(y) \sigma(e) - \sigma(e) \chi(y) &= (\chi(y_1) + \chi(y_3)) \sigma(e) - \sigma(e) (\chi(y_1) + \chi(y_3)) \\
 &= \chi(y_1) \sigma(e) + \chi(y_3) \sigma(e) - \sigma(e) \chi(y_1) - \sigma(e) \chi(y_3) \\
 &= \underbrace{\chi(y_1) \sigma(e^\perp) \sigma(e)}_{= \mathbf{0}_{\mathcal{H}}} + \chi(y_3) - \underbrace{\sigma(e) \sigma(e^\perp) \chi(y_1)}_{= \mathbf{0}_{\mathcal{H}}} - \chi(y_3) \\
 &= \mathbf{0}_{\mathcal{H}}.
 \end{aligned}$$

Also gilt Punkt (ii).

Möge nun umgekehrt Punkt (ii) für $y \in \hat{\mathcal{L}}$ und $e \in G$ eintreten. Es wird gesetzt:

$$\begin{aligned}
 A_1 &:= \sigma(e^\perp) \chi(y) \sigma(e^\perp), \\
 A_3 &:= \sigma(e) \chi(y) \sigma(e).
 \end{aligned}$$

Es wird nun gezeigt, daß A_1 und A_3 der Menge $\chi(\hat{\mathcal{L}})$ zugehören und daß die Urbilder von A_1 und A_3 bezüglich χ der Aussage (10.61) genügen.

Stetigkeit und Beschränktheit von A_3 sind trivial. Die Selbstadjungiertheit ergibt sich direkt aus der Definition von A_3 aufgrund der Selbstadjungiertheit von $\chi(y)$ und $\sigma(e)$. Man wähle schließlich ein $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$, dann ergibt sich wiederum mit der Selbstadjungiertheit von $\sigma(e)$:

$$\langle A_3 \varphi, \varphi \rangle = \langle \sigma(e) \chi(y) \sigma(e) \varphi, \varphi \rangle = \langle \chi(y) \sigma(e) \varphi, \sigma(e) \varphi \rangle. \quad (10.65)$$

Falls $\sigma(e) \varphi = 0$ gilt, erhält man mit (10.65):

$$0 = \langle A_3 \varphi, \varphi \rangle \leq 1.$$

Für den Fall $\sigma(e) \varphi \neq 0$ ergibt sich:

$$\langle A_3 \varphi, \varphi \rangle = \|\sigma(e) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \left\langle \chi(y) \frac{\sigma(e) \varphi}{\|\sigma(e) \varphi\|_{\mathcal{H}}}, \frac{\sigma(e) \varphi}{\|\sigma(e) \varphi\|_{\mathcal{H}}} \right\rangle.$$

Da $0 \leq \langle \chi(y) \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle \leq 1$ für alle $\bar{\varphi} \in \mathcal{H}$ mit $\|\bar{\varphi}\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt, erhält man somit ebenfalls:

$$0 \leq \langle A_3 \varphi, \varphi \rangle \leq 1.$$

Völlig analoge Betrachtungen können für A_1 vorgenommen werden, so daß sich A_1 und A_3 als Elemente der Menge $\chi(\hat{\mathcal{L}})$ auffassen lassen. Die den Operatoren A_1 und A_3 bezüglich χ zugehörigen Urbilder mögen y_1 und y_3 heißen. Es bleibt zu zeigen, daß y_1 und y_3 die Eigenschaften aus (10.61) haben.

Zunächst gilt für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$:

$$\begin{aligned} \langle \chi(y_1) \varphi, \varphi \rangle &= \langle A_1 \varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle \sigma(e^\perp) \chi(y) \sigma(e^\perp) \varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle \chi(y) \sigma(e^\perp) \varphi, \sigma(e^\perp) \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Gilt nun $\sigma(e^\perp) \varphi = 0$, erhält man unmittelbar:

$$\langle \chi(y_1) \varphi, \varphi \rangle = 0 = \langle \sigma(e^\perp) \varphi, \varphi \rangle.$$

Da $0 \leq \langle \chi(y) \bar{\varphi}, \bar{\varphi} \rangle \leq 1$ für alle $\bar{\varphi} \in \mathcal{H}$ mit $\|\bar{\varphi}\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt, erhält man im Falle $\sigma(e^\perp) \varphi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \langle \chi(y_1) \varphi, \varphi \rangle &= \|\sigma(e^\perp) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \langle \chi(y) \frac{\sigma(e^\perp) \varphi}{\|\sigma(e^\perp) \varphi\|_{\mathcal{H}}}, \frac{\sigma(e^\perp) \varphi}{\|\sigma(e^\perp) \varphi\|_{\mathcal{H}}} \rangle \\ &\leq \|\sigma(e^\perp) \varphi\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \langle \sigma(e^\perp) \varphi, \sigma(e^\perp) \varphi \rangle \\ &= \langle \sigma(e^\perp) \varphi, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Also gilt $\langle \chi(y_1) \varphi, \varphi \rangle \leq \langle \sigma(e^\perp) \varphi, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$, woraus sich mit (10.62) die Ungleichung $y_1 \leq e^\perp$ ergibt.

Auf analogem Wege erhält man auch die Ungleichung $y_3 \leq e$, so daß noch die Identität $y = y_1 + y_3$ nachzuweisen bleibt. Diesbezüglich gilt unter Verwendung des vorausgesetzten Punktes (ii):

$$\begin{aligned} \chi(y_1 + y_3) &= \chi(y_1) + \chi(y_3) = A_1 + A_3 \\ &= \sigma(e) \chi(y) \sigma(e) + \sigma(e^\perp) \chi(y) \sigma(e^\perp) \\ &= \chi(y) (\sigma(e))^2 + (\mathbf{1} - \sigma(e)) \chi(y) (\mathbf{1} - \sigma(e)) \\ &= \chi(y) \sigma(e) + \chi(y) (\mathbf{1} - \sigma(e)) - \sigma(e) \chi(y) (\mathbf{1} - \sigma(e)) \\ &= \chi(y) - \sigma(e) \chi(y) + \sigma(e) \chi(y) \sigma(e) \\ &= \chi(y) - \sigma(e) \chi(y) + \chi(y) (\sigma(e))^2 \\ &= \chi(y). \end{aligned}$$

Also folgt mit Hilfe der Bijektivität von χ auch die gesuchte Identität von y und $y_1 + y_3$. ■

Mit obigem Satz folgt insbesondere für die Entscheidungseffekte:

Lemma 10.5.2 *Ein Paar (e_1, e_2) von Elementen aus G bildet genau dann ein ko-existentes Paar von Entscheidungseffekten, wenn auf ganz \mathcal{H} gilt:*

$$\sigma(e_1) \sigma(e_2) = \sigma(e_2) \sigma(e_1).$$

Es muß betont werden, daß sich Satz 10.5.1 nicht auf beliebige Effekte ausweiten läßt. Zwar impliziert die Vertauschbarkeit der den Effekten zugehörigen Operatoren auch, daß sie miteinander koexistieren, aber im allgemeinen gilt nicht die Umkehrung. In Anlehnung einiger Überlegungen, die Ludwig in [Lud85a], Kapitel VIII, §4.3, S. 222 anstellt, kann man lediglich notieren:

Lemma 10.5.3 *Seien y_1, y_2 Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$. Gilt auf ganz \mathcal{H} die Identität*

$$\chi(y_1)\chi(y_2) = \chi(y_2)\chi(y_1),$$

dann bildet (y_1, y_2) ein Paar koexistenter Effekte.

Beweis:

Gelte für zwei Elemente y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ auf ganz \mathcal{H} die Operator-Identität $\chi(y_1)\chi(y_2) = \chi(y_2)\chi(y_1)$. Es ist jetzt das Ziel, Satz E.8.1 zum Nachweis der Koexistenz anzuwenden. Dafür werden zunächst drei Elemente y'_1, y'_2 und y_{12} wohldefiniert. Im Anschluß daran werden dann die notwendigen Eigenschaften nachgewiesen, um vermittels Satz E.8.1 auf die Koexistenz des Paares (y_1, y_2) zu schließen.

Als erstes wird nachgewiesen, daß $\chi(y_1)\chi(y_2)$ in $\chi(\hat{\mathcal{L}})$ liegt. Linearität und Stetigkeit von $\chi(y_1)\chi(y_2)$ sind offensichtlich, und die Selbstadjungiertheit folgt direkt aus der Selbstadjungiertheit von $\chi(y_1)$ und $\chi(y_2)$ und der vorausgesetzten Vertauschbarkeit.

Mit Satz 29.8 in [Heu92], Kapitel V, S. 198 folgt für beliebige selbstadjungierte Operatoren $A, B, C \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$ die Relation $AC \leq BC$, wenn $A \leq B$, $C \geq \mathbf{0}_{\mathcal{H}}$, $AC = CA$ und $BC = CB$ gilt.

Aus $\mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq \chi(y_1)$, $\mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq \chi(y_2)$ und der offensichtlichen Vertauschbarkeit von $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ mit $\chi(y_1)$ und $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ mit $\chi(y_2)$ folgt somit $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}\chi(y_2) \leq \chi(y_1)\chi(y_2)$. Ebenso ergibt sich aus $\chi(y_1) \leq \mathbf{1}$, $\chi(y_2) \geq \mathbf{0}_{\mathcal{H}}$, der Vertauschbarkeit von $\chi(y_1)$ mit $\chi(y_2)$ und der offensichtlichen Vertauschbarkeit von $\mathbf{1}$ mit $\chi(y_2)$ die Relation $\chi(y_1)\chi(y_2) \leq \mathbf{1}\chi(y_2)$. Damit erhält man also:

$$\mathbf{0}_{\mathcal{H}} \leq \mathbf{0}_{\mathcal{H}}\chi(y_2) \leq \chi(y_1)\chi(y_2) \leq \mathbf{1}\chi(y_2) = \chi(y_2) \leq \mathbf{1}. \quad (10.66)$$

Also liegt $\chi(y_1)\chi(y_2)$ wegen Satz 10.3.6 auch in $\chi(\hat{\mathcal{L}})$. Das heißt, es existiert auch ein Element $y_{12} \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $\chi(y_{12}) = \chi(y_1)\chi(y_2)$. Aus der Ungleichungskette (10.66) erhält man darüber hinaus auch noch die Relation

$$\chi(y_1)\chi(y_2) \leq \chi(y_2). \quad (10.67)$$

Da in die obigen Betrachtungen $\chi(y_1)$ und $\chi(y_2)$ in symmetrischer Weise eingehen, gilt ob der vorausgesetzten Vertauschbarkeit von $\chi(y_1)$ und $\chi(y_2)$ ebenso auch

$$\chi(y_1)\chi(y_2) \leq \chi(y_1). \quad (10.68)$$

Wiederum mit Hilfe der Vertauschbarkeit von $\chi(y_1)$ und $\chi(y_2)$ erhält man, daß $\chi(y_1)(\mathbf{1} - \chi(y_2))$ und $\chi(y_2)(\mathbf{1} - \chi(y_1))$ zu den selbstadjungierten Elementen aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ gehören. Außerdem erhält man

$$\mathbf{0}_{\mathcal{H}} = \chi(y_1) - \chi(y_1) \stackrel{(10.68)}{\leq} \chi(y_1) - \chi(y_1)\chi(y_2) \stackrel{(10.66)}{\leq} \chi(y_1) \leq \mathbf{1},$$

so daß $\chi(y_1)(\mathbf{1} - \chi(y_2))$ wegen Satz 10.3.6 zur Menge $\chi(\hat{\mathcal{L}})$ gehört. Das zugehörige Element aus $\hat{\mathcal{L}}$ heiße y'_1 , so daß man zu $\chi(y'_1) = \chi(y_1)(\mathbf{1} - \chi(y_2))$ kommt. Aus Symmetriegründen erhält man das analoge Ergebnis auch für $\chi(y_2)(\mathbf{1} - \chi(y_1))$. Bezeichnet man das zugehörige Element aus $\hat{\mathcal{L}}$ mit y'_2 , gilt somit $\chi(y'_2) = \chi(y_2)(\mathbf{1} - \chi(y_1))$.

Damit liegen mit y'_1, y'_2 und y_{12} drei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ vor, für die jetzt die Eigenschaften aus Satz E.8.1 (ii) gezeigt werden.

Aufgrund der Linearität von χ erhält man:

$$\begin{aligned} \chi(y'_1 + y_{12}) &= \chi(y'_1) + \chi(y_{12}) \\ &= \chi(y_1)(\mathbf{1} - \chi(y_2)) + \chi(y_1)\chi(y_2) \\ &= \chi(y_1). \end{aligned}$$

Mit der Bijektivität von χ gilt also $y_1 = y'_1 + y_{12}$. In analoger Weise erhält man $y_2 = y'_2 + y_{12}$. Mithin bleibt zu zeigen, daß $y'_1 + y'_2 + y_{12}$ in $\hat{\mathcal{L}}$ liegt. Offensichtlich gilt aber

$$\begin{aligned} \chi(y'_1 + y'_2 + y_{12}) &= \chi(y'_1) + \chi(y'_2) + \chi(y_{12}) \\ &= \chi(y_1)(\mathbf{1} - \chi(y_2)) + \chi(y_2)(\mathbf{1} - \chi(y_1)) + \chi(y_1)\chi(y_2) \\ &= \chi(y_1) + \chi(y_2) - \chi(y_1)\chi(y_2), \end{aligned}$$

so daß die Zugehörigkeit von $\chi(y'_1 + y'_2 + y_{12})$ zu $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ und die Selbstadjungiertheit von $\chi(y'_1 + y'_2 + y_{12})$ offensichtlich sind. Außerdem ergibt sich wiederum mit Satz 29.8 in [Heu92], Kapitel V, S. 198, der weiter oben notiert wurde, aus $\chi(y_1), \chi(y_2) \leq \mathbf{1}$, der Vertauschbarkeit von $\chi(y_1)$ und $\chi(y_2)$ sowie der offensichtlichen Vertauschbarkeit von $\mathbf{1}$ und $\mathbf{1} - \chi(y_1)$ die Relation

$$\chi(y_2)(\mathbf{1} - \chi(y_1)) \leq \mathbf{1}(\mathbf{1} - \chi(y_1)) = (\mathbf{1} - \chi(y_1)). \quad (10.69)$$

So erhält man

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0}_{\mathcal{H}} & \stackrel{(10.68)}{\leq} \chi(y_1) - \chi(y_1)\chi(y_2) \stackrel{\chi(y_2) \geq \mathbf{0}_{\mathcal{H}}}{\leq} \chi(y_1) + \chi(y_2) - \chi(y_1)\chi(y_2) \\
 & = \chi(y'_1 + y'_2 + y_{12}) = \chi(y_1) + \chi(y_2)(\mathbf{1} - \chi(y_1)) \\
 & \stackrel{(10.69)}{\leq} \chi(y_1) + (\mathbf{1} - \chi(y_1)) = \mathbf{1}.
 \end{aligned}$$

Also liegt $\chi(y'_1 + y'_2 + y_{12})$ tatsächlich in $\chi(\hat{\mathcal{L}})$, und somit gehört $y'_1 + y'_2 + y_{12}$ zu $\hat{\mathcal{L}}$, womit alle Voraussetzungen von Satz E.8.1 erfüllt sind. ■

Die zurückliegenden drei Aussagen erlauben es, dem Kommutieren bestimmter Operatoren eine gewisse physikalische Bedeutung beizumessen. Im Falle eines Paares beliebiger Effekte ist die Vertauschbarkeit der den betrachteten Effekten mittels χ zugeordneten Operatoren bereits hinreichend dafür, daß ein Paar koexistenter Effekte vorliegt. Bei Beteiligung eines Entscheidungseffektes erweist sich das Vertauschen der zugehörigen Operatoren sogar als äquivalent zur Koexistenz des betrachteten Effektpaares.

Als einen ersten Punkt hinsichtlich der Leistungsfähigkeit des Ludwigschen Zugangs zur Quantenmechanik kann man den Gewinn der bekannten Hilbertraumstrukturen verzeichnen. Damit zusammenhängend stellt sich als eine weitere Frage diejenige nach der Schrödingergleichung und der Dynamik im allgemeinen. Dem widmet sich das folgende Kapitel.

Kapitel 11

Die Galilei-Gruppe in der Quantenmechanik – Dynamik, Masse und Spin

Im nun folgenden Kapitel soll dargelegt werden, wie sich die Galilei-Gruppe im Rahmen der Quantenmechanik darstellt. Dazu wird zunächst die rationale Galilei-Gruppe betrachtet. Sie kann in Form stetiger Automorphismen bezüglich der Menge der Präparier- wie auch der Effektverfahren repräsentiert werden. Eine eindeutige Interpretation der Automorphismen stellen Abbildungsprinzipien sicher. Zugehörige Eigenschaften werden durch die Axiome AGal 1 und AGal 2 in die mathematische Theorie eingeführt. Den Übergang zu Gruppenhomomorphismen aus der rationalen Galilei-Gruppe in die Menge der sogenannten \mathcal{D} -stetigen Mischungs-Automorphismen auf der Menge der Zustände einerseits wie auch in die Menge der sogenannten B_{Δ} -stetigen Effekt-Automorphismen auf der Menge der Effekte andererseits ist Inhalt des zweiten Abschnitts. Im dritten Abschnitt werden Anforderungen an die uniforme Struktur der physikalischen Unschärfe der rationalen Galilei-Gruppe im Falle der Quantenmechanik erläutert. Mathematisch gehen die Betrachtungen in Form des Axioms AGal 3 ein. Es zeigt sich, daß die beiden Gruppenhomomorphismen der rationalen Galilei-Gruppe in die Menge der \mathcal{D} -stetigen Mischungs-Automorphismen einerseits und in die Menge der B_{Δ} -stetigen Effekt-Automorphismen andererseits jeweils auf die gesamte Galilei-Gruppe fortgesetzt werden können. Dadurch findet sich die gesamte Galilei-Gruppe im Rahmen der Quantenmechanik wieder. Auf Basis des Theorems von R.V. Kadison stellen sich die so gewonnenen Fortsetzungen als sogenannte unitäre Darstellungen bis auf einen Faktor dar. Der letzte Abschnitt definiert zunächst die Begriffe der elementaren und

zusammengesetzten Mikrosysteme. Als Anwendung des Theorems von M.H. Stone kann man die unitären Darstellungen bis auf einen Faktor weiter konkretisieren. Besonderes Gewicht wird dabei auf die Ableitung einer abstrakten Form der Schrödingergleichung gelegt, die anhand der eingangs eingeführten Abbildungsprinzipien insbesondere eine eindeutige Interpretation erfahren wird. Ebenso kann den Begriffen der Gesamtmasse und des Spins ein realistisches Fundament gegeben werden.

11.1 Darstellung der rationalen Galilei-Gruppe durch p - und r -Automorphismen

Dem Standpunkt der Kapitel 4 und 5 folgend, sollen Galilei-Transformationen nur als Galilei-Transformationen der apparativen Aufbauten und nicht einzelner Mikrosysteme verstanden werden. Die Apparate und damit die ihren Aufbau und ihre Verwendung definierenden Präparierverfahren und Registriermethoden haben insbesondere einen raum-zeitlichen Kontext. Dagegen scheint es zumindest allein auf Basis der Vortheorien zur Quantenmechanik schwierig, einzelnen Mikrosystemen, also Paaren von Präparier- und Registrierereignissen im Sinne der Definition 9.9.1, Begriffe wie einen Aufenthaltsort oder -zeitpunkt zuzuordnen. Bedenkt man zudem, daß der Begriff des Ereignisses in Abschnitt 5.2 stellvertretend für eine ganze Abfolge makroskopischer Vorgänge verwendet wird, die allesamt bezüglich eines vorgegebenen Bezugssystems für sich raum-zeitlich konkretisierbar sind, wird das Problem noch gravierender. Ein Mikrosystem im Sinne von Definition 9.9.1 steht demnach abkürzend für einen ganz bestimmten, eventuell enorm großen Satz von raum-zeitlich lokalisierten Vorkommnissen. Daher kann nicht ohne weiteres von einer raum-zeitlichen Lokalisierbarkeit eines einzelnen Mikrosystems gesprochen werden. Also ist es nahezu zwingend, sich bezüglich raum-zeitlicher Aussagen auf Präparierverfahren und Registriermethoden sowie die zugehörigen Registrierprozeduren zu beziehen.

In Abschnitt 5.6 wurde die Registriermethode als ein Verfahren zur Gewinnung von Registrierereignissen eingeführt, das insbesondere durch die raum-zeitliche Orientierung zu einem vorgegebenen Bezugssystem definiert wird. Das heißt, zusätzlich zu den Aussagen über den „inneren Aufbau“ des Apparates zur Registrierung bedarf es noch genauer Angaben zur raum-zeitlichen Positionierung des apparativen Aufbaus relativ zum gewählten Bezugssystem, also in erster Linie zum verwendeten Präparierapparat. Wie in Abschnitt 5.6 bereits betont wurde, können sich Registriermethoden auch nur dadurch unterscheiden, daß sie an verschiedenen Orten

stehen oder daß sich zu verschiedenen Zeiten Verwendung finden. Denkt man dabei etwa an Detektorbatterien in Beschleunigerringen, sind derartige Überlegungen evident. In derselben Weise ist es denkbar, daß sich zwei identisch aufgebaute Registrierapparate relativ zueinander mit konstanter Geschwindigkeit bewegen. Wenn sich also zwei Registriermethoden auf eine derartige Weise lediglich in ihrer raumzeitlichen Positionierung unterscheiden, kann man in wohldefinierter Weise davon sprechen, daß die eine Registriermethode aus der anderen mittels einer Galilei-Transformation hervorgeht. Damit ist aber schon das zentrale interpretatorische Element der Galilei-Transformationen in der Quantenmechanik formuliert worden. Mit Interpretation wird aber im Sinne von Kapitel 4 stets ein Abbildungsprinzip gemeint, so daß es noch der Formulierung eines Abbildungsprinzips bedarf. Dabei geht man wie in Kapitel 5 von der Vortheorie der Newtonschen Raum-Zeit aus, bezüglich derer den Galilei-Transformationen neben ihrer Interpretation als Übergang zwischen Koordinatensystemen insbesondere als Transformationen von Ereignissen Realitätscharakter zukommt. Zum Verständnis betrachte man zwei Ereignisse \mathcal{E} und \mathcal{E}' , die bezüglich eines vorgegebenen, mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen Bezugssystems einerseits am Orte (x_1, x_2, x_3) zum Zeitpunkt t und andererseits am Orte (x'_1, x'_2, x'_3) zum Zeitpunkt t' stattfinden. Dann spricht man davon, daß das Ereignis \mathcal{E}' aus dem Ereignis \mathcal{E} durch diejenige Galilei-Transformation hervorgeht, die durch eine räumliche Drehungsmatrix $A = (\alpha_{ij})$ ($i, j = 1, 2, 3$), die Relativgeschwindigkeit $\vec{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$, die räumliche Translation $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ sowie die zeitliche Translation γ charakterisiert wird, wenn die folgenden Beziehungen gelten

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} x_j + \delta_i t + \eta_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3, \quad (11.1)$$

$$t' = t + \gamma. \quad (11.2)$$

Daß die Matrix $A = (\alpha_{ij})$ die Matrix der räumlichen Drehungen beschreibt, drückt sich mathematisch in dem Umstand aus, daß die zu A transponierte Matrix mit der zu A inversen Matrix zusammenfällt. Zudem beschränkt man sich auf den Fall, daß die Determinante von A gleich $+1$ ist. Das heißt, es werden keine Spiegelungen betrachtet. Eine Galilei-Transformation wird somit durch ein Quadrupel $(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)$ gekennzeichnet. Für die Menge aller Galilei-Transformationen wird der Name \mathfrak{G} gewählt.

Bezüglich der Operation

$$\mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad ((A', \vec{\delta}', \vec{\eta}', \gamma'), (A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)) \longmapsto (A', \vec{\delta}', \vec{\eta}', \gamma') \cdot (A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma),$$

mit $(A', \vec{\delta}', \vec{\eta}', \gamma') \cdot (A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma) := (A'A, A'\vec{\delta} + \vec{\delta}', A'\vec{\eta} + \vec{\eta}' + \gamma\vec{\delta}', \gamma' + \gamma)$

handelt es sich bei \mathcal{G} um eine Gruppe im Sinne der Definition G.3.3. Daher spricht man bei \mathcal{G} von der **Galilei-Gruppe**. Bezeichnet \mathbb{I} die 3×3 -Einheitsmatrix, ist das neutrale Element der Galilei-Gruppe durch $\epsilon := (\mathbb{I}, 0, 0, 0)$ gegeben. Für das zu dem Element $(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)$ inverse Element erhält man:

$$(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}\vec{\delta}, -A^{-1}(\vec{\eta} - \gamma\vec{\delta}), -\gamma).$$

Für jedes Element $(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)$ aus \mathcal{G} gilt:

$$(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma) = (\mathbb{I}, \vec{\delta}, 0, 0) \cdot (\mathbb{I}, 0, \vec{\eta}, 0) \cdot (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma) \cdot (A, 0, 0, 0). \quad (11.3)$$

Das heißt, die gesamte Galilei-Gruppe fußt demnach einerseits auf den drei abelschen Untergruppen der räumlichen Translationen, der zeitlichen Translationen und der sogenannten **eigentlichen Galilei-Transformationen** des Typs $(\mathbb{I}, \vec{\delta}, 0, 0)$ sowie andererseits auf der nicht-abelschen Untergruppe der räumlichen Drehungen. Bezüglich der Beziehungen dieser vier elementaren Gruppen zueinander gelten eine Reihe von Regeln, die hier nicht explizit aufgezählt werden müssen. Dafür sei etwa auf [IW52] verwiesen.

Die Teilmenge derjenigen Galilei-Transformationen, deren Elemente durch Quadrupel $(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)$ mit ausschließlich rationalen Zahlen charakterisiert werden, soll als **rationale Galilei-Gruppe** bezeichnet werden. Als Symbol wird $\tilde{\mathcal{G}}$ gewählt. Mit $\tilde{\mathcal{G}}$ liegt offenbar eine Untergruppe von \mathcal{G} vor. Den Überlegungen zur Endlichkeit der Physik in Abschnitt 4.3 folgend ist als Bildmenge der Galilei-Transformationen die Menge $\tilde{\mathcal{G}}$ zu wählen, da nur rationale Zahlenverhältnisse realisiert werden können. Damit kann man die Bedeutung der Galilei-Transformationen innerhalb der Quantenmechanik durch das folgende Abbildungsprinzip formulieren:

Abbildungsprinzipien Teil 10:

Für jede rationale Galilei-Transformation g sei mit $T_g \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ eine Bildrelation in dem folgenden Sinne ausgezeichnet:

| | | |
|---|-------------------------|------------------------|
| die Registriermethode b'_0 geht aus der Registriermethode b_0 dadurch hervor, daß alle b_0 definierenden makroskopischen Vorgänge in ihrer raum-zeitlichen Abfolge in bezug auf das gewählte Bezugssystem um eine Galilei-Transformation g räumlich gedreht, raumzeitlich verschoben und relativ bewegt stattfinden | } \longleftrightarrow | $(b_0, b'_0) \in T_g,$ |
| die Registrierprozedur b' geht aus der Registrierprozedur b dadurch hervor, daß alle b definierenden makroskopischen Vorgänge in ihrer raum-zeitlichen Abfolge in bezug auf das gewählte Bezugssystem um eine Galilei-Transformation g räumlich gedreht, raumzeitlich verschoben und relativ bewegt stattfinden | } \longleftrightarrow | $(b, b') \in T_g.$ |

Völlig analoge Überlegungen können auch für die Präparierverfahren durchgeführt werden. Dabei finden sich die Galilei-Transformationen im Verhältnis der raumzeitlichen Lokalisationen der beteiligten Präparierverfahren wieder. Daher wird das folgende Abbildungsprinzip formuliert:

Abbildungsprinzipien Teil 11:

Für jede rationale Galilei-Transformation g sei mit $S_g \subseteq \mathcal{R} \times \mathcal{R}$ eine Bildrelation in dem folgenden Sinne ausgezeichnet:

| | | |
|---|-------------------------|--------------------|
| das Präparierverfahren a' geht aus dem Präparierverfahren a dadurch hervor, daß alle a definierenden makroskopischen Vorgänge in ihrer raum-zeitlichen Abfolge in bezug auf das gewählte Bezugssystem um eine Galilei-Transformation g räumlich gedreht, raumzeitlich verschoben und relativ bewegt stattfinden | } \longleftrightarrow | $(a, a') \in S_g.$ |
|---|-------------------------|--------------------|

Nachdem nun mit den T_g und den S_g neue Bildrelationen eingeführt wurden und nachdem ihnen durch obige Abbildungsprinzipien eine Zuordnung zu Elementen der Realität zugemessen wurde, besteht der nächste Schritt darin, die Struktur des mathematischen Bildes weiterzuentwickeln. Dazu werden zunächst die folgenden Begriffe definiert:

Definition 11.1.1

Seien \mathcal{Q} , \mathcal{R} , \mathcal{R}_0 Mengen von Präparierverfahren, Registrierprozeduren und Registriermethoden einer Präparier-Registrier-Struktur im Sinne von Definition 5.8.1.

- (i) Eine Bijektion $S : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ heißt **p-Automorphismus**, wenn S die folgenden Eigenschaften besitzt:
- (a) Für alle a_1, a_2 aus \mathcal{Q} gilt $S(a_1 \cap a_2) = S(a_1) \cap S(a_2)$.
 - (b) Für alle a_1, a_2 aus \mathcal{Q} mit $a_1 \subseteq a_2$ gilt $S(a_2 \setminus a_1) = S(a_2) \setminus S(a_1)$.
 - (c) Für alle a_1, a_2 aus \mathcal{Q} mit $a_1 \subseteq a_2$ gilt $\lambda_{\mathcal{Q}}(S(a_2), S(a_1)) = \lambda_{\mathcal{Q}}(a_2, a_1)$.
- (ii) Eine Bijektion $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ heißt **r-Automorphismus**, wenn T die folgenden Eigenschaften besitzt:
- (a) Für alle Elemente b_1, b_2 aus \mathcal{R} gilt $T(b_1 \cap b_2) = T(b_1) \cap T(b_2)$.
 - (b) Für alle Elemente b_1, b_2 aus \mathcal{R} mit $b_1 \subseteq b_2$ gilt $T(b_2 \setminus b_1) = T(b_2) \setminus T(b_1)$.
 - (c) Es gilt $T(\mathcal{R}_0) \subseteq \mathcal{R}_0$. Ferner gilt für alle b_{01}, b_{02} aus \mathcal{R}_0 mit $b_{01} \subseteq b_{02}$ die Identität $\lambda_{\mathcal{R}_0}(T(b_{02}), T(b_{01})) = \lambda_{\mathcal{R}_0}(b_{02}, b_{01})$.
- (iii) Ein Paar (V, W) aus einem p-Automorphismus und einem r-Automorphismus heißt **dual**, wenn die folgenden Aussagen gelten:

- (a) Für alle Elemente a aus \mathcal{Q} und alle Elemente b_0 aus \mathcal{R}_0 gilt die Äquivalenz:

$$(V(a), b_0) \in C \iff (a, W(b_0)) \in C. \quad (11.4)$$

- (b) Für alle Elemente a aus \mathcal{Q} , alle Elemente b_0 aus \mathcal{R}_0 und alle Elemente b aus \mathcal{R} mit $b \subseteq b_0$ und $(a, b_0) \in C$ gilt:

$$\bar{\mu}(V(a), (b_0, b)) = \bar{\mu}(a, (W(b_0), W(b))). \quad (11.5)$$

Im Zusammenhang mit den neuen Bildrelationen des Typs S_g und T_g werden nun in einem ersten Schritt zwei Axiome gefordert. Ludwig führt die damit verknüpften Aussagen allerdings nicht in Form explizit benannter Postulate ein, sondern fügt sie der mathematischen Theorie auf erläuterndem Wege zu. Die unten gewählten Namen AGal 1 und AGal 2 für die beiden Axiome stammen folglich nicht von Ludwig. Da die durch sie ausgedrückten mathematischen Aussagen aber lediglich das Ludwigsche Vorgehen formalisieren, ohne inhaltlich von seinem Weg abzuweichen, wird den Namen kein „A“ angehängt.

Das erste der beiden genannten Axiome läßt sich aus Erläuterungen Ludwigs in [Lud83b], Kapitel VII, Abschnitt 1, S. 261 gewinnen:

AGal 1 Für jedes g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ bildet (S_g^{-1}, T_g) ein duales Paar aus einem p-Automorphismus und einem r-Automorphismus.

Man fordert also, daß für jede rationale Galilei-Transformation g die Relationen T_g und S_g Bijektionen sind, für die die Aussagen aus Definition 11.1.1 gelten. Im weiteren schreibe man anstelle der Relation $(a, a') \in S_g$, wie sie in den Abbildungsprinzipien Teil 11 Verwendung findet, die Relation $a' = S_g(a)$. In analoger Weise werden die Relationen $b'_0 = T_g(b_0)$ und $b' = T_g(b)$ anstatt $(b_0, b'_0) \in T_g$ und $(b, b') \in T_g$ verwendet. Der Motivation von Axiom AGal 1 wird noch das zweite erwähnte Axiom vorangestellt, das Ludwig in [Lud83b], Kapitel VII, Abschnitt 1, S. 261 durch Verweis auf die allgemeinere Erörterungen in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 1.1, S. 232 fordert:

AGal 2 Für alle Elemente g_1, g_2 aus $\tilde{\mathcal{G}}$ gilt $S_{g_1 g_2} = S_{g_1} S_{g_2}$ und $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}$.

Eine unmittelbare Konsequenz der Axiome AGal 1 und 2 liefert das folgende Lemma:

Lemma 11.1.2 Für alle Elemente g der Menge $\tilde{\mathcal{G}}$ fällt die zu T_g inverse Abbildung mit der Abbildung $T_{g^{-1}}$ zusammen. Ferner ergibt sich die Identität von S_g^{-1} und $S_{g^{-1}}$. Das heißt, es gelten die folgenden Abbildungsidentitäten:

$$\begin{aligned} S_g^{-1} &= S_{g^{-1}}, \\ T_g^{-1} &= T_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für das neutrale Element ϵ der Gruppe der rationalen Galilei-Transformationen, daß T_ϵ mit der identischen Abbildung auf \mathcal{R} zusammenfällt sowie daß S_ϵ die identische Abbildung auf \mathcal{Q} ist.

Beweis:

Für das neutrale Element ϵ aus $\tilde{\mathcal{G}}$, ein beliebiges Element g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ und für jedes $b \in \mathcal{R}$ erhält man mit AGal 2:

$$T_g(b) = T_{\epsilon g}(b) = T_\epsilon(T_g(b)).$$

Da T_g bijektiv ist, gilt also $T_\epsilon(b) = b$ für alle $b \in \mathcal{R}$. Das heißt, die Abbildung T_ϵ fällt mit der identischen Abbildung $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ zusammen. Somit erhält man für alle $b \in \mathcal{R}$ und alle $g \in \tilde{\mathcal{G}}$:

$$T_g T_{g^{-1}} b = T_{g g^{-1}} b = T_\epsilon b = b.$$

Damit sind $T_{g^{-1}}$ und T_g^{-1} identisch. Die Aussagen für S_g laufen analog. ■

Nun kann man zur Motivation der Axiome AGal 1 und 2 übergehen. Für AGal 1 betrachte man eine rationale Galilei-Transformation g sowie die zugehörigen Relationen T_g und S_g^{-1} . Bedenkt man die Interpretationen der Relationen im Sinne der Teile 10 und 11 der Abbildungsprinzipien, dann sind die Forderungen aus Definition 11.1.1 (i) und (ii) offensichtlich. Man ordnet vermittle T_g jeder Registrierprozedur b lediglich diejenige Registrierprozedur b' zu, die im Verhältnis zu b als Ganzes um die Galilei-Transformation g raum-zeitlich verschoben, relativ bewegt und gedreht wird. Mithin umfaßt b' genau die Registrierereignisse, die um g „verschoben“ aus denjenigen von b hervorgehen. Damit sind aber die Aussagen gemäß Definition 11.1.1 (i) (a), (b) und (c) natürliche Forderungen. In völlig analoger Weise motivieren sich die Aussagen, wie sie in Definition 11.1.1 (ii) bezüglich der Präparierverfahren zum Ausdruck kommen. Physikalisch tiefgründiger sind dagegen die Aussagen, die zu Punkt (iii) aus Definition 11.1.1 gehören. Dazu werden die folgenden Überlegungen angestellt.

Eine zentrale Beobachtung, die der Mensch im Umgang mit seiner Umwelt gemacht hat, besteht im Umstand, daß es für ein Experiment bestehend aus einem Präparier- und einem Registrieranteil beliebig ist, wann (Invarianz gegenüber Zeittranslationen) oder wo ein Experiment (Invarianz gegenüber räumlichen Drehungen und räumlichen Translationen) durchgeführt wird. Ebenso hat es sich als irrelevant herausgestellt, ob man ein Experiment mit konstanter Geschwindigkeit bezüglich eines Bezugssystems bewegt durchführt (Invarianz gegenüber eigentlichen Galilei-Transformationen), zumindest wenn man sich auf hinreichend kleine Relativgeschwindigkeiten beschränkt. Derartige Invarianzen können sogar als entscheidende Voraussetzung für die Reproduzierbarkeit der Experimente einschließlich der relativen Häufigkeiten aufgefaßt werden. Es kommt nur auf die relative Positionierung von Präparation zur Registrierung an. Bedenkt man Lemma 11.1.2, bringt AGal 1 in Form von Punkt (iii) aus Definition 11.1.1 genau diese Erfahrung an der Natur zum Ausdruck.

Auch Axiom AGal 2 ist unmittelbar einsichtig. Denn für zwei rationale Galilei-Transformationen g_1, g_2 bezeichnet g_1g_2 ob der Gruppeneigenschaft von $\tilde{\mathcal{G}}$ wiederum eine rationale Galilei-Transformation, die sich durch Hintereinanderausführung der beiden Transformationen ergibt. Nun ist es sicher irrelevant, ob man von einer Registrierprozedur b zu einer vermittle g_1g_2 transformierten Registrierprozedur übergeht oder ob man zunächst zu $T_{g_1}b$ übergeht, um dann davon ausgehend zu $T_{g_2}T_{g_1}b$ zu gelangen. Dieselben Überlegungen gelten auch für die Präparierverfahren.

Die Axiome AGal 1 und 2 sind reichhaltig genug, um weitere Eigenschaften zu beweisen. Zur adäquaten Formulierung werden zuvor noch geeignete Begriffe eingeführt.

Definition und Lemma 11.1.3 *Bezeichnet $T : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ einen p-Automorphismus, dann wird in kanonischer Weise durch die Vorschrift*

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, (b_0, b) \longmapsto (T(b_0), T(b))$$

eine Bijektion definiert. Dabei bezeichne \mathcal{F} die \mathcal{R} und \mathcal{R}_0 zugehörige Menge von Effektverfahren gemäß Definition 5.6.2.

Bemerkung: Zur Reduzierung der verwendeten Symbole soll auch die obige Bijektion mit dem Symbol T bezeichnet werden, wenn der zugrundeliegende r-Automorphismus mit T symbolisiert wird. Das dem Effektverfahren f aus \mathcal{F} im Sinne der obigen Abbildung zugeordnete Element aus \mathcal{F} erhält also den Namen $T(f)$. Bezeichnet f das Effektverfahren (b_0, b) , soll in vereinfachender Weise der Schreibweise $T(b_0, b)$ der eigentlich korrekten Formulierung $T((b_0, b))$ der Vorzug gegeben werden.

Beweis: Der Beweis ist offensichtlich.

Im weiteren wird definiert:

Definition 11.1.4

Es bezeichne $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur im Sinne von Definition 6.3.1. Die Mengen von Präparierverfahren, Registrierprozeduren und Registriermethoden der zugehörigen Präparier-Registrier-Struktur seien mit $\mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{R}_0$ benannt. Dabei stehe gemäß Definition 5.6.2 das Symbol \mathcal{F} für die Menge der Effektverfahren. Entsprechend Definition 6.1.5 werden die kanonischen Abbildungen von \mathcal{Q}' nach \mathcal{K} und von \mathcal{F} nach \mathcal{L} mit φ und ψ benannt.

Es werden die folgenden Begriffe eingeführt.

- (i) Ein p-Automorphismus S heißt **r-invariant**, wenn für alle a_1, a_2 aus \mathcal{Q}' mit $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ auch $\varphi(S(a_1)) = \varphi(S(a_2))$ gilt.
- (ii) Ein p-Automorphismus S heißt **r-stetig im Punkte a aus \mathcal{Q}** , wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle f aus \mathcal{F} ein $\delta > 0$ und eine endliche Familie $(f_i)_{i=1}^n$ aus \mathcal{F} so existieren, so daß für alle \hat{a} aus \mathcal{Q}' mit

$$|\mu(\varphi(a), \psi(f_i)) - \mu(\varphi(\hat{a}), \psi(f_i))| < \delta \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

folgender Relation entsprochen wird:

$$|\mu(S(\varphi(a)), \psi(f)) - \mu(S(\varphi(\hat{a})), \psi(f))| < \varepsilon.$$

S wird **r-stetig** genannt, wenn S in jedem Punkt a aus \mathcal{Q} r-stetig ist.

- (iii) Ein r -Automorphismus $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ heißt **p-invariant**, wenn für alle f_1, f_2 aus \mathcal{F} mit $\psi(f_1) = \psi(f_2)$ auch $\psi(T(f_1)) = \psi(T(f_2))$ gilt.
- (iv) Ein r -Automorphismus $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ heißt **p-stetig im Punkte f aus \mathcal{F}** , wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle a aus \mathcal{Q}' ein $\delta > 0$ und eine endliche Familie $(a_i)_{i=1}^n$ aus \mathcal{Q}' so existieren, daß für alle \hat{f} aus \mathcal{F} mit

$$|\mu(\varphi(a_i), \psi(f)) - \mu(\varphi(a_i), \psi(\hat{f}))| < \delta \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}$$

folgender Relation genügt wird:

$$|\mu(\varphi(a), \psi(T(f))) - \mu(\varphi(a), \psi(T(\hat{f})))| < \varepsilon.$$

T heißt **p-stetig**, wenn T in jedem Punkt f aus \mathcal{F} p-stetig ist.

Zur Illustration der so definierten Stetigkeitseigenschaften betrachte man etwa für einen r -Automorphismus $T : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ zwei Effektverfahren f_1, f_2 aus \mathcal{F} . Sind f_1, f_2 nun durch Präparierverfahren mittels der Wahrscheinlichkeiten μ „kaum“ zu unterscheiden, dann lassen sich auch die Bilder $T(f_1)$ und $T(f_2)$ „kaum“ unterscheiden. Analoge Betrachtungen sind zur Illustration der Stetigkeitsaussagen eines p -Automorphismus anzustellen.

Wie weiter oben bereits betont wurde, kommt es nur auf die relative Positionierung von Präparations- und Registrierteil eines Experiments an. Infolgedessen ist zu erwarten, daß für jede rationale Galilei-Transformation g nicht nur (S_g^{-1}, T_g) ein duales Paar von p - und r -Automorphismen darstellt, sondern auch daß (S_g, T_g^{-1}) ein duales Paar von p - und r -Automorphismen liefert. Folgt man Th. 3.3 und Th. 3.4 in [Lud83b], Kapitel V, Abschnitt 3, S. 205 ergibt sich:

Satz 11.1.5 *Sei g ein Element aus $\tilde{\mathcal{G}}$. Dann sind S_g und S_g^{-1} zwei r -stetige, r -invariante p -Automorphismen. T_g und T_g^{-1} bezeichnen zwei p -stetige, p -invariante r -Automorphismen.*

Die Paare (S_g^{-1}, T_g) und (S_g, T_g^{-1}) sind dual im Sinne der Definition 11.1.1 (iii).

Beweis:

Bezeichne g ein Element aus $\tilde{\mathcal{G}}$. Daß es sich bei (S_g^{-1}, T_g) um ein duales Paar im Sinne von Definition 11.1.1 (iii) handelt, ist Inhalt von AGal 1.

Zunächst wird die p -Invarianz von T_g nachgewiesen. Man betrachte dafür zwei Effektverfahren $f_1 = (b_{01}, b_1)$ und $f_2 = (b_{02}, b_2)$ aus \mathcal{F} mit $\psi(f_1) = \psi(f_2)$. Für alle $a \in \mathcal{Q}'$ mit $(a, T_g(b_{01})) \in C$ und $(a, T_g(b_{02})) \in C$ erhält man mit AGal 1

vermittels der Aussage (11.4), daß auch $(S_g^{-1}(a), b_{01})$ und $(S_g^{-1}(a), b_{02})$ in C liegen. Wegen $\psi(f_1) = \psi(f_2)$ folgt nun

$$\bar{\mu}(S_g^{-1}(a), f_1) = \bar{\mu}(S_g^{-1}(a), f_2),$$

woraus sich mit AGal 1 in Form von Aussage (11.5) ergibt:

$$\bar{\mu}(a, T_g(f_1)) = \bar{\mu}(S_g^{-1}(a), f_1) = \bar{\mu}(S_g^{-1}(a), f_2) = \bar{\mu}(a, T_g(f_2)).$$

Also gilt auch $\psi(T_g(f_1)) = \psi(T_g(f_2))$. Völlig analog folgt die r-Invarianz von S_g^{-1} .

Damit kann man nun beweisen, daß für alle $f \in \mathcal{F}$ und alle $a \in \mathcal{Q}'$ gilt:

$$\mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), \psi(f)) = \mu(\varphi(a), \psi(T_g(f))). \quad (11.6)$$

Zum Beweis von (11.6) wähle man ein $a \in \mathcal{Q}'$ und ein $f = (b_0, b) \in \mathcal{F}$. Mit APS 5.1.4A (i) in der Form aus Lemma 6.1.6 (i) existiert ein a' in $\varphi(a)$ mit $(a', T_g(b_0)) \in C$. Da nun aber S_g^{-1} r-invariant ist und da a und a' zu derselben Klasse $\varphi(a)$ gehören, sind auch $\varphi(S_g^{-1}(a))$ und $\varphi(S_g^{-1}(a'))$ identisch. Damit folgt mit AGal 1 und mit (11.5):

$$\begin{aligned} \mu(\varphi(a), \psi(T_g(f))) &= \bar{\mu}(a', T_g(f)) = \bar{\mu}(S_g^{-1}(a'), f) \\ &= \mu(\varphi(S_g^{-1}(a')), \psi(f)) = \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), \psi(f)). \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage aus (11.6) bewiesen.

Der Nachweis der Stetigkeitsaussagen bezüglich T_g und S_g^{-1} ist mit (11.6) in einfacher Weise möglich. Dafür betrachte man zunächst die Abbildung T_g . Es seien $f \in \mathcal{F}$, $\varepsilon > 0$ und $a \in \mathcal{Q}'$ gewählt. Man setze $\delta := \varepsilon$, und als Familie $(a_i)_{i=1}^n$ verwende man die lediglich einelementige Menge $\{S_g^{-1}(a)\}$. Dann erhält man für alle $\hat{f} \in \mathcal{F}$ mit

$$\left| \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), \psi(f)) - \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), \psi(\hat{f})) \right| < \delta \quad (11.7)$$

unmittelbar

$$\begin{aligned} &\left| \mu(\varphi(a), \psi(T_g(f))) - \mu(\varphi(a), \psi(T_g(\hat{f}))) \right| \\ &\stackrel{(11.6)}{=} \left| \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), \psi(f)) - \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), \psi(\hat{f})) \right| \stackrel{(11.7)}{<} \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Der Nachweis der p-Stetigkeit von S_g^{-1} ergibt sich in analoger Weise.

Also bleibt es, die Aussagen bezüglich des Paares (S_g, T_g^{-1}) zu beweisen. Dafür genügt es, die Dualitätsaussagen gemäß Definition 11.1.1 (iii) zu beweisen, denn die Aussagen entsprechend Definition 11.1.1 (i) und (ii) ergeben sich direkt aus den zugehörigen Aussagen für das Paar (S_g^{-1}, T_g) . Die Stetigkeits- und Invarianzaussagen folgen dann auf entsprechendem Wege, wie er oben für das Paar (S_g^{-1}, T_g) dargelegt wurde. Es bleibt also, zu zeigen:

(i) Für alle $a \in \mathcal{Q}$ und $b_0 \in \mathcal{R}_0$ gilt:

$$(S_g(a), b_0) \in C \iff (a, T_g^{-1}(b_0)) \in C.$$

(ii) Für alle $a \in \mathcal{Q}$, alle $b_0 \in \mathcal{R}_0$ und $b \in \mathcal{R}$ mit $b \subseteq b_0$ und $(a, b_0) \in C$ gilt:

$$\bar{\mu}(S_g(a), (b_0, b)) = \bar{\mu}\left(a, (T_g^{-1}(b_0), T_g^{-1}(b))\right).$$

Zum Nachweis von (i) wähle man $a \in \mathcal{Q}$ und $b_0 \in \mathcal{R}_0$ mit $(S_g(a), b_0) \in C$. Setzt man $a' := S_g(a)$ und $b'_0 := T_g^{-1}(b_0)$, dann gilt also $(a', T_g(b'_0)) \in C$. Damit folgt aus der Dualität des Paares (S_g^{-1}, T_g) sofort die Zugehörigkeit $(S_g^{-1}(a'), b'_0) = (a, T_g^{-1}(b_0))$ zu C . In derselben Weise folgt die umgekehrte Richtung. Zum Nachweis von Punkt (ii) wähle man $a \in \mathcal{Q}$, $b_0 \in \mathcal{R}_0$ und $b \in \mathcal{R}$ mit $b \subseteq b_0$ und $(a, b_0) \in C$. Setzt man $a' := S_g(a)$, $b'_0 := T_g^{-1}(b_0)$ und $b := T_g^{-1}(b)$, dann erhält man wiederum mit der Dualität des Paares (S_g^{-1}, T_g) mittels der Relation (11.5)

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(S_g(a), (b_0, b)) &= \bar{\mu}\left(a', (T_g(b'_0), T_g(b'))\right) = \bar{\mu}\left(S_g^{-1}(a'), (b'_0, b')\right) \\ &= \bar{\mu}\left(a, (T_g^{-1}(b_0), T_g^{-1}(b))\right). \end{aligned}$$

Damit ist auch der obige Punkt (ii) nachgewiesen. ■

Es ist offensichtlich, daß die Menge der r -Automorphismen wie auch die Menge der p -Automorphismen bezüglich der Hintereinanderausführung als Operation Gruppen bilden. Die Mengen der p -stetigen, p -invarianten r -Automorphismen und der r -stetigen, r -invarianten p -Automorphismen bilden jeweils Untergruppen der Mengen aller r -Automorphismen und der Menge aller p -Automorphismen. Da man auf der Basis der Axiome AGal 1 und AGal 2 mit Satz 11.1.5 jedem Element aus $\tilde{\mathcal{G}}$ sowohl einen p -stetigen, p -invarianten r -Automorphismus als auch einen r -stetigen, r -invarianten p -Automorphismus zuordnet, stellt sich die Frage, ob es sich dabei um Gruppenhomomorphismen im Sinne von Definition G.3.4 handelt. Zur Beantwortung wird notiert:

Satz 11.1.6 (Darstellung der rationalen Galilei-Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ durch p- und r-Automorphismen)

Bezeichne $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur im Sinne von Definition 6.3.1, für die die Aussagen AGal 1 und AGal 2 gelten. Dann stellen die Abbildungen

$$\tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \{S \mid S \text{ ist } r\text{-stetiger, } r\text{-invarianter } p\text{-Automorphismus}\}, \quad g \longmapsto S_g$$

und

$$\tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \{T \mid T \text{ ist } p\text{-stetiger, } p\text{-invarianter } r\text{-Automorphismus}\}, \quad g \longmapsto T_g$$

zwei Gruppenhomomorphismen dar.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit der Abbildungen ist Inhalt von Satz 11.1.5. Die Aussagen über die Gruppenhomomorphie im Sinne von Definition G.3.4 wird gerade durch AGal 2 geliefert. ■

Der letzte Satz berechtigt uns, die zurückliegenden Betrachtungen folgendermaßen zusammenzufassen:

In Zustands-Effekt-Strukturen, die den Aussagen AGal 1 und AGal 2 genügen, also insbesondere in der Quantenmechanik, kann die rationale Galilei-Gruppe sowohl durch eine Untergruppe der Gruppe der p-stetigen, p-invarianten r-Automorphismen als auch durch eine Untergruppe der Gruppe der r-stetigen, r-invarianten p-Automorphismen dargestellt werden.

Die Interpretation der Galilei-Gruppe innerhalb der Quantenmechanik gipfelt somit in einer Darstellungsaussage für $\tilde{\mathcal{G}}$. Demzufolge besteht die Antwort auf die Frage nach der physikalischen Bedeutung der rationalen Galilei-Gruppe darin, daß jeder rationalen Galilei-Transformation g zwei Bijektionen zukommen. Die eine Bijektion überführt die Präparierverfahren ineinander entsprechend der Interpretation, daß man von einem Präparierverfahren zu einem anderen gelangt, indem man alle raumzeitlichen Abläufe um g „verschoben“ vornimmt. Die andere Bijektion überführt die Registrierprozeduren und Registriermethoden jeweils ineinander ebenso entsprechend der Interpretation, daß man von einer Prozedur oder Methode zu einer anderen kommt, indem man alle raumzeitlichen Vorgänge um g „verschoben“ durchführt.

Man könnte auch die Injektivität der beiden Gruppenhomomorphismen gewinnen, indem man forderte, daß das neutrale Element ϵ der rationalen Galilei-Gruppe das einzige Element aus $\tilde{\mathcal{G}}$ ist, für das die zugehörige S -Abbildung mit der identischen Abbildung $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ zusammenfällt und für das die zugehörige T -Abbildung mit der identischen Abbildung $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ übereinstimmt. Eine derartige Forderung ist nicht schwer zu motivieren, denn welche Galilei-Transformation außer derjenigen, die alles so läßt, wie es ist, sollte auf die identischen Abbildungen $\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}$ und $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ führen. Daß eine obige Forderung zur Injektivität der beiden Gruppenhomomorphismen aus Satz 11.1.6 hinreichend ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 11.1.7 *Für eine Zustands-Effekt-Struktur mögen neben AGal 1 und AGal 2 noch die folgenden Aussagen gelten:*

- (i) *Bezeichnet S_g für ein Element g der Menge $\tilde{\mathcal{G}}$ die identische Abbildung auf \mathcal{Q} , dann gilt $g = \epsilon$.*
- (ii) *Bezeichnet T_g für ein Element g der Menge $\tilde{\mathcal{G}}$ die identische Abbildung auf \mathcal{R} , dann gilt $g = \epsilon$.*

Dann besitzen die Gruppenhomomorphismen aus Satz 11.1.6 die Eigenschaft der Injektivität.

Beweis:

Es wird nur der Fall der p -Automorphismen betrachtet, da der Fall für die r -Automorphismen analog verläuft.

Seien g_1, g_2 zwei Elemente aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit $S_{g_1} = S_{g_2}$. Dann gilt mit AGal 2 in Form von Lemma 11.1.2 die Identität $S_{g_1 g_2^{-1}} = Id$. Mit der Voraussetzung erhält man somit $g_1 g_2^{-1} = \epsilon$. Also gilt $g_1 = g_2$. ■

Für die weiteren Betrachtungen bedarf es allerdings nicht der obigen Injektivitätseigenschaften, weswegen sie hier auch nicht gefordert werden.

11.2 Darstellung der rationalen Galilei-Gruppe durch Mischungs- und Effekt-Automorphismen

Nachdem im vorigen Abschnitt die Darstellung der rationalen Galilei-Gruppe durch bijektive Abbildungen auf dem Niveau der Präparier- und Registrierstrukturen gelungen ist, stellt sich die Frage danach, wie sich die rationale Galilei-Gruppe im

Zusammenhang mit Zuständen und Effekten darstellt. Es ist naheliegend, diesbezüglich für jede rationale Galilei-Transformation g die folgenden beiden Abbildungen zu betrachten, wobei φ und ψ wiederum die kanonischen Abbildungen aus Definition 6.1.5 bezeichnen mögen:

$$\tilde{S}_g : \varphi(\mathcal{Q}') \longrightarrow K, \quad \varphi(a) \longmapsto \varphi(S_g(a)), \quad (11.8)$$

$$\tilde{T}_g : \psi(\mathcal{F}) \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}, \quad \psi(f) \longmapsto \psi(T_g(f)). \quad (11.9)$$

Die physikalische Interpretation der Abbildung \tilde{S}_g ergibt sich unmittelbar aus derjenigen von S_g , denn S_g ordnet jedem Präparierverfahren a dasjenige Präparierverfahren a' zu, das sich aus a dadurch ergibt, daß man alle a definierenden Vorgänge bezüglich a um g „verschoben“ vornimmt. Folglich ordnet die Abbildung aus (11.8) einem Zustand $\varphi(a)$ denjenigen Zustand zu, zu dem das um g „verschobene“ Präparierverfahren $a' = S_g(a)$ gehört. Also stellt \tilde{S}_g die Galilei-Transformation g im Rahmen der Zustände dar. Analoge Überlegungen gelten für die Abbildung \tilde{T}_g und die Effekte.

Bezüglich der Wohldefiniertheit von \tilde{S}_g und \tilde{T}_g bedenke man die r-Invarianz von S_g und die p-Invarianz von T_g nach Satz 11.1.5. Dadurch wird gesichert, daß die S_g -Bilder einer Klasse zugehöriger Präparierverfahren wiederum zu derselben Klasse gehören. Ein ebensolches Resultat folgt für die Effektverfahren.

Für die weiteren Betrachtungen wird nun eine Zustands-Effekt-Struktur vorausgesetzt, die den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, sAV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a und AV 4b genügt. Mit der Forderung nach AV 4i beschränkt man sich auf den Fall eines irreduziblen Verbandes der Entscheidungseffekte zur Umgehung unnötiger Komplikationen. Man bedenke dafür die Erörterungen in Abschnitt 10.1. Im weiteren fordere man die Gültigkeit von AGal 1 und AGal 2.

Auf Basis der Ergebnisse aus Abschnitt 10.2 und 10.3 existieren ein separabler, unendlichdimensionaler, komplexer Hilbertraum \mathcal{H} und isometrische Isomorphismen

$$\tilde{\rho} : B_\Delta \longrightarrow \mathbb{S}(\mathcal{H})$$

von $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ auf reellen Vektorraum der selbstadjungierten Spur-Klasse-Operatoren ausgestattet mit der Spur-Norm $\|\cdot\|_{S_p}$ und

$$\chi : \Delta \longrightarrow \{A \in L \mid A \text{ selbstadjungiert}\}$$

von $(\Delta, \|\cdot\|)$ auf den mit der Operatornorm $\|\cdot\|_{O_p}$ ausgestatteten reellen Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$.

G. Ludwig arbeitet in Abschnitt 4 des Kapitels V in [Lud83b], S. 207-230, die bisher entwickelte mathematische Theorie aus. Da es sich dabei um rein mathematische Aussagen handelt, in die keine weiteren physikalischen Überlegungen eingehen, und da im vorliegenden Kapitel der Schwerpunkt auf den physikalischen Einsichten liegen soll, werden hier lediglich die wichtigsten Ergebnisse seiner Rechnungen vorgestellt. Ludwig weist nach, daß für jede rationale Galilei-Transformation g die Abbildung \tilde{S}_g aus (11.8) in eindeutiger Weise als isometrischer Isomorphismus von ganz $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ auf ganz $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ fortgesetzt werden kann. Die so gewonnene Fortsetzung soll ebenfalls mit \tilde{S}_g symbolisiert werden. Ebenso soll bei der Restriktion von \tilde{S}_g auf K in vereinfachender Weise das Symbol \tilde{S}_g zur Anwendung kommen. Sie liefert eine affine Bijektion von K auf K . Das heißt, daß für beliebige Elemente x_1, x_2 aus K und eine beliebige Zahl λ aus dem reellen Intervall $[0, 1]$ die Identität $\tilde{S}_g(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda \tilde{S}_g(x_1) + (1 - \lambda)\tilde{S}_g(x_2)$ gilt. Für die Konvexität von K sei an Satz 8.3.4 (i) erinnert. Eine affine Bijektion von K auf K wird als **Mischungs-Automorphismus** bezeichnet. Auch bei der Umkehrabbildung \tilde{S}_g^{-1} handelt es sich um einen isometrischen Isomorphismus von $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ auf $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$, dessen Restriktion auf K ein Mischungs-Automorphismus ist. Für jedes g aus \mathfrak{G} erweisen sich die Mischungs-Automorphismen \tilde{S}_g und \tilde{S}_g^{-1} als stetig, wenn man K sowohl im Urbild- wie im Bildraum mit der Topologie $\sigma(K, \mathcal{D})$ ausstattet. Zur Definition von \mathcal{D} siehe Definition 8.2.1 und bezüglich der Definition der Topologie $\sigma(K, \mathcal{D})$ siehe Seite 168. G. Ludwig spricht daher von den sogenannten **\mathcal{D} -stetigen Mischungs-Automorphismen**.

Ebenso kann für jedes g aus \mathfrak{G} die Abbildung \tilde{T}_g aus (11.9) in eindeutiger Weise zu einem in beide Richtungen ordnungserhaltenden, isometrischen Isomorphismus von ganz $(\Delta, \|\cdot\|)$ auf ganz $(\Delta, \|\cdot\|)$ fortgesetzt werden. Die so gewonnene Fortsetzung von \tilde{T}_g wird wiederum mit dem Symbol \tilde{T}_g belegt. Die Restriktion auf $\hat{\mathcal{L}}$, für die der Einfachheit halber ebenfalls \tilde{T}_g notiert wird, stellt dabei eine Bijektion von $\hat{\mathcal{L}}$ auf $\hat{\mathcal{L}}$ mit der Eigenschaft dar, daß für alle Elemente y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ mit $y_1 + y_2 \in \hat{\mathcal{L}}$ die Identität $\tilde{T}_g(y_1 + y_2) = \tilde{T}_g(y_1) + \tilde{T}_g(y_2)$ gilt. Eine Bijektion von $\hat{\mathcal{L}}$ auf $\hat{\mathcal{L}}$ mit einer solchen Eigenschaft wird **Effekt-Automorphismus** genannt. Ferner ist zu bemerken, daß die Restriktion von \tilde{T}_g auf den Verband G der Entscheidungseffekte einen Ortho-Isomorphismus von G auf G darstellt. Mit der Umkehrabbildung \tilde{T}_g^{-1} liegt gleichsam ein isometrischer Isomorphismus von ganz $(\Delta, \|\cdot\|)$ auf ganz $(\Delta, \|\cdot\|)$ vor, dessen Restriktion auf $\hat{\mathcal{L}}$ ein Effekt-Automorphismus ist und dessen Restriktion auf G den Verband G in orthoisomorpher Weise auf sich abbildet. Der Einfachheit halber kommt auch hier stets dasselbe Symbol \tilde{T}_g^{-1} zur Anwendung unabhängig davon, ob man die Abbildung auf ganz Δ oder eine zugehörige Restriktion betrachtet.

Im weiteren sind für alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ die Abbildungen \tilde{T}_g und \tilde{T}_g^{-1} stetig, wenn man Δ sowohl im Urbild- wie auch im Bildraum mit der Topologie $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ versieht. Gleichartiges gilt auch für die Effekt-Automorphismen \tilde{T}_g und \tilde{T}_g^{-1} bei Ausstattung von $\hat{\mathcal{L}}$ mit der Unterraumtopologie $\sigma(\Delta, B_\Delta) |_{\hat{\mathcal{L}}}$ im Urbild- und im Bildraum. Daher wird von B_Δ -**stetigen Effekt-Automorphismen** gesprochen. Eine weitere wichtige Eigenschaft besteht in der **\mathcal{D} -Invarianz von \tilde{T}_g** . Das heißt, daß für alle Elemente y aus \mathcal{D} auch $\tilde{T}_g(y)$ zu \mathcal{D} gehört.

Wie AGal 1 in Form von Punkt (iii)(b) aus Definition 11.1.1 erwarten läßt, hängen die Abbildungen \tilde{S}_g und \tilde{T}_g in charakteristischer Weise zusammen, denn \tilde{T}_g erweist sich als die zu \tilde{S}_g^{-1} adjungierte Abbildung. Das heißt, mit g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ gilt für alle Elemente x aus B_Δ und alle Elemente y aus Δ :

$$\xi_\Delta(\tilde{S}_g^{-1}(x), y) = \xi_\Delta(x, \tilde{T}_g(y)). \quad (11.10)$$

Dabei sei daran erinnert, daß mit Satz 8.2.3 (ii) in Verbindung mit Definition 8.1.18 und Lemma 8.1.21 der normierte Raum $(\Delta, \|\cdot\|)$ mit dem Norm-Dualraum des Raumes $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ identifizierbar ist und daß bei einer solchen Identifikation die kanonische Bilinearform des Dualsystems $\langle B_\Delta, B'_\Delta \rangle$ mit ξ_Δ zusammenfällt.

Es sei hier erwähnt, daß Ludwigs Überlegungen nur unter gewissen Mindestanforderungen an die Dimension des vorkommenden Hilbertraumes gelten. Solche Anforderungen sind für die hier angestellten Betrachtungen unerheblich, da gemäß Satz 10.2.1 die Dimension des Hilbertraumes \mathcal{H} unendlich ist. Weil Zustands-Effekt-Strukturen aber auch im allgemeinen wichtige physikalische Strukturen darstellen, bedarf es dahingehender Überlegungen, welche Dimension zwingend gefordert werden muß. Derartigen Erörterungen widmen sich die Artikel [CDVLL00] und [MP01]. Sie bringen zum Ausdruck, daß die entscheidenden Strukturen auch schon für Hilberträume einer Dimension größer oder gleich 2 zur Verfügung stehen.

Mit Hilfe der oben aufgezählten Eigenschaften läßt sich nun in Umsetzung einer Feststellung in [Lud83b], Unterabschnitt 1.1, S. 232 zeigen:

Lemma 11.2.1 *Seien g_1, g_2 zwei Elemente aus $\tilde{\mathcal{G}}$, dann gilt einerseits für alle Elemente x aus K*

$$\tilde{S}_{g_1} \tilde{S}_{g_2}(x) = \tilde{S}_{g_1 g_2}(x) \quad (11.11)$$

und andererseits für alle Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}}$

$$\tilde{T}_{g_1} \tilde{T}_{g_2}(y) = \tilde{T}_{g_1 g_2}(y). \quad (11.12)$$

Beweis:

Es seien g_1, g_2 aus $\tilde{\mathcal{G}}$ gewählt. Dann gilt für alle $a \in \mathcal{Q}'$ gemäß der Definition von \tilde{S}_g und AGal 2:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{g_1} \tilde{S}_{g_2}(\varphi(a)) &= \tilde{S}_{g_1}(\varphi(S_{g_2}(a))) = \varphi(S_{g_1} S_{g_2}(a)) \\ &= \varphi(S_{g_1 g_2}(a)) = \tilde{S}_{g_1 g_2}(\varphi(a)).\end{aligned}$$

Also gilt $\tilde{S}_{g_1 g_2} w = \tilde{S}_{g_1} \tilde{S}_{g_2} w$ für alle Elemente w aus \mathcal{K} . Da K aber der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Abschluß von \mathcal{K} ist und da ob der Angaben im Vorfeld des Lemmas die Abbildungen \tilde{S}_g für alle $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ sind, folgt die Aussage für alle $x \in K$.

Erinnert man, daß mit Satz 8.2.7 die Menge $\hat{\mathcal{L}}$ der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abschluß von \mathcal{L} ist, dann folgt der zweite Teil der Behauptung ganz analog zum obigen Vorgehen unter Ausnutzung der im Vorfeld des Lemmas genannten Tatsache, daß \tilde{T}_g für jedes $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ stetig ist, wenn man Δ mit der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Topologie versieht. ■

In Entsprechung des Lemmas 11.1.2 kann man mit obigem Lemma insbesondere notieren:

Lemma 11.2.2 *Sei g Element aus $\tilde{\mathcal{G}}$, dann fällt zum einen die zu \tilde{T}_g inverse Abbildung mit der Abbildung $\tilde{T}_{g^{-1}}$ auf ganz $\hat{\mathcal{L}}$ zusammen, und zum anderen gilt die Identität von \tilde{S}_g^{-1} und $\tilde{S}_{g^{-1}}$ auf ganz K . Das heißt, es ergeben sich die Abbildungsidentitäten:*

$$\tilde{S}_g^{-1} = \tilde{S}_{g^{-1}}, \quad (11.13)$$

$$\tilde{T}_g^{-1} = \tilde{T}_{g^{-1}}. \quad (11.14)$$

Beweis:

Für für beliebige $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ folgt mit Lemma 11.1.2:

$$\tilde{S}_{g^{-1}}(\tilde{S}_g(\varphi(a))) = \tilde{S}_{g^{-1}}(\varphi(S_g(a))) = \varphi(S_{g^{-1}} S_g(a)) = \varphi(S_e(a)) = \varphi(a).$$

Da \tilde{S}_g Automorphismus ist und da \tilde{S}_g somit eine Umkehrabbildung besitzt, folgt für alle $a \in \mathcal{Q}'$:

$$\tilde{S}_g^{-1}(\varphi(a)) = \tilde{S}_{g^{-1}}(\varphi(a)). \quad (11.15)$$

Das heißt, daß die Abbildungen \tilde{S}_g^{-1} und $\tilde{S}_{g^{-1}}$ auf \mathcal{K} identisch sind. Man bedenke nun, daß K den $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Abschluß von \mathcal{K} darstellt und daß für jedes

$g \in \tilde{\mathcal{G}}$, den Angaben im Vorfeld des Lemmas 11.2.1 folgend, sowohl \tilde{S}_g^{-1} als auch $\tilde{S}_{g^{-1}}$ stetige Abbildungen bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ bezeichnen. Dann folgt die Aussage (11.15) für alle $x \in K$. Die Behauptung (11.14) ergibt sich analog aus Lemma 11.1.2 und mit den $\sigma(\Delta, B_\Delta) |_{\hat{\mathcal{L}}}$ -Stetigkeitseigenschaften von $\tilde{T}_{g^{-1}}$ und \tilde{T}_g^{-1} . ■

Der physikalischen Interpretation zufolge, wie sie eingangs des Abschnitts für die Abbildungen \tilde{S}_g und \tilde{T}_g erläutert wurde, bringt Lemma 11.2.2 also zum Ausdruck, daß die inverse Abbildung von \tilde{S}_g oder \tilde{T}_g gerade mit derjenigen Abbildung zusammenfällt, die der inversen rationalen Galilei-Transformation zugehörig ist.

Es ist offensichtlich, daß die Menge der \mathcal{D} -stetigen Mischungs-Automorphismen wie auch die Menge der B_Δ -stetigen Effekt-Automorphismen bezüglich der Hintereinanderausführung als Operation Gruppencharakter haben. Durch Satz 11.1.6 wurden zwei Darstellungen der rationalen Galilei-Gruppe einerseits durch r -stetige p -Automorphismen und andererseits durch p -stetige r -Automorphismen festgehalten. Mit Lemma 11.2.1 kann eine analoge Aussage im Zusammenhang mit den Mischungs- und Effekt-Automorphismen angegeben werden:

Satz 11.2.3 (Darstellung der rationalen Galilei-Gruppe $\tilde{\mathcal{G}}$ durch stetige Mischungs- und Effekt-Automorphismen)

Sei mit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur im Sinne von Definition 6.3.1 gegeben, für die die Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b sowie AGal 1 und AGal 2 gelten.

Dann stellen die Abbildungen

$$\tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \{\tilde{S} \mid \tilde{S} \text{ ist } \mathcal{D}\text{-stetiger Mischungs-Automorphismus}\}, \quad g \longmapsto \tilde{S}_g \quad (11.16)$$

und

$$\tilde{\mathcal{G}} \longrightarrow \{\tilde{T} \mid \tilde{T} \text{ ist } B_\Delta\text{-stetiger Effekt-Automorphismus}\}, \quad g \longmapsto \tilde{T}_g \quad (11.17)$$

zwei Gruppenhomomorphismen dar.

Beweis:

Die Wohldefiniertheit der Abbildungen wurde zu Beginn des Abschnitts durch Rückgriff auf die Ludwigschen Ergebnisse in [Lud83b], Kapitel V, S. 207-230 bereitgestellt. Die Aussagen über die Gruppenhomomorphie im Sinne von Definition G.3.4 wird gerade durch Lemma 11.2.1 geliefert. ■

Folglich kann man sagen:

Genügt eine Zustands-Effekt-Struktur wie etwa diejenige der hier betrachteten Quantenmechanik den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b sowie AGal 1 und AGal 2, dann stellt sich die rationale Galilei-Gruppe sowohl durch eine Untergruppe der Gruppe der \mathcal{D} -stetigen Mischungs-Automorphismen als auch durch eine Untergruppe der Gruppe der B_Δ -stetigen Effekt-Automorphismen dar.

Das heißt, man kann die rationale Galilei-Gruppe im Zusammenhang mit der hier aufgebauten Formulierung der Quantenmechanik sowohl als Mischungs- als auch als Effektautomorphismen verstehen, deren physikalische Interpretation durch die Überlegungen im Anschluß an die Einführung der Abbildungen in (11.8) und (11.9) dargelegt wurde.

11.3 Darstellung der gesamten Galilei-Gruppe

Die in den ersten beiden Abschnitten gewonnenen Darstellungsaussagen beziehen sich nur auf die rationale Galilei-Gruppe. Es stellt sich nun die Frage, wie man derartige Darstellungen auf die gesamte Galilei-Gruppe ausdehnen kann.

Dazu werden nun Auszüge der Erörterungen in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitte 1.1-1.3, S. 232-246 dargestellt.

Wie in Abschnitt 11.1 dargelegt wurde, kommt den Galilei-Transformationen im Rahmen einer Raum-Zeit-Vortheorie zur Quantenmechanik Realitätscharakter vermittelt geeigneter Abbildungsprinzipien zu. Die zugehörige Bildmenge $\tilde{\mathcal{G}}$ ist die Menge der rationalen Galilei-Transformationen. Den Überlegungen in Kapitel 4.2 über die unscharfen Abbildungsprinzipien folgend ist für die Menge der rationalen Galilei-Transformationen auch eine uniforme Struktur der physikalischen Unschärfe einzuführen. Sie soll mit \mathcal{N}_{ph} bezeichnet werden. Da die rationalen Zahlen dicht in der Menge der reellen Zahlen liegen, sollte es möglich sein, bezüglich der von \mathcal{N}_{ph} induzierten Topologie eine durch reelle Zahlen charakterisierte Galilei-Transformation beliebig genau durch rationale Galilei-Transformationen zu approximieren. Physikalisch kommt dadurch lediglich zum Ausdruck, daß man reelle und rationale Galilei-Transformationen bezüglich endlicher Unschärfemengen gar nicht unterscheiden kann. Demnach kann die Uniformität der physikalischen Unschärfe nur dann richtig gewählt sein, wenn sie obiger Eigenschaft bezüglich des Verhältnisses reeller und rationaler Galilei-Transformationen zueinander nachkommt. Es wird

daher im weiteren davon ausgegangen, daß \mathcal{G} mit der Hausdorff-Vervollständigung von $\tilde{\mathcal{G}}$ identisch ist, wobei die \mathcal{G} zugehörige Uniformität dann mit $\hat{\mathcal{N}}_{ph}$ bezeichnet wird. Dafür sei an Definition A.4.8 erinnert. Dies geschieht in Entsprechung der Überlegungen, wie sie in Kapitel 7 in Form von Satz 7.2.8 angestellt wurden. Dort konnte aus den rationalen Konvexitätseigenschaften von \mathcal{K} und \mathcal{L} auf die reelle Konvexität der zugehörigen Hausdorff-Vervollständigungen geschlossen werden. Neben den Eigenschaften der Separabilität, der Metrisierbarkeit sowie der Präkompaktheit und Kompaktheit, die den uniformen Räumen $(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{N}_{ph})$ und $(\mathcal{G}, \hat{\mathcal{N}}_{ph})$ gemäß den allgemeinen Überlegungen bezüglich der Endlichkeit der Physik in Abschnitt 4.3 zukommen, sollte für die Uniformität der physikalischen Unschärfe gelten, daß für alle g_1 aus \mathcal{G} die Abbildungen

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad g \longmapsto g_1 g, \quad (11.18)$$

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}, \quad g \longmapsto g g_1 \quad (11.19)$$

bei Ausstattung von \mathcal{G} mit $\hat{\mathcal{N}}_{ph}$ gleichmäßig stetig sind. Eine solche Forderung ist durchaus naheliegend, denn wenn man sich mit einer Folge von Galilei-Transformationen $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ einer anderen Galilei-Transformation g in der Form immer weiter annähert, daß es immer kleinerer Unschärfemengen bedarf, um sie auseinander zu halten, dann sollte dasselbe auch für die zusammengesetzten Galilei-Transformationen $(g_i g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $g_1 g$ oder $(g_i g_1)_{i \in \mathbb{N}}$ und $g g_1$ gelten. Dazu sei angemerkt, daß aufgrund der Metrisierbarkeit und der Kompaktheit der Uniformität von $\hat{\mathcal{N}}_{ph}$ die Betrachtung von Folgen genügt, wie durch die Sätze A.5.6 (ii) und A.6.10 zum Ausdruck kommt. Die bisher erwähnten Eigenschaften der uniformen Struktur der physikalischen Unschärfe im Zusammenhang mit den Galilei-Transformationen werden als Teil der Vorthorie der Newtonschen Raum-Zeit aufgefaßt. Daher wird den obigen Forderungen kein eigener Name in der Axiomatik der Quantenmechanik zugeordnet. Sie werden vielmehr als geltend erachtet, da man die Newtonsche Raum-Zeit als Vorthorie voraussetzt.

Darüber hinaus sollen aber weitere Eigenschaften diskutiert werden, die konkreteren Bezug auf den bisher entwickelten Aufbau der Quantenmechanik nehmen.

Man betrachte ein Effektverfahren f und eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, die im Sinne von Abschnitt 5.3 die Meßgenauigkeit der relativen Häufigkeiten charakterisieren soll. Die Erfahrung zeigt nun, daß sich in Abhängigkeit von ε und f ein gewisses Maß an Ungenauigkeiten in der raum-zeitlichen Positionierung von f bezüglich des zugrundegelegten Bezugssystems experimentell nicht feststellen läßt. Das heißt, man kann bezüglich vorgegebenem f und ε eine Unschärfemenge $U_{\varepsilon, f}$ so angeben, daß sich für $\psi(f)$ und $\psi(T_g(f))$ mit $(g, \mathfrak{e}) \in U_{\varepsilon, f}$ bezüglich der relativen Häufigkeiten

bei Präparation in den verschiedenen Zuständen w kein Unterschied ergibt, der die vorgegebene Grenze ε überschreitet. Mathematisch exakt formuliert gelangt man also zu dem Postulat, daß zu jedem Element f aus \mathcal{F} und jedem $\varepsilon > 0$ ein $U_{\varepsilon, f}$ aus \mathcal{N}_{ph} so existiert, daß für alle w aus \mathcal{K} und alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit $(g, \mathfrak{e}) \in U_{\varepsilon, f}$ gilt:

$$\left| \mu(w, \psi(f)) - \mu(w, \psi(T_g(f))) \right| < \varepsilon.$$

Ebenso kann man eine umgekehrte Überlegung anstellen. Wenn man ein Präparierverfahren a und wiederum eine die Meßgenauigkeit der relativen Häufigkeiten charakterisierende reelle Zahl $\delta > 0$ betrachtet, dann stellt es ebenfalls einen Erfahrungswert dar, daß man auch die Präparierverfahren mit einer gewissen Ungenauigkeit raum-zeitlich positionieren kann, ohne daß das experimentell vermittelt mit a kombinierbarer Effektverfahren auf dem vorgegebenen Meßgenauigkeitsniveau feststellbar wäre. Das heißt also, zu jedem a aus \mathcal{Q}' und jedem $\delta > 0$ wird die Existenz einer Unschärfemenge $U_{\delta, a}$ gefordert, so daß für alle y aus \mathcal{L} und alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit $(g, \mathfrak{e}) \in U_{\delta, a}$ die Ungleichung $\left| \mu(\varphi(a), y) - \mu(\varphi(S_g(a)), y) \right| < \delta$ erfüllt wird. Bedenkt man Lemma 11.1.2, dann kann man in völlig gleichwertiger Weise auch fordern, daß es zu jedem a aus \mathcal{Q}' und jedem $\delta > 0$ eine Unschärfemenge $U_{\delta, a}$ so gibt, daß für alle y aus \mathcal{L} und alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit $(g, \mathfrak{e}) \in U_{\delta, a}$ gilt:

$$\left| \mu(\varphi(a), y) - \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), y) \right| < \delta. \quad (11.20)$$

Um die von Ludwig gewählte Form zu erhalten, sind noch einige Umformungen notwendig, die auf den Definitionen der Abbildungen \tilde{S}_g und \tilde{T}_g sowie auf Formel (11.10) beruhen. Man erhält für den Term auf der linken Seite von (11.20) mit der Abmachung $w := \varphi(a)$ und $y := \psi(f)$, wobei man die Zugehörigkeit y zu \mathcal{L} bedenke:

$$\begin{aligned} \left| \mu(\varphi(a), y) - \mu(\varphi(S_g^{-1}(a)), y) \right| &= \left| \mu(w, y) - \mu(\tilde{S}_g^{-1}(w), y) \right| \\ &\stackrel{(11.10)}{=} \left| \mu(w, y) - \mu(w, \tilde{T}_g(y)) \right| \\ &= \left| \mu(w, y) - \mu(w, \psi(T_g(f))) \right|. \end{aligned}$$

Also kann man die obige Aussage auch folgendermaßen formulieren. Zu jedem w aus \mathcal{K} und jedem $\delta > 0$ existiert ein Element $U_{\delta, w}$ aus \mathcal{N}_{ph} , so daß für alle f aus \mathcal{F} und alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit $(g, \mathfrak{e}) \in U_{\delta, w}$ die Relation $\left| \mu(w, y) - \mu(w, \psi(T_g(f))) \right| < \delta$ gilt. Die so gewonnenen zwei Forderungen an die Uniformität der physikalischen Unschärfe werden nun axiomatisch in der mathematischen Theorie verankert, indem das von

Ludwig in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 1.1, S. 235 mit AG 1 bezeichnete Axiom gefordert wird:

AGal 3 Zu jedem w aus \mathcal{K} und jedem $\delta > 0$ existiert ein Element $U_{\delta,w}$ aus \mathcal{N}_{ph} derart, daß für alle f aus \mathcal{F} und alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit (g, \mathfrak{e}) aus $U_{\delta,w}$ gilt:

$$\left| \mu(w, \psi(f)) - \mu(w, \psi(T_g(f))) \right| < \delta.$$

Zu jedem f aus \mathcal{F} und jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein Element $U_{\varepsilon,f}$ aus \mathcal{N}_{ph} , so daß für alle w aus \mathcal{K} und alle g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit (g, \mathfrak{e}) aus $U_{\varepsilon,f}$ gilt:

$$\left| \mu(w, \psi(f)) - \mu(w, \psi(T_g(f))) \right| < \varepsilon.$$

Durch Axiom AGal 3 ist es möglich, für jedes y aus \mathcal{D} die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung

$$(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{N}_{ph}) \longrightarrow (\mathcal{D}, \|\cdot\|), \quad g \longmapsto \tilde{T}_g(y) \quad (11.21)$$

nachzuweisen. Man bedenke dabei die \mathcal{D} -Invarianz von \tilde{T}_g . Ebenso kann man für jedes x aus B_Δ die gleichmäßige Stetigkeit der Abbildung

$$(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{N}_{ph}) \longrightarrow (B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta}), \quad g \longmapsto \tilde{S}_g(x) \quad (11.22)$$

zeigen. Den Nachweis der beiden Stetigkeitsaussagen liefert Th. 1.1.2 in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 1.1, S. 236. Damit können die obigen Abbildungen vermittle Satz A.4.7 in eindeutiger Weise gleichmäßig stetig auf ganz \mathcal{G} fortgesetzt werden, denn weiter oben wurde begründet, warum \mathcal{G} als Hausdorff-Vervollständigung von $(\tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{N}_{ph})$ anzusehen ist. Die darüber hinaus nötige Normvollständigkeit von \mathcal{D} ergibt sich dabei, da \mathcal{D} normabgeschlossener Unterraum des Banachraumes $(R, \|\cdot\|)$ ist, wie aus Definition 8.2.1 und Satz 8.1.7 bekannt ist. Mit den gleichmäßigen Fortsetzungen der Abbildungen aus (11.21) und (11.22) liegen Funktionen $F_1 : \mathcal{G} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ und $F_2 : \mathcal{G} \times B_\Delta \longrightarrow B_\Delta$ vor. Da aber $\hat{\mathcal{L}}$ im allgemeinen keine Teilmenge von \mathcal{D} ist, verfügt man mit $F_1(g, \cdot)$ für ein g aus \mathcal{G} noch nicht über eine Abbildung auf ganz $\hat{\mathcal{L}}$. Man kann aber zeigen, daß man $F_1(g, \cdot)$ für jedes $g \in \mathcal{G}$ zu einem Effekt-Automorphismus $\hat{\mathcal{L}} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ und damit in eindeutiger Weise auch zu einem Isomorphismus $\Delta \longrightarrow \Delta$ fortsetzen kann. Siehe dafür Th. 1.1.3 in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 1.1, S. 236. Wie man unmittelbar einsieht, fallen diese Fortsetzungen für jedes g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ mit den bekannten Abbildungen \tilde{T}_g zusammen.

Ebenfalls unmittelbar ergibt sich, daß für rationale Galilei-Transformationen g die Abbildungen \tilde{S}_g und $F_2(g, \cdot)$ identisch sind. Darüber hinaus gewinnt man aber in den Restriktionen $F_2(g, \cdot)|_K$ für g aus $\mathcal{G} \setminus \tilde{\mathcal{G}}$ weitere Mischungs-Automorphismen. Die so hinzugewonnenen Effekt- und Mischungs-Automorphismen werden wiederum mit \tilde{S}_g und \tilde{T}_g bezeichnet. Mit einer solchen Bezeichnungsweise läßt sich in Erweiterung von (11.10) zeigen, daß für alle g aus \mathcal{G} , alle x aus B_Δ und alle y aus Δ gilt:

$$\xi_\Delta(\tilde{S}_g^{-1}(x), y) = \xi_\Delta(x, \tilde{T}_g(y)). \quad (11.23)$$

Es sei hier nur kurz erwähnt, daß sich auch die im vorigen Abschnitt angedeuteten Stetigkeitseigenschaften der Automorphismen \tilde{S}_g und \tilde{T}_g mit g aus $\tilde{\mathcal{G}}$ auf diejenigen mit g aus \mathcal{G} übertragen lassen. Dabei wird im besonderen ein Ergebnis aus [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 1.3, S. 245f., hervorgehoben, demzufolge es möglich ist, die Menge der B_Δ -stetigen Effekt-Automorphismen mit einer geeigneten Topologie zu versehen, so daß sich die Abbildung

$$\mathcal{G} \longrightarrow \{ \tilde{T} \mid \tilde{T} \text{ ist } B_\Delta\text{-stetiger Effekt-Automorphismus} \}, \quad g \longmapsto \tilde{T}_g$$

bei Ausstattung von \mathcal{G} mit der \mathcal{N}_{ph} zugehörigen Topologie als stetig erweist. Damit kann man nun die Erweiterung des Satzes 11.2.3 beweisen. Dabei wird eine Feststellung Ludwigs in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 1.3, S. 245 konkret ausgeführt.

Satz 11.3.1 (Darstellung der gesamten Galilei-Gruppe \mathcal{G} durch stetige Mischungs- und Effekt-Automorphismen)

Bezeichne $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur, für die die Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b sowie AGal 1, AGal 2 und AGal 3 gelten.

Werden die Symbole \tilde{S}_g und \tilde{T}_g in der Weise, wie es im Laufe dieses und des letzten Abschnitts erläutert wurde, verwendet, dann stellen die Abbildungen

$$\mathcal{G} \longrightarrow \{ \tilde{S} \mid \tilde{S} \text{ ist } \mathcal{D}\text{-stetiger Mischungs-Automorphismus} \}, \quad g \longmapsto \tilde{S}_g \quad (11.24)$$

und

$$\mathcal{G} \longrightarrow \{ \tilde{T} \mid \tilde{T} \text{ ist } B_\Delta\text{-stetiger Effekt-Automorphismus} \}, \quad g \longmapsto \tilde{T}_g \quad (11.25)$$

zwei Gruppenhomomorphismen dar. Es gilt für alle Elemente g, g_1, g_2 aus \mathcal{G} und alle Elemente x aus K :

$$\tilde{S}_{g_1} \tilde{S}_{g_2}(x) = \tilde{S}_{g_1 g_2}(x) \quad \text{und} \quad \tilde{S}_g^{-1}(x) = \tilde{S}_{g^{-1}}(x). \quad (11.26)$$

Ferner ergibt sich für alle Elemente g, g_1, g_2 aus \mathcal{G} und alle Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}}$

$$\tilde{T}_{g_1} \tilde{T}_{g_2}(y) = \tilde{T}_{g_1 g_2}(y) \quad \text{und} \quad \tilde{T}_g^{-1}(y) = \tilde{T}_{g^{-1}}(y). \quad (11.27)$$

Beweis:

Die Wohldefiniertheit der betrachteten Abbildungen ist Inhalt der Überlegungen und Verweise des bisherigen Abschnitts, so daß noch die Gruppeneigenschaften im Sinne von Definition G.3.4 zu zeigen sind. Man betrachte dazu zwei Elemente g_1, g_2 aus \mathcal{G} . Da $\tilde{\mathcal{G}}$ bezüglich der durch $\hat{\mathcal{N}}_{ph}$ induzierten Topologie dicht in \mathcal{G} liegt und da die Uniformität der physikalischen Unschärfe nach Abschnitt 4.3 metrisierbar ist, existieren zwei Folgen $(g_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(g_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{\mathcal{G}}$, die bezüglich der $\hat{\mathcal{N}}_{ph}$ zugehörigen Topologie gegen g_1 und g_2 konvergieren. Mit der im Vorfeld des Satzes erläuterten Stetigkeit der Abbildung

$$\mathcal{G} \longrightarrow \{ \tilde{T} \mid \tilde{T} \text{ ist } B_\Delta\text{-stetiger Effekt-Automorphismus} \}, \quad g \longmapsto \tilde{T}_g$$

und mit den Stetigkeitsaussagen bezüglich der Abbildungen (11.18) und (11.19) folgt nun:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{g_1 g_2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_{g_{1n} g_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{T}_{g_{1n} g_{2m}} \stackrel{(11.11)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{T}_{g_{1n}} \tilde{T}_{g_{2m}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_{g_{1n}} \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{T}_{g_{2m}} = \tilde{T}_{g_1} \tilde{T}_{g_2}. \end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, daß durch die Abbildung aus (11.25) ein Gruppenhomomorphismus vermittelt wird. Mit Hilfe von (11.23) kann man daraus das analoge Ergebnis auch für die Abbildung aus (11.24) zeigen, denn es gilt für alle $x \in B_\Delta$ und $y \in \Delta$:

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(\tilde{\mathcal{S}}_{g_1 g_2}^{-1}(x), y) &= \xi_\Delta(x, \tilde{T}_{g_1 g_2}(y)) = \xi_\Delta(x, \tilde{T}_{g_1} \tilde{T}_{g_2}(y)) \\ &= \xi_\Delta(\tilde{\mathcal{S}}_{g_1}^{-1}(x), \tilde{T}_{g_2}(y)) = \xi_\Delta(\tilde{\mathcal{S}}_{g_2}^{-1} \tilde{\mathcal{S}}_{g_1}^{-1}(x), y). \end{aligned}$$

Da $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ ein Dualsystem darstellt, ergibt sich somit für alle $x \in B_\Delta$

$$\tilde{\mathcal{S}}_{g_1 g_2}^{-1}(x) = \tilde{\mathcal{S}}_{g_2}^{-1}(\tilde{\mathcal{S}}_{g_1}^{-1}(x)).$$

Also ist die Abbildung $\tilde{\mathcal{S}}_{g_1 g_2}^{-1}$ mit dem Kompositum $\tilde{\mathcal{S}}_{g_2}^{-1} \circ \tilde{\mathcal{S}}_{g_1}^{-1}$ identisch. Damit gilt die Identität $\tilde{\mathcal{S}}_{g_1 g_2} = \tilde{\mathcal{S}}_{g_1} \tilde{\mathcal{S}}_{g_2}$.

Es bleibt noch, die Aussagen zu den inversen Abbildungen zu zeigen. Da \mathcal{G} und $\tilde{\mathcal{G}}$ als Folge der Untergruppeneigenschaft dasselbe neutrale Element ϵ besitzen,

kann man Lemma 11.2.2 auf ϵ anwenden. Folglich erhält man für $x \in K$ aus $\epsilon\epsilon = \epsilon$ und $\epsilon = \epsilon^{-1}$:

$$\tilde{S}_\epsilon(x) = \tilde{S}_{\epsilon^{-1}}\tilde{S}_\epsilon(x) = \tilde{S}_\epsilon^{-1}(\tilde{S}_\epsilon(x)) = x.$$

Für alle $x \in K$ und alle $g \in \mathcal{G}$ erhält man somit:

$$\tilde{S}_{g^{-1}}(\tilde{S}_g(x)) = \tilde{S}_{g^{-1}g}(x) = \tilde{S}_\epsilon(x) = x.$$

Da \tilde{S}_g eine inverse Abbildung besitzt, muß sie mit $\tilde{S}_{g^{-1}}$ identisch sein. Auf analogem Wege erhält man die Aussage in (11.27). ■

Mit dem letzten Satz ist es jetzt gelungen, alle Galilei-Transformationen in der Quantenmechanik darzustellen. Einerseits finden sich die Galilei-Transformationen als \mathcal{D} -stetige Mischungs-Automorphismen wieder, andererseits realisieren sie sich als B_Δ -stetige Effekt-Automorphismen. Im nächsten Abschnitt wird man sehen, daß sich die gewonnenen Darstellungen in attraktiver Weise innerhalb des Hilbertraumes wiedergeben lassen.

11.4 Unitäre Darstellungen bis auf einen Faktor

Bevor diskutiert wird, in welcher Form sich die in den vorigen Abschnitten erreichte Darstellung der Galilei-Gruppe durch Mischungs- und Effekt-Automorphismen im Hilbertraum \mathcal{H} widerspiegelt, bedarf es der Einführung einiger Begriffe. Es wird dabei im Prinzip der Notation gefolgt, die Ludwig in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 3.3, S. 254-257 verwendet.

Die Betrachtung unitärer Darstellungen geht auf E.P. Wigner zurück, wofür die Bücher [Wig31, Wig59] genannt seien. Eine moderne Behandlung unitärer Darstellungen und der zugehörigen Theorie der Multiplikatoren bietet V.S. Varadarajan in den Kapiteln VI und VII seines Buches [Var85]. Des weiteren sind die Bücher [Mac68, Mac76, Mac78] von G.W. Mackey zu nennen. Einen Beweis für das im folgenden Abschnitt wichtige Theorem von Wigner findet sich in dem Artikel [Bar64] von V. Bargmann.

Definition 11.4.1

Seien $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ und $(\mathcal{H}', \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}'})$ zwei komplexe Hilberträume. Eine lineare Bijektion $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ heißt **unitärer Isomorphismus** zwischen den Hilberträumen \mathcal{H} und \mathcal{H}' , wenn für alle Elemente η_1, η_2 aus \mathcal{H} gilt:

$$\langle U\eta_1, U\eta_2 \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Sind \mathcal{H} und \mathcal{H}' identisch, nennt man einen unitären Isomorphismus auch **unitären Operator auf \mathcal{H}** . Die Menge der unitären Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} erhält den Namen $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Unter einem **anti-unitären Isomorphismus** versteht man eine Bijektion des Typs $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, wenn für alle Elemente η_1, η_2 aus \mathcal{H} und beliebige komplexe Zahlen α_1, α_2 gilt:

$$\begin{aligned} U(\alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2) &= \alpha_1^* U(\eta_1) + \alpha_2^* U(\eta_2) \quad (\text{Anti-Linearität}), \\ \langle U\eta_1, U\eta_2 \rangle_{\mathcal{H}'} &= \langle \eta_2, \eta_1 \rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne $*$ wie bisher die kanonische Konjugation des komplexen Zahlkörpers. Falls \mathcal{H} und \mathcal{H}' identisch sind, nennt man einen anti-unitären Isomorphismus einen **anti-unitären Operatoren auf \mathcal{H}** .

Es ist offensichtlich, daß $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ bezüglich der Operation der Hintereinanderausführung eine Gruppe ist. Dabei ist die identische Abbildung das neutrale Element.

Definition 11.4.2

Es bezeichne $\bar{\mathcal{G}}$ eine Gruppe mit neutralem Element \bar{e} . Sei zudem \mathcal{H} ein Hilbertraum. Eine Abbildung

$$U : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$$

heißt **unitäre Darstellung der Gruppe $\bar{\mathcal{G}}$ bis auf einen Faktor**, wenn $U_{\bar{e}}$ mit der identischen Abbildung auf \mathcal{H} zusammenfällt und wenn es eine komplexwertige Funktion $\omega : \bar{\mathcal{G}} \times \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \{\alpha \in \mathbb{C} \mid |\alpha| = 1\}$ so gibt, daß für alle g_1, g_2 aus $\bar{\mathcal{G}}$ gilt:

$$U_{g_1 g_2} = \omega(g_1, g_2) U_{g_1} U_{g_2}. \quad (11.28)$$

Dabei sei $U_g := U(g)$ für alle g aus $\bar{\mathcal{G}}$ gesetzt. Die Abbildung ω wird dabei als der der Darstellung U zugehörige **Multiplikator** oder **lokaler Faktor** bezeichnet.

Eine unitäre Darstellung $U : \bar{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ der Gruppe $\bar{\mathcal{G}}$ bis auf einen Faktor heißt **irreduzibel**, wenn es außer \mathcal{H} und $\{0\}$ keinen **bezüglich U invarianten** abgeschlossenen Unterraum von \mathcal{H} gibt. Das heißt, es gibt keinen abgeschlossenen echten Unterraum X von \mathcal{H} , so daß für alle g aus $\bar{\mathcal{G}}$ gilt:

$$U_g(X) \subseteq X.$$

Ist die Darstellung nicht irreduzibel, so wird sie **reduzibel** genannt.

Seien \mathcal{H} und \mathcal{H}' zwei Hilberträume, und seien $U : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ und $V : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}')$ unitäre Darstellungen der Gruppe $\overline{\mathcal{G}}$ bis auf einen Faktor. Dann heißen die Darstellungen U und V **äquivalent**, wenn es einen unitären oder anti-unitären Isomorphismus $W : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ so gibt, daß für jedes Element g aus $\overline{\mathcal{G}}$ gilt:

$$V_g = W U_g W^{-1}.$$

Die Multiplikatoren ω_1 und ω_2 zweier unitärer Darstellungen bis auf einen Faktor $U : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ und $V : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}')$ der Gruppe $\overline{\mathcal{G}}$ heißen **äquivalent**, wenn eine reellwertige Funktion $\delta : \overline{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ derart existiert, daß für alle g, g' aus $\overline{\mathcal{G}}$ gilt:

$$\omega_2(g, g') = \omega_1(g, g') e^{i[\delta(g) + \delta(g') - \delta(gg')]}.$$
 (11.29)

Bemerkung: Es sei darauf hingewiesen, daß V.S. Varadarajan in seinen Definitionen der obigen Begriffe innerhalb von [Var85] teilweise noch weitere mathematische Anforderungen stellt.

Mit der Darstellung der Galilei-Gruppe durch Mischungs- und Effekt-Automorphismen auf der Basis der Axiome AGal 1, 2 und 3 und mit der Darstellung der bisher entwickelten mathematischen Theorie durch Hilberträume in Kapitel 10 besteht nun die Möglichkeit der Anwendung des Theorems H.1.3 von R.V. Kadison, das auf das bekannte Wignersche Theorem H.1.2 zurückführbar ist. Da hier nicht den von Ludwig in [Lud83b], Kapitel V, Abschnitt 5, S. 216-230 angestellten allgemeinen Betrachtungen gefolgt werden soll, wird der folgende Satz formuliert, der sich auf den Fall der Galilei-Gruppe in der Quantenmechanik beschränkt:

Satz 11.4.3 *Sei g ein Element aus \mathcal{G} . Dann existiert ein unitärer Operator U auf \mathcal{H} , so daß für alle Elemente x aus K gilt:*

$$\rho\left(\tilde{S}_{g^{-1}}(x)\right) = U^{-1} \rho(x) U.$$
 (11.30)

Für alle Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}}$ ergibt sich:

$$\chi\left(\tilde{T}_g(y)\right) = U \chi(y) U^{-1}.$$
 (11.31)

Der Operator U ist bis auf eine globale Phase genau bestimmt, das heißt, wenn es noch einen anderen unitären Operator U' gibt, der für alle Elemente x aus K zu der Identität $\rho\left(\tilde{S}_{g^{-1}}(x)\right) = U'^{-1} \rho(x) U'$ führt, dann existiert eine reelle Zahl θ mit $U' = e^{i\theta} U$.

Beweis:

Für jedes $g \in \mathcal{G}$ bezeichnen \tilde{S}_g wie $\tilde{S}_g^{-1} = \tilde{S}_{g^{-1}}$ Mischungs-Automorphismen. Das heißt insbesondere, daß die Restriktion $\tilde{S}_g^{-1}|_K$ eine affine Bijektion von K auf K darstellt. Außerdem ist mit Satz 10.3.3 die Abbildung ρ eine affine Bijektion von K auf die Menge der Dichteoperatoren $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Demzufolge ist auch das Kompositum $\rho \circ \tilde{S}_g^{-1} \circ \rho^{-1}$ eine affine Bijektion von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ auf $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Der Satz H.1.3 von R.V. Kadison garantiert damit die Existenz eines bis auf eine globale Phase genau bestimmten unitären oder anti-unitären Operators \bar{U} auf \mathcal{H} , so daß für alle $D \in \mathbb{D}(\mathcal{H})$ gilt:

$$\rho \circ \tilde{S}_g^{-1} \circ \rho^{-1}(D) = \bar{U} D \bar{U}^{-1}.$$

Da ρ eine Bijektion von K auf $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ darstellt, gilt damit für alle $x \in K$:

$$\rho(\tilde{S}_g^{-1}(x)) = \rho \circ \tilde{S}_g^{-1} \circ \rho^{-1}(\rho(x)) = \bar{U} \rho(x) \bar{U}^{-1}.$$

Ist \bar{U} anti-unitär, dann ist es auch $U := \bar{U}^{-1}$. Entsprechendes gilt auch im Falle der Unitarität von \bar{U} , so daß damit folgt:

$$\rho(\tilde{S}_g^{-1}(x)) = U^{-1} \rho(x) U. \quad (11.32)$$

Für den in (11.32) vorkommenden Operator U kann nun die Unitarität nachgewiesen werden. Man betrachte dafür zunächst zwei Elemente g_1, g_2 aus \mathcal{G} . Mit U_{g_1} und U_{g_2} seien zwei unitäre oder anti-unitäre Operatoren benannt, die wegen der eben angestellten Überlegungen existieren und die dabei jeweils Relationen des Typs (11.32) genügen. Dann gilt mit Lemma 11.2.1 für jedes x aus K

$$\begin{aligned} U_{g_1 g_2}^{-1} \rho(x) U_{g_1 g_2} &= \rho(\tilde{S}_{(g_1 g_2)^{-1}}(x)) = \rho(\tilde{S}_{g_2^{-1}} \tilde{S}_{g_1^{-1}}(x)) \\ &= U_{g_2}^{-1} \rho(\tilde{S}_{g_1^{-1}}(x)) U_{g_2} = U_{g_2}^{-1} U_{g_1}^{-1} \rho(x) U_{g_1} U_{g_2}. \end{aligned}$$

Da nach Satz G.4.7 die Abbildung ρ in bijektiver Weise die Menge K auf die Menge der Dichteoperatoren $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ abbildet, erhält man somit die Identität der beiden affinen Bijektionen

$$\mathbb{D}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{H}), \quad D \longmapsto U_{g_1 g_2}^{-1} D U_{g_1 g_2}$$

und

$$\mathbb{D}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{H}), \quad D \longmapsto (U_{g_1} U_{g_2})^{-1} D (U_{g_1} U_{g_2}).$$

Damit folgt mit dem Theorem H.1.3 von R.V. Kadison, daß sich die Operatoren $U_{g_1 g_2}$ und $U_{g_1} U_{g_2}$ nur durch eine globale Phase unterscheiden können. Das heißt, es existiert eine reelle Zahl $\alpha(g_1, g_2)$ mit

$$U_{g_1 g_2} = e^{i \alpha(g_1, g_2)} U_{g_1} U_{g_2}. \quad (11.33)$$

Insbesondere für den Fall $g_1 = g_2$ erhält man mit $g := g_1$ die Relation

$$U_{g^2} = e^{i \alpha(g, g)} (U_g)^2. \quad (11.34)$$

Da das Produkt zweier anti-unitärer Operatoren einen unitären Operator liefert, bedeutet das, daß U_{g^2} ein unitärer Operator ist. Nun gibt es zu jeder Galilei-Transformation g eine andere Galilei-Transformation \bar{g} mit $\bar{g}^2 = g$, so daß alle U_g unitär sind.

Damit kann man nun zusammenfassend sagen, daß es zu jedem $g \in \mathcal{G}$ einen bis auf eine Phase bestimmten unitären Operator U so gibt, daß für alle $x \in K$ gilt:

$$\rho(\tilde{S}_g^{-1}(x)) = U^{-1} \rho(x) U. \quad (11.35)$$

Es bleibt, die Behauptung für \tilde{T}_g nachzuweisen. Verwendet man Satz 8.2.14 und Formel (10.32) aus Satz 10.3.6, dann folgt für alle $x \in K$ und alle $y \in \hat{\mathcal{L}}$:

$$\begin{aligned} Sp(\rho(x) U \chi(y) U^{-1}) &= Sp(U^{-1} \rho(x) U \chi(y)) \\ &\stackrel{(11.35)}{=} Sp(\rho(\tilde{S}_g^{-1}(x)) \chi(y)) \\ &\stackrel{(10.32)}{=} \xi_{\Delta}(\tilde{S}_g^{-1}(x), \chi(y)) \\ &\stackrel{(11.23)}{=} \xi_{\Delta}(x, \tilde{T}_g(y)) \\ &\stackrel{(10.32)}{=} Sp(\rho(x) \chi(\tilde{T}_g(y))). \end{aligned}$$

Da mit Satz 10.3.3 die Abbildung ρ eine Bijektion von K auf die Menge der Dichteoperatoren $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ darstellt, erhält man für alle $D \in \mathbb{D}(\mathcal{H})$

$$Sp(D U \chi(y) U^{-1}) = Sp(D \chi(\tilde{T}_g(y))).$$

Das bedeutet, daß für alle $\eta \in \mathcal{H}$ mit $\|\eta\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt:

$$\langle (U \chi(y) U^{-1}) \eta, \eta \rangle = \langle \chi(\tilde{T}_g(y)) \eta, \eta \rangle.$$

Da nun aber $\chi(\tilde{T}_g(y))$ und $U\chi(y)U^{-1}$ zwei selbstadjungierte Operatoren sind, folgt damit schon ihre Identität nach Korollar V.5.8 in [Wer97], Kapitel V, S. 195. ■

Mit Satz 11.4.3 ist es offenbar möglich, jeder Galilei-Transformation einen bis auf eine globale Phase festgelegten unitären Operator zuzuordnen. Das erlaubt es, eine große Vielzahl von Abbildungen des Typs $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ zu definieren, indem man jedem Element g aus \mathcal{G} einen unitären Operator entsprechend Satz 11.4.3 zuordnet. Die Bildoperatoren desselben Argumentes derartiger Abbildungen unterscheiden sich dann lediglich durch eine Phase $e^{i\Theta}$ mit reellem Θ .

Darüber hinaus gilt für derartige Abbildungen:

Lemma 11.4.4 *Bezeichnet U eine Abbildung $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$, die jedem Element g aus \mathcal{G} einen unitären Operator entsprechend Satz 11.4.3 zuordnet, dann ist der dem neutralen Element \mathfrak{e} der Galilei-Gruppe zugeordnete Bildoperator von der Form $e^{i\alpha}\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ mit reellem α .*

Beweis:

Dieselben Überlegungen, die im Beweis von Satz 11.4.3 zur Relation (11.34) geführt haben, können auch für den Fall $g = \mathfrak{e}$ angewendet werden. Das heißt, es existiert ein reelles α mit

$$U_{\mathfrak{e}} = U_{\mathfrak{e}^2} = e^{i\alpha}(U_{\mathfrak{e}})^2.$$

Damit folgt unmittelbar aus der Unitarität von $U_{\mathfrak{e}}$

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}} = U_{\mathfrak{e}}U_{\mathfrak{e}}^{\dagger} = e^{i\alpha}(U_{\mathfrak{e}})^2U_{\mathfrak{e}}^{\dagger} = e^{i\alpha}U_{\mathfrak{e}},$$

wobei $U_{\mathfrak{e}}^{\dagger}$ die Hilbertraum-Adjungierte von $U_{\mathfrak{e}}$ bezeichnen möge. Damit ergibt sich dann die Behauptung $U_{\mathfrak{e}} = e^{-i\alpha}\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. ■

Im weiteren werden nur die Abbildungen obigen Typs mit $U_{\mathfrak{e}} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ erörtert. Daher führt man den folgenden Namen ein:

Definition 11.4.5

Es bezeichne $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ die Menge aller Abbildungen, die jedem Element aus \mathcal{G} gemäß Satz 11.4.3 einen unitären Operator auf \mathcal{H} zuordnen und die insbesondere dem neutralen Element \mathfrak{e} von \mathcal{G} die identische Abbildung auf \mathcal{H} zuordnen.

Bemerkung: Der üblichen Konvention folgend wird für eine Abbildung U aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ die Schreibweise $U_g := U(g)$ für alle g aus \mathcal{G} vereinbart.

Für die Abbildungen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ gilt nun das folgende Lemma, das einige Erläuterungen aus [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 3.3, S. 255 zusammenfaßt:

Lemma 11.4.6 *Jedes Element aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ stellt eine unitäre Darstellung der Galilei-Gruppe \mathcal{G} bis auf einen Faktor dar. Je zwei Elemente aus \mathcal{G} sind äquivalent im Sinne von Definition 11.4.2. Genauer existiert für zwei Elemente U und V aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ eine reellwertige Funktion $\theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle g aus \mathcal{G} gilt:*

$$U_g = e^{i\theta(g)} V_g. \quad (11.36)$$

Ferner sind die den Elementen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ zugeordneten Multiplikatoren äquivalent im Sinne von Definition 11.4.2.

Beweis:

Es gelten dieselben Überlegungen, die im Beweis von Satz 11.4.3 zur Relation (11.33) geführt haben. Da die Elemente aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ definitionsgemäß für ϵ auf die identische Abbildung auf \mathcal{H} führen, ist damit der Nachweis gelungen, daß jedes Element aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ eine unitäre Darstellung der Galilei-Gruppe bis auf einen Faktor liefert.

Es seien nun mit U, V zwei Elemente aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ bezeichnet. Da sich für jedes $g \in \mathcal{G}$ die Operatoren V_g und U_g ob der Definition der Abbildungen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ nur um eine Phase unterscheiden können, existiert eine reellwertige Funktion $\theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $g \in \mathcal{G}$ die Beziehung (11.36), also

$$U_g = e^{i\theta(g)} V_g,$$

gilt. Daher sind U und V äquivalent im Sinne von Definition 11.4.2.

Benennt man die den Darstellungen U, V zugehörigen Multiplikatoren mit ω_U und ω_V , dann folgt aus (11.36) für alle $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \omega_U(g_1, g_2) U_{g_1} U_{g_2} &= U_{g_1 g_2} = e^{i\theta(g_1 g_2)} V_{g_1 g_2} \\ &= e^{i\theta(g_1 g_2)} \omega_V(g_1, g_2) V_{g_1} V_{g_2} \\ &= \omega_V(g_1, g_2) e^{i\theta(g_1 g_2)} e^{-i\theta(g_1)} e^{-i\theta(g_2)} U_{g_1} U_{g_2}. \end{aligned}$$

Da $U_{g_1} U_{g_2}$ unitär ist, handelt es sich bei $U_{g_1} U_{g_2}$ nicht um die Abbildung, die alle Elemente aus \mathcal{H} auf 0 abbildet. Somit gilt:

$$\omega_U(g_1, g_2) = e^{i\theta(g_1 g_2) - i\theta(g_1) - i\theta(g_2)} \omega_V(g_1, g_2).$$

Also sind die Multiplikatoren $\omega_U(g_1, g_2)$ und $\omega_V(g_1, g_2)$ äquivalent. ■

Damit ist es offenbar gelungen, die gesamte Galilei-Gruppe in Form unitärer Darstellungen bis jeweils auf einen Faktor in der Quantenmechanik, wie sie bisher in den Kapiteln 5 bis 11 aufgebaut wurde, wiederzufinden. Die so gewonnenen Darstellungen sind in der Menge $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ zusammengefaßt. Alle Darstellungen haben sich im Sinne der Definition 11.4.2 als äquivalent erwiesen. Kommt es nicht darauf an, welches Element konkret aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ gerade verwendet wird, sondern wird nur die Darstellbarkeit als solche durch Elemente aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ diskutiert, wird daher gelegentlich auch von der unitären Darstellung der Galilei-Gruppe gesprochen. Daß die Mitglieder der Menge $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ auch tatsächlich physikalisch äquivalent sind, zeigt das folgende Lemma:

Lemma 11.4.7 *Seien U, V zwei unitäre Darstellungen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$, und sei g ein Element aus \mathcal{G} . Dann gilt für alle x aus K und alle y aus $\hat{\mathcal{L}}$:*

$$\hat{\mu}(x, \tilde{T}_g(y)) = Sp\left(\rho(x) U_g \chi(y) U_g^{-1}\right) = Sp\left(\rho(x) V_g \chi(y) V_g^{-1}\right).$$

Beweis:

Seien $U, V \in \mathfrak{D}(\mathcal{G})$, dann existiert gemäß Lemma 11.4.6 eine Abbildung $\theta : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle g aus \mathcal{G} gilt:

$$U_g = e^{i\theta(g)} V_g. \quad (11.37)$$

Damit folgt aufgrund der Unitarität von U_g und V_g für jedes $g \in \mathcal{G}$:

$$U_g^{-1} = U_g^\dagger \stackrel{(11.37)}{=} (e^{i\theta(g)} V_g)^\dagger = V_g^\dagger e^{-i\theta(g)} = e^{-i\theta(g)} V_g^{-1}. \quad (11.38)$$

Folglich erhält man für jedes $g \in \mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x, \tilde{T}_g(y)) &\stackrel{(10.32)}{=} Sp\left(\rho(x) \chi(\tilde{T}_g(y))\right) \\ &\stackrel{(11.31)}{=} Sp\left(\rho(x) U_g \chi(y) U_g^{-1}\right) \\ &\stackrel{(11.37), (11.38)}{=} Sp\left(\rho(x) e^{i\theta(g)} V_g \chi(y) e^{-i\theta(g)} V_g^{-1}\right) \\ &= Sp\left(\rho(x) V_g \chi(y) V_g^{-1}\right). \end{aligned}$$

■

Man erhält also unabhängig von der konkreten Wahl einer Darstellung aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ stets dieselben Wahrscheinlichkeiten. Für die weiteren Betrachtungen besteht mithin

das Problem in der geeigneten Wahl eines Elementes aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$. Die so bestehende Freiheit in der Wahl eines Elementes aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ füllt Ludwig in Punkt (3.3.8) in [Lud83b], Kapitel VI, Unterabschnitt 3.3, S. 256 mit einer Stetigkeitsforderung an die Abbildungen des Typs

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g \longmapsto | \langle U_g \eta_1, \eta_2 \rangle | \quad (11.39)$$

mit Elementen η_1, η_2 aus \mathcal{H} als Parameter. Da zur adäquaten Diskussion und Motivation derartiger Forderungen recht aufwendige mathematische Ausführungen vorangestellt werden müßten, soll hier darauf verzichtet werden.

11.5 Dynamik, Masse und Spin

In den zurückliegenden Abschnitten wurde dargelegt, in welcher Weise sich die gesamte Galilei-Gruppe in Form von Mischungs- und Effekt-Automorphismen in der Quantenmechanik wiederfindet. Im Zusammenhang mit dem separablen, unendlichdimensionalen, komplexen Hilbertraum \mathcal{H} , der jedes irreduzible Segment der mathematischen Theorie der Quantenmechanik gemäß den Überlegungen aus Abschnitt 10.1 im Sinne von Satz 10.3.7 darstellt, trat die Galilei-Gruppe in Form unitärer Operatoren zutage. Deren Aussehen kann noch weiter konkretisiert werden.

Zuvor soll die unitäre Darstellung der Galilei-Gruppe zur Definition der Begriffe des elementaren und des zusammengesetzten Mikrosystems genutzt werden:

Definition 11.5.1

Sei durch einen Teil der Wirklichkeit, eine mathematische Theorie \mathcal{MT} und durch Anwendungsvorschriften \longleftrightarrow eine physikalische Theorie gegeben. Sei weiter durch $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur bezüglich dieser physikalischen Theorie im Sinne von Definition 6.3.1 gegeben, für die die Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b sowie AGal 1, AGal 2 und AGal 3 gelten. Die der Zustands-Effekt-Struktur zugehörige Menge von Wechselwirkungsträgern sei mit M bezeichnet. Der durch Satz 10.3.7 bestimmte unendlichdimensionale, separable, komplexe Hilbertraum sei mit \mathcal{H} benannt.

Dann heißen die Elemente von M **elementare Mikrosysteme**, wenn die zugehörige unitäre Darstellung der Galilei-Gruppe bis auf einen Faktor in \mathcal{H} irreduzibel ist. Andernfalls heißen die Elemente aus M **zusammengesetzte Systeme**.

Bemerkung: Hinsichtlich der inneren Konsistenz der verwandten Namen wird darauf hingewiesen, daß die in der obigen Definition aufgezählten Voraussetzungen garantieren, daß es sich bei M insbesondere auch um eine Menge von Mikrosystemen im Sinne der Definition 9.9.1 handelt.

Für den Zusammenhang der obigen Definition des zusammengesetzten Mikrosystems mit dem üblicherweise in einem solchen Kontext vorkommenden Tensorprodukt von Hilberträumen, der hier nicht in angemessener Weise erläutert werden kann, wird auf Kapitel VIII in [Lud83b], S. 307-342 hingewiesen. Erste Schritte dahingehend finden sich am Ende des Abschnitts.

Die obige Definition elementarer und zusammengesetzter Mikrosysteme besitzt denselben Vorteil wie auch schon die Definition der Mikrosysteme selbst, denn sie nimmt keinen Bezug auf Sachverhalte oder Vorstellungen, die außerhalb der betrachteten Theorie liegen. Nachteilhaft ist es, daß die Definition nicht unmittelbar anschaulich zugänglich ist. Zu einer gewissen Motivation obiger Definition wird ebenfalls auf das Ende des Abschnitts verwiesen.

Die Irreduzibilität in der Form der Definition 11.4.2 ist zumeist recht unhandlich. Zudem ist es unbefriedigend, daß sie nur Bezug auf den Hilbertraum nimmt. Das folgende Lemma zeigt, daß man auch mit Hilfe der Effekte und Entscheidungseffekte die Irreduzibilität der betrachteten unitären Darstellung bis auf einen Faktor charakterisieren kann. Die folgenden Aussagen beruhen auf Bemerkungen in den Unterabschnitten 1.2 und 3.3 in [Lud83b], Kapitel VII, S. 238 und S. 256:

Definition und Lemma 11.5.2 *Bezeichne $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur im Sinne von Definition 6.3.1, für die die Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b sowie AGal 1, AGal 2 und AGal 3 gelten.*

Dann bezeichnet man einen Effekt y aus $\hat{\mathcal{L}}$ als \mathcal{G} -invariant, wenn $\tilde{T}_g(y) = y$ für alle g aus \mathcal{G} gilt. Ein Entscheidungseffekt wird \mathcal{G} -invarianter Entscheidungseffekt genannt, wenn er als Effekt \mathcal{G} -invariant ist. Ein Zustand x aus K heißt \mathcal{G} -invariant, wenn $\tilde{S}_g(y) = y$ für alle g aus \mathcal{G} gilt.

Mit $\{\lambda \mathbf{1} \mid \lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ ist eine Menge \mathcal{G} -invarianter Effekte gegeben. Dabei sind $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ insbesondere \mathcal{G} -invariante Entscheidungseffekte.

Bezeichnet U eine unitäre Darstellung bis auf einen Faktor aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$, dann sind äquivalent:

- (i) U ist irreduzibel.*
- (ii) Außer den Effekten $\lambda \mathbf{1}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ gibt es keine \mathcal{G} -invarianten Effekte.*
- (iii) $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ sind die einzigen \mathcal{G} -invarianten Entscheidungseffekte.*
- (iv) Lineare und beschränkte Operatoren A , die für alle g aus \mathcal{G} der Vertauschungsrelation $AU_g = U_g A$ genügen, sind von der Form $A = \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ mit komplexem λ .*

Beweis:

Die \mathcal{G} -Invarianz der Effekte des Typs $\lambda \mathbf{1}$ ergibt sich folgendermaßen. Es gilt für alle $x \in K$ und beliebige reelle $\lambda \in [0, 1]$:

$$\hat{\mu}(x, \tilde{T}_g(\lambda \mathbf{1})) \stackrel{(11.23)}{=} \hat{\mu}(\tilde{S}_g^{-1}(x), \lambda \mathbf{1}) = \lambda \hat{\mu}(\underbrace{\tilde{S}_g^{-1}(x)}_{\in K}, \mathbf{1}) = \lambda. \quad (11.40)$$

Für die letzten beiden Gleichheitszeichen bedenke man einerseits die Bijektivität von \tilde{S}_g von K auf K und andererseits Lemma 8.2.13 (i). Mit (11.40) folgt also $\hat{\mu}(x, \tilde{T}_g(\lambda \mathbf{1})) = \lambda = \hat{\mu}(x, \lambda \mathbf{1})$ für alle x aus K . Vermittels Lemma 8.4.2 (i) bedeutet das aber gerade die Identität von $\tilde{T}_g(\lambda \mathbf{1})$ und $\lambda \mathbf{1}$. Folglich stellen sich alle Effekte der Form $\lambda \mathbf{1}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ als \mathcal{G} -invariante Effekte dar.

Bedenkt man die Identifikationsmöglichkeiten der Mengen $\hat{\mathcal{L}}$ und G im Sinne von Satz 10.3.6 mit selbstadjungierten Operatoren zwischen $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ und $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ einerseits und der Menge der Projektionsoperatoren $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ andererseits, dann kann die Äquivalenz der Aussagen (i) - (iv) dem Buch von V.S. Varadarajan [Var85] in Kapitel VI, §1, S. 203f. entnommen werden. Auch bezüglich der Aussage „(i) \implies (ii)“ wird darauf verwiesen. Zum besseren Verständnis, woher der invariante Untervektorraum kommt, wenn man von den Effekten und Entscheidungseffekten ausgeht, werden aber die restlichen Implikationen diskutiert.

(ii) \implies (iii): Man nehme an, $e := \lambda \mathbf{1}$ bezeichne einen Entscheidungseffekt mit $0 \leq \lambda \leq 1$. Dann existiert gemäß Definition 9.2.3 eine Teilmenge k von K , so daß e das größte Element der Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ ist. Ist k identisch mit der leeren Menge, dann fällt $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $\hat{\mathcal{L}}$ zusammen. Das größte Element von $\hat{\mathcal{L}}$ stellt aber $\mathbf{1}$ dar, so daß also $e = \mathbf{1}$ gilt. Ist k nicht-leer, so ergibt sich insbesondere für e , daß $\hat{\mu}(x, e) = 0$ für alle $x \in k$ gilt. Das bedeutet aber gerade $\lambda \hat{\mu}(x, \mathbf{1}) = 0$ für alle $x \in k$. Das kann aber nur erfüllt sein, wenn $\lambda = 0$ gilt. Damit wurde nachgewiesen, daß in der Menge $\{\lambda \mathbf{1} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ nur zwei Entscheidungseffekte liegen, und das sind $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$.

(iii) \implies (iv): Offenbar genügen alle Operatoren des Typs $A = \lambda \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ mit komplexem λ den angegebenen Vertauschungsrelationen. Es bleibt der Nachweis zu erbringen, daß es keine weiteren Operatoren mit derartigen Eigenschaften gibt.

Dazu betrachte man zunächst einen Projektionsoperator P aus $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ mit $PU_g = U_g P$ für alle g aus \mathcal{G} . Die Projektionsoperatoren sind laut Satz 10.3.6 durch die Restriktion $\chi|_{\mathcal{G}}$ in bijektiver Weise mit den Entscheidungseffekten

verknüpft. Also existiert ein $e \in G$ mit $\chi(e) = P$. Vermittels Satz 11.5.2 und der vorausgesetzten Vertauschungsrelationen erhält man für jedes $g \in \mathcal{G}$:

$$\chi(e) = U_g \chi(e) U_g^{-1} = \chi(\tilde{T}_g(y)).$$

Die Bijektivität von χ liefert also die Identität $\tilde{T}_g(e) = e$ für jedes $g \in \mathcal{G}$. Das heißt, e ist \mathcal{G} -invarianter Entscheidungseffekt. Unter Ausnutzung der Voraussetzung kann man also sagen, daß alle Projektionsoperatoren $P \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$, die den Vertauschungsrelationen $PU_g = U_g P$ für alle g aus \mathcal{G} genügen, entweder mit $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ oder mit $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ zusammenfallen müssen.

Als Nächstes werden selbstadjungierte Operatoren A betrachtet, die der Relation $AU_g = U_g A$ für alle g aus \mathcal{G} entsprechen. Bezeichnet E das A zugehörige Spektralmaß auf der Borel- σ -Algebra Σ von \mathbb{R} nach $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, dann folgt aus den für A vorausgesetzten Vertauschungsrelationen für alle $S \in \Sigma$ und alle $g \in \mathcal{G}$ mit Korollar VII.1.14 in [Wer97], Kapitel VII, S. 285

$$E_S U_g = U_g E_S.$$

Gemäß den einführenden Betrachtungen bezüglich der Projektionsoperatoren bedeutet das, daß das Spektralmaß von A genauer eine Abbildung von Σ in die zweielementige Menge $\{\mathbf{0}_{\mathcal{H}}, \mathbf{1}_{\mathcal{H}}\}$ darstellt. Da der Operator $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ keinen Beitrag liefert, muß A proportional zum Operator $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ sein. Also gibt es auch unter den selbstadjungierten Operatoren keinen Operator, der mit allen U_g vertauscht und der nicht ein Vielfaches von $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ ist.

Schließlich betrachte man nun einen beliebigen linearen und stetigen Operator A mit $AU_g = U_g A$ für alle g aus \mathcal{G} . Der Operator A läßt sich in der Form $A = A_1 - iA_2$ mit Hilfe der selbstadjungierten Operatoren $A_1 := \frac{1}{2}(A + A^\dagger)$ und $A_2 := \frac{i}{2}(A - A^\dagger)$ schreiben, wobei A^\dagger den adjungierten Operator im Hilbertraum-Sinne bezeichnen möge. Aus den vorausgesetzten Vertauschungsrelationen erhält man für jedes $g \in \mathcal{G}$ die Relation $A^\dagger U_g^\dagger = U_g^\dagger A^\dagger$. Bedenkt man $U_g U_g^\dagger = U_g^\dagger U_g = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ ob der Unitarität der U_g , dann folgt für alle $g \in \mathcal{G}$:

$$A^\dagger U_g = U_g A^\dagger.$$

Also vertauschen auch A_1 und A_2 für alle $g \in \mathcal{G}$ mit den U_g . Demnach sind sie entsprechend den obigen Überlegungen zu den selbstadjungierten Operatoren Vielfache des Operators $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$. Wegen $A = A_1 - iA_2$ gilt dasselbe Ergebnis auch für A , so daß die Behauptung bewiesen ist.

(iv) \implies (i): Bezeichne E einen invarianten abgeschlossenen nicht unbedingt echten Unterraum von \mathcal{H} , das heißt, $E = \{0\}$ und $E = \mathcal{H}$ werden zugelassen. Der zugehörige Projektionsoperator trage den Namen P^E . Da E abgeschlossen

ist, gehört P^E zu $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Bezeichne η ein Element aus \mathcal{H} . Mit der Invarianz von E folgt für jedes $g \in \mathcal{G}$ die Zugehörigkeit von $U_g P^E \eta$ zu E . Mithin erhält man $P^E U_g P^E \eta = U_g P^E \eta$. Also gilt für alle $g \in \mathcal{G}$ als Operatoridentität auf ganz \mathcal{H} :

$$P^E U_g P^E = U_g P^E. \quad (11.41)$$

Durch Übergang zu den adjungierten Abbildungen erhält man damit die Identität $P^E U_g^\dagger P^E = U_g^\dagger P^E$. Da die U_g unitär sind, gilt $U_g^\dagger = U_g^{-1}$, so daß man die Relation

$$P^E U_g^{-1} P^E = U_g^{-1} P^E \quad (11.42)$$

erhält. Die Operatoren U_g^{-1} und $U_{g^{-1}}$ können sich nur durch eine Phase voneinander unterscheiden, wie die folgende Überlegung zeigt. Da U_g eine unitäre Darstellung von \mathcal{G} bis auf einen Faktor ist, gibt es einen Multiplikator ω , so daß gilt

$$\mathbf{1}_{\mathcal{H}} = U_{\epsilon} = U_{gg^{-1}} = \omega(g, g^{-1}) U_g U_{g^{-1}}.$$

Da ω als Multiplikator den Betrag 1 hat, können sich U_g^{-1} und $U_{g^{-1}}$ nur durch eine Phase voneinander unterscheiden. Da (11.42) für alle $g \in \mathcal{G}$ gilt, erhält man daher ebenfalls für alle $g \in \mathcal{G}$:

$$P^E U_g P^E = U_g P^E.$$

In Kombination mit (11.41) bedeutet das, daß P^E mit allen U_g vertauscht. Nach Voraussetzung muß P^E von der Form $\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ sein. Aber nur für $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ ist $\lambda \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ überhaupt ein Projektionsoperator. Das heißt, E fällt entweder mit $\{0\}$ oder \mathcal{H} zusammen. Also gibt es keinen invarianten abgeschlossenen eigentlichen Unterraum von \mathcal{H} , so daß U irreduzibel ist. ■

Nach der Einführung der Begriffe des zusammengesetzten und des elementaren Mikrosystems, soll nun zur weitergehenden Untersuchung des Aussehens der Darstellungen aus $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ übergegangen werden. Dabei werden die wichtigsten Ergebnisse der Abschnitte 2 bis 5 aus [Lud83b], Kapitel VII, S. 262-293 dargelegt.

Wie in Abschnitt 11.1 bei der Zusammenstellung der allgemeinen Aussagen zur Galilei-Gruppe erwähnt, gründet sich die gesamte Galilei-Gruppe auf den drei abelschen Untergruppen der räumlichen wie zeitlichen Translationen und der eigentlichen Galilei-Transformationen sowie auf der nicht-abelschen Untergruppe der räumlichen Drehungen. Daher kann die Untersuchung der Darstellungen der Galilei-Gruppe bis auf einen Faktor mit Hilfe der Untersuchungen zu den so spezifizierten Untergruppen stattfinden. Insbesondere ist auch die Darstellung der Galilei-Gruppe im Hilbertraum bis auf den Multiplikator durch die vier Untergruppen erfaßt.

Dazu betrachte man beispielhaft die ein-parametrische Untergruppe der zeitlichen Translationen, also Galilei-Transformationen des Typs $(\mathbb{I}, 0, 0, \gamma)$. Im weiteren betrachte man eine unitäre Darstellung U aus $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ der Galilei-Gruppe bis auf einen Faktor ω . Zwecks besserer Übersicht setze man für reelle $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$

$$U_\gamma := U_{(\mathbb{I}, 0, 0, \gamma)}$$

und

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2) := \omega((\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_1), (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_2)).$$

Man bedenke, daß die Untergruppe der zeitlichen Translationen abelsch ist, denn mit der Produktvorschrift für die Galilei-Transformationen aus Abschnitt 11.1 gilt:

$$(\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_1) \cdot (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_2) = (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_1 + \gamma_2). \quad (11.43)$$

Bezüglich des inversen Elementes gilt trivialerweise:

$$(\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_1)^{-1} = (\mathbb{I}, 0, 0, -\gamma_1). \quad (11.44)$$

Für den der Darstellung zugehörigen Multiplikator kann $\omega((\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_1), (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma_2)) = 1$ für alle reellen γ_1, γ_2 gewählt werden. Man siehe dafür Theorem 7.42 in [Var85], Kapitel VII, S. 287. Folglich gilt für die Restriktion der Darstellung U auf die Untergruppe der zeitlichen Translationen mit reellen Zahlen γ_1, γ_2 :

$$U_{\gamma_1} U_{\gamma_2} = U_{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Die Stetigkeitsvoraussetzungen, die für die Abbildungen aus (11.39) gefordert wurden, erweisen sich als hinreichend für die starke Stetigkeit der ein-parametrischen Gruppe U_γ unitärer Operatoren im Sinne von Definition H.2.2. Also ergibt sich mit dem Satz H.2.3 von M.H. Stone die Existenz eines eventuell unbeschränkten selbstadjungierten Operators H auf \mathcal{H} , so daß für alle reellen Zahlen γ gilt:

$$U_\gamma = e^{i\gamma H}. \quad (11.45)$$

Der Operator H wird als **Hamilton-Operator** oder als **infinitesimaler Generator von U_γ** bezeichnet. Zwar ist H gemäß dem Stoneschen Theorem eindeutig bestimmt, aber mit Lemma 11.4.6 gibt es neben der hier verwendeten Darstellung U weitere äquivalente Darstellungen, die sich von U nur durch einen Faktor der Form $e^{i\theta(g)}$ unterscheiden. Daher ist H durch die Familie der äquivalenten Darstellungen, die im Rahmen von Definition 11.4.5 in der Menge $\mathfrak{D}(\mathfrak{G})$ zusammengefaßt wurden, nur bis auf einen additiven Term der Form $\alpha \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ mit beliebigem reellen α bestimmt.

Dabei muß α aufgrund der Selbstadjungiertheit des Generators reell sein. Die vom Hamilton-Operator erzeugte bis auf den eben erwähnten Phasenfaktor genau bestimmte Gruppe U_γ wird als **dynamische Gruppe** bezeichnet.

Man setze nun in Analogie zu den obigen Abkürzungen für alle γ aus \mathbb{R} , alle Elemente x aus K und alle Elemente y aus $\hat{\mathcal{L}}$:

$$\tilde{S}_\gamma(x) := \tilde{S}_{(\mathbb{I},0,0,\gamma)}(x) \quad \text{und} \quad \tilde{T}_\gamma(y) := \tilde{T}_{(\mathbb{I},0,0,\gamma)}(y).$$

Damit ergibt sich aus (11.30) für alle γ aus \mathbb{R} die Relation:

$$\rho(\tilde{S}_{(\mathbb{I},0,0,\gamma)}^{-1}(x)) = U_\gamma^{-1} \rho(x) U_\gamma = e^{-i\gamma H} \rho(x) e^{i\gamma H}. \quad (11.46)$$

Bedenkt man nun (11.44) und den Umstand, daß (11.46) für alle reellen Zahlen γ gilt, erhält man für alle $\gamma \in \mathbb{R}$ und alle Elemente x aus K die Beziehung:

$$\rho(\tilde{S}_\gamma(x)) = e^{i\gamma H} \rho(x) e^{-i\gamma H}. \quad (11.47)$$

Mit (11.31) und (11.45) folgt zudem unmittelbar für alle γ aus \mathbb{R} und alle y aus $\hat{\mathcal{L}}$:

$$\chi(\tilde{T}_\gamma(y)) = e^{i\gamma H} \chi(y) e^{-i\gamma H}. \quad (11.48)$$

Mit (11.47) und (11.48) sind gerade die abstrakten Formulierungen der quantenmechanischen „dynamischen Gleichungen“ gewonnen worden. Eine Gleichung der Art (11.47) wird als **abstrakte Schrödingergleichung** bezeichnet. Man spricht auch vom **Schrödinger-Bild**. Betrachtet man Gleichungen des Typs (11.48) spricht man vom **Heisenberg-Bild**.

Mit den Gleichungen in (11.47) und (11.48) ist ein zentrales Ziel des Kapitels erreicht worden. Dabei ist nicht das Erlangen der Gleichungen als solches im besonderen hervorzuheben, sondern vielmehr, daß durch den hier präsentierten Zugang die Möglichkeit einer eindeutigen physikalischen Interpretation der Gleichungen besteht. Dazu erinnere man, welcher physikalische Sachverhalt mit der Abbildung \tilde{S}_γ erfaßt werden sollte. Für eine rationale Galilei-Transformation g war die Abbildung \tilde{S}_g in (11.8) dadurch definiert worden, daß jedem Zustand $w = \varphi(a)$ aus \mathcal{K} , wobei a ein Präparierverfahren sei, ein anderer Zustand zugeordnet wird, der sich aus $\varphi(a)$ dadurch ergibt, daß alle makroskopischen Vorgänge, die das Präparierverfahren a festlegen, um die Galilei-Transformation g räumlich und zeitlich verschoben, verdreht und relativ bewegt vorgenommen werden. Entsprechende Aussagen können unter Berücksichtigung der physikalischen Unschärfe für alle Galilei-Transformationen getroffen werden. Das heißt also bei Betrachtung von Galilei-Transformationen des Typs $(\mathbb{I}, 0, 0, \gamma)$, daß \tilde{S}_γ

ein Mischungs-Automorphismus ist, der jedem Zustand $w = \varphi(a)$ denjenigen Zustand zuordnet, dem dasjenige Präparierverfahren angehört, das im Verhältnis zu a um das Zeitintervall γ später, wenn γ positiv ist, oder früher, wenn γ negativ ist, stattfindet. Demzufolge ordnet die Schrödingergleichung dem Dichteoperator, der mit einem Zustand $\varphi(a)$ mittels der Abbildung ρ identifiziert wird, eine durch γ parametrisierte Schar weiterer Dichteoperatoren zu, die Zuständen entsprechen, die zu Präparierverfahren gehören, die sich lediglich bezüglich der Zeit, wann sie im Verhältnis zu a Anwendung finden, unterscheiden. Dieselben Überlegungen kann man auch für die Beziehungen aus (11.48) anstellen. Einem Effekt $\psi(f)$, dem das Effektverfahren $f = (b_0, b)$ zugehörig ist, wird eine durch γ parametrisierte Schar anderer Effekte zugeordnet, die sich bezüglich f in ihrer Durchführungszeit lediglich um das Zeitintervall γ unterscheiden. Die Gleichung aus (11.48) formuliert eben diesen Sachverhalt auf dem Niveau der den einzelnen Effekten zugeordneten selbstadjungierten Operatoren.

Der Umstand, daß es sich bei dem in der Schrödingergleichung vorkommenden Zeitparameter eigentlich um eine Zeitdifferenz handelt, scheint besonders erwähnenswert. Üblicherweise wird im Zusammenhang mit der Schrödingergleichung davon gesprochen, daß man Aussagen über das Aussehen des Zustandes zum Zeitpunkt $t = t_0$ ausgehend vom Aussehen des Zustandes zum Zeitpunkt $t = 0$ erhält. Ein solcher Sprachgebrauch suggeriert aber, daß es sich bei einem Zustand um einen Sachverhalt handelt, der zeitlich lokalisierbar ist. Wenn man aber bedenkt, daß in Definition 6.1.5 Zustände als Klassen von Präparierverfahren eingeführt wurden, kann bei einem Zustand kaum von einem irgendwie lokalisierbaren Sachverhalt gesprochen werden. Außerdem können zu einem Zustand verschiedene Präparierverfahren gehören, die bezüglich eines gemeinsamen Bezugssystems zu ganz verschiedenen Zeiten vonstatten gehen. Folglich wäre es schwierig, zu sagen, auf welches der beiden Präparierverfahren zur Bestimmung eines Zeitpunktes Bezug genommen werden sollte. Aber auch wenn man sich mit obiger Aussage auf die die Zustände konstituierenden Präparierverfahren direkt bezöge, wäre eine stringente Interpretation schwer möglich, denn in der Regel bestehen Präparierverfahren aus einer ganzen Abfolge makroskopischer Vorgänge, die zeitlich durchaus enorme Ausdehnung erlangen können. Man denke dabei an einen Präparationsvorgang in einem Beschleunigerring, dessen Bau Jahre in Anspruch nimmt.

Eine weitere Bemerkung sollte zum Aussehen der Schrödingergleichung in (11.47) angestellt werden. Üblicherweise erscheint die Schrödingergleichung in der Literatur in der Form

$$D(\gamma) = e^{-i\gamma H} D_0 e^{i\gamma H}, \quad (11.49)$$

wobei mit D_γ und D_0 Dichteoperatoren bezeichnet werden. Über die Probleme der Bedeutung der Indizierungen wurde eben diskutiert. Im Verhältnis zu (11.47) erhält man einen Unterschied im Vorzeichen der Exponenten. Das so bestehende Mißverhältnis klärt sich aber unmittelbar aus der Konstruktion der vorkommenden Abbildungen auf. Dazu betrachte man nochmals (11.46). Daraus ergibt sich, daß die übliche Form der Schrödingergleichung im Sinne von Beziehung (11.49) eigentlich die inverse Zeitrichtung beschreibt. Das hat seinen Ursprung darin, daß Schrödinger-Bild und Heisenberg-Bild als einander äquivalente Formulierungen desselben Sachverhaltes aufgefaßt werden sollen, nämlich der Veränderung der relativen zeitlichen Positionierung von Präparier- und Registrierapparat zueinander. Das entspricht genau den Überlegungen, die in Abschnitt 11.1 mittels AGal 1 in Form der Relation (11.5) Eingang in die Theorie gefunden haben. Rein anschaulich wird dabei lediglich zum Ausdruck gebracht, daß man zum selben experimentellen Aufbau kommt unabhängig davon, ob man die Registrierung um das Zeitintervall $\gamma > 0$ später oder die Präparation um das Zeitintervall γ früher, also mathematisch $-\gamma$, durchführt. Analoges liefert der Fall eines negativen γ . Zur Vermeidung etwaiger Probleme, die mit versteckten Vorzeichen eingehen könnten, ist es daher ratsam, die Schrödingergleichung in der Form (11.47) zu notieren.

Zum Aussehen des Operators H kann keine allgemeingültige Aussage gemacht werden. Üblicherweise versucht man H auf korrespondenzmäßigem Wege zu „erraten“. Gerade im Falle nicht-freier Mikrosysteme, also etwa bei Existenz äußerer Felder, müssen ausführliche Überlegungen zum Aussehen von H angestellt werden. Für Betrachtungen, die auf dem Fundament des Ludwigschen Zuganges durchgeführt werden, siehe [Lud83b], Kapitel VIII, insbesondere Abschnitt 5 und 6 oder aber [KN89]. Für den Fall elementarer und zusammengesetzter Mikrosysteme im Sinne von Definition 11.5.1, die keinen äußeren Feldern ausgesetzt sind, kann der Hamiltonoperator bis zu einem gewissen Grade noch weiter konkretisiert werden, indem man die unitären Darstellungen auch bezüglich der anderen elementaren Untergruppen der räumlichen Translationen sowie der eigentlichen Galilei-Transformationen untersucht.

Einige wichtige Ergebnisse derartiger Untersuchungen auch in Hinsicht auf das Aussehen des Hamiltonoperators werden nun zusammengefaßt. Ausführliche Besprechungen findet man etwa bei [Var85].

Für die jeweils dreiparametrischen Untergruppen kann analog zur ein-parametrischen Untergruppe der Zeittranslationen vorgegangen werden unter Verwendung einer Generalisierung des Stoneschen Satzes, wie er beispielsweise mit Theorem VIII.12 in [RS80], Abschnitt VIII.4, S. 270, zur Verfügung steht. Anstelle des Parameters γ finden für den Fall der räumlichen Translationen der dreidimensionale Vektor $\vec{\eta}$ und

für den Fall eigentlichen Galilei-Transformationen der dreidimensionale Vektor $\vec{\delta}$ als Parameter Anwendung. Infolgedessen findet man für jede der jeweils drei einparametrischen Untergruppen im allgemeinen unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren K_1, K_2, K_3 und X_1, X_2, X_3 in der Form, daß mit den Vereinbarungen

$$\vec{K} := \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{X} := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

für alle $\vec{\eta}, \vec{\delta}$ aus \mathbb{R}^3

$$U_{(\mathbb{I}, 0, \vec{\eta}, 0)} = e^{i\vec{K} \cdot \vec{\eta}} \quad \text{und} \quad U_{(\mathbb{I}, \vec{\delta}, 0, 0)} = e^{i\vec{X} \cdot \vec{\delta}}$$

gilt. Dabei besagt die oben erwähnte Verallgemeinerung des Stoneschen Theorems das Kommutieren der Operatoren K_1, K_2, K_3 miteinander in dem Sinne, daß die zugehörigen projektionswertigen Maße miteinander kommutieren. Siehe dafür etwa Definition in Abschnitt VIII.5 in [RS80], S. 271. In derselben Weise kommutieren auch die Operatoren X_1, X_2, X_3 miteinander. Die unitären Gruppen $e^{i\vec{K} \cdot \vec{\eta}}$ und $e^{i\vec{X} \cdot \vec{\delta}}$ genügen dabei den Gleichungen

$$e^{i\vec{X} \cdot \vec{\delta}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{\eta}} = e^{im\vec{\delta} \cdot \vec{\eta}} e^{i\vec{K} \cdot \vec{\eta}} e^{i\vec{X} \cdot \vec{\delta}}, \quad (11.50)$$

woraus sich die bekannten Vertauschungsrelationen mit $\delta_{\mu\nu}$ als Kronecker-Symbol

$$K_\mu X_\nu - X_\nu K_\mu = im \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, \quad (11.51)$$

ergeben. Dafür siehe [RS80], S. 274-275 auch bezüglich der Problematik derartiger Vertauschungsrelationen im Zusammenhang mit dem Umstand der Nicht-Beschränktheit der verwendeten Operatoren. Das Symbol m stehe für eine beliebige positive Zahl. m wird durch die Darstellung eindeutig festgelegt. Verschiedene Werte für m führen zu verschiedenen nicht-äquivalenten Darstellungen. Die Zahl m wird als **Gesamtmasse** der durch den Hilbertraum \mathcal{H} charakterisierten Sorte von Mikrosystemen bezeichnet. Die Beziehungen aus (11.51) stellen im Prinzip die Heisenbergschen Unschärferelationen dar, wie in [Lud83b], Abschnitt 4 von Kapitel VII, S. 284-292, dargelegt wird. Diesbezüglich wird auch auf Bemerkungen in Abschnitt 14.2 hingewiesen.

Das Verhältnis der unitären Darstellung $e^{i\vec{K} \cdot \vec{\eta}}$ der Untergruppe der räumlichen Translationen zur unitären Darstellung der $e^{i\gamma H}$ der zeitlichen Translationen stellt sich für jedes $\nu = 1, 2, 3$ folgendermaßen dar:

$$e^{iK_\nu \eta_\nu} e^{i\gamma H} = e^{i\gamma H} e^{iK_\nu \eta_\nu}. \quad (11.52)$$

Mithin kommutieren alle K_ν mit $\nu = 1, 2, 3$ mit dem Hamiltonoperator. Verwandte Überlegungen führen bezüglich des Verhältnisses der Gruppe der eigentlichen Galilei-Transformationen zur Gruppe der zeitlichen Translationen auf die folgenden Vertauschungsrelationen mit $\nu = 1, 2, 3$:

$$X_\nu H - H X_\nu = -i K_\nu. \quad (11.53)$$

Setzt man nun den Hamiltonoperator mit

$$H = \frac{1}{2m} \vec{K}^2 + H_i \quad (11.54)$$

an, erhält man mit (11.50) und (11.53), daß H_i sowohl mit den X_1, X_2, X_3 als auch den K_1, K_2, K_3 kommutiert. Daher stellt man üblicherweise \mathcal{H} in der folgenden Form dar

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_i, \quad (11.55)$$

wobei \otimes das Tensorprodukt der beiden Hilberträume \mathcal{H}_b und \mathcal{H}_i symbolisieren soll. Der Operator H_i wirkt effektiv nur im Hilbertraum \mathcal{H}_i , während die Operatoren aus \vec{X} und \vec{K} effektiv nur auf \mathcal{H}_b fungieren. Formal äußert sich das im folgenden Übergang zu einer Tensor-Darstellung der Operatoren:

$$\begin{aligned} K_\nu &\longrightarrow K_\nu \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i} \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \\ X_\nu &\longrightarrow X_\nu \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i} \text{ für } \nu = 1, 2, 3, \\ H &\longrightarrow \frac{1}{2m} \vec{K}^2 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes H_i. \end{aligned} \quad (11.56)$$

Gelegentlich wird der Hilbertraum \mathcal{H}_b als **Bahn-Hilbertraum** bezeichnet. Im Gegensatz dazu nennt man \mathcal{H}_i den **Hilbertraum der inneren Struktur**. Mit (11.54) oder (11.56) steht die oben angedeutete weitergehende Konkretisierung des Aussehens des Hamiltonoperators zur Verfügung.

Es fehlen damit nur noch Bemerkungen zur bisher nicht berücksichtigten Gruppe der räumlichen Drehungen. Auch hier kann man drei selbstadjungierte Operatoren J_1, J_2, J_3 so angeben, daß bei Drehung um den Winkel α_1 bezüglich der x -Achse, bei Drehung um den Winkel α_2 bezüglich der y -Achse und bei Drehung um den Winkel α_3 bezüglich der z -Achse mit der Vereinbarung

$$\vec{\alpha} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{J} := \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

gilt

$$U_{\vec{\alpha}} = e^{i\vec{J}\cdot\vec{\alpha}}. \quad (11.57)$$

Dabei möge der Index $\vec{\alpha}$ als Abkürzung für das zugehörige Element der Galilei-Gruppe verstanden werden. Die Operatoren J_1, J_2, J_3 genügen den bekannten Vertauschungsrelationen:

$$J_1 J_2 - J_2 J_1 = i J_3, \quad J_2 J_3 - J_3 J_2 = i J_1, \quad J_3 J_1 - J_1 J_3 = i J_2.$$

Zum Abschluß sollen elementare Mikrosysteme betrachtet werden. Die Operatoren aus \vec{J} lassen sich entsprechend der obigen Tensorprodukt-Darstellung des Hilbertraumes \mathcal{H} folgendermaßen notieren:

$$\vec{J} = \left(\frac{1}{m} \vec{X} \times \vec{K} \right) \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i} + \mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes \vec{S}.$$

Dabei stehe \times im formalen Sinne für das vektorielle Kreuzprodukt. \vec{S} besteht aus den drei selbstadjungierten S_1, S_2, S_3 , die die infinitesimalen Generatoren der unitären Darstellung bis auf einen Faktor der räumlichen Drehung in \mathcal{H}_i bezeichnen. Da elementare Darstellungen betrachtet werden sollen, muß auch die durch \vec{S} erzeugte Darstellung in \mathcal{H}_i irreduzibel sein. Die irreduziblen Darstellungen auf \mathcal{H}_i sind charakterisiert durch eine Zahl s , die die Werte $\frac{n}{2}$ annehmen kann, wenn n für eine natürliche Zahl einschließlich der 0 steht. Der Hilbertraum \mathcal{H}_i ist dabei $(2s + 1)$ -dimensional. Die Zahl s wird als **Spin** bezeichnet. Jede irreduzible unitäre Darstellung der Galilei-Gruppe bis auf einen Faktor ist eindeutig durch die Angabe der als Gesamtmasse und Spin bezeichneten Zahlen m und s bestimmt.

Auch das Aussehen des Hamilton-Operators vereinfacht sich für elementare Mikrosysteme gegenüber der Form in (11.54) noch weiter. Es ergibt sich zunächst auf elementarem Wege auch ohne Beschränkung auf elementare Mikrosysteme aus der Definition der Gruppenoperation in Abschnitt 11.1 für jede Drehmatrix A und alle γ aus \mathbb{R} innerhalb der Galilei-Gruppe:

$$(A, 0, 0, 0) \cdot (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma) \cdot (A, 0, 0, 0)^{-1} = (\mathbb{I}, 0, 0, \gamma).$$

Auf dem Niveau der unitären Darstellung erhält man damit

$$U_{(A,0,0,0)} e^{iH\gamma} U_{(A,0,0,0)}^{-1} = e^{iH\gamma},$$

wobei sich der auftretende Multiplikator zu 1 ergibt. Damit folgt, daß H und $U_{(A,0,0,0)}$ vertauschen:

$$H U_{(A,0,0,0)} - U_{(A,0,0,0)} H = 0.$$

Mit (11.57) bedeutet das aber insbesondere das Kommutieren des Operators $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes H_i$ aus (11.54) mit den Operatoren J_1, J_2, J_3 . Man bedenke zudem die obige Feststellung, daß H_i auch mit den Operatoren $X_1, X_2, X_3, K_1, K_2, K_3$ vertauscht. Daraus ergibt sich das Kommutieren von H mit $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes H_i$. Also kommutiert $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes H_i$ mit allen infinitesimalen Generatoren der betrachteten vier unitären Gruppen, die den Untergruppen der räumlichen wie zeitlichen Translationen, den räumlichen Drehungen und den eigentlichen Galilei-Transformationen zugehörig sind. Wie eingangs der Untersuchung der Darstellung U_g der gesamten Galilei-Gruppe erläutert wurde, gewinnt man die Darstellung der gesamten Galilei-Gruppe aber bis auf den Multiplikator durch die vier unitären Untergruppen, die den obigen Überlegungen zufolge durch die Operatoren H, \vec{X}, \vec{K} und \vec{J} erzeugt werden. Daher ergibt sich für alle g aus \mathcal{G} :

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes H_i) U_g = U_g (\mathbf{1}_{\mathcal{H}_b} \otimes H_i).$$

Da aber elementare Mikrosysteme vorausgesetzt wurden, ist die betrachtete Darstellung definitionsgemäß irreduzibel. Weil der Hilbertraum \mathcal{H}_i endlichdimensional ist, ist der Operator H_i beschränkt. Mit Lemma 11.5.2 (iv) folgt daher, daß H_i ein Vielfaches des Operators $\mathbf{1}_{\mathcal{H}_i}$ sein muß. Nun ist aber der Hamiltonoperator ohnehin nur bis auf ein Vielfaches des Operators $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ genau bestimmt, so daß der Hamiltonoperator mit

$$H = \frac{1}{2m} \vec{K}^2 \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}_i} \quad (11.58)$$

angesetzt werden kann. Auf der Basis der Erfahrungen, die man im Umgang mit der Hilbertraum-Quantenmechanik gerade im Zusammenhang mit dem Experiment gemacht hat, kann man in (11.58) rückwirkend eine gewisse Motivation für die Wahl der Definition 11.5.1 elementarer und zusammengesetzter Mikrosysteme sehen. Denn offenbar führt die obige Definition für elementare Mikrosysteme auf Hamilton-Operatoren, die keinen Hinweis auf innere Strukturen machen. Man findet lediglich einen Term, den man auf Basis korrespondenzmäßiger Betrachtungen im Verhältnis zur klassischen Mechanik mit der kinetischen Energie assoziiert.

Mit dem Gewinn solch zentraler Strukturen wie der der Schrödingergleichung kann für den hier vorgestellten Weg von einer endgültigen Begründung der bekannten Hilbertraum-Quantenmechanik auf der Basis eines Systems nahezu ausschließlich physikalisch motivierter Axiome gesprochen werden.

Kapitel 12

Das Verhältnis der vorliegenden Theorie zur verbandstheoretischen Axiomatik

Die nun folgenden Betrachtungen dienen dazu, das Verhältnis zwischen der in den Kapiteln 5 bis 11 entwickelten physikalischen Theorie und der „verbandstheoretischen Formulierung“ der Quantenmechanik zu untersuchen. Dabei wird sich herausstellen, daß die Formulierung der Quantenmechanik im Sinne von G. Ludwig die Möglichkeit bietet, zentrale Probleme der verbandstheoretischen Axiomatik der Quantenmechanik sowohl bezüglich der Interpretation als auch bezüglich der Motivation der einzelnen Axiome zu überwinden.

Mit dem Terminus der „verbandstheoretischen Formulierung“ der Quantenmechanik soll dabei die auf G. Birkhoff und J. von Neumann, [BN36], zurückgehende Entwicklung einer mathematischen Bildtheorie der quantenmechanischen Experimente gemeint sein, die ohne den Hilbertraum und zugehörige Operatoren als Ausgangspunkt auskommt. Die Theorie hat bis heute erhebliche Weiterentwicklungen im Rahmen einer Vielzahl von Veröffentlichungen erfahren, die hier nicht in Gänze aufgeführt werden können. Besonders hervorzuheben sind allerdings die folgenden Publikationen: [Mac63] von G.W. Mackey, [Jau68] von J.M. Jauch, [Pir64], [Pir76] von C. Piron, [Mac64], [Mac65] von M.D. MacLaren und [Zie61], [Zie66] von N. Zierler.

Vom mathematischen Blickwinkel werden in der verbandstheoretischen Formulierung der Quantenmechanik zwei abstrakte Mengen L und S sowie eine Abbildung $p : S \times L \longrightarrow [0, 1]$ betrachtet. Physikalisch soll dabei die Menge L für Propositionen, Ja-Nein-Experimente oder auch questions stehen. S wird als Menge von

Zuständen, später auch als Menge von Präparationen, aus denen sich die Zustände durch Äquivalenzklassenbildung ergeben, betrachtet. Bei der Abbildung p wird von einer Wahrscheinlichkeitsfunktion gesprochen. Es kann hier nicht erschöpfend erläutert werden, welche physikalischen Sachverhalte die einzelnen Autoren mit den Begriffen Proposition, Zustand und Wahrscheinlichkeitsfunktion genau anvisieren. Vielmehr muß man sogar sagen, daß zumeist entweder keine genauen Aussagen dazu getätigt werden oder daß die zugehörigen Erläuterungen auf ebenso unklare Begriffe wie etwa den des physikalischen Systems zurückgreifen. Mit „unklar“ ist bei Verwendung des in Kapitel 4 etablierten Sprachgebrauchs gemeint, daß kein Abbildungsprinzip zur Verwendung der obigen Begriffe mitgeliefert wird. Es liegt demnach auch keine Möglichkeit vor, am Realtext in zweifelsfreier Weise Zugehörigkeiten zu den verwandten Begriffen festzustellen. Es kann nur gesagt werden, daß im Prinzip je nach Autor mit Propositionen etwas wie Effekte oder Effektverfahren gemeint sind. Der Zustandsbegriff, teilweise mit und teilweise ohne Äquivalenzklassenbildung, wie auch der Wahrscheinlichkeitsbegriff gehen im Prinzip in dieselbe Richtung, wie die in Kapitel 6 verwandten Begriffe desselben Namens.

Die Entwicklung der verbandstheoretischen Formulierung der Quantenmechanik unterliegt einer großen bis heute andauernden Dynamik, so daß es nicht möglich ist, eine ganz bestimmte Axiomatik als die Axiomatik auszuzeichnen. Es soll hier auch keine vollständige Diskussion der Literatur erfolgen. Dafür sei zum Beispiel auf [DCG01] verwiesen. Es hat sich aber dennoch ein gewisser Kern von Eigenschaften des Tripels (S, L, p) verfestigt, der jetzt in Kürze dargestellt werden soll und der in Anlehnung an die Ausführungen in [Mac63], [BC81] und [Giu91] erfolgt. Die so gewonnene Axiomatik wird dann als Bezugspunkt für weitere Erörterungen dienen.

Die verbandstheoretische Axiomatik der Quantenmechanik

Axiom 1 : Bezeichnen s_1, s_2 zwei Elemente aus S , dann gilt $s_1 = s_2$ genau dann, wenn $p(s_1, a) = p(s_2, a)$ für jedes Element a aus L gilt.
Zwei Elemente a_1, a_2 aus L sind genau dann identisch, wenn $p(s, a_1) = p(s, a_2)$ für jedes Element s aus S gilt.

Axiom 1 ermöglicht es, auf L eine Halbordnung zu definieren durch:

Definition 12.1

Für zwei Elemente a_1, a_2 aus L wird $a_1 \leq a_2$ genau dann notiert, wenn für alle Elemente s aus S die Ungleichung $p(s, a_1) \leq p(s, a_2)$ gilt.

Axiom 2 : Es existiert ein Element $\mathbf{0}$ in L derart, daß $p(s, \mathbf{0}) = 0$ für jedes Element s aus S gilt.

Axiom 3 : Zu jedem Element a in L existiert ein Element a^\perp in L , so daß $p(s, a^\perp) = 1 - p(s, a)$ für jedes Element s aus S gilt.

Man bemerke, daß das gemäß Axiom 3 zu jedem a aus L existierende Element a^\perp wegen Axiom 1 eindeutig bestimmt ist.

Axiom 4 : Für jede höchstens abzählbare Familie $(a_i)_{i \in I}$ in L , für die die Relationen $a_i \leq a_j^\perp$ für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gelten, existiert das Supremum $\bigvee_{i \in I} a_i$ in (L, \leq) . Ferner gilt für jedes s aus S :

$$p(s, \bigvee_{i \in I} a_i) = \sum_{i \in I} p(s, a_i).$$

Man bemerke, daß die Existenz der rechten Seite der obigen Gleichung einen Teil der Forderung in Axiom 4 darstellt. Dagegen ist der Term auf der linken Seite ohnehin stets wohldefiniert, da p nach Voraussetzung die Menge $S \times L$ als Definitionsbereich besitzt.

Vermittels der ersten vier Axiome ist L bezüglich der Relation \leq und der durch Axiom 3 definierten Abbildung $\perp : L \rightarrow L, a \mapsto a^\perp$ eine orthomodulare Halbordnung.

Bezeichnet man gemäß Definition F.20 mit $W(L)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L , dann kann man in Anwendung auf die obige Axiomatik durch die Injektion $j : S \rightarrow W(L), s \mapsto j(s) := p(s, \cdot)$ die Menge S mit einer ordnenden Menge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf L identifizieren. Dazu wird auf Definition I.1 verwiesen. Im weiteren soll die Identifikation durch j stets vorgenommen werden. Für die folgenden Axiome werden zur weiteren Charakterisierung der Zustandsmenge einige Konvexitätsbegriffe benötigt. Sie werden in Anhang I erörtert. Dort wird ebenfalls erläutert, wann eine Teilmenge von $W(L)$ hinreichend genannt wird.

Als weitere Axiome werden notiert:

Axiom 5 : L ist separabel.

Axiom 6 : S ist hinreichende und σ -konvexe Teilmenge der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L .

Axiom 7 : Jedes Element s in S besitzt die **Jauch-Piron-Eigenschaft**. Das heißt, daß es zu jedem Element s aus S und beliebigen Elementen a_1, a_2 aus L mit $p(s, a_1) = p(s, a_2) = 1$ ein Element a_3 in L so gibt, daß einerseits den Relationen $a_3 \leq a_1$ sowie $a_3 \leq a_2$ entsprochen wird und daß andererseits $p(s, a_3) = 1$ gilt.

Die bisherige Axiomatik garantiert nun insbesondere, daß L vollständiger Verband ist. Siehe dafür etwa [BC81], Theoreme 11.4.2 und 11.4.3, S. 118-119.

Axiom 8 : L ist atomar.

Axiom 9 : L besitzt die Überdeckungseigenschaft.

Ob seiner Atomizität kann man für den Verband L einen Zerlegungssatz formulieren, der in vollständiger Analogie zum Satz 10.1.5 steht. L stellt sich also, genau wie der Verband G der Entscheidungseffekte, als ein „unabhängiges Nebeneinander“ irreduzibler Bausteine dar. Das erlaubt es, sich für die weitere Strukturanalyse auf irreduzible Verbände zu konzentrieren. Daher fordert man die Irreduzibilität von L .

Axiom 10 : L ist irreduzibel.

Es sei angemerkt, daß es eine enge Beziehung zwischen der Irreduzibilität von L und verbandstheoretischen Formulierungen eines Superpositionsprinzips gibt. Man siehe dazu Abschnitt 14.8 in [BC81], S. 164-167. Derartige Überlegungen bieten Alternativen zu Axiom 10.

Kann man nun eine Länge des Verbandes L echt größer als 3 garantieren, dann ist L so strukturiert, daß man den Darstellungssatz G.3.25 (i) von Varadarajan anwenden kann. Das heißt, es existieren ein Schiefkörper, ein involutiver Anti-Automorphismus, ein Links-Vektorraum \mathcal{H} über dem Schiefkörper und eine hermitesche Form über \mathcal{H} in der Weise, daß L orthoisomorph zum Verband

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) := \{U \subseteq \mathcal{H} \mid U = U^{\perp\perp}\} \quad (12.1)$$

der biorthogonalen Untervektorräume von \mathcal{H} ist. Folglich wird je nach Autor auf axiomatischem Wege sichergestellt, daß L mindestens die Länge 4 besitzt. Da man in der Regel unendlichdimensionale Hilberträume anstrebt, wird hier gefordert:

Axiom 11a : L besitzt eine unendliche Länge.

Man kann nun den Weg beschreiten, der in Kapitel 10 am Beispiel des Verbandes G illustriert wurde. Dabei stattet man L auf irgendeine Weise mit einer Topologie aus, die den Schiefkörper zu einem lokalkompakten, zusammenhängenden topologischen Schiefkörper macht. Der Satz von L.S. Pontrjagin, notiert als Satz G.3.28, erlaubt dann den Schluß, daß der Schiefkörper mit den reellen oder komplexen Zahlen oder den Quaternionen identifizierbar ist. Wird dann noch die Stetigkeit des involutiven Anti-Automorphismus gesichert, folgt mit dem Satz von C. Piron, siehe Satz G.3.25 (ii), daß \mathcal{H} als reeller, komplexer oder quaternionischer Hilbertraum aufgefaßt werden kann. Der so beschriebene Weg wurde von N. Zierler im Rahmen der Artikel [Zie61] und [Zie66] vorgestellt. Es gibt daneben weitere Programme zur Realisierung einer Hilbertraum-Darstellung, die das Axiom 11 ersetzen. Allen ist gemein, daß sie eine Orthoisomorphie von L zu dem Verband der abgeschlossenen Unterräume eines reellen, komplexen oder quaternionischen Hilbertraumes zu garantieren suchen. Separabilität und Dimension des Hilbertraumes hängen dabei jeweils von der konkreten Axiomatik ab. Die meisten Zugänge sind zumindest vom mathematischen Standpunkt einander äquivalent, denn die geforderten Axiome sind äquivalent zur Aussage der Existenz eines reellen, komplexen oder quaternionischen Hilbertraumes, dessen zugehöriger Projektionsoperatorverband dann zu L orthoisomorph ist.

Einen wichtigen Baustein alternativer Axiome bildet das Theorem von M.P. Solèr, das sich als Satz I.7 in Anhang I findet. In dem Artikel [Sol95], in dem sie auch den eben erwähnten Satz publiziert, legt M.P. Solèr dar, daß die Forderung der Existenz eines sogenannten „angle bisecting systems“ in L unter Verwendung ihres Theorems bereits hinreichend ist. Dabei sei angemerkt, daß der Begriff des „angle bisecting systems“ von R.P. Morash in [Mor73] geprägt wurde.

Alternative Formulierungen des Solèrschen Theorems von R. Mayet findet man etwa in [May98]. D. Aerts und B. van Steirteghem haben die Überlegungen von R. Mayet und M.P. Solèr in [AS00] aufgegriffen. Sie legen dort Vorschläge zu Axiomen vor, die auf den Aertsschen Überlegungen zusammengesetzter „Entitäten“ beruhen. Zum Begriff der zusammengesetzten Entitäten wird auf [Aer82] und [Aer84] hingewiesen.

Schließlich sei noch die Arbeit [Hol95] von S.S. Holland jr. erwähnt. Dort wird zunächst axiomatisch sichergestellt, daß L irreduzibler, vollständiger, orthomodularer und atomarer Verband mit Überdeckungseigenschaft ist. Demnach steht eine Orthoisomorphie von L zum Verband der biorthogonalen Untervektorräume eines Links-Vektorraumes E_L ausgestattet mit Schiefkörper, involutivem Anti-Automorphismus und hermitescher Form zur Verfügung. Anschließend wird dann ein mit „ample unitary group“, kurz AUG, betitelt Axiom formuliert, das fordert, daß zu je zwei orthogonalen Atomen a, b aus $L = \mathbb{P}(E_L)$ ein unitärer Operator U mit $U(a) = b$ existiert.

Vermittels des Theorems von M.P. Solér kann dann darauf geschlossen werden, daß E_L reeller, komplexer oder quaternionischer Hilbertraum ist. Die Zusammenstellung bezüglich des Axioms 11 endet hiermit ohne Anspruch auf Vollständigkeit.

Da bisher in der Literatur keine Entscheidung abzusehen ist, welcher Weg als kanonischer aufgefaßt werden soll, wird in stark vereinfachender Weise als Axiom festgehalten:

Axiom 11b : Der Schiefkörper ist der Körper der komplexen Zahlen. Der involutive Anti-Automorphismus ist stetig.

Somit kann man L mit dem Verband der Projektionsoperatoren eines unendlichdimensionalen, separablen komplexen Hilbertraumes \mathcal{H} identifizieren. Man bemerke, daß die so gewonnene Darstellung von L unter Ausnutzung des Axioms 6 und des Theorems von A.M. Gleason, siehe Satz G.4.7 (vi), auch dazu ausreicht, die Menge S mit der Menge aller Dichteoperatoren $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ bezüglich des obigen Hilbertraumes zu identifizieren. Für den Begriff des Dichteoperators wird an Definition 10.3.1 (iii) erinnert. Nimmt man eine solche Identifikation vor, dann fällt p mit der Spur über die entsprechenden Operatorprodukte zusammen. Der zugehörige Beweis wird in Lemma I.8 durchgeführt.

Bezüglich der Dynamik wird in zusammenfassender Weise den Überlegungen von G.W. Mackey in [Mac63], Kapitel II, Abschnitt 2.3 gefolgt. Mackey geht davon aus, daß ein Zustand zur Zeit $t_2 > t_1$ vollständig durch den Zustand zur Zeit t_1 und die Zeitdifferenz $t_2 - t_1$ bestimmt ist. Zudem sollen Konvexkombinationen zeitlich erhalten bleiben. Das heißt, man fordert die Existenz einer ein-parametrischen Halbgruppe

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \{V : S \longrightarrow S \mid V \text{ erhält Konvexkombinationen}\}, \quad t \longmapsto V_t \quad (12.2)$$

gepaart mit der Interpretation, daß $V_{t_2-t_1}(s)$ den Zustand angibt, der sich aus dem Zustand s zur Zeit t_1 nach Ablauf des Zeitintervalls $t_2 - t_1$ ergibt. Des weiteren soll Reversibilität gefordert werden. Das heißt, man fordert, daß die Abbildungen des Typs V_t Bijektionen sind. Trifft man für alle t aus \mathbb{R} die Abmachung

$$V_{-t} := V_t^{-1},$$

dann gewinnt man aus der Abbildung in (12.2) eine Abbildung auf ganz \mathbb{R} . Bezeichnet man nun den Zustand zu einem beliebigen Zeitpunkt t mit $s(t)$, dann legt die Forderung, daß sich der Zustand $s(t)$ vollkommen durch den Zustand $s(t')$ zu einem früheren Zeitpunkt t' und die Zeitdifferenz $t - t'$ bestimmen läßt, bei Betrachtung dreier Zeitpunkte $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ die folgende Beziehung nahe:

$$V_{t_3-t_1} s(t_1) = s(t_3) = V_{t_3-t_2} s(t_2) = V_{t_3-t_2} V_{t_2-t_1} s(t_1).$$

Daher verlangt man von der Abbildung $t \mapsto V_t$, daß für beliebige reelle Zahlen α_1, α_2 die Identität $V_{\alpha_1+\alpha_2} = V_{\alpha_1} V_{\alpha_2}$ gilt. Die Forderung, daß geringe zeitliche Abstände auch nur geringe Veränderungen in den Zuständen erlauben sollen, soll in Form einer Stetigkeitsaussage eingehen, so daß man nun zu dem folgenden Axiom gelangt:

Axiom 12 : Es gibt eine Abbildung $t \mapsto V_t$ auf der Menge der reellen Zahlen in die Menge der Konvexkombinationen erhaltenden Bijektionen auf S derart, daß für alle Elemente a der Menge L und alle Elemente s der Menge S die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad t \longmapsto p(V_t(s), a)$$

stetig ist und daß für alle reellen Zahlen t_1, t_2 gilt:

$$V_{t_1+t_2} = V_{t_1} V_{t_2}.$$

Auf der Basis von Axiom 12 kann man nun in ähnlicher Weise argumentieren, wie es in den Abschnitten 11.4 und 11.5 vorgeführt wurde. Ausgehend von der im Vorfeld zu Axiom 12 diskutierten Identifikation von S mit der Menge der Dichteoperatoren liefert Axiom 12 die Existenz einer ein-parametrischen Gruppe in die Menge der Kadison-Automorphismen auf der Menge der Dichteoperatoren im Sinne der Definition H.1.1. Mit dem Theorem H.1.3 von R.V. Kadison gibt es zu jedem V_t mit reellem t einen bis auf eine globale Phase bestimmten unitären oder anti-unitären Operator U_t , so daß für alle Dichteoperatoren D gilt:

$$V_t(D) = U_t D U_t^{-1}.$$

Man wähle nun für jedes reelle t einen der so zur Verfügung stehenden und nur durch eine globale Phase differierenden Operatoren aus. Damit folgt wiederum mit Axiom 12 für beliebige reelle Zahlen t_1, t_2 und beliebige Dichteoperatoren D :

$$U_{t_1+t_2} D U_{t_1+t_2}^{-1} = V_{t_1+t_2}(D) = V_{t_1}(V_{t_2}(D)) = U_{t_1} V_{t_2}(D) U_{t_1}^{-1} = U_{t_1} U_{t_2} D U_{t_2}^{-1} U_{t_1}^{-1}.$$

Also erhält man mit Hilfe der „Eindeutigkeitsaussage“ aus dem Theorem H.1.3 von R.V. Kadison für beliebige reelle Zahlen t_1, t_2 die Beziehung

$$U_{t_1+t_2} = e^{i\theta(t_1, t_2)} U_{t_1} U_{t_2}$$

mit einer reellen Zahl $\theta(t_1, t_2)$. Wählt man insbesondere $t := t_1 = t_2$, dann erhält man die Relation $U_{2t} = e^{i\theta(t, t)} U_t^2$. Da das Produkt anti-unitärer Operatoren einen

unitären Operator liefert, muß für jedes reelle t der Operator U_t unitär sein. Zudem konkretisiert man noch die Wahl des Operators U_0 , wie folgt. Mit den eben angestellten Betrachtungen erhält man für $t = 0$ die Relation $U_0 = e^{i\theta(0,0)}U_0^2$. Wählt man nun $\theta(0,0) = 0$ ergibt sich $U_0 = \mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ mit Hilfe der Unitarität von U_0 .

In Definition 11.4.1 wurde das Symbol $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ als Menge der unitären Operatoren auf dem betrachteten Hilbertraum \mathcal{H} eingeführt. Damit liegt mit der Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H}), \quad t \longmapsto U_t$$

eine unitäre Darstellung bis auf einen Faktor im Sinne der Definition 11.4.2 vor. Wie bereits in Abschnitt 11.5 erläutert, kann man den in der unitären Darstellung 11.5 vorkommenden Multiplikator für beliebige reelle Zahlen t_1, t_2 zu 1 wählen, so daß folglich $U_{t_1+t_2} = U_{t_1}U_{t_2}$ gilt. Damit und mit der in Axiom 12 bereitgestellten Stetigkeitsaussage kommt G.W. Mackey zur Anwendung des Theorems H.2.3 von M.H. Stone. Mithin existiert ein bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmter selbstadjungierter Operator H derart, daß für beliebige reelle Zahlen t und beliebige Dichteoperatoren D aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ gilt:

$$V_t(D) = e^{-itH} D e^{itH}. \quad (12.3)$$

Also steht die abstrakte Schrödingergleichung zur Verfügung.

Im Vergleich zu (11.47) beobachtet man genau den Vorzeichen-Unterschied, der im Kontext der Beziehung (11.49) bereits diskutiert wurde.

Die so präsentierten Axiome 1 - 12 sollen stellvertretend für die verbandstheoretische Formulierung der Quantenmechanik herangezogen werden, um das Verhältnis zum Ludwigschen Zugang zu diskutieren. Allerdings verhindern die eingangs des Kapitels angesprochenen offenen Fragen hinsichtlich der Interpretation der vorkommenden Terme S, L und p einen Vergleich im strengen Sinne. Dafür wäre es notwendig, genau sagen zu können, für welche Realtextstücke die obigen Terme als Bilder fungieren sollen. Deshalb bietet sich ein anderer Weg an. Man kann zeigen, daß in der Menge der Entscheidungseffekte G , der Menge der Zustände K und der Abbildung $\hat{\mu}$ innerhalb der realistisch fundierten physikalischen Theorie, wie sie in den Kapiteln 5 bis 11 der vorliegenden Arbeit aufgebaut wurde, eine Struktur vorliegt, die den Axiomen 1 - 12 genügt. Dabei sei auch für G vereinfachend die Irreduzibilität angenommen. Es wird daher der Standpunkt vertreten, daß man mit Hilfe des in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Zugangs zur Quantenmechanik überhaupt erst einen Vorschlag machen kann, was eigentlich mit S, L und p physikalisch abgebildet wird, nämlich mit S die Menge der Zustände K , mit L die Menge der Entscheidungseffekte G und

mit p die Restriktion der Funktion $\hat{\mu}$ auf $K \times G$. Falls mit (S, L, p) nicht das Tripel $(K, G, \hat{\mu}|_{K \times G})$ gemeint sein sollte, muß eine andere physikalische Theorie in einer Weise entwickelt werden, die bezüglich der Verknüpfung zwischen Realität und mathematischem Abbild den allgemeinen Überlegungen aus Kapitel 4 entsprechen muß und in der dann das Tripel (S, L, p) auf Basis von Abbildungsprinzipien interpretiert werden kann. Bevor die Überlegungen weitergeführt werden, soll die obige Behauptung bewiesen werden. Dabei könnte man sich einen Beweis eigentlich ersparen, denn einerseits stellen die Axiome 1 - 12 allesamt Eigenschaften eines Tripels dar, das sich aus dem Projektionsoperatorverband und der Menge der Dichteoperatoren auf einem separablen, komplexen unendlichdimensionalen Hilbertraum sowie der Spur auf dem zugehörigen Produktraum konstituiert. Zum Nachweis wird beispielsweise auf Theorem 1.1 in [Giu91], Kapitel 1, S. 49 verwiesen. Andererseits wurde in Kapitel 10 erkannt, daß $(K, G, \hat{\mu}|_{K \times G})$ gerade mit einem solchen Tripel identifiziert werden kann. Aber es ist durchaus instruktiv zu sehen, an welchen Stellen entscheidende Eigenschaften von S , L und p aus der Ludwigschen Axiomatik hervorgehen, denn für die meisten Eigenschaften im Rahmen der verbandstheoretischen Axiomatik gibt bis heute zumeist keine physikalisch einsichtigen Motivationen, auch wenn man von den eingangs geschilderten grundsätzlichen interpretatorischen Problemen absieht. Man denke dabei etwa an solch abstrakte Eigenschaften wie die der Separabilität, der Atomizität oder der Überdeckungseigenschaft. Lediglich ihre mathematische Unentbehrlichkeit sichert ihre Zugehörigkeit zur verbandstheoretischen Axiomatik der Quantenmechanik. Durch ihre Rückführung auf die physikalisch motivierten Axiome innerhalb der Ludwigschen Axiomatik kann den Axiomen 1 - 12 ein physikalisches Fundament gegeben werden. Das muß neben der Problematik der Interpretation als zweiter gewichtiger Vorteil der Ludwigschen Axiomatik gezählt werden. Besonders erwähnenswert ist dabei sicherlich auch die sogenannte Jauch-Piron-Eigenschaft aus Axiom 7, worauf in Abschnitt 9.1.1 bereits hingewiesen wurde. Es wird sich eine enge Verknüpfung mit AV 1.1 herausstellen.

Um den Bezug auf die Hauptaxiome des Messens und die Axiome aus Kapitel 10 deutlich zu machen, wird darauf im folgenden Beweis gesondert hingewiesen:

Satz 12.2 *Sei $(\mathcal{K}, \mathcal{L}, \mu)$ eine Zustands-Effekt-Struktur im Sinne von Definition 6.3.1, die den Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b, AGal 1, AGal 2 und AGal 3 genügt.*

Dann gelten für das Tripel $(K, G, \hat{\mu}|_{K \times G})$ die als Axiome 1 - 12 bezeichneten Aussagen, wenn man $S := K$, $L := G$ und $p := \hat{\mu}$ setzt.

Bemerkung: Auch wenn es sich also um mathematische Theoreme handeln wird, soll zur Einfachheit des Sprachgebrauchs immer von den Axiomen 1 - 12 gesprochen werden, die es nachzuweisen gilt.

Beweis:

Neben den Eigenschaften einer Zustands-Effekt-Struktur wird noch vorausgesetzt:

AV 1.1, AV 1.2, AV 2 und AVid.

zu Axiom 1: Seien x_1, x_2 Elemente in K derart, daß $\hat{\mu}(x_1, e) = \hat{\mu}(x_2, e)$ für alle $e \in G$ gilt. Da $\hat{\mu}$ auf $K \times \hat{\mathcal{L}}$ wegen Satz 8.2.14 mit der Bilinearität ξ_Δ zusammenfällt, gilt die Identität dann auch für alle $y \in \text{co } G$. Die Stetigkeit von $\hat{\mu}$ liefert dann $\hat{\mu}(x_1, y) = \hat{\mu}(x_2, y)$ für alle $\overline{\text{co}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} G$ und damit gemäß Satz 9.5.1 für alle $y \in \hat{\mathcal{L}}$. Also folgt mit Satz 7.2.7 (ii) auch die Identität von x_1 und x_2 .

Sind nun $e_1, e_2 \in G$ mit $\hat{\mu}(x, e_1) = \hat{\mu}(x, e_2)$ für alle $x \in K$, dann folgt die Behauptung sofort mit Satz 7.2.7 (i).

Damit kann entsprechend Definition 12.1 eine Ordnung auf G definiert werden, die aber offensichtlich mit derjenigen zusammenfällt, die vermittels Definition 8.4.1 insbesondere auf G festgelegt wird.

zu Axiom 2: Mit Lemma 9.2.5 (i) folgt die Zugehörigkeit von $\mathbf{0}$ zu G . Das Element $\mathbf{0}$ hat bekanntermaßen die Eigenschaften, die durch Axiom 2 verlangt werden.

zu Axiom 3: Siehe Lemma 9.5.3 (ii).

zu Axiom 4: Die erste Forderung in Axiom 4 ist gleichbedeutend mit der Forderung nach σ -Orthovollständigkeit für G im Sinne von Definition F.15. G ist aber mit Lemma 9.2.5 (i) sogar vollständiger Verband, so daß G auch σ -orthovollständig ist. Der zweiten Forderung wird mit Satz 9.5.11 (ii) entsprochen.

Damit kann man im Sinn des Programms der Axiome 1 - 12 eine Orthokomplementation auf G einführen. Sie fällt offenbar mit derjenigen aus Lemma 9.5.4 zusammen.

zu Axiom 5: Siehe nochmals Satz 9.5.11 (ii).

Den Erörterungen im Vorfeld des Axioms 5 auf Seite 421 zufolge muß K mit einer Teilmenge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf G vermittels der Abbildung j identifiziert werden. Die Abbildung nimmt hier die folgende Form an

$$j : K \longrightarrow W(G), \quad x \longmapsto \hat{\mu}|_{K \times G}(x, \cdot).$$

zu Axiom 6: Axiom AVid beinhaltet gerade die Forderung danach, daß K hinreichend ist. Also muß man jetzt noch die σ -Konvexität zeigen. Seien dafür eine höchstens abzählbare Indexmenge I , eine Familie $(x_i)_{i \in I}$ in K und eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ aus dem reellen Intervall $[0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ gewählt. Dann existiert mit Satz 8.3.4 (i) ein $x \in K$, so daß für eine beliebige Reihenfolge $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$ gilt. Also folgt aufgrund der Normstetigkeit von ξ_Δ für jedes $e \in G$ auch $\hat{\mu}(x, e) = \sum_{i \in I} \lambda_i \hat{\mu}(x_i, e)$. Damit liegt die gesuchte Konvexitätseigenschaft vor.

zu Axiom 7:

Zum Beweis der Jauch-Piron-Eigenschaften für die Elemente aus K wähle man ein Element $x \in K$ und zwei Elemente e_1, e_2 aus G mit der Eigenschaft $\hat{\mu}(x, e_1) = \hat{\mu}(x, e_2) = 1$. Dann liegt aufgrund der Verbandseigenschaft von G das Infimum $e_1 \wedge e_2$ in G . Trivialerweise gilt $e_1 \wedge e_2 \leq e_1, e_2$. Es bleibt, die Identität $\hat{\mu}(x, e_1 \wedge e_2) = 1$ zu zeigen.

Nun gilt mit Lemma 9.5.8 und Lemma 9.2.6 (ii) aber gerade:

$$\forall e_1, e_2 \in G : K_1(e_1) \cap K_1(e_2) = K_1(e_1 \wedge e_2).$$

Wegen der Voraussetzung $\hat{\mu}(x, e_1) = \hat{\mu}(x, e_2) = 1$ ergibt sich die Zugehörigkeit von x zu $K_1(e_1) \cap K_1(e_2)$. Folglich erhält man insbesondere $\hat{\mu}(x, e_1 \wedge e_2) = 1$.

Die Gesamtheit der Jauch-Piron-Eigenschaften für die Elemente von K kann also gerade als Teil der Aussage über den Verbandsisomorphismus $G \xrightarrow{K_1} W_{\hat{\mathcal{L}}}$ aus Lemma 9.5.8 aufgefaßt werden. Die Aussage aus Lemma 9.5.8 beruht aber außer auf AVid gerade entscheidend auf Lemma 9.2.5 (iii), das wiederum direkte Konsequenz von AV 1.1 ist.

Man kann auch noch eine etwas offensichtlichere Verbindung zwischen AV 1.1 und der Gesamtheit Jauch-Piron-Eigenschaften für die Elemente aus K zeigen, wobei aber natürlich auch auf Aussagen zurückgegriffen wird, die auf dem gesamten Kanon der Aussagen AV 1.1, AV 1.2, AV 2 und AVid beruhen.

Dazu wird AV 1.1 betrachtet:

$$\forall y_1, y_2 \in \hat{\mathcal{L}} \exists y \in \hat{\mathcal{L}} : y \geq y_1, y_2 \text{ und } K_0(y) \supseteq K_0(y_1) \cap K_0(y_2). \quad (12.4)$$

Man wähle nun zwei Elemente e_1, e_2 aus G . Mit Lemma 8.3.5 (ii) liegen auch $\mathbf{1} - e_1$ und $\mathbf{1} - e_2$ in $\hat{\mathcal{L}}$, so daß mit (12.4) die Existenz eines Elementes \bar{y} aus $\hat{\mathcal{L}}$ mit $\bar{y} \geq \mathbf{1} - e_1, \mathbf{1} - e_2$ und $K_0(\bar{y}) \supseteq K_0(\mathbf{1} - e_1) \cap K_0(\mathbf{1} - e_2)$ folgt.

Es gelten also einerseits die Relationen $\mathbf{1} - \bar{y} \leq e_1, e_2$, und andererseits gilt die Inklusion $K_1(\mathbf{1} - \bar{y}) \supseteq K_1(e_1) \cap K_1(e_2)$. Mit Lemma 9.2.7 (ii) existiert zu $\mathbf{1} - \bar{y}$ ein Element $e \in G$ mit $\mathbf{1} - \bar{y} \leq e$ und $K_1(e) = K_1(\mathbf{1} - \bar{y})$. Nach Lemma 9.2.7 (ii) ist e aber auch das kleinste Element aus G mit $e \geq \mathbf{1} - \bar{y}$, so daß man zu den Relationen $e \leq e_1, e_2$ gelangt. Also kann man zusammenfassen:

$$\forall e_1, e_2 \in G \exists e \in G : e \leq e_1, e_2 \text{ und } K_1(e) \supseteq K_1(e_1) \cap K_1(e_2). \quad (12.5)$$

Damit liegen aber alle Jauch-Piron-Eigenschaften auf der Hand. Wählt man nämlich ein Element $x \in K$ und zwei Elemente e_1, e_2 aus G mit $\hat{\mu}(x, e_1) = \hat{\mu}(x, e_2) = 1$, dann gilt offenbar $x \in K_1(e_1) \cap K_1(e_2)$. Folglich erhält man mit (12.5) die Existenz eines Elementes e_3 aus G mit $e_3 \leq e_1, e_2$ und $\hat{\mu}(x, e_3) = 1$.

Man setze jetzt voraus:

AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AVid, AV 3 und AV 4s.

zu Axiom 8 und 9: Siehe Satz 9.8.3 und Satz 9.8.4 (i).

Ab jetzt mögen die folgenden Aussagen gelten:

AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AVid, AV 3, AV 4s, AV 4i, AV 4a, AV 4b.

zu Axiom 10: Dabei handelt es sich um eine unmittelbare Folge von AV 4(i).

zu Axiom 11: Siehe Satz 10.2.1 und Lemma 10.2.2.

zu Axiom 12: Man betrachte die Abbildung aus (11.24) in Anwendung auf die Elemente $g = (\mathbb{I}, 0, 0, t)$ der Galilei-Gruppe mit reellem t , dann erhält man die folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \{ \tilde{S} \mid \tilde{S} \text{ ist } \mathcal{D}\text{-stetiger Mischungs-Automorphismus } \}, \\ t &\longmapsto \tilde{S}_{(\mathbb{I}, 0, 0, t)}. \end{aligned}$$

Man setze nun $V_t := \tilde{S}_{(\mathbb{I}, 0, 0, t)}$ für beliebige reelle Zahlen t . Es bleibt, die Eigenschaften von V_t zu zeigen. Für jedes t aus \mathbb{R} bezeichnet $\tilde{S}_{(\mathbb{I}, 0, 0, t)}$ einen Mischungs-Automorphismus. Das heißt Abschnitt 11.2 zufolge gerade, daß $\tilde{S}_{(\mathbb{I}, 0, 0, t)}$ eine affine Bijektion ist. Des weiteren folgt mit (11.26) und (11.43) für beliebige reelle Zahlen t_1, t_2 die Beziehung $V_{t_1+t_2} = V_{t_1} V_{t_2}$. Auf die Aussage bezüglich der Stetigkeit kann hier nicht weiter eingegangen werden, da die zugehörige Aussage in (11.39) nicht hinreichend konkretisiert wurde. ■

Satz 12.2 zeigt, daß mit $(K, G, \hat{\mu}|_{K \times G})$ eine mathematische Struktur im Rahmen des Ludwigschen Zugangs zur Quantenmechanik ausgezeichnet werden kann, die genau die typischen Eigenschaften hat, die im Rahmen der verbandstheoretischen Axiomatik gefordert werden. Mit der Ludwigschen Formulierung steht also eine geeignete Rahmentheorie für die durch die Axiome 1 - 12 aufgebaute mathematische Struktur zur Verfügung, die einerseits eine Interpretation der vorkommenden mathematischen Terme S, L, p erlaubt und die andererseits die Axiome 1 - 12 auf andere Axiome zurückführt, die fast ausschließlich durch Verallgemeinerung und Idealisierung physikalischer Aussagen gewonnen wurden.

Trotz der diskutierten wichtigen Kritikpunkte sind durch das System der Axiome 1 - 12 entscheidende Schritte in Richtung einer hilbertraumfreien Axiomatik der Quantenmechanik entwickelt worden. Aus Sicht des Ludwigschen Standpunktes erklärt sich der Erfolg des verbandstheoretischen Zuganges zumindest zum Teil aus der Identität

$$\overline{\text{co}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} G = \hat{\mathcal{L}}, \quad (12.6)$$

für die an Satz 9.5.1 erinnert wird. In (12.6) konkretisiert sich, warum man durch ein Axiomensystem, wie es in diesem Kapitel dargestellt wurde, dennoch zentrale physikalische Strukturen erfaßt hat. Man betrachtet mit G zwar nicht alle Effekte, aber dennoch eine Teilmenge, die die Menge aller Effekte charakterisiert. Jeder Effekt ist beliebig genau durch Konvexkombinationen von Entscheidungseffekten im Sinne der physikalischen Unschärfe approximierbar.

Der Ludwigsche Zugang erweist sich im Verhältnis zu alternativen Grundlegungen der Quantenmechanik als leistungsstark. Er bietet nicht nur einen geeigneten Rahmen, um Interpretationsfragen zu begegnen, sondern kann sogar zentrale Axiome auf physikalisch motivierte Aussagen zurückführen.

Kapitel 13

Die Überwindung von unzulässigen Vorstellungen und Interpretationsproblemen

Die zentrale Ursache für die Fülle von Problemen, die im Zusammenhang mit der Quantenmechanik immer wieder auftreten, kann in dem Bedürfnis nach Anschaulichkeit der mikrophysikalischen Vorgänge gesehen werden. Mikrosystemen werden häufig Eigenschaften zugeschrieben, die ihnen aus der Sicht des hier vertretenen Standpunktes nicht zukommen. Es ist das Ziel der anschließenden Erörterungen, die Problempunkte aus Kapitel 1 auf Vorstellungen über das Wesen der Mikrosysteme zurückzuführen, die entweder der Quantenmechanik widersprechen oder zum mindesten vollständig entbehrlich sind.

Der Diskussion zum Welle-Teilchen-Dualismus im ersten Abschnitt folgen im zweiten Abschnitt Auseinandersetzungen mit den Vorstellungen zur Reduktion des Wellenpaketes und den von Neumannschen Vorstellungen zur Rolle des Subjekts in der Quantenmechanik. Dem schließt sich eine ausführliche Diskussion des Artikels von A. Einstein, B. Podolsky und N. Rosen an. Der vierte Abschnitt befaßt sich mit den Interpretationsvarianten der Unschärferelationen. Da in der vorliegenden Arbeit der Observablen-Begriff ob seiner Entbehrlichkeit für eine Axiomatik der Quantenmechanik nur unzureichend eingeführt wurde, beschränkt sich der vierte Abschnitt allerdings auf die Betrachtung von Effekten. Überlegungen zur Notwendigkeit einer neuen Logik widmet sich der fünfte Abschnitt. Als Resultat der vorhergehenden Abschnitte erfolgt zum Abschluß eine Bemerkung zur Bohr-Einstein-Debatte hinsichtlich der Frage eines der Quantenmechanik angepaßten Realitätsbegriffes.

13.1 Welle-Teilchen-Dualismus

In Punkt (i) der Aufzählung in Kapitel 1 wurde der Doppelspaltversuch als ein Beispiel für das Auftauchen zweier widersprüchlicher Eigenschaften der Mikrosysteme angeführt. Es scheint dabei „etwas“ von der Quelle zum Schirm zu gelangen, das einerseits Wellencharakter hat und das sich andererseits wie Teilchen verhält. Wenn man nun annimmt, daß Mikrosysteme manchmal Teilchen und manchmal Wellen sind und daß es sich situationsbedingt entscheidet, welches Verhalten gerade zu Tage tritt, drängt sich die Frage auf, wie das vonstatten geht. Das Mikrosystem müßte die experimentelle Situation erschließen können, um eine Entscheidung fällen zu können. Das scheint weit hergeholt. Viel naheliegender ist es, Mikrosysteme nicht in einem solchen Maße zu veranschaulichen. Man darf nicht aus dem wellenartigen Verhalten auf der einen Seite und dem teilchenartigen Verhalten auf der anderen Seite darauf schließen, daß sich bei dem betrachteten Doppelspaltexperiment tatsächlich Wellen oder Teilchen von der Quelle zum Schirm bewegen. Es handelt sich dabei um einen unzulässigen Schluß über die Natur der Mikrosysteme. Wenn man einen derartigen Schluß nicht zieht, sondern anerkennt, daß die quantenmechanische Wechselwirkung nicht das gewünschte Maß an Anschaulichkeit im klassischen Sinne besitzt, kann man einem Widerspruch entgehen. Der sogenannte Welle-Teilchen-Dualismus ist mithin nicht als innerer Widerspruch der Quantenmechanik oder gar der Realität aufzufassen. Vielmehr steht er dafür, daß man sich die Wechselwirkungsträger der Quantenmechanik nicht zu sehr veranschaulichen darf. In dem hier vorgestellten Zugang zur Quantenmechanik wird stets äußerst zurückhaltend mit Vorstellungen zu den Wechselwirkungsträgern der Quantenmechanik, also den Mikrosystemen, umgegangen. Sie werden zwar genutzt, um gewisse Axiome nahezulegen, aber die Axiome selber nehmen keinen Bezug auf derartige Vorstellungen, sondern nur auf die realen Gegebenheiten, die sich in den Verfahren und darauf aufbauenden Strukturen wie Effekten und Zuständen manifestieren.

Eine erheblich ausführlichere Analyse zum Welle-Teilchen-Dualismus führt G. Ludwig in [Lud84a], Kapitel XI, §1.5, S. 43-57. Man beachte auch die verallgemeinerten Überlegungen zu Theoriennetzen in [Lud90b], Abschnitt 9.3, S. 115-121. In etwas vereinfachter Form lassen sich die dort erläuterten Überlegungen in der folgenden Weise zusammenfassen. Man betrachte beispielsweise die Teil-Theorie der Quantenmechanik, die sich mit Elektronen befaßt und die im weiteren mit \mathcal{PT}_{elek} bezeichnet sei. Dann kann man die zwei Bilder, das „Wellenbild“ und das „Teilchenbild“, als zwei physikalische Theorien \mathcal{PT}_W oder \mathcal{PT}_T auffassen, die jeweils gegenüber \mathcal{PT}_{elek} weniger umfangreich sind. Das heißt, sie beschreiben jeweils bezüglich \mathcal{PT}_{elek} kleinere Wirklichkeitsbereiche, die aber nicht identisch sind. Das entspricht dem Umstand,

das die beiden Theorien auch auf Grundbereiche Bezug nehmen, die in demjenigen von \mathcal{PT}_{elek} echt enthalten sind, die aber nicht identisch sind. Der Umstand, daß sich die beiden Theorien \mathcal{PT}_W und \mathcal{PT}_T im Widerspruch zueinander befinden, weist nun lediglich darauf hin, daß es in den beiden zugehörigen mathematischen Theorien überflüssige Strukturen gibt, die gerade durch den Übergang zu \mathcal{PT}_{elek} beseitigt werden. In einem solchen Sinne sieht Ludwig Widersprüche zwischen derartigen Theorien nicht als Hinweis auf eine Widersprüchlichkeit der Natur. Vielmehr faßt er sie als besonders fruchtbar für die Entwicklung umfangreicherer Theorien auf, da so aufgedeckt werden kann, welche Strukturen innerhalb der beteiligten mathematischen Theorien zur Beschreibung der physikalischen Phänomene überflüssig sind. Interessant ist dabei die Beobachtung Ludwigs, daß es auch durchaus Gemeinsamkeiten der Theorien \mathcal{PT}_W oder \mathcal{PT}_T gibt. Man kann Experimente angeben, für die Wellen- wie Teilchenbild gleichermaßen erfolgreich sind, wie etwa Ablenkungsversuche von Kathodenstrahlen in langsam veränderlichen äußeren elektromagnetischen Feldern. Das heißt, es gibt Überschneidungen der \mathcal{PT}_W oder \mathcal{PT}_T zugehörigen Grundbereiche. Bezeichnet man die diesem „gemeinsamen“ Grundbereich zugehörige physikalische Theorie mit \mathcal{PT}_g , dann handelt es sich sowohl bei \mathcal{PT}_W als auch \mathcal{PT}_T um eine gegenüber \mathcal{PT}_g umfangreichere physikalische Theorie. Symbolisiert man die Relation, daß eine physikalische Theorie \mathcal{PT}_1 umfangreicher ist als eine andere physikalische Theorie \mathcal{PT}_2 , mit $\mathcal{PT}_1 \longrightarrow \mathcal{PT}_2$, kommt man zu dem in Abbildung 13.1 wiedergegebenen Diagramm der betrachteten vier physikalischen Theorien.

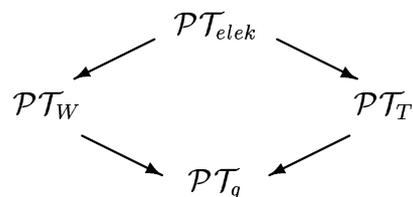


Abbildung 13.1: Illustration des Verhältnisses der quantenmechanischen Teil-Theorie \mathcal{PT}_{elek} der Elektronen, dem „Wellenbild“ \mathcal{PT}_W , dem „Teilchenbild“ \mathcal{PT}_T und einer dem Wellen- und dem Teilchenbild gemeinsamen Teil-Theorie \mathcal{PT}_g zueinander. Von zwei Theorien, die durch einen Pfeil miteinander verknüpft sind, ist die Obenstehende gegenüber der Untenstehenden jeweils umfangreicher.

13.2 Reduktion des Wellenpakets und Subjektivismus

Hinter den Aussagen aus Punkt (ii) und (iii) der Aufzählung aus Kapitel 1 lassen sich Versuche vermuten, den Mikrosystemen eine ihnen nicht zustehende Eigenständigkeit zuzuschreiben. Dafür sollen, dem Artikel [Lud90c] von G. Ludwig folgend, Formulierungen wie

„Jedem einzelnen Mikrosystem kommt eine Wellenfunktion zu, die den Zustand des Mikrosystems beschreibt.“

diskutiert werden. Das Mikrosystem wird also augenscheinlich als Individuum aufgefaßt. Seine Selbständigkeit drückt sich hier darin aus, daß es im Besitz eines Zustandes sein kann, ohne daß dabei ein Rückgriff auf die Apparateebene nötig scheint. Vom hier vertretenen Standpunkt aus betrachtet, demzufolge ein Mikrosystem lediglich ein Paar aus einem Präparier- und einem Registrierereignis ist, handelt es sich dabei um ein entscheidendes Mißverständnis. Es ist nicht etwa das Mikrosystem, das sich in einem Zustand befindet, sondern es ist das Präparierverfahren, mit dem das dem Mikrosystem zugehörige Präparierereignis gewonnen wurde, das zu einem Zustand gehört. Die Menge \mathcal{K} der Zustände ist eine Menge von Mengen von Präparierereignissen und nicht eine Menge von Präparierereignissen. Man kann höchstens sagen, daß man ein Mikrosystem in einem Zustand präpariert hat, wenn man damit genau den eben erläuterten Sachverhalt meint.

Einen Zustand, also eine Klasse von Präparierverfahren, kann man im extremalen Falle vermittle der Überlegungen aus Kapitel 10 mit einem normierten Vektor eines Hilbertraumes identifizieren. Die Schrödingersche Wellenfunktion kommt also nicht einem einzelnen Mikrosystem zu, sondern nur dem Präparierverfahren, das das dem Mikrosystem zugehörige Präparierereignis erzeugt hat. Natürlich stellt das einen entscheidenden Unterschied dar. Da die Motivation, einzelnen Mikrosystemen Zustände zuzuschreiben, vermutlich in der Hoffnung besteht, die mikrophysikalischen Vorgänge insbesondere beim sogenannten Meßprozeß anschaulich zu gestalten, sollen die Konsequenzen einer solchen Annahme auch daran studiert werden.

Man gehe davon aus, daß es sinnvoll sei, einem einzelnen Mikrosystem einen Zustand zuzuschreiben. Der Einfachheit halber gehe man zudem davon aus, daß der Zustand gerade durch ein normiertes Element φ des zugrundeliegenden Hilbertraumes \mathcal{H} charakterisiert werden könne. An einem Registrierapparat tritt nun in einem bestimmten Raum-Zeit-Gebiet ein Ereignis auf oder nicht. Betrachtet man etwa eine Batterie von Auftreffzählern, auf die vermittle eines Präparierverfahrens Elektronen gerichtet wirken, dann spricht in der Regel nur einer an. Ebenso findet man nur

eine Szintillation auf einem Szintillationsschirm, nur einen geschwärzten Punkt auf dem Photopapier. Meistens zeichnet φ aber keinen Auftreffzähler oder dergleichen in trivialer Weise aus. Genau eine solche Information muß man aber φ abringen, wenn man an der eingangs gewählten Vorstellung festhalten will, daß dem Mikrosystem der Zustand zukäme. Mithin ist es zwingend, die Ausgangsvorstellung durch eine zweite zu ergänzen. Es wird angenommen, daß der dem betrachteten Mikrosystem zukommende individuelle Zustand φ die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einen konkreten beobachteten Veränderung bestimmt. G. Ludwig spricht in [Lud90c] von der „Märchenvorstellung einer Wahrscheinlichkeit für einen Einzelprozeß“. Nachdem dadurch eine „Erklärung“ des Meßereignisses geliefert wird, schließt sich aber unmittelbar das Problem an, daß der vormalige Zustand φ nicht mehr geeignet ist, künftige Vorgänge zu beschreiben. Es wird augenblicklich ein neuer Zustand benötigt. Dafür muß das Mikrosystem unterscheiden können, ob es gemessen wird oder ob es sich lediglich in einer „nicht-messenden“ Wechselwirkung befindet. Je nachdem kommt es plötzlich durch die sogenannte „Reduktion des Wellenpaketes“ zur Wahl eines neuen Zustandes, der zudem auch noch ein Eigenvektor des dem Registrierapparat zugehörigen selbstadjungierten Operators ist. Damit kommt bereits die dritte Vorstellung über das Wesen der Mikrosysteme zur Anwendung. Wenn man nun noch die Überlegungen J. von Neumanns zur Reduktion des Wellenpakets hinzunimmt, die Punkt (iii) in Kapitel 1 kurz skizziert, kommen mit der entscheidenden Rolle des Subjekts oder des Bewußtseins des Beobachters zur Umgehung eines unendlichen Regresses noch weitere befremdende Vorstellungen hinzu. Offenbar erzwingt die anfänglich harmlos wirkende Annahme, daß ein Mikrosystem Träger eines Zustandes sei, in der Folge eine Reihe immer merkwürdiger anmutender Zusatzvorstellungen. Folglich erscheint es gerade hinsichtlich des Wunsches, sich die Vorgänge besser vorstellen zu können, kontraproduktiv, an einer solchen Annahme festzuhalten.

Keine der eben erläuterten Vorstellungen steht im Widerspruch zu den experimentellen Aussagen der Quantenmechanik, da stets eine zusätzliche Vorstellung die Mängel der vorhergehenden gerade aufzufangen vermag, bis man schließlich Zuflucht im Bewußtsein des Beobachters sucht. Aber während die zu Beginn gemachte Annahme über Zustände der Mikrosysteme vom Standpunkt der alltäglichen Erfahrung noch naheliegen mag, kann man kaum behaupten, daß sich die zu ihrer Stütze vorgebrachten Folgevorstellungen in natürlicher Weise aufdrängen. Daher erscheint das Argument, daß die Annahmen nicht mit dem Experiment in Widerspruch geraten, nicht befriedigend. So kann etwa auch die Behauptung, daß alle Ereignisse auf der Welt, die bisher geschehen sind, ein ungeheurer Zufall waren und daß sich eigentlich alles ganz anders verhält, als es scheint, nicht experimentell widerlegt werden. Dennoch darf man es wohl als unbefriedigend einstufen. Um so mehr darf man die oben

erläuterten Vorstellungen zur Natur der Mikrosysteme als unbefriedigend einschätzen, als sie sich als entbehrlich erweisen, denn der hier vorgestellte Zugang bezieht sich an keiner Stelle auf derartige Überlegungen. Insbesondere erweist es sich an keiner Stelle als notwendig, das Bewußtsein des Beobachters innerhalb der Theorie explizit zu berücksichtigen.

Wie eingangs vermutet wurde, dienen die obigen Vorstellungen wohl vor allem dem Versuch der Veranschaulichung des Meßprozesses. Mit der Ablehnung solcher Vorstellungen wird aber noch nicht deutlich, wie der Meßprozeß im Rahmen der Quantenmechanik verstanden werden sollte. Der hier gewählte Aufbau erlaubt aber eine klare Analyse zum Verhältnis von Meßprozeß und Quantenmechanik, deren Ergebnis bereits in Abschnitt 6.1 dargelegt wurde. Die für die Quantenmechanik gewählte Kombinierbarkeitsbedingung für Präparierverfahren und Registriermethoden ist gerade derart gewählt, daß keine Informationen über die Prozesse während des Präparierens und des Registrierens gesammelt werden. Das heißt, es besteht vom Standpunkt des Ludwigschen Zugangs schon aus solch prinzipiellen Gründen nicht die Möglichkeit den Meßprozeß im Rahmen der Quantenmechanik zu beschreiben. Der Meßprozeß liegt außerhalb der Quantenmechanik.

Ein weiterer Grund, die obigen problematischen Vorstellungen abzulehnen, muß noch aufgeführt werden, obwohl er hier nicht in befriedigender Weise gewürdigt werden kann. G. Ludwig hat an eine physikalische Theorie neben der Widerspruchsfreiheit mit den Experimenten weitergehende Ansprüche. Sie soll Aussagen darüber machen, was physikalisch wirklich und physikalisch möglich ist. Eine ausführliche Analyse der Begriffe „physikalisch möglich“ und „physikalisch wirklich“ im Zusammenhang mit allgemeinen physikalischen Theorien führt G. Ludwig in [Lud90b], Kapitel 10, S. 125-211. An eine Reihe einführender Überlegungen zur physikalischen Wirklichkeit hinsichtlich einer Charakterisierung des Wirklichkeitsbereiches einer physikalischen Theorie sei auch an Kapitel 4 erinnert. Fordert man im Ludwigschen Sinne von einer physikalischen Theorie nun noch Aussagen darüber, was physikalisch möglich und real und vor allem was physikalisch nicht möglich und nicht real ist, dann wiegt das oben angeführte Argument schwerer. Warum sollte man Vorstellungen über die Mikrosysteme als real annehmen, wenn die physikalische Theorie auch ohne sie auskommt. Verlangt man also von einer physikalischen Theorie auch Aussagen über das, was möglich ist, formiert sich deutlich schärferer Widerstand gegen die hier diskutierten Vorstellungen. Vor dem Hintergrund solcher Ansprüche sind die provokanten Aussagen Ludwigs zu sehen, wenn er an mehreren Stellen wie etwa in [Lud85b, Lud90c] von „Märchenvorstellungen“ oder „Wunschträumen“ spricht.

13.3 Das Gedanken-Experiment von Einstein, Podolsky und Rosen

Wie in den beiden zurückliegenden Abschnitten bereits deutlich wurde, entstehen die Probleme in der Interpretation der Quantenmechanik dadurch, daß man den Mikrosystemen mehr Eigenschaften zukommen lassen möchte, als es angebracht ist. Auch die nun folgende Diskussion der Aussagen, die Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen in ihrem berühmten Artikel [EPR35] tätigen, legen die Vermutung unzulässiger Vorstellungen über die Natur der Mikrosysteme nahe.

Um das zu belegen, erfolgt zunächst in Unterabschnitt 13.3.1 eine kurze Zusammenfassung der Argumentation, die im oben genannten Artikel vorgestellt wird. Die Diskussion der so vorgestellten Überlegungen vor dem Hintergrund des Zuganges zur Quantenmechanik, wie er in der zurückliegenden Arbeit vorgestellt wurde, erfolgt dann in Unterabschnitt 13.3.2.

13.3.1 Der Artikel von Einstein, Podolsky und Rosen

Der im Mittelpunkt stehende Artikel [EPR35] versteht sich in erster Linie als Nachweis, daß die Beschreibung der quantenmechanischen Naturphänomene durch die sogenannten Wellenfunktionen nicht als vollständig aufgefaßt werden kann. Die Argumentation fußt auf zwei zentralen Kriterien. Zum einen wird ein für unumgänglich erachtetes Vollständigkeitskriterium angegeben. Zum anderen wird ein als hinreichend charakterisiertes Kriterium dafür formuliert, was als ein Element der physikalischen Realität verstanden werden kann. Dabei geschieht letzteres vor dem besonders betonten Hintergrund, daß die Elemente der Realität nicht durch a priori philosophische Überlegungen bestimmt sind, sondern daß sie durch Berufung auf Ergebnisse von Experimenten und Messungen gefunden werden müssen.

Als ein unumgängliches Kriterium für die Vollständigkeit einer physikalischen Theorie als erachten die Autoren die folgende Aussage:

Bedingung der Vollständigkeit: Jedes Element der physikalischen Realität muß seine Entsprechung in der physikalischen Theorie haben.

Als ein hinreichendes, wenn auch nicht notwendiges Kriterium für Elemente der physikalischen Realität wird gewählt:

Realitäts-Kriterium: Wenn wir, ohne auf irgendeine Weise ein System zu stören, den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit, das heißt mit Wahrscheinlichkeit gleich eins, vorhersagen können, dann gibt es

ein Element der physikalischen Realität, das dieser physikalischen Größe entspricht.

Auf der Basis obiger Kriterien bestehen nach Meinung von Einstein, Podolsky und Rosen nur zwei Möglichkeiten:

- (i) die Beschreibung der quantenmechanischen Realität durch die Wellenfunktionen ist nicht vollständig,
- (ii) zwei physikalischen Größen, denen nichtkommutierende Operatoren zugeordnet werden, kann nicht zugleich physikalische Realität zukommen.

Dafür wird die folgende Begründung angegeben. Käme zwei derartigen physikalischen Größen zugleich physikalische Realität zu und kämen ihnen damit bestimmte Werte zu, dann müßten sich die beiden Werte aufgrund der Vollständigkeitsbedingung in der Wellenfunktion wiederfinden. Das ist aber nicht der Fall, da die betrachteten Operatoren nicht kommutieren.

Die Argumentation zielt nun darauf, durch die prinzipielle Charakterisierung eines apparativen Aufbaus Punkt (ii) der obigen Aufzählung als nicht zutreffend darzustellen, um so auf Punkt (i), also die anvisierte Nicht-Vollständigkeit, zu schließen.

Als experimentellen Aufbau werden Gesamtsysteme betrachtet, die sich aus zwei Teilsystemen I und II zusammensetzen. Die Teilsysteme mögen im Zeitintervall $t = 0$ bis $t = T$ miteinander in Wechselwirkung treten. In der Folge möge keine Wechselwirkung mehr zwischen den Subsystemen stattfinden. Durch einen solchen Vorgang, so sagen Einstein, Podolsky und Rosen, ist der Zustand des Gesamtsystems vollständig charakterisiert. Somit kann die zeitliche Entwicklung des Zustandes des Gesamtsystems durch Lösen der Schrödingergleichung für alle Zeiten $t > T$ ermittelt werden. Die Zustände der einzelnen Subsysteme können nicht bestimmt werden. Nun besteht aber die Möglichkeit der Durchführung weiterer Messungen an den einzelnen Subsystemen, die dann dadurch, daß der Gesamtzustand bekannt ist, auf den Zustand des jeweils anderen Subsystems schließen lassen, da keine weitere Wechselwirkung zwischen den beiden Subsystemen mehr besteht. Es steht frei, an den Subsystemen II verschiedene physikalische Größen zu messen, so daß dadurch auch die Werte der Größe für die Subsysteme des Typs I feststehen. Ein solches Vorgehen kann auch für Größen durchgeführt werden, denen nicht-kommutierende Operatoren zukommen. In bezug darauf wird jetzt gefolgert:

Wir werden daher durch Messen zweier derartiger Größen in die Lage versetzt, mit Sicherheit, und ohne auf irgendeine Weise das System I zu

stören, entweder den Wert der einen Größe oder den Wert der anderen Größe für das System I vorherzusagen. Im Einklang mit obigem Realitätskriterium müssen wir im ersten Fall die eine Größe als ein Element der physikalischen Realität betrachten, im zweiten Fall ist die andere Größe als ein Element der physikalischen Realität anzusehen. Da aber die Systeme zum Zeitpunkt der Messung der jeweiligen Größe nicht mehr miteinander in Wechselwirkung stehen, kann nicht wirklich eine Änderung an dem System I als Folge von irgendetwas auftreten, das dem System II zugefügt werden mag. Es handelt sich hierbei natürlich nur um eine Äußerung dessen, was mit der Abwesenheit der Wechselwirkung zwischen den beiden Systemen gemeint ist. Also können die Werte beider Größen derselben physikalischen Realität zugeordnet werden.

Damit steht für Einstein, Podolsky und Rosen die Nicht-Gültigkeit von Punkt (ii) der obigen Aufzählung fest. Mithin ergibt sich die Gültigkeit von Punkt (i) der Aufzählung. Das heißt, es folgt die Nicht-Vollständigkeit der Beschreibung der quantenmechanischen Naturphänomene.

13.3.2 Die Erörterung des Artikels von Einstein, Podolsky und Rosen im Lichte des Ludwigschen Zuganges

Zu Beginn des soeben erläuterten Artikels wird betont, daß Elemente der physikalischen Realität nicht durch a priori philosophische Überlegungen bestimmt sind, sondern daß sie durch Berufung auf Ergebnisse von Experimenten und Messungen festzulegen sind. Damit vertreten die Autoren einen Standpunkt, der durchaus den Überlegungen entspricht, die in Kapitel 4 zur Grundlage der hier dargestellten Form der physikalischen Theorie der Quantenmechanik gemacht wurden. Insofern gibt es eine gemeinsame Basis für den Vergleich der beiden Zugänge. Allerdings verlassen Einstein, Podolsky und Rosen bereits bei der Formulierung ihres Realitätskriteriums das so gelegte Fundament, denn sowohl der Begriff des „Systems“ als auch der Tatbestand des „Störens“ müssen als Sachverhalte eingestuft werden, die sich nicht in trivialer Weise auf experimentelle Prozesse zurückführen lassen. Da aber keine Rückführung der benannten Begriffe auf experimentelle Sachverhalte zur Verfügung gestellt wird, kann den beiden Begriffen auch keine Bedeutung zugeordnet werden. Es fehlt im Sinne des Kapitels 4 an geeigneten Abbildungsprinzipien. Die folgende Erörterung soll nun deutlich machen, daß genau im Verlassen des experimentellen Fundamentes und nicht in der Quantenmechanik selbst die eigentliche Quelle für innere Widersprüche liegt.

Dafür wird der von Einstein, Podolsky und Rosen vorgeschlagene experimentelle Aufbau betrachtet, indem er zunächst in den Rahmen einordnet wird, der durch Kapitel 5 aufgespannt wurde. Das heißt, der experimentelle Aufbau muß in den Begriffen der Präparierverfahren und Registriermethoden formuliert werden. Man stelle als erstes fest, daß drei Sorten von Mikrosystemen vorliegen, diejenigen der Sorte I, diejenigen der Sorte II und diejenigen, die aus Mikrosystemen der Sorten I und II zusammengesetzt sind. Zum Begriff der Sorte von Mikrosystemen erinnere man Abschnitt 10.1. In einer Vielzahl von Veröffentlichungen, für die stellvertretend auf [Lud85c], Kapitel XVII, Abschnitt 4.4, S. 330-334 verwiesen sei, faßt G. Ludwig das betrachtete Experiment als ein Präparierverfahren für Mikrosysteme des Typs I auf. Dabei bedenke man, daß ein Präparierverfahren eine Anleitung zum Erhalt einzelner konkreter Präparierereignisse bezeichnet, die bestimmte durch das Verfahren festgelegte Charakteristika besitzen. Also bedarf es zur Definition des anvisierten Präparierverfahrens der Angabe der definierenden Merkmale. Es wird als erstes ein mit a benanntes Präparierverfahren für denjenigen Mikrosystem-Typ durchgeführt, der aus den Mikrosystem-Sorten I und II zusammengesetzt ist. Vermittels a gewinnt man so ein einzelnes Präparierereignis bezüglich des aus I und II zusammengesetzten Mikrosystem-Typs. Relativ zum raum-zeitlichen Bezugssystem soll dabei die Wirkung, die den Subsystemen des Typs II zukommt, den a zugehörigen Apparat in negativer y -Richtung verlassen, während die dem Mikrosystem-Typ I zukommende Wirkung den Apparat in positiver y -Richtung verlassen möge. Im weiteren soll keine Wechselwirkung mehr zwischen den beiden Subsystemen der Typen I und II bestehen. Derartige Präparierverfahren existieren durchaus, man denke dabei etwa an das bekannte Phänomen der sogenannten Paarerzeugung. Nach der einmaligen Verwendung des Präparierverfahrens a folgt das Durchführen einer Registriermethode b_0^{II} für die Subsysteme des Typs II. Das meint ebenfalls das einmalige Durchführen der Methode b_0^{II} . Die so konstruierte Abfolge der einmaligen Durchführung eines Präparierverfahrens für den zusammengesetzten Mikrosystem-Typ und der anschließenden einmaligen Durchführung einer Registriermethode für die Mikrosystem-Typ II liefert einzelne Präparierereignisse für den Mikrosystem-Typ I. Dadurch wird also ein Präparierverfahren definiert, das in der Folge mit dem Namen a_{ges}^I versehen sei. Das Verfahren a_{ges}^I hängt dabei noch von einer weiteren Konkretisierung der verwendeten Registriermethode ab. Das Präparierverfahren a_{ges}^I kann mit Registriermethoden b_0^I in Kontakt gebracht werden.

Das Präparierverfahren a_{ges}^I ist erst dann abgeschlossen, wenn die Registriermethode b_0^{II} vollständig beendet ist. Wie Ludwig in [Lud84a], Kapitel XIII, §9, S. 474 betont, heißt das aber nicht unbedingt, daß die Registriermethode b_0^{II} bereits vollständig durchgeführt sein muß, bevor die Registriermethode b_0^I angewandt wird, denn die

Kombinierbarkeitsbedingung aus Abschnitt 6.1 verlangt nur, daß keine Aussagen über die innere Funktionsweise des Präparierverfahrens durch Verwendung der Registriermethode b_0^I gewonnen werden. Da aber keine Wechselwirkung mehr zwischen den Mikrosystemen des Typs I und denjenigen des Typs II besteht, kann man mit Hilfe von b_0^I nichts mehr über den inneren Aufbau des Präparierverfahrens a_{ges}^I erfahren. Das heißt, es hat keinen Einfluß auf den Ablauf des Registriervorganges, der mit der Registriermethode b_0^I gewonnen wird, ob man b_0^{II} vor b_0^I oder nach b_0^I durchführt. Eine Skizze des bisherigen Aufbaus liefert Abbildung 13.2.

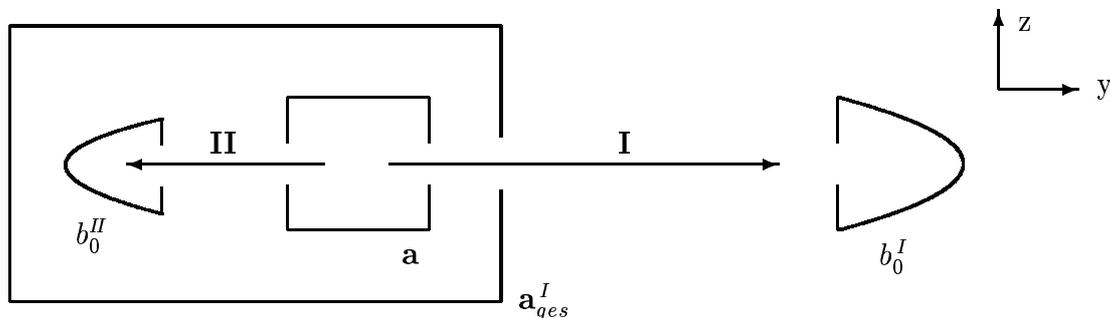


Abbildung 13.2: Prinzipieller Aufbau des Experiments von Einstein, Podolsky und Rosen. Die x -Richtung des eingezeichneten Koordinatensystems steht senkrecht auf y - und senkrecht auf der z -Richtung, wobei sie aus der Seite herauszeigt.

Der zentrale Punkt der Argumentation von Einstein, Podolsky und Rosen fußt auf der Betrachtung physikalischer Größen, die auf nicht-kommutierende Operatoren führen. Man beschränkt sich dabei auf Effekte, da der Begriff der Observablen nicht in wohldefinierter Weise eingeführt wurde. Eine ausführliche Diskussion des Observablen-Begriffs ist für den Kern der Überlegungen auch nicht nötig, da er im Grunde auf dem Effekt-Begriff beruht. Es werden also Effekte betrachtet, denen mittels der Abbildung χ aus Abschnitt 10.3 nicht-kommutierende Operatoren zukommen. Nun wurde im Zusammenhang mit Lemma 10.5.3 festgehalten, daß es durchaus Paare koexistenter Effekte geben kann, denen mittels der Abbildung χ selbstadjungierte Operatoren zukommen, die nicht kommutieren. Paare koexistenter Effekte sind natürlich uninteressant für die Argumentation im Sinne von Einstein, Podolsky und Rosen, denn sie können gemäß Axiom AkEff ohnehin beliebig genau

zugleich an einem geeignet zu wählenden Registrierapparat ausgezeichnet werden. Daher kann man sich auf Effekte beschränken, die nicht koexistent sind.

Da drei Sorten von Mikrosystemen vorliegen, betrachtet man im Sinne von Abschnitt 10.1 drei Segmente der Gesamtheorie, denen jeweils ein irreduzibler Verband der Entscheidungseffekte zukommt. Den Untersuchungen aus Kapitel 10 folgend kommt also jeder der drei Sorten ein separabler, unendlichdimensionaler komplexer Hilbertraum zu. Die Hilberträume sollen die Namen \mathcal{H}_I , \mathcal{H}_{II} und \mathcal{H}_{zus} erhalten. Alle drei Hilberträume kann man im Sinne von (11.55) als Tensorprodukt bestehend aus einem Bahn-Hilbertraum und einem Hilbertraum der inneren Struktur darstellen:

$$\mathcal{H}_I = \mathcal{H}_{Ib} \otimes \mathcal{H}_{Ii} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_{II} = \mathcal{H}_{IIb} \otimes \mathcal{H}_{IIi}. \quad (13.1)$$

Die den Zuständen und Effekten zugeordneten Operatoren stellen sich ebenfalls als Tensorprodukte dar.

Zur weiteren Analyse benötigt man den Umstand, daß der Hilbertraum \mathcal{H}_{zus} , der der Sorte der aus I und II zusammengesetzten Mikrosysteme zukommt, durch das Tensorprodukt der beiden Hilberträume \mathcal{H}_I , \mathcal{H}_{II} gegeben ist. Da es sich dabei um eine wohlbekannte Tatsache im Rahmen der Hilbertraum-Quantenmechanik handelt, siehe etwa [AD78], wird ohne weitere Diskussion von der Tensorprodukt-darstellung

$$\mathcal{H}_{zus} = \mathcal{H}_b \otimes \mathcal{H}_i$$

mit der Abmachung

$$\mathcal{H}_b := \mathcal{H}_{Ib} \otimes \mathcal{H}_{IIb} \quad \text{und} \quad \mathcal{H}_i := \mathcal{H}_{Ii} \otimes \mathcal{H}_{IIi}$$

ausgegangen.

Die weiteren Betrachtungen sollen nun anhand eines Beispiels durchgeführt werden, das die bisherige Situation noch weiter konkretisiert. Dazu betrachte man Mikrosysteme des Typs I und des Typs II mit Spin $s = \frac{1}{2}$. Zur Definition des Spins siehe Abschnitt 11.5. Der Eigenvektor der Spin-Komponente S_z^I für die Mikrosysteme des Typs I zum Eigenwert $\frac{1}{2}$ heiße $u_+(I)$, während derjenige zum Eigenwert $-\frac{1}{2}$ den Namen $u_-(I)$ erhalte. Die Vektoren $u_+(I)$ und $u_-(I)$ bezeichnen dabei Vektoren des zweidimensionalen Hilbertraumes \mathcal{H}_{Ii} . In analoger Weise werden für die Mikrosystem-Sorte II in \mathcal{H}_{IIi} die Eigenvektoren zur zugehörigen Spin-Komponente S_z^{II} mit $u_+(II)$ und $u_-(II)$ symbolisiert. Experimentell äußern sich die so mathematisch erfaßten Sachverhalte etwa bei Stern-Gerlach-Apparaturen auf die bekannte Weise, daß auf einem hinter der Stern-Gerlach-Apparatur positionierten Photoschirm lediglich zwei geschwärzte Bereiche auftreten.

Als Präparierverfahren a für die zusammengesetzten Systeme betrachte man nun einen Apparat, der bezogen auf den Hilbertraum \mathcal{H}_{zus} zu dem Zustand $W_b \otimes P^n$ gehört, wobei P^n den Projektionsoperator auf den durch den normierten Vektor

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_+(I) u_-(II) - u_-(I) u_+(II) \right) \quad (13.2)$$

aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum des Hilbertraumes \mathcal{H}_i beschreibe. Mit W_b sei ein Operator bezüglich des Hilbertraumes \mathcal{H}_b bezeichnet. Der üblichen Konvention folgend wurde in (13.2) das Tensorprodukt der Vektoren in Form eines normalen Produktes notiert. Es werden also durch a zusammengesetzte Systeme mit Spin 0 präpariert. Bezüglich der Realisierbarkeit derartiger Präparierverfahren sei nochmals an das Phänomen der Paar-Erzeugung erinnert.

Als Registriermethode b_0^{II} wähle man eine Stern-Gerlach-Apparatur, die bezüglich des vorgegebenen kartesischen Koordinatensystems die y -Achse als Apparat-Vorzugsrichtung hat. Unter Apparat-Vorzugsrichtung verstehe man dabei die gedachte Linie zwischen Eingang und Ausgang der Stern-Gerlach-Apparatur. Die Vorzugsrichtung des Magnetfeldes innerhalb von b_0^{II} verlaufe in Richtung der z -Achse. Hinter der Stern-Gerlach-Apparatur seien in einem gewissen räumlichen Abstand zwei Auftreffzähler positioniert, die zur y -Achse denselben Abstand haben. Die Verbindungslinie der beiden Auftreffzähler möge darüber hinaus parallel zur z -Achse verlaufen, so daß man bei Ansprechen des Auftreffzählers, der dem positiven Ast der z -Achse zugehörig ist, in Abkürzung die Formulierung „(+z) spricht an“ verwenden möge. Ebenso möge „(-z) spricht an“ als Abkürzung zum Einsatz kommen.

Mit den so gewählten Apparaten und Bezeichnungen können nun drei Präparierverfahren a_{ges}^I für die Mikrosysteme des Typs I definiert werden. Das erste Präparierverfahren umfaßt alle Präparierereignisse für Mikrosysteme des Typs I, die durch Durchführung des Präparierverfahrens a und die anschließende Verwendung der Registriermethode b_0^{II} gewonnen werden unabhängig davon, welche Veränderung an der Registriermethode b_0^{II} auftritt. Das so gewonnene Präparierverfahren für Mikrosysteme der Art I nenne man a_z . Das zweite Präparierverfahren besteht darin, lediglich diejenigen Präparierereignisse für Mikrosysteme des Typs I auszuwählen, für die es nach Durchführung von a bei Anwendung der Registriermethode b_0^{II} dazu kommt, daß „(+z) anspricht“. Als zugehörigen Namen verwende man dafür das Symbol a_z^+ . In analoger Weise kann man ein drittes Präparierverfahren definieren, indem man an b_0^{II} das Vorkommen des Tatbestandes „(-z) spricht an“ fordert. Man wähle dafür den Namen a_z^- . Offenbar handelt es sich bei der zweielementigen Menge $\{a_z^+, a_z^-\}$ um

eine disjunkte Zerlegung des Präparierverfahrens a_z im Sinne der Definition 5.4.3. Das heißt, es gelten die Relationen:

$$a_z = a_z^+ \cup a_z^- \quad \text{und} \quad a_z^+ \cap a_z^- = \emptyset. \quad (13.3)$$

Die obigen Relationen bringen insbesondere zum Ausdruck, daß sowohl a_z^+ als auch a_z^- ein gegenüber a_z feineres Präparierverfahren bezeichnet. Den Überlegungen aus Abschnitt 5.5 zufolge, die in Axiom APS 1 mündeten, sind sowohl a_z^+ als auch a_z^- von a_z statistisch abhängig. Für die zugehörigen Gewichte ergeben sich aus der Anti-Symmetrie von η aus (13.2) bezüglich des Austausches der System-Sorten und dem Umstand, daß die Summe der Gewichte gleich 1 sein muß, unmittelbar die Relationen

$$\lambda_{\mathcal{Q}}(a_z, a_z^+) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathcal{Q}}(a_z, a_z^-) = \frac{1}{2}. \quad (13.4)$$

Man kann innerhalb der Registriermethode b_0^H auch eine Stern-Gerlach-Apparatur mit Vorzugsrichtung in y -Richtung wählen, deren Magnetfeld entlang der x -Achse ausgerichtet sei. Hinter der Stern-Gerlach-Apparatur mögen in einigem Abstand zwei Auftreffzähler aufgebaut sein, die gleichen Abstand zur y -Achse haben. Ihre Verbindungslinie möge parallel zur x -Achse verlaufen. In analoger Form kann man wiederum drei weitere Präparierverfahren definieren. Mit a_x bezeichne dasjenige Präparierverfahren für die Mikrosysteme des Typs I, die durch Durchführung des Präparierverfahrens a und die anschließende Verwendung der nun anders orientierten Stern-Gerlach-Apparatur gewonnen werden unabhängig davon, welcher der beiden Ausgänge an der Stern-Gerlach-Apparatur b_0^H angezeigt wird. Mit a_x^+ benenne man das Auswahlverfahren für Präparierereignisse für Mikrosysteme des Typs I, wenn nach Durchführung des Verfahrens a an der Stern-Gerlach-Apparatur „ $(+x)$ “ anspricht“. Den Namen a_x^- verwende man, falls nach Durchführung des Verfahrens a an der Stern-Gerlach-Apparatur „ $(-x)$ “ anspricht“, wobei die Formulierungen „ $(+x)$ “ anspricht“ und „ $(-x)$ “ anspricht“ wiederum in abkürzender Weise zu verstehen sind. Es gelten analog zu (13.3) die Relationen

$$a_x = a_x^+ \cup a_x^- \quad \text{und} \quad a_x^+ \cap a_x^- = \emptyset. \quad (13.5)$$

Auch a_x^+ und a_x^- sind statistisch abhängig von a_x . Für die zugehörigen Gewichte erhält man entsprechend den Relationen aus (13.4):

$$\lambda_{\mathcal{Q}}(a_x, a_x^+) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_{\mathcal{Q}}(a_x, a_x^-) = \frac{1}{2}. \quad (13.6)$$

Es stellt nun eine bekannte Erfahrung dar, daß die Effekte, die Stern-Gerlach-Apparaturen mit senkrecht aufeinander stehenden Magnetfeldern zukommen, nicht

koexistent sind. Unter der Voraussetzung, daß es sich bei derartigen Effekten um Entscheidungseffekte handelt, wurde die Nicht-Koexistenz in Abschnitt 9.6.3 sogar gezeigt.

Verwendet man als Registrierapparat b_0^I in bezug auf das Präparierverfahren a_{ges}^I für die Registriermethode für b_0^I ebenfalls einen Stern-Gerlach-Aufbau mit identischer Magnetfeld-Vorzugsrichtung wie bei b_0^I nur räumlich umgekehrt, da die Wirkungsausbreitung der den Mikrosystemen I und II zugeordneten Wirkungen umgekehrte Ausbreitungsrichtungen haben, dann zeigt die Erfahrung, daß das Ergebnis des Registriervorganges bei b_0^I demjenigen der Registrierung bei b_0^I in umgekehrter Weise genau entspricht. Das heißt, wählt man für b_0^I und b_0^I Stern-Gerlach-Apparaturen, deren Magnetfeld-Vorzugsrichtung der x -Achse parallel ist, und erhält man an b_0^I das Ergebnis „ $(+x)$ spricht an“, wird sich an b_0^I mit Sicherheit das Ergebnis „ $(-x)$ spricht an“ einstellen. Ein analoges Phänomen liegt auch vor, wenn man als Magnetvorzugsrichtung die z -Achse wählt. Damit ergibt sich auch, zu welchen Zuständen die bisher betrachteten Präparierverfahren gehören. Dazu bezeichne man mit $P^{u_+(I)}$ und $P^{u_-(I)}$ die Projektionsoperatoren auf die von $u_+(I)$ und $u_-(I)$ aufgespannten eindimensionalen Untervektorräume von \mathcal{H}_{I_i} . Zudem benenne man die Eigenvektoren der Spin-Komponente S_x^I der Mikrosystem-Sorte I mit $v_+(I)$ und $v_-(I)$, und man verwende für die zugehörigen Projektionsoperatoren die Symbole $P^{v_+(I)}$ und $P^{v_-(I)}$. Mit den so gewählten Bezeichnungen ergibt sich nun

$$\rho(\varphi(a_z^+)) = W_{Ib} \otimes P^{u_-(I)}, \quad \rho(\varphi(a_z^-)) = W_{Ib} \otimes P^{u_+(I)}, \quad (13.7)$$

$$\rho(\varphi(a_x^+)) = W_{Ib} \otimes P^{v_-(I)}, \quad \rho(\varphi(a_x^-)) = W_{Ib} \otimes P^{v_+(I)}, \quad (13.8)$$

wobei ρ die Abbildung aus Satz 10.3.3 bezeichnet, vermittels derer die Zustandsmenge und die Dichteoperatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H}_I miteinander identifiziert werden. Der Operator W_{Ib} symbolisiert den zugehörigen Bahn-Anteil des Dichteoperators.

Mit dem so entwickelten Aufbau liegt nun genau eine solche Situation vor, wie sie von Einstein, Podolsky und Rosen anvisiert wurde. Daher soll nun auf die von ihnen geführte Argumentation in Hinblick auf die vorliegende Situation eingegangen werden.

Standpunkt von Einstein, Podolsky und Rosen:

Wählt man als Registriermethoden b_0^I , b_0^I eine der beiden oben erläuterten Stern-Gerlach-Apparaturen, dann determinieren die Ergebnisse des Registriervorganges vermittels b_0^I die Ergebnisse des Registriervorganges vermittels b_0^I . Da die Möglichkeit besteht, die konkrete Wahl der

Registrieremethode auch erst nach dem Ende der Wechselwirkungszeit der beiden Systeme I und II zu treffen und da somit keine Wechselwirkung mehr zwischen den Mikrosystemen des Typs I und des Typs II besteht, kommt für das System I sowohl der Messung durch eine Stern-Gerlach-Apparatur mit Magnetfeld-Vorzugsrichtung entlang der x -Achse wie auch der Messung bei Wahl der Magnetfeld-Vorzugsrichtung entlang der x -Achse Realitätscharakter im Sinne des Realitätskriteriums zu.

Nun wurde weiter oben bereits erörtert, daß dem in Unterabschnitt 13.3.1 angegebenen Realitätskriterium keine Entsprechung in der hier eingeführten Terminologie zugeordnet werden kann. Es liegt aber die Vermutung nahe, daß Einstein, Podolsky und Rosen durch die obige Überlegung zum Ausdruck bringen wollen, daß es zumindest im Prinzip möglich ist, die Mikrosysteme dergestalt auszuwählen, daß die ihnen zukommenden Präparierereignisse sowohl einem der beiden Präparierverfahren a_z^+ oder a_z^- als auch einem der beiden Präparierverfahren a_x^+ oder a_x^- zugehören. Läge zum Beispiel ein Mikrosystem in der Form vor, daß das zugehörige Präparierereignis sowohl zu a_z^+ als auch zu a_x^+ gehörte, dann wären die Ergebnisse der Registrierungen mit Hilfe der beiden Stern-Gerlach-Apparaturen mit Magnetfeld-Vorzugsrichtung entlang der z -Achse einerseits und entlang der x -Achse andererseits mit Sicherheit festgelegt. Analoge Ergebnisse erhielte man für die anderen Kombinationen von Präparierverfahren. Der Übersicht halber beschränke man sich auf die Betrachtung der Präparierverfahren a_z^+ und a_x^+ . Die eben erläuterte Vermutung, daß es möglich ist, Mikrosysteme derart zu präparieren, daß die zugehörigen Präparierereignisse sowohl zu a_z^+ als auch zu a_x^+ gehören, übersetzt sich mathematisch in die Behauptung:

$$a_z^+ \cap a_x^+ \neq \emptyset. \quad (13.9)$$

Die Zugehörigkeit zu \mathcal{Q}' ergibt sich dabei aus APS 1. Experimentell evident ist der Umstand, daß es sich bei a_z^+ und a_x^+ nicht um identische Präparierverfahren handelt, denn die apparativen Aufbauten der Verfahren a_z^+ und a_x^+ unterscheiden sich offenkundig, so daß man zu der Relation

$$a_z^+ \neq a_x^+ \quad (13.10)$$

kommt. Man kann nun aber zeigen, daß (13.9) im Rahmen der bisher entwickelten Quantenmechanik zu einem Widerspruch führt. Folgt man den Erörterungen in [Lud85c], Kapitel XVII, Abschnitt 4.4, S. 331-333, ergibt sich

Lemma 13.3.1 *Die Menge $a_z^+ \cap a_x^+$ ist leer.*

Beweis:

Der Beweis wird als Widerspruchsbeweis geführt. Das heißt, es wird von (13.9) ausgegangen.

Man betrachte nun die disjunkten Zerlegungen

$$a_z^+ = (a_z^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+)) \cup (a_z^+ \cap a_x^+), \quad (13.11)$$

$$a_x^+ = (a_x^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+)) \cup (a_z^+ \cap a_x^+) \quad (13.12)$$

der Präparierverfahren a_z^+ und a_x^+ vor. Aus der Relation (13.10) ergibt sich

$$a_z^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad a_x^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+) \neq \emptyset. \quad (13.13)$$

Also folgt unter Voraussetzung von (13.9), daß mit (13.11) und (13.12) insbesondere nicht-triviale disjunkte Zerlegungen vorliegen, da alle vorkommenden Mengen nicht-leer sind. Damit kann aber auch allen in (13.11) und (13.12) vorkommenden Mengen ein Zustand mittels der Abbildung φ aus Abschnitt 6.1 zugeordnet werden. Man vereinbare zuvor noch

$$\lambda_z := \lambda_{\mathcal{Q}}(a_z^+, (a_z^+ \cap a_x^+)) \quad \text{und} \quad \lambda_x := \lambda_{\mathcal{Q}}(a_x^+, (a_z^+ \cap a_x^+)).$$

Da \mathcal{Q} mit APS 1 eine Menge statistischer Auswahlverfahren darstellt (also Aussage AS 2.3 gilt) und da (13.9) vorausgesetzt wurde, handelt es sich bei λ_z und λ_x um echt positive reelle Zahlen. Damit erhält man nun aus (13.11) und (13.12) mittels Lemma 6.2.2 die zugehörigen Entmischungen der vorkommenden Zustände:

$$\varphi(a_z^+) = (1 - \lambda_z) \varphi(a_z^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+)) + \lambda_z \varphi(a_z^+ \cap a_x^+), \quad (13.14)$$

$$\varphi(a_x^+) = (1 - \lambda_x) \varphi(a_x^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+)) + \lambda_x \varphi(a_z^+ \cap a_x^+). \quad (13.15)$$

Durch die Abbildung ρ aus Satz 10.3.3 werden die Zustände und die Dichteoperatoren $D(\mathcal{H}_I)$ auf dem der Mikrosystem-Sorte I zugehörigen Hilbertraum miteinander identifiziert. Den Spin-Anteil des dem Zustand $\varphi(a_z^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+))$ zugeordneten Dichteoperators nenne man W' , den Spin-Anteil des dem Zustand $\varphi(a_x^+ \setminus (a_z^+ \cap a_x^+))$ zugehörigen Dichteoperators nenne man W'' . Der Spin-Anteil des dem Zustand $\varphi(a_z^+ \cap a_x^+)$ zuzuordnenden Dichteoperators erhält schließlich den Namen W''' . Damit ergeben sich unter Verwendung von (13.7) und (13.8) aus (13.14) und (13.15) die folgenden Relationen zwischen Dichteoperatoren:

$$W_{Ib} \otimes P^{u-(I)} = (1 - \lambda_z) (W_{Ib} \otimes W') + \lambda_z W_{Ib} \otimes W''', \quad (13.16)$$

$$W_{Ib} \otimes P^{v-(I)} = (1 - \lambda_x) (W_{Ib} \otimes W'') + \lambda_x W_{Ib} \otimes W'''. \quad (13.17)$$

Da es sich bei $P^{u-(I)}$ um einen Extrempunkt der Menge der Dichteoperatoren auf \mathcal{H}_{I_i} handelt, wie aus Satz G.4.7 (iii) bekannt ist, führt die Beziehung (13.16) nur dann nicht zum Widerspruch, wenn $\lambda_z = 1$ gilt. Das heißt, es liegt die Identität $P^{u-(I)} = W'''$ vor. Eine analoge Argumentation bezüglich (13.17) führt auf die Relation $P^{v-(I)} = W'''$. Damit erhält man aber $P^{u-(I)} = P^{v-(I)}$, und das stellt einen Widerspruch dar, denn $u_-(I)$ ist der Eigenvektor des Operators S_z , während $v_-(I)$ einen Eigenvektor des Operators S_x darstellt. Also gilt die Behauptung. ■

Lemma 13.3.1 zufolge gibt es also kein nicht-leeres Präparierverfahren, das zugleich den Charakteristika des Präparierverfahrens a_z^+ und denen des Präparierverfahrens a_x^+ genügt. Bereits die Vorstellung, daß es möglich sei, Präparierereignisse zu erzeugen, die sowohl zu a_x^+ als auch zu a_z^+ gehören, steht im Widerspruch zur Quantenmechanik. Man muß sie also als eine Fehlvorstellung über das Wesen der Mikrosysteme einschätzen. Als Quelle einer solchen unzulässigen Vorstellung ist wie in Abschnitt 13.2 im Zusammenhang mit der Reduktion des Wellenpaketes zu vermuten, daß man mit dem Begriff des Mikrosystems mehr Eigenständigkeit verbindet, als ihm zusteht. Dazu erinnere man auch die Überlegungen aus den Kapiteln 6 und 9, in denen der Zug der Autonomie, der Mikrosystemen zuzurechnen ist, bereits diskutiert wurde. Dort wurde hervorgehoben, daß die Autonomie der Mikrosysteme, als Wechselwirkungsträger der quantenmechanischen Wechselwirkung, keinesfalls dahingehend verstanden werden darf, daß ihnen eine Objektivierbarkeit wie in einer klassischen Theorie zukommt. In der klassischen Physik ist es durchaus erlaubt, den Begriff des Wechselwirkungsträgers mit einem physikalischen Objekt zu identifizieren, das den Präparierapparat verläßt. Von dem Zeitpunkt des Verlassens des Präparierapparates ist dann das physikalische Objekt vollkommen eigenständig, das heißt, seine Vergangenheit und insbesondere die Art und Weise seiner Gewinnung sind irrelevant. In der Quantenmechanik ist ein solcher Vorgang nicht erlaubt. Es handelt sich um eine Fehlvorstellung, daß den Präparierapparat ein physikalisches Objekt so verläßt, daß die Art seiner Gewinnung völlig beliebig ist. Während man die Probleme, die sich in Abschnitt 13.2 bezüglich der Eigenständigkeit der Mikrosysteme ergaben, noch ignorieren könnte, da sie der Quantenmechanik nicht widersprechen, und während man dort noch auf der Vorstellung einer Eigenständigkeit der Mikrosysteme beharren könnte, ist ein Solches hier nicht mehr möglich, da sich ein direkter Widerspruch zu den Aussagen der Quantenmechanik ergeben hat. Also ist es endgültigerweise nicht erlaubt, den Begriff des Mikrosystems mit der Vorstellung eines eigenständigen physikalischen Objektes zu vermischen. In der zurückliegenden Arbeit wurde daher ein völlig auf das experimentelle Geschehen reduzierter Stand-

punkt eingenommen. Dabei bezieht man sich ausschließlich auf die makroskopischen Vorgänge der Präparation und Registrierung. Die Mikrosysteme sind dabei eben nur Paare aus Präparier- und Registrierereignissen, denen keine Selbständigkeit in der Form zukommt, daß sie loslösbar wären vom experimentellen Kontext. Sie bestehen vielmehr aus dem experimentellen Kontext.

G. Ludwig bringt das eben Erläuterte in [Lud85b], S. 164 auf die folgende Weise zum Ausdruck:

Wie man auch sonst noch argumentieren mag, um einen Widerspruch [der Zusatzvorstellungen, Anmerkung des Autors] mit der Physik zu vermeiden, auf jeden Fall muß man die Vorstellung von Mikrosystemen aufgeben, die „für sich unabhängig“ von den Makrosystemen existieren und allein durch ihre Wechselwirkung miteinander das Geschehen bestimmen. Vielmehr sind die Mikrosysteme etwas nur relativ zur Makrophysik Definierbares, dessen Existenz unabdingbar mit der Makrowelt verknüpft bleibt. Dies zeigt die Quantenmechanik allgemein [...] und speziell und markant das EPR-Problem.

Während es im vorigen Abschnitt hinsichtlich der Reduktion des Wellenpaketes noch um Ideen zur Natur der Mikrosysteme ging, die zur Quantenmechanik nicht im Widerspruch stehen können, kommt es hier sogar zu einem direkten Widerspruch zur Quantenmechanik. Daher zeigen die oben angestellten Überlegungen noch viel dringlicher, daß man das realistische Fundament der Theorie nicht verlassen darf. Zu einem Widerspruch gelangt man nur, wenn man mit dem Begriff des Mikrosystem Vorstellungen verbindet, die über das hinausgehen, was durch Präparierverfahren, Registrieremethoden und Registrierprozeduren erfaßt werden kann. Die Überlegungen von Einstein, Podolsky und Rosen müssen in die Reihe solcher unzulässiger Vorstellungen über die Mikrosysteme eingeordnet werden.

Man kann in analoger Weise zu Lemma 13.3.1 auch die folgenden Aussagen beweisen:

Lemma 13.3.2 *Die drei Mengen $a_z^+ \cap a_x^-$, $a_z^- \cap a_x^+$ und $a_z^- \cap a_x^-$ sind leer.*

Zusammen mit Lemma 13.3.1 ergibt sich daraus:

$$a_z \cap a_x = (a_z^+ \cap a_x^+) \cup (a_z^+ \cap a_x^-) \cup (a_z^- \cap a_x^+) \cup (a_z^- \cap a_x^-) = \emptyset.$$

Das heißt, daß auch die Präparierverfahren a_z und a_x sich gegenseitig ausschließen, denn man kann kein a_z und a_x zugehöriges Präparierereignis erzeugen, ohne mit der Quantenmechanik in Widerspruch zu geraten. Andererseits erhält Ludwig in [Lud85c], Kapitel XVII, Abschnitt 4.4, S. 333:

Lemma 13.3.3 *Die Präparierverfahren a_z und a_x gehören zum selben Zustand. Das heißt, es gilt die Identität $\varphi(a_z) = \varphi(a_x)$.*

Beweis:

Mit Lemma 6.2.2 und den Relationen aus (13.4) und (13.6) folgen die Entmischungen:

$$\varphi(a_z) = \frac{1}{2}\varphi(a_z^+) + \frac{1}{2}\varphi(a_z^-) \quad \text{und} \quad \varphi(a_x) = \frac{1}{2}\varphi(a_x^+) + \frac{1}{2}\varphi(a_x^-).$$

Da sowohl $\{u_+(I), u_-(I)\}$ als auch $\{v_+(I), v_-(I)\}$ Orthonormalsysteme von \mathcal{H}_{I_i} darstellen, hat man $P^{u_+(I)} + P^{u_-(I)} = P^{v_+(I)} + P^{v_-(I)}$. Aufgrund der Linearität von ρ erhält man somit:

$$\begin{aligned} \rho(\varphi(a_x)) &= \frac{1}{2}\rho(\varphi(a_x^+)) + \frac{1}{2}\rho(\varphi(a_x^-)) \\ &= \frac{1}{2}W_{Ib} \otimes P^{v_+(I)} + \frac{1}{2}W_{Ib} \otimes P^{v_-(I)} \\ &= \frac{1}{2}W_{Ib} \otimes Id_{\mathcal{H}_{I_i}} \\ &= \frac{1}{2}W_{Ib} \otimes P^{u_+(I)} + \frac{1}{2}W_{Ib} \otimes P^{u_-(I)} \\ &= \frac{1}{2}\rho(\varphi(a_z^+)) + \frac{1}{2}\rho(\varphi(a_z^-)) \\ &= \rho(\varphi(a_z)). \end{aligned}$$

Da ρ injektiv ist, folgt $\varphi(a_x) = \varphi(a_z)$. ■

Lemma 13.3.3 zeigt einen wichtigen Sachverhalt, denn demnach kann ein Zustand durch disjunkte Präparierverfahren realisiert werden. Damit kann man eine Frage aus Kapitel 6 beantworten, denn offenbar gehen beim Übergang von einer Theorie der Präparierverfahren, Registriermethoden und Registrierprozeduren zu einer Theorie der Zustände und Effekte relevante Informationen verloren. Es ist also wichtig, sauber zwischen dem Begriff des Zustandes und demjenigen des Präparierverfahrens zu unterscheiden.

13.4 Ungenauigkeitsrelationen für Entscheidungseffekte

In der Regel werden die allgemeinen Heisenbergschen Unschärferelationen, für die aufgrund der nun folgenden Erkenntnisse die Bezeichnung Ungenauigkeitsrelationen vorgezogen wird, unter Beteiligung sogenannter konjugierter Observablen formuliert. Wie die Erörterungen seit Kapitel 4 gezeigt haben, kann die Quantenmechanik auf realistisch fundierte Weise formuliert werden, ohne auf den Begriff der Observablen zurückzugreifen. Wie in Unterabschnitt 9.6.1 auf Seite 274 bereits erläutert wurde und wie es in Abschnitt 14.2 in knapper Form noch dargelegt werden wird, bezeichnet man als Observable abgeleitete Strukturen, die auf dem Konzept der koexistenten Effekte fußen. Mithin ist es zu erwarten, daß sich das Prinzipielle, das sich hinter Ungenauigkeitsrelationen verbirgt, auch auf dem Niveau der Effekte äußert. Mit Satz 9.5.1 kann man die Effekte aber bereits in hinreichender Weise durch Entscheidungseffekte charakterisieren, so daß eine physikalisch relevante Struktur, wie sie durch die Ungenauigkeitsrelationen zum Ausdruck gebracht werden, sogar bereits bei den Entscheidungseffekten aufzufinden sein sollte. Daher werden im folgenden Abschnitt die zentralen Überlegungen zur Interpretation der Ungenauigkeitsrelationen nur auf dem Niveau der Entscheidungseffekte und nicht auf dem Niveau von Observablen durchgeführt. Für die zugehörigen Erweiterungen auf die Observablen wird auf Abschnitt 8.3 in [Lud83b], Kapitel IV, S. 195-198 und hinsichtlich der Heisenbergschen Unschärferelationen für Ort- und Impulskomponenten auch auf Abschnitt 14.2 verwiesen. Für einen schnelleren Einstieg eignet sich [Lud77]. Es wird angemerkt, daß die Heisenbergschen Unschärferelationen für Ort- und Impulskomponenten im Prinzip bereits in Formel (11.51) notiert wurden. Freilich fehlt noch eine etwas eingängigere Interpretation der vorkommenden Operatoren als ihre Eigenschaft, Generatoren der unitären Darstellungen von Untergruppen der Galilei-Gruppe zu sein.

Für die nun folgenden Betrachtungen soll die gesamte Axiomatik, wie sie bis einschließlich des Kapitels 11 entwickelt wurde, vorausgesetzt werden. Dabei soll wiederum in vereinfachender Weise nur der Fall eines irreduziblen Verbandes der Entscheidungseffekte betrachtet werden. Das heißt, es wird Aussage AV 4i aus Abschnitt 10.1 gefordert. Insbesondere kann man folglich auf die Hilbertraum-Darstellung im Sinne von Kapitel 10 zurückzugreifen.

Den Ausführungen in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 8.3, S. 193-194 folgend erhält man:

Satz 13.4.1 *Es existieren Entscheidungseffekte e_1, e_2 in der Form, daß für kein x aus K sowohl die Relation*

$$\hat{\mu}(x, e_1)(1 - \hat{\mu}(x, e_1)) \leq \frac{1}{16} \quad (13.18)$$

als auch die Relation

$$\hat{\mu}(x, e_2)(1 - \hat{\mu}(x, e_2)) \leq \frac{1}{16} \quad (13.19)$$

gilt. Insbesondere sind derartige Entscheidungseffektpaare nicht koexistent.

Beweis:

Es sei nochmals bemerkt, daß auf die Strukturen aus Kapitel 10 zurückgegriffen wird. Da innerhalb des Abschnitts nur ein irreduzibles G erörtert werden soll, wird nur mit einem unendlichdimensionalen separablen komplexen Hilbertraum gearbeitet, der im weiteren mit \mathcal{H} bezeichnet werden soll. Die weitere Namensgebung für die Strukturen auf \mathcal{H} und für die Verknüpfung mit K , G und $\hat{\mu}$ folgt derjenigen von Kapitel 10.

Es soll wiederum vereinbart werden, daß für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ durch P^φ der Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} bezeichnet wird.

Betrachte eine Orthonormalbasis $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von \mathcal{H} , deren Existenz gesichert ist, da \mathcal{H} ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum ist. Man siehe etwa Korollar V.4.10 in [Wer97], Kapitel V, S. 190.

Durch $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\varphi_{(2n-1)}}$ ist ein Projektionsoperator auf einen abgeschlossenen Untervektorraum von \mathcal{H} gegeben. Siehe dazu etwa Satz V.4.8 (b) in [Wer97], Kapitel V, S. 187). Der Entscheidungseffekt, der bezüglich der Abbildung σ gemäß (10.2) obigem Projektionsoperator zugehört, heiße e_1 . Damit gilt außerdem, da σ einen Orthoisomorphismus beschreibt:

$$\sigma(e_1^\perp) = \mathbf{1} - \sigma(e_1) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\varphi_{2n}}, \quad (13.20)$$

denn die $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ -Abschle des linearen Aufspans von $(\varphi_{(2n-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ und des linearen Aufspans von $(\varphi_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ sind einerseits orthogonal zueinander, und andererseits ergibt ihre direkte Summe den ganzen Hilbertraum. Man setze nun fur jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\chi_n := \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{(2n-1)} + \varphi_{2n}), \quad \eta_n := \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{(2n-1)} - \varphi_{2n}).$$

Dann liegt auch durch $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} vor, denn die Orthogonalität folgt durch einfaches Nachrechnen. Die Normiertheit der einzelnen Vektoren erhält man unmittelbar. Zudem ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_{(2n-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_n + \eta_n), \quad (13.21)$$

$$\varphi_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_n - \eta_n), \quad (13.22)$$

so daß also jedes Element der Orthonormalbasis $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Linearkombination von Elementen der Menge $\{\chi_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\eta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dargestellt werden kann. Somit stellen auch $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\chi_n}$ und $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\eta_n}$ Projektionsoperatoren auf abgeschlossene Untervektorräume von \mathcal{H} dar. Der $\sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\chi_n}$ zugehörige Entscheidungseffekt wird mit dem Namen e_2 versehen. Man erhält dann analog zu (13.20):

$$\sigma(e_2^\perp) = \mathbf{1} - \sigma(e_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\eta_n}.$$

Mit e_1, e_2 stehen jetzt zwei Entscheidungseffekte zur Verfügung. Es soll nun gezeigt werden, daß sie die behauptete Eigenschaft bezüglich der Ungleichungen aus (13.18) und (13.19) besitzen. Man nehme dafür an, daß

$$\hat{\mu}(x, e_1)(1 - \hat{\mu}(x, e_1)) \leq \frac{1}{16}$$

für ein $x \in K$ gilt. Also gilt entweder $\hat{\mu}(x, e_1) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ oder $\hat{\mu}(x, e_1) \geq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$. Es wird nun gezeigt, daß die Relation (13.19) für x nicht gelten kann. Dazu wird nur der Fall $\hat{\mu}(x, e_1) \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}$ betrachtet, da sich der Fall $\hat{\mu}(x, e_1) \geq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

unter Verwendung einer ähnlichen Argumentation ergibt. Für den gewählten Fall erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} &\geq \hat{\mu}(x, e_1) = Sp(\rho(x) \sigma(e_1)) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \rho(x) \varphi_{(2n-1)}, \varphi_{(2n-1)} \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \sqrt{\rho(x)} \varphi_{(2n-1)}, \sqrt{\rho(x)} \varphi_{(2n-1)} \rangle \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \varphi_{(2n-1)}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\stackrel{(13.21)}{=} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} (\chi_n + \eta_n)\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{13.23}
\end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} (\|\sqrt{\rho(x)} \chi_n\|_{\mathcal{H}} - \|\sqrt{\rho(x)} \eta_n\|_{\mathcal{H}})^2 \tag{13.24}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \chi_n\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \eta_n\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{13.25}$$

$$\begin{aligned}
&- \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \chi_n\|_{\mathcal{H}} \|\sqrt{\rho(x)} \eta_n\|_{\mathcal{H}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \rho(x) \chi_n, \chi_n \rangle + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \rho(x) \eta_n, \eta_n \rangle \\
&- \sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \chi_n\|_{\mathcal{H}} \|\sqrt{\rho(x)} \eta_n\|_{\mathcal{H}} \\
&\geq \frac{1}{2} Sp(\rho(x) \sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\chi_n}) + \frac{1}{2} Sp(\rho(x) \sum_{n \in \mathbb{N}} P^{\eta_n}) \tag{13.26}
\end{aligned}$$

$$- \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \chi_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\rho(x)} \eta_n\|_{\mathcal{H}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} Sp(\rho(x) \sigma(e_2)) + \frac{1}{2} Sp(\rho(x) \sigma(e_2^\perp))$$

$$- \sqrt{Sp(\rho(x) \sigma(e_2))} \sqrt{Sp(\rho(x) \sigma(e_2^\perp))}$$

$$= \frac{1}{2} - \sqrt{\hat{\mu}(x, e_2)} \sqrt{1 - \hat{\mu}(x, e_2)}.$$

Dabei ergibt sich das Ungleichheitszeichen in (13.24) aus den Normeigenschaften, denn für zwei Elemente y, z eines normierten Raumes $(Y, \|\cdot\|)$ gilt stets die Ungleichung $\|y - z\| \geq | \|y\| - \|z\| |$. Das Ungleichheitszeichen aus (13.26) ergibt sich mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung in Anwendung auf die beiden l^2 -Elemente $(\|\sqrt{\rho(x)}\chi_n\|_{\mathcal{H}})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\|\sqrt{\rho(x)}\eta_n\|_{\mathcal{H}})_{n \in \mathbb{N}}$, wobei l^2 den Hilbertraum der betragsquadrat-summierbaren Folgen bezeichnen möge.

Die obige Betrachtung liefert also die Ungleichung

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \geq \frac{1}{2} - \sqrt{\hat{\mu}(x, e_2)} \sqrt{1 - \hat{\mu}(x, e_2)}.$$

Daraus erhält man durch Quadrieren die Ungleichung:

$$\hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2)) \geq \frac{3}{16} \geq \frac{1}{16}.$$

Also ist die Ungleichung (13.19) nicht erfüllt.

zum Zusatz: Bezeichne mit e_1, e_2 zwei Entscheidungseffekte, für die kein $x \in K$ derart existiert, daß sowohl (13.18) als auch (13.19) erfüllt wird. Das impliziert insbesondere $e_1 \neq \mathbf{0}$ und $e_2 \neq \mathbf{0}$. Für ein $x \in K_1(e_1)$ ergibt sich offensichtlich $\hat{\mu}(x, e_1) - (\hat{\mu}(x, e_1))^2 = 0 \leq \frac{1}{16}$. Also muß nach Voraussetzung $\hat{\mu}(x, e_1) - (\hat{\mu}(x, e_1))^2 \geq \frac{1}{16}$ gelten. Das heißt x kann weder in $K_0(e_2)$ noch in $K_1(e_2)$ liegen. Also kommt man zu den Relationen:

$$\begin{aligned} K_1(e_1) \cap K_0(e_2) &= \emptyset, \\ K_1(e_1) \cap K_1(e_2) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Mit Lemma 9.5.8 erhält man damit:

$$e_1 \wedge e_2 = \mathbf{0} \text{ und } e_1 \wedge e_2^\perp = \mathbf{0},$$

woraus sich ergibt:

$$(e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e_2^\perp) = \mathbf{0} \neq e_1.$$

Wegen Satz 9.6.9 (iii) kann es sich bei (e_1, e_2) nicht um ein Paar koexistenter Effekte handeln. ■

Die vorsichtige Strategie, die in den zurückliegenden Kapiteln verfolgt wurde, ermöglicht jetzt eine eindeutige physikalische Interpretation des obigen Satzes, mit deren Hilfe auch die alternativen Interpretationsversuche aus Punkt (v) der Aufzählung in Kapitel 1 bewertet werden können. Gemäß obigem Satz 13.4.1 gibt es nicht-koexistente Entscheidungseffektpaare, für die es nicht möglich ist, in einer Weise zu

präparieren, daß sowohl $\hat{\mu}(x, e_1)$ als auch $\hat{\mu}(x, e_2)$ beliebig nahe an die 0 oder an die 1 heranreichen. Es handelt sich bei Satz 13.4.1 offenbar um eine Aussage darüber, daß es nicht möglich ist, einen Präparierapparat so zu bauen, daß für beide Effekte die zugehörige Eintrittswahrscheinlichkeit 0 oder 1 beliebig nahe kommt. Ungenauigkeitsrelationen machen folglich Aussagen über die beschränkten Möglichkeiten der Präparation. Es fällt schwer, einzusehen, in welcher Weise daran Vorstellungen über unkontrollierbare Störungen des Mikrosystems durch einen Meßprozeß geknüpft werden könnten. Wenn man einer solchen Vorstellung überhaupt einen Sinn zuordnen kann, muß sie zumindest im Zusammenhang mit Ungenauigkeitsrelationen als irreführend abgelehnt werden, da sie offenbar den tieferen Gehalt der Relationen gar nicht erfaßt.

Auch der zweiten der drei Interpretationsvarianten aus Punkt (v) der Aufzählung in Kapitel 1, die sich auf prinzipielle Meßungenauigkeiten bezieht, muß begegnet werden. Da mit Kapitel 7 ein mathematisches Bild für die Unschärfe im Vergleich von Experiment und Theorie zur Verfügung gestellt wurde, kann man deutlich erkennen, daß der obige Satz keine Aussage über Meßungenauigkeiten macht, denn die Uniformitäten der physikalischen Unschärfe wurden gar nicht verwendet. Obiger Satz arbeitet ausschließlich im idealisierenden mathematischen Bild, ohne das Problem des Vergleiches mit den experimentellen Daten zu diskutieren. Dabei werden die Meßungenauigkeiten in idealisierender Weise als Null angenommen. Die Existenz von Entscheidungseffekten, die für keinen Zustand aus K beide Relationen (13.18) und (13.19) erfüllen, basiert offenbar auf einem viel tieferliegenden physikalischen Phänomen. Daher wurde in konsequenter Weise auch der Ausdruck der Ungenauigkeitsrelation demjenigen der Unschärferelation vorgezogen.

Schließlich muß noch die dritte Interpretationsvariante in Punkt (v) der Aufzählung in Kapitel 1 erörtert werden. Häufig wird versucht, die als Heisenbergsche Unschärferelationen bezeichneten Beziehungen dahingehend zu verbalisieren, daß gesagt wird, sie würden eine Aussage über „die Unmöglichkeit eines gleichzeitigen Meßvorganges der beteiligten physikalischen Größen“ machen. Es wurde bereits in Abschnitt 9.6 erörtert, daß Formulierungen des Typs „gleichzeitiger Meßvorgang“ als problematisch anzusehen sind. Daher wurde zum Konzept der Mengen koexistenter Effekte übergegangen, das in eindeutiger Weise interpretiert ist. Es soll deshalb davon ausgegangen werden, daß mit „Unmöglichkeit eines gleichzeitigen Meßvorganges der beteiligten physikalischen Größen“ die Nicht-Koexistenz der im obigen Satz vorkommenden Entscheidungseffektpaare gemeint ist. Aber mit der Nicht-Koexistenz der beteiligten Entscheidungseffektpaare hat man gar nicht den physikalischen Gehalt der Ungenauigkeitsrelationen in Satz 13.4.1 erfaßt, denn es gibt durchaus nicht-

koexistente Entscheidungseffektpaare derart, daß die beiden Relationen (13.18) und (13.19) für einen Zustand erfüllt sind, wie der nachfolgende Satz zeigt:

Satz 13.4.2 *Es existieren Paare (e_1, e_2) nicht-koexistenter Entscheidungseffekte, für die die beiden Relationen*

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(x, e_1)(1 - \hat{\mu}(x, e_1)) &\leq \frac{1}{16}, \\ \hat{\mu}(x, e_2)(1 - \hat{\mu}(x, e_2)) &\leq \frac{1}{16}\end{aligned}$$

durch geeignete Wahl von x aus K simultan erfüllbar sind.

Beweis:

Der darstellende Hilbertraum im Sinne von Kapitel 10 wird auch hier mit \mathcal{H} bezeichnet. Alle weiteren Bezeichnungen folgen ebenso Kapitel 10.

Wiederum wird die Abmachung getroffen, daß für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ durch P^φ der Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} symbolisiert wird.

Man wähle zwei Elemente $\varphi_1, \varphi_3 \in \mathcal{H}$ mit $\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle = 0$ und $\|\varphi_1\|_{\mathcal{H}} = \|\varphi_3\|_{\mathcal{H}} = 1$. Dann existiert ein Entscheidungseffekt e_1 , so daß $\sigma(e_1) = P^{\varphi_1}$ gilt. Setzt man für jedes $\delta \in \mathbb{R}$

$$\varphi_2^\delta := \frac{\varphi_1 + \delta \varphi_3}{\|\varphi_1 + \delta \varphi_3\|_{\mathcal{H}}},$$

dann existiert auch für jedes $\delta \in \mathbb{R}$ ein Entscheidungseffekt e_2^δ mit $\sigma(e_2^\delta) = P^{\varphi_2^\delta}$.

Gilt $\delta \neq 0$, dann kommutieren P^{φ_1} und $P^{\varphi_2^\delta}$ nicht, denn dann sind φ_1 und $\varphi_1 + \delta \varphi_3$ linear unabhängig. Das bedeutet aber mit Lemma 10.5.1 die Nicht-Koexistenz des Entscheidungseffektpaars (e_1, e_2^δ) .

P^{φ_1} liegt aber auch in der Menge der Dichteoperatoren $\mathbb{D}(\mathcal{H})$, also existiert ein Zustand $x \in K$ mit $\rho(x) = P^{\varphi_1}$. Damit gilt:

$$\hat{\mu}(x, e_1) = Sp(\rho(x) \sigma(e_1)) = Sp(P^{\varphi_1} P^{\varphi_1}) = Sp(P^{\varphi_1}) = 1.$$

Das heißt also:

$$\hat{\mu}(x, e_1)(1 - \hat{\mu}(x, e_1)) = 0 \leq \frac{1}{16}.$$

Wählt man nun

$$\delta := \sqrt{\frac{\sqrt{8} - \sqrt{7}}{\sqrt{8} + \sqrt{7}}},$$

dann gilt:

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(x, e_2^\delta) &= Sp(P\varphi_1 P\varphi_2^\delta) = \langle \varphi_2^\delta, \varphi_1 \rangle \\ &= \frac{\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + \delta \langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle}{\langle \varphi_1 + \delta \varphi_3, \varphi_1 + \delta \varphi_3 \rangle} \\ &= \frac{1}{1 + \delta^2}.\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{\mu}(x, e_2^\delta) - (\hat{\mu}(x, e_2^\delta))^2 &= \frac{1}{1 + \delta^2} - \frac{1}{(1 + \delta^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{8} + \sqrt{7}}{2\sqrt{8}} - \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{7})^2}{32} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}} - \frac{15}{32} - \frac{\sqrt{8}\sqrt{7}}{16} \\ &= \frac{1}{32} \leq \frac{1}{16}.\end{aligned}$$

■

Die grundlegende physikalische Struktur, die in Ungenauigkeitsrelationen wie in denjenigen aus Satz 13.4.1 zum Ausdruck kommt, geht über das einfache Phänomen nicht-koexistenter Entscheidungseffektpaare hinaus. Als Fazit muß man also ziehen, daß keine der drei in Punkt (v) der Aufzählung in Kapitel 1 genannten Interpretationsvorschläge die physikalische Realität wiedergibt, die den Ungenauigkeitsrelationen gerecht wird.

Die Ungenauigkeitsrelationen für bestimmte Entscheidungseffekte, wie sie in Satz 13.4.1 zum Ausdruck gebracht worden sind, haben nicht die übliche Form, wie man sie im Zusammenhang mit den Heisenbergschen Unschärferelationen kennt. Man kann aber auch für Entscheidungseffekte eine ähnliche Form beweisen, die sich aus allgemeineren Überlegungen ergibt, die verkürzt in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 8.3, S. 196 dargestellt werden:

Lemma 13.4.3 *Bezeichnen e_1, e_2 zwei Elemente aus G , dann gilt für jedes x aus K die Ungleichung*

$$\sqrt{\hat{\mu}(x, e_1)(1 - \hat{\mu}(x, e_1))} \sqrt{\hat{\mu}(x, e_2)(1 - \hat{\mu}(x, e_2))} \geq \frac{1}{2} |Sp(\rho(x) C_{12})|, \quad (13.27)$$

wenn man $C_{12} := i[\sigma(e_1)\sigma(e_2) - \sigma(e_2)\sigma(e_1)]$ setzt.

Beweis:

Für jedes $j \in \{1, 2\}$ setze man

$$A'_j := \sigma(e_j) - \hat{\mu}(x, e_j) \mathbf{1},$$

und man setze darüber hinaus für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$

$$D'_\alpha := A_1 + i\alpha A'_2.$$

Dann liegt mit $D_\alpha^\dagger D_\alpha$ ein selbstadjungierter, positiver, linearer und beschränkter Operator vor, wie sich etwa mit [Wer97], S. 227 ergibt. Das heißt, es gilt $Sp(\rho(x) D_\alpha^\dagger D_\alpha) \geq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Es gilt aber auch

$$\begin{aligned} D_\alpha^\dagger D_\alpha &= (A_1 + i\alpha A'_2)^\dagger (A_1 + i\alpha A'_2) = (A_1 - i\alpha A'_2) (A_1 + i\alpha A'_2) \\ &\stackrel{A'_j = A_j}{=} (A'_1)^2 + i\alpha A'_1 A'_2 - i\alpha A'_2 A'_1 + \alpha^2 (A'_2)^2 \\ &= (A'_1)^2 + \alpha^2 (A'_2)^2 + i\alpha [\sigma(e_1) \sigma(e_2) - \sigma(e_2) \sigma(e_1)]. \end{aligned}$$

Also erhält man für alle $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq Sp(\rho(x) D_\alpha^\dagger D_\alpha) \\ &= \hat{\mu}(x, e_1) (1 - \hat{\mu}(x, e_1)) + \alpha^2 \hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2)) + \alpha Sp(\rho(x) C_{12}). \end{aligned}$$

Falls nun $\hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2)) = 0$ wäre, könnte obige Ungleichung nur dann für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten, wenn schon $Sp(\rho(x) C_{12}) = 0$ einträte unabhängig von $\hat{\mu}(x, e_1)$. Damit würde aber der behaupteten Ungleichung (13.27) genügt, so daß für die weiteren Betrachtungen von $\hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2)) \neq 0$ ausgegangen werden kann. Wählt man dann

$$\alpha := -\frac{1}{2} \frac{Sp(\rho(x) C_{12})}{\hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2))}$$

ergibt sich mit der obigen Ungleichung:

$$0 \leq \hat{\mu}(x, e_1) (1 - \hat{\mu}(x, e_1)) - \frac{1}{4} \frac{(Sp(\rho(x) C_{12}))^2}{\hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2))}.$$

Damit erhält man

$$\hat{\mu}(x, e_1) (1 - \hat{\mu}(x, e_1)) \hat{\mu}(x, e_2) (1 - \hat{\mu}(x, e_2)) \geq \frac{1}{4} (Sp(\rho(x) C_{12}))^2,$$

woraus sich dann die Ungleichung (13.27) ergibt. ■

Die Terme der Form $\sqrt{\hat{\mu}(x, e_i) (1 - \hat{\mu}(x, e_i))}$ mit $i \in \{1, 2\}$ in der Beziehung aus (13.27) stellen gerade die Varianzterme dar, die üblicherweise in den Heisenbergschen Unschärferelationen vorkommen.

Allerdings birgt die Relation (13.27) im Falle der Entscheidungseffekte keine physikalisch interessante Information, wie es im Falle von Observablen der Fall ist, denn nach Axiom AVid ist für alle Entscheidungseffekte e die Menge $K_1(e)$ nicht-leer. Das heißt, für alle Paare e_1, e_2 von Entscheidungseffekten kann man einen Zustand x aus K derart angeben, daß

$$\sqrt{\hat{\mu}(x, e_1) (1 - \hat{\mu}(x, e_1))} = 0$$

gilt. Also muß gemäß (13.27) auch $Sp(\rho(x) C_{12}) = 0$ gelten. Somit liegt das Infimum der Menge

$$\{ |Sp(\rho(x) C_{12})| \mid x \in K \}$$

bei 0. Also kann man keine relevante Ungenauigkeitsrelation gewinnen. Daher wurde auch zu Beginn des Abschnitts in Satz 13.4.1 eine den Entscheidungseffekten angepaßte Form einer Ungenauigkeitsrelation gewählt.

13.5 Die Forderung nach einer neuen Logik

Die Überlegungen, ob die Erfahrungen mit der Quantenmechanik die Verwendung eines alternativen Logikkalküls erzwingen, haben ihren gemeinsamen Ursprung mit der in Kapitel 12 ausführlich diskutierten verbandstheoretischen Axiomatik der Quantenmechanik in dem Artikel [BN36] von G. Birkhoff und J. von Neumann. Daher wird im Zusammenhang mit der verbandstheoretischen Axiomatik oft auch von Quanten-Logik gesprochen. In Kapitel 12 wurde ein solcher Begriff allerdings strikt gemieden, da er suggeriert, daß in der Quantenmechanik notwendigerweise ein anderes Logikkalkül zur Anwendung käme. Aber gerade der hier vorlegte Zugang zur Quantenmechanik zeigt, daß es zum Verständnis der Quantenmechanik nicht notwendig ist, das übliche zweiwertige logische Gerüst zu verlassen. Es wurde an keiner Stelle ein anderes logisches Konzept verwendet, und es hat sich auch an keiner Stelle aufgedrängt, ein solches zu verwenden. Das schließt nicht aus, daß man die Quantenmechanik unter Verwendung mehrwertiger Logikkalküle formulieren kann. Es kann aber nicht behauptet werden, daß die Quantenmechanik einen solchen Schritt unabdingbar machen würde.

G. Ludwig hat hierzu auch weiterführende Untersuchungen angestellt, die man ausführlich in [Lud83b], Kapitel IV, §8.3, S. 181-198 und äußerst knapp in [Lud90b], Kapitel 12, Abschnitt 3, S. 259f. findet.

13.6 Eine Bemerkung zur Bohr-Einstein-Debatte

Die Auseinandersetzung mit den in Kapitel 1 aufgeführten Punkten hat die Vermutung erhärtet, daß die Interpretationsprobleme Folge unangemessener Vorstellungen über die Natur der Mikrosysteme sind. Während einige Vorstellungen, wie etwa beim Einstein-Podolsky-Rosen-Experiment, in direktem Widerspruch zur Quantenmechanik stehen, gibt es andere, wie etwa bei der Reduktion des Wellenpaketes, die der Quantenmechanik nichts hinzufügen, was mit dem Experiment in Widerspruch geraten kann. Während erstere unmittelbar abgelehnt werden können ist bei letzteren zumindest fraglich, warum man etwas von der Wirklichkeit erfaßt haben sollte, wenn es sich als völlig entbehrlich erweist. Daher soll in beiden Fällen von unzulässigen Vorstellungen oder auch von „Fehlvorstellungen“ über die Mikrosysteme gesprochen werden.

Bei den untersuchten Fehlvorstellungen stehen an erster Stelle solche, die sich mit dem Grad der Eigenständigkeit der Mikrosysteme beschäftigen. Es geht dabei um Aussagen, inwieweit man die Mikrosysteme von der Apparateebene abstrahiert betrachten darf. Der Ludwigsche Zugang bietet einen Rahmen, der nur äußerst reduziert Vorstellungen über die Natur der Mikrosysteme einfließen läßt. Es hat sich in diesem Kapitel offenbart, daß man das durch die Präparier- und Registrierstrukturen gelegte realistische Fundament der Theorie nicht verlassen darf. Alle Vorstellungen, die man mit dem Begriff des Mikrosystems verbindet, sollten nicht über das hinausgehen, was durch Präparierverfahren, Registriermethoden und Registrierprozeduren erfaßt werden kann. So kann zum einen die Gefahr innerer Widersprüche und interpretatorisch problematischer Schlüsse gebannt werden, und zum anderen kann sich so die Eignung der ausgedrückten Ideen zur Natur der Mikrosysteme direkt auf experimentellem Wege herausstellen.

Die Ablehnung gegenüber Fehlvorstellungen darf nicht dazu führen, daß man sich überhaupt keine Vorstellungen mehr vom Wesen der quantenmechanischen Wechselwirkung macht. Ganz im Gegenteil erweisen sich intuitive Bilder zwecks der Motivation von Axiomen und auch der Entwicklung von Experimenten als entscheidende Quelle. Das wurde an vielen Stellen des Aufbaus der Axiomatik vor allem in Teil II der hier vorliegenden Arbeit deutlich. Man denke dabei etwa an die in Abschnitt 6.1 formulierte Annahme, daß sich die durch die Mikrosysteme vermittelte Wechselwirkung nicht in Raum und Zeit verliert. Gerade die damit verbundenen Überlegungen haben auf eine ganz entscheidende Form der Abstraktion von der Apparateebene geführt, nämlich die Möglichkeit der Klassenbildung auf der Menge der Präparier- und der Effektverfahren. Aber wenn man ein Axiom dann formuliert, darf man sich nur auf Präparier- und Registrierstrukturen beziehen. Dabei darf auch auf Konzepte wie

etwa Zustände und Effekte zurückgegriffen werden, die im Sinne innerer Terme auf Präparier- und Registrierstrukturen basieren, aber sie dürfen dann stets nur in dem Sinne zur Anwendung kommen, wie es ihnen auf Basis ihrer Definition als innere Terme im Sinne von Abschnitt 4.4 zukommt. Außerdem gibt es durchaus Vorstellungen, die verträglich sind mit dem hier präsentierten Fundament der Präparation und Registrierung. Beispiele im Kontext des Gedanken-Experiments von Einstein, Podolsky und Rosen werden in [Neu85] erörtert.

Rückblickend kann man sagen, daß der Ludwigsche Zugang alle relevanten Strukturen der Quantenmechanik liefert, wobei auf den Versuch allzu großer Veranschaulichungen bewußt verzichtet wird. Daraus läßt sich eine Bemerkung zur Bohr-Einstein-Debatte über die Frage nach einem angemessenen Realitätsbegriff ableiten. Um die experimentellen Erfahrungen, die die Quantenmechanik mit so großem Erfolg erfaßt, in widerspruchsfreier Weise realistisch interpretieren zu können, muß man sich in seinem Realitätsbegriff im Sinne Bohrs auf eine makroskopische Realität beschränken. Dem starken Bestreben Einsteins in der Mikrowelt einen der Makrowelt entsprechenden Realitätsbegriff zum Zuge kommen zu lassen, kann nicht entsprochen werden. Es muß vielmehr als eine Konsequenz der Erfahrungen mit der Quantenmechanik gelten, daß ein mikroskopischer Realitätsbegriff nur durch Bezug auf den makroskopischen Realitätsbegriff begründet werden kann.

Kapitel 14

Ergänzungen und ein Ausblick auf die Quanteninformationstheorie

Neben den bisher erörterten Fragestellungen hinsichtlich eines realistischen Verständnisses der Quantenmechanik soll hier noch auf das Gedankenexperiment von Erwin Schrödinger eingegangen werden, das häufig unter dem Schlagwort „Schrödingers Katze“ geführt wird. Allerdings ist es hier nicht möglich, die Ludwigschen Überlegungen in aller Ausführlichkeit zu würdigen. In ähnlich übersichtsartigem Stil soll auch noch das Konzept der Observablen innerhalb des Ludwigschen Zugangs zur Quantenmechanik skizziert werden. Abschließend wird im Sinne eines Ausblicks mit der Quanteninformationstheorie ein Gebiet der aktuellen Forschung genannt, für dessen grundlegendes Verständnis der hier gewählte Zugang zur Quantenmechanik gut geeignet scheint.

14.1 Das Gedanken-Experiment von Schrödinger

Das berühmte Katzen-Experiment stellt E. Schrödinger in [Sch35], S. 812 vor:

Eine Katze wird in eine Stahlkammer gesperrt, zusammen mit folgender Höllenmaschine (die man gegen den direkten Zugriff der Katze sichern muß): in einem Geigerschen Zählrohr befindet sich eine winzige Menge radioaktiver Substanz, *so* wenig, daß im Laufe einer Stunde *vielleicht* eines von den Atomen zerfällt, ebenso wahrscheinlich aber auch keines; geschieht es, so spricht das Zählrohr an und betätigt über ein Relais ein Hämmerchen, das ein Kölbchen mit Blausäure zertrümmert. Hat man dieses ganze System eine Stunde sich selbst überlassen, so wird man sich

sagen, daß die Katze noch lebt, *wenn* inzwischen kein Atom zerfallen ist. Der erste Atomzerfall würde sie vergiftet haben. Die ψ -Funktion des ganzen Systems würde das so zum Ausdruck bringen, daß in ihr die lebende und die tote Katze [...] zu gleichen Teilen gemischt oder verschmiert sind.

Schrödinger führt auf drastische Weise die Probleme einer auf makroskopische Systeme extrapolierten Quantenmechanik vor Augen. Für G. Ludwig liegt der Keim zum Verständnis der mit dem Schrödingerschen Experiment verbundenen Irritationen allerdings weniger in dem Glauben, daß die makroskopische Realität anders ist, als sie dem Menschen seit jeher erscheint, sondern vielmehr in einer richtigen Einordnung der Quantenmechanik in den Reigen der physikalischen Theorien. Gemeinhin wird die Quantenmechanik als die umfangreichste physikalische Theorie in dem Sinne aufgefaßt, daß sie „am meisten“ über die Strukturen der Wirklichkeit aussagt. Das heißt, daß sie einerseits nicht im Widerspruch zu den experimentellen Tatsachen steht und daß sie andererseits Aussagen über das macht, was zur physikalischen Realität gehört und was nicht. Aus einem solchen Verständnis der Rolle der Quantenmechanik leitet sich insbesondere der Anspruch ab, daß sich aus der Quantenmechanik alle klassischen Theorien deduzieren lassen sollten. Wäre die Quantenmechanik tatsächlich die umfangreichste physikalische Theorie, träte mit dem obigen Katzen-Experiment in der Tat ein außerordentlich merkwürdiger Zug der Realität zu Tage. Aber statt die Erfahrungen, die der Mensch mit der makroskopischen Welt gemacht hat, in so fundamentaler Weise in Frage zu stellen, liegt es eigentlich viel näher, der Quantenmechanik ihre fundamentale Rolle zu nehmen. Ludwig nimmt genau einen solchen Standpunkt ein und hält die Quantenmechanik nur für eine ganz spezielle Wechselwirkungstheorie zwischen Makrosystemen. Er bezeichnet die Behauptung, die Quantenmechanik sei gegenüber den klassischen Theorien umfangreicher, in §6 des Artikels [Lud85b] sogar als „Märchen“.

Zur Untermauerung eines solch harten Standpunktes liefert Ludwig zwei zentrale Gründe. Der erste Grund ergibt sich unmittelbar, wenn man einen Zugang zur Quantenmechanik wählt, wie er in der vorliegenden Arbeit erläutert wurde. Es wurde dabei stets vorausgesetzt, daß eine klassische Beschreibung der Makrosysteme bereits möglich ist. Die klassischen Theorien sind sogar Vortheorien zur Quantenmechanik. Wenn man etwa zeigt, daß sich die klassische Mechanik als Grenzfall der Quantenmechanik ergibt, zeigt man eigentlich, daß in der mathematischen Theorien Nebenbedingungen aufgestellt werden können, unter denen sich Mikrosysteme wie klassische Massenpunkte verhalten können. Damit ist noch nicht einmal gezeigt, daß ein solches Verhalten überhaupt experimentell relevant ist. Es muß erst durch ein

Vorweisen von Experimenten gezeigt werden, daß es einen Teil des Grundbereiches der Quantenmechanik gibt, der diesen Teil der Theorie auch tatsächlich realisiert. Schließlich bestünde, ähnlich wie im Falle der sich widersprechenden Teile der mathematischen Theorien von Wellen- und Teilchenbild in Abschnitt 13.2, die Möglichkeit, daß mit dem sogenannten klassischen Grenzfall eine mathematische Teil-Struktur innerhalb der Quantenmechanik vorliegt, bei dem es sich eigentlich um entbehrliche Strukturen der Theorie handelt. Das dem nicht so ist, erfährt man erst durch die experimentelle Grundlage, also den Grundbereich. Die Quantenmechanik wird folglich nicht als eine gegenüber den klassischen Theorien umfangreichere Theorie aufgefaßt, sondern steht in Ergänzung zu den klassischen Wechselwirkungstheorien.

Ein solche Einstellung wäre sicher weniger schwer anzunehmen, wenn sich der Physiker nicht der alten griechischen Atomismus-Idee gegenüber sähe, derzufolge die Materie sich aus kleinsten „unteilbaren“ Teilchen, den Atomen, zusammensetzt. Die Quantenmechanik kann für sich in Anspruch nehmen, gerade eine physikalische Theorie der Atome zu sein. Wie steht es daher mit der Frage nach dem Aufbau der Materie aus Atomen ?

Kapitel XV von [Lud79a] wie auch die Kapitel X und XI von [Lud87] widmen sich ausführlich den hier nur kurz angeschnittenen Überlegungen. Es muß auch der Artikel [Lud83a] genannt werden. In [Lud85b] und [Lud90c] faßt Ludwig seinen Standpunkt rein verbal zusammen. Dabei kommt er in [Lud85b] diesbezüglich zu der klaren Aussage:

Tatsache ist vielmehr, daß weder die Mikrosysteme die Makrosysteme, noch die Makrosysteme die Mikrosysteme erklären können. Beide Bereiche bestimmen einander. [...]

Die Elementarteilchenphysik allein kann daher nicht den Aufbau aller Systeme ob klein oder groß erklären. Durch sie lernen wir aber neue Wechselwirkungsmöglichkeiten kennen und erreichen vielleicht eine einheitliche Strukturtheorie der Vielfalt aller Wechselwirkungen. Zum Problem des Aufbaus der uns täglich umgebenden Makrosysteme wird die Elementarteilchentheorie nichts Neues beitragen können.

Daher kommt Ludwig in [Lud79a], S. 407 zu dem Schluß:

Die Makrosysteme sind physikalisch wirkliche Systeme, aber keine quantenmechanischen Systeme [...].

Nun gibt es aber die experimentelle Erfahrung, daß etwa einzelne Fremdatome in einem Verband eines Makrosystems genauso gut präparier- und registrierbar sind

wie freie Atome. Daher mutmaßt Ludwig ebenfalls in [Lud79a], S. 407, daß „wahrscheinlich einzelne Fremdatome als Teile des Gesamtsystems physikalisch wirkliche quantenmechanische Mikrosysteme sind. Dagegen geht etwas von dem Umfang der quantenmechanischen Strukturen und der Wirklichkeit der Mikroteile verloren, sobald viele gleiche Mikrosysteme im Sinne von $\mathcal{PT}_{q\ exp}$ als Teile vorkommen.“ Dabei steht das Symbol $\mathcal{PT}_{q\ exp}$ für die physikalische Theorie einer auf Vielteilchen-Systeme extrapolierten Quantenmechanik, wobei die Anzahl der Konstituenten der betrachteten Vielteilchen-Systeme „sehr groß“ sein soll zum Beispiel in der Größenordnung der Avogadro-Konstante.

In [Lud90c] macht Ludwig deutlich, wie er das Verhältnis einer solchen Theorie $\mathcal{PT}_{q\ exp}$ zu einer adäquaten Theorie der Makrosysteme sieht.

Unsere Auffassung ist nun die, daß eine extrapolierte Quantenmechanik [...] eine Theorie mit vielen Luftschlössern ist.

Damit ist gemeint, daß eine auf große Systeme extrapolierte Quantenmechanik neben den physikalisch wirklichen Präparier- und Registrierverfahren für Makrosysteme eine Vielzahl anderer Möglichkeiten der Präparation und Registrierung zuläßt, die sich augenscheinlich nicht experimentell realisieren lassen. Die extrapolierte Quantenmechanik widerspricht also nicht einer Theorie der Makrosysteme, sondern ist viel zu reichhaltig, als daß sie die wahren Gegebenheiten widerspiegeln würde. Dabei kommen Überlegungen zur Aufgabe einer physikalischen Theorie, Aussagen über die „physikalischen Möglichkeiten“ und die „physikalische Realität“ zu machen, zum Tragen. Dafür sei auch an die Anmerkungen zum Ende des Abschnitts 13.2 erinnert. Mithin gibt es neben der Tatsache, daß die klassischen Theorien bereits als Vortheorien zur Quantenmechanik benötigt werden, mit der mangelnden Restriktivität einer Vielteilchen-Quantenmechanik noch einen zweiten Punkt, die Quantenmechanik nicht für umfangreicher als etwa die klassische Punktmechanik oder die Hydrodynamik zu halten.

Zusammenfassend gesehen, betrachtet Ludwig das Schrödingersche Gedanken-Experiment nicht als Hinweis auf bisher unentdeckte Realitäten in der Makrowelt, sondern er versteht es im Gegenteil als ein illustratives Beispiel, daß die Extrapolation der Quantenmechanik auf Vielteilchen-Systeme mit einer „sehr großen“ Anzahl von Teilsystemen Dinge für real erklärt, die mit der Erfahrung nicht übereinstimmen. Der experimentelle Erfahrungsbereich für den die Quantenmechanik scheinbar korrekte Aussagen bezüglich dessen liefert, was „physikalisch wirklich“ ist, beschränkt sich auf nicht „allzu große“ Mikrosysteme. Je mehr Bausteine ein zusammengesetztes Mikrosystem konstituieren, desto geringer scheint die Quantenmechanik zumindest

hinsichtlich ihrer Aussagekraft bezüglich dessen, was möglich und wirklich ist, zu sein.

14.2 Das Konzept der Observablen

Wie bereits an mehreren Stellen angemerkt, wurde in der hier vorliegenden Arbeit der Observablen-Begriff nicht eingeführt. Stattdessen verwendet der Ludwigsche Zugang Registriermethoden und -prozeduren als Ausgangspunkt, wie in Abschnitt 5.6 vorgestellt. Darauf basierend kann man dann gemäß den Erörterungen aus Abschnitt 6.1 den Begriff des Effektes begründen.

Daß man zum Verständnis der zentralen Bausteine der Quantenmechanik den Observablen-Begriff erübrigen kann und daß er daher in der hier vorgestellten Axiomatik keine Verwendung fand, nimmt natürlich nicht das Interesse an einer realistischen Begründung eines solchen Begriffs. Es soll nun knapp erläutert werden, was vom hier gewählten Standpunkt aus unter einer Observablen verstanden werden soll und wie sich ein solches Konzept in die mathematische Theorie einfügen läßt. Die Darstellung ist nur übersichtsartig. Auf weitergehende Analysen Ludwigs, denen hier nicht gefolgt wird, wird jeweils hingewiesen.

G. Ludwig äußert sich an mehreren Stellen zum Begriff der Observablen. Hinsichtlich der allgemeinen Erörterungen zu den Observablen sind als Schwerpunkte allerdings [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitte 2 bis 4, S. 106-155 und [Lud85a], Kapitel V, §§1-5, S. 126-140 zu nennen. Die dort vorgestellten mathematischen Betrachtungen sind jedoch aufwendig, so daß auch auf die mathematisch einfachere Darlegung in [Lud84a], Kapitel XIII, §5, S. 439ff. aufmerksam gemacht wird.

Zur Einführung des Observablen-Konzepts sei an den Begriff der Koexistenz von Mengen von Effekten aus Abschnitt 9.6 erinnert. Dort wird zunächst eine Struktur des Typs $(\mathcal{R}(b_0), \psi(b_0, \cdot))$ bestehend aus dem Booleschen Verband

$$\mathcal{R}(b_0) := \{b \in \mathcal{R} \mid b \subseteq b_0\}$$

und dem effektiven, additiven Maß

$$\psi(b_0, \cdot) : \mathcal{R}(b_0) \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}, \quad b \longmapsto \psi(b_0, b)$$

für eine Registriermethode b_0 aus \mathcal{R}_0 betrachtet, wobei an die Identität der beiden Mengen $\hat{\mathcal{L}}$ und $[0, 1]_\Delta$ gemäß Satz 9.4.1 erinnert wird. Die Menge der Effekte aus \mathcal{L} , die sich als Bilder eines solchen Maßes $\psi(b_0, \cdot)$ für ein geeignetes b_0 aus \mathcal{R}_0 darstellen lassen, werden dabei als Menge koexistenter Effekte bezeichnet. Das Bedürfnis, den

Begriff der Koexistenz auf Effekte aus ganz $\hat{\mathcal{L}}$ erweitern zu können, führte auf eine Idealisierung des Begriffs in Form der Definition 9.6.6, die der Übersicht halber hier noch einmal wiederholt wird:

Definition 9.6.6

Eine Teilmenge A der Effektemenge $\hat{\mathcal{L}}$ heißt Menge **koexistenter Effekte**, wenn es einen Booleschen Verband Σ mit einem additiven Maß F so gibt, daß A im Bildbereich des Maßes liegt, wenn also $A \subseteq F(\Sigma)$ gilt.

Dabei sei an die Übereinkunft im Anschluß an Definition 9.6.3 erinnert, daß, falls nichts anderes gesagt wird, die Halbordnung eines Booleschen Verbandes Σ mit \leq und die Orthokomplementation mit \perp bezeichnet wird. Im weiteren wird ε das Eins-Element und 0 das Null-Element genannt.

Unter einer Observablen soll nun im Prinzip eine Struktur (Σ, F) bestehend aus einem Booleschen Verband und einem additiven Maß $F : \Sigma \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$ verstanden werden. Aber wie bei allen Termen, denen neben ihrer Funktion innerhalb der mathematischen Theorie auch noch eine physikalische Interpretation zukommt, bedarf es der Diskussion geeigneter uniformer Strukturen. Ludwig führt diesbezüglich in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.4, S. 96-106 eine eingehende Analyse zur Motivation einer geeigneten Uniformität auf Σ durch, die \mathcal{U}_g genannt wird und die von Σ und F abhängt. Allerdings fällt \mathcal{U}_g im allgemeinen nicht mit der Uniformität der physikalischen Unschärfe, die den Namen \mathcal{U}_p erhält, zusammen. Die Erörterungen werden hier unterdrückt, da nur die prinzipiellen Punkte im Zusammenhang mit Observablen erläutert werden sollen.

Ludwig definiert nun in [Lud85a], Kapitel V, §1.3, S. 129:

Definition 14.1

Eine **Observable** heißt ein Paar (Σ, F) bestehend aus einem Booleschen Verband Σ und einem additiven, effektiven Maß $F : \Sigma \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}$, wenn Σ bezüglich der durch Σ und F festgelegten Uniformität \mathcal{U}_g vollständig und separabel ist.

Die Menge der so betrachteten Effekte $F(\Sigma)$ ist dabei definitionsgemäß koexistent, wie sich aus der oben wiederholten Definition 9.6.6 ergibt.

Im Prinzip handelt es sich bei einer Observablen also lediglich um die Abstraktion von Strukturen des Typs $(\mathcal{R}(b_0), \psi(b_0, \cdot))$. Eine Observable kann mithin als die begriffliche Zusammenfassung der Menge aller Effekte aufgefaßt werden, die eine Registrieremethode liefert. Damit rechtfertigt sich auch das Vorgehen, im Verlaufe der vorliegenden Arbeit das Observablen-Konzept nicht in den Mittelpunkt zu rücken, sondern stattdessen alle zentralen Aussagen vermittelt der Effekte zu diskutieren. Den Begriff der Entscheidungsobservablen definiert man in naheliegender Weise:

Definition 14.2

Eine Observable (Σ, F) heißt **Entscheidungsobservable**, wenn $F(\Sigma)$ Teilmenge von G ist.

Mit der prinzipiellen Einführung von Observablen ist allerdings ob des Fehlens einer Meßskala ein typischer Aspekt, den man häufig mit Observablen verknüpft, noch nicht berücksichtigt. Ludwig geht bewußt so vor und betont etwa in [Lud85a], Kapitel V, §3.5, S. 136, daß die Skalen bei der Messung für zu wichtig gehalten werden. Die Skalen sind eigentlich mehr von praktischem als von prinzipiellem Interesse. Das allgemeine für beliebige Observable definierte Konzept der Meßskalen ist nicht trivial. Ihm widmet sich der Abschnitt 2.5 in [Lud83b], Kapitel IV, S. 139-152. Zur Vermittlung eines vereinfachten Eindrucks des Terminus der Meßskala bei Observablen wird eine Definition vorgestellt, die Definition 12 aus [Lud77], S. 210 folgt:

Definition 14.3

Sei (Σ, F) eine Observable. Dann heißt eine Abbildung $\mathfrak{S} : \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \rightarrow \Sigma$ eine **Meßskala der Observablen** (Σ, F) , wenn sie die folgenden Eigenschaften hat:

- (i) Für beliebige reelle α_1, α_2 mit $\alpha_1 \geq \alpha_2$ gilt $\mathfrak{S}(\alpha_1) \geq \mathfrak{S}(\alpha_2)$.
- (ii) Es gilt $\sigma(-\infty) = 0$ und $\sigma(+\infty) = \varepsilon$.
- (iii) Für jedes Element σ aus $\Sigma \setminus \{0, \varepsilon\}$ existiert ein α aus \mathbb{R} mit $\mathfrak{S}(\alpha) = \sigma$.

Die Zahlenwerte einer solchen Meßskala sind gerade die Werte, die man bei Registriervorgängen für die betrachtete Observable erhält. Bezeichnet b_0 etwa ein Drehspulinstrument, das verschiedener Zeigerstellungen fähig ist, dann ordnet die Meßskala jedem Wert, auf den der Zeiger verweisen kann, die zugehörige Registrierprozedur zu. Das heißt zum Beispiel, daß dem Wert 20 auf der Apparateskala gerade die Registrierprozedur zugeordnet wird, zu deren definierenden Merkmalen als interessierende Veränderung am Apparat b_0 im Sinne von Abschnitt 5.6 eine Zeigerstellung zum Wert 20 an der Apparateskala gehört. Dabei bleiben Betrachtungen zur physikalischen Unschärfe der Einfachheit halber unberücksichtigt.

Was üblicherweise mit Observable gemeint ist, findet sich in dem so aufgebauten Schema als eine Entscheidungsobservable mit einer eindimensionalen Meßskala, die Definition 14.3 in vereinfachter Form erläutert, wieder.

Rückt man die Observablen mehr in den Blickpunkt, dann stellt sich auch die Frage nach einer experimentellen Realisierbarkeit von Observablen. Eine solche Überlegung steht in direkter Verbindung mit dem Axiom A_{kEff} , demzufolge beliebige Mengen koexistenter Effekte beliebig genau durch geeignete Registriermethoden und die ihr

zugehörigen Registrierprozeduren realisiert werden können. Ein entsprechendes Axiom kann man auch im Rahmen der Observablen formulieren. Ludwig notiert dafür in [Lud85a], Kapitel V, §5, S. 138 das folgende Axiom, das die approximative Realisierbarkeit von Observablen zum Inhalt hat:

AOb Zu jeder Observablen (Σ, F) und jedem endlichen Booleschen Unterverband $\tilde{\Sigma}$ von Σ und jeder Umgebung U von $\mathbf{0} \in \Delta$ bezüglich der Topologie $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gibt es ein b_0 aus \mathcal{R}_0 und einen Homomorphismus $h : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathcal{R}(b_0)$, so daß $\psi(b_0, h(\tilde{\sigma})) - F(\sigma)$ für alle Elemente $\tilde{\sigma}$ aus $\tilde{\Sigma}$ in U liegt.

Vereinfacht gesagt, drückt AOb aus, daß man zu jeder Menge M von Effekten aus dem Bildbereich $F(\Sigma)$ der Observablen (Σ, F) bei Vorgabe eines beliebigen Unschärfeniveaus U eine Registriermethode b_0 so finden kann, daß M bezüglich U Teil der b_0 zugehörigen Menge $\{\psi(b_0, b) \mid b \in \mathcal{R} \text{ mit } b \subseteq b_0\}$ von Effekten ist. Es wird deutlich, daß AOb und AkEff vom physikalischen Standpunkt dieselben Aussagen machen.

Von Interesse ist die Frage, mit welchen Strukturen des Hilbertraumes man Observablen identifizieren kann, wenn man von der Axiomatik bis einschließlich der Axiome aus Kapitel 11 ausgeht. Für eine ausführliche Antwort muß wiederum auf Abschnitt 2.5 in [Lud83b], Kapitel IV, S. 139-152 verwiesen werden. Etwas einfacher liegt der Fall aber bei Entscheidungsobservablen mit Meßskalen im Sinne der obigen Definition 14.3, einem Sonderfall der sogenannten Skalen-Observablen. Dafür kann man den Aussagen in [Lud84a], Kapitel XIII, §5, S. 440 folgen. Insbesondere wird dabei wiederum in vereinfachender Weise davon ausgegangen, daß AV 4i gilt und daß man sich somit auf die Betrachtung eines einzelnen Hilbertraumes \mathcal{H} beschränken kann. Sei (Σ, F) eine Entscheidungsobservable mit Meßskala \mathfrak{G} . Dann kann man statt des gesamten additiven Maßes F auch die Familie $(E(\lambda))_{\lambda \in \mathbb{R}}$ mit $E(\lambda) := F(\mathfrak{G}(\lambda))$ für alle reellen λ betrachten. Unter Verwendung der identifizierenden Abbildung σ gemäß (10.2) ist durch die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{L}(\mathcal{H}), \quad \lambda \longmapsto \sigma(E(\lambda))$$

auf den reellen Zahlen in die Menge der Projektionsoperatoren auf \mathcal{H} eine Spektralschar gegeben. Für den Begriff der Spektralschar sei etwa auf [Wer97], Abschnitt VII.5, S. 317ff. verwiesen. Mit Hilfe der obigen Spektralschar kann dann gemäß

$$A := \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) \tag{14.1}$$

ein selbstadjungierter Operator definiert werden. A ist der der Observablen (Σ, F) mit Meßskala \mathfrak{S} zugeordnete selbstadjungierte Operator. Umgekehrt kann auch in eindeutiger Weise aus dem Operator A die Observable (Σ, F) zurückgewonnen werden. Mit dem obigen Operator A kann man nun in einfacher Weise die physikalisch interessanten Größen, das heißt Erwartungswerte der Observablen bezüglich \mathfrak{S} , gewinnen. So erhält man etwa $Sp(\rho(x)A)$ als Erwartungswert der Observable (Σ, F) bezüglich \mathfrak{S} für den Zustand x aus K .

Zum Abschluß der kurzen Bemerkungen zum Observablen-Konzept soll noch einmal auf die berühmten Heisenbergschen Unschärferelationen für Ort und Impuls eingegangen werden. Mit (11.51) stehen bereits die entscheidenden Vertauschungsrelationen zur Verfügung:

$$K_\mu X_\nu - X_\nu K_\mu = i m \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3. \quad (14.2)$$

Wiederum wird nur von einem einzelnen Hilbertraum \mathcal{H} ausgegangen. Zu den in (14.2) vorkommenden Operatoren gehören Entscheidungsobservablen. Bezeichnet man mit m die Gesamtmasse der betrachteten Mikrosystem-Sorte im Sinne von Abschnitt 11.5, dann heißt für $\nu = 1, 2, 3$ die dem Operator $\frac{1}{m}X_\nu$ zugehörige Observable „Orts-Observable in der ν -Komponente zum Zeitpunkt $t = 0$ “, und man setzt

$$Q_\nu := \frac{1}{m}X_\nu. \quad (14.3)$$

Als „Impuls-Observable in der ν -Komponente“ mit $\nu = 1, 2, 3$ wird die dem Operator

$$P_\nu := -K_\nu \quad (14.4)$$

zugehörige Observable bezeichnet. Dabei handelt es sich freilich nur um Namen, ohne daß man ihnen unmittelbar eine konkrete Bedeutung im Sinne eines Vorweisens konkreter Apparate zur ihrer Realisierung beimessen könnte. Ludwig widmet sich den zugehörigen Fragen in [Lud83b], Kapitel VII, §4, S. 284-292 und etwas vereinfacht auch in [Lud84a], Kapitel XI, §10.4, S. 329-335. Mit den Festlegungen in (14.3) und (14.4) erhält man aus (14.2) die Heisenbergschen Vertauschungsrelation für Ort und Impuls in ihrer kanonischen Form:

$$P_\mu Q_\nu - Q_\nu P_\mu = -i \delta_{\mu\nu} \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3.$$

Daraus ergibt sich gemäß [Lud83b], Kapitel IV, §8.3, S. 197 für jeden Zustand x aus K die sogenannte Heisenbergsche Unschärferelation zu

$$(\Delta P)_x (\Delta Q)_x \geq \frac{1}{2}, \quad (14.5)$$

wobei für $A = P, Q$ und jeden Zustand x aus K gesetzt wird:

$$(\Delta A)_x := \sqrt{Sp\left(\rho(x) \left[A - Sp(\rho(x)A) \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \right]^2\right)}.$$

Ganz analog zu den Betrachtungen in Abschnitt 13.4 zu den Ungenauigkeitsrelationen für Effekte sagt eine Beziehung wie (14.5) aber nichts über die Unmöglichkeit gleichzeitiger Meßbarkeit, prinzipielle Meßunschärfen oder die Störung des Mikrosystems durch die Messung aus, sondern sie macht eine Aussage über die begrenzten Möglichkeiten der Präparation. Das heißt, es ist nicht möglich, ein Präparierverfahren so zu realisieren, daß die den Observablen Ort und Impuls zukommenden Streuungen die Relation (14.5) verletzen.

14.3 Quanteninformationstheorie

Die Quanteninformationstheorie und damit verbunden auch die Theorie der sogenannten Quanten-Computer bezeichnen hochaktuelle Forschungsbereiche, die sich mit der prinzipiellen Nutzbarkeit der Besonderheiten der Mikrosysteme hinsichtlich der Lösung komplexer Berechnungsaufgaben widmen. Wie im weiteren kurz angedeutet werden soll, erweist sich der Ludwigsche Zugang zur Quantenmechanik als äußerst hilfreich, gerade um prinzipielle Fragestellungen realistisch zu formulieren und nicht unnötig durch Anschauungsprobleme zu behindern.

Allgemeine Darstellungen zur Quanteninformationstheorie und zu Quanten-Computern findet man zum Beispiel in [Bro99, NC00, Alb01, Hir01]. Auch hinsichtlich der physikalischen Realisierung gibt es eine Vielzahl von Veröffentlichungen. Als ein Beispiel wird [BL02] genannt. Hier soll in der Darstellung der Grundlagen der Quanteninformationstheorie den Überlegungen von R.F. Werner gefolgt werden, wie man sie etwa in [Alb01], Kapitel 2, S. 14-57 oder in [Wer02] findet.

Mit **Quanteninformationstheorie** wird die Theorie der Übertragung und Verarbeitung von Quanteninformationen bezeichnet. Dabei wählt R.F. Werner in [Wer02], S.144 die folgende vorläufige „Definition“:

Quanteninformation ist diejenige Art von Information, die durch Quantenteilchen von der Präparation zum Meßapparat eines quantenmechanischen Experiments übertragen wird.

Quanteninformation ist also diejenige Information, die durch Mikrosysteme von den Makrosystemen der Präparation zu den Makrosystemen der Registrierung vermittelt wird. Um eine solche noch etwas vage Formulierung auf ein realistisches Fundament zu stellen, böte es sich an, die Quanteninformation, die mit Mikrosystemen

vermittelt wird, einfach mit den sie vermittelnden Mikrosystemen zu identifizieren. Eine solche Auffassung erscheint aber etwas zu eng, da zumindest theoretisch eine Abstraktion von den verschiedenen Mikrosystemsorten als Informationsträgern erlaubt sein sollte. So sollte etwa die mit dem Spinfreiheitsgrad assoziierte Information unabhängig davon sein, ob man sie durch den Spin eines Elektrons oder denjenigen eines Protons realisiert. Daher muß die obige Definition mehr als eine prinzipielle Ausrichtung verstanden werden. Um zu betonen, daß man sich nicht auf spezielle Mikrosysteme beschränken will, sondern daß man die prinzipiellen Möglichkeiten der Informationsverarbeitung mit Hilfe von Mikrosystemen im Fokus hat, wird auch von einer **abstrakten Quanteninformationstheorie** gesprochen. Die Verwendung eines so gearteten Begriffs der Quanteninformation macht deutlich, daß man mit der Quanteninformationstheorie nicht eine „neue“ Quantentheorie begründen möchte. Vielmehr geht es darum, durch die Wahl alternativer Formulierungen wie etwa „es geht eine Quanteninformation vom Präparierapparat zum Registrierapparat über“ anstelle von „es geht eine gerichtete quantenmechanische Wechselwirkung von einem Präparierapparat zu einem Registrierapparat über“ einen neuen Blick auf die Quantenmechanik unter dem Aspekt der Informationstheorie zu werfen.

Mit der Begründung eines neuen Informationsbegriffs geht die Frage nach seiner Notwendigkeit einher. Die Einführung eines Begriffs der Quanteninformation ist sicher dann zwingend, wenn man damit einen Teil der Realität erfaßt, der sich nicht durch den Begriff der klassischen Information erfassen läßt. Dabei verstehe man unter klassischen Informationen solche, die durch klassische Träger vermittelt werden, also etwa schriftliche oder magnetische Aufzeichnungen, elektromagnetische Wechselwirkungen wie Funksignale und dergleichen mehr. Daß tatsächlich ein solcher prinzipieller Unterschied zwischen den beiden Informationsarten besteht, zeigt sich daran, daß sich beide Informationsarten nicht beliebig ineinander übersetzen lassen, wie die folgenden Überlegungen zeigen.

Man betrachte zunächst eine Folge auf Papier notierter Bits, etwa 0100101..., als Stellvertreter für klassische Informationen. Dann kann man eine solche Information ohne weiteres zum Beispiel in Form von Spin-Ausrichtungen von Mikrosystemen mit Spin $\frac{1}{2}$ in Quanteninformation übersetzen. Das heißt genauer, entsprechend der betrachteten Bit-Abfolge 0100101... werden die Spins von Mikrosystemen beispielsweise entlang der z -Achse präpariert, wobei für ein Bit mit Wert 1 der Spin in positiver z -Richtung und für ein Bit mit Wert 0 der Spin in negativer z -Richtung präpariert wird. Auf eine solche Weise wird eine Reihe von Mikrosystemen mit Spin-Ausrichtungen $- + - - + - + \dots$ erzeugt. Dabei mögen $+$ für positive und $-$ für negative Spin-Richtung stehen. Ein Auslesen der so gespeicherten Information ge-

schiebt durch Registrierung der Spin-Komponente in derselben Raumrichtung. Also ist es offenbar in einfacher Weise möglich, klassische Informationen in Quanteninformationen und wieder zurück zu übersetzen. Problematisch ist aber der umgekehrte Prozeß, also die Übersetzung von Quanteninformation in klassische Information, um daraus wiederum die ursprüngliche Quanteninformation zu gewinnen. Bei einem solchen Aufbau wird von **klassischer Teleportation** gesprochen. Allerdings ist der so benannte Prozeß durch die eben angegebene Beschreibung noch nicht präzise genug erfaßt. Es bedarf einer Übersetzung in den durch Präparation und Registrierung gesteckten Rahmen. Für die folgenden Überlegungen bleiben der Einfachheit halber etwaige raum-zeitliche Kombinierbarkeitsfragen unberücksichtigt, da sie hier keine prinzipiellen Einschränkungen der erzielten Einsichten implizieren würden. Man betrachte jetzt ein beliebiges Präparierverfahren a . Durch Anwendung von a wird eine quantenmechanische Wechselwirkung, also eine Quanteninformation, präpariert. Zur Realisierung klassischer Teleportation bedarf es nun einer geeigneten Methode, um aus der so präparierten Wechselwirkung klassische Informationen zu extrahieren. Das ist aber nur eine andere Formulierung für die Suche nach einer geeigneten Registriermethode b_0 . Unter der ausschließlichen Verwendung der mit der Registriervorrichtung b_0 erhaltenen Informationen soll jetzt ein anderes Präparierverfahren ausgewählt und durchgeführt werden. Dadurch wird eine neue quantenmechanische Wirkung, eine neue Quanteninformation, präpariert. Damit stellt die aus a und dem eben geschilderten Aufbau gewonnene experimentelle Vorrichtung ebenfalls ein Präparierverfahren dar. Das heißt, man gewinnt aus dem Ausgangspräparierverfahren a ein neues Präparierverfahren a' . Von klassischer Teleportation soll nun gesprochen werden, wenn man den obigen Aufbau so gestalten kann, daß für alle Ausgangspräparierverfahren a und alle Effektverfahren f die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\bar{\mu}(a, f)$ nicht von den Wahrscheinlichkeiten $\bar{\mu}(a', f)$ unterschieden werden können. Dabei soll a' im obigen Sinne, das aus a und der nachgeschalteten Kodier-Dekodier-Strecke gewonnene Präparierverfahren bezeichnen. Man kann nun zeigen, daß ein solcher Aufbau im Widerspruch zur Quantenmechanik steht.

Als erstes erlaubt die Möglichkeit der klassischen Teleportation die Konstruktion eines sogenannten **Quanten-Kopiergerätes** im folgenden Sinne. Man betrachte ein Präparierverfahren a . Wiederum seien raum-zeitliche Kombinierbarkeitsfragen vernachlässigt. Wenn nun die klassische Teleportation möglich wäre, dann könnte man aus der von a präparierten Wirkung alle relevanten Informationen in klassischer Form gewinnen, um ein zu a experimentell äquivalentes Präparierverfahren a' zu konstruieren. Bekanntermaßen lassen sich klassische Informationen, zumindest im Prinzip, beliebig vervielfältigen. Man kann zum Beispiel ohne weiteres die auf einer Festplatte gespeicherten Informationen auf einen anderen Datenträger überspielen.

Also kann man auch diejenige klassische Information duplizieren, die man aus der von a ausgehenden Wirkung im Sinne des Prozesses der klassischen Teleportation gewonnen hat. Daraus lassen sich dann offenbar zwei im Prinzip identische Präparierverfahren des Typs a' bauen, die jeweils von a statistisch nicht zu unterscheiden sind. Das heißt aber gerade, daß man auch die von a ausgehende Quanteninformation dupliziert, also kopiert hat. Wäre ein solches Quanten-Kopiergerät realisierbar, hieße das, daß im Prinzip alle Effekte aus \mathcal{L} koexistent wären. Man betrachte hierfür zwei Effekte $g_1 = \psi(b_{01}, b_1)$ und $g_2 = \psi(b_{02}, b_2)$ aus \mathcal{L} . Nun wäre es mit Hilfe eines Quanten-Kopiergerätes möglich, die Registriermethoden parallel durchzuführen, indem man zunächst die Wirkung, die von der Präparation ausgeht, mit Hilfe des Quanten-Kopiergerätes kopiert, um dann in der Folge je eine der Kopien in Kontakt mit den Registriermethoden b_{01} und b_{02} zu bringen. Der Apparat bestehend aus dem Quanten-Kopiergerät und den beiden Registriermethoden b_{01} und b_{02} kann wiederum als eine Registriermethode b_0 aufgefaßt werden¹. Also ist es damit gelungen, die Registriermethoden b_{01} und b_{02} an einem gemeinsamen Apparat wiederzufinden. Entsprechend kann man dann auch die Effekte g_1, g_2 als an einem gemeinsamen Apparat ausgezeichnet auffassen. Das ist aber gleichbedeutend mit ihrer Koexistenz. Da zu Beginn keine Voraussetzungen über die Koexistenz von g_1 und g_2 gemacht wurden, führt die Existenz eines Quanten-Kopiergerätes offenbar auf die Koexistenz aller Effekte aus \mathcal{L} . Hier zeigt sich ein Konflikt mit der Quantenmechanik, denn man betrachtet es gerade als ein zentrales Merkmal der Quantenmechanik, daß es Paare nicht-koexistenter Effekte gibt. Es sei an Abschnitt 9.6 erinnert. Nun könnte man dem entgegen, daß sich die Nicht-Koexistenz von Effekten nicht experimentell beweisen läßt. Vielleicht hat man den gemeinsamen Apparat bisher als nicht-koexistent geltender Effekte nur noch nicht gefunden. Vielleicht ist die Quantenmechanik als solche verbesserungsbedürftig. Man kann allerdings zeigen, daß die Möglichkeit gemeinsamer Apparate, wie sie eben geschildert wurden, auch zum Bau eines weiteren Apparates genutzt werden kann, das von R.F. Werner als Bellsches Telefon bezeichnet wird. Das Bellsche Telefon zeichnet sich dadurch aus, daß es für physikalische Theorien, in denen die auf J.S. Bell, [Bel64], zurückgehenden Ungleichungen verletzt sind, einen Informationsaustausch im Widerspruch zum Einsteinschen Kausalitätsprinzip zuläßt. Eine ausführliche Erläuterung liefert Werner mit Unterabschnitt 2.3.3 in [Alb01], S. 19-23.

¹Eigentlich müßte man wie bei den Konvexitätsüberlegungen in Abschnitt 6.2 im Zusammenhang mit dem Zufallsgenerator genauer von zwei Registriermethoden b'_{01} und b'_{02} sprechen, die in allen Belangen mit den Methoden b_{01} und b_{02} übereinstimmen, da es sich bei b_{01} und b_{02} um eigenständige Registriermethoden handelt, die nicht in irgendeinem Zusammenhang mit dem Aufbau eines Quanten-Kopiergerätes stehen. Hier soll der Einfachheit davon abgesehen werden.

Die Möglichkeit der klassischen Teleportation führt also auf die Möglichkeit des Baus von Apparaten, die im Widerspruch mit der Quantenmechanik stehen. Folglich ist die klassische Teleportation kein erlaubter Vorgang im Rahmen der Quantenmechanik, und somit sind Quanteninformation und klassische Information physikalisch nicht gleichwertig. Das rechtfertigt es, mit der Quanteninformation einen neuen Informationsbegriff anzustreben.

Die Unmöglichkeit des Quanten-Kopiergerätes hat unmittelbare praktische Konsequenzen für die Arbeit mit Quanteninformationen. Wenn man Quanteninformationen nicht kopieren kann, dann kann man sie auch nicht in Sinne einer Datenbank speichern, auf die viele Benutzer Zugriff hätten. Es wären ebenso keine Sicherheitskopien sensibler Daten möglich. Allerdings bieten sich auch Möglichkeiten, denen man sich im Bereich der **Quanten-Kryptographie** widmet. Normalerweise verläuft ein Abhörvorgang in der Form ab, daß die Daten auf ihrem Weg vom Sender zum Empfänger kopiert werden, um sie nach dem Kopiervorgang an den eigentlichen Empfänger weiterzuleiten. Wenn nun aber ein solcher Kopiervorgang nicht möglich ist, ohne die Informationen zu verändern, kann auch der Abhörvorgang nicht durchgeführt werden, ohne Spuren zu hinterlassen. Ausführliche Erörterungen zum Thema der Quanten-Kryptographie finden sich in allen eingangs des Abschnitts genannten Werken.

Neben den oben aufgezählten Beschränkungen, die die Arbeit mit Mikrosystemen aus dem Blickwinkel der Informationstheorie eher unattraktiv erscheinen lassen, bietet die Quantenmechanik aber mit der Superposition und der sogenannten **Verschränktheit**², zwei eng miteinander verknüpfte Phänomene, die Möglichkeiten bieten, die der klassischen Informationsverarbeitung nicht zugänglich sind. Von Verschränktheit von Zuständen spricht man bei zusammengesetzten Systemen, wenn sich der dem Zustand, in dem das Gesamtsystem präpariert wurde, zugehörige Dichteoperator nicht als Konvexkombination von Tensorprodukten von Dichteoperatoren darstellen läßt, die mit Zuständen der Subsysteme korrespondieren. Falls eine solche Darstellung möglich ist, spricht man zur Unterscheidung von der Verschränktheit auch von **klassischen Korrelationen** oder von **Separierbarkeit**. Ein Beispiel für verschränkte Zustände bildet der durch den Dichteoperator P^η mit

$$\eta := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(u_+(I) u_-(II) - u_-(I) u_+(II) \right)$$

gekennzeichnete Zustand, wie er im Rahmen des experimentellen Aufbaus von Einstein, Podolsky und Rosen in Abschnitt 13.3 erläutert wurde. Offenbar handelt es

²Im englischen Sprachraum wird dafür der Begriff **entanglement** verwendet.

sich bei P^n gerade um eine Superposition reiner Zustände, die sich nicht als Konvexkombination von Zuständen des Typs $D_I \otimes D_{II}$ darstellen läßt. Dabei sollen D_I und D_{II} Dichteoperatoren auf den jeweils zweidimensionalen Hilberträumen sein, die dem Spin der beiden betrachteten Mikrosystemsorten zugeordnet wurden.

Im Rahmen der Quanteninformationstheorie findet sich die Verschränktheit von Zuständen in vielen Betrachtungen wieder. Ein besonders prominentes Beispiel ist die sogenannte **verschränktheitsverstärkte Teleportation**. Dabei werden drei Parteien M , P und S betrachtet. Das Ziel des Aufbaus besteht darin, daß M den Partner P durch Weitergabe klassischer Informationen in die Lage versetzt, die bei M ankommende quantenmechanische Wirkung in statistisch gleichwertiger Weise zu präparieren. Wenn tatsächlich nur klassische Informationen verwendet werden, ist das unmöglich, wie die obige Diskussion zur klassischen Teleportation gezeigt hat. Ein solcher Vorgang wird aber ermöglicht, wenn man zusätzlich noch verschränkte Mikrosysteme verwendet. Dazu wird je ein Subsystem eines Paares verschränkter Mikrosysteme von S an M und P gesandt. M führt nun einen Registriervorgang an demjenigen Mikrosystem durch, das sich aus dem Subsystem des Paares verschränkter Mikrosysteme und demjenigen zusammensetzt, das teleportiert werden soll. Die klassischen Informationen, die M mittels der Durchführung eines solchen Registriervorganges gewonnen hat, werden an P weitergegeben. P nutzt nun die so erhaltenen Daten zur Umpräparation seiner Hälfte des von S gesandten Paares im Sinne einer unitären Transformation. Man kann nun mathematisch wie experimentell zeigen, daß ein solcher Aufbau tatsächlich derart realisiert werden kann, daß sich die Wirkung, die den gesamten Teleportationsapparat verläßt, statistisch nicht von der Wirkung unterscheidet, die vom ursprünglichen Präparierapparat ausgeht. In einem solchen Falle kann dann auch von Teleportationsprozeß gesprochen werden. Allerdings muß betont werden, daß stets nur statistische Argumente formuliert werden. Der Vorgang sollte nicht dahingehend mißverstanden werden, daß ein Mikrosystem im Sinne eines Individuum von M zu P teleportiert wird. Vereinfacht gesprochen, wird nur das Wirkmuster von M nach P geschickt und nicht ein konkretes Objekt.

Die verschränktheitsverstärkte Teleportation ist nur ein Beispiel von vielen, die die besonderen Möglichkeiten in der Verwendung der Mikrosysteme als Informationskanal zeigen. Die Zustandsverschränkung ermöglicht es zum Beispiel, in komprimierter Weise Daten zu übermitteln. So kann man zeigen, daß es bei entsprechender Ausnutzung der Verschränkung möglich ist, mittels eines einzigen Zwei-Niveau-Mikrosystems, eines sogenannten **Qubits**, zwei Bit klassischer Informationen zu senden. Daher wird von „**superdense coding**“ gesprochen. Für ausführlichere Dis-

kussionen wird wiederum auf die zu Beginn des Abschnitts erwähnte Literatur verwiesen.

Nutzt man Verschränkung auf eine der eben erläuterten Weisen zur Übermittlung von Informationen, zeigt sich, daß es sich bei der Verschränkung von Zuständen nicht nur um eine Besonderheit der Quantenmechanik handelt, die ausschließlich für Grundlagenfragen wie in Abschnitt 13.3 relevant ist, sondern daß dadurch ganz praktische Problemstellungen berührt werden. Daher wird bei der Verschränktheit auch von einer Ressource gesprochen, denn zum einen muß sie aufwendig hergestellt werden und zum anderen verbraucht sie sich bei ihrer Ausnutzung. So wird häufig auch bei Verwendung von Paaren verschränkter Mikrosysteme der Begriff des **ebits** verwendet, wobei „e“ in Abkürzung für „entanglement“ stehen soll.

Das zentrale Ziel einer Quanteninformationstheorie besteht sicher in der Realisierung eines **Quanten-Computers**. Als Register werden nicht wie im klassischen Fall Speicherzellen zur Datenverarbeitung genutzt, sondern Mikrosysteme oder zumindest Freiheitsgrade von Mikrosystemen. Weiter oben wurde als abstrakter Begriff für die einfachste Ausführung solcher Systeme der Begriff des Qubits bereits eingeführt. Beispiele sind etwa die Spin-Freiheitsgrade von Photonen oder Elektronen, aber auch Moden elektromagnetischer Hohlraumstrahlung, Ionenfallen, Quantenpunkte und dergleichen mehr. Die Gatter, die die logischen Grundoperationen erlauben und aus denen sich alle Berechnungen aufbauen lassen, können auf Quantencomputer übertragen werden. Allerdings gibt es im quantenmechanischen Fall eine Vielzahl weiterer Gatter, zu denen es kein klassisches Analogon gibt. So existiert im klassischen Fall nur ein nicht-triviales Ein-Bit-Gatter, das NOT-Gatter. Im Gegensatz dazu gibt es bei Betrachtung von Qubits noch ganz andere Operationen. Als bekannte Beispiele sind das Z-Gatter und das Hadamard-Gatter zu nennen. Es wird dafür etwa auf [NC00], Unterabschnitt 1.3, S. 17-28 verwiesen. Unter einem Programm versteht man dasselbe wie im klassischen Fall, also eine Abfolge von Schritten, die in Form von klassischer Information vorliegt. Der Dateneingang in die Register wird durch Präparation der entsprechenden Freiheitsgrade realisiert, insbesondere die Herstellung eines definierten Ausgangszustandes, die sogenannte Initialisierung, stellt einen Präparationsvorgang dar. Das Auslesen der Information besteht in der Durchführung von Registrieremethoden. Nun treten die verschiedenen Ausgänge einer Registrierung im Rahmen der Quantenmechanik nur mit bestimmten, in der Regel von 1 abweichenden Wahrscheinlichkeiten auf, so daß verschiedene Durchläufe eines Programms auf einem Quanten-Computer auch zu verschiedenen Ergebnissen führen. Da es auch klassische Algorithmen mit stochastischen Elementen gibt, stellt das aber keine Eigenart dar, die sich nur auf Quantencomputer beschränkt. Bei man-

chen Fragestellungen begegnet man dem, indem das erhaltene Ergebnis auf seine Eignung zur Lösung des gestellten Problems überprüft wird.

Der offenbar große Aufwand der aus verschiedenen Gründen zur Realisierung eines Quantencomputers betrieben werden muß, stellt die Frage nach der Motivation seiner Verwirklichung mit besonderem Nachdruck. Zunächst muß einschränkend gesagt werden, daß mit einem Quanten-Computer keine prinzipiellen Grenzen im Vergleich zu klassischen Computern durchbrochen werden können. Klassisch unlösbare Probleme, wie das Wortproblem in der Gruppentheorie oder das Halteproblem für Turingmaschinen, die beispielsweise in [Her78] erläutert werden, sind auch von Quanten-Computern nicht zu lösen. Das ergibt sich aus der grundsätzlichen Beobachtung, daß zumindest im Prinzip die dynamischen Gleichungen, und damit auch alle dadurch erreichbaren Ergebnisse, innerhalb der Quantenmechanik auf einem klassischen Computer simuliert werden können. Das liegt daran, daß die vorkommenden mathematischen Strukturen allesamt auf klassischen Computern berechnet werden können.

Das Potential der Quanten-Computer liegt aber auf dem Gebiet der Laufzeit. Mit dem Shor- und dem Grover-Algorithmus existieren bekannte Beispiele, die die Laufzeit gegenüber den besten bekannten klassischen Algorithmen drastisch reduzieren. So liegt der auf P.W. Shor zurückgehende Algorithmus, für den etwa auf [Sho97] verwiesen wird und der der Faktorisierung ganzer Zahlen dient, im Sinne der Komplexitätstheorie sogar in einer anderen Klasse als seine klassischen Gegenstücke. Während moderne klassische Algorithmen zur exponentiellen Klasse gehören, das heißt, die Anzahl der zur Bestimmung eines Faktors einer Zahl benötigten Schritte wächst exponentiell mit ihrer Länge, liegt der Shor-Algorithmus in der sogenannten polynomialen Klasse, das heißt, die Anzahl der benötigten Schritte hängt polynomial von der Länge der betrachteten Zahl ab. Der von L.K. Grover in [Gro97] vorgestellte Algorithmus dient dem Auffinden eines ausgezeichneten Mitglieds in einer Liste. Die Anzahl benötigter Schritte ist hier im klassischen Fall proportional zur Länge der Liste, während der Grover-Algorithmus dieselbe Aufgabe in der Größenordnung von \sqrt{N} Schritten für eine Liste mit N Mitgliedern löst.

Es kann hier nicht ausführlich erläutert werden, wodurch die einzelnen Quanten-Algorithmen ihre Vorteile gegenüber den klassischen Varianten gewinnen. Es muß daher bei einigen Bemerkungen bleiben. Neben der Ausnutzung der weiter oben erläuterten Verschränktheit von Zuständen kommt etwa im Shor-Algorithmus ein weiteres Phänomen hinzu, das **Quantenparallelismus** genannt wird. Bei der Initialisierung wird der Anfangszustand des Quantenrechners in einer geeigneten Superposition präpariert, so daß alle Werte einer innerhalb des Algorithmus relevanten Funktion parallel berechnet werden können. Das nutzt in massiver Weise die Lineari-

tät der vorkommenden Operationen aus. Eine Vorstellung über die wahre Leistungsfähigkeit der Quantenmechanik im Zusammenhang mit der Informationstheorie erlauben die folgenden Dimensionsüberlegungen. Während man im Falle eines klassischen N -Bit-Problems einen Konfigurationsraum mit 2^N Punkten betrachten muß, hat der entsprechende Zustandsraum für ein System bestehend aus N Qubits eine Dimension von 2^{2N} , denn der zugrundeliegende Hilbertraum zur Beschreibung von N Zwei-Niveau-Mikrosystemen hat gerade die Dimension 2^N . Daher verwundert es nicht, daß sich in einem solch deutlich vergrößerten Zustandsraum auch mehr Möglichkeiten zur Lösung von Problemen bieten. Allerdings erweist es sich als schwierig, die so gebotenen Möglichkeiten adäquat zu nutzen. Die Verschränkung etwa im Falle der verschränktheitsverstärkten Teleportation ist dafür ein Beispiel.

Zusammenfassend kann man sagen, daß sich zur Diskussion gerade zentraler Überlegungen im Bereich der Grundlagen der Quanteninformationstheorie das ausgereifte Instrumentarium, das der Ludwigsche Zugang bereitstellt, besonders eignet. Der dadurch auferlegte Zwang, stets die entwickelten Vorstellungen wie etwa bei der klassischen Teleportation oder beim Quanten-Kopiergerät in den Begriffen der Präparation und Registrierung auszudrücken, bewahren vor der Entwicklung problematischer Ansichten. So wird stets deutlich, daß es nicht um Mikrosysteme im Sinne von Objekten geht, sondern nur um Wirkmuster, die etwa teleportiert werden. Das Beispiel der verschränktheitsverstärkten Teleportation erscheint interpretatorisch problematisch, wenn man tatsächlich annähme, daß ein bestimmtes Objekt an einer Stelle verschwindet, um an einer anderen wieder aufzutauchen. Sind die beiden Objekte wirklich identisch? Wieso ist das eine Subsystem des verschränkten Paares jetzt mit dem Ausgangsteilchen identisch? Gerade die Diskussion des Experiments von Einstein, Podolsky und Rosen in Abschnitt 13.3 hat gezeigt, welche große Schwierigkeiten eine Interpretation der quantenmechanischen Wechselwirkungsträger im Sinne klassischer Objekte nach sich zieht. Es kann nicht nur zu Vorstellungen kommen, die das Verständnis behindern, sondern es kann sogar zu Vorstellungen kommen, die im direkten Widerspruch zur Quantenmechanik stehen. Daher muß im Zusammenhang mit verschränkten Mikrosystemen, die für die Quanteninformationstheorie eine zentrale Rolle spielen, mit ausdrücklicher Vorsicht vorgegangen werden. Aber gerade in solchen Belangen erweist sich der hier vorliegende Zugang mit seiner radikaler Beschränkung auf die makroskopischen Vorgänge als hinreichend vorsichtig.

Schlußbetrachtung

Die von Günther Ludwig entwickelte Neubegründung der Quantenmechanik birgt zwei bemerkenswerte Vorteile.

Zum einen steht eine Axiomatik der Quantenmechanik zur Verfügung, die reichhaltig genug ist, bekannte Strukturen, wie etwa die des Hilbertraumes, zu begründen und die sich nahezu ausschließlich aus physikalisch motivierten Axiomen zusammensetzt. Insbesondere im Vergleich zu den alternativen Versuchen eines axiomatischen Aufbaus der Quantenmechanik, die ihre Forderungen zumeist kaum oder gar nicht auf physikalische Aussagen zurückführen können, offenbart der Ludwigsche Zugang damit deutlich attraktivere Züge.

Zum anderen erweist sich das Fundament der Präparation und Registrierung als hinreichend vorsichtig, um problematischen Fragen der Interpretation zu begegnen. Nimmt man den Ludwigschen Standpunkt ein, daß die Quantenmechanik eine spezielle Wechselwirkungstheorie zwischen Makrosystemen darstellt, kann im Sinne der Überlegungen des Kapitels 13 von einer echten Überwindung zumindest der dort vorgetragenen Deutungsschwierigkeiten gesprochen werden.

Der Ludwigsche Neuaufbau der Quantenmechanik verwirklicht in konsequenter Weise die von Niels Bohr immer wieder vorgebrachte Forderung, daß man die quantenmechanischen Systeme nicht von dem experimentellen Zusammenhang lösen darf, in dem sie beobachtet werden.

Begründet man die Quantenmechanik in der hier vorgestellten Form, so verfügt man nicht nur über ein besseres Verständnis der Grundlagen der Quantenmechanik, sondern es steht zudem eine leistungsfähige Formulierung zur Verfügung, die sich auch für hochaktuelle Forschungsbereiche eignet.

Als problematisch müssen die Axiome AV 1.2 und AV 4b eingeschätzt werden. Bei AV 1.2 wird zwar von einer bekannten physikalischen Erfahrung im Zusammenhang mit der Empfindlichkeitssteigerung von Effekten ausgegangen, aber der daran anschließende Schritt zur Gewinnung der endgültigen Formulierung von AV 1.2 geht deutlich über eine einfache Idealisierung hinaus. Dabei wird die Gültigkeit der ma-

thematischen Ausgangsaussage, die man als Ausdruck der Erfahrung gewinnt, in physikalisch nicht nachvollziehbarer Weise auf eine Menge \overline{L} erweitert. Die mathematische Attraktivität der mit AV 1.2 gewonnenen Aussage ist zwar offensichtlich, reicht aber zur Begründung des Axioms nicht aus. Ein weiteres Problem bei Axiom AV 1.2 besteht darin, daß zu seiner Formulierung mit der Menge $[0, 1]_{\Delta}$ und der Abbildung ξ_{Δ} auf zwei Terme zurückgegriffen wird, die beide nicht in evidenter Weise zu interpretieren sind. Zwar kann man $[0, 1]_{\Delta}$ als einfache Erweiterung der Bildmenge $\hat{\mathcal{L}}$ und ξ_{Δ} als Fortsetzung der Bildrelation $\hat{\mu}$ auffassen, aber zumindest bleibt ein solcher Standpunkt unbefriedigend, nicht zuletzt weil AV 1.2 das einzige Hauptaxiom des Messens ist, das über den von K , $\hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mu}$ aufgespannten Rahmen hinausgeht.

Auch Axiom AV 4b, das den komplexen Zahlenkörper gegenüber dem Körper der reellen Zahlen und dem Schiefkörper der Quaternionen auszeichnet, wird als verbesserungswürdig angesehen. Obwohl es als physikalisch überprüfbar einzuordnen ist, kann es nicht als durch die Erfahrung nahegelegt gelten. Da die Auszeichnung des komplexen Zahlenkörpers aber noch Gegenstand der aktuellen Forschung ist, besteht im Hinblick auf die Tatsache, daß zusammengesetzte Systeme nur bei Wahl des komplexen Zahlenkörpers in unproblematischer Weise implementiert werden können, Grund zu der Annahme, daß eine geeignete Alternative zu AV 4b gefunden werden kann.

Anhang A

Auszüge aus der Theorie uniformer Räume

Der folgende Anhang stellt die für die vorliegende Arbeit wichtigsten Aussagen über uniforme Räume zusammen. Dabei werden auch Theoreme aus der Theorie der topologischen Räume genannt, wenn sie für die spätere Darstellung und für die Arbeit von Interesse sind. Als zentrale hier verwandte Referenzen sind die Werke [Bou66a], [Bou66b] und [vQ01] zu nennen. Aussagen, die der mathematischen Fachliteratur entnommen worden sind, werden ohne Beweis notiert, aber mit einem Verweis auf die Entnahmestelle versehen. Allerdings werden einfache Aussagen zuweilen auch ohne weiteres Zitat formuliert. Derartige Aussagen finden sich dann in den zugehörigen Abschnitten der oben aufgeführten Werke. Die restlichen Aussagen werden an der Stelle ihrer Nennung bewiesen.

A.1 Grundlegende Definitionen

Definition A.1.1

Sei X eine Menge, und seien A, B Teilmengen des kartesischen Produktes $X \times X$. Es wird festgelegt:

$$\begin{aligned} A^{-1} &:= \{(x, y) \in X \times X \mid (y, x) \in A\}, \\ BA &:= \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X : (x, z) \in A \text{ und } (z, y) \in B\}. \end{aligned}$$

Es wird $A^2 := AA$ definiert, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird $A^n := AA^{n-1}$ gesetzt. A heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^{-1}$ gilt.

Lemma A.1.2 *Es gilt unter den Voraussetzungen von Definition A.1 für beliebige Teilmengen A, B von $X \times X$:*

$$(i) \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(ii) *Für beliebige Teilmengen C von $X \times X$ gilt die Identität $(AB)C = A(BC)$.*

(iii) *Sei A eine Teilmenge von B , dann ergibt sich die Mengeninklusion $A^{-1} \subseteq B^{-1}$. Für eine beliebige Teilmenge C von $X \times X$ gilt darüber hinaus: $AC \subseteq BC$,*

(iv) *Für alle natürlichen Zahlen n aus \mathbb{N} folgt aus der Symmetrie von A die Symmetrie von A^n .*

Im weiteren wird abgemacht:

Definition A.1.3

Seien X, Y Mengen, und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Für Teilmengen V von X und W von Y wird symbolisch eingeführt:

$$f(V) := \{f(x) \in Y \mid x \in X\} \quad \text{und} \quad f^{-1}(W) := \{x \in X \mid f(x) \in W\}.$$

Außerdem wird die folgende „kartesische Produktabbildung“ eingeführt:

Definition A.1.4

Seien X_1, X_2, Y_1, Y_2 Mengen, und seien $f_1 : X_1 \rightarrow Y_1, f_2 : X_2 \rightarrow Y_2$ zwei Abbildungen. Auf den kartesischen Produktmengen wird nun definiert:

$$X_1 \times X_2 \rightarrow Y_1 \times Y_2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (f_1 \times f_2)((x_1, x_2)) := (f_1(x_1), f_2(x_2)).$$

Bemerkung: Statt der korrekten Schreibweise $(f_1 \times f_2)((x_1, x_2))$ wird zumeist das Symbol $(f_1 \times f_2)(x_1, x_2)$ verwendet.

Die Definition läßt sich ohne weiteres auf beliebige endliche Funktionenfamilien erweitern.

Mit Verwendung der Voraussetzungen aus der Definition A.1.4 erhält man für eine Teilmenge V des kartesischen Produktes $X_1 \times X_2$ und für eine Teilmenge W des Produktes $Y_1 \times Y_2$:

$$(f_1 \times f_2)(V) = \{(f_1(x_1), f_2(x_2)) \in Y_1 \times Y_2 \mid (x_1, x_2) \in V\}, \quad (\text{A.1})$$

$$(f_1 \times f_2)^{-1}(W) = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \mid (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in W\}. \quad (\text{A.2})$$

Damit kann nun zur Einführung der zentralen Struktur des Anhangs übergegangen werden:

Definition A.1.5

Als **uniforme Struktur** oder **Uniformität** \mathcal{N} auf einer Menge X bezeichnet man ein System von Teilmengen von $X \times X$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jede Teilmenge A von $X \times X$ und für jedes Element N aus \mathcal{N} folgt aus der Mengeneinklusion $A \supseteq N$ die Zugehörigkeit von A zu \mathcal{N} .
- (ii) Für jede natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ und für jede Familie $(N_i)_{i=1}^k$ aus \mathcal{N} liegt auch der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^k N_i$ in \mathcal{N} .
- (iii) Jedes Element N aus \mathcal{N} umfaßt die sogenannte **Diagonale** $\{(x, x) \mid x \in X\}$.
- (iv) Liegt N in \mathcal{N} , dann gehört die Menge N^{-1} zu \mathcal{N} .
- (v) Zu jedem Element N aus \mathcal{N} gibt es ein Element V in \mathcal{N} , so daß N die Menge V^2 umfaßt.

Die Elemente von \mathcal{N} heißen die **Nachbarschaften** der uniformen Struktur. (X, \mathcal{N}) bezeichnet man als **uniformen Raum**. Bezeichnet N eine Nachbarschaft aus \mathcal{N} , und bezeichnen x_1, x_2 zwei Elemente N , dann heißen x_1 und x_2 **von der Ordnung N benachbart**.

Eine Uniformität läßt sich auch als Filter auf X auffassen. Deshalb wird gelegentlich auch von einem **Nachbarschaftsfilter** gesprochen. Dabei erinnere man aus der mengentheoretischen Topologie die folgenden Begriffe:

Definition A.1.6

- (i) Ein **Filter** auf einer Menge X ist ein System \mathfrak{F} von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:
 - (a) \mathfrak{F} enthält die Menge X als Element. Die leere Menge \emptyset gehört nicht zu \mathfrak{F} .
 - (b) Sind F_1, F_2 zwei Elemente von \mathfrak{F} , dann liegt der Durchschnitt $F_1 \cap F_2$ in \mathfrak{F} .
 - (c) Ist F' eine Teilmenge von X , die ein Element von \mathfrak{F} umfaßt, dann liegt F' in \mathfrak{F} .

- (ii) Eine Teilmenge \mathcal{B} eines Filters \mathfrak{F} auf einer Menge X heißt **Filterbasis** \mathfrak{F} , wenn jedes Element aus \mathfrak{F} ein Element aus \mathcal{B} enthält.
- (iii) Sind $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ zwei Filter auf X , so heißt \mathfrak{F}_1 **feiner** als \mathfrak{F}_2 und \mathfrak{F}_2 **gröber** als \mathfrak{F}_1 , wenn der Filter \mathfrak{F}_1 den Filter \mathfrak{F}_2 umfaßt.
- (iv) Seien X, Y zwei Mengen, und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Sei ferner \mathfrak{F} ein Filter auf X , dann heißt derjenige Filter, der die Menge $\{f(F) \mid f \in \mathfrak{F}\}$ als Basis besitzt, der **Bildfilter** von \mathfrak{F} bezüglich f . Als Symbol für den Bildfilter wird $f(\mathfrak{F})$ gewählt.

Beispiele für uniforme Räume: Sei X eine Menge.

- (i) Die Menge aller Teilmengen von $X \times X$, die die als **Diagonale** bezeichnete Menge $\{(x, x) \mid x \in X\}$ enthalten, bilden eine Uniformität auf X . Sie wird als **diskrete Uniformität** bezeichnet.
- (ii) Die einelementige Menge $\{X \times X\}$ bildet ebenfalls eine Uniformität. Sie wird **indiskrete Uniformität** genannt.

Definition A.1.7

Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum. Eine Teilmenge \mathcal{B} der Uniformität \mathcal{N} heißt **Fundamentalsystem der uniformen Struktur**, wenn es zu jeder Nachbarschaft N aus \mathcal{N} ein Element B in \mathcal{B} so gibt, daß B Teilmenge von N ist.

Offensichtlich bildet ein Fundamentalsystem einer Uniformität gerade eine Filterbasis des Nachbarschaftsfilters.

Durch \mathcal{N} selbst liegt für jeden uniformen Raum (X, \mathcal{N}) stets ein Fundamentalsystem vor. Dadurch wird deutlich, daß im allgemeinen nicht nur ein Fundamentalsystem existiert.

Die obige Definition besagt, wann ausgehend von einer Uniformität ein Fundamentalsystem gegeben ist. Man kann aber auch umgekehrt vorgehen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz A.1.8 *Sei \mathcal{B} ein System von Teilmengen von $X \times X$ für eine Menge X mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Zu jeder natürlichen Zahl $k \in \mathbb{N}$ und zu jeder Familie $(B_i)_{i=1}^k$ in \mathcal{B} existiert ein Element in \mathcal{B} , das in dem Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^k B_i$ enthalten ist.*
- (ii) *Jedes Element B aus \mathcal{B} enthält die Diagonale $\{(x, x) \mid x \in X\}$.*

- (iii) Zu jedem Element B aus \mathcal{B} existiert ein Element in \mathcal{B} , das in der Menge B^{-1} enthalten ist.
- (iv) Zu jedem Element B aus \mathcal{B} existiert ein Element V in \mathcal{B} , so daß V^2 in B enthalten ist.

Dann bezeichnet $\mathcal{N} := \{N \in X \times X \mid \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq N\}$ eine Uniformität auf X mit \mathcal{B} als Fundamentalsystem.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt A, Satz 11.4, S. 137.

Vom Standpunkt der Strukturhierarchie aus betrachtet sind die uniformen Räume zwischen die topologischen und die metrischen Räume einzuordnen. Ein **topologischer Raum** ist eine Menge, die nur mit einem System offener Mengen, der **Topologie**, ausgestattet ist, auf dem sich dann der Umgebungsbegriff begründet. Für die Topologie wird in der vorliegenden Arbeit zumeist das Symbol \mathcal{O} verwendet. Ein **metrischer Raum** ist eine Menge, auf der eine Abstandsfunktion, die **Metrik**, definiert ist, mit deren Hilfe in kanonischer Weise eine Topologie gewonnen werden kann. Somit sind metrische Räume insbesondere auch topologische Räume. Die obige Aussage zum Verhältnis der uniformen Räume zu den topologischen und metrischen Räume wird durch die nächsten beiden Sätze und Definitionen konkretisiert:

Satz und Definition A.1.9 Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $U_\varepsilon := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ definiert. Dann erfüllen $\mathcal{B} := \{U_\varepsilon \mid \varepsilon > 0\}$ und $\mathcal{B}^* := \{U_{1/n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Bedingungen von Satz A.1.8. \mathcal{B} und \mathcal{B}^* legen dieselbe uniforme Struktur fest, die als die **uniforme Struktur des metrischen Raumes** oder als die **von der Metrik induzierte uniforme Struktur** bezeichnet wird.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt A, Beispiel 11.6, S. 138.

Weitere Erörterungen zu Zusammenhängen von Metriken und Uniformitäten erfolgen in Abschnitt A.5. Es gilt ferner:

Satz und Definition A.1.10 Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei für $x \in X$ und $N \in \mathcal{N}$ definiert:

$$V_N(x) := \{y \in X \mid (x, y) \in N\}. \quad (\text{A.3})$$

Dann liegt durch die Menge aller $\mathcal{U}(x) := \{V_N(x) \mid N \in \mathcal{N}\}$ mit $x \in X$ eine Familie von Teilmengensystemen vor, die dadurch in eindeutiger Weise eine Topologie auf X festlegt, daß für jedes Element x aus X das zugehörige Umgebungssystem durch die

Menge $\mathcal{U}(x)$ gegeben ist. Die so gewonnene Topologie wird als die **Topologie des uniformen Raumes** oder als die **von der Uniformität induzierte Topologie** bezeichnet.

Bemerkung: Es wird hier angemerkt, daß in der mathematischen Literatur, wie etwa in [Bou66a], Kapitel II, §1.2, Fußnote, S. 171 oder in [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt D, Formel (*), S. 137 üblicherweise eine gegenüber der obigen korrekten Notation vereinfachte Symbolik verwendet wird. Dabei wird für jedes Element V einer Uniformität \mathcal{N} auf einer Menge X und jedes Element x aus X definiert:

$$V(x) := \{y \in X \mid (x, y) \in V\}.$$

Dadurch ist das Umgebungssystem eines Punktes x bezüglich der von der Uniformität induzierten Topologie durch

$$\mathcal{U}(x) := \{V(x) \mid V \in \mathcal{N}\}$$

gegeben. Um der typischen mathematischen Notation zu entsprechen, wird gelegentlich die vereinfachte Notation zum Einsatz kommen.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt A, Satz 11.5, S. 137.

Lemma A.1.11 *Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei \mathcal{B} ein zugehöriges Fundamentalsystem, dann ist für jeden Punkt $x \in X$ durch $\{V_N(x) \mid V \in \mathcal{B}\}$ eine Umgebungsbasis gegeben, wobei das Symbol V_N für jedes $N \in \mathcal{N}$ gemäß (A.3) verwendet werden möge.*

Beweis: Der Beweis ist offensichtlich. ■

Definition A.1.12

Ein uniformer Raum heißt **Hausdorffraum** oder **separiert**, **kompakt** oder **separabel**, wenn die induzierte Topologie die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Lemma A.1.13 *Ein uniformer Raum (X, \mathcal{N}) ist genau dann Hausdorffraum, wenn gilt:*

$$\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt A, Definition und Satz 11.10 (b), S. 140.

A.2 Gleichmäßige Stetigkeit und Isomorphismus

Zur Verwendung von Symbolen des Typs $(f_1 \times f_2)(V)$ und $(f_1 \times f_2)^{-1}(W)$ wird an die Formeln (A.1) und (A.2) erinnert. Damit kann man nun definieren:

Definition A.2.1

Seien (X_1, \mathcal{N}_1) und (X_2, \mathcal{N}_2) uniforme Räume, und bezeichne $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung, dann heißt f **gleichmäßig stetig**, wenn es zu jedem Element W aus \mathcal{N}_2 ein Element V in \mathcal{N}_1 so gibt, daß mit $(f \times f)(V)$ eine Teilmenge von W vorliegt.

Es gilt also unter den Voraussetzungen aus obiger Definition:

Lemma A.2.2 *f ist gleichmäßig stetig genau dann, wenn die Menge $(f \times f)^{-1}(\mathcal{N}_2)$ eine Teilmenge der Uniformität \mathcal{N}_1 ist.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt B, Def. 11.12, S. 141.

Es soll noch eine Abkürzung eingeführt werden für den Fall reellwertiger Funktionen.

Definition A.2.3

Sei (X_1, \mathcal{N}_1) ein uniformer Raum, und sei $f : X_1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für den Fall, daß f bezüglich \mathcal{N}_1 und der kanonischen Uniformität der reellen Zahlen gleichmäßig stetig ist, soll gesagt werden, f sei **bezüglich \mathcal{N}_1 gleichmäßig stetig**, oder noch kürzer, f sei **\mathcal{N}_1 -gleichmäßig stetig**.

Man kann sich auch auf Fundamentalsysteme der Uniformitäten beschränken:

Lemma A.2.4 *Sei (X_1, \mathcal{N}_1) ein uniformer Raum mit Fundamentalsystem \mathcal{B}_1 , sei (X_2, \mathcal{N}_2) ein uniformer Raum mit Fundamentalsystem \mathcal{B}_2 , und sei $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung. Dann gilt folgende Äquivalenzaussage:*

f besitzt die Eigenschaft der gleichmäßigen Stetigkeit bezüglich der Uniformitäten \mathcal{N}_1 und \mathcal{N}_2 genau dann, wenn es zu jedem Element B_2 aus \mathcal{B}_2 ein Element B_1 in \mathcal{B}_1 so gibt, daß $(f \times f)(B_1)$ eine Teilmenge von B_2 ist.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt B, Bemerkung nach Def. 11.12, S. 141.

Mit Lemma A.2.4 und Definition A.1.9 fällt der oben definierte Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit auf metrischen Räumen mit der herkömmlichen sogenannten $\varepsilon\delta$ -Definition der gleichmäßigen Stetigkeit zusammen. Außerdem gelten die folgenden Aussagen:

Lemma A.2.5

- (i) Die Hintereinanderausführung gleichmäßig stetiger Funktionen ist gleichmäßig stetig.
- (ii) Ist eine Abbildung zwischen uniformen Räumen gleichmäßig stetig, dann ist sie stetig bezüglich der von den Uniformitäten induzierten Topologien.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §2.1, Prop. 1 und 2, S. 175.

Um Aussagen über das Verhältnis verschiedener Uniformitäten auf derselben Menge formulieren zu können, wird der folgende Begriff eingeführt:

Definition A.2.6

Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ zwei Uniformitäten auf X , dann heißt \mathcal{N}_1 **feiner** als \mathcal{N}_2 und \mathcal{N}_2 **gröber** als \mathcal{N}_1 , wenn die Uniformität \mathcal{N}_1 die Uniformität \mathcal{N}_2 umfaßt.

Die eben formulierte „gröber-feiner“-Definition steht in Analogie zum analogen Begriff innerhalb der Theorie der topologischen Räume. Dort wird definiert:

Definition A.2.7

Sei eine X Menge, und seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ zwei Topologien auf X , dann heißt \mathcal{O}_1 **feiner** als \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_2 **gröber** als \mathcal{O}_1 , wenn die Topologie \mathcal{O}_1 die Topologie \mathcal{O}_2 umfaßt.

Über das Verhältnis der „gröber-feiner“-Relationen für uniforme und topologische Räume gibt das nächste Lemma Auskunft:

Lemma A.2.8 Sei X eine Menge, und seien $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$ zwei Uniformitäten auf X . \mathcal{N}_1 ist feiner als \mathcal{N}_2 genau dann, wenn die identische Abbildung von (X, \mathcal{N}_1) nach (X, \mathcal{N}_2) gleichmäßig stetig ist. Außerdem gilt: Ist \mathcal{N}_1 feiner als \mathcal{N}_2 , dann ist auch die von \mathcal{N}_1 induzierte Topologie \mathcal{O}_1 feiner als die von \mathcal{N}_2 induzierte Topologie \mathcal{O}_2 . In Symbolen heißt das: $\mathcal{N}_1 \supseteq \mathcal{N}_2 \implies \mathcal{O}_1 \supseteq \mathcal{O}_2$.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt C, Satz 11.17 (a), (b), S. 142.

Unmittelbar aus Lemma A.2.2 ergibt sich:

Lemma A.2.9 Sei f eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen zwei uniformen Räumen. f bleibt gleichmäßig stetig sowohl für den Fall, daß man im Urbildraum die vorhandene Uniformität durch eine feinere Uniformität ersetzt, als auch für den Fall, daß man im Bildraum die vorhandene Uniformität durch eine gröbere Uniformität ersetzt.

Zum Schluß des Abschnitts soll noch ein Begriff eingeführt werden, der die Strukturäquivalenz zweier uniformer Räume zum Ausdruck bringt:

Definition A.2.10

Zwei uniforme Räume (X_1, \mathcal{N}_1) und (X_2, \mathcal{N}_2) heißen **isomorph**, wenn es eine Bijektion $f : X_1 \rightarrow X_2$ so gibt, daß sowohl f als auch f^{-1} gleichmäßig stetig sind. f bezeichnet man dann als einen **(uniformen) Isomorphismus**.

Äquivalent zu der Definition A.2.10 ist auch die Aussage, daß es eine Bijektion so gibt, daß die Identität $(f \times f)(\mathcal{N}_1) = \mathcal{N}_2$ gilt. Folglich ordnet ein uniformer Isomorphismus nicht nur die Punkte der beteiligten uniformen Räume einander in bijektiver Weise zu, sondern auch die Nachbarschaften.

Mit einem Isomorphismus zweier uniformer Räume liegt auch ein Homöomorphismus zwischen den zugehörigen topologischen Räumen vor, also eine in beide Richtungen bezüglich der induzierten Topologien stetige Bijektion.

A.3 Initiale Uniformität und initiale Topologie

Im Zentrum des Abschnitts steht ein zentraler Satz, der eine Aussage darüber macht, wie man mit Hilfe von Abbildungsfamilien, die dieselbe Menge als Urbildmenge besitzen, eine uniforme Struktur auf der gemeinsamen Urbildmenge induzieren kann. Es wird im Vorfeld nochmals auf Formel (A.2) zur Verwendung von Symbolen des Typs $(f_1 \times f_2)^{-1}(W)$ hingewiesen.

Satz und Definition A.3.1 *Sei X eine Menge. Bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit. Für jedes $i \in I$ bezeichne $f_i : X \rightarrow Y_i$ eine Abbildung.*

(i) *Die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen der Menge*

$$S := \{(f_i \times f_i)^{-1}(V) \mid i \in I \text{ und } V \in \mathcal{N}_i\} \quad (\text{A.4})$$

*bildet das Fundamentalsystem einer uniformen Struktur auf X , die als **initiale uniforme Struktur auf X bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$** bezeichnet wird. Wird aus dem Kontext deutlich, welche Bildräume gemeint sind, spricht man auch abkürzend von der **initialen Uniformität** bezüglich $(f_i)_{i \in I}$. In der vorliegenden Arbeit wird häufig für die **initiale Uniformität** das Symbol $\sigma(X, I)$ verwendet.*

(ii) *Die initiale Uniformität ist die größte Uniformität, so daß alle Abbildungen f_i gleichmäßig stetig sind.*

- (iii) Bezeichnet (Z, \mathcal{N}_Z) einen uniformen Raum, und bezeichnet $h : Z \rightarrow X$ eine Abbildung, dann ist h genau dann gleichmäßig stetig bezüglich der initialen Uniformität auf X , wenn für alle $i \in I$ die Hintereinanderausführung $f_i \circ h$ gleichmäßig stetig ist.
- (iv) Bezeichnet \mathcal{O}_i für jedes $i \in I$ die durch \mathcal{N}_i auf Y_i induzierte Topologie, dann induziert die initiale Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ auf X die **initiale Topologie bezüglich $((Y_i, \mathcal{O}_i, f_i))_{i \in I}$** , also die größte Topologie, für die alle f_i mit $i \in I$ stetig sind.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt C, Satz 11.18, S. 143.

Es folgt unmittelbar:

Lemma A.3.2 Sei X eine Menge. Bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit, und bezeichne $f_i : X \rightarrow Y_i$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung. Bezeichne zudem J eine Teilmenge von I , dann ist auf X die initiale Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ feiner als die initiale Uniformität bezüglich $((Y_j, \mathcal{N}_j, f_j))_{j \in J}$.

Beweis:

Der Beweis folgt unmittelbar mit Punkt (i) von Satz A.3.1. Wenn man die gemäß (A.4) der Indexmenge I zukommende Menge mit S_I bezeichnet und wenn man entsprechend den Namen S_J verwendet, dann folgt unmittelbar $S_J \subseteq S_I$. Also kann die initiale Uniformität bezüglich I nur mehr Mengen enthalten als diejenige bezüglich J . Das heißt aber gerade, daß die I zugehörige Uniformität feiner ist als diejenige, die durch J gewonnen wird. ■

Der letzte Punkt von Satz A.3.1 stellt die Verknüpfung zur bekannten Struktur der initialen Topologie dar. Daher sei ein wichtiges Theorem aus der Theorie topologischer Räume genannt, das initiale Topologien, und damit auch initiale Uniformitäten, mit der Hausdorffeigenschaft in Beziehung setzt.

Satz A.3.3 Sei X eine Menge, und bezeichne $((Y_i, \mathcal{O}_i))_{i \in I}$ eine Familie topologischer Hausdorffräume mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit. Für jedes $i \in I$ sei $f_i : X \rightarrow Y_i$ eine Abbildung. Bezeichnet $\sigma(X, I)$ die initiale Topologie bezüglich $((Y_i, \mathcal{O}_i, f_i))_{i \in I}$, dann sind äquivalent

- (i) $(X, \sigma(X, I))$ besitzt die Hausdorffeigenschaft.

(ii) Bezeichnen x_1, x_2 zwei Elemente aus X , dann sind x_1 und x_2 genau dann identisch, wenn für alle $i \in I$ die Identität $f_i(x_1) = f_i(x_2)$ gilt.

Beweis: Siehe [Bou66a] Kapitel I, §8.3, Korollar 1, S. 78.

Bevor mit Hilfe des Satzes A.3.3 die wichtigen Konzepte des uniformen Unterraumes und des uniformen Produktraumes begründet werden, beachte man noch die folgende Transitivitätseigenschaft initialer Uniformitäten:

Lemma A.3.4 *Seien X, Y zwei Mengen, sei (Z, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Wenn \mathcal{N}' die initiale Uniformität auf Y bezüglich (Z, \mathcal{N}, g) bezeichnet, dann ergibt sich bezüglich $(Z, \mathcal{N}, g \circ f)$ auf X dieselbe initiale Uniformität wie bezüglich (Y, \mathcal{N}', f) .*

Beweis: Siehe Bemerkung in [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt C, nach Satz 11.18, S. 144.

Definition A.3.5

Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei A eine Teilmenge von X . Wird A mit der initialen Uniformität bezüglich der kanonischen Injektion versehen, dann erhält man einen uniformen Raum, der als **uniformer Unterraum** von (X, \mathcal{N}) bezeichnet wird. Die Uniformität des so gewonnenen Unterraumes bezeichnet man mit $\mathcal{N}|_A$.

Es sei angemerkt, daß man häufig auch nur vom Unterraum spricht. Das führt in der Regel nicht zu Problemen, da offensichtlich die von der Unterraumuniformität induzierte Topologie gerade die Unterraumtopologie liefert. Innerhalb dieses Anhangs soll aber stets die exakte Bezeichnung verwandt werden.

Da die Definition A.3.5 nicht immer handlich ist, erweist sich das folgende Lemma als nützlich:

Lemma A.3.6 *Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei A eine Teilmenge von X . Es gelten für die Unterraumuniformität die folgenden Identitäten:*

$$\mathcal{N}|_A = \{N \cap (A \times A) \mid N \in \mathcal{N}\} = \mathcal{N} \cap (A \times A).$$

Stellt \mathcal{B} ein Fundamentalsystem von \mathcal{N} dar, dann liefert $\mathcal{B} \cap (A \times A)$ ein Fundamentalsystem von $\mathcal{N}|_A$.

Beweis:

Die erste Aussage folgt einer Bemerkung im Anschluß an Definition 11.19 in [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt C, S. 145. Sie ergibt sich direkt aus der Definition

mit Hilfe von Satz A.3.1 (i). Sei zum Beweis der zweiten Aussage ein $N' \in \mathcal{N} \upharpoonright_A$ gewählt. Dann existiert ein $N \in \mathcal{N}$, so daß $N' = N \cap (A \times A)$ gilt. Ferner existiert ein $B \in \mathcal{B}$ mit $B \subseteq N$. Also liegt $B \cap (A \times A)$ in $\mathcal{B} \cap (A \times A) \subseteq \mathcal{N} \upharpoonright_A$, und es gilt $B \cap (A \times A) \subseteq N'$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Außerdem beachte man im Zusammenhang mit uniformen Unterräumen die folgenden Eigenschaften:

Lemma A.3.7

- (i) Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei A eine Teilmenge von X ausgestattet mit der Unterrraumuniformität $\mathcal{N} \upharpoonright_A$. Dann fällt die durch $\mathcal{N} \upharpoonright_A$ auf A induzierte Topologie mit der Unterrraumtopologie auf A bezüglich der durch \mathcal{N} auf X induzierten Topologie zusammen.
- (ii) Sind $(X_1, \mathcal{N}_1), (X_2, \mathcal{N}_2)$ uniforme Räume, ist A eine Teilmenge von X ausgestattet mit der Unterrraumuniformität, und ist $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine gleichmäßig stetige Abbildung, dann ist die Restriktion $f \upharpoonright_A$ eine gleichmäßig stetige Abbildung von A nach X' .

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §2.4, Bemerkung hinter Def. 3, S. 178.

Schließlich wird noch ein Lemma im Zusammenhang mit dem Isomorphismus-Begriff aus Definition A.2.10 formuliert:

Lemma A.3.8 Bezeichne $f : X \rightarrow Y$ einen Isomorphismus zwischen den zwei uniformen Räumen (X, \mathcal{N}_1) und (Y, \mathcal{N}_2) , und sei A eine Teilmenge von X , dann ist auch die Abbildung $g : A \rightarrow f(A)$, $x \mapsto g(x) := f(x)$ ein Isomorphismus zwischen den uniformen Unterräumen A und $f(A)$.

Beweis:

Offensichtlich ist auch g eine Bijektion. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} (f \times f)(\mathcal{N}_1 \upharpoonright_A) &= (f \times f)(\mathcal{N}_1 \cap A \times A) = (f \times f)(\mathcal{N}_1) \cap f(A) \times f(A) \\ &= \mathcal{N}_2 \cap f(A) \times f(A) = \mathcal{N}_2 \upharpoonright_{f(A)}. \end{aligned}$$

■

Neben den Unterräumen gibt es noch eine weitere kanonische Methode, uniforme Räume aus vorgegebenen uniformen Räumen zu gewinnen.

Definition A.3.9

Bezeichne $((X_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume für eine Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit. Dann nennt man das kartesische Produkt $\prod X_i$ ausgestattet mit der initialen Uniformität bezüglich der Projektionsabbildungen auf die Komponenten den **uniformen Produktraum**. Die dem uniformen Produktraum zugehörige Uniformität wird als **Produkt der Uniformitäten** \mathcal{N}_i bezeichnet.

Mit Definition A.3.9 ergibt sich sofort, daß die Produktuniformität die größte Uniformität auf dem kartesischen Produkt ist, für die alle Projektionsabbildungen gleichmäßig stetig sind. Dabei muß der folgende Satz berücksichtigt werden:

Satz A.3.10 *Seien $(X_i)_{i \in I}$ und $(Y_i)_{i \in I}$ Familien uniformer Räume mit derselben Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit. Für jedes $i \in I$ sei $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ eine Abbildung. Die Vorschrift*

$$f : \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i, \quad (x_i)_{i \in I} \mapsto (f(x_i))_{i \in I}$$

*definiert die sogenannte **Produktabbildung**. Es gilt:*

f ist bezüglich der Produktuniformitäten genau dann gleichmäßig stetig, wenn für jedes $i \in I$ die Abbildung f_i gleichmäßig stetig ist.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt C, Satz 11.21, S. 145.

Der Satz über die initiale Uniformität erlaubt die wichtige Aussage, daß es zu jeder Familie von Uniformitäten auf einer Menge ein Supremum gibt. Man kann aber auch die Existenz des Infimums beweisen, so daß gilt:

Satz A.3.11 *Die Menge aller Uniformitäten auf einer nicht-leeren Menge bildet einen vollständigen Verband bezüglich der Mengeninklusion, also der feiner-größer-Relation, als Halbordnung.*

Bemerkung: Zur Definition des Verbandsbegriffes siehe Definition F.6 in Anhang F.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt C, Satz 11.17 (c), S. 142.

A.4 Hausdorff-Vervollständigung

Um den Begriff der Vollständigkeit uniformer Räume einzuführen, bedarf es der geeigneten Erweiterung des Cauchy-Folgen-Konzeptes, das man in metrischen Räumen zur Definition der Vollständigkeit verwendet. Dafür wird zunächst erläutert, was mit einem Cauchy-Filter bezeichnet wird:

Definition A.4.1

Ein Filter \mathfrak{F} im Sinne der Definition A.1.6 auf einem uniformen Raum (X, \mathcal{N}) heißt **Cauchy-Filter**, wenn es zu jeder Nachbarschaft N aus \mathcal{N} ein Filterelement F in \mathfrak{F} so gibt, daß $F \times F$ Teilmenge von N ist. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ heißt **Cauchy-Folge**, wenn es zu jeder Nachbarschaft N aus \mathcal{N} eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, daß $(x_n, x_m) \in N$ für alle $n, m \geq n_0$ gilt.

Um einen Zusammenhang zwischen dem Cauchy-Folgen-Konzept und dem Cauchy-Filter-Konzept herzustellen, trifft man die folgende Abmachung:

Definition A.4.2

Bezeichnet $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum (X, \mathcal{O}) , dann liefert das System $\mathcal{B} := \{B_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ mit $B_k := \{x_n \mid n \geq k\}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Filterbasis für einen Filter auf X . Der so gewonnene Filter wird als der **von der Folge erzeugte** oder als der **der Folge zugehörige** Filter bezeichnet. Häufig wird er durch $\mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ symbolisiert.

Damit kann man nun zeigen, daß ein von einer Folge erzeugter Filter -genau dann ein Cauchy-Filter ist, wenn die Folge eine Cauchy-Folge ist. Ebenso bemerke man, daß auf einem metrischen Raum die bekannte Definition von Cauchy-Folgen äquivalent zu der obigen Definition ist.

Für den Begriff des Cauchy-Filters gelten zu den Cauchy-Folgen in metrischen Räumen analoge Eigenschaften:

Lemma A.4.3

- (i) *In einem uniformen Raum ist jeder konvergente Filter ein Cauchy-Filter. Im allgemeinen gilt die Umkehrung nicht.*
- (ii) *Ist $f : X \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen uniformen Räumen, und ist \mathfrak{F} ein Cauchy-Filter in X , dann ist der Bildfilter $f(\mathfrak{F})$ ein Cauchy-Filter in Y .*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 12, Abschnitt A, Satz 12.4 und 12.6, S. 154.

Außerdem gilt die folgende Aussage:

Satz A.4.4 *Sei X eine Menge, und sei für eine Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume. Sei ferner für jedes $i \in I$ durch $f_i : X \rightarrow Y_i$ eine Abbildung gegeben. Stattet man X mit der initialen Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ aus, dann ist ein Filter \mathfrak{F} auf X genau dann ein Cauchy-Filter, wenn $f_i(\mathfrak{F})$ für jedes $i \in I$ ein Cauchy-Filter ist.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 12, Abschnitt A, Satz 12.12, S. 156.

Nun kann auf uniformen Räumen ein Vollständigkeitsbegriff definiert werden, der im Falle metrischer Räume mit dem bekannten Vollständigkeitsbegriff zusammenfällt:

Definition A.4.5

Ein uniformer Raum (X, \mathcal{N}) heißt **vollständig**, wenn jeder Cauchy-Filter konvergiert.

Als Eigenschaften vollständiger uniformer Räume seien notiert:

Satz A.4.6 (i) *Jeder abgeschlossene uniforme Unterraum eines vollständigen uniformen Raumes ist vollständig.*

(ii) *In uniformen Hausdorffräumen ist jeder vollständige uniforme Unterraum abgeschlossen.*

(iii) *Der uniforme Produktraum vollständiger uniformer Räume ist vollständig.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 12, Abschnitt A, Korollar 12.13, S. 156.

Der Vollständigkeitsbegriff eignet sich auch, um die Existenz bestimmter gleichmäßig stetiger Fortsetzungen zu garantieren. Die Eindeutigkeit folgt schon auf topologischem Niveau für stetige Abbildungen.

Satz A.4.7 *Sei X uniformer Raum, und sei A eine dichte Teilmenge in X ausgestattet mit der Unterraumuniformität. Sei weiter mit einem vollständigen uniformen Hausdorffraum Y eine gleichmäßig stetige Abbildung $f : A \rightarrow Y$ gegeben. Dann kann man f auf eindeutige Weise gleichmäßig stetig auf ganz X fortsetzen.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 12, Abschnitt A, Korollar 12.14, S. 157.

Zur Formulierung des wichtigen Satzes über die sogenannte Hausdorff-Vervollständigung uniformer Räume sei erwähnt, daß man unter **minimalen Cauchy-Filtern** naheliegenderweise die bezüglich der Mengeninklusion minimalen Elemente der Menge aller Cauchy-Filter auf einem uniformen Raum versteht.

Satz und Definition A.4.8 *Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei für jedes $x \in X$ mit $\mathcal{U}(x)$ das zugehörige Umgebungssystem von x bezeichnet. Dann sind durch*

$$\hat{X} := \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \text{ ist minimaler Cauchy-Filter von } X\}$$

$$i : X \rightarrow \hat{X}, x \mapsto \mathcal{U}(x)$$

ein vollständiger uniformer Hausdorffraum und eine gleichmäßig stetige Abbildung so gegeben, daß gilt:

(P) Sei Y ein vollständiger uniformer Hausdorffraum, und sei $f : X \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung, dann gibt es eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Abbildung $g : \hat{X} \rightarrow Y$, so daß $f = g \circ i$ gilt.

Gibt es noch ein anderes Paar (\hat{X}_1, i_1) bestehend aus einem vollständigen uniformen Hausdorffraum \hat{X}_1 und einer gleichmäßig stetigen Abbildung $i_1 : X \rightarrow \hat{X}_1$, das die Eigenschaft (P) besitzt, dann existiert ein eindeutig bestimmter uniformer Isomorphismus

$$\varphi : \hat{X} \rightarrow \hat{X}_1,$$

so daß die Identität $i_1 = \varphi \circ i$ gilt. Den obigen vollständigen uniformen Hausdorffraum \hat{X} bezeichnet man als **Hausdorff-Vervollständigung von X** , während man i die **kanonische Abbildung** von X in seine Hausdorff-Vervollständigung nennt. Die Uniformität der Hausdorff-Vervollständigung \hat{X} von (X, \mathcal{N}) wird mit $\hat{\mathcal{N}}$ symbolisiert.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.7, Theorem 3, S. 191.

Zunächst werden die folgenden Tatsachen notiert, wobei die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus obigem Satz gelten mögen:

Satz A.4.9 (i) $i(X)$ liegt bezüglich $\hat{\mathcal{N}}$ dicht in \hat{X} .

$$(ii) \mathcal{N} = (i \times i)^{-1}(\hat{\mathcal{N}}) = (i \times i)^{-1}(\hat{\mathcal{N}}|_{i(X)}).$$

$$(iii) (i \times i)(\mathcal{N}) = \hat{\mathcal{N}}|_{i(X)}.$$

(iv) Durch die Abschlüsse der Nachbarschaften von $i(X)$ in $\hat{X} \times \hat{X}$ ist ein Fundamentalsystem von $\hat{\mathcal{N}}$ gegeben.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.7, Prop. 12, S. 194.

Mit Punkt (iii) des obigen Satzes A.4.9 und mit der Definition A.3.1 der initialen Uniformität sieht man sofort, daß die Uniformität auf X gerade mit der initialen Uniformität bezüglich $(\hat{X}, \hat{\mathcal{N}}, i)$ zusammenfällt. Besonders interessant gestaltet sich die Situation im Falle uniformer Hausdorffräume und ihrer Hausdorff-Vervollständigungen:

Lemma A.4.10 *Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Hausdorffraum, dann ist die kanonische Abbildung i in die Hausdorff-Vervollständigung \hat{X} ein uniformer Isomorphismus von (X, \mathcal{N}) auf einen dichten Unterraum des uniformen Raumes \hat{X} .*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.7, Korollar, S. 194.

Lemma A.4.10 legt es nahe, im Falle von Hausdorffräumen den Ausgangs-Hausdorffraum mit dem dichten Unterraum der Vervollständigung mittels i zu identifizieren. Eine solche Identifikation wird in der Regel vorgenommen. Dabei wird zumeist auch nur noch von der **Vervollständigung** gesprochen. Es bleibt, zu erwähnen:

Lemma A.4.11 *Sei Y ein vollständiger uniformer Hausdorffraum, und sei X ein dichter uniformer Unterraum von Y , dann dehnt sich die kanonische Injektion $X \rightarrow Y$ zu einem uniformen Isomorphismus von \hat{X} auf Y aus.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.7, Prop. 13, S. 195.

Das heißt also, daß die Vervollständigung \hat{X} eines dichten uniformen Unterraumes X eines vollständigen uniformen Hausdorffraumes Y isomorph zu Y ist.

Im Zusammenhang mit den Hausdorff-Vervollständigungen stellt sich natürlicherweise die Frage nach gleichmäßig stetigen Fortsetzungen. Dazu notiere man:

Satz A.4.12 *Seien X, Y zwei uniforme Räume, seien \hat{X}, \hat{Y} die zugehörigen Hausdorff-Vervollständigungen, und seien i_X, i_Y die kanonischen Abbildungen. Sei ferner $f : X \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Dann existiert genau eine gleichmäßig stetige Abbildung $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, so daß $i_Y \circ f = \hat{f} \circ i_X$ gilt.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.7, Prop. 15, S. 195.

Satz A.4.12 erlaubt eine interessante Verknüpfung zwischen initialen Uniformitäten und Hausdorff-Vervollständigungen:

Satz A.4.13 *Sei X eine Menge, und bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit. Ferner sei für jedes $i \in I$ eine Abbildung $f_i : X \rightarrow Y_i$ gegeben. Bezeichne \mathcal{N} die initiale Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$, und sei X mit \mathcal{N} ausgestattet. Dann ist die Uniformität der Hausdorff-Vervollständigung $\hat{\mathcal{N}}$ der initialen Uniformität \mathcal{N} gerade die initiale Uniformität auf \hat{X} bezüglich $((\hat{Y}_i, \hat{\mathcal{N}}_i, \hat{f}_i))_{i \in I}$. Dabei soll \hat{f}_i für jedes $i \in I$ die nach obigem Satz A.4.12 eindeutig bestimmte Fortsetzung von f_i bezeichnen.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.9, Prop. 18, S. 197.

Ebenso natürlich stellt sich die Frage nach dem Verhältnis der Hausdorff-Vervollständigungen zu uniformen Unter- und Produkträumen. Diesbezüglich gilt:

Satz A.4.14 *Sei X ein uniformer Raum, und sei i die kanonische Abbildung von X in die Hausdorff-Vervollständigung \hat{X} . Bezeichne A einen uniformen Unterraum von X , und bezeichne $j : A \rightarrow X$ die kanonische Injektion, dann vermittelt die gemäß Satz A.4.12 eindeutig bestimmte Fortsetzung $\hat{j} : \hat{A} \rightarrow \hat{X}$ einen Isomorphismus von der Hausdorff-Vervollständigung \hat{A} von A auf den uniformen Unterraum $i(A)$ von \hat{X} .*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.9, Korollar 1, S. 198.

Also kann man die Hausdorff-Vervollständigung eines uniformen Unterraumes mit einem uniformen Unterraum der Hausdorff-Vervollständigung des Gesamtraumes identifizieren.

Satz A.4.15 *Bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit, dann ist die Hausdorff-Vervollständigung des Produktraumes $\widehat{\prod_{i \in I} Y_i}$ isomorph zum Produktraum der Hausdorff-Vervollständigungen $\prod_{i \in I} \hat{Y}_i$.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.9, Korollar 2, S. 198.

Abschließend sei noch ein günstiges Kriterium für die Identität von Uniformitäten genannt:

Satz A.4.16 *Sei (X, \mathcal{N}) vollständiger uniformer Hausdorffraum, und Z sei dichter uniformer Unterraum. Sei \mathcal{N}' eine weitere Uniformität auf X , dann sind äquivalent:*

- (i) \mathcal{N} fällt mit \mathcal{N}' zusammen.
- (ii) Es gelten die beiden Aussagen:
 - (a) \mathcal{N}' ist gröber als \mathcal{N} , das heißt: $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$,
 - (b) \mathcal{N}' induziert auf Z dieselbe Uniformität, das heißt: $\mathcal{N}'|_Z = \mathcal{N}|_Z$.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §3.7, Prop. 14, S. 195.

A.5 Metrisierbarkeit

In Abschnitt A.1 wurde gesagt, wie man von einer Metrik in kanonischer Weise zur ihr zugeordneten Uniformität gelangt. Umgekehrt stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine solche Metrik gefunden werden kann. Dazu soll zunächst ein geeigneter Begriff eingeführt werden:

Definition A.5.1

Eine Metrik auf einer Menge X heißt **kompatibel** mit einer Uniformität \mathcal{N} auf X , wenn die von der Metrik induzierte Uniformität mit \mathcal{N} übereinstimmt. Eine Uniformität auf einer Menge X heißt **metrisierbar**, wenn es eine mit der Uniformität kompatible Metrik auf X gibt. Einen uniformen Raum nennt man **metrisierbar**, wenn die Uniformität metrisierbar ist.

Man bemerke allerdings, daß dieselbe Uniformität von verschiedenen Metriken induziert werden kann. Man spricht dann von **äquivalenten Metriken**. Ein metrischer Raum ist aber im allgemeinen struktureicher als ein uniformer Raum.

Offensichtlich ist die von einer metrisierbaren Uniformität induzierte Topologie ebenfalls metrisierbar.

Im Falle der Metrisierbarkeit uniformer Räume wird das folgende wichtige Theorem genannt:

Satz A.5.2 *Ein uniformer Raum ist genau dann metrisierbar, wenn er zum einen ein Hausdorffraum ist und wenn er zum anderen ein abzählbares Fundamentalsystem besitzt.*

Beweis: Siehe [Bou66b], Kapitel IX, §2.4, Theorem 1, S. 152.

Damit folgt unmittelbar aus Lemma A.1.11 über die Umgebungsbasis von Punkten eines uniformen Raumes das folgende Lemma, das man als Proposition 6 in [Bou66b], Kapitel IX, §2.6, S. 153 findet.

Lemma A.5.3 *Jeder Punkt eines metrisierbaren uniformen Raumes besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis.*

Außerdem erlaubt der obige Satz sofort die Behauptung:

Lemma A.5.4 *Jeder Unterraum eines metrisierbaren uniformen Raumes ist metrisierbar.*

Beweis:

Sei (X, \mathcal{N}) metrisierbarer uniformer Raum, und sei $(A, \mathcal{N}|_A)$ der betrachtete Unterraum. Satz A.5.2 liefert zunächst die Hausdorffeigenschaft von \mathcal{N} , woraus sich mit [vQ01], Kapitel 6, Abschnitt B, Satz 6.11, S. 88 auch die Hausdorffeigenschaft für die Unterraumuniformität $\mathcal{N}|_A$ ergibt. Im weiteren garantiert Satz A.5.2 die Existenz eines abzählbaren Fundamentalsystems für \mathcal{N} . Also ist mit Lemma A.3.6 auch für die Unterraumuniformität ein abzählbares Fundamentalsystem gegeben, woraus man zusammen mit der Hausdorffeigenschaft und wiederum mit Satz A.5.2 auch für den Unterraum die Metrisierbarkeit ableiten kann. ■

Satz A.5.5 *Der uniforme Produktraum abzählbar vieler metrisierbarer uniformer Räume ist metrisierbar.*

Beweis: Siehe [Bou66b], Kapitel IX, §2.4, Korollar 2, S. 152.

Der Metrisierbarkeitsbegriff wird auch für topologische Räume geprägt. Ein topologischer Raum wird dabei metrisierbar genannt, wenn es eine Metrik gibt, die die Topologie des topologischen Raumes induziert. Also zieht die Metrisierbarkeit eines uniformen Raumes offenbar die Metrisierbarkeit des zugehörigen topologischen Raumes nach sich. Metrisierbare uniforme Räume sind folglich insbesondere metrisierbare topologische Räume. Es sei dafür der nachfolgende wichtige Satz aus der Theorie metrisierbarer topologischer Räume wiederholt.

Satz A.5.6 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Sei (X, \mathcal{O}) ein metrisierbarer topologischer Raum, sei ferner A eine nicht-leere Teilmenge von X , und sei x ein Element aus X . Dann sind äquivalent:*
 - (a) *x liegt im Abschluß \bar{A} von A .*
 - (b) *Es existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$, die bezüglich \mathcal{O} gegen x konvergiert.*
- (ii) *Sei (X_1, \mathcal{O}_1) ein metrisierbarer topologischer Raum, sei (X_2, \mathcal{O}_2) ein topologischer Raum, sei $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung, und sei x ein Element aus X_1 . Dann sind äquivalent:*
 - (a) *f ist stetig in x .*
 - (b) *Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X_1 , die bezüglich \mathcal{O}_1 gegen x konvergiert, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich \mathcal{O}_2 gegen $f(x)$.*

Beweis: Siehe [Bou66b], Kapitel IX, §2.6, Prop. 8 und 10, S. 154.

Während, wie oben erläutert, die Metrisierbarkeit einer uniformen Struktur die Metrisierbarkeit ihrer Topologie nach sich zieht, gilt der umgekehrte Fall im allgemeinen nicht. Das heißt, es gibt Fälle, in denen die Topologie eines nicht metrisierbaren uniformen Raumes metrisierbar ist. Man siehe etwa Beispiel 11.28 in [vQ01], Kapitel 11, Abschnitt D, S. 149.

Abschließend werden bezüglich der Metrisierbarkeit noch die folgenden Aussagen aus der Theorie topologischer Räume erwähnt:

Satz A.5.7 *Sei X ein metrisierbarer topologischer Raum, dann sind äquivalent:*

- (i) X ist separabel.
- (ii) Die Topologie von X hat eine abzählbare Basis. Das heißt, X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Beweis: Siehe [Bou66b], Kapitel IX, §2.8, Def. 4 und Prop. 12, S. 156.

Insbesondere folgt damit sofort:

Lemma A.5.8 *Jeder topologische Unterraum eines metrisierbaren topologischen Raumes ist metrisierbarer topologischer Raum. Ist der topologische Raum auch separabel, dann ist auch der Unterraum separabel.*

Beweis:

Mit [Dug66], Kapitel IX, Theorem 5.1, folgt, daß ein topologischer Unterraum eines metrisierbaren, separablen topologischen Raumes mit dem vom metrischen Unterraum induzierten topologischen Raum zusammenfällt. Also ist der topologische Unterraum insbesondere auch metrisierbar. Die Separabilität liefert mit obigem Satz A.5.7, daß die Topologie eine abzählbare Basis hat. Damit hat aber auch sofort der topologische Unterraum eine abzählbare Basis. Somit folgt wiederum mit obigem Satz A.5.7 auch die Eigenschaft der Separabilität. ■

A.6 Kompaktheit

Wie in Definition A.1.12 vereinbart, soll ein uniformer Raum kompakt heißen, wenn die zugehörige Topologie kompakt ist, so daß man eigentlich wieder ein rein topologisches Problem vorliegen hat. Man kann aber im Falle uniformer Räume mit

der Präkompaktheit ein weiteres Kompaktheitskonzept definieren, das hier ebenfalls eingeführt werden soll. Zudem soll der Zusammenhang der Präkompaktheit zur herkömmlichen Kompaktheit dargestellt werden. Da in der Literatur häufig verschiedene Definitionen der Kompaktheit, mit oder ohne Hausdorffeigenschaft, aufgeführt werden, werden zur Verdeutlichung des hier verwandten Sprachgebrauchs zuvor noch die zentralen Begriffe aus der Theorie der topologischen Räume angegeben.

Definition A.6.1

- (i) Ein topologischer Raum heißt **quasi-kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Überdeckung von X enthält.
- (ii) Ein topologischer Raum heißt **kompakt**, wenn er quasi-kompakter Hausdorffraum ist.
- (iii) Ein Hausdorffraum X heißt **abzählbar kompakt**, wenn jede abzählbare offene Überdeckung von X eine endliche Überdeckung von X enthält.
- (iv) Ein Hausdorffraum X wird **folgenkompakt** genannt, wenn jede Folge von Punkten aus X eine konvergente Teilfolge enthält.
- (v) Ein Hausdorffraum X heißt **lokalkompakt**, wenn jeder Punkt aus X eine quasi-kompakte Umgebung besitzt.

Nach [vQ01], Kapitel 8, Abschnitt A, Satz 8.4, S. 106 kann man sich zum Beweis der Quasi-Kompaktheit für einen topologischen Raum auf eine Subbasis der Topologie beschränken.

Die Quasi-Kompaktheit stellt eine intrinsische Eigenschaft dar im Gegensatz etwa zur Abgeschlossenheit einer Menge, die nur in Relation zu einer Obermenge mit Topologie formuliert werden kann. Offensichtlich folgt aus der Kompaktheit die abzählbare Kompaktheit eines Hausdorffraumes. Für die hier vorliegende Arbeit bedarf es des folgenden Quasi-Kompaktheitskriteriums:

Lemma A.6.2 *Ein topologischer Raum (X, \mathcal{O}) ist genau dann quasi-kompakt, wenn jedes Netz in (X, \mathcal{O}) ein konvergentes Teilnetz besitzt.*

Beweis: Siehe [Wer97], Theorem B.2.9, S. 439.

Dabei wird unter einem Teilnetz verstanden:

Definition A.6.3

Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X , sei J eine aufwärts gerichtete Menge, und sei $\varphi : J \rightarrow I$ eine Abbildung, so daß gilt:

$$\forall i \in I \exists j_0 \in J \forall j \geq j_0 : \varphi(j) \geq i.$$

Dann heißt $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ ein **Teilnetz** von $(x_i)_{i \in I}$.

Es muß hier davor gewarnt werden, das Lemma A.6.2 dahingehend mißzuverstehen, daß bei einem kompakten topologischen Raum auch jede Folge eine konvergente Teilfolge hat. Es ist dabei zu bedenken, daß sich das Konzept der Teilfolge eben nicht in trivialer Weise mit dem Konzept des Teilnetzes deckt, denn Wiederholungen sind beim Teilnetz durchaus erlaubt. Stattdessen kann man aber die für die Zusammenhänge der vorliegenden Arbeit relevante Aussage formulieren:

Satz A.6.4 *Besitzt in einem Hausdorffraum X jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis, so ist X folgenkompakt genau dann, wenn X abzählbar kompakt ist.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 8, Abschnitt C, Satz 8.27, S. 113

Damit gelangt man zu folgendem Lemma:

Lemma A.6.5 *Sei X metrisierbarer kompakter uniformer Raum, dann ist X auch folgenkompakt.*

Beweis:

Die Metrisierbarkeit von X liefert mit Lemma A.5.3 die Existenz abzählbarer Umgebungsbasen aller Punkte des Raumes, und die Kompaktheit impliziert die abzählbare Kompaktheit. Somit ergibt sich mit Satz A.6.4 die Behauptung. ■

Nun werden noch einige bekannte Eigenschaften im Zusammenhang mit (quasi-) kompakten topologischen Räumen aufgezählt:

Satz A.6.6 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Jeder abgeschlossene Unterraum eines quasi-kompakten topologischen Raumes ist quasi-kompakt.*
- (ii) *Jeder kompakte Unterraum eines Hausdorffraumes (X, \mathcal{O}) ist abgeschlossen in (X, \mathcal{O}) .*

- (iii) In kompakten topologischen Räumen ist die Kompaktheit von Unterräumen äquivalent zu ihrer Abgeschlossenheit.
- (iv) Die Vereinigung endlich vieler quasi-kompakter Unterräume eines topologischen Raumes ist ein quasi-kompakter topologischer Unterraum.

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 8, Abschnitt A, Satz 8.6, S. 107 und [Bou66a], Kapitel I, §9.3, Prop. 5, S. 86.

In bezug auf stetige Abbildungen gilt das Folgende:

Satz A.6.7 Seien (X_1, \mathcal{O}_1) und (X_2, \mathcal{O}_2) topologische Räume, und sei $f : X_1 \rightarrow X_2$ eine Abbildung. Ist (X_1, \mathcal{O}_1) quasi-kompakt, und ist f stetig, dann ist auch $f(X_1)$ quasikompakt.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel I, §9.4, Theorem 2, S. 87.

Ein interessante Konsequenz von Satz A.6.7 bringt der nächste Satz zum Ausdruck.

Satz A.6.8 Bezeichnet f eine bijektive Abbildung aus einem quasi-kompakten Raum in einen Hausdorffraum, dann ist f ein Homöomorphismus.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel I, §9.4, Korollar 2, S. 87.

Im weiteren läßt sich noch das folgende wichtige Theorem beweisen:

Satz A.6.9 Sei (X, \mathcal{O}) ein quasi-kompakter topologischer Raum. Ist \mathcal{O}_1 eine Hausdorff-Topologie auf X , die gröber als \mathcal{O} ist, dann folgt die Identität von \mathcal{O} und \mathcal{O}_1 .

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel I, §9.4, Korollar 3, S. 88.

Ein interessantes Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit im Zusammenhang mit der Kompaktheit des Urbildraumes liefert der folgende Satz:

Satz A.6.10 Jede stetige Abbildung f von einem kompakten Raum X in einen uniformen Raum Y ist auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §4.1, Theorem 2, S. 201.

Es gelten noch die beiden folgenden berühmten Sätze:

Satz A.6.11 (Satz von Tychonoff) Jedes Produkt von quasi-kompakten (kompakten) topologischen Räumen ist ein quasi-kompakter (kompakter) topologischer Raum. Umgekehrt folgt aus der Quasi-Kompaktheit (Kompaktheit) eines Produktraumes von nicht-leeren Faktoren die Quasi-Kompaktheit (Kompaktheit) aller Faktoren.

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel I, §9.5, Theorem 3, S. 88.

Satz A.6.12 (Satz von Heine-Borel) *Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 8, Abschnitt A, Satz 8.13, S. 109.

Nach der kurzen Zusammenfassung für topologische Räume sollen nun die Aussagen bei Betrachtung uniformer Räume angegeben werden. Zunächst wird notiert:

Satz A.6.13 *Bezeichnet X einen kompakten Raum, dann gibt es genau eine Uniformität auf X , die die Topologie auf X induziert. Sie ist gegeben durch die Menge aller Umgebungen der Diagonalen $\{(x, x) \mid x \in X\}$ in $X \times X$, also diejenigen Teilmengen von X , die eine offene Menge umfassen, die ihrerseits A enthält.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §4.1, Theorem 1, S. 199.

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts erwähnt wurde, kann man auf uniformen Räumen ein weiteres Konzept im Zusammenhang mit Kompaktheit einführen.

Definition A.6.14

Ein uniformer Raum (X, \mathcal{N}) heißt **präkompakt**, wenn es zu jeder Nachbarschaft $V \in \mathcal{N}$ eine endliche Überdeckung von X mit Teilmengen C von X gibt, für die die Mengeninklusion $C \times C \subseteq V$ gilt. Eine Teilmenge A von X heißt **präkompakt**, wenn sie als uniformer Unterraum präkompakt ist.

Die Definition A.6.14 führt für metrische Räume auf den bekannten Begriff der **Totalbeschränktheit**. Er bedeutet dort die Möglichkeit, für jedes echt positive ε den metrischen Raum mit endlich vielen Mengen des Durchmesser kleiner als ε überdecken zu können.

Der folgende Satz stellt eine wichtige Verknüpfung zwischen der Präkompaktheit eines uniformen Raumes und der Kompaktheit seiner Hausdorff-Vervollständigung her:

Satz A.6.15 *Ein uniformer Raum ist präkompakt genau dann, wenn seine Hausdorff-Vervollständigung kompakt ist.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §4.2, Def. 2 und Theorem 3, S. 201.

Es gilt die folgende äquivalente Formulierung der Präkompaktheit, wie sie G. Ludwig in [Lud90b], Kapitel 8, Abschnitt 8.2, S. 98 präsentiert. Der hier wiedergegebene Beweis folgt Ausführungen in [Ott00]:

Lemma A.6.16 *Ein uniformer Raum (X, \mathcal{N}) ist präkompakt genau dann, wenn es zu jeder Nachbarschaft V aus \mathcal{N} eine endliche Familie $(x_i)_{i=1}^n$ von Elementen aus X so gibt, daß man zu jedem Element x aus X ein Mitglied x_k der Familie $(x_i)_{i=1}^n$ mit $(x, x_k) \in V$ finden kann.*

Beweis:

Es soll gezeigt werden, daß die Präkompaktheit äquivalent ist zu der Aussage

$$\forall V \in \mathcal{N} \exists (x_i)_{i=1}^n \subseteq X \forall x \in X \exists k \in \{1, \dots, n\} : (x, x_k) \in V. \quad (\text{A.5})$$

Bedingung (A.5) folgt sofort aus der Präkompaktheit, denn die Präkompaktheit garantiert für jedes $V \in \mathcal{N}$ die Existenz eines endlichen Satzes von Teilmengen $(C_i)_{i=1}^n$ von X derart, daß einerseits $C_i \times C_i \subseteq V$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt und daß andererseits die Vereinigung der C_i ganz X ergibt. Zum Beweis der Aussage (A.5) wähle man für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $x_i \in C_i$, dann ist eine Familie von Elementen aus X mit den gesuchten Eigenschaften gewonnen.

Für die andere Richtung sei ein $V \in \mathcal{N}$ gewählt, dann existiert gemäß Definition A.1.5 Punkt (v) ein $S \in \mathcal{N}$ mit $S^2 \subseteq V$. Sei mit $(x_i)_{i=1}^n$ die Familie mit der Eigenschaft entsprechend (A.5) für die Nachbarschaft S bezeichnet, und sei für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ definiert:

$$T(x_i) := \{\bar{x} \in X \mid (\bar{x}, x_i) \in S\}.$$

Dann gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ bei Verwendung der Tatsache, daß gemäß Punkt (iv) der Definition A.1.5 mit S auch S^{-1} zu \mathcal{N} gehört

$$\begin{aligned} T(x_i) \times T(x_i) &= \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X \mid (\bar{x}_1, x_i) \in S \text{ und } (\bar{x}_2, x_i) \in S\} \\ &= \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in X \times X \mid (\bar{x}_1, x_i) \in S \text{ und } (x_i, \bar{x}_2) \in S\} \\ &\subseteq S^2 \subseteq V. \end{aligned}$$

Aber die Familie $(T(x_i))_{i=1}^n$ überdeckt auch X , denn für jedes $x \in X$ existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $(x, x_k) \in S$. ■

Für Hausdorffräume gilt eine wichtige Beziehung zwischen Präkompaktheit, Kompaktheit und Vollständigkeit:

Satz A.6.17 *Sei (X, \mathcal{N}) uniformer Hausdorffraum. X ist kompakt genau dann, wenn X präkompakt und vollständig ist.*

Beweis: Siehe [vQ01], Kapitel 13, Abschnitt A, Korollar 13.3, S. 168.

Weiter beachte man:

Lemma A.6.18 *In einem uniformen Raum ist jede Teilmenge einer präkompakten Menge präkompakt. Die Vereinigung endlich vieler präkompakter Mengen ist präkompakt, und der Abschluß einer präkompakten Teilmenge ist präkompakt.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §4.2, Prop. 1, S. 202.

Während für die Kompaktheit von Bildern kompakter Urbildern Stetigkeit notwendig ist, gilt für die Präkompaktheit:

Satz A.6.19 *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung zwischen uniformen Räumen. Dann ist das Bild $f(A)$ eines präkompakten Unterraumes A von X präkompakt.*

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §4.2, Prop. 2, S. 203.

Da in der vorliegenden Arbeit die initialen Uniformitäten eine wichtige Rolle spielen, notiere man noch die folgende Aussage:

Satz A.6.20 *Sei X eine Menge. Bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit. Bezeichne ferner $f_i : X \rightarrow Y_i$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung, und sei X mit der initialen Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ ausgestattet. Dann sind für jeden uniformen Unterraum A von X die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) A ist präkompakt.
- (ii) Für jedes i aus I ist $f_i(A)$ präkompakter Unterraum von Y_i .

Beweis: Siehe [Bou66a], Kapitel II, §4.2, Prop. 3, S. 203.

Anhang B

Die Ludwigschen Konvexitätsaxiome

Es werden hier die von G. Ludwig in [Lud83b], Kapitel III, Abschnitt 2, S. 50ff. und in [Lud85a], Kapitel III, §5.3, S. 82ff. formulierten Axiome zur Konvexität für die Mengen der Präparier- und Effektverfahren angegeben, um dann ihren Zusammenhang zu den Axiomen AP 1A und AR 1A aus Abschnitt 6.2 zu zeigen. Zunächst werden die Überlegungen für die Präparierverfahren erläutert.

G. Ludwig geht zur Motivation seiner Konvexitätsaxiome von denselben Überlegungen aus, wie sie in Abschnitt 6.2 dargestellt wurden. Allerdings wird an einer Stelle ein Gedanke weitergeführt und konkretisiert, der in Abschnitt 6.2 nur angedeutet wurde.

Wenn man ausgehend von zwei Präparierverfahren a_1, a_2 durch „Vorschalten“ eines Zufallsgenerators ein neues Präparierverfahren a konstruiert, indem man in Aufbau, Durchführung und raum-zeitlicher Orientierung a_1 und a_2 gleichende Verfahren in Abhängigkeit des Ausgangs des Zufallsgenerators verwendet, dann kann man diese Teilverfahren jeweils mit einem Namen versehen. So sei die Menge der Präpariererignisse, die gewonnen werden, wenn der Zufallsgenerator das a_1 zugehörige Verfahren wählt, mit a_+ bezeichnet. Entsprechend verwende man den Namen a_- . Mit a_+ und a_- liegt eine disjunkte Zerlegung von a vor. Es darf jetzt nicht der vielleicht naheliegende Schluß gezogen werden, daß etwa $a_1 = a_+$ und $a_2 = a_-$ gälte. Das ist nicht der Fall, da a_1 und a_2 eigenstehende Verfahren beschreiben, die in keinem Zusammenhang mit dem Zufallsgenerator-Aufbau stehen. Aber natürlich haben a_1 und a_+ große Ähnlichkeit miteinander ebenso wie a_2 und a_- . Man spricht von der Isomorphie der Präparierverfahren in dem folgenden Sinne:

Definition B.1

Seien a_1, a_2 zwei Elemente aus \mathcal{Q}' . Dann heißen a_1 und a_2 **isomorph**, wenn es einen Orthoisomorphismus i zwischen den Booleschen Verbänden $\mathcal{Q}(a_1)$ und $\mathcal{Q}(a_2)$ gibt, der den folgenden drei Eigenschaften genügt:

- (i) Für alle Elemente a der Menge $\mathcal{Q}(a_1)$ gilt $\varphi(i(a)) = \varphi(a)$.
- (ii) Für jedes Element a aus $\mathcal{Q}(a_1)$ gilt $\lambda_{\mathcal{Q}}(a_1, a) = \lambda_{\mathcal{Q}}(i(a_1), i(a))$.
- (iii) Sei b_0 ein Element aus \mathcal{R}'_0 . Das Paar (a_1, b_0) gehört genau dann zu C , wenn (a_2, b_0) in C liegt.

Bemerkung: Für den Begriff der Orthoisomorphie zwischen Verbänden siehe Definition F.11 in Anhang F.

Die Gültigkeit der Eigenschaften aus Definition B.1 liegt für den obigen Fall nahe. Zur Formulierung des eigentlichen Axioms wird aber noch ein weiterer Begriff benötigt.

Definition B.2

Ein Präparierverfahren a heißt **direkte Mischung** von zwei Präparierverfahren a_1 und a_2 , wenn es zwei Präparierverfahren a'_1 und a'_2 so gibt, daß zum ersten a_1 und a'_1 isomorph sind, daß zum zweiten a_2 und a'_2 isomorph sind und daß zum dritten a'_1 und a'_2 das Präparierverfahren a disjunkt zerlegen. Dabei heißen $\lambda_{\mathcal{Q}}(a, a'_1)$ und $\lambda_{\mathcal{Q}}(a, a'_2)$ die **Gewichte** von a_1 und a_2 in der direkten Mischung.

Das Präparierverfahren a , wie es ausführlich in Abschnitt 6.2 und weiter oben nochmals kurz diskutiert wurde, läßt sich offenbar als direkte Mischung von a_1 und a_2 auffassen, so daß das folgende Axiom aus [Lud85a], Kapitel III, Abschnitt 5, S. 82 motiviert ist:

AP 1 Zu zwei Elementen a_1, a_2 der Menge \mathcal{Q}' und zu jeder Zahl α aus dem rationalen Intervall $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ existiert eine direkte Mischung a von a_1 und a_2 in \mathcal{Q}' mit dem Gewicht α für a_1 und dem Gewicht $(1 - \alpha)$ für a_2 .

Um nun das Axiom AP 1A aus AP 1 ausgehend von APS 1 - 4, 5.1.3, 5.1.4, 6A, 8 ableiten zu können, benötigt man nun folgende Eigenschaft:

Bezeichnen a_1, a_2 Elemente aus \mathcal{Q} und bezeichnet b_0 ein Element aus \mathcal{R}_0 , so daß den drei Eigenschaften $a_1 \cap a_2 = \emptyset$ und $a_1 \cup a_2 \in \mathcal{Q}$ und $(a_1, b_0), (a_2, b_0) \in C$ entsprochen wird, dann gehört das Paar $(a_1 \cup a_2, b_0)$ zur Menge C .

Eine solche Eigenschaft kann man auf zwei Wegen erreichen. Entweder folgt man dem Ludwigschen Weg. Das heißt, man definiert die Kombinierbarkeit auf die durch (5.4) in Abschnitt 5.7 dargestellte Weise, der dann eine zugehörige Motivation folgen muß. Oder man motiviert obige Eigenschaft direkt in der Weise, wie es mehrfach in Kapitel 6 vorgestellt wurde auf der Basis einer Kombinierbarkeitsbedingung, wobei man im weiteren nur von den oben genannten Axiomen ausgeht. Hat man auf einem der beiden geschilderten Wege die obige Eigenschaft zur Verfügung gestellt, folgt damit

Lemma B.3 *Aus AP 1 folgt AP 1A.*

Beweis:

Seien zwei Präparierverfahren $a_1, a_2 \in \mathcal{Q}'$ gewählt, und sei ein $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ vorgegeben. Dann existiert nach Voraussetzung eine direkte Mischung a . Die isomorphen Präparierverfahren bezeichne man mit a'_1 und a'_2 . Dabei komme a'_1 das Gewicht α zu. Man wähle nun ein $f \in \mathcal{F}$, so daß $(a_1, f), (a_2, f) \in \mathcal{C}$ gilt. Dann folgt aufgrund der Isomorphismen auch $(a'_1, f), (a'_2, f) \in \mathcal{C}$. Damit erhält man aufgrund der im Vorfeld des Lemmas erläuterten Bedingung auch die Zugehörigkeit von $(a'_1 \cup a'_2, b_0)$ zu \mathcal{C} . Ferner erhält man mit APS 6A (i) und den Isomorphieeigenschaften entsprechend der obigen Definition:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}(a, f) &= \lambda_{\mathcal{Q}}(a'_1 \cup a'_2, a'_1) \bar{\mu}(a'_1, f) + \lambda_{\mathcal{Q}}(a'_1 \cup a'_2, a'_2) \bar{\mu}(a'_2, f) \\ &= \alpha \mu(\varphi(a'_1), \psi(f)) + (1 - \alpha) \mu(\varphi(a'_2), \psi(f)) \\ &= \alpha \mu(\varphi(a_1), \psi(f)) + (1 - \alpha) \mu(\varphi(a_2), \psi(f)) \\ &= \alpha \bar{\mu}(a_1, f) + (1 - \alpha) \bar{\mu}(a_2, f). \end{aligned}$$

■

Damit ist nun gezeigt, daß im Rahmen der kanonischen Ludwigschen Axiomatik das Konvexitätsaxiom AP 1 das hier verwandte AP 1A impliziert.

Man kann in analoger Weise auch für den Fall der Registrierung vorgehen. Das zugehörige Konvexitätsaxiom aus [Lud85a], Kapitel III, Abschnitt 5, S. 84, lautet dabei:

AR 1 Zu zwei Elementen b_{01}, b_{02} der Menge \mathcal{R}'_0 und zu jeder Zahl α aus dem rationalen Intervall $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ existiert eine direkte Mischung b_0 von b_{01} und b_{02} in \mathcal{R}'_0 mit dem Gewicht α für b_{01} und dem Gewicht $(1 - \alpha)$ für b_{02} .

Damit gelangt man zu der Aussage

Lemma B.4 *Aus AR 1 folgt AR 1A.*

Beweis:

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma B.3. ■

Anhang C

Hilfsaussagen zu Kapitel 7

Im vorliegenden Anhang werden Aussagen formuliert, die vorwiegend nicht der mathematischen Fachliteratur entnommen wurden. Man möge bei Vorkommen der Menge der reellen Zahlen stets davon ausgehen, daß sie mit der von der Absolutbetragnorm induzierten Metrik, Uniformität und Topologie ausgestattet sei. Deshalb wird bei einer initialen Struktur auf einer Menge X bezüglich einer Menge von Abbildungen $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$ auch abkürzend von der initialen Struktur bezüglich $(f_i)_{i \in I}$ oder noch kürzer von $\sigma(X, I)$ gesprochen. Ob $\sigma(X, I)$ dann als Uniformität oder als Topologie aufgefaßt wird, ergibt sich jeweils aus dem Kontext.

C.1 Zum Beweis der Eigenschaften von $(\mathcal{K}, \sigma(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$

Es folgen zunächst Hilfsaussagen zum Beweis des Satzes 7.1.1. Dafür wird zwecks besserer Zitierbarkeit das folgende offensichtliche Lemma ohne Beweis notiert.

Lemma C.1.1 *Sei X eine Menge, und sei \mathcal{N} eine Uniformität auf X . Sei weiter \mathcal{B} ein Fundamentalsystem von \mathcal{N} , dann ist eine Menge $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ genau dann auch ein Fundamentalsystem von \mathcal{N} , wenn \mathcal{B}' Teilmenge von \mathcal{N} ist und wenn für alle Elemente b aus \mathcal{B} ein Element b' aus \mathcal{B}' mit $b' \subseteq b$ existiert.*

Damit kann man nun beweisen:

Lemma C.1.2 *Sei X eine Menge, und sei $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit. Sei für alle $i \in I$ mit \mathcal{B}_i ein*

Fundamentalsystem von \mathcal{N}_i bezeichnet, und sei $f_i : X \rightarrow Y_i$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung. Dann liefert das Mengensystem

$$A := \left\{ \bigcap_{g \in S} (f_g \times f_g)^{-1}(B_g) \mid S \subseteq I \text{ endlich und für alle } g \in S \text{ gilt: } B_g \in \mathcal{B}_g \right\}$$

ein Fundamentalsystem der initialen Uniformität auf X bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$.

Beweis:

Die initiale Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ sei mit $\sigma(X, I)$ bezeichnet. Mit Satz A.3.1 ist für $\sigma(X, I)$ ein Fundamentalsystem \mathcal{B} konkret gegeben. Da trivialerweise für jedes $i \in I$ die Mengeninklusion $\mathcal{B}_i \subseteq \mathcal{N}_i$ gilt, ergibt sich daher offensichtlich die Mengeninklusion $A \subseteq \sigma(X, I)$. Man muß wegen Lemma C.1.1 also nur noch zeigen, daß es zu jedem Element a aus A ein Element b aus \mathcal{B} gibt, das a enthält.

Man wähle dafür ein Element a aus A . Das heißt, man betrachtet eine Menge des Typs

$$\bigcap_{g \in S} (f_g \times f_g)^{-1}(N_g),$$

wobei S eine endliche Teilmenge von I bezeichnet. Mit N_g wird für jedes $g \in S$ ein Element der Uniformität \mathcal{N}_g benannt. Gemäß der Voraussetzungen bezeichnet \mathcal{B}_g für jedes $g \in S$ ein Fundamentalsystem der Uniformität \mathcal{N}_g . Also existiert für jedes g aus S ein Element B_g aus \mathcal{B}_g mit $B_g \subseteq N_g$. Damit folgt nun für alle $g \in S$:

$$(f_g \times f_g)^{-1}(B_g) \subseteq (f_g \times f_g)^{-1}(N_g).$$

Mithin ergibt sich unmittelbar:

$$\bigcap_{g \in S} (f_g \times f_g)^{-1}(B_g) \subseteq \bigcap_{g \in S} (f_g \times f_g)^{-1}(N_g). \quad (\text{C.1})$$

Der Term auf der linken Seite von (C.1) beschreibt offenbar ein Element aus A . Also ist es gelungen, ein Element aus A zu finden, das eine Teilmenge des gewählten Elementes aus \mathcal{B} darstellt. Damit ist der Beweis abgeschlossen. ■

Außerdem gilt die folgende bekannte Aussage:

Lemma C.1.3 *Für eine abzählbare Menge X ist die Menge F aller endlichen Teilmengen von X abzählbar.*

Beweis: Siehe [Kel55], Theorem 18, Kapitel 0, S. 27.

Damit kann man nun durch Bezugnahme auf wohlbekanntere Theoreme aus der Theorie der uniformen Strukturen den folgenden Satz beweisen:

Satz C.1.4 *Sei X eine Menge. Bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit. Bezeichne ferner $f_i : X \rightarrow Y_i$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung. Trägt die initiale Uniformität bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ den Namen $\sigma(X, I)$ tragen, dann gilt:*

- (i) *Sei I abzählbar, und sei (X_i, \mathcal{N}_i) für jedes $i \in I$ ein uniformer Hausdorffraum mit abzählbarem Fundamentalsystem. Gelte außerdem für alle Elemente x_1, x_2 aus X , daß x_1 und x_2 genau dann identisch sind, wenn für alle $i \in I$ die Identität $f_i(x_1) = f_i(x_2)$ gilt. Dann ist $\sigma(X, I)$ metrisierbar.*
- (ii) *$(X, \sigma(X, I))$ ist genau dann präkompakt, wenn $f_i(X)$ präkompakt ist für alle $i \in I$.*

Beweis:

zu (i): Die Hausdorffeigenschaft folgt mit Satz A.3.3 aus den Voraussetzungen. Mit Lemma C.1.2 und dem Satz A.3.1 über die initiale Uniformität ist die folgende Menge ein Fundamentalsystem von $\sigma(X, I)$:

$$H := \left\{ \bigcap_{g \in S} (f_g \times f_g)^{-1}(B_g) \mid S \subseteq I \text{ endlich und } \forall g \in S : B_g \in \mathcal{B}_g \right\}.$$

Dabei symbolisiere \mathcal{B}_g für jedes Element g aus I das abzählbare Fundamentalsystem von \mathcal{N}_g aus der Voraussetzung. Mit Lemma C.1.3 liefert die Abzählbarkeit von I auch die Abzählbarkeit der Menge aller endlichen Teilmengen von I . Da die Elemente der Familie $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ nach Voraussetzung abzählbar sind, ist für jede endliche Teilmenge S von I auch die Menge aller Familien $(B_g)_{g \in S}$ mit $B_g \in \mathcal{B}_g$ für alle $g \in S$ höchstens abzählbar. Also ist auch H höchstens abzählbar, und mit Satz A.5.2 folgt damit die Metrisierbarkeit.

zu (ii): Siehe Satz A.6.20. ■

C.2 Zum Beweis der Eigenschaften von $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ und $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$

Es werden nun die zum Beweis von Satz 7.2.1 benötigten Aussagen zur Verfügung gestellt.

Lemma C.2.1 Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, und sei $(\hat{X}, \hat{\mathcal{N}})$ seine Hausdorff-Vervollständigung. Wenn j die kanonische Abbildung bezeichnet und wenn \mathcal{B} ein Fundamentalsystem von \mathcal{N} benennt, dann ist ein Fundamentalsystem von $\hat{\mathcal{N}}$ durch die folgende Menge gegeben:

$$\left\{ \overline{(j \times j)(N)}^{\hat{\mathcal{N}}} \mid N \in \mathcal{B} \right\}.$$

Dabei symbolisiere $\overline{(j \times j)(N)}^{\hat{\mathcal{N}}}$ den Abschluß von $(j \times j)(N)$ bezüglich $(\hat{X}, \hat{\mathcal{N}})$.

Beweis:

Nach Satz A.4.9 (iv) ist ein Fundamentalsystem von $\hat{\mathcal{N}}$ gegeben durch:

$$\left\{ \overline{(j \times j)(N)}^{\hat{\mathcal{N}}} \mid N \in \mathcal{N} \right\}.$$

Ob der Mengeninklusion $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N}$ erhält man unmittelbar die folgende Mengeninklusion:

$$\left\{ \overline{(j \times j)(N)}^{\hat{\mathcal{N}}} \mid N \in \mathcal{B} \right\} \subseteq \left\{ \overline{(j \times j)(N)}^{\hat{\mathcal{N}}} \mid N \in \mathcal{N} \right\}.$$

Bezeichnet N ein Element aus \mathcal{N} , dann existiert ein Element N' aus \mathcal{B} mit $N' \subseteq N$, da es sich bei \mathcal{B} nach Voraussetzung um ein Fundamentalsystem von \mathcal{N} handelt. Man wähle nun ein Element N aus \mathcal{N} , und man bezeichne mit N' das so existierende Element aus \mathcal{B} , dann gilt:

$$\overline{(j \times j)(N')}^{\hat{\mathcal{N}}} \subseteq \overline{(j \times j)(N)}^{\hat{\mathcal{N}}}.$$

Damit folgt die Aussage mit Lemma C.1.1. ■

Lemma C.2.2 Ist ein uniformer Raum (X, \mathcal{N}) metrisierbar, dann ist auch seine Hausdorff-Vervollständigung $(\hat{X}, \hat{\mathcal{N}})$ metrisierbar.

Beweis:

Die Metrisierbarkeit von (X, \mathcal{N}) bedeutet mit Satz A.5.2 insbesondere, daß \mathcal{N} ein abzählbares Fundamentalsystem besitzt. Wiederum mit Satz A.5.2 folgt aus der Hausdorff-Eigenschaft und Lemma C.2.1 die Metrisierbarkeit für die Hausdorff-Vervollständigung. ■

C.3 Aussagen zum Verhältnis von $\hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K})$, $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \mathcal{K})$, $\sigma(\hat{\mathcal{L}}, \overline{\mathcal{K}})$ und $\hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L})|_{\overline{\mathcal{K}}}$, $\sigma(\overline{\mathcal{K}}, \mathcal{L})$, $\sigma(\overline{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{L}})$

Es werden die Aussagen diskutiert, die insbesondere für den Beweis von Satz 7.2.4 benötigt werden.

Satz C.3.1 *Sei X eine Menge, und sei A eine Teilmenge von X . Sei im weiteren $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie uniformer Räume mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit, und bezeichne $f_i : X \rightarrow Y_i$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung. Sei für die initiale Uniformität auf X bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ der Name $\sigma(X, I)$ gewählt. Dann fallen die Unterraumuniformität von $\sigma(X, I)$ auf A und die initiale Uniformität auf A bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i|_A))_{i \in I}$ zusammen. Das bedeutet, es gilt die Identität*

$$\sigma(X, I)|_A = \sigma(A, I),$$

wenn man mit $\sigma(X, I)|_A$ die Unterraumuniformität von $\sigma(X, I)$ auf A bezeichnet und wenn $\sigma(A, I)$ für die initiale Uniformität auf A bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i|_A))_{i \in I}$ steht.

Beweis:

Man setze zunächst

$$S_1 := \{(f_i \times f_i)^{-1}(N) \mid i \in I, N \in \mathcal{N}_i\},$$

$$S_2 := \{(f_i|_A \times f_i|_A)^{-1}(V) \mid i \in I, V \in \mathcal{N}_i\}.$$

Nach Satz A.3.1 gewinnt man aus S_1 mittels endlicher Durchschnittsbildung ein Fundamentalsystem von $\sigma(X, I)$, und auf analogem Wege erhält man aus S_2 eines von $\sigma(A, I)$. Die Unterraumuniformität auf A bezüglich $(X, \sigma(X, I))$ ist mit Lemma A.3.6 gegeben durch $\sigma(X, I) \cap A \times A$. Demzufolge erhält man ein Fundamentalsystem der Unterraumuniformität durch Spurbildung mit einem Fundamentalsystem des gesamten Raumes, hier also mit der Menge der endlichen Schnitte von Elementen aus S_1 . Es genügt folglich, die Identität $S_1 \cap A \times A = S_2$ zu zeigen, denn das bedeutet die Identität der Mengen der endlichen Schnitte von Elementen aus $S_1 \cap A \times A$ und S_2 , mithin von Fundamentalsystemen von $\sigma(X, I)|_A$ und $\sigma(A, I)$. Die Identität der Fundamentalsysteme impliziert natürlich die Identität der Uniformitäten selbst. Die Bedingung $S_1 \cap A \times A = S_2$ ist aber erfüllt, denn es gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
\bar{V} \in S_2 &\iff \exists i \in I \exists V \in \mathcal{N}_i : \bar{V} = (f_i|_A \times f_i|_A)^{-1}(V) \\
&= A \times A \cap \underbrace{(f_i \times f_i)^{-1}(V)}_{\in S_1} \\
&\iff \exists \bar{N} \in S_1 : \bar{V} = \bar{N} \cap A \times A.
\end{aligned}$$

■

Satz C.3.2 Sei X eine Menge. Bezeichne $((Y_i, \mathcal{N}_i))_{i \in I}$ eine Familie vollständiger uniformer Hausdorffräume mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit, und bezeichne $f_i : X \rightarrow Y_i$ für jedes $i \in I$ eine Abbildung derart, daß die initiale Uniformität auf X bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, f_i))_{i \in I}$ die Hausdorffeigenschaft besitzt. Sei weiter mit \hat{X} die Vervollständigung von $(X, \sigma(X, I))$ bezeichnet, und sei mit $\hat{\sigma}(X, I)$ die zugehörige Uniformität benannt. Symbolisiert \hat{f}_i für jedes $i \in I$ die nach Satz A.4.7 eindeutig existierende gleichmäßig stetige Fortsetzung von f_i auf \hat{X} und wird die initiale Uniformität auf \hat{X} bezüglich $((Y_i, \mathcal{N}_i, \hat{f}_i))_{i \in I}$ mit $\sigma(\hat{X}, I)$ benannt, dann gilt die folgende Identität:

$$\hat{\sigma}(X, I) = \sigma(\hat{X}, I).$$

Beweis:

Der Beweis wird geführt, indem die Voraussetzungen für den Satz A.4.16 bewiesen werden.

- (i) Mit dem Satz A.4.8 über die Hausdorff-Vervollständigung, folgt insbesondere, daß $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ ein vollständiger uniformer Hausdorffraum ist.
- (ii) Hausdorffräume können gemäß Lemma A.4.10 mit dichten Teilmengen ihrer Vervollständigungen identifiziert werden, und somit kann X als dichte Teilmenge von $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ aufgefaßt werden.
- (iii) Es gilt $\sigma(\hat{X}, I) \subseteq \hat{\sigma}(X, I)$, denn $\sigma(\hat{X}, I)$ ist die größte Uniformität, so daß alle Abbildungen \hat{f}_i gleichmäßig stetig sind. Aber da die \hat{f}_i gerade die gleichmäßig stetigen Fortsetzungen der f_i auf $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ sind, also insbesondere bezüglich $\hat{\sigma}(X, I)$ gleichmäßig stetig sind, gilt eben die eingangs aufgeführte Relation zwischen den Uniformitäten.
- (iv) $\hat{\sigma}(X, I)$ und $\sigma(\hat{X}, I)$ bilden auf X dieselbe Unterraumuniformität, wie die folgenden Überlegungen zeigen. Mit Satz A.4.9 (iii) und der Identifikation aus obigem Punkt (ii) folgt einerseits $\hat{\sigma}(X, I) = \sigma(X, I)$. Andererseits liefert Satz C.3.1 wiederum ob der Mengeninklusion mit $X \subseteq \hat{X}$ die Identität der Unterraumuniformität $\sigma(\hat{X}, I)|_X$ und der Uniformität $\sigma(X, I)$.

Also fallen auch die Unterraumuniformitäten $\hat{\sigma}(X, I) \mid_X$ und $\sigma(\hat{X}, I) \mid_X$ zusammen.

■

C.4 Hilfsaussagen zur Konvexität von $\overline{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ bezüglich $\hat{\mu}$

Im Rahmen des Beweises von Satz 7.2.8 wurden die Konvexitätseigenschaften der Mengen $\overline{\mathcal{K}}$ und $\hat{\mathcal{L}}$ unter Verwendung der Abbildung $\hat{\mu}$ im Sinne der Definition 6.2.1 untersucht. Dabei wurde auf die hier angegebenen Aussagen zurückgegriffen. Hinsichtlich des einer Folge zugeordneten Filters sowie des Begriffs des Bildfilters wird an die Definitionen A.1.6 und A.4.2 erinnert.

Lemma C.4.1 *Seien (X_1, \mathcal{O}_1) und (X_2, \mathcal{O}_2) topologische Räume, sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , und sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wenn $\mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ den von der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugten Filter bezeichnet und wenn das Symbol $\mathfrak{F}_{(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}}$ für den von der Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugten Filter steht, dann gilt für den Bildfilter von $\mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ bezüglich f :*

$$f(\mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}) = \mathfrak{F}_{(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}}.$$

Beweis:

Eine Basis des Filters $\mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{B}_1 := \{F_{n_0} \mid n_0 \in \mathbb{N}\} \text{ mit } F_{n_0} := \{x_s \mid s \geq n_0\}.$$

Eine Basis des Filters $\mathfrak{F}_{(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}}$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{B}_2 := \{\overline{F}_{n_0} \mid n_0 \in \mathbb{N}\} \text{ mit } \overline{F}_{n_0} := \{f(x_s) \mid s \geq n_0\}.$$

Offensichtlich gilt

$$\mathcal{B}_2 = \{f(F_{n_0}) \mid F_{n_0} \in \mathcal{B}_1\} = f(\mathcal{B}_1). \quad (\text{C.2})$$

Eine Basis des Bildfilters $f(\mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}})$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{B}_3 := \{f(F) \mid F \in \mathfrak{F}_{(x_n)_{n \in \mathbb{N}}}\}.$$

Es gilt aber wegen (C.2) auch

$$\mathcal{B}_2 = f(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{B}_3.$$

Bezeichnet B ein Element aus \mathcal{B}_3 , dann existieren ein $F \in \mathfrak{F}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und ein $B' \in \mathcal{B}_1$, so daß $B' \subseteq F$ und $B = f(F)$ gilt. Also erhält man auch $\mathcal{B}_3 \subseteq f(\mathcal{B}_1) = \mathcal{B}_2$. Die Identität der Filterbasen \mathcal{B}_2 und \mathcal{B}_3 bedeutet auch die Identität der Filter. ■

Satz C.4.2 Sei X eine Menge, und sei $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, i \in I$, eine Familie von Abbildungen mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit derart, daß X , ausgestattet mit der mit $\sigma(X, I)$ bezeichneten initialen Uniformität bezüglich $(f_i)_{i \in I}$, ein metrisierbarer uniformer Raum ist. Symbolisiert \hat{f}_i für jedes $i \in I$ die gemäß Satz A.4.7 in eindeutiger Weise existierende Fortsetzung von f_i auf die Vervollständigung \hat{X} , dann gilt:

- (i) Ist X rational $(f_i)_{i \in I}$ -konvex, dann ist \hat{X} reell $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ -konvex.
- (ii) Fordert man zusätzlich noch, daß für jedes $i \in I$ die Menge $f_i(X)$ in dem reellen Intervall $[0, 1]$ enthalten ist, dann erhält man sogar:
Ist X rational $(f_i)_{i \in I}$ -konvex, dann ist \hat{X} reell σ - $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ -konvex.

Bemerkung: Die Metrisierbarkeit ist nicht zwingend notwendig. Man kann den Satz auch beweisen, wenn man nur die Hausdorffeigenschaft von $(X, \sigma(X, I))$ voraussetzt. Die Metrisierbarkeit wird hier aber verlangt, da sie im physikalischen Fall erfüllt ist und da man dann im Beweis mit Folgen arbeiten kann. Bei der zweiten Aussage genügt auch die Beschränktheit der Bildbereiche der f_i . Hier wurde lediglich aus Bequemlichkeit das physikalisch relevante Intervall $[0, 1]$ verwendet.

Beweis:

Wie üblich möge mit $\hat{\sigma}(X, I)$ die Uniformität der Vervollständigung bezeichnet werden. Ebenso identifiziere man $(X, \sigma(X, I))$ mit einem dichten Unterraum von $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ im Sinne von Satz A.4.10.

zu (i): Es seien eine Familie $(x_j)_{j=1}^m$ von Elementen aus X und eine Familie von Zahlen $(\alpha_j)_{j=1}^m$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$ gewählt.

- (I) Da \mathbb{Q} bezüglich der stets gewählten, durch die Absolutbetragsmetrik induzierten Topologie dicht in \mathbb{R} liegt, existieren m Folgen $(\alpha_{jn})_{n \in \mathbb{N}}, j = 1, \dots, m$, in \mathbb{Q} , so daß für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\alpha_{jn} \rightarrow \alpha_j.$$

Man kann zeigen, daß die Folgen so gewählt werden können, daß für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$(\alpha_{jn})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, 1] \cap \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^m \alpha_{jm} = 1. \quad (\text{C.3})$$

Um das zu zeigen, werden die folgenden Überlegungen angestellt:

1.Fall: Es existiert ein $j \in \{1, \dots, m\}$, so daß $\alpha_j = 1$ gilt. Dann muß zwangsläufig $m = 1$ gelten. Definiert man $\alpha_{1n} := 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann ist die Behauptung erfüllt.

2.Fall: Für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ gelte: $0 < \alpha_j < 1$.

1.Schritt: Da für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$ die Konvergenz $\alpha_{jn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha_j$ vorliegt, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $\alpha_{jn} < 1$ für alle $n \geq n_0$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Man gehe nun von den Folgen $(\alpha_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, m$ über zu den Restfolgen ab dem n_0 -ten Glied. Diese Folgen seien der Einfachheit halber wieder mit $(\alpha_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, m$ bezeichnet. Man hat jetzt m Folgen aus $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ vorliegen.

2.Schritt: Man belasse die Folgen mit $j = 1$ bis $j = m - 1$, wie sie sind, und ersetze die m -te Folge durch die Folge $(\tilde{\alpha}_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$, die festgelegt ist durch:

$$\tilde{\alpha}_{mn} := 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{jn}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt nun mit Hilfe der Grenzwertsätze für reelle Folgen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}_{mn} = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{jn} = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j = \alpha_m.$$

Mithin konvergiert $(\tilde{\alpha}_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen α_m . Da α_m echt kleiner als 1 ist, kann man ein $n'_0 \in \mathbb{N}$ so finden, daß alle Glieder der Folge $(\tilde{\alpha}_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ im Intervall $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ liegen. Man gehe nun von den Folgen $(\alpha_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, m-1$ und $(\tilde{\alpha}_{mn})_{n \in \mathbb{N}}$ über zu den Restfolgen ab dem n'_0 -ten Glied. Damit hat man die gewünschten Eigenschaften garantiert.

Also kann man zu jedem Folgensatz einen Folgensatz angeben, der die in (C.3) geforderten Eigenschaften hat. Daher werden im weiteren diese Eigenschaften vorausgesetzt.

- (II) Mit $(X, \sigma(X, I))$ ist nach Lemma C.2.2 auch $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ metrisierbar. Da X dicht in $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ liegt, folgt mit Satz A.5.6 (i), daß es zu jedem $j \in \{1, \dots, m\}$ eine Folge $(x_{jn})_{n \in \mathbb{N}}$ in X so gibt, daß gilt

$$x_{jn} \xrightarrow{\hat{\sigma}(X, I)} x_j$$

- (III) Es wird für alle $n \in \mathbb{N}$ gesetzt:

$$\begin{aligned} \bar{x}_n &:= \text{die } (f_i)_{i \in I}\text{-Konvexkombination} \\ &\text{der } (x_{jn})_{j=1}^m \text{ bezüglich der Gewichte } (\alpha_{jn})_{j=1}^m. \end{aligned}$$

Existenz sowie Eindeutigkeit der Konvexkombinationen und damit die Wohldefiniertheit der Folge $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhält man mit der vorausgesetzten rationalen $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexität von X . Insbesondere liefert die rationale $(f_i)_{i \in I}$ -Konvexität von X , daß $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X beschreibt. Außerdem gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $i \in I$:

$$f_i(\bar{x}_n) = \sum_{j=1}^m \alpha_{jn} f_i(x_{jn}). \quad (\text{C.4})$$

- (IV) Es wird an Definition A.4.2 erinnert, derzufolge der einer Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ zugeordnete Filter mit $\mathfrak{F}_{(y_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ bezeichnet wird.

Da für alle Elemente $j \in \{1, \dots, m\}$ die Konvergenzen $\alpha_{jn} \rightarrow \alpha_j$ und $x_{jn} \xrightarrow{\hat{\sigma}(X, I)} x_j$ gelten, liefern (C.4) und die Stetigkeit der \hat{f}_i , $i \in I$, für jedes $i \in I$:

$$\hat{f}_i(\bar{x}_n) \rightarrow \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{f}_i(x_j). \quad (\text{C.5})$$

Das heißt, für alle $i \in I$ ist $\hat{f}_i(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Cauchy-Folge. Damit handelt es sich beim zugehörigen Filter $\mathfrak{F}_{\hat{f}_i(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ um einen Cauchy-Filter.

Mit Lemma C.4.1 ist damit auch für jedes $i \in I$ der Bildfilter $\hat{f}_i(\mathfrak{F}_{(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}})$ ein Cauchy-Filter. Das bedeutet aber mit Satz A.4.4, daß auch der $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugehörige Filter ein Cauchy-Filter ist. Also bezeichnet $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$. Die Vollständigkeit des Raumes $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ besagt nun, daß die Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert. Die Hausdorff-Eigenschaft garantiert die Eindeutigkeit des Grenzwertes, der im weiteren

mit x bezeichnet sei. Die Stetigkeit der \hat{f}_i , $i \in I$, liefert dann die für die Konvexkombination relevante Aussage, denn es gilt für alle $i \in I$:

$$\hat{f}_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_i(x_n) \stackrel{(C.5)}{=} \sum_{j=1}^m \alpha_j \hat{f}_i(x_j). \quad (C.6)$$

Die Hausdorff-Eigenschaft von $\hat{\sigma}(X, I)$, Satz C.3.2 und Satz A.3.3 besagen, daß es nur ein $x \in \hat{X}$ geben kann, daß (C.6) genügt.

Damit ist der Beweis von Punkt (i) des Satzes abgeschlossen.

zu (ii): Gelte jetzt zusätzlich $f_i(X) \subseteq [0, 1]$ für alle $i \in I$. Da die Aussage bezüglich der reellen $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ -Konvexität von \hat{X} aus dem eben bewiesenen Punkt (i) dennoch gilt, kann man sich auf den Fall abzählbarer $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ -Konvexkombinationen beschränken.

Man wähle dafür eine Familie $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ in X und eine Familie von Zahlen $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$.

Mit der reellen $(\hat{f}_i)_{i \in I}$ -Konvexität von \hat{X} kann man mit der Abkürzung

$$\eta_n := \left(\sum_{s=1}^n \alpha_s \right)^{-1}, n \in \mathbb{N},$$

eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definieren vermittels der Vorschrift

$$z_n := \text{die } (\hat{f}_i)_{i \in I}\text{-Konvexkombination} \\ \text{der } (x_j)_{j=1}^n \text{ bezüglich der Gewichte } (\eta_n \alpha_j)_{j=1}^n.$$

Wegen der Voraussetzungen an die Familie $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ ergibt sich die Konvergenz $\eta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Außerdem bedeutet die vorausgesetzte Eigenschaft des Bildbereiches der f_i -Abbildungen, daß mit Satz A.4.7 auch die Fortsetzungen \hat{f}_i keine Bilder außerhalb des Intervalls $[0, 1]$ besitzen. Somit erhält man

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{f}_i(x_j) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq 1. \quad (C.7)$$

Das bedeutet aber insbesondere, daß die Folgen $(\sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{f}_i(x_j))_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in I$, konvergieren, wie sich etwa mit [Heu91a], Monotoniekriterium 31.2, S. 191 ergibt. Der Grenzwert sei mit t_i bezeichnet.

Seien nun $i \in I$, $\varepsilon > 0$ und n_0 so gewählt, daß für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|\eta_n - 1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{f}_i(x_j) - t_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann gilt mit (C.7):

$$|\hat{f}_i(z_n) - t_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n |\eta_n - 1| |\alpha_j \hat{f}_i(x_j)| \right) + \left| \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{f}_i(x_j) - t_i \right| \leq \varepsilon.$$

Also gilt für alle $i \in I$ die Konvergenz

$$\hat{f}_i(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t_i.$$

Die weitere Argumentation verläuft analog zu Schritt (IV) des Beweises von Punkt (i) dieses Satzes ab S. 526. Es folgt damit, daß $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $(\hat{X}, \hat{\sigma}(X, I))$ ist. Aus der Stetigkeit der $\hat{f}_i, i \in I$, erhält man für jedes $i \in I$:

$$\hat{f}_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \hat{f}_i(x_j)$$

Die Hausdorffeigenschaft liefert dann die Eindeutigkeit. ■

Lemma C.4.3 *Sei (X, \mathcal{N}) ein uniformer Raum, seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei gleichmäßig stetige Abbildungen, und seien λ, μ beliebige reelle Zahlen. Dann ist bei punktweiser Definition auch die Abbildung $\lambda f + \mu g$ gleichmäßig stetig.*

Beweis:

Mit Hilfe von Lemma A.2.4 und dem kanonischen Fundamentalsystem von \mathbb{R} entsprechend Definition A.1.9, bedeutet die gleichmäßige Stetigkeit von f und g :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists V \in \mathcal{N} \quad \forall x, y \in V : \quad & |f(x) - f(y)| < \varepsilon \\ \text{und} \quad \forall \delta > 0 \exists V' \in \mathcal{N} \quad \forall x', y' \in V' : \quad & |g(x') - g(y')| < \delta \end{aligned}$$

Also existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Nachbarschaften $V, V' \in \mathcal{N}$, so daß für alle Elemente $x, y \in V \cap V'$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \quad \text{und} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}.$$

Da es sich bei \mathcal{N} um eine Uniformität handelt, gehört mit $V, V' \in \mathcal{N}$ auch $V \cap V'$ zu \mathcal{N} . Also kommt man zu der Aussage, daß für alle $\varepsilon > 0$ ein Element $V \in \mathcal{N}$ so existiert, daß für alle Elemente $x, y \in V$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\lambda|} \quad \text{und} \quad |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2|\mu|}.$$

Sei nun für ein $\varepsilon > 0$ das Element V aus \mathcal{N} mit obiger Eigenschaft gewählt, dann gilt für alle $x, y \in V$:

$$\begin{aligned} |\lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda f(y) - \mu g(y)| &\leq |\lambda| |f(x) - f(y)| + |\mu| |g(x) - g(y)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Anhang D

Hilfsaussagen zu Kapitel 8

Der folgende Anhang stellt zunächst einige Aussagen zusammen, die beim Aufbau der mathematischen Rahmentheorie benötigt werden, um die Einbettung in Banachraumstrukturen vorzunehmen. Im dritten Abschnitt wird ausführlich der Beweis des Darstellungstheorems für die Elemente von B_Δ durchgeführt.

D.1 Hilfsaussage bezüglich der Einbettung von \mathcal{K} und \mathcal{L} in topologische Vektorräume

Für den Beweis von Satz 8.1.2 über die Einbettung von \mathcal{K} und \mathcal{L} in ein duales Paar topologischer Vektorräume wird das folgende Lemma benötigt, das eine Bemerkung in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 104 verallgemeinert:

Lemma D.1.1 *Seien X, Y zwei reelle Vektorräume, sei $\langle X, Y, f \rangle$ ein Dualsystem, und sei S eine Teilmenge von Y . Sei ferner mit $\sigma(X, S)$ die initiale Uniformität auf X bezüglich $(f(\cdot, y))_{y \in S}$ bezeichnet, und sei mit $\sigma(X, \langle S \rangle)$ die initiale Uniformität bezüglich $(f(\cdot, y))_{y \in \langle S \rangle}$ benannt, wobei $\langle S \rangle$ den linearen Aufspann von S in Y symbolisiere. Dann sind $\sigma(X, S)$ und $\sigma(X, \langle S \rangle)$ identisch.*

Beweis:

Da S eine Teilmenge des linearen Aufspans $\langle S \rangle$ ist, folgt sofort die Mengeneinklusion:

$$\sigma(X, S) \subseteq \sigma(X, \langle S \rangle).$$

Die Inklusion in die andere Richtung gilt, wenn sich $f(\cdot, y)$ für alle y aus $\langle S \rangle$ als gleichmäßig stetig bezüglich $\sigma(X, S)$ erweist. Man betrachte da-

für ein Element $y \in \langle S \rangle$, dann existiert eine Darstellung $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ mit $\{\lambda_i \mid i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{R}$ und $\{v_i \mid i = 1, \dots, n\} \subseteq S$. Also gilt die folgende Abbildungsidentität auf ganz X :

$$f(\cdot, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\cdot, v_i).$$

Da für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Abbildung $f(\cdot, v_i)$ gleichmäßig stetig bezüglich $\sigma(X, S)$ ist, folgt die Behauptung mit Lemma C.4.3. ■

D.2 Aussagen bezüglich der konvexen Strukturen von K und $\hat{\mathcal{L}}$

Zu Beginn des Abschnitts werden die für den Haupttext wichtigsten Aussagen aus der Theorie affiner Mengen zusammengestellt werden. Die Aussagen entstammen [RV73], Kapitel III, §31, S. 76ff.; dort werden sie auch bewiesen.

Definition D.2.1

Sei X ein Vektorraum, dann heißt eine Teilmenge A von X **affin**, wenn für eine beliebige reelle Zahl α und beliebige Elemente x_1, x_2 der Menge A die Linearkombination $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ in A liegt.

Eine Linearkombination $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ heißt **Affinkombination** von $(x_i)_{i=1}^n$, wenn $(\alpha_i)_{i=1}^n$

eine Familie reeller Zahlen mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ist und wenn $(x_i)_{i=1}^n$ eine Familie von Elementen der Menge X bezeichnet.

Satz D.2.2 *Sei X ein Vektorraum, und sei A eine Teilmenge von X . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) A ist affin.
- (ii) Es existiert ein Untervektorraum V von X , und es existiert ein Element x der Menge X so, daß $A = x + V$ gilt.
- (iii) Jede Affinkombination von Elementen aus A liegt in A .

Beweis: Siehe [RV73], Kapitel III, §31, Theoreme A und B, S. 74-75.

Damit kann nun in wohldefinierter Weise festgelegt werden:

Definition D.2.3

Sei X ein Vektorraum, und sei A eine affine Teilmenge von X , dann versteht man unter der **Dimension** von A die Dimension des A zugehörigen Untervektorraumes.

Lemma D.2.4 *Der Durchschnitt beliebig vieler affiner Teilmengen eines Vektorraumes X ist eine affine Teilmenge von X .*

Beweis: Siehe [RV73], Kapitel III, §31, Theorem C, S. 75.

Dadurch wird folgende Definition in wohldefinierter Weise ermöglicht:

Definition D.2.5

Sei X ein Vektorraum. Als **affine Hülle** einer Teilmenge A von X bezeichnet man die kleinste affine Teilmenge von X , die A umfaßt.

Die Zusammenstellung von Aussagen über affine Mengen endet mit einem Satz, der, wie für die meisten relevanten Hüllen, auch für die affine Hülle gilt:

Satz D.2.6 *Sei X ein Vektorraum, und sei A eine Teilmenge von X , dann ist die affine Hülle von A gegeben durch die Menge aller Affinkombinationen von Elementen aus A .*

Beweis: Siehe [RV73], Kapitel III, §31, Theorem D, S. 75.

D.3 Ein Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ

Im folgenden Abschnitt wird das Darstellungstheorem 8.4.7 für die Elemente von B_Δ hergeleitet. Es werden zum Beweis lediglich die in Kapitel 8 zur Verfügung gestellten Eigenschaften von K und B_Δ benötigt. Insbesondere sind dabei die Aussagen bezüglich des Verhältnisses von K und B_Δ zueinander zu nennen. Mit Definition 8.2.8, Lemma 8.3.4 (i) und Lemma 8.4.6 handelt es sich bei K um eine konvexe und bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ abgeschlossene Teilmenge von B_Δ mit der Eigenschaft:

$$\overline{\|\cdot\|_{B_\Delta}}(K \cup (-K)) = B_{\Delta|1|}.$$

Dabei bezeichnet $B_{\Delta|1|}$ die abgeschlossene Einheitskugel von B_Δ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$. In der Folge sollen die Normeinheitskugeln jedes vorkommenden normierten Raumes X mit $X_{|1|}$ symbolisiert werden.

Außerdem sei daran erinnert, daß Δ mittels des isometrischen Isomorphismus aus Satz 8.1.17 mit ganz B'_Δ identifiziert werden kann. Dafür bedenke man auch die Symmetrie von Δ im Sinne von Satz 8.2.3 (ii). Unter Verwendung der derart ermöglichten Identifizierung fallen mit Lemma 8.1.21 die Abbildung ξ_Δ und die kanonische Bilinearität $\langle \cdot, \cdot \rangle_{B_\Delta}$ des Norm-Dualsystems $\langle B_\Delta, B'_\Delta \rangle$ und damit auch die beiden Dualsysteme insgesamt zusammen.

Zum Beweis des Darstellungstheorems sollen zwei Theoreme aus dem Artikel [Ell68] von A.J. Ellis verwendet werden, die ausführlichen Bezug auf die Theorie der geordneten Vektorräume nehmen. Daher werden zunächst die zur Verwendung der Theoreme notwendigen Grundlagen dargelegt, um sie in der Folge in den Zusammenhang mit derjenigen Theorie zu bringen, die bis einschließlich des Kapitels 8 entwickelt wurde. Bei der Begriffsbildung wird hier im Prinzip derjenigen gefolgt, die A.J. Ellis in den Artikeln [Ell64] und [Ell68] erläutert und verwendet. Geeignete Einführungen in die Theorie der geordneten Vektorräume stellen beispielsweise die Bücher [Per67], [WN73] und [SW99] dar. Alle in der Folge nicht bewiesenen Lemmata, für die kein expliziter Verweis auf die mathematische Fachliteratur erfolgt, finden sich in den genannten Werken in einfacher Weise.

Als erstes sind die grundlegenden Begriffe des konvexen Kegels und des geordneten Vektorraumes zu definieren, um im Anschluß auf den engen Zusammenhang der beiden Begriffe einzugehen.

Definition D.3.1

Eine Teilmenge M eines Vektorraumes X heißt **konvexer Kegel mit Scheitel 0**, wenn für jedes Element x der Menge M und jede echt positive reelle Zahl α auch αx in M liegt und wenn für alle Elemente x_1, x_2 der Menge M auch $x_1 + x_2$ zu M gehört. Enthält ein konvexer Kegel mit Scheitel 0 auch die 0, dann heißt er **spitz**. Liegt 0 nicht in einem Kegel mit Scheitel 0, so wird der Kegel **stumpf** genannt. Ein konvexer Kegel mit Scheitel 0 heißt **echt**, wenn $M \cap (-M) = \{0\}$ gilt.

Offensichtlich ist ein echter konvexer Kegel mit Scheitel 0 auch stets spitz.

Definition D.3.2

Ein reeller Vektorraum X heißt **geordneter Vektorraum**, wenn auf ihm eine Halbordnung \leq im Sinne von Definition F.1 so definiert ist, daß für alle Elemente x_1, x_2 der Menge X mit $x_1 \leq x_2$ gilt:

- (i) Für alle Elemente x der Menge X gilt die Relation $x_1 + x \leq x_2 + x$.
- (ii) Für beliebige nicht-negative reelle Zahlen α wird der Relation $\alpha x_1 \leq \alpha x_2$ entsprochen.

Zwischen den Halbordnungen, die einen Vektorraum zu einem geordneten Vektorraum machen, und seinen echten konvexen Kegeln mit Scheitel 0 gibt es zentrale Verknüpfungen, denn es gilt einerseits:

Definition und Lemma D.3.3 *Sei X ein geordneter Vektorraum, dann ist durch die Menge $X_+ := \{x \in X \mid x \geq 0\}$ ein echter konvexer Kegel mit Scheitel 0 gegeben. Die Elemente von X_+ werden **positiv** genannt, und X_+ wird als **positiver Kegel** des geordneten Vektorraumes bezeichnet.*

Andererseits gilt aber auch:

Lemma D.3.4 *Sei X ein reeller Vektorraum, und sei C ein echter konvexer Kegel mit Scheitel 0, dann ist durch die Vorschrift*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \leq x_2 : \iff x_2 - x_1 \in C$$

eine Halbordnung auf X gegeben, die X zu einem geordneten Vektorraum mit C als positivem Kegel macht.

Also gibt es für jeden reellen Vektorraum X eine kanonische Bijektion zwischen der Menge der Halbordnungen, die X zu einem geordneten Vektorraum machen, und der Menge der echten konvexen Kegel mit Scheitel 0 in X .

Lediglich für die nun folgenden Betrachtungen und für weiterführende Überlegungen in Abschnitt E.7 wird die folgende Menge explizit eingeführt:

Definition D.3.5 $B_+ := \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K.$

Mit Definition D.3.3 wurde einem Symbol der Form X_+ eine Bedeutung im Kontext geordneter Vektorräume zugeordnet. Das nächste Lemma zeigt, daß die Bezeichnung B_+ in konsistenter Weise vergeben worden ist. Dabei wird Erläuterungen und T 4.1 in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 114 gefolgt:

Lemma D.3.6 *B_+ ist echter konvexer Kegel mit Scheitel 0 im Vektorraum B_Δ . Ferner ist B_+ sowohl bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ als auch bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ abgeschlossen in B_Δ .*

Beweis:

Die Konvexität von K gemäß Lemma 8.3.4 (i) impliziert in einfacher Weise die Eigenschaft, daß B_+ konvexer Kegel ist.

Als Nächstes ist zu zeigen, daß B_+ echter Kegel ist. Da in der Definition von B_+ auch der Fall $\lambda = 0$ zugelassen ist, liegt 0 in B_+ , und somit liegt 0 auch

in $B_+ \cap (-B_+)$. Es bleibt für die Echtheit also lediglich nachzuweisen, daß $B_+ \cap (-B_+)$ nur die 0 enthält. Sei dafür ein Element x aus $B_+ \cap (-B_+)$ gewählt. Es gibt also $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ und $x_1, x_2 \in K$, so daß $x = \lambda_1 x_1 = -\lambda_2 x_2$ gilt. Damit folgt aber $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$. Wäre $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, erhielte man ob der Konvexität von K :

$$\begin{aligned} 0 &= \|\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2\|_{B_\Delta} = (\lambda_1 + \lambda_2) \underbrace{\left\| \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right\|}_{= 1 \text{ mit Lemma 8.2.13 (i)}} = \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Das hieße aber $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, und es läge ein Widerspruch zur Annahme $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ vor. Mithin muß $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ gelten. Das bedeutet $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, wenn man $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ bedenkt. Folglich kann in $B_+ \cap (-B_+)$ nur die 0 liegen, und die Echtheit des Kegels ist gezeigt.

Zum Beweis der Abgeschlossenheit von B_+ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ wähle man eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_+$ und ein Element x aus B_Δ mit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$. Man kann sich dabei auf den Fall $x \neq 0$ beschränken, da, wie oben gezeigt, die 0 in B_+ liegt. Es muß nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\lambda_n \geq 0$ und ein $\bar{x}_n \in K$ mit $x_n = \lambda_n \bar{x}_n$ geben. Da die Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ als Abbildung insbesondere auch bezüglich ihrer selbst stetig ist, folgt aus der Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x die Konvergenz $\lambda_n \|\bar{x}_n\|_{B_\Delta} \rightarrow \|x\|_{B_\Delta}$. Da aber mit Lemma 8.2.13 (i) für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität $\|\bar{x}_n\|_{B_\Delta} = 1$ gilt, erhält man also $\lambda_n \rightarrow \|x\|_{B_\Delta}$. Mit $x \neq 0$ ist auch $\|x\|_{B_\Delta} \neq 0$, und man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge echt positiver Zahlen ist. Damit gilt nun für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left\| \bar{x}_n - \frac{x}{\|x\|_{B_\Delta}} \right\|_{B_\Delta} &= \left\| \bar{x}_n - \frac{\lambda_n}{\|x\|_{B_\Delta}} \bar{x}_n + \frac{\lambda_n}{\|x\|_{B_\Delta}} \bar{x}_n - \frac{x}{\|x\|_{B_\Delta}} \right\|_{B_\Delta} \\ &\leq \left\| \bar{x}_n - \frac{\lambda_n}{\|x\|_{B_\Delta}} \bar{x}_n \right\|_{B_\Delta} + \left\| \frac{\lambda_n}{\|x\|_{B_\Delta}} \bar{x}_n - \frac{x}{\|x\|_{B_\Delta}} \right\|_{B_\Delta} \\ &= \frac{1}{\|x\|_{B_\Delta}} \left(\left| \|x\|_{B_\Delta} - \lambda_n \right| \underbrace{\|\bar{x}_n\|_{B_\Delta}}_{=1} + \|\lambda_n \bar{x}_n - x\|_{B_\Delta} \right) \end{aligned}$$

Ob der Konvergenzen $\lambda_n \rightarrow \|x\|_{B_\Delta}$ und $\lambda_n \bar{x}_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$ konvergiert die Folge $(\bar{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen $\frac{x}{\|x\|_{B_\Delta}}$. Da K bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ definitionsgemäß abgeschlossen ist, muß $\frac{x}{\|x\|_{B_\Delta}}$ Element von K sein. Also liegt mit x ein Element aus B_+ vor, so daß nachgewiesen ist, daß $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein Ele-

ment aus B_+ konvergiert. Damit ist der Beweis der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Abgeschlossenheit von B_+ gelungen.

Die Abgeschlossenheit bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ folgt aufgrund der eben gezeigten Normabgeschlossenheit und aufgrund der Konvexität von B_+ mit [SW99], Kapitel II, Abschnitt 9.2, Korollar 2, S. 65. Dabei sei an Lemma 8.1.23 erinnert. ■

Den obigen Erläuterungen zufolge wird B_Δ durch den Kegel B_+ zu einem geordneten Vektorraum. B_+ hat darüber hinaus eine besondere Form, die die Menge K in gewisser Weise hervorhebt. K ist eine Basis des Kegels B_+ , denn man definiert:

Definition D.3.7

Sei X ein geordneter Vektorraum mit positivem Kegel X_+ , der nicht nur 0 enthält. Eine nicht-leere, konvexe Teilmenge C von X_+ heißt **Basis von X_+** , wenn es zu jedem Element x der Menge $X_+ \setminus \{0\}$ genau eine reelle Zahl $\lambda > 0$ und genau ein Element \bar{x} in B mit $x = \lambda \bar{x}$ gibt.

Nachdem der Begriff der Basis zur Verfügung steht, ist die Behauptung zu beweisen, die im Vorfeld der Definition aufgestellt wurde und die Ludwig in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 114 anmerkt:

Lemma D.3.8 *K ist eine Basis von B_+ .*

Beweis:

Die Konvexität von K ist bekannt, so daß noch der Nachweis der zweiten Bedingung bleibt. Sei dafür ein $x \in B_+ \setminus \{0\}$ gewählt, dann existieren definitionsgemäß ein $\lambda \geq 0$ und ein $\bar{x} \in K$ mit $x = \lambda \bar{x}$. Die so gewonnene Darstellung ist aber eindeutig, denn nähme man an, es gäbe noch ein weiteres $\lambda_1 > 0$ und es gäbe ein weiteres Element $\bar{x}_1 \in K$ mit $x = \lambda_1 \bar{x}_1$, dann gälte offensichtlich $\lambda \bar{x} = \lambda_1 \bar{x}_1$. Da aber mit Lemma 8.2.13 (i) die Identitäten $\|\bar{x}\|_{B_\Delta} = \|\bar{x}_1\|_{B_\Delta} = 1$ gelten, würde sofort $\lambda = \lambda_1$ und damit auch $\bar{x} = \bar{x}_1$ folgen. ■

Für die weiteren Darlegungen betrachte man nun einen geordneten Vektorraum X mit positivem Kegel X_+ und einer Basis C von X_+ . Zudem sei der Kegel X_+ **erzeugend**, das heißt, es gilt $X = X_+ - X_+$. Es folgt mit Überlegungen, wie sie in [Ell64], S. 731, im Beweis von Lemma 3 angestellt werden, daß durch die folgende Vorschrift in wohldefinierter Weise eine Seminorm definiert wird:

$$p_C : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto p_C(x) := \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda \operatorname{co}(C \cup (-C)) \}. \quad (\text{D.1})$$

Es sei angemerkt, daß es sich dabei um das sogenannte **Minkowski-** oder auch **Eich-Funktional** bezüglich der konvexen Hülle von $C \cup (-C)$ handelt.

Unter bestimmten Voraussetzungen, für die auf [Ell64], S. 731, Lemma 3 verwiesen sei, kann p_C sogar eine Norm werden, so daß X durch p_C zu einem normierten Raum wird. Andererseits kann ein geordneter Vektorraum bereits ohnehin zusätzlich zur Ordnungsstruktur eine Topologie besitzen, die ihn zu einem topologischen Vektorraum macht. In einem solchen Falle spricht man von einem **geordneten topologischen Vektorraum**. Eine solche Topologie kann natürlich auch durch eine Norm induziert werden. In einem solchen Falle wird dann von einem **geordneten normierten Raum** gesprochen. Ist der normierte Raum sogar ein Banachraum, dann liegt ein **geordneter Banachraum** vor. Falls man nun einen geordneten normierten Raum X mit positivem Kegel X_+ und zugehöriger Basis C derart vorliegen hat, daß p_C eine Norm wird, hat man es also mit zwei zunächst verschiedenen Normen zu tun. Für die hier angestrebten Einsichten kann man sich auf die sogenannten basis-normierten Räume beschränken. Dabei definiert man:

Definition D.3.9

Ein geordneter normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ mit positivem Kegel X_+ heißt **basis-normierter Raum**, wenn $X = X_+ - X_+$ gilt und wenn es eine Basis C von X_+ so gibt, daß für alle Elemente x der Menge X

$$\|x\| = p_C(x) \quad (\text{D.2})$$

gilt. Dabei sei p_C entsprechend (D.1) definiert.

Im Falle basis-normierter geordneter Räume kann man also eine Basis des positiven Kegels in der Form finden, daß das Funktional aus (D.1) wohldefiniert ist und daß es mit der eigentlichen Norm des normierten Raumes zusammenfällt. Die Norm des Ausgangsraumes erweist sich also im Falle basis-normierter Räume als von einer Basis des positiven Kegels induziert.

Es muß nun gezeigt werden, daß der Begriff der Basis-Normiertheit für die Situation der in Kapitel 8 entwickelten Theorie auch tatsächlich Anwendung findet. Bevor aber die zugehörige Aussage formuliert und bewiesen wird, ist es günstig, noch ein weiteres Konzept zur Verfügung zu stellen.

Bei Betrachtung eines Dualsystems kann man auch duale Kegel definieren.

Definition und Lemma D.3.10 Sei $\langle X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ ein Dualsystem bestehend aus zwei reellen Vektorräumen und einer reellwertigen Bilinearität $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $X \times Y$. Ist durch C in X ein konvexer Kegel mit Scheitel 0 gegeben, dann ist in Y durch

$$C' := \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \ \forall x \in C\}$$

ein konvexer Kegel mit Scheitel 0 in Y gegeben. C' wird als der bezüglich des Dualsystems $\langle X, Y, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$ **duale Kegel von C in Y** bezeichnet.

Beweis:

Die Kegeleigenschaften folgen unmittelbar aus den Linearitätseigenschaften von $\langle \cdot, \cdot \rangle$. ■

Der duale Kegel eines Kegels muß allerdings nicht echt sein. Dafür müssen noch weitere Voraussetzungen erfüllt sein, die hier nicht in Allgemeinheit diskutiert werden sollen.

In der genannten Form kann man nun bezüglich des Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ auch den zu B_+ dualen Kegel betrachten. Man definiert also:

Definition D.3.11 $B'_+ := \{y' \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y') \geq 0 \forall x \in B_+\}$.

Als erste Aussagen über die Eigenschaften von B'_+ ergeben sich, Anmerkungen und T 4.3 in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 115 zum Ausdruck bringend:

Lemma D.3.12 *Durch B'_+ ist der zu B_+ duale Kegel bezüglich des Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ gegeben. Ferner handelt es sich bei B'_+ um einen echten und in Δ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossenen Kegel. Außerdem gilt:*

$$B'_+ := \{y' \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y') \geq 0 \forall x \in K\}.$$

Beweis:

Die Aussage zum dualen Kegel ist trivial. Zum Nachweis der Echtheit sei ein $y \in B'_+ \cap (-B'_+)$ gewählt, dann gilt offensichtlich $\xi_\Delta(x, y) = 0$ für alle $x \in K$. Die Behauptung folgt nun aus dem Umstand, daß K bezüglich ξ_Δ die Menge Δ trennt. Dafür sei daran erinnert, daß \mathcal{K} gemäß Definition 8.1.1 und Satz 8.1.2 (iii) den Vektorraum B aufspannt und daß B zusammen mit dem algebraischen Dualraum bezüglich einer Bilinearität $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Dualsystem bildet, die nach Lemma 8.1.15 mit ξ_Δ auf $B \times \Delta$ zusammenfällt. Also trennt \mathcal{K} und damit erst recht K die Menge Δ bezüglich ξ_Δ .

Die Abgeschlossenheit bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ ist aufgrund der Stetigkeit von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ für jedes $x \in B_\Delta$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ offensichtlich.

Die verbleibende Aussage ergibt sich aus den folgenden Überlegungen:

$$\begin{aligned} B'_+ &= \{y \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \geq 0 \ x \in B_+\} \\ &= \{y \in \Delta \mid \lambda \xi_\Delta(x, y) \geq 0 \ \forall \lambda \geq 0 \ \forall x \in K\} \\ &= \{y \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \geq 0 \ \forall x \in K\}. \end{aligned}$$

■

B'_+ ist also bezüglich $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ der zu B_+ duale Kegel. Da B'_+ echt ist, wird dadurch Δ zu einem geordneten Banachraum. Genauer wird Δ sogar zu einem sogenannten Ordnung-Eins-Raum, wobei $\mathbf{1}$ die Rolle der Ordnung-Eins übernimmt. Derartige Zusammenhänge sind aber zum Beweis des angestrebten Darstellungstheorems nicht relevant. Daher sei auf die Literatur wie etwa [WN73], Kapitel 9 verwiesen. Wie man leicht einsieht, fällt die durch B'_+ auf Δ definierte Ordnung mit der in Definition 8.4.1 eingeführten Ordnung \leq zusammen. Es gilt also das folgende Lemma:

Lemma D.3.13 *Für alle Elemente y_1, y_2 der Menge Δ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es gilt die Relation $y_1 \leq y_2$.*
- (ii) *Für alle Elemente x aus K gilt die Ungleichung $\xi_\Delta(x, y_1) \leq \xi_\Delta(x, y_2)$.*
- (iii) *Für alle Elemente x der Menge B_+ gilt die Ungleichung $\xi_\Delta(x, y_1) \leq \xi_\Delta(x, y_2)$.*
- (iv) *$y_2 - y_1$ liegt in B'_+ .*

Nachdem nun das Konzept des dualen Kegels eingeführt wurde und nachdem auch dargelegt wurde, in welcher Weise es im Zusammenhang mit dem Dualsystem $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ zur Anwendung kommt, kann man zur Frage nach der Basis-Normiertheit von B_Δ zurückkehren. Dazu betrachte man das folgende Lemma, das T 4.6 und T 4.8 aus [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 116f. zusammenfaßt:

Lemma D.3.14 *$(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ ist basis-normierter Banachraum mit positivem Kegel B_+ und Basis K . Das heißt insbesondere, es gilt $\|x\|_{B_\Delta} = p_K(x)$ für jedes Element x aus der Menge B_Δ , wobei p_K entsprechend (D.1) definiert sei.*

Beweis:

Nachweis der Beziehung $B_\Delta = B_+ - B_+$:

Auf einem Vektorraum kann man mit [Wer97], Abschnitt VIII.1, S. 323-329 in kanonischer Weise durch eine Menge von Halbnormen eine Topologie definieren, die den Vektorraum zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum macht. Mit [Wer97], Abschnitt VIII.1, Punkt (g), S. 327 ist die vermittels $\|\cdot\|$

durch einen solchen Prozeß gewonnene lokalkonvexe Topologie auf Δ gerade die Normtopologie. Außerdem gilt für alle $y_1, y_2 \in B'_+$:

$$\begin{aligned} \|y_1 + y_2\| &= \sup_{x \in K} |\xi_\Delta(x, y_1 + y_2)| = \sup_{x \in K} \xi_\Delta(x, y_1 + y_2) \\ &= \sup_{x \in K} (\xi_\Delta(x, y_1) + \underbrace{\xi_\Delta(x, y_2)}_{\geq 0}) \\ &\geq \sup_{x \in K} \xi_\Delta(x, y_1) = \sup_{x \in K} |\xi_\Delta(x, y_1)| = \|y_1\|. \end{aligned}$$

Mit [SW99], Kapitel V, Abschnitt 3.1, S. 215 hat man damit aber hinreichende Aussagen gefunden, um auf die Normalität des Kegels B'_+ bezüglich $(\Delta, \|\cdot\|)$ schließen zu dürfen. Dabei versteht man unter einem normalen Kegel bezüglich eines topologischen Vektorraumes einen konvexen Kegel mit Scheitel 0 mit der Eigenschaft, daß es eine Umgebungsbasis der 0 gibt, die ausschließlich aus Mengen A besteht, für die $A = (A + K) \cap (A - K)$ gilt (A heißt volle Menge). Mit [AB99], Korollar 6.27, S. 251 folgt die Identität der starken Topologie und der Normtopologie. Zur Definition der starken Topologie siehe man etwa [SW99], Kapitel IV, Abschnitt 5, S. 140-147. Damit ist B'_+ auch ein normaler Kegel bezüglich Δ bei Ausstattung mit der starken Topologie. Das erlaubt bei Verwendung des Theorems und des Korollars in [SW99], Kapitel V, Abschnitt 3.5, S. 221-222 den Schluß, daß $B_\Delta = B_+ - B_+$ gilt, da mit Lemma D.3.6 die Menge B_+ abgeschlossen ist bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$.

Mithin ist die erste Eigenschaft für die Basis-Normiertheit von B_Δ gezeigt. Folglich ist auch das Minkowski-Funktional von $\text{co}(K \cup (-K))$ wohldefiniert und Seminorm, wie im Vorfeld von (D.1) erläutert wurde.

Nachweis der Identität von p_K und $\|\cdot\|_{B_\Delta}$:

Es muß jetzt also noch die Identität $\|x\|_{B_\Delta} = p_K(x)$ für alle $x \in B_\Delta$ gezeigt werden.

Dafür wird zunächst die folgende Hilfsaussage zur Verfügung gestellt:

Hilfsaussage I: Für alle $x \in B_\Delta$ gilt:

$$p_K(x) = \inf \{ \alpha + \beta > 0 \mid \alpha, \beta \geq 0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K, x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2 \}.$$

Beweis der Hilfsaussage I:

Zum Beweis der Hilfsaussage I sei $x \in B_\Delta$ vorgegeben. Es wird nun behauptet, daß die Infima zweier Mengen positiver reeller Zahlen zusammenfallen. Zum Nachweis einer solchen Aussage ist es also ausreichend, zu zeigen, daß die beiden Mengen identisch sind. Seien $\alpha, \beta \geq 0$

so gewählt, daß $\alpha + \beta > 0$ gilt und daß zwei Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ mit $x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2$ existieren. Dann gilt, da $\alpha + \beta > 0$:

$$x = (\alpha + \beta) \left(\underbrace{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \bar{x}_1 + \frac{\beta}{\alpha + \beta} (-\bar{x}_2)} \right).$$

$\in K \cup (-K)$, da $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$

Also gehört x zu $(\alpha + \beta)\text{co}(K \cup (-K))$, und somit ist $\alpha + \beta$ Element der Menge aller $\lambda > 0$ mit $x \in \lambda \text{co}(K \cup (-K))$. Sei jetzt umgekehrt ein $\lambda > 0$ mit $x \in \lambda \text{co}(K \cup (-K))$ vorgegeben. Dann existiert eine Konvexkombination $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ von Elementen aus K und $-K$, so daß $x = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ gilt. Es sei die Anzahl der Elemente aus K mit m benannt. Die Anzahl der Glieder mit Elementen aus $-K$ liegt dann bei $n - m$. Die Glieder der Summe kann man sich nun ob ihrer endlichen Anzahl derart angeordnet denken, daß zunächst alle x_i aus K und dann alle x_i aus $-K$ verwendet werden. Es reicht jetzt, den Fall $m \neq 0$ und $m \neq n$ zu betrachten, da die Fälle $m = 0$ und $m = n$ im Prinzip analog verlaufen.

$$\begin{aligned} \frac{x}{\lambda} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i \underbrace{x_i}_{\in K} - \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \underbrace{(-x_i)}_{\in K} \\ &= \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \right) \underbrace{\sum_{i=1}^m \frac{\alpha_i}{\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \right)} x_i}_{=:\bar{x}_1} - \left(\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \right) \underbrace{\sum_{i=m+1}^n \frac{\alpha_i}{\left(\sum_{j=m+1}^n \alpha_j \right)} (-x_i)}_{=:\bar{x}_2}. \end{aligned}$$

Also hat man für x eine Darstellung der Form $x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2$ gefunden, wenn man $\alpha := \lambda \sum_{j=1}^m \alpha_j$ und $\beta := \lambda \sum_{j=m+1}^n \alpha_j$ definiert. Trivialerweise sind $\alpha, \beta \geq 0$, und aufgrund der Konvexität von K sind auch \bar{x}_1, \bar{x}_2 Elemente von K . Außerdem gilt $\lambda = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha + \beta$, so daß die Menge $\{\alpha + \beta > 0 \mid \alpha, \beta \geq 0, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K, x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2\}$ auch λ als Element besitzt. Damit ist die Hilfsaussage I bewiesen.

Man kann die Hilfsaussage I nutzen, um die Normeigenschaft von p_K zu beweisen. Da p_K bereits als Halbnorm erkannt worden ist, braucht nur noch gezeigt zu werden, daß für ein $x \in B_\Delta$ aus der Gültigkeit der Relation $p_K(x) = 0$ die Identität von x und 0 folgt. Dafür wähle man ein Element $x \in B_\Delta$ mit

$p_K(x) = 0$. Dann existieren Folgen $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen und zwei Folgen $(\bar{x}_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(\bar{x}_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus K , so daß gilt:

$$\alpha_n + \beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (\text{D.3})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad x = \alpha_n \bar{x}_{1n} - \beta_n \bar{x}_{2n}.$$

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\|x\|_{B_\Delta} = \|\alpha_n \bar{x}_{1n} - \beta_n \bar{x}_{2n}\|_{B_\Delta} \leq \alpha_n \|\bar{x}_{1n}\|_{B_\Delta} + \beta_n \|\bar{x}_{2n}\|_{B_\Delta} = \alpha_n + \beta_n$$

gilt, wofür man Lemma 8.2.13 (i) bedenke, erzwingt (D.3) die Identität von x und 0. Also ist p_K eine Norm.

Der nächste Schritt besteht im Nachweis der folgenden Hilfsaussage:

Hilfsaussage II: B_Δ ist bezüglich p_K ein Banachraum.

Beweis der Hilfsaussage II:

Um die Hilfsaussage II zu zeigen, benenne man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die abgeschlossene $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Kugel des Radius $2^{(-n)}$ um die 0 mit U_n . Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x_1, x_2 \in U_{n+1}$ gilt dann:

$$\|x_1 + x_2\|_{B_\Delta} \leq \|x_1\|_{B_\Delta} + \|x_2\|_{B_\Delta} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}.$$

Also liegt $x_1 + x_2$ in U_n , und es gilt $U_{n+1} + U_{n+1} \subseteq U_n$. Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 2, [SW99], Kapitel V, Abschnitt 3.4, S. 221 erfüllt, wenn man die folgenden Tatsachen bedenkt:

- 1.) B_Δ ist $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Banachraum. B_Δ ist insbesondere bezüglich der von der Norm induzierten Topologie ein metrisierbarer topologischer Vektorraum, und bezüglich der von der Norm induzierten Uniformität liegt mit B_Δ ein vollständiger uniformer Raum vor.
- 2.) B_+ ist mit Lemma D.3.6 in B_Δ ein $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -abgeschlossener konvexer Kegel, und somit ist B_+ wegen Lemma A.4.6 (i) bezüglich der von $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ induzierten Uniformität vollständig.
- 3.) Jedes U_n ist offensichtlich kreisförmig, das heißt, daß für alle $y \in U_n$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| \leq 1$ auch αy in U_n liegt.

Mit dem so anwendbaren oben erwähnten Lemma 2, [SW99], Kapitel V, Abschnitt 3.4, S. 221 weiß man nun, daß durch die Mengenfamilie

$$V_n := (U_n \cap B_+) - (U_n \cap B_+), \quad n \in \mathbb{N},$$

eine Umgebungsbasis der 0 gegeben ist, die auf $B_\Delta = B_+ - B_+$ in eindeutiger Weise eine Topologie \mathcal{O} definiert, die B_Δ zu einem vollständigen topologischen Vektorraum macht.

Hilfsaussage II ist bewiesen, wenn man zeigen kann, daß \mathcal{O} mit der von p_K auf B_Δ induzierten Topologie zusammenfällt, denn dann sind auch die topologischen Vektorräume (B_Δ, \mathcal{O}) und (B_Δ, p_K) identisch. Da (B_Δ, \mathcal{O}) aber ein vollständiger topologischer Vektorraum ist, handelt es sich bei B_Δ bezüglich p_K um einen Banachraum. Man zeigt also jetzt die Identität der Topologie \mathcal{O} und der Topologie, die durch p_K erzeugt wird.

Mit Definition D.3.5 gilt $B_+ = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda K$, und mit Lemma 8.2.13 (i) erhält man $\|\lambda x\|_{B_\Delta} = \lambda$ für jedes $\lambda > 0$ und jedes $x \in K$. Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \left(\bigcup_{\lambda_1 \leq \frac{1}{2^n}} \lambda_1 K \right) - \left(\bigcup_{\lambda_2 \leq \frac{1}{2^n}} \lambda_2 K \right). \quad (\text{D.4})$$

Liegt nun ein Element $x \in B_\Delta$ mit $p_K(x) \leq \frac{1}{2^n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ vor, dann kann man ob der Hilfsaussage I zwei positive Zahlen α, β und zwei Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ mit $x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2$ und $\alpha + \beta \leq \frac{1}{2^n}$ angeben. Berücksichtigt man (D.4), dann folgt offensichtlich die Zugehörigkeit von x zu V_n . Betrachtet man jetzt andersherum ein Element $x \in V_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gibt es wegen (D.4) eine Darstellung von x in der Form $x = \alpha \bar{x}_1 - \beta \bar{x}_2$ mit positiven Zahlen $\alpha, \beta \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ und zwei Elementen $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$. Also gilt

$$p_K(x) \leq \alpha + \beta \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}$$

unter erneuter Ausnutzung der Hilfsaussage I. Damit erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Inklusionskette:

$$V_{n+1} \subseteq \left\{ x \in B_\Delta \mid p_K(x) \leq \frac{1}{2^n} \right\} \subseteq V_n. \quad (\text{D.5})$$

Durch das System der Mengen $\{x \in B_\Delta \mid p_K(x) \leq \frac{1}{2^n}\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind offensichtlich Umgebungen der 0 bezüglich der von der Norm p_K induzierten Topologie gegeben, wie sich mit [vQ01], Kapitel 2, Abschnitt B, Beispiel 2.11 (b), S. 27 ergibt. Obiges Mengensystem ist aber sogar eine Basis des Umgebungssystems der 0 bezüglich der von der Norm p_K induzierten Topologie, denn zu jeder offenen p_K -Kugel um die 0 kann man ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ so finden, daß $\{x \in B_\Delta \mid p_K(x) \leq \frac{1}{2^n}\}$ in

der vorgegebenen offenen p_K -Kugel enthalten ist. Auch das Mengensystem $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ war weiter oben bereits als Umgebungsbasis der 0 erkannt worden. Somit bedeutet (D.5) die Identität der zu den beiden Basen gehörigen Umgebungssysteme der 0, denn zu jedem Element des einen Systems kann man eine im Sinne der Mengeninklusion kleinere Menge im jeweils anderen System finden. Da aber nach [SW99], Kapitel I, Abschnitt 1.1, S. 14 topologische Vektorräume durch Angabe des Umgebungssystems eines beliebigen Punktes in vollständiger Weise bestimmt sind, fallen deshalb auch die von p_K induzierte Topologie und die Topologie \mathcal{O} zusammen. Damit ist Hilfsaussage II bewiesen.

Mit Lemma 8.4.6 folgt nun für jedes $x \in B_\Delta$:

$$\begin{aligned} p_K(x) &= \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda \operatorname{co}(K \cup (-K)) \} \\ &\geq \inf \left\{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda \overline{\operatorname{co}}^{\|\cdot\|_{B_\Delta}}(K \cup (-K)) \right\} \\ &= \inf \{ \lambda > 0 \mid x \in \lambda B_{\Delta|1} \} \geq \|x\|_{B_\Delta}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Dabei ergibt sich das letzte Ungleichheitszeichen aus der Überlegung, daß für jedes $\lambda > 0$ und jedes $\bar{x} \in B_{\Delta|1}$ mit $x = \lambda \bar{x}$ folgt: $\|x\|_{B_\Delta} = \lambda \|\bar{x}\|_{B_\Delta} \leq \lambda$.

Nun gilt aber folgende Hilfsaussage:

Hilfsaussage III:

Sei X ein Vektorraum, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X . Gilt dann für alle $x \in X$ die Beziehung $\|x\|_1 \leq \|x\|_2$, dann ist die von $\|\cdot\|_2$ induzierte Topologie \mathcal{O}_2 feiner als die von $\|\cdot\|_1$ induzierte Topologie \mathcal{O}_1 .

Beweis der Hilfsaussage III:

Zum Beweis der Hilfsaussage III betrachte man die identische Abbildung in der folgenden Form $id : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$. Die identische Abbildung ist offensichtlich linear. Aber bei der angegebenen Ausstattung des Urbild- und des Bildraumes mit Topologien ist die Abbildung auch stetig, denn es gilt nach Voraussetzung $\|id(x)\|_1 = \|x\|_1 \leq \|x\|_2$ für alle $x \in X$. Damit ist aber \mathcal{O}_2 feiner als \mathcal{O}_1 , wie sich mit [Bou66a], Kapitel I, §2.2, Def. 3 und Prop. 3, S. 28-29 ergibt. Also ist die Hilfsaussage III bewiesen.

Also liefert die Gültigkeit von (D.6) für jedes $x \in B_\Delta$, daß die von p_K induzierte Topologie feiner ist als die der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ zugehörige Topologie. Wegen Korollar 2 in [SW99], Kapitel II, Abschnitt 2.1, S. 78 müssen die beiden Topologien dann aber sogar identisch sein.

Die Identität der Topologien hat zur Folge, daß die Menge der auf B_Δ linearen und bezüglich p_K stetigen Funktionale mit der Menge $B'_\Delta (= \Delta !)$ zusammenfällt. Kann man nun zeigen, daß die Norm $\|\cdot\|$, also die Dualraum-Norm von $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$, und die Dualraum-Norm von (B_Δ, p_K) zusammenfallen, dann folgt mit Korollar III.1.7, [Wer97], S. 98 auch die Identität der Normen $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ und p_K .

Es bleibt also, die Beziehung $\|y\| = \sup_{p_K(x) \leq 1} |y(x)|$ für alle $y \in B'_\Delta$ zu beweisen. Sei dafür ein y aus B'_Δ gewählt. Man erhält mit (D.6) die Mengeninklusion $B_{\Delta|1} \supseteq \{x \in B_\Delta \mid p_K(x) \leq 1\}$. Das bedeutet unter Berücksichtigung des isometrischen Isomorphismus zwischen Δ und B'_Δ im Sinne der zu Beginn des Abschnitts gemachten Anmerkungen:

$$\|y\| = \sup_{\substack{x \in B_{\Delta|1}, \\ x \neq 0}} |\xi_\Delta(x, y)| \geq \sup_{p_K(x) \leq 1} |y(x)|.$$

Andererseits gilt aber $p_K(x) \leq 1$ für jedes $x \in K$, denn wegen $x = 1 \cdot x$ gehört 1 zur Menge $\{\lambda > 0 \mid x \in \lambda \operatorname{co}(K \cup (-K))\}$. Damit ist K Teilmenge von $\{x \in B_\Delta \mid p_K(x) \leq 1\}$, so daß mit Lemma 8.2.13 (ii) gilt:

$$\sup_{p_K(x) \leq 1} |y(x)| \geq \sup_{x \in K} |\xi_\Delta(x, y)| = \|y\|.$$

Also sind die betrachteten Dualraum-Normen und damit auch die Normen $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ und p_K identisch.

Damit wurde nun $B_\Delta = B_+ - B_+$ und $\|\cdot\|_{B_\Delta} = p_K$ gezeigt. Also ist die Basis-Normiertheit von B_Δ bezüglich des positiven Kegels mit Basis K nachgewiesen. ■

Mit [Ell68], Abschnitt 1 und 2, S. 989 gilt die Aussage:

Lemma D.3.15 *Sei X ein basis-normierter Raum mit positivem normabgeschlossenem Kegel X_+ . Ferner bezeichne X' den Norm-Dualraum von X , und der bezüglich des Dualsystems $\langle X, X' \rangle$ gebildete duale Kegel von X_+ heiße X'_+ . Dann ist für jedes y aus dem Norm-Inneren von X'_+ durch*

$$C_y := \{x \in X_+ \mid y(x) = 1\} \tag{D.7}$$

eine Basis von X_+ gegeben. Bezüglich der Basis (D.7) definiert die Vorschrift

$$X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|_y := p_{C_y}(x)$$

auf X eine Norm, wenn Definition (D.1) für p_{C_y} verwandt wird. Alle Normen des Typs $\|x\|_y$ sind äquivalent. Ferner gilt:

$$C_y = \{x \in X_+ \mid \|x\|_y = 1\}.$$

Im Falle des physikalisch relevanten Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ kann man das obige Lemma auch auf den Fall $y = \mathbf{1}$ anwenden, denn die offene $\|\cdot\|$ -Kugel um $\mathbf{1}$ mit Radius $\frac{1}{2}$ liegt offenbar vollständig in B'_+ . Das Lemma liefert dann die Aussage, daß durch die Menge $C_1 := \{x \in B_+ \mid \xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1\}$ eine Basis von B_+ gegeben ist und daß dadurch eine Norm p_{C_1} auf B_Δ definiert wird. Bedenkt man die Definition D.3.5 von B_+ , dann ist unmittelbar klar, daß es sich bei C_1 gerade um die Basis K handelt. Somit fällt auch p_{C_1} mit p_K zusammen, und man erhält $K = \{x \in B_\Delta \mid p_K(x) = 1\}$. Bedenkt man nun die Aussage von Lemma D.3.14, dann folgt mit obigem Lemma insbesondere, daß $\|\cdot\|_{B_\Delta} = p_{C_1}$ gilt und daß damit $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ äquivalent ist zu jeder Norm des Typs $\|\cdot\|_y$ mit y aus dem Norm-Inneren von B'_+ .

Man kann nun die folgende Definition vornehmen:

Definition D.3.16

Sei X ein geordneter Vektorraum mit positivem Kegel X_+ , und sei C eine Basis von X_+ . Für ein Element x der Menge X heißt die Darstellung $x = \bar{x} - (\bar{x} - x)$ eine **positive Zerlegung**, wenn \bar{x} in der Menge $X_+ \cap (x + X_+)$ liegt.

Sei X ein basis-normierter Raum, bezeichne X' den Norm-Dualraum von X , und heiße X'_+ der bezüglich des Norm-Dualsystems gebildete duale Kegel von X_+ . Liegt y im Norm-Inneren von X'_+ , dann heißt eine positive Zerlegung $x = \bar{x} - (\bar{x} - x)$ eines Elementes $x \in X$ eine **minimale Zerlegung bezüglich C_y** , wenn gilt:

$$\|x\|_y = \|\bar{x}\|_y + \|\bar{x} - x\|_y.$$

Bemerkung: Die für den Fall positiver Zerlegung angegebene Bedingung der Zugehörigkeit von \bar{x} zur Menge $X_+ \cap (x + X_+)$ ist äquivalent zu der Bedingung, daß sowohl \bar{x} als auch $\bar{x} - x$ Elemente von X_+ , also dem positiven Kegel, sind. Deshalb spricht man von einer positiven Zerlegung.

Erinnert man sich an die Begriffe des Stützfunktions und des Stützpunktes in Definition 8.3.11, stehen alle Begriffe zur Verfügung, um die eingangs erwähnten Theoreme von A.J. Ellis formulieren zu können.

Satz D.3.17 (Theorem 4(i) von A.J. Ellis aus [Ell68], S. 995)

Sei X ein basis-normierter Raum mit positivem normabgeschlossenem Kegel X_+ . Sei y ein Element aus dem Norm-Inneren des bezüglich des Norm-Dualsystems gebildeten dualen Kegels von X'_+ . Dann sind für alle Elemente x, \bar{x} der Menge X die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) y ist Stützfunctional von $X_+ \cap (x + X_+)$, und \bar{x} ist ein zugehöriger Stützpunkt.
- (ii) $x = \bar{x} - (\bar{x} - x)$ ist eine minimale Zerlegung bezüglich der Norm $\|\cdot\|_y$.

Satz D.3.18 (Theorem 5 von A.J. Ellis aus [Ell68], S. 996)

Sei X ein basis-normierter Banachraum (!) mit positivem normabgeschlossenem Kegel X_+ . Sei X' der Norm-Dualraum von X , und sei X'_+ der duale Kegel von X_+ in X' . Dann liegt für jedes x aus X die Menge aller y aus dem Norm-Inneren von X'_+ , die Stützfunctionale von $X_+ \cap (x + X_+)$ sind, normdicht in X'_+ .

Die so zur Verfügung stehenden Theoreme ermöglichen es jetzt, die Formulierung eines Darstellungstheorems für die Elemente von B_Δ vorzunehmen, das Ludwig im Rahmen von T 4.10 in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 117 darstellt:

Satz D.3.19 (Darstellungstheorem für die Elemente von B_Δ)

Zu jedem Element x der Menge B_Δ und zu jeder echt positiven reellen Zahl ε existieren zwei reelle Zahlen $\alpha, \beta \geq 0$, zwei Elemente x_1, x_2 der Menge K sowie zwei Elemente y_0, y'_0 der Menge $\Delta_{|1|}$ so, daß die folgenden Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned} x = \alpha x_1 - \beta x_2 \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_1, y_0) \geq 1 - \varepsilon, \quad \xi_\Delta(x_1, y'_0) = 1, \\ \text{so wie} \quad \xi_\Delta(x_2, y_0) = -1, \quad \xi_\Delta(x_2, y'_0) \leq -1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Beweis:

Mit Lemma D.3.14 ist $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$ ein basis-normierter Banachraum mit positivem Kegel B_+ und zugehöriger Basis K . Der Kegel B_+ ist mit Lemma D.3.6 abgeschlossen bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$. Der Raum $(\Delta, \|\cdot\|)$ ist der zu B_Δ norm-duale Raum, und B'_+ ist mit Lemma D.3.12 der bezüglich des Norm-Dualsystems gewonnene duale Kegel von B_+ . Außerdem liegt $\mathbf{1}$ mit Lemma D.3.12 in B'_+ , denn es gilt mit Lemma 8.2.13 (i) für jedes $x \in K$ die Aussage $\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1 \geq 0$.

Damit steht ein Grundgerüst an Aussagen zur Verfügung, das den Beweis der folgenden vier Aussagen erlaubt.

Hilfsaussagen:

- (i) Für alle $x \in B_\Delta$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $y_e \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, so daß erstens y_e ein innerer Punkt von B'_+ ist, zweitens y_e ein Stützfunctional von $B_+ \cap (x + B_+)$ ist, und drittens $\|\mathbf{1} - y_e\| < \varepsilon$ gilt.

- (ii) Für alle $x \in B_\Delta$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren ein $y_e \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ und ein $\bar{x} \in B_+ \cap (x + B_+)$ so, daß erstens y_e innerer Punkt von B'_+ ist, daß zweitens $\|x\|_{y_e} = \|\bar{x}\|_{y_e} + \|x - \bar{x}\|_{y_e}$ gilt und daß drittens $\|\mathbf{1} - y_e\| < \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist.
- (iii) Für jedes $y_e \in \Delta$ wird definiert:

$$I_e := \{y \in \Delta \mid -y_e \leq y \leq y_e\}.$$

Dann ist I_e kompakt bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$, und es gilt für alle Elemente x aus B_Δ :

$$\|x\|_{y_e} = \sup_{y \in I_e} |\xi_\Delta(x, y)|.$$

- (iv) Zu jedem $x \in B_\Delta$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren ein $y_e \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit $\|\mathbf{1} - y_e\| < \frac{\varepsilon}{2}$, zwei reelle Zahlen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0$ und zwei Elemente \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 der Menge $\{z \in B_+ \mid \xi_\Delta(z, y_e) = 1\}$ derart, daß sowohl $x = \tilde{\alpha}\tilde{x}_1 - \tilde{\beta}\tilde{x}_2$ als auch $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \sup_{y \in I_e} |\xi_\Delta(x, y)|$ gilt.

Beweis der Hilfsaussagen:

zu (i): Es genügt, die Hilfsaussage (i) für alle $x \in B_\Delta$ und ε mit $0 < \varepsilon < 2$ zu beweisen, denn, wenn die Aussage für ein $\varepsilon > 0$ und ein $x \in B_\Delta$ gilt, dann gilt sie auch für alle $\varepsilon_1 \geq \varepsilon$.

Es seien jetzt also ein $x \in B_\Delta$ und ein ε mit $0 < \varepsilon < 2$ gewählt. Dann existiert mit Satz D.3.18 ein y aus dem Norm-Inneren von B'_+ derart, daß einerseits y ein Stützfunctional von $B_+ \cap (x + B_+)$ ist und daß andererseits $\|\mathbf{1} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Es wird nun gezeigt, daß mit $y_e := y/\|y\|$ das gesuchte Element gefunden ist. Nach Voraussetzung gilt $\varepsilon < 2$, und somit erhält man $\|\mathbf{1} - y\| < 1$. Es gibt folglich eine echt positive Zahl η , so daß $\|\mathbf{1} - y\| \leq 1 - \eta$ gilt. Das bedeutet unter Berücksichtigung von Lemma 8.2.13 (ii), daß für alle $x \in K$ gilt:

$$-1 + \eta \leq \xi_\Delta(x, -\mathbf{1} + y) = -1 + \xi_\Delta(x, y) \leq 1 - \eta.$$

Daraus ergeben sich drei wichtige Konsequenzen. Erstens gilt $\xi_\Delta(x, y) > 0$ für alle $x \in K$. Also folgt wiederum mit Lemma 8.2.13 (ii) die Ungleichung $\|y\| \geq 0$, wodurch die Wohldefiniertheit von y_e gesichert ist. Zweitens ist $y_e \geq \mathbf{0}$. Da aber trivialerweise $\|y_e\| = 1$ gilt, gehört y_e zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$. Drittens erhält man:

$$\delta := \inf_{x_1 \in K} \xi_\Delta(x_1, y_e) = \inf_{x_1 \in K} \xi_\Delta(x_1, \frac{y}{\|y\|}) \geq \frac{\eta}{\|y\|} > 0.$$

Da δ echt positiv ist, gibt es eine offene $\|\cdot\|$ -Kugel M_y^δ um y_e mit Radius δ . Trivialerweise gilt aber für jedes Element $y_1 \in M_y^\delta$ und jedes $x \in K$:

$$\xi_\Delta(x, y_1) \geq \inf_{x_1 \in K} \xi_\Delta(x_1, y_e) = \delta > 0.$$

Das bedeutet nun gerade, daß es sich bei M_y^δ um eine Teilmenge von B'_+ handelt. Also gibt es eine offene $\|\cdot\|$ -Kugel in B'_+ um y_e , und somit liegt mit y_e ein innerer Punkt von B'_+ vor.

Zum endgültigen Beweis der Behauptung muß man damit noch zeigen, daß y_e Stützfunktional von $B_+ \cap (x + B_+)$ ist und daß die Normabschätzung von y_e zur $\mathbf{1}$ gilt.

Für ein beliebiges Stützfunktional f einer Menge ist auch λf mit $\lambda \neq 0$ ein Stützfunktional derselben Menge, wie man unmittelbar einsieht. Da die Norm von y echt positiv ist, wie oben gezeigt wurde, bezeichnet mit y auch y_e ein Stützfunktional von $B_+ \cap (x + B_+)$. Damit bleibt nur noch, die Gültigkeit der Normabschätzung zu zeigen. Wegen $\|\mathbf{1} - y\| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1} - y_e\| &= \left\| \mathbf{1} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq \|\mathbf{1} - y\| + \left\| y - \frac{y}{\|y\|} \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \left\| \left(1 - \frac{1}{\|y\|}\right) y \right\| = \frac{\varepsilon}{2} + \left| 1 - \frac{1}{\|y\|} \right| \|y\| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \left| \|y\| - 1 \right| = \frac{\varepsilon}{2} + \left| \|\mathbf{1}\| - \|y\| \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \|\mathbf{1} - y\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist Hilfsaussage (i) bewiesen.

zu (ii): Zum Beweis der Hilfsaussage (ii) wähle man $x \in B_\Delta$ und $\varepsilon > 0$. Indem man Hilfsaussage (i) auf x und $\frac{\varepsilon}{2}$ anwendet, gewinnt man ein $y_e \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, das sowohl Stützfunktional von $B_+ \cap (x + B_+)$ als auch innerer Punkt von B'_+ ist und das der Ungleichung $\|\mathbf{1} - y_e\| < \frac{\varepsilon}{2}$ genügt. Gemäß Definition 8.3.11 (ii) gibt es zu jedem Stützfunktional von $B_+ \cap (x + B_+)$ auch einen Stützpunkt \bar{x} aus $B_+ \cap (x + B_+)$. Es liegt also insbesondere eine positive Zerlegung $x = \bar{x} - (\bar{x} - x)$ vor. Mit Satz D.3.17 ist die Zerlegung aber sogar minimal bezüglich $\|\cdot\|_{y_e}$, das heißt, es gilt: $\|x\|_{y_e} = \|\bar{x}\|_{y_e} + \|\bar{x} - x\|_{y_e}$. Damit ist die Hilfsaussage (ii) bewiesen.

zu (iii): Zunächst wird die Kompaktheit gezeigt. Mit dem Satz von Alaoglu, [Wer97], Korollar VIII.3.12, S. 344, ist $\Delta_{|1|}$ kompakt bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$, denn es gilt $\sigma(\Delta, B_\Delta) = \sigma(B'_\Delta, B_\Delta)$ mit Satz 8.1.23. Zum Beweis der behaupteten Kompaktheitsaussage genügt es wegen Satz A.6.6 (i) also, zu zeigen, daß I_e eine Teilmenge von $\Delta_{|1|}$ ist und daß I_e abgeschlossen ist in $\Delta_{|1|}$ bezüglich der Unterraumtopologie von $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ auf $\Delta_{|1|}$. Nun genügt aber jedes $y \in I_e$ wegen der Zugehörigkeit von y_e zur Menge $[0, 1]_\Delta$ der folgenden Ungleichungskette:

$$-1 \leq -y_e \leq y \leq y_e \leq 1.$$

Das heißt, bei I_e handelt es sich um eine Teilmenge von $\Delta_{|1|}$. Außerdem ist I_e abgeschlossen in Δ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$, wie die folgende Überlegung zeigt. Ist ein Netz $(y_i)_{i \in I} \subseteq I_e$ gegeben, das bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen ein Element $y \in \Delta$ konvergiert, dann folgt für jedes $x \in K$ aufgrund der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Stetigkeit von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ für den Grenzwert die Ungleichungskette

$$-\xi_\Delta(x, y_e) \leq \xi_\Delta(x, y) \leq \xi_\Delta(x, y_e).$$

Also liegt y auch in I_e . Damit folgt mit [Bou66a], Kapitel I, §3.1, Prop. 1, S. 36 die Eigenschaft der Abgeschlossenheit von I_e in $\Delta_{|1|}$ bezüglich der Unterraumtopologie von $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ auf $\Delta_{|1|}$. Also ist auch die Kompaktheit von I_e bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ bewiesen.

Damit kann jetzt zum Beweis des zweiten Teils der Hilfsaussage (iii) übergegangen werden. Lemma D.3.14 besagt, daß B_Δ basis-normiert ist bezüglich des konvexen Kegels B_+ und der Basis K . Es gilt also insbesondere $B_\Delta = B_+ - B_+$. Mit Lemma D.3.15 und den daran anschließenden Bemerkungen weiß man, daß $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ die durch die Basis K gewonnene Norm ist. Lemma D.3.15 besagt weiter, daß erstens die Menge

$$C_{y_e} := \{x_1 \in B_+ \mid \xi_\Delta(x_1, y_e) = 1\} \quad (\text{D.8})$$

auch eine Basis von B_+ darstellt, daß zweitens auf B_Δ die Vorschrift

$$B_\Delta \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\|_{y_e} := p_{C_{y_e}}(x)$$

eine Norm definiert und daß drittens die so gewonnene Norm äquivalent zur Norm $p_K = \|\cdot\|_{B_\Delta}$ ist. Die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{y_e}$ und $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ bedingt, daß die Norm-Dualräume von B_Δ bezüglich der beiden Normen zumindest als Mengen zusammenfallen. Die Äquivalenz der Normen impliziert nämlich die Tatsache, daß ein lineares Funktional auf B_Δ genau

dann stetig bezüglich $\|\cdot\|_{y_e}$ ist, wenn es bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ stetig ist. Also erhält man Δ auch für $(B_\Delta, \|\cdot\|_{y_e})$ als Norm-Dualraum. Allerdings sind $\|\cdot\|_{y_e}$ und $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ nicht identisch, so daß die Normen der Dualräume nicht identisch sind. Die Identität der Dualräume als Mengen aber impliziert insbesondere die Identität der kanonischen Bilinearitäten, das heißt, ξ_Δ liefert die kanonische Bilinearität unabhängig davon, ob man B_Δ mit $\|\cdot\|_{y_e}$ oder mit $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ ausstattet. Demzufolge kommt man auch in beiden Fällen bei Bildung des zu B_+ dualen Kegels zu dem Kegel B'_+ , und damit kommt man auch zur selben Halbordnung auf Δ . In kanonischer Weise definiert für jedes $y \in \Delta$ der Ausdruck

$$\sup \{ |\xi_\Delta(x, y)| \mid x \in B_\Delta \text{ mit } \|x\|_{y_e} \leq 1 \} \quad (\text{D.9})$$

die Dualraum-Norm für den Norm-Dualraum von $(B_\Delta, \|\cdot\|_{y_e})$. Man kann jetzt zeigen, daß die abgeschlossene Norm-Einheitskugel von Δ bezüglich der Norm aus (D.9) mit der Menge I_e zusammenfällt. Dafür wird zunächst gezeigt, daß die Norm aus (D.9) mit $\sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|$ identisch ist, also für alle $y \in \Delta$ gilt:

$$\sup \{ |\xi_\Delta(x, y)| \mid x \in B_\Delta \text{ mit } \|x\|_{y_e} \leq 1 \} = \sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|. \quad (\text{D.10})$$

Zum Nachweis von (D.10) sei zum ersten bemerkt, daß mit Lemma D.3.15 für jedes $x \in C_{y_e}$ die Beziehung $\|x\|_{y_e} = 1$ gilt, so daß man für alle $y \in \Delta$ unmittelbar erhält:

$$\sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)| \leq \sup \{ |\xi_\Delta(x, y)| \mid x \in B_\Delta \text{ mit } \|x\|_{y_e} \leq 1 \}. \quad (\text{D.11})$$

Da aber der rechte Ausdruck aus (D.11) gerade die Norm aus (D.9) ist, besagt (D.11) insbesondere, daß der Ausdruck $\sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|$ für jedes $y \in \Delta$ wohldefiniert ist.

Damit kann man jetzt die folgende Aussage beweisen:

$$\forall x \in B_\Delta \quad \forall y \in \Delta : \quad |\xi_\Delta(x, y)| \leq \|x\|_{y_e} \sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|. \quad (\text{D.12})$$

Seien zum Nachweis ein $x \in B_\Delta$ und ein $y \in \Delta$ vorgegeben. Für ein $\lambda > 0$ mit $x \in \lambda \text{co}(C_{y_e} \cup (-C_{y_e}))$ gelten nun die folgenden Überlegungen. Es gibt eine Familie $(\alpha_i)_{i=1}^n$ echt positiver reeller Zahlen mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, und

es gibt eine Familie $(x_i)_{i=1}^n$ von Elementen aus $(C_{y_e} \cup (-C_{y_e}))$, so daß $x = \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ gilt. Damit erhält man nun:

$$\begin{aligned} |\xi_\Delta(x, y)| &= \lambda \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_\Delta(x_i, y) \right| \\ &\leq \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i |\xi_\Delta(x_i, y)| \\ &\leq \lambda \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \right) \sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Dabei ist bezüglich der letzten Ungleichung anzumerken, daß für alle $\bar{x} \in B_\Delta$ die Gleichung $|\xi_\Delta(\bar{x}, y)| = |\xi_\Delta(-\bar{x}, y)|$ gilt. Somit kann man in der Summe (D.13) Vorzeichen so einfügen, daß in der ersten Komponente der Bilinearität ausschließlich Elemente aus C_{y_e} zur Anwendung kommen. Wegen $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ erhält man also, daß für alle $\lambda > 0$ mit $x \in \lambda \text{co}(C_{y_e} \cup (-C_{y_e}))$ die folgende Ungleichung gilt:

$$|\xi_\Delta(x, y)| \leq \lambda \sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|.$$

Bedenkt man jetzt die Definition der Norm $\|\cdot\|_{y_e}$ als Minkowski-Funktional entsprechend (D.1), dann ergibt sich unmittelbar die Aussage in (D.12).

Die Gültigkeit von (D.11) und (D.12) garantiert aber schon die Gültigkeit von (D.10), denn mit Hilfe von (D.12) gilt für jedes $y \in \Delta$:

$$\begin{aligned} &\sup \{ |\xi_\Delta(x, y)| \mid x \in B_\Delta \text{ mit } \|x\|_{y_e} \leq 1 \} \\ &\leq \left(\sup \{ \|x\|_{y_e} \mid x \in B_\Delta \text{ mit } \|x\|_{y_e} \leq 1 \} \right) \sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)| \\ &= \sup_{\bar{x} \in C_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)|. \end{aligned}$$

(D.11) liefert die Umkehrung, so daß die Aussage in (D.10) gilt.

Mit der so in (D.10) gewonnenen alternativen Darstellung der Dualraum-Norm in Δ ergibt sich unmittelbar die behauptete Identität der Menge

I_e und der Normeinheitskugel von Δ bezüglich der Norm aus (D.9), denn es gilt:

$$\begin{aligned}
& \{y \in \Delta \mid \sup_{\bar{x} \in \tilde{C}_{y_e}} |\xi_\Delta(\bar{x}, y)| \leq 1\} \\
&= \{y \in \Delta \mid -1 \leq \xi_\Delta(\bar{x}, y) \leq 1 \ \forall \bar{x} \in C_{y_e}\} \\
&= \{y \in \Delta \mid -\xi_\Delta(\bar{x}, y_e) \leq \xi_\Delta(\bar{x}, y) \leq \xi_\Delta(\bar{x}, y_e) \ \forall \bar{x} \in C_{y_e}\} \\
&= \{y \in \Delta \mid \xi_\Delta(\bar{x}, -y_e) \leq \xi_\Delta(\bar{x}, y) \leq \xi_\Delta(\bar{x}, y_e) \ \forall \bar{x} \in B_+\} \\
&= \{y \in \Delta \mid -y_e \leq y \leq y_e\} = I_e.
\end{aligned}$$

Benennt man die Norm-Einheitskugel von Δ unter der Norm (D.9) mit E_Δ , wurde also $E_\Delta = I_e$ gezeigt. Damit folgt nun mit Korollar III.1.7, [Wer97], S. 98 für alle $x \in B_\Delta$:

$$\|x\|_{y_e} = \sup_{y \in E_\Delta} |\xi_\Delta(x, y)| = \sup_{y \in I_e} |\xi_\Delta(x, y)|.$$

Also ist die Hilfsaussage (iii) bewiesen.

zu (iv): Zum Nachweis der Hilfsaussage (iv) seien $x \in B_\Delta$ und $\varepsilon > 0$ gewählt. Dann existieren mit Hilfsaussage (ii) ein Element $y_e \in [0, 1]_\Delta$ und ein Element $\bar{x} \in B_+ \cap (x + B_+)$ so, daß erstens y_e innerer Punkt von B'_+ ist, daß zweitens $\|x\|_{y_e} = \|\bar{x}\|_{y_e} + \|x - \bar{x}\|_{y_e}$ gilt und daß drittens $\|\mathbf{1} - y_e\| < \frac{\varepsilon}{2}$ erfüllt ist. Die Zugehörigkeit von \bar{x} zur Menge $B_+ \cap (x + B_+)$ impliziert, daß auch $\bar{x} - x$ in B_+ liegt. Mit Lemma D.3.15 ist nun bekannt, daß durch $C_{y_e} := \{x_1 \in B_+ \mid \xi_\Delta(x_1, y_e) = 1\}$ eine Basis von B_+ gegeben ist. Also gibt es $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0$ und Elemente $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B_+$, so daß $\bar{x} = \tilde{\alpha}\bar{x}_1$ und $\bar{x} - x = \tilde{\beta}\bar{x}_2$ gilt. Folglich erhält man:

$$\begin{aligned}
\xi_\Delta(\bar{x}_1, y_e) &= \xi_\Delta(\bar{x}_2, y_e) = 1, \\
x &= \tilde{\alpha}\bar{x}_1 - \tilde{\beta}\bar{x}_2.
\end{aligned}$$

Der Beweis der Hilfsaussage (iv) kann nun abgeschlossen werden, denn es gilt mit Lemma D.3.15 die Gleichungskette $\|\bar{x}_1\|_{y_e} = \|\bar{x}_2\|_{y_e} = 1$, und so erhält man mit Hilfsaussage (iii):

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} &= \tilde{\alpha}\|\bar{x}_1\|_{y_e} + \tilde{\beta}\|\bar{x}_2\|_{y_e} = \|\bar{x}\|_{y_e} + \|x - \bar{x}\|_{y_e} \\
&= \|x\|_{y_e} = \sup_{y \in I_e} |\xi_\Delta(x, y)|.
\end{aligned}$$

Also ist die Hilfsaussage (iv) bewiesen.

Die jetzt zur Verfügung stehenden Hilfsaussagen (i) - (iv) ermöglichen es nun, die eigentliche Behauptung zu beweisen.

Seien dafür ein $x \in B_\Delta$ und ein $\varepsilon > 0$ gewählt. Bedenkt man die Definition von B_+ in Definition D.3.5, dann existieren mit der Hilfsaussage (iv) ein $y_e \in [0, 1]_\Delta$ mit $\|\mathbf{1} - y_e\| < \frac{\varepsilon}{2}$, zwei reelle Zahlen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \geq 0$, zwei reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und zwei Elemente $x_1, x_2 \in K$, so daß gilt:

$$\xi_\Delta(\lambda_1 x_1, y_e) = \xi_\Delta(\lambda_2 x_2, y_e) = 1, \quad (\text{D.14})$$

$$x = \tilde{\alpha} \lambda_1 x_1 - \tilde{\beta} \lambda_2 x_2, \quad (\text{D.15})$$

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \sup_{y \in I_e} |\xi_\Delta(x, y)|. \quad (\text{D.16})$$

Mit der in Hilfsaussage (iii) gezeigten Kompaktheit von I_e folgt aus der Stetigkeit von $\xi_\Delta(x, \cdot)$ auf $(\Delta, \sigma(\Delta, B_\Delta))$, daß das Supremum aus (D.16) auf I_e auch angenommen wird. Das heißt, es existiert ein $\tilde{y}_0 \in I_e$ mit $|\xi_\Delta(x, \tilde{y}_0)| = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$. Ferner liefert (D.15) auch $\xi_\Delta(x, \tilde{y}_0) = \tilde{\alpha} \lambda_1 \xi_\Delta(x_1, \tilde{y}_0) - \tilde{\beta} \lambda_2 \xi_\Delta(x_2, \tilde{y}_0)$, so daß gilt:

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = |\tilde{\alpha} \lambda_1 \xi_\Delta(x_1, \tilde{y}_0) - \tilde{\beta} \lambda_2 \xi_\Delta(x_2, \tilde{y}_0)|. \quad (\text{D.17})$$

Man kann also ein $\tilde{y}_0 \in I_e$ mit

$$\tilde{\alpha} (1 - \lambda_1 \xi_\Delta(x_1, \tilde{y}_0)) = \tilde{\beta} (-1 - \lambda_2 \xi_\Delta(x_2, \tilde{y}_0)) \quad (\text{D.18})$$

finden, denn entweder ist das Argument der Betragsfunktion auf der rechten Seite von (D.17) bereits positiv oder man geht andernfalls einfach von \tilde{y}_0 zu $-\tilde{y}_0$ über, wobei man dann der Einfachheit halber denselben Namen \tilde{y}_0 verwendet. Mit (D.14) und der Zugehörigkeit von \tilde{y}_0 zu I_e weiß man, daß die Beziehungen

$$\xi_\Delta(x_1, \tilde{y}_0) \leq \xi_\Delta(x_1, y_e) = \frac{1}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_2, \tilde{y}_0) \geq \xi_\Delta(x_2, -y_e) = -\frac{1}{\lambda_2}$$

gelten. Damit ergeben sich unmittelbar die Ungleichungen $1 - \lambda_1 \xi_\Delta(x_1, \tilde{y}_0) \geq 0$ und $-1 - \lambda_2 \xi_\Delta(x_2, \tilde{y}_0) \leq 0$. Also ist der Term auf der linken Seite in (D.18) größer oder gleich 0, während der Term auf der rechten Seite in (D.18) kleiner oder gleich 0 ist. Die Gleichung (D.18) kann also nur erfüllt sein, wenn beide Seiten identisch 0 sind. Sind $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ echt positiv, dann folgt sofort $\xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \tilde{y}_0) = 1$ und $\xi_\Delta(\lambda_2 x_2, \tilde{y}_0) = -1$. Die Fälle, in denen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ nicht echt positiv sind, führen in einfacher Weise auf dasselbe Ergebnis.

Man kann also sagen, daß in I_e ein Element \tilde{y}_0 existiert mit der Eigenschaft:

$$\xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \tilde{y}_0) = 1 \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(\lambda_2 x_2, \tilde{y}_0) = -1. \quad (\text{D.19})$$

Setzt man nun $\alpha := \tilde{\alpha} \lambda_1$ und $\beta := \tilde{\beta} \lambda_2$, dann gilt mit (D.15)

$$x = \alpha x_1 - \beta x_2.$$

Folglich hat man eine Darstellung von x durch Elemente von K in der behaupteten Art vorliegen. Es bleibt also noch, zu zeigen, daß man Elemente aus $\Delta_{|1|}$ gewinnen kann, so daß die behaupteten Beziehungen gelten.

Bevor derartige Elemente angegeben werden und die behaupteten Eigenschaften bewiesen werden, soll noch gezeigt werden, daß außer für den Fall, daß $\varepsilon = 2$ gewählt wurde, gilt:

$$\lambda_1 < \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}} \quad \text{und} \quad \lambda_2 < \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}. \quad (\text{D.20})$$

Zum Beweis der beiden Ungleichungen aus (D.20) sei $\varepsilon \neq 2$ angenommen. Ferner sei daran erinnert, daß wegen Lemma 8.2.13 (i) die drei Beziehungen $\xi_\Delta(x_1, \mathbf{1}) = 1$, $\xi_\Delta(x_2, \mathbf{1}) = 1$ und $\|x_1\|_{B_\Delta} = \|x_2\|_{B_\Delta} = 1$ gelten, da x_1, x_2 Elemente von K sind. Bedenkt man nun noch die Relation $\|\mathbf{1} - y_e\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und Lemma 8.1.12 kann man mit Hilfe der bisherigen Untersuchungen die folgenden Ungleichungen gewinnen:

$$\begin{aligned} |\lambda_1 - 1| &\stackrel{(\text{D.14})}{=} |\lambda_1 \xi_\Delta(x_1, \mathbf{1}) - \lambda_1 \xi_\Delta(x_1, y_e)| = |\xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \mathbf{1} - y_e)| \\ &\leq \|\lambda_1 x_1\|_{B_\Delta} \|\mathbf{1} - y_e\| < \lambda_1 \|x_1\|_{B_\Delta} \frac{\varepsilon}{2} = \lambda_1 \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt $-\lambda_1 \frac{\varepsilon}{2} < \lambda_1 - 1 < \lambda_1 \frac{\varepsilon}{2}$, und damit folgt die Ungleichungskette:

$$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < \lambda_1 < \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}.$$

In völlig analoger Weise erhält man das Ergebnis für λ_2 zu:

$$\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} < \lambda_2 < \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Also gelten insbesondere die Ungleichungen aus (D.20).

Damit kann man zum Beweis der eigentlichen Aussage zurückkehren. Es wird definiert:

$$y_0 := \tilde{y}_0 + y_e - \mathbf{1} \quad \text{und} \quad y'_0 := -y_e + \tilde{y}_0 + \mathbf{1}.$$

Offensichtlich liegen y_0 und y'_0 in Δ , denn Δ besitzt die Vektorraumeigenschaft mit $+$ als Additionsoperation. Außerdem handelt es sich bei y_0 und y'_0 auch um Elemente aus $\Delta_{|1|}$, denn es gilt für alle $x \in K$

$$-\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) \leq -\xi_\Delta(x, y_e) \leq \xi_\Delta(x, \tilde{y}_0) \leq \xi_\Delta(x, y_e) \leq \xi_\Delta(x, \mathbf{1}),$$

und damit erhält man für alle $x \in K$:

$$\begin{aligned} -1 &= -\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) \leq -\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) + \xi_\Delta(x, \tilde{y}_0) + \xi_\Delta(x, y_e) = \xi_\Delta(x, y_0) \\ &\leq -\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) + 2\xi_\Delta(x, y_e) \leq 1. \end{aligned}$$

Also gilt $-1 \leq \xi_\Delta(x, y_0) \leq 1$ für alle $x \in K$. Das heißt, man erhält $\|y_0\| \leq 1$. Es ergibt sich für y'_0 :

$$\begin{aligned} -1 \leq -\xi_\Delta(x, y_e) &= -1 - \xi_\Delta(x, y_e) + 1 = \xi_\Delta(x, -\mathbf{1}) - \xi_\Delta(x, y_e) + \xi_\Delta(x, \mathbf{1}) \\ &\leq \xi_\Delta(x, -y_e) + \xi_\Delta(x, \tilde{y}_0) + \xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = \xi_\Delta(x, y'_0) \leq \xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist auch y'_0 Element von $\Delta_{[1]}$, so daß nur noch die behaupteten Gleichungen und Ungleichungen zu zeigen sind.

Unter Verwendung von (D.14) und (D.19) ergeben sich zunächst die folgenden Gleichungen für beliebiges $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x_1, y_0) &= \frac{1}{\lambda_1} (\xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \tilde{y}_0) + \xi_\Delta(\lambda_1 x_1, y_e) - \xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \mathbf{1})) \\ &= \frac{1}{\lambda_1} (1 + 1 - \lambda_1) = \frac{2}{\lambda_1} - 1, \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x_2, y_0) &= \frac{1}{\lambda_2} (\xi_\Delta(\lambda_2 x_2, \tilde{y}_0) + \xi_\Delta(\lambda_2 x_2, y_e) - \xi_\Delta(\lambda_2 x_2, \mathbf{1})) \\ &= \frac{-1 + 1 - \lambda_2}{\lambda_2} = -1, \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x_1, y'_0) &= \frac{1}{\lambda_1} (-\xi_\Delta(\lambda_1 x_1, y_e) + \xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \tilde{y}_0) + \xi_\Delta(\lambda_1 x_1, \mathbf{1})) \\ &= \frac{-1 + 1 + \lambda_1}{\lambda_1} = 1, \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x_2, y'_0) &= \frac{1}{\lambda_2} (-\xi_\Delta(\lambda_2 x_2, y_e) + \xi_\Delta(\lambda_2 x_2, \tilde{y}_0) + \xi_\Delta(\lambda_2 x_2, \mathbf{1})) \\ &= -\frac{2}{\lambda_2} + 1. \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

Mit den Aussagen aus (D.22) und (D.23) sind bereits die beiden behaupteten Gleichungen bewiesen, so daß noch die beiden Ungleichungen gezeigt werden müssen. Für den Fall $\varepsilon = 2$ ergibt sich sofort aus (D.21) und (D.24), da λ_1 und λ_2 echt größer 0 sind:

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x_1, y_0) &= \underbrace{\frac{2}{\lambda_1}}_{>0} - 1 > -1 = 1 - \varepsilon, \\ \xi_\Delta(x_2, y'_0) &= -\underbrace{\frac{2}{\lambda_2}}_{<0} + 1 < 1 = -1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Für den Fall $\varepsilon \neq 2$ ergibt sich mit Hilfe der Ungleichungen aus (D.20):

$$\begin{aligned}\xi_{\Delta}(x_1, y_0) &= \frac{2}{\lambda_1} - 1 > 2 - \varepsilon - 1 = 1 - \varepsilon, \\ \xi_{\Delta}(x_2, y'_0) &= -\frac{2}{\lambda_2} + 1 < -2 + \varepsilon + 1 = -1 + \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Anhang E

Hilfsaussagen zu Kapitel 9

Die folgenden Erörterungen schildern Aussagen, die zur Gewinnung der Hauptaxiome des Messens benötigt werden.

Nach der Erörterung der physikalischen Gleichwertigkeit von Aussagen, auf die im Rahmen der Motivation der Axiome AV 1.1 und AV 1.2 zurückgegriffen wird, erfolgt der Beweis der Identität der Mengen \overline{L} und $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$, die ebenfalls der Gewinnung des Axioms AV 1.2 dient. In der Folge wird gezeigt, daß die physikalisch motivierte Aussage A'_5 mit Axiom AV 2s äquivalent ist. Der fünfte Abschnitt widmet sich einer Aussage, die zur Begründung des Begriffs des Entscheidungseffektes dient. Die daran anschließenden beiden Abschnitte liefern Aussagen für die Darstellungstheoreme von \hat{L} und \overline{K} . Dem folgen äquivalente Formulierungen der Koexistenz von Effektpaaren. Zum Abschluß wird eine äquivalente Formulierung der Dimension von Seiten von K bewiesen.

E.1 Die physikalische Gleichwertigkeit von A_1 und A'_1 zur Motivation des Axioms AV 1.1

Zur besseren Übersicht werden die beiden relevanten Aussagen aus Unterabschnitt 9.1.1 nochmals aufgeführt:

A_1 Gibt es zwei Effekte g_1, g_2 in \mathcal{L} , einen Zustand w_0 in \mathcal{K} und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\mu(w_0, g_1) < \varepsilon_1$ und $\mu(w_0, g_2) < \varepsilon_2$, dann gibt es einen weiteren Effekt g in \mathcal{L} sowie zwei echt positive und ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits der Ungleichung $\mu(w_0, g) < \delta$ entsprochen wird und daß andererseits $\mu(w, g_i) - \eta \leq \mu(w, g)$ für jedes w aus \mathcal{K} und $i \in \{1, 2\}$ gilt.

A'_1 Gibt es zwei Effekte g_1, g_2 in \mathcal{L} , einen Zustand x_0 in K und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\hat{\mu}(x_0, g_1) < \varepsilon_1$ und $\hat{\mu}(x_0, g_2) < \varepsilon_2$, dann gibt es einen weiteren Effekt g in \mathcal{L} sowie zwei echt positive und ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits der Ungleichung $\hat{\mu}(x_0, g) < \delta$ entsprochen wird und daß andererseits $\hat{\mu}(x, g_i) - \eta \leq \hat{\mu}(x, g)$ für jedes x in K und $i \in \{1, 2\}$ gilt.

Wie im Unterabschnitt 9.1.1 erwähnt wurde, ist der Ausdruck „physikalisch klein“ keine exakte Aussage, so daß weder A_1 noch A'_1 als mathematische Aussage aufgefaßt werden kann. Allerdings unabhängig davon, was man konkret mit „physikalisch klein“ innerhalb der beiden obigen Aussagen meint, ist offensichtlich, daß die Aussage A_1 aus der Aussage A'_1 folgt. Es ist daher das Ziel des restlichen Abschnitts, zu zeigen, daß man ausgehend von der Aussage A_1 durch plausible Anforderungen an den Ausdruck „physikalisch klein“ auch die Aussage A'_1 gewinnen kann.

Seien dafür g_1, g_2 aus \mathcal{L} , x_0 aus K und zwei echt positive physikalisch kleine Zahlen ε_1 und ε_2 gegeben, so daß $\hat{\mu}(x_0, g_1) < \varepsilon_1$ und $\hat{\mu}(x_0, g_2) < \varepsilon_2$ gilt. Es existiert dann eine Folge $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K} mit $w_{0n} \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x_0$. Also existiert ein $\bar{n}_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq \bar{n}_0$ gilt: $\mu(w_{0n}, g_1) < \varepsilon_1$ und $\mu(w_{0n}, g_2) < \varepsilon_2$. Damit liefert die Aussage A_1 für jedes $n \geq \bar{n}_0$ ein Element g_n aus \mathcal{L} und echt positive, physikalisch kleine reelle Zahlen δ_n und η_n , so daß gilt:

$$\mu(w_{0n}, g_n) < \delta_n, \quad (\text{E.1})$$

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall w \in \mathcal{K} : \quad \mu(w, g_i) - \eta_n \leq \mu(w, g_n). \quad (\text{E.2})$$

Man wähle zur Bequemlichkeit anstatt der Folge $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ ihre Restfolge ab dem \bar{n}_0 -ten Glied, so daß die obigen Eigenschaften für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Der Einfachheit halber sei die Restfolge wiederum mit $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet.

Die Konvergenz $w_{0n} \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x_0$ erlaubt mit den Sätzen 8.1.16 und 8.2.14 die folgenden Überlegungen. Es gilt zunächst:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 : \sup_{y \in \Delta, y \neq \mathbf{0}} \frac{|\mu(w_{0m}, y) - \hat{\mu}(x_0, y)|}{\|y\|} < \varepsilon.$$

Wegen Lemma 8.1.8 ergibt sich:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 \forall g \in \mathcal{L} : |\mu(w_{0m}, g) - \hat{\mu}(x_0, g)| < \varepsilon.$$

Damit folgt insbesondere:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 : |\mu(w_{0m}, g_m) - \hat{\mu}(x_0, g_m)| < \varepsilon. \quad (\text{E.3})$$

Da das Supremum einer Menge reeller Zahlen bezüglich des Absolutbetrages als Topologie immer beliebig genau durch Elemente der Menge approximiert werden kann, ist es berechtigt, auch die Zahlen $\sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ und $\eta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ als „physikalisch klein“ anzusehen. Außerdem ist es möglich, ein $\varepsilon > 0$ so zu wählen, daß $\delta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n + \varepsilon$ immer noch „physikalisch klein“ ist. Man denke etwa an eine Situation, bei der $\delta = 10^{-4}$ ist. Wenn man dann $\varepsilon = 10^{-10}$ wählt, kann man die Summe aus δ und ε sicher berechtigterweise immer noch als „physikalisch klein“ bezeichnen. Man wähle nun ein ε derart, daß δ noch „physikalisch klein“ ist, und man wähle $n > n_0$ mit n_0 entsprechend (E.3) in Abhängigkeit des verwendeten ε . Dann gilt mit (E.1):

$$\hat{\mu}(x_0, g_n) \leq \mu(w_{0n}, g_n) + |\mu(w_{0n}, g_n) - \hat{\mu}(x_0, g_n)| < \delta_n + \varepsilon \leq \delta.$$

Für w aus \mathcal{K} gilt mit (E.2) für jedes $i \in \{1, 2\}$

$$\hat{\mu}(w, g_i) - \eta = \mu(w, g_i) - \eta \leq \mu(w, g_i) - \eta_n \leq \mu(w, g_n),$$

und damit folgt insbesondere $\hat{\mu}(w, g_i - g_n) \leq \eta$ mit $i \in \{1, 2\}$. Wählt man jetzt ein x aus K , dann existiert eine Folge $(w_l)_{l \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K} mit $w_l \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$. So ergibt sich für $i \in \{1, 2\}$:

$$\hat{\mu}(x, g_i - g_n) = \lim_{l \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(w_l, g_i - g_n)}_{\leq \eta} \leq \eta.$$

Also erhält man die Beziehung: $\hat{\mu}(x, g_i) - \eta \leq \hat{\mu}(x, g_n)$. Damit ist aber gezeigt, daß in g_n ein Element aus \mathcal{L} gefunden ist, das die behaupteten Eigenschaften hat.

E.2 Die physikalische Gleichwertigkeit von A_3 und A'_3 zur Motivation des Axioms AV 1.2

Die Erläuterung der physikalischen Gleichwertigkeit der Aussagen A_3 und A'_3 läuft im Prinzip völlig analog zu den Erörterungen bei den Aussagen A_1 und A'_1 in Abschnitt E.1. Deshalb wird hier mehrfach auf Abschnitt E.1 verwiesen, wodurch sich gewisse Abkürzungen ergeben. Wie in Unterabschnitt 9.1.2 erwähnt, soll der Ausdruck „physikalisch klein“ in derselben Weise verstanden werden wie im Falle der Aussagen A_1 und A'_1 .

Der Übersicht halber werden auch hier die beteiligten Aussagen A_3 und A'_3 aus dem Fließtext wiederholt.

A_3 Gibt es einen Effekt g aus $\mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, einen Zustand w_0 aus \mathcal{K} und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\mu(w_0, g) < \varepsilon_1$, dann gibt es einen weiteren Effekt \bar{g} aus \mathcal{L} sowie echt positive, ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits die Relation $\mu(w_0, \bar{g}) < \delta$ erfüllt ist und daß andererseits für jedes w aus \mathcal{K} mit $\mu(w, g) \geq \|g\| - \varepsilon_2$ auch $\mu(w, \bar{g}) \geq 1 - \eta$ gilt.

A'_3 Gibt es einen Effekt g in $\mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$, einen Zustand x_0 in K und echt positive, aber kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\hat{\mu}(x_0, g) < \varepsilon_1$, dann gibt es einen weiteren Effekt \bar{g} in \mathcal{L} sowie zwei echt positive, ebenfalls kleine reelle Zahlen δ, η derart, daß einerseits die Relation $\hat{\mu}(x_0, \bar{g}) < \delta$ erfüllt ist und daß andererseits für jedes x aus K mit $\hat{\mu}(x, g) \geq \|g\| - \varepsilon_2$ auch $\hat{\mu}(x, \bar{g}) \geq 1 - \eta$ gilt.

Unabhängig davon, was konkret mit „physikalisch klein“ gemeint ist, wird A_3 offensichtlich von der Aussage A'_3 impliziert. Somit besteht die Aufgabe für den Rest des Abschnitts darin, zu zeigen, daß man mit denselben plausiblen Anforderungen an den Ausdruck „physikalisch klein“ wie im Abschnitt E.1 von der Aussage A_3 ausgehend zu der Aussage A'_3 gelangt.

Seien dafür ein $g \in \mathcal{L}$ und ein $x_0 \in K$ gewählt und außerdem positive, aber physikalisch kleine reelle Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ mit $\hat{\mu}(x_0, g) < \varepsilon_1$ vorgegeben. Dann existiert eine Folge $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K} , die bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen x_0 konvergiert. Durch Wahl der geeigneten Restfolge von $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ analog zum Vorgehen in Abschnitt E.1 existieren

mit A_3 zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element \overline{g}_n aus \mathcal{L} und zwei positive, aber physikalisch kleine reelle Zahlen δ_n, η_n derart, daß gilt:

$$\mu(w_{0n}, \overline{g}_n) < \delta_n, \quad (\text{E.4})$$

$$\forall w \in \mathcal{K} : \quad \mu(w, g) \geq \|g\| - \varepsilon_2 \implies \mu(w, \overline{g}_n) \geq 1 - \eta_n. \quad (\text{E.5})$$

Wiederum analog zu den Überlegungen in Abschnitt E.1 kann man auch die Zahlen $\sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ und $\eta := \sup_{n \in \mathbb{N}} \eta_n$ als positive, aber betragsmäßig physikalisch kleine reelle Zahlen auffassen. Außerdem kann man wiederum ein $\varepsilon > 0$ derart wählen, daß durch $\delta := \varepsilon + \sup_{n \in \mathbb{N}} \delta_n$ immer noch eine physikalisch kleine Zahl gegeben ist. Die Normkonvergenz der Folge $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ impliziert in Analogie zur Ableitung von (E.3) die Aussage:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 : \quad |\mu(w_{0m}, \overline{g}_m) - \hat{\mu}(x_0, \overline{g}_m)| < \varepsilon. \quad (\text{E.6})$$

Sei jetzt mit (E.6) ein n_0 bezüglich des oben ausgesuchten ε gewählt. Dann gilt für ein $n \geq n_0$ wegen (E.4):

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(x_0, \overline{g}_n) &\leq \hat{\mu}(w_{0n}, \overline{g}_n) + |\hat{\mu}(x_0, \overline{g}_n) - \mu(w_{0n}, \overline{g}_n)| \\ &\leq \delta_n + \varepsilon \leq \delta. \end{aligned}$$

Für $w \in \mathcal{K}$ mit $\mu(w, g) \geq \|g\| - \varepsilon_2$ gilt wegen (E.5): $\mu(w, \overline{g}_n) \geq 1 - \eta_n \geq 1 - \eta$. Liegt nun x in K , dann existiert eine Folge $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{K} , die bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen x konvergiert. Also gilt:

$$\hat{\mu}(x, \overline{g}_n) = \lim_{i \rightarrow \infty} \underbrace{\mu(w_i, \overline{g}_n)}_{\geq 1 - \eta} \geq 1 - \eta.$$

Mit g_n existiert somit ein Element in \mathcal{L} mit den gesuchten Eigenschaften.

E.3 Die Identität der Mengen $\overline{\overline{\mathcal{L}}}$ und $[0, 1]_\Delta$

Es soll gezeigt werden, daß die in Abschnitt 9.1.2 definierte Menge $\overline{\overline{\mathcal{L}}}$ wohldefiniert ist und daß sie mit der Menge $[0, 1]_\Delta$ zusammenfällt.

Zum Nachweis der Wohldefiniertheit von $\overline{\overline{\mathcal{L}}}$ ist es günstig, die folgende Menge einzuführen:

Definition E.3.1

Mit T_L wird die Menge aller konvexen und bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossenen Teilmengen N von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ bezeichnet, die die folgenden Eigenschaften haben:

- (i) N umfaßt $\hat{\mathcal{L}}$.
- (ii) Bezeichnet y ein Element aus N , und bezeichnet λ eine echt positive reelle Zahl mit $\|\lambda y\| \leq 1$, dann liegt λy in N .
- (iii) Symbolisiert y ein Element aus N , dann liegt $\mathbf{1} - y$ in N .

$\overline{\overline{L}}$ wird definiert als das bezüglich der Mengeninklusion kleinste Element aus T_L .

Um die Wohldefiniertheit zu zeigen, notiere man folgendes Lemma:

Lemma E.3.2 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ liegt in T_L .
- (ii) Sei mit einer Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit durch $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie aus T_L gegeben, dann liegt $\bigcap_{i \in I} N_i$ in T_L .

Beweis:

zu (i): Die Eigenschaft aus Definition E.3.1 (i), die Konvexität und die Abgeschlossenheit bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ sind Inhalt von Lemma 8.4.4. Zum Nachweis von Punkt (ii) aus Definition E.3.1 wähle man ein $y \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta \setminus \{\mathbf{0}\}$, da der Fall $y = \mathbf{0}$ trivial ist, und eine echt positive reelle Zahl λ , so daß $\|\lambda y\| \leq 1$. Da $\lambda > 0$ ist und da $y \geq \mathbf{0}$ gilt, ist auch $\lambda y \geq \mathbf{0}$. Andererseits gilt wegen $\|\lambda y\| \leq 1$ für alle $x \in K$:

$$\lambda \xi_\Delta(x, y) = \xi_\Delta(x, \lambda y) \leq 1.$$

Damit gilt also auch $\lambda y \leq \mathbf{1}$, womit die Zugehörigkeit von λy zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ bewiesen wäre. Damit bedarf es noch des Nachweises von Punkt (iii) der Definition E.3.1. Ist ein y Element von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, dann gilt $0 \leq \xi_\Delta(x, y) \leq 1$ für alle $x \in K$. Damit folgt aber trivialerweise auch $0 \leq \xi_\Delta(x, \mathbf{1} - y) \leq 1$. Also ist $\mathbf{1} - y$ Element von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, und die Behauptung ist bewiesen.

zu (ii): Sei I eine Indexmenge beliebiger Mächtigkeit, und sei $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie aus T_L . Es sei $N := \bigcap_{i \in I} N_i$ definiert. Bekanntermaßen ist der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener, konvexer Mengen wiederum abgeschlossen und konvex, wie man etwa [Köt66], §16, S. 177 entnimmt. Wenn für alle

$i \in I$ die Mengeninklusion $\hat{L} \subseteq N_i$ gilt, dann muß auch $\hat{L} \subseteq N$ gelten. Es bleibt also noch, die Punkte (ii) und (iii) aus Definition E.3.1 nachzuweisen. Bezüglich Punkt (ii) seien ein $y \in N$ und ein $\lambda > 0$ gewählt. Dann ist aber $y \in N_i$ für jedes $i \in I$, und somit ist auch $\lambda y \in N_i$ für jedes $i \in I$. Das heißt aber, daß λy zur Menge N gehört. In völlig analoger Form ergibt sich auch der noch fehlende Punkt (iii). ■

Damit ist der Nachweis der Wohldefiniertheit von $\overline{\overline{L}}$ trivial, denn mit Lemma E.3.2 (i) ist T_L nicht-leer. Mit Punkt (ii) desselben Lemmas ist der Schnitt aller Elemente von T_L ebenfalls Element von T_L . Also existiert in T_L bezüglich der Mengeninklusion ein kleinstes Element.

Zum angestrebten Beweis der Identität der beiden Mengen $\overline{\overline{L}}$ und $[0, 1]_\Delta$ werden zunächst einige Hilfsaussagen zur Verfügung gestellt, die sich in der Beweisskizze finden, die in [Lud85a], Kapitel VI, §1.4, S. 162 hinsichtlich der anvisierten Aussage entworfen wird. Es sei daran erinnert, daß $\Delta_{|1|}$ die Normeinheitskugel von Δ bezüglich der Norm $\|\cdot\|$ bezeichnet.

Lemma E.3.3 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Bezeichnet y ein Element aus $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$, dann liegt $-y$ in $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$.*
- (ii) *$2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ enthält $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ als Elemente. Ferner ist $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ konvex, und es gilt die Mengeninklusion $\overline{\overline{L}} \subseteq 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$.*
- (iii) *$\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ ist der von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ aufgespannte Untervektorraum von Δ , also der kleinste Untervektorraum von Δ , der $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ umfaßt.*
- (iv) *Sei y_0 ein Element von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ derart, daß y_0 und $\mathbf{1}$ linear unabhängig sind. Dann ist*

$$y_1 := \frac{\mathbf{1} - \frac{\overline{y}_0}{\|\overline{y}_0\|}}{\left\| \mathbf{1} - \frac{\overline{y}_0}{\|\overline{y}_0\|} \right\|} \quad (\text{E.7})$$

ein Element von $\overline{\overline{L}}$. Bezeichnet man den von y_0 und $\mathbf{1}$ aufgespannten zweidimensionalen Untervektorraum von Δ mit E , dann gilt:

$$E \cap [0, 1]_\Delta = \{(1 - \lambda_1) y_1 + \lambda_2 (\mathbf{1} - y_1) \mid 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1\}.$$

- (v) Bezeichnet y_0 ein Element der Menge $(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}) \setminus \{\mathbf{0}\}$, dann liegt $\frac{y_0}{\|y_0\|}$ in $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$.
- (vi) Es gilt: $\left(\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}) \right) \cap \Delta_{|\cdot|} = 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$.
- (vii) $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ ist bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossen in Δ .
- (viii) Δ ist der einzige bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossene Untervektorraum von Δ , der $\hat{\mathcal{L}}$ umfaßt.

Beweis:

zu (i): Sei $y \in 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$, dann existiert ein $\overline{y}_0 \in \overline{\overline{L}}$ mit $y = 2\overline{y}_0 - \mathbf{1}$. Damit gilt weiter:

$$\begin{aligned} -y &= -2\overline{y}_0 + \mathbf{1} = 2(\mathbf{1} - \overline{y}_0) - 2 \cdot \mathbf{1} + \mathbf{1} \\ &= 2(\mathbf{1} - \overline{y}_0) - \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Da mit \overline{y}_0 auch $\mathbf{1} - \overline{y}_0$ Element von $\overline{\overline{L}}$ ist, liegt auch $-y$ in $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$.

zu (ii): Zunächst wird gezeigt, daß $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zu $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ gehören. Da $\hat{\mathcal{L}} \subseteq \overline{\overline{L}}$ gilt, liegt insbesondere $\mathbf{1}$ in $\overline{\overline{L}}$. Also ist $2 \cdot \mathbf{1} - \mathbf{1} = \mathbf{1}$ Element von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$. Außerdem folgt mit Lemma 8.3.5 (i) die Zugehörigkeit von $\frac{1}{2}\mathbf{1}$ zu $\hat{\mathcal{L}}$, und damit folgt mit Punkt (i) aus Definition E.3.1 auch die Zugehörigkeit von $\frac{1}{2}\mathbf{1}$ zu $\overline{\overline{L}}$. Folglich ist damit auch $2 \cdot (\frac{1}{2}\mathbf{1}) - \mathbf{1} = \mathbf{0}$ Element von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$. Damit kann zum Beweis der Konvexität übergegangen werden.

Seien $y_1, y_2 \in 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ und eine reelle Zahl λ mit $0 < \lambda \leq 1$ gewählt, dann existieren Elemente $\overline{y}_1, \overline{y}_2 \in \overline{\overline{L}}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2 &= \lambda(2\overline{y}_1 - \mathbf{1}) + (1 - \lambda)(2\overline{y}_2 - \mathbf{1}) \\ &= 2(\underbrace{\lambda\overline{y}_1 + (1 - \lambda)\overline{y}_2}_{\in \overline{\overline{L}}, \text{ da } \overline{\overline{L}} \text{ konvex}}) - \mathbf{1}. \end{aligned}$$

Also ist auch $\lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2$ Element von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$, womit die Konvexität von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ nachgewiesen ist.

Um die Mengeneinklusion $\overline{\overline{L}} \subseteq 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ zu zeigen, wähle man ein Element $y \in \overline{\overline{L}}$. Definiert man $\overline{y}_0 := \frac{1}{2}(y + \mathbf{1})$, folgt aufgrund der Konvexität von $\overline{\overline{L}}$ und der

Zugehörigkeit von $\mathbf{1}$ zu $\overline{\overline{L}}$, daß \overline{y}_0 auch ein Element von $\overline{\overline{L}}$ ist. Trivialerweise gilt $y = 2\overline{y}_0 - \mathbf{1}$, so daß y auch Element von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ ist.

zu (iii): Es wird zunächst gezeigt, daß $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ Untervektorraum von Δ ist.

Seien $y_1, y_2 \in \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ gewählt. Dabei werden die Fälle $\alpha_1 = 0$ oder $\alpha_2 = 0$ oder $y_1 = \mathbf{0}$ oder $y_2 = \mathbf{0}$ ob ihrer Trivialität ausgeschlossen. Bezeichnet sgn die Signum-Funktion, dann sind mit obigem Punkt (i) sowohl $\text{sgn}(\alpha_1) y_1$ als auch $\text{sgn}(\alpha_2) y_2$ Elemente von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 &= |\alpha_1| \text{sgn}(\alpha_1) y_1 + |\alpha_2| \text{sgn}(\alpha_2) y_2 \\ &= (|\alpha_1| + |\alpha_2|) \left(\frac{|\alpha_1|}{|\alpha_1| + |\alpha_2|} \text{sgn}(\alpha_1) y_1 + \frac{|\alpha_2|}{|\alpha_1| + |\alpha_2|} \text{sgn}(\alpha_2) y_2 \right). \end{aligned}$$

Die im obigen Punkt (ii) bewiesene Konvexität von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ liefert, daß der Term innerhalb der großen Klammern ebenfalls Element von $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ ist. Also ist $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ Element von $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$, womit die Untervektoreigenschaft von $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ bezüglich Δ bewiesen wurde.

Ein Untervektorraum von Δ , der $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ umfaßt, muß insbesondere abgeschlossen gegenüber der Skalarmultiplikation sein. Ein solcher Untervektorraum muß demnach auch die Elemente von $\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ enthalten. Also ist gezeigt, daß

$\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ der kleinste $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ umfassende Untervektorraum von Δ ist.

zu (iv): Da y_0 zur Menge $2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ gehört, ist $\overline{y}_0 := \frac{1}{2}(y_0 + \mathbf{1})$ Element von $\overline{\overline{L}}$. Wegen Punkt (ii) aus Definition E.3.1 ist damit auch $\overline{y}_0 / \|\overline{y}_0\|$ Element von $\overline{\overline{L}}$. Punkt (iii) aus Definition E.3.1 sichert die Zugehörigkeit von $\mathbf{1} - \overline{y}_0 / \|\overline{y}_0\|$ zu $\overline{\overline{L}}$, so daß mit Hilfe von Punkt (ii) aus Definition E.3.1 auch die Zugehörigkeit von

$$y_1 := \frac{\mathbf{1} - \frac{\overline{y}_0}{\|\overline{y}_0\|}}{\left\| \mathbf{1} - \frac{\overline{y}_0}{\|\overline{y}_0\|} \right\|}$$

zur Menge $\overline{\overline{L}}$ garantiert ist; die Wohldefiniiertheit von y_1 ist durch die lineare Unabhängigkeit von y_0 und $\mathbf{1}$ gesichert. Wiederum mit Punkt (iii) aus Definition E.3.1 folgt auch, daß $\mathbf{1} - y_1$ ein Element von $\overline{\overline{L}}$ ist.

Die Identität der beiden Mengen wird durch Nachweis der beiden Mengeneinklusionen „ \subseteq “ und „ \supseteq “ gezeigt.

„ \subseteq “ : Sei dafür ein Element y aus $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ gewählt.

Da y_0 und $\mathbf{1}$ linear unabhängig sind, ist y_1 kein Vielfaches von $\mathbf{1}$. Also hat man in y_1 und $\mathbf{1} - y_1$ zwei linear unabhängige Elemente des zweidimensionalen Vektorraumes E vorliegen. Mithin muß es zwei reelle Zahlen λ_1, λ_2 so geben, daß gilt:

$$y = (1 - \lambda_1) y_1 + \lambda_2 (\mathbf{1} - y_1).$$

Es bleibt somit, zu zeigen, daß $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ und $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ gilt.

Da $\|y_1\| = 1$ gilt, erhält man:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in K : \xi_\Delta(x, y_1) > 1 - \varepsilon. \quad (\text{E.8})$$

Da $\|\bar{y}_0/\|\bar{y}_0\|\| = 1$ ist, gilt eine analoge Aussage auch für $\|\bar{y}_0/\|\bar{y}_0\|\|$, so daß man für y_1 zur folgenden Aussage kommt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in K : \xi_\Delta(x, y_1) < \varepsilon. \quad (\text{E.9})$$

Damit kann nun der Nachweis für die Eigenschaften von λ_1, λ_2 durch Widerspruchsbeweis mit Hilfe einer Fallunterscheidung vorgenommen werden:

(A) Es sei angenommen, es wären $\lambda_2 > 1$ und $1 - \lambda_1 \geq 0$. Dann wäre $\varepsilon := 1 - \frac{1}{\lambda_2}$ echt positiv. Somit existierte mit (E.8) ein $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, y_1) > 1 - \varepsilon$, so daß man erhielte:

$$\xi_\Delta(x, y) = \underbrace{(1 - \lambda_1) \xi_\Delta(x, y_1)}_{\geq 0} + \lambda_2 (1 - \xi_\Delta(x, y_1)) > \lambda_2 (1 - \varepsilon) = 1.$$

Das würde aber einen Widerspruch darstellen, denn wegen der Zugehörigkeit von y zu $\bar{L} \subseteq [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ gilt $0 \leq \xi_\Delta(x, y) \leq 1$ für alle $x \in K$.

(B) Es sei nun angenommen, es wären $\lambda_2 > 1$ und $1 - \lambda_1 < 0$. Dann wäre $\varepsilon := \frac{1 - \lambda_2}{1 - \lambda_1 - \lambda_2}$ echt positiv. Also existierte mit (E.9) ein $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, y_1) < \varepsilon$, so daß sich ergäbe:

$$\xi_\Delta(x, y) > (1 - \lambda_1)\varepsilon + \lambda_2 (1 - \varepsilon) = 1.$$

Damit läge ein Widerspruch vor, da y Element von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ist.

- (C) Es sei $\lambda_2 < 0$ und $1 - \lambda_1 \geq 0$ angenommen. Dann erhalte man $\varepsilon := \frac{-\lambda_2}{1 - \lambda_1 - \lambda_2} > 0$, so daß (E.9) die Existenz eines $x \in K$ derart sicherte, daß $\xi_\Delta(x, y_1) < \varepsilon$ wäre. Damit erhalte man

$$\xi_\Delta(x, y) < (1 - \lambda_1)\varepsilon + \lambda_2(1 - \varepsilon) = 0,$$

womit man abermals einen Widerspruch zur Eigenschaft $y \in [0, 1]_\Delta$ vorliegen hätte.

- (D) Man betrachte nun den Fall, daß $\lambda_2 < 0$ und $1 - \lambda_1 < 0$ sei. Wähle man $\varepsilon := 1 > 0$, so existierte (E.9) zufolge ein $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, y_1) < 1$. Damit erhalte man:

$$\xi_\Delta(x, y) = \underbrace{(1 - \lambda_1) \xi_\Delta(x, y_1)}_{<0} + \underbrace{\lambda_2}_{<0} \underbrace{(1 - \xi_\Delta(x, y_1))}_{>0} < 0.$$

Also läge erneut ein Widerspruch zur Eigenschaft $y \in [0, 1]_\Delta$ vor.

Die Fälle (A) - (D) garantieren bereits $0 \leq \lambda_2 \leq 1$, so daß nur noch die folgenden beiden Fälle betrachtet werden müssen:

- (E) Im Falle $\lambda_1 > 1$ wäre $\varepsilon := \frac{1 - \lambda_1}{1 - \lambda_1 - \lambda_2} > 0$, somit existierte mit (E.8) ein $x \in K$ dergestalt, daß $\xi_\Delta(x, y_1) > 1 - \varepsilon$ gelten würde. Folglich erhalte man nun:

$$\xi_\Delta(x, y) < (1 - \lambda_1)(1 - \varepsilon) + \lambda_2\varepsilon = 0.$$

Also läge ein Widerspruch vor, denn es ist $y \in [0, 1]_\Delta$.

- (F) Für den Fall $\lambda_1 < 0$ wäre $\varepsilon := 1 - \frac{1}{1 - \lambda_1} > 0$, so daß mit (E.8) ein $x \in K$ mit $\xi_\Delta(x, y_1) > 1 - \varepsilon$ existierte. Somit würde gelten:

$$\xi_\Delta(x, y) = (1 - \lambda_1) \xi_\Delta(x, y_1) + \underbrace{\lambda_2 (1 - \xi_\Delta(x, y_1))}_{\geq 0} > (1 - \lambda_1)(1 - \varepsilon) = 1.$$

Damit ist auch der letzte Fall zum Widerspruch geführt.

Es muß also $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ und $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ gelten, das heißt, y ist Element der Menge $\{(1 - \lambda_1)y_1 + \lambda_2(\mathbf{1} - y_1) \mid 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1\}$.

„ \supseteq “ : Sei ein $y := (1 - \lambda_1)y_1 + \lambda_2(\mathbf{1} - y_1)$ mit $0 \leq \lambda_1 \leq 1$ und $0 \leq \lambda_2 \leq 1$ gewählt. Da y_1 und $\mathbf{1} - y_1$ Elemente von E sind, wie aus den Erläuterungen zu Beginn der „ \subseteq “-Richtung hervorgeht, liegt ob der Vektorraumeigenschaft von E auch y in E . Außerdem sind y_1 und $\mathbf{1} - y_1$ auch Elemente von $[0, 1]_\Delta$, da $\overline{L} \subseteq [0, 1]_\Delta$ ist. Deshalb gilt:

$$\mathbf{0} \leq (1 - \lambda_1)y_1 + \lambda_2(\mathbf{1} - y_1) \leq y_1 + \mathbf{1} - y_1 = \mathbf{1}.$$

Also liegt y in $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$.

Damit ist die Aussage bewiesen.

zu (v): Sei $y_0 \in 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$ mit $y_0 \neq \mathbf{0}$. Gilt $y_0 = \lambda \mathbf{1}$ für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann folgt die Aussage unmittelbar, denn es ist dann $y_0 / \|y_0\| = \mathbf{1} \in 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$. Ist nun y_0 nicht Vielfaches von $\mathbf{1}$, dann sind $\mathbf{1}$ und y_0 linear unabhängig. Verwendet man den Namen y_1 wie in (E.7), und bezeichnet man mit E den von y_0 und $\mathbf{1}$ aufgespannten zweidimensionalen Untervektorraum von Δ , dann erhält man mit (iv):

$$E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \{(1 - \lambda_1)y_1 + \lambda_2(\mathbf{1} - y_1) \mid 0 \leq \lambda_1 \leq 1, 0 \leq \lambda_2 \leq 1\}. \quad (\text{E.10})$$

Es soll nun gezeigt werden, daß die Mengen $E \cap \Delta_{|1|}$ und $E \cap (2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ zusammenfallen. Dafür wird erst die Identität der Mengen $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ und $E \cap \overline{\overline{L}}$ nachgewiesen.

Mit (E.10) ist unmittelbar klar, daß die Menge $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ konvex ist und daß sie in $\mathbf{0}, \mathbf{1}, y_1$ und $\mathbf{1} - y_1$ ihre vier Extrempunkte besitzt entsprechend der vier Möglichkeiten, daß λ_1 und λ_2 die Werte 0 und 1 annehmen.

Nun ist $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ aber auch $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -kompakt, wie die folgenden Überlegungen zeigen. Da E endlichdimensionaler topologischer Vektorraum bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ ist, folgt mit [Köt66], §15.5(2), S. 155 auch die $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abgeschlossenheit von E . $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ist ebenfalls bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossen, wie aus Lemma 8.4.4 (ii) bekannt, so daß auch $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossen ist. Mit Lemma 8.4.4 (i) folgt sogar, daß $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ eine bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossene Teilmenge der Normeinheitskugel $\Delta_{|1|}$ darstellt. Der Satz von Alaoglu, siehe [Wer97], Korollar VIII.3.12, S. 344, besagt, daß $\Delta_{|1|}$ kompakt ist bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$, denn mit Satz 8.2.3 (ii) und mit Lemma 8.1.23 folgt die Identifizierbarkeit von Δ und B'_Δ in der Form, daß die Identität $\sigma(\Delta, B_\Delta) = \sigma(B'_\Delta, B_\Delta)$ gilt. $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ist also eine $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossene Teilmenge der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -kompakten Menge $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, woraus sich mit Satz A.6.6 (i) die $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Kompaktheit von $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ergibt.

Damit sind aber alle Voraussetzungen des Satzes von Krein-Milman, der sich bei [Köt66], §25.1(4), S. 355 findet, erfüllt, demzufolge $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ gerade der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abschluß der konvexen Hülle der Menge $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, y_1, \mathbf{1} - y_1\}$ ist. Es gilt also:

$$E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \overline{\text{co}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, y_1, \mathbf{1} - y_1\}.$$

Da $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, y_1, \mathbf{1} - y_1\}$ Teilmenge von $\overline{\overline{L}}$ ist und da außerdem $\overline{\overline{L}}$ sowohl konvex als auch $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossen ist, folgt im weiteren $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta \subseteq E \cap \overline{\overline{L}}$. Es gilt aber sogar $E \cap [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = E \cap \overline{\overline{L}}$, denn $\overline{\overline{L}}$ ist Teilmenge von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$.

Um nun auch die Identität von $E \cap \Delta_{|1|}$ und $E \cap (2\overline{\overline{L}} - 1)$ zu beweisen, wähle man ein $y \in E \cap \Delta_{|1|}$. Dann ist $\frac{1}{2}(y+1)$ Element der Menge $E \cap [0, 1]_\Delta = E \cap \overline{\overline{L}}$, also ist $\frac{1}{2}(y+1)$ insbesondere Element der Menge $\overline{\overline{L}}$. Das wiederum bedeutet, daß y auch Element von $2\overline{\overline{L}} - 1$ ist. Also ist y Element von $E \cap (2\overline{\overline{L}} - 1)$, womit die Inklusion $E \cap \Delta_{|1|} \subseteq E \cap (2\overline{\overline{L}} - 1)$ bewiesen wäre. Die umgekehrte Richtung beweist sich in analoger Form, so daß der angestrebte Beweis der Identität von $E \cap \Delta_{|1|}$ und $E \cap (2\overline{\overline{L}} - 1)$ abgeschlossen ist.

Der Umstand $E \cap \Delta_{|1|} = E \cap (2\overline{\overline{L}} - 1)$ ermöglicht es nun, den Beweis der eigentlichen Aussage unmittelbar zu führen. Einerseits ist mit y_0 auch $y_0/\|y_0\|$ Element von E , da E Vektorraum ist, und andererseits ist die Zugehörigkeit von $y_0/\|y_0\|$ zu $\Delta_{|1|}$ trivial, so daß also $y_0/\|y_0\|$ Element von $E \cap \Delta_{|1|} = E \cap (2\overline{\overline{L}} - 1)$ ist. Das liefert aber insbesondere $y_0/\|y_0\| \in 2\overline{\overline{L}} - 1$.

zu (vi): „ \supseteq “ : Definitionsgemäß gilt $2\overline{\overline{L}} - 1 \subseteq \bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - 1)$. Da $\overline{\overline{L}} \subseteq [0, 1]_\Delta$ gilt, folgt auch $2\overline{\overline{L}} - 1 \subseteq \Delta_{|1|}$.

„ \subseteq “ : Sei $y \in \left(\bigcup_{\lambda > 0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - 1) \right) \cap \Delta_{|1|}$. Der Fall $y = \mathbf{0}$ ist wegen Punkt (ii) bereits bekannt. Sei deshalb $y \neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt. Dann existieren ein $\lambda > 0$ und ein $\overline{y}_0 \in (2\overline{\overline{L}} - 1) \setminus \{\mathbf{0}\}$, so daß $y = \lambda \overline{y}_0$ gilt. Mit obigem Punkt (v) ist mit \overline{y}_0 auch $\overline{y}_0/\|\overline{y}_0\|$ Element von $2\overline{\overline{L}} - 1$. Da y_0 Element von $\Delta_{|1|}$ ist, gilt

$$1 \geq \|y\| = \lambda \|\overline{y}_0\|,$$

so daß $\lambda \|\overline{y}_0\|$ im reellen Intervall $(0, 1]$ liegt. Durch

$$y = \lambda \|\overline{y}_0\| \frac{\overline{y}_0}{\|\overline{y}_0\|} + (1 - \lambda \|\overline{y}_0\|) \cdot \mathbf{0}$$

hat man deswegen das Element y als Konvexkombination von Elementen aus $2\overline{\overline{L}} - 1$ dargestellt. Mit obigem Punkt (ii) folgt die Zugehörigkeit von y zu $2\overline{\overline{L}} - 1$.

Damit ist die Identität der betrachteten Mengen nachgewiesen.

zu (vii): Definitionsgemäß ist $\overline{\overline{L}}$ abgeschlossen in Δ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$. Da $(\overline{\overline{\Delta}}, \sigma(\overline{\overline{\Delta}}, B_{\overline{\overline{\Delta}}}))$ mit Lemma 8.1.22 (i) ein topologischer Vektorraum ist, stellt die Abbildung $\overline{\overline{\Delta}} \rightarrow \overline{\overline{\Delta}}, \overline{y} \mapsto 2\overline{y} - 1$ einen Homöomorphismus dar, wie man etwa mit [SW99], Kapitel I, §1.1, S. 13 erhält. Somit ist auch $2\overline{\overline{L}} - 1$ abgeschlossene Teilmenge von $\overline{\overline{\Delta}}$ bezüglich $\sigma(\overline{\overline{\Delta}}, B_{\overline{\overline{\Delta}}})$. Mit Punkt (vi) bedeutet

das aber gerade, daß man auch in $\left(\bigcup_{\lambda>0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})\right) \cap \Delta_{|1|}$ eine $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossene Teilmenge von Δ vorliegen hat. Bedenkt man, daß mit Punkt (iii) $\bigcup_{\lambda>0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ ein Untervektorraum von Δ ist, kann man mit dem Korollar aus [SW99], Kapitel IV, §6.4, S. 152 auf die Behauptung schließen. Dabei sei daran erinnert, daß das Korollar im Beweis von 8.1.27 wiedergegeben wurde.

zu (viii): Δ umfaßt die Menge $\hat{\mathcal{L}}$, und trivialerweise ist Δ eine $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossene Menge. Sei nun U ein beliebiger $\hat{\mathcal{L}}$ umfassender Untervektorraum von Δ , der auch $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossen ist. Mit Satz 8.1.27 folgt, daß U auch $\sigma(R, B_R)$ -abgeschlossene Teilmenge in R ist. Da \mathcal{L} Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$ ist, umfaßt U den Vektorraum D . Dazu erinnere man Definition 8.1.1 und Satz 8.1.2 (iii). Da aber Δ nach Definition 8.2.1 der kleinste D umfassende, $\sigma(R, B_R)$ -abgeschlossene Untervektorraum von R ist, muß also Δ Teilmenge von U sein. Das bedeutet aber gerade, daß Δ der einzige Untervektorraum von Δ ist, der $\hat{\mathcal{L}}$ umfaßt und der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossen bezüglich Δ ist. ■

Damit stehen geeignete Aussagen zur Verfügung, um die angestrebte Behauptung zu beweisen, wie sie in [Lud85a], Kapitel VI, §1.4, S. 162 angegeben wird:

Lemma E.3.4 *Es gilt: $\overline{\overline{L}} = [0, 1]_\Delta$.*

Beweis:

Unter Verwendung von Punkt (ii) des Lemmas E.3.3 kommt man zu folgender Mengeninklusionskette:

$$\hat{\mathcal{L}} \subseteq \overline{\overline{L}} \subseteq 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1} \subseteq \bigcup_{\lambda>0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}).$$

Also umfaßt $\bigcup_{\lambda>0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ die Menge $\hat{\mathcal{L}}$. Da mit Lemma E.3.3 (vii) auch die $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abgeschlossenheit von $\bigcup_{\lambda>0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$ bezüglich Δ gilt, folgt mit Lemma E.3.3 (viii) die Identität der Mengen Δ und $\bigcup_{\lambda>0} \lambda(2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1})$. Punkt (vi) von Lemma E.3.3 liefert dann $\Delta_{|1|} = 2\overline{\overline{L}} - \mathbf{1}$, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. ■

E.4 Die Äquivalenz von A'_5 und AV 2s

Der Beweis der Äquivalenz der Aussagen A'_5 und AV 2s beruht in erster Linie auf der Normkonvergenz der vorkommenden Folgen aus K . Zur besseren Einsicht werden die betreffenden Aussagen aus Abschnitt 9.1.2 nochmals aufgeführt, gefolgt vom Beweis ihrer Äquivalenz.

A'_5 Sei F eine abgeschlossene Seite von K , sei x_0 ein Element von F , und sei x Element von $K \setminus F$. Seien weiter $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen in \mathcal{K} derart, daß bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ die Konvergenzen $w_{0n} \rightarrow x_0$ und $w_n \rightarrow x$ vorliegen. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} so, daß einerseits die Folge $(\mu(w_{0n}, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß andererseits $\mu(w_n, g_n) > \delta$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

AV2s Hauptaxiom über die Entmischung von Zuständen (scharfe Form):

Sei F eine abgeschlossene Seite von K , sei x_0 ein Element von F , und sei x ein Element von $K \setminus F$, dann existieren eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{L} und eine echt positive reelle Zahl δ derart, daß zum einen $(\hat{\mu}(x_0, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert und daß zum anderen $\hat{\mu}(x, g_n) > \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Es gilt nun:

Lemma E.4.1 Die Aussage A'_5 ist äquivalent zur Aussage AV2s.

Beweis:

„ \implies “ : Sei F eine abgeschlossene Seite von K , sei $x_0 \in F$, und sei außerdem $x \in K \setminus F$. Dann existieren zwei Folgen $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}, (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{K}$, für die die Konvergenzen $w_{0n} \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x_0$ und $w_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$ gelten. Mit A'_5 folgt die Existenz eines $\delta > 0$ und einer Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}$, so daß einerseits $\mu(w_{0n}, g_n) \rightarrow 0$ und andererseits $\mu(w_n, g_n) > \delta$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Bedenkt man die Herleitung der Aussage (E.3) gilt aufgrund der Normkonvergenz der beiden Folgen $(w_{0n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |\mu(w_{0n}, g_n) - \hat{\mu}(x_0, g_n)| < \varepsilon, \quad (\text{E.11})$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n}_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq \bar{n}_0 : |\mu(w_n, g_n) - \hat{\mu}(x, g_n)| < \varepsilon. \quad (\text{E.12})$$

Da $\hat{\mu}(x_0, g_n) \leq \mu(w_{0n}, g_n) + |\hat{\mu}(x_0, g_n) - \hat{\mu}(w_{0n}, g_n)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, folgt mit (E.11) also $\mu(x_0, g_n) \rightarrow 0$.

Man wähle ein $\varepsilon > 0$ mit $\delta' := \delta - \varepsilon > 0$, und man wähle außerdem $\bar{n}_0(\varepsilon)$ entsprechend (E.12), dann gilt für alle $n \geq \bar{n}_0(\varepsilon)$:

$$\hat{\mu}(x, g_n) \geq \mu(w_n, g_n) - |\hat{\mu}(x, g_n) - \mu(w_n, g_n)| > \delta - \varepsilon = \delta'.$$

Wählt man jetzt anstatt der Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Restfolge ab dem $\bar{n}_0(\varepsilon)$ -ten Glied, dann ist die Behauptung bewiesen.

„ \Leftarrow “ : Der Beweis folgt in völlig analoger Weise zur „ \Rightarrow “ -Richtung. Wie in der anderen Richtung bereits gezeigt, garantiert die Normkonvergenz, daß die Folgen $(\hat{\mu}(x_0, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\mu(w_{0n}, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren, wie durch (E.11) zum Ausdruck kommt, und daß $(\hat{\mu}(x, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $(\mu(w_n, g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ einander beliebig nahe kommen, wie man (E.12) entnimmt. Damit sind dann die Behauptungen sofort bewiesen. ■

E.5 Eine Aussage zum Beweis von Satz 9.2.2

Der folgende Satz ist Teil gemeinsamer Erörterungen in [Ott00]:

Satz E.5.1 *Sei (X, \mathcal{O}) ein kompakter topologischer Raum. Bezeichne $(f_i)_{i \in J}$ mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit ein Familie positiver, stetiger Abbildungen von X nach \mathbb{R}_+ . Auf X sei durch die folgende Vorschrift eine Halbordnung gegeben:*

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \leq x_2 : \Longleftrightarrow [\forall j \in J : f_j(x_1) \leq f_j(x_2)].$$

Ist A eine aufwärts gerichtete Teilmenge von X , dann existiert in X ein größtes Element bezüglich A . Das heißt, es existiert ein Element s in X so, daß für jedes a aus A die Relation $a \leq s$ gilt.

Beweis:

Ob der Aufwärtsgerichtetheit von A bildet $(x)_{x \in A}$ ein Netz in X . Die Kompaktheit von X garantiert daher mit Lemma A.6.2 die Existenz eines konvergenten Teilnetzes $(x_i)_{i \in I}$. Dabei ist auch I eine aufwärts gerichtete Menge. Den Grenzwert des Teilnetzes bezeichne man mit s .

Es soll nun gezeigt werden, daß s das gesuchte größte Element ist. Dafür wird zunächst nachgewiesen, daß $s \geq x_i$ für alle $i \in I$ gilt.

Zum Beweis wird angenommen, daß dem nicht so wäre. Dann existierten $i \in I$, $j \in J$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\varepsilon + f_j(s) \leq f_j(x_i). \quad (\text{E.13})$$

Aufgrund der Konvergenz von $(x_i)_{i \in I}$ und der Stetigkeit von f_j existierte aber ein $i_0 \in I$ so, daß man $\frac{\varepsilon}{2} > |f_j(s) - f_j(x_m)| \geq f_j(x_m) - f_j(s)$ für alle $m \geq i_0$ erhielte. Das hieße:

$$\exists i_0 \in I \forall m \geq i_0 : f_j(s) + \frac{\varepsilon}{2} > f_j(x_m). \quad (\text{E.14})$$

Die Aufwärtsgerichtetheit von A garantierte die Existenz eines Elementes $\bar{x} \in A$ mit

$$\bar{x} \geq x_{i_0}, x_i. \quad (\text{E.15})$$

Da es sich bei $(x_i)_{i \in I}$ um ein Teilnetz von $(x)_{x \in A}$ handelt, lieferte die Teilnetzeigenschaft aus Definition A.6.3:

$$\forall x \in A \exists t_0 \in I \forall t \geq t_0 : x_t \geq x. \quad (\text{E.16})$$

Nutzte man (E.15), und wendete (E.16) auf \bar{x} an, dann ergäbe sich daraus:

$$\exists t_0 \in I \forall t \geq t_0 : x_t \geq x_i, x_{i_0}. \quad (\text{E.17})$$

Damit käme man jetzt aber zu einem Widerspruch, denn für ein $t \geq i_0, t_0$, dessen Existenz durch die Aufwärtsgerichtetheit von I gesichert wäre, erhielte man einerseits mit (E.13) und (E.17)

$$f_j(x_t) \geq f_j(x_i) \geq f_j(s) + \varepsilon,$$

andererseits erhielte man aber mit (E.14)

$$f_j(x_t) < f_j(s) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt tatsächlich $x_i \leq s$ für jedes $i \in I$.

Es ist aber sogar $x \leq s$ für jedes $x \in A$, denn für $\tilde{a} \in A$ existiert aufgrund der Teilnetzeigenschaft (E.16) von $(x_i)_{i \in I}$ ein $t_0 \in I$ so, daß für jedes $t \geq t_0$ gilt: $s \geq x_t \geq \tilde{a}$. ■

E.6 Aussagen zum Beweis des Darstellungssatzes für $\hat{\mathcal{L}}$

Inhalt des Abschnitts sind zwei Lemmata, die zum Beweis der einen Richtung des Darstellungssatzes 9.4.1 für $\hat{\mathcal{L}}$ benötigt werden.

Zunächst sei noch eine Vorbemerkung zur Notation gemacht. In den in der Folge diskutierten Zusammenhängen werden die Normeinheitskugeln eines normierten Raumes X mit $X_{|1|}$ symbolisiert werden. Man bedenke insbesondere die Existenz eines isometrischen Isomorphismus zwischen Δ und B'_Δ , denn Δ ist mit Satz 8.2.3 (ii) symmetrisch. Daher kann für die weiteren Betrachtungen von $\Delta = B'_\Delta$ ausgegangen werden. Insbesondere gilt für die Norm-Einheitskugeln $B'_{\Delta|1|} = \Delta_{|1|}$. Im weiteren wird aus Übersichtsgründen dem Term $\Delta_{|1|}$ der Vorzug gegeben.

Gelten die Axiome AV 1.2 und AV 2 in der bisher entwickelten mathematischen Theorie, wobei man der Aussagen AV 1.1 und AV 2f nicht bedarf, dann gewinnt man die folgende Aussage, die Teil des Beweises von T 2.2.2 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 167 ist:

Lemma E.6.1 *Für jedes Element x aus B_Δ gilt: $\|x\|_{B_\Delta} = \sup_{y \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}} |\xi_\Delta(x, y)|$.*

Beweis:

Es seien $x \in B_\Delta$ und $\varepsilon \in (0, 2) \subseteq \mathbb{R}$ gewählt, dann existieren mit Satz 8.4.7 zwei reelle Zahlen $\alpha, \beta \geq 0$, zwei Elemente $x_1, x_2 \in K$ und ein Element $y'_0 \in \Delta_{|1|}$, so daß gilt:

$$x = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad \xi_\Delta(x_1, y'_0) = 1 \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_2, y'_0) \leq -1 + \varepsilon. \quad (\text{E.18})$$

Mit $y' := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - y'_0) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ergibt sich deshalb

$$\xi_\Delta(x_1, y') = 0 \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_2, y') \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (\text{E.19})$$

Weil $\varepsilon \in (0, 2)$ gewählt wurde, bedeutet das insbesondere:

$$x_1 \in K_0(y') \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_2, y') > 0. \quad (\text{E.20})$$

Mit $K_0(y')$ ist eine exponierte Seite von K gegeben, wie aus Lemma 8.3.13 bekannt, und somit existiert mit AV 2 unter Verwendung von Lemma 9.3.2 zu y' und x_2 ein Element $y \in \hat{\mathcal{L}}$, so daß gilt:

$$K_0(y) \supseteq K_0(y') \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_2, y) > 0.$$

Zusammenfassend kann man also sagen: Es gibt ein $y \in \hat{\mathcal{L}}$, ein $x_1 \in K_0(y)$ und ein $y' \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit $x_1 \in K_0(y')$. Das sind aber gerade die Voraussetzungen von Axiom AV 1.2. Demzufolge existieren ein $\bar{y} \in \hat{\mathcal{L}}$ und eine Funktion δ aus der Menge $\{t : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid t(\varrho) \xrightarrow{\varrho \rightarrow 0} 0\}$ dergestalt, daß gilt:

$$x_1 \in K_0(\bar{y}) \quad \text{und} \quad \xi_\Delta(x_2, \bar{y}) \geq 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (\text{E.21})$$

Die zweite Relation ergibt sich dabei, wenn man bedenkt, daß mit (E.19) die Ungleichung $\xi_{\Delta}(x_2, y') \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

Mit (E.21) folgt nun für das eingangs gewählte $x \in B_{\Delta}$:

$$\begin{aligned}
 \xi_{\Delta}(x, \mathbf{1} - 2\bar{y}) &\stackrel{(E.18)}{=} \alpha \xi_{\Delta}(x_1, \mathbf{1} - 2\bar{y}) - \beta \xi_{\Delta}(x_2, \mathbf{1} - 2\bar{y}) \\
 &\stackrel{(E.21)}{=} \alpha \xi_{\Delta}(x_1, \mathbf{1}) - \beta \xi_{\Delta}(x_2, \mathbf{1}) + 2\beta \xi_{\Delta}(x_2, \bar{y}) \\
 &= (\alpha - \beta) + 2\beta \xi_{\Delta}(x_2, \bar{y}) \\
 &\stackrel{(E.21)}{\geq} (\alpha - \beta) + 2\beta(1 - \delta(\frac{\varepsilon}{2})) = (\alpha + \beta) - 2\beta\delta(\frac{\varepsilon}{2}) \\
 &\stackrel{\alpha, \delta(\frac{\varepsilon}{2}) \geq 0}{\geq} (\alpha + \beta) - 2\beta\delta(\frac{\varepsilon}{2}) - 2\alpha\delta(\frac{\varepsilon}{2}) \\
 &= (\alpha + \beta)(1 - 2\delta(\frac{\varepsilon}{2})) \\
 \|x\|_{B_{\Delta}} &\stackrel{\|x\|_{B_{\Delta}} \leq \alpha + \beta}{\geq} \|x\|_{B_{\Delta}}(1 - 2\delta(\frac{\varepsilon}{2})).
 \end{aligned}$$

Damit folgt nun mit Lemma 8.1.16 und $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}} \subseteq \Delta$:

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{B_{\Delta}} &= \sup_{\tilde{y} \in \Delta, \tilde{y} \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_{\Delta}(x, \tilde{y})|}{\|\tilde{y}\|} \geq \sup_{\tilde{y} \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}, \tilde{y} \neq \mathbf{0}} \frac{|\xi_{\Delta}(x, \tilde{y})|}{\underbrace{\|\tilde{y}\|}_{\leq 1}} \\
 &\geq \sup_{\tilde{y} \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}} |\xi_{\Delta}(x, \tilde{y})| \stackrel{\bar{y} \in \hat{\mathcal{L}}}{\geq} |\xi_{\Delta}(x, \mathbf{1} - 2\bar{y})| \\
 &\geq \|x\|_{B_{\Delta}}(1 - 2\delta(\frac{\varepsilon}{2})).
 \end{aligned}$$

Also erhält man insbesondere für alle $\varepsilon \in (0, 2)$ die Beziehung

$$\|x\|_{B_{\Delta}} \geq \sup_{\tilde{y} \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}} |\xi_{\Delta}(x, \tilde{y})| \geq \|x\|_{B_{\Delta}}(1 - 2\delta(\frac{\varepsilon}{2})).$$

Betrachtet man nun den Fall $\varepsilon \rightarrow 0$, dann konvergiert auch $\delta(\frac{\varepsilon}{2})$ gegen 0, und damit folgt die Behauptung. \blacksquare

Außerdem läßt sich eine Feststellung beweisen, die Ludwig im Beweis zu T 2.2.2 in [Lud85a], Kapitel VI, §2, S. 167 vornimmt:

Lemma E.6.2 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ ist konvex, und $-\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}$ sind Elemente von $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$.
- (ii) $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ ist kreisförmig, das heißt, wenn y aus $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ gewählt wird und wenn α eine reelle Zahl mit $|\alpha| \leq 1$ ist, dann liegt αy in $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$.
- (iii) $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ ist absolutkonvex und bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossen. Dabei heißt eine Teilmenge A eines reellen Vektorraumes X gemäß [Köt66], Kapitel 3, §15.10, S. 164 absolutkonvex, wenn sie mit x_1 und x_2 stets auch $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ enthält, wenn $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 1$ gilt.

Beweis:

zu (i): Die erste Aussage ist Folge bekannter Aussagen über konvexe Mengen, wie sie etwa [Köt66], §16.1 (3) und (4), S. 178 entnommen werden können. Daß $-\mathbf{1}$ und $\mathbf{1}$ Elemente von $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ sind, folgt aus der Zugehörigkeit von $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ zu $\hat{\mathcal{L}}$. Es gilt aber auch $\mathbf{0} = \frac{1}{2}\mathbf{1} + \frac{1}{2}(-\mathbf{1})$, so daß aufgrund der Konvexität von $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ auch $\mathbf{0}$ in $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ liegt.

zu (ii): Man wähle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \leq 1$, und man wähle ein Element $y \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$. Ist α positiv, dann ist auch αy Element von $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$, denn man kann

$$\alpha y = \alpha y + (1 - \alpha) \mathbf{0}$$

schreiben. Aber mit Punkt (i) ist $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ konvex, und $\mathbf{0}$ liegt in $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$.

Ist α negativ, dann existiert ein $\bar{y} \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y = \mathbf{1} - 2\bar{y}$, so daß gilt:

$$\alpha y = -|\alpha| y = |\alpha| (-\mathbf{1} + 2\bar{y}) = |\alpha| (\mathbf{1} - 2 \cdot \mathbf{1} + 2\bar{y}) = |\alpha| (\mathbf{1} - 2(\mathbf{1} - \bar{y})).$$

Damit ist aber der Fall eines negativen α auf den Fall eines positiven α zurückgeführt, denn mit \bar{y} liegt mit Lemma 8.3.5 auch $\mathbf{1} - \bar{y}$ in $\hat{\mathcal{L}}$.

zu (iii): Die Aussage über die Absolutkonvexität folgt mit den obigen Punkten (i) und (ii) aus [Köt66], §16.1 (2), S. 177.

Somit bleibt, die Abgeschlossenheit zu zeigen. Da $(\Delta, \sigma(\Delta, B_\Delta))$ topologischer Vektorraum ist, hat man mit [SW99], Kapitel I, §1.1, S. 13 durch die Abbildung

$$\Delta \longrightarrow \Delta, y \longmapsto \mathbf{1} - 2y$$

einen Homöomorphismus von $(\Delta, \sigma(\Delta, B_\Delta))$ auf sich selbst vorliegen. Mit Satz 8.2.7 weiß man aber um die $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abgeschlossenheit von $\hat{\mathcal{L}}$ in $(\Delta, \sigma(\Delta, B_\Delta))$. Also folgt die Behauptung mit der Homöomorphieeigenschaft obiger Abbildung. ■

E.7 Aussagen zum Beweis des Darstellungssatzes für $\overline{\mathcal{K}}$

Zugunsten einer besseren Übersicht innerhalb des Fließtextes werden hier einige Lemmata zusammengestellt, die zum Beweis des Darstellungssatzes 9.4.2 für $\overline{\mathcal{K}}$ benötigt werden.

Wie stets werden die Normeinheitskugeln eines normierten Raumes X mit $X_{|1|}$ symbolisiert. Bedenke insbesondere die Existenz eines isometrischen Isomorphismus zwischen Δ und B'_Δ , denn Δ ist mit Satz 8.2.3 (ii) symmetrisch. Daher kann für die weiteren Betrachtungen von $\Delta = B'_\Delta$ ausgegangen werden. Insbesondere gilt für die Norm-Einheitskugeln $B'_{\Delta_{|1|}} = \Delta_{|1|}$. Im weiteren wird aus Übersichtsgründen dem Term $\Delta_{|1|}$ der Vorzug gegeben.

Es sei betont, daß für den ganzen Abschnitt $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ vorausgesetzt wird. Das heißt nach Satz 9.4.1, daß die Axiome AV 1.2 und AV 2 gelten. Die Axiome AV 1.1 und AV 2f werden nicht benötigt.

Angeregt durch Bemerkungen im Beweis von T 3.18 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 113 und durch T 4.4 in [Lud85a], Kapitel IV, §4, S. 115 wird das folgende Lemma notiert:

Lemma E.7.1 *Es gilt:*

- (i) *Die Mengen $\Delta_{|1|}$ und $\mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$ sind identisch.*
- (ii) *Der lineare Aufspann von $\hat{\mathcal{L}}$ fällt mit Δ zusammen.*

Beweis:

Für Punkt (i) wähle man ein $y \in \Delta_{|1|}$. Man setze $\bar{y} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - y)$, dann ist offensichtlich $\bar{y} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$, und es gilt $\mathbf{1} - 2\bar{y} = y$, also ist $y \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$.

Ist umgekehrt $y \in \mathbf{1} - 2\hat{\mathcal{L}}$, dann existiert ein $\bar{y} \in \hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ mit $y = \mathbf{1} - 2\bar{y}$, so daß für alle $x \in K$ gilt:

$$|\xi_\Delta(x, y)| = |1 - 2\underbrace{\xi_\Delta(x, \bar{y})}_{\in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}}| \leq 1.$$

Also ist $y \in \Delta_{|1|}$.

Damit bleibt es, Punkt (ii) zu zeigen. Offensichtlich ist der lineare Aufspann von $\hat{\mathcal{L}}$ Teilmenge von Δ , da $\hat{\mathcal{L}}$ Teilmenge von Δ ist und da Δ die Vektorraum-eigenschaft besitzt. Zum Beweis der umgekehrten Richtung der Mengeninklusion

sei ein $y \in \Delta$ gewählt. Dann ist $y/\|y\|$ Element von $\Delta_{|1|}$. Wegen obigem Punkt (i) existiert also ein $\bar{y} \in \hat{\mathcal{L}}$ so, daß $y/\|y\| = \mathbf{1} - 2\bar{y}$ gilt. Somit erhält man:

$$y = \|y\|\mathbf{1} - 2\|y\|\bar{y}.$$

Da aber $\mathbf{1}$ und \bar{y} Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ sind, liegt y im linearen Aufspans von $\hat{\mathcal{L}}$. ■

Um an geeigneter Stelle darauf verweisen zu können, sei noch einmal an das folgende triviale Lemma erinnert:

Lemma E.7.2 *Sei X ein reeller Vektorraum, und sei A eine Teilmenge von X so, daß der lineare Aufspann von A mit X zusammenfällt. Dann ist für zwei reellwertige lineare Abbildungen auf X die Identität auf A hinreichend für die Identität auf ganz X .*

Außerdem gilt:

Lemma E.7.3 *Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer reeller Vektorraum, sei x_0 ein Element von X , und sei $\alpha_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei ferner A eine Teilmenge X , und sei f eine reellwertige lineare Abbildung auf X . Dann folgt aus der Stetigkeit der Restriktion $f|_A$ auch die Stetigkeit der Restriktion $f|_{x_0+\alpha_0A}$ jeweils bezüglich der zugehörigen Unterraumtopologie.*

Beweis:

Man wähle ein $x \in x_0 + \alpha_0A$, und sei $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in $x_0 + \alpha_0A$ derart, daß $(x_i)_{i \in I}$ bezüglich der Unterraumtopologie auf $x_0 + \alpha_0A$ gegen x konvergiert. Man setze nun $\bar{x} := \frac{1}{\alpha_0}(x - x_0)$ und $\bar{x}_i := \frac{1}{\alpha_0}(x_i - x_0)$ für alle $i \in I$. Es gilt dann $\bar{x} \in A$ und $\{\bar{x}_i \mid i \in I\} \subseteq A$. Außerdem konvergiert $(\bar{x}_i)_{i \in I}$ bezüglich der Unterraumtopologie auf A gegen \bar{x} . Mit der vorausgesetzten Stetigkeit von $f|_A$ ergibt sich jetzt

$$f|_{x_0+\alpha_0A}(x_i) = f(x_0) + \alpha_0 f|_A(\bar{x}_i) \longrightarrow f(x_0) + \alpha_0 f|_A(\bar{x}) = f|_{x_0+\alpha_0A}(x),$$

und somit folgt die Stetigkeit von $f|_{x_0+\alpha_0A}$. ■

Für die weiteren Erörterungen wird teilweise auf die Bezeichnungen und Ergebnisse des Abschnitts D.3 zurückgegriffen. Um das Studium etwas zu erleichtern, sollen

die verwandten Bezeichnungen nochmals aufgeführt werden. Es galten die folgenden Beziehungen:

$$B_+ := \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K,$$

$$B'_+ := \{y' \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y') \geq 0 \ \forall x \in K\}.$$

Zusätzlich definiere man jetzt ausschließlich für die Betrachtungen innerhalb der nächsten drei Lemmata:

$$B_1 := \overline{\left(\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \hat{\mathcal{L}}\right)^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}}.$$

Man erinnere ferner aus Abschnitt D.3, daß eine Teilmenge M eines linearen Raumes X konvexer Kegel mit Scheitel 0 heißt, wenn für jedes x aus M und jedes $\alpha \geq 0$ auch αx zu M gehört und wenn außerdem für alle x_1, x_2 aus M auch $x_1 + x_2$ in M liegt. Ebenso wurde definiert, daß ein konvexer Kegel mit Scheitel 0 spitz genannt wird, wenn er die 0 enthält. Andernfalls nennt man ihn stumpf.

Damit gilt für B_1 in Korrektur einer Bemerkung im Beweis zu T 2.2.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 166:

Lemma E.7.4 B_1 ist spitzer konvexer Kegel mit Scheitel 0 , und die Menge B_1 fällt mit ihrer bipolaren Menge zusammen, das heißt: $B_1 = B_1^{oo}$.

Beweis:

Wie schon beim Beweis der Kegeleigenschaften von B_+ sei für den Beweis auf die Literatur wie etwa [Köt66], §16.5, S. 187 verwiesen, da es sich hier um bekannte Situationen der konvexen Analysis handelt. Der zweite Teil der Aussage folgt aus dem Bipolarenatz, da B_1 konvex ist, die 0 enthält und offensichtlich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -abgeschlossen ist. ■

Als Nächstes wird ein Lemma betrachtet, das in korrigierender Weise auf einer Feststellung im Beweis zu T 2.2.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 166 beruht:

Lemma E.7.5 B_+ ist der zu B_1 duale Kegel bezüglich des Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$, das heißt:

$$B_+ = \{x \in B_\Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \geq 0 \ y \in B_1\}.$$

Beweis:

„ \subseteq “ : Sei $x \in B_+$, dann existieren ein $\lambda \geq 0$ und ein $\bar{x} \in K$ so, daß $x = \lambda \bar{x}$ gilt. Für $y \in \hat{\mathcal{L}}$ erhält man $\xi_\Delta(x, y) = \lambda \xi_\Delta(\bar{x}, y) \geq 0$, denn es ist $0 \leq \xi_\Delta(\bar{x}, y) \leq 1$.

Sei jetzt $y \in B_1$, dann existiert ein Netz $(y_i)_{i \in I} \subseteq \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \hat{\mathcal{L}}$, das bezüglich

$\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen y konvergiert. Da aber, wie eben gezeigt wurde, $\xi_\Delta(x, y_i) \geq 0$ für jedes $i \in I$ gilt, ergibt sich auch $\xi_\Delta(x, y) \geq 0$.

„ \supseteq “ : Es soll zunächst eine Hilfsaussage bewiesen werden:

Hilfsaussage:

$$\forall x \in B_\Delta \exists \alpha, \beta \geq 0 \exists x_1, x_2 \in K \exists \bar{y} \in [0, 1]_\Delta : \quad x = \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \text{und } \xi_\Delta(x, \bar{y}) \leq -\frac{\beta}{2}.$$

Zum Beweis der Hilfsaussage wird Satz 8.4.7 angewendet für $x \in B_\Delta$ mit $\varepsilon = 1$. Das liefert die Existenz von $\alpha, \beta \geq 0$ und $x_1, x_2 \in K$ sowie $y'_0 \in \Delta_{|1|}$ derart, daß gilt:

$$x = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad \xi_\Delta(x_1, y'_0) = 1 \text{ und } \xi_\Delta(x_2, y'_0) \leq 0.$$

Für $\bar{y} := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - y'_0) \in [0, 1]_\Delta$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x, \bar{y}) &= \frac{1}{2} \xi_\Delta(x, \mathbf{1}) - \frac{1}{2} \xi_\Delta(x, y'_0) \\ &= \frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}(\alpha - \beta \xi_\Delta(x_2, y'_0)) \\ &= -\frac{\beta}{2} + \beta \xi_\Delta(x_2, y'_0) \leq -\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Somit kann man zum Beweis der eigentlichen Aussage kommen. Sei dafür ein $x \in B_\Delta$ mit $\xi_\Delta(x, y) \geq 0$ für jedes $y \in B_1$ gewählt. Der obigen Hilfsaussage zufolge gibt es eine Darstellung der Form $x = \alpha x_1 - \beta x_2$ und ein $\bar{y} \in [0, 1]_\Delta$, so daß $\xi_\Delta(x, \bar{y}) \leq -\frac{\beta}{2}$ gilt. Wäre jetzt x kein Element von B_+ , dann müßte $\beta > 0$ sein. Und damit gälte auch $\xi_\Delta(x, \bar{y}) \leq -\frac{\beta}{2} < 0$. Da aber $[0, 1]_\Delta = \hat{\mathcal{L}} \subseteq B_1$ gilt, läge somit ein Widerspruch zur Voraussetzung vor. ■

Man kann aber auch umgekehrt zeigen, daß B_1 der zu B_+ duale Kegel bezüglich des Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ ist. B_1 und B_+ sind also zueinander duale Kegel. Es ist somit die folgende Aussage zu beweisen, die T 2.2.1 in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 166 wiedergibt:

Lemma E.7.6 *Es gilt: $B'_+ = B_1$.*

Beweis:

Zunächst werden zwei Hilfsaussagen formuliert:

Hilfsaussagen:

(i) Sei ein $x \in B_\Delta$ gewählt, dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$[\forall y \in B_1 : \xi_\Delta(x, y) \leq 0] \iff [\forall y \in B_1 : \xi_\Delta(x, y) \leq 1].$$

(ii) Sei ein $y \in \Delta$ gewählt, dann gilt die folgende Äquivalenz:

$$[\forall x \in B_+ : \xi_\Delta(x, y) \leq 0] \iff [\forall x \in B_+ : \xi_\Delta(x, y) \leq 1].$$

Sei zum Beweis des ersten Punktes ein $x \in B_\Delta$ gewählt, dann folgt die „ \implies “-Richtung trivialerweise. Für die andere Richtung sei $\xi_\Delta(x, y) \leq 1$ für alle $y \in B_1$ angenommen. Sei ein $y \in B_1$ gewählt, dann gilt also $\xi_\Delta(x, y) \leq 1$. Da die Bedingung aber für alle $y \in B_1$ gelten soll, heißt das aufgrund der Kegелеigenschaft von B_1 , die aus Lemma E.7.4 bekannt ist, daß auch $\xi_\Delta(\lambda x, y) = \lambda \xi_\Delta(x, y) \leq 1$ für alle $\lambda \geq 0$ gelten soll. Das ist aber nur möglich, wenn schon $\xi_\Delta(x, y) \leq 0$ gilt. Aufgrund der Kegeleigenschaft von B_+ nach Lemma D.3.6 folgt die Aussage des zweiten Punktes auf ganz analoge Weise, so daß die Hilfsaussagen bewiesen sind.

Mit Lemma E.7.5 und Punkt (i) der Hilfsaussagen ist

$$\begin{aligned} -B_+ &= \{x \in B_\Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \leq 0 \ \forall y \in B_1\} \\ &= \{x \in B_\Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \leq 1 \ \forall y \in B_1\} = B_1^o. \end{aligned}$$

In analoger Weise liefert Lemma D.3.12 zusammen mit Punkt (ii) der obigen Hilfsaussagen die Identität:

$$\begin{aligned} -B'_+ &= \{y \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \leq 0 \ \forall x \in B_+\} \\ &= \{y \in \Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \leq 1 \ \forall x \in B_+\} = B_+^o. \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme von Lemma E.7.4 erhält man somit die Behauptung:

$$B_1 = B_1^{oo} = (-B_+)^o = -B_+^o = B'_+.$$

Die Identität $(-B_+)^o = -B_+^o$ ergibt sich mit [Köt66], §20.8 (1) a.), S. 247. ■

Damit kann man nun das folgende Lemma beweisen, das einer Feststellung nach T 3.19 in [Lud85a], Kapitel IV, §3, S. 113 folgt. Hinsichtlich der dabei vorkommenden Menge \mathcal{D} wird an Definition 8.2.1 erinnert.

Lemma E.7.7 B'_+ ist gleich dem Abschluß von $\mathcal{D} \cap B'_+$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$, das heißt, es gilt:

$$B'_+ = \overline{\mathcal{D} \cap B'_+}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}.$$

Beweis:

„ \subseteq “ : Zunächst wird gezeigt, daß für alle $\lambda \geq 0$ gilt: $\lambda \hat{\mathcal{L}} \subseteq \overline{\mathcal{D} \cap B'_+}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$. Mit Lemma 8.2.13 ist $0 \leq \xi_\Delta(x, g) \leq 1$ für alle $x \in K$ und für alle $g \in \mathcal{L}$, also ist für alle $\lambda \geq 0$, alle $y \in \lambda \mathcal{L}$ und alle $x \in K$ auch $\xi_\Delta(x, y) \geq 0$. Das bedeutet aber gerade, daß $\lambda \mathcal{L} \subseteq B'_+$ für alle $\lambda \geq 0$ gilt.

Da D nach Definition 8.1.1 und Satz 8.1.2 (iii) der lineare Aufspann von \mathcal{L} ist, erhält man ebenso $\lambda \mathcal{L} \subseteq D \subseteq \mathcal{D}$ für jedes $\lambda \geq 0$.

Also ist $\lambda \mathcal{L} \subseteq \mathcal{D} \cap B'_+$ für alle $\lambda \geq 0$. Da aber nach dem Einbettungssatz 8.2.7 die Identität $\hat{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}$ gilt, erhält man daraus für $\lambda \geq 0$:

$$\lambda \hat{\mathcal{L}} = \lambda \overline{\mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \subseteq \overline{\lambda \mathcal{L}}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \subseteq \overline{\mathcal{D} \cap B'_+}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}. \quad (\text{E.22})$$

Mit (E.22) ergibt sich somit unmittelbar:

$$\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \hat{\mathcal{L}} \subseteq \overline{\mathcal{D} \cap B'_+}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}.$$

Wegen Lemma E.7.6 erhält man also:

$$B'_+ = \overline{\left(\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \hat{\mathcal{L}} \right)}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)} \subseteq \overline{\mathcal{D} \cap B'_+}^{\sigma(\Delta, B_\Delta)}.$$

„ \supseteq “ : Die Richtung ist trivial, da zum einen $\mathcal{D} \cap B'_+ \subseteq B'_+$ gilt und da zum anderen B'_+ nach Lemma D.3.12 bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossen ist. ■

Abschließend wird eine Aussage gezeigt, die Äußerungen in [Lud85a], Kapitel VI, §2.2, S. 166 zu entnehmen ist. Da dort aber anders vorgegangen wird, bedarf es für den hier beschrittenen Weg eines ausführlicheren Beweises:

Lemma E.7.8 Gilt für ein Element x aus B_Δ sowohl $\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1$ als auch für jedes y aus B'_+ die Ungleichung $\xi_\Delta(x, y) \geq 0$, dann liegt x in K .

Beweis:

Zunächst soll für die weiteren Erörterungen innerhalb des Beweis die folgende Abkürzung eingeführt werden:

$$A_2 := \{x \in B_\Delta \mid \xi_\Delta(x, y) \geq 0 \ \forall y \in B'_+\}.$$

Es ist klar, daß A_2 der zu B'_+ duale konvexe Kegel ist. Es werden jetzt erst eine Reihe von Hilfsaussagen formuliert und bewiesen. Dafür sei daran erinnert, daß die polaren Mengen zu einer Menge M bezüglich des zugrundeliegenden Dualsystems $\langle B_\Delta, \Delta, \xi_\Delta \rangle$ mit M^o bezeichnet werden. Das Symbol M^{oo} steht für die bipolare Menge zu M .

Hilfsaussagen: Es gelten die drei Beziehungen

- (i) $B'_+ = (-B_+)^o$,
- (ii) $A_2 = (-B'_+)^o$,
- (iii) $A_2 = B_+$.

zu (i): Die Aussage folgt direkt aus den Betrachtungen zum Beweis von Lemma E.7.6. Dort hatte man $-B'_+ = B_+^o$ erhalten, woraus sich dann mit [Köt66], §20.8 (1) a.), S. 247 ergibt:

$$B'_+ = -B_+^o = (-B_+)^o.$$

zu (ii): Sei $x \in A_2$, dann gilt $\xi_\Delta(x, y) \leq 0 \leq 1$ für alle $y \in (-B'_+)$, und somit liegt x in $(-B'_+)^o$. Wählt man andersherum ein $x \in (-B'_+)^o$, ergibt sich $\xi_\Delta(x, y) \geq -1$ für alle $y \in B'_+$. Nun erhält man aber ob der Kegeleigenschaft von B_+ auch $\alpha y \in B'_+$ für alle $\alpha \geq 0$ und $y \in B'_+$. Also muß auch $\xi_\Delta(x, y) \geq 0$ für alle $y \in B'_+$ gelten.

zu (iii): Mit (i), (ii) und [Köt66], §20.8 (1) a.), S. 247 erhält man sofort:

$$A_2 = (-(-B_+)^o)^o = B_+^{oo}.$$

Es reicht also zu zeigen, daß B_+ konvex und $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -abgeschlossen ist, um mit dem Bipolarensatz, [Köt66], §20.8 (5), S. 248, auf die Behauptung schließen zu können. Die Konvexität von B_+ ist direkte Folge der Konvexität von K und auch schon aus Lemma D.3.6 bekannt. Für die $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Abgeschlossenheit genügt wegen Korollar 2 aus [SW99], Kapitel II, Abschnitt 9.2, S. 65 der Beweis der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Abgeschlossenheit.

Man wähle also eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_+$ und ein $x \in B_\Delta \setminus \{0\}$ mit $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{B_\Delta}} x$, wobei $x = 0$ ausgeschlossen werden kann, da 0 offensichtlich in B_+ liegt. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\lambda_n \geq 0$ und ein $\bar{x}_n \in K$, so daß $x_n = \lambda_n \bar{x}_n$ gilt. Die $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x bedeutet, daß die Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\|x\|_{B_\Delta}$ konvergiert, da nach Lemma 8.2.13 $\|x_n\|_{B_\Delta} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Es sei nun $z_n := (x_n/\lambda_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gesetzt, dann ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in K . Wegen $\lambda_n \rightarrow \|x\|_{B_\Delta} \neq 0$ kann man $\lambda_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen, denn es gibt deshalb immer ein endliches $n_0 \in \mathbb{N}$, ab dem alle λ_n von 0 verschieden sind. $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen $(x/\|x\|_{B_\Delta})$. Also ist $(x/\|x\|_{B_\Delta})$ Grenzwert einer $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -konvergenten Folge aus K . Die $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Abgeschlossenheit von K impliziert demnach, daß $(x/\|x\|_{B_\Delta})$ ebenfalls Element von K ist. Somit gilt $x = \|x\|_{B_\Delta} \left(\frac{x}{\|x\|_{B_\Delta}} \right) \in B_+$, womit die Hilfsaussage bewiesen ist.

Damit kann zum Nachweis der eigentlichen Aussage übergegangen werden. Wählt man dafür ein x entsprechend der Voraussetzungen, dann liegt x offenbar in A_2 , wobei $\xi(x, \mathbf{1}) = 1$ gilt. Mit Punkt (iii) der obigen Hilfsaussagen bedeutet das aber wiederum, daß x in B_+ liegt und daß $\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1$ gilt. Also existiert ein $\lambda \geq 0$ und ein $\bar{x} \in K$ mit $x = \lambda \bar{x}$. Die Bedingung $\xi_\Delta(x, \mathbf{1}) = 1$ liefert $\lambda = 1$. Mithin gilt $x = \bar{x}$, und damit liegt auch x in K . ■

E.8 Zur Koexistenz bei Effekten und zur Motivation von Axiom AV 3

Es werden zwei Aussagen zur Koexistenz von Effekten und Entscheidungseffekten aufgeführt, die zur Motivation von Axiom AV 3 zur Verfügung gestellt werden müssen. Es sei darauf hingewiesen, daß die Axiome AV 1.1, AV 1.2, AV 2 und AVid vorausgesetzt werden, auch wenn nicht immer für alle Aussagen auch alle Axiome benötigt werden.

Der folgende Satz findet sich als Th. 1.2.4. in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.2, S. 89. Das ebenfalls dort aufgeführte Th. 1.2.3. ist Teil des unten aufgeführten Beweises.

Satz E.8.1 *Für alle y_1, y_2 aus $\hat{\mathcal{L}}$ sind äquivalent:*

- (i) (y_1, y_2) ist ein Paar koexistenter Effekte.

(ii) *Es existieren drei Elemente y'_1, y'_2, y_{12} in $\hat{\mathcal{L}}$, so daß $y_1 = y'_1 + y_{12}$, $y_2 = y'_2 + y_{12}$ und $y'_1 + y'_2 + y_{12} \in \hat{\mathcal{L}}$ gilt.*

Beweis:

(i) \implies (ii): Nach Voraussetzung existiert ein effektives, additives Maß $F : \Sigma \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ auf einem Booleschen Ring Σ derart, daß es zwei Elemente $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ mit $F(\sigma_1) = y_1$ und $F(\sigma_2) = y_2$ gibt. Bezüglich der Effektivität bedenke man die Bemerkung im Anschluß an die Definition 9.6.6 der Koexistenz.

Man setze: $y'_1 := F(\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp)$, $y'_2 := F(\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2)$ und $y_{12} := F(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$.

Die Existenz der Ausdrücke ist dabei durch die Voraussetzungen gesichert.

Je zwei der drei Elemente $\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp, \sigma_1 \wedge \sigma_2$ und $\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2$ haben offensichtlich als Infimum die 0, da F additiv ist und da Σ distributiv ist. Also erhält man:

$$\begin{aligned} y'_1 + y_{12} &= F(\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) + F(\sigma_1 \wedge \sigma_2) \\ &= F((\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) \vee (\sigma_1 \wedge \sigma_2)) = F(\sigma_1) = y_1. \end{aligned}$$

In analoger Weise gewinnt man $y'_2 + y_{12} = y_2$.

Außerdem gilt mit der Distributivität von Σ und der Additivität von F :

$$\begin{aligned} F(\sigma_1 \vee \sigma_2) &= F((\sigma_1 \wedge \sigma_2) \vee (\sigma_1 \wedge \sigma_2^\perp) \vee (\sigma_1^\perp \wedge \sigma_2)) \\ &= y'_1 + y'_2 + y_{12}. \end{aligned}$$

Demzufolge liegt $y'_1 + y'_2 + y_{12}$ im Bildbereich $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ der Abbildung F . Mit dem Darstellungssatz 9.4.1 gilt aber gerade $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$, so daß also $y'_1 + y'_2 + y_{12}$ Element von $\hat{\mathcal{L}}$.

(ii) \implies (i): Man betrachte die Menge $M := \{a_1, a_2, a_3\}$ mit drei beliebigen Elementen, die aber paarweise voneinander verschieden sein mögen. Man setze ferner $\Sigma := \mathcal{P}(M)$ sowie $\sigma_1 := \{a_1\}$, $\sigma_2 := \{a_2\}$ und $\sigma_3 := \{a_3\}$. Damit ist Σ nach Lemma F.19 Boolescher Verband bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung und der Mengendifferenz bezüglich M als Orthokomplementation. Auf Σ kann man eine Abbildung $F : \Sigma \rightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ definieren durch die Festlegungen

$$F(\sigma_1) := y'_1, \quad F(\sigma_2) := y'_2, \quad F(\sigma_3) := y_{12}$$

und die Anforderung der Additivität, das heißt, daß für alle $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ mit $\sigma \cap \sigma' = \emptyset$ gilt: $F(\sigma \cup \sigma') = F(\sigma) + F(\sigma')$. Die Voraussetzung $y'_1 + y'_2 + y_{12} \in \hat{\mathcal{L}}$ garantiert, daß F auch tatsächlich eine Abbildung nach $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ist.

Damit hat man also eine additive Abbildung auf einem Booleschen Verband nach $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_{\Delta}$. Aber F ist kein Maß, da $F(M)$ nicht unbedingt gleich $\mathbf{1}$ sein muß. Zur Beseitigung eines derartigen Mangels muß die Struktur noch etwas komplizierter gestaltet werden.

Sei mit $\bar{\Sigma} = \{\bar{\mathbf{0}}, \bar{\varepsilon}\}$ ein zweielementiger Boolescher Verband bezeichnet. Dann werden auf $\tilde{\Sigma} := \bar{\Sigma} \times \Sigma$ durch die folgenden Vereinbarungen für $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$

$$\begin{aligned} (\bar{\varepsilon}, \sigma_1) \vee (\bar{\varepsilon}, \sigma_2) &:= (\bar{\varepsilon}, \sigma_1 \wedge \sigma_2), \\ (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1) \vee (\bar{\varepsilon}, \sigma_2) &:= (\bar{\varepsilon}, \sigma_1^{\perp} \wedge \sigma_2), \\ (\bar{\varepsilon}, \sigma_1) \vee (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_2) &:= (\bar{\varepsilon}, \sigma_1 \wedge \sigma_2^{\perp}), \\ (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1) \vee (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_2) &:= (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1 \vee \sigma_2), \\ (\bar{\varepsilon}, \sigma_1) \wedge (\bar{\varepsilon}, \sigma_2) &:= (\bar{\varepsilon}, \sigma_1 \vee \sigma_2), \\ (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1) \wedge (\bar{\varepsilon}, \sigma_2) &:= (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1 \wedge \sigma_2^{\perp}), \\ (\bar{\varepsilon}, \sigma_1) \wedge (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_2) &:= (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1^{\perp} \wedge \sigma_2), \\ (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1) \wedge (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_2) &:= (\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1 \wedge \sigma_2), \end{aligned}$$

sowie die Vereinbarungen für $\alpha \in \bar{\Sigma}$ und $\sigma \in \Sigma$:

$$(\alpha, \sigma)^{\perp} := (\alpha^{\perp}, \sigma)$$

drei Operationen \perp, \wedge, \vee definiert, die Σ zu einem Booleschen Verband machen. Dabei ist das Null-Element durch $(\bar{\mathbf{0}}, \emptyset)$ gegeben, während das Eins-Element mit $(\bar{\varepsilon}, \emptyset)$ vorliegt. Für den Beweis sind einfache, aber recht aufwendige Rechnungen notwendig, die hier nicht dargelegt werden, da sie keinen weiteren Gewinn bringen. Durch die folgende Abbildung

$$\tilde{F}: \tilde{\Sigma} \longrightarrow \hat{\mathcal{L}}, (\alpha, \sigma) \longmapsto \tilde{F}((\alpha, \sigma)) := \begin{cases} F(\sigma) & \text{für } \alpha = \bar{\mathbf{0}} \\ \mathbf{1} - F(\sigma) & \text{für } \alpha = \bar{\varepsilon} \end{cases}$$

ist ein additives Maß auf $\tilde{\Sigma}$ gegeben. Auch hier sind für den Beweis einfache, aber aufwendigere Rechnungen notwendig, die hier ausgespart werden sollen. Es sei nur gezeigt, daß für \tilde{F} jetzt das erreicht wurde, was für F nicht galt, denn es ist $F(\bar{\varepsilon}, \emptyset) = \mathbf{1} - F(\emptyset) = \mathbf{1}$. Abschließend muß nun noch gezeigt werden, daß y_1 und y_2 auch wirklich im Bildbereich von \tilde{F} liegen. Das ist aber sofort einsichtig, denn es gilt

$$\tilde{F}((\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1 \vee \sigma_3)) = \tilde{F}((\bar{\mathbf{0}}, \sigma_1)) + \tilde{F}((\bar{\mathbf{0}}, \sigma_3)) = F(\sigma_1) + F(\sigma_3) = y'_1 + y_{12} = y_1$$

und analog $\tilde{F}((\bar{\mathbf{0}}, \sigma_2 \vee \sigma_3)) = y'_2 + y_{12} = y_2$. ■

Als zweites wird ein Lemma notiert, das sich basierend auf den Aussagen des obigen Lemmas mit der Situation befaßt, in der einer der beiden betrachteten Effekte ein Entscheidungseffekt ist. Es handelt sich dabei um Teile von Th. 1.3.1. in [Lud83b], Kapitel IV, Abschnitt 1.3, S. 91.

Satz E.8.2 *Seien y aus $\hat{\mathcal{L}}$ und e aus G gewählt, dann sind äquivalent:*

(i) (y, e) ist ein Paar koexistenter Effekte.

(ii) Es existiert genau ein Paar (y_1, y_3) von Elementen in $\hat{\mathcal{L}}$, so daß gilt:

$$y_1 \leq e^\perp, \quad y_3 \leq e \quad \text{und} \quad y = y_1 + y_3.$$

(iii) Es existiert genau ein Paar (y'_2, y'_3) von Elementen in $\hat{\mathcal{L}}$, so daß gilt:

$$y'_2 \leq \mathbf{1} - y, \quad y'_3 \leq y \quad \text{und} \quad e = y'_2 + y'_3.$$

Außerdem gilt:

Ist (y, e) ein Paar koexistenter Effekte, dann sind die Elemente y_3 , entsprechend (ii), und y'_3 , entsprechend (iii), identisch.

Beweis:

Zunächst wird bemerkt, daß die Identität $\hat{\mathcal{L}} = [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ohne weitere Bemerkungen zur Anwendung kommt.

(i) \implies (ii): Mit Satz E.8.1 existieren $y'_1, y'_2, y_{12} \in \hat{\mathcal{L}}$ so, daß gilt:

$$y = y'_1 + y_{12}, \tag{E.23}$$

$$e = y'_2 + y_{12}, \tag{E.24}$$

$$y'_1 + y'_2 + y_{12} \in \hat{\mathcal{L}}. \tag{E.25}$$

Die gesuchten Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ hat man in $y_1 := y'_1$ und $y_3 := y_{12}$ gefunden, wie in der Folge gezeigt wird. Zunächst ergibt sich ob der Zugehörigkeit von y'_2 zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ aus (E.24) unmittelbar die Relation $y_{12} \leq e$. Da aber mit (E.25) auch $y'_1 + y'_2 + y_{12}$ in $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ liegt, erhält man mit (E.24):

$$y_1 = y'_1 = y'_1 + y'_2 + y_{12} - e \leq \mathbf{1} - e = e^\perp.$$

$y = y_1 + y_3$ gilt wegen (E.23) ohnehin, so daß nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen ist.

Dafür nehme man an, daß $\bar{y}_1, \bar{y}_3 \in \hat{\mathcal{L}}$ mit $y = \bar{y}_1 + \bar{y}_3$, $\bar{y}_1 \leq e^\perp$ und $\bar{y}_3 \leq e$ existieren. Es gilt also $y = \bar{y}_1 + \bar{y}_3 = y_1 + y_3$, woraus sich ergibt:

$$\bar{y}_3 - y_3 = \bar{y}_1 - y_1. \quad (\text{E.26})$$

Nutzt man jetzt die Relationen $y_3 \leq e$, $\bar{y}_1 \leq e^\perp$ und auch die Zugehörigkeit von \bar{y}_3 und y_1 zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$, dann erhält man mit (E.26):

$$\mathbf{0} \leq e - y_3 \leq e + \bar{y}_3 - y_3 = e + \bar{y}_1 - y_1 \leq e + \bar{y}_1 \leq e + e^\perp \leq \mathbf{1}.$$

Also ist $e + \bar{y}_3 - y_3 = e + \bar{y}_1 - y_1$ Element von $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta = \hat{\mathcal{L}}$.

Nun ist aber $y_3, \bar{y}_3 \leq e$, und somit gilt mit Lemma 9.2.7 auch $K_0(e) \subseteq K_0(y_3)$ und $K_0(e) \subseteq K_0(\bar{y}_3)$. Folglich ergibt sich:

$$K_0(e + \bar{y}_3 - y_3) \supseteq K_0(e) \cap K_0(\bar{y}_3) \cap K_0(y_3) = K_0(e).$$

Erneute Anwendung von Lemma 9.2.7 liefert damit die Relation $e \geq e + \bar{y}_3 - y_3$, und somit gilt $y_3 \geq \bar{y}_3$. In analoger Weise erhält man auch $y_3 \leq \bar{y}_3$. Damit folgt aus (E.26) dann aber auch $y_1 = \bar{y}_1$.

(ii) \implies (iii): Man setze $y'_3 := y_3$ und $y'_2 := e - y_3$. Unmittelbar ergibt sich die Relation $e = y'_2 + y'_3$. Ob der Identität $y = y_1 + y_3$ und der Zugehörigkeit von y_1 zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ erhält man ferner die Relation $y'_3 \leq y$. Es muß jetzt gezeigt werden, daß y'_2 auch tatsächlich in $\hat{\mathcal{L}}$ liegt und daß $y'_2 \leq \mathbf{1} - y$ gilt.

Die Mengenzugehörigkeit von y_2 zu $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ ergibt sich dabei aus folgenden Überlegungen. Es gilt zunächst wegen $y_3 \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$:

$$\mathbf{1} \geq e \geq e - y_3 \geq \mathbf{0}.$$

Da $y'_2 = e - y'_3 = e - y_3$ gilt, ist also y'_2 Element von $\hat{\mathcal{L}}$.

Bezüglich der noch nachzuweisenden Ungleichung gilt nun mit Hilfe der Ungleichung $y_1 \leq e^\perp$:

$$y'_2 = e - y_3 \leq e^\perp + e - y_1 - y_3 = \mathbf{1} - y.$$

Damit bleibt die Eindeutigkeit zu beweisen, das heißt, es ist zu zeigen, daß es neben y'_2 und y'_3 keine zwei anderen, davon verschiedenen Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ geben kann, die die unter Punkt (iii) dieses Satzes notierten Eigenschaften haben. Der Beweis wird geführt, indem gezeigt wird, daß die Annahme zweier anderer von y'_2 und y'_3 abweichender Elemente in Widerspruch zu der Voraussetzung gerät, die mit Punkt (ii) gemacht wurde. Dafür zeigt man zunächst die folgende Aussage:

Hilfsaussage:

Seien \bar{y}_2 und \bar{y}_3 zwei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ in der Form, daß die Relationen $\bar{y}_2 \leq \mathbf{1} - y$, $\bar{y}_3 \leq y$ und $e = \bar{y}_2 + \bar{y}_3$ gelten. Dann ist mit $\bar{\bar{y}} := y - \bar{y}_3$ ein Element von $\hat{\mathcal{L}}$ derart gegeben, daß die Relationen $\bar{y}_3 \leq e$, $\bar{\bar{y}} \leq e^\perp$ und $y = \bar{y}_3 + \bar{\bar{y}}$ gelten.

Zum Beweis der Hilfsaussage schließt man mit den Voraussetzungen unmittelbar, daß $\mathbf{0} \leq y - \bar{y}_3 \leq y \leq \mathbf{1}$ gilt, also ist $\bar{\bar{y}}$ Element von $\hat{\mathcal{L}}$. Ferner gilt $\bar{y}_3 = e - \bar{y}_2 \leq e$, und es gilt:

$$\bar{\bar{y}} = y - \bar{y}_3 \leq (\mathbf{1} - \bar{y}_2) - \bar{y}_3 = \mathbf{1} - \bar{y}_2 - \bar{y}_3 = \mathbf{1} - e = e^\perp.$$

Die letzte zu beweisende Relation schließlich ist nach Definition von $\bar{\bar{y}}$ trivial, und damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Die Hilfsaussage bringt zum Ausdruck, daß man ausgehend von zwei Elementen \bar{y}_2 und \bar{y}_3 aus $\hat{\mathcal{L}}$, die die unter Punkt (iii) dieses Satzes notierten Eigenschaften besitzen, in $y - \bar{y}_3$ und \bar{y}_3 zwei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ findet, die die unter Punkt (ii) dieses Satzes notierten Eigenschaften haben. Gäbe es also neben dem Paar (y'_2, y'_3) noch ein anderes echt davon verschiedenes Paar (z_1, z_3) von Elementen aus $\hat{\mathcal{L}}$, das den unter Punkt (iii) dieses Satzes angegebenen Relationen entspricht, dann käme es zu einem Widerspruch, wie die folgenden Überlegungen zeigen. Man erhielte vermittels obiger Hilfsaussage jeweils für (y'_2, y'_3) und für (z_1, z_3) ein Paar von Elementen aus $\hat{\mathcal{L}}$, die einerseits ob der Verschiedenheit von (y'_2, y'_3) und (z_1, z_3) auch voneinander verschieden wären, aber andererseits beide den unter Punkt (ii) dieses Satzes angegebenen Relationen genügen. Mit der mit Punkt (ii) vorausgesetzten Eindeutigkeit läge somit der Widerspruch vor.

(iii) \implies (i): In y'_2, y'_3 und $\bar{\bar{y}} := y - y'_3$ hat man drei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$, so daß $e = y'_2 + y'_3$ und $y = \bar{\bar{y}} + y'_3$ gilt. Für $\bar{\bar{y}}$ siehe dabei die Hilfsaussage im Beweisabschnitt (ii) \implies (iii). Außerdem erhält man

$$\mathbf{0} \leq e = y'_2 + y'_3 \leq y'_2 + y'_3 + \bar{\bar{y}} = y'_2 + y \leq \mathbf{1} - y + y \leq \mathbf{1},$$

so daß $y'_2 + y'_3 + \bar{\bar{y}}$ Element von $\hat{\mathcal{L}}$ ist. Also folgt mit Satz E.8.1 die Koexistenz des Paares (y, e) .

zum Zusatz: Ist (y, e) ein koexistentes Paar von Effekten, dann existieren mit Punkt (iii) dieses Satzes zwei Elemente $y'_2, y'_3 \in \hat{\mathcal{L}}$, so daß gilt:

$$y'_2 \leq \mathbf{1} - y, \quad y'_3 \leq y \quad \text{und} \quad e = y'_2 + y'_3.$$

Mit der Hilfsaussage im Beweisabschnitt „(ii) \implies (iii)“ liegen in $y - y'_3$ und y'_3 zwei Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$ vor, so daß gilt:

$$(y - y'_3) \leq e^\perp, \quad y'_3 \leq e \quad \text{und} \quad y = (y - y'_3) + y'_3.$$

Mit der Eindeutigkeit nach Punkt (ii) dieses Satzes muß also $y_3 = y'_3$ folgen. ■

E.9 Lemma zur Formulierung von Aussage AV 4

Zur endgültigen Formulierung der Aussage AV 4 wird das folgende Lemma benötigt, das eine Feststellung in [Lud85a], Kapitel VI, §7.1, S. 185 beweist:

Lemma E.9.1 *Sei F eine Seite von K , und sei n Element von $\mathbb{N} \cup \{0\}$, dann sind äquivalent:*

- (i) *F hat die Dimension n im Sinne der Definition 8.3.6.*
- (ii) *n ist die kleinste Mächtigkeit einer Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$, bezüglich der die Seite F trennbar ist, das heißt:*
 - (a) *Es gibt eine n -elementige Menge l von Effekten aus $\hat{\mathcal{L}}$ dergestalt, daß F bezüglich l trennbar ist.*
 - (b) *Es gibt keine Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$ echt kleinerer Mächtigkeit als n , bezüglich der die Seite F trennbar ist.*

Beweis:

(i) \implies (ii): Sei $\dim F = n$.

Zunächst wird die Aussage (ii) (a) bewiesen. Es existiert ein n -dimensionaler Untervektorraum U von B_Δ , so daß für jedes $x_0 \in F$ gilt: $F \subseteq x_0 + U$. Sei ein beliebiges x_0 aus F gewählt, und sei $(\bar{x}_i)_{i=1}^n$ eine Basis von U . Mit [SW99], Kapitel IV, §1.1, S. 124 folgt die Existenz einer Familie $(\bar{y}_i)_{i=1}^n$ linear unabhängiger Elemente aus Δ , so daß gilt:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \xi_\Delta(\bar{x}_i, \bar{y}_j) = \delta_{ij}, \quad (\text{E.27})$$

wobei δ_{ij} das gewöhnliche Kronecker-Symbol bezeichne. Da mit Lemma E.7.1 der lineare Aufspann von $\hat{\mathcal{L}}$ mit Δ zusammenfällt, existiert eine Familie $(y_i)_{i=1}^n$ linear unabhängiger Elemente aus $\hat{\mathcal{L}}$, so daß der lineare Aufspann von $(y_i)_{i=1}^n$ mit demjenigen von $(\bar{y}_i)_{i=1}^n$ identisch ist.

Also existiert eine invertierbare reellwertige $n \times n$ -Matrix (M_{ij}) derart, daß für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$y_j = \sum_{s=1}^n M_{js} \bar{y}_s. \quad (\text{E.28})$$

Es ist jetzt zu zeigen, daß F bezüglich $(y_i)_{i=1}^n$ trennbar ist. Seien dafür $x_1, x_2 \in F$ derart gewählt, daß $\xi_\Delta(x_1, y_j) = \xi_\Delta(x_2, y_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Da $(\bar{x}_i)_{i=1}^n$ eine Basis von U ist, existieren zwei Familien $(\alpha_{1t})_{t=1}^n$ und $(\alpha_{2t})_{t=1}^n$ reellwertiger Zahlen, so daß für $i \in \{1, 2\}$ gilt:

$$x_i = x_0 + \sum_{t=1}^n \alpha_{it} \bar{x}_t. \quad (\text{E.29})$$

Damit erhält man für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} \xi_\Delta(x_0, y_j) + \sum_{t=1}^n \alpha_{1t} M_{jt} &\stackrel{(\text{E.27})}{=} \xi_\Delta(x_0, y_j) + \sum_{t=1}^n \alpha_{1t} \sum_{s=1}^n M_{js} \xi_\Delta(\bar{x}_t, \bar{y}_s) \\ &\stackrel{(\text{E.28})}{=} \xi_\Delta(x_0, y_j) + \sum_{t=1}^n \alpha_{1t} \xi_\Delta(\bar{x}_t, y_j) \\ &\stackrel{(\text{E.29})}{=} \xi_\Delta(x_1, y_j) \\ &= \xi_\Delta(x_2, y_j) \\ &\stackrel{(\text{E.29})}{=} \xi_\Delta(x_0, y_j) + \sum_{t=1}^n \alpha_{2t} \xi_\Delta(\bar{x}_t, y_j) \\ &\stackrel{(\text{E.28})}{=} \xi_\Delta(x_0, y_j) + \sum_{t=1}^n \alpha_{2t} \sum_{s=1}^n M_{js} \xi_\Delta(\bar{x}_t, \bar{y}_s) \\ &\stackrel{(\text{E.27})}{=} \xi_\Delta(x_0, y_j) + \sum_{t=1}^n \alpha_{2t} M_{jt}. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{s=1}^n M_{js} (\alpha_{1s} - \alpha_{2s}) = 0.$$

Da die Matrix (M_{ij}) invertierbar ist, ist ihr Kern identisch mit der Menge $\{0\}$, wie man etwa mit [Rom92], Kapitel 2, Theorem 2.3, S. 48 erhält. Somit ergibt sich $\alpha_{1s} = \alpha_{2s}$ für alle $s \in \{1, \dots, n\}$. Wegen (E.29) folgt schließlich die Identität $x_1 = x_2$.

Damit bleibt es noch, die Aussage (ii) (b) nachzuweisen. Sei dafür angenommen, daß durch $\{y_j \mid j = 1, \dots, m\}$ eine F trennende Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$ mit $m < n$ gegeben ist. Da auch $\dim F = n$ gelten soll, gerät man in einen Widerspruch, wie die nachfolgenden Überlegungen zeigen. Den Widerspruch erhält man dadurch, daß erläutert wird, wie es die obigen Annahmen ermöglichen, n

linear unabhängige Elemente in einem m -dimensionalen Vektorraum zu definieren.

Es kann im weiteren $\dim F = n > 0$ angenommen werden kann, denn im Falle $\dim F = n = 0$ liegt bereits ein Widerspruch vor, da man $m < 0$ erhielte.

Wegen $\dim F = n$ kann man F als konvexe Teilmenge eines endlichdimensionalen Untervektorraumes von B_Δ auffassen, der im weiteren mit V bezeichnet sei. Die Dimension von V , die größer als n sein muß, sei mit n_0 benannt. V ausgestattet mit der von $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ induzierten Unterraumtopologie ist isomorph im Sinne topologischer Vektorräume zum \mathbb{R}^{n_0} ausgestattet mit der von der Euklidischen Norm induzierten Topologie. Siehe dafür [SW99], Kapitel I, §3.2, S. 20.

Der Umstand, daß $\dim F = n$ gilt, bedingt im weiteren, daß die affine Hülle von F die Dimension n hat. Also hat auch der der affinen Hülle zugeordnete Untervektorraum U von B_Δ wie von V die Dimension n . Es gilt für alle $x' \in F$ die Inklusion $F \subseteq x' + U$.

Damit kann man nun mit Theorem 6.2, [Roc70], Kapitel II, §6, S. 45 folgern, daß die Menge F bezüglich ihrer affinen Hülle einen relativen inneren Punkt besitzt. Das heißt, es existiert ein $x_0 \in F$ und ein $\varepsilon > 0$, so daß gilt

$$K_\varepsilon(x_0) \cap (x_0 + U) \subseteq F, \quad (\text{E.30})$$

wobei mit $K_\varepsilon(x_0)$ die offene $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Kugel in B_Δ des Radius ε um den Punkt x_0 benannt sei.

Ist $(x_i)_{i=1}^n$ eine Basis von U , dann ist für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ durch

$$h_i := \begin{pmatrix} \xi_\Delta(x_i, y_1) \\ \vdots \\ \xi_\Delta(x_i, y_m) \end{pmatrix} \quad (\text{E.31})$$

ein Element des \mathbb{R}^m gegeben. Es wird nun gezeigt, daß die Vektoren aus (E.31) linear unabhängig sind.

Für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i h_i = 0$ gilt für ein beliebiges $\alpha > 0$:

$$\begin{pmatrix} \xi_\Delta(x_0, y_1) \\ \vdots \\ \xi_\Delta(x_0, y_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\Delta(x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, y_1) \\ \vdots \\ \xi_\Delta(x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, y_m) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.32})$$

Wegen (E.30) kann man α aber derart wählen, daß $x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ Element von F ist, denn man kann ohne weiteres ein $\alpha > 0$ so wählen, daß die Ungleichung $\|\alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\|_{B_\Delta} < \varepsilon$ gilt. Also erhält man $\|x_0 - (x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)\|_{B_\Delta} < \varepsilon$, woraus sich mit (E.30) gerade $x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in F$ ergibt.

Mit einem derartig gewählten α besagt (E.32) aufgrund der vorausgesetzten Trennungseigenschaft der Familie $(y_j)_{j=1}^m$, daß $x_0 = x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ gilt. Also folgt insbesondere $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$, woraus sich $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$ aufgrund der linearen Unabhängigkeit von der Elemente der Menge $\{x_i \mid i = 1, \dots, n\}$ ergibt. Das bedeutet aber die behauptete lineare Unabhängigkeit der Vektoren aus (E.31).

Es ist somit gelungen, n linear unabhängige Elemente in einem m -dimensionalen Vektorraum zu finden, obwohl $m < n$ gilt. Also liegt ein Widerspruch zu den Voraussetzungen vor, und die Behauptung ist bewiesen.

(ii) \implies (i): Sei F eine Seite von K . Mögen außerdem für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussagen (ii) (a) und (ii) (b) gelten.

Zunächst wird gezeigt, daß $\dim F \leq n$ gelten muß. Es wurde im Beweisabschnitt „(i) \implies (ii) (b)“ gezeigt, daß man zu einem Widerspruch kommt, wenn die Dimension einer Seite F von K echt größer ist als die Mächtigkeit einer F trennenden Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$. Nimmt man nun an, daß $\dim F > n$ gilt, dann gelangt man also zu einem Widerspruch, da es nach Voraussetzung (ii) (a) eine F trennende Menge $l \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ der Mächtigkeit n gibt. Man erhält somit: $\dim F \leq n$.

Um nun $\dim F = n$ zu zeigen, reicht es aus, nachzuweisen, daß die Annahme von $\dim F < n$ zum Widerspruch führt. Sei dafür angenommen, daß $\dim F = m < n$ gilt. Dann folgt mit der oben bereits gezeigten Implikation „(i) \implies (ii)“, daß es eine m -elementige Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$ gibt, bezüglich derer die Seite F trennbar ist. Das steht aber im Widerspruch zur Annahme (ii) (b), derzufolge es keine F trennende Teilmenge von $\hat{\mathcal{L}}$ gibt, die echt kleinerer Mächtigkeit als n ist. ■

Anhang F

Auszüge aus der Verbandstheorie

Inhalt des folgenden Anhanges ist eine Zusammenstellung verbandstheoretischer Grundlagen, wie sie zum Verständnis insbesondere der Kapitel 9, 10 und 12 benötigt werden. Alle Sätze und Lemmata werden, soweit sie der Literatur entnommen wurden, nicht bewiesen, sondern nur mit einem Hinweis auf die zugehörige Stelle der mathematischen Fachliteratur versehen. Einfache Aussagen werden zuweilen auch ohne weiteres Zitat formuliert; sie sind dann aber in zugehörigen Abschnitten der nachfolgenden Werke zu finden. Als zentrale hier verwandte Referenzen sind die Werke [BC81], [Giu91] und [PP91] zu nennen, die sich besonders auch mit der physikalischen Relevanz der Verbandstheorie auseinandersetzen. Als vor allem mathematisch orientierte Referenz beachte man die Werke [MM70], [Kal83] und [Bir95]. Da es zwischen den genannten Büchern leichte Notations- und Bezeichnungsunterschiede gibt, wird darauf hingewiesen, daß zumeist derjenigen von [BC81] gefolgt wird.

Als grundlegender Begriff der Verbandstheorie wird zunächst der Begriff der halbgeordneten Menge eingeführt.

Definition F.1

Eine Relation \leq auf einer Menge L heißt **Halbordnung auf L** , wenn \leq transitiv, reflexiv und antisymmetrisch ist. Das Paar (L, \leq) heißt **halbgeordnete Menge** oder auch ebenfalls **Halbordnung**.

Als Beispiele betrachte man die natürlichen Zahlen \mathbb{N} bezüglich der natürlichen größer-kleiner-Ordnung oder die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer beliebigen Menge bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung. Mit Hilfe einer Halbordnung auf einer Menge kann man den Begriff der oberen und unteren Schranke von Teilmengen einführen. Das ermöglicht dann insbesondere die Definition der Begriffe der klein-

sten oberen sowie der größten unteren Schranke einer Teilmenge, die auch auch als Supremum und Infimum bezeichnet werden.

Definition F.2

Sei (L, \leq) eine Halbordnung, und bezeichne A eine nicht-leere Teilmenge von X .

- (i) Ein Element a der Menge L heißt **obere Schranke von A bezüglich (L, \leq)** , wenn $x \leq a$ für jedes Element x aus A gilt.
- (ii) Ein Element a der Menge L heißt **untere Schranke von A bezüglich (L, \leq)** , wenn $a \leq x$ für jedes Element x aus A gilt.
- (iii) Ein Element a der Menge L heißt **Supremum von A bezüglich (L, \leq)** , wenn a obere Schranke von A ist und wenn für jede obere Schranke a' von A die Relation $a \leq a'$ gilt. Als Symbol für das Supremum von A bezüglich (L, \leq) wird das Zeichen $\bigvee_{a \in A} a$ verwandt.
- (iv) Ein Element a der Menge L wird **Infimum von A bezüglich (L, \leq)** genannt, wenn a untere Schranke von A ist und wenn für jede untere Schranke a' von A die Beziehung $a' \leq a$ gilt. Als Symbol für das Infimum von A bezüglich (L, \leq) wird das Zeichen $\bigwedge_{a \in A} a$ verwandt.

Wenn aus dem Kontext heraus klar ist, welche Halbordnung auf einer Menge gemeint ist, dann werden die Zusätze wie „bezüglich (L, \leq) “ meist weggelassen. Ebenso wird häufig vereinfachend L als Halbordnung bezeichnet, ohne explizit die Relation \leq immer mitaufzuführen. Wenn keine andere Vereinbarung getroffen wurde, soll bei einer Halbordnung L die zugehörige Relation stets mit \leq bezeichnet sein.

Betrachtet man in Definition F.2 im besonderen den ganzen Verband als Teilmenge A , dann wählt man zusätzlich noch die Bezeichnung:

Definition F.3

Sei (L, \leq) eine Halbordnung. Dann heißt ein Element a der Menge L **maximales Element von L** , wenn es kein von a verschiedenes Element x aus L mit $a \leq x$ gibt.

Man bemerke, daß eine Halbordnung mehrere maximale Elemente enthalten kann. Mit dem Begriff des maximalen Elementes kann das folgende Lemma formuliert werden.

Lemma F.4 (Lemma von Zorn) *Es sei (L, \leq) eine Halbordnung. Ferner möge für jede nicht-leere Teilmenge A von L mit der Eigenschaft, daß für beliebige Elemente a_1, a_2 aus A entweder $a_1 \leq a_2$ oder $a_2 \leq a_1$ gilt, eine obere Schranke in L existieren. Dann besitzt L ein maximales Element.*

Beweis: Siehe [Wl071], Kapitel II, §9, S. 71.

Definition F.5

Sei (L, \leq) eine Halbordnung. Dann wird das Supremum von L , wenn es existiert, mit dem Symbol $\mathbf{1}$ belegt. Das Element $\mathbf{1}$ wird im weiteren als **Eins-Element** bezeichnet.

Im Falle seiner Existenz wird für das Infimum von L das Zeichen $\mathbf{0}$ gewählt. Das mit $\mathbf{0}$ benannte Element wird **Null-Element** genannt.

Es ist offensichtlich, daß $\mathbf{1}$ das größte Element von L in dem Sinne ist, daß $a' \leq a$ für alle $a \in L$ gilt. Dagegen handelt es sich offenbar bei $\mathbf{0}$ um das kleinste Element von L , das heißt, es ist $a \leq a'$ für alle $a \in L$.

Nun kann der Begriff des Verbandes eingeführt werden:

Definition F.6

Eine Halbordnung (L, \leq) heißt

- (i) **(endlicher) Verband**, wenn für jede endliche nicht-leere Teilmenge von L Supremum und Infimum existieren,
- (ii) **σ -Verband**, wenn für jede höchstens abzählbare nicht-leere Teilmenge von L Supremum und Infimum existieren und
- (iii) **vollständiger Verband**, wenn für beliebige nicht-leere Teilmengen von L Supremum und Infimum existieren.

Der Zusatz „endlich“ bei Punkt (i) soll dabei nur verwandt werden, um zwischen den drei Typen präziser unterscheiden zu können.

Das nachfolgende Lemma wird zum Beweis von Lemma 8.3.16 benötigt. Man findet es etwa im Anschluß an Definition (2.12) in [MM70], Kapitel I, S. 8.

Lemma F.7 *Bezeichne (L, \leq) eine Halbordnung mit Eins-Element derart, daß für beliebige Teilmengen von L das Infimum existiert. Dann existiert für beliebige Teilmengen von L das Supremum.*

Beweis:

Sei U eine beliebige Teilmenge von L . Man betrachte die Menge V aller oberen Schranken der Elemente von U , also die Menge $V = \{x \in L \mid \forall u \in U : x \geq u\}$. V ist nicht-leer, da das Eins-Element in V liegen muß. Nach Voraussetzung existiert zudem $\inf_{x \in V} x$, das aber definitionsgemäß gerade das Supremum von U darstellt. ■

Zuweilen ist es möglich, auf einer halbgeordneten Menge eine besondere Funktion zu definieren:

Definition F.8

Es bezeichne (L, \leq) eine Halbordnung mit Null-Element $\mathbf{0}$, dann heißt eine Abbildung $\perp : L \rightarrow L$, $a \mapsto a^\perp$ eine **Orthokomplementation** der Halbordnung (L, \leq) , wenn gilt:

- (i) Für alle Elemente a der Menge L gilt: $a^{\perp\perp} = a$.
- (ii) Für alle Elemente a, b der Menge L mit $a \leq b$ gilt die Relation $b^\perp \leq a^\perp$.
- (iii) Für alle Elemente a der Menge L gilt die Identität $a \wedge a^\perp = \mathbf{0}$.

(L, \leq, \perp) wird als **orthokomplementierte Halbordnung** bezeichnet.

Bemerkung: Wie in obiger Definition wird in der Regel für eine Orthokomplementation \perp die Schreibweise $a^\perp := \perp(a)$ für alle Elemente a aus L verwendet.

Es sei angemerkt, daß eine Orthokomplementation insbesondere eine Bijektion ist. Zudem wird betont, daß es im allgemeinen mehrere Orthokomplementationen auf einer Halbordnung geben kann. Dennoch wird man häufig auch bei Umgang mit orthokomplementierten Halbordnungen anstatt der korrekten Formulierung (L, \leq, \perp) einfach von einer orthokomplementierten Halbordnung L sprechen, falls eindeutig ist, welche Orthokomplementation gemeint ist. Wenn keine andere Vereinbarung getroffen wurde, soll die zugehörige Orthokomplementation dann stets mit \perp bezeichnet werden. Auf einer orthokomplementierten Halbordnung existiert mit $\mathbf{0}^\perp$ stets auch ein Eins-Element. Für das Eins-Element gilt insbesondere $a \vee a^\perp = \mathbf{1}$. Außerdem erhält man offensichtlich auch $\mathbf{1}^\perp = \mathbf{0}$.

Eine weitere wichtige Konsequenz der Existenz einer Orthokomplementation besteht darin, daß Suprema und Infima nicht mehr unabhängig sind, denn es gilt:

Satz F.9 (Regeln von de Morgan) Sei (L, \leq, \perp) eine orthokomplementierte Halbordnung, und bezeichne A eine Teilmenge von L , dann gilt:

- (i) Existiert $\bigvee_{a \in A} a$ (oder $\bigwedge_{a \in A} a^\perp$), dann existiert $\bigwedge_{a \in A} a^\perp$ (oder $\bigvee_{a \in A} a$), und es gilt:

$$\left(\bigvee_{a \in A} a\right)^\perp = \bigwedge_{a \in A} a^\perp.$$

(ii) Existiert $\bigwedge_{a \in A} a$ (oder $\bigvee_{a \in A} a^\perp$), dann existiert $\bigvee_{a \in A} a^\perp$ (oder $\bigwedge_{a \in A} a$), und es gilt:

$$\left(\bigwedge_{a \in A} a\right)^\perp = \bigvee_{a \in A} a^\perp.$$

Zur weiteren Strukturanalyse orthokomplementierter Halbordnungen sind die folgenden Begriffe wichtig.

Definition F.10

Sei (L, \leq, \perp) eine orthokomplementierte Halbordnung, dann heißen zwei Elemente a, b von L **orthogonal**, in Zeichen $a \perp b$, wenn $a \leq b^\perp$ gilt. Eine Teilmenge A von L heißt **orthogonal**, wenn die Elemente von A paarweise orthogonal sind.

Eine orthokomplementierte Halbordnung (L, \leq, \perp) wird **separabel** genannt, wenn jede orthogonale Teilmenge von $L \setminus \{0\}$ höchstens abzählbarer Mächtigkeit ist.

Bevor weitere Eigenschaften von Verbänden untersucht werden sollen, ist es angebracht, einen Begriff der Strukturäquivalenz verschiedener Verbände bereitzustellen.

Definition F.11

(i) Seien (L_1, \leq_1) und (L_2, \leq_2) zwei Verbände, und bezeichne $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ eine Abbildung, so daß gilt:

- (a) φ ist surjektiv,
- (b) φ ist in beiden Richtungen ordnungserhaltend, das heißt, daß für alle Elemente a, b der Menge L_1 die Relationen $a \leq_1 b$ und $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$ äquivalent sind.

Dann wird φ als **Verbandsisomorphismus** oder auch nur als **Isomorphismus** bezeichnet.

(ii) Seien (L_1, \leq_1) und (L_2, \leq_2) zwei Verbände, und bezeichne $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ eine Abbildung, so daß gilt:

- (a) φ ist surjektiv,
- (b) φ dreht die Ordnungen um, das heißt, für alle Elemente a, b der Menge L_1 gilt die Relation $a \leq_1 b$ genau dann, wenn der Relation $\varphi(b) \leq_2 \varphi(a)$ entsprochen wird.

Dann wird φ als **dualer Bandsisomorphismus** bezeichnet.

(iii) Seien (L_1, \leq_1, \perp_1) und (L_2, \leq_2, \perp_2) zwei orthokomplementierte Verbände, und sei mit $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ eine Abbildung derart gegeben, daß gilt:

(a) φ ist Verbandsisomorphismus.

(b) Für jedes Element a der Menge L_1 gilt die Identität $\varphi(a^{\perp_1}) = (\varphi(a))^{\perp_2}$.

Dann wird φ **Orthoisomorphismus** genannt.

Ein prominentes Beispiel für einen dualen Verbandsisomorphismus ist die Orthokomplementation.

Die Eigenschaft, daß eine Abbildung zwischen zwei Verbänden ein Isomorphismus oder ein dualer Verbandsisomorphismus ist, läßt sich auch noch anders formulieren. Hinsichtlich alternativer Charakterisierungen von Isomorphismen gilt:

Lemma F.12 *Seien (L_1, \leq_1) und (L_2, \leq_2) zwei Verbände, und sei $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ eine Abbildung, dann sind äquivalent:*

(a) φ ist Verbandsisomorphismus.

(b) Es gelten die beiden Aussagen:

(i) φ ist eine Bijektion.

(ii) Für alle Elemente a, b der Menge L_1 gilt die Identität

$$\varphi(a \vee_1 b) = \varphi(a) \vee_2 \varphi(b).$$

(c) Es gelten die beiden Aussagen:

(i) φ ist eine Bijektion,

(ii) Für alle Elemente a, b der Menge L_1 gilt die Identität

$$\varphi(a \wedge_1 b) = \varphi(a) \wedge_2 \varphi(b).$$

Beweis:

Seien (L_1, \leq_1) und (L_2, \leq_2) Verbände, und sei $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ eine Abbildung. Man kann sich ob der Gleichheit der Argumentation für die anderen Fälle auf den Beweis der Äquivalenz von (a) und (b) beschränken.

(b) \implies (a): Es muß nur der Ordnungserhalt in beide Richtungen gezeigt werden. Seien dafür $a, b \in L_1$ mit $a \leq_1 b$ gewählt, dann gilt $b = a \vee_1 b$. Also folgt

mit (b)(ii): $\varphi(a) \leq_2 \varphi(a) \vee_2 \varphi(b) = \varphi(a \vee_1 b) = \varphi(b)$. Gilt nun andersherum für zwei Elemente $a, b \in L_1$ die Beziehung $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$, dann erhält man: $\varphi(b) = \varphi(a) \vee_2 \varphi(b) = \varphi(a \vee_1 b)$. Die Bijektivität von φ liefert damit $b = a \vee_1 b$, so daß also $a \leq_1 b$ gilt.

(a) \implies (b): Zunächst wird die Injektivität von φ gezeigt. Seien dafür $a, b \in L_1$ mit $\varphi(a) = \varphi(b)$ gewählt. Dann gilt $\varphi(a) \leq_2 \varphi(b)$ und $\varphi(b) \leq_2 \varphi(a)$. Mit dem Ordnungserhalt folgt daher $a \leq_1 b$ und $b \leq_1 a$, so daß man $a = b$ erhält. Zusammen mit der vorausgesetzten Surjektivität ergibt sich also die Bijektivität von φ .

Es bleibt, die Aussage (b)(ii) zu beweisen. Seien nun a, b zwei Elemente aus L_1 . Da (L_1, \leq_1) ein Verband ist, existiert das Supremum $a \vee_1 b$. Da $a, b \leq_1 a \vee_1 b$ gilt, erhält man mit der Eigenschaft des Ordnungserhaltes von φ die Ungleichungen $\varphi(a), \varphi(b) \leq_2 \varphi(a \vee_1 b)$, so daß $\varphi(a \vee_1 b)$ obere Schranke von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ in (L_2, \leq_2) ist. Es bleibt somit nur noch zu zeigen, daß $\varphi(a \vee_1 b)$ auch kleinste obere Schranke ist. Sei dafür eine beliebige obere Schranke c von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ in (L_2, \leq_2) gewählt. Dann erhält man mit der Eigenschaft des Ordnungserhaltes von φ in die andere Richtung die Ungleichungen $a, b \leq_1 \varphi^{-1}(c)$, woraus sich $a \vee_1 b \leq_1 \varphi^{-1}(c)$ ergibt. Also gilt die Ungleichung $\varphi(a \vee_1 b) \leq_2 c$, so daß $\varphi(a \vee_1 b)$ tatsächlich kleinste obere Schranke von $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ in (L_2, \leq_2) ist. ■

Bevor ein analoger Satz auch für duale Verbandsisomorphismen formuliert wird, wird noch das folgende Lemma notiert.

Lemma F.13 *Sei (L_1, \leq_1) ein vollständiger Verband, sei (L_2, \leq_2) eine Halbordnung, und symbolisiere $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ eine in beide Richtungen ordnungserhaltende Surjektion. Dann handelt es sich bei (L_2, \leq_2) um einen vollständigen Verband, und φ ist ein Verbandsisomorphismus.*

Beweis:

Zunächst wird die Injektivität von φ gezeigt. Dafür wähle man x_1, x_2 aus L_1 mit $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Daraus ergibt sich trivialerweise $\varphi(x_1) \leq_2 \varphi(x_2)$ und $\varphi(x_2) \leq_2 \varphi(x_1)$. Die Eigenschaft des Ordnungserhaltes von φ liefert daraus $x_1 \leq_1 x_2$ und $x_2 \leq_1 x_1$. Ob der Antisymmetrie von \leq_1 gilt somit die Identität $x_1 = x_2$. Also ist φ eine in beide Richtungen ordnungserhaltende Bijektion.

Zum Beweis der Aussage muß nun gezeigt werden, daß für jede Teilmenge von L_2 sowohl Supremum als auch Infimum in L_2 existieren. Dabei kann man sich auf den Fall der Existenz des Infimums beschränken, da der Beweis für die Existenz des Supremums analog verläuft.

Man betrachte dafür mit einer Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit eine Familie $(c_i)_{i \in I}$ von Elementen aus L_2 . Dann ist die Menge $\{\varphi^{-1}(c_i) \mid i \in I\}$ in der Menge L_1 enthalten. Da L_1 vollständiger Verband ist, existiert das Infimum $\bigwedge_{i \in I}^1 \varphi^{-1}(c_i)$ in L_1 . Dabei soll das Superskript 1 deutlich machen, daß es sich um ein Infimum von Elementen aus L_1 bezüglich \leq_1 handelt. Entsprechend wird dann das Superskript 2 verwandt. Wegen der Bijektivität von φ liegt $C := \varphi(\bigwedge_{i \in I}^1 \varphi^{-1}(c_i))$ in L_2 . Es wird nun gezeigt, daß C Infimum der Familie $(c_i)_{i \in I}$ ist. Für jedes $j \in I$ gilt $\bigwedge_{i \in I}^1 \varphi^{-1}(c_i) \leq_1 \varphi^{-1}(c_j)$, und damit erhält man $C \leq_2 c_j$ für jedes $j \in I$. Also ist C untere Schranke der c_j mit $j \in I$. Liegt nun mit $x \in L_2$ eine untere Schranke der Familie $(c_i)_{i \in I}$ vor, dann gewinnt man für jedes $j \in I$ die Relation $\varphi^{-1}(x) \leq_1 \varphi^{-1}(c_j)$. Damit erhält man folglich $\varphi^{-1}(x) \leq_1 \bigwedge_{i \in I}^1 \varphi^{-1}(c_i)$. Folglich gilt $x \leq_2 C$, das heißt, C ist größte untere Schranke. Somit bildet (L_2, \leq_2) einen vollständigen Verband. Lemma F.12 liefert dann, daß φ ein Verbandsisomorphismus ist. ■

Man kann in Analogie zu Lemma F.12 auch für die dualen Verbandsisomorphismen äquivalente Formulierungen angeben. Sie beweisen sich wie Lemma F.12 auf einfachem Wege, so daß hier nur das Lemma formuliert wird:

Lemma F.14 *Bezeichnen (L_1, \leq_1) und (L_2, \leq_2) zwei Verbände und symbolisiert $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ eine Abbildung, dann sind äquivalent:*

(a) φ ist dualer Verbandsisomorphismus.

(b) Es gelten die beiden Aussagen:

(i) φ ist eine Bijektion,

(ii) Für alle Elemente a, b der Menge L_1 gilt die Identität

$$\varphi(a \vee_1 b) = \varphi(a) \wedge_2 \varphi(b).$$

(c) Es gelten die beiden Aussagen:

(i) φ ist eine Bijektion,

(ii) Für alle Elemente a, b der Menge L_1 gilt die Identität

$$\varphi(a \wedge_1 b) = \varphi(a) \vee_2 \varphi(b).$$

Im Rahmen der physikalischen Anwendung der Verbandstheorie benötigt man auch die nachfolgenden Begriffe.

Definition F.15

- (i) Eine Halbordnung L heißt **σ -orthovollständig**, wenn L orthokomplementiert ist und wenn bezüglich dieser Orthokomplementation das Supremum jeder höchstens abzählbaren orthogonalen Teilmenge von L existiert.

Eine Halbordnung L heißt **orthomodular**, wenn sie σ -orthovollständig ist und wenn die **Orthomodularitätsidentitäten** gelten. Das heißt, für alle Elemente a, b der Menge L mit $a \leq b$ gilt die Identität:

$$b = a \vee (a^\perp \wedge b).$$

- (ii) Ein Verband (L, \leq) heißt **modular**, wenn für alle Elemente a, b von L gilt:

$$\forall c \in L : c \leq b \implies (c \vee a) \wedge b = c \vee (a \wedge b).$$

- (iii) Sei (L, \leq) ein Verband, dann heißt ein Tripel (a, b, c) von Elementen aus L ein **distributives Tripel**, wenn die Relationen

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{und} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad (\text{F.1})$$

zusammen mit den vier anderen Gleichungen gelten, die sich aus (F.1) durch zyklische Permutation von a, b, c ergeben.

- (iv) Ein Verband (L, \leq) heißt **distributiv**, wenn jedes Tripel aus L ein distributives Tripel ist.
- (v) Als **Boolescher Verband** wird ein distributiver, orthokomplementierter Verband bezeichnet.

Zu den obigen Definitionen sollen einige kurze Bemerkungen gemacht werden. Zunächst beobachte man, daß bei der Definition der Orthomodularität nicht von einem Verband ausgegangen werden muß, um die Wohldefiniertheit der in Orthomodularitätsidentitäten vorkommenden Ausdrücke zu garantieren. Dafür reicht die Voraussetzung einer σ -orthovollständigen Halbordnung bereits aus, wie sich unmittelbar beweist. Die Orthomodularität kann auf viele weitere äquivalente Weisen definiert werden. Es soll hier aber nur noch die duale Form der Orthomodularitätsidentität erwähnt werden. Es gilt das Lemma:

Lemma F.16 (duale Formen der Orthomodularitätsidentitäten) *Auf einer σ -orthovollständigen Halbordnung (L, \leq) sind äquivalent:*

(i) *Für alle Elemente a, b der Menge L mit $a \leq b$ gilt die Identität:*

$$b = a \vee (a^\perp \wedge b). \quad (\text{F.2})$$

(ii) *Für alle Elemente a, b der Menge L mit $a \leq b$ gilt die Identität:*

$$a = b \wedge (b^\perp \vee a). \quad (\text{F.3})$$

Beweis:

Gelte zunächst (F.2). Man wähle Elemente a, b aus L mit $a \leq b$, dann gilt insbesondere $b^\perp \leq a^\perp$. Damit ergibt sich $a^\perp = b^\perp \vee (a^\perp \wedge b)$. Vermittels der de Morganschen Regeln erhält man dann $a = b \wedge (a \vee b^\perp)$, also (F.3). Die andere Richtung folgt entsprechend. ■

Die Definitionen der Orthomodularität und der Modularität können für Verbände auch mit Hilfe des Begriffes des distributiven Tripels formuliert werden, denn es gilt:

Lemma F.17 *Es gilt:*

(i) *Ein Verband ist orthomodular genau dann, wenn für alle Elemente a, b aus L mit $a \leq b$ durch (a, b, a^\perp) ein distributives Tripel gegeben ist.*

(ii) *Ein Verband ist modular genau dann, wenn für alle Elemente a, b aus L mit $a \leq b$ gilt:*

Für jedes Element c aus L ist (a, b, c) ein distributives Tripel.

Mit obigem Lemma wird offenbar, daß aus der Distributivität die Modularität und aus der Modularität auch die Orthomodularität eines Verbandes folgt.

Eine bemerkenswerte Eigenschaft distributiver Verbände besteht nach [Bir95], Kapitel I, Theorem 16, S. 17 darin, daß sie nur genau eine Orthokomplementation besitzen.

Zum Nachweis der Distributivität eines Verbandes muß man nicht tatsächlich für jedes Tripel alle sechs Gleichungen nachweisen, die in der Definition F.15 (iii) für ein distributives Tripel gefordert werden, denn es gilt:

Lemma F.18 *Sei L ein Verband, dann sind äquivalent:*

(i) *L ist distributiv.*

(ii) *Für alle Elemente a, b, c der Menge L gilt die Identität:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

(iii) *Für alle Elemente a, b, c der Menge L gilt die Identität:*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

Beweis: Siehe [Bir95], Kapitel I, Theorem 9, S. 11.

Ein bekanntes Beispiel für Boolesche Verbände illustriert das nachfolgende Lemma:

Lemma F.19 *Sei M eine Menge, und sei \mathcal{T} ein System von Teilmengen von M , das M enthält. Für beliebige Elemente a, b aus \mathcal{T} liege der Durchschnitt $a \cap b$ in \mathcal{T} , und für alle Elemente a aus \mathcal{T} sei das Komplement $M \setminus a$ ein Element von \mathcal{T} .*

Dann ist \mathcal{T} bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung und der Mengendifferenz als Orthokomplementation ein endlicher Boolescher Verband. Dabei beschreibt M das Eins- und \emptyset das Null-Element. Das Supremum endlich vieler Elemente aus \mathcal{T} fällt mit der Mengenvereinigung zusammen, während das Infimum endlich vieler Elemente aus \mathcal{T} mit dem Mengendurchschnitt identisch ist.

Beweis:

Die Aussagen bezüglich der Halbordnungseigenschaften der Mengeninklusion und bezüglich des Null- und Eins-Elementes sind trivial.

Bezeichnen nun a, b zwei Elemente aus \mathcal{T} , dann gehört nach Voraussetzung auch der Durchschnitt $a \cap b$ zu \mathcal{T} . Der Durchschnitt zweier Mengen ist aber in Hinsicht auf die Mengeninklusion die größte in a und b enthaltene Menge. Somit bezeichnet $a \cap b$ auch das Infimum von a und b bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung. Die Erweiterung auf endliche Familien ergibt sich mit vollständiger Induktion, so daß für jede endliche Familie $(a_i)_{i=1}^n$ aus \mathcal{T} gilt:

$$\bigwedge_{i=1}^n a_i = \bigcap_{i=1}^n a_i. \tag{F.4}$$

Als Nächstes wird gezeigt, daß durch die Abbildung

$$\perp : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}, \quad a \longmapsto M \setminus a$$

eine Orthokomplementation bezüglich (\mathcal{T}, \subseteq) vorliegt. Seien dafür Elemente a, b aus \mathcal{T} gewählt. Notiert man im weiteren in üblicher Weise für jedes Element c aus \mathcal{T} das Symbol c^\perp für das Bild von c bezüglich \perp , dann erhält man:

- (i) $a^{\perp\perp} = M \setminus (M \setminus a) = a$.
- (ii) Gilt $a \subseteq b$, so ergibt sich $b^\perp = (M \setminus b) \subseteq (M \setminus a) = a^\perp$.
- (iii) Mit (F.4) ergibt sich $a \wedge a^\perp = a \cap (M \setminus a) = \emptyset$.

Also bezeichnet die Abbildung \perp eine Orthokomplementation auf \mathcal{T} .

Damit kann man auch die Aussagen über Existenz und Aussehen der Suprema endlicher Familien aus \mathcal{T} zeigen. Man betrachte dazu eine Familie $(a_i)_{i=1}^n$ aus \mathcal{T} . Dann liegt ob der obigen Aussagen über die Infima endlicher Familien aus \mathcal{T} auch $\bigwedge_{i=1}^n a_i^\perp$ in \mathcal{T} . Mit Hilfe der de Morganschen Regeln aus Satz F.9 ist damit die Existenz des Supremums $\bigvee_{i=1}^n a_i$ in \mathcal{T} gesichert, und es gilt mit (F.4):

$$\begin{aligned} \bigvee_{i=1}^n a_i &= \left(\bigwedge_{i=1}^n a_i^\perp \right)^\perp = M \setminus \left(\bigcap_{i=1}^n (M \setminus a_i) \right) = M \setminus \left(M \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n a_i \right) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n a_i. \end{aligned}$$

Also ist gezeigt, daß für beliebige endliche Familien aus \mathcal{T} Supremum und Infimum bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung existieren und daß das Supremum dabei gerade durch die Vereinigung und das Infimum gerade durch den Mengendurchschnitt gegeben ist. Daher folgen die noch zu zeigenden Distributivitätseigenschaften unmittelbar aus der bekannten Distributivität von \cap, \cup . ■

Bereits auf dem Niveau einer σ -orthovollständigen Halbordnung kann man das Konzept des Wahrscheinlichkeitsmaßes bezüglich einer Halbordnung begründen. Man definiert:

Definition F.20

Sei L eine σ -orthovollständige Halbordnung. Dann heißt eine Funktion f von L in das reelle Intervall $[0, 1]$ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß auf L** , wenn gilt:

- (i) $f(\mathbf{1}) = 1$,

- (ii) für jede höchstens abzählbare Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Elementen aus L , deren Mitglieder paarweise orthogonal sind, gilt

$$f\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \sum_{i \in I} f(a_i). \quad (\text{F.5})$$

Die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L wird mit dem Symbol \mathcal{W}_L belegt.

Bemerkung: Es sei darauf hingewiesen, daß die Existenz des Terms auf der rechten Seite von (F.5) einen Teil der Definition darstellt, das heißt im abzählbaren Fall, daß die Existenz der Reihe bewiesen werden muß!

Auf einer orthomodularen Halbordnung kann man eine weitere Relation definieren:

Definition F.21

Sei L eine orthokomplementierte Halbordnung, dann **kommutieren** zwei Elemente a, b aus L , wenn $a \wedge b$ und $a \wedge b^\perp$ existieren und wenn gilt:

$$a = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp).$$

In einem solchen Fall wird symbolisch $(a, b)C$ notiert.

Einige grundlegende Eigenschaften des Kommutierbarkeitsbegriffs zählt das folgende Lemma auf:

Lemma F.22 *Seien a, b zwei Elemente einer orthokomplementierten Halbordnung L , dann gilt:*

- (i) *Die Kommutierbarkeitsrelation ist symmetrisch. Das heißt, es gilt $(a, b)C$ genau dann, wenn $(b, a)C$ gilt.*
- (ii) *Kommutieren a und b , dann kommutieren auch a^\perp und b , das heißt, aus $(a, b)C$ folgt $(a^\perp, b)C$.*
- (iii) *Sind a und b orthogonal zu einander, dann kommutieren sie auch. Das heißt, $a \perp b$ impliziert $(a, b)C$.*
- (iv) *Aus $a \leq b$ folgt $(a, b)C$.*

Beweis: Siehe [MM70], Kapitel VIII, Lemma (36.3), S. 166.

Der Begriff der Kommutierbarkeit ermöglicht es, gewisse Distributivitätsaussagen auch in orthomodularen Verbänden zu formulieren.

Satz F.23 Seien a, b und c drei Elemente eines orthomodularen Verbandes L . Kommutiert eines der drei Elemente mit den anderen beiden, dann ist (a, b, c) ein distributives Tripel.

Beweis: Siehe [MM70], Kapitel VIII, Theorem (36.7), S. 167.

Außerdem wird die folgende Aussage notiert:

Satz F.24 (Verallgemeinertes Distributivgesetz)

Sei L ein orthomodularer $\left\{ \begin{array}{l} \text{endlicher} \\ \sigma\text{-} \\ \text{vollständiger} \end{array} \right\}$ Verband. Sei a aus L , und sei $(b_i)_{i \in I}$ eine Familie in L mit einer Indexmenge I von $\left\{ \begin{array}{l} \text{endlicher} \\ \text{abzählbarer} \\ \text{überabzählbarer} \end{array} \right\}$ Mächtigkeit derart, daß $(a, b_i)C$ für jedes $i \in I$ gilt. Dann ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i),$$

$$a \vee \left(\bigwedge_{i \in I} b_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (a \vee b_i).$$

Beweis:

Zunächst wird die erste Relation bewiesen. Offensichtlich gilt $b_j \leq \bigvee_{i \in I} b_i$ für alle $j \in I$, und deshalb erhält man auch $a \wedge b_j \leq a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right)$ für alle $j \in I$. Also erhält man $\bigvee_{j \in I} (a \wedge b_j) \leq a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right)$. Es bleibt mithin, die andere Richtung zu zeigen. Sei dafür wieder ein $j \in I$ gewählt, dann gilt wegen der Kommutierbarkeit mit a :

$$b_j = (a \wedge b_j) \vee (a^\perp \wedge b_j) \leq (a \wedge b_j) \vee a^\perp \leq \left(\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \right) \vee a^\perp. \quad (\text{F.6})$$

Da (F.6) für alle $j \in I$ gilt, gewinnt man die folgende Relation:

$$\bigvee_{j \in I} b_j \leq \left(\bigvee_{j \in I} (a \wedge b_j) \right) \vee a^\perp.$$

Damit ergibt sich:

$$a \wedge \left(\bigvee_{j \in I} b_j \right) \leq \left(\left(\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_j) \right) \vee a^\perp \right) \wedge a = \bigvee_{j \in I} (a \wedge b_j).$$

Dabei ergibt sich das letzte Gleichheitszeichen mit $\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_j) \leq a$ aus der dualen Orthomodularitätsidentität (F.3). Der zweite Punkt der Behauptung folgt mit dem ersten unter Verwendung der de Morganschen Regeln. ■

Basierend auf dem Kommutierbarkeitsbegriff definiert man weiter:

Definition F.25

Sei L eine orthomodulare Halbordnung, und sei X eine Teilmenge von L . Dann heißt die Menge aller Elemente a aus L , die mit allen Elementen b aus X kommutieren, die **Kommutante von X** . Die Kommutante von L wird als **Zentrum von L** bezeichnet. Es wird dafür das Symbol $Z(L)$ verwendet.

Offensichtlich sind Null- und Eins-Element einer orthomodularen Halbordnung L dem Zentrum von L zugehörig. Das heißt, $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$ liegen in $Z(L)$, so daß das Zentrum einer orthomodularen Halbordnung stets nicht-leer ist. Um die Fälle, ob noch weitere Elemente im Zentrum liegen oder nicht, begrifflich unterscheiden zu können, wählt man die Namen:

Definition F.26

Besteht das Zentrum einer orthomodularen Halbordnung L mit Null-Element $\mathbf{0}$ und Eins-Element $\mathbf{1}$ nur aus $\mathbf{0}$ und $\mathbf{1}$, dann heißt die Halbordnung **irreduzibel**. Andernfalls nennt man sie **reduzibel**.

In Verbänden mit Null-Element kann man ein weiteres Konzept begründen, das sich als fruchtbar erweist.

Definition F.27

Sei L ein Verband mit Null-Element $\mathbf{0}$.

- (i) Ein Element p der Menge L heißt **Atom**, wenn für alle Elemente a aus L mit $\mathbf{0} \leq a \leq p$ gilt:

$$a = \mathbf{0} \text{ oder } a = p.$$

Die Menge aller Atome eines Verbandes wird mit $A(L)$ bezeichnet.

- (ii) L heißt **atomar**, wenn zu jedem Element a der Menge L mit $a \neq \mathbf{0}$ ein Atom p aus der Menge $A(L)$ mit $p \leq a$ existiert.

- (iii) L heißt **atomistisch**, wenn jedes Element a aus der Menge $L \setminus \{0\}$ Supremum der Menge $\{p \in A(L) \mid p \leq a\}$ ist.

Trivialerweise ist ein atomistischer Verband insbesondere atomar. Besitzt ein Verband die Eigenschaft der Orthomodularität, dann gilt auch die Umkehrung, wie das folgende Lemma zum Ausdruck bringt.

Lemma F.28 *Ein atomarer, orthomodularer Verband ist insbesondere atomistisch.*

Beweis: Siehe [Kal83], Kapitel 3, §10, S. 140.

Unter den atomaren Verbänden haben sich diejenigen, die die sogenannte Überdeckungseigenschaft besitzen, als besonders interessant herausgestellt.

Definition F.29

Sei L eine Halbordnung.

- (i) Bezeichnen a, b zwei Elemente von L , dann heißt b **oberer Nachbar** von a und a **unterer Nachbar** von b , wenn $a \not\leq b$ gilt und wenn für jedes Element c von L mit $a \leq c \leq b$ entweder $c = a$ oder $c = b$ folgt. In Zeichen schreibt man dafür $a \triangleleft b$.
- (ii) Sei L mit einem Null-Element 0 ausgestattet. L besitzt dann die **Überdeckungseigenschaft**, wenn für jedes Atom p von L und jedes Element a von L mit $a \wedge p = 0$ in $a \vee p$ ein oberer Nachbar von a gegeben ist. Das heißt, es gilt für alle Atome p aus der Menge $A(L)$ und alle Elemente a der Menge L mit $a \wedge p = 0$ die Relation

$$a \triangleleft a \vee p.$$

Für atomistische Verbände mit Überdeckungseigenschaft gilt die folgende Aussage:

Lemma F.30 *Sei L ein orthokomplementierter, atomistischer Verband mit Überdeckungseigenschaft. Bezeichnen a, b Elemente aus L , dann sind äquivalent:*

- (i) Für alle $c \in L$ mit $c \leq b$ gilt: $(c \vee a) \wedge b = c \vee (a \wedge b)$.
- (ii) Für alle $c \in L$ mit $c \leq a$ gilt: $(c \vee b) \wedge a = c \vee (a \wedge b)$.

Beweis: Siehe [MM70], Kapitel VI, Theorem (30.2), S. 133.

Mit Hilfe der Überdeckungseigenschaft kann man ein interessantes Irreduzibilitätskriterium formulieren:

Lemma F.31 *Bezeichnet L einen orthomodularen, atomaren Verband mit Überdeckungseigenschaft, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) L ist irreduzibel.
- (ii) Zu je zwei verschiedenen Atomen p_1, p_2 von L existiert ein drittes von p_1 und p_2 verschiedenes Atom q mit $q \leq p_1 \vee p_2$.

Beweis: Siehe Theorem 12.6.3 in [BC81], Abschnitt 12.6, S. 134.

Die Überdeckungseigenschaft erlaubt es, ein weiteres verbandstheoretisches Konzept in wohldefinierter Weise einzuführen:

Definition F.32

Sei L ein atomistischer Verband mit Null-Element $\mathbf{0}$, Eins-Element $\mathbf{1}$ und Überdeckungseigenschaft. Sei ferner a ein Element von L . Falls für eine natürliche Zahl n eine Ungleichungskette der Form

$$\mathbf{0} < a_1 < \cdots < a_n = a \tag{F.7}$$

in L existiert, dann heißt n die **Länge von a** . Dem Null-Element $\mathbf{0}$ wird die Länge 0 zugeordnet. Falls für ein Element a von L keine Kette des Typs (F.7) existiert, sagt man, daß a unendlicher Länge sei. Ein Element a von L wird als **endlich** bezeichnet, wenn es endliche Länge hat. Als **Länge von L** wird die Länge des Eins-Elementes $\mathbf{1}$ definiert.

Bemerkung: Die oben angegebene Definition der Länge ist ob der angegebenen Voraussetzungen wohldefiniert, das heißt, wenn es für ein Element a von L zwei Ketten $\mathbf{0} < a_1 < \cdots < a_n = a$ und $\mathbf{0} < a'_1 < \cdots < a'_m = a$ in L gibt, dann gilt $n = m$. Für die notwendigen Betrachtungen wird auf den Beginn von Abschnitt 8 in [MM70], Kapitel II, S. 35f. verwiesen.

Im Zusammenhang mit der Definition der Länge von Elementen notieren Maeda und Maeda das folgende Lemma:

Lemma F.33 *Sei L ein Verband mit Null-Element $\mathbf{0}$ und Überdeckungseigenschaft. Sind $(p_i)_{i=1}^n$ und $(q_i)_{i=1}^n$ zwei Familien von Atomen aus L mit den folgenden beiden Eigenschaften*

- (i) für jedes $i \in \{2, \dots, n\}$ gilt: $(p_1 \vee \cdots \vee p_{i-1}) \wedge p_i = \mathbf{0}$,
- (ii) für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt: $p_i \leq q_1 \vee \cdots \vee q_n$,

dann ergibt sich schon die Identität $p_1 \vee \cdots \vee p_n = q_1 \vee \cdots \vee q_n$.

Beweis: Siehe Lemma (8.3) in [MM70], Kapitel II, S. 35.

Wie bei allen mathematischen Theorien stellt sich auch bei der Verbandstheorie die Frage, inwieweit es Teilstrukturen von Halbordnungen oder Verbänden gibt und inwieweit sich Eigenschaften an die Teilstrukturen weitervererben. Derartigen Fragestellungen gelten die nachfolgenden Aussagen.

Definition F.34

Sei (L, \leq) ein Verband, dann heißt eine Teilmenge von L , die mit a, b auch $a \wedge b$ und $a \vee b$ enthält, als **Unterverband** oder als **Subverband**.

Es sei bemerkt, daß ein Unterverband T von L bezüglich der induzierten Halbordnung, also der Restriktion der Halbordnungsrelation von $L \times L$ auf $T \times T$, ein eigenstehender Verband ist, für den die ihm zugehörigen Suprema und Infima mit denjenigen von L übereinstimmen.

Mit dem Begriff des Unterverbandes kann man eine Reihe von Aussagen über das Zentrum eines Verbandes formulieren:

Satz F.35 (i) Sei (L, \leq, \perp) ein orthomodularer $\left\{ \begin{array}{l} \text{endlicher} \\ \sigma\text{-} \\ \text{vollständiger} \end{array} \right\}$ Verband, dann ist das Zentrum $Z(L)$ ein Boolescher $\left\{ \begin{array}{l} \text{endlicher} \\ \sigma\text{-} \\ \text{vollständiger} \end{array} \right\}$ Unterverband, wenn als Orthokomplementation die Restriktion von \perp verwendet wird.

(ii) Ist (L, \leq, \perp) ein vollständiger, atomarer, orthomodularer Verband, dann ist $Z(L)$ ein atomarer, vollständiger Boolescher Unterverband.

Beweis:

Für Punkt (i) siehe [MM70], Kapitel I, Theorem (4.15), S. 19 und Theorem (36.9), S. 168. Für Punkt (ii) siehe Lemma (10.12) in [MM70], Kapitel II, S. 46. Dafür sei bemerkt, daß dort vorausgesetzt wird, daß es sich bei L um einen sogenannten Z-Verband gemäß Definition (5.7) in [MM70], Kapitel I, S. 23 handelt. Den dafür notwendigen Eigenschaften genügt L aber mit Hilfe von Satz F.24. ■

Es muß ein wichtiger Typ von Unterverbänden hervorgehoben werden.

Definition F.36

Bezeichnet (L, \leq) einen Verband und benennen a und b zwei Elemente aus L , dann heißt die Menge

$$L[a, b] := \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$$

ein **Intervall von L**.

Bezüglich derartiger Intervalle gilt das folgende Lemma:

Lemma F.37 *Es bezeichne (L, \leq) einen Verband, und es seien a, b zwei Elemente aus L mit $a \leq b$, dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) $L[a, b]$ ist Unterverband von L . Ist L σ -Verband oder vollständiger Verband, dann ist $L[a, b]$ ein σ -Verband oder ein vollständiger Verband.
- (ii) Ist L atomistischer Verband mit Überdeckungseigenschaft und Null-Element $\mathbf{0}$, dann handelt es sich bei $L[a, b]$ um einen atomistischen Verband mit Überdeckungseigenschaft mit Null-Element a . Ferner ist ein Element c aus L genau dann ein Atom von $L[a, b]$, wenn es ein Atom p von L derart gibt, daß gilt

$$c = a \vee p, \quad a \wedge p = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad p \leq b,$$

wobei $\mathbf{0}$ das Null-Element von L bezeichnen möge.

Für $a = \mathbf{0}$ bedeutet das insbesondere:

Ein Element p aus L ist Atom von $L[\mathbf{0}, b]$ genau dann, wenn p Atom von L mit $p \leq b$ ist.

Beweis:

Punkt (i) ist trivial, für Punkt (ii) siehe [MM70], Kapitel II, Lemma (8.18), S. 39. ■

Bezüglich der Übertragung der Orthokomplementation eines Verbandes auf ein Intervall kann man die folgenden Aussagen treffen:

Definition und Lemma F.38 *Sei (L, \leq, \perp) ein orthomodularer Verband mit Null-Element $\mathbf{0}$ und Eins-Element $\mathbf{1}$. Sei b ein Element aus L , und es sei die folgende Abbildung definiert*

$$\perp_b : L[\mathbf{0}, b] \longrightarrow L[\mathbf{0}, b], \quad a \longmapsto a^{\perp_b} := a^{\perp} \wedge b,$$

dann ist $L[\mathbf{0}, b]$ bezüglich \perp_b orthokomplementiert. Die Abbildung \perp_b wird als **relative Orthokomplementation** bezeichnet. Darüber hinaus gilt:

(i) $L[\mathbf{0}, b]$ ist orthomodular, und es gilt für alle $r, s \in L[\mathbf{0}, b]$:

$$r \perp s \iff r \perp_b s.$$

(ii) Ist L separabel im Sinne von Definition F.10, dann ist $L[\mathbf{0}, b]$ separabel.

Beweis:

Siehe [MM70], Kapitel VI, Lemma (29.15), S. 132. Die Aussage bezüglich der Orthogonalitäten ist trivial. Zum Nachweis der Separabilität von $L[\mathbf{0}, b]$ betrachte man eine Familie $(a_i)_{i \in I}$ von Elementen aus $L[\mathbf{0}, b]$, die bezüglich der relativen Orthokomplementation paarweise orthogonal sind. Das heißt, für alle $i, j \in I$ mit $i \neq j$ gilt:

$$a_i \leq a_j^\perp \wedge b \leq a_j^\perp.$$

Also handelt es sich bei $(a_i)_{i \in I}$ insbesondere um eine Familie von Elementen aus L , die bezüglich der Orthokomplementation \perp paarweise orthogonal sind. Aufgrund der vorausgesetzten Separabilität von L kann $(a_i)_{i \in I}$ nur höchstens abzählbarer Mächtigkeit sein. ■

Anhang G

Hilfsaussagen zu Kapitel 10

Im Folgenden werden Aussagen formuliert, die benötigt werden, um die mathematische Theorie, wie sie bis innerhalb der Kapitel 5 bis Kapitel 9 erarbeitet wurde, durch Hilbertraumstrukturen darzustellen.

Dafür wird im ersten Abschnitt der Zerlegungssatz 10.1.5 für den Verband G der Entscheidungseffekte bewiesen. Im zweiten und dritten Abschnitt werden eine Reihe von Aussagen zusammengestellt, die in das Darstellungstheorem 10.2.1 für G eingehen. Dabei besteht der zweite Abschnitt aus den Aussagen, die sich auf Basis der vorliegenden Axiomatik ergeben, während sich der dritte Abschnitt mit den Darstellungstheoremen von V.S. Varadarajan und C. Piron nebst der dafür erforderlichen mathematischen Instrumente befaßt. Der vierte Abschnitt befaßt sich dann mit konkreten Strukturen auf einem komplexen separablen Hilbertraum, wie sie in Abschnitt 10.3 von Bedeutung sind.

G.1 Aussagen zur Zerlegung von G in irreduzible Teile

Es wird zunächst ein Lemma zur Verfügung gestellt, das zum Beweis des Zerlegungssatzes für G benötigt wird. In der Folge wird dann der Zerlegungssatz 10.1.5 für G selbst bewiesen. Aus Übersichtsgründen wird er nochmals angegeben.

Vorausgesetzt wird dabei die Axiomatik, die bis einschließlich des Kapitels 9 erörtert wurde. Das heißt, es gelten die Axiome bis einschließlich AV 4s. Die Axiome AV 4a oder AV 4b dagegen werden nicht benötigt.

Lemma G.1.1

Bezeichne $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ mit einer höchstens abzählbaren Indexmenge I eine Familie vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler, irreduzibler Verbände mit Überdeckungseigenschaft. Auf der Menge

$$\tilde{G} := \{(e_i)_{i \in I} \mid \forall i \in G_i : a_i \in G_i\}$$

sei zum einen die Relation

$$\forall \tilde{e}, \tilde{f} \in \tilde{G} : \tilde{e} \leq \tilde{f} \iff [\forall i \in I : e_i \leq_i f_i]$$

und zum anderen die Abbildung

$$\tilde{\perp} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}, \tilde{e} \longmapsto \tilde{e}^{\tilde{\perp}} := (e_i^{\perp_i})_{i \in I}$$

definiert. Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Bezeichne $(e_j)_{j \in J}$ eine Familie beliebiger Mächtigkeit aus \tilde{G} , und für jedes $j \in J$ gelte die Darstellung $e_j = (e_{ji})_{i \in I}$, dann folgt

$$\bigvee_{j \in J} e_j = \left(\bigvee_{j \in J} e_{ji} \right)_{i \in I}, \quad (\text{G.1})$$

$$\bigwedge_{j \in J} e_j = \left(\bigwedge_{j \in J} e_{ji} \right)_{i \in I}. \quad (\text{G.2})$$

- (ii) Für jedes $j \in I$ und für jedes Atom p von G_j gehört q zu den Atomen von \tilde{G} , wenn für jedes $i \in I$ definiert wird:

$$q_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ p & \text{für } i = j. \end{cases}$$

- (iii) Zu jedem Atom q von \tilde{G} existiert genau ein Paar (j, p) in $I \times A(G_j)$, so daß für alle $i \in I$ gilt:

$$q_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ p & \text{für } i = j. \end{cases}$$

- (iv) Ein Element e aus \tilde{G} gehört genau dann zum Zentrum von \tilde{G} , wenn für alle $i \in I$ die Komponente e_i zum Zentrum von G_i gehört.

(v) Zu jedem Atom z des Zentrums von \tilde{G} existiert genau ein Paar (j, p) aus der Menge $I \times A(Z(G_j))$, so daß für alle $i \in I$ gilt:

$$z_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ p & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Für jedes $j \in I$ stehe dabei $A(Z(G_j))$ für die Menge der Atome des Zentrums von G_j .

Beweis:

zu (i): Die Beweise von (G.1) und (G.2) laufen analog, so daß es nur des Beweises der Supremumsaussage.

Da für jedes $i \in I$ der Verband G_i nach Voraussetzung vollständig ist, existiert mithin für jedes $i \in I$ auch das Supremum $\bigvee_{j \in J} e_{ji}$. Also gilt

$$e_{si} \leq_i \bigvee_{j \in J} e_{ji}$$

für alle $s \in J$ und alle $i \in I$, woraus man nach Definition der Relation \lesssim für jedes $s \in J$ erhält:

$$e_s \lesssim \left(\bigvee_{j \in J} e_{ji} \right)_{i \in I}.$$

Somit bleibt zu zeigen, daß $\left(\bigvee_{j \in J} e_{ji} \right)_{i \in I}$ auch kleinste obere Schranke ist. Man betrachte dafür ein $g \in \tilde{G}$ mit $e_j \lesssim g$ für alle $j \in J$. Das heißt, es gilt für alle $i \in I$ und $j \in J$

$$e_{ji} \leq_i g_i.$$

Mit Hilfe der Supremumseigenschaften von $\bigvee_{j \in J} e_{ji}$ erhält man damit für jedes $i \in I$

$$\bigvee_{j \in J} e_{ji} \leq_i g_i,$$

woraus man dann vermittels der Definition der Relation \lesssim die Aussage

$$\left(\bigvee_{j \in J} e_{ji} \right)_{i \in I} \lesssim g$$

gewinnt. Also ist $\left(\bigvee_{j \in J} e_{ji} \right)_{i \in I}$ tatsächlich das Supremum der Familie $(e_j)_{j \in J}$ bezüglich \lesssim .

zu (ii): Sei p ein Atom von G_j für ein $j \in I$, und sei q , wie in Aussage (ii) dargestellt, definiert. Es gilt $\mathbf{0} <_j p$ in G_j . Man betrachte nun ein $c \in \tilde{G}$ mit $\mathbf{0} \lesssim c \lesssim q$. Definitionsgemäß erhält man $\mathbf{0}_i \leq_i c_i \leq_i q_i$ für jedes $i \in I$. Daraus ergibt sich $\mathbf{0}_i \leq_i c_i \leq_i \mathbf{0}_i$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$, was gleichbedeutend damit ist, daß $c_i = \mathbf{0}_i$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$ gilt. Für $i = j$ ergibt sich dagegen $\mathbf{0}_j \leq_j c_j \leq_j p$. Wegen $\mathbf{0} < p$ erhält man folglich $c_j = p$ oder $c_j = \mathbf{0}_j$. Also gilt auch $c = q$ oder $c = \mathbf{0}$, und somit bezeichnet q ein Atom von \tilde{G} .

zu (iii): Sei q ein Atom in \tilde{G} , dann gilt $\mathbf{0} \not\lesssim q$. Da q nicht mit $\mathbf{0}$ identisch sein kann, muß es ein $j \in I$ mit $q_j \neq \mathbf{0}_j$ geben. Es kann aber nur ein Element aus I geben, für das sich die zugehörige Komponente von q vom entsprechenden Null-Element unterscheidet, wie die folgende Überlegung zeigt. Gäbe es noch ein weiteres Element k von I mit $q_k \neq \mathbf{0}_k$, dann gälte für \tilde{q} mit

$$\tilde{q}_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ q_j & \text{für } i = j. \end{cases}, \quad i \in I$$

die Ungleichungskette $\mathbf{0} \not\lesssim \tilde{q} \lesssim q$ im Widerspruch zur Atomeigenschaft von q . Zum Abschluß des Beweises bleibt noch zu zeigen, daß q_j Atom in G_j ist. Das ist aber trivial, da $\mathbf{0} \not\lesssim q$ vorausgesetzt war.

zu (iv): Bezeichne der bisherigen Konvention folgend mit $Z(\tilde{G})$ das Zentrum von \tilde{G} . Ebenso möge für jedes $i \in I$ mit $Z(G_i)$ das Zentrum von G_i symbolisiert werden. Dann gelten mit Hilfe von Punkt (i) dieses Satzes die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} & e \in Z(\tilde{G}) \\ \iff & \forall a \in \tilde{G} : (a \wedge e) \vee (a \wedge e^\perp) = a \\ \iff & \forall a \in \tilde{G} \forall i \in I : (a_i \wedge e_i) \vee (a_i \wedge e_i^\perp) = a_i \\ \iff & \forall i \in I \forall b \in G_i : (b \wedge e_i) \vee (b \wedge e_i^\perp) = b \\ \iff & \forall i \in I : e_i \in Z(G_i). \end{aligned}$$

zu (v): Bezeichne z ein Atom des Zentrums von \tilde{G} . Dann muß z in genau einer Komponente vom Null-Element des zugehörigen Verbandes verschieden sein, denn ein Atom unterscheidet sich von $\mathbf{0}$, so daß es mindestens ein $j \in I$ mit $z_j \neq \mathbf{0}_j$ geben muß. Gäbe es aber noch ein weiteres $k \in I$ mit $z_k \neq \mathbf{0}_k$, dann wäre $\mathbf{0} \not\lesssim q \lesssim z$, wenn man für alle $i \in I$ definierte

$$q_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ z_j & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Nach Punkt (iv) dieses Satzes läge q im Zentrum von \tilde{G} . Mithin führte die Relation $\mathbf{0} \not\leq q \not\leq z$ zu einem Widerspruch mit der Atomeigenschaft von z .

Also existiert ein $j \in I$ mit $z_j \neq \mathbf{0}_j$, während für alle $i \in I \setminus \{j\}$ die Relation $z_i = \mathbf{0}_i$ gilt. Es bleibt zu zeigen, daß z_j ein Atom des Zentrums von G_j ist. Dabei wird die Zugehörigkeit von z_j zum Zentrum von G_j bereits durch Punkt (iv) dieses Satzes garantiert. z_j muß aber auch Atom des Zentrums von G_j sein, da ansonsten in derselben Weise, wie eben geschehen, ein Element zwischen $\mathbf{0}$ und z liegen würde, das weder mit $\mathbf{0}$ noch mit z identisch ist. ■

Damit kann zum Beweis des Zerlegungssatzes übergegangen werden.

Satz G.1.2 (Zerlegungssatz für G)

(i) Sei z ein Element aus $A(Z(G))$, und es sei definiert

$$G[\mathbf{0}, z] := \{e \in G \mid e \leq z\}.$$

Bezüglich der induzierten Halbordnung und der relativen Orthokomplementierung im Sinne Definition F.38 ist $G[\mathbf{0}, z]$ ein vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler und irreduzibler Unterverband von G , für den die erweiterten Überdeckungseigenschaften im Sinne von Satz 9.8.4 gelten.

(ii) (Inneres Produkt)

Jedes Element von e aus G läßt sich auf eindeutige Weise in der Form

$$e = \bigvee_{z \in A(Z(G))} e_z$$

darstellen, wobei für jedes z aus $A(Z(G))$ mit e_z ein Element aus $G[\mathbf{0}, z]$ bezeichnet sei.

Zu jedem e aus G kann die zugehörige Familie $(e_z)_{z \in A(Z(G))}$ konkret angegeben werden, denn es gilt für jedes z aus $A(Z(G))$:

$$e_z = e \wedge z.$$

(iii) (Äußeres Produkt)

Es bezeichne $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ für eine höchstens abzählbare Indexmenge I eine Familie vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler, irreduzibler Verbände, für die die erweiterten Überdeckungseigenschaften gemäß Satz 9.8.4 gelten. Dann ist die Menge

$$\tilde{G} := \{(e_i)_{i \in I} \mid \forall i \in G_i : a_i \in G_i\}$$

bezüglich der Relation

$$\forall \tilde{e}, \tilde{f} \in \tilde{G} : \tilde{e} \leq \tilde{f} \iff [\forall i \in I : e_i \leq_i f_i]$$

als Halbordnung und der Abbildung

$$\tilde{\perp} : \tilde{G} \longrightarrow \tilde{G}, \tilde{e} \longmapsto \tilde{e}^{\tilde{\perp}} := (e_i^{\perp_i})_{i \in I}$$

als Orthokomplementation ein vollständiger, orthomodularer, atomarer, separabler Verband, für den die erweiterten Überdeckungseigenschaften entsprechend Satz 9.8.4 gelten.

(iv) (Konsistenzbetrachtungen)

(a) Der im Sinne von Punkt (iii) aus der Familie $(G[\mathbf{0}, z])_{z \in A(Z(G))}$ gewonnene Verband $(\tilde{G}, \tilde{\leq}, \tilde{\perp})$ ist orthoisomorph zum Verband (G, \leq, \perp) bezüglich der Abbildung:

$$G \longrightarrow \tilde{G}, e \longmapsto (a \wedge z)_{z \in A(Z(G))}.$$

(b) Sei $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ für eine höchstens abzählbare Indexmenge I eine Familie vollständiger, orthomodularer, atomarer, irreduzibler Verbände. Ferner bezeichne $(\tilde{G}, \tilde{\leq}, \tilde{\perp})$ den entsprechend Punkt (iii) aus der Familie $((G_i, \leq_i, \perp_i))_{i \in I}$ gewonnenen Verband. Dann existiert eine Bijektion

$$f : A(Z(\tilde{G})) \longrightarrow I,$$

so daß für jedes $z \in A(Z(\tilde{G}))$ durch die Abbildung

$$\tilde{G}[\mathbf{0}, z] \longrightarrow G_{f(z)}, (e_i)_{i \in I} \longrightarrow e_{f(z)}$$

der Verband $\tilde{G}[\mathbf{0}, z]$ orthoisomorph ist zu dem Verband $G_{f(z)}$.

Beweis:

zu (i): Siehe die Lemmata F.37 und F.38. Für die Irreduzibilität siehe Lemma (10.12) in [MM70], Kapitel II, S. 46. Dafür sei bemerkt, daß dort vorausgesetzt wird, daß es sich bei L um einen sogenannten Z -Verband gemäß Definition (5.7) in [MM70], Kapitel I, S. 23 handelt. Den dafür notwendigen Eigenschaften genügt G aber mit Hilfe von Satz F.24. Es bleiben die erweiterten Überdeckungseigenschaften gemäß Satz 9.8.4 zu beweisen. Man wähle dafür zunächst zwei Elemente p und e von $G[\mathbf{0}, z]$, so daß p Atom von $G[\mathbf{0}, z]$ ist und daß $p \not\leq e$ gilt. Nach Satz 9.8.4 (i) ist $p \vee e$ oberer Nachbar von p bezüglich G . Dann muß aber erst recht $p \vee e$ oberer Nachbar von p bezüglich $G[\mathbf{0}, z]$ sein, da $G[\mathbf{0}, z]$ Unterverband von G ist. Also gilt auch für $G[\mathbf{0}, z]$ Punkt (i) von Satz 9.8.4. Zum Beweis des zweiten Punktes von Satz 9.8.4 bezeichne e ein Element aus $G[\mathbf{0}, z] \setminus \{\mathbf{0}, z\}$. Außerdem symbolisiere p ein Atom von $G[\mathbf{0}, z]$. Satz F.37 (ii) zufolge ist p damit auch Atom von G . Außerdem gehört e trivialerweise auch zu $G \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Also folgt mit Satz 9.8.4 (ii) die Existenz zweier Atome q_1, q_2 von G , so daß $q_1 \leq e, q_2 \leq e^\perp$ und $p \leq q_1 \vee q_2$ gilt. Die Relation $q_1 \leq e$ garantiert, daß auch $q_1 \leq z$ gilt, so daß q_1 mit Satz F.37 (ii) zu den Atomen von $G[\mathbf{0}, z]$ gehört. Gälte nun auch $q_2 \leq z$, womit q_2 auch Atom von $G[\mathbf{0}, z]$ wäre, dann erhielte man wegen $q_2 \leq e^\perp$ insbesondere $q_2 \leq e^\perp \wedge z = e^{\perp z}$, wenn man mit \perp_z die relative Orthokomplementation auf $G[\mathbf{0}, z]$ bezeichnete. Mithin wäre die Behauptung im Falle $q_2 \leq z$ bewiesen. Wenn allerdings $q_2 \not\leq z$ gilt, dann ergibt sich $q_2 \wedge z = \mathbf{0}$. Also erhält man aus $p \leq q_1 \vee q_2$ und der Zentrumszugehörigkeit von z :

$$p = p \wedge z \leq z \wedge (q_1 \vee q_2) = (z \wedge q_1) \vee (z \wedge q_2) = z \wedge q_1.$$

Das bedeutet insbesondere $p \leq q_1$. Da aber p und q_1 Atome von G sind, muß dann sogar schon $p = q_1$ gelten. Wählt man nun statt q_2 ein beliebiges anderes Atom q'_2 von $G[\mathbf{0}, z]$ mit $q'_2 \leq e^{\perp z}$, dessen Existenz ob der Atomizität von $G[\mathbf{0}, z]$ garantiert ist, dann ist die Behauptung für q_1 und q'_2 erfüllt, denn es gilt:

$$p \leq q_1 \leq q_1 \vee q_2$$

zu (ii): Da $Z(G)$ nach Satz F.35 (ii) vollständiger, atomarer Boolescher Verband ist, handelt es sich bei $Z(G)$ mit Lemma F.28 insbesondere um einen atomistischen Verband. Also ist das Zentrumselement $\mathbf{1}$ Supremum aller Atome von $Z(G)$, die es umfaßt. Das sind aber gerade alle Element aus $A(Z(G))$. Das heißt, es gilt:

$$\bigvee_{z \in A(Z(G))} z = \mathbf{1}. \quad (\text{G.3})$$

Man betrachte nun ein beliebiges Element $e \in G$, dann gilt mit Satz F.24:

$$e = e \wedge \mathbf{1} = \left(\bigvee_{z \in A(Z(G))} z \right) \wedge e = \bigvee_{z \in A(Z(G))} (e \wedge z).$$

Die Zugehörigkeit von $e \wedge z$ zu $G[\mathbf{0}, z]$ für jedes $z \in A(Z(G))$ ist trivial, so daß noch die Eindeutigkeitsaussage zu beweisen bleibt. Dafür bezeichne $(f_z)_{z \in A(Z(G))}$ eine weitere Familie von Elementen mit $e = \bigvee_{z \in A(Z(G))} f_z$ dargestellt, daß $f_z \in G[\mathbf{0}, z]$ für jedes $z \in A(Z(G))$ gilt. Dann erhält man für alle $z' \in A(Z(G))$ mit Satz F.24

$$e \wedge z' = \left(\bigvee_{z \in A(Z(G))} f_z \right) \wedge z' = \bigvee_{z \in A(Z(G))} (f_z \wedge z') = f_{z'}.$$

zu (iii):

Die Halbordnungseigenschaften von $(\tilde{G}, \tilde{\leq})$ folgen unmittelbar aus den Halbordnungseigenschaften der Relationsfamilie $(\leq_i)_{i \in I}$. Ebenso ergeben sich die Orthokomplementationseigenschaften der Abbildung \perp direkt aus den Eigenschaften der Mitglieder der Abbildungsfamilie $(\perp_i)_{i \in I}$. Dabei sind $\mathbf{0} := (\mathbf{0}_i)_{i \in I}$ und $\mathbf{1} := (\mathbf{1}_i)_{i \in I}$ das Null-Element und das Eins-Element von \tilde{G} , wobei $\mathbf{0}_i$ und $\mathbf{1}_i$ die Null- und Einselemente für jedes $i \in I$ bezeichnen sollen. Daß es sich bei $(\tilde{G}, \tilde{\leq})$ um einen vollständigen Verband handelt, folgt mit Lemma G.1.1 (i). Zum Nachweis der Orthomodularität bedarf es des Nachweises der Orthomodularitätsidentität im Sinne der Definition F.15. Man wähle dafür zwei Elemente $a, b \in \tilde{G}$ mit $a \tilde{\leq} b$. Das heißt, es gilt $a_i \leq_i b_i$ für alle $i \in I$, woraus sich für jedes $i \in I$ aufgrund der Orthomodularität von G_i ergibt:

$$b_i = a_i \vee (b_i \wedge a_i^{\perp_i}).$$

Also folgt vermittels Satz G.1.1 (i) die Orthomodularitätsidentität

$$b = (b_i)_{i \in I} = (a_i \vee (b_i \wedge a_i^{\perp_i}))_{i \in I} \stackrel{(G.1)}{=} a \vee (b_i \wedge a_i^{\perp_i})_{i \in I} \stackrel{(G.2)}{=} a \vee (b \wedge a^{\perp}).$$

Zum Beweis der Separabilität von \tilde{G} wähle man eine Familie $(e_j)_{j \in J}$ aus $\tilde{G} \setminus \{\mathbf{0}\}$, die bezüglich $\tilde{\perp}$ paarweise orthogonal sind. Nun gilt für alle $a, b \in \tilde{G}$ die folgende Beziehung zwischen den Orthogonalitätsrelationen

$$a \tilde{\perp} b \iff [\forall i \in I : a_i \perp_i b_i], \quad (G.4)$$

denn es gilt

$$a \tilde{\perp} b \iff a \tilde{\leq} b^{\perp} \iff [\forall i \in I : a_i \leq_i b_i^{\perp_i}] \iff [\forall i \in I : a_i \perp_i b_i].$$

Geht man wiederum von der Darstellung $e_j = (e_{ji})_{i \in I}$ für jedes $j \in J$ aus, ergibt sich mit (G.4), daß für jedes $i \in I$ mit $(e_{ji})_{j \in J}$ eine Familie in G_i vorliegt, deren Mitglieder bezüglich \perp_i paarweise orthogonal sind. Wegen der Separabilität der G_i kann für jedes $i \in I$ die Familie $(e_{ji})_{j \in J}$ höchstens abzählbar viele Elemente enthalten, die von $\mathbf{0}_i$ verschieden sind. Man bezeichne für jedes $i \in I$ die Menge der von $\mathbf{0}_i$ verschiedenen Elemente aus $(e_{ji})_{j \in J}$ mit J_i . Da I selbst höchstens abzählbarer Mächtigkeit ist, kann auch die Menge $\bigcup_{i \in I} J_i$ höchstens abzählbar sein, wie man zum Beispiel [Heu91a], Satz 19.2, S. 139 entnehmen kann. Nun ist aber $J = \bigcup_{i \in I} J_i$, denn es gilt einerseits $J_i \subseteq J$ für alle $i \in I$ und andererseits muß es zu jedem $j \in J$ ein $i \in I$ mit $j \in J_i$ geben, da nach Voraussetzung kein $j \in J$ mit $e_j = \mathbf{0}$ existiert. Also ist auch J höchstens abzählbarer Mächtigkeit.

Für den Nachweis der Atomizität von \tilde{G} sei ein Element $a \in \tilde{G} \setminus \{\mathbf{0}\}$ gewählt. Dann existiert ein $j \in I$ mit $a_j \neq \mathbf{0}_j$. Da G_j nach Voraussetzung atomar ist, existiert daher ein Atom p in G_j mit $p \leq_j a_j$. Man definiere nun das Element p in \tilde{G} , indem man für alle $i \in I$ wählt:

$$p_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ p & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Dann ist p mit Lemma G.1.1 (ii) ein Atom in \tilde{G} , und es gilt $p \lesssim a$. Also ist \tilde{G} atomar.

Somit bleibt es schließlich noch, die Gültigkeit der Aussagen entsprechend Satz 9.8.4 für \tilde{G} zu zeigen. Für den ersten Punkt von Satz 9.8.4 wähle man zwei Elemente p, e von \tilde{G} derart, daß p Atom von \tilde{G} ist und daß $p \not\lesssim e$ gilt. Nach Lemma G.1.1 (iii) existiert genau ein Paar $(j, q) \in I \times A(G_j)$ so, daß für alle $i \in I$ gilt:

$$p_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ q & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Also erhält man $e_i \vee p_i = e_i \vee \mathbf{0}_i = e_i$ für alle $i \in I \setminus \{j\}$, während $e_j \vee p_j$ oberer Nachbar von e_j ist, da nach Voraussetzung G_j die Eigenschaft aus Satz 9.8.4 (i) besitzt. Berücksichtigt man Lemma G.1.1 (i), ist auch $e \vee p$ oberer Nachbar von e , so daß \tilde{G} der Aussage in Satz 9.8.4 (i) genügt. Zum Beweis des zweiten Punktes von Satz 9.8.4 bezeichne man mit e ein Element aus $\tilde{G} \setminus \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Man bezeichne außerdem mit p ein Atom von \tilde{G} . Nach Lemma G.1.1 (iii) existiert genau ein Paar $(j, q) \in I \times A(G_j)$ so, daß für alle $i \in I$ gilt:

$$p_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ q & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Da G_j nach Voraussetzung der Aussage in Satz 9.8.4 (ii) genügt, existieren zwei Atome $q_1, q_2 \in G_j$, so daß $q_1 \leq_j e_j, q_2 \leq_j e_j^{\perp}$ und $q \leq_j q_1 \vee q_2$ gilt. Nach Lemma G.1.1 (ii) bezeichnen \tilde{q}_1 und \tilde{q}_2 zwei Atome von \tilde{G} , wenn man für jedes $i \in I$ und $j \in \{1, 2\}$ definiert:

$$\tilde{q}_{ji} := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ q_j & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Trivialerweise ergeben sich mit Hilfe der Definitionen der Halbordnung $\tilde{\leq}$ und der Orthokomplementation $\tilde{\perp}$ die Relationen $\tilde{q}_1 \tilde{\leq} e$ und $\tilde{q}_2 \tilde{\leq} e^{\perp}$. Der Beweis schließt mit dem Nachweis der Relation $p \tilde{\leq} \tilde{q}_1 \vee \tilde{q}_2$. Für alle $i \in I \setminus \{j\}$ erhält man mit Lemma G.1.1 (i):

$$p_i = \mathbf{0}_i = \tilde{q}_{1i} \vee \tilde{q}_{2i}.$$

Für $i = j$ ergibt sich:

$$p_j = q \leq_j q_1 \vee q_2 = \tilde{q}_{1j} \vee \tilde{q}_{2j}.$$

zu (iv) (a): Für den folgenden Beweis wird die in (iv) (a) angegebene Abbildung mit t benannt. Es ist gemäß Definition F.11 und Satz F.12 zu zeigen, daß t eine Bijektion ist, die für alle $e, f \in G$ den folgenden Beziehungen entspricht:

$$t(e \vee f) = t(e) \vee t(f), \quad (\text{G.5})$$

$$t(e^{\perp}) = t(e)^{\tilde{\perp}}. \quad (\text{G.6})$$

Zunächst wird die Injektivität von t bewiesen. Man bezeichne dafür mit e, f zwei Elemente aus G mit $t(e) = t(f)$. Das heißt, es gilt für alle $z \in A(Z(G))$:

$$e \wedge z = f \wedge z.$$

Mit Satz F.24 ergibt daraus sich mit Hilfe der Zentrumszugehörigkeit der $z \in A(Z(G))$ und mit Hilfe von (G.3):

$$\begin{aligned} e &= \mathbf{1} \vee e = \left(\bigvee_{z \in A(Z(G))} z \right) \vee e = \bigvee_{z \in A(Z(G))} (z \vee e) \\ &= \bigvee_{z \in A(Z(G))} (z \vee f) = \left(\bigvee_{z \in A(Z(G))} z \right) \vee f = \mathbf{1} \vee f = f. \end{aligned}$$

Um die Surjektivität von t zu beweisen, wähle man ein Element $\tilde{d} = (\tilde{d}_z)_{z \in A(Z(G))}$ aus \tilde{G} . Dann gehört \tilde{d}_z definitionsgemäß zu $G[\mathbf{0}, z]$ für jedes $z \in A(Z(G))$. Man definiere nun

$$d := \bigvee_{z \in A(Z(G))} \tilde{d}_z.$$

Da G vollständiger Verband ist, liegt d offenbar in G . Ob der Eindeutigkeitsaussage in Punkt (ii) dieses Satzes muß für jedes $z \in A(Z(G))$ gelten:

$$\tilde{d}_z = d \wedge z.$$

Daraus erhält man also unmittelbar die Surjektivität, denn es gilt:

$$t(d) = (d \wedge z)_{z \in A(Z(G))} = (\tilde{d}_z)_{z \in A(Z(G))}.$$

Zum Nachweis von (G.5) wähle man nun zwei Elemente $e, f \in G$. Dann erhält man mit Hilfe von Satz F.24, mit Hilfe der Zentrumszugehörigkeit der $z \in A(Z(G))$ sowie Satz G.1.1 (i):

$$\begin{aligned} t(e \vee f) &= ((e \vee f) \wedge z)_{z \in A(Z(G))} = ((e \wedge z) \vee (f \wedge z))_{z \in A(Z(G))} \\ &= (e \wedge z)_{z \in A(Z(G))} \vee (f \wedge z)_{z \in A(Z(G))} = t(e) \vee t(f). \end{aligned}$$

Damit ist (G.5) bewiesen, und es bleibt (G.6) zu zeigen. Bezeichnet man für jedes $z \in A(Z(G))$ die relative Orthokomplementation auf $G[\mathbf{0}, z]$ mit \perp_z , dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} (t(e))^{\tilde{\perp}} &= ((e \wedge z)_{z \in A(Z(G))})^{\tilde{\perp}} = ((e \wedge z)^{\perp_z})_{z \in A(Z(G))} \\ &= ((e \wedge z)^{\perp} \wedge z)_{z \in A(Z(G))} = ((e^{\perp} \vee z^{\perp}) \wedge z)_{z \in A(Z(G))} \\ &= ((e^{\perp} \wedge z) \vee (\underbrace{z^{\perp} \wedge z}_{=\mathbf{0}}))_{z \in A(Z(G))} = t(e^{\perp}). \end{aligned}$$

Also ist t ein Orthoisomorphismus zwischen G und \tilde{G} .

zu (iv) (b):

Mit Hilfe von Lemma G.1.1 (v) existiert zu jedem $z \in A(Z(\tilde{G}))$ genau ein Paar (j, p) aus der Menge $I \times A(Z(G_j))$, so daß für alle für alle $i \in I$ gilt:

$$z_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ p & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Ordnet man jedem $z \in A(Z(\tilde{G}))$ das in derartiger Weise eindeutig bestimmte Element $j \in I$ zu, dann definiert das eine Abbildung:

$$f : A(Z(\tilde{G})) \longrightarrow I.$$

Die Funktion f stellt eine Bijektion dar, wie die folgenden Überlegungen darlegen. Man bezeichne mit z_1, z_2 zwei Elemente aus $A(Z(\tilde{G}))$ mit $f(z_1) = f(z_2)$.

Das heißt, z_1 und z_2 bezeichnen zwei Zentrumsatome, die sich in derselben Komponente $f(z_1)$ und nur dort vom Null-Element des zugehörigen Verbandes unterscheiden. Wegen Lemma G.1.1 (iv) handelt es sich sowohl bei der $f(z_1)$ -Komponente von z_1 als auch bei der $f(z_1)$ -Komponente von z_2 um ein Atom des Zentrums von $G_{f(z_1)}$. Da aber $G_{f(z_1)}$ nach Voraussetzung irreduzibel ist, muß es sich in beiden Fällen um das Eins-Element des Verbandes $G_{f(z_1)}$ handeln. Also sind z_1 und z_2 identisch. Zum Nachweis der Surjektivität wähle man ein Element j aus I . Man setze nun für jedes $i \in I$:

$$z_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq j, \\ \mathbf{1}_j & \text{für } i = j. \end{cases}$$

Dann ist z mit Lemma G.1.1 (iv) aufgrund der Irreduzibilität von G_j ein Atom des Zentrums von \tilde{G} . Außerdem gilt $f(z) = j$, so daß die Surjektivität von f bewiesen ist.

Als Nächstes muß jetzt gezeigt werden, daß für jedes $z \in A(Z(\tilde{G}))$ durch die Abbildung

$$t_z : \tilde{G}[\mathbf{0}, z] \longrightarrow G_{f(z)}, \quad (e_i)_{i \in I} \longrightarrow a_{f(z)}$$

der Verband $\tilde{G}[\mathbf{0}, z]$ orthoisomorph ist zu dem Verband $G_{f(z)}$. Man bezeichne dafür mit z ein Element aus $A(Z(\tilde{G}))$.

Zunächst wird die folgende Aussage nachgewiesen:

$$\tilde{G}[\mathbf{0}, z] = \{e \in \tilde{G} \mid e_i = \mathbf{0}_i \quad \forall i \in I \setminus \{f(z)\}\}. \quad (\text{G.7})$$

Mit Lemma G.1.1 (v) und der Irreduzibilität von $G_{f(z)}$ ist z dergestalt, daß für alle $i \in I$ gilt:

$$z_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq f(z), \\ \mathbf{1}_{f(z)} & \text{für } i = f(z). \end{cases}$$

Also ergibt sich für alle Elemente e aus \tilde{G} mit $\mathbf{0} \lesssim e \lesssim z$, daß $e_i = \mathbf{0}_i$ für alle $i \in I \setminus \{f(z)\}$ gilt. Ist andersherum e ein Element aus \tilde{G} derart, daß $e_i = \mathbf{0}_i$ für alle $i \in I \setminus \{f(z)\}$ gilt, dann ist die Gültigkeit der Ungleichungskette $\mathbf{0} \lesssim e \lesssim z$ trivial.

Damit kann man zum Nachweis der Orthoisomorphieeigenschaften von t_z übergehen. Die Wohldefiniertheit von t_z auf ganz $\tilde{G}[\mathbf{0}, z]$ ist offenbar. Um die Injektivität zu zeigen, wähle man zwei Elemente a, b aus $\tilde{G}[\mathbf{0}, z]$ mit $t_z(e_1) = t_z(e_2)$. Dann gilt somit $a_{f(z)} = b_{f(z)}$. Daraus ergibt sich mit (G.7) die Identität von a und b . Bezüglich der Surjektivität wähle man ein a aus $G_{f(z)}$, und man setze für jedes $i \in I$:

$$e_i := \begin{cases} \mathbf{0}_i & \text{für } i \neq f(z), \\ a & \text{für } i = f(z). \end{cases}$$

Dann gilt:

$$t_z(e) = e_{f(z)} = a.$$

Wegen Definition F.11 und Satz F.12 bleibt zu zeigen, daß für alle $a, b \in G[\mathbf{0}, z]$ gilt:

$$t_z(a \vee b) = t_z(a) \vee t_z(b), \quad (\text{G.8})$$

$$t_z(a \tilde{\perp}) = t_z(a)^{\perp_{f(z)}}, \quad (\text{G.9})$$

Seien daher a, b aus $G[\mathbf{0}, z]$ gewählt, dann gilt mit Satz G.1.1 (i) die Aussage aus (G.8):

$$t_z(a \vee b) = (a \vee b)_{f(z)} = a_{f(z)} \vee b_{f(z)} = t_z(a) \vee t_z(b).$$

Außerdem gilt ob der Definition von $\tilde{\perp}$ auch (G.9):

$$t_z(a \tilde{\perp}) = a_{f(z)}^{\perp_{f(z)}} = t_z(a)^{\perp_{f(z)}}.$$

■

G.2 Aussagen zum Beweis des Darstellungssatzes 10.2.1 für G

Es werden alle Axiome vorausgesetzt, die bis einschließlich des Kapitels 9 formuliert wurden. Das heißt, es gelten die Axiome AV 1.1, AV 1.2, AV 2, AV 2f, AVid, AV 3 und AV 4s. Zudem wird von der Irreduzibilität des Verbandes G der Entscheidungseffekte ausgegangen. Zu einer Rechtfertigung sei an die Diskussion in Abschnitt 10.1 erinnert. Um deutlich zu machen, in welchen Aussagen des nun folgenden Abschnitts die Irreduzibilität eingeht, erfolgt nach Formulierung des jeweiligen Satzes oder Lemmas eine zugehörige Bemerkung.

Zunächst wird T 1.1 aus [Lud85a], Kapitel VIII, §1, S. 208 wiedergegeben:

Lemma G.2.1 *Jedes Element aus G läßt sich als Supremum einer höchstens abzählbaren Menge von Atomen von G darstellen, deren Elemente paarweise orthogonal sind.*

Beweis:

Sei e ein Element aus G . Man definiere nun folgende Menge:

$$Y_e := \left\{ \bigvee_{p \in P} p \mid P \subseteq A(G) \text{ mit } p_1 \leq e \text{ und } p_1 \perp p_2 \quad \forall p_1, p_2 \in P \right\}.$$

Dabei bezeichne $A(G)$ gemäß Definition 9.8.3 die Menge der Atome von G . Y_e erfüllt bezüglich der Halbordnung \leq genau die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn, das als Lemma F.4 in Anhang F notiert wurde, denn für jede nicht-leere Teilmenge von Y_e ist durch e eine obere Schranke gegeben. Also besitzt Y_e ein maximales Element $\bigvee_{p \in P} p$. Aus der Definition von Y_e folgt insbesondere

$$\bigvee_{p \in P} p \leq e.$$

Wäre nun $\bigvee_{p \in P} p \neq e$, dann wäre $e - \bigvee_{p \in P} p \neq \mathbf{0}$. Somit existierte aufgrund der Atomizität von G gemäß Satz 9.8.3 ein Atom \tilde{p} von G mit $\tilde{p} \leq e - \bigvee_{p \in P} p$. Damit gälte aber

$$\tilde{p} \leq \mathbf{1} - \bigvee_{p \in P} p = \bigwedge_{p \in P} p^\perp,$$

so daß also \tilde{p} zu jedem $p \in P$ orthogonal wäre. Damit läge aber ein Widerspruch zur Maximalität von $\bigvee_{p \in P} p$ vor, denn $(\bigvee_{p \in P} p) \vee \tilde{p}$ wäre Element von Y_e

$$\text{mit } \bigvee_{p \in P} p \leq (\bigvee_{p \in P} p) \vee \tilde{p}.$$

Also fallen e und $\bigvee_{p \in P} p$ zusammen.

Wegen Satz 9.5.11 (ii) sind alle Teilmengen von $A(G)$, deren Elemente paarweise orthogonal sind, höchstens abzählbarer Mächtigkeit, so daß die Behauptung bewiesen ist. ■

Bezüglich der Elemente e von G gibt es enge Zusammenhänge zwischen bestimmten verbandstheoretischen Eigenschaften, der Darstellbarkeit als Summe von Atomen von G sowie der Dimensionalität der zugeordneten Seite $K_1(e)$. Als erstes werden Teile der Aussage T 1.4 aus [Lud85a], Kapitel VIII, §1, S. 210 formuliert:

Lemma G.2.2 *Für ein Element e aus G und eine natürliche Zahl n sind äquivalent:*

- (i) e ist Summe von n Atomen aus G , die paarweise verschieden sind.
- (ii) e hat im verbandstheoretischen Sinne die Länge n .

Beweis:

(i) \implies (ii): Nach Voraussetzung kann man e als Summe von n Atomen $(p_i)_{i=1}^n$ darstellen:

$$e = \sum_{i=1}^n p_i.$$

Ob des Punktes (i) von Satz 9.5.11 müssen die Atome $(p_i)_{i=1}^n$ paarweise orthogonal sein. Man setze nun für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$a_j := \sum_{i=1}^j p_i.$$

Da die Mitglieder der Familie $(p_i)_{i=1}^n$ paarweise orthogonal sind, ergibt sich mit Satz 9.5.11 (ii) für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ die Identität $a_j = \bigvee_{i=1}^j p_i$. Also liegt die Familie $(a_j)_{j=1}^n$ im Verband G .

Trivialerweise gilt $a_{j+1} \geq a_j$ für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. Aber a_{j+1} ist sogar oberer Nachbar von a_j für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$. Um das zu zeigen, wähle man ein $j \in \{1, \dots, n\}$ und ein $\bar{e} \in G$ mit $a_{j+1} \geq \bar{e} \geq a_j$. Da a_j und \bar{e} in G liegen, folgt zunächst mit Lemma 9.5.3 (v) die Zugehörigkeit von $\bar{e} - a_j$ zu G . Zudem erhält man auch $p_{j+1} \geq \bar{e} - a_j \geq \mathbf{0}$. Da aber p_{j+1} ein Atom aus G ist, gilt somit entweder $\bar{e} - a_j = p_{j+1}$, also $\bar{e} = a_{j+1}$, oder $\bar{e} = a_j$.

Demnach gibt es eine Kette der Form

$$\mathbf{0} \triangleleft a_1 \triangleleft \dots \triangleleft a_n = e.$$

Mit der Bemerkung im Anschluß an Definition F.32 folgt damit, daß e die Länge n besitzt.

(ii) \implies (i): Es existiert nach Voraussetzung eine Kette der Form

$$\mathbf{0} \triangleleft a_1 \triangleleft \dots \triangleleft a_n = e.$$

mit einer Familie $(a_i)_{i=1}^n \subseteq G$. Man setze nun $a_0 := \mathbf{0}$, und man setze für jedes j aus $\{1, \dots, n\}$

$$p_j := a_j - a_{j-1}.$$

Die Zugehörigkeit von $(p_j)_{j=1}^n$ zu G ergibt sich aus der Orthomodularität und der Verbandseigenschaft von G , denn wegen $a_{j-1} \leq a_j$ erhält man die Identität $a_j - a_{j-1} = a_j \wedge a_{j-1}^\perp$ für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$.

Offensichtlich gilt

$$\sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^n a_{j-1} = \sum_{j=1}^n a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j = a_n = e. \quad (\text{G.10})$$

Daraus ergibt sich mit Satz 9.5.11 (i) insbesondere, daß die Mitglieder der Familie $(p_j)_{j=1}^n$ paarweise orthogonal sind. Das heißt mit Satz 9.5.11 (ii) für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$a_j = \sum_{i=1}^j p_i = \bigvee_{i=1}^j p_i. \quad (\text{G.11})$$

Außerdem kann man zeigen, daß es sich bei $(p_j)_{j=1}^n$ um eine Menge von Atomen aus G handelt. Man betrachte dafür ein $\bar{e} \in G$ mit $p_j \geq \bar{e} \geq \mathbf{0}$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Folglich bekommt man damit für jedes $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$ aufgrund der Orthogonalitätseigenschaften der $(p_i)_{i=1}^n$:

$$\bar{e} \leq p_j \leq p_i^\perp.$$

Also ist \bar{e} orthogonal zu p_i für jedes $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$, woraus sich dann mit Satz 9.5.11 (ii) die Relation $\bar{e} \vee a_{j-1} = \bar{e} + a_{j-1}$ ergibt. Damit erhält man nun mit (G.11):

$$a_j = \left(\bigvee_{i=1}^{j-1} p_i \right) \vee p_j = a_{j-1} \vee p_j \geq a_{j-1} \vee \bar{e} = a_{j-1} + \bar{e} \geq a_{j-1}.$$

Da es sich bei a_j um einen oberen Nachbarn von a_{j-1} handelt, bedeutet das, daß entweder $a_j = a_{j-1} + \bar{e}$ oder $a_{j-1} = a_{j-1} + \bar{e}$ gilt. Da $a_j = a_{j-1} + \bar{e}$ der Aussage $\bar{e} = p_j$ äquivalent ist und da $a_{j-1} = a_{j-1} + \bar{e}$ gleichbedeutend mit der Aussage $\bar{e} = \mathbf{0}$ ist, gehört p_j offenbar zu den Atomen von G .

Mit $(p_i)_{i=1}^n$ ist es also gelungen, eine Familie von Atomen in G zu finden, deren Summe mit e zusammenfällt. ■

Die Darstellbarkeit eines Elementes e von G als Summe endlich vieler Atome von G hängt auch mit der Endlichdimensionalität der zugeordneten Seite $K_1(e)$ zusammen. Um mit Satz G.2.4 eine zugehörige Aussage formulieren zu können, wird vorher T 6.3.3 aus [Lud85a], Kapitel VI, §6.3, S. 183 präsentiert:

Lemma G.2.3 *Bezeichnet e_1 ein Element aus G so, daß $K_1(e_1)$ bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ kompakt ist, und bezeichnet e_2 ein weiteres Element von G , dann gilt:*

(i) *Für Elemente e aus G mit $e \leq e_2$ gilt: $(e \vee e_1) \wedge e_2 = e \vee (e_1 \wedge e_2)$.*

(ii) *Für Elemente e aus G mit $e \leq e_1$ gilt: $(e \vee e_2) \wedge e_1 = e \vee (e_1 \wedge e_2)$.*

Beweis:

Es wird zunächst Punkt (i) mittels Lemma 9.6.15 (iv) gezeigt.

Aus der Orthomodularität folgert man wegen $e_1 \wedge e_2 \leq e_1$

$$\begin{aligned} e_1 &= (e_1 \wedge e_2) \vee ((e_1 \wedge e_2)^\perp \wedge e_1) \\ &= (e_1 \wedge e_2) + ((e_1 \wedge e_2)^\perp \wedge e_1), \end{aligned}$$

wobei man das $+$ -Zeichen in der letzten Zeile mit Lemma 9.5.10 erhält. Damit erhält man nun $e_1 - e_1 \wedge e_2 = (e_1 \wedge e_2)^\perp \wedge e_1$, woraus sich dann unmittelbar die Zugehörigkeit von $e_1 - e_1 \wedge e_2$ zu G ergibt.

Des weiteren erhält man damit:

$$e_2 \wedge (e_1 - e_1 \wedge e_2) = (e_1 \wedge e_2) \wedge (e_1 \wedge e_2)^\perp = \mathbf{0}. \quad (\text{G.12})$$

Die Voraussetzung der $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Kompaktheit von $K_1(e_1)$ liefert die $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Kompaktheit von $K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2)$, denn wegen $e_1 - e_1 \wedge e_2 \leq e_1$ und Lemma 8.3.15 handelt es sich bei $K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2)$ um eine bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ abgeschlossene Teilmenge einer $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -kompakten Menge. Dabei setze man $e_1 \neq e_1 \wedge e_2$ voraus, denn im Falle $e_1 = e_1 \wedge e_2$ wird die Behauptung (i) insgesamt trivial.

Die Kompaktheit von $K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2)$ bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ garantiert aber schon

$$\Delta(e_2, e_1 - e_1 \wedge e_2) \neq 0, \quad (\text{G.13})$$

wie die folgenden Überlegungen zeigen. Wäre

$$\inf_{x \in K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - e_2) = 0,$$

müßte es aufgrund der $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Kompaktheit von $K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2)$ ein x in $K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2)$ so geben, daß $\hat{\mu}(x, \mathbf{1} - e_2) = 0$ gälte. Also wäre x Element der Menge

$$\begin{aligned} K_1(e_1 - e_1 \wedge e_2) \cap K_1(e_2) &= K_1((e_1 - e_1 \wedge e_2) \wedge e_2) \\ &\stackrel{(\text{G.12})}{=} K_1(\mathbf{0}) = \emptyset, \end{aligned}$$

wodurch offensichtlich ein Widerspruch vorläge, so daß also (G.13) gelten muß.

Wählt man nun $e \leq e_2$ mit $e \neq \mathbf{0}$, da der Fall $e = \mathbf{0}$ trivial ist, dann ergibt sich unmittelbar

$$e_2 \wedge (e \vee e_1) \geq e_2 \wedge e = e \neq \mathbf{0},$$

so daß der Term $\Delta(e_2 \wedge (e \vee e_1), e_1 - e_1 \wedge e_2)$ wohldefiniert ist. Mit Lemma 9.6.13 (iii) folgt wegen $e_2 \wedge (e \vee e_1) \leq e_2$ und (G.13)

$$\Delta(e_2 \wedge (e \vee e_1), e_1 - e_1 \wedge e_2) \neq 0.$$

Damit erhält man nun die Behauptung aus Lemma 9.6.15 (iv).

Punkt (ii) der Behauptung gewinnt man mit Lemma F.30. ■

Damit kann man nun den angekündigten Satz formulieren, der T 1.2 aus [Lud85a], Kapitel VIII, §1, S. 208 wiedergibt:

Satz G.2.4 *Für beliebige Elemente e aus G ist $K_1(e)$ genau dann endlichdimensional, wenn e Summe endlich vieler Atome von G ist.*

Beweis:

„ \implies “ : Liege $K_1(e)$ mit Dimension m vor. Gemäß Lemma G.2.1 kann man e als Supremum höchstens abzählbar vieler Atome darstellen, die paarweise orthogonal sind

$$e = \bigvee_{i \in I} p_i, \quad (\text{G.14})$$

wobei I der Form $\{1, 2, 3, \dots\}$ sein möge. Setzt man nun für jedes $n \in I$

$$e_n := \bigvee_{i=1}^n p_i,$$

dann gilt offensichtlich $e_i \leq e_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$. Außerdem gilt $e_i \leq e$ für alle $i \in I$. Damit erhält man also mit Lemma 9.8.2 eine Familie von Seiten $(K_1(e_i))_{i \in I}$ von K dergestalt, daß für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ gilt:

$$\dim K_1(e_i) \leq \dim K_1(e_j).$$

Ebenso muß auch $\dim K_1(e_i) \leq \dim K_1(e)$ für alle $i \in I$ gelten. Es kann also nur dann ein Widerspruch verhindert werden, wenn I nicht mehr als m Elemente enthält. Dann stellt sich e aber wegen (G.14) als Supremum endlich vieler Atome dar, das mit Satz 9.5.11 (ii) als Summe im Sinne des Vektorraumes Δ aufgefaßt werden kann.

„ \impliedby “ : Man nehme nun an, daß für ein Element e aus G die Darstellung

$$e = \sum_{\nu=1}^n p_\nu$$

vorliege, wobei $(p_\nu)_{\nu=1}^n$ eine Familie von Atomen von G sei. Wegen Satz 9.5.11 (i) müssen die Atome paarweise orthogonal sein.

Setzt man für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\tilde{e}_k := \sum_{\nu=1}^k p_\nu,$$

dann erhält man eine Ungleichungskette der Form

$$\mathbf{0} \leq \tilde{e}_1 \leq \tilde{e}_2 \leq \dots \leq \tilde{e}_n = e.$$

Dabei ergibt sich die Zugehörigkeit der Menge $\{\tilde{e}_k \mid k = 1, \dots, n\}$ zu G aus der Verbandseigenschaft von G und aus Satz 9.5.11 (ii). Die \leq -Relationen sind Konsequenz des Lemmas 9.8.4 (i).

AV 4s zufolge existiert zu $K_1(e)$ eine Folge endlichdimensionaler Seiten $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$F_j \subseteq F_{j+1} \tag{G.15}$$

für alle $j \in \mathbb{N}$, so daß gilt:

$$K_1(e) = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} F_j. \tag{G.16}$$

Mit AV 2f sind alle endlichdimensionalen Seiten von K auch exponiert, so daß mit Satz 9.3.2 (iii) und Lemma 9.5.8 für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $e_j \in G$ mit $F_j = K_1(e_j)$ existiert. Daher erhält man vermittels (G.15), (G.16) und wiederum Lemma 9.5.8:

$$\mathbf{0} \leq e_1 \leq e_2 \leq \dots \leq e \text{ und } e = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} e_j. \tag{G.17}$$

Man gehe im weiteren ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon aus, daß es kein $i \in \mathbb{N}$ mit $e_i = e_{i+1} \not\leq e_{i+2}$ gibt. Es gibt demnach nur zwei Möglichkeiten. Entweder wächst die Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ streng monoton unbegrenzt an oder sie bleibt ab einem endlichen Glied konstant. Es soll nun gezeigt werden, daß der letztere Fall eintreten muß. Das heißt, daß es ein $M \in \mathbb{N}$ so gibt, daß $e_i = e_{i+1}$ für alle $i \geq M$ gilt. In einem solchen Falle wäre der Beweis der Behauptung gelungen, denn aus (G.17) ergäbe sich

$$K_1(e) = K_1\left(\bigvee_{j \in \mathbb{N}} e_j\right) = K_1(e_M), \tag{G.18}$$

und mit der Endlichdimensionalität von $K_1(e_M)$ ergäbe sich dann auch die gesuchte Endlichdimensionalität von $K_1(e)$.

Um nun zu zeigen, daß die Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ab einem endlichen Glied konstant bleibt, werden die folgenden Größen für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \mathbb{N}$ definiert:

$$\begin{aligned} c_{i,j} &:= (\tilde{e}_i \wedge e_j) \vee \tilde{e}_{i-1}, \\ d_{j,i} &:= (e_j \wedge \tilde{e}_i) \vee e_{j-1}. \end{aligned}$$

Dabei sei $\tilde{e}_0 := \mathbf{0}$ und $e_0 := \mathbf{0}$ vereinbart.

Für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt offenbar

$$\tilde{e}_{i-1} = c_{i,0} \leq c_{i,1} \leq c_{i,2} \leq \dots \leq \tilde{e}_i, \quad (\text{G.19})$$

denn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \mathbb{N}$ erhält man einerseits

$$c_{i,j} = (\tilde{e}_i \wedge e_j) \vee \tilde{e}_{i-1} \stackrel{e_j \leq e_{j+1}}{\leq} (\tilde{e}_i \wedge e_{j+1}) \vee \tilde{e}_{i-1} = c_{i,(j+1)}$$

und andererseits wegen $\tilde{e}_i \geq \tilde{e}_i \wedge e_j$ und $\tilde{e}_i \geq \tilde{e}_{i-1}$

$$\tilde{e}_i \geq (\tilde{e}_i \wedge e_j) \vee \tilde{e}_{i-1} = c_{i,j}.$$

Ebenso ergibt sich für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \mathbb{N}$

$$e_{j-1} = d_{j,0} \leq d_{j,1} \leq d_{j,2} \leq \dots \leq d_{j,n} = e_j,$$

denn für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden drei (Un-)Gleichungsketten:

$$d_{j,i} = (e_j \wedge \tilde{e}_i) \vee e_{j-1} \stackrel{\tilde{e}_i \leq \tilde{e}_{i+1}}{\leq} (e_j \wedge \tilde{e}_{i+1}) \vee e_{j-1} = d_{j,(i+1)}$$

$$d_{j,0} = (e_j \wedge \tilde{e}_0) \vee e_{j-1} = \mathbf{0} \vee e_{j-1} = e_{j-1}$$

$$d_{j,n} = (e_j \wedge \tilde{e}_n) \vee e_{j-1} = (e_j \wedge e) \vee e_{j-1} = e_j \vee e_{j-1} = e_j.$$

Da für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ mit \tilde{e}_i ein oberer Nachbar von \tilde{e}_{i-1} vorliegt, gibt es (G.19) zufolge für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ nur zwei Möglichkeiten. Entweder gilt $e_{i-1} = c_{i,j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, oder es existiert ein $m_i \in \mathbb{N}$, so daß $\tilde{e}_i = c_{i,j}$ für alle $j \geq m_i$ gilt. Der erste Fall kann aber nicht eintreten, wie die folgenden Überlegungen zeigen. Sei dafür angenommen, daß es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ so gibt, daß $\tilde{e}_{i-1} = c_{i,j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Das heißt, es gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{e}_{i-1} = (\tilde{e}_i \wedge e_j) \vee \tilde{e}_{i-1}.$$

Dazu äquivalent ist die Aussage, daß für alle $j \in \mathbb{N}$ die Relation $\tilde{e}_{i-1} \geq \tilde{e}_i \wedge e_j$ erfüllt ist. Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\tilde{e}_{i-1} \geq \bigvee_{j \in \mathbb{N}} (\tilde{e}_i \wedge e_j). \quad (\text{G.20})$$

Andererseits konvergiert $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in streng monotoner Weise gegen $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} e_j = e$, denn $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ stellt eine aufwärts gerichtete Teilmenge von G dar, die mit Satz 9.5.9 bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen das Supremum $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} e_j = e$ konvergiert. Dabei bedenke man, daß $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und daß daher $(e_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(\tilde{e})_{\tilde{e} \in \{e_j | j \in \mathbb{N}\}}$ gegen denselben Grenzwert konvergieren. Somit muß es außer im trivialen Falle $\tilde{e}_i = e$ ein j_0 geben, ab dem $e_j \geq \tilde{e}_i$ für alle $j \geq j_0$ gilt. Das bedeutet aber

$$\bigvee_{j \in \mathbb{N}} (\tilde{e}_i \wedge e_j) = \left(\underbrace{\bigvee_{j < j_0} (\tilde{e}_i \wedge e_j)}_{\leq \tilde{e}_i \wedge e_{j_0}} \right) \vee \left(\bigvee_{j \geq j_0} \underbrace{(\tilde{e}_i \wedge e_j)}_{= e_j} \right) = \bigvee_{j \in \mathbb{N}} e_j = e. \quad (\text{G.21})$$

Mit (G.20) und (G.21) kommt man somit zu der Ungleichungskette

$$\tilde{e}_{i-1} \geq \bigvee_{j \in \mathbb{N}} (\tilde{e}_i \wedge e_j) = \tilde{e}_i,$$

welche im Widerspruch dazu steht, daß \tilde{e}_i oberer Nachbar von \tilde{e}_{i-1} ist.

Also muß es somit für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $m_i \in \mathbb{N}$ mit $\tilde{e}_i = c_{i,j}$ für alle $j \geq m_i$ geben. Es soll nun gezeigt werden, daß mit

$$M := \max_{i \in \{1, \dots, n\}} m_i \quad (\text{G.22})$$

das gesuchte Element aus \mathbb{N} gefunden wurde, für das $e_i = e_{i+1}$ mit $i \geq M$ eintritt.

Dazu ist es günstig, zunächst zu zeigen, daß für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt:

$$c_{i,j} = c_{i,(j-1)} \iff d_{j,i} = d_{j,(i-1)}. \quad (\text{G.23})$$

Zum Beweis von (G.23) seien $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \mathbb{N}$ gewählt. Gilt nun $c_{i,j} = c_{i,(j-1)}$, bedeutet das also ob der Definition der $c_{i,j}$:

$$(\tilde{e}_i \wedge e_j) \vee \tilde{e}_{i-1} = (\tilde{e}_i \wedge e_{j-1}) \vee \tilde{e}_{i-1}. \quad (\text{G.24})$$

Entsprechend der einleitenden Überlegungen ist $K_1(e_j)$ endlicher Dimension, so daß $K_1(e_j)$ gemäß Lemma 9.8.1 auch die Eigenschaft der $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ -Kompaktheit besitzt. Daraus ergibt sich wegen $\tilde{e}_{i-1} \leq \tilde{e}_i$ mit Lemma G.2.3 (i), daß die Aussage aus (G.24) äquivalent ist zu der folgenden Aussage

$$(\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) \wedge \tilde{e}_i = (\tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1}) \wedge \tilde{e}_i. \quad (\text{G.25})$$

Daraus folgt dann

$$\begin{aligned}\tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1}) \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) &= \tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) \\ &= \tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j).\end{aligned}$$

Das heißt nun:

$$\tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) \leq \tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1}. \quad (\text{G.26})$$

Aus (G.26) erhält man aber auch andersherum wegen $\tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) \leq \tilde{e}_i$ und $e_{j-1} \leq e_j$:

$$\tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1}) \leq \tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_j) \leq \tilde{e}_i \wedge (\tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1}).$$

Also gilt (G.25), und somit sind offenbar die Aussagen (G.26) und $c_{i,j} = c_{i,(j-1)}$ äquivalent.

Mit erneuter Verwendung von Lemma G.2.3 (i) ist die Aussage (G.26) äquivalent der Aussage

$$\tilde{e}_{i-1} \vee (\tilde{e}_i \wedge e_j) \leq \tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1},$$

die wiederum äquivalent ist zu der Relation

$$\tilde{e}_i \wedge e_j \leq \tilde{e}_{i-1} \vee e_{j-1}. \quad (\text{G.27})$$

Aus (G.27) ergibt sich mit $e_{j-1} \leq e_j$:

$$\begin{aligned}(e_{j-1} \vee \tilde{e}_i) \wedge e_j &\leq (e_j \vee \tilde{e}_i) \wedge e_j \\ &\leq (e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}) \wedge e_j \\ &\leq e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}.\end{aligned} \quad (\text{G.28})$$

Da man aber ausgehend von (G.28) auch

$$\tilde{e}_i \wedge e_j \leq (e_{j-1} \vee \tilde{e}_i) \wedge e_j \leq e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}$$

erhält, sind (G.27) und (G.28) offenbar äquivalent.

Wegen $e_j \wedge (e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}) \leq e_j$ und $\tilde{e}_{i-1} \leq \tilde{e}_i$ ergibt sich aus (G.28):

$$\begin{aligned}(e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}) \wedge e_j &\leq (e_{j-1} \vee \tilde{e}_i) \wedge e_j \\ &\leq (e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}) \wedge e_j.\end{aligned}$$

Also erhält man die Identität

$$(e_{j-1} \vee \tilde{e}_{i-1}) \wedge e_j = (e_{j-1} \vee \tilde{e}_i) \wedge e_j. \quad (\text{G.29})$$

(G.29) wiederum liefert umgekehrt auch (G.28) in offensichtlicher Weise.

Damit sind also auch (G.28) und (G.29) gleichwertig. (G.29) ist aber gerade gleichbedeutend mit $d_{j,i} = d_{j,(i-1)}$, wenn man Lemma G.2.3 (ii) ausnutzt. Also ist der Beweis der Äquivalenzaussage aus (G.23) abgeschlossen.

Mit Hilfe von (G.23) kann man zeigen, daß für alle $j \geq M$ die Relation $e_j = e_{j+1}$ gilt.

Da M das Maximum aller m_i mit $i \in \{1, \dots, n\}$ symbolisiert, gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \geq M + 1$:

$$c_{i,j} = c_{i,(j-1)}.$$

Das heißt mit Hilfe von (G.23), daß für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \geq M + 1$ die Identität $d_{j,i} = d_{j,(i-1)}$ eintritt. Somit erhält man für alle $j \geq M + 1$:

$$\begin{aligned} e_{j-1} &= (e_j \wedge \underbrace{\tilde{e}_0}_{= \mathbf{0}}) \vee e_{j-1} = d_{j,0} = \dots = d_{j,n} = \\ &= (e_j \wedge \underbrace{\tilde{e}_n}_{= e}) \vee e_{j-1} = e_j \vee e_{j-1} = e_j. \end{aligned}$$

Damit ist also der Nachweis der Relation aus (G.18) gelungen, wenn man M entsprechend (G.22) wählt. Somit müssen $K_1(e)$ wie $K_1(e_M)$ endlicher Dimension sein. ■

Man erinnere, daß ein Element von G als endlich bezeichnet wird, wenn es endlicher Länge im verbandstheoretischen Sinne ist. Dafür sei auf Definition F.32 und die anschließende Bemerkung verwiesen. Daher kann man in gewisser Zusammenfassung von Lemma G.2.2 und Satz G.2.4 auch schreiben:

Lemma G.2.5 *Für ein Element e aus G sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) e ist endliches Element von G .
- (ii) $K_1(e)$ ist endlicher Dimension.
- (iii) e ist Summe endlich vieler Atome von G , die paarweise orthogonal sind.
- (iv) e ist im verbandstheoretischen Sinne endlicher Länge.

Beweis:

Die Äquivalenz von (iv) und (i) folgt, wie im Vorfeld des Lemmas bereits erwähnt, gemäß Definition F.32. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) folgt aus Satz G.2.4 und Satz 9.5.11 (i). Die Gleichwertigkeit der Aussagen (iii) und (iv) schließlich ergibt sich aus Lemma G.2.2 und wiederum Satz 9.5.11 (i). ■

Im weiteren steht also bei Wahl eines endlichen Elementes von G das eben aufgezählte Spektrum von Eigenschaften zur Verfügung.

Damit kommt man nun zu der folgenden Aussage, die man als T 1.3 in [Lud85a], Kapitel VIII, §1, S. 210 findet:

Satz G.2.6 *Sei e ein endliches Element von G , dann ist*

$$G[\mathbf{0}, e] := \{a \in G \mid \mathbf{0} \leq a \leq e\}$$

ein irreduzibler, atomarer, vollständiger und modularer Unterverband von G mit Überdeckungseigenschaft, der bezüglich der Abbildung

$$G[\mathbf{0}, e] \longrightarrow G[\mathbf{0}, e], \quad a \longmapsto a^\perp \wedge e$$

orthokomplementiert ist.

Bemerkung: In den Nachweis der Irreduzibilität von $G[\mathbf{0}, e]$ geht die am Anfang des Abschnitts gemachte vereinfachende Annahme der Irreduzibilität von G ein.

Beweis:

Atomizität, Überdeckungseigenschaft, Orthokomplementiertheit sowie die Eigenschaft, vollständiger Verband zu sein, folgen aus den Lemmata F.37, F.38, dem Lemma 9.2.5, 9.5.4 sowie Satz 9.8.3.

Da e endliches Element ist, hat $K_1(e)$ mit Lemma G.2.5 endliche Dimension. Also ist $K_1(e)$ mit Lemma 9.8.1 auch $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -kompakt. Mit Lemma G.2.3 gilt dann auch die Modularität des Verbandes $G[\mathbf{0}, e]$.

Es bleibt der Nachweis der Irreduzibilität, der mit Hilfe von Lemma F.31 geführt werden soll. Man wähle dafür zwei beliebige voneinander verschiedene Atome p_1, p_2 von $G[\mathbf{0}, e]$. Der Nachweis ist wegen Lemma F.31 gelungen, wenn ein von p_1 und p_2 verschiedenes drittes Atom r bezüglich $G[\mathbf{0}, e]$ mit $r \leq p_1 \vee p_2$ existiert.

Lemma F.37 (ii) zufolge handelt es sich bei p_1, p_2 auch um Atome von G , die zusätzlich noch den Relationen

$$p_1 \leq e \text{ und } p_2 \leq e \tag{G.30}$$

gehörchen. Also existiert aufgrund der Irreduzibilität von G mit Lemma F.31 ein von p_1 und p_2 verschiedenes Atom r bezüglich G mit $r \leq p_1 \vee p_2$. Wegen (G.30) ergibt sich damit aber unmittelbar $r \leq e$. Also ist r wegen Lemma F.37 (ii) auch Atom von $G[\mathbf{0}, e]$, und der Beweis ist durchgeführt. ■

Bevor der nächste Satz formuliert werden kann, bedarf es noch der folgenden zwei Aussagen, die durch Überlegungen im Beweis zu T 3.1 in [Lud85a], Kapitel VIII, §3, S. 212 nahegelegt werden:

Lemma G.2.7 *Sei e die Summe von n Atomen aus G , die paarweise verschieden sind, und sei $(q_\alpha)_{\alpha=1}^n$ eine Familie Atomen von G mit $\sum_{\alpha=1}^n q_\alpha \leq e$, dann gilt*

$$\sum_{\alpha=1}^n q_\alpha = e.$$

Beweis:

Nach den Voraussetzungen gibt es eine Familie $(p_i)_{i=1}^n$ von Atomen von G mit $e = \sum_{i=1}^n p_i$. Mit Satz 9.5.11 (i) und (ii) sind die Mitglieder der Familie $(p_i)_{i=1}^n$ paarweise orthogonal, und es gilt

$$e = \sum_{i=1}^n p_i = \bigvee_{i=1}^n p_i.$$

Ebenfalls mit Satz 9.5.11 (i) und (ii) erhält man einerseits, daß die Atome der Familie $(q_\alpha)_{\alpha=1}^n$ paarweise orthogonal sind, und andererseits, daß die folgende Identität gilt:

$$\sum_{\alpha=1}^n q_\alpha = \bigvee_{\alpha=1}^n q_\alpha.$$

Es wird nun die Relation $\bigvee_{i=1}^n p_i = \bigvee_{\alpha=1}^n q_\alpha$, und damit die Behauptung, bewiesen, indem die Voraussetzungen von Lemma F.33 gezeigt werden.

Da die Atome $(p_i)_{i=1}^n$ paarweise orthogonal sind, erhält man für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ die Relation $p_i \leq p_j^\perp$. Also gilt auch $p_i \leq p_j^\perp$ für alle $j \in \{2, \dots, n\}$ und alle $1 \leq i \leq j-1$, woraus sich dann unmittelbar ergibt:

$$\bigvee_{i=1}^{j-1} p_i \leq p_j^\perp.$$

Also erhält man für alle $j \in \{2, \dots, n\}$

$$\left(\bigvee_{i=1}^{j-1} p_i \right) \wedge p_j = \mathbf{0}.$$

Um die Voraussetzungen von Lemma F.33 zu garantieren, muß gezeigt werden, daß für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ auch

$$p_i \leq \bigvee_{\alpha=1}^n q_\alpha \quad (\text{G.31})$$

gilt. Man nehme nun an, daß die Aussage (G.31) für insgesamt m Mitglieder der Familie $(p_i)_{i=1}^n$ nicht gilt. Außerdem nehme man ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß es sich dabei um diejenigen Elemente handelt, die mit $i = 1, \dots, m$ indiziert werden. Das heißt, es gilt für alle $j \in \{1, \dots, m\}$:

$$p_j \not\leq \left(\bigvee_{\alpha=1}^n q_\alpha \right). \quad (\text{G.32})$$

Man setze nun für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$a_i := \bigvee_{\alpha=1}^i q_\alpha,$$

und darüber hinaus definiere man für jedes $j \in \{1, \dots, m\}$

$$a_{n+j} := a_n \vee \left(\bigvee_{s=1}^j p_s \right).$$

Aufgrund der Verbandseigenschaften von G gehört die Familie $(a_i)_{i=1}^{n+m}$ in trivialer Weise zu G . Aus den Atomeigenschaften der beteiligten Atome $(q_\alpha)_{\alpha=1}^n$ und $(p_i)_{i=1}^m$, aus (G.32) sowie aus dem Umstand, daß die Atome $(p_i)_{i=1}^m$ paarweise orthogonal sind, folgt mit Satz 9.8.4 (i), daß für jedes i aus der Menge $\{1, \dots, n+m-1\}$ mit a_{i+1} ein oberer Nachbar von a_i vorliegt. Also ergibt sich die folgende Ungleichungskette:

$$\mathbf{0} \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots \leq a_{n+m} = e.$$

Das Gleichheitszeichen am Ende der Kette muß gelten, da nach obiger Annahme $a_n \geq p_j$ für alle $j = m+1, \dots, n$ gilt und da man somit erhält

$$e \geq a_{n+m} = a_n \vee \left(\bigvee_{s=1}^m p_s \right) \geq \left(\bigvee_{s=m+1}^n p_s \right) \vee \left(\bigvee_{s=1}^m p_s \right) = \bigvee_{s=1}^n p_s = e.$$

Da nun aber mit Lemma G.2.2 das Element e die Länge n hat, muß $m = 0$ gelten. Dazu sei an die Bemerkung im Anschluß an Definition F.32 erinnert.

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma F.33 erfüllt, so daß die Behauptung bewiesen ist. ■

Lemma G.2.8 *Sei e ein Element von G , so daß $K_1(e)$ endlicher Dimension ist, und bezeichne $\mathcal{N}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}}$ die von der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ auf $K_1(e)$ induzierte Uniformität.*

Dann besitzt der aus den uniformen Räumen $(\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e), \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)})$ und $(K_1(e), \mathcal{N}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}})$ gewonnene uniforme Produktraum die Eigenschaft der Folgenkompaktheit.

Beweis:

Mit Satz 7.2.1 und Satz 8.2.7 (ii) handelt es sich bei $(\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}})$ um einen kompakten und metrisierbaren uniformen Raum. Ob seiner offensichtlichen $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abgeschlossenheit in Δ besitzt auch der uniforme Unterraum $(\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e), \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)})$ dieselben Eigenschaften. Siehe dafür Satz A.6.6 (i) und Lemma A.5.4.

Mit Lemma 9.8.1 hat auch der uniforme Raum $(K_1(e), \mathcal{N}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}})$ die Eigenschaft der Kompaktheit. Seine Metrisierbarkeit ist trivial, da $\mathcal{N}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}}$ von einer Norm induziert wird.

Mit den Sätzen A.5.5 und A.6.11 ergeben sich damit die Kompaktheit und die Metrisierbarkeit des uniformen Produktraumes, woraus mit Lemma A.6.5 die Behauptung folgt. ■

Erinnert man aus Satz 9.8.3 oder auch Definition F.27 (i), daß mit dem Symbol $A(G)$ die Menge der Atome von G bezeichnet wurde, dann kann man mit Hilfe der beiden zuletzt notierten Lemmata die Aussage T 3.1 aus [Lud85a], Kapitel VIII, §3, S. 212 beweisen:

Satz und Definition G.2.9 *Für endliche Elemente e aus G ist die Menge*

$$A(e) := A(G) \cap G[\mathbf{0}, e]$$

kompakt bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$.

Beweis:

Bezeichne e ein endliches Element aus G , dann existiert mit Lemma G.2.5 ein $n \in \mathbb{N}$, so daß e die verbandstheoretische Länge n besitzt. Da $\hat{\mathcal{L}}$ kompakt ist bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}}$ und da $A(e) \subseteq G \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ gilt, genügt es, zu zeigen, daß $A(e)$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ abgeschlossene Teilmenge von Δ ist. Das heißt, daß es für eine Folge $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq A(e)$, die bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen ein $y \in \Delta$ konvergiert, nachzuweisen gilt, daß y in $A(e)$ liegt.

Man wähle daher eine Folge $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq A(e)$, die bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen ein $y \in \Delta$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit der Abbildung $\xi_\Delta(x, \cdot)$ für jedes $x \in K$ auf $(\Delta, \sigma(\Delta, B_\Delta))$ folgt $\mathbf{0} \leq y \leq e$, da man $\mathbf{0} \leq p_\nu \leq e$ für alle $\nu \in \mathbb{N}$ vorausgesetzt hat. Also liegt y mit Satz 9.4.1 insbesondere in $\hat{\mathcal{L}}$. Damit gehört y auch zu $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$, wie sich mit Lemma 9.2.4 (iv) ergibt.

Da nach Voraussetzung e die Länge n hat, muß für jedes $\nu \in \{1, \dots, n\}$ das Element $e - p_\nu$ die Länge $n - 1$ haben. Das ergibt sich etwa mit Lemma 1 in [Bir95], Kapitel I, §3, S. 5 in Anwendung auf den Unterverband $G[\mathbf{0}, e]$. Also existiert mit Lemma G.2.2 für jedes $\nu \in \{1, \dots, n\}$ eine Familie $(p_\nu^\alpha)_{\alpha=1}^{n-1}$ von Atomen von G , so daß $e - p_\nu = \sum_{\alpha=1}^{n-1} p_\nu^\alpha$ gilt. Setzt man nun noch $p_\nu^0 := p_\nu$ für jedes $\nu \in \{1, \dots, n\}$, erhält man also

$$e = \sum_{\alpha=0}^{n-1} p_\nu^\alpha.$$

Da die p_ν^α allesamt Atome von G sind, enthalten die zugehörigen Seiten $K_1(p_\nu^\alpha)$ auch allesamt nur ein Element. Dieses ist Extrempunkt von K , und es mit x_ν^α benannt werden. Es gilt damit insbesondere für alle $\nu \in \{1, \dots, n\}$ und $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\hat{\mu}(x_\nu^\alpha, p_\nu^\alpha) = 1. \quad (\text{G.33})$$

Wegen $p_\nu^\alpha \leq e$ für alle $\nu \in \{1, \dots, n\}$ und alle $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt aber auch $K_1(p_\nu^\alpha) \subseteq K_1(e)$, so daß die x_ν^α mit Lemma 8.3.8 auch Extrempunkte von $K_1(e)$ sind. Mit Lemma G.2.8 ist der uniforme Produktraum der uniformen Räume $(\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e), \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)})$ und $(K_1(e), \mathcal{N}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}})$, wobei $\mathcal{N}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}}$ die von der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ auf $K_1(e)$ induzierte Uniformität bezeichne, insbesondere folgenkompakt. Also existiert zu jeder Folge $((p_\nu^\alpha, x_\nu^\alpha))_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$ eine konvergente Teilfolge, die wiederum mit $((p_\nu^\alpha, x_\nu^\alpha))_{\nu \in \mathbb{N}}$ bezeichnet werden soll. Der zugehörige Grenzwert möge für jedes α aus der Menge $\{0, \dots, n-1\}$ mit (y^α, x^α) bezeichnet sein. Die Konvergenz der Folge $((p_\nu^\alpha, x_\nu^\alpha))_{\nu \in \mathbb{N}}$ impliziert, daß die Folge $(p_\nu^\alpha)_{\nu \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen

y^α konvergiert und ebenso daß die Folge $(x_\nu^\alpha)_{\nu \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen x^α strebt. Weil bei einer konvergenten Folge alle Teilfolgen gegen denselben Grenzwert wie die Gesamtfolge konvergieren, erhält man insbesondere $y^0 = y$. Zudem garantiert die $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Abgeschlossenheit von $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$ die Zugehörigkeit von y^α zu $\hat{\mathcal{L}}_0 K_0(e)$ für alle $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$. Ebenso liegt x^α für jedes $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$ in $K_1(e)$, da $K_1(e)$ abgeschlossen ist bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$.

Es gilt nun die folgende Überlegung für jedes $\nu \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(x^\alpha, y^\alpha) - 1| &\stackrel{(G.33)}{=} |\hat{\mu}(x^\alpha, y^\alpha) - \hat{\mu}(x_\nu^\alpha, p_\nu^\alpha)| \\ &\leq |\hat{\mu}(x^\alpha, y^\alpha) - \hat{\mu}(x^\alpha, p_\nu^\alpha)| + |\hat{\mu}(x^\alpha, p_\nu^\alpha) - \hat{\mu}(x_\nu^\alpha, p_\nu^\alpha)| \\ &\leq |\hat{\mu}(x^\alpha, y^\alpha) - \hat{\mu}(x^\alpha, p_\nu^\alpha)| + \|x^\alpha - x_\nu^\alpha\|_{B_\Delta}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich ob der oben festgestellten Konvergenzen $\hat{\mu}(x^\alpha, y^\alpha) = 1$. Mit Lemma 9.2.7 (ii) in Anwendung auf $N = \{\mathbf{1} - y\}$ folgt, daß es zu jedem $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$ ein $e^\alpha \in G$ mit $K_1(y^\alpha) = K_1(e^\alpha)$ und $y^\alpha \geq e^\alpha$ gibt. Wegen $\hat{\mu}(x^\alpha, y^\alpha) = 1$ erhält man $\emptyset \neq K_1(y^\alpha) = K_1(e^\alpha)$, so daß man mit Lemma 9.5.8 zu $e^\alpha \neq \mathbf{0}$ kommt. Mithin existiert aufgrund der Atomizität von G ein Atom q^α mit

$$q^\alpha \leq e^\alpha \leq y^\alpha. \quad (G.34)$$

Daraus ergibt sich

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} q^\alpha \leq \sum_{\alpha=0}^{n-1} y^\alpha = e, \quad (G.35)$$

wobei das Gleichheitszeichen in (G.35) folgt, da $\sum_{\alpha=0}^{n-1} p_\nu^\alpha = e$ gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}$.

Aus (G.35) erhält man mit Lemma G.2.7 sogar schon die Identität $\sum_{\alpha=0}^{n-1} q^\alpha = e$, so daß man zu der Relation

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} (y^\alpha - q^\alpha) = \mathbf{0}$$

gelangt. Aus (G.34) ergibt sich daraus, daß $q^\alpha = y^\alpha$ für alle $\alpha \in \{0, \dots, n-1\}$ gilt. Insbesondere liefert das für $\alpha = 0$ also $y = y^0 = q^0$. Da q^0 Atom von G ist und da mit (G.34) und (G.35) die Relation $q^0 \leq e$ zur Verfügung steht, gehören q^0 und damit auch y mit Lemma F.37 zu den Atomen von $G[\mathbf{0}, e]$. ■

Neben der nun zur Verfügung stehenden Kompaktheitsaussage für Mengen des Typs $A(e)$ mit endlichem Element e kann man noch eine weitere topologische Aussage formulieren. Dazu wird noch die Aussage T 3.3 in [Lud85a], Kapitel VIII, §3, S. 213 notiert:

Lemma G.2.10 *Sei e ein endliches Element von G . Durch die Vorschrift*

$$A(e) \longrightarrow \partial_e K_1(e), \quad p \longmapsto x \text{ mit } x \in K_1(p)$$

wird eine Abbildung von der Menge $A(e)$ in die Menge der Extrempunkte von $K_1(e)$ definiert, bezüglich derer die topologischen Räume $(A(e), \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{A(e)})$ und $(\partial_e K_1(e), \mathcal{O}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}})$ homöomorph sind. Dabei symbolisiere $\mathcal{O}_{\|\cdot\|_{B_\Delta}}$ die von der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ auf $\partial_e K_1(e)$ induzierte Topologie.

Beweis:

Man wähle mit e ein endliches Element von G , dann gilt mit Lemma 8.3.8 die folgende Beziehung zwischen den Extrempunkten von K und den Extrempunkten von $K_1(e)$:

$$\partial_e K_1(e) = \partial_e K \cap K_1(e). \quad (\text{G.36})$$

Damit kann man zeigen, daß die in der Behauptung formulierte Vorschrift in wohldefinierter Weise eine Bijektion festlegt.

Gemäß Satz 9.8.3 besitzt für jedes Atom p von G die Menge $K_1(p)$ nur ein einzelnes Element, das zudem Extrempunkt von K ist. Demzufolge besteht auch die Menge $K_1(p)$ für $p \in A(e)$ nur aus einem Extrempunkt x von K . Da $p \leq e$ gilt, erhält man daher unmittelbar

$$1 = \hat{\mu}(x, p) \leq \hat{\mu}(x, e).$$

Also gewinnt man die Beziehung $\hat{\mu}(x, e) = 1$, so daß x auch zu $K_1(e)$ gehört. Somit ist wegen (G.36) durch die in der Behauptung angegebene Vorschrift tatsächlich in wohldefinierter Weise eine Abbildung auf ganz $A(e)$ gegeben, die für die weiteren Betrachtungen des Beweises mit t bezeichnet werden möge. Die Injektivität von t ergibt sich direkt aus der Injektivität der Abbildung (9.38) innerhalb des Satzes 9.8.3. Geht man nun von einem Extrempunkt x von $K_1(e)$ aus, dann ist x mit (G.36) auch Extrempunkt von K . Also existiert ob der Surjektivität der Abbildung in (9.38) ein $p \in A(G)$ mit $K_1(p) = \{x\}$. Mithin liegt x in $K_1(e) \cap K_1(p)$, so daß mit Lemma 9.5.8 die Relation $p \wedge e \neq \mathbf{0}$ folgt. Das heißt, daß $p \leq e$ gelten muß, denn p ist Atom. Damit gehört p zu $A(e)$. Folglich handelt es sich bei der Abbildung, auf die die Behauptung Bezug nimmt, tatsächlich um eine wohldefinierte Bijektion.

Da e zu den endlichen Elementen von G gehört, ist $A(e)$ mit Satz G.2.9 auch $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -kompakt. Damit also t ein Homöomorphismus ist, genügt es mit Satz A.6.8, die Stetigkeit von t zu zeigen.

Es handelt sich bei $(A(e), \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{A(e)})$ um einen uniformen Unterraum des metrisierbaren uniformen Raumes $(\hat{\mathcal{L}}, \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{\hat{\mathcal{L}}})$, wie sich aus Satz 7.2.1 und Satz 8.2.7 (ii) ergibt. Mit Lemma A.5.4 ist daher auch $(A(e), \sigma(\Delta, B_\Delta)|_{A(e)})$ ein metrisierbarer uniformer Raum. Also genügt es wegen Satz A.5.6 (ii) zum Beweis der Stetigkeit von t , daß aus der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Konvergenz einer Folge $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq A(e)$ gegen eine Element $p \in A(e)$ die Konvergenz der Folge $(t(p_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ gegen $t(p)$ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ folgt. Man betrachte daher eine Folge $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subseteq A(e)$, die bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen $p \in A(e)$ konvergiert. Ob der Definition von t gilt für alle $\nu \in \mathbb{N}$

$$\{t(p_\nu)\} = K_1(p_\nu). \quad (\text{G.37})$$

Ebenso notiert man

$$\{t(p)\} = K_1(p). \quad (\text{G.38})$$

Da e endliches Element ist, ergibt sich mit Satz G.2.4, Lemma 9.8.1 und Lemma A.6.5 die Folgenkompaktheit von $K_1(e)$ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$. Also besitzt die Folge $(t(p_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge $(t(p_{\nu_i}))_{i \in \mathbb{N}}$, deren Grenzwert ein Häufungspunkt der Folge $(t(p_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist.

Betrachtet man jetzt eine beliebige bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ konvergente Teilfolge $(t(p_{\nu_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ von $(t(p_\nu))_{\nu \in \mathbb{N}}$ mit Grenzwert \tilde{x} , dann gewinnt man für jedes $j \in \mathbb{N}$ wegen (G.37):

$$\begin{aligned} |\hat{\mu}(\tilde{x}, p) - 1| &\leq |\hat{\mu}(\tilde{x}, p) - \hat{\mu}(\tilde{x}, p_{\nu_j})| + |\hat{\mu}(\tilde{x}, p_{\nu_j}) - \hat{\mu}(t(p_{\nu_j}), p_{\nu_j})| \\ &\leq |\hat{\mu}(\tilde{x}, p) - \hat{\mu}(\tilde{x}, p_{\nu_j})| + \|\tilde{x} - t(p_{\nu_j})\|_{B_\Delta}. \end{aligned} \quad (\text{G.39})$$

Da mit $(p_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ auch die Teilfolge $(p_{\nu_j})_{j \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ gegen p konvergiert und da nach Voraussetzung $(t(p_{\nu_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen \tilde{x} konvergiert, erhält man also mit (G.39) die Relation $\hat{\mu}(\tilde{x}, p) = 1$. Somit zeigt sich, daß \tilde{x} in $K_1(p)$ liegen muß. Da $K_1(p)$ aber nach (G.38) lediglich das Element $t(p)$ umfaßt, müssen alle Grenzwerte bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ konvergenter Teilfolgen von $(t(p_{\nu_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ den Grenzwert $t(p)$ haben.

Damit hat man also gezeigt, daß die Folge $(t(p_{\nu_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ mit $t(p)$ einen und nur einen Häufungspunkt besitzt. Daraus ergibt sich mit dem Korollar in [Bou66a], Kapitel I, §9.1, S. 85 aufgrund der Kompaktheit von $K_1(e)$ schon die Konvergenz von $(t(p_{\nu_j}))_{j \in \mathbb{N}}$ gegen $t(p)$ ergibt. ■

Mit Hilfe des im obigen Lemma diskutierten Homöomorphismus kann man zu der in Satz G.2.9 zum Ausdruck gebrachten Kompaktheitsaussage für Mengen des Typs

$A(e)$ mit endlichem e noch eine Zusammenhangsaussage formulieren, die Ludwig als T 3.4 in [Lud85a], Kapitel VIII, §3, S. 214 angibt. Satz 17.2 in [Lud70], Kapitel III, §17, S. 412ff. bringt dieselbe Aussage zum Ausdruck, liefert allerdings wichtige Hinweise zum Beweis.

Satz G.2.11 *Für jedes e in G ist $A(e)$ bezüglich der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Topologie zusammenhängend.*

Bemerkung: In den Beweis geht die am Anfang des Abschnitts gemachte vereinfachende Annahme der Irreduzibilität von G ein.

Beweis:

Es wird gezeigt, daß $A(e)$ bezüglich der $\sigma(\Delta, B_\Delta)$ -Topologie wegzusammenhängend ist. Daraus ergibt sich dann mit Satz 4.17 in [vQ01], Kapitel 4, Abschnitt B, S. 69 die Behauptung.

Dazu muß gezeigt werden, daß es für alle Elemente $p_0, p_1 \in A(e)$ möglich ist, eine stetige Abbildung aus dem abgeschlossenen reellen Intervall $[0, 1]$ in die Menge $A(e)$ mit $t(0) = p_0$ und $t(1) = p_1$ anzugeben. Dabei soll das reelle Intervall $[0, 1]$ mit der kanonischen Topologie des Absolutbetrages versehen sein.

Es werden also zwei voneinander verschiedene Elemente p_1, p_2 aus $A(e)$ gewählt. Da $A(e)$ ausschließlich Atome von G umfaßt, existiert mit Lemma F.31 ein von den Atomen p_0 und p_1 verschiedenes drittes Atom q von G mit $q \leq p_0 \vee p_1$. Wegen $p_0, p_1 \leq e$ ergibt sich unmittelbar auch $q \leq p_0 \vee p_1 \leq e$, so daß auch die Zugehörigkeit von q zu $A(e)$ feststeht.

Vermittels Satz 9.8.3 existieren drei voneinander verschiedene Extrempunkte x_q, x_0, x_1 von K mit $K_1(q) = \{x_q\}$, $K_1(p_0) = \{x_0\}$ und $K_1(p_1) = \{x_1\}$. Wegen $q, p_0, p_1 \leq p_0 \vee p_1$ ergibt sich mit Lemma 9.5.8 die Zugehörigkeit der drei Punkte x_q, x_0, x_1 zu $K_1(p_0 \vee p_1)$. Da die Extrempunkte x_q, x_0, x_1 voneinander verschieden sind, können sie nicht auf einer Geraden liegen, denn das hieße, daß man einen der drei Punkte im Widerspruch zu seiner Extrempunkteigenschaft als echte Konvexkombination der anderen beiden darstellen könnte. Also ist $K_1(p_0 \vee p_1)$ mindestens zweidimensional. Außerdem spannen x_q, x_0, x_1 eine zweidimensionale Ebene \mathcal{E} im Vektorraum B_Δ auf. Benennt man den Schnitt von $K_1(p_0 \vee p_1)$ und \mathcal{E} mit \mathcal{S} , dann bezeichnet \mathcal{S} eine zweidimensionale konvexe Teilmenge von $K_1(p_0 \vee p_1)$, bezüglich derer x_q, x_0, x_1 drei Extrempunkte sind. Außerdem ist \mathcal{S} sowohl bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ als auch bezüglich $\sigma(B_\Delta, \Delta)$ abgeschlossen, da $K_1(p_0 \vee p_1)$ und \mathcal{E} gemäß Lemma 8.3.15 und §15.5(2) in [Köt66], S. 155 bezüglich beider Topologien abgeschlossen sind.

Die Seite $K_1(p_0 \vee p_1)$ selber ist aber ebenfalls endlichdimensional, denn mit Lemma 9.8.4 (i) ist $p_0 \vee p_1 - p_1$ ein Atom von G , so daß

$$p_0 \vee p_1 = (p_1 \vee p_2 - p_1) + p_1 \quad (\text{G.40})$$

eine Darstellung von $p_0 \vee p_1$ als Summe zweier Atome von G liefert. Daraus folgt die Endlichdimensionalität von $K_1(p_0 \vee p_1)$ mit Satz G.2.4.

Also kann man ein $\bar{x} \in \mathcal{S}$ und einen m -dimensionalen Untervektorraum V von B_Δ mit $m \geq 2$ so angeben, daß $\bar{x} + V$ die affine Hülle von $K_1(p_0 \vee p_1)$ darstellt. Ausgestattet mit der Norm $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ bezeichnet V einen m -dimensionalen Unterraum von $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$. Alle endlichdimensionalen Hausdorffschen topologischen \mathbb{R} -Vektorräume sind dem Euklidischen \mathbb{R}^m im Sinne topologischer Vektorräume isomorph. Das heißt mit [SW99], Kapitel I, §3.2, S. 21, es existiert ein linearer Homöomorphismus auf den Euklidischen \mathbb{R}^m . Demzufolge kann man die Mengen $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ und $\mathcal{S} - \bar{x}$ als konvexe Teilmengen des Euklidischen \mathbb{R}^m auffassen, und so erhält man die Inklusionskette

$$\mathcal{S} - \bar{x} \subseteq K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Die Menge $\mathcal{S} - \bar{x}$ liegt dabei innerhalb einer zweidimensionalen Ebene. Insbesondere sind dabei $x_q - \bar{x}$, $x_0 - \bar{x}$, $x_1 - \bar{x}$ drei verschiedene Extrempunkte sowohl von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ als auch von $\mathcal{S} - \bar{x}$.

Darüber hinaus besitzt $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ eine weitere wichtige Eigenschaft:

Hilfsaussage: Für $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ ist jeder topologische Randpunkt bezüglich des Euklidischen \mathbb{R}^m auch ein Extrempunkt.

Es sei angemerkt, daß man die Eigenschaft, die in der Hilfsaussage zum Ausdruck kommt, auch als strikte Konvexität bezeichnet.

Für den Beweis der Hilfsaussage bezeichne man mit x' einen topologischen Randpunkt von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ bezüglich des Euklidischen \mathbb{R}^m . Da $m > 0$ gilt und da $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ den \mathbb{R}^m als affine Hülle besitzt, enthält die Menge $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ bezüglich des Euklidischen \mathbb{R}^m mindestens einen topologisch inneren Punkt, wie Theorem 6.2 in [Roc70], Kapitel II, §6, S. 45 entnommen werden kann. Nach der Aussage §17.5(1) in [Köt66], S. 197, in deren Voraussetzungen die Existenz eines topologisch inneren Punktes von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ gefordert wird, handelt es sich beim Randpunkt x' von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ insbesondere um einen Stützpunkt von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$, der entsprechend in einer Stützhyperebene H von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ liegt. Damit stellt

$$F := H \cap (K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}) \quad (\text{G.41})$$

eine x' enthaltende exponierte Seite von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ dar. Wie sich in elementarer Weise nachweisen läßt, erhält man durch $F + \bar{x}$ eine $x' + \bar{x}$ enthaltende Seite von $K_1(p_0 \vee p_1)$, die ob der Endlichdimensionalität von $K_1(p_0 \vee p_1)$ ebenfalls endlicher Dimension sein muß. Nach AV 2f muß $F + \bar{x}$ daher auch exponiert sein, und nach Satz 9.8.3 muß $F + \bar{x}$ daher eine Seite der Form $\{x\}$ enthalten, wobei x einen Extrempunkt von K symbolisiert. Da x auch in $K_1(p_0 \vee p_1)$ liegt, ist x mit Lemma 8.3.8 auch Extrempunkt von $K_1(p_0 \vee p_1)$. Also kommt man zu einer Inklusionskette exponierter Seiten von K :

$$\emptyset \subseteq \{x\} \subseteq F + \bar{x} \subseteq K_1(p_0 \vee p_1). \quad (\text{G.42})$$

Aus der Exponiertheit der Seiten $\{x\}$ und $F + \bar{x}$ folgt wegen Lemma 9.5.8 die Existenz zweier Elemente e_1, e_2 aus G mit $\{x\} = K_1(e_1)$ und $F + \bar{x} = K_1(e_2)$. Wiederum mit Lemma 9.5.8 ergibt sich damit aus (G.42) die folgende Ungleichungskette in G :

$$\mathbf{0} \leq e_1 \leq e_2 \leq p_0 \vee p_1. \quad (\text{G.43})$$

Dabei begründet sich die Relation $\mathbf{0} \leq e_1$ damit, daß $\{x\}$ ob des Satzes 9.8.3 ein Atom in $\mathcal{W}_{\hat{\mathcal{L}}}$ darstellt. Da nun aber $p_0 \vee p_1$ mit (G.40) und Lemma G.2.2 die verbandstheoretische Länge 2 besitzt, kann (G.43) nur dann nicht zum Widerspruch führen, wenn entweder $e_1 = e_2$ oder $e_2 = p_0 \vee p_1$ gilt. Der letztere Fall kann aber nicht eintreten, denn aus $e_2 = p_0 \vee p_1$ ergibt sich die Mengenidentität $F + \bar{x} = K_1(p_0 \vee p_1)$, woraus man vermittels (G.41) zu der Inklusion

$$K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x} \subseteq H \quad (\text{G.44})$$

kommt. (G.44) steht aber im Widerspruch dazu, daß $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ eine m -dimensionale Menge ist, während H als Hyperebene des Euklidischen \mathbb{R}^m nur $(m - 1)$ -dimensional sein kann. Also muß der Fall $e_1 = e_2$ eintreten. Das heißt, die Menge $F + \bar{x}$ enthält lediglich den Extrempunkt x von $K_1(p_0 \vee p_1)$. Da F aber auch den anfänglich gewählten Randpunkt x' von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ umfaßt, kommt man daher zu der Relation

$$x' + \bar{x} = x.$$

Weil x Extrempunkt von $K_1(p_0 \vee p_1)$ ist, handelt es sich bei $x' = x - \bar{x}$ um einen Extrempunkt von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$, wie zu zeigen war. Damit ist die Hilfsaussage bewiesen.

Definition der Abbildung g :

Mit den bisher gewonnenen Eigenschaften der beiden Mengen $\mathcal{S} - \bar{x}$ und $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ kann man nun eine Abbildung g definieren. Dazu erinnere,

daß $x_0 - \bar{x}, x_1 - \bar{x}, x_q - \bar{x}$ drei verschiedene Extrempunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$ bezeichnen. Daher existiert ein Punkt x_M in $\mathcal{S} - \bar{x}$, um den man einen Kreis bezüglich der Euklidischen Norm schlagen kann, der vollständig in $\mathcal{S} - \bar{x}$ enthalten ist. Dazu sei auf Theorem 6.2 in [Roc70], Kapitel II, §6, S. 45 verwiesen, demzufolge es einen relativen inneren Punkt in $\mathcal{S} - \bar{x}$ gibt. Indem man nun jedem Randpunkt s von $\mathcal{S} - \bar{x}$ denjenigen Schnittpunkt der durch x_M und s verlaufenden Geraden mit dem Kreis um x_M zuordnet, der zwischen x_M und s liegt, steht eine Vorschrift zur Verfügung, die eine Funktion definiert. Eine Illustration der Definition von g liefert Abbildung G.1. Die Wohldefiniertheit der Abbildung auf dem ganzen Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion, denn es gibt stets genau einen derartigen Schnittpunkt im \mathbb{R}^m .

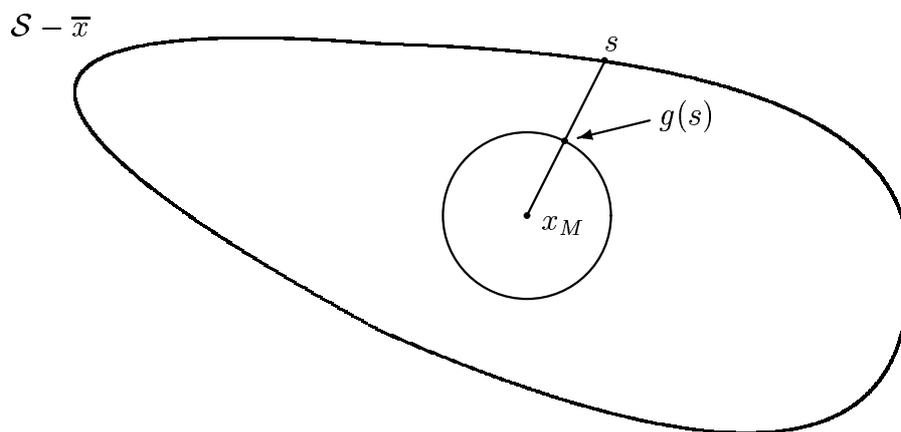


Abbildung G.1: Illustration der Definition der Abbildung g

Die Abbildung g besitzt aber noch weitere Eigenschaften, denn g stellt sogar einen Homöomorphismus zwischen dem Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ und dem Kreisrand um x_M dar, wenn man die beiden Mengen jeweils mit der zugehörigen Unterraumtopologie zum Euklidischen \mathbb{R}^m ausstattet. Der Beweis der Homöomorphie-Eigenschaft von g erfolgt mit Hilfe von Satz A.6.8, indem gezeigt wird, daß g eine stetige Bijektion ist und daß der Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ eine kompakte Teilmenge des Euklidischen \mathbb{R}^m ist.

zur Injektivität von g : Liegen zwei Elemente s_1, s_2 aus dem Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ mit $g(s_1) = g(s_2)$ vor, dann müssen s_1, s_2 und x_M auf einer Geraden liegen. Das heißt, entweder liegt s_1 zwischen s_2 und x_M , oder s_2 liegt zwischen s_1 und x_M . Das steht gemäß der Hilfsaussage aber nur dann nicht im Widerspruch

zu den Extremalpunkteigenschaften von s_1 und s_2 , wenn s_1 und s_2 identisch sind.

zur Surjektivität von g : Da mit Satz I.2.5 in [Wer97], Kapitel I, S. 26 auf endlichdimensionalen normierten Räumen alle Normen äquivalent sind und da mit Lemma 8.2.13 (i) die Elemente aus $\mathcal{S} - \bar{x}$ bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ beschränkt sind, sind die Elemente von $\mathcal{S} - \bar{x}$ auch bezüglich der Euklidischen Norm auf dem \mathbb{R}^m beschränkt. Wählt man also ein Element \bar{s} aus dem Kreisrand um x_M , dann muß die Gerade, die von x_M ausgehend durch \bar{s} verläuft, den Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ schneiden. Nennt man den Schnittpunkt s , dann gilt offenbar $g(s) = \bar{s}$.

zur Stetigkeit von g : Liege eine Folge $(s_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus dem Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ vor, die bezüglich der Euklidischen Norm gegen ein Randelement s von $\mathcal{S} - \bar{x}$ konvergiert. Dann gilt offensichtlich für alle $\nu \in \mathbb{N}$

$$\|g(s_\nu) - g(s)\|_2 \leq \|s_\nu - s\|_2,$$

wobei $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm bezeichnen möge, da der Kreis um x_M innerhalb von $\mathcal{S} - \bar{x}$ liegt. Die gesuchte Konvergenz $g(s_\nu) \rightarrow g(s)$ folgt daher unmittelbar aus der Konvergenz von $(s_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ gegen s .

zur Kompaktheit des Randes von $\mathcal{S} - \bar{x}$: Jeder Randpunkt von $\mathcal{S} - \bar{x}$ bezüglich des Euklidischen \mathbb{R}^m ist auch ein Randpunkt von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$, denn \mathcal{S} wird als Schnitt einer Ebene mit $K_1(p_0 \vee p_1)$ gewonnen. Da nach obiger Hilfsaussage die Randpunkte von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ auch Extremalpunkte von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ sind, ist die Menge aller Randpunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$ eine Teilmenge der Extremalpunktmenge von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$. Die Menge aller Randpunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$ ist zudem $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -abgeschlossen in der Menge der Extremalpunkte von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$, wie die nachfolgenden Überlegungen zeigen. Man betrachte eine Folge $(\tilde{x}_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ aus der Menge der Randpunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$, die bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ gegen ein Element \tilde{x} aus B_Δ konvergiert. Da die Menge der Extremalpunkte von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ abgeschlossen ist bezüglich $\|\cdot\|_{B_\Delta}$, denn mit Lemma G.2.10 und Satz G.2.9 ist $\partial_e K_1(p_0 \vee p_1)$ sogar $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -kompakt, muß \tilde{x} ein Extremalpunkt von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ sein. Erinnerung man nun, daß \mathcal{S} abgeschlossen ist bezüglich $(B_\Delta, \|\cdot\|_{B_\Delta})$, dann folgt die Zugehörigkeit von \tilde{x} zu $\mathcal{S} - \bar{x}$. Also handelt es sich bei \tilde{x} gleichfalls um einen Extremalpunkt von $\mathcal{S} - \bar{x}$. Extremalpunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$ sind notwendigerweise ebenso Randpunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$, so daß die $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Abgeschlossenheit der Menge der Randpunkte von $\mathcal{S} - \bar{x}$ in der Menge der Extremalpunkte nachgewiesen ist. Daraus folgt nun unter Ausnutzung der $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Kompaktheit von $\partial_e K_1(p_0 \vee p_1)$ auch die $\|\cdot\|_{B_\Delta}$ -Kompaktheit von $\mathcal{S} - \bar{x}$.

Damit handelt es sich bei g um einen Homöomorphismus zwischen dem Rand von $\mathcal{S} - \bar{x}$ und dem Kreisrand um x_M .

Mit g steht nun eine Abbildung zur Verfügung, mittels derer ein Weg in $A(e)$ konstruiert werden kann, der in stetiger Weise von p_0 zu p_1 führt. Man bezeichne dafür mit f eine beliebige stetige Abbildung aus dem reellen Intervall $[0, 1]$ auf das Kreisbogenstück von $g(x_0)$ bis $g(x_1)$. Außerdem trage der Homöomorphismus von $A(e)$ nach $\partial_e K_1(e)$ aus Lemma G.2.10 den Namen t , dann stellt die Abbildung

$$[0, 1] \longrightarrow A(e), \quad \alpha \longmapsto t^{-1}(g^{-1}(f(\alpha)) + \bar{x})$$

einen vollständig in $A(e)$ gelegenen Weg von p_0 nach p_1 dar. Dazu sei bemerkt, daß mit [SW99], Kapitel I, §1.1, S. 13 die Vorschrift

$$x \longmapsto x + \bar{x}$$

offensichtlich einen Homöomorphismus aus der Menge der Extrempunkte von $K_1(p_0 \vee p_1) - \bar{x}$ in die Menge der Extrempunkte der Menge $K_1(p_0 \vee p_1)$ darstellt. ■

G.3 Der Satz von L.S. Pontrjagin und die Darstellungssätze von V.S. Varadarajan und C. Piron

Der Satz von L.S. Pontrjagin und die Darstellungssätze von V.S. Varadarajan und C. Piron verwenden eine Reihe mathematischer Instrumente, deren Darstellung im Vorfeld Platz eingeräumt werden soll. Es wird dabei dem Buch [Wis94] gefolgt.

Definition G.3.1

Sei H eine nicht-leere Menge, und sei $\tau : H \times H \longrightarrow H$ eine Abbildung, so daß für beliebige Elemente a, b, c aus H gilt

$$\tau(\tau(a, b), c) = \tau(a, \tau(b, c)) \quad (\text{Assoziativität}),$$

dann heißt das Paar (H, τ) **Halbgruppe**. Gilt zusätzlich für alle a, b aus H

$$\tau(a, b) = \tau(b, a) \quad (\text{Kommutativität}),$$

dann heißt (H, τ) **kommutative Halbgruppe**.

Definition G.3.2

Sei (H, τ) eine Halbgruppe.

- (i) Ein Element e aus H heißt **neutrales Element**, wenn für jedes $a \in H$ gilt:

$$\tau(a, e) = \tau(e, a) = a.$$

- (ii) Besitze (H, τ) ein neutrales Element e . Bezeichnet a ein Element aus H , dann heißt ein Element b aus H **invers zu a** , wenn gilt:

$$\tau(a, b) = \tau(b, a) = e.$$

Bemerkung: Eine Halbgruppe kann höchstens ein neutrales Element enthalten. Ebenso kann ein Element einer Halbgruppe höchstens ein inverses Element besitzen.

Definition G.3.3

Eine Halbgruppe (H, τ) heißt **Gruppe**, wenn gilt:

- (i) Es gibt ein neutrales Element e in H .
 (ii) Zu jedem Element a von H gibt es ein inverses Element.

Ist darüber hinaus die Abbildung τ kommutativ, so wird (H, τ) eine **abelsche Gruppe** genannt.

Definition G.3.4

Seien (H_1, τ_1) und (H_2, τ_2) zwei Halbgruppen. Eine Abbildung $f : H_1 \rightarrow H_2$ heißt **(Halbgruppen-)Homomorphismus**, wenn für alle Elemente a, b aus H_1 gilt:

$$f(\tau_1(a, b)) = \tau_2(f(a), f(b)).$$

Besitzt f die Eigenschaft der Bijektivität, heißt f **(Halbgruppen-)Isomorphismus**. Sind (H_1, τ_1) und (H_2, τ_2) Gruppen, dann heißt ein Halbgruppen-Homomorphismus f zwischen H_1 und H_2 **(Gruppen-)Homomorphismus**. Entsprechend wird der Begriff **(Gruppen-)Isomorphismus** angewandt.

Definition G.3.5

Sei (H, τ) eine Gruppe. Dann heißt eine Teilmenge U von H eine **Untergruppe von (H, τ)** , wenn für alle x, y aus U gilt:

- (i) $\tau(a, b)$ ist Element von U ,

(ii) das inverse Element von a bezüglich der Gruppe (H, τ) liegt in U .

Bemerkung: Der üblichen Konvention folgend, wird im weiteren bei einer Halbgruppe (H, τ) die Schreibweise $a\tau b$ gegenüber der Schreibweise $\tau(a, b)$ vorgezogen.

Definition G.3.6

Ein Tripel $(S, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge S und zwei Verknüpfungen $+$, \cdot , heißt **Ring**, wenn gilt:

- (i) $(S, +)$ ist abelsche Gruppe.
- (ii) (S, \cdot) ist eine Halbgruppe mit neutralem Element $.$
- (iii) Es gelten die **Distributivgesetze**, das heißt, für alle a, b, c aus S gilt:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c, \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c. \end{aligned}$$

Das neutrale Element von S bezüglich $+$ wird als **Null** bezeichnet, und das neutrale Element von S bezüglich \cdot soll **Eins** genannt werden.

Ist für einen Ring $(S, +, \cdot)$ die Halbgruppe (S, \cdot) sogar kommutativ, dann nennt man auch den Ring **kommutativ**.

Definition G.3.7

Ein Ring $(S, +, \cdot)$ heißt **Schiefkörper** oder auch **Divisionsring**, wenn S ohne Null bezüglich \cdot eine Gruppe ist. Das heißt, für jedes Element r aus S , das nicht mit der Null identisch ist, existiert ein inverses Element bezüglich \cdot .

Ein Schiefkörper heißt **Körper**, wenn (S, \cdot) kommutativ ist.

Definition G.3.8

Sei $f : R \rightarrow S$ eine Abbildung zwischen zwei Ringen $(R, +_R, \cdot_R)$ und $(S, +_S, \cdot_S)$. Dann heißt f **(Ring-)Homomorphismus**, wenn für alle $a, b \in R$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} f(a +_R b) &= f(a) +_S f(b), \\ f(a \cdot_R b) &= f(a) \cdot_S f(b), \\ f(1_R) &= 1_S, \end{aligned}$$

gelten, wobei 1_R und 1_S die Eins-Elemente bezüglich $(R, +_R, \cdot_R)$ und $(S, +_S, \cdot_S)$ bezeichnen mögen.

Existiert ein Homomorphismus zwischen zwei Ringen, so heißen die Ringe **homomorph**.

Definition G.3.9

Es bezeichne $(S, +, \cdot)$ einen Schiefkörper, und es sei $\alpha : S \longrightarrow S$ eine Bijektion, so daß für alle $\lambda, \mu \in S$ gilt:

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda + \mu) &= \alpha(\lambda) + \alpha(\mu), \\ \alpha(\lambda \cdot \mu) &= \alpha(\mu) \cdot \alpha(\lambda), \\ \alpha(\alpha(\lambda)) &= \lambda.\end{aligned}$$

Dann heißt α **involutiver Anti-Automorphismus**.

Es sollen hier drei wichtige Beispiele angegeben werden:

Beispiel G.3.10 (i) Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist bezüglich der herkömmlichen Addition und Multiplikation ein Körper. Die identische Abbildung stellt einen involutiven Anti-Automorphismus dar.

(ii) Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen ist bezüglich der herkömmlichen Addition und Multiplikation ein Körper. Die kanonische Konjugation stellt einen involutiven Anti-Automorphismus dar.

(iii) Unter der Menge \mathbb{H} der Quaternionen wird der reelle Aufspann der folgenden vier 2×2 -Matrizen verstanden

$$\mathbf{1}_{\mathbb{H}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_1 := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j}_3 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei i in üblicher Weise für die Quadratwurzel aus -1 stehen soll. Also kann jedes Element q aus \mathbb{H} in der Form

$$q = q_0 \mathbf{1}_{\mathbb{H}} + q_1 \mathbf{j}_1 + q_2 \mathbf{j}_2 + q_3 \mathbf{j}_3$$

mit vier reellen Zahlen q_0, q_1, q_2, q_3 dargestellt werden. Bezüglich gewöhnlicher Matrizenaddition und -multiplikation ist \mathbb{H} ein Schiefkörper. Da die Multiplikation nicht kommutativ ist, handelt es sich bei \mathbb{H} allerdings nicht um einen Körper. Ordnet man jedem Element aus \mathbb{H} die positive Wurzel ihrer Determinante zu, dann beschreibt die derart definierte Abbildung eine Norm auf \mathbb{H} . Wenn in der Folge von den Quaternionen als normiertem Raum gesprochen wird, dann verstehe man darunter \mathbb{H} versehen mit eben genannter Norm. Jedem Element $q_0 \mathbf{1}_{\mathbb{H}} + \sum_{s=1}^3 q_s \mathbf{j}_s$ aus \mathbb{H} wird das Element $q_0 \mathbf{1}_{\mathbb{H}} - \sum_{s=1}^3 q_s \mathbf{j}_s$ als

kanonisch konjugiertes Element zugeordnet. Eine derartige Zuordnung definiert einen involutiven Anti-Automorphismus. Für weitere Aussagen zu den Eigenschaften der Quaternionen wird auf Kapitel II, §2 in [Var85], S. 21 und auf [KR88] verwiesen.

Definition G.3.11

Es bezeichne $(S, +_S, \cdot_S)$ einen Schiefkörper, und es bezeichne $(E, +)$ eine abelsche Gruppe. Sei weiter mit 1 die Eins bezüglich (S, \cdot_S) benannt. Existiert eine Abbildung

$$\cdot : S \times E \longrightarrow E, \quad (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \quad (\text{G.45})$$

mit den folgenden Eigenschaften für alle Elemente λ, μ aus S und alle Elemente x, y aus E

- (i) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y,$
- (ii) $(\lambda +_S \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x,$
- (iii) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \cdot_S \mu) \cdot x,$
- (iv) $1 \cdot x = x,$

dann nennt man $(E, +)$ einen **Links-Vektorraum** über dem Schiefkörper $(S, +_S, \cdot_S)$. Abkürzend wird auch nur von einem Links-Vektorraum über dem Schiefkörper S oder auch nur von einem Links-Vektorraum gesprochen, wenn die zugehörigen Operationen aus dem Zusammenhang hervorgehen. Die Abbildung (G.45) wird als **Skalarmultiplikation** bezeichnet. Das neutrale Element bezüglich $(E, +)$ heißt **Null**. Es wird dafür das Symbol 0 gewählt.

Bemerkung: Der üblichen Konvention folgend, werden künftig zugunsten einer größeren Übersichtlichkeit die Abbildungssymbole sowohl für \cdot_S als auch für die Skalarmultiplikation \cdot fortgelassen. Außerdem werden $+_S$ und $+$ beide mit demselben Symbol $+$ belegt. Es ergibt sich dann jeweils aus dem Zusammenhang, welche Operation gemeint ist.

Definition G.3.12

Sei $(E, +)$ ein Links-Vektorraum über einem Schiefkörper S . Dann heißt eine Untergruppe U von $(E, +)$ ein **Untervektorraum von E** , wenn λx für alle λ aus S und alle x aus U ein Element von U ist.

Definition G.3.13

Sei E ein Links-Vektorraum über einem Schiefkörper S .

- (i) Eine endliche Familie $(x_i)_{i=1}^n$ von Elementen aus E heißt **linear unabhängig**, wenn aus der Identität $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0$ für einen Satz $(\lambda_i)_{i=1}^n$ von Elementen aus S folgt, daß $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt.
- (ii) Eine unendliche Teilmenge N von Elementen aus E heißt **linear unabhängig**, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist.
- (iii) Eine Teilmenge N von Elementen aus E heißt **Erzeugendensystem**, wenn für jedes x aus E eine natürliche Zahl n , ein Satz von Elementen $(y_i)_{i=1}^n$ aus N und ein Satz von Elementen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ aus S derart existieren, daß gilt:

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i.$$

- (iv) Eine linear unabhängige Teilmenge von E heißt **Basis** von E , wenn sie Erzeugendensystem ist.

Es gilt nun der zentrale Satz:

Satz G.3.14 *Ist E ein Links-Vektorraum über einem Schiefkörper S , dann besitzt E auch eine Basis.*

Beweis: Siehe [Wis94], Satz 9.1, S. 77.

Darauf basierend definiert man:

Definition G.3.15

Sei E ein Links-Vektorraum über einem Schiefkörper S . Besitzt E ein endliches Erzeugendensystem, dann wird die Anzahl der Elemente einer Basis von E die **Dimension** von E genannt. Existiert kein endliches Erzeugendensystem, so nennt man E **unendlichdimensional**.

Definition G.3.16

Sei E ein Links-Vektorraum über einem Schiefkörper S . Seien U_1 und U_2 zwei Untervektorräume von E , dann wird die **Summe von U_1 und U_2** , wie folgt, definiert:

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1 \text{ und } u_2 \in U_2\}.$$

Die Definition läßt sich in analoger Weise auf endliche Familien von Untervektorräumen erweitern. Aber auch für unendliche Familien $(U_i)_{i \in I}$ von Untervektorräumen kann eine Summe in sinnvoller Weise definiert werden. Man faßt sie als die Menge aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus den beteiligten Untervektorräumen auf. Es gilt also:

$$\sum_{i \in I} U_i = \left\{ \sum_{j \in J} u_j \mid J \text{ endliche Teilmenge von } I \text{ und } u_j \in U_j \text{ für jedes } j \in J \right\}.$$

Definition G.3.17

Sei F eine nicht-leere Teilmenge eines Links-Vektorraums E über einem Schiefkörper S . Dann heißt

$$\langle N \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid n \in \mathbb{N} \text{ sowie } \lambda_i \in S \text{ und } x_i \in N \text{ für jedes } i \in I. \right\}$$

der **lineare Aufspann von N** bezüglich E .

Definition G.3.18

Sei E ein Links-Vektorraum über einem Schiefkörper S . Sei ferner S mit einem involutiven Anti-Automorphismus α ausgestattet. Liegt dann eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \longrightarrow S$$

derart vor, daß für alle x, y aus E und alle λ, μ aus S die folgenden Beziehungen gelten

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \\ \langle z, x + y \rangle &= \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle, \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle, \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \langle x, y \rangle \alpha(\lambda), \\ \langle x, y \rangle &= \alpha(\langle y, x \rangle), \end{aligned}$$

dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine **α -hermitesche Form**. Das Quadrupel $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ wird als **hermitescher Raum** bezeichnet.

Eine α -hermitesche Form heißt **anisotrop**, wenn für alle x aus E gilt:

$$x = 0 \iff \langle x, x \rangle = 0.$$

Definition G.3.19

Sei $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Raum, und bezeichne 1 die Eins des Schiefkörpers S . Dann werden die folgenden Bezeichnungen vereinbart:

- (i) Zwei Elemente x, y aus E heißen **orthogonal**, wenn $\langle x, y \rangle = 0$ gilt.
- (ii) Für eine Teilmenge F von E wird definiert:

$$F^\perp := \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in F\}.$$

Außerdem wird $F^{\perp\perp} := (F^\perp)^\perp$ gesetzt.

- (iii) Ein Untervektorraum F von E heißt **abgeschlossen**, wenn $F = F^{\perp\perp}$ gilt.
- (iv) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus E , bei der kein Glied mit der Null identisch ist, heißt **orthogonale Folge**, wenn die Glieder paarweise orthogonal sind. Gilt zusätzlich noch $\langle x_n, x_n \rangle = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, nennt man $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **orthonormale Folge**.

Für die so eingeführten Bezeichnungen gilt das folgende Lemma:

Lemma G.3.20 *Sei $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) *Für jede Teilmenge F von E ist durch F^\perp ein Untervektorraum von E gegeben.*
- (ii) *Jeder endlichdimensionale Untervektorraum von E ist abgeschlossen im Sinne von Definition G.3.19 (iii).*

Es gibt hermitesche Räume mit besonderen Eigenschaften. Eine wichtige Eigenschaft kommt in folgender Definition zum Ausdruck.

Definition G.3.21

Ein hermitescher Raum $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ heißt **orthomodularer Raum**, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge F von E gilt:

$$F + F^\perp = E.$$

Lemma G.3.22

Die α -hermitesche Form eines orthomodularen Raumes $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist anisotrop.

Beweis: Siehe [Hol95], hinter Definition 1.2, S. 206.

In der Folge werden nun die drei klassischen Hilberträume als Beispiele erläutert. Sie unterscheiden sich dabei nur darin, daß die drei in Beispiel G.3.10 erwähnten verschiedenen Körper oder Schiefkörper in Verbindung mit den jeweils zugehörigen involutiven Anti-Automorphismen als zugrundeliegende Schiefkörper verwandt werden.

Satz und Definition G.3.23 (Die drei Typen klassischer Hilberträume)

Bezeichnet $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen hermiteschen Raum und gilt einer der drei Fälle

- (i) S ist der Körper der reellen Zahlen, und α ist die identische Abbildung,
- (ii) S ist der Körper der komplexen Zahlen, und α ist die kanonische Konjugation auf den komplexen Zahlen,
- (iii) S ist der Schiefkörper der Quaternionen, und α ist die kanonische Konjugation auf den Quaternionen,

dann heißt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein **Skalarprodukt** auf E , wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anisotrop ist und wenn $\langle x, x \rangle$ für jedes x aus E Element der nicht-negativen reellen Zahlen ist.

Auf einem hermiteschen Raum $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bei dem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist, definiert die Vorschrift

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf E , wenn $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ für die positive Wurzel steht. Wird E mit der Norm $\|\cdot\|$ versehen, liegt ein normierter Raum vor, der als **Prähilbertraum** bezeichnet wird. Ist E bezüglich $\|\cdot\|$ vollständig, dann wird $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als **Hilbertraum** E bezeichnet.

Man spricht bei den so gewonnenen drei Typen von Hilberträumen von den **klassischen Hilberträumen**. Bezeichnet \mathcal{H} einen klassischen Hilbertraum über dem Schiefkörper \mathbb{K} und dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und bezeichnet $\alpha_{\mathbb{K}}$ den im Sinne der obigen drei Fälle zu \mathbb{K} gehörenden involutiven Anti-Automorphismus, dann ist $(\mathcal{H}, \mathbb{K}, \alpha_{\mathbb{K}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein orthomodularer Raum.

Beweis: Siehe in Abschnitt V.1 in [Wer97], Kapitel V, S. 158-159 sowie in Abschnitt 4 in [Var85], Kapitel II, S. 26. Bezüglich der Aussage zum orthomodularen Raum siehe beispielsweise [Sol95].

Bemerkung:

- (i) Es sei angemerkt, daß es sich in obiger Definition eigentlich immer um einen Links-Vektorraum handelt. Im Falle kommutativer Schiefkörper, also im Falle von Körpern wie etwa \mathbb{R} und \mathbb{C} , spricht man auch einfach von **Vektorräumen**. Auch wenn es sich bei den Quaternionen nicht um einen Körper handelt, soll im weiteren zur sprachlichen Vereinfachung ausnahmsweise auch bei einem Links-Vektorraum über den Quaternionen von einem Vektorraum gesprochen werden. Wie in obiger Definition bereits durchgeführt, soll auch im Falle der Quaternionen von einem Prähilbertraum oder bei Vollständigkeit von einem Hilbertraum gesprochen werden. Die so gewählte Vereinfachung soll aber nicht über die Nicht-Kommutativität der Quaternionen hinwegtäuschen.
- (ii) Daß es auch nicht-klassische Hilberträume gibt, wurde zuerst von H.A. Keller in [Kel80] bewiesen.

Auf der Basis hermitescher Räume kann man Verbände definieren:

Satz G.3.24 Sei $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein hermitescher Raum, dann ist die Menge

$$\mathbb{P}(E) := \{U \subseteq E \mid U = U^{\perp\perp}\},$$

ausgestattet mit der Mengeneinklusion als Halbordnung und der Abbildung

$$\mathbb{P}(E) \longrightarrow \mathbb{P}(E), \quad F \longmapsto F^\perp$$

als Orthokomplementation ein irreduzibler, orthokomplementierter, vollständiger, atomarer Verband mit Überdeckungseigenschaft. Ist $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ orthomodular, dann ist der Verband $\mathbb{P}(E)$ orthomodular.

Bezeichnet E einen klassischen Hilbertraum im Sinne der Definition G.3.23, dann ist eine Teilmenge U von E genau dann normabgeschlossen bezüglich der kanonischen Norm, wenn $U = U^{\perp\perp}$ gilt. Insbesondere handelt es sich bei $\mathbb{P}(E)$ um die Menge aller normabgeschlossenen Unterräume von E .

Beweis:

Für die erste Aussage siehe Theorem (34.2) in [MM70], Kapitel VII, S. 151. Bezüglich der Orthomodularitätsaussage siehe etwa [Sol95], S. 242. Für den Zusatz bezüglich der klassischen Hilberträume siehe etwa Korollar V.3.5 in [Wer97], Kapitel V, S. 181 für den reellen und komplexen Fall. Der quaternionische Fall ergibt sich auf analogem Wege. ■

Damit stehen die notwendigen mathematischen Instrumente zur Verfügung, um das erste zentrale Theorem des Abschnitts zu formulieren:

Satz G.3.25 (i) (Darstellungstheorem von V.S. Varadarajan)

Es bezeichne $(L, \leq \perp)$ einen vollständigen, atomaren, orthomodularen Verband mit einer Länge echt größer als 3 und mit Null-Element $\mathbf{0}$, der die folgenden Eigenschaften besitzt:

- (a) *Für jedes endliche Element a aus $L \setminus \{\mathbf{0}\}$ ist $L[\mathbf{0}, a]$ ein irreduzibler und modularer Verband.*
- (b) *Zu jedem Atom p aus L und zu jedem Element a aus L existieren zwei Atome q, r von L mit $q \leq a$, $r \leq a^\perp$ und $p \leq q \vee r$.*

Dann existiert ein orthomodularer Raum $(E_L, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ im Sinne der Definition G.3.21, so daß

$$\mathbb{P}(E_L) := \{U \subseteq E_L \mid U = U^{\perp\perp}\},$$

ausgestattet mit der Mengeninklusion als Halbordnung und der Abbildung

$$\mathbb{P}(E_L) \longrightarrow \mathbb{P}(E_L), \quad F \longmapsto F^\perp$$

als Orthokomplementation, orthoisomorph zu $(L, \leq \perp)$ ist.

(ii) (Darstellungstheorem von C. Piron)

Es bezeichne (L, \leq, \perp) einen Verband mit denselben Eigenschaften wie in (i).

Handelt es sich bei dem gemäß obigem Punkt (i) existierenden Schiefkörper S um den Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen, den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen oder den Schiefkörper \mathbb{H} der Quaternionen und ist der gemäß obigem Punkt (i) existierende involutive Anti-Automorphismus α stetig bezüglich der jeweils natürlichen Topologie auf \mathbb{R}, \mathbb{C} oder \mathbb{H} , dann bezeichnet $(E_L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen klassischen Hilbertraum im Sinne von Definition G.3.23. Im weiteren fällt $\mathbb{P}(E_L)$ mit der Menge aller normabgeschlossenen Unterräume des Hilbertraumes E_L zusammen, so daß (L, \leq, \perp) orthoisomorph ist zu dem Verband der normabgeschlossenen Unterräume des Hilbertraumes E_L bezüglich der Mengeninklusion als Halbordnung und der Zuordnung $F \longmapsto F^\perp$ als Orthokomplementation.

Besitzt L die Eigenschaft der verbandstheoretischen Separabilität, dann ist E_L als Hilbertraum in seiner natürlichen Topologie, also bezüglich des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$, separabel.

Beweis: Siehe die Theoreme 4.40 und 4.44 in [Var85], Kapitel IV, Abschnitt 5, S. 117 und S. 122.

Zur Nutzung von Punkt (ii) des obigen Satzes von Varadarajan innerhalb des Beweises von Satz 10.2.1 benötigt man einen Satz von L.S. Pontrjagin, zu dessen Formulierung man noch den Begriff des topologischen Schiefkörpers und den Begriff der Isomorphie topologischer Schiefkörper einführen muß. Es wird dabei dem Buch [Pon57] gefolgt. Erwähnt sei aber auch das Buch [War93].

Definition G.3.26

Ein Quadrupel $(S, +, \cdot, \mathcal{O})$ aus einer Menge S , zwei Operationen $+$ und \cdot auf S sowie einer Topologie \mathcal{O} auf S wird als **topologischer Schiefkörper** bezeichnet, wenn erstens $(S, +, \cdot)$ ein Schiefkörper ist, wenn zweitens (S, \mathcal{O}) ein topologischer Raum ist und wenn drittens die in S erklärten Operationen $+$ und \cdot bezüglich der Topologie stetig sind. Darunter sei die Stetigkeit der folgenden vier Abbildungen verstanden:

$$S \times S \longrightarrow S, \quad (x, y) \longmapsto x + y, \quad (\text{G.46})$$

$$S \times S \longrightarrow S, \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y. \quad (\text{G.47})$$

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow S, & x &\longmapsto -x, \\ S \setminus \{0\} &\longrightarrow S \setminus \{0\}, & x &\longmapsto x^{-1}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne in üblicher Weise $-x$ das bezüglich $+$ inverse Element zu x , und ebenso der üblichen Konvention folgend bezeichne x^{-1} das bezüglich \cdot inverse Element zu x . Das Symbol 0 stehe für das neutrale Element bezüglich \cdot . Die Stetigkeitsaussagen bezüglich der Abbildungen aus (G.46) und (G.47) sind als Forderungen nach der Stetigkeit auf dem topologischen Produktraum zu verstehen.

Definition G.3.27

Eine Abbildung $f : R \longrightarrow S$ eines topologischen Schiefkörpers R in einen topologischen Schiefkörper S heißt **Isomorphie**, wenn f sowohl ein Homomorphismus der Körper R und S im Sinne der Definition G.3.8 als auch ein Homöomorphismus der topologischen Räume R und S ist. Liegt eine Isomorphie zwischen R und S vor, werden sie als **isomorph** bezeichnet.

Damit kann man den folgenden Satz zitieren:

Satz G.3.28 (Satz von L.S. Pontrjagin) *Jeder bezüglich seiner Topologie lokal-kompakte und zusammenhängende topologische Schiefkörper ist entweder dem Körper der reellen Zahlen oder dem Körper der komplexen Zahlen oder dem Schiefkörper der Quaternionen isomorph im Sinne der Definition G.3.27.*

Bemerkung: Pontrjagin verwendet in der ursprünglichen Form seines Satzes den Terminus der Lokalkompaktheit. Damit ist gemeint, daß jeder Punkt eine quasisikompakte Menge als Umgebung besitzt. Das heißt, die Hausdorffeigenschaft, die in der oben verwandten Formulierung des Satzes im Begriff der Lokalkompaktheit gemäß Definition A.6.1 implizit mit eingeht, müßte eigentlich nicht gefordert werden. Sie folgt bereits aus der Lokalkompaktheit im eben erläuterten Sinne und der Zusammenhangseigenschaft des topologischen Körpers, wie durch Hilfssatz IV in [Pon32], S. 165 zum Ausdruck kommt.

Beweis: Siehe Satz 21 in [Pon57], Kapitel IV, §27, S. 189.

G.4 Der Verband der Projektionsoperatoren eines separablen, unendlichdimensionalen komplexen Hilbertraumes

Die hier zusammengestellten Aussagen stellen allesamt wohlbekannte Ergebnisse der Funktionalanalysis und der Verbandstheorie dar. Als mathematische Referenz wird auf die Bücher von [Wer97] und [RS80] verwiesen. Als physikalisch orientierte Referenz ziehe man das Buch [BC81] heran.

Zugunsten einer besseren Übersicht werden einige Begriffe und Symbole, die auch schon in Anhang G.3 in einem allgemeineren Kontext eingeführt wurden, hier nochmals bereitgestellt.

In der Folge wird von einem komplexen Hilbertraum $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ausgegangen. Dabei bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt im Sinne der Definition G.3.23, das in kanonischer Weise ein Norm auf \mathcal{H} induziert. Man definiert:

Definition G.4.1

Mit $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ wird die Menge der normabgeschlossenen Untervektorräume bezüglich des Hilbertraumes \mathcal{H} bezeichnet.

Zudem betrachte man:

Definition G.4.2

Es wird die folgende Abbildung definiert:

$$\perp : \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}), \quad M \longmapsto M^\perp := \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, \psi \rangle = 0 \quad \forall \psi \in M\}.$$

Damit kann man den folgenden Satz formulieren:

Satz G.4.3 *Es gelten die folgenden Aussagen:*

- (i) $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \subseteq, \perp)$ ist ein irreduzibler, vollständiger, orthomodularer, atomarer Verband mit Überdeckungseigenschaft. \mathcal{H} liefert dabei das Eins-Element, während $\{0\}$ das Null-Element darstellt. Die Atome sind die eindimensionalen Untervektorräume. Für Supremum und Infimum einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Elementen aus $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ mit einer Indexmenge I von beliebiger Mächtigkeit gilt

$$\bigwedge_{i \in I} M_i = \bigcap_{i \in I} M_i, \quad (\text{G.48})$$

$$\bigvee_{i \in I} M_i = \overline{\sum_{i \in I} M_i}, \quad (\text{G.49})$$

wobei $\overline{\dots}$ den Abschluß bezüglich der durch das Skalarprodukt induzierten Norm bezeichne. Für das Summenzeichen sei auf Definition G.3.16 und die nachfolgende Erörterung verwiesen.

- (ii) Im Falle unendlicher Dimension des Hilbertraumes \mathcal{H} ist $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \subseteq, \perp)$ nicht modular.
- (iii) Falls \mathcal{H} separabel ist, ist auch der Verband $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \subseteq, \perp)$ im verbandstheoretischen Sinne separabel.

Beweis: Siehe [BC81], Abschnitt 10.3, S. 105-108.

Man kann alternativ zu den abgeschlossenen Unterräumen eines Hilbertraumes auch die Projektionsoperatoren betrachten. Dem liegt das folgende bekannte Theorem zugrunde:

Satz und Definition G.4.4 (Projektionstheorem) *Sei M ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes \mathcal{H} . Zu jedem Element φ aus \mathcal{H} gibt es genau ein Paar $(\varphi_M, \varphi_\perp)$ aus $M \times M^\perp$ mit*

$$\varphi = \varphi_M + \varphi_\perp. \quad (\text{G.50})$$

Wird jedem Element φ aus \mathcal{H} das entsprechend (G.50) zugehörige Element φ_M zugeordnet, dann definiert das eine Abbildung, die mit P^M bezeichnet werden soll. Bei P^M handelt es sich um eine lineare, stetige und selbstadjungierte Abbildung von \mathcal{H} auf M , so daß $(P^M (P^M \varphi)) = P^M \varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt. Darüber hinaus besitzt P^M noch die folgenden Eigenschaften:

- (i) Gilt $M \neq \{0\}$, dann hat P^M die Operatornorm 1, das heißt: $\|P^M\|_{Op} = 1$.
- (ii) Der Kern der Abbildung P^M ist durch die Menge M^\perp gegeben.
- (iii) Bezeichnet $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ die identische Abbildung auf \mathcal{H} , dann ergibt sich die Identität $P^{M^\perp} = \mathbf{1}_{\mathcal{H}} - P^M$.

Abbildungen des Typs P^M für einen abgeschlossenen Unterraum eines Hilbertraumes \mathcal{H} werden als **Orthogonalprojektionsoperatoren** oder auch einfach als **Projektionsoperatoren** bezeichnet.

Beweis: Siehe Theorem V.3.4 und Satz V.5.9 in [Wer97], Kapitel V, S. 180.

Bemerkung: Es muß hervorgehoben werden, daß in der mathematischen Literatur die in obiger Definition eingeführte gleichwertige Verwendung der beiden Begriffe des Projektionsoperators und des Orthogonalprojektionsoperators zumeist nicht zur Anwendung kommt. Üblicherweise wird dort unter einem Projektionsoperator nur eine lineare und stetige Abbildung P verstanden, für die $P^2\varphi = P\varphi$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt. Das heißt, unter dem Begriff der Projektionsoperatoren wird nicht die Eigenschaft der Selbstadjungiertheit oder eine der dazu äquivalenten Aussagen $\|P^M\|_{Op} = 1$ oder $\text{ran}(P) \perp \text{ker}(P)$ subsumiert. Bei einem Orthogonalprojektionsoperator, der in der mathematischen Literatur mit demjenigen aus der obigen Definition zusammenfällt, handelt es sich dann um einen selbstadjungierten Projektionsoperator. Da aber eine derartige Differenzierung für die hier erörterten Zusammenhänge überflüssig ist, wird der Notation von Beltrametti und Cassinelli in [BC81] gefolgt.

Durch das Projektionstheorem ist eine Bijektion zwischen der Menge der Projektionsoperatoren auf \mathcal{H} und der Menge $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ gegeben. Daher werden für die weiteren Erörterungen die Projektionsoperatoren auf \mathcal{H} in der Form P^M geschrieben, wobei M dann den in eindeutiger Weise zugehörigen normabgeschlossenen Untervektorraum von \mathcal{H} bezeichnen möge.

Man kann nun in analoger Weise auch auf der Menge der Projektionsoperatoren eine halbordnende Relation sowie eine Orthokomplementation definieren.

Hinsichtlich der Halbordnung wird für zwei Projektionsoperatoren P^{M_1}, P^{M_2} vereinbart:

$$P^{M_1} \leq P^{M_2} : \iff M_1 \subseteq M_2. \quad (\text{G.51})$$

Als Orthokomplementation wählt man die Zuordnung:

$$P^M \longmapsto P^{M^\perp}. \quad (\text{G.52})$$

Bezüglich (G.51) und (G.52) hat die Menge der Projektionsoperatoren auf \mathcal{H} dieselbe verbandstheoretische Struktur wie $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \subseteq, \perp)$, denn es gilt:

Satz G.4.5 *Der Verband $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \subseteq, \perp)$ ist orthoisomorph zu der Menge der Projektionsoperatoren bei Ausstattung mit der Halbordnung gemäß (G.51) und der Orthokomplementation gemäß (G.52).*

Das Eins-Element im Verband der Projektionsoperatoren liefert die identische Abbildung, während das Null-Element derjenige Projektionsoperator ist, der alle Elemente auf 0 abbildet. Die Atome des Verbandes der Projektionsoperatoren sind die Projektionsoperatoren auf die eindimensionalen Untervektorräume.

Es bezeichne $(M_i)_{i \in I}$ für eine Indexmenge I beliebiger Mächtigkeit eine Familie aus $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Werden die den Mitgliedern der Familie $(M_i)_{i \in I}$ zugehörigen Projektionsoperatoren mit $(P^{M_i})_{i \in I}$ benannt und bezeichnen $P^{\bigvee_{i \in I} M_i}$ und $P^{\bigwedge_{i \in I} M_i}$ die Projektionsoperatoren auf die abgeschlossenen Untervektorräume $\bigvee_{i \in I} M_i$ und $\bigwedge_{i \in I} M_i$, dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$\bigvee_{i \in I} P^{M_i} = P^{\bigvee_{i \in I} M_i}, \quad (\text{G.53})$$

$$\bigwedge_{i \in I} P^{M_i} = P^{\bigwedge_{i \in I} M_i}. \quad (\text{G.54})$$

Beweis: Siehe [BC81], Abschnitt 10.3, S. 105-108.

Die im letzten Satz zum Ausdruck gekommene Strukturäquivalenz erlaubt es, daß nicht explizit zwischen den beiden Verbänden differenziert werden muß. Daher wird für beide Verbände das gemeinsame Symbol $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ verwendet. Oft wird auch noch kürzer das Symbol $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ genutzt.

Man kann auf $(\mathbb{P}(\mathcal{H}), \leq, \perp)$ auch das Konzept des Wahrscheinlichkeitsmaßes im Sinne von Definition F.20 diskutieren. Dafür werden zunächst zugunsten einer besseren Übersicht die folgenden Namen gewählt:

Definition und Lemma G.4.6 *Sei \mathcal{H} ein separabler komplexer Hilbertraum, und sei mit $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ der Vektorraum der linearen und stetigen Operatoren von \mathcal{H} nach \mathcal{H} bezeichnet. Dann ist $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ ausgestattet mit der kanonischen Operatornorm $\|\cdot\|_{\text{Op}}$ ein Banachraum.*

Mit $N(\mathcal{H})$ wird die Menge der Spur-Klasse-Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ benannt, also derjenigen Elemente A aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, für die die Spur bezüglich des zugehörigen Betrags-

operators $Sp | A |$ endlich ist. $N(\mathcal{H})$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{L}(\mathcal{H})$. Bezüglich der Norm

$$N(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{R}, A \longmapsto \|A\|_{sp} := Sp | A |$$

besitzt $N(\mathcal{H})$ die Banachraumeigenschaft.

Mit $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ wird die Menge der Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ bezeichnet, die selbstadjungiert und positiv sind und für die $Sp D = 1$ gilt. Die Elemente von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ werden im physikalischen Zusammenhang meist als **Dichteoperatoren** bezeichnet.

Ferner sei mit $\mathcal{W}_{\mathbb{P}(\mathcal{H})}$ die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ im Sinne von Definition F.20 benannt.

Beweis:

Bezüglich $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ siehe [Wer97], Abschnitt II.1, S. 45-47. Für die Aussagen bezüglich $N(\mathcal{H})$ siehe Theorem VI.20 in [RS80], Kapitel VI, S. 209. ■

Damit kommt man zu den folgenden Aussagen.

Satz G.4.7 Sei \mathcal{H} ein separabler komplexer Hilbertraum mit Dimension echt größer als 0.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- (i) Bezeichnet M einen eindimensionalen Untervektorraum von \mathcal{H} , dann ist P^M eine Dichteoperator. Mit der Abbildung

$$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}), P \longmapsto Sp(P^M P)$$

liegt ein Element aus $\mathcal{W}_{\mathbb{P}(\mathcal{H})}$ vor.

- (ii) $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ ist reell σ -konvexe Menge bezüglich $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Op})$ im Sinne von Definition 8.3.1.
- (iii) Die Projektionsoperatoren auf die eindimensionalen Untervektorräume stellen die Extrempunkte von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ dar, das heißt:

$$\partial_e \mathbb{D}(\mathcal{H}) = \{P^M \mid M \text{ ist eindimensionaler Untervektorraum von } \mathcal{H}\}.$$

Es gilt für alle D aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$:

$$D \in \partial_e \mathbb{D}(\mathcal{H}) \iff D^2 = D.$$

(iv) Jeder Dichteoperator D läßt sich als endliche oder als σ -Konvexkombination von Extremalpunkten von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ darstellen, die paarweise orthogonal sind. Das heißt, zu jedem Dichteoperator D existiert eine höchstens abzählbare Indexmenge I , eine Familie von Projektionsoperatoren $(P^{E_i})_{i \in I}$ auf eindimensionale Untervektorräume E_i von \mathcal{H} , die paarweise orthogonal sind, und eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, so daß gilt:

$$D = \sum_{i \in I} \lambda_i P^{E_i}.$$

Dabei bezeichnet $\sum_{i \in I} \lambda_i P^{E_i}$ im abzählbaren Falle den Reihengrenzwert sowohl bezüglich $(\mathbb{L}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Op})$ als auch bezüglich $(N(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{Sp})$. In beiden Fällen liegt unbedingte Konvergenz vor.

(v) Die Abbildung

$$\vartheta : \mathbb{D}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{W}_{\mathbb{P}(\mathcal{H})}, \quad D \longmapsto Sp(D \cdot)$$

ist eine σ -Konvexkombinationen erhaltende Injektion. Das heißt, für eine beliebige höchstens abzählbare Familie $(D_i)_{i \in I}$ aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ und für eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ reeller Zahlen aus $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{i \in I} \lambda_i \vartheta(D_i)$ unbedingte punktweise gegen $\vartheta(\sum_{i \in I} \lambda_i D_i)$. In diesem Sinne gilt:

$$\vartheta\left(\sum_{i \in I} \lambda_i D_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \vartheta(D_i). \quad (\text{G.55})$$

(vi) **Theorem von A.M. Gleason:**

Hat darüber hinaus \mathcal{H} eine Dimension echt größer als zwei, dann ist die Abbildung ϑ aus (v) eine Surjektion.

Beweis:

Die Aussagen der Punkte (i) bis (v), die sich auf die Operatornorm $\|\cdot\|_{Op}$ beziehen, folgen allesamt aus den Erörterungen in Abschnitt 2.1 von [BC81], S. 6-8. Der $\|\cdot\|_{Sp}$ -Konvergenz-Aussage in Punkt (iv) gelten die folgenden Überlegungen. Zunächst sieht man ein, daß für jede beliebige Reihenfolge der Glieder und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{E_i} \right\|_{Sp} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\|P^{E_i}\|_{Sp}}_{=1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{i \in I} \lambda_i P^{E_i}$ auch bezüglich $\|\cdot\|_{S_p}$ absolut, woraus sich mit [Heu91b], Satz 109.13, S. 21 ob der Banachraumeigenschaft von $(N(\mathcal{H}), \|\cdot\|_{S_p})$ die unbedingte Konvergenz der Reihe ergibt. Der Grenzwert der Reihe bezüglich $\|\cdot\|_{S_p}$ werde D_1 genannt. Zum Beweis der Behauptung muß gezeigt werden, daß $D_1 = D$ gilt.

Bedenkt man, daß mit Theorem VI.20 in [RS80], Kapitel VI, S. 209 für alle Operatoren A aus $N(\mathcal{H})$ die Ungleichung $\|A\|_{O_p} \leq \|A\|_{S_p}$ gilt, erhält man für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|D_1 - D\|_{O_p} &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{E_i} - D \right\|_{O_p} + \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{E_i} - D_1 \right\|_{O_p} \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{E_i} - D \right\|_{O_p} + \left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i P^{E_i} - D_1 \right\|_{S_p}. \end{aligned}$$

Da nun aber die Folge $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i P^{E_i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_{O_p}$ gegen D und bezüglich $\|\cdot\|_{S_p}$ gegen D_1 konvergiert, muß $\|D_1 - D\|_{O_p} = 0$ gelten. Daraus erhält man unmittelbar mit Hilfe der Normeigenschaft die Identität von D und D_1 .

Der Punkt (vi) schließlich, also das Theorem von A.M. Gleason, findet sich in [Gle57]. Man beachte auch die Darstellung in Abschnitt 2 des Kapitels II in [Var85]. ■

Abschließend folgt eine Lemma, das in den Abschnitten 10.3 und 10.4 Verwendung findet.

Lemma G.4.8 *Sei $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum mit kanonischer Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Seien A_1 und A_2 selbstadjungierte Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) *Für jedes D aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ gilt: $Sp(DA_1) \leq Sp(DA_2)$.*
- (ii) *Für jedes φ aus \mathcal{H} gilt: $\langle A_1 \varphi, \varphi \rangle \leq \langle A_2 \varphi, \varphi \rangle$.*
- (iii) *Für jedes $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt: $\langle A_1 \varphi, \varphi \rangle \leq \langle A_2 \varphi, \varphi \rangle$.*

Beweis:

Man setze nun A_1 und A_2 als selbstadjungierte, lineare und stetige Abbildungen von \mathcal{H} nach \mathcal{H} voraus.

Da die Norm von Elementen aus \mathcal{H} reell ist, ergibt sich die Äquivalenz von (ii) und (iii) unmittelbar aus der Sesquilinearität des Skalarproduktes.

Gilt nun (i), erhält man insbesondere für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$, wenn man mit P^φ den Projektionsoperator auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum bezeichnet:

$$\langle A_1 \varphi, \varphi \rangle = Sp(P^\varphi A_1) \leq Sp(P^\varphi A_2) \leq \langle A_2 \varphi, \varphi \rangle.$$

Also ergibt sich die Aussage aus (iii). Gehen man nun umgekehrt von (iii) aus, dann gilt offensichtlich für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ bei analoger Verwendung des Symbols P^φ die Ungleichung $Sp(P^\varphi A_1) \leq Sp(P^\varphi A_2)$. Man wähle nun einen Operator $D \in \mathbb{D}(\mathcal{H})$. Mit Punkt (iv) des obigen Satzes G.4.7 kann man D in der folgenden Weise darstellen:

$$D = \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D P^{\varphi_i^D}. \quad (\text{G.56})$$

Dabei bezeichnen I_D eine höchstens abzählbare Indexmenge, $(\varphi)_{i \in I_D}$ ein Orthonormalsystem aus \mathcal{H} und $(\lambda_i^D)_{i \in I_D}$ eine Familie von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i \in I_D} \lambda_i^D = 1$. Falls I_D abzählbarer Mächtigkeit sein sollte, handelt es sich beim Term auf der rechten Seite von (G.56) um eine Reihe, die insbesondere im unbedingten Sinne bezüglich $\|\cdot\|_{Sp}$ konvergiert. Daher erhält man:

$$\begin{aligned} Sp(D A_1) &= \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D \underbrace{Sp(P^{\varphi_i^D} A_1)}_{\leq Sp(P^{\varphi_i^D} A_2)} \\ &\leq \sum_{i \in I_D} \lambda_i^D Sp(P^{\varphi_i^D} A_2) \\ &= Sp(D A_2), \end{aligned}$$

womit dann (i) bewiesen wäre. ■

Anhang H

Theoreme zur unitären Darstellung in Kapitel 11

Es bezeichne \mathcal{H} einen separablen komplexen Hilbertraum mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Die zugehörige Norm des Hilbertraumes wird mit $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ symbolisiert. Wie in Abschnitt 10.3 wird mit $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ die Menge der Dichteoperatoren auf \mathcal{H} bezeichnet.

H.1 Die Theoreme von E.P. Wigner und R.V. Kadison

Die Theoreme von E.P. Wigner und R.V. Kadison werden hier in der Form präsentiert, wie sie B. Simon in dem Artikel [Sim76] vorstellt.

Es werden zwei Typen von Automorphismen betrachtet:

Definition H.1.1

- (i) Zwei Elemente ψ, η aus \mathcal{H} mit $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = \|\eta\|_{\mathcal{H}} = 1$ heißen äquivalent, wenn es eine reelle Zahl θ mit $\psi = e^{i\theta} \eta$ gibt. Die der so definierten Äquivalenzrelation zugehörige Quotientenmenge erhält den Name $P(\mathcal{H})$. Ein **Wigner-Automorphismus** ist eine Bijektion $\alpha : P(\mathcal{H}) \rightarrow P(\mathcal{H})$ derart, daß für alle ψ, η aus \mathcal{H} mit $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = \|\eta\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt

$$\langle \alpha([\psi]), \alpha([\eta]) \rangle = \langle [\psi], [\eta] \rangle,$$

wobei $[\cdot]$ die dem Argument zugehörige Klasse symbolisieren soll.

- (ii) Unter einem **Kadison-Automorphismus** versteht man eine affine Bijektion $\beta : \mathbb{D}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{D}(\mathcal{H})$. Das heißt, es gilt für beliebige Elemente D_1, D_2 aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ und eine beliebige Zahl λ aus dem reellen Intervall $[0, 1]$:

$$\beta(\lambda D_1 + (1 - \lambda) D_2) = \lambda \beta(D_1) + (1 - \lambda) \beta(D_2).$$

Für die Wigner-Automorphismen erhält man die folgende Aussage:

Satz H.1.2 (Theorem von E.P. Wigner) *Zu jedem Wigner-Automorphismus α gibt es einen unitären oder einen anti-unitären Operator U , so daß für alle $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt:*

$$\alpha([\psi]) = [U\psi].$$

Dabei ist U bis auf eine Phase eindeutig bestimmt. Das heißt, für jeden unitären oder anti-unitären Operator U' , für den $\alpha([\psi]) = [U'\psi]$ für alle $\psi \in \mathcal{H}$ mit $\|\psi\|_{\mathcal{H}} = 1$ gilt, existiert eine reelle Zahl θ mit $U' = e^{i\theta} U$.

Das obige Theorem von E.P. Wigner findet man in einer ersten Form in [Wig31], Kapitel XX, S. 251-254. In [Bar64] bringt V. Bargmann das Theorem in eine äquivalente Form unter Verwendung des Strahl-Begriffs.

Das Wignersche Theorem erlaubt eine ähnliche Aussage auch für die Kadison-Automorphismen, die auf den Artikel [Kad65] von R.V. Kadison zurückgeht.

Satz H.1.3 (Theorem von R.V. Kadison) *Zu jedem Kadison-Automorphismus β existiert ein unitärer oder anti-unitärer Operator U , so daß für alle D aus $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ gilt:*

$$\beta(D) = U D U^{-1}.$$

Dabei ist U bis auf eine Phase eindeutig bestimmt. Das heißt, für jeden unitären oder anti-unitären Operator U' , der für alle $D \in \mathbb{D}(\mathcal{H})$ der Identität $\beta(D) = U' D U'^{-1}$ genügt, existiert eine reelle Zahl θ mit $U' = e^{i\theta} U$.

H.2 Das Theorem von M.H. Stone

Es wird hier dem Vorgehen des Kapitels VIII aus dem Buch [RS80] von M. Reed und B. Simon gefolgt.

Um das angestrebte Theorem zu formulieren, muß zunächst erläutert werden, was unter einer ein-parametrischen unitären Gruppe zu verstehen ist. Dazu sei an den Sprachgebrauch aus Kapitel 11 erinnert, demzufolge $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe der unitären Operatoren auf dem Hilbertraum \mathcal{H} bezeichnet.

Definition H.2.1

Sei \mathfrak{U} eine Untergruppe von $\mathcal{U}(\mathcal{H})$, und sei $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}$ ein Gruppenhomomorphismus, wobei man die reellen Zahlen als Gruppe bezüglich der Addition auffassen möge. Dann bezeichnet man \mathfrak{U} als **ein-parametrische Gruppe unitärer Operatoren bezüglich der Parametrisierung** $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}$.

Bemerkung: Die Eigenschaft der Gruppenisomorphie von U bedeutet gerade die Bijektivität von U , so daß $U(s+t) = U(s)U(t)$ für alle s, t aus \mathbb{R} gilt.

Für ein-parametrische Gruppen unitärer Operatoren kann man verschiedene Stetigkeitsbegriffe definieren. Für das anvisierte Theorem wird der Folgende benötigt:

Definition H.2.2

Sei \mathfrak{U} eine ein-parametrische Gruppe unitärer Operatoren bezüglich der Parametrisierung $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}$. Die Parametrisierung heißt **stark stetig**, wenn für jede reelle Zahl t_0 , jede reelle Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die bezüglich der kanonischen Norm gegen t_0 konvergiert, und jedes Element φ aus \mathcal{H} die Folge $(U(t_n)\varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich der Hilbertnorm gegen $U(t)\varphi$ konvergiert.

Damit stehen alle benötigten Begriffe zur Verfügung. Das nun folgende Theorem wurde von M.H. Stone in [Sto30] angekündigt und in [Sto32] bewiesen.

Satz H.2.3 (Theorem von M.H. Stone) *Sei \mathfrak{U} eine ein-parametrische Gruppe unitärer Operatoren bezüglich der Parametrisierung $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{U}$. Ist die Parametrisierung stark stetig, dann existiert genau ein selbstadjungierter Operator A auf \mathcal{H} , der nicht notwendigerweise unbeschränkt ist, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$U(t) = e^{itA}.$$

Anhang I

Aussagen zur verbandstheoretischen Axiomatik in Kapitel 12

Im vorliegenden Anhang werden Begriffe und Aussagen zur Verfügung gestellt, die zum Aufbau der verbandstheoretischen Axiomatik der Quantenmechanik benötigt werden.

Zur Charakterisierung der Zustandsmenge werden die folgenden Konvexitätseigenschaften eingeführt. Dabei wird dem Vorgehen in [BC81], Abschnitt 11.1, S. 112 gefolgt:

Definition I.1

Sei (L, \leq, \perp) eine σ -orthovollständige Halbordnung mit Null-Element $\mathbf{0}$ im Sinne von Definition F.5. Die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L im Sinne der Definition F.20 sei mit $W(L)$ bezeichnet. Eine Teilmenge W_1 von W heißt **ordnend**, wenn gilt

$$a_1 \leq a_2 \iff [\forall s \in S : s(a_1) \leq s(a_2)].$$

Eine Teilmenge W_1 von $W(L)$ heißt **hinreichend**, wenn es zu jedem $a \in L \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein $s \in W_1$ mit $s(a) = 1$ gibt.

Für die Menge $W(L)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße auf einer orthomodularen Halbordnung L kann man den folgenden Konvexitätsbegriff einführen:

Satz und Definition I.2 *Sei (L, \leq, \perp) eine orthomodulare Halbordnung. Es bezeichne $(s_i)_{i=1}^n$ für eine natürliche Zahl n eine Familie von Wahrscheinlichkeitsma-*

ben auf L . Sei $(\lambda_i)_{i=1}^n$ eine Familie von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, dann ist durch die Vorschrift

$$s : L \longrightarrow [0, 1], \quad a \longmapsto s(a) := \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i(a)$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf L gegeben, das als **Konvexkombination** der Familie $(s_i)_{i=1}^n$ bezüglich der **Gewichte** $(\lambda_i)_{i=1}^n$ bezeichnet wird.

Beweis: Der Beweis läuft analog zum Beweis des nachfolgenden Satzes I.3.

Das Konvexitätskonzept aus Definition I.2 soll auf abzählbare Familien erweitert werden.

Satz und Definition I.3 *Bezeichne $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf einer orthomodulare Halbordnung (L, \leq, \perp) . Sei ferner $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Zahlen aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1$, dann ist durch die Vorschrift*

$$s : L \longrightarrow [0, 1], \quad a \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i s_i(a) \tag{I.1}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf L gegeben, das als **σ -Konvexkombination** der Familie $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezüglich der **Gewichte** $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnet wird. Die Reihe in (I.1) konvergiert unbeding, also unabhängig von der Reihenfolge ihrer Glieder.

Beweis:

Zunächst ist zu klären, daß die Abbildung aus (I.1) auch tatsächlich wohldefiniert ist. Die unbedingte Konvergenz der Reihe in (I.1) für jedes $a \in L$ folgt aber unmittelbar aus der unbedingten Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$, denn es gilt für jedes $a \in L$ und jedes $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$:

$$\left| \sum_{i=1}^n \lambda_i s_i(a) - \sum_{i=1}^m \lambda_i s_i(a) \right| = \left| \sum_{i=n}^m \lambda_i s_i(a) \right| \leq \left| \sum_{i=n}^m \lambda_i \right|.$$

Also ist die Abbildung s wohldefiniert. Bezeichnet $\mathbf{1}$ das Eins-Element von L , dann erhält man zudem aus dem Wahrscheinlichkeitsmaßeigenschaften der Mitglieder der Familie $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$s(\mathbf{1}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \underbrace{s_i(\mathbf{1})}_{=1} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = 1.$$

Da der Fall endlicher Familien trivial ist, betrachte man schließlich eine Familie $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ von Elementen aus L , die paarweise orthogonal sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} s\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i\right) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j s_j\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} a_i\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_j s_j(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j s_j(a_i) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} s(a_i). \end{aligned}$$

Bezüglich der Vertauschbarkeit der beiden Grenzwertprozesse beim vorletzten Gleichheitszeichen siehe etwa den Doppelreihensatz von Cauchy, den man als Satz 45.2 in [Heu91a], Kapitel V, S. 259 findet. ■

Die so begründeten Konvexkombinationsbegriffe erlauben es, konvexe Teilmengen von $W(L)$ zu definieren:

Definition I.4

Sei (L, \leq, \perp) eine orthomodulare Halbordnung. Dann heißt eine Teilmenge W_1 der Menge $W(L)$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L **konvex** (oder **σ -konvex**), wenn sie abgeschlossen bezüglich Konvexkombinationen (oder bezüglich Konvexkombinationen und σ -Konvexkombinationen) ist. Das heißt, W_1 ist konvexe Teilmenge von $W(L)$, wenn für alle Familien $(s_i)_{i=1}^n$ aus W_1 und alle Familien von Zahlen $(\lambda_i)_{i=1}^n$ aus dem reellen Intervall $(0, 1]$ mit $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ die zugehörige Konvexkombination ebenfalls zu W_1 gehört. Für den σ -Falle gilt das Entsprechende.

Ein wichtiges Beispiel liefert das folgende Lemma:

Lemma I.5 *Bezeichnet (L, \leq, \perp) eine orthomodulare Halbordnung, dann ist die Menge $W(L)$ aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L eine σ -konvexe Teilmenge von $W(L)$.*

Beweis:

Der Beweis wurde bereits im Beweis zu Satz I.3 erbracht. Dort wurde gezeigt, daß jede σ -Konvexkombination auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf L ist. Der endliche Fall ist trivial. ■

Liegt ein Konvexitätsbegriff vor, dann kann auch von Mischungen und reinen Wahrscheinlichkeitsmaßen gesprochen werden:

Definition I.6

Bezeichne (L, \leq, \perp) eine orthomodulare Halbordnung, dann heißt ein Wahrscheinlichkeitsmaß s auf L **rein**, wenn es nicht möglich ist, s als Konvexkombination zweier anderer Wahrscheinlichkeitsmaße darzustellen. Das heißt, für alle $s_1, s_2 \in W(L)$ und alle $\lambda \in [0, 1]$ mit $s = \lambda s_1 + (1 - \lambda) s_2$ folgt $s = s_1$ oder $s = s_2$. Ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß nicht rein, wird es als **Mischung** bezeichnet.

Als Nächstes wird das Theorem von M.P. Solèr formuliert. Dabei wird auf eine Reihe von Begriffen aus Anhang G.3 zurückgegriffen.

Satz I.7 (Theorem von M.P. Solèr) *Bezeichne $(E, S, \alpha, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ einen unendlichdimensionalen orthomodularen Raum im Sinne von Definition G.3.21. Enthält E eine orthonormale Folge im Sinne der Definition G.3.19 (iv), dann gilt einer der drei Fälle:*

- (i) *S ist identisch mit dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} , der involutive Anti-Automorphismus fällt mit der identischen Abbildung zusammen, die hermitesche Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein bilineares Skalarprodukt, und $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein reeller Hilbertraum.*
- (ii) *S ist identisch mit dem Körper der komplexen Zahlen \mathbb{C} , der involutive Anti-Automorphismus fällt mit der kanonischen Konjugation bezüglich der komplexen Zahlen zusammen, die hermitesche Form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Skalarprodukt, und $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein komplexer Hilbertraum.*
- (iii) *S ist identisch mit dem Schiefkörper der Quaternionen \mathbb{Q} , der involutive Anti-Automorphismus fällt mit der quaternionischen Konjugation zusammen, und $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist ein quaternionischer Hilbertraum.*

Beweis: Siehe [Sol95], Theorem, S. 220.

Zur Formulierung des nächsten Lemmas wird von der Gültigkeit der Axiome 1 - 11 aus Kapitel 12 ausgegangen. Folglich kann man L mit dem Verband $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ der Projektionsoperatoren über einem separablen, komplexen und unendlichdimensionalen Hilbertraum \mathcal{H} im Sinne eines Orthoisomorphismus identifizieren. Es wird daher im weiteren von $L = \mathbb{P}(\mathcal{H})$ ausgegangen. Ebenso wird von der Identifikation der Menge S mit einer Teilmenge der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L ausgegangen. Das \mathcal{H} zugehörige Skalarprodukt werde mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. Der Konvention in Kapitel 10 folgend sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in der ersten Komponente linear und in der zweiten Komponente anti-linear. Die kanonische Norm trage den Namen $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. Dann gilt in Ausführung einiger Bemerkungen von M.D. MacLaren in [Mac65], S. 19:

Lemma I.8 Die Menge S kann so mit der Menge $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ aller Dichteoperatoren auf \mathcal{H} identifiziert werden, daß die Abbildung p mit der Spur zusammenfällt, das heißt, bei Identifikation von S und $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ im obigen Sinne gilt für jeden Projektionsoperator P aus L und jeden Dichteoperator D aus S :

$$p(D, P) = Sp(DP).$$

Beweis:

Mit Satz G.4.7 (v) und (vi), also insbesondere dem Theorem von A.M. Gleason, kann man die Menge $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ aller Dichteoperatoren auf \mathcal{H} mit der Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf L identifizieren. Mithin handelt es sich bei S um eine Teilmenge von $\mathbb{D}(\mathcal{H})$, und es gilt für alle $D \in S$ und $P \in L$:

$$p(D, P) = Sp(DP).$$

Es wird zunächst bewiesen, daß für jedes Element $\varphi \in \mathcal{H}$ mit $\|\varphi\|_{\mathcal{H}} = 1$ der Projektionsoperator P^φ auf den von φ aufgespannten eindimensionalen Unterraum von \mathcal{H} zu S gehört.

Trivialerweise gehört P^φ mit Satz G.4.7 (i) zu $\mathbb{D}(\mathcal{H})$. Aber P^φ gehört auch zu L , denn P^φ ist Projektionsoperator auf einen abgeschlossenen Unterraum von \mathcal{H} . Also existiert mit Axiom 6 mittels der „hinreichend-Eigenschaft“ von S ein Element $D \in S$ mit $Sp(DP^\varphi) = 1$. Gemäß Satz G.4.7 (iv) existiert eine höchstens abzählbare Familie $(E_i)_{i \in I}$ eindimensionaler Untervektorräume von \mathcal{H} , die paarweise orthogonal sind, und eine Familie $(\lambda_i)_{i \in I}$ reeller echt positiver Gewichte mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ derart, daß sich D als (σ) -Konvexkombination der zugehörigen Projektionsoperatoren $(P^{E_i})_{i \in I}$ darstellt. Wählt man nun für jedes $i \in I$ ein Element $\psi_i \in E_i$ mit $\|\psi_i\|_{\mathcal{H}} = 1$, dann erhält man mit $Sp(DP^\varphi) = 1$, wobei für die notwendigen Konvergenzeigenschaften wiederum auf Satz G.4.7 (iv) verwiesen sei:

$$1 = Sp\left(\sum_{i \in I} \lambda_i P^{E_i} P^\varphi\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i Sp(P^{E_i} P^\varphi) = \sum_{i \in I} \lambda_i |\langle \psi_i, \varphi \rangle|^2.$$

Da aber die $(\lambda_i)_{i \in I}$ echt positive reelle Zahlen mit $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$ sind, muß also für $|\langle \psi_i, \varphi \rangle| = 1$ jedes $i \in I$ gelten. Also ist für jedes $i \in I$ die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung identisch erfüllt, denn man erhält

$$|\langle \psi_i, \varphi \rangle|^2 = 1 = \|\psi_i\|_{\mathcal{H}}^2 \cdot \|\varphi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Das heißt aber gerade, daß für jedes $i \in I$ die Vektoren φ und ψ_i linear abhängig sind, wie man mit Satz V.1.2 in [Wer97], Kapitel V, S. 157 erhält.

Also sind P^φ und alle Mitglieder der Familie $(P^{E_i})_{i \in I}$ identisch. Da D eine (σ) -Konvexkombination der $(P^{E_i})_{i \in I}$ ist, muß $D = P^\varphi$ gelten. Nun war aber D ein Element aus S , und demnach liegt auch P^φ in S .

Also ist man zu dem Ergebnis gekommen, daß alle Projektionsoperatoren auf eindimensionale Unterräume von \mathcal{H} in S liegen. Da S nach Axiom 6 aber σ -konvex ist, folgt die Behauptung mit Satz G.4.7 (iv). ■

Liste der Axiome

Es werden hier alle axiomatischen Relationen, die im Laufe der Arbeit mit einem eigenen Namen versehen wurden, unter Angabe der Seitenzahl ihres ersten Auftretens aufgeführt.

Diejenigen Aussagen, die innerhalb der Arbeit mit einem * versehen wurden, um anzudeuten, daß sie von später geforderten axiomatischen Relationen eingeschlossen werden, erhalten auch in den untenstehenden Listen wiederum ein *.

Zu Beginn werden auch die Relationen genannt, die im Zusammenhang mit der Definition von Auswahlverfahren und statistischen Auswahlverfahren stehen. Sie gehen in Anwendung auf die drei Bildmengen \mathcal{Q} , \mathcal{R} und \mathcal{R}_0 mittels der Axiome APS 1, 2 und 3 implizit in die Axiomatik der Quantenmechanik ein. Daher erhalten sie im Unterschied zur Vorgehensweise innerhalb der Arbeit, wo sie in allgemeiner Weise diskutiert werden, in der folgenden Zusammenstellung der Axiome der Quantenmechanik ebenfalls ein *.

Die hier geforderte Axiomatik der Quantenmechanik besteht aus allen Axiomen ohne * mit Ausnahme der Aussagen AP 1, AR 1, AV 2s und AOb, die lediglich im Zusammenhang der Entwicklung der Axiomatik mitdiskutiert wurden. Um deutlich zu machen, daß sie nicht zu der hier gewählten Axiomatik gehören, werden sie in den untenstehenden Listen in Klammern gesetzt.

Axiomatische Relationen im Kontext von Auswahlverfahren und statistischen Auswahlverfahren

| Bezeichnung | Seite des ersten Auftretens |
|-------------|-----------------------------|
| AS 1.1 * | 58 |
| AS 1.2 * | 58 |
| AS 2.1 * | 60 |
| AS 2.2 * | 60 |
| AS 2.3 * | 60 |

Axiome zum Begriff der Präparier-Registrier-Struktur

| Bezeichnung | Seite des ersten Auftretens |
|-------------|-----------------------------|
| AZ 1 | 55 |
| AZ 2 | 56 |
| AZ * | 56 |
| APS 1 | 70 |
| APS 8.1 | 70 |
| APS 2 | 75 |
| APS 3 | 76 |
| APS 4.1 | 77 |
| APS 4.2 * | 77 |
| APS 8.2 | 77 |
| APS 5A | 81 |
| APS 5.1.1 * | 82 |
| APS 5.2 | 82 |
| APS 6A | 87 |

Axiome zum Begriff der Zustands-Effekt-Struktur

| Bezeichnung | Seite des ersten Auftretens |
|-------------|-----------------------------|
| APS 5.1.2 * | 107 |
| APS 5.1.3 | 110 |
| APS 5.1.4 * | 113 |
| APS 5.1.4A | 114 |
| AP 1A | 127 |
| AR 1A | 129 |
| (AP 1) | 514 |
| (AR 1) | 515 |
| APSabz | 131 |

Hauptaxiome des Messens

| Bezeichnung | Seite des ersten Auftretens |
|-------------|-----------------------------|
| AV 1.1 | 227 |
| AV 1.2 | 234 |
| (AV 2s) | 246 |
| AV 2 | 247 |
| AV 2f | 248 |
| AVid | 257 |
| AkEff | 274 |
| (AOB) | 472 |
| AV 3 | 291 |
| AV 4* | 296 |
| AV 4s | 297 |

Axiome im Zusammenhang mit der Hilbertraumdarstellung

| Bezeichnung | Seite des ersten Auftretens |
|-------------|-----------------------------|
| AV 4i | 315 |
| AV 4a | 316 |
| AV 4b | 321 |

Axiome im Zusammenhang mit der Darstellung der Galilei-Gruppe

| Bezeichnung | Seite des ersten Auftretens |
|-------------|-----------------------------|
| AGal 1 | 379 |
| AGal 2 | 379 |
| AGal 3 | 395 |

Symbolverzeichnis

Es werden die wichtigsten verwandten Symbole nebst einer kurzen Charakterisierung und einem Verweis auf die erste Stelle ihres Auftretens oder ihrer Definition aufgeführt. Werden in der rechten Spalte zwei Seitenzahlen angegeben bezieht sich die erste Seitenzahl auf das erste Vorkommen innerhalb des Fließtextes, während die zweite Seitenzahl auf das erste Erscheinen in einem Anhang hinweist.

| | | |
|-----------------------|---|----------|
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen | 30 |
| $\mathbb{R}_{\geq 0}$ | Menge der positiven reellen Zahlen einschließlich 0 | 122 |
| \mathbb{R}_+ | Menge der echt positiven reellen Zahlen | 232 |
| \mathbb{N} | Menge der natürlichen Zahlen | 63 |
| \mathbb{Q} | Menge der rationalen Zahlen | 122 |
| \mathbb{C} | Menge der komplexen Zahlen | 316 |
| λ^* | komplex konjugierte Zahl zu λ | 323 |
| \mathbb{H} | Menge der Quaternionen | 316, 656 |
| $:\Leftrightarrow$ | definitionsgemäß äquivalent | 34 |
| \exists | es existiert | 34 |
| \forall | für alle | 43 |
| $\mathcal{P}(M)$ | Potenzmenge der Menge M , also die Menge aller Teilmengen von M | 43 |
| ■ | Ende eines mathematischen Beweises | 56 |

| | | |
|---|--|----------|
| \emptyset | leere Menge | 58 |
| $A \setminus B$ | Differenz der Mengen A und B | 58 |
| $A \subsetneq B$ | es gilt die Aussage ($A \subseteq B$ und $A \neq B$) | 182 |
| $f _A$ | Restriktion der Abbildung f auf die Menge A | 144 |
| $f \circ g$ | Hintereinanderausführung der Abbildungen f und g | 166 |
| $A \times B$ | kartesisches Produkt der Mengen A und B | 30 |
| $f_1 \times f_2$ | „kartesische Produktabbildung“ der Funktionen f_1 und f_2 | 135, 486 |
| \mathcal{O} | Topologie | 170, 489 |
| $\mathcal{O} _A$ | Unterraumtopologie von \mathcal{O} auf der Menge A | 175 |
| \mathfrak{F} | Filter | 487 |
| \mathcal{B} | Basis eines Filters, insbesondere Fundamentalsystem einer Uniformität | 488 |
| $\mathfrak{F}(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ | der der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zugeordnete Filter | 498 |
| $\overline{A}, \overline{A}^{\mathcal{O}}, \overline{A}^{\ \cdot\ }$ | topologischer Abschluß von A , ein mitangegebenes Superskript charakterisiert die dabei verwendete Topologie | 164 |
| $x_i \rightarrow x,$ $x_i \xrightarrow{\mathcal{O}} x,$ $x_i \xrightarrow{\ \cdot\ } x$ | das Netz $(x_i)_{i \in I}$ oder im Falle $I = \mathbb{N}$ die Folge konvergiert gegen x ; ein Symbol oberhalb des Pfeils charakterisiert die Topologie, auf die sich die Konvergenzaussage bezieht | 161 |
| $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} f(t_0)$ | $f(t)$ konvergiert gegen $f(t_0)$, wenn t gegen t_0 konvergiert | 232 |
| A^* | algebraischer Dualraum eines linearen Raumes A | 155 |
| $\text{co } A$ | konvexe Hülle der Menge A | 216 |
| $\overline{\text{co}}^{\mathcal{O}} A$ | Abschluß der konvexen Hülle der Menge A ; das Symbol im Superskript charakterisiert die verwendete Topologie | 216 |

| | | |
|--------------------------------|---|------------------------|
| $\dim C$ | Dimension der konvexen Menge C | 199 |
| $\partial_e C$ | Extremalpunkte der konvexen Menge C | 200 |
| V^\perp | $\{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in V\}$ je nach Zusammenhang steht E dabei für den dualen Raum eines vorgegebenen Dualsystems $\langle F, E, \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle$, wobei $V \subseteq F$ gilt oder für einen hermiteschen Raum, im besonderen für einen Hilbertraum, wobei dann auch $V \subseteq E$ gilt | 176 316, 660 |
| X/U | Quotientenraum des linearen Raumes X nach dem linearen Unterraum U | 176 |
| $\langle X, Y, f \rangle$ | Dualität (Dualsystem) bestehend aus den Mengen X, Y und der zugehörigen Bilinearität f | 155 |
| $\langle X, Y \rangle$ | abkürzend für eine Dualität bestehend aus den Mengen X und Y , wenn aus dem Zusammenhang deutlich wird, welche Bilinearität gemeint ist | 163 |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | üblicherweise die kanonische Bilinearität des Dualsystems $\langle B, B^* \rangle$; gelegentlich bei explizitem Hinweis ein Symbol für die kanonische Bilinearität eines allgemeinen Dualsystems; im Kontext eines hermiteschen Raumes die α -hermitesche Form, das heißt insbesondere im Falle eines Hilbertraumes das kanonische Skalarprodukt | 155 538 317, 659 |
| A° | die zur Menge A polare Menge bezüglich eines vorgegebenen Dualsystems $\langle X, Y, f \rangle$, das ist die Menge $\{y \in Y \mid f(x, y) \leq 1 \ \forall x \in A\}$, falls $A \subseteq X$ gilt, und die Menge $\{x \in X \mid f(x, y) \leq 1 \ \forall y \in A\}$, falls $A \subseteq Y$ gilt; in der vorliegenden Arbeit werden im Zusammenhang mit polaren Mengen nur reellwertige Bilinearitäten f betrachtet | 256 |

| | | |
|----------------------|---|----------|
| A^{oo} | die zur Menge A bipolare Menge, die sogenannte Bipolare von A , das ist die polare Menge von A^o | 177 |
| $A^{ o }$ | absolutpolare Menge von A bezüglich eines vorgegebenen Dualsystems $\langle X, Y, f \rangle$, das ist die Menge $\{y \in Y \mid f(x, y) \leq 1 \ \forall x \in A\}$, falls $A \subseteq X$ gilt, und die Menge $\{x \in X \mid f(x, y) \leq 1 \ \forall y \in A\}$, falls $A \subseteq Y$ gilt | 217 |
| $A^{ o }$ | absolutbipolare Menge von A , das ist die absolutpolare Menge von $A^{ o }$ | 217 |
| \mathcal{N} | Uniformität, uniforme Struktur, Nachbarschaftsfilter | 36, 487 |
| (X, \mathcal{N}) | uniformer Raum | 40, 487 |
| \hat{X} | Hausdorff-Vervollständigung des uniformen Raumes X | 40, 499 |
| $\hat{\mathcal{N}}$ | Uniformität der Hausdorff-Vervollständigung des uniformen Raumes (X, \mathcal{N}) | 40, 500 |
| $\sigma(X, I)$ | initiale Uniformität (Topologie) bezüglich einer auf der Menge X definierten und durch die Menge I indizierten Funktionenfamilie, die aus dem Kontext bekannt ist | 135, 493 |
| $\hat{\sigma}(X, I)$ | Uniformität der Hausdorff-Vervollständigung des uniformen Raumes $(X, \sigma(X, I))$ | 137 |
| $\mathcal{N} _A$ | Unterraumuniformität von \mathcal{N} auf A | 140, 495 |
| $\ \cdot\ $ | üblicherweise die Norm im Raum R ; gelegentlich bei explizitem Hinweis die Norm eines allgemeinen normierten Raumes | 156 |
| $(X, \ \cdot\)$ | normierter Raum X mit Norm $\ \cdot\ $ | 156 |
| $X_{ 1 }$ | Norm-Einheitskugel des normierten Raumes X | 174 |
| $X', (X)'$ | Norm-Dualraum des normierten Raumes X | 160 |

| | | |
|------------------------------------|---|----------|
| $\ \cdot\ _{X'}, \ \cdot\ _{(X)'}$ | Norm des Norm-Dualraumes von X | 160 |
| \mathcal{H} | Hilbertraum | 309 |
| $\ \cdot\ _{\mathcal{H}}$ | kanonische Norm auf dem Hilbertraum \mathcal{H} | 323 |
| $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ | Verband der norm-abgeschlossenen Unterräume des Hilbertraumes \mathcal{H} und Verband der Projektionsoperatoren auf die norm-abgeschlossenen Untervektorräume des Hilbertraumes \mathcal{H} | 317, 665 |
| $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ | Menge der linearen und stetigen Abbildungen, auch Operatoren genannt, von $(\mathcal{H}, \ \cdot\ _{\mathcal{H}})$ nach $(\mathcal{H}, \ \cdot\ _{\mathcal{H}})$ | 323 |
| $\ \cdot\ _{op}$ | Operatornorm auf $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, das bedeutet für alle $A \in \mathbb{L}(\mathcal{H})$: $\ A\ _{op} = \sup_{\ \varphi\ _{\mathcal{H}}=1} \ A\varphi\ $ | 323 |
| $\mathbf{0}_{\mathcal{H}}$ | Null-Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} | 323 |
| $\mathbf{1}_{\mathcal{H}}$ | Eins-Operator auf dem Hilbertraum \mathcal{H} | 323 |
| $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ | Menge der selbstadjungierten Spur-Klasse-Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ | 324 |
| A^{\dagger} | der zu A im Hilbertraumsinn adjungierte Operator | 327 |
| $ A $ | Absolutbetrag des Operators A , also die positive Wurzel $\sqrt{A^{\dagger}A}$ | 324 |
| $\ \cdot\ _{sp}$ | Spur-Norm auf $\mathbb{S}(\mathcal{H})$, das bedeutet für alle $A \in \mathbb{S}(\mathcal{H})$: $\ A\ _{sp} := Sp A $ | 324 |
| $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ | Menge der Dichteoperatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, das sind die selbstadjungierten, positiven Operatoren mit Spur 1 | 324 |
| $N(\mathcal{H})$ | Menge aller Spur-Klasse-Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ | 326 |
| P^{φ} | Projektionsoperator auf den von dem normierten Element φ eines Hilbertraumes aufgespannten eindimensionalen Hilbertraum | 328 |
| P^E | Projektionsoperator auf den abgeschlossenen Untervektorraum E eines Hilbertraumes | 333 |

| | | |
|----------------------------|--|-------------------------|
| $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ | Menge der unitären Operatoren auf einem Hilbertraum \mathcal{H} | 399 |
| \otimes | Tensorprodukt von Hilberträumen oder von Operatoren auf einem Tensorprodukt von Hilberträumen | 416 |
| \leq, \geq | kontextabhängig größer- oder kleiner-Relation auf \mathbb{R} oder Halbordnung auf Δ oder Halbordnung auf der Menge der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ oder allgemeine Halbordnung | 63 213 323 597 |
| $c \not\leq d$ | es gilt nicht die Relation $e_1 \leq e_2$ | 287 |
| $c \not\geq d$ | es gilt die Aussage „ $c \leq d$ und $c \neq d$ “ | 286 |
| $\bigvee_{a \in A} a$ | Supremum der Familie $(a)_{a \in A}$ bezüglich einer sich aus dem Kontext ergebenden Halbordnung | 239, 598 |
| $\bigwedge_{a \in A} a$ | Infimum der Familie $(a)_{a \in A}$ bezüglich einer sich aus dem Kontext ergebenden Halbordnung | 241, 598 |
| \perp, e^\perp | Orthokomplementation \perp auf G mit $e^\perp := \mathbf{1} - e$; gelegentlich bei explizitem Hinweis ein allgemeines Symbol für eine Orthokomplementation | 259, 600 |
| $e_1 \perp e_2$ | e_1 und e_2 sind orthogonal bezüglich der Orthokomplementation \perp | 260 |
| Σ | abstrakter Boolescher Verband bezüglich der Halbordnung \leq und der Orthokomplementation \perp mit Null-Element 0 und Eins-Element ε | 272 |
| $A(L)$ | Menge der Atome des Verbandes L | 299, 611 |
| $(a, b)C$ | die Elemente a, b einer Halbordnung kommutieren im verbandstheoretischen Sinne | 609 |
| $Z(L)$ | Zentrum von L , das heißt die Menge aller Elemente aus L , die mit allen Elementen aus L im verbandstheoretischen Sinne kommutieren | 310, 611 |

| | | |
|-----------------------------|--|----------|
| $L[a, b]$ | $\{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ für einen Verband L und für Elemente $a, b \in L$ | 311, 615 |
| \mathcal{W}_L | Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf der σ -orthovollständigen Halbordnung L | 332, 609 |
| \mathcal{PT} | physikalische Theorie | 26 |
| \mathcal{MT} | mathematische Theorie einer \mathcal{PT} | 26 |
| \mathcal{W} | Wirklichkeitsbereich einer \mathcal{PT} | 26 |
| \longleftrightarrow | Anwendungsvorschriften einer \mathcal{PT} | 26 |
| $\longleftrightarrow_r (1)$ | Typisierungsrelationen bezüglich des Realtextes r | 30 |
| $\longleftrightarrow_r (2)$ | übersetzte reale Sachverhalte des Realtextes r | 30 |
| \longleftrightarrow_r | Abbildungsaxiome bezüglich des Realtextes r , Zusammenfassung von $\longleftrightarrow_r (1)$ und $\longleftrightarrow_r (2)$ | 31 |
| \tilde{R}^U | mit Hilfe der Unschärfemenge U „verschmierte“ Bildrelation R | 35 |
| M_1 | Bildmenge der Präparierereignisse | 55 |
| M_2 | Bildmenge der Registrierereignisse | 55 |
| M | Bildmenge der Einzelexperimente | 55 |
| * an einem Axiom | ein derart gekennzeichnetes Axiom wird durch ein späteres Axiom impliziert | 56 |
| \mathcal{S} | im allgemeinen: für Mengen von Auswahlverfahren im besonderen: für eine bestimmte physikalische Menge von statistischen Auswahlverfahren | 57 93 |
| $\lambda_{\mathcal{S}}$ | Wahrscheinlichkeitsfunktion bezüglich einer Menge \mathcal{S} statistischer Auswahlverfahren | 58 |
| $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ | Definitionsbereich der Abbildung $\lambda_{\mathcal{S}}$, also die Menge $\{(c, c') \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \mid c \supseteq c', c \neq \emptyset\}$ | 58 |
| \sim_p | „approximativ“ gleich | 59 |

| | | |
|-------------------------|--|-----|
| $\mathcal{S}(a)$ | Menge der Elemente b einer Menge \mathcal{S} von Auswahlverfahren mit $b \subseteq a$ | 62 |
| \mathcal{S}' | Menge von Auswahlverfahren \mathcal{S} ohne \emptyset | 62 |
| $\tau(\Theta)$ | die von einer Menge $\Theta \subseteq \mathcal{P}(N)$ erzeugte Menge von Auswahlverfahren auf einer Menge N | 65 |
| \mathcal{Q} | Bildmenge der Präparierverfahren | 68 |
| \mathcal{R} | Bildmenge der Registrierprozeduren | 72 |
| \mathcal{R}_0 | Bildmenge der Registriermethoden | 74 |
| \mathcal{F} | Menge der Effektverfahren | 78 |
| (b_0, b) | Elemente aus \mathcal{F} bestehend aus $b_0 \in \mathcal{R}_0$ und $b \in \mathcal{R}$ | 78 |
| \mathcal{C} | Menge der Paare kombinierbarer Präparierverfahren und Registriermethoden | 81 |
| \mathcal{C} | Menge der Ja-Nein-Experimente | 84 |
| $\bar{\mu}$ | Bildfunktion der relativen Häufigkeit eines Ja-Nein-Experiments | 86 |
| $\mathbf{1}_{b_0}$ | (b_0, b_0) für $b_0 \in \mathcal{R}_0$ | 90 |
| $\mathbf{0}_{b_0}$ | (b_0, \emptyset) für $b_0 \in \mathcal{R}_0$ | 90 |
| $\mathcal{R}_{0\alpha}$ | Menge der Registriermethoden, die zum einen nach dem durch α charakterisierten Zeitpunkt und zum anderen außerhalb des durch α charakterisierten Raumbereiches stattfinden | 105 |
| Γ | anschaulich die Menge der Mengen des Typs $\mathcal{R}_{0\alpha}$, geht in die physikalische Theorie aber nur als abstraktes Mengensystem ein, siehe APS 5.1.2 und APS 5.1.3 | 106 |
| \mathcal{F}_Λ | $\{(b_0, b) \in \mathcal{F} \mid b_0 \in \Lambda\}$ mit $\Lambda \in \mathcal{P}(\mathcal{R}'_0)$ | 107 |
| \sim | Relation auf \mathcal{Q}' zur Definition der Zustände | 110 |
| \approx | Relation auf \mathcal{F} zur Definition der Effekte | 110 |

| | | |
|--------------------------|---|-----|
| \mathcal{K} | Quotientenmenge \mathcal{Q}'/\sim ; die Elemente heißen Zustände | 115 |
| \mathcal{L} | Quotientenmenge \mathcal{F}/\approx ; die Elemente heißen Effekte | 115 |
| φ | kanonische Abbildung von \mathcal{Q}' nach \mathcal{K} ; im Zusammenhang mit Hilberträumen einfaches Element | 115 |
| ψ | kanonische Abbildung von \mathcal{F} nach \mathcal{L} ; im Zusammenhang mit Hilberträumen einfaches Element | 115 |
| μ | die aus $\bar{\mu}$ gewonnene Abbildung auf $\mathcal{K} \times \mathcal{L}$ | 116 |
| g_0 | ein Element in \mathcal{L} mit $\mu(w, g_0) = 0$ für alle $w \in \mathcal{K}$ | 118 |
| g_1 | ein Element in \mathcal{L} mit $\mu(w, g_1) = 1$ für alle $w \in \mathcal{K}$ | 118 |
| $h_g(w)$ | $\mu(w, g)$ für $w \in \mathcal{K}$ und $g \in \mathcal{L}$ | 139 |
| \hat{h}_g | gleichmäßig stetige Fortsetzung von h_g auf die Hausdorff-Vervollständigung $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\sigma}(\mathcal{K}, \mathcal{L}))$ | 139 |
| $s_w(g)$ | $\mu(w, g)$ für $w \in \mathcal{K}$ und $g \in \mathcal{L}$ | 139 |
| \hat{s}_w | gleichmäßig stetige Fortsetzung von s_w auf die Hausdorff-Vervollständigung $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ | 139 |
| $H_x(g)$ | $\hat{h}_g(x)$ für $x \in \hat{\mathcal{K}}$ und $g \in \mathcal{L}$ | 140 |
| \hat{H}_x | gleichmäßig stetige Fortsetzung von H_x auf die Hausdorff-Vervollständigung $(\hat{\mathcal{L}}, \hat{\sigma}(\mathcal{L}, \mathcal{K}))$ | 140 |
| $\overline{\mathcal{K}}$ | $\{x \in \hat{\mathcal{K}} \mid H_x \text{ gleichmäßig stetig auf } (\mathcal{L}, \sigma(\mathcal{L}, \mathcal{K}))\}$ | 140 |
| $\hat{\mu}(x, y)$ | $\hat{H}_x(y)$ für $x \in \overline{\mathcal{K}}$ und $y \in \hat{\mathcal{L}}$ | 140 |
| B | reeller linearer Aufspann von \mathcal{K} | 153 |
| D | reeller linearer Aufspann von \mathcal{L} | 153 |
| ξ | bilineare Fortsetzung von μ auf $B \times D$ | 154 |
| $\mathbf{0}$ | g_0 als Element von B^* | 155 |
| $\mathbf{1}$ | g_1 als Element von B^* | 156 |

| | | |
|--|--|-----|
| R | $\{y \in B^* \mid \sup_{w \in \mathcal{K}} \langle w, y \rangle < \infty\}$ | 156 |
| \mathcal{V}_R | Menge aller D umfassenden Untervektorräume von R , jeweils ausgestattet mit der von $\ \cdot\ $ induzierten Norm | 159 |
| \tilde{R} | Element der Menge \mathcal{V}_R | 159 |
| $\ \cdot\ _{\tilde{R}}$ | Norm auf B gemäß $\ x\ _{\tilde{R}} := \sup_{y \in \tilde{R}, y \neq \mathbf{0}} \frac{ \langle x, y \rangle }{\ y\ }$ | 159 |
| $B_{\tilde{R}}$ | Vervollständigung von B bezüglich $\ x\ _{\tilde{R}}$ | 160 |
| $\ \cdot\ _{B_{\tilde{R}}}$ | Norm der Vervollständigung $B_{\tilde{R}}$ | 160 |
| $\xi_{\tilde{R}}(\cdot, y)$ | Fortsetzung von $\langle \cdot, y \rangle$ auf $B_{\tilde{R}}$ für $y \in \tilde{R}$ | 160 |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{R}}$ | kanonische Bilinearität des Dualsystems $\langle \tilde{R}, (\tilde{R})' \rangle$ | 163 |
| \mathcal{D} | Abschluß der Menge D in R bezüglich der Norm $\ \cdot\ $ | 180 |
| Δ | in bezug auf die Mengeninklusion kleinstes Element aus \mathcal{V}_R , das bezüglich $\sigma(R, B_R)$ abgeschlossen ist | 180 |
| K | Abschluß der Menge \mathcal{K} in B_Δ bezüglich der Norm $\ \cdot\ _{B_\Delta}$ | 187 |
| W | Menge der abgeschlossenen Seiten von K | 205 |
| $K_0(N)$ | $\{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 0 \ \forall y \in N\}$ für $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$; in Definition 8.4.5 erweitert auf die Wahl $N \subseteq [\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ | 205 |
| $W_{\hat{\mathcal{L}}}$ | $\{K_0(N) \mid N \subseteq \hat{\mathcal{L}}\}$ | 205 |
| $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ | $\{y \in \hat{\mathcal{L}} \mid \xi_\Delta(x, y) = 0 \ \forall x \in k\}$ für $k \subseteq K$ | 205 |
| U_K | $\{\hat{\mathcal{L}}_0(k) \mid k \subseteq K\}$ | 205 |
| $F(k)$ | die von $k \subseteq K$ erzeugte abgeschlossene Seite von K | 210 |
| $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]_\Delta$ | $\{y \in \Delta \mid \mathbf{0} \leq y \leq \mathbf{1}\}$ | 215 |
| $\overline{\overline{L}}$ | Menge aus dem Kontext der Motivation von Axiom AV 1.2 | 233 |

| | | |
|---|---|-----|
| $e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ | größtes Element der Menge $\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ mit $k \subseteq K$ | 236 |
| G | Menge der Entscheidungseffekte, also Menge der Elemente $e\hat{\mathcal{L}}_0(k)$ | 236 |
| $K_1(N)$ | $\{x \in K \mid \xi_\Delta(x, y) = 1 \ \forall y \in N\}$ für $N \subseteq \hat{\mathcal{L}}$ | 260 |
| $\Delta(e_1, e_2)$ | $\max \left\{ \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_1)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_2), \inf_{x \in K_1(\tilde{e}_2)} \hat{\mu}(x, \mathbf{1} - \tilde{e}_1) \right\}$ für $e_1, e_2 \in G$ | 286 |
| σ | der Orthoisomorphismus von G auf $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ gemäß Formel (10.2) | 322 |
| Φ | ein isometrischer Isomorphismus vom reellen Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ in die Menge der \mathbb{R} -linearen und stetigen Abbildungen des Typs $f : \mathbb{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}$ | 324 |
| ρ | die σ -Konvexkombinationen erhaltende Bijektion von K nach $\mathbb{D}(\mathcal{H})$ aus Satz 10.3.3 | 332 |
| $\tilde{\rho}$ | Fortsetzung von ρ zu einer Abbildung von B_Δ auf $\mathbb{S}(\mathcal{H})$ | 337 |
| χ | der isometrische Isomorphismus von $(\Delta, \ \cdot\)$ auf den reellen Vektorraum der selbstadjungierten Operatoren aus $\mathbb{L}(\mathcal{H})$ aus Lemma 10.3.5 | 342 |
| \mathcal{G} | gesamte Galilei-Gruppe | 375 |
| $\tilde{\mathcal{G}}$ | rationale Galilei-Gruppe | 376 |
| $(A, \vec{\delta}, \vec{\eta}, \gamma)$ | Element aus \mathcal{G} oder aus $\tilde{\mathcal{G}}$ | 375 |
| \mathbb{I} | reelle 3×3 -Einheitsmatrix | 376 |
| \mathbf{e} | $(\mathbb{I}, 0, 0, 0)$; neutrales Element der rationalen wie der gesamten Galilei-Gruppe | 376 |

| | | |
|-----------------------------|--|-----|
| S_g | Bildrelation, die einem Präparierverfahren a dasjenige Präparierverfahren zuordnet, das sich aus a gewinnen läßt, indem man alle Vorgänge, die a ausmachen um $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ raum-zeitlich „verschoben“ vornimmt; später mathematisch erklärt für $g \in \mathcal{G}$ | 377 |
| T_g | Bildrelation, die jeder Registrierprozedur oder -methode b diejenige Registrierprozedur oder -methode zuordnet, die sich aus b gewinnen läßt, indem man alle Vorgänge, die b ausmachen um $g \in \tilde{\mathcal{G}}$ raum-zeitlich „verschoben“ vornimmt; später mathematisch erklärt für $g \in \mathcal{G}$ | 377 |
| \tilde{S}_g | Mischungs-Automorphismus für $g \in \mathcal{G}$ | 387 |
| \tilde{T}_g | Effekt-Automorphismus für $g \in \mathcal{G}$ | 387 |
| N_{ph} | uniforme Struktur der physikalischen Unschärfe auf $\tilde{\mathcal{G}}$ | 392 |
| U_g | $U(g)$ für eine unitäre Darstellung $U : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ | 399 |
| $\mathfrak{D}(\mathcal{G})$ | Menge aller Abbildungen, die jedem Element aus \mathcal{G} gemäß Satz 11.4.3 einen unitären Operator zuordnen, wobei dem neutralen Element ϵ von \mathcal{G} die identische Abbildung auf \mathcal{H} zukommt | 403 |
| H | Hamilton-Operator | 411 |
| \vec{K}, K_1, K_2, K_3 | Generatoren der unitären Darstellung der Untergruppe der räumlichen Translationen der Galilei-Gruppe | 415 |
| \vec{X}, X_1, X_2, X_3 | Generatoren der unitären Darstellung der Untergruppe der eigentlichen Galilei-Transformationen | 415 |
| \vec{J}, J_1, J_2, J_3 | Generatoren der unitären Darstellung der Untergruppe der räumlichen Drehungen | 416 |
| \vec{S}, S_1, S_2, S_3 | Spin-Anteil von \vec{J} | 417 |
| Q_ν | $\frac{1}{m}X_\nu$ mit $\nu = 1, 2, 3$; Orts-Observable in der ν -Komponente zum Zeitpunkt $t = 0$ | 473 |
| P_ν | $-K_\nu$ mit $\nu = 1, 2, 3$; Impuls-Observable in der ν -Komponente | 473 |

Literaturverzeichnis

- [AB99] ALIPRANTIS, C.D. und BORDER, K.C., *Infnite Dimensional Analysis*. Berlin etc.: Springer, 2nd ed. 1999.
- [AD78] AERTS, D. und DAUBECHIES, I., Physical justification for using the tensor product to describe two quantum systems as one joint system. *Helv. Phys. Acta* **51**: 661–675, 1978.
- [Aer82] AERTS, D., Description of many physical entities without the paradoxes encountered in quantum mechanics. *Found. Phys.* **12**: 1131–1170, 1982.
- [Aer84] AERTS, D., Construction of the tensor product for the lattices of properties of physical entities. *J. Math. Phys.* **25**: 1134–1441, 1984.
- [AF90] ALONSO, M. und FINN, E.J., *Quantenphysik*. Bonn etc.: Addison-Wesley, 2. Aufl. 1990.
- [Alb01] ALBER, G. et al. (eds.), *Quantum Information: An Introduction to Basic Theoretical Concepts and Experiments*. Berlin etc.: Springer (Springer Tracts in Modern Physics, vol. 173), 2001.
- [AS00] AERTS, D. und VAN STEIRTEGHEM, B., Quantum axiomatics and a theorem of M.P. Solèr. *Int. J. Theor. Phys.* **39**: 497–502, 2000.
- [Bar54] BARGMANN, V., On unitary ray representations of continuous groups. *Ann. Math. (Leipzig)* **59**: 1–46, 1954.
- [Bar64] BARGMANN, V., Note on Wigner’s Theorem on Symmetry Operations. *J. Math. Phys.* **5**: 862–868, 1964.

- [BC81] BELTRAMETTI, E.G. und CASSINELLI, G., *The Logic of Quantum Mechanics*. Reading etc.: Addison-Wesley (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 15), 1981.
- [Bel64] BELL, J.S., On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics* **1**: 195–200, 1964; nachgedruckt in [WZ83], sect. III.3, S. 403–408.
- [Bir95] BIRKHOFF, G., *Lattice Theory*. Providence: American Mathematical Society (Amer. Math. Soc. Colloq. Publications, vol. 25), 3rd ed. 1995.
- [BL02] BURKARD, G. und LOSS, D., Electron Spins in Quantum Dots as Qubits for Quantum Information Processing. In: AWSCHALOM, D.D., LOSS, D. und SAMARTH, N. (eds.), *Semiconductor Spintronics and Quantum Computation*. Berlin etc.: Springer (Nanoscience and Technology), 2002, chap. 8, S. 229–276.
- [BN36] BIRKHOFF, G. und VON NEUMANN, J., The Logic of Quantum Mechanics. *Ann. Math. (Leipzig)* **37**: 823–843, 1936.
- [Boh28] BOHR, N., Das Quantenpostulat und die neuere Entwicklung der Atomistik. *Naturwiss.* **16**: 245–257, 1928.
- [Boh58] BOHR, N., Über Erkenntnisfragen der Quantenphysik. In: KOCKEL, B., MACKE, W. und PAPAPETROU, A. (eds.), *Max-Planck-Festschrift 1958*. Berlin: Deutscher Verlag der Wiss., 1958, S. 169–175. Der Beitrag von Bohr findet sich als Nachdruck in [BS87], S.156-162.
- [Boh66] BOHR, N., *Atomphysik und menschliche Erkenntnis II*. Braunschweig: Vieweg (Die Wissenschaft, Bd. 123), 1966.
- [Bor26] BORN, M., Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge [Vorläufige Mitteilung]. *Z. Phys.* **37**: 863–867, 1926.
- [Bou66a] BOURBAKI, N., *General Topology Part I* (Elements of Mathematics, Bd. 3), Reading etc.: Addison-Wesley, 1966.
- [Bou66b] BOURBAKI, N., *General Topology Part II* (Elements of Mathematics, Bd. 3), Reading etc.: Addison-Wesley, 1966.
- [Bou87] BOURBAKI, N., *Topological Vector Spaces, Chapters 1 - 5* (Elements of Mathematics), Berlin etc.: Springer, 1987.

- [BP63] BISHOP, E. und PHELPS, R.R., The support functionals of a convex set. In: KLEE, V.L. (ed.), *Convexity*. Providence: American Mathematical Society (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 7), 1963, S. 27–35.
- [Bro99] BROOKS, M. (ed.), *Quantum Computing and Communications*. London etc.: Springer, 1999.
- [BS87] BAUMANN, K. und SEXL, R.U., *Die Deutungen der Quantentheorie*. Braunschweig: Vieweg (Facetten der Physik, Bd. 11), 1987.
- [CDVLL00] CASSINELLI, G., DE VITO, E., LAHTI, P. und LEVRERO, A., A Theorem of Ludwig Revisited. *Found. Phys.* **30**: 1757–1763, 2000.
- [Däh68] DÄHN, G., Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories IV. *Commun. math. Phys.* **9**: 192–211, 1968.
- [DCG01] DALLA CHIARA, M.L. und GIUNTINI, R., Quantum logics. *quant-ph/0101028v2*, 6. Jan. 2001, s. URL <http://xxx.lanl.gov> in der Rubrik quant-ph.
- [d'E76] D'ESPAGNAT, B., *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*. Reading: Benjamin (Mathematical Physics Monographs Series, vol. 20), 2nd ed. 1976.
- [Dug66] DUGUNDJI, J., *Topology*. Boston etc.: Allyn and Bacon (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics), 1966.
- [Ell64] ELLIS, A.J., The duality of partially ordered normed linear spaces. *J. Lond. Math. Soc.* **39**: 730–744, 1964.
- [Ell68] ELLIS, A.J., Minimal decompositions in partially ordered normed vector spaces. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **64**: 989–1000, 1968.
- [Emc63a] EMCH, G., Mécanique quantique quaternionnienne et Relativité restreinte I. *Helv. Phys. Acta* **36**: 739–769, 1963.
- [Emc63b] EMCH, G., Mécanique quantique quaternionnienne et Relativité restreinte II. *Helv. Phys. Acta* **36**: 770–788, 1963.

- [EPR35] EINSTEIN, A., PODOLSKY, B. und ROSEN, N., Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Phys. Rev.* **47**: 777–780, 1935.
- [FJSS62] FINKELSTEIN, D., JAUCH, J.M., SCHIMINOVICH, S. und SPEISER, D., Foundations of Quaternion Quantum Mechanics. *J. Math. Phys.* **3**: 207–220, 1962.
- [Giu91] GIUNTINI, R., *Quantum Logic and Hidden Variables*. Mannheim etc.: Bibliogr. Institut (Grundlagen der exakten Naturwissenschaften, Bd. 8), 1991.
- [Gle57] GLEASON, A.M., Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space. *J. Math. and Mech.* **6**: 885–894, 1957.
- [GNW81] GERSTBERGER, H., NEUMANN, H. und WERNER, R.F., Makroskopische Kausalität und relativistische Quantenmechanik. In: NITSCH, J., PFARR, J., STACHOW, E.-W. (Hrsg.), *Grundprobleme der modernen Physik – Festschrift für Peter Mittelstaedt zum 50. Geburtstag*. Mannheim etc.: Bibliogr. Institut, 1981, S. 205–216.
- [Gro97] GROVER, L.K., Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack. *Phys. Rev. Lett.* **79**: 325–328, 1997.
- [Gud79] GUDDER, S.P., *Stochastic Methods in Quantum Mechanics*. New York etc.: North Holland (North Holland Series in Probability and Applied Mathematics), 1979.
- [Hei25] HEISENBERG, W., Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. *Z. Phys.* **33**: 879–893, 1925; nachgedruckt in [Lud69], S.193-210.
- [Hei27] HEISENBERG, W., Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. *Z. Phys.* **43**: 172–198, 1927.
- [Hei31] HEISENBERG, W., Kausalgesetz und Quantenmechanik. *Erkenntnis* **2**: 172–182, 1931.
- [Hei59] HEISENBERG, W., *Physik und Philosophie*. Stuttgart: Hirzel, 1959, Kap. 3, S. 27–42; nachgedruckt in [Hei79]. Das gesamte Buch als Nachdruck liefert [Hei84], S.3-202.

- [Hei69] HEISENBERG, W., *Der Teil und das Ganze*. München: Piper, 1969.
- [Hei79] HEISENBERG, W., *Quantentheorie und Philosophie*. Stuttgart: Reclam (Universalbibliothek, Bd. 9948[2]), 1979.
- [Hei84] HEISENBERG, W., *Gesammelte Werke, Abt. C, Bd. II*. München: Piper, 1984.
- [Hel98] HELD, C., *Die Bohr-Einstein-Debatte*. Paderborn: Schöningh, 1998.
- [Her78] HERMES, H., *Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit*. Berlin etc.: Springer (Heidelberger Taschenbücher, Bd. 87), 3. Aufl. 1978.
- [Heu91a] HEUSER, H., *Lehrbuch der Analysis Bd. 1*. Stuttgart: Teubner, 9. Aufl. 1991.
- [Heu91b] HEUSER, H., *Lehrbuch der Analysis Bd. 2*. Stuttgart: Teubner, 6. Aufl. 1991.
- [Heu92] HEUSER, H., *Funktionalanalysis*. Stuttgart: Teubner, 3. Aufl. 1992.
- [Hir01] HIRVENSALO, M., *Quantum Computing*. Berlin etc.: Springer (Natural Computing Series), 2001.
- [Hol95] HOLLAND JR., S.S., Orthomodularity in infinite dimensions; a theorem of M. Solèr. *Bull. Amer. Math. Soc.* **32**: 205–234, 1995.
- [IW52] INÖNÜ, E. und WIGNER, E.P., Representations of the Galilei Group. *Nuovo Cim.* **9**: 705–718, 1952.
- [Jam66] JAMMER, M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. New York etc.: McGraw-Hill (International Series in Pure and Applied Physics), 1966.
- [Jam74] JAMMER, M., *The Philosophy of Quantum Mechanics*. New York etc.: Wiley, 1974.
- [Jau68] JAUCH, J.M., *Foundations of Quantum Mechanics*. Reading etc.: Addison-Wesley (Addison-Wesley Series in Advanced Physics), 1968.
- [Kad65] KADISON, R.V., Transformations of states in operator theory and dynamics. *Topology* **3**: 177–198, 1965.

- [Kal83] KALMBACH, G., *Orthomodular Lattices*. London etc.: Academic Press (London Math. Soc. Monographs, vol. 18), 1983.
- [Kel55] KELLEY, J.L., *General Topology*. New York etc.: Springer (Graduate Texts in Mathematics, vol. 27), 1955.
- [Kel80] KELLER, H.A., Ein nicht-klassischer Hilbertraum. *Math. Z.* **172**: 41–49, 1980.
- [KN89] KLÜPPEL, M. und NEUMANN, H., The Space-Time Structure of Quantum Systems in External Fields. *Found. Phys.* **19**: 985–998, 1989.
- [Köt66] KÖTHER, G., *Topologische Lineare Räume I*. Berlin etc.: Springer (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 107), 2. Aufl. 1966.
- [Köt79] KÖTHER, G., *Topological Vector Spaces II*. New York etc.: Springer (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 237) 1979.
- [KR88] KOECHER, M. und REMMERT, R., Hamiltonsche Quaternionen. In: EBBINGHAUS, H.-D. et al., *Zahlen*. Berlin etc.: Springer (Grundtexte Mathematik, Bd. 1), 2. Aufl. 1988, Kap. 7, S. 155–181.
- [Krü70] KRÜGER, L. (Hrsg.), *Erkenntnisprobleme der Naturwissenschaften: Texte zur Einführung in die Philosophie der Wissenschaft*. Köln etc.: Kiepenheuer & Witsch (Neue Wissenschaftliche Bibliothek: Philosophie, Bd. 38), 1970.
- [Lud53] LUDWIG, G., Der Meßprozeß. *Z. Phys.* **135**: 483–511, 1953.
- [Lud54a] LUDWIG, G., *Die Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin etc.: Springer (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 70), 1954.
- [Lud54b] LUDWIG, G., Die Stellung des Subjekts in der Quantentheorie. In: *Veritas, Jusititia, Libertas* (Festschrift der Freien Universität Berlin zur 200-Jahrfeier der Columbia University New York). Berlin: Colloquium-Verlag, 1954, S. 261–272.
- [Lud55] LUDWIG, G., Zur Deutung der Beobachtung in der Quantenmechanik. *Phys. Bl.* **11**: 489–494, 1955; nachgedruckt in [Krü70], S. 428–434.

- [Lud61] LUDWIG, G., Gelöste und ungelöste Probleme des Meßprozesses in der Quantenmechanik. In: *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*. Braunschweig: Vieweg, 1961, S. 150–181.
- [Lud64] LUDWIG, G., Versuch einer axiomatischen Grundlegung der Quantenmechanik und allgemeinerer physikalischer Theorien. *Z. Phys.* **181**: 233–260, 1964.
- [Lud67a] LUDWIG, G., Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories II. *Commun. math. Phys.* **4**: 331–348, 1967.
- [Lud67b] LUDWIG, G., Hauptsätze über das Messen als Grundlage der Hilbert-Raumstruktur der Quantenmechanik. *Z. Naturforschg.* **22a**: 1303–1323, 1967.
- [Lud67c] LUDWIG, G., Ein weiterer Hauptsatz über das Messen als Grundlage der Hilbert-Raumstruktur der Quantenmechanik. *Z. Naturforschg.* **22a**: 1324–1327, 1967.
- [Lud68] LUDWIG, G., Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories III. *Commun. math. Phys.* **9**: 1–12, 1968.
- [Lud69] LUDWIG, G., *Wellenmechanik*. Braunschweig: Vieweg (Wissenschaftliche Taschenbücher, Bd. 55), 1969.
- [Lud70] LUDWIG, G., *Deutung des Begriffs „physikalische Theorie“ und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens*. Berlin etc.: Springer (Lecture Notes in Physics, vol. 4), 1970.
- [Lud72] LUDWIG, G., An Improved Formulation of Some Theorems and Axioms in the Axiomatic Foundation of the Hilbert Space Structure of Quantum Mechanics. *Commun. math. Phys.* **26**: 78–86, 1972.
- [Lud73] LUDWIG, G., Why a New Approach to Found Quantum Theory ? In: MEHRA, J. (ed.), *The Physicists Conception of Nature*. Dordrecht: Reidel, 1973, S. 702–708.

- [Lud74] LUDWIG, G., *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Bd. 2: Elektrodynamik, Zeit, Raum, Kosmos*. Düsseldorf: Bertelsmann, 1974.
- [Lud77] LUDWIG, G., A Theoretical Description of Single Microsystems. In: PRICE, W.C. und CHISSICK, S.S. (eds.), *The Uncertainty Principle and Foundations of Quantum Mechanics: A Fifty Years' Survey*. Chichester: Wiley, 1977, chap. 11, S. 189–226.
- [Lud78a] LUDWIG, G., *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie*. Berlin etc.: Springer, 1. Aufl. 1978.
- [Lud78b] LUDWIG, G., *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Bd. 1: Raum, Zeit, Mechanik*. Braunschweig: Vieweg, 2. Aufl. 1978.
- [Lud79a] LUDWIG, G., *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Bd. 4: Makrosysteme, Physik und Mensch*. Braunschweig: Vieweg, 1979.
- [Lud79b] LUDWIG, G., Wie kann man durch Physik etwas von der Wirklichkeit erkennen? *Akad. Wiss. Mainz, Abh. Math.-Nat. Kl.*, Jg. 1979, Nr. 2, S. 3-16.
- [Lud80a] LUDWIG, G., *Axiomatische Basis der Quantenmechanik, Kap. I-III*. Marburg (Notes in Mathematical Physics, vol. 16), 1980.
- [Lud80b] LUDWIG, G., *Axiomatische Basis der Quantenmechanik, Kap. IV-VII*. Marburg (Notes in Mathematical Physics, Bd. 17), 1980.
- [Lud80c] LUDWIG, G., *Axiomatische Basis der Quantenmechanik, Kap. VIII-X*. Marburg (Notes in Mathematical Physics, Bd. 18), 1980.
- [Lud80d] LUDWIG, G., Das Problem der Ja-Nein-Messung in der Quantenmechanik. In: *Grundlagen der Quantentheorie*. Mannheim etc.: Bibliogr. Institut (Grundlagen der exakten Naturwissenschaften, Bd. 1), 1980, S. 9–21.
- [Lud81a] LUDWIG, G., An Axiomatic Basis of Quantum Mechanics. In: *Interpretations and Foundations of Quantum Theory*. Mannheim etc.: Bibliogr. Institut (Grundlagen der exakten Naturwissenschaften, Bd. 5), 1981, S. 49–70.

- [Lud81b] LUDWIG, G., Axiomatische Basis einer physikalischen Theorie und theoretische Begriffe. *Z. allg. Wissenschafts-theorie* **12**: 55–74, 1981.
- [Lud81c] LUDWIG, G., Imprecision in Physics. In: HARTKÄMPER, J. und SCHMIDT, H.-J. (eds.), *Structure and Approximation in Physical Theories*. New York etc.: Plenum Press, 1981, S. 7–11.
- [Lud81d] LUDWIG, G., Quantum theory as a theory of interactions between macroscopic systems which can be described objectively. *Erkenntnis* **16**: 359–387, 1981.
- [Lud83a] LUDWIG, G., The Connection between the Objective Description of Macrosystems and Quantum Mechanics of „Many Particles“. In: *Old and New Questions in Physics, Cosmology, Philosophy, and Theoretical Biology – Essays in Honor of Wolfgang Yourgrau*. New York: Plenum Press, 1983, chap. 16, S. 243–263.
- [Lud83b] LUDWIG, G., *Foundations of Quantum Mechanics I*. Berlin etc.: Springer (Texts and Monographs in Physics), 1983.
- [Lud84a] LUDWIG, G., *Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Bd. 3: Quantentheorie*. Braunschweig: Vieweg, 2. Aufl. 1984.
- [Lud84b] LUDWIG, G., Restriction and Embedding. In: *Reduction in Science*. Dordrecht: Reidel (Synthese Library, vol. 175), 1984, S. 17–33.
- [Lud85a] LUDWIG, G., *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics, Vol. 1: Derivation of Hilbert Space Structure*. Berlin etc.: Springer, 1985.
- [Lud85b] LUDWIG, G., Das EPR-Paradoxon als makroskopisches Experiment und seine Auswirkungen auf unsere Vorstellung von Physik. *Ann. Phys. (Leipzig)* 7. F., **42**: 150–168, 1985.
- [Lud85c] LUDWIG, G., *Foundations of Quantum Mechanics II*. Berlin etc.: Springer (Texts and Monographs in Physics), 1985.
- [Lud87] LUDWIG, G., *An Axiomatic Basis for Quantum Mechanics, Vol. 2: Quantum Mechanics and Macrosystems*. Berlin etc.: Springer, 1987.
- [Lud89] LUDWIG, G., Atoms: Are They Real or Are They Objects? *Found. Phys.* **19**: 971–983, 1989.

- [Lud90a] LUDWIG, G., Concepts of States in Physics. *Found. Phys.* **20**: 621–633, 1990.
- [Lud90b] LUDWIG, G., *Die Grundstrukturen einer physikalischen Theorie*. Berlin etc.: Springer, 2. Aufl. 1990.
- [Lud90c] LUDWIG, G., Die Katze ist tot. In: *Wieviele Leben hat Schrödingers Katze ?* Mannheim: Bibliogr. Inst., 1990, S. 183–208.
- [Lud94] LUDWIG, G., Die Methode der Physik und ihre Grenzen. *Ethik und Sozialwiss.* **5**: 458–460, 1994.
- [Mac63] MACKEY, G.W., *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. New York etc.: Benjamin (The Mathematical Physics Monograph Series), 1963.
- [Mac64] MACLAREN, M.D., Atomic orthocomplemented lattices. *Pacific J. Math.* **14**: 597–612, 1964.
- [Mac65] MACLAREN, M.D., *Notes on axioms for quantum mechanics*. Tech. Rep. 7065, Argonne National Laboratory, 1965.
- [Mac68] MACKEY, G.W., *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*. New York: Benjamin/ Turin: Boringhieri, 1968.
- [Mac76] MACKEY, G.W., *The Theory of Unitary Group Representations*. Chicago etc.: The University of Chicago Press (Chicago Lectures in Mathematics), 1976.
- [Mac78] MACKEY, G.W., *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory*. Reading: Benjamin/Cummings (Mathematics Lecture Note Series, vol. 55), 1978.
- [May98] MAYET, R., Some Characterizations of the Underlying Division Ring of a Hilbert Lattice by Automorphisms. *Int. J. Theor. Phys.* **37**: 109–114, 1998.
- [MM70] MAEDA, F. und MAEDA, S., *Theory of Symmetric Lattices*. Berlin etc.: Springer (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 173), 1970.

- [Mor73] MORASH, R.P., Angle bisection and orthoautomorphisms in Hilbert lattices. *Can. J. Math.* **25**: 261–272, 1973.
- [MP01] MOLNÁR, L. und PÁLES, Z., \perp -order automorphisms of Hilbert space effect algebras: The two-dimensional case. *J. Math. Phys.* **42**: 1907–1912, 2001.
- [MR01] MEHRA, J. und RECHENBERG, H., The Historical Development of Quantum Theory. Berlin etc.: Springer, 1982-2001, 6 Bände.
- [MV92] MEISE, R. und VOGT, D., *Einführung in die Funktionalanalysis*. Braunschweig: Vieweg (vieweg Studium - Aufbaukurs Mathematik), 1992.
- [NC00] NIELSEN, M.A. und CHUANG, I.L., *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
- [vN32] VON NEUMANN, J., Über einen Satz von Herrn M.H. Stone. *Ann. Math. (Leipzig)* **33**: 567–573, 1932.
- [vN68] VON NEUMANN, J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Berlin etc.: Springer (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 38), 1968, unveränd. Nachd. der Erstauflage von 1932.
- [Neu83] NEUMANN, H., The Description of Preparation and Registration of Physical Systems and Conventional Probability Theory. *Found. Phys.* **13**: 761–778, 1983.
- [Neu85] NEUMANN, H., Which Ideas on the Action of Microsystems in EPR-Experiments are Compatible with Quantum Theory ? In: *Symposium on the Foundations of Modern Physics – 50 years of the Einstein-Podolsky-Rosen Gedankenexperiment*. Singapur: World Scientific, 1985, S. 497–509.
- [Neu03] NEUMANN, H., 2003, persönliche Mitteilung.
- [NW83] NEUMANN, H. und WERNER, R.F., Causality between Preparation and Registration Processes in Relativistic Quantum Theory. *Int. J. Theor. Phys.* **22**: 781–802, 1983.
- [Ott00] OTT, C., 2000, persönliche Mitteilung.

- [Ott02] OTT, C., Vortrag im Rahmen des interdisziplinären Oberseminars „Mathematik und Physik“, CAU Kiel, Wintersemester 2001/2002.
- [Per67] PERESSINI, A.L., *Ordered Topological Vector Spaces*. New York etc.: Harper & Row (Harper's Series in Modern Mathematics), 1967.
- [Pir64] PIRON, C., Axiomatique Quantique. *Helv. Phys. Acta* **37**: 439–468, 1964.
- [Pir76] PIRON, C., *Foundations of Quantum Physics*. Reading etc.: Benjamin, 1976.
- [Pon32] PONTRJAGIN, L.S., Über stetige algebraische Körper. *Ann. Math. (Leipzig)* **33**: 163–174, 1932.
- [Pon57] PONTRJAGIN, L.S., *Topologische Gruppen Teil 1*. Leipzig: Teubner, 2. Aufl. 1957.
- [PP91] PTÁK, P. und PULMANOVÁ, S., *Orthomodular Structures as Quantum Logics*. Dordrecht: Kluwer (Fundamental Theories of Physics, vol. 44), 1991.
- [vQ01] VON QUERENBURG, B., *Mengentheoretische Topologie*. Berlin etc.: Springer, 3. Aufl. 2001.
- [Roc70] ROCKAFELLAR, R.T., *Convex Analysis*. Princeton: Princeton University Press (Princeton Mathematical Series, vol. 28), 1970.
- [Rom92] ROMAN, S., *Advanced Linear Algebra*. New York etc.: Springer (Graduate Texts in Mathematics, vol. 135), 1992.
- [RS80] REED, M. und SIMON, B., *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Orlando etc.: Academic Press, rev. and enl. ed. 1980.
- [RV73] ROBERTS, A. und VARBERG, D., *Convex Functions*. New York etc.: Academic Press (Pure and Applied Mathematics, vol. 57), 1973.
- [Sch35] SCHRÖDINGER, E., Die gegenwärtige Situation der Quantenmechanik. *Naturwiss.* **23**: 807–812, 823–828, 844–849, 1935.

- [Sho97] SHOR, P.W., Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.* **26**: 1484–1509, 1997.
- [Sim76] SIMON, B., Quantum dynamics: from automorphism to Hamiltonian. In: LIEB, E.H., SIMON, B. und WIGHTMAN, A.S. (eds.), *Studies in Mathematical Physics: Essays in Honor of Valentine Bargmann*. Princeton: Princeton University Press (Princeton Series in Physics), 1976, S. 327–349.
- [Sol95] SOLÈR, M.P., Characterization of Hilbert spaces by orthomodular spaces. *Commun. Algebra* **23**: 219–243, 1995.
- [Sto30] STONE, M.H., Linear transformations in Hilbert space III. Operational methods and group theory. *Proc. Nat. Acad. Sci.* **16**: 172–175, 1930.
- [Sto32] STONE, M.H., On one-parameter unitary groups in Hilbert space. *Ann. Math. (Leipzig)* **33**: 643–648, 1932.
- [Sto69] STOLZ, P., Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories V. *Commun. math. Phys.* **11**: 303–312, 1969.
- [Sto71] STOLZ, P., Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories VI. *Commun. math. Phys.* **23**: 117–126, 1971.
- [Stu60] STUECKELBERG, E.C.G., Quantum Theory in Real Hilbert Space. *Helv. Phys. Acta* **33**: 727–752, 1960.
- [SW99] SCHAEFER, H.H. mit WOLFF, M.P., *Topological Vector Spaces*. New York etc.: Springer (Graduate Texts in Mathematics, vol. 3), 2nd ed. 1999.
- [Val64] VALENTINE, F.A., *Convex Sets*. New York etc.: McGraw-Hill (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics), 1964.
- [Var85] VARADARAJAN, V.S., *Geometry of Quantum Theory*. New York etc.: Springer, 2nd ed. 1985.
- [War93] WARNER, S.L., *Topological Rings*. Amsterdam etc.: North Holland (North-Holland Mathematics Studies, vol. 178), 1993.

- [vW44] VON WEIZSÄCKER, C.F., *Zum Weltbild der Physik*, Leipzig: Hirzel, 2.Aufl. 1944.
- [Wer97] WERNER, D., *Funktionalanalysis*. Berlin etc.: Springer, 2. Aufl. 1997.
- [Wer02] WERNER, R.F., Quantenrechner – die neue Generation von Supercomputern? In: AUDRETSCH, J. (Hrsg.), *Verschränkte Welt – Faszination der Quanten*. Weinheim: Wiley-VCH, 2002, Kap. 7, S. 141–168.
- [Wig31] WIGNER, E.P., *Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren*. Braunschweig: Vieweg (Die Wissenschaft, Bd. 85), 1931.
- [Wig59] WIGNER, E.P., *Group Theory and its Applications to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*. New York: Academic Press, 1959; um einige Kapitel erweiterte, englische Übersetzung von [Wig31].
- [Wis94] WISBAUER, R., *Lineare Algebra*. München: Fischer, 1994.
- [Wlo71] WLOKA, J., *Funktionalanalysis und Anwendungen*. Berlin etc.: de Gruyter (de Gruyter Lehrbuch), 1971.
- [WN73] WONG, Y.-C. und NG, K.-F., *Partially Ordered Topological Vector Spaces*. Oxford: Clarendon Press (Oxford Mathematical Monographs), 1973.
- [WWW52] WICK, G.C., WIGHTMAN, A.S. und WIGNER, E.P., The Intrinsic Parity of Elementary Particles. *Phys. Rev.* **88**: 101–105, 1952.
- [WZ83] WHEELER, J.A. und ZUREK, W.H. (eds.), *Quantum Theory and Measurement*. Princeton: Princeton University Press (Princeton Series in Physics), 1983.
- [Zie61] ZIERLER, N., Axioms for non-relativistic quantum mechanics. *Pacific J. Math.* **11**: 1151–1169, 1961.
- [Zie66] ZIERLER, N., On the Lattice of Closed Subspaces of Hilbert Space. *Pacific J. Math.* **19**: 583–586, 1966.

Danksagungen

Wissenschaftliche Hilfe:

Herrn Priv.-Doz. Dr. Albrecht Huber möchte ich außer für die ausdauernde Unterstützung für die Möglichkeit danken, eine Dissertation anzufertigen, die sich sowohl mit den philosophischen als auch mit den mathematischen Fragen der Quantenmechanik beschäftigt. Dies ermöglichte es mir, mich den Fragen zu widmen, die mir nach Beendigung meines Physik-Studiums am dringendsten erschienen.

Herrn Prof. Dr. Holger Neumann danke ich für die Diskussionsmöglichkeit zu den Arbeiten von Günther Ludwig im Frühjahr 2003. Insbesondere danke ich für den Hinweis auf den Artikel [KN89] und die Überlassung jeweils eines Exemplars der Bücher [Lud69, Lud83b, Lud85a, Lud90b].

Herrn Dr. Christian Ott danke ich für einige Treffen in den Jahren 2000 und 2001.

Persönliche Hilfe:

Die vorliegende Dissertation entstand in einer Phase meines Lebens, die zu Beginn sehr von gesundheitlichen Sorgen geprägt war, ohne daß ich sie zunächst adäquat artikulieren konnte. Erst als meine Tochter Marie im Laufe des Jahres 2000 im Bauche meiner lieben Frau Katharina wuchs und als wir uns Gedanken über ihre Ernährung machten, begann ich die Bücher des Naturarztes Dr. M.O. Bruker zu studieren. Dies bedeutet für mich rückblickend einen entscheidenden Wendepunkt meines Lebens. Durch die Annahme seiner Vorstellungen einer gesunden Ernährung konnte ich meine geistige Leistungsfähigkeit wiedererlangen und meine gesundheitlichen Probleme überwinden. Daher möchte ich ihm, ohne ihn zu kennen und obwohl er bereits verstorben ist, meinen tiefen Dank aussprechen.

Eine solche Entwicklung wäre aber ohne meine Frau Katharina nicht möglich gewesen. Ich danke Dir für alle Deine Mühen und Deine unerschütterliche Geduld. Auch Dir, Marie, verdanke ich viel. Deine freundliche Fröhlichkeit, mit der Du mich stets beschenkt hast, beglückt mein Herz immer wieder aufs Neue.

Inniger Dank für die ungeheure Ausdauer und den steten Glauben an mich gilt meinen Eltern.

Ebenfalls danke ich von Herzen meinen Schwiegereltern, die mich ohne Klagen unterstützten haben.

Meinem Bruder Björn verdanke neben zahlreichen Ermunterungen einschließlich amüsanten Email-Austausches besonders die Möglichkeit, in zwei Fällen die aufwendige Fernleihe zu umgehen. Er verschaffte mir sehr kurzfristigen Zugriff auf [Lud54b, Lud84b] und auf eine weitere Veröffentlichung von G. Ludwig aus seiner Berliner Zeit.

Hinsichtlich des Durchlesens einiger Passagen der Arbeit auf Fehler in Rechtschreibung und dergleichen möchte ich meiner Frau, meinem Vater und meiner Schwägerin Kristina Pisot danken.

Schließlich danke ich noch Claus-Bahne Bahnson und Eva Wachowitz, die mir ihre Zeit geschenkt haben.

Lebenslauf

Am 1. September 1972 wurde ich, André Freter, in Kiel als Sohn von Gerd und Sabine Freter geboren. Ich bin verheiratet, habe eine dreijährige Tochter und besitze die deutsche Staatsangehörigkeit.

Nach dem Besuch der Astrid-Lindgren-Grund- und Hauptschule in Klausdorf/Schwentine im Zeitraum von 1978 bis 1982 wechselte ich an das Gymnasium im Schulzentrum Elmschenhagen. Im Jahre 1991 legte ich dort die Reifeprüfung ab.

Im Wintersemester 1991/92 begann ich das Studium der Physik an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Nach dem Vordiplom im Jahre 1993 folgten 1995 die Hauptdiplomprüfungen, denen sich eine Diplomarbeit mit dem Thema *Massen und Mischungswinkel der beiden schweren Quarkfamilien aus infrarot-attraktiven Fixpunkten und Fixlinien der Renormierungsgruppengleichungen* bei Frau Prof. Dr. Barbara Schrempf anschloß. Im Januar 1997 konnte ich die Diplomarbeit fertigstellen und beendete so mein Studium der Physik mit der Gesamtnote „sehr gut“.

Im Sommersemester 1997 immatrikulierte ich mich an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel im Fach Philosophie. Bedauerlicherweise verschlechterte sich mein Gesundheitszustand dahingehend, daß ich meinen Studienwünschen nicht befriedigend entsprechen konnte. Ebenso konnte ich meinem Wunsch nach Anfertigung einer Dissertation, den ich 1997 mit Herrn Priv.-Doz. Dr. Albrecht Huber erörterte, nicht nachkommen. Erst im Laufe des Jahres 2000 verbesserte sich mein Gesundheitszustand allmählich wieder. Im Sommersemester 2003 gab ich das Studium der Philosophie endgültig auf und exmatrikulierte mich, um mich vollständig der hier vorliegenden Dissertation widmen zu können.

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit unter Anleitung meines Betreuers Herrn Priv.-Doz. Dr. Albrecht Huber und nur unter Benutzung der angegebenen Literatur selbstständig angefertigt habe.

Die vorliegende Arbeit hat weder ganz noch zum Teil in einem früheren Prüfungsverfahren vorgelegen. Ferner ist sie bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden.

Frühere Promotionsversuche sind nicht unternommen worden.

(André Freter)