

# Fixpunkte und normale Familien quasiregulärer Abbildungen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von

Heike Siebert

Kiel

Oktober 2004

Referent/in:  
Korreferent/in :  
Tag der mündlichen Prüfung:  
Zum Druck genehmigt:

Prof. Dr. W. Bergweiler  
Prof. Dr. D. Müller  
15.12.2004  
Kiel, den 15.12.2004

Prof. Dr. J. Grotemeyer, Dekan

## Zusammenfassung

Im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen Familien quasiregulärer Abbildungen, die Frage nach deren Normalität sowie die nach der Existenz von Fixpunkten der zu den Familien gehörenden Funktionen oder deren Iterierten. Wir finden Bedingungen die Normalität der betrachteten Familien betreffend, die uns Funktionen in diesen Familien mit der Eigenschaft finden lassen, daß ihre Iterierten oder die Funktionen selbst Fixpunkte besitzen. Bei diesen Bedingungen handelt es sich um Anforderungen an die Punkte, in denen die Funktionenfamilie nicht normal ist, etwa daß diese isoliert voneinander liegen oder ausreichend viele solcher Punkte vorhanden sind. Verschärfungen dieser Bedingungen ermöglichen uns nicht nur Aussagen über Fixpunkte von Iterierten der betrachteten Funktionen, sondern über periodische Punkte der Funktion selbst. Nachfolgend untersuchen wir Familien  $K$ -quasiregulärer Abbildungen, die eine Iterierte haben, die keinen Fixpunkt besitzt, und zeigen die Normalität dieser Familien. Anschließend schwächen wir die Voraussetzungen etwas ab und betrachten die Familie aller  $K$ -quasiregulärer Abbildungen  $f$ , für die ein  $k > 1$  so existiert, daß  $f$  keinen periodischen Punkt der Periode  $k$  besitzt. Es gelingt uns zu zeigen, daß diese Familie quasinormal von der Ordnung höchstens eins ist. Mit ähnlichen Methoden beweisen wir, daß eine ganze, quasireguläre Abbildung, die eine wesentliche Singularität in  $\infty$  hat, unendlich viele periodische Punkte beliebiger Periode größer eins besitzt.

Ein Hilfsmittel für die Beweise der obigen Ergebnisse stellt ein Satz dar, der besagt, daß die Familie aller  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen, die über keiner von  $p$  gegebenen  $\varepsilon$ -Kugeln, wobei  $p$  und  $\varepsilon$  geeignet gewählt sind, eine Insel besitzen, normal ist. Diesen Satz modifizieren wir, in dem wir statt Inseln im allgemeinen nur einfache Inseln betrachten. Unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen erhalten wir auch die Normalität solcher Familien. Es lassen sich damit Ergebnisse über Normalität von Familien quasiregulärer Abbildungen und die Existenz abstoßender Fixpunkte von zu diesen Familien gehörenden Funktionen oder deren Iterierten im Stil der oben angesprochenen Aussagen beweisen.

Das abschließende Kapitel widmen wir der Iterationstheorie gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen und versuchen dabei zunächst einen Überblick über den Stand dieses Arbeitsgebiets zu geben. Des weiteren ergänzen wir einige einfache Aussagen wandernde Komponenten der Fatoumenge und die Gestalt der Juliamenge betreffend. Die oben angesprochenen Ergebnisse erlauben es uns außerdem, neue Bedingungen zu finden, unter denen die Juliamenge der betrachteten Funktion der Menge der abstoßenden periodische Punkte dieser Funktion entspricht.

## Abstract

In this thesis we focus on families of quasiregular mappings, study their normality and the question of the existence of fixed points of mappings belonging to those families or of iterates of such mappings. We give conditions concerning the normality of the families in question which imply that there are mappings  $f$  in those families such that  $f^k$  for all  $k > 1$  or the mapping  $f$  itself has a fixed point. These are conditions regarding the set of points in which the family is not normal, for instance that those points are isolated in this set or that the set contains a certain number of points. We obtain results concerning periodic points of mappings belonging to the families in question rather than fixed points of iterates of such mappings by strengthening the hypotheses. By using some of the results mentioned above it is easy to show that a family is normal, if for each of the mappings  $f$  contained in that family there is  $k > 1$  such that  $f^k$  does not have a fixed point. Furthermore we prove that the family of all  $K$ -quasiregular mappings  $f$  for which there exists  $k > 1$  such that  $f$  does not have a periodic point of period  $k$  is quasinormal of order one. Similar methods as in the proof of the above theorem enable us to show that an entire quasiregular mapping  $f$  has infinitely many periodic points of any period greater than one, if  $\infty$  is an essential singularity of  $f$ .

In the proofs of the results given above we use a theorem that states the following. There are  $p \in \mathbb{N}$  and  $\varepsilon > 0$  such that the family of all  $K$ -quasimeromorphic mappings that have no island over any of  $p$  distinct balls  $B(a_j, \varepsilon)$  is normal. We modify this theorem by regarding the larger family one gets by considering only simple islands. We are able to show, that this family is normal too, but require stronger conditions in order to do so. This theorem allows us to establish results concerning the normality of families of quasiregular mappings and the existence of repelling fixpoints of mappings belonging to those families or iterates of such mappings in the manner of the results mentioned above.

The last chapter aims to give an overview of the theory of iteration of uniformly quasimeromorphic mappings. We add some simple results about wandering components of the Fatou set and the structure of the Julia set. Using some of the results given above we show that under certain conditions the Julia set of some uniformly quasimeromorphic mapping  $f$  is equal to the closure of the set of the repelling periodic points of  $f$ .

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Notation . . . . .	5
1.2 Quasireguläre Abbildungen . . . . .	6
1.3 Der topologische Grad . . . . .	15
1.4 Wichtige Ergebnisse . . . . .	22
<b>2 Fixpunkte und Normalität</b>	<b>27</b>
2.1 Einige graphentheoretische Überlegungen . . . . .	27
2.2 Das Insellemma . . . . .	32
2.3 Existenz von Fixpunkten und periodischen Punkten . . . . .	35
2.4 Normalität und Quasinormalität . . . . .	41
2.5 Periodische Punkte ganzer quasiregulärer Abbildungen . . . . .	44
<b>3 Abstoßende Fixpunkte und Normalität</b>	<b>49</b>
3.1 Variationen des Insellemmas . . . . .	49
3.2 Existenz abstoßender Fixpunkte und Normalität . . . . .	54
<b>4 Iterationstheorie gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen</b>	<b>57</b>
4.1 Grundlegende dynamische Eigenschaften . . . . .	57
4.2 Die Fatoumenge . . . . .	65
4.3 Die Juliamenge . . . . .	70
<b>Literatur</b>	<b>79</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>83</b>



# Einleitung

Bereits in den zwanziger Jahren begannen die ersten Versuche, die Theorie analytischer Funktionen in der komplexen Ebene zu verallgemeinern. H. Grötzsch betrachtete 1928 Homöomorphismen, die Winkel und Kreise zwar nicht erhielten, aber auch nicht zu stark verzerrten, die quasikonformen Abbildungen. Es entstand eine Theorie, die später von L. V. Ahlfors, O. Teichmüller, O. Lehto und K. I. Virtanen, um nur einige zu nennen, weiterentwickelt wurde. Die Theorie blieb dabei nicht auf die komplexe Ebene beschränkt, sondern wurde, zuerst von M. Lavrent'ev 1938, auch im  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq 2$  betrieben.

Zuerst hatte man sich nur mit Homöomorphismen beschäftigt, aber auch das Konzept von analytischen Funktionen, die nicht notwendigerweise bijektiv sind, läßt sich verallgemeinern. Man erhält die sogenannten quasiregulären Abbildungen. Allerdings bringt diese Abschwächung im  $\mathbb{R}^2$  keine neuen Erkenntnisse, da in dieser speziellen Situation jede quasireguläre Abbildung nichts anderes ist als eine analytische Funktion ausgeführt nach einer quasikonformen Abbildung. Anders sieht es im höherdimensionalen Raum aus. Dort stellt man zunächst fest, daß es für eine reiche Theorie unverzichtbar ist, Verzerrung im oben angesprochenen Sinne zuzulassen. So ist etwa eine konforme Abbildung im  $\mathbb{R}^n$  für  $n \geq 3$  schon immer eine Möbiustransformation, ein Ergebnis, welches im wesentlichen bereits auf J. Liouville zurückgeht. Des weiteren kann man zeigen, daß eine entsprechende Abbildung überhaupt nur dann nicht injektiv sein kann, wenn der Verzerrungskoeffizient oberhalb einer von der Dimension  $n$  abhängigen Konstante  $> 1$  liegt. Löst man sich jedoch von zu starken Einschränkungen der angesprochenen Art, so bietet die Theorie der quasiregulären Abbildungen ein vielfältiges Arbeitsgebiet, dessen systematische Erschließung in einer Reihe von zwischen 1966 und 1969 erschienenen Artikeln von Yu. G. Reshetnyak begonnen wurde. Die wichtigsten grundlegenden Eigenschaften quasiregulärer Abbildungen wurden von ihm darin mittels Methoden aus der Theorie der nicht-linearen, partiellen Differentialgleichungen, der Differentialgeometrie und der Theorie der Sobolevräume bewiesen. O. Martio, S. Rickman und J. Väisälä erweiterten, basierend auf einigen von Reshetnyaks Ergebnissen, die Theorie in einer von 1969 bis 1972 veröffentlichten Artikelserie, wobei sie noch andere als die von Reshetnyak benutzten Methoden zur Anwendung brachten. Besonders Betrachtungen der Module von Familien von Wegen konnten sie nutzbringend einsetzen.

Aufbauend auf den in den oben genannten Artikeln gelegten Grundsteinen wurde die Theorie der quasiregulären Abbildungen in den letzten dreißig Jahren facettenreich weiterentwickelt und entpuppte sich dabei als natürliche Verallgemeinerung einiger Aspekte der komplexen Funktionentheorie. Denn obwohl

wichtige Ergebnisse über analytische Funktionen wie etwa der Riemannsche Abbildungssatz oder die Potenzreihenentwicklung im Höherdimensionalen nicht zur Verfügung stehen, gibt es doch genügend tiefreichende Parallelen. So ist etwa jede quasireguläre Abbildung diskret und offen, und es gilt ein dem Satz von Weierstraß entsprechender Grenzwertsatz für Folgen  $K$ -quasiregulärer Abbildungen. Auch tiefliegendere Ergebnisse wie der Kleine Satz von Picard finden ihre Entsprechungen im Rahmen der quasiregulären Abbildungen. Dies gibt in vielen Fällen Anlaß zur Hoffnung, daß weitere Ergebnisse der komplexen Funktionentheorie für quasireguläre Abbildungen verallgemeinert werden können. Die vorliegende Arbeit stellt Untersuchungen in diese Richtung an.

M. Essén und S. Wu betrachten in ihrem Artikel [11] Familien analytischer Abbildungen, die eine Iterierte besitzen, die keinen Fixpunkt hat und zeigen, daß solche Familien normal sind. Inspiriert von dieser Arbeit untersuchen D. Bargmann und W. Bergweiler in [2] die Familie aller analytischen Abbildungen  $f$ , für die ein  $p > 1$  so existiert, daß  $f$  keinen periodischen Punkt der Periode  $p$  besitzt. Unter diesen schwächeren Voraussetzungen gelingt es ihnen immerhin noch, Quasinormalität der Ordnung eins zu zeigen. Anschließend verwenden sie diese Aussage im Beweis der Tatsache, daß eine ganze transzendente Funktion unendlich viele periodische Punkte beliebiger Periode echt größer eins besitzt. Es gelingt uns hier, die angesprochenen Ergebnisse ohne Abstriche für quasireguläre Abbildungen zu beweisen. Dies geschieht, nachdem im ersten Kapitel die grundlegenden in dieser Arbeit benötigten Aussagen und Begriffe eingeführt worden sind, in Kapitel 2 wie folgt.

Zunächst erarbeiten wir in Abschnitt 2.1 für uns im weiteren Verlauf nützliche graphentheoretische Aussagen. Hilfsmittel dieser Art werden auch implizit in [11] und in ausgearbeiteter Form in [2] verwendet. Die Ergebnisse aus Abschnitt 2.2 zielen ebenso auf die Verwendung in den nachfolgenden Abschnitten ab. Inhaltlich geht es in diesem Abschnitt um die Frage, unter welchen die Normalität betreffenden Bedingungen man in einer gegebenen Familie quasimeromorpher Abbildungen Funktionen finden kann, die geeignete Teilgebiete ihres Definitionsbereichs eigentlich auf gegebene Kugeln abbilden.

Im dritten Abschnitt des zweiten Kapitels befassen wir uns mit Familien quasiregulärer Abbildungen, die gewisse Normalitätsbedingungen erfüllen, und schließen aus diesen auf die Existenz von Fixpunkten beziehungsweise periodischen Punkten von zu diesen Familien gehörigen Funktionen oder deren Iterierten. Die Herangehensweise steht also im Gegensatz zu der in den oben angegebenen Artikeln. Diese machen wir uns in Abschnitt 2.4 zu eigen. Dabei ermöglichen die Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 übersichtliche Beweise der verallgemeinerten Versionen der beiden die Normalität beziehungsweise die Quasinormalität betreffenden Aus-

sagen aus den Artikeln [11] beziehungsweise [2]. Sowohl in Abschnitt 2.4 als auch in Abschnitt 2.3 diskutieren wir inwieweit die erzielten Ergebnisse ihre Gültigkeit auch für Familien quasimeromorpher Abbildungen behalten. Im letzten Abschnitt des zweiten Kapitels nutzen wir schließlich einige der bereitgestellten Aussagen, um, ähnlich wie dies in [2] geschieht, zu zeigen, daß eine ganze quasireguläre Abbildung, die eine wesentlichen Singularität in  $\infty$  hat, unendlich viele periodische Punkte beliebiger Periode  $p \geq 2$  besitzt. Mit diesem Ergebnis beschließen wir das zweite Kapitel.

M. Essén und S. Wu haben ihren Satz aus [11], motiviert durch Ergebnisse aus der Iterationstheorie analytischer Abbildungen, noch etwas verfeinert. Statt der oben angesprochenen Funktionenfamilien betrachten sie nun Familien analytischer Abbildungen, die eine Iterierte besitzen, die keinen abstoßenden Fixpunkt hat. Es gelingt ihnen auch in dieser Situation, die Normalität der betrachteten Familien nachzuweisen. Dabei bringen sie Methoden zur Anwendung, für die uns in höheren Dimensionen keine Entsprechungen zur Verfügung stehen. Dennoch beschäftigen wir uns in Kapitel 3 mit eben dieser Fragestellung im Rahmen der quasiregulären Abbildungen. Die graphentheoretischen Ergebnisse aus Abschnitt 2.1 stehen uns selbstverständlich auch hier zur Verfügung, aber die Hilfsmittel aus Abschnitt 2.2 müssen modifiziert werden. Dies geschieht in Abschnitt 3.1. Daran anschließend untersuchen wir in Abschnitt 3.2, inwiefern sich die Ergebnisse der Abschnitte 2.3 und 2.4 etablieren lassen, wenn wir statt Fixpunkten im allgemeinen ausschließlich abstoßende Fixpunkte betrachten. Es zeigt sich, daß die Verzweigungsmengen der zu den betrachteten Funktionenfamilien gehörenden Abbildungen eine Schlüsselrolle spielen und daß wir diese Mengen betreffende Bedingungen voraussetzen müssen. Wir erhalten somit nicht so starke Aussagen wie in Kapitel 2. Insbesondere gelingt es uns nicht, das erwähnte, verschärfte Normalitätsergebnis von M. Essén und S. Wu auf quasireguläre Abbildungen zu übertragen. Explizit beschäftigen wir uns in Abschnitt 3.2 nur mit Fixpunkten, sprechen aber auch die erzielbaren Ergebnisse über periodische Punkte an.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit stehen ebenfalls Familien quasimeromorpher Abbildungen und die Frage nach ihrer Normalität im Mittelpunkt. Wir beschäftigen uns darin mit der Iterationstheorie gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen, in deren Zentrum die Analyse der Fatoumenge, also der Menge aller Punkte, in denen die Familie der Iterierten der betrachteten Funktion normal ist, und ihres Komplements, der Juliamenge, steht. Die Entwicklung dieser Theorie nahm, motiviert durch die reich entwickelte Theorie der komplexen Dynamik, ihren Anfang Mitte der neunziger Jahre. In Abschnitt 4.1 erörtern wir, in welchem Rahmen eine höherdimensionale Iterationstheorie Sinn macht und stellen einige grundle-

gende Begriffe und Ergebnisse vor. Der darauffolgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Struktur der Fatoumenge. Wir stellen eine von A. Hinkkanen, G. Martin und V. Mayer für gleichmäßig quasimeromorphe Abbildungen eingeführte Klassifizierung der invarianten Zusammenhangskomponenten der Fatoumenge vor, die der aus der komplexen Iteration bekannten entspricht. Zum Ende des Abschnitts beweisen wir noch zwei einfache Ergebnisse über die sogenannten wandernden Komponenten, deren Existenz, anders als bei rationalen Funktionen, zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht ausgeschlossen werden kann. Komplettiert wird dieses Kapitel, das von uns auch als Überblick über die Iterationstheorie der gleichmäßig quasimeromorphen Abbildungen gedacht ist, durch Abschnitt 4.3, der sich ausschließlich mit der Juliamenge befaßt. Das zentrale, die Juliamenge betreffende Ergebnis der komplexen Dynamik ist, daß diese dem Abschluß der Menge der abstoßenden periodische Punkte der betrachteten Funktion entspricht. Im Rahmen der gleichmäßig quasimeromorphen Abbildungen war bisher nur ein von A. Hinkkanen, G. Martin und V. Mayer bewiesenes Teilergebnis in dieser Richtung bekannt. Auch uns gelingt es nicht, den angesprochenen Satz in voller Allgemeinheit zu beweisen, jedoch können wir das Ergebnis von Hinkkanen, Martin und Mayer erweitern. Dabei kommen einige der in den Kapiteln 2 und 3 erarbeiteten Ergebnisse zur Anwendung.

An dieser Stelle möchte ich besonders Prof. Dr. W. Bergweiler für die Vergabe des Themas und die hervorragende Betreuung danken. Nicht zuletzt gilt ihm mein Dank für die Vermittlung eines Stipendiums der Deutsch-Israelischen Stiftung für Wissenschaftliche Forschung und Entwicklung, für deren Unterstützung ich mich ebenfalls bedanken möchte. Des weiteren danke ich Sonja Tscheu und Frank Paasch sowie meinen Büromitbewohnern Ralf Meyer und Martin Hemke, die über zwei Jahre alle Höhen und Tiefen der Entstehung dieser Arbeit hilfsbereit und gelassen begleitet haben. Schließlich danke ich noch meiner Familie, die sich zwar nicht für Mathematik interessiert, aber mir immer das Gefühl gegeben hat, daß sie meine Arbeit ganz großartig findet.

# 1 Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst, nach kurzen Angaben über unsere Bezeichnungsweise, in die Theorie der quasiregulären Abbildungen einführen. Wir geben eine analytische Definition quasiregulärer Abbildungen und diskutieren nachfolgend einige der grundlegendsten und wichtigsten Eigenschaften dieser Abbildungen. Dabei orientieren wir uns maßgeblich an dem Buch [33] von S. Rickman. Für einen Einblick in den Themenkreis der quasiregulären Abbildungen ist des weiteren die Monographie [30] von Yu. G. Reshetnyak zu empfehlen. Im dritten Abschnitt dieses Kapitels wenden wir uns einem topologischen Begriff zu, der Aussagen über Vielfachheiten von  $a$ -Stellen und verwandte Fragestellungen ermöglicht, dem topologischen Grad. Dieser ist für stetige Funktionen definiert, ist also durchaus nicht auf den Kontext quasiregulärer Abbildungen beschränkt, und wird in unserer Arbeit immer wieder Verwendung finden. Schließlich geben wir noch einige speziellere und teilweise tiefliegende Ergebnisse an, die wir für Beweise von Aussagen in den folgenden Kapiteln benötigen. Hier stellen wir unter anderem den Satz von Rickman, ein höherdimensionales Analogon zum Kleinen Satz von Picard, vor, der sich als Dreh- und Angelpunkt der in den nächsten Kapiteln folgenden Ergebnisse erweisen wird.

## 1.1 Notation

Im vorliegenden Text bezeichnen wir den  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum mit  $\mathbb{R}^n$ , wobei, falls nicht anders erwähnt,  $n \geq 2$  gelte. Das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und für jeden Vektor  $x \in \mathbb{R}^n$  ist  $|x| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  die euklidische Norm von  $x$ . Ist  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare Abbildung, so verwenden wir die Operatornorm  $|A| := \max_{|h|=1} |Ah|$ . Des weiteren ist für eine auf einer Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  definierte Abbildung  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\|f\|_\infty$  die Supremumsnorm gemeint. Um den Abstand zweier Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  zu messen, verwenden wir den Term  $\text{dist}(A, B) := \inf\{|x - y|; x \in A, y \in B\}$  und setzen  $\text{dist}(x, B) := \text{dist}(\{x\}, B)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Den Durchmesser einer Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  bezüglich des euklidischen Abstands definieren wir durch  $\text{diam } A := \sup\{|x - y|; x, y \in A\}$ .

Mit  $\overline{\mathbb{R}^n}$  bezeichnen wir die Einpunktkompaktifizierung des  $\mathbb{R}^n$ . Auf diesem Raum verwenden wir die sphärische Metrik

$$\chi : \overline{\mathbb{R}^n} \times \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2}(1+|y|^2)^{1/2}} & , \text{ falls } x, y \neq \infty \\ \frac{2}{(1+|x|^2)^{1/2}} & , \text{ falls } y = \infty \end{cases}.$$

Die Kugel um einen Punkt  $x$  mit Radius  $r > 0$  bezeichnen wir mit  $B(x, r)$ .

Betrachten wir Kugeln im  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , so verwenden wir die sphärische Metrik und bezeichnen die Kugel mit  $B_x(x, r)$ .

Für eine Menge  $A$  verwenden wir die Bezeichnung  $\overline{A}$  für den Abschluß,  $\text{int } A$  für das Innere und  $\partial A$  für den Rand von  $A$ . Wollen wir hervorheben bezüglich welchen Raumes  $X$  diese topologischen Operationen ausgeführt werden, so indizieren wir die jeweiligen Symbole mit  $X$ .

Das Lebesgue-Maß im  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir mit  $m$  oder, falls wir die Dimension hervorheben wollen, mit  $m_n$ , die Mächtigkeit einer Menge  $M$  mit  $\text{card } M$ . Ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion, so bezeichnen wir mit  $f_i$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion. Ist  $f$  partiell beziehungsweise total differenzierbar, so schreiben wir  $D_i f_j$  für die  $i$ -te partielle Ableitung der  $j$ -ten Koordinatenfunktion und  $Df(x)$  für die totale Ableitung an der Stelle  $x$ . Mit  $J_f(x)$  bezeichnen wir die Determinante der Jacobi-Matrix von  $f$  an der Stelle  $x$ , mit  $\det A$  die Determinante einer linearen Abbildung  $A$  im allgemeinen. Die Menge der auf einer Menge  $M$  definierten stetigen Funktionen bezeichnen wir mit  $C(M)$ . Ist  $M$  offen, so bezeichnet  $C^k(M)$  die Menge der auf  $M$  definierten  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Für eine beliebige Funktion  $f$  schreiben wir die  $k$ -fache Hintereinanderausführung dieser Funktion als  $f^k$ . Dabei setzen wir  $f^0 := \text{id}$ .

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß wir, um den Text übersichtlicher zu gestalten, einen Beweis mit dem Symbol  $\square$  beschließen und das Ende einer Bemerkung oder eines anderen wichtigen Einschubs mit  $\triangleleft$  kennzeichnen.

Eine Auflistung aller wichtigen in dieser Arbeit verwendeten Symbole findet sich im Symbolverzeichnis am Ende dieser Arbeit.

## 1.2 Quasireguläre Abbildungen

In diesem Abschnitt werden wir eine analytische Definition der quasiregulären Abbildungen geben. Im wesentlichen wird sie aus zwei Punkten bestehen. Zuerst soll eine quasireguläre Abbildung infinitesimal kleine Kugeln fast überall in ihrem Definitionsbereich nur beschränkt verzerren. Die zweite Bedingung ist mehr analytischen Charakters und schränkt die Klasse der betrachteten Funktionen so ein, daß wichtige Ergebnisse wie etwa ein Grenzwertsatz beweisbar sind, aber auch genügend interessante Funktionen übrig bleiben. Für diese Aufgabe zeigt sich der Begriff der absoluten Stetigkeit auf Geraden als geeignet, den wir zunächst einführen wollen. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts beschäftigen wir uns mit einigen wichtigen Eigenschaften quasiregulärer Abbildungen und geben abschließend eine Reihe von Beispielen quasiregulärer Abbildungen an.

Zur Erinnerung wollen wir noch kurz aufführen, was man unter absoluter Stetigkeit einer reellen Funktion versteht, bevor wir den Begriff der absoluten

Stetigkeit auf Geraden für vektorwertige Funktionen mit Definitionsbereichen im  $\mathbb{R}^n$  einführen.

**1.2.1 Definition** Sei  $[a, b]$  ein reelles Intervall, und sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Dann heißt  $f$  absolut stetig, wenn für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  so existiert, daß für jedes  $k \in \mathbb{N}$  und alle paarweise disjunkten Intervalle  $[\alpha_1, \beta_1], \dots, [\alpha_k, \beta_k] \subset [a, b]$ , für die  $\sum_{j=1}^k (\beta_j - \alpha_j) < \delta$  gilt, die Bedingung  $\sum_{j=1}^k |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$  erfüllt ist.

Wie üblich wird diese Definition für vektorwertige Funktionen komponentenweise verstanden.

**1.2.2 Definition** Seien  $[a_1, b_1], \dots, [a_n, b_n]$  reelle Intervalle. Mit  $Q$  bezeichnen wir den achsenparallelen Quader  $\{x \in \mathbb{R}^n; \forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i \leq x_i \leq b_i\}$ . Des weiteren sei  $P_i := \text{id} - e_i \pi_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , wobei wir mit  $e_i$  den  $i$ -ten Einheitsvektor und mit  $\pi_i$  die Projektion auf die  $i$ -te Komponente bezeichnen.

Eine Funktion  $f : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt absolut stetig auf Geraden (kurz ACL für absolutely continuous on lines), falls  $f$  stetig ist und folgendes für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt:

Ist  $E_i$  die Menge aller  $x \in P_i(Q)$ , für die die Abbildung  $t \mapsto f(x + te_i)$  auf  $[a_i, b_i]$  nicht absolut stetig ist, so gilt  $m_{n-1}(E_i) = 0$ .

Ist  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen, so heißt  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolut stetig auf Geraden, falls  $f|_Q$  für alle achsenparallelen, abgeschlossenen Quader  $Q \subset U$  absolut stetig auf Geraden ist.

Beispiele für Funktionen, die ACL sind, sind affine Abbildungen, Lipschitz-Funktionen ebenso wie  $C^1$ -Funktionen. Eine wichtige Eigenschaft auf Geraden stetiger Funktionen findet sich im nächsten Satz, dessen Beweis in [35] auf Seite 88 nachzulesen ist.

**1.2.3 Satz** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine auf Geraden absolut stetige Funktion.

Dann existieren die partiellen Ableitungen von  $f$  fast überall in  $G$  und sind auf ihrem Definitionsbereich Borelfunktionen.

Für die Definition quasiregulärer Abbildungen wollen wir auch an die partiellen Ableitungen noch Bedingungen stellen. Dafür führen wir den folgenden Begriff ein.

**1.2.4 Definition** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet,  $p \geq 1$ , und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine auf Geraden absolut stetige Funktion.

Wir sagen  $f$  ist  $ACL^p$ , falls die partiellen Ableitungen lokal  $L^p$ -integrierbar sind.

*Bemerkung:* Alternativ kann man einen Zugang über Sobolevräume wählen, da die  $ACL^p$ -Funktionen den stetigen Funktionen entsprechen, die lokal  $L^p$ -Funktionen sind und deren schwache partielle Ableitungen erster Ordnung ebenfalls lokal  $L^p$ -Funktionen sind. Genauere Ausführungen finden sich in [33] ab Seite 5.

◁

Zum Abschluß wollen wir noch einen Satz zitieren, der sich im Umgang mit  $ACL^p$ -Funktionen als nützlich erweist. Der Beweis ist in [33] auf Seite 9 nachzulesen.

**1.2.5 Satz** Seien  $D, G \subset \mathbb{R}^n$  Gebiete, und die Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei  $ACL^p$ . Es sei  $g : D \rightarrow G$  ein  $C^2$ -Diffeomorphismus und  $h : f(G) \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Lipschitz-Funktion.

Dann sind  $h \circ f$  und  $f \circ g$  beide  $ACL^p$ .

Wir kommen nun endlich zur Definition einer quasiregulären Abbildung, wobei wir uns auch hier an die Vorgehensweise von S. Rickman in [33] halten.

**1.2.6 Definition** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet.

Dann heißt  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  quasiregulär, wenn

- (1)  $f$  eine  $ACL^n$ -Funktion ist;
- (2) ein  $K \in [1, \infty)$  so existiert, daß  $|Df(x)|^n \leq K J_f(x)$  für fast alle  $x \in G$  gilt.

*Bemerkungen:* 1. Mit  $Df(x)$  ist hier zunächst nur die formale Ableitung gemeint. Dies bedeutet,  $Df(x)$  ist die lineare Abbildung, die auf den Einheitsvektoren  $e_i$  durch  $Df(x)e_i = \sum_{j=1}^n D_i f_j(x)e_j$  definiert ist. Die partiellen Ableitungen existieren nach Satz 1.2.3.

2. Ist  $f$  quasiregulär, so gilt für  $f$  auch die Ungleichung

$$(3) \quad J_f(x) \leq K' \left( \min_{|h|=1} |Df(x)h| \right)^n \quad \text{für ein } K' \geq 1 \text{ und für fast alle } x \in G.$$

Umgekehrt folgt aus (3) aber nicht die Bedingung (2) wie man sich am Beispiel von Projektionen klar machen kann.

3. Es erweist sich als natürlich, in der Definition zu fordern, daß eine quasireguläre Abbildung  $ACL^n$  sein soll, da diese Bedingung es ermöglicht, den Grenzwertsatz 1.2.9(d) zu beweisen.

4. Im Falle  $n = 2$  läßt sich eine quasireguläre Abbildung immer schon als Hintereinanderausführung einer analytischen und einer quasikonformen Abbildung schreiben. Dies liegt letztlich an der Lösbarkeit der Beltrami-Differentialgleichung, wie sich in [21] ab Seite 247 nachlesen läßt.

&lt;

**1.2.7 Definition** *Seien die Voraussetzungen wie in der vorangegangenen Definition.*

*Das Infimum der Menge aller  $K \geq 1$ , die die Ungleichung aus (2) erfüllen, heißt äußere Dilatation von  $f$  und wird mit  $K_O(f)$  bezeichnet.*

*Das Infimum der Menge aller  $K' \geq 1$ , die die Bedingung (3) erfüllen, heißt innere Dilatation von  $f$  und wird mit  $K_I(f)$  bezeichnet.*

*Der Wert  $K(f) := \max\{K_O(f), K_I(f)\}$  heißt (maximale) Dilatation. Die quasireguläre Abbildung  $f$  heißt  $K$ -quasiregulär, falls  $K(f) \leq K$  gilt.*

*Ein quasiregulärer Homöomorphismus heißt quasikonform.*

*Bemerkungen:* 1. Da eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, ist leicht einzusehen, daß die Werte  $K_O(f)$  und  $K_I(f)$  ebenfalls die Ungleichung (2) beziehungsweise (3) erfüllen.

2. Wir haben uns in den Definitionen nach S. Rickman gerichtet. Andere Autoren weichen in ihren Definitionen teilweise ab. So fordert Yu. G. Reshetnyak etwa in (2) die Ungleichung nur für den Absolutbetrag von  $J_f(x)$ , verlangt aber, daß die Determinante fast überall im Definitionsbereich ihr Vorzeichen nicht ändert. Er betrachtet also eine größere Klasse von Funktionen. Wir werden aber im nächsten Kapitel noch sehen, daß es sich dabei letztlich doch nur um eine technische Geschmackssache handelt. Des weiteren nennt Yu. G. Reshetnyak eine quasireguläre Abbildung  $K$ -quasiregulär, wenn  $K_O(f) \leq K$  gilt. Wieder andere benutzen die Dilatation, die aus der Ungleichung  $|Df(x)| \leq \tilde{K} \min_{|h|=1} |Df(x)h|$  gewonnen wird. Diese Ungleichung läßt sich selbstverständlich ebenfalls aus (2) folgern. Alle diese Definitionen sind in dem Sinne äquivalent, daß sie sich gegeneinander abschätzen lassen. Dies folgt aus den Beziehungen  $K_O(f) \leq K_I(f)^{n-1}$  und  $K_I(f) \leq K_O(f)^{n-1}$ , die sich aus den unten aufgeführten geometrischen Überlegungen ergeben.

In der Theorie der quasikonformen Abbildungen wird dagegen meist ein Zugang über Module von Familien von Wegen gewählt. Diese sind auch in der Theorie der quasiregulären Abbildungen ein überaus wichtiges Hilfsmittel. In [33] auf Seite 44 findet sich eine Charakterisierung quasiregulärer Abbildungen mittels dieses Begriffes.

&lt;

Als nächstes wollen wir uns verdeutlichen, was die Bedingung (2) geometrisch bedeutet. Genaueres läßt sich in [35] ab Seite 43 oder auch in [30] in Abschnitt I.4.1. nachlesen.

### Geometrische Interpretation:

Sei  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear und bijektiv. Wir setzen

$$H_I(A) := \frac{|\det A|}{(\min_{|h|=1} |Ah|)^n}, \quad H_O(A) := \frac{|A|^n}{|\det A|} \quad \text{und} \quad H(A) := \frac{|A|}{\min_{|h|=1} |Ah|}.$$

Sei  $B$  die Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ . Dann wird  $B$  von  $A$  auf einen Ellipsoiden  $E(A)$  abgebildet. Es gilt  $m(E(A)) = m(A(B)) = |\det A|m(B)$ .

Umschreibt man den Ellipsoid  $E(A)$  mit einer Kugel  $B_O(A)$ , so hat diese den Radius  $\max_{|h|=1} |Ah| = |A|$ , und es gilt  $m(B_O(A)) = |A|^n m(B)$ . Ebenso gilt die Gleichung  $m(B_I(A)) = (\min_{|h|=1} |Ah|)^n m(B)$  für die in  $E(A)$  eingeschriebene Kugel  $B_I(A)$ . Es gilt also

$$H_I(A) = \frac{m(E(A))}{m(B_I(A))} \quad \text{und} \quad H_O(A) = \frac{m(B_O(A))}{m(E(A))}.$$

Die Größe  $H(A)$  stellt den Quotient der größten und der kleinsten Halbachse von  $E(A)$  dar.

Wir bezeichnen nun die Halbachsen von  $E(A)$  in absteigender Größe mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ , es gilt also  $a_1 = |A|$  und  $a_n = \min_{|h|=1} |Ah|$ . Diese erhält man rechnerisch als die positiven Wurzeln der Eigenwerte der symmetrischen, selbstadjungierten, positiv definiten Matrix  $A^T A$ . Es gilt also  $\det A^T A = a_1^2 \dots a_n^2$  und somit  $\det A = a_1 \dots a_n$ . Wir erhalten die Formeln

$$H_I(A) = \frac{a_1 \dots a_{n-1}}{a_n^{n-1}}, \quad H_O(A) = \frac{a_1^{n-1}}{a_2 \dots a_n} \quad \text{und} \quad H(A) = \frac{a_1}{a_n}.$$

Es lassen sich nun die Beziehungen  $H_I(A) \leq H_O(A)^{n-1}$  und  $H_O(A) \leq H_I(A)^{n-1}$  einfach nachrechnen. Die Abschätzungen sind scharf, wie man für den Fall  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} > a_n$  sehen kann.

Diese Betrachtungen zeigen, daß eine quasireguläre Abbildung infinitesimal kleine Kugeln fast überall in ihrem Definitionsbereich nur in beschränktem Maß deformiert.

◁

Es erweist sich des öfteren als fruchtbar, statt des  $\mathbb{R}^n$  dessen Einpunktkompaktifizierung  $\overline{\mathbb{R}^n}$  versehen mit der eingangs eingeführten sphärischen Metrik zu betrachten.

**1.2.8 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet.

Eine stetige Funktion  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  heißt  $K$ -quasimeromorph, falls entweder  $f(G) = \{\infty\}$  gilt, oder  $f^{-1}(\infty)$  diskret und  $\tilde{f} := f|_{G \setminus (f^{-1}(\infty) \cup \{\infty\})}$   $K$ -quasiregulär ist.

Wir setzen  $K(f) := K(\tilde{f})$ ,  $K_O(f) := K_O(\tilde{f})$  und  $K_I(f) := K_I(\tilde{f})$ .

*Bemerkung:* Wir haben uns bei dieser Definition an dem Buch [36] von M. Vuorinen orientiert. Man kann die Definition quasiregulärer Funktionen auch ganz allgemein für Funktionen zwischen orientierten, zusammenhängenden, glatten Riemann- $n$ -Mannigfaltigkeiten formulieren. Genaueres hierzu findet sich bei S. Rickman in [33], Seite 11, oder bei Yu. G. Reshetnyak in [30] ab Seite 67.

◁

Wir wollen nun ein paar sehr wichtige Eigenschaften quasiregulärer Funktionen auflisten. Die aufgeführten Ergebnisse sind teilweise tieflegend und werden ohne Beweis aufgeführt. In den anschließenden Bemerkungen werden wir selbstverständlich auf die entsprechenden Quellen verweisen.

**1.2.9 Satz** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine quasireguläre Funktion.

- (a) Entweder ist  $f$  konstant oder diskret und offen.
- (b) Die Funktion  $f$  ist fast überall differenzierbar.
- (c) Ist  $H \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und ist  $g : H \rightarrow G$  eine weitere quasireguläre Abbildung, so ist  $f \circ g$  quasiregulär, und es gilt  $K_O(f \circ g) \leq K_O(f)K_O(g)$  und  $K_I(f \circ g) \leq K_I(f)K_I(g)$ .
- (d) Ist  $K \geq 1$  und ist  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $K$ -quasiregulärer Abbildungen in  $G$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $g : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  konvergiert, so ist auch  $g$  eine  $K$ -quasireguläre Abbildung.

*Bemerkungen:* Zu (a): Hierbei handelt es sich um eines der wichtigsten grundlegenden Ergebnisse über quasireguläre Abbildungen. Es wurde 1967 von Yu. G. Reshetnyak in [28] bewiesen. Der Beweis findet sich auch in [30] ab Seite 182. Reshetnyak zeigt, daß viele grundlegende Eigenschaften einer quasiregulären Funktion  $f$  von den Eigenschaften der Funktion  $\log |f(\cdot)|$ , die eine nicht-lineare, elliptische Differentialgleichung erfüllt, abgeleitet werden können. B. Bojarski und T. Iwaniec vereinfachen diesen Beweis in [7]. Schließlich findet sich in dem Buch [20] von T. Iwaniec und G. Martin ab Seite 401 eine verfeinerte Version des ursprünglichen Beweises. Als weitere Quelle sei noch das Buch [33] von S. Rickman, Kapitel VI, genannt, in dem aber grundsätzlich wie in den anderen Beweisen vorgegangen wird.

Zu(b): Auch dieses Ergebnis wurde zuerst von Yu. G. Reshetnyak in [28] bewiesen, wobei er Erkenntnisse über die Differenzierbarkeit von Funktionen mit schwachen Ableitungen verwendet (siehe auch [30] ab Seite 83). S. Rickman beweist das Resultat aufbauend auf bestimmten Eigenschaften der Koordinatenfunktionen quasiregulärer Abbildungen und einem Satz von L. Cesari und A. Calderón, welcher besagt, daß eine auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  definierte, reelle  $\text{ACL}^p$ -Funktion fast überall differenzierbar ist, falls  $p > n$  gilt. Sein Beweis findet sich in [33] ab Seite 142.

T. Iwaniec beweist in [18], daß  $K$ -quasireguläre Abbildungen tatsächlich schon immer  $\text{ACL}^p$ -Funktionen für ein  $p = p(n, K) > n$  sind. Somit läßt sich das oben genannte Resultat von L. Cesari und A. Calderón direkt nutzen. Der Beweis dieses Ergebnisses von T. Iwaniec ist allerdings aufwendig. Er findet sich auch in [7].

Zu(c): Auch dieses Ergebnis ist nicht sofort ersichtlich, da etwa die Hintereinanderausführung zweier  $\text{ACL}^n$ -Abbildungen im allgemeinen nicht  $\text{ACL}^n$  ist. Ein Beweis von (c) findet sich in [33] auf Seite 44.

Zu(d): Hierbei handelt es sich um ein weiteres Resultat, daß auf Yu. G. Reshetnyak zurückgeht, der es 1968 in [29] bewies. Der Beweis ist auch in [30] in Kapitel II.9.2 nachzulesen. In dem Buch [33] von S. Rickman findet sich eine vereinfachte Version dieses Beweises in Kapitel VI.8.

◁

Bevor wir einige Beispiele für quasireguläre Funktionen betrachten, wollen wir noch einen weiteren Begriff einführen.

**1.2.10 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine quasimeromorphe Abbildung.

Die Menge der Punkte aus  $G$ , die keine Umgebung derart besitzen, daß  $f$  eingeschränkt auf diese Umgebung ein Homöomorphismus ist, nennt man Verzweigungsmenge von  $f$  und bezeichnet sie mit  $B_f$ .

In vielen Fällen stellt sich die Frage, wie die Verzweigungsmenge der betrachteten Funktion aussieht. Der nächste Satz gibt Auskunft darüber, wie groß diese Menge werden kann.

**1.2.11 Satz** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  quasimeromorph und nicht konstant.

Dann gilt

$$\dim B_f = \dim f(B_f) \leq n - 2.$$

*Bemerkungen:* 1. Wir bezeichnen hier mit  $\dim$  die topologische Dimension (siehe

etwa [17]).

2. Wie viele Ergebnisse über die Verzweigungsmenge gilt auch der oben angegebene Satz schon für offene und diskrete Abbildungen auf  $n$ -Mannigfaltigkeiten. Er wurde zuerst von A. V. Chernavskiĭ bewiesen. Ein übersichtlicher Beweis findet sich in [34]. Es ist nicht geklärt, ob es quasireguläre Abbildungen gibt, deren Verzweigungsmengen nicht leer sind und Dimension  $< n - 2$  haben. Offene und diskrete Abbildungen mit diesen Eigenschaften sind jedoch bekannt.

3. Offensichtlich ist die Verzweigungsmenge immer abgeschlossen. Aus der obigen Abschätzung der Dimension von  $B_f$  läßt sich mittels der Tatsache, daß eine höchstens  $(n - 2)$ -dimensionale Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  den  $\mathbb{R}^n$  nicht zerlegen kann (siehe z. B. [1, Seite 390]), schließen, daß  $G \setminus B_f$  ein Gebiet ist.

4. Im Falle  $n = 2$  ist  $B_f$  diskret, wie man leicht an der Darstellung einer quasiregulären Funktion als eine Hintereinanderausführung einer analytischen und einer quasikonformen Abbildung sieht, deren Existenz wir schon in Bemerkung 4 nach Definition 1.2.6 angesprochen haben. Ist  $n \geq 3$ , so ist  $B_f$  eine perfekte Menge. Sie besitzt somit keine isolierten Punkte, falls sie nicht leer ist (siehe [8]).

◁

Wir kommen nun zu den versprochenen Beispielen. Zunächst wollen wir dabei eine Gruppe von Abbildungen betrachten, die im folgenden des öfteren eine Rolle spielen wird.

### Beispiele:

#### BEISPIEL 1 Möbiustransformationen

Um Möbiustransformationen definieren zu können, müssen wir zunächst Spiegelungen im  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , und zwar an Hyperebenen und an Kugelschalen, betrachten. Die nachfolgenden Ergebnisse können in [3] nachgelesen werden.

Die Spiegelung an der Hyperebene  $P(a, t) := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, a \rangle = t\} \cup \{\infty\}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , hat die Form  $S_H := \text{id} - 2(\langle \text{id}, a \rangle - t) a / |a|^2$ .

Die Spiegelung an der Kugelschale  $\partial B(a, r)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ , hat die Form  $S_K := a + r^2(\text{id} - a) / |\text{id} - a|^2$ .

Jede Spiegelung ist ein Diffeomorphismus des  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , und es gilt  $|DS(x)|^n = |J_S(x)|$ . Die Determinante der Jacobi-Matrix  $J_S(x)$  ist für alle  $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$  negativ. Daran können wir sofort erkennen, daß eine Spiegelung oder eine Hintereinanderausführung einer ungeraden Anzahl von Spiegelungen nicht quasiregulär sein kann. Jedoch ist jede Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Spiegelungen eine 1-quasireguläre Abbildung.

**1.2.12 Definition** *Eine Möbiustransformation ist eine Hintereinanderausführung endlich vieler Spiegelungen.*

Wichtige Beispiele für quasireguläre Möbiustransformationen sind Translationen und Streckungen, die sich jeweils als Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen schreiben lassen.

Da eine quasireguläre Möbiustransformation  $M$  ein Diffeomorphismus ist und  $|DM(x)|^n = J_M(x)$  gilt, ist es in vielen Fällen möglich, statt einer gegebenen quasiregulären Funktion  $f$  die Funktionen  $M^{-1} \circ f \circ M$  oder  $f \circ M$  zu betrachten und dadurch die Ausgangssituation zu vereinfachen. In den folgenden Kapiteln werden wir uns diese Tatsache des öfteren zu nutze machen.

BEISPIEL 2 Nichtsinguläre affine Abbildungen sind quasiregulär.

BEISPIEL 3 Eine auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbare Funktion  $f$  ist quasiregulär, falls sie folgende Bedingungen erfüllt.

Es existieren  $\gamma, M \in \mathbb{R}_{>0}$  so, daß für fast alle  $x \in G$  die Ungleichungen  $J_f(x) \geq \gamma$  und  $|Df(x)| \leq M$  erfüllt sind.

Bevor wir nun noch etwas interessantere Beispiele betrachten, wollen wir einige Punkte angeben, die verdeutlichen, daß es nicht sinnvoll ist, sich auf zu glatte Funktionen oder Funktionen mit Dilatation nahe 1 zu beschränken. Für genauere Bemerkungen und Literaturangaben verweisen wir auf [33], Seiten 11, 12 sowie 161. Im folgenden sei  $n \geq 3$ .

- Jede nicht-konstante 1-quasireguläre Abbildung ist schon die Restriktion einer geeigneten Möbiustransformation.
- Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $K_n > 1$  nahe bei 1 so, daß jede  $K_n$ -quasireguläre Abbildung ein lokaler Homöomorphismus ist.
- Eine lokal homöomorphe quasireguläre Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist ein Homöomorphismus und somit quasikonform.
- Alle nicht-konstanten quasiregulären  $C^3$ -Funktionen sind lokale Homöomorphismen.

BEISPIEL 4 Sei  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sei

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \begin{cases} x|x|^{\alpha-1} & , \text{ falls } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ falls } x = 0 \end{cases} .$$

Dann ist  $f$  quasiregulär, sogar quasikonform, und es gilt:

$$K_O(f) = \alpha^{n-1} \text{ und } K_I(f) = \alpha, \text{ falls } \alpha \geq 1 \text{ ist,}$$

$$K_O(f) = 1/\alpha \text{ und } K_I(f) = (1/\alpha)^{n-1}, \text{ falls } \alpha < 1 \text{ ist.}$$

Für  $\alpha < 1$  erhält man so ein Beispiel einer quasiregulären Abbildung, also einer Funktion mit beschränkter Verzerrung, deren Ableitungen in jeder Umgebung von Null unbeschränkt sind.

BEISPIEL 5 Sei  $m > 1$ . Definiere für  $n \geq 3$  die Funktion  $f$  wie folgt:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \begin{cases} x & , \quad x_{n-1} = x_n = 0 \\ (x_1, \dots, x_{n-2}, r \cos m\phi, r \sin m\phi) & , \quad x_{n-1}^2 + x_n^2 > 0 \end{cases} ,$$

wobei  $x_{n-1} = r \cos \phi$ ,  $x_n = r \sin \phi$ ,  $r = (x_{n-1}^2 + x_n^2)^{1/2}$  und  $0 \leq \phi < 2\pi$  ist.

Die Abbildung  $f$  läßt die Menge  $A := \{x \in \mathbb{R}^n ; x_{n-1} = x_n = 0\}$  fest. Umläuft  $x$  einen Kreis  $\Gamma$  mit Mittelpunkt in  $A$ , der in der zweidimensionalen Ebene orthogonal zu  $A$  liegt, ein Mal, so umläuft  $f(x)$  diesen Kreis  $m$  Mal in derselben Richtung. Es läßt sich nachrechnen, daß  $f$  quasiregulär ist. Es gilt  $K_O(f) = m^{n-1}$  und  $K_I(f) = m$ . Für die Verzweigungsmenge gilt  $B_f = A$  und somit  $\dim B_f = n - 2$ .

BEISPIEL 6 Für  $n = 3$  läßt sich verhältnismäßig einfach eine quasireguläre Funktion  $f$  konstruieren, die in einigen Eigenschaften mit der komplexen Exponentialfunktion übereinstimmt. Diese Funktion wird nach V. A. Zorich, der sie in [39] beschrieb, Zorich-Funktion genannt. Um sie zu konstruieren, zerlegt man den  $\mathbb{R}^3$  durch ein Ebenengitter bestehend aus den Ebenen  $\{(i, x, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$  und  $\{(x, j, y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$ ,  $i, j \in \mathbb{Z}$ , in kongruente, unbeschränkte Zylinder  $C$ . Anschließend wählt man einen Zylinder  $C_0$  und bildet ihn quasikonform auf den Halbraum  $H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z > 0\}$  ab. Diese Abbildung setzt man fort, indem man entsprechend oft an den Flächen der Zylinder  $C$  und dem Rand des Halbraumes  $H$  spiegelt. Die resultierende Funktion ist doppelt periodisch mit den Perioden  $2e_1$  und  $2e_2$ , wobei mit  $e_i$  wieder die entsprechenden Einheitsvektoren bezeichnet sind. Sie wächst gemäß der Gleichung  $|f(x)| = e^{x^3}$ , und es gilt  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Die angegebene Konstruktion läßt sich für  $n > 3$  verallgemeinern.

◁

Eine ausführliche Betrachtung der Beispiele 4 und 5 findet man in [30] ab Seite 63. Die Konstruktion der Zorich-Funktion läßt sich in [33] auf Seite 15 nachlesen. In beiden Quellen finden sich auch weitere Beispiele.

### 1.3 Der topologische Grad

Für viele Sätze der Funktionentheorie gibt es Analoga in der Theorie der quasiregulären Abbildungen in höheren Dimensionen. Einen wichtigen und hilfreichen Begriff stellt im Komplexen die Windungszahl dar, die unter anderem dazu benutzt werden kann, die Anzahl von Nullstellen gemäß Vielfachheit in bestimmten Gebieten auszurechnen. Ein solches Konzept erweist sich auch im Höherdimensionalen als nützlich und wird durch den topologischen Grad realisiert. Wir halten uns in dieser Einführung im wesentlichen an das Buch von K. Deimling [9].

**1.3.1 Satz, Definition** Sei  $M$  die Menge aller Tripel  $(f, \Omega, y)$ , wobei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und offen,  $f: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  ist.

Es existiert genau eine Funktion  $\mu: M \rightarrow \mathbb{Z}$ , die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- ( $\mu 1$ ) Es gilt  $\mu(\text{id}, \Omega, y) = 1$  für alle beschränkten und offenen  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und alle  $y \in \Omega$ .
- ( $\mu 2$ ) Es gilt  $\mu(f, \Omega, y) = \mu(f, \Omega_1, y) + \mu(f, \Omega_2, y)$ , falls  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt ist,  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  offene, disjunkte Teilmengen von  $\Omega$  sind und  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$  ist.
- ( $\mu 3$ ) Der Wert  $\mu(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$  ist unabhängig von  $t \in [0, 1]$ , falls die Funktionen  $h: [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig sind, und  $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt.

Ein Tripel  $(f, \Omega, y)$  heißt zulässig, wenn es in  $M$  liegt.

Die Funktion  $\mu$  heißt der topologische (oder auch der lokale) Grad.

*Bemerkungen:* 1. Bei der Bedingung ( $\mu 1$ ) handelt es sich um eine Normalisierung, während ( $\mu 2$ ) Informationen über die Lage der Urbilder der betrachteten Werte liefert. Schließlich ermöglicht die Bedingung ( $\mu 3$ ), den Wert von  $\mu$  für eine komplizierte Funktion zu berechnen, indem man ihn für einfachere Funktionen bestimmt, die die komplizierte Funktion geeignet approximieren.

2. Es ist wichtig, sich bei der Benutzung von  $\mu$  davon zu überzeugen, daß die eingesetzten Tripel zulässig sind. Im folgenden, auch in späteren Kapiteln, werden wir nicht ausdrücklich überprüfen, daß nur zulässige Tripel verwendet werden, der Leser darf aber davon ausgehen, daß dies geschehen ist.

3. Die Konstruktion der Funktion  $\mu$  kann auf verschiedene Weisen durchgeführt werden. Der ältere Zugang nutzt Methoden der algebraischen Topologie und ist zum Beispiel in dem Buch von P. Alexandroff und H. Hopf ([1]) zu finden. Eine andere Möglichkeit nutzt analytische Mittel wie den Approximationssatz von K. Weierstraß und den Satz über implizite Funktionen. Dieser Ansatz findet sich in [9]. Dabei betrachtet man im Definitionsbereich von  $\mu$  zuerst nur Funktionen  $f$ , die auf  $\Omega$  stetig differenzierbar sind und Werte  $y$  so, daß die Determinante der Jacobimatrix von  $f$  in den Punkten der Menge  $f^{-1}(y)$  ungleich Null ist. Für solche Funktionen und Werte definiert man  $\mu(f, \Omega, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sgn } J_f(x)$ , wobei  $\sum_{\emptyset} = 0$  gesetzt wird. Im folgenden werden allgemeinere Funktionen und Werte geeignet approximiert. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, erweist es sich als ausreichend festzustellen, daß  $\mu$  durch die Werte auf den invertierbaren, linearen Abbildungen eindeutig bestimmt ist.

3. Wir wollen nun noch kurz auf den Zusammenhang zwischen  $\mu$  und der Windungszahl  $n(\cdot, \cdot)$  im  $\mathbb{R}^2$  eingehen.

Zu jeder geschlossenen Kurve  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es eine stetige Funktion  $f : \partial B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  so, daß  $\text{Bild } f = \text{Bild } \gamma$  gilt. Wir können nun die Funktion  $f$  auf beliebige Weise stetig auf  $B(0, 1)$  fortsetzen. Der Wert  $\mu(\cdot, B(0, 1), a)$  hängt für alle  $a \notin f(\partial B(0, 1))$  nicht von der gewählten Fortsetzung ab, wie man aus  $(\mu 3)$  folgern kann. Es gilt nun  $\mu(f, B(0, 1), a) = n(\gamma, a)$ . Den Beweis und genauere Erklärungen findet man in [9] ab Seite 30.

◁

Als nächstes wollen wir einige Eigenschaften von  $\mu$  auflisten. Sie sind leicht aus  $(\mu 1)$ - $(\mu 3)$  oder der Konstruktion von  $\mu$  zu folgern und in [9] im ersten Kapitel nachzulesen.

**1.3.2 Satz** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt,  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , und sei  $f \in C(\overline{\Omega})$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- ( $\mu 4$ ) Es gilt  $\mu(f, \emptyset, y) = 0$ .  
Insbesondere gilt  $\mu(f, \Omega, y) = 0$ , falls  $f^{-1}(y) = \emptyset$  ist. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht.
- ( $\mu 5$ ) Sei  $r := \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$ . Die Funktion  $\mu(\cdot, \Omega, y)$  beziehungsweise  $\mu(f, \Omega, \cdot)$  ist auf  $\{g \in C(\overline{\Omega}); \|g - f\|_\infty < r\}$  beziehungsweise  $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n$  konstant.
- ( $\mu 6$ ) Ist  $f$  injektiv und  $y \in f(\Omega)$ , so gilt  $|\mu(f, \Omega, y)| = 1$ .
- ( $\mu 7$ ) Die Funktion  $\mu(f, \Omega, \cdot)$  ist auf den Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  konstant.

Der nächste Satz, den wir angeben, beinhaltet eine nützliche Formel zur Berechnung des topologischen Grades von Hintereinanderausführungen geeigneter Funktionen.

**1.3.3 Satz** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt. Sei  $f \in C(\overline{\Omega})$ , und sei  $g \in C(\mathbb{R}^n)$ . Mit  $K_i, i \in I$ , bezeichnen wir die beschränkten Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Schließlich sei  $y \in \mathbb{R}^n \setminus (g \circ f)(\partial\Omega)$ . Dann gilt

$$\mu(g \circ f, \Omega, y) = \sum_{i \in I} \mu(f, \Omega, K_i) \mu(g, K_i, y),$$

wobei  $\mu(f, \Omega, K_i) = \mu(f, \Omega, x)$  für ein beliebiges  $x \in K_i$  sei.

*Bemerkungen:* 1. Der Ausdruck  $\mu(f, \Omega, K_i)$  ist aufgrund von  $(\mu 7)$  wohldefiniert. Auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  hat  $\mu(f, \Omega, \cdot)$  den Wert Null. Es ist also gerechtfertigt, sie bei den Betrachtungen wegzulassen.

2. Ist  $g : f(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, so läßt  $g$  sich zu einer auf  $\mathbb{R}^n$  stetigen Funktion  $\tilde{g}$  fortsetzen (siehe etwa [9, Seite 6]). Es gilt dann nach obiger Formel  $\mu(g \circ f, \Omega, y) = \sum_{i \in I} \mu(f, \Omega, K_i) \mu(\tilde{g}, K_i, y)$ , da  $\mu(f, \Omega, K_i) = 0$  ist, sobald  $K_i \not\subset f(\overline{\Omega})$  gilt. Die Bedingung, daß  $g$  auf dem ganzen  $\mathbb{R}^n$  definiert sein soll, stellt also keine Einschränkung dar.

3. Man kann sich leicht überlegen, daß die Summe in der Formel in Satz 1.3.3 endlich ist. Die Formel läßt sich beweisen, indem man sie zuerst für stetig differenzierbare Funktionen und geeignete Werte  $y$  zeigt und anschließend die allgemeineren Funktionen und Werte approximiert. Der Beweis ist in [9] auf Seite 24 nachzulesen.

◁

Ist der Wert des topologischen Grades Null, so läßt sich im allgemeinen keine Aussage darüber treffen, ob der betrachtete Wert  $y$  angenommen wird oder nicht. Anders sieht es in dem speziellen Fall der orientierungserhaltenden Abbildungen aus, die wir als nächstes betrachten wollen. Zuvor führen wir noch eine vereinfachende Bezeichnungsweise ein.

**1.3.4 Bezeichnung** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Mit  $\mathcal{K}(G)$  bezeichnen wir die Menge aller Gebiete, deren Abschluß eine kompakte Teilmenge von  $G$  ist.

**1.3.5 Definition** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

Dann heißt  $f$  orientierungserhaltend beziehungsweise orientierungsumkehrend, falls für alle  $D \in \mathcal{K}(G)$  und alle  $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$  die Ungleichung  $\mu(f, D, y) > 0$  beziehungsweise  $\mu(f, D, y) < 0$  gilt.

*Bemerkungen:* 1. Ist  $f$  eine differenzierbare Funktion und  $y$  ein nicht-singulärer Wert, so entspricht die Forderung in der vorangegangenen Definition der Bedingung  $J_f(x) > 0$  beziehungsweise  $J_f(x) < 0$  für alle  $x \in f^{-1}(y)$ .

2. Die Produktformel 1.3.3 zeigt, daß Hintereinanderausführungen zweier orientierungserhaltender oder zweier orientierungsumkehrender Funktionen orientierungserhaltend sind, während Hintereinanderausführungen einer orientierungserhaltenden und einer orientierungsumkehrenden Funktion orientierungsumkehrend sind.

◁

Wir können nun eine weitere wichtige Eigenschaft quasiregulärer Abbildungen formulieren. Der folgende Satz geht auf Yu. G. Reshetnyak zurück, ein Beweis findet sich auch im Buch [33] von S. Rickman in Abschnitt VI.5.

**1.3.6 Satz** *Eine quasireguläre Abbildung ist konstant oder orientierungserhaltend.*

*Bemerkung:* Man kann zeigen (siehe etwa [33, Seite 18]), daß stetige, diskrete, offene Abbildungen schon immer orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend sind. Fordert man in der Definition der quasiregulären Abbildungen in Bedingung (2), daß die dortige Ungleichung nur für den Betrag der Determinante der Jacobimatrix erfüllt sein muß, so läßt man auch orientierungsumkehrende Funktionen zu. Dies ist aufgrund des eben genannten Ergebnisses nur eine technische Geschmacksfrage.

◁

Als nächstes wollen wir einen Begriff einführen, der die Vielfachheit einer  $y$ -Stelle beschreibt, den sogenannten topologischen (oder auch lokalen) Index.

**1.3.7 Definition** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und diskret. Des weiteren seien  $x \in G$  und  $U \in \mathcal{K}(G)$  derart, daß  $\overline{U} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$  gilt. Dann heißt  $i(x, f) := \mu(f, U, f(x))$  topologischer (oder lokaler) Index von  $x$ .*

*Bemerkungen:* 1. Die Eigenschaft ( $\mu 2$ ) sichert die Unabhängigkeit von  $i(x, f)$  von der Umgebung  $U$ .

2. Nach ( $\mu 7$ ) ist  $|i(\cdot, f)| = 1$  außerhalb der Verzweigungsmenge  $B_f$ . Des weiteren gilt nach ( $\mu 2$ ) für  $D \in \mathcal{K}(G)$  und  $y \in f(D) \setminus f(\partial D)$  und  $D \cap f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  die Gleichung  $\mu(f, D, y) = \sum_{j=1}^k i(x_j, f)$ .

3. Man kann für jede natürliche Zahl  $k$  eine quasireguläre Funktion angeben, die Punkte besitzt, deren Index  $k$  beträgt. Beispiel 5 des vorangegangenen Kapitels liefert etwa für jedes  $m > 1$  eine Funktion, für die gilt, daß der Index jedes Punktes der dort definierten Menge  $A$  gleich  $m$  ist. Betrachtet man jedoch das Infimum über  $i(x, f)$  für  $x \in F \subset B_f$ , wobei  $F$  in gewissem Sinne groß genug sein muß, ist dieses Infimum kleiner als eine nur von  $n$  und  $K(f)$  abhängige Konstante. Ist also  $F \subset B_f$  geeignet gewählt, ausreichend ist etwa  $F$  als ein nicht-degeneriertes Kontinuum zu wählen, so kann  $i(\cdot, f)$  nicht in jedem  $x \in F$  beliebig groß werden. Genauer findet sich in [33] ab Seite 73.

◁

Um den topologischen Grad bestimmen zu können, muß man die Zulässigkeit der betrachteten Tripel gewährleisten. Dazu ist es interessant zu wissen, worauf der Rand des betrachteten Gebietes abgebildet wird.

**1.3.8 Definition** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, diskret und offen.*

Ein Gebiet  $D \in \mathcal{K}(G)$  heißt normales Gebiet von  $f$ , falls  $f(\partial D) = \partial f(D)$  gilt.  
 Eine normale Umgebung eines Punktes  $x \in G$  ist ein normales Gebiet  $U$  von  $f$ , für das  $U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$  gilt.

*Bemerkungen:* 1. Es gilt unter den Voraussetzungen der vorangegangenen Definition für alle  $D \in \mathcal{K}(G)$  schon immer  $\partial f(D) \subset f(\partial D)$ . Die umgekehrte Inklusion ist im allgemeinen nicht gegeben.

2. Ist  $D$  ein normales Gebiet von  $f$ , so gilt  $f(D) \cap f(\partial D) = \emptyset$ , also ist  $\mu(f, D, \cdot)$  nach ( $\mu 6$ ) konstant auf  $f(D)$ .

◁

Die folgenden beiden Lemmata helfen uns bei der Suche nach normalen Gebieten. Die einfachen Beweise finden sich etwa in [33] ab Seite 18.

**1.3.9 Lemma** Seien  $U, G \subset \mathbb{R}^n$  Gebiete, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, diskret und offen. Sei  $D$  eine Komponente von  $f^{-1}(U)$ , für die  $D \in \mathcal{K}(G)$  gilt.  
 Dann ist  $D$  ein normales Gebiet von  $f$ . Des weiteren gilt  $f(D) = U$  und  $U \in \mathcal{K}(f(G))$ .

**1.3.10 Bezeichnung** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, diskret und offen. Für  $x \in G$  und  $s > 0$  bezeichnen wir mit  $U(x, f, s)$  die Komponente von  $f^{-1}(B(f(x), s))$ , die  $x$  enthält.

**1.3.11 Lemma** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, diskret und offen. Sei  $x \in G$ .  
 Dann existiert ein  $s_x > 0$  derart, daß das Gebiet  $U(x, f, s)$  für alle  $0 < s < s_x$  eine normale Umgebung von  $x$  ist. Des weiteren gilt  $f(U(x, f, s)) = B(f(x), s)$  und  $\text{diam } U(x, f, s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow 0$ .

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir Funktionen mit einer Eigenschaft betrachten, die es unter bestimmten Voraussetzungen ermöglicht, auf die Existenz von Fixpunkten zu schließen.

**1.3.12 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet.  
 Eine Abbildung  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  heißt eigentlich, wenn  $f^{-1}(K)$  für jede kompakte Teilmenge  $K$  von  $f(G)$  selbst kompakt ist.

Eigentliche Funktionen lassen sich auf verschiedene Weise charakterisieren. Das nächste Lemma hält eine einfach zu zeigende Äquivalenz fest.

**1.3.13 Lemma** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  stetig, diskret und offen.

Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $f$  ist eigentlich;
- (2) es gilt  $\text{dist}(f(x_k), \partial_{\mathbb{R}^n} f(G)) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  für alle Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $G$ , die die Bedingung  $\text{dist}(x_k, \partial_{\mathbb{R}^n} G) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  erfüllen.

*Bemerkungen:* 1. Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Aus dem vorangegangenen Lemma folgt sofort, daß eine stetige, offene und diskrete Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  auf einem normalen Gebiet von  $f$  eigentlich ist.

Ist umgekehrt  $f$  auf einem Gebiet  $D \subset \mathcal{K}(G)$  eigentlich, so können wir  $f(\partial G) \subset \partial f(G)$  folgern. Mit der ersten Bemerkung zu Definition 1.3.8 folgt, daß auch  $\partial f(G) \subset f(\partial G)$  gilt,  $D$  also ein normales Gebiet von  $f$  ist.

2. Eine weitere Möglichkeit eigentliche Abbildungen zu charakterisieren, bietet der topologische Grad. Es ließe sich dem vorangegangenen Lemma hinzufügen:

$f$  ist genau dann eigentlich, wenn  $\sup\{\text{card}(G \cap f^{-1}(y)); y \in \overline{\mathbb{R}^n}\} = p < \infty$  und  $\sum_{j=1}^k i(x_j, f) = p$  für alle  $y \in f(G)$ ,  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$  gilt. Diese Aussage folgt sofort aus Lemma 3.3 in [24].

◁

Für eigentliche Abbildungen lassen sich einfache Bedingungen angeben, unter denen diese Abbildungen Fixpunkte haben. Das nachfolgende Lemma wollen wir, auch zur Illustration der Benutzung des topologischen Grades, kurz beweisen.

**1.3.14 Lemma** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig, offen, diskret und orientierungserhaltend. Des weiteren sei  $x_0 \in G$  und  $\varepsilon > 0$  so, daß  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset G$  gilt.

Existiert ein Gebiet  $U$  derart, daß  $\overline{U} \subset B(x_0, \varepsilon)$  und  $f(U) = B(x_0, \varepsilon)$  gilt und  $f|_U$  eigentlich ist, so existiert ein  $a \in U$  mit  $f(a) = a$ .

*Beweis:* Sei  $U$  ein Gebiet mit den oben gewünschten Eigenschaften. Wir können annehmen, daß  $x_0 = 0$  gilt. Andernfalls betrachten wir statt  $f$  die Funktion  $M \circ f \circ M^{-1}$ , wobei  $M$  eine geeignete Möbiustransformation bezeichnet.

Dann hat  $f$  in  $U$  eine Nullstelle. Da  $(f, U, 0)$  zulässig und  $f$  orientierungserhaltend ist, gilt  $\mu(f, U, 0) > 0$ . Wir betrachten nun die stetige Funktion  $g := f|_{\overline{U}} - \text{id}_{\overline{U}}$ . Da  $\overline{U} \subset B(0, \varepsilon)$  ist, existiert ein  $\delta < \varepsilon$  so, daß  $U \subset B(0, \delta)$  gilt. Da des weiteren  $f(\partial U) = \partial f(U) = \partial B(0, \varepsilon)$  gilt, können wir insgesamt  $\|g - f|_{\overline{U}}\|_\infty = \|\text{id}_{\overline{U}}\|_\infty \leq \delta < \varepsilon = \text{dist}(0, f(\partial U))$  folgern. Es gilt also  $\mu(g, U, 0) = \mu(f, U, 0) > 0$  nach  $(\mu 5)$ . Aus  $(\mu 4)$  folgt, daß  $g$  eine Nullstelle in  $U$  hat. Bezeichnen wir diese Nullstelle mit  $a$ , so gilt  $f(a) = a$ .

□

Abschließend zu diesem Abschnitt ist zu bemerken, daß sich das Konzept des topologischen Grades problemlos auf Funktionen des  $\overline{\mathbb{R}^n}$  übertragen läßt, für die wir es auch des öfteren verwenden werden. Man vergleiche hierzu auch [33] ab Seite 16, wo der topologische Grad gleich auf dem  $\overline{\mathbb{R}^n}$  eingeführt und die meisten oben aufgeführten Ergebnisse für Funktionen im  $\overline{\mathbb{R}^n}$  formuliert sind.

Einer nicht-konstanten quasimeromorphen Funktion läßt sich zudem ein Grad im Sinne von Bemerkung 2 zu Lemma 1.3.13 zuweisen.

**1.3.15 Satz, Definition** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine nicht-konstante, quasimeromorphe Abbildung.*

*Dann existiert eine Konstante  $\mu(f)$  so, daß  $\mu(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} i(x, f) < \infty$  für alle  $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$  gilt.*

*Wir nennen  $\mu(f)$  den Abbildungsgrad von  $f$ .*

Der Beweis der obigen Aussage läßt sich in [24] in Abschnitt 4 nachlesen.

## 1.4 Wichtige Ergebnisse

In diesem Abschnitt listen wir Ergebnisse aus der Theorie der quasiregulären Abbildungen auf, die wir in den Beweisen der nächsten Kapitel zusätzlich zu den in Abschnitt 1.2 aufgeführten Eigenschaften quasiregulärer Abbildungen benötigen. Bei den meisten der nachfolgenden Sätze handelt es sich um Aussagen, welche die Normalität von Familien quasiregulärer Abbildungen betreffen. Zusätzlich zum Begriff der Normalität einer Familie von Funktionen führen wir den der Quasinormalität ein, der in Kapitel 2 ebenfalls Verwendung finden wird. Beginnen wollen wir jedoch mit einem für uns zentralen Satz der Werteverteilungstheorie der quasiregulären Abbildungen, einem Analogon des Kleinen Satzes von Picard, welcher besagt, daß eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die mindestens zwei verschiedene Werte aus  $\mathbb{C}$  nicht annimmt, konstant sein muß. Für quasireguläre Funktionen in der Ebene gilt exakt dieselbe Aussage, da sich solche Funktionen als Hintereinanderausführung einer analytischen und einer quasikonformen Abbildung schreiben lassen, wie wir schon in Bemerkung 4 nach Definition 1.2.6 festgestellt haben. Für den Fall  $n \geq 3$  wurde zuerst gezeigt, daß eine auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definierte quasireguläre Funktion in ihrem Bild höchstens eine Menge der Kapazität Null auslassen kann. Schließlich gelang es S. Rickman 1980 in [31] das Analogon des Satzes von Picard zu beweisen.

**1.4.1 Satz (Rickman)** *Für alle  $n \geq 2$  und alle  $K \geq 1$  existiert ein  $q_0 \in \mathbb{N}$ , welches nur von  $n$  und  $K$  abhängt, derart, daß jede  $K$ -quasimeromorphe Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , die mindestens  $q_0$  verschiedene Werte ausläßt, konstant ist.*

*Bemerkungen:* 1. Das minimale zu  $K$  und  $n$  gehörige  $q_0$  mit der obigen Eigenschaft wollen wir im folgenden als Rickman-Konstante bezeichnen.

2. In [33] wird im Beweis auf Module von Familien von Wegen zurückgegriffen, eine Technik, die in der Theorie der quasiregulären Abbildungen sehr fruchtbar ist. Man betrachtet eine fest gewählte Kugelschale  $Y$ . Läßt man zu, daß  $q_0$  beliebig groß wird, so kann man das Mittel über die Anzahl der Urbilder von Punkten aus  $Y$  in Kugeln  $\overline{B(x, r)}$  durch eine Zahl echt größer Null nach unten beschränken, während ihr Durchmesser mit  $r$  gegen Null geht, was zum Widerspruch führt.

A. Eremenko und J. L. Lewis haben in ihrem Artikel [10] einen Beweiszugang gewählt, der die Zusammenhänge von quasiregulären Funktionen und partiellen Differentialgleichungen und als zentrales Beweismittel Harnacks Ungleichung ausnutzt. Diese Herangehensweise findet sich auch in dem Buch [20] von T. Iwaniec und G. Martin ab Seite 467.

3. S. Rickman hat darüber hinausgehend eine Theorie der Werteverteilung für quasireguläre Abbildungen entwickelt, die in Teilen den Theorien von L. V. Ahlfors und R. Nevanlinna entspricht. Kapitel V in [33] vermittelt einen Einblick in seine Ergebnisse.

4. Es wurde lange vermutet, daß auch in Dimensionen  $n \geq 3$  der Wert  $q_0 = 3$  gesetzt werden kann. S. Rickman konnte in [32] jedoch zeigen, daß diese Vermutung wenigstens für  $n = 3$  falsch ist. Er zeigt durch Angabe konkreter Beispiele, daß für alle  $p \in \mathbb{N}$  eine  $K(p)$ -quasireguläre, nicht konstante Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  existiert, die  $p$  verschiedene Punkte ausläßt. Dieser Beweis ist, wie so oft, wenn es um die Konstruktion konkreter Beispiele quasiregulärer Abbildungen geht, sehr kompliziert.

Da orientierungserhaltende Möbiustransformationen für alle  $K \geq 1$  zu den  $K$ -quasiregulären Abbildungen gehören, ist klar, daß  $q_0$  schon immer mindestens 2 sein muß.

Die als Beispiel 6 in Kapitel 1.2 angegebene Zorich-Funktion ist ein Beispiel einer auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definierten nicht-konstanten quasiregulären Funktion, die zwei verschiedene Werte des  $\overline{\mathbb{R}^n}$  ausläßt.

Des weiteren gilt für  $n \geq 3$ , daß ein  $K_n > 1$  derart existiert, daß alle nicht konstanten  $K_n$ -quasiregulären Funktionen lokale Homöomorphismen sind (siehe [33, Kapitel VI.8.14]), und daß eine quasireguläre Abbildung  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die lokal ein Homöomorphismus ist, schon ein Homöomorphismus ist. Das bedeutet, daß jede auf  $\mathbb{R}^n$  definierte  $K_n$ -quasireguläre Funktion konstant oder ein Homöomorphismus ist. Für  $1 \leq K \leq K_n$  und beliebiges  $n \geq 3$  kann man also  $q_0 = 2$  wählen.

Schließlich läßt sich der Wert  $q_0$  in Termen der Dilatationen und der Dimension nach oben abschätzen. Genaueres hierzu findet sich in [33] auf Seite 86.

5. Kleine Veränderungen in dem Beweis aus [33] liefern eine  $n$ -dimensionale Version des Großen Satzes von Picard, der dort auf Seite 87 zu finden ist.

◁

Nun kommen wir zu der grundlegenden Definition dieses Abschnitts.

**1.4.2 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie in  $G$  definierter quasimeromorpher Abbildungen.

Die Familie  $\mathcal{F}$  nennt man *normal*, falls jede Folge in  $\mathcal{F}$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Sie heißt *normal in einem Punkt*  $x \in G$ , falls es eine Umgebung  $U$  von  $x$  gibt, in der die Familie der auf  $U$  eingeschränkten Funktionen aus  $\mathcal{F}$  normal ist.

Existiert zu jeder Folge in  $\mathcal{F}$  eine Teilfolge und eine endliche Menge  $E \subset G$  derart, daß diese Teilfolge lokal gleichmäßig auf  $G \setminus E$  konvergiert, so heißt  $\mathcal{F}$  *quasinormal*.

Ist die Mächtigkeit der Menge  $E$  unabhängig von den betrachteten Folgen beschränkt und ist  $q$  die kleinste obere Schranke für die Mächtigkeit, so nennt man  $\mathcal{F}$  *quasinormal von der Ordnung*  $q$ .

Wir werden nun einige speziellere Ergebnisse betrachten, die unterschiedlich tief liegend sind. Genauer werden wir in den auf die jeweiligen Sätze folgenden Bemerkungen aufführen. Wir beginnen mit einem einfachen Ergebnis, einer Eigenschaft von stetigen, offenen Abbildungen, dem Maximumsprinzip.

**1.4.3 Satz** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  offen und stetig. Sei  $D \in \mathcal{K}(G)$ .

Dann gilt  $\max_{x \in \partial D} |f(x)| = \max_{x \in \overline{D}} |f(x)|$ .

Als nächstes betrachten wir ein Analogon zum Satz von Hurwitz, welches man in dem Artikel [27] von R. Miniowitz findet.

**1.4.4 Satz** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $a \in \mathbb{R}^n$ . Des weiteren sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $K$ -quasiregulärer Abbildungen von  $G$  nach  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  konvergiert.

Dann ist  $f$  konstant, oder es gilt  $\mu(f, D, a) = 0$  für alle  $D \in \mathcal{K}(G)$ .

*Bemerkungen:* 1. Da die Grenzfunktion  $f$ , sobald sie nicht konstant ist, nach Satz 1.2.9(d) quasiregulär und somit orientierungserhaltend ist, gilt schon, daß auch  $f$  den Wert  $a$  nicht annimmt.

2. Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Eigenschaften von  $\mu$ .

◁

Als nächstes benötigen wir eine Reihe von Normalitätskriterien, die sich alle in dem Artikel [27] von R. Miniowitz finden.

**1.4.5 Satz** *Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von auf einem Gebiet  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  definierten,  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen.*

*Dann ist  $\mathcal{F}$  genau dann normal, wenn für alle kompakten Teilmengen  $K$  von  $G$  ein  $M < \infty$  so existiert, daß*

$$\chi(f(x), f(y)) \leq M(\chi(x, y))^\alpha$$

*für  $\alpha = K^{1/(n-1)}$  und alle  $x \in K$ ,  $y \in G$  und  $f \in \mathcal{F}$  gilt.*

*Bemerkung:* Ist  $\mathcal{F}$  in einem Punkt  $x_0$  nicht normal, so liefert Satz 1.4.5 Folgen  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $G$  mit  $x_k \neq y_k$ , die gegen  $x_0$  konvergieren sowie eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}$ , für die gilt:

$$\frac{\chi(f_k(x_k), f_k(y_k))}{\chi(x_k, y_k)^\alpha} \rightarrow \infty \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

◁

Der nächste Satz ist ein Analogon zu dem im Komplexen bekannten Zalcman-Lemma (siehe [38]).

**1.4.6 Satz** *Eine Familie  $\mathcal{F}$  von in  $B(0, 1)$  definierten  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen ist genau dann in einem Punkt  $x_0 \in B(0, 1)$  nicht normal, wenn*

- (a) *ein Folge positiver Zahlen  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen Null konvergiert,*
- (b) *eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $B(0, 1)$ , die gegen  $x_0$  konvergiert,*
- (c) *eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Funktionen aus  $\mathcal{F}$  und*
- (d) *eine nicht konstante,  $K$ -quasimeromorphe Funktion  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$*

*so existieren, daß  $(f_k(\rho_k x + x_k))_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig auf  $\mathbb{R}^n$  gegen  $h$  konvergiert.*

*Bemerkungen:* 1. Die Forderung, daß die in (b) genannte Folge gegen  $x_0$  konvergiert, findet sich in dem Artikel von R. Miniowitz nicht. Daß der Satz auch in der hier angegebenen Version gültig ist, ist einfach zu zeigen (vergleiche etwa [20]).

2. Der vorangegangene Satz ermöglicht wie im Komplexen auch im  $\mathbb{R}^n$  eine Art Bloch-Prinzip zu entwickeln, das Bedingungen, welche die Normalität einer Funktionenfamilie erzwingen, in Relation zu Bedingungen an quasireguläre Abbildungen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  setzt, die darauf schließen lassen, daß diese Abbildungen

konstant sind. Diese Idee wird in dem Artikel [27] von R. Miniowitz konkretisiert. Ein Beispiel für eine solche Beziehung liefern der Satz von Rickman und der folgende Satz.

◁

Das nächste Ergebnis stellt eine  $n$ -dimensionale Entsprechung des Satzes von Montel dar.

**1.4.7 Satz** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von in  $G$  definierten  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen.*

*Dann existiert eine Konstante  $q \in \mathbb{N}$ , die nur von  $K$  und  $n$  abhängig ist, so, daß folgendes gilt:*

*Existieren verschiedene Punkte  $a_1, \dots, a_q \in \overline{\mathbb{R}^n}$  derart, daß für alle  $f \in \mathcal{F}$  die Bedingung  $f(G) \cap \{a_1, \dots, a_q\} = \emptyset$  gilt, so ist  $\mathcal{F}$  normal.*

*Bemerkung:* Im Beweis dieses Satzes benutzt R. Miniowitz in [27] das in der zu Satz 1.4.6 gehörenden Bemerkung 2 angesprochene Prinzip und den oben aufgeführten Satz von Rickman. Die Konstante  $q$  ist genau die Konstante, die auch in Satz 1.4.1 benötigt wird. In den daran anschließenden Bemerkungen haben wir bereits einige Anmerkungen zum Wert dieser Konstante gemacht.

◁

## 2 Fixpunkte und Normalität

Ziel dieses Kapitels ist es, Verknüpfungen zwischen der Normalität einer Familie quasiregulärer Abbildungen und der Existenz von Fixpunkten der in der betrachteten Familie enthaltenen Funktionen oder deren Iterierten herzustellen. Dafür stellen wir zunächst eine Reihe von Hilfsmitteln bereit. Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen von der Theorie der quasiregulären Abbildungen völlig unabhängigen graphentheoretischen Überlegungen. Wir erarbeiten Bedingungen, die, in den Kontext der quasiregulären Abbildungen gesetzt, die Existenz von Fixpunkten geeigneter Funktionen sicher stellen. Daran anschließend beschäftigen wir uns mit einer Normalitätsaussage, deren zweidimensionale Version aus dem Themenkreis der Ahlfors'schen Theorie der Überlagerungsflächen stammt. Sie wird uns befähigen, Funktionen in nicht-normalen Familien zu finden, die Eigenschaften besitzen, welche die Anwendung der im ersten Teil erarbeiteten Ergebnisse erlauben. Im dritten Abschnitt dieses Kapitels nutzen wir die bereits gewonnenen Erkenntnisse, um die Existenz von Fixpunkten und periodischen Punkten von Funktionen aus geeigneten Familien nachzuweisen. In Abschnitt 4 formulieren wir Aussagen über die Normalität von Familien, deren zugehörige Funktionen bestimmten Anforderungen an die Existenz von Fixpunkten beziehungsweise periodischen Punkten genügen. Es handelt sich dabei unter anderem um die Analoga der in der Einleitung bereits angesprochenen Sätze aus den Artikeln [11] und [2]. Sie folgen leicht aus den Ergebnissen des dritten Abschnitts. Abschließen werden wir dieses Kapitel mit einer Anwendung einiger in den vorangegangenen Abschnitten erarbeiteten Ergebnisse. Wir betrachten quasireguläre Abbildungen, die auf ganz  $\mathbb{R}^n$  definiert sind und in  $\infty$  eine wesentliche Singularität besitzen. Es ist uns möglich zu beweisen, daß solche Abbildungen schon unendlich viele periodische Punkte beliebiger Periode größer eins besitzen. Viele der in die letzten drei Abschnitte eingehende Ideen stammen aus den Artikeln [11] und [2], in denen entsprechende Probleme für analytische Funktionen untersucht worden sind.

### 2.1 Einige graphentheoretische Überlegungen

In den späteren Beweisen werden wir uns in einer Situation befinden, die man graphentheoretisch umschreiben kann. Es erweist sich deshalb als sinnvoll, in diesem allgemeinen Kontext Überlegungen anzustellen, auf die wir später in der konkreten Situation zurückgreifen können. Am Ende dieses Abschnittes erhalten wir durch Lemma 2.1.9 einen Einblick, wie das geschehen wird.

**2.1.1 Definition** Sei  $V$  eine Menge, und sei  $E \subset V \times V$ .

Wir nennen  $G := (V, E)$  einen gerichteten Graphen. Die Elemente aus  $V$  heißen Ecken, die aus  $E$  Kanten.

Sei  $k \in \mathbb{N}$ , und sei  $w := (v_0, \dots, v_k) \in V^{k+1}$ .

Dann heißt  $w$  geschlossener Kantenzug der Länge  $k$  in  $G$ , falls  $(v_{j-1}, v_j) \in E$  für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  gilt, und  $v_0 = v_k$  ist.

Ein geschlossener Kantenzug  $w = (v_0, \dots, v_k)$  heißt einfach, falls es kein  $p \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < k$ , derart gibt, daß  $k$  durch  $p$  teilbar ist und  $v_j = v_l$  ist für alle  $j, l \in \{1, \dots, k\}$ , für die gilt, daß  $j - l$  von  $p$  geteilt wird. Anschaulich bedeutet dies, daß man  $w$  nicht erhalten kann, indem man einen kürzeren geschlossenen Kantenzug mehrmals durchläuft.

Die Mächtigkeit der Menge  $\{u \in V; (v, u) \in E\}$  heißt der Außengrad der Ecke  $v$  und wird mit  $od(v)$  bezeichnet.

In den folgenden Lemmata bezeichnet  $V$  eine endliche Menge. Des weiteren ist  $E \subset V \times V$  und  $G$  der gerichtete Graph  $(V, E)$ .

Im ersten Lemma halten wir eine offensichtliche Beobachtung fest.

**2.1.2 Lemma** Existiert ein  $v \in V$  derart, daß  $(v, v) \in E$  gilt, so existieren geschlossene Kantenzüge beliebiger Länge.

Unter den im obigen Lemma gegebenen Voraussetzungen ist natürlich keine Aussage über einfache geschlossene Kantenzüge möglich. Die nötigen Zusatzvoraussetzungen finden sich im nächsten Lemma.

**2.1.3 Lemma** Existieren  $u, v \in V$ ,  $u \neq v$ , so, daß  $\{(v, v), (u, v), (v, u)\} \subset E$  gilt, so existieren einfache geschlossene Kantenzüge beliebiger Länge.

Die Voraussetzungen von Lemma 2.1.3 sind erfüllt, sobald  $\text{card } V \geq 2$  und  $E = V \times V$  gilt.

**2.1.4 Lemma** Sei  $q \in \mathbb{N}$ , und sei  $\text{card } V \geq \max\{(q-1)^2 + 1, 3\}$ . Für alle  $v \in V$  gelte  $od(v) \geq \text{card } V - (q-1)$ .

Dann existiert für jedes  $k \geq 2$  ein geschlossener Kantenzug der Länge  $k$ .

*Beweis:* Sei  $k \geq 2$ .

Existiert ein  $v \in V$  derart, daß  $(v, v) \in E$  gilt, so folgt die Behauptung nach Lemma 2.1.2.

Im folgenden gelte  $(v, v) \notin E$  für alle  $v \in V$ . (Das heißt insbesondere, daß  $q > 1$  gilt.) Wir zeigen nun: Es existieren  $q$  paarweise verschiedene Punkte  $v_1, v_0^j \in V$ ,  $j \in \{1, \dots, q-1\}$ , derart, daß  $(v_0^j, v_1) \in E$  für alle  $j \in \{1, \dots, q-1\}$  gilt.

Dazu seien  $u_1, \dots, u_{(q-1)(q-2)+1}, w_1, \dots, w_{q-1} \in V$  verschieden. Wir betrachten nun für  $j \in \{1, \dots, (q-1)(q-2)+1\}$  die  $q$  Ecken  $u_j, w_1, \dots, w_{q-1}$ . Da  $(u_j, u_j) \notin E$  gilt und  $od(u_j) \geq \text{card } V - (q-1)$  ist, existiert ein  $j_i \in \{1, \dots, q-1\}$  derart, daß  $(u_j, w_{j_i}) \in E$  gilt.

Wegen  $\lceil (q-1)(q-2)+1 : (q-1) \rceil = q-1$ , wobei  $\lceil \cdot \rceil$  die obere Gaußklammer bezeichnet, existieren  $l_1, \dots, l_{q-1} \in \{1, \dots, (q-1)(q-2)+1\}$  und ein  $l \in \{1, \dots, q-1\}$  derart, daß  $(u_{l_i}, w_{l_i}) \in E$  für alle  $i \in \{1, \dots, q-1\}$  gilt.

Wir setzen nun  $v_1 := w_l$  und  $v_0^i := u_{l_i}$  für alle  $i \in \{1, \dots, q-1\}$ . Es gilt also  $(v_0^i, v_1) \in E$  für alle  $i \in \{1, \dots, q-1\}$ .

Da  $\text{card } V \geq \max\{(q-1)^2 + 1, 3\}$  ist, gilt  $\text{card } V - (q-1) \geq q$ . Somit können wir aus  $od(v) \geq \text{card } V - (q-1)$  und  $(v, v) \notin E$  folgern, daß für alle  $v \in V \setminus \{v_0^j; j \in \{1, \dots, q-1\}\}$  ein  $w \in V \setminus \{v_0^j; j \in \{1, \dots, q-1\}\}$  derart existiert, daß  $(v, w) \in E$  ist. Wir wählen nun sukzessiv  $v_2, \dots, v_{k-1} \in V \setminus \{v_0^j; j \in \{1, \dots, q-1\}\}$  so, daß  $(v_l, v_{l+1}) \in E$  für alle  $l \in \{1, \dots, k-2\}$  gilt. Schließlich finden wir ein  $j \in \{1, \dots, q-1\}$  so, daß  $(v_{k-1}, v_0^j) \in E$  ist. Dann ist  $(v_0^j, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0^j)$  ein geschlossener Kantenzug der Länge  $k$  in  $G$ . □

Im nächsten Lemma wird wieder eine Aussage über einfache geschlossene Kantenzüge getroffen.

**2.1.5 Lemma** *Es gebe paarweise verschiedene Ecken  $u, v, w \in V$  derart, daß  $\{(u, v), (v, u), (v, w), (w, v), (w, u)\} \subset E$  gilt.*

*Dann enthält  $G$  für alle  $k \geq 2$  einen einfachen geschlossenen Kantenzug der Länge  $k$ .*

*Beweis:* Sei  $k \geq 2$ .

Wir setzen  $v_0 := v_k := u$ . Für jedes  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  wählen wir induktiv ein  $v_j \in \{v, w\}$  so, daß  $(v_{j-1}, v_j) \in E$  gilt und  $v_j \neq v_{j-1}$  ist. Dann ist  $(v_0, \dots, v_k)$  ein einfacher geschlossener Kantenzug der Länge  $k$ . □

Das nächste Lemma ähnelt in den Voraussetzungen Lemma 2.1.4, trifft aber eine Aussage über einfache geschlossene Kantenzüge.

**2.1.6 Lemma** *Sei  $q \in \mathbb{N}$ , und es gelte  $\text{card } V \geq (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q)$ . Für jedes  $v \in V$  sei der Außengrad mindestens  $\text{card } V - (q-1)$ .*

*Dann enthält  $G$  für alle  $k \geq 2$  einen einfachen geschlossenen Kantenzug der Länge  $k$ .*

*Beweis:* Der Beweis läßt sich in zwei Schritte gliedern.

SCHRITT 1: Wir definieren  $\tilde{q} := (q - 1)q + 1$  und zeigen zunächst folgendes: Sind  $u_1, \dots, u_{\tilde{q}}, v_1, \dots, v_q \in V$  paarweise verschieden, so finden wir  $i \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$  und ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  so, daß  $(u_i, v_j), (v_j, u_i) \in E$  gilt.

Wir wählen also paarweise verschiedene Ecken  $u_1, \dots, u_{\tilde{q}}, v_1, \dots, v_q \in V$ . Nach Voraussetzung gilt  $od(u_i) \geq \text{card } V - (q - 1)$  für alle  $i \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$ , das heißt, es existiert ein  $j_i \in \{1, \dots, q\}$  so, daß  $(u_i, v_{j_i}) \in E$  gilt. Weil  $\lceil \tilde{q} : q \rceil = q$  gilt, wobei  $\lceil \cdot \rceil$  die obere Gaußklammer bezeichnet, finden wir paarweise verschiedene Ecken  $u_{\nu(1)}, \dots, u_{\nu(q)} \in \{u_1, \dots, u_{\tilde{q}}\}$  und ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  derart, daß  $(u_{\nu(i)}, v_j) \in E$  für alle  $i \in \{1, \dots, q\}$  gilt. Da auch  $od(v_j) \geq \text{card } V - (q - 1)$  gilt, existiert außerdem ein  $i \in \{1, \dots, q\}$  so, daß auch  $(v_j, u_{\nu(i)}) \in E$  gilt.

SCHRITT 2: Wir wenden nun die Methode aus Schritt 1 wiederholt an. Dazu wählen wir  $(q - 1)\tilde{q} + 1$  Mengen  $V_i$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $V_i \subset V \setminus \{u_1, \dots, u_{\tilde{q}}\}$  für alle  $i \in \{1, \dots, (q - 1)\tilde{q} + 1\}$ ,
- (2)  $\text{card } V_i = q$  für alle  $i \in \{1, \dots, (q - 1)\tilde{q} + 1\}$ ,
- (3)  $V_i \cap V_j = \emptyset$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, (q - 1)\tilde{q} + 1\}$  mit  $i \neq j$ .

Nun führen wir Schritt 1 für  $u_1, \dots, u_{\tilde{q}}$  und jeweils eine der gewählten Mengen  $V_i$  aus. Dann erhalten wir für jedes  $i \in \{1, \dots, (q - 1)\tilde{q} + 1\}$  ein  $v_i \in V_i$  so, daß ein  $\nu(i) \in \{1, \dots, \tilde{q}\}$  existiert mit  $(u_{\nu(i)}, v_i), (v_i, u_{\nu(i)}) \in E$ . Also finden wir auch ein  $u \in \{u_1, \dots, u_{\tilde{q}}\}$  und  $q$  paarweise verschiedene Punkte  $v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(q)} \in \bigcup_{j=1}^{(q-1)\tilde{q}+1} V_j$  so, daß  $(u, v_{\mu(i)}), (v_{\mu(i)}, u) \in E$  für alle  $i \in \{1, \dots, q\}$  gilt.

Da für alle  $v \in V$  gilt, daß  $od(v) \geq \text{card } V - (q - 1)$  ist, existieren  $v, w \in \{v_{\mu(1)}, \dots, v_{\mu(q)}\}$  so, daß  $(v, w) \in E$  gilt.

Ist  $v = w$ , so gilt  $(v, u), (u, v), (v, v) \in E$ , und die Behauptung folgt mit Lemma 2.1.3.

Ist  $v \neq w$ , so gilt  $(u, v), (v, u), (u, w), (w, u), (v, w) \in E$ , und die Behauptung folgt mit Lemma 2.1.5.

□

Verwendet werden wir diese Lemmata, um die Existenz von Fixpunkten beziehungsweise periodischen Punkten nachzuweisen. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Bereichen wird durch das nächste Lemma klar. Zunächst geben wir nun die Definition eines Fixpunktes und eines periodischen Punktes an.

**2.1.7 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet,  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine Funktion,  $k \in \mathbb{N}$  und  $a$  ein Punkt aus  $G$ .

Dann heißt  $a$  Fixpunkt von  $f^k$ , wenn  $f^j(a) \in G$  für alle  $j \in \{1, \dots, k - 1\}$  und  $f^k(a) = a$  gilt.

Gilt überdies  $f^j(a) \neq a$  für alle  $j < k$ , so nennen wir  $a$  einen periodischen Punkt der Periode  $k$  von  $f$ .

Für das anstehende Lemma führen wir noch eine Bezeichnungsweise ein.

**2.1.8 Bezeichnung** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine quasimeromorphe Abbildung. Des weiteren sei  $p \in \mathbb{N}$ , und seien  $x_1, \dots, x_p \in G \setminus \{\infty\}$  verschieden. Es sei  $\varepsilon > 0$  so gewählt, daß für alle  $B_j := B(x_j, \varepsilon)$ ,  $j \in \{1, \dots, p\}$ , gilt, daß ihre Abschlüsse in  $G$  liegen und paarweise disjunkt sind.

Wir setzen  $V := \{B_j; j \in \{1, \dots, p\}\}$  und bezeichnen mit  $E$  die Menge der Paare  $(B_j, B_k) \in V \times V$ , für die ein Teilgebiet von  $B_j$  existiert, dessen Abschluß in  $B_j$  enthalten ist und das durch  $f$  eigentlich auf  $B_k$  abgebildet wird. Den gerichteten Graphen  $(V, E)$  bezeichnen wir mit  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$ .

**2.1.9 Lemma** Enthält der gerichtete Graph  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$  einen geschlossenen Kantenzug der Länge  $k$ , so hat  $f^k$  einen Fixpunkt in jeder Ecke des Kantenzuges. Enthält  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$  einen einfachen geschlossenen Kantenzug der Länge  $k$ , so hat  $f$  einen periodischen Punkt der Periode  $k$  in jeder Ecke des Kantenzuges.

*Beweis:* Sei  $k \in \mathbb{N}$ , und sei  $(B_{\nu(0)}, \dots, B_{\nu(k)})$  ein geschlossener Kantenzug der Länge  $k$  in  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$ . Dann existiert nach Definition von  $E$  ein Gebiet  $U_{k-1}$  mit  $\overline{U_{k-1}} \subset B_{\nu(k-1)}$ , welches durch  $f$  eigentlich auf  $B_{\nu(k)}$  abgebildet wird. Nach Bemerkung 1 zu Lemma 1.3.13 ist  $U_{k-1}$  ein normales Gebiet von  $f$ . Da nach Voraussetzung (sofern  $k \geq 2$  ist) ein Teilgebiet von  $B_{\nu(k-2)}$  existiert, dessen Abschluß in  $B_{\nu(k-2)}$  liegt und das eigentlich auf  $B_{\nu(k-1)}$  abgebildet wird, existiert eine Urbildkomponente  $U_{k-2}$  von  $U_{k-1}$ , deren Abschluß in  $B_{\nu(k-2)}$  liegt. Dann ist  $U_{k-2}$  ein normales Gebiet von  $f$  nach Lemma 1.3.9 und somit auch von  $f^2$ . Nach der schon oben erwähnten Bemerkung 1 zu Lemma 1.3.13 bildet  $f^2$  das Gebiet  $U_{k-2}$  eigentlich auf  $B_{\nu(k)}$  ab. Induktiv erhalten wir nun ein normales Gebiet  $U_0$  von  $f^k$ , dessen Abschluß in  $B_{\nu(0)} = B_{\nu(k)}$  liegt und welches von  $f^k$  eigentlich auf  $B_{\nu(k)}$  abgebildet wird. Nach Lemma 1.3.14 hat  $f^k$  also einen Fixpunkt  $a$  in  $B_{\nu(k)}$ . Offensichtlich sind dann die Punkte  $f(a), \dots, f^{k-1}(a)$  ebenfalls Fixpunkte von  $f^k$ , die in den weiteren Ecken des Kantenzuges liegen.

Ist  $(B_{\nu(0)}, \dots, B_{\nu(k)})$  ein einfacher geschlossener Kantenzug der Länge  $k$  in  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$ , so folgt aus der Definition der Einfachheit, daß die wie oben in jeder Ecke des Kantenzuges gefundenen Fixpunkte von  $f^k$  periodische Punkte der Periode  $k$  von  $f$  sind.

□

## 2.2 Das Insellemma

In diesem Abschnitt werden wir einen Satz beweisen, der zu einem zentralen Hilfsmittel im nächsten Teil dieses Kapitels werden wird. Er findet seine Entsprechung in einem Ergebnis der komplexen Funktionentheorie, das folgendes besagt. Die Familie aller in einem Gebiet  $G$  definierten meromorphen Abbildungen  $f$  mit der Eigenschaft, daß kein Teilgebiet von  $G$ , dessen Abschluß in  $G$  enthalten ist, durch  $f$  eigentlich auf eine von drei fest gewählten Kreisscheiben  $B(a_j, \varepsilon)$ ,  $j \in \{1, 2, 3\}$ , abgebildet wird, ist für geeignet gewähltes  $\varepsilon > 0$  normal. Ein Teilgebiet von  $G$  mit den oben genannten Eigenschaften nennt man Insel von  $f$  über dem entsprechenden Gebiet  $B(a_j, \varepsilon)$ . Die Beweisidee, die sich in [6] findet, läßt sich auf quasimeromorphe Abbildungen übertragen.

**2.2.1 Bezeichnung** Sei  $p \in \mathbb{N}$ . Seien  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$  verschieden. Für ein Gebiet  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  und  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}_K(G, \{B(a_j, \varepsilon)\}_{j=1}^p)$  die Familie aller  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , die folgende Eigenschaft haben:

Kein Teilgebiet von  $G$ , dessen Abschluß in  $G$  enthalten ist, wird durch  $f$  eigentlich auf eines der Gebiete  $B(a_j, \varepsilon)$  abgebildet.

**2.2.2 Satz (Insellemma)** Sei  $K \geq 1$ , und sei  $q$  die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante. Seien  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{R}^n$  paarweise verschieden.

Es existiert ein  $\tilde{\varepsilon} > 0$  derart, daß die Familie  $\mathcal{F}_K(G, \{B(a_j, \varepsilon)\}_{j=1}^q)$  für beliebiges Gebiet  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  und  $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  normal ist.

*Beweis:* Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist.

Dann finden wir eine Folge  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen Null konvergiert und eine Folge  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Gebieten im  $\overline{\mathbb{R}^n}$  derart, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  die Familie  $\mathcal{F}^k := \mathcal{F}_K(G_k, \{B(a_j, \varepsilon_k)\}_{j=1}^q)$  nicht normal ist.

Für jedes  $\mathcal{F}^k$  sei  $p_k$  ein Punkt in  $G_k$ , in dem  $\mathcal{F}^k$  nicht normal ist. Des weiteren sei  $V_k \subset G_k$  eine Kugel-Umgebung von  $p_k$ . Mit  $M_k$  bezeichnen wir eine orientierungserhaltende Möbiustransformation, die die Null auf  $p_k$  und  $B(0, 1)$  auf  $V_k$  abbildet. Sei  $D_k := M_k^{-1}(G_k) \supset B(0, 1)$ .

Dann ist  $\tilde{\mathcal{F}}^k := \{f \circ M_k|_{D_k}; f \in \mathcal{F}^k\}$  in Null nicht normal. Wir finden nach Satz 1.4.5 für alle  $k \in \mathbb{N}$  Punkte  $x_k$  und  $y_k$  in  $B(0, 1)$  und eine Funktion  $g_k \in \tilde{\mathcal{F}}^k$  derart, daß sowohl  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  als auch  $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen Null konvergiert und

$$\frac{\chi(g_k(x_k), g_k(y_k))}{\chi(x_k, y_k)^\alpha} \geq k$$

für  $\alpha = K^{1/(n-1)}$  gilt. Wir betrachten nun die Menge  $\mathcal{G} := \{g_k|_{B(0,1)}; k \in \mathbb{N}\}$ . Sei  $M < \infty$ . Es ist  $\{x_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \subset B(0,1)$  kompakt, und für  $k \geq M$  gilt

$$\frac{\chi(g_k(x_k), g_k(y_k))}{\chi(x_k, y_k)^\alpha} \geq k \geq M.$$

Somit ist  $\mathcal{G}$  nach Satz 1.4.5 nicht normal.

Nach Lemma 1.4.6 existieren eine Teilfolge  $(g_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , eine Folge  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$  positiver Zahlen, die gegen Null konvergiert und eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $B(0,1)$  derart, daß die Funktionenfolge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $h$  konvergiert, wobei  $h_k(x) := g_{\nu(k)}(x_k + \rho_k x)$  gesetzt und  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  nicht konstant und  $K$ -quasimeromorph ist.

Nach Satz von Rickman gilt, daß ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  und ein  $\xi \in \mathbb{R}^n$  so existieren, daß  $h(\xi) = a_j$  ist. Dann existiert nach Lemma 1.3.11 eine beschränkte normale Umgebung  $U$  von  $\xi$  derart, daß  $h(U) = B(a_j, \varepsilon)$  gilt, falls  $\varepsilon$  klein genug gewählt ist. Es gilt also  $h(\partial U) = \partial(h(U)) = \partial B(a_j, \varepsilon)$ , und  $h|_U$  ist eigentlich.

Auf  $\partial U$  konvergiert  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ab genügend großem  $k$  gleichmäßig gegen  $h$ . Somit findet man ein  $k_1 \in \mathbb{N}$  so, daß für alle  $k > k_1$  die Abschätzung

$$\text{dist}(h_k(\partial U), h(\partial U)) = \text{dist}(h_k(\partial U), \partial B(a_j, \varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

gilt. Da  $h$  orientierungserhaltend ist, gilt  $\mu(h, U, a_j) > 0$ . Weil  $h$  auf  $U$  nicht konstant ist, liefert der Satz von Hurwitz, daß ein  $k_0 > k_1$  so existiert, daß  $h_k$  für alle  $k > k_0$  eine  $a_j$ -Stelle in  $U$  hat. Gemäß ihrer Konstruktion sind die Funktionen  $h_k$  ebenfalls orientierungserhaltend, also gilt für alle  $k > k_0$ , daß  $\mu(h_k, U, a_j) > 0$  ist. Da  $\mu(h_k, U, \cdot)$  auf den Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus h_k(\partial U)$  konstant ist, und  $B(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$  nach obiger Abschätzung für alle  $k > k_0$  in einer Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^n \setminus h_k(\partial U)$  liegt, gilt  $\mu(h_k, U, x) > 0$  für alle  $x \in B(a_j, \frac{\varepsilon}{2})$ . Es gilt also  $B(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subset h_k(U)$ .

Da die zu Anfang des Beweises gewählte Folge  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen Null konvergiert, finden wir nun ein  $k \in \mathbb{N}$  so, daß  $\nu(k) > k_0$  und  $\varepsilon_{\nu(k)} < \frac{\varepsilon}{2}$  ist. Somit ist  $\overline{B(a_j, \varepsilon_{\nu(k)})} \subset B(a_j, \frac{\varepsilon}{2}) \subset h_k(U)$ . Also existiert eine beschränkte Komponente  $U_k$  von  $h_k^{-1}(B(a_j, \varepsilon_{\nu(k)}))$ , deren Abschluß in  $U$  liegt. Somit ist  $U_k$  nach Lemma 1.3.9 ein normales Gebiet, und  $h_k|_{U_k}$  ist eigentlich.

Sei  $\widetilde{U}_k := x_k + \rho_k U_k$ . Dann ist  $\widetilde{U}_k$  ein Gebiet, dessen Abschluß in  $D_k$  enthalten ist. Somit gilt  $g_{\nu(k)}(\widetilde{U}_k) = B(a_j, \varepsilon_{\nu(k)})$ , und  $g_{\nu(k)}|_{\widetilde{U}_k}$  ist eigentlich. Nach Konstruktion existiert nun ein  $f \in \mathcal{F}^{\nu(k)}$  so, daß  $g_{\nu(k)} = f \circ M_{\nu(k)}$  gilt. Dann ist  $V := M_{\nu(k)}(\widetilde{U}_k)$  ein Gebiet, dessen Abschluß in  $G_{\nu(k)}$  enthalten ist, und  $f$  bildet  $V$  eigentlich auf  $B(a_j, \varepsilon_{\nu(k)})$  ab. Dies führt zum Widerspruch. □

*Bemerkungen:* 1. Betrachtet man quasireguläre statt quasimeromorphe Abbildungen, so sind  $q - 1$  verschiedene Punkte  $a_1, \dots, a_{q-1} \in \mathbb{R}^n$  in den Voraussetzungen ausreichend, da jede quasireguläre Funktion den Wert  $\infty$  ausläßt.

2. Der sogenannte Ahlforssche 5-Insel-Satz liefert in der Funktionentheorie eine wesentlich stärkere Aussage. Wählt man fünf statt drei geeignete Kreisscheiben, so ist schon die Familie aller meromorphen Funktionen, die kein Teilgebiet ihres Definitionsbereiches bijektiv auf eine der betrachteten Kreisscheiben abbilden, normal. Die Aussage bleibt erhalten, wenn man statt der fünf Kreisscheiben fünf Jordangebiete auf der Riemannschen Zahlenkugel mit paarweise disjunkten Abschlüssen vorgibt. In [6] läßt sich ein Beweis dieses Ergebnisses nachlesen, in dem auch die im obigen Beweis verwendeten Methoden zum Tragen kommen. Zusätzlich wird ausgenutzt, daß eine komplexe, ganze, nicht-konstante Funktion höchstens vier vollständig verzweigte Werte in  $\overline{\mathbb{C}}$  haben kann. Bei quasiregulären Abbildungen können wesentlich mehr vollständig verzweigte Werte vorliegen, wie schon das Beispiel 5 aus dem ersten Kapitel zeigt. In Kapitel 3 werden wir das Insellemma weiter auf die hier genannten Aspekte hin untersuchen.

◁

Wir werden in den folgenden Kapiteln eine Folgerung aus Satz 2.2.2 verwenden, die sich sofort aus der Kontraposition von Satz 2.2.2 ergibt. Wir wollen sie hier noch kurz formulieren.

**2.2.3 Folgerung** *Es gelten dieselben Voraussetzung wie in Satz 2.2.2, und es sei  $\tilde{\varepsilon}$  entsprechend der Behauptung des Satzes gewählt. Des weiteren sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Menge von auf  $G$  definierten  $K$ -quasimeromorphen Funktionen, die nicht normal ist.*

*Dann existiert zu jedem  $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  ein  $f \in \mathcal{F}$ , ein Gebiet  $U$ , dessen Abschluß in  $G$  liegt und ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  derart, daß  $f$  das Gebiet  $U$  eigentlich auf  $B(a_j, \varepsilon)$  abbildet.*

*Bemerkungen:* 1. Wählt man  $f$ ,  $U$  und  $j \in \{1, \dots, q\}$  gemäß obiger Folgerung so, daß  $f : U \rightarrow B(a_j, \tilde{\varepsilon})$  eigentlich ist, so existieren offensichtlich für alle  $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  Gebiete  $V \subset U$  so, daß  $f : V \rightarrow B(a_j, \varepsilon)$  eigentlich ist.

2. Gelten die Voraussetzungen von Satz 2.2.2 und ist  $\tilde{\varepsilon}$  entsprechend seiner Aussage gewählt, so läßt sich folgendes feststellen. Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine  $K$ -quasimeromorphe, nicht-konstante Abbildung und definieren wir  $M_k(x) := kx$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , so können wir mittels Satz 1.4.5 leicht zeigen, daß die Familie  $\mathcal{F} := \{f \circ M_k; k \in \mathbb{N}\}$  nicht normal ist. Somit existiert ein beschränktes Gebiet  $U \subset \mathbb{R}^n$  und ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  derart, daß  $f$  das Gebiet  $U$  eigentlich auf die Kugel  $B(a_j, \tilde{\varepsilon})$  abbildet. Wir haben damit gezeigt, daß eine auf dem  $\mathbb{R}^n$  definierte

$K$ -quasimeromorphe Abbildung, die über keiner der Kugeln  $B(a_i, \tilde{\varepsilon})$  eine Insel besitzt, konstant ist.

Eine Beziehung zwischen Aussagen über Familien  $K$ -quasimeromorpher Abbildungen einerseits und über auf dem  $\mathbb{R}^n$  definierte  $K$ -quasimeromorphe Abbildungen andererseits, wie sie durch Satz 2.2.2 und das eben aufgeführte Ergebnis aufgezeigt wird, haben wir schon in der zweiten Satz 1.4.6 folgenden Bemerkung angesprochen und dort durch Satz 1.4.7 und den Satz von Rickman illustriert.

◁

Ruft man sich Lemma 2.1.9 in Erinnerung, so zeichnet sich ab, in welcher Weise die oben formulierte Folgerung uns helfen wird, aus Normalitätseigenschaften einer Funktionenfamilie auf die Existenz von Fixpunkten der entsprechenden Funktionen oder deren Iterierten zu schließen. Wie dies im einzelnen geschieht, zeigt der nächste Abschnitt.

## 2.3 Existenz von Fixpunkten und periodischen Punkten

Die vorangegangenen Abschnitte liefern uns eine Reihe von Hilfsmitteln, die wir nun einsetzen wollen, um die Existenz von Fixpunkten von zu geeigneten Familien gehörenden, quasiregulären Abbildungen nachzuweisen. Im Mittelpunkt der Betrachtungen stehen dabei Funktionenfamilien, die nicht in allen Punkten der Definitionsbereiche der zugehörigen Abbildungen normal sind. Zuerst beschäftigen wir uns mit der Situation, daß die Familien nur in voneinander isolierten Punkten nicht normal sind. In den anschließenden Untersuchungen fordern wir stattdessen, daß ausreichend viele Punkte vorhanden sind, in denen die betrachtete Familie nicht normal ist. In beiden Fällen finden wir Bedingungen, die auf die Existenz von Fixpunkten oder auch periodischen Punkten der entsprechenden Abbildungen schließen lassen.

Die Normalität stellt in den folgenden Beweisen einen zentralen Begriff dar. Die auftretenden Grenzfunktionen von in den betrachteten Familien liegenden Folgen liefern uns wichtige Informationen. In diesem Zusammenhang erweist sich das folgende einfache Lemma als nützlich.

**2.3.1 Lemma** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  und sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $K$ -quasiregulärer Funktionen auf  $G$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  konvergiert. Dann ist  $f$   $K$ -quasiregulär oder konstant  $\infty$ .*

*Beweis:* Sei  $f$  nicht  $K$ -quasiregulär. Dann gibt es ein  $x_0 \in G$  mit  $f(x_0) = \infty$ . Sei  $U \subset G$  eine Umgebung von  $x_0$  derart, daß  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $U$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und  $|f(x)| > C > 0$  für alle  $x \in U$  gilt. Dann existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so, daß  $|f_k(x)| > C/2$  für alle  $k \geq k_0$  und für alle  $x \in U$  gilt.

Sei nun  $M$  eine orientierungserhaltende Möbiustransformation, für die  $M(0) = \infty$  und  $M(\infty) = 0$  gilt. Dann ist  $(M \circ f_k|_U)_{k \geq k_0}$  eine Folge  $K$ -quasiregulärer Abbildungen, die  $M \circ f_k(x) \neq 0, \infty$  für alle  $x \in U$  und  $k \geq k_0$  erfüllt und lokal gleichmäßig gegen  $M \circ f|_U$  konvergiert. Somit ist  $M \circ f|_U$  nach Satz 1.2.9 (d)  $K$ -quasiregulär. Des weiteren gilt  $M \circ f|_U(x_0) = 0$  und somit gilt  $\mu(M \circ f|_U, U, 0) > 0$ , oder  $M \circ f|_U$  ist konstant. Nach Satz 1.4.4 muß aber  $M \circ f|_U$  konstant sein oder  $\mu(M \circ f|_U, U, 0) = 0$  gelten. Es folgt, daß  $M \circ f|_U$  konstant 0 ist, und dies bedeutet, daß  $f$  auf  $U$  konstant  $\infty$  ist.

Wir haben gezeigt, daß  $\{x \in G; f(x) = \infty\}$  offen ist. Die Stetigkeit von  $f$  stellt sicher, daß diese Menge auch abgeschlossen ist. Es folgt, daß  $f$  konstant  $\infty$  auf  $G$  ist. □

Wir wollen nun die Situation beschreiben, in der die Punkte, in denen die betrachtete Familie nicht normal ist, isoliert vorliegen. Das folgende Lemma ist für holomorphe Funktionen von M. Essén und S. Wu in [11] bewiesen worden.

**2.3.2 Lemma** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $x_0$  ein Punkt aus  $G$ . Des weiteren sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von in  $G$  definierten  $K$ -quasiregulären Abbildungen, die normal in  $G^* := G \setminus \{x_0\}$  ist, die aber keine Teilfolge besitzt, welche in  $x_0$  normal ist.*

*Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $f_k$  für alle  $k \geq k_0$  einen Fixpunkt in  $B(x_0, \varepsilon)$  besitzt.*

*Beweis:* Sei  $\varepsilon > 0$  so, daß  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset G$  gilt. Da  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $G^*$  normal ist, existiert zu jeder Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  dieser Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert. Nach Lemma 2.3.1 ist  $f$  quasiregulär oder konstant  $\infty$ . Wäre  $f$  quasiregulär, so folgte aus dem Maximumsprinzip, daß  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$  ab genügend großem  $k$  gleichmäßig beschränkt ist. Satz 1.4.7 lieferte dann Normalität von  $(f_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  in  $x_0$ . Dies stände im Widerspruch zu den Voraussetzungen. Also ist  $f$  konstant  $\infty$ .

Wir finden nun ein  $l_1 \in \mathbb{N}$  so, daß  $f_{\nu(l)}(\partial B(x_0, \varepsilon)) \cap \overline{B(x_0, \varepsilon)} = \emptyset$  für alle  $l \geq l_1$  gilt. Da aber  $(f_{\nu(l)})_{l \in \mathbb{N}}$  in  $B(x_0, \varepsilon)$  nicht normal ist, folgt mit Satz 1.4.7, daß wir ein  $l_0 \geq l_1$  derart finden können, daß  $f_{\nu(l)}(B(x_0, \varepsilon)) \cap B(x_0, \varepsilon) \neq \emptyset$  für alle  $l \geq l_0$  gilt. Da  $\mu(f_{\nu(l)}, B(x_0, \varepsilon), \cdot)$  auf  $\mathbb{R}^n \setminus f_{\nu(l)}(\partial B(x_0, \varepsilon))$  konstant ist, können wir  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \subset f_{\nu(l)}(B(x_0, \varepsilon))$  für alle  $l \geq l_0$  folgern. Somit existiert eine Komponente  $U$  des Urbilds von  $B(x_0, \varepsilon)$  unter  $f_{\nu(l)}$ , deren Abschluß in  $B(x_0, \varepsilon)$  liegt. Dann ist  $U$  ein normales Gebiet von  $f_{\nu(l)}$  und wird eigentlich auf  $B(x_0, \varepsilon)$  abgebildet. Mit Lemma 1.3.14 folgt nun, daß  $f_{\nu(l)}$  für alle  $l \geq l_0$  einen Fixpunkt in  $B(x_0, \varepsilon)$  besitzt.

Insgesamt haben wir nun gezeigt, daß jede Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  unendlich viele Folgenglieder hat, die einen Fixpunkt in  $B(x_0, \varepsilon)$  besitzen. Somit existieren nur endlich viele Folgenglieder von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die keinen Fixpunkt in  $B(x_0, \varepsilon)$  haben. Es folgt die Behauptung.  $\square$

Ein ähnliches Lemma wollen wir nun für periodische Punkte formulieren. Dafür reicht allerdings ein Punkt, in dem die betrachtete Folge nicht normal ist, nicht aus.

**2.3.3 Lemma** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Seien  $x_1, x_2 \in G$  verschieden. Des weiteren sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $G$  definierter  $K$ -quasiregulärer Abbildungen. Diese Folge sei in  $G \setminus \{x_1, x_2\}$  normal, es sei jedoch jede Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  weder in  $x_1$  noch in  $x_2$  normal.*

*Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $f_k$  für alle  $k \geq k_0$  und für beliebiges  $m \in \mathbb{N}$  einen periodischen Punkt der Periode  $m$  sowohl in  $B(x_1, \varepsilon)$  als auch in  $B(x_2, \varepsilon)$  besitzt.*

*Beweis:* Sei  $\varepsilon > 0$  so, daß die Abschlüsse von  $B(x_1, \varepsilon)$  und  $B(x_2, \varepsilon)$  disjunkt sind und in  $G$  liegen. Nach den Voraussetzungen können wir zu jeder Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  dieser Teilfolge finden, die auf  $G \setminus \{x_1, x_2\}$  lokal gleichmäßig konvergiert. Wie im Beweis von Lemma 2.3.2 können wir schließen, daß die Grenzfunktion schon konstant  $\infty$  sein muß. Ebenfalls wie im Beweis von Lemma 2.3.2 finden wir nun ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so, daß  $f_{\nu(k)}(\partial B(x_i, \varepsilon)) \cap \overline{B(x_j, \varepsilon)} = \emptyset$  und  $f_{\nu(k)}(B(x_i, \varepsilon)) \cap B(x_j, \varepsilon) \neq \emptyset$  und somit  $\overline{B(x_i, \varepsilon)} \subset f_{\nu(k)}(B(x_j, \varepsilon))$  für alle  $k \geq k_0$  und für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt. Somit finden wir für alle  $k \geq k_0$  und für alle  $i, j \in \{1, 2\}$  ein Gebiet  $V_i^j$ , dessen Abschluß in  $B(x_i, \varepsilon)$  liegt und welches von  $f_{\nu(k)}$  eigentlich auf  $B(x_j, \varepsilon)$  abgebildet wird. Somit ist der Graph  $G(f_{\nu(k)}, \{B(x_i, \varepsilon)\}_{i=1}^2)$ , wie er in Bezeichnung 2.1.8 eingeführt wurde, für alle  $k \geq k_0$  ein vollständiger Graph. Nach Lemma 2.1.3 und Lemma 2.1.9 folgt nun, daß  $f_{\nu(k)}$  für alle  $k \geq k_0$  sowohl in  $B(x_1, \varepsilon)$  als auch in  $B(x_2, \varepsilon)$  einen periodischen Punkt beliebiger Periode besitzt.

Wir haben nun gezeigt, daß es nur endlich viele Folgenglieder von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  geben kann, die keine periodischen Punkte beliebiger Periode in  $B(x_1, \varepsilon)$  und  $B(x_2, \varepsilon)$  besitzen. Die Behauptung folgt.  $\square$

*Bemerkung:* Die beiden vorangegangenen Lemmata sind für quasimeromorphe Abbildungen nicht analog beweisbar, da das Maximumprinzip in den Beweisen eine wesentliche Rolle spielt.  $\triangleleft$

Es ist uns gelungen, Kriterien zu finden, die uns die Existenz von Fixpunkten oder periodischen Punkten sichern, falls wir Punkte finden, die in der Menge der Punkte, in denen die betrachtete Folge nicht normal ist, isoliert liegen. Die nächsten beiden Lemmata zielen darauf ab, entsprechende Ergebnisse ohne die Voraussetzung der Isoliertheit der Punkte, in denen die Folge nicht normal ist, zu liefern. Ein zentrales Hilfsmittel stellt dabei das Insellemma 2.2.2 dar.

**2.3.4 Lemma** *Sei  $q$  die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante. Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $p \in \mathbb{N}_{\geq q}$ . Seien  $x_1, \dots, x_p$  paarweise verschiedene Punkte in  $G \setminus \{\infty\}$ . Des Weiteren sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge  $K$ -quasimeromorpher Funktionen in  $G$  derart, daß für alle Teilfolgen  $(f_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt, daß  $(f_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  in  $x_j$  nicht normal ist.*

*Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  derart, daß  $\overline{B(x_j, \varepsilon_0)} \subset G$  für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt, und für alle  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  so existiert, daß für jedes  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  folgendes gilt:*

- ( $\star$ ) *Sind  $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(q)} \in \{x_1, \dots, x_p\}$  paarweise verschieden, und ist  $x \in \{x_1, \dots, x_p\}$ , so findet man ein  $l \in \{1, \dots, q\}$  und ein Gebiet  $U$ , dessen Abschluß in  $B(x, \varepsilon)$  enthalten ist, derart, daß  $f$  das Gebiet  $U$  eigentlich auf  $B(x_{\alpha(l)}, \varepsilon)$  abbildet.*

*Beweis:* Seien  $T_1, \dots, T_s$  die verschiedenen Teilmengen von  $\{x_1, \dots, x_p\}$ , die  $q$  Elemente haben. Wir wählen nun entsprechend des Insellemmas 2.2.2 und unter Beibehaltung der dortigen Bezeichnungen für alle  $k \in \{1, \dots, s\}$  zu  $T_k = \{x_{\alpha_k(1)}, \dots, x_{\alpha_k(q)}\}$  ein  $\varepsilon_k > 0$  derart, daß für alle  $\varepsilon \leq \varepsilon_k$  und für alle Gebiete  $H \subset \mathbb{R}^n$  die Familie  $\mathcal{F}(H, \{B(x_{\alpha_k(j)}, \varepsilon)\}_{j=1}^q)$  normal ist.

Sei  $\varepsilon_0 \leq \min\{\varepsilon_k; k \in \{1, \dots, s\}\}$  so, daß  $\overline{B(x_j, \varepsilon_0)} \subset G$  für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt. Sei  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ .

SCHRITT 1: Wir betrachten die Familie  $\mathcal{F}_{1,1} := \{f_k|_{B(x_1, \varepsilon)}; k \in \mathbb{N}\}$ . Da nach Voraussetzung keine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $x_1$  normal ist, ist auch keine Teilfamilie von  $\mathcal{F}_{1,1}$  normal. Zunächst betrachten wir die Menge  $T_1$ . Nach der Folgerung zum Insellemma finden wir eine Teilfolge  $(f_{\alpha_{1,1}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit der folgenden Eigenschaft:

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  existieren ein  $j_k \in \{1, \dots, q\}$  und ein Gebiet  $U_k$ , dessen Abschluß in  $B(x_1, \varepsilon)$  liegt derart, daß  $f_{\alpha_{1,1}(k)}$  das Gebiet  $U_k$  eigentlich auf  $B(x_{\alpha_1(j_k)}, \varepsilon)$  abbildet.

Nun betrachten wir die Familie  $\mathcal{F}_{1,2} := \{f_{\alpha_{1,1}(k)}|_{B(x_1, \varepsilon)}; k \in \mathbb{N}\}$  und wiederholen das obige Argument für  $\mathcal{F}_{1,2}$  und  $T_2$ .

Induktiv erhalten wir schließlich eine Teilfolge  $(f_{\alpha_{1,s}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft:

Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $T_l$ ,  $l \in \{1, \dots, s\}$ , existieren ein  $j_k \in \{1, \dots, q\}$  und ein Gebiet  $U_{k,l}$ , dessen Abschluß in  $B(x_1, \varepsilon)$  liegt derart, daß die Funktion  $f_{\alpha_{1,s}(k)}$  das Gebiet  $U_{k,l}$  eigentlich auf  $B(x_{\alpha_l(j_k)}, \varepsilon)$  abbildet.

SCHRITT 2: Wir betrachten nun die Funktionen der gefundenen Teilfolge eingeschränkt auf  $B(x_2, \varepsilon)$ , also die Familie  $\mathcal{F}_{2,1} := \{f_{\alpha_{1,s}(k)}|_{B(x_2, \varepsilon)}; k \in \mathbb{N}\}$ . Durch Wiederholung von Schritt 1 erhalten wir eine Teilfolge  $(f_{\alpha_{2,s}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_{\alpha_{1,s}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  mit der gewünschten Eigenschaft. Induktiv erhalten wir letztlich eine Teilfolge  $(f_{\alpha_{p,s}(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit folgender Eigenschaft:

Für alle  $k \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \{x_1, \dots, x_p\}$  und  $T_l$ ,  $l \in \{1, \dots, s\}$ , existieren ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  und ein Gebiet  $U$ , dessen Abschluß in  $B(x, \varepsilon)$  liegt derart, dass die Funktion  $f_{\alpha_{p,s}(k)}$  das Gebiet  $U$  eigentlich auf  $B(x_{\alpha_l(j)}, \varepsilon)$  abbildet. □

*Bemerkung:* Betrachten wir ausschließlich quasireguläre Abbildungen, so ist das Insellemma 2.2.2, wie in den daran anschließenden Bemerkungen erwähnt, schon für  $q - 1$  verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_{q-1}$  gültig. Somit reicht es in diesem Fall aus,  $p \geq q - 1$  in den Voraussetzungen von Lemma 2.3.4 zu fordern. ◁

Mit Hilfe der entsprechenden Lemmata aus der Graphentheorie können wir nun Aussagen über die Existenz von Fixpunkten und periodischen Punkten treffen.

**2.3.5 Lemma** *Es seien die Voraussetzungen des Lemmas 2.3.4 gegeben.*

*Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  so, daß  $\overline{B(x_j, \varepsilon_0)} \subset G$  für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt und für alle  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  existiert, die folgendes erfüllt:*

- (i) *Ist  $p \geq \max\{(q - 1)^2 + 1, 3\}$ , so existiert für jede Funktion  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  zu jedem  $k > 1$  ein  $j \in \{1, \dots, p\}$  derart, daß  $f^k$  einen Fixpunkt in  $B(x_j, \varepsilon)$  besitzt.*
- (ii) *Ist  $p \geq (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q)$ , so existiert für jede Funktion  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  zu jedem  $k > 1$  ein  $j \in \{1, \dots, p\}$  derart, daß  $f$  in  $B(x_j, \varepsilon)$  einen periodischen Punkt der Periode  $k$  besitzt.*

*Beweis:* Sei  $\varepsilon_0 > 0$  entsprechend Lemma 2.3.4 gewählt. Sei  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ , und sei  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , welche die Bedingung  $(\star)$  gemäß Lemma 2.3.4 erfüllt. Sei  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$ . Wir betrachten den gerichteten Graphen  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$ , der in Bezeichnung 2.1.8 eingeführt wurde. Die Bedingung  $(\star)$  liefert uns, daß der Außengrad einer jeden Ecke  $B_j$  mindestens  $p - (q - 1)$  beträgt.

Ist nun  $p \geq \max\{(q - 1)^2 + 1, 3\}$ , sind die Voraussetzungen von Lemma 2.1.4 erfüllt, und es folgt, daß der Graph  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$  für jedes  $k > 1$  einen geschlosse-

nen Kantenzug der Länge  $k$  enthält. Lemma 2.1.9 liefert somit, daß die Funktion  $f^k$  für jedes  $k > 1$  einen Fixpunkt in einem der  $B_j$  besitzt.

Ist  $p \geq (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q)$ , sind die Voraussetzungen von Lemma 2.1.6 erfüllt, und es folgt, daß der Graph  $G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$  für jedes  $k > 1$  einen einfachen geschlossenen Kantenzug der Länge  $k$  enthält. Lemma 2.1.9 liefert dann, daß die Funktion  $f$  für jedes  $k > 1$  einen periodischen Punkt der Periode  $k$  in einem der  $B_j$  besitzt. □

Die Formulierung von Lemma 2.3.5 läßt uns sofort einsehen, daß wir sogar eine Aussage über die Mindestanzahl der Fixpunkte der Abbildungen  $f_{\nu(k)}$  in  $G$  machen können. Sie hat die folgende Gestalt.

**2.3.6 Lemma** *Es seien wieder die Voraussetzungen von Lemma 2.3.4 gegeben.*

*Wir setzen  $\tilde{q}_1 := \max\{(q-1)^2 + 1, 3\}$ ,  $\tilde{q}_2 := (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q)$ ,  $c_1 := p - \tilde{q}_1 + 1$  und  $c_2 := p - \tilde{q}_2 + 1$ .*

*Dann existiert eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die folgendes erfüllt:*

- (i) *Ist  $p \geq \tilde{q}_1$ , so hat  $f^k$  für alle  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  und alle  $k > 1$  mindestens  $c_1$  verschiedene Fixpunkte in  $G$ .*
- (ii) *Ist  $p \geq \tilde{q}_2$ , so hat jedes  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  für alle  $k > 1$  mindestens  $c_2$  verschiedene periodische Punkte der Periode  $k$  in  $G$ .*

*Beweis:* Wir wählen  $\varepsilon > 0$  so, daß  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  für das  $\varepsilon_0$  aus Lemma 2.3.5 und  $\overline{B(x_i, \varepsilon)} \cap \overline{B(x_j, \varepsilon)} = \emptyset$  für alle  $i, j \in \{1, \dots, p\}$  mit  $i \neq j$  gilt. Sei  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die die Aussagen von Lemma 2.3.5 erfüllt. Sei nun  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  und  $k > 1$ .

Wir wenden Lemma 2.3.5 (i) zunächst nur für  $x_1, \dots, x_{\tilde{q}_1}$  an. Dann finden wir ein  $j_1 \in \{1, \dots, \tilde{q}_1\}$  derart, daß  $f^k$  in  $B(x_{j_1}, \varepsilon)$  einen Fixpunkt besitzt. Anschließend tauschen wir, falls  $c_1 > 0$  ist,  $x_{j_1}$  gegen  $x_{\tilde{q}_1+1}$  und wiederholen das Argument für die  $\tilde{q}_1$  verschiedenen Punkte  $x_1, \dots, x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \dots, x_{\tilde{q}_1+1}$ . So erhalten wir einen Fixpunkt in  $B(x_{j_2}, \varepsilon)$ , wobei  $j_1 \neq j_2$  gilt. Diesen Schritt können wir noch  $(c_1 - 2)$ -mal ausführen und erhalten so  $c_1$  verschiedene Fixpunkte von  $f^k$  in  $G$ .

Völlig analog läßt sich (ii) unter Verwendung von Lemma 2.3.5 (ii) beweisen. □

*Bemerkung:* Auch in den vorangegangenen Lemmata verringert sich der Wert, den  $p$  mindestens haben muß, falls wir ausschließlich quasireguläre Abbildungen betrachten. Entsprechend der Bemerkung nach Lemma 2.3.4 und aufgrund der Tatsache, daß die im obigen Beweis verwendeten graphentheoretischen Lemmata gültig bleiben, wenn man  $q$  durch den Wert  $q - 1$  ersetzt, ist es aus-

reichend, in der Aussage (i)  $p \geq \max\{(q-2)^2 + 1, 3\}$  beziehungsweise  $p \geq ((q-1)^4 + 3(q-1)^2 + 1) - (2(q-1)^3 + (q-1))$  in (ii) zu fordern, um die entsprechenden Ergebnisse zu erhalten.

◁

## 2.4 Normalität und Quasinormalität

In diesem Abschnitt betrachten wir Familien quasiregulärer Abbildungen, die eine Iterierte besitzen, die keine Fixpunkte hat, und wollen auf die Normalität dieser Familie schließen. Dies ist mittels der Ergebnisse aus Abschnitt 2.3 sofort möglich. Etwas schwieriger gestaltet sich die Situation, wenn wir Anforderungen stellen, die sich statt auf Fixpunkte einer Iterierten der betrachteten Abbildung auf periodische Punkte der Abbildung selbst beziehen. In diesem Fall erzielen wir ein etwas schwächeres Ergebnis in der Form von Satz 2.4.2. Abschließend formulieren wir die angesprochenen Aussagen noch etwas allgemeiner für quasimeromorphe statt quasireguläre Abbildungen.

Wie auch schon einleitend erwähnt, ist das folgende Ergebnis von M. Essén und S. Wu in [11] für holomorphe Funktionen bewiesen worden.

**2.4.1 Satz** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von in  $G$  definierten  $K$ -quasiregulären Funktionen. Es existiere für alle  $f \in \mathcal{F}$  ein  $k > 1$  derart, daß  $f^k$  keinen Fixpunkt in  $G$  besitzt.*

*Dann ist  $\mathcal{F}$  normal.*

*Beweis:* Wir nehmen an, daß  $\mathcal{F}$  nicht normal ist.

Dann existiert ein  $x_1 \in G$ , in dem  $\mathcal{F}$  nicht normal ist. Somit finden wir eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}$  derart, daß keine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $x_1$  normal ist. Da  $f_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  nach Voraussetzung keinen Fixpunkt besitzen kann, folgt aus Lemma 2.3.2, daß  $x_1$  in der Menge der Punkte, in denen  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht normal ist, nicht isoliert ist. Sei mit  $q = q(n, K)$  die Rickman-Konstante bezeichnet. Wir setzen  $p := \max\{(q-1)^2 + 1, 3\}$  und wählen paarweise verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_p \in G$  und eine Teilfolge  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  so, daß keine ihrer Teilfolgen in einem der  $x_j, j \in \{1, \dots, p\}$ , normal ist. Nun können wir Lemma 2.3.5 (i) anwenden. Dies liefert uns ein  $f \in \{f_{\mu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  derart, daß  $f^k$  für alle  $k > 1$  einen Fixpunkt in  $G$  besitzt. Dies ist ein Widerspruch, da  $f \in \mathcal{F}$  gilt.

□

*Bemerkung:* In  $\mathbb{C}$  gibt es Beispiele, die zeigen, daß man in den Voraussetzungen von Satz 2.4.1 tatsächlich  $k > 1$  fordern muß und nicht etwa  $k \geq 1$  zulassen darf

(siehe [11]). Betrachtet man die Beweise der graphentheoretischen Lemmata, die wir verwendet haben, so stellt man fest, daß diese ebenfalls nur Ergebnisse im Fall  $k > 1$  liefern.

◁

Wir haben gezeigt, daß die Familie  $\mathcal{F}$  aller  $K$ -quasiregulären Funktionen  $f$ , für die ein  $k > 1$  so existiert, daß  $f^k$  keinen Fixpunkt besitzt, normal ist. Im folgenden wollen wir die Familie  $\tilde{\mathcal{F}}$  aller  $K$ -quasiregulären Funktionen  $f$ , für die ein  $k > 1$  so existiert, daß  $f$  keinen periodischen Punkt der Periode  $k$  hat, betrachten. Offensichtlich gilt  $\mathcal{F} \subset \tilde{\mathcal{F}}$ . Die Familie  $\tilde{\mathcal{F}}$  ist nicht normal. Etwa liegt die Folge  $(\lambda^k \text{id})_{k \in \mathbb{N}}$  für  $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$  in  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Diese hat keine Teilfolge, die in 0 lokal gleichmäßig konvergiert. Durch Konjugation mit Möbiustransformationen läßt sich dieses Beispiel unabhängig von dem Gebiet, auf dem die Funktionen der Familie  $\tilde{\mathcal{F}}$  definiert sind, betrachten.

Der nächste Satz zeigt, daß wir unter diesen schwächeren Voraussetzungen trotzdem noch Quasinormalität, sogar der Ordnung 1, erhalten. Er ist von D. Bargmann und W. Bergweiler im Rahmen der komplexen Funktionentheorie in [2] bewiesen worden.

**2.4.2 Satz** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Sei  $\tilde{\mathcal{F}}$  die Familie aller  $K$ -quasiregulären Funktionen  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , für die ein  $k = k(f) > 1$  derart existiert, daß  $f$  keinen periodischen Punkt der Periode  $k$  besitzt.*

*Dann ist  $\tilde{\mathcal{F}}$  quasinormal von der Ordnung 1.*

*Beweis:* Wie oben schon gezeigt, ist  $\tilde{\mathcal{F}}$  nicht normal. Somit finden wir ein  $p \in \mathbb{N}$ , verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_p \in G$  und eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  derart, daß keine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in einem der  $x_j$  normal ist. Wir zeigen nun, daß  $p = 1$  gilt. Dies bedeutet, daß  $\tilde{\mathcal{F}}$  quasinormal von der Ordnung 1 ist.

Sei mit  $q$  wieder die Rickman-Konstante bezeichnet. Wir nehmen zunächst an, daß  $p \geq (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q) =: \tilde{q}$  gilt.

Wir können nun Lemma 2.3.5 (ii) anwenden und erhalten damit ein  $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ , welches periodische Punkte beliebiger Periode größer 1 in  $G$  besitzt. Dies ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Es folgt, daß  $p < \tilde{q}$  gilt. Sei  $p$  nun in dem Sinne maximal, daß  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $G \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$  normal ist. Wäre nun  $p \geq 2$ , so könnten wir Lemma 2.3.3 anwenden und erhielten wiederum eine Funktion  $f \in \tilde{\mathcal{F}}$ , die periodische Punkte beliebiger Periode in  $G$  besitzt. Da dies nach den Voraussetzungen ausgeschlossen ist, können wir folgern, daß schon  $p = 1$  gelten muß.

□

M. Essén und S. Wu haben in ihrem Artikel [11] die in Satz 2.4.1 gegebene Si-

tuation auch im meromorphen Fall betrachtet. Ihre Überlegungen erweisen sich als auf den quasimeromorphen Fall übertragbar. Es stellt sich das Problem, daß Lemma 2.3.2 für Folgen quasimeromorpher Abbildungen im allgemeinen falsch ist, wie im Fall  $n = 2$  durch die Betrachtung der Folge  $(x - 1/(kx))_{k \in \mathbb{N}}$  auf der Einheitskreisscheibe, die auch von M. Essén und S. Wu angegeben wird, deutlich wird. Somit entfällt dieses Hilfsmittel zur Beschaffung ausreichend vieler Punkte, in denen die betrachtete Familie nicht normal ist, im Beweis von Satz 2.4.1. Auch Satz 2.4.2 läßt sich nicht ohne weiteres auf den Fall quasimeromorpher Abbildungen übertragen, da wir im Beweis Lemma 2.3.3 verwendet haben, welches ebenfalls nicht für quasimeromorphe Abbildungen gilt (vergleiche die Bemerkung nach Lemma 2.3.3). Der angegebene Beweis ist also nicht geeignet, um eine Satz 2.4.2 entsprechende Aussage für quasimeromorphe Abbildungen zu beweisen. Indem wir in beiden Fällen die Kontrapositionen der entsprechenden Aussagen aus Lemma 2.3.5 anwenden, können wir aber wenigstens eine abgeschwächte Version leicht einsehen. Wir werden diesen Satz hier etwas allgemeiner fassen. Er folgt sofort aus den Kontrapositionen der Aussagen aus Lemma 2.3.6.

**2.4.3 Satz** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie auf  $G$  definierter  $K$ -quasimeromorpher Abbildungen. Mit  $q$  sei die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante bezeichnet. Sei  $c \in \mathbb{N}_0$ . Wir setzen  $\tilde{q}_1 := \max\{(q - 1)^2 + 1, 3\}$  und  $\tilde{q}_2 := (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q)$ .*

- (i) *Existiert für alle  $f \in \mathcal{F}$  ein  $k > 1$  so, daß  $f^k$  höchstens  $c$  verschiedene Fixpunkte in  $G$  besitzt, so ist  $\mathcal{F}$  quasinormal von der Ordnung höchstens  $\tilde{q}_1 + c - 1$ .*
- (ii) *Existiert für alle  $f \in \mathcal{F}$  ein  $k > 1$  so, daß  $f$  höchstens  $c$  verschiedene periodische Punkte der Periode  $k$  in  $G$  besitzt, so ist  $\mathcal{F}$  quasinormal von der Ordnung höchstens  $\tilde{q}_2 + c - 1$ .*

*Bemerkungen:* 1. Lassen wir Gebiete  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  als Definitionsbereiche zu, so erhöht sich die Ordnung der Quasinormalität um jeweils 1, da das verwendete Lemma 2.3.6 keine Aussage im Punkt  $\infty$  tift.

2. Ist  $n = 2$ , so hat  $q$  nach dem Kleinen Satz von Picard den Wert 3. Wir erhalten also in diesem Spezialfall für  $c = 0$ , also in der Situation von Satz 2.4.1, in der obigen Aussage Quasinormalität der Ordnung höchstens 4. Dies stellt eine Verbesserung zum Ergebnis von M. Essén und S. Wu in [11, §4 Remark 2] dar. Dort wird nur Quasinormalität der Ordnung höchstens 17 erreicht. S. Wang und S. Wu haben diese Verbesserung in [37] ebenfalls erzielt. Sie geben außerdem ein Ergebnis der Form (i) für komplexe, meromorphe Funktionen an.

◁

## 2.5 Periodische Punkte ganzer quasiregulärer Abbildungen

Für ganze, das heißt auf dem ganze Raum definierte, transzendente Funktionen in der komplexen Ebene ist in [5] von W. Bergweiler gezeigt worden, daß diese für alle  $m \geq 2$  unendlich viele periodische Punkte der Periode  $m$  besitzen. Dieses Ergebnis wollen wir jetzt nach einer Idee aus [2] unter Anwendung einiger Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte für  $K$ -quasireguläre Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  beweisen. Der oben genannte Satz stellt dann den Spezialfall  $n = 2$  und  $K = 1$  dar.

Zuerst müssen wir dazu einige Informationen über wesentliche Singularitäten quasiregulärer Abbildungen sammeln. Wir halten uns dabei wieder an das Buch [33] von S. Rickman und beginnen mit der Definition einer wesentlichen Singularität.

**2.5.1 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  quasimeromorph. Des weiteren sei  $b$  ein isolierter Punkt des Randes von  $G$  (in  $\overline{\mathbb{R}^n}$ ). Dann heißt  $b$  wesentliche Singularität von  $f$ , falls  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  in  $\overline{\mathbb{R}^n}$  nicht existiert.

*Bemerkungen:* 1. Existiert der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ , so läßt sich  $f$  nicht nur stetig, sondern quasimeromorph in  $b$  fortsetzen (siehe [33, Seite 66]).

2. Besitzt die quasimeromorphe Funktion  $f$  eine wesentliche Singularität in  $\infty$ , so folgt aus der obigen Definition, daß wir eine unbeschränkte Folge im Definitionsbereich von  $f$  finden können, deren Bildfolge unter  $f$  beschränkt ist.

◁

Im folgenden benötigen wir Aussagen über das Verhalten des Maximalbetrages einer quasiregulären Funktion. Die gewünschte Aussage folgern wir aus zwei Lemmata, die in [33] auf Seite 79 beziehungsweise Seite 83 zu finden sind. Doch zunächst müssen wir noch einige Begriffe einführen.

**2.5.2 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  quasimeromorph und nicht konstant.

Für  $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$  und eine Borelmenge  $E$ , deren Abschluß eine kompakte Teilmenge von  $G$  ist, setzen wir

$$n(E, y) := \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap E} i(x, f).$$

Ist  $Y$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Kugelschale in  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , so definieren wir

$$\nu(E, Y) := \frac{1}{m_{n-1}(Y)} \int_Y n(E, y) dy.$$

Zur Abkürzung definieren wir

$$n(r, y) := n(\overline{B(0, r)}, y) \quad \text{und} \quad \nu(r, s) := \nu(\overline{B(0, r)}, \partial B(0, s)).$$

Schließlich setzen wir

$$M(r) := \max_{|x|=r} |f(x)|,$$

falls  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  gilt.

*Bemerkungen:* 1. Ist aus dem Kontext nicht klar, auf welche Funktion wir uns beziehen, so versehen wir die jeweiligen Bezeichnungen mit einem entsprechenden Index.

2. Die Funktion  $n(E, \cdot)$  ist eine Borelfunktion, die die Urbilder jedes Punktes  $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$  in  $E$  gemäß Vielfachheit zählt. Man nennt sie deswegen auch Zählfunktion. Der Wert  $\nu(E, Y)$  gibt das sphärische Mittel über die Anzahl der Urbilder von Punkten aus  $Y$  in  $E$  an. Offensichtlich gilt

$$\nu(r, s) = \frac{1}{m_{n-1}(\partial B(0, 1))} \int_{\partial B(0, 1)} n(r, sy) dy.$$

Wegen des Maximumprinzips ist  $M$  eine monoton wachsende Funktion. Man nennt  $M(r)$  Maximalbetrag.

◁

Wir kommen jetzt zu den angekündigten Lemmata.

**2.5.3 Lemma** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet. Seien  $r, s, t > 0$ , und sei  $\theta > 1$  derart, daß  $\overline{B(0, \theta r)} \subset G$  gilt. Schließlich sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  quasimeromorph und nicht konstant.

Dann gilt

$$\nu(\theta r, t) \geq \nu(r, s) - \frac{K_I(f) |\log(\frac{t}{s})|^{n-1}}{(\log \theta)^{n-1}}.$$

**2.5.4 Lemma** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine quasimeromorphe Abbildung, die eine wesentlich Singularität in  $\infty$  hat.

Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r, Y) = \infty$$

für alle  $(n - 1)$ -dimensionalen Kugelschalen  $Y$  in  $\overline{\mathbb{R}^n}$ .

*Bemerkung:* Im Beweis von Lemma 2.5.3 ([33, Seite 79]) benutzt S. Rickman das Mittel der Module von Familien von Wegen. In den Beweis von Lemma 2.5.4 ([33, Seite 83]) gehen Überlegungen darüber ein, wie groß die Menge aller Punkte sein kann, die von  $f$  nicht angenommen werden, welche wesentlich grundlegender sind als Satz 1.4.1. Lemma 2.5.4 selbst stellt einen Baustein im Beweis von Satz 1.4.1 dar.

◁

Aus den beiden vorangegangenen Lemmata folgern wir nun eine Aussage, die wir im Beweis von Satz 2.5.6 benötigen.

**2.5.5 Lemma** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine quasireguläre, nicht-konstante Abbildung, die in  $\infty$  eine wesentliche Singularität besitzt.

Dann gilt  $M(R)/R \rightarrow \infty$  für  $R \rightarrow \infty$ .

*Beweis:* Wir wählen  $\theta > 1$ ,  $r > 0$ ,  $s = 1$  und  $t > M(\theta r)$  und erhalten aus Lemma 2.5.3

$$\nu(\theta r, t) \geq \nu(r, 1) - \frac{K_I(f) |\log t|^{n-1}}{(\log \theta)^{n-1}}.$$

Da  $t > M(\theta r)$  gewählt ist, gilt  $\nu(\theta r, t) = 0$ . Es folgt also mit  $t \downarrow M(\theta r)$

$$|\log M(\theta r)| \geq \left( \frac{\nu(r, 1)}{K_I(f)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \log \theta.$$

Es folgt nun für  $r = \theta > 1$

$$\frac{|\log M(r^2)|}{\log r^2} \geq \left( \frac{\nu(r, 1)}{K_I(f)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{\log r}{\log r^2}.$$

Mit Lemma 2.5.4 ergibt sich, daß  $\log M(R)/\log R \rightarrow \infty$  für  $R \rightarrow \infty$  gilt. Somit gilt auch  $M(R)/R \rightarrow \infty$  für  $R \rightarrow \infty$ .

□

Wir haben nun genug Vorarbeit geleistet, um den nachfolgenden Satz beweisen zu können.

**2.5.6 Satz** *Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $K$ -quasireguläre Funktion, die in  $\infty$  eine wesentliche Singularität besitzt. Sei  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ .*

*Dann besitzt  $f$  unendlich viele periodische Punkte der Periode  $m$ .*

*Beweis:* Da  $f$  nach Voraussetzung eine wesentliche Singularität in  $\infty$  besitzt, finden wir eine betragsmäßig monoton steigende, unbeschränkte Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^n$  derart, daß  $(f(a_k))_{k \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist.

Sei  $D_k$  eine Drehung, die den ersten Einheitsvektor  $e_1$  auf  $\frac{1}{|a_k|}a_k$  abbildet, das heißt insbesondere, daß  $D_k$  sowie  $D_k^{-1}$  orthogonal sind. Weiter sei  $S_k$  die Streckung  $x \rightarrow |a_k|x$ . Dann ist  $M_k := S_k \circ D_k$  eine Möbiustransformation, die  $e_1$  auf  $a_k$  abbildet. Des weiteren gilt  $|M_k^{-1}(x)| = |S_k^{-1}(x)| = \frac{1}{|a_k|}|x|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Wir betrachten nun die  $K$ -quasireguläre Abbildung  $f_k := M_k^{-1} \circ f \circ M_k$ . Es ist  $x$  genau dann ein periodischer Punkt der Periode  $m$  von  $f_k$ , wenn  $M_k(x)$  ein periodischer Punkt der Periode  $m$  von  $f$  ist. Es gilt  $|f_k(x)| = \frac{1}{|a_k|}|f(M_k(x))|$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Es folgt, daß  $|f_k(0)| = \frac{1}{|a_k|}|f(0)| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und somit auch  $f_k(0) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt. Ebenso gilt  $|f_k(e_1)| = \frac{1}{|a_k|}|f(a_k)| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , also  $f_k(e_1) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Nun können wir zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall haben wir genügend Punkte, in denen  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht normal ist, zur Verfügung, um Lemma 2.3.5 anzuwenden. Andernfalls stellen wir Überlegungen an, die es uns erlauben, Lemma 2.3.3 nutzbringend einzusetzen. Wir bezeichnen mit  $q$  wie gewohnt die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante und definieren  $p := (q^4 + 3q^2 + 1) - (2q^3 + q)$ .

1. FALL: Es existiert eine Teilfolge  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $p$  verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  derart, daß keine Teilfolge von  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  in einem der  $x_i$  normal ist.

Nach Lemma 2.3.5 können wir ein  $\varepsilon > 0$  und eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  so finden, daß  $0 \notin B(x_i, \varepsilon)$  für alle  $i \in \{1, \dots, p\}$  gilt und zu jedem  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  ein  $j \in \{1, \dots, p\}$  derart existiert, daß  $f$  einen periodischen Punkt der Periode  $m$  in  $B(x_j, \varepsilon)$  besitzt. Wir dürfen annehmen, daß es ein  $j \in \{1, \dots, p\}$  so gibt, daß  $f_{\nu(k)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  einen periodischen Punkt  $p_k$  der Periode  $m$  in  $B(x_j, \varepsilon)$  hat. Andernfalls gehen wir zu einer geeigneten Teilfolge über.

Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist nun  $M_{\nu(k)}(p_k)$  ein periodischer Punkt der Periode  $m$  von  $f$ . Es gilt  $M_{\nu(k)}(p_k) \in B(M_{\nu(k)}(x_j), |a_{\nu(k)}|\varepsilon)$  und somit

$$|a_{\nu(k)}|(|x_j| - \varepsilon) \leq |M_{\nu(k)}(p_k)| \leq |a_{\nu(k)}|(|x_j| + \varepsilon).$$

Da  $|a_{\nu(k)}| \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, können wir folgern, daß  $f$  unendlich viele periodische Punkte der Periode  $m$  hat.

2. FALL: Die Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  quasinormal von der Ordnung höchstens  $p - 1$ .

Wir finden also Punkte  $x_1, \dots, x_{p-1} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  und eine Teilfolge  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  derart, daß  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  konvergiert. Es gilt für alle  $t > 0$  die Aussage

$$\begin{aligned} \max_{|x|=t} |f_{\mu(k)}(x)| &= \max_{|x|=t} \frac{|f(M_{\mu(k)}(x))|}{|a_{\mu(k)}|} \\ &= t \frac{\max_{|x|=|a_{\mu(k)}|t} |f(x)|}{|a_{\mu(k)}|} \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

da nach Lemma 2.5.5 die Beziehung

$$\frac{\max_{|x|=|a_{\mu(k)}|t} |f(x)|}{|a_{\mu(k)}|t} \rightarrow \infty \quad \text{für } k \rightarrow \infty$$

gilt, und  $t$  fest gewählt ist.

Aus der obigen Überlegung folgt mit Hilfe von Lemma 2.3.1, daß  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^n \setminus \{0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  lokal gleichmäßig gegen  $\infty$  konvergiert. Da wie oben gezeigt  $f_{\mu(k)}(e_1) \rightarrow 0$  und  $f_{\mu(k)}(0) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, folgt somit, daß jede Teilfolge von  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  weder in  $e_1$  noch in  $0$  normal ist. Die Folge  $(f_{\mu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  erfüllt nun die Voraussetzungen von Lemma 2.3.3. Dieses liefert uns ein  $\varepsilon \in (0, 1/2)$  und ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $f_{\mu(k)}$  für alle  $k \geq k_0$  einen periodischen Punkt  $p_k$  der Periode  $m$  in  $B(e_1, \varepsilon)$  besitzt. Dann ist  $M_{\mu(k)}(p_k)$  für alle  $k \geq k_0$  ein periodischer Punkt der Periode  $m$  von  $f$ . Da  $M_{\mu(k)}(p_k) \in B(M_{\mu(k)}(e_1), |a_{\mu(k)}|\varepsilon)$  ist, gilt

$$|a_{\mu(k)}|(1 - \varepsilon) \leq |M_{\mu(k)}(p_k)| \leq |a_{\mu(k)}|(1 + \varepsilon)$$

für alle  $k \geq k_0$ . Da  $|a_{\mu(k)}| \rightarrow \infty$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, folgt, daß  $f$  unendlich viele periodische Punkte der Periode  $m$  besitzt. □

*Bemerkung:* In  $\mathbb{C}$  kann man eine noch genauere Aussage erzielen, nämlich daß eine ganze transzendente Funktion schon unendlich viele abstoßende periodische Punkte von beliebiger Periode  $\geq 2$  besitzt. Man vergleiche hierzu auch die Bemerkungen nach Satz 2.2.2 sowie das folgende Kapitel.

Des weiteren wird durch die holomorphe Funktion  $z \mapsto e^z + z$  illustriert, daß die Aussage des vorangegangenen Satzes für  $m = 1$  im allgemeinen falsch ist. ◁

### 3 Abstoßende Fixpunkte und Normalität

In diesem Kapitel wollen wir uns nochmals mit den Fragen aus Kapitel 2 befassen, allerdings in einer etwas spezielleren Form. Wir haben in Kapitel 2 Beziehungen zwischen der Normalität einer Familie von quasiregulären Abbildungen und den Fixpunkten der in dieser Familie enthaltenen Abbildungen hergestellt. Nun interessieren wir uns nicht mehr nur für Fixpunkte im allgemeinen, sondern beschränken unsere Betrachtungen auf die sogenannten abstoßenden Fixpunkte. Eine Eigenschaft dieser Fixpunkte ist, daß die betrachtete Funktion in einer Umgebung eines abstoßenden Fixpunktes injektiv ist. Dies erweist sich keineswegs als Einschränkung bei der Benutzung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.1, jedoch zeigt die nähere Betrachtung der folgenden Abschnitte von Kapitel 2, daß dort Modifikationen nötig werden. Zunächst wenden wir uns dem in Abschnitt 2.2 angegebenen Insellemma zu und führen die für unsere Zwecke geeigneten Veränderungen durch. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir untersuchen, inwiefern sich Ergebnisse aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 auf die hier betrachtete Situation übertragen lassen.

#### 3.1 Variationen des Insellemmas

Wie schon einleitend erwähnt, wollen wir in diesem Abschnitt das Insellemma aus Abschnitt 2.2 so modifizieren, daß wir es zum Beweis von Aussagen nicht nur über Fixpunkte im allgemeinen, sondern über abstoßende Fixpunkte verwenden können. Zunächst betrachten wir die Definition eines abstoßenden Fixpunktes. Es sei erwähnt, daß die Klassifizierung von Fixpunkten im nächsten Kapitel vervollständigt werden wird. Hier führen wir nur den in diesem Kapitel benötigten Begriff ein.

**3.1.1 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine Funktion.

Ein Fixpunkt  $a$  von  $f$  heißt abstoßend, falls eine Umgebung  $U \subset G$  von  $a$  so existiert, daß  $f$  auf  $U$  injektiv ist und  $f(U) \supset \overline{U}$  gilt.

Ist  $x$  ein periodischer Punkt der Periode  $m \in \mathbb{N}$  von  $f$ , so heißt  $x$  abstoßend, falls  $x$  ein abstoßender Fixpunkt von  $f^m$  ist.

*Bemerkungen:* 1. Wir verwenden hier einen topologischen Zugang wie dies in [15] geschieht. Es ist jedoch auch möglich, eine analytische Definition anzugeben. Genauer werden wir darauf in den der vollständigen Klassifikation der Fixpunkte folgenden Bemerkungen im nächsten Kapitel eingehen.

2. In Kapitel 2 haben wir das Insellemma 2.2.2 und einige graphentheoretische Überlegungen ausgenutzt, um Funktionen zu finden, die ein Gebiet  $U$ , dessen

Abschluß in einer  $\varepsilon$ -Umgebung eines bestimmten Punktes  $x$  liegt, eigentlich auf eben diese  $\varepsilon$ -Kugel abbilden und somit nach Lemma 1.3.14 einen Fixpunkt in  $U$  besitzen. Wüßten wir nun, daß  $U$  nicht nur eigentlich sondern sogar bijektiv abgebildet wird, so könnten wir nach der obigen Definition schon auf die Existenz eines abstoßenden Fixpunktes schließen.

◁

Betrachten wir die vorangegangene Bemerkung, so wird klar, daß wir eine Form des Insellemmas benötigen, welche Aussagen über die Existenz von Inseln über  $\varepsilon$ -Kugeln, die nicht nur eigentlich, sondern bijektiv abgebildet werden, sogenannte einfache Inseln, liefert. In den Bemerkungen nach Satz 2.2.2 sind wir schon auf die entsprechenden Ergebnisse in der komplexen Ebene sowie die Schwierigkeiten, die in höheren Dimensionen auftreten, eingegangen. Im folgenden wollen wir nun zwei weitere Versionen des Insellemmas angeben, die uns die gewünschte Aussage liefern. Dazu passen wir zunächst unsere Bezeichnungen an.

**3.1.2 Bezeichnung** Sei  $G^* \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{L} := \{f_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$  eine Familie auf  $G^*$  definierter  $K$ -quasimeromorpher Abbildungen. Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Sei  $p \in \mathbb{N}$ , und seien  $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}^n$  paarweise verschieden.

Für ein Gebiet  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  und  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}_{K,\varepsilon}^1(G, A)$  die Familie aller  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , die folgende Eigenschaft haben:

Kein Teilgebiet von  $G$ , dessen Abschluß in  $G$  enthalten ist, wird durch  $f$  bijektiv auf eines der Gebiete  $B(a, \varepsilon)$ ,  $a \in A$ , abgebildet.

Für ein Gebiet  $G \subset G^*$  und  $\varepsilon > 0$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{F}_L^1(G, \{B(a_j, \varepsilon)\}_{j=1}^p)$  die Familie aller Funktionen  $f \in \{g|_G; g \in \mathcal{L}\}$ , die folgende Eigenschaft haben:

Kein Teilgebiet von  $G$ , dessen Abschluß in  $G$  enthalten ist, wird durch  $f$  bijektiv auf eines der Gebiete  $B(a_j, \varepsilon)$  abgebildet.

Im folgenden Satz werden wir die schon im ersten Kapitel angesprochene Tatsache ausnutzen, daß für jede offene diskrete Abbildung  $f$  die Beziehung

$$\dim B_f = \dim f(B_f) \leq n - 2$$

gilt. Wir erhalten folgende Aussage.

**3.1.3 Satz** Sei  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine Menge, deren topologische Dimension  $\dim A$  größer als  $n - 2$  ist.

Dann existiert ein  $\tilde{\varepsilon} > 0$  derart, daß für alle Gebiete  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  und für alle  $0 < \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  gilt, daß die Familie  $\mathcal{F}_{K,\varepsilon}^1(G, A)$  normal ist.

*Beweis:* Wir nehmen an, daß die Behauptung falsch ist. Wir finden also eine Folge positiver Zahlen  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  und eine Folge von Gebieten  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  so, daß  $\mathcal{F}^k := \mathcal{F}_{K, \varepsilon_k}^1(G_k, A)$  für kein  $k \in \mathbb{N}$  normal ist. Wir gehen nun analog zum Beweis von Satz 2.2.2 vor. Aus diesem läßt sich ersehen, daß wir o. B. d. A. annehmen können, daß Funktionen  $g_k \in \mathcal{F}^k$ , eine Folge von positiven Zahlen  $\rho_k \rightarrow 0$  sowie eine Folge von Punkten  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  so existieren, daß die Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen eine quasimeromorphe, nicht konstante Funktion  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  konvergiert, wobei  $h_k(x) := g_k(x_k + \rho_k x)$  gesetzt ist.

Nach dem Satz von Rickman nimmt  $h$  höchstens  $q - 1$  Punkte nicht an, wobei  $q$  die Rickman-Konstante aus Satz 1.4.1 bezeichnet. Sei nun  $O$  die Menge der Punkte, die von  $h$  nicht angenommen werden. Für eine beliebige endliche Menge  $E \subset \mathbb{R}^n$  gilt  $\dim A \setminus E > n - 2$ , wie sich leicht aus der Definition der topologischen Dimension ersehen läßt (vergleiche [17]). Wäre nun  $h^{-1}(A) \subset B_h$ , so gälte  $A \setminus O \subset h(B_h)$  und somit  $\dim A \setminus O \leq \dim h(B_h) \leq n - 2$ . Dies ist nach den Voraussetzungen ausgeschlossen. Also finden wir ein  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus B_h$  und ein  $a \in A$  so, daß  $h(\xi) = a$  gilt.

Da  $B_h$  abgeschlossen ist, finden wir nach Lemma 1.3.11 eine beschränkte normale Umgebung  $U$  von  $\xi$  so, daß  $\overline{U} \subset \mathbb{R}^n \setminus B_h$  und  $h(U) = B(a, \varepsilon)$  für genügend kleines  $\varepsilon$  gilt. Des weiteren gilt  $i(\xi, h) = 1$  und  $h^{-1}(a) \cap U = \{\xi\}$ . Da  $h$  eigentlich auf der normalen Umgebung  $U$  ist, gelten nach Bemerkung 2 nach Lemma 1.3.13 die Beziehungen  $\sup\{\text{card}(U \cap h^{-1}(y)); y \in \mathbb{R}^n\} = 1$  und  $\sum_{x \in h^{-1}(y) \cap U} i(x, h) = 1$  für alle  $y \in B(a, \varepsilon)$ . Es folgt, daß  $h$  die normale Umgebung  $U$  bijektiv auf  $B(a, \varepsilon)$  abbildet, insbesondere gilt  $\mu(h, U, B(a, \varepsilon)) = 1$  sowie  $h(\partial U) = \partial B(a, \varepsilon)$ .

Wie im Beweis vom Insellemma 2.2.2 läßt sich folgern, daß  $h_k$  für alle genügend großen  $k$  eine  $a$ -Stelle in  $U$  hat und  $B(a, \varepsilon/2) \subset h_k(U)$  gilt. Da die Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\overline{U}$  gleichmäßig gegen  $h$  konvergiert, können wir aus der Eigenschaft  $(\mu 5)$  des topologischen Grads schließen, daß für genügend großes  $k$  die Gleichung  $\mu(h_k, U, a) = \mu(h, U, a) = 1$  gilt. Wählen wir nun  $k$  so groß, daß  $\overline{B(a, \varepsilon_k)} \subset h_k(U)$  gilt, so finden wir ein normales Gebiet  $U_k$ , dessen Abschluß in  $U$  liegt, und für das  $h_k(U_k) = B(a, \varepsilon_k)$  gilt. Da  $\mu$  auf den Zusammenhangskomponenten von  $\mathbb{R}^n \setminus h_k(\partial U_k)$  konstant ist, gilt  $\mu(h_k, U_k, x) = 1$  für alle  $x \in B(a, \varepsilon_k)$ . Es folgt, daß  $h_k$  das Gebiet  $U_k$  bijektiv auf  $B(a, \varepsilon_k)$  abbildet.

Schließlich folgt, daß  $g_k$  das Gebiet  $x_k + \rho_k U_k$ , dessen Abschluß in  $G_k$  liegt, bijektiv auf  $B(a, \varepsilon_k)$  abbildet. Dies ist ein Widerspruch. □

*Bemerkung:* Der oben bewiesene Satz ist für die einleitend angesprochenen Zwecke nicht geeignet. Dies liegt an folgendem Problem. In Abschnitt 2.3 haben wir das Insellemma 2.2.2 verwendet, um Lemma 2.3.4 zu beweisen, welches eine zentra-

le Rolle im Beweis von Lemma 2.3.5 spielte. Es ist unser Ziel, das letztgenannte Lemma in einer Version für abstoßende Fixpunkte zu beweisen. Also benötigen wir eine Form von Lemma 2.3.4, die geeignet ist, als Hilfsmittel in Beweisen von Aussagen über die Existenz abstoßender Fixpunkte zu dienen. Um diese zu erhalten, wollen wir aus schon angesprochenen Gründen Satz 2.2.2 im Beweis von Lemma 2.3.4 durch eine modifizierte Version dieses Satzes, die Aussagen über einfache Inseln ermöglicht, ersetzen. Im Beweis von Lemma 2.3.4 spielt es eine wesentliche Rolle, daß wir uns, wie in Satz 2.2.2, nur mit endlich vielen Punkten  $a_1, \dots, a_p$  befassen müssen. Statt endlich vieler Punkte mußten wir uns im oben angegebenen Satz jedoch eine unendliche Menge  $A$  vorgeben. Das macht die Anwendung dieses Satzes im Beweis von Lemma 2.3.4 unmöglich.

◁

Im vorangegangenen Satz haben wir ausgenutzt, daß wir eine Schranke für die Größe der Verzweigungsmenge einer beliebigen Funktion kennen. Dementsprechend mußten wir die Menge  $A$  nur groß genug wählen, um sicherzugehen, daß wir einen Wert in  $A$  finden würden, der für die von uns betrachtete Funktion kein vollständig verzweigter Wert ist. Als nächstes werden wir stattdessen Voraussetzungen über die Verzweigungsmengen der zu der betrachteten Funktionenfamilie gehörigen Funktionen formulieren, die uns auf die Verzweigungsmenge einer Grenzfunktion schließen lassen.

Zunächst führen wir noch ein Lemma an, daß wir im Beweis des folgenden Satzes benötigen. Ein Beweis findet sich in [23] in Abschnitt 2.1. Dazu sei angemerkt, daß eine Menge  $Q \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  relativ lokal zusammenhängend heißt, wenn jeder Punkt in  $\overline{Q}$  beliebig kleine Umgebungen besitzt, deren Schnitt mit  $Q$  zusammenhängend ist.

**3.1.4 Lemma** *Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ , und sei  $f : G \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  ein lokaler Homöomorphismus. Des weiteren sei  $Q \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Sei  $P$  eine Komponente von  $f^{-1}(Q)$ , deren Abschluß in  $G$  enthalten ist.*

*Dann bildet  $f$  die Komponente  $P$  homöomorph auf  $Q$  ab.*

*Ist  $Q$  zusätzlich relativ lokal zusammenhängend, so bildet  $f$  sogar  $\overline{P}$  homöomorph auf  $\overline{Q}$  ab.*

Nun können wir den nächsten Satz beweisen.

**3.1.5 Satz** *Sei  $G^* \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ , und sei  $\mathcal{L} := \{f_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$  eine Familie von auf  $G^*$  definierten  $K$ -quasimeromorphen Abbildungen.*

*Des weiteren seien  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})}$  verschieden, wobei  $q$  wie ge-*

wohnt die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante bezeichnet.

Dann existiert ein  $\tilde{\varepsilon}$  so, daß die Familie  $\mathcal{F}_L^1(G, \{B(a_j, \varepsilon)\}_{j=1}^q)$  für alle  $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  und für alle Gebiete  $G \subset G^*$  normal ist.

*Beweis:* Wir nehmen an, die Behauptung ist falsch.

Dann existieren eine Folge positiver Zahlen  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die gegen Null konvergiert und eine Folge  $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Teilgebieten von  $G^*$  derart, daß die Familie  $\mathcal{F}^k := \mathcal{F}_L^1(G_k, \{B(a_j, \varepsilon_k)_{j=1}^q\})$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  nicht normal ist. Wir dürfen o. B. d. A. annehmen, daß jede der Familien  $\mathcal{F}^k$  in Null nicht normal ist und  $B(0, 1) \subset G_k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.

Wir gehen nun völlig analog zum Beweis des Insellemmas 2.2.2 vor und finden wie dort angegeben Funktionen  $g_k \in \mathcal{F}^k$  so, daß die Folge  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nicht normal ist. Weiter finden wir nach Satz 1.4.6 eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen  $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , eine Teilfolge von  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, daß diese Teilfolge schon die Folge  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  selbst ist, und eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Punkten in  $B(0, 1)$  derart, daß die Folge  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $h_k(x) := g_k(x_k + \rho_k x)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  lokal gleichmäßig gegen eine  $K$ -quasimeromorphe, nicht-konstante Funktion  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  konvergiert. Nach Satz von Rickman finden wir ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  und ein  $\xi \in \mathbb{R}^n$  so, daß  $h(\xi) = a_j$  gilt.

Nun existieren  $r > 0$  sowie ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so, daß  $B(\xi, r) \cap B_{h_k} = \emptyset$  für alle  $k \geq k_0$  gilt. Andernfalls existierten Folgen  $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(h_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  derart, daß  $\xi_k \rightarrow \xi$  und  $\xi_k \in B_{h_{\nu(k)}}$ , das heißt  $h_{\nu(k)}(\xi_k) \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Es gälte dann  $|h_{\nu(k)}(\xi_k) - h(\xi)| \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  und somit  $a_j = h(\xi) \in \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})}$ . Dies wäre ein Widerspruch.

Somit sind die Funktionen  $h_k$  auf  $B(\xi, r)$  lokale Homöomorphismen. Nach Lemma 1.3.11 existiert eine beschränkte normale Umgebung  $U$  von  $\xi$  bezüglich  $h$  derart, daß  $U \subset B(\xi, r)$  und  $h(U) = B(a_j, \varepsilon)$  gilt, falls  $\varepsilon > 0$  klein genug gewählt ist. Analog zum Beweis des Insellemmas 2.2.2 finden wir ein  $k \geq k_0$  und ein normales Gebiet  $U_k$  von  $h_k$ , dessen Abschluß in  $U$  liegt und welches von  $h_k$  eigentlich auf  $B(a_j, \varepsilon_k)$  abgebildet wird. Dabei ist  $U_k$  eine Komponente von  $h_k^{-1}(B(a_j, \varepsilon_k))$  und  $\overline{U_k} \subset B(\xi, r)$ . Damit ist Lemma 3.1.4 anwendbar und liefert uns, daß  $h_k$  das Gebiet  $U_k$  bijektiv auf  $B(a_j, \varepsilon_k)$  abbildet.

Dann ist  $\widetilde{U}_k := x_k + \rho_k U_k$  ein Gebiet, dessen Abschluß in  $G_k$  liegt und welches von  $g_k$  bijektiv auf  $B(a_j, \varepsilon_k)$  abgebildet wird. Dies führt zum Widerspruch.  $\square$

Auch hier läßt sich eine Folgerung 2.2.3 entsprechende Folgerung formulieren.

**3.1.6 Folgerung** *Es gelten die Voraussetzungen wie in Satz 3.1.5. Sei  $\tilde{\varepsilon}$  entspre-*

chend der Behauptung des Satzes 3.1.5 gewählt. Sei  $G \subset G^*$  ein Gebiet. Des weiteren sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von auf  $G$  eingeschränkten Funktionen aus  $\mathcal{L}$ , die nicht normal ist.

Dann existiert ein  $f \in \{f_k; k \in \mathbb{N}\}$  derart, daß wir für alle  $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}$  ein Gebiet  $U$ , dessen Abschluß in  $G$  liegt und ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  so finden können, daß  $f$  das Gebiet  $U$  bijektiv auf  $B(a_j, \varepsilon)$  abbildet.

Fordern wir die in Satz 3.1.5 angegebenen Voraussetzungen, haben wir nun Aussagen zur Verfügung, die denen aus Abschnitt 2.2 entsprechen.

### 3.2 Existenz abstoßender Fixpunkte und Normalität

Wir wenden uns nun den Ergebnissen aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 zu. Wollen wir analoge Aussagen für abstoßende Fixpunkte zeigen, so müssen wir die Beweise der entsprechenden Ergebnisse dahingehend modifizieren, daß wir Fixpunkte finden, die in einfachen Inseln über geeigneten  $\varepsilon$ -Kugeln liegen. Wie dies im einzelnen geschehen kann, haben wir im vorangegangenen Abschnitt gesehen. Zur Verdeutlichung wollen wir ein Lemma 2.3.2 entsprechendes Ergebnis mit Beweis angeben. Nachfolgend listen wir noch einige weitere Ergebnisse ohne Beweis auf, da diese sich direkt aus den Beweisen der entsprechenden Aussagen aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 und den oben angegebenen Änderungen ergeben.

**3.2.1 Lemma** Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet. Sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von in  $G$  definierten  $K$ -quasiregulären Abbildungen. Sei  $x_0 \in G \setminus \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k(B_{f_k})}$ . Es sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  normal in  $G^* := G \setminus \{x_0\}$ , aber keine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei normal in  $x_0$ .

Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so, daß  $f_k$  für alle  $k \geq k_0$  einen abstoßenden Fixpunkt in  $B(x_0, \varepsilon)$  besitzt.

*Beweis:* Da  $x_0 \notin \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k(B_{f_k})}$  gilt, existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  so, daß  $\overline{B(x_0, \varepsilon_0)} \cap \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k(B_{f_k})} = \emptyset$  und  $B(x_0, \varepsilon_0) \subset G$  gilt. Sei  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Wir gehen nun analog zum Beweis von Lemma 2.3.2 vor, um eine Teilfolge  $(f_{\nu(l)})_{l \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und ein  $l_0 \in \mathbb{N}$  so zu finden, daß für beliebiges  $l \geq l_0$  folgendes gilt. Es existiert ein Gebiet  $U$ , dessen Abschluß in  $B(x_0, \varepsilon)$  liegt und welches von  $f_{\nu(l)}$  eigentlich auf  $B(x_0, \varepsilon)$  abgebildet wird. Des weiteren gilt  $\overline{U} \cap B_{f_{\nu(l)}} = \emptyset$ , da  $\overline{B(x_0, \varepsilon)} \cap f_{\nu(l)}(B_{f_{\nu(l)}}) = \emptyset$  gilt. Somit ist  $f_{\nu(l)}$  auf einer Umgebung von  $\overline{U}$  ein lokaler Homöomorphismus. Da  $B(x_0, \varepsilon)$  einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend ist, können wir Lemma 3.1.4 anwenden und erhalten, daß  $f_{\nu(l)}$  das Gebiet  $U$  bijektiv auf  $B(x_0, \varepsilon)$  abbildet. Also besitzt  $f_{\nu(l)}$  einen abstoßenden Fixpunkt in  $U$ . Wie in Lemma 2.3.2 folgt die Behauptung. □

Um die in Abschnitt 2.1 bereitgestellten Hilfsmittel in unserem Sinne anwenden zu können, haben wir in Abschnitt 2.3 Lemma 2.3.4 formuliert. Der Beweis verwendete maßgeblich das Insellemma 2.2.2. Verwenden wir nun stattdessen die Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts, so erhalten wir die folgende Aussage.

**3.2.2 Lemma** *Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge auf  $G$  definierter  $K$ -quasimeromorpher Abbildungen. Sei  $q$  die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante, und sei  $p \geq q$ . Des weiteren seien  $x_1, \dots, x_p \in (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k(B_{f_k})}) \cap G$  verschieden.*

*Es gelte für jede Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , daß sie in keinem der  $x_j$  normal ist. Dann existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  derart, daß  $\overline{B(x_j, \varepsilon_0)} \subset G$  für alle  $j \in \{1, \dots, p\}$  gilt, und für alle  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  eine Teilfolge  $(f_{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  so existiert, daß für jedes  $f \in \{f_{\nu(k)}; k \in \mathbb{N}\}$  folgendes gilt:*

- (★) *Sind  $x_{\alpha(1)}, \dots, x_{\alpha(q)} \in \{x_1, \dots, x_p\}$  paarweise verschieden, und ist  $x \in \{x_1, \dots, x_p\}$ , so findet man ein  $l \in \{1, \dots, q\}$  und ein Gebiet  $U$ , dessen Abschluß in  $B(x, \varepsilon)$  enthalten ist, derart, daß  $f$  das Gebiet  $U$  bijektiv auf  $B(x_{\alpha(l)}, \varepsilon)$  abbildet.*

Mit Hilfe des obigen Lemmas und den graphentheoretischen Hilfsmitteln aus Abschnitt 2.1 können wir nun analog zu Lemma 2.3.5 das folgende Ergebnis beweisen. Es wird im nächsten Kapitel zu einer wichtigen Anwendung kommen.

**3.2.3 Lemma** *Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie auf  $G$  definierter  $K$ -quasimeromorpher Abbildungen. Sei  $p \in \mathbb{N}$ , und sei  $q$  die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante. Des weiteren gebe es eine Folge  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{F}$  und verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_p \in G \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} f_k(B_{f_k})})$  derart, daß keine Teilfolge von  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in einem der  $x_i$  normal ist.*

*Ist  $p \geq \max\{(q-1)^2 + 1, 3\}$ , so existiert ein  $f \in \mathcal{F}$  derart, daß  $f^k$  für alle  $k > 1$  einen abstoßenden Fixpunkt in  $G$  besitzt.*

*Bemerkung:* Wie schon nach den entsprechenden Ergebnissen in Kapitel 2 bemerkt, können wir  $q$  durch  $q-1$  ersetzen, sobald wir ausschließlich quasireguläre Funktionen betrachten.

◁

Die angegebenen Lemmata ermöglichen es uns nun, den Beweis von Satz 2.4.1 so zu modifizieren, daß wir das folgende Ergebnis erhalten.

**3.2.4 Satz** *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet, und sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von in  $G$  definierten  $K$ -quasiregulären Funktionen. Es existiere für alle  $f \in \mathcal{F}$  ein  $k > 1$  derart, daß*

$f^k$  keinen abstoßenden Fixpunkt in  $G$  besitzt.

Dann ist  $\mathcal{F}$  normal in  $G \setminus \overline{\bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(B_f)}$ .

*Bemerkung:* In [11] gelingt es M. Essén und S. Wu im Falle holomorpher Funktionen zu beweisen, daß unter den Voraussetzungen des obigen Satzes die Familie  $\mathcal{F}$  schon in ganz  $G$  normal ist. Dazu ist anzumerken, daß für komplexe analytische Funktionen wesentlich schärfere Versionen des Insellemmas zur Verfügung stehen (vergleiche die Bemerkungen nach Satz 2.2.2). Des weiteren gelingt es ihnen, Lemma 2.3.2 ohne weitere Voraussetzungen für abstoßende Fixpunkte zu beweisen. Dieser Beweis ist jedoch nicht auf unsere Situation übertragbar.

◁

Zum Ende dieses Kapitels seien noch zwei Dinge angemerkt.

Wir haben uns hier darauf beschränkt, die Ergebnisse über Fixpunkte und Normalität aus den Abschnitten 2.3 und 2.4 zu modifizieren. Die dabei zur Anwendung gekommene Idee läßt sich ebenso einfach anwenden, um Ergebnisse für abstoßende periodische Punkte zu erzielen. Somit lassen sich die in den Abschnitten 2.3 und 2.4 getroffenen Aussagen über die Existenz periodischer Punkte und die Quasinormalität von Familien von Funktionen mit geeigneten Eigenschaften entsprechend der oben angeführten Ergebnisse umformulieren und beweisen.

Schließlich sei noch folgendes erwähnt. Es ist zu beachten, daß die hier angegebenen Sätze und Lemmata nicht immer gehaltvoll sind, einfach weil die Menge  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})}$  so groß sein kann, daß es nicht möglich ist,  $q$  verschiedene Punkte aus  $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})}$  zu wählen. Betrachten wir etwa die Funktion  $f$  aus Beispiel 5 in Kapitel 1.2 für  $n = 3$ . Es gilt  $B_f = \{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$ . Wir bezeichnen nun mit  $f_{(y,z)}$  die Funktion, die wir erhalten, wenn wir  $f$  nach einer geeigneten Verschiebung ausführen, die gewährleistet, daß  $B_{f_{(y,z)}} = \{(x, y, z) ; x \in \mathbb{R}\}$  gilt. Setzen wir  $\Lambda := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ , so gilt  $\overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})} = \mathbb{R}^3$ , das heißt  $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\bigcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(B_{f_\lambda})} = \emptyset$ .

Andererseits lassen sich auch Situationen finden, in denen die vorangegangenen Sätze und Lemmata sinnvoll angewendet werden können, wie wir im nächsten Kapitel illustrieren werden.

## 4 Iterationstheorie gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen

Die Iterationstheorie beschäftigt sich im allgemeinen mit dem Verhalten von Punkten aus dem Definitionsbereich einer Funktion unter wiederholter Anwendung dieser Funktion. Anfang des letzten Jahrhunderts begründeten P. Fatou und G. Julia die Iterationstheorie komplexer rationaler Funktionen, die mittlerweile reich entwickelt ist. Im Mittelpunkt stehen dabei die Fatoumenge, die alle Punkte enthält, in denen die Iteriertenfolge normal ist, und ihr Komplement, die Juliamenge. In den letzten Jahren wurde von verschiedenen Autoren damit begonnen, eine Iterationstheorie für quasimeromorphe Funktionen zu entwickeln. Dazu erwies es sich als notwendig zu fordern, daß die Dilatation der betrachteten Funktion sowie die ihrer Iterierten durch denselben Wert beschränkt werden kann. Dies führte zum Begriff der gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung sowie der Frage, ob überhaupt interessante Funktionen (das heißt Funktionen mit nicht-leerer Verzweigungsmenge) dieser Art zu finden sind. Diese Frage ist von T. Iwaniec und G. Martin in [19] und später ergänzend durch V. Mayer in [25] positiv beantwortet worden.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, einen Überblick über die Iterationstheorie gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen zu geben. Unser Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Situation in höheren Dimensionen. Wir werden jedoch auch immer wieder auf Parallelen sowie Unterschiede zur komplexen Dynamik hinweisen. Zunächst stellen wir im ersten Abschnitt die grundlegenden Definitionen und Eigenschaften vor und sammeln Ergebnisse, die wir in den folgenden Abschnitten benötigen werden. Im zweiten Teil dieses Kapitels wenden wir uns der Fatoumenge zu und versuchen, ihre Struktur sowie das dynamische Verhalten der Iteriertenfolge auf den Komponenten der Fatoumenge zu beschreiben. Der letzte Abschnitt befaßt sich mit der Gestalt der Juliamenge. Definitionsgemäß ist die Iteriertenfolge auf der Juliamenge nicht normal, was es uns ermöglicht, den Bogen zu den Ergebnissen der vorangegangenen Kapitel zu schlagen.

### 4.1 Grundlegende dynamische Eigenschaften

In diesem Abschnitt führen wir in die Iterationstheorie gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen ein. Dabei definieren wir neben Fatou- und Juliamenge weitere wichtige Begriffe wie den der postkritischen Menge. Eine zentrale Rolle werden die Fixpunkte der betrachteten Funktionen spielen, was uns dazu veranlaßt, die in Abschnitt 3.1 begonnene Klassifikation der Fixpunkte zu vervollständigen und die Zugehörigkeit der verschiedenen Fixpunkte zur Fatou- beziehungsweise

Juliamenge zu untersuchen. Schließlich werden wir eine Reihe von Ergebnissen vorstellen, die das dynamische Verhalten der Iteriertenfolge in offenen, die Juliamenge schneidenden Mengen betreffen. Doch zunächst wollen wir einige grundlegende Definitionen und Ergebnisse festhalten.

**4.1.1 Definition** Sei  $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet, und sei  $f : G \rightarrow G$  eine quasimeromorphe Abbildung.

Dann heißt  $f$  gleichmäßig quasimeromorph, falls ein  $K \in [1, \infty)$  so existiert, daß  $f^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  eine  $K$ -quasimeromorphe Abbildung ist.

Die Fatoumenge von  $f$  ist die Menge aller  $x \in G$ , die eine Umgebung besitzen, auf der die Familie der Iterierten von  $f$  normal ist. Sie wird mit  $\mathcal{F}(f)$  bezeichnet. Das Komplement der Fatoumenge  $G \setminus \mathcal{F}(f)$  heißt Juliamenge und wird mit  $\mathcal{J}(f)$  bezeichnet.

Offensichtlich ist die Fatoumenge offen und die Juliamenge abgeschlossen. In [19] finden sich die folgenden grundlegenden Ergebnisse.

**4.1.2 Satz** Fatou- und Juliamenge einer gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung  $f$  sind vollständig invariant, das heißt ein Punkt ist genau dann in der entsprechenden Menge, wenn auch der Bildpunkt in dieser Menge ist.

Ist die Verzweigungsmenge einer nicht-konstanten gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  nicht leer, so ist die Juliamenge von  $f$  nicht leer.

Ist die Verzweigungsmenge der betrachteten Abbildung  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  leer, so ist die Situation sehr einfach. Man kann beweisen, daß die Juliamenge dann aus höchstens zwei Elementen besteht. Es zeigt sich also, daß für unsere Betrachtungen nur Funktionen mit nicht-leerer Verzweigungsmenge interessant sind. Daher gelte im folgenden: Sofern nicht anders erwähnt, seien alle betrachteten gleichmäßig quasimeromorphen Abbildungen nicht konstant und ihre Verzweigungsmengen nicht leer.

*Bemerkung:* Wie schon in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt, stellte sich zuerst die Frage nach der Existenz gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen, deren Verzweigungsmenge nicht leer ist. Im  $\mathbb{R}^2$  erfüllen alle rationalen Funktionen vom Grad  $\geq 2$  diese Voraussetzung. Umgekehrt sind gleichmäßig quasimeromorphe Abbildungen für  $n = 2$  schon quasikonform konjugiert zu rationalen Funktionen. Dieses Ergebnis findet sich in [13] und in [14, Theorem 1]. Somit blieb diese Frage noch für  $n \geq 3$  zu klären. Beantwortet wurde sie von T. Iwaniec und G. Martin, die in [19] folgendes beweisen: Für alle  $K > 2$  existiert eine gleichmäßig  $K$ -quasimeromorphe Abbildung  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ , deren Verzweigungsmenge nicht leer ist.

V. Mayer gelang es in [25] und [26] eine weitere Klasse gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen mit nicht-leerer Verzweigungsmenge zu beschreiben. Er verallgemeinert darin eine Konstruktion von S. Lattès, der sich mit komplexen rationalen Funktionen befaßte.

Die hier angesprochenen Beispiele zeichnen sich alle durch strukturell verhältnismäßig einfache Verzweigungsmengen aus. Dies ist aber nicht notwendigerweise der Fall, wie ein Ergebnis von G. Martin zeigt. Indem er die Methode zur Konstruktion von gleichmäßig quasimeromorphen Abbildungen aus [19] verfeinerte, bewies er in [22], daß sich zu jeder quasimeromorphen Abbildung  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung  $g : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  so finden läßt, daß die Verzweigungsmengen von  $f$  und  $g$  übereinstimmen.

Es blieb zu klären, ob die zur Verfügung stehenden Beispiele auch illustrieren können, daß es sich lohnt, das dynamische Verhalten gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen zu untersuchen. Unter den Beispielen, die V. Mayer angegeben hat, finden sich Funktionen, deren Juliamengen der Rand der Einheitskugel oder sogar der ganze Raum sind. Das heißt, daß es durchaus möglich ist, daß die Fatoumenge leer ist. Die Juliamenge kann jedoch auch eine kompliziertere Struktur aufweisen. So ist etwa die Juliamenge der in [19] konstruierten, gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung, die wir gegen Ende des letzten Abschnitts dieses Kapitels vorstellen werden, eine Cantormenge.

◁

Fatou- und Juliamenge haben eine weitere nützliche Eigenschaft, die es ermöglicht, bei Betrachtungen von Eigenschaften von bestimmten Iterierten einer Funktion  $f$  diese Eigenschaften ohne Beschränkung der Allgemeinheit schon  $f$  selbst zuzuschreiben.

**4.1.3 Lemma** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung. Sei  $k \in \mathbb{N}$ .*

*Dann gilt  $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(f^k)$  und  $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^k)$ .*

*Beweis:* Offensichtlich gilt  $\mathcal{F}(f) \subset \mathcal{F}(f^k)$ .

Wir definieren nun  $F_l := \{f^l \circ f^{jk} ; j \in \mathbb{N}_0\}$  für alle  $l \in \{0, \dots, k-1\}$ . Dann gilt  $\{f^j ; j \in \mathbb{N}_0\} =: F = \bigcup_{l=0}^{k-1} F_l$ . Da  $f^l$  für alle  $l \in \{0, \dots, k-1\}$  auf  $\overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig stetig ist, ist  $F^l$  in jedem  $x \in \mathcal{F}(f^k)$  normal. Somit ist auch  $F$  normal, es gilt also  $\mathcal{F}(f^k) \subset \mathcal{F}(f)$ .

Die Aussage für die Juliamenge ergibt sich durch Komplementbildung.

□

Im vorigen Kapitel haben wir in Definition 3.1.1 begonnen, eine Einteilung von Fixpunkten vorzunehmen. Diese wollen wir nun vervollständigen.

**4.1.4 Definition** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung.

Ein Fixpunkt  $a$  von  $f$  heißt abstoßend beziehungsweise anziehend, falls eine Umgebung  $U \subset G$  von  $a$  so existiert, daß  $f$  auf  $U$  injektiv ist und  $f(U) \supset \overline{U}$  beziehungsweise  $\overline{f(U)} \subset U$  gilt.

Liegt ein Fixpunkt in der Verzweigungsmenge von  $f$ , so nennen wir ihn superattraktiv.

Erfüllt der Fixpunkt keine der vorangegangenen Bedingungen, so nennen wir ihn neutral.

Ist  $x$  ein periodischer Punkt der Periode  $m \in \mathbb{N}$  von  $f$ , so heißt  $x$  abstoßend, anziehend, superattraktiv oder neutral, falls  $x$  als Fixpunkt von  $f^m$  die entsprechende Eigenschaft aufweist.

*Bemerkungen:* 1. In Lemma 2.1 in [25] wird gezeigt, daß ein superattraktiver Fixpunkt, obwohl er nach Definition kein anziehender Fixpunkt ist, sich in gewisser Hinsicht eben doch wie ein solcher verhält.

2. In [16] wird im Rahmen der Iteration gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen eine analytische Definition angegeben, die der aus der Iterationstheorie im Komplexen stammenden Definition mittels des Multiplikators entspricht. Da eine quasimeromorphe Abbildung  $f$  nicht in jedem Punkt differenzierbar sein muß, führen die Autoren den Begriff des Infinitesimalraums von  $f$  in einem Fixpunkt  $x_0$  ein. Die darin enthaltenen Abbildungen können als verallgemeinerte Ableitungen verstanden und entsprechend der Klassifikation von Möbiustransformationen in loxodromische und elliptische Elemente eingeteilt werden. Die Art eines Elements aus dem Infinitesimalraum legt die Art aller darin enthaltenen Funktionen fest und ermöglicht eine Klassifikation des zugehörigen Fixpunkts.

◁

Wir wollen nun versuchen, die verschiedenen Arten von Fixpunkten der Fatou- oder der Juliamenge zuzuordnen. Die Definition eines anziehenden Fixpunktes liefert zusammen mit Satz 1.4.7 sofort, daß anziehende Fixpunkte in der Fatoumenge liegen müssen. Wie schon in Bemerkung 1 nach Definition 4.1.4 erwähnt, verhalten sich die Iterierten nahe superattraktiver Fixpunkte ähnlich wie in der Nähe von anziehenden Fixpunkten, weswegen man sie ebenso der Fatoumenge zuordnen kann. Andererseits ist die Iteriertenfolge in keiner Umgebung eines abstoßenden Fixpunktes normal. Diese Fixpunkte gehören damit zur Juliamenge. Sofort ersichtlich wird dies aus Theorem 1.2 in [15]. Zusammenfassend erhalten wir den folgenden Satz.

**4.1.5 Satz** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph.

*Anziehende und superattraktive Fixpunkte von  $f$  liegen in der Fatoumenge von  $f$ . Abstoßende Fixpunkte von  $f$  liegen in der Juliamenge von  $f$ .*

*Bemerkung:* Mit Lemma 4.1.3 ist sofort klar, daß die Aussage von Satz 4.1.5 auch für die entsprechenden periodischen Punkte von  $f$  gilt.

◁

Die neutralen Fixpunkte lassen sich nicht ohne weiteres einordnen. Wir geben deshalb die folgende, ergänzende Definition.

**4.1.6 Definition** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung, und sei  $x$  ein neutraler Fixpunkt von  $f$ .

Der Punkt  $x$  heißt *Siegelpunkt*, falls er in der Fatoumenge von  $f$  liegt.

Er heißt *parabolisch*, sobald eine Zusammenhangskomponente  $\Omega$  von  $\mathcal{F}(f)$  und eine Teilfolge  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  so existieren, daß  $f(\Omega) \subset \Omega$  und  $x \in \partial\Omega$  gilt und  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen  $x$  konvergiert.

Liegt  $x$  in der Juliamenge, ist aber nicht parabolisch, so nennen wir  $x$  *Cremerpunkt*.

Ein periodischer Punkt der Periode  $m$  heißt *parabolisch*, *Siegel-* oder *Cremerpunkt*, falls er ein parabolischer Punkt, ein Siegel- oder ein Cremerpunkt von  $f^m$  ist.

*Bemerkung:* Diese Einteilung der Fixpunkte entspricht der in der komplexen Dynamik, in der man konkrete Beispiele für alle Fixpunktarten kennt. In [16] wird gezeigt, daß anziehende, superattraktive, abstoßende und parabolische Fixpunkte tatsächlich auftreten können. Es ist mir nicht bekannt, ob es gleichmäßig quasimeromorphe Abbildungen gibt, die einen Siegel- oder einen Cremerpunkt besitzen.

◁

Neben Fatou- und Juliamenge lohnt es sich noch eine weitere Menge zu betrachten.

**4.1.7 Definition** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph.

Ein Punkt  $x \in \overline{\mathbb{R}^n}$  heißt *Ausnahmepunkt* von  $f$ , falls die Menge  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} f^{-k}(x)$  endlich ist.

Die Menge aller Ausnahmepunkte von  $f$  heißt *Ausnahmemenge* und wird mit  $\mathcal{E}(f)$  bezeichnet.

*Bemerkungen:* 1. Man kann zeigen, daß für einen Punkt  $x_0 \in \mathcal{E}(f)$  gilt, daß die Menge  $\{x \in \overline{\mathbb{R}^n} ; \exists k, l \in \mathbb{N}_0 : f^k(x) = f^l(x_0)\}$  endlich ist. Ein Beweis für diese

Aussage im Rahmen der rationalen Funktionen findet sich in [4] auf Seite 66. Er läßt sich problemlos auf unsere Situation übertragen.

2. Mit der vorangegangenen Bemerkung wird sofort deutlich, daß auch die Menge  $\mathcal{E}(f)$  vollständig invariant ist.

◁

Wir betrachten in diesem Kapitel nur Funktionen, die auf ganz  $\overline{\mathbb{R}^n}$  definiert sind. In diesem Fall können wir folgendes beweisen.

**4.1.8 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung. Dann gilt  $\mathcal{E}(f) \subset \mathcal{F}(f)$ .*

*Beweis:* Wir zeigen dazu, daß jeder Punkt der Ausnahmemenge schon ein superattraktiver periodischer Punkt von  $f$  ist.

Da  $f$  stetig und offen ist, gilt  $f(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$ , das heißt jeder Punkt aus  $\overline{\mathbb{R}^n}$  besitzt Urbilder unter  $f$ . Sei nun  $x \in \mathcal{E}(f)$ . Da die Menge der Urbilder von  $x$  unter allen Iterierten von  $f$  endlich ist, folgt, daß  $x$  ein periodischer Punkt von  $f$  ist. Wir finden also ein  $l \in \mathbb{N}$  so, daß  $f^l(x) = x$  gilt. Des weiteren gilt  $(f^l)^{-1}(x) = \{x\}$ , da  $\mathcal{E}(f)$  vollständig invariant und jeder Punkt der Ausnahmemenge periodisch ist. Da  $f$  nicht injektiv ist und somit  $\mu(f^l) > 1$  gilt, folgt  $i(x, f^l) = \mu(f^l) > 1$ . Es folgt, daß  $x \in B_{f^l}$  ist, das heißt  $x$  ist ein superattraktiver Fixpunkt von  $f^l$ . Nach Satz 4.1.5 gilt  $x \in \mathcal{F}(f^l) = \mathcal{F}(f)$ .

□

*Bemerkung:* Bezeichnen wir mit  $q$  wie gewohnt die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante, so können wir aus Satz 1.4.7 und dem obigen Satz folgern, daß  $\mathcal{E}(f)$  höchstens  $q - 1$  Punkte enthalten kann.

◁

Wir betrachten nun das dynamische Verhalten der Iteriertenfolge auf offenen Mengen, die nicht-leeren Schnitt mit der Juliamenge haben. Die hier gesammelten Ergebnisse werden im folgenden immer wieder Verwendung finden, weswegen wir auch die einfachen Beweise angeben wollen. Die aufgeführten Aussagen finden sich teilweise in [16], die dort angegebene Beweise unterscheiden sich allerdings von den hier geführten.

**4.1.9 Lemma** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph. Des weiteren sei  $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  offen, und es gelte  $U \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ .*

- (a) Es gilt  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} f^k(U) \supset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \mathcal{E}(f)$ .
- (b) Die Juliamenge von  $f$  ist perfekt, das heißt, sie ist nicht leer, abgeschlossen und entspricht der Menge aller ihrer Häufungspunkte.
- (c) Es existiert ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $f^k(U) \supset \mathcal{J}(f)$  für alle  $k \geq k_0$  gilt.
- (d) Keine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ist in  $U$  normal. Insbesondere existiert kein Punkt in der Juliamenge von  $f$ , in dem eine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  normal ist.

*Beweis:* Zu (a): Sei  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} f^k(U)$ . Dann ist  $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} f^k(U)$  sobald  $x$  Urbild von  $x_0$  unter einer Iterierten von  $f$  ist. Da  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $U$  nicht normal ist, folgt nach Satz 1.4.7, daß die Menge der Urbilder von  $x_0$  unter beliebigen Iterierten von  $f$  endlich ist. Somit gilt  $x_0 \in \mathcal{E}(F)$ .

Zu (b): Wir haben zu Anfang des Kapitels schon festgestellt, daß die Juliamenge von  $f$  abgeschlossen und nicht leer ist. Wir zeigen nun, daß jeder Punkt aus der Juliamenge Häufungspunkt der Juliamenge ist.

Da die Menge der Ausnahmepunkte in der Fatoumenge von  $f$  liegt und die Juliamenge nicht leer und vollständig invariant ist, enthält sie abzählbar viele Elemente. Da  $\mathcal{J}(f)$  außerdem kompakt in  $\overline{\mathbb{R}^n}$  ist, finden wir eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{J}(f)$ , die gegen einen von allen Folgengliedern verschiedenen Punkt  $x_0 \in \mathcal{J}(f)$  konvergiert. Sei nun  $x \in \mathcal{J}(f)$  beliebig, und sei  $V$  eine Umgebung von  $x$ . Dann existiert nach (a) ein  $k \in \mathbb{N}_0$  so, daß  $f^k(V)$  eine Umgebung von  $x_0$  ist. Da  $x_0$  nicht isoliert ist, können wir nun schließen, daß  $(V \setminus \{x\}) \cap \mathcal{J}(f)$  nicht leer ist. Die Behauptung folgt.

Zu (c): Sei  $q$  wieder die zu  $n$  und der Dilatation von  $f$  gehörige Rickman-Konstante. Entsprechend (b) können wir  $q$  offene Mengen  $U_1, \dots, U_q \subset U$  so wählen, daß ihre Abschlüsse disjunkt sind, und  $U_j \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$  für alle  $j \in \{1, \dots, q\}$  gilt. Da  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in keiner der Mengen  $U_i$  normal ist, folgern wir mit Satz 1.4.7, daß für alle  $j \in \{1, \dots, q\}$  ein  $i \in \{1, \dots, q\}$  und ein  $l \in \mathbb{N}$  so existieren, daß  $f^l(U_j) \supset U_i$  gilt. Es ist nun leicht einzusehen, daß ein  $m \in \mathbb{N}$  und ein  $j \in \{1, \dots, q\}$  so existieren, daß  $f^m(U_j) \supset U_j$  gilt. Somit gilt  $f^{(l+1)m}(U_j) \supset f^{lm}(U_j)$  für alle  $l \in \mathbb{N}_0$ . Nach (a) haben wir nun  $\bigcup_{l \in \mathbb{N}_0} f^{lm}(U_j) \supset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \mathcal{E}(f^m) \supset \mathcal{J}(f^m) = \mathcal{J}(f)$ , also bilden die Mengen  $f^{lm}(U_j)$ ,  $l \in \mathbb{N}_0$ , eine geschachtelte offene Überdeckung der kompakten Menge  $\mathcal{J}(f)$ . Wir finden somit ein  $l_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $\mathcal{J}(f) \subset f^{m l_0}(U_j) \subset f^{m l_0}(U)$  gilt. Schließlich gilt  $\mathcal{J}(f) = f(\mathcal{J}(f)) \subset f^{m l_0 + 1}(U)$ , und wir erhalten induktiv die Behauptung.

Zu (d): Wir nehmen an, es gibt eine Teilfolge  $(f^{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$  von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die auf  $U$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $g$  konvergiert. Sei nun  $x_0 \in U \cap \mathcal{J}(f)$ , und sei  $\varepsilon > 0$  so klein, daß  $\mathcal{J}(f) \not\subset B_\chi(g(x_0), 2\varepsilon)$  gilt. Des weiteren existieren eine Umgebung  $V$  von  $x_0$  und ein  $l_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß  $\chi(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$  und

$\chi(f^{k_l}(x), g(x)) < \varepsilon$  für alle  $x \in V$  und  $l \geq l_0$  gilt. Daraus können wir folgern, daß schon  $f^{k_l}(V) \subset B_\chi(g(x_0), 2\varepsilon)$  für alle  $l \geq l_0$  gilt. Andererseits existiert nach (c) ein  $l \geq l_0$  so, daß  $f^{k_l}(V) \supset \mathcal{J}(f)$  gilt. Dies ist ein Widerspruch. □

*Bemerkungen:* 1. In der komplexen Dynamik beweist man (c) und (d) oft unter Verwendung der in  $\overline{\mathbb{R}^2}$  bekannten Tatsache, daß die Juliamenge einer Funktion  $f$  dem Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Punkte von  $f$  entspricht. Dieses Ergebnis haben wir so nicht zur Verfügung. Ausführlich werden wir uns damit im dritten Abschnitt dieses Kapitels beschäftigen.

2. Aus (c) läßt sich sofort folgern, daß die Juliamenge von  $f$  entweder leeres Inneres besitzt oder schon  $\mathcal{J}(f) = \overline{\mathbb{R}^n}$  gilt. ◁

Für uns wird im weiteren Verlauf interessant sein, was mit der Verzweigungsmenge unter Iteration passiert. Hierzu führen wir den folgenden Begriff ein, der, wie in der Theorie der komplexen Iteration, auch in unserem Fall eine große Rolle spielt.

**4.1.10 Definition** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung.

Wir setzen  $B_f^+ := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(B_f)$  und nennen  $B_f^+$  die postkritische Menge von  $f$ .

*Bemerkungen:* 1. Es ist leicht einzusehen, daß  $B_{f^k} = \bigcup_{j=0}^{k-1} f^{-j}(B_f)$  gilt. Somit gilt  $B_f^+ = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(B_{f^k})$ .

2. In der komplexen Iterationstheorie bezeichnet der Begriff der postkritischen Menge oft schon den Abschluß der von uns definierten Menge  $B_f^+$ . ◁

Betrachten wir offene Mengen, die den Abschluß der postkritischen Menge nicht schneiden, so ist es möglich, Folgen von Umkehrfunktionen von Iterierten der betrachteten Funktion  $f$  zu untersuchen. Alle Umkehrfunktionen müssen in ihrem Bild die Verzweigungsmenge von  $f$  auslassen. Satz 1.4.7 und Ergebnisse über die Größe der Verzweigungsmenge (vergleiche Bemerkung 4 nach Satz 1.2.11) ermöglichen es, auf die Normalität von beliebigen Familien von Umkehrfunktionen zu schließen. Eine einfache Überlegung mit Hilfe von Lemma 4.1.9 (d) läßt eine genauere Aussage zu, falls wir die Folge der Umkehrfunktionen auf einer Menge betrachten, die nicht-leeren Schnitt mit der Juliamenge von  $f$  hat. Wir erhalten das folgende Ergebnis, welches sich in [16, Lemma 3.4] findet.

**4.1.11 Lemma** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph, und sei  $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}^n}$  ein Gebiet. Sei  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  derart, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein Zweig der Umkehrfunktion  $g_k : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  von  $f^{\nu(k)}$  existiert.

Dann ist  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  normal.

Ist  $\Omega \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ , so hat jede konvergente Teilfolge von  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konstante Grenzfunktion.

## 4.2 Die Fatoumenge

Auf den Zusammenhangskomponenten, oder kurz Komponenten, der Fatoumenge ist die Familie der Iterierten definitionsgemäß normal. Es liegt somit nahe, die Menge der Grenzfunktionen von Teilfolgen der Iteriertenfolge näher zu betrachten, um so eine Charakterisierung der Komponenten der Fatoumenge zu erreichen. Es wird sich zeigen, daß dabei sowohl die bereits in Abschnitt 4.1 erfolgte Klassifizierung der Fixpunkte der betrachteten Funktion  $f$  als auch die postkritische Menge von  $f$  eine große Rolle spielen wird. Das entstehende Bild des Verhaltens der Iteriertenfolge auf den verschiedenen Komponenten der Fatoumenge gleicht auf den ersten Blick der Situation in der komplexen Dynamik. Es gibt jedoch auch Unterschiede und ungeklärte Fragen, die wir im Laufe dieses Abschnitts ansprechen werden. Wir beginnen mit einer grundlegenden Definition.

**4.2.1 Definition** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph, und sei  $\Omega$  eine Zusammenhangskomponente der Fatoumenge von  $f$ .

Wir nennen  $\Omega$  periodisch, falls ein  $p \in \mathbb{N}$  so existiert, daß  $f^p(\Omega) \subset \Omega$  gilt. Gilt diese Bedingung für  $p = 1$ , so heißt  $\Omega$  invariant.

Des weiteren heißt  $\Omega$  präperiodisch, falls ein  $k \in \mathbb{N}$  und eine periodische Komponente  $U$  derart existieren, daß  $f^k(\Omega) \subset U$  gilt.

Ist  $\Omega$  nicht präperiodisch, so nennen wir  $\Omega$  wandernde Komponente.

*Bemerkung:* Da  $f^p$  offen und  $\overline{\Omega}$  in  $\overline{\mathbb{R}^n}$  kompakt ist, gilt  $\partial f^p(\Omega) = f^p(\partial\Omega) \subset \mathcal{J}(f)$ . Somit ist  $f^p(\Omega)$  schon selbst eine Komponente von  $\mathcal{F}(f)$ . Es gilt also für eine periodische Komponente  $\Omega$  schon  $f^p(\Omega) = \Omega$ .

◁

Da die Fatoumengen von  $f$  und  $f^k$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  übereinstimmen und da präperiodische Komponenten durch eine Iterierte von  $f$  auf periodische abgebildet werden, ist es für die Untersuchung des dynamischen Verhaltens auf der Fatoumenge ausreichend, invariante und wandernde Komponenten zu betrachten.

Nach Definition 4.1.6 und Satz 4.1.5 liegen Siegelpunkte sowie anziehende und superattraktive Fixpunkte in der Fatoumenge, genauer in einer invarianten Kom-

ponente der Fatoumenge. Ein parabolischer Fixpunkt liegt zwar in der Juliamenge, beeinflußt jedoch ebenfalls das Verhalten der Iterierten auf einer Komponente der Fatoumenge. Es scheint also sinnvoll, eine der Klassifikation der Fixpunkte entsprechende Einteilung der Komponenten der Fatoumenge vorzunehmen.

**4.2.2 Definition** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung, und sei  $\Omega$  eine invariante Komponente der Fatoumenge von  $f$ .

Wir nennen  $\Omega$

- (a) *Attraktionsgebiet*, falls  $\Omega$  einen anziehenden oder superattraktiven Fixpunkt enthält;
- (b) *parabolisches Gebiet*, falls ein Fixpunkt  $x_0 \in \partial\Omega$  und eine Teilfolge  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  der Iteriertenfolge so existiert, daß  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen  $x_0$  konvergiert;
- (c) *Rotationsgebiet*, falls eine Teilfolge der Iteriertenfolge auf  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen eine nicht-konstante Grenzfunktion konvergiert.

Enthält  $\Omega$  im letzten Fall einen Siegelpunkt, so nennen wir  $\Omega$  ein Siegelgebiet. Eine periodische Komponente der Fatoumenge nennen wir Attraktionsgebiet, parabolisches Gebiet oder Rotationsgebiet, falls sie die angegebenen Bedingungen für die entsprechende Iterierte von  $f$  erfüllt.

Es ist nun wie im rationalen Fall einfach zu zeigen, daß damit alle invarianten, und somit auch periodischen, Komponenten der Fatoumenge beschrieben sind.

**4.2.3 Satz** Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung. Eine invariante Komponente der Fatoumenge von  $f$  ist entweder ein Attraktionsgebiet, ein parabolisches Gebiet oder ein Rotationsgebiet.

*Beweis:* Sei  $\Omega$  eine invariante Komponente von  $\mathcal{F}(f)$ , aber kein Rotationsgebiet. Also enthält die Menge aller möglichen Grenzfunktionen von Teilfolgen von  $(f|_{\Omega}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die wir mit  $L$  bezeichnen wollen, nur konstante Funktionen. Offensichtlich muß  $L \subset \overline{\Omega}$  gelten. Sei  $x_0 \in L$  und  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die auf  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen  $x_0$  konvergiert. Wegen der Invarianz von  $\Omega$  gilt  $f(x_0) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} f^{\nu(k)}(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{\nu(k)}(f(x)) = x_0$  für  $x \in \Omega$ . Es sind also alle Elemente aus  $L$  Fixpunkte von  $f$ .

Ist  $x_0 \in \Omega$ , so kann  $L$  nur  $x_0$  enthalten. Somit konvergiert  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  auf  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen  $x_0$ . Es ist nun nicht schwer einzusehen, daß  $x_0$  superattraktiv oder anziehend sein muß.

Ist  $x_0 \in \partial\Omega$ , so liegen schon alle Element aus  $L$  im Rand von  $\Omega$ . Nach Definition ist  $x_0$  ein parabolischer Fixpunkt und  $\Omega$  ein parabolisches Gebiet. □

*Bemerkungen:* 1. Im obigen Beweis haben wir gesehen, daß die Iteriertenfolge auf einem Anziehungsgebiet  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen den anziehenden oder superattraktiven Fixpunkt  $x_0$  lokal konvergiert. Des weiteren geht aus dem Beweis hervor, daß alle Element der Menge  $L$  der Grenzfunktionen parabolische Fixpunkte von  $f$  sind, falls  $\Omega$  ein parabolisches Gebiet ist. Ist  $f$  eine rationale Funktion, so läßt sich mittels des Identitätssatzes daraus folgern, daß  $L$  diskret ist. Weitere einfache Überlegungen zeigen dann, daß  $L$  nur aus einem Punkt besteht, das heißt die gesamte Iteriertenfolge konvergiert lokal gleichmäßig gegen einen parabolischen Fixpunkt. Leider steht uns in höheren Dimensionen der Identitätssatz nicht zur Verfügung, wie man sich leicht durch die Betrachtung des Beispiels 5 aus dem zweiten Abschnitt des ersten Kapitels im Vergleich mit der Identitätsabbildung klar machen kann. Wir können in der allgemeinen Situation auf diesem Weg somit nicht klären, ob auch im Falle eines parabolischen Gebiets die gesamte Iteriertenfolge gegen eine Punkt konvergiert.

2. In [16] werden ab Seite 13 Beispiele gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen angegeben, die einen anziehenden und einen superattraktiven Fixpunkt und damit zwei Attraktionsgebiete besitzen. Daran anschließend werden Beispiele genannt, die ein parabolisches Gebiet aufweisen. Es ist mir nicht bekannt, ob es gleichmäßig quasimeromorphe Abbildungen in höheren Dimensionen gibt, die einen Siegelpunkt besitzen. In der komplexen Dynamik dagegen sind Funktionen mit Siegelgebieten bekannt.

3. Bei erster Betrachtung ergibt sich also, bis auf die Frage nach der Existenz von konkreten Beispielen, die Situation, die aus der komplexen Iterationstheorie bekannt ist. Allerdings lassen sich im Iterationsverhalten auch Unterschiede zwischen der zwei- und der höherdimensionalen Situation feststellen. Als Beispiel hierfür wollen wir das Verhalten der Iteriertenfolge nahe eines parabolischen Fixpunktes betrachten. Haben wir es mit einer rationalen Funktion zu tun, so kann man ein Teilgebiet des parabolischen Gebiets, das den zugehörigen parabolischen Fixpunkt als Randpunkt besitzt, finden, auf welchem die betrachtete Funktion  $f$  zu der Translation  $T(x) := x + 1$  konform konjugiert ist. Im Fall gleichmäßig quasimeromorpher Abbildungen sucht man quasikonforme statt konforme Linearisierungen und kann Beispiele finden, die ein den rationalen Funktionen entsprechendes Verhalten zeigen. Aber es gibt auch Funktionen, die sich nicht quasikonform zu  $T$  konjugieren lassen.

In [16] wird neben den oben angesprochenen Ergebnissen auch gezeigt, daß sich die Ergebnisse über die Linearisierung in geeigneten Umgebungen von abstoßenden oder anziehenden Fixpunkten in der komplexen und der höherdimensionalen Iterationstheorie entsprechen.

&lt;

Wie auch in der komplexen Dynamik kann man Informationen über die postkritische Menge nutzen, um Schlüsse über die Gestalt der Fatoumenge zu ziehen. Liegt ein Punkt nicht im Abschluß der postkritischen Menge, so ist es möglich, Iteriertenfolgen von Umkehrfunktionen der betrachteten Funktion zu untersuchen. Lemma 4.1.11 ist eines der Hilfsmittel, die den Beweis des nächsten Satzes ermöglichen. Genauer findet sich in [16] in Abschnitt 7.3.

**4.2.4 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph.*

*Jeder Fixpunkt von  $f$ , der weder abstoßend noch ein Siegelpunkt ist, liegt im Abschluß der postkritischen Menge von  $f$ . Des weiteren liegt der Rand eines Rotationsgebiets von  $f$  vollständig im Abschluß der postkritischen Menge.*

*Bemerkung:* Wir haben ein Rotationsgebiet etwas anders definiert, als dies in [16] geschieht. Die Beweisidee für den Rotationsgebiete betreffenden Teil von Satz 4.2.4 kann dennoch aus [16] übernommen werden.

◁

Wir haben am Beispiel der Linearisierung nahe parabolischer Fixpunkte in Bemerkung 3 nach Satz 4.2.3 gesehen, daß sich das Iterationsverhalten von rationalen und gleichmäßig quasiregulären Abbildungen im höherdimensionalen Raum wenigstens lokal unterscheiden kann. Des weiteren ist es meines Wissens noch nicht geklärt, ob Siegelscheiben, deren Existenz in der komplexen Dynamik nachgewiesen ist, im Höherdimensionalen auftreten können. Andererseits ist bekannt, daß rationale Abbildungen keine wandernden Gebiete besitzen können. Bewiesen wurde dieses tiefliegende Ergebnis von D. Sullivan Anfang der achtziger Jahre. Der Beweis ist äußerst komplex und läßt nicht hoffen, daß man ihn auf unsere Situation übertragen kann. So begnügen wir uns an dieser Stelle damit, einige einfache Feststellungen über wandernde Gebiete festzuhalten, die es wenigstens in speziellen Situationen erlauben, die Existenz wandernder Gebiete auszuschließen.

**4.2.5 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung, und sei  $\Omega$  ein wanderndes Gebiet von  $f$ .*

*Dann enthält die Menge aller möglichen Grenzfunktionen von Teilfolgen von  $(f^k|_{\Omega})_{k \in \mathbb{N}}$  ausschließlich konstante Funktionen.*

*Beweis:* Wir zeigen die Kontraposition der Aussage.

Sei  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  eine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , die auf  $\Omega$  lokal gleichmäßig gegen eine nicht-konstante Abbildung  $\Phi$  konvergiert. Dann ist  $\Phi$  quasimeromorph, insbesondere ist  $\Phi$  offen. Da  $\mathcal{J}(f)$  kein Inneres besitzt, sobald  $\mathcal{F}(f)$  nicht leer ist, gilt  $\Phi(\Omega) \cap \mathcal{F}(f) \neq \emptyset$ . Sei  $x \in \Omega$  so gewählt, daß  $\Phi(x) \in \mathcal{F}(f)$  gilt, und sei  $V$  die Komponente von  $\mathcal{F}(f)$ , die  $\Phi(x)$  enthält. Es gilt sowohl  $f^{\nu(k)}(x) \rightarrow \Phi(x)$  als auch

$f^{\nu(k+1)}(x) \rightarrow \Phi(x)$ . Ist  $k$  groß genug, gilt somit schon  $f^{\nu(k)}(x), f^{\nu(k+1)}(x) \in V$ . Da  $V$  eine Komponente der Fatoumenge und  $f^{\nu(k)}(\Omega) \subset \mathcal{F}(f)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  zusammenhängend ist, sind  $f^{\nu(k)}(\Omega)$  und  $f^{\nu(k+1)}(\Omega)$  Teilmengen von  $V$ , woraus wir schließen können, daß  $V$  eine periodische Komponente der Fatoumenge von  $f$  ist. Somit ist  $\Omega$  präperiodisch, also kein wanderndes Gebiet.

◁

Zum Abschluß dieses Abschnitts wollen wir auch für wandernde Gebiete eine Beziehung zur postkritischen Menge herstellen.

**4.2.6 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph, und sei  $\Omega$  ein wanderndes Gebiet von  $f$ .*

*Konvergiert eine Teilfolge  $(f^{\nu(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig auf  $\Omega$  gegen einen Wert  $a \in \overline{\mathbb{R}^n}$ , so gilt  $a \in \overline{B_f^+}$ .*

*Beweis:* Wir nehmen an, daß  $a \notin \overline{B_f^+}$  gilt.

Dann existiert  $r_0 > 0$  derart, daß  $B(a, r_0) \cap \overline{B_f^+} = \emptyset$  gilt. Sei  $0 < r < r_0$ . Sei  $V$  ein Gebiet, dessen Abschluß in  $\Omega$  enthalten ist. Wir können nun ein  $k_0 \in \mathbb{N}$  so finden, daß  $f^{\nu(k)}(\overline{V}) \subset B(a, r)$  für alle  $k \geq k_0$  gilt. Sei im folgenden  $k \geq k_0$ .

Sei  $U$  die Komponente von  $(f^{\nu(k)})^{-1}(B(a, r_0))$ , die  $V$  enthält. Es gilt nun  $U \cap \overline{B_{f^{\nu(k)}}} = \emptyset$ , denn andernfalls existierte ein  $x \in U \cap \overline{B_{f^{\nu(k)}}}$  und somit  $f^{\nu(k)}(x) \in B(a, r_0) \cap \overline{B_f^+}$  im Widerspruch zur Wahl von  $r_0$ . Daraus folgt, daß  $f^{\nu(k)} : U \rightarrow B(a, r_0)$  ein lokaler Homöomorphismus ist. Die Kugel  $B(a, r)$  ist einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, und es existiert eine Komponente  $W$  von  $(f^{\nu(k)})^{-1}(B(a, r))$ , die  $\overline{V}$  enthält und deren Abschluß in  $U$  liegt. Nach Lemma 3.1.4 ist  $f^{\nu(k)} : W \rightarrow B(a, r)$  ein Homöomorphismus. Somit existiert für alle  $k \geq k_0$  auf  $B(a, r)$  eine Umkehrfunktion  $\phi_k$  von  $f^{\nu(k)}$  so, daß  $\phi_k \circ f^{\nu(k)}|_V = \text{id}_V$  gilt. Nach Lemma 4.1.11 ist die Folge  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  normal. Es gelte o. B. d. A., daß  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $\phi$  konvergiert. Da  $V \subset \phi_k(B(a, r))$  für alle Folgenglieder  $\phi_k$  gilt, kann  $\phi$  nicht konstant sein.

Andererseits kann  $a$  nicht in der Fatoumenge von  $f$  liegen, da sonst  $f^{\nu(k)}(\Omega)$  und  $f^{\nu(k+1)}(\Omega)$  für genügend großes  $k$  nicht-leeren Schnitt mit der Komponente der Fatoumenge hätten, die  $a$  enthält. Somit wären sie schon gleich dieser Komponente und  $\Omega$  wäre keine wandernde Komponente. Es gilt folglich  $B(a, r) \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$ . Dann müßte  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  nach Lemma 4.1.11 aber eine konstante Grenzfunktion besitzen. Dies führt zu einem Widerspruch.

□

### 4.3 Die Juliamenge

Nachdem wir uns im vorangegangenen Abschnitt mit den Komponenten der Fatoumenge beschäftigt haben, wollen wir nun einen Blick auf die Gestalt der Juliamenge werfen. Wie auch bei der Betrachtung der Fatoumenge werden die postkritische Menge und periodische Punkte eine wichtige Rolle spielen. Besonders die Frage, wie die Juliamenge einer gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung  $f$  und die Menge der abstoßenden periodischen Punkte von  $f$  in Beziehung zueinander stehen, wird uns im zweiten Teil dieses Abschnitts interessieren. Auch hier finden sich viele Entsprechungen zu der Situation in der komplexen Dynamik. Wir beginnen mit einigen einfachen Zusammenhangseigenschaften. Dabei betrachten wir die Juliamenge des öfteren als topologischen Teilraum des  $\overline{\mathbb{R}^n}$ , den wir mit der Relativtopologie versehen.

**4.3.1 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph, und sei  $x \in \mathcal{J}(f)$ . Existiert eine zusammenhängende Relativumgebung  $V$  von  $x$  in  $\mathcal{J}(f)$ , so ist  $\mathcal{J}(f)$  bereits zusammenhängend.*

*Insbesondere ist die Juliamenge von  $f$  zusammenhängend, wenn sie lokal zusammenhängend ist.*

*Beweis:* Sei  $V \subset \mathcal{J}(f)$  eine zusammenhängende Relativumgebung von  $x$  in  $\mathcal{J}(f)$ . Dann finden wir eine in  $\overline{\mathbb{R}^n}$  offene, nicht-leere Menge  $U$  so, daß  $U \cap \mathcal{J}(f) \subset V$  gilt. Nach Lemma 4.1.9 (c) existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  derart, daß  $\mathcal{J}(f) \subset f^k(U)$  gilt. Wegen der vollständigen Invarianz von  $\mathcal{J}(f)$  folgt die Beziehung  $\mathcal{J}(f) \subset f^k(U \cap \mathcal{J}(f)) \subset f^k(V) \subset \mathcal{J}(f)$ , also gilt insgesamt  $\mathcal{J}(f) = f^k(V)$ . Da  $f^k$  stetig und  $V$  zusammenhängend ist, folgt die Behauptung. □

Eine Folgerung aus dem Satz von Baire, welche besagt, daß eine Folge abgeschlossener Teilmengen  $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eines nicht-leeren, vollständigen, metrischen Raumes  $X$ , die die Bedingung  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$  erfüllt, schon ein Element  $X_{k_0}$  mit nicht-leerem Inneren besitzen muß, ermöglicht uns den Beweis des folgenden Ergebnisses.

**4.3.2 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasiregulär.*

*Die Juliamenge von  $f$  ist entweder zusammenhängend oder besitzt überabzählbar viele Komponenten.*

*Beweis:* Wir nehmen an,  $\mathcal{J}(f)$  besteht aus nur abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten  $K_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Da  $\mathcal{J}(f)$  ein nicht-leerer, vollständiger, metrischer Teilraum von  $\overline{\mathbb{R}^n}$  ist, erhalten wir mittels der oben angesprochenen Folgerung aus dem Satz von Baire, daß ein  $j \in \mathbb{N}$  derart existiert, daß  $\text{int } \mathcal{J}(f) \cap K_j \neq \emptyset$  gilt. Dann

ist  $K_j$  eine zusammenhängende Relativumgebung für jeden Punkt aus dem Inneren von  $K_j$ . Nach Satz 4.3.1 folgt, daß die Juliamenge von  $f$  zusammenhängend ist. □

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß wir Informationen über die postkritische Menge nutzen können, um Rückschlüsse auf die Gestalt der Fatoumenge zu ziehen. Auch die Juliamenge läßt sich unter diesen Gesichtspunkten untersuchen. Das folgende Ergebnis ist für rationale Funktionen von P. Fatou bereits Anfang des letzten Jahrhunderts bewiesen worden (siehe [12]).

**4.3.3 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph, und sei  $\Omega$  ein invariantes Attraktionsgebiet von  $f$ . Es gelte  $B_f \subset \Omega$ .*

*Dann ist die Juliamenge von  $f$  eine Cantormenge.*

*Beweis:* Sei  $\xi$  der anziehende oder superattraktive Fixpunkt, der in  $\Omega$  enthalten ist. Da  $B_f \subset \Omega$  gilt und  $\Omega$  ein invariantes Attraktionsgebiet ist, folgt  $\overline{B_f^+} \subset \Omega$ . Nach Satz 4.2.6 kann  $f$  keine wandernden Gebiete besitzen. Des weiteren liefert uns Satz 4.2.4, daß auch Rotationsgebiete, parabolische Gebiete und von  $\Omega$  verschiedene Attraktionsgebiete nicht auftreten können. Es folgt, daß die Fatoumenge von  $f$  aus  $\Omega$  und den Urbildern von  $\Omega$  unter den Iterierten von  $f$  besteht. Insbesondere gilt, daß die Iteriertenfolge auf der Fatoumenge lokal gleichmäßig gegen  $\xi$  konvergiert.

Wir trennen nun  $\overline{B_f^+}$  von  $\mathcal{J}(f)$  wie folgt. Zunächst dürfen wir annehmen, daß  $\infty \notin \Omega$  gilt, indem wir andernfalls  $M(\Omega)$  für eine geeignete Möbiustransformation  $M$  betrachten und nach der folgenden Konstruktion zurücktransformieren. Wir überdecken die kompakte Menge  $\overline{B_f^+}$  mit offenen, achsenparallelen Quadern so, daß für alle  $x \in \overline{B_f^+}$  ein Quader  $Q_x$  derart existiert, daß  $x \in Q_x \subset \overline{Q_x} \subset \Omega$  gilt. Nun können wir endlich viele Quader  $Q_1, \dots, Q_j$  finden, die  $\overline{B_f^+}$  überdecken. Da  $\Omega$  insbesondere wegzusammenhängend ist, finden wir Wege  $\gamma_i, i \in \{1, \dots, j-1\}$ , die die Quader  $Q_i$  so verbinden, daß die Menge  $K_0 := \bigcup_{i=1}^j \overline{Q_i} \cup \bigcup_{i=1}^{j-1} \text{Bild } \gamma_i$  kompakt und zusammenhängend ist und  $\overline{B_f^+} \subset K_0 \subset \Omega$  gilt.

Wir überdecken nun  $K_0$  mit einem achsenparallelen Quadergitter der Seitenlänge  $\delta$ , wobei  $2\delta < \text{dist}(K_0, \partial\Omega)$  sei, und betrachten alle abgeschlossenen Quader des Gitters, die  $K_0$  schneiden. Es sei  $\Gamma$  die Vereinigung der Quaderseiten, die Randseite nur eines der betrachteten Quader sind. Wir erhalten somit ein  $(n-1)$ -dimensionales Polyeder, welches  $\overline{B_f^+}$  von  $\mathcal{J}(f)$  trennt. Des weiteren hat  $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \Gamma$  genau zwei Zusammenhangskomponenten, die beide einfach zusammenhängend sind.

Wir bezeichnen mit  $V$  die Zusammenhangskomponente, die  $\mathcal{J}(f)$  und mit  $W$  die, die  $\overline{B_f^+}$  enthält. Die Mengen  $V \cup \Gamma$  und  $W \cup \Gamma$  sind kompakt, und es gilt  $W \cup \Gamma \subset \Omega$ . Somit können wir folgern, daß ein  $k \in \mathbb{N}$  so existiert, daß  $f^k(W \cup \Gamma) \subset W$  gilt. Dann gilt  $(f^k)^{-1}(K) \subset V$  für  $K := V \cup \Gamma$ . Da  $B_{f^k}^+ \subset B_f^+$  und  $\mathcal{J}(f^k) = \mathcal{J}(f)$  gilt, dürfen wir annehmen, daß  $k = 1$  gilt.

Sei nun  $d$  der Grad von  $f$ . Für jede Komponente  $U$  von  $f^{-1}(V)$  gilt  $f(U) = V$  und  $U \subset V$ , da  $f(W \cup \Gamma) \subset W$  gilt. Nach Konstruktion ist  $V$  einfach zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sowie relativ lokal zusammenhängend. Des weiteren ist  $f$  auf einer Umgebung von  $K$  ein lokaler Homöomorphismus. Wir können nun Lemma 3.1.4 anwenden und erhalten, daß  $f$  die Menge  $\overline{U}$  homöomorph auf  $\overline{V} = K$  abbildet. Somit finden wir  $d$  Zweige  $g_1, \dots, g_d$  der Umkehrfunktion von  $f$ , die auf  $K$  definiert sind. Offensichtlich sind  $g_1(K), \dots, g_d(K)$  kompakte, disjunkte Teilmengen von  $V$ .

Wir setzen nun  $K_{(i_1, \dots, i_k)} := (g_{i_1} \circ \dots \circ g_{i_k})(K)$  für  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, d\}$ , somit sind die  $K_{(i_1, \dots, i_k)}$  kompakt. Da  $g_i(K) \subset K$  für alle  $i \in \{1, \dots, d\}$  ist, gilt schon immer  $K_{(i_1, \dots, i_{k+1})} \subset K_{(i_1, \dots, i_k)}$ . Schließlich gilt  $K_{(i_1, \dots, i_k)} \cap K_{(j_1, \dots, j_k)} = \emptyset$ , falls  $(i_1, \dots, i_k) \neq (j_1, \dots, j_k)$  ist, und

$$f^{-k}(K) = \bigcup_{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, d\}^k} K_{(i_1, \dots, i_k)}.$$

Wir definieren  $K_\infty := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} f^{-k}(K)$ . Da die Juliamenge von  $f$  eine Teilmenge von  $K$  und vollständig invariant ist, gilt  $\mathcal{J}(f) \subset K_\infty$ . Ist  $x \in K_\infty$ , so gilt  $f^k(x) \in K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , das heißt  $f^k(x) \not\rightarrow \xi$ , also gilt  $x \notin \mathcal{F}(f)$ . Es gilt somit insgesamt schon  $K_\infty = \mathcal{J}(f)$ .

Sei  $L$  eine Komponente von  $\mathcal{J}(f)$ . Für jedes  $k$  liegt  $L$  in höchstens einer der Komponenten  $K_{(i_1, \dots, i_k)}$ , das heißt wir finden eine Folge  $(i_k)_{k \in \mathbb{N}}$  derart, daß  $L \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} K_{(i_1, \dots, i_k)}$  gilt. Nun zeigen wir, daß der Durchmesser der Mengen  $K_{(i_1, \dots, i_k)}$  gegen Null konvergiert. Wir definieren  $h_k := g_{i_1} \circ \dots \circ g_{i_k}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Nach Satz 1.4.7 ist  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  normal. Des weiteren gilt  $V \cap \mathcal{J}(f) \neq \emptyset$  und somit folgt nach Satz 4.1.11, daß jede konvergente Teilfolge von  $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine konstante Grenzfunktion hat. Sei  $\zeta$  der Wert einer solchen Grenzfunktion, und sei  $U$  eine beliebig kleine  $\varepsilon$ -Umgebung von  $\zeta$ . Da  $g_{i_1}(K)$  kompakt ist und  $K_{(i_1, \dots, i_{k+1})} \subset K_{(i_1, \dots, i_k)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, folgt, daß für jedes genügend große  $k$  die Menge  $K_{(i_1, \dots, i_k)}$  in  $U$  liegt. Da  $\varepsilon$  beliebig gewählt war, folgt, daß  $\text{diam } K_{(i_1, \dots, i_k)}$  gegen Null konvergiert. Wir können nun schließen, daß  $K_\infty = \mathcal{J}(f)$  total unzusammenhängend ist. Ferner ist die Juliamenge perfekt, also ist sie eine Cantormenge. □

*Bemerkung:* In der komplexen Iterationstheorie nennt man eine Funktion  $f$ , deren Verzweigungsmenge in der Vereinigung aller Attraktionsgebiete von  $f$  liegt, hyperbolisch. Diese Definition läßt sich auf gleichmäßig quasimeromorphe Abbildungen übertragen. Mit Hilfe der Sätze 4.2.6 und 4.2.4 zeigt man wie zu Anfang des obigen Beweises, daß diese Forderung äquivalent zu der Bedingung  $\overline{B_f^+} \cap \mathcal{J}(f) = \emptyset$  ist. Ein konkretes Beispiel einer diese Bedingung erfüllenden Abbildung stellen wir auf Satz 4.3.6 folgend vor.

◁

Wir wollen uns nun der Aufgabe zuwenden, die Juliamenge mithilfe der periodischen Punkte der betrachteten Funktion  $f$  zu beschreiben. Eines der klassischen und wichtigsten Ergebnisse der Iterationstheorie holomorpher Funktionen ist, daß die Juliamenge von  $f$  dem Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Punkte von  $f$  entspricht. Dieses Ergebnis wurde bereits Anfang des letzten Jahrhunderts unabhängig voneinander von G. Julia und P. Fatou bewiesen. Für gleichmäßig quasimeromorphe Abbildungen konnten bisher nur Teilergebnisse in dieser Richtung erzielt werden. Für uns liegt es nahe, die in den vorigen Kapiteln erarbeiteten Aussagen über den Zusammenhang zwischen Normalität bestimmter Funktionenfamilien und der Existenz von Fixpunkten von zu diesen Familien gehörenden Funktionen auf die Familie der Iterierten einer gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung anzuwenden. So erhalten wir zunächst die folgende Aussage, die auch schon in [16, §5.3] bewiesen wurde.

**4.3.4 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph, und sei  $x \in \mathcal{J}(f)$ . Dann liegt  $x$  im Abschluß der Menge der periodischen Punkte von  $f$ .*

*Beweis:* Sei  $U$  eine Umgebung von  $x$ . Da die Juliamenge von  $f$  perfekt ist, finden wir  $p := \max\{(q-1)^2 + 1, 3\}$  verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_p \in (U \cap \mathcal{J}(f)) \setminus \{\infty\}$ . Nach Lemma 4.1.9 (d) ist keine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in einem der  $x_i$  normal. Somit sind die Voraussetzungen von Satz 2.3.5 (i) erfüllt, und es folgt, daß wir eine Iterierte  $f^m$  von  $f$  derart finden, daß  $f^{ml}$  für alle  $l \in \mathbb{N}_{>1}$  einen Fixpunkt in  $U$  besitzt. Das heißt, es existiert ein  $y \in U$ , für das  $f^{2m}(y) = y$  gilt. Also ist  $y$  ein periodischer Punkt von  $f$ .

□

Wenden wir uns nun den abstoßenden periodischen Punkten und ihrer Bedeutung für die Juliamenge, wie wir sie oben bereits angesprochen haben, zu. Das erste Teilergebnis findet sich in [16, §5.1].

**4.3.5 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  gleichmäßig quasimeromorph. Die Fatoumenge von  $f$  bestehe aus mindestens zwei Zusammenhangskomponenten.*

Dann liegen die abstoßenden periodischen Punkte von  $f$  in der Juliamenge von  $f$  dicht.

*Bemerkung:* Die Anforderung an die Fatoumenge von  $f$  stellt tatsächlich eine Bedingung dar, die gewährleistet, daß die Juliamenge von  $f$  größer als die Verzweigungsmenge einer beliebigen quasimeromorphen Abbildung ist. Betrachtet man meromorphe Funktionen, so ist dies immer der Fall, da ihre Verzweigungsmenge diskret ist. In höheren Dimensionen kann sie jedoch wesentlich größer sein. Allerdings ist bekannt, daß die topologische Dimension der Verzweigungsmenge jeder quasimeromorphen Abbildung ebenso wie die ihres Bildes durch  $n - 2$  beschränkt ist (siehe Satz 1.2.11). Der Beweis von Satz 4.3.5 aus [16] greift auch bei gleichmäßig quasimeromorphen Abbildungen, deren Juliamengen Dimension mindestens  $n - 1$  haben, ohne daß zusätzlich Bedingungen an die Fatoumenge gestellt werden müssen.

◁

Die Ergebnisse aus Kapitel 3 ermöglichen es uns nun auch in dem Fall, daß die Fatoumenge zusammenhängend ist, eine Aussage im Stil von Satz 4.3.5 zu treffen. Allerdings kommen wir nicht ohne Anforderungen an die Verzweigungsmenge aus. Der Satz hat die folgende Gestalt.

**4.3.6 Satz** *Sei  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung. Es gelte  $\mathcal{J}(f) \not\subset \overline{B_f^+}$ .*

*Dann liegen die abstoßenden periodischen Punkte von  $f$  in der Juliamenge von  $f$  dicht.*

*Beweis:* Sei  $x \in \mathcal{J}(f)$ . Für alle Umgebungen  $U$  von  $x$  gilt  $U \cap \mathcal{J}(f) \not\subset \overline{B_f^+}$ . Existierte eine Umgebung  $U$  mit  $U \cap \mathcal{J}(f) \subset \overline{B_f^+}$ , so wäre es nach Lemma 4.1.9 (c) möglich, ein  $k \in \mathbb{N}$  derart zu finden, daß  $\mathcal{J}(f) \subset f^k(U \cap \mathcal{J}(f)) \subset f^k(\overline{B_f^+}) \subset \overline{B_f^+}$  gilt. Dies widerspräche den Voraussetzungen.

Sei  $p := \max\{(q - 1)^2 + 1, 3\}$ , wobei  $q$  die zu  $n$  und  $K$  gehörige Rickman-Konstante bezeichne, und sei  $U$  eine Umgebung von  $x$ . Es existieren  $p$  verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_p \in (U \cap \mathcal{J}(f)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_f^+}) = (U \cap \mathcal{J}(f)) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^k(B_{f^k}))$ . Nach Lemma 4.1.9 (d) ist keine Teilfolge von  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in einem der  $x_i$  normal. Somit können wir Lemma 3.2.3 (i) anwenden, welches uns eine Iterierte  $f^l$  von  $f$  derart liefert, daß  $(f^l)^k$  für alle  $k > 1$  einen abstoßenden Fixpunkt in  $U$  besitzt. Insbesondere hat dann  $f$  einen abstoßenden periodischen Punkt in  $U$ .

□

Anders als in Satz 4.3.5 stellen wir in dem vorangegangenen Satz keine Bedingungen an die Größe der Juliamenge, sondern nutzen Informationen über die Lage

der postkritischen Menge in Relation zur Juliamenge aus. Daß eine solche Bedingung durchaus im konkreten Fall nachprüfbar sein kann, zeigt das folgende aus [19] stammende Beispiel.

**Beispiel:** Wir wollen hier die Konstruktion des Beispiels nicht im Detail wiedergeben und verweisen für genauere Betrachtungen auf den Artikel [19].

Sei  $0 < \varepsilon < \pi/2$ . Wir setzen

$$W_1 := \{(r, \theta, z) ; r > 0, |\theta| < \varepsilon, z \in \mathbb{R}^{n-2}\} \quad \text{und}$$

$$W_2 := \{(r, \theta, z) ; r > 0, |\theta - \pi| < \varepsilon, z \in \mathbb{R}^{n-2}\},$$

wobei wir zylindrische Koordinaten  $(r, \theta, z)$  im  $\mathbb{R}^n$  verwenden. Die Mengen  $W_1$  und  $W_2$  stellen also bezüglich der von den Einheitsvektoren  $e_2, \dots, e_n$  aufgespannten Hyperebene spiegelsymmetrische, unbeschränkte Keile dar. Sei schließlich  $a := de_1$  so gewählt, daß  $d > 3$  gilt und  $\overline{B(a, 1)} \subset W_1$  ist.

Zunächst wird nun eine Abbildung  $g$  konstruiert, die auf  $W_1$  eine Streckung um den Faktor 2 und auf  $W_2$  eine Rotation um  $\pi$  gefolgt von einer Streckung um den Faktor 2 darstellt. Somit gilt  $g(W_1) = W_1$  und  $g(W_2) = W_1$ . Außerhalb von  $W_1 \cup W_2$  ähnelt  $g$  der Abbildung aus Beispiel 5 in Kapitel 1.2. Die Verzweigungsmenge von  $g$  ist nicht leer und liegt im Komplement von  $W_1 \cup W_2$ . Sei nun  $\Phi$  die Hintereinanderausführung der Spiegelung an  $\partial B(a, 1)$  und der Spiegelung an der Hyperebene  $\{x \in \mathbb{R}^n ; x_n = 0\}$ . Somit ist  $\Phi$  eine konforme Abbildung. Wir setzen nun  $f := \Phi \circ g$ . Die Verzweigungsmenge von  $f$  stimmt somit mit der von  $g$  überein. Die Abbildung  $f$  hat die folgenden Eigenschaften.

- (1) Es gilt  $B_f \cap (W_1 \cup W_2) = \emptyset$ .
- (2) Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $f^k(B(a, 1)) \subset B(a, 1)$ .
- (3) Es gilt  $f(x) \in B(a, 1)$  für alle  $x \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus (W_1 \cup W_2)$ .

Aus den obigen Eigenschaften können wir schließen, daß  $f$  gleichmäßig quasimorph ist.

Betrachten wir nun die Verzweigungsmenge von  $f$ , so können wir aus (1) und (3) folgern, daß  $\overline{B_f^+} \subset \overline{B(a, 1)}$  gilt. Da die Verzweigungsmenge von  $f$  nicht leer ist, ist auch die Juliamenge nicht leer. Mit (2) und Satz 1.4.7 folgt sofort, daß  $B(a, 1)$  in der Fatoumenge liegt. Des weiteren können wir aus den Abbildungseigenschaften von  $f$  schließen, daß  $f(\partial B(a, 1)) \subset B(a, 1)$  und somit  $\overline{B(a, 1)} \subset \mathcal{F}(f)$  gilt. Insgesamt gilt also  $\mathcal{J}(f) \cap \overline{B_f^+} = \emptyset$ . Die Abbildung  $f$  erfüllt somit die Voraussetzungen von Satz 4.3.6, und wir können folgern, daß die abstoßenden periodischen Punkte in der Juliamenge von  $f$  dicht liegen.

Für eine genauere Untersuchung der Gestalt der Juliamenge gehen wir wie folgt vor. Wir setzen  $D_1 := f^{-1}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(a, 1))$ . Aus (3) und der Gestalt der Ab-

bildungen  $\Phi$  und  $g$  können wir schließen, daß

$$D_1 = \overline{B(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})} \cup \overline{B(\frac{a}{2}, \frac{1}{2})}$$

gilt. Ist  $x \notin D_1$ , so existiert eine Umgebung  $U$  von  $x$  derart, daß  $f(U) \subset B(a, 1)$  und nach (2) auch  $f^k(U) \subset B(a, 1)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Somit gilt für jedes  $x \notin D_1$  schon  $x \in \mathcal{F}(f)$ , also  $\mathcal{J}(f) \subset D_1$ .

Nun definieren wir  $D_2 := f^{-1}(D_1)$ . Es gilt  $D_2 \subset W_1 \cup W_2$  nach (3). Das Urbild von  $W_1$  unter  $\Phi$  besteht aus zwei abgeschlossenen, disjunkten Kugeln, die in  $B(a, 1)$  und deren Mittelpunkte auf der  $e_1$ -Achse liegen. Jede dieser Kugeln hat unter  $g$  wiederum die Vereinigung zweier abgeschlossener Kugeln, deren Mittelpunkte auf der  $e_1$ -Achse liegen, als Urbild, wobei eine der Kugeln in  $B(-a/2, 1/2)$  und die andere in  $B(a/2, 1/2)$  liegt. Insgesamt können wir folgern, daß  $D_2$  aus vier abgeschlossenen, disjunkten Kugeln besteht, von denen jeweils zwei in einer Komponente von  $D_1$  liegen. Wieder gilt für jedes  $x \notin D_2$ , daß eine Umgebung  $U$  so existiert, daß  $f^2(U) \subset B(a, 1)$  gilt, also ist  $x \in \mathcal{F}(f)$ .

Induktiv erhalten wir nun folgendes. Wir setzen  $D_{k+1} := f^{-1}(D_k)$ . Dann setzt sich  $D_{k+1}$  aus  $2^{k+1}$  disjunkten, abgeschlossenen Kugeln, deren Mittelpunkte auf der  $e_1$ -Achse liegen, zusammen, von denen jeweils zwei in einer Komponente von  $D_k$  liegen. Des weiteren gilt für alle  $x \notin D_{k+1}$  schon  $x \in \mathcal{F}(f)$ . Somit gilt  $\mathcal{J}(f) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_k$ . Wir können nun folgern, daß die Juliamenge von  $f$  eine Cantormenge und Teilmenge der  $e_1$ -Achse ist. Die Fatoumenge von  $f$  ist demnach zusammenhängend. Man kann zeigen, daß  $f$  einen anziehenden Fixpunkt besitzt.  $\triangleleft$

*Bemerkungen:* 1. Wie schon in den Bemerkungen zu Anfang dieses Kapitels erwähnt, ist das oben angeführte Beispiel in [22] verallgemeinert worden, um zu zeigen, daß zu jeder quasimeromorphen Funktion  $f : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  eine gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung  $g : \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$  so existiert, daß  $B_g$  und  $B_f$  übereinstimmen. Das dafür verwendete Konstruktionsverfahren liefert wiederum eine gleichmäßig quasimeromorphe Funktion  $g$ , deren Juliamenge eine Cantormenge ist und deren Fatoumenge einen anziehenden Fixpunkt enthält. Des weiteren läßt sich wie im obigen Beispiel einsehen, daß  $\overline{B_g^+}$  die Juliamenge von  $g$  nicht schneidet. Somit ist Satz 4.3.6 auf alle so gewonnenen Abbildungen anwendbar.

Es sei hierzu jedoch noch erwähnt, daß es für die auf diese Weise konstruierten Beispiele ohne größeren Aufwand auch direkt nachprüfbar ist, daß in beliebig kleinen Umgebungen eines jeden Punktes der Juliamenge abstoßende periodische Punkte liegen.

2. In der Bemerkung nach Satz 4.3.3 haben wir den Begriff der hyperbolischen Funktion vorgestellt. In der Iterationstheorie holomorpher Funktionen stellen die-

se Abbildungen eine wichtige, gründlich untersuchte Klasse dar. Offensichtlich ist Satz 4.3.6 für jede hyperbolische, gleichmäßig quasimeromorphe Abbildung anwendbar.

3. In [16] wird die oben angesprochene Methode zur Konstruktion von gleichmäßig quasimeromorphen Abbildungen geringfügig abgewandelt. Statt einer Funktion, deren Fatoumenge aus einer Komponente mit einem anziehenden Fixpunkt besteht, erhält man eine Abbildung  $g$ , deren Fatoumenge ebenfalls zusammenhängend ist, deren Iterierten darauf aber gegen einen neutralen Fixpunkt, welcher in der Juliamenge von  $g$  liegt, konvergieren. Dieser Fixpunkt liegt außerdem auch in  $\overline{B}_g^+$ , daß heißt  $\overline{B}_g^+ \cap \mathcal{J}(g)$  ist nicht leer. Aber es läßt sich wieder wie oben zeigen, daß  $\overline{B}_g^+$  die Juliamenge von  $g$  nicht umfaßt. Für diese Funktion ist Satz 4.3.6 ebenfalls anwendbar.

◁

Auch in diesem Abschnitt haben sich viele Parallelen zur komplexen Dynamik gezeigt. Es ist jedoch auch klar geworden, daß nicht alle Ergebnisse für rationale Funktionen ohne Schwierigkeiten auf die höherdimensionale Situation übertragbar sind. Dies läßt es interessant und lohnend erscheinen, weitere Untersuchungen im Bereich der Iterationstheorie gleichmäßig quasiregulärer Abbildungen durchzuführen.



## Literatur

- [1] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Springer, 1935.
- [2] D. Bargmann und W. Bergweiler, *Periodic Points and Normal Families*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (2001), 2881-2888.
- [3] A. F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, New York, 1983.
- [4] A. F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer, New York, 1991.
- [5] W. Bergweiler, *Periodic points of entire functions: proof of a conjecture of Baker*, Complex Variables Theory Appl. 17 (1991), 57-72.
- [6] W. Bergweiler, *A new proof of the Ahlfors five islands theorem*, J. Analyse Math. 76 (1998), 337-347.
- [7] B. Bojarski und T. Iwaniec, *Analytical foundations of the theory of quasiconformal mappings in  $\mathbb{R}^n$* , Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 8 (1983), 257-324.
- [8] P. T. Curch und E. Hemmingsen, *Light open maps on  $n$ -manifolds*, Duke Math. J. 27 (1960), 527-536.
- [9] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1985.
- [10] A. Eremenko und J. Lewis, *Uniform limits of certain  $A$ -harmonic functions with applications to quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 16 (1991), 361-375.
- [11] M. Essén und S. Wu, *Fixpoints and a normal family of analytic functions*, Complex Variables Theory Appl. 37 (1998), 171-178.
- [12] P. Fatou, *Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelle*, C. R. Acad. Sci. Paris 143 (1906), 546-548.
- [13] L. Geyer, *Quasikonforme Deformation in der Iterationstheorie*, Diplomarbeit TU Berlin, 1994.
- [14] A. Hinkkanen, *Uniformly quasiregular semigroups in two dimensions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 21, (1996), 205-222.
- [15] A. Hinkkanen und G. Martin, *Attractors in Quasiregular Semigroups*, Proc. XVI Nevanlinna colloquium, Eds. I. Laine und O. Martio, de Gruyter, Berlin - New York (1996), 135-141.

- 
- [16] A. Hinkkanen, G. Martin und V. Mayer, *Local Dynamics of Uniformly Quasiregular Mappings*, preprint.
- [17] W. Hurewicz und H. Wallman, *Dimension Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton. NJ, 1948.
- [18] T. Iwaniec, *On  $L^p$ -integrability in PDE's and quasiregular mappings for large exponent*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 7 (1982), 301-322.
- [19] T. Iwaniec und G. Martin, *Quasiregular Semigroups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 21 (1996), 241-254.
- [20] T. Iwaniec und G. Martin, *Geometric Function Theory and Non-linear Analysis*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [21] O. Lehto und K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 126, 2nd edn., Springer, Berlin-Heidelberg - New York, 1973.
- [22] G. Martin, *Branch sets of uniformly quasiregular mappings*, Conform. Geom. Dynam. Vol. 1 (1997), 24-27.
- [23] O. Martio, S. Rickman und J. Väisälä, *Topological and metric properties of quasiregular mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 488 (1971), 1-31.
- [24] O. Martio und U. Srebro, *Periodic quasimeromorphic mappings*, J. Analyse Math. 28 (1975), 20-40.
- [25] V. Mayer, *Uniformly Quasiregular Mappings of Lattès type*, Conform. Geom. Dynam. 1 (1997), 104-111.
- [26] V. Mayer, *Quasiregular analogues of Critically Finite Rational Functions with Parabolic Orbifold*, J. Analyse Math. 75 (1998), 105-119.
- [27] R. Miniowitz, *Normal families of quasimeromorphic mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), 35-43.
- [28] Yu. G. Reshetnyak, *Space mappings with bounded distortion*, (Russian), Sibirsk. Math. Zh. 8 (1967), 629-659.
- [29] Yu. G. Reshetnyak, *Mappings with bounded distortion as extremals of Dirichlet type integrals*, (Russian), Sibirsk. Math. Zh. 9 (1968), 652-666.

- 
- [30] Yu. G. Reshetnyak, *Space Mappings with Bounded Distortion*, Transl. of Math. Monographs 73, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [31] S. Rickman, *On the number of omitted values of entire quasiregular mappings*, J. Analyse Math. 37 (1980), 100-117.
- [32] S. Rickman, *The analogue of Picard's theorem for quasiregular mappings in dimension three*, Acta Math. 154 (1985), 195-242.
- [33] S. Rickman, *Quasiregular Mappings*, Springer, Berlin, 1993.
- [34] J. Väisälä, *Discrete open mappings on manifolds*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 392 (1966), 1-10.
- [35] J. Väisälä, *Lectures on  $n$ -Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Mathematics 229, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.
- [36] M. Vuorinen, *Conformal Geometry and Quasiregular Mappings*, Lecture Notes in Mathematics 1319, Springer, Berlin - Heidelberg, 1988.
- [37] S. Wang und S. Wu, *Fixpoints of Meromorphic Functions and Quasinormal Families*, Acta Math. Sin. 45 (2002), 545-550.
- [38] L. Zalcman, *A heuristic principle in complex function theory*, Amer. Math. Monthly 82 (1975), 813-817.
- [39] V. A. Zorich, *The theorem of M. A. Lavrent'ev on quasiconformal mappings in space*, (Russian), Mat. Sb. 74 (1967), 417-433.



## Symbolverzeichnis

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ ; Seite 5
$ x $	euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ ; Seite 5
$ A $	Operatornorm der linearen Abbildung $A$ ; Seite 5
$\ f\ _\infty$	Supremumsnorm der Funktion $f$ ; Seite 5
$(V, E)$	gerichteter Graph mit Eckenmenge $V$ und Kantenmenge $E$ ; Seite 28
$(v_0, \dots, v_k)$	geschlossener oder einfach geschlossener Kantenzug in einem gerichteten Graphen $(V, E)$ ; Seite 28
$\bar{A}, \bar{A}^X$	Abschluß der Menge $A$ beziehungsweise Abschluß der Menge $A$ im topologischen Raum $X$ ; Seite 6
ACL	Abkürzung für absolut stetig auf Geraden; Seite 7
ACL <sup><math>p</math></sup>	Eigenschaft einer Funktion, ACL zu sein und lokal $L^p$ -integrierbare Ableitungen zu besitzen; Seite 8
$B(x, r)$	Kugel um den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r$ bezüglich der euklidischen Metrik; Seite 5
$B_X(x, r)$	Kugel um den Punkt $x \in \bar{\mathbb{R}}^n$ mit Radius $r$ bezüglich der sphärischen Metrik; Seite 6
$B_f$	Verzweigungsmenge der Abbildung $f$ ; Seite 12
$B_f^+$	postkritische Menge der gleichmäßig quasimergen Abbildung $f$ ; Seite 64
$C(M)$	Menge der auf der Menge $M$ definierten stetigen Funktionen; Seite 6
$C^k(M)$	Menge der auf der Menge $M$ definierten $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen; Seite 6
card $M$	Mächtigkeit der Menge $M$ ; Seite 6
$\partial A, \partial_X A$	Rand der Menge $A$ beziehungsweise Rand der Menge $A$ im topologischen Raum $X$ ; Seite 6
det $A$	Determinante einer linearen Abbildung $A$ ; Seite 6
$Df(x)$	totale Ableitung der differenzierbaren Funktion $f$ an der Stelle $x$ ; Seite 6
$D_i f_j$	$i$ -te partielle Ableitung der $j$ -ten Koordinatenfunktion der partiell differenzierbaren Funktion $f$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ ; Seite 6

$\text{diam } A$	Durchmesser der Menge $A$ ; Seite 5
$\text{dim } A$	topologische Dimension der Menge $A$ ; Seite 12
$\text{dist}(A, B), \text{dist}(x, B)$	Abstand der Mengen $A$ und $B$ beziehungsweise $\{x\}$ und $B$ ; Seite 5
$\mathcal{E}(f)$	Menge der Ausnahmepunkte der gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung $f$ ; Seite 61
$f_i$	$i$ -te Koordinatenfunktion der Abbildung $f$ mit Werten in $\mathbb{R}^n$ ; Seite 6
$f^k$	$k$ -fache Hintereinanderausführung der Funktion $f$ ; Seite 6
$\mathcal{F}(f)$	Fatoumenge der gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung $f$ ; Seite 58
$\mathcal{F}_K(G, \{B(a_j, \varepsilon)\}_{j=1}^p)$	Familie aller auf dem Gebiet $G$ definierten $K$ -quasimeromorphen Abbildungen, die über keiner der gegebenen Kugeln $B(a_1, \varepsilon), \dots, B(a_p, \varepsilon)$ eine Insel besitzen; Seite 32
$\mathcal{F}_{K, \varepsilon}^1(G, A)$	Familie aller auf einem Gebiet $G$ definierten $K$ -quasimeromorphen Abbildungen, die über keiner der Kugeln $B(a, \varepsilon), a \in A$ , eine einfache Insel besitzen; Seite 50
$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}^1(G, \{B(a_j, \varepsilon)\}_{j=1}^p)$	Familie aller Abbildungen aus der Funktionenfamilie $\mathcal{L}$ , die über keiner der gegebenen Kugeln $B(a_1, \varepsilon), \dots, B(a_p, \varepsilon)$ eine einfache Insel besitzen; Seite 50
$G(f, \{B_j\}_{j=1}^p)$	gerichteter Graph, deren Eckenmenge $p$ verschiedene $\varepsilon$ -Kugeln $B_j$ enthält und deren Kantenmenge aus Paaren $(B_i, B_j)$ besteht, für die gilt, daß $f$ eine Insel über $B_j$ in $B_i$ besitzt; Seite 31
$i(x, f)$	lokaler Index der Funktion $f$ im Punkt $x$ ; Seite 19
$\text{int } A, \text{int}_X A$	Inneres der Menge $A$ beziehungsweise Inneres der Menge $A$ im topologischen Raum $X$ ; Seite 6
$\mathcal{J}(f)$	Juliamenge der gleichmäßig quasimeromorphen Abbildung $f$ ; Seite 58
$J_f(x)$	Determinante der Jacobimatrix der partiell differenzierbaren Funktion $f$ im Punkt $x$ ; Seite 6

$\mathcal{K}(G)$	Menge aller Gebiete, deren Abschluß kompakte Teilmenge des Gebiets $G$ ist; Seite 18
$K_I(f), K_O(f), K(f)$	innere, äußere beziehungsweise maximale Dilatation der quasiregulären Abbildung $f$ ; Seite 9
$\mu(f)$	Abbildungsgrad der Funktion $f$ ; Seite 22
$\mu(f, \Omega, y)$	topologischer Grad der Funktion $f$ , der Menge $\Omega$ und dem Wert $y \in \mathbb{R}^n$ ; Seite 16
$m(A), m_n(A)$	Lebesgue-Maß der Menge $A$ im $\mathbb{R}^n$ ; Seite 6
$M(r)$	Maximalbetrag der betrachteten Funktion $f$ ; Seite 45
$\nu(E, Y), \nu(r, s)$	sphärisches Mittel über die Anzahl der Urbilder unter der betrachteten Funktion $f$ von Punkten aus einer $(n-1)$ -dimensionalen Kugelschale $Y$ in einer Borelmenge $E$ beziehungsweise von Punkten aus $\partial B(0, s)$ in $\overline{B(0, r)}$ ; Seite 44 beziehungsweise 45
$n(E, y), n(r, y)$	Anzahl der Urbilder des Wertes $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ unter der betrachteten Abbildung $f$ gemäß Vielfachheit in der Borelmenge $E$ beziehungsweise in $\overline{B(0, r)}$ ; Seite 44 beziehungsweise 45
$od(v)$	Außengrad der Ecke $v$ in einem gerichteten Graph $(V, E)$ ; Seite 28
$\mathbb{R}^n$	euklidischer, $n$ -dimensionaler Raum; falls nicht anders erwähnt, gilt immer $n \geq 2$ ; Seite 5
$\overline{\mathbb{R}^n}$	Einpunktkompaktifizierung des $\mathbb{R}^n$ ; Seite 5
$U(x, f, s)$	Komponente von $f^{-1}(B(f(x), s))$ , die den Punkt $x$ enthält; Seite 20
$\chi(x, y)$	sphärischer Abstand der beiden Punkte $x, y \in \overline{\mathbb{R}^n}$ ; Seite 5



## Erklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch meinen akademischen Lehrer, in Inhalt und Form selbst angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 16. Oktober



## Lebenslauf

Name: Heike Siebert  
Anschrift: Holtenauer Str. 278  
24106 Kiel  
Tel. 0431 30314

Staatsangehörigkeit: deutsch  
Geburtsdatum: 8. 10. 1976  
Geburtsort: Wilhelmshaven  
Familienstand: ledig  
Eltern: Reinhold Siebert  
Birgit Siebert, geb. Werner

08/1982 - 07/1986 Paul-Sillus-Grundschule Jever  
08/1986 - 07/1988 Orientierungsstufe Jever  
08/1988 - 07/1991 Mariengymnasium Jever  
08/1991 - 07/1992 Portsmouth High School, USA  
08/1992 - 06/1995 Mariengymnasium Jever  
Abschluß: Abitur

09/1995 - 02/1996 Praktikum am Alfred-Wegener-Institut in Bremerhaven  
04/1996 - 09/1996 Studium der Mathematik und der Chemie auf gymnasia-  
les Lehramt an der Christian-Albrechts-Universität zu  
Kiel

10/1996- 03/2002 Studium der Mathematik und der Biologie auf gymna-  
siales Lehramt an der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

04/2002 - 09/2002 Studium der Mathematik an der Christian-Albrechts-  
Universität zu Kiel  
Abschluß: Diplom in Mathematik

ab 09/2002 Stipendium der Deutsch-Israelischen Stiftung für Wis-  
senschaftliche Forschung und Entwicklung für For-  
schungsarbeit zum Thema „Normale Familien und kom-  
plexe Dynamik“

ab 10/2002 Studium der Geologie an der Christian-Albrechts-  
Universität zu Kiel