

Isolierte Involutionen in endlichen Gruppen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von

Rebecca Waldecker

Kiel

Dezember 2006

Referent :

Korreferent :

Tag der mündlichen Prüfung :

Zum Druck genehmigt : Kiel,

Der Dekan

Prof. Dr. J. Grotemeyer

Danksagung

Dem Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel und dort besonders den Professoren B. Stellmacher und R. Schmidt danke ich für die Unterstützung der Arbeit an meinem Promotionsvorhaben, außerdem Prof. Dr. G. Stroth von der Universität Halle für wertvolle Hinweise.

Auch Frau G. Christiansen hat mir oft (und immer freundlich) hilfreich zur Seite gestanden.

Während eines mehrmonatigen Aufenthalts an der Universität Birmingham (UK) habe ich wichtige Schritte in meiner Arbeit machen können und verdanke das unter anderem vielen fruchtbaren Gesprächen mit den Professoren C. W. Parker und P. J. Flavell. Die Stipendien der Studienstiftung des deutschen Volkes während des Studiums und auch in der Zeit der Promotion waren eine (nicht nur finanzielle) große Hilfe, und auch dafür bin ich sehr dankbar.

Schließlich möchte ich meinem akademischen Lehrer H. Bender sehr herzlich danken für die Betreuung dieser Arbeit und für die vielen lehrreichen Gespräche.

Kurzfassung

Sei G eine endliche Gruppe und $z \in G$ eine Involution, also ein Element der Ordnung 2. Dann heißt z isoliert, falls z mit keinem Konjugierten $z^g = g^{-1}zg \neq z$ ($g \in G$) vertauschbar ist.

Z^* -Satz von Glauberman (siehe [GL1])

Ist $z \in G$ eine isolierte Involution, so liegt z in $Z^(G)$, d. h. $\langle z \rangle O(G)$ ist ein Normalteiler von G .*

Insbesondere besitzt eine nichtabelsche endliche einfache Gruppe keine isolierte Involution.

Glauberman selbst schließt in seinem Beweis für diesen Satz innerhalb der modularen Darstellungstheorie.

Die vorliegende Arbeit ist grundsätzlich als ein Versuch zu verstehen, den Z^* -Satz rein gruppentheoretisch zu beweisen. Das gelingt in dem Spezialfall, daß der Zentralisator $C := C_G(z)$ auflösbar ist.

Hauptgegenstand der Arbeit ist naturgemäß ein Gegenbeispiel G kleinster Ordnung zum allgemeinen Z^* -Satz und darin vor allem eine maximale Untergruppe M , die C enthält. Mit Hilfe der sogenannten Bender-Methode wird gezeigt:

Es ist $E(M) \neq 1$ oder $C = M$ oder $F^*(M)$ eine p -Gruppe mit $p \neq 2$ prim.

Anschließend betrachten wir den Fall, daß $O_2(C/O(C))$ eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 4 besitzt. Ein Hauptresultat ist dann, daß jede Involution in G isoliert ist und zentral in einer maximalen Untergruppe.

Von besonderem Interesse sind die Komponenten von $C/O(C)$. Mit Hilfe der Signalfunktormethode (Sätze von Goldschmidt), die auch vorher schon eine wichtige Rolle spielt, wird bewiesen, daß es mindestens eine und höchstens drei Komponenten gibt.

Abstract

In a finite group G , let z be an involution, i. e. an element of order 2. Then z is isolated in G if z does not commute with any of its conjugates $z^g = g^{-1}zg \neq z$ ($g \in G$).

The following theorem of Glauberman is the famous Z^* -Theorem ([GL1]):

Z^* -Theorem of Glauberman

If in a finite group G , $z \in G$ is an isolated involution, then $z \in Z^(G)$, that is $\langle z \rangle O(G)$ is normal in G .*

In particular, a nonabelian finite simple group does not possess an isolated involution.

Glauberman proves this theorem using modular character theory.

As a matter of principle, this note should be regarded as an attempt to provide a proof by purely local arguments. We succeed in the special case where the centralizer $C := C_G(z)$ is soluble.

Naturally the main subject is a counterexample G of minimal order to the general Z^* -Theorem, and a maximal subgroup M containing C . Now the so called Bender method comes into action, and we can show:

$E(M) \neq 1$ or $C = M$ or $F^*(M)$ is a p -group for some odd prime p .

After that we concentrate on the case where $O_2(C/O(C))$ contains an elementary abelian subgroup of order 4. One of our main results there is that each involution of G is isolated and central in a maximal subgroup.

Moreover, our attention focuses on the components of $C/O(C)$. Using the signalizer functor method (results of Goldschmidt), which played an important role earlier already, we conclude that $C/O(C)$ possesses at least one and at most three components.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Vorbereitendes	3
3	Spezielle Resultate	13
4	Signalisatorfunktoren	25
5	Isolierte Involutionen	29
6	Z^* -Involutionen	39
7	Die Kommutatorgruppe $[M, z]$	43
8	Infektion	51
9	Ein minimales Gegenbeispiel zum Z^* -Satz	57
10	Maximale Untergruppen, die C enthalten	61
11	Involutionen in $O_{2',2}(C)$	67
12	Reduktion auf den Fall $\mathcal{K}_2(C) \neq \emptyset$	79
13	Die 2-Komponenten von C	85
14	Verzeichnis für Notation und Stichworte	105
15	Literaturangaben	108

1 Einleitung

1966 bewies G. Glauberman in seiner Arbeit „Central elements in core-free groups“ (siehe [GL1]) einen Satz, der jetzt in der Gruppentheorie als Z^* -Satz berühmt ist:

Z^* -Satz von Glauberman

Sei G eine endliche Gruppe und $z \in G$ eine isolierte Involution.

Dann ist $z \in Z^(G)$, d. h. $\langle z \rangle O(G) \trianglelefteq G$.*

Dabei heißt eine Involution isoliert, wenn sie mit keinem Konjugierten außer sich selbst vertauschbar ist.

Im Beweis verwendet Glauberman Methoden aus der modularen Darstellungstheorie (Blocktheorie). Nun gibt es, obwohl die Charaktertheorie ein natürliches und unverzichtbares Hilfsmittel darstellt, ein Bestreben nach möglichst rein gruppentheoretischen Beweisen. Dieses führte zum Beispiel beim $p^\alpha q^\beta$ -Satz von Burnside zum Erfolg. Es besteht ein ähnlich gelagertes Interesse, die Zuhilfenahme modularer Charaktertheorie zu vermeiden, d. h. mit gewöhnlicher Darstellungstheorie auszukommen. So gelang etwa Glauberman ein Beweis für den Satz von Brauer und Suzuki über Gruppen mit Quaternionen-2-Sylowgruppen ohne Zuhilfenahme der Blocktheorie.

Diese Arbeit weist einen möglichen Weg zu einem neuen Beweis für Glaubermans Z^* -Satz. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß der Zentralisator einer isolierten Involution auflösbar ist, wird der Satz bewiesen, und die Struktur eines minimalen Gegenbeispiels zum allgemeinen Z^* -Satz kann stark eingeschränkt werden.

Ein solches Gegenbeispiel G ist ab Kapitel 9 Gegenstand der Arbeit. Wir untersuchen zuerst den Zentralisator C einer isolierten Involution z mit dem Ziel, zu zeigen, daß C eine maximale Untergruppe von G ist. Die sogenannte Bender-Methode spielt dort eine wesentliche Rolle und auch anschließend, wenn wir den Fall $r_2(O_{2',2}(C)) \geq 2$ untersuchen.

In Kapitel 13 liegt unsere Aufmerksamkeit auf den 2-Komponenten von C , und nicht erst dort ist die Signalisatorfunktormethode von großer Bedeutung und liefert Einschränkungen etwa für deren Anzahl.

Die Hauptergebnisse sind:

Satz 1

Ist $z \in G$ eine isolierte Involution mit auflösbarem Zentralisator, so ist $\langle z \rangle O(G) \trianglelefteq G$.

Sei jetzt G ein minimales Gegenbeispiel zum Z^* -Satz, $z \notin Z^*(G)$ eine isolierte Involution und $C := C_G(z) \leq M \max G$.

Satz 2

Es ist $E(M) \neq 1$ oder $C = M$ oder $F^(M)$ eine p -Gruppe mit einer ungeraden Primzahl p .*

Satz 3

Sei $z \in S \in \text{Syl}_2(G)$ und $r_2(O_{2',2}(C)) \geq 2$.

- *S besitzt genau drei Involutionen, diese sind isoliert.*
- *Für jede Primzahl p wird jede p -Sylowuntergruppe von G von einer der drei Involutionen in S zentralisiert.*
- *Der Zentralisator jeder Involution in G ist eine maximale Untergruppe.*
- *$C = O_{2',E}(C)$.*
- *$[C, a] \leq F(C)$ für alle Involutionen $a \in C$.*

Satz 4

$C/O(C)$ besitzt mindestens eine und höchstens drei Komponenten.

Mit zusätzlichen Voraussetzungen über die auftretenden einfachen Gruppen können am Ende der Arbeit weitere Resultate über $O_{2',F^*}(C)$ bewiesen werden.

2 Vorbereitendes

Bezeichnungen

Von nun an sind alle Gruppen endlich.

Sei X eine Gruppe, p eine Primzahl, π eine Menge von Primzahlen und $n \in \mathbb{N}$.

- Für alle $x \in X$ und $U \subseteq X$ ist $x^U := \{x^u \mid u \in U\}$.
- $O(X) = O_{2'}(X)$ ist der größte Normalteiler ungerader Ordnung von X , und $Z^*(X)$ ist das Urbild von $Z(X/O(X))$ in X .
- X ist **quasi-einfach**, falls X perfekt ist (also $X' = X$) und $X/Z(X)$ einfach.
- Eine **Komponente von X** ist ein quasi-einfacher Subnormalteiler von X .
- $F(X)$ ist der größte nilpotente Normalteiler von X , die **Fittinguntergruppe** von X , und $E(X)$ ist das Produkt aller Komponenten von X .
 - Komponenten zentralisieren sich gegenseitig.
 - $E(X)$ zentralisiert jeden auflösbaren Normalteiler von X . Insbesondere ist $[E(X), F(X)] = 1$.
- Die **verallgemeinerte Fittinguntergruppe** $F^*(X)$ ist das zentrale Produkt von $F(X)$ und $E(X)$.
 - Ist X auflösbar, so ist $F^*(X) = F(X)$.
- $F_\pi(X) := O_\pi(F(X))$.

- $O_{\pi', F^*}(X)$ ist das Urbild von $F^*(X/O_{\pi'}(X))$ in X .

Analog sind $O_{\pi', \pi}(X)$, $O_{\pi', F}(X)$ und $O_{\pi', E}(X)$ definiert.

- Ein Subnormalteiler E von X ist eine **p -Komponente von X** , falls $E = O^{p'}(E)$ und $E/O_{p'}(E)$ quasi-einfach ist.

$\mathcal{K}_p(X)$ ist die Menge aller p -Komponenten von X .

- Ist $E \leq X$ und \bar{E} eine Komponente von $\bar{X} := X/O_{p'}(X)$, dann ist $O^{p'}(E)$ eine p -Komponente von X .

- $O_{p', E}(X)$ ist das Produkt aller $E \in \mathcal{K}_p(X)$ mit $O_{p'}(X)$.

- Wir kürzen ab $L(X) := O^{2'}(O_{2', E}(X))$.

- X ist p -perfekt, wenn $O^p(X) = X$ ist.

- $\text{char}(X) = p$ bedeutet $F^*(X) = O_p(X)$.

X ist **von Primzahlcharakteristik**, falls es eine Primzahl p gibt mit

$\text{char}(X) = p$.

- X ist eine **p^* -Gruppe**, falls X p -perfekt ist und für jeden Normalteiler N von X gilt: $X = NC_X(P)$ für alle $P \in \text{Syl}_p(N)$.

$O_{p^*}(X)$ ist der größte p^* -Normalteiler von X .

- $\text{char}(X) = p$ genau dann, wenn $O_{p^*}(X) = 1$ ist.

- $Y \leq X$ ist **zentralisatorabgeschlossen in X** , wenn $C_X(Y) \leq Y$ ist.

- $F^*(X)$ ist zentralisatorabgeschlossen in X .

- Ist X auflösbar, so ist $F(X)$ zentralisatorabgeschlossen.

- Ist $t \in X$ eine Involution und $W \leq X$ eine t -invariante Untergruppe, so ist $I_W(t) := \{tt^w \mid w \in W\}$.
- Falls W ungerade Ordnung hat, ist das genau die Menge der von t invertierten Elemente in W .
- Sei $A \leq X$. Dann ist $\mathcal{I}_X(A, \pi)$ die Menge aller A -invarianten π -Untergruppen von X .
 $\mathcal{I}_X^*(A, \pi)$ ist die Menge aller maximalen Elemente von $\mathcal{I}_X(A, \pi)$ bezüglich Inklusion.
- X ist **metazyklisch**, wenn X einen zyklischen Normalteiler mit zyklischer Faktorgruppe besitzt.
- Sei X eine p -Gruppe.
Dann ist $\Omega_n(X) := \langle x \in X \mid x^n = 1 \rangle$.
- $\mathcal{E}_p(X)$ ist die Menge aller elementarabelschen p -Untergruppen von X . Wir lassen den Index p weg, wenn klar ist, um welche Primzahl es sich handelt.
 $\mathcal{E}_p^*(X)$ ist die Menge aller ordnungsmaximalen Elemente aus $\mathcal{E}_p(X)$.
Ist P eine elementarabelsche p -Untergruppe von X mit $|P| = p^n$, so ist n der **Rang von P** , abgekürzt mit $r(P)$. Der Rang einer p -Gruppe ist der Rang einer ordnungsmaximalen elementarabelschen Untergruppe.
 $r_p(X)$ (der **p -Rang von X**) ist der Rang der Elemente aus $\mathcal{E}_p^*(X)$.
Schließlich ist $\mathcal{E}_p^n(X) := \{P \in \mathcal{E}_p(X) \mid r(P) = n\}$.
- Sei X eine p -Gruppe. X ist **speziell**, falls $\phi(X) = X' = Z(X)$ elementarabelsch ist. X ist **extraspeziell**, wenn $|Z(X)| = p$ ist.
- In einer extraspeziellen Gruppe X ist $|X : Z(X)|$ eine Quadratzahl.

- Sei $P \in \text{Syl}_p(X)$. Dann ist $J(P) := \langle \mathcal{E}_p^*(X) \rangle$.

Das Zentrum $Z(J(P))$ wird üblicherweise mit $ZJ(P)$ abgekürzt.

- C_n ist die zyklische Gruppe der Ordnung n .
- Q_8 ist die Quaternionengruppe der Ordnung 8.
- S_n ist die symmetrische Gruppe und A_n die alternierende Gruppe vom Grad n .
- M_{11} ist die Mathieu-Gruppe der Ordnung $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, eine einfache 4-fach transitive Gruppe vom Grad 11.
- $PSL_n(q)$ (abgekürzt $L_n(q)$) ist die projektive spezielle lineare Gruppe eines n -dimensionalen Vektorraumes über einem Körper mit q Elementen.
- $PSU_n(q)$ (abgekürzt $U_n(q)$) ist die projektive spezielle unitäre Gruppe eines n -dimensionalen Vektorraumes über einem Körper mit q^2 Elementen.

Elementare Hilfssätze

Die hier aufgeführten Sätze werden im Verlauf der Arbeit benötigt, und wir werden uns in der Regel konkret darauf beziehen. Auf Beweise verzichten wir hier weitgehend – dort, wo auch keine genaue Quelle angegeben ist, siehe etwa [A], [G1] oder [KS]. Es sei immer X eine Gruppe, p prim und π eine Menge von Primzahlen.

Satz 2.1. *Die Gruppe A operiere teilerfremd auf der Gruppe W .*

1. $W = [W, A]C_W(A)$.
2. $[W, A] = [W, A, A]$.
3. *Ist W abelsch, so ist $W = [W, A] \times C_W(A)$.*
4. *Falls A einen zentralisatorabgeschlossenen Subnormalteiler von W zentralisiert, so folgt schon $[A, W] = 1$.*
5. *Falls W eine p -Gruppe ist und A jedes Element der Ordnung p in W zentralisiert, dann operiert A trivial auf W .*
6. *(Erzeugungssatz) Sei A abelsch, aber nicht zyklisch.
Dann ist $W = \langle C_W(B) \mid B \leq A, A/B \text{ zyklisch} \rangle$
und $[W, A] = \langle [C_W(B), A] \mid B \leq A, A/B \text{ zyklisch} \rangle$.
Insbesondere ist $W = \langle C_W(a) \mid a \in A^\# \rangle$.*
7. *Sei W nilpotent und A elementarabelsch der Ordnung 4, etwa $A = \{1, a, b, ab\}$.
Dann ist $W = C_W(a)C_W(b)C_W(ab)$.*
8. *Sei $W = W_1W_2$. Dann ist $C_W(A) = C_{W_1}(A)C_{W_2}(A)$.*
9. *Sei A eine π -Gruppe.
Dann ist $\bigvee_W^*(A, q) \subseteq \text{Syl}_q(W)$ für alle Primzahlen $q \in \pi'$, $C_W(A)$ ist auf $\bigvee_W^*(A, q)$ transitiv, und jede A -invariante q -Untergruppe von W liegt in einer A -invarianten q -Sylowuntergruppe.*

Lemma 2.2. *Die elementarabelsche Gruppe $A = \{1, a, b, ab\}$ der Ordnung 4 operiere auf der nilpotenten $2'$ -Gruppe W .*

Ist dann $C_W(a) \leq C_W(b)$, so folgt $I_W(b) \subseteq I_W(a)$.

Beweis. Aus Lemma 2.1 (6) und der Voraussetzung folgt $W = C_W(b)C_W(ab)$. Da $C_W(ab)$ unter b invariant ist, sehen wir weiter $[W, b] = [C_W(ab), b] \leq C_W(ab)$. Insbesondere wird jedes von b invertierte Element aus W nun von ab zentralisiert, also auch von a invertiert.

□

Satz 2.3. *Sei X eine p -Gruppe.*

Dann gibt es eine charakteristische Untergruppe P von X mit folgenden Eigenschaften:

- *Jede p' -Untergruppe von $\text{Aut}(X)$ operiert treu auf P .*
- *$P' = \phi(P)$ ist elementarabelsch und in $Z(P)$ enthalten.*
- *Ist $p \neq 2$ und $X \neq 1$, so folgt $\text{Exp}(P) = p$.*

Satz 2.4. *Sei $P \leq X$ eine p -Gruppe und $A \leq N_X(P)$ eine p' -Untergruppe.*

Sei P_0 eine minimale $C_{N_X(P)}(A)$ -invariante, aber nicht von A zentralisierte Untergruppe von P .

Dann ist P_0 elementarabelsch oder speziell.

In jedem Fall ist $P_0 = [P_0, a]$ und $C_{P_0}(A) = P_0'$. Für $p \neq 2$ ist weiter $\text{Exp}(P_0) = p$.

Lemma 2.5. *Sei $H \leq X$ eine auflösbare Untergruppe, die von der Involution $t \in X$ normalisiert wird. Jede t -invariante π -Untergruppe von H werde von t zentralisiert.*

Dann ist $H = C_H(t)O_{\pi'}(H)$.

Beweis. Die Voraussetzungen vererben sich auf die Faktorgruppe $H/O_{\pi'}(H)$, also können wir $O_{\pi'}(H) = 1$ annehmen. Nun ist $F^*(H) = F(H)$ eine π -Gruppe (H ist auflösbar!) und natürlich t -invariant, wird also von t zentralisiert nach Voraussetzung. Da $F(H)$ ein zentralisatorabgeschlossener Normalteiler ist, folgt nun $[H, t] = 1$ aus 2.1 (4).

□

Lemma 2.6. *Sei p ungerade und P eine metazyklische, nicht zyklische p -Gruppe. Dann ist $\Omega_1(P)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 .*

Lemma 2.7. *Sei $P \leq X$ eine p -Untergruppe und $W \leq N_X(P)$. Falls dann W fixpunktfrei auf P operiert, ist W eine p' -Gruppe.*

Lemma 2.8. *Sei $t \in X$ eine Involution und $W \leq X$ eine t -invariante Untergruppe.*

1. *Ist W eine $2'$ -Gruppe, so ist $|W : C_W(t)| = |I_W(t)|$.*

Genauer: Jede Nebenklasse von $C_W(t)$ in W enthält genau ein von t invertiertes Element.

2. *Falls t fixpunktfrei auf W ist, invertiert t jedes Element von W , und insbesondere ist W abelsch.*

Lemma 2.9 (Thompsons $P \times Q$ -Lemma). *Die Gruppe A operiere auf der p -Gruppe W , wobei $A = P \times Q$ direktes Produkt einer p -Gruppe P mit einer p' -Gruppe Q ist. Falls dann $C_W(P)$ von Q zentralisiert wird, operiert A trivial auf ganz W .*

Weitere benötigte Sätze

Satz 2.10. *Sei X eine 2-Gruppe, $T \trianglelefteq X$, und T enthalte keinen elementarabelschen Normalteiler der Ordnung 4 von X .*

Dann ist X zyklisch, eine Quaternionengruppe, eine Diedergruppe oder eine Semidiedergruppe.

Satz 2.11. *Sei Y eine p -Untergruppe von $O_{p',p}(X)$. Dann ist $O_{p'}(C_X(Y)) \leq O_{p'}(X)$. Ist X auflösbar, so ist für jede p -Untergruppe P von X schon $O_{p'}(C_X(P)) \leq O_{p'}(X)$.*

Satz 2.12. *Sei $t \in O_{2',2}(X)$ eine Involution und $D \leq X$ eine $\langle t \rangle C_X(t)$ -invariante $2'$ -Untergruppe.*

Dann ist $D \leq O(X)$, und falls D nilpotent ist, folgt $[t, D] \leq F(X)$.

Beweis. Wegen der teilerfremden Operation (siehe 2.1) ist $D = C_D(t)[D, t]$.

Aus $t \in O_{2',2}(X)$ folgt nun einerseits $[t, D] \leq [O_{2',2}(X), D] \leq O(X)$ und andererseits $C_D(t) \leq O(C_X(t)) \leq O(X)$ mit Satz 2.11. Sei jetzt D nilpotent. Wir zeigen für jede Primzahl $q \in \pi(D)$: $[t, O_q(D)] \leq O_q(X)$.

Dazu nehmen wir oBdA $O_q(X) = 1$ an und zeigen $[z, O_q(D)] = 1$. (Sonst gehen wir zur Faktorgruppe nach $O_q(X)$ über.)

$O_q(D)$ ist $\langle t \rangle C_X(t)$ -invariant.

Mit $D_0 := [O_q(D), t]$ ist $[C_{F(X)}(t), D_0] \leq O_q(D) \cap F(X) \leq O_q(X) = 1$ und daher $C_{F(X)}(t) \leq C_{F(X)}(D_0) =: H$. Nun operiert t auf der Faktorgruppe $N_{F(X)}(H)/H$, und zwar fixpunktfrei, also invertiert t jedes Element wegen Lemma 2.8 (2). Aber dann zentralisiert $D_0 = [D_0, t]$ diese Faktorgruppe und daher schon $N_{F(X)}(H)$ selbst.

Das impliziert $N_{F(X)}(H) \leq C_{F(X)}(D_0) = H$, also ist H mit seinem Normalisator in der nilpotenten Gruppe $F(X)$ identisch. Das ist aber nur möglich, wenn $H = F(X)$ ist. Wir beachten nun $D_0 \leq D \leq O(X) \leq C_X(E(X))$ und erhalten

$D_0 \leq C_X(F^*(X)) \leq F(X)$, also $D_0 \leq O_q(X) = 1$ wie behauptet.

□

Satz 2.13. Sei V eine p -Untergruppe von $O_{p',p}(X)$.

Dann ist $C_X(V)$ transitiv auf $\mathcal{V}_X^*(V, q)$ für jedes $q \in \pi'$.

Satz 2.14 (siehe BE3). Sei P eine p -Untergruppe von X .

Dann ist $O_{p^*}(C_X(P)) \leq O_{p^*}(X)$.

Satz 2.15 (siehe GL2). Sei $O(X) = 1$ und $S \in \text{Syl}_2(X)$.

Dann besitzt $A := C_{\text{Aut}(X)}(S)$ ein normales 2-Komplement, und die 2-Sylowuntergruppen von A sind abelsch. Insbesondere ist A auflösbar.

Satz 2.16. Sei $a \in X$ eine Involution.

Dann ist $L(C_X(a)) \leq L(X)$.

Satz 2.17 (Thompsons Verlagerungslemma). Sei $S \in \text{Syl}_2(X)$, T eine maximale Untergruppe von S und $s \in S$ eine Involution mit $s^X \cap T = \emptyset$.

Dann ist $s \notin O^2(X)$.

Satz 2.18. Sei $P \in \text{Syl}_p(X)$, $P \leq H \leq X$, und für jedes p -Element $y \in H$ sei $y^X \cap H = y^H$.

Falls dann $O^p(H) \neq H$ ist, folgt auch $O^p(X) \neq X$.

Wir benötigen auch abgeschwächte Versionen des ZJ -Satzes von Glauberman und des Verlagerungssatzes von Burnside.

Satz 2.19 (ZJ-Satz). Sei X eine Gruppe ungerader Ordnung, $\text{char}(X) = p$ und $P \in \text{Syl}_p(X)$.

Dann ist $ZJ(P) \trianglelefteq X$.

Satz 2.20 (Burnside). *Sei $S \in \text{Syl}_2(X)$ zyklisch.*

Dann besitzt X ein normales 2-Komplement, d. h. $X = SO(X)$.

Satz 2.21 (Brauer-Suzuki). *Sei $S \in \text{Syl}_2(X)$ eine Quaternionengruppe und s die zentrale Involution in S .*

Dann ist $\langle s \rangle O(X) \trianglelefteq X$, d. h. $s \in Z^(X)$.*

Satz 2.22 (Frobenius). *Für jede nichttriviale p -Untergruppe P von X besitze $N_X(P)$ ein normales p -Komplement.*

Dann besitzt X ein normales p -Komplement.

Eine abgeschwächte Version von Theorem 1 in [GL3] ist

Satz 2.23. *Sei H eine π -Gruppe und A eine π' -Untergruppe von $\text{Aut}(H)$. Sei t ein involutorischer Automorphismus von H und $C_H(t) \leq C_H(A)$.*

Dann sind $[C_H(A), t]$ und $[H, A]$ Normalteiler von H , und $[H, A]$ ist eine nilpotente $2'$ -Untergruppe.

Satz 2.24 (siehe J). *Sei T eine 2-Gruppe, die genau drei Involutionen enthält und $C_4 \times C_4 \simeq W \trianglelefteq T$ mit $\Omega_1(W) \leq Z(T)$.*

Dann besitzt T einen metazyklischen Normalteiler vom Index höchstens vier.

Wir verwenden in der ganzen Arbeit, ohne speziell darauf zu verweisen :

Satz 2.25 (siehe FT). *Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar.*

3 Spezielle Resultate

Wir beweisen hier allgemeine Sätze, die im Laufe der Arbeit benötigt werden.

Satz 3.1 kommt in Kapitel 12 ins Spiel und verwendet ein Ergebnis aus Jankos Arbeit über 2-Gruppen mit genau drei Involutionen (siehe [J] und speziell Satz 2.24).

Auch Satz 3.2 bzw. das Korollar 3.3 daraus wird am Ende von Kapitel 12 zitiert.

Zum Schluß beweisen wir einen Satz über teilerfremde Operation (genauer einen Erzeugungsatz), der sich an Ergebnisse wie 2.1 (6) anschließt und sehr ähnlich zu Resultaten von Goldschmidt ist, vgl. etwa [GO1] und [GO2]. Er wird in Kapitel 13 benötigt.

Satz 3.1. *Sei T eine 2-Gruppe, die genau drei Involutionen enthält.*

Dann ist $\text{Aut}(T)$ auflösbar.

Beweis. Angenommen nicht. Dann besitzt $\text{Aut}(T)$ eine perfekte nichttriviale Untergruppe A . Sind a, b und $z := ab$ die drei Involutionen in T und $V := \langle a, b \rangle$, so ist $V \leq Z(T)$ und A trivial auf V .

Weiter können wir $\phi(T) = T' = V \leq Z(T)$ annehmen mit Satz 2.3. Also ist nun T/V elementarabelsch, d. h. jedes Element außerhalb von V hat Ordnung 4.

Für jedes $v \in V^\#$ definieren wir die Teilmenge $T_v := \{t \in T \mid t^2 = v\}$. Dann ist T als Menge die disjunkte Vereinigung von V, T_a, T_b und T_z , und diese Partition wird von A elementweise invariant gelassen. Wir bezeichnen eine Untergruppe oder Teilmenge S von T als **vom Typ** T_v , wenn alle Elemente der Ordnung 4 aus S in T_v liegen.

Wir erhalten offenbar einen Widerspruch, falls $T = V$ ist. Wir sehen auch sofort, daß A im Falle $|T| \leq 16$ auflösbar ist, denn die Faktorgruppe $T/Z(T)$ hat dann höchstens Ordnung 4. Daher folgt $|T| \geq 32$.

Sei $|T| = 32$.

Dann ist $\bar{T} := T/\langle z \rangle$ nicht extraspeziell, da sonst $|T : V|$ ein Quadrat wäre.

Deshalb ist $|Z(\bar{T})| \neq 2$.

Wegen $|T| = 32$ muß $|\bar{T}/Z(\bar{T})| = 4$ sein und dann $A/C_A(\bar{T}/Z(\bar{T}))$ isomorph zu einer Untergruppe von S_4 .

Aber ein nichttrivialer $2'$ -Automorphismus von T , der $\bar{T}/Z(\bar{T})$ zentralisiert, kann nicht auch noch $Z(\bar{T})$ zentralisieren und induziert darauf eine auflösbare Gruppe. Das ist ein Widerspruch.

Also haben wir $|T| \geq 64$.

Jetzt zeigen wir $|T| \leq 64$.

Sei $x \in T$, oBdA $x \in T_a$ und $X := \langle x \rangle V$. Angenommen, $X = C_T(x)$.

Dann ist $8 = |C_T(x)| = |T : [T, x]| \geq |T : V|$, also $|T| \leq 32$, was wir schon behandelt haben.

Sei also $X \neq C_T(X)$, und angenommen, $C_T(X)$ sei vom Typ T_a .

Für jedes $y \in C_T(X) \setminus X$ ist dann xy eine Involution und offenbar $xy \neq a$. Sei etwa $xy = b$. Es ist auch $yz \in C_T(X) \setminus X$ und $xyz = bz = a = x^2$. Also folgt $yz = x$, ein Widerspruch. Analog im Falle $xy = z$.

Daher muß es ein $u \in C_T(x) \setminus X$ geben vom Typ T_b oder T_z , und $\langle x \rangle \times \langle u \rangle$ ist dann eine zu $C_4 \times C_4$ isomorphe Untergruppe von T . Diese enthält V und ist daher normal in T .

Aber Satz 2.24 liefert dann, daß T einen metazyklischen Normalteiler vom Index höchstens 4 enthält, und damit ist $|T| \leq 64$.

Wir halten noch fest, daß $T_v \neq \emptyset$ ist für alle $v \in V^\#$.

Jetzt ist $|T| = 64$, und A operiert irreduzibel auf $\tilde{T} := T/V$.

Da sich die Typen der Elemente in T auf \tilde{T} übertragen, bilden die Teilmengen \tilde{T}_v mit $v \in V^\#$ eine Partition von \tilde{T} , die von A elementweise festgelassen wird.

Falls etwa $|\tilde{T}_a| < 5$ ist, dann induziert A darauf eine auflösbare Gruppe, ein Widerspruch.

Also ist $|\tilde{T}_v| = 5$ für alle $v \in V^\#$.

A operiert nun auf \tilde{T}_a , einer Menge von fünf Elementen, enthält also eine zu A_5 isomorphe Untergruppe. (A_5 ist die einzige perfekte Untergruppe von S_5 .)

Jetzt ist A 2-fach transitiv auf \tilde{T}_a .

Seien $x_1, \dots, x_5 \in T$, so daß $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_5$ genau die fünf Elemente vom Typ T_a in \tilde{T} sind.

Da \tilde{T} elementarabelsch ist, haben wir $[x_1, x_2] = v \in V$. Aber A ist 2-fach transitiv, und deshalb ist für alle $i, j \in \{1, \dots, 5\}$ schon $[x_i, x_j] = v$.

Die Gruppe $\langle x_1, \dots, x_5 \rangle / \langle v \rangle$ ist also abelsch, und nun ist $\langle \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_5 \rangle$ eine echte A -invariante Untergruppe von \tilde{T} .

Das widerspricht der irreduziblen Operation von A .

□

Satz 3.2. *Sei \mathbb{F} ein Körper der Charakteristik p , p ungerade, und W ein endlichdimensionaler \mathbb{F} -Vektorraum.*

Sei H eine Gruppe, die auf W operiert und $a \in H$ eine Involution mit $[H, a] \leq O(H)$ und $\dim(C_W(a)) \leq 1$.

Sei $H/O(H)$ sowohl 2-perfekt als auch 3-perfekt.

Dann operiert $[H, a]$ nilpotent auf W .

Beweis. Angenommen, $[H, a]$ operiere nicht nilpotent auf W .

Zuerst sehen wir, daß nach Voraussetzung $H = C_H(a)[H, a] = C_H(a)O(H)$ ist.

Für jedes $q \in \pi([H, a])$ besitzt $[H, a]$ eine a -invariante q -Sylowuntergruppe, siehe 2.1 (9). Wenn diese zentralisiert wird, ist $[H, a]$ eine q' -Gruppe mit Satz 2.5. Falls also für alle $q \neq p$ schon a eine q -Sylowuntergruppe von $[H, a]$ zentralisiert, ist $[H, a]$ eine p -Gruppe und liegt in $O_p(H)$, ein Widerspruch.

Daher existiert eine Primzahl $q \neq p$, so daß eine q -Sylowuntergruppe T von $[H, a]$ nicht von a zentralisiert wird. Mit dem Frattiniargument ist nun $H = [H, a]N_H(T)$, also sogar $H = [H, a](N_H(T) \cap C_H(a))$.

Sei $Q \leq T$ eine minimale $(N_H(T) \cap C_H(a))$ -invariante, aber nicht von a zentralisierte q -Untergruppe von $[H, a]$.

Mit Satz 2.4 ist $Q = [Q, a]$ elementarabelsch oder speziell.

Wir wählen jetzt unser Gegenbeispiel H minimal, genauer sei $|H| + \dim(W)$ möglichst klein.

Wegen der minimalen Wahl operiert H treu und irreduzibel auf W . Ferner ist $Q \trianglelefteq H$, also sogar $H = C_H(a)Q$, und die Voraussetzungen bleiben erhalten.

Wir beachten, daß aus $C_W(H) = 0$ nun auch $C_W(Q) = 0$ folgt.

Seien K_1, \dots, K_n die homogenen $Z(Q)$ -Komponenten von W .

Die Summe der von a invertierten Komponenten ist unter $Z(Q)$, also auch unter Q invariant und wird deshalb von $Q = [Q, a]$ zentralisiert. Das ist ein Widerspruch zu $C_W(Q) = 0$.

Also gibt es keine von a invertierte Komponente.

Angenommen, a läßt keine der Komponenten fest.

Sei etwa $K_1^a = K_2$. Dann wird die „Diagonale“ $D := \{kk^a \mid k \in K_1\}$ von a zentralisiert, ist also wegen $\dim(C_W(a)) \leq 1$ ein eindimensionaler Teilraum.

Ferner gibt es dann nur eine solche Diagonale – es folgt $n = 2$, und K_1, K_2 sind selbst eindimensionale Teilräume.

Da H treu operiert, ist jetzt H isomorph zu einer Untergruppe von $GL_2(p)$ und H' isomorph zu einer Untergruppe von $SL_2(p)$. Aber $H/O(H)$ ist nach Voraussetzung 2-perfekt, also folgt $a \in C_H(a)'$, und daher ist das Bild von a die zentrale Involution in $SL_2(p)$.

Jetzt wird W von a invertiert, ein Widerspruch.

Also läßt a mindestens eine Komponente, etwa K_1 , fest.

Es folgt $K_1 = [K_1, a] \oplus C_{K_1}(a)$. Da $C_W(a)$ ein höchstens eindimensionaler Teilraum ist und K_1 nicht von a invertiert wird, hat $C_{K_1}(a)$ Dimension 1, und a invertiert jede weitere Komponente.

Daraus folgt $W = K_1$.

Nun induziert $Z(Q)$ eine zyklische Gruppe auf W_1 , ist also selbst zyklisch.

1. Fall: Q ist elementarabelsch.

Dann ist $Q = Z(Q)$ zyklisch der Ordnung q und wird von a invertiert. Aber Q ist normal in H , also ist nun $H/C_H(Q)$ abelsch. Daraus folgt $a \in H' \leq C_H(Q)$, ein Widerspruch.

2. Fall: Q ist speziell.

Dann ist $Z(Q) = C_Q(a)$ zyklisch der Ordnung q .

Sei $Z(Q) \leq Y \in \mathcal{E}^2(Q)$.

Dann ist mit dem Erzeugungssatz $W = \langle C_W(y) \mid y \in Y^\# \rangle$, genauer W die direkte Summe der Teilräume $C_W(y)$. In Y gibt es genau $q + 1$ Untergruppen der Ordnung q – eine (nämlich $Z(Q)$) wird von a zentralisiert, eine wird von a invertiert. Die anderen $q - 1$ werden von a paarweise vertauscht.

Wegen $C_W(Z(Q)) = 0$ ist W die direkte Summe von q Summanden.

Sei $X \leq Y$ eine nicht von a normalisierte Untergruppe der Ordnung q und

$W_0 := C_W(X)$. Dann sind W_0 und W_0^a Unterräume von W mit trivialem Schnitt, und die Diagonale $\{ww^a \mid w \in W_0\}$ wird von a zentralisiert. Daher ist $\dim(W_0) = 1$, und es kann keine weitere solche Diagonale geben, da $C_W(a)$ eindimensional ist. Das heißt, daß es in Y insgesamt nur zwei nicht a -invariante Untergruppen der Ordnung q gibt, und es folgt $q = 3$. Nun ist W die Summe dreier isomorpher Teilräume der Dimension eins.

Angenommen, $|Q| > q^3 = 3^3$. Dann gibt es in Q eine elementarabelsche Untergruppe Q_0 der Ordnung q^3 .

Mit dem Erzeugungssatz 2.1 (6) ist $W = \langle C_W(X) \mid X \leq Q_0 \text{ vom Index } q \rangle$, sei also $X \leq Q_0$ mit $|X| = q^2$ und $W_1 := C_W(X) \neq 0$. (Offenbar ist auch $W_1 < W$.)

Da X nicht zyklisch ist, haben wir wieder mit 2.1 (6) auch $W = \langle C_W(x) \mid x \in X^\# \rangle$.

Es gibt also ein $x \in X^\#$ mit $C_W(x) \not\leq W_1$. Aber andererseits ist $\langle x \rangle Z(Q) \in \mathcal{E}^2(Q)$ wie oben und daher $C_W(x)$ ein eindimensionaler Teilraum. Das ist ein Widerspruch.

Daher kann es in Q keine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung q^3 geben, und nun ist $|Q| = 3^3$. Deshalb ist $Q/Z(Q)$ elementarabelsch der Ordnung 3^2 , und da Q normal in H ist, ist nun $H/C_H(Q/Z(Q))$ isomorph zu einer Untergruppe von $GL_2(3)$. Aber $H/O(H)$ ist 2- und 3-perfekt, ein Widerspruch.

□

Nun formulieren wir 3.2 um als Satz über die Operation einer Gruppe auf einem p -Normalteiler.

Satz 3.3. *Sei H eine Gruppe, $p \in \pi(H)$ und $P := O_p(H)$.*

Sei $H/O(H)$ sowohl 2-perfekt als auch 3-perfekt und $a \in H$ eine Involution mit $[H, a] \leq O(H)$, so daß $C_P(a)$ zyklisch ist.

Dann operiert $[H, a]$ nilpotent auf P .

Beweis. H operiert auf der elementarabelschen p -Gruppe $P/\phi(P)$, und diese Gruppe können wir als p -Vektorraum auffassen.

Auf ein minimales Gegenbeispiel können wir dann Satz 3.2 anwenden und erhalten einen Widerspruch.

□

Satz 3.4. *Sei p prim.*

Das zentrale Produkt AA_0 operiere teilerfremd auf der auflösbaren Gruppe W mit $W = [W, A_0]$, wobei A eine elementarabelsche p -Gruppe vom Rang mindestens 3 ist.

Sei ferner $B \leq A$, $H := C_W(A_0B)$, und $Hyp^2(A)$ bezeichne die Menge aller Untergruppen von A vom Index p^2 .

Dann ist $H = \langle [C_W(X), A_0] \cap H \mid X \in Hyp^2(A) \rangle$.

Beweis. Sei W ein minimales Gegenbeispiel und

$$E_H := \langle [C_W(X), A_0] \cap H \mid X \in \text{Hyp}^2(A) \rangle.$$

Untergruppen von A vom Index p bezeichnen wir hier als **Hyperebenen von A** .

Wir beachten, daß W nicht abelsch ist, da sonst $W = [W, A_0] \times C_W(A_0)$ wäre mit 2.1 (3). Dieses Argument zeigt auch $C_W(A_0) \leq W'$, da die Faktorgruppe W/W' abelsch ist.

Sei R eine maximale AA_0 -invariante Untergruppe von W , die W' enthält (daher $R \trianglelefteq W$) und $R_0 := [R, A_0]$. Nun ist $C_W(A_0) \leq W' \leq R$ und $R = R_0 C_W(A_0)$ mit 2.1 (1) und (2).

Da A nicht zyklisch ist, finden wir mit dem Erzeugungssatz (2.1 (6)) eine Hyperebene Y von A , so daß $U := [C_W(Y), A_0]$ nicht in R enthalten ist.

Offenbar ist U eine AA_0 -invariante Untergruppe von W , und $W = RU$.

Wir erreichen nun in mehreren Schritten einen Widerspruch.

1. $W = \langle R_0, U \rangle$.

Beweis. Wir haben $W = RU = C_W(A_0)\langle R_0, U \rangle$, und $\langle R_0, U \rangle$ ist A_0 -invariant, woraus $W = [W, A_0] = [C_W(A_0)\langle R_0, U \rangle, A_0] = [\langle R_0, U \rangle, A_0] \leq \langle R_0, U \rangle$ folgt.

□

Sei N ein minimaler AA_0 -invarianter Normalteiler von W . Da W auflösbar ist, ist N eine elementarabelsche r -Gruppe für eine Primzahl r .

2. $H = E_H \cdot (H \cap N)$.

Beweis. Wir setzen $K_X := [C_W(X), A_0]$ für alle $X \in \text{Hyp}^2(A)$. Wegen der Minimalität von W ist der Satz in der Faktorgruppe W/N richtig, und wir erhalten

$$HN/N = \langle [C_{W/N}(X), A_0] \cap HN/N \mid X \in \text{Hyp}^2(A) \rangle.$$

Für jedes $X \in \text{Hyp}^2(A)$ sehen wir aber

$$\begin{aligned} [C_{W/N}(X), A_0] \cap HN/N &= K_X N/N \cap HN/N = (K_X N \cap HN)/N \\ &= (K_X N \cap H)N/N = C_{K_X N}(BA_0)N/N = C_{K_X}(BA_0)N/N = (K_X \cap H)N/N \end{aligned}$$

und daher $HN/N = E_H N/N$.

Also ist $HN = E_H N$, und die Dedekindidentität liefert die Behauptung. \square

Wir werden mehrmals die Minimalität von W gemeinsam mit (2) verwenden in folgender Weise:

Wann immer $V = [V, A_0]$ eine echte A -invariante Untergruppe von W ist, gilt der Satz in V , und daher ist $H \cap V \leq E_H$.

Nun ist N nicht in V enthalten, da sonst $H \cap N \leq E_H$ ist und wegen (1) dann W kein Gegenbeispiel sein kann. Im Falle $V \trianglelefteq W$ ist wegen der minimalen Wahl von N sogar $V \cap N = 1$.

Diese Anwendung von (2) zusammen mit der Minimalität von W kennzeichnen wir mit (2*).

3. Es gibt keinen minimalen AA_0 -invarianten Normalteiler D von W mit der Eigenschaft $D = [D, R_0][D, U]$.

Beweis. Nehmen wir an, es gebe einen solchen minimalen Normalteiler D .

Die teilerfremde Operation von $A_0 B$ auf D liefert dann

$$H \cap D = C_D(A_0 B) = C_{[D, R_0]}(A_0 B) \cdot C_{[D, U]}(A_0 B) \quad (\text{mit 2.1 (8)}).$$

Nehmen wir zuerst $R_0 D \neq W \neq UD$ an.

Dann ist offenbar $D_1 := [R_0 D, A_0]$ eine echte A -invariante Untergruppe von W , und (2*) liefert $H \cap D_1 \leq E_H$.

Wegen $R_0 = [R_0, A_0] \leq D_1 \trianglelefteq R_0 D$ folgt $[R_0, D] \leq [R_0, R_0 D] \leq D_1$.

Schließlich sehen wir $[R_0, D] \cap H \leq D_1 \cap H \leq E_H$.

Genauso ist $[U, D] \cap H \leq E_H$, und insgesamt folgt

$$H \cap D = C_D(A_0B) = ([R_0, D] \cap H)([U, D] \cap H) \leq E_H.$$

Das ist nicht möglich.

Wir erhalten $W = R_0D$ oder $W = UD$. Im ersten Fall liefert die Dedekindidentität $R = R_0(D \cap R)$, daraus folgt $R = R_0$ oder $R = R_0D = W$, und beides ist nicht möglich.

Im zweiten Fall beachten wir, daß U eine Hyperebene Y von A zentralisiert. Da A vom Rang mindestens 3 ist, ist Y nicht zyklisch, und wir finden mit dem Erzeugungssatz (2.1 (6)) eine Hyperebene Y_D von Y mit $C_D(Y_D) \neq 1$.

Nun folgt $D = C_D(Y_D) \leq C_W(Y_D)$, denn wegen $W = UD$ ist $C_D(Y_D)$ normal in W , aber D ist ein minimaler AA_0 -invarianter Normalteiler. Das bedeutet, daß $Y_D \in \text{Hyp}^2(A)$ von ganz W zentralisiert wird, ein Widerspruch. Also haben wir (3) gezeigt.

□

4. $N \leq Z(W) \leq H$.

Beweis. Für die erste Inklusion wenden wir (3) an und sehen $N \neq [N, R_0][N, U]$.

Weiter ist $[N, R_0][N, U]$ normal in W mit (1), und die minimale Wahl von N impliziert $[N, R_0][N, U] = 1$. So erhalten wir $N \leq Z(W)$ mit (1).

Nun sind alle Untergruppen von N normal in W , also ist $H \cap N = N$ oder $H \cap N = 1$. Der zweite Fall ist wegen (2) nicht möglich, also haben wir $N \leq H$.

A_0B operiert teilerfremd auf $Z(W)$, und 2.1 liefert

$Z(W) = [Z(W), A_0B] \times C_{Z(W)}(A_0B)$. Der zweite Faktor enthält N , also muß $[Z(W), A_0B] = 1$ sein, da sonst N darin gewählt werden könnte.

Nun haben wir auch $Z(W) \leq H$.

□

Wir beachten noch, daß $Z(W) \cap R_0 = 1$ ist, denn sonst könnte N in diesem Schnitt gewählt werden im Widerspruch zu (2*).

Sei $M \trianglelefteq W$, so daß $M/Z(W)$ ein minimaler AA_0 -invarianter Normalteiler von $W/Z(W)$ ist. Wir können M in R wählen.

5. M ist abelsch.

Beweis. Da $M/Z(W)$ elementarabelsch ist, ist M nilpotent.

Daraus folgt $M \cap R_0 \cap Z(M) \neq 1$ und insbesondere $Z(M) \cap R_0 \neq 1$.

Angenommen $Z(M) \cap R_0 \leq Z(W)$. Dann wäre $Z(M) \cap R_0$ ein AA_0 -invarianter Normalteiler von W , und darin könnte N gewählt werden im Widerspruch zu (2*). Daraus folgt, daß $Z(M) \cap R_0$ nicht in $Z(W)$ liegt, und wegen

$1 \neq Z(M) \not\leq Z(W)$ ist $Z(M) = M$ mit der Wahl von M .

□

Wir setzen $L := [M, U] \cdot [M, R_0]$.

6. Es ist $L \leq Z(W)$ und $M \leq Z_2(W)$.

Beweis. Da M nicht in $Z(W)$ liegt, folgt mit (1) schon $1 \neq L \trianglelefteq W$.

Wäre $L \not\leq Z(W)$, so folgte $L = M$ aus der Minimalität von M , und (3) führt zu einem Widerspruch. Das bedeutet $L \leq Z(W)$, und aus (1) folgt dann sofort $M \leq Z_2(W)$.

□

7. $M = Z(W) \times [M, A_0]$.

Beweis. Offenbar ist $M = C_M(A_0) \times [M, A_0]$, und wir beachten

$Z(W) \leq M \cap H \leq C_M(A_0)$. Wegen der Minimalität von M ist $C_M(A_0) = M$ oder $C_M(A_0) = Z(W)$.

Im ersten Fall hätten wir $[A_0, M, W] = 1 = [M, W, A_0]$ und dann $[W, M] = [W, A_0, M] = 1$ mit dem Drei-Untergruppen-Lemma. Da das nicht möglich ist, erhalten wir $C_M(A_0) = Z(W)$ und mit 2.1 (3) die Behauptung.

□

8. $R = C_W(M)$.

Beweis. Zuerst beweisen wir, daß R_0 und M sich zentralisieren.

Wir haben $[M \cap R_0, R_0] \leq [M, R_0] \cap R_0 \leq L \cap R_0 \leq Z(W) \cap R_0 = 1$ und daher $[M, A_0] \leq M \cap R_0 \leq Z(R_0)$. Also liefert (7) uns $[M, R_0] = 1$.

Es ist $[W', Z_2(W)] = 1$ (zum Beispiel mit dem Drei-Untergruppen-Lemma), und zusammen mit (6) folgt daraus $W' \leq C_W(M)$.

Aber W' enthält $C_W(A_0)$, also ist auch $[C_W(A_0), M] = 1$, und schließlich sehen wir, daß $R = R_0 \cdot C_W(A_0)$ in $C_W(M)$ enthalten ist.

Da M nicht in $Z(W)$ liegt, folgt aus der Wahl von R nun $R = C_W(M)$.

□

9. $W = UM$.

Beweis. Angenommen $T := UM < W$.

Dann ist $W = RU = RT$, und mit Hilfe von (2*) und (4) sehen wir, daß $Z(W)$ nicht in $T_0 := [T, A_0]$ enthalten ist. Nun ist $Z(W) \cap T_0 = 1$, da sonst N in diesem Durchschnitt gewählt werden könnte, ein Widerspruch.

Offenbar ist $U \leq T$ und dann $U = [U, A_0] \leq T_0 \trianglelefteq T$. Weiter folgt

$[U, M] \leq [T_0, M] \leq T_0 \cap M$, da sowohl T_0 als auch M normal in T sind. Ferner ist $[U, M] \leq L \leq Z(W)$, und deshalb ist $[U, M] \leq T_0 \cap L \leq T_0 \cap Z(W) = 1$.

Schließlich folgt $U \leq C_W(M) = R$, aber dann ist $W = R$, und das ist nicht möglich.

□

10. W zentralisiert eine Untergruppe von A vom Index p^2 .

Beweis. Wir beachten, daß U eine Hyperebene Y von A zentralisiert. Der Erzeugungssatz (2.1 (6)), angewandt auf die Operation von A auf $M/Z(W)$, liefert eine weitere Hyperebene Y_M von A mit $[M, Y_M] \leq Z(W)$.

Setzen wir $X := Y \cap Y_M$, so sehen wir $[W, X] = [UM, X] = [M, X] \leq Z(W)$ und daher $[X, W, A_0] \leq [Z(W), A_0] = 1$.

Offensichtlich ist nun $[A_0, X, W] = 1$, und das Drei-Untergruppen-Lemma liefert $[W, X] = [W, A_0, X] = 1$.

Da X vom Index p oder p^2 in A ist, folgt die Behauptung.

□

Natürlich widerspricht (10) der Wahl von W als Gegenbeispiel, also haben wir nun Satz 3.4 bewiesen.

□

4 Signalisatorfunktoren

Die Signalisatorfunktormethode wird später in der Arbeit eine wichtige Rolle spielen. Daher führen wir das Konzept hier ein und geben Beispiele an sowie einige Sätze, die wir benötigen werden.

Definition

Sei p prim und A eine abelsche p -Untergruppe von X . Für alle $a \in A^\#$ sei $\theta(a)$ eine A -invariante p' -Untergruppe von $C_X(a)$.

Dann heißt θ ein A -Signalisatorfunktoren, falls die folgende **Balancebedingung** erfüllt ist : $\theta(a) \cap C_X(b) \leq \theta(b)$ für alle $a, b \in A^\#$.

θ heißt auflösbar, falls $\theta(a)$ auflösbar ist für jedes $a \in A^\#$.

Ein (auflösbarer) A -Signalisatorfunktoren θ heißt **vollständig** , falls es eine (auflösbare) A -invariante p' -Untergruppe W gibt mit $\theta(a) = C_W(a)$ für jedes $a \in A^\#$.

Satz 4.1 (Vollständigkeitsatz, siehe GL4). *Sei p prim, $A \leq X$ eine abelsche p -Untergruppe vom Rang mindestens 3 und θ ein auflösbarer A -Signalisatorfunktoren. Dann ist θ vollständig. Insbesondere ist $\langle \theta(a) \mid a \in A^\# \rangle$ eine p' -Untergruppe von X .*

Ist $p = 2$, so ist jeder A -Signalisatorfunktoren auflösbar und daher im Falle $r(A) \geq 3$ vollständig.

Wir stellen jetzt kurz ein Standardbeispiel vor.

Satz 4.2. *Sei p prim, A eine abelsche p -Untergruppe von X und $C_X(a)$ auflösbar für jedes $a \in A^\#$.*

Sei $\theta(a) := O_{p'}(C_X(a))$ für alle $a \in A^\#$.

Dann ist θ ein auflösbarer A -Signalisatorfunktoren.

Beweis. Seien $a, b \in A^\#$. Mit Satz 2.11 ist dann

$$\theta(a) \cap C_X(b) = C_{O_{p'}(C_X(a))}(b) \leq O_{p'}(C_{C_X(a)}(b)) \leq O_{p'}(C_X(b)) = \theta(b).$$

Die Auflösbarkeit ist klar. □

Die Balancebedingung $O_{p'}(C_X(a)) \cap C_X(b) \leq O_{p'}(C_X(b))$ ist auch schon unter schwächeren Voraussetzungen erfüllt, im allgemeinen ist sie jedoch verletzt.

In [G2] werden Balancekonzepte entwickelt, und es wird gezeigt, wie bestimmte Balancebedingungen zu Signalisatorfunktoren führen. (siehe Kapitel 4.4 dort.)

Wir greifen diese Ideen in Kapitel 13 auf. Dort verwenden wir auch den folgenden Satz von Goldschmidt aus seiner Arbeit über schwach eingebettete 2-lokale Untergruppen, siehe [GO1].

Satz 4.3. *Sei B eine abelsche 2-Untergruppe von X vom Rang mindestens 3.*

Sei A eine nichtzyklische Untergruppe von B , so daß $A \leq O_{2',2}(C_X(b))$ ist für alle Involutionen $b \in B$.

Dann ist $\langle O(C_X(a)) \mid a \in \Omega_1(A)^\# \rangle$ eine Untergruppe ungerader Ordnung.

Goldschmidt zeigt, daß unter den gegebenen Voraussetzungen durch

$$\theta(b) := [O(C_X(b)), A](O(C_X(A)) \cap C_X(b))$$

für alle $b \in B^\#$ ein B -Signalisatorfunktorkonstruktionsgesetz definiert wird.

Für uns ist später wichtig, daß $[O(C_X(b)), a] \leq \theta(a)$ ist für alle $a \in A^\#$.

Da B eine 2-Gruppe ist, ist θ auflösbar und wegen der Voraussetzung über $r(B)$ dann vollständig. Noch etwas ist an dieser Stelle erwähnenswert, sei dazu

$$M := [O(C_X(b)), A].$$

Um zu zeigen, daß θ die geforderte Balancebedingung erfüllt, wendet Goldschmidt einen Operationssatz an, der in der Situation von Satz 4.3 liefert, daß

$$C_M(A) = \langle C_X(A) \cap [C_M(a), A] \mid a \in A^\# \rangle \text{ ist.}$$

Auch auf diese Idee kommen wir in Kapitel 13 zurück und zeigen, wie Satz 3.4 aus Kapitel 3 zusammen mit einer Balancebedingung zu einem Signalisatorfunktoren führt.

In seiner Arbeit über stark abgeschlossene 2-Untergruppen (siehe [GO2]) definiert Goldschmidt einen Signalisatorfunktoren, der als Verallgemeinerung des für 4.3 verwendeten aufgefaßt werden kann. Wir formulieren hier einen entsprechenden Satz, benötigen aber vorher noch eine Definition.

Definition

Sei $A \leq X$, $A = A_1 \times A_2$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{E}_2^2(X)$.

A_1, A_2 heißen dann **2'-separiert**, falls für jedes $a \in A^\#$ und für jede Komponente \widehat{E} von $\widehat{C_X(a)} := C_X(a)/O(C_X(a))$ gilt:

$$[\widehat{E}, \widehat{A}_1] = 1 \text{ oder } [\widehat{E}, \widehat{A}_2] = 1.$$

Satz 4.4. *Seien A_1, A_2 zwei 2'-separierte elementarabelsche 2-Untergruppen von X der Ordnung 4 und $A := A_1 \times A_2$.*

Dann definiert $\theta(a) := \bigcap_{i=1,2} [O(C_X(a), A_i)(O(C_X(a)) \cap O(C_X(A_i)))$ für alle $a \in A^\#$ einen auflösbaren A -Signalisatorfunktoren.

Unsere Definition für „2'-separiert“ ist etwas stärker als diejenige von Goldschmidt. Wir beachten weiter, daß θ hier wieder sofort vollständig ist.

5 Isolierte Involutionen

Sei von jetzt an und für den Rest der Arbeit G eine endliche Gruppe.

Lemma 5.1. *Seien $s, t \in G$ Involutionen, $n := o(st)$ und $D := \langle s, t \rangle$.*

Dann ist $\langle st \rangle$ ein zyklischer Normalteiler vom Index zwei in D , der von s und t invertiert wird. Alle Elemente in $D \setminus \langle st \rangle$ sind Involutionen.

*D heißt **Diedergruppe der Ordnung $2n$** , und es gibt genau drei Fälle:*

- n ist ungerade. Dann ist $Z(D) = 1$, und alle Involutionen in D sind konjugiert.*
- $n = 2$. Dann ist D elementarabelsch der Ordnung 4.*
- $n > 2$ ist gerade. Dann ist die einzige Involution aus $\langle st \rangle$ in $Z(D)$ enthalten, $|Z(D)| = 2$, und $D \setminus \langle st \rangle$ zerfällt in genau zwei Konjugiertenklassen von Involutionen.*

Definition

Eine Involution $z \in G$ heißt **isoliert in G** , falls z mit keinem seiner Konjugierten außer sich selbst vertauschbar ist, d. h. $z^G \cap C_G(z) = \{z\}$.

Für den Rest der Arbeit sei z eine isolierte Involution und $C := C_G(z)$.

Wir stellen zuerst ein paar einfache, aber wichtige Eigenschaften zusammen.

Lemma 5.2. *Sei $z \in S \in \text{Syl}_2(G)$.*

- 1. $z^G \cap S = \{z\}$.*
- 2. z zentralisiert jede z -invariante 2-Untergruppe von G . Insbesondere ist $z \in Z(S)$.*
- 3. Für jedes $g \in G$ hat zz^g ungerade Ordnung.*
- 4. Für jede Untergruppe H von G , die z enthält, ist $z^G \cap H = z^H$.*
- 5. Ist $w \in G$ eine nicht zu z konjugierte Involution, so wird $o(zw)$ von 2, aber nicht von 4 geteilt. Die 2-Sylowuntergruppen von $D := \langle z, w \rangle$ sind deshalb elementarabelsch der Ordnung 4.*

6. Ist $z \in X \trianglelefteq Y \leq G$, so haben wir $Y = XC_Y(z)$.
7. Ist $z \notin N \trianglelefteq G$ und $\bar{G} := G/N$, so ist $C_{\bar{G}}(\bar{z}) = \overline{C_G(z)}$ und \bar{z} auch isoliert in \bar{G} .
8. Sei p prim und eine p -Sylowuntergruppe P von G in $C_G(z)$ enthalten. Sind dann X, Y Teilmengen von P , die in G konjugiert sind, so sind sie bereits in C konjugiert.

Beweis. 1. Die Behauptung folgt sofort, weil $\langle z \rangle$ subnormal in S ist.

2. Sei T eine z -invariante 2-Untergruppe von G .

Dann liegt $T\langle z \rangle$ in einer 2-Sylowuntergruppe von G , also oBdA $T\langle z \rangle \leq S$.

Nun ist $z^G \cap T \subseteq z^G \cap S = \{z\}$ mit (1), also insbesondere $z^t = z$ für alle $t \in T$, d.h. $[T, z] = 1$.

3. Angenommen, $n := o(zz^g)$ sei gerade. Mit 5.1 besitzt $D := \langle z, z^g \rangle$ eine zentrale Involution t , genauer ist t eine Potenz von zz^g .

Wegen $[z, t] = 1$ ist auch $[z, zt] = 1$, aber zt ist zu z konjugiert. Das liefert $zt = z$ und schließlich $z^g = z$, ein Widerspruch.

4. Sei $z^g \in H$. Mit (3) und Lemma 5.1 sind in $D := \langle z, z^g \rangle$ alle Involutionen konjugiert. Insbesondere sind dann z und z^g schon in $D \leq H$ konjugiert.

5. Wäre $o(zw)$ ungerade, so wären z und w in D konjugiert mit 5.1, ein Widerspruch.

Sei jetzt $z \in T \in \text{Syl}_2(D)$. Im Falle $[z, w] = 1$ ist die Behauptung natürlich richtig. Andernfalls ist $z \notin Z(D)$, aber $z \in Z(T)$ mit (2). Daher ist T elementarabelsch der Ordnung 4.

6. Sei $z \in T \in \text{Syl}_2(X)$. Da z isoliert ist, haben wir $N_Y(T) \leq C_Y(z)$, und mit dem Frattiniargument ist $Y = XN_Y(T) \leq XC_Y(z)$.

7. $\overline{C_G(z)} = C_{\bar{G}}(\bar{z})$ folgt aus (4), und wegen $\bar{z}^{\bar{G}} = \overline{z^G}$ ist dann \bar{z} isoliert.

8. Sei $Y = X^g$. Wegen $X, Y \leq C$ sind z und $z^{g^{-1}}$ in $C_G(X)$ enthalten und dann schon darin konjugiert, siehe (4). Ist $h \in C_G(X)$ mit $z = z^{g^{-1}h}$, so folgt $g^{-1}h \in C$ und $Y^{g^{-1}h} = X^h = X$ wie gewünscht.

□

Satz 5.3. *Sei $x \in C$ eine von z verschiedene Involution und $C \leq M \max G$.*

Dann ist $C_G(x) \not\leq M$.

Beweis. Offenbar ist $w := zx$ eine von z verschiedene Involution in C . Weiter sind w und z nicht konjugiert. Wegen $1 \neq \langle w^G \rangle \trianglelefteq G$ ist $\langle w^G \rangle \langle z \rangle = G$, denn G ist z -einfach. Daher existiert ein Konjugiertes u von w , das nicht in M liegt. Insbesondere sind z und u nicht vertauschbar. Wir setzen $D := \langle u, z \rangle$.

Da z und u nicht konjugiert sind, hat zu gerade Ordnung, und $Z(D)$ enthält eine Involution v . Offenbar ist $C_G(v) \not\leq M$.

Sei $z \in T \in \text{Syl}_2(D)$ und $T \leq S \in \text{Syl}_2(G)$. Mit 5.2 (5) und (2) ist T elementarabelsch der Ordnung vier, enthält v und zentralisiert z . Sei $d \in D$ mit $u^d \in S$, also $T = \langle z, u^d \rangle$. Dann muß $v = zu^d$ sein, und wegen $u^d \in T \leq C$ und $w \in C$ erhalten wir mit Lemma 5.2 (4), daß $u^d (= zv)$ und $w (= zx)$ in C konjugiert sind. Also sind auch v und x in C konjugiert, und wegen $C_G(v) \not\leq M$ ist schließlich auch $C_G(x) \not\leq M$.

□

Der Vergleich des folgenden Lemmas mit 2.8 (1) legt – zu Recht – nahe, daß isolierte Involutionen „wie teilerfremd“ operieren.

Lemma 5.4. *Sei $W \leq G$ eine z -invariante Untergruppe.*

Dann ist $|W : C_W(z)| = |I_W(z)|$, genauer enthält jede Nebenklasse von $C_W(z)$ in W genau ein von z invertiertes Element.

Wir setzen jetzt $K := \{zz^g \mid g \in G\}$ und behalten diese Bezeichnung für den Rest der Arbeit bei. Offenbar ist K unter C invariant und wird von z invertiert.

Lemma 5.5. *Sind $a, b \in K$, so hat ab ungerade Ordnung.*

Beweis. Sei etwa $a = zz^g$ und $b = zz^h$.

Dann ist $ab = zz^gzz^h = z^{gz}z^h$ konjugiert zu $zz^{hzg^{-1}} \in K$, also von ungerader Ordnung. □

Lemma 5.6. *Sind $s, t \in z^G$, $s \neq t$, so folgt $st \notin C$.*

Beweis. Angenommen $st \in C$.

Dann setzen wir $X := C_G(st)$ und $Y := X\langle t \rangle$. Nun wird st von t invertiert und von z zentralisiert, d. h. $z \in X \trianglelefteq Y$ und $t \notin X$.

Andererseits sind t und z in Y enthalten, also auch schon darin konjugiert mit 5.2 (4).

Das ist nicht möglich. □

Definition

Für alle $a, b \in K$ setzen wir $a \circ b := aba$.

Lemma 5.7. *\circ ist eine Verknüpfung auf K , und für jedes $a \in K$ sind die Abbildungen $k \mapsto k \circ a$ und $k \mapsto a \circ k$ von K in K bijektiv.*

Beweis. Seien etwa $a = zz^g$, $b = zz^h$ und $d = zz^k$.

Es ist $a \circ b = zz^gzz^hzz^g = zz^{ha} \in K$, also \circ eine Verknüpfung auf K .

Für den Rest der Behauptung genügt es, zu zeigen, daß die angegebenen Abbildungen injektiv sind:

Aus $a \circ b = a \circ d$, also $aba = ada$, folgt sofort $b = d$. Sei nun $a \circ b = d \circ b$. Dann folgt $zz^{ha} = zz^{hd}$, also $z^{ha} = z^{hd}$, so daß ha und hd in der gleichen Nebenklasse von C liegen. Aber das bedeutet $z^kz^g = d^{-1}a \in C$, was wegen Lemma 5.6 nur möglich ist, wenn $z^k = z^g$ ist, also $a = d$. □

Definition

Zu je zwei Elementen $a, b \in K$ bezeichnen wir mit $a + b$ das nach Lemma 5.7 eindeutig bestimmte Element $d \in K$ mit $d \circ a^{-1} = b$, also $(a + b)a^{-1}(a + b) = b$.

Lemma 5.8. *Seien $a, b, d \in K$.*

- $a + b = b + a$.
- Für alle $c \in C$ ist $(a + b)^c = a^c + b^c$.
- $(a + b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$.
- $a + b = 1$ genau dann, wenn $b = a^{-1}$ ist.
- $a \circ (b + d) = a \circ b + a \circ d$.

Beweis. Seien $a, b \in K$.

Nach Definition ist $(a + b) \circ a^{-1} = b$, also $(a + b)^{-1} \circ a = b^{-1}$ und somit $(a + b) \circ b^{-1} = a = (b + a) \circ b^{-1}$. Daher folgt $a + b = b + a$.

Der zweite Punkt ist klar, und der dritte folgt unmittelbar, da z in C liegt und K invertiert.

$a + b = 1$ bedeutet $1 \circ a^{-1} = b$, also sofort $a^{-1} = 1a^{-1}1 = b$.

Umgekehrt: $1 \circ a^{-1} = a^{-1} = (a + a^{-1}) \circ a^{-1}$, also $a + a^{-1} = 1$.

Für den letzten Punkt beachten wir $(b + d) \circ b^{-1} = d$, also

$$\begin{aligned} (a \circ b + a \circ d) \circ (a \circ b)^{-1} &= a \circ d = a \circ ((b + d) \circ b^{-1}) = a(b + d)b^{-1}(b + d)a = \\ a(b + d)aa^{-1}b^{-1}a^{-1}a(b + d)a &= (a(b + d)a) \circ (a \circ b)^{-1} = (a \circ (b + d)) \circ (a \circ b)^{-1} . \end{aligned}$$

Das liefert die Behauptung. □

Satz 5.9. *Sei $a \in K$ und $s \in C$ eine von z verschiedene Involution.*

Dann ist $a = u \circ v$ mit $u \in C_K(s)$ und $v \in C_K(sz)$, und diese Darstellung ist eindeutig.

Insbesondere ist $|K| = |C_K(s)||C_K(sz)|$ und $K \subseteq \langle C_K(s), C_K(sz) \rangle$.

Beweis. Offenbar ist $a + a^s = a^s + a = (a + a^s)^s$, also $a + a^s \in C_K(s)$.

Für alle $b \in K$ setzen wir $\bar{b} := b + b^s$. Dann bilden die Teilmengen $K_x := \{b \in K \mid \bar{b} = x\}$ mit $x \in C_K(s)$ eine Partition von K .

Wir bemerken

$$\begin{aligned} K_1 &= \{b \in K \mid \bar{b} = 1\} = \{b \in K \mid b + b^s = 1\} = \{b \in K \mid b^s = b^{-1}\} = \{b \in K \mid b^{sz} = b\} \\ &= C_K(sz). \end{aligned}$$

Sei jetzt $\bar{a} =: x \in C_K(s)$. Da x ungerade Ordnung hat (5.2 (3)), gibt es eine Potenz y von x mit $(y^{-1})^2 = x$. Nun ist $y \in C_K(s)$ und $y \circ \bar{a} = y \circ x = 1$.

Wie wir in Lemma 5.8 gesehen haben, ist

$$y \circ \bar{a} = y \circ (a + a^s) = y \circ a + y \circ a^s = y \circ a + y^s \circ a^s = \overline{y \circ a}.$$

Das heißt $\overline{y \circ a} = y \circ \bar{a} = 1$ und $y \circ a \in K_1 = C_K(sz)$. Setze $u := y^{-1}$ und $v := y \circ a$. Dann ist $a = y^{-1}yayy^{-1} = y^{-1}(y \circ a)y^{-1} = u \circ v \in C_K(s) \circ C_K(sz)$.

Falls es eine zweite Darstellung $a = u' \circ v' \in C_K(s) \circ C_K(sz)$ gibt, sehen wir sofort $\bar{a} = u' \circ \bar{v}' = u'^2$, also $u'^2 = \bar{a} = u^2$, und da u und u' ungerade Ordnung haben, folgt daraus schon $u = u'$. Sobald aber einer der Faktoren eindeutig ist, sind es beide wegen Lemma 5.7.

□

Lemma 5.10. $G = K \cdot C$, genauer enthält jede Nebenklasse von C in G genau ein von z invertiertes Element.

Ferner ist $|G| = |C||C_K(s)||C_K(sz)|$ für jede von z verschiedene Involution s in C .

Beweis. K ist C -invariant, und jedes Element aus $K \setminus \{1\}$ wird von z invertiert und nicht zentralisiert. Seien nun zz^g, zz^h aus K . Angenommen, $Czz^g = Czz^h$.

Dann ist $z^g z^h \in C$, aber das ist wegen Lemma 5.6 nur möglich, wenn schon $zz^g = zz^h$ ist. Also erhalten wir $|K| = |G : C|$ wie gewünscht. Mit Satz 5.9 wissen wir

$|K| = |C_K(s)||C_K(sz)|$, und damit folgt der Rest der Behauptung.

□

Satz 5.11. *Sei $p \in \pi(G)$. Dann gibt es eine z -invariante p -Sylowuntergruppe von G .*

Beweis. Wir können uns wegen 5.2 (2) auf ungerade p beschränken und schließen per Induktion nach $|G|$.

Zuerst zeigen wir, daß es überhaupt eine z -invariante p -Untergruppe von G gibt. Sei dazu $s \in C$ eine von z verschiedene Involution. (Wenn es keine solche Involution gibt, ist $r_2(G) = 1$, und mit den Sätzen 2.20 und 2.21 folgt $z \in Z^*(G)$. Aber dann ist sofort klar, daß z eine p -Sylowuntergruppe von G normalisiert.)

Nun ist p ein Teiler von $|C|$, $|C_K(s)|$ oder $|C_K(sz)|$ mit Lemma 5.10. Falls $p \in \pi(C)$ ist, dann gibt es in G eine nichttriviale von z zentralisierte p -Untergruppe.

Falls p kein Teiler von $|C|$ ist, dann muß $|C_K(s)|$ oder $|C_K(sz)|$ von p geteilt werden. Sei oBdA p ein Teiler von $|C_K(s)|$, also von $|C_G(s) : C_C(s)|$. Es ist $z \in C_G(s)$, und per Induktion gibt es in $C_G(s)$ sogar eine z -invariante p -Sylowuntergruppe, falls $C_G(s) < G$ ist.

Sei also $s \in Z(G)$. Da das Bild von z in $G/\langle s \rangle$ isoliert ist (5.2), erhalten wir per Induktion eine invariante p -Sylowuntergruppe in der Faktorgruppe und sind wieder fertig.

Nun wählen wir eine maximale z -invariante Untergruppe P_0 und betrachten $N_0 := N_G(P_0)$. Offenbar ist $z \in N_0$, und falls $N_0 < G$ ist, existiert per Induktion eine z -invariante p -Sylowuntergruppe P von N_0 . Wegen der maximalen Wahl von P_0 muß dann $P_0 = P$ sein, also $P_0 \in \text{Syl}_p(G)$.

Falls $P_0 \trianglelefteq G$ ist, existiert per Induktion eine z -invariante p -Sylowuntergruppe von G/P_0 . Das Urbild ist eine z -invariante p -Sylowuntergruppe von G wie gewünscht.

□

Für jede Untergruppe H von G und jede Primzahl p bezeichnen wir die Menge der z -invarianten p -Sylowuntergruppen von H mit $\text{Syl}_p(H, z)$, und mit Satz 5.11 ist im Falle $z \in H$ stets $\text{Syl}_p(H, z) \neq \emptyset$. Für jede 2-Untergruppe $V \leq H$ bezeichnen wir ganz analog die Menge der V -invarianten p -Sylowuntergruppen von H mit $\text{Syl}_p(H, V)$.

Lemma 5.12. *Sei $p \in \pi(G)$.*

Dann ist jede z -invariante p -Untergruppe von G in einer z -invarianten p -Sylowuntergruppe enthalten, und C ist transitiv auf $Syl_p(G, z)$.

Beweis. Sei X eine z -invariante p -Untergruppe von G . Dann liegt X in einer maximalen z -invarianten p -Untergruppe P von G , und z ist in $N := N_G(P)$ enthalten.

Sei $P_0 \in Syl_p(N, z)$.

Nun ist, da P normal in N ist, P in P_0 enthalten und wegen der maximalen Wahl schon $P = P_0$. Daher ist $P \in Syl_p(N_G(P))$, also $P \in Syl_p(G)$ wie behauptet.

Seien nun $P_1, P_2 \in Syl_p(G, z)$ und $g \in G$ mit $P_1^g = P_2$.

Wegen $z \in N_G(P_2) = (N_G(P_1))^g$ sehen wir, daß z und z^g in $N_G(P_2)$ liegen, also schon darin konjugiert sind mit 5.2 (4). Sei $h \in N_G(P_2)$ mit $z = z^{gh}$.

Dann ist $gh \in C$ und $P_1^{gh} = P_2^h = P_2$ wie behauptet.

□

Bemerkung 5.13. *Die Aussagen in 5.11 und 5.12 lassen sich leicht verallgemeinern auf elementarabelsche 2-Untergruppen V von G , in denen jede Involution isoliert ist :*

Ist p prim, so ist $|G^(V, p)| \subseteq Syl_p(G)$, und $N_G(V) = C_G(V)$ ist transitiv auf $Syl_p(G, V)$.*

Lemma 5.14. *Sei $V \in \mathcal{E}_2^2(G)$ mit $z \in V$, etwa $V = \{1, a, b, z\}$.*

Sei q prim und $Q \in Syl_q(G, V)$ mit $Q \leq C_G(a)$, aber C enthalte keine q -Sylowuntergruppe von G .

Dann enthält auch $C_G(b)$ keine q -Sylowuntergruppe von G , und insbesondere sind a und b nicht konjugiert.

Beweis. Mit Satz 5.10 ist $|G|_q = |C|_q |C_K(a)|_q |C_K(b)|_q$.

Andererseits haben wir nach Voraussetzung $|G|_q = |Q| = |C_G(a)|_q = |C_C(a)|_q |C_K(a)|_q$ und $|C|_q = |C_C(a)|_q$.

Daraus folgt $|G|_q = |C_C(a)|_q |C_K(a)|_q |C_K(b)|_q = |C_G(a)|_q |C_K(b)|_q$.

Nun muß $|C_K(b)|_q = 1$ sein. Aber es ist $|C_G(b)|_q = |C_C(b)|_q |C_K(b)|_q$ und nach Voraussetzung keine q -Sylowuntergruppe von G in C enthalten.

Daher ist $|C_G(b)|_q < |G|_q$ wie behauptet.

□

6 Z^* -Involutions

Definition

Sei $z \in G \setminus Z^*(G)$ eine isolierte Involution. Dann heißt z eine Z^* -**Involution** (von G), falls $z \in Z^*(H)$ ist, d. h. $H = C_H(z)O(H)$, für jede echte Untergruppe H von G , die z enthält. Gleichbedeutend ist $z \in O_{2',2}(H)$.

Die Gruppe G nennen wir z -**einfach**, falls $G = N\langle z \rangle$ ist für jeden Normalteiler $N \neq 1$ von G .

Sei von nun an z eine Z^* -Involution, $C := C_G(z)$ und M eine maximale Untergruppe von G , die C enthält. Sei G außerdem z -einfach.

Wir sehen unmittelbar:

Lemma 6.1. *Sei $z \in L < G$.*

Dann ist $L = (C \cap L)O(L)$ und $O_{2',2}(C) \cap L \leq O_{2',2}(L)$.

Lemma 6.2. *Sei $z \in L < G$.*

Dann ist $[E(L), z] = 1$.

Beweis. Offenbar ist $[E(L), Z^*(L)] = 1$. Das liefert die Behauptung wegen $z \in Z^*(L)$. □

Lemma 6.3. *Sei $C = M$ und $q \in \pi(F(M))$.*

Dann enthält M eine q -Sylowuntergruppe von G , und jede z -invariante q -Untergruppe von G wird von z zentralisiert.

Beweis. Sei $Q \in \text{Syl}_q(M)$.

Dann ist $z \in C_G(Q) \leq C_G(O_q(M)) \leq M$. (Beachte $O_q(M) \neq 1$.)

Wir setzen $X := C_G(Q)$ und $Y := N_G(Q)$.

Nun liefert 5.2 (6) uns $Y = XC_Y(z)$, also ist schon $N_G(Q) = Y \leq M$ und daher $Q \in \text{Syl}_q(G)$. Da $C = M$ transitiv auf $\text{Syl}_q(G, z) = \mathcal{V}_G^*(z, q)$ ist (siehe 5.12), liegt nun jede z -invariante q -Untergruppe in M .

□

Lemma 6.4. *Sei $t \in z^G$, aber $t \notin M$, und $D := M \cap M^t$.*

Sei weiter $n := |M : C|$ und $I := I_D(t)$.

1. $D = O(D)C_D(t)$
2. I (und damit D) ist transitiv auf z^M .
3. $M = CI$, jede Nebenklasse von C in M enthält genau ein Element aus I .
4. $|I| = |D : C_D(t)| = |D : C_D(z)| = n$.
5. Ist q prim und $Q \in \text{Syl}_q(G, z)$, so ist $C_Q(z) \in \text{Syl}_q(C)$.
Ist $Q_0 \in \text{Syl}_q(D, t)$, so ist $|I_{Q_0}(t)| = n_q$.

Beweis. D ist t -invariant, und da mit z auch t eine Z^* -Involution ist, folgt

$$D\langle t \rangle = [D\langle t \rangle, t] \cdot C_{D\langle t \rangle}(t) = [D, t] \cdot C_{D\langle t \rangle}(t) \leq O(D) \cdot C_{D\langle t \rangle}(t).$$

Mit der Dedekindidentität ist $D = O(D)(C_{D\langle t \rangle}(t) \cap D) = O(D)C_D(t)$, das zeigt (1).

Sei $u \in z^M$. In der Diedergruppe $T := \langle u, z^t \rangle$ sind u und z^t konjugiert (siehe 5.2), genauer gibt es eine Involution $s \in T$ mit $u^s = z^t$.

Jetzt ist einerseits $u = z^{ts}$, andererseits sind wieder wegen 5.2 schon z und u in M konjugiert. Sei also $x \in M$ mit $u^x = z$. Dann ist $z = u^x = z^{tsx}$, also $tsx \in C$ und daher $ts \in M$.

Da ts von t invertiert wird, liegt ts in $M \cap M^t = D$ und dann sogar schon in I . Das zeigt (2), und es folgt auch $M = CI$.

Seien jetzt $x_1, x_2 \in I$ mit $Cx_1 = Cx_2$.

Dann ist $x_1x_2^{-1} \in C$. Nach Definition von I sind x_1t und x_2t Involutionen (zu t und damit auch zu z konjugiert), es folgt $x_1tx_2t = x_1t(x_2t)^{-1} = x_1x_2^{-1} \in C$.

Wegen Lemma 5.6 ist das nur möglich, wenn $x_1t = x_2t$, also $x_1 = x_2$ ist. Daher ist I ein Vertretersystem für die Nebenklassen von C in M wie in (3) behauptet.

I ist auch ein Vertretersystem für die Nebenklassen von $C_D(t)$ in D , siehe (1), und das liefert (4).

Die erste Behauptung in (5) folgt, da C transitiv auf $Syl_q(G, z)$ ist, siehe Lemma 5.12. Sei nun $Q_0 \in Syl_q(D, t)$. Dann ist $C_{Q_0}(t) \in Syl_q(C_D(t))$, da t genau wie z isoliert ist. Aber nun sehen wir $n_q = |D : C_D(t)|_q = |Q_0 : C_{Q_0}(t)| = |I_{Q_0}(t)|$ wie behauptet. □

Lemma 6.5. *Sei q prim mit $O_q(M) \not\leq C$.*

Dann enthält M keine q -Sylowuntergruppe von G .

Beweis. Offenbar ist q ungerade.

Sei $Q \in Syl_q(M, z)$, und nehmen wir $Q \in Syl_q(G, z)$ an. Nach Voraussetzung ist $1 \neq X := I_{O_q(M)}(z)$. Setzen wir $|M : C| = n$, so ist $|I_Q(z)| = n_q \neq 1$. Wir zeigen nun, daß X in jedem Konjugierten von M liegt.

Zuerst stellen wir fest, daß X in jeder z -invarianten q -Sylowuntergruppe von G liegt, denn $X \subseteq Q \in Syl_q(G, z)$, und $C \leq M$ ist auf $Syl_q(G, z)$ transitiv und normalisiert X . Aus dem gleichen Grund liegt jede z -invariante q -Untergruppe von G in M .

Sei jetzt $g \in G \setminus M$ und $M_1 := M^g$. Setze $D := M_1 \cap M_1^z$, dann ist offenbar $D = D^z$ und daher $D = C_D(z)O(D)$, siehe 6.4. Wir wissen $|D : C_D(z)| = n$. Wählen wir $T \in Syl_q(D, z)$, so ist mit 6.4 schon $|T : C_T(z)| = n_q \neq 1$, und wie oben bemerkt ist $T \leq M$.

Nun folgt $I_T(z) = I_{Q^c}(z) = (I_Q(z))^c$ mit einem geeigneten $c \in C$, und schließlich ist $X \subseteq I_T(z) \subseteq D \leq M_1$ wie behauptet.

Aber $N := \bigcap_{g \in G} M^g$ ist normal in G , wir haben also $G = N\langle z \rangle$ mit der z -Einfachheit von G . Das ist nicht möglich wegen $N\langle z \rangle \leq M \max G$. □

7 Die Kommutatorgruppe $[M, z]$

Sei wie vorher z eine Z^* -Involution, sei $C := C_G(z) < M \max G$ und G wieder z -einfach. Sei $n := |M : C|$.

Wir zeigen in diesem Abschnitt, daß dann $M_0 := [M, z] \neq 1$ noch in einem weiteren Konjugierten von M liegt. Dabei benutzen wir Argumente aus [BE2], teils ein wenig verallgemeinert.

Die nächsten Lemmata bereiten den Beweis vor.

Lemma 7.1. *Sei q eine ungerade Primzahl.*

Dann gibt es ein Konjugiertes $M_1 \neq M$ von M , so daß $D := M \cap M_1$ eine q -Sylowuntergruppe Q besitzt, die von einer Involution aus z^M normalisiert wird.

Beweis. Sei Q eine q -Untergruppe von G , die maximal ist mit der Eigenschaft, in zwei verschiedenen Konjugierten von M zu liegen, etwa $Q \in \text{Syl}_q(M \cap M^s)$ mit $s \in z^G \setminus M$. Wir können Q als s -invariant annehmen und erhalten $|I_Q(s)| = n_q$ mit 6.4.

Nehmen wir zuerst an, daß Q in keinem weiteren Konjugierten von M liegt. Dann ist $|N_G(Q) : N_{M \cap M^s}(Q)| = 2$. Also sind alle q -Elemente von $N_G(Q)$ in $N_{M \cap M^s}(Q)$ enthalten, und daher ist $Q \in \text{Syl}_q(N_G(Q))$ und $Q \in \text{Syl}_q(G) \cap \text{Syl}_q(M)$. Wir können Q als z -invariant annehmen.

Da Q in genau zwei verschiedenen Konjugierten von M liegt und z -invariant ist, kann z nur M und M^s vertauschen oder beide festlassen. Aber $z \in M$ läßt natürlich M fest, also auch M^s , und das ist ein Widerspruch. (z liegt in genau einem Konjugierten von M .)

Also liegt Q in einem dritten Konjugierten von M .

Wir zeigen nun **(T)** :

$z^G \cap N_G(Q)$ ist transitiv auf der Menge aller Konjugierten von M , die Q enthalten.

Seien M_1, M_2 zu konjugiert und $Q \leq M_1, M_2$. Da z^G transitiv ist auf der Menge aller Konjugierten von M , können wir ein $t \in z^G$ wählen mit $M_1^t = M_2$.

OBdA ist $Q \leq Q_1 \in \text{Syl}_q(M_1 \cap M_2, t)$. Wir sind fertig, falls $Q = Q_1$ ist.

Nehmen wir also $Q < Q_1$ an und beachten $|I_{Q_1}(t)| = n_q$. Nach Wahl von Q liegt Q_1 in genau zwei Konjugierten von M , nämlich M_1 und M_2 .

Das bedeutet $|M^G| \equiv |\{H \in M^G \mid Q \leq H\}| \equiv 2 \pmod{q}$, und da q ungerade ist, liegt jede q -Untergruppe von M in mindestens zwei Konjugierten von M .

Nun ist $Q < Q_0 := N_{Q_1}(Q)$, und wir wählen $P \in \text{Syl}_q(N_G(Q))$, so daß Q_0 in P enthalten ist. Da t zu z konjugiert ist und in $N_G(Q)$ liegt, normalisiert t eine q -Sylowuntergruppe von $N_G(Q)$, also oBdA $t \in N_G(P)$. Nun liegt t in genau einem Konjugierten von M . Andererseits normalisiert t aber P , und es gibt mindestens zwei Konjugierte von M , die P enthalten, das heißt es gibt ein M_3 , zu M konjugiert, mit $P \leq M_3$ und $M_3^t \neq M_3$. Da P eine t -invariante q -Untergruppe von $M_3^t \cap M_3$ ist, wissen wir $|I_P(t)| \leq n_q$ mit 6.4. Aber $|I_Q(u)| = n_q$, und P enthält Q , also muß $I_P(t) = I_Q(t)$ sein.

t operiert teilerfremd auf P , deshalb ist $P = C_P(t)I_P(t)$, und

$[P, t] \leq \langle I_P(t) \rangle = \langle I_Q(t) \rangle \leq Q \leq Q_0$, so daß nun $[Q_0, t] \leq [P, t] \leq Q_0$ ist und Q_0 ebenfalls unter t invariant. Das bedeutet $I_{Q_0}(t) = I_Q(t)$ und $|I_{Q_0}(t)| = n_q$. Die Wahl von Q garantiert, daß Q_0 in genau zwei Konjugierten von M liegt, nämlich in M_1 and M_2 . Da t nun Q_0 normalisiert, kann t nur M_1 und M_2 festhalten oder sie vertauschen. Aber t liegt nur in genau einem Konjugierten von M , also vertauscht t nun M_1 und M_2 , und das beweist **(T)**.

Nehmen wir nun an, es gebe ein $x \in z^G \cap N_G(Q)$, das fixpunktfrei ist auf der Menge aller Konjugierten von M , die Q enthalten. Dann sei $N := \langle z^G \cap N_G(Q) \rangle$.

Wegen $x \in N < G$ ist $N = C_N(x)O(N) = \langle x \rangle O(N)$. Da Q in M liegt, ist nach Wahl von x (fixpunktfrei!) $M \cap N$ in $O(N)$ enthalten. Andererseits folgt aus **(T)**, daß in jeder Nebenklasse von $M \cap N$ eine Involution aus N liegt, die konjugiert zu z ist, und das bedeutet $O(N) \leq M \cap N$ und schließlich $M \cap N = O(N)$. Aber dann liegt Q in genau zwei Konjugierten von M , ein Widerspruch.

Wir wissen nun, daß jedes Element in $z^G \cap N_G(Q)$ in genau einem Konjugierten von M liegt, das Q enthält. Sei $u \in z^G \cap N_G(Q)$ und oBdA $u \in M$. Da Q in mindestens drei Konjugierten von M liegt, vertauscht u zwei davon, zum Beispiel $M_1^u = M_2$.

Setzen wir $D := M \cap M_1$, so ist $D \cap D^u = M \cap M_1 \cap M^u \cap M_2$, also Q darin enthalten und daher $Q \in \text{Syl}_q(D) \cap \text{Syl}_q(D \cap D^u)$ wegen der maximalen Wahl. Nun erfüllen Q und D die Behauptung. □

Lemma 7.1 führt zu folgender

Definition

Ist $g \in G \setminus M$ und $D := M \cap M^g$, so heißt D **q -regulär**, wenn für eine Involution $u \in z^M$ (und damit sogar für jede solche Involution) $D \cap D^u$ eine q -Sylowuntergruppe von D enthält. Lemma 7.1 garantiert die Existenz q -regulärer Schnitte.

Lemma 7.2. *Sei $z \in L < G$.*

Dann existiert ein Normalteiler N von $M \cap L$, so daß $(M \cap L)/N$ nur eine einzige Involution besitzt und $N_L(N)$ nicht in M enthalten ist.

Beweis. Da z in $Z^*(L)$ liegt, besitzt L einen nichttrivialen abelschen Normalteiler A , und wir können annehmen, daß $M \cap L$ keinen Normalteiler von L enthält. Dann ist (wegen der Maximalität von M) schon $L = (L \cap M)A$, weiter $M \cap L \cap A = 1$ und $C_L(A) = A$, also $C_L(A) \cap M = 1$.

Die Involutionen in $M \cap L$ operieren nun fixpunktfrei auf A , sie invertieren wegen Lemma 2.8 (2) jedes Element. Das Produkt zweier verschiedener Involutionen in $M \cap L$ würde dann aber A zentralisieren, daher gibt es nur eine einzige Involution. Wir können also sogar $N = 1$ wählen. □

Lemma 7.3. *Sei $u \in z^M$, σ eine Menge ungerader Primzahlen und $Q \leq M$ eine u -invariante σ -Untergruppe. Sei $I := I_Q(u)$.*

Ist dann W eine $\langle u \rangle Q$ -invariante $\{\sigma, 2\}'$ -Untergruppe von G , die nicht in M liegt, so ist $C_W(I) \not\leq M$.

Beweis. Wir wählen W minimal mit diesen Eigenschaften. Als Gruppe ungerader Ordnung ist W auflösbar, also ist $W' < W$ und daher $W' \leq M$. Nun folgt $W \cap M \trianglelefteq W$. Offenbar ist $C_G(u) \leq M$, also wird mit Lemma 2.8 (2) jedes Element in $W/(W \cap M)$ von u invertiert. I zentralisiert dann $W/W \cap M$, somit ist $[W, I] \leq W \cap M$.

Da die nichttrivialen Elemente aus I auf der σ' -Gruppe W operieren, ist nun $W = [W, I] C_W(I) = (W \cap M) C_W(I)$.

Aber W liegt nicht in M , daher folgt die Behauptung. □

Wir beginnen nun mit dem Beweis des angekündigten Satzes:

Satz 7.4. *Es gibt eine zu M konjugierte Untergruppe $M_1 \neq M$, die M_0 enthält.*

Beweis. Nehmen wir an, es gebe *keine* zu M konjugierte Untergruppe $M_1 \neq M$ von G , so daß M_0 in $M \cap M_1$ enthalten ist.

1. Sei $t \in z^G \setminus M$ und $D := M \cap M^t$. Dann ist $G = \langle z, t, [t, D] \rangle$.

Beweis. Angenommen nicht, dann sei $L := \langle z, t, [t, D] \rangle < G$.

Da z eine Z^* -Involution ist, ist $L = O(L)C_L(z)$. Mit Lemma 7.2 gibt es einen Normalteiler N von $L \cap M$, so daß $(L \cap M)/N$ nur genau eine Involution enthält und $N_L(N) \not\leq M$ ist.

So erhalten wir ein $g \in L$, das N , aber nicht M normalisiert, also ist $M \neq M^g$ und $N \leq M \cap M^g$. Da z in genau einem Konjugierten von M liegt, ist z nicht in $N \leq M \cap M^g$ enthalten, also ist zN/N die einzige Involution in $(L \cap M)/N$. Insbesondere sehen wir $[z, M \cap L] \leq N$. Mit Lemma 5.2 sind z und t konjugiert in L , und wegen $\langle t, [t, D] \rangle = \langle t^D \rangle$ erhalten wir $L = \langle z^G \cap L \rangle$.

Offenbar wird $\langle t^D \rangle$ von D normalisiert, also ist L invariant unter $C_D(z)$.

Wir wissen $M = C \cdot I_D(t)$ (siehe Lemma 6.4), also sehen wir zusammen mit $I_D(t) \leq [t, D] \leq L$, daß $\langle z^M \rangle = \langle z^{I_D(t)} \rangle \leq L$ ist. Das bedeutet $M_0 \leq L$.

Aber nun haben wir $M_0 = [M_0, z] \leq [L \cap M, z] \leq N \leq M \cap M^g$, ein Widerspruch. Also ist $L = G$.

□

2. Sei $t \in z^G \setminus M$, $q \neq 2$ prim und $D := M \cap M^t$ q -regulär. Sei weiter $u \in z^M$, X eine unter u und t invariante q -Sylowuntergruppe von D und $\sigma := \{2, q\}$. Dann existiert eine $X\langle t \rangle$ -invariante σ' -Untergruppe von D , die nicht in $D \cap D^u$ enthalten ist, das heißt

$$|\llbracket_{D \cap D^u}(X, \sigma') \rrbracket| < |\llbracket_D(X, \sigma') \rrbracket|.$$

Beweis. Angenommen nicht. Dann sei $E := \langle U \mid U \in \llbracket_D(X, \sigma') \rrbracket \rangle$.

Nach Annahme ist $E \leq D \cap D^u$ und daher $E = \langle U \mid U \in \llbracket_{D \cap D^u}(X, \sigma') \rrbracket \rangle$.

Da X und D unter t invariant sind, wird auch E von t normalisiert.

Andererseits sind X und $D \cap D^u$ unter u invariant, also ist E auch u -invariant, und wir erhalten $t, u \in N_G(E) =: L$. Sei nun $Q \in \llbracket_D^*(X, \sigma') \rrbracket$. Als Gruppe ungerader Ordnung ist $QO(D)$ auflösbar, und daher liegt jede X -invariante q' -Untergruppe von $QO(D)$ schon in $O_{q'}(QO(D))$.

Also ist $Q \leq O_{p'}(QO(D))$, und wegen der Maximalität von Q dann

$Q = O_{q'}(QO(D))$. Insbesondere wird Q von $O(D)$ normalisiert. Dann wird aber schon ganz E von $O(D)$ normalisiert, und somit $O(D) \leq L$.

Mit 6.4 ist $[D, t] \leq O(D)$, also insgesamt $\langle t \rangle [D, t] \leq L$, und mit u anstelle z folgt dann aus (1), daß $L = G$ ist und damit $E = 1$, da G z -einfach ist. Das bedeutet, daß $O(D)$ eine q -Gruppe ist, insbesondere in X liegt.

Nun ist $ZJ(X)$ invariant unter $[D, t] \leq O(D)$. Aber $N_G(ZJ(X))$ enthält dann $[D, t]$, t und u , und das ist wegen (1) nicht möglich, da G z -einfach ist.

Wir finden also ein $Q \in \llbracket_D^*(X, \sigma') \rrbracket$, das nicht in D^u liegt.

Offenbar ist $[t, D] \leq O(D) \leq QO(D)$ und $QO(D)$ damit t -invariant. Dann ist $Q = O_{q'}(QO(D))$ aber auch t -invariant und wird von $X\langle t \rangle$ normalisiert wie gewünscht.

□

3. Sei $q \neq 2$ prim, $\sigma := \{2, q\}$, $D = M \cap M^g$ q -regulär und $u \in z^M$. Sei weiter $X \in \text{Syl}_q(D)$ u -invariant und $I := I_X(u)$.

Dann ist $C_G(I) \not\leq M$.

Beweis. Wir finden eine zu z konjugierte Involution $t \in G \setminus M$ mit $D = M \cap M^t$ und können X als t -invariant annehmen. Wegen $|\{d \in D \mid d^t = d^{-1}\}| = n$ und $|C_D(t)| = |C_D(u)|$ ist dann $|I| = n_q$.

Jeder Schnitt $M \cap M^a$ mit $a \notin M$, der I enthält, ist q -regulär, enthält also eine u -invariante q -Sylowuntergruppe X_1 und X_1 -invariante σ' -Untergruppen. Wir wählen nun D so, daß die Anzahl $|\mathcal{I}_D(X, \sigma')|$ der X -invarianten σ' -Untergruppen möglichst klein ist.

Offenbar ist $X = X^t = X^u$ in $D_1 := M^t \cap M^{tu}$ enthalten. Weiter ist D_1 invariant unter u und enthält I , ist also q -regulär. Sei Y eine X enthaltende entsprechende q -Sylowuntergruppe von D_1 . Falls ein $Q_1 \in \mathcal{I}_{D_1}(Y, \sigma')$ existiert mit $Q_1 \not\leq M$, so finden wir ein solches Q_1 sogar u -invariant, und mit 7.3 folgt dann die Behauptung. Also nehmen wir an, daß alle Elemente aus $\mathcal{I}_{D_1}(Y, \sigma')$ schon in M liegen und damit in D . Das bedeutet $\mathcal{I}_{D_1}(Y, \sigma') \subseteq \mathcal{I}_D(X, \sigma')$.

Wir beachten weiter $I \subseteq D_2 := M \cap M^{tut}$. Außerdem ist Y^t in D_2 enthalten und aus Ordnungsgründen dann schon eine q -Sylowuntergruppe von D_2 . Ferner ist $X = X^t \leq Y^t$, also haben wir insgesamt

$$|\mathcal{I}_{D_2}(Y^t, \sigma')| = |\mathcal{I}_{D_1}(Y, \sigma')|.$$

Sei unter Anwendung von (2) nun $Q \in \mathcal{I}_D(X, \sigma')$ mit $Q \not\leq D^u$. Dann ist offensichtlich $Q \not\leq M^{tu}$, also $Q \not\leq D_1$.

Wegen $\|\!|_{D_1}(Y, \sigma') \subseteq \|\!|_D(X, \sigma')$ folgt daraus $|\!|_{D_1}(Y, \sigma')| < |\!|_D(X, \sigma')|$.

Aber das liefert $|\!|_{D_2}(Y^t, \sigma')| = |\!|_{D_1}(Y, \sigma')| < |\!|_D(X, \sigma')|$,

ein Widerspruch zur Wahl von D .

□

Wir bleiben bei den Voraussetzungen aus (3).

Offenbar ist $|I| = n_q \neq 1$, und wir haben gesehen, daß $C_G(I)$ nicht in M liegt.

$C_G(I)$ ist u -invariant, und in $U := \langle u \rangle C_G(I) < G$ gilt

$$U = O(U)C_U(u) = O(U)C_{C_G(I)}(u).$$

Mit 7.2 existiert ein Normalteiler N von $U \cap M$, so daß $M \cap U/N$ nur eine Involution besitzt und $N_U(N)$ nicht in M liegt. Wegen $M \cap U = \langle u \rangle C_M(I)$ wird $(M \cap U)/N$ von u zentralisiert.

Sei nun $F := N_U(N)$. Da I von jeder Involution aus $F \leq \langle u \rangle C_G(I)$ elementweise invertiert wird, gilt für alle zu M konjugierten Untergruppen M_2 :

Jeder Durchschnitt $M_2 \cap M^g$, der I und eine zu z konjugierte Involution aus F enthält, ist q -regulär.

Wir wählen nun $t \in F \setminus M$ zu z konjugiert, $D := M \cap M^t$ und eine u -invariante q -Sylowuntergruppe X von D , so daß $|\!|_D(X, \sigma')$ möglichst groß ist. Wir können dabei X als t -invariant annehmen. Da t zu z konjugiert ist, existiert genau eine zu M konjugierte Untergruppe M_3 , die t enthält. t und u sind zu z , also auch zueinander konjugiert und liegen in F . Also sind sie in F konjugiert mit Lemma 5.2 (4), es existiert eine zu z konjugierte Involution s mit $u^s = t$ und daher $M^s = M_3$.

Wir setzen $D_1 := M \cap M^s$. Da $I = I^s$ in M und in M^s enthalten ist, ist D_1 q -regulär. Sei $Y \in \text{Syl}_q(D_1)$ t -invariant mit $X \leq Y$. Nach Wahl von D ist dann $|\!|_{D_1}(Y, \sigma')| \leq |\!|_D(X, \sigma')|$.

Offenbar ist $D \cap M^s = D_1 \cap D_1^t$, und mit (2) erhalten wir

$$|\!|_{D_1 \cap D_1^t}(Y, \sigma')| < |\!|_{D_1}(Y, \sigma')| \leq |\!|_D(X, \sigma')|.$$

Es können also nicht alle Elemente aus $\mathcal{I}_D(X, \sigma')$ in M^s liegen, denn dann lägen sie schon alle in $D \cap M^s = D_1 \cap D_1^t$.

Daher existiert ein $W \in \mathcal{I}_D(X, \sigma')$, das nicht in M^s enthalten ist. Wir finden ein solches t -invariant und können darauf 7.3 anwenden mit t und M^s anstelle u und M . Das liefert dann $C_W(I) \not\leq M^s$, also insbesondere $C_D(I) \not\leq M^s$. Andererseits liegt t in $F \leq U$, normalisiert also I , woraus folgt, daß $C_D(I)$ invariant unter t ist.

Weiter ist $N \leq M$ normal in F , also t -invariant und somit in $D = M \cap M^t$ enthalten. u zentralisiert $(M \cap U)/N$, also auch $C_M(I)/N$, und daher ist $C_D(I)$ schon u -invariant.

Wir haben schließlich $u, t \in N_G(C_D(I))$. Da beide Involutionen zu z konjugiert sind, sind sie schon in $N_G(C_D(I))$ konjugiert mit Lemma 5.2 (4). Dann sind auch M und M_3 unter $N_G(C_D(I))$ konjugiert. Aber $C_D(I)$ liegt in M und nicht in M_3 , das ist nicht möglich.

Dieser letzte Widerspruch beweist Satz 7.4.

□

8 Infektion

Sei auch hier wieder z eine Z^* -Involution, $C := C_G(z) \leq M \max G$ und G weiterhin z -einfach.

Definition

Seien H, L maximale Untergruppen von G .

Dann wird L von H **infiziert** und wir schreiben $H \vartheta L$, falls es eine Untergruppe X von $F(H)$ gibt, so daß $X \cdot C_{F^*(H)}(X) \leq L$ ist.

Wir folgen (nicht nur) in diesem Abschnitt der sogenannten Bender-Methode. Der nächste Satz, der dabei eine besonders wichtige Rolle spielt, wurde von Bender in größerer Allgemeinheit bewiesen, siehe [BE1].

Satz 8.1 (Infektionssatz). *Seien H, L maximale Untergruppen von G mit $z \in H$, weiter $H \vartheta L$ und $\sigma := \pi(F(H))$.*

1. $F_{\sigma'}(L) \cap H = 1$.
2. Aus $L \vartheta H$ folgt $H = L$ oder $\text{char}(H) = p = \text{char}(L)$, p prim.
3. Ist $E(L) \leq H$ und $\pi(F(L)) \subseteq \sigma$, dann ist $H = L$ oder $\text{char}(H) = p = \text{char}(L)$, p prim.
4. Seien H und L konjugiert und $E(L) = 1$.
Dann ist $H = L$ oder $\text{char}(H) = p = \text{char}(L)$, p prim.

Von nun an sei C echt in M enthalten.

Lemma 8.2. $[F(M), z] \neq 1$.

Beweis. Angenommen $[F(M), z] = 1$. Wegen $[E(M), z] = 1$ (siehe 6.2) folgt dann $z \in C_M(F^*(M)) \leq F(M)$, also $z \in O_2(M)$, ein Widerspruch.

□

Definition

Sei $t \in G$ eine Involution.

Dann bezeichnen wir eine $2'$ -Untergruppe X von G als t -**minimal**, falls X unter $C_G(t)$ invariant ist, aber nicht darin liegt und minimal mit diesen Eigenschaften ist.

Lemma 8.3. *Es gibt ein $p \in \pi(F(M))$, so daß $O_p(M)$ eine z -minimale Untergruppe U enthält. Ferner ist $U = [U, z]$.*

Beweis. Mit Lemma 8.2 gibt es ein $p \in \pi$ mit $[O_p(M), z] \neq 1$, also besitzt $O_p(M)$ eine z -minimale Untergruppe U . Wegen der Minimalität und Lemma 2.1 (2) ist $U = [U, z]$. □

Seien von jetzt an p die Primzahl und U die z -minimale Untergruppe aus 8.3.

Wegen $C \leq N_G(U)$ nehmen wir $N_G(U) \leq M$ an.

Sei weiter $\pi := \pi(F(M))$ und $F^*(M)$ keine p -Gruppe.

Lemma 8.4. $[O_p(C), U] = 1$, insbesondere $[C_{F(M)}(z), U] = 1$.

Beweis. Nehmen wir $[O_p(C), U] \neq 1$ an und setzen $C_0 := C_U(O_p(C))$.

Dann ist C_0 eine echte C -invariante Untergruppe von U , wird also von z zentralisiert.

Mit Thompsons $P \times Q$ -Lemma erhalten wir $[U, z] = 1$, das ist ein Widerspruch.

Daher ist $O_p(C) \leq C_G(U)$, und der Rest der Behauptung folgt sofort wegen

$[O_{p'}(M), U] = 1$. □

Das nächste Lemma (zusammen mit dem Korollar) ist grundlegend für die weitere Untersuchung maximaler Untergruppen, die den Zentralisator einer Involution enthalten. Wir werden beide Ergebnisse vor allem benötigen, um den Infektionssatz 8.1 später wirksam ins Spiel bringen zu können.

Lemma 8.5 (Basislemma). *Sei $L < G$, $t \in L$ eine Z^* -Involution und $F \leq L$ eine nilpotente, unter $C_L(t)$ invariante Untergruppe.*

Dann ist $[t, F] \leq F(L)$.

Beweis. Wir wenden Satz 2.12 an.

Es ist $t \in O_{2',2}(L)$ und $[t, F] \leq [t, L] \leq O(L)$ eine nilpotente $C_L(t)$ -invariante $2'$ -Untergruppe. Satz 2.12 und 2.1 (2) liefern sofort $[t, F] = [t, t, F] \leq F(L)$.

□

Wir fassen verschiedene typische Anwendungen des Basislemmas bzw. von 2.12 zusammen:

Korollar 8.6. *Sei $z \in L < G$.*

- $[z, F(M) \cap L] \leq F(L)$.
- *Ist $U \leq L$, so ist $U \leq O_p(L)$.*

Sei $a \in O_{2',2}(C)$ eine Involution.

- *Sei $X \leq G$ eine $C_C(a)$ -invariante nilpotente $2'$ -Untergruppe von M .*

Dann ist $[X, a] \leq F(M)$.

- *Sei $a \in L$ und U_a eine a -minimale Untergruppe von L .*

Ist dann $z \in H < G$ mit $a \in H$ und $U_a \leq H$, so ist $U_a = [U_a, a]$ in $F(H)$ enthalten.

Beweis. $F(M) \cap L$ ist nilpotent und invariant unter $C_L(z)$, also erhalten wir die Behauptung mit dem Basislemma.

U ist ebenfalls nilpotent und sogar C -invariant, daher ist genauso $U = [U, z] \leq O_p(L)$.

Für den Beweis der dritten Behauptung wenden wir Satz 2.12 an auf a und X und erhalten sofort $[X, a] \leq F(M)$.

Schließlich beachten wir, daß a in $O_{2',2}(H)$ liegt (6.1) und daß wegen der Minimalität von U_a und Lemma 2.1 (2) schon $U_a = [U_a, a]$ ist. Jetzt folgt die letzte Aussage wieder mit Satz 2.12.

□

Lemma 8.7 (Normalisatorlemma). *Sei $1 \neq X \leq F(M)$ invariant unter $\langle z \rangle U$.*

Dann ist $N_G(X) \leq M$.

Beweis. Sei $N_G(X) \leq L \max G$. Wegen $X \leq F(M)$ ist dann $M \varphi L$, und aus $\langle z \rangle U \leq L$ folgt $U \leq O_p(L)$ mit Korollar 8.6. Aber $N_G(U) \leq M$, also ist auch $L \varphi M$. Da M nicht von Charakteristik p ist, liefert der Infektionssatz 8.1 nun $M = L$.

□

Lemma 8.8. *Sei $1 \neq X = [X, z] \leq O_p(M)$ und $V \leq C_C(O_p(M))$ eine nicht zyklische p -Untergruppe.*

Dann ist $N_G(X) \leq M$.

Beweis. Sei $N_G(X) \leq L \max G$. Wegen $X \leq O_p(M)$ ist dann offenbar $M \varphi L$. Weiter sind V und z in L enthalten, und V operiert teilerfremd auf $F := F_{\pi'}(L)$. Da V nicht zyklisch ist, liefert der Erzeugungssatz 2.1(6) nun $F = \langle C_F(v) \mid v \in V^\# \rangle$.

Sei $v \in V^\#$ und $N_G(\langle v \rangle) \leq L_1 \max G$.

V liegt in $C_G(O_p(M)) \leq C_G(U)$, also sind U und z in L_1 enthalten. Wegen 8.6 ist $U \leq O_p(L_1)$.

Mit dem Infektionssatz folgt $F \cap M = 1$, d. h. F wird von z invertiert (siehe 2.8 (2)).

Also wird $C_F(v) \leq L_1$ von z invertiert, und daher ist $C_F(v) \leq O(L_1)$. Mit dem Basislemma 8.5 folgt $X = [X, z] \leq O_p(L)$, also $[F, X] = 1$, und so erhalten wir

$C_F(v) = C_{C_F(v)}(X) \leq O_{p'}(C_{O(L_1)}(X)) \leq O_{p'}(O(L_1)) \leq O_{p'}(L_1)$ mit Satz 2.11.

Wegen $U \leq O_p(L_1)$ ist nun $[U, C_F(v)] = 1$ und schließlich $[U, F] = 1$. Also ist F in $N_G(U) \leq M$ enthalten und deshalb $F = F \cap M = 1$, d.h. $\pi(F(L)) \subseteq \pi$.

Andererseits liegt z in L , also ist $E(L) \leq C \leq M$ mit Lemma 6.2, und der Infektionssatz liefert dann $M = L$, da M nach Voraussetzung nicht von Charakteristik p ist.

□

Lemma 8.9. Sei $P \in \text{Syl}_p(M, z)$.

Dann ist $Z(P)$ nicht zyklisch.

Beweis. Angenommen, $Z(P)$ sei zyklisch.

Dann ist jede Untergruppe von $Z(P)$ unter $N_G(Z(P))$ invariant.

Offenbar ist $1 \neq Z(P) \cap O_p(M)$ nach Annahme zyklisch, enthält also genau eine Untergruppe Z der Ordnung p .

Nun ist $Z \leq Z(P) \leq C_G(U)$, und mit P sind auch $Z(P)$ und Z invariant unter z .

Daher ist mit Lemma 8.7 schon $N_G(Z) \leq M$.

Andererseits ist dann $N_G(P) \leq N_G(Z(P)) \leq N_G(Z) \leq M$ im Widerspruch zu Lemma 6.5.

□

Satz 8.10. Für alle Untergruppen $1 \neq X = [X, z]$ von $O_p(M)$ ist $N_G(X) \leq M$.

Beweis. Sei $N_G(X) \leq L \max G$, also $M \curvearrowright L$.

Es ist $z \in L$ und wegen $X = [X, z] \leq [O_p(M) \cap L, z]$ schon $X \leq O_p(L)$, siehe Korollar 8.6. Ferner sehen wir $E(L) \leq C_L(z) \leq M$ mit Lemma 6.2, also müssen wir nur noch zeigen, daß $F(L)$ eine π -Gruppe ist, damit der Infektionssatz die gewünschte Behauptung liefert. Wir setzen $F := F_{\pi'}(L)$.

Ist $P \in \text{Syl}_p(M, z)$, so ist mit Lemma 8.9 $V := Z(P)$ nicht zyklisch. Offenbar ist $[V, O_p(M)] = 1$, deshalb können wir mit Lemma 8.8 annehmen, daß $[V, z] \neq 1$ ist.

Nun besitzt V ein von z invertiertes Element $v \neq 1$. Mit dem Infektionssatz (1) wird auch F von z invertiert. Andererseits ist $v \in C_G(X) \leq L$ und F daher v -invariant. Schließlich wird F von $\langle v \rangle = [\langle v \rangle, z]$ zentralisiert.

Sei $N_G(\langle v \rangle) \leq L_1 \max G$.

Dann sind z , X und V in L_1 enthalten, und wir haben gerade gesehen : $F \leq L_1$.

Mit Korollar 8.6 ist $X \leq O_p(L_1)$, und da F von z invertiert wird, ist $F \leq O(L_1)$.

Wir erhalten mit Satz 2.11 wieder $F \leq O_{p'}(C_G(X)) \cap O(L_1) \cap C_G(v) \leq O_{p'}(L_1)$.

Aber es ist auch $U \leq C_G(v)$, wieder mit 8.6 also $U \leq O_p(L_1)$.

Daher folgt $[U, F] = 1$, also liegt F tatsächlich in $N_G(U) \leq M$ und wir sehen $F = 1$.

□

9 Ein minimales Gegenbeispiel zum Z^* -Satz

Für den Rest der Arbeit sei G ein Gegenbeispiel zum Z^* -Satz von Glauberman, und in jeder echten Untergruppe und jeder echten Faktorgruppe von G sei der Satz richtig. (Ist also $z \in H < G$ eine isolierte Involution, so ist $z \in Z^*(H)$, d. h. $I_H(z) \subseteq O(H)$.) Wir kürzen diese Eigenschaften von G mit (\star) ab.

Weiter sei stets $z \in G$ eine Z^* -Involution.

Wir bemerken noch, daß ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung zum Z^* -Satz offenbar die Eigenschaft (\star) besitzt. Genauso ein minimales Gegenbeispiel zu Satz 1, also zum Z^* -Satz unter der Voraussetzung, daß der Zentralisator einer isolierten Involution auflösbar ist. Das erläutern wir in Kapitel 12.

Im allgemeinen Gegenbeispiel G mit (\star) sei $z \in S \in \text{Syl}_2(G)$ und $C := C_G(z) \leq M \max G$.

Wir beginnen hier mit einfachen Eigenschaften von G .

Lemma 9.1. $r_2(G) \geq 2$.

Beweis. Sonst wäre S zyklisch oder eine Quaternionengruppe, und beides ist wegen der Sätze 2.20 und 2.21 nicht möglich. \square

Korollar 9.2. G besitzt mindestens zwei Konjugiertenklassen von Involutionen.

Beweis. Klar wegen $z^G \cap S = \{z\}$. \square

Satz 9.3. G besitzt eine einfache normale Untergruppe N mit $G = N \cdot \langle z \rangle$. G ist insbesondere z -einfach.

Beweis. Mit 5.2 (7), angewandt auf $G/O(G)$, sehen wir $O(G) = 1$ wegen (\star) .

Als nächstes zeigen wir: $G = \langle z^G \rangle$.

Angenommen, $D := \langle z^G \rangle$ sei ein echter Normalteiler von G .

Da z eine Z^* -Involution ist, erhalten wir dann $z \in Z^*(\langle z^G \rangle) = Z^*(\langle z^D \rangle) = Z(\langle z^D \rangle)$, beachte $O(D) \leq O(G) = 1$.

Also ist z mit jedem Konjugierten vertauschbar, und da z isoliert ist, folgt $z \in Z(G)$, ein Widerspruch.

Sei jetzt N ein minimaler Normalteiler von G . Da z in $Z(S)$ liegt, folgt $[O_2(G), z] = 1$. Andererseits ist z nicht selbst in $O_2(G)$ enthalten, da z isoliert ist und sonst sofort in $Z(G)$ liegt.

Falls also N eine 2-Gruppe ist, dann wird $N \leq O_2(G)$ von allen Konjugierten von z zentralisiert und wir haben $N \leq Z(G)$, d.h. $Z(G)$ enthält eine Involution t . In $\bar{G} := G/\langle t \rangle$ ist wegen (\star) schon $\bar{z} \in Z^*(\bar{G})$.

Sei jetzt $H \trianglelefteq G$ mit $\bar{H} = O(\bar{G})$. Nun ist $\langle t \rangle$ eine 2-Sylowuntergruppe von H . Wegen $O(H) \leq O(G) = 1$ und Satz 2.20 ist $H = \langle t \rangle$, also $O(\bar{G}) = 1$ und $Z^*(\bar{G}) = Z(\bar{G})$.

Aber \bar{z} liegt in $Z^*(\bar{G}) = Z(\bar{G})$, d.h. $G = C_G(z)\langle t \rangle = C_G(z)$, ein Widerspruch.

Daher hat N zwar gerade Ordnung, ist aber keine 2-Gruppe, und $F(G) = 1$.

Angenommen $N\langle z \rangle < G$. Da z eine Z^* -Involution ist, folgt mit $O(N) \leq O(G) = 1$ schon $z \in Z(N\langle z \rangle)$. Also wird N von z und all seinen Konjugierten zentralisiert, ein Widerspruch.

Deshalb ist $N\langle z \rangle = G$.

Sei X ein minimaler Normalteiler von N .

Dann ist X nicht z -invariant (sonst wäre $X \trianglelefteq G$) und $X \cap X^z = 1$ (denn $X \cap X^z \trianglelefteq G$).

Da X gerade Ordnung hat, zentralisiert z aber eine nichttriviale 2-Untergruppe von X . Diese liegt dann in $X \cap X^z$, ein Widerspruch. Also ist N einfach.

Im Falle $N = G$ ist G selbst einfach.

□

Satz 9.4. *Sei $a \in G$ eine isolierte Involution.*

Dann ist a eine Z^ -Involution von G , und G ist a -einfach.*

Beweis. Offensichtlich müssen wir nur den Fall $a \neq z$ betrachten.

Wegen $O(G) = 1$ ist $Z^*(G) = Z(G) = 1$ und daher $a \notin Z^*(G)$. Andererseits ist $a \in Z^*(H)$ für jede echte Untergruppe H von G , die a enthält, mit (\star) , angewandt auf G und a .

Sei $1 \neq N$ ein echter Normalteiler von G . Mit Satz 9.3 ist dann N einfach und $|G : N| = 2$. Wäre a in N enthalten, so wäre $a \in Z^*(N) = 1$, ein Widerspruch. Also ist $a \notin N$ und wegen $|G : N| = 2$ schon $N\langle a \rangle = G$.

Ist G einfach, so ist G insbesondere a -einfach.

□

Satz 9.5. *Sei p prim, $P \in \text{Syl}_p(G, z)$ und $P \leq C \leq H < G$.*

Dann hat H keine nichttriviale p -Faktorgruppe, falls p ungerade ist.

Im Falle $p = 2$ liegt z außerhalb eines jeden Normalteilers von H vom Index 2, und falls G einfach ist, besitzt H gar keine nichttriviale 2-Faktorgruppe.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus 5.2 (8) zusammen mit 2.18 und der z -Einfachheit von G .

Ist $p = 2$, so folgt die Behauptung mit Thompsons Transfer Lemma 2.17 (genauer $H = O^2(H)\langle z \rangle$). Ist G einfach, so folgt $O^2(H) = H$, wieder mit 5.2 (8) und 2.18.

□

Wir bleiben für den Rest der Arbeit bei den angegebenen Voraussetzungen und können auf die Ergebnisse in den bisherigen Abschnitten zurückgreifen. Insbesondere lassen sich wegen Satz 9.4 alle Resultate aus Kapitel 8 auf jede isolierte Involution von G (anstelle z) anwenden.

10 Maximale Untergruppen, die C enthalten

Wir zeigen hier:

Satz 10.1. *Falls $E(M) = 1$ ist, folgt $M = C$ oder M hat Primzahlcharakteristik.*

Ohne die Bedingung $E(M) = 1$ benötigen wir im Beweis Informationen über Anzahl und Gestalt der 2-Komponenten von C ; damit beschäftigen wir uns in Kapitel 13.

Die zusätzliche Voraussetzung erlaubt es uns, den Satz ohne diese speziellen Kenntnisse zu beweisen und dabei schon die wichtigsten Argumente zu sehen.

Nehmen wir jetzt für den Rest des Kapitels an, Satz 10.1 sei falsch.

Sei also $C < M \max G$ mit $E(M) = 1$, $\pi := \pi(F(M))$ und U eine z -minimale Untergruppe von M .

Sei $p \in \pi$ mit $U \leq O_p(M)$, $N_G(U) \leq M$ und $F^*(M)$ keine p -Gruppe.

Nun stehen uns die Resultate aus Kapitel 8 zur Verfügung.

Lemma 10.2. *Sei $V \in \mathcal{E}_p^2(M)$ eine von z zentralisierte oder invertierte Untergruppe. Dann wird V von z invertiert, und $[C_{O_p(M)}(V), z] = 1$.*

Beweis. Sei V ein Gegenbeispiel, d.h. $[V, z] = 1$ oder (falls V von z invertiert wird) $[C_{O_p(M)}(V), z] \neq 1$.

$V\langle z \rangle$ operiert auf $O_p(M)$, und wegen $U \leq O_p(M)$ wissen wir $O_p(M) \not\leq C$. Im Falle $[V, z] = 1$ ist mit Thompsons $P \times Q$ -Lemma ebenfalls $[C_{O_p(M)}(V), z] \neq 1$, und demzufolge gibt es in $C_{O_p(M)}(V)$ ein von z invertiertes Element b der Ordnung p .

Sei $V \leq P \in \text{Syl}_p(M, z)$.

Wegen Lemma 6.5 ist $P \notin \text{Syl}_p(G)$, also $N_G(P) \not\leq M$, und wir finden eine zu z konjugierte Involution t in $N_G(P)$, so daß $M \neq M^t$ ist.

Dann ist offenbar $P = P^t \leq M \cap M^t$ und insbesondere $V\langle b \rangle \leq M \cap M^t$. Nun operiert $V\langle b \rangle$ auf $Q := O_{p'}(M^t)$, und der Erzeugungssatz 2.1 (6) liefert $Q = \langle C_Q(v) \mid v \in V^\# \rangle$.

Sei $v \in V^\#$. Wir beachten, daß mit 8.10 schon $C_G(b) \leq M$ ist und setzen $L := N_G(\langle v \rangle)$.

Mit Korollar 8.6 ist $b \in O_p(L)$ und folglich $[b, C_Q(v)] \leq O_p(L) \cap Q = 1$, also $C_Q(v) \leq C_G(b) \leq M$. Das bedeutet $Q \leq M$ und, da t eine Involution ist, auch $O_{p'}(M) \leq M^t$. Von Anfang an ist $O_p(M) \leq P \leq M^t$ und $O_p(M^t) \leq P \leq M$, also $F(M) \leq M^t$ und umgekehrt. Wegen $E(M) = 1$ ist aber $F^*(M) = F(M)$, also infizieren sich M und M^t gegenseitig. Da M nicht von Charakteristik p ist, folgt aus dem Infektionssatz schließlich $M = M^t$, ein Widerspruch.

□

Bemerkung 10.3. *Auch ohne die Voraussetzung $E(M) = 1$ kann Lemma 10.2 im wesentlichen genauso bewiesen werden, falls für jede Komponente E von M^t gilt:*

$$E = \langle C_E(v) \mid v \in V^\# \rangle.$$

Mit den Bezeichnungen im Beweis von 10.2 ist dann nämlich $[b, C_E(v)] \leq O_p(L) \cap E$, also $[b, C_E(v)] = 1$ und schließlich $E \leq M$.

Nun haben wir $F^(M^t) \leq M$ und umgekehrt, also $M \triangleleft M^t$ und umgekehrt, und der Infektionssatz liefert $M = M^t$, ein Widerspruch.*

Wir erläutern in Kapitel 13, unter welchen Voraussetzungen das erfüllt ist.

Sei jetzt $P \in \text{Syl}_p(M, z)$ und $Z := \Omega_1(Z(P))$.

Lemma 10.4. $Z \not\leq O_p(M)$.

Beweis. Mit Satz 6.5 ist $P \notin \text{Syl}_p(G, z)$ und daher $N_G(P)$ nicht in M enthalten.

Offenbar ist $[U, Z] = 1$ wegen $U \leq O_p(M) \leq P$. Mit P ist aber auch Z unter z invariant – läge also Z in $O_p(M)$, so wäre Z eine $\langle z \rangle U$ -invariante Untergruppe von $F(M)$, so daß $N_G(Z) \leq M$ folgte mit dem Normalisatorlemma.

Aber dann wäre $N_G(P) \leq N_G(Z) \leq M$, ein Widerspruch.

□

Lemma 10.5. *Z ist elementarabelsch der Ordnung p^2 , genauer ist*

$$|C_Z(z)| = |I_Z(z)| = p.$$

Beweis. Offenbar ist $O_p(M) \cap Z \neq 1$. Hätte Z die Ordnung p , so müßte Z schon ganz in $O_p(M)$ enthalten sein, ein Widerspruch zu Lemma 10.4. Also ist $|Z| \geq p^2$.

Wegen der teilerfremden Operation von z auf Z ist $Z = C_Z(z) \times [Z, z] = C_Z(z) \times I_Z(z)$ (Lemma 2.1(3)), und mit Lemma 10.2 kann $C_Z(z)$ keine Untergruppe der Ordnung p^2 enthalten.

Falls $I_Z(z)$ eine Untergruppe V der Ordnung p^2 besitzt, folgt $[C_{O_p(M)}(V), z] = 1$ (wieder mit Lemma 10.2). Aber $V \leq Z(P)$ wird von $O_p(M)$ zentralisiert, also ist $[O_p(M), z] = 1$, ein Widerspruch. Daher ist Z elementarabelsch der Ordnung p^2 wie behauptet. □

Lemma 10.6. *$O_p(M)$ ist zyklisch und wird von z invertiert.*

Beweis. $O_p(M)$ besitzt eine von z invertierte Untergruppe Y der Ordnung p .

Angenommen $Y \neq I_Z(z)$. Dann ist $V := I_Z(z)Y$ elementarabelsch der Ordnung p^2 , und mit Lemma 10.2 folgt $[C_{O_p(M)}(V), z] = 1$. Aber es ist $Y \leq C_{O_p(M)}(V)$ und $[Y, z] \neq 1$.

Genauso sehen wir, daß sogar $I_Z(z)$ die einzige von z invertierte Untergruppe der Ordnung p von P ist.

Nun haben wir $I_Z(z) \leq O_p(M)$, d.h. $O_p(M)$ besitzt genau eine von z invertierte Untergruppe der Ordnung p . Gäbe es eine von z zentralisierte Untergruppe der Ordnung p in $O_p(M)$, so wäre das $C_Z(Z)$ und damit wäre ganz Z in $O_p(M)$ enthalten. (P besitzt nur genau eine von z zentralisierte Untergruppe der Ordnung p wegen Lemma 10.2.)

Das wäre aber ein Widerspruch zu 10.4. Daraus folgt $C_{O_p(M)}(z) = 1$, d.h. $O_p(M)$ wird von z invertiert, besitzt nun nur genau eine Untergruppe der Ordnung p , und da $p \neq 2$ ist, muß $O_p(M)$ dann zyklisch sein. □

Lemma 10.7. $I_Z(z)$ liegt in jedem Konjugierten von M .

Beweis. Sei $g \in G \setminus M$, $t \in z^G \cap M^g$ und $D := M \cap M^t$.

p teilt $|M : C| = |D : C_D(t)|$ (mit Lemma 6.4), also ist auch $\frac{|[D,t]|}{|[D,t] \cap C_D(t)|}$ durch p teilbar, so daß es eine Untergruppe X von D gibt der Ordnung p , die von t invertiert wird.

Wir wollen zeigen, daß X zu $I := I_Z(z)$ konjugiert ist.

Mit 2.1 (1) ist $P = C_P(z)[P, z]$, und da es in P jeweils genau eine von z zentralisierte bzw. invertierte Untergruppe der Ordnung p gibt, ist P metazyklisch (und nicht zyklisch). Mit Lemma 2.6 ist $\Omega_1(P)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 , also $Z = \Omega_1(P)$.

Sei jetzt $P_1 \in \text{Syl}_p(N_G(Z), z)$. Mit Lemma 6.5 ist P_1 nicht in M enthalten, und daher sind mindestens p der $p + 1$ Untergruppen der Ordnung p von Z in G konjugiert.

Wir beachten noch, daß wegen Lemma 10.6 schon $M = N_G(I)$ ist und daher I nicht von P_1 normalisiert wird.

Angenommen, $C_Z(z)$ und I seien in G konjugiert.

Ist dann $h \in G$ mit $C_Z(z)^h = I$, so folgt $h \notin M$ wegen $I \not\leq M$.

Es ist $[z^h, I] = [z, C_Z(z)]^h = 1$, also $z^h \in C_G(I) \leq M$. Nun ist $z^h \in M \cap M^h$, aber jedes Konjugierte von z liegt nur in genau einem Konjugierten von M , d. h. $h \in M$, ein Widerspruch.

Es sind also genau p dieser $p + 1$ Untergruppen konjugiert, und da $C_Z(z)$ und I nicht konjugiert sind, muß eine der beiden Untergruppen von P_1 invariant gelassen werden. Wegen $P_1 \not\leq M$ wird $C_Z(z)$ von P_1 normalisiert.

X ist in M enthalten, also zu einer der $p + 1$ Untergruppen der Ordnung p von Z konjugiert. Da aber $C_Z(z)$ von z zentralisiert und X von t invertiert wird, können X und $C_Z(z)$ nicht konjugiert sein. X ist also zu allen übrigen Untergruppen konjugiert, insbesondere zu I .

Sei etwa $y \in G$ mit $X = I^y$. Dann ist $t \in N_G(X) = M^y$. Aber jedes Konjugierte von z liegt nur in genau einem Konjugierten von M , also muß $M^y = M^g$ sein.

$X \leq D \leq M$ normalisiert $I \trianglelefteq M$, aber es handelt sich um zwei p -Gruppen, und mit Lemma 2.7 folgt $C_I(X) \neq 1$. Jetzt ist $[X, I] = 1$, so daß I in $N_G(X) = M^g$ liegt wie behauptet.

□

Der Widerspruch

Mit Lemma 10.7 ist $1 \neq I_Z(z) \leq N := \bigcap_{g \in G} M^g \trianglelefteq G$.

Da G z -einfach ist, heißt das $G = N\langle z \rangle$ im Widerspruch zu $N\langle z \rangle \leq M$.

Aber auch $I_Z(z) = 1$ ist offenbar falsch (bzw. es bedeutet $C = M$), so daß wir in jedem Fall einen Widerspruch erhalten.

11 Involutionen in $O_{2',2}(C)$

Wir untersuchen hier den Fall $r(O_{2',2}(C)) \geq 2$. Sei also $z \in V \in \mathcal{E}_2^2(O_{2',2}(C))$, etwa $V = \{1, a, b, z\}$.

Sei weiter $V \leq S \in \text{Syl}_2(G)$, $C_v := C_G(v) \leq L_v \max G$ für jedes $v \in V^\#$ und im Falle $C_v < L_v$ jeweils U_v eine v -minimale Untergruppe und $N_G(U_v) \leq L_v$.

Wir bleiben bei der Notation $U = U_z$, $C_G(z) = C$, $L_z = M$ und $\pi = \pi(F(M))$.

Satz 11.1. $r_2(C_G(V)) = 2$.

Beweis. Angenommen $r_2(C_G(V)) > 2$.

Dann sei $B \in \mathcal{E}_2^3(C_G(V))$. Ist $b \in B$ eine Involution, so ist dann z in $L := C_G(b)$ enthalten und $V \leq O_{2',2}(M) \cap L \leq O_{2',2}(L)$, vgl. Lemma 6.1.

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 4.3 erfüllt, und der besagt, daß

$W := \langle O(C_G(v)) \mid v \in V^\# \rangle$ eine Gruppe ungerader Ordnung ist. Wir wissen aber, daß $\langle K \rangle$ von $C_K(a)$ und $C_K(b)$ erzeugt wird (Satz 5.9) und daß $C_K(a) \leq O(C_G(a))$ ist sowie $C_K(b) \leq O(C_G(b))$. Das bedeutet nun $K \subseteq \langle C_K(a), C_K(b) \rangle \leq W$, ein Widerspruch.

□

Lemma 11.2. Sei $v \in V^\#$ und $C_v < L_v$.

Dann ist $E(L_v) = 1 = O_2(L_v)$.

Beweis. Offensichtlich ist $[z, O_2(L_v)] = 1$, aber $z \notin O_2(L_v)$ nach Annahme bzw. mit Lemma 5.3. Falls aber $O_2(L_v) \neq 1$ ist, liegt darin wegen Lemma 11.1 genau eine Involution, und diese muß jetzt v sein. Das heißt $v \in Z(L_v)$, also $C_v = L_v$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Andererseits ist V in $O_{2',2}(C_v)$ enthalten, also $[V, E(L_v)] = 1$.

Wegen $V \cap E(L_v) \leq O_2(L_v) = 1$ folgt nun auch $E(L_v) = 1$ mit Lemma 11.1.

□

Satz 11.3. *Falls a isoliert ist, ist $L_a = C_a$ oder $\text{char}(L_a) = q$ mit einer ungeraden Primzahl q .*

Beweis. Mit Lemma 11.2 ist im Falle $C_G(a) < L_a$ schon $E(L_a) = 1 = O_2(L_a)$ und insbesondere *nicht* $\text{char}(L_a) = 2$.

Da a eine Z^* -Involution und G auch a -einfach ist (siehe Lemma 9.4), können wir Satz 10.1 anwenden und sind fertig. □

Lemma 11.4. *Seien a, b in $H \leq G$ enthalten.*

Dann sind a und b entweder konjugiert oder isoliert in H .

Beweis. Sei $V \leq T \in \text{Syl}_2(H)$, und seien a und b nicht in H konjugiert. Es ist $z \in Z(T)$ mit 5.2 (2), und da a und b nicht in T konjugiert sind, muß dann $N_T(V) = C_T(V)$ sein. Aber $V = \Omega_1(Z(C_T(V)))$ mit Lemma 11.1, und $N_T(N_T(V))$ zentralisiert die charakteristische Untergruppe V von $C_T(V)$, also ist $N_T(V)$ normalisatorgleich in T und damit $T = N_T(V) = C_T(V)$.

Nun sind a, b und z die einzigen Involutionen in T , und damit folgt sofort die Behauptung. □

Ein Hauptziel dieses Kapitels ist, zu zeigen, daß C , $C_G(a)$ und $C_G(b)$ maximale Untergruppen sind.

Dabei wird wieder der Infektionssatz eine wichtige Rolle spielen.

Lemma 11.5. $r_2(G) = 2$, G ist einfach, und $O^2(C) = C$.

Außerdem ist $G = \langle C_K(a), C_K(b) \rangle$.

Beweis. Sei $S_0 := S \cap O_{2',2}(C)$. Dann ist $S_0 \trianglelefteq S$.

Angenommen, es gibt keinen elementarabelschen Normalteiler der Ordnung 4 von S , der in S_0 liegt. Dann wäre mit Satz 2.10 schon S_0 eine Dieder- oder Semidiedergruppe der Ordnung mindestens 8.

Aber in $\overline{C} := C/O(C)$ ist $\overline{S}_0 = O_2(\overline{C})$, und da $\text{Aut}(S_0)$ eine 2-Gruppe ist, besitzt \overline{C} (und damit C) nun einen Normalteiler von 2-Potenzindex, der z enthält. Das ist nicht möglich (9.5).

Also können wir annehmen, daß V normal in S ist. Falls $r_2(G) \geq 3$ wäre, hätten wir eine elementarabelsche Untergruppe T von S der Ordnung acht. Nun wäre einerseits $C_T(V) \leq V$ mit Satz 11.1, aber andererseits $|T : C_T(V)| \leq 2$ und daher $C_T(V) = V$. Aber V kann wegen Satz 11.1 nicht in T liegen.

Also ist $r_2(G) = 2$. Daraus folgt sofort, daß G einfach ist, denn sonst wäre $G = N\langle z \rangle$ mit einem einfachen Normalteiler N , siehe Satz 9.3. Es müßte dann $r_2(N) = 1$ sein, aber das ist mit den Sätzen 2.20 und 2.21 nicht möglich.

Jetzt ist $O^2(G) = G$ und mit Lemma 9.5 dann $O^2(C) = C$.

Die letzte Behauptung folgt mit Satz 5.9, da wegen der Einfachheit $G = \langle K \rangle$ ist. □

Lemma 11.6. *a ist in L_a isoliert, und $[V, L_a] \leq O(L_a)$.*

Falls alle Involutionen aus V isoliert sind in G , ist auch $[V, M] \leq O(M)$.

Beweis. Angenommen, a sei nicht isoliert in L_a . Dann sind a und b in L_a (sogar in $C_{L_a}(z)$) konjugiert mit 11.4.

Sei $x \in C_{L_a}(z)$ mit $a^x = b$.

Dann ist $C_K(b) = C_K(a^x) = C_{K^x}(a^x) = C_K(a)^x \leq L_a$, so daß nun mit Lemma 11.5 schon $G = \langle C_K(a), C_K(b) \rangle$ in L_a enthalten ist, ein Widerspruch.

Jetzt ist aber auch b isoliert in L_a , und es folgt sofort $[V, L_a] \leq O(L_a)$.

Sind a , b und z isoliert in G , so sind sie Z^* -Involutionen mit 9.4, und deshalb ist $[V, M] \leq O(M)$. □

Lemma 11.7. *Sei q prim und $\text{char}(L_a) = q = \text{char}(L_b)$.*

Dann sind a und b konjugiert.

Beweis. Angenommen nicht, dann sind a und b isoliert mit Lemma 11.4.

Es ist q ungerade und $a \notin Z(L_a)$. Ferner sehen wir $U_a \leq O_q(L_a)$.

Sei jetzt Q_a eine maximale V -invariante q -Untergruppe von G , die $O_q(L_a)$ enthält, so daß $ZJ(Q_a)$ von $C_K(a)$ normalisiert wird. Eine solche Untergruppe Q_a gibt es - etwa ist $O_q(L_a)$ ein Beispiel.

Sei $H_a := N_G(ZJ(Q_a))$. Dann ist H_a eine echte Untergruppe von G , die V , $C_K(a)$ und Q_a enthält. Wir beachten $C_K(a) \subseteq O(H_a)$.

Wegen $F^*(L_a) = O_q(L_a) \leq H_a$ haben wir $L_a \curvearrowright H_a$. Mit Korollar 8.6 (angewandt auf die Z^* -Involution a anstelle z) folgt andererseits $U_a \leq O_q(H_a)$, also auch $H_a \curvearrowright L_a$.

Der Infektionssatz liefert jetzt $L_a = H_a$ (und damit ist $Q_a \in \text{Syl}_q(G)$)

oder $\text{char}(H_a) = q$.

Im zweiten Fall sei $Q_a \leq Q_0 \in \text{Syl}_q(H_a, V)$. Wegen $\text{char}(H_a) = q$ ist wieder mit Satz 2.19 dann $ZJ(Q_0) \trianglelefteq Q_0 O(H_a) V$, also wird $ZJ(Q_0)$ von $C_K(a)$ normalisiert. Q_a ist aber maximal mit dieser Eigenschaft gewählt worden, also folgt

$Q_a = Q_0 \in \text{Syl}_q(H_a)$, und wegen $N_G(Q_a) \leq N_G(ZJ(Q_a)) \leq H_a$ ist auch in diesem Falle Q_a eine q -Sylowuntergruppe von G .

Insbesondere haben wir nun $Q_a \in \mathcal{I}_G^*(V, q)$ und finden genauso $Q_b \in \mathcal{I}_G^*(V, q)$ und H_b mit den entsprechenden Eigenschaften.

Mit Bemerkung 5.13 wählen wir $x \in C_G(V)$ mit $Q_a^x = Q_b$.

Dann ist auch $ZJ(Q_a)^x = ZJ(Q_b)$, also $H_a^x = H_b$. Aber $C_K(a) \subseteq H_a$, und da K unter C invariant ist, erhalten wir $C_K(a) = C_K(a)^x \subseteq H_a^x = H_b$.

Mit Lemma 11.5 ist jetzt $G = \langle C_K(a), C_K(b) \rangle \leq H_b$, ein Widerspruch.

□

Lemma 11.8. *Sei q eine ungerade Primzahl und seien $Q_1, Q_2 \in \mathcal{I}_G^*(V, q)$ mit $Q_1 \cap Q_2 \neq 1$. Dann sind Q_1 und Q_2 unter $C_G(V)$ konjugiert.*

Beweis. Angenommen nicht.

Seien dann Q_1 und Q_2 nicht unter $C_G(V)$ konjugiert und so gewählt, daß der Schnitt $D := Q_1 \cap Q_2 \neq 1$ möglichst groß ist. Sei $H := N_G(D)$. Mit Q_1 und Q_2 sind auch D und $N_{Q_1}(D)$, $N_{Q_2}(D) \leq H$ unter V invariant, und wir wählen $N_{Q_i}(D) \leq \widehat{Q}_i \in \mathcal{V}_H^*(V, q)$.

Da q ungerade und $V \leq O_{2',2}(H)$ ist, liefert Satz 2.13 ein $h \in C_H(V)$ mit $\widehat{Q}_1^h = \widehat{Q}_2$. Sei $\widehat{Q}_1 \leq Q_1^* \in \mathcal{V}_G^*(V, q)$. Dann ist offenbar $\widehat{Q}_2 \leq Q_1^{*h} \in \mathcal{V}_G^*(V, q)$.

Wegen $D < N_{Q_1}(D) \leq Q_1 \cap Q_1^*$ und $D < N_{Q_2}(D) \leq Q_2 \cap Q_1^{*h}$ sind nun Q_1 und Q_1^* , Q_2 und Q_1^{*h} jeweils unter $C_G(V)$ konjugiert. Aber $h \in C_H(V)$, also sind auch Q_1 und Q_2 unter $C_G(V)$ konjugiert, ein Widerspruch. □

Lemma 11.9. *Es gibt keine Primzahl q mit $\text{char}(L_a) = q = \text{char}(L_b)$.*

Beweis. Angenommen doch. Dann ist q ungerade wegen $z \notin Z(L_a)$.

Wir wissen bereits mit Lemma 11.7, daß a und b konjugiert sind in G . Ferner ist a in L_a isoliert (Lemma 11.6).

Wir möchten wie in Lemma 11.7 schließen und müssen dazu zeigen, daß es ein $Q \in \text{Syl}_q(L_a, V)$ und ein $Q_1 \in \text{Syl}_q(L_b, V)$ gibt mit nichttrivialem Schnitt (so daß also Lemma 11.8 greift).

Angenommen, das sei nicht der Fall.

Ist dann $Q \in \text{Syl}_q(L_a, V)$, so erhalten wir $Q \cap L_b = 1$. Q wird also von b invertiert. Daher ist Q abelsch, zentralisiert insbesondere $O_q(L_a)$, und damit folgt

$$Q = O_q(L_a) = F^*(L_a).$$

Nun ist $N_G(Q) \leq L_a$, also Q schon eine q -Sylowuntergruppe von ganz G . Insbesondere sind die q -Sylowuntergruppen von G abelsch, d. h. $O_q(M)$ ist abelsch.

Da q ungerade ist, liegt a nicht in $Z(L_a)$, und U_a wird von a invertiert, aber auch von b , siehe oben. Daher liegt U_a in C . Mit Korollar 8.6 ist dann $U_a \leq O_q(M)$.

Aber aus $U_a \leq O_p(M)$ folgt sogar $O_p(M) \leq C_G(U_a) \leq L_a$, d. h. $O_p(M) \leq Q$, und da Q abelsch ist, liegt nun umgekehrt Q in M , also haben wir schließlich $O_q(M) = Q$ im Widerspruch zu $M \neq L_a$.

Seien also jetzt $Q \in \text{Syl}_q(L_a, V)$ und $Q_1 \in \text{Syl}_q(L_b, V)$ mit $Q \cap Q_1 \neq 1$.

Sei weiter Q_a eine maximale V -invariante q -Untergruppe von G , die Q enthält, so daß $ZJ(Q_a)$ von $C_K(a)$ normalisiert wird. Diese Wahl ist möglich wie in Lemma 11.7 wegen $\mathcal{N}_{L_a}^*(V, q) \subseteq \text{Syl}_q(L_a, V)$ und $\text{char}(L_a) = q$. (Beachte, daß a und b in L_a isoliert sind.)

Sei wieder $H_a := N_G(ZJ(Q_a))$. Dann ist V in H_a enthalten.

Angenommen, a und b seien nicht isoliert in H_a .

Dann sind sie mit Lemma 11.4 konjugiert – sogar in $C_{H_a}(z)$. Ist aber $x \in C_{H_a}(z)$ mit $b = a^x$, so erhalten wir $C_K(b) = C_K(a^x) = (C_K(a))^x \in H_a$ und mit Lemma 11.5 wieder $G \leq H_a$, ein Widerspruch.

Also sind a und b isoliert in H_a , d. h. $\mathcal{N}_{H_a}^*(V, q) \subseteq \text{Syl}_q(H_a, V)$ genau wie in Lemma 11.7, und nun erhalten wir wie dort $Q_a \in \text{Syl}_q(G)$. Genauso finden wir $Q_b \in \text{Syl}_q(G, V)$ mit $Q_1 \leq Q_b$ und $C_K(b) \subseteq H_b := N_G(ZJ(Q_b))$.

Aber wegen $Q \cap Q_1 \neq 1$ ist auch $Q_a \cap Q_b \neq 1$, und mit Lemma 11.8 sind dann Q_a und Q_b unter $C_G(V)$ konjugiert. Nun folgt ein Widerspruch genau wie in Lemma 11.7.

□

Lemma 11.10. *Es gibt keine Primzahl q mit $\text{char}(M) = q = \text{char}(L_a)$.*

Beweis. Angenommen doch.

Sind a und b konjugiert in G , so ist auch $\text{char}(L_b) = q$, und wir erhalten mit Lemma 11.7 einen Widerspruch.

Sind a und b isoliert in G , so können wir Lemma 11.7 anwenden auf a und z anstelle von a und b und erhalten ebenfalls einen Widerspruch.

Weitere Fälle sind wegen Lemma 11.4 nicht möglich.

□

Im Beweis des nächsten Satzes verwenden wir Argumente aus [BG].

Satz 11.11. *Sei $M = C$, $p \in \pi$ ungerade (wegen $2 \in \pi$ also insbesondere M nicht von Primzahlcharakteristik) und $Y \in \mathcal{E}^3(O_p(M))$.*

Dann ist $C_G(y) \leq M$ für alle $y \in Y^\#$.

Beweis. Sei $A := C_{F^*(M)}(Y)$.

Dann sind $Z(F^*(M))$ und $E(M)$ in A enthalten, und offenbar ist A zentralisatorabgeschlossen in $F^*(M)$. Sei $A \leq H \max G$.

– $C_G(A) \leq M$ und $C_G(A_p) \leq M$ für alle $p \in \pi$, denn A enthält $Z(F(M))$, und A_p enthält $O_p(Z(F(M)))$.

– $C_G(A)$ ist eine π -Gruppe, denn ein π' -Element zentralisiert ganz $F^*(M)$ mit Lemma 2.1 (4) und liegt in M , also schon in $Z(F^*(M))$. Analog sehen wir $\|_{M(A\langle z \rangle, \pi')} = \{1\}$.

– $\langle \|_{H(A\langle z \rangle, \pi')} \rangle \leq O_{\pi'}(H)$.

Sei $Q \in \|_{H(A\langle z \rangle, \pi')}$ und $r \in \pi$. Dann operiert A_r teilerfremd auf Q , also ist mit 2.1 (1) schon $Q = [Q, A_r]C_Q(A_r)$.

Aber $C_Q(A_r) \in \|_{M(A\langle z \rangle, \pi')}$ muß trivial sein, also haben wir $Q = [Q, A_r]$.

Es ist genauso $Q \cap M = 1$, d. h. Q wird von z invertiert und liegt damit in $O(H)$.

Für alle $r \neq p$ in π erhalten wir schließlich

$$Q = [Q, A_r] \leq [Q, O_{p'}(N_H(Z(O_p(M))))] \cap O(H) \leq O_{p'}(N_{O(H)}(Z(O_p(M)))) \leq O_{p'}(H)$$

mit Satz 2.11. Also ist $Q \leq O_{\pi'}(H)$.

– $H = M$.

Es sind die Voraussetzungen für Theorem 7.2 in [BG] erfüllt (Der Satz wird in einem minimalen Gegenbeispiel zum Satz von Feit und Thompson formuliert, aber der Beweis funktioniert auch in unserer Situation.) , und das liefert, daß $O_{\pi'}(C_G(A))$ transitiv auf $\|_G^*(A\langle z \rangle, q)$ ist für alle $q \in \pi'$.

Aber $O_{\pi'}(C_G(A)) = 1$, also besitzt $\bigvee_G^*(A\langle z \rangle, q)$ nur ein einziges Element Q^* . Wir beachten $Q^* \cap M = 1$, siehe oben. Wir wissen wegen $\langle z \rangle A \leq H$, daß $E(H)$ in M liegt (6.2) und H von M infiziert wird. Mit dem Infektionssatz folgt also die Behauptung, falls $F_{\pi'}(H) = 1$ ist.

Nehmen wir also an, es gebe ein $q \in \pi'$ mit $F := O_q(H) \neq 1$. Dann liegt F offenbar in $\bigvee_H(A\langle z \rangle, q)$ und ist daher in Q^* enthalten.

Wegen $A \trianglelefteq \trianglelefteq M$ ist aber Q^* unter M invariant und liegt dann darin, da M maximal ist. Also ist $Q^* = 1$ und $F(H)$ eine π -Gruppe.

Jetzt haben wir, daß A (und damit auch $C_G(y)$ für jedes $y \in Y^\#$) in einer einzigen maximalen Untergruppe von G liegt, nämlich in M .

□

Aus Satz 2.14 folgt:

Korollar 11.12. *Sei H max G , $p \in \pi(H)$ und $N \leq O_p(H)$.*

Dann ist $F_{p'}(H)E(H) \leq O_{p^}(N_G(N))$.*

Genauso $F_{p'}(H)E(H) \leq O_{p^}(H_1)$, falls $N_G(N) \leq H_1$ max G ist. Insbesondere folgt aus $\text{char}(H_1) = p$ schon $\text{char}(H) = p$.*

Satz 11.13. *C_a ist eine maximale Untergruppe.*

Beweis. Angenommen nicht. Sei $F := F(L_a)$ ($= F_{2'}(L_a) = F^*(L_a)$ mit 11.2).

- Sei $C_F(z) \leq C_F(a)$. Mit Lemma 2.2 folgt dann $[F, a] \leq [F, z] \cap C_G(b)$, und daher ist U_a in L_b enthalten.

Mit 8.6 ist etwa $U_a \leq O_p(L_b)$ und deshalb $L_b \rightleftharpoons L_a$.

L_a und L_b sind weder gleich noch beide von Charakteristik p (mit Lemma 11.9), der Infektionssatz ((2) und (4)) liefert also, daß umgekehrt L_b *nicht* von L_a infiziert wird und daß a und b nicht konjugiert sind.

Mit Lemma 11.4 sind also a und b isoliert, und wegen 11.3 ist $\text{char}(L_a) = p$. Aber aus Korollar 11.12 folgt wegen $U_a \leq O_p(L_b)$ dann auch $\text{char}(L_b) = p$ im Widerspruch zu 11.9.

Jetzt ist $[C_F(z), a] \neq 1$.

Sei $p \in \pi(F(L_a))$ und $P := O_p(L_a)$ mit $X := [C_P(z), a] \neq 1$.

Wir wenden Korollar 8.6 an und erhalten $X \leq [P \cap M, a] \leq O_p(M)$ und daher

$X \leq C_{F(M)}(z)$.

- Angenommen $C < M$. Wegen Lemma 11.2 folgt dann $E(M) = 1$ und mit Satz 10.1 schon $\text{char}(M) = p$. Nun haben wir $[X, U] = 1$ mit Lemma 8.4, also ist X eine $U\langle z \rangle$ -invariante Untergruppe von $O_p(M)$ und mit dem Normalisatorlemma 8.7 dann $N_G(X) \leq M$.

Also haben wir $L_a \not\leftrightarrow M$.

Aber nun ist auch $\text{char}(L_a) = p$, wieder mit 11.12, im Widerspruch zu 11.10.

Es ist also $C = M$.

Da mit Lemma 11.7 jede z -invariante π -Untergruppe in M liegt, wird $F_\pi(L_a)$ von z zentralisiert.

Aus $X \leq O_p(M)$ folgt $p \in \pi$ und daher $P \leq C$. Das bedeutet $X = [P, a] \trianglelefteq F$, insbesondere ist X invariant unter $U_a\langle a \rangle$ und daher mit dem Normalisatorlemma schon $N_G(X) \leq L_a$. (Die Anwendung auf a und U_a anstelle z und U ist möglich, weil der Beweis außer dem Infektionssatz nur 8.6 benötigt.)

Wir sehen also $M \not\leftrightarrow L_a$ und beachten, daß wegen des Infektionssatzes und 5.3 bzw. 11.10 jetzt $F_{\pi'}(L_a)$ *nicht* in M enthalten ist.

- Angenommen, a und b seien isoliert.

Dann können wir Lemma 11.3 anwenden und erhalten, daß wegen $C_a < L_a$ schon $\text{char}(L_a) = p$ sein muß. Wegen $F^*(L_a) = P \leq M$ haben wir dann auch $L_a \vartheta M$ und mit dem Infektionssatz $M = L_a$ oder $\text{char}(L_a) = p = \text{char}(M)$.

Beides ist nicht möglich wegen der Sätze 5.3 und 11.10.

Also sind a und b konjugiert mit Lemma 11.4, wir haben $U_b \leq O_p(M)$ und $M \vartheta L_b$. Da $F_\pi(L_a)$ von z zentralisiert und $F_{\pi'}(L_a)$ von z invertiert wird, erhalten wir $[L_a, z] \leq C_{L_a}(F) \leq F$. Mit Lemma 2.5 ist sogar $L_a = C_{L_a}(z)F_{\pi'}(L_a)$, und wir beachten, daß $F_{\pi'}(L_a)$ abelsch ist.

- Sei $D := F_{\pi'}(L_a) \cap C_b$.

Dann ist $D \trianglelefteq F_{\pi'}(L_a)$, ferner ist D unter $C_b \cap C_a = C_C(b) = C_C(a)$ invariant, also schon unter ganz $C_a \leq C_C(a)F_{\pi'}(L_a)$.

Aber da D von z invertiert wird und in C_b liegt, ist D in

$[C_b, z] \leq F_{\pi'}(L_b)$ enthalten und ist darin normal. Also ist D auch unter C_b invariant, d. h. (mit 11.5) $G \leq \langle C_a, C_b \rangle \leq N_G(D)$ mit Lemma 11.5.

Da G z -einfach ist, muß $G = D\langle z \rangle$ sein, und das ist nicht möglich.

Also wird $F_{\pi'}(L_a)$ von b invertiert und damit von a zentralisiert.

- $O_p(M)$ ist nicht in L_a enthalten.

Sonst wäre nämlich $U_b \leq O_p(M) \leq L_a$, also $U_b \leq O_p(L_b)$ und $L_b \vartheta L_a$. Das ist wegen des Infektionssatzes nicht möglich, da L_a und L_b weder gleich noch beide von Charakteristik q sein können.

Angenommen, es gebe zwei verschiedene Primzahlen p und q in $\pi \cap \pi(F(L_a))$.

Dann operiert $P \times O_q(L_a)$ auf $O_p(M)$, und

$$[C_{O_p(M)}(P), O_q(L_a)] \leq O_p(M) \cap O_q(L_a) = 1.$$

Mit Thompsons $P \times Q$ -Lemma 2.9 folgt $[O_p(M), O_q(L_a)] = 1$, also $O_p(M) \leq L_a$, ein Widerspruch.

Daher ist $\pi \cap \pi(F(L_a)) = \{p\}$.

- Sei $P_0 := P \cap O_p(M)$. Dann liegt $X = [P, a]$ in P_0 .

Angenommen, $\Omega := \Omega_1(Z(O_p(M))) \leq P_0$.

Dann ist wegen $\Omega \leq P$ schon $F_{\pi'}(L_a) \leq C_G(\Omega) \leq M$, ein Widerspruch.

Also ist $\Omega \not\leq P_0$.

Angenommen, P_0 sei nicht zyklisch.

Dann sei $W_1 \in \mathcal{E}^2(P_0)$ und $W \in \mathcal{E}^3(W_1\Omega)$ mit $W_1 \leq W$. Mit Satz 11.11 ist $C_G(w) \leq M$ für alle $w \in W^\#$. Aber wegen $W_1 \leq O_p(L_a)$ ist $O_{p'}(L_a) \leq C_G(W_1)$, also $F_{\pi'}(L_a) \leq O_{p'}(L_a) \leq M$, ein Widerspruch.

Nun ist P_0 zyklisch und wird deshalb von a und b invertiert.

- a invertiert P_0 und zentralisiert P/P_0 , d. h. $[L_a, a]$ zentralisiert P_0 und P/P_0 . Da $F_{p'}(L_a)$ von a (und damit auch von $[L_a, a]$) zentralisiert wird, operiert nun $[L_a, a]$ nilpotent auf ganz $F = F^*(L_a)$, liegt also darin.

Wegen $[F_{p'}(L_a), a] = 1$ folgt $[L_a, a] = P_0$.

Nun wird für jede Primzahl $q \neq p$ eine q -Sylowuntergruppe von L_a von a zentralisiert.

- Sei $q \in \pi' \cap \pi(F)$ und $Q \in \text{Syl}_q(L_a, V)$.

Dann wird Q von a , aber nicht von z zentralisiert. Ist also $a \in T \in \text{Syl}_2(C_G(Q))$, so ist a die einzige Involution in T und daher $N_G(T) \leq C_a$.

Mit dem Frattiniargument ist dann

$$N_G(Q) = C_G(Q)N_{N_G(Q)}(T) \leq C_G(Q)C_a \leq C_a \text{ und daher } Q \in \text{Syl}_q(G).$$

Mit Lemma 5.14 sind a und b dann nicht konjugiert, und das ist ein endgültiger Widerspruch.

□

Lemma 11.14. *a und b sind isoliert.*

Beweis. Wegen $z \notin Z(L_a)$ gibt es eine Primzahl $q \in \pi(F(L_a))$, so daß $O_q(L_a)$ nicht von z zentralisiert wird. Ist $Q \in \text{Syl}_q(L_a, V)$, so ist $C_G(Q) \leq C_G(O_q(L_a)) \leq L_a$, und Q wird von a , aber nicht von z zentralisiert.

Sei $a \in T \in \text{Syl}_2(C_G(Q))$.

Dann ist a die einzige Involution in T (denn in einer 2-Sylowuntergruppe von L_a gibt es nur genau drei Involutionen), d. h. a wird von $N_G(T)$ zentralisiert. Mit dem Frattiniargument sehen wir nun $N_G(Q) = C_G(Q)N_{N_G(Q)}(T) \leq C_G(Q)C_a \leq L_a$.

Deshalb ist sogar schon $Q \in \text{Syl}_q(G)$.

Nun liegt Q in C_a , aber keine q -Sylowuntergruppe von G ist in C enthalten (sonst läge schon Q in C mit Lemma 5.12). Wir wenden Lemma 5.14 an und sehen, daß a und b nicht in G konjugiert sein können.

Mit Lemma 11.4 sind sie isoliert.

□

Schließlich haben wir:

Satz 11.15. *C , $C_G(a)$ und $C_G(b)$ sind maximale Untergruppen.*

Beweis. Das ist jetzt ein einfaches Korollar aus Satz 11.13 und Lemma 11.14. Da alle Involutionen aus V isoliert sind in G , können wir nämlich die Rollen von a , b und z beliebig vertauschen. □

12 Reduktion auf den Fall $\mathcal{K}_2(C) \neq \emptyset$

Nach einigen vorbereitenden Lemmata zeigen wir, daß $C/O(C)$ perfekt ist. Anschließend können wir den Fall $\mathcal{K}_2(C) = \emptyset$ ausschließen und insbesondere den Z^* -Satz beweisen unter der Voraussetzung, daß C auflösbar ist (siehe Satz 1).

Satz 12.1. *Sei $M = C$, $\pi := \pi(F(M))$ und $a \in C \setminus \{z\}$ eine Involution.*

Sei $C_G(a) \leq L_a$ und $O(F(M)) \cap L_a \neq 1$.

Dann ist $[L_a, z]$ in $F_{\pi'}(L_a)$ enthalten.

Beweis. Wir setzen $L_0 := [L_a, z]$ und sehen mit 6.3, daß L_0 eine π' -Gruppe ist.

Sei $D := O(F(M)) \cap L_a$. Dann operiert $D \times \langle z \rangle$ teilerfremd auf L_0 .

Nun ist $[C_{L_0}(z), D] \leq C_{L_0}(z) \cap O(F(M)) = 1$, also $C_{L_0}(z) \leq C_{L_0}(D)$.

Nun sind die Voraussetzungen von Satz 2.23 erfüllt, und damit erhalten wir, daß $[C_{L_0}(D), z]$ normal in L_0 ist und $[L_0, D]$ sogar ein nilpotenter Normalteiler von L_0 .

Sei jetzt $C_G(D)D \leq H \max G$. Dann ist $H_0 := [H, z]$ eine auflösbare π' -Gruppe mit Satz 6.3 (beachte $z \in C_G(D)$), und wegen $D \leq F(M)$ ist $M \vartriangleleft H$. Für alle $q \in \pi'$ und $Q \in \text{Syl}_q(H_0)$ ist nun $M \cap Q = 1$, und das heißt, daß ganz H_0 von z invertiert wird. H_0 ist also ein abelscher Normalteiler von H und liegt damit in $F(H)$.

Daraus folgt

$$[z, C_{L_0}(D)] \leq [z, C_G(D)] \cap C_{L_0}(D) \leq H_0 \cap C_{L_0}(D) \leq F(H) \cap C_{L_0}(D) \leq F(C_{L_0}(D)).$$

$[z, C_{L_0}(D)]$ ist also ebenfalls nilpotent, d. h. $[z, C_{L_0}(D)] \leq F(L_0)$.

Aber mit 2.1 sehen wir

$$L_0 = C_{L_0}(D)[L_0, D], \text{ also } L_0 = [L_0, z] = [C_{L_0}(D), z][L_0, D, z] \leq F(L_0) \leq F_{\pi'}(L_a)$$

wie behauptet. □

Lemma 12.2. Sei $z \in V \in \mathcal{E}_2^2(O_{2',2}(C))$, $V = \{1, a, b, z\}$ und $C_G(v) \leq L_v$ max G für alle $v \in V^\#$. Sei $[M, a] \not\leq F(M)$.

Dann ist $[L_a, z] \leq F(L_a)$ und $[L_b, z] \leq F(L_b)$.

Beweis. Mit Satz 11.15 ist für alle $v \in V^\#$ schon $C_G(v) = L_v$ eine maximale Untergruppe von G .

Wegen $[M, a] \not\leq F(M)$ ist $O(F(L_a)) \cap M = 1$ mit Satz 12.1, und das heißt, daß $O(F(L_a))$ von z invertiert wird.

Aber z zentralisiert $O_2(L_a)$ und $E(L_a)$, also wird nun ganz $F^*(L_a)$ von $[L_a, z]$ zentralisiert, und das bedeutet $[L_a, z] \leq C_{L_a}(F^*(L_a)) \leq F(L_a)$ wie behauptet.

Genauso ist $[L_b, z] \leq F(L_b)$.

□

Lemma 12.3. Sei wieder $z \in V \leq O_{2',2}(C)$, V elementarabelsch der Ordnung 4.

Sei p prim und $P \in \text{Syl}_p(G, V)$.

Dann wird P von einer der drei Involutionen in V zentralisiert.

Beweis. Sei wie vorher $V = \{1, a, b, z\}$ und $\pi := \pi(F(C))$.

Mit Satz 11.15 ist der Zentralisator jeder Involution aus V maximal. Nun sehen wir mit den Argumenten im Beweis von Satz 6.3, daß die Behauptung folgt, falls p in einer der Mengen $\pi, \pi(F(L_a)), \pi(F(L_b))$ liegt.

Nehmen wir also an, daß $p \notin \pi$ ist.

Dann liegt P nicht in M , und mit Lemma 5.10 folgt, daß p ein Teiler etwa von $|C_K(a)|$ und damit von $|[L_a, z]|$ ist. Nun können wir aber mit Lemma 12.2 die Bezeichnungen so wählen, daß $[L_a, z] \leq F(L_a)$ ist und daher $p \in \pi(F(L_a))$.

□

Satz 12.4. *Im Falle $r_2(O_{2',2}(C)) \geq 2$ ist $C/O(C)$ perfekt.*

Beweis. Angenommen nicht.

Mit $\bar{C} := C/O(C)$ ist dann $\bar{C}' < \bar{C}$, d. h. \bar{C} besitzt eine nichttriviale abelsche Faktorgruppe.

Sei wieder $z \in V \leq O_{2',2}(C)$, $V = \{1, a, b, z\}$ elementarabelsch der Ordnung 4.

Wegen $O(C_G(V)) \leq O(C)$ ist $O(C_G(V)) = O(C) \cap C_G(V)$ und daher $\bar{C} \simeq C_G(V)/O(C_G(V))$, d. h. $C_G(V)/O(C_G(V))$ besitzt eine nichttriviale abelsche Faktorgruppe.

Jetzt sei q prim und $X \trianglelefteq C_G(V)$ so, daß $XO(C_G(V))/O(C_G(V))$ von q -Potenzindex in $C_G(V)/O(C_G(V))$ ist.

Wir beachten, daß wieder mit Satz 11.15 $C_G(v) = L_v$ eine maximale Untergruppe ist für alle $v \in V^\#$, und wir sehen $L_v/O(L_v) \simeq C_G(V)/O(C_G(V))$ genau wie in C .

Das bedeutet, daß nun die q -Faktorgruppe in jeder der Gruppen C, L_a, L_b auftritt. Aber eine der drei Gruppen enthält eine q -Sylowuntergruppe von G (mit 12.3), besitzt also keine nichttriviale q -Faktorgruppe mit 2.18.

Das ist ein Widerspruch. □

Ist $r_2(O_{2',2}(C)) \geq 2$ und $V \in \mathcal{E}_2^2(O_{2',2}(C))$, so wissen wir aus dem letzten Kapitel, daß die drei Involutionen in V isoliert sind und daß ihre Zentralisatoren maximale Untergruppen sind. Wegen $r_2(C_G(V)) = 2$ besitzt jede 2-Sylowuntergruppe von G genau drei Involutionen, jede Involution in G ist isoliert.

Mit Satz 12.4 ist dann $C/O(C)$ insbesondere 2-perfekt und 3-perfekt. Das führt zu einer Verbesserung von Satz 12.2.

Satz 12.5. *Sei $r_2(O_{2',2}(C)) \geq 2$ und $V \in \mathcal{E}_2^2(O_{2',2}(C))$.*

Dann ist $[C_G(v), V] \leq F(C_G(v))$ für jedes $v \in V^\#$.

Beweis. Sei wieder $V = \{1, a, b, z\}$.

Es ist $C_G(v) \max G$ mit Satz 11.15 für jedes $v \in V^\#$. Ferner ist die Situation symmetrisch in a, b und z , deshalb genügt es mit Satz 11.15, zu zeigen, daß $[C, a] \leq F(C)$ ist.

Da a isoliert ist, haben wir $C = C_C(a)[C, a]$ und $[C, a] \leq O(C)$. Weiter ist $C/O(C)$ 2-perfekt und 3-perfekt (12.4).

Sei $\pi := \pi(F(C))$, $p \in \pi$ beliebig und $P := O_p(C)$. Es genügt, zu zeigen, daß $[C, a]$ nilpotent auf P operiert, denn dann ist $[C, a]$ ein Normalteiler von C , der nilpotent auf $F(C)$ operiert und $E(C)$ zentralisiert, liegt also in $F(C)$.

Angenommen, $[C, a]$ sei nicht nilpotent auf P .

Dann wird insbesondere P nicht von a zentralisiert, und mit Satz 3.2 ist $C_P(a)$ nicht zyklisch.

Sei also $X \in \mathcal{E}^2(C_P(a))$. Falls X in $\mathcal{E}^*(P)$ ist, heißt das $X = \Omega_1(C_P(X))$. Dann zentralisiert jedoch a jedes Element der Ordnung p aus $C_P(X)$ und damit ganz $C_P(X)$ (siehe 2.1 (5)). Aber $C_P(X)$ ist zentralisatorabgeschlossen in P , also folgt mit 2.1 (4) jetzt $[P, a] = 1$, ein Widerspruch.

Daher ist $r(P) \geq 3$ und $X \leq Y \in \mathcal{E}^3(P)$. Setzen wir $L := C_G(a)$, dann ist X in L enthalten, ferner $z \in L$ und deshalb $L = C_L(z)O(L)$. Da mit Satz 6.3 jede z -invariante π -Untergruppe von L in M liegt, liefert uns Lemma 2.5 : $L = C_L(z)O_{\{2,\pi\}'}(L)$.

Die Untergruppe X von L operiert nun auf $Q := O_{\{2,\pi\}'}(L)$, und da X nicht zyklisch ist, erhalten wir $Q = \langle C_Q(x) \mid x \in X^\# \rangle$ mit dem Erzeugungssatz 2.1 (6). Aufgrund von Satz 11.11 wissen wir aber $C_G(x) \leq C$ für alle $x \in X^\#$.

Also ist schon ganz Q in C enthalten, und deshalb folgt $L \leq C$, ein Widerspruch zu Satz 5.3.

□

Nun beweisen wir das Hauptergebnis dieses Kapitels.

Satz 12.6. $\mathcal{K}_2(C) \neq \emptyset$.

Beweis. Sei $\bar{C} := C/O(C)$, und angenommen $\mathcal{K}_2(C) = \emptyset$.

Sei $T \in \text{Syl}_2(O_{2',2}(C))$.

Im Falle $r(T) \geq 2$ muß schon $r(T) = 2$ sein mit Satz 11.1, und dann besitzt T genau drei Involutionen. Nach Annahme ist $F^*(\bar{C}) = O_2(\bar{C}) = \bar{T}$ und daher $C_{\bar{C}}(\bar{T}) \leq \bar{T}$. Mit Satz 3.1, angewandt auf \bar{T} , ist also \bar{C} auflösbar.

Andererseits ist \bar{C} perfekt mit Satz 12.4, d. h. \bar{C} ist eine perfekte auflösbare Gruppe und damit trivial. Aber das bedeutet $C = O(C)$, ein Widerspruch.

Wir haben also $r_2(O_{2',2}(C)) = 1$. Nun gibt es zwei Möglichkeiten:

Falls T zyklisch ist, ist die Automorphismengruppe von T eine zyklische 2-Gruppe. Andererseits ist $\bar{T} = O_2(\bar{C})$, und es folgt $\bar{C} = N_{\bar{C}}(\bar{T}) = C_{\bar{C}}(\bar{T}) \leq \bar{T}$ wegen $\bar{T} = F^*(\bar{C})$. Aber dann ist $C/O(C)$ eine 2-Gruppe, und das ist mit Lemma 9.5 nicht möglich.

Falls T eine Quaternionengruppe ist, folgt $T \simeq Q_8$, da die Automorphismengruppen aller anderen Quaternionengruppen 2-Gruppen sind.

Sei jetzt $T \leq S \in \text{Syl}_2(G)$.

In \bar{C} induziert \bar{S} innere Automorphismen von \bar{T} (mit Lemma 9.5), also ist $\bar{S} \leq \bar{T}C_{\bar{C}}(\bar{T})$. Aber $\bar{T} = F^*(\bar{C})$, und das impliziert $\bar{S} \leq \bar{T}C_{\bar{C}}(\bar{T}) \leq \bar{T}$.

Nun ist \bar{S} und damit auch S eine Quaternionengruppe, aber das ist ein Widerspruch zu 9.1.

□

Mit Satz 12.6 ist auch Satz 1, die „auflösbare Version“ des Z^* -Satzes bewiesen :

Ist nämlich G ein minimales Gegenbeispiel zu Satz 1 und $z \notin Z^*(G)$ eine isolierte Involution mit auflösbarem Zentralisator C , so ist genau wie in Kapitel 9 auch hier z eine Z^* -Involution und G eine z -einfache Gruppe.

Dazu beachten wir:

Ist $z \in H < G$, so erhalten wir $H = C_H(z)O(H)$, also ist H auflösbar. Insbesondere ist der Zentralisator $H = C_G(t)$ jeder Involution $t \in G$ auflösbar, da darin z (oder ein Konjugiertes von z) liegt.

Ist $z \notin N \trianglelefteq G$, so ist \bar{z} isoliert in $\bar{G} := G/N$, und $C_{\bar{G}}(\bar{z}) = \overline{C_G(z)}$ ist auflösbar.

G hat also auch hier die Eigenschaft (\star) , und wir können genau wie in einem Gegenbeispiel zum allgemeinen Z^* -Satz schließen.

Der Widerspruch resultiert dann daraus, daß gleichzeitig C auflösbar und mit Satz 12.6 $\mathcal{K}_2(C) \neq \emptyset$ ist.

Zum Schluß dieses Abschnitts beweisen wir mit Hilfe von 2.15 eine Verbesserung von Satz 12.4.

Satz 12.7. *Im Falle $r_2(O_{2',2}(C)) \geq 2$ ist $C/O(C)$ eine E -Gruppe.*

Beweis. Sei $T \in \text{Syl}_2(O_{2',E}(C))$.

Mit dem Frattiniargument ist dann $C = O_{2',E}(C)N_C(T)$.

Aber Satz 2.15 liefert, daß $C_C(T)$ auflösbar ist, also ist schon ganz $N_C(T)$ auflösbar (mit Satz 3.1). Nun ist einerseits $C/O_{2',E}(C)$ auflösbar, andererseits $C/O(C)$ perfekt mit Satz 12.4.

Daher folgt $C = O_{2',E}(C)$.

□

Nun, da unsere Aufmerksamkeit von Satz 12.6 auf die 2-Komponenten von C gelenkt wird, untersuchen wir im nächsten Abschnitt deren Anzahl und Gestalt und beschränken sie möglichst weit.

13 Die 2-Komponenten von C

In diesem Abschnitt spielt die Signalisatorfunktormethode eine wesentliche Rolle – zuerst im Zusammenhang mit $2'$ -separierten Untergruppen von $O_{2',F^*}(C)$ und dann bei der Ausnutzung von Balancebedingungen.

Die grundlegenden Definitionen und Sätze sind in Kapitel 4 aufgeführt und werden deshalb hier nur zitiert.

Wir setzen von nun an $\bar{C} := C/O(C)$.

Satz 13.1. *In C gibt es kein Paar (A_1, A_2) von $2'$ -separierten elementarabelschen 2-Untergruppen der Ordnung 4.*

Beweis. Angenommen doch, und sei oBdA $z \notin A_1$. Setzen wir $A := A_1 \times A_2$ und betrachten den durch

$$\theta(a) := \bigcap_{i=1,2} [O(C_G(a), A_i)(O(C_G(a)) \cap O(C_G(A_i))) \text{ für alle } a \in A^\#$$

definierten Goldschmidtschen Signalisatorfunktors, vgl. dazu [GO2] und Kapitel 4.

Der A -Signalisatorfunktors θ ist auflösbar und wegen des Ranges von G vollständig, mit Satz 4.1 ist $W := \langle \theta(a) \mid a \in A^\# \rangle$ eine Untergruppe ungerader Ordnung von G .

Sei nun $a \in A^\#$ und $L := C_G(a)$. Dann ist wegen $z \in L$ schon $[L, z] \leq O(L)$ und $[L, z] = [L, z, A_i] \cdot C_{[L, z]}(A_i)$, da A_i teilerfremd auf $[L, z]$ operiert. Wir beachten, daß wegen $z \in C_G(A_i)$ auch $[C_G(A_i), z] \leq O(C_G(A_i))$ ist.

Nun folgt $[L, z] = [L, z, z] = [L, z, A_i] \cdot [C_{[L, z]}(A_i), z]$ und daher $[L, z] \leq [O(L), A_i] \cdot (O(L) \cap [C_G(A_i), z]) \leq \theta(a)$.

Es ist $z \in C_G(a)$ und deshalb $C_K(a) \subseteq [C_G(a), z] \leq \theta(a)$.

Mit Satz 5.9 folgt jetzt $K \subseteq \langle C_K(a), C_K(az) \rangle \leq \langle \theta(a), \theta(az) \rangle \leq W$, ein Widerspruch. □

Satz 13.2. \overline{C} hat höchstens eine einfache Komponente.

Beweis. Sei \overline{E}_1 eine einfache Komponente von \overline{C} . Da eine einfache Gruppe nicht 2-Rang 1 haben kann (mit den Sätzen 2.20 und 2.21), ist \overline{E}_1 vom 2-Rang mindestens 2, und natürlich schneidet \overline{E}_1 jede weitere Komponente von \overline{C} trivial.

Da eine weitere einfache Komponente aber wieder vom 2-Rang mindestens 2 wäre, gäbe es dann zwei 2'-separierte Untergruppen im Widerspruch zu Satz 13.1.

□

Satz 13.3. Seien E_1, \dots, E_n sämtliche 2-Komponenten von C , weiter $Y := E_3 \dots E_n O_{2',2}(C)$.

Dann gibt es keine elementarabelschen 2-Gruppen A_1, A_2 mit $A_1 \leq E_1 E_2$, $A_2 \leq C_Y(A_1)$ und $A_1 \cap A_2 = 1$.

Beweis. Angenommen doch.

Wegen $z \in O_{2',2}(C)$ ist oBdA $z \in A_2$. Wir setzen jetzt $A := A_1 \times A_2$ und $F := E_1 E_2 Y$, ferner sei $T \in \text{Syl}_2(O_{2',2}(C))$.

Ziel ist, zu zeigen, daß A_1 und A_2 2'-separiert sind, denn dann folgt ein Widerspruch mit Satz 13.1.

Sei also $a \in A^\#$, $H := C_G(a)$ und $\widehat{H} := H/O(H)$. Da z in $Z^*(H)$ liegt, ist $\widehat{H} = \widehat{C_H(z)}$.

Wir beachten, daß E_1, \dots, E_n normal sind in F und insbesondere unter a invariant.

Sei jetzt $E \in \mathcal{K}_2(H)$ und $E_0 := O^{2'}(C_E(z))$.

Dann ist $E_0 \leq L(C_C(a)) \leq L(C)$ mit Satz 2.16, daher $E_0 \leq L(C) \cap H$.

Wir zeigen: Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $E_0 \leq E_i$.

Wegen $a \in F$ ist $a = a_1 \cdots a_n t$ mit $a_i \in E_i$ und $t \in O_{2',2}(C)$. Wir setzen

$\overline{X}_i := C_{\overline{E}_i}(\overline{a}_i) = C_{\overline{E}_i}(\overline{a})$, $\overline{X} := C_{\overline{T}}(\overline{t})$ und sehen, daß $C_{\overline{F}}(\overline{a}) = \overline{X}_1 \cdots \overline{X}_n \cdot \overline{X}$ zentrales Produkt von Normalteilern ist.

Nun wird jeder dieser Normalteiler von \overline{E}_0 zentralisiert oder enthält \overline{E}_0 .

Angenommen, \overline{E}_0 liegt in keinem der Faktoren \overline{X}_i und auch nicht in \overline{X} .

Dann folgt $\overline{E}_0 \leq Z(C_{\overline{F}}(\overline{a}))$, also ist \overline{E}_0 abelsch, ein Widerspruch.

Deshalb wissen wir nun, daß \overline{E}_0 in einem der \overline{E}_i liegt.

Daraus folgt $E_0 \cap A_1 \leq O(C)$ oder $E_0 \cap A_2 \leq O(C)$.

Schließlich ist $C_E(z) \cap A_1 \leq O(C_H(z)) \leq O(H)$ oder $C_E(z) \cap A_2 \leq O(C_H(z)) \leq O(H)$ und deshalb $[\widehat{E}, \widehat{A}_1] = 1$ oder $[\widehat{E}, \widehat{A}_2] = 1$. \square

Satz 13.4. *Falls $r_2(G) \geq 3$ ist, dann ist z die einzige Involution in $O_{2',2}(C)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt, wenn wir $r(O_{2',2}(C)) = 1$ zeigen.

Angenommen nicht, dann sei $z \in V \in \mathcal{E}_2^2(O_{2',2}(C))$.

Nun sind wir in der Situation von Kapitel 11, und mit Satz 11.5 ist $r_2(G) = 2$ im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Lemma 13.5. *Seien $E_1, E_2 \in \mathcal{K}_2(C)$ verschieden.*

Dann ist $r_2(E_1 E_2) \geq 2$.

Beweis. Falls eine der beiden 2-Komponenten selbst 2-Rang mindestens 2 hat, sind wir fertig.

Wir können also annehmen, daß $r_2(E_1) = r_2(E_2) = 1$ ist.

Nun haben \overline{E}_1 und \overline{E}_2 Quaternionen-2-Sylowuntergruppen (die 2-Sylowuntergruppen können wegen Satz 2.20 nicht zyklisch sein) und sind nicht einfach.

1. Fall : $\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2 = 1$.

Dann erzeugen die beiden zentralen Involutionen eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 4, und mit $\overline{E}_1 \overline{E}_2$ ist dann auch $E_1 E_2$ von 2-Rang 2.

2. Fall : $\overline{E_1}$ und $\overline{E_2}$ enthalten genau eine gemeinsame (dann zentrale) Involution \bar{s} , genauer ist $|\overline{E_1} \cap \overline{E_2}| = 2$.

Dann folgt $r_2(E_1 E_2) = 3$, denn es gibt Elemente $\bar{a}_1 \in \overline{E_1}$ und $\bar{a}_2 \in \overline{E_2}$ der Ordnung vier, die das gleiche Quadrat besitzen. Ihr Produkt ist eine Involution (verschieden von \bar{s}), da sich $\overline{E_1}$ und $\overline{E_2}$ zentralisieren.

Weitere Fälle sind nicht möglich, da $\overline{E_1}$ und $\overline{E_2}$ sich nicht in einer größeren 2-Untergruppe schneiden können.

□

Satz 13.6. \overline{C} besitzt höchstens drei Komponenten.

Falls eine davon einfach ist, gibt es insgesamt höchstens zwei Komponenten.

Beweis. Angenommen, es gäbe vier verschiedene 2-Komponenten E_1, \dots, E_4 .

Sei $S_i \in \text{Syl}_2(E_i)$.

1. Fall : $r_2(O_{2',2}(C)) = 2$.

Dann sei wie vorher $V \in \mathcal{E}_2^2(O_{2',2}(C))$, $V = \{1, a, b, z\}$.

Angenommen, $V \leq E_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, 4\}$ und $\overline{V} = Z(E(\overline{C}))$.

Da $\overline{E_i}/Z(\overline{E_i})$ einfach ist, muß mit den Sätzen 2.20 und 2.21 schon $r_2(\overline{E_i}/Z(\overline{E_i})) \geq 2$ sein. Da es außerdem nur drei Involutionen in V gibt, aber vier 2-Komponenten, finden wir nun etwa Elemente $\bar{x}, \bar{y} \in \overline{E_1}$ und $\bar{e} \in \overline{E_2}$ mit $\bar{x}^2 = \bar{y}^2 = \bar{e}^2 = \bar{a}$, so daß \bar{x} und \bar{y} verschiedene Untergruppen von $\overline{E_1}$ erzeugen.

Nun sind aber $\bar{x}\bar{e}$ und $\bar{y}\bar{e}$ verschiedene Involutionen und offenbar auch von \bar{a} verschieden, also folgt etwa $\bar{x}\bar{e} = \bar{b}$ und $\bar{y}\bar{e} = \bar{z}$.

Dann ist $\bar{a} = \bar{b}\bar{z} = \bar{x}\bar{e}\bar{y}\bar{e} = \bar{x}\bar{y}\bar{a}$, also $\bar{x}\bar{y} = 1$ im Widerspruch zu $\langle \bar{x} \rangle \neq \langle \bar{y} \rangle$.

Angenommen, $V \leq E_i$ für jedes $i \in \{1, \dots, 4\}$, aber $\overline{V} < Z(E(\overline{C})) =: \overline{Z}$.

Da $\overline{E_1}$ nicht 2-nilpotent ist, gibt es mit dem Verlagerungssatz von Frobenius (2.22) eine 2-Untergruppe \overline{T} von $\overline{E_1}$, so daß $\text{Aut}(\overline{T})$ eine nichttriviale 2'-Untergruppe besitzt.

Wir können $\bar{Z} \leq \bar{T}$ annehmen und ferner, daß $\bar{V} = \bar{T}' = \phi(\bar{T})$ elementarabelsch und in $Z(\bar{T})$ enthalten ist mit Satz 2.3.

Offenbar ist \bar{T} nicht abelsch.

Falls es in \bar{Z} eine zu $C_4 \times C_4$ isomorphe Untergruppe \bar{W} gäbe, wäre sie zentral in \bar{T} , und da \bar{T} vom Exponenten 4 ist, gibt es keinen größeren metazyklischen Normalteiler von \bar{T} .

Andererseits treten in \bar{W} nun schon alle Involutionen in \bar{V} als Quadrat auf, d. h. es gibt in \bar{T} außerhalb von \bar{W} keine Elemente der Ordnung 4 mehr (sonst könnten wir ja wie im vorherigen Fall argumentieren), und das bedeutet $\bar{W} = \bar{T}$.

Aber dann ist \bar{T} abelsch, ein Widerspruch.

Da \bar{Z} nicht elementarabelsch ist, ist \bar{Z} nun Produkt einer zyklischen Gruppe der Ordnung 2 mit einer zyklischen 2-Gruppe der Ordnung mindestens 4.

Das heißt es gibt eine Involution in \bar{V} , etwa \bar{z} , so daß alle Elemente der Ordnung 4 aus $E(\bar{C})$, deren Quadrat \bar{z} ist, in \bar{Z} liegen, aber alle Elemente der Ordnung 4, deren Quadrat \bar{a} oder \bar{b} ist, außerhalb von \bar{Z} .

Sei $\bar{x} \in \bar{Z}$ mit $\bar{x}^2 = \bar{z}$ und etwa $\bar{y} \in \bar{E}_1$ mit $\bar{y}^2 = \bar{a}$.

Dann ist $\bar{x}\bar{y}^2 = \bar{b}$. Gäbe es also eine weitere Komponente \bar{E}_2 , dann hätten wir darin ein Element $\bar{w} \in \bar{E}_2$ etwa mit $\bar{w}^2 = \bar{b}$ und daher $\bar{x}\bar{w}^2 = \bar{a}$, also ist $\bar{x}\bar{w}\bar{y}$ eine Involution. Aber $\bar{x}\bar{w}\bar{y}$ kann keine der Involutionen aus \bar{V} sein, ein Widerspruch.

Also gibt es dann sogar nur eine 2-Komponente in C .

Sei jetzt V nicht in jedem E_i enthalten.

Sei etwa $V \cap E_1 = \langle z \rangle$.

Dann muß $r_2(E_1) = 1$ sein, da sonst E_1 eine weitere Involution enthält.

Nun ist S_1 eine Quaternionengruppe mit zentraler Involution z , insbesondere ist z das einzige Quadrat. Seien $x, y \in E_1$ wie oben mit $x^2 = y^2 = z$.

Falls es etwa $e, h \in E_2$ gibt mit $e^2 = h^2 = z$, dann folgt mit früheren Argumenten $r_2(E_1E_2) \geq 3$.

Wegen $r_2(E_3E_4) \geq 2$ (siehe Lemma 13.5) ist es dann möglich,

2'-separierte Untergruppen A_1, A_2 wie in Satz 13.3 zu finden, ein Widerspruch.

Also wird V von den anderen drei 2-Komponenten etwa in $\langle a \rangle$ geschnitten.

(Da 2-Komponenten gerade Ordnung haben, muß der Schnitt jedes E_i mit V nicht-trivial sein.)

Insbesondere sind S_2, \dots, S_4 ebenfalls Quaternionengruppen, ihre gemeinsame zentrale Involution ist a .

Nun sehen wir $r_2(E_3E_4) = 3$, und wieder finden wir $2'$ -separierte Untergruppen A_1, A_2 , ein Widerspruch.

Damit ist der Fall $r_2(O_{2',2}(C)) = 2$ abgeschlossen.

2. Fall : $r_2(O_{2',2}(C)) = 1$.

Dann ist z die einzige Involution in $O_{2',2}(C)$.

Angenommen, $\bigcap_{i=1}^4 \overline{E_i} = \langle \bar{z} \rangle$.

Falls E_1, \dots, E_4 von 2-Rang 1 sind, also Quaternionen-2-Sylowuntergruppen haben, folgt mit Argumenten wie oben $r_2(E_1E_2) = 3 = r_2(E_3E_4)$, und wir finden $2'$ -separierte Untergruppen, ein Widerspruch.

Analog gibt es einen Widerspruch, wenn es ein E_i gibt mit größerem 2-Rang.

Also liegt z nicht in jedem E_i , sei etwa $z \notin E_1$. Aber E_1 muß eine Involution enthalten, und da diese jetzt nicht zentral sein kann (sonst liegt sie in $O_{2',2}(C)$), muß schon $\overline{E_1}$ selbst einfach sein. Dann ist aber $r_2(E_1) \geq 2$, und wir finden wieder $2'$ -separierte Untergruppen, ein Widerspruch.

Weitere Fälle gibt es nicht wegen $r_2(O_{2',2}(C)) \leq 2$.

Für die zweite Behauptung bemerken wir, daß eine einfache Komponente \overline{E} jede andere Komponente trivial schneidet. Gäbe es zwei weitere Komponenten, so hätte ihr Produkt 2-Rang 2 mit Satz 13.5. Es gäbe also zwei $2'$ -separierte Untergruppen im Widerspruch zu Satz 13.1.

□

Nachdem wir jetzt die Anzahl der auftretenden Komponenten eingeschränkt haben, versuchen wir noch Informationen über die möglichen auftretenden Gruppen zu bekommen.

Die in [G2] erläuterten Balancekonzepte sind dabei ein wichtiges Hilfsmittel, und wir werden sehen, daß bei genügend großem 2-Rang bereits gewisse Balancebedingungen in G verletzt sein müssen.

Wie in Kapitel 4 angedeutet, definieren wir mit Hilfe von Satz 3.4 einen Signalfunktor. Es ist erwähnenswert, daß die folgende Definition von 2-Balance nur scheinbar schwächer ist als diejenige von Gorenstein in Kapitel 4.4 in [G2], da für alle Involutionen $a \in C \setminus \{z\}$ schon $C_G(a) = C_C(a)O(C_G(a))$ ist.

Definition

Sei $A \leq C$ eine elementarabelsche 2-Gruppe vom Rang mindestens 4.

Wir nennen A hier **2-balanciert**, falls für jede elementarabelsche Untergruppe V der Ordnung 4 von A gilt: $\bigcap_{v \in V^\#} O(C_G(v)) \cap C \leq O(C)$.

Lemma 13.7. *Sei E_1 eine 2-Komponente von C mit $\overline{E_1}/Z(\overline{E_1}) \simeq A_n$, $n \equiv 3 \pmod{4}$.*

Weiter sei $r_2(O_{2',F^}(C)) \geq 4$, und es gelte einer der folgenden Fälle:*

1. $\mathcal{K}_2(C) = \{E_1\}$.
2. *Es gibt genau eine weitere 2-Komponente E_2 von C , und es ist $\overline{E_2}/Z(\overline{E_2}) \simeq A_m$ mit $m \equiv 3 \pmod{4}$ oder $r_2(E_2) \leq 2$.*

Dann besitzt C eine 2-balancierte Untergruppe.

Beweis. Zuerst beachten wir, daß wegen der Voraussetzung $r_2(O_{2',F^*}(C)) \geq 4$ und Satz 13.4 schon z die einzige Involution in $O_{2',2}(C)$ ist.

Wir beginnen mit dem ersten Fall.

1. Ist $n = 7$, so ist $r_2(O_{2',F^*}(C)) < 4$, also haben wir $n \geq 11$.

Ist $\overline{E_1}$ nicht einfach, so liegt \bar{z} darin, und wenn $n \in \{11, 15\}$ ist, folgt dann $r_2(O_{2',F^*}(C)) = 3$. Also ist $\overline{E_1}$ einfach oder $n \geq 19$.

- Sei jetzt $\overline{E_1} \simeq A_{11}$.

In A_{11} selbst ist $B^* := \langle (12)(34), (12)(56), (12)(78) \rangle$ eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung 8.

Betrachten wir die Zentralisatoren der Involutionen aus B^* in $S_{11} = \text{Aut}(A_{11})$, so sehen wir, daß etwa $O(C_{S_{11}}((12)(34))) \simeq O(S_7) = 1$ ist.

Das einzige Element in $b \in B^{*\#}$ mit $O(C_{S_{11}}(b)) \neq 1$ ist $b = (12)(34)(56)(78)$, und dann ist $O(C_{S_{11}}(b)) = \langle (9, 10, 11) \rangle$.

Daraus folgt aber für jedes $V \in \mathcal{E}_2^2(B^*)$: $\bigcap_{v \in V^\#} O(C_{S_{11}}(v)) = 1$.

Wir wählen jetzt eine Untergruppe $B \in \mathcal{E}_2^3(E_1)$, so daß $\overline{B} \simeq B^* \leq A_{11}$ ist.

Sei $A := B\langle z \rangle$. Dann ist A elementarabelsch der Ordnung 16, und für jedes $V \in \mathcal{E}^2(A)$ ist offenbar $\bigcap_{v \in V^\#} O(C_C(v)) \leq O(C)$.

Also ist A 2-balanciert. Genauso schließen wir für größere n .

- Ist $\overline{E_1}/Z(\overline{E_1}) \simeq A_n$ mit $n \geq 19$, so können wir ganz ähnlich argumentieren. Denn schon im Fall $\widehat{E_1} := \overline{E_1}/Z(\overline{E_1}) \simeq A_{15}$ finden wir in E_1 selbst eine 2-balancierte Untergruppe. Das ist leicht zu sehen, falls $\overline{E_1}$ einfach ist mit der gleichen Idee wie für B^* oben.

Ist aber $\overline{E_1}$ nicht einfach, so wählen wir $B \leq E_1$ mit $z \notin B$ und

$$\widehat{B} \simeq \langle (12)(34)(56)(78), (12)(34)(9, 10)(11, 12), (12)(34)(13, 14)(15, 16) \rangle \in \mathcal{E}_2^3(A_{19}).$$

Dann setzen wir $A := B\langle z \rangle$ und sehen genau wie oben, daß A schon 2-balanciert ist.

Jetzt betrachten wir den zweiten Fall.

2. Sei $\overline{E_1}/Z(\overline{E_1}) \simeq A_7$.

Ist $\overline{E_1}$ nicht einfach, so ist insbesondere $\bar{z} \leq Z(\overline{E_1})$.

Falls $r_2(E_2) \leq 2$ ist, folgt entweder $z \in E_2$ (und dann ist $r_2(O_{2',F^*}(C)) < 4$), oder es ist $z \notin E_2$ und wir finden daher zwei $2'$ -separierte Untergruppen.

Beides ist nicht möglich.

Ist $\overline{E_1}$ einfach, so können wir genauso argumentieren wegen $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = 1$.

- Sei jetzt $\overline{E_2}/Z(\overline{E_2}) \simeq A_m$.

Sei zuerst $\overline{E_2}$ nicht einfach und $\overline{E_2}/Z(\overline{E_2}) \simeq A_7$.

Ist $\overline{E_1}$ nicht einfach, so folgt $\bar{z} \leq Z(\overline{E_2})$, und wieder ist $r_2(O_{2',F^*}(C)) = 3$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ist $\overline{E_1}$ einfach, so erhalten wir ebenfalls $r_2(O_{2',F^*}(C)) = 3$ oder C besitzt zwei einfache 2-Komponenten im Widerspruch zu Satz 13.2.

Sei jetzt $\overline{E_2} \simeq A_7$.

Dann ist $\overline{E_1}$ nicht einfach wegen Satz 13.2 und deshalb wieder $r_2(O_{2',F^*}(C)) = 3$, ein Widerspruch.

- Also ist $m \geq 11$.

Falls $\overline{E_2}$ einfach oder $m \geq 19$ ist, finden wir eine 2-balancierte Untergruppe $A \in \mathcal{E}_2^4(E_2\langle z \rangle)$ genau wie oben im ersten Fall.

Wir müssen also nur noch die Fälle betrachten, in denen $\overline{E_2}$ nicht einfach und $m \in \{11, 15\}$ ist.

Wenn $\overline{E_1}$ einfach ist, finden wir wieder zwei $2'$ -separierte Untergruppen.

Wenn aber $\overline{E_1}$ nicht einfach ist, ist wieder nur $r_2(O_{2',F^*}(C)) = 3$. Beides führt zu einem Widerspruch.

Damit ist der Fall $\overline{E_1}/Z(\overline{E_1}) \simeq A_7$ abgeschlossen.

- Sei also $\overline{E_1}/Z(\overline{E_1}) \simeq A_n$ mit $n \geq 11$.

Dann ist $r_2(E_1) \geq 2$.

Falls also auch $r_2(E_2) \geq 2$ ist und $\overline{E_1} \cap \overline{E_2} = 1$, dann finden wir zwei $2'$ -separierte Untergruppen im Widerspruch zu 13.1.

Insbesondere ist also E_2 nicht einfach.

Wir erhalten aber auch einen Widerspruch zu Satz 13.1, falls E_1 oder E_2 sogar von 2-Rang 3 ist.

Sei zuerst $\overline{E_1}$ einfach. Wegen $n \geq 11$ finden wir dann schon in E_1 eine 2-balancierte Untergruppe, siehe oben.

Sei daher jetzt $\overline{E_1}$ nicht einfach. Wir sind fertig, falls auch $m \geq 11$ ist, d. h. es bleibt nur noch ein Fall übrig:

- $n \in \{11, 15\}$ und $m = 7$.

Sei $\widehat{C} := \overline{C}/C_{\overline{C}}(\overline{E_1})$.

Wegen $r_2(E_1) \geq 3$ gibt es eine elementarabelsche Untergruppe B von E_1 , die nicht z enthält, so daß $\widehat{B} \leq \mathcal{E}_2^2(\widehat{E_1})$ ist und B kann so gewählt werden, daß zusätzlich $\bigcap_{b \in B\#} O(C_{\widehat{C}}(\widehat{b})) = 1$ gilt.

Seien weiter $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$ Elemente der Ordnung 4 und $x := x_1x_2$. Dann ist x eine Involution mit $\widehat{x} = \widehat{x_1}$, die in $C_C(B)$ gewählt werden kann und zusätzlich mit $O(C_{\widehat{C}}(\widehat{x_1})) = 1$.

(Warum diese Wahl jeweils möglich ist, kann etwa in [A] unter „coverings“ nachgelesen werden.)

Wir beachten, daß wegen $\overline{E_1} \trianglelefteq \overline{C}$ schon \widehat{C} isomorph zu einer Untergruppe von S_n ist und $\widehat{E_1} \simeq A_n$. Jetzt setzen wir $A := B\langle z, x \rangle$.

Wir wollen zeigen, daß A 2-balanciert ist und beweisen zuerst:

$$\Delta(V) := \bigcap_{v \in V^\#} O(C_C(v)) \leq O(C).$$

Sei also $V \in \mathcal{E}^2(A)$. Wir sind offenbar fertig, falls z in V liegt, also nehmen wir $z \notin V$ an. Sei weiter Q eine A -invariante 2-Sylowuntergruppe von $O_{2',2}(C)$.

Zuerst beachten wir $\overline{Q} = O_2(\overline{C})$ und sehen $C_Q(V) \leq \bigcap_{v \in V^\#} C_C(v)$,

andererseits ist $\Delta(V) \trianglelefteq C_C(V)$ und daher $\Delta(V) \leq O(C_C(V))$, so daß schließlich $[\overline{\Delta(V)}, \overline{C_Q(V)}] \leq \overline{Q} \cap \overline{O(C_C(V))} = 1$ folgt.

Mit Thompsons $P \times Q$ -Lemma (2.9) ist $[\overline{\Delta(V)}, \overline{Q}] = 1$.

Eine kleine Fallunterscheidung zeigt, daß auch stets $[\overline{\Delta(V)}, \overline{E_1}] = 1$ ist. (Betrachte $\widehat{\Delta(V)}$.)

Wegen $z \notin V$ gibt es ein Element $v \in V$ mit $v \in B$ oder $vz \in B$.

Offenbar ist $C_C(v) = C_C(vz)$, nehmen wir also $v \in B$ an.

Aus $v \in B \leq E_1$ folgt dann $[\overline{v}, \overline{E_2}] = 1$, also $\overline{E_2} \leq C_{\overline{C}}(\overline{v})$ und daher

$$[O(C_{\overline{C}}(\overline{v})), \overline{E_2}] = 1.$$

Aber dann ist auch $[\overline{\Delta(V)}, \overline{E_2}] = 1$, also schließlich $[\overline{\Delta(V)}, F^*(\overline{C})] = 1$.

Daraus folgt $\overline{\Delta(V)} \leq C_{\overline{C}}(F^*(\overline{C})) \leq Z(F^*(\overline{C})) = \langle \overline{z} \rangle$, also $\overline{\Delta(V)} = 1$ und deshalb $\Delta(V) \leq O(C)$.

Aber für jedes $v \in V^\#$ ist $O(C_G(v)) \cap C \leq O(C_C(v))$, also haben wir

$$\bigcap_{v \in V^\#} O(C_G(v)) \cap C \leq \Delta \leq O(C),$$

und A ist tatsächlich 2-balanciert.

□

Satz 13.8. Sei $A \leq C$ eine 2-balancierte Untergruppe.

Setzen wir $\theta(t) := C_{O(C)}(t) \cdot [C_G(t), z]$ für alle $t \in A$, so wird dadurch ein auflösbarer A -Signalisatorfunktorktor θ definiert.

Beweis. Sei $t \in A^\#$. Offenbar ist $z \in C_G(t) < G$, also $[C_G(t), z] \leq O(C_G(t))$, und da $[C_G(t), z]$ ein Normalteiler von $C_G(t)$ ist, ist $\theta(t)$ eine Untergruppe von $C_G(t)$.

Weiter ist $\theta(t)$ auflösbar, und wegen $A \leq C_G(t)$ ist $\theta(t)$ auch A -invariant.

Sei $s \in A^\#$. Wir müssen zeigen: $\theta(t) \cap C_G(s) \leq \theta(s)$.

Da s teilerfremd auf $\theta(t)$ operiert, ist $\theta(t) \cap C_G(s) = C_{C_{O(C)}(t)}(s) \cdot C_{[C_G(t), z]}(s)$ mit 2.1 (8).

Offenbar ist $C_{C_{O(C)}(t)}(s) \leq C_{O(C)}(s) \leq \theta(s)$, wir setzen also $L := [C_G(t), z]$ und $C_0 := C_L(s)$. Es bleibt zu zeigen, daß C_0 in $\theta(s)$ enthalten ist.

Da z teilerfremd auf C_0 operiert, ist $C_0 = C_{C_0}(z) \cdot [C_0, z]$ mit 2.1 (1), und $[C_0, z] \leq [C_G(s), z] \leq \theta(s)$.

Wir müssen noch zeigen: $C_{C_0}(z) \leq \theta(s)$, und wir beweisen das mit Hilfe von Satz 3.4.

$L \leq O(C_G(t))$ ist auflösbar, und offenbar ist $L = [L, z]$.

Mit $\langle z \rangle$ in der Rolle von A_0 , L in der Rolle von W und $\langle s \rangle$ in der Rolle von B liefert Satz 3.4 dann

$$C_{C_0}(z) = C_L(z) \cap C_G(s) = \langle [C_L(X), z] \cap C_{C_0}(z) \mid X \in \text{Hyp}^2(A) \rangle.$$

Sei $X \in \text{Hyp}^2(A)$. Nach den Voraussetzungen über A enthält X eine elementarabelsche Untergruppe V der Ordnung vier, und weiter ist $\bigcap_{v \in V^\#} O(C_v) \cap C \leq O(C)$.

Da z in $C_G(V) < G$ liegt, ist für jedes $v \in V^\#$ schon $[C_G(v), z] \leq O(C_G(v))$. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} [C_L(X), z] \cap C_{C_0}(z) &\leq [C_G(V), z] \cap C_{C_0}(z) \leq \bigcap_{v \in V^\#} [C_G(v), z] \cap C_{C_0}(z) \\ &\leq \bigcap_{v \in V^\#} O(C_G(v)) \cap C_{C_0}(z) \leq O(C) \cap C_{C_0}(z) \leq C_{O(C)}(s) \leq \theta(s). \end{aligned}$$

Also liegt auch $C_{C_0}(z)$ in $\theta(s)$.

□

Satz 13.9. *C besitzt keine 2-balancierte Untergruppe.*

Beweis. Angenommen doch, dann sei A eine 2-balancierte 2-Untergruppe von C der Ordnung 16. Nun sind für A die Voraussetzungen aus Satz 13.8 erfüllt, also ist θ wie dort definiert ein auflösbarer A -Signalisatorfunktorkomplex.

Der Rang von A erlaubt uns, den Vollständigkeitssatz 4.1 anzuwenden, also ist nun $W := \langle \theta(a) \mid a \in A^\# \rangle$ eine A -invariante 2'-Untergruppe von G und insbesondere eine echte Untergruppe. Für alle $a \in A^\#$ ist $C_K(a)$ in $[C_G(a), z]$ enthalten und liegt daher in $\theta(a)$.

Ist also $a \in A^\# \setminus \{z\}$, so liefert Satz 5.9 $K \subseteq \langle \theta(a), \theta(az) \rangle \leq W$, ein Widerspruch. \square

Wir formulieren jetzt zwei Sätze, die die Gestalt der auftretenden 2-Komponenten betreffen.

Sei $r_2(G) \geq 4$. Wegen Satz 13.9 besitzt G keine 2-balancierte Untergruppe, und das liefert Informationen über die 2-Komponenten. (siehe [G2])

Konkret:

Es gibt eine Komponente \bar{E} von \bar{C} und eine Untergruppe \hat{H} von $\hat{N} := N_{\bar{C}}(\bar{E})/C_{\bar{C}}(\bar{E})$, die die von \bar{E} induzierten Automorphismen von \hat{E} enthält, und eine Untergruppe $\hat{B} \in \mathcal{E}_2^2(\hat{H})$, so daß $\bigcap_{\hat{b} \in \hat{B}^\#} O(C_{\hat{H}}(\hat{b})) \neq 1$ ist.

Nehmen wir an, daß die in $E(\bar{C})$ auftretenden einfachen Gruppen bekannt sind, so können die Typen der Komponenten bestimmt werden, derentwegen die 2-Balancebedingung verletzt ist. Gorenstein formuliert in [G2] einen entsprechenden Satz (4.61 dort).

Wir müssen also an dieser Stelle, um weiter schließen zu können, annehmen, daß die 2-Komponenten von C im wesentlichen bekannt sind.

Diese sogenannte \mathcal{K} -Gruppen-Annahme (für C) ist im Hinblick auf die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen (**GLS**-Projekt, siehe [GLS]) keine wirkliche Einschränkung.

Von nun an seien die in $E(\overline{C})$ auftretenden einfachen Gruppen bekannt.

Satz 13.10 ist eine Folgerung aus Theorem 4.61 in [G2].

Danach stellen wir in Satz 13.11 zusammen, welche 2-Komponenten von kleinem 2-Rang es geben kann. (Siehe dazu etwa [A].)

Satz 13.10. *Sei $r_2(G) \geq 4$.*

Dann besitzt $\overline{C} = C/O(C)$ eine Komponente \overline{E} mit

$\overline{E}/Z(\overline{E}) \simeq PSL_2(q)$, q ungerade, oder

$\overline{E}/Z(\overline{E}) \simeq A_n$, $n \geq 7$ und $n \equiv 3 \pmod{4}$.

Satz 13.11. *Sei $E \in \mathcal{K}_2(C)$ mit $r_2(\overline{E}/Z(\overline{E})) = 2$.*

Dann ist $\overline{E}/Z(\overline{E})$ isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$PSL_2(q)$, q ungerade,

$PSL_3(q)$, q ungerade,

$PSU_3(q)$, q ungerade,

M_{11} ,

A_7 ,

$PSU_3(4)$.

Im Falle $r_2(\overline{E}) = 1$ ist $\overline{E}/Z(\overline{E}) \simeq A_7$ oder $\overline{E}/Z(\overline{E}) \simeq PSL_2(q)$.

Wir bezeichnen die in Satz 13.10 aufgeführten 2-Komponenten von C als **unbalanciert** und gegebenenfalls **unbalanciert vom Typ $PSL_2(q)$ bzw. A_n** .

Alle anderen Typen von 2-Komponenten nennen wir der Einfachheit halber **balanciert** und beziehen uns auch dort wieder mit dem **Typ** auf die verschiedenen Gruppen in Satz 13.11.

Wir möchten zum Schluß dieses Abschnitts den 2-Rang von G begrenzen.

Mit Satz 12.6 aus haben wir: $\mathcal{K}_2(C) \neq \emptyset$.

Satz 13.12. *Es sei jede 2-Komponente von C von einem der Typen in den Sätzen 13.10 und 13.11.*

Dann ist $r_2(G) \in \{2, 3\}$.

Beweis. Angenommen, $r_2(G) \geq 4$.

Ist $z \in S \in \text{Syl}_2(G)$, so ist offenbar $r(S) \geq 4$ und $\bar{S} \in \text{Syl}_2(\bar{C})$.

Wir wissen außerdem, daß z die einzige Involution in $O_{2',2}(C)$ ist mit Satz 13.4.

Deshalb ist $O_2(\bar{C})$ zyklisch oder eine Quaternionengruppe.

- $O_2(\bar{C})$ ist zyklisch.

Sei $E_1 \in \mathcal{K}_2(C)$.

Angenommen, E_1 sei die einzige 2-Komponente von C .

Dann ist E_1 unbalanciert wegen $r_2(G) \geq 4$, und $\text{Aut}(E_1)$ ist wegen des Typs 2-nilpotent.

Andererseits ist $E_1 \trianglelefteq C$, also induziert \bar{S} innere Automorphismen von $E(\bar{C})$ und auch von $F(\bar{C}) = O_2(\bar{C})$, denn $\text{Aut}(O_2(\bar{C}))$ ist eine 2-Gruppe. (siehe 9.5)

Es folgt $\bar{S} \leq F^*(\bar{C})$.

Falls E_1 vom Typ $PSL_2(q)$ oder A_7 ist, folgt ein Widerspruch, da dann nicht $r_2(F^*(\bar{C})) \geq 4$ sein kann.

Also ist E_1 vom Typ A_n mit $n \geq 11$.

Ist \bar{E}_1 einfach, so ist $r_2(\bar{E}_1) \geq 2$ und $\bar{z} \notin \bar{E}_1$. Daher ist entweder $r_2(F^*(\bar{C})) = 3$ oder wir finden mit Lemma 13.7 eine 2-balancierte Untergruppe im Widerspruch zu Satz 13.9.

Daher ist \bar{E}_1 nicht einfach und folglich $\bar{z} \in Z(\bar{E}_1)$ und $r_2(\bar{E}_1) \geq 3$.

Im Falle $n = 11$ ist $r_2(\bar{E}_1) = r_2(F^*(\bar{C})) = 3$, ein Widerspruch.

Im Falle $n \geq 15$ finden wir eine 2-balancierte Untergruppe, erneut ein Widerspruch.

Also gibt es eine weitere 2-Komponente E_2 .

Falls $r_2(E_2) = 1 = r_2(E_2)$ ist, liegt \bar{z} in $\overline{E_1} \cap \overline{E_2}$, und wir haben bereits gesehen, daß dann $r_2(\overline{E_1 E_2}) = r_2(F^*(\overline{C})) = 3$ ist.

Aber S normalisiert beide 2-Komponenten, und wegen der Typen induziert S innere Automorphismen auf $E(\overline{C})$ und $F(\overline{C})$, d. h. es ist wieder $\overline{S} \leq F^*(\overline{C})$, ein Widerspruch.

Daher ist etwa $r_2(E_1) \geq 2$.

Angenommen, E_1 sei unbalanciert.

Dann ist $\overline{E_1}$ einfach und vom Typ A_7 oder $\simeq PSL_2(q)$ oder E_1 ist vom Typ A_n mit $n \geq 11$.

Falls jetzt $r_2(E_2) = 1$ ist, finden wir wegen $r_2(F^*(\overline{C})) \geq 4$ mit Lemma 13.7 eine 2-balancierte Untergruppe, ein Widerspruch.

Also ist auch $r_2(E_2) \geq 2$, und dann finden wir mit der gleichen Begründung eine 2-balancierte Untergruppe in $O_{2',F^*}(C)$ oder aber zwei $2'$ -separierte Untergruppen im Widerspruch zu 13.1 oder aber $r_2(E_1 E_2) = 3$ (wegen $\bar{z} \in \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$), erneut ein Widerspruch.

Insbesondere finden wir zwei $2'$ -separierte Untergruppen, falls E_1 vom Typ A_n mit $n \geq 11$ ist.

Also ist E_1 balanciert und E_2 unbalanciert. Ist $\overline{E_2}$ einfach, so erhalten wir wieder zwei $2'$ -separierte Untergruppen, genauso im Falle $r_2(E_2) \geq 3$.

Falls $r_2(E_2) = 1$ ist, folgt $\bar{z} \in Z(\overline{E_2})$, und wir erhalten $r_2(F^*(\overline{C})) \leq 3$ oder finden wieder zwei $2'$ -separierte Untergruppen.

Genauso können wir argumentieren, falls es sogar drei 2-Komponenten gibt.

Damit ist jetzt ausgeschlossen, daß $O_2(\overline{C})$ zyklisch ist.

- $O_2(\overline{C})$ ist eine Quaternionengruppe.

Angenommen, $|O_2(\overline{C})| \geq 16$. Dann ist $\overline{C}/C_{\overline{C}}(O_2(\overline{C}))$ eine 2-Gruppe (da isomorph zu einer Untergruppe von $Aut(O_2(\overline{C}))$), also trivial. Aber $O_2(\overline{C}) \leq Z(\overline{C})$ ist hier nicht möglich.

Also ist $O_2(\overline{C}) \simeq Q_8$ und \bar{z} die zentrale Involution darin.

Falls es eine 2-Komponente E_1 von C gibt mit $r_2(E_1) = 1$, dann ist

$r_2(E_1 O_{2',2}(C)) = 3$ mit Argumenten, die wir zum Beispiel im Beweis von 13.5 schon verwendet haben.

Wenn wir das beachten und weiter, daß wegen $Aut(Q_8) \simeq S_4$ und der Typen der 2-Komponenten wieder S innere Automorphismen auf $E(\overline{C})$ und $F(\overline{C})$ induziert, können wir wie im ersten Fall ($O_2(\overline{C})$ zyklisch) schließen und erhalten genauso einen Widerspruch.

Weitere Fälle sind aber nicht möglich.

□

Wir können jetzt zum Abschluß eine etwas allgemeinere Version von Satz 10.1 beweisen – ohne die Voraussetzung $E(M) = 1$, dafür mit Informationen über $\mathcal{K}_2(C)$.

Satz 13.13. *Es sei jede 2-Komponente von C von einem der Typen in den Sätzen 13.10 und 13.11, aber nicht vom Typ M_{11} .*

Dann ist $M = C$ oder M hat Primzahlcharakteristik.

Beweis. Angenommen nicht. Dann sei $p \in \pi := \pi(F(M))$, $F^*(M)$ keine p -Gruppe und $U \leq O_p(M)$ eine z -minimale Untergruppe von M .

Der in Kapitel 8 ausgeführte Beweis hing wesentlich von Lemma 10.2 ab, und dort (und *nur* dort) war sichtbar, wo die Bedingung $E(M) = 1$ benötigt wird.

Wenn wir jetzt Lemma 10.2 ohne diese zusätzliche Voraussetzung beweisen, dann zeigt das auch sofort Satz 13.13.

Sei also V eine elementarabelsche Untergruppe von M der Ordnung p^2 , die von z zentralisiert oder invertiert wird, $V \leq P \in \text{Syl}_p(M, z)$ und wieder mit Lemma 6.5 t eine zu z konjugierte Involution in $N_G(P)$, so daß $M \neq M^t$ ist. Wir können alle Schlüsse aus dem Beweis von 10.2 übernehmen, die nicht von $E(M)$ abhängen und wissen daher: $F(M) \leq M^t$ und umgekehrt.

Wir bemerken noch, daß $O_2(M) = 1$ ist:

Angenommen nicht, dann sei $x \in O_2(M)$ eine Involution. wegen $U\langle z \rangle \leq C_G(x)$ ist $C_G(x) \leq M$ mit dem Normalisatorlemma 8.7, im Widerspruch zu 5.3.

Da wir im Falle $E(M) = 1$ fertig sind, sei jetzt $E(M) \neq 1$. Wir beachten $[E(M), z] = 1$, aber $z \notin E(M)$, und die Komponenten von $E(M)$ besitzen wegen $O_2(M) = 1$ keine zentralen Involutionen (sind also einfach).

Nun kann es höchstens eine Komponente E in $E(M)$ geben (auch keine weitere 2-Komponente!), und $r_2(E) = 2$, denn sonst gäbe es entweder eine zentrale Involution oder wegen $z \notin E$ wäre schon $r_2(G) \geq 4$ im Widerspruch zu Satz 13.12.

Wir sehen jetzt $r_2(C) = 3$.

Angenommen, E sei vom Typ $PSL_2(q)$ mit $q = r^n$, r eine Primzahl.

Sei $s \in E$ eine Involution. Wegen $s \in C$ liefert Satz 5.3 nun $C_G(s) \not\leq M$.

Nehmen wir $p = r$ an und setzen $D_0 := O_p(C_G(s)) \cap O_p(M)$.

Falls $D_0 = O_p(C_G(s)) =: P$ wäre, hätten wir $P \leq O_p(M)$. Wegen $U \leq C_G(s)$ und Korollar 8.6 ist $U \leq P$ und mit dem Normalisatorlemma 8.7 dann $N_G(P) \leq M$. Aber das bedeutet $C_G(s) \leq N_G(P) \leq M$, ein Widerspruch. Also ist $D_0 < P$ und $D_0 < N_P(D_0) =: P_0$.

Da D_0 unter z invariant ist und U enthält, ist wieder mit 8.7 nun

$P_0 \leq N_G(D_0) \leq M$, und P_0 operiert auf $E(M) = E$ und damit auf einer zu $PSL_2(q)$ isomorphen Gruppe. Wegen $[P_0, s] = 1$ normalisiert P_0 die Diedergruppe $C_E(s)$.

Andererseits ist $[C_E(s), O_p(M)] = 1$, also $[C_E(s), D_0] = 1$, und $C_E(s) \leq C_G(s)$ normalisiert P . Daher ist P_0 unter $C_E(s)$ invariant, und daher ist $P_0/C_{P_0}(E)$ isomorph zu einer Untergruppe von $O_p(P_0C_E(s)) \leq E$.

Offenbar liegt D_0 in $C_{P_0}(E)$, aber umgekehrt ist $C_{P_0}(E) \leq C_M(E) \cap N_G(D_0) \cap P \leq O_p(C_M(E)) \cap N_G(D_0) \cap P \leq O_p(M) \cap P = D_0$, also schließlich $D_0 = C_{P_0}(E)$ und daher P_0/D_0 isomorph zu einer Untergruppe von $C_E(s)$.

Nun ist P_0/D_0 eine zyklische nichttriviale p -Gruppe, und insbesondere ist p ein Teiler von $|C_E(s)|$.

Wegen der Struktur der Gruppe $PSL_2(q)$ ist das nicht möglich, wenn p die Charakteristik des Grundkörpers ist. Also ist $p \neq r$. Genauso können wir in den anderen Fällen argumentieren.

Da V auf $E^t = E(M^t)$ operiert, folgt $E(M^t) = \langle C_{E(M^t)}(v) \mid v \in V^\# \rangle$.

Wie bereits in Bemerkung 10.3 erwähnt, führt das zu einem Widerspruch.

□

14 Verzeichnis für Notation und Stichworte

$X^\#$	Menge aller nichttrivialen Elemente von X	
$M \max X$	M ist eine maximale Untergruppe von X	
$H \triangleright L$	H infiziert L	S. 48
$ X _p$	größte p -Potenz, die $ X $ teilt (p prim)	
$O(X)$	Abkürzung für $O_{2'}(X)$, den größten Normalteiler ungerader Ordnung von X	S. 3
$F(X)$	Fittinggruppe, größter nilpotenter Normalteiler von X	S. 3
$F_\pi(X)$	Abkürzung für $O_\pi(F(X))$	S. 3
$E(X)$	Produkt aller Komponenten von X	S. 3
$\mathcal{K}_p(X)$	Menge aller p -Komponenten von X	S. 4
$O_{p',p}(X)$	Urbild von $O_p(X/O_{p'}(X))$ in X	S. 4
$L(X)$	Abkürzung für $O^{2'}(O_{2',E}(X))$	S. 4
$F^*(X)$	verallgemeinerte Fittinggruppe, Produkt von $E(X)$ und $F(X)$...	S. 3
$Z^*(X)$	Urbild von $Z(X/O(X))$ in X	S. 3
K	Menge aller $zz^g = [z, g]$ mit $g \in G$ (im min. Gegenbeispiel)	S. 30
x^U	Menge aller x^u mit $u \in U$ ($x \in X, U \subseteq X$)	S. 3
$I_X(t)$	Menge aller $tt^x = [t, x]$ mit $x \in X$	S. 5
$Syl_p(X, V)$	Menge aller V -invarianten p -Sylowuntergruppen von X	S. 34

$\mathcal{I}_X(A, \pi)$	Menge aller A -invarianten π -Untergruppen von X S. 5
$\mathcal{I}_X^*(A, \pi)$	Menge aller maximalen Elemente von $\mathcal{I}_X(A, \pi)$ S. 5
$r_p(X)$	p -Rang von X S. 5
$\Omega_n(P)$	Erzeugnis $\langle x \in P \mid x^n = 1 \rangle$ ($n \in \mathbb{N}$, P eine p -Gruppe) S. 5
$\mathcal{E}_p(X)$	Menge aller elementarabelschen p -Untergruppen von X S. 5
$\mathcal{E}_p^*(X)$	Menge aller ordnungsmaximalen Elemente aus $\mathcal{E}_p(X)$ S. 5
$\mathcal{E}_p^n(X)$	Menge aller elem.ab. Untergruppen von X der Ordnung p^n S. 5
$\text{Hyp}^2(A)$	Menge aller Untergruppen von $A \in \mathcal{E}_p(X)$ vom Index p^2 S. 18
C_n	zyklische Gruppe der Ordnung n S.6
Q_8	Quaternionengruppe der Ordnung 8 S.6
S_n (A_n)	symmetrische (alternierende) Gruppe vom Grad n S.6
M_{11}	Mathieu-Gruppe der Ordnung $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$ S.6
$PSL_n(q)$	projektive spezielle lineare Gruppe eines n -dimensionalen Vektorraumes über einem Körper mit q Elementen (abgekürzt $L_n(q)$) S.6
$PSU_n(q)$	projektive spezielle unitäre Gruppe eines n -dimensionalen Vektorraumes über einem Körper mit q^2 Elementen (abgekürzt $U_n(q)$) S.6

Index

- 2-balanciert, 91
- 2'-separiert, 27
- Z^* -Involution, 39
- p -Komponente, 4
- p -Rang, 5
- p -perfekt, 4
- p^* -Gruppe, 4
- q -regulär, 45
- t -minimal, 52
- z -einfach, 39

- Balancedingung, 25
- balanciert, 98
- Basislemma, 53

- Diedergruppe, 29

- Erzeugungssatz, 7
- extraspeziell, 5

- Hyperebene, 19

- Infektion, infizieren, 51
- Infektionssatz, 51
- isoliert, 29

- Komponente, 3

- metazyklisch, 5

- Normalisatorlemma, 54

- perfekt, 3
- Primzahlcharakteristik, 4

- quasi-einfach, 3

- Rang, 5

- Signalisatorfunktorkomplex, 25
- speziell, 5

- Typ, 13

- unbalanciert, 98
- unbalanciert vom Typ ..., 98

- vollständig, 25

- zentralisatorabgeschlossen, 4

15 Literaturangaben

- [A] ASCHBACHER, M.: *Finite Group Theory*, Cambridge University Press, 1981.
- [BE1] BENDER, H.: On Groups with Abelian Sylow-2-Subgroups, *Math. Z.* **117** (1970), 164-176.
- [BE2] BENDER, H.: Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt, *J. Algebra* **17** (1971), 527-554.
- [BE3] BENDER, H.: On the normal p -structure of a finite group and related topics I, *Hokkaido Math. J.* **7** (1978), 271-288.
- [BG] BENDER, H., GLAUBERMAN, G.: *Local Analysis for the Odd Order Theorem*, Cambridge University Press, 1994.
- [FT] FEIT, W., THOMPSON, J.G.: Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775-1029.
- [GL1] GLAUBERMAN, G.: Central elements in core-free groups, *J. Algebra* **4** (1966), 403-420.
- [GL2] GLAUBERMAN, G.: On the automorphism group of a finite group having no non-identity normal subgroup of odd order, *Math. Z.* **93** (1966), 154-160.
- [GL3] GLAUBERMAN, G.: Fixed point subgroups that contain centralizers of involutions, *Math. Z.* **124** (1972), 353-360.
- [GL4] GLAUBERMAN, G.: On solvable signalizer functors in finite groups, *Proc. London Math. Soc.* **33** (1976), 1-27.
- [GO1] GOLDSCHMIDT, D.M.: Weakly embedded 2-local subgroups of finite groups, *J. Algebra* **21** (1972), 341-351.

- [GO2] GOLDSCHMIDT, D.M.: Strongly closed 2-subgroups of finite groups, *Annals of Mathematics (2)* **102** (1975), 475-489.
- [G1] GORENSTEIN, D.: *Finite Groups*, Harper & Row, 1968.
- [G2] GORENSTEIN, D.: *Finite Simple Groups*, Plenum Press, 1982.
- [GLS] GORENSTEIN, D., LYONS, R., SOLOMON, R.: *The Classification of the finite simple groups*, Mathematical surveys and monographs, v. 40, number 1 –, 1994.
- [J] JANKO, Z.: A classification of finite 2-groups with exactly three involutions, *J. Algebra* **291** (2005), 505-533.
- [KS] KURZWEIL, H., STELLMACHER, B.: *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer, 1998.

Lebenslauf

- geboren am 9. April 1979 in Aachen
- deutsche Staatsangehörigkeit
- 1985 – 1998 Schulbesuch in Aachen, Schönberg (bei Kiel) und Kiel
- wohnhaft in Kiel seit 1997
- Abitur am 26. 6. 1998
- 1998 – 2003 Studium an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (ein Urlaubssemester wegen Krankheit)
- August – Oktober 2002 Aufenthalt am Institut Poincaré in Paris
(DAAD-Stipendium)
- Diplom am 4. 6. 2003, Hauptfach Mathematik, Nebenfach Statistik und Ökonometrie
- seit 2003 Doktorandin am Mathematischen Seminar der CAU Kiel
- September – Dezember 2005 Aufenthalt an der Universität Birmingham (UK)
- 1998 – 2006 Stipendiatin der Studienstiftung des deutschen Volkes

Erklärung

Ich versichere an Eides Statt, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt zu haben. Die einzigen Hilfsmittel waren die angegebene Literatur sowie der Rat meines wissenschaftlichen Lehrers.

Die Arbeit wurde unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis erstellt und bisher weder als Ganzes noch in Teilen veröffentlicht.

Des weiteren erkläre ich, bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Rebecca Waldecker