

Welche Leistungen erbringen Viertklässler  
bei Aufgaben zum Thema Größen?

Untersuchungen  
zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Kompetenz  
im Grundschulalter im Rahmen von IGLU

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
an der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von  
Kirstin Rosemarie Lobemeier

Kiel, im Mai 2005



Welche Leistungen erbringen Viertklässler  
bei Aufgaben zum Thema Größen?

Untersuchungen  
zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Kompetenz  
im Grundschulalter im Rahmen von IGLU

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
an der Erziehungswissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von  
Kirstin Rosemarie Lobemeier

Kiel, im Mai 2005

Referent/in:	Prof. Dr. Gerd Walther
Korreferent/in:	Prof. Dr. Manfred Prenzel
Tag der mündlichen Prüfung:	19. August 2005
Zum Druck genehmigt:	19. August 2005

---

Der Dekan

Meinen lieben Eltern

Rosemarie und Peter Landolf Lobemeier

## Zusammenfassung

Das Thema Größen und Messen besitzt als eine fundamentale Idee einen lebensweltlichen Bezug für alle Menschen der unterschiedlichsten Altersstufen, ist damit von allgemeinbildender Natur und steht im Kontext des lebenslangen Lernens.

In der vorliegenden Arbeit wurden anhand von Multiple-Choice-Aufgaben die Stärken und Schwächen, insbesondere die Fehlvorstellungen von nahezu 6000 Grundschulkindern der Bundesrepublik Deutschland am Ende der vierten Jahrgangsstufe zu Sachrechenaufgaben des Themas Größen erforscht. Die Arbeit bediente sich des Datenmaterials der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung und ihrer Erweiterung um die Fächer Mathematik und Naturwissenschaften (IGLU bzw. IGLU-E) aus dem Jahr 2001. Diese Studie lieferte erstmals Befunde über Bildungsvoraussetzungen und Bildungsergebnisse von Viertklässlern der BRD. Basierend auf dem zu den ausgewählten Items der Studie entwickelten Kategoriensystem wurden die Aufgaben sowohl quantitativ als auch qualitativ ausgewertet. Die Untersuchung machte sich insbesondere die in der IGLU-E-Arbeitsgruppe entwickelten Kompetenzstufenmodelle für die Mathematik und Naturwissenschaften zunutze. Vor diesem Hintergrund wurden Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Fehlvorstellungen in den verschiedenen Leistungsgruppen analysiert. Da einige der IGLU-Aufgaben bereits in den Grundschulstudien TIMSS-POP1 (1995) und CROSSTEL (1993) eingesetzt wurden, konnte trotz des Zeitabstandes zwischen diesen drei Erhebungen überprüft werden, ob die in IGLU-E festgestellten Fehlkonzepte auch bei Viertklässlern der anderen Populationen auftreten.

Es zeigte sich, dass die Viertklässler die Größenaufgaben nicht nur aus den verschiedenen Kategorien, sondern auch innerhalb der einzelnen Aufgabengruppen unterschiedlich erfolgreich lösten. Bei Aufgaben mit hoher Itemschwierigkeit mussten auch die leistungsstarken Kinder Leistungseinbußen verzeichnen. Bezüglich der Leistungen der Mädchen und Jungen konnten keine signifikanten Leistungsunterschiede festgestellt werden. Der Vergleich der Befunde aus den drei Grundschulstudien IGLU, TIMSS und CROSSTEL wies auf gleiche Fehlkonzepte der Schülerinnen und Schüler dieses Alters hin. Darüber hinaus trennten die meisten der untersuchten Aufgaben die Leistungen der Viertklässler in den verschiedenen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen gut voneinander. Die Auswertungen ergaben ferner, dass Grundschul Kinder mit dem Multiple-Choice-Antwortformat keine Schwierigkeiten besitzen; Mehrfachmarkierungen der Viertklässler waren in nur sehr geringem Umfang zu verzeichnen.

Die Befunde dieser Arbeit können für Grundschullehrkräfte der Fächer Mathematik und Naturwissenschaften als Ansatzpunkt zur differenzierten Wahrnehmung der Leistungen von Kindern zu Sachrechenaufgaben der Größenthematik und damit insbesondere für Konzepte zur individuellen Förderung leistungsschwacher sowie leistungsstarker Kinder im Mathematik- und Sachunterricht der Grundschule genutzt werden. Derartige Fördermaßnahmen sind auch im Hinblick auf die Bildungsstandards für die Grundschule von Bedeutung.

## Abstract

The topic of dimensions and measurements as a fundamental idea has a connection to the real world for people of every age. It therefore has general educational value and is a part of lifelong learning.

The present work uses multiple choice questions to study the strengths and weaknesses, especially misconceptions about practical calculation problems in the area of dimensions, of almost 6000 primary school children in the Federal Republic of Germany, at the end of the fourth grade. The study used the data of the Progress in International Reading Literacy Study and its extension into the fields of mathematics and natural sciences (IGLU + IGLU-E) of 2001. This study is unprecedented in producing data regarding educational prerequisites and results of fourth graders in the Federal Republic of Germany. On the basis of the category system developed for the selected study items, the problems were analyzed both quantitatively and qualitatively. The study made particularly effective use of the competence level models for mathematics and natural sciences, that were developed by the IGLU-E working group. Against this background, similarities and differences among misconceptions at the different competence levels were analyzed. Since some of the IGLU problems had already been used in the primary school studies TIMSS-POP1 (1995) and CROSSTEL (1993), it was possible to determine, in spite of the time intervals separating these three studies, whether the misconceptions found in the IGLU-E also occur in fourth graders of other populations.

It turned out that the fourth graders solved the dimension problems with varying degrees of success, not only when different categories were compared but within the individual groups of problems. In problems with great item difficulty, even the highly competent children showed decreased achievement. No significant difference could be demonstrated in the success of boys and girls. Comparison of the data from the three primary school studies, IGLU, TIMSS and CROSSTEL, pointed to the same misconceptions in boys and girls of this age. Over and above this, most of the problems studied produced a good separation between fourth graders at the different achievement levels in mathematics and natural sciences. Moreover, the evaluations showed that primary school students have no difficulty with the multiple choice format; marking of more than one answer by fourth graders was seen only rarely.

The findings of this study can be used for primary school teachers of mathematics and natural sciences as a starting point for differentiated observation of children's achievements with practical problems in the mathematics of dimensions. Thus, they are particularly useful for programs to support children at low-performing as well as high-performing levels in primary school mathematics and science classes. This kind of supportive measure is also significant for setting educational standards in primary schools.

## **Danksagung**

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel im Rahmen der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung und ihrer Erweiterung um Mathematik und Naturwissenschaften (IGLU bzw. IGLU-E).

Mein besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr. Gerd Walther und Herrn Professor Dr. Manfred Prenzel für ihre anregenden Gespräche und ihre Unterstützung bei der Durchführung meiner selbstgewählten Forschungsarbeit.

Im weiteren danke ich meiner IGLU-Arbeitsgruppe, die sich auf die Städte Berlin, Hamburg und Kiel erstreckt, für ihre freundliche Zusammenarbeit. Ein besonderer Dank gebührt meinem IGLU-E-Kollegen Herrn Diplompädagogen Helmut Geiser für seine engagierte Diskussionsbereitschaft zu alten wie neuen Erkenntnissen der Grundschulforschung.

Allen Kolleginnen und Kollegen der Erziehungswissenschaftlichen Abteilung des Leibniz-Instituts für die Pädagogik der Naturwissenschaften, die durch eine freundliche Arbeitsatmosphäre, Ermunterung und Ansporn zur Fertigstellung meiner Dissertation beigetragen haben, sei gedankt – besonders meinem SINUS- und dem LLL-Team.

Meinen Freunden und meiner Familie danke ich sehr herzlich für ihre liebe Unterstützung zu jeder Zeit – vornehmlich Richard Sheil, Dr. Karen Shu-Nu Chang, Désirée Burba, Rosemarie Lobemeier, Maria und Herbert Kotzem.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Die Entwicklung der Zahlen und Größen</b> .....	<b>7</b>
2.1	Aspekte des Zahlbegriffs .....	7
2.2	Vom Zählen zu Zahlen – eine historische Skizze über die Entstehung und Entwicklung der Zahlzeichen .....	9
2.2.1	Die ersten Zählmethoden der Menschen .....	9
2.2.2	Die Zahlzeichen – additive Ziffernsysteme und Stellenwertsysteme .....	11
2.3	Vom Körpermaß zum Naturmaß – Skizze der historischen Entwicklung des Messens und der Maßsysteme .....	13
2.3.1	Vorgeschichtliche Zeit der Metrologie .....	13
2.3.2	Das Internationale Einheitensystem „Système International d’Unités“ .....	17
2.3.2.1	Basiseinheiten und abgeleitete Einheiten .....	18
2.3.2.2	Vorsätze zur Bezeichnung dezimaler Vielfache und Teile von Einheiten ..	22
2.3.3	Die behördliche Überwachung von Maß und Gewicht .....	22
2.3.4	Sonstige Maßsysteme .....	23
2.4	Zusammenfassung des Kapitels .....	25
<b>3</b>	<b>Der Größenbegriff aus mathematischer Sicht</b> .....	<b>26</b>
3.1	Größen als Abstraktion .....	26
3.2	Repräsentanten der bürgerlichen Größen .....	27
3.3	Grundlegende Rechengesetze für Größen .....	29
3.4	Grundvorstellungen zu Größen .....	31
3.5	Definition von Größenbereichen .....	34
3.6	Zusammenfassung des Kapitels .....	34
<b>4</b>	<b>Größen im Kontext des lebenslangen Lernens</b> .....	<b>36</b>
4.1	Die Entwicklung des Größenbegriffs beim Kind aus entwicklungspsy- chologischer Sicht .....	36
4.2	Kenntnisse von Schulanfängern und Grundschulkindern zum Thema Größen – Befunde mathematikdidaktischer Untersuchungen .....	39
4.3	Größen und Messen im Schulunterricht .....	44
4.3.1	Leitlinien der Curricula und der Bildungsstandards zu Größen .....	44

4.3.2	Größen als fächerverbindendes / fächerübergreifendes Thema .....	48
4.3.3	Größen in der Grundschule .....	52
4.3.3.1	Überblick über die Unterrichtsinhalte zum Thema Größen .....	52
4.3.3.2	Methodische Überlegungen zur Erarbeitung des Größenbegriffs .....	53
4.3.3.3	Aufbau von Grundvorstellungen zu den bürgerlichen Größen .....	55
4.3.4	Größen in den weiterführenden Schulen .....	58
4.4	Zusammenfassung des Kapitels .....	59
<b>5</b>	<b>Sachrechnen .....</b>	<b>60</b>
5.1	Funktionen des Sachrechnens .....	61
5.1.1	Sachrechnen als Lernstoff .....	61
5.1.2	Sachrechnen als Lernprinzip .....	62
5.1.3	Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung .....	62
5.2	Mathematische Modellbildung beim Sachrechnen .....	64
5.3	Aufgabentypen zum Sachrechnen .....	67
5.3.1	Traditionelle Einteilung von Aufgaben zum Sachrechnen .....	67
5.3.2	Neue Systematisierung von Aufgabentypen zum Sachrechnen .....	69
5.4	Schwierigkeiten beim Lösen von Sachrechenaufgaben .....	72
5.5	Fehlertypen beim Lösen von Sachrechenaufgaben .....	74
5.5.1	Identifikationsfehler .....	74
5.5.2	Fehler beim Strukturieren des Lösungsplans .....	75
5.5.3	Fehlerhafte Verkürzung des Lösungsplans .....	75
5.5.4	Fehler in der verbalen Antwort .....	75
5.6	Zusammenfassung des Kapitels .....	76
<b>6</b>	<b>Fragestellungen und Zielsetzung der Arbeit .....</b>	<b>77</b>
<b>7</b>	<b>Methodologischer Rahmen der Arbeit .....</b>	<b>78</b>
7.1	Die IGLU-Studie und ihre Organisationsstruktur .....	78
7.2	Untersuchungsdesign .....	81
7.2.1	Zeitraum der Studie .....	81
7.2.2	Stichprobenbeschreibung .....	81
7.2.3	Testdurchführung – Instrumente und Methoden .....	82
7.2.4	Dateneingabe und Kodierung .....	88
7.2.5	Skalierung der Leistungstests .....	88
7.3	Verfahren zur Datenauswertung der vorliegenden Arbeit .....	89

7.4	Vorausgehende Befunde aus IGLU bzw. IGLU-E .....	90
7.4.1	Curriculare Validierung der Mathematik- und Naturwissenschaftsitems ..	91
7.4.2	Leistungen in Mathematik und in Naturwissenschaften .....	93
7.4.2.1	Mathematische Kompetenzen am Ende der Grundschulzeit .....	94
7.4.2.2	Naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Grundschulzeit .....	97
<b>8</b>	<b>Empirische Untersuchungen und ihre Ergebnisse .....</b>	<b>99</b>
8.1	Zusammenhang der IGLU-Leistungen Mathematik und Naturwissen- schaften .....	100
8.2	Das Kategoriensystem der IGLU-E-Aufgaben zur Größenthematik .....	101
8.2.1	Items der Untersuchung .....	102
8.2.2	Aufbau des Kategoriensystems .....	103
8.2.2.1	Die Aufgabenperipherie .....	104
8.2.2.2	Der Aufgabenkern .....	105
8.2.3	Kategorie „Basiswissen zu Größen“ .....	106
8.2.3.1	Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	106
8.2.3.2	Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	108
8.2.4	Kategorie „Messen von Größen“ .....	110
8.2.4.1	Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	111
8.2.4.2	Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	113
8.3	Curriculare Validierung der Größenitems aus IGLU-E.....	115
8.4	Leistungen von Viertklässlern zu Aufgaben der Größenthematik .....	119
8.4.1	Analysen zu Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	120
8.4.1.1	Das Item Ia „Größte Zahl“ .....	121
8.4.1.2	Das Item Ib „Zeitmessung“ .....	125
8.4.1.3	Das Item Ic „Größte Fläche“ .....	129
8.4.1.4	Das Item Id „Wärme“ .....	133
8.4.1.5	Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	136
8.4.2	Analysen zu Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	139
8.4.2.1	Das Item IIa „Ei“ .....	140
8.4.2.2	Das Item IIb „Bleistift“ .....	143
8.4.2.3	Das Item IIc „Zimmer“ .....	147
8.4.2.4	Das Item IId „Körpertemperatur“ .....	150
8.4.2.5	Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	154

8.4.3	Analysen zu Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	156
8.4.3.1	Das Item IIIa „Kuchen“ .....	157
8.4.3.2	Das Item IIIb „Würfel“ .....	161
8.4.3.3	Das Item IIIc „Gewichte“ .....	164
8.4.3.4	Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	168
8.4.4	Analysen zu Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	170
8.4.4.1	Das Item IVa „Kalender“ .....	172
8.4.4.2	Das Item IVb „Umfang“ .....	175
8.4.4.3	Das Item IVc „Waage“ .....	179
8.4.4.4	Das Item IVd „Schrittlänge“ .....	183
8.4.4.5	Das Item IVe „Rechteck“ .....	187
8.4.4.6	Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	192
<b>9</b>	<b>Diskussion und Ausblick</b> .....	<b>194</b>
9.1	Diskussion zentraler Befunde der Arbeit .....	194
9.2	Schlussfolgerungen für die pädagogische Praxis – Didaktische Überle- gungen für den Mathematik- und Sachunterricht in der Grundschule .....	199
9.3	Fragen künftiger Forschung .....	201
<b>10</b>	<b>Literatur</b> .....	<b>204</b>
<b>11</b>	<b>Anhang</b> .....	<b>214</b>
<b>12</b>	<b>Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen</b> .....	<b>234</b>

# 1 Einleitung

*„Alles, was messbar ist, messen –  
und alles, was nicht messbar ist, messbar machen.“*

*Galileo Galilei*

Das „Messen“ liegt in der Natur des heutigen Menschen<sup>1</sup>, der von seiner Geburt an bis zu seinem Tod mit dem Messen (vgl. Padelt & Laporte 1976) von sogenannten bürgerlichen Größen wie Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht<sup>2</sup> und Temperatur eng verbunden ist (vgl. Blankenagel 1994).

Bereits kurz nach seiner Geburt wird das Neugeborene im Hinblick auf seine Körperlänge, seinen Kopfumfang sowie sein Körpergewicht vermessen. Die Zeit entscheidet nicht nur über den Anfang des Lebens, sondern sie begleitet den Menschen in seinen verschiedensten Lebenssituationen – wie z.B. Weckzeit, Arbeitszeit, Freizeit – und markiert schließlich seinen Tod. Die meisten Gegenstände des Alltags, mit denen Menschen in Berührung kommen, sind vermessen: Kleider- und Schuhgrößen, Preise in Einkaufssituationen, Gewichte der Nahrungsmittel etc. Nicht nur im alltäglichen Geschehen, sondern auch in Handel und Verkehr ist das Thema Größen und Messen nicht wegzudenken. Der Mensch begegnet in seinem Alltag verschiedensten Messgeräten – wie z.B. Zollstock, Messbecher (in der Küche), Uhr, Waage, Thermometer, Tachometer – und erlebt die Größen und den Vorgang des Messens mal bewusst, mal eher unbewusst. Vielfach genügt auch schon der qualitative Vergleich von Größen in Form des „... ist länger (dauert länger) / schwerer / größer (Flächen-, Rauminhalt) als ...“. So wird das Messen sowohl von dem Messbereich als auch von der Messgenauigkeit begleitet.

Größen und Messen vermitteln zwischen Realität sowie Mathematik und Naturwissenschaften und besitzen als eine fundamentale Idee (vgl. Winter 1976 und Vohns

---

<sup>1</sup> Der heutige Mensch macht oft vor dem Unmessbaren wie beispielsweise der Liebe, aber auch der Freude oder der Trauer keinen Halt, wie die Kindergeschichte von Sam McBratney (1994) verdeutlicht.

<sup>2</sup> In der Grundschule erfolgt keine Unterscheidung zwischen den Begriffen „Masse“ und „Gewicht“. Aus dem Alltagsgeschehen heraus sind Kinder mit der Bezeichnung „Gewicht“ vertraut und benutzen „Gewicht“ im Sinne von „Masse“. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit von „Gewicht“ gesprochen.

2002) einen lebensweltlichen Bezug für *alle* Menschen. Dies bedeutet insbesondere, dass das Thema Größen und Messen ein wichtiges Element von Allgemeinbildung ist (vgl. Heymann 1989, 1996) und damit selbstverständlich im Kontext von Schule und auch des lebenslangen Lernens von Bedeutung ist. So durchzieht das Thema als eine zentrale Idee (vgl. Heymann 1996) vertikal die Curricula von Mathematik und Naturwissenschaften und wird entsprechend altersbezogen konkretisiert. Zu den übrigen Schulfächern bestehen horizontale Verknüpfungen.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung besteht darin, Stärken und Schwächen von Grundschulkindern am Ende der vierten Jahrgangsstufe zum Thema Größen zu ermitteln. Die Arbeit verwendet das Datenmaterial der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung und ihrer Erweiterung um die Fächer Mathematik und Naturwissenschaften (IGLU bzw. IGLU-E) aus dem Jahr 2001. Anhand detaillierter Analysen von ausgewählten Testaufgaben der Subtests Mathematik und Naturwissenschaften zur Größenthematik im Multiple-Choice-Format wird anhand der repräsentativen Stichprobe von knapp 6000 Grundschulkindern der Bundesrepublik Deutschland erforscht, welche Fehlvorstellungen Schülerinnen und Schüler hinsichtlich des Messens zu den oben genannten bürgerlichen Größen besitzen. Da einige der in der IGLU-E-Studie verwendeten Größenitems bereits in den Grundschulstudien TIMSS-Pop1 im Jahr 1995 (vgl. Mullis et al. 1997; Martin et al. 1997) und CROSSTEL im Jahr 1993 (vgl. Baumert et al. 1998) eingesetzt wurden, wird trotz des beträchtlichen Zeitabstandes zwischen den drei Erhebungen TIMSS, CROSSTEL und IGLU überprüft, ob die aus IGLU-E festgestellten Fehlkonzepte auch bei den Viertklässlern der anderen Populationen auftreten.

Die Befunde der Arbeit liefern neue Erkenntnisse zum Verständnis bzw. zu Grundvorstellungen von Schülerinnen und Schülern am Ende der Grundschulzeit zu den Größen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur.

Mit der vorliegenden Arbeit sollen folgende Fragestellungen geklärt werden:

- Welche Stärken und Schwächen weisen Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe bei Aufgaben zu den bürgerlichen Größen Länge,

Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur im thematischen Überschneidungsbereich zwischen Mathematik und Sachunterricht auf?

- Lösen Viertklässler Sachrechenaufgaben aus verschiedenen Kategorien des in dieser Arbeit entwickelten Kategoriensystems mit den Klassen „Ordnen von Größen“, „Schätzen von Größen“, „Zerlegen von Größen“ sowie „Operieren mit Größen“ gleichermaßen erfolgreich?
- Welche Fehlkonzepte / Fehlvorstellungen werden durch Distraktorenanalyse aus den Lösungsergebnissen der Schülerinnen und Schüler zu den einzelnen Größenaufgaben sichtbar?

Die Untersuchungen zu den gewählten Fragestellungen bedienen sich des Zusammenspiels von quantitativen und qualitativen Untersuchungsmethoden. Auf der Grundlage einer quantitativen Erhebung des Antwortverhaltens der IGLU-E-Kinder zu den ausgewählten Items der bürgerlichen Größen erfolgt eine qualitative Analyse der von den Schülerinnen und Schülern gewählten Distraktoren der jeweilig vorgegebenen Multiple-Choice-Antworten. Als Datengrundlage für die Auswertungen dienen der nach dem Rasch-Modell skalierte und aufbereitete IGLU-Datensatz sowie die TIMSS-Datensätze der POP1-Untersuchung aus dem Jahr 1995. Das Testdesign dieser Studien ist im Multi-Matrix-Design aufgebaut, d.h. jedes der insgesamt 6 Teilhefte der Schülerinnen und Schüler erhielt nur einen Teil der im Gesamttest verwendeten Aufgaben.

Die Befunde der Arbeit können von verschiedenen Akteuren nutzbar gemacht werden. Die in der repräsentativen Stichprobe von Grundschulkindern der Bundesrepublik Deutschland untersuchten Aufgaben lassen sich in den Aufgabenpool der Bildungsstandards der Grundschulmathematik zur Überprüfung der Leistungen von Grundschulkindern aufnehmen. Mit Hilfe des hier untersuchten Aufgabenmaterials können Mathematik- und Sachunterrichtslehrkräfte die Grundvorstellungskonzepte ihrer Schülerinnen und Schüler zur Größenthematik gezielt untersuchen, um aus den Ergebnissen gegebenenfalls individuelle Fördermaßnahmen für die jeweiligen Kinder abzuleiten. Zudem wird mit dieser Arbeit den Lehrerinnen und Lehrern der Grundschule die Vernetzung zwischen den Fächern Mathematik und Naturwissenschaften

am Beispiel der Größen und des Messens deutlich gemacht. Es zeigt sich, dass das Thema Größen und Messen für fächerübergreifende Unterrichtsaktivitäten geeignet wäre. Die Befunde dieser Arbeit könnten auch Impulse geben, die Entwicklung des Größenverständnisses unter entwicklungspsychologischer Perspektive genauer zu untersuchen.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwölf Kapitel (vgl. Abb. 1.1). Die Kapitel 2 bis 5 bilden den Teil I, die Kapitel 6 bis 8 den Teil II der Arbeit. In Kapitel 9 erfolgt eine Diskussion der zentralen Befunde der empirischen Untersuchung. In Kapitel 10 wird die in der Arbeit zitierte Literatur, in Kapitel 11 der Anhang und in Kapitel 12 das Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen dargelegt.

<b>Kapitel 1:</b>	Einleitung
<b><u>TEIL I</u></b>	
<b>Kapitel 2:</b>	Die Entwicklung der Zahlen und Größen
<b>Kapitel 3:</b>	Der Größenbegriff aus mathematischer Sicht
<b>Kapitel 4:</b>	Größen im Kontext des lebenslangen Lernens
<b>Kapitel 5:</b>	Sachrechnen
<b><u>TEIL II</u></b>	
<b>Kapitel 6:</b>	Fragestellungen und Zielsetzung der Arbeit
<b>Kapitel 7:</b>	Methodologischer Rahmen der Arbeit
<b>Kapitel 8:</b>	Empirische Untersuchungen und ihre Ergebnisse
<b>Kapitel 9:</b>	Diskussion und Ausblick
<b>Kapitel 10:</b>	Literatur
<b>Kapitel 11:</b>	Anhang
<b>Kapitel 12:</b>	Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

Abbildung 1.1: Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden einige Facetten aus der frühen Geschichte von Zahlen und Größen referiert. Dabei wird deutlich, dass Zahlen und Größen aus Alltagsbedürfnissen der Menschen entstanden sind. Über einen menscheitsgeschichtlich großen Zeitraum hinweg haben sich individuelle Maßsysteme der bürgerlichen Größen zu einem einheitlichen Maßsystem, dem *Système International d'Unités*, entwickelt. Im internationalen SI-Einheitensystem sind die bürgerlichen Größen Länge, Masse, Zeit und Temperatur verankert. Die bürgerlichen Größen Fläche und Volumen sind abgeleitete Größen.

Das dritte Kapitel widmet sich dem Größenbegriff aus mathematischer Sicht. In Anlehnung an Kirsch (1994) wird an die mathematische Modellierung des Größenkonzepts durch die Struktur des Größenbereichs erinnert. Die Ausführungen verdeutlichen, dass bereits dem täglichen Umgang mit Größen elementare mathematische Prozesse zugrunde liegen. Hierbei ist das Konzept der Grundvorstellungen von v. Hofe (1995, 1996) als wechselseitige Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen bedeutsam.

Im vierten Kapitel wird die Bedeutung der Größen im Kontext des lebenslangen Lernens erörtert. Hierbei wird neben den Erkenntnissen der Entwicklungspsychologie über Vorkenntnisse und Vorerfahrungen von Vorschulkindern zu Größen, insbesondere auf die curriculare Stellung von Größen in der Grundschule und den weiterführenden Schulen, eingegangen. Im Heymannschen Sinn (1989, 1996) markiert das Thema Größen eine Schnittstelle zwischen Mathematik und der Welt und erfüllt zentrale Aufgaben der allgemeinbildenden Schulen, die in diesem Kapitel ausführlich dargestellt werden.

Das Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem Thema Größen aus der Perspektive des Sachrechnens. Die Ausführungen gehen ausführlich auf die drei Funktionen des Sachrechnens nach Winter (1992) mit „Sachrechnen als Lernstoff“, „Sachrechnen als Lernprinzip“ und „Sachrechnen als Befähigung zur Erschließung der Umwelt“ ein. Ferner werden die Mathematische Modellbildung, die verschiedenen Aufgabentypen sowie Schwierigkeiten und typische Fehler beim Lösen von Sachrechenaufgaben erörtert. Das Kapitel spannt einen Bogen zwischen Teil I und Teil II der Arbeit.

Auf der Basis von Teil I werden in Kapitel 6 die zentralen Fragestellungen der empirischen Untersuchung detailliert dargestellt.

Das Kapitel 7 beschreibt den Methodologischen Rahmen der Arbeit. Da die vorliegende Untersuchung auf Datenmaterial der IGLU-E-Studie (Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung und ihre Erweiterung um die Fächer Mathematik und Naturwissenschaften) beruht, erfolgt zunächst eine skizzenhafte Beschreibung des Untersuchungsdesigns von IGLU bzw. IGLU-E. Nach einer Zusammenfassung der aus der Studie bereits veröffentlichten und für diese Arbeit bedeutenden Befunde wird auf das Verfahren zur Datenauswertung der hier vorliegenden empirischen Untersuchung eingegangen, die sowohl quantitativ als auch qualitativ angelegt ist.

In Kapitel 8, dem letzten Kapitel von Teil II, werden die Untersuchungsergebnisse der Studie vor dem Hintergrund der zuvor entwickelten vier Aufgabenkategorien „Ordnen von Größen“, „Schätzen von Größen“, „Zerlegen von Größen“ sowie „Operieren mit Größen“ dargestellt.

Die Arbeit endet in Kapitel 9 mit einer Diskussion zentraler Ergebnisse und einem Ausblick auf offene Fragen.

## 2 Die Entwicklung der Zahlen und Größen

In diesem Kapitel wird die Entstehung und Entwicklung der Zahlen und der aus ihnen hervorgegangenen bürgerlichen Größen, den sogenannten „benannten Zahlen“ (vgl. Anselm 1979, S.193), skizzenhaft beschrieben, die die Menschen vor mehr als einer Million Jahren aus ihren wirtschaftlich-gesellschaftlichen Bedürfnissen entwickelten (vgl. v. Alberti 1957; Damerow & Lefèvre 1981; Dilke 1991; Gericke 1970, 1984; Ibrah 1992; Menninger 1957, 1958; Trapp 2001). Die Ausführungen zeigen, dass seit der frühen Menschheitsgeschichte Größen und Messen von Bedeutung sind. Die Entwicklung des Messwesens, insbesondere der Übergang vom Körper- zum Naturmaß, legte den Grundstein sowohl für Kultur und Handel als auch für Mathematik und Naturwissenschaften.

### 2.1 Aspekte des Zahlbegriffs

Kinder und Erwachsene kommen in vielen Situationen ihres täglichen Lebens mit natürlichen Zahlen in Berührung (vgl. Abb. 2.1).

Zutaten für eine Springform (26 cm Ø):  
 200 g Butterkekse  
 75 g weiche Butter  
 1 Päckchen Vanillezucker  
 600 g Doppelrahmfrischkäse  
 150 g Crème fraîche  
 100 g Zucker  
 Mark von 2 Vanilleschoten  
 Schale von 1/2 unbehandelten Zitrone  
 4 Eier  
 1 EL Speisestärke  
 250 g Himbeeren  
 2 EL Honig  
 2 EL Himbeergeist (nach Belieben)  
 Backpapier  
 ZUBEREITUNGSZEIT: 30 MIN.  
 RUHZEIT: 30 MIN.  
 BACKZEIT: 1 STD.  
 BEI 12 STÜCKEN PRO STÜCK ETWA:  
 1620 kJ / 390 KCAL

JANUAR 12 9<sup>h</sup> SA 8.27 SU 16.25 MA 22.31 MI 11.33  
**SAMSTAG**  
**1**  
 Neujahr  
 Oktavtag von Weihnachten  
 Hochfest der Gottesmutter Maria  
 Hochf.: Weißbrotjahr: A  
 Les.: Num 6,23-27/Gal 4,4-7  
 Ps 67/68,2-5-8 u.9  
 Weifriedenstag  
 Fulgentius, Wilhelm  
 Käferschnittz  
 Gott sei uns gnädig und segne uns.

**UNSERE EINTRITTSPREISE**  
 täglicher regulärer Preis € 5,50  
 Schüler / Studenten ganztags € 4,50

**SPIELREGELN**  
 5 = Wenn du nicht weißt, wie viel 3 + 3 ist, musst du 1 x aussetzen.

8 + 5 =

**Notrufnummern:**  
 Polizei 110  
 Feuerwehr 112  
 Rettungsdienst 112

Abbildung 2.1: Überall sind Zahlen<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Quellen der in der Abbildung 2.1 aufgeführten Informationen:

- A: Dusy, T. (2002). Käsekuchen, S.22. München: Gräfe und Unzer Verlag.  
 B: Schlierf, W. J. (1949). Liturgischer Kalender für das Jahr 2005. Mönchengladbach: Kühlen Verlag.  
 C: Grabis, B. (2003). Pettersson und Findus. Erstes Rechnen mit Zahlen bis 20, S.11. Hamburg: XENOS.  
 D: Kino-Programm „Neues Studio“ in Kiel vom Januar 2005.  
 E: Grabis, B. (2003). Pettersson und Findus. Erstes Rechnen mit Zahlen bis 20, S.26. Hamburg: XENOS.  
 F: Grabis, B. (2003). Pettersson und Findus. Erstes Rechnen mit Zahlen bis 20, S.24. Hamburg: XENOS.  
 G: Das Telefonbuch der Deutschen Telekom für Kiel, Neumünster, Rendsburg 2004 / 2005.

In der Mathematikdidaktik unterscheidet man zwischen verschiedenen Zahlaspekten bzw. Verwendungsarten der natürlichen Zahlen (vgl. Padberg 2005; Hasemann 2003 sowie Tab. 2.1):

Aspekte des Zahlbegriffs	Funktion	Frage	Beispiel
<b>Kardinalzahlaspekt</b> (vgl. Abb. 2.1 A)	Beschreibung von Anzahlen	Wie viele?	Für den Käsekuchen benötigt man 4 Eier. Rosemarie hat 2 Geschwister. Die Zahl 6 hat 4 Teiler.
<b>Ordinalzahlaspekt</b>			
Ordnungszahl (vgl. Abb. 2.1 B)	Reihenfolge innerhalb einer (total geordneten) Reihe	An welcher Stelle? Der / die wievielte?	Heute ist der 01. Januar. „Wenn zwei sich streiten, freut sich der Dritte.“
Zählzahl (vgl. Abb. 2.1 C)	Reihenfolge innerhalb einer Reihe		Verbinde die Punkte von 1 bis 16. Das Haus hat die Nummer 5.
<b>Maßzahlaspekt</b> (vgl. Abb. 2.1 D)	Bezeichnung von Größen	Wie teuer? Wie lang? Wie schwer? ...	Die Kinokarte kostet 4,50 €. Der Schulweg ist 2 km lang. Die Tafel Schokolade wiegt 100 g.
<b>Operatoraspekt</b> (vgl. Abb. 2.1 E)	Bezeichnung der Vielfachheit einer Hand- lung / eines Vorgangs	Wie oft?	Wenn du die Aufgabe nicht lösen kannst, musst du ein- mal aussetzen. Noch dreimal schlafen und dann ist Weihnachten.
<b>Rechenzahlaspekt</b>			
algebraischer Aspekt (vgl. Abb. 2.1 F)	Gültigkeit von algebraischen Gesetzen  Rechnen nach algebraischen Gesetzen  Zahlenmuster		$8 + 5 = 5 + 8$ $(8 + 7) + 13 = 8 + (7 + 13)$  $8 + 5 =$ $8 + (2 + 3) = (8 + 2) + 3$ Zehnerergänzung  $1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, \dots$
algorithmischer Aspekt	Handlungsanweisungen zur schrittweisen Durchführung von Operationen (Algorithmen)		$\begin{array}{r} 5\ 7\ 9 \\ +\ 6\ 8\ 8 \\ \hline 1\ 2\ 6\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8\ 3\ 4 \\ -\ 3\ 5\ 9 \\ \hline 4\ 7\ 5 \end{array}$
<b>Codierungsaspekt</b> (vgl. Abb. 2.1 G)	Kennzeichnung und Unterscheidung von Objekten		Die Notrufnummer der Polizei lautet: 110. Das Buch hat die ISBN- Nummer 3-8274-0993-4.

Tabelle 2.1: Aspekte des Zahlbegriffs

Die Verwendung von natürlichen Zahlen ist sehr vielfältig und reicht von der Beschreibung von Anzahlen (*Kardinalzahlaspekt*) bis hin zur Kennzeichnung und damit möglichen Unterscheidung von Objekten (*Codierungsaspekt*). Die Zahlaspekte dürfen keineswegs voneinander isoliert betrachtet werden, sondern sind eng miteinander verbunden. Padberg nennt als verknüpfendes Glied das *Zählen* (vgl. Padberg 2005, S.16): Durch das Aus- bzw. Abzählen der Elemente einer vorgegebenen Menge kann die Anzahl der Elemente (*Kardinalzahlaspekt*) sowie die Reihenfolge bzw. der Rangplatz innerhalb einer Reihe (*Ordinalzahlaspekt*) beschrieben werden. Zählen ermöglicht ferner, die Vielfachheit einer Handlung oder eines Vorgangs (*Operatoraspekt*) zu bestimmen. Ebenso kann die Maßzahl einer Größe durch das Auszählen der Anzahl der erforderlichen Größeneinheiten gewonnen werden – sowohl bei rationalen als auch bei reellen Zahlen (*Maßzahlaspekt*). Zählen hilft auch beim Erzielen von Rechenergebnissen mittels Weiterzählen bei der Addition sowie Rückwärtszählen bei der Subtraktion (*Rechenzahlaspekt*) (vgl. Padberg 2005, S.16).

## **2.2 Vom Zählen zu Zahlen – eine historische Skizze über die Entstehung und Entwicklung der Zahlzeichen**

Die Fähigkeit zu zählen und Zahlen zu notieren fällt historisch gesehen mit dem Beginn der Kultur zusammen (vgl. Beutelspacher & Weigand 1998, S.4). Die Erfindung der Schrift ermöglichte es, die gesprochene Sprache aufzuzeichnen und somit Gedanken und Ideen zu fixieren. Auf diese Weise konnten zugleich das Gedächtnis entlastet und Informationen über längere Zeit gespeichert werden (Devlin 2002, S.18). Vor mehr als einer Million Jahren lebten unsere Vorfahren als Jäger. Bereits sie hatten das Bedürfnis, von ihnen erlegte Tiere zu zählen oder sich die Anzahl von Tagen zu merken. Hieraus entwickelte sich ein Begriff von Ziffern und schließlich Zahlen.<sup>4</sup>

### **2.2.1 Die ersten Zählmethoden der Menschen**

Die einzelnen Völker zählten auf vielfältige Weise, so mit Hilfe von Kerben in Knochen, mit einzelnen Körperteilen wie beispielsweise Fingern oder bestimmten Stellen

---

<sup>4</sup> Am Anfang der Geschichte der Zahlen beschränkten sich die numerischen Fähigkeiten der Menschen auf ein globales Abschätzen von Dingen und von Lebewesen in ihrer Umgebung. So unterschieden sie zwischen der Einheit, dem Paar und der Vielheit und kannten – ebenso wie kleine Kinder – demzufolge nur die Zahlen 1, 2 und viele (vgl. Ifrah 1992, S.18). Derzeitige Forschungen des Linguisten Daniel Everett von der Universität Manchester zeigen, dass die überwiegend als Jäger und Sammler lebenden Pirahã an dem Fluss Maici im Amazonastiefland auch heute noch lediglich jeweils ein Wort für „eine kleine Menge oder Anzahl“, „eine irgendwie größere Menge oder Anzahl“ und ein Wort für „viele“ kennen (vgl. v. Rauchhaupt 2004, S.57).

am gesamten Körper sowie mit unterschiedlichen (selbsthergestellten) Gegenständen wie Schnüren oder Steinen (vgl. Tab. 2.2).

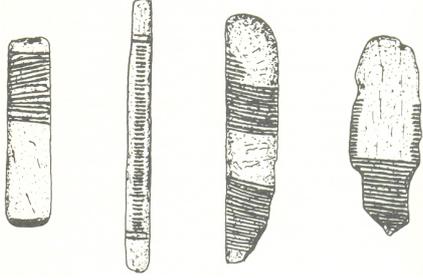
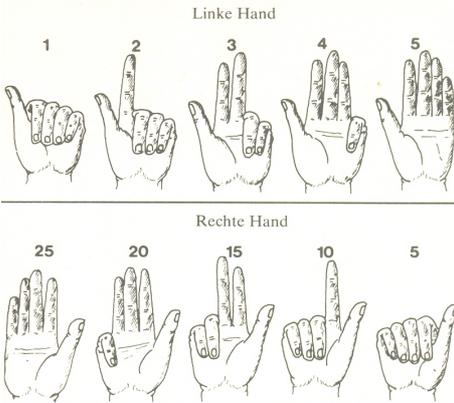
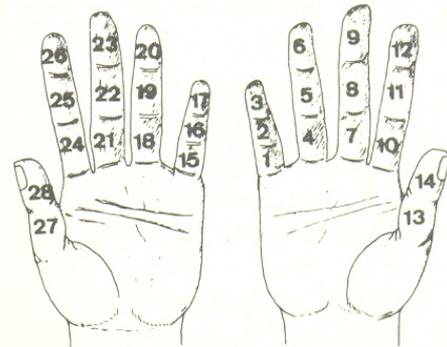
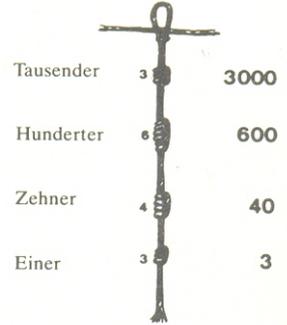
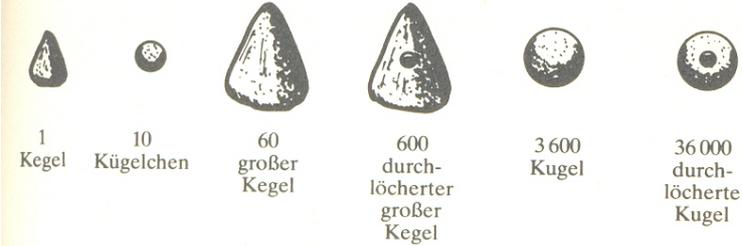
<p><b>Zählen mit Kerben</b></p>	 <p>Abbildung 2.2: Gekerbte Knochen aus dem Spätpaläolithikum (35 000 bis 20 000 v.Chr.) (aus: Ifrah 1992, S.82)</p>	
<p><b>Zählen mit einzelnen Körperteilen</b></p>	 <p>Abbildung 2.3: Zählen mit den Fingern (aus: Ifrah 1992, S.51)</p>	 <p>Abbildung 2.4: Zählen mit den Fingergliedern in Indien, Indochina und Südchina (aus: Ifrah 1992, S.65)</p>
<p><b>Zählen mit Schnüren</b></p>	 <p>Abbildung 2.5: Darstellung der Zahlen 1 bis 9 nach der Methode der Inka (aus: Ifrah 1992, S.78)</p>	 <p>Abbildung 2.6: Darstellung der Zahl 3643 nach der Methode der Inka (aus: Ifrah 1992, S.78)</p>
<p><b>Zählen mit Steinen bzw. Tonmarken (calculi)</b></p>	 <p>Abbildung 2.7: Repräsentanten der Zahlen durch calculi, die Babylonische Hirten zum Zählen ihrer Herden verwendeten (aus: Ifrah 1992, S.103)</p>	

Tabelle 2.2: Die ersten Zählmethoden der Menschen

Die beiden Zählmethoden „Zählen mit Kerben“<sup>5</sup> und „Zählen mit einzelnen Körperteilen“<sup>6</sup> sind auch heutzutage in abgewandelter Form gebräuchlich.

### 2.2.2 Die Zahlzeichen – additive Ziffernsysteme und Stellenwertsysteme

Große Zahlen ließen sich mit den beschriebenen Zählmethoden nur schwer auf Anhieb erkennen. So begannen die Menschen, eine vereinfachte Notation von Zahlen zu entwickeln, die u.a. physisches Zählen ersetzte (vgl. Devlin 2002, S.21). Die Zahlennotation war keineswegs einheitlich, sondern bei einzelnen Völkern von sehr unterschiedlicher Gestalt.

Verallgemeinernd lassen sich zwei Notationstypen von Zahlzeichen klassifizieren, die in der Literatur ausführlich beschrieben sind (vgl. Beutelspacher & Weigand 1998; Gericke 1970, 1984; Ifrah 1992; Menninger 1957, 1958; Richter & Richter 1998; Rödler 1998; Trapp 2001):

- Zahlzeichen nach dem Prinzip eines additiven Ziffernsystems und
- Zahlzeichen nach dem Prinzip eines Stellenwertsystems.

Die Ägypter, Griechen und Römer bildeten Zahlen im Sinne einer Summe additiv aus Ziffern, die von ihnen zuvor festgelegt worden waren: D.h. zur Darstellung einer Zahl wiederholten sie Ziffern so oft wie erforderlich und reihten diese aneinander (vgl. Tab. 2.3).

Das uns bekannte erste Stellenwertsystem wurde bereits vor 4000 Jahren von den Babyloniern entworfen und entspricht als erstes unserer heutigen Zahlenschrift. Lediglich die Basis 60 des zugrundeliegenden Zahlensystems und die Art der Ziffern zur damaligen Zeit unterscheiden sich von unserem heutigen Dezimalsystem (vgl. Tab. 2.3).

---

<sup>5</sup> Bei Gesellschaftsspielen wird zum Sammeln von Punkten häufig die Notationsform mit „Strichen“ verwendet. Hierbei wird die Zahl 5 mit einem schrägen Strich in der Gestalt „“ notiert (vgl. Dahl & Nordqvist 1996, S.27).

<sup>6</sup> Das Zählen mit Fingern ist in der heutigen Zeit besonders bei kleinen Kindern zu beobachten, die aus ihrer individuellen Entwicklung her, der sogenannten Ontogenese, Zahlen neu entwickeln. – In der Gebärdensprache ist das Zählen und die Darstellung von Zahlen mit Fingern ein wesentlicher Bestandteil zur Kommunikation (vgl. Maisch & Wisch 1996 und Rödler 1998, S.10). – Die Bestimmung der Anzahl von Tagen einzelner Monate ist mit dem Auszählen der Handknöchel ein volkstümlicher Brauch (vgl. Grundschule Sachunterricht 11 (2001), S.6).

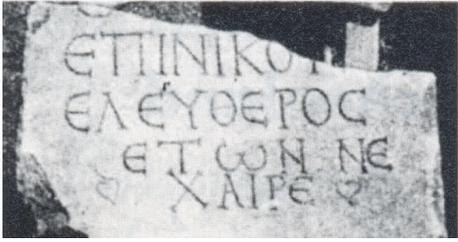
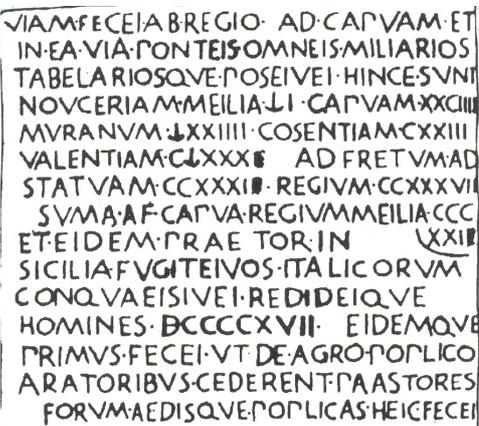
	Zahl- zeichen in ...	Beispiel																																																																																									
additive Ziffernsysteme	Ägypten	 <p>Abbildung 2.8: Darstellung der Zahl 1998 in ägyptischer Schrift (aus: Richter &amp; Richter 1998, S.26)</p>																																																																																									
	Griechen- land	 <p>Abbildung 2.9: Alter griechischer Grabstein (aus: Richter &amp; Richter 1998, S.38) „Der Freigelassene (ΕΛΕΥΘΕΡΟΣ) des Epinikos (ΕΠΙΝΙΚΟΣ) erfreute sich eines Alters von 55 Jahren (Νε).“</p>																																																																																									
	Rom	 <p>Abbildung 2.10: Römischer Meilenstein aus der Provinz Salerno - vom Konsul C. Popilius Laenas (um 160 v. Chr.) aufgestellt. (aus: Richter &amp; Richter 1998, S.43; Ibrah 1992, S.136)</p> <p>In den Zeilen 4, 5, 6, 7, 8 und 12 sind folgende Zahlzeichen notiert:</p> <table border="0" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><u>Zeile 4:</u></td> <td style="text-align: center;"><u>Zeile 5:</u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">↓ I      51</td> <td style="text-align: center;">↓ XXIII    74</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">XXCIII    84</td> <td style="text-align: center;">CXXIII    123</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><u>Zeile 6:</u></td> <td style="text-align: center;"><u>Zeile 7:</u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">C↓XXX    180</td> <td style="text-align: center;">CCXXXI    231</td> </tr> <tr> <td></td> <td style="text-align: center;">CCXXXVII    237</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><u>Zeile 8:</u></td> <td style="text-align: center;"><u>Zeile 12:</u></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">CCCXXI    321</td> <td style="text-align: center;">DCCCXVII    917</td> </tr> </table>	<u>Zeile 4:</u>	<u>Zeile 5:</u>	↓ I      51	↓ XXIII    74	XXCIII    84	CXXIII    123	<u>Zeile 6:</u>	<u>Zeile 7:</u>	C↓XXX    180	CCXXXI    231		CCXXXVII    237	<u>Zeile 8:</u>	<u>Zeile 12:</u>	CCCXXI    321	DCCCXVII    917																																																																									
<u>Zeile 4:</u>	<u>Zeile 5:</u>																																																																																										
↓ I      51	↓ XXIII    74																																																																																										
XXCIII    84	CXXIII    123																																																																																										
<u>Zeile 6:</u>	<u>Zeile 7:</u>																																																																																										
C↓XXX    180	CCXXXI    231																																																																																										
	CCXXXVII    237																																																																																										
<u>Zeile 8:</u>	<u>Zeile 12:</u>																																																																																										
CCCXXI    321	DCCCXVII    917																																																																																										
Stellenwertsysteme	Mesopotamien	 <p>Abbildung 2.11: Darstellung der Zahl 1999 in babylonischer Schrift (aus: Richter &amp; Richter 1998, S.34)</p> $1999 = 33 \cdot 60 + 19 \cdot 1$ $= 33 \cdot 60^1 + 19 \cdot 60^0$																																																																																									
	Arabien / Europa	<table border="1" style="font-size: small;"> <tr> <td>Ostarabisch 952 n. Chr.</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Ostarabisch um 970 n. Chr.</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Westarabisch 12/13. Jh.</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Westarabisch 14. Jahrhundert</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Codex Erlangen 11. Jahrhundert</td> <td>I</td><td>II</td><td>III</td><td>IV</td><td>V</td><td>VI</td><td>VII</td><td>VIII</td><td>IX</td> </tr> <tr> <td>Algorismusschrift vor 1180</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Algorismus Ratisbonensis 1450 n. Chr.</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Bamberger Rechenbuch 1483 n. Chr.</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>Dürer 1525</td> <td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td> </tr> </table> <p>Abbildung 2.12: Entwicklung der indisch-arabischen Ziffern (aus: Quak 1998, S.270)</p>	Ostarabisch 952 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Ostarabisch um 970 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Westarabisch 12/13. Jh.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Westarabisch 14. Jahrhundert	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Codex Erlangen 11. Jahrhundert	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	Algorismusschrift vor 1180	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Algorismus Ratisbonensis 1450 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Bamberger Rechenbuch 1483 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dürer 1525	1	2	3	4	5	6	7	8
Ostarabisch 952 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Ostarabisch um 970 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Westarabisch 12/13. Jh.	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Westarabisch 14. Jahrhundert	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Codex Erlangen 11. Jahrhundert	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX																																																																																		
Algorismusschrift vor 1180	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Algorismus Ratisbonensis 1450 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Bamberger Rechenbuch 1483 n. Chr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		
Dürer 1525	1	2	3	4	5	6	7	8	9																																																																																		

Tabelle 2.3: Entstehung und Entwicklung der Zahlzeichen

Die Beispiele zu den additiven Ziffernsystemen belegen die Schwierigkeiten im Umgang mit ägyptischen, griechischen und römischen Zahldarstellungen: Innerhalb von Texten war es nicht einfach, Worte bzw. Zahlen voneinander zu unterscheiden.

Durch das Zusammenleben von mehreren Menschen an einem Ort fand ein beträchtlicher Warenhandel – zunächst durch Tausch, später durch Kauf und Verkauf – statt (vgl. Trapp 2001). Der Vergleich von Waren über Anzahlbestimmungen im Sinne des Kardinalzahlaspektes war sehr mühsam, so dass die Menschen für ihre Messungen weitere Maßsysteme entwickelten.

### **2.3 Vom Körpermaß zum Naturmaß – Skizze der historischen Entwicklung des Messens und der Maßsysteme**

Die physikalischen Größen<sup>7</sup> Zeit, Länge und Masse (Gewicht) waren vermutlich die ersten, die der Mensch durch seine Messungen zu erfassen suchte. Neben diesen Größen spielten im frühen Altertum zusätzlich die Fläche und das Volumen in der Landvermessung, im Bauwesen und nicht zuletzt im Warenaustausch eine bedeutende Rolle. Schon zu jener Zeit waren innerhalb der einzelnen Herrschaftsgebiete Maße gesetzlich geregelt und die Verwendung von Maßen beaufsichtigt. Das Messwesen war regional sehr unterschiedlich (vgl. Trapp 2001), was im praktischen Gebrauch zu erheblichen Schwierigkeiten führen konnte.

#### **2.3.1 Vorgeschichtliche Zeit der Metrologie**

*Die Messung der Länge.*

In allen alten Kulturen leiteten sich Längenmaße von Körpermaßen des Menschen und darüber hinaus von der körperlichen Leistungsfähigkeit des Menschen ab (vgl. Trapp 2001, S.16). Körpermaße waren sehr nützlich, zumal sie zu jeder Zeit zur Verfügung standen und sich beim erwachsenen Menschen kaum mehr änderten.<sup>8</sup> Als

---

<sup>7</sup> Das Ergebnis einer Messung ist die Angabe einer *physikalischen Größe*, dem Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit (vgl. Kap. 3.1). Eine Zusammenstellung von Einheiten, die nach bestimmten Regeln verknüpft werden, wird als „Einheitensystem“ bzw. „Maßsystem“ bezeichnet. Ein physikalisches Maßsystem enthält Basiseinheiten und abgeleitete Einheiten (vgl. Kap. 2.3.2.1).

<sup>8</sup> Da die Menschen unterschiedliche Körpergrößen und damit auch verschiedene Körpermaße besaßen, waren für Längenmessungen die Körpermaße der Landesherren als Norm verbindlich (vgl. den Abschnitt „Die Regelung und Beaufsichtigung der Maßeinheiten zu damaliger Zeit“, S.16 sowie Abbildung 2.16 „Das Messen mit Körpermaßen“).

Körpermaße dienten neben Klafter, Elle, kleiner und großer Spanne, ferner Daumenbreite, Schritt und Fuß (vgl. Abb. 2.13).

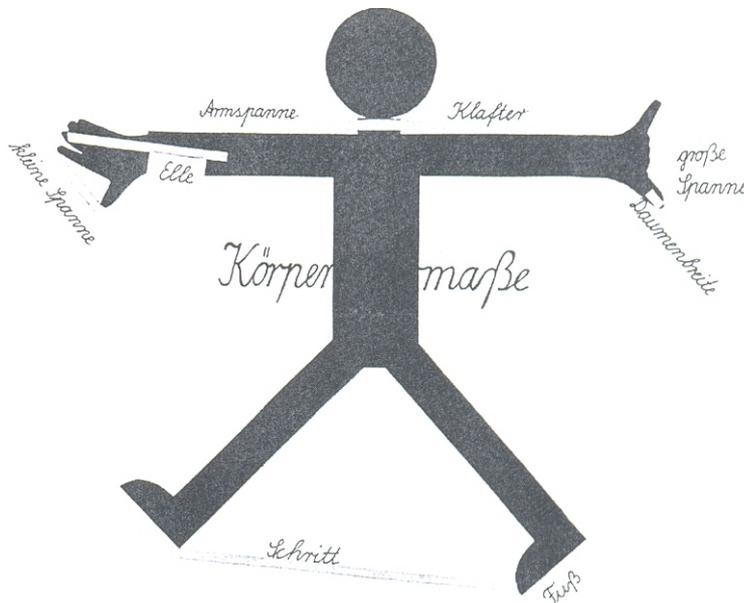


Abbildung 2.13: Körpermaße  
(aus: Zenker-Schweinstetter 1994, S.109)

**Klafter (Armspanne):**

Abstand zwischen den Fingerspitzen eines Menschen mit waagrecht ausgestreckten Armen

**Elle:**

Abstand zwischen den Ellenbogen und der Spitze des Mittelfingers

**kleine Spanne:**

Abstand zwischen der Spitze des Zeigefingers und der Spitze des Daumens

**große Spanne:**

Abstand zwischen der Spitze des kleinen Fingers und der Spitze des Daumens bei gespreizten Fingern

**Daumenbreite:**

Breite des ersten Daumengliedes

**Schritt:**

Abstand der Füße beim Gehen

**Fuß:**

Länge des Fußes einer Person, von der Fußspitze bis zur Ferse

Da die Körpermaße für das Erfassen größerer Entfernungen ungeeignet waren, wurde in die Angabe von Längen die Größe Zeit miteinbezogen. Auf diese Weise wurden Längenangaben konkret vorstellbar<sup>9</sup>: Zur Messung von Wegstrecken nutzte man die Wegstunde oder die Tagereise, welche jener Längen entsprachen, die ein Fußgänger unter Normalbedingungen in einer Stunde bzw. in einem Tag zurücklegen konnte. – Die Körpermaße des Menschen besaßen auch einen hohen Stellenwert innerhalb der Kunst mit ihren klassischen Proportionsstudien von Leonardo da Vinci (\*1452, †1519) (vgl. Anh. 3) und Albrecht Dürer (\*1471, †1528).

<sup>9</sup> Die Beschreibung größerer Entfernungen wird auch gelegentlich heute noch durch zeitliche Angaben ergänzt („eine Viertelstunde zu Fuß“, „eine Stunde mit dem Bus“) und ist Bestandteil vieler Redewendungen der Größe Länge (vgl. Anh. 2). – Menschen verschiedener Kulturen benutzen zur Veranschaulichung von Wegstrecken unterschiedliche Typen von Zeitangaben: Einwohner aus Tibet beispielsweise nutzen die Längeneinheit „Tasse Tee weit“. Sie bezeichnet jene Wegstrecke, die von einem Fußgänger in der Zeitspanne zurückgelegt wird, in der ein frisch aufgebrühter Tee sich soweit abgekühlt hat, dass der Tee trinkbar ist. Manche Europäer beschreiben Wegstrecken oder aber eine Zeitspanne mit der „Zigarettenlänge“ (vgl. Padelt & Laporte 1976, S.28).

### *Die Messung von Volumen und Massen.*

Das Messen von Volumina und Massen (Gewichten) beruhte auf Erfindungen der Menschen: Sie bestimmten Hohlmaße u.a. mit Tierschädeln, Kokosnussschalen oder mit geflochtenen Körben. Massen (Gewichte) wogen sie mit sehr einfachen, aus einem Holzbalken und Schnüren konstruierten (Balken-)Waagen (vgl. Trapp 2001). Als Gewichte verwendeten sie Samenkörner<sup>10</sup> oder Steine.

### *Die Messung der Zeit.*

Schon vor vielen tausend Jahren entwickelten die Menschen Instrumente zur Messung der Zeit: Zu diesen zählten Sonnen-, Wasser-, Feuer-, Duft-, Kerzen- sowie Sanduhren (vgl. Andrewes 2003; Dilke 1991; Schäfke 1999; Trapp 2001; Übelacker 1990).

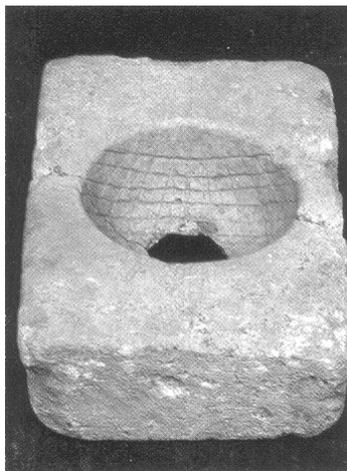


Abbildung 2.14:  
Römische Halbkugelsonnenuhr  
(aus: Roth 1999, S.63)



Abbildung 2.15:  
Sanduhr (Stundenglas)  
Deutschland 17. Jh.  
(aus: Benner 1999, S.83)

Für die Messung größerer Zeitspannen entwarfen sie Kalender, die aus ihren Beobachtungen des Laufes der Sonne, des Mondes, von Planeten und anderen Sternen entstanden sind.<sup>11</sup> Unser heutiger Gregorianische Kalender ging über mehrere Zwi-

---

<sup>10</sup> Die Gewichtseinheit Karat, die bis heute zum Wiegen von Schmuckstücken verwendet wird, leitete sich vom Samen des Johanniskornbrotbaumes ab.

<sup>11</sup> Die Ägypter hatten bemerkt, dass der helle Fixstern Sirius nach einer jeweils längeren Unsichtbarkeitsperiode von 365 Tagen wieder am Morgenhimmel erschien. Der heliakische Aufgang des Sirius fiel zeitlich mit der jährlichen Nilüberschwemmung zusammen (vgl. Gericke 1984, S.47). Damit wurde das 365-

schenstufen hinweg aus dem Römischen und dem Julianischen Kalender hervor (vgl. Trapp 2001, S.36ff.; Übelacker 1990, S.27ff.).

### *Die Regelung und Beaufsichtigung der Maßeinheiten zu damaliger Zeit.*

Im Altertum bis weit nach dem Mittelalter legten die Landesherrn in ihren Herrschaftsgebieten eigene Maße fest: Ihre individuellen Körpermaße waren als Norm verbindlich und hatten innerhalb der Landesgrenzen uneingeschränkte Gültigkeit, so dass für das Messen eine strenge Überwachung erforderlich war. Die Benutzung von Maßen der Nachbarländer war nicht erlaubt und führte bei Widersetzen zu schwerwiegenden Bestrafungen: Bei der Verwendung falscher Wägestücke bekamen Babylonier beide Hände abgeschlagen (vgl. Padelt & Laporte 1976, S.29).

Jeder Grundherr bzw. jede Stadt dokumentierte ihre Selbstständigkeit durch eigene Längen-, Flächen- und Hohlmaße, Gewichte und auch Münzen (vgl. Anh. 4).<sup>12</sup>

Neben regionalen Besonderheiten existierten hinsichtlich der Maßsysteme auch lokale Eigenheiten („Jedes deutsche Ländchen hat sein eigenes Quäntchen“, <http://www.ptb.de> [vom 13.05.2004] / Anh. 4). Im Jahr 1810 sollen allein im Land Baden 112 verschiedene Ellen, 92 Flächeneinheiten, 65 Hohlmaße, 163 Getreidemaße und 80 Pfunde existiert haben (vgl. Zenker-Schweinstetter 1994, S.104).<sup>13</sup>

Die Vielfalt an verschiedenen Maßsystemen in den jeweiligen Ländern erforderte ein ständiges Umrechnen von Maßen und hemmte damit Handel und Verkehr.<sup>14</sup> Zudem

---

tägige Sonnenjahr entdeckt, welches die Ägypter für ihren Kalender nutzten. Die Babylonier besaßen Kalender, die aufgrund ihrer genauen Vorausberechnungen von Finsternissen und Planetenstellungen auf astronomische Beobachtungen zurückzuführen waren. Ebenso stellen die Steinkreise von Stonehenge in Südengland ein riesiges Kalenderwerk dar. Die Verbindungslinien zwischen den verschiedenen Steinblöcken weisen zu wichtigen Auf- und Untergangspunkten der Sonne und des Mondes (vgl. Übelacker 1990).

<sup>12</sup> Im Anhang 3 ist das Maßsystem der Sumerer zu den Größen Länge, Fläche, Volumen und Gewicht dargestellt und auf heutige metrische Werte umgerechnet. Die Ausführungen geben einen Einblick in die komplex aufgebauten Maßsysteme zur damaligen Zeit. Weitere Informationen zu den Maßsystemen der Ägypter, Griechen und Römer sind Trapp (2001) zu entnehmen. Wegen enger Handelsbeziehungen beeinflussten vor allem ägyptische und babylonische Maße die Maßsysteme der Mittelmeerstaaten (vgl. Trapp 2001, S.19).

<sup>13</sup> Im Anhang 4 sind ferner für einzelne Städte Deutschlands zur Zeit des ersten Drittels des 19. Jahrhunderts die regionalen Längeneinheiten dargestellt. Weitere Informationen zu den Größen Fläche, Volumen und Masse (Gewicht) sind Trapp (2001) zu entnehmen.

<sup>14</sup> „Mit zweierlei Maß messen“ erinnert neben vielen anderen heutzutage bekannten Sprichwörtern zu den Größen an die Messmethoden der historischen Zeit (vgl. Anh. 2).

waren betrügerische Methoden und Streitigkeiten an der Tagesordnung, zumal die Menschen unterschiedliche Körpermaße besaßen (vgl. Abb. 2.16).



Abbildung 2.16: Das Messen mit Körpermaßen  
(aus: Stäudel, Werber & Freimann 2002, S.27)

Erst die Wissenschaft bemühte sich, ein von nationalen Besonderheiten weitgehend freies und zugleich einheitliches Maßsystem für ihre Zwecke sowie für Wirtschaft, Handel und Gewerbe zu entwickeln.

### 2.3.2 Das Internationale Einheitensystem „Système International d'Unités“

Im Jahr 1960 endete mit der Einführung des „Système International d'Unités“ – in allen Weltsprachen mit SI abgekürzt – die jahrhundertlange Suche nach einem weltweit einheitlichen System der Maßeinheiten.<sup>15</sup>

In der Bundesrepublik Deutschland wurde das internationale SI-Einheitensystem mit dem Gesetz über Einheiten im Messwesen (Einheitengesetz) vom 02. Juli 1969 und der Ausführungsverordnung zu diesem Gesetz vom 05. Juli 1970 (Einheitenverordnung) eingeführt. Seit dem 01. Januar 1978 ist in der BRD die Verwendung des SI-Einheitensystems im amtlichen sowie geschäftlichen Verkehr und ferner im Unter-

<sup>15</sup> Vor dem SI-Einheitensystem existierten das CGS- (Centimeter-Gramm-Sekunde), das Gaußsche CGS- und das MKS-System (Meter-Kilogramm-Sekunde) (vgl. Kurzweil 2000). Das SI-System basiert ebenfalls auf den Einheiten Meter, Kilogramm und Sekunde und enthält zusätzlich Grundeinheiten für die elektrische Stromstärke, Stoffmenge, Temperatur und Lichtstärke.

richt der Bundesrepublik Deutschland (vgl. Grehn 1992, S.50) gesetzlich vorgeschrieben. Mit Ausnahme der Verwendung anderer auf internationalen Übereinkommen beruhender Einheiten sowie ihrer Namen und Einheitszeichen im Schiffs-, Luft- und Eisenbahnverkehr sind von SI abweichende Einheiten in Deutschland verboten (vgl. <http://www.ptb.de> [vom 13.05.2004]).

Das SI-Einheitensystem ist weltweit von der internationalen und nationalen Normung übernommen worden (vgl. ISO 1000: <http://www.iso.org> [vom 13.05.2004]). Im Jahr 2004 waren insgesamt 51 Mitgliedsstaaten der Meterkonvention beigetreten (vgl. Anh. 5). Das gesetzlich vorgeschriebene SI-Einheitensystem verlangt nicht, dass in *allen* Lebensbereichen mit diesen Einheiten zu arbeiten ist. Entsprechend werden oftmals im täglichen Alltagsgebrauch insbesondere in den USA und in Großbritannien noch „alte“ nicht metrische Maßeinheiten verwendet (vgl. Anh. 6).

### **2.3.2.1 Basiseinheiten und abgeleitete Einheiten**

Im SI-Einheitensystem unterscheidet man zwei Klassen von Einheiten: die Basiseinheiten und die aus ihnen abgeleiteten Einheiten.

Die sieben Basisgrößen Länge (Meter), Masse (Kilogramm), Zeit (Sekunde), elektrische Stromstärke (Ampère), Stoffmenge (Mol), thermodynamische Temperatur (Kelvin) und Lichtstärke (Candela) (vgl. Tab. 2.4) sind von Raum und Zeit unabhängig und können jederzeit an verschiedenen Orten mit identischer Genauigkeit reproduziert werden. Aus diesem Grund sind im Laufe der Zeit die Definitionen der sieben Grundgrößen mehrmals abgeändert worden und basieren derzeit mit Ausnahme des Kilogramms<sup>16</sup> nicht mehr auf Maßverkörperungen, sondern auf konstanten Eigenschaften der Natur (vgl. Tab. 2.4).

---

<sup>16</sup> Das Kilogramm ist die einzige SI-Einheit, die wie vor ungefähr 200 Jahren auch heute noch durch einen Prototyp-Körper dargestellt wird. Dieses „Ur-Kilogramm“ aus einer Platin-Iridium-Legierung ruht unter einer doppelten „Käseglocke“ in einem Labor des „Bureau International des Poids et Mesures“ (BIPM) in Sèvres bei Paris, dem Weltzentrum der Metrologie. Nationale Metrologie-Institute – wie z.B. die Physikalisch-Technische Bundesanstalt PTB – besitzen Kopien des „Ur-Kilogramms“, die regelmäßig mit ihrem internationalen Gegenstück verglichen werden. Aufgrund zunehmender Gewichtsabweichung voneinander suchen Wissenschaftler nach einem Weg, auch die Einheit der Masse auf eine Fundamentalkonstante zurückzuführen (vgl. <http://www.ptb.de> [vom 13.05.2004]; Barz et al. 2001, S.29-33).

Basisgröße	Abkürzung	Name der Einheit	Einheitensymbol	Definition der Basisgröße
Länge	<i>l</i>	Meter	m	Das Meter (m) ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $\frac{1}{299792458}$ Sekunden durchläuft.
Masse	<i>m</i>	Kilogramm	kg	Das Kilogramm (kg) ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.
Zeit	<i>t</i>	Sekunde	s	Die Sekunde (s) ist das 9 192 631 770 -fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstruktur-niveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids $^{133}\text{Cs}$ entsprechenden Strahlung.
elektrische Stromstärke	<i>I</i>	Ampère <sup>17</sup>	A	Das Ampère (A) ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von einem Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je einem Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.
Temperatur	<i>T</i>	Kelvin <sup>18</sup>	K	Das Kelvin (K), die Einheit der thermodynamischen Temperatur, ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.
Stoffmenge	<i>n</i>	Mol	mol	Das Mol (mol) ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebensoviel Einzelteilchen besteht, wie Atome in 0,012 Kilogramm des Kohlenstoffnuklids $^{12}\text{C}$ enthalten sind. Bei Benutzung des Mols müssen die Einzelteilchen spezifiziert sein und können Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen sowie andere Teilchen oder Gruppen solcher Teilchen genau angegebener Zusammensetzung sein.
Lichtstärke	<i>J</i>	Candela	cd	Die Candela (cd) ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hertz ausstrahlt und deren Strahlstärke in dieser Richtung ( $\frac{1}{683}$ ) Watt pro Steradian beträgt.

Tabelle 2.4: Das Internationale Einheitensystem mit seinen 7 Basiseinheiten  
(vgl. Bergmann & Schäfer 1990)

<sup>17,18</sup> Die Einheit für die Basisgröße der Elektrischen Stromstärke *I* wurde nach André Marie Ampère (1775-1836), die der Temperatur *T* nach William Thomson (1824-1907) benannt, der 1892 mit dem Titel Lord Kelvin of Largs geehrt wurde.

Die SI-Basiseinheiten stehen in vielfältiger Beziehung zueinander. Zum Beispiel geht in die Definition der Stromstärke die Länge, die Zeit und – über die Definition der Kraft – auch die Masse mit ein (vgl. Abb. 2.17).

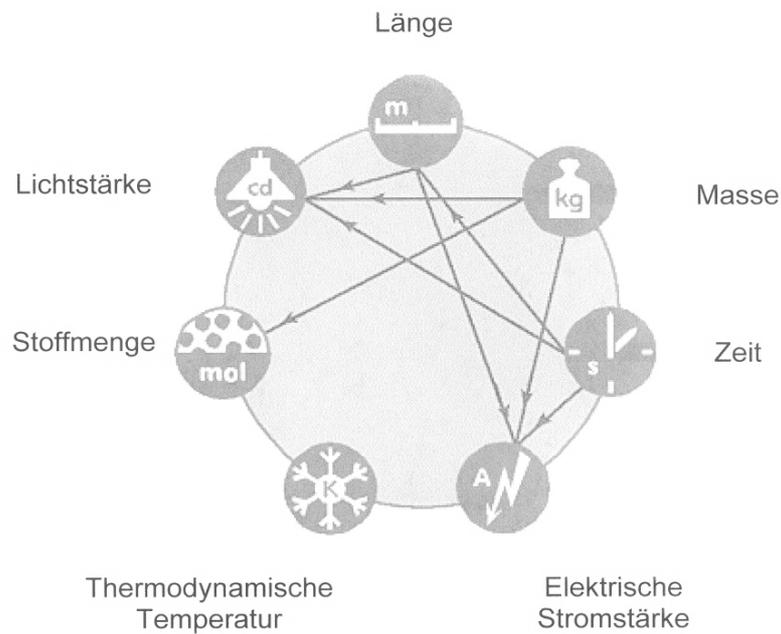


Abbildung 2.17: Beziehungen zwischen den Basiseinheiten des SI-Einheitensystems (aus: <http://www.ptb.de/de/wegweiser/einheiten/si/geschichte.html> [vom 13.05.2004])

Die *abgeleiteten SI-Einheiten* (vgl. Tab. 2.5) werden kohärent aus den Basiseinheiten – d.h. durch schlichtes Multiplizieren oder Dividieren einzelner Basiseinheiten – abgeleitet, ohne weitere Zahlenfaktoren zu verwenden. Grundlage bilden die in algebraischer Form ausgedrückten Naturgesetze für die entsprechenden Größen. Demzufolge ist beispielsweise die Geschwindigkeit  $v$  als der Quotient aus den beiden Basisgrößen Länge  $s$  und Zeit  $t$  definiert:  $v = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \frac{s}{t}$ . Die dazugehörige SI-Einheit

der Geschwindigkeit entspricht also gleich dem Quotienten aus den SI-Einheiten der Länge und der Zeit mit  $[v] = \left[ \frac{s}{t} \right] = \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}} = \frac{m}{s}$ .

In der folgenden Tabelle 2.5 ist eine Auswahl an abgeleiteten physikalischen Größen aufgelistet, die wiederum zur Bildung weiterer abgeleiteter Einheiten herangezogen

werden können. Einige der in Tabelle 2.5 genannten Größeneinheiten wurden nach Naturforschern benannt.

abgeleitete Größe	Abkürzung	Name der Einheit	Symbol	SI-Einheit	Einheit nach folgendem Naturforscher benannt
Beschleunigung	$a$	Meter / Sek. <sup>2</sup>	-	$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	-
Fläche	$A$	Quadratmeter	-	$\text{m}^2$	-
Radioaktivität	$A$	Becquerel	Bq	$\text{Bq} = \text{s}^{-1}$	Antoine Henri <b>Becquerel</b> (1852-1908)
Magnetische Flussdichte	$B$	Tesla	T	$T = \text{V}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-2}$	Nicola <b>Tesla</b> (1856-1943)
elektrische Kapazität	$C$	Farad	F	$F = \text{C}\cdot\text{V}^{-1}$	Michael <b>Faraday</b> (1791-1867)
Absorbierte Energiedosis	$D$	Gray	Gy	$\text{Gy} = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$	Louis Harold <b>Gray</b> (1905-1965)
Frequenz	$f, \nu$	Hertz	Hz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$	Heinrich <b>Hertz</b> (1857-1894)
Kraft	$F$	Newton	N	$\text{N} = \text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$	Isaac <b>Newton</b> (1643-1727)
elektrische Leitfähigkeit	$G$	Siemens	S	$\text{S} = \Omega^{-1} = \text{V}^{-1}\cdot\text{A}$	Werner von <b>Siemens</b> (1816-1892)
Äquivalentdosis	$H$	Sievert	Sv	$\text{Sv} = \text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$	Rolf <b>Sievert</b> (1896-1966)
Induktivität	$L$	Henry	H	$\text{H} = \text{V}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{s}$	Joseph <b>Henry</b> (1797-1878)
Druck	$p$	Pascal	Pa	$\text{Pa} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$	Blaise <b>Pascal</b> (1623-1662)
Leistung	$P$	Watt	W	$\text{W} = \text{J}\cdot\text{s}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$	James <b>Watt</b> (1736-1819)
elektrische Ladung	$Q$	Coulomb	C	$\text{C} = \text{A}\cdot\text{s}$	Charles-Auguste de <b>Coulomb</b> (1736-1806)
elektrischer Widerstand	$R$	Ohm	$\Omega$	$\Omega = \text{V}\cdot\text{A}^{-1}$	Georg Simon <b>Ohm</b> (1789-1854)
elektrische Spannung	$U$	Volt	V	$\text{V} = \text{W}\cdot\text{A}^{-1} = \text{J}\cdot\text{C}^{-1}$	Alessandro <b>Volta</b> (1745-1827)
Geschwindigkeit	$v$	Meter / Sek.	-	$\text{V} = \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$	-
Volumen	$V$	Kubikmeter	-	$\text{V} = \text{m}^3$	-
Energie, Arbeit, Wärme	$W$	Joule	J	$\text{J} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$	James Prescott <b>Joule</b> (1818-1889)
Magnetischer Fluss	$\Phi$	Weber	Wb	$\text{Wb} = \text{V}\cdot\text{s}$	Wilhelm Eduard <b>Weber</b> (1804-1891)

Tabelle 2.5: Abgeleitete physikalische Einheiten

### 2.3.2.2 Vorsätze zur Bezeichnung dezimaler Vielfache und Teile von Einheiten

Bei der Verwendung kohärenter SI-Einheiten können bei Größenangaben sehr große oder sehr kleine Zahlenwerte vorkommen. Um diese in einer praktikablen Größenordnung zu halten, wurden auf der 11. Generalkonferenz für Maß und Gewicht im Jahr 1960 Vorsätze zur Bezeichnung dezimaler Vielfache und Teile von Einheiten verabschiedet (vgl. Tab. 2.6).

Vorsatz	Name	Zeichen	Vorsatz	Name	Zeichen
$10^{24}$	Yotta	Y	$10^{-1}$	Dezi	d
$10^{21}$	Zetta	Z	$10^{-2}$	Zenti	c
$10^{18}$	Exa	E	$10^{-3}$	Milli	m
$10^{15}$	Peta	P	$10^{-6}$	Mikro	$\mu$
$10^{12}$	Tera	T	$10^{-9}$	Nano	n
$10^9$	Giga	G	$10^{-12}$	Piko	p
$10^6$	Mega	M	$10^{-15}$	Femto	f
$10^3$	Kilo	k	$10^{-18}$	Atto	a
$10^2$	Hekto	h	$10^{-21}$	Zepto	z
$10^1$	Deka	da	$10^{-24}$	Yocto	y

Tabelle 2.6: SI-Vorsätze und Vorsatzzeichen zur Bezeichnung dezimaler Vielfache und Teile von Einheiten (vgl. Kurzweil 2000, S.8).

### 2.3.3 Die behördliche Überwachung von Maß und Gewicht

Die Festlegung und Kontrolle der Maße und Gewichte ist ein hoheitliches Recht, das heutzutage von staatlichen Instituten der jeweiligen Länder wahrgenommen wird (vgl. <http://www.bipm.org> [vom 20.05.2004]). Diesen Organisationen gehören allgemein die *Metrology institutes*, *National accreditation bodies*, *National legal metrology authorities* und *National standard bodies* an.

In der Bundesrepublik Deutschland beschäftigen sich folgende Einrichtungen mit der Festlegung und Kontrolle der Maße und Gewichte:

<b>Metrology institutes</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- BAM (Bundesanstalt für Materialforschung und -prüfung)</li> <li>- PTB (Physikalisch-Technische Bundesanstalt)</li> <li>- UBA (Umweltbundesamt, Institut für Wasser-, Boden- und Lufthygiene)</li> </ul>
<b>National accreditation bodies</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Deutsche Akkreditierungsstelle Mineralöl (DASMIN) GmbH</li> <li>- Deutsche Akkreditierungsstelle Technik (DATEch) e.V.</li> <li>- Deutsches Akkreditierungssystem Prüfwesen (DAP) GmbH</li> <li>- Fachverband Dampfkessel-, Behälter- und Rohrleitungsbau (FDBR) e.V.</li> <li>- German Accreditation Council (DAR)</li> <li>- German Calibration Service (DKD)</li> </ul>
<b>National legal metrology authorities</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB)</li> </ul>
<b>National standard bodies</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- German Institut for Standardization (DIN)</li> </ul>

Tabelle 2.7: Festlegung und Kontrolle der Maße und Gewichte  
in der Bundesrepublik Deutschland

(vgl. [http://www1.bipm.org/jsp/en/print/PrintCountryDetails.jsp?ISO\\_CODE=DE](http://www1.bipm.org/jsp/en/print/PrintCountryDetails.jsp?ISO_CODE=DE)  
[vom 29.11.2004])

Das Internationale Komitee CIPM (**C**ommission **I**nternationale des **P**oids et **M**esures) und die Generalkonferenz CGPM (**C**onférence **G**énérale des **P**oids et **M**esures) für Maß und Gewicht führen vor allem wissenschaftliche Untersuchungen durch und sprechen Empfehlungen aus. Das Internationale Büro für Maß und Gewicht bei Paris BIPM (**B**ureau **I**nternational des **P**oids et **M**esures) ist die zentrale Hüterin der Einheiten; bei ihr ist auch der Internationale Kilogramm-Prototyp aufbewahrt – die heutzutage einzige Einheit, die auf eine Maßverkörperung zurückgeht.

#### 2.3.4 Sonstige Maßsysteme

Neben dem SI-Einheitensystem existieren noch „alte“ regionale Einheiten (vgl. Anh. 6) der Größen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Masse und Temperatur sowie eine Reihe weiterer, weltweit nicht einheitlich geregelter Maße. Zu diesen zählen beispielsweise die Geldwährung oder die Normung der Papierformate.<sup>19</sup>

<sup>19</sup> In der heutigen Bundesrepublik Deutschland sind im Jahr 1922 die Standardmaße für Papierformate vom Deutschen Institut für Normung in der Norm DIN 476 festgelegt und in fast allen Ländern adaptiert. In den USA und in Kanada existieren traditionelle, meist weniger logisch aufgebaute Systeme weiter. Sie folgen keinem einheitlichen Muster, sondern sind stattdessen ursprünglich zollbasiert.

Auch der Umgang mit diesen Maßen kann mit Schwierigkeiten verbunden sein: Hinsichtlich der Währungen sei an die Wechselkurse und dem damit schwankenden Wert des Geldes erinnert. Unterschiedliche Papierformate können zu zusätzlichen Kosten führen.

Der Prozess zur Vereinheitlichung verschiedener Maße ist längst nicht abgeschlossen, was auch am Unterschied zwischen einer Landmeile (1,609 km) und einer Seemeile (1,852 km) deutlich wird.

Der Mensch der heutigen Zeit ist mit „seinen“ ihm bekannten Maßen so eng vertraut, dass er – ebenso wie die Menschen zur damaligen Zeit – auf mögliche Veränderungen im Messwesen häufig mit Ablehnung reagiert (vgl. Abb. 2.18).



Abbildung 2.18: Das Maß Bier mit seiner möglichen Abschaffung von Füllmengen für Schankgefäße (aus: mathematik lehren 2003 (118), S.59)

## 2.4 Zusammenfassung des Kapitels

Mit der Darstellung der unterschiedlichen Aspekte der natürlichen Zahlen (vgl. Kap. 2.1) wurde die Verflechtung der natürlichen Zahlen mit der Lebenspraxis veranschaulicht.

Der geschichtliche Ausflug in die frühe Menschheitsgeschichte und die skizzenhafte Beschreibung zur Entstehung und Entwicklung der Zahlen verdeutlicht (vgl. Kap. 2.2), dass durch Tausch, später durch Kauf und Verkauf von Waren Anzahlbestimmungen nicht mehr ausreichten. Die Entwicklung weiterer Maßsysteme, nämlich die der Größen, war notwendig. Größen, auch unter dem Terminus „benannte Zahlen“ bekannt (vgl. Anselm 1979, S.193), treten im Sinne des Maßzahlaspektes in der Lebenspraxis wohl am häufigsten auf. Zu ihnen zählen die Größen Geldwerte, Längen, Flächeninhalt, Volumen, Masse (Gewicht), Zeit und Temperatur.

In vielen alten Kulturen leiteten sich die Längenmaße zunächst von den Körpermaßen der Landesherrn ab (vgl. Kap. 2.3), was zu regional sehr unterschiedlichen Messwesen und damit erheblichen Schwierigkeiten im Handel führte. Erst mit der Einführung des „Système International d'Unités“ im Jahr 1960 endete die jahrhundertlange Suche nach einem weltweit auf Naturmaßen beruhenden einheitlichen System der Maßeinheiten, welches im amtlichen und geschäftlichen Verkehr international vorgeschrieben ist (vgl. Kap. 2.3.2). Im Alltagsgebrauch werden oftmals noch traditionelle, nicht-metrische Maße verwendet, so beispielsweise in den USA und in Großbritannien. Darüber hinaus existieren weltweit nicht einheitlich geregelte Maße wie beispielsweise die Geldwährung und die Normung der Papierformate. Die Festlegung und Kontrolle der Maße und Gewichte ist ein hoheitliches Recht, das von staatlichen Institutionen der jeweiligen Länder wahrgenommen wird (vgl. Kap. 2.3.3).

### 3 Der Größenbegriff aus mathematischer Sicht

In diesem Kapitel wird an die mathematische Modellierung des Größenkonzepts durch die Struktur des Größenbereichs in Anlehnung an Kirsch (1994) erinnert. Die Ausführungen verdeutlichen, dass bereits dem alltäglichen Umgang mit Größen mathematische Strukturen zugrunde liegen. Für die vorliegende Arbeit ist darüber hinaus die Thematik der Grundvorstellungen bedeutsam: In der Ergebnisdarstellung des empirischen Teils der Arbeit wird vorgestellt, welche Grundvorstellungen im Sinne von Fehlkonzepten / Fehlvorstellungen durch Distraktorenanalyse aus Lösungsergebnissen der Schülerinnen und Schüler zu Größenaufgaben der IGLU-E-Studie sichtbar werden. Im Zentrum dieser und weiterer Ausführungen stehen die sogenannten *bürgerlichen Größen*, zu denen Geldwerte, Längen, Flächen, Volumina, Massen (Gewicht) und Zeit zählen (vgl. Blankenagel 1994, S.112).

#### 3.1 Größen als Abstraktion

Aus analytischer Sicht gelangt man nach Kirsch (1994) zum Begriff *Größe*, indem von realen Gegenständen ausgehend ein Abstraktionsvorgang mit Hilfe eines Messvorganges durchlaufen wird. Die wechselseitige Beziehung zwischen der konkret-realen und der abstrakt-mathematischen Ebene lässt sich am Beispiel der Größe Längen folgendermaßen schematisch darstellen (vgl. Kirsch 1994, S.52):

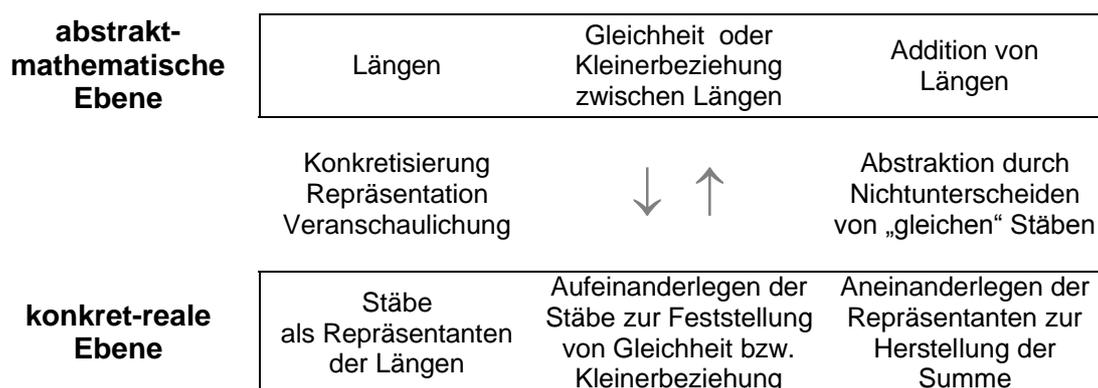


Abbildung 3.1: Stufenmodell zum Größenbegriff am Beispiel der Größe Länge (vgl. Kirsch 1994, S.52)

Der Abstraktionsprozess erfolgt durch den Übergang von den Repräsentanten – in diesem Beispiel von den Stäben – zu der zugehörigen Größe und ihrem Größenbe-

reich, hier: dem Größenbereich der Längen. Bei der Abstraktion werden „gleichwertige“ Repräsentanten *nicht* mehr unterschieden. Man spricht ausschließlich von den Größen der betreffenden Art (Geldwerte, Längen, Flächen, ...), die jeweils einen Größenbereich bilden (vgl. Kap. 3.5). Bei dem im Stufenmodell beschriebenen Beispiel handelt es sich um den Größenbereich  $\mathcal{L}$  der Längen, die durch Stäbe oder Strecken repräsentiert bzw. veranschaulicht werden (vgl. Kap. 3.2).

In umgekehrter Weise wird bei gegebenem Größenbereich (z.B. Längen) der „Abstieg“ aus der Ebene der Größen(bereiche) in die Ebene der Repräsentanten als Repräsentation bezeichnet. Auf der Ebene der Repräsentanten wird die Länge von Stäben durch Kongruenz (Aufeinander- bzw. Aneinanderlegen) bestimmt. Beim Repräsentantenvergleich anderer Größen sind entsprechend andersartige Handlungen und Messwerkzeuge erforderlich.

Das Ergebnis einer Messung ist die Angabe einer „physikalischen Größe“ durch eine „benannte Zahl“ (vgl. Anselm 1979, S.193), bestehend aus dem „Produkt“ von Maßzahl und Maßeinheit:

$$\text{Größe} = \text{Maßzahl} \cdot \text{Maßeinheit.}$$

Das Verhältnis der Größe zur Maßeinheit ergibt eine Maßzahl, die nur für die betreffende Maßeinheit gültig ist.<sup>20</sup> Der Größenwert ist gegen den Wechsel von Einheiten invariant. Maßzahl und Maßeinheit verhalten sich wie die Faktoren eines konstanten Produktes gegenläufig: Je größer die Maßeinheit, desto kleiner die Maßzahl einer Größe (vgl. Kurzweil 2000, S.1).

### 3.2 Repräsentanten der bürgerlichen Größen

Größen treten als Eigenschaften auf, die sich auf eine bestimmte Art von Gegenständen, die Repräsentanten beziehen. Die folgende Tabelle 3.1 listet für die Größen Geldwerte, Längen, Flächeninhalt, Volumen, Gewicht und Zeit beispielhafte Reprä-

---

<sup>20</sup> Die Messung einer Größe ist der Vergleich mit der für die Größe vorgeschriebenen Einheit. Bei der Messung der Länge einer Tischplatte mit einem 0,5 m langen Lineal kann man beispielsweise feststellen, dass das Lineal viermal an der Tischplatte anzulegen ist. Das Ergebnis der Längenmessung der Tischplatte lautet folglich:  $l = 4 \cdot 0,5 \text{ m} = 2 \text{ m}$  (vgl. Trapp 2001, S.15).

sentanten auf, die einen bestimmten Wert, ein bestimmtes Ausmaß der jeweiligen Größe besitzen (vgl. Griesel 1996). Die letzten beiden Tabellenspalten geben für die jeweiligen Größenrepräsentanten die einem Messvorgang zugrundeliegende Äquivalenz- und Ordnungsrelation an (vgl. Anh. 7), die einem jeden Messvorgang zugrunde liegt.<sup>21</sup>

Größe	Repräsentanten	Namen der Maßeinheiten	Äquivalenzrelation	Ordnungsrelation
<b>Geldwerte</b>	Mengen / Zusammensetzungen von Geldstücken (Münzen) oder Geldscheinen	Euro, Cent ...	hat den gleichen (denselben) Wert wie; ist so viel wert wie	ist weniger Wert als
<b>Längen</b>	Stäbe, Stifte, Drähte	km, m, dm, cm, mm ...	ist so lang wie; ist deckungsgleich zu	ist kürzer als
<b>Fläche (Flächeninhalt)</b>	Wohnungs-, Zimmer-, Tisch- und Wand- flächen, Grundstücke, Äcker, Wiesen, Seen	km <sup>2</sup> , ha, a, m <sup>2</sup> , dm <sup>2</sup> , cm <sup>2</sup> , mm <sup>2</sup> ...	hat den gleichen Flächeninhalt wie; ist zerlegungsgleich zu	hat einen kleineren Flächeninhalt als; hat weniger Fläche als
<b>Volumen</b>	Töpfe, Tassen, Kannen, Flaschen, Eimer, Fässer	hl, l, dm <sup>3</sup> , cm <sup>3</sup> , mm <sup>3</sup> ...	ist volumengleich zu; ist inhaltsgleich (gleichgeräumig); verdrängt so viel Wasser wie	hat ein kleineres Volumen als; hat weniger Volumen als
<b>Gewicht</b>	Lebensmittel, Personen, Steine	t, kg, g, mg ...	ist so schwer / gleich- schwer wie; hält Gleichgewicht mit; hat dasselbe Gewicht wie	ist leichter als
<b>Zeit</b>	Vorgänge, Handlungsabläufe	Jahr, Monat, Wo- che, Tag, Stunde, Minute, Sekunde	dauert so lange wie	dauert kürzer als

Tabelle 3.1: Repräsentanten der bürgerlichen Größen  
(vgl. Strehl 1979; Blankenagel 1994)

<sup>21</sup> Jede Äquivalenzrelation mit ihren Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität auf einer nicht leeren Menge erzeugt eine Klasseneinteilung dieser Menge, d.h. eine Zerlegung in (nicht leere) disjunkte Teilmengen. Die einzelnen Klassen definieren gleiche Eigenschaften der Träger aus den jeweiligen Größenarten. So ist beispielsweise ein Geldwert eine Klasse gleichwertiger Zusammenstellungen von Münzen oder Geldscheinen. Für die Repräsentanten der anderen Größenarten existieren entsprechende Klasseneinteilungen.

### 3.3 Grundlegende Rechengesetze für Größen

Für die jeweiligen Größen sind Rechenoperationen der Addition, Subtraktion, Multiplikation (im Sinne von Vervielfachen) und Division (im Sinne von Verteilen und Aufteilen) möglich, die in täglichen Anwendungen ausgeführt werden:

<b>Addition</b>	<p>Zwei Größen der gleichen Art können <b>addiert</b> werden.</p> <p><u>Beispiel:</u> <i>Wie viel Kilogramm Äpfel sind 3 kg rote und 4 kg gelbe Äpfel?</i></p> <p>Allgemein gilt: Seien <math>m, n \in \mathbb{N}</math> und <math>A \in G</math>: <math>m \cdot A + n \cdot A = (m + n) \cdot A</math>.</p>
<b>Subtraktion</b>	<p>Zwei Größen der gleichen Art können <b>subtrahiert</b> werden, sofern <math>m \cdot A &gt; n \cdot A</math>.</p> <p><u>Beispiel:</u> <i>Von 1500 g Kirschen werden 800 g für eine Torte verwendet. Wie viele Kirschen sind übrig?</i></p> <p>Allgemein gilt: Seien <math>m, n \in \mathbb{N}</math> mit <math>m &gt; n</math> und <math>A \in G</math>:  <math>m \cdot A - n \cdot A = (m - n) \cdot A</math>.</p>
<b>Multiplikation</b>	<p>Man kann eine Größe <b>vervielfachen</b>, das heißt mit einer natürlichen Zahl multiplizieren.</p> <p><u>Beispiel:</u> <i>Herr Gärtner pflückt 4 mal 8 kg Birnen. Wie viele Birnen pflückt er insgesamt?</i></p> <p>Allgemein gilt: Seien <math>m, n \in \mathbb{N}</math> und <math>A \in G</math>: <math>m \cdot (n \cdot A) = (m \cdot n) \cdot A</math>.</p>
<b>Division</b>	<p>Man kann gewisse Größe <b>verteilen</b>, das heißt durch eine Zahl dividieren.</p> <p><u>Beispiel:</u> <i>Auf einer Länge von 42 m sind auf einer Autohalde lückenlos 7 gleichlange Autos abgestellt. Wie lang ist jedes Auto?</i></p> <p>Allgemein gilt: <math>m, n \in \mathbb{N}</math> und <math>A \in G</math>: <math>(n \cdot A) : m = (n : m) \cdot A</math>.</p> <hr/> <p>Man kann gewisse Größe <b>aufteilen</b>, das heißt durch eine Größe des gleichen Größenbereiches dividieren.</p> <p><u>Beispiel:</u> <i>Herr Bauer hat 12 kg Erdbeeren. Er teilt sie in Körbe zu je 2 kg auf. Wie viel Körbe werden voll?</i></p> <p>Allgemein gilt: <math>m, n \in \mathbb{N}</math> und <math>A \in G</math>: <math>(n \cdot A) : (m \cdot A) = (n : m)</math>.</p>

Tabelle 3.2: Rechengesetze für Größen (vgl. Franke 2003, S.213f.)

Bezüglich der Division im Sinne von *Verteilen* ist anzumerken, dass ebenso wie im Bereich der natürlichen Zahlen Repräsentanten der Größe Geldwerte *nicht* beliebig teilbar sind. – Beispielsweise existiert *nicht* der dritte Teil eines Euros in Geldmünzen. – Die Größe Geldwerte besitzt somit *nicht* die Teilbarkeitseigenschaft (Divisibilität), die verlangt, dass zu jeder Größe  $B \in G$  und jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  eine Größe  $A \in G$  existiert mit  $n \cdot A = B$  (vgl. Blankenagel 1994, S.112).

Manche Größenbereiche besitzen die Eigenschaft der Kommensurabilität. Diese verlangt, dass zu zwei Größen  $A, B \in G$  stets zwei natürliche Zahlen  $m, n \in \mathbb{N}$  existieren mit  $m \cdot A = n \cdot B$  (vgl. Blankenagel 1994, S.112). Die Größenbereiche der Längen, Flächen und Volumina besitzen *nicht* die Eigenschaft der Kommensurabilität und sind somit inkommensurabel.<sup>22</sup>

---

<sup>22</sup> Bei den Längen existiert die Länge der Diagonalen im Einheitsquadrat, die mit  $\sqrt{2}$  keine rationale Länge besitzt. Ebenso sind bei Flächen und Volumina irrationale Maßzahlen denkbar (vgl. Blankenagel 1994, S.112).

### 3.4 Grundvorstellungen zu Größen

Mit den jeweiligen Verknüpfungen der Addition, Subtraktion, Multiplikation (im Sinne von Vervielfachen) und Division (im Sinne von Verteilen und Aufteilen) sind nach Griesel (1996) folgende Grundvorstellungen verbunden (vgl. Tab. 3.3 und Anh. 8), die sich als didaktische Leitlinien auffassen lassen (vgl. v. Hofe 1995, S.89):

Verknüpfung	zugehörige Grundvorstellung
<b>Addition</b> zweier Größen	<b>Zusammenfassen (Vereinigung)</b> von Repräsentanten
<b>Subtraktion</b> zweier Größen	<b>Abtrennung</b> des einen Repräsentanten von einem anderen
<b>Multiplikation</b> einer Größe A mit einer natürlichen Zahl n	<b>Zusammenfassung (Vereinigung)</b> von n äquivalenten (paarweise quasidisjunk- ten) Repräsentanten der Größe
<b>Division</b> einer Größe A durch eine natürliche Zahl n	<b>Zerlegen</b> eines Repräsentanten der Größe in n äquivalente (paarweise) Teilrepräsentanten
<b>Division</b> einer Größe A durch eine Größe B	<b>Zusammensetzen (bzw. Zerlegen)</b> eines Repräsentanten der Größe A aus (bzw. in) Repräsentanten der Größe B (wiederholtes Abtrennen eines Repräsen- tanten der Größe B von einem Repräsentanten für A)

Tabelle 3.3: Grundvorstellungen zur Verknüpfung von Größen  
(vgl. Griesel 1973, S.70f.)

Während mit den Operationen der Addition und der Multiplikation meist die gedankliche Vorstellung einer *Vereinigung* verbunden ist, wird mit der Subtraktion<sup>23</sup> und der Division das Bild einer *Abtrennung bzw. Zerlegung* assoziiert.

<sup>23</sup> Für die Subtraktion existieren neben dem Bild einer Abtrennung im Sinne einer „Wegnehmvorstellung“ auch folgende Grundvorstellungen (vgl. Blum & Wiegand 1998):

- Vergleichsvorstellung:** Ich habe 5 Blumen, du hast 8 Blumen. Wie viele Blumen hast du mehr als ich?
- Ergänzungsvorstellung:** Ich habe 5 und will insgesamt 8 Blumen haben. Wie viele muss ich bekommen?
- Vereinigungsvorstellung:** Ich habe 8 Blumen: Nämlich 5 Tulpen und noch paar Narzissen: Wie viele Narzissen habe ich?

Grundvorstellungen, die ihre Wurzeln in konkreten Handlungsvorstellungen besitzen und zunehmend mit mathematischen Darstellungsmitteln verbunden werden<sup>24</sup>, sind im Sinne des Konzepts von v. Hofe (1995, 1996) allgemein wechselseitige Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen (vgl. Abb. 3.2).

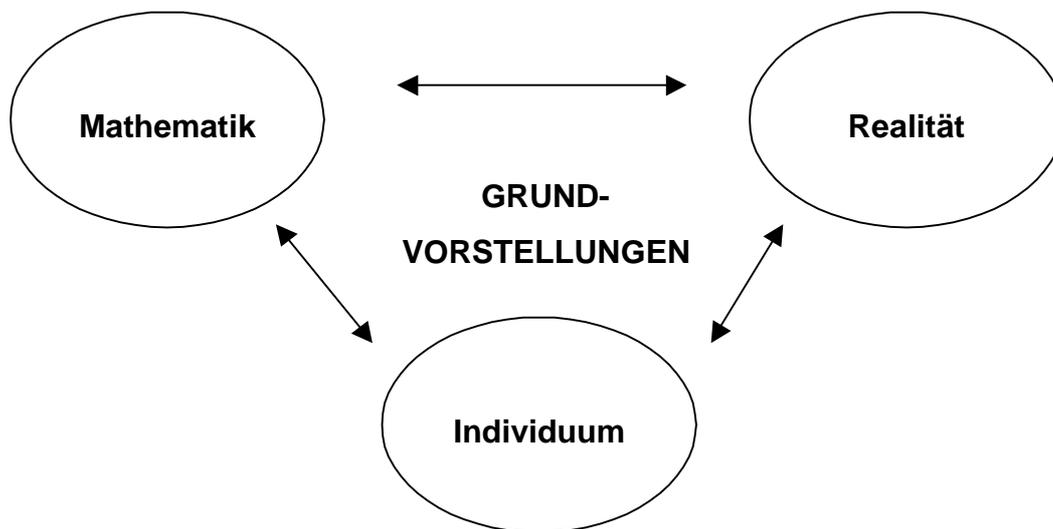


Abbildung 3.2: Beziehungen zwischen Mathematik, Realität und Individuum  
(vgl. Blum & Wiegand 1998)

Als Träger der Bedeutung des mathematischen Inhalts repräsentieren Grundvorstellungen für das Individuum den „Kern“ des Inhalts und sind damit unabdingbar für ein wirkliches Verstehen des Realkontextes.

Für den Aufbau eines Grundvorstellungskonzeptes mathematischer Begriffe hält v. Hofe die Entwicklung und Vernetzung mehrerer Grundvorstellungen für notwendig<sup>25</sup>: Erst durch die Ausbildung eines Netzwerkes an Grundvorstellungen durch Erweiterung von alten und Zugewinn von neuen Vorstellungen kann ein System mentaler mathematischer Modelle entwickelt werden (vgl. v. Hofe 2003), welches naturgemäß

<sup>24</sup> Mit dem Aufbau von Grundvorstellungen ist eine Interaktion der Darstellungsformen enaktiv (handelnd), ikonisch (bildlich, zeichnerisch) und symbolisch (in Sprache und Formeln) gegeben.

<sup>25</sup> Vgl. hierzu auch Freudenthals Konzept der Phänomenologie Mathematischer Strukturen (Freudenthal 1983). (Mathematische) Begriffe besitzen mehr als nur genau *eine* Vorstellung bzw. Bedeutung („Length“ has more than one meaning.“, Freudenthal 1983, S.1). Die Vielfalt an Grundvorstellungen zu Begriffen, insbesondere zu denen der Basisgrößen, spiegelt sich im übrigen auch in der Sprache wider (vgl. Freudenthal 1983, S.11 sowie Anh. 2).

eine entscheidende Rolle beim Modellieren, d.h. Übersetzen zwischen Realität und Mathematik (vgl. Blum & Wiegand 1998), spielt und für das Lösen von Sachrechenaufgaben notwendige Voraussetzung ist (vgl. Kap. 5.2).

Nach Winter (2001, S.46) haben alle Größenarten, die in der Primarstufe mehr oder weniger intensiv thematisiert werden, mit leiblich-sinnlichen Erfahrungen des Alltags zu tun (vgl. Tab. 3.4).<sup>26</sup>

<b>Größenart</b>	<b>Beispiele leiblich-sinnlicher Erfahrungen</b>
<b>Stückzahl / Anzahl</b>	Wahrnehmen von Körperteilen (z.B. Finger, Zehen)
<b>Länge</b>	Abtasten / Abschreiten von Abständen, Entfernungen
<b>Flächeninhalt</b>	sich selbst oder etwas bedecken, abdecken
<b>Rauminhalt</b>	etwas mit etwas füllen oder leeren, etwas ein- oder ausräumen
<b>Winkel</b>	Gliedmaßen drehen, schwenken, beugen
<b>Zeitspanne</b>	warten, ausharren, überdauern, Wiederholung, Beobachten der Welt
<b>Geschwindigkeit</b>	bummeln, gehen, rennen
<b>Gewicht</b>	mit dem eigenen Körpergewicht etwas drücken, zerdrücken, eindrücken, plätten
<b>Temperatur</b>	schwitzen, Fieber haben, frösteln, frieren

Tabelle 3.4: leiblich-sinnliche Erfahrungen von Kindern zu Größen  
(aus: Winter 2001, S.47)

<sup>26</sup> Diese leiblich-sinnlichen Erfahrungen sind häufig in den Redewendungen bzw. Sprichwörtern und auch in körperbezogenen Metaphern der jeweiligen Größen verdeutlicht (vgl. Anh. 2 sowie Winter 2001, S.48).

Grundvorstellungen sind somit nicht nur zur Rekonstruktion mathematischen Wissens (Rückschauaspekt) hilfreich, sondern tragen im Wesentlichen auch zur Konstruktion von Wissen bei (Vorschauaspekt) (vgl. Gallin & Ruf 1998).

### 3.5 Definition von Größenbereichen

Der Begriff des Größenbereiches lässt sich folgendermaßen als mathematischer Strukturbegriff definieren:

Eine nichtleere Menge  $G$ , für die eine innere Verknüpfung  $+$  (genannt Addition) und eine strenge lineare Ordnungsrelation  $<$  (genannt Kleinerrelation) erklärt ist, heißt Größenbereich  $(G, +, <)$ , wenn für beliebige Elemente  $A, B, C \in G$  die folgenden vier Eigenschaften gelten:

- (1) Kommutativgesetz:**  $A + B = B + A$
- (2) Assoziativgesetz:**  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- (3) Trichotomiegesetz:** entweder  $(A < B)$  oder  $(B < A)$  oder  $(A = B)$
- (4) Lösbarkeitsgesetz:**  $A < B$ , genau dann, wenn es ein  $X \in G$  gibt mit  $A + X = B$ .

Aus der Charakterisierung der Größenbereiche durch die Folgerungen (1) bis (4) lassen sich weitere Eigenschaften<sup>27</sup> ableiten (vgl. z.B. Blankenagel 1994, S.110ff.).

### 3.6 Zusammenfassung des Kapitels

In diesem Kapitel wurde aus mathematischer Perspektive der Größenbegriff anhand eines Vorschlags von Kirsch (1994) erläutert (vgl. Kap. 3.1). Größen treten als Eigenschaften auf, die durch verschiedene Objekte, die sogenannten Repräsentanten, verkörpert werden (vgl. Kap. 3.2 sowie Strehl 1979; Blankenagel 1994; Kirsch 1994). Über die Repräsentanten einer bestimmten Größe lassen sich durch Abstraktion Vergleichs- und grundlegende Rechenoperationen wie die der Addition, Subtraktion, Multiplikation (im Sinne von Vervielfachen) und Division (im Sinne von Verteilen und

---

<sup>27</sup> Zu diesen Eigenschaften der Größenbereiche zählen:

- Elemente der Größenbereiche sind positiv,
- Nichtexistenz eines neutralen Elements,
- Transitivität der Kleinerrelation,
- Monotoniegesetz der Addition,
- ...

Aufteilen) definieren, die für Anwendungen bedeutsam sind (vgl. Kap. 3.3 sowie Franke 2003).

Mit den Größenrepräsentanten selbst und ihren Verknüpfungen sind Grundvorstellungen verbunden, die an konkreten (Handlungs-)Vorstellungen im Alltag ansetzen (vgl. Kap. 3.4. sowie Griesel 1973; v. Hofe 1995, 1996, 2003). Solche Grundvorstellungen stellen nach v. Hofe (1995, 1996) wechselseitige Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen dar und spielen beim Modellieren, d.h. beim Übersetzen zwischen Realität und Mathematik, eine entscheidende Rolle: Für das Lösen von Sachproblemen – insbesondere Sachrechenaufgaben – sind sie notwendige Voraussetzung.

## 4 Größen im Kontext des lebenslangen Lernens

Bereits in der Einleitung wurde darauf hingewiesen, dass der heutige Mensch lebenslang eng mit dem Umgang mit Größen verbunden ist. In diesem Kapitel wird dargestellt, in welcher Weise das von Allgemeinbildung gekennzeichnete Thema Größen in der Grundschule thematisiert wird. Ausgehend von Erkenntnissen der Entwicklungspsychologie wird hierzu aufgezeigt, welche Vorerfahrungen und Vorkenntnisse gesunde Kinder im Vorschulalter zum Thema Größen besitzen (sollten), an die in der Grundschule angeknüpft werden kann. Am Ende des Kapitels erfolgt ein Ausblick zur Größenthematik in den weiterführenden Schulen.

### 4.1 Die Entwicklung des Größenbegriffs beim Kind aus entwicklungspsychologischer Sicht

Nach Jean Piaget (1896-1980) werden im Stadium des konkret-operativen Denkens von Kindern – dem dritten der vier Intelligenzentwicklungsstadien (vgl. Abb. 4.1), welches im Wesentlichen in die Grundschulzeit fällt – eine Reihe fundamentaler logischer und infralogischer Strukturen zum Größenbegriff entwickelt.<sup>28</sup>

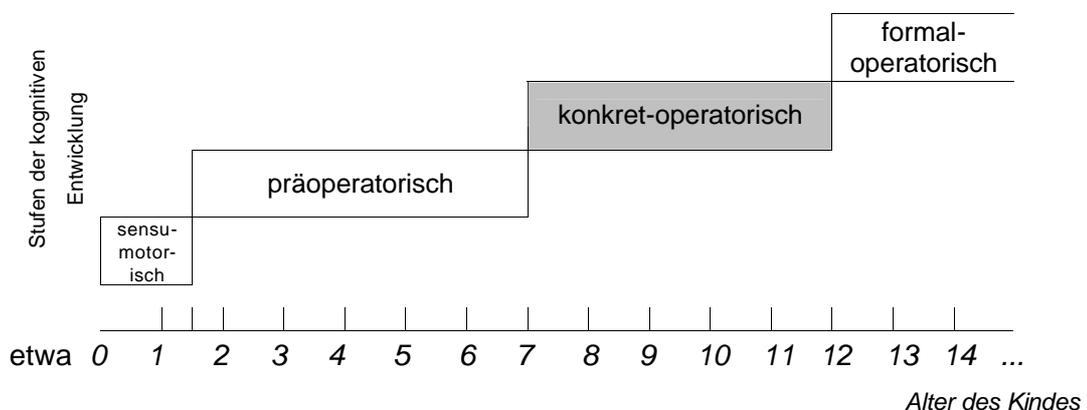


Abbildung 4.1: Piagets Stufenmodell der kognitiven Entwicklung

Piagets Forschungsergebnisse beruhen auf seinen klinischen Untersuchungen u.a. zum Erhaltungs- bzw. Invarianzverständnis der Kinder (vgl. Tab. 4.1).

<sup>28</sup> Piagets Untersuchungen zur kognitiven Entwicklung des Kindes liegen bereits einige Jahrzehnte zurück und wurden teilweise massiv kritisiert. – Piagets Kritiker stellten u.a. fest, dass er zu hohe Anforderungen an das Sprachverständnis seiner kindlichen Versuchspersonen stellte (vgl. Mietzel 2002, S.187ff.): Er verwendete Begriffe, deren Bedeutung den Kindern keineswegs klar war. Das Verhalten der Kinder interpretierte er als unmittelbares Indiz für ihr Können und wertete eine falsche Antwort als Beleg für ein fehlendes Verständnis der Kinder. Piaget berücksichtigte hierbei nicht, dass eine unzutreffende Antwort auch infolge sprachlicher Verständnisschwierigkeiten zustande gekommen sein könnte. Zudem erwiesen sich Piagets Befunde im Hinblick auf Kinder im voroperatorischen und operatorischen Stadium als ausschließlich gültig bei Kindern in Europa, Nord-, Mittel- und Südamerika, in Afrika, Asien und Australien (vgl. Mackay 1980, S.137). – Dennoch berufen sich namhafte Entwicklungspsychologen wie Goswami (2001), Mietzel (2002), Oerter & Montada (2002), Siegler (2001) in ihren Beschreibungen zur geistigen Entwicklung des Kindes stets auf Piaget. Neuere Forschungsergebnisse über Entwicklung des Größenbegriffs beim Kind liegen offenbar nicht vor.

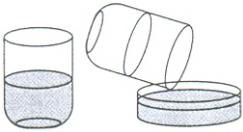
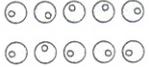
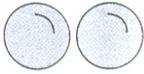
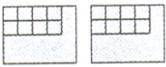
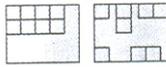
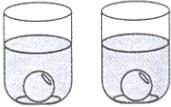
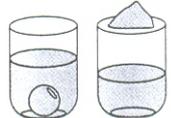
Größe	Ausgangssituation	Transformation	Endsituation
<b>Flüssigkeitsmenge</b>	 Ist in beiden Gläsern gleich viel Wasser?	Aus einem Glas wird vor den Augen des Kindes Wasser in ein anderes Glas mit größerer Grundfläche gegossen.	 Ist in beiden Gläsern gleich viel Wasser oder ist in einem Glas mehr?
<b>Anzahl</b>	 Sind in beiden Reihen gleich viele Perlen?	Die Abstände zwischen den Perlen werden in einer Reihe vergrößert.	 Sind in beiden Reihen gleich viele Perlen oder sind in einer Reihe mehr?
<b>Länge</b>	 Sind die beiden Stäbe gleich lang?	Einer der beiden Stäbe wird gegenüber dem anderen nach links oder rechts verschoben.	 Sind die beiden Stäbe gleich lang oder ist einer länger?
<b>Masse</b>	 Enthalten beide Kugeln gleich viel Knetgummi?	Aus einer Kugel Knetgummi wird eine längliche „Wurst“ geformt.	 Enthalten beide „Klumpen“ gleich viel Knetgummi oder enthält einer mehr?
<b>Fläche</b>	 Sind die nicht bedeckten Flächen gleich groß?	Die Quadrate auf der einen Fläche werden anders geordnet.	 Ist die Größe der nicht bedeckten Flächen gleich groß?
<b>Volumen</b>	 Ist in beiden Gläsern der Wasserstand gleich hoch?	Eine der Knetkugeln wird aus dem Wasser genommen, andersartig geformt und auf das Gefäß gelegt.	 Wie verändert sich der Wasserstand im Glas, wenn die neu geformte Knetmasse in das Wasser getan wird?

Tabelle 4.1: Experimente zur Invarianz  
(Zeichnungen stammen aus Mietzel 2002, S.255)

Bei allen der in Tabelle 4.1 aufgelisteten Experimenten erklärt erst ein Kind des dritten Entwicklungsstadiums, dass die jeweilige Transformation nichts am Ausgangszustand des Versuches verändert. Beim „Umschüttversuch“ (vgl. Tab. 4.1, erste Zeile) wird es dies so begründen (Mietzel 2002, S.254):

- „Wenn man das Wasser wieder in den ursprünglichen Behälter zurückgießt, dann wird dieser genauso voll wie vorher“ (*Reversibilität des Vorganges*).
- „Das Wasser ist zwar höher, aber das Glas ist dünner“ (*Kompensation*).
- „Es wurde beim Umgießen nichts weggenommen und es ist nichts hinzugekommen“ (*Identität*).

Die Antworten des Kindes zeigen seine parallel durchgeführten gedanklichen Operationen, zu denen es in den vorhergehenden Entwicklungsstufen nicht fähig ist. Stattdessen würde es am Ende des durchgeführten Invarianzversuches zur Flüssigkeitsmenge nur durch die Wahrnehmung geleitet behaupten, dass aufgrund des niedrigeren Wassers im rechten Glas auch dort weniger Flüssigkeit enthalten sei. Erst im Stadium des konkret-operativen Denkens ist das Kind zu mehreren parallelen Operationen der *Reversibilität*, der *Kompensation* und der *Identität* fähig.

Ein Verständnis des Größenbegriffs bzw. der Invarianz wird nicht in allen Größenbereichen zur gleichen Zeit ausgebildet: Im Alter von 5 bis 7 Jahren entwickelt das Kind ein Verständnis für die Invarianz der Anzahl der Elemente einer Menge, gefolgt vom Invarianzverständnis für Längen (7 und 8 Jahre). Erst im achten bis neunten Lebensjahr zeigen Kinder ein Verständnis für Invarianzen von Flächen, Gewicht (zwischen 9 und 10 Jahren) und Volumen (12 bis 14 Jahren) (vgl. Mietzel 2002, S.255).<sup>29</sup> Die An-

---

<sup>29</sup> Das aus entwicklungspsychologischer Sicht von Jean Piaget entwicklungsabhängige Verständnis der Invarianzen in den jeweiligen Größenbereichen stimmt etwa mit der zeitlichen Positionierung der Größen Länge, Fläche, Gewicht und Volumen im Grundschulcurriculum der BRD überein (vgl. Kap. 4.3.3.1). Kulturvergleichende Untersuchungen ergeben, dass Piagets Befunde im Hinblick auf Kinder im voroperatorischen und operatorischen Stadium in Europa, Nord-, Mittel- und Südamerika, in Afrika, Asien und Australien gültig sind (vgl. Mackay 1980, S.137). Eine kulturvergleichende Untersuchung von Opper zur Überprüfung Piagets Entwicklungstheorie im Stadium des konkret-operativen Denken ergab, dass thailändische Kinder aus den ländlichen Gebieten Leistungsrückstände von einem bis zu drei Jahren bei der Beurteilung konkreter und formaler Operationen erreichten (vgl. Carlson 1980, S.720). Weitere Ergebnisse bezüglich kulturvergleichender Untersuchungen im Rahmen von Piagets Theorie sind beispielsweise Carlson (1980) zu entnehmen.

gaben dienen der ungefähren zeitlichen Einordnung. Alle gesunden Kinder durchlaufen die Stufen in derselben Reihenfolge. Hinsichtlich der Geschwindigkeit beim Durchlaufen der jeweiligen Stufen können große individuelle Unterschiede existieren. Die Altersangaben für die jeweiligen Stufen sind als Annäherungswerte zu interpretieren: Während manche Kinder eine Entwicklungsstufe sehr früh erreichen, durchlaufen andere Kinder diese Stufe sehr spät (vgl. Mietzel 2002, S.303). Darüber hinaus ist zu berücksichtigen, dass ein Verständnis des Kindes für die Invarianz der jeweiligen Größen vom Umfang seiner Erfahrungen und der aus ihnen gewonnenen Grundvorstellungen zum jeweiligen Größenbereich abhängig ist: „Es [ein bzw. das Kind, KRL] hat nun mal häufiger Gelegenheit, Erfahrungen mit Flüssigkeiten zu sammeln, die von einem Gefäß in ein anderes geschüttet werden; sehr viel seltener dürfte es die Chance haben, in seinem Alltagsleben zu beobachten, wie sich die Höhe einer Flüssigkeitssäule in einem Behälter verändert, wenn man dort einen Festkörper hineinbefördert“, Mietzel 2002, S.256.

Im Stadium des konkret-operativen Denkens kommt es allgemein zur Ausformung fundamentaler mathematischer und physikalischer Begriffe und Relationen (vgl. Wittmann 1981, S.74). Zu diesen zählen zusammenfassend:

- logische Verknüpfungen (z.B. Vereinigung von Mengen),
- logische Relationen (z.B. „Teilmenge von“),
- Entwicklung operativer Begriffe der Zahl, Zeit, Länge, Flächeninhalt, Volumen, und Gewicht,
- asymmetrische Relation ( $\leq$ ).

#### **4.2 Kenntnisse von Schulanfängern und Grundschulkindern zum Thema Größen – Befunde mathematikdidaktischer Untersuchungen**

Schülerinnen und Schüler besitzen bereits zu Schulbeginn Vorkenntnisse und Vorerfahrungen über vielfältige Zahlenaspekte – so auch den Größen. Schmidt- und Weisers (1986) empirische Untersuchungen zum Maßzahlverständnis zeigen, dass 5- bis 7-jährige Vorschulkinder über beachtenswerte Erfahrungen im Umgang mit Größen und Maßzahlen verfügen (vgl. Tab. 4.2).

<b>Allgemeines</b>	Zählen, Rechnen, Schreiben, <b>Geld</b> , Autokennzeichen, Messen, Würfel, Hausnummer, Schreibmaschine, Sport
<b>Einkaufen</b>	<b>Geld, Preise, Kasse, Kassenzettel, Holz in Metern</b>
<b>Spielen</b>	Würfeln, „Mensch ärgere dich nicht“, Domino, Tankstelle, Kaufladen, Zahlenmemory, <b>Kinderuhr</b>
<b>Basteln oder Bauen</b>	Messen, <b>Maßband, Lineal</b> , Bauklötze abzählen
<b>Backen oder Kochen</b>	<b>Herdknöpfe, Waage, Backofen</b> , Waschmaschine, Geburtstagskuchen, <b>Uhr, Thermometer</b> , Kochbuch, <b>Wecker, Messen von Mehl und Zucker</b>
<b>Autofahren</b>	<b>Tachometer, Uhr</b> , Kennzeichen, Parkscheibe, Gangschaltung, <b>Benzinverbrauch</b> , „Null“ (an den Reifen)
<b>Telefonieren</b>	Wählscheibe, Telefonnummer
<b>Sonstiges</b>	TV-Fernbedienung, Buch, Brief, <b>Geldverdienen, Inhalt von Dosen</b>

Tabelle 4.2: Maßzahlverständnis von Vorschulkindern  
(vgl. Padberg 1992, S.21f.)

Das Wissen von Schulanfängern über einzelne Größen und deren Grundvorstellungen ist jedoch sehr unterschiedlich ausgeprägt (vgl. auch Hasemann 2003, S.162-168).

*Befunde zur Größe Geldmenge.*

Schulanfänger verfügen über Erfahrungen beim Einkaufen und anderen Situationen, in denen Geld eine Rolle spielt. Bei unterschiedlich großen Münzenmengen halten sie jedoch die größere Anzahl von Münzen für den höheren Geldwert (vgl. Schmidt & Weiser 1986, S.134 und Hasemann 2003, S.162). Zudem besitzen Schulanfänger nur eine vage Vorstellung über Warenpreise.

### *Befunde zur Größe Länge.*

Ebenso zeigen Kinder vor Schuleintritt Schwierigkeiten, die Länge von Objekten oder die Größe von Personen zu schätzen und mit Standardmaßen anzugeben. Derartige Defizite sind durchaus noch im dritten und vierten Schuljahr anzutreffen (vgl. Spiegel & Selter 2003, S.75 sowie Kap. 4.3.3.2).

### *Befunde zu den Größen Masse (Gewicht), Zeit und Temperatur.*

Repräsentanten der Größen Masse (Gewicht), Zeit und Temperatur sind nicht sichtbar und damit auch nicht am äußeren Erscheinungsbild einzelner Repräsentanten ablesbar (vgl. Lorenz 1992). Ohne technische Hilfsmittel sind Maße dieser Größen schwer anzugeben. Kinder, aber auch Erwachsene neigen fälschlicherweise dazu, auf das Gewicht eines Körpers zu schließen, indem sie von seinen Eigenschaften wie beispielsweise Dicke oder Volumen ausgehen (vgl. Schmidt & Weiser 1986, S.131f.). Dafür können Grundschul Kinder zu Beginn der vierten Klassenstufe bei Kenntnis ihres eigenen Körpergewichtes das ihrer Klassenkameraden gut einschätzen (vgl. Grassmann 1999, S.32).

Zeitdauern und Temperaturen sind besonders gegenüber subjektiven Fehleinschätzungen anfällig. Repräsentanten dieser Größen lassen sich ohne geeignete Messinstrumente nur schwer miteinander vergleichen. So verfügte keines der von Schmidt und Weiser interviewten Kinder bei den Zeitspannen über die Messidee (vgl. Schmidt & Weiser 1986, S.135-137).

### *Befunde zu den Größen Flächeninhalt und Volumen.*

Kenntnisse von Schulanfängern hinsichtlich der Größen Flächeninhalt und Volumen sind durch wenige empirische Daten belegt (vgl. Hasemann 2003, S.163). Flächeninhalte werden aber auch von älteren Grundschulkindern falsch eingeschätzt.

### *Befunde der TIMS-Studie zur Mathematik.*

In der TIMS-Grundschulstudie 1995 (vgl. Mullis et al. 1997), an der die Bundesrepublik Deutschland nicht teilgenommen hatte, wurden international die Mathematikleistungen von Viertklässlern u.a. in dem Stoffgebiet „Messen und Maßeinheiten“ zu den Größen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Masse (Gewicht) und Temperatur getestet.

Die Befunde zu den internationalen Lösungshäufigkeiten (Mittelwert über alle teilnehmenden Länder der TIMSS-POP1-Studie 1995) zeigen, dass Schülerinnen und Schüler auf dem Gebiet „Messen und Maßeinheiten“ mit 56 Prozent mit am schlechtesten abschnitten (vgl. Abb. 4.2).

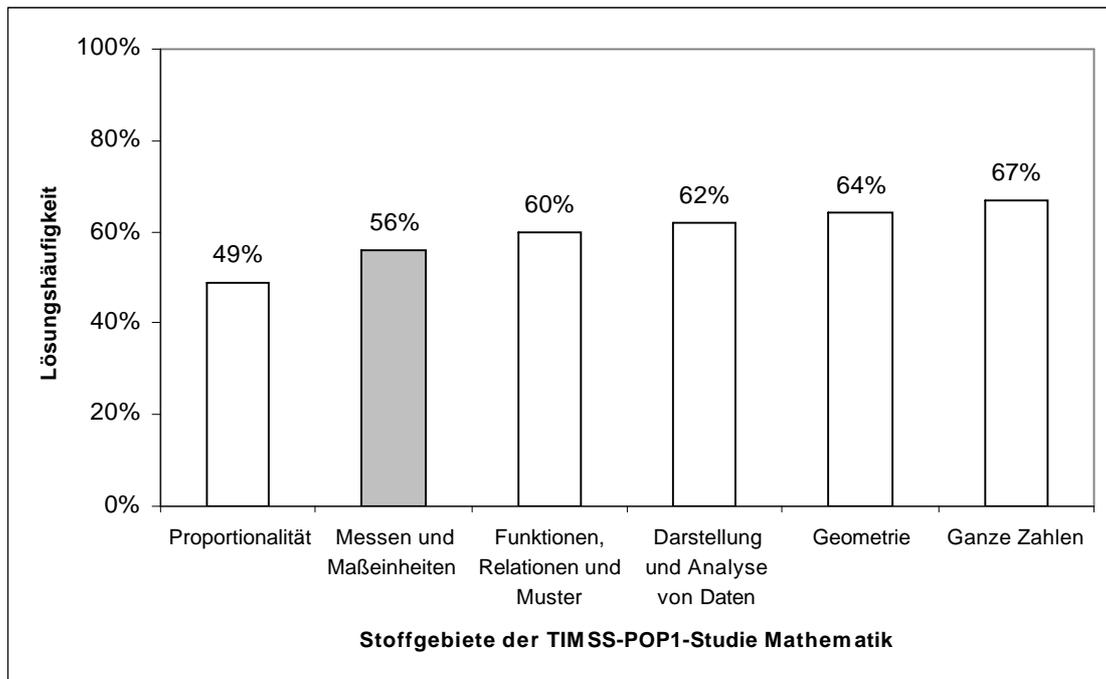


Abbildung 4.2: Internationale Lösungshäufigkeiten für alle an der TIMS-Studie von 1995 teilnehmenden Länder (vgl. Mullis et al. 1997, S.47)

Da die meisten Testitems der Studie für die Öffentlichkeit nicht zugänglich sind, kann hier nur ein Einblick in einige Ergebnisse hinsichtlich der Lösungen der Schülerinnen und Schüler gegeben werden (vgl. Abb. 4.3).

Beim Schätzen der Länge eines Bleistiftes (Beispiel 1) und der Angabe der größten Masseneinheit (Beispiel 2) waren die Schülerinnen und Schüler erfolgreich. Dagegen zeigten die Kinder Schwierigkeiten, einen Teelöffel als Maß für Milliliter zu nennen (Beispiel 3).

### Beispiel 1

About how long is this picture of a pencil?



- A. 5 cm
- B. 10 cm
- C. 20 cm
- D. 30 cm

(size reduced from original)

Internationale Lösungshäufigkeit: 77%

### Beispiel 2

Which of these is largest?

- A. 1 kilogram
- B. 1 centigram
- C. 1 milligram
- D. 1 gram

Internationale Lösungshäufigkeit: 72%

### Beispiel 3

Which of these would most likely be measured in milliliters?

- A. The amount of liquid in a teaspoon
- B. The weight (mass) of a pin
- C. The amount of gasoline in a tank
- D. The thickness of 10 sheets of paper

Internationale Lösungshäufigkeit: 38%

Abbildung 4.3: Beispielaufgaben der TIMS-Studie POP1 Mathematik mit internationalen Lösungshäufigkeiten bzgl. der korrekten Antworten (aus: Mullis et al. 1997, S.83-87)

## 4.3 Größen und Messen im Schulunterricht

### 4.3.1 Leitlinien der Curricula und der Bildungsstandards zu Größen

Aufgrund der Bedeutsamkeit der Größen und des Messens in der Lebenswelt der Kinder und der Erwachsenen ist es nicht verwunderlich, dass das Thema „Größen und Messen“ als Leitidee in den Grundschullehrplänen und in den Bildungsstandards Mathematik (vgl. <http://www.kmk.org> [vom 20.12.2004]) der Bundesrepublik Deutschland für die Grundschule und die weiterführenden Schulen explizit ausgewiesen ist (vgl. Kap. 4.3).

Nach den Bildungsstandards sollen Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe zum Thema „Größen und Messen“ über folgende inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen verfügen:

<b>Leitidee „Größen und Messen“ im Fach Mathematik</b>	
Bildungsstandards in der Jahrgangsstufe 4 der Grundschule Beschluss der KMK vom 15. Oktober 2004, S.14ff.	
<b>Größenvorstellungen besitzen</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>- Standardeinheiten aus den Bereichen Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte kennen,</li><li>- Größen vergleichen, messen und schätzen,</li><li>- Repräsentanten für Standardeinheiten kennen, die im Alltag wichtig sind,</li><li>- Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen darstellen (umwandeln),</li><li>- im Alltag gebräuchliche einfache Bruchzahlen im Zusammenhang mit Größen kennen und verstehen.</li></ul>
<b>mit Größen in Sachzusammenhängen umgehen</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>- mit geeigneten Einheiten und unterschiedlichen Messgeräten sachgerecht messen,</li><li>- wichtige Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt zum Lösen von Sachproblemen heranziehen,</li><li>- in Sachsituationen angemessen mit Näherungswerten rechnen, dabei Größen begründet schätzen,</li><li>- Sachaufgaben mit Größen lösen.</li></ul>

Tabelle 4.3: KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik der Jahrgangsstufe 4

In den Bildungsstandards der Haupt- und der Realschule wird gefordert, dass Schülerinnen und Schüler u.a. das Grundprinzip des Messens nicht nur zur Längen-, Flächen- und Volumenmessung im Mathematikunterricht, sondern auch in den Naturwissenschaften und anderen Bereichen nutzen können.

<b>Leitidee „Messen“</b>	<b>Leitidee „Messen“</b>
Bildungsstandards im Fach Mathematik Hauptschulabschluss nach Klasse 9	Bildungsstandards im Fach Mathematik Mittlerer Schulabschluss Jahrgangsstufe 10
Beschluss der KMK vom 15. Oktober 2004, S.10	Beschluss der KMK vom 04. Dezember 2003, S.14
<p>Die Schülerinnen und Schüler ...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,</b></li> <li>- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel) und wandeln sie ggf. um,</li> <li>- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über alltagsbezogene Repräsentanten,</li> <li>- ermitteln Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,</li> <li>- ermitteln Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide und Zylinder sowie daraus zusammengesetzten Körpern,</li> <li>- nehmen in der Umwelt gezielt Messungen vor oder entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.</li> </ul>	<p>Schülerinnen und Schüler ...</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen,</b></li> <li>- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel),</li> <li>- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten,</li> <li>- berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren,</li> <li>- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern,</li> <li>- berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen,</li> <li>- nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation.</li> </ul>

Tabelle 4.4: KMK-Bildungsstandards zur Leitidee „Messen“ in den weiterführenden Schulen

Auch in anderen Ländern, z.B. England und USA, sind „Größen und Messen“ ein zentrales Thema. Eine frühzeitige Beschäftigung mit Größen wird in den Principles and Standards for School Mathematics (vgl. <http://standards.nctm.org> [vom 30.11.2004] sowie Abb. 4.5) und in den Benchmarks of Science Literacy befürwortet (vgl. American Association for the Advancement of Science 1993 sowie Abb. 4.6).

<b>Instructional programs from prekindergarten through grade 12 should enable all students to ...</b>	<b>In prekindergarten through grade 2 all students should ...</b>	<b>In grades 3 - 5 students should ...</b>
<i>understand measurable attributes of objects and the units, systems, and processes of measurement</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• recognize the attributes of length, volume, weight, area, and time,</li> <li>• compare and order objects according to these attributes,</li> <li>• understand how to measure using nonstandard and standard units,</li> <li>• select an appropriate unit and tool for the attribute being measured.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• understand such attributes as length, area, weight, volume, and size of angle and select the appropriate type of unit for measuring each attribute,</li> <li>• understand the need for measuring with standard units and become familiar with standard units in the customary and metric systems,</li> <li>• carry out simple unit conversions, such as from centimeters to meters, within a system of measurement,</li> <li>• understand that measurements are approximations and how differences in units affect precision,</li> <li>• explore what happens to measurements of a two-dimensional shape such as its perimeter and area when the shape is changed in some way.</li> </ul>
<i>apply appropriate techniques, tools, and formulas to determine measurements</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• measure with multiple copies of units of the same size, such as paper clips laid end to end,</li> <li>• use repetition of a single unit to measure something larger than the unit, for instance, measuring the length of a room with a single meterstick,</li> <li>• use tools to measure,</li> <li>• develop common referents for measures to make comparisons and estimates.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• develop strategies for estimating the perimeters, areas, and volumes of irregular shapes,</li> <li>• select and apply appropriate standard units and tools to measure length, area, volume, weight, time, temperature, and the size of angles,</li> <li>• select and use benchmarks to estimate measurements,</li> <li>• develop, understand, and use formulas to find the area of rectangles and related triangles and parallelograms,</li> <li>• develop strategies to determine the surface areas and volumes of rectangular solids.</li> </ul>

Tabelle 4.5: NCTM Principles and Standards zum Thema „Measurement“

	<b>COMMON THEMES</b>  <i>Scale</i>  p.276-279	<b>HABITS OF MIND</b>  <i>Computation and Estimation</i>  p.288-291
<b><i>Kindergarten through grade 2</i></b>	Things in nature and things people make <b>have very different</b> sizes, weights, ages, and speeds.	Make <b>quantitative estimates</b> of familiar lengths, weights, and time intervals and check them by measurements.
...	...	...
<b><i>grades 9 to 12</i></b>	Because different properties are not affected to the same degree by changes in scale, <b>large changes in scale typically change the way</b> that things work in physical, biological, or social systems.	Find answers to problems by <b>substituting</b> numerical values in <b>simple algebraic formulas</b> and judge whether the answer is reasonable by <b>reviewing the process and checking against typical values.</b>

Tabelle 4.6: Benchmarks of Science,  
in denen das Thema „Measurement“ explizit angesprochen wird

Schülerinnen und Schüler sollen sich bereits vom Kindergartenalter an bis in die höchsten Klassenstufen mit dem Thema „measurement“ – einer gemeinsamen Thematik der Mathematik als auch der Naturwissenschaften (vgl. McDonald & Czerniak 1994; Lonning & DeFranco 1994; Lonning & DeFranco 1997; Lonning, DeFranco & Weinland 1998; Huntley 1998) – beschäftigen.

Zum Thema Größen existiert für die Grundschule und die weiterführenden Schulen eine Fülle an fachdidaktischer Literatur (vgl. <http://www.emis.de/MATH/DI.html> [vom 20.12.2004]).

### 4.3.2 Größen als fächerverbindendes / fächerübergreifendes Thema

„It is the union of science, mathematics and technology that forms the scientific endeavor and that makes it so successful. Although each of these human enterprises has a character and history of its own, each is dependent on and reinforces the others“, American Association for the Advancement of Science 1993, S.3.

Größen werden nicht nur in den Unterrichtsfächern Mathematik und Naturwissenschaften thematisiert, sondern zum Teil auch in anderen Unterrichtsfächern unter deren spezifischer Perspektive. Mit Hilfe des Themensterns zur Größe Zeit soll dies exemplarisch beleuchtet werden (vgl. Abb. 4.4).

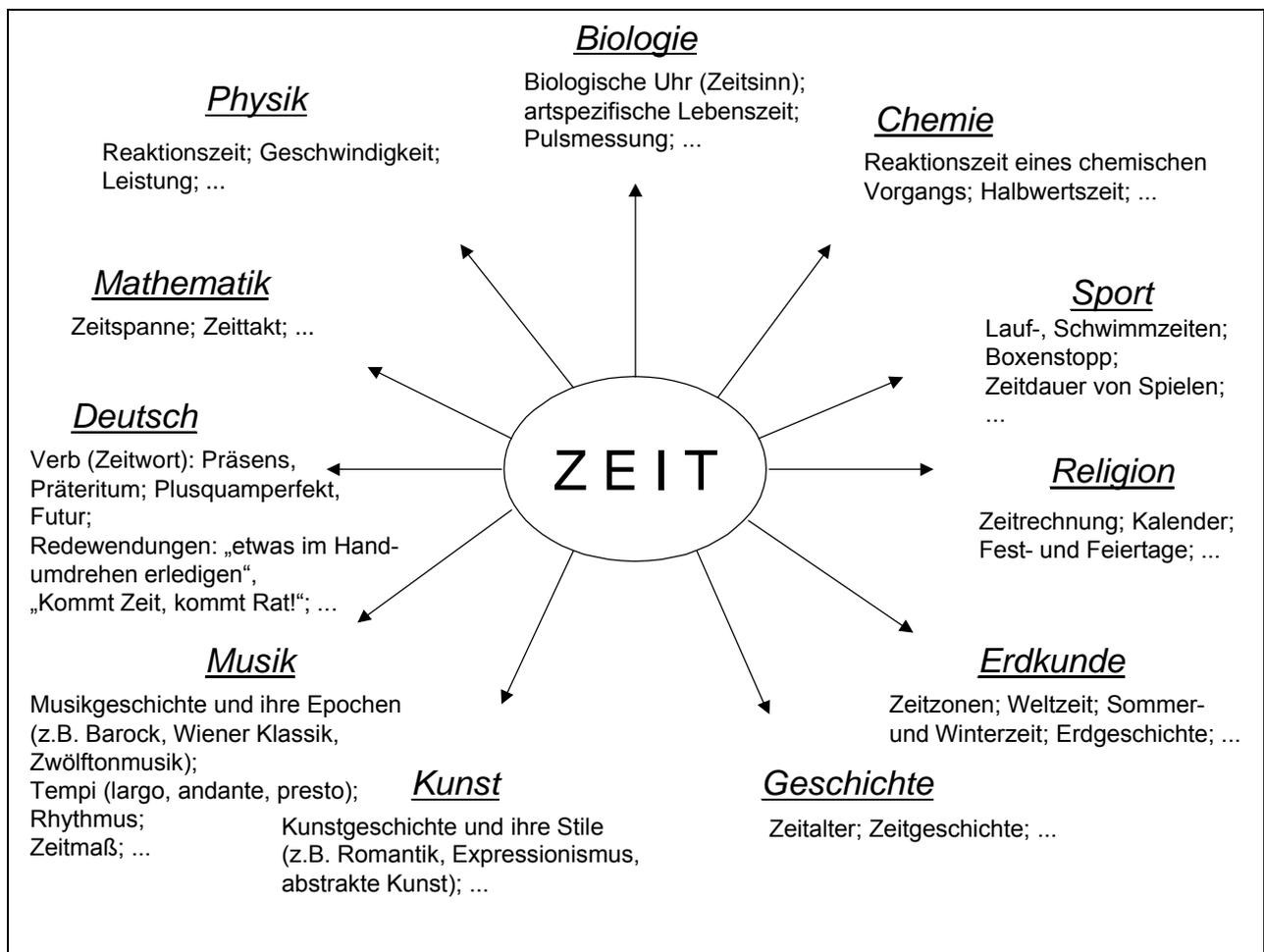


Abbildung 4.4: Themenstern zur Größe Zeit

Der Themenstern veranschaulicht die facettenreichen Bezüge der Größe Zeit zu den unterschiedlichen Schulfächern. Zu nennen sind hier u.a. die Jahreszeit (Unterrichts-

fach Erdkunde), der Kalender (in den Religionen Islam, Judentum, ...), die Zeit in der Muttersprache (Unterrichtsfach zur Muttersprache und andere Fächer), die Reaktionszeit z.B. im Straßenverkehr (Unterrichtsfach Sachunterricht in der Grundschule sowie Physik, Biologie, Chemie in den weiterführenden Schulen) und die Biologische Uhr (Unterrichtsfach Biologie). Das Thema Größen bildet ein stark vernetztes System zwischen einzelnen Fachgebieten und ist damit aus der Schul- und Lernperspektive gesehen von fächerverbindender bzw. fächerübergreifender Natur (vgl. Grund 1992; Homann 1992; Beckmann 2003a, 2003b, 2003c).

Gleichzeitig wird deutlich, dass die Größenthematik im Sinne einer fundamentalen mathematischen Idee (vgl. Winter 1976 und Vohns 2002) einen direkten lebensweltlichen Bezug für die Schülerinnen und Schüler *aller* Jahrgangsstufen hat<sup>30</sup> und somit allgemeinbildend ist (vgl. Heymann 1989, 1996). Im Heymannschen Sinn markiert das Thema Größen eine Schnittstelle zwischen Mathematik und der Welt und erfüllt sieben zentrale Aufgaben der allgemeinbildenden Schulen:

- Lebensvorbereitung,
- Stiftung kultureller Kohärenz,
- Weltorientierung,
- Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch,
- Förderung von Phantasie und Kreativität,
- Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft und
- Stärkung des Schüler-Ichs.

Diese Aufgaben werden im folgenden näher erläutert.

#### *Lebensvorbereitung.*

Die Idee der Größen und des Messens durchdringt und prägt die gesamte Alltagskultur unserer Gesellschaft: „Im Messen verknüpft sich die Mathematik auf vielfältige Weise mit der sinnlich erfahrbaren Welt“, Heymann 1996, S.175. So trägt das Thema Größen und Messen im Unterricht dazu bei, die Schülerinnen und Schüler auf ihr

---

<sup>30</sup> Das Thema Größen lässt sich im Sinne einer fundamentalen Idee auf unterschiedlichen Niveaustufen konkretisieren und durchläuft somit das Schulcurriculum vertikal (vgl. Vohns 2002, S.4).

Leben und die Bewältigung alltäglicher Situationen vorzubereiten, ohne dabei auf die Ausübung eines bestimmten Berufes hin ausgerichtet zu sein.

#### *Stiftung kultureller Kohärenz.*

Die Idee der Größen und des Messens verbirgt sich in der vermessenen Welt und ist nicht überall offensichtlich: „Die Kilo-Packungen im Supermarkt sind fertig ausgewogen und abgepackt, die Entfernungen zwischen den Städten auf Schildern angezeigt etc., und alle gebräuchlichen Messgeräte – die Digitalwaage für Obst und Gemüse, die Digitaluhr, das Fieberthermometer, der Kilometerzähler und der Tacho im elterlichen Personenwagen – zeigen gleich fertige Zahlen an“, Heymann 1996, S.175. Für die Stiftung kultureller Kohärenz ist es notwendig, fächerübergreifende Gelegenheiten für elementare Messerfahrungen und „Messerlebnisse“ zu bieten. Aufgrund der im Alltagsgeschehen weltweit nicht einheitlich geregelten Maßsysteme sollen sich die Lernenden mit ihren regional-vertrauten Maßsystemen sowohl als ein Teil der Kultur aber auch als ein verbindendes Glied innerhalb der Kulturen erkennen. Für den täglichen Gebrauch sind die vom Internationalen Einheitensystem „Système International d'Unités“ abweichenden Maßsysteme als gleichberechtigte Daseinsform zu akzeptieren. Das internationale SI-Einheitensystem ermöglicht zudem ein Sichtbarmachen „synchroner“ Verflechtungen innerhalb der gesamten Weltkultur. Angesichts der schnellen technischen, wissenschaftlichen und gesellschaftlichen Entwicklung muss nach Heymanns Auffassung (Heymann 1989) der Anfangsmathematikunterricht zu einer generationsübergreifenden Klammer werden, um dem Mathematikunterricht eine allgemeinbildende Qualität zuzusprechen.

#### *Weltorientierung.*

In der abendländischen Kultur gilt es seit jeher als ein Merkmal eines „gebildeten“ Menschen, auch über Zusammenhänge anderer Kulturen Bescheid zu wissen, die nicht unmittelbar seinem beruflichen oder privaten Lebenskreis zuzuordnen sind. In diesem Zusammenhang ermöglicht das Thema Größen und Messen, historische Bezüge und Zusammenhänge zwischen den internationalen Maßeinheiten des SI-Einheitensystems und den nicht metrischen Maßeinheiten wie beispielsweise der USA oder Großbritanniens zu erörtern.

### *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch.*

Der kritische Vernunftgebrauch setzt bei der Größenthematik im exakten Messen und im Schätzen an. Lernende müssen selbstständig entscheiden können, bei welcher Messsituation ein exakter oder „nur“ ein geschätzter Wert erforderlich bzw. ausreichend ist.

### *Förderung von Fantasie und Kreativität.*

Die Entfaltung von Fantasie und Kreativität ist für die Entwicklung zur Selbstständigkeit wichtig. Beim Messen durch Schätzen können die Schülerinnen und Schüler ihre Fantasie und ihre Kreativität im Hinblick des Einsatzes von „Stützpunktvorstellungen“ ihnen bekannter Objekte entfalten und dabei ihr Netzwerk an individuellen Grundvorstellungen weiter ausbauen.

### *Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft.*

Bereits beim (Aus-)Messen von verschiedenen Größenrepräsentanten sollen Grundschülerinnen und -schüler erlernen, für ihre Messergebnisse mit den von ihnen verwendeten Messmethoden Verantwortung zu übernehmen. Auf diese Weise erhalten die Lernenden einen Einblick in das für die Allgemeinheit erforderliche verantwortungsbewusste Arbeiten von Praktikern und von Wissenschaftlern.

### *Stärkung des Schüler-Ichs.*

Die Wirksamkeit der zuvor beschriebenen sechs Aufgaben allgemeinbildender Schulen vereint sich in der Stärkung des Schüler-Ichs und wird damit zu einem Element von Allgemeinbildung (Heymann 1989).

Im Sachrechnen der Grundschule (vgl. Kap. 5) werden die fünf erst genannten Größen Länge (Einheit Meter), Zeit (Einheit Sekunde), Masse (Einheit Kilogramm), Temperatur (Einheit Kelvin, in der Grundschule und Mittelstufe ist für die Temperatur nur die Einheit °C bekannt) und im Sachunterricht in Ansätzen die elektrische Stromstärke (Einheit Ampère) der insgesamt sieben sogenannten Basiseinheiten des internationalen SI-Einheitensystem behandelt. Die noch fehlenden Größen Stoffmenge (Einheit Mol) und Lichtstärke (Einheit Candela) sowie viele weitere Größen begegnen den Schülerinnen und Schülern erst in den höheren Klassenstufen.

### **4.3.3 Größen in der Grundschule**

#### **4.3.3.1 Überblick über die Unterrichtsinhalte zum Thema Größen**

Analysen der Grundschullehrpläne der einzelnen Länder der Bundesrepublik Deutschland ergeben, dass in den ersten beiden Schuljahren des Mathematikunterrichts eine erste systematische Beschäftigung mit den Größen Geldwerte, Länge und Zeit erfolgt (vgl. auch Franke 2003, S.201). Eine vertiefte Behandlung dieser Größen erfolgt in den Klassenstufen 3 und 4 unter anderem durch die Verwendung gemischter Einheiten, den Wechsel von Maßeinheiten, die Umwandlungen einer Maßeinheit in eine andere und die Kommaschreibweise: 5,3 m wird z.B. als Kurzschreibweise für 5 m und 30 cm eingeführt. In den Klassenstufen 3 und 4 werden in Ansätzen die Größen Masse (Gewicht), Fläche und Volumen behandelt. Hierbei wird mit der Erschließung des Größenbereiches der Masse (Gewicht) das erste „1000-teilige“ Maß eingeführt. Flächen- und Rauminhalte werden in der Grundschule als „selbstständige“ Größen (im Sinne von Basisgrößen) betrachtet. Erst in der Orientierungsstufe kann auf die Darstellung von Flächeninhalten und Volumina als abgeleitete Größen eingegangen werden (vgl. Lauter 1977, S.15). So werden Flächeninhalte ohne die Maßeinheiten  $\text{cm}^2$ ,  $\text{m}^2$  bestimmt. Der Flächenvergleich erfolgt direkt durch ein Übereinanderlegen bzw. Auslegen von Flächen mit zunächst selbstgewählten Maßeinheiten und danach mit Zentimeter- oder Meterquadraten. Meist geschieht dies unter Benutzung von Rechenkästchen, die den Schülerinnen und Schülern in ihrem karierten Mathematikheft zur Verfügung stehen (vgl. Franke 2003, S.199).

In einzelnen Grundschulrahmenrichtlinien bzw. -lehrplänen der Bundesrepublik Deutschland sind verschiedene Querverweise zwischen den Unterrichtsfächern Mathematik und Sachunterricht speziell zum Thema Sachrechnen genannt. So wird auch im Sachunterricht der Grundschule die Größe Zeit thematisiert. Sie steht meist im Zusammenhang mit dem Thema Raum. Ferner wird im Rahmen der Wetterkunde des Sachunterrichts die Temperatur ansatzweise behandelt.

#### 4.3.3.2 Methodische Überlegungen zur Erarbeitung des Größenbegriffs

Das Thema Größen darf im Unterricht keineswegs auf das schlichte Ausführen rechnerischer Operationen reduziert werden, da dies sehr leicht zu mechanischem Rechnen ohne Einsicht in den Größenbegriff mit seinen Grundvorstellungen führt (vgl. Anselm 1979, S.198; Griesel 1996), wie das nachfolgende Beispiel zeigt (vgl. Abb. 4.5).

Wir haben einmal Kinder eines 4. Schuljahres gebeten, auf einem Zettel zu notieren, wie groß ihre Lehrerin sei. Als wir die Zettel einsammelten, fanden sich viele unterschiedliche Antworten: Von 40 cm bis 4,63 m reichten die Angaben. Was die Kinder aber wie die Feuerwehr konnten, war km in m oder m in cm umrechnen.

Abbildung 4.5:

Vorstellung von Kindern zur Körpergröße ihrer Lehrerin  
(aus: Spiegel & Selter 2003, S.75)

Zahlreiche Mathematikdidaktiker (vgl. Anselm 1979, S.198f.; Griesel 1996, S.16; Lauter et al. 1974, S.48; Radatz & Schipper 1983) schlagen für die Behandlung von Größen eine didaktische Stufenfolge vor (vgl. Tab. 4.7), in der der Abstraktionsprozess zum Gewinnen von Größen im Unterricht über bestimmte Lernstufen realisiert wird:

<b>Stufe 1</b>	Sammeln erster Erfahrungen mit Größen in Spiel- und Sachsituationen
<b>Stufe 2</b>	direkter / unmittelbarer Vergleich von Repräsentanten Gegenstände werden miteinander verglichen, indem sie aufeinander- bzw. aneinander gelegt werden (z.B. Das Stück Kreide ist kürzer als der Bleistift.)
<b>Stufe 3</b>	Klassenbildung äquivalenter Klassen (z.B. Zusammenfassung gleichlanger Stäbe zu einer Klasse)
<b>Stufe 4</b>	indirekter / mittelbarer Vergleich von Repräsentanten (willkürlich selbstgewählter Maßeinheiten) (Ein Repräsentant wird durch einen Repräsentanten einer Klasse durch wiederholtes Abtragen gemessen: Mit einem als Maßeinheit ausgewählten Stab wird beispielsweise die Länge des Klassenzimmers abgetragen.)

<b>Stufe 5</b>	Erkennen der Invarianz einer Größe (z.B. ändert sich die Länge einer Schnur nicht, wenn sie statt geradlinig geschwungen auf dem Boden liegt)
<b>Stufe 6</b>	Einführung der konventionellen Maßeinheiten, indirektes Vergleichen bzw. Messen mit standardisierten technischen Hilfsmitteln / Messgeräten
<b>Stufe 7</b>	Verfeinern und Vergrößern von Maßeinheiten (Die Unterteilung einer Größe führt zu neuen Maßeinheiten.)
<b>Stufe 8</b>	Kommaschreibweise bei Größen
<b>Stufe 9</b>	Rechnen mit Größen im Rahmen des Sachrechnens

Tabelle 4.7: Didaktische Stufenfolge für die Behandlung von Größen

Griesel (1996) hält für die Entwicklung von Größenbegriffen den Aufbau von sogenannten Grundvorstellungen (vgl. Kap. 3.4) für notwendig. Diese sollten beim qualitativen Vergleich zweier Träger einer jeden Größe, beim Messverfahren und der damit verbundenen Angabe eines Größenwertes durch Maßzahl und Maßeinheit sowie bei den Grundrechenarten aufgebaut werden – wie in Kapitel 3 bereits allgemein dargestellt.

### 4.3.3.3 Aufbau von Grundvorstellungen zu den bürgerlichen Größen

Schülerinnen und Schüler sollen neben ihren eigenen Körpermaßen – wie Handspanne, Fußlänge und Körpergröße – durch selbstständige Messungen einen reichen Fundus ihnen vertrauter Größenrepräsentanten aufbauen, die sie zum Vergleichen oder Schätzen beliebiger Objekte heranziehen können.

Für die Größen Gewichte, Rauminhalte und Längen nennen Spiegel und Selter (2003, S.76) folgende Beispiele:

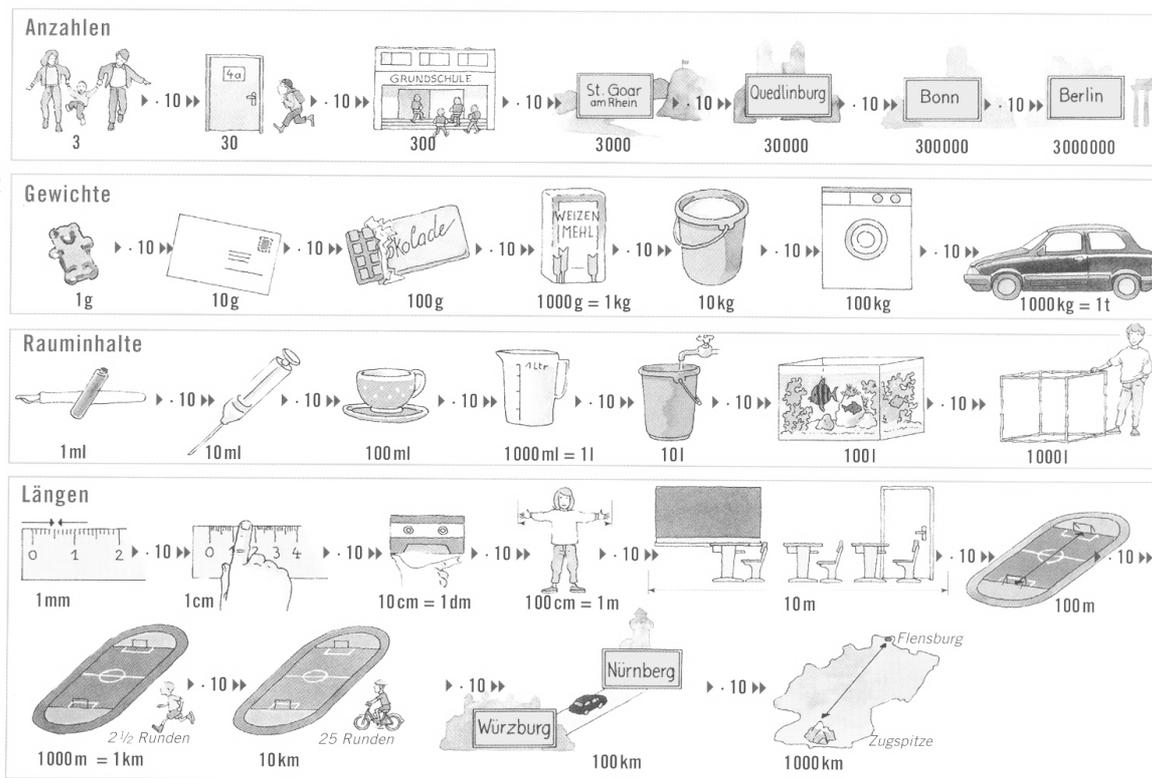


Abbildung 4.6: Wichtige Grundvorstellungen zu verschiedenen Einheiten bedeutender Größen (aus: Spiegel & Selter 2003, S.76)

Ebenso ist es sinnvoll und notwendig, aus vertrauten Objekten kleiner Maßeinheiten Beziehungen zu Objekten größerer Einheiten aufzubauen. In diesem Zusammenhang nennt Franke (2003, S.211f.) folgende Vergleichsobjekte, mit denen die Kinder oft zu tun haben (vgl. Tab. 4.8):

Größenart	Vergleichsobjekt	Größenangabe
<b>Länge</b>	Länge eines neuen Stiftes	18 cm
	Türhöhe	2 m
	Länge eines Autos	4 m
	Länge des Klassenraumes	10 m
	Länge eines Fußballfeldes	100 m
	Runde im Stadion	400 m
<b>Zeit</b>	Eieruhr	5 min
	Hofpause	15 min
	Sendung mit der Maus	30 min
<b>Gewicht</b>	Puddingpulver	37 g
	eine kleine Tube Zahncreme	75 g
	eine Tafel Schokolade	100 g
	unser Mathematikbuch	250 g
	großer Margarinebecher	500 g
<b>Volumen</b>	ein kleiner Eimer	5 l
	ein großer Eimer	10 l
	eine Badewanne	200 l
	ein Medizinfläschchen	10 ml
	ein kleines Glas Saft	200 ml
	ein großes Glas Saft	300 ml
	ein Trinkpäckchen	200 ml
	eine kleine Limoflasche	500 ml
	eine mittlere Flasche	750 ml
eine große Limoflasche	2 l	

Tabelle 4.8: Weitere Grundvorstellungen  
zu den Größen Länge, Gewicht, Zeit und Volumen  
(aus: Franke 2003, S.211f.)

Da sich Maße einzelner Repräsentanten nicht immer exakt angeben lassen, müssen Schülerinnen und Schüler ebenso eine Vorstellung von Größenintervallen entwickeln (vgl. Abb. 4.6 sowie Schipper, Dröge & Ebeling 2000, S.212).

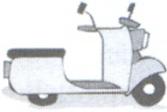
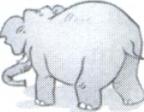
weniger als 10g	10g - 100g	100g - 1000g (1kg)	1kg - 10kg
 Steckwürfel	 Brötchen	 Lesebuch	 Tornister
10kg - 100kg	100kg - 1000kg (1t)	mehr als 1t	
 Schulkind	 Motorroller	 Elefant	

Abbildung 4.7: Vorstellung von Größenintervallen  
(aus: Schipper et al. 2000, S.212)

Grundvorstellungen zu einzelnen Größenrepräsentanten werden nicht durch ein einmaliges Messen erworben, sondern sind in vielfältigen prozessbezogenen Übungen zu festigen und beim Lösen von Sachaufgaben (vgl. Kap. 5) als Vergleichsgrößen heranzuziehen (vgl. Franke 2003, S.213).

#### 4.3.4 Größen in den weiterführenden Schulen

In den weiterführenden Schulen wird das Thema Größen im Wesentlichen im Fach Mathematik und in den naturwissenschaftlichen Fächern Biologie, Physik und Chemie fortgesetzt. Die Tabelle 4.9 listet für diese Fächer beispielhafte Unterrichtsinhalte zur Größe Volumen auf, wodurch der fächerübergreifende und kumulative Charakter des Themas „Größen und Messen“ nochmals verdeutlicht wird.

Mathematik	Physik	Biologie	Chemie
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Volumen von Körpern (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Pyramidenstumpf, regelmäßige (reguläre) Polyeder, Zylinder, Kegel, Kegelstumpf, Kugel, zusammengesetzte Körper)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Dichte <math>\delta = m / V</math></li> <li>* Archimedisches Prinzip</li> <li><math>F_A = F_G = \delta \cdot g \cdot V</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Lungenvolumen</li> <li>* Atemvolumen</li> <li>* Flüssigkeitshaushalt</li> <li>* Treibhauseffekt (Anstieg des Meeresvolumens und Erhöhung der Niederschlagsmenge)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* molares Volumen (Molvolumen): <math>V_m = V/n</math> mit <math>[V_m] = 1 \text{ m}^3/\text{mol}</math> (<math>V</math>: Volumen; <math>n</math>: Anzahl der Mole eines Stoffes)</li> <li>* Das Volumen einer Gasportion mit <math>L = 6,023 \cdot 10^{23}</math> Teilchen (molares Volumen) beträgt unter Normbedingung <math>V = 22,4 \text{ l}</math>.</li> <li>* Gasgesetze (Zusammenhang zwischen Volumen, Druck und Temperatur) Amontons-Gesetz; Boyle-Mariotte-Gesetz; Gay-Lussac-Gesetz</li> <li>* Zustandsgleichung der Gase</li> <li>* Ölfleckversuch (Bestimmung des Volumens kleinster Teilchen)</li> <li>* Volumenprozent (Konzentration)</li> </ul>

Tabelle 4.9: Unterrichtsinhalte zur Größe Volumen in den weiterführenden Schulen

Zusätzliche Beispiele zu den anderen bürgerlichen Größen sind im Anhang 9 aufgeführt. Das Thema Größen wird in Aufgaben mit außermathematischen Kontexten

thematisiert, die erfahrungsgemäß Kindern und Jugendlichen besondere Schwierigkeiten bereiten.

#### **4.4 Zusammenfassung des Kapitels**

In diesem Kapitel wurde das Thema Größen und Messen als fundamentale Idee (vgl. Winter 1976 und Vohns 2002) dargestellt. Es besitzt einen lebensweltlichen Bezug für Kinder und Jugendliche *aller* Jahrgangsstufen, ist allgemeinbildend (vgl. Heymann 1989, 1996) und steht somit im Kontext des lebenslangen Lernens. Das Thema „Größen und Messen“ durchzieht vertikal (vgl. Vohns 2002, S.4) die Curricula von Mathematik und Naturwissenschaften und wird entsprechend altersbezogen konkretisiert. Horizontale Verzweigungen bestehen zu den übrigen Schulfächern.

Das Thema „Größen und Messen“ ist nicht nur in Deutschland, sondern beispielsweise auch in England und in den USA in *allen* Klassenstufen ein zentrales Thema der Curricula bzw. Bildungsstandards (vgl. 4.3).

Bereits vor Schulbeginn besitzen Kinder Vorkenntnisse und Vorerfahrungen zum Maßzahlbegriff (vgl. Kap. 4.1; Kap. 4.2 sowie Schmidt & Weiser 1986; Mietzel 2002). Nach Piagets Untersuchungen werden im Stadium des konkret-operativen Denkens, dem dritten der vier Intelligenzentwicklungsstadien, welches im Wesentlichen in die Grundschulzeit fällt, eine Reihe fundamentaler logischer und infralogischer Strukturen ausgebildet. Zu diesen zählen u.a. der Begriff der Zahl, der Zeit, der Länge, der Fläche, des Volumens und der Masse (Gewicht) (vgl. Wittmann 1981). Das Verständnis des Größenbegriffs bzw. der entsprechenden Invarianzbegriffe ist jedoch nicht in allen Größenbereichen zur gleichen Zeit ausgebildet: Während Kinder ein Verständnis für die Invarianz von Zahlen bereits im Alter von etwa 5 bis 7 Jahren entwickeln, zeigen Kinder erst im Alter von etwa 9 bis 10 Jahren ein Verständnis für Invarianzen von Flächen und Gewicht, gefolgt vom Invarianzverständnis des Volumens (12 bis 14 Jahre) (vgl. Mietzel 2002, S.255).

Einzelne Fallstudien und Befunde der TIMS-Studie Population I (vgl. Mullis et al. 1997), an der die Bundesrepublik Deutschland nicht teilgenommen hat, belegen, dass Grundschülerinnen und -schüler in der vierten Jahrgangsstufe Schwächen auf dem Gebiet „Messen und Maßeinheiten“ besitzen (vgl. Kap. 4.2).

## 5 Sachrechnen

Das Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem Thema Größen aus der Perspektive des Sachrechnens – neben Arithmetik und Geometrie der dritte Kernbereich im Mathematikunterricht der Grundschule – und spannt damit einen Bogen zwischen den vorhergehenden Ausführungen und der empirischen Untersuchung der vorliegenden Arbeit.

Sachrechnen beinhaltet nicht vordergründig Rechnen, sondern kennzeichnet einen komplexen und anspruchsvollen Problemlöseprozess zur Erschließung der Umwelt mit mathematischen Mitteln und unterstützt damit das Verstehen von Phänomenen und Erscheinungen des Alltags (vgl. Kap. 5.1 sowie Franke & Schipper 2001, S.468 und Franke 2003, S.5). Beim Sachrechnen geht es um das Anwenden von Mathematik auf sogenannte außermathematische Situationen<sup>31</sup>, in denen Größen eine wichtige Rolle spielen.

Sachrechnen, in seiner modernen Deutung als mathematische Modellbildung, erfordert in der Regel neben Alltagswissen, spezifisches mathematisches Wissen, Rechenfertigkeiten und allgemeine Problemlösefähigkeiten.

Diese Vielfalt an notwendigen Kompetenzen zum erfolgreichen Lösen von Sachrechenaufgaben dieses Typs ist der Grund dafür, dass Sachrechnen bei Schülerinnen und Schülern in der Grundschule mit erheblichen Schwierigkeiten (vgl. Kap. 5.4 und Kap. 5.5) und mit zahlreichen negativen Erfahrungen und Assoziationen verbunden ist (vgl. Radatz & Schipper 1983, S.123).

---

<sup>31</sup> Bei Aufgaben mit außermathematischem Kontext zeigt der Aufgabentext einen expliziten Bezug zur außermathematischen Realität auf, der gegebenenfalls auch fiktiv sein kann. Aufgaben mit außermathematischem Kontext werden traditionell als Sachrechenaufgaben bezeichnet, die mathematisches (Fach-)Wissen und Sachwissen miteinander vernetzen. Die Beschäftigung mit außermathematischen Situationen wird in Heinrich Winters (1992) Forderung zur mathematischen Grundbildung explizit angesprochen: Der Mathematikunterricht soll „Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen“ ermöglichen.

## 5.1 Funktionen des Sachrechnens

Hinsichtlich des Sachrechnens in der Grundschule unterscheidet Heinrich Winter (1992, S.15ff.) drei Funktionen:

- Sachrechnen als Lernstoff,
- Sachrechnen als Lernprinzip und
- Sachrechnen als Lernziel – Befähigung zur Erschließung der Umwelt.

### 5.1.1 Sachrechnen als Lernstoff

Im Sachrechnen der Grundschule sollen Schülerinnen und Schüler zur erfolgreichen Erschließung ihrer Umwelt ein Wissen über „bürgerliche Größen“ sowie Fertigkeiten im Umgang mit „bürgerlichen Größen“ aufbauen (vgl. Winter 1992, S.24).

Zu diesen „bürgerlichen Größen“ zählen im Grundschulunterricht die Größen Länge, Gewicht, Zeit, Temperatur, Fläche und Volumen. In neuerer Zeit sehen Lehrpläne zunehmend auch die Beschäftigung mit elementaren Verfahren und Begriffen der beschreibenden Statistik im Rahmen des Sachrechnens vor.

Im Grundschulunterricht sind für die Lehre von den Größen in Verbindung mit beschreibender Statistik folgende Lerninhalte vorgesehen:

- Methoden zum Gewinnen von Daten (Messwerten / Größen) mittels Zählen, Messen, Schätzen,
- Kennenlernen der Maßsysteme und Verankern von Stützpunktwissen<sup>32</sup> über Größen,
- Methoden zum Darstellen von Daten durch Modellieren, Zeichnen und Symbolisieren und
- Verarbeitung von Daten durch Sortieren, Anordnen von Daten und Rechnen mit Größen (auch Mittelwerte bestimmen) (vgl. Winter 1992, S.15).

---

<sup>32</sup> In älterer Literatur wird der Begriff der Grundvorstellungen noch im Sinne von „Stützpunktwissen“ bzw. „Stützpunktvorstellungen“ geführt.

### **5.1.2 Sachrechnen als Lernprinzip**

Da jedes Lernen als „Weiterlernen“ (Vermehren, Vertiefen und Umordnen vorhandenen Wissens, Trainieren vorhandener und Erlernen neuer Fertigkeiten) erfolgt, sollte jeder Lernprozess an Erfahrungen und Vorkenntnissen aus der Lebenswelt der Kinder anknüpfen (vgl. Winter 1992, S.26). Sachsituationen, die für das Lernen mathematischer Begriffe und Verfahren genutzt werden, sollten so reichhaltig und Interesse weckend gestaltet sein, dass die Kinder unter Nutzung ihrer bisherigen Erfahrungen und ihres Vorwissens neue Erfahrungen machen und neues (mathematisches) Wissen entwickeln können. Je interessanter und rätselhafter den Lernenden eine Situation erscheint, umso angeregter werden sie sein, über die Sachsituation nachzudenken und sich mit ihr zu befassen. Sachrechnen dient neben dem Fördern mathematischen Verständnisses auch dem Festigen mathematischen Stoffes.

### **5.1.3 Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung**

Die dritte Funktion „Sachrechnen als Beitrag zur Umwelterschließung“, in der sich die beiden anderen Funktionen „Sachrechnen als Lernstoff“ und „Sachrechnen als Lernprinzip“ integrieren, stellt die umfassendste, wichtigste und in der Unterrichtspraxis am schwierigsten umzusetzende Funktion des Sachrechnens dar.

Sachrechnen macht hier die Sachsituation selbst zum Stoff des Mathematikunterrichts (im Sinne von Sachkunde). Schülerinnen und Schüler sollen lernen, Umweltsituationen mit Hilfe mathematischer Modelle zu bearbeiten und sie dabei klarer, bewusster und kritischer sehen zu lernen. Das heißt, die Kinder sollen lernen, Problemsituationen aus dem Alltag zu mathematisieren – das Herzstück des Sachrechnens.

Umwelterschließendes Sachrechnen bildet eine enge Verzahnung zwischen Inhalten des Mathematik-, des Sach- *und* auch des Deutschunterrichts (vgl. Abb. 5.1), zumal Sachrechenaufgaben schwerpunktmäßig in Textform, Bildaufgaben oder daraus gebildeten Mischformen gestellt sind.

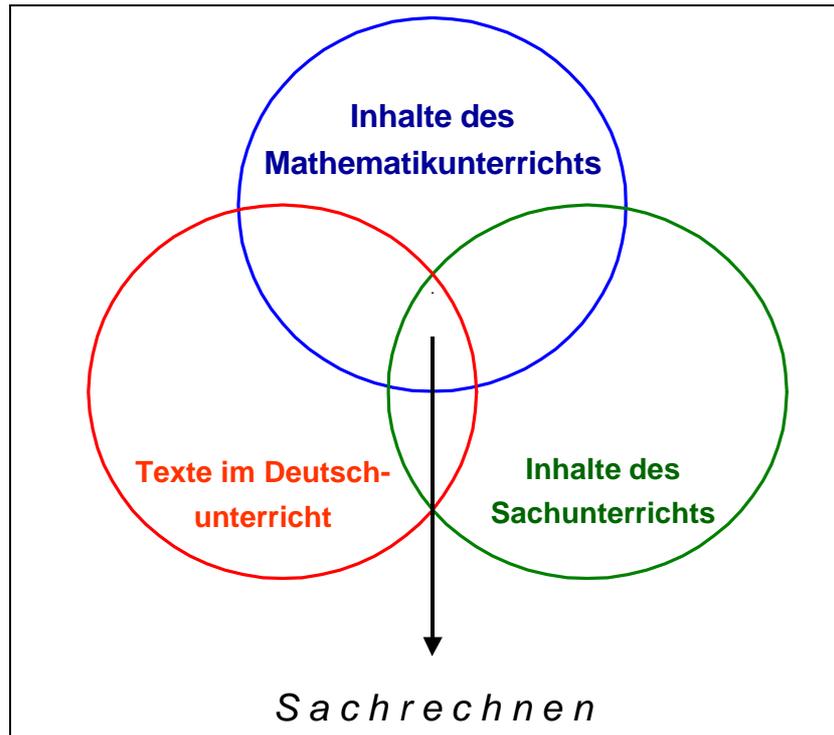


Abbildung 5.1: Umwelterschließendes Sachrechnen als Verzahnung von Mathematik, Sachunterricht und Texten aus dem Deutschunterricht

Sachrechnen besitzt somit einen interdisziplinären und damit fächerübergreifenden Charakter: Zur Mathematisierung der jeweiligen Sachsituation ist das Erschließen von (Informations-)Texten im Sinne eines informativen, weiterführenden Lesens notwendig. Hierzu können folgende Lesestrategien hilfreich sein (vgl. Erichson 1991, S.23):

- **orientierendes Lesen:** Verschaffen eines Überblicks über den Sachverhalt,
- **genaues Lesen:** Herstellen von Beziehungen zwischen den einzelnen Textaussagen,
- **selektives Lesen:** „Herauspicken“ der wesentlichen Informationen für die Problemlösung,
- **kritisches Lesen:** Entdecken textimmanenter Widersprüche aber auch Widersprüche zwischen Text und eigenen Erfahrungen,
- **produktives Lesen:** Operieren mit den Informationen.

Die Mathematisierung von Sachsituationen stellt eine besondere Form der Texterschließung dar, „wie sie nirgendwo sonst sinnvoller geleistet werden kann, die aber zur Bewältigung der gedruckten Umwelt unverzichtbar ist“ (Erichson 1991, S.23).

Beim Mathematisieren sollen die Kinder zusätzlich allgemeine Problemlösefähigkeiten – sogenannte Heuristiken – erlernen. Zu diesen zählen u.a.

- Wiedergabe von Texten mit eigenen Worten,
- Gliederung eines Textes,
- Deuten bzw. Anlegen von Skizzen,
- Lesen bzw. Erstellen von Tabellen,
- Überprüfung von Vermutungen,
- Schätzen von Ergebnissen (vgl. Winter 1992, S.33).

## 5.2 Mathematische Modellbildung beim Sachrechnen

Die für das Sachrechnen erforderliche mathematische Modellbildung ist in ihrem zyklischen Prozess mit den vier Phasen Mathematisieren, Verarbeiten, Interpretieren und Validieren in der Abbildung 5.2 schematisch dargestellt.

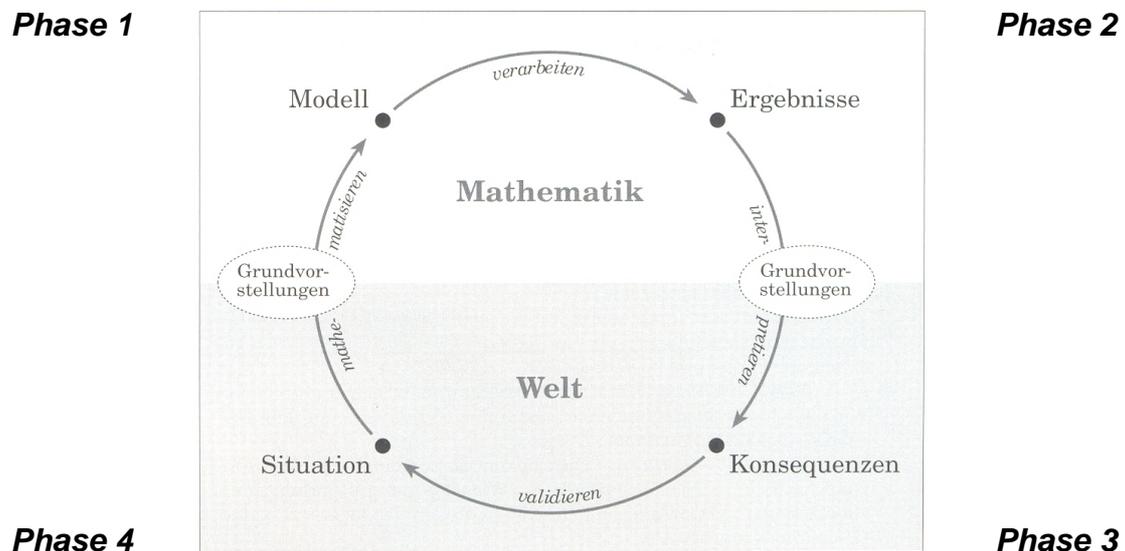


Abbildung 5.2: Der Modellierungsprozess  
(aus: v. Hofe 2003, S.5)

### *Phase 1.*

Ausgangspunkt bildet eine Situation aus der realen Welt mit mathematischem Gehalt, die durch Texte, Bilder, Grafiken, Tabellen bzw. Mischformen solcher Elemente dargestellt ist (Walther et al. 2003, S.190). Aus dieser Präsentation ist zunächst ein Verständnis der Sachsituation zu gewinnen (Sachverständnis).<sup>33</sup> Hierbei ist besonders das Verstehen von Texten aber auch von grafischen Elementen der Schülerinnen und Schüler notwendige Voraussetzung. Der Aufgabenlöser konstruiert das gestellte Sachproblem neu und schafft sich ein individuelles Situationsmodell (kognitive Repräsentation des Aufgabeninhaltes) (vgl. Reusser 1997, S.144).

### *Phase 2.*

Die aus der realen Welt angebotene textlich vermittelte (Problem-)Situation ist in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, d.h. die Sachsituation ist mit Hilfe mathematischer Begriffe und Verfahren auf der mathematischen Ebene in einen mathematischen Operationszusammenhang darzustellen (vgl. v. Hofe 2003, S.5). Dieser Vorgang wird als Mathematisieren einer außermathematischen Situation bezeichnet, der Kern des Sachrechnens. Das vom Problemlöser entworfene individuelle Situationsmodell wird auf den mathematischen Kern reduziert. Dabei kommen Prozesse des Abstrahierens, des Idealisierens, der Identifizierung relevanter Parameter der Sachstruktur, des Formalisierens und der Auswahl bzw. Entwicklung einer geeigneten mathematischen Struktur zum Tragen.

### *Phase 3.*

Innerhalb der Mathematik erfolgt die Bearbeitung der Aufgabe mit dem Ziel eines mathematischen Resultats. Notwendige Rechenoperationen sind zu erkennen bzw. zu entwickeln, Inhalte bzw. Größen sind entsprechend miteinander zu verknüpfen und Ergebnisse auszurechnen. Hierbei kann es vorkommen, dass in der Sachsituation nicht alle Daten präsent sind und zum Bearbeiten der Aufgaben weitere Informationen beschafft werden müssen. Zum Lösen der Aufgabe kann neben den Ausfüh-

---

<sup>33</sup> Zum Verstehen der Problemsituation sind Bearbeitungshilfen nützlich (vgl. Franke 2003, S.84ff.). Man unterscheidet zwischen Bearbeitungshilfen zur Textanalyse (Lesen / Vorlesen, Nacherzählen der Aufgabe, ...), konkreten Bearbeitungshilfen (Nachspielen / Rollenspiel und Darstellen der Situation mit Material) sowie grafischen Bearbeitungshilfen (Erstellen einer Situationskizze, eines Strecken- oder Streifendiagramms, eines Rechenbaums oder einer Tabelle).

rungen von Rechnungen ein Vergleichen, Zählen, Messen oder Schätzen, geometrisches Skizzieren bzw. Konstruieren erforderlich sein.

#### *Phase 4.*

Die Aufgabenergebnisse sind schließlich auf den Ausgangssachkontext zurückzubeziehen und zu interpretieren. In diesem Schritt ist zu überprüfen, ob das gewählte mathematische Modell für die Ausgangsfragestellung geeignet war – d.h. die mathematische Lösung eine Lösung des außermathematischen Problems darstellt oder ob aufgrund nicht oder ungenügend erfüllter Anforderungen der Sachsituation eventuell einzelne Modellierungsschritte verändert oder gegebenenfalls ein neuer Durchlauf des Zyklus – möglicherweise mit einem anderen und besseren mathematischen Modell – vorgenommen werden muss.

Das Reflektieren und Validieren des Lösungswegs unterstützt ein Bewusstwerden über erfolgreiche oder nicht erfolgreiche Lösungsstrategien und ist damit elementare Voraussetzung für die Bewältigung weiterer Sachprobleme.<sup>34</sup>

Allgemein verläuft der Lösungsprozess – besonders bei mehrschrittigen und komplizierten Aufgaben – nicht geradlinig: Der Bearbeiter der Aufgabe wird den Text mehrmals lesen und durch diese Vorgehensweise neue Fragen an den Text und an sich selbst formulieren, nacheinander Rechenschritte planen und durchführen, um sich schließlich wieder an der Frage bzw. an dem Sachtext zu orientieren.

Für die Vermittlung zwischen Mathematik und der Welt ist die Ausbildung von tragfähigen Grundvorstellungen zu mathematischen Begriffen und Verfahren notwendig (vgl. v. Hofe 2003, S.5 und Kap. 3.4). Beide „Welten“ – die Welt der Sachsituationen und die Welt der Mathematik – sind stets wechselseitig aufeinander zu beziehen und in dieser sich vernetzenden Abhängigkeit gleichzeitig zu erschließen (vgl. Winter 1994, S.11).

---

<sup>34</sup> Die Mathematisierung einer außermathematischen Situation spiegelt sich im allgemeinen Problemlöseprozess wider, wie ihn George Polya (1949) mit den vier Stufen „Verstehen der Aufgabe“, „Ausdenken eines Planes“, „Ausführen des Planes“ und „Rückschau“ beschreibt (vgl. Anh. 10).

### 5.3 Aufgabentypen zum Sachrechnen

#### 5.3.1 Traditionelle Einteilung von Aufgaben zum Sachrechnen

In der Mathematikdidaktik wurden Textaufgaben traditionell nach den drei Typen „eingekleidete Aufgaben“, „Textaufgaben“ sowie „Sachaufgaben / Sachrechenaufgaben“ klassifiziert (vgl. Radatz & Schipper 1983, S.130 sowie Tab. 5.1).

Aufgabentyp	Charakterisierung	Intentionen	Beispiel
<b>eingekleidete Aufgabe</b>	in Worte gefasste Aufgabenkonstruktion bzw. Rechenoperationen ohne Realitätsbezug	Anwenden und Üben von Rechenfertigkeiten und mathematischen Begriffen, wobei diese in Texte eingekleidet sind.	Auf 3 Behälter werden gleichmäßig 420 Liter verteilt.
<b>Textaufgabe</b>	in Textform dargestellte Aufgaben, bei denen der Sachverhalt weitgehend bedeutungslos und austauschbar ist.	Zum Lösen der Aufgabe ist der gesamte Sachkomplex zu durchschauen. Die Aufgaben sind „gekünstelt“, ihre Hauptschwierigkeit liegt im Aufstellen von Informationen aus der Umgangssprache in die mathematische Fachsprache.	Herr Tietze hat 1000 € auf seinem Lohnkonto. Er überweist 400 € für Miete, 12 € für Gas und Elektrizität sowie 8 € für seinen Parteibeitrag. Zudem hebt er 450 € in bar ab.
<b>Sachaufgabe / Sachrechenproblem</b>	Die Sache / Umwelt steht im Vordergrund und wird mitdiskutiert. Die Mathematik dient nur als Hilfsmittel zur Bearbeitung und Erschließung des Sachproblems.	Es erfolgt ein echtes Anwenden mathematischen Wissens in realistischen Sachsituationen, zu denen oft erst noch die Daten selbst zu sammeln sind.	Den Klassenausflug in den Harz können wir mit einem Bus oder mit der Bundesbahn durchführen. Was ist preiswerter? Was ist praktischer? Welche Kosten kommen noch hinzu? Wie teuer kommt der Ausflug für jeden Schüler?

Tabelle 5.1: Traditionelle Einteilung von Aufgaben im Sachrechnen  
(vgl. Radatz & Schipper 1983, S.130 – leicht adaptiert)

Während eingekleidete Aufgaben und Textaufgaben häufig zur Festigung und Anwendung des im Unterricht gerade behandelten arithmetischen Stoffes dienen, führt das Bearbeiten von Sachaufgaben / Sachrechenproblemen über die Grenzen des

Mathematikunterrichts hinaus – Mathematik dient hier nur als Hilfsmittel zur Erschließung und Bearbeitung des Sachproblems – und ist somit fächerverbindend und -übergreifend. Hier bietet sich die Chance, Unterrichtsfächer wie beispielsweise Deutsch, Mathematik und Sachunterricht *bewusst* miteinander zu vernetzen.

In den letzten Jahren hat sich beim Sachrechnen eine Öffnung hin zu einem Unterricht vollzogen, „der offen ist hinsichtlich der Kontexte und damit der Erfahrungen der Schüler, offen für die Methoden der Präsentation und Bearbeitung, offen für Diskussionen, unterschiedliche Sichtweisen und Lösungsmöglichkeiten“ (Franke & Schipper 2001, S.470). Konzeptionelle Ansätze zum „neuen Sachrechnen“, die Alternativen zu den traditionellen Sachrechenaufgaben darstellen, werden u.a. von Dröge (1995, 2001), Erichson (2004), Hengartner & Wieland (2001), Rasch (2001a, 2001b, 2003) und Winter (1992, 2004) mitbestimmt.

Das „neue Sachrechnen“ wird auch unter dem Begriff „Sachmathematik“ geführt (vgl. <http://reitberger-berlin.de/sachmath.htm> [vom 16.12.2004] und Spiegel & Wenning 1991). Sachmathematik ermöglicht, im Alltag und Beruf auftretende, meist einfache mathematische Fragen zu beantworten. Entscheidend ist hierbei die Anwendung von mathematischen Techniken in außermathematischen Situationen: Zu diesen zählen u.a. das Messen, insbesondere der Umgang mit Messgeräten, die tabellarische und grafische Darstellung von Daten und das Anwenden mathematischer Verfahren.

### 5.3.2 Neue Systematisierung von Aufgabentypen zum Sachrechnen

Bezüglich der traditionellen Aufgabentypisierung im Sachrechnen bemerkt Franke, dass „sowohl der mathematische Inhalt als auch die Sache gleichberechtigte Komponenten in der Aufgabe sein sollten“ (2003, S.35). Für alle drei konventionellen Aufgabentypen des Sachrechnens verwendet sie die Bezeichnung „Sachaufgaben“ und klassifiziert sie nach drei unterschiedlichen Sichtweisen mit weiteren Differenzierungen (vgl. Tab. 5.2).

Einteilung von Aufgaben zum Sachrechnen nach ...	
<b>a) den in den Aufgaben beschriebenen Situationen</b>	<b>Sachaufgaben zu realen Situationen</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- einfache Sachaufgaben,</li> <li>- Sachprobleme,</li> <li>- Sachtexte,</li> <li>- Projekte</li> </ul>
<b>b) den mathematischen Inhalten</b>	<b>Sachaufgaben zu fiktiven Situationen</b>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Märchen- und Fantasiefiguren,</li> <li>- Denk- und Knobelaufgaben,</li> <li>- Scherz- und Kapitänsaufgaben,</li> <li>- Sachaufgaben in Kinderbüchern</li> </ul>
<b>c) nach der Art der Präsentation der Aufgabe</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sachaufgaben mit vorwiegend geometrischem Inhalt,</li> <li>- Sachaufgaben mit vorwiegend stochastischem Inhalt,</li> <li>- Sachaufgaben zum Aufbau von Größenvorstellungen,</li> <li>- Sachaufgaben mit vorwiegend arithmetischem Inhalt</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>- reale Probleme,</li> <li>- authentische Materialien und Imitationen,</li> <li>- Bildaufgaben,</li> <li>- Bild-Textaufgaben,</li> <li>- Textaufgaben (Sachaufgaben in Textform)</li> </ul>

Tabelle 5.2: Systematisierung von Aufgabenklassen beim Sachrechnen nach Franke (2003)

Für die vorliegende Arbeit sind folgende Punkte aus der obigen Klassifizierung (vgl. Tab. 5.2) bedeutsam:

- Sachaufgaben zu realen Situationen,
- Sachaufgaben zum Aufbau von Größenvorstellungen,
- Sachaufgaben mit vorwiegend arithmetischem Inhalt,
- Art der Präsentationsformen.

Diese Punkte sollen nun erörtert werden.

#### *Sachaufgaben zu realen Situationen.*

Die Gruppe der Sachaufgaben zu realen Situationen lässt sich hinsichtlich Umfang, Problemgehalt und Alltagsbezug in „einfache Sachaufgaben“, „Sachprobleme“, „Sachtexte“ und „Projekte“ untergliedern.

Während bei einfachen Sachaufgaben das Anwenden von mathematischen Beziehungen (Rechenoperationen) im Vordergrund steht, erfordern Sachprobleme Problemlösefähigkeiten. Bei Sachtexten steht die Information über die Sache im Vordergrund, die durch Zahlen, Größen und deren rechnerische Verknüpfungen veranschaulicht wird. Projekte – sie werden tatsächlich ausgeführt und sind somit sehr komplex – bilden einen engen Bezug zur Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler (vgl. Franke 2003, S.36,37).

#### *Sachaufgaben zum Aufbau von Größenvorstellungen.*

Sachaufgaben zum Aufbau von Größenvorstellungen dienen im Wesentlichen dem Kennenlernen der Maßsysteme, dem Verarbeiten erfasster Daten – mittels Vergleichen, Ordnen und Umwandeln – und dem Aufbau von Größenvorstellungen. Diese Inhalte lassen sich nur in Verbindung mit lebensweltlichen Situationen behandeln (vgl. Franke 2003, S.51).

#### *Sachaufgaben mit vorwiegend arithmetischem Inhalt.*

Bezüglich der „Aufgaben mit vorwiegend arithmetischem Inhalt“ unterscheidet man die arithmetische Struktur der Aufgabe nach

- **Simplex:** Aufgabe mit einer Rechenoperation.
- **Mehrfachsimplex:** Aufgaben mit mehreren voneinander unabhängigen Rechenoperationen.
- **Komplex:** Aufgaben mit mindestens zwei voneinander abhängigen Rechenoperationen (vgl. Franke 2003, S.53).

### *Art der Präsentationsformen von Sachaufgaben.*

Hinsichtlich der Präsentation von Sachaufgaben<sup>35</sup> klassifiziert Franke (2003, S.56ff.)

- **reale Phänomene:** Zahlreiche Anregungen aus der Umwelt der Kinder wie z.B. „In unserem Klassenzimmer“, „In unserer Schule“, „Meine Familie“.
- **authentische Materialien und Imitationen:** Simulation echter Alltagssituationen mit Hilfe eines aktuellen Kalenders, eines Fahrplans, der Öffnungszeiten des Schwimmbades etc.
- **Bildaufgaben:** Präsentation von Aufgaben als Bildgeschichten, die die Schülerinnen und Schüler besonders im Anfangsunterricht erzählen sollen.
- **Bild-Text-Aufgaben:** Darstellung einer komplexen Situation, deren Bearbeitung umfassendes Situationswissen erfordert und somit nicht auf eine arithmetische Operation beschränkt ist.
- **Textaufgaben:** Aufgaben sind ausschließlich in Textform präsentiert. Sie wirken teilweise unrealistisch und stehen im Sinne einer „schulischen Kunstform“ zur aktuellen Diskussion.
- **Sachtexte:** Beschreibung eines Ausschnitts aus der Wirklichkeit. Sachtexte bilden eine Brücke zwischen dem Fach Mathematik und anderen Fächern, wie beispielsweise dem Sachunterricht.
- **Projekte:** Wirklich realisierte Projekte wie z.B. Einkaufen für ein Klassenfest, Durchführung eines Tagesausflugs oder einer Klassenfahrt sind eine realistische Auseinandersetzung mit einem Sachproblem aus dem Alltag, die Schüler und Lehrer gleichermaßen herausfordert. Die Mathematik dient als Werkzeug zum angestrebten Ziel.

---

<sup>35</sup> Im Sinne der objektiven Kennzeichen von Aufgaben zählt die Präsentation von Aufgaben zur sogenannten Aufgabenperipherie, der auch die in der Aufgabe enthaltenen *Anweisungen* und der *Ausführungsgrad* der jeweiligen Aufgabe selbst angehören. Die in den Aufgaben enthaltenen *Anweisungen* können explizit oder implizit sein: Explizite Anweisungen sind in der jeweiligen Aufgabe meist selbst formuliert. Hierbei handelt es sich um Anweisungen, die angeben, was zu tun ist. Derartige Aufforderungen können sowohl zur Reproduktion als auch zur selbstständigen Produktion auffordern. Implizite Anweisungen liegen vor, wenn das in der Aufgabe zu Bearbeitende implizit in der Aufgabe vorhanden ist. Der *Ausführungsgrad* der Aufgabe gibt an, ob nur die Erarbeitung einer Lösungsidee oder ein vollständiges Ausführen der Aufgabe gefordert wird (vgl. Neubrand 2002).

#### **5.4 Schwierigkeiten beim Lösen von Sachrechenaufgaben**

Sachrechnen unter der Perspektive der mathematischen Modellbildung erfordert ein Wechselspiel von sprachlichen, sachlichen und mathematischen Verarbeitungsprozessen. Dabei spielt die Verbindung von Alltagswissen, spezifischem mathematischem Wissen und Können sowie Problemlösefähigkeiten eine zentrale Rolle.

Diese Vielfalt an notwendigen Kompetenzen zum erfolgreichen Lösen von Sachrechenaufgaben ist ein Grund dafür, dass Sachrechnen den Schülerinnen und Schülern in der Regel große Schwierigkeiten bereitet und deshalb bei den Kindern mit zahlreichen negativen Erfahrungen und Assoziationen verbunden ist (vgl. Radatz & Schipper 1983, S.123). Empirische Untersuchungen belegen, dass im Vergleich zu strukturgleichen mathematischen Aufgaben ohne Sachtext Sachrechenaufgaben um bis zu 30% schlechter gelöst werden (vgl. Reusser 1997, S.142). Nicht das Ausführen von Rechnungen, sondern das Auffinden der im Text enthaltenen mathematischen Struktur bildet beim Sachrechnen das Hindernis.

Für das Verstehen und Lösen von Aufgaben in Textform bietet die Pädagogische Psychologie zwei Erklärungsansätze an: Vertreter der „logisch-mathematischen Modelle“ wie Riley, Greeno und Heller sowie Briars und Larkin sind der Ansicht, dass die Kompetenz im Lösen von Textaufgaben primär mit dem mathematischen Wissen zusammenhängt. Anhänger der „Textverarbeitungsmodelle“ – zu ihnen zählen Kintsch, Greeno und Reusser – sind der Meinung, dass die Schwierigkeit im Lösen von Textaufgaben auf einem unzureichenden Sprach- und Situationsverständnis beruht (vgl. Reusser 1997, S.147ff.).

Aus mathematikdidaktischer Sicht werden diese beiden Erklärungsansätze gleichberechtigt angesehen. Als Ursachen für Schwierigkeiten von Schülerinnen und Schülern beim Lösen von Sachrechenaufgaben nennen Radatz und Schipper (1983, S.137f.)

- sprachlich-syntaktische Struktur,
- Sachstruktur,
- mathematische Struktur und
- Prozessstruktur einer Sachrechenaufgabe,

die in der Tabelle 5.3 detailliert dargestellt sind.

<b>sprachlich-syntaktische Struktur</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Schwierigkeiten durch Fremdworte und Fachtermini,</li> <li>- Textlänge,</li> <li>- Textkomplexität und Textgestaltung,</li> <li>- unbekannte Formulierungen,</li> <li>- Satzschachtelungen,</li> <li>- ...</li> </ul>
<b>Sachstruktur</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Kontext der Sachaufgabe ist unbekannt,</li> <li>- Größenbereiche sind unklar,</li> <li>- Sachstruktur ist zu komplex,</li> <li>- Zusammenhänge zwischen Größenbereichen sind für die Schüler nicht herstellbar,</li> <li>- Problemstellung ist unbekannt,</li> <li>- Sachsituation ist der Erwachsenenwelt entnommen,</li> <li>- ...</li> </ul>
<b>mathematische Struktur</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Anzahl von notwendigen Teilschritten,</li> <li>- Komplexität der durchzuführenden Rechenoperationen sowie Größenbeziehungen,</li> <li>- Verknüpfung verschiedener Operationssimplexe,</li> <li>- ...</li> </ul>
<b>Prozessstrukturen</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- impulsive Lösungshypothesen (Drang, einen Sachverhalt unreflektiert auf Rechenschemata zurückzuführen),</li> <li>- Teilinformationen werden nicht berücksichtigt,</li> <li>- Teillösungen werden vernachlässigt,</li> <li>- Einstellungseffekte,</li> <li>- Rechenschwächen und Rechenfehler,</li> <li>- ...</li> </ul>

Tabelle 5.3: Ursachen für Schwierigkeiten beim Sachrechnen  
(vgl. Radatz & Schipper 1983, S.137,138)

Im Sinne der objektiven Kennzeichen von Aufgaben sind Ursachen der sprachlich-syntaktischen Struktur in der Aufgabenperipherie, d.h. während der Informationsaufnahme verankert. Probleme in der Sach-, der mathematischen oder der Prozessstruktur siedeln sich dagegen im Aufgabenkern der jeweiligen Aufgabe<sup>36</sup>, also innerhalb der Informationsverarbeitung an.

<sup>36</sup> Der Aufgabenkern – umgeben von der Aufgabenperipherie – beschreibt die Art des Kontextes, in den die Aufgabe eingebettet ist, und die Art des Wissens, welches für das erfolgreiche Lösen der Aufgabe erforderlich ist.

## **5.5 Fehlertypen beim Lösen von Sachrechenaufgaben**

Fehler gehören zur Realität des Lernens und stellen produktive Zwischenformen auf dem Weg zur Leistung dar (vgl. Brügelmann 2001, S.57). In ihrer Funktion als Orientierungsmittel (vgl. Führer 2004) steckt eine Chance zum Lernen.

Die meisten Fehler entstehen nicht durch Flüchtigkeit und Zufälligkeit, Ablenkung oder mangelnde Konzentration, sondern weisen vielmehr auf tiefer liegende Ursachen hin – so beispielsweise auf Fehlvorstellungen zu mathematischen Begriffen.

Zur Identifikation von Fehlern dienen Fehleranalysen, die als wirksames diagnostisches Mittel für individuelle pädagogische und fachliche Fördermaßnahmen der betroffenen Kinder fungieren. Bei Fehleranalysen, die ausschließlich auf schriftlichen Aufzeichnungen der bearbeiteten Aufgabe beruhen, handelt es sich seitens des Beobachters um eine vorgenommene Interpretation von „Texten“, die unzureichend sein kann. Genauere Hinweise auf die Vorgehensweise der Kinder beim Bearbeiten von Aufgaben erhält man auch dadurch, dass man die Kinder bittet, ihre Lösungsschritte mündlich zu erläutern. Dies kann auch weiterhelfen, wenn Fehler aufgrund einer nicht vorhandenen Regelmäßigkeit weder interpretiert noch innerhalb einer Fehlertypologie kategorisiert werden können (vgl. Franke 1997, S.33).

Die genannten Fehlerursachen für das Lösen von Sachrechenaufgaben während der Informationsaufnahme bzw. Informationsverarbeitung schlagen sich in folgenden Fehlertypen nieder (vgl. Franke 2003, S.114ff.):

- Identifikationsfehler,
- Fehler beim Strukturieren des Lösungsplans,
- Fehlerhafte Verkürzung des Lösungsplans bei mehrschrittigen Aufgaben,
- Fehler bei der verbalen Antwort.

### **5.5.1 Identifikationsfehler**

Identifikationsfehler sind ein Indiz dafür, dass textliche Angaben nicht den richtigen mathematischen Operationen oder Begriffen zugeordnet werden. Typische Beispiele für diesen Fehlertyp liegen in der Verwechslung von Addition und Subtraktion oder in der Verwechslung von Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks (vgl. Lauter 1995, S.269). Kinder neigen dazu, sich ferner von sogenannten Signalwörtern zu falschen

Rechenoperationen verleiten zu lassen (vgl. Franke 2003, S.114): So addieren sie häufig große Zahlen und multiplizieren kleine. Ferner beziehen Kinder gerne irrelevante Angaben in ihre Rechnungen mit ein. In diesem Zusammenhang sei an die sogenannten Kapitänsaufgaben erinnert (vgl. Spiegel & Selter 2003, S.8-14; Selter 2003).

### **5.5.2 Fehler beim Strukturieren des Lösungsplans**

Fehler beim Strukturieren des Lösungsplanes entstehen durch eine nicht lösungskonforme Reihenfolge der Angaben im Aufgabentext, dem Einbeziehen bzw. Nicht-einbeziehen von Teillösungen oder regelwidrigen Verknüpfungen von Angaben, die durch bestimmte Schlüsselwörter im Aufgabentext verursacht werden. Mit den Angaben (Zahlen, Größen) in der jeweiligen Aufgabe wird losgerechnet, ohne den Aufgabentext zu beachten. Nach dem Motto „Lieber falsch als gar nicht rechnen.“ führen die Kinder mit den Sachrechenangaben willkürliche Operationen aus und schlagen im Lösungsgang eine falsche Richtung ein.

### **5.5.3 Fehlerhafte Verkürzung des Lösungsplans**

Fehlerhafte Verkürzungen im Lösungsplan erfolgen bei mehrgliedrigen Aufgaben durch das Auslassen von einzelnen Lösungsschritten. Dies geschieht durch ein Verlesen oder Überlesen relevanter Informationen, einem unvollständigen Erfassen der Situation oder einem Vergessen von in der Aufgabe ausgewiesenen Beziehungen (vgl. Lauter 1995, S.268).

### **5.5.4 Fehler in der verbalen Antwort**

Fehler in der verbalen Antwort basieren auf einem Nichtbeachten der Fragestellung – die Antwort kann für das bzw. ein Zwischenergebnis richtig sein, jedoch wird die gestellte Frage nicht beantwortet. Weitere Merkmale für diesen Fehlertyp stellen die fehlende Interpretation der mathematischen Aufgabenlösung wegen mangelndem Alltags- und Sachwissen sowie ein falscher Bezug zur der in der Aufgabe beschriebenen Sachsituation dar (vgl. Franke 2003, S.114,115).

## **5.6 Zusammenfassung des Kapitels**

In der Grundschule wird das Thema Größen vorwiegend im umwelterschließenden Sachrechnen behandelt, welches eine enge Verzahnung zwischen Inhalten des Mathematik-, des Sach- und des Deutschunterrichts herstellt (vgl. Kap. 5.1).

Zur Bearbeitung von Sachrechenaufgaben ist eine mathematische Modellbildung in ihrem zyklischen Prozess mit den Phasen Mathematisieren, Verarbeiten, Interpretieren und Validieren erforderlich (vgl. Kap. 5.2), in der unter Nutzen von tragfähigen Grundvorstellungen Sachsituationen und Mathematik wechselseitig aufeinander zu beziehen sind.

Als Ursachen für Schwierigkeiten beim Lösen von Sachrechenaufgaben gelten aus mathematikdidaktischer Sicht neben der sprachlich-syntaktischen und der Sachstruktur die mathematische und die Prozessstruktur der jeweiligen Sachrechenaufgabe (vgl. Kap. 5.4). Die Ursachen schlagen sich in entsprechenden Fehlertypen der Schülerinnen und Schüler nieder. Zu diesen zählen Identifikationsfehler, Fehler beim Strukturieren sowie fehlerhafte Verkürzung des Lösungsplans bei mehrschrittigen Aufgaben und Fehler in der verbalen Antwort (vgl. Kap. 5.5).

## 6 Fragestellungen und Zielsetzung der Arbeit

In der hier vorliegenden Arbeit werden erstmals aus der für die Bundesrepublik Deutschland repräsentativen Grundschulstudie IGLU bzw. IGLU-E aus dem Jahr 2001 Aufgaben aus den Subtests Mathematik und Naturwissenschaften zum Thema Größen differenziert analysiert. Hierzu werden verschiedene methodische Zugänge miteinander kombiniert: Auf der Grundlage einer quantitativen Erhebung des Antwortverhaltens der IGLU-E-Kinder zu ausgewählten Items der bürgerlichen Größen erfolgt eine qualitative Analyse der von den Schülerinnen und Schülern gewählten Distraktoren der jeweilig vorgegebenen Multiple-Choice-Antworten. Dieses Zusammenspiel der quantitativen und qualitativen Auswertungsmethoden soll klären, welche Fehlkonzepte bzw. Fehlvorstellungen Viertklässler in Deutschland zum Thema Größen besitzen. Da einige der in der IGLU-E-Studie verwendeten Größenitems bereits in den Grundschulstudien TIMSS-Pop1 im Jahr 1995 (vgl. Mullis et al. 1997 und Martin et al. 1997) und CROSSTEL im Jahr 1993 (vgl. Baumert et al. 1998) eingesetzt wurden, soll trotz des beträchtlichen Zeitabstandes zwischen den drei Erhebungen TIMSS, CROSSTEL und IGLU überprüft werden, ob die aus IGLU-E festgestellten Fehlkonzepte auch bei den beiden anderen Untersuchungen auftreten.

Die Arbeit beschäftigt sich mit folgenden sechs Fragestellungen:

- Fragestellung 1:** Besteht zwischen den IGLU-Leistungen Mathematik und Naturwissenschaften ein Zusammenhang?
- Fragestellung 2:** Welche Stärken und Schwächen weisen Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe bei Aufgaben zu den bürgerlichen Größen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur im thematischen Überschneidungsbereich zwischen Mathematik und Sachunterricht auf?
- Fragestellung 3:** Lösen Viertklässler Sachrechenaufgaben aus den verschiedenen Kategorien des in dieser Arbeit entwickelten Kategoriensystems mit den beiden Hauptklassen „Basiswissen zu Größen“ und „Messen von Größen“ gleichermaßen erfolgreich?
- Fragestellung 4:** Welche Fehlkonzepte / Fehlvorstellungen werden durch Distraktorenanalyse aus den Lösungsergebnissen der Schülerinnen und Schüler zu den einzelnen Größenaufgaben sichtbar?

**Fragestellung 5:** Liegen bezüglich der Itemergebnisse zu den Größenaufgaben der Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe geschlechtsspezifische Unterschiede vor?

**Fragestellung 6:** Besitzen Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe aus verschiedenen Nationen gleiche Fehlkonzepte zu Größenaufgaben, die in den Grundschulleistungsstudien IGLU-E, TIMSS-POP1 sowie CROSSTEL gestellt wurden?

## **7 Methodologischer Rahmen der Arbeit**

Da die hier vorgestellte empirische Untersuchung auf Datenmaterial der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung IGLU mit ihrer nationalen Erweiterung IGLU-E beruht, sind für die nachfolgenden Analysen das Untersuchungsdesign von IGLU bzw. IGLU-E maßgeblich. In einer skizzenhaften Beschreibung dieser Grundschulstudie werden insbesondere auf die Organisationsstruktur von IGLU bzw. IGLU-E, ihr Untersuchungsdesign mit der Durchführung der Leistungstests in Mathematik und in den Naturwissenschaften und auf das Verfahren zur Datenauswertung der vorliegenden Arbeit eingegangen.<sup>37</sup> Im Anschluss daran erfolgt eine Darstellung der für die Arbeit relevanten und bereits veröffentlichten Befunde der IGLU- bzw. IGLU-E-Arbeitsgruppe. Hierzu zählen neben den für die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fähigkeiten formulierten Kompetenzstufen insbesondere die Curriculare Validität der Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben aus IGLU-E.

### **7.1 Die IGLU-Studie und ihre Organisationsstruktur**

Die Internationale Grundschul-Leseuntersuchung IGLU mit ihrer nationalen Erweiterung IGLU-E in den Fächern Mathematik und Naturwissenschaften lieferte im Frühjahr 2003 erstmals international vergleichbare Befunde über Bildungsvoraussetzungen und Bildungsergebnisse von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in der Bundesrepublik Deutschland im Leseverständnis, in Mathematik und in den Naturwissenschaften (vgl. Bos et al. 2003).<sup>38</sup>

---

<sup>37</sup> Ausführliche Informationen zur Anlage und Durchführung der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU) und ihrer nationalen Erweiterung um Mathematik und Naturwissenschaften (IGLU-E) sind Lankes et al. 2003 zu entnehmen.

<sup>38</sup> Die IGLU-Studie ist Teil der international vergleichenden Studie PIRLS (Progress in International Reading Literacy Study) der IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement). An der TIMS-Grundschulstudie von 1995 hatte die Bundesrepublik Deutschland nicht teilgenommen (vgl. Mullis et. al 1997).

An der Durchführung und Auswertung der IGLU- bzw. IGLU-E-Studie sind international und national zahlreiche Arbeitsgruppen und Institutionen beteiligt (vgl. Abb. 7.1).

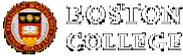
 <p>Universität Hamburg</p>	<p>Universität Hamburg Prof. Dr. Wilfried Bos PD Dr. Eva-Maria Lankes</p>	
<p><b>Internationale Studie IGLU / PIRLS</b></p>  <p>International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA)</p>  <p>BOSTON COLLEGE PIRLS International Study Center</p>  <p>Humboldt-Universität Berlin, Prof. Dr. Renate Valtin</p>		<p><b>Nationale Erweiterung IGLU-E</b></p>  <p>Mathematisches Seminar der Kieler Christian-Albrechts-Universität, Prof. Dr. Gerd Walther</p>  <p>Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Kieler Christian-Albrechts-Universität, Prof. Dr. Manfred Prenzel</p>

Abbildung 7.1: Organisationsstruktur der IGLU- / IGLU-E-Studie mit den Mitgliedern des nationalen Konsortiums in Deutschland<sup>39</sup>

Die Durchführung der internationalen IGLU-Studie wurde je zur Hälfte durch Zuwendungen des Bundesministeriums für Bildung, Wissenschaft, Forschung und Techno-

<sup>39</sup> Für die nationale Leitung und Durchführung der Studie, das Datenmanagement und die Koordination der Datenanalysen ist das Institut für International und Interkulturell Vergleichende Erziehungswissenschaft am Lehrstuhl für Quantitative Methoden an der Universität Hamburg mit Professor Dr. Wilfried Bos, PD Dr. Eva-Maria Lankes und PD Dr. Knut Schwippert verantwortlich (vgl. Bos et al. 2003, S.3). Mit der Organisation der Datenerhebung und der Datenverarbeitung (Dateneingabe und Kodierung) wurde international und national das Data Processing Center (DPC) der IEA in Hamburg beauftragt. Für die IGLU-Arbeiten waren hier Svenja Bundt, Steffen Knoll, Heiko Sibberns und Anja Waschk zuständig. Zum IGLU-Team gehören ferner: Professorin Dr. Renate Valtin und Isolde Badel (Humboldt-Universität Berlin), Ingola Mohr, Nike Pläßmeier, Heike Poppendieker und Andreas Voss (Universität Hamburg), Professor Dr. Manfred Prenzel, Helmut Geiser, Dr. Rolf Langeheine und Kirstin Lobemeier (IPN Kiel) sowie Professor Dr. Gerd Walther (CAU zu Kiel) (vgl. Bos et al. 2003, S.3f.). Während das IEA sowie die Institute in Hamburg und Berlin ihren Untersuchungsschwerpunkt im Bereich des Lesens haben, werden am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und am Mathematisches Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel Mathematik- und Naturwissenschaftsdaten ausgewertet.

logie (BMBF) und der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder gefördert. Die Unterstützung der nationalen Erweiterung IGLU-E erfolgte anteilmäßig von den an dieser Ergänzung beteiligten 12 Bundesländern. Die Federführung für die Administration von IGLU-E hat das Land Schleswig-Holstein übernommen (vgl. Bos et al. 2003, S.6). Die Tabelle 7.1 zeigt im Überblick den Projektverlauf von IGLU bzw. IGLU-E.

1998 bis 1999	<b>Planung</b> Entwicklung der internationalen Tests und Fragebögen
Oktober 2000 - Januar 2001	<b>IGLU-Voruntersuchungen</b> an Grundschulen in vier Bundesländern: Erprobung der internationalen und nationalen Tests, Fragebögen und Prozeduren
November 2000 - Februar 2001	<b>Auswertungen der Voruntersuchungen und Vorbereitung der Haupterhebung</b> (Überarbeitung der Testaufgaben und Hintergrundfragebögen)
23. April - 31. Mai 2001	<b>IGLU-Haupterhebung an 247 Schulen in allen 16 Bundesländern</b>
Juni - Dezember 2001	<b>Auswertung der Haupterhebung</b> Kodierung der offenen Fragen, Dateneingabe und Erstellung der Datensätze zur Weitergabe an die internationale und nationale Projektleitung
2002	<b>Auswertung der Daten</b> durch internationale Projektleitung (Boston College) und nationales Konsortium (Federführung: Universität Hamburg), Erstellung des Berichts
April 2003	<b>Veröffentlichung des ersten internationalen und nationalen Ergebnisberichts:</b> Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (Hrsg.) (2003). Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.
Januar 2004	<b>Veröffentlichung des zweiten Ergebnisberichts<sup>40</sup>:</b> Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (Hrsg.) (2004). IGLU. Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.
2004 / 2005	<b>Vertiefende Analysen zum Verständnis schulleistungsrelevanter Faktoren in ihrem wechselseitigen Zusammenwirken</b>

Tabelle 7.1: Projektverlauf von IGLU bzw. IGLU-E

<sup>40</sup> Neben den beiden Ergebnisberichten existieren eine Reihe weiterer Veröffentlichungen. Eine Zusammenstellung der aus IGLU bzw. IGLU-E hervorgegangenen Publikationen kann bei der nationalen IGLU-Koordinationsstelle in HH – Institut für International und Interkulturell Vergleichende Erziehungswissenschaft (officebos@erzwiss.uni-hamburg.de) – eingesehen bzw. angefordert werden.

## **7.2 Untersuchungsdesign**

Die IGLU bzw. IGLU-E-Konzeption beruht auf einer Vorstellung von Grundbildung (Literacy) und betont dabei die kulturelle Bedeutung von Bildungsinhalten. Die Testaufgaben, die Kompetenzen im Leseverständnis, in Mathematik und in den Naturwissenschaften ansprechen, sind in der Lebenswelt von Grundschulkindern bedeutsam und stellen zugleich eine wichtige Basis für das anschließende Lernen in den weiterführenden Schulen dar (vgl. Bos et al. 2003, S.1).

Im Folgenden wird das Untersuchungsdesign der Grundschulstudie IGLU bzw. IGLU-E im Hinblick auf den Zeitraum, die Stichprobenbeschreibung und die Instrumente des kooperativ-internationalen Projektes beschrieben. Die für die vorliegende Arbeit angewandten Methoden werden explizit im Kapitel 7.3 zur Zielsetzung der Arbeit erläutert.

### **7.2.1 Zeitraum der Studie**

In dem Zeitraum von April bis Mai 2001 wurde in der Bundesrepublik Deutschland an zwei aufeinanderfolgenden Testtagen die IGLU- bzw. IGLU-E-Studie am Ende der vierten Jahrgangsstufe im Klassenverband durchgeführt. In den meisten Bundesländern war eine schriftliche Genehmigung der Eltern für die Teilnahme ihres Kindes an der IGLU-Studie erforderlich. Die Verfahren der Datenerhebung und der Datenverarbeitung erfolgten entsprechend der gesetzlichen Vorgaben in enger Zusammenarbeit mit den Datenschutzbeauftragten der jeweiligen Länder. Um die Vergleichbarkeit der Testdurchführungsbedingungen sicherzustellen, folgten geschulte Testleiterinnen und Testleiter des DPC Hamburg dem in einem Skript festgesetzten Zeitablauf mit vorgegebenen Anweisungen (vgl. Lankes et al. 2003, S.24).

### **7.2.2 Stichprobenbeschreibung**

Am *ersten Testtag* nahmen alle 16 Bundesländer der Bundesrepublik Deutschland an der Internationalen Lesestudie teil. Alle Grundschulen, deren Kinder in der vierten Klassenstufe in der Lage waren, die Tests zu bearbeiten (so auch Kinder aus Sonderschulen), gingen in die Stichprobenziehung ein. Lediglich ausgeschlossen wurden sehr kleine Schulen sowie Sonderschulen, deren Kinder wegen körperlicher, geistiger oder mehrfacher Behinderungen die Tests nicht durchführen konnten (vgl. Lankes et al. 2003, S.11f.). Auch innerhalb der Schulen konnten einzelne Kinder vom

Test ausgeschlossen werden: Schülerinnen und Schüler mit fremder Muttersprache, die weniger als ein Jahr in der Landessprache Deutsch unterrichtet worden sind, sowie körperlich oder geistig behinderte Viertklässler, die weder einen Test durchführen (z.B. in integrierten Klassen) noch an den regulären Klassenarbeiten teilnehmen können (vgl. Lankes et al. 2003, S.12). Da einige der Bundesländer ihre Stichprobe erweiterten (Oversampling), wurden in IGLU insgesamt 10 571 Schülerinnen und Schüler an 246 Schulen getestet (vgl. <http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/IGLU/home.htm> [vom 31.01.2005]).

Am *zweiten Testtag* reduzierte sich die Stichprobe von IGLU-E auf 5943 Schülerinnen und Schüler an 168 Schulen und umfasste damit die den Zufallskriterien genügende Stichprobe für die nationale Erweiterung IGLU-E (vgl. Lankes et al. 2003, S.139): Die Bundesländer Brandenburg<sup>41</sup>, Mecklenburg-Vorpommern, Niedersachsen und Sachsen-Anhalt haben sich an der Erweiterungsstudie IGLU-E mit den Fächern Mathematik und Naturwissenschaften nicht beteiligt.

Die Teilnahme der Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe an IGLU bzw. IGLU-E war freiwillig. Auch bei der Zustimmung der Eltern seitens eines Mitwirkens an dieser Untersuchung, konnten die Kinder jederzeit die Bearbeitung des Tests ablehnen oder abbrechen (vgl. Lankes et al. 2003, S.26). Obwohl in der IGLU-Studie die Testmotivation der Kinder nicht explizit untersucht wurde, lassen die Auswertungen der Leistungstests – im Besonderen die Teilnahme am Wortdiktat und der Schreibaufgabe – auf eine selbst in einer Testsituation sehr hohe Anstrengungs- und Leistungsbereitschaft der Kinder in diesem Alter schließen (vgl. Lankes et al. 2003, S.27).

### **7.2.3 Testdurchführung – Instrumente und Methoden**

Sowohl am ersten als auch am zweiten Testtag wurde ein Testdesign mit rotierten Aufgabenblöcken – dem sogenannten Multi-Matrix-Design – verwendet, d.h. die Schülerinnen und Schüler erhielten nur einen Teil der im Gesamtest enthaltenen Aufgaben. Auf diese Weise konnten die Fachbereiche Lesen, Mathematik und Na-

---

<sup>41</sup> Das Land Brandenburg hatte bereits im Jahr 2000 eine eigene umfangreiche Qualitätsuntersuchung zum Mathematikunterricht QUASUM in der Jahrgangsstufe 5 durchgeführt. Weitere Informationen sind Bos et al. 2003, S.13 zu entnehmen.

turwissenschaften in genügender Breite abgebildet werden, ohne die Grundschülerinnen und -schüler über Gebühr zu belasten (vgl. Lankes et al. 2003, S.21). Dieses in der empirischen Forschung etablierte Forschungsdesign stellt mit dem angewandten Skalierungsverfahren sicher, dass alle Testhefte die gleiche Kompetenz und damit die geforderte Validität erfassen. Zudem repräsentiert in dieser Studie jede Schülerperson nicht nur sich selbst, sondern eine bestimmte Anzahl weiterer Schülerinnen und Schüler (vgl. Lankes et al. 2003, S.11).

#### *Erster Testtag.*

Am ersten Testtag dauerte die Testdurchführung über zwei Stunden an. Der Internationale Lesetest enthielt eine Kombination von Aufgaben zum Lesen aus literarischer oder informierender Absicht. Im Anschluss an den Lesetest bearbeiteten die Kinder einen Test zu Analogien und Worterkennung und füllten zudem den Internationalen Schülerfragebogen aus.

Lesekompetenz ist eine wichtige Schlüsselqualifikation, die bereits in der Grundschule für den Erwerb von Wissen notwendig ist. So gehört die Vermittlung von Lesen und Schreiben zu den Hauptaufgaben der Grundschule. Lehrkräfte dieser Bildungsstufe haben dafür zu sorgen, dass möglichst alle Schülerinnen und Schüler bei diesen beiden Grundanforderungen erfolgreich sind. Die Fähigkeiten des Lesens und Schreibens sind – gerade auch im Zeitalter von Computer und Internet – für ein gesellschaftliches Leben und ein lebenslanges Lernen grundlegend (vgl. Bos et al. 2003, S.70).

#### *Zweiter Testtag.*

Die Testdurchführung des zweiten Testtages dauerte inklusive der beiden Pausen nahezu zwei Stunden an und war insgesamt so angelegt, dass die Kinder pädagogisch sinnvolle Aufgaben zur Mathematik und den Naturwissenschaften vorgelegt bekamen. Die Schülerinnen und Schüler hatten stets die Möglichkeit, wenn sie an einer Stelle nicht weiterkamen, an einer anderen Stelle erfolgreich einzusteigen.

In jedem Testheft war jeweils ein Testteil zur Mathematik und ein Testteil zu den Naturwissenschaften zusammengestellt. Den Mathematik- bzw. den Naturwissenschaftstestteil durften die Schülerinnen und Schüler erst nach einer allgemeinen Auf-

forderung der Testleiter bearbeiten. Die folgende Tabelle 7.2 gibt Auskunft über den Ablauf und die in der IGLU-E-Untersuchung eingesetzten Instrumente am zweiten Testtag.

Zeit	Testhefte zur MATHEMATIK und NATURWISSENSCHAFTEN (2.Testtag)											
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6
20´	N1	M2	N3	M4	N5	M6	N1	M2	N3	M4	N5	M6
20´	M1	N2	M3	N4	M5	N6	M1	N2	M3	N4	M5	N6
10´	<b>PAUSE</b>											
20´	WO	WO	WO	WO	WO	WO	S	IRL	S	IRL	S	IRL
15´	<b>PAUSE</b>											
10´	Test zu Analogien											
20´	Nationaler Schülerfragebogen											

M: Testaufgaben Mathematik; N: Testaufgaben Naturwissenschaften;  
 WO: Wortdiktat; S: Schreibaufgabe; IRL: International Reading Literacy

Tabelle 7.2: Ablauf der Untersuchung und eingesetzte Instrumente der nationalen IGLU-E-Untersuchung in Deutschland am zweiten Testtag (aus: Lankes et al. 2003, S.22)

Die Rahmenkonzeption des Subtests Mathematik in IGLU-E orientiert sich an grundlegenden, auch für das Mathematiklernen in weiterführenden Schulen bedeutsamen *Begriffen* und *Prozessen* der Grundschulmathematik (vgl. Tab. 7.3).

Die Mathematikaufgaben erfordern in jedem der genannten Inhalts- bzw. Konzeptbereiche bestimmte Kompetenzen, wie z.B. Einsatz von Faktenwissen, einfache mathematische Begriffe, Fertigkeiten, Standardverfahren, Zusammenfügung mehrerer bekannter rechnerischer oder begrifflicher Lösungsschritte oder Lösungselemente zu einer Gesamtlösung, schöpferisches Denken zur Überwindung von Barrieren bei Problemaufgaben (vgl. Walther et al. 2003, S.195). Bei der Zuordnung von Aufgaben zu diesen Tätigkeiten ist insbesondere der curriculare Hintergrund zu beachten. Zudem sagt die für die Lösung einer Aufgabe erforderliche Tätigkeit zunächst nichts über die Schwierigkeit dieser Aufgabe aus.

<b>Inhalts- / Begriffsfelder</b>	<b>Arithmetik</b>	Zahlbegriff, Zahlreihen, Rechengesetze, Rechenvorteile, Zehnersystem, Gesetzmäßigkeiten und Muster
	<b>Geometrie</b>	Formen, Koordinaten, Pläne, Maßstab, Maße (Länge, Fläche, Volumen, Winkel), Gesetzmäßigkeiten und Muster
	<b>Größen und Sachrechnen</b>	Längen-, Hohl-, Gewichts-, Zeitmaße, Zahlen und Formen in der Umwelt, Zufall und Wahrscheinlichkeit
<b>Prozesse</b>	<b>Verfahren</b>	Rechenverfahren, Rechenfertigkeit, Rechnen mit Größen, Konstruktionen
	<b>Herangehen</b>	Beobachten, Entdecken, Begründen, Argumentieren, Modellieren, außer-, innermathematisches Problemlösen
	<b>Denken</b>	Darstellung von mathematischen Sachverhalten, Interpretieren und Übersetzen von Darstellungen

Tabelle 7.3: Inhaltsfelder und Prozesse in der Grundschulmathematik  
(aus: Walther et al. 2003, S.194)

Bezüglich des Mathematikaufgabenpools wurden mit insgesamt 58 Aufgaben (mit 65 Items) die Bereiche Arithmetik, Geometrie und Größen- und Sachrechnen abgedeckt. Etwa die Hälfte der Mathematikaufgaben wurde aus der TIMS-Studie Population I<sup>42</sup> aus dem deutschsprachigen Testinstrument von Österreich übernommen, wobei bei einigen der TIMSS-Aufgaben leichte sprachliche Anpassungen erforderlich waren. Die übrigen Aufgaben wurden von der Expertengruppe Mathematik (vgl. Bos et al. 2003, S.4) neu entwickelt oder aus vorliegendem Aufgabenmaterial zur Grundschulmathematik gewonnen. Sechs der TIMSS-Aufgaben wurden als sogenannte Ankeraufgaben von allen Schülerinnen und Schülern bearbeitet. Von den insgesamt 58 Aufgaben waren 37 Aufgaben im Multiple-Choice-Format und 21 Aufgaben im offenen Antwortformat gestellt (vgl. Walther et al. 2003, S.196).

Die theoretische Grundlage für den IGLU-E-Naturwissenschaftstest ist eine Konzeption von naturwissenschaftlicher Grundbildung im Sinne von Scientific Literacy (vgl. Prenzel et al. 2003, S.153). Die Testitems orientieren sich an der Unterscheidung von naturwissenschaftlichen Themengebieten bzw. Konzepten und naturwissenschaftlichen Prozessen. So decken die Naturwissenschaftsitems die Stoffgebiete

<sup>42</sup> Die internationale Grundschuluntersuchung TIMSS wurde 1995 ohne deutsche Beteiligung durchgeführt.

Physik / Chemie (28 Aufgaben), Biologie (17 Aufgaben) und Erde / Umwelt (4 Aufgaben) ab, die mit dem TIMSS-Ansatz übereinstimmen. Diesem entsprach auch die Unterscheidung der Kompetenzanforderungen Wissensreproduktion, Konzeptanwendung, Verständnis und Prozesswissen (vgl. Prenzel et al. 2003, S.154). Von den insgesamt 49 Naturwissenschaftsaufgaben hatten 41 das Multiple-Choice-Format, die übrigen 8 Aufgaben waren im offenen Antwortformat gestellt. Von den insgesamt 49 Aufgaben des Naturwissenschaftstests stammen 24 aus der TIMSS-Grundschuluntersuchung. 10 dieser TIMSS-Items wurden als Ankeraufgaben zusammengestellt, die in jedem der 6 Testhefte den Schülerinnen und Schülern zur Bearbeitung vorlagen (vgl. Prenzel et al. 2003, S.154). Weitere 15 Items wurden aus dem Aufgabenbestand der CROSSTEL-Studie entnommen (vgl. Baumert et al. 1998), die auf einer früheren internationalen Vergleichsstudie der IEA (SISS) basiert. Des Weiteren wurden 10 Items in den Naturwissenschaftsaufgabenpool miteinbezogen, die von einer Arbeitsgruppe an der Universität Erlangen-Nürnberg für Untersuchungen zum Sachunterricht entwickelt worden waren (vgl. Einsiedler 1976).

Neben den Kontextfragebögen für die Viertklässler selbst (vgl. Tab. 7.2) wurden ferner durch Fragebögen an die Mathematik- und Sachunterrichtslehrer, die Schulleiter sowie die Eltern der IGLU-Kinder ein breites Spektrum an Zusatzinformationen erhoben<sup>43</sup> (vgl. Abb. 7.2 sowie Lankes et al. 2003, S.16ff.): „Eltern und Kinder gaben Auskunft über die familiären Hintergründe der Schülerinnen und Schüler und über lern- und leistungsrelevante Merkmale des Kindes. Schüler, Lehrkräfte und Schulleiter wurden nach ihrer jeweiligen Einschätzung und Wahrnehmung des Unterrichtsgeschehens befragt. Lehrkräfte und Schulleitungen lieferten Informationen über leistungsrelevante Rahmenbedingungen an Schulen“, Lankes et al. 2003, S.17.

---

<sup>43</sup> Die Fragebögen für die Eltern, die nur in deutscher Sprache verteilt worden waren (vgl. Lankes et al. 2003, S.14), wurden den Kindern am Ende des ersten Testtages mitgegeben und von den Kindern am nächsten Tag in einem verschlossenen Umschlag wieder mitgebracht. Die Eltern- sowie die Schulleiter- und die Lehrerfragebögen, die den Schulen bereits vorher versandt worden waren, schickten die Testleiterinnen und Testleiter zusammen mit dem Testmaterial der Leistungsuntersuchungen an das DPC zurück (vgl. Lankes et al. 2003, S.25).

Die Fragebögen der Erwachsenen erhielten teilweise dieselben Fragen: So wurden die Mathematik- und Sachunterrichtslehrer sowie die Eltern der Viertklässler nach der Einstellung zum Fach Mathematik bzw. Sachunterricht (Weltbilder) befragt.

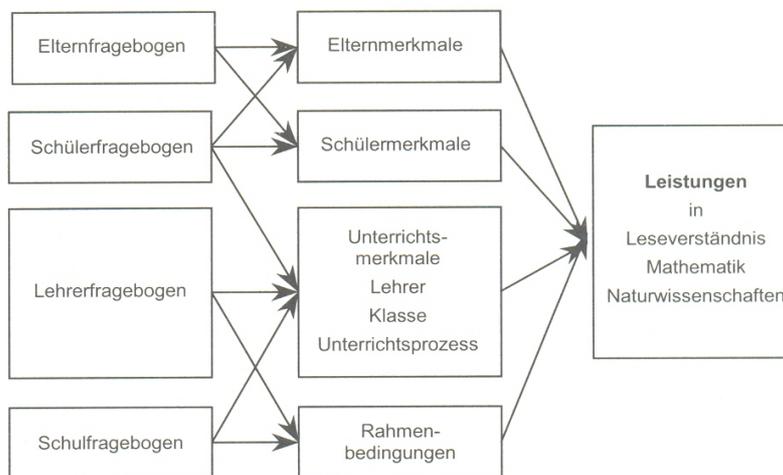


Abbildung 7.2: Die IGLU-Kontextfragebögen und damit erhobene Merkmale  
(aus: Lankes et al. 2003, S.17)

Die folgende Tabelle 7.4 zeigt die unterschiedliche Beteiligung an den einzelnen Testkomponenten in Deutschland:

Fragebögen	IGLU	IGLU-E
	1. Testtag 16 Bundesländer	2. Testtag 12 Bundesländer
Leistungstest	85%	84%
Schülerfragebogen	84%	84%
Schulleiterfragebogen	95%	-
Deutschlehrerfragebogen	92%	-
Elternfragebogen	76%	-
Mathematiklehrerfragebogen	-	93%
Sachunterrichtslehrerfragebogen	-	88%

Tabelle 7.4: IGLU- bzw. IGLU-E-Teilnahmequoten in Deutschland  
(aus: Lankes et al. 2003, S.13)

Während die Bereitschaft der Schulleiter sowie der Lehrkräfte hinsichtlich des Ausfüllens der Fragebögen sehr hoch war, erfolgte im Vergleich dazu der Rücklauf der nur

in deutscher Sprache verteilten Elternfragebögen erwartungsgemäß geringer. – Weitere Informationen zur Anlage und Durchführung der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung IGLU und ihrer Erweiterung um Mathematik und Naturwissenschaften IGLU-E sind ausführlich in Bos et al. 2003 berichtet.

#### **7.2.4 Dateneingabe und Kodierung**

Die Dateneingabe der IGLU- bzw. IGLU-E-Tests wurde in Deutschland auf zwei Wegen verwirklicht: Die Fragebögen für die Schüler, Schulleiter, Lehrer und Eltern wurden mit Hilfe der Scan-Technologie eingelesen. Die Dateneingabe und die Verarbeitungsschritte erfolgten gemäß „Scannen – Interpretieren – Verifizieren – Übertragen“. Für jedes der von den Schülerinnen und Schülern ausgefüllten Testhefte wurden durch Kodierer die Antworten im Multiple-Choice-Format auf Kodierblätter übertragen und eingescannt. Der scangestützte Ansatz ermöglicht eine niedrige Fehlerquote und einen schnellen Zugriff auf Antworten einzelner Viertklässler bzw. Viertklässlergruppen (vgl. Lankes et al. 2003, S.26).

#### **7.2.5 Skalierung der Leistungstests**

Zur Bestimmung individueller Leistungsscores wurden wie in vorhergegangenen internationalen Vergleichsstudien wie beispielsweise TIMSS (vgl. Baumert et al. 1997 und Martin & Kelly 1997) und PISA (vgl. Baumert et al. 2001) zur Skalierung der IGLU-Daten Modelle der Item Response Theorie (IRT) – im deutschsprachigen Raum eher bekannt als probabilistische Testmodelle – nach dem Rasch-Modell in der Version von Adams, Wu & Macaskill (1997) mit Gewichtung und Einbeziehung eines Populationsmodells verwendet. Die nach dieser Metrik skalierten Fähigkeits- und Itemschwierigkeitsparameter ermöglichen auf derselben Skala die Zuordnung, mit welchem Fähigkeitsparameter eine Schülerin oder ein Schüler eine bestimmte Aufgabe mit einiger Sicherheit löst. Die Skalen allein sind allerdings wenig aussagekräftig. Erst mit der Beschreibung von Voraussetzungen und notwendigen Denkopoperationen zur Lösung der jeweiligen Aufgabe erhält der verwendete Fähigkeitsmaßstab inhaltliche Substanz, in dem das Konstrukt der mathematisch und naturwissenschaftlichen Kompetenz sowie Lesefähigkeit und seine Abbildung auf den Fähigkeitsmaßstab durch einzelne, gut voneinander abgegrenzte Kompetenzstufen mit charakteris-

tischen Aufgabenbeispielen veranschaulicht wird (vgl. Kap. 7.4.2). Dies ist unter curricularen, psychologischen und fachdidaktischen Aspekten bedeutsam.<sup>44</sup>

Die Itemselektion der Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben wurde im Rahmen von IGLU-E mit dem Programm eGPCM (v. Davier 2002) in mehreren Schritten und wiederholten Analysen durchgeführt.<sup>45</sup> Auf diese Weise wurden einige Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben ausgeschlossen, die eine sehr geringe Trennschärfe und eine nicht zufriedenstellende Übereinstimmung der nach dem Rasch-Modell theoretisch erwarteten mit der beobachteten Itemfunktion haben. Die verbliebenen Items wurden schließlich in Analogie zu TIMSS nach dem Rasch Modell mit dem Programm ConQuest (vgl. Wu, Adams & Wilson 1997) skaliert. Das Ergebnis dieser Skalierung sind 5 Plausible Values (individuelle Fähigkeitswerte) mit geringer Variation zwischen den Mittelwerten und Standardabweichungen dieser fünf Werte. Diese Skalen wurden wie in TIMSS und PISA auf einen Mittelwert von 500 und einer Standardabweichung von 100 transformiert. Hierdurch ist unter Berücksichtigung des Zeitabstandes eine eingeschränkte Einordnung der IGLU-Leistungskennwerte Mathematik und Naturwissenschaften für Deutschland in die TIMSS-Erhebung 1995 möglich (vgl. Walther et. al 2003, S.206ff. und Prenzel et al. 2003, S.162ff.).

### **7.3 Verfahren zur Datenauswertung der vorliegenden Arbeit**

Wie in Kapitel 6 „Fragestellungen und Zielsetzung der Arbeit“ angedeutet, werden in der vorliegenden Untersuchung die beiden methodischen Zugänge der quantitativen und qualitativen Analyse von Aufgaben im Multiple-Choice-Antwortformat zum Thema Größen angewendet. Als Datengrundlage für die Auswertungen dienen der nach dem probabilistischen Testmodell skalierte und aufbereitete IGLU-Datensatz (vgl. Kap. 7.2.5) sowie die TIMSS-Datensätze der POP1-Untersuchung aus dem Jahr 1995 (vgl. <http://isc.bc.edu/timss1995i/Database.html> [vom 28.11.2003]).

---

<sup>44</sup> Die Einteilung einer Gesamtskala in einzelne Kompetenzstufen beruht auf der Feststellung, dass Schülerinnen und Schüler, die schwere Aufgaben lösen, mit hoher Wahrscheinlichkeit auch leichte Aufgaben erfolgreich bewältigen. Allgemein sind die Kompetenzstufen so konzipiert, dass ein Kind mit durchschnittlichen Leistungen beispielsweise der mittleren Kompetenzstufe eine durchschnittlich schwere Aufgabe dieser Kompetenzstufe mit 65-prozentiger Wahrscheinlichkeit erfolgreich löst. Vom Schwierigkeitsgrad her leichtere Aufgaben werden mit größerer Wahrscheinlichkeit erfolgreich bewältigt (vgl. Bos et al. 2003, S.88).

<sup>45</sup> Die Wissenschaftlichen Mitarbeiter Herr Diplompädagoge Helmut Geiser und Herr Dr. Rolf Langeheine, IPN Kiel führten die Itemselektion der Mathematik- sowie Naturwissenschaftsaufgaben durch.

Als quantitative Methoden werden vornehmlich Lösungshäufigkeiten der Größenaufgaben ermittelt: Es wird überprüft, mit welcher Wahrscheinlichkeit Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe die korrekte Multiple-Choice-Antwort bzw. die vorgegebenen Distraktoren der jeweiligen Aufgabe wählen. Mit Hilfe des statistischen Verfahrens der Signifikanzuntersuchung nach Pearson wird untersucht, ob bezüglich der Leistungen der Mädchen und Jungen signifikante Unterschiede existieren. Anhand der von der IGLU-E-Arbeitsgruppe vorausgehend entwickelten Kompetenzstufen in Mathematik und in den Naturwissenschaften wird detailliert analysiert, ob das Antwortverhalten – insbesondere im Hinblick auf die Distraktorenauswahl – der in der Grundschule leistungsheterogenen Kinder vergleichbar ist.

Basierend auf diesen vorausgegangenen statistischen Auswertungen erfolgt eine qualitative Interpretation der Distraktorenergebnisse im Hinblick auf Fehlkonzepte / Fehlvorstellungen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe zu den einzelnen Aufgaben der Größenthematik. Mit den zu verschiedenen Kategorien zusammengefassten Items wird versucht, allgemeine Aussagen zu den Leistungen von Viertklässlern zu unterschiedlichen prozessbezogenen Anforderungen der Größenthematik zu machen.

Für die statistischen Auswertungen wurde das Statistikprogramm SPSS (**S**tatistical **P**ackage for **S**ocial **S**cience) für Windows 10 verwendet.

#### **7.4 Vorausgehende Befunde aus IGLU bzw. IGLU-E**

In diesem Abschnitt erfolgt eine kurze gebündelte Darstellung der für die vorliegende Arbeit relevanten und bereits veröffentlichten Befunde der IGLU- bzw. IGLU-E-Arbeitsgruppe. Hierzu zählen neben der Curricularen Validität der Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben aus IGLU-E insbesondere die für die mathematischen und naturwissenschaftlichen Fähigkeiten sowie für das Leseverständnis formulierten Kompetenzstufen.<sup>46</sup>

---

<sup>46</sup> An der Entwicklung der Kompetenzstufenmodelle Mathematik und Naturwissenschaften sowie der Auswertungen der Curricularen Validität der Items aus IGLU-E war die Autorin der vorliegenden Arbeit beteiligt.

### 7.4.1 Curriculare Validierung der Mathematik- und Naturwissenschaftsitems

Zur curricularen Validierung des IGLU-E-Testmaterials für die Mathematik und die Naturwissenschaften benannten die Bundesländer Fachleute, die mit den Schnittstellen zwischen Schulaufsicht und Unterrichtspraxis vertraut sind und somit über einen fundierten Einblick sowohl in die staatlichen Vorgaben und Rahmenrichtlinien des jeweiligen Landes als auch in die Praxis des Mathematik- und Sachunterrichts der Länder verfügen (vgl. Walther et al 2003, S.204 und Prenzel et al. 2003, S.160).

Die Lehrplanexperten schätzten die Testaufgaben u.a. nach folgenden Kriterien ein:

- *Stoff als Inhalt der gültigen Rahmenpläne,*
- *Klassenstufe, in welcher der angesprochene Stoff behandelt wird,*
- *Bedeutsamkeit und Relevanz des Stoffs für höhere Klassenstufen.*

*Stoff als Inhalt der gültigen Rahmenpläne.*

Bezüglich der Frage „Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne?“ konnten die Experten zwischen den vier Antwortmöglichkeiten „ja, explizit“, „ja, implizit“, „nein“ sowie „kann ich nicht beurteilen“ entscheiden. Da mehrfach vorgenommene Antworten keinen Sinn ergeben, wurde in diesen Fällen die seitens der Experten bearbeitete Frage nicht bewertet. Die Tabelle 7.5 fasst die Ergebnisse über alle 12 Bundesländer zusammen.

Items aus dem Subtest ...	ja, explizit	ja, implizit	nein	kann ich nicht beurteilen	keine Angaben
<b>Mathematik</b>	60,3%	32,6%	6,5%	0%	0,6%
<b>Naturwissenschaften</b>	36,4%	33,3%	28,8%	0%	1,5%

Tabelle 7.5: Einschätzungen der Lehrplanexperten zum Kriterium  
„Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne?“

Den Auswertungen ist zu entnehmen, dass die Lehrplanexperten die in der IGLU-E-Studie getesteten Mathematikaufgaben im Wesentlichen als einen Inhalt der gültigen Rahmenpläne ansehen. Sachrechenaufgaben erhielten eine geringfügig schlechtere

Einschätzung als Aufgaben aus den Bereichen der Arithmetik und Geometrie und wurden zu 11% nicht als Inhalt der gültigen Rahmenpläne angesehen (vgl. Walther et al. 2003, S.205).

Zweidrittel der Naturwissenschaftsaufgaben stuften die Experten als explizit bzw. implizit lehrplanvalide ein (vgl. Tab. 7.5). Jedoch existieren nach ihren Einschätzungen auch eine Reihe an Naturwissenschaftsitems, deren erforderliches Wissen in den Lehrplänen nicht angesprochen wird. Bei dieser relativ großen Menge an Items fällt es anscheinend schwer, einen direkten und klaren Bezug zu den Lehrplänen für den Sachunterricht herzustellen (vgl. Prenzel et al. 2003, S.160).

*Klassenstufe, in welcher der betreffende Stoff behandelt wird.*

Im direkten Anschluss an die Frage „Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne?“ gaben die Experten den Zeitpunkt des zu erlernenden Stoffes an. Hierbei konnten sie zwischen den Klassenstufen 1 bis 6 sowie der Alternativen „in weiterführenden Schulen“ eine Stufe benennen. Wenn für einzelne Items mehrere Zuordnungen erfolgten, wurde die Nennung für die niedrigste der angegebenen Klassenstufen gewertet.<sup>47</sup>

Die Lehrplanexperten ordneten die Mathematikaufgaben hauptsächlich den Klassenstufen 3 und 4 (vgl. Walther et al. 2003, S.205), die Naturwissenschaftsitems vorwiegend der Klassenstufe 3 zu (vgl. Prenzel et al. 2003, S.161). Deutlich niedriger fielen die Nennungen für die übrigen Klassenstufen aus (vgl. Tab. 7.6).

Items aus dem Subtest ...	Klassenstufen						
	1	2	3	4	5	6	weiterführend
<b>Mathematik</b>	2,7%	17,8%	34,2%	37,6%	0,1%	0,1%	1,3%
<b>Naturwissenschaften</b>	6%	18,3%	34,8%	14,5%	0,4%	0%	3,6%

Tabelle 7.6: Einschätzungen der Lehrplanexperten zum Zeitpunkt des zu erlernenden Stoffes

<sup>47</sup> In die Auswertungen der Mathematikaufgaben konnten von maximal 696 Voten bei insgesamt 58 einzuschätzenden Mathematikitems 654 Voten in die Auswertung miteinbezogen werden. In die Naturwissenschaftsauswertungen gingen von maximal 552 Voten bei insgesamt 46 einzuschätzenden Sachunterrichtsaufgaben 428 Voten mit ein (vgl. Prenzel et al. 2003, S.161).

Diese Befunde belegen, dass den Schülerinnen und Schülern der von dem IGLU-E Testinstrument erfasste Stoff in Mathematik und in den Naturwissenschaften am Ende der vierten Jahrgangsstufe geläufig sein sollte.

#### *Bedeutsamkeit und Relevanz des Stoffs für höhere Klassenstufen.*

Die Auswertungen zu „Wie wichtig ist der Stoff für das Lernen in höheren Klassenstufen?“ weisen daraufhin, dass das in den IGLU-E-Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben untersuchte Wissen und Verständnis nicht nur in der Primarstufe, sondern für das nachfolgende Lernen auch in der Sekundarstufe von Relevanz ist (vgl. Abb. 7.3).

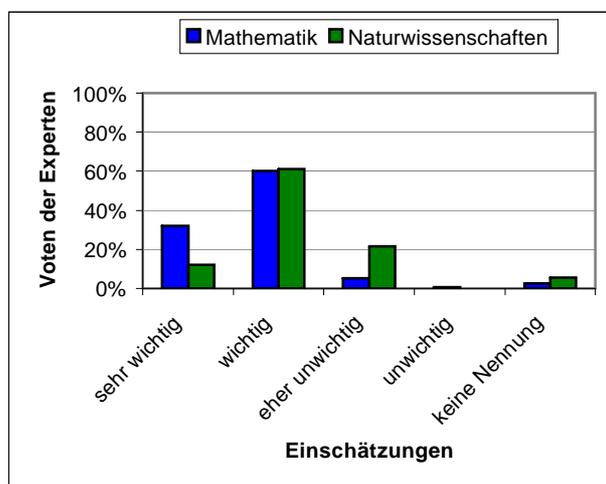


Abbildung 7.3:  
Einschätzungen der Lehrplanexperten bzgl. der Relevanz des getesteten Wissens für das Lernen in höheren Klassenstufen

Zusammenfassend sind die in der IGLU-E Studie verwendeten Mathematik- und Naturwissenschaftsaufgaben curricular valide und testen Fähigkeiten, die für den weiterführenden Mathematik- und Naturwissenschaftsunterricht bedeutsam sind.

Die Einschätzungen der Lehrplanexperten zu den in dieser Untersuchung ausgewählten Items der Größen wird im Kapitel 8.3 beschrieben.

#### **7.4.2 Leistungen in Mathematik und in Naturwissenschaften**

Die mathematische und naturwissenschaftliche Fähigkeit von Grundschülerinnen und Grundschülern ist ein Konstrukt, das über die Leistungen der Kinder bei der Bearbeitung von Testaufgaben mit unterschiedlichen Schwierigkeitsgraden erschlossen werden kann.

### 7.4.2.1 Mathematische Kompetenzen am Ende der Grundschulzeit

Die Schwierigkeitswerte der Testaufgaben streuen für die Mathematik im Bereich von 203 bis 828 Testpunkten (Walther et al. 2003, S.198). Die mathematischen Fähigkeitswerte werden durch fünf inhaltlich gut interpretierbare und gut gegeneinander abgrenzbare Kompetenzstufen gegliedert (vgl. Tab. 7.7). Die Tabelle informiert zugleich über den entsprechenden Bereich auf der Fähigkeitsskala (Mittelwert 500, Standardabweichung 100).

Stufen mathematischen Kompetenz (Grundschule)		gesamt	Mädchen (in Prozent)	Jungen
<b>Stufe I</b>	(< 289) Rudimentäres schulisches Anfangswissen	<b>1,9</b>	2,2	1,5
<b>Stufe II</b>	(290-410) Grundfertigkeiten zum Zehnersystem, zur ebenen Geometrie und zu Größenvergleichen	<b>16,7</b>	20,2	13,4
<b>Stufe III</b>	(411-520) Verfügbarkeit von Grundrechenarten und Arbeit mit einfachen Modellen	<b>39,8</b>	40,4	39,3
<b>Stufe IV</b>	(521-650) Beherrschung der Grundrechenarten, Bewältigung von Aufgaben der räumlichen Geometrie und begriffliche Modellentwicklung	<b>35,1</b>	31,7	38,3
<b>Stufe V</b>	(> 650) Problemlösen bei Aufgaben mit innermathematischem oder außermathematischem Kontext	<b>6,5</b>	5,5	7,5

Tabelle 7.7: Verteilung von Schülerinnen und Schülern auf die Stufen mathematischer Kompetenz am Ende der vierten Jahrgangsstufe (aus: Walther et al. 2003, S.218)

Die Tabellen-Spalten 3, 4 und 5 zeigen die Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die fünf Mathematikkompetenzstufen: Knapp ein Fünftel der Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe sind den beiden unteren Kompetenzstufen zuzurechnen. Diese Gruppe von Kindern weist gravierende Defizite in ihren mathematischen Fähigkeiten auf; das mathematische Wissen und Können dieser Viertklässler geht kaum über das zweite Schuljahr hinaus. Eine Grundlage für das

Lernen in weiterführenden Schulen ist für Schülerinnen und Schüler der Kompetenzstufe I kaum vorhanden. Kinder der Kompetenzstufe II besitzen einen beträchtlichen Nachholbedarf, um ein für die weiterführenden Schulen anschlussfähiges Wissen und Können zu erlangen.

Die Tabelle 7.7 zeigt ferner, dass die beiden unteren Kompetenzstufen I und II stärker mit Mädchen besetzt sind; bei den beiden oberen Stufen IV und V ist es umgekehrt. In der dritten und mittleren Kompetenzstufe besteht ein nahezu ausgewogenes Verhältnis zwischen den Anteilen beider Geschlechter.

In einer detaillierten Untersuchung konnte nachgewiesen werden, dass bezüglich der Mathematikaufgaben ein Zusammenhang zwischen den Leistungskennwerten und dem Kontextbezug der einzelnen Mathematikaufgaben bei *allen* Kindern der unterschiedlichen Mathematikkompetenzstufen existiert (vgl. Lobemeier et al. 2004). Grundschülerinnen und Grundschüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe besitzen vermehrt Schwierigkeiten bei Aufgaben mit außermathematischem Kontext (vgl. Abb. 7.4). „Während Schülerinnen und Schüler gut 90% der kontextfreien Aufgaben mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von mindestens 50% erfolgreich bearbeiten, liegt bei gleicher Leistung der Aufgabenanteil von solchen mit innermathematischem Kontext bei 74% und bei außermathematischem Kontext bei 54% (siehe weiß gefärbte Balken)“, Lobemeier et al. 2004, S.169.

Die Lösungsergebnisse von Aufgaben mit außermathematischem Kontext fallen insbesondere bei Kindern der beiden unteren Mathematikkompetenzstufen beunruhigend aus. Leistungsschwache Kinder bearbeiten eine nur sehr geringe Anzahl an Sachrechenaufgaben (10% oder 20% der Aufgaben) mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von wenigstens 50% erfolgreich.

Aber auch Schülerinnen und Schüler der höheren Kompetenzstufen besitzen bei diesem Aufgabentyp durchaus Schwächen, obwohl diese im Vergleich zu den Defiziten leistungsschwacher Kinder deutlich geringer sind. So lösen Kinder der Mathematikkompetenzstufe IV 35% der Aufgaben mit außermathematischem Kontext mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von mindestens 80%. Eine derartige Leistung erbringen

die leistungsstärksten Kinder bei 65% dieser Items (vgl. Lobemeier et al. 2004, S.172).

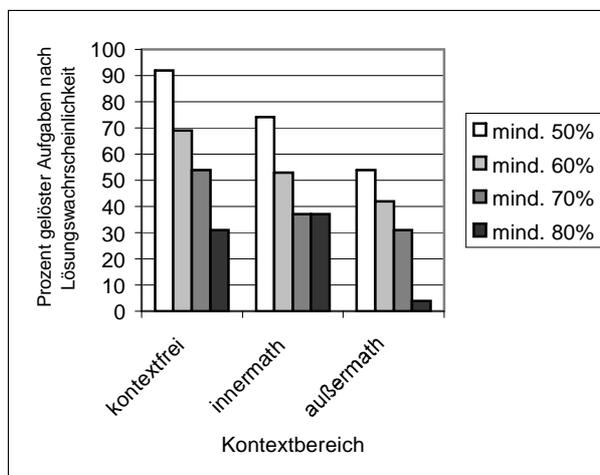


Abbildung 7.4:

Lösungen von Aufgaben nach Kontext

der Kinder aus der Bundesrepublik Deutschland am Ende der vierten Jahrgangsstufe<sup>48</sup>

(aus: Lobemeier et al. 2004, S.170)

Die Auswertungen dieser Untersuchung zeigen allgemein, dass – wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß – ein Förderungsbedarf für alle Kinder hinsichtlich der Bearbeitung von Sachrechenaufgaben notwendig ist: Individuelle Leistungsschwächen in diesem Bereich müssen frühzeitig erkannt werden, damit für die betroffenen Kinder individuelle pädagogische und fachliche Fördermaßnahmen eingeleitet werden können.

Die IGLU-E Untersuchung lieferte überraschenderweise keine Hinweise darauf, dass mangelnde mathematische Kompetenz zu einer deutlichen Abnahme der Lernmotivation führt (vgl. Walther et al. 2003, S.178). Leistungsschwache Kinder sind trotz ihrer Defizite lernmotiviert und haben am Fach Mathematik Interesse. So kann allgemein die auf *allen* Mathematikkompetenzstufen auf hohem Niveau liegende Lern-

<sup>48</sup> Die Abbildung 7.4 stellt, beruhend auf allen Leistungsergebnissen der am IGLU-E-Subtest Mathematik teilnehmenden Kinder, für jeden der drei Aufgabenkontextbereiche „kontextfrei“, „innermathematisch“ und „außermathematisch“ den jeweiligen Prozentanteil gelöster Aufgaben nach vier Mindestlösungswahrscheinlichkeiten, nämlich 50%, 60% 70% sowie 80% dar.

motivation der Viertklässler als eine günstige Voraussetzung für die Steigerung der Effizienz des Mathematikunterrichts in der Grundschule gewertet werden.

#### 7.4.2.2 Naturwissenschaftliche Kompetenzen am Ende der Grundschulzeit

Die Schwierigkeitsgrade der Testaufgaben streuen für die Naturwissenschaften im Bereich von 163 bis 787 Testpunkten. Die Fähigkeitswerte werden durch 6 inhaltlich gut interpretierbare und gut gegeneinander abgrenzbare Kompetenzstufen gegliedert (vgl. Tab. 7.8). Die Tabelle informiert zugleich über den entsprechenden Bereich auf der Fähigkeitsskala mit einem Mittelwert von 500 und einer Standardabweichung von 100).

Stufen naturwissenschaftlicher Kompetenz (Grundschule)		gesamt	Mädchen (in Prozent)	Jungen
	(< 323) Vorschulisches Alltagswissen	3,9	5,3	2,4
<b>Stufe I</b>	(323-400) Einfache Wissensreproduktion	12,8	14,3	11,4
<b>Stufe II</b>	(401-468) Anwenden alltagsnaher Begriffe	20,2	21,0	19,4
<b>Stufe III</b>	(469-522) Anwenden naturwissenschaftsnaher Begriffe	21,3	21,9	20,7
<b>Stufe IV</b>	(523-637) Beginnendes naturwissenschaftliches Verständnis	33,7	30,9	36,5
<b>Stufe V</b>	(> 637) Naturwissenschaftliches Denken	8,1	6,6	9,7

Tabelle 7.8: Verteilung von Schülerinnen und Schülern auf die Stufen naturwissenschaftlicher Kompetenz am Ende der vierten Jahrgangsstufe (aus: Prenzel et al. 2003, S.174)

Die Tabellenspalten 3, 4 und 5 zeigen wiederum die Verteilung der Schülerinnen und Schüler auf die 6 Naturwissenschaftskompetenzstufen. Die Voraussetzungen der Viertklässler auf der Kompetenzstufe I sind als relativ schlecht zu beurteilen. Diese Kinder können zwar sehr einfache Sachverhalte benennen oder aufzählen, aber es

fehlt ihnen an Verständnis bezüglich dieser Sachverhalte. Die Gruppe der Schülerinnen und Schüler, die am Ende der vierten Jahrgangsstufe mit vorschulischem Wissen arbeiten, ist zwar mit 4% sehr klein, bedarf aber besonderer Beachtung. 34% der Viertklässler auf der Kompetenzstufe IV verfügen über begriffliche Vorstellungen zu naturwissenschaftlichen Sachverhalten, die eine sehr gute Grundlage für einen nachfolgenden naturwissenschaftlichen Unterricht sein können (vgl. Prenzel et al. 2003, S.173). Eine kleine Gruppe von 8% auf der höchsten Kompetenzstufe kann naturwissenschaftliche Fragen klären und durchdenken – auch im Hinblick auf Versuchsanordnungen.

Während die beiden unteren Kompetenzstufen stärker mit Mädchen besetzt sind, sind in den beiden oberen Leistungsstufen IV und V mehr Jungen vertreten. In den beiden mittleren Kompetenzstufen besteht ein nahezu ausgewogenes Verhältnis zwischen den Anteilen von Mädchen und Jungen.

Auch die IGLU-E-Untersuchung im Bereich der Naturwissenschaften zeigte, dass keine systematische Beziehung zwischen Lernmotivation und Kompetenz besteht (vgl. Prenzel et al. 2003, S.178). Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe sind fast gleichermaßen motiviert, im Sachunterricht zu lernen. Folglich kann – ebenso wie in den mathematischen Befunden berichtet – die auf allen Naturwissenschaftskompetenzstufen auf hohem Niveau liegende Lernmotivation der Viertklässler als eine günstige Voraussetzung für die Steigerung der Effizienz des Sachunterrichts in der Grundschule gewertet werden.

## 8 Empirische Untersuchungen und ihre Ergebnisse

Die Darstellung der Ergebnisse gliedert sich nach den in der Einleitung der Arbeit sowie in Kapitel 6 vorgestellten Fragestellungen. Der folgende Übersichtsplan zeigt, welche Befunde im Zentrum der Auswertungen der Empirischen Untersuchungen stehen.

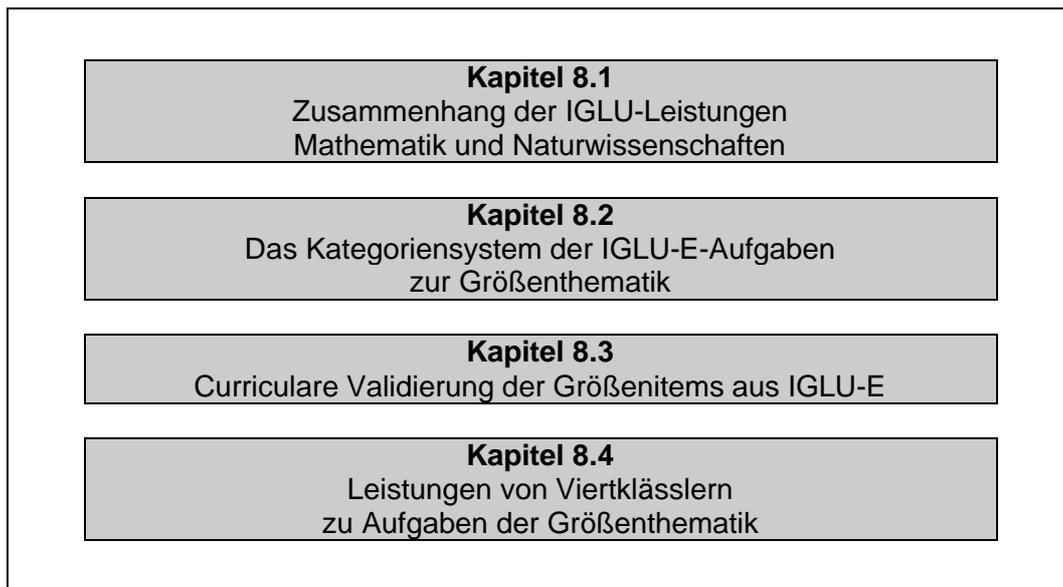


Abbildung 8.1: Übersichtsplan zur Darstellung der Empirischen Untersuchungen und ihrer Ergebnisse der vorliegenden Forschungsarbeit

Das Kapitel 8.1 stellt den Zusammenhang bezüglich der Leistungen in Mathematik und in den Naturwissenschaften der IGLU-E-Studie dar und gibt diesbezüglich Auskunft, welche Leistungen Viertklässler der jeweiligen Mathematikkompetenzstufen in den Naturwissenschaften erbringen bzw. wie erfolgreich Kinder der verschiedenen Naturwissenschaftskompetenzstufen in Mathematik sind.

Das Kapitel 8.2 widmet sich der Darstellung und Erläuterung des in der Arbeit entwickelten Kategoriensystems zu den IGLU-Größenaufgaben mit den beiden Hauptklassen „Basiswissen zu Größen“ und „Messen von Größen“ und ihren jeweiligen Unterkategorien.

In Kapitel 8.3 wird über die Einschätzungen der Lehrplanexperten zu den in dieser Untersuchung ausgewählten Größenitems der IGLU-E-Studie berichtet.

Im Anschluss daran erfolgt im Kapitel 8.4 die Präsentation der detaillierten Analyseergebnisse hinsichtlich der Leistungen der IGLU-E-Viertklässler zu den Items der jeweiligen Kategorien. Da einige der Aufgaben bereits in der TIMSS-POP1-Studie von 1995 und der CROSSTEL-Studie von 1993 getestet wurden, werden trotz des beträchtlichen Zeitabstandes dieser Grundschulstudien die aus den IGLU-Distraktoren sichtbaren Fehlkonzepte mit denen der Studien TIMSS und CROSSTEL verglichen.

### 8.1 Zusammenhang der IGLU-E-Leistungen Mathematik und Naturwissenschaften

Zwischen den Leistungen der Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe in Mathematik und in den Naturwissenschaften besteht ein enger Zusammenhang. In Tabelle 8.1 sind zur Erinnerung die Kompetenzstufen zur Mathematik und den Naturwissenschaften mit den jeweiligen Skalenbereichen der Fähigkeiten dargestellt. Diese Ausführung zeigt, dass die Skalenbereiche der Kompetenzstufen aus Mathematik und Naturwissenschaften nicht übereinstimmen.

	Kompetenzstufen mit Skalenbereich der Fähigkeiten					
	0	I	II	III	IV	V
<b>Mathematik</b>		< 289	290 - 410	411 - 520	521 - 650	> 650
<b>Naturwissenschaften</b>	< 323	323 - 400	401 - 468	469 - 522	523 - 637	> 637

Tabelle 8.1: Kompetenzstufen und Skalenbereiche der Fähigkeiten in Mathematik und in Naturwissenschaften

Die Abbildung 8.2 zeigt, welche Leistungen Viertklässler der jeweiligen Mathematikkompetenzstufen in den Naturwissenschaften erzielen und umgekehrt. Die statistischen Auswertungen machen deutlich, dass es durchaus Viertklässler mit schwachen Leistungen im Fach Mathematik und gleichzeitig erfreulichen Leistungen in den Naturwissenschaften gibt. In gleicher Weise gibt es leistungsstarke Kinder in den Naturwissenschaften, die Defizite in Mathematik haben. Diese Befunde weisen darauf hin, dass im Fach Mathematik leistungsstarke Kinder nicht unmittelbar in den Naturwissenschaften erfolgreich sein müssen. Umgekehrt müssen in einem der beiden

Fächer leistungsschwache Schülerinnen und Schüler nicht automatisch auch im anderen Fach Leistungseinbußen verzeichnen.

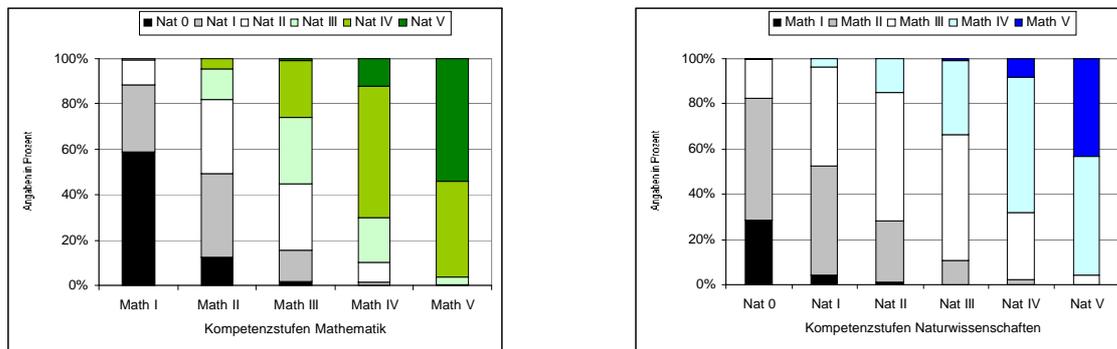


Abbildung 8.2: Zugehörigkeit der IGLU-E-Kinder zu den Kompetenzstufen der Mathematik und den Naturwissenschaften

## 8.2 Das Kategoriensystem der IGLU-E-Aufgaben zur Größenthematik

Innerhalb der beiden Subtests Mathematik und Naturwissenschaften der IGLU-E-Studie wurden den Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe u.a. Aufgaben zu den Größen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur gestellt. Im Sinne von Franke (2003, S.51 bzw. Kap. 5.3.2) handelt es sich hierbei um Sachaufgaben zum Aufbau von Größenvorstellungen. Einige der Größenaufgaben enthalten arithmetische Inhalte mit mehrschrittigen Berechnungen.

Die in dieser Untersuchung ausgewählten Größenitems lassen sich entsprechend ihrer Aufgabenperipherie und ihres Aufgabenkerns zwei Hauptkategorien „Basiswissen zu Größen“ und „Messen von Größen“ mit jeweils zwei Unterkategorien zuordnen (vgl. Abb. 8.3).

<b>Kategorie</b> <b>„Basiswissen zu Größen“</b>	I: Ordnen von Größen  II: Schätzen von Größen
<b>Kategorie</b> <b>„Messen von Größen“</b>	III: Zerlegen von Größen  IV: Operieren mit Größen

Abbildung 8.3: Kategorien der Aufgaben zur Größenthematik aus IGLU-E

In den folgenden Ausführungen wird auf der Basis allgemeingültiger Eigenschaften zu den ausgewählten Größenaufgaben der IGLU-Studie das hier entwickelte Kategoriensystem in seiner Struktur näher erläutert.

### 8.2.1 Items der Untersuchung

In die Itemuntersuchungen gehen insgesamt 16 Aufgaben zum Thema Größen im Multiple-Choice-Format ein<sup>49</sup>: 11 Aufgaben stammen aus dem IGLU-Subtest Mathematik und 5 Aufgaben aus dem IGLU-Subtest Naturwissenschaften. Die Aufgaben könnten Gegenstand des Mathematik- als auch des Sachunterrichts sein. Bei diesen Größenaufgaben handelt es sich um sogenannte Grund- oder Bestimmungsaufgaben, in einem Fall liegt die Umkehrung einer Bestimmungsaufgabe vor.<sup>50</sup>

Die einzelnen Aufgabenstellungen enthalten keine irrelevanten Informationen, die die Kinder von der jeweiligen Problemstellung und der Aufgabenlösung ablenken könnten. Die Aufgaben sind in einer für Grundschülerinnen und Grundschüler dieses Alters angemessenen Sprache formuliert und besitzen einen direkten Bezug zur Lebenswelt der Viertklässler.

Die Arbeitsaufträge sind klar und eindeutig gefasst: Am Ende einer jeden Aufgabe fordert eine Frage die Schülerinnen und Schüler explizit zur vollständigen Ausführung der Lösung auf. Dieser jeweiligen Frage folgen Antwortvorschläge im Multiple-Choice-Format von mindestens 4 und höchstens 6 Antwortalternativen: Bei 11 Aufgaben stehen 4 Antwortmöglichkeiten zur Auswahl, 4 Items besitzen 5 und 1 Item besitzt 6 Antwortalternativen. Nur *eine* der vorgeschlagenen Antworten bildet die korrekte Lösung. Ein Markieren von mehreren Antwortalternativen wird als eine falsch gelöste Aufgabe gewertet.

---

<sup>49</sup> Da bei dieser vorliegenden Untersuchung jede Aufgabe aus *einem* Item besteht, werden im folgenden die Begriffe *Aufgabe* und *Item* synonym verwendet.

<sup>50</sup> Für das Lösen von Grundaufgaben sind neben der Ausgangssituation auch die Transformation der Ausgangs- in die Endsituation bekannt. – Bestimmungsaufgaben verfügen nur über eine bekannte Ausgangssituation. Die Umkehrung einer Bestimmungsaufgabe zeichnet sich durch die bekannte Endsituation aus. Ausgehend von dieser sind die Ausgangsparameter der Aufgabe zu bestimmen. Auch bei diesem Aufgabentyp ist der Weg unbekannt. – Die Zuordnung der Größenaufgaben zu den Typen „Grund- bzw. Bestimmungsaufgabe“ kann nicht immer eindeutig vorgenommen werden, da sie vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler abhängig ist (vgl. Bruder 2003, S.15).

Frage und Multiple-Choice-Antworten bilden zwei Grundelemente einer jeden Aufgabe zu den verschiedenen Größenbereichen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur.

Die Mehrheit der ausgewählten Mathematikaufgaben enthält einen außermathematischen Kontext (7 Aufgaben); nur wenige Aufgaben sind kontextfrei (1 Aufgabe) oder besitzen einen innermathematischen Kontext (3 Aufgaben). Die 5 Aufgaben aus dem Naturwissenschaftstest thematisieren Alltagsprobleme und sind damit ebenfalls von außermathematischer Natur.<sup>51</sup>

Die kontextfreien Items dieser Untersuchung besitzen einen Sonderstatus. Die Aufgaben wurden in die vorliegende Untersuchung miteinbezogen, da ihre Inhalte in enger Verbindung zum Größenaspekt stehen.

Innerhalb der vier Kategorien sind sowohl Aufgaben zu den verschiedenen Größenbereichen Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur als auch Aufgaben mit unterschiedlicher Schwierigkeitsanforderung und ferner verschiedenen Itemschwierigkeiten vertreten. Die Beschreibungen der jeweiligen Kategorien geben hierzu näher Auskunft.

## 8.2.2 Aufbau des Kategoriensystems

Mit Hilfe des Kategoriensystems werden die Größenitems im Hinblick auf die objektiven Kennzeichen von Aufgaben in ihrer *Aufgabenperipherie* und ihrem *Aufgabenkern* untersucht (vgl. Neubrand 2002; Neubrand 2003; Reusser 1997). Diese Vorgehens-

---

<sup>51</sup> *Kontextfreie Aufgaben* verlangen nur die schlichte Ausführung eines klar umrissenen und bekannten Verfahrens. Diese Aufgaben besitzen kaum Textanteile, enthalten zudem keine grafischen Elemente wie beispielsweise Zeichnungen, Diagramme oder Tabellen und sind nicht in umfassendere Aufgabenstellungen eingebettet. Kontextfreie Aufgaben werden auch als „Aufgaben ohne erweiterten mathematischen Kontext“ bezeichnet (vgl. Neubrand 2002, S.113). – Aufgaben mit *innermathematischem Kontext* verlangen das Ermitteln von Eigenschaften mathematischer Objekte oder Beziehungen zwischen solchen Eigenschaften. Ein innermathematischer Kontext liegt vor, wenn die zu bearbeitende Wissenseinheit in einen weiteren mathematischen Zusammenhang eingebettet ist, der über die zu bearbeitende Wissenseinheit hinausgeht und innermathematische Bezüge erfordert (vgl. Neubrand 2002, S.112). – Bei Aufgaben mit *außermathematischem Kontext* zeigt der Aufgabentext einen expliziten Bezug zur außermathematischen Realität auf. Dieser kann auch fiktiv sein. So unterscheidet man „real world“- und scheinbare „real world“-Kontexte. Während bei Aufgaben mit einem „real world“-Kontext realistische Daten und Zusammenhänge verwendet werden, kommen bei Aufgabenstellungen mit „scheinbarem real world“-Kontext nur zu Zwecken der Einkleidung konstruierte Daten und Zusammenhänge vor (vgl. Neubrand 2002, S.113). Aufgaben mit außermathematischem Kontext werden traditionell als Sachrechenaufgaben bezeichnet, die Fach- und Sachwissen miteinander vernetzen.

weise ermöglicht es, die Leistungen von Kindern bezüglich Aufgaben mit ähnlichem Aufbau und Anforderungen zu vergleichen.

### 8.2.2.1 Die Aufgabenperipherie

Die Analyse der Aufgabenperipherie gliedert sich in die Untersuchung des Aufgabenstamms, in welchem das Problem dargelegt wird, und die Untersuchung der Antwortalternativen der einzelnen Multiple-Choice-Aufgaben.

<b>Aufgabenperipherie</b>	<b>Aufgabenstamm</b>	Text
		Grafik
		Tabelle
		Schlüsselwörter
	<b>MC-Antworten</b>	Anzahl der MC
		Zahl
		Zahl + Einheit
		math. Ausdruck
		Wort
		Wortreihe
		Grafik
	in der Aufgabe genannte Einheiten	

Tabelle 8.2: Die Aufgabenperipherie des Kategoriensystems

In Bezug auf den Aufgabenstamm wird geprüft, in welcher Art und Weise die einzelnen Aufgaben präsentiert werden, d.h. ob die Aufgaben zusätzlich zu den allgemeinen Charakteristika (vgl. Kap. 8.3.1) einen einleitenden Text<sup>52</sup>, Grafik(en), eine Tabelle oder Schlüsselwörter enthalten. Die Inspektion des Aufgabenstamms gibt u.a. Auskunft über die Aufgabenkomplexität.

Neben der Anzahl der Multiple-Choice-Antworten werden die Antwortvorschläge im Hinblick auf ihre Antwortgestalt analysiert. Die Antworttypen der hier untersuchten IGLU-Größenitems sind verschieden und erstrecken sich von Antworten mathematisch-symbolischer Gestalt (Zahl, Maßzahl und Maßeinheit, mathematischer Ausdruck) bis hin zu Antworten sprachlicher Form (Wort, Wortreihe).

Zudem wird überprüft, ob in der jeweiligen Aufgabe explizit Maßeinheiten genannt werden.

<sup>52</sup> Die Anzahl der Sätze, aus denen der einleitende Text besteht, werden mit der jeweiligen Anzahl und der Abkürzung S für Satz bzw. Sätze notiert.

### 8.2.2.2 Der Aufgabenkern

Der Aufgabenkern liefert mit den verschiedenen Analyseparametern – hierzu zählen insbesondere das für das Lösen der Aufgabe erforderliche Wissen und die Itemschwierigkeit (vgl. Tab. 8.3) – Informationen zu den inhaltlichen Anforderungen der Items.

Aufgabenkern	Quelle	
	Art der Größe	
	Kontext	
	Itemschwierigkeit	
	Art des Wissens	Fakten-Wissen
		Prozedurales Wissen
		Konzeptuelles Wissen

Tabelle 8.3: Der Aufgabenkern des Kategoriensystems

Bezüglich der Art des Wissens, welches die Kinder zum Lösen der Aufgaben benötigen, wird zwischen den drei Wissenstypen „Faktenwissen“, „Prozedurales Wissen“ und „Konzeptuelles Wissen“ unterschieden.<sup>53</sup>

Die anderen Analysefaktoren geben Auskunft, aus welchem IGLU-E-Subtest das jeweilige Item stammt (Quelle), welche Größe im Zentrum der Aufgabe steht (Art der Größe, wie z.B. Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht, Temperatur), welchen inhaltlichen Kontext die Aufgabe beschreibt (Kontext wie z.B. kontextfrei, innermathematisch, außermathematisch) und welche Itemschwierigkeit die Aufgabe besitzt (Itemschwierigkeit).

Innerhalb der Darstellungen zum Aufgabenkern kann die Leistungsanforderung der Aufgabe an die Viertklässler nur ansatzweise geklärt werden. Ausführliche Informationen sind den detaillierten Ergebnisdarstellungen zu entnehmen.

<sup>53</sup> Bei Aufgaben, die nur Faktenwissen erfordern, wird beispielsweise die Wiedergabe von Fakten, Regeln und Bezeichnungen ohne eine konkrete Anwendung verlangt. – Unter Prozeduralem Wissen versteht man einerseits die formale Sprache oder das symbolische Darstellungssystem der Mathematik. Andererseits verbindet man mit Prozeduralem Wissen die Kenntnis von Regeln, Algorithmen und Prozeduren. – Konzeptuelles Wissen ist reich an Beziehungen (relationships) und ist ein Wissen über Zusammenhänge. Konzeptuelles Wissen entwickelt sich erst durch das Schaffen von Beziehungen zwischen bereits existierendem Wissen und neu hinzukommenden Informationen. Für Aufgaben, die überwiegend konzeptuelles Wissen erfordern, steht im Allgemeinen kein sofort abrufbares standardisiertes Verfahren zur Verfügung (vgl. Reusser 1997; Neubrand 2002).

Im folgenden werden die einzelnen vier Kategorien detailliert präsentiert. Eine Darstellung der Leistungsergebnisse der Viertklässler zu den Items erfolgt im Kapitel 8.4.

### 8.2.3 Kategorie „Basiswissen zu Größen“

#### 8.2.3.1 Kategorie I „Ordnen von Größen“

		Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“				
		la Größte Zahl	lb Zeit- messung	lc Größte Fläche	ld Wärme	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	-	-	-	-
		Grafik	-	-	-	-
		Tabelle	-	-	-	-
		Schlüsselwörter	größte Zahl <sup>54</sup>	von der kürzesten zur längsten geordnet	größte Fläche	vom kältesten zum heißesten sortiert
	MC-Antworten	Anzahl der MC	4	4	4	5
		Zahl	X	-	-	-
		Zahl + Einheit	-	-	-	-
		math. Ausdruck	-	-	-	-
		Wort	-	-	-	-
		Wortreihe	-	X	-	X
Grafik		-	-	X	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		-	Stunde, Tag, Woche, Monat, Jahr	-	-	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	NAT	MAT	NAT
	Größe		Zahl	Zeit	Fläche	Temperatur
	Kontext		kontextfrei	außermath	innermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KI 212	KI 359	KII 386	KIII 502
	Art des Wissens	Fakten- Wissen	X	X	X	X
		Prozedurales Wissen	X	X	X	X
Konzeptuelles Wissen		-	X	-	-	

Tabelle 8.4: Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“<sup>55</sup>

<sup>54</sup> Natürliche Zahlen sind – wenn sie nicht als Anzahlen auftreten – zunächst keine Größen im eigentlichen Sinn. Gleichwohl ist die Menge der natürlichen Zahlen ein Größenbereich, so dass natürliche Zahlen demnach als Größen gedeutet werden können (insbesondere unter dem Anzahlaspekt).

<sup>55</sup> Innerhalb dieser und der folgenden Tabellen zur Kategorisierung der Größenaufgaben der IGLU-E-Studie bedeutet die Markierung „X“, dass das jeweilige Item die angegebene Information enthält. Das Zeichen „-“ weist daraufhin, dass die Aufgabe diese Information nicht enthält.

Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“ sind in ihrem Aufbau sehr schlicht. Sie bestehen lediglich aus einer mit wenigen Worten formulierten Frage und ihrer direkt anschließenden Multiple-Choice-Antworten.

Die in den Fragen verwendeten Schlüsselwörter „größte“, „geordnet“ und „sortiert“ weisen daraufhin, dass sich die einzelnen Aufgaben mit dem Ordnen von Größenrepräsentanten – genauer dem Ordnen von Zahlen, Zeiten, Flächen und Temperaturen – beschäftigen. Die jeweiligen Fragen leiten mit ihrem explizit formulierten Arbeitsauftrag direkt zu den Antwortalternativen über, die selbst kleinen Teilaufgaben entsprechen.

Welche von diesen Zahlen ist die größte Zahl ?

- 2735
- 2537
- 2573
- 2753

Abbildung 8.4: Beispiel einer Aufgabe der Kategorie I „Ordnen von Größen“  
(Item Ia „Größte Zahl“)

Bei dem ersten und dem dritten Item dieser Kategorie (Item Ia und Item Ic) müssen die Schülerinnen und Schüler zur Beantwortung der Frage *alle* Antwortvorschläge betrachten und die Antworten hinsichtlich ihres Größenausmaßes zueinander in Beziehung setzen. Die einzelnen Antwortalternativen bestehen jeweils aus einem Element: einer Zahl bzw. einer Fläche.

Die zweite und vierte Aufgabe (Item Ib und Item Id) erfordern innerhalb der einzelnen Antwortalternativen eine Überprüfung der korrekten Größenanordnung vorgegebener Repräsentanten der Größe Zeit bzw. Temperatur. Sobald die korrekte Anordnung der Repräsentanten – also die richtige Reihenbildung der vorgegebenen Repräsentanten hinsichtlich des geforderten Größenausmaßes – in einer der vorgegebenen Antwortalternativen gefunden ist, ist eine Untersuchung der übrigen Multiple-Choice-Antworten nicht mehr notwendig. Die beiden Aufgaben Ib und Id beschreiben die Ordnungsrelationen „kürzer als“ bzw. „kälter als“.

Bei allen vier Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“ müssen die Kinder zugleich über Faktenwissen und Grundvorstellungen bzw. Erfahrungen zu den „Kontrasten“ „klein – groß“, „kurz – lang“ (im Sinne der Größe Zeit) sowie „kalt – heiß“ der entsprechenden Größen Fläche, Zeit und Temperatur verfügen. Zudem ist Prozedurales Wissen erforderlich: Die Kinder müssen die Algorithmen kennen, nach denen Repräsentanten im Sinne der Äquivalenz- und Ordnungsrelation miteinander verglichen und zueinander in Beziehung gesetzt, also nach entsprechenden Vorgaben geordnet werden. Für das Lösen der Items sind mehrere Lösungsschritte erforderlich.

### 8.2.3.2 Kategorie II „Schätzen von Größen“

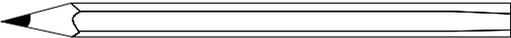
		Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“				
		Ila Ei	Ilb Bleistift	Ilc Zimmer	Ild Körpertemperatur	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	-	-	-	1S
		Grafik	-	Bleistift	-	-
		Tabelle	-	-	-	-
		Schlüsselwörter	welche Einheit am besten geeignet	wie lang ungefähr	wie hoch ungefähr	welche Temperatur liegt am nächsten
	MC-Antworten	Anzahl der MC	4	4	6	4
		Zahl	-	-	-	-
		Zahl + Einheit	-	X	X	X
		math. Ausdruck	-	-	-	-
		Wort	X (Maßeinheit)	-	-	-
		Wortreihe	-	-	-	-
Grafik		-	-	-	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		Zentimeter, Millimeter, Gramm, Kilogramm	cm	cm, m	°C	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	MAT	MAT	NAT
	Größe		Gewicht	Länge	Länge	Temperatur
	Kontext		außermath	außermath	außermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KII 410	KIII 429	KIV 556	-
	Art des Wissens	Fakten-Wissen	X	X	X	X
		Prozedurales Wissen	X	-	-	-
Konzeptuelles Wissen		-	X	X	X	

Tabelle 8.5: Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“

Die Aufgabenperipherie von Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“ ist mit der der Kategorie I „Ordnen von Größen“ vergleichbar: Die Aufgaben bestehen aus einer Frage und Antwortvorschlägen im Multiple-Choice-Format. Beim zweiten Item IIb folgt dem Aufgabenstamm als weitere Information die Abbildung eines gezeichneten Bleistiftes; beim vierten Item IIc geht dem Stamm eine kurze Information in der Form eines Satzes voraus.

Die in der Frage verwendeten Schlüsselwörter „... am besten geeignet ...“, „... ungefähr ...“, „... liegt am nächsten ...“ kündigen an, dass sich die Aufgaben mit dem Schätzen von Größen beschäftigen. Die Items handeln von der Bestimmung der passenden Einheit des Gewichts eines Eies sowie dem Schätzen einer Bleistiftlänge und Zimmerhöhe sowie der menschlichen Körpertemperatur im Gesundheitszustand als eine eigenständige Methode der Datengewinnung. Wahrnehmen, Erinnern, in Beziehung setzen, Runden und Rechnen sind vielfältige, sich wechselseitig bedingende Aktivitäten, die für das Schätzen notwendig sind und eine wichtige Rolle spielen. Während bei den Aufgaben IIb, IIc und IId die Antwort aus einer Maßzahl und ihrer Einheit besteht, ist bei der ersten Aufgabe IIa lediglich die geeignete Einheit zur Bestimmung der Masse eines Eies zu nennen.

Wie lang ist dieser Bleistift ungefähr?



5 cm  
 10 cm  
 20 cm  
 30 cm

Abbildung 8.5: Beispiel einer Aufgabe der Kategorie II „Schätzen von Größen“  
(Item IIb „Bleistift“ – hier verkleinert dargestellt)

In erster Linie grenzen die Antwortvorschläge die Schätzungen der Kinder zu den Größen Gewicht, Länge und Temperatur ein: Die Schülerinnen und Schüler können aus den Antwortvorgaben die beste Schätzung auswählen, d.h. ihre zuvor überlegte Lösung mit den angegebenen Vorschlägen vergleichen, gegebenenfalls revidieren und anpassen. Die jeweiligen Antwortalternativen dienen somit als indirekte Hilfestellung zur Schätzung entsprechender Größenrepräsentanten. Jede Entscheidung der

Kinder für eine der vorgegebenen Antwortalternativen ist mit einer Begründung verbunden, die bei dieser Testform im Verborgenen bleibt.

Neben Faktenwissen ist für das Lösen der Aufgaben insbesondere Konzeptuelles Wissen notwendig. Die einzelnen Items erfordern zunächst Grundvorstellungen zu Repräsentanten der Größe Länge, Gewicht und Temperatur. Hierbei spielt das Messen eine wichtige Rolle. Für das Schätzen der Objektgrößen müssen zudem Beziehungen zu bekannten Objektmaßen geschaffen werden.

Auch Aufgaben der zweiten Kategorie erfordern eine eigenständige Organisation mehrerer (bekannter) Lösungsschritte zur Gesamtlösung.

Aufgaben der ersten Hauptkategorie „Basiswissen zu Größen“ stehen in enger Verbindung mit denen der zweiten Hauptkategorie „Messen von Größen“: Jedem Messvorgang liegen Grundvorstellungen sowie Äquivalenz- und Ordnungsrelation zugrunde.

#### **8.2.4 Kategorie „Messen von Größen“**

Items der zweiten Hauptkategorie „Messen von Größen“ sind im Vergleich zu den Items der vorherigen Aufgabenklasse „Basiswissen zu Größen“ in ihrem Aufbau komplex. Neben der allgemeinen Struktur der Größenaufgaben bestehend aus Frage und Multiple-Choice-Antworten gehen dem jeweiligen Aufgabenstamm zusätzlich Informationen in der Gestalt von Text oder grafischen Elementen voran.

Aufgaben dieser zweiten Hauptkategorie können im offenen Antwortformat gestellt werden. Die vorgegebenen Antwortvorschläge zu den Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ und IV „Operieren mit Größen“ dienen den Schülerinnen und Schülern ausschließlich zur selbstständigen Überprüfung ihrer erzielten Resultate: Sollten die Viertklässler in den vorgegebenen Antwortalternativen ihre Lösungsergebnisse nicht finden, so wird ihnen auf diese Weise indirekt vermittelt, dass ihnen bei der Bearbeitung ein Fehler unterlaufen ist. Diese indirekte Rückmeldung fordert die Schülerinnen und Schüler zu einem erneuten Lösungsversuch der Aufgabe auf.

Items dieser zweiten Hauptkategorie sind nicht nur in ihrem Aufbau, sondern auch in ihren Anforderungen anspruchsvoll. – Die Itemschwierigkeiten streuen von 418 bis 627. – Auch diese Items erfordern eine eigenständige Organisation mehrerer Lösungsschritte zur Gesamtlösung.

#### 8.2.4.1 Kategorie III „Zerlegen von Größen“

		Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“			
		IIIa Kuchen	IIIb Würfel	IIIc Gewichte	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	3S	-	1S; 2S
		Grafik	-	Würfel	3 Versuchsaufbauten
		Tabelle	-	-	-
		Schlüsselwörter	wie viel	aus wie vielen	wie viele
	MC-Antworten	Anzahl der MC	4	4	5
		Zahl	X	X	X
		Maßzahl, Einheit	-	-	-
		Math. Ausdruck	-	-	-
		Wort	-	-	-
		Wortreihe	-	-	-
Grafik		-	-	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		-	-	-	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	MAT	NAT
	Größentyp		Fläche	Volumen	Gewicht
	Kontext		außermath	innermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KIII 418	KIV 538	-
	Art des Wissens	Fakten-Wissen	X	X	X
		Prozedurales Wissen	-	-	-
Konzeptuelles Wissen		X	X	X	

Tabelle 8.6: Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“

Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ beschäftigen sich mit dem Messen von Repräsentanten der Größen Fläche, Volumen und Gewicht im Sinne des Kardinalzahlaspekts, was anhand der in den Aufgaben genannten Schlüsselwörter „wie viel(e)“ bzw. „aus wie vielen“ deutlich wird. Die Aufgabenantworten bestehen folglich aus einer Anzahl, die angibt, aus wie vielen „kleinen“ willkürlich gewählten bzw. konventionellen Flächen- oder Rauminhaltseinheiten eine Fläche oder ein vorgegebener Körper zusammengesetzt ist bzw. wie viele Gewichte benötigt werden, um ein Objekt auszuwiegen.

Die Methoden zur Anzahlbestimmung können seitens des Aufgabenbearbeiters sehr unterschiedlich sein.

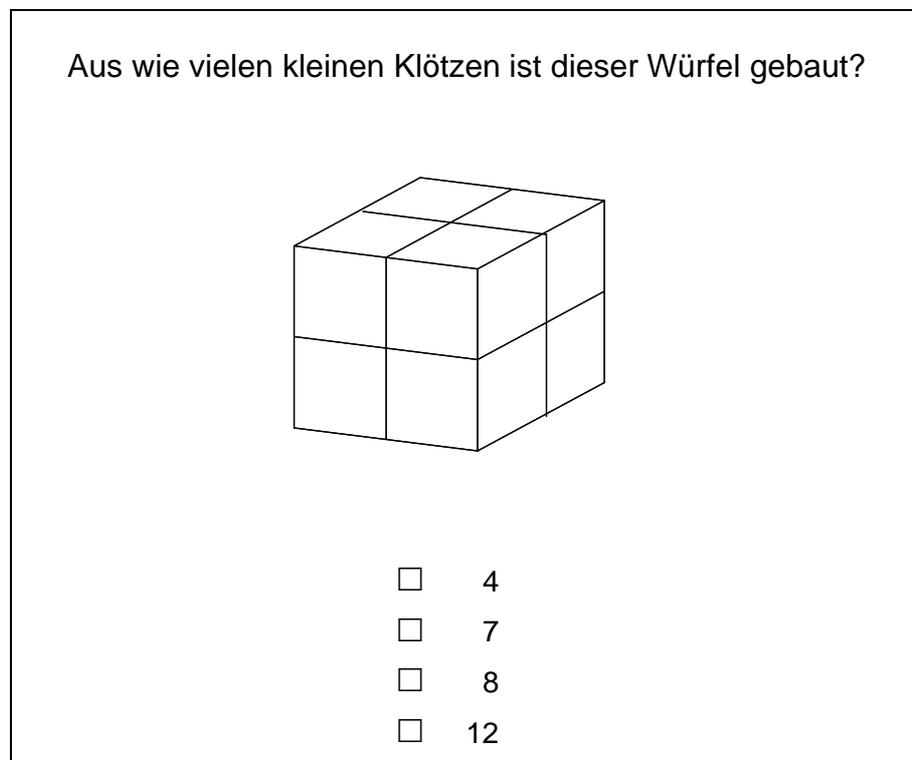


Abbildung 8.6: Beispiel einer Aufgabe der Kategorie III „Zerlegen von Größen“  
(Item IIIb „Würfel“)

Die Aufgabe IIIb zur Volumenbestimmung erfordert räumliches Vorstellungsvermögen und spricht damit das geometrische Verständnis der Schülerinnen und Schüler an. Die Kinder sollen die Anzahl der Einheitswürfel bestimmen, aus denen ein großer Würfel zusammengesetzt ist. Auch der Aufgabe IIIa, die sich mit einfachen Brüchen im Alltag beschäftigt (ein Viertel, drei Viertel, die Hälfte), liegt eine geometrische Struktur zugrunde. Bei dieser Aufgabe kommen am Beispiel der Aufteilung eines Kuchens an verschiedene Personen geometrische Elemente ins Spiel. Die Aufgabe IIIc beschäftigt sich in ihren ersten Ansätzen mit dem Konzept der Proportionalität. Das Item erfordert, dass Schülerinnen und Schüler die Gewichte verschiedener Objekte zueinander in Beziehung setzen.

Das zur Lösung der Aufgaben IIIa, IIIb und IIIc erforderliche Wissen ist neben der Kenntnis von Fakten hauptsächlich konzeptueller Art.

### 8.2.4.2 Kategorie IV „Operieren mit Größen“

		Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“					
		IVa Kalender	IVb Umfang	IVc Waage	IVd Schrittlänge	IVe Rechteck	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	1S; 2S	2S	3S	3S	2S
		Grafik	Kalenderblatt	Rechteck	3 Versuchsaufbauten	-	-
		Tabelle	-	-	-	X	-
		Schlüsselwörter	an welchem Datum	wie groß	wie viel mal schwerer	wer hat den größten Schritt	wie lang
	MC-Antworten	Anzahl der MC	5	4	5	4	4
		Zahl	-	-	-	-	-
		Zahl + Einheit	X	-	-	-	X
		math. Ausdruck	-	X	X	-	-
		Wort	-	-	-	X	-
		Wortreihe	-	-	-	-	-
Grafik		-	-	-	-	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		Monat	cm	-	-	cm	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	MAT	NAT	MAT	MAT
	Größentyp		Zeit	Länge	Gewicht	Länge	Länge
	Kontext		außermath	innermath	außermath	außermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KIII 427	KIV 541	KIV 575	KIV 627	-
	Art des Wissens	Fakten-Wissen	X	X	X	X	X
		Prozedurales Wissen	-	-	-	-	-
Konzeptuelles Wissen		X	X	X	X	X	

Tabelle 8.7: Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“

Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ beschäftigen sich mit der Bestimmung von Längen, Zeitpunkt und Gewichten, was sich in den Fragen der jeweiligen Aufgaben widerspiegelt.

Im Zentrum der Itemanforderungen steht das Rechnen und Vergleichen in den betreffenden Größenbereichen. Die Aufgabenantworten bestehen aus einem mathematischen Ausdruck oder einer Maßzahl mit dazugehöriger Maßeinheit.

Zur Lösung der Aufgaben ist eine rechnerische Modellierung mit mehreren Rechenschritten erforderlich.

Das ist ein Kalenderblatt für den August 2001.

AUGUST						
So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	28	30	31	

Marias Geburtstag ist am Donnerstag, dem 2. August.  
Genau 3 Wochen später will sie eine Reise beginnen.  
An welchem Datum will sie verreisen?

- 16. August
- 19. August
- 21. August
- 23. August
- 30. August

Abbildung 8.7: Beispiel einer Aufgabe der Kategorie IV „Operieren mit Größen“  
(Item IVa „Kalender“)

Mit Ausnahme der Aufgabe IVe erfolgt die Bearbeitung der Aufgaben mittels „Vorwärtsarbeiten“. Für die Lösung des Items IVe ist ein „Rückwärtsarbeiten“ notwendig. Es handelt sich hierbei um die bereits erwähnte Umkehrung einer Bestimmungsaufgabe (vgl. Kap. 8.2.1).

Im folgenden werden die Ergebnisse zu den Items der jeweiligen Kategorien detailliert dargestellt. Da die meisten Items der IGLU-E-Studie zur Veröffentlichung nicht freigegeben sind, können nur sehr wenige Aufgaben in ihrer Originalfassung dargestellt werden. Bei den nicht freigegebenen Aufgaben wird eine analoge Version angegeben.

### 8.3 Curriculare Validierung der Größenitems aus IGLU-E

Für die interpretative Reichweite und Gültigkeit der Befunde sowie für didaktische Schlussfolgerungen stellt die Curriculare Validität der in dieser Arbeit untersuchten IGLU-E-Testaufgaben zum Thema Größen einen wichtigen Aspekt dar.

Die Curriculare Validität der Subtests Mathematik und Naturwissenschaften der IGLU-E-Studie ergab, dass sich die Testitems an den grundlegenden – auch für das Lernen in weiterführenden Schulen – bedeutsamen Begriffen und Prozessen sowie Aspekten des mathematisch-naturwissenschaftlichen Verständnisses von Grundschulkindern orientieren (vgl. Prenzel et al. 2003, S.160-162; Walther et al. 2003, S.204-206; Kap. 7.4.1).

Im Folgenden werden die Einschätzungen der 12 Lehrplanexperten zu den Größenaufgaben nach den in Kapitel 7.4.1 beschriebenen drei Untersuchungskriterien

- *Stoff als Inhalt der gültigen Rahmenpläne,*
- *Klassenstufe, in welcher der angesprochene Stoff behandelt wird,*
- *Bedeutsamkeit und Relevanz des Stoffs für höhere Klassenstufen*

detailliert dargestellt.

#### *Stoff als Inhalt der gültigen Rahmenpläne.*

Die Analysen zeigen, dass die Experten mit wenigen Einschränkungen insbesondere hinsichtlich der Naturwissenschaftsitems den Aufgabenstoff der Größenitems aus den jeweiligen vier Kategorien „Ordnen von Größen“, „Schätzen von Größen“, „Zerlegen von Größen“ sowie „Operieren mit Größen“ als einen Inhalt der gültigen Rahmenpläne ansehen (vgl. Abb. 8.8).

Der grafischen Auswertung ist zu entnehmen, dass bei den Naturwissenschaftsitems Voten einer Nichtzustimmung von 33% (Items Id und IId), 58% (Item IIIc) und 75% (Item IVc) zu verzeichnen sind. Nach Beurteilungen der Lehrplanexperten werden die Inhalte dieser Naturwissenschaftsaufgaben nicht in den gültigen Lehrplänen des Sachunterrichts angesprochen und infolgedessen mit hoher Wahrscheinlichkeit auch

nicht im Sachunterricht der Grundschule thematisiert. Während sich die Aufgaben Id und IId mit der Größe Temperatur beschäftigen, widmen sich die beiden Items IIIc und IVc der Größe Gewicht.

Aber auch der Aufgabenstoff einzelner Mathematikaufgaben IIIa, IVb und IVe ist nach Ansicht einiger Lehrplanexperten nicht Inhalt der gültigen Rahmenpläne. Die Votes hierzu liegen mit knapp 8% (Item IVb), 17% (Item IVe) und 33% (Item IIIa) deutlich unter denen der Naturwissenschaftsitems. Die beiden Items IVb und IVe beschäftigten sich mit der Bestimmung des Umfangs eines Rechtecks, das Item IIIa befasst sich mit einfachen Alltagsbrüchen.

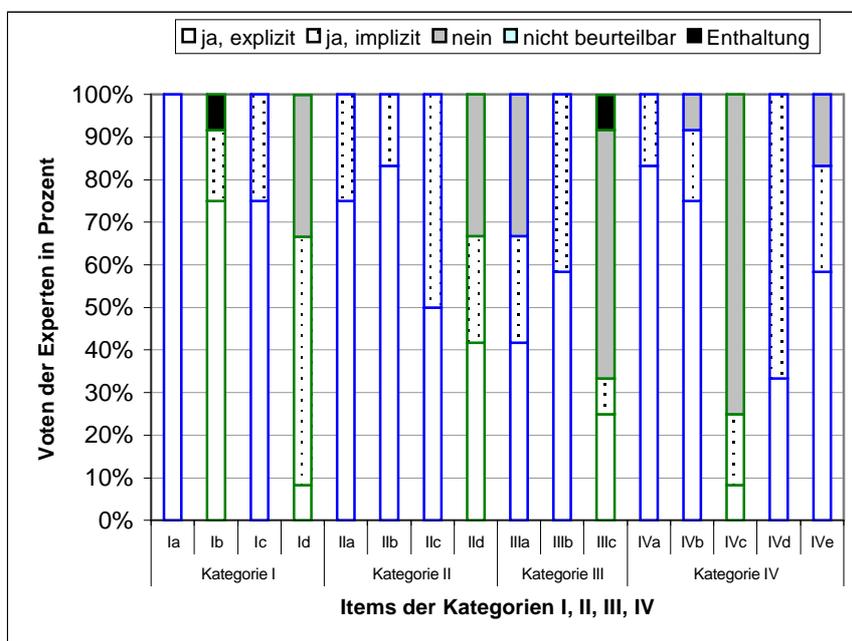


Abbildung 8.8: Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne?

Einschätzungen der Lehrplanexperten zu den Größenitems der Kategorien I, II, III und IV  
 blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

*Klassenstufe, in welcher der betreffende Stoff behandelt wird.*

Im direkten Anschluss an die Frage „Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne?“ gaben die Lehrplanexperten den Zeitpunkt des zu erlernenden Stoffes an. Hierbei konnten sie zwischen den Klassenstufen 1 bis 6 sowie der Alternativen „in weiterführenden Schulen“ eine Stufe benennen. Wenn für einzelne Mathematik- bzw. Na-

turwissenschaftsaufgaben mehrere Antworten gegeben wurden, wurde die niedrigste benannte Stufe gewertet.

Die Mathematikaufgaben zum Thema Größen werden ebenso wie Items des gesamten IGLU-Mathematikaufgabenpools vorwiegend den Klassenstufen 3 und 4 zugeordnet (vgl. Tab. 8.8).

Da die Lehrplanexperten die Größenitems des Naturwissenschaftssubtests zu hohen Anteilen nicht als Inhalt der gültigen Grundschulrahmenpläne ansehen, sind bei der Klassenstufenzuordnung erwartungsgemäß Enthaltungen zu verzeichnen. Mit Ausnahme des Items Ib, welches sich mit dem Ordnen von Zeitspannen befasst und den ersten beiden Klassenstufen zugeordnet wird, werden die übrigen Naturwissenschaftsitems Id, IId, IIIc und IVc – unter Berücksichtigung der jeweiligen Enthaltungen – der Klassenstufe 3 bzw. Klassenstufe 4 zugerechnet.

Items aus den Kategorien		Klassenstufen							keine Angaben
		1	2	3	4	5	6	weiter-führend	
Kategorie I	Ia	0%	0%	16,7%	83%	0%	0%	0%	0%
	Ib	16,7%	66,7%	8,3%	0%	0%	0%	0%	8,3%
	Ic	8,3%	16,7%	8,3%	66,7%	0%	0%	0%	0%
	Id	0%	0%	66,7%	0%	0%	0%	0%	33,3%
Kategorie II	IIda	0%	0%	75%	25%	0%	0%	0%	0%
	IIdb	0%	83,3%	16,7%	0%	0%	0%	0%	0%
	IIdc	0%	16,7%	83,3%	0%	0%	0%	0%	0%
	IIdd	8,3%	25%	25%	16,7%	0%	0%	8,3%	0%
Kategorie III	IIIa	0%	0%	8,3%	50%	0%	8,3%	8,3%	25%
	IIIb	8,3%	8,3%	33,3%	41,7%	0%	0%	8,3%	0%
	IIIc	0%	0%	58,3%	0%	0%	0%	0%	41,7%
Kategorie IV	IVa	0%	33,3%	41,7%	25%	0%	0%	0%	0%
	IVb	0%	8,3%	25%	58,3%	0%	0%	0%	8,3%
	IVc	0%	8,3%	25%	0%	0%	0%	0%	66,7%
	IVd	0%	58,3%	33,3%	8,3%	0%	0%	0%	0%
	IVe	0%	0%	16,7%	66,7%	0%	0%	0%	16,7%

Tabelle 8.8: Einschätzung der Lehrplanxperten bezüglich der Klassenstufe, in welcher der Stoff der Größenitems aus den Kategorien I, II, III und IV behandelt wird  
blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

### *Bedeutsamkeit und Relevanz des Stoffs für höhere Klassenstufen.*

Anhand der Einschätzungen „Wie wichtig ist der Stoff für das Lernen in höheren Klassenstufen?“ belegen die Antworten der Experten, dass die im IGLU-E-Subtest Mathematik getesteten Aufgaben zum Thema Größen in der Primar- und der Sekundarstufe von Relevanz sind (vgl. Abb. 8.9).

Für die Naturwissenschaftsitems sind Voten mit „eher unwichtig“ von knapp 8% (Item IIIc), 17% (Item IVc), 25% (Item Id) und 50% (Item IId) zu verzeichnen. Dies zeigt, dass nach der Ansicht der Lehrplanexperten das mit den Größenaufgaben der Naturwissenschaften untersuchte Wissen und Verständnis für das nachfolgende Lernen auf höheren Klassenstufen mit Einschränkungen bedeutsam ist.

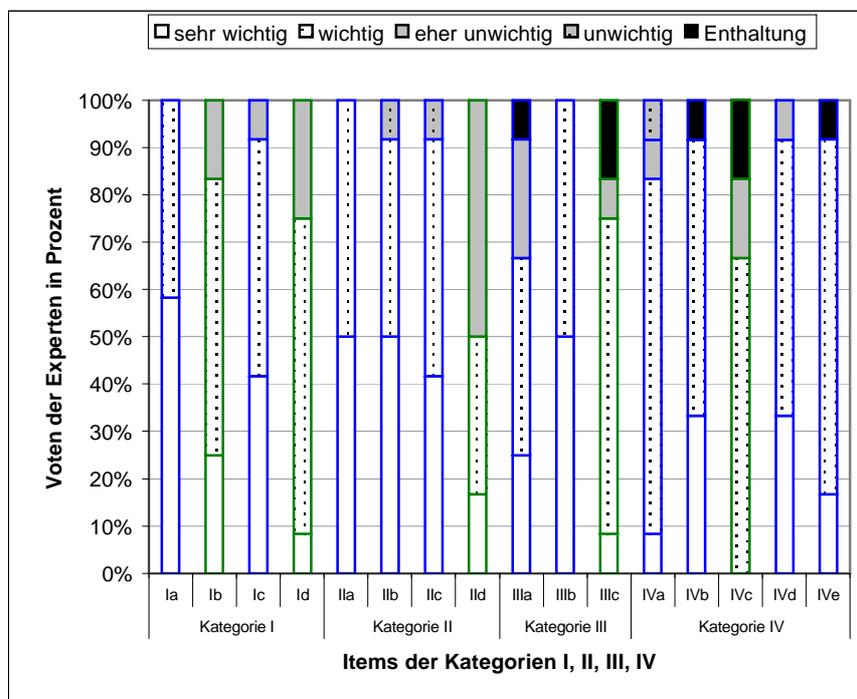


Abb. 8.9: Wie wichtig ist der Stoff für das Lernen in höheren Klassenstufen?

Einschätzungen der Lehrplanexperten zu den Größenitems der Kategorien I, II, III und IV  
blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Zusammenfassend belegen die Ausführungen der Curricularen Validität für die Aufgaben zum Thema Größen, dass den Kindern am Ende der vierten Jahrgangsstufe der in den Mathematikaufgaben erfasste Stoff geläufig sein müsste. Aufgrund der Einschränkungen bezüglich der Naturwissenschaftsaufgaben ist wohl bei diesen Größenaufgaben mit Leistungsschwächen seitens der Kinder zu rechnen.

## 8.4 Leistungen von Viertklässlern zu Aufgaben der Größenthematik

In diesem Kapitel werden die Leistungen der Viertklässler aus der IGLU-E-Studie zu den einzelnen Größenaufgaben der in Kapitel 8.2 vorgestellten Hauptkategorien „Basiswissen zu Größen“ und „Messen von Größen“ mit ihren beiden Unterkategorien „Ordnen von Größen“ und „Schätzen von Größen“ sowie „Zerlegen von Größen“ und „Operieren mit Größen“ dargestellt.

<b>Kategorie</b> <b>„Basiswissen zu Größen“</b>	I: Ordnen von Größen II: Schätzen von Größen
<b>Kategorie</b> <b>„Messen von Größen“</b>	III: Zerlegen von Größen IV: Operieren mit Größen

Abbildung 8.10: Kategorien der Aufgaben zur Größenthematik aus IGLU-E

Die Ergebnisse beruhen auf Analysen quantitativer und qualitativer Art. Am Ende eines jeden Kapitels erfolgt eine Ergebniszusammenschau zu den analysierten Aufgaben der jeweiligen Kategorie.

### 8.4.1 Analysen zu Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“

Aufgaben der Kategorie I beschäftigen sich mit dem Ordnen von vierstelligen natürlichen Zahlen sowie dem Ordnen von Repräsentanten der Größen Zeit, Fläche und Temperatur.

		Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“				
		la Größte Zahl	lb Zeit- messung	lc Größte Fläche	ld Wärme	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	-	-	-	-
		Grafik	-	-	-	-
		Tabelle	-	-	-	-
		Schlüsselwörter	größte Zahl	von der kürzesten zur längsten geordnet	größte Fläche	vom kältesten zum heißesten sortiert
	MC-Antworten	Anzahl der MC	4	4	4	5
		Zahl	X	-	-	-
		Zahl + Einheit	-	-	-	-
		math. Ausdruck	-	-	-	-
		Wort	-	-	-	-
		Wortreihe	-	X	-	X
Grafik		-	-	X	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		-	Stunde, Tag, Woche, Monat, Jahr	-	-	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	NAT	MAT	NAT
	Größe		Zahl	Zeit	Fläche	Temperatur
	Kontext		kontextfrei	außermath	innermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KI 212	KI 359	KII 386	KIII 502
	Art des Wissens	Fakten- Wissen	X	X	X	X
		Prozedurales Wissen	X	X	X	X
Konzeptuelles Wissen		-	X	-	-	

Tabelle 8.9: Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“

Bei den Aufgaben lb „Zeitmessung“ und lc „Größte Fläche“ handelt es sich um sogenannte Ankeraufgaben der IGLU-E-Grundschulstudie, die allen Kindern am Ende der vierten Jahrgangsstufe vorlagen.

Die folgende Tabelle 8.10 zeigt die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die das jeweilige Item der Kategorie I „Ordnen von Größen“ bearbeitet haben.

Item	Itemname	N <sub>gesamt</sub>	N <sub>Mädchen</sub>	N <sub>Jungen</sub>	N <sub>keine Angaben</sub>
la	<b>Größte Zahl</b>	1016	525	489	2
lb	<b>Zeitmessung</b>	5849	2866	2980	3
lc	<b>Größte Fläche</b>	5829	2852	2975	2
ld	<b>Wärme</b>	950	456	494	-

Tabelle 8.10: Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“

Im folgenden werden die Befunde zu den vier Items der ersten Kategorie detailliert dargestellt.<sup>56</sup>

#### 8.4.1.1 Das Item la „Größte Zahl“

Die im IGLU-E-Mathematiktest gestellte kontextfreie Aufgabe „Größte Zahl“ hat eine Itemschwierigkeit von 212 und ist der Mathematikkompetenzstufe I „Rudimentäres schulisches Anfangswissen“ zuzuordnen.

Welche von diesen Zahlen ist die größte Zahl ?

2735

2537

2573

2753

Abbildung 8.11: Aufgabe la „Größte Zahl“  
mit vier Multiple-Choice-Antworten

Die Aufgabe erfordert, dass Schülerinnen und Schüler aus vier vorgegeben vierstelligen Zahlen, die alle aus den Ziffern 2, 3, 5 und 7 bestehen, die größte Zahl benennen. Mit diesem Testitem wird überprüft, ob sich Kinder im Zahlenraum (Tausenderraum) bewegen können, d.h. ob Viertklässler über das Konzept des Stellenwertsystems von Zahlen verfügen und somit die Grundfertigkeit aufweisen, Zahlen in dezimaler Schreibweise lexikographisch zu vergleichen und ihrer Größe nach zu ordnen. Zur Beantwortung der Frage, welche von den vier vorgegebenen Zahlen die größte Zahl sei, müssen *alle* vier Antwortvorgaben betrachtet werden. Der Lösungsprozess

<sup>56</sup> Die Darstellung der Befunde erfolgt im Wesentlichen durch Angaben von Lösungshäufigkeiten. Abweichungen von 100% beruhen auf Rundungsfehlern.

könnte in folgenden Schritten ablaufen (lexikographischer Vergleich): Da alle vier Zahlen die gleiche Tausenderstelle besitzen, verlagert sich in einem ersten Untersuchungsschritt der Zahlenvergleich auf die jeweilige Hunderterstelle der vier vierstelligen Zahlen. Die Antworten MC 1 mit 2735 und MC 4 mit 2753 besitzen im Vergleich zu den anderen Antworten MC 2 mit 2537 und MC 3 mit 2573 eine größere Hunderterstelle, so dass sich die weiteren Untersuchungen auf die beiden Zahlen 2735 (MC 1) und 2753 (MC 4) beschränken. Da schließlich die Zehnerstelle der Zahl 2753 größer ist als die der Zahl 2735, gibt die Antwort MC 4 die gesuchte größte Zahl aus der Gruppe der vier Antwortvorschläge an. Natürlich könnte die Aufgabe auch anders bearbeitet werden. Die Zahlen lassen sich auch ganzheitlich vergleichen.

Die Abbildung 8.12 zeigt das Antwortverhalten der Kinder. Die Angabe der größten Zahl 2753 (MC 4) aus den vier vorgegebenen natürlichen Zahlen fällt Kindern mit der Lösungshäufigkeit von knapp 95% sehr leicht. Die Wahl der anderen drei Antwortvorgaben erfolgt erwartungsgemäß deutlich niedriger, bedarf jedoch einer Interpretation. Die Zahl 2573 (MC 3) wählen die Grundschul Kinder mit 2,8% häufiger als die Zahl 2735 (MC 1) mit 1,70%, die sich von der gesuchten Tausenderzahl nur in der vertauschten Einer- und Zehnerstelle unterscheidet. Dies könnte in der vorliegenden Situation daran liegen, dass eine Reihe von Kindern den Größenvergleich mit Hilfe der beiden Endziffern durchführen und dabei die anderen Stellen vernachlässigen.

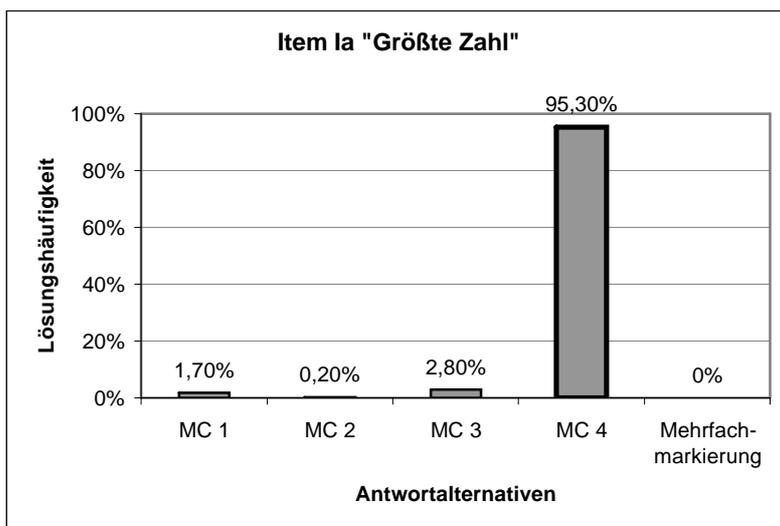


Abbildung 8.12: Lösungsergebnisse zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 ( $N_{\text{gesamt}}=1016$ )

Schülerinnen und Schüler der Mathematik-Kompetenzstufe I geben mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 68% die korrekte Antwort 2753 (MC 4) an (vgl. Tab. 8.11). Der Distraktor MC 1 mit der Zahl 2735, die sich von der richtigen Aufgabenlösung nur in den vertauschten Ziffern der Einer- und Zehnerstelle unterscheidet, wird von Kindern der Kompetenzstufe I noch zu 23%, von Kindern der Kompetenzstufe II mit 5% deutlich weniger gewählt. Immerhin entscheiden sich fast 9% der im Fach Mathematik leistungsschwächsten Kinder für die Antwort MC 3 mit der Zahl 2573.

Die Auswertungen zu den Leistungen von Kindern aus den verschiedenen sechs Naturwissenschaftskompetenzstufen zeigen (vgl. Tab. 8.12), dass bereits Viertklässler aus den unteren Kompetenzstufen das Item mit einer Lösungshäufigkeit von über 80% korrekt lösen. Aber auch die Wahl der anderen Distraktoren ist – wenn auch in geringem Ausmaß – vertreten. Besonders die im Fach Sachunterricht leistungsschwächsten Schülerinnen und Schüler wählen zu 16% die Antwort MC 3 mit der Zahl 2573.

Antwortalternativen	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=24	II N=183	III N=397	IV N=343	V N=68
MC 1: 2735	23,1%	5,2%	0,2%	0,3%	0,1%
MC 2: 2537	0%	0,5%	0,3%	0%	0%
MC 3: 2573	8,7%	6,4%	2,8%	0,9%	0%
<b>MC 4: 2753</b>	<b>68,2%</b>	<b>87,9%</b>	<b>96,6%</b>	<b>98,8%</b>	<b>99,9%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.11: Lösungshäufigkeiten zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortalternativen	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=45	I N=136	II N=209	III N=200	IV N=355	V N=71
MC 1: 2735	0%	6,1%	3,5%	0,5%	0,2%	0,1%
MC 2: 2537	0%	0,7%	0,6%	0%	0%	0%
MC 3: 2573	16%	5,4%	3,2%	1,2%	1,3%	0%
<b>MC 4: 2753</b>	<b>84%</b>	<b>87,9%</b>	<b>92,7%</b>	<b>98,4%</b>	<b>98,6%</b>	<b>99,9%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.12: Lösungshäufigkeiten zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Bezüglich der Antworten der Mädchen und Jungen aus IGLU-E existieren keine nennenswerten Leistungsunterschiede ( $N_{\text{Mädchen}}=525$ ;  $N_{\text{Jungen}}=489$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,289$ ;  $\varepsilon^2 = ,004$ ).

Befunde der TIMSS-POP1-Studie von 1995 zum Item Ia „Größte Zahl“ zeigen, dass ein großer Anteil von Schülerinnen und Schülern der vierten Jahrgangsstufe aus verschiedenen Staaten das Item Ia korrekt bearbeiten (vgl. Tab. 8.13).<sup>57</sup>

Staat	MC 1: 2735	MC 2: 2537	MC 3: 2573	MC 4: 2753	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
Korea	1,7%	0%	1,4%	<b>96,8%</b>	0%	<b>345</b>
Tschechien	1,0%	0,2%	2,7%	<b>95,8%</b>	0,2%	<b>409</b>
Österreich <sup>1</sup>	0,9%	0,3%	3,3%	<b>95,5%</b>	0%	<b>331</b>
Japan	0,9%	1,5%	2,2%	<b>95,5%</b>	0%	<b>538</b>
Deutschland <sup>2</sup>	1,7%	0,2%	2,8%	<b>95,3%</b>	0%	<b>1016</b>
Ungarn <sup>1</sup>	2,8%	0,3%	3,1%	<b>93,9%</b>	0%	<b>360</b>
Australien <sup>1</sup>	1,5%	1,5%	4,4%	<b>92,7%</b>	0%	<b>684</b>
Niederlande <sup>1</sup>	0,9%	0,9%	5,2%	<b>92,5%</b>	0,3%	<b>346</b>
USA	1,9%	3,0%	4,4%	<b>90,7%</b>	0%	<b>677</b>
Norwegen	1,8%	1,4%	6,1%	<b>90,3%</b>	0%	<b>277</b>
Griechenland	4,9%	1,4%	2,2%	<b>90,1%</b>	0,8%	<b>365</b>
Kanada	5,2%	1,7%	2,9%	<b>90,0%</b>	0%	<b>992</b>
Irland	4,5%	0,9%	5,4%	<b>89,2%</b>	0%	<b>352</b>
Schottland	2,5%	2,5%	7,3%	<b>87,6%</b>	0%	<b>395</b>
Island	4,9%	2,0%	6,9%	<b>85,7%</b>	0,5%	<b>203</b>
England	2,9%	2,4%	9,3%	<b>85,6%</b>	0%	<b>375</b>
Neuseeland	4,6%	5,6%	5,5%	<b>84,4%</b>	0%	<b>311</b>
Portugal	4,4%	1,5%	10,0%	<b>84,1%</b>	0%	<b>340</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.13: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4

Die Leistungsergebnisse der Kinder aus allen Staaten der TIMSS-POP1-Studie streuen hinsichtlich der korrekten Antwort MC 4 mit der Zahl 2753 von 53% (einem nicht der OECD angehörenden Staat, vgl. Fußnote 50) bis fast 97%. Die nachträglich eingefügten Leistungsbefunde der Viertklässler der IGLU-E-Studie liegen im oberen Leistungsbereich. Den Auswertungen in Tabelle 8.13 ist ferner zu entnehmen, dass

<sup>57</sup> In der vorliegenden Arbeit werden nur die Befunde der OECD-Mitgliedstaaten genannt, die an der TIMSS-POP1-Studie teilgenommen haben.

unerlaubte Mehrfachmarkierungen bei Kindern der OECD-Staaten äußerst selten auftreten.

#### 8.4.1.2 Das Item Ib „Zeitmessung“

Das Item Ib „Zeitmessung“ wurde im IGLU-E-Subtest Naturwissenschaften als Ankeraufgabe für alle Testteilnehmer gestellt und zählt mit einem Skalenwert von 359 zur Naturwissenschaftskompetenzstufe I „Einfache Wissensreproduktion“. Die Aufgabe stammt im Original aus der TIMSS-POP1-Studie und ist nicht freigegeben. Zur Darstellung der Ergebnisse habe ich analoge Multiple-Choice-Antworten angegeben.

Aus vier Reihen von jeweils fünf Zeitmessungen sollen Schülerinnen und Schüler die Anordnung vorgegebener Zeitspannen von der kürzesten zur längsten geordnet angeben:

MC 1:	<input type="checkbox"/>	Tag, Minute, Monat, Stunde, Woche
MC 2:	<input type="checkbox"/>	Tag, Monat, Woche, Stunde, Minute
MC 3:	<input type="checkbox"/>	Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat
MC 4:	<input type="checkbox"/>	Minute, Tag, Stunde, Woche, Monat

Abbildung 8.13: Multiple-Choice-Antworten des Items Ib „Zeitmessung“<sup>58</sup>

Das Thema Zeit ist insbesondere Bestandteil des Curriculums der Grundschulmathematik (vgl. Franke 2003, S.198f.).

Das Item setzt Grundvorstellungen und Faktenwissen bezüglich der jeweiligen Zeitspannen Minute, Stunde, Tag, Woche und Monat und ihrer entsprechenden Beziehungen zueinander voraus. Die Aufgabe beschränkt sich aber nicht auf eine eigenständige Wiedergabe der Anordnung der Zeitspannen, sondern verlangt, dass die Viertklässler aus den vier vorgegebenen Antworten die korrekte Anordnung der üblichen Standardeinheiten zu Zeitspannen finden. Während des Lösungsprozesses sind zwangsläufig Prozeduren zum Ordnen der Zeitspannen notwendig. Die Aufgabe erfordert neben konzeptuellem auch prozedurales Wissen. Für das erfolgreiche Be-

<sup>58</sup> Die hier vorgenommene Markierung der jeweiligen Multiple-Choice-Antworten (MC 1, MC 2, ...) zur unterstützenden Darstellung der Befunde hat in der Originalfassung der Testaufgaben nicht vorgelegen.

arbeiten des Items ist es nicht erforderlich, dass *alle* vier Antwortalternativen betrachtet werden. Sobald die Lösung gefunden ist, ist die Bearbeitung der Aufgabe abgeschlossen. Die Abbildung 8.14 zeigt die Lösungsergebnisse der IGLU-E-Viertklässler.

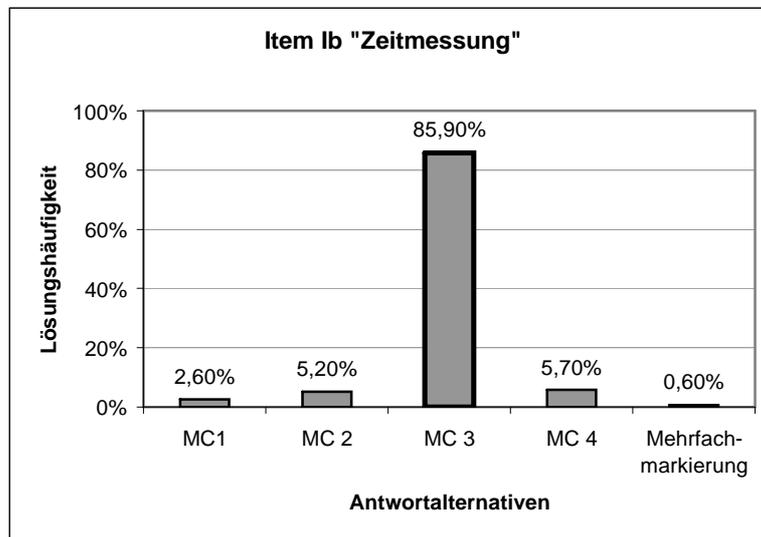


Abbildung 8.14: Lösungsergebnisse zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 ( $N_{\text{gesamt}}=5849$ )

Die korrekte Reihenbildung der Zeiteinheiten von der kürzesten zur längsten Zeitmessung gibt die Multiple-Choice-Antwort MC 3 mit „Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat“ wieder, die mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 86% der Grundschul Kinder gewählt wurde. Die drei anderen Antwortalternativen sind mit deutlich geringerer Häufigkeit genannt.

Die statistischen Auswertungen lassen erkennen, dass bereits leistungsschwache Kinder der unteren Naturwissenschaftskompetenzstufe I zu fast 70% die vorgegebenen Zeiteinheiten von der kürzesten zur längsten sortieren können (vgl. Tab. 8.14).

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=206	I N=743	II N=1175	III N=1250	IV N=1991	V N=483
MC 1: Tag, Minute, Monat, Stunde, Woche	12,8%	5,8%	4,1%	0,9%	1,1%	0,2%
MC 2: Tag, Monat, Woche, Stunde, Minute	14,2%	12,0%	7,3%	4,9%	2,0%	0,4%
<b>MC 3: Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat</b>	<b>53,0%</b>	<b>69,7%</b>	<b>79,0%</b>	<b>90,0%</b>	<b>93,8%</b>	<b>98,3%</b>
MC 4: Minute, Tag, Stunde, Woche, Monat	17,5%	11,6%	8,9%	3,7%	2,8%	1,1%
Mehrfachmarkierung	2,6%	1,0%	0,7%	0,5%	0,3%	0%

Tabelle 8.14: Lösungshäufigkeiten zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Vergleichbare Ergebnisse erzielen Kinder ab der Mathematikkompetenzstufe II (vgl. Tab. 8.15). Die im Fach Mathematik leistungsschwächsten Kinder (Mathematikkompetenzstufe I) können auch aus dem Alltag bekannte Zeitspannen noch nicht mit hinreichender Sicherheit ihrer Größe nach ordnen. Nur 44% dieser Kinder lösen die Aufgabe.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=100	II N=965	III N=2331	IV N=2067	V N=385
MC 1: Tag, Minute, Monat, Stunde, Woche	18,9%	6,4%	2,2%	0,8%	0,4%
MC 2: Tag, Monat, Woche, Stunde, Minute	12,2%	9,3%	6,7%	2,2%	1,0%
<b>MC 3: Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat</b>	<b>44,0%</b>	<b>73,3%</b>	<b>83,6%</b>	<b>94,1%</b>	<b>97,9%</b>
MC 4: Minute, Tag, Stunde, Woche, Monat	21,7%	10,0%	6,7%	2,8%	0,6%
Mehrfachmarkierung	3,2%	1,0%	0,7%	0,2%	0,1%

Tabelle 8.15: Lösungshäufigkeiten zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Hinsichtlich der Leistungen der Mädchen und Jungen liegen keine signifikanten Unterschiede vor ( $N_{\text{Mädchen}}=2866$ ;  $N_{\text{Jungen}}=2980$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,004$ ;  $\varepsilon^2 = ,003$ ).

Internationale Befunde der TIMSS-POP1-Studie von 1995 zeigen, dass auch bei dieser Aufgabe die Leistungen der TIMSS-Kinder aus den verschiedenen Staaten dieser Studie recht weit streuen (47% bis 91%). Die Leistungen der IGLU-E-Kinder der Bundesrepublik Deutschland beim Ordnen der Zeiteinheiten Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat sind sehr erfreulich und liegen im oberen Leistungsbereich, wie die Tabelle 8.16 belegt.

Den Auswertungen ist ferner zu entnehmen, dass die im TIMSS-Naturwissenschaftstest leistungsstarken Kinder aus Japan ( $M=574$ ,  $SD=73$ ) (vgl. Prenzel et al. 2003, S.164) bei der Zeitaufgabe mit ihrer entsprechenden Lösungshäufigkeit von 73% Leistungseinbußen verzeichnen.

Staat	<b>MC 1:</b> Tag, Minute, Monat, Stunde Woche	<b>MC 2:</b> Tag, Monat, Woche, Stunde, Minute	<b>MC 3:</b> Minute, Stunde, Tag, Woche, Monat	<b>MC 4:</b> Minute, Tag, Stunde, Woche, Monat	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
<b>Tschechien</b>	1,8%	2,5%	<b>91,1%</b>	4,2%	0,2%	<b>1231</b>
<b>Niederlande<sup>1</sup></b>	2,0%	5,2%	<b>90,1%</b>	2,6%	0,1%	<b>982</b>
<b>Ungarn<sup>1</sup></b>	2,2%	4,9%	<b>85,9%</b>	7,0%	0%	<b>1087</b>
<b>Deutschland<sup>2</sup></b>	2,6%	5,2%	<b>85,9%</b>	5,7%	0,6%	<b>5849</b>
<b>USA</b>	3,5%	5,9%	<b>85,1%</b>	5,4%	0,1%	<b>2017</b>
<b>Österreich<sup>1</sup></b>	3,2%	4,3%	<b>84,5%</b>	7,7%	0,3%	<b>966</b>
<b>Australien<sup>1</sup></b>	3,9%	5,0%	<b>84,3%</b>	6,9%	0%	<b>2102</b>
<b>Korea</b>	2,6%	5,7%	<b>84,3%</b>	7,4%	0%	<b>1060</b>
<b>Kanada</b>	5,1%	8,5%	<b>79,2%</b>	6,7%	0,4%	<b>3046</b>
<b>Norwegen</b>	5,5%	6,5%	<b>79,0%</b>	8,2%	0,7%	<b>811</b>
<b>Irland</b>	3,2%	8,4%	<b>78,2%</b>	8,0%	2,2%	<b>1069</b>
<b>England</b>	6,4%	6,1%	<b>77,8%</b>	9,6%	0%	<b>1110</b>
<b>Griechenland</b>	5,5%	9,7%	<b>76,6%</b>	6,7%	1,5%	<b>1057</b>
<b>Schottland</b>	5,9%	8,6%	<b>75,1%</b>	9,0%	1,5%	<b>1167</b>
<b>Neuseeland</b>	5,3%	10,4%	<b>74,2%</b>	10,2%	0%	<b>934</b>
<b>Japan</b>	4,8%	11,0%	<b>73,1%</b>	11,1%	0,1%	<b>1638</b>
<b>Portugal</b>	10,2%	9,8%	<b>66,4%</b>	13,6%	0%	<b>1021</b>
<b>Island</b>	9,5%	14,1%	<b>62,7%</b>	13,3%	0,3%	<b>622</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.16: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3

### 8.4.1.3 Das Item Ic „Größte Fläche“

Die TIMSS-Aufgabe Ic „Größte Fläche“ ist eine nicht frei gegebene Ankeraufgabe aus dem Subtest Mathematik mit innermathematischem Kontext. Sie besitzt einen Schwierigkeitswert von 386 und repräsentiert damit Items der Kompetenzstufe II „Grundfertigkeiten zum Zehnersystem, zur ebenen Geometrie und zu Größenvergleichen“.

Aus den folgenden analog veränderten Antwortvorschlägen der Aufgabe sollen Viertklässler die Figur mit der größten Fläche herausfinden. Die jeweiligen Flächen sind aus gleich großen Quadraten zusammengesetzt.

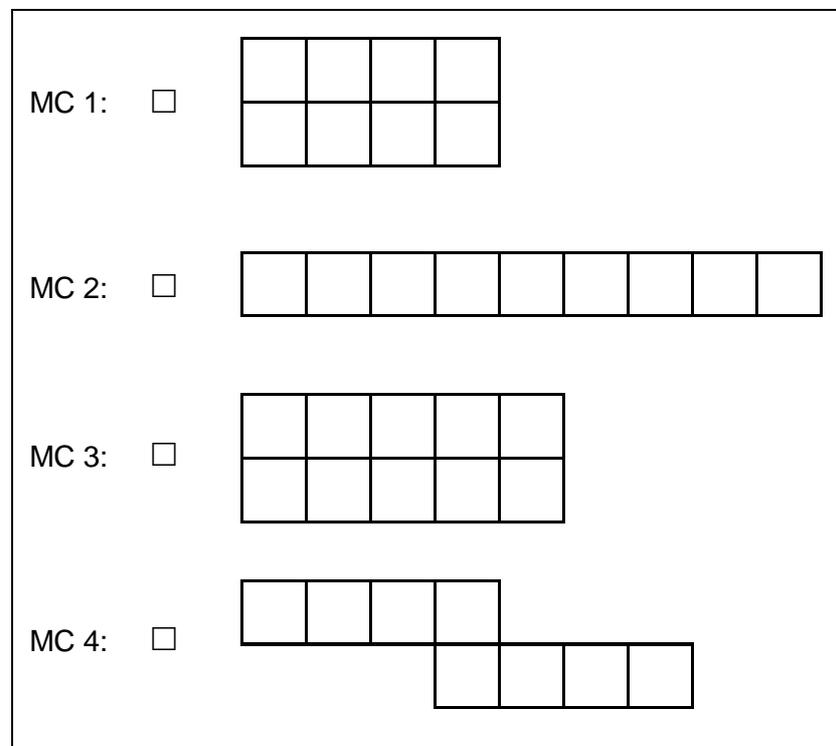


Abbildung 8.15: Multiple-Choice-Antworten des Items Ic „Größte Fläche“

Diese Aufgabe erfordert den Vergleich von Flächen, die in kongruente Quadrate unterteilt sind. Die Aufgabe besteht aus drei aufeinander aufbauenden Lösungsschritten: Zunächst muss begrifflich eine Beziehung zwischen den unterteilten Figuren und dem Flächeninhalt hergestellt werden. Dabei ist die Wahrnehmung wichtig, dass die Figuren in gleich große Quadrate unterteilt sind. Erst vor diesem Hintergrund ist der Flächenvergleich sinnvoll. Im zweiten Lösungsschritt ist durch Abzählen die Anzahl

der (Einheits-)Quadrate zu bestimmen, aus denen die jeweiligen vier Flächen zusammengesetzt sind. Im dritten sich direkt anschließenden Lösungsschritt muss ein Vergleich bezüglich der Anzahl der Einheitsquadrate in den vier Antwortalternativen erfolgen. Die Fläche mit der größten Anzahl an Quadraten entspricht gleichzeitig der größten Fläche. Diese zum Lösen der Aufgabe erforderliche Vorgehensweise macht deutlich, dass zum Beantworten der Frage *alle* vier Antwortvorschläge zu analysieren sind. Die Abbildung 8.16 zeigt die Lösungsergebnisse der Viertklässler aus IGLU-E.

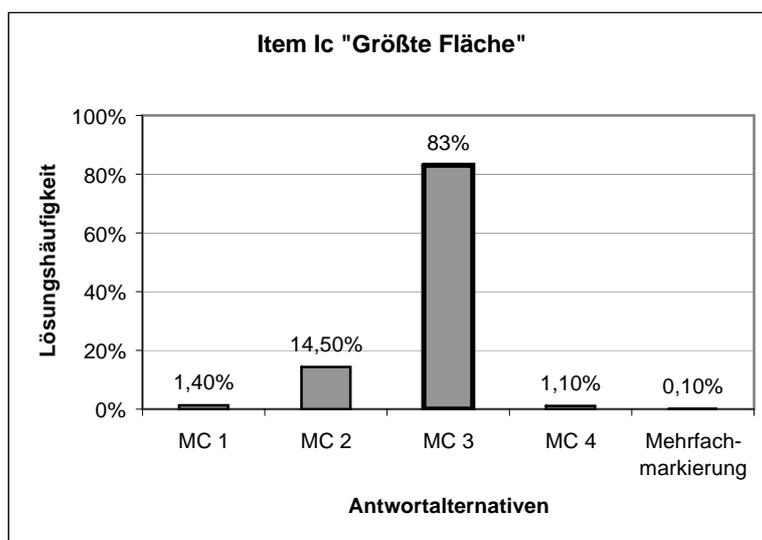


Abbildung 8.16: Lösungsergebnisse zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 ( $N_{\text{gesamt}}=5829$ )

Die Aufgabe beantworten 83% der Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe erfolgreich. Die Auswertungen zeigen, dass nahezu 15% der Grundschul Kinder ihrer Wahrnehmung folgen und die lineare Ausdehnung der Figur ihrer Entscheidung zugrunde legen und die übrigen Antwortvorschläge der Aufgabe nicht berücksichtigen. Die Antwortalternativen MC 1 und MC 4 werden mit 1,4% bzw. 1,1% nur selten gewählt. Das unerlaubte Markieren mehrerer Antworten ist kaum zu verzeichnen.

Das auf Wahrnehmung gestützte Urteil (Antwort MC 2) tritt bei nahezu der Hälfte der Kinder aus der Mathematikkompetenzstufe I auf, die das Item mit einer Lösungshäufigkeit von nur 45% korrekt lösen (vgl. Tab. 8.17). Aber auch bei Viertklässlern der Kompetenzstufen II und III der Mathematik ist diese Fehlvorstellung noch recht stark ausgeprägt.

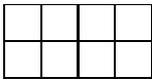
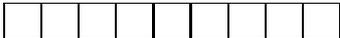
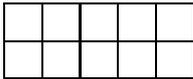
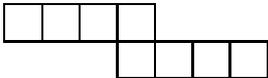
Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=98	II N=955	III N=2321	IV N=2067	V N=386
MC 1: 	4,3%	2,6%	2,0%	0,2%	0%
MC 2: 	48,8%	28,3%	15,5%	7,5%	3,3%
<b>MC 3:</b> 	<b>45,2%</b>	<b>67,6%</b>	<b>81,5%</b>	<b>91,1%</b>	<b>96%</b>
MC 4: 	1,6%	1,2%	1,0%	1,1%	0,6%
Mehrfachmarkierung	0%	0,3%	0,1%	0%	0%

Tabelle 8.17: Lösungshäufigkeiten zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

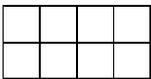
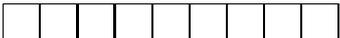
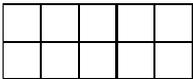
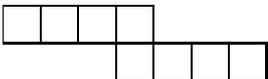
Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=213	I N=740	II N=1164	III N=1246	IV N=1987	V N=479
MC 1: 	4,1%	3,6%	2,1%	1,1%	0,3%	0%
MC 2: 	33,9%	25,2%	19,6%	14,1%	8,6%	2,9%
<b>MC 3:</b> 	<b>60,2%</b>	<b>69,4%</b>	<b>77,4%</b>	<b>83,5%</b>	<b>90,1%</b>	<b>96,2%</b>
MC 4: 	1,3%	1,7%	0,7%	1,3%	1,0%	0,9%
Mehrfachmarkierung	0,5%	0,1%	0,2%	0%	0%	0%

Tabelle 8.18: Lösungshäufigkeiten zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Die Dominanz der Wahrnehmung (Antwort MC 2) ist auch bei Kindern der Naturwissenschaftskompetenzstufen 0 bis III augenfällig vorhanden (vgl. Tab. 8.18). Das Item

wird jedoch bereits von mehr als der Hälfte der leistungsschwächsten Kinder korrekt gelöst.

In der IGLU-E-Studie sind bezüglich der Antwortwahl keine signifikanten Leistungsunterschiede der Mädchen und Jungen zu verzeichnen ( $N_{\text{Mädchen}}=2852$ ;  $N_{\text{Jungen}}=2975$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,000$ ;  $\varepsilon^2 = ,006$ ).

Die Befunde der TIMSS-POP1-Studie im Bereich der Mathematik bestätigen, dass auch bei Viertklässlern anderer Nationen die Dominanz der Wahrnehmung (MC 2) ausgeprägt vorhanden ist (vgl. Tab. 8.19). So wählen eine Reihe von Kindern des leistungsstärksten Staates Korea ( $M=611$ ,  $SD=74$ ) (vgl. Walther et al. 2003, S.209) die inkorrekte Antwort MC 2. Gleichzeitig weisen die Auswertungen daraufhin, dass Grundschüler anderer Nationen das Item erfolgreicher lösen als die Viertklässler der Bundesrepublik Deutschland.

Staat	MC 1	MC 2	MC 3	MC 4	Mehrfach-Markierung	$N_{\text{gesamt}}$
<b>Tschechien</b>	0,5%	2,7%	<b>95,7%</b>	1,0%	0,1%	<b>3307</b>
<b>Österreich<sup>1</sup></b>	0,3%	4,2%	<b>94,8%</b>	0,4%	0,2%	<b>2646</b>
<b>Japan</b>	0,5%	3,9%	<b>94,7%</b>	0,8%	0,1%	<b>4374</b>
<b>Schottland</b>	1,1%	8,2%	<b>89,2%</b>	1,4%	0,2%	<b>3176</b>
<b>Australien<sup>1</sup></b>	1,1%	8,3%	<b>88,2%</b>	2,4%	0%	<b>5623</b>
<b>Korea</b>	2,1%	9,5%	<b>87,5%</b>	1,0%	0%	<b>2808</b>
<b>Portugal</b>	1,4%	11,0%	<b>86,0%</b>	1,6%	0%	<b>2852</b>
<b>England</b>	1,6%	11,2%	<b>84,5%</b>	2,7%	0%	<b>3020</b>
<b>Ungarn<sup>1</sup></b>	0,4%	12,9%	<b>84,3%</b>	2,4%	0%	<b>2966</b>
<b>Niederlande<sup>1</sup></b>	0,9%	11,6%	<b>83,8%</b>	3,4%	0,3%	<b>2668</b>
<b>Deutschland<sup>2</sup></b>	1,4%	14,5%	<b>83,0%</b>	1,1%	0,1%	<b>5829</b>
<b>USA</b>	1,6%	13,7%	<b>82,1%</b>	2,6%	0%	<b>5398</b>
<b>Kanada</b>	1,3%	14,4%	<b>80,9%</b>	3,3%	0%	<b>8125</b>
<b>Irland</b>	1,7%	14,6%	<b>80,1%</b>	3,4%	0,2%	<b>2905</b>
<b>Neuseeland</b>	1,6%	15,3%	<b>78,3%</b>	4,8%	0%	<b>2516</b>
<b>Norwegen</b>	2,0%	16,9%	<b>77,0%</b>	3,9%	0,1%	<b>2176</b>
<b>Griechenland</b>	1,7%	22,8%	<b>72,1%</b>	3,3%	0,2%	<b>2984</b>
<b>Island</b>	2,7%	50,6%	<b>45,5%</b>	1,2%	0%	<b>1695</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.19: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3

Allen Distraktor-Auswertungen dieses Items ist zu entnehmen, dass unerlaubte Mehrfachmarkierungen kaum auftreten.

#### 8.4.1.4 Das Item Id „Wärme“

Das Item „Wärme“ wurde aus der CROSSTEL-Studie übernommen, besitzt in der IGLU-E-Studie einen Schwierigkeitsgrad von 502 und gehört der Naturwissenschaftskompetenzstufe III „Anwenden naturwissenschaftsnaher Begriffe“ an.

Schülerinnen und Schüler sollen aus fünf Multiple-Choice-Vorschlägen die korrekte Anordnung vier vorgegebener, ihnen bekannter Objekte von der kältesten zur heißesten Temperatur sortiert angeben. Da das Item Id „Wärme“ nicht freigegeben ist, formuliere ich ein analoges Antwortschema.

MC 1:	<input type="checkbox"/>	Eisberg, kochende Suppe, menschlicher Körper, Feuer
MC 2:	<input type="checkbox"/>	Eisberg, menschlicher Körper, kochende Suppe, Feuer
MC 3:	<input type="checkbox"/>	menschlicher Körper, Eisberg, kochende Suppe, Feuer
MC 4:	<input type="checkbox"/>	Feuer, menschlicher Körper, kochende Suppe, Eisberg
MC 5:	<input type="checkbox"/>	Feuer, kochende Suppe, Eisberg, menschlicher Körper

Abbildung 8.17: Multiple-Choice-Antworten des Items Id „Wärme“

Zur Beantwortung der Frage müssen die Schülerinnen und Schüler nicht nur über eine Grundvorstellung bzw. über Erfahrungen zu Temperaturen der jeweilig genannten „Objekte“ verfügen, sondern sie müssen ferner diese Temperaturen auch zueinander in Beziehung setzen, also ordnen können.

Für das erfolgreiche Bearbeiten der Aufgabe ist es ebenso wie bei der Aufgabe Ib „Zeitmessung“ nicht erforderlich, dass alle fünf Antwortalternativen betrachtet werden. Sobald der Aufgabenbearbeiter die korrekte Lösung gefunden hat, ist die Bearbeitung der Aufgabe abgeschlossen.

In der Abbildung 8.18 sind die Lösungsergebnisse der Viertklässler grafisch dargestellt.

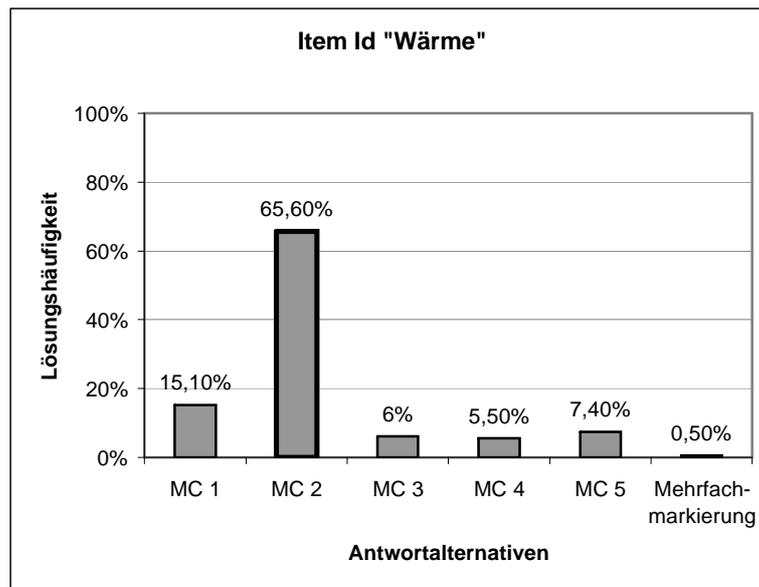


Abbildung 8.18: Lösungsergebnisse zum Item Id „Wärme“ mit der korrekten Antwort MC 2 ( $N_{\text{gesamt}}=950$ )

Das Item „Wärme“ wird von allen Aufgaben der ersten Kategorie „Ordnen von Größen“ mit 66% am schlechtesten gelöst. Schülerinnen und Schüler scheinen im Vergleich zum Ordnen von Zahlen, Zeitspannen und Flächen mit dem Konzept des Ordnen von Repräsentanten unterschiedlicher Temperaturen Schwierigkeiten zu besitzen.

Knapp 15% der Viertklässler lösen die Aufgabe nicht vollständig: Vermutlich bilden sie die beiden aufeinanderfolgenden Paare „Eisberg, kochende Suppe“ und „menschlicher Körper, Feuer“, in denen sie jeweils einen Repräsentanten kalter und warmer Temperatur aneinander reihen (MC 1).

Ebenso wird zu 7% die Antwort MC 5 genannt, in der vermutlich zunächst die beiden heißesten Objekte „Feuer, kochende Suppe“ und im Anschluss daran die beiden kältesten Objekte „Eisberg, menschlicher Körper“ aufgezählt werden.

Der Distraktor MC 4, den die Kinder mit einer Lösungshäufigkeit von fast 6% wählten, listet die Repräsentanten unterschiedlicher Temperaturen von der heißesten zur kältesten Temperatur auf, wobei auch hier die Paare aus dem Antwortvorschlag 1 in umgekehrter Reihenfolge genannt werden. Schülerinnen und Schüler, die als Aufga-

benlösung die Antworten 4 und 5 nennen, scheinen die Aufgabenstellung nicht sorgfältig gelesen zu haben: Die Objekte sind grob betrachtet von der heißesten zur kältesten Temperatur sortiert und erfüllen nicht die Ausgangsbedingung.

Die CROSSTEL-Studie zeigt ähnliche Befunde (vgl. Abb. 8.19). Auch Schülerinnen und Schüler in Schleswig-Holstein, in Mecklenburg-Vorpommern und in den USA wählten im Jahr 1993 zu einem relativ hohen Prozentsatz die Antwort MC 1 und die Antwort MC 4 mit der Liste vom heißesten zum kältesten Repräsentanten, wiederum zu zwei Paaren angeordnet.

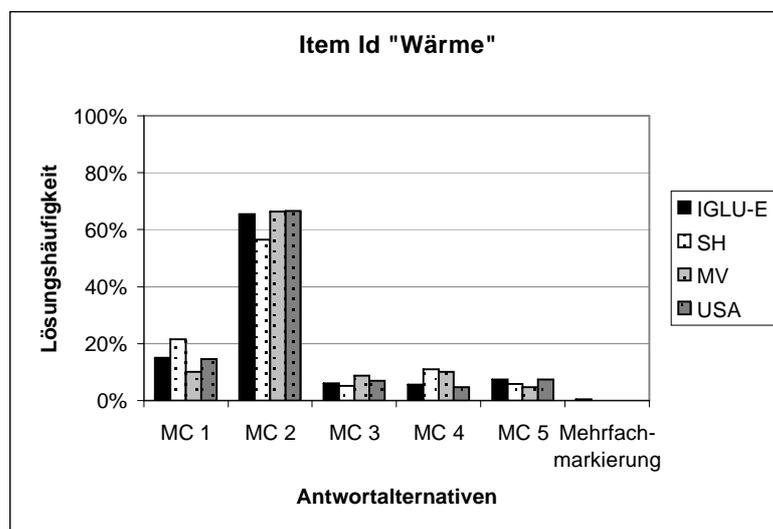


Abbildung 8.19: Gegenüberstellung der Lösungsergebnisse zum Item Id „Wärme“ mit der korrekten Antwort MC 2 aus den Studien IGLU-E und CROSSTEL ( $N_{IGLU-E}=950$ ;  $N_{CROSSTEL-SH}=154$ ;  $N_{CROSSTEL-MV}=149$ ;  $N_{CROSSTEL-USA}=192$ )

Unerlaubte Mehrfachmarkierungen treten auch in der CROSSTEL-Studie in nur geringem Ausmaß auf.

Detaillierte Auswertungen zu den Leistungen der Kinder aus den verschiedenen IGLU-E-Kompetenzstufen ergeben, dass erst ab der Mathematikkompetenzstufe III bzw. der Naturwissenschaftskompetenzstufe II die Aufgabe zum Ordnen von Objekten unterschiedlicher Temperaturen zu mindestens 50% erfolgreich bearbeitet wird (vgl. Tab. 8.20 und Tab. 8.21).

Antwortalternativen	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=12	II N=142	III N=406	IV N=328	V N=60
MC 1:	52,2%	20,3%	18,1%	9,3%	6,0%
<b>MC 2:</b>	<b>9,6%</b>	<b>34,7%</b>	<b>63,2%</b>	<b>78,6%</b>	<b>93,2%</b>
MC 3:	9,3%	13,4%	6,3%	3,5%	0%
MC 4:	4,7%	16,0%	5,0%	2,6%	0%
MC 5:	4,2%	15,7%	7,2%	5,6%	0%
Mehrfachmarkierung	20,1%	0%	0,1%	0,4%	0,8%

Tabelle 8.20: Lösungshäufigkeiten zum Item Id „Wärme“  
mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=23	I N=108	II N=221	III N=205	IV N=317	V N=76
MC 1:	33,6%	16,9%	23,5%	13,2%	11,0%	3,8%
<b>MC 2:</b>	<b>11,5%</b>	<b>34,1%</b>	<b>52,0%</b>	<b>69,1%</b>	<b>81,2%</b>	<b>91,0%</b>
MC 3 :	9,3%	19,3%	5,3%	6,9%	2,5%	0,7%
MC 4:	11,9%	10,3%	6,8%	6,6%	2,5%	2,5%
MC 5:	23,2%	19,0%	12,3%	4,1%	2,7%	0%
Mehrfachmarkierung	10,5%	0,4%	0,2%	0%	0%	1,9%

Tabelle 8.21: Lösungshäufigkeiten zum Item Id „Wärme“  
mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Es sind keine signifikanten Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe zu verzeichnen ( $N_{\text{Mädchen}}=456$ ;  $N_{\text{Jungen}}=494$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,088$ ;  $\varepsilon^2=,01$ ).

#### 8.4.1.5 Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“

Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe in der Bundesrepublik Deutschland erzielen bei Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“ erfreuliche Leistungen. Dies lässt darauf schließen, dass Kinder dieses Alters mit dem Konzept des Ordnen von natürlichen Zahlen und bei den Größen Zeit, Fläche und Temperatur vertraut sind.

Das Vergleichen von Zahlen fällt Viertklässlern mit einer Lösungshäufigkeit von 95% am leichtesten, gefolgt vom Vergleichen von Zeitspannen (Lösungshäufigkeit von

86%) sowie dem Vergleichen von verschiedenen Flächen- (Lösungshäufigkeit von 83%) und Temperaturrepräsentanten (Lösungshäufigkeit von 66%). Die Leistungsunterschiede hinsichtlich des Ordnen von verschiedenen Größenrepräsentanten beruhen vermutlich darauf, dass Konzepte der Zahlen, Zeiten und Flächen intensiver im Grundschulunterricht thematisiert werden als das Konzept der Temperatur.

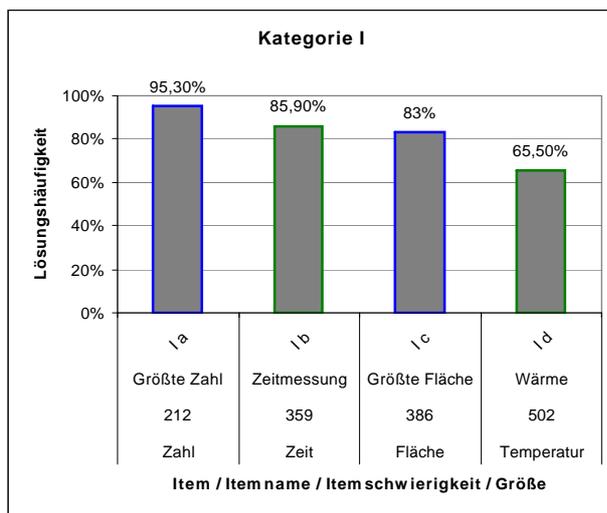


Abbildung 8.20:  
Leistungen der Viertklässler  
zu Aufgaben der  
Kategorie I „Ordnen von Größen“

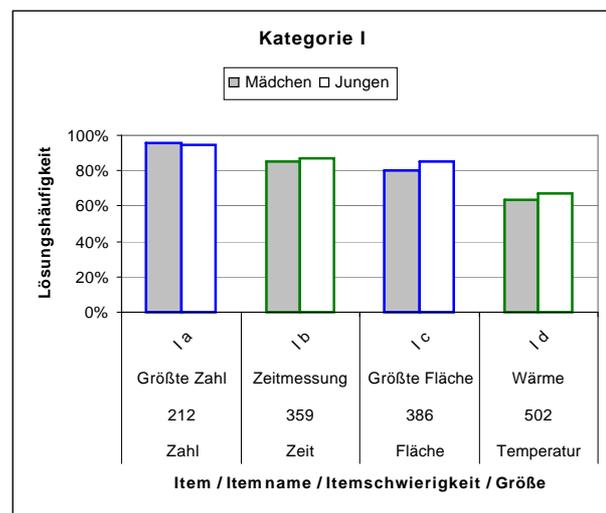


Abbildung 8.21:  
Leistungen von Mädchen und Jungen  
zu Aufgaben der  
Kategorie I „Ordnen von Größen“

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Die Auswertungen zeigen, dass keine geschlechtsspezifischen Leistungsunterschiede bestehen.

Detaillierte Analysen zu den Leistungen der Kinder aus den jeweiligen Kompetenzstufen der Mathematik (vgl. Abb. 8.22) bzw. Naturwissenschaften (vgl. Abb. 8.23) ergeben, dass Schülerinnen und Schüler der unteren Kompetenzstufen durchaus fähig sind, Repräsentanten verschiedener Größen zu ordnen.

Die grafischen Auswertungen zeigen (vgl. Abb. 8.22, Abb. 8.23), dass Kinder der unteren Mathematik- bzw. Naturwissenschaftskompetenzstufen das Ordnen von Zahlen am leichtesten fällt. Das Ordnen von Repräsentanten unterschiedlicher Temperaturen bereitet ihnen im Vergleich dazu besonders große Schwierigkeiten. Dar-

über hinaus zeigen die Auswertungen, dass auch leistungsstarke Kinder bei Aufgaben des Ordnen mit zunehmender Itemschwierigkeit Schwächen besitzen.

Allgemein trennen die Aufgaben der Kategorie I die Leistungen der Kinder aus den unterschiedlichen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen sehr gut voneinander.

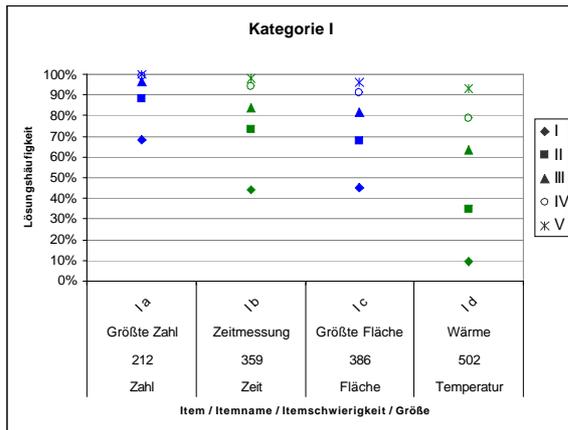


Abbildung 8.22:

Leistungen der Viertklässler  
aus den Mathematikkompetenzstufen  
zu Items der Kategorie I

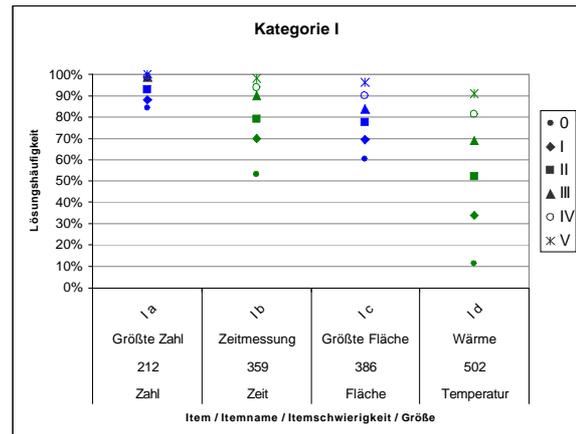


Abbildung 8.23:

Leistungen der Viertklässler  
aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen  
zu Items der Kategorie I

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Ein Vergleich der Leistungen von Viertklässlern aus IGLU-E mit den Leistungen von Viertklässlern aus der TIMSS-POP1- oder CROSSTEL-Studie zu einzelnen Aufgaben des Ordnen von Größen zeigt vergleichbare Befunde.

Unerlaubte Mehrfachmarkierungen treten bei Aufgaben der ersten Kategorie „Ordnen von Größen“ in sehr geringem Umfang auf und sind zu vernachlässigen.

### 8.4.2 Analysen zu Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“

Die Aufgaben der Kategorie II beschäftigen sich mit dem Schätzen von Repräsentanten der Größen Gewicht, Länge und Temperatur als eine eigenständige Methode der Datengewinnung. Wahrnehmen, Erinnern, in Beziehung setzen, Runden und Rechnen sind vielfältige, sich wechselseitig bedingende Aktivitäten, die für das Schätzen notwendig sind und eine wichtige Rolle spielen.

		Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“				
		Ila Ei	Ilb Bleistift	Ilc Zimmer	Ild Körpertemperatur	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	-	-	-	1S
		Grafik	-	Bleistift	-	-
		Tabelle	-	-	-	-
		Schlüsselwörter	welche Einheit am besten geeignet	wie lang ungefähr	wie hoch ungefähr	welche Temperatur liegt am nächsten
	MC-Antworten	Anzahl der MC	4	4	6	4
		Zahl	-	-	-	-
		Zahl + Einheit	-	X	X	X
		math. Ausdruck	-	-	-	-
		Wort	X (Maßeinheit)	-	-	-
		Wortreihe	-	-	-	-
Grafik		-	-	-	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		Zentimeter, Millimeter, Gramm, Kilogramm	cm	cm, m	°C	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	MAT	MAT	NAT
	Größe		Gewicht	Länge	Länge	Temperatur
	Kontext		außermath	außermath	außermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KII 410	KIII 429	KIV 556	-
	Art des Wissens	Fakten-Wissen	X	X	X	X
		Prozedurales Wissen	X	-	-	-
Konzeptuelles Wissen		-	X	X	X	

Tabelle 8.22: Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“

Da den Kindern während der Testdurchführung keine konkreten Messinstrumente (z.B. Lineal) zur Verfügung standen, beruhen die Ergebnisse auf indirekten Vergleichen der Kinder. Zum Lösen der einzelnen Sachprobleme müssen die Viertklässler folglich Bezugsgrößen aus ihrer Erfahrungswelt heranziehen. Die detaillierten Aus-

führungen zeigen, dass das Lösen der Aufgaben mehrere Schritte erfordert. Die Tabelle 8.23 gibt Auskunft über die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die das jeweilige Item der zweiten Kategorie bearbeitet haben.

Die drei Aufgaben Ila „Ei“, Ilb „Bleistift“ und Ilc „Zimmer“ stammen aus dem IGLU-E-Subtest Mathematik; das Item Ild „Körpertemperatur“ gehört dem IGLU-E-Subtest Naturwissenschaften an.

Item	Itemname	N <sub>gesamt</sub>	N <sub>Mädchen</sub>	N <sub>Jungen</sub>	N <sub>keine Angaben</sub>
Ila	Ei	991	470	520	1
Ilb	Bleistift	1003	476	527	-
Ilc	Zimmer	974	466	508	-
Ild	Körpertemperatur	1010	525	485	-

Tabelle 8.23: Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“

Im folgenden werden die Befunde zu den vier Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“ detailliert dargestellt.

#### 8.4.2.1 Das Item Ila „Ei“

Das Item Ila „Ei“ besitzt eine Itemschwierigkeit mit dem Wert 410 und liegt damit zwischen den beiden Mathematikkompetenzstufen II „Grundfertigkeiten zum Zehnersystem, zur ebenen Geometrie und zu Größenvergleichen“ (Skalenbereich 290 bis 410) und III „Verfügbarkeit von Grundrechenarten und Arbeit mit einfachen Modellen“ (Skalenbereich 411 bis 520).

Schülerinnen und Schüler sollen angeben, welche von den vier vorgegebenen Einheiten am besten geeignet ist, um das Gewicht eines Eies zu bestimmen. Da das von der IGLU-Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik entwickelte Item nicht freigegeben ist, gebe ich hier analoge Multiple-Choice-Antworten an (vgl. Abb. 8.24).

Während die ersten beiden Multiple-Choice-Antworten MC 1 „Meter“ und MC 2 „Zentimeter“ Längeneinheiten sind, entsprechen die Antworten unter MC 3 und MC 4 Gewichtseinheiten.

MC 1:	<input type="checkbox"/>	Meter
MC 2:	<input type="checkbox"/>	Zentimeter
MC 3:	<input type="checkbox"/>	Gramm
MC 4:	<input type="checkbox"/>	Kilogramm

Abbildung 8.24: Multiple-Choice-Antworten des Items Ila „Ei“

In erster Linie müssen die Kinder zur Beantwortung der Aufgabe über das Faktenwissen verfügen, dass Gewichte von Gegenständen in Gewichtseinheiten wie z.B. Gramm, Kilogramm oder Tonnen gemessen werden. Auf diese Weise können in einem ersten Schritt die Antworten zu den Längeneinheiten MC 1 „Meter“ und MC 2 „Zentimeter“ ausgeschlossen werden.

Die Entscheidung für eine der beiden übrig gebliebenen Antwortalternativen MC 3 und MC 4 erfordert weitere Überlegungen: In einem gedanklichen Experiment müssen die Schülerinnen und Schüler das Gewicht eines Eies mit dem Gewicht anderer ihnen bekannter Gegenstände vergleichen. Für die Lösung der Aufgabe müssen Zusammenhänge bzw. Beziehungen von Gewichten unterschiedlicher Objekte in den jeweiligen Einheiten Gramm bzw. Kilogramm hergestellt werden. Allgemein erfordert die Aufgabe die Erfahrung bzw. Grundvorstellung, dass ein Ei im Vergleich zu Gegenständen, deren Gewicht mit der Einheit Kilogramm gemessen wird, deutlich leichter ist. Die Viertklässler müssen also Bezugsgrößen aus ihrer Erfahrungswelt zum Lösen dieses Sachproblems heranziehen.

Den statistischen Auswertungen in Abbildung 8.25 ist zu entnehmen, dass sich die Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe hauptsächlich für die Antworten MC 3 „Gramm“ (Lösungshäufigkeit von nahezu 80%) und MC 4 „Kilogramm“ (Lösungshäufigkeit von 11%) entscheiden und zumindest Längen- von Gewichtseinheiten unterscheiden können. Die korrekte Antwort MC 3 wird mit nahezu 80% am häufigsten genannt. Die beiden Längeneinheiten „Meter“ und „Zentimeter“ in den Multiple-Choice-Antwortvorgaben MC 1 und MC 2 wählen die Grundschul Kinder deutlich weniger.

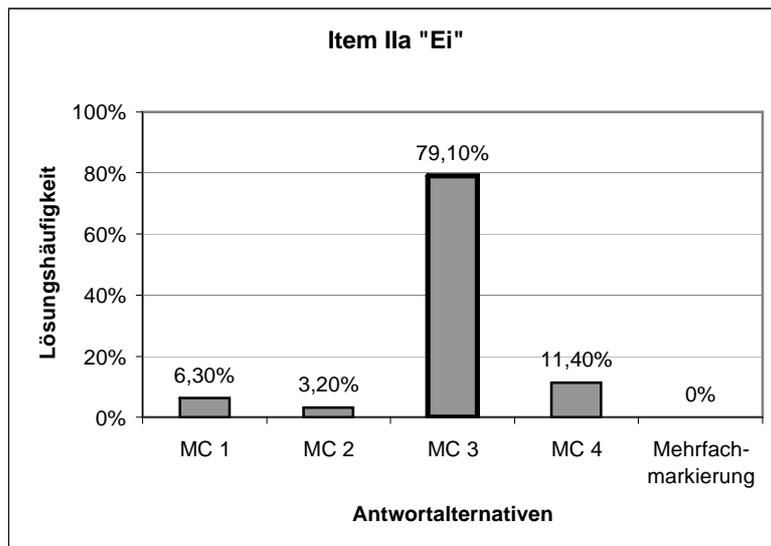


Abbildung 8.25: Lösungsergebnisse zum Item Ila „Ei“ mit der korrekten Antwort MC 3 ( $N_{\text{gesamt}}=991$ )

Detaillierte Analysen zu den Leistungen der Kinder aus den verschiedenen Mathematik- bzw. Naturwissenschaftskompetenzstufen zeigen (vgl. Tab. 8.24 und Tab. 8.25), dass in hohem Maße Kinder aus den unteren Mathematikleistungsstufen als Antwort zur Bestimmung des Gewichts eines Eies die Längenmaße Meter und Zentimeter nennen. So wählen nahezu ein Drittel der Kinder aus der Mathematikkompetenzstufe I und ein Viertel der Kinder aus der Mathematikkompetenzstufe II die Antworten MC 1 und MC 2.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=11	II N=182	III N=377	IV N=365	V N=56
MC 1: Meter	22,9%	17,7%	5,4%	2,1%	0%
MC 2: Zentimeter	9,6%	7,7%	3,7%	0,6%	0%
<b>MC 3: Gramm</b>	<b>27,6%</b>	<b>57,4%</b>	<b>77,9%</b>	<b>89,8%</b>	<b>97,1%</b>
MC 4: Kilogramm	39,9%	16,9%	12,9%	7,5%	2,9%
Mehrfachmarkierung	0%	0,2%	0%	0%	0%

Tabelle 8.24: Lösungshäufigkeiten zum Item Ila „Ei“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Ein ähnliches Antwortverhalten ist auch bei Kindern der unteren Naturwissenschaftskompetenzstufen zu beobachten. Aber auch die Antwort MC 4 mit der Einheit „Kilogramm“ wird – auch wenn in unterschiedlichem Ausmaß – von allen Kindern der ver-

schiedenen Kompetenzstufen der Mathematik bzw. Naturwissenschaften als korrekte Lösung genannt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=32	I N=138	II N=183	III N=206	IV N=352	V N=79
MC 1: Meter	17,6%	9,3%	7,5%	7,8%	4,1%	0%
MC 2: Zentimeter	22,8%	7,4%	5,9%	0,5%	0,6%	0%
<b>MC 3: Gramm</b>	<b>34,9%</b>	<b>66,2%</b>	<b>68,3%</b>	<b>81,3%</b>	<b>88,4%</b>	<b>97,0%</b>
MC 4: Kilogramm	24,7%	17,2%	18,2%	10,5%	6,8%	3,0%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0%	0,1%	0%

Tabelle 8.25: Lösungshäufigkeiten zum Item IIa „Ei“

mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Bezüglich des Items IIa „Ei“ existieren geringfügige Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen, die aber aufgrund einer sehr geringen Effektstärke zu vernachlässigen sind ( $N_{\text{Mädchen}}=470$ ;  $N_{\text{Jungen}}=520$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,001$ ;  $\varepsilon^2=,018$ ).

#### 8.4.2.2 Das Item IIb „Bleistift“

Die Aufgabe IIb „Bleistift“ hat die Itemschwierigkeit 429 und ist daher der Mathematikkompetenzstufe III „Verfügbarkeit von Grundrechenarten und Arbeit mit einfachen Modellen“ zuzuordnen.

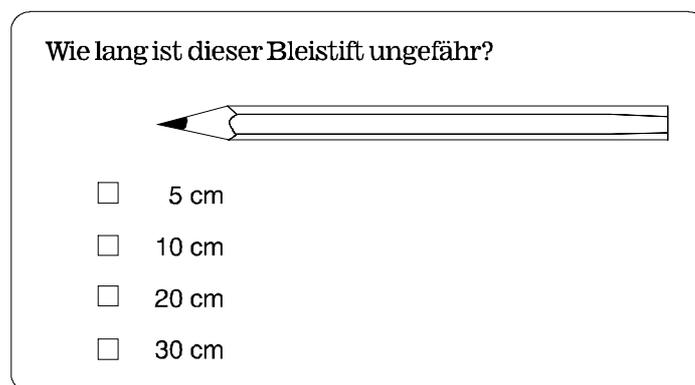


Abbildung 8.26: Aufgabe IIb „Bleistift“ mit vier Multiple-Choice-Antworten (hier verkleinert dargestellt)

Schülerinnen und Schüler sollen die Länge eines gezeichneten angespitzten Bleistifts, der horizontal ausgerichtet ist, schätzen. Die vier vorgegebenen Antwortalternativen sind in der Einheit cm angegeben und erstrecken sich von einem Längenmaß von 5 cm bis zu 30 cm.

Auch die Bleistiftaufgabe erfordert in ihrem Lösungsprozess ein Heranziehen von Bezugsgrößen verschiedener den Schülerinnen und Schülern bekannter Objektlängen bzw. zu den genannten Längen entsprechende Bezugsobjekte. Mit diesem Item wird indirekt überprüft, inwiefern die Kinder über Grundvorstellungen der Größe Länge verfügen bzw. ein „Augenmaß“ für Längen besitzen. Die Abbildung 8.27 zeigt die Lösungsergebnisse der Schülerinnen und Schüler aus IGLU-E.

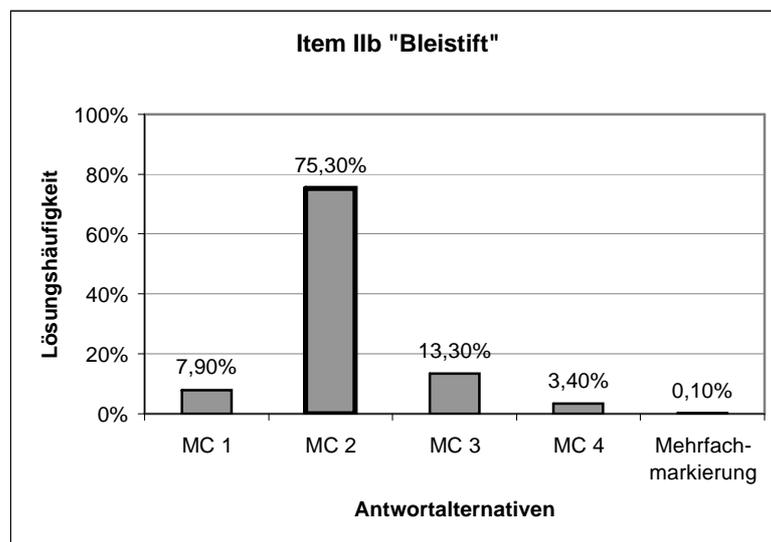


Abbildung 8.27: Lösungsergebnisse zum Item IIb „Bleistift“ mit der korrekten Antwort MC 2 ( $N_{\text{gesamt}}=1003$ )

Die Aufgabe „Bleistift“ wird von 75% der Kinder am Ende der Grundschulzeit mit einer geschätzten Bleistiftlänge von 10 cm (MC 2) erfolgreich gelöst. Die Nennungen der übrigen Antwortalternativen MC 1 (5 cm), MC 2 (20 cm) und MC 3 (30 cm) fallen deutlich niedriger aus, wobei die Antwort MC 2 (20 cm) mit 13% die zweithäufigst gewählte Antwort ist.

Die Lösungsergebnisse der Viertklässler aus den verschiedenen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen sehen folgendermaßen aus (vgl. Tab. 8.26 und Tab. 8.27):

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=11	II N=187	III N=381	IV N=366	V N=57
MC 1: 5 cm	0,5%	12,7%	9,8%	4,9%	0%
<b>MC 2: 10 cm</b>	<b>67,6%</b>	<b>53,8%</b>	<b>75,9%</b>	<b>83,2%</b>	<b>91,9%</b>
MC 3: 20 cm	1,3%	23,2%	12,4%	10,3%	8,1%
MC 4: 30 cm	30,5%	10,2%	1,5%	1,6%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,3%	0%	0%

Tabelle 8.26: Lösungshäufigkeiten zum Item IIb „Bleistift“  
mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Im Fach Mathematik leistungsschwache Schülerinnen und Schüler lösen das Item bereits zu fast 68% korrekt. Auffällig ist, dass Kinder dieser Leistungsgruppe noch zu 31% eine Bleistiftlänge von 30 cm annehmen. Viertklässler der höheren Kompetenzstufen favorisieren neben der korrekten Lösung eher die Multiple-Choice-Antworten MC 1 mit 5 cm und MC 3 mit 20 cm. Erst ab der Mathematikkompetenzstufe III lösen drei viertel der Grundschülerinnen und Grundschüler die Aufgabe korrekt.

Die Schätzungen von Kindern der Naturwissenschaftskompetenzstufen sind mit denen der Schülerinnen und Schüler aus den Mathematikkompetenzstufen vergleichbar. Die Antwortalternative MC 4 mit einer Schätzung von 30 cm ist jedoch weitaus weniger genannt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=32	I N=145	II N=185	III N=209	IV N=351	V N=80
MC 1: 5 cm	20,8%	9,3%	8,5%	8,1%	6,3%	5,2%
<b>MC 2: 10 cm</b>	<b>57,0%</b>	<b>63,6%</b>	<b>67,5%</b>	<b>77,1%</b>	<b>82,1%</b>	<b>86,9%</b>
MC 3: 20 cm	11,2%	20,7%	18,5%	10,0%	11,1%	6,7%
MC 4: 30 cm	11,0%	6,4%	5,4%	4,7%	0,1%	1,1%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0%	0,3%	0%

Tabelle 8.27: Lösungshäufigkeiten zum Item IIb „Bleistift“  
mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Hinsichtlich der Leistungen von Mädchen und Jungen zu dieser Aufgabe existieren keine nennenswerten Unterschiede ( $N_{\text{Mädchen}}=476$ ;  $N_{\text{Jungen}}=527$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,167$ ;  $\varepsilon^2=,006$ ).

Die TIMSS-POP1-Leistungen streuen bei diesem Item im Leistungsbereich von nahezu 56% bis 92%. Die nachträgliche internationale Einordnung der Leistungen der IGLU-E-Viertklässler der Bundesrepublik Deutschland ergibt, dass Kinder einer Reihe von anderen Nationen deutlich bessere Ergebnisse erzielen. Zudem ist den Distraktorenauswertungen der verschiedenen Nationen zu entnehmen, dass beispielsweise die USA, Schottland und England, welche nach den TIMSS-Befunden im Bereich der Mathematik durchschnittliche Leistungen erzielen (USA:  $M=545$ ,  $SD=81$ ; Schottland:  $M=520$ ,  $SD=89$ ; England:  $M=513$ ,  $SD=91$ ) (vgl. Walther et al. 2003; S.209), besonders bei diesem Item sichtbare Schwierigkeiten besitzen. Dies mag vermutlich damit zusammenhängen, dass im Alltagsgeschehen dieser Staaten nicht mit metrischen Maßen gemessen wird, wie es auch in der englischsprachigen Version dieses Items gefordert wird (vgl. Ratzka 2003, S.125f.).

Staat	MC 1: 5 cm	MC 2: 10 cm	MC 3: 20 cm	MC 4: 30 cm	Mehrfach- markierung	$N_{\text{gesamt}}$
<b>Tschechien</b>	1,9%	<b>91,3%</b>	5,0%	1,5%	0,2%	<b>413</b>
<b>Österreich<sup>1</sup></b>	3,7%	<b>89,4%</b>	4,4%	2,2%	0%	<b>322</b>
<b>Japan</b>	4,5%	<b>88,1%</b>	7,3%	0,4%	0%	<b>554</b>
<b>Korea</b>	4,3%	<b>85,8%</b>	9,0%	1,1%	0%	<b>352</b>
<b>Norwegen</b>	5,8%	<b>83,3%</b>	8,4%	2,3%	0%	<b>258</b>
<b>Irland</b>	7,7%	<b>79,7%</b>	9,2%	2,6%	0,5%	<b>379</b>
<b>Ungarn<sup>1</sup></b>	7,6%	<b>79,2%</b>	8,8%	4,6%	0%	<b>370</b>
<b>Australien<sup>1</sup></b>	4,9%	<b>77,3%</b>	14,7%	3,1%	0%	<b>715</b>
<b>Niederlande<sup>1</sup></b>	5,1%	<b>77,0%</b>	14,5%	2,7%	0,3%	<b>331</b>
<b>Deutschland<sup>2</sup></b>	7,9%	<b>75,3%</b>	13,3%	3,4%	0,1%	<b>1003</b>
<b>Neuseeland</b>	8,7%	<b>73,5%</b>	11,5%	6,3%	0%	<b>306</b>
<b>Kanada</b>	8,3%	<b>71,9%</b>	14,6%	5,1%	0%	<b>1023</b>
<b>Island</b>	10,5%	<b>70,3%</b>	8,5%	10,5%	0%	<b>209</b>
<b>Schottland</b>	8,9%	<b>69,7%</b>	17,2%	4,0%	0%	<b>403</b>
<b>Portugal</b>	11,2%	<b>68,9%</b>	12,4%	7,6%	0%	<b>357</b>
<b>Griechenland</b>	15,2%	<b>68,1%</b>	9,7%	6,6%	0,5%	<b>395</b>
<b>England</b>	9,3%	<b>68,0%</b>	18,4%	4,4%	0%	<b>388</b>
<b>USA</b>	16,3%	<b>56,2%</b>	19,6%	7,9%	0%	<b>669</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.28: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IIb „Bleistift“ mit der korrekten Antwort MC 2

### 8.4.2.3 Das Item IIc „Zimmer“

Die im IGLU-E-Subtest Mathematik gestellte Aufgabe IIc „Zimmer“ hat die Itemschwierigkeit 556 und repräsentiert die Mathematikkompetenzstufe IV „Beherrschung der Grundrechenarten, Bewältigung von Aufgaben der räumlichen Geometrie und begriffliche Modellentwicklung“.

Die Aufgabe fordert Schülerinnen und Schüler dazu auf, die Höhe eines normalen Zimmers zu schätzen. Von den insgesamt 6 Maßangaben besitzen jeweils drei Antworten die Maßeinheit Zentimeter (MC 1, MC 3, MC 5) bzw. Meter (MC 2, MC 4, MC 6) in ihrer entsprechenden Kurzschreibweise. Zudem sind zwei der vorgeschlagenen Zimmerhöhen in der Kommaschreibweise angegeben (MC 2 und MC 4). Darüber hinaus entsprechen die Längenangaben in den Antwortalternativen MC 2, MC 3 und MC 4 den Körpergrößen von Kindern bzw. Erwachsenen.

MC 1:	<input type="checkbox"/>	25 cm
MC 2:	<input type="checkbox"/>	1,30 m
MC 3:	<input type="checkbox"/>	160 cm
MC 4:	<input type="checkbox"/>	1,70 m
MC 5:	<input type="checkbox"/>	250 cm
MC 6:	<input type="checkbox"/>	5 m

Abbildung 8.28: Multiple-Choice-Antworten des Items IIc „Zimmer“

Im Vergleich zur vorherigen Aufgabe IIb „Bleistift“ besitzt dieses Item IIc „Zimmer“ einen höheren Leistungsanspruch an die Kinder. Die zu schätzende Zimmerhöhe ist von anderer Art als die Länge eines Bleistiftes. Bleistifte sind Gegenstände, mit denen Schüler im allgemeinen unmittelbaren Umgang haben, die sie in die Hand nehmen können. Die Höhe von Zimmern ist zwar allgegenwärtig, doch zeigt sie sich in der Regel nur mittelbar über die Höhe von Wänden, Schränken etc. Zudem sind die einzelnen Antwortalternativen in verschiedenen Einheiten notiert, was eventuell ein Umrechnen erfordert.

Die Aufgabe erfordert wiederum ein Heranziehen von Bezugsobjekten entsprechend der genannten Antwortvorschläge. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Viertkläss-

ler zum Lösen der Aufgabe ihre eigene Körpergröße zum indirekten Vergleich zu Hilfe nehmen und überprüfen, wie oft sie mit ihrer bekannten Körperlänge die Zimmerhöhe ausmessen können. In der Abbildung 8.29 sind die Lösungsergebnisse der Kinder grafisch dargestellt.

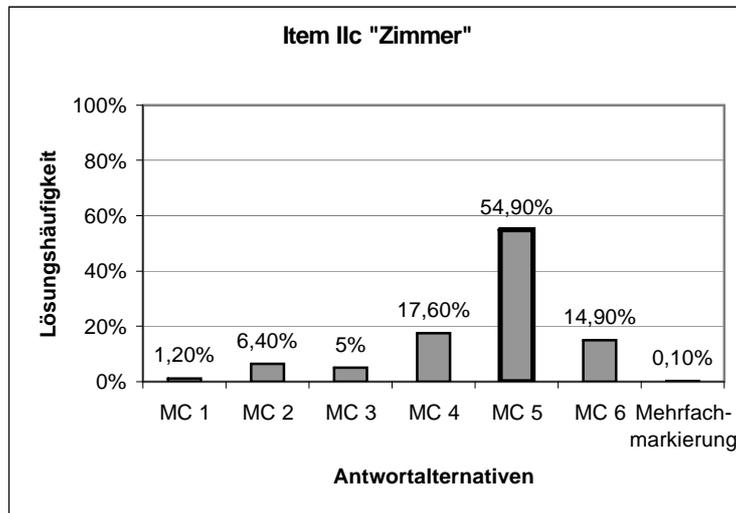


Abbildung 8.29: Lösungsergebnisse zum Item IIC „Zimmer“ mit der korrekten Antwort MC 5 ( $N_{\text{gesamt}}=974$ )

Die Auswertungen zeigen, dass das Item mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 55% korrekt gelöst wird. Die Viertklässler favorisieren insbesondere die Antwortalternativen MC 4 (1,70 m) mit einer Lösungshäufigkeit von fast 18% und MC 6 (5 m) mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 15%. Aber auch die beiden Antwortalternativen MC 2 mit 1,30 m und MC 3 mit 160 cm werden, wenn auch in geringer Anzahl, gewählt.

Das Item ist für Kinder der unteren Kompetenzstufen der Mathematik sehr anspruchsvoll und wird von leistungsschwachen Kindern nur mit knapp 30% bewältigt (vgl. Tab. 8.29). Erst Kinder der vierten Kompetenzstufen bearbeiten die Aufgabe zu fast 70% erfolgreich. Ab der zweiten Kompetenzstufen bevorzugen die Kinder bei den Distraktoren besonders die Antworten MC 4 mit 1,70 m und MC 6 mit 5 m. Dies mag zum einen mit dem Bezug zur eigenen Körpergröße, zum anderen mit der Strategie „die größte Höhenangabe wird schon passen“, zusammenhängen.

Auch die im Fach Mathematik leistungsstärksten Kinder haben mit dem Schätzen einer Zimmerhöhe Schwierigkeiten. Sie lösen die Aufgabe nur zu knapp 80% korrekt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=18	II N=148	III N=399	IV N=333	V N=75
MC 1: 25 cm	0,3%	4,6%	0%	1,4%	0%
MC 2: 1,30 m	28,3%	12,3%	8,0%	1,9%	0%
MC 3: 160 cm	12,0%	12,3%	4,9%	2,1%	2,1%
MC 4: 1,70 m	30,0%	20,7%	20,6%	13,0%	12,1%
<b>MC 5: 250 cm</b>	<b>28,5%</b>	<b>31,4%</b>	<b>48,4%</b>	<b>69,3%</b>	<b>78,4%</b>
MC 6: 5 m	0,9%	18,7%	17,8%	12,3%	7,4%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,3%	0%	0%

Tabelle 8.29: Lösungshäufigkeiten zum Item IIc „Zimmer“  
mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Die Schwierigkeiten im Schätzen der Zimmerhöhe spiegeln sich auch bei Kindern der verschiedenen Naturwissenschaftskompetenzstufen wider (vgl. Tab. 8.30). Die Antworten MC 4 mit einer Höhe 1,60 m und MC 6 mit einer Höhe von 5 m werden auch hier bevorzugt genannt. Die Auswertungen zeigen vor allem, dass die Kinder alle der sechs Antwortalternativen ausschöpfen.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=42	I N=118	II N=186	III N=210	IV N=325	V N=92
MC 1: 25 cm	6,6%	1,9%	1%	2,3%	0%	0%
MC 2: 1,30 m	20,7%	10,7%	7,7%	4,4%	5,0%	0,8%
MC 3: 160 cm	15,7%	6,9%	5,1%	7,4%	2,7%	0%
MC 4: 1,70 m	18,1%	24,6%	24,0%	17,3%	11,5%	16,9%
<b>MC 5: 250 cm</b>	<b>33,2%</b>	<b>34,4%</b>	<b>46,8%</b>	<b>51,9%</b>	<b>65,6%</b>	<b>76,2%</b>
MC 6: 5 m	5,7%	21,5%	15,4%	16,1%	15,2%	6,1%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0,6%	0%	0%

Tabelle 8.30: Lösungshäufigkeiten zum Item IIc „Zimmer“  
mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Es existieren keine signifikanten Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe in Deutschland ( $N_{\text{Mädchen}}=466$ ;  $N_{\text{Jungen}}=508$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,165$ ;  $\varepsilon^2=,009$ ).

Zusammenfassend ist zu vermuten, dass Kinder im Alter von 10 Jahren noch keine hinreichend differenzierte Grundvorstellung zu Längenrepräsentanten im Alltag entwickelt haben (vgl. Kap. 4.3.3.2). Die Kinder neigen dazu, einerseits die Zimmerhöhe auf ihre Körpergröße zu beziehen (vgl. MC 4 mit 1,70 m) oder schlicht die größte angegebene Länge (vgl. MC 6 mit 5 m) zu wählen.

#### 8.4.2.4 Das Item IId „Körpertemperatur“

In der Aufgabe IId „Körpertemperatur“ sollen Schülerinnen und Schüler angeben, welche der in den vier Antwortvorschlägen vorgegebenen Temperaturen ihrer Körpertemperatur bei Gesundheit am nächsten kommt.

Das TIMSS-POP1-Item aus dem IGLU-E-Subtest Naturwissenschaften besteht aus einem einleitenden Satz zur Schilderung der Situation, einer expliziten Frage sowie 4 anschließenden Temperaturvorschlägen in der Temperatureinheit Celsius, die hier leicht abgewandelt wurden (vgl. Abb. 8.30).

MC 1:	<input type="checkbox"/>	29 °C
MC 2:	<input type="checkbox"/>	37 °C
MC 3:	<input type="checkbox"/>	100 °C
MC 4:	<input type="checkbox"/>	242 °C

Abbildung 8.30: Multiple-Choice-Antworten zur Aufgabe IId „Körpertemperatur“

Da das Item mit einer geringen Trennschärfe und einer nicht zufrieden stellenden Übereinstimmung der nach dem Rasch-Modell theoretisch erwarteten mit der beobachteten Itemfunktion zur Skalierung der Leistungstests aus dem Aufgabenpool herausgenommen wurde (vgl. Kap. 7.2.5), kann dem Item weder eine Itemschwierigkeit noch eine Kompetenzstufenzugehörigkeit zugeordnet werden. Das Item gibt jedoch Aufschluss zum Temperaturkonzept von Kindern und wird im folgenden analysiert.

Die Aufgabe erfordert zunächst Faktenwissen bezüglich der Maßeinheit von Temperaturen. Die Grundschul Kinder müssen mit dem Symbol °C die Temperatureinheit Grad Celsius verbinden und wissen, dass einem hohen Celsiuswert auch eine hohe („warme“ bzw. „heiße“) Temperatur entspricht. Zudem erfordert die Aufgabe Fakten-

wissen über die Körpertemperatur eines Menschen im Gesundheitszustand. Wiederum sind den vorgegebenen Temperaturen entsprechende Repräsentanten zuzuordnen: Wahrnehmen, Erinnern und „in Beziehung setzen“ von Temperaturen spielen hierbei eine wichtige Rolle. Zur Beantwortung der Frage sind *alle* Multiple-Choice-Antworten zu betrachten.

Die Auswertungen zeigen sehr erfreuliche Ergebnisse der Kinder zum Temperaturkonzept (vgl. Abb. 8.31). Die Antworten der Viertklässler konzentrieren sich vornehmlich auf die Multiple-Choice-Antworten MC 2 und MC 1: Fast 62% der Viertklässler wählten die korrekte Antwort MC 2 mit 37 °C, 36% der Kinder die Antwort MC 1 mit einer Temperatur von 29 °C. Die Antworten MC 3 (100 °C) und MC 4 (242 °C) werden von sehr wenigen Kindern gewählt und sind zu vernachlässigen.

Auf welche Fehlvorstellung lässt die Antwort mit der Temperatur 29 °C schließen? Vermutlich bringen Kinder die Zahl 37 mit einem Unwohlsein und einer leicht erhöhten Temperatur von beispielsweise 37,5 °C in Verbindung, so dass sie den Antwortvorschlag 1 mit 29 °C wählten.

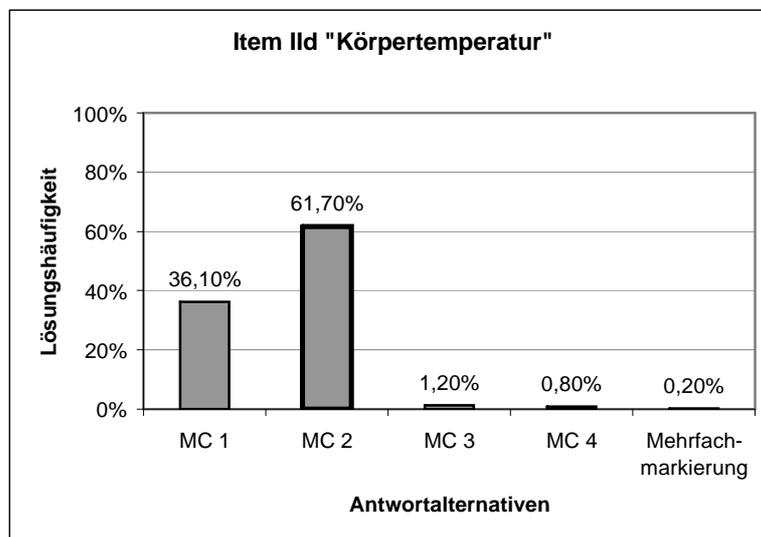


Abbildung 8.31: Lösungsergebnisse zum Item IId „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 ( $N_{\text{gesamt}}=1010$ )

Die Wahl von MC 1 mit 29 °C ist auf allen Naturwissenschaftskompetenzstufen augenfällig vorhanden (vgl. Tab. 8.31). Die Befunde zeigen ferner, dass im Fach Naturwissenschaften leistungsschwache Kinder der untersten Kompetenzstufe das Item

mit fast 63% recht erfolgreich lösen. Im Vergleich dazu besitzen Viertklässler der Kompetenzstufen I und II deutliche Leistungseinbußen. Erst Kinder ab der Kompetenzstufe III lösen das Item zu mindestens 66% korrekt. Die Auswertungen machen deutlich, dass diese Aufgabe auch den leistungsstärksten Kindern Schwierigkeiten bereitet.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=43	I N=132	II N=213	III N=196	IV N=353	V N=72
MC 1: 29 °C	24,4%	43,7%	50,5%	33,5%	30,2%	22,7%
<b>MC 2: 37 °C</b>	<b>62,6%</b>	<b>53,8%</b>	<b>45,2%</b>	<b>66,3%</b>	<b>68,6%</b>	<b>77,3%</b>
MC 3: 100 °C	4,1%	2,1%	2,1%	0,2%	0,8%	0%
MC 4: 242 °C	8,8%	0,4%	1,5%	0%	0,2%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,7%	0%	0,1%	0%

Tabelle 8.31: Lösungshäufigkeiten zum Item IId „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Die Leistungen von Kindern der verschiedenen Mathematikkompetenzstufen (vgl. Tab. 8.32) lassen ebenfalls erkennen, dass die mit MC 1 verbundene Fehlvorstellung sowohl bei leistungsschwachen als auch bei leistungsstarken Kindern besteht. Erst die Hälfte der Kinder der Mathematikkompetenzstufe II bearbeiten die Aufgabe erfolgreich.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=24	II N=183	III N=393	IV N=342	V N=68
MC 1: 29 °C	51,7%	45,1%	40,5%	28,7%	18,3%
<b>MC 2: 37 °C</b>	<b>40,1%</b>	<b>50,5%</b>	<b>56,9%</b>	<b>70,6%</b>	<b>81,7%</b>
MC 3: 100 °C	0,3%	2,6%	1,5%	0,4%	0%
MC 4: 242 °C	7,9%	1,5%	0,7%	0,3%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	0,3%	0,4%	0%	0%

Tabelle 8.32: Lösungshäufigkeiten zum Item IId „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Bezüglich der Antworten der Mädchen und Jungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe existieren keine nennenswerten Leistungsunterschiede ( $N_{\text{Mädchen}}=525$ ;  $N_{\text{Jungen}}=485$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,360$ ;  $\varepsilon^2=,004$ ).

Aus Tabelle 8.33 ist ersichtlich, dass auch die Kinder anderer Nationen aus der TIMSS-POP1-Studie bevorzugt den Distraktor MC 1 wählen.

Die Befunde zeigen, dass Kinder aus den USA – einem Land, in dem alltäglich eher mit der Temperatureinheit Fahrenheit gemessen wird – die Aufgabe zu 63% korrekt lösten. Schülerinnen und Schüler aus England und Irland waren dagegen bei dem Item weniger erfolgreich: In England lösten nur knapp 31%, in Irland 27% der Vierklässler die Aufgabe korrekt.

Staat	<b>MC 1:</b> 29 °C	<b>MC 2:</b> 37 °C	<b>MC 3:</b> 100 °C	<b>MC 4:</b> 242 °C	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
Japan	23,6%	<b>74,4%</b>	0,9%	1,3%	0%	<b>543</b>
Niederlande <sup>1</sup>	26,3%	<b>70,6%</b>	1,9%	1,2%	0%	<b>323</b>
USA	27,3%	<b>62,9%</b>	5,5%	4,3%	0%	<b>677</b>
Deutschland <sup>2</sup>	36,1%	<b>61,7%</b>	1,2%	0,8%	0,2%	<b>1010</b>
Tschechien	37,3%	<b>60,1%</b>	1,0%	0,7%	1,0%	<b>416</b>
Österreich <sup>1</sup>	37,5%	<b>59,3%</b>	1,6%	1,9%	0%	<b>317</b>
Island	34,2%	<b>58,6%</b>	4,5%	2,3%	0%	<b>222</b>
Korea	36,0%	<b>58,1%</b>	5,0%	1,1%	0%	<b>358</b>
Norwegen	39,1%	<b>57,3%</b>	2,8%	0,4%	0%	<b>253</b>
Griechenland	45,7%	<b>46,6%</b>	2,2%	5,0%	0,6%	<b>363</b>
Australien <sup>1</sup>	44,3%	<b>43,6%</b>	7,4%	4,7%	0%	<b>702</b>
Ungarn <sup>1</sup>	55,0%	<b>43,3%</b>	1,1%	0%	0%	<b>371</b>
Portugal	46,8%	<b>42,1%</b>	4,4%	7,0%	0%	<b>342</b>
Kanada	36,3%	<b>37,8%</b>	20,3%	5,4%	0,1%	<b>988</b>
Neuseeland	40,8%	<b>33,5%</b>	17,9%	7,8%	0%	<b>297</b>
Schottland	36,1%	<b>33,2%</b>	21,5%	8,6%	0,3%	<b>382</b>
England	40,1%	<b>31,1%</b>	21,9%	6,9%	0%	<b>379</b>
Irland	31,4%	<b>27,4%</b>	31,9%	9,0%	0,3%	<b>354</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.33: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ild „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2

### 8.4.2.5 Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“

Die Ausführungen zeigen, dass im Vergleich zu Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“ Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe Aufgaben zum Schätzen mit einer niedrigeren Lösungshäufigkeit erfolgreich bearbeiten. Diese Ergebnisse untermauern, dass im Vergleich zum Ordnen für das Schätzen von Größen anspruchsvollere prozessbezogene Kompetenzen notwendig sind.

Die einzelnen Analysen ergeben, dass ein erfolgreiches Schätzen in hohem Maße von dem zu schätzenden Objekt abhängig ist. Die Abbildung 8.32 verdeutlicht diesbezüglich, dass das Schätzen der passenden Einheit zur Bestimmung des Gewichts eines Eies (Item IIa) mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 79% den Kindern deutlich leichter fällt, als das Schätzen der Zimmerhöhe (IIc) mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 55% – und dies, obwohl die Größe Länge explizit im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert wird. Bezüglich der Leistungen von Mädchen und Jungen konnten keine signifikanten Unterschiede festgestellt werden; die Unterschiede der Geschlechter sind zufallsbedingt (vgl. Abb. 8.33).

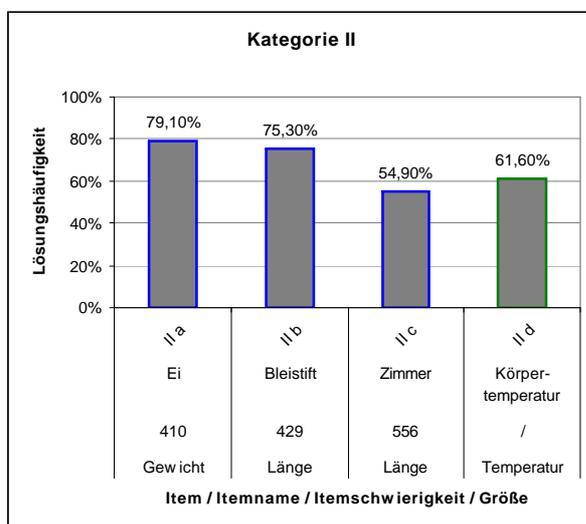


Abbildung 8.32:

Leistungen der Viertklässler  
zu Aufgaben der  
Kategorie II „Schätzen von Größen“

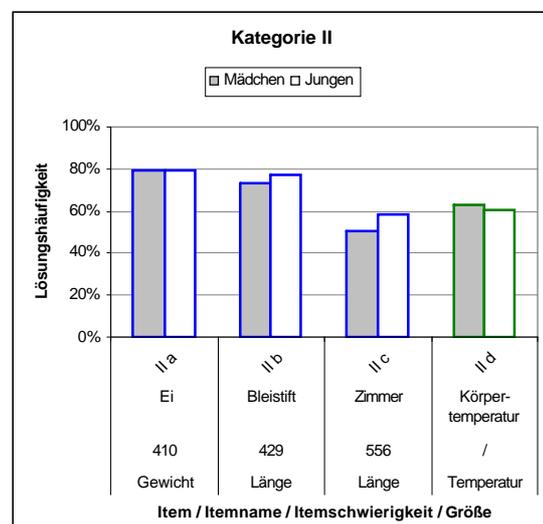


Abbildung 8.33:

Leistungen von Mädchen und Jungen  
zu Aufgaben der  
Kategorie I „Schätzen von Größen“

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Detaillierte Analysen zu den Leistungen der Kinder aus den jeweiligen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen ergeben (vgl. Abb. 8.34 und Abb. 8.35), dass bei diesem Aufgabentyp sowohl Kinder mit geringen als auch mit hohen Leistungsfähigkeiten Einbußen in ihren Fähigkeiten verzeichnen müssen, was zweifelsohne mit der Schwierigkeit der Aufgaben zusammenhängt.

Die Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“ trennen mit Ausnahme der Aufgabe IIc „Zimmer“ die Leistungen der Kinder aus den einzelnen Mathematikkompetenzstufen sehr gut voneinander. Durch die Aufgabe IIc „Zimmer“ werden die Leistungen der Kinder aus den beiden unteren Kompetenzstufen nicht getrennt.

Die grafischen Auswertungen der Leistungen von Viertklässlern aus den verschiedenen Naturwissenschaftskompetenzstufen lassen erkennen, dass Leistungen von Kindern einzelner Naturwissenschaftskompetenzstufen nahezu übereinstimmen. So trennen die Aufgaben der Kategorie „Schätzen von Größen“ im wesentlichen leistungsschwache und leistungsstarke Schülerinnen und Schüler voneinander.

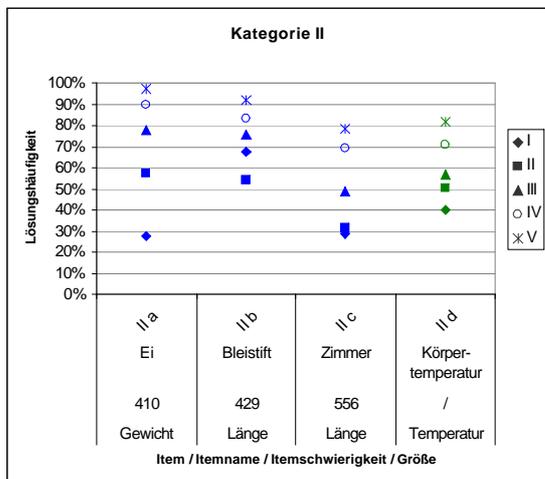


Abbildung 8.34:

Leistungen der Viertklässler  
aus den Mathematikkompetenzstufen  
zu Items der Kategorie II

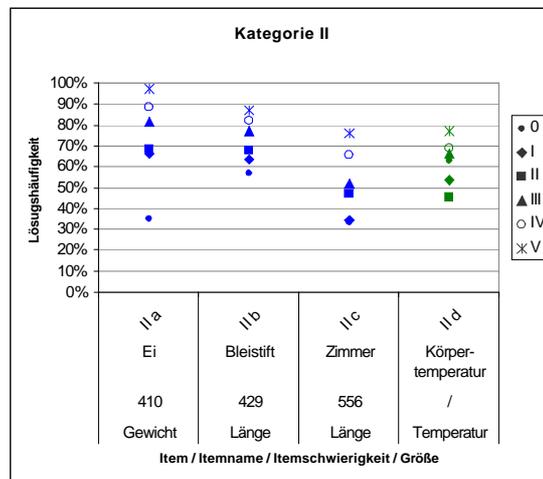


Abbildung 8.35:

Leistungen der Viertklässler  
aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen  
zu Items der Kategorie II

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Unerlaubte Mehrfachmarkierungen treten auch bei Aufgaben der zweiten Kategorie „Schätzen von Größen“ sehr selten auf.

### 8.4.3 Analysen zu Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“

Die Aufgaben der Kategorie III beschäftigen sich mit dem Zerlegen von Flächen, Volumina und Gewichten, dem sogenannten Zerlegen von Größen (vgl. Kap. 8.2.4.1).

		Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“			
		IIIa Kuchen	IIIb Würfel	IIIc Gewichte	
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	3S	-	1S; 2S
		Grafik	-	Würfel	3 Versuchsaufbauten
		Tabelle	-	-	-
		Schlüsselwörter	wie viel	aus wie vielen	wie viele
	MC-Antworten	Anzahl der MC	4	4	5
		Zahl	X	X	X
		Maßzahl, Einheit	-	-	-
		Math. Ausdruck	-	-	-
		Wort	-	-	-
		Wortreihe	-	-	-
Grafik		-	-	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		-	-	-	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	MAT	NAT
	Größentyp		Fläche	Volumen	Gewicht
	Kontext		außermath	innermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KIII 418	KIV 538	-
	Art des Wissens	Fakten-Wissen	X	X	X
		Prozedurales Wissen	-	-	-
Konzeptuelles Wissen		X	X	X	

Tabelle 8.34: Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“

Die Tabelle 8.35 gibt Auskunft über die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die das jeweilige Item aus der dritten Kategorie bearbeitet haben. Die beiden Aufgaben IIIa „Kuchen“ und IIIb „Würfel“ stammen aus dem IGLU-E-Subtest Mathematik; das Item IIIc „Gewichte“ stammt aus dem IGLU-E-Subtest Naturwissenschaften.

Item	Itemname	N <sub>gesamt</sub>	N <sub>Mädchen</sub>	N <sub>Jungen</sub>	N <sub>keine Angaben</sub>
IIIa	Kuchen	968	462	505	1
IIIb	Würfel	945	448	496	1
IIIc	Gewichte	923	433	488	2

Tabelle 8.35: Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“

Im Folgenden werden die Befunde zu den drei Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ detailliert dargestellt.

#### 8.4.3.1 Das Item IIIa „Kuchen“

Die im IGLU-E-Subtest Mathematik gestellte Aufgabe „Kuchen“ mit außermathematischem Kontext hat eine Itemschwierigkeit von 418 und repräsentiert damit die Mathematikkompetenzstufe III „Verfügbarkeit von Grundrechenarten und Arbeit mit einfachen Modellen“.

Das bereits in der TIMS-Studie eingesetzte Item besteht aus einem Text von insgesamt drei Sätzen zur Darstellung des Sachverhalts, einer direkt anschließenden Frage und vier Multiple-Choice-Antworten.

In kurzen, kindgerecht formulierten Sätzen schildert die Aufgabe die reale Situation eines gemeinsamen Kuchenessens zweier Schwestern Julia und Margit sowie ihrer Mutter. Aus dem Informationstext erfahren die Schülerinnen und Schüler, dass Julia die Hälfte des Kuchens isst. Margit und die Mutter genießen jeweils ein Viertel des Gebäcks. Im Anschluss an diesen Bericht wird an den Aufgabenbearbeiter direkt die Frage gerichtet, wie viel von dem Kuchen übrig sei. Die zur Auswahl stehenden vier Antwortvorgaben dienen den Schülerinnen und Schülern als indirekte Hilfe zur Überprüfung ihrer Lösung (vgl. Abb. 8.36).

MC 1:	<input type="checkbox"/>	drei Viertel
MC 2:	<input type="checkbox"/>	die Hälfte
MC 3:	<input type="checkbox"/>	ein Viertel
MC 4:	<input type="checkbox"/>	nichts

Abbildung 8.36: Multiple-Choice-Antworten des Items IIIa „Kuchen“

Die Aufgabe erfordert, dass Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe über eine Grundvorstellung bezüglich der Größenangaben „die Hälfte“ und „ein Viertel“ verfügen. Die Kinder müssen wissen, dass die Summe von zwei Vierteln eine Hälfte und ferner die Summe von zwei Hälften ein Ganzes ergibt. Diese Überlegungen zeigen, dass die Aufgabenstellung aus mehreren Teilschritten besteht

und insbesondere eine mathematische Modellbildung erfordert: Nach einem Verständnis der Sachsituation ist diese in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, also zu mathematisieren.

Die Befunde bezeugen, dass Viertklässler über das Konzept von einfachen Alltagsbrüchen verfügen: Die IGLU-E-Kinder bearbeiten die Kuchenaufgabe mit nahezu 79% erfolgreich (vgl. Abb. 8.37).

Die dritte Multiple-Choice-Antwort MC 3 mit der Lösung „ein Viertel“, die die Viertklässler zu rund 12% nannten, legt die Vermutung nahe, dass die Kinder die erste Information „Julia isst die Hälfte des Kuchens.“ nicht aufmerksam gelesen und gespeichert haben. Aufgrund der in der Aufgabe direkt anschließenden Aussage „Margit isst ein Viertel des Kuchens.“ sowie „Ihre Mutter isst ein Viertel des Kuchens.“ könnte sich bei den Kindern bei der Informationsaufnahme die Botschaft eingeschlichen haben, dass auch Julia ein Viertel des Kuchens isst. In diesem Fall wäre tatsächlich ein Viertelstück des Kuchens übrig geblieben, was das für diese Aufgabe falsche Antwortverhalten der Kinder erklärt.

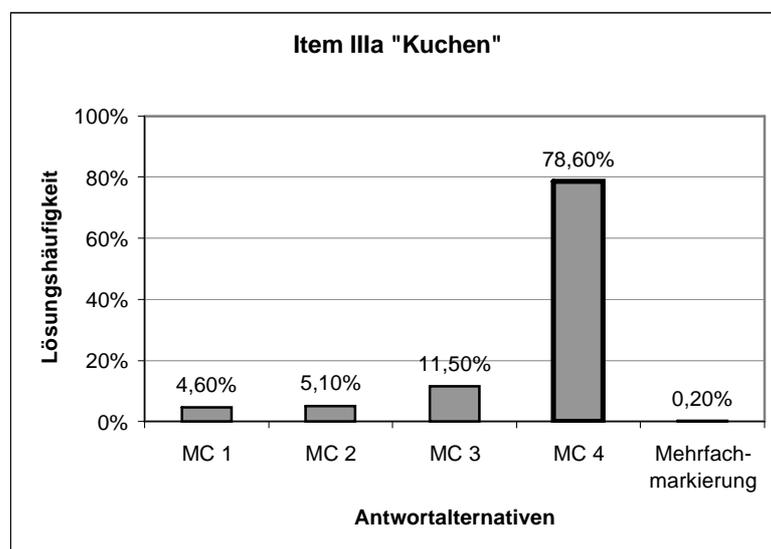


Abbildung 8.37: Lösungsergebnisse zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 ( $N_{\text{gesamt}}=968$ )

Detaillierte Auswertungen zu den Ergebnissen der Viertklässler zeigen, dass selbst Kinder aus den unteren Leistungsstufen der Mathematik und der Naturwissenschaft-

ten die Aufgabe zur Thematik „Brüche des alltäglichen Lebens“ zu mindestens 60% korrekt meistern (vgl. Tab. 8.36 und Tab. 8.37).

Auf allen Kompetenzstufen der Mathematik und der Naturwissenschaften ist erkennbar, dass unter den drei inkorrekten Antworten MC 1, MC 2 und MC 3 der dritte Distraktor MC 3 mit der Antwort „ein Viertel“ am häufigsten gewählt wurde. Unerlaubte Mehrfachmarkierungen sind nur bei den leistungsschwächsten Kindern zu beobachten.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=11	II N=147	III N=417	IV N=333	V N=60
MC 1: drei Viertel	19,0%	9,5%	4,5%	2,5%	1,9%
MC 2: die Hälfte	10,3%	16,6%	4,8%	1,1%	0%
MC 3: ein Viertel	7,0%	18,6%	14,2%	6,4%	4,5%
<b>MC 4: nichts</b>	<b>58,6%</b>	<b>55,2%</b>	<b>76,5%</b>	<b>89,6%</b>	<b>93,5%</b>
Mehrfachmarkierung	5,1%	0%	0%	0,4%	0%

Tabelle 8.36: Lösungshäufigkeiten zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=25	I N=108	II N=225	III N=212	IV N=322	V N=76
MC 1: drei Viertel	10,0%	10,2%	5,6%	5,2%	2,2%	0%
MC 2: die Hälfte	5,0%	14,2%	9,1%	1,4%	2,8%	0%
MC 3: ein Viertel	16,7%	17,8%	13,0%	14,8%	7,0%	6,8%
<b>MC 4: nichts</b>	<b>66,0%</b>	<b>56,6%</b>	<b>72,3%</b>	<b>78,6%</b>	<b>88%</b>	<b>93,2%</b>
Mehrfachmarkierung	2,3%	1,2%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.37: Lösungshäufigkeiten zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Das Item IIIa „Kuchen“ lösen Mädchen und Jungen der IGLU-E-Studie gleichermaßen erfolgreich. Geschlechtsspezifische Unterschiede sind zufallsbedingt ( $N_{\text{Mädchen}}=462$ ;  $N_{\text{Jungen}}=505$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,205$ ;  $\varepsilon^2=,006$ ).

Die nachträgliche Einordnung der IGLU-E-Befunde dieser Sachrechenaufgabe in die Leistungsergebnisse der TIMSS-Teilnehmer aus dem Jahre 1995 macht deutlich,

dass im Vergleich zu den anderen Staaten Schülerinnen und Schüler in der Bundesrepublik Deutschland beim Umgang mit einfachen Alltagsbrüchen sehr erfolgreich sind (vgl. Tab. 8.38).

Gleichzeitig ergeben die Auswertungen über alle Teilnehmerstaaten der TIMSS-POP1-Studie, dass die Lösungshäufigkeiten der korrekten Antwort MC 4 mit „nichts“ von 39% bis 83% erheblich streuen. Viertklässler aus Japan – einem der leistungsstärksten Länder in Mathematik in der TIMSS-POP1-Studie (M=597, SD=81) (vgl. Walther et al. 2003, S.209) – haben bei einer Lösungshäufigkeit von knapp 49% mit einfachen Alltagsbrüchen offenbar deutliche Schwierigkeiten.

Staat	<b>MC 1:</b> drei Viertel	<b>MC 2:</b> die Hälfte	<b>MC 3:</b> ein Viertel	<b>MC 4:</b> nichts	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
<b>Irland</b>	4,3%	6,9%	6,1%	<b>82,5%</b>	0,1%	<b>1080</b>
<b>Österreich<sup>1</sup></b>	4,5%	7,0%	6,4%	<b>81,6%</b>	0,3%	<b>969</b>
<b>Tschechien</b>	5,6%	8,0%	7,5%	<b>78,8%</b>	0,2%	<b>1205</b>
<b>Deutschland<sup>2</sup></b>	4,6%	5,1%	11,5%	<b>78,6%</b>	0,2%	<b>968</b>
<b>England</b>	7,0%	11,8%	5,9%	<b>75,3%</b>	0%	<b>1130</b>
<b>Schottland</b>	6,1%	11,0%	8,9%	<b>74,0%</b>	0%	<b>1174</b>
<b>Australien<sup>1</sup></b>	9,6%	10,0%	9,1%	<b>71,3%</b>	0%	<b>2124</b>
<b>Neuseeland</b>	10,8%	11,3%	7,8%	<b>70,1%</b>	0%	<b>949</b>
<b>Ungarn<sup>1</sup></b>	9,7%	13,0%	8,7%	<b>68,6%</b>	0%	<b>1075</b>
<b>Portugal</b>	11,9%	14,5%	6,2%	<b>67,4%</b>	0%	<b>957</b>
<b>Niederlande<sup>1</sup></b>	10,7%	16,2%	8,6%	<b>64,3%</b>	0,4%	<b>982</b>
<b>USA</b>	13,3%	16,6%	9,7%	<b>60,2%</b>	0,1%	<b>2020</b>
<b>Island</b>	10,6%	23,8%	8,2%	<b>57,4%</b>	0%	<b>625</b>
<b>Kanada</b>	16,5%	14,6%	11,7%	<b>57,1%</b>	0%	<b>3040</b>
<b>Norwegen</b>	11,9%	23,8%	8,4%	<b>55,8%</b>	0%	<b>797</b>
<b>Griechenland</b>	19,6%	14,9%	11,0%	<b>54,3%</b>	0,2%	<b>1028</b>
<b>Japan</b>	12,2%	19,7%	19,2%	<b>48,7%</b>	0,2%	<b>1643</b>
<b>Korea</b>	18,3%	23,4%	19,8%	<b>38,7%</b>	0%	<b>1057</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

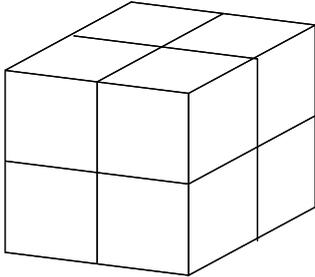
Tabelle 8.38: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995  
zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4

### 8.4.3.2 Das Item IIIb „Würfel“

Das durch einen innermathematischen Kontext gekennzeichnete Item „Würfel“ stammt aus dem IGLU-E-Subtest Mathematik, besitzt eine Itemschwierigkeit von 538 und zählt zu der vierten Mathematikkompetenzstufe „Beherrschung der Grundrechenarten, Bewältigung von Aufgaben der räumlichen Geometrie und begriffliche Modellentwicklung“.

Schülerinnen und Schüler sollen die Anzahl der kleinen Klötze (Einheitswürfel) bestimmen, aus denen der abgebildete Würfel zusammengesetzt ist. Da das Item nicht zur Veröffentlichung zur Verfügung steht, stellen die folgende Würfelabbildung und die vier Antwortalternativen ein Analogon zum ursprünglichen Item dar (vgl. Abb. 8.38).

Aus wie vielen kleinen Klötzen ist dieser Würfel gebaut?



MC 1:  4  
MC 2:  7  
MC 3:  8  
MC 4:  12

Abbildung 8.38: Aufgabe IIIb „Würfel“ mit vier Multiple-Choice-Antworten

Die Aufgabe verkörpert die Grundidee der Bestimmung des Rauminhaltes eines „großen“ Würfels durch die enthaltene Anzahl von Einheitswürfeln. Zur Bearbeitung der Aufgabe mit der Bestimmung der „Bausteineanzahl“ ist räumliches Vorstellungs-

vermögen notwendig. Mit dem Item kann auch überprüft werden, ob Kinder bei der Anzahlbestimmung der Einheitswürfel auch die nicht sichtbaren Würfelemente berücksichtigen. Die Antwort MC 3 mit einer Anzahl von 8 Einheitswürfeln entspricht der korrekten Lösung.

Die einzelnen Distraktoren MC 1, MC 2 und MC 4 lassen auf folgende Rechenwege schließen: Zur Antwort MC 1 mit einer Anzahl von 4 kleinen Würfeln gelangen die Schülerinnen und Schüler, indem sie vermutlich die Anzahl der Würfel einer der Flächen bestimmen. Die zweite Antwortalternative MC 2 mit einer Anzahl von 7 Würfeln erhält man durch das einfache Auszählen der sichtbaren Einheitswürfel. Zur Antwort MC 4 mit 12 kleinen Würfeln gelangt man ebenfalls durch das Auszählen der sichtbaren Einheitswürfel. Jedoch werden durch das Auszählen der Würfelplatten „vorne, rechts und oben“ Würfel mehrfach gezählt (1 Würfel wird zweifach, 2 Würfel werden dreifach gezählt).

Die Aufgabe wird von den IGLU-E-Viertklässlern mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 58% erfolgreich bearbeitet (vgl. Abb. 8.39). Während sich einige Viertklässler für die Distraktoren MC 1 (4 Würfel) und MC 2 (7 Würfel) mit einer geringen Häufigkeit von etwa 8% entscheiden, wird die Antwortalternative MC 4 mit einer Anzahl von 12 Würfeln von 26% der Kinder ausgewählt.

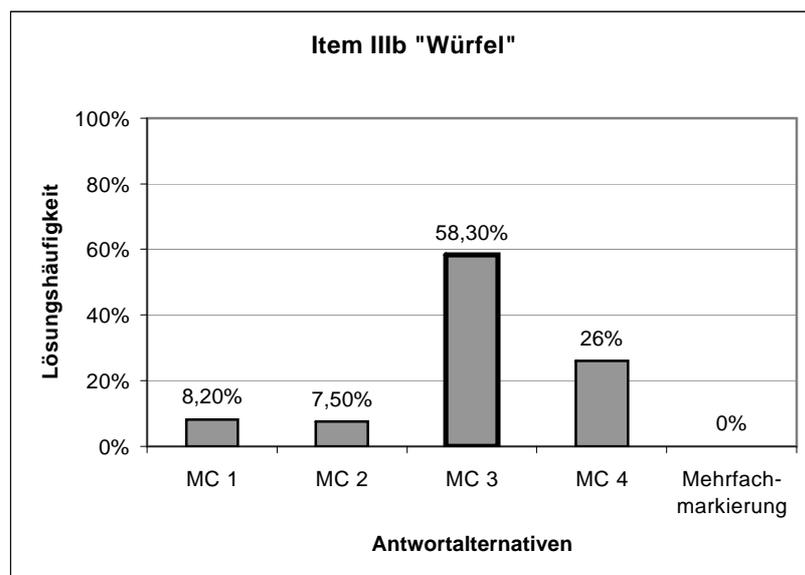


Abbildung 8.39: Lösungsergebnisse zum Item IIIb „Würfel“ mit der korrekten Antwort MC 3 ( $N_{\text{gesamt}}=945$ )

Der Bevorzugung des Distraktors MC 4 mit 12 kleinen Würfeln gegenüber den anderen Distraktoren zieht sich quer durch die Kompetenzstufen (vgl. Tab. 8.39 und Tab. 8.40). Die Auswertungen zeigen ferner, dass die im Fach Mathematik leistungsschwächsten Kinder die Würfelaufgabe zu nur 26% korrekt bearbeiten, während bereits 40% der im Fach Naturwissenschaften leistungsschwächsten Viertklässler das Item erfolgreich lösen.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=17	II N=155	III N=384	IV N=329	V N=60
MC 1: 4	21,0%	19,6%	7,3%	4,8%	0%
MC 2: 7	9,6%	10,0%	7,1%	7,5%	2,7%
<b>MC 3: 8</b>	<b>25,9%</b>	<b>42,5%</b>	<b>54,2%</b>	<b>67,6%</b>	<b>83,2%</b>
MC 4: 12	43,5%	27,9%	31,4%	20,2%	14,1%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.39: Lösungshäufigkeiten zum Item IIIb „Würfel“  
mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=34	I N=123	II N=189	III N=209	IV N=302	V N=88
MC 1: 4	17,4%	16,7%	10,1%	7,7%	4,8%	1,6%
MC 2: 7	16,0%	5,9%	7,0%	7,1%	8,7%	4,1%
<b>MC 3: 8</b>	<b>40,3%</b>	<b>40,7%</b>	<b>53,9%</b>	<b>63,5%</b>	<b>58,5%</b>	<b>85,8%</b>
MC 4: 12	26,3%	36,6%	29,0%	21,7%	28,0%	8,5%
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.40: Lösungshäufigkeiten zum Item IIIb „Würfel“  
mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Diese Befunde deuten darauf hin, dass die Kinder die Anzahl der Einheitswürfel durch ein „naives Auszählen“ bestimmen und nicht den Strukturaufbau des großen Würfels aus Einheitswürfeln beachten.

Die geringfügigen Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen sind zufallsbedingt und nicht signifikant ( $N_{\text{Mädchen}}=448$ ;  $N_{\text{Jungen}}=496$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,174$ ;  $\varepsilon^2=,005$ ).

### 8.4.3.3 Das Item IIIc „Gewichte“

Das Item IIIc „Gewichte“ stammt aus der CROSSTEL-Studie und wurde in der IGLU-E-Untersuchung im Subtest Naturwissenschaften eingesetzt. Da das Item eine geringe Trennschärfe und eine nicht zufrieden stellende Itemcharakteristik aufweist, wurde es nicht bei der Skalierung berücksichtigt (vgl. Kap. 7.2.5). Die Aufgabe ist bedingt durch ihren Aufbau und ihre Anforderungen recht komplex. Da das Item nicht freigegeben ist, sind Aufgabenstellung und Multiple-Choice-Antworten wiederum leicht verändert (vgl. Abb. 8.40 und Abb. 8.41).

In einem einleitenden Text und drei Abbildungen wird erklärt, dass zum Balancieren von einer Dose Fisch (F) fünf Gewichte benötigt werden (vgl. Abb. 1 der Aufgabe). Zwei Dosen Fisch (F) können einen Beutel Reis (R) im Gleichgewicht halten (vgl. Abb. 2 der Aufgabe). Es ist nun zu klären, wie viele Gewichte benötigt werden, um einen Beutel Reis in die Balance zu bringen (vgl. Abb. 3 der Aufgabe).

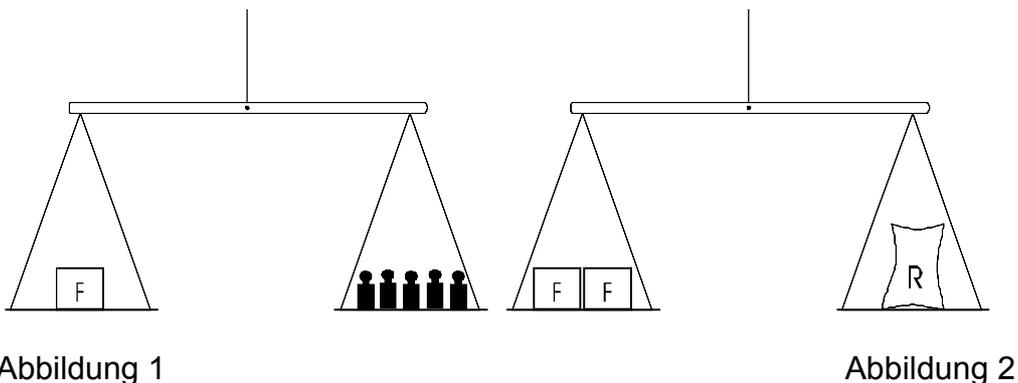


Abbildung 8.40: Grafik des Items IIIc „Gewichte“

Die Aufgabe enthält die folgenden 5 Antwortalternativen:

MC 1:	<input type="checkbox"/>	1 Gewicht
MC 2:	<input type="checkbox"/>	2 Gewichte
MC 3:	<input type="checkbox"/>	5 Gewichte
MC 4:	<input type="checkbox"/>	4 Gewichte
MC 5:	<input type="checkbox"/>	10 Gewichte

Abbildung 8.41: Multiple-Choice-Antworten des Items IIIc „Gewichte“

Dieses realitätsbezogene, aber kaum authentische Problem erfordert in erster Linie, dass Schülerinnen und Schüler über Kenntnisse zur Funktionsweise einer Balkenwaage verfügen. Das Gewicht eines beliebigen Objektes kann mit Hilfe einer derartigen Waage durch verschieden schwere Gegenstände anschaulich bestimmt werden. Hierbei gilt folgende Gesetzmäßigkeit: Je leichter die Gewichtsstücke sind, mit denen das Gewicht des Objektes ausgemessen werden soll, umso mehr Gewichtsstücke sind erforderlich. Umgekehrt wird bei schweren Gewichtsstücken eine kleinere Anzahl benötigt, um das Gewicht des Objektes zu ermitteln, also die Waagschalen auszutariieren.

Es liegt die Vermutung nahe, dass den Viertklässlern die verschiedenen Gewichtsbeziehungen bei der Aufgabenlösung Schwierigkeiten bereiten. Die Auswertungen zeigen (vgl. Abb. 8.42), dass die Aufgabe von knapp der Hälfte der Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe erfolgreich bearbeitet wird. Fast 28% der Viertklässler wählen den Distraktor MC 2 mit der Antwort „2 Gewichte“, gefolgt von der Antwort MC 3 „5 Gewichte“ mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 12%. Beide Antworten MC 2 und MC 3 geben die im Text genannten Informationen wieder und erbringen keinen Fortschritt zur Lösung der Aufgabe: Mit der Antwort MC 2 mit „2 Gewichte“ wird wiederholt, dass zwei Dosen Fisch einen Beutel Reis balancieren (vgl. Abb. 2 des Items). Die Antwort MC 3 „5 Gewichte“ deutet auf ein Ablesen der Anzahl der Gewichte aus der Abbildung 1 hin, die eine Dose Fisch im Gleichgewicht halten. Für die Beantwortung der Frage wird allerdings die wesentliche Information vernachlässigt, dass für das Balancieren eines Reisbeutels nicht eine, sondern 2 Dosen Fisch gebraucht werden. Die beiden anderen Distraktoren MC 1 „1 Gewicht“ und

MC 4 „4 Gewichte“ werden mit höchstens 6% selten gewählt. Auch diese Antwortalternativen deuten an, dass „irgendwelche“ Angaben genannt werden, ohne die in der Aufgabe genannten Gewichtsverhältnisse zwischen einer Dose Fisch, Gewichtsstücken und einem Beutel Reis zu beachten und in die Aufgabenlösung einzubeziehen. Eine unerlaubte Mehrfachmarkierung tritt bei dieser Aufgabe nicht auf.

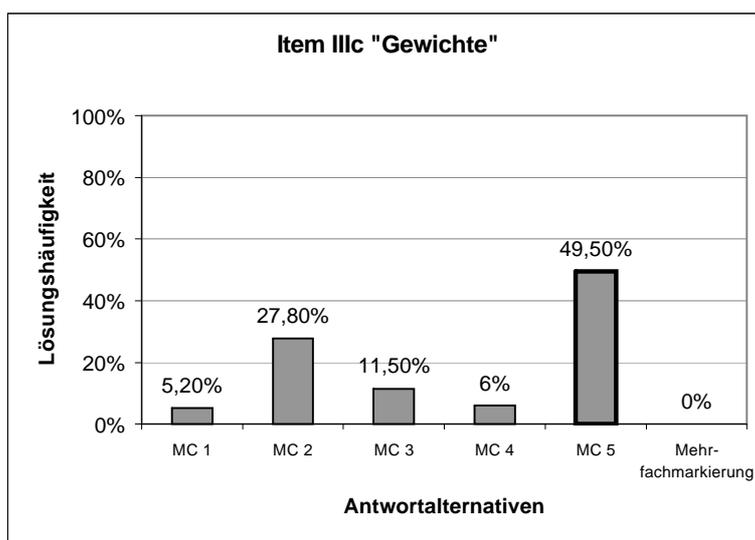


Abbildung 8.42: Lösungsergebnisse zum Item IIIc „Gewichte“ mit der korrekten Antwort MC 5 ( $N_{\text{gesamt}}=923$ )

Diese Befunde aus IGLU-E lassen sich bereits in der CROSSTEL-Studie feststellen (vgl. Abb. 8.43). Auch CROSSTEL-Viertklässler aus Schleswig-Holstein (SH), Mecklenburg-Vorpommern (MV) und USA wählten zu einem relativ hohen Prozentsatz die Distraktoren MC 2 und MC 3. Die Wahl der anderen beiden Distraktoren MC 1 und MC 4 sind zu vernachlässigen.

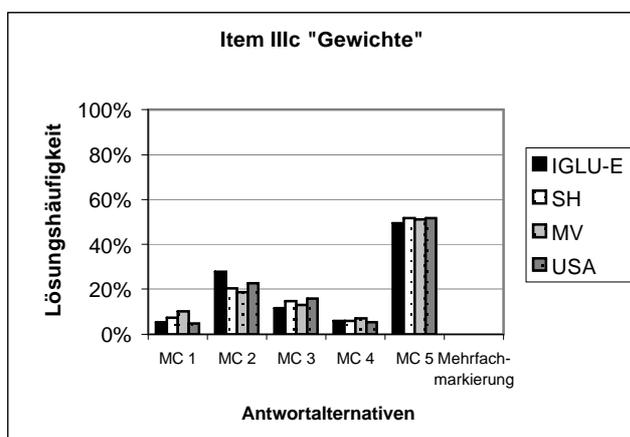


Abbildung 8.43: Gegenüberstellung der Lösungsergebnisse zum Item IIIc „Gewichte“ mit der korrekten Antwort MC 5 aus den Studien IGLU-E und CROSSTEL

$N_{\text{IGLU-E}}=923$ ;  
 $N_{\text{CROSSTEL-SH}}=151$ ;  $N_{\text{CROSSTEL-MV}}=145$ ;  
 $N_{\text{CROSSTEL-USA}}=190$

Differenzierte Auswertungen für die Viertklässler zeigen, dass das Item besonders für leistungsschwache Kinder in den Fächern Mathematik und Naturwissenschaften sehr anspruchsvoll und schwer lösbar ist (vgl. Tab. 8.41 und Tab. 8.42).

Kinder der beiden unteren Kompetenzstufen Mathematik und Naturwissenschaften lösen die Aufgabe zu höchstens 18% korrekt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=15	II N=144	III N=374	IV N=330	V N=60
MC 1: 1 Gewicht	0,4%	12,0%	5,9%	2,5%	0%
MC 2: 2 Gewichte	35,6%	38,0%	35,3%	17,9%	8,6%
MC 3: 5 Gewichte	55,5%	25,7%	12,5%	3,8%	1,9%
MC 4: 4 Gewichte	0%	7,1%	7,0%	5,1%	4,4%
<b>MC 5: 10 Gewichte</b>	<b>8,4%</b>	<b>17,2%</b>	<b>39,2%</b>	<b>70,8%</b>	<b>85,1%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,1%	0%	0%

Tabelle 8.41: Lösungshäufigkeiten zum Item IIIc „Gewichte“  
mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=29	I N=116	II N=180	III N=211	IV N=298	V N=89
MC 1: 1 Gewicht	3,7%	5,3%	8,3%	6,6%	3,6%	1,3%
MC 2: 2 Gewichte	32,6%	40,5%	42,8%	29,8%	16,5%	12,3%
MC 3: 5 Gewichte	43,9%	26,6%	15,8%	9,5%	4,6%	0%
MC 4: 4 Gewichte	10,8%	9,7%	6,6%	5,2%	5,8%	1,2%
<b>MC 5: 10 Gewichte</b>	<b>9,0%</b>	<b>17,8%</b>	<b>26,2%</b>	<b>48,9%</b>	<b>69,5%</b>	<b>85,2%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,2%	0%	0%	0%

Tabelle 8.42: Lösungshäufigkeiten zum Item IIIc „Gewichte“  
mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Leistungsunterschiede von Mädchen und Jungen sind zufallsbedingt und nicht signifikant ( $N_{\text{Mädchen}}=433$ ;  $N_{\text{Jungen}}=488$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,001$ ;  $\varepsilon^2=,021$ ).

### 8.4.3.4 Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“

Die Auswertungen zu den Items der dritten Kategorie „Zerlegen von Größen“ zeigen, dass Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe die Aufgabe IIIa „Kuchen“ zum Konzept einfacher Alltagsbrüche mit einer Lösungshäufigkeit von 79% am erfolgreichsten lösen. Die Lösungshäufigkeiten der anderen beiden Items IIIb „Würfel“ und IIIc „Gewichte“ fallen mit knapp 58% und 50% deutlich niedriger aus.

Bei allen drei Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Leistungen der Mädchen und Jungen festgestellt werden. Die Kompetenzunterschiede hinsichtlich der Geschlechter – wie in Abbildung 8.45 zusammenfassend dargestellt – sind zufallsbedingt.

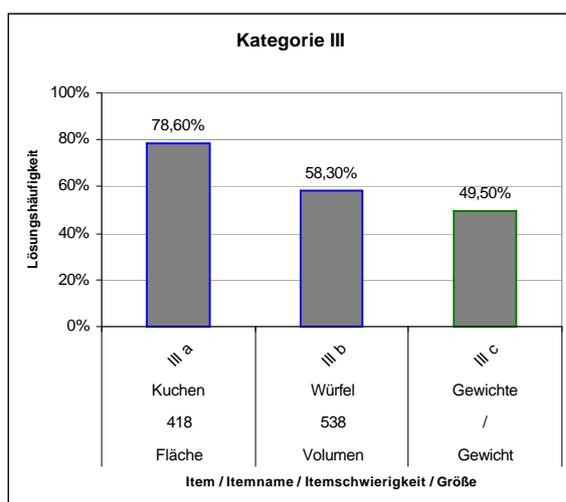


Abbildung 8.44:

Leistungen der Viertklässler  
zu Aufgaben der Kategorie III  
„Zerlegen von Größen“

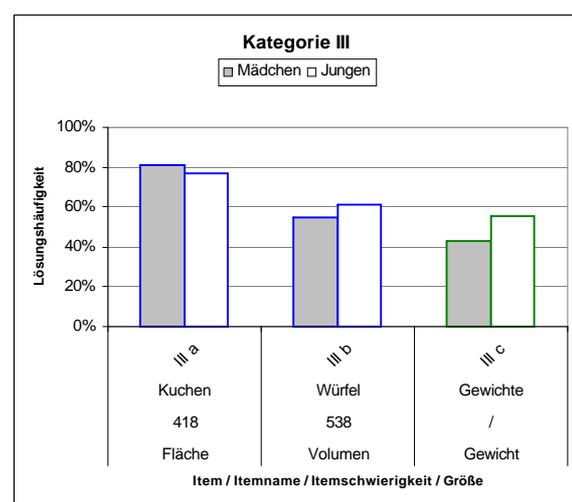


Abbildung 8.45:

Leistungen von Mädchen und Jungen  
zu Aufgaben der Kategorie III  
„Zerlegen von Größen“

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Detaillierte Analysen zu den Leistungen der Kinder aus den jeweiligen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen ergeben (vgl. Tab. 8.46 und Tab. 8.47), dass besonders das Item IIIc „Gewichte“ dazu geeignet ist, Kinder der vierten Jahrgangsstufe im Fach Mathematik und im Fach Sachunterricht in ihrer Leistungsfähigkeit gut voneinander zu unterscheiden.

Die grafische Auswertung zur ersten Aufgabe dieser Kategorie verdeutlicht, dass das Item IIIa „Kuchen“ die beiden unteren, die mittlere und die beiden oberen Leistungsgruppen der Mathematik voneinander trennen. Die Leistungsgruppe der Naturwissenschaften trennt das Item dagegen sehr gut.

In ähnlicher Weise trennt das Item IIIb „Würfel“ die Mathematikleistungen von Viertklässlern sehr gut voneinander. Im Hinblick auf die Naturwissenschaftenleistungen ist die Aufgabe lediglich dazu geeignet, in den Naturwissenschaften leistungsschwache von leistungsstarken Kindern zu unterscheiden. Die Leistungen von Viertklässlern aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen II, III und IV stimmen nahezu miteinander überein.

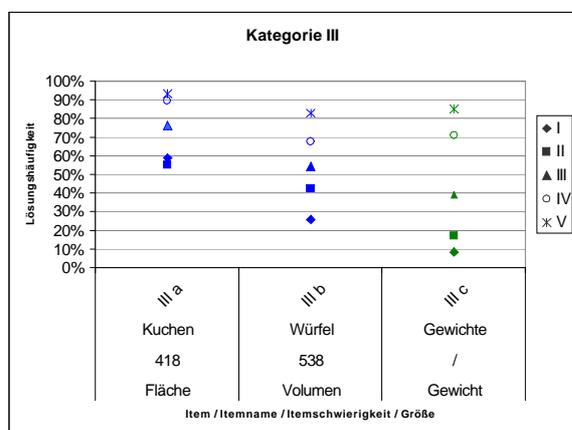


Abbildung 8.46:  
Leistungen der Viertklässler  
aus den Mathematikkompetenzstufen  
zu Items der Kategorie III

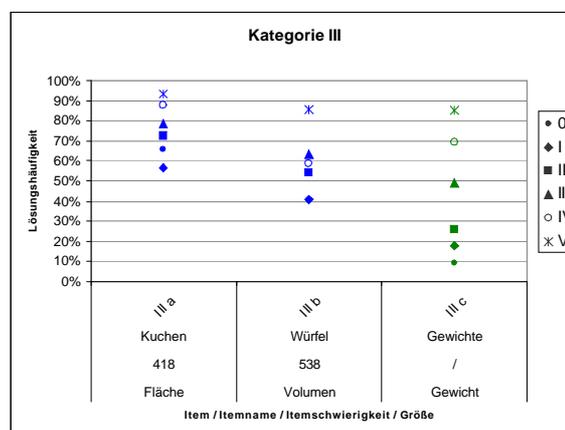


Abbildung 8.47:  
Leistungen der Viertklässler  
aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen  
zu Items der Kategorie III

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

#### 8.4.4 Analysen zu Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“

Die Aufgaben der vierten Kategorie beschäftigen sich mit dem Operieren mit Größen. Dabei erfordern die jeweiligen Aufgaben die Bestimmung von Längen, Zeitpunkt und Gewichten. Im Zentrum dieser Aufgaben stehen Verknüpfungen im Sinne des Rechenzahlaspekts. Zur Lösung der jeweiligen Items sind in der Regel mehrere Rechenschritte erforderlich.

			Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“				
			IVa Kalender	IVb Umfang	IVc Waage	IVd Schrittlänge	IVe Rechteck
Aufgabenperipherie	Aufgabenstamm	Text	1S; 2S	2S	3S	3S	2S
		Grafik	Kalenderblatt	Rechteck	3 Versuchsaufbauten	-	-
		Tabelle	-	-	-	X	-
		Schlüsselwörter	an welchem Datum	wie groß	wie viel mal schwerer	wer hat den größten Schritt	wie lang
	MC-Antworten	Anzahl der MC	5	4	5	4	4
		Zahl	-	-	-	-	-
		Zahl + Einheit	X	-	-	-	X
		math. Ausdruck	-	X	X	-	-
		Wort	-	-	-	X	-
		Wortreihe	-	-	-	-	-
Grafik		-	-	-	-	-	
in der Aufgabe genannte Einheiten		Monat	cm	-	-	cm	
Aufgabenkern	Quelle		MAT	MAT	NAT	MAT	MAT
	Größentyp		Zeit	Länge	Gewicht	Länge	Länge
	Kontext		außermath	innermath	außermath	außermath	außermath
	Itemschwierigkeit		KIII 427	KIV 541	KIV 575	KIV 627	-
	Art des Wissens	Fakten-Wissen	X	X	X	X	X
		Prozedurales Wissen	-	-	-	-	-
Konzeptuelles Wissen		X	X	X	X	X	

Tabelle 8.43: Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“

Die Tabelle 8.44 gibt Auskunft über die Anzahl der Schülerinnen und Schüler, die das jeweilige Item aus der vierten Kategorie bearbeitet haben.

Das Item IVc „Waage“ stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften, die anderen vier Items dieser Kategorie sind aus dem Subtest „Mathematik“.

<b>Item</b>	<b>Itemname</b>	<b>N<sub>gesamt</sub></b>	<b>N<sub>Mädchen</sub></b>	<b>N<sub>Jungen</sub></b>	<b>N<sub>keine Angaben</sub></b>
<b>IVa</b>	<b>Kalender</b>	950	496	452	2
<b>IVb</b>	<b>Umfang</b>	979	504	474	1
<b>IVc</b>	<b>Waage</b>	999	473	526	-
<b>IVd</b>	<b>Schrittlänge</b>	1019	529	489	1
<b>IVe</b>	<b>Rechteck</b>	885	423	462	-

Tabelle 8.44: Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“

Im folgenden werden die Befunde zu den fünf Items der vierten und letzten Kategorie ausführlich dargestellt.

#### 8.4.4.1 Das Item IVa „Kalender“

Die Aufgabe „Kalender“ ist in ihrem Aufbau recht komplex: Ein Kalenderblattauszug des Monats August ist in einen Text bestehend aus 3 Sätzen eingebettet, der die Problemstellung schildert. Den Aufgabenausführungen folgen neben einer explizit gestellten Frage fünf Antwortvorschläge (vgl. Abb. 8.48), die für die Schülerinnen und Schüler eine Kontrollfunktion widerspiegeln: Sollten die Kinder ihre Lösung in den Antwortalternativen nicht wiederfinden, so wird ihnen auf diese Weise indirekt mitgeteilt, dass bei der Bearbeitung der Aufgabe ein Fehler unterlaufen ist und sie die Fragestellung neu bearbeiten sollten.

Das ist ein Kalenderblatt für den August 2001.

AUGUST						
So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	28	30	31	

Marias Geburtstag ist am Donnerstag, dem 2. August.  
Genau 3 Wochen später will sie eine Reise beginnen.  
An welchem Datum will sie verreisen?

MC 1:  16. August  
MC 2:  19. August  
MC 3:  21. August  
MC 4:  23. August  
MC 5:  30. August

Abbildung 8.48: Aufgabe IVa „Kalender“  
mit fünf Multiple-Choice-Antworten

Das Item mit außermathematischem Kontext besitzt eine Itemschwierigkeit von 427 und ist der Mathematikkompetenzstufe III „Verfügbarkeit von Grundrechenarten und Arbeit mit einfachen Modellen“ zuzuordnen. Schülerinnen und Schüler sollen von dem vorgegeben Zeitpunkt des 2. Augusts und einer bekannten Zeitspanne von 3 Wochen den Zeitpunkt der Abreise des Mädchens Marie bestimmen. Die Aufgabensituation ist kindgerecht formuliert und spricht durch den gewählten Kontext der Sommerferien die Viertklässler direkt an. Das Item erfordert bei bekanntem Startzeitpunkt und bekannter Zeitspanne die Ermittlung des (End-)Zeitpunktes. Die Bestimmung von Zeitpunkten ist im täglichen Leben stets präsent. Die Abbildung 8.49 zeigt die Lösungsergebnisse der Kinder aus IGLU-E.

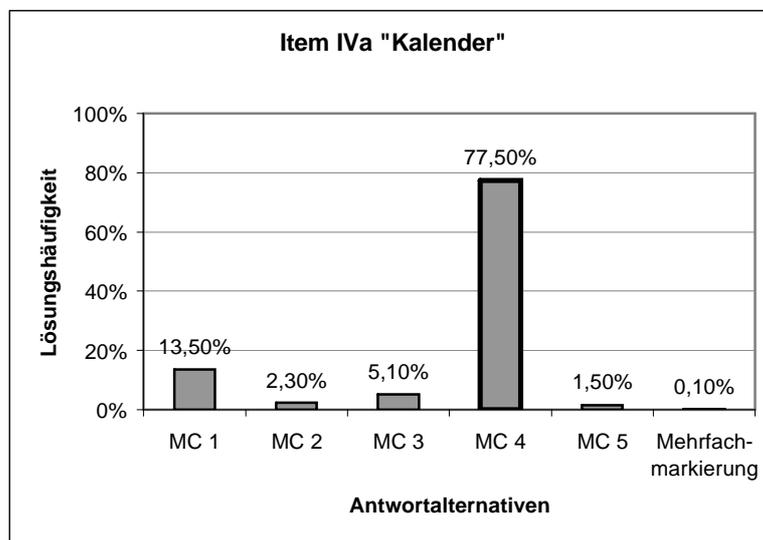


Abbildung 8.49: Lösungsergebnisse zum Item IVa „Kalender“ mit der korrekten Antwort MC 4 ( $N_{\text{gesamt}}=950$ )

Die Antworten der Schülerinnen und Schüler konzentrieren sich hauptsächlich auf die inkorrekte Antwort 1 mit fast 14% und die korrekte Antwort 4 mit nahezu 78%. Die anderen Antworten MC 2, MC 3 und MC 5 wurden von sehr wenigen Kindern gewählt und sind ebenso wie Mehrfachmarkierungen zu vernachlässigen. Das Datum 16. August (Antwort 1) lässt vermuten, dass Schülerinnen und Schüler bei der Bestimmung des Abreisetermins fälschlicherweise den 2. August als eine bereits vergangene Woche mitzählten. Dieser „Einsundeinsfehler der Nähe“ ist häufig beim Addieren durch Weiterzählen zu beobachten (vgl. Hasemann 2003, S.99).

Dieses Fehlkonzept ist besonders bei Kindern aus der ersten Mathematik- und der ersten Naturwissenschaftskompetenzstufe vorhanden (vgl. Tab. 8.45 und Tab. 8.46): Knapp 44% der im Fach Mathematik und 33% der im Fach Sachunterricht leistungsschwächsten Kinder entscheiden sich für die erste Antwort „16. August“. Aber auch in den übrigen Leistungsstufen II, III, IV und V ist dieses Fehlkonzept – wenn auch in weitaus niedrigerer Ausprägung – durchgehend vorhanden.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=17	II N=155	III N=348	IV N=362	V N=67
MC 1: 16. August	43,6%	22,8%	12,6%	11%	2,4%
MC 2: 19. August	19,7%	4,4%	3,0%	0,4%	0%
MC 3: 21. August	5,6%	10,6%	5,6%	3,0%	0%
<b>MC 4: 23. August</b>	<b>31,0%</b>	<b>56,7%</b>	<b>77,8%</b>	<b>84,7%</b>	<b>97,6%</b>
MC 5: 30. August	0%	4,7%	1,0%	0,9%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	0,8%	0%	0%	0%

Tabelle 8.45: Lösungshäufigkeiten zum Item IVa „Kalender“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=41	I N=113	II N=183	III N=212	IV N=326	V N=74
MC 1: 16. August	33,4%	15,6%	16,4%	13,9%	10%	5,2%
MC 2: 19. August	4,4%	6,4%	3,2%	1,6%	1,3%	0%
MC 3: 21. August	15,9%	7,8%	7,9%	4,3%	2,4%	2,1%
<b>MC 4: 23. August</b>	<b>46,4%</b>	<b>64,3%</b>	<b>71,3%</b>	<b>79,8%</b>	<b>84,7%</b>	<b>92,7%</b>
MC 5: 30. August	0%	5,6%	1,2%	0%	1,7%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	0,4%	0%	0,4%	0%	0%

Tabelle 8.46: Lösungshäufigkeiten zum Item IVa „Kalender“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Die Antwortauswahl der Mädchen und Jungen ist vergleichbar und unterscheidet sich nicht signifikant voneinander ( $N_{\text{Mädchen}}=496$ ;  $N_{\text{Jungen}}=452$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,894$ ;  $\varepsilon^2=,002$ ).

#### 8.4.4.2 Das Item IVb „Umfang“

Mit zwei einleitenden Sätzen „Dies ist ein Rechteck mit den Maßen 8 cm und 6 cm. Die Länge rundherum nennt man seinen Umfang.“ und der Abbildung eines gezeichneten Rechtecks mit den Längenmaßen 8 cm und 6 cm (vgl. Abb. 8.50) wird das Item „Umfang“ präsentiert. Die aus dem IGLU-E-Subtest Mathematik stammende Aufgabe mit innermathematischem Kontext besitzt eine Itemschwierigkeit von 541 und ist ihren Anforderungen entsprechend der Mathematikkompetenzstufe IV „Beherrschung der Grundrechenarten, Bewältigung von Aufgaben der räumlichen Geometrie und begriffliche Modellentwicklung“ zuzuordnen.

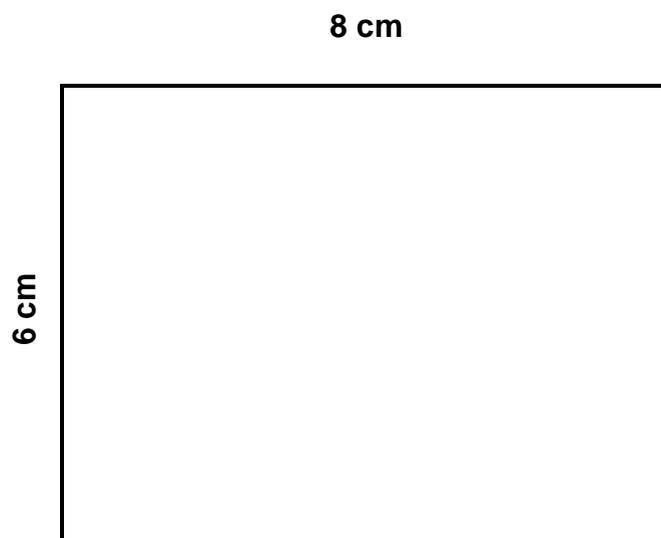


Abbildung 8.50: Abbildung zum Item IVb „Umfang“

Die Kinder sollen angeben, welcher der gegebenen Terme den Umfang des in den Originalmaßen abgebildeten Rechtecks korrekt wiedergibt (vgl. Abb. 8.51). Natürlich gibt es auch andere korrekte Lösungsterme, z.B.  $2 \cdot 8 + 2 \cdot 6$  oder 28.

MC 1:	<input type="checkbox"/>	$8 + 6$
MC 2:	<input type="checkbox"/>	$8 \cdot 6$
MC 3:	<input type="checkbox"/>	$8 \cdot 6 \cdot 2$
MC 4:	<input type="checkbox"/>	$8 + 6 + 8 + 6$

Abbildung 8.51: Multiple-Choice-Antworten des Items IVb „Umfang“

Die Abbildung 8.52 zeigt die Lösungsergebnisse der IGLU-E-Viertklässler.

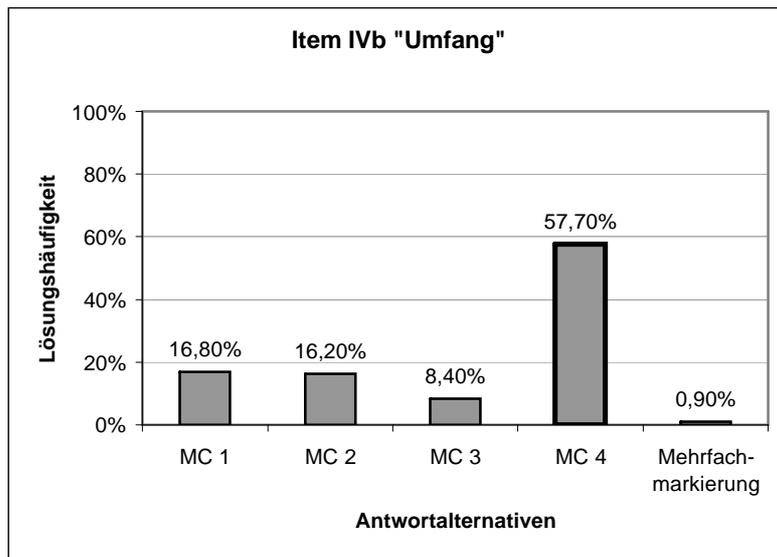


Abbildung 8.52: Lösungsergebnisse zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 ( $N_{\text{gesamt}}=979$ )

Knapp 58% der Kinder wählten den vierten Antwortvorschlag „8 + 6 + 8 + 6“ und lösten somit die Aufgabe korrekt. Die anderen drei Distraktoren „8 + 6“ (MC 1), „8 • 6“ (MC 2) sowie „8 • 6 • 2“ (MC 3) wurden mit deutlich geringeren Häufigkeiten gewählt. Die Anteile der Stimmen für die Antworten MC 1 und MC 2 sind nahezu gleich.

Die Ergebnisse geben Auskunft über das Verständnis von Kindern zum Begriff Umfang. Die Antwort MC mit „8 + 6“ deutet daraufhin, dass die Kinder den Lösungsplan der Aufgabe fehlerhaft verkürzen: Aufgrund eines unzureichenden Verständnisses des Umfangbegriffs erfassen sie die Situation nicht vollständig und bestimmen nur die Hälfte des Umfangs. Hauptursache dürfen wohl die *zwei* Zahlen 8 und 6 sein.

Die Antwort MC 2 mit „8 • 6“ signalisiert ebenfalls ein fehlendes Verständnis hinsichtlich des Begriffs Umfang. Mit dieser gewählten Antwort bestimmten die Viertklässler die Fläche des Rechtecks. Die Verwechslung von Umfang und Flächeninhalt ist ein typischer Identifikationsfehler von Schülern (vgl. Lauter 1995, S.269 sowie Kap. 5.5).<sup>59</sup>

<sup>59</sup> Bereits vor über 20 Jahren konnten Woodward und Byrd feststellen, dass 13- bis 14-jährige Schülerinnen und Schüler der 8. Klassenstufe Fläche und Umfang verwechselten (vgl. Danielson 2005, S.30).

Die Antwort MC 3 mit der Multiplikation „ $8 \cdot 6 \cdot 2$ “ lässt vermuten, dass die Kinder erkannt haben, dass zur Bestimmung des Rechteckumfangs die beiden Rechtecksstrecken der Längen 8 cm und 6 cm jeweils zweimal entlang gelaufen werden müssen. Korrekt müsste die Antwort jedoch heißen: „ $8 \cdot 2 + 6 \cdot 2$ “ bzw. „ $(8 + 6) \cdot 2$ “.

Mädchen und Jungen entscheiden sich gleichermaßen für den ersten sowie letzten Antwortvorschlag. Die geringen Unterschiede im Antwortverhalten sind zufallsbedingt und nicht signifikant ( $N_{\text{Mädchen}}=504$ ;  $N_{\text{Jungen}}=474$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,049$ ;  $\varepsilon^2=,01$ ).

Die Verwechslung von Umfang und Flächeninhalt ist – wenn auch in unterschiedlichem Ausmaß – bei allen Kindern der jeweiligen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen zu verzeichnen (vgl. Tab. 8.47 und Tab. 8.48). Erst Kinder der Mathematikkompetenzstufe III lösen die Aufgabe mit einer Lösungshäufigkeit von mindestens 50% korrekt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=15	II N=169	III N=387	IV N=341	V N=67
MC 1: $8 + 6$	14,7%	38%	17,3%	9,0%	0%
MC 2: $8 \cdot 6$	45,7%	17,7%	18,4%	12,7%	11,7%
MC 3: $8 \cdot 6 \cdot 2$	12,1%	10,8%	10,8%	5,5%	2,6%
<b>MC 4: <math>8 + 6 + 8 + 6</math></b>	<b>18,9%</b>	<b>33,4%</b>	<b>52,9%</b>	<b>72,1%</b>	<b>81,8%</b>
Mehrfachmarkierung	8,6%	0%	0,6%	0,8%	3,9%

Tabelle 8.47: Lösungshäufigkeiten zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=35	I N=125	II N=204	III N=193	IV N=351	V N=72
MC 1: $8 + 6$	25,7%	29,8%	22,2%	19,0%	9,6%	3,3%
MC 2: $8 \cdot 6$	31,2%	17,6%	16,6%	14,5%	14,6%	18,5%
MC 3: $8 \cdot 6 \cdot 2$	20,9%	9,5%	13,8%	5,8%	6,4%	2,2%
<b>MC 4: <math>8 + 6 + 8 + 6</math></b>	<b>22,2%</b>	<b>41,6%</b>	<b>47,4%</b>	<b>60,1%</b>	<b>67,8%</b>	<b>76,0%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	1,4%	0%	0,7%	1,6%	0%

Tabelle 8.48: Lösungshäufigkeiten zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Das nachträgliche Einordnen der IGLU-E-Ergebnisse in die TIMSS-Befunde von 1995 ergibt, dass auch Kinder anderer Nationen beim Konzeptverständnis von Umfang und Fläche mehr oder weniger große Schwierigkeiten besitzen (vgl. Tab. 8.49). Die Befunde zeigen insbesondere, dass beispielsweise Kinder in Japan – einem in der TIMSS-POP1-Studie Mathematik sehr leistungsstarken Land (M=597, SD=81) –, die Aufgabe zur Bestimmung des Umfangs eines Rechtecks nur mit knapp halb so großer Lösungshäufigkeit von rund 27% korrekt lösen. Dagegen favorisieren japanische Kinder zu einem hohen Prozentsatz die Antwort MC 2, die die Gleichung zur Bestimmung der Fläche eines Rechtecks angibt. Im Vergleich dazu zeigen Grundschülerinnen und Grundschüler aus Portugal (M=475, SD=80) (vgl. Walther et al. 2003, S.209) sehr erfreuliche Leistungen. Sie lösen das Item IVb „Umfang“ mit einer hohen Lösungshäufigkeit von 65% korrekt.

Die Leistungen der Viertklässler der BRD sind allgemein befriedigend.

Staat	<b>MC 1:</b> 8 + 6	<b>MC 2:</b> 8 • 6	<b>MC 3:</b> 8 • 6 • 2	<b>MC 4:</b> 8 + 6 + 8 + 6	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
<b>Portugal</b>	11,6%	20,4%	3,6%	<b>64,5%</b>	0%	<b>1061</b>
<b>Tschechien</b>	8,0%	15,3%	12,5%	<b>63,9%</b>	0,4%	<b>1245</b>
<b>Österreich<sup>1</sup></b>	7,0%	19,8%	13,4%	<b>59,2%</b>	0,6%	<b>986</b>
<b>Norwegen</b>	21,9%	15,8%	3,5%	<b>58,7%</b>	0,1%	<b>831</b>
<b>Australien<sup>1</sup></b>	10,4%	23,4%	7,8%	<b>58,3%</b>	0%	<b>2098</b>
<b>Deutschland<sup>2</sup></b>	16,8%	16,2%	8,4%	<b>57,7%</b>	0,9%	<b>979</b>
<b>Kanada</b>	16,4%	22,7%	5,7%	<b>55,0%</b>	0,3%	<b>3032</b>
<b>Ungarn<sup>1</sup></b>	11,3%	21,2%	13,9%	<b>53,5%</b>	0%	<b>1087</b>
<b>USA</b>	15,7%	28,1%	4,9%	<b>51,3%</b>	0,1%	<b>1998</b>
<b>Griechenland</b>	13,2%	27,7%	8,3%	<b>50,5%</b>	0,5%	<b>1086</b>
<b>Schottland</b>	21,9%	23,6%	8,0%	<b>46,3%</b>	0,3%	<b>1177</b>
<b>Niederlande<sup>1</sup></b>	8,9%	35,0%	9,7%	<b>45,5%</b>	0,8%	<b>1010</b>
<b>England</b>	19,7%	29,1%	7,0%	<b>44,1%</b>	0%	<b>1122</b>
<b>Korea</b>	2,6%	45,8%	10,2%	<b>41,4%</b>	0%	<b>1047</b>
<b>Irland</b>	15,6%	32,1%	11,2%	<b>40,5%</b>	0,7%	<b>1071</b>
<b>Neuseeland</b>	25,8%	28,9%	7,4%	<b>37,8%</b>	0%	<b>923</b>
<b>Japan</b>	3,8%	54,5%	15,0%	<b>26,7%</b>	0%	<b>1640</b>
<b>Island</b>	33,8%	33,9%	8,0%	<b>24,1%</b>	0,2%	<b>613</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.49: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4

### 8.4.4.3 Das Item IVc „Waage“

Mit drei einleitenden Sätzen (u.a. zum Aufbau und der Funktionsweise der Waage), drei Abbildungen und einer expliziten Fragestellung wird den Schülerinnen und Schülern die Problemstellung des Items „Waage“ aus dem IGLU-E-Subtest Naturwissenschaften dargestellt (vgl. Abb. 8.53). Die Aufgabe weist eine Itemschwierigkeit von 575 auf und ist ihren Leistungsanforderungen entsprechend der Naturwissenschaftskompetenzstufe IV „Beginnendes naturwissenschaftliches Verständnis“ zuzuordnen.

Wie viel mal schwerer ist der große Stein als der kleine Stein?

leerer Behälter      kleiner Stein      großer Stein

Abbildung 1      Abbildung 2      Abbildung 3

MC 1:  dasselbe Gewicht wie der kleine Stein  
MC 2:  2 mal so schwer  
MC 3:  5 mal so schwer  
MC 4:  8 mal so schwer  
MC 5:  10 mal so schwer

Abbildung 8.53: Aufgabe IVc „Waage“ mit fünf Multiple-Choice-Antworten

Die Aufgabe besteht darin, das Gewicht von zwei unterschiedlich großen und unterschiedlich schweren Steinen miteinander zu vergleichen. Hierbei soll das Gewicht des schweren Steines mit Hilfe des Gewichts des leichten Steines beschrieben werden, was die Schwierigkeit der Aufgabe ausmacht.

Die Abbildung 8.54 zeigt die Antwortwahl der Viertklässler aus IGLU-E.

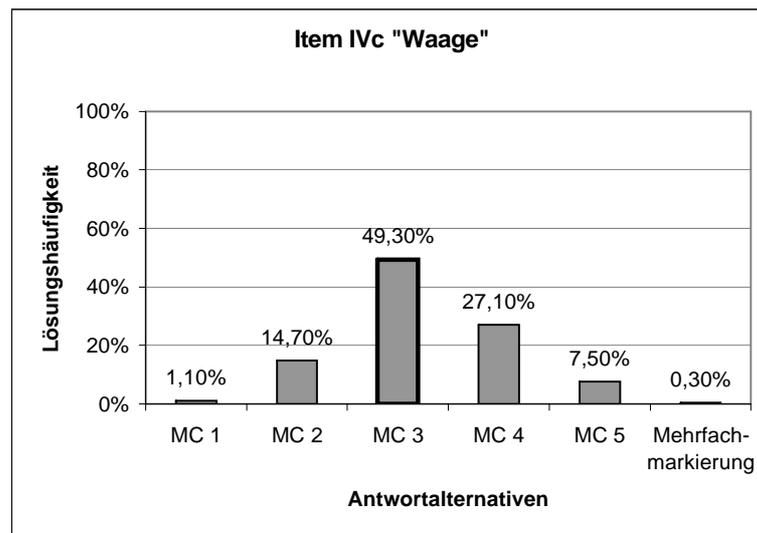


Abbildung 8.54: Lösungsergebnisse zum Item IVc „Waage“ mit der korrekten Antwort MC 3 ( $N_{\text{gesamt}}=999$ )

Die Aufgabe wurde von knapp der Hälfte der Kinder aus IGLU-E korrekt gelöst. Die Viertklässler wählten bevorzugt die Distraktoren MC 4 („8 mal so schwer“) und MC 2 („2 mal so schwer“). Die Entscheidungen für die anderen Antwortalternativen MC 1 und MC 5 fielen deutlich niedriger aus. Eine unerlaubte Mehrfachmarkierung ist kaum zu verzeichnen.

Die beiden Antworten „8 mal so schwer“ (MC 4) und „2 mal so schwer“ (MC 2) deuten daraufhin, dass der Fehler in der Strukturierung des Lösungsplans auftritt: Schülerinnen und Schüler verknüpfen die Ergebnisse der beiden Gewichtsmessungen des kleinen (Abb. 2 der Aufgabe) und des großen Steins (Abb. 3 der Aufgabe) regelwidrig miteinander. Dem Gewichts Zusammenhang zwischen den beiden verschiedenen schweren Steinen wird nicht die korrekte mathematische Operation zugeordnet (Identifikationsfehler): Im Falle der Antwort MC 4 „8 mal so schwer“ wird anstelle der

Multiplikation die Subtraktion zugeordnet. Die Kinder bestimmen den Abstand der beiden auf den jeweiligen Skalen abgebildeten Messergebnisse mit  $8 = 10 - 2$  (der große Stein ist 8 Größeneinheiten schwerer als der kleine Stein).

Die Antwort MC 2 „2 mal so schwer“ beruht vermutlich auf einem Ablesen der Gewichtsmessung des kleinen Steines. Dies lässt erkennen, dass die Kinder den Gewichtszusammenhang beider Steine nicht erfassen.

Die CROSSTEL-Studie zeigt ähnliche Befunde (vgl. Abb. 8.55). Auch Schülerinnen und Schüler in Schleswig-Holstein, in Mecklenburg-Vorpommern und in den USA wählten im Jahr 1993 zu einem relativ hohen Prozentsatz die Antworten MC 4 („8 mal so schwer“) und MC 2 („2 mal so schwer“).

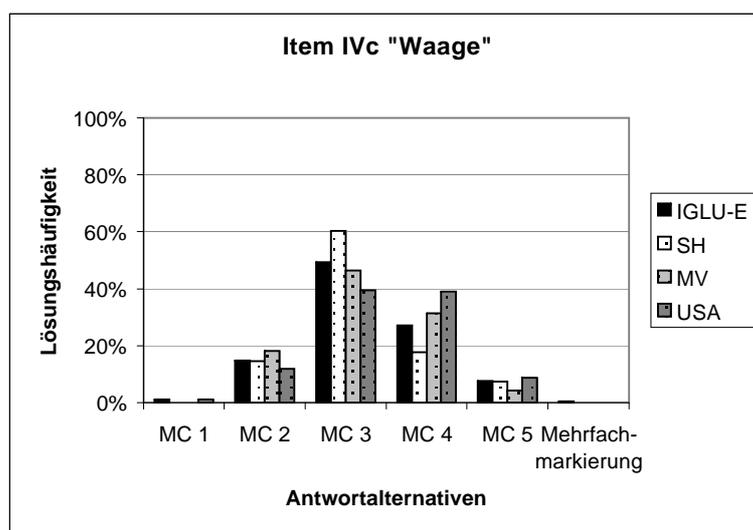


Abb. 8.55: Gegenüberstellung der Lösungsergebnisse zum Item IVc „Waage“ mit der korrekten Antwort MC 3 aus den Studien IGLU-E und CROSSTEL (N<sub>IGLU-E</sub>= 999; N<sub>CROSSTEL-SH</sub>=164; N<sub>CROSSTEL-MV</sub>=166; N<sub>CROSSTEL-USA</sub>=193)

Unerlaubte Mehrfachmarkierungen sind auch in der CROSSTEL-Studie kaum zu verzeichnen.

Die Bandbreite der Antwortalternativen wird von den IGLU-E-Kindern der unteren Kompetenzstufen voll ausgeschöpft (vgl. Tab. 8.50 und Tab. 8.51). Ungefähr ein Drit-

tel der in Naturwissenschaften und in Mathematik leistungsschwachen Kinder lösen das Item korrekt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=31	I N=144	II N=184	III N=207	IV N=352	V N=80
MC 1: dasselbe Gewicht wie der kleine Stein	8,8%	4,3%	1,1%	0%	0%	0%
MC 2: 2 mal so schwer	25,5%	21%	23,1%	13,5%	10,4%	2,4%
<b>MC 3: 5 mal so schwer</b>	<b>13,6%</b>	<b>29,2%</b>	<b>38,4%</b>	<b>50,6%</b>	<b>58%</b>	<b>82,2%</b>
MC 4: 8 mal so schwer	17,8%	29,2%	29,3%	31,1%	26,1%	15,4%
MC 5: 10 mal so schwer	34,3%	14,8%	7,4%	4,8%	5,6%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	1,4%	0,6%	0%	0%	0%

Tabelle 8.50: Lösungshäufigkeiten zum Item IVc „Waage“

mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=11	II N=185	III N=379	IV N=366	V N=57
MC 1: dasselbe Gewicht wie der kleine Stein	0%	3,6%	1,1%	0%	0%
MC 2: 2 mal so schwer	26,2%	20,2%	21,8%	6,4%	1,8%
<b>MC 3: 5 mal so schwer</b>	<b>0%</b>	<b>33,4%</b>	<b>40,8%</b>	<b>63,5%</b>	<b>75,0%</b>
MC 4: 8 mal so schwer	37,5%	28,0%	27,4%	26,5%	23,2%
MC 5: 10 mal so schwer	36,3%	14,7%	8,3%	3,4%	0%
Mehrfachmarkierung	0%	0%%	0,6%	0,3%	0%

Tabelle 8.51: Lösungshäufigkeiten zum Item IVc „Waage“

mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Die Leistungen von Mädchen und Jungen unterscheiden sich nicht ( $N_{\text{Mädchen}}=473$ ;  $N_{\text{Jungen}}=526$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,693$ ;  $\varepsilon^2=,003$ ).

#### 8.4.4.4 Das Item IVd „Schrittlänge“

Mit drei einleitenden Sätzen, einer Messwertetabelle und einer expliziten Fragestellung werden den Schülerinnen und Schülern die Problemstellung des Items „Schrittlänge“ aus dem IGLU-E-Subtest Mathematik dargelegt (vgl. Abb. 8.56). Die Aufgabe besitzt eine Itemschwierigkeit von 627 und ist ihren Leistungsanforderungen entsprechend der Mathematikkompetenzstufe IV „Beherrschung der Grundrechenarten, Bewältigung von Aufgaben der räumlichen Geometrie und begriffliche Modellentwicklung“ zuzuordnen (vgl. Walther et al. 2003, S.202).

Vier Kinder messen die Breite eines Zimmers. Sie zählen dabei, wie viele Schritte sie benötigen.  
In der Tabelle sind ihre Ergebnisse aufgeschrieben.

Name	Anzahl der Schritte
Frank	10
Maren	8
Anja	9
Marc	7

Wer hat den größten Schritt?

Frank

Maren

Anja

Marc

Abbildung 8.56: Aufgabe IVd „Schrittlänge“ mit 4 Multiple-Choice-Antworten

Die Aufgabe beschreibt eine im Leben von Kindern bekannte Situation: Schülerinnen und Schüler vergleichen ihre Schrittweite. Die IGLU-E-Teilnehmer sollen angeben, welches von den vier Kindern den größten Schritt, also die größte Schrittlänge besitzt. Hierzu ist eine begriffliche Modellentwicklung notwendig: Je mehr Schritte man benötigt, um eine vorgegebene Entfernung zu überwinden, desto kleiner ist die Schrittlänge. Allgemein: Je kleiner die Längeneinheit gewählt wird, um eine gegebene Streckenlänge zu messen, umso öfter lässt sich die Längeneinheit auf der

Strecke abtragen und umgekehrt. Ähnliche Situationen begegnen den Kindern beim Wiegen von Gegenständen mit verschiedenen schweren Objekten oder Gewichten (vgl. Item IVc „Waage“). Die in der Aufgabe ausgedrückte Beziehung lässt sich formal durch den Begriff der umgekehrten Proportionalität beschreiben, der in der Grundschule natürlich noch nicht zur Verfügung steht.

Die Abbildung 8.57 zeigt die Lösungsergebnisse der IGLU-E-Viertklässler.

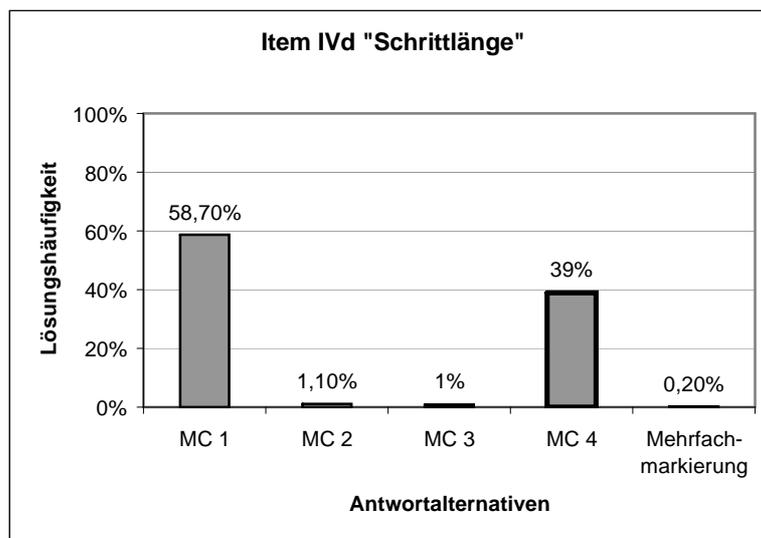


Abbildung 8.57: Lösungshäufigkeiten zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 ( $N_{\text{gesamt}}=1019$ )

Knapp 40% der Kinder wählten den vierten Antwortvorschlag „Marc“ und lösten somit die Aufgabe korrekt. Fast 60% der Kinder entschieden sich für die erste Antwortmöglichkeit „Frank“. Die beiden anderen Distraktoren „Maren“ und „Anja“ wurden mit vernachlässigbarer Häufigkeit gewählt.

Die Ergebnisse zeigen ferner, dass sich Mädchen und Jungen gleichermaßen für den ersten sowie letzten Antwortvorschlag entschieden. Die geringfügigen Leistungsunterschiede zwischen Mädchen und Jungen sind zufallsbedingt ( $N_{\text{Mädchen}}=529$ ;  $N_{\text{Jungen}}=489$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,616$ ;  $\varepsilon^2=,003$ ).

Die am häufigsten gewählte Antwort MC 1 „Frank“ weist daraufhin, dass deutlich mehr als die Hälfte der Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe noch nicht über eine Grundvorstellung zur umgekehrten Proportionalität verfügen.

Diese Fehlvorstellung ist bei Kindern auf den Kompetenzstufen des Mathematiktests I bis III sehr stark ausgeprägt (vgl. Tab. 8.52). Erst ab der Kompetenzstufe IV lösen mehr als 60% der Kinder das Item korrekt.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=26	II N=185	III N=397	IV N=343	V N=68
MC 1: Frank	93,0%	93,2%	69,6%	34,8%	8,5%
MC 2: Maren	0%	0,8%	0,7%	1,8%	1,3%
MC 3: Anja	7,0%	3,6%	0,2%	0,3%	0%
<b>MC 4: Marc</b>	<b>0%</b>	<b>2,4%</b>	<b>29,2%</b>	<b>63,0%</b>	<b>90,2%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,3%	0,1%	0%

Tabelle 8.52: Lösungshäufigkeiten zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=44	I N=136	II N=212	III N=200	IV N=355	V N=72
MC 1: Frank	91,9%	80,7%	85,6%	53,9%	42,3%	11,4%
MC 2: Maren	0%	1,1%	0,6%	0%	2,4%	0%
MC 3: Anja	3,8%	4,1%	0,5%	0,4%	0,3%	0%
<b>MC 4: Marc</b>	<b>4,3%</b>	<b>14,0%</b>	<b>13,0%</b>	<b>45,1%</b>	<b>55,0%</b>	<b>88,6%</b>
Mehrfachmarkierung	0%	0%	0,3%	0,6%	0%	0%

Tabelle 8.53: Lösungshäufigkeiten zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Auch Viertklässlern aus anderen Nationen fällt dieses Item schwer.

Die Tabelle 8.54 zeigt die Leistungsergebnisse von Viertklässlern aus verschiedenen Nationen, die an der TIMSS-POP1-Untersuchung teilgenommen haben. Die favorisierte Antwort MC 1 zeigt, dass Viertklässler nicht über die für die Aufgabe notwendige Grundvorstellung verfügen. Die Lösungshäufigkeiten der korrekten Antwort MC 4 „Marc“ streuen hinsichtlich aller Teilnehmerstaaten der TIMSS-POP1-Studie von nahezu 9% bis 66%.

Staat	<u>MC 1:</u> Frank	<u>MC 2:</u> Maren	<u>MC 3:</u> Anja	<u>MC 4:</u> Marc	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
Korea	34,2%	0%	0,3%	<b>65,5%</b>	0%	<b>345</b>
Niederlande <sup>1</sup>	38,6%	0%	0,6%	<b>60,5%</b>	0,3%	<b>332</b>
Österreich <sup>1</sup>	43,1%	1,3%	0,9%	<b>54,7%</b>	0%	<b>320</b>
Tschechien	52,3%	0,7%	0,5%	<b>46,4%</b>	0%	<b>405</b>
Japan	54,1%	0,7%	0,6%	<b>44,8%</b>	0%	<b>545</b>
<b>Deutschland<sup>2</sup></b>	<b>58,7%</b>	<b>1,1%</b>	<b>1,0%</b>	<b>39,0%</b>	<b>0,2%</b>	<b>1019</b>
Irland	58,0%	2,7%	0,3%	<b>39,0%</b>	0,3%	<b>369</b>
Island	59,7%	2,1%	0,5%	<b>38,2%</b>	0%	<b>191</b>
Norwegen	60,4%	2,5%	0,7%	<b>36,1%</b>	0,4%	<b>280</b>
Ungarn <sup>1</sup>	69,5%	1,6%	0,5%	<b>28,6%</b>	0%	<b>364</b>
Portugal	70,1%	1,1%	1,4%	<b>27,6%</b>	0%	<b>370</b>
England	70,5%	1,6%	1,1%	<b>26,9%</b>	0%	<b>376</b>
Griechenland	70,3%	2,5%	1,4%	<b>26,2%</b>	0%	<b>367</b>
Schottland	75,1%	0,8%	0,5%	<b>23,4%</b>	0%	<b>389</b>
Neuseeland	74,3%	1,9%	1,6%	<b>22,2%</b>	0%	<b>323</b>
Australien <sup>1</sup>	74,1%	2,5%	2,0%	<b>21,3%</b>	0%	<b>684</b>
Kanada	78,1%	1,4%	0,9%	<b>19,7%</b>	0%	<b>1036</b>
USA	86,4%	1,5%	1,3%	<b>10,7%</b>	0,1%	<b>674</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.54: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995  
zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4

#### 8.4.4.5 Das Item IVe „Rechteck“

Das Item IVe „Rechteck“ stammt ursprünglich aus dem Mathematikaufgabenpool der TIMSS-POP1-Studie und wurde in den IGLU-E-Subtest der Mathematik übernommen. Da das Item mit einer geringen Trennschärfe und einer nicht zufrieden stellenden Übereinstimmung der nach dem Rasch-Modell theoretisch erwarteten mit der beobachteten Itemfunktion zur Skalierung der Leistungstests aus dem Aufgabenpool herausgenommen wurde (vgl. Kap. 7.2.5), kann der Aufgabe weder eine Itemschwierigkeit noch eine Kompetenzstufenzugehörigkeit zugeordnet werden. Die Aufgabe liefert jedoch wesentliche Informationen zum Konzeptverständnis des Rechteckumfangs von Kindern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

Mit zwei einleitenden Sätzen beschreibt die in ihrer Originalfassung dargestellte Aufgabe IVe „Rechteck“ die Sachsituation mit außermathematischem Kontext (vgl. Abb. 8.58). Die tätigkeitsorientierte Beschreibung ermöglicht es den Kindern, sich das Formen eines Rechtecks aus einem dünnen Draht konkret vorzustellen.

Aus einem dünnen, 20 cm langen Draht wird ein Rechteck geformt.  
Das Rechteck ist 4 cm breit. Wie lang ist es?

5 cm

6 cm

12 cm

16 cm

Abbildung 8.58: Aufgabe IVe „Rechteck“  
mit vier Multiple-Choice-Antworten

Die Aufgabe erfordert zunächst, dass Schülerinnen und Schüler mit dem Begriff „Rechteck“ eine Grundvorstellung hinsichtlich eines besonderen Vierecks besitzen und sich ein Rechteck vorstellen können. Zur Lösung der Aufgabe müssen die Kinder wissen, dass Länge und Breite eines jeden Rechtecks zweifach auftreten.

Die korrekte Antwort entspricht der zweiten Multiple-Choice-Antwortalternative MC 2 mit 6 cm, die in der Grundschule in der Regel durch zwei Lösungsschritte erzielt wird.

Hinter den einzelnen Distraktoren lassen sich folgende falsche Rechenwege bzw. Fehlkonzepte der Kinder vermuten:

Die Antwort MC 1 entspricht mit 5 cm dem Ergebnis der Divisionsaufgabe „ $20 : 4$ “. Es liegt die Vermutung nahe, dass die Kinder auch bei diesem Item das Konzept des Umfangs mit dem der Fläche verwechseln. Den Umfang des Rechtecks von 20 cm setzen sie mit der Rechtecksfläche gleich und bestimmen anhand der vorgegebenen Rechtecksbreite von 4 cm die Rechteckslänge.

Die dritte Antwort MC 3 mit der Rechteckslänge 12 cm lässt darauf schließen, dass die Kinder zwar in ihrer Lösung den korrekten Ansatz wählen ( $20 - (2 \cdot 4)$ ), jedoch durch das Weglassen des letzten Lösungsschrittes den Lösungsprozess fehlerhaft verkürzen. Die Viertklässler versäumen zu berücksichtigen, dass jedes „echte“ Rechteck zwei Längen besitzt, so dass ihr erzielttes Ergebnis die Gesamtlänge beider einzelnen Längen angibt. Um die gesuchte Rechteckslänge zu erhalten, muss das Ergebnis durch 2 dividiert werden.

Die Multiple-Choice-Antwort MC 4 mit 16 cm gibt an, dass die Kinder die in der Aufgabe genannten Größen 20 cm und 4 cm voneinander subtrahieren „ $20 \text{ cm} - 4 \text{ cm}$ “.

Die Abbildung 8.59 zeigt die Lösungsergebnisse der Viertklässler.

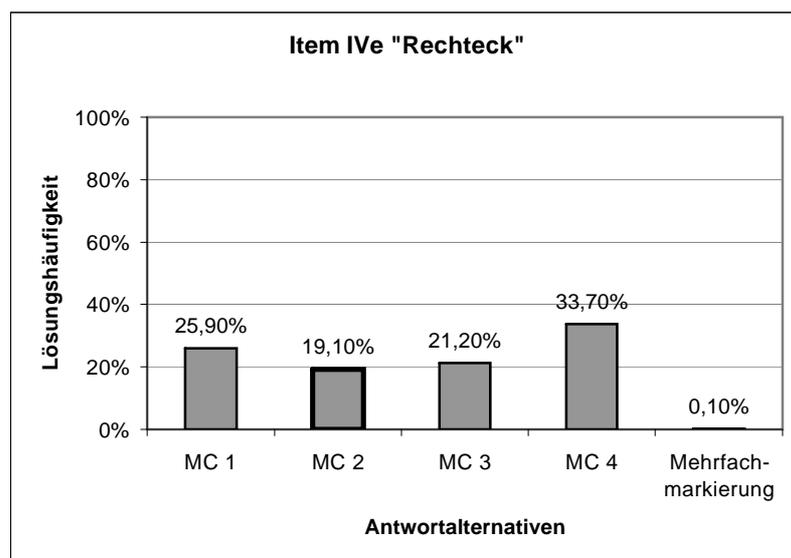


Abbildung 8.59: Lösungsergebnisse zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 4 ( $N_{\text{gesamt}}=885$ )

Die Bestimmung der Länge des Rechtecks anhand des bekannten Umfangs von 20 cm und der Rechtecksbreite von 4 cm fällt Kindern dieses Alters mit einer Lösungshäufigkeit von nur knapp 19% sehr schwer. Die Auswertungen zeigen, dass die Grundschüler das Spektrum der Distraktoren voll ausschöpfen: Am häufigsten wählen die Kinder den vierten Distraktor 16 cm mit einer Lösungshäufigkeit von fast 34%, gefolgt von der Multiple-Choice-Antwort MC 1 mit 5 cm und schließlich der dritten Antwortalternativen 12 cm mit einer Lösungshäufigkeit von knapp 21%. Zusammen mit den Ergebnissen zum Item IVa „Umfang“ (vgl. Kap. 8.4.4.2) belegen diese Ergebnisse, dass Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe die beiden Konzepte Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks noch nicht korrekt diskriminieren können.

Die Leistungen der Mädchen und Jungen weisen keine signifikanten Unterschiede auf ( $N_{\text{Mädchen}}=423$ ;  $N_{\text{Jungen}}=462$ ;  $\chi^2$  nach Pearson (2-seitig)  $p=,170$ ;  $\varepsilon^2=,007$ ).

Detaillierte Auswertungen zu den Leistungen der Kinder aus den verschiedenen Kompetenzstufen der Mathematik und der Naturwissenschaften ergeben (vgl. Tab. 8.55 und Tab. 8.56), dass nicht nur leistungsschwache, sondern auch insbesondere leistungsstarke Kinder das Item IVe „Rechteck“ mit einer sehr niedrigen Lösungshäufigkeit von nur über knapp 30% korrekt bearbeiten. Auch die differenzierten Analysen ergeben, dass die Viertklässler das gesamte Spektrum der Distraktoren ausschöpfen.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Mathematik				
	I N=9	II N=126	III N=373	IV N=317	V N=60
MC 1: 5 cm	23,0%	16,5%	26,9%	29,3%	21,7%
<b>MC 2: 6 cm</b>	<b>1,3%</b>	<b>23,6%</b>	<b>17,1%</b>	<b>17,4%</b>	<b>34,3%</b>
MC 3: 12 cm	31,6%	26,3%	20,4%	18,6%	28,1%
MC 4: 16 cm	37,6%	33,6%	35,6%	34,7%	16,0%
Mehrfachmarkierung	6,5%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.55: Lösungshäufigkeiten zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert

Viertklässler der unteren Mathematikkompetenzstufen I und II neigen in erster Linie zum Fehlkonzept der Subtraktion (MC 4), gefolgt von der fehlerhaften Verkürzung des Lösungsplans (MC 3) und der Antwort MC 1, die in ihrer Lösung eine vorgege-

bene Rechtecksfläche voraussetzt. Kinder der Mathematikkompetenzstufen III und IV wählen bevorzugt die Antwort MC 4, nachstehend der Antwortalternativen MC 1 und MC 3. Auch bei den im Fach Mathematik leistungsstärksten Kindern ist die Wahl der Antworten weit gefächert. Bei den fehlerhaften Antworten dominiert die Antwort MC 3.

Von den Kindern der Naturwissenschaftskompetenzstufen 0 bis IV wird am häufigsten der Distraktor MC 4 gewählt. Die leistungsstärksten Kinder im Naturwissenschaftsteil favorisieren hingegen die Antwort MC 1. Trotz dieser unterschiedlichen Bevorzugung von Antwortalternativen ist auch bei Kindern der verschiedenen Naturwissenschaftskompetenzstufen das Antwortspektrum weit gefächert.

Antwortmöglichkeiten	Kompetenzstufen Naturwissenschaften					
	0 N=18	I N=96	II N=198	III N=196	IV N=303	V N=71
MC 1: 5 cm	9,4%	20,8%	22,4%	28,0%	28,5%	30,1%
<b>MC 2: 6 cm</b>	<b>22,4%</b>	<b>20,3%</b>	<b>19,3%</b>	<b>15,7%</b>	<b>17,6%</b>	<b>32,5%</b>
MC 3: 12 cm	25,1%	27,1%	19,8%	18,6%	22,1%	19,8%
MC 4: 16 cm	40,0%	31,9%	38,5%	37,7%	31,8%	17,6%
Mehrfachmarkierung	3,1%	0%	0%	0%	0%	0%

Tabelle 8.56: Lösungshäufigkeiten zum Item IVe „Rechteck“

mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert

Die Befunde der TIMSS-POP1-Studie von 1995 zum Item IVe „Rechteck“ lassen erkennen, dass alle Schülerinnen und Schüler der vierten Jahrgangsstufe bei der Bestimmung der Rechteckslänge enorme Schwierigkeiten besitzen (vgl. Tab. 8.57). Die korrekten Antworten aller TIMSS-Teilnehmerstaaten streuen von 16% bis knapp 47%.

Im internationalen Vergleich zeigt sich, dass Viertklässler der Bundesrepublik Deutschland deutliche Defizite beim Umfangskonzept besitzen und bei dieser Aufgabe im unteren Teil von Tabelle 8.57 rangieren.

Staat	<u>MC 1:</u> 5 cm	<u>MC 2:</u> 6 cm	<u>MC 3:</u> 12 cm	<u>MC 4:</u> 16 cm	Mehrfach- markierung	N <sub>gesamt</sub>
Korea	43,4%	<b>38,4%</b>	3,4%	14,9%	0%	<b>352</b>
Niederlande <sup>1</sup>	22,5%	<b>35,3%</b>	17,0%	24,9%	0,3%	<b>331</b>
Japan	34,2%	<b>32,4%</b>	12,5%	20,8%	0%	<b>553</b>
England	14,6%	<b>29,9%</b>	30,6%	24,9%	0%	<b>377</b>
Schottland	20,8%	<b>24,8%</b>	27,1%	27,3%	0%	<b>398</b>
Österreich <sup>1</sup>	31,3%	<b>24,2%</b>	15,3%	29,2%	0%	<b>307</b>
USA	22,7%	<b>24,2%</b>	25,2%	27,9%	0%	<b>659</b>
Australien <sup>1</sup>	20,1%	<b>23,8%</b>	30,5%	25,5%	0%	<b>708</b>
Neuseeland	18,6%	<b>23,5%</b>	31,0%	26,9%	0%	<b>304</b>
Kanada	20,4%	<b>23,2%</b>	30,4%	25,9%	0%	<b>1012</b>
Norwegen	15,5%	<b>21,1%</b>	35,0%	28,4%	0%	<b>239</b>
Irland	28,7%	<b>20,7%</b>	21,8%	28,6%	0,3%	<b>371</b>
Portugal	22,4%	<b>19,8%</b>	24,6%	33,2%	0%	<b>344</b>
Deutschland <sup>2</sup>	25,9%	<b>19,1%</b>	21,2%	33,7%	0,1%	<b>885</b>
Griechenland	26,2%	<b>17,9%</b>	22,7%	33,1%	0%	<b>378</b>
Tschechien	40,2%	<b>16,3%</b>	19,4%	23,3%	0,8%	<b>408</b>
Ungarn <sup>1</sup>	30,1%	<b>16,0%</b>	19,6%	34,3%	0%	<b>357</b>

<sup>1</sup> Länder, die Vorgaben für Stichprobenausschöpfung verfehlten.

<sup>2</sup> Die Grundschulwerte für Deutschland sind nachträglich zugeordnet.

Tabelle 8.57: Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995  
zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 2

### 8.4.4.6 Zusammenfassung der Analyseergebnisse zu Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“

Grundschülerinnen und Grundschüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe bewältigen Aufgaben zum Operieren mit Größen unterschiedlich erfolgreich (vgl. Abb. 8.60). Während gut drei viertel der Kinder aus einem Anfangszeitpunkt und einer Zeitspanne einen Endzeitpunkt ermitteln können, zeigen die Viertklässler zum Teil erhebliche Defizite beim Umfangs- und Flächenkonzept von Rechtecken und lösen die entsprechenden Items IVb und IVe mit einer Lösungshäufigkeit von 58% bzw. 19%. Darüber hinaus besitzen Kinder erst rudimentäre Grundvorstellungen zur umgekehrten Proportionalität (Item IVd).

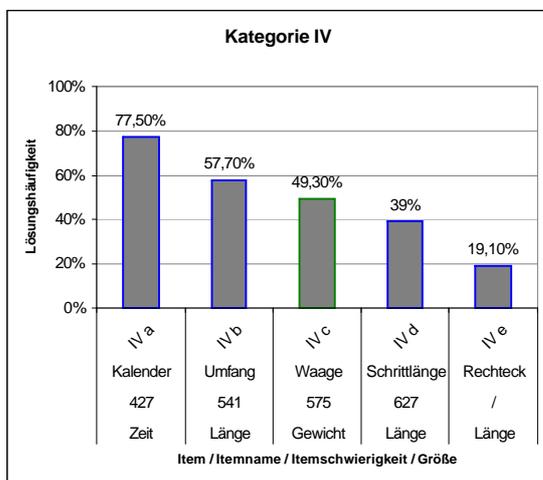


Abbildung 8.60:

Leistungen der Viertklässler  
zu Aufgaben der  
Kategorie IV „Operieren mit Größen“

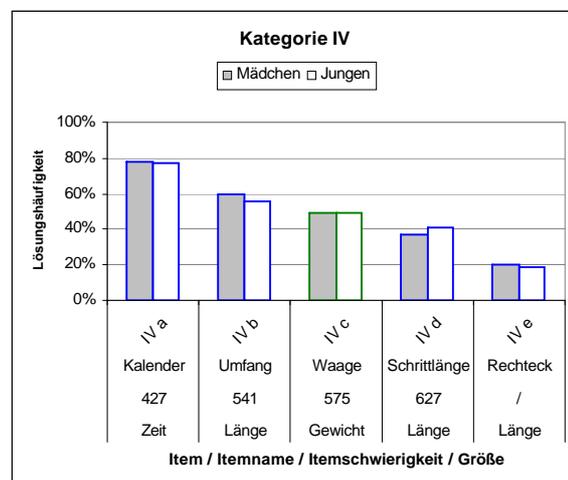


Abbildung 8.61:

Leistungen von Mädchen und Jungen  
zu Aufgaben der  
Kategorie IV „Operieren mit Größen“

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

Zwischen den Leistungen von Mädchen und Jungen bei Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ lassen sich keine signifikanten Unterschiede feststellen (vgl. Abb. 8.61).

Bei allen Aufgaben konnten unerlaubte Mehrfachmarkierungen in nur sehr geringem Ausmaß verzeichnet werden.

Die grafischen Auswertungen belegen (vgl. Abb. 8.62 und Abb. 8.63), dass mit zunehmender Itemschwierigkeit die Leistungen der Kinder aus den verschiedenen Kompetenzstufen der Mathematik und der Naturwissenschaften mit geringen Ausnahmen (vgl. Item IVd Schrittlänge) abnehmen.

Nur wenige der leistungsschwächsten Kinder lösen die Items IVc und IVd.

Aber auch bei den leistungsstärksten Kinder sind bei den Items mit zunehmender Itemschwierigkeit leichte Leistungseinbußen zu verzeichnen. Die Aufgabe IVe zur Längenbestimmung eines Rechtecks aus vorgegebenem Umfang und Breite ist für die Viertklässler kaum lösbar.

Allgemein trennen mit Ausnahme des Items IVe „Rechteck“ die Aufgaben der Kategorie IV die Leistungen der Kinder aus den unterschiedlichen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen sehr gut voneinander. Die ungenügende Trennschärfe des Items IVe, die dazu geführt hat, es für die Skalenbildung nicht zu berücksichtigen, zeigt sich auch in den Abbildungen 8.62 und 8.63.

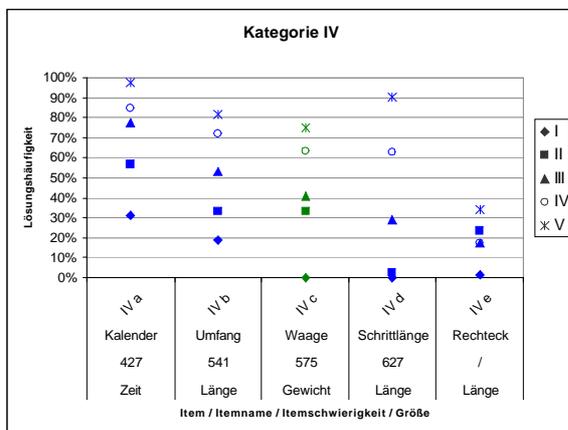


Abbildung 8.62:  
Leistungen der Viertklässler  
aus den Mathematikkompetenzstufen  
zu Items der Kategorie IV

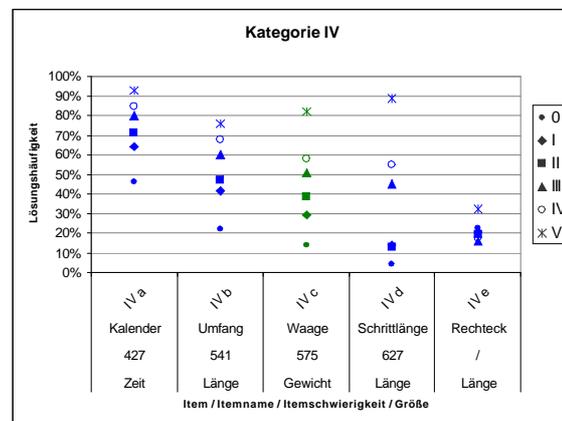


Abbildung 8.63:  
Leistungen der Viertklässler  
aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen  
zu Items der Kategorie IV

blau: Item stammt aus dem Subtest Mathematik; grün: Item stammt aus dem Subtest Naturwissenschaften

## 9 Diskussion und Ausblick

Dieses Kapitel gliedert sich in drei Abschnitte. In Abschnitt 9.1 werden die zentralen Befunde der vorliegenden Arbeit zusammengefasst und diskutiert. Auf der Basis dieser Ergebnisdarstellung beschäftigt sich der Abschnitt 9.2 mit den daraus resultierenden didaktischen Schlussfolgerungen für den Mathematik- und den Sachunterricht der Grundschule. Der Abschnitt 9.3 geht abschließend auf weitere Forschungsfragen zum Thema „Größen und Messen“ der Grundschule, aber auch der weiterführenden Schulen ein.

### 9.1 Diskussion zentraler Befunde der Arbeit

Die vorliegende Arbeit *„Welche Leistungen erbringen Viertklässler bei Aufgaben zum Thema Größen? Untersuchungen zur mathematisch-naturwissenschaftlichen Kompetenz im Grundschulalter im Rahmen von IGLU“* entstand im Rahmen der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung und ihrer Erweiterung um die Fächer Mathematik und Naturwissenschaften (IGLU bzw. IGLU-E) im Jahr 2001. Diese für Deutschland repräsentative Studie lieferte erstmals Befunde über Bildungsvoraussetzungen und Bildungsergebnisse von Viertklässlern in der Bundesrepublik Deutschland. Die vorliegende Arbeit hatte zum Ziel, die Stärken und Schwächen, hier insbesondere Fehlvorstellungen von Grundschulkindern am Ende der vierten Jahrgangsstufe zum Thema Größen anhand von Multiple-Choice-Aufgaben zu untersuchen. So wurden in dieser Arbeit Aufgaben mit verschiedenen „bürgerlichen“ Größen wie Länge, Fläche, Volumen, Zeit, Gewicht und Temperatur analysiert. Die Auswertungen zur Curricularen Validität der untersuchten Testaufgaben zum Thema Größen ergaben, dass mit wenigen Einschränkungen hinsichtlich der Items des Subtest Naturwissenschaften die Größenitems ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne sind und den Kindern am Ende der vierten Jahrgangsstufe geläufig sein müssten. Auf der Basis eines Kategoriensystems mit den vier Gruppen „Ordnen von Größen“, „Schätzen von Größen“, „Zerlegen von Größen“ und „Operieren mit Größen“ wurden die Aufgaben sowohl quantitativ als auch qualitativ ausgewertet. Die Untersuchung machte sich hier insbesondere die für IGLU-E entwickelten Kompetenzstufenmodelle für Mathematik und Naturwissenschaften zunutze. Vor diesem Hintergrund konnten Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Fehlvorstellungen in den verschiedenen Leistungsgruppen analysiert werden. Da einige der IGLU-E-Aufgaben bereits in den

Grundschulstudien TIMSS-POP1 (1995) und CROSSTEL (1993) eingesetzt wurden, konnte trotz des beträchtlichen Zeitabstandes zwischen diesen drei Erhebungen überprüft werden, ob die in IGLU-E festgestellten Fehlkonzepte auch bei Viertklässlern der anderen Populationen auftreten.

Die Ausführungen im ersten Teil der Arbeit zeigen, dass seit den Anfängen der Menschheitsgeschichte bürgerliche Größen für die wirtschaftlich-gesellschaftlichen Bedürfnisse des Menschen von entscheidender Bedeutung sind. Bereits dem alltäglichen Umgang von Größen liegen mathematische Prozesse zugrunde, mit denen Grundvorstellungen verbunden sind. Im Sinne von v. Hofe (1995, 1996) sind diese Vorstellungen wechselseitige Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten, Realkontexten und individuellen mentalen Strukturen. Die Wurzeln der Grundvorstellungen liegen meist in konkreten Handlungsvorstellungen. Das Thema Größen besitzt als eine fundamentale Idee (vgl. Heymann 1989, 1996) einen lebensweltlichen Bezug für Kinder aller Jahrgangsstufen, ist allgemeinbildend und steht damit im Kontext des lebenslangen Lernens. So durchzieht das Thema Größen und Messen die Curricula von Mathematik und Naturwissenschaften vertikal; zu den übrigen Unterrichtsfächern bestehen horizontale Verzweigungen. In der Grundschule wird das Thema Größen vorwiegend im umwelterschließenden Sachrechnen behandelt. Zur Bearbeitung von Sachrechenaufgaben ist eine mathematische Modellbildung erforderlich, in der unter Nutzung von tragfähigen Grundvorstellungen die Welt der Sachsituationen und die Welt der Mathematik stets wechselseitig aufeinander zu beziehen sind. Als Ursachen für Schwierigkeiten beim Lösen von Sachrechenaufgaben existieren aus mathematikdidaktischer Sicht neben der sprachlich-syntaktischen und der Sachstruktur die mathematische und die Prozessstruktur der jeweiligen Aufgabe. Diese Ursachen spiegeln sich in verschiedenen Fehlertypen wider: Identifikationsfehler, Fehler beim Strukturieren sowie fehlerhafte Verkürzung des Lösungsplans bei mehrschrittigen Aufgaben und Fehlern in der verbalen Antwort.

Die Distraktorenanalyse bei den Lösungsergebnissen der Schülerinnen und Schüler lassen Fehlvorstellungen der Viertklässler deutlich werden. Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe lösen nicht nur Größenaufgaben aus den vier verschiedenen Kategorien, sondern auch innerhalb der einzelnen Aufgabengruppen unterschiedlich erfolgreich. Die detaillierten Untersuchungen belegen, dass – wenn auch in unter-

schiedlichem Ausmaß – Kinder aller Leistungsstufen Fehlkonzepte zu einzelnen Aufgaben besitzen. So verzeichnen sowohl leistungsschwache als auch leistungsstarke Kinder bei einzelnen Aufgaben zur Größenthematik gleichermaßen Leistungseinbußen. Die meisten Aufgaben trennen die Viertklässler in den verschiedenen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen gut voneinander. Die „Aufsplittung“ der Leistungen von Kindern hinsichtlich der jeweiligen Kompetenzstufen zeigt aber auch, dass eine Größenaufgabe die Leistungen von Kindern aus den verschiedenen Mathematik- und den Naturwissenschaftskompetenzstufen nicht in gleicher Weise gut trennen muss. Die detaillierten Analysen ergeben, dass bezüglich der Leistungen der Mädchen und Jungen keine signifikanten Leistungsunterschiede existieren. Ein Vergleich der Befunde aus den drei Grundschulstudien IGLU-E, TIMSS und CROSSTEL zeigt, dass Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe nicht nur auf nationaler, sondern auch auf internationaler Ebene bei den untersuchten Aufgaben zur Größenthematik im Wesentlichen gleiche Fehlvorstellungen an den Tag legen. Die Analysen der Aufgaben lassen erkennen, dass Viertklässler mit dem Multiple-Choice-Format kaum Schwierigkeiten besitzen. Fast alle Kinder dieses Alters entscheiden sich für eine der vorgegeben Antwortalternativen. Mehrfachmarkierungen treten nur in sehr geringem Umfang auf. Die Befunde dieser Arbeit belegen, dass im Rahmen von Leistungsstudien für individuelle Förderungsmaßnahmen und damit übergeordnet zur Effizienzsteigerung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts Einzelanalysen dringend erforderlich sind.

Im Folgenden werden die Ergebnisse zu den Items der vier Kategorien „Ordnen von Größen“, „Schätzen von Größen“, „Zerlegen von Größen“ und „Operieren mit Größen“ zusammenfassend dargestellt.

#### *Ergebnisse der Kategorie I „Ordnen von Größen“ (vgl. Kap. 8.4.1).*

Die Analysen zu Aufgaben der ersten Kategorie „Ordnen von Größen“ zeigen, dass Schülerinnen und Schüler am Ende der vierten Jahrgangsstufe erfreuliche Leistungen im Ordnen von Repräsentanten verschiedener Größen erzielen. Die Lösungshäufigkeiten zu den einzelnen Aufgaben streuen von 95% bis knapp 66%. Das Vergleichen von Zahlen (Lösungshäufigkeit von 95%) und Zeitspannen (Lösungshäufigkeit von 86%) fällt den Grundschulkindern leichter als das Ordnen von Flächen (Lösungshäufigkeit von 85%) und Temperaturen (Lösungshäufigkeit von 66%). – Die

Flächenaufgabe weist insbesondere daraufhin, dass Schülerinnen und Schüler auch noch am Ende der vierten Jahrgangsstufe über die Wahrnehmungsdominanz verfügen. – Die Leistungsunterschiede beruhen vermutlich darauf, dass Konzepte der Zahlen, Zeiten und Flächen intensiver im Grundschulunterricht thematisiert werden als das Konzept der Temperatur. Detaillierte Analysen zu den Leistungen der Kinder aus den verschiedenen Mathematik- und Naturwissenschaftskompetenzstufen ergeben, dass Viertklässler der unteren Kompetenzstufen durchaus fähig sind, Repräsentanten verschiedener Größen zu ordnen.

*Ergebnisse der Kategorie II „Schätzen von Größen“ (vgl. Kap. 8.4.2).*

Die Befunde zur zweiten Kategorie „Schätzen von Größen“ fallen im Vergleich zu den Ergebnissen der ersten Kategorie „Ordnen von Größen“ mit niedrigeren Lösungshäufigkeiten aus. Die einzelnen Analysen weisen daraufhin, dass ein erfolgreiches Schätzen von dem zu schätzenden Objekt abhängig ist. So fällt den Viertklässlern das Schätzen der passenden Einheit zur Bestimmung des Gewichts eines Eies mit einer Lösungshäufigkeit von 79% am leichtesten, gefolgt vom Schätzen der Länge eines Bleistifts (Lösungshäufigkeit von 75%), dem Schätzen der Höhe eines normalen Zimmers (Lösungshäufigkeit von 55%) sowie dem Schätzen der Körpertemperatur eines gesunden Menschen (Lösungswahrscheinlichkeit von 62%). Den statistischen Auswertungen der jeweiligen Aufgaben ist zu entnehmen, dass Grundschul Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe Längen- und Gewichtseinheiten voneinander unterscheiden können. Es besteht die Vermutung, dass etwa zehnjährige Schülerinnen und Schüler noch keine hinreichend differenzierte Grundvorstellung zu Längenrepräsentanten im Alltag entwickelt haben. Die Kinder neigen dazu, die gesuchte Zimmerhöhe auf ihre eigene Körpergröße zu beziehen oder die größte angegebene Länge von 5 Metern zu wählen. Die Angabe der Körpertemperatur von 29 °C als die Körpertemperatur eines gesunden Menschen lässt sich vermutlich damit erklären, dass Kinder mit der Zahl 37 eine leicht erhöhte Temperatur und damit ein Unwohlsein in Verbindung bringen. Die Aufgaben dieser Kategorie trennen mit Ausnahme des Items zum Schätzen der Höhe eines normalen Zimmers die Leistungen der Kinder aus den verschiedenen Mathematikkompetenzstufen sehr gut voneinander. Die Aufgabe „Zimmer“ trennt dagegen nicht die Leistungen von Kindern aus den beiden unteren Mathematikkompetenzstufen. Die Items „Bleistift“ und „Körpertemperatur“ ermöglichen schwerpunktmäßig eine „Selektion“ von leistungsschwachen und

leistungsstarken Kindern der Naturwissenschaften. Die Ergebnisse dieser zweiten Kategorie „Schätzen von Größen“ untermauern, dass im Vergleich zum Ordnen von Größen für das Schätzen von Größen anspruchsvollere prozessbezogene Kompetenzen notwendig sind.

#### *Ergebnisse der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ (vgl. Kap. 8.4.3).*

Innerhalb der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ bearbeiten die Viertklässler die Aufgabe zum Konzept einfacher Alltagsbrüche mit einer Lösungswahrscheinlichkeit von 79% am erfolgreichsten. Die Lösungshäufigkeiten der beiden anderen Items fallen mit einer Lösungshäufigkeit von 58% (Item „Würfel“) und 50% (Item „Gewichte“) deutlich niedriger aus. Die Auswertungen zeigen, dass Kinder die Anzahl an Einheitswürfeln, aus denen ein großer Würfel zusammengesetzt ist, durch ein „naives Auszählen“ bestimmen und nicht den Strukturaufbau des großen Würfels beachten. Die Befunde zur Aufgabe „Gewichte“ legen die Vermutung nahe, dass die Grundschul Kinder die in der Aufgabe genannten Gewichtsverhältnisse zwischen den verschiedenen Objekten Dose Fisch, Gewichtsstücken und einem Beutel Reis nicht beachten und nicht in die Aufgabenlösung einbeziehen. Die detaillierten Analysen zu den Leistungen der Kinder aus den verschiedenen Kompetenzstufen der Mathematik und der Naturwissenschaften ergeben, dass besonders dieses Item „Gewichte“ dazu geeignet ist, Kinder verschiedener Leistungskompetenzen in den Fächern Mathematik und Sachunterricht voneinander zu trennen.

#### *Ergebnisse der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ (vgl. Kap. 8.4.4).*

Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe bewältigen Aufgaben der vierten Kategorie „Operieren mit Größen“ unterschiedlich erfolgreich. Während gut dreiviertel der Kinder aus einem gegebenen Anfangszeitpunkt und einer gegebenen Zeitspanne einen Endzeitpunkt ermitteln können (Lösungswahrscheinlichkeit von 78%), zeigen Grundschul Kinder zum Teil erhebliche Defizite beim Umfangs- (Lösungswahrscheinlichkeit von 58%) und Flächenkonzept (Lösungswahrscheinlichkeit von 19%) von Rechtecken. Darüber hinaus besitzen sie erst rudimentäre Grundvorstellungen zur umgekehrten Proportionalität, welche natürlich in der Grundschule noch nicht unter diesem Begriff thematisiert wird (Lösungswahrscheinlichkeit von knapp 40%). Bei der Zeitaufgabe neigen die Kinder zum Fehlkonzent des „Einsundeinsfehler der Nähe“, indem sie den Ausgangszeitpunkt als eine vergangene Woche mitzählen. Die Lö-

sungsergebnisse der Grundschul Kinder am Ende der vierten Jahrgangsstufe zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler Umfang und Flächeninhalt eines Rechtecks verwechseln. Darüber hinaus sind die Lernenden nicht in der Lage, den Gewichts Zusammenhang zweier unterschiedlich großer und schwerer Steine zu erfassen. Ferner verfügen die Kinder nicht über die Erfahrung bzw. das Wissen, dass zum Ausmessen eine Strecke mit Schritten umso mehr Schritte erforderlich sind, je kleiner die Schrittlänge ist.

#### *Diskussion der verwendeten Methoden zur vorliegenden Arbeit.*

Die in der vorliegenden Arbeit gewählte Kombination aus quantitativen und qualitativen Auswertungsmethoden haben sich im Rahmen dieser repräsentativen Leistungsstudie als ein geeignetes Instrument zur Analyse von Fehlkonzepten / Fehlvorstellungen bei Größenaufgaben von Kindern im Multiple-Choice-Format erwiesen. Der Vergleich der Befunde aus der IGLU-E-Studie mit denen der TIMS- bzw. CROSSTEL-Studie bestätigen, dass die in den jeweiligen Größenaufgaben angegebenen Distraktoren typische Fehlkonzepte darstellen. Die gewählten Auswertungsmethoden ermöglichen es allerdings weder individuelle Lösungsantworten noch Denk- oder Lösungswege der Viertklässler zu erfassen. Für weitere Untersuchungen wären im Rahmen von Fallstudien die schriftliche Bearbeitung von Aufgaben mit anschließendem Interview der Kinder zu ihren Lösungen sinnvoll (vgl. Kap. 9.3).

## **9.2 Schlussfolgerungen für die pädagogische Praxis – Didaktische Überlegungen für den Mathematik- und Sachunterricht in der Grundschule**

Die empirischen Befunde dieser Arbeit zeigen, dass das Thema Größen einer intensiven Beschäftigung im Grundschulunterricht der Fächer Mathematik und Naturwissenschaften (Sachunterricht) bedarf. Grundschullehrkräfte sollten in diesen Lernbereichen die Leistungen der Kinder differenziert wahrnehmen können und entsprechend ihrer diagnostischen und methodischen Kompetenz individuelle Fördermaßnahmen sowohl für leistungsschwache als auch für leistungsstarke Kinder entwickeln. Im Rahmen der Größenthematik ist es von besonderer Wichtigkeit, dass Lehrkräfte auf mögliche Fehlvorstellungen von Kindern vorbereitet sind, um im Unterricht diese Fehlkonzepte der Kinder entdecken, aufgreifen, hinterfragen, diskutieren und gemeinsam mit den Kindern überwinden zu können. Derartige Förderungsmaßnah-

men sind auch im Hinblick auf die Bildungsstandards für die Grundschule von Bedeutung.

Die in dieser Arbeit untersuchten Größenaufgaben lassen sich selbstverständlich nicht nur als Testaufgaben zur Leistungsüberprüfung einsetzen. Diese Aufgaben, analoge oder durch Variation erzeugte Aufgaben, können auch im Unterricht als Lernaufgaben zum Forschen oder Üben verwendet werden. Aufgaben aus den vier Kategorien bieten die Chance, Fehler im Klassengespräch vertiefend zu erörtern. Dabei sollen die Kinder erklären, warum sie sich für die von ihnen ausgewählte Antwort entschlossen haben. Ferner könnten die Distraktoren unter dem Motto „Aus Fehlern lernen“ dazu genutzt werden, die Schülerinnen und Schüler darüber nachdenken zu lassen, welche falschen Denkwege sich hinter den inkorrekten Antworten verbergen könnten.

Die Aufgaben bieten zudem Möglichkeiten der Aufgabenvariation. Schülerinnen und Schüler können in selbstständiger Arbeit eigene Fragen mit entsprechenden Antwortvorschlägen entwickeln. Durch ein selbstständiges Konstruieren derartiger Größenaufgaben erlernen die Kinder inhaltliche und auch prozessbezogene Fähigkeiten zum Ordnen, Schätzen, Zerlegen und Operieren mit Größen. Im Mathematik- und Sachunterricht können speziell Items der Kategorien II, III, IV, bei denen die vorgegebenen Antworten eine Kontrolle für die Schülerinnen und Schüler darstellen, im offenen Antwortformat gestellt werden. Mit hoher Wahrscheinlichkeit führt dies zu einer größeren Streubreite von Antwortergebnissen, wie das in Kapitel 4.3.3.2 zitierte Beispiel zur Bestimmung der Körpergröße der Lehrerin von den Kindern gezeigt hat. Diese Vorgehensweise ermöglicht für die Grundschullehrkräfte einen ersten Einblick in die Vielfalt der Grundvorstellungen der Kinder zu Größen.

Das Thema Größen und Messen bietet Anregungen für einen fächerübergreifenden Unterricht mit Themen, die ein vernetztes und kumulatives Lernen ermöglichen. Eine Veränderung in der Aufgaben- und Unterrichtskultur (Gruppenarbeit, eigenes Erfinden von Aufgaben, insbesondere selbstständiges Experimentieren) kann zu einem vermehrten Interesse der Schülerinnen und Schüler an Problemstellungen mit außermathematischen Kontexten und demzufolge auch an Sachrechnen- bzw. Textaufgaben beitragen.

Eine Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts in der Grundschule wird in dem gleichnamigen Projekt SINUS-Transfer Grundschule angestrebt (<http://www.sinus-grundschule.de> [vom 30.03.2005]). Einige der Mathematikmodule beschäftigen sich unter anderem mit den in dieser Arbeit angesprochenen wichtigen Aspekten eines effizienten Unterrichts zum Thema Größen und Messen im Mathematik und Sachunterricht der Grundschule. So regt das Modul G6 „Fächerübergreifend unterrichten“ die Lehrerinnen und Lehrer zu fächerübergreifendem / fächerverbindendem Arbeiten in der Grundschule an. Das Thema Größen und Messen bietet hier eine interessante Möglichkeit für Verknüpfungen verschiedener Unterrichtsfächer wie beispielsweise Mathematik, Sachunterricht und Deutsch. Der an der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler orientierte Maßzahlaspekt kann bei fächerübergreifender Betrachtung besser geklärt und verstanden werden. Die Lernenden können auf diese Weise besonders die Tragweite und Relevanz der Größenthematik erfahren. Innerhalb des SINUS-Ansatzes ermöglicht das Thema Größen aber auch eine Verknüpfung mit anderen Modulbausteinen für eine unterrichtsbezogene Qualitätsentwicklung an Grundschulen. Hierzu zählen beispielsweise Modul 1 „Vielfältige Aufgaben“, Modul 3 „Alltagsvorstellungen aufgreifen und weiterführen“ sowie Modul 5 „Grundlegende Ideen weiter entwickeln“. Aber auch die Module 9 „Entdecken, Fordern und Fördern von Talenten“ und 10 „Lernvoraussetzungen und Lernerfolg diagnostizieren, Lernfortschritte zurückmelden und Vorhersagen verbessern“ sind in diesem Zusammenhang zu nennen. Die in der vorliegenden Arbeit erzielten Ergebnisse können als Ansatzpunkt für Anregungen mit der Modularbeit im SINUS-Grundschulprojekt dienen.

Obwohl der Mensch in einer „vermessenden“ Welt lebt, sollten die Kinder schon frühzeitig Erfahrungen darüber sammeln, dass das Leben auch von *nicht messbaren* „Größen“ geprägt ist, wie beispielsweise Liebe, Freude, Glück, Trauer, Schmerz und Angst.

### **9.3 Fragen künftiger Forschung**

Um einen fundierten Einblick über die Entwicklung von Grundvorstellungen und das Verständnis von Kindern zum Thema „Größen und Messen“ zu bekommen, halte ich es für notwendig, die in meiner Arbeit untersuchten Aufgaben bereits Vor- und Grundschulkindern verschiedener Altersstufen zur Bearbeitung vorzulegen. Auf diese

Weise können frühzeitig Grund- bzw. Fehlvorstellungen der Kinder zu den jeweiligen Items erkannt und erforderliche individuelle Förderungsmaßnahmen in die Wege geleitet werden. Vor allem ließe sich mit dieser Vorgehensweise überprüfen, ob und inwieweit sich im Entwicklungsprozess der Kinder ihre Grund- und Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter verändern.

Eine Analyse der Grundvorstellungen zu Größen ist aber nicht nur für Primarstufenschüler, sondern im Hinblick auf die fundamentale Bedeutung des Messens für die Lebenswelt der Menschen auch für Lernende der weiterführenden Schulen bedeutsam. Die Klärung dieser Forschungsfrage aus entwicklungspsychologischer Perspektive könnte beispielsweise in einer Längsschnittuntersuchung erfolgen. Über eine festgesetzte Zeitspanne wäre es sinnvoll, Kinder vom Vorschul- bis zum Jugendalter in ihrem Entwicklungsprozess bezüglich ihrer Ausbildung von Grundvorstellungen zu den verschiedenen Größenkonzepten zu begleiten. Dies könnte einen wesentlichen Beitrag dazu leisten, Zeitpunkt und Ursache von einzelnen Fehlkonzepten besser zu erfassen.

Für vertiefte Untersuchungen wäre es von Nutzen, Kinder die in dieser Arbeit untersuchten Aufgaben im offenen Antwortformat bearbeiten und sich danach in einem Interviewgespräch zu ihren Lösungen äußern zu lassen. So könnte überprüft werden, ob das Antwortspektrum der in der vorliegenden Arbeit vorgegeben Multiple-Choice-Antworten mit den eigenständigen Antworten der Schülerinnen und Schüler übereinstimmt und wie Denkwege zu bestimmten Antworten führen.

Für die Größenthematisierung im Schulunterricht wäre es allgemein wichtig zu erfahren, ob die im Unterricht eingesetzten Sozialformen und das verwendete Unterrichtsmaterial einen Einfluss auf die Entwicklung des Grundvorstellungskonzeptes der Kinder zu Größen hat. Hierin sehe ich einen weiteren Forschungsansatz, der durchaus im Rahmen des SINUS-Grundschulprojektes näher untersucht werden könnte.

Vor allem muss geklärt werden, wo die „eigentlichen“ Ursachen für individuelle Defizite beim Bearbeiten von Sachrechenaufgaben liegen: Ist es die Textstruktur, ein mangelndes Verständnis der Sachsituation, das Fehlen der erforderlichen naturwis-

senschaftlichen Konzepte oder die fehlerhafte mathematische Verarbeitung der Daten?

## 10 Literatur

- Adams, R. A., Wu, M. L. & Macaskill, G. (1997). Scaling methodology and procedures for the mathematics and science scales. In M. O. Martin & D. L. Kelly (Hrsg.), Third international mathematics and science study, technical report, Vol. II: Implementation and analysis – primary and middle school years (S.111-145). Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Alberti, H. J. v. (1957). Maß und Gewicht. Geschichtliche und tabellarische Darstellungen von den Anfängen bis zur Gegenwart. Berlin: Akademie Verlag.
- American Association for the Advancement of Science (1993). Benchmarks for science literacy. Projekt 2061. New York: Oxford University Press.
- Andrewes, W. J. H. (2003). Eine kurze Geschichte der Zeitmessung. In Spektrum der Wissenschaft. Spezial. Phänomen Zeit (S.26-36). Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft.
- Anselm, H. (1979). Mathematikunterricht in der Grundschule: Theorie, Methode, Lernziele, Beispiele. München: Oldenbourg.
- Barz, J.-U., Ehlbeck, B., Somin, J., Schow, E. & Wysfeld, B. H. (2001). Maßstäbe. Magazin der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt PTB. Heft 1. (<http://www.ptb.de/de/publikationen/masstaebe/index.html> [vom 19.05.2004]).
- Baumert, J., Lehmann, R. H. & Lehrke, M. (1997). TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.
- Baumert, J., Evans, R. & Geiser, H. (1998). Technical problem solving among 10-year-old students related to science achievement, out-of-school experience, domain-specific control beliefs, and attribution patterns. *Journal of Research in Science Teaching*, 35 (9), S.987-1013.
- Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J. & Weiß M. (2001). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.
- Beckmann, A. (2003a). Fächerübergreifender Unterricht. Konzept und Begründung. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Beckmann, A. (2003b). Fächerübergreifender Mathematikunterricht. Teil 1: Ein Modell, Ziele und fachspezifische Diskussion. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Beckmann, A. (2003c). Fächerübergreifender Mathematikunterricht. Teil 2: Mathematikunterricht in Kooperation mit dem Fach Physik. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

- Benner, I. (1999). Vom Stundenglas. In W. Schäfke (Hrsg.), *Wie die Zeit vergeht* (S.82-83). Köln: Du Mont.
- Bergmann, L. & Schaefer, C. (1990). *Lehrbuch der Experimentalphysik. Band I. Mechanik • Akustik • Wärme*. Berlin: Walter de Gruyter.
- Betteridge, H. T. (1988). *Cassell's German Dictionary (1978). German - English. English - German*. New York: Macmillian Publishing Company.
- Beutelspacher, A. & Weigand, H.-G. (1998). Die faszinierende Welt der Zahlen. In *mathematik lehren* 87, S. 4-8.
- Blankenagel, J. (1994). *Elemente der angewandten Mathematik: Mathematische Texte, Band 2*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag.
- Blum, W. & Wiegand, B. (1998). Wie kommen die deutschen TIMSS-Ergebnisse zustande? Ein Interpretationsansatz auf der Basis stoffdidaktischer Analysen. In W. Blum & M. Neubrand, *TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen* (S.28-34). Schroedel: Hannover.
- Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (Hrsg.) (2003). *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.
- Bos, W., Lankes, E.-M., Prenzel, M., Schwippert, K., Valtin, R. & Walther, G. (Hrsg.) (2004). *IGLU. Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich*. Münster: Waxmann.
- Bruder, R. (2003). Konstruieren – auswählen – begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In H. Ball, G. Becker, R. Bruder, R. Girmes, L. Stäudel, F. Winter (Hrsg.), *Aufgaben. Lernen fördern – Selbstständigkeit entwickeln. Friedrich Jahresheft XXI* (S.12-15). Seelze: Friedrich.
- Brügelmann, H. (2001). Fehlertoleranz. In *Die Grundschulzeitschrift* 15 (141), S.56-57.
- Carlson, J. S. (1980). Kulturvergleichende Untersuchungen im Rahmen von Piagets Theorie. In G. Steiner (Hrsg.), *Die Psychologie des 20. Jahrhunderts, Band VII, Piaget und die Folgen. Entwicklungspsychologie • Denkpsychologie • Genetische Psychologie* (S.709-728), Zürich: Kindler.
- Dahl, K. & Nordqvist, S. (1996). *Zahlen, Spiralen und magische Quadrate. Mathe für jeden*. Hamburg: Friedrich Oetinger.
- Damerow, P. & Lefèvre, W. (1981). *Rechenstein, Experiment, Sprache. Historische Fallstudien zur Entstehung der exakten Wissenschaften*. Stuttgart: Klett.
- Danielson, Ch. (2005). *Perimeter in the Curriculum. For the Learning of Mathematics* 25, 1. Canada: FLM Publishing Association.

- Das Telefonbuch der Deutschen Telekom für Kiel, Neumünster, Rendsburg 2004 / 2005.
- Davier, M. v. (2002). eGPCM – an experimental software for mixed generalized partial credit models. EGPCM is based on WINMIRA algorithms and is written by M. von Davier, currently at Educartonal Testing Service, email: mvdavier@ets.org.
- Devlin, K. (2002). *Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.
- Dilke, O. A. W. (1991). *Mathematik, Maße und Gewichte in der Antike.* Stuttgart: Reclam.
- Dröge, R. (1995). Zehn Gebote für einen schülerorientierten Sachrechenunterricht. In *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* 23 (9), S.413-423.
- Dröge, R. (2001). Sachrechnen (besser) verstehen lernen. In Ch. Selter & G. Walther, *Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller* (S.57-74). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett.
- Duden (2002). *Wörterbuch der deutschen Idiomatik. Band 11: Redewendungen.* Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: Dudenverlag.
- Dusy, T. (2002). *Käsekuchen.* München: Gräfe und Unzer.
- Einsiedler, W. (1976). *Lehrstrategien und Lernerfolg.* Weinheim: Beltz.
- Erichson, Ch. (1991). Sachtexte lesen, mit denen man rechnen kann. In *Die Grundschulzeitschrift* 48, S.22-25.
- Erichson, Ch. (2004). Simulation und Authentizität. Wie viel Realität braucht das Sachrechnen? In M. Baum & H. Wielpütz, *Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch* (S.185-194). Seelze: Kallmeyer.
- Franke, M. (1997). Missverständnisse oder mathematische Fehler? In *Grundschulunterricht* 1, S.30-33.
- Franke, M. & Schipper, W. (2001). Sachrechnen. In W. Einsiedler, M. Götz, H. Hacker, J. Kahlert & R. W. Keck (Hrsg.), *Handbuch der Grundschulpädagogik und Grundschuldidaktik* (S.468-472). Regensburg: Klinkhardt.
- Franke, M. (2003). *Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule.* Heidelberg, Berlin: Spektrum.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Boston, Lancaster: D. Reidel Publishing Company.
- Führer, L. (2004). Fehler als Orientierungsmittel. In *mathematik lehren* 125, S.4-8.

- Gallin, P. & Ruf, U. (1998). Sprache und Mathematik in der Schule. Seelze: Kallmeyer.
- Gericke, H. (1970). Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim: Bibliographisches Institut.
- Gericke, H. (1984). Mathematik in Antike und Orient. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Goswami, U. (2001). So denken Kinder. Eine Einführung in die Psychologie der kognitiven Entwicklung. Berlin: Huber.
- Grabis, B. (2003). Pettersson und Findus. Erstes Rechnen mit Zahlen bis 20. Hamburg: Xenos.
- Grassmann, M. (1999). Zur Entwicklung von Zahl- und Größenvorstellungen als wichtigem Anliegen des Sachrechnens. In Grundschulunterricht 46(4), S.31-34.
- Grehn, J. (Hrsg.) (1992). Metzler Physik. Hannover: Schroedel.
- Griesel, H. (1973). Die Neue Mathematik für Lehrer und Studenten. Band 2: Größen, Bruchzahlen, Sachrechnen. Hannover: Schroedel.
- Griesel, H. (1996). Grundvorstellungen zu Größen. In mathematik lehren 78, S.15-19.
- Grund, K.-H. (1992). Größenvorstellungen – eine wesentliche Voraussetzung beim Anwenden von Mathematik. In Grundschule 12 (24), S.42-44.
- Hasemann, K. (2003). Anfangsunterricht Mathematik. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Hengartner, E. & Wieland, G. (2001). Eigene Versuche der Kinder fördern und verstehen lernen: Übungsbeispiele zum Sachrechnen. In Ch. Selter & G. Walther, Mathematik lernen und gesunder Menschenverstand. Festschrift für Gerhard Norbert Müller (S.83-90). Leipzig, Stuttgart, Düsseldorf: Klett.
- Heymann, H. W. (1989). Allgemeinbildender Mathematik – was könnte das sein? In mathematik lehren 33, S.4-9.
- Heymann, H. W. (1996). Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Band 13. Weinheim & Basel: Beltz.
- Hofe, R. v. (1995). Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum.
- Hofe, R. v. (1996). Grundvorstellungen – Basis für inhaltliches Denken. In mathematik lehren 78, S.4-8.
- Hofe, R. v. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. In mathematik lehren 118, S.4-8.

- Homann, G. (1992). Messen und schätzen im Mathematikunterricht. In *Grundschule* 11(24), S.10-11.
- Huntley, M. A. (1998). Design and Implementation of a Framework for Defining Integrated Mathematics and Science Education. In *School Science and Mathematics*, Volume 98(6), S.320-327.
- Ifrah, G. (1992). *Die Zahlen. Die Geschichte einer großen Erfindung*. Frankfurt am Main, New York: Campus.
- Kino-Programm „Neues Studio“ in Kiel vom Januar 2005.
- Kirsch, A. (1994). *Mathematik wirklich verstehen. Eine Einführung in ihre Grundbegriffe und Denkweisen*. Köln: Aulis.
- Kurzweil, P. (2000). *Das Vieweg Einheiten-Lexikon. Begriffe, Formeln und Konstanten aus Naturwissenschaften, Technik und Medizin*. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Lankes, E.-M., Bos, W., Mohr, I., Plaßmeier, N., Schwippert, K., Sibberns, H. & Voss, A. (2003). Anlage und Durchführung der Internationalen Grundschul-Lese-Untersuchung (IGLU) und ihrer Erweiterung um Mathematik und Naturwissenschaften (IGLU-E). In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich (S.7-28)*. Münster: Waxmann.
- Lauter, J. (1977) (Hrsg.). *Der Mathematikunterricht in der Grundschule. Didaktisch-methodische Hilfen für die Unterrichtspraxis*. Donauwörth: Ludwig Auer.
- Lauter, J. (1995). *Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch-didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule*. Donauwörth: Ludwig Auer.
- Lobemeier, K., Walther, G. & Geiser, H. (2004). Der Zusammenhang von Leistungskennwerten und Aufgabenkontextbezug im Fach Mathematik am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In I. Esslinger-Hinz & H. Hahn (Hrsg.), *Kompetenzen entwickeln – Unterrichtsqualität in der Grundschule steigern. Entwicklungslinien und Forschungsbefunde (S.165-174)*. Baltmannsweiler: Schneider.
- Lonning, R. A. & DeFranco, T. C. (1994). Development and Implementation of an Integrated Mathematics / Science Preservice Elementary Methods Course. In *School Science and Mathematics*, Volume 94(1), S.18-25.
- Lonning, R. A. & DeFranco, T. C. (1997). Integration of Science and Mathematics: A Theoretical Model. *School Science and Mathematics*, Volume 97(4), S.212-215.
- Lonning, R. A., DeFranco, T. C. & Weinland, T. P. (1998). Development of Theme-based, Interdisciplinary, Integrated Curriculum: A Theoretical Model. In *School Science and Mathematics*, Volume 98(6), S.312-319.

- Lorenz, J. H. (1992). Größen und Maße in der Grundschule. In *Grundschule* 11(24), S.12-14.
- Mackay, Ch. K. (1980). Vom voroperatorischen zum konkret-operatorischen Denken. In G. Steiner (Hrsg.), *Die Psychologie des 20. Jahrhunderts*, Band VII, Piaget und die Folgen. *Entwicklungspsychologie • Denkpsychologie • Genetische Psychologie* (S.121-154), Zürich: Kindler.
- Maisch, G. & Wisch, F.-H. (1996). *Gebärdenlexikon. 1. Grundgebärden*. Hamburg: hörgeschädigte Kinder GmbH.
- Martin, M. O. , Mullis, I. V. S., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Smith, T. A. & Kelly, D. L. (1997). *Science achievement in the primary school years: IEA's third international mathematics and science study (TIMSS)*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Martin, M. O. & Kelly, D. L. (1997). *Third international mathematics and science study, technical report, vol. II: Implementation and analysis – primary and middle school years*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- McBratney, S. (1994). *Guess how much I love you*. London, Boston, Sydney: Walker Books.
- McDonald, J. & Czerniak, C. (1994). *Developing Interdisciplinary Units: Strategies and Examples*. In *School Science and Mathematics*, Volume 94(1), S.5-10.
- Menninger, K. (1957). *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. Band 1: Zählreihe und Zahlsprache*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Menninger, K. (1958). *Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. Band 2: Zahlschrift und Rechnen*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Mietzel, G. (2002). *Wege in die Entwicklungspsychologie. Kindheit und Jugend*. Weinheim: Beltz.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Beaton, A. E., Gonzalez, E. J., Kelly, D. L. & Smith, T. A. (1997). *Mathematics achievement in the primary school years. IEA's third international mathematics and science study*. Chestnut Hill, MA: Boston College.
- Neubrand, J. (2002). *Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen: Selbsttätiges Arbeiten in Schülerarbeitsphasen in den Stunden der TIMSS-Video-Studie*. Hildesheim: Franzbecker.
- Neubrand, J. (2003). *Aufgabe = Aufgabe? Mathematische Aufgaben im internationalen Vergleich*. In H. Ball, G. Becker, R. Bruder, R. Girmes, L. Stäudel, F. Winter (Hrsg.), *Aufgaben. Lernen fördern – Selbstständigkeit entwickeln*. Friedrich Jahresheft XXI (S.30f.). Seelze: Friedrich.
- Oerter, R. & Montada, L. (Hrsg.) (2002). *Entwicklungspsychologie*. Weinheim, Basel, Berlin: Beltz.

- Padberg, F. (1992). Didaktik der Arithmetik. Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag.
- Padberg, F. (2005). Didaktik der Arithmetik für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. Heidelberg: Spektrum.
- Padelt, E. & Laporte, H. (1976). Einheiten und Größenarten der Naturwissenschaften. Fachbuchverlag Leipzig.
- Polya, G. (1949). Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme. Bern: Francke AG.
- Prenzel, M., Geiser, H., Langeheine, R., Lobemeier, K. (2003). Das naturwissenschaftliche Verständnis am Ende der Grundschule. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich (S.143-187). Münster: Waxmann.
- Quak, U. (Hrsg.) (1998). Die Fundgrube für den Mathematik-Unterricht in der Sekundarstufe I. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Radatz, H. & Schipper, W. (1983). Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover: Schroedel.
- Rasch, R. (2001a). Offenheit und Zielorientierung bei der Arbeit mit Sachaufgaben. In Grundschule 3, S.21-24.
- Rasch, R. (2001b). Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Rasch, R. (2003). 42 Denk- und Sachaufgaben. Wie Kinder mathematische Aufgaben lösen und diskutieren. Kallmeyer: Seelze.
- Ratzka, N. (2003). Mathematische Fähigkeiten und Fertigkeiten am Ende der Grundschulzeit. Empirische Studien im Anschluss an TIMSS. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Rauchhaupt, U. v. (2004). Am Amazonas ist das Rechnen nicht so wichtig. In der FAZ - Sonntagszeitung vom 22. August 2004, S.57.
- Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Literaturüberblick. In F. E. Weinert & A. Helmke (Hrsg.), Entwicklung im Grundschulalter (S.144-151). Weinheim: Psychologie Verlags Union.
- Richter, K. & Richter, K. (1998). Mathe-Welt „Reise in die Welt der Zahlendarstellungen“. In mathematik lehren 91, S.23-46.
- Roth, B. (1999). Sonnenuhren – Monduhren – Sternenuhren. Über die „natürliche“ Zeit und deren Messung. In W. Schäfer (Hrsg.), Wie die Zeit vergeht (S.60-79). Köln: Du Mont.

- Rödler, K. (1998). Die Geschichte der Zahlen und des Rechnens. In *mathematik lehren* 87, S.9-14.
- Schäfke, W. (Hrsg.) (1999). *Wie die Zeit vergeht*. Köln: DuMont.
- Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (2000). *Handbuch für den Mathematikunterricht*, 4. Schuljahr. Hannover: Schroedel.
- Schlierf, W. J. (1949). *Liturgischer Kalender für das Jahr 2005*. Mönchengladbach: Kühlen Verlag.
- Schmidt, S. & Weiser, W. (1986). Zum Maßzahlverständnis von Schulanfängern. In *Journal für Mathematik-Didaktik* 7, S.121-154.
- Selter, Ch. (2003). Kindern im Unterricht das Recht auf eigenes Denken gewähren. Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht. Klett ThemenDienst Schule Nr.18 (04) sowie unter <http://www.klett-themendienst.de> [vom 30.11.2004].
- Siegler, R. S. (2001). *Das Denken von Kindern*. München: Oldenbourg.
- Spiegel, H. & Wenning, A. (1991). Lückenhafte Zeitungsmeldungen – Sachmathematik einmal anders. In *SMP* 19, Nr.3, S.114-122.
- Spiegel, H. & Selter, Ch. (2003). *Kinder & Mathematik. Was Erwachsene wissen sollten*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Stäudel, L., Werber, B., Freimann, T. (2002). *Naturwissenschaften – Verstehen & Anwenden*. Seelze-Velber: Friedrich.
- Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg im Breisgau: Herder.
- Trapp, W. (2001). *Kleines Handbuch der Maße, Zahlen, Gewichte und der Zeitrechnung*. Stuttgart: Reclam.
- Übelacker, E. (1990). *Was ist Was. Die Zeit*. Band 22. Nürnberg: Tesloff.
- Vohns, A. (2002). Das Messen als fundamentale Idee im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. <http://www.math.uni-siegen.de/didaktik/downl/sistudien61.pdf> [vom 17.12.2004].
- Walther, G., Geiser, H. Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2003). Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, G. Walther, R. Valtin (Hrsg.), *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich* (S.189-226). Münster: Waxmann.
- Winter, H. (1976). Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule. In *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe* 4, S.337-353.

- Winter, H. (1992). Sachrechnen in der Grundschule. Problematik des Sachrechnens – Funktionen des Rechnens – Unterrichtsprojekte. Berlin: Cornelsen Scriptor.
- Winter, H. (1994). Modelle als Konstrukte zwischen lebensweltlichen Situationen und arithmetischen Begriffen. In Grundschule 3 (26), S.10-13.
- Winter, H. (2001). Mensch und Maß – ein kurzes Kapitel leiblicher Mathematik. In Die Grundschulzeitschrift 15 (141), S.46-49.
- Winter, H. (2004). Gute Aufgaben für das Sachrechnen. In M. Baum & H. Wielpütz, Mathematik in der Grundschule. Ein Arbeitsbuch (S.177-183). Seelze: Kallmeyer.
- Wittmann, E. Ch. (1981). Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.
- Wu, M. L., Adams, R. J. & Wilson, M. R. (1997). ConQuest. Generalised Item Response Modelling Software. Draft Release 2. Melbourne: Australien Council for Educational Research (ACER).
- Zenker-Schweinstetter, E. S. (1994). Alte Längemaße. In Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe, 22 (3), S.103-110.

### **Zeitschriften:**

- Grundschule Sachunterricht 11 (2001), S.6.
- mathematik lehren 2003 (118), S.59.

### **Informationen aus dem Internet:**

- <http://www.ph-linz.at/ZIP/didaktik/m/sprich/sprich.htm> [vom 02.11.2004]
- <http://www.sabon.org/leonardo> [vom 03.12.2004]
- <http://www.ptb.de> [vom 13.05.2004]
- <http://www.iso.org> [vom 13.05.2004]
- <http://www.ptb.de/de/wegweiser/einheiten/si/geschichte.html> [vom 13.05.2004]
- <http://www.bipm.org> [vom 20.05.2004]
- [http://www1.bipm.org/en/convention/member\\_states/](http://www1.bipm.org/en/convention/member_states/) [vom 05.11.2004]

- [http://www1.bipm.org/jsp/en/print/PrintCountryDetails.jsp?ISO\\_CODE=DE](http://www1.bipm.org/jsp/en/print/PrintCountryDetails.jsp?ISO_CODE=DE)  
[vom 29.11.2004]
- [http://www.koboldmessring.com/tech\\_area/grundlag/Tabellen/tabell5.htm](http://www.koboldmessring.com/tech_area/grundlag/Tabellen/tabell5.htm) [vom 28.08.2003]
- <http://www.kmk.org> [vom 20.12.2004]
- <http://www.standards.nctm.org> [vom 30.11.2004]
- <http://www.emis.de/MATH/DI.html> [vom 20.12.2004]
- <http://reitberger-berlin.de/sachmath.htm> [vom 16.12.2004]
- <http://www.erzwiss.uni-hamburg.de/IGLU/home.htm> [vom 31.01.2005]
- <http://isc.bc.edu/timss1995i/Database.html> [vom 28.11.2003]
- <http://www.sinus-grundschule.de> [vom 30.03.2005]

## 11 Anhang

<b>Anhang 1:</b>	Guess how much I love you .....	215
<b>Anhang 2:</b>	Größen in Redensarten und Sprichwörtern der Deutschen Sprache – eine Auswahl .....	216
<b>Anhang 3:</b>	Die klassischen Proportionsstudien des menschlichen Körpers von Leo- nardo da Vinci .....	218
<b>Anhang 4:</b>	Alte Maße .....	219
	(a) Sumerische Maße .....	219
	(b) Europäische Längeneinheiten im 1. Drittel des 19. Jahrhunderts .....	221
<b>Anhang 5:</b>	Der Meterkonvention angehörende Länder .....	223
<b>Anhang 6:</b>	Nichtmetrische Maße in USA und in GB .....	224
<b>Anhang 7:</b>	Vergleichen von Repräsentanten einzelner Größen bzgl. Gleichheit oder Kleinerbeziehung .....	227
<b>Anhang 8:</b>	Division in verschiedenen Größenbereichen .....	228
<b>Anhang 9:</b>	Fachwissenschaftliche Inhalte der Fächer Mathematik, Physik, Biologie und Chemie in den weiterführenden Schulen .....	229
<b>Anhang 10:</b>	How to solve it – Der Problemlöseprozess von George Polya .....	233

## **Anhang 1: GUESS HOW MUCH I LOVE YOU, Sam McBratney (1994)**



Little Nutbrown Hare, who was going to bed, held on tight to Big Nutbrown Hare's very long ears. He wanted to be sure that Big Nutbrown Hare was listening. "Guess how much I love you," he said. "Oh, I don't think I could guess that," said Big Nutbrown Hare.

"This much," said Little Nutbrown Hare, stretching out his arms as wide as they could go. But Big Nutbrown Hare had even longer arms. "But I love YOU this much," he said. Hmm, that is a lot, thought Little Nutbrown Hare.

"I love you as high as I can reach," said Little Nutbrown Hare. "I love you as high as I can reach," said Big Nutbrown Hare. That is quite high, thought Little Nutbrown Hare. I wish I had arms like that.

Then Little Nutbrown Hare had a good idea. He tumbled upside down and reached up the tree trunk with his feet. "I love you all the way up to my toes!" he said. "And I love you all the way up to your toes," said Big Nutbrown Hare, swinging him up over his head.

"I love you as high as I can HOP!" laughed Little Nutbrown Hare, bouncing up and down. "But I love you as high as I can hop," smiled Big Nutbrown Hare – and he hopped so high that his ears touched the branches above. That's good hopping, thought Little Nutbrown Hare. I wish I could hop like that.

"I love you all the way down the lane as far as the river," cried Little Nutbrown Hare. "I love you across the river and over the hills," said Big Nutbrown Hare. That's very far, thought Little Nutbrown Hare. He was almost too sleepy to think any more. Then he looked beyond the thorn bushes, out into the big dark night. Nothing could be further than the sky. I love you right up to the MOON," he said and closed his eyes. "Oh, that's far," said Big Nutbrown Hare. "That is very, very far."

Big Nutbrown Hare settled Little Nutbrown Hare into his bed of leaves. He leaned over and kissed him good night. Then he lay down close by and whispered with a smile, "I love you right up to the moon – AND BACK."

## Anhang 2: Größen in Redensarten und Sprichwörtern der Deutschen Sprache – eine Auswahl

(aus: Duden (2002). Wörterbuch der deutschen Idiomatik. Band 11: Redewendungen. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: Dudenverlag;  
<http://www.ph-linz.at/ZIP/didaktik/m/sprich/sprich.htm> [vom 02.11.2004])

### MASS

- das Maß ist voll
- weder Maß noch Ziel kennen
- jmdm. Maß nehmen
- in / mit Maßen
- mit zweierlei Maß messen
- über die / über alle Maßen
- ...

### MESSEN

- jmdn., etw. mit gleicher Elle Messen
- mit jmdn. seine Kräfte messen
- ...

### GELD

- **Geld** regiert die Welt
- Zeit ist **Geld**
- jmdn. den **Geldhahn** zudrehen
- etw. für bare **Münze** nehmen
- auf jmd., etw. **gemünzt** sein
- keinen **Pfennig** wert sein
- der **Groschen** fällt **pfennigweise**
- nicht die Welt **kosten**
- fragen **kostet** nichts
- Was **kostet** die Welt?
- ...

### LÄNGE

- sich in die **Länge** ziehen
- am **längeren** Hebel sitzen
- **lange** Latte
- ehrlich währt am **längsten**
- eine **lange** Leitung haben
- **kurz** und schmerzlos
- **hoch** hinauswollen
- das lässt **tief** blicken
- es **weit** bringen
- ...

### FLÄCHE

- **breit** sein
- so **breit** wie lang sein
- sich **breit** machen
- etw. **breit** schlagen
- einen **breiten** Rücken haben
- groß und **breit**
- lang und **breit**
- weit und **breit**
- in die **Breite** gehen
- ...

### VOLUMEN

- **voll** und ganz
- aus dem **Vollen** schöpfen
- mit **vollen** Händen
- beide Hände **voll** zu tun haben
- aus **voller** Lunge singen
- etw. in **vollen** Zügen genießen
- **leer** ausgehen
- ein **Fass** ohne Boden
- **Raum** ist in der kleinsten Hütte
- ...

### ZEIT

- andere **Zeiten**, andere Sitten
- **Zeit** ist Geld
- **Zeit** heilt alle Wunden
- kommt **Zeit**, kommt Rat
- morgen ist auch noch ein **Tag**
- die **Stunde** der Wahrheit
- in **Sekundenschnelle**
- jmdn. paar **Takte** sagen
- immer und **ewig**
- rund um die **Uhr**
- ...

### MASSE

- nicht die **Masse** sein
- auf etw. **Gewicht** legen
- sich etw. **leicht** machen
- keinen **leichten** Stand haben
- eine der **leichtesten** Übung sein
- **schwer** von Begriff sein
- **schweren** Herzens
- eine **schwere** Zunge
- das Zünglein an der **Waage** sein
- alles auf die **Waagschale** legen
- ...

### TEMPERATUR

- auf die **kalte** Tour
- jmdn. **kalt** erwischen
- das ist **kalter** Kaffee
- das **Eis** brechen
- die Spitze des **Eisbergs**
- sich jmdn. **warm** halten
- weggehen wie **warme** Semmeln
- um den **heißen** Brei herumreden
- für jmdn. durchs **Feuer** gehen
- für jmdn. die Hand ins **Feuer** legen
- ...

Die Größe Zeit wird häufig zur Angabe von Längen verwendet, was sich in den Redewendungen der Größe Länge widerspiegelt: etwas auf die **lange** Bank schieben // **langes** Leiden // viel reden, wenn der Tag **lang** ist // da kannst du **lange** warten // dafür muss ´ne alte Frau / Oma **lange** stricken ...

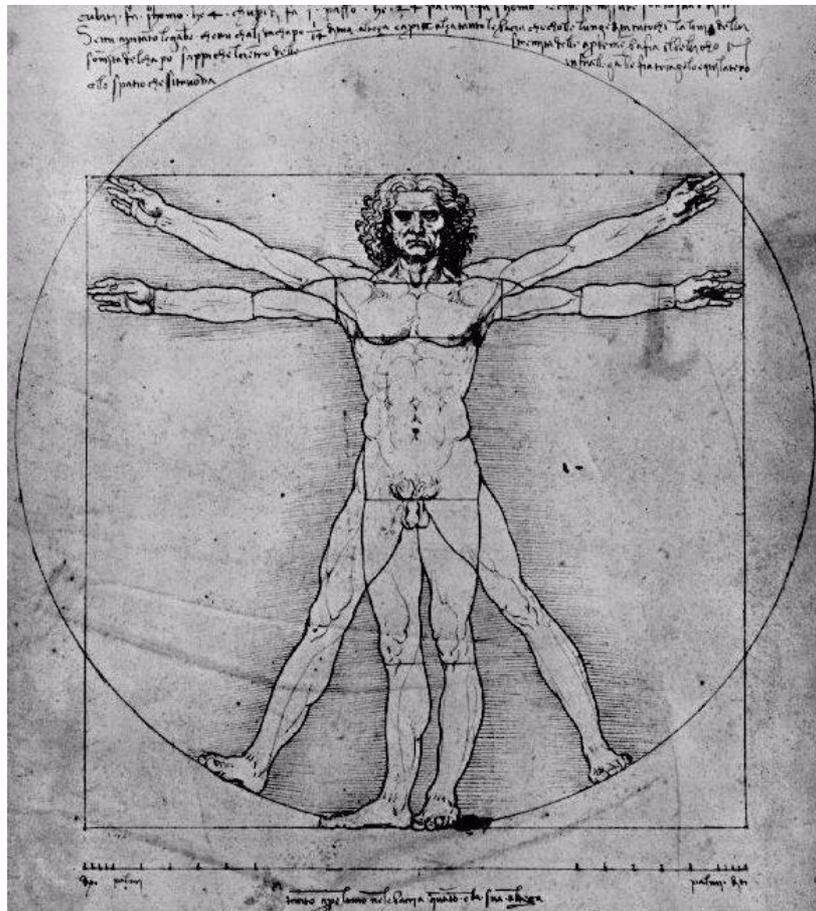
## **Körperbezogene Metapher**

(aus: Heinrich Winter (2001). Mensch und Maß – ein kurzes Kapitel leiblicher Mathematik. Die Grundschulzeitschrift, 15 (141), S.46-49.)

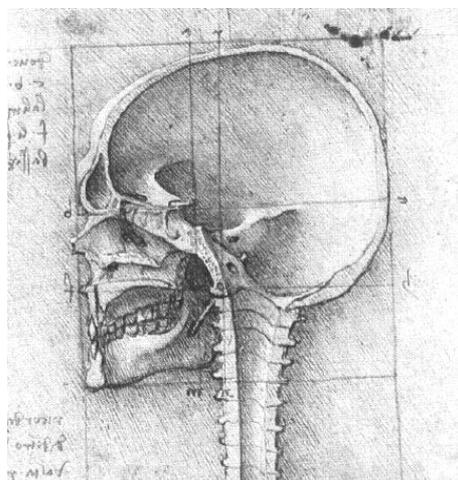
<b>Stückzahl:</b>	an den Fingern einer Hand abzählen können
<b>Länge:</b>	etwas um Haaresbreite verfehlen
<b>Flächeninhalt:</b>	einen breiten Rücken haben
<b>Rauminhalt:</b>	eine Faustdicke Chance bekommen
<b>Geschwindigkeit:</b>	etwas im Handumdrehen erledigen
<b>Gewicht:</b>	etwas schwer im Magen liegen haben
<b>Temperatur:</b>	warmherzig sein
<b>Geldbetrag:</b>	sich etwas einverleiben

**Anhang 3: Die klassischen Proportionsstudien des menschlichen Körpers von Leonardo da Vinci**

(<http://www.sabon.org/leonardo> [vom 03.12.2004])



Vitruv



Schädel

## Anhang 4: Alte Maße

Die nachfolgenden Tabellen geben einen Überblick über die Sumerischen Maße und die Längeneinheiten in Europa im 19. Jh. Die Werte der damaligen Zeit sind auf heutige Werte des metrischen SI-Einheitensystems umgerechnet.

Die in den Tabellen angegebenen Zahlen geben das Verhältnis zwischen den jeweiligen Einheiten an. So entspricht beispielsweise für das Weg- und Längemaß der Sumerer: 1 danna = 30 giš.

### (a) Sumerische Maße (vgl. Trapp 2001, S.201ff.)

Bei der Umrechnung in metrische Werte wurde die Elle zu 50 cm angenommen.

Genauere Maße: Gudea-Elle: 45,59 cm, Nippur-Elle: 51,86 cm.

Die Längeneinheit „(Gersten-)Korn“ wurde vermutlich erst in assyrischer Zeit gebraucht.

### Sumerische Längeneinheiten

#### a) Weg- und Landmaße

danna	giš	es	maš-esch	gar(-du)	gi
<i>Meile</i>	<i>sechzig</i>	<i>Meßschnur</i>	$\frac{1}{2}$ <i>Meßschnur</i>	<i>Vermessungsmaß</i>	<i>Rohr</i>
10 800 m	360 m	60 m	30 m	6 m	3 m
1	30	180	360	1800	3600
	1	6	12	60	120
		1	2	10	20
			1	5	10
				1	2

#### b) Kleinmaße

gi	kuš-ara	kuš	kuš	šu-bad	šu-dû-a	šu-si	še
<i>Rohr</i>	<i>Schritt</i>	<i>Elle</i>	<i>Fuß</i>	<i>Spanne</i>	<i>Hand, Ziegel</i>	<i>Finger</i>	<i>(Gersten-) Korn</i>
300 cm	75 cm	50 cm	33,3 cm	25 cm	16,7 cm	1,67 cm	0,28 cm
1	4	6	9	12	18	180	1080
	1	1,5	2,25	3	4,5	45	270
		1	1,5	2	3	30	180
			1	1,33	2	20	120
				1	1,5	15	90
					1	10	60
						1	6

### Sumerische Flächeneinheiten

šar-u	šar	bur-u	bur (-gan)	eše	gan, iku	gar	sar	gin	še
					<i>Feld</i>		<i>Garten, Beet</i>		<i>(Gersten-) Korn</i>
<b>38,1 km<sup>2</sup></b>	<b>3,81 km<sup>2</sup></b>	<b>0,635 km<sup>2</sup></b>	<b>63 540 m<sup>2</sup></b>	<b>21 180 m<sup>2</sup></b>	<b>3530 m<sup>2</sup></b>	<b>2120 m<sup>2</sup></b>	<b>35,3 m<sup>2</sup></b>	<b>0,59 m<sup>2</sup></b>	<b>0,196 m<sup>2</sup></b>
1	10	60	600	1800	10 800	18 000	1	60	180
	1	6	60	180	1080	1800		1	3
		1	10	30	180	300			1
			1	3	18	30	1800		
				1	6	10	600		
					1	1,66	100		
						1	60		

### Sumerische Volumeneinheiten

guru	gur-lugal	gur-mah	gur-sag-gal	gur, 2 ul	gur, ul	ban	silā	gin
<i>Tonne</i>	<i>gur des Königs</i>	<i>Groß-gur</i>	<i>Haupt-gur</i>	<i>Doppel-gur</i>	<i>Topf</i>	<i>kleiner Krug</i>	<i>Getreide-Hohlmaß</i>	<i>Schekel wörtlich: 1/60 (šila) = 1/72 dm<sup>3</sup></i>
<b>3 m<sup>3</sup></b>	<b>250 dm<sup>3</sup></b>	<b>240 dm<sup>3</sup></b>	<b>120 dm<sup>3</sup></b>	<b>60 dm<sup>3</sup></b>	<b>30 dm<sup>3</sup></b>	<b>5 dm<sup>3</sup></b>	<b>5/6 dm<sup>3</sup></b>	
1	12	12,5	25	50	100	600	3600	
	1	1,04	2,08	4,17	8,3	50	300	
		1	2	4	8	48	288	
			1	2	4	24	144	
				1	2	12	72	
					1	6	36	
						1	6	

### Sumerische Gewichtseinheiten

gun	mana	gin	mana-tur	gin-tur	še
<i>Talent</i>	<i>Mine</i>	<i>Schekel</i>	<i>kl. Mine</i>	<i>kl. Schekel</i>	<i>(Gersten-) Korn</i>
<b>30,3 kg</b>	<b>505 kg</b>	<b>8,42 kg</b>	<b>2,81 g</b>	<b>140 mg</b>	<b>46,8 mg</b>
1	60	3600	10 800		
	1	60	180	3600	10 800
		1	3	60	180
			1	20	60
				1	3

**(b) Europäische Längeneinheiten im 1. Drittel des 19. Jahrhunderts**

(vgl. Trapp 2001, S.233f.)

<b>Stadt / Staat</b>	<b>Fußmaß cm</b>	<b>Ellenmaß cm</b>	<b>Meilenmaß m</b>	<b>Bemer- kungen</b>
Aachen	28,87	66,72		
Amsterdam	28,31	68,78	5857,9	
Ansbach	29,96	62,37		
Antwerpen	28,68	69,50	5857,9	
Augsburg	29,62	58,65		
Baden, Ghzt.	30,00	60,00	8888,8	seit 1810
Basel	30,45	53,98	8345,9	
Bayern, Kgr.	29,19	83,30	7407,4	seit 1811
Bern	29,33	54,17	8345,9	
Bologna	38,00	64,00		
Braunschweig, Hzt.	28,54	57,07	7419,2	
Bremen	28,94	57,87		
Breslau	28,80	57,61		
Dänemark	31,38	62,75	7522,7	
Danzig	28,69	57,39	7407,4	
Dresden	28,33	56,65	7416,0	neue Meile
Düsseldorf	28,74	68,52		
Emden	29,21	67,88		
Erfurt	28,33	56,31		
Florenz		58,36	1851,8	
Frankfurt a.M.	28,46	54,73		
Frankreich	32,48	118,84	4444,4	alte Einheiten
Gera	28,62	57,24		
Gotha	28,76	56,26		
Großbritannien	30,48	91,44	1609,3	
Hamburg	28,64	57,08	7532,5	
Hannover, Kgr.	29,20	58,40	7419,2	
Hessen, Ghzt.	25,00	60,00	7500	seit 1817
Hildesheim	28,00	56,00		
Kassel	28,77	58,39	9206,4	
Köln a.Rh.	28,74	57,48		
Leipzig	28,32	56,50	9062,1	
Lippe, Ft.	28,95	57,92		

<b>Stadt / Staat</b>	<b>Fußmaß cm</b>	<b>Ellenmaß cm</b>	<b>Meilenmaß m</b>	<b>Bemer- kungen</b>
Lübeck	28,32	57,58	7362,5	
Mailand	43,52	59,49		
Mainz	29,13	55,08		
Mecklenburg- Schwerin Ghzt.	28,77	57,54	7532,5	
Neapel	26,37	210,94	10 000	
Niederlande	10,00 Palm	100,00	1000	seit 1816
Nürnberg	30,40	65,64		
Preußen, Kgr.	31,39	66,69	7532,5	
Regensburg	31,36	81,00		
Riga	27,41	54,82	1066,8	
Rom	24,83	200,16	1489,0	
Rußland	28,20	71,15	1066,8	
Schweden	29,67	59,37	10 688,5	
Weimar	28,20	56,40	7358,5	
Wien	31,61	77,92	7586,5	
Württemberg, Kgr.	28,65	61,42	7449,75	
Würzburg	29,37	58,74	7407,4	
Zürich	30,16	60,28	8345,9	

## **Anhang 5: Der Meterkonvention angehörende Länder**

Die Jahreszahl gibt an, wann die Länder der Meterkonvention beigetreten sind ([http://www1.bipm.org/en/convention/member\\_states/](http://www1.bipm.org/en/convention/member_states/) [vom 05.11.2004]).

<b>Ägypten</b>	1962	<b>Argentinien</b>	1877	<b>Australien</b>	1947
<b>Belgien</b>	1875	<b>Brasilien</b>	1921	<b>Bulgarien</b>	1911
<b>Cameroon</b>	1970	<b>Chile</b>	1908	<b>China</b>	1977
<b>Dänemark</b>	1875	<b>Förd. Republik Deutschlands</b>	1875	<b>Dominikanische Republik</b>	1954
<b>Finnland</b>	1923	<b>Frankreich</b>	1875	<b>Griechenland</b>	2001
<b>Großbritannien</b>	1884	<b>Indien</b>	1957	<b>Indonesien</b>	1960
<b>Islamische Republik von Iran</b>	1975	<b>Irland</b>	1925	<b>Israel</b>	1985
<b>Italien</b>	1875	<b>Japan</b>	1924	<b>Kanada</b>	1907
<b>Demokratische Rep. von Korea</b>	1982	<b>Malaysia</b>	2001	<b>Mexiko</b>	1890
<b>Neuseeland</b>	1991	<b>Niederlande</b>	1929	<b>Norwegen</b>	1875
<b>Österreich</b>	1875	<b>Islamische Republik Pakistans</b>	1973	<b>Polen</b>	1925
<b>Portugal</b>	1876	<b>Republik Korea</b>	1959	<b>Rumänien</b>	1925
<b>Russland</b>	1875	<b>Schweden</b>	1875	<b>Schweiz</b>	1875
<b>Serbien und Montenegro</b>	1929	<b>Singapur</b>	1994	<b>Slowakei</b>	1922
<b>Südafrika</b>	1964	<b>Spanien</b>	1875	<b>Tschechische Republik</b>	1922
<b>Thailand</b>	1912	<b>Türkei</b>	1875	<b>Ungarn</b>	1925
<b>USA</b>	1878	<b>Östliche Republik von Uruguay</b>	1908	<b>Venezuela</b>	1879

## **Anhang 6: Nichtmetrische Maße in USA und in GB**

([http://www.koboldmessring.com/tech\\_area/grundlag/Tabellen/tabell5.htm](http://www.koboldmessring.com/tech_area/grundlag/Tabellen/tabell5.htm)  
[vom28.08.03])

### LÄNGE

<b><u>metrisch</u></b> 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm 1000 m = 1 km	
<b><u>Großbritannien und USA</u></b> 1 Zoll (inch, in.) = 1" = 25,4 mm 1 Fuß (foot, ft) = 1' = 12" = 0,305 m 1 Yard (yd.) = 36" 1 Statue mile (Landmeile) = 1,609 km 1 nautical mile (internat. Seemeile) = 1,852 km	1 mm = 0,0394" 1 m = 3,28' 1 m = 1,094 yd. 1 km = 0,621 stat. mile 1 km = 0,540 naut. mile

### FLÄCHE

<b><u>metrisch</u></b> 1 m <sup>2</sup> = 100 dm <sup>2</sup> = 10 000 cm <sup>2</sup> = 1000 000 mm <sup>2</sup> 1 km <sup>2</sup> = 100 ha = 10 000 a = 1000 000 m <sup>2</sup>	
<b><u>Großbritannien und USA</u></b> 1 Quadratzoll (square inch, sq.in.) = 6,45 cm <sup>2</sup> 1 Quadratfuß (square foot, sq.ft.) = 144 sq.in. = 0,0929 m <sup>2</sup>	1 cm <sup>2</sup> = 0,155 sq.in. 1 m <sup>2</sup> = 10,764 sq.ft.

### VOLUMEN

<b><u>metrisch</u></b> 1 m <sup>3</sup> = 1000 dm <sup>3</sup> ; 1 l = 1000 cm <sup>3</sup> 1 dm <sup>3</sup> = 1 l; 1 hl = 100l	
<b><u>Großbritannien und USA</u></b> 1 Kubikzoll (cu.in) = 16,39 cm <sup>3</sup> 1 Kubikfuß (cu.ft) = 28,32 cm <sup>3</sup>	1 dm <sup>3</sup> = 61,02 cu.in. 1 m <sup>3</sup> = 35,32 cu.ft.
<b><u>Nur Großbritannien</u></b> 1 engl. Gallone (Imp.gal.) = 4,546 dm <sup>3</sup>	1 dm <sup>3</sup> = 0,22 Imp.gal.
<b><u>Nur USA</u></b> 1 U.S.-Gallone (U.S.gal.) = 3,785 dm <sup>3</sup> (5 Imp.gal. = 6 U.S.gal.) 1 U.S.-oil-barrel = 42 U.S.-gal. = 1,59 hl	1 dm <sup>3</sup> = 0,264 U.S.gal. 1 hl = 0,629 U.S.-oil-barrel 1 l = 0,264 U.S.gal.

## ZEIT

Im Britischen als auch im Amerikanischen werden für die Angabe der Zeit die Abkürzungen a.m. (ante meridiem – vor dem Mittag) und p.m. (post meridiem – nach dem Mittag) verwendet.

Die Abkürzung a.m. ist demnach jede Uhrzeit nach 12 Uhr nachts bis vor 12 Uhr mittags. Für alle Zeiten danach gilt p.m.

12 Uhr mittags oder 12 Uhr Mitternacht werden mit keiner der beiden Abkürzungen bezeichnet.

## MASSE (GEWICHT)

<b>metrisch</b> 1 kg = 1000 g; 1 g = 1000 mg; 1 t = 1000 kg	
<b>Großbritannien und USA</b> 1 pound (lb.) = 16 ounces (oz) = 0,454 kg 1 hundredweight (cwt.) = 112 lb = 50,8 kg 1 long ton (GB) = 20 cwt. = 1,016 t 1 short ton = 1 net ton (USA) = 18 cwt. = 0,9072 t	1 kg = 2,205 lb. 1 kg = 0,0197 cwt.; 1t = 0,984 long ton

## TEMPERATUR

Temperaturskala	Gefrierpunkt	Siedepunkt des Wasser
Celsius: °C	0 °C	100 °C
Kelvin: K absolute Temperatur	273 K	373 K
Fahrenheit: °F (Deg. F)	32 °F	212 °F
<u>Umrechnung:</u>		
K = °C + 273	1 K = 1 C-Grad 9 F-Grade = 5 C-Grade	°C = K - 273
$^{\circ}\text{F} = \frac{9}{5}^{\circ}\text{C} + 32$		$^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9} (^{\circ}\text{F} - 32)$

Die Celsius-Temperaturskala orientiert sich am Gefrierpunkt von Wasser und setzt diesen gleich Null.

Die Fahrenheit-Temperaturskala orientiert sich mit der Null an der seinerzeit tiefsten erreichbaren Temperatur. Daraus ergab sich, dass Wasser bei 32 Grad Fahrenheit gefriert (entspricht 0 °C).

## **Kleidergrößen**

(aus: Betteridge, H. T. (1988). Cassell's German Dictionary (1978).)

### **Schuhe**

<b>deutsch</b>	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
<b>britisch</b>	3 ½	4	5	6	6½	7	8	9	9½	10½	11	12
<b>amerikanisch</b>	5	5 ¾	6 ½	7 ¼	8	8 ¾	9 ½	10 ¼	11	11 ¾	12 ½	13 ¼

### **Krägen**

<b>deutsch</b>	35-36	37	38	39	40-41	42	43
<b>britisch / amerikanisch</b>	14	14 ½	15	15½	16	16 ½	17

### **Strümpfe**

<b>deutsch</b>	35	36	37	38	39	40	41
<b>britisch / amerikanisch</b>	8	8 ½	9	9 ½	10	10 ½	11

## **Anhang 7:   Vergleichen von Repräsentanten einzelner Größen bzgl. Gleichheit oder Kleinerbeziehung** (vgl. Blankenagel 1994, S.109)

Aus dem täglichen Leben ist man eher als bei den anderen Größen daran gewöhnt, **Geldwerte** auf verschiedene Weise durch Münzen oder Scheine darzustellen. Geldwerte werden anhand ihrer Beträge miteinander verglichen.

Repräsentanten von **Längen** lassen sich durch Aufeinander- bzw. Aneinanderlegen miteinander vergleichen.

Beim **Flächeninhalt** von Vielecken wird die Äquivalenzrelation „... ist flächengleich mit ...“ im Sinne der Zerlegungsgleichheit oder der Ergänzungsgleichheit realisiert.

**Volumengleichheit** kann überprüft werden, indem die zu vergleichenden Körper in ein Messglas / Messzylinder mit Wasser getaucht werden und die verdrängte Wassermenge der einzelnen Körper miteinander verglichen wird. Ferner kann bei Hohlkörpern ein Vergleich durch Umfüllen mit einer Flüssigkeit vorgenommen werden. Bei dieser Vorgehensweise werden allerdings nicht die Gesamtkörper miteinander verglichen, sondern ausschließlich die von der jeweiligen Innenwand begrenzten Innenkörper. So liefert die erste Methode einen exakten Vergleich der Körper hinsichtlich ihres Volumens.

**Massen / Gewichte** lassen sich im physikalischen Sinne durch Wägen (z.B. mit der Balkenwaage) miteinander vergleichen.

**Zeitspannen** werden mit Uhren verglichen.

Eigenschaften von Repräsentanten der Größen Gewicht (Masse) und Zeit lassen sich nicht unmittelbar am äußeren Erscheinungsbild der Repräsentanten ablesen bzw. schätzen (vgl. Franke 2003, S.202 und Grund 1992, S.42): Gleichschwere Körper können unterschiedliche Volumina besitzen; Zeitspannen werden häufig aus subjektiver Sicht und Einstellung unterschiedlich lang empfunden (vgl. Franke 2003, S.233). Das Messen von Massen (Gewichten) und Zeiten bereiten Kindern, Schülern und Erwachsenen ohne die Nutzung von konkreten Messinstrumenten für einen indirekten Vergleich erhebliche Schwierigkeiten.

## **Anhang 8: Division in verschiedenen Größenbereichen**

(vgl. Lauter 1977, S.99)

Bei Größen gibt es zwei mögliche Umkehrungen der Vervielfachungsoperation – das **Verteilen** und das **Aufteilen** –, die durch das gleiche Divisionszeichen dargestellt werden:

<b>Größe</b>	<b>Verteilen bzw. Teilen</b> <b>a : n</b>	<b>Aufteilen bzw. Messen</b> <b>a : b</b>
<b>Geldwerte</b>	Lässt sich ein Haufen von Geldstücken oder -scheinen vom Wert a in n Haufen von jeweils gleichem Wert teilen, so hat jeder dieser Haufen den Wert $a : n$ .	Lässt sich ein Haufen von Geldstücken oder -scheinen vom Gesamtwert a aus Haufen von jeweils gleichem Wert b zusammensetzen, so ist deren Anzahl $a : b$ .
<b>Längen</b>	Zerlegt man einen Stab der Länge a in n gleichlange Stäbe, so hat jeder dieser Stäbe die Länge $a : n$ .	Lässt sich ein Stab der Länge a aus gleichlangen Stäben der Länge b zusammensetzen, so ist ihr Anzahl $a : b$ .
<b>Fläche (Flächeninhalt)</b>	Zerlegt man eine Fläche der Größe a in n zerlegungsgleiche Flächen, so hat jeder dieser Flächen die Größe $a : n$ .	Lässt sich eine Fläche der Größe a aus zerlegungsgleichen Flächen der Größe b zusammensetzen, so ist ihre Anzahl $a : b$ .
<b>Volumen</b>	Zerlegt man einen Körper mit dem Volumen a in n inhaltsgleiche Körper, so hat jeder das Volumen $a : n$ .	Lässt sich ein Körper mit dem Volumen a aus inhaltsgleichen Körpern des Volumens b zusammensetzen, so ist ihre Anzahl $a : b$ .
<b>Gewicht (Masse)</b>	Zerlegt man einen Körper der Masse a in n gleichschwere Körper, so hat jeder dieser Körper die Masse $a : n$ .	Lässt sich ein Körper der Masse a aus gleichschweren Körpern der Masse b zusammensetzen, so ist ihre Anzahl $a : b$ .
<b>Zeit</b>	Zerlegt man einen Vorgang der Dauer a in n gleichlang andauernde Vorgänge, so hat jeder dieser Vorgänge die Dauer $a : n$ .	Lässt sich ein Vorgang der Dauer a aus gleichlang dauernden Vorgängen der Dauer b zusammensetzen, so ist ihre Anzahl $a : b$ .

**Anhang 9: Fachwissenschaftliche Inhalte der Fächer Mathematik, Physik, Biologie und Chemie in den weiterführenden Schulen**

**A Größen im Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen**

Maßzahl
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Natürliche Zahlen</li> <li>* Rationale Zahlen</li> <li>* Irrationale und reelle Zahlen</li> <li>* Zuordnungen zwischen Größenbereichen (proportional / antiproportional)</li> </ul>

Länge	Fläche	Volumen
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Umfang von Dreiecken, Vierecken, n-Ecken</li> <li>* Kreis, zusammengesetzte Figuren</li> <li>* Berechnung verschiedener Körpergrößen: Länge der Seitenkanten, räumliche Diagonale und Höhe, Radius, Durchmesser, Inkreis- und Umkreisradius</li> <li>* Länge besonderer Linien im Dreieck: Ankathete, Gegenkathete, Hypotenuse, Seiten- und Winkelhalbierende</li> <li>* Länge krummliniger Kurven</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Flächeninhalt von Dreiecken, Vierecken, n-Ecken</li> <li>* Flächeninhalt von Kreis, Kreissektor, Kreissegment</li> <li>* Mantelfläche und Oberflächeninhalt von Körpern</li> <li>* Flächensätze am rechtwinkligen Dreieck: Satz des Pythagoras, Höhen- und Kathetensatz, Mönchchen des Hippokrates</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Volumen von Körpern (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, regelmäßige (reguläre) Polyeder, Zylinder, Kegel, Kegelstumpf, Kugel, zusammengesetzte Figuren)</li> </ul>

## B Größen im Physikunterricht der weiterführenden Schulen

Länge	Fläche	Volumen
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Arbeit <math>W = F \cdot s</math></li> <li>* Goldene Regel der Mechanik</li> <li>* Weg-Zeit-Gesetze <math>s = v \cdot t</math>; <math>s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2</math></li> <li>* Schweredruck bei ruhenden Flüssigkeiten <math>p = \delta \cdot g \cdot h</math></li> <li>* Optische Abbildungen: Linsengleichung</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Druck <math>p = F / A</math></li> <li>* Ausdehnung von Körpern bei Erwärmung (Festkörper, Flüssigkeiten, Gase)</li> <li>* Reflexion an unterschiedlichen Oberflächen</li> <li>* Reflexionsgesetz</li> <li>* Brechungswinkel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Dichte <math>\delta = m / V</math></li> <li>* Archimedisches Prinzip <math>F_A = F_G = \delta \cdot g \cdot V</math></li> </ul>

Zeit	Masse	Temperatur
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Geschwindigkeit <math>v = s / t</math>; <math>v = a \cdot t</math></li> <li>* Leistung <math>P = W / t</math></li> <li>* Frequenz <math>\nu = n / t</math></li> <li>* Reaktionszeit</li> <li>* Belichtungszeiten</li> <li>* Elektrische Ladung <math>Q = I \cdot t</math></li> <li>* Elektrische Arbeit <math>W = U \cdot I \cdot t</math></li> <li>* Elektrische Leistung <math>P = W / t</math></li> <li>* Halbwertszeit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* träge / schwere Masse</li> <li>* Gewichtskraft <math>F_G = m \cdot g</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* subjektives Wärmeempfinden</li> <li>* Thermometer</li> <li>* Skalen °C, K</li> <li>* Ausdehnung von Körpern bei Erwärmung (Festkörper, Flüssigkeiten, Gase)</li> <li>* Wärmetransport (Leitung, Konvektion, Strahlung)</li> <li>* Wärmemenge</li> <li>* spezifische Wärmekapazität</li> <li>* allgemeine Mischungsformel</li> </ul>

## C Größen im Biologieunterricht der weiterführenden Schulen

Länge	Fläche	Volumen
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Proportionen bzgl. der Körperteilmaße</li> <li>* Körper- und Fußgröße; Flügelbreite und Spannweite bei Vögeln; ...</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Hautoberfläche</li> <li>* Lungenoberfläche</li> <li>* Prinzip der Oberflächenvergrößerung (Zwerchfellatmung)</li> <li>* Gesichtsfeld</li> <li>* Lebensfläche / Lebensraum</li> <li>* Jagdfläche</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Lungenvolumen</li> <li>* Atemvolumen</li> <li>* Flüssigkeitshaushalt</li> <li>* Treibhauseffekt (Anstieg des Meeresspiegels und Erhöhung der Niederschlagsmenge)</li> </ul>

Zeit	Masse	Temperatur
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Erdzeitalter, Fossilien</li> <li>* Paläontologie: geologische Schichtenfolge</li> <li>* Jahreszeitliche Veränderungen in der Pflanzen- und Tierwelt: Überwinterung (Winterruher, Winterschläfer); Blumenbrauchtum im Jahresverlauf; Geburtstagsblumen in der Natur; ...</li> <li>* in der Natur immanente Zeitmaße: Blumen- und Vogeluhr</li> <li>* Stammesentwicklung u. Entwicklungsstadien</li> <li>* artspezifische Lebenszeit</li> <li>* Zyklus</li> <li>* Jagdzeit bei Tieren</li> <li>* Herzfrequenz</li> <li>* Chronobiologie: Zeitstruktur des Lebendigen</li> <li>* innere Uhr</li> <li>* Biorhythmus</li> <li>* Fortbewegungsgeschwindigkeiten (Flugschläge, ...)</li> <li>* Zugkalender der Vögel</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Körpermasse</li> <li>* Nahrungsmenge(nbedarf)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Körpertemperatur (zu verschiedenen Tageszeiten, bei Winterruhern / Winterschläfer, ...)</li> <li>* Temperatur der Jahreszeiten</li> <li>* Treibhauseffekt (Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur)</li> </ul>

## D Größen im Chemieunterricht der weiterführenden Schulen

Länge	Fläche	Volumen
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Atomradius</li> <li>* Atomabstand</li> <li>* Bindungslänge</li> </ul>	-	<ul style="list-style-type: none"> <li>* molares Volumen (Molvolumen):  <math>V_m = V / n</math> mit  <math>[V_m] = 1 \text{ m}^3 / \text{mol}</math>                      (V: Volumen; n: Anzahl der Mole eines Stoffes)</li> <li>* Das Volumen einer Gasportion mit  <math>L = 6,023 \cdot 10^{23}</math> Teilchen (molares Volumen) beträgt unter Normbedingung <math>V = 22,4 \text{ l}</math>.</li> <li>* Gasgesetze                      (Zusammenhang zwischen Volumen, Druck und Temperatur)                      Amontons-Gesetz;                      Boyle-Mariotte-Gesetz;                      Gay-Lussac-Gesetz</li> <li>* Zustandsgleichung der Gase</li> <li>* Ölfleckversuch (Bestimmung des Volumens kleinster Teilchen)</li> <li>* Volumenprozent (Konzentration)</li> </ul>

Zeit	Masse	Temperatur
<ul style="list-style-type: none"> <li>* Reaktionszeit eines chemischen Vorgangs</li> <li>* Landolt-Reaktionszeit</li> <li>* Reaktionskinetik</li> <li>* Reaktionsgeschwindigkeit</li> <li>* Halbwertszeit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Gesetz von der Erhaltung der Masse</li> <li>* Gesetz von den konstanten Massenverhältnissen</li> <li>* Massenzahl</li> <li>* Elementarmasse</li> <li>* Atommasse                      Atomare Masseneinheit:  <math>1u = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}</math>  <math>1g = 6,022 \cdot 10^{-23} u</math></li> <li>* Molekülmasse</li> <li>* Massenwirkungsgesetz</li> <li>* Massemodell (Dalton)</li> <li>* Masse-Ladung-Modell (Thomson)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Bunsenbrennerflamme</li> <li>* Reaktion: exotherm, endotherm</li> <li>* Aktivierungsenergie</li> <li>* Reaktionswärme</li> <li>* Bindungsenergie</li> <li>* Brownsche Bewegung</li> <li>* Aggregatzustände</li> <li>* Erstarrungs-, Siede- und Schmelztemperatur von Wasser und anderen Stoffen</li> <li>* Anomalie des Wassers</li> <li>* Trennverfahren: Abdampfen, Destillation, Sublimation, Extraktion</li> <li>* absolute Temperatur</li> </ul>

## **Anhang 10: HOW TO SOLVE IT? – Der Problemlöseprozess von George Polya** (Polya 1949)

---

### **VERSTEHEN DER AUFGABE**

#### **Erstens.**

Du musst die Aufgabe verstehen

- Was ist unbekannt? Was ist gegeben? Wie lautet die Bedingung?
  - Ist es möglich, die Bedingung zu befriedigen? Ist die Bedingung ausreichend, um die Unbekannte zu bestimmen? Oder ist sie unzureichend? Oder überbestimmt? Oder kontradiktorisch?
  - Zeichne eine Figur! Führe eine passende Bezeichnung ein!
  - Trenne die verschiedenen Teile der Bedingung! Kannst Du sie hinschreiben?
- 

### **AUSDENKEN EINES PLANES**

#### **Zweitens.**

Suche den Zusammenhang zwischen den Daten und der Unbekannten

Du musst vielleicht Hilfsaufgaben betrachten, wenn ein unmittelbarer Zusammenhang nicht gefunden werden kann

Du musst schließlich einen Plan der Lösung erhalten

- Hast Du die Aufgabe schon früher gesehen? Oder hast Du dieselbe Aufgabe in einer wenig verschiedenen Form gesehen?
  - Kennst Du eine verwandte Aufgabe? Kennst Du einen Lehrsatz, der förderlich sein könnte?
  - Betrachte die Unbekannte! Und versuche, Dich auf eine Dir bekannte Aufgabe zu besinnen, die dieselbe oder eine ähnliche Unbekannte hat.
  - Hier ist eine Aufgabe, die der Deinen verwandt und schon gelöst ist. Kannst Du sie gebrauchen? Kannst Du ihr Resultat verwenden? Kannst Du ihre Methode verwenden? Würdest Du irgendein Hilfselement einführen, damit du sie verwenden kannst?
  - Kannst Du die Aufgabe anders ausdrücken? Kannst Du sie auf noch verschiedene Weise ausdrücken? Geh auf die Definition zurück!
  - Wenn du die vorliegende Aufgabe nicht lösen kannst, so versuche, zuerst eine verwandte Aufgabe zu lösen. Kannst Du Dir eine zugänglichere verwandte Aufgabe denken? Eine allgemeinere Aufgabe? Eine speziellere Aufgabe? Eine analoge Aufgabe? Kannst Du einen Teil der Aufgabe lösen? Behalte nur einen Teil der Bedingung bei und lasse den anderen fort; wie weit ist die Unbekannte dann bestimmt, wie kann ich sie verändern? Kannst Du etwas Förderliches aus den Daten ableiten? Kannst Du Dir andere Daten denken, die geeignet sind, die Unbekannte zu bestimmen? Kannst Du die Unbekannte ändern oder die Daten oder, wenn nötig, beide, so dass die neue Unbekannte und die neuen Daten einander näher sind?
  - Hast Du alle Daten benutzt? Hast Du die ganze Bedingung benutzt? Hast Du alle wesentlichen Begriffe in Rechnung gezogen, die in der Aufgabe enthalten sind?
- 

### **AUSFÜHREN DES PLANES**

#### **Drittens.**

Führe Deinen Plan aus

- Wenn Du Deinen Plan der Lösung durchführst, so kontrolliere jeden Schritt. Kannst Du deutlich sehen, dass der Schritt richtig ist? Kannst Du beweisen, dass er richtig ist?
- 

### **RÜCKSCHAU**

#### **Viertens.**

Prüfe die erhaltene Lösung

- Kannst Du das Resultat kontrollieren? Kannst Du den Beweise kontrollieren?
  - Kannst Du das Resultat auf verschiedene Weise ableiten? Kannst Du es auf den ersten Blick sehen?
  - Kannst Du das Resultat oder die Methode für irgend eine andere Aufgabe gebrauchen?
-

## 12 Verzeichnis der Abbildungen und Tabellen

<b>Abb. 1.1:</b>	Gliederung der Arbeit .....	4
<b>Abb. 2.1:</b>	Überall sind Zahlen .....	7
<b>Abb. 2.2:</b>	Gekerbte Knochen aus dem Spätpaläolithikum (35 000 bis 20 000 v. Chr.) .....	10
<b>Abb. 2.3:</b>	Zählen mit den Fingern .....	10
<b>Abb. 2.4:</b>	Zählen mit den Fingergliedern in Indien, Indochina und Südchina .....	10
<b>Abb. 2.5:</b>	Darstellung der Zahlen 1 bis 9 nach der Methode der Inka .....	10
<b>Abb. 2.6:</b>	Darstellung der Zahl 3643 nach der Methode der Inka .....	10
<b>Abb. 2.7:</b>	Repräsentanten der Zahlen durch calculi, die Babylonische Hirten zum Zählen ihrer Herden verwendeten .....	10
<b>Abb. 2.8:</b>	Darstellung der Zahl 1998 in ägyptischer Schrift .....	12
<b>Abb. 2.9:</b>	Alter griechischer Grabstein .....	12
<b>Abb. 2.10:</b>	Römischer Meilenstein aus der Provinz Salerno – vom Konsul C. Popilius Laenas (um 160 v. Chr.) aufgestellt .....	12
<b>Abb. 2.11:</b>	Darstellung der Zahl 1999 in babylonischer Schrift .....	12
<b>Abb. 2.12:</b>	Entwicklung der indisch-arabischen Ziffern .....	12
<b>Abb. 2.13:</b>	Körpermaße .....	14
<b>Abb. 2.14:</b>	Römische Halbkugelsonnenuhr .....	15
<b>Abb. 2.15:</b>	Sanduhr (Stundenglas) Deutschland 17. Jh. ....	15
<b>Abb. 2.16:</b>	Das Messen mit Körpermaßen .....	17
<b>Abb. 2.17:</b>	Beziehungen zwischen Basiseinheiten des SI-Einheitensystems .....	20
<b>Abb. 2.18:</b>	Das Maß Bier mit seiner möglichen Abschaffung von Füllmengen für Schankgefäße. ....	24
<b>Abb. 3.1:</b>	Stufenmodell zum Größenbegriff am Beispiel der Größe Länge .....	26
<b>Abb. 3.2:</b>	Beziehungen zwischen Mathematik, Realität und Individuum .....	32
<b>Abb. 4.1:</b>	Piagets Stufenmodell der kognitiven Entwicklung .....	36
<b>Abb. 4.2:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten für alle an der TIMS-Studie von 1995 teilnehmenden Länder .....	42
<b>Abb. 4.3:</b>	Beispielaufgaben der TIMS-Studie POP1 Mathematik mit internationalen Lösungshäufigkeiten bzgl. der korrekten Antworten .....	43
<b>Abb. 4.4:</b>	Themenstern zur Größe Zeit .....	48
<b>Abb. 4.5:</b>	Vorstellung von Kindern zur Körpergröße ihrer Lehrerin .....	53
<b>Abb. 4.6:</b>	Wichtige Grundvorstellungen zu verschiedenen Einheiten bedeutender Größen .....	55
<b>Abb. 4.7:</b>	Vorstellung von Größenintervallen .....	57
<b>Abb. 5.1:</b>	Umwelterschließendes Sachrechnen als Verzahnung von Mathematik, Sachunterricht und Texten aus dem Deutschunterricht .....	63
<b>Abb. 5.2:</b>	Der Modellierungsprozess .....	64
<b>Abb. 7.1:</b>	Organisationsstruktur der IGLU- / IGLU-E-Studie mit den Mitgliedern des nationalen Konsortiums in Deutschland .....	79
<b>Abb. 7.2:</b>	Die IGLU-Kontextfragebögen und damit erhobene Merkmale .....	87
<b>Abb. 7.3:</b>	Einschätzungen der Lehrplanexperten bzgl. der Relevanz des getesteten Wissens für das Lernen in höheren Klassenstufen .....	93

<b>Abb. 7.4:</b>	Lösungen von Aufgaben nach Kontext der Kinder aus der Bundesrepublik Deutschland am Ende der vierten Jahrgangsstufe .....	96
<b>Abb. 8.1:</b>	Übersichtsplan zur Darstellung der Empirischen Untersuchungen und ihrer Ergebnisse der vorliegenden Forschungsarbeit .....	99
<b>Abb. 8.2:</b>	Zugehörigkeit der IGLU-E-Kinder zu den Kompetenzstufen der Mathematik und den Naturwissenschaften .....	101
<b>Abb. 8.3:</b>	Kategorien der Aufgaben zur Größenthematik aus IGLU-E .....	101
<b>Abb. 8.4:</b>	Beispiel einer Aufgabe der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	107
<b>Abb. 8.5:</b>	Beispiel einer Aufgabe der Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	109
<b>Abb. 8.6:</b>	Beispiel einer Aufgabe der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	112
<b>Abb. 8.7:</b>	Beispiel einer Aufgabe der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	114
<b>Abb. 8.8:</b>	Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne? Einschätzungen der Lehrplanexperten zu den Größenitems der Kategorien I, II, III und IV .....	116
<b>Abb. 8.9:</b>	Wie wichtig ist der Stoff für das Lernen in höheren Klassenstufen? Einschätzungen der Lehrplanexperten zu den Größenitems der Kategorien I, II, III und IV .....	118
<b>Abb. 8.10:</b>	Kategorien der Aufgaben zur Größenthematik aus IGLU-E .....	119
<b>Abb. 8.11:</b>	Aufgabe Ia „Größte Zahl“ mit vier Multiple-Choice-Antworten .....	121
<b>Abb. 8.12:</b>	Lösungsergebnisse zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	122
<b>Abb. 8.13:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items Ib „Zeitmessung“ .....	125
<b>Abb. 8.14:</b>	Lösungsergebnisse zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	126
<b>Abb. 8.15:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items Ic „Größte Fläche“ .....	129
<b>Abb. 8.16:</b>	Lösungsergebnisse zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	130
<b>Abb. 8.17:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items Id „Wärme“ .....	133
<b>Abb. 8.18:</b>	Lösungsergebnisse zum Item Id „Wärme“ mit der korrekten Antwort MC 2 .....	134
<b>Abb. 8.19:</b>	Gegenüberstellung der Lösungsergebnisse zum Item Id „Wärme“ mit der korrekten Antwort MC 2 aus den Studien IGLU-E und CROSSTEL .....	135
<b>Abb. 8.20:</b>	Leistungen der Viertklässler zu Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	137
<b>Abb. 8.21:</b>	Leistungen von Mädchen und Jungen zu Aufgaben der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	137
<b>Abb. 8.22:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Mathematikkompetenzstufen zu Items der Kategorie I .....	138
<b>Abb. 8.23:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen zu Items der Kategorie I .....	138
<b>Abb. 8.24:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items IIa „Ei“ .....	141
<b>Abb. 8.25:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IIa „Ei“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	142
<b>Abb. 8.26:</b>	Aufgabe IIb „Bleistift“ mit vier Multiple-Choice-Antworten .....	143
<b>Abb. 8.27:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IIb „Bleistift“ mit der korrekten Antwort MC 2 .....	144
<b>Abb. 8.28:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items IIc „Zimmer“ .....	147
<b>Abb. 8.29:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IIc „Zimmer“ mit der korrekten Antwort MC 5 .....	148
<b>Abb. 8.30:</b>	Multiple-Choice-Antworten zur Aufgabe IId „Körpertemperatur“ .....	150
<b>Abb. 8.31:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IId „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 .....	151
<b>Abb. 8.32:</b>	Leistungen der Viertklässler zu Aufgaben der Kategorie II „Schätzen von Größen“ ...	154

<b>Abb. 8.33:</b>	Leistungen von Mädchen und Jungen zu Aufgaben der Kategorie I „Schätzen von Größen“ .....	154
<b>Abb. 8.34:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Mathematikkompetenzstufen zu Items der Kategorie II .....	155
<b>Abb. 8.35:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen zu Items der Kategorie II .....	155
<b>Abb. 8.36:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items IIIa „Kuchen“ .....	157
<b>Abb. 8.37:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	158
<b>Abb. 8.38:</b>	Aufgabe IIIb „Würfel“ mit vier Multiple-Choice-Antworten .....	161
<b>Abb. 8.39:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IIIb „Würfel“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	162
<b>Abb. 8.40:</b>	Grafik des Items IIIc „Gewichte“ .....	164
<b>Abb. 8.41:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items IIIc „Gewichte“ .....	165
<b>Abb. 8.42:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IIIc „Gewichte“ mit der korrekten Antwort MC 5 .....	166
<b>Abb. 8.43:</b>	Gegenüberstellung der Lösungsergebnisse zum Item IIIc „Gewichte“ mit der korrekten Antwort MC 5 aus den Studien IGLU-E und CROSSTEL .....	166
<b>Abb. 8.44:</b>	Leistungen der Viertklässler zu Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ ...	168
<b>Abb. 8.45:</b>	Leistungen von Mädchen und Jungen zu Aufgaben der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	168
<b>Abb. 8.46:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Mathematikkompetenzstufen zu Items der Kategorie III .....	169
<b>Abb. 8.47:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen zu Items der Kategorie III .....	169
<b>Abb. 8.48:</b>	Aufgabe IVa „Kalender“ mit fünf Multiple-Choice-Antworten .....	172
<b>Abb. 8.49:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IVa „Kalender“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	173
<b>Abb. 8.50:</b>	Abbildung zum Item IVb „Umfang“ .....	175
<b>Abb. 8.51:</b>	Multiple-Choice-Antworten des Items IVb „Umfang“ .....	175
<b>Abb. 8.52:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	176
<b>Abb. 8.53:</b>	Aufgabe IVc „Waage“ mit fünf Multiple-Choice-Antworten .....	179
<b>Abb. 8.54:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IVc „Waage“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	180
<b>Abb. 8.55:</b>	Gegenüberstellung der Lösungsergebnisse zum Item IVc „Waage“ mit der korrekten Antwort MC 3 aus den Studien IGLU-E und CROSSTEL .....	181
<b>Abb. 8.56:</b>	Aufgabe IVd „Schrittlänge“ mit vier Multiple-Choice-Antworten .....	183
<b>Abb. 8.57:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	184
<b>Abb. 8.58:</b>	Aufgabe IVe „Rechteck“ mit vier Multiple-Choice-Antworten .....	187
<b>Abb. 8.59:</b>	Lösungsergebnisse zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	188
<b>Abb. 8.60:</b>	Leistungen der Viertklässler zu Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ ..	192
<b>Abb. 8.61:</b>	Leistungen von Mädchen und Jungen zu Aufgaben der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	192
<b>Abb. 8.62:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Mathematikkompetenzstufen zu Items der Kategorie IV .....	193
<b>Abb. 8.63:</b>	Leistungen der Viertklässler aus den Naturwissenschaftskompetenzstufen zu Items der Kategorie IV .....	193

<b>Tab. 2.1:</b>	Aspekte des Zahlbegriffs .....	8
<b>Tab. 2.2:</b>	Die ersten Zählmethoden der Menschen .....	10
<b>Tab. 2.3:</b>	Entstehung und Entwicklung der Zahlzeichen .....	12
<b>Tab. 2.4:</b>	Das Internationale Einheitensystem mit seinen 7 Basiseinheiten .....	19
<b>Tab. 2.5:</b>	Abgeleitete physikalische Einheiten .....	21
<b>Tab. 2.6:</b>	SI-Vorsätze und Vorsatzzeichen zur Bezeichnung dezimaler Vielfache und Teile von Einheiten .....	22
<b>Tab. 2.7:</b>	Festlegung und Kontrolle der Maße und Gewichte in der Bundesrepublik Deutschland .....	23
<b>Tab. 3.1:</b>	Repräsentanten der bürgerlichen Größen .....	28
<b>Tab. 3.2:</b>	Rechengesetze für Größen .....	29
<b>Tab. 3.3:</b>	Grundvorstellungen zur Verknüpfung von Größen .....	31
<b>Tab. 3.4:</b>	leiblich-sinnliche Erfahrungen von Kindern zu Größen .....	33
<b>Tab. 4.1:</b>	Experimente zur Invarianz .....	37
<b>Tab. 4.2:</b>	Maßzahlverständnis von Vorschulkindern .....	40
<b>Tab. 4.3:</b>	KMK-Bildungsstandards im Fach Mathematik der Jahrgangsstufe 4 .....	44
<b>Tab. 4.4:</b>	KMK-Bildungsstandards zur Leitidee „Messen“ in den weiterführenden Schulen .....	45
<b>Tab. 4.5:</b>	NCTM Principles and Standards zum Thema „Measurement“ .....	46
<b>Tab. 4.6:</b>	Benchmarks of Science, in denen das Thema „Measurement“ explizit angesprochen wird .....	47
<b>Tab. 4.7:</b>	Didaktische Stufenfolge für die Behandlung von Größen .....	54
<b>Tab. 4.8:</b>	Weitere Grundvorstellungen zu den Größen Länge, Gewicht, Zeit und Volumen .....	56
<b>Tab. 4.9:</b>	Unterrichtsinhalte zur Größe Volumen in den weiterführenden Schulen .....	58
<b>Tab. 5.1:</b>	Traditionelle Einteilung von Aufgaben im Sachrechnen .....	67
<b>Tab. 5.2:</b>	Systematisierung von Aufgabenklassen beim Sachrechnen .....	69
<b>Tab. 5.3:</b>	Ursachen für Schwierigkeiten beim Sachrechnen .....	73
<b>Tab. 7.1:</b>	Projektverlauf von IGLU bzw. IGLU-E .....	80
<b>Tab. 7.2:</b>	Ablauf der Untersuchung und eingesetzte Instrumente der nationalen IGLU-E-Untersuchung in Deutschland am zweiten Testtag .....	84
<b>Tab. 7.3:</b>	Inhaltsfelder und Prozesse in der Grundschulmathematik .....	85
<b>Tab. 7.4:</b>	IGLU- bzw. IGLU-E-Teilnahmequoten in Deutschland .....	87
<b>Tab. 7.5:</b>	Einschätzungen der Lehrplanexperten zum Kriterium „Ist der Stoff ein Inhalt der gültigen Rahmenpläne?“ .....	91
<b>Tab. 7.6:</b>	Einschätzungen der Lehrplanexperten zum Zeitpunkt des zu erlernenden Stoffes .....	92
<b>Tab. 7.7:</b>	Verteilung von Schülerinnen und Schülern auf die Stufen mathematischer Kompetenz am Ende der vierten Jahrgangsstufe .....	94
<b>Tab. 7.8:</b>	Verteilung von Schülerinnen und Schülern auf die Stufen naturwissenschaftlicher Kompetenz am Ende der vierten Jahrgangsstufe .....	97
<b>Tab. 8.1:</b>	Kompetenzstufen und Skalenbereiche der Fähigkeiten in Mathematik und in Naturwissenschaften .....	100
<b>Tab. 8.2:</b>	Die Aufgabenperipherie des Kategoriensystems .....	104
<b>Tab. 8.3:</b>	Der Aufgabenkern des Kategoriensystems .....	105

<b>Tab. 8.4:</b>	Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	106
<b>Tab. 8.5:</b>	Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	108
<b>Tab. 8.6:</b>	Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	111
<b>Tab. 8.7:</b>	Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	113
<b>Tab. 8.8:</b>	Einschätzung der Lehrplanexperten bezüglich der Klassenstufe, in welcher der Stoff der Größenitems aus den Kategorien I, II, III und IV behandelt wird .....	117
<b>Tab. 8.9:</b>	Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	120
<b>Tab. 8.10:</b>	Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie I „Ordnen von Größen“ .....	121
<b>Tab. 8.11:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	123
<b>Tab. 8.12:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	123
<b>Tab. 8.13:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ia „Größte Zahl“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	124
<b>Tab. 8.14:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	126
<b>Tab. 8.15:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	127
<b>Tab. 8.16:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ib „Zeitmessung“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	128
<b>Tab. 8.17:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	131
<b>Tab. 8.18:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	131
<b>Tab. 8.19:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item Ic „Größte Fläche“ mit der korrekten Antwort MC 3 .....	132
<b>Tab. 8.20:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Id „Wärme“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	136
<b>Tab. 8.21:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item Id „Wärme“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	136
<b>Tab. 8.22:</b>	Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	139
<b>Tab. 8.23:</b>	Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie II „Schätzen von Größen“ .....	140
<b>Tab. 8.24:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIa „Ei“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	142
<b>Tab. 8.25:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIa „Ei“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	143
<b>Tab. 8.26:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIb „Bleistift“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	145
<b>Tab. 8.27:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIb „Bleistift“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	145
<b>Tab. 8.28:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IIb „Bleistift“ mit der korrekten Antwort MC 2 .....	146
<b>Tab. 8.29:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIc „Zimmer“ mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	149

<b>Tab. 8.30:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIc „Zimmer“ mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	149
<b>Tab. 8.31:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIc „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	152
<b>Tab. 8.32:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIc „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	152
<b>Tab. 8.33:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IIc „Körpertemperatur“ mit der korrekten Antwort MC 2 .....	153
<b>Tab. 8.34:</b>	Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	156
<b>Tab. 8.35:</b>	Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie III „Zerlegen von Größen“ .....	156
<b>Tab. 8.36:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	159
<b>Tab. 8.37:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	159
<b>Tab. 8.38:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IIIa „Kuchen“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	160
<b>Tab. 8.39:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIIb „Würfel“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	163
<b>Tab. 8.40:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIIb „Würfel“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	163
<b>Tab. 8.41:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIIc „Gewichte“ mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	167
<b>Tab. 8.42:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IIIc „Gewichte“ mit der korrekten Antwort MC 5 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	167
<b>Tab. 8.43:</b>	Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	170
<b>Tab. 8.44:</b>	Allgemeine Informationen zu Items der Kategorie IV „Operieren mit Größen“ .....	171
<b>Tab. 8.45:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVa „Kalender“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	174
<b>Tab. 8.46:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVa „Kalender“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	174
<b>Tab. 8.47:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	177
<b>Tab. 8.48:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	177
<b>Tab. 8.49:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IVb „Umfang“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	178
<b>Tab. 8.50:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVc „Waage“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	182
<b>Tab. 8.51:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVc „Waage“ mit der korrekten Antwort MC 3 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	182
<b>Tab. 8.52:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	185
<b>Tab. 8.53:</b>	Lösungshäufigkeiten zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	185
<b>Tab. 8.54:</b>	Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IVd „Schrittlänge“ mit der korrekten Antwort MC 4 .....	186

<b>Tab. 8.55:</b> Lösungshäufigkeiten zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Mathematik gegliedert .....	189
<b>Tab. 8.56:</b> Lösungshäufigkeiten zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 2 nach Kompetenzstufen der Naturwissenschaften gegliedert .....	190
<b>Tab. 8.57:</b> Internationale Lösungshäufigkeiten der TIMSS-POP1-Studie 1995 zum Item IVe „Rechteck“ mit der korrekten Antwort MC 2 .....	191



## **Erklärung**

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe; die aus fremden Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche kenntlich gemacht.

Während der Entstehungsphase der Arbeit, insbesondere der Erstellung des Manuskriptes, haben mich Herr Professor Dr. Gerd Walther vom Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel und Herr Professor Dr. Manfred Prenzel vom Kieler Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften beraten.

Weitere Personen waren an der geistigen Herstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich nicht die Hilfe eines Promotionsberaters in Anspruch genommen. Dritte haben von mir weder unmittelbar noch mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im Inland noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Kiel, im Mai 2005

---

## Lebenslauf

**Name** Lobemeier

**Vorname** Kirstin Rosemarie

**Geburtsdatum** 30. März 1974

**Geburtsort** Kiel; Staatsangehörigkeit deutsch

**Familienstand** ledig

### **Schulbildung**

1978 Kindergarten der Stadt Kiel

1979 Vorschule der Stadt Kiel, Max-Tau-Schule

1980 - 1984 Grundschule „Max-Tau-Schule“, Kiel

1984 - 1994 Gymnasium „Alexander-von-Humboldt-Schule“, Kiel

### **Studium**

1994 - 1999 Studium der Fächer Mathematik und Physik für das Lehramt an Realschulen an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

November 1999 I. Staatsexamen für das Lehramt an Realschulen in Mathematik, Physik und Erziehungswissenschaften  
Staatsexamensarbeit (unveröffentlicht): „Zur Hamiltonizität von  $P(n,4)$  mit  $n \geq 9$ “

Mai 2000 -  
Oktober 2001 Vorbereitungsdienst in Emden, Niedersachsen, für das Lehramt an Realschulen in den Fächern Mathematik, Physik und Drittfach Chemie; Ausbildungsseminar Aurich, Niedersachsen

September 2001 II. Staatsexamen in den Fächern Mathematik, Physik und dem Drittfach Chemie für das Realschullehramt  
Staatsexamensarbeit (unveröffentlicht): „Möglichkeiten des Einsatzes von Lernspielen als methodische Unterstützung zur Übung mathematischer Lerninhalte – dargestellt an der UE "Rationale Zahlen" in einer 7. Realschulklasse“

## **Beruf**

Seit 01. November 2001 Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel im Projekt IGLU-E (Internationale Grundschul-Lese-Untersuchung und ihre Erweiterung um die Fächer Mathematik und Naturwissenschaften). Seit 15. August 2004 Wissenschaftliche Mitarbeiterin im Projekt SINUS-Transfer Grundschule (Weiterentwicklung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts an Grundschulen).

## **Veröffentlichungen**

Die nachfolgenden Veröffentlichungen sind aus meiner Tätigkeit als Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel im Projekt IGLU-E hervorgegangen:

Prenzel, M., Geiser, H., Langeheine, R., Lobemeier, K. (2003). *Das naturwissenschaftliche Verständnis am Ende der Grundschule*. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich (S.143-187). Münster: Waxmann.

Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R., Lobemeier, K. (2003). *Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe*. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich (S.189-226). Münster: Waxmann.

Prenzel, M., Geiser, H., Langeheine, R., Lobemeier, K. (2004). Naturwissenschaftliche Kompetenz am Ende der Grundschulzeit: Vergleiche zwischen einigen Ländern der Bundesrepublik Deutschland. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), IGLU. Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich (S.93-115). Münster: Waxmann.

Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R., Lobemeier, K. (2004). *Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe in einigen Ländern der Bundesrepublik Deutschland*. In W. Bos, E.-M. Lankes, M. Prenzel, K. Schwippert, R. Valtin & G. Walther (Hrsg.), IGLU. Einige Länder der Bundesrepublik Deutschland im nationalen und internationalen Vergleich (S.117-140). Münster: Waxmann.

Lobemeier, K., Walther, G. & Geiser, H. (2004). *Der Zusammenhang von Leistungskennwerten und Aufgabenkontextbezug im Fach Mathematik am Ende der vierten Jahrgangsstufe*. In I. Esslinger-Hinz & H. Hahn (Hrsg), Kompetenzen entwickeln – Unterrichtsqualität in der Grundschule steigern. Entwicklungslinien und Forschungsbefunde (S.165-174). Baltmannsweiler: Schneider.

Walther, G. & Lobemeier, K. (im Druck, erscheint im Mai 2005). Analysen zur schwersten Mathematikaufgabe aus IGLU-E. In Ch. Kaune, I. Schwank & J. Sjuts (Hrsg.), Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens. Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg. Osnabrück: Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik.

