

# Zufällige Juliamengen und invariante Maße mit maximaler Entropie

**Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel



vorgelegt von  
**Markus Wendt**

April 2005

**Referent:** Prof. Dr. Uwe Rösler

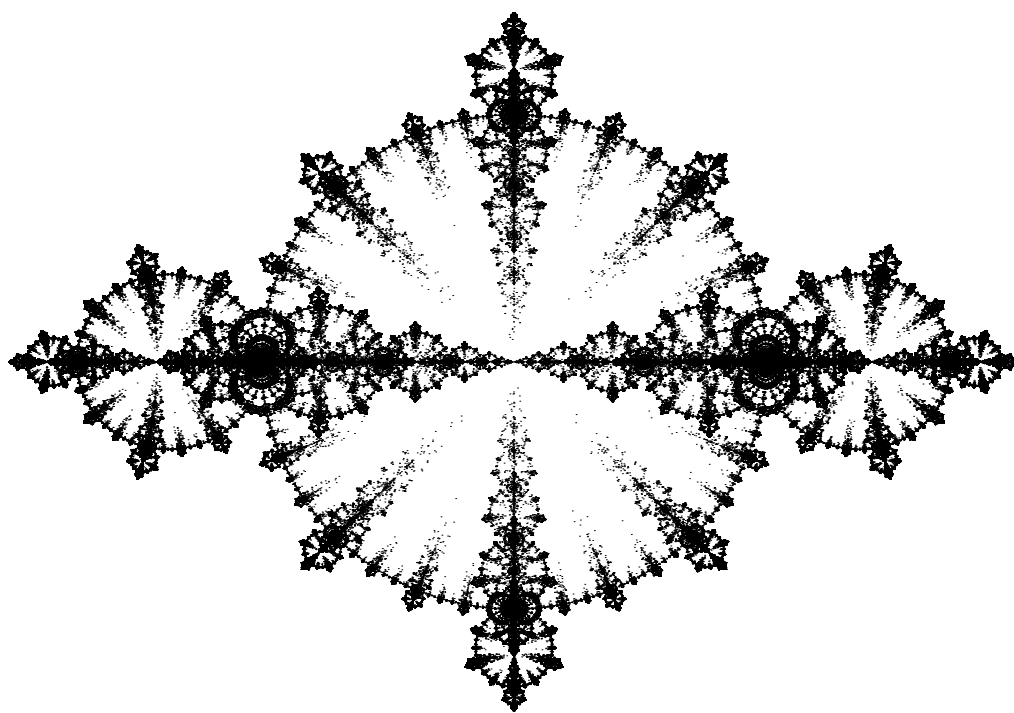
**Koreferent:** Prof. Dr. Walter Bergweiler

**Tag der mündlichen Prüfung:** 27. Mai 2005

**Zum Druck genehmigt:** Prof. Dr. Grotemeyer, Dekan

Kiel, den 27. Mai 2005

# **Random Julia sets and invariant measures with maximal entropy**





## Zusammenfassung

Betrachtet man (zufällige) dynamische Systeme und insbesondere eine (zufällige) Iteration, so ist man daran interessiert, stabile und instabile (chaotische) Zustände zu beschreiben. Eine Möglichkeit besteht darin, (Wahrscheinlichkeits-) Maße zu untersuchen, die bezüglich dem zugrundeliegenden Schiefprodukt invariant sind. Nun ist die Menge der invarianten Maße in allen interessanten Fällen nicht-leer, man zieht daher bestimmte Maße anderen vor. Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Betrachtung von Familien von holomorphen (bzw. rationalen) Funktionen und die Frage nach der Existenz von bestimmten invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen:

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbb{P}^k$  der komplexe projektive Raum der Dimension  $k$ .  $\mathbb{P}^k$  ist eine Kompaktifizierung von  $\mathbb{C}^k$ .  $\mathbb{P}^1$  entspricht der Riemannschen Zahlensphäre  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , die holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^1$  sind genau die rationalen Funktionen auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Sei  $I$  ein meßbarer Raum und sei  $f_i, i \in I$ , eine Familie von holomorphen Selbstabbildungen  $f_i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  mit  $d_i := \text{grad } f_i \geq 2$  für alle  $i \in I$ . Sei  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ , und sei  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Das zugehörige Schiefprodukt ist gegeben durch

$$f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z)).$$

Wir betrachten die zugehörigen Fasern und die entsprechenden Juliamengen, d.h. für jedes  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  sei  $F_\omega = \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$  und sei  $\mathcal{J}(F_\omega)$  die zugehörige Juliamenge. Es ist wohlbekannt, daß zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\Omega \times \mathbb{P}^k$ , dessen Marginalmaß auf  $\Omega$  mit  $\mathbf{P}$  übereinstimmt (d.h.  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  mit  $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega, (\omega, x) \mapsto \omega$ ), eine Faktorisierung existiert, d.h. für  $\mathbf{P}$ -fast jedes  $\omega \in \Omega$  gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_\omega$  auf  $\mathbb{P}^k$  mit

$$\mu(C) = \int_\Omega \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_C(\omega, x) \mu_\omega(dx) \mathbf{P}(d\omega) \quad \text{für jedes meßbare } C \subseteq \Omega \times \mathbb{P}^k.$$

In der vorliegenden Arbeit gehen wir der Frage nach, unter welchen Bedingungen ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\Omega \times \mathbb{P}^k$  existiert mit  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  und

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Ist  $|I| = 1$ , so kann  $f$  auch als holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  aufgefaßt werden. Bereits in diesem Fall ist die Existenz für beliebiges  $k \geq 2$  noch ein offenes Problem. Hier untersuchen wir im wesentlichen den Fall  $k = 1$  und setzen voraus, daß nur eine meßbare Parameterabhängigkeit vorliegt (Korollar 5.4.8). Interessant sind auch Maße mit maximaler Entropie. Im Fall  $|I| = 1$  hat das so konstruierte Maß maximale Entropie. Wir wollen  $I$  hier nicht als kompakten Raum voraussetzen. Allerdings werden in der Entropie-Theorie fast ausschließlich kompakte Räume zugrundegelegt. Wir übertragen hier daher einige der Definitionen der topologischen Entropie auf den Fall, daß der zugrundeliegende Raum nicht kompakt ist. Wir vergleichen diese Definitionen und geben zudem einen Beweis für Goodwyn's Theorem für diesen Fall an.



# Abstract

Considering a (random) dynamical system, especially a (random) iteration, one would like to classify the stable and unstable (chaotic) states. Investigating invariant probability measures (with respect to the corresponding skew-product) have been proved to be a good tool to examine this problem. If the underlying space is a compact (metric) space the set of invariant (probability) measures is non-empty (for continuous functions). Therefore, one may prefer invariant measures with special properties, in particular measures with maximal entropy.

Let  $\mathbb{P}^k$  denote the complex projective space of dimension  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Thus,  $\mathbb{P}^k$  is a compactification of  $\mathbb{C}^k$  and  $\mathbb{P}^1$  agrees with the Riemannian sphere  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Furthermore, the holomorphic self-mappings on  $\mathbb{P}^1$  are precisely the rational functions on  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Let  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I$  be a measurable space and let  $f_i$ ,  $i \in I$ , be a family of holomorphic self-mappings on  $\mathbb{P}^k$  with  $d_i := \deg f_i \geq 2$  for all  $i \in I$ . Let  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$  supplied with the product  $\sigma$ -algebra  $\mathfrak{A}$  and let  $\mathbf{P}$  be a shift-invariant probability measure on  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . The corresponding skew-product  $f$  is given by

$$f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z)).$$

We are considering the fibres and the corresponding Julia sets, thus for each  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  let

$$F_\omega := \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$$

and let  $\mathcal{J}(F_\omega)$  be the Julia set of  $F_\omega$ . It is well known that for every probability measure  $\mu$  on  $\Omega \times \mathbb{P}^k$  with marginal  $\mathbf{P}$  on  $\Omega$  (i.e.  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  where  $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega$ ,  $(\omega, x) \mapsto \omega$ ) there exists a factorisation, i.e. for  $\mathbf{P}$ -almost all  $\omega \in \Omega$  there exists a probability measure  $\mu_\omega$  on  $\mathbb{P}^k$  such that

$$\mu(C) = \int_\Omega \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_C(\omega, x) \mu_\omega(dx) \mathbf{P}(d\omega) \quad \text{for all measurable subsets } C \text{ of } \Omega \times \mathbb{P}^k.$$

We are interested in the existence of  $f$ -invariant probability measures  $\mu$  on  $\Omega \times \mathbb{P}^k$  with margin  $\mathbf{P}$  on  $\Omega$  and

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{for } \mathbf{P}\text{-almost all } \omega \in \Omega$$

as well as maximal entropy. It is known that such a probability measure exists if  $I$  is finite and  $k = 1$  [69].  $f$  corresponds to a holomorphic mapping  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  with  $\deg f \geq 2$  if  $|I| = 1$ . For this case one could show that there exists an invariant probability measure  $\mu$  on  $\mathbb{P}^k$  with maximal entropy and  $\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{J}(f)$ . Equality is still an open problem (for  $k \geq 2$ ) [39, §5.]. Here, we determine the case when we have a family of functions which depends only measurably on the parameter  $i$ ,  $i \in I$ . So  $I$  is just a measurable space. Under certain conditions (Korollar 5.4.8), such a measure exists but we do not calculate the (maximal) entropy. We still take a closer look on the entropy theory on non-compact spaces in general.

## Keywords

Invariant measures, complex projective space, Julia set, maximal entropy, random iteration, pluri-potential theory.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>I. Präliminarien</b>	<b>7</b>
<b>0. Potentialtheorie in der komplexen Ebene</b>	<b>9</b>
0.1. Distributionentheorie . . . . .	9
0.2. (Pluri-) Potentialtheorie . . . . .	10
<b>1. Komplexe Differentialformen und Currents</b>	<b>13</b>
1.1. Das Differentialkalkül . . . . .	13
1.2. Über (komplexe) Mannigfaltigkeiten . . . . .	16
1.3. Komplexe Differentialformen . . . . .	22
1.4. Positive Currents . . . . .	26
<b>2. Sub- und pluri-subharmonische Funktionen</b>	<b>35</b>
2.1. Harmonische und subharmonische Funktionen . . . . .	35
2.2. Pluri-harmonische und pluri-subharmonische Funktionen . . . . .	36
2.3. Wichtige Beispiele und Anwendungen . . . . .	41
<b>3. Pluri-Potentialtheorie</b>	<b>45</b>
3.1. Der komplexe projektive Raum . . . . .	45
3.2. Die Liftung . . . . .	47
3.3. Potentiale und positive $(1, 1)$ -Currents auf $\mathbb{P}^k$ . . . . .	52
3.4. Positive $(k, k)$ -Currents auf $\mathbb{P}^k$ . . . . .	57
<b>II. Entropie-Theorie und zufällige Juliamengen</b>	<b>61</b>
<b>4. Entropie-Theorie auf nicht-kompakten Räumen</b>	<b>63</b>
4.1. Maßtheoretische Entropie . . . . .	63
4.2. Systeme bedingter Maße und ergodische Zerlegungen . . . . .	65
4.3. Topologische Entropie mittels offener Überdeckungen . . . . .	72
4.4. Topologische Entropie mittels einer Metrik . . . . .	74
4.5. Topologische Entropie mittels $C$ -Strukturen . . . . .	77
4.6. Maße mit maximaler Entropie . . . . .	84
4.7. Die topologische Entropie auf nicht-kompakten Räumen . . . . .	90
<b>5. Pluri-Komplexe Dynamik</b>	<b>93</b>
5.1. Greensche Currents . . . . .	93
5.2. Der Träger des Greenschen Current . . . . .	98

5.3. Meßbare Parameterabhängigkeit . . . . .	101
5.4. <i>Das invariante Maß</i> . . . . .	105
<b>III. Anhang</b>	<b>115</b>
<b>A. Juliamengen, Faktorisierungen und zufällige Mengen</b>	<b>117</b>
A.1. Die Julia- und Fatoumenge . . . . .	117
A.2. Die Juliamenge von holomorphen Abbildungen auf $\mathbb{P}^k$ . . . . .	118
A.3. Faktorisierung und reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	120
A.4. Random sets . . . . .	122
<b>B. Über die (Nicht-) Existenz von invarianten Maßen</b>	<b>127</b>
B.1. Aussagen zur Meßbarkeit . . . . .	127
B.2. Die Existenz einfacher invarianter Maße . . . . .	131
B.3. Ein einfaches Gegenbeispiel . . . . .	133
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>143</b>
<b>Index</b>	<b>145</b>

# Einleitung

Die Iterationstheorie ist ein Beispiel dafür, wie aus einer einfachen Idee etwas sehr Kompliziertes und zugleich Wunderschönes entstehen kann. Zu einer vorgegebenen Funktion betrachtet man die Menge von Punkten, die unter Iteration (d.h. Hintereinanderausführung) ein chaotisches Verhalten aufweisen, d.h. kleinste Änderungen führen zu einem völlig anderen Iterationsverhalten. Dies entspricht dem viel zitierten *butterfly effect*. Legt man eine meromorphe Funktion zugrunde, so erhält man, daß die nach Gaston Maurice Julia benannte Menge dieser instabilen Punkte in allen interessanten Fällen nicht-leer ist. Die Juliamenge hat häufig eine sehr komplizierte, aber dennoch reguläre (z.B. selbstähnliche) Gestalt. Ziel der komplexen Dynamik ist daher die Beschreibung der Juliamenge, wobei auch häufig deren Komplement, die sogenannte Fatoumenge (nach Pierre Joseph Louis Fatou), untersucht wird.

In der Theorie (zufälliger) dynamischer Systeme betrachtet man im wesentlichen die (zufällige) Iteration einer Funktion(enfamilie) und ist entsprechend an der Klassifikation von stabilen Zuständen und instabilen (chaotischen) Verhalten interessiert. Wird nur eine Funktion betrachtet, so sind periodische Punkte von großer Bedeutung, und insbesondere für den Klassifikationssatz (der periodischen Komponenten der Fatoumenge einer meromorphen Funktion) ist dies grundlegend. Im Fall einer zufälligen Iteration beschreiben periodische Punkte, falls überhaupt derartige Punkte existieren, nur unzureichend die auftretende Dynamik und es gibt kein Analogon zum Klassifikationssatz, auch wird die Juliamenge im allgemeinen nicht mit dem Abschluß der abstoßenden periodischen Punkte übereinstimmen. Als ein Hilfsmittel zur Beschreibung der Dynamik hat sich die Untersuchung invarianter (Wahrscheinlichkeits-) Maße\* hervor getan.

Beim Vorliegen eines kompakten (metrisierbaren) Raumes ist die Existenz eines invarianten Maßes stets (genauer: für meßbare zufällige dynamische Systeme mit stetigen Funktionen) gegeben [4, §1.5], allerdings liegt im allgemeinen keine Eindeutigkeit vor. Es sind daher bestimmte invariante Maße anderen vorzuziehen. Für eine rationale Funktion (auf der Riemannschen Zahlensphere mit Grad  $\geq 2$ ) stimmt die Juliamenge mit dem Träger des eindeutig bestimmten invarianten Maßes mit maximaler Entropie überein. Invariante Maße mit maximaler Entropie müssen jedoch im allgemeinen nicht existieren und sind auch nicht zwingend eindeutig bestimmt.

Wir betrachten hier die Juliamenge eines zufälligen dynamischen Systems rationaler Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}}$ , d.h. holomorphe Selbstabbildungen auf dem komplexen projektiven Raum  $\mathbb{P}^1(\cong \hat{\mathbb{C}})$  der Dimension 1, und fragen nach der Existenz spezieller invarianter Maße. Wir betrachten auch den Fall, wenn holomorphe Selbstabbildungen auf dem komplexen projektiven Raum  $\mathbb{P}^k$ , d.h. einer speziellen Kompaktifizierung von  $\mathbb{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , vorliegen. Diese Abbildungen können durch homogene Polynomfunktionen in  $k + 1$ -Variablen, den sogenannten

---

\*Wenn nicht anders angegeben, verstehen wir unter einem Maß stets ein normiertes Maß, also ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Liftungen, beschrieben werden. Aus diesem Grund erhält man auch eine zufällige Iteration von Polynomfunktionen, die einfacher zu handhaben ist. Genauer formulieren wir die auftretende Fragestellung wie folgt:

### Ausgangssituation

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I$  ein meßbarer Raum und  $f_i, i \in I$ , eine Familie holomorpher Abbildungen  $f_i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  mit  $d_i := \text{grad } f_i \geq 2$  für alle  $i \in I$ . Verseehe  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$  mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  und einem Shift-invarianten Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$ . - Liegt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $I$  vor, so ist das auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  definierte Produktmaß Shift-invariant, und dies ist der eigentlich interessante Fall. - Das zugehörige Schiefprodukt ist gegeben durch

$$f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z)).$$

Wir betrachten die einzelnen Fasern und die entsprechenden Juliamengen, d.h. für jedes  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  sei

$$F_\omega := \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$$

und sei  $\mathcal{J}(F_\omega)$  die zugehörige Juliamenge. Es ist wohlbekannt, daß zu jedem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\Omega \times \mathbb{P}^k, \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B})$  ( $\mathcal{B}$ : Borelsche  $\sigma$ -Algebra von  $\mathbb{P}^k$ ), dessen Marginalmaß auf  $\Omega$  mit  $\mathbf{P}$  übereinstimmt (d.h.  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  mit  $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega, (\omega, x) \mapsto \omega$ ), eine Faktorisierung (auch: Desintegration) existiert, d.h. für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_\omega$  auf  $(\mathbb{P}^k, \mathcal{B})$  mit

$$\mu(C) = \int_\Omega \left( \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_C(\omega, x) \mu_\omega(dx) \right) \mathbf{P}(d\omega)$$

für alle meßbaren  $C \subseteq \Omega \times \mathbb{P}^k$ , d.h. für alle  $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}$ .

### Fragestellung

Existiert ein [eindeutig bestimmtes]  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\Omega \times \mathbb{P}^k, \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B})$  mit  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  und [maximaler Entropie, sowie]

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega ?$$

Die notwendige Meßbarkeit von  $\omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$  bezüglich der Hausdorff-Metrik läßt vermuten, daß eine Existenz in voller Allgemeinheit nicht zu erwarten ist. Es sind daher zusätzliche Bedingungen an die Funktionen  $f_i, i \in I$ , oder an die Indexmenge  $I$  zu stellen. Notwendig und hinreichend für die Meßbarkeit von  $f$  ist dabei die Meßbarkeit von  $i \mapsto f_i(z)$  für alle  $z \in \mathbb{P}^k$ .

Aus der Theorie zufälliger dynamischer Systeme, insbesondere dem Fixpunktsatz von Markov-Kakutani, folgt die Existenz eines  $f$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  mit  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  und

$$(*) \quad \text{supp } \mu_\omega \subseteq \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega,$$

falls  $i \mapsto f_i(z)$  meßbar ist für jedes  $z \in \mathbb{P}^k$ . Allerdings ist der Beweis [ $\rightarrow$  Anhang B.2] wenig konstruktiv und eine Gleichheit ist im allgemeinen nicht gegeben. Damit ist die Menge aller invarianten Maße  $\mu$  mit  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$ , die (\*) erfüllen, nicht leer. Man könnte daher gewillt sein, unter diesen eines mit maximaler Entropie auszuwählen und in (\*) auf Gleichheit zu hoffen. Bislang existieren jedoch nur wenige

hinreichende Bedingungen für die Existenz invarianter Maße mit maximaler Entropie. Die explizite Konstruktion derartiger Maße ist daher der bislang eingeschlagene Weg. Wir werden uns im wesentlichen auf den Fall  $k = 1$  beschränken, betrachten die Situation aber auch allgemein.

### Eine Auswahl bekannter Existenzaussagen\* ( $k = 1$ )

- Sei  $|I| = 1$ . Dann kann man  $f$  auch als rationale Funktion  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  auffassen.
  - Ist  $f$  eine Polynomfunktion, so liegt der Punkt  $\infty \in \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  nicht in der Juliamenge von  $f$ , so daß man auch  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  betrachten kann. Mit Hilfe der Potentialtheorie konnte H. Brolin (1965) die Existenz eines  $f$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  mit  $\text{supp } \mu = \mathcal{J}(f)$  nachweisen [11, 58].
  - Der allgemeine Fall konnte (1983) von M. Lyubich gezeigt werden, außerdem wurde die topologische Entropie von  $f$  als  $\log(\text{grad } f)$  bestimmt [46]. Einen einfacheren Beweis (ohne Aussagen über die [maximale] Entropie) findet man beispielsweise im Buch von N. Steinmetz [67, §6.3].
- Den Fall  $|I| < \infty$ , d.h. falls nur endlich viele rationale Funktionen vorliegen, hat H. Sumi (2000) betrachtet [69]. Eine Teilaussage läßt sich wie folgt formulieren:

#### Theorem:

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $f_1, \dots, f_n$  rationale Funktionen auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  mit  $d_i := \text{grad } f_i \geq 2$  für  $i = 1, \dots, n$ , außerdem sei  $\Omega := \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}}$  und  $f : \Omega \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega \times \widehat{\mathbb{C}}$  das zugehörige Schiefprodukt. Ist  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  ein stochastischer Vektor mit  $p_i > 0$  für  $i = 1, \dots, n$  und  $\mathbf{P}$  das Produktmaß auf  $\Omega$ , das aus  $\mathbf{p}$  hervorgeht, so gibt es ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu (= \mu_{\mathbf{p}})$  auf  $\Omega \times \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $\pi_{\Omega} \mu = \mathbf{P}$  und

$$\text{supp } \mu = \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times \mathcal{J}(F_{\omega})}.$$

$\mu_{\mathbf{p}}$  ist das eindeutig bestimmte  $f$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß mit maximaler Entropie, falls

$$p_i = \frac{d_i}{d_1 + \dots + d_n} \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

- M. Jonsson (2000) betrachtet allgemeinere Schiefprodukte, d.h. sei  $g : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung auf einem *kompakten*, metrisierbaren Raum  $X$  und sei  $Q_x$ ,  $x \in X$ , eine Familie von rationalen Funktionen sowie das zugehörige Schiefprodukt gegeben durch

$$f : X \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X \times \widehat{\mathbb{C}}, \quad (x, z) \mapsto (g(x), Q_x(z)).$$

Zusätzlich wird hier jedoch vorausgesetzt, daß alle Funktionen  $Q_x$ ,  $x \in X$ , den gleichen Grad  $d \geq 2$  besitzen und eine stetige Parameterabhängigkeit vorliegt

---

\*Siehe beispielsweise auch: A. Freire, A. Lopez, R. Mañé ( $|I| = 1, k = 1$ ) [26, 48], J. E. Fornæss, N. Sibony ( $|I| = 1$ , Maß mit maximaler Entropie) [22, 65], ebenso J. H. Hubbard und P. Papadopol [39] sowie [24] (zufällige Iteration von holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^k$  mit identischem Grad und holomorpher Parameterabhängigkeit). Unerwähnt bleiben darf auch nicht die Arbeit von D. Boyd über die Juliamenge einer von endlich vielen rationalen Funktionen erzeugten Halbgruppe [9].

[41]. Im wesentlichen wurde also die Shift-Abbildung durch  $g$  ersetzt, und entsprechend werden Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mathbf{P}$  auf  $X$  betrachtet, für die  $g$  maßerhaltend ist. Bezeichnet nun  $\pi_X : X \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X, (x, z) \mapsto x$  die Projektion auf  $X$ , so lassen sich unter Verwendung der Pluri-Potentialtheorie die wesentlichen Aussagen wie folgt formulieren:

**Theorem:**

Sei  $\mathbf{P}$  ein bzgl.  $g$  invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $X$ . Dann existiert ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $X \times \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $\pi_X \mu = \mathbf{P}$  und für die zugehörige Faktorisierung<sup>†</sup>  $(\mu_x)_x$ , d.h.  $\mu(C) = \int_X \left( \int_{\widehat{\mathbb{C}}} \mathbb{1}_C(x, z) \mu_x(dz) \right) \mathbf{P}(dx)$ ,  $C \subseteq X \times \widehat{\mathbb{C}}$  meßbar, gilt

$$\text{supp } \mu_x = \mathcal{J}(\{Q_{g^n(x)} \circ \dots \circ Q_{g(x)} \circ Q_x : n \in \mathbb{N}\}).$$

Ist  $\mathbf{P}$  ein Maß mit maximaler Entropie, so ist auch  $\mu$  ein Maß mit maximaler Entropie. Sei  $h(g)$  die topologische Entropie von  $g$ . Gilt  $h(g) < \infty$  und ist  $\mathbf{P}$  ein eindeutig bestimmtes Maß mit maximaler Entropie (für  $g$ ), so ist  $\mu$  das eindeutig bestimmte Maß mit maximaler Entropie (für  $f$ ).

Die Grundideen für die Konstruktion eines derartigen invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes sind sehr ähnlich, die Methoden jedoch verschieden. In der Literatur wird zumeist nur der Fall betrachtet, daß eine stetige oder holomorphe Parameterabhängigkeit vorliegt. Dies kann beispielsweise durch das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung einer Funktion motiviert werden: In jedem Iterationsschritt tritt ein (numerischer) Fehler auf, der durch eine „gestörte“ Funktion (*engl.*: perturbation function) modelliert werden kann. Es ist naheliegend, daß unter einer derartigen Bedingung gute Aussagen über die Dynamik des zugrundeliegenden zufälligen dynamischen Systems möglich sind, da die Funktionen sich sehr ähnlich verhalten. Hier verwenden wir die Pluri-Potentialtheorie und untersuchen den Fall, wenn eine meßbare Parameterabhängigkeit vorliegt und insbesondere den Fall, daß  $I$  abzählbar (-unendlich) ist. Wir werden uns im wesentlichen auf den Fall  $k = 1$  beschränken, betrachten die Situation jedoch (zumindest teilweise) auch für beliebiges  $k \in \mathbb{N}$ .

Wir untersuchen die zufällige Iteration (einer Funktionenfamilie) und wollen keine allgemeinen Schiefprodukte betrachten. Ist  $I$  nicht endlich (und topologisch), so ist die Entropie der Shift-Abbildung  $\infty$ . Allgemeinere Schiefprodukte (d.h. Schiefprodukte, die nicht bezüglich der Shiftabbildung gebildet werden) sind daher in Hinblick auf entropietheoretische Fragestellungen interessanter. Es liegt nahe, auch die sogenannte Faser-Entropie [15, 19] heranzuziehen, dies entspricht im wesentlichen der maßtheoretischen Entropie, gegeben das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$ . Ist  $I$  ein (topologischer und) nicht-kompakter Raum, so ist  $\Omega \times \mathbb{P}^k$  nicht kompakt. Entropie-Theorie wird fast ausschließlich auf kompakten (und metrisierbaren) Räumen betrieben. Im allgemeinen Fall koexistieren verschiedene Definitionen der topologischen Entropie. Diesen Aspekt betrachten wir auch ganz allgemein und separat

---

<sup>†</sup>M. Jonsson betrachtet eine andere Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen:  $\mu_x$  ist das bedingte Maß von  $\mu$  auf  $\{x\} \times \widehat{\mathbb{C}}$ , d.h.  $\mu_x(C) = \mu(C | \pi_X = x)$ ,  $C \subseteq X \times \widehat{\mathbb{C}}$  meßbar, und es gilt (vgl. auch Satz A.3.3)

$$\begin{aligned} \text{supp } \mu_x &= \mathcal{J}(\{f^n|_{\{x\} \times \widehat{\mathbb{C}}} : n \in \mathbb{N}\}) = \mathcal{J}(\{(g^n(x), Q_{g^{n-1}(x)} \circ \dots \circ Q_{g(x)} \circ Q_x) : n \in \mathbb{N}\}) \\ &= \{x\} \times \mathcal{J}(\{Q_{g^n(x)} \circ \dots \circ Q_x : n \in \mathbb{N}\}). \end{aligned}$$

von obiger Fragestellung. Wir vergleichen diese verschiedenen Definitionen und formulieren den als Goodwyn's Theorem bekannten Zusammenhang zwischen maßtheoretischer und topologischer Entropie für diesen Fall.

### Gliederung und Inhaltsübersicht

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in drei Abschnitte. Wir beginnen dabei mit einer Einführung in die Pluri-Potentialtheorie, die wir vorab mit der auch in der komplexen Dynamik verwendeten Potentialtheorie motivieren. Dabei sei auf das Buch „Pluri-potential theory“ von M. Klimek verwiesen [44], das als Standardwerk angesehen werden kann. Wie beispielsweise in den einführenden Arbeiten „Dynamique des applications rationelle de  $\mathbb{P}^k$ “ [65] und „Complex dynamics in higher dimensions“ [23] wird eine lokale Vorgehensweise benötigt, da die später betrachtete Kompaktifizierung von  $\mathbb{C}^n$  als komplexe Mannigfaltigkeit aufzufassen ist. Da wir häufig auf die zugrundeliegenden Konzepte zurückgreifen, werden diese entsprechend ausführlich dargestellt. Wir verzichten in diesem Abschnitt auf eine Vielzahl von Beweisen um den Umfang dieser Arbeit überschaubar zu halten.

Im sich anschließenden Abschnitt wird zunächst eine Einführung in die Entropie-Theorie gegeben. Entgegen der „klassischen“ Entropie-Theorie werden stetige (und nicht nur gleichmäßig stetige) Selbstabbildungen auf einem metrisierbaren (nicht notwendigerweise kompakten) Raum betrachtet. Die Entropie-Theorie auf *kompakten* Räumen ist wohlbekannt [71]. Wir stellen verschiedene Definitionen gegenüber. Zudem beantworten wir obige Fragestellung, d.h. wir geben eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines entsprechenden invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes an. Dabei betrachten wir den Fall, daß nur eine meßbare Abhängigkeit von der Parametermenge  $I$  vorliegt. Wir erhalten unter anderem die nachfolgende Existenzaussage (Theorem 5.4.7, Korollar 5.4.8):

#### Satz

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ . Sei  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Für jedes  $i \in I$  sei  $f_i : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine rationale Funktion mit  $d_i := \text{grad } f_i \geq 2$ . Es gelte

$$f_i(z) = \frac{g_i(z)}{h_i(z)} := \frac{a_{i,d_i} \cdot z^{d_i} + \dots + a_{i,2} \cdot z^2 + a_{i,1} \cdot z + a_{i,0}}{b_{i,d_i} \cdot z^{d_i} + \dots + b_{i,2} \cdot z^2 + b_{i,1} \cdot z + b_{i,0}} \quad \text{für alle } i \in I, z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

wobei  $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$  und wir eine teilerfremde Darstellung voraussetzen wollen. Sei  $f : \Omega \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega \times \widehat{\mathbb{C}}, ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z))$ .

(i) Sei  $i \mapsto f_i(z)$  für jedes  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  meßbar.

(ii) Sei

$$\mathbf{P} \left( \bigcup_{M,d \in \mathbb{N}} \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : d_{\omega_n} \leq d, |a_{\omega_n,j}|, |b_{\omega_n,j}| \leq M \text{ für } j = 1, \dots, d_{\omega_n} \} \right) = 1.$$

$$\text{und } \mathbf{P} \left( \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \| (a_{\omega_n, d_{\omega_n}}, b_{\omega_n, d_{\omega_n}}) \| > 0 \} \right) = 1.$$

(iii) Sei

$$\mathbf{P} \left( \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(g_{\omega_n}^{-1}(0), h_{\omega_n}^{-1}(0)) > 0 \} \right) = 1,$$

wobei  $\text{dist}$  den Abstand zweier Mengen (bezüglich der euklidischen Metrik) bezeichnet.

Dann gibt es ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times \widehat{\mathbb{C}})$  mit

$$\text{supp } \mu_{\omega} = \mathcal{J}(F_{\omega}) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Im Anhang gehen wir auf einige Teilaspekte zufälliger dynamischer Systeme ein, insbesondere betrachten wir die Faktorisierung von (Wahrscheinlichkeits-) Maßen und zufällige Mengen (*engl.*: random sets). Letzteres sind im wesentlichen bezüglich der Hausdorff-Metrik meßbare Abbildungen. Zudem wird gezeigt, wie man mit der Theorie zufälliger dynamischer Systeme allgemein ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit  $\text{supp } \mu_{\omega} \subseteq \mathcal{J}(F_{\omega})$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  erhält, wenn eine meßbare Parameterabhängigkeit vorliegt. Wir geben auch ein Beispiel an, daß zeigt, daß die Abbildung  $\omega \mapsto \mathcal{J}(F_{\omega})$  bezüglich der Hausdorff-Metrik im allgemeinen nicht meßbar zu sein braucht. In diesem Fall kann auch kein derartiges (invariantes) Wahrscheinlichkeitsmaß existieren.

### Danksagung

Meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Uwe Rösler danke ich dafür, daß ich meinen eigenen Interessen folgen konnte und ein vielleicht etwas eigenwilliges Thema bearbeiten durfte. Herrn Prof. Dr. Walter Bergweiler verdanke ich meine Begeisterung für die komplexe Dynamik. Ihm danke ich zutiefst für seinen steten Einsatz und sein Engagement. Desweiteren möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Albrecht Irle, Herrn Dr. Volkert Paulsen und Frau Dr. Amke Caliebe für die gute Zusammenarbeit bedanken. Die Zeit, die ich mit Herrn Dr. Lars Willert im gemeinsamen Büro verbracht habe, werde ich ebenso vermissen wie den (fast) wöchentlichen Gang zum Eisstand. Zudem danke ich allen (auch ehemaligen) Teilnehmern des Oberseminars „Komplexe Dynamik“, unter anderem Martin Hemke, Hendrik Schubert, Heike Siebert, Sonja Tscheu sowie Detlef Bargmann.

Meiner Partnerin Birgit und vor allem meiner Mutter und meiner Schwester Michaela verdanke ich so viel, daß der Platz hier nicht ausreichen würde, alles aufzuzählen. Sie alle haben (mehr oder weniger) die Höhen und Tiefen der Entstehung dieser Arbeit miterlebt, ohne sie alle wäre sie wohl nicht entstanden, Ihnen sei diese Arbeit gewidmet.

„Nur wer Chaos im Herzen trägt, kann Sterne gebären.“

*F. Nietzsche*



# Teil I.

## Präliminarien

Mit einer Einführung in die Pluri-Potentialtheorie

In den folgenden vier Kapiteln wird zunächst eine Einführung in die Pluri-Potentialtheorie gegeben, die im späteren Verlauf zur Konstruktion eines speziellen (Wahrscheinlichkeits-) Maßes verwendet wird. Wir geben dabei zunächst einen Überblick über die Potentialtheorie und betrachten im anschließenden Kapitel Differentialformen und sogenannte Currents, die unter bestimmten Voraussetzungen als Maße aufgefaßt werden können. Im dritten Kapitel gehen wir auf pluri-subharmonische Funktionen ein, die eng mit den positiven Currents (und positiven Differentialformen) verbunden sind. Im letzten Kapitel werden wir unsere Untersuchungen auf die komplexen projektiven Räume  $\mathbb{P}^k$  der Dimension  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , also auf spezielle Kompaktifizierungen von  $\mathbb{C}^k$ , fortführen. Dies schließt insbesondere den Fall der Riemannschen Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} (\cong \mathbb{P}^1)$  ein.

### Standard-Notation

Wir verwenden die üblichen Standard-Notationen, unter anderem ist  $\bar{A}$  der Abschluß einer Menge  $A$  und  $A^c$  das Komplement von  $A$  (bezüglich einer vorgegebenen Grundmenge). Zudem sei  $\text{id}_A$  die Identitätsabbildung auf  $A$ . Für eine Norm  $\|\cdot\|$  sei  $\|\cdot\|_K$  die Supremumsnorm auf einer Menge  $K$ . Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  sei  $\mathbf{P}(A|B)$  die bedingte Wahrscheinlichkeit von  $A$ , gegeben  $B$ , sofern  $\mathbf{P}(B) > 0$ . Für das Produkt von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Produkt- $\sigma$ -Algebren verwenden wir stets  $\otimes$ . Natürlich ist  $\bar{z}$  die Komplex-konjugierte einer komplexen Zahl  $z$ . Wir sagen, daß eine Abbildung eine  $C^k$ -Abbildung ist, wenn sie  $k$ -mal stetig differenzierbar ist bzw. im Fall  $k = 0$  als stetig vorausgesetzt wird,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Eine  $C^\infty$ -Abbildung ist eine beliebig oft differenzierbare Abbildung. Eine komponentenweise reell analytische Funktion heißt reell analytisch, wir bezeichnen eine solche auch als  $C^\omega$ -Abbildung. Im Anhang befindet sich eine Übersicht der verwendeten Symbole mit der Angabe, an welcher Stelle diese eingeführt worden sind. Einen Widerspruch zeigen wir mit  $\zeta$ , das Ende eines Beweises stets mit  $\blacksquare$  an.

# Kapitel 0.

## Potentialtheorie in der komplexen Ebene

In der Potentialtheorie [3], [58], [66, §8] ist eine Äquivalenz von endlichen Maßen (mit kompaktem Träger) und sogenannten **Potentialen**, d.h. speziellen subharmonischen Funktionen, gegeben. Dabei gewinnt man aus einem Potential ein Maß, indem man den **Laplace-Operator** im distributionellen Sinn auffaßt und auf das vorliegende Potential anwendet.

In der Pluri-Potentialtheorie ersetzt man den Laplace-Operator durch einen anderen Operator. Betrachtet man Currents, in gewisser Weise verallgemeinerte Distributionen, so erhält man auf ähnliche Art und Weise eine Äquivalenz von Currents und (Pluri-) Potentialen. Wir schicken daher der Einführung in die Pluri-Potentialtheorie noch einen kurzen Überblick über die Potentialtheorie (auf  $\mathbb{C}$ ) vorweg.

### 0.1. Distributionentheorie

Aufgrund des motivierenden Charakters dieses Kapitels betrachten wir hier ausschließlich Abbildungen, die auf  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , definiert sind. Es ist ein leichtes, das nun folgende auf Funktionen zu übertragen, die nur auf einer offenen Teilmenge vom  $\mathbb{R}^n$  definiert sind.

#### Notation

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  die Menge aller reellwertigen Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{R}^n$ , die beliebig oft differenzierbar sind und einen kompakten Träger

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$$

besitzen. Die Elemente aus  $\mathcal{D}$  heißen auch **Testfunktionen**. Sei  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_0(\mathbb{R}^n)$  die Menge aller stetigen Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die einen kompakten Träger besitzen. Wie in der Literatur üblich, bezeichnen wir die partielle Ableitung einer auf einer Teilmenge vom  $\mathbb{R}^n$  definierten Abbildung  $f$  nach der  $j$ -ten Komponente mit  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ .

#### 0.1.1 Definition ((Positive) Distribution)

Eine **Distribution** ist eine lineare und bezüglich der  $C^\infty$ -Topologie auf  $\mathcal{D}$  stetige Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , also ein Element des Dualraumes  $\mathcal{D}'$  von  $\mathcal{D}$ . Eine Distribution  $T$  heißt **positiv**, falls<sup>1</sup>

$$\langle T, \varphi \rangle \geq 0 \quad \text{für jede Testfunktion } \varphi \in \mathcal{D} \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

#### Bemerkung 1

- (i) Eine lineare Abbildung  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann eine Distribution, wenn gilt: Für jede Folge  $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{D}$ , für die es eine kompakte Teilmenge  $K$  von  $\mathbb{R}^n$  mit  $\text{supp } \varphi_k \subseteq K$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gibt und

$$D^\alpha \varphi_k := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{gleichmäßig (auf } K)$$

<sup>1</sup>Wir schreiben im folgenden auch  $\langle T, \varphi \rangle$  statt  $T(\varphi)$ .

für alle  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ , wobei  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , vorliegt, folgt

$$\langle T, \varphi_k \rangle \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

(ii) Ist  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokal-integrierbare Funktion, so sei

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int f(x) \cdot \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Dann ist  $T_f$  eine Distribution und  $f \mapsto T_f$  ist injektiv. Eine lokal-integrierbare Funktion  $f$  wird daher auch mit ihrer zugehörigen Distribution  $T_f$  identifiziert, und statt  $T_f$  schreibt man üblicherweise auch nur  $f$ .

Wir versehen den Raum  $\mathcal{D}_0$  mit einer entsprechenden Topologie, d.h. eine Folge  $(\varphi_k)$  in  $\mathcal{D}_0$  konvergiert genau dann gegen eine Funktion  $\varphi$  aus  $\mathcal{D}_0$ , wenn  $\overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{supp } \varphi_k}$  kompakt ist und  $(\varphi_k)$  gleichmäßig gegen  $\varphi$  konvergiert. Der nachfolgende Satz zeigt von welcher fundamentalen Bedeutung positive Distributionen sind:

### 0.1.2 Satz ([44, Prop. 3.3.2])

Ist  $T$  eine positive Distribution, so kann  $T$  auf  $\mathcal{D}_0$  zu einer linearen und stetigen Abbildung fortgesetzt werden, diese Fortsetzung ist eindeutig.

Eine positive Distribution kann daher gemäß dem Darstellungssatz von Riesz als Maß aufgefaßt werden. Man ist daher an einer Klasse von „einfachen“ Funktionen interessiert, die eine möglichst große Klasse von positiven Distributionen, also Maßen, beschreiben.

## 0.2. (Pluri-) Potentialtheorie

In der Potentialtheorie betrachtet man den **Laplace-Operator**  $\Delta$ , d.h. ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung, so gilt

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Aus der Greenschen Formel folgt

### Bemerkung 1

Ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar und  $\varphi \in \mathcal{D}$ , so gilt

$$\int \Delta u(x) \cdot \varphi(x) dx = \int u(x) \cdot \Delta \varphi(x) dx.$$

Wir fassen den Laplace-Operator im distributionellem Sinn auf, d.h. für eine lokal-integrierbare Funktion  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sei

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle := \int u(x) \cdot \Delta \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Aus der vorangehenden Bemerkung ergibt sich, daß die Definition von  $\langle \Delta u, \varphi \rangle$  mit der zuvor eingeführten Notation zusammenfällt, wenn  $u$  zweimal stetig differenzierbar ist. In der Potentialtheorie betrachtet man Funktionen  $u$ , für die  $\Delta u$  (im distributionellem Sinn) eine positive Distribution ist, also ein Maß vorliegt. Dies sind genau die **subharmonischen Funktionen**. Eine Funktion  $u$  ist **harmonisch** falls  $\Delta u = 0$ .

Wir betrachten im folgenden ausschließlich den Fall  $n = 2$  und identifizieren den  $\mathbb{R}^2$  mit  $\mathbb{C}$ , vermöge  $(x, y) \mapsto x + iy$ . Der nachfolgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen (Wahrscheinlichkeits-) Maßen (mit kompaktem Träger) und speziellen subharmonischen Funktionen, den sogenannten **Potentialen**:

### 0.2.1 Satz ([58, Thm.3.1.2])

Sei  $\mu$  ein endliches Maß auf  $\mathbb{C}$  mit kompaktem Träger und

$$P_\mu : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad z \mapsto \int \log |z - w| \mu(dw).$$

Dann ist  $P_\mu$  eine subharmonische Funktion und es gilt

$$P_\mu(z) = \mu(\mathbb{C}) \cdot \log |z| + O(|z|^{-1}) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty.$$

Außerdem liegt  $\Delta P_\mu = 2\pi \cdot \mu$  im distributionellem Sinn vor, wobei wir  $\mu$  gemäß dem Darstellungssatz von Riesz als Element des Dualraumes  $\mathcal{D}'_0$  von  $\mathcal{D}_0$  auffassen.

Die letzte Aussage gilt auch, wenn man statt  $P_\mu$  die Funktion  $P_\mu + a$  mit einer beliebigen Konstanten  $a \in \mathbb{C}$  betrachtet. Dies führt zur folgenden

### 0.2.2 Definition (Potential)

Eine subharmonische Funktion  $u : \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty[$  heißt **Potential**, falls ein  $c > 0$  existiert mit

$$u(z) = c \cdot \log |z| + O(1) \quad \text{für } |z| \rightarrow \infty.$$

### Bemerkung 2

Satz 0.2.1 besagt, daß man ein endliches Maß auf  $\mathbb{C}$  (mit kompaktem Träger) mit seinem (bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmten) zugehörigen Potential identifizieren kann. Im Fall  $c = 1$  liegen Wahrscheinlichkeitsmaße vor.

Diese Äquivalenz kann verwendet werden um für eine Polynomfunktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\text{grad } f \geq 2$  ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit

$$\text{supp } \mu = \mathcal{J}(f) (= \text{Juliamenge von } f)$$

zu konstruieren [58]. Dies entspricht dem in der Einleitung erwähnten Resultat von H. Browlin, 1965 [11], vgl. auch §5.1.1.

Ist  $n > 2$  und  $\mu$  ein endliches Maß auf dem  $\mathbb{R}^n$  mit kompakten Träger, so kann man ebenfalls eine subharmonische Funktion  $P_\mu$  definieren, aus der durch Anwendung des Laplace-Operators das Maß  $\mu$  zurückgewonnen werden kann [3, Thm. 4.3.8]. Naheliegender ist es daher im allgemeinen den  $\mathbb{C}^n$  mit dem  $\mathbb{R}^{2n}$  zu identifizieren und dann ähnlich wie im Fall  $n = 1$  zu verfahren. Insbesondere in der komplexen Dynamik hat sich gezeigt, daß diese Vorgehensweise nicht zu hinreichend guten Ergebnissen führt. Ein Grund dafür ist der folgende Zusammenhang zwischen harmonischen und holomorphen Funktionen, der in höheren Dimensionen nicht mehr gültig ist:

### 0.2.3 Satz

Sei  $G$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$ . Der Realteil einer auf  $G$  holomorphen Abbildung ist eine harmonische Funktion. Umgekehrt existiert zu jeder harmonischen Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  lokal<sup>2</sup> eine holomorphe Abbildung  $f$  mit  $\text{Re } f = u$ .

<sup>2</sup>D.h. zu jedem  $z \in G$  existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  in  $G$  sowie eine in  $U$  holomorphe Abbildung  $f$  mit  $\text{Re } f|_U = u|_U$ .

In höheren Dimensionen ist nur noch eine der obigen Aussagen richtig. Allerdings führt dieser Zugang unmittelbar auf die später betrachteten pluri-harmonischen Funktionen (vgl. auch Satz 2.3.1):

#### 0.2.4 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Ist  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Abbildung, so ist  $u := \operatorname{Re} f$  nicht nur eine harmonische Abbildung (wenn man  $\mathbb{C}^n$  mit dem  $\mathbb{R}^{2n}$  identifiziert), sondern für alle  $a, b \in \mathbb{C}^n$  ist auch die Abbildung

$$u_{a,b} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto u(a + \lambda \cdot b)$$

harmonisch.

Eine reellwertige (und oberhalb-stetige) Abbildung  $u$  derart, daß  $u_{a,b}$  für alle  $a, b$  (sub)harmonisch ist, heißt **pluri-(sub)harmonisch**.

#### Bemerkung 3

Im Fall  $n = 1$ , d.h. für auf  $\mathbb{C}$  definierte Abbildungen, sind (sub)harmonische und pluri-(sub)harmonische Funktionen dasselbe.

#### 0.2.5 Satz

Pluri-harmonische Funktionen sind harmonische Funktionen (wenn man den  $\mathbb{C}^n$  in kanonischer Weise mit dem  $\mathbb{R}^{2n}$  identifiziert), allerdings existieren (für  $n > 1$ ) auch harmonische Funktionen, die nicht pluri-harmonisch sind.

Daraus ergibt sich, daß nicht jede (auf dem  $\mathbb{C}^n$ ,  $n > 1$ , definierte) harmonische Funktion lokal der Realteil einer holomorphen Abbildung ist. Für pluri-harmonische Funktionen ist dies jedoch richtig [44, Prop. 2.2.13]. Die Betrachtung von pluri-(sub)harmonischen Funktionen liegt bei der Untersuchung von holomorphen Abbildungen auf dem  $\mathbb{C}^n$  also näher als die Betrachtung von (sub)harmonischen Funktionen.

Blickt man auf das oben eingeführte Potential  $P_\mu$  zurück, so wurde dort die Funktion  $w \mapsto \log|z - w|$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , bzgl.  $\mu$  integriert. In der Potentialtheorie verwendet man für  $n > 1$  auf dem  $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$  stattdessen die auf  $\mathbb{C}^n \setminus \{z\}$  harmonische Funktion

$$u : \mathbb{C}^n \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad w \mapsto -\|z - w\|^{2-2n} \quad (u(z) = -\infty).$$

Dabei bezeichnen wir mit  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{C}^n$ .  $u$  ist auf  $\mathbb{C}^n \setminus \{z\}$  nicht pluri-harmonisch [44, Ex. 2.2.12]. Es liegt also nahe, ähnlich wie im Fall  $n = 1$  vorzugehen, und die Funktion

$$u : \mathbb{C}^n \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad z \mapsto \log\|z\|, \quad (\log 0 := -\infty)$$

oder allgemeiner  $u(z) = \log\|f(z)\|$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$ , mit einer holomorphen Abbildung  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , zu betrachten. Gesucht wird daher nach einem Operator, der dem Laplace-Operator in der Potentialtheorie entspricht. Dieser Operator setzt gewisse **(Pluri-)Potentiale** wieder zu bestimmten Elementen eines Dualraumes in eine eindeutige Beziehung. Da hier jedoch nicht der  $\mathbb{C}^n$  sondern eine Kompaktifizierung (sogar eine komplexe Mannigfaltigkeit) betrachtet wird, benötigt man eine lokale Fassung dieses Operators. In den folgenden Kapiteln wird daher zunächst eine Einführung in die Pluri-Potentialtheorie (auf Mannigfaltigkeiten) gegeben.

# Kapitel 1.

## Komplexe Differentialformen und Currents

Life is complex.  
- It has real and imaginary components.

*(Tom Potter)*

Wir werden später, wie in der Potential- und Distributionentheorie, die Elemente eines geeigneten Dualraumes betrachten. Dies sind die sogenannten **Currents**. Die Testfunktionen werden dabei durch sogenannte **Testformen** ersetzt und es liegt eine enge Beziehung zur Distributionentheorie vor. Spezielle Currents können wieder als (Wahrscheinlichkeits-) Maße aufgefaßt werden. Aus diesem Grund wird zunächst eine Einführung in die Theorie der **(komplexen) Differentialformen** auf (komplexen) Mannigfaltigkeiten als notwendig erachtet.

Auf dem  $\mathbb{C}^n$  entfallen viele der technischen Feinheiten und die meisten Aussagen können auf diesen Fall zurückgeführt werden. Wir beginnen daher mit der Betrachtung von auf  $\mathbb{C}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^n$  definierten Abbildungen.

### 1.1. Das Differentialkalkül

Da die holomorphen Abbildungen bekanntlich [59] genau die ( $\mathbb{R}$ -) differenzierbaren Abbildungen sind, die den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen, können wir uns auf die Betrachtung der reellen Differenzierbarkeit beschränken.

#### 1.1.1 Definition und Satz (Totales Differential)

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  und sei  $U$  eine offene, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{K}^n$  (mit  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) sowie  $a \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{K}^m$ .  $f$  ist im Punkt  $a$  ( $\mathbb{R}$ -) [Fréchet-] **differenzierbar**, falls eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$d_a f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$$

existiert mit

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - d_a f(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Die Abbildung  $d_a f$  ist eindeutig bestimmt und heißt **totales Differential** von  $f$  im Punkt  $a$ .  $f$  ist differenzierbar, wenn  $f$  in jedem Punkt differenzierbar ist.

#### Bemerkung 1

(i) Sind  $f_1, \dots, f_m : U \rightarrow \mathbb{K}$  die Komponentenfunktionen von  $f : U \rightarrow \mathbb{K}^m$ , so gilt

$$d_a f = (d_a f_1, \dots, d_a f_m) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m,$$

und für eine differenzierbare, komplexwertige Abbildung  $f$  gilt

$$d_a f = d_a \operatorname{Re} f + i \cdot d_a \operatorname{Im} f.$$

(ii) Ist  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  differenzierbar und  $\mathbb{R}$ -linear, so gilt  $d_a f = f$  für alle  $a \in \mathbb{K}^n$ , man schreibt dann auch nur  $df$  statt  $d_a f (= f)$ .

Mit Hilfe elementarer Kenntnisse über Fréchet-Ableitungen [45] erhält man (insbesondere im Fall  $m = 1$ ) die folgende Darstellung des totalen Differentials:

### 1.1.2 Satz

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  und sei  $U$  eine offene, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  sowie  $a \in U$  und  $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine im Punkt  $a$  differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$d_a f = \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \cdot dx_j, \dots, \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \cdot dx_j \right),$$

wobei  $x_j$  die (lineare) Abbildung  $x_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (w_1, \dots, w_n) \mapsto w_j$  bezeichne,  $j = 1, \dots, n$ .

Wir formulieren nun die Kettenregel in diesem speziellen Kontext, da sie in dieser Darstellung gelegentlich verwendet wird, als

### 1.1.3 Satz

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ . Ist  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $g = (g_1, \dots, g_n) : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Abbildung, und ist  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen mit  $V \subseteq g(U)$  und  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, so gilt

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(a)) \quad \text{für alle } a \in U \text{ und } j = 1, \dots, m,$$

### Notation

Wir fassen  $\mathbb{C}$  stets als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum auf und identifizieren entsprechend  $\mathbb{C}^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$ , vermöge

$$\varphi_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad (z_1, \dots, z_n) \rightarrow (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n).$$

Ebenso fassen wir Abbildungen  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  auch als Abbildungen  $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  auf und umgekehrt. Gleiches gilt, wenn sich der Definitions- oder Bildbereich nur über eine Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^{2n}$  erstreckt.

### 1.1.4 Lemma

Seien  $V, W$   $\mathbb{C}$ -Vektorräume und sei  $L : V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $g : V \rightarrow W$  und eine eindeutig bestimmte anti- $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung<sup>3</sup>  $h : V \rightarrow W$  mit

$$L(z) = g(z) + h(z) \quad \text{für alle } z \in V.$$

#### Beweis:

Definiere  $g, h : V \rightarrow W$  durch

$$g(z) := \frac{1}{2} \cdot (L(z) - i \cdot L(iz)) \quad \text{und} \quad h(z) := \frac{1}{2} \cdot (L(z) + i \cdot L(iz))$$

für alle  $z \in V$ . Dann folgt  $L = g + h$ , außerdem ist  $g$   $\mathbb{C}$ - und  $h$  anti- $\mathbb{C}$ -linear. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, daß nur die Nullabbildung sowohl  $\mathbb{C}$ - als auch anti- $\mathbb{C}$ -linear ist. ■

### Notation

Sind  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  offen und nicht-leer sowie  $a \in U$  und ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$  eine im Punkt  $a$  differenzierbare Abbildung, so besitzt das totale Differential  $d_a f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  von  $f$  im Punkt  $a$  gemäß Lemma 1.1.4 die Darstellung

$$d_a f = \partial_a f + \bar{\partial}_a f$$

<sup>3</sup>D.h.  $h$  ist additiv mit  $h(\lambda \cdot z) = \bar{\lambda} \cdot h(z)$  für alle  $z \in V, \lambda \in \mathbb{C}$ .



mit einer eindeutig bestimmten  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial_a f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  und einer eindeutig bestimmten anti- $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\bar{\partial}_a f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ .

Eine ( $\mathbb{R}$ -) differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}^m$ ,  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  offen, heißt in einem Punkt  $a \in U$  **komplex differenzierbar** (auch:  $\mathbb{C}$ -differenzierbar), falls  $\bar{\partial}_a f = 0$  gilt, und **holomorph**, falls sie in jedem Punkt komplex differenzierbar ist.

### Notation

Im folgenden seien für  $j = 1, \dots, n$

$$z_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto w_j \quad \text{und} \quad \bar{z}_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad (w_1, \dots, w_n) \mapsto \bar{w}_j.$$

Da  $z_j$  und  $\bar{z}_j$   $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen sind, folgt mit der Notation aus Bemerkung 1

$$dz_j = z_j \quad \text{und} \quad d\bar{z}_j = \bar{z}_j.$$

Wie üblich [68] verwenden wir die Bezeichnungen  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  und  $\frac{\partial f}{\partial y_j}$  für die partielle Ableitungen einer differenzierbaren Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  offen, nach der  $j$ -ten reellen bzw. imaginären Komponente, entsprechend für höhere Ableitungen. Zudem definieren wir die **Wirtinger Ableitungen** [59] durch

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) : U \rightarrow \mathbb{C}.$$

Der folgende Satz zeigt, wie das totale Differential als Linearkombination von  $\mathbb{C}$ - und anti- $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen beschrieben werden kann:

#### 1.1.5 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $U$  eine offene, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$ . Ist  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine differenzierbare Abbildung und  $a \in U$ , so gilt

$$\partial_a f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) dz_j, \quad \bar{\partial}_a f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) d\bar{z}_j$$

und

$$d_a f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) dx_j + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) dy_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) dz_j + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) d\bar{z}_j,$$

wobei  $x_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(w_1, \dots, w_n) \mapsto \operatorname{Re} w_j$ ,  $y_j : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(w_1, \dots, w_n) \mapsto \operatorname{Im} w_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

#### 1.1.6 Korollar (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $U$  eine offene, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Abbildung. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

also  $\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \cdot \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0$  für  $j = 1, \dots, n$ . Ist  $u := \operatorname{Re} f$  und  $w := \operatorname{Im} f$ , d.h.  $f = u + iw$ , so ergeben sich die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen**

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial w}{\partial y_j}, \quad \frac{\partial u}{\partial y_j} = -\frac{\partial w}{\partial x_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Zudem ist eine differenzierbare Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  genau dann holomorph, wenn die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt sind.

Naheliegender ist es, die Abbildung  $df : a \mapsto d_a f$  zu untersuchen, schreibe

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j} dz_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j.$$

Dies führt zu sogenannten (komplexen) Differentialformen [18, 25, 44]. Wir betrachten hier jedoch nicht nur (komplexe) Differentialformen auf  $\mathbb{C}^n$ , sondern allgemein auf (komplexen) Mannigfaltigkeiten und gehen daher nun auf diese ein.

## 1.2. Über (komplexe) Mannigfaltigkeiten

Die komplexen Mannigfaltigkeiten sind bekanntlich Hausdorff-Räume, die lokal zu offenen Teilmengen des  $\mathbb{C}^n$  homöomorph sind [53]. Wir haben zuvor die komplexe Zahlenebene auch als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum betrachtet, und so liegt es nahe, auch in diesem Fall der zugrundeliegenden reellen Struktur Beachtung zu schenken:

### 1.2.1 Definition (Atlas, Mannigfaltigkeit)

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$  und sei  $M$  ein Hausdorff-Raum, der eine abzählbare Basis besitzt.

(a) Ein  $C^k$ -Atlas  $\mathfrak{A}$  auf  $M$  ist eine Familie von Paaren  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $i \in I$ , für die gilt:

- (i)  $U_i$ ,  $i \in I$ , ist eine offene Überdeckung von  $M$ .
- (ii) Für jedes  $i \in I$  existiert eine offene Teilmenge  $V_i$  von  $\mathbb{R}^n$  derart, daß  $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$  ein Homöomorphismus ist.
- (iii) Für alle  $i, j \in I$  gilt entweder  $U_i \cap U_j = \emptyset$  oder die **Kartenwechselabbildung**

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

ist eine  $C^k$ -Abbildung. Man sagt, daß die **Karten**  $(U_i, \varphi_i), (U_j, \varphi_j)$  **verträglich** oder auch **kompatibel** sind.

$n$  ist die (reelle) **Dimension** von  $\mathfrak{A}$ .

(b) Zwei Atlanten  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  (der selben Dimension) heißen **äquivalent**, falls je zwei Karten

$$(U_1, \varphi_1) \in \mathfrak{A}_1, \quad (U_2, \varphi_2) \in \mathfrak{A}_2$$

verträglich sind. Eine Äquivalenzklasse von  $n$ -dimensionalen Atlanten für  $M$  ist eine  **$n$ -dimensionale Struktur**.  $M$  heißt  **$n$ -dimensionale (reelle)  $C^k$ -Mannigfaltigkeit**, wenn es für  $M$  eine  $n$ -dimensionale Struktur gibt. Im Fall  $k = \omega$  spricht man auch von **(reell) analytischen Mannigfaltigkeiten**.

(c) Ersetzt man in (ii)  $\mathbb{R}^n$  durch  $\mathbb{C}^n$  und setzt man voraus, daß die Kartenwechselabbildungen holomorph sind, so spricht man von **komplexen Karten** und gelangt so zur Definition von **komplexen Mannigfaltigkeiten**.

Wir beschränken uns hier im wesentlichen auf die Betrachtung von komplexen und  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten, wobei wir letztere auch kurz als reelle Mannigfaltigkeiten bezeichnen wollen.

**Bemerkung 1**

- (i) Durch Vertauschen der Indizes  $i$  und  $j$  folgt, daß jede Kartenwechselabbildung ein  $C^k$ -Diffeomorphismus ist. Im Fall von komplexen Karten liegen stets bi-holomorphe Kartenwechselabbildungen vor.
- (ii) Mittels der Identifizierung von  $\mathbb{C}^n$  mit  $\mathbb{R}^{2n}$  ergibt sich, daß jede komplexe Mannigfaltigkeit auch als analytische Mannigfaltigkeit betrachtet werden kann.

**Notation**

Ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und ist  $(U, \varphi)$  eine komplexe Karte, so bezeichnet man die Abbildungen  $z_1, \dots, z_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(z_1, \dots, z_n) = \varphi$$

als (lokale) **komplexe Koordinatenfunktionen** (auf  $U$ ). Entsprechend führt man für  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten ( $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ ) reelle Koordinatenfunktionen ein, wobei man gewöhnlich die Bezeichnungen  $x_1, \dots, x_n$  oder  $y_1, \dots, y_n$  wählt.

**Bemerkung 2**

Sind  $z_1, \dots, z_n$  komplexe Koordinatenfunktionen, so sind die Funktionen

$$x_1 := \operatorname{Re} z_1, \dots, x_n := \operatorname{Re} z_n, \quad y_1 := \operatorname{Im} z_1, \dots, y_n := \operatorname{Im} z_n$$

reelle Koordinatenfunktionen auf der gleichen Mannigfaltigkeit, wenn man diese als reelle Mannigfaltigkeit auffaßt.

**1.2.2 Definition (Differenzierbare Abbildung)**

Sei  $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty, \omega\}$  und seien  $M_1, M_2$   $C^k$ -Mannigfaltigkeiten, außerdem sei  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine stetige Abbildung.  $f$  ist eine  **$C^k$ -Abbildung** (d.h.  $k$ -mal stetig differenzierbar bzw. reell analytisch), falls für jede Karte  $(U_1, \varphi_1)$  in  $M_1$  und jede Karte  $(U_2, \varphi_2)$  in  $M_2$  mit  $f(U_1) \subseteq U_2$

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \rightarrow \varphi_2(U_2)$$

eine  $C^k$ -Abbildung ist. Sind  $M_1$  und  $M_2$  komplexe Mannigfaltigkeiten und setzt man voraus, daß obige Abbildung holomorph ist, so heißt  $f$  **holomorph**.

**Bemerkung 3**

- (i) Zum Nachweis, daß  $f$  eine  $C^k$ -Abbildung ist, genügt es, für jedes  $x \in M_1$  die Existenz einer Karte  $(U_1, \varphi_1)$  in  $M_1$  mit  $x \in U_1$  und einer Karte  $(U_2, \varphi_2)$  in  $M_2$  mit  $f(U_1) \subseteq U_2$  zu zeigen, derart, daß  $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \rightarrow \varphi_2(U_2)$  eine  $C^k$ -Abbildung ist.
- (ii) Sind  $M_1, M_2$  komplexe Mannigfaltigkeiten und ist  $f : M_1 \rightarrow M_2$  eine holomorphe Abbildung, so ist  $f$  eine reell analytische Abbildung, wenn man  $M_1$  und  $M_2$  als analytische Mannigfaltigkeiten auffaßt. Außerdem sind die komplexen bzw. reellen Koordinatenfunktionen holomorph bzw. reell analytisch.

Das totale Differential  $d_a f$  einer differenzierbaren Abbildung  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $U \subseteq \mathbb{C}^n$  offen,  $a \in U$ , ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$d_a f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}.$$

Liegt eine auf einer (komplexen) Mannigfaltigkeit  $M$  definierten differenzierbare Abbildung vor, so ist etwas Entsprechendes einzuführen.  $M$  besitzt im allgemeinen

jedoch keine Vektorraumstruktur, so daß nun der **Tangentialraum** betrachtet wird. Wir beteiligen uns an dieser Stelle nicht an der Diskussion über die verschiedenen Zugänge zum Tangentialraum [10] und verwenden hier zu diesem Zweck die sogenannten **Derivationen**.

### 1.2.3 Definition (Keim)

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$  und sei  $Y$  eine nicht-leere Menge. Ein **Abbildungskeim** ist eine Abbildung  $f : U \rightarrow Y$  mit einer Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$ . Zwei Abbildungskeime  $f : U \rightarrow Y$ ,  $g : V \rightarrow Y$  heißen äquivalent, wenn es eine Umgebung  $W$  von  $x$  in  $X$  mit  $W \subseteq U \cap V$  gibt, so daß

$$f|_W = g|_W.$$

Die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation heißen **Abbildungskeime** von  $X$  in  $Y$  im Punkt  $x$ , und wir schreiben für diese auch

$$\bar{f} : (X, x) \rightarrow Y, \quad \text{oder kurz: } \bar{f}.$$

Ist  $Y$  topologisch, so heißen die Abbildungskeime auch **Funktionskeime**. Es liegen **stetige Funktionskeime** vor, wenn stetige Repräsentanten existieren. Sind  $X, Y$  Mannigfaltigkeiten, so spricht man entsprechend von  $C^k$ -**Funktionskeimen**, wenn zu jedem Funktionskeim ein Repräsentant existiert, der eine  $C^k$ -Abbildung ist,  $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty, \omega\}$ . Analog werden **holomorphe Funktionskeime** eingeführt.

In §1.1 wurde stets die zugrundeliegende reelle Struktur betrachtet. Daher liegt es nahe, statt komplexer Mannigfaltigkeiten zunächst auf  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $C^\infty$ -Abbildungen sowie deren zugehörigen Tangentialabbildung einzugehen:

#### Notation

Sei  $\xi(a) = \xi_M(a)$  die Menge aller  $C^\infty$ -Funktionskeime  $\bar{f} : (M, a) \rightarrow \mathbb{R}$  im Punkt  $a \in M$  einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $M$ .

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $a \in M$ . Führt man mit Hilfe der Repräsentanten Addition und Skalarmultiplikation auf  $\xi(a)$  ein, so erhält man einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ist  $N$  eine weitere  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und ist  $\bar{f} : (M, a) \rightarrow N$  ein  $C^\infty$ -Funktionskeim sowie  $b := f(a)$  (für einen Repräsentanten  $f$ ), so betrachtet man den sogenannten **Pull back**  $f^*$  von  $f$  (bzw.  $\bar{f}$ ), definiert durch

$$f^* : \xi_N(b) \rightarrow \xi_M(a), \quad \bar{\varphi} \mapsto \overline{\varphi \circ f}.$$

### 1.2.4 Definition (( $\mathbb{R}$ -) Derivation, Tangentialraum)

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $a \in M$ . Eine ( $\mathbb{R}$ -) **Derivation** von  $\xi(a)$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $X : \xi(a) \rightarrow \mathbb{R}$ , die der Produktregel

$$X(\bar{\varphi} \cdot \bar{\psi}) = X(\bar{\varphi}) \cdot \bar{\psi}(a) + \bar{\varphi}(a) \cdot X(\bar{\psi}) \quad \text{für alle } \bar{\varphi}, \bar{\psi} \in \xi(a)$$

genügt. Die Menge  $T_a = T_a(M)$  aller Derivationen von  $\xi(a)$  wird als **Tangentialraum** von  $M$  im Punkt  $a$  bezeichnet.

#### Bemerkung 4

Der Tangentialraum  $T_a(M)$  ist bezüglich der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Aufgrund der lokalen Struktur lassen sich  $T_a(M)$  und  $T_a(U)$ , für beliebige offene Umgebungen  $U$  von  $a$ , identifizieren.

Es bleibt anzumerken, daß der Tangentialraum für  $C^k$ -Mannigfaltigkeiten ( $k < \infty$ ) nicht als Menge aller  $\mathbb{R}$ -Derivationen (bzgl. der  $C^k$ -Funktionskeime) eingeführt wird, allerdings kann man ihn mit einer Teilmenge hiervon identifizieren [68, S. 39ff.].

### 1.2.5 Definition (Tangentialabbildung - das totale Differential)

Seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und sei  $a \in M$ . Ist  $\bar{f} : (M, a) \rightarrow N$  ein  $C^\infty$ -Funktionskeim, so ist die **Tangentialabbildung**  $T_a f$  (das **totale Differential**) von  $f$  in  $a$  definiert durch

$$T_a f : T_a(M) \rightarrow T_{f(a)}(N), \quad X \mapsto X \circ f^*.$$

### Bemerkung 5

Die Tangentialabbildung  $T_a f$  ist eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, außerdem gilt für eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $L$  und einen  $C^\infty$ -Funktionskeim  $\bar{g} : (N, f(a)) \rightarrow L$  die **Kettenregel**

$$T_a(g \circ f) = T_{f(a)}g \circ T_a f,$$

Da reelle Mannigfaltigkeiten lokal zu offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph sind, liegt es nahe, zunächst den Tangentialraum  $T_a(\mathbb{R}^n)$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ , zu untersuchen [10]:

### 1.2.6 Satz

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$ . Dann bilden die Funktionen

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_a : \xi_{\mathbb{R}^n}(a) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{f} \mapsto \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \right|_a := \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad j = 1, \dots, n,$$

eine Basis von  $T_a(\mathbb{R}^n)$ , insbesondere ist  $T_a(\mathbb{R}^n)$  ( $\cong T_a(U)$  für jede offene Umgebung  $U$  von  $a$ ) ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

### Notation

Entsprechend Satz 1.2.6 identifiziert man für jedes  $a \in \mathbb{R}^n$  den Tangentialraum  $T_a(\mathbb{R}^n)$  (also auch jeden Tangentialraum  $T_a(U)$ ,  $U$  offene Umgebung von  $a$  in  $\mathbb{R}^n$ ) mit  $\mathbb{R}^n$ , vermöge

$$\pi_a : \mathbb{R}^n \rightarrow T_a(\mathbb{R}^n), \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \left. \frac{\partial}{\partial x_j} \right|_a.$$

Der nachfolgende Satz besagt nun, daß bei dieser Identifizierung das totale Differential aus §1.1 und die Tangentialabbildung für alle  $C^\infty$ -Abbildungen übereinstimmen.

### 1.2.7 Satz

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  und sei  $U$  eine offene, nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  sowie  $a \in U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^\infty$ -Abbildung. Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{d_a f} & \mathbb{R}^m \\ \pi_a \downarrow & & \downarrow \pi_{f(a)} \\ T_a(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{T_a f} & T_{f(a)}(\mathbb{R}^m) \end{array}$$

Dabei ist  $d_a f$  das totale Differential von  $f$  in  $a$  aus Definition 1.1.1.

**Notation**

Wir bezeichnen die Tangentialabbildung (das totale Differential)  $T_a f$  aufgrund von Satz 1.2.7 im folgenden auch mit  $d_a f$ .

Da reelle Mannigfaltigkeiten lokal homöomorph zu offenen Teilmengen von  $\mathbb{R}^n$  sind, wird man lokale Koordinatenfunktionen zur Konstruktion einer Basis des Tangentialraumes heranziehen wollen:

**1.2.8 Satz ([53, Prop 2.1.11])**

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \in \mathbb{N}$  und  $a \in M$ . Dann ist  $T_a(M)$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Dimension  $n$ . Ist  $(U, \varphi)$  eine Karte für  $M$  mit  $a \in U$  und  $b := \varphi(a)$ , so ist eine Basis gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_a : \xi_M(a) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{f} \mapsto \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_j} \Big|_a := \frac{\partial (\overline{f \circ \varphi^{-1}})}{\partial x_j} \Big|_b, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dabei bezeichnet  $\overline{f \circ \varphi^{-1}}$  den Funktionskeim, der durch die Hintereinanderausführung eines Repräsentanten  $f$  von  $\bar{f}$  und einer entsprechenden Restriktion von  $\varphi^{-1}$  gegeben ist.

**Notation**

Die in Satz 1.2.8 definierte Basis von  $T_a(M)$ ,  $a \in M$ , hängt von der Wahl der betrachteten Karte  $(U, \varphi)$  ab. Aufgrund der lokalen Struktur liegt nur eine Abhängigkeit von  $\varphi$  und nicht von  $U$  vor. Allgemein schreiben wir

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_a,$$

falls die Koordinatenfunktionen von  $\varphi$  die Bezeichnungen  $x_1, \dots, x_n$  tragen. Dadurch wird die Abhängigkeit von  $\varphi$  dokumentiert.

Wir bezeichnen die Abbildungen  $a \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_a$ ,  $a \in M$ , mit  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dabei liegen Abbildungen von  $M$  in das **Tangentialbündel**  $T(M)$  von  $M$ , definiert durch

$$T(M) := \bigcup_{a \in M} T_a(M),$$

vor.

**Notation**

Ganz analog zu dem Vorgehen in Satz 1.2.8 (unter Beachtung der anschließenden Notation) führen wir für eine  $n$ -dimensionale  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit durch das lokale Zurückziehen mittels Karten  $(U, \varphi)$  (und  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ ) ein:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} : M \rightarrow T(M), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Bislang haben wir bei der Untersuchung komplexer Mannigfaltigkeiten die reelle Struktur betrachtet und die Tangentialräume  $T_a(M)$ ,  $a \in M$ , stets als reelle Vektorräume aufgefaßt. Natürlich sind die Tangentialräume einer komplexen Mannigfaltigkeit auch komplexe Vektorräume. Dazu kann man analog wie bei reellen Mannigfaltigkeiten verfahren:

### 1.2.9 Anmerkungen

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit,  $a \in M$  und  $\xi_{\mathbb{C}}(a)$  die Menge aller holomorphen Funktionskeime

$$\bar{f} : (M, a) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dann wird der Tangentialraum  $T_a(M)$  von  $M$  im Punkt  $a$  auch als Menge aller  $\mathbb{C}$ -Derivationen von  $\xi_{\mathbb{C}}(a)$  eingeführt. Dies sind die  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen

$$X : \xi_{\mathbb{C}}(a) \rightarrow \mathbb{C},$$

die der Produktregel genügen.  $T_a(M)$  ist dann ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Da man  $M$  auch als  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit auffassen kann, erhält man zwei verschiedene Tangentialräume, die jedoch miteinander identifiziert werden können:

Um die (Standard-) Basen des reellen und des komplexen Tangentialraumes in Beziehung setzen zu können, werden zunächst *alle* Basiselemente auf die Menge der  $\mathbb{C}$ -Derivationen von  $C_a^\infty(M, \mathbb{C})$  fortgesetzt<sup>4</sup>. Dies führt zur Wirtinger-Einbettung und zur Komplexifizierung von  $T_a(M)$  [68, 2.A.6].

### 1.2.10 Definition und Satz (Wirtinger Ableitungen)

Ist  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $a \in M$ , so setzen wir eine  $\mathbb{R}$ -Derivation  $X \in T_a(M)$ , d.h. eine Abbildung  $X : \xi_M(a) \rightarrow \mathbb{R}$ , durch

$$X(f) := X(\operatorname{Re} f) + i \cdot X(\operatorname{Im} f) \quad \text{für alle } f \in C_a^\infty(M, \mathbb{C})$$

in eindeutiger Weise zu einer  $\mathbb{C}$ -Derivation  $X : C_a^\infty(M, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  fort. Wir definieren nun die **Wirtinger Ableitungen** wie zuvor als

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} - i \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \right),$$

wobei Karten der Form  $\varphi = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  betrachtet werden.

### Anmerkungen

Obiges entspricht dem naheliegenden Vorgehen um auf  $T_a(M)$ ,  $a \in M$ , eine komplexe Struktur einzuführen: Sei  $(U, \varphi)$  eine komplexe Karte von  $M$  mit  $a \in U$  und  $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$  sowie  $x_j := \operatorname{Re} z_j$ ,  $y_j := \operatorname{Im} z_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann ist durch

$$T_a(M) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad X \mapsto (T_a x_1(X), T_a y_1(X), \dots, T_a x_n(X), T_a y_n(X))$$

ein  $\mathbb{R}$ -Isomorphismus gegeben, wobei wir die Identifizierung  $T_x(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , (vermöge  $\pi_x$ ) verwenden. Mit der Identifizierung von  $\mathbb{C}^n$  mit dem  $\mathbb{R}^{2n}$  erhält man somit eine komplexe Struktur auf  $T_a(M)$ , d.h.  $T_a(M)$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Es liegt eine Unabhängigkeit von der betrachteten Karte  $(U, \varphi)$  vor [53, S.74f.].

### Notation

Sind  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten,  $a \in M$  und ist  $\bar{f} : (M, a) \rightarrow N$  ein  $C^\infty$ -Funktionskeim, so ist das totale Differential (die Tangentialabbildung) im Punkt  $a$

$$d_a \bar{f} : T_a(M) \rightarrow T_{f(a)}(N)$$

<sup>4</sup> $C_a^\infty(M, \mathbb{C})$  ist dabei die Menge aller  $C^\infty$ -Funktionskeime  $\bar{f} : (M, a) \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei wir sowohl  $M$  als auch  $\mathbb{C}$  als reelle Mannigfaltigkeit auffassen.

eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung von einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum in einen anderen. Damit besitzt  $d_a f$  gemäß Lemma 1.1.4 die Darstellung

$$d_a f = \partial_a f + \overline{\partial}_a f$$

mit einer eindeutig bestimmten  $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\partial_a f : T_a(M) \rightarrow T_{f(a)}(N)$  und einer eindeutig bestimmten anti- $\mathbb{C}$ -linearen Abbildung  $\overline{\partial}_a f : T_a(M) \rightarrow T_{f(a)}(N)$ .

### 1.3. Komplexe Differentialformen

Wir gehen nun näher auf die in §1.1 betrachtete Abbildung  $df : a \mapsto d_a f$  ein.  $df$  ist eine Abbildung in die Menge der  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen von einem vom Punkt  $a$  abhängenden, endlich dimensionalen Vektorraum in einen anderen. Allgemein untersuchen wir zunächst (alternierende)  $k$ -lineare Abbildungen:

#### 1.3.1 Definition ( $k$ -Linearform)

Seien  $V, W$   $\mathbb{R}$ -Vektorräume und  $k \in \mathbb{N}$ . Eine Abbildung  $f : V^k \rightarrow W$  heißt  **$k$ -linear** (auch: **Multilinearform der Ordnung  $k$  oder  $k$ -Linearform**), falls sie in jeder Komponente  $\mathbb{R}$ -linear ist. Gilt zusätzlich

$$f(v_1, \dots, v_k) = 0, \quad \text{falls es } i \neq j \text{ mit } v_i = v_j \text{ gibt,}$$

so heißt  $f$  **alternierende  $k$ -Linearform**. Sei  $\Lambda^k(V, W)$  die Menge aller alternierenden  $k$ -Linearformen  $f : V^k \rightarrow W$ . Wir setzen außerdem  $\Lambda^0(V, W) = W$ .

#### Bemerkung 1

$\Lambda^1(V, W)$  ist die Menge aller  $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$ .

#### 1.3.2 Definition (Äußeres Produkt)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f_1, \dots, f_k \in \Lambda^1(V, \mathbb{C})$ . Dann definieren wir das **äußere Produkt** (auch: **alternierendes Produkt**)  $f_1 \wedge \dots \wedge f_k : V^k \rightarrow \mathbb{C}$  von  $f_1, \dots, f_k$  durch

$$(f_1 \wedge \dots \wedge f_k)(v_1, \dots, v_k) := \det \begin{pmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & \dots & f_1(v_k) \\ f_2(v_1) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_k(v_1) & f_k(v_2) & \dots & f_k(v_k) \end{pmatrix}$$

für alle  $v_1, \dots, v_k \in V$ .

#### Bemerkung 2

- (i) Aus den elementaren Eigenschaften von Determinanten und dem Entwicklungssatz folgt  $f_1 \wedge \dots \wedge f_k \in \Lambda^k(V, \mathbb{C})$ .
- (ii) Es gilt  $f_1 \wedge f_2 = -f_2 \wedge f_1$  und  $(a \cdot f_1) \wedge f_2 = a \cdot (f_1 \wedge f_2)$  für alle  $a \in \mathbb{C}$ .
- (iii)  $\Lambda^k(V, \mathbb{C})$  ist ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, und ist  $\{f_1, \dots, f_n\}$  die zu einer Basis von  $V$  gehörende duale Basis von  $\Lambda^1(V, \mathbb{C})$ , so ist

$$\{f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$$

eine Basis von  $\Lambda^k(V, \mathbb{C})$  für  $k = 1, \dots, n$ .



Indem man das äußere Produkt zunächst entsprechend Bemerkung 2(iii) auf Basen von  $\Lambda^p(V, \mathbb{C})$  und  $\Lambda^q(V, \mathbb{C})$  definiert und dann linear fortsetzt, erhält man ein **äußeres Produkt**

$$\wedge : \Lambda^p(V, \mathbb{C}) \times \Lambda^q(V, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda^{p+q}(V, \mathbb{C}),$$

genauer gilt der folgende

### 1.3.3 Satz (Fortsetzung des äußeren Produkts)

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sind  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p+q \leq \dim \Lambda^1(V, \mathbb{C})$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte bi-lineare Abbildung

$$\wedge : \Lambda^p(V, \mathbb{C}) \times \Lambda^q(V, \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda^{p+q}(V, \mathbb{C}), \quad (f, g) \mapsto f \wedge g,$$

die mit obiger Definition des äußeren Produkts konform ist, wobei wir  $f \wedge g = f \cdot g$  setzen, falls  $f \in \Lambda^0(V, \mathbb{C})$  oder  $g \in \Lambda^0(V, \mathbb{C})$ .

### 1.3.4 Definition (Differentialform)

Sei  $M$  eine reelle Mannigfaltigkeit sowie  $k \in \mathbb{N}_0$ . Eine (komplexe oder: komplexwertige) **Differentialform vom Grad  $k$**  auf  $M$  (kurz:  **$k$ -Form auf  $M$** ) ist eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^k(T(M), \mathbb{C}) := \bigcup_{a \in M} \Lambda^k(T_a(M), \mathbb{C})$$

mit  $\omega(a) \in \Lambda^k(T_a(M), \mathbb{C})$  für alle  $a \in M$ . Eine **reelle (reellwertige) Differentialform** (vom Grad  $k$ ) liegt vor, wenn man entsprechend  $\mathbb{C}$  durch  $\mathbb{R}$  ersetzt.

### Bemerkung 3

(i) Jede reelle Differentialform ist eine komplexe Differentialform und definiert man für eine (komplexe) Differentialform  $\omega$  punktweise  $\operatorname{Re} \omega$  und  $\operatorname{Im} \omega$ , so gilt  $\omega = \operatorname{Re} \omega + i \cdot \operatorname{Im} \omega$ .  $\operatorname{Re} \omega$  und  $\operatorname{Im} \omega$  sind reelle Differentialformen.

(ii) Eine 0-Form  $\omega$  auf  $M$  ist eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow \mathbb{C}$ .

(iii) Ist  $M$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\omega$  (bis auf Isomorphie) eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ , bzw.  $\omega : M \rightarrow \Lambda^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ .

Nun setzen wir punktweise die Definition des äußeren Produkts auf Differentialformen fort, d.h. sind  $\omega_1, \omega_2$  Differentialformen auf  $M$ , so ist das **äußere Produkt**  $\omega_1 \wedge \omega_2$  von  $\omega_1$  und  $\omega_2$  definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(a) := \omega_1(a) \wedge \omega_2(a) \quad \text{für alle } a \in M.$$

### Bemerkung 4

Für jede  $k$ -Form  $\omega_1$  und jede  $\ell$ -Form  $\omega_2$  ist  $\omega_1 \wedge \omega_2$  eine  $k + \ell$ -Form.

### Notation

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . Gilt  $1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_k$ , so heißt  $\alpha$  **Multi-Index** der Länge  $k$ . Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{M}(k, n)$  die Menge aller Multi-Indizes  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  der Länge  $k$  mit  $\alpha_k \leq n$ . Sei außerdem  $\mathcal{M}(0, n) = \{(0, \dots, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ .

Der folgende Satz gibt eine wichtige Darstellung von (komplexen) Differentialformen auf reellen Mannigfaltigkeiten an. Wenn wir später komplexe Mannigfaltigkeiten betrachten, werden wir eine ähnliche Darstellung zugrunde legen.

**1.3.5 Satz**

Seien  $n, k \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit sowie  $\omega$  eine (komplexe) Differentialform vom Grad  $k$  auf  $M$ . Ist  $U$  eine Karte von  $M$  und sind  $x_1, \dots, x_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  Koordinatenfunktionen auf  $U$ , so gibt es eine eindeutig bestimmte Familie  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{M}(k, n)$ , von Abbildungen  $\omega_\alpha : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\omega(a) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(k, n)} \omega_\alpha(a) \cdot d_a x^\alpha \text{ f\"ur alle } a \in U,$$

wobei  $d_a x^\alpha = d_a x_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge d_a x_{\alpha_k}$ . Ist  $\omega$  eine reelle Differentialform, so sind die Koeffizientenfunktionen  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{M}(k, n)$ , reellwertig.

**Notation**

Eine (komplexe) Differentialform  $\omega$  vom Grad  $k \in \mathbb{N}$  heißt stetig, stetig differenzierbar etc., wenn für jede Karte  $(U, \varphi)$  sämtliche Koeffizientenfunktionen  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{M}(k, n)$ , aus Satz 1.3.5 diese Eigenschaft haben. Schreibe

$$\omega \in C(M, \Lambda^k(T(M), \mathbb{C})), \quad \omega \in C^1(M, \Lambda^k(T(M), \mathbb{C})) \quad \text{etc.}$$

**1.3.6 Definition (uere Ableitung)**

Sei  $M$  eine reelle Mannigfaltigkeit. Ist  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  differenzierbar, so betrachte die Abbildung

$$df : a \mapsto d_a f$$

als Abbildung  $df : M \rightarrow \Lambda^1(T(M), \mathbb{C})$ , d.h. als eine 1-Form. Ist  $\omega$  eine differenzierbare Differentialform vom Grad  $k \in \mathbb{N}$  auf  $M$ , so definieren wir die **uere Ableitung**  $d\omega : a \mapsto d_a \omega$  von  $\omega$  durch

$$d_a \omega := \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(k, n)} (d_a \omega_\alpha) \wedge d_a x^\alpha, \quad a \in M,$$

mit Koeffizientenfunktionen  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha \in \mathcal{M}(k, n)$ , gemäß Satz 1.3.5. Der Operator  $d$  wird auch als **uere Ableitung** bezeichnet.

**Bemerkung 5**

(i) Die Definition von  $d\omega$  ist unabhängig von der Wahl der Karte [14, §4].

(ii)  $d\omega$  ist eine Differentialform vom Grad  $k + 1$ .

Der folgende Satz [18, 44, 45] besagt, daß die Komposition der äußeren Ableitung für zweimal stetig differenzierbare Differentialformen auf  $\mathbb{R}^n$  stets die Differentialform ergibt, die konstant 0 ist. Für eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung folgt die Aussage aus dem Satz von Schwarz, der es erlaubt, die Reihenfolge der auftretenden partiellen Ableitungen zu vertauschen, zusammen mit der Darstellung aus Satz 1.1.5, d.h.

$$ddf = \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \cdot dx_k \wedge dx_j.$$

**1.3.7 Satz ([53, Prop. 2.6.3])**

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit und sei  $\omega$  eine zweimal stetig differenzierbare Differentialform auf  $M$ . Dann gilt  $dd\omega = 0$ .

Wir haben abermals nur die reelle Struktur betrachtet. Beim Vorliegen einer komplexen Differentialform wollen wir jedoch nun den alternierenden Anteil  $dx^\alpha$  durch einen  $\mathbb{C}$ -linearen und einen anti- $\mathbb{C}$ -linearen beschreiben. Dies führt zur Definition von  $(p, q)$ -**Formen**:

### Notation

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit,  $(U, \varphi)$  eine komplexe Karte sowie  $z_1, \dots, z_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$ . Sei  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \leq n$  und  $a \in U$ . Setze

$$d_a z^\alpha := d_a z_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge d_a z_{\alpha_p}$$

für alle  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathcal{M}(p, n)$ . Wir fassen  $d_a z_j$  als  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$d_a z_j : T_a(M) \rightarrow \mathbb{C}$$

auf. Dann ist  $d_a z^\alpha$  ein Element von  $\Lambda^p(T_a(M), \mathbb{C})$ . Setze  $d_a z^{(0, \dots, 0)} := 1$ . Entsprechend führt man  $d_a \bar{z}^\alpha$  ein. Ist zusätzlich  $q \in \mathbb{N}_0$  mit  $q \leq n$ , so bezeichnen wir den von der Menge

$$\{d_a z^\alpha \wedge d_a \bar{z}^\beta : \alpha \in \mathcal{M}(p, n), \beta \in \mathcal{M}(q, n)\}$$

erzeugten Unterraum von  $\Lambda^{p+q}(T_a(M), \mathbb{C})$  mit  $\Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{C})$ , wobei wir auch  $p = 0$  zulassen. Sei außerdem

$$\Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{R}) := \Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{C}) \cap \Lambda^{p+q}(T_a(M), \mathbb{R}) = \{f \in \Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{C}) : f = \bar{f}\}$$

sowie

$$\Lambda^{p,q}(T(M), \mathbb{C}) := \bigcup_{a \in M} \Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{C}) \quad \text{und} \quad \Lambda^{p,q}(T(M), \mathbb{R}) := \bigcup_{a \in M} \Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{R}).$$

### 1.3.8 Satz

Ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit,  $a \in M$  und ist  $(U, \varphi)$  eine komplexe Karte mit  $a \in U$  und  $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$ , so ist

$$\{d_a z_1, \dots, d_a z_n\} \quad \text{bzw.} \quad \{d_a \bar{z}_1, \dots, d_a \bar{z}_n\}$$

eine Basis der Menge aller  $\mathbb{C}$ -linearen bzw. anti- $\mathbb{C}$ -linearen Abbildungen von  $T_a(M)$  nach  $\mathbb{C}$ .

### 1.3.9 Definition (( $p, q$ )-Form)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ . Eine **komplexe Differentialform vom Typ**  $(p, q)$  (kurz: **( $p, q$ )-Form**) auf  $M$  ist eine komplexe Differentialform  $\omega$  vom Grad  $p+q$  auf  $M$  (wenn man  $M$  als reelle Mannigfaltigkeit der Dimension  $2n$  auffasst) mit

$$\omega(a) \in \Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{C}) \quad \text{für alle } a \in M.$$

Aus Satz 1.3.8 ergibt sich

### 1.3.10 Satz

Ist  $\omega$  eine  $(p, q)$ -Form auf  $M$  und sind  $z_1, \dots, z_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  komplexe Koordinatenfunktionen einer Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$ , so existieren eindeutig bestimmte Koeffizientenfunktionen  $\omega_{\alpha, \beta} : U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathcal{M}(p, n), \beta \in \mathcal{M}(q, n)$ , mit

$$\omega(a) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(p, n), \beta \in \mathcal{M}(q, n)} \omega_{\alpha, \beta}(a) \cdot d_a z^\alpha \wedge d_a \bar{z}^\beta \quad \text{für alle } a \in U.$$

**Notation**

Eine  $(p, q)$ -Form  $\omega$  heißt stetig, stetig differenzierbar etc., wenn für jede Karte  $(U, \varphi)$  alle Koeffizientenfunktionen aus Satz 1.3.10 diese Eigenschaft haben, entsprechend schreiben wir  $\omega \in C(M, \Lambda^{p,q}(T(M), \mathbb{C}))$ ,  $\omega \in C^1(M, \Lambda^{p,q}(T(M), \mathbb{C}))$  etc.

Man führt nun die äußere Ableitung  $d\omega, a \mapsto d_a\omega$  einer differenzierbaren  $(p, q)$ -Form  $\omega$  (die in obiger Darstellung vorliegt) ein durch

$$d_a\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(p,n), \beta \in \mathcal{M}(q,n)} d_a\omega_{\alpha,\beta} \wedge d_a z^\alpha \wedge d_a \bar{z}^\beta, \quad a \in M.$$

Man beachte dabei, daß die Definition nicht von der Wahl der Karte abhängt. Entsprechend führt man  $\partial\omega : a \mapsto \partial_a\omega$  und  $\bar{\partial}\omega : a \mapsto \bar{\partial}_a\omega$  ein durch

$$\partial\omega := \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(p,n), \beta \in \mathcal{M}(q,n)} \partial\omega_{\alpha,\beta} \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \quad \text{und} \quad \bar{\partial}\omega := \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(p,n), \beta \in \mathcal{M}(q,n)} \bar{\partial}\omega_{\alpha,\beta} \wedge dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

**Bemerkung 6**

(i) Sind  $d, \partial, \bar{\partial}$  in naheliegender Weise definiert, so gilt  $d = \partial + \bar{\partial}$ .

(ii)  $\partial\omega$  ist eine  $(p+1, q)$ - und  $\bar{\partial}\omega$  eine  $(p, q+1)$ -Form, falls  $p+1 \leq n$  bzw.  $q+1 \leq n$ .

Satz 1.3.7 lehrt, daß die Komposition der äußeren Ableitung  $d = \partial + \bar{\partial}$  kein weiter zu untersuchendes Objekt darstellt. Man betrachtet daher einen durch  $\partial - \bar{\partial}$  definierten Differentialoperator:

**1.4. Positive Currents**

Wir führen nun den Operator ein, der in der Pluri-Potentialtheorie eine ähnlich große Bedeutung besitzt, wie der Laplace-Operator in der Potentialtheorie (vgl. auch §3.4). Sei dazu zunächst

$$d^c = i \cdot (\bar{\partial} - \partial)$$

ein weiterer Differential-Operator. Wir betrachten den Differential-Operator  $dd^c$ .

**Bemerkung 1**

Aus Satz 1.3.7 folgt  $0 = dd\omega = (\partial + \bar{\partial})(\partial + \bar{\partial})\omega = \partial^2\omega + (\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial)\omega + \bar{\partial}^2\omega$  ( $\omega$ : zweimal stetig differenzierbare Differentialform) und, da jeder Summand einem anderen Typ von Differentialform entspricht,

$$\partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0 \quad \text{und} \quad \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

Damit ergibt sich für den linearen Operator  $dd^c$  die Darstellung

$$dd^c = i(\partial + \bar{\partial})(\bar{\partial} - \partial) = i \cdot (\partial\bar{\partial} - \partial^2 + \bar{\partial}^2 - \bar{\partial}\partial) = 2i \cdot \partial\bar{\partial}.$$

Entsprechend folgt  $d^c d = -dd^c$ .

Es gibt Zusammenhänge zwischen dem Laplace-Operator und dem Operator  $dd^c = 2i \cdot \partial\bar{\partial}$  [68]. Wir geben noch eine Motivation für den auftretenden Faktor  $2i$ . Benötigt wird dazu die nachfolgende

**Bemerkung 2**

Ist  $V$  ein Vektorraum und  $f \in \Lambda^1(V, \mathbb{C})$ , so gilt für alle  $v_1, v_2 \in V$

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \cdot f \wedge \bar{f} &= \frac{i}{2} \cdot \det \begin{pmatrix} f(v_1) & f(v_2) \\ \bar{f}(v_1) & \bar{f}(v_2) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \cdot (f(v_1) \cdot \bar{f}(v_2) - \bar{f}(v_1) \cdot f(v_2)) \\ &= \operatorname{Re} f(v_1) \cdot \operatorname{Im} f(v_2) - \operatorname{Re} f(v_2) \cdot \operatorname{Im} f(v_1). \end{aligned}$$

Setzt man außerdem  $g := \frac{i}{2} \cdot f \wedge \bar{f}$ , so gilt  $g = \bar{g}$ , d.h.  $g \in \Lambda^2(V, \mathbb{R})$ . Dieses Vorgehen kann allgemein verwendet werden, um Elemente aus  $\Lambda^k(V, \mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , zu konstruieren.

**1.4.1 Korollar**

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit,  $a \in M$  und sei  $(U, \varphi)$  eine Karte von  $M$  mit  $a \in U$ . Sei  $\varphi = (z_1, \dots, z_n)$  und sei  $z_j = x_j + i \cdot y_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann gilt

$$\frac{i}{2} \cdot d_a z_j \wedge d_a \bar{z}_j = d_a x_j \wedge d_a y_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n,$$

also  $\frac{i}{2} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_j = dx_j \wedge dy_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

**1.4.2 Anmerkungen (Zusammenhang zum Laplace-Operator)**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} &= \frac{\partial}{\partial z_j} \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z_j} \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y_k} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} + i \cdot \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y_k} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \right) + \frac{i}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Schwarz und einer analogen Rechnung für  $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_k \partial z_j}$  folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}_k \partial z_j} \quad \text{und} \quad \Delta u = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} \right) = 4 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_k}.$$

Im Fall  $n = 1$  ergibt sich somit

$$dd^c u = 2i \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \stackrel{1.4.1}{=} \Delta u \cdot dx \wedge dy,$$

wobei  $x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, w \mapsto \operatorname{Re} w$  und  $y : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, w \mapsto \operatorname{Im} w$ .

Der folgende Satz liefert eine explizite Darstellung von  $dd^c u$  für eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung  $u$  und ist im Zusammenhang mit pluri-subharmonischen Funktionen von entscheidender Bedeutung.

**1.4.3 Satz**

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Dann ist  $dd^c u$  eine  $(1, 1)$ -Form, gegeben durch

$$dd^c u = 2i \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

**Beweis:**

Mit Satz 1.1.5 folgt

$$\begin{aligned} dd^c u &= 2i\partial\bar{\partial}u = 2i \cdot \partial \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k = 2i \cdot \sum_{k=1}^n \partial \left( \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right) = 2i \sum_{j,k=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \right) \wedge d\bar{z}_k \\ &= 2i \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k. \end{aligned}$$

■

Naheliegend ist es, die in Satz 1.4.3 auftretenden partiellen Ableitungen im distributionellem Sinn zu verstehen und somit den Operator  $dd^c$  auf lokal integrierbare Funktionen zu erweitern. Wir wollen dann auch Funktionen zulassen, die auf Mannigfaltigkeiten definiert sind. Natürlich kann  $dd^c u$  dann nicht als Distribution aufgefaßt werden, da auch noch ein alternierender Anteil auftritt. Es liegt dann jedoch, wie im Fall von Distributionen, ein Element eines geeigneten Dualraumes vor. Man wählt dazu eine aus der Distributionentheorie motivierte Notation [14, 44]:

### Notation

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ . Die Menge aller stetigen (bzw. beliebig oft differenzierbaren)  $(p, q)$ -Formen  $\omega$  auf  $M$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } \omega := \overline{\{x \in M : \omega(x) \neq 0\}}$  sei

$$\mathfrak{D}_0^{p,q}(M) = C_0(M, \Lambda^{p,q}(T(M), \mathbb{C})), \text{ bzw. } \mathfrak{D}^{p,q}(M) = C_0^\infty(M, \Lambda^{p,q}(T(M), \mathbb{C})).$$

Die Elemente von  $\mathfrak{D}^{p,q}(M)$  werden in Analogie zur Distributionentheorie als **Testformen** (auf  $M$ ) bezeichnet. Wir versehen  $\mathfrak{D}^{p,q}(M)$  mit der  $C^\infty$ -Topologie der Koeffizientenfunktionen, d.h. sind  $\omega^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , Differentialformen aus  $\mathfrak{D}^{p,q}(M)$ , so konvergiert  $(\omega^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  genau dann gegen  $\omega^{(0)}$ , wenn gilt:

- (i) Es existiert eine Karte  $(U, \varphi)$  von  $M$  und eine kompakte Menge  $K \subseteq U$  mit

$$\text{supp } \omega^{(k)} \subseteq K \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

- (ii) Ist

$$\omega^{(k)}(a) = \sum_{\alpha \in \mathcal{M}(p,n), \beta \in \mathcal{M}(q,n)} \omega_{\alpha,\beta}^{(k)}(a) \cdot d_a z^\alpha \wedge d_a \bar{z}^\beta, \quad a \in U,$$

eine lokale Darstellungen von  $\omega^{(k)}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ , so gilt für alle  $\alpha \in \mathcal{M}(p,n), \beta \in \mathcal{M}(q,n)$  und alle  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{2n}) \in \mathbb{N}_0^{2n}$

$$D^\nu(\omega_{\alpha,\beta}^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} D^\nu(\omega_{\alpha,\beta}^{(0)}) \quad \text{gleichmäßig,}$$

wobei

$$D^\nu := \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \partial y_1^{\nu_2} \dots \partial x_n^{\nu_{2n-1}} \cdot \partial y_n^{\nu_{2n}}}, \quad |\nu| := \nu_1 + \dots + \nu_{2n}$$

bezüglich beliebigen Koordinatenfunktionen  $\varphi = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  auf  $U$ .

Indem man in (ii) nur die gleichmäßige Konvergenz von  $(\omega_{\alpha,\beta}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $\omega_{\alpha,\beta}^{(0)}$  fordert, erhält man entsprechend eine Topologie auf  $\mathfrak{D}_0^{p,q}$ .

### Bemerkung 3

- (i) Die Konvergenz in (ii) ist unabhängig von  $\varphi$ , d.h. von der betrachteten Karte.

(ii) Die Konvergenz der Koeffizientenfunktionen entspricht der in der Distributionentheorie verwendeten Konvergenz der Testfunktionen.

Die Distributionen sind genau die Elemente des Dualraumes der Menge der Testfunktionen. Ganz analog führt dies zur folgenden

#### 1.4.4 Definition (Current)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ . Die Elemente des Dualraumes von...

...  $\mathcal{D}^{n-p, n-q}(M)$  heißen  $(p, q)$ -**Currents** (franz.: Courants) (auf  $M$ ). Sei  $\mathcal{D}_{p,q}(M)$  die Menge aller  $(p, q)$ -Currents auf  $M$ .

...  $\mathcal{D}_0^{n-p, n-q}(M)$  heißen  $(p, q)$ -**Currents der Ordnung 0** (auf  $M$ ). Sei  $\mathcal{D}_{p,q}^0(M)$  die Menge aller  $(p, q)$ -Currents der Ordnung 0 auf  $M$ .

#### Bemerkung 4

(i) Ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, so sind die  $(n, n)$ -Currents auf  $M$  genau die Distributionen auf  $M$ , **denn** ist  $p = q = n$ , so folgt  $\mathcal{D}^{n-p, n-q}(M) = \mathcal{D}^{0,0}(M) = C_0^\infty(M, \Lambda^{0,0}(T(M), \mathbb{C})) = C_0^\infty(M, \mathbb{C})$ , also  $\mathcal{D}_{n,n}(M) = (C_0^\infty(M, \mathbb{C}))'$ .

(ii)  $(p, q)$ -Currents können als  $(p, q)$ -Differentialformen mit Distributionen als Koeffizientenfunktionen aufgefaßt werden [23, §5.2].

#### Notation

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$  sowie  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Für jede offene Teilmenge  $U$  von  $M$  und jedes  $(p, q)$ -Current  $T$  auf  $M$  bezeichnen wir mit  $T|_U$  das durch  $\langle T|_U, \omega \rangle := \langle T, \omega \rangle$ ,  $\omega \in \mathcal{D}^{n-p, n-q}(U)$ , definierte  $(p, q)$ -Current auf  $U$ .

Da Currents als verallgemeinerte Distributionen aufgefaßt werden können, liegt es nahe, den Träger von Currents analog zu denen von Distributionen zu definieren:

#### 1.4.5 Definition (Träger eines Currents)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ . Für einen  $(p, q)$ -Current  $T$  auf  $M$  wird der **Träger von  $T$**  definiert durch

$$\text{supp } T := M \setminus \bigcup \{U : U \text{ offene Teilmenge von } M, T|_U = 0\}.$$

#### Bemerkung 5

Ist  $U \subseteq M$  offen und gibt es zu jedem Punkt  $x \in U$  eine offene Umgebung  $V$  von  $x$  mit  $T|_V = 0$ , so gilt  $T|_U = 0$  [14].

#### 1.4.6 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ . Sei  $T$  ein  $(p, q)$ -Current, lokal in der Darstellung

$$T = \sum_{\substack{\alpha \in \mathcal{M}(p, n), \\ \beta \in \mathcal{M}(q, n)}} T_{\alpha, \beta} \cdot dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

mit Distributionen  $T_{\alpha, \beta}$ . Dann gilt:

(a)  $\text{supp } T_{\alpha, \beta} \subseteq \text{supp } T$  für alle  $\alpha \in \mathcal{M}(p, n)$ ,  $\beta \in \mathcal{M}(q, n)$ .

(b) Für jedes  $x \in \text{supp } T$  existieren  $\alpha \in \mathcal{M}(p, n)$ ,  $\beta \in \mathcal{M}(q, n)$  mit  $x \in \text{supp } T_{\alpha, \beta}$ .

**Beweis:**

Zu (a): Sei  $x \notin \text{supp } T$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  mit  $T|_U = 0$ . Durch Verkleinern von  $U$  kann man voraussetzen, daß  $U$  in einer Karte von  $M$  enthalten ist. Damit folgt

$$0 = T|_U = \sum_{\alpha, \beta} T_{\alpha, \beta}|_U \cdot dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Aus Satz 1.3.8 folgt  $T_{\alpha, \beta}|_U = 0$ , also  $x \notin \text{supp } T_{\alpha, \beta}$  für alle  $\alpha, \beta$ . Zu (b): Sei  $x \in \text{supp } T$ . **Angenommen**,  $x \notin \text{supp } T_{\alpha, \beta}$  für alle  $\alpha, \beta$ . Dann gibt es für alle  $\alpha, \beta$  eine offene Umgebung  $U = U(\alpha, \beta)$  von  $x$  mit  $T_{\alpha, \beta}|_U = 0$ . Setzt man  $U := \bigcap_{\alpha, \beta} U(\alpha, \beta)$ , so ist  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  mit  $T_{\alpha, \beta}|_U = 0$  für alle  $\alpha, \beta$ . Damit folgt  $T|_U = 0 \quad \zeta$ . ■

In der Distributionentheorie identifiziert man lokal integrierbare Funktion mit einer Distribution (vgl. Bemerkung 1 (Seite 9)). Eine ähnliche Vorgehensweise erlaubt es lokal integrierbare Differentialformen als Current aufzufassen. Dazu werden Kenntnisse der Integration von Differentialformen auf (orientierbaren) Mannigfaltigkeiten benötigt. Wir verzichten auf Details und führen nur die zugrundeliegende Idee an:

#### 1.4.7 Integration von (reellen) Differentialformen

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $M$  eine reelle  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Sei  $\omega$  eine reelle Differentialform auf  $M$  vom Grad  $n$  mit kompaktem Träger  $\text{supp } \omega$  und sei  $(U, \varphi)$  eine (reelle) Karte von  $M$  in der Darstellung  $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ . Gemäß Satz 1.3.5 existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $f_{U, \varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\omega(a) = f_{U, \varphi}(a) \cdot d_a x_1 \wedge \dots \wedge d_a x_n \quad \text{für alle } a \in U.$$

Die Definition von  $\int \omega$  führt man nun lokal durch das Zurückziehen mittels Karten auf die Integration im  $\mathbb{R}^n$  zurück: Da  $\text{supp } \omega$  kompakt ist existieren Karten  $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_m, \varphi_m)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , mit  $\text{supp } \omega \subseteq \bigcup_{j=1}^m U_j$ . Sei  $\eta_1, \dots, \eta_m$  eine  $C^\infty$ -Partition der Eins bzgl.  $U_1, \dots, U_m$ , und setze

$$\int_M \omega := \sum_{j=1}^m \int_{\varphi_j(U_j)} (\eta_j \cdot f_{U_j, \varphi_j}) \circ \varphi_j^{-1},$$

falls die rechte Seite wohldefiniert ist. Man beachte dabei, daß diese Definition zunächst nicht nur von der Partition der Eins und der Überdeckung  $U_1, \dots, U_m$ , sondern auch von den Karten  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  abhängt. Eine Unabhängigkeit erhält man mittels Transformationssatz, wenn man die Mannigfaltigkeit  $M$  als orientierbar voraussetzt [53].

#### 1.4.8 Anmerkungen

Faßt man komplexe Mannigfaltigkeiten in der hier angegebenen Art und Weise als reelle Mannigfaltigkeit auf, so ist jede komplexe Mannigfaltigkeit eine reelle und orientierbare Mannigfaltigkeit [68, Bsp. 9.B.4].

(i) Ist  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und  $\omega$  eine Differentialform auf  $M$  mit kompaktem Träger, so sei

$$\int_M \omega := \int_M \text{Re } \omega + i \cdot \int_M \text{Im } \omega,$$

sofern die rechte Seite wohldefiniert ( $\omega$  also integrierbar) ist.



(ii) Die kanonische Orientierung auf einer  $n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  ist gegeben durch die (reellwertige) **Standardvolumenform** [68, S.394], vgl. auch [30, S.18] für  $M = \mathbb{C}^n$ ,

$$\begin{aligned} dV &:= \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \\ &= (-1)^{\frac{n \cdot (n-1)}{2}} \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_n = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n. \end{aligned}$$

Ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  offen, zweimal stetig differenzierbar, so gilt [44, S.15]

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge \cdots \wedge dd^c u = 4^n n! \cdot \det \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right)_{j,k=1}^n dV.$$

$(dd^c)^n$  wir als **(komplexer) Monge-Ampère Operator** bezeichnet.

### 1.4.9 Definition und Satz

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ . Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und sei  $\chi$  eine lokal-integrierbare  $(p, q)$ -Differentialform auf  $M$ . Ist  $\omega \in \mathfrak{D}^{n-p, n-q}(M)$  eine Testform, so ist  $\chi \wedge \omega$  eine lokal-integrierbare  $(n, n)$ -Differentialform auf  $M$  mit kompaktem Träger. Sei

$$\langle T_\chi, \omega \rangle := \int_M \chi \wedge \omega \quad \text{für alle Testformen } \omega \in \mathfrak{D}^{n-p, n-q}(M).$$

Dann ist  $T_\chi$  ein  $(p, q)$ -Current auf  $M$ . Die Injektivität der Abbildung  $\chi \mapsto T_\chi$  ergibt sich aus der Tatsache, daß aus  $\int_M \chi \wedge \omega = 0$  für alle  $\omega \in \mathfrak{D}^{n-p, n-q}(M)$  bereits  $\chi = 0$  folgt [17, §17.5.1]. Damit kann  $\chi$  mit dem Current  $T_\chi$  identifiziert werden und man schreibt auch nur  $\chi$  statt  $T_\chi$ .

### Bemerkung 6

Ist  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Abbildung, so folgt aus der Integration-by-part formula [44, Prop. 3.4.1]

$$\langle dd^c u, \chi \rangle = \int dd^c u \wedge \chi = \int u \cdot dd^c \chi = \int u \wedge dd^c \chi = \langle u, dd^c \chi \rangle$$

für jede Testform  $\chi \in \mathfrak{D}^{n-1, n-1}(M)$ .

### Notation

Sind  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$  und ist  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $T$  ein  $(p, q)$ -Current auf  $M$  und  $\psi \in \mathfrak{D}^{k, \ell}(M)$  mit  $p+k, q+\ell \leq n$ , so ist durch

$$\langle T \wedge \psi, \omega \rangle := \langle T, \psi \wedge \omega \rangle \quad \text{für alle } \omega \in \mathfrak{D}^{n-p-k, n-q-\ell}(M)$$

ein  $(p+k, q+\ell)$ -Current  $T \wedge \psi$  definiert. Man beachte, daß im Fall  $k = \ell = 0$  auf der rechten Seite die übliche Multiplikation auftritt, man schreibt in diesem Fall auch  $\varphi \cdot T$  statt  $T \wedge \varphi$ . Ist  $T$  von Ordnung 0, so läßt man auch  $\psi \in \mathfrak{D}_0^{k, \ell}(M)$  zu.

Für die Definition von positiven Currents benötigen wir analog zu positiven Testfunktionen in der Distributionentheorie noch positive Testformen. Dabei liegt es nahe, daß positive  $(p, q)$ -Formen notwendigerweise reellwertig sind, d.h. es liegen Differentialformen der Form

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^{p, q}(T(M), \mathbb{R})$$

vor. Der nachfolgende Satz gibt ein Kriterium zum Testen auf Reellwertigkeit einer Linearform aus  $\Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$  an.

#### 1.4.10 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Linearform  $\omega \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$  ist genau dann reellwertig, d.h. es liegt  $\omega \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$  vor, wenn es eine hermitesche  $n \times n$  Matrix  $(a_{j,k})$  mit Einträgen in  $\mathbb{C}$  gibt so, daß

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Beweis:

Wähle die eindeutig bestimmte Familie  $a_{j,k}$ ,  $j, k = 1, \dots, n$  komplexer Zahlen mit  $\omega = \frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \omega \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}) &\iff \omega = \bar{\omega} \\ &\iff \frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k = \overline{\frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k} = -\frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n \overline{a_{j,k}} \cdot d\bar{z}_j \wedge dz_k \\ &= \frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n \overline{a_{k,j}} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k \iff (a_{j,k}) = (\overline{a_{k,j}}). \end{aligned}$$

■

Aus Satz 1.4.10 und Anmerkung 1.4.2 sowie Satz 1.4.3 ergibt sich:

#### 1.4.11 Korollar

Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung, so ist  $dd^c u$  eine reellwertige  $(1,1)$ -Form, d.h. es liegt

$$dd^c u : \Omega \rightarrow \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$$

vor.

#### 1.4.12 Beispiel

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $g_1, \dots, g_n : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  integrierbare Abbildungen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \omega &:= \frac{i}{2} \cdot (g_1 \cdot dz_1 \wedge \bar{g}_1 \cdot d\bar{z}_1) \wedge \dots \wedge \frac{i}{2} \cdot (g_n \cdot dz_n \wedge \bar{g}_n \cdot d\bar{z}_n) \\ &= (g_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot \dots \cdot g_n \cdot \bar{g}_n) \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n, \end{aligned}$$

also aufgrund der natürlichen Orientierung (Anmerkung 1.4.8)

$$\int \omega = \int g_1 \cdot \bar{g}_1 \cdot \dots \cdot g_n \cdot \bar{g}_n \geq 0.$$

Wir verfahren nun allgemein entsprechend obigem Beispiel und Bemerkung 2, um zu einer Definition von positiven Testformen und somit positiven Currents zu gelangen.

#### 1.4.13 Definition (Positive Linearform, Differentialform und Current)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $p \in \mathbb{N}$  mit  $p \leq n$  und  $a \in M$ . Eine Linearform  $\omega \in \Lambda^{p,p}(T_a(M), \mathbb{R})$  bezeichnen wir als **elementar**

(stark) **positiv**, wenn linear unabhängige Linearformen  $f_1, \dots, f_p \in \Lambda^{1,0}(T_a(M), \mathbb{C})$ , d.h.  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildungen  $f_1, \dots, f_p : T_a(M) \rightarrow \mathbb{C}$ , existieren mit

$$\omega = \frac{i}{2} \cdot f_1 \wedge \overline{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{i}{2} \cdot f_p \wedge \overline{f_p}.$$

Eine Linearform  $\omega \in \Lambda^{p,p}(T_a(M), \mathbb{R})$  heißt (stark) **positiv**, falls es  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$  und elementar (stark) positive Linearformen  $\omega_1, \dots, \omega_m \in \Lambda^{p,p}(T_a(M), \mathbb{R})$  gibt mit

$$\omega = \lambda_1 \cdot \omega_1 + \dots + \lambda_m \cdot \omega_m.$$

Wir lassen nun auch  $p = 0$  zu und sagen, daß eine Linearform  $\omega \in \Lambda^{0,0}(T_a(M), \mathbb{R}) = \mathbb{R}$  stark positiv ist, falls  $\omega \geq 0$ . Eine  $(p, p)$ -Form

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^{p,p}(T(M), \mathbb{R})$$

heißt (stark) **positiv**, falls  $\omega(a)$  für jedes  $a \in M$  eine stark positive Linearform ist. Ein  $(p, p)$ -Current  $T$  (auf  $M$ ) ist **positiv**, falls  $\langle T, \omega \rangle \geq 0$  für jede positive Testform  $\omega \in \mathfrak{D}^{n-p, n-p}(M)$ .

### Bemerkung 7

Ist  $\chi$  eine lokal-integrierbare, positive  $(p, p)$ -Form, so ist das zugehörige  $(p, p)$ -Current  $T_\chi$  aus Satz 1.4.9 positiv. Außerdem sind positive  $(n, n)$ -Currents auf einer  $n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit und positive Distributionen auf  $M$  dasselbe.

Korollar 1.4.11 zeigt, daß eine Bedingung für das Vorliegen einer positiven reellen  $(1, 1)$ -Form (auf dem  $\mathbb{C}^n$ ) wünschenswert ist. Eine solche ist gegeben durch die Positivität der sogenannten **Levi-Form**:

#### 1.4.14 Satz ([44, Cor. 3.2.5])

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine reelle  $(1, 1)$ -Linearform  $\omega = \frac{i}{2} \cdot \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k \in \Lambda^{1,1}(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$  ist genau dann positiv, wenn

$$\sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k} \cdot z_j \overline{z_k} \geq 0 \quad \text{für alle } (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Wir haben den Dualraum der  $(p, q)$ -Testformen betrachtet und so die  $(p, q)$ -Currents erhalten.  $(p, q)$ -Formen sind Differentialformen vom Grad  $p+q$ , so daß es naheliegend ist, auch sogenannte  $k$ -Testformen einzuführen. Dies sind beliebig oft differenzierbare (komplexwertige) Differentialformen vom Grad  $k$ , die einen kompakten Träger besitzen. Betrachtet man auf diesem Raum eine entsprechende Topologie und den zugehörigen Dualraum, so gelangt man zu den sogenannten  **$k$ -Currents**. Mittels der Identifizierung  $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$  (bzw. dem entsprechenden Vorgehen auf dem Tangentialraum), ergibt sich, daß jedes  $(p, q)$ -Current ein  $p+q$ -Current ist. Benötigt wird noch die Ableitung eines Currents:

#### 1.4.15 Definition (Ableitung eines Currents)

Seien  $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq n$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit sowie  $T$  ein  $k$ -Current auf  $M$ . Wir definieren die **Ableitung**  $dT$  von  $T$  durch

$$\langle dT, \omega \rangle = (-1)^{k+1} \cdot \langle T, d\omega \rangle \quad \text{für alle } (n-k-1)\text{-Testformen.}$$

Gilt  $dT = 0$ , so heißt  $T$  **geschlossen**.

Jede stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt eine Stammfunktion, d.h. ist  $\omega = f \cdot dx$ , so existiert eine Funktion  $g$  mit  $\omega = dg$ . Daraus folgt  $d\omega = ddg = 0$  gemäß Satz 1.3.7. Eine ähnliche Aussage gilt allgemein für eine Klasse von geschlossenen Differentialformen und ist als **Poincaré Lemma** bekannt. Es liegt daher nahe, sich auf die Betrachtung von Differentialformen und Currents zu beschränken, die geschlossen sind.

Wir versehen den Raum aller  $(p, q)$ -Currents  $\mathcal{D}_{p,q}$  mit der schwachen Topologie, d.h. eine Folge  $(T_n)$  von  $(p, q)$ -Currents konvergiert genau dann gegen ein  $(p, q)$ -Current  $T$ , wenn punktweise Konvergenz vorliegt.

## Kapitel 2.

### Sub- und pluri-subharmonische Funktionen

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Konzept der Currents vorgestellt, wobei enge Beziehungen zur Distributionentheorie bestehen. Positive Distributionen können bekanntlich als Maße aufgefaßt werden, man betrachtet in der Potentialtheorie den Laplace-Operator  $\Delta$  im distributionellem Sinn und Abbildungen  $f$  mit  $\Delta f \geq 0$ . Dies sind genau die **subharmonische Funktionen**. In der **Pluri-Potentialtheorie** wird der Laplace-Operator ersetzt durch den Operator  $dd^c$  und es werden Abbildungen  $u$  betrachtet für die  $dd^c u$  ein positives  $(1,1)$ -Current ist. Ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar, so ist  $dd^c u$  nach Korollar 1.4.11 eine reellwertige  $(1,1)$ -Form. Satz 1.4.14 liefert eine notwendige wie hinreichende Bedingung für die Positivität von  $dd^c u$ . Dies führt zur Betrachtung von **pluri-subharmonischen Funktionen**, also Abbildungen, die auf jeder Geraden subharmonisch sind. Wir gehen daher noch kurz auf subharmonische Funktionen ein. Dies sind bekanntlich oberhalb-stetige Abbildungen, die die Mittelwertungleichung erfüllen.

#### 2.1. Harmonische und subharmonische Funktionen

##### 2.1.1 Definition (Oberhalb-stetige Funktion)

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow [-\infty, \infty[$  heißt **oberhalb-stetig**, falls  $\{x \in X : f(x) < s\}$  für jedes  $s \in \mathbb{R}$  offen ist.

##### 2.1.2 Satz (Elementare Eigenschaften)

Sei  $(X, d)$  ein lokalkompakter metrischer Raum und seien  $X_1, X_2$  metrische Räume.

- (a) Ist  $g : X_1 \rightarrow X_2$  eine stetige und  $f : X_2 \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine oberhalb-stetige Abbildung, so ist  $f \circ g : X_1 \rightarrow [-\infty, \infty[$  oberhalb-stetig.
- (b) Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge oberhalb-stetiger Abbildungen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $f$  oberhalb-stetig.

Wir begnügen uns hier mit der Betrachtung von (sub)harmonischen Funktionen, die auf einer offenen Teilmenge von  $\mathbb{C}$  definiert sind [58]:

##### 2.1.3 Definition ((Sub)harmonische Funktion)

Sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine oberhalb-stetige Abbildung, die auf keiner Zusammenhangskomponente von  $\Omega$  identisch  $-\infty$  ist.  $u$  heißt **subharmonisch**, falls für alle  $a \in \Omega$  ein  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert so, daß

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt \quad (\text{Mittelwertungleichung})$$

für jedes  $r \in ]0, s[$ . Setzt man die Gleichheit voraus, so heißt  $u$  **harmonisch**.

**Bemerkung 1**

Eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  Gebiet, ist genau dann (sub-)harmonisch, wenn  $\Delta u = 0$  (bzw.  $\Delta u \geq 0$ ) vorliegt.

Durch eine Glättung von (sub-)harmonischen Funktionen (vgl. auch Theorem 2.2.6) durch beliebig oft differenzierbare (sub-)harmonische Funktionen läßt sich die Aussage von Bemerkung 1 auf beliebige (sub-)harmonische Funktionen übertragen:

**2.1.4 Satz ([44, Thm.2.5.8])**

Sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine (sub-)harmonische Funktion. Dann ist  $u$  lokal-integrierbar und es gilt  $\Delta u = 0$  (bzw.  $\Delta u \geq 0$ ) im distributionellem Sinn, d.h.

$$\int u(x) \cdot \Delta \varphi(x) dx \geq 0 \text{ (bzw. } = 0) \quad \text{für jede Testfunktion } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C}) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

**2.2. Pluri-harmonische und pluri-subharmonische Funktionen**

Wir sind an Funktionen  $u : \mathbb{C}^n \rightarrow [-\infty, \infty[$  interessiert, für die  $dd^c u$  ein positives (1,1)-Current ist. Dies sind genau die nun eingeführten **pluri-subharmonischen Funktionen**:

**Notation**

Ist  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine Abbildung sowie  $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$ , so sei  $\Omega_{a,b} := \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\}$  und

$$u_{a,b} : \Omega_{a,b} \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad \lambda \mapsto u(a + \lambda b).$$

**2.2.1 Definition (Pluri-subharmonische Funktionen)**

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine oberhalb-stetige Abbildung, die auf keiner Zusammenhangskomponente von  $\Omega$  identisch  $-\infty$  ist.  $u$  heißt **pluri-(sub)harmonisch**, falls  $u_{a,b}$  für alle  $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$  (sub)harmonisch ist.

**2.2.2 Satz (Mittelwertungleichung für pluri-(sub)harmonische Funktionen)**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine oberhalb-stetige Abbildung, die auf keiner Zusammenhangskomponente von  $\Omega$  identisch  $-\infty$  ist.  $u$  ist genau dann pluri-subharmonisch, wenn für alle  $a \in \Omega$  und alle  $b \in \mathbb{C}^n$  mit  $\{a + be^{it} : t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \Omega$  gilt

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + be^{it}) dt. \quad \text{(Mittelwertungleichung)}$$

$u$  ist genau dann pluri-harmonisch, wenn stets Gleichheit vorliegt.

**Beweis:**

Ist  $u$  pluri-subharmonisch, so ist  $u_{a,b}$  für alle  $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$  mit  $\{a + be^{it} : t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \Omega$  subharmonisch, d.h. es gibt für  $u_{a,b}$  die Mittelwertungleichung. Damit existiert ein  $r > 0$ , so daß für  $\lambda = 0$  gilt

$$u(a) = u(a + \lambda \cdot \frac{1}{r} \cdot b) = u_{a, \frac{1}{r} \cdot b}(\lambda) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{a, \frac{1}{r} \cdot b}(\lambda + r \cdot e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + be^{it}) dt.$$

Liegt umgekehrt die Mittelwertungleichung für  $u$  vor, so folgt für alle  $a \in \Omega$ ,  $b \in \mathbb{C}^n$  und alle  $\lambda \in \Omega_{a,b}$  sowie  $r > 0$  mit  $\{a + \lambda b + rb \cdot e^{it} : t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \Omega$

$$u_{a,b}(\lambda) = u(a + \lambda b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \lambda b + rb \cdot e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_{a,b}(\lambda + re^{it}) dt.$$

■

### 2.2.3 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge pluri-subharmonischer Funktionen  $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die lokal gleichmäßig gegen eine Funktion  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Dann ist  $u$  pluri-subharmonisch.

Beweis:

Nach Satz 2.1.2 ist  $u$  oberhalb-stetig. Sei  $a \in \Omega$  und  $b \in \mathbb{C}^n$  mit  $\{a + be^{it} : t \in [0, 2\pi]\} \subseteq \Omega$ . Wendet man nun Satz 2.2.2 auf die Folge  $(u_n)$  an, so folgt, daß  $u$  die Mittelwertungleichung erfüllt und somit nach Satz 2.2.2 pluri-subharmonisch ist. ■

### 2.2.4 Lemma

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung. Dann gilt

$$4 \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (a + \lambda b) \cdot b_j \bar{b}_k = (\Delta u_{a,b})(\lambda)$$

für alle  $a \in \Omega$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $a + \lambda b \in \Omega$ .

Beweis:

Seien  $a \in \Omega$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$  und  $g = (g_1, \dots, g_n) : \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{C}^n$ ,  $\lambda \mapsto a + \lambda b$ . Dann folgt  $u_{a,b} = u \circ g$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $a + \lambda b \in \Omega$ . Aus Satz 1.1.3 ergibt sich

$$\frac{\partial(u \circ g)}{\partial x}(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}(\lambda) \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ g \right)(\lambda) + \frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial x}(\lambda) + \left( \frac{\partial u}{\partial y_j} \circ g \right)(\lambda)$$

und mit nochmaliger Anwendung unter Verwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(u \circ g)}{\partial x^2}(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial(u \circ g)}{\partial x} \right)(\lambda) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ g \right)(\lambda) \cdot \frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y_j} \circ g \right)(\lambda) \cdot \frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial x}(\lambda) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \operatorname{Re} g_j}{\partial x}(\lambda) \cdot \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \operatorname{Re} g_k}{\partial x}(\lambda) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(g(\lambda)) + \frac{\partial \operatorname{Im} g_k}{\partial x}(\lambda) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j}(g(\lambda)) \right] \\ &\quad + \frac{\partial \operatorname{Im} g_j}{\partial x}(\lambda) \cdot \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial \operatorname{Re} g_k}{\partial x}(\lambda) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j}(g(\lambda)) + \frac{\partial \operatorname{Im} g_k}{\partial x}(\lambda) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(g(\lambda)) \right] \\ &= \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(a + \lambda b) + \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j}(a + \lambda b) \\ &\quad + \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j}(a + \lambda b) + \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(a + \lambda b). \end{aligned}$$

Ganz analog erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(u \circ g)}{\partial y^2}(\lambda) &= \sum_{j,k=1}^n \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(a + \lambda b) - \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial x_j}(a + \lambda b) \\ &\quad - \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial y_j}(a + \lambda b) + \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_j}(a + \lambda b). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
(\Delta u_{a,b})(\lambda) &= \frac{\partial(u \circ g)}{\partial x^2}(\lambda) + \frac{\partial^2(u \circ g)}{\partial y^2}(\lambda) \\
&= \sum_{j,k=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(a + \lambda b) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(a) \right) \cdot (\operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k + \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k) \\
&\quad + i \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k}(a + \lambda b) - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k}(a + \lambda b) \right) \cdot (i \cdot \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k - i \cdot \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k) \\
&\stackrel{1.4.2}{=} 4 \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a + \lambda b) \cdot b_j \bar{b}_k \\
&\quad - \left[ \sum_{j,k=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}(a + \lambda b) + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k}(a + \lambda b) \right) \cdot (i \cdot \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k - i \cdot \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k) \right. \\
&\quad \left. + i \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k}(a + \lambda b) - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k}(a + \lambda b) \right) \cdot (\operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k + \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k) \right] \\
&= 4 \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a + \lambda b) \cdot b_j \bar{b}_k,
\end{aligned}$$

wobei wir  $b_j \bar{b}_k = \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k + i \cdot \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Re} b_k - i \cdot \operatorname{Re} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k + \operatorname{Im} b_j \cdot \operatorname{Im} b_k$  verwendet haben, die letzte Identität folgt aus dem Satz von Schwarz. ■

### Bemerkung 1

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Abbildung.

(i) Gilt

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) \cdot b_j \bar{b}_k \geq 0 \quad \text{für alle } a \in \Omega, b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n,$$

so ist  $u$  pluri-subharmonisch, und wenn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n,$$

vorliegt, so ist  $u$  pluri-harmonisch, **denn** sind  $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$  und  $\lambda \in \Omega_{a,b}$ , so gilt

$$(\Delta u_{a,b})(\lambda) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a + \lambda b) \cdot b_j \bar{b}_k \stackrel{(\geq)}{=} 0, \text{ d.h. } u_{a,b} \text{ ist (sub)harmonisch.}$$

(ii) Ist  $u$  pluri-(sub)harmonisch, so ist  $u$  auch (sub)harmonisch, **denn** aus

$$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \right) + \frac{i}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} \right) \stackrel{1.4.2}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \stackrel{2.2.4}{\stackrel{(\geq)}}{=} 0 \quad (j, k = 1, \dots, n)$$

$$\text{ergibt sich } \Delta u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} \stackrel{(\geq)}{=} 0.$$

### 2.2.5 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare, pluri-subharmonische Funktion. Dann ist  $dd^c u$  eine positive  $(1,1)$ -Form.



Beweis:

Nach Satz 1.4.3 ist  $dd^c u$  eine  $(1,1)$ -Form mit  $dd^c u = 2i \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ , die gemäß Korollar 1.4.11 reellwertig ist. Aus Lemma 2.2.4 folgt

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) \cdot b_j \bar{b}_k = (\Delta u_{a,b})(0) \geq 0 \quad \text{für alle } a \in \Omega, b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n,$$

also mit Satz 1.4.14 die Behauptung. ■

Das **Main-Approximation-Theorem** für subharmonische Funktionen besagt, daß man sich im wesentlichen auf die Betrachtung von zweimal stetig (sogar beliebig oft) differenzierbaren subharmonischen Funktionen beschränken kann. Faltet man eine pluri-subharmonische Funktion mit dem Standard-Glättungskernel, so erhält man eine beliebig oft differenzierbare, pluri-subharmonische Abbildung. Aus diesem Grund ergibt sich entsprechend ein Approximationstheorem für pluri-subharmonische Funktionen [44]:

### Notation

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und seien  $A, B \subseteq X$ . Dann setzen wir

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

mit der Konvention  $\inf \emptyset := \infty$ . Um die Abhängigkeit von  $d$  zu dokumentieren, schreiben wir auch  $\text{dist}_d$  statt  $\text{dist}$ . Ist  $x \in X$ , so sei  $\text{dist}(x, A) := \text{dist}(\{x\}, A)$ . Die Faltung zweier Funktionen  $f, g$  sei im folgenden mit  $f * g$  bezeichnet.

### 2.2.6 Theorem (Main-Approximation-Theorem)

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine [pluri-]subharmonische Funktion. Sei  $\varepsilon > 0$ . Ist  $\Omega = \mathbb{C}^n$ , so sei  $\Omega_\varepsilon := \mathbb{C}^n$ , andernfalls sei

$$\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\} \neq \emptyset$$

vorausgesetzt. Dann gibt es eine Abbildung  $\chi_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  (den Standard-Glättungskernel) derart, daß  $u_\varepsilon := u * \chi_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebig oft differenzierbare, [pluri-]subharmonische Funktion ist mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(z) = u(z) \quad \text{für jedes } z \in \Omega.$$

Außerdem gilt  $u_{\varepsilon_1} \leq u_{\varepsilon_2}$  für alle  $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ .

Aus dem Main-Approximation-Theorem und Bemerkung 1 erhält man auch, daß pluri-(sub)harmonische Funktionen (sub)harmonisch sind, insbesondere liegen also lokal integrierbare Abbildungen vor. Wir kommen nun auf die Charakterisierung pluri-(sub)harmonischer Funktionen zurück:

### 2.2.7 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine pluri-subharmonische Funktion. Dann gilt

$$(*) \quad \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) \cdot b_j \bar{b}_k \geq 0 \quad \text{für alle } a \in \Omega, b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$$

im distributionellem Sinn, d.h.

$$\int_{\Omega} u(z) \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz \geq 0 \quad \text{für alle } b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$$

und jede beliebig oft differenzierbare Funktion  $\varphi : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  mit kompaktem Träger, d.h.  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$ . Ist  $u$  pluri-harmonisch mit  $-\infty \notin u(\Omega)$ , so gilt die Gleichheit und somit insbesondere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0 \quad \text{für } j, k = 1, \dots, n \text{ im distributionellem Sinn.}$$

Ist umgekehrt  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine lokal integrierbare Abbildung derart, daß (\*) im distributionellem Sinn gilt, so ist  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u * \chi_\varepsilon$  eine pluri-subharmonische Funktion auf  $\Omega$ , die (Lebesgue) fast sicher mit  $u$  übereinstimmt.

Beweis: (Beweisskizze)

„ $\Rightarrow$ “ Ist  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pluri-subharmonisch und zweimal stetig differenzierbar, so folgt (\*) aus Lemma 2.2.4. Der allgemeine Fall ergibt sich nun aus dem Main-Approximation-Theorem:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(z) \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz &= \sum_{j,k=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u * \chi_\varepsilon)(z) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz \\ &= \sum_{j,k=1}^n \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi(z) \cdot \frac{\partial^2 (u * \chi_\varepsilon)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz \geq 0. \end{aligned}$$

Wendet man dieses auf  $u$  und  $-u$  an, wenn  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pluri-harmonisch ist, so ergibt sich die Gleichheit in (\*). Seien  $j, k \in \{1, \dots, n\}$  und  $b_j = b_k = 1$  sowie  $b_\ell = 0$  für alle  $\ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j, k\}$ . Dann folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_k \partial \bar{z}_j} = 0 \quad (\text{im distributionellem Sinn}).$$

Zusammen mit 1.4.2 erhält man daraus  $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 0$ .

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  lokal integrierbar und es gelte (\*) im distributionellem Sinn. Ist  $j \in \{1, \dots, n\}$  und wendet man (\*) an mit  $b_j = 1$  und  $b_k = 0$  für alle  $k \neq j$ , so folgt  $\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \geq 0$  im distributionellem Sinn. Aus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \stackrel{1.4.2}{=} \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \right) + \frac{i}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} \right), \quad j, k = 1, \dots, n$$

ergibt sich also  $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} \geq 0$  für  $j = 1, \dots, n$ , insbesondere  $\Delta u \geq 0$  im distributionellem Sinn. Aus der Potentialtheorie ist bekannt, daß  $w := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u * \chi_\varepsilon$  existiert und subharmonisch auf  $\Omega$  ist, außerdem stimmen  $w$  und  $u$  (Lebesgue) fast sicher überein. Entsprechend Satz 2.2.3 genügt es zu zeigen, daß  $u_\varepsilon := u * \chi_\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , pluri-subharmonisch ist (auf  $\Omega_\varepsilon$ ). Seien dazu  $\varepsilon^* > 0$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$  und  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_{\varepsilon^*}) \subseteq C_0^\infty(\Omega)$  mit  $\varphi \geq 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \inf_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega} \varphi(z) \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz &= \inf_{\varepsilon > 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(z) \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon(z) \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz \\ &= \int_{\Omega} u(z) \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot b_j \bar{b}_k \, dz \geq 0, \end{aligned}$$

also aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen  $\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 u_{\varepsilon^*}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) \cdot b_j \bar{b}_k \geq 0$  für alle  $a \in \Omega$ . Aus Bemerkung 1 folgt, daß  $u_{\varepsilon^*}$  pluri-subharmonisch ist. ■

## 2.3. Wichtige Beispiele und Anwendungen

Der Realteil (und Imaginärteil) einer holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}^n$  ist eine pluri-harmonische Funktion (vgl. Satz 0.2.3). Wie im Fall  $n = 1$  folgt dies aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

### 2.3.1 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Abbildung. Dann ist  $u := \operatorname{Re} f : U \rightarrow \mathbb{R}$  pluri-harmonisch.

Beweis:

Sei  $w := \operatorname{Im} f$ , also  $f = u + iw$ . Aufgrund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (1.1.6) und dem Satz von Schwarz gilt für  $j, k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} &\stackrel{1.4.2}{=} \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} \right) + \frac{i}{4} \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial x_k} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) + \frac{i}{4} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial y_j} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial y_k} - \frac{\partial}{\partial y_k} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + \frac{i}{4} \cdot \left( -\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial w}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) = 0, \end{aligned}$$

so daß die Behauptung aus Satz 2.2.7 folgt. ■

Die Hintereinanderausführung einer pluri-subharmonischen Funktion und einer holomorphen Abbildung ist eine pluri-subharmonische Funktion. Setzt man zunächst voraus, daß die betrachtete pluri-subharmonische Funktion zweimal stetig differenzierbar ist, so erhält man dies wie im eindimensionalen Fall. Das Main-Approximation-Theorem liefert dann die Aussage für beliebige pluri-subharmonische Funktionen. Wir formulieren dies als

### 2.3.2 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine pluri-subharmonische Abbildung. Sei  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $U$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^m$  sowie  $f : U \rightarrow \Omega$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$u \circ f : U \rightarrow [-\infty, \infty[$$

pluri-subharmonisch.

Eine auf einer komplexen Mannigfaltigkeit definierte Abbildung heißt pluri-(sub)harmonisch, wenn sie durch das lokale Zurückziehen mittels Karten eine pluri-(sub)harmonische Funktion liefert. Man kann dies sogar noch allgemeiner für auf sogenannten komplexen Räumen definierte Abbildungen einführen [27, 29].

### 2.3.3 Definition (Pluri-(sub)harmonische Funktion auf Mannigfaltigkeiten)

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine oberhalb-stetige Abbildung  $u : M \rightarrow [-\infty, \infty[$  heißt **pluri-(sub)harmonisch**, falls

$$u \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow [-\infty, \infty[$$

für jede (komplexe) Karte  $(U, \varphi)$  pluri-(sub)harmonisch ist.

Da die Kartenwechselabbildungen holomorph sind, ergibt sich aus Satz 2.3.2 die nachfolgende

**Bemerkung 1**

In Definition 2.3.3 genügt es zu fordern, daß es für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $(U, \varphi)$  mit  $x \in U$  gibt derart, daß  $u \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow [-\infty, \infty[$  pluri-subharmonisch ist.

**2.3.4 Satz**

Seien  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten, sei  $u : N \rightarrow [-\infty, \infty[$  pluri-subharmonisch und sei  $f : M \rightarrow N$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung. Dann ist  $u \circ f : M \rightarrow [-\infty, \infty[$  pluri-subharmonisch.

Beweis:

Sei  $x \in M$  und sei  $(V, \psi)$  eine Karte für  $N$  mit  $f(x) \in V$ . Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte für  $M$  mit  $x \in U$  und  $U \subseteq f^{-1}(V)$ . Dann ist  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  holomorph und nicht-konstant, außerdem ist  $u \circ \psi^{-1} : \psi(V) \rightarrow [-\infty, \infty[$  pluri-subharmonisch. Aus Satz 2.3.2 folgt, daß  $(u \circ f) \circ \varphi^{-1} = (u \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \rightarrow [-\infty, \infty[$  pluri-subharmonisch ist. Damit ist  $u \circ f$  pluri-subharmonisch. ■

Ist  $\Omega$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Abbildung mit  $f \neq 0$ , so ist

$$u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[, \quad z \mapsto \log |f(z)|$$

subharmonisch und auf  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$  sogar harmonisch, denn lokal (d.h. in geeigneten Umgebungen von Punkten aus  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$ ) ist  $u$  gegeben durch  $\operatorname{Re}(\log f)$  (mit einem holomorphen Zweig der Logarithmusfunktion), so daß die Aussage aus Satz 2.3.1 folgt. Ist  $\Omega$  allgemeiner eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$ , so folgt daraus, daß  $u$  pluri-subharmonisch und auf  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$  sogar pluri-harmonisch ist. Damit ergibt sich

**2.3.5 Korollar**

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und sei  $f : M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine holomorphe Abbildung. Dann gilt

$$dd^c \log |f| = 0.$$

Beweis:

Sei  $(U, \varphi)$  eine komplexe Karte von  $M$ . Dann ist  $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eine holomorphe Abbildung. Aus dem Vorangehenden folgt, daß  $\log |f \circ \varphi^{-1}| : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  pluri-harmonisch ist. Es folgt  $dd^c(\log |f| \circ \varphi^{-1}) = dd^c(\log |f \circ \varphi^{-1}|) = 0$  aus Satz 2.2.7 und somit  $dd^c \log |f| = 0$ . ■

Wir betrachten nun den Fall, daß  $f$  Werte im  $\mathbb{C}^m$  annimmt. Benötigt wird dazu noch der folgende

**2.3.6 Satz**

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u_1, u_2 : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  Abbildungen derart, daß  $\log u_1, \log u_2$  pluri-subharmonisch sind. Dann ist  $\log(u_1 + u_2)$  pluri-subharmonisch.

Beweis:

Indem man für  $a \in \Omega, b \in \mathbb{C}^n$  die Abbildungen  $\lambda \mapsto u_1(a + \lambda b), \lambda \mapsto u_2(a + \lambda b)$  betrachtet, genügt es die entsprechende Aussage für subharmonische statt pluri-subharmonische Funktionen auf  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  zu zeigen. Dies folgt beispielsweise aus [58, Thm. 2.6.4]. ■

### 2.3.7 Beispiel

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$ . Sei  $m \in \mathbb{N}$  und sei  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^m$  eine holomorphe Abbildung mit  $f \neq 0$ . Dann ist

$$u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty], \quad z \mapsto \log \|f(z)\|$$

eine pluri-subharmonische Funktion, die im allgemeinen (für  $m \geq 2$ ) auf  $\Omega \setminus f^{-1}(0)$  nicht pluri-harmonisch ist.

Beweis:

Sei  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Dann sind  $f_1, \dots, f_m : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  holomorphe Abbildungen. Sei

$$u_j : \Omega \rightarrow [0, \infty[, \quad z \mapsto |f_j(z)|^2 \quad j = 1, \dots, m.$$

Dann folgt aus  $\log u_j(z) = \log(|f_j(z)|^2) = 2 \cdot \log |f_j(z)|$ ,  $z \in \Omega$ , daß  $\log u_j$  pluri-subharmonisch ist für  $j = 1, \dots, m$ . Aus Satz 2.3.6 folgt, daß  $\log(u_1 + \dots + u_m)$ , also auch  $\frac{1}{2} \cdot \log(u_1 + \dots + u_m)$  pluri-subharmonisch ist. Nun gilt für  $z \in \Omega$

$$u(z) = \log \|f(z)\| = \log \sqrt{|f_1(z)|^2 + \dots + |f_m(z)|^2} = \frac{1}{2} \cdot \log(u_1(z) + \dots + u_m(z)),$$

so daß  $u$  pluri-subharmonisch ist. Sei nun  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $(z_1, z_2) \mapsto (1, z_1, z_2)$ . Dann ist  $f$  eine holomorphe Abbildung mit  $f(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}^2$ . Setze  $a := (0, 0)$  und  $b := (2, 2)$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} u(a) = \log \|f(a)\| &= 0 < 3 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log \sqrt{1+4+4} \, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log \|(1, 2 \cdot e^{it}, 2 \cdot e^{it})\| \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log \|f(2e^{it}, 2e^{it})\| \, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \log \|f(a + e^{it}b)\| \, dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} u(a + be^{it}) \, dt, \end{aligned}$$

d.h.  $u$  ist nicht pluri-harmonisch. ■

Bekanntlich ist eine harmonische Funktion  $u$  lokal stets von der Form  $u = \log |w|$  für eine holomorphe Abbildung  $w \neq 0$ . Entsprechendes gilt für pluri-harmonische Funktionen:

### 2.3.8 Satz

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{C}^n$  und sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  derart, daß  $a + (b-a) \cdot t \in \Omega$  für alle  $t \in [0, 1]$ ,  $b \in \Omega$ . Sei  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine pluri-harmonische Funktion. Dann existiert eine holomorphe Abbildung  $w : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $u = \log |w|$ .

Beweis:

Aus Proposition 2.2.13 in [44] folgt, daß es eine pluri-harmonische Funktion  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  gibt so, daß  $f := u + iv$  eine holomorphe Abbildung ist. Damit ist  $w := \exp \circ f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph mit  $w(z) \neq 0$  für alle  $z \in U$ . Es gilt  $\log |w| = \operatorname{Re} f = u$ . ■

Wir kommen nun wieder auf das eingangs betrachtete Problem zurück:

### 2.3.9 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u$  eine pluri-subharmonische Funktion auf  $\Omega$ . Dann ist  $dd^c u$  ein positives  $(1, 1)$ -Current und es gilt  $dd^c u \in \mathfrak{D}_{1,1}^0(\Omega)$ , d.h.  $u$  ist ein  $(1, 1)$ -Current der Ordnung 0.

Beweis:

Ist  $u$  zweimal stetig differenzierbar, so ist  $dd^c u$  nach Satz 2.2.5 eine positive  $(1, 1)$ -Form, also als Current aufgefaßt ein positives  $(1, 1)$ -Current. Sei nun  $u$  nicht als zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt.  $dd^c u$  ist also im distributionellem Sinn aufzufassen, d.h. es ist

$$\langle dd^c u, \omega \rangle := \langle u, dd^c \omega \rangle = \int u \wedge dd^c \omega \geq 0 \quad \text{für jede positive Testform } \omega \in \mathfrak{D}^{n-1, n-1}(\Omega)$$

zu zeigen. Sei also  $\omega \in \mathfrak{D}^{n-1, n-1}(\Omega)$  eine positive  $(n-1, n-1)$ -Testform in der Darstellung

$$\omega(a) = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{j,k=1}^n \omega_{j,k}(a) \cdot d_a z^{(1, \dots, \overset{j}{0}, \dots, 1)} \wedge d_a \bar{z}^{(1, \dots, \overset{k}{0}, \dots, 1)}, \quad a \in \Omega,$$

mit  $C_0^\infty$ -Koeffizientenfunktionen  $\omega_{j,k} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $j, k = 1, \dots, n$ . Es folgt

$$\begin{aligned} dd^c \omega &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{j,k=1}^n dd^c \omega_{j,k} \cdot dz^{(1, \dots, \overset{j}{0}, \dots, 1)} \wedge d\bar{z}^{(1, \dots, \overset{k}{0}, \dots, 1)} \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \cdot 2i \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \omega_{j,k}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \cdot dz_j \wedge d\bar{z}_k \wedge dz^{(1, \dots, \overset{j}{0}, \dots, 1)} \wedge d\bar{z}^{(1, \dots, \overset{k}{0}, \dots, 1)} \\ &= 4 \cdot \left(\frac{i}{2}\right)^n \cdot \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 \omega_{j,k}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \cdot (-1)^{n-1+k+j} \cdot dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n. \end{aligned}$$

Für jedes  $\varepsilon > 0$  sei  $u_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  aus dem Main-Approximation-Theorem (2.2.6). Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle dd^c u, \omega \rangle &= \int u \wedge dd^c \omega = 4 \cdot \sum_{j,k=1}^n (-1)^{n-1+k+j} \cdot \int u(z) \cdot \frac{\partial^2 \omega_{j,k}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) dz \\ &\stackrel{2.2.6}{=} 4 \cdot \sum_{j,k=1}^n (-1)^{n-1+k+j} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int u_\varepsilon(z) \cdot \frac{\partial^2 \omega_{j,k}}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) dz \\ &= 4 \cdot \sum_{j,k=1}^n (-1)^{n-1+k+j} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \cdot \omega_{j,k}(z) dz \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dd^c u_\varepsilon \wedge \omega \geq 0, \end{aligned}$$

da  $dd^c u_\varepsilon$  und damit auch  $dd^c u_\varepsilon \wedge \omega$  für jedes  $\varepsilon > 0$  eine positive Differentialform ist. Man kann ganz allgemein zeigen, daß positive Currents der Ordnung 0 sind [44, Prop.3.3.4], d.h. es gilt  $dd^c u \in \mathfrak{D}_{1,1}^0(\Omega)$ . ■

### 2.3.10 Satz

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  sowie  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$  eine pluri-subharmonische Funktion. Dann ist das Current  $T := dd^c u$  geschlossen.

Beweis:

Für jede Testform  $\omega$  gilt

$$|\langle dT, \omega \rangle| = |\langle T, d\omega \rangle| = |\langle dd^c u, d\omega \rangle| = |\langle u, dd^c(d\omega) \rangle| \stackrel{\text{Bem. 1 (Seite 26)}}{=} |\langle u, d^c(d^2\omega) \rangle| \stackrel{1.3.7}{=} 0.$$

■

Für eine auf  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$  definierte pluri-subharmonische Funktion  $u$  ist  $dd^c u$  ein positives, geschlossenes  $(1, 1)$ -Current. Ist umgekehrt ein positives, geschlossenes  $(1, 1)$ -Current  $T$  gegeben, so folgt aus dem  $\partial\bar{\partial}$ -Poincaré Lemma [30], daß eine pluri-subharmonische Funktion  $u$  existiert mit  $T = dd^c u$ .  $u$  ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt und wird auch als (Pluri-) Potential bezeichnet. Im nächsten Kapitel werden wir anstatt  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , den komplexen projektiven Raum  $\mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , betrachten. Durch ein lokales Vorgehen (vergleiche etwa Theorem 3.3.8) kann man entsprechend auf eine Äquivalenz von (Pluri-) Potentialen und positiven, geschlossenen (auf  $\mathbb{P}^k$  definierten)  $(1, 1)$ -Currents schließen. Wir werden im wesentlichen nur die in diesem Kapitel betrachtete Richtung benötigen.

# Kapitel 3.

## Pluri-Potentialtheorie

Als Verallgemeinerung der Iteration meromorpher (also rationaler) Funktionen (auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ ) hat sich neben der Betrachtung ganzer transzendenter Funktionen die Iteration holomorpher Selbstabbildungen auf den **komplexen projektiven Räumen**  $\mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , hervor getan. Dies liegt zum einen an der Kompaktheit des zugrundeliegenden Raumes, zum anderen an der Existenz einer sogenannten **Liftung**, d.h. einer homogenen Polynomfunktion in  $k+1$  Veränderlichen, die eine gute Darstellung der holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^k$  liefert. Es gilt  $\mathbb{P}^1 \cong \widehat{\mathbb{C}}$ , außerdem lassen sich die holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^1$  mit den rationalen Funktionen auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  identifizieren. In Kapitel 2 haben wir Zusammenhänge zwischen pluri-subharmonischen Funktionen  $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ , dem Operator  $dd^c$  und (positiven)  $(1, 1)$ -Currents (auf  $\Omega$ ) vorgestellt. In diesem Kapitel betrachten wir statt  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die komplexen projektiven Räume.

### 3.1. Der komplexe projektive Raum

Die Darstellung einer komplexen Zahl mittels Quotient zweier komplexer Zahlen ist nicht eindeutig, dies motiviert die folgende

#### 3.1.1 Definition (Komplexer Projektiver Raum)

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $\mathbb{P}^k$  die Menge aller Äquivalenzklassen  $[z_0, \dots, z_k]$  von Elementen  $(z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  bezüglich der Äquivalenzrelation

$$[z_0, \dots, z_k] \sim [z'_0, \dots, z'_k] \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : (z_0, \dots, z_k) = \lambda \cdot (z'_0, \dots, z'_k).$$

$\mathbb{P}^k$  wird als  $k$ -dimensionaler **komplexer projektiver Raum** bezeichnet. Man sagt auch, daß  $z_0, \dots, z_k$  die **homogenen Koordinaten** von  $[z_0, \dots, z_k]$  sind.

#### Bemerkung 1

Man kann die Riemannsche Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  mit  $\mathbb{P}^1$  identifizieren, vermöge

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad [p, q] \mapsto \frac{p}{q}.$$

$\mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , sind kompakte und zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeiten der Dimension  $k$ , wenn man die folgende komplexe Struktur zugrunde legt [27]:

#### 3.1.2 Die komplexe Struktur von $\mathbb{P}^k$

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Wir versehen  $\mathbb{P}^k$  mit der Quotiententopologie, d.h. mit der feinsten Topologie, für die die Projektionsabbildung

$$\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, \quad (z_0, \dots, z_k) \mapsto [z_0, \dots, z_k]$$

stetig ist, d.h. eine Menge  $U \subseteq \mathbb{P}^k$  ist genau dann offen, wenn  $\pi^{-1}(U)$  offen ist. Für jede offene Teilmenge  $V$  von  $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  gilt

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}} (\lambda \cdot V),$$

d.h.  $\pi(V)$  ist offen. Damit ist  $\pi$  eine offene Abbildung. Sei  $[z] \in \mathbb{P}^k$  und seien  $U_n := \pi(\mathbb{B}(z, \frac{1}{n}))$  und  $A_n := \pi(\overline{\mathbb{B}}(z, \frac{1}{n}))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  (dabei ist  $\mathbb{B}(z, r)$  die euklidische Kugel um  $z$  mit Radius  $r > 0$ ). Da  $\pi$  offen und stetig ist, folgt aus  $[z] \in U_n \subseteq A_n$ , daß  $A_n$  eine abgeschlossene Umgebung von  $[z]$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $[w] \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Dann existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $w_n \in \mathbb{B}(z, \frac{1}{n})$  mit  $[w_n] = [w]$ . Aus  $w_n \rightarrow z$  und der Stetigkeit von  $\pi$  folgt  $[w] = [z]$ , d.h. der Schnitt aller abgeschlossenen Umgebungen von  $[z]$  ist  $\{[z]\}$ . Damit ist  $\mathbb{P}^k$  ein Hausdorff-Raum. Außerdem ist

$$\pi|_S : S \rightarrow \mathbb{P}^k \quad \text{mit } S := \{z \in \mathbb{C}^{k+1} : \|z\| = 1\}$$

surjektiv,  $\mathbb{P}^k$  also kompakt. Zudem ist  $\mathbb{P}^k$  zusammenhängend, besitzt eine abzählbare Basis und ist nach dem Satz von Urysohn [70] metrisierbar. Die Mengen

$$U_j := \pi(\{(z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} : z_j \neq 0\}) = \{[z_0, \dots, z_k] \in \mathbb{P}^k : z_j \neq 0\} \quad j = 0, \dots, k$$

bilden eine offene Überdeckung von  $\mathbb{P}^k$ . Betrachte für  $j = 0, \dots, k$  die Abbildung

$$s_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, \quad [z_0, \dots, z_k] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j} \right),$$

sowie  $V_j := s_j(U_j)$ . Sei  $\widehat{s}_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$  die Abbildung, die aus  $s_j$  hervorgeht, wenn man im Bild die  $j+1$ ste Komponente entfernt („streichen der 1“), und sei  $\widehat{V}_j := \widehat{s}_j(U_j)$ . Für  $j = 0, \dots, k$  und alle  $[z_0, \dots, z_k] \in U_j$  gilt

$$\pi(s_j([z_0, \dots, z_k])) = \left[ \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j} \right] = [z_0, \dots, z_k],$$

also  $\pi \circ s_j = \text{id}_{U_j}$  ( $s_j$  ist eine sogenannte local section von  $\pi$ ). Damit ist  $s_j : U_j \rightarrow V_j$  bijektiv und  $s_j^{-1} = \pi|_{V_j}$ , außerdem ist  $s_j$  stetig. Daraus folgt, daß

$$\widehat{s}_j : U_j \rightarrow \widehat{V}_j \subseteq \mathbb{C}^k$$

ein Homöomorphismus ist. Seien nun  $i, j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $i \neq j$ . Dann gilt für  $z_i := 1$  und alle  $z = (z_0, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_k) \in \widehat{s}_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^k \setminus \{0\}$

$$\widehat{s}_j(\widehat{s}_i^{-1}(z)) = \widehat{s}_j([z_0, \dots, z_{i-1}, 1, z_{i+1}, \dots, z_k]) = \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j} \right),$$

d.h. die Kartenwechselabbildung  $\widehat{s}_j \circ \widehat{s}_i^{-1} : \widehat{s}_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \widehat{s}_j(U_i \cap U_j)$  ist biholomorph und  $\mathbb{P}^k$  also eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $k$ .

### Bemerkung 2

- (i) Die Abbildung  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  aus Bemerkung 1 ist ein Homöomorphismus und  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$  ist eine holomorphe Abbildung.
- (ii)  $s_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  ist eine injektive und holomorphe Abbildung, **denn** für alle  $z = (z_0, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_k) \in \widehat{V}_j$  gilt  $(s_j \circ \widehat{s}_j^{-1})(z) = (z_0, \dots, z_{j-1}, 1, z_{j+1}, \dots, z_k)$ , d.h.  $s_j \circ \widehat{s}_j^{-1}$  ist holomorph.



## 3.2. Die Liftung

Betrachtet man eine holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ , so liegt es nahe nach einer Darstellung

$$f = [F_0, \dots, F_k], \quad \text{genauer} \quad f([z]) = [F_0(z), \dots, F_k(z)], \quad z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\},$$

mit Abbildungen  $F_0, \dots, F_k : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  zu suchen. Natürlich ist eine solche Darstellung stets möglich, die Funktionen können dabei sogar als homogene Polynomfunktionen (in  $k+1$  Veränderlichen) gewählt werden. Die bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmte homogene Polynomfunktion  $F := (F_0, \dots, F_k)$  wird als **Liftung** bezeichnet:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^k \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^k \end{array} \quad \begin{array}{l} \pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, \\ (z_0, \dots, z_k) \mapsto [z_0, \dots, z_k] \\ F : \text{homogene Polynomfunktion} \end{array}$$

Abbildung 3.1.: Die Liftung einer holomorphen Funktion  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$

### 3.2.1 Definition (Homogene Polynomfunktion)

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Eine Abbildung  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine **Polynomfunktion** (in  $n$  Veränderlichen), falls es eine Familie  $a_\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , gibt mit  $a_\alpha = 0$  für fast alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ , und

$$P(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_\alpha \cdot z^\alpha \quad \text{mit} \quad z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,$$

für alle  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ . Der **Grad** von  $P$  - für  $P \neq 0$  - wird dann definiert durch

$$\text{grad } P := \max\{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n : \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, a_\alpha \neq 0\}.$$

$P$  heißt **homogen**, falls alle auftretenden Terme den gleichen Grad haben, d.h. falls ein  $d \in \mathbb{N}_0$  existiert mit

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \cdot z^\alpha, \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n, \text{ wobei } |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Ist  $m \in \mathbb{N}$ , so wird jede Abbildung  $P = (P_1, \dots, P_m) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  als Polynomfunktion bezeichnet, falls sämtliche Komponentenfunktionen  $P_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , Polynomfunktionen sind. Der **Grad** von  $P$  ist dann gegeben durch

$$\text{grad } P := \max_{j=1}^m \text{grad } P_j.$$

$P$  heißt **homogen**, falls  $\text{grad } P = \text{grad } P_j$  für  $j = 1, \dots, m$  vorliegt. Die Restriktionen von Polynomfunktionen werden wieder als Polynomfunktionen bezeichnet.

#### Bemerkung 1

Eine Polynomfunktion  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  ist genau dann homogen und vom Grad  $d \in \mathbb{N}_0$ , wenn

$$P(c \cdot z) = c^d \cdot P(z) \quad \text{für alle } c \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n.$$

Insbesondere gilt  $P(0) = 0$  für jede homogene Polynomfunktion  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ .

Beweis:

Daß aus der Homogenität von  $P$  die angegebene Identität folgt, ist klar. Die andere Richtung ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung [36][Thm.2.4.5] einer jeden Komponentenfunktion von  $P$ , vergleiche auch [27, Prop. 2.1]. ■

### Bemerkung 2

Ist  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  eine homogene Polynomfunktion und  $d := \text{grad } P$ , so gilt

$$\|z\|^d \cdot \inf_{\|z\|=1} \|P(z)\| \leq \|P(z)\| \leq \|z\|^d \cdot \sup_{\|z\|=1} \|P(z)\| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n,$$

denn für  $z \neq 0$  gilt

$$\|z\|^d \cdot \inf_{\|z\|=1} \|P(z)\| \leq \|z\|^d \cdot \|P\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\| = \|P(z)\| = \|z\|^d \cdot \|P\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\| \leq \|z\|^d \cdot \sup_{\|z\|=1} \|P(z)\|.$$

Da die Hintereinanderausführung und das Produkt von Polynomfunktionen wieder Polynomfunktionen sind, ergibt sich sofort der folgende

### 3.2.2 Satz

Die Hintereinanderausführung homogener Polynomfunktionen (von  $\mathbb{C}^n$  nach  $\mathbb{C}^n$ ) und das Produkt zweier homogener Polynomfunktionen (von  $\mathbb{C}^n$  nach  $\mathbb{C}$ ) ist eine homogene Polynomfunktion. Der Grad der resultierenden Polynomfunktion ist das Produkt bzw. die Summe der Grade.

Wir werden später eine Familie von (homogenen) Polynomfunktionen betrachten, die meßbar vom Parameter abhängt:

### 3.2.3 Satz

Seien  $n, m \in \mathbb{N}$  und sei  $I$  ein meßbarer Raum. Für jedes  $i \in I$  sei  $P_i : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  eine Polynomfunktion in der Darstellung

$$P_i(z) = \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_{i,\alpha}^{(1)} \cdot z^\alpha, \dots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} a_{i,\alpha}^{(m)} \cdot z^\alpha \right) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^n,$$

derart, daß  $i \mapsto P_i(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}^n$  meßbar ist. Dann ist  $i \mapsto a_{i,\alpha}^{(\ell)}$  für  $\ell = 1, \dots, m$  und alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$  meßbar.

Beweis:

Aus Lemma B.1.1 folgt, daß die Abbildung  $P : I \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m, (i, z) \mapsto P_i(z)$  meßbar ist. Ist  $j \in \{1, \dots, n\}$  und  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  sowie  $x_j := \text{Re } z_j, y_j := \text{Im } z_j$ , so ist

$$i^* \mapsto \frac{\partial P_{i^*}}{\partial x_j}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(i^*, z_1, \dots, z_{j-1}, (x_j + \frac{1}{n}) + i \cdot y_j, z_{j+1}, \dots, z_n) - P(i^*, z)}{\frac{1}{n}}, \quad i^* \in I,$$

meßbar, entsprechendes gilt für  $i \mapsto \frac{\partial P_i}{\partial y_j}(z)$ . Aufgrund der Definition der Wirtinger Ableitung folgt die Meßbarkeit von

$$\begin{aligned} i \mapsto \frac{\partial^{|\alpha|} P_i}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}(z) &= \sum_{\beta \geq \alpha} \frac{\beta!}{(\beta - \alpha)!} \cdot (a_{i,\beta}^{(1)} \cdot z^{\beta - \alpha}, \dots, a_{i,\beta}^{(m)} \cdot z^{\beta - \alpha}) \\ &= \alpha! \cdot (a_{i,\alpha}^{(1)}, \dots, a_{i,\alpha}^{(m)}) \end{aligned}$$

für jedes  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  und  $z = 0 \in \mathbb{C}^n$ , wobei  $\beta! := \beta_1! \dots \beta_n!$  (für  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ) und  $\beta \geq \alpha$  genau dann, wenn  $\beta_j \geq \alpha_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . ■

Die nachfolgende Aussage bleibt auch für Polynomfunktionen in mehr als einer Veränderlichen gültig:

**3.2.4 Lemma**

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $d_n \in \mathbb{N}$  und für  $j = 0, \dots, d_n$  sei  $a_{n,j} \in \mathbb{C}$  sowie

$$P_n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \sum_{j=0}^{d_n} a_{n,j} \cdot z^j$$

mit  $P_n \neq 0$  und  $\text{grad } P_n = d_n$ .  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiere gegen einen Punkt  $d \in \mathbb{N}$  und für  $j = 0, \dots, d$  konvergiere  $(a_{n,j})_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen Punkt  $a_j \in \mathbb{C}$ . Dann konvergiert  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen

$$P : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \sum_{j=0}^d a_j \cdot z^j.$$

Beweis:

Es gibt ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $d_n = d$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ . Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{C}$  und  $\varepsilon > 0$ . Setze  $M := 1 + \sup K$  und sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  mit  $|a_{n,j} - a_j| < \frac{\varepsilon}{d \cdot M^d}$  für  $j = 0, \dots, d$ . Dann folgt

$$|P_n(z) - P(z)| \leq \sum_{j=0}^d |a_{n,j} - a_j| \cdot |z|^j < \sum_{j=0}^d \frac{\varepsilon}{d \cdot M^d} \cdot M^j \leq \varepsilon \quad \text{für jedes } z \in K.$$

■

Wir geben nun einen elementaren Beweis dafür, daß holomorphe Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^1$  stets durch homogene Polynomfunktionen beschrieben werden können. Wir zeigen auch, daß die holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^1$  genau den rationalen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  entsprechen. Benötigt wird dazu noch das folgende Lemma, wobei wir die im Beweis angegebene Konstruktion später häufiger verwenden werden:

**3.2.5 Lemma**

Sei  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine rationale Funktion und  $d := \text{grad } f \geq 1$ . Sei  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, [p, q] \mapsto \frac{p}{q}$  und

$$\tilde{f} := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Dann existieren homogene Polynomfunktionen  $F_0, F_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  mit  $\text{grad } F_0 = \text{grad } F_1 = d$  derart, daß  $F_0$  und  $F_1$  keine gemeinsamen Nullstellen in  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  haben, und

$$\tilde{f}([z]) = [F_0(z), F_1(z)] \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}.$$

Beweis:

Seien  $a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_d \in \mathbb{C}$  mit  $(a_d, b_d) \neq (0, 0)$  und seien

$$P(z) := \sum_{i=0}^d a_i \cdot z^i, \quad Q(z) := \sum_{i=0}^d b_i \cdot z^i, \quad z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

teilerfremd mit  $f = \frac{P}{Q}$ . Setze für alle  $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$

$$F_0(z) := \sum_{i=0}^d a_i \cdot z_0^i z_1^{d-i}, \quad F_1(z) := \sum_{i=0}^d b_i \cdot z_0^i z_1^{d-i}.$$

Sei  $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . Sind  $z_0, z_1 \neq 0$ , so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{f}([z]) &= \tilde{f}\left(\left[\frac{z_0}{z_1}, 1\right]\right) = (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)\left(\left[\frac{z_0}{z_1}, 1\right]\right) = \varphi^{-1}\left(f\left(\frac{z_0}{z_1}\right)\right) = \varphi^{-1}\left(\frac{P\left(\frac{z_0}{z_1}\right)}{Q\left(\frac{z_0}{z_1}\right)}\right) \\ &= \left[P\left(\frac{z_0}{z_1}\right), Q\left(\frac{z_0}{z_1}\right)\right] = \left[\sum_{i=0}^d a_i \cdot \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^i, \sum_{i=0}^d b_i \cdot \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^i\right] \\ &= \left[z_1^d \cdot \sum_{i=0}^d a_i \cdot \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^i, z_1^d \cdot \sum_{i=0}^d b_i \cdot \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^i\right] = \left[\sum_{i=0}^d a_i \cdot z_0^i z_1^{d-i}, \sum_{i=0}^d b_i \cdot z_0^i z_1^{d-i}\right] = [F_0(z), F_1(z)]. \end{aligned}$$

Für  $z_0 = 0$  oder  $z_1 = 0$  ergibt sich obige Gleichung ganz analog, wobei man  $f(\infty) = \frac{a_d}{b_d}$  berücksichtigt.

**Annahme:** Es existiert ein  $z = (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  mit  $F_0(z) = F_1(z) = 0$ .

Gilt  $z_1 = 0$ , so folgt  $a_d \cdot z_0^d = F_0(z) = 0 = F_1(z) = b_d \cdot z_0^d$  und aus  $z_0 \neq 0$  damit  $a_d = b_d = 0$ .  $\zeta$   
Es gelte  $z_1 \neq 0$ . Dann folgt

$$P\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = \sum_{i=0}^d a_i \cdot \left(\frac{z_0}{z_1}\right)^i = z_1^{-d} \cdot F_0(z_0, z_1) = 0, \quad \text{und analog } Q\left(\frac{z_0}{z_1}\right) = 0.$$

Damit haben  $P$  und  $Q$  eine gemeinsame Nullstelle.  $\zeta$

■

### 3.2.6 Satz

Vermöge dem Homöomorphismus

$$\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad [p, q] \mapsto \frac{p}{q}$$

sind die holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^1$  genau die rationalen Funktionen auf der Riemannschen Zahlenkugel.

Beweis:

Die Aussage ist für konstante Funktionen klar, so daß wir uns im folgenden auf die Betrachtung nicht-konstanter Funktionen beschränken können.

„ $\Rightarrow$ “ Sei  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine nicht-konstante holomorphe Funktion und setze

$$\tilde{f} := \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}.$$

Als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist  $\tilde{f}$  stetig. Setze  $N := \tilde{f}^{-1}(\infty)$ . Wäre  $N$  nicht diskret, so wäre  $f$  auf einer nicht diskreten Menge konstant und mit dem Identitätssatz [68] folgt damit, daß dann  $f$  insgesamt konstant wäre.  $\zeta$  Sei  $w \in \mathbb{C} \setminus N$ . Wähle eine Umgebung  $U$  von  $w$  in  $\mathbb{C}$  mit  $\tilde{f}(z) \neq \infty$  für alle  $z \in U$ . Setze  $U_1 := \varphi^{-1}(U)$ ,  $U_2 := \varphi^{-1}(\tilde{f}(U))$ . Da  $f$  eine offene Abbildung ist, sind  $U_1$  und  $U_2$  offene Teilmengen von  $\mathbb{P}^1$ . Betrachtet man nun die komplexen Karten

$$(U_1, \varphi|_{U_1}), (U_2, \varphi|_{U_2})$$

von  $\mathbb{P}^1$ . Es gilt  $\varphi(U_1) = U$  und  $\varphi(U_2) = \tilde{f}(U)$  und mit der Holomorphie von  $f$  ergibt sich, daß  $\tilde{f}|_U = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}|_U$  holomorph ist. Aus der Stetigkeit von  $\tilde{f}$  folgt, daß nur Polstellen vorliegen und  $\tilde{f}$  ist auf ganz  $\widehat{\mathbb{C}}$  meromorph, also eine rationale Funktion.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine nicht-konstante rationale Funktion, d.h.  $\text{grad } f \geq 1$ . Setze

$$\tilde{f} := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Nach Lemma 3.2.5 existieren homogene Polynomfunktionen  $F_0, F_1 : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , die keine gemeinsamen Nullstellen in  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  haben, mit  $\tilde{f}([z]) = [F_0(z), F_1(z)]$  für alle  $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . Seien  $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)$  komplexe Karten von  $\mathbb{P}^1$  mit  $\tilde{f}(U_1) \subseteq U_2$ .  $\varphi_1, \varphi_2$  sind geeignete Restriktionen der in 3.1.2 eingeführten komplexen Karten von  $\mathbb{P}^1$ , o.B.d.A. sei  $\varphi_1 = \widehat{s}_0|_{U_1}, \varphi_2 = \widehat{s}_1|_{U_2}$ . Dann gilt für jedes  $z \in \varphi_1(U_1)$

$$\varphi_2 \circ \tilde{f} \circ \varphi_1^{-1}(z) = \widehat{s}_1 \circ \tilde{f} \circ \widehat{s}_0^{-1}(z) = \widehat{s}_1 \circ \tilde{f}([1, z]) = \widehat{s}_1([F_0(1, z), F_1(1, z)]) = \frac{F_0(1, z)}{F_1(1, z)},$$

d.h.  $\varphi_2 \circ \tilde{f} \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1) \rightarrow \varphi_2(U_2)$  ist holomorph und somit auch  $\tilde{f}$ . ■

Wir kommen nun zur Liftung, die wir für den allgemeinen Fall notieren, aber hier nur für den Fall  $k = 1$  beweisen wollen. Für die Eindeutigkeit des Grades einer Liftung benötigen wir noch das folgende

### 3.2.7 Lemma

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Ist  $P : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  eine homogene Polynomfunktion mit  $P(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , so ist  $\text{grad } P = 0$ , d.h.  $P$  ist konstant.

Beweis:

**Angenommen**, es gilt  $d := \text{grad } P \geq 1$ .  $P$  habe die Darstellung  $P(z) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha \cdot z^\alpha$ ,  $z \in \mathbb{C}^n$ . Setze  $a := a_\alpha$  mit  $\alpha = (d, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^n$ . Dann folgt

$$P(z, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-mal}}) = a \cdot z^d \neq 0 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

also insbesondere  $a \neq 0$ . Betrachtet man

$$Q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto P(z, 1, \dots, 1) = \sum_{\substack{|\alpha|=d, \\ \alpha_1 \neq 0}} a_\alpha \cdot z^{\alpha_1} + \sum_{\substack{|\alpha|=d, \\ \alpha_1 = 0}} a_\alpha,$$

so ist  $Q$  eine auf  $\mathbb{C}$  definierte Polynomfunktion, die nach Voraussetzung keine Nullstellen besitzt. Damit gilt  $\text{grad } Q = 0$ , d.h.  $a_\alpha = 0$  für alle  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  mit  $|\alpha| = d$  und  $\alpha_1 \neq 0$ . Insbesondere folgt  $a = 0$ . ■

### 3.2.8 Satz (Existenz und Eindeutigkeit der Liftung)

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  eine holomorphe Abbildung. Dann gilt

(a) Es existiert eine homogene Polynomfunktion  $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  mit

$$F(z) \neq 0 \quad \text{und} \quad f(\pi(z)) = \pi(F(z)) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\},$$

wobei  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, (z_0, \dots, z_k) \mapsto [z_0, \dots, z_k]$ .

(b) Sind  $F, \tilde{F}$  zwei Abbildungen aus (a), so gibt es ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $\tilde{F} = c \cdot F$ .

Beweis:

(a) Für  $k = 1$  folgt die Aussage aus Lemma 3.2.5 und Satz 3.2.6. Den allgemeinen Fall findet man in [21, 31].

(b) Seien  $F = (F_0, \dots, F_k)$  und  $\tilde{F} = (\tilde{F}_0, \dots, \tilde{F}_k)$ . Dann folgt für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ .

$$[F_0(z), \dots, F_k(z)] = \pi(F(z)) = \pi(\tilde{F}(z)) = [\tilde{F}_0(z), \dots, \tilde{F}_k(z)],$$

d.h. es existiert ein  $c = c(z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $c(z) \cdot F(z) = \widetilde{F}(z)$ . Betrachte die Abbildung  $c : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \mapsto c(z)$ . Da  $F_0, \dots, F_k$  keine gemeinsamen Nullstellen in  $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  haben, folgt aus

$$(*) \quad c(z) = \frac{\widetilde{F}_j(z)}{F_j(z)} \quad \text{für } j = 0, \dots, k \text{ und alle } z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \text{ mit } F_j(z) \neq 0,$$

daß  $c$  auf ganz  $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  holomorph ist. Es existiert eine eindeutig bestimmte Potenzreihendarstellung [36][Thm.2.4.5] für  $c$ . Aus (\*) und da  $F_j, \widetilde{F}_j$  Polynomfunktionen sind, folgt mit der Eindeutigkeit dieser Potenzreihenentwicklung, daß  $c$  eine Polynomfunktion auf  $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  ist. Setze  $c$  auf  $\mathbb{C}^{k+1}$  fort. Bemerkung 1 impliziert, daß  $c$  eine homogene Polynomfunktion ist, und aus Lemma 3.2.7 ergibt sich, daß  $c$  konstant ist. ■

### 3.2.9 Definition (Liftung, Grad einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{P}^k$ )

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  eine holomorphe Abbildung. Die nach Satz 3.2.8 existierende und bis auf Multiplikation mit einer Konstanten eindeutig bestimmte homogene Polynomfunktion  $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  mit  $F^{-1}(0) = 0$  und

$$f \circ \pi = \pi \circ F \quad \text{auf } \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$$

heißt **Liftung** von  $f$ . Der **Grad** von  $f$  wird definiert als der Grad der zugehörigen Liftung. Setze  $\text{grad } f := \text{grad } F$ .

### Bemerkung 3

Ist  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  eine holomorphe Funktion und ist  $\tilde{f} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die zu  $f$  gehörige rationale Funktion gemäß Satz 3.2.6, so gilt

$$\text{grad } f = \text{grad } \tilde{f}.$$

### 3.2.10 Satz

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und seien  $f_1, f_2 : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  holomorphe Abbildungen sowie  $F_1, F_2$  die zugehörigen Liftungen. Dann ist  $F := F_2 \circ F_1$  eine Liftung von  $f := f_2 \circ f_1$ .

Beweis:

Nach Satz 3.2.2 ist  $F$  eine homogene Polynomfunktion, außerdem gilt

$$(f \circ \pi)(z) = ((f_2 \circ f_1) \circ \pi)(z) = ((f_2 \circ \pi) \circ F_1)(z) = (\pi \circ (F_2 \circ F_1))(z) = (\pi \circ F)(z)$$

und  $F(z) \neq 0$  für alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ . Also ist  $F$  eine Liftung von  $f$ . ■

## 3.3. Potentiale und positive $(1, 1)$ -Currents auf $\mathbb{P}^k$

In diesem Abschnitt untersuchen wir spezielle pluri-subharmonische Funktionen, die wir als (Pluri-) Potentiale bezeichnen wollen, und stellen den eingangs erwähnten Zusammenhang zwischen  $(1, 1)$ -Currents und (Pluri-) Potentialen her.

### 3.3.1 Definition ((Pluri-) Potential)

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Zwei auf  $\mathbb{C}^{k+1}$  definierte, pluri-subharmonische Funktionen liegen in der selben Äquivalenzklasse, wenn sie sich nur um eine additive Konstante unterscheiden. Sei  $\mathcal{P}_k$  die Menge aller Äquivalenzklassen von pluri-subharmonischen Funktionen  $u : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow [-\infty, \infty[$  mit der Eigenschaft, daß ein  $c \in ]0, \infty[$  existiert mit

$$u(\lambda z) = c \cdot \log |\lambda| + u(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^{k+1}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Die Elemente aus  $\mathcal{P}_k$  heißen auch **(Pluri-) Potentiale**.

Wie üblich unterscheiden wir nicht zwischen Repräsentanten und der zugehörigen Äquivalenzklasse. In der Literatur werden auch normierte Abbildungen betrachtet [22, 65]. Es gilt stets  $u(0) = -\infty$  und wir sagen, daß ein **stetiges Potential** vorliegt, wenn  $u|_{\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}} : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist.

### Bemerkung 1

(i) Ist  $u \in \mathcal{P}_k$  und  $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  eine nicht-konstante homogene Polynomfunktion sowie  $d := \text{grad } F \geq 1$ , so ist  $\frac{1}{d} \cdot u \circ F \in \mathcal{P}_k$ , **denn** nach Satz 2.3.2 ist  $\frac{1}{d} \cdot u \circ F$  pluri-subharmonisch und für alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gilt

$$\frac{1}{d} \cdot u(F(\lambda z)) = \frac{1}{d} \cdot u(\lambda^d \cdot F(z)) = c \cdot \log |\lambda| + \frac{1}{d} \cdot u(F(z)).$$

(ii) Ist  $u \in \mathcal{P}_k$ , so gilt für alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$

$$u(z) = u\left(\|z\| \cdot \frac{z}{\|z\|}\right) = c \cdot \log \|z\| + u\left(\frac{z}{\|z\|}\right) \leq c \cdot \log \|z\| + \sup_{\|w\|=1} u(w),$$

also  $u(z) \leq c \cdot \log \|z\| + O(1)$  für  $\|z\| \rightarrow \infty$ . Diese Eigenschaft fordert man allgemein für Greensche Funktionen [44]. Vergleiche hierzu auch Definition 0.2.2 und betrachte beispielsweise [22, §6] und [58, §3.1].

### 3.3.2 Satz

Seien  $k \in \mathbb{N}$  und  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, (z_0, \dots, z_k) \mapsto [z_0, \dots, z_k]$  die natürliche Projektion. Sei  $z = [z_0, \dots, z_k] \in \mathbb{P}^k$ . Dann gilt:

(a) Es existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  in  $\mathbb{P}^k$  und eine injektive, holomorphe Abbildung  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  mit

$$\pi \circ s = \text{id}_U.$$

(b) Sind  $s_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, s_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  Abbildungen mit den Eigenschaften aus (a), so existiert eine holomorphe Abbildung  $\varphi : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit

$$s_1(w) = \varphi(w) \cdot s_2(w) \quad \text{für alle } w \in U_1 \cap U_2.$$

### Beweis:

(a) Wähle ein  $j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $z_j \neq 0$  und betrachte  $U_j, s_j$  aus 3.1.2.

(b) Sei  $w \in U_1 \cap U_2$ . Aus  $\pi(s_1(w)) = w = \pi(s_2(w))$  folgt, daß ein  $\lambda = \lambda(w) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  existiert mit  $s_1(w) = \lambda(w) \cdot s_2(w)$ . Betrachte  $\varphi : U_1 \cap U_2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, w \mapsto \lambda(w)$ . Sind  $s_{1,0}, \dots, s_{1,k}$  und  $s_{2,0}, \dots, s_{2,k}$  die Komponentenfunktionen von  $s_1$  bzw.  $s_2$ , so folgt

$$\varphi(w) = \frac{s_{2,j}(w)}{s_{1,j}(w)} \quad \text{für } j = 0, \dots, k \text{ und alle } w \in U_1 \cap U_2 \text{ mit } s_{1,j}(w) \neq 0.$$

Damit ist  $\varphi$  holomorph. ■

### 3.3.3 Lemma

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $u \in \mathcal{P}_k$  sowie  $z \in \mathbb{P}^k$  und seien  $U \subseteq \mathbb{P}^k, s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  aus Satz 3.3.2 gewählt. Dann ist das auf  $U$  definierte (1,1)-Current

$$dd^c(u \circ s)$$

unabhängig von der Wahl von  $s$ , außerdem ist  $dd^c(u \circ s)$  geschlossen.

Beweis:

Zunächst beachte man, daß die Definition von  $dd^c(u \circ s)$  unabhängig von der Wahl des Repräsentanten aus  $[u]$  ist. Sei  $r : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  eine weitere Abbildung, die die Eigenschaft aus Satz 3.3.2(a) erfüllt. Dann existiert nach Satz 3.3.2(b) eine holomorphe Abbildung  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $r = \varphi \cdot s$ . Aus der Linearität von  $dd^c$  folgt mit Korollar 2.3.5 für jede  $(k-1, k-1)$ -Testform  $\omega \in \mathfrak{D}^{k-1, k-1}(U)$

$$\begin{aligned} \langle dd^c(u \circ r), \omega \rangle &= \langle u \circ r, dd^c \omega \rangle = \langle u \circ (\varphi \cdot s), dd^c \omega \rangle \stackrel{3.3.1}{=} \langle c \cdot \log |\varphi| + u \circ s, dd^c \omega \rangle \\ &= c \cdot \langle \log |\varphi|, dd^c \omega \rangle + \langle u \circ s, dd^c \omega \rangle = c \cdot \langle dd^c \log |\varphi|, \omega \rangle + \langle dd^c(u \circ s), \omega \rangle = \langle dd^c(u \circ s), \omega \rangle. \end{aligned}$$

Mit einer Argumentation wie im Beweis von Satz 2.3.10 folgt, daß  $dd^c(u \circ s)$  geschlossen ist. ■

## Bemerkung 2

In der Situation von Lemma 3.3.3 gelte zusätzlich  $u(s(z)) \neq -\infty$  für alle  $z \in U$ . Dann ist  $u$  auf  $s(U)$  pluri-harmonisch genau dann, wenn  $dd^c(u \circ s) = 0$ .

Beweis:

Die Hintereinanderausführung einer pluri-subharmonischen und einer nicht-konstanten holomorphen Abbildung ist pluri-subharmonisch nach Satz 2.3.4. Wendet man dies auf  $u, -u$  und  $s^{-1}$  an, so folgt die Behauptung. ■

Nicht nur für den Nachweis der Positivität von  $dd^c(u \circ s)$  wird der **Push back** (das Zurückziehen oder auch die Rücktransformation) und der **Push forward** (die Vorwärtstransformation) von Differentialformen benötigt:

### 3.3.4 Definition (Pull back, Push forward)

Seien  $M, N$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und seien  $f \in C^\infty(M, N)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $\omega$  eine (komplexe) Differentialform vom Grad  $k$  auf  $N$ . Für alle  $a \in M$  und alle  $v_1, \dots, v_k \in T_a(M)$  sei

$$(f^*\omega)(a)(v_1, \dots, v_k) := \omega(f(a))(T_a f(v_1), \dots, T_a f(v_k)),$$

d.h.  $f^*\omega : M \rightarrow \bigcup_{a \in M} \Lambda^k(T_a(M), \mathbb{C})$ . Ist  $k = 0$ , so ist  $\omega$  eine Abbildung  $\omega : N \rightarrow \mathbb{C}$  und wir setzen dann  $f^*\omega := \omega \circ f : M \rightarrow \mathbb{C}$ .  $f^*\omega$  wird als **Pull back von  $\omega$  unter  $f$**  bezeichnet. Ist  $f$  ein  $C^\infty$ -Diffeomorphismus, so sei  $f_*\omega := (f^{-1})^*\omega$  der **Push forward** einer auf  $M$  definierten Differentialform  $\omega$  unter  $f$ .

### Bemerkung 3 (Eigenschaften von $f^*$ )

(i) Ist  $\omega$  eine Differentialform vom Grad  $k$ , so auch  $f^*\omega$ ; außerdem übertragen sich Stetigkeit, Differenzierbarkeit etc.

(ii)  $f^*$  ist  $\mathbb{C}$ -linear und für alle Differentialformen  $\omega_1, \omega_2$  gilt  $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*\omega_1 \wedge f^*\omega_2$ . Ist also  $\omega$  eine (elementar-) positive Differentialform, so auch  $f^*\omega$ . Ist  $\omega$  differenzierbar, so gilt  $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$  [68].

(iii) Es gilt die Transformationsformel  $\int_N \omega = \int_M f^*\omega$ , falls  $f$  ein orientierungserhaltender  $C^\infty$ -Diffeomorphismus ist [2].

Seien  $n \in \mathbb{N}, p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $\omega$  eine zweimal stetig differenzierbare  $(p, q)$ -Form auf  $M$ . Aus (ii), zusammen mit  $d = \partial + \bar{\partial}$ , folgt  $\partial(f^*\omega) = f^*(\partial\omega)$ ,  $\bar{\partial}(f^*\omega) = f^*(\bar{\partial}\omega)$  und somit

$$f^*(dd^c\omega) = dd^c(f^*\omega).$$

Damit kann nun die Positivität von  $dd^c(u \circ s)$  (aus Lemma 3.3.3) eingesehen werden:



**3.3.5 Satz**

Es seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Lemma 3.3.3 gegeben. Dann ist  $dd^c(u \circ s)$  ein positives (1, 1)-Current auf  $U$ .

Beweis:

Sei  $\omega \in \mathcal{D}^{k-1, k-1}(U)$  eine positive  $(k-1, k-1)$ -Testform und  $f := s^{-1} : V \rightarrow U$  mit  $V := s(U) \subseteq \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $f^*\omega$  eine positive Testform auf  $V$ , der Push forward von  $\omega$  unter  $s$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \langle dd^c(u \circ s), \omega \rangle &= \langle u \circ s, dd^c\omega \rangle = \int_U (u \circ s) \wedge dd^c\omega \stackrel{\text{Bem. 3 (iii)}}{=} \int_V f^*((u \circ s) \wedge dd^c\omega) \\ &= \int_V f^*(u \circ s) \wedge f^*(dd^c\omega) = \int_V u \cdot f^*(dd^c\omega) \\ &= \int_V u \cdot dd^c(f^*\omega) = \langle u, dd^c f^*\omega \rangle = \langle dd^c u, f^*\omega \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

da  $dd^c u$  ein positives (1, 1)-Current (auf  $V$ ) ist. ■

**3.3.6 Satz**

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und  $\{U_1, \dots, U_m\}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Seien  $p, q \in \mathbb{N}_0$  mit  $p, q \leq n$ , außerdem sei  $T_j$  ein  $(p, q)$ -Current auf  $U_j$  für  $j = 1, \dots, m$ . Für alle  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  mit  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  gelte

$$T_i|_{U_i \cap U_j} = T_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $(p, q)$ -Current  $T$  auf  $M$  mit  $T|_{U_j} = T_j$  für  $j = 1, \dots, m$ .

**Zusatz:** Sind  $T_1, \dots, T_m$  positive (geschlossene) Currents, so ist auch  $T$  positiv (geschlossen).

Beweis:

Sei  $\eta_1, \dots, \eta_m : M \rightarrow [0, 1]$  eine  $C^\infty$ -Partition der Eins bezüglich  $U_1, \dots, U_m$ , d.h. es gilt  $\text{supp } \eta_j \subseteq U_j$  für  $j = 1, \dots, m$  und  $\eta_1(x) + \dots + \eta_m(x) = 1$  für alle  $x \in M$ , außerdem sind  $\eta_1, \dots, \eta_m$  beliebig oft differenzierbar [53, Thm.2.2.14]. Sei  $\omega$  eine  $(n-p, n-q)$ -Testform auf  $M$ , d.h.  $\omega \in \mathcal{D}^{n-p, n-q}(M)$ . Dann kann  $\eta_j \cdot \omega$  als eine  $(n-p, n-q)$ -Testform auf  $U_j$  aufgefaßt werden. Setze

$$\langle T, \omega \rangle := \sum_{j=1}^m \langle T_j, \eta_j \cdot \omega \rangle.$$

Dann ist  $T : \mathcal{D}^{n-p, n-q}(M) \rightarrow \mathbb{C}$  eine lineare Abbildung und aus der Stetigkeit von  $T_1, \dots, T_m$  folgt die von  $T$ , d.h.  $T$  ist ein  $(p, q)$ -Current auf  $M$ . Nach Konstruktion gilt  $T|_{U_j} = T_j$  für  $j = 1, \dots, m$ . Sei  $S$  ein  $(p, q)$ -Current auf  $M$  mit  $S|_{U_j} = T_j$  für  $j = 1, \dots, m$  und  $\omega \in \mathcal{D}^{n-p, n-q}(M)$ . Dann folgt

$$\langle S, \omega \rangle = \left\langle S, \sum_{j=1}^m \eta_j \cdot \omega \right\rangle = \sum_{j=1}^m \langle S, \eta_j \cdot \omega \rangle = \sum_{j=1}^m \langle T_j, \eta_j \cdot \omega \rangle = \langle T, \omega \rangle,$$

also  $S = T$ , was die Eindeutigkeit zeigt. Sind  $T_1, \dots, T_m$  und  $\omega$  positiv, so ist  $\eta_j \cdot \omega$  eine positive Testform auf  $U_j$  und somit  $\langle T, \omega \rangle = \langle T_1, \eta_1 \cdot \omega \rangle + \dots + \langle T_m, \eta_m \cdot \omega \rangle \geq 0$ . Um die Geschlossenheit von  $T$  zu zeigen, wenn  $T_1, \dots, T_m$  geschlossen sind, geht man entsprechend vor. ■

Aus Satz 3.3.6 und Lemma 3.3.3 erhält man

### 3.3.7 Korollar

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $u \in \mathcal{P}_k$ . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes positives und geschlossenes  $(1, 1)$ -Current  $T = T(u)$  auf  $\mathbb{P}^k$  mit

$$T|_U = dd^c(u \circ s)$$

für alle offenen Umgebungen  $U$  und  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  aus Satz 3.3.2.

Zu jedem (Pluri-) Potential  $u \in \mathcal{P}_k$  wurde ein positives, geschlossenes  $(1, 1)$ -Current auf  $\mathbb{P}^k$  definiert. Umgekehrt findet man zu jedem derartigen Current ein Potential:

### 3.3.8 Theorem ([23, Thm. 5.9], [65, Théorème A.5.1])

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $\mathcal{C}_{1,1} = \mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$  die Menge aller positiven, geschlossenen  $(1, 1)$ -Currents auf  $\mathbb{P}^k$ . Dann ist die Abbildung

$$L : \mathcal{P}_k \rightarrow \mathcal{C}_{1,1}, \quad u \mapsto T(u)$$

bijektiv.

### Notation

Ist  $T \in \mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$  und  $u \in \mathcal{P}_k$  mit  $T = L(u)$ , so sagen wir auch, daß  $u$  das **(Pluri-) Potential** von  $T$  ist, und man schreibt

$$\pi^*T = dd^c u.$$

Dies entspricht dem **Pull back** von  $T$  unter  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, z \mapsto [z]$ , der durch den Push forward von Differentialformen (unter  $\pi$ ) eingeführt werden kann<sup>5</sup>. Da  $\pi$  jedoch nicht bijektiv ist, muß man den Begriff des Push forwards zunächst erweitern. Wir benötigen hier nur wenige Spezialfälle und führen den Pull back von Currents daher nicht allgemein ein (vgl. Kommentare in [62, S. 59f.] oder betrachte [65, A.3] zusammen mit [17, S. 257]).

Ist eine holomorphe Abbildung und ein Current gegeben, so liegt es nahe das zum Current zugehörige Potential durch die entsprechende Liftung zu manipulieren:

### 3.3.9 Definition (Pull back)

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $f$  eine nicht-konstante holomorphe Selbstabbildung auf  $\mathbb{P}^k$  sowie  $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  eine Liftung von  $f$ . Sei  $T \in \mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$  und  $u \in \mathcal{P}_k$  ein Potential von  $T$ , d.h.  $\pi^*T = dd^c u$ . Dann sei  $f^*T$  das  $(1, 1)$ -Current auf  $\mathbb{P}^k$ , der **Pull back** von  $T$  unter  $f$ , für das gilt: Sind  $U \subseteq \mathbb{P}^k, s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  aus Lemma 3.3.2, d.h.  $T|_U = dd^c(u \circ s)$ , so gilt

$$f^*T|_U = dd^c(u \circ F \circ s).$$

### Bemerkung 4

(i) Es gilt  $\pi^*(f^*T) = dd^c(u \circ F)$ .

(ii) Die Existenz von  $f^*T$  folgt aus Satz 3.3.6. Sei  $\tilde{F}$  eine weitere Liftung von  $f$  und  $c > 0$  mit  $u(\lambda z) = c \cdot \log |\lambda| + u(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Wähle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $\tilde{F} = \lambda \cdot F$ . Dann folgt

$$(u \circ \tilde{F} \circ s)(z) = u(\lambda \cdot F(s(z))) = c \cdot \log |\lambda| + u(F(s(z))) \quad \text{für alle } z \in U,$$

<sup>5</sup>Da  $\pi$  eine Abbildung  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$  ist, wäre es naheliegender auf  $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  und nicht auf  $\mathbb{C}^{k+1}$  definierte Abbildungen zu betrachten.  $\pi^*T$  ist zunächst ein Current auf  $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ , kann jedoch auf  $\mathbb{C}^{k+1}$  fortgesetzt werden [23, §5.4]. Diese Fortsetzung sei wieder mit  $\pi^*T$  bezeichnet.

also  $dd^c(u \circ \tilde{F} \circ s) = dd^c(u \circ F \circ s)$ . Damit ist die Definition von  $f^*T$  unabhängig von der Wahl der Liftung.

Entscheidend ist hier, daß man aus der Konvergenz von Potentialen die Konvergenz der zugehörigen  $(1, 1)$ -Currents erhält:

### 3.3.10 Satz

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $u \in \mathcal{P}_k$  und sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{P}_k$ . Auf  $u^{-1}(\mathbb{R})$  konvergiere  $(u_n)$  lokal gleichmäßig gegen  $u$ . Sei  $T$  das zu  $u$  gehörende  $(1, 1)$ -Current und sei  $T_n$  das zu  $u_n$  gehörende  $(1, 1)$ -Current,  $n \in \mathbb{N}$ . Dann konvergiert  $(T_n)$  schwach gegen  $T$ .

Beweis:

Sei  $\omega \in \mathcal{D}^{n-1, n-1}(\mathbb{P}^k)$  eine  $(n-1, n-1)$ -Testform auf  $\mathbb{P}^k$ . Wähle die offenen Mengen  $U_0, \dots, U_k \subseteq \mathbb{P}^k$  und die holomorphen Abbildungen  $s_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  für  $j = 0, \dots, k$  gemäß 3.1.2 (vgl. auch Beweis von Satz 3.3.2). Sei  $\eta_0, \dots, \eta_k$  eine  $C^\infty$ -Partition der Eins bezüglich  $U_0, \dots, U_k$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle T_n, \omega \rangle &= \sum_{j=0}^k \langle T_n, \eta_j \cdot \omega \rangle = \sum_{j=0}^k \langle dd^c(u_n \circ s_j), \eta_j \cdot \omega \rangle = \sum_{j=0}^k \langle u_n \circ s_j, dd^c(\eta_j \cdot \omega) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^k \int (u_n \circ s_j) \cdot dd^c(\eta_j \cdot \omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^k \int (u \circ s_j) \cdot dd^c(\eta_j \cdot \omega) = \sum_{j=0}^k \langle u \circ s_j, dd^c(\eta_j \cdot \omega) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^k \langle dd^c(u \circ s_j), \eta_j \cdot \omega \rangle = \sum_{j=0}^k \langle T, \eta_j \cdot \omega \rangle = \langle T, \omega \rangle. \end{aligned}$$

■

## 3.4. Der (verallgemeinerte, komplexe) Monge-Ampère Operator und positive $(k, k)$ -Currents auf $\mathbb{P}^k$

Die auf  $\mathbb{P}^k$  definierten  $(k, k)$ -Currents sind gemäß Bemerkung 4 (Seite 29) genau die Distributionen auf  $\mathbb{P}^k$ , positive  $(k, k)$ -Currents können als Maße (auf  $\mathbb{P}^k$ ) aufgefaßt werden. Bislang haben wir nur  $(1, 1)$ -Currents betrachtet. Aus diesen erhält man jedoch durch Anwendung des (verallgemeinerten, komplexen) **Monge-Ampère Operators**  $(dd^c)^k$  auch  $(k, k)$ -Currents. Da es für die spätere Anwendung genügt, stetige Funktionen zu betrachten, geben wir die Definition aus [39, S.320] wieder, eine allgemeine Definition findet man beispielsweise in [44].

### 3.4.1 Definition (Monge-Ampère Operator)

Seien  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$ , sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$  und seien  $u_1, \dots, u_k : \Omega \rightarrow ]-\infty, \infty[$  stetige, pluri-subharmonische Funktionen. Wir führen ein positives  $(k, k)$ -Current  $dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_k$  auf  $\Omega$  induktiv wie folgt ein:

$dd^c u_1$  ist ein positives  $(1, 1)$ -Current auf  $\Omega$  und ist  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\ell \leq k-1$  derart, daß  $dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_\ell$  ein positives  $(\ell, \ell)$ -Current ist, so liegt ein Current der Ordnung 0 vor und

$$\langle dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_{\ell+1}, \chi \rangle := \langle dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_\ell, u_{\ell+1} \cdot dd^c \chi \rangle$$

ist für alle Testformen  $\chi \in \mathcal{D}^{n-(\ell+1), n-(\ell+1)}(\Omega)$  wohldefiniert. Für eine stetige, pluri-subharmonische Funktion  $u : \Omega \rightarrow ]-\infty, \infty[$  setzen wir

$$(dd^c u)^k := \underbrace{dd^c u \wedge \dots \wedge dd^c u}_{k\text{-mal}}$$

$(dd^c)^n$  wird auch als **(verallgemeinerter, komplexer) Monge-Ampère Operator** bezeichnet.

Da pluri-subharmonische Funktionen durch  $C^\infty$ -Abbildungen approximiert werden können und für derartige Funktionen  $dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k$  elementar definiert ist, liegt es nahe eine entsprechende Approximation zu betrachten. Wir notieren nur den Fall, daß stetige Abbildungen vorliegen, wengleich eine wesentlich schwächere Formulierung möglich ist:

### 3.4.2 Theorem ([44, Theorem 3.4.3])

Seien  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$  und sei  $\Omega$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n$ . Seien  $u_1, \dots, u_k : \Omega \rightarrow ]-\infty, \infty[$  stetige, pluri-subharmonische Funktionen. Ist  $(u_{\ell,j})_{j \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge pluri-subharmonischer  $C^\infty$ -Funktionen, die gegen  $u_\ell$  konvergiert,  $\ell = 1, \dots, k$ , so gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} dd^c u_{1,j} \wedge \cdots \wedge dd^c u_{k,j} = dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k$$

wobei die linke Seite gemäß 1.4.9 als positiver Current aufgefaßt und punktweise Konvergenz (für Currents von Ordnung 0) betrachtet wird, d.h. es gilt

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} dd^c u_{1,j} \wedge \cdots \wedge dd^c u_{k,j} \wedge \chi = \langle dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k, \chi \rangle \quad \text{für alle } \chi \in \mathfrak{D}_0^{n-k, n-k}(\Omega).$$

Für auf einer (komplexen) Mannigfaltigkeit definierte pluri-subharmonische (und stetige) Abbildung führt man den (verallgemeinerten, komplexen) Monge-Ampère Operator entsprechend ein. Wir ziehen hierzu obige Approximation heran:

### 3.4.3 Definition und Satz (Monge-Ampère Operator auf Mannigfaltigkeiten)

Seien  $n, k \in \mathbb{N}$  mit  $k \leq n$ . Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit und seien  $u_1, \dots, u_k : M \rightarrow ]-\infty, \infty[$  stetige, pluri-subharmonische Funktionen. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes positives  $(k, k)$ -Current

$$dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k$$

mit der Eigenschaft, daß für alle monoton fallenden Folgen  $(u_{\ell,j})_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $\ell = 1, \dots, k$ , von pluri-subharmonischen  $C^\infty$ -Abbildungen mit  $\lim_{j \rightarrow \infty} u_{\ell,j} = u_\ell$  gilt:

$$\langle dd^c u_{1,j} \wedge \cdots \wedge dd^c u_{k,j}, \chi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_k, \chi \rangle \quad \text{für jedes } \chi \in \mathfrak{D}_0^{n-k, n-k}(M).$$

$(dd^c)^n$  ist der **(verallgemeinerter, komplexer) Monge-Ampère Operator**.

Beweis:

Sei  $(U, \varphi)$  eine Karte und  $(u_{\ell,j})_{j \in \mathbb{N}}$  eine monoton fallende Folge von stetigen, pluri-subharmonischen  $C^\infty$ -Funktionen, die gegen  $u_\ell$  konvergiert für  $\ell = 1, \dots, k$ . Sei  $\chi \in \mathfrak{D}_0^{n-k, n-k}(U)$ . Dann folgt mit  $f := \varphi^{-1}$  unter Verwendung der Eigenschaften des Pull backs:

$$\begin{aligned} \langle dd^c u_{1,j} \wedge \cdots \wedge dd^c u_{k,j}, \chi \rangle &= \int_U dd^c u_{1,j} \wedge \cdots \wedge dd^c u_{k,j} \wedge \chi \\ &= \int_{f(U)} f^*(dd^c u_{1,j} \wedge \cdots \wedge dd^c u_{k,j} \wedge \chi) = \int_{f(U)} f^*(dd^c u_{1,j}) \wedge \cdots \wedge f^*(dd^c u_{k,j}) \wedge f^* \chi \\ &= \int_{\varphi(U)} dd^c(u_{1,j} \circ \varphi^{-1}) \wedge \cdots \wedge dd^c(u_{k,j} \circ \varphi^{-1}) \wedge (\chi \circ \varphi^{-1}) \\ &= \langle dd^c(u_{1,j} \circ \varphi^{-1}) \wedge \cdots \wedge dd^c(u_{k,j} \circ \varphi^{-1}), \chi \circ \varphi^{-1} \rangle \rightarrow \langle dd^c(u_1 \circ \varphi^{-1}) \wedge \cdots \wedge dd^c(u_k \circ \varphi^{-1}), \chi \circ \varphi^{-1} \rangle \end{aligned}$$

für  $j \rightarrow \infty$  gemäß Theorem 3.4.2. Für  $(U, \varphi)$  gibt es daher ein auf  $U$  definiertes, positives  $(k, k)$ -Current mit der behaupteten Eigenschaft (für auf  $U$  definierte Testformen). Nun wende man Satz 3.3.6 an. ■

Als einfache Folgerung aus der (induktiven) Definition von  $(dd^c u)^k$  ergibt sich

### 3.4.4 Lemma

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit sowie  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige, pluri-harmonische Abbildung, d.h. es gilt  $dd^c u = 0$ . Dann folgt  $(dd^c u)^k = 0$  für  $k = 1, \dots, n$ .

### 3.4.5 Satz ([23, Lemma 5.10])

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $u \in \mathcal{P}_k$  und sei  $c \in ]0, \infty[$  mit  $u(\lambda z) = c \cdot \log |\lambda| + u(z)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ . Dann existiert eine monoton fallende Folge  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{P}_k$  mit

$$u_n(\lambda z) = c \cdot \log |\lambda| + u_n(z) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, z \in \mathbb{C}^{k+1} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

derart, daß  $u_n|_{\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .  $u_n$  hat die Form

$$u_n(z) = \int u(z - \|z\| \cdot w) \cdot \alpha_n(w) dw, \quad z \in \mathbb{C}^{k+1}$$

mit einer  $C^\infty$ -Abbildung  $\alpha_n : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die nicht von  $u$  abhängt.

### 3.4.6 Satz

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $u \in \mathcal{P}_k$  ein stetiges Potential. Seien  $U \subseteq \mathbb{P}^k$  und  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  aus Satz 3.3.2(a) gewählt, d.h. es gilt  $\pi \circ s = \text{id}_U$ . Dann ist

$$(dd^c(u \circ s))^\ell$$

für  $\ell = 1, \dots, k$  unabhängig von der Wahl von  $s$ .

#### Beweis:

Sei  $r : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  eine weitere injektive, holomorphe Abbildung gemäß Satz 3.3.2(a). Aus Satz 3.3.2(b) folgt, daß es eine holomorphe Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  gibt mit  $u \circ r = c \cdot \log |\varphi| + u \circ s$  für ein  $c \in ]0, \infty[$ . Sei  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge über  $\mathcal{P}_k$  entsprechend Satz 3.4.5 für  $u$ . Dann folgt für jedes  $\chi \in \mathfrak{D}_0^{k-\ell, k-\ell}(U)$

$$\begin{aligned} \langle (dd^c(u \circ r))^\ell, \chi \rangle &\stackrel{3.4.3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (dd^c(u_n \circ r))^\ell, \chi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \underbrace{dd^c(u_n \circ r) \wedge \dots \wedge dd^c(u_n \circ r)}_{\ell\text{-mal}} \wedge \chi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int dd^c(c \cdot \log |\varphi| + u_n \circ s) \wedge \dots \wedge dd^c(c \cdot \log |\varphi| + u_n \circ s) \wedge \chi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (dd^c(c \cdot \log |\varphi|) + dd^c(u_n \circ s)) \wedge \dots \wedge (dd^c(c \cdot \log |\varphi|) + dd^c(u_n \circ s)) \wedge \chi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int dd^c(u_n \circ s) \wedge \dots \wedge dd^c(u_n \circ s) \wedge \chi = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (dd^c(u_n \circ s))^\ell, \chi \rangle = \langle (dd^c(u \circ s))^\ell, \chi \rangle. \end{aligned}$$

■

Mit Satz 3.3.6 folgt somit:

### 3.4.7 Korollar

Seien  $k, \ell \in \mathbb{N}$  mit  $\ell \leq k$  und sei  $u \in \mathcal{P}_k$  ein stetiges (Pluri-) Potential. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes positives  $(\ell, \ell)$ -Current  $T$  auf  $\mathbb{P}^k$  mit

$$T|_U = (dd^c(u \circ s))^\ell$$

für jede offene Umgebung  $U$  und der injektiven, holomorphen Abbildung  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  mit  $\pi \circ s = \text{id}_U$  aus Satz 3.3.2.

**Notation**

- Wir schreiben  $\pi^*T = (dd^c u)^\ell$ , falls die Voraussetzungen (und Bezeichnungen) von Korollar 3.4.7 gegeben sind. In diesem Fall ist  $T$  also ein  $(\ell, \ell)$ -Current auf  $\mathbb{P}^k$ .
- Sei  $T$  ein  $(1, 1)$ -Current auf  $\mathbb{P}^k$ , das ein stetiges Potential  $u$  besitzt. Dann schreiben wir  $T^\ell = \underbrace{T \wedge \cdots \wedge T}_{\ell\text{-mal}}$  für das  $(\ell, \ell)$ -Current auf  $\mathbb{P}^k$ , für das gilt

$$T^\ell|_U = (dd^c(u \circ s))^\ell$$

für jede offene Umgebung  $U$  und der injektiven, holomorphen Abbildung  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  mit  $\pi \circ s = \text{id}_U$  aus Satz 3.3.2. Es gilt also  $\pi^*T^\ell = (dd^c u)^\ell$ .

**Bemerkung 1**

Ist  $c > 0$  mit  $u(\lambda z) = c \cdot \log |\lambda| + u(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , so hat das  $(k, k)$ -Current  $T$  mit  $\pi^*T = (dd^c u)^k$ , aufgefaßt als Maß, Gesamtmasse  $c$ . Insbesondere liegt im Fall  $c = 1$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß vor [23, Prop. 5.14].

## Teil II.

# Entropie-Theorie und zufällige Juliamengen

In diesem Abschnitt betrachten wir zunächst die maßtheoretische und topologische Entropie einer (stetigen) Funktion. In der Entropie-Theorie wird zumeist vorausgesetzt, daß der zugrundeliegende Raum kompakt ist. Die topologische Entropie kann auf verschiedene Arten und Weisen eingeführt werden. Hier betrachten wir die Situation, daß keine Kompaktheit vorliegt. Man kann die verschiedenen Definitionen der topologischen Entropie auf diesen Fall übertragen. Es zeigt sich, daß diese im allgemeinen nicht übereinstimmen müssen, allerdings kann man sie unter gewissen Bedingungen in Beziehung setzen. Wir untersuchen auch wann Zusammenhänge zwischen der maßtheoretischen und topologischen Entropie (Goodwyn's Theorem) vorliegen. Im sich anschließenden Kapitel untersuchen wir die zufällige Iteration von holomorphen Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , und gehen auf die Existenz eines bestimmten invarianten Maßes ein.





## Kapitel 4.

# Entropie-Theorie auf nicht-kompakten Räumen

The happy life is determined by  
maximum entropy.

*(Russ Giannetta)*

Die topologische Entropie wurde ursprünglich für stetige Selbstabbildungen auf kompakten Räumen eingeführt, häufig werden auch nur Homöomorphismen betrachtet. Weitere Definitionen sind insbesondere für gleichmäßig stetige Selbstabbildungen auf metrisierbaren Räumen gegeben worden. Ist der zugrundeliegende Raum kompakt, so stimmen alle Definitionen überein, weiterhin liegt eine enge Beziehung zwischen der topologischen und der maßtheoretischen Entropie vor - es gilt das **Variationsprinzip** [56, 71]. In der Literatur wird zumeist nur diesem Fall Beachtung geschenkt.

Hier betrachten wir die Situation, wenn der zugrundeliegende Raum nicht kompakt ist, und diskutieren verschiedene Definitionen der topologischen Entropie. Interessant sind **Maße mit maximaler Entropie**, die jedoch im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt sein können, wenn die vorliegende Entropie  $\infty$  ist. Wir beginnen mit der maßtheoretischen Entropie, die auf A. N. Kolmogorov zurückgeht.

### 4.1. Maßtheoretische Entropie

Im folgenden verwenden wir stets die Konvention  $0 \cdot \log 0 := 0$ , d.h. wir setzen die Abbildung  $t \mapsto t \cdot \log t$  in den Punkt 0 hinein fort.

#### 4.1.1 Definition (Entropie einer Partition)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei  $\beta$  eine aus abzählbar vielen meßbaren Mengen bestehende Partition (kurz: abzählbare, meßbare Partition) von  $X$ . Die **Entropie von**  $\beta$  ist definiert durch

$$H_\mu(\beta) := - \sum_{B \in \beta} \mu(B) \cdot \log \mu(B).$$

#### Notation

Sei  $X$  eine Menge und  $\xi_i, i \in I$ , eine endliche Familie von Teilmengen von  $X$ . Die **Verfeinerung** von  $\xi_i, i \in I$ , ist definiert durch

$$\bigvee_{i \in I} \xi_i := \left\{ \bigcap_{i \in I} E_i : E_i \in \xi_i \text{ für jedes } i \in I \right\}.$$

Liegt eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  zugrunde und ist  $\xi_i$  für jedes  $i \in I$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra, so führen wir die Verfeinerung (für eine beliebige Indexmenge  $I$ ) als die kleinste

$\sigma$ -Algebra ein, die alle  $\xi_i$ ,  $i \in I$ , enthält<sup>6</sup>.

#### 4.1.2 Definition (Maßtheoretische Entropie)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung. Sei  $\beta$  eine endliche, meßbare Partition von  $X$ . Die **maßtheoretische Entropie von  $T$  bzgl.  $\beta$**  (und  $\mu$ ) ist gegeben durch

$$h_\mu(T, \beta) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot H_\mu \left( \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \beta \right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot H_\mu \left( \bigvee_{k=0}^{n-1} T^{-k} \beta \right),$$

und die **maßtheoretische Entropie** von  $T$  (bzgl.  $\mu$ ) ist definiert durch

$$h_\mu(T) := \sup \{ h_\mu(T, \beta) : \beta \text{ endliche, meßbare Partition von } X \}.$$

Aus der nachfolgenden Bemerkung ergibt sich, daß man stets einen vollständigen (Wahrscheinlichkeits-) Raum voraussetzen kann:

#### Bemerkung 1

- (i) Für alle  $A \in \mathfrak{B}$  sei  $\mathfrak{B}_A := \{A \cap B : B \in \mathfrak{B}\}$ . Dann gilt für jedes  $B \in \mathfrak{B}$  mit  $T^{-1}(B) = B$  und  $\mu(B) = 0$

$$h_\mu(T) = h_{\mu_{X \setminus B}}(T|_{X \setminus B}),$$

wobei  $\mu_{X \setminus B}$  die Einschränkung von  $\mu$  auf  $\mathfrak{B}_{X \setminus B}$  bezeichne.

- (ii) Sei  $\overline{\mathfrak{B}} := \{B \cup N : B \in \mathfrak{B}, N \text{ Teilmenge einer } \mu\text{-Nullmenge}\}$ , sowie  $\overline{\mu}(B \cup N) := \mu(B)$  für alle  $B \cup N \in \overline{\mathfrak{B}}$ , d.h.  $(X, \overline{\mathfrak{B}}, \overline{\mu})$  ist die  $(\mu\text{-})$  Vervollständigung von  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ . Dann gilt

$$h_\mu(T) = h_{\overline{\mu}}(T),$$

**denn**  $h_\mu(T) \leq h_{\overline{\mu}}(T)$  folgt aus der Definition. Sei  $\overline{\beta} = \{B_1 \cup N_1, \dots, B_k \cup N_k\}$  eine endliche, aus  $\overline{\mathfrak{B}}$ -meßbaren Mengen bestehende Partition und wähle  $N \in \mathfrak{B}$  mit  $\mu(N) = 0$  und  $N_1 \cup \dots \cup N_k \subseteq N$ . Indem man die endliche, aus  $\mathfrak{B}$ -meßbaren Mengen bestehende Partition  $\beta := \{B_1 \cap N^c, \dots, B_k \cap N^c\}$  betrachtet, erhält man auch  $h_{\overline{\mu}}(T) \leq h_\mu(T)$ .

#### 4.1.3 Anmerkungen

Sei  $(X, \mathfrak{B})$  ein meßbarer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine meßbare Abbildung. Wir versehen die Menge aller endlichen, signierten Maße auf  $(X, \mathfrak{B})$  mit der üblichen Vektorraumstruktur, d.h. für alle  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  und alle endlichen, signierten Maße  $\mu_1, \mu_2$  sei

$$(\alpha \cdot \mu_1 + \beta \cdot \mu_2)(B) := \alpha \cdot \mu_1(B) + \beta \cdot \mu_2(B) \quad \text{für jedes } B \in \mathfrak{B}.$$

Die Menge  $\mathcal{P}(X)$  aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(X, \mathfrak{B})$  und die Menge  $\mathcal{P}_T(X)$  aller  $T$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(X, \mathfrak{B})$  sind konvexe (Teil-) Mengen. Sei  $\mathcal{E}(X, T)$  die Menge aller (bzgl.  $T$ ) ergodischen Wahrscheinlichkeitsmaße<sup>7</sup> aus  $\mathcal{P}_T(X)$ .

<sup>6</sup>Für meßbare Partitionen  $\xi_i$ ,  $i \in I$ , eines Lebesgue-Raumes ( $\rightarrow$  §4.2) führt man auch eine Ordnung (die „Verfeinerung“) ein. Dabei werden auch Nullmengen und allgemeinere Indexmengen berücksichtigt [50, §1.3].  $\bigvee_{i \in I} \xi_i$  ist dann definiert als das Supremum von  $\xi_i$ ,  $i \in I$  (in der vorliegenden Verbandstruktur), und man kann meßbare Partitionen mit den Unter- $\sigma$ -Algebren identifizieren (modulo Nullmengen).

<sup>7</sup> $\mu \in \mathcal{P}_T(X)$  ist ergodisch (bzgl.  $T$ ), falls  $\mu(B) \in \{0, 1\}$  für jedes  $B \in \mathfrak{B}$  mit  $T^{-1}(B) = B$  gilt.

#### 4.1.4 Satz

Sei  $(X, \mathfrak{B})$  ein meßbarer Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine meßbare Abbildung. Dann ist die Entropie-Abbildung  $\mu \mapsto h_\mu(T)$  affin, d.h. für alle  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_T(X)$  und jedes  $\lambda \in [0, 1]$  gilt

$$h_{\lambda \cdot \mu_1 + (1-\lambda) \cdot \mu_2}(T) = \lambda \cdot h_{\mu_1}(T) + (1-\lambda) \cdot h_{\mu_2}(T).$$

Beweis:

Der in [71, Theorem 8.1] geführte Beweis benötigt nicht die dort vorausgesetzte Stetigkeit (von  $T$ ) und auch nicht die Kompaktheit von  $X$ . ■

Mittels der **bedingten Entropie** (einer Partition) erhält man einen anderen Zugang zur maßtheoretischen Entropie, der häufig nützlich ist um die Entropie (explizit) zu bestimmen.

#### 4.1.5 Definition (Bedingte Entropie einer Partition)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß und seien  $\alpha, \beta$  abzählbare, meßbare Partitionen von  $X$ . Dann ist die **bedingte Entropie von  $\alpha$ , gegeben  $\beta$** , definiert durch

$$H_\mu(\alpha|\beta) := H_\mu(\alpha \vee \beta) - H_\mu(\beta) = - \sum_{\substack{A \in \alpha, B \in \beta, \\ \mu(B) > 0}} \mu(A \cap B) \cdot \log \mu(A|B).$$

#### 4.1.6 Satz ([71, Theorem 4.14])

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung, sowie  $\beta$  eine endliche, meßbare Partition von  $X$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_\mu\left(\beta \middle| \bigvee_{k=1}^n T^{-k}\beta\right) = h_\mu(T, \beta).$$

Man kann die bedingte Erwartung dazu verwenden,  $H_\mu(\alpha|\beta)$  für eine  $\sigma$ -Algebra  $\beta$  (und eine abzählbare, meßbare Partition  $\alpha$ ) einzuführen. Betrachtet man zu einer abzählbaren, meßbaren Partition  $\beta$  die erzeugte  $\sigma$ -Algebra, so zeigt sich, daß die Definitionen konsistent sind [56]. Indem man sogenannte **Systeme bedingter Maße** auf Lebesgue-Räumen verwendet, können auch „feinere“ Partitionen  $\alpha$  (etwa die Einpunkt-Partition) für eine Definition von  $H_\mu(\alpha|\beta)$  herangezogen werden:

## 4.2. Systeme bedingter Maße und ergodische Zerlegungen

Grundlage für diesen Abschnitt sind die beiden grundlegenden Arbeiten von V. A. Rohlin [60, 61]. Einige Details wurden bereits in [72] ausgeführt, vergleiche auch [50]. Insbesondere für die Existenz einer **ergodischen Zerlegung** (von Wahrscheinlichkeitsmaßen) werden wir die sogenannten **Systeme bedingter Maße** verwenden.

### 4.2.1 Definition (Meßbare Partition)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine aus paarweise disjunkten Teilmengen von  $X$  bestehende Menge  $\alpha$  mit  $\bigcup_{A \in \alpha} A = X$  heißt **meßbare Partition**, wenn es eine Folge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{B}$  gibt derart, daß gilt:

(i) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine Teilmenge  $\alpha'$  von  $\alpha$  mit  $B_n = \bigcup_{A \in \alpha'} A$ .

(ii) Für alle  $A_1, A_2 \in \alpha$  mit  $A_1 \neq A_2$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$A_1 \subseteq B_n, A_2 \subseteq B_n^c \quad \text{oder} \quad A_1 \subseteq B_n^c, A_2 \subseteq B_n.$$

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt dann auch **Basis der Partition**  $\alpha$ . Liegt ein topologischer Raum mit der zugehörigen Borelschen  $\sigma$ -Algebra zugrunde, so spricht man statt von meßbaren Partitionen auch von **Borel-Partitionen**.

### Bemerkung 1

(i) Jede meßbare Partition besteht aus meßbaren Mengen.

(ii) Jede abzählbare, aus meßbaren Mengen bestehende Partition ist eine meßbare Partition im Sinne von Definition 4.2.1.

### 4.2.2 Definition (Separabler Raum)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein vollständiger Maßraum. Eine abzählbare Familie  $B_n, n \in \mathbb{N}$ , von Mengen aus  $\mathfrak{B}$  heißt **Basis von X** (genauer: von  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ), falls gilt<sup>8</sup>:

(i) Zu jedem  $A \in \mathfrak{B}$  existiert ein  $B \in \sigma(B_i : i \in \mathbb{N})$  mit  $A \subseteq B$  und  $\mu(B \setminus A) = 0$ .

(ii) Für alle paarweise verschiedenen Punkte  $x, y \in X$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$x \in B_n, y \notin B_n \quad \text{oder} \quad x \notin B_n, y \in B_n.$$

Besitzt  $X$  eine Basis, so bezeichnen wir  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  als **separablen (Maß-) Raum**.

### Bemerkung 2

Ist  $E_n \in \{B_n, B_n^c\}$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , so enthält  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$  höchstens einen Punkt.

### 4.2.3 Definition (Vollständiger Raum)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein separabler Wahrscheinlichkeitsraum und sei  $B_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Basis von  $X$ .  $X$  (genauer:  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ ) heißt **vollständig** (bezüglich  $B_n, n \in \mathbb{N}$ ), falls

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \neq \emptyset \quad \text{für alle } E_n \in \{B_n, B_n^c\}, n \in \mathbb{N}.$$

$X$  heißt **vollständig mod 0** bezüglich  $B_n, n \in \mathbb{N}$ , falls es einen separablen Wahrscheinlichkeitsraum  $(X', \mathfrak{B}', \mu')$  mit  $X \subseteq X'$  und  $\mu(B) = \mu'(B)$  für alle  $B \in \mathfrak{B}$  gibt, so daß  $X'$  bzgl. einer Basis  $B'_n, n \in \mathbb{N}$ , vollständig ist und

$$B'_n \cap X = B_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

### 4.2.4 Definition (Lebesgue-Raum)

Ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  heißt **Lebesgue-Raum**, falls er separabel und vollständig mod 0 (bzgl. einer Basis) ist.  $\mu$  wird dann auch als **Lebesgue-Maß** bezeichnet.

Eines der wichtigsten Beispiele für Lebesgue-Räume sind die polnischen Räume:

### 4.2.5 Fundamentalbeispiel

Sei  $X$  ein polnischer Raum (d.h.  $X$  ist vollständig metrisierbar und besitzt eine abzählbare Basis) und sei  $\mu$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(X, \mathfrak{B}_X)$ . Dann ist die Vervollständigung  $(X, \overline{\mathfrak{B}}_X, \overline{\mu})$  von  $(X, \mathfrak{B}_X, \mu)$  ein Lebesgue-Raum [50, Example 1.9].

### Notation

Ist  $X$  eine Menge und  $\alpha$  eine Partition von  $X$ , so sei  $\alpha_x$  das eindeutig bestimmte Element aus  $\alpha$  mit  $x \in \alpha_x, x \in X$ .

<sup>8</sup>Für ein Mengensystem  $\mathcal{E}$  sei mit  $\sigma(\mathcal{E})$  die von  $\mathcal{E}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra bezeichnet.

**4.2.6 Definition (Faktorraum)**

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $\alpha$  eine Partition von  $X$ . Betrachte

$$\alpha_\bullet : x \mapsto \alpha_x$$

als Abbildung von  $X$  nach  $X/\alpha := \alpha$ . Setze  $\mathfrak{B}_\alpha := \{B \subseteq X/\alpha : \alpha_\bullet^{-1}(B) \text{ meßbar}\}$  und

$$\mu_\alpha(B) := \mu(\alpha_\bullet^{-1}(B)) \quad \text{für alle } B \in \mathfrak{B}_\alpha.$$

Dann ist  $(X/\alpha, \mathfrak{B}_\alpha, \mu_\alpha)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und wird als **Faktorraum** von  $X$  bzgl.  $\alpha$  bezeichnet.

**4.2.7 Definition und Satz (System bedingter Maße)**

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Lebesgue-Raum und sei  $\alpha$  eine meßbare Partition von  $X$ . Dann existiert eine  $\mu_\alpha$ -Nullmenge  $\mathcal{N} \in \mathfrak{B}_\alpha$  und für jedes  $A \in \alpha \setminus \mathcal{N}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_A$  derart, daß gilt:

(i)  $(A, \mathfrak{B}_A, \mu_A)$  ist ein Lebesgue-Raum, wobei  $\mathfrak{B}_A := \{A \cap B : B \in \mathfrak{B}\}$ .

(ii) Ist  $B \in \mathfrak{B}$ , so liegt  $A \cap B$  für  $\mu_\alpha$ -fast alle  $A \in X/\alpha$  in  $\mathfrak{B}_A$ , außerdem ist die Funktion  $A \mapsto \mu_A(A \cap B)$  meßbar und es gilt

$$\mu(B) = \int_{X/\alpha} \mu_A(A \cap B) \mu_\alpha(dA).$$

$(\mu_A)$  wird als (kanonisches) **System bedingter Maße bzgl.  $\alpha$**  (engl.: canonical system [family] of measures) bezeichnet und ist eindeutig in dem Sinne, daß für jedes weitere System bedingter Maße  $(\mu'_A)$  stets  $\mu_A = \mu'_A$  für  $\mu_\alpha$ -fast alle  $A \in \alpha$  gilt.

**Bemerkung 3**

Da  $\mu_\alpha$  als Bildmaß von  $\mu$  unter  $x \mapsto \alpha_x$  definiert ist, folgt für jedes  $B \in \mathfrak{B}$

$$\int_{X/\alpha} \mu_A(A \cap B) \mu_\alpha(dA) = \int_X \mu_{\alpha_x}(\alpha_x \cap B) \mu(dx),$$

wobei  $x \mapsto \mu_{\alpha_x}(\alpha_x \cap B)$  für  $\mu$ -fast alle  $x \in X$  definiert ist.

**Notation**

Sei  $\beta$  eine meßbare Partition eines Lebesgue-Raumes  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ . Dann haben nur höchstens abzählbar viele Elemente aus  $\beta$  strikt positives Maß. Setze  $\beta' := \{B \in \beta : \mu(B) > 0\}$  und führe die Entropie von  $\beta$  ein durch

$$H_\mu(\beta) := \begin{cases} H_\mu(\beta'), & \text{falls } \mu(X \setminus \bigcup_{B' \in \beta'} B') = 0 \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit läßt sich die bedingte Entropie auf Lebesgue-Räumen wie folgt einführen:

**4.2.8 Definition und Satz (Bedingte Entropie auf Lebesgue-Räumen)**

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Lebesgue-Raum und seien  $\alpha, \beta$  meßbare Partitionen von  $X$ . Dann ist

$$H_\mu(\alpha|\beta) := \int_{X/\beta} H_{\mu_B}(\alpha \cap B) \mu_\beta(dB) = - \int_X \log \mu_{\beta_x}(\alpha_x \cap \beta_x) \mu(dx)$$

(mit  $\alpha \cap B = \{A \cap B : A \in \alpha\}$ ) die **bedingte Entropie von  $\alpha$ , gegeben  $\beta$** . Ist  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung, so setzt man

$$h_\mu(T, \alpha) := H_\mu\left(\alpha \mid \bigvee_{k \in \mathbb{N}} T^{-k} \alpha\right),$$

und es gilt dann  $\sup\{h_\mu(T, \alpha) : \alpha \text{ meßbare Partition von } X\} = h_\mu(T)$ .

Wir kommen nun zur Zerlegung von invarianten (Wahrscheinlichkeits-) Maßen in ihre ergodischen Komponenten. Im Gegensatz zu [16] und [49, II.6] betrachten wir hier nicht-kompakte Räume, so daß die Choquet-Theorie nicht anwendbar ist.

#### 4.2.9 Theorem (Ergodische Zerlegung eines (Wahrscheinlichkeits-) Maßes)

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Lebesgue-Raum und  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung. Dann existiert fur  $\mu$ -fast jedes  $x \in X$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_x$  auf  $(X, \mathfrak{B})$  mit

$$\int \varphi(x) \mu(dx) = \int_X \left( \int_X \varphi d\mu_x \right) \mu(dx)$$

fur alle  $\mu$ -integrierbaren  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  (kurz:  $\varphi \in L^1(\mu)$ ) derart, daß  $T$  bzgl.  $\mu_x$  ergodisch ist.

**Zusatz:** Es gibt ein  $E \in \mathfrak{B}$  mit  $T^{-1}(E) = E$ ,  $\mu(E) = 1$  und  $\mu_x(E) = 1$  fur alle  $x \in E$ . Ist  $\varphi \in L^1(\mu)$ , so kann man  $E$  wahlen mit  $\varphi \in L^1(\mu_x)$  fur alle  $x \in E$ .

Beweis:

Sei  $\mathcal{F} := \{B \in \mathfrak{B} : T^{-1}(B) = B\}$ . Dann ist  $\mathcal{F}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra von  $\mathfrak{B}$ .  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ist als Lebesgue-Raum abzahlbar erzeugt, also auch  $\mathcal{F}$ , d.h. es existiert eine Folge  $(B_n)$  von Mengen aus  $\mathcal{F}$  mit

$$\mathcal{F} = \sigma(B_n : n \in \mathbb{N}).$$

Setze

$$\alpha := \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n : E_n \in \{B_n, B_n^c\} \right\}.$$

Dann ist  $\alpha$  eine meßbare Partition von  $X$  (mit  $(B_n)$  als Basis dieser Partition) mit  $\alpha \subseteq \mathcal{F}$ , d.h. fur jedes  $A \in \alpha$  gilt  $T^{-1}(A) = A$ , also  $T(A) = T(T^{-1}(A)) \subseteq A$ . Sei

$$\mathcal{F}' := \left\{ \bigcup \beta : \beta \subseteq \alpha, \bigcup \beta \in \mathfrak{B} \right\}.$$

$\mathcal{F}'$  ist eine  $\sigma$ -Algebra. Fur jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $B_n = \bigcup_{x \in B_n} \alpha_x$ , d.h. es gilt  $B_n \in \mathcal{F}'$ . Es folgt  $\mathcal{F} = \sigma(B_n : n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}'$ . Sei  $(\mu_A)$  ein System bedingter Maße bzgl.  $\alpha$ . Sei  $A \in \alpha$  fur das  $\mu_A$  definiert ist und sei  $B \in \mathfrak{B}$  mit  $T^{-1}(B) = B$ . Wir zeigen  $\mu_A(A \cap B) \in \{0, 1\}$ , d.h.  $T$  ist ergodisch bzgl. dem durch  $B \mapsto \mu_A(A \cap B)$  gegebenen Maß. Aus  $T^{-1}(B) = B$  folgt  $B \in \mathcal{F}$ . Damit gilt  $B \in \mathcal{F}'$ , und somit

$$\mu_A(A \cap B) = \mu_A\left(A \cap \bigcup_{x \in B} \alpha_x\right) = \begin{cases} \mu_A(A) = 1, & \text{falls } A \cap B \neq \emptyset \\ \mu_A(\emptyset) = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fur alle  $B \in \mathfrak{B}$  und fast alle  $x \in X$  ist somit durch  $\mu_x(B) := \mu_{\alpha_x}(\alpha_x \cap B)$  ein ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_x$  auf  $(X, \mathfrak{B})$  definiert. Es folgt fur jedes  $B \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} \int \mathbb{1}_B d\mu &= \mu(B) = \int_{X/\alpha} \mu_A(A \cap B) \mu_\alpha(dA) = \int \mu_{\alpha_x}(\alpha_x \cap B) \mu(dx) \\ &= \int_X \mu_x(B) \mu(dx) = \int_X \left( \int_X \mathbb{1}_B d\mu_x \right) \mu(dx) \end{aligned}$$

und mit dem üblichen Erweiterungsschluß die Behauptung. Nun zum Nachweis des Zusatzes. Sei  $\mathcal{L} \in \mathfrak{B}_\alpha$  mit  $\mu_\alpha(\mathcal{L}) = 1$  derart, daß  $\mu_A$  für alle  $A \in \mathcal{L}$  existiert. Setze

$$E := \{x \in X \mid \alpha_x \in \mathcal{L}\} = \alpha_\bullet^{-1}(\mathcal{L}).$$

Aus der Definition von  $\mathfrak{B}_\alpha$  und  $\mu_\alpha$  folgt  $E \in \mathfrak{B}$  und  $\mu(E) = 1$ . Sei  $x \in E$ . Für jedes  $y \in \alpha_x$  ist  $\alpha_y = \alpha_x \in \mathcal{L}$ , d.h.  $y \in E$ . Damit ist  $\alpha_x \subseteq E$  und somit

$$\mu_x(E) = \mu_{\alpha_x}(\alpha_x \cap E) = \mu_{\alpha_x}(\alpha_x) = 1.$$

Ist  $x \in E$ , so gilt  $x \in T^{-1}(\alpha_{T(x)}) = \alpha_{T(x)}$ , also  $\alpha_{T(x)} = \alpha_x \in \mathcal{L}$ , d.h.  $x \in T^{-1}(E)$ . Ist umgekehrt  $x \in T^{-1}(E)$ , so gilt ebenfalls  $x \in T^{-1}(\alpha_{T(x)}) = \alpha_{T(x)}$  und somit  $\alpha_x = \alpha_{T(x)} \in \mathcal{L}$ , d.h.  $x \in E$ . Damit gilt auch  $T^{-1}(E) = E$ . Sei nun  $\mu \in L^1(\mu)$ . Aus der Meßbarkeit von  $A \mapsto \mu_A(A \cap B)$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ , folgt durch den üblichen Erweiterungsschluß die Meßbarkeit von  $x \mapsto \int |\varphi| d\mu_x$ . Damit ist

$$F := \{x \in X : \int |\varphi| d\mu_x < \infty\} = \bigcup \{A \in \alpha \mid \exists x \in A : \int |\varphi| d\mu_x < \infty\}$$

eine meßbare Menge, und aus der zweiten Darstellung folgt  $T^{-1}(F) = F$ . Wäre  $\mu(F) < 1$ , so wäre  $\infty = \int_{F^c} (\int |\varphi| d\mu_x) \mu(dx) \leq \int (\int |\varphi| d\mu_x) \mu(dx) = \int |\varphi| d\mu$ .  $\nabla$  zu  $\varphi \in L^1(\mu)$ . Betrachtet man  $E \cap F$  (statt  $E$ ) so folgt der Zusatz. ■

### Notation

Wir versehen  $\mathcal{P}(X)$  ( $X$ : meßbarer Raum) mit der Topologie der schwachen Konvergenz. Für jede meßbare Abbildung  $T : X \rightarrow X$ .

### Bemerkung 4

Sei  $X$  ein polnischer Raum,  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\bar{\mu}$  die Vervollständigung von  $\mu$  und  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung. Dann ist die Abbildung (mit der ergodischen Zerlegung  $(\mu_x)$  von  $\bar{\mu}$ )

$$x \mapsto \mu_x$$

meßbar (bzgl. der Topologie der schwachen Konvergenz auf  $\mathcal{P}(X)$ ).

### Beweis:

Die Mengen

$$V_{\mu^*}(f_1, \dots, f_n, \varepsilon) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) : \left| \int f_i d\mu - \int f_i d\mu^* \right| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n \right\},$$

$\mu^* \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und beschränkt, bilden eine Basis der Topologie der schwachen Konvergenz auf  $\mathcal{P}(X)$ . Nun ist  $x \mapsto \int f_i d\mu_x$  meßbar für  $i = 1, \dots, n$  und somit das Urbild von  $V_{\mu^*}(f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$  unter  $x \mapsto \mu_x$  gegeben durch die meßbare Menge

$$\left\{ x \in X : \left| \int f_i d\mu_x - \int f_i d\mu^* \right| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n \right\} = \bigcap_{i=1}^n \left\{ x \in X : \left| \int f_i d\mu_x - \int f_i d\mu^* \right| < \varepsilon \right\}.$$

■

Wir erhalten eine weitere ergodische Zerlegung von  $\mu$ , wie man sie im Fall eines kompakten Raumes aus der Choquet-Theorie erhält (die extremen Elemente<sup>9</sup> von  $\mathcal{P}_T(X)$  sind genau die ergodischen (Wahrscheinlichkeits-) Maße [49, Prop. II.2.5]). Benötigt wird hierzu noch die nachfolgende Aussage, die sich durch eine Approximation mittels Treppenfunktionen ergibt [45, VI.§4]:

<sup>9</sup>Ein Element  $a$  einer konvexen Menge  $X$  ist ein **extremer Punkt**, wenn für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  und jedes  $\lambda \in [0, 1]$  mit  $a = \lambda x + (1 - \lambda)y$  bereits  $\lambda \in \{0, 1\}$  folgt.

**Vorbemerkung**

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum,  $E$  ein Banachraum und sei  $H : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige und lineare Abbildung. Dann gilt für jedes integrierbare  $f : X \rightarrow E$

$$\int_X H \circ f \, d\mu = H\left(\int_X f \, d\mu\right).$$

**4.2.10 Korollar (Ergodische Zerlegung)**

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum, der eine abzählbare Basis besitzt. Sei  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  ein vollständiges Maß,  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung und sei  $\tau = \tau_\mu$  das Bildmaß von  $\mu$  unter der Abbildung  $x \mapsto \mu_x$ . Dann gilt

$$(*) \quad \mu = \int_{\mathcal{E}(X, T)} m \, \tau(dm).$$

Beweis:

Zunächst beachte man, daß  $X$  auch ein polnischer Raum ist [5, Satz 31.5] und die Faktorisierung  $(\mu_x)$  daher ( $\mu$ -fast sicher) existiert. Wir fassen die Elemente aus  $\mathcal{P}(X)$  mittels dem Darstellungssatz von Riesz als stetige Funktionale auf. Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die einen kompakten Träger besitzt. Die Menge  $\mathfrak{M}(X)$  aller endlichen, signierten Maße auf  $(X, \mathfrak{B}_X)$  ist, versehen mit der Variationsnorm, ein Banachraum [74] und die auf  $\mathfrak{M}(X)$  definierte Abbildung  $\nu \mapsto \langle \nu, \varphi \rangle = \int \varphi \, d\nu$  ist stetig und linear. Aus der Vorbemerkung folgt

$$\begin{aligned} \langle \mu, \varphi \rangle &= \int_X \varphi \, d\mu = \int_X \left( \int_X \varphi \, d\mu_x \right) \mu(dx) = \int_X \langle \mu_x, \varphi \rangle \mu(dx) = \left\langle \int_X \mu_x \mu(dx), \varphi \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\mathcal{E}(X, T)} m \, \tau(dm), \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung gerade die Transformationsformel ist. ■

**Bemerkung 5**

Ist  $X$  kompakt (und metrisierbar), so ist aus der Choquet-Theorie bekannt (z.B. [71]), daß die Darstellung  $(*)$  in dem Sinne eindeutig ist, daß es nur ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tau$  auf  $\mathcal{P}_T(X)$  mit obiger Eigenschaft und  $\tau(\mathcal{E}(X, T)) = 1$  gibt. Zudem muß die Vollständigkeit von  $\mu$  nicht vorausgesetzt werden.

**4.2.11 Lemma**

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Sigma := \{1, \dots, n\}^{\mathbb{N}_0}$  und  $S : \Sigma \rightarrow \Sigma, (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \mapsto (a_{k+1})_{k \in \mathbb{N}_0}$  der (einseitige) Shift auf  $(\Sigma, \mathfrak{B}_\Sigma)$ . Sei  $\mu \in \mathcal{P}_S(\Sigma)$  und sei  $\tau = \tau_{\bar{\mu}}$  aus Korollar 4.2.10 bezüglich der Vervollständigung  $\bar{\mu}$  von  $\mu$ . Dann gilt

$$\mathfrak{h}_\mu(S) = \int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} \mathfrak{h}_\nu(S) \, \tau(d\nu).$$

Beweis:

Aus Bemerkung 1 (Seite 64) folgt  $\mathfrak{h}_\mu(S) = \mathfrak{h}_{\bar{\mu}}(S)$  und  $\mu$  kann daher als vollständig vorausgesetzt werden. Für alle  $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}, y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \Sigma$  sei

$$d(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_k - y_k|}{2^k}.$$

Dann wird hierdurch eine Metrik  $d$  auf  $\Sigma$  definiert, deren erzeugte Topologie mit der auf  $\Sigma$  gegebenen Produkt-Topologie übereinstimmt. Gilt  $x \neq y$  und ist  $k_0 \in \mathbb{N}_0$  mit  $x_{k_0} \neq y_{k_0}$ , so folgt

$$d(S^{k_0}(x), S^{k_0}(y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x_{k+k_0} - y_{k+k_0}|}{2^k} \geq |x_{k_0} - y_{k_0}| \geq 1,$$



d.h.  $S$  ist eine expansive Abbildung. Aus [57, Thm. 2.4.6] folgt, daß die Entropieabbildung  $F : \mathcal{P}_S(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mu \mapsto \mathfrak{h}_\mu(S)$  oberhalb-stetig (und nach Satz 4.1.4 auch affin) ist. Nun geht man wie im bekannten Fall eines Homöomorphismuses vor (z.B. [71, Theorem 8.4]), d.h. man wählt eine monoton fallende Folge  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von stetigen und affinen Abbildungen  $F_n : \mathcal{P}_T(X) \rightarrow \mathbb{R}$ , die (punktweise) gegen  $F$  konvergiert und unter Verwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_\mu(S) &= F(\mu) = F\left(\int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} m \tau(dm)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n\left(\int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} m \tau(dm)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} F_n(m) \tau(dm) = \int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} F(m) \tau(dm) = \int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} \mathfrak{h}_\nu(S) \tau(d\nu). \end{aligned}$$

■

Der nachfolgende Satz zeigt, warum man sich im wesentlichen auf die Betrachtung von ergodischen Maßen beschränken kann. Dabei wurde die Aussage zuerst von K. Jacobs (1961) für Homöomorphismen  $T : X \rightarrow X$ ,  $X$  kompakter metrischer Raum, bewiesen [40]. Eine Formulierung für stetige Selbstabbildungen (auf einem kompakten metrischen Raum) findet man beispielsweise im Buch von P. Walters [71, Thm. 8.4].

#### 4.2.12 Theorem

Sei  $(X, \mathfrak{B}, \mu)$  ein Lebesgue-Raum und sei  $T : X \rightarrow X$  eine maßerhaltende Abbildung, sowie  $(\mu_x)_x$  eine ergodische Zerlegung von  $\mu$  (bzgl.  $T$ ) gemäß Theorem 4.2.9.

(a) Für jede endliche, meßbare Partition  $\beta$  von  $X$  gilt

$$\mathfrak{h}_\mu(T, \beta) = \int_X \mathfrak{h}_{\mu_x}(T, \beta) \mu(dx),$$

(b) Es gilt

$$\mathfrak{h}_\mu(T) \leq \int_X \mathfrak{h}_{\mu_x}(T) \mu(dx).$$

Beweis:

(a) Sei  $\beta = \{B_1, \dots, B_k\}$  eine endliche, meßbare Partition von  $X$  und sei  $\Sigma := \{1, \dots, k\}^{\mathbb{N}_0}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $x \in X$  sei  $i_n(x) \in \{1, \dots, k\}$  mit  $T^n(x) \in B_{i_n(x)}$ , außerdem sei

$$\Phi : X \rightarrow \Sigma, \quad x \mapsto (i_n(x))_{n \in \mathbb{N}_0}.$$

Ist  $C = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : a_0 \in I_0, \dots, a_m \in I_m\}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $I_0, \dots, I_m \subseteq \{1, \dots, k\}$ , eine Zylindermenge in  $\Sigma$ , so ist

$$\Phi^{-1}(C) = \{x \in X : i_0(x) \in I_0, \dots, i_m(x) \in I_m\} = \bigcap_{j=0}^m \{x \in X : i_j(x) \in I_j\} = \bigcap_{j=0}^m T^{-j} \left( \bigcup_{i \in I_j} B_i \right)$$

meßbar. Damit ist  $\Phi$  eine meßbare Abbildung. Aus  $T^{n+1}(x) \in B_{i_{n+1}(x)}$  und  $T^{n+1}(x) = T^n(T(x)) \in B_{i_n(T(x))}$  folgt  $i_{n+1}(x) = i_n(T(x))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in X$ . Für den (einseitigen) Shift  $S : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \mapsto (a_{n+1})_{n \in \mathbb{N}_0}$  gilt also

$$\Phi \circ T = S \circ \Phi.$$

Ist  $\mu$  ein  $T$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß (auf  $X$ ), so gilt  $\mu(\Phi^{-1}(S^{-1}(A))) = \mu((S \circ \Phi)^{-1}(A)) = \mu((\Phi \circ T)^{-1}(A)) = \mu(T^{-1}(\Phi^{-1}(A))) = \mu(\Phi^{-1}(A))$  für alle  $A \in \mathfrak{B}_\Sigma$ , d.h. das Bildmaß  $\Phi\mu$  von  $\mu$  unter  $\Phi$  ist ein  $S$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Sigma, \mathfrak{B}_\Sigma)$ .

Ist  $\mu$  ergodisch, so auch  $\Phi\mu$ . Sei  $\mu$  ein  $T$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß und sei  $\tau$  wieder das Bildmaß von  $\mu$  unter  $x \mapsto \mu_x$ . Für  $i = 1, \dots, k$  setze

$$U_i := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : a_0 = i\} \quad \text{und} \quad \eta := \{U_i : i \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Dann folgt  $\Psi^{-1}(U_i) = B_i$  für  $i = 1, \dots, k$ , also  $\Psi^{-1}\eta = \beta$ .  $\xi := \{\bigcup_{i \in I} U_i : I \subseteq \{1, \dots, k\}\}$  ist eine endliche  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathcal{B}_\Sigma$ . Für alle  $j_0, \dots, j_n \in \{1, \dots, k\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\{(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} : a_0 = j_0, \dots, a_n = j_n\} = U_{j_0} \cap S^{-1}(U_{j_1}) \cap \dots \cap S^{-n}(U_{j_n}) \in \xi_n := \bigvee_{i=0}^n S^{-i}\xi,$$

und somit liegen alle Zylindermengen von  $\mathcal{B}_\Sigma$  in  $\bigvee_{i=0}^\infty S^{-i}\xi$  (ist die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle Mengen  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , enthält). Damit gilt  $\bigvee_{i=0}^\infty S^{-i}\xi = \mathcal{B}_\Sigma$ . Aus Theorem 4.18 in [71] folgt

$$(\#) \quad \mathfrak{h}_{\Psi\mu}(S) = \mathfrak{h}_{\Psi\mu}(S, \eta) = \mathfrak{h}_\mu(T, \beta) \quad \text{für alle } \mu \in \mathcal{P}_T(X).$$

Aus der Eindeutigkeit der Darstellung (\*) in Korollar 4.2.10 (vergleiche die anschließende Bemerkung) folgt, daß  $\Psi\tau$  das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathcal{E}(\Sigma, S)$  ist, mit dem  $\Psi\mu$  (statt  $\mu$ ) dargestellt wird. Damit folgt aus Lemma 4.2.11

$$\mathfrak{h}_{\Phi\mu}(S) = \int_{\mathcal{E}(\Sigma, S)} \mathfrak{h}_\nu(S) (\Phi\tau)(d\nu) = \int_X \mathfrak{h}_{\Phi\mu_x}(S) \mu(dx).$$

Gemäß (#) stimmt die linke Seite mit  $\mathfrak{h}_\mu(T, \beta)$  überein und die rechte Seite ist das Integral  $\int_X \mathfrak{h}_{\mu_x}(T, \beta) \mu(dx)$ , wie behauptet.

(b) Für jede endliche, meßbare Partition  $\beta$  von  $X$  folgt aus (a)

$$\mathfrak{h}_\mu(T, \beta) = \int_X \mathfrak{h}_{\mu_x}(T, \beta) \mu(dx) \leq \int_X \mathfrak{h}_{\mu_x}(T) \mu(dx),$$

woraus sich (b) ergibt. ■

### Bemerkung 6

Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $T : X \rightarrow X$  ein Homöomorphismus, so gilt in (b) die Gleichheit.

## 4.3. Topologische Entropie mittels offener Überdeckungen

Die Definition der topologischen Entropie von R. L. Adler, G. Konheim und M. H. McAndrew [1] ergibt sich dadurch, daß  $H_\mu$  durch eine Funktion  $H$  ersetzt wird und offene Überdeckungen anstatt meßbarer Partitionen betrachtet werden. Ist der zugrundeliegende Raum nicht kompakt, so betrachten wir hier zwei Möglichkeiten, diese Definition auf diesen Fall zu übertragen.

### Notation

Ist  $X$  ein topologischer Raum und  $\xi$  eine endliche Überdeckung von  $X$ , so sei

$$N(\xi) := \min \{|\xi'| : \xi' \text{ endliche Teilüberdeckung von } \xi\}$$

und  $H(\xi) := \log N(\xi)$ .

### 4.3.1 Definition (Topologische Entropie mittels offener Überdeckungen)

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  stetig, sowie  $\xi$  eine endliche, offene Überdeckung von  $X$  und

$$\mathfrak{h}(f, \xi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\xi\right) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\xi\right).$$

Dann wird die **topologische Entropie** von  $f$  definiert durch

$$\mathfrak{h}(f) := \sup\{\mathfrak{h}(f, \xi) : \xi \text{ endliche, offene Überdeckung von } X\}.$$

#### Bemerkung 1

Die Konvergenz von

$$\left(\frac{1}{n} \cdot H\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\xi\right)\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist stets gegeben, und ist  $X$  kompakt, so stimmt obige Definition mit der üblichen Definition der topologischen Entropie überein [71, §7.1]. Die topologische Entropie ist eine topologische Eigenschaft.

### 4.3.2 Anmerkungen

J. E. Hofer [35] gibt eine weitere Definition der topologischen Entropie an, die auf einer Kompaktifizierung des zugrundeliegenden Raumes beruht [43, 70]:

Sei  $X$  ein vollständig regulärer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Sei  $\beta X$  eine Stone-Čech-Kompaktifizierung<sup>10</sup> von  $X$  und fasse  $f$  als stetige Abbildung  $f : X \rightarrow \beta X$  auf, d.h. betrachte  $\beta \circ f$ . Dann existiert eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung  $f^* = f_\beta^* : \beta X \rightarrow \beta X$  von  $f$  (genauer: von  $\beta \circ f$ ), d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & \beta X \\ & \searrow \beta \circ f & \downarrow f^* \\ & & \beta X \end{array}$$

kommutiert, es gilt also  $f^* \circ \beta = \beta \circ f$ . Dann ist  $\mathfrak{h}^*(f) := \mathfrak{h}(f^*)$  die **topologische Entropie** von  $f$ .

#### Bemerkung 2

$\beta X$  ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt, d.h. ist  $\beta' X$  eine weitere Stone-Čech-Kompaktifizierung, so existiert ein eindeutig bestimmter Homöomorphismus

$$h : \beta X \rightarrow \beta' X$$

mit  $h \circ \beta = \beta'$ . Es folgt

$$(h \circ f_\beta^*) \circ \beta = h \circ (f_\beta^* \circ \beta) = h \circ (\beta \circ f) = \beta' \circ f = f_{\beta'}^* \circ \beta' = (f_{\beta'}^* \circ h) \circ \beta.$$

Da  $\beta(X)$  dicht in  $\beta X$  ist, ergibt sich also  $h \circ f_\beta^* = f_{\beta'}^* \circ h$ . Damit folgt  $\mathfrak{h}(f_\beta^*) = \mathfrak{h}(f_{\beta'}^*)$ , die topologische Entropie  $\mathfrak{h}^*(f)$  von  $f$  ist also unabhängig von der Wahl der (Stone-Čech-) Kompaktifizierung von  $X$ . Ist  $X$  kompakt, so gilt  $\mathfrak{h}^*(f) = \mathfrak{h}(f)$ .

<sup>10</sup>Bis auf Homöomorphie betrachte die folgende Konstruktion: Sei  $I = C(X, [0, 1])$ . Dann ist  $[0, 1]^I$  gemäß Satz von Tychonoff kompakt. Verwende  $\beta : X \rightarrow [0, 1]^I$ ,  $x \mapsto (f(x))_{f \in I}$  und setze  $\beta X := \overline{\beta(X)}$ .

Im Gegensatz zur Alexandroff-Einpunkt-Kompaktifizierung (zu der im allgemeinen keine stetige Fortsetzung  $f^*$  von  $f \cong \beta \circ f$  existiert) ist unter Umständen eine Hinzu-nahme einer Vielzahl von Punkten von Nöten, um die Stone-Čech-Kompaktifizierung zu erhalten. Aus diesem Grund kann auch die topologische Entropie der stetigen Fortsetzung  $f^*$  von  $f$  sehr groß werden.

#### 4.4. Topologische Entropie mittels einer Metrik

Die (topologische) Entropie wird häufig als ein „Maß“ für das chaotische Verhalten (genauer: für die Unvorhersehbarkeit) einer Funktion aufgefaßt. Deutlich wird dies an der folgenden Definition der topologischen Entropie. Wir führen diese nicht nur für gleichmäßig stetige Abbildungen ein, sondern setzen zunächst noch nicht einmal Stetigkeit voraus.

##### Notation

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Für alle  $x_0 \in X, r \in \mathbb{R}_{>0}$  seien  $\mathbb{B}_d(x_0, r) [= \mathbb{B}(x_0, r)]$  und  $\overline{\mathbb{B}}_d(x_0, r) [= \overline{\mathbb{B}}(x_0, r)]$  die offene bzw. abgeschlossene  $d$ -Kugel um  $x_0$  mit Radius  $r$ . Sei  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist  $d_n = d_{n,f} : X \times X \rightarrow [0, \infty[$ , definiert durch

$$d_n(x, y) := \max_{i=0}^{n-1} d(f^i(x), f^i(y)) \quad \text{für alle } x, y \in X$$

eine Metrik auf  $X$ , wobei  $f^0 = \text{id} = \text{id}_X, f^n = f \circ f^{n-1}$ . Sei  $\mathcal{K}(X)$  die Menge aller kompakten, nicht-leeren Teilmengen von  $X$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, K \in \mathcal{K}(X)$  setze

$$r_n(\varepsilon, K) := \min \left\{ |E| : E \subseteq X, K \subseteq \bigcup_{x \in E} \overline{\mathbb{B}}_{d_n}(x, \varepsilon) \right\}.$$

Eine Menge  $E \subseteq X$  aus der Definition von  $r_n(\varepsilon, K)$  wird aus naheliegenden Gründen auch als  $(n, \varepsilon)$ -**spanning set** (für  $K$ ) bezeichnet.  $r_n(\varepsilon, K)$  hängt sowohl von der Metrik  $d$  als auch von der Abbildung  $f$  ab. Gelegentlich schreiben wir daher auch  $r_n(\varepsilon, K, f)$  oder sogar  $r_n(\varepsilon, K, f, d)$ .

##### 4.4.1 Definition (Topologische Entropie mittels einer Metrik)

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  und  $K \in \mathcal{K}(X)$ . Dann ist

$$h_d(f, K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon, K) = \sup_{\varepsilon > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon, K) \in [0, \infty]$$

die **topologische Entropie von  $f$  auf  $K$**  (bzgl.  $d$ ) und  $h_d(f) := \sup_{K \in \mathcal{K}(X)} h_d(f, K)$  die **topologische Entropie von  $f$**  (bzgl.  $d$ ).

##### Bemerkung 1

(i) Diese Definition der topologischen Entropie ist keine topologische Eigenschaft. Eine Unabhängigkeit von der Wahl der Metrik liegt jedoch vor, wenn der zugrundeliegende Raum kompakt ist.

(ii) Statt  $(n, \varepsilon)$ -spanning sets werden auch  $(n, \varepsilon)$ -**separated sets** betrachtet [71, §7.2], d.h. sei

$$s_n(\varepsilon, K) := \sup \{ |E| : E \subseteq K, \forall x, y \in E : x \neq y \Rightarrow d_n(x, y) > \varepsilon \}.$$

Auch ohne die (gleichmäßige) Stetigkeit von  $f$  zu fordern, erhält man  $r_n(\varepsilon, K) \leq s_n(\varepsilon, K) \leq r_n(\frac{\varepsilon}{2}, K)$ , d.h. es gilt  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log s_n(\varepsilon, K) = h_d(f, K)$ .

#### 4.4.2 Beispiele

- 1.) Sei  $X = \mathbb{R}$ , versehen mit der euklidischen Metrik  $d$ , und  $f : X \rightarrow X, x \mapsto x + 1$ . Dann gilt  $h_d(f) = 0$ . **Denn:** Für alle  $n \in \mathbb{N}_0, x \in X$  gilt  $f^n(x) = x + n$ , also  $d_n(x, y) = d(x, y)$  für alle  $n \in \mathbb{N}, x, y \in X$ . Sei  $K \in \mathcal{K}(X)$ . Es folgt, daß  $r_n(\varepsilon, K)$  unabhängig von  $n \in \mathbb{N}$  ist. Damit gilt  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon, K) = 0$ , also ergibt sich  $h_d(f, K) = 0$ , d.h.  $h_d(f) = 0$ .
- 2.) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x$ . Dann gilt  $h_d(f) = \log 2$  mit der euklidischen Metrik  $d$ , außerdem gibt es für jedes  $c > 0$  eine Metrik  $d_c$ , die die euklidische Topologie erzeugt, mit  $h_{d_c}(f) = c$  [32].

#### Notation

Ist  $X$  ein metrisierbarer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung, so sei

$$h_D(f) := \inf\{h_d(f) : d \text{ Metrik auf } X, \text{ die die vorliegende Topologie erzeugt}\}.$$

Auch  $h_D(f)$  wird als **topologische Entropie von  $f$**  bezeichnet. Der nachfolgende Satz zeigt, daß es sich hierbei tatsächlich um eine topologische Eigenschaft handelt:

#### 4.4.3 Satz

Seien  $X, X_1, X_2$  metrisierbare Räume und seien  $f : X \rightarrow X, f_1 : X_1 \rightarrow X_1, f_2 : X_2 \rightarrow X_2$  Abbildungen.

(a) Sei  $\pi : X_1 \rightarrow X_2$  eine stetige Abbildung mit  $\pi \circ f_1 = f_2 \circ \pi$ .

(i) Ist  $\pi$  surjektiv, offen und eigentlich<sup>11</sup>, so gilt  $h_D(f_1) \geq h_D(f_2)$ .

(ii) Ist  $\pi$  ein Homöomorphismus, d.h. sind  $f_1$  und  $f_2$  topologisch konjugiert, so gilt in (i) die Gleichheit.

(b) Ist  $A$  eine nicht-leere Teilmenge von  $X$  mit  $f(A) \subseteq A$  und versieht man  $A$  mit der Spurtopologie, so gilt

$$h_D(f|_A) \leq h_D(f).$$

(c) Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt  $h_D(f^k) \leq k \cdot h_D(f)$ .

#### Beweis:

(a) (i) Sei  $d_1$  eine Metrik auf  $X_1$ , die die Topologie auf  $X_1$  erzeugt. Sei  $K_2 \in \mathcal{K}(X_2)$  und  $K_1 := \pi^{-1}(K_2)$ . Es folgt  $K_1 \in \mathcal{K}(X_1)$ , da  $\pi$  eigentlich und surjektiv ist. Seien  $n \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und sei  $E_1$  eine  $(n, \varepsilon)$ -spanning set für  $K_1, f_1, d_1$ . Sei

$$d_2(x, y) := \text{dist}_{d_1}(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y)) \quad \text{für alle } x, y \in X_2.$$

①  $d_2$  ist eine Metrik auf  $X_2$ :

Für jedes  $x \in X_2$  ist  $\pi^{-1}(x)$  kompakt und nicht-leer. Sind  $x, y \in X_2$  mit  $d_2(x, y) = 0$ , so folgt daraus  $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y) \neq \emptyset$ , also  $x = y$ . Da alle anderen Metrikeigenschaften von  $d_2$  klar sind, folgt, daß  $d_2$  eine Metrik auf  $X_2$  ist.

② Die von  $d_2$  erzeugte Topologie ist die von  $X_2$ :

Seien  $y \in X_2, r \in \mathbb{R}_{>0}$ . Für jedes  $x \in \pi^{-1}(y) \neq \emptyset$  wähle eine offene Menge  $U_x \subseteq X_1$  mit  $x \in U_x \subseteq \mathbb{B}_{d_1}(x, r)$ . Dann ist  $U := \bigcup_{x \in \pi^{-1}(y)} U_x \subseteq X_1$  offen. Da  $\pi$  eine offene Abbildung ist, ist  $V := \pi(U) \subseteq X_2$  offen, außerdem folgt  $y \in V$  und es gilt

<sup>11</sup>D.h. das Urbild einer jeden kompakten Menge ist kompakt.

$V \subseteq \mathbb{B}_{d_2}(y, r)$ . Sei nun  $V$  eine offene Menge in  $X_2$  und  $y \in V$ . **Angenommen**, es existiert kein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\mathbb{B}_{d_2}(y, r) \subseteq V$ . Dann existiert zu jedem  $n \in \mathbb{N}$  ein  $y_n \in X_2$  mit  $d_2(y, y_n) < \frac{1}{n}$  und  $y_n \notin V$ . Es gilt also

$$d_2(y_n, y) = \text{dist}_{d_1}(\pi^{-1}(y_n), \pi^{-1}(y)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Sei  $m \in \mathbb{N}$ . Dann existiert also ein  $n_0 = n_0(m) \in \mathbb{N}$  mit

$$\text{dist}_{d_1}(\pi^{-1}(y_n), \pi^{-1}(y)) < \frac{1}{m} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Für jedes  $n \geq n_0(m)$  gibt es also  $x^{(m,n)} \in \pi^{-1}(y)$  und  $x_n^{(m,n)} \in \pi^{-1}(y_n)$  mit  $d_1(x_n^{(m,n)}, x^{(m,n)}) < \frac{1}{m}$ . Aufgrund der Kompaktheit von  $\pi^{-1}(y)$  kann man durch den Übergang zu einer konvergenten Teilfolge von  $(x^{(m,n)})_{n \in \mathbb{N}_{\geq n_0(m)}}$  o.B.d.A. die Existenz von  $x^{(m)} := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(m,n)}$  voraussetzen. Es folgt  $x^{(m)} \in \pi^{-1}(y)$ . Abermals durch den Übergang zu einer Teilfolge können wir o.B.d.A. die Existenz von  $x := \lim_{m \rightarrow \infty} x^{(m)}$  annehmen. Es folgt  $x \in \pi^{-1}(y) \subseteq \pi^{-1}(V)$  (ist offen). Wähle ein  $r > 0$  mit  $\mathbb{B}_{d_1}(x, r) \subseteq \pi^{-1}(V)$ . Sei  $m \in \mathbb{N}_{> \frac{3}{r}}$  mit  $d_1(x^{(m)}, x) < \frac{r}{3}$  und sei  $n \geq n_0(m)$  mit  $d_1(x^{(m,n)}, x^{(m)}) < \frac{r}{3}$ . Dann folgt aus

$$d_1(x_n^{(m,n)}, x) \leq d_1(x_n^{(m,n)}, x^{(m,n)}) + d_1(x^{(m,n)}, x^{(m)}) + d_1(x^{(m)}, x) < r$$

$x_n^{(m,n)} \in \pi^{-1}(V)$ , also  $y_n = \pi(x_n^{(m,n)}) \in V$ .  $\zeta$

③  $E_2 := \pi(E_1)$  ist eine  $(n, \varepsilon)$ -spanning set für  $K_2, f_2, d_2$ :

Sei  $y \in K_2$ . Wähle ein  $z \in \pi^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Es folgt  $z \in K_1$ . Da  $E_1$  eine  $(n, \varepsilon)$ -spanning set für  $K_1, f_1, d_1$  ist, gibt es ein  $x \in E_1$  mit  $d_{1, f_1}(z, x) < \varepsilon$ . Es folgt für  $j = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} d_2(f_2^j(y), f_2^j(\pi(x))) &= d_2(f_2^j(\pi(z)), f_2^j(\pi(x))) = d_2(\pi \circ f_1^j(z), \pi \circ f_1^j(x)) \\ &\leq d_1(f_1^j(z), f_1^j(x)) \leq d_{1, f_1}(z, x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist  $E_2$  eine  $(n, \varepsilon)$ -spanning set für  $K_2, f_2, d_2$  mit  $|E_2| \leq |E_1|$ . Also gilt  $r_n(\varepsilon, K_2, f_2, d_2) \leq r_n(\varepsilon, K_1, f_1, d_1)$ , d.h.  $\mathfrak{h}_{d_2}(f_2, K_2) \leq \mathfrak{h}_{d_1}(f_1, \pi^{-1}(K_2))$ .

(ii) Folgt aus (i), indem man  $f_1$  und  $f_2$  vertauscht und  $\pi^{-1}$  betrachtet.

(b) Sei  $d$  eine Metrik auf  $X$ , die die Topologie von  $X$  erzeugt und seien  $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ . Sei  $d' := d|_{A \times A}$  und sei  $K \subseteq A$  eine in  $A$ , also auch in  $X$  kompakte, nicht-leere Menge. Sei  $E \subseteq K$  eine  $(n, \varepsilon)$ -separated set für  $K$  und  $f|_A$ , d.h. für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  gilt  $d'_{n, f|_A}(x, y) > \varepsilon$ . Dann gilt auch  $d_{n, f}(x, y) > \varepsilon$ , d.h.  $E$  ist auch eine  $(n, \varepsilon)$ -separated set für  $K$  und  $f$ . Es folgt  $s_n(\varepsilon, K, f|_A) \leq s_n(\varepsilon, K, f)$ , also  $\mathfrak{h}_{d'}(f, K) \leq \mathfrak{h}_d(f, K)$  und somit (b).

(c) Wir können  $k \geq 1$  voraussetzen. Sei  $d$  eine Metrik auf  $X$ , die die Topologie von  $X$  erzeugt,  $K \in \mathcal{K}(X)$  und seien  $\ell \in \mathbb{N}, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Sei  $E \subseteq X$  eine  $(\ell \cdot k, \varepsilon)$ -spanning set für  $f$  und  $K$ , d.h.

$$K \subseteq \bigcup_{x \in E} \overline{\mathbb{B}}_{d_{\ell \cdot k, f}}(x, \varepsilon).$$

Dann folgt  $K \subseteq \bigcup_{x \in E} \overline{\mathbb{B}}_{d_{\ell, f^k}}(x, \varepsilon)$ , d.h.  $E$  ist eine  $(\ell, \varepsilon)$ -spanning set für  $f^k$ . Damit gilt  $r_\ell(\varepsilon, K, f^k) \leq r_{\ell \cdot k}(\varepsilon, K, f)$ , d.h.

$$\frac{1}{\ell} \cdot \log r_\ell(\varepsilon, K, f^k) \leq k \cdot \frac{1}{\ell \cdot k} \cdot \log r_{\ell \cdot k}(\varepsilon, K, f) \quad \text{für jedes } \ell \in \mathbb{N}.$$

Es folgt  $\mathfrak{h}_d(f^k, K) \leq k \cdot \mathfrak{h}_d(f, K)$ , also  $\mathfrak{h}_D(f^k) \leq k \cdot \mathfrak{h}_D(f)$ . ■

#### 4.4.4 Anmerkungen

Die Idee  $h_D(f)$  zu betrachten, stammt von M. Handel und B. Kitchens [32]. Ist in Definition 4.4.1 der zugrundeliegende Raum  $(X, d)$  kompakt, so ist bekannt, daß man (ebenfalls ohne Stetigkeitsannahme) „lim sup“ in der Definition von  $h_d(f, K)$  auch durch „lim inf“ ersetzen kann [49]. Betrachte daher auch

$$\underline{h}_d(f, K) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon, K) = \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon, K)$$

und führe entsprechend  $\underline{h}_d(f), \underline{h}_D(f)$  ein. Die Aussagen (a) und (b) aus Satz 4.4.3 bleiben erhalten, wenn man  $h_D$  durch  $\underline{h}_D$  ersetzt. Obiger Beweis von Aussage (c) bricht jedoch für  $\underline{h}_D$  zusammen. Es gilt  $\underline{h}_D(f) \leq h_D(f)$  mit Gleichheit, falls  $X$  kompakt ist.

#### 4.4.5 Beispiel

3.) (Der einseitige Shift)

Für jede nicht-leere Menge  $I$  sei  $\Omega_I := I^{\mathbb{N}}$  und sei  $\sigma_I : \Omega_I \rightarrow \Omega_I$  der (einseitige) Shift auf  $\Omega_I$ . Sei  $X$  ein metrischer Raum und seien  $I, J \subseteq X$  mit  $\emptyset \neq I \subseteq J$  und sei  $\pi = \text{id}_{\Omega_I} : \Omega_I \rightarrow \Omega_J$ . Dann ist  $\pi$  stetig und injektiv, außerdem gilt

$$\pi \circ \sigma_I = \sigma_J \circ \pi,$$

allerdings ist  $\pi$  im allgemeinen nicht surjektiv. Aus  $\sigma_J|_{\Omega_I} = \sigma_I$  folgt mit Satz 4.4.3(b)  $h_D(\sigma_J) \geq h_D(\sigma_J|_{\Omega_I}) = h_D(\sigma_I)$ . Ist  $|I| < \infty$ , so ist  $\Omega_I$  kompakt und es gilt  $h_D(\sigma_I) = h(\sigma_I) = \log |I|$ . Insbesondere gilt  $h_D(\sigma_J) = \infty$ , falls  $|J| = \infty$ .

## 4.5. Topologische Entropie mittels $C$ -Strukturen

Der in [8, 72, 73] betrachteten topologischen Entropie wird in der Literatur nur wenig Beachtung geschenkt. Dabei wurde diese ähnlich wie die Hausdorff-Dimension eingeführt (es liegt eine **Carathéodory-Dimensions-Struktur**, kurz:  **$C$ -Struktur**, vor [54]), die bekanntlich ein Maß für die Komplexität von Mengen darstellt.

### Notation

Sei  $X$  eine Menge,  $\mathfrak{P}(X)$  die Potenzmenge von  $X$ ,  $C \subseteq X$  und  $\xi \subseteq \mathfrak{P}(X)$ .  $C$  ist  $\xi$  **untergeordnet**, in Zeichen:  $C \prec \xi$ , falls es ein  $E \in \xi$  mit  $C \subseteq E$  gibt. Ist  $C_i, i \in I$ , eine Familie in  $\mathfrak{P}(X)$ , so sei

$$\{C_i : i \in I\} \prec \xi,$$

falls  $C_i \prec \xi$  für jedes  $i \in I$  vorliegt. Sei  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung und  $\xi$  eine Überdeckung<sup>12</sup> von  $X$ . Für jedes  $C \in \mathfrak{P}(X)$  sei

$$N_{f, \xi}(C) := \begin{cases} 1 + \sup \{k \in \mathbb{N}_0 : f^\ell(C) \prec \xi \text{ für } \ell = 0, \dots, k\}, & \text{falls } C \prec \xi \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und  $D_{f, \xi}(C) := \exp(-N_{f, \xi}(C))$  mit  $\exp(-\infty) := 0$ . Für alle  $A \in \mathfrak{P}(X)$ ,  $s, \delta \in ]0, \infty[$  sei

$$h_{\xi, \delta}^s(f, A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} D_{f, \xi}(C_j)^s : A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j, D_{f, \xi}(C_j) \leq \delta \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \right\},$$

wobei  $\inf \emptyset := \infty$ , sowie  $h_{\xi}^s(f, A) := \sup_{\delta > 0} h_{\xi, \delta}^s(f, A)$ .

<sup>12</sup>Die Elemente aus  $\xi$  können auch Teilmengen einer Menge  $Y \supseteq X$  sein.

**Bemerkung 1**

Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  und  $\xi$  eine Überdeckung von  $X$ , so gilt

$$N_{f,\xi}(E) \geq n + 1, \text{ d.h. } D_{f,\xi}(E) \leq e^{-(n+1)}, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, E \in \bigvee_{k=0}^n f^{-k}\xi,$$

**denn** sind  $E_0, \dots, E_n \in \xi$  mit  $E = \bigcap_{k=0}^n f^{-k}(E_k)$ , so folgt  $f^\ell(E) \subseteq E_\ell \prec \xi$  für  $\ell = 0, \dots, n$ .

**4.5.1 Definition (Topologische Entropie)**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung, sowie  $A \subseteq X$  und  $\xi$  eine Überdeckung von  $X$ . Setze

$$h_\xi(f, A) := \inf\{s \in ]0, \infty[ : h_\xi^s(f, A) = 0\}.$$

Dann ist die **topologische Entropie von  $f$  auf  $A$**  definiert durch

$$h(f, A) := \sup\{h_\xi(f, A) : \xi \text{ endliche, offene Überdeckung von } X\},$$

und  $h(f, X)$  ist die **topologische Entropie** von  $f$ .

**Bemerkung 2**

Man beachte, daß die Stetigkeit der Abbildung  $f$  nicht vorausgesetzt wurde, außerdem gilt für jede Überdeckung  $\xi$  von  $X$

$$h_\xi^s(f, A) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } s < h_\xi(f, A) \\ 0, & \text{falls } s > h_\xi(f, A) \end{cases} \quad \text{für alle } s \in ]0, \infty[.$$

$h(f, \cdot)$  ist ein äußeres Maß, aber kein Maß auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}_X$  von  $X$ .

**4.5.2 Satz ([72, §2.2])**

Seien  $X, X_1, X_2$  topologische Räume und seien  $f : X \rightarrow X$ ,  $f_1 : X_1 \rightarrow X_1$ ,  $f_2 : X_2 \rightarrow X_2$ .

(a) Sei  $\pi : X_1 \rightarrow X_2$  eine stetige Abbildung mit  $\pi \circ f_1 = f_2 \circ \pi$ .

(i) Ist  $\pi$  surjektiv, so gilt  $h(f_1, A) \geq h(f_2, \pi(A))$  für alle Teilmengen  $A$  von  $X_1$ .

(ii) Ist  $\pi$  ein Homöomorphismus, so gilt in (i) die Gleichheit.

(b) Für jede abgeschlossene Teilmenge  $A$  von  $X$  mit  $f(A) \subseteq A$  gilt  $h(f, A) = h(f|_A, A)$ .

(c) Es gilt  $h(f, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} h(f, A_n)$  für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{P}(X)$ .

**4.5.3 Beispiele**

1.) Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ , wobei wir  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie versehen. Dann gilt [8, Remark]

$$h(f, \mathbb{R}) = \infty.$$

Mit derselben Argumentation ergibt sich auch  $h(f, [0, \infty[) = \infty$ .

2.) Ist  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $f : X \rightarrow X$  derart, daß ein  $x_0 \in X$  existiert mit

$$f^n|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \quad \text{bzgl. der gleichmäßigen Konvergenz,}$$

d.h. zu jeder offenen Umgebung  $U$  von  $x_0$  existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $f^n(A) \subseteq U$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ , so gilt  $h(f, A) = 0$  [72, Beispiel 2.2.6], [73, Lemma 1.3].



#### 4.5.4 Anmerkungen

Es seien die Voraussetzungen von Satz 4.5.2(a) gegeben. Ist  $\pi$  injektiv, so gilt im allgemeinen  $h(f_1, A) \not\leq h(f_2, \pi(A))$ .

Beweis:

Seien  $X_1 = X_2 = [0, \infty[$ , versehen mit der euklidischen Topologie, sowie  $f_1(x) := x + 1$ ,  $f_2(x) := \frac{1}{2} \cdot x$  und  $\pi(x) := \exp(-x \cdot \log 2)$  für alle  $x \in X_1 = X_2$ . Dann ist  $\pi : X_1 \rightarrow X_2$  stetig und injektiv. Es gilt  $\pi(X_1) = ]0, 1]$  und  $f_2^n|_{]0, 1]} \rightarrow 0$  gleichmäßig. Damit ist  $h(f_2, ]0, 1]) = 0$ , außerdem gilt  $h(f_1, X_1) = \infty$ . Für jedes  $x \in X_1$  gilt

$$\pi(f_1(x)) = \pi(x + 1) = \exp(-(x + 1) \cdot \log 2) = \frac{1}{2} \cdot \exp(-x \cdot \log 2) = f_2(\pi(x))$$

und  $h(f_1, X_1) = \infty \not\leq 0 = h(f_2, ]0, 1]) = h(f_2, \pi(X_1))$ . ■

#### 4.5.5 Anmerkungen

Y. B. Pesin und B. S. Pitskel haben den topologischen Druck untersucht, der auf einer modifizierten Definition von  $h(f, \cdot)$  beruht - es werden offene Überdeckungen eines kompakten Raumes betrachtet, der  $X$  enthält [55]. Sei also  $Y$  ein kompakter Raum,  $X \subseteq Y$ ,  $f : X \rightarrow X$  sowie  $A \subseteq X$  und setze

$$h_Y(f, A) := \sup\{h_\xi(f, A) : \xi \text{ endliche, offene Überdeckung von } Y\}.$$

Wir verwenden diese Notation natürlich auch dann, wenn  $X$  nur in einen kompakten Raum  $Y$  eingebettet wird.

Pesin und Pitskel verwenden zum einen eine andere Notation (vgl. dazu auch [55, Prop. 4.4]), zum anderen werden ausschließlich metrische Räume betrachtet. Anstatt einer Supremumsbildung wurde dort eine Limesbildung durchgeführt. Ist der Raum  $Y$  metrisierbar, so stimmen, wie der nachfolgende Satz zeigt, beide Definitionen überein:

#### Bemerkung 3

Sei  $Y$  ein kompakter Raum,  $X \subseteq Y$  und  $f : X \rightarrow X$ , sowie  $A \subseteq X$ . Sind  $\xi, \xi'$  endliche offene Überdeckungen von  $Y$  mit  $\xi' \prec \xi$ , so gilt

$$h_\xi(f, A) \leq h_{\xi'}(f, A), \quad \text{für jedes } A \subseteq X,$$

**denn** ist  $s > 0$  mit  $h_{\xi'}^s(f, A) = 0$ , so ergibt sich  $h_\xi^s(f, A) = 0$ .

#### 4.5.6 Satz

Sei  $(Y, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $X \subseteq Y$ , sowie  $f : X \rightarrow X$ . Dann gilt

$$h_Y(f, A) = \lim_{\text{diam } \xi \rightarrow 0} h_\xi(f, A) \quad \text{für alle } A \subseteq X,$$

wobei  $\text{diam } \xi := \sup\{\text{diam } E : E \in \xi\}$  den Durchmesser einer endlichen, offenen Überdeckung  $\xi$  von  $Y$  bezeichne.

Beweis:

Sei  $A \subseteq X$ . Dann gilt

$$(*) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } \xi \text{ eine endliche offene Überdeckung von } Y \text{ und } \varepsilon > 0, \text{ so gibt es eine} \\ \text{endliche offene Überdeckung } \xi_\varepsilon \text{ von } Y \text{ mit } \text{diam } \xi_\varepsilon \leq \varepsilon \text{ und } h_\xi(f, A) \leq h_{\xi_\varepsilon}(f, A), \end{array} \right.$$

**denn** aus der Kompaktheit von  $Y$  folgt, daß es eine endliche offene Überdeckung  $\eta_\varepsilon$  von  $Y$  mit  $\text{diam } \eta_\varepsilon \leq \varepsilon$  gibt, betrachte  $\xi_\varepsilon := \xi \vee \eta_\varepsilon$  und verwende Bemerkung 3. Wähle eine Folge  $(\xi_n)$

von endlichen, offenen Überdeckungen von  $Y$  mit  $h_{\xi_n}(f, A) \rightarrow h_Y(f, A)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Gemäß (\*) können wir  $(\xi_n)$  so wählen, daß

$$\text{diam } \xi_n \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen  $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_{\xi'_n}(f, A) = h_Y(f, A)$  für jede Folge  $(\xi'_n)$  von endlichen offenen Überdeckungen von  $Y$  mit  $\text{diam } \xi'_n \rightarrow 0$ . Sei dazu  $(\xi'_n)$  eine solche Folge, von der wir voraussetzen, daß  $(h_{\xi'_n}(f, A))$  konvergiert (in  $[0, \infty]$ ). Sei  $n \in \mathbb{N}$  und wähle ein  $k = k(n) \geq n$  derart, daß  $\text{diam } \xi'_k$  kleiner als die Lebesgue-Zahl von  $\xi_n$  ist. Dann folgt  $\xi'_k \prec \xi_n$ , also

$$h_{\xi_n}(f, A) \leq h_{\xi'_k}(f, A).$$

Damit konvergiert die Folge  $(h_{\xi'_{k(n)}}(f, A))$  gegen  $h_Y(f, A)$  und somit auch  $(h_{\xi'_n}(f, A))$ . ■

Der folgende Satz zeigt, daß auch diese Definition der topologischen Entropie eine topologische Eigenschaft ist. Der Beweis ist elementar und ergibt sich wie der von Satz 4.5.2:

#### 4.5.7 Satz

Seien  $Y, Y_1, Y_2$  kompakte Räume und  $X \subseteq Y, X_1 \subseteq Y_1, X_2 \subseteq Y_2$ , sowie  $f : X \rightarrow X, f_1 : X_1 \rightarrow X_1, f_2 : X_2 \rightarrow X_2$ .

(a) Sei  $\pi : Y_1 \rightarrow Y_2$  eine stetige Abbildung mit  $\pi(X_1) \subseteq X_2$  und  $\pi \circ f_1 = f_2 \circ \pi$  auf  $X_1$ .

(i) Ist  $\pi$  surjektiv, so gilt  $h_{Y_1}(f_1, A) \geq h_{Y_2}(f_2, \pi(A))$  für jede Teilmenge  $A$  von  $X_1$ .

(ii) Ist  $\pi$  ein Homöomorphismus, so gilt in (i) die Gleichheit.

(b) Für jede beliebige (nicht-leere) Teilmenge  $A$  von  $X$  mit  $f(A) \subseteq A$  gilt

$$h_Y(f, A) = h_Y(f|_A, A).$$

(c) Es gilt  $h_Y(f, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} h_Y(f, A_n)$  für jede Folge  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathfrak{P}(X)$ .

#### Bemerkung 4

(i) Auch  $h_Y(f, \cdot)$  ist ein äußeres Maß, aber im Allgemeinen kein Maß auf der Borelschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{B}_X$  von  $X$ .

(ii) Ist  $Y$  ein kompakter Raum,  $Y' \subseteq Y$  kompakt und  $X \subseteq Y'$ , sowie  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung, so gilt

$$h_Y(f, A) = h_{Y'}(f, A) \quad \text{für alle } A \subseteq X.$$

Aufgrund der Ähnlichkeit dieser beiden Definitionen ergibt sich der nachfolgende Zusammenhang zwischen  $h(f, A)$  und  $h_Y(f, A)$ .

#### 4.5.8 Satz

Sei  $Y$  ein kompakter Raum,  $X \subseteq Y$  und  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung. Dann gilt

$$h_Y(f, A) \leq h(f, A) \quad \text{für jede Teilmenge } A \text{ von } X.$$

Ist  $A$  eine (in  $Y$ ) abgeschlossene (also kompakte) Teilmenge von  $X$  mit  $f(A) \subseteq A$ , so gilt die Gleichheit.

**Beweis:**

Ist  $\xi$  eine endliche Überdeckung von  $Y$ , bestehend aus  $(Y)$ -offenen Mengen, so ist

$$\xi' := \{X \cap E : E \in \xi\}$$

eine endliche, aus  $X$ -offenen Mengen bestehende Überdeckung von  $X$ . Für  $C \subseteq X$  gilt  $N_{f,\xi}(C) = N_{f,\xi'}(C)$ , also  $h_\xi(f, A) = h_{\xi'}(f, A)$ . Damit gilt  $h_Y(f, A) \leq h(f, A)$ . Sei nun  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  mit  $f(A) \subseteq A$  und  $\xi$  eine endliche, aus  $X$ -offenen Mengen bestehende Überdeckung von  $X$ . Für jedes  $E \in \xi$  existiert eine offene Menge  $E' \subseteq Y$  mit  $E = X \cap E'$ . Dann ist

$$\xi' := \{E' : E \in \xi\} \cup \{Y \setminus A\}$$

eine endliche, aus  $(Y)$ -offenen Mengen bestehende Überdeckung von  $Y$ . Sei  $s > 0$  mit  $h_{\xi'}^s(f, A) = 0$ . Seien  $\delta, \varepsilon > 0$ . Dann existiert eine Folge  $(C_j)$  in  $\mathfrak{P}(X)$  mit  $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C_j$  und

$$\sum_{j=1}^{\infty} D_{f,\xi'}(C_j)^s < \varepsilon, \quad D_{f,\xi'}(C_j) \leq \delta \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Sei  $C'_j := C_j \cap A$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann folgt  $A \subseteq \bigcup_{j \in \mathbb{N}} C'_j$ . Sind  $\ell \in \mathbb{N}_0, j \in \mathbb{N}$  mit  $f^\ell(C'_j) \prec \xi'$ , so folgt  $f^\ell(C'_j) = f^\ell(A \cap C_j) \subseteq A \cap f^\ell(C_j) \prec \xi$  aus  $f(A) \subseteq A$ . Es folgt  $h_{\xi'}^s(f, A) = 0$ , also  $h_\xi(f, A) \leq h_{\xi'}(f, A) \leq h_Y(f, A)$ , d.h.  $h(f, A) \leq h_Y(f, A)$ . ■

Das folgende Beispiel zeigt, daß die in Satz 4.5.8 auftretende Ungleichung durchaus strikt sein kann.

**4.5.9 Beispiel**

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum mit abzählbarer Basis und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige und eigentliche Abbildung. Sei  $\widehat{X}$  die Alexandroff-Kompaktifizierung von  $X$  und sei

$$\widehat{f} : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in X \\ \infty, & \text{falls } x = \infty \end{cases}$$

die stetige Fortsetzung von  $f$  auf  $\widehat{X}$ . Wie etwa in [37, S.222f.] kann man die topologische Entropie von  $f$  auch definieren als die topologische Entropie von  $\widehat{f}$ . Da für auf  $\widehat{X}$  definierte, stetige Selbstabbildungen alle Definitionen der topologischen Entropie übereinstimmen, folgt aus Satz 4.5.7

$$h(\widehat{f}) = h_{\widehat{X}}(\widehat{f}, \widehat{X}) = \max\{h_{\widehat{X}}(\widehat{f}, X), h_{\widehat{X}}(\widehat{f}, \{\infty\})\} = h_{\widehat{X}}(f, X).$$

In einem solchen Fall stimmen also diese beide Definitionen der topologischen Entropie überein. Ist  $X = \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ , so gilt  $h(\widehat{f}) = 0$  [1, S. 315] und somit auch  $h_{\widehat{\mathbb{R}}}(f, \mathbb{R}) = 0$ . Andererseits gilt  $h(f, \mathbb{R}) = \infty$  gemäß Beispiel 4.5.3.

Naheliegender ist es, für eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow X$  eine Kompaktifizierung des zugrundeliegenden Raumes  $Y$  zu verwenden und dann  $h_Y(f, A)$  zu betrachten. Wir wollen uns nicht nur auf lokal kompakte Räume beschränken, sondern verwenden zunächst wieder die Stone-Čech-Kompaktifizierung:

**4.5.10 Satz**

Sei  $X$  ein vollständig regulärer Raum,  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung und  $A \subseteq X$ .

(a) Sind  $\beta X, \beta' X$  Stone-Čech-Kompaktifizierungen von  $X$ , so gilt  $h_{\beta X}(f, A) = h_{\beta' X}(f, A)$  bzgl. den vorliegenden Einbettungen  $\beta$  bzw.  $\beta'$ .

(b) Für jede Stone-Čech-Kompaktifizierung  $\beta X$  von  $X$  und die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung  $f_\beta^* : \beta X \rightarrow \beta X$  von  $f$  (genauer: von  $\beta \circ f$ ) gilt

$$h(f_\beta^*, A) = h_{\beta X}(f, A),$$

bzgl. der Einbettung  $\beta$  von  $X$  in  $\beta X$ .

**Beweis:**

(a) Seien  $\beta X, \beta' X$  Stone-Čech-Kompaktifizierungen von  $X$  und seien  $\beta : X \rightarrow \beta X, \beta' : X \rightarrow \beta' X$  die entsprechenden Einbettungen. Dann existiert ein Homöomorphismus  $\pi : \beta X \rightarrow \beta' X$  mit  $\pi \circ \beta = \beta'$ . Es ist

$$h_{\beta X}(\beta \circ f \circ \beta^{-1}, \beta(A)) = h_{\beta' X}(\beta' \circ f \circ \beta'^{-1}, \beta'(A))$$

zu zeigen. Es gilt  $\pi(\beta(X)) = \pi \circ \beta(X) = \beta'(X)$  und  $\pi \circ (\beta \circ f \circ \beta^{-1}) = \beta' \circ f \circ \beta'^{-1} = \beta' \circ f \circ (\pi^{-1} \circ \beta')^{-1} = (\beta' \circ f \circ \beta'^{-1}) \circ \pi$  auf  $\beta(X)$ , so daß aus Satz 4.5.7(a) die Behauptung folgt.

(b) Es ist  $h_{\beta X}(f_\beta^*, \beta(A)) = h_{\beta X}(\beta \circ f \circ \beta^{-1}, \beta(A))$  einzusehen. Nun gilt  $f_\beta^* = \beta \circ f \circ \beta^{-1}$  auf  $\beta(X)$  und indem man Satz 4.5.7(a) auf  $\pi = \text{id}_{\beta X}$  anwendet, folgt die Behauptung. ■

### Bemerkung 5

Es gilt  $h^*(f) = h(f_\beta^*, \beta X)$ , und natürlicher ist die Betrachtung von  $h(f_\beta^*, X)$ , genauer von  $h(f_\beta^*, \beta(X))$ . Es folgt

$$h_{\beta X}(f, X) \leq h^*(f).$$

Die Stone-Čech-Kompaktifizierung ist die „größte“ Kompaktifizierung eines vollständig regulären Raumes, so daß der folgende Satz wenig überraschend ist:

### 4.5.11 Satz

Sei  $X$  ein vollständig regulärer Raum,  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung sowie  $A \subseteq X$ . Für jede Kompaktifizierung  $(\gamma, Y)$  von  $X$  gilt

$$h_Y(f, A) \leq h_{\beta X}(f, A),$$

bezüglich der Einbettungen  $\gamma : X \rightarrow Y$  bzw.  $\beta : X \rightarrow \beta X$ , d.h. es gilt

$$h_Y(\gamma \circ f \circ \gamma^{-1}, \gamma(A)) \leq h_{\beta X}(\beta \circ f \circ \beta^{-1}, \beta(A)).$$

**Beweis:**

Da  $\beta X$  eine Stone-Čech-Kompaktifizierung ist, existiert eine stetige und surjektive Abbildung  $\pi : \beta X \rightarrow Y$  derart, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\beta} & \beta X \\ & \searrow \gamma & \downarrow \pi \\ & & Y \end{array}$$

kommutiert, d.h. es liegt  $\pi \circ \beta = \gamma$  vor. Es folgt  $\pi(\beta(X)) = \gamma(X)$ . Setzt man  $f_1 := \beta \circ f \circ \beta^{-1} : \beta(X) \rightarrow \beta(X)$  und  $f_2 := \gamma \circ f \circ \gamma^{-1} : \gamma(X) \rightarrow \gamma(X)$ , so folgt auf  $\beta(X)$

$$\pi \circ f_1 = (\pi \circ \beta) \circ f \circ \beta^{-1} = \gamma \circ f \circ \beta^{-1} = \gamma \circ f \circ (\gamma^{-1} \circ \pi) = f_2 \circ \pi,$$

d.h. es gilt  $\pi \circ f_1 = f_2 \circ \pi$  auf  $\beta(X)$ . Aus Satz 4.5.7 folgt nun die Behauptung. ■

Wir betrachten nun noch einmal die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$  und zeigen

$$h_{\beta \mathbb{R}}(f, \mathbb{R}) = \infty.$$

Dazu wird die Wallman-Kompaktifizierung benötigt, die eine einfachere Konstruktion einer Stone-Čech-Kompaktifizierung auf einem normalen  $T_1$ -Raum darstellt:

**Notation (Wallman-Kompaktifizierung (43, S.167f.))**

Sei  $X$  ein normaler  $T_1$ -Raum und sei  $\mathcal{A}(X)$  die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von  $X$  sowie

$w(X) := \{ \mathfrak{A} \subseteq \mathcal{A}(X) : \text{Der Durchschnitt einer jeden endlichen Teilfamilie von } \mathfrak{A} \text{ ist nicht-leer, und } \mathfrak{A} \text{ ist maximal mit dieser Eigenschaft} \}$ .

Sei  $\Phi = \Phi_X : X \rightarrow w(X), x \mapsto \{A \in \mathcal{A}(X) : x \in A\}$ . Ist  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$ , so sei

$$U^* := \{ \mathfrak{A} \in w(X) : \text{Es existiert ein } A \in \mathfrak{A} \text{ mit } A \subseteq U \},$$

außerdem versehen wir  $w(X)$  mit einer Topologie derart, daß  $\mathfrak{B} := \{U^* : U \subseteq X \text{ offen}\}$  eine Basis dieser Topologie ist. Dann ist  $w(X)$  kompakt,  $\Phi : X \rightarrow w(X)$  eine Einbettung und  $w(X)$  eine Stone-Čech-Kompaktifizierung von  $X$ .

**Bemerkung 6**

Ist  $X$  ein normaler  $T_1$ -Raum und  $A$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$ , so ist

$$\pi_A : w(X) \rightarrow w(A), \quad \mathfrak{A} \mapsto \{A \cap B : B \in \mathfrak{A}\}$$

stetig und surjektiv, außerdem gilt  $\pi_A \circ \Phi_X = \Phi_A$  auf  $A$ .

**4.5.12 Beispiel**

Sei  $\mathbb{R}$  mit der euklidischen Topologie versehen und sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ . Dann gilt

$$h_{\beta\mathbb{R}}(f, \mathbb{R}) = \infty.$$

Beweis:

Wir zeigen  $h_{w(\mathbb{R})}(f, \mathbb{R}) = \infty$ . Sei dazu  $\mathbf{C} \subseteq [0, 1]$  die Cantormenge und

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} (n + \mathbf{C}).$$

$A$  ist eine abgeschlossene Teilmenge von  $\mathbb{R}$  mit  $f(A) \subseteq A$ . Sei  $M \in \mathbb{N}$ . Dann existiert eine stetige und surjektive Abbildung  $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$  mit  $h(g) \geq M$  (betrachte beispielsweise die  $M$ -te Hintereinanderausführung des Shifts auf  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \cong \mathbf{C}$ ). Sei

$$\pi : A \rightarrow \mathbf{C}, \quad (n + c) \mapsto g^n(c) \quad (n \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbf{C}).$$

Dann ist  $\pi$  stetig und surjektiv, und ist  $x = n + c \in A$ , so gilt

$$\pi(f(x)) = \pi(x + 1) = \pi((n + 1) + c) = g^{n+1}(c) = g(g^n(c)) = g(\pi(n + c)) = g(\pi(x)),$$

also  $\pi \circ f = g \circ \pi$  auf  $A$ .  $A$  ist ein normaler  $T_1$ -Raum, so daß es eine stetige Fortsetzung von  $\pi$  auf  $w(A)$  gibt, d.h. es existiert eine stetige Abbildung  $\pi' : w(A) \rightarrow \mathbf{C}$  mit  $\pi' \circ \Phi_A = \pi$ . Es folgt  $\pi'(\Phi_A(A)) = \mathbf{C}$  und aus Satz 4.5.7 somit

$$h_{w(A)}(f, A) = h_{w(A)}(f|_A, A) = h_{w(A)}(\Phi_A \circ f \circ \Phi_A^{-1}, \Phi_A(A)) \geq h(g, \mathbf{C}) = h(g) \geq M.$$

Es genügt also  $h_{w(\mathbb{R})}(f|_A, A) \geq h_{w(A)}(f, A)$ , oder genauer

$$h_{w(\mathbb{R})}(\Phi_{\mathbb{R}} \circ f \circ \Phi_{\mathbb{R}}^{-1}|_{\Phi_{\mathbb{R}}(A)}, \Phi_{\mathbb{R}}(A)) \geq h_{w(A)}(\Phi_A \circ f \circ \Phi_A^{-1}, \Phi_A(A))$$

zu zeigen. Nun gilt  $\pi_A(\Phi_{\mathbb{R}}(A)) = \Phi_A(A)$  und  $\pi_A \circ \Phi_{\mathbb{R}} \circ f \circ \Phi_{\mathbb{R}}^{-1}|_{\varphi_{\mathbb{R}}(A)} = \Phi_A \circ f \circ \Phi_A^{-1} \circ \Phi_A$  gemäß Bemerkung 6, so daß Letzteres abermals aus Satz 4.5.7 folgt. ■

## 4.6. Maße mit maximaler Entropie

Ist  $X$  ein metrisierbarer kompakter Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so stimmen *alle* hier gegebenen Definitionen der (topologischen) Entropie überein [8, 56, 71]. Die Literatur beschränkt sich im wesentlichen auf diesen Fall.

Wir betrachten die Situation, wenn der zugrundeliegende Raum nicht kompakt ist. In §4.7 werden wir die in den vorangehenden Paragraphen gegebenen Definitionen miteinander vergleichen. Zunächst gehen wir jedoch auf den Zusammenhang zwischen der topologischen und der maßtheoretischen Entropie ein.

### 4.6.1 Theorem (Variationsprinzip, Goodwyn's Theorem)

Sei  $X$  ein kompakter, metrisierbarer Raum und  $f : X \rightarrow X$  stetig. Dann gilt das **Variationsprinzip**, d.h.

$$\sup\{h_\mu(f) : \mu \text{ } f\text{-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (X, \mathcal{B}_X)\} = h(f).$$

#### Bemerkung 1

(i) Insbesondere gilt  $h_\mu(f) \leq h(f)$  für jedes  $f$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{B}_X)$ . Diese Ungleichung ist bekannt als **Goodwyn's Theorem**.

(ii) Es genügt, eine Supremumbildung über alle ( $f$ -invarianten) ergodischen Wahrscheinlichkeitsmaße durchzuführen.

Ist der zugrundeliegende Raum nicht kompakt, so ist die Existenz von  $f$ -invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen im allgemeinen nicht gegeben. Daraus ergibt sich insbesondere, daß das Variationsprinzip (in dieser Form) nicht allgemein gelten kann:

### 4.6.2 Beispiel

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x+1$ . **Angenommen** es existiert ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ . Sei  $x \in \text{supp } \mu$  und seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < x < b$  und  $b - a < 1$ . Dann gilt  $\mu(]a, b]) > 0$ , außerdem sind die Mengen

$$f^{-n}(]a, b]) = ]a - n, b - n[, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

paarweise disjunkt, es gilt also

$$\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(]a, b]) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(]a - n, b - n]) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} ]a - n, b - n[ \right) \leq \mu(\mathbb{R}) = 1. \quad \zeta$$

#### Bemerkung 2

Es gibt auch Beispiele von stetigen Selbstabbildungen auf einem metrisierbaren und nicht kompakten Raum, für die invariante Wahrscheinlichkeitsmaße existieren, aber obiges Supremum strikt kleiner ist als die topologische Entropie  $h_D(f)$  bzw.  $h_Y(f)$  [32, 55].

In diesem Zusammenhang sind lokalkompakte Räume, die eine abzählbare Basis besitzen, von besonderer Bedeutung. Zumindest für eigentliche Abbildungen (bzw. deren stetige Fortsetzung) ist die Anwendung des Variationsprinzips möglich. Wir sind hier jedoch auch an Räumen interessiert, die nicht lokalkompakt sind.

Beispiel 4.6.2 zeigt, daß im allgemeinen kein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß existieren muß. Goodwyn's Theorem bleibt jedoch für  $h_Y(f, X)$  ( $Y$  kompakt) und in einer ähnlichen Form auch für  $h_D(f), h_D(f)$  gültig:

**4.6.3 Theorem ([55, Theorem 1])**

Sei  $Y$  ein metrisierbarer kompakter Raum und sei  $X \in \mathcal{B}_Y$  sowie  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Dann gilt für jedes  $f$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(Y, \mathcal{B}_Y)$ , d.h.  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ ,  $A \subseteq X$  meßbar, mit  $\mu(X) = 1$

$$h_\mu(f) \leq h_Y(f, X).$$

M. Handel und B. Kitchens haben Goodwyn's Theorem für  $h_D(f)$  zeigen können [32, Prop. 1.4], wobei  $f$  als Homöomorphismus vorausgesetzt wurde. Wir wollen hier nur die Stetigkeit fordern und werden einsehen, daß man  $h_D(f)$  sogar durch  $\underline{h}_D(f)$  ersetzen kann (sofern ein polnischer Raum vorliegt).

**Notation**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f : X \rightarrow X$  eine Abbildung und sei  $\mathcal{C}$  eine aus endlich vielen, paarweise disjunkten Teilmengen von  $X$  bestehende Menge. Sei  $K \in \mathcal{K}(X)$ . Eine endliche Teilmenge  $E$  von  $K$  heißt  $(n, \mathcal{C})$ -**separated set**, falls es für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  disjunkte Mengen  $C, C' \in \mathcal{C}$  gibt mit  $f^j(x) \in C$ ,  $f^j(y) \in C'$  für ein  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ .

$$r_n(\mathcal{C}, K) := \sup\{|E| : E \subseteq K \text{ } (n, \mathcal{C})\text{-separated set}\}.$$

**Bemerkung 3**

Sei  $X$  metrisierbar. Ist  $d$  eine Metrik auf  $X$ , die die Topologie von  $X$  erzeugt, und

$$\varepsilon^* := \min\{\text{dist}_d(C_1, C_2) : C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2\} > 0,$$

so gilt  $r_n(\mathcal{C}, K) \leq r_n(\varepsilon, K) [= r_n(\varepsilon, K, f, d)]$  für jedes  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon^*]$ . Ist  $X$  metrisierbar und sind die Elemente aus  $\mathcal{C}$  kompakte Mengen, so liegt dies stets vor.

**4.6.4 Lemma**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung und sei  $\mu$  ein ergodisches,  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(X, \mathcal{B}_X)$ . Sei  $\delta \in ]0, 1[$  und  $C \in \mathcal{K}(X)$  mit  $\mu(C) > 1 - \frac{\delta}{2}$ . Dann existiert eine kompakte Menge  $K \subseteq C$  mit  $\mu(K) > 1 - \delta$  und ein  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_C(f^j(x)) \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } x \in K, n \in \mathbb{N}_{\geq N}.$$

**Beweis:**

Sei  $N \in \mathbb{N}$  und setze

$$G_N(C) := \left\{ x \in X : \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_C(f^j(x)) \geq 1 - \delta \text{ für alle } n \geq N \right\}.$$

Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq N}$  und  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $F_n := \{x \in X : \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_C(f^j(x)) \geq 1 - \delta\}$ , sowie  $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Dann gilt  $|\{j \in \{0, \dots, n-1\} : f^j(x_k) \in C\}| \geq n \cdot (1 - \delta)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}$ . Durch den Übergang zu einer geeigneten Teilfolge von  $(x_k)$  erhält man aufgrund der Stetigkeit von  $f$  und der Abgeschlossenheit von  $C$  auch  $|\{j \in \{0, \dots, n-1\} : f^j(x) \in C\}| \geq n \cdot (1 - \delta)$ , d.h. es gilt  $x \in F_n$ . Damit ist  $G_N(C) = \bigcap_{n \geq N} F_n$  abgeschlossen. Setze

$$A := \left\{ x \in X : \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_C(f^j(x)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu(C) > 1 - \frac{\delta}{2} \right\}.$$

Aus dem Birkhoffschen Ergodensatz folgt  $\mu(A) = 1$ , außerdem gilt  $A \subseteq \bigcup_{N \in \mathbb{N}} G_N(C)$ , also  $\mu(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} G_N(C)) = 1$ . Es gilt  $G_n(C) \subseteq G_{n+1}(C)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $(G_n(C))$  ist eine monoton aufsteigende Mengenfolge. Damit existiert ein  $N \in \mathbb{N}$  mit  $\mu(G_N(C)) \geq 1 - \frac{\delta}{2}$ . Setze  $K := C \cap G_N(C)$ . Dann ist  $K \subseteq C$  kompakt und es gilt

$$\begin{aligned} \mu(K) &= \mu(C \cap G_N(C)) = \mu(C) + \mu(G_N(C)) - \mu(C \cup G_N(C)) \geq \mu(C) + \mu(G_N(C)) - 1 \\ &> 1 - \frac{\delta}{2} + 1 - \frac{\delta}{2} - 1 = 1 - \delta. \end{aligned}$$

■

#### 4.6.5 Lemma

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $f : X \rightarrow X$  eine meßbare Abbildung und  $\mathcal{P}$  eine endliche Borel-Partition von  $X$ . Für jedes  $P \in \mathcal{P}$  sei  $C_P$  eine kompakte Teilmenge von  $P$  und setze  $\mathcal{C} := \{C_P : P \in \mathcal{P}\}$ . Sei  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $C := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$  und seien  $\delta \in ]0, \frac{1}{4}[$ ,  $N \in \mathbb{N}$  mit

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_C(f^j(x)) \geq 1 - \delta \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_{\geq N}, x \in K.$$

Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{C}, K) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - \varphi(\delta)$$

mit  $\varphi(\delta) \rightarrow 0$  für  $\delta \rightarrow 0$ .

Beweis:

Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq N$ .

- ① Wir zeigen: Für jede  $(n, \mathcal{P})$ -separated set  $E \subseteq K$ , die die Eigenschaft besitzt, daß  $\{x, y\}$  für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  keine  $(n, \mathcal{C})$ -separated set ist, gilt<sup>13</sup>

$$|E| \leq |\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}.$$

Sei dazu  $x \in E$  und  $J(x) := \{j \in \{0, \dots, n-1\} : f^j(x) \notin C\}$ . Aus  $x \in E \subseteq K$  folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{1}_C(f^j(x)) \geq n \cdot (1 - \delta) = n - n\delta,$$

also  $|J(x)| \leq \lceil n\delta \rceil$ . Sei  $J \subseteq \{0, \dots, n-1\}$  mit  $|J| = 2 \cdot \lceil n\delta \rceil$ . Da  $\mathcal{P}$  eine Partition von  $X$  ist, gibt es für alle  $x \in E, i \in \{0, \dots, n-1\}$  ein eindeutig bestimmtes  $P_{i,x} \in \mathcal{P}$  mit  $f^i(x) \in P_{i,x}$ . Wir zeigen, daß die Abbildung

$$\varphi : \{x \in E : J(x) \subseteq J\} \rightarrow \mathcal{P}^{|J|}, \quad x \mapsto (P_{j,x})_{j \in J}$$

injektiv ist, d.h. es gilt  $|\{x \in E : J(x) \subseteq J\}| \leq |\mathcal{P}|^{|J|} = |\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}$ . Seien dazu  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  und  $J(x) \subseteq J, J(y) \subseteq J$ . Da  $E$  eine  $(n, \mathcal{P})$ -separated set ist existiert ein  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  derart, daß  $f^i(x)$  und  $f^i(y)$  in verschiedenen Elementen aus  $\mathcal{P}$  liegen, d.h. es gilt  $P_{i,x} \neq P_{i,y}$ . **Angenommen**, es gilt  $i \notin J$ . Dann folgt  $i \notin J(x) \cup J(y)$ , d.h. es gilt  $f^i(x), f^i(y) \in C$ . Da  $\{x, y\}$  keine  $(n, \mathcal{C})$ -separated set ist, folgt daraus, daß ein  $P \in \mathcal{P}$  existiert mit  $f^i(x), f^i(y) \in C_P \subseteq P$ , d.h. es gilt  $P_{i,x} = P_{i,y}$ .  $\zeta$  Damit ist  $\varphi$  injektiv. Nun gibt es  $\binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot 2 \cdot \lceil n\delta \rceil$ -elementige Teilmengen von  $\{0, \dots, n-1\}$ , so daß ① aus der Darstellung

$$E = \bigcup_{\substack{J \subseteq \{0, \dots, n-1\}, \\ |J| = 2 \cdot \lceil n\delta \rceil}} \{x \in E : J(x) \subseteq J\}$$

folgt.

<sup>13</sup>Für  $x \in [0, \infty[$  sei  $\lceil x \rceil := \inf\{n \in \mathbb{N}_0 : x \leq n\}$ .



② Wir zeigen:

$$r_n(\mathcal{C}, K) \geq \frac{r_n(\mathcal{P}, K)}{|\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}}.$$

Sei dazu  $E \subseteq K$  eine  $(n, \mathcal{P})$ -separated set mit  $|E| = r_n(\mathcal{P}, K)$ . Wähle eine maximale (bzgl. Mächtigkeit) Teilmenge  $F$  von  $E$  mit der Eigenschaft, daß  $\{x, y\}$  für alle  $x, y \in F$  mit  $x \neq y$  keine  $(n, \mathcal{C})$ -separated set ist. Entsprechend sei  $G$  eine maximale Teilmenge von  $E$  mit der Eigenschaft, daß  $\{x, y\}$  für alle  $x, y \in G$  mit  $x \neq y$  eine  $(n, \mathcal{C})$ -separated set ist. Wir zeigen  $|E| \leq |F| \cdot |G|$  durch Induktion nach  $|E|$ .

I. Sei  $|E| = 1$ . Dann gilt  $|F| = |G| = 1$ .

II. Sei  $|E| \geq 2$  und wähle  $z \in E$ . Setze  $E' := E \setminus \{z\}$ . Aus der Maximalität von  $F$  und  $G$  folgt, daß  $F' := F \setminus \{z\}$  und  $G' := G \setminus \{z\}$  Teilmengen von  $E'$  sind, die maximal mit obigen Eigenschaften (für  $E'$ ) sind. Da  $E$  eine  $(n, \mathcal{P})$ -separated set ist, folgt für alle  $x \in G$  mit  $x \neq z$ , daß  $\{x, z\}$  eine  $(n, \mathcal{C})$ -separated set ist. Damit gilt  $z \in G$ , d.h.  $|G| \geq 1 + |G'|$  und nach Induktion somit

$$|E| = |E'| + 1 \leq |F'| \cdot |G'| + 1 \leq |F| \cdot (|G| - 1) + 1 \leq |F| \cdot |G|.$$

Damit folgt

$$\frac{r_n(\mathcal{P}, K)}{|\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}} = \frac{|E|}{|\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}} \leq \frac{|F| \cdot |G|}{|\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}} \stackrel{\text{②}}{\leq} |G| \leq r_n(\mathcal{C}, K).$$

③ Wir zeigen:<sup>14</sup>

$$\binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \sim \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot (n - k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} \cdot k_n^{k_n+\frac{1}{2}}} \quad \text{mit } k_n := 2 \cdot \lceil n\delta \rceil.$$

Es gilt  $k_n \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ , und aus  $\delta \leq \frac{1}{4}$  folgt  $n\delta \leq n \cdot \frac{1}{4}$ , also  $\lceil n\delta \rceil \leq \lceil n \cdot \frac{1}{4} \rceil$ . Damit folgt

$$n - k_n = n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil \geq n - 2 \cdot \lceil n \cdot \frac{1}{4} \rceil \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Die Stirlingsche Formel besagt  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$ , und wendet man diese auf  $n, k_n$  und  $n - k_n$  an, so erhält man

$$\begin{aligned} \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} &= \binom{n}{k_n} \sim \frac{\sqrt{2\pi} \cdot n \cdot n^n \cdot e^{-n}}{\sqrt{2\pi} \cdot (n - k_n) \cdot (n - k_n)^{n-k_n} \cdot e^{-(n-k_n)} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot k_n \cdot k_n^{k_n} \cdot e^{-k_n}} \\ &= \frac{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n}}{\sqrt{2\pi} \cdot (n - k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} \cdot k_n^{k_n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-(n-k_n)-k_n}} = \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot (n - k_n)^{n-k_n+\frac{1}{2}} \cdot k_n^{k_n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

④ Es gilt  $1 \leq \frac{\lceil n\delta \rceil}{n\delta} \leq \frac{n\delta+1}{n\delta} = \frac{\delta+\frac{1}{n}}{\delta} \rightarrow 1$ , also  $\frac{\lceil n\delta \rceil}{n} \rightarrow \delta$ . Damit folgt

$$\log(n - 2n\delta) - \log(n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil) = \log\left(\frac{n - 2 \cdot n\delta}{n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil}\right) = \log\left(\frac{1 - 2\delta}{1 - 2 \cdot \frac{\lceil n\delta \rceil}{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

<sup>14</sup>Zwei reelle Folgen  $(a_n), (b_n)$  heißen asymptotisch gleich (in Zeichen:  $a_n \sim b_n$ ), wenn  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1$ .

Somit ergibt sich nun

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{C}, K) \stackrel{\textcircled{2}}{\geq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log \left( \frac{r_n(\mathcal{P}, K)}{|\mathcal{P}|^{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \cdot \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}} \right) \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - \frac{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}{n} \cdot \log |\mathcal{P}| - \frac{1}{n} \cdot \log \binom{n}{2 \cdot \lceil n\delta \rceil} \\
&\stackrel{\textcircled{3}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - \frac{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}{n} \cdot \log |\mathcal{P}| - \frac{n + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log n \\
&\quad + \frac{1}{n} \cdot \log \sqrt{2\pi} + \frac{n - k_n + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log(n - k_n) + \frac{k_n + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log k_n \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - \frac{2 \cdot \lceil n\delta \rceil}{n} \cdot \log |\mathcal{P}| - \log n + \frac{n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log(n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil) \\
&\quad + \frac{2 \cdot \lceil n\delta \rceil + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log(2 \cdot \lceil n\delta \rceil) \\
&\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - \frac{2 \cdot (n\delta + 1)}{n} \cdot \log |\mathcal{P}| - \log n + \frac{n - 2 \cdot (n\delta + 1) + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log(n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil) \\
&\quad + \frac{2 \cdot n\delta + \frac{1}{2}}{n} \cdot \log(2 \cdot n\delta) \\
&\stackrel{\textcircled{4}}{=} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - 2\delta \cdot \log |\mathcal{P}| - \log n + \left(1 - 2\delta - \frac{2}{n} + \frac{1}{2n}\right) \cdot \left[\log(n - 2 \cdot n\delta) - \log(n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil)\right] \\
&\quad + \log(n - 2 \cdot \lceil n\delta \rceil) + 2\delta \cdot \log n + \frac{1}{2n} \cdot \log n + 2\delta \cdot \log 2\delta + \frac{1}{2n} \cdot \log 2\delta \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - 2\delta \cdot \log |\mathcal{P}| - \log n + \left(1 - 2\delta + \frac{2}{n} + \frac{1}{2n}\right) \cdot (\log n + \log(1 - 2\delta)) \\
&\quad + 2\delta \cdot \log n + 2\delta \cdot \log 2\delta \\
&= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{P}, K) - 2\delta \cdot \log |\mathcal{P}| + \log(1 - 2\delta) - 2\delta \cdot \log(1 - 2\delta).
\end{aligned}$$

■

#### 4.6.6 Theorem

Sei  $X$  ein metrisierbarer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Dann gilt für jedes von innen reguläre, ergodische,  $f$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{B}_X)$

$$h_\mu(f) \leq \underline{h}_D(f).$$

Beweis:

Sei  $d$  eine Metrik auf  $X$ , die die Topologie von  $X$  erzeugt. Sei  $\mu$  ein von innen reguläres, ergodisches,  $f$ -invariantes Borel-Maß mit  $\mu(X) = 1$ . Sei  $\beta$  eine endliche Borel-Partition von  $X$  und sei  $\delta \in ]0, \frac{1}{4}[$ . Da  $\mu$  von innen regulär ist existiert zu jedem  $B \in \beta$  eine kompakte Menge  $C_B \subseteq B$  mit  $\mu(C_B) > \mu(B) - \frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{|\beta|}$ . Setze  $C := \bigcup_{B \in \beta} C_B$ . Dann ist  $C$  kompakt und es gilt

$$\mu(C) = \mu\left(\bigcup_{B \in \beta} C_B\right) = \sum_{B \in \beta} \mu(C_B) > 1 - \frac{\delta}{2}.$$

Wähle  $N \in \mathbb{N}$  und  $K \subseteq C$  entsprechend Lemma 4.6.4. Wir setzen zunächst  $h_\mu(f, \beta) > \delta > 0$  voraus. Bezeichnet  $g_n(\varepsilon)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$ , die minimale Anzahl von Elementen aus  $\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\beta$  mit der Eigenschaft, daß das Maß der Vereinigung dieser Mengen  $> 1 - \varepsilon$  ist, so folgt aus dem Shannon-McMillian-Breiman-Theorem  $\frac{1}{n} \cdot \log g_n(\varepsilon) \rightarrow h_\mu(f, \beta)$  [71, S.93f.]. Seien  $n \in \mathbb{N}$  und

$$A_1, \dots, A_{g_n(\delta)} \in \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\beta \quad \text{mit} \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^{g_n(\delta)} A_j\right) > 1 - \delta.$$

Setze  $I_n := \{j : A_j \cap K \neq \emptyset\}$  und  $h_n := |I_n|$ . Dann gilt  $h_n \leq g_n$  und aus  $\mu(K) > 1 - \delta$  folgt

$$\mu\left(\bigcup_{j \in I_n} A_j\right) \geq \mu\left(\bigcup_{j \in I_n} (A_j \cap K)\right) = \mu\left(K \cap \bigcup_{j=1}^{g_n(\delta)} A_j\right) > 1 - 2\delta,$$

also  $g_n(2\delta) \leq h_n$ . Aus dem Quetschungssatz folgt  $\frac{1}{n} \cdot \log h_n \rightarrow \mathfrak{h}_\mu(f, \beta)$ . Es existiert also ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $\mathfrak{h}_\mu(f, \beta) - \frac{1}{n} \cdot \log h_n < \delta$  für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ . Sei  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$ . Wählt man für jedes  $j \in I_n$  einen Punkt aus  $A_j \cap K$ , so ist die Menge dieser Punkte eine  $(n, \beta)$ -separated set und eine Teilmenge von  $K$ . Daraus folgt  $h_n \leq r_n(\beta, K)$  und somit

$$\begin{aligned} (1 - 2\delta) \cdot \exp((\mathfrak{h}_\mu(f, \beta) - \delta) \cdot n) &= (1 - 2\delta) \cdot \exp\left(\left(\mathfrak{h}_\mu(f, \beta) - \frac{1}{n} \cdot \log h_n + \frac{1}{n} \cdot \log h_n - \delta\right) \cdot n\right) \\ &\leq (1 - 2\delta) \cdot \exp\left(\left(\delta + \frac{1}{n} \cdot \log h_n - \delta\right) \cdot n\right) \\ &= (1 - 2\delta) \cdot h_n \leq r_n(\beta, K) \cdot (1 - 2\delta) \leq r_n(\beta, K). \end{aligned}$$

Für  $\mathfrak{h}_\mu(f, \beta) \geq \delta$  ist obige Ungleichung trivial. Nun folgt  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\beta, K) \geq \mathfrak{h}_\mu(f, \beta) - \delta$ , also mit  $\varepsilon^* > 0$  aus Bemerkung 3

$$\begin{aligned} \underline{\mathfrak{h}}_d(f) &= \sup_{\varepsilon > 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon, K) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\varepsilon^*, K) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\mathcal{C}, K) \\ &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \log r_n(\beta, K) - \varphi(\delta) \geq \mathfrak{h}_\mu(f, \beta) - (\varphi(\delta) + \delta) \rightarrow \mathfrak{h}_\mu(f, \beta) \quad \text{für } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit folgt  $\mathfrak{h}_\mu(f) = \sup_\beta \mathfrak{h}_\mu(f, \beta) \leq \underline{\mathfrak{h}}_d(f)$  für jede Metrik  $d$ , die die Topologie von  $X$  erzeugt, und es ergibt sich die Behauptung.  $\blacksquare$

#### Bemerkung 4

Man beachte, daß in Theorem 4.6.6 keine Aussage darüber getroffen wird, ob überhaupt ein derartiges Maß auf  $(X, \mathcal{B}_X)$  existiert.

Da auf polnischen Räumen bekanntlich endliche Borel-Maße stets von innen regulär sind, ergibt sich (zusammen mit Theorem 4.2.12) eine entsprechende Formulierung von Goodwyn's Theorem wie folgt

#### 4.6.7 Theorem

Sei  $X$  ein polnischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Dann gilt für jedes  $(f)$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{B}_X)$

$$\mathfrak{h}_\mu(f) \leq \underline{\mathfrak{h}}_D(f) \leq \mathfrak{h}_D(f).$$

Im folgenden Spezialfall bleibt das Variationsprinzip für  $\mathfrak{h}_D$  gültig, allerdings haben M. Handel und B. Kitchens zeigen können, daß dieses nicht allgemein vorliegt.

#### 4.6.8 Korollar

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum, der eine abzählbare Basis besitzt, und sei  $f : X \rightarrow X$  eine stetige und eigentliche Abbildung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_D(f) &= \sup\{\mathfrak{h}_\mu(f) : \mu \text{ } f\text{-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (X, \mathcal{B}_X)\} \\ &= \sup\{\mathfrak{h}_\mu(f) : \mu \text{ } f\text{-invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (X, \mathcal{B}_X)\} \end{aligned}$$

#### Beweis:

Sei  $Y$  die Einpunkt-Kompaktifizierung von  $X$ . Da  $X$  eine abzählbare Basis besitzt, ist  $Y$  nach dem Satz von Urysohn metrisierbar [70, Satz 10.15]. Da  $f$  stetig und eigentlich ist, kann  $f$  stetig (und eindeutig) zu einer stetigen Funktion  $f' : Y \rightarrow Y$  fortgesetzt werden.

Für jedes ergodische  $f'$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu'$  auf  $Y$  gilt  $\mu'(\{\infty\}) \in \{0, 1\}$ . Ist  $\mu'(\{\infty\}) = 1$ , so gilt  $h_{\mu'}(f') = 0$ . Somit folgt

$$\begin{aligned} h_D(f) &\stackrel{4.4.3(b)}{\leq} h_D(f') = h(f') \\ &= \sup\{h_{\mu'}(f') : \mu' \text{ } f'\text{-invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß}\} \\ &= \sup\{h_{\mu}(f) : \mu \text{ } f\text{-invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß}\}, \end{aligned}$$

wobei wir das Variationsprinzip für  $f'$  verwendet haben. Die umgekehrte Ungleichung folgt aus Theorem 4.6.7 und die zweite behauptete Gleichung aus Theorem 4.2.12. ■

#### 4.6.9 Definition (Maß mit maximaler Entropie)

Sei  $(X, \mathfrak{B})$  ein meßbarer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine meßbare Abbildung. Ein auf  $(X, \mathfrak{B})$  definiertes  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  hat **maximale Entropie**, falls

$$h_{\mu}(f) = \sup\{h_{\mu}(f) : \mu \text{ } f\text{-invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß}\}.$$

#### 4.6.10 Anmerkungen

- (i) Üblicherweise definiert man die maximale Entropie mittels dem Variationsprinzip, d.h. ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, so hat ein invariantes Maß  $\mu$  maximale Entropie, falls  $h_{\mu}(f) = h(f)$ .
- (ii) Ist  $(X, d)$  ein kompakter metrischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung, sowie  $\mu$  ein Maß mit maximaler Entropie, so folgt aus [8, Theorem 1] und dem Variationsprinzip

$$h(f, \text{supp } \mu) = h(f, X).$$

Man kann dies so interpretieren, daß die (topologische) Entropie auf dem Träger von  $\mu$  konzentriert ist. Es wurde für meromorphes  $f$  (mit einigen zusätzlichen Bedingungen) und der zugehörigen Fatoumenge  $\mathcal{F}(f)$  gezeigt [73]

$$h(f, \mathcal{F}(f)) = 0.$$

Die Entropie ist daher auf der Juliamenge konzentriert. Zu einer rationalen Funktion  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $\text{grad } f \geq 2$  gibt es nach M. Lyubich ein eindeutig bestimmtes Maß mit maximaler Entropie, dessen Träger mit der Juliamenge übereinstimmt [46].

## 4.7. Die topologische Entropie auf nicht-kompakten Räumen

Es ist bekannt, daß alle hier eingeführten Definitionen der topologischen Entropie übereinstimmen, wenn eine stetige Selbstabbildung auf einem kompakten, metrisierbaren Raum vorliegt [8, 56, 71]. Wir betrachten nun den Fall, daß der zugrundeliegende Raum nicht kompakt ist, und diskutieren Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Definitionen.

### 4.7.1 Satz

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$h(f, X) \leq h(f).$$

**Beweis:**

Ist  $h(f) = \infty$ , so ist nichts zu zeigen. Es gelte  $h(f) < \infty$ . Sei  $\xi$  eine endliche, offene Überdeckung von  $X$  und

$$\xi_n := \bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\xi \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Sei  $s \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $h(f) < s$ . Seien  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ . Aus  $\frac{1}{n} \cdot H(\xi_n) \rightarrow \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n} \cdot H(\xi_n) = h(f, \xi) \leq h(f) < s$  folgt, daß ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert mit  $e^{-n} \leq \delta$  und

$$\exp\left(\frac{1}{n} \cdot H(\xi_n) - s\right)^n < \varepsilon.$$

Sei  $\xi'_n = \{E_1, \dots, E_{N(\xi_n)}\}$  eine Teilüberdeckung von  $\xi_n$  mit  $|\xi'_n| = N(\xi_n)$ . Nach Bemerkung 1 (Seite 78) gilt  $D_{f,\xi}(E_j) \leq \exp(-n) \leq \delta$  für  $j = 1, \dots, N(\xi_n)$ . Es folgt

$$\begin{aligned} h_{\xi,\delta}^s(f, X) &\leq \sum_{j=1}^{N(\xi_n)} D_{f,\xi}(E_j)^s \leq \sum_{j=1}^{N(\xi_n)} \exp(-n)^s = N(\xi_n) \cdot \exp(-n)^s \\ &= \exp\left(\frac{1}{n} \cdot \log(N(\xi_n)) - s\right)^n = \exp\left(\frac{1}{n} \cdot H(\xi_n) - s\right)^n < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt  $h_{\xi,\delta}^s(f, X) = 0$  und somit  $h_\xi^s(f, X) = 0$ . Daraus folgt  $h_\xi(f, X) \leq h(f)$ , also  $h(f, X) \leq h(f)$ . ■

Unter der Bedingung, daß der zugrundeliegende Raum  $X$  ein normaler  $T_1$ -Raum ist und  $f : X \rightarrow X$  ein Homöomorphismus ist, konnte J. E. Hofer  $h(f) = h^*(f)$  zeigen [35]. Damit haben wir noch einen Alternativbeweis für

$$h^*(f) = \infty$$

mit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ . Insgesamt haben wir den nachfolgenden Zusammenhang zwischen den einzelnen Definitionen der topologischen Entropie:

**4.7.2 Theorem**

Sei  $X$  ein vollständig regulärer Raum und  $f : X \rightarrow X$  eine stetige Abbildung. Dann gilt

(i)  $h_{\beta X}(f, X) \leq \min\{h(f, X), h(f), h^*(f)\} = \min\{h(f, X), h^*(f)\}.$

(ii) Für alle  $A \subseteq X$  und jede Kompaktifizierung  $Y$  von  $X$  gilt

$$h_Y(f, A) \leq h_{\beta X}(f, A).$$

(iii) Für jeden kompakten Raum  $Y$  mit  $Y \supseteq X$  (d.h. die Spurtopologie von  $Y$  auf  $X$  stimmt mit der auf  $X$  gegebenen Topologie überein) gilt

$$h_Y(f, A) \leq h(f, A) \quad \text{für alle } A \subseteq X.$$

**Beweis:**

Aus Bemerkung 5 (Seite 82) folgt  $h_{\beta X}(f, X) \leq h^*(f)$ . Mit Satz 4.5.8 folgt  $h_{\beta X}(f, X) \leq h(f, X)$ . Aus Satz 4.7.1 erhält man nun sowohl die behauptete Ungleichung als auch die behauptete Gleichheit in (i). Aussage (ii) folgt aus Satz 4.5.11 und (iii) ist Satz 4.5.8. ■

**4.7.3 Beispiel**

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine ganze, transzendente Funktion. Für jede hier betrachtete topologische Entropie ergibt sich der Wert  $\infty$ , d.h. es gilt

$$h_{\beta \mathbb{C}}(f, \mathbb{C}) = h_{\widehat{\mathbb{C}}}(f, \mathbb{C}) = h^*(f) = \infty$$

und auch  $h_D(f) = \infty$ . Dies ergibt sich aus [73, Remarks 6.2] zusammen mit den Eigenschaften der (jeweiligen) topologischen Entropie. Zum Nachweis von  $h_D(f) = \infty$  wird nur noch die Ungleichung  $h_D(f^2) \leq 2 \cdot h_D(f)$  benötigt, vgl. auch Anmerkung 4.4.4.

#### 4.7.4 Anmerkungen

Wir wollen hier die (topologische) Entropie als ein Maß für die Unvorhersehbarkeit einer Funktion auffassen. Es ist bekannt, daß stetige (und surjektive) Selbstabbildungen auf einem kompakten metrisierbaren Raum mit strikt positiver Entropie chaotisch (nach Li-York) sind [7]. Aus diesem Grund sind wir an einer Definition der topologischen Entropie interessiert, die möglichst klein ist. Betrachtet man die Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$ , so ist diese nicht chaotisch, außerdem gilt

$$h_D(f) = 0 \quad \text{und} \quad h_{\widehat{\mathbb{R}}}(f, \mathbb{R}) = 0.$$

Alle anderen Definitionen liefern  $\infty$  und disqualifizieren sich hier für weitere Untersuchungen. Dabei ist zu beachten, daß  $h_Y(f, \mathbb{R})$  noch von der Wahl der Kompaktifizierung  $Y$  abhängt, beispielsweise erhält man für  $Y = \widehat{\mathbb{R}}$  und  $Y = \beta\mathbb{R}$  im obigen Beispiel (wesentlich) verschiedene Werte. Ersteres entspricht der Entropie der eindeutig bestimmten stetigen Fortsetzung von  $f$  auf die Alexandroff-Kompaktifizierung. Insbesondere in [37, S.222f.] wurde dieses für eigentliche Abbildungen betrachtet. Natürlich könnte man für eine Abbildung  $f : X \rightarrow X$ ,  $X$  vollständig regulär, auch

$$\inf\{h_Y(f, A) : Y \text{ Kompaktifizierung von } X\}, \quad A \subseteq X,$$

betrachten. Allerdings ergibt sich aus Satz 4.5.7 nicht, daß diese Definition eine topologische Eigenschaft ist. Für  $h_D(f)$  ist keine Kompaktifizierung notwendig, dies ist eine obere Schranke für die maßtheoretische Entropie.

Zumindest in einem Spezialfall gibt es auch einen Zusammenhang zwischen der mittels einer Metrik definierten Entropie  $h_D$  und den anderen Zugängen zur topologischen Entropie:

#### 4.7.5 Satz

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum, der eine abzählbare Basis besitzt und sei  $f : X \rightarrow X$  eine stetige und eigentliche Abbildung. Für die Einpunkt-Kompaktifizierung  $Y$  von  $X$  gilt dann

$$h_D(f) = h_Y(f, X).$$

##### Beweis:

Da  $f$  eigentlich und stetig ist, kann  $f$  zu einer stetigen Abbildung  $f' : Y \rightarrow Y$  fortgesetzt werden. Da  $X$  eine abzählbare Basis besitzt folgt aus dem Satz von Urysohn, daß  $Y$  metrisierbar ist. Damit ist  $f'$  eine stetige Selbstabbildung auf einem metrisierbaren, kompakten Raum. Für jedes ergodische,  $f'$ -invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu'$  auf  $Y$  gilt  $\mu'(\{\infty\}) \in \{0, 1\}$ , und im Fall  $\mu'(\{\infty\}) = 1$  ist  $h_{\mu'}(f') = 0$ . Damit folgt, da für  $f'$  das Variationsprinzip gilt,

$$\begin{aligned} h_D(f) &\stackrel{4.6.8}{=} \sup\{h_{\mu}(f) : \mu \text{ } f\text{-invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf } X\} \\ &= \sup\{h_{\mu'}(f') : \mu' \text{ } f'\text{-invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß auf } Y\} \\ &= h(f') = h_Y(f', Y) \stackrel{4.5.7(b)}{=} h_Y(f, X). \end{aligned}$$

■

# Kapitel 5.

## Pluri-Komplexe Dynamik

Chaos is a name for any order that produces confusion in our minds.

*(George Santayana)*

In diesem Kapitel betrachten wir eine zufällige Iteration von auf  $\mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , definierten holomorphen Selbstabbildungen  $f_i$ ,  $i \in I$ , mit  $\text{grad } f_i \geq 2$  für jedes  $i \in I$ . Im Fall  $k = 1$  liegen bekanntlich (auf  $\widehat{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}^1$  definierte) rationale Funktionen vor. Sei  $f$  das Schiefprodukt von  $f_i$ ,  $i \in I$ , und dem (einseitigen) Shift auf  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ . Sei  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\Omega$ . Wir sind an der Existenz von ( $f$ -) invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\mu$  interessiert derart, daß für die zugehörige Faktorisierung (§A.3) ( $\mu_\omega$ ) gilt

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Dabei sei  $\mathcal{J}(F_\omega)$  die Juliamenge von  $F_\omega := \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ . Wir verwenden hier die Darstellung von Maßen mittels (Pluri-) Potentialen und gehen faserweise vor. Im wesentlichen beschränken wir uns auf den Fall  $k = 1$ , betrachten die Situation aber auch allgemein. Natürlich fassen wir Maße entsprechend dem Darstellungssatz von Riesz stets auch als stetige Funktionale auf.

Man erhält zunächst einen sogenannten **Greenschen Current**, der im Fall  $k = 1$  einem (Wahrscheinlichkeits-) Maß entspricht.

### 5.1. Greensche Currents

In diesem Kapitel wollen wir stets die nachfolgenden Bezeichnungen zugrunde legen:

#### Notation (Generalvoraussetzungen)

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $I$  ein meßbarer Raum und sei

$$F_i = (F_{i,0}, \dots, F_{i,k}) : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}, \quad i \in I,$$

eine Familie von homogenen Polynomfunktionen mit  $F_i^{-1}(0) = 0$  und  $d_i := \text{grad } F_i \geq 2$  für alle  $i \in I$ . Für alle  $i \in I$  sei

$$f_i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k, \quad [z] \mapsto [F_i(z)].$$

Wir versehen  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$  mit der Produkt  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  und betrachten das zugehörige Schiefprodukt  $f$ , bezüglich dem (einseitigem) Shift  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$ ,  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , d.h.

$$f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z)).$$

Für jedes  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  sei zudem  $F_\omega := \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$ . Für die Definition der Juliamenge  $\mathcal{J}(F_\omega)$  von  $F_\omega$ ,  $\omega \in \Omega$ , sei auf den Anhang (§A.1) verwiesen. Für die Borelsche  $\sigma$ -Algebra von  $\mathbb{P}^k$  schreiben wir  $\mathcal{B}_{\mathbb{P}^k}$  oder auch nur  $\mathcal{B}$ .

**Bemerkung 1**

- (i)  $f_i$  ist wohldefiniert und eine holomorphe Selbstabbildung auf  $\mathbb{P}^k$  mit  $\text{grad } f_i = d_i \geq 2$  für alle  $i \in I$ .  $F_i$  ist eine Liftung von  $f_i$  für jedes  $i \in I$ .
- (ii) Aus Satz B.1.2 ergibt sich, daß  $f$  genau dann meßbar ist, wenn  $i \mapsto f_i(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{P}^k$  meßbar ist.

Ist ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  gegeben, so sind wir daran interessiert unter welchen Bedingungen ein auf  $(\Omega \times \mathbb{P}^k, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$  definiertes  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  und

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega$$

existiert. Dabei sei  $\pi_\Omega$  die Projektion von  $\Omega \times \mathbb{P}^k$  auf  $\Omega$  und  $(\mu_\omega)_\omega$  sei die zu  $\mu$  gehörende Faktorisierung ( $\rightarrow$  §A.3).

Wir werden  $\mu$  faserweise konstruieren, d.h. für ( $\mathbf{P}$ -fast) jedes  $\omega \in \Omega$  werden wir zunächst ein auf  $\mathbb{P}^k$  definiertes  $(1, 1)$ -Current  $T_\omega$  einführen. Im Fall  $k = 1$  entspricht  $T_\omega$  einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_\omega$ , in den anderen Fällen muß  $T_\omega$  noch in ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_\omega$  überführt werden. Anschließend werden diese Maße zu einem auf  $(\Omega \times \mathbb{P}^k, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$  definierten Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  zusammengesetzt.

**5.1.1 Motivation**

Gilt  $|I| = 1$  und  $k = 1$ , so kann man  $f$  auch als rationale Funktion  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $d := \text{grad } f \geq 2$  auffassen. Für jedes  $a \in \mathcal{J}(f)$  gilt

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} f^{-n}(a)}, \quad \text{wobei } f^{-n} = (f^n)^{-1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

so daß die folgende Konstruktion eines invarianten Maßes naheliegend ist: Für alle  $a \in \mathcal{J}(f)$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$\mu_n^{(a)} := \frac{1}{d^n} \cdot \sum_{f^n(\xi)=a} \delta_\xi,$$

wobei  $\delta_\xi$  das Punktmaß im Punkt  $\xi$  bezeichne und man beachte, daß es (gezählt gemäß Vielfachheit) genau  $d^n$  Punkt  $\xi \in \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $f^n(\xi) = a$  gibt. Damit liegt eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen vor. Aus der (vollständigen) Invarianz der Juliamenge folgt

$$\text{supp } \mu_n^{(a)} \subseteq \mathcal{J}(f) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Konvergiert  $(\mu_n^{(a)})_{n \in \mathbb{N}}$  bezüglich der Topologie der schwachen Konvergenz gegen ein vom Punkt  $a$  unabhängiges Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$ , so ist  $\mu$   $f$ -invariant und es gilt  $\text{supp } \mu = \mathcal{J}(f)$ . Ist  $f$  eine Polynomfunktion, so läßt sich zum Nachweis der Konvergenz die Potentialtheorie verwenden [11], [58, §6.5]. Das zu  $\mu_n^{(a)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gehörende Potential (vgl. §0.2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{\mu_n^{(a)}}(z) &= \int \log |z - w| \mu_n^{(a)}(dw) = \frac{1}{d^n} \cdot \sum_{f^n(\xi)=a} \log |z - \xi| \\ &= \frac{1}{d^n} \cdot \log |f^n(z) - a|, \quad \text{da } f^n(z) - a = \prod_{f^n(\xi)=a} (z - \xi), \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall, d.h. wenn  $f$  eine rationale Funktion ist, konnte von M. Lyubich nachgewiesen werden [46]. Die Anwendung der Potentialtheorie ist so nicht möglich.



Die von J. H. Hubbard und P. Papadopol stammende Idee, unter Verwendung der Liftung und der Pluri-Potentialtheorie Maße bzw. Currents zu konstruieren, hat zu einer Fülle weiterer Anwendungen in der komplexen Dynamik geführt [39]. Auch hier verwenden wir die Darstellung von Maßen mittels (Pluri-) Potentialen und gehen entsprechend faserweise vor. 5.1.1 zeigt, daß es naheliegend ist, das zum (Pluri-) Potential  $z \mapsto \log\|z\|$  korrespondierende  $(1, 1)$ -Current (auf  $\mathbb{P}^k$ ) zu betrachten:

### Notation

Setze für alle  $i \in I$

$$C_i := \max \left\{ \log \sup_{\|z\|=1} \|F_i(z)\|, -\log \inf_{\|z\|=1} \|F_i(z)\| \right\},$$

außerdem sei für alle  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$G_{\omega, n} := \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \log \|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}\| : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow [-\infty, \infty[$$

und  $H_{\omega, n} := G_{\omega, n}|_{\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}} : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Aus Bemerkung 2 (Seite 48) folgt

### Bemerkung 2

Für alle  $i \in I$ ,  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$  gilt

$$e^{-C_i} \cdot \|z\|^{d_i} \leq \|F_i(z)\| \leq e^{C_i} \cdot \|z\|^{d_i}.$$

### 5.1.2 Satz

Sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  und es gelte

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\omega_n}}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} < \infty.$$

Dann konvergiert  $(H_{\omega, n})_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen eine stetige, pluri-subharmonische Funktion  $H_{\omega} : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  und es gilt

$$H_{\omega}(\lambda \cdot z) = \log |\lambda| + H_{\omega}(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^{k+1}, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

**Zusatz:** Setzt man  $G_{\omega}(0) := -\infty$  und  $G_{\omega}(z) := H_{\omega}(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ , so ist die Abbildung  $G_{\omega} : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow [-\infty, \infty[$  ein (Pluri-) Potential, d.h.  $G_{\omega} \in \mathcal{P}_k$ , mit  $G_{\omega}^{-1}(-\infty) = \{0\}$ .

### Beweis:

Seien  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Setze  $P_n := F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}$ .

1. Fall: Es gilt  $d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| \geq \log \|F_{\omega_{n+1}}(P_n(z))\|$ . Dann folgt aus Bemerkung 2

$$\begin{aligned} |H_{\omega, n+1}(z) - H_{\omega, n}(z)| &= \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \left| \log \|F_{\omega_{n+1}}(P_n(z))\| - d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| \right| \\ &= \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \left[ d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| - \log \|F_{\omega_{n+1}}(P_n(z))\| \right] \\ &\leq \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \left[ d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| - \log(e^{-C_{\omega_{n+1}}} \cdot \|P_n(z)\|^{d_{\omega_{n+1}}}) \right] \\ &= \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot C_{\omega_{n+1}}. \end{aligned}$$

2. Fall: Es gilt  $d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| \leq \log \|F_{\omega_{n+1}}(P_n(z))\|$ . Dann folgt aus Bemerkung 2 ebenso

$$\begin{aligned} |H_{\omega, n+1}(z) - H_{\omega, n}(z)| &= \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \left[ \log \|F_{\omega_{n+1}}(P_n(z))\| - d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| \right] \\ &\leq \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \left[ \log (e^{C_{\omega_{n+1}}} \cdot \|P_n(z)\|^{d_{\omega_{n+1}}}) - d_{\omega_{n+1}} \cdot \log \|P_n(z)\| \right] \\ &= \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot C_{\omega_{n+1}}. \end{aligned}$$

Aus dem Cauchyschen Konvergenzkriterium [33] ergibt sich die Existenz einer stetigen Abbildung  $H_\omega : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$H_{\omega, n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H_\omega \text{ (gleichm\u00e4\u00dfig).}$$

Als Hintereinanderausf\u00fchrung einer pluri-subharmonischen Funktion und einer holomorphen Abbildung ist  $H_{\omega, n}$  nach Satz 2.3.2 pluri-subharmonisch f\u00fcr jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Aus Satz 2.2.3 folgt, da\u00df  $H_\omega$  pluri-subharmonisch ist, aus der Homogenit\u00e4t der Liftung ergibt sich f\u00fcr alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  und alle  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} H_\omega(\lambda \cdot z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\omega, n}(\lambda \cdot z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \log \|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(\lambda \cdot z)\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \log \|\lambda^{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot (F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(z))\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \left[ \log |\lambda^{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}| + \log \|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(z)\| \right] \\ &= H_\omega(z) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n} \cdot \log |\lambda| = H_\omega(z) + \log |\lambda|. \end{aligned}$$

Sei nun  $G_\omega : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow [-\infty, \infty[$  mit  $G_\omega(0) = -\infty$  und  $G_\omega(z) = H_\omega(z)$  f\u00fcr alle  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $G_\omega$  eine oberhalb-stetige Abbildung und  $G_\omega$  erf\u00fcllt in jedem Punkt die Mittelwertungleichung, d.h.  $G_\omega$  ist pluri-subharmonisch. ■

### Bemerkung 3

(i) Ist  $c_i, i \in I$ , eine Familie komplexer Zahlen mit  $|c_i| = 1$  f\u00fcr alle  $i \in I$  und ersetzt man  $F_i$  durch  $c_i \cdot F_i$ , so bleibt (\*) erf\u00fcllt und man erh\u00e4lt die gleiche Funktion  $G_\omega$ .

(ii) Ist  $C_\omega := \sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty$ , so ist die Bedingung (\*) f\u00fcr  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  erf\u00fcllt und  $C_\omega < \infty$  liegt genau dann vor, wenn

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| < \infty \quad \text{und} \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| > 0.$$

Inbesondere f\u00fcr  $|I| < \infty$  ist (\*) f\u00fcr jedes  $\omega \in \Omega$  erf\u00fcllt.

### Notation

Unter Verwendung obiger Bezeichnungen sei

$$\Omega^* := \left\{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\omega_n}}{d_{\omega_n} \cdots d_{\omega_1}} < \infty \right\},$$

d.h.  $\Omega^*$  besteht aus allen Punkten  $\omega \in \Omega$ , f\u00fcr die die Bedingung (\*) aus Satz 5.1.2 erf\u00fcllt ist. Mit Satz 3.3.10 und Satz 5.1.2 ergibt sich

**5.1.3 Satz**

Für alle  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ ,  $n \in \mathbb{N}$  sei

$$f_{\omega,n} := f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}.$$

Sei  $T$  das durch  $\pi^*T = dd^c \log \|z\|$  gegebene  $(1,1)$ -Current auf  $\mathbb{P}^k$ . Dann ist  $G_{\omega,n}$  ein Potential zum  $(1,1)$ -Current

$$T_{\omega,n} := \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot f_{\omega,n}^* T \in \mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$$

und für jedes  $\omega \in \Omega^*$  konvergiert  $(T_{\omega,n})_{n \in \mathbb{N}}$  schwach gegen ein positives, geschlossenes  $(1,1)$ -Current  $T_\omega$ .

Liegt nur eine Funktion vor, d.h. gilt  $|I| = 1$ , so bezeichnet man das entsprechende  $(1,1)$ -Current auch als **Greensche Current** (der vorliegenden Funktion). Aus diesem Grund sagen wir auch, daß  $T_\omega$  das **Greensche Current** von  $F_\omega = \{f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\omega \in \Omega^*$ , ist. Wir notieren nun noch einige einfache Eigenschaften von  $G_\omega$ ,  $\omega \in \Omega^*$ :

**5.1.4 Lemma**

Sei  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  der (einseitige) Shift auf  $\Omega$  und sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ . Dann gilt

$$d_{\omega_1} \cdot G_{\omega,n+1} = G_{\sigma\omega,n} \circ F_{\omega_1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und entsprechend  $d_{\omega_1} \cdot G_\omega = G_{\sigma\omega} \circ F_{\omega_1}$ , falls  $\omega \in \Omega^*$ . Dabei schreiben wir  $\sigma\omega$  statt  $\sigma(\omega)$ .

Beweis:

Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$  gilt

$$\begin{aligned} d_{\omega_1} \cdot G_{\omega,n+1}(z) &= \frac{d_{\omega_1}}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \log \|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(z)\| \\ &= \frac{1}{d_{\omega_2} \cdots d_{\omega_{n+1}}} \cdot \log \|(F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_2})(F_{\omega_1}(z))\| = G_{\sigma\omega,n}(F_{\omega_1}(z)) \end{aligned}$$

und für  $n \rightarrow \infty$  folgt  $d_{\omega_1} \cdot G_\omega = G_{\sigma\omega} \circ F_{\omega_1}$ , sofern  $G_\omega$  definiert ist, d.h. falls  $\omega \in \Omega^*$ . ■

**Bemerkung 4**

Ist  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  und  $C_\omega := \sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty$ , so gilt

$$|G_{\omega,n}(z) - G_\omega(z)| \leq \frac{2 \cdot C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}.$$

Beweis:

Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Aus  $H_{\omega,n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H_\omega$  (gleichmäßig) folgt, daß ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$|H_{\omega,n+N}(z) - H_\omega(z)| \leq \frac{C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+N}}} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}.$$

Aus dem Beweis von Satz 5.1.2 folgt für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} |G_{\omega,n}(z) - G_\omega(z)| &= |H_{\omega,n}(z) - H_\omega(z)| \leq \sum_{j=0}^{N-1} |H_{\omega,n+j}(z) - H_{\omega,n+j+1}(z)| + |H_{\omega,n+N}(z) - H_\omega(z)| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{C_{\omega_{n+j+1}}}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+j+1}}} + \frac{C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n+N}}} \leq \frac{C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \left[ \frac{1}{2} + \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{2^{j+1}} \right] \\ &= \frac{C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^N \right] \leq \frac{2 \cdot C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}. \end{aligned}$$

■

## 5.2. Der Träger des Greenschen Current

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß der Träger  $\text{supp } T_\omega$  des  $(1, 1)$ -Currents  $T_\omega$ ,  $\omega \in \Omega^*$ , aus Satz 5.1.3 unter bestimmten Bedingungen mit der Juliamenge  $\mathcal{J}(F_\omega)$  von  $F_\omega$  übereinstimmt. Im Fall  $k > 1$  kann  $T_\omega$  nicht als Wahrscheinlichkeitsmaß interpretiert werden. Wir betrachten daher auch ein  $(k, k)$ -Current  $\mu_\omega$ , das aus  $T_\omega$  konstruiert wird und als Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{P}^k$  aufgefaßt werden kann.

### 5.2.1 Lemma

Es seien die Bezeichnungen aus §5.1 gegeben. Sei  $\omega \in \Omega^*$ . Für jedes  $z \in \mathbb{P}^k$  sind dann die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) Es gilt  $z \notin \text{supp } T_\omega$ .
- (ii) Es existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  derart, daß  $G_\omega$  in  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch ist.

#### Beweis:

„(i)  $\Rightarrow$  (ii)“: Sei  $z \notin \text{supp } T_\omega$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $z$  mit  $T_\omega|_V = 0$ . Sei  $z = [z_0, \dots, z_k]$  und wähle  $j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $z_j \neq 0$ . Setze  $U := V \cap \{[a_0, \dots, a_k] \in \mathbb{P}^k : a_j \neq 0\}$ . Dann ist  $U$  eine offene Umgebung von  $z$  in  $\mathbb{P}^k$ .  $G_\omega$  aus Satz 5.1.2 ist ein (Pluri-) Potential für  $T_\omega$ . Aus der Konstruktion von  $T_\omega$ , d.h. aus Korollar 3.3.7, ergibt sich  $0 = T_\omega|_U = dd^c(G_\omega \circ s)$  für die injektive und holomorphe Abbildung

$$s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, \quad [z_0, \dots, z_k] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j} \right).$$

Aus Bemerkung 2 (Seite 54) folgt, daß  $G_\omega$  auf  $s(U)$  pluri-harmonisch ist. Für jedes  $a = (a_0, \dots, a_k) \in \pi^{-1}(U)$  ist  $\frac{a}{a_j} \in s(U)$ , außerdem ist  $a = (a_0, \dots, a_k) \mapsto \log |a_j|$  auf  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch. Damit ist

$$a = (a_0, \dots, a_k) \mapsto G_\omega(a) = G_\omega\left(\frac{a}{a_j}\right) + \log |a_j|$$

auf  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch, d.h.  $G_\omega$  ist auf  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch.

„(ii)  $\Rightarrow$  (i)“: analog. ■

### 5.2.2 Satz

Seien  $k \in \mathbb{N}$ ,  $z \in \mathbb{P}^k$  und sei  $U$  eine offene Umgebung von  $z$  in  $\mathbb{P}^k$ . Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Funktionen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{P}^k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die auf  $U$  gleichmäßig konvergiert. Dann existiert ein  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $z$  mit  $V \subseteq U$  und

$$f_n(V) \subseteq \{[a_0, \dots, a_k] : a_j = 1, |a_i| < 2 \text{ für } i = 0, \dots, k\}$$

für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Beweis:

Sei  $f : U \rightarrow \mathbb{P}^k$  die Funktion, gegen die  $(f_n)$  gleichmäßig konvergiert. Setze  $w := f(z)$ . Sei  $w = [w_0, \dots, w_k]$  und wähle ein  $j \in \{0, 1, \dots, k\}$  mit  $|w_j| \geq |w_i|$  für  $i = 0, \dots, k$  ( $j$  ist unabhängig von der Wahl des Repräsentanten). Da  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, z \mapsto [z]$  offen ist, folgt für alle  $\varepsilon, \delta \in ]0, 1[$ , daß

$$\begin{aligned} W_{\varepsilon, \delta} &:= \{[a_0, \dots, a_k] \in \mathbb{P}^k : 1 - \varepsilon < |a_j| < 1 + \varepsilon, |a_i| < 1 + \delta \text{ für alle } i \neq j\} \\ &= \pi(\{(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} : 1 - \varepsilon < |a_j| < 1 + \varepsilon, |a_i| < 1 + \delta \text{ für alle } i \neq j\}) \end{aligned}$$

offen ist, zudem ist  $A_{\varepsilon,\delta} := \{[a_0, \dots, a_k] \in \mathbb{P}^k : 1 - \varepsilon \leq |a_j| \leq 1 + \varepsilon, |a_i| \leq 1 + \delta \text{ für alle } i \neq j\}$  abgeschlossen. Seien  $\varepsilon, \delta \in ]0, \frac{1}{2}[$  und setze  $V := f^{-1}(W_{\frac{1}{2}, \varepsilon, \frac{1}{2}, \delta})$ . Setzt man  $a_i := \frac{w_i}{w_j}$  für  $i = 0, \dots, k$ , so folgt  $|a_i| \leq 1$  für  $i = 1, \dots, k$  und  $a_j = 1$ , d.h. es gilt  $z \in V$ . Damit ist  $V$  eine offene Umgebung von  $z$  in  $\mathbb{P}^k$ . Aus  $V = f^{-1}(W_{\frac{1}{2}, \varepsilon, \frac{1}{2}, \delta}) \subseteq f^{-1}(A_{\frac{1}{2}, \varepsilon, \frac{1}{2}, \delta}) \subseteq U$  folgt  $\bar{V} \subseteq U$ , außerdem gilt sogar  $\bar{V} \subseteq f^{-1}(W_{\varepsilon, \delta})$ . Wir wollen  $f_n(V) \subseteq W_{2\varepsilon, 2\delta}$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  zeigen und nehmen an, daß dies nicht der Fall ist. Dann existiert eine Folge  $(v_\ell)$  in  $V$  und eine streng monoton wachsende Folge  $(n_\ell)$  in  $\mathbb{N}$  mit  $f_{n_\ell}(v_\ell) \in \mathbb{P}^k \setminus W_{2\varepsilon, 2\delta}$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$ . Da  $\bar{V}$  kompakt ist, kann man o.B.d.A.  $v_\ell \rightarrow v$  für ein  $v \in \bar{V} \subseteq f^{-1}(W_{\varepsilon, \delta})$  voraussetzen. Daraus folgt  $f(v) \in W_{\varepsilon, \delta}$ , aber aus  $f_{n_\ell}(v_\ell) \in \mathbb{P}^k \setminus W_{2\varepsilon, 2\delta}$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  folgt  $f(v) \notin W_{2\varepsilon, 2\delta}$ .  $\nabla$  Also existiert ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, daß für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  gilt

$$\begin{aligned} f_n(V) \subseteq W_{2\varepsilon, 2\delta} &= \{[a_0, \dots, a_k] \in \mathbb{P}^k : 1 - 2\varepsilon < |a_j| < 1 + 2\varepsilon, |a_i| < 1 + 2\delta\} \\ &\subseteq \left\{ [a_0, \dots, a_k] \in \mathbb{P}^k : a_j = 1, |a_i| < \frac{1 + 2\delta}{1 - 2\varepsilon} \text{ für alle } i \neq j \right\}. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun beispielsweise  $\varepsilon = \delta = \frac{1}{20}$ , so folgt  $\frac{1+2\delta}{1-2\varepsilon} = \frac{11}{9} < 2$ .  $\blacksquare$

### 5.2.3 Theorem

Es seien die Bezeichnungen aus Abschnitt §5.1 gegeben und sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega^*$ . Dann gilt

$$\text{supp } T_\omega \subseteq \mathcal{J}(F_\omega)$$

mit Gleichheit, falls  $C_\omega := \sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty$ .

#### Beweis:

Sei wieder  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, z \mapsto [z]$ .

„ $\subseteq$ “: Sei  $z \in \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{J}(F_\omega) = \mathcal{F}(F_\omega)$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  derart, daß die Familie  $F_\omega = \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$  in  $U$  normal ist. Sei  $(f_{\omega_{n_\ell}} \circ \dots \circ f_{\omega_1})_{\ell \in \mathbb{N}}$  eine auf  $U$  lokal gleichmäßig konvergente Folge aus  $F_\omega$ . Durch Verkleinerung von  $U$  kann die gleichmäßige Konvergenz vorausgesetzt werden. Gemäß Satz 5.2.2 kann man durch den Übergang zu einer Teilfolge und einer weiteren Verkleinerung von  $U$  annehmen, daß o.B.d.A.  $f_{\omega_{n_\ell}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(U) \subseteq W := \{[a_0, \dots, a_k] : a_0 = 1, |a_i| < 2 \text{ für } i = 0, \dots, k\}$  für alle  $\ell \in \mathbb{N}$  vorliegt. Sei  $\ell \in \mathbb{N}$  und wähle holomorphe Funktionen  $G_\ell, H_{\ell,1}, \dots, H_{\ell,k} : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $F_{\omega_{n_\ell}} \circ \dots \circ F_{\omega_1} = (G_\ell, H_{\ell,1}, \dots, H_{\ell,k}) : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$ . Für jedes  $z \in \pi^{-1}(U)$  gilt

$$[G_\ell(z), H_{\ell,1}(z), \dots, H_{\ell,k}(z)] = \pi(F_{\omega_{n_\ell}} \circ \dots \circ F_{\omega_1}(z)) = f_{\omega_{n_\ell}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}([z]) \subseteq W,$$

also insbesondere  $G_\ell(z) \neq 0$ . Es folgt, daß  $A_{\ell,j} : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{H_{\ell,j}(z)}{G_\ell(z)}$  eine holomorphe und (von  $\ell$  und  $j$  unabhängige) beschränkte Abbildung ist für  $j = 1, \dots, k$ . Nun gilt

$$G_\ell(z) \cdot (1, A_{\ell,1}(z), \dots, A_{\ell,k}(z)) = F_{\omega_{n_\ell}} \circ \dots \circ F_{\omega_1}(z) \quad \text{für alle } z \in \pi^{-1}(U).$$

Für jedes  $z \in \pi^{-1}(U)$  folgt

$$G_{\omega, n_\ell}(z) = \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n_\ell}}} \cdot \log |G_\ell(z)| + \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_{n_\ell}}} \cdot \log \|(1, A_{\ell,1}(z), \dots, A_{\ell,k}(z))\|.$$

Da  $|A_{\ell,1}|, \dots, |A_{\ell,k}| \leq 2$  folgt, daß der zweite Summand gegen 0 konvergiert. Der erste ist hingegen pluri-harmonisch (vgl. Kommentare nach Satz 2.3.2). Damit ist  $G_\omega = \lim_{\ell \rightarrow \infty} G_{\omega, n_\ell}$  auf  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch. Aus Lemma 5.2.1 folgt  $z \notin \text{supp } T_\omega$ .

„ $\supseteq$ “: Es gelte  $C_\omega := \sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty$ . Sei  $z \notin \text{supp } T_\omega$ . Aus Lemma 5.2.1 folgt, daß eine offene Umgebung  $U$  von  $z$  existiert, so daß  $G_\omega$  auf  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch ist. Indem man  $U$  gegebenenfalls verkleinert, erhält man aus Satz 2.3.8 die Existenz einer auf  $\pi^{-1}(U)$

holomorphen Abbildung  $h$  mit  $h(a) \neq 0$  und  $G_\omega(a) = \log|h(a)|$  für alle  $a \in \pi^{-1}(U)$ . Für alle  $a \in \pi^{-1}(U)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  folgt mit Bemerkung 4 (Seite 97)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \left| \log \frac{\|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(a)\|}{|h(a)|^{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}} \right| \\ &= \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \left| \log \|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(a)\| - d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n} \cdot \log|h(a)| \right| \\ &= \left| \frac{1}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} \cdot \log \|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(a)\| - \log|h(a)| \right| = |G_{\omega,n}(a) - G_\omega(a)| \leq \frac{2 \cdot C_\omega}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}, \end{aligned}$$

also

$$e^{-2C_\omega} \leq \frac{\|F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(a)\|}{|h(a)|^{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}} \leq e^{2C_\omega}.$$

Damit ist die Familie  $\frac{F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}}{h^{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auf  $\pi^{-1}(U)$  normal. Für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in U$  gilt

$$f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}([a]) = \pi \left( \frac{F_{\omega_n} \circ \cdots \circ F_{\omega_1}(a)}{h(a)^{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}}} \right)$$

und somit ist  $F_\omega = \{f_{\omega_n} \circ \cdots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$  in  $U$  normal, d.h. es gilt  $z \notin \mathcal{J}(F_\omega)$ . ■

### 5.2.4 Korollar

Es gilt  $\mathcal{J}(F_\omega) \neq \emptyset$  für jedes  $\omega \in \Omega^*$ , ohne Verwendung der Pluri-Potentialtheorie ergibt sich elementar sogar  $\mathcal{J}(F_\omega) \neq \emptyset$  für alle  $\omega \in \Omega$  ( $\rightarrow$  Satz A.2.6).

Im Fall  $k = 1$  kann man gemäß Bemerkung 4 (Seite 29) das  $(1,1)$ -Current  $T_\omega$  als positive Distribution, d.h. als (Wahrscheinlichkeits-) Maß, auf  $\mathbb{P}^1$  auffassen. Entsprechend sind (positive)  $(k,k)$ -Currents auf  $\mathbb{P}^k$  (positive) Distributionen und man überführt  $T_\omega$  in ein solches:

#### Notation

Sei  $\omega \in \Omega^*$ .  $G_\omega$  (aus Satz 5.1.2) ist ein (Pluri-) Potential von  $T_\omega$ , d.h. es gilt  $\pi^*T_\omega = dd^c G_\omega$ . Unter Beachtung der Notationen aus §3.4 sei nun  $\mu_\omega$  gegeben durch

$$\pi^* \mu_\omega = (dd^c G_\omega)^k.$$

#### Bemerkung 1

Für jedes  $\omega \in \Omega^*$  ist  $\mu_\omega$  ein  $(k,k)$ -Current, im Fall  $k = 1$  gilt  $\mu_\omega = T_\omega$ .

### 5.2.5 Satz

Für jedes  $\omega \in \Omega^*$  gilt  $\text{supp } \mu_\omega \subseteq \mathcal{J}(F_\omega)$ .

#### Beweis:

Sei  $z = [z_0, \dots, z_k] \notin \mathcal{J}(F_\omega)$ . Aus Theorem 5.2.3 folgt  $z \notin \text{supp } T_\omega$ , und mit Lemma 5.2.1 ergibt sich die Existenz einer offenen Umgebung  $U$  von  $z$  mit der Eigenschaft, daß  $G_\omega$  (also auch  $H_\omega$ ) auf  $\pi^{-1}(U)$  pluri-harmonisch ist. Wählt man  $j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $z_j \neq 0$  und verkleinert man ggf.  $U$ , so kann man wieder  $s : U \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ ,  $[z_0, \dots, z_k] \mapsto (\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j})$  betrachten. Aus Bemerkung 2 (Seite 54) folgt  $dd^c(G_\omega \circ s) = 0$ . Aus Lemma 3.4.4 folgt  $(dd^c(G_\omega \circ s))^k = 0$  und somit  $\mu_\omega|_U = 0$ , d.h.  $z \notin \text{supp } \mu_\omega$ . ■

### 5.3. Meßbare Parameterabhängigkeit

Fassen wir  $\mu_\omega$  als (Wahrscheinlichkeits-) Maß auf, so wollen wir in diesem Abschnitt untersuchen, unter welchen Bedingungen die Abbildung  $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}$  meßbar ist. Dazu liegt es nahe, die Abbildung  $\omega \mapsto H_\omega$  zu betrachten und die Meßbarkeit bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz (siehe Anhang §B.1) zu fordern:

#### 5.3.1 Satz

Sei  $i \mapsto F_i(z)$  meßbar für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ . Dann ist  $i \mapsto d_i = \text{grad } F_i$  meßbar und  $\omega \mapsto H_{\omega,n}$ ,  $\omega \in \Omega$ , ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  eine bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbare Abbildung.

#### Beweis:

Wir zeigen zunächst, daß  $i \mapsto d_i$  meßbar ist. Seien  $F_{i,0}, \dots, F_{i,k}$  die Komponentenfunktionen von  $F_i$ ,  $i \in I$ , und sei

$$F_{i,\ell}(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{k+1}} a_{i,\alpha}^{(\ell)} \cdot z^\alpha \quad \text{für } \ell = 0, \dots, k \text{ und alle } z \in \mathbb{C}^{k+1}.$$

Aus Satz 3.2.3 folgt, daß  $i \mapsto a_{i,\alpha}^{(\ell)}$  für  $\ell = 0, \dots, k$  und alle  $\alpha \in \mathbb{N}_0^{k+1}$  meßbar ist. Sei  $\ell \in \{1, \dots, m\}$ . Dann folgt die Meßbarkeit von

$$i \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{k+1}} a_{i,\alpha}^{(\ell)}$$

(nur jeweils endlich viele Summanden sind ungleich 0). Für  $z = (2, \dots, 2) \in \mathbb{C}^{k+1}$  folgt die Meßbarkeit von

$$i \mapsto F_i(z) = (F_{i,0}(z), \dots, F_{i,k}(z)) = 2^{d_i} \cdot \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{k+1}} a_{i,\alpha}^{(0)}, \dots, \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{k+1}} a_{i,\alpha}^{(k)} \right) \neq 0.$$

Setze  $I_\ell := \{i \in I : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^{k+1}} a_{i,\alpha}^{(\ell)} \neq 0\}$  für  $\ell = 0, \dots, k$ . Dann ist  $I_\ell$  meßbar für  $\ell = 0, \dots, k$  und die auf  $I_\ell$  definierte Abbildung  $i \mapsto 2^{d_i}$  ist meßbar. Aus  $I = \bigcup_{\ell=0}^k I_\ell$  folgt, daß die auf  $I$  definierte Abbildung  $i \mapsto 2^{d_i}$ , also auch  $i \mapsto d_i$ , meßbar ist. Betrachtet man das Schiefprodukt  $F : \Omega \times \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \Omega \times \mathbb{C}^{k+1}$ ,  $((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, F_{\omega_1}(z))$ , so folgt aus Bemerkung 1 (Seite 129) die Meßbarkeit von  $\omega \mapsto F_{\omega_n} \circ \dots \circ F_{\omega_1}(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ . Insgesamt ist somit

$$\omega \mapsto H_{\omega,n}(z) = \frac{1}{d_{\omega_n} \dots d_{\omega_1}} \cdot \log \|F_{\omega_n} \circ \dots \circ F_{\omega_1}(z)\| \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$$

meßbar, so daß die Behauptung aus Lemma B.1.5 folgt. ■

Da der punktweise Grenzwert von meßbaren Abbildungen (mit Werten in einen metrischen Raum) meßbar ist [45, S.117f.], ergibt sich

#### 5.3.2 Korollar

Unter Verwendung der Bezeichnungen aus Abschnitt §5.1 sei  $\Omega^*$  als meßbare Teilmenge von  $\Omega$  vorausgesetzt und die auf  $\Omega^*$  definierten Abbildungen  $\omega \mapsto H_{\omega,n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , seien meßbar bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz. Dann ist

$$\omega \mapsto H_\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} H_{\omega,n} \quad (\omega \in \Omega^*)$$

eine bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbare Abbildung auf  $\Omega^*$ .

Ist  $i \mapsto F_i(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$  meßbar, so folgt aus der Stetigkeit der Projektionsabbildung  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k, (z_0, \dots, z_k) \mapsto [z_0, \dots, z_k]$ , daß auch  $i \mapsto f_i(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{P}^k$  meßbar ist. Wie das nachfolgende Beispiel zeigt, liegt im allgemeinen die Umkehrung nicht vor:

### 5.3.3 Beispiel

Sei  $N$  eine nicht-leere Teilmenge von  $\mathbb{N}$ . Seien  $J_n, n \in N$ , nicht-meßbare, paarweise disjunkte Teilmengen von  $I$  derart, daß  $\bigcup_{n \in N} J_n$  nicht meßbar ist und sei  $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  eine homogene Polynomfunktion mit  $\text{grad } F \geq 2$  und  $F^{-1}(0) = 0$ . Betrachte für alle  $i \in I$ :

$$F_i := \begin{cases} (n+1) \cdot F, & \text{falls ein } n \in N \text{ existiert mit } i \in J_n, \\ F, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ . Dann ist  $i \mapsto [F_i(z)] = [F(z)]$  meßbar. Ist  $w := F(z)$ , so folgt

$$\{i \in I : F_i(z) = w\} = \bigcup_{n \in N} \{i \in J_n : (n+1) \cdot F(z) = F(z)\} \cup \left( I \setminus \bigcup_{n \in N} J_n \right) = I \setminus \bigcup_{n \in N} J_n$$

und somit ist  $i \mapsto F_i(z)$  nicht meßbar.

In diesem Beispiel kann man für jedes  $i \in I$  ein  $c_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  angeben derart, daß  $i \mapsto c_i \cdot F_i(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$  meßbar ist. Betrachtet man  $c_i \cdot F_i$  anstatt  $F_i, i \in I$ , so können die an  $\{F_i : i \in I\}$  gestellten Forderungen (etwa  $C_\omega = \sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty, \omega \in \Omega$ ) im allgemeinen jedoch nicht auf  $\{c_i \cdot F_i : i \in I\}$  übertragen werden.

### 5.3.4 Lemma

Seien die Bezeichnungen aus §5.1 gegeben und sei  $i \mapsto F_i(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$  meßbar. Dann ist  $\Omega^*$  eine meßbare Teilmenge von  $\Omega$ , die zudem unter der Shift-Abbildung  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  vollständig invariant ist, d.h. es gilt  $\sigma^{-1}(\Omega^*) = \Omega^*$ .

Beweis:

Aus Satz 5.3.1 folgt, daß  $i \mapsto d_i$  meßbar ist. Für jedes Kompaktum  $K \subseteq \mathbb{C}^{k+1}$  ist die Abbildung  $f \mapsto \|f\|_K, f \in C(\mathbb{C}^{k+1}, \mathbb{C}^{k+1})$ , eine bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz stetige Abbildung. Damit sind  $i \mapsto \sup_{\|z\|=1} \|F_i(z)\|$  und  $i \mapsto \inf_{\|z\|=1} \|F_i(z)\|$  meßbar und somit auch  $i \mapsto C_i = \max\{\log \sup_{\|z\|=1} \|F_i(z)\|, -\log \inf_{\|z\|=1} \|F_i(z)\|\}$ . Also ist

$$\Omega^* = \left\{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\omega_n}}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} < \infty \right\}.$$

meßbar. Nun gilt genau dann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\omega_n}}{d_{\omega_1} \cdots d_{\omega_n}} < \infty$ , wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{\omega_{n+1}}}{d_{\omega_2} \cdots d_{\omega_{n+1}}} < \infty$ , woraus die vollständige Invarianz folgt. ■

Unter der Annahme einer meßbaren Parameterabhängigkeit erhalten wir nun, daß  $\omega \mapsto T_\omega$  eine meßbare Abbildung ist:

### 5.3.5 Satz

Seien die Bezeichnungen aus §5.1 gegeben und sei  $\Omega^*$  als meßbare und nicht-leere Teilmenge von  $\Omega$  vorausgesetzt. Sei zudem  $\omega \mapsto H_\omega, \omega \in \Omega^*$ , bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbar. Für jede  $(k-1, k-1)$ -Testform  $\chi \in \mathcal{D}^{k-1, k-1}(\mathbb{P}^k)$  ist dann die auf  $\Omega^*$  definierte Abbildung

$$\omega \mapsto \langle T_\omega, \chi \rangle$$

meßbar.



**Beweis:**

Sei  $U_j := \{[z_0, \dots, z_k] \in \mathbb{P}^k : z_j \neq 0\}$  und  $s_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, [z_0, \dots, z_k] \mapsto (\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j})$  für  $j = 0, \dots, k$ . Sei  $\eta_0, \dots, \eta_k : \mathbb{P}^k \rightarrow [0, 1]$  eine  $C^\infty$ -Partition der Eins bzgl.  $U_0, \dots, U_k$ . Sei  $\chi_j := dd^c(\eta_j \cdot \chi)$  für  $j = 0, \dots, k$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \langle T_\omega, \chi \rangle &= \sum_{j=0}^k \langle dd^c(G_\omega \circ s_j), \eta_j \cdot \chi \rangle = \sum_{j=0}^k \langle G_\omega \circ s_j, dd^c(\eta_j \cdot \chi) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^k \int_{U_j} (G_\omega \circ s_j) \wedge \chi_j = \sum_{j=0}^k \int_{U_j} (G_\omega \circ s_j) \cdot \chi_j = \sum_{j=0}^k \int_{U_j} \chi_j \cdot (H_\omega \circ s_j), \end{aligned}$$

so daß es genügt, die Meßbarkeit von  $\omega \mapsto \int_{U_j} \chi_j \cdot (H_\omega \circ s_j)$  für  $j = 0, \dots, k$  nachzuweisen. Sei dazu  $j \in \{0, \dots, k\}$  und setze  $\widehat{s}_j(z) := (\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j})$  für alle  $z = [z_0, \dots, z_k] \in U_j$ , d.h. die Abbildung  $\widehat{s}_j : U_j \rightarrow V_j := \widehat{s}_j(U_j)$  ist eine Karte von  $\mathbb{P}^k$  ( $\rightarrow$  §3.1.2).  $\chi_j$  ist eine  $(k, k)$ -Form auf  $U_j$ . Wir identifizieren  $\chi_j$  mit seiner Koeffizientenfunktion (bezüglich der Karte  $(U_j, \widehat{s}_j)$ , vgl. Satz 1.3.10), d.h. wir fassen  $\chi_j$  auch als Abbildung  $U_j \rightarrow \mathbb{C}$  auf. Für jedes  $\omega \in \Omega^*$  folgt

$$\int_{U_j} \chi_j \cdot (H_\omega \circ s_j) = \int_{V_j} (\chi_j \circ \widehat{s}_j^{-1}) \cdot (H_\omega \circ s_j \circ \widehat{s}_j^{-1}).$$

$\chi_j$  besitzt einen kompakten Träger. Damit ist  $H \mapsto \int_{V_j} (\chi_j \circ \widehat{s}_j^{-1}) \cdot (H \circ s_j \circ \widehat{s}_j^{-1})$  (mit  $H : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig) eine bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz stetige Abbildung. Da  $\omega \mapsto H_\omega, \omega \in \Omega^*$ , als meßbar bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz vorausgesetzt worden ist, folgt die Meßbarkeit der auf  $\Omega^*$  definierten Abbildung

$$\omega \mapsto \int_{V_j} (\chi_j \circ \widehat{s}_j^{-1}) \cdot (H_\omega \circ s_j \circ \widehat{s}_j^{-1}).$$

■

Im hier interessanten Fall  $k = 1$  liefert das nachfolgende Theorem noch einen Alternativbeweis für die Meßbarkeit von  $\omega \mapsto T_\omega$ .

**Vorbemerkung**

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $X$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $\mathbb{C}^n, n \in \mathbb{N}$ , und  $\lambda$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{C}^n$ . Für jedes  $i \in I$  sei  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung derart, daß  $i \mapsto f_i$  eine bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbare Abbildung ist. Dann ist  $i \mapsto \int f_i d\lambda$  meßbar.

**Beweis:**

Aus Bemerkung 2 (Seite 131) folgt, daß  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in X$  meßbar ist. Für jedes kompakte Intervall  $J \subseteq X$  hängen die Riemannschen Summen [34, S.439ff.] von  $f_i|_J$  somit meßbar vom Parameter  $i \in I$  ab. Nun ist  $X$  die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Intervalle, deren Inneres punktfremd ist [25, S.68f.] so, daß durch Grenzübergang die Meßbarkeit von  $i \mapsto \int f_i d\lambda$  folgt. ■

**5.3.6 Theorem**

Seien die Bezeichnungen aus den Abschnitten §5.1 und §5.2 gegeben. Sei  $\Omega^*$  als meßbare und nicht-leere Teilmenge von  $\Omega$  vorausgesetzt, außerdem sei  $\omega \mapsto H_\omega, \omega \in \Omega^*$ , bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbar. Für jede Testfunktion (d.h.  $(0, 0)$ -Testform)  $\varphi : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}$  ist dann die auf  $\Omega^*$  definierte Abbildung

$$\omega \mapsto \langle \mu_\omega, \varphi \rangle$$

meßbar.

**Beweis:**

Seien wieder  $U_j := \{[z_0, \dots, z_k] \in \mathbb{P}^k : z_j \neq 0\}$  und  $s_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, [z_0, \dots, z_k] \mapsto (\frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j})$  für  $j = 0, \dots, k$ . Sei  $\eta_0, \dots, \eta_k : \mathbb{P}^k \rightarrow [0, 1]$  eine  $C^\infty$ -Partition der Eins bzgl.  $U_0, \dots, U_k$ . Sei  $\chi_j := \eta_j \cdot \varphi$  für  $j = 0, \dots, k$ . Es folgt

$$\langle \mu_\omega, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^k \langle (dd^c(G_\omega \circ s_j))^k, \eta_j \cdot \varphi \rangle = \sum_{j=0}^k \langle (dd^c(G_\omega \circ s_j))^k, \chi_j \rangle.$$

Sei  $j \in \{0, \dots, k\}$  und  $s = s_j$ ,  $\chi := \chi_j$  sowie  $U := U_j$ . Es genügt die Meßbarkeit von  $\omega \mapsto \langle (dd^c(G_\omega \circ s))^k, \chi \rangle$  einzusehen. Gemäß Satz 3.4.5 findet man zu jedem  $\omega \in \Omega$  eine monoton fallende Folge  $(G_{\omega,n})_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{P}_k$  mit  $G_{\omega,n} \rightarrow G_\omega$  derart, daß  $G_{\omega,n}|_{\setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt

$$\omega \mapsto \langle (dd^c(G_\omega \circ s))^k, \chi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle dd^c(G_{\omega,n} \circ s)^k, \chi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \underbrace{dd^c(G_{\omega,n} \circ s) \wedge \dots \wedge dd^c(G_{\omega,n} \circ s)}_{k\text{-mal}} \wedge \chi.$$

Aus der Darstellung von  $G_{\omega,n}$  in Satz 3.4.5 und obiger Vorbemerkung folgt die Meßbarkeit von  $\omega \mapsto G_{\omega,n}(s(z))$  für jedes  $z \in U$ . Damit hängen auch die partiellen Ableitungen von  $G_{\omega,n} \circ s$ , ausgewertet in einem festen Punkt  $z \in U$ , meßbar vom Parameter  $\omega \in \Omega$  ab. Gemäß Lemma B.1.5 liegen somit bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbare Abbildungen vor. Unter Verwendung obiger Vorbemerkung erhält man nun die Meßbarkeit von

$$\omega \mapsto \int \underbrace{dd^c(G_{\omega,n} \circ s) \wedge \dots \wedge dd^c(G_{\omega,n} \circ s)}_{k\text{-mal}} \wedge \chi.$$

■

**Bemerkung 1**

Ist  $\omega \mapsto \langle \mu_\omega, \varphi \rangle$ ,  $\omega \in \Omega^*$ , für jede Testfunktion  $\varphi : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}$  meßbar, so auch  $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}$ , wenn man  $\mu_\omega$  entsprechend dem Darstellungssatz von Riesz als Maß auf  $\mathbb{P}^k$  auffaßt.

Theorem 5.2.3 legt es nahe, daß man neben  $\Omega^*$  auch die Menge aller  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  betrachtet, für die  $\sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty$  gilt:

**Notation**

Unter Verwendung der Bezeichnungen aus §5.1 sei

$$C^* := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : C_\omega := \sup_{n \in \mathbb{N}} C_{\omega_n} < \infty\}.$$

**5.3.7 Lemma**

Es seien die Bezeichnungen aus §5.1 gegeben. Dann ist  $C^*$  eine unter der Shift-Abbildung  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  vollständig invariante Teilmenge von  $\Omega$  mit  $C^* \subseteq \Omega^*$ . Ist  $i \mapsto F_i(z)$  meßbar für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ , so ist  $C^*$  meßbar.

**Beweis:**

Die ersten beiden Eigenschaften ergeben sich aus der Definition von  $C^*$ , die letzte aus der Meßbarkeit der Abbildung  $i \mapsto C_i$ , vergleiche hierzu den Beweis von Lemma 5.3.4. ■

## 5.4. Das invariante Maß

In diesem Abschnitt setzen wir die einzelnen Maße  $\mu_\omega$ ,  $\omega \in \Omega^*$ , zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\Omega \times \mathbb{P}^k$  zusammen und formulieren für den Fall  $k = 1$  einige hinreichende Existenzbedingungen:

### 5.4.1 Theorem

Es seien die Bezeichnungen aus §5.1-5.3 gegeben. Zusätzlich sei  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Es gelte

- (i)  $i \mapsto f_i(z)$  sei meßbar für alle  $z \in \mathbb{P}^k$ ,
- (ii)  $\Omega^*$  sei meßbar mit  $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$ ,
- (iii)  $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$ ,  $\omega \in \Omega^*$ , sei meßbar für jedes  $B \in \mathfrak{B}$  (wir fassen  $\mu_\omega$  als Maß und nicht als Funktional auf).

Dann ist  $\mu$ , definiert durch

$$\mu(C) := \int_{\Omega^*} \left( \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_C(\omega, x) \mu_\omega(dx) \right) \mathbf{P}(d\omega)$$

für alle  $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ , ein bezüglich dem Schiefprodukt

$$f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z))$$

invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega \times \mathbb{P}^k, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B})$ .

Aus dem bereits Gezeigten folgt

### Bemerkung 1

Ist  $i \mapsto F_i(z)$  meßbar für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ , so ist  $\Omega^*$  eine meßbare Teilmenge von  $\Omega$  und die Eigenschaften (i) und (iii) sind erfüllt.

Zum Nachweis von Theorem 5.4.1 benötigen wir noch einige Vorbereitungen:

### 5.4.2 Definition (Lokal pluripolare Menge)

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Teilmenge  $E$  von  $M$  heißt **(lokal) pluripolar**, falls es zu jedem  $a \in E$  eine offene Umgebung  $V$  von  $a$  und eine auf  $V$  plurisubharmonische Funktion  $u$  gibt mit

$$E \cap V \subseteq \{z \in V : u(z) = -\infty\}.$$

### Bemerkung 2

(i) Seien  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten und sei  $f : M \rightarrow N$  eine surjektive, holomorphe Abbildung. Für jede pluripolare Menge  $E \subseteq N$  ist dann  $f^{-1}(E)$  pluripolar.

(ii) Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit und sei  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung. Betrachtet man  $u : M \rightarrow [-\infty, \infty[$ ,  $z \mapsto \log |f(z)|$ , so folgt, daß  $E = \{z \in M : f(z) = 0\}$  pluripolar ist.

### 5.4.3 Satz

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $E \subseteq \mathbb{P}^k$  eine pluripolare Menge. Sei  $T \in \mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$  derart, daß  $T$  ein stetiges Potential besitzt. Für  $\ell = 1, \dots, k$  ist  $T^\ell = T \wedge \dots \wedge T$  eine Differentialform mit Maßkoeffizienten und jeder dieser (maßwertigen) Koeffizienten hat auf  $E$  Maß 0.

Beweis:

Der Beweis beruht auf einer Anwendung der Chern-Levine-Nirenberg-Ungleichung. Hier sind nur zwei Spezialfälle interessant: Für den Fall  $\ell = 1$  sei auf [23, Thm. 6.4] verwiesen und für  $\ell = k$  siehe [24, §3]. ■

**Notation**

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  eine holomorphe Abbildung mit  $\text{grad } f \geq 2$  und für jede stetige Abbildung  $\varphi : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{R}$  und jedes  $z \in \mathbb{P}^k$  sei

$$(f_*\varphi)(z) := \sum_{f(\xi)=z} \varphi(\xi),$$

wobei wir die  $z$ -Stellen  $\xi$  von  $f$  entsprechend der auftretenden Vielfachheit zählen. Dann ist  $f_*\varphi : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $\nu$  ein Maß auf  $\mathbb{P}^k$ , betrachtet als positives  $(k, k)$ -Current, so sei

$$\langle f^*\nu, \varphi \rangle := \langle \nu, f_*\varphi \rangle \quad \text{für jedes } \varphi \in C(\mathbb{P}^k, \mathbb{R}).$$

$f^*\nu$  wird auch als **Pull back** von  $\nu$  unter  $f$  bezeichnet. Die nachfolgende Aussage zeigt, wie dieser mit dem in §3.3 eingeführten Pull back zusammenhängt:

**5.4.4 Satz**

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  eine holomorphe Abbildung mit  $\text{grad } f \geq 2$  und sei  $T \in \mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$  derart, daß  $T$  ein stetiges Potential besitzt. Setze  $\nu := T^k = T \wedge \cdots \wedge T$ . Dann gilt

$$\langle \nu, f_*\varphi \rangle = \underbrace{\langle f^*T \wedge \cdots \wedge f^*T, \varphi \rangle}_{k\text{-mal}} \quad \text{für jedes } \varphi \in C(\mathbb{P}^k, \mathbb{R}),$$

wobei  $f^*T$  den Pull back aus 3.3.9 bezeichne.

Beweis:

Sei  $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  eine Liftung von  $f$  und sei  $u : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow [-\infty, \infty[$  ein Potential für  $T$ . Nach Voraussetzung ist  $u|_{\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}} : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Sei  $C$  die Menge der kritischen Punkte von  $f$  und  $d := \text{grad } f$ . Wir zeigen zunächst, daß es für jedes  $y \in \mathbb{P}^k \setminus f(C)$  eine offene Umgebung  $V$  von  $y$  gibt derart, daß für alle  $\varphi \in C(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$ ,  $\eta \in C^\infty(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \eta \subseteq V$  gilt

$$(*) \quad \langle \nu, \eta \cdot f_*\varphi \rangle = \langle f^*T \wedge \cdots \wedge f^*T, \varphi \cdot f^*\eta \rangle.$$

Sei dazu  $y \in \mathbb{P}^k \setminus f(C)$ . Dann gibt es eine offene Umgebung  $V$  von  $y$  sowie injektive und holomorphe Abbildungen  $r_1, \dots, r_{d^k} : V \rightarrow \mathbb{P}^k$  mit  $f \circ r_j = \text{id}_V$  für  $j = 1, \dots, d^k$ , d.h.  $r_1, \dots, r_{d^k}$  sind die lokalen Zweige von  $f^{-1}$ . Man kann voraussetzen, daß die Mengen  $r_j(V)$ ,  $j = 1, \dots, d^k$  paarweise disjunkt sind. Sei  $\pi : \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^k$  die natürliche Projektion. Indem man  $V$  gegebenenfalls verkleinert, folgt aus Satz 3.3.2(a) die Existenz einer injektiven, holomorphen Abbildung  $s : V \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  mit  $\pi \circ s = \text{id}_V$  und für  $j = 1, \dots, d^k$  die Existenz einer injektiven und holomorphen Abbildung  $s_j : r_j(V) \rightarrow \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  mit  $\pi \circ s_j = \text{id}_{r_j(V)}$ . Seien  $\varphi, \eta \in C^\infty(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \eta \subseteq V$ . Dann folgt

$$(f_*\varphi)(z) = \sum_{f(\xi)=z} \varphi(\xi) = \sum_{j=1}^{d^k} \varphi(r_j(z)) = \sum_{j=1}^{d^k} r_j^*\varphi(z) \quad \text{für jedes } z \in V,$$

also  $\eta \cdot f_*\varphi = \eta \cdot (r_1^*\varphi + \cdots + r_{d^k}^*\varphi)$ . Für den Nachweis von (\*) kann entsprechend Theorem 3.4.2 und Satz 3.4.5  $u|_{\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}} \in C^\infty(\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$  vorausgesetzt werden. Aus  $\pi \circ F = f \circ \pi$  und  $\pi \circ s_j = \text{id}_{r_j(V)}$  folgt

$$s \circ f|_{r_j(V)} = (s \circ \pi) \circ F \circ s_j \quad \text{für } j = 1, \dots, d^k.$$

Für jedes  $\ell \in \{0, \dots, k\}$  und alle  $z = (z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$  mit  $z_\ell \neq 0$  gilt  $u \circ (s \circ \pi)(z) = u(\frac{1}{z_\ell} \cdot z) = \log|\frac{1}{z_\ell}| + u(z)$ , außerdem ist der erste Summand auf  $\{(z_0, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} : z_\ell \neq 0\}$  pluriharmonisch. Damit folgt

$$dd^c(u \circ s \circ f|_{r_j(V)}) = dd^c(u \circ F \circ s_j) \quad \text{für } j = 1, \dots, d^k.$$

Es gilt  $\bigcup_{j=1}^{d^k} r_j(V) = f^{-1}(V)$  und  $r_j^{-1} = f|_{r_j(V)}$  für  $j = 1, \dots, d^k$ . Aus den Eigenschaften des Pullbacks von  $C^\infty$ -Differentialformen (vergleiche etwa Seite 54) folgt nun

$$\begin{aligned} \langle \nu, \eta \cdot f_* \varphi \rangle &= \langle \nu|_V, \eta \cdot f_* \varphi \rangle = \langle (dd^c(u \circ s))^k, \eta \cdot f_* \varphi \rangle = \int_V (dd^c(u \circ s))^k \cdot \eta \cdot f_* \varphi \\ &= \sum_{j=1}^{d^k} \int_V (dd^c(u \circ s))^k \cdot \eta \cdot r_j^* \varphi = \sum_{j=1}^{d^k} \int_V r_j^* (\varphi \cdot (r_j^{-1})^* \eta \cdot (r_j^{-1})^* (dd^c(u \circ s))^k) \\ &= \sum_{j=1}^{d^k} \int_{r_j(V)} \varphi \cdot (\eta \circ r_j^{-1}) \cdot (dd^c(u \circ s \circ r_j^{-1}))^k = \sum_{j=1}^{d^k} \int_{r_j(V)} \varphi \cdot (\eta \circ f|_{r_j(V)}) \cdot (dd^c(u \circ s \circ f|_{r_j(V)}))^k \\ &= \sum_{j=1}^{d^k} \int_{r_j(V)} \varphi \cdot (\eta \circ f|_{r_j(V)}) \cdot (dd^c(u \circ F \circ s_j))^k = \sum_{j=1}^{d^k} \langle (dd^c(u \circ F \circ s_j))^k, (\varphi \cdot f^* \eta)|_{r_j(V)} \rangle \\ &= \underbrace{\langle f^* T \wedge \dots \wedge f^* T, \varphi \cdot f^* \eta \rangle}_{k\text{-mal}} = \langle (f^* T)^k, \varphi \cdot f^* \eta \rangle. \end{aligned}$$

Da man  $\varphi \mapsto \langle \nu, \eta \cdot f_* \varphi \rangle$  und  $\varphi \mapsto \langle (f^* T)^k, \varphi \cdot f^* \eta \rangle$ ,  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$ , eindeutig auf  $C(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$ , d.h. zu einem Maß, fortsetzen kann, folgt (\*).

Nach [21, Theorem 2.4] ist die Menge  $C$  der kritischen Punkte von  $f$  eine algebraische Menge (auch: algebraic variety, [47, S.381ff.], siehe auch [27, S.216f.]). Also gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und homogene Polynomfunktionen  $P_1, \dots, P_n : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$C = \{[z_0, \dots, z_k] \in \mathbb{P}^k : P_i(z_0, \dots, z_k) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}.$$

Auf  $\mathbb{P}^k$  sind algebraische und analytische Mengen<sup>15</sup> dasselbe [30, S.166f.].  $f|_C$  ist eine eigentliche Abbildung und aus Remmert's proper mapping theorem [30, S.395] folgt, daß  $f(C)$  eine analytische (algebraische) Menge ist. Damit ist  $f(C)$  pluripolar, also auch  $f^{-1}(f(C))$ . Aus Satz 5.4.3 folgt, daß  $\nu$  keine Masse auf  $f(C)$  hat, außerdem hat das Maß  $f^* T \wedge \dots \wedge f^* T = (f^* T)^k$  auf  $f^{-1}(f(C))$  keine Masse. Sei  $\varphi \in C(\mathbb{P}^k, \mathbb{R})$  und  $U := \mathbb{P}^k \setminus f(C)$ . Dann folgt aus (\*)

$$\langle \nu, f_* \varphi \rangle = \langle \nu|_U, (f_* \varphi)|_U \rangle = \langle (f^* T)^k|_{f^{-1}(U)}, \varphi|_{f^{-1}(U)} \rangle = \langle (f^* T)^k, \varphi \rangle. \quad \blacksquare$$

### 5.4.5 Lemma

Sei  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega$  der (einseitige) Shift auf  $\Omega$  und sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega^*$ . Sei  $(f_{\omega_1})_* \mu_\omega$  das Bildmaß von  $\mu_\omega$  unter  $f_{\omega_1}$ . Dann gilt

$$f_{\omega_1}^* \mu_{\sigma\omega} = d_{\omega_1}^k \cdot \mu_\omega \quad \text{und} \quad (f_{\omega_1})_* \mu_\omega = \mu_{\sigma\omega}.$$

Beweis:

① Es gilt  $d_{\omega_1} \cdot G_\omega = G_{\sigma\omega} \circ F_{\omega_1}$  gemäß Lemma 5.1.4. Daraus folgt

$$\pi^*(f_{\omega_1}^* T_{\sigma\omega}) = dd^c(G_{\sigma\omega} \circ F_{\omega_1}) = dd^c(d_{\omega_1} \cdot G_\omega) = \pi^*(d_{\omega_1} \cdot T_\omega),$$

<sup>15</sup>Eine Menge  $A \subseteq \mathbb{P}^k$  heißt **analytisch**, falls es zu jedem  $x \in A$  eine offene Umgebung  $U$  von  $x$ , ein  $n \in \mathbb{N}$  und holomorphe Abbildungen  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$  gibt mit  $A \cap U = \{z \in U : f_i(z) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ .

also  $f_{\omega_1}^* T_{\sigma\omega} = d_{\omega_1} \cdot T_\omega$ . Setzt man für  $\ell = 1, \dots, k$

$$\begin{aligned} f_{\omega_1}^* ((T_{\sigma\omega})^\ell) &= f_{\omega_1}^* (T_{\sigma\omega} \wedge \dots \wedge T_{\sigma\omega}) := f_{\omega_1}^* T_{\sigma\omega} \wedge \dots \wedge f_{\omega_1}^* T_{\sigma\omega} \\ &= (d_{\omega_1} \cdot T_\omega) \wedge \dots \wedge (d_{\omega_1} \cdot T_\omega) = d_{\omega_1}^\ell \cdot T_\omega^\ell, \end{aligned}$$

so folgt  $f_{\omega_1}^* \mu_{\sigma\omega} = f_{\omega_1}^* (T_{\sigma\omega}^k) = d_{\omega_1}^k \cdot T_\omega^k = d_{\omega_1}^k \cdot \mu_\omega$ . Da  $T_{\sigma\omega}$  ein stetiges Potential besitzt, ergibt sich aus Satz 5.4.4, daß  $f_{\omega_1}^* \mu_{\sigma\omega}$  im Fall  $k = 1$  mit dem in 3.3.9 eingeführten Pull back von  $\mu_{\sigma\omega} = T_{\sigma\omega}$  unter  $f_{\omega_1}$  übereinstimmt.

② Sei  $\varphi : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung. Aus Satz A.2.3 folgt

$$(f_* (\varphi \circ f))(z) = \sum_{f(\xi)=z} \varphi(f(\xi)) = \sum_{f(\xi)=z} \varphi(z) = d^k \cdot \varphi(z)$$

für jede holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ ,  $d = \text{grad } f \geq 2$  und jedes  $z \in \mathbb{P}^k$ . Damit folgt

$$\begin{aligned} \langle \mu_{\sigma\omega}, \varphi \rangle &= \frac{1}{d_{\omega_1}^k} \cdot \langle \mu_{\sigma\omega}, d_{\omega_1}^k \cdot \varphi \rangle = \frac{1}{d_{\omega_1}^k} \cdot \left\langle \mu_{\sigma\omega}, \sum_{f_{\omega_1}(\xi)=z} \varphi \circ f_{\omega_1}(\xi) \right\rangle \\ &= \frac{1}{d_{\omega_1}^k} \cdot \langle f_{\omega_1}^* \mu_{\sigma\omega}, \varphi \circ f_{\omega_1} \rangle \stackrel{\textcircled{1}}{=} \langle \mu_\omega, \varphi \circ f_{\omega_1} \rangle = \langle (f_{\omega_1})_* \mu_\omega, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

■

Beweis: (von Theorem 5.4.1)

Aus Bemerkung 1 (Seite 94) folgt, daß  $f$  meßbar ist. Seien  $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}$  und sei  $\sigma$  wieder der (einseitige) Shift auf  $\Omega$ . Dann folgt  $f^{-1}(A \times B) = \{(\omega, z) \in \Omega \times \mathbb{P}^k : \sigma\omega \in A, f_{\omega_1}(z) \in B\} = \{(\omega, z) \in \Omega \times \mathbb{P}^k : \omega \in \sigma^{-1}(A), z \in f_{\omega_1}^{-1}(B)\}$ , also

$$\begin{aligned} \mu(A \times B) &= \int_A \mu_\omega(B) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{\sigma^{-1}(A)} \mu_{\sigma\omega}(B) \mathbf{P}(d\omega), \quad \text{da } \mathbf{P} \text{ Shift-invariant} \\ &= \int_{\sigma^{-1}(A)} \left( \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_B d\mu_{\sigma\omega} \right) \mathbf{P}(d\omega) \stackrel{5.4.5}{=} \int_{\sigma^{-1}(A)} \left( \int \mathbb{1}_B \circ f_{\omega_1} \mu_\omega \right) \mathbf{P}(d\omega) \\ &= \int_{\sigma^{-1}(A)} \left( \int \mathbb{1}_{f_{\omega_1}^{-1}(B)}(z) \mu_\omega(dz) \right) \mathbf{P}(d\omega) = \int_\Omega \left( \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_{\sigma^{-1}(A) \times f_{\omega_1}^{-1}(B)}(\omega, z) \mu_\omega(dz) \right) \mathbf{P}(d\omega) \\ &= \int_\Omega \left( \int_{\mathbb{P}^k} \mathbb{1}_{f^{-1}(A \times B)}(\omega, z) \mu_\omega(dz) \right) \mathbf{P}(d\omega) = \mu(f^{-1}(A \times B)). \end{aligned}$$

Damit folgt, daß das Bildmaß von  $\mu$  unter  $f$  mit  $\mu$  übereinstimmt. Da  $\mu_\omega$  für alle  $\omega \in \Omega^*$ , d.h. für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ , ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, ist  $\mu$  nach Bemerkung 1 (Seite 121) ein Wahrscheinlichkeitsmaß. ■

### Bemerkung 3

(i) Das Bildmaß von  $\mu$  unter der Projektion  $\pi_\Omega : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega, (\omega, z) \mapsto \omega$  stimmt mit  $\mathbf{P}$  überein, d.h. es gilt  $\mu \in \mathcal{P}_\mathbf{P}(\Omega \times \mathbb{P}^k)$ . Außerdem ist  $(\mu_\omega)_\omega$  eine Faktorisierung von  $\mu$  (siehe Anhang §A.3).

(ii) Ist  $\mathbf{P}$  ergodisch, so gilt stets  $\mathbf{P}(\Omega^*) \in \{0, 1\}$  und  $\mathbf{P}(C^*) = \{0, 1\}$ .

Es gibt nicht-ergodische, Shift-invariante Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $\Omega = I^\mathbb{N}$  (betrachte etwa  $(\mathbf{p}, P)$ -Markov-Shifts, vgl. [71, Thm. 1.19]). Ist  $\mathbf{P}$  ein Produktmaß, so ist  $\mathbf{P}$  jedoch ergodisch:

#### 5.4.6 Satz

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $\Omega := I^\mathbb{N}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  und sei  $\mathbf{p}$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $I$ . Sei  $\sigma$  der Shift auf  $\Omega$  und sei  $\mathbf{P}$  das Produktmaß

auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ , das aus  $\mathbf{p}$  hervorgeht. Dann ist  $\mathbf{P}$  Shift-invariant und strong mixing, d.h. es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A \cap \sigma^{-k}(B)) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{A}.$$

Insbesondere ist  $\mathbf{P}$  ergodisch.

**Beweis:**

Sei  $N \in \mathbb{N}$  und seien  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N$  meßbare Teilmengen von  $I$  sowie  $A := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \omega_n \in A_n \text{ für } n = 1, \dots, N\}$  und  $B := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \omega_n \in B_n \text{ für } n = 1, \dots, N\}$  Zylindermengen. Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap \sigma^{-(N+k)}(B)) &= \mathbf{P}(\{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \omega_n \in A_n \text{ für } n = 1, \dots, N \text{ und} \\ &\quad \omega_{N+k+n} \in B_n \text{ für } n = 1, \dots, N\}) \\ &= \prod_{n=1}^N \mathbf{p}(A_n) \cdot \mathbf{p}(B_n) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B). \end{aligned}$$

Damit folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A \cap \sigma^{-k}(B)) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$  für alle  $A, B \in \mathfrak{A}$ . **Angenommen**,  $\mathbf{P}$  ist nicht ergodisch. Dann gibt es eine vollständig invariante Menge  $B$  mit  $\mathbf{P}(B) \in ]0, 1[$ . Für  $A := B^c$  folgt nun  $0 = \mathbf{P}(A \cap B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{P}(A \cap \sigma^{-k}(B)) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \neq 0$ .  $\zeta$  ■

Wie im Anhang (§A.4) setzen wir  $\text{supp } \mu_\omega := \mathbb{P}^k$  für alle  $\omega \notin \Omega^*$ . Indem wir die Aussagen aus den letzten Paragraphen zusammenfassen, erhalten wir unter Verwendung obiger Bezeichnungen nun das folgende

#### 5.4.7 Theorem

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ , zudem sei  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Sei  $k \in \mathbb{N}$  und für jedes  $i \in I$  sei  $F_i : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$  eine homogene Polynomfunktion mit

$$d_i := \text{grad } F_i \geq 2 \quad \text{und} \quad F_i^{-1}(0) = 0$$

derart, daß  $i \mapsto F_i(z)$  für jedes  $z \in \mathbb{C}^{k+1}$  meßbar ist. Definiere für jedes  $i \in I$  eine holomorphe Abbildung  $f_i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  durch  $f_i([z]) := [F_i(z)]$ ,  $z \in \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ . Sei

$$f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z)).$$

Dann ist  $\Omega^*$  eine meßbare Teilmenge von  $\Omega$  und ist  $\mathbf{P}(\Omega^*) = 1$ , so gibt es ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times \mathbb{P}^k)$  mit

$$\text{supp } \mu_\omega \subseteq \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für alle } \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega^*.$$

Dabei ist  $F_\omega = \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$  und  $(\mu_\omega)_\omega$  eine Faktorisierung von  $\mu$ . Auch  $C^*$  ist eine meßbare Teilmenge von  $\Omega$  mit  $C^* \subseteq \Omega^*$  und im Fall  $k = 1$  gilt

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für alle } \omega \in C^*.$$

Außerdem sind  $\Omega^*$  und  $C^*$  bezüglich der Shiftabbildung vollständig invariant.

Wir betrachten nun speziell den Fall  $k = 1$ , der dem Vorliegen von rationalen Funktionen entspricht. Dann liefert das nachfolgende Korollar eine Klasse von Funktionenfamilien, für die das oben konstruierte invariante Maß existiert:

### 5.4.8 Korollar

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ . Sei  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Für jedes  $i \in I$  sei  $f_i : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine rationale Funktion mit  $d_i := \text{grad } f_i \geq 2$ . Es gelte

$$f_i(z) = \frac{g_i(z)}{h_i(z)} := \frac{a_{i,d_i} \cdot z^{d_i} + \cdots + a_{i,2} \cdot z^2 + a_{i,1} \cdot z + a_{i,0}}{b_{i,d_i} \cdot z^{d_i} + \cdots + b_{i,2} \cdot z^2 + b_{i,1} \cdot z + b_{i,0}} \quad \text{für alle } i \in I, z \in \widehat{\mathbb{C}},$$

mit  $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbb{C}$ , wobei wir eine teilerfremde Darstellung voraussetzen wollen. Sei  $f : \Omega \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega \times \widehat{\mathbb{C}}, ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z))$ .

(i) Sei  $i \mapsto f_i(z)$  für jedes  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  meßbar.

(ii) Sei

$$\mathbf{P} \left( \bigcup_{M,d \in \mathbb{N}} \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : d_{\omega_n} \leq d, |a_{\omega_n, j}|, |b_{\omega_n, j}| \leq M \text{ für } j = 1, \dots, d_{\omega_n} \} \right) = 1.$$

$$\text{und } \mathbf{P} \left( \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \| (a_{\omega_n, d_{\omega_n}}, b_{\omega_n, d_{\omega_n}}) \| > 0 \} \right) = 1.$$

(iii) Sei

$$\mathbf{P} \left( \{ \omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(g_{\omega_n}^{-1}(0), h_{\omega_n}^{-1}(0)) > 0 \} \right) = 1,$$

mit  $\text{dist}$  bezüglich der euklidischen Metrik.

Dann gibt es ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times \widehat{\mathbb{C}})$  mit

$$\text{supp } \mu_{\omega} = \mathcal{J}(F_{\omega}) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

**Zusatz:** Die in (ii) und (iii) auftretenden Mengen sind bezüglich der Shift-Abbildung vollständig invariant. Ist  $\mathbf{P}$  ergodisch, so genügt es in (ii) und (iii) vorauszusetzen, daß strikt positive Wahrscheinlichkeiten vorliegen.

Beweis:

Fassen wir  $f_i, i \in I$ , als Selbstabbildung auf  $\mathbb{P}^1$  auf, so ist

$$F_i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (z_0, z_1) \mapsto \left( \sum_{j=0}^{d_i} a_{i,j} \cdot z_0^j z_1^{d_i-j}, \sum_{j=0}^{d_i} b_{i,j} \cdot z_0^j z_1^{d_i-j} \right)$$

entsprechend dem Beweis von Lemma 3.2.5 eine Liftung von  $f_i$ .

- ① Aus Satz 3.2.3 folgt die Meßbarkeit von  $i \mapsto a_{i,j}, i \mapsto b_{i,j}$  für alle  $j \in \mathbb{N}_0$  (wobei  $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$  für  $j > d_i$ ). Für jedes  $z \in \mathbb{C}^2$  ist also  $i \mapsto F_i(z)$  meßbar und aufgrund von Satz 5.3.1 auch  $i \mapsto d_i$ . Daraus ergibt sich, daß die in (ii) auftretenden Mengen, die bezüglich der Shift-Abbildung vollständig invariant sind, meßbar sind.
- ② Die in (iii) auftretende Menge ist vollständig invariant und für den Nachweis der Meßbarkeit genügt es zu zeigen, daß  $i \mapsto \text{dist}(g_i^{-1}(0), h_i^{-1}(0))$  meßbar ist: Aus Lemma B.1.5 folgt, daß  $i \mapsto g_i$  und  $i \mapsto h_i$  bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbare Abbildungen sind. Sei  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{C}$ . Dann gibt es eine Folge  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von kompakten Mengen mit  $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Aus B.1.3 folgt die Meßbarkeit von

$$\{i \in I : g_i^{-1}(0) \cap U = \emptyset\} = \{i \in I : g_i(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{i \in I : g_i(K_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}\}.$$



Damit ist  $i \mapsto g_i^{-1}(0)$  und entsprechend  $i \mapsto h_i^{-1}(0)$  eine compact random set (vgl. §A.4).  $i \mapsto g_i^{-1}(0)$  und  $i \mapsto h_i^{-1}(0)$  sind also bezüglich der Hausdorff-Metrik (auf  $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ ) meßbare Abbildungen. Ist  $d$  die Hausdorff-Metrik auf  $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ , so gilt

$$\text{dist}(A, B) \leq d(A, B) \quad \text{für alle } A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{C}).$$

Damit ist  $(A, B) \mapsto \text{dist}(A, B)$  eine stetige Abbildung bezüglich der Produkt-Topologie (der Hausdorff-Metrik). Als Hintereinanderausführung meßbarer Abbildungen ist somit  $i \mapsto \text{dist}(g_i^{-1}(0), h_i^{-1}(0))$  meßbar.

- ③ Entsprechend Theorem 5.4.7 genügt es zu zeigen, daß  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| < \infty$  und  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| > 0$  für **P**-fast alle  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  gilt. Sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$  und sind  $M, d \in \mathbb{N}$  mit  $d_{\omega_n} \leq d$ , sowie  $|a_{\omega_n, j}|, |b_{\omega_n, j}| \leq M$  für  $j = 1, \dots, d_{\omega_n}$  und alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\|^2 &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\|z\|=1} \left| \sum_{j=0}^{d_{\omega_n}} a_{\omega_n, j} \cdot z_0^j z_1^{d_{\omega_n}-j} \right|^2 + \left| \sum_{j=0}^{d_{\omega_n}} b_{\omega_n, j} \cdot z_0^j z_1^{d_{\omega_n}-j} \right|^2 \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{j=0}^{d_{\omega_n}} |a_{\omega_n, j}| \right)^2 + \left( \sum_{j=0}^{d_{\omega_n}} |b_{\omega_n, j}| \right)^2 \leq 2 \cdot (d \cdot M)^2 < \infty. \end{aligned}$$

Es gelte zusätzlich  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|(a_{\omega_n, d_{\omega_n}}, b_{\omega_n, d_{\omega_n}})\| > 0$  und  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(g_{\omega_n}^{-1}(0), h_{\omega_n}^{-1}(0)) > 0$ .

**Annahme:** Es gilt  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| = 0$ . Dann existiert eine Folge  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}^2$  mit  $\|z_k\| = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und eine Teilfolge  $(\omega_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  von  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|F_{\omega_{n_k}}(z_k)\| = 0.$$

Nun sind  $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(d_{\omega_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{\omega_{n_k}, j})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_{\omega_{n_k}, j})_{k \in \mathbb{N}}$  für  $j = 0, \dots, d$  beschränkte Folgen, die nach dem Satz von Weierstraß eine konvergente Teilfolge besitzen. O.B.d.A. liege bereits die Konvergenz vor. Sei  $z := \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$  und  $a_j := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\omega_{n_k}, j}$  sowie  $b_j := \lim_{k \rightarrow \infty} b_{\omega_{n_k}, j}$  für  $j = 0, \dots, d$  und  $d' := \lim_{k \rightarrow \infty} d_{\omega_{n_k}}$ . Betrachte

$$f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{g(z)}{h(z)} := \frac{a_{d'} \cdot z^{d'} + \dots + a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z + a_0}{b_{d'} \cdot z^{d'} + \dots + b_2 \cdot z^2 + b_1 \cdot z + b_0}.$$

Aus  $\|(a_{d'}, b_{d'})\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|(a_{\omega_{n_k}, d_{\omega_{n_k}}}, b_{\omega_{n_k}, d_{\omega_{n_k}}})\| \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|(a_{\omega_n, d_{\omega_n}}, b_{\omega_n, d_{\omega_n}})\| > 0$  folgt, daß  $f$  nicht die Nullfunktion ist. Gemäß Lemma 3.2.4 konvergiert  $(g_{\omega_{n_k}})_{k \in \mathbb{N}}$  lokal gleichmäßig gegen  $g$ . Sei  $c$  eine Nullstelle von  $g$ . Nimmt man an, daß ein  $r > 0$  existiert derart, daß  $\mathbb{B}(c, r) \cap g_{\omega_{n_k}}^{-1}(0) = \emptyset$  für fast alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt, so erhält man aus dem Satz von Hurwitz einen Widerspruch. Durch Übergang zu einer Teilfolge kann man daher voraussetzen, daß es eine Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  gibt mit  $g_{\omega_{n_k}}(c_k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $c_k \rightarrow c$ . Entsprechendes gilt für  $h$ . Somit folgt

$$\text{dist}(g^{-1}(0), h^{-1}(0)) > 0.$$

Damit haben  $g$  und  $h$  keine gemeinsamen Nullstellen und entsprechend dem Beweis von Lemma 3.2.5 ist

$$F: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (z_0, z_1) \mapsto \left( \sum_{j=0}^{d'} a_j \cdot z_0^j z_1^{d'-j}, \sum_{j=0}^{d'} b_j \cdot z_0^j z_1^{d'-j} \right).$$

eine Liftung von  $f$  (wenn man  $f$  als Abbildung von  $\mathbb{P}^1$  nach  $\mathbb{P}^1$  auffaßt). Insbesondere gilt  $F^{-1}(0) = 0$ . Damit folgt  $z = 0$  aus  $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} F_{\omega_{n_k}}(z^k) = F(z) \not\equiv 0$  zu  $\|z\| = 1$ . ■

**Bemerkung 4**

(i) Ist  $f_i$  für jedes  $i \in I$  eine Polynomfunktion, so ist (iii) stets erfüllt.

(ii) Ist  $I$  endlich (versehen mit der Potenzmenge), so sind (i)-(iii) aus Korollar 5.4.8 für jedes Shift-invariante Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  und beliebige rationale Funktionen  $f_i$  mit  $\text{grad } f_i \geq 2$ ,  $i \in I$ , gegeben. Außerdem ist  $\mu$  so konstruiert worden, daß sogar  $\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega)$  für alle  $\omega \in \Omega$  vorliegt.

**5.4.9 Beispiel**

Für jedes  $n \in I := \mathbb{N}$  sei

$$f_n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \frac{z^4 + \frac{1}{n} \cdot z^2}{z^2 + \frac{2}{n}}.$$

Dann ist  $F_n : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $(z_0, z_1) \mapsto (\frac{1}{n} \cdot z_0^2 z_1^2 + z_0^4, \frac{2}{n} \cdot z_1^4 + z_0^2 z_1^2)$  eine Liftung von  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega := I^{\mathbb{N}}$  mit  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n = \infty$ . Dann gilt

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|F_{\omega_n}(0, 1)\| = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{\omega_n} = 0,$$

d.h.  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\|z\|=1} \|F_{\omega_n}(z)\| = 0$ . Die Eigenschaften (i) und (ii) aus Korollar 5.4.8 sind für jedes  $\omega \in \Omega$  erfüllt, (iii) aber nur für die Elemente aus

$$C := \bigcup_{M \in \mathbb{N}} C_M, \quad C_M := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \omega_n \leq M \text{ für jedes } n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei  $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in I}$  ein stochastischer Vektor mit  $p_i > 0$  für unendlich viele  $i \in I$  und sei  $\mathbf{P}$  das Produktmaß auf  $\Omega$ , das aus  $\mathbf{p}$  hervorgeht. Dann gilt  $\mathbf{P}(C) = 0$ .

**Beweis:**

Sei  $M \in \mathbb{N}$  und für jedes  $N \in \mathbb{N}$  sei  $C_{M,N} := \{\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega : \omega_n \leq M \text{ für } n = 1, \dots, N\}$ . Dann folgt  $\mathbf{P}(C_M) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_{M,N}) = \lim_{N \rightarrow \infty} (\sum_{i=1}^M p_i)^N = 0$ , da  $\sum_{i=1}^M p_i < 1$ . Nun folgt  $\mathbf{P}(C) = \lim_{M \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_M) = 0$ . ■

In diesem Beispiel ist also nur der Fall interessant, wenn  $p_i = 0$  für fast alle  $i \in I$  vorliegt. Dies entspricht jedoch der zufälligen Iteration von endlich vielen Funktionen. Ist  $\mathbf{P}$  das Produktmaß eines Maßes auf  $I$ , so gilt eine entsprechende Aussage ganz allgemein:

**5.4.10 Satz**

Es seien die Voraussetzungen von Korollar 5.4.8 gegeben. Zusätzlich sei  $\mathbf{P}$  als Produktmaß eines Maßes  $\mathbf{p}$  vorausgesetzt. Dann gibt es eine Nullmenge  $N \subseteq I$  sowie  $d, M \in \mathbb{N}$  mit  $d_i \leq d$  und  $|a_{i,j}|, |b_{i,j}| \leq M$  für alle  $i \in I \setminus N$  und  $j = 1, \dots, d_i$ .

**Beweis:**

Für alle  $d, N \in \mathbb{N}$  sei  $C_{d,N} := \{\omega = (\omega_n) \in \Omega : d_{\omega_n} \leq d \text{ für } n = 1, \dots, N\}$ ,  $C_d := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} C_{d,N}$  und  $I_d := \{i \in I : d_i \leq d\}$ . Aus der Forderung (ii) in Korollar 5.4.8 folgt  $1 = \mathbf{P}(\bigcup_{d \in \mathbb{N}} C_d) = \lim_{d \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_d)$ . Damit existiert ein  $d^* \in \mathbb{N}$  mit  $\mathbf{P}(C_d) > 0$  für alle  $d \geq d^*$ . Sei  $\mathbf{p}$  das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $I$ , aus dem  $\mathbf{P}$  hervorgeht. Dann folgt

$$\mathbf{P}(C_{d^*,N}) = \mathbf{p}(I_{d^*})^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathbf{P}(C_{d^*}) > 0,$$

also  $\mathbf{p}(I_{d^*}) = 1$ . Damit folgt  $d_i \leq d^*$  für fast alle  $i \in I$ . Entsprechend geht man für die Existenz von  $M$  vor. ■

Wir geben nun einige Anmerkungen und Folgerungen aus der Konstruktion von obigem Wahrscheinlichkeitsmaß an. Zunächst bemerken wir, daß die faserweise betrachtete Juliamenge keine isolierten Punkte enthält:

**5.4.11 Satz**

Für jedes  $\omega \in \Omega^*$  hat  $\text{supp } T_\omega$  keine isolierten Punkte, ist also perfekt und somit insbesondere überabzählbar. Für jedes  $\omega \in C^*$  ist  $\mathcal{J}(F_\omega)$  perfekt.

Beweis:

Sei  $\omega \in \Omega^*$  und  $A := \text{supp } T_\omega$ . **Angenommen**, es existiert ein isolierter Punkt  $a \in A$ . Dann gibt es ein  $r > 0$  mit  $A \cap \mathbb{B}(a, r) = \{a\}$ .  $T_\omega$  ist eine Differentialform mit Maßkoeffizienten und nach Satz 1.4.6 gibt es einen Koeffizienten  $\mu$  mit  $a \in \text{supp } \mu$ . Aus Satz 1.4.6 folgt auch  $\mu(A) = 1$  und zusammen mit Satz 5.4.3 ergibt sich

$$0 = \mu(\{a\}) = \mu(A \cap \mathbb{B}(a, r)) = \mu(\mathbb{B}(a, r)) > 0. \quad \zeta$$

Aus Theorem 5.2.3 folgt  $\text{supp } T_\omega = \mathcal{J}(F_\omega)$  für jedes  $\omega \in C^*$ , woraus sich der zweite Teil der Behauptung ergibt. ■

Allgemeine Aussagen über den Träger von  $\mu$ , falls  $\Omega$  metrisierbar und  $\mu$  von innen regulär ist, findet man im Anhang (Satz A.4.5).

Ist  $|I| = 1$ , so entspricht  $f$  einer holomorphen Funktion  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  und es ist bekannt, daß  $\mu$  in diesem Fall ein Maß mit maximaler Entropie ist, es gilt  $h(f) = \log(\text{grad } f)^k$  [65, Théorème 3.3.2]. Im allgemeinen ist die *topologische* Entropie von  $f$  jedoch nur von geringem Interesse:

**5.4.12 Satz**

Sei  $I$  als metrischer Raum vorausgesetzt. Dann gilt

$$h_D(f) \geq \log |I|$$

und eine entsprechende Ungleichung liegt auch für jede andere Definition der topologischen Entropie aus §4 vor. Insbesondere ist die topologische Entropie von  $f$  unendlich, falls  $I$  nicht endlich ist.

Beweis:

Sei  $\sigma = \sigma_I$  der Shift auf  $\Omega$  und sei  $\pi_\Omega : \Omega \times X \rightarrow \Omega, (\omega, x) \mapsto \omega$  die Projektion auf  $\Omega$ . Dann gilt

$$\pi_\Omega \circ f = \sigma \circ \pi_\Omega.$$

$\pi_\Omega$  ist als Projektion eine stetige und offene Abbildung, außerdem ist  $\pi_\Omega$  auch eigentlich und surjektiv. Aus Satz 4.4.3 und Beispiel 4.4.5 folgt

$$h_D(f) \geq h_D(\sigma_I) = \log |I|.$$

Für die anderen Definitionen der topologischen Entropie aus §4 kann man unter Verwendung von Theorem 4.7.2 analog vorgehen. ■

Die Frage nach der (maximalen) Entropie von  $\mu$  (für beliebiges  $I$ ) lassen wir hier unbeantwortet.



## Teil III.

# Anhang

In diesem Abschnitt geben wir zunächst die Definition der Julia- und Fatoumenge an, wobei wir diese allgemein für Familien von auf einem metrischen Raum definierten Selbstabbildungen einführen. Die (zufällige) Juliamenge holomorpher Selbstabbildungen  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\text{grad } f \geq 2$  ist stets nicht-leer. Wir stellen einige Aspekte der Theorie zufälliger dynamischer Systeme vor, die in den vorangehenden Abschnitten verwendet wurden. Bereits unter einer schwachen Meßbarkeitsannahme ist die zufällige Juliamenge eine „random set“, d.h. es liegt eine bzgl. der Hausdorff-Metrik meßbare Abbildung vor. Aus der Theorie zufälliger dynamischer Systeme ergibt sich die Existenz eines „einfachen“ invarianten Maßes. Abschließend geben wir ein einfaches Beispiel an, für das die zufällige Juliamenge nicht meßbar ist.



## Anhang A.

### Juliamengen, Faktorisierungen und zufällige Mengen

Nichts ist getan,  
wenn noch etwas zu tun übrig ist.

*(Carl Friedrich Gauß)*

In der komplexen Dynamik [6, 52, 38] führt man die Julia- und Fatoumenge von meromorphen (holomorphen) Abbildungen üblicherweise mittels dem Konstrukt der normalen Familien<sup>16</sup> ein [63]. Ein fundamentales Normalitätskriterium ist dabei gegeben durch den Satz von Montel. Der Satz von Arzela-Ascoli lehrt darüberhinaus unter welchen Bedingungen Normalität zur gleichgradigen Stetigkeit äquivalent ist. Wir verwenden hier den Zugang über die gleichgradige Stetigkeit und führen die Julia- und Fatoumenge auch allgemein für Funktionen auf metrischen Räumen ein. Eine Diskussion dieser beiden Zugänge findet man beispielsweise in [37, §1.3-1.4]. Betrachtet sei eine Familie von holomorphen Selbstabbildungen  $f$  auf  $\mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , mit  $\text{grad } f \geq 2$ . Es liegt nahe, die zugehörige *zufällige* Juliamenge, d.h. die Fasern entlang einer gegebenen Folge von Funktionen, zu betrachten. Interessant ist der Fall, wenn die zufällige Juliamenge eine bzgl. der Hausdorff-Metrik meßbare Abbildung ist, also eine sogenannte random set vorliegt. Wir gehen in diesem Kapitel zudem noch auf die Faktorisierung (auch: Desintegration) von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein und untersuchen die zugehörigen Träger.

#### A.1. Die Julia- und Fatoumenge

##### A.1.1 Definition (Gleichgradige Stetigkeit)

Seien  $(X, d), (Y, d)$  metrische Räume und  $x_0 \in X$ . Eine Familie  $F$  von Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$  heißt **gleichgradig stetig** in  $x_0$ , falls gilt:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall f \in F \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Ist  $K \subseteq X$ , so heißt  $F$  **gleichgradig stetig auf  $K$** , falls gilt

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall f \in F \forall x, y \in K : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

##### Bemerkung 1

Ist  $K$  kompakt, so ist die gleichgradige Stetigkeit in jedem Punkt von  $K$  zur gleichgradigen Stetigkeit auf  $K$  äquivalent.

Einen Punkt  $x_0 \in X$  bezeichnen wir als **stabil** bzgl. einer vorgegebenen Familie  $F$  von Funktionen, wenn  $F$  nicht nur in  $x_0$ , sondern in einer ganzen Umgebung von  $x_0$  gleichgradig stetig ist:

<sup>16</sup>Eine Familie  $F$  von Funktionen heißt *normal*, wenn jede Folge in  $F$  eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt.

**A.1.2 Definition (Julia- und Fatoumenge)**

Seien  $(X, d), (Y, d)$  metrische Räume und sei  $F$  eine Familie von Abbildungen  $f : X \rightarrow Y$ . Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt **stabil** bzgl.  $F$ , wenn es eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  gibt derart, daß  $F$  in jedem Punkt aus  $U$  gleichgradig stetig ist. Die **Fatou-** und **Juliamenge** ist dann definiert durch

$$\mathcal{F}(F) := \{x_0 \in X : x_0 \text{ ist stabil bzgl. } F\}, \text{ bzw. } \mathcal{J}(F) := X \setminus \mathcal{F}(F).$$

Ist  $f : X \rightarrow X$ , so setzen wir  $\mathcal{J}(f) := \mathcal{J}(\{f^n : n \in \mathbb{N}\})$  und sprechen von der **Juliamenge von  $f$** .

**Bemerkung 2**

(i) Ist  $X$  ein kompakter, metrisierbarer Hausdorff-Raum, so ist

$$\text{id} : (X, d) \rightarrow (X, d')$$

für alle Metriken  $d, d'$ , die die Topologie von  $X$  erzeugen, gleichmäßig stetig. Damit ist die Definition der Julia- und Fatoumenge bei Vorlage von kompakten Räumen  $X, Y$  unabhängig von der Wahl der Metriken.

(ii) Aus dem Satz von Arzela-Ascoli folgt, daß insbesondere im Fall  $X = \mathbb{P}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , obige Definition der Julia- und Fatoumenge mit der üblichen, durch die Normalität gegebenen, übereinstimmt.

**A.2. Die Juliamenge von holomorphen Abbildungen auf  $\mathbb{P}^k$** 

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $(f_n)$  eine Folge holomorpher Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^k$  mit  $\text{grad } f_n \geq 2$  (vgl. §3.2) für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Wir benötigen ein Argument für

$$\mathcal{J}(F) \neq \emptyset, \quad \text{wobei } F = \{f_n \circ \cdots \circ f_1 : n \in \mathbb{N}\}.$$

Im Fall  $k = 1$  kann man die Abbildungen  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , auch als rationale Funktionen auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  auffassen. Nimmt man dann  $\mathcal{J}(F) = \emptyset$  an, so ist  $F$  in ganz  $\widehat{\mathbb{C}}$  normal und man kann o.B.d.A. voraussetzen, daß  $(f_n \circ \cdots \circ f_1)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Die Grenzfunktion ist dann identisch  $\infty$  oder eine rationale Funktion. Indem man eine Folge von Nullstellen betrachtet, folgt, daß der erste Fall nicht eintreten kann. Da die Folge der Abbildungsgrade von  $f_n \circ \cdots \circ f_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , unbeschränkt ist, ergibt sich, daß auch der zweite Fall nicht vorliegen kann.

Es ist naheliegend im allgemeinen Fall den topologischen Grad zu verwenden, um auch in höheren Dimensionen entsprechend vorgehen zu können. Eine Einführung findet man beispielsweise in [42, §8.2], wir verweisen auch auf [47, Chapter V, §2] und [20, S.22ff.].

**A.2.1 Lemma**

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $U$  eine offene Teilmenge von  $\mathbb{P}^k$  und sei  $(f_n)$  eine Folge holomorpher Abbildungen  $f_n : U \rightarrow \mathbb{P}^k$ , die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{P}^k$  konvergiert. Dann ist  $f$  holomorph.

Beweis:

Die Funktion  $f$  ist stetig. Sei  $[z] = [z_0, \dots, z_k] \in U$  und setze  $[w] = [w_0, \dots, w_k] := f([z])$ . Wähle  $i, j \in \{0, \dots, k\}$  mit  $z_i \neq 0$  und  $w_j \neq 0$ . Seien  $U_1, U_2$  offene Umgebungen von  $[z]$  bzw.  $[w]$  mit



$U_1 \subseteq U$  und  $f(U_1) \subseteq U_2$ , zudem gelte  $z'_i \neq 0$  für alle  $[z'_0, \dots, z'_k] \in U_1$  und  $w'_j \neq 0$  für alle  $[w'_0, \dots, w'_k] \in U_2$ . Seien

$$\widehat{s}_i : U_1 \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad [z] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_k}{z_i} \right), \quad \widehat{s}_j : U_2 \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad [z] \mapsto \left( \frac{z_0}{z_j}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_j}, \frac{z_{j+1}}{z_j}, \dots, \frac{z_k}{z_j} \right)$$

die auf  $U_1$  bzw.  $U_2$  eingeschränkten Abbildungen aus 3.1.2. Indem man gegebenenfalls zu einer offenen Umgebung  $U'_1$  von  $[z]$  mit  $\overline{U'_1} \subseteq U_1$  übergeht, kann man  $f_n(U_1) \subseteq U_2$  für o.B.d.A. alle  $n \in \mathbb{N}$  voraussetzen. Wir zeigen, daß

$$\widehat{s}_j \circ f_n \circ \widehat{s}_i^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \widehat{s}_j \circ f \circ \widehat{s}_i^{-1} : \widehat{s}_i(U_1) \rightarrow \widehat{s}_j(U_2)$$

bzgl. der lokal gleichmäßigen Konvergenz vorliegt. Damit ist dann  $\widehat{s}_j \circ f \circ \widehat{s}_i^{-1} : \widehat{s}_i(U_1) \rightarrow \widehat{s}_j(U_2)$  holomorph (z.B. [47, §C.1.9]), also auch  $f$ . Sei  $d$  eine Metrik auf  $\mathbb{P}^k$ , die die vorliegende Topologie auf  $\mathbb{P}^k$  erzeugt. Aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $(f_n)$  gegen  $f$  folgt, daß  $g_n := f_n \circ \widehat{s}_i^{-1}$  (auf  $\widehat{s}_i(U_1)$ ) gleichmäßig gegen  $g := f \circ \widehat{s}_i^{-1}$  konvergiert. Sei nun  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $\widehat{s}_i(U_1)$ . Es existiert ein  $\varepsilon_0 > 0$  derart, daß

$$L_\varepsilon := \{a \in \mathbb{P}^k : \text{dist}_d(a, g(K)) \leq \varepsilon\}$$

für jedes  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  eine kompakte Teilmenge von  $\mathbb{P}^k$  ist, die in  $U_2$  liegt. Sei  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $\varepsilon < \varepsilon_0$  und  $L := L_\varepsilon \subseteq U_2$ . Da  $\widehat{s}_j$  auf  $L$  gleichmäßig stetig ist, existiert ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  mit

$$\forall x, y \in L : d(x, y) < \delta \Rightarrow \|\widehat{s}_j(x) - \widehat{s}_j(y)\| < \varepsilon.$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz von  $(g_n)$  gegen  $g$  folgt, daß ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert so, daß

$$d(g_n(z), g(z)) < \min\{\delta, \varepsilon\} \quad \text{für alle } z \in \widehat{s}_i(U_1), n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}.$$

Ist also  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  und  $a \in K$ , so gilt  $g(a) \in L$  und wegen  $\text{dist}_d(g_n(a), g(K)) \leq d(g(a), g_n(a)) < \min\{\delta, \varepsilon\} \leq \varepsilon$  auch  $g_n(a) \in L$ . Es folgt  $\|\widehat{s}_j \circ g(a) - \widehat{s}_j \circ g_n(a)\| < \varepsilon$ . Damit konvergiert  $(\widehat{s}_j \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $K$  gleichmäßig gegen  $\widehat{s}_j \circ g$ . ■

Wir benötigen eine allgemeine Definition der Vielfachheit eines Punktes einer auf einer (komplexen) Mannigfaltigkeit definierten Abbildung:

### A.2.2 Definition (Vielfachheit)

Seien  $M, N$   $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeiten,  $f : M \rightarrow N$  holomorph und sei  $a \in M$  derart, daß  $a$  ein isolierter Punkt von  $f^{-1}(f(a))$  ist. Für hinreichend kleine Umgebungen  $U, V$  von  $a$  bzw.  $f(a)$  ist dann

$$m_a f := \sup\{|U \cap f^{-1}(b)| : b \in V\}$$

endlich und unabhängig von  $U$  und  $V$  [47, Chapter V, §2].  $m_a f$  ist die **Vielfachheit von  $f$  im Punkt  $a$**  oder auch die **Vielfachheit von  $a$**  (bzgl.  $f$ ).

### A.2.3 Satz ([65, Corollaire 1.3.2])

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung und  $d := \text{grad } f$ . Dann hat jeder Punkt  $z \in \mathbb{P}^k$  unter  $f$  genau  $d^k$  Urbilder, gezählt gemäß Vielfachheit, d.h. es gilt

$$\sum_{a \in f^{-1}(z)} m_a f = d^k \quad \text{für jedes } z \in \mathbb{P}^k.$$

Wir betrachten nur (komplexe) Mannigfaltigkeiten derselben Dimension und führen reguläre Punkte bzw. reguläre Werte wie folgt ein:

**A.2.4 Definition (Regulärer Punkt, regulärer Wert)**

Seien  $M, N$  komplexe Mannigfaltigkeiten mit gleicher Dimension und sei  $f : M \rightarrow N$  eine holomorphe Abbildung. Ein Punkt  $a \in M$  heißt **regulärer Punkt** von  $f$ , falls  $T_a f$  injektiv ist, andernfalls **kritischer Punkt** von  $f$ .  $b \in N$  heißt **regulärer Wert** von  $f$ , falls  $f^{-1}(b)$  nur aus regulären Punkten von  $f$  besteht.

**A.2.5 Satz ([37, Thm. 5.32])**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge holomorpher Abbildungen  $f_n : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ , die gleichmäßig gegen eine Funktion  $f$  konvergiert. Dann folgt  $\text{grad } f_n \rightarrow \text{grad } f$ , also  $\text{grad } f_n = \text{grad } f$  für hinreichend großes  $n \in \mathbb{N}$ .

Beweis: (Beweisskizze)

Sei  $g : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  eine nicht-konstante, holomorphe Abbildung mit  $d := \text{grad } g \geq 1$ . Aus dem Satz von Sard folgt, daß für  $g$  ein regulärer Wert  $b$  existiert. Für jedes  $a \in g^{-1}(b)$  ist  $a$  ein regulärer Punkt, d.h.  $T_a g$  ist injektiv und somit bijektiv. Dann ist  $g$  um  $a$  lokal biholomorph, insbesondere gilt  $m_a g = 1$ . Ist  $\omega$  ein positives Volumelement mit  $\int \omega = 1$ , so folgt aus Satz A.2.3, zusammen mit [42, Lemma 8.2.10],  $\int g^* \omega = \sum_{a \in g^{-1}(b)} 1 = \sum_{a \in g^{-1}(b)} m_a g = d^k$ . Aus Lemma A.2.1 folgt, daß  $f$  eine holomorphe Abbildung ist und mit der vorausgesetzten gleichmäßigen Konvergenz ergibt sich somit  $(\text{grad } f_n)^k = \int f_n^* \omega \rightarrow \int f^* \omega = (\text{grad } f)^k$ , also die Behauptung. ■

**A.2.6 Satz**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $f_n, n \in \mathbb{N}$ , eine Familie holomorpher Selbstabbildungen auf  $\mathbb{P}^k$  mit  $\text{grad } f_n \geq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $F := \{f_n \circ \dots \circ f_1 : n \in \mathbb{N}\}$ . Dann gilt  $\mathcal{J}(F) \neq \emptyset$ .

Beweis:

Angenommen, es gilt  $\mathcal{J}(F) = \emptyset$ . Dann ist  $F$  auf ganz  $\mathbb{P}^k$  normal. Wir setzen o.B.d.A. voraus, daß bereits  $f_n \circ \dots \circ f_1, n \in \mathbb{N}$ , gleichmäßig gegen eine Funktion  $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  konvergiert. Nach Lemma A.2.1 ist  $f$  holomorph, außerdem ist  $f$  (wie auch  $f_n, n \in \mathbb{N}$ ) surjektiv. Insbesondere ist  $f$  nicht konstant. Aus Satz A.2.5 und Satz A.2.3 folgt  $\text{grad}(f_n \circ \dots \circ f_1) \rightarrow \text{grad } f$  für  $n \rightarrow \infty$ , also wegen  $\text{grad } f_n \geq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Widerspruch. ■

**A.3. Faktorisierung und reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten**

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Faktorisierung (auch: Desintegration) von Wahrscheinlichkeitsmaßen ein. Im Kontext der hier betrachteten zufälligen dynamischen Systeme entspricht dies den faserweise betrachteten Juliamengen.

**Notation**

Ist  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  ein topologischer Raum, so sei  $\mathcal{B}_X$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra von  $X$  und  $\mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$  die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu$  auf  $(\Omega \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}_X)$  mit Marginalmaß  $\mathbf{P}$  auf  $\Omega$ , d.h. mit

$$\pi_{\Omega} \mu = \mathbf{P}, \quad \text{wobei } \pi_{\Omega} : \Omega \times X \rightarrow \Omega, \quad (\omega, x) \mapsto \omega.$$

Es gilt also  $\mu(A \times X) = \mu(\pi_{\Omega}^{-1}(A)) = \mathbf{P}(A)$  für alle  $A \in \mathcal{A}$ .

**A.3.1 Definition (Faktorisierung)**

Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X$  ein topologischer Raum sowie  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$ . Eine Funktion

$$\mu_{\bullet} : \Omega \times \mathcal{B}_X \rightarrow [0, 1], \quad (\omega, B) \mapsto \mu_{\omega}(B)$$

heißt **Faktorisierung** von  $\mu$  bzgl.  $\mathbf{P}$ , falls gilt:

- (a) Für jedes  $B \in \mathcal{B}_X$  ist  $\omega \mapsto \mu_\omega(B)$   $\mathfrak{A}$ -meßbar.  
 (b) Für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  ist  $B \mapsto \mu_\omega(B)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(X, \mathcal{B}_X)$ .  
 (c) Für alle  $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}_X$  gilt

$$\mu(C) = \int_{\Omega} \left( \int_X \mathbb{1}_C(\omega, x) \mu_\omega(dx) \right) \mathbf{P}(d\omega),$$

wobei  $\mathbb{1}_C$  die Indikatorfunktion von  $C$  bezeichne.

Allgemein wird eine Abbildung  $\mu_\bullet : \Omega \times \mathcal{B}_X \rightarrow [0, 1]$  auch als **zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß** bezeichnet, wenn (a) und (b) erfüllt sind.

### Notation

Statt  $\mu_\bullet$  schreiben wir auch  $(\mu_\omega)_\omega$ .

### A.3.2 Satz

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X, d)$  ein polnischer Raum sowie  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$ . Dann existiert eine  $\mathbf{P}$ -fast sicher eindeutig bestimmte Faktorisierung von  $\mu$ , d.h. sind  $\mu_\bullet, \mu'_\bullet$  Faktorisierung von  $\mu$ , so gilt  $\mu_\omega = \mu'_\omega$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ .

#### Beweis:

Es bezeichne  $\mathbb{E}_\mu$  den ((faktorierten) bedingten) Erwartungswert bezüglich  $\mu$ . Die Definition des faktorierten bedingten Erwartungswertes liefert

$$\begin{aligned} \int_A \mu(C|\pi_\Omega = \omega) \mathbf{P}(d\omega) &= \int_A \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_C|\pi_\Omega = \omega) \mathbf{P}(d\omega) \stackrel{(\pi_\Omega)_\# \mu = \mathbf{P}}{=} \int_A \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_C|\pi_\Omega = \cdot)(\omega) (\pi_\Omega)_\# \mu(d\omega) \\ (*) \quad &= \int_{\Omega \times X} (\mathbb{1}_A \circ \pi_\Omega) \cdot (\mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_C|\pi_\Omega = \cdot) \circ \pi_\Omega) d\mu = \int_{\pi_\Omega^{-1}(A)} \mathbb{E}_\mu(\mathbb{1}_C|\pi_\Omega) d\mu \\ &= \int_{\pi_\Omega^{-1}(A)} \mathbb{1}_C d\mu = \mu(C \cap (A \times X)) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}, C \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}_X. \end{aligned}$$

Nach [28] existiert eine *reguläre* bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mu$ , gegeben  $\pi_\Omega = \omega$ , d.h. man kann eine Version der bedingten Erwartung so wählen, daß  $C \mapsto \mu(C|\pi_\Omega = \omega)$ ,  $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}_X$ , für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Ist also  $\mu_\omega(B) := \mu(\Omega \times B|\pi_\Omega = \omega)$ ,  $B \in \mathcal{B}_X$ , so folgt (für  $C = \Omega \times B$ )

$$\int_{\Omega} \left( \int_X \mathbb{1}_{A \times B}(\omega, x) \mu_\omega(dx) \right) \mathbf{P}(d\omega) = \int_A \mu_\omega(B) \mathbf{P}(d\omega) = \mu((\Omega \times B) \cap (A \times X)) = \mu(A \times B)$$

für alle  $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathcal{B}_X$ . Damit ergeben sich (a)-(c) aus Definition A.3.1. Die Eindeutigkeit folgt aus Eigenschaft (c). ■

### Bemerkung 1

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X, d)$  ein polnischer Raum. Für alle  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X), C \in \mathfrak{A} \otimes \mathcal{B}_X$  gilt dann<sup>17</sup>

$$\mu(C) = \int_{\Omega} \mu_\omega(C_\omega) \mathbf{P}(d\omega).$$

Daraus folgt, daß genau dann  $\mu(C) = 1$  vorliegt, wenn

$$\mu_\omega(C_\omega) = 1 \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

<sup>17</sup>Dabei bezeichne  $C_\omega$  den  $\omega$ -Schnitt  $C_\omega = \{x \in X : (\omega, x) \in C\}$  von  $C$ .

Die Faktorisierung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes  $\mu$  liefert Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu_\omega$  auf  $X$ . Betrachtet man hingegen  $\mu$ , gegeben  $\{\omega\} \times X$ , so erhält man eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf  $\Omega \times X$ . Diese unterscheiden sich nur marginal:

### A.3.3 Satz

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X, d)$  ein polnischer Raum sowie  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$ . Sei  $(\mu_\omega)_\omega$  die Faktorisierung von  $\mu$  und sei  $\delta_\omega$  für jedes  $\omega \in \Omega$  das Einpunkt-Maß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$  im Punkt  $\omega$ . Setze

$$\nu_\omega := \delta_\omega \otimes \mu_\omega$$

für alle  $\omega \in \Omega$ , für die  $\mu_\omega$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist. Für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  stimmt dann  $\nu_\omega$  mit  $\mu$ , gegeben  $\{\omega\} \times X$ , überein, d.h. es gilt  $\nu_\omega(C) = \mu(C|\pi_\Omega = \omega)$  für alle  $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_X$ .

Beweis:

Seien  $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}_X$ . Dann folgt aus der Gleichung (\*) ( $\rightarrow$  Beweis von Satz A.3.2) für jedes  $D \in \mathfrak{A}$

$$\begin{aligned} \int_D \nu_\omega(A \times B) \mathbf{P}(d\omega) &= \int_D \delta_\omega(A) \cdot \mu_\omega(B) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{A \cap D} \mu_\omega(B) \mathbf{P}(d\omega) \\ &= \int_{A \cap D} \mu(\Omega \times B | \pi_\Omega = \omega) \mathbf{P}(d\omega) \stackrel{(*)}{=} \mu((\Omega \times B) \cap ((A \cap D) \times X)) \\ &= \mu((A \times B) \cap (D \times X)) \stackrel{(*)}{=} \int_D \mu(A \times B | \pi_\Omega = \omega) \mathbf{P}(d\omega). \end{aligned}$$

Aus der  $\mathbf{P}$ -fast sicheren Eindeutigkeit des (faktorierten) bedingten Erwartungswertes folgt  $\nu_\omega(C) = \mu(C|\pi_\Omega = \omega)$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$  und alle  $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_X$ . ■

In der Situation von Satz A.3.3 gilt insbesondere der nachfolgende Zusammenhang zwischen den Trägern von  $\mu_\omega$  und  $\nu_\omega$ :

### Bemerkung 2

Ist  $\Omega$  ein polnischer Raum, so gilt  $\text{supp } \nu_\omega = \{\omega\} \times \text{supp } \mu_\omega$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ .

## A.4. Random sets

Eine zufällige Juliamenge ist eine Familie von abgeschlossenen (Julia-) Mengen, die meßbar vom Parameter abhängen. Dabei handelt es sich ganz allgemein um eine zufällige Menge (*engl.*: random set), auf die wir nun näher eingehen werden:

### A.4.1 Definition (Random sets)

Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein meßbarer Raum sowie  $\mathfrak{P}(X)$  die Potenzmenge von  $X$ . Eine Abbildung

$$A_\bullet : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad \omega \mapsto A_\omega$$

ist eine **closed random set**, falls  $A_\omega$  für jedes  $\omega \in \Omega$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $X$  ist und

$$\{\omega \in \Omega : A_\omega \cap U \neq \emptyset\} \in \mathfrak{A} \quad \text{für jede offene Teilmenge } U \text{ von } X.$$

Entsprechend definiert man **compact random sets**, wenn eine closed random set vorliegt, deren Bildbereich die Menge aller kompakten Teilmengen von  $X$  ist.

**Notation**

Ist  $A_\bullet : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ ,  $\omega \mapsto A_\omega$  eine Abbildung, so sei

$$\text{graph}(A_\bullet) := \{(\omega, x) \in \Omega \times X : x \in A_\omega\}.$$

Zudem sei  $\mathcal{K}(X)$  die Menge aller nicht-leeren, kompakten Teilmengen von  $X$ .

Wir fassen einige Tatsachen über random sets zusammen [12, 13, 51]. Häufig werden (closed) random sets über die Eigenschaft (ii) aus dem nachfolgenden Satz eingeführt. Für obige Definition muß jedoch kein metrisierbarer Raum vorausgesetzt werden. Eine gute Einführung in random sets findet man auch in [64].

**A.4.2 Satz**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A})$  ein meßbarer Raum, sei  $(X, d)$  ein polnischer Raum und  $A_\bullet : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X)$  eine Abbildung mit Werten in der Menge der abgeschlossenen Teilmengen von  $X$ .

(a) Es sind äquivalent:

- (i)  $A_\bullet$  ist eine closed random set.
- (ii) Für jedes  $x \in X$  ist die Abbildung  $\omega \mapsto \text{dist}(x, A_\omega)$  meßbar.

Falls  $A_\omega \neq \emptyset$  für alle  $\omega \in \Omega$ , so sind (i) und (ii) auch äquivalent zu

- (iii) Es existiert eine Folge  $(a_n)$  von meßbaren Abbildungen  $a_n : \Omega \rightarrow X$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mit

$$A_\omega = \overline{\{a_n(\omega) : n \in \mathbb{N}\}}.$$

(b) Ist  $A_\bullet$  eine closed random set, so ist  $\text{graph}(A_\bullet)$  eine meßbare Teilmenge von  $\Omega \times X$ . Ist  $\mathfrak{A}$  vollständig bezüglich einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$ , so gilt auch die Umkehrung.

(c) Ist  $A_\omega$  für jedes  $\omega \in \Omega$  eine nicht-leere kompakte Teilmenge von  $X$ , so ist  $A_\bullet$  genau dann eine compact random set, wenn  $\omega \mapsto A_\omega$  bzgl. der Hausdorff-Metrik  $d$ , definiert durch

$$d(A, B) := \max\left\{\sup_{a \in A} \text{dist}(a, B), \sup_{b \in B} \text{dist}(A, b)\right\}, \quad A, B \in \mathcal{K}(X),$$

meßbar ist [12, Thm. II.10].

**A.4.3 Satz**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X, d)$  ein polnischer Raum sowie  $A_\bullet : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ ,  $\omega \mapsto A_\omega$  eine Abbildung mit  $\text{graph}(A_\bullet) \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}_X$ . Sei  $\mu_\bullet : \Omega \times \mathfrak{B}_X \rightarrow [0, 1]$ ,  $(\omega, B) \mapsto \mu_\omega(B)$  ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann ist

$$\omega \mapsto \mu_\omega(A_\omega)$$

eine meßbare Abbildung.

Wir kommen nun wieder auf die Faktorisierung zurück und betrachten unter anderem die Träger von  $(\mu_\omega)$ . Dazu formulieren wir zunächst die sehr einfache

**Bemerkung 1**

Sei  $X$  ein Hausdorff-Raum und  $\mu$  ein endliches Radon-Maß auf  $(X, \mathcal{B}_X)$  und  $U$  eine offene Teilmenge von  $X$ . Es gilt genau dann  $\mu(U) > 0$ , wenn

$$U \cap \text{supp } \mu \neq \emptyset,$$

**denn** „ $\Leftarrow$ “: ist klar. „ $\Rightarrow$ “: Wäre  $U \cap \text{supp } \mu = \emptyset$ , so  $\text{supp } \mu \subseteq X \setminus U$ , also  $\mu(X) = \mu(\text{supp } \mu) \leq \mu(X \setminus U) = \mu(X) - \mu(U)$ , d.h.  $\mu(U) = 0$ .  $\zeta$

**A.4.4 Beispiel (Der Träger eines Wahrscheinlichkeitsmaßes)**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X, d)$  ein polnischer Raum sowie  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$ . Dann wird der Träger  $\text{supp } \mu_{\bullet}$  von  $\mu$  definiert durch

$$\text{supp } \mu_{\bullet} : \Omega \rightarrow \mathcal{A}(X), \quad \omega \mapsto \begin{cases} \text{supp } \mu_{\omega}, & \text{falls } \mu_{\omega} \text{ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist} \\ X, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Definition hängt (formal) von der Wahl der Faktorisierung  $\mu_{\bullet}$  ab, ist aber  $\mathbf{P}$ -fast sicher eindeutig bestimmt. Aus Bemerkung 1 folgt, daß  $\text{supp } \mu_{\bullet}$  eine closed random set ist. Wir setzen  $\text{supp } \mu_{\omega} := X$  für alle  $\omega \in \Omega$ , für die  $\mu_{\omega}$  kein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

**A.4.5 Satz**

In der Situation von Beispiel A.4.4 sei  $\Omega$  ein metrisierbarer Raum,  $\mathfrak{A}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega$  und  $\mu$  von innen regulär. Dann ist auch die übliche Definition des Trägers  $\text{supp } \mu \subseteq \Omega \times X$  von  $\mu$  gegeben.

(a) Es gilt  $\text{supp } \mu_{\omega} \subseteq (\text{supp } \mu)_{\omega}$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ .

(b) Für  $A := \{\omega \in \Omega : \text{supp } \mu_{\omega} \subseteq (\text{supp } \mu)_{\omega}\}$  gilt  $\mathbf{P}(A) = 1$  und

$$\overline{\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\} \times \text{supp } \mu_{\omega}} \subseteq \text{supp } \mu \subseteq \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times \text{supp } \mu_{\omega}}.$$

Beweis:

(a) Es gilt  $\mu(\text{supp } \mu) = 1$  und aus Bemerkung 1 (Seite 121) folgt  $\mu_{\omega}((\text{supp } \mu)_{\omega}) = 1$ , also  $\text{supp } \mu_{\omega} \subseteq (\text{supp } \mu)_{\omega}$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ .

(b) Nach (a) ist  $\mathbf{P}(A) = 1$ . Sei  $(\omega, x) \in \overline{\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\} \times \text{supp } \mu_{\omega}}$ . Dann existiert eine Folge  $(\omega_n, x_n)$  in  $A \times X$  mit  $(\omega_n, x_n) \rightarrow (\omega, x)$  und  $x_n \in \text{supp } \mu_{\omega_n} \subseteq (\text{supp } \mu)_{\omega_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $(\omega_n, x_n) \in \text{supp } \mu$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und somit gilt auch  $(\omega, x) \in \text{supp } \mu$ . Setzt man  $C := \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times \text{supp } \mu_{\omega}$ , so folgt

$$1 = \int_{\Omega} \mu_{\omega}(\text{supp } \mu_{\omega}) \mathbf{P}(d\omega) = \int_{\Omega} \mu_{\omega}(C_{\omega}) \mathbf{P}(d\omega) \stackrel{\text{Bem. 1, S. 121}}{=} \mu(C) \leq \mu(\overline{C}) = \mu\left(\overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times \text{supp } \mu_{\omega}}\right),$$

$$\text{also } \text{supp } \mu \subseteq \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times \text{supp } \mu_{\omega}}.$$

■

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$  stimmt das Marginalmaß auf  $\Omega$  mit  $\mathbf{P}$  überein. Es liegt nahe, neben der Faktorisierung  $\mu_{\bullet}$  und dem zugehörigen Träger  $\text{supp } \mu_{\bullet}$  auch das Marginalmaß von  $\mu$  auf  $X$  zu betrachten:

**A.4.6 Satz**

Sei  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $(X, d)$  ein polnischer Raum sowie  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$  und  $\pi_X : \Omega \times X \rightarrow X, (\omega, x) \mapsto x$ . Dann gilt

$$\text{supp}(\pi_X \mu) \subseteq \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \text{supp} \mu_\omega}.$$

Ist  $\Omega$  ein metrischer Raum,  $\mathfrak{A}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra von  $\Omega$  und  $\mu$  von innen regulär sowie  $A := \{\omega \in \Omega : \text{supp} \mu_\omega \subseteq (\text{supp} \mu)_\omega\}$ , so gilt

$$\overline{\bigcup_{\omega \in A} \text{supp} \mu_\omega} \subseteq \text{supp}(\pi_X \mu).$$

Beweis:

Sei  $C := \Omega \times \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \text{supp} \mu_\omega}$ . Dann folgt aus

$$(\pi_X \mu) \left( \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \text{supp} \mu_\omega} \right) = \mu(C) = \int_{\Omega} \mu_\omega(C_\omega) \mathbf{P}(d\omega) \geq \int_{\Omega} \mu_\omega(\text{supp} \mu_\omega) \mathbf{P}(d\omega) = 1$$

$\text{supp}(\pi_X \mu) \subseteq \overline{\bigcup_{\omega \in \Omega} \text{supp} \mu_\omega}$ . Sei  $x \in \overline{\bigcup_{\omega \in A} \text{supp} \mu_\omega}$ . Dann existiert eine Folge  $(\omega_n)$  in  $A$  und eine Folge  $(x_n)$  in  $X$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \in \text{supp} \mu_{\omega_n} \subseteq (\text{supp} \mu)_{\omega_n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $(\omega_n, x_n) \in \text{supp} \mu$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $U$  eine offene Umgebung von  $x$  in  $X$ . Dann gilt  $(\omega_n, x_n) \in (\Omega \times U) \cap \text{supp} \mu$  für fast alle  $n \in \mathbb{N}$ , also  $(\pi_X \mu)(U) = \mu(\Omega \times U) > 0$ . Damit ist  $x \in \text{supp}(\pi_X \mu)$ . ■





## Anhang B.

# Über die Existenz und Nicht-Existenz von invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßen

Betrachtet sei ein zufälliges dynamisches System und eine compact random set  $A_\bullet : \omega \mapsto A_\omega$ . Es ist bekannt, daß unter gewissen Bedingungen ein bzgl. des zugrundeliegenden Schiefprodukts invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit  $\pi_\Omega \mu = \mathbf{P}$  und

$$\text{supp } \mu_\omega \subseteq A_\omega \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega$$

existiert [4]. Allerdings erhält man auf diesem Weg im allgemeinen nur Maße, für die  $\text{supp } \mu_\omega$  endlich ist<sup>18</sup>. Aus diesem Grund sprechen wir auch von einfachen (oder: schlichten) invarianten Maßen. Hier wenden wir dies auf die zufällige Juliamenge einer Familie von stetigen Selbstabbildungen an und zeigen, daß insbesondere für holomorphe Selbstabbildungen  $f$  auf  $\mathbb{P}^k$  mit  $\text{grad } f \geq 2$  alle Voraussetzungen erfüllt sind, wenn eine meßbare Parameterabhängigkeit vorliegt. Wir geben auch ein Beispiel an, daß zeigt, daß die zufällige Juliamenge  $\omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$  nicht meßbar zu sein braucht. In diesem Fall existiert auch kein (invariantes) Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit  $\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega)$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ .

### B.1. Aussagen zur Meßbarkeit

Wir betrachten im folgenden stets ein zufälliges dynamisches System unter Verwendung der nachfolgenden Bezeichnungen:

#### Notation

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_X$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra von  $X$  und  $f_i, i \in I$ , eine Familie (stetiger) Selbstabbildungen auf  $X$ . Sei  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ , außerdem sei für jedes  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$

$$F_\omega := \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\},$$

und das zugehörige Schiefprodukt ist definiert durch

$$f : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, x) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(x)).$$

Sei zudem  $\sigma : \Omega \rightarrow \Omega, (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  der Shift auf  $\Omega$  und  $\mathbf{P}$  ein Shift-invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega, \mathfrak{A})$ . Die **zufällige Juliamenge** ist definiert durch

$$\mathcal{J}(F_\bullet) : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad \omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega).$$

<sup>18</sup>Dies entspricht der sehr einfachen Tatsache, daß man für *eine* rationale Funktion  $f$  durch die Betrachtung eines periodischen Punktes (aus der Juliamenge) stets ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  mit  $\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{J}(f)$  konstruieren kann.

Setze

$$\varphi_k(\omega, x) := (f_{\omega_k} \circ \dots \circ f_{\omega_1})(x), \quad \varphi_0(\omega, x) := x$$

für alle  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $x \in X$ , außerdem sei  $\varphi : \mathbb{N}_0 \times \Omega \times X \rightarrow X$ ,  $(k, \omega, x) \mapsto \varphi_k(\omega, x)$ .

Wir gehen nun auf hinreichende und notwendige Bedingungen ein, unter denen das Schiefprodukt  $f$  eine meßbare Abbildung ist. Benötigt wird hierzu noch das nachfolgende

### B.1.1 Lemma

Sei  $(X, d)$  ein separabler metrischer Raum und  $U$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $X$ . Für alle  $i \in I$  sei  $f_i : U \rightarrow X$  eine stetige Abbildung derart, daß  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in U$  meßbar ist. Dann ist die Abbildung

$$f : I \times U \rightarrow X, \quad (i, x) \mapsto f_i(x)$$

meßbar.

Beweis:

Sei  $D = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare, dichte Teilmenge von  $X$  und sei  $n \in \mathbb{N}$ . Setze  $\mathcal{U}_n(x_1) := \mathbb{B}(x_1, \frac{1}{n})$  und induktiv

$$\mathcal{U}_n(x_k) := \mathbb{B}(x_k, \frac{1}{n}) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{U}_n(x_j) \quad \text{für jedes } k \in \mathbb{N}.$$

Sei  $\mathcal{U}_n := \{\mathcal{U}_n(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ . Da  $D$  dicht ist, folgt, daß  $\mathcal{U}_n$  eine aus meßbaren Teilmengen bestehende Partition von  $X$  ist mit  $\mathcal{U}_n(x_k) \subseteq \mathbb{B}(x_k, \frac{1}{n})$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Für jedes  $x \in X$  existiert ein eindeutig bestimmtes  $y = y_x \in D$  mit  $x \in \mathcal{U}_n(y)$ . Betrachte

$$g_n : I \times U \rightarrow X, \quad (i, x) \mapsto f_i(y_x).$$

Da  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in U$  meßbar ist, folgt die Meßbarkeit von  $g_n^{-1}(B) = \bigcup_{y \in D} \{(i, x) \in I \times U : y_x = y, f_i(y) \in B\} = \bigcup_{y \in D} \{i \in I : f_i(y) \in B\} \times (\mathcal{U}_n(y) \cap U)$  für jedes  $B \in \mathcal{B}_X$ , d.h.  $g_n$  ist meßbar. Für alle  $(i, x) \in I \times U$ ,  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$d(f_i(x), g_n(i, x)) = d(f_i(x), f_i(y_x)) \leq \sup \left\{ d(f_i(x), f_i(y)) : y \in X, d(x, y) < \frac{1}{n} \right\},$$

also aufgrund der Stetigkeit von  $x \mapsto f_i(x)$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(i, x) = f_i(x)$ . Damit ist  $(i, x) \mapsto f_i(x)$  eine meßbare Abbildung. ■

### B.1.2 Satz

(a) Das Schiefprodukt  $f : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X$  ist genau dann eine meßbare Abbildung, wenn die auf  $I \times X$  definierte Abbildung  $(i, x) \mapsto f_i(x)$  meßbar ist.

(b) Ist  $X$  separabel und gilt

(i)  $i \mapsto f_i(x)$  ist meßbar für jedes  $x \in X$ ,

sowie

(ii)  $x \mapsto f_i(x)$  ist stetig für jedes  $i \in I$ ,

so ist die auf  $I \times X$  definierte Abbildung  $(i, x) \mapsto f_i(x)$  meßbar und somit auch  $f$ .

Beweis:

(a) Für alle  $A \in \mathfrak{A}$ ,  $B \in \mathfrak{B}_X$  gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(A \times B) &= \{(\omega, x) \in \Omega \times X : (\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \in A, f_{\omega_1}(x) \in B\} \\ &= \{(\omega, x) \in \Omega \times X : f_{\omega_1}(x) \in B\} \cap (\sigma^{-1}(A) \times X). \end{aligned}$$

Setzt man die Meßbarkeit von  $f$  voraus und betrachtet man  $A = \Omega$ , so ergibt sich daraus die Meßbarkeit von  $(i, x) \mapsto f_i(x)$ . Ist umgekehrt  $(i, x) \mapsto f_i(x)$  meßbar, so folgt aus der Meßbarkeit der Shiftabbildung  $\sigma$  und obiger Identität die Meßbarkeit von  $f$ .

(b) ergibt sich aus Lemma B.1.1 und Aussage (a). ■

### Bemerkung 1

(i) Ist das Schiefprodukt  $f$  meßbar, so für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  auch

$$(\omega, x) \mapsto \varphi_k(\omega, x) = f_{\omega_k} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}(x).$$

(ii) Ist  $X$  ein separabler Raum und  $f_i$  stetig für jedes  $i \in I$ , so ist das Schiefprodukt  $f$  genau dann meßbar, wenn  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in X$  meßbar ist.

Beweis:

Zu (i):  $f^k : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X, ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, x) \mapsto ((\omega_{n+k})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_k} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}(x))$  ist meßbar, also auch die Projektion auf  $X$ , d.h.  $(\omega, x) \mapsto f_{\omega_k} \circ \cdots \circ f_{\omega_1}(x)$ . (ii) folgt aus Satz B.1.2. ■

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß  $f_i$  stetig ist für jedes  $i \in I$ . Wir untersuchen nun Zusammenhänge zur Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz:

### B.1.3 Anmerkungen (Zur Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz)

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum, der abzählbar im Unendlichen ist und sei  $Y$  ein metrischer Raum. Sei  $C = C(X, Y)$  die Menge der stetigen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  und setze

$$d_A(f, g) := \sup_{x \in A} d(f(x), g(x))$$

für alle  $f, g \in C$  und jede nicht-leere Teilmenge  $A$  von  $X$ . Dann ist die **Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz** (auch: Topologie der kompakten Konvergenz) auf  $C$  metrisierbar, eine Metrik ist gegeben durch

$$d(f, g) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \min\{1, d_{K_n}(f, g)\} \quad \text{für alle } f, g \in C,$$

wobei  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Folge kompakter Teilmengen von  $X$  ist mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} K_n = X$  und  $K_n \subseteq K_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Man kann  $K_n$  so wählen, daß  $K_n$  der Abschluß einer offenen Menge ist [70, 8.19(b)]. Ist  $K$  eine kompakte Teilmenge von  $X$  und  $U$  eine offene Teilmenge von  $Y$ , so ist

$$\{f \in C(X, Y) : f(K) \subseteq U\}$$

offen (und hierdurch ist eine Subbasis der kompakt-offenen Topologie gegeben, die mit der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz übereinstimmt [70, §14.B]).

### B.1.4 Lemma

Sei  $X$  ein lokalkompakter Raum, der abzählbar im Unendlichen ist und sei  $Y$  ein metrischer Raum. Ist  $g \in C(X, Y)$ ,  $K \subseteq X$  kompakt und  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ , so ist

$$V = V(g, K, \varepsilon) := \{f \in C(X, Y) : d_K(f, g) < \varepsilon\}$$

offen und

$$\{V(g, K_n, \varepsilon) : g \in C(X, Y), \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

ist eine Basis der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz.

**Beweis:**

Sei  $f \in V$ . Wähle ein  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $K \subseteq K_n$ . Sei  $\delta \in ]0, 1[$  mit  $\delta < \varepsilon - d_K(f, g)$ . Wähle  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $r < \frac{\delta}{2^n}$ . Dann folgt für jedes  $h \in \mathbb{B}_d(f, r)$

$$\delta > 2^n \cdot r > 2^n \cdot d(f, h) \geq \min\{1, d_{K_n}(f, h)\},$$

also  $d_{K_n}(f, h) < \delta$  und somit  $d_K(h, g) \leq d_K(h, f) + d_K(f, g) \leq d_{K_n}(h, f) + d_K(f, g) < \varepsilon$ . Damit ist  $f$  ein innerer Punkt,  $V$  also offen. Für alle  $f, g \in C(X, Y)$  gilt

$$\begin{aligned} d(f, g) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \min\{1, d_{K_n}(f, g)\} \leq \sum_{m=0}^n \frac{1}{2^m} \cdot d_{K_m}(f, g) + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \\ &\leq d_{K_n}(f, g) \cdot \sum_{m=0}^n \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} = d_{K_n}(f, g) \cdot \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n} \leq 2 \cdot d_{K_n}(f, g) + \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Sei  $U$  eine nicht-leere, offene Teilmenge von  $C(X, Y)$ . Sei  $g \in U$  und sei  $n = n(g) \in \mathbb{N}_0$  mit  $\mathbb{B}_d(g, \frac{1}{2^n}) \subseteq U$ . Für jedes  $f \in V(g, K_{n+1}, \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}))$  folgt

$$d(f, g) \leq 2 \cdot d_{K_{n+1}}(f, g) + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n},$$

also  $V(g, K_{n+1}, \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}})) \subseteq \mathbb{B}_d(g, \frac{1}{2^n}) \subseteq U$ . Damit folgt

$$\bigcup_{g \in U} V\left(g, K_{n(g)+1}, \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{n(g)}} - \frac{1}{2^{n(g)+1}}\right)\right) = U,$$

d.h.  $\{V(g, K_n, \varepsilon) : g \in C(X, Y), \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}_0\}$  ist eine Basis der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz. ■

### B.1.5 Lemma

Sei  $I$  ein meßbarer Raum,  $X$  ein lokalkompakter metrischer Raum, der abzählbar im Unendlichen ist. Sei  $Y$  ein metrischer Raum und für jedes  $i \in I$  sei  $f_i : X \rightarrow Y$  derart, daß gilt:

(i)  $f_i$  ist stetig für jedes  $i \in I$ ,

(ii)  $i \mapsto f_i(x)$  ist meßbar für alle  $x \in X$ .

Dann ist die auf  $I$  definierte Abbildung  $i \mapsto f_i$  bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbar.

**Beweis:**

Die Mengen

$$W(g, K_n, \varepsilon) := \{f \in C(X, Y) : d_{K_n}(f, g) \leq \varepsilon\}, \quad g \in C(X, Y), \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}, n \in \mathbb{N}_0$$

bilden wegen  $V(g, K_n, \varepsilon) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{f \in C(X, Y) : d_{K_n}(f, g) \leq \varepsilon - \frac{1}{k}\}$  (vergleiche Lemma B.1.4) ein Erzeugendensystem der Borelschen  $\sigma$ -Algebra der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz. Aus [70, Satz 10.15] folgt, daß  $X$  eine abzählbare Basis besitzt, also separabel ist. Sei  $D$  eine abzählbar dichte Teilmenge von  $X$ ,  $g \in C(X, Y)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Da  $K_n$  keine isolierten Punkte enthält, folgt aus

$$\begin{aligned} \{i \in I : f_i \in W(g, K_n, \varepsilon)\} &= \{i \in I : d_{K_n}(f_i, g) \leq \varepsilon\} = \{i \in I : d_{K_n \cap D}(f_i, g) \leq \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{x \in D \cap K_n} \{i \in I : d(f_i(x), g(x)) \leq \varepsilon\} = \bigcap_{x \in D \cap K_n} \{i \in I : f_i(x) \in \mathbb{B}(g(x), \varepsilon)\}. \end{aligned}$$

die Meßbarkeit von  $i \mapsto f_i$ . ■

**Bemerkung 2**

In der Situation von Lemma B.1.5 ist die Einsetzabbildung

$$e : C(X, Y) \times X \rightarrow Y, (f, x) \mapsto f(x)$$

stetig [70, Korollar 14.16]. Damit gilt: Setzt man nur (i) voraus, so gilt in Lemma B.1.5 die Umkehrung, d.h. aus der Meßbarkeit von  $i \mapsto f_i$  folgt die Meßbarkeit von  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in X$ .

**B.2. Die Existenz einfacher invarianter Maße****B.2.1 Definition (Invariante Mengen und Abbildungen)**

Sei  $C \subseteq \Omega \times X$  und für jedes  $\omega \in \Omega$  sei  $C_\omega := \{x \in X : (\omega, x) \in C\}$  der  $\omega$ -Schnitt von  $C$ .  $C$  heißt **(vorwärts) invariant** (bzgl. dem zugrundeliegenden zufälligen dynamischen System  $\varphi$ ), falls für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\varphi_n(\omega, C_\omega) \subseteq C_{\sigma^n \omega} \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Gilt sogar die Gleichheit, so sprechen wir davon, daß  $C$  **vollständig invariant** ist. Eine Abbildung  $A_\bullet : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X), \omega \mapsto A_\omega$  ist (vorwärts/vollständig) invariant, falls  $\text{graph}(A_\bullet)$  (vorwärts/vollständig) invariant ist.

**Bemerkung 1**

Liegen keine Ausnahmepunkte vor, d.h. gilt obiges sogar für alle  $\omega \in \Omega$ , so spricht man von **strikt (vorwärts/vollständig) invarianten Mengen bzw. Abbildungen**.  $C$  ist genau dann strikt (vorwärts/vollständig) invariant, wenn

$$C \subseteq f^{-n}(C) \quad \text{bzw.} \quad C = f^{-n}(C).$$

**B.2.2 Satz**

Die zufällige Juliamenge

$$\mathcal{J}(F_\bullet) : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad \omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$$

ist strikt invariant. Ist  $f_i$  offen und surjektiv für alle  $i \in I$ , so liegt sogar eine strikt vollständig invariante Abbildung vor.

Beweis:

Sei  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ . Wir zeigen zunächst, daß  $\mathcal{J}(F_\bullet)$  strikt (vorwärts) invariant ist, d.h.

$$\varphi_n(\omega, \mathcal{J}(F_\omega)) \subseteq \mathcal{J}(F_{\sigma^n \omega}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Seien dazu  $x \in \mathcal{J}(F_\omega)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $y := \varphi_n(\omega, x) = (f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1})(x)$ .

**Annahme:** Es gilt  $y \notin \mathcal{J}(F_{\sigma^n \omega})$ .

Es folgt  $y \in \mathcal{F}(F_{\sigma^n \omega})$ . Damit gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $y$  derart, daß  $F_{\sigma^n \omega}$  in jedem Punkt aus  $U$  gleichgradig stetig ist. Setze

$$V := \varphi_n(\omega, \cdot)^{-1}(U).$$

Da  $\varphi_n(\omega, \cdot) = f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1}$  stetig ist, ist  $V$  eine offene Umgebung von  $x$ . Wir zeigen, daß  $F_\omega$  in jedem Punkt von  $V$  gleichgradig stetig ist. Seien dazu  $v_0 \in V, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Setze  $z_0 := \varphi_n(\omega, v_0)$ . Dann folgt  $z_0 \in U$ . Da  $F_{\sigma^n \omega}$  in  $z_0$  gleichgradig stetig ist, gibt es ein  $\delta_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  derart, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $z \in X$  mit  $d(z, z_0) < \delta_1$  gilt

$$d(f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_{n+1}}(z), f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_{n+1}}(z_0)) < \varepsilon.$$

Da  $\varphi_1(\omega, \cdot), \dots, \varphi_n(\omega, \cdot)$  im Punkt  $v_0$  stetig sind, folgt, daß ein  $\delta_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert, so daß für alle  $x \in X$  mit  $d(x, v_0) < \delta_2$  und für  $k = 1, \dots, n$  gilt

$$d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, v_0)) < \min\{\varepsilon, \delta_1\}.$$

Setze nun  $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Sei  $x \in X$  mit  $d(x, v_0) < \delta$ . Für  $k = 1, \dots, n$  folgt

$$d(f_{\omega_k} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(x), f_{\omega_k} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(v_0)) = d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, v_0)) < \varepsilon$$

und für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt mit  $z := \varphi_n(\omega, x)$

$$\begin{aligned} d(\varphi_{n+k}(\omega, x), \varphi_{n+k}(\omega, v_0)) &= d(f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(x), f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(v_0)) \\ &= d(f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_{n+1}}(z), f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_{n+1}}(z_0)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist  $F_\omega$  in jedem Punkt aus  $U$  gleichgradig stetig, d.h. es gilt  $x \in \mathcal{F}(F_\omega)$ .  $\zeta$

Sei nun  $f_i$  offen und surjektiv für alle  $i \in I$ . Sei  $C := \text{graph}(\mathcal{J}(F_\bullet)) = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\} \times \mathcal{J}(F_\omega)$ . Wir zeigen  $f^{-n}(C) \subseteq C$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , durch Kontraposition. Sei dazu  $(\omega, x) \in (\Omega \times X) \setminus C$ ,  $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und  $n \in \mathbb{N}$ . Es folgt  $x \notin \mathcal{J}(F_\omega)$ , also  $x \in \mathcal{F}(F_\omega)$ . Damit gibt es eine offene Umgebung  $U$  von  $x$  in  $X$  derart, daß  $F_\omega$  in jedem Punkt aus  $U$  gleichgradig stetig ist. Setze  $y := \varphi_n(\omega, x)$  und  $V := \varphi_n(\omega, U)$ . Da  $f_i$ ,  $i \in I$ , offen ist, folgt, daß  $V$  eine offene Umgebung von  $y$  in  $X$  ist. Seien  $v \in V, \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Wähle  $u \in U$  mit  $\varphi_n(\omega, u) = v$ . Da  $F_\omega$  in  $u$  gleichgradig stetig ist, existiert ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  so, daß für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in X$  mit  $d(x, u) < \delta$  gilt

$$d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, u)) < \varepsilon.$$

Sei  $y \in X$  mit  $d(y, v) < \delta$ . Da  $f_i$ ,  $i \in I$ , surjektiv ist, folgt, daß ein  $x \in X$  existiert mit  $y = \varphi_n(\omega, x)$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  folgt

$$\begin{aligned} d(f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_{n+1}}(y), f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_{n+1}}(v)) &= d(f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(x), f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(u)) \\ &= d(\varphi_{n+k}(\omega, x), \varphi_{n+k}(\omega, u)) < \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h.  $F_{\sigma^n \omega}$  ist im Punkt  $v$ , also in jedem Punkt aus  $V$ , gleichgradig stetig. Damit ist  $\varphi_n(\omega, x) = y \in \mathcal{F}(F_{\sigma^n \omega})$ , also  $f^n(\omega, x) = (\sigma^n \omega, \varphi_n(\omega, x)) \notin C$ . Es gilt also  $(\omega, x) \notin f^{-n}(C)$ .  $\blacksquare$

Aus dem Standardwerk „Random dynamical systems“ von L. Arnold ergibt sich (siehe [4, Theorem 1.6.13] unter Beachtung der Fußnote auf Seite 28 in [4]):

### B.2.3 Theorem

Sei  $X$  ein polnischer Raum,  $\varphi$  meßbar und die zufällige Juliamenge  $\mathcal{J}(F_\bullet) : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X)$ ,  $\omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$  sei eine compact random set mit  $\mathcal{J}(F_\omega) \neq \emptyset$  für  $\mathbf{P}$ -fast alle  $\omega \in \Omega$ . Dann existiert ein  $f$ -invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$  mit

$$\text{supp } \mu_\omega \subseteq \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

Wir zeigen, daß alle Voraussetzungen von Theorem B.2.3 erfüllt sind, wenn eine Familie von holomorphen Selbstabbildungen  $f_i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ ,  $i \in I$  mit  $\text{grad } f_i \geq 2$  für alle  $i \in I$  vorliegt:

#### Bemerkung 2

Ist  $X$  als separabler Raum vorausgesetzt und ist  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in X$  meßbar, so ist  $\varphi : \mathbb{N}_0 \times \Omega \times X \rightarrow X$ ,  $(k, \omega, x) \mapsto \varphi_k(\omega, x) = (f_{\omega_k} \circ \dots \circ f_{\omega_1})(x)$  meßbar.

#### Beweis:

Aus Bemerkung 1 (Seite 129) folgt die Meßbarkeit von  $(\omega, x) \mapsto \varphi_k(\omega, x)$  für jedes  $k \in \mathbb{N}_0$  und somit auch die von

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \{k\} \times \varphi_k^{-1}(B) = \{(k, \omega, x) \in \mathbb{N}_0 \times \Omega \times X : \varphi_k(\omega, x) \in B\} = \varphi^{-1}(B) \quad \text{für jedes } B \in \mathcal{B}_X.$$

$\blacksquare$

**B.2.4 Satz**

Sei  $X$  lokalkompakt und abzählbar im Unendlichen, außerdem sei  $i \mapsto f_i(x)$  für jedes  $x \in X$  meßbar. Dann ist die zufällige Juliamenge

$$\mathcal{J}(F_\bullet) : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(X), \quad \omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$$

eine closed random set.

Beweis:

Sei  $U \subseteq X$  offen und nicht-leer. Es ist zu zeigen, daß  $A := \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}(F_\omega) \cap U \neq \emptyset\}$  meßbar ist. Sei  $K \subseteq X$  kompakt und seien  $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}_{>0}$ . Dann ist  $L := \{(x, y) \in K^2 : d(x, y) \leq \delta\}$  kompakt und somit

$$G := \{f : X \times X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig, } f(L) \subseteq ]0, \varepsilon[\}$$

eine bezüglich der kompakt-offen Topologie, also auch bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz, offene Menge. Sei  $k \in \mathbb{N}$  und für jedes  $\omega \in \Omega$  sei  $h_\omega : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, y))$ . Dann ist  $h_\omega$  für alle  $\omega \in \Omega$  eine stetige Abbildung. Aus Bemerkung 1 (Seite 129) folgt die Meßbarkeit von  $(\omega, x) \mapsto \varphi_k(\omega, x) = (f_{\omega_k} \circ \dots \circ f_{\omega_1})(x)$  und somit ist auch  $\omega \mapsto h_\omega(x, y)$  meßbar für alle  $x, y \in X$ . Lemma B.1.5 impliziert, daß  $\omega \mapsto h_\omega$  bezüglich der Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz meßbar ist. Damit ist

$$\{\omega \in \Omega : \sup_{(x, y) \in L} d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, y)) < \varepsilon\} = \{\omega \in \Omega : h_\omega(L) \subseteq ]0, \varepsilon[\} = \{\omega \in \Omega : h_\omega \in G\}$$

meßbar. Es ist  $U$  lokalkompakt und aus [70, Satz 10.15] folgt, daß  $U$  auch abzählbar im Unendlichen ist. Damit gibt es eine Folge  $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$  kompakter Mengen mit  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = U$ . Die Meßbarkeit von  $A$  ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} A^c &= \{\omega \in \Omega : U \subseteq \mathcal{F}(F_\omega)\} \stackrel{\text{A.1.2}}{=} \{\omega \in \Omega : F_\omega \text{ ist in jedem Punkt } x_0 \in U \text{ gleichgradig stetig}\} \\ &\stackrel{\text{Bem. 1 (Seite 117)}}{=} \{\omega \in \Omega : F_\omega \text{ ist auf } K_n \text{ gleichgradig stetig für jedes } n \in \mathbb{N}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \forall x, y \in K_n : d(x, y) \leq \delta \Rightarrow d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, y)) < \varepsilon\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}_{>0}} \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : \forall x \in K_n \forall y \in K_n \cap \overline{\mathbb{B}}(x, \delta) : d(\varphi_k(\omega, x), \varphi_k(\omega, y)) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

■

Zusammen mit Satz A.2.6 ergibt sich nun

**B.2.5 Korollar**

Sei  $k \in \mathbb{N}$  und sei  $f_i : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$  für jedes  $i \in I$  eine holomorphe Abbildung mit  $\text{grad } f_i \geq 2$ , derart, daß  $i \mapsto f_i(z)$  meßbar ist für alle  $z \in \mathbb{P}^k$ . Dann existiert ein bzgl. dem zugehörigen Schiefprodukt  $f : \Omega \times \mathbb{P}^k \rightarrow \Omega \times \mathbb{P}^k$  invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$  mit

$$\text{supp } \mu_\omega \subseteq \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

**B.3. Ein einfaches Gegenbeispiel**

Ist  $i \mapsto f_i(x)$  nicht meßbar für jedes  $x \in X$ , so ist das zugehörige Schiefprodukt  $f$  nach Satz B.1.2 nicht meßbar. Das nachfolgende Beispiel zeigt, daß noch nicht einmal die zufällige Juliamenge  $\omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$  eine (closed) random set sein muß:

**B.3.1 Beispiel**

Sei  $I$  ein meßbarer Raum mit  $|I| \geq 2$  und  $\Omega := I^{\mathbb{N}}$ , versehen mit der Produkt- $\sigma$ -Algebra. Es gebe eine nicht-meßbare Teilmenge  $J$  von  $I$ , und für jedes  $i \in I$  sei

$$f_i : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto \begin{cases} z^2, & \text{falls } i \in J \\ 2 \cdot z^2, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist  $F_\omega := \{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $\omega = (\omega_n) \in \Omega$ , so ist die zugehörige zufällige Juliamenge

$$\mathcal{J}(F_\bullet) : \Omega \rightarrow \mathfrak{P}(\widehat{\mathbb{C}}), \quad \omega \mapsto \mathcal{J}(F_\omega)$$

keine (closed/compact) random set.

Beweis:

Sei  $\varepsilon := \frac{1}{2}$  und

$$U := \bigcup_{a \in \mathbb{C}, |a|=1} \mathbb{B}(a, \varepsilon),$$

wobei wir die euklidische Metrik betrachten. Dann ist  $U$  eine offene Menge und wir werden zeigen, daß

$$A := \{\omega \in \Omega : \mathcal{J}(F_\omega) \cap U \neq \emptyset\}$$

keine meßbare Teilmenge von  $\Omega$  ist. Sei dazu  $C := \{\omega = (\omega_n) \in \Omega : \omega_1 \in J\}$ . Wir zeigen:  $A = C$ .

„ $\subseteq$ “: (durch Kontraposition) Sei  $\omega = (\omega_n) \in \Omega \setminus C$ . Dann ist  $\omega_1 \notin J$ , d.h.  $f_{\omega_1}(z) = 2 \cdot z^2$ ,  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > \varepsilon = \frac{1}{2}$  folgt

$$|f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(z)| \geq 2^{2^n - 1} \cdot |z|^{2^n} \geq 2^{2^n - 1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 2^{2^n - 1} \cdot 2^{-2^n} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Mit dem Satz von Montel folgt

$$\mathcal{J}(F_\omega) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon\}.$$

Für alle  $a, z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| \leq \varepsilon$  und  $|a| = 1$  gilt  $|z - a| \geq ||z| - |a|| = 1 - |z| \geq 1 - \frac{1}{2} = \varepsilon$ , also  $z \notin \mathbb{B}(a, \varepsilon)$ . Damit ist  $\mathcal{J}(F_\omega) \cap U = \emptyset$ , also  $\omega \notin A$ .

„ $\supseteq$ “: Sei  $\omega = (\omega_n) \in C$ . Gilt  $\omega_n \in J$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so folgt  $\mathcal{J}(F_\omega) = \partial\mathbb{B}(0, 1)$  und somit  $\omega \in A$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  sei  $\varepsilon_k := \exp\left(-\frac{\log 2}{2^k}\right)$ . Es gebe ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $\omega_k \notin J$ . Wir wählen  $k$  minimal mit dieser Eigenschaft. Es folgt  $k \geq 2$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| < \varepsilon_{k-1}$  gilt

$$\begin{aligned} |f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(z)| &\leq |z|^{2^{n+k}} \cdot \prod_{j=0}^n 2^{2^{n-j}} = |z|^{2^{n+k}} \cdot 2^{\sum_{j=0}^n 2^{n-j}} = |z|^{2^{n+k}} \cdot 2^{\sum_{j=0}^n 2^j} \\ &= |z|^{2^{n+k}} \cdot 2^{2^{n+1} - 1} < \varepsilon_{k-1}^{2^{n+k}} \cdot 2^{2^{n+1} - 1} = \varepsilon_{k-1} \cdot 2^{2^{n+1} - 1} \cdot \exp\left(-\frac{\log 2}{2^{k-1}}\right)^{2^{n+k} - 1} \\ &= \varepsilon_{k-1} \cdot \exp\left((2^{n+1} - 1) \cdot \log 2\right) \cdot \exp\left(-\frac{\log 2}{2^{k-1}}\right)^{2^{n+k} - 1} \\ &= \varepsilon_{k-1} \cdot \exp\left(\left(2^{n+1} - 1 - 2^{n+1} + \frac{1}{2^{k-1}}\right) \cdot \log 2\right) \leq \varepsilon_{k-1} \cdot \exp(0) = \varepsilon_{k-1}. \end{aligned}$$

Ist also  $W := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varepsilon_{k-1}\}$ , so gilt  $f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(W) \subseteq W$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Nach dem Satz von Montel ist die Familie  $\{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}_{\geq k}\}$  somit auf  $W$  normal. Damit ist auch  $\{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\} = F_\omega$  auf  $W$  normal. Es folgt

$$\mathcal{J}(F_\omega) \subseteq \mathbb{C} \setminus W = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \varepsilon_{k-1}\}.$$



Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z| > \varepsilon_k$  gilt

$$\begin{aligned} |f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(z)| &\geq 2^{2^n} \cdot |z|^{2^{n+k}} > 2^{2^n} \cdot \varepsilon_k^{2^{n+k}} = \varepsilon_k \cdot 2^{2^n} \cdot \exp\left(-\frac{\log 2}{2^k}\right)^{2^{n+k}-1} \\ &= \varepsilon_k \cdot \exp(2^n \cdot \log 2) \cdot \exp\left(-(2^{n+k} - 1) \cdot \frac{\log 2}{2^k}\right) = \varepsilon_k \cdot \exp\left(\frac{\log 2}{2^k}\right) > \varepsilon_k. \end{aligned}$$

Ist also  $W := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon_k\} \cup \{\infty\}$ , so folgt  $f_{\omega_{n+k}} \circ \dots \circ f_{\omega_1}(W) \subseteq W$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Nach dem Satz von Montel ist die Familie  $\{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}_{\geq k}\}$  in  $W$  normal. Daraus folgt, daß auch  $\{f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_1} : n \in \mathbb{N}\} = F_\omega$  in  $W$  normal ist. Damit gilt

$$\mathcal{J}(F_\omega) \subseteq \mathbb{C} \setminus W = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \varepsilon_k\},$$

insgesamt also  $\mathcal{J}(F_\omega) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \varepsilon_{k-1} \leq |z| \leq \varepsilon_k < 1\}$ . Sei  $z \in \mathcal{J}(F_\omega)$ . Setze  $a := \frac{z}{|z|}$ . Dann gilt  $|a| = 1$  und

$$|z - a| = \left|z - \frac{z}{|z|}\right| = |z| \cdot \left|1 - \frac{1}{|z|}\right| = |z| \cdot \left(\frac{1}{|z|} - 1\right) = 1 - |z| \leq 1 - \varepsilon_{k-1} < 1 - \varepsilon_0 = \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

also  $z \in U$ , d.h.  $\omega \in A$ .

Damit gilt  $A = C$ . Ist  $\omega^* \in \prod_{i=2}^\infty I$ , so stimmt der  $\omega^*$ -Schnitt  $C_{\omega^*} = \{i \in I : (i, \omega^*) \in C\}$  von  $C$  entlang  $\omega^*$  mit  $J$  überein. Da Schnitte von meßbaren Mengen stets meßbar sind, folgt, daß  $C = A$ , keine meßbare Teilmenge von  $\Omega$  ist. ■

Da der Träger eines auf  $\Omega \times \widehat{\mathbb{C}}$  definierten Wahrscheinlichkeitsmaßes nach Beispiel A.4.4 stets eine (closed) random set ist, folgt

### B.3.2 Korollar

Sei in der Situation von Beispiel B.3.1 zusätzlich ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbf{P}$  auf  $\Omega$  gegeben. Dann gibt es kein  $\mu \in \mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times \widehat{\mathbb{C}})$  mit

$$\text{supp } \mu_\omega = \mathcal{J}(F_\omega) \quad \text{für } \mathbf{P}\text{-fast alle } \omega \in \Omega.$$

#### Bemerkung 1

Da das Urbild von  $\{1\}$  unter  $i \mapsto f_i(1)$  mit der nicht-meßbaren Menge  $J$  übereinstimmt, folgt aus Satz B.1.2, daß auch das zugehörige Schiefprodukt

$$f : \Omega \times \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \Omega \times \widehat{\mathbb{C}}, \quad ((\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}, z) \mapsto ((\omega_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}, f_{\omega_1}(z))$$

nicht meßbar ist.



## Literaturverzeichnis

- [1] ADLER, R. L., KONHEIM, G., AND MCANDREW, M. H. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), p. 309-319.
- [2] AMANN, H., AND ESCHER, J. *Analysis III*. Grundstudium Mathematik, Birkhäuser Verlag, 2001.
- [3] ARMITAGE, D. H., AND GARDINER, S. J. *Classical potential theory*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.
- [4] ARNOLD, L. *Random dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics, 1998.
- [5] BAUER, H. *Maß- und Integrationstheorie*. de Gruyter Lehrbuch, 1990.
- [6] BERGWELER, W. Iteration of meromorphic functions. *Bulletin of the American Mathematical Society* **29** (1993), p. 151-188.
- [7] BLANCHARD, F., GLASNER, E., KOLYADA, S., AND MAASS, A. On Li-Yorke pairs. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **547** (2002), p. 51-68.
- [8] BOWEN, R. Topological entropy for noncompact sets. *Transactions of the AMS*, Vol. **184** (1973), p. 125-135.
- [9] BOYD, D. An invariant measure for finitely generated rational semigroups. *Complex Variables. Theory and Application* **39** (1999), No. 3, p. 229-254.
- [10] BRÖCKER, T., AND JÄNICH, K. *Einführung in die Differentialtopologie*. Heidelberger Taschenbücher (Band 143), Springer-Verlag, 1973.
- [11] BROLIN, H. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.* **6** (1965), p. 103-144.
- [12] CASTAING, C., AND VALADIER, M. *Convex analysis and measurable multifunctions*, *Lecture Notes in Mathematics* Vol. **580** (1977).
- [13] CRAUEL, H. Random probability measures on polish spaces. Habilitationsschrift, Universität Bremen, 1995.
- [14] DE RHAM, G. *Differentiable Manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaft 266, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1984.
- [15] DENKER, M., GORDIN, M., AND HEINEMANN, S.-M. On the relative variational principle for fibre expanding maps. *Ergodic theory and dynamical Systems* **22** (2002), p. 757-782.
- [16] DENKER, M., GRILLENBERGER, C., AND SIGMUND, K. *Ergodic theory on compact spaces*. *Lecture Notes in Mathematics* Vol. **527** (1976).

- [17] DIEUDONNÉ, J., AND MACDONALD, I. G. *Treatise on analysis, 10-III*. Academic Press New York, London, 1972.
- [18] DO CARMO, M. P. *Differential forms and applications*. Springer-Verlag, 1994.
- [19] DOWNAROWICZ, T., AND SERAFIN, J. Fiber entropy and conditional variational principles in compact non-metrizable spaces. *Fundamenta Mathematicae* **172** (2002), p. 217-247.
- [20] FONSECA, I., AND GANGBO, W. *Degree theory in analysis and applications*. Oxford Lecture Series in Mathematics and its applications 2, 1995.
- [21] FORNÆSS, J. E., AND SIBONY, N. Complex dynamics in higher dimension I. *Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992)*, *Astérisque* No. **222** (1994), p. 201-231.
- [22] FORNÆSS, J. E., AND SIBONY, N. Complex dynamics in higher dimension II. *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, p. 135-182, *Ann. of Math. Stud.* **137**.
- [23] FORNÆSS, J. E., AND SIBONY, N. Complex dynamics in higher dimensions. *Complex potential theorie, P.M.Gauthier, NatoAS Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences* **439** (1994), *Proceedings of the NATO Advanced study institute and seminaire de mathematiques superieures on complex potential theory, Montreal, Canada, Jul 26-August 6, 1993*.
- [24] FORNÆSS, J. E., AND WEICKERT, B. Random iteration in  $\mathbb{P}^k$ . *Ergodic theory and dynamical Systems* **20** (2000), No. 4.
- [25] FORSTER, O. *Analysis 3*. Vieweg Studium, 3. Auflage, 1996.
- [26] FREIE, A., LOPEZ, A., AND MAÑÉ, R. An invariant measure for rational maps. *Bol. Soc. Bras. Math* **6** (1983), p. 45-62.
- [27] FRITZSCHE, K., AND GRAUERT, H. *From holomorphic functions to complex manifolds*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 2002.
- [28] GÄNSSLER, P., AND STUTE, W. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [29] GRAUERT, H., AND REMMERT, R. Plurisubharmonische funktionen in komplexen Räumen. *Mathematische Zeitschrift* **65** (1956), p. 175-194.
- [30] GRIFFITHS, P., AND HARRIS, J. *Principles of algebraic geometry*. Pure & applied mathematics, a wiley-interscience series of texts, monographs and tracts, 1978.
- [31] GUNNING, R. C. *Introduction to holomorphic functions of several variables, Vol. II: Local Theory*. Wadsworth & brooks/Cole Mathematics Series, 1990.
- [32] HANDEL, M., AND KITCHENS, B. Metrics and entropy for non-compact spaces. *Israel Journal of Mathematics* **91** (1995), p. 253-271.
- [33] HEUSER, H. *Analysis I*. B.G. Teubner Stuttgart, 11. Auflage, 1994.
- [34] HEUSER, H. *Analysis II*. B.G. Teubner Stuttgart, 6. Auflage, 1991.

- [35] HOFER, J. E. Topological entropy for noncompact spaces. *Michigan Math. J.* **21** (1975), No. 3, p. 235-242.
- [36] HÖRMANDER, L. *An introduction to complex analysis in several variables*. North-Holland Mathematical Library, 1990.
- [37] HU, P.-C., AND YANG, C.-C. *Differentiable and complex dynamics of several variables*. Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [38] HUA, X.-H., AND YANG, C.-C. *Dynamics of transcendental functions*. Gordon and Breach Science Publishers, 1998.
- [39] HUBBARD, J. H., AND PAPADOPOULOS, P. Superattractive fixed points in  $\mathbb{C}^n$ . *Indiana University Mathematics Journal* **43**, No. 1 (1994), p. 321-365.
- [40] JACOBS, K. Ergodic decomposition of the Kolmogoroff-Sinai invariant. In *Ergodic theory, edited by Fred B. Wright, Proceeding of an international Symposium held at Tulane University, New Orleans, Louisiana, October, 1961* (1963).
- [41] JONSSON, M. Ergodic properties of fibered rational maps. *Ark. Mat.* **38**, p. 281-317 (2000).
- [42] KATOK, A., AND HASSELBLATT, B. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Encyclopedia of mathematics and its applications **54**, 1995.
- [43] KELLEY, J. L. *General Topology*. D. van Nostrand Company, Inc., The university series in higher mathematics, 1957.
- [44] KLIMEK, M. *Pluripotential theory*. Oxford science publications, 1991.
- [45] LANG, S. *Real and functional analysis*. Springer-Verlag, 1993.
- [46] LJUBICH, M. J. Entropy properties of rational endomorphisms of the riemann sphere. *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **3** p. 351-385 (1983).
- [47] ŁOJASIEWICZ, S. *Introduction to complex analytic geometry*. Birkhäuser Verlag, 1991.
- [48] MAÑÉ, R. On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Math.* **14** (1983), p. 27-43.
- [49] MAÑÉ, R. *Ergodic theory and differentiable dynamics*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3. Folge, Band 8, A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, 1987.
- [50] MARTIN, N. F., AND ENGLAND, J. W. *Mathematical Theory of Entropy, Encyclopedia of mathematics and its applications, 12*. Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [51] MATHERON, G. *Random sets and integral Geometry*. Wiley Series in Probability and mathematical statistics, 1975.
- [52] MILNOR, J. *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures*. Vieweg, Braunschweig, 2000.

- [53] NARASIMHAN, R. *Analysis on real and complex manifolds*. Advanced studies in pure mathematics, A. Grothendieck and N. H. Kuiper Editors, 1973.
- [54] PESIN, Y. B. *Dimension theory in dynamical systems: Contemporary Views and applications*. Chicago Lectures in Mathematics, 1997.
- [55] PESIN, Y. B., AND PITSKEL, B. S. Topological pressure and the variational principle for noncompact sets. *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya* **18** (1984), p. 50-63, engl. transl. in *Functional Analysis and its Applications* **18** (1984), p. 307-318.
- [56] PETERSEN, K. *Ergodic Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics 2, 1983.
- [57] PRZYTYCKI, F., AND URBANSKI, M. *Fractals in the plane - the ergodic theory methods*. Cambridge University Press, unpublished script (version: 02/2002).
- [58] RANSFORD, T. *Potential theory in the complex plane*. London mathematical society student texts 28, 1995.
- [59] REMMERT, R. *Funktionentheorie 1*. Springer-Lehrbuch, 1992.
- [60] ROHLIN, V. A. On the fundamental ideas of measure theory. *Amer. Math. Soc. Translation* **1952** (1952), No. 7, p. 1-54 (1952).
- [61] ROHLIN, V. A. Lectures on the entropy theory of measure-preserving transformations. *Russ. Math. Surv.* **22**, No. 5, p. 1-52 (1967).
- [62] SABOT, C. Spectral properties of hierarchical lattices and iteration of rational maps. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* No. **92** (2003), vi + 104pp.
- [63] SCHIFF, J. L. *Normal Families*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [64] SCHNEIDER, R., AND WEIL, W. *Stochastische Geometrie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik, 2000.
- [65] SIBNONY, N. Dynamique des applications rationelle de  $\mathbb{P}^k$ . *Dynamique et géométrie complexes, Panoramas et synthèses, Numéro* **8** (1999), p. 97-185.
- [66] SMILLIE, J. Complex dynamics in several variables. *Flavors of Geometry, MSRI Publications, Vol.* **31** (1997).
- [67] STEINMETZ, N. *Rational Iteration, complex analytic dynamical systems*. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1993.
- [68] STORCH, U., AND WIEBE, H. *Lehrbuch der Mathematik Band 4: Analysis auf Mannigfaltigkeiten - Funktionentheorie - Funktionalanalysis*. Spektrum Akademischer Verlag, 2001.
- [69] SUMI, H. Skew product maps related to finitely generated rational semigroups. *Non-Linearity* **13** No.4 (2000), p. 995-1019.
- [70] VON QUERENBURG, B. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Lehrbuch, 2001.

- 
- [71] WALTERS, P. *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer Verlag, New York, 1982.
- [72] WENDT, M. *Invariante Maße und Juliamengen meromorpher Funktionen*. Diplomarbeit am Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2002.
- [73] WENDT, M. The entropy of entire transcendental functions. *Preprint* (2004).
- [74] WERNER, D. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 2000.





# Symbolverzeichnis

$\bar{A}$ , 8	$f * g$ , 39
$A^c$ , 8	$F_\omega$ , 93
$\mathbb{B}(x_0, \varepsilon) = \mathbb{B}_d(x_0, \varepsilon)$ , 74	grad, 47, 52
$\bar{\mathbb{B}}(x_0, \varepsilon) = \bar{\mathbb{B}}_d(x_0, \varepsilon)$ , 74	graph( $A_\bullet$ ), 123
$\mathcal{B}_X$ , 120	$\mathfrak{h}_d(f, K)$ , 74
$\hat{\mathbb{C}}$ , 7	$\mathfrak{h}_d(f)$ , 74
$C^k, C^\infty, C^\omega$ , 8	$\mathfrak{h}_D(f)$ , 75
$C_0^\infty(X)$ , 9	$\underline{\mathfrak{h}}_D(f)$ , 77
$C^*$ , 104	$\mathfrak{h}_\mu(T)$ , 64
$C^k(M, \Lambda(T(M), \mathbb{C}))$ , 24	$\mathfrak{h}_\mu(T, \beta)$ , 64
$\mathcal{C}_{1,1}(\mathbb{P}^k)$ , 56	$H_\mu(\beta)$ , 63
$d$ , 26	$\text{id}_A$ , 8
$d_A(f, g)$ , 129	$\mathbb{1}_A$ , 121
$d_a f$ , 13, 20	$\mathcal{J}(f)$ , 118
$d_n, d_{n,f}$ , 74	$\mathcal{J}(F)$ , 118
$D^\alpha$ , 9, 28	$\mathcal{J}(F_\bullet)$ , 127
$\Delta$ , 10	$\mathbb{K}$ , 13
$\delta_\varepsilon$ , 94	$\mathcal{K}(X)$ , 74, 123
$df$ , 24	$\Lambda^k(T(M), \mathbb{C})$ , 23
diam $A$ , 79	$\Lambda^k(V, W)$ , 22
dist( $A, B$ ), dist $_d(A, B)$ , 39	$\Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{C})$ , 25
dist( $x, A$ ), dist $_d(x, A)$ , 39	$\Lambda^{p,q}(T_a(M), \mathbb{R})$ , 25
$\mathfrak{D}^{p,q}(M)$ , 28	$\mathcal{M}(k, n)$ , 23
$\mathfrak{D}_{p,q}(M)$ , 29	$\mu_\bullet$ , 121
$\mathfrak{D}_0^{p,q}(M)$ , 28	$(\mu_\omega)_\omega$ , 121
$\mathfrak{D}_{p,q}^0(M)$ , 29	$\ \cdot\ $ , 12
$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(U)$ , 9	$\ \cdot\ _K$ , 8
$\mathfrak{D}'$ , 9	Im $\omega$ , 23
$\mathfrak{D}_0$ , 9	Re $\omega$ , 23
$dV$ , 31	$\Omega_{a,b}$ , 36
$\mathcal{E}(X, T)$ , 64	$\Omega_\varepsilon$ , 39
$f^*$ , 18, 54, 56	$\Omega^*$ , 96
$f_*$ , 54, 107	$\otimes$ , 8
$f^n$ , 74	$\mathbb{P}^k$ , 45
$f^{-n}$ , 94	
$\bar{f}, \underline{f} : (X, x) \rightarrow Y$ , 18	
$\mathcal{F}(F)$ , 118	

$\partial, \bar{\partial}$ , 26

$\partial_x f, \bar{\partial}_x f$ , 15, 22

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ , 9

$\frac{\partial f}{\partial z_j}, \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}$ , 15, 21

$\pi^* T$ , 56, 60

$\pi$ , 45

$\pi_x$ , 19

$\mathcal{P}_k$ , 52

$\mathfrak{P}(X)$ , 77, 122

$\mathcal{P}(X)$ , 64

$\mathcal{P}_T(X)$ , 64

$\mathcal{P}_{\mathbf{P}}(\Omega \times X)$ , 120

$r_n(\varepsilon, K), r_n(\varepsilon, K, f), r_n(\varepsilon, K, f, d)$ , 74

$\sigma(\mathcal{E})$ , 66

$\sigma_I$ , 77

$s_n(\varepsilon, K), s_n(\varepsilon, K, f), s_n(\varepsilon, K, f, d)$ , 74

$\text{supp } f$ , 9

$\text{supp } T$ , 29

$\text{supp } \mu_{\bullet}$ , 124

$\text{supp } \omega$ , 28

$T(M)$ , 20

$T|_U$ , 29

$T_{\chi}$ , 31

$\langle T_{\chi}, \omega \rangle (= \langle \chi, \omega \rangle)$ , 31

$T_f (= f)$ , 10

$\langle T_f, \varphi \rangle (= \langle f, \varphi \rangle)$ , 10

$T_{\omega}$ , 97

$T_x f$ , 19

$u_{a,b}$ , 12, 36

$\bigvee_{i \in I} \xi_i$ , 63

$\wedge$ , 22

$\bar{z}$ , 8

# Index

- Abbildung
  - Entropie-, 65
  - anti- $\mathbb{C}$ -lineare, 14
  - differenzierbare, 17
  - eigentliche, 75
  - harmonische, 35
  - holomorphe, 15, 17
  - komplex differenzierbare, 15
  - oberhalb-stetige, 35
  - pluri-harmonische, 12, 36
  - pluri-subharmonische, 36
  - subharmonische, 35
- Abbildungskeim, 18
- Äußere Ableitung, 24
- Äußeres Produkt, 22
- Alternierende  $k$ -Linearform, 22
- Anti- $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung, 14
- Atlas, 16
- Basis
  - einer Partition, 66
  - eines Maßraumes, 66
- Borel-Partition, 66
- Cauchy-Riemannsche DGL, 15
- Closed random set, 122
- Compact random set, 122
- Current, 29
  - Ableitung von, 33
  - Greenscher, 97
  - der Ordnung 0, 29
  - geschlossener, 33
  - positiver, 33
- $C^\infty$ -Topologie, 28
- Derivation, 18
- Differential, 13
- Differentialform
  - komplexe, 23, 25
  - vom Typ  $(p, q)$ , 25
  - reelle, 23
- Differenzierbar
  - $\mathbb{C}$ -, 15
  - $\mathbb{R}$ -, 13
- Distribution, 9
  - positive, 9
- Elementar (stark) positive Linearform, 33
- Entropie
  - Maßerhaltende-, 64
  - Topologische, 74, 75, 78
  - einer Partition, 63
- Entropie-Abbildung, 65
- Ergodische Zerlegung, 68
- Ergodisches Maß, 64
- Faktorisierung, 121
- Faktorraum, 67
- Familie
  - normale, 117
- Fatoumenge, 118
- Form
  - Differential-, 23
  - Standardvolumen-, 31
- Gleichgradig stetige Familie, 117
- Goodwyn's Theorem, 84
- Grad
  - einer Liftung, 52
  - einer Polynomfunktion, 47
- Greenscher Current, 97
- Harmonische Funktion, 35
- Homogene Koordinaten, 45
- Juliamenge, 118
  - zufällige, 127
- $k$ -Form, 23
- $k$ -Linearform, 22
  - alternierende, 22
- Kanonische Orientierung, 31
- Karten, 16

- Kettenregel, 19
- Kompaktifizierung
  - Einpunkt-, 81
  - Stone-Čech-, 73
  - Wallman-, 83
- Komplexe Differentialform, 25
- Komplexer projektiver Raum, 45
- Koordinatenfunktion, 17
- Kritischer Punkt, 120
- Laplace-Operator, 10
- Lebesgue-Raum, 66
- Levi-Form, 33
- Liftung, 52
- Linearform, 22
  - alternierende, 22
  - elementar (stark) positive, 33
- Maß
  - ergodisches, 64
- Main-Approximation-Theorem, 39
- Mannigfaltigkeit, 16
- Marginalmaß, 120
- Meßbare Partition, 66
- Menge
  - algebraische, 107
  - analytische, 107
  - invariante, 131
    - vollständig-, 102, 131
    - vorwärts-, 131
  - lokal pluripolare, 105
- Mittelwertungleichung
  - für pluri-(sub)harmonische Funktionen, 36
  - für subharmonische Funktionen, 35
- Monge-Ampère Operator, 31, 58
- Multi-Index, 23
- Multilinearform, 22
- Normale Familie, 117
- $\partial\bar{\partial}$ -Poincaré Lemma, 44
- Partition
  - meßbare, 66
- Pluri-(sub)harmonische Funktion, 36
- Pluri-harmonische Funktion, 12
- Pluripolare Menge, 105
- Polnischer Raum, 66
- Polynomfunktion, 47
  - homogene, 47
- Potential, 11, 52
  - stetiges, 53
- $(p, q)$ -Form, 25
  - positive, 33
- Pull back, 18, 54, 56, 106
- Punkt
  - extremer, 69
  - kritischer, 120
  - regulärer, 120
  - stabiler, 118
- Push forward, 54
- Random set
  - closed, 122
  - compact, 122
- Raum
  - Lebesgue-, 66
  - komplexer projektiver, 45
  - polnischer, 66
  - separabler, 66
  - vollständiger, 64
  - vollständiger (mod 0), 66
- Regulärer Punkt, 120
- Regulärer Wert, 120
- Separabler Raum, 66
  - $(n, \varepsilon)$ -Separated set, 74
  - $(n, \varepsilon)$ -Spanning set, 74
- Stabiler Punkt, 118
- Standardvolumenform, 31
- Stone-Čech-Kompaktifizierung, 73
- Subharmonische Funktion, 35
- Tangentialabbildung, 19
- Tangentialbündel, 20
- Tangentialraum, 18
- Testform, 28
- Testfunktion, 9
- Theorem
  - von Goodwyn, 84
- Topologische Entropie, 72–83
- Totales Differential, 13, 19
- Träger
  - einer Differentialform, 28
  - einer Funktion, 9
  - eines  $(p, q)$ -Currents, 29
- Untergeordnete Menge, 77
- Variationsprinzip, 84

- Verfeinerung, 63
- Vervollständigung, 64
- Vielfachheit, 119
- Vollständiger Raum (mod 0), 66
  
- Wallman-Kompaktifizierung, 83
- Wert
  - regulärer, 120
- Wirtinger Ableitung, 15, 21
  
- Zufällige Juliamenge, 127
- Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß, 121



# Curriculum vitae

## Persönliche Daten:

Name: Markus Wendt  
Anschrift: Holtenauer Str. 173  
24118 Kiel  
Tel: (04 31) 3 28 93 62  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Geburtsdatum: 24. Oktober 1974  
Geburtsort: Kiel  
Familienstand: ledig

## Schulausbildung:

07.1981-06.1985 Peter-Petersen Grund- und Hauptschule, Kiel  
07.1985-06.1991 Timm-Kröger Realschule, Kiel  
07.1991-06.1994 Berufliche Schulen am Schützenpark,  
Fachgymnasium Technischer Zweig, Kiel (Abitur)

## Wehrdienst:

10.1994-09.1995 Grundwehrdienst bei der Marine, Flensburg

## Studium:

10.1995-02.2002 Studium der Mathematik an der  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel,  
Abschluß: Diplom in Mathematik  
seit 04.2002 Studium zum Diplom-Informatiker an der  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

## Ausgeübte Tätigkeiten:

10.1998-09.2001 Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel  
seit 04.2002 Anstellung als wissenschaftlicher Mitarbeiter am  
Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel





**Eidesstattliche Erklärung:**

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch meinen akademischen Lehrer, in Inhalt und Form selbst angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 20. April 2005