

Struktur von Fixpunkten aus Prozeßgleichungen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

korrigierte Version



vorgelegt von
Diether Knof

Kiel, Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	2
Abstract	3
1 Einleitung	4
1.1 Übersicht der Kapitel	8
2 Konstruktion der metrischen Räume (\mathfrak{M}_p, D_p)	9
2.1 Der Raum \mathfrak{M}	9
2.2 Die Metrik D_p	13
2.3 Cauchyfolgen in \mathfrak{M}	15
3 Der Operator K	19
3.1 Definition	19
3.2 Momente	22
3.3 Find	29
4 Der Supremumsoperator H	30
4.1 Find	38
5 Die Baumstruktur der $K^n(\delta_0)$	39
5.1 Baumstruktur	39
5.2 Abschätzung	46
5.3 Find	60
6 Der Hauptsatz	61
7 Ausblick	66
A Die Wasserstein-Metrik	67
A.1 Der Wasserstein-Abstand d_p	67
A.2 Die metrischen Räume (Γ_p, d_p)	76
A.3 d_p -Konvergenz und schwache Konvergenz	84
A.4 Die Wasserstein-Metrik in $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$	92
B Notation	95
Literatur	96
Lebenslauf	98
Eidesstattliche Erklärung	99

Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Prozeßgleichung

$$(X(s))_{s \in [0,1]} \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in [0,1]}$$

in Hinblick auf Fixpunkte mit Pfaden in D , dem Raum der cadlag-Funktionen. Das Standardbeispiel ist die Prozeßgleichung des FIND-Algorithmus.

Über die Betrachtung der endlichdimensionalen Marginalverteilungen erhalten wir die Existenz eines Prozesses X mit Pfaden in D , der die Prozeßgleichung erfüllt.

Im Verlauf der Arbeit betrachten wir auch die stochastische Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C$$

für Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{R}^+ , und zeigen über ein Monotonieargument die Existenz eines Fixpunktes.

Im Anhang dieser Arbeit untersuchen wir die Wasserstein-Metriken auf Wahrscheinlichkeitsmaßen. Wir zeigen die Vollständigkeit des Raumes der Wahrscheinlichkeitsmaße auf der Borel- σ -Algebra eines separablen endlichdimensionalen Banachraumes und betrachten den Zusammenhang schwachen Konvergenz mit der Konvergenz bezüglich der Wasserstein-Metriken.

Abstract

In this thesis we investigate the process equation

$$(X(s))_{s \in [0,1]} \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in [0,1]}$$

in regard to fixed points with paths in D , the space of the cadlag functions. The standard example is the process equation of the FIND algorithm.

By analysing the finite dimensional marginal distributions we show the existence of a process X with path in D , which fulfils the process equation.

In the course of this thesis we also take a look at the stochastic equation

$$X \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C$$

for random variables with values in \mathbb{R}^+ . Using an argument of monotony we prove the existence of a fixed point.

The appendix contains an analysis of the Wasserstein metrics for probability measures. We show the completeness for the space of probability measures on the Borel σ -algebra of separable finite dimensional banach spaces and we examine the relation of the the weak convergence to the convergence according to the Wasserstein metrics.

1 Einleitung

Das Standardbeispiel für die Untersuchung von stochastischen Fixpunktgleichungen für Prozesse auf dem Einheitsintervall $I = [0, 1)$ ist der FIND-Prozeß.

FIND oder Quickselect ist ein von Hoare eingeführter Algorithmus (siehe [Ho]), um aus einer n -elementigen Menge T das k -kleinste Element zu finden:

- 1) Ist T einelementig, so enthält T das gesuchte Element.
- 2) Andernfalls wähle zufällig ein Pivotelement v .
- 3) Vergleiche alle Elemente aus T mit dem Pivotelement v und bilde die Menge der kleineren Elemente $T_{<}$, die Menge $\{v\}$ und die Menge der größeren Elemente $T_{>}$
- 4) a) Ist $|T_{<}| = k - 1$, dann ist v das gesuchte Element
 b) Ist $|T_{<}| \geq k$, dann wende den Algorithmus rekursiv an mit $T_{<}$ und k .
 c) Ist $|T_{<}| < k - 1$, dann wende den Algorithmus rekursiv an mit $T_{>}$ und $k - (|T_{<}| + 1)$

Von Interesse ist die Laufzeit des Algorithmus, die durch die Anzahl der Vergleiche gemessen wird. Die Laufzeit ist zufällig, der Zufall entsteht durch die Wahl des Pivotelementes. Wir nehmen im folgenden an, daß das Pivotelement mit Gleichverteilung aus den n Elementen von T gewählt wird. Weitere (bessere) Methoden für die Wahl des Pivotelements sind der $2k + 1$ -Median (siehe [MR]) und die Wahl abhängig von k (siehe [MPV]).

Desweiteren betrachten wir statt des vorgestellten 3-FIND-Algorithmus den 2-FIND-Algorithmus, bei dem T in nur zwei Mengen unterteilt wird. Ersetze die Schritte 3) und 4) des Algorithmus durch

- 3') vergleiche alle Elemente aus T mit dem Pivotelement v und bilde die Menge der kleineren Elemente $T_{<}$ und die Menge der größeren Elemente T_{\geq} inklusive v
- 4') a) ist $|T_{<}| \geq k$, dann wende den Algorithmus an mit $T_{<}$ und k
 b) ist $|T_{<}| < k$, dann wende den Algorithmus an mit T_{\geq} und $k - |T_{<}|$

Es sei für $n, k \in \mathbb{N}$ die Zufallsgröße $Y^n(k)$ die Anzahl der Vergleiche, um aus einer n -elementigen Menge das k -kleinste Element zu finden. Für den 2-FIND-Algorithmus ergibt sich die folgende Rekursionsgleichung

$$Y^n(k) \stackrel{\text{D}}{=} n - 1 + \mathbb{1}_{V < k} \cdot Y^{n-V}(k - V) + \mathbb{1}_{V \geq k} \cdot \bar{Y}^V(k),$$

dabei ist V gleichverteilt auf $\{1, \dots, n\}$ und $(Y^i)_{i=1}^n, (\bar{Y}^i)_{i=1}^n$ sind unabhängig verteilt mit $Y^i \sim \bar{Y}^i$ und $Y^1(1) = 0$. V repräsentiert dabei die Position des gewählten Pivotelements in der sortierten Menge, also $V = |T_{<}| + 1$.

Um das Konvergenzverhalten für $n \rightarrow \infty$ zu untersuchen normieren wir die Y^n durch

$$X^n\left(\frac{k-1}{n}\right) := \frac{Y^n(k)}{n}$$

und erweitern die X^n konstant zwischen den Stützstellen auf das Einheitsintervall. Die Konvergenz der X^n in Verteilung gegen einen Prozeß X mit Werten in D wurde in [GR] und [Knof] bewiesen. Als σ -Algebra wird die von der Skorohod-Topologie, der Standard-Topologie für Untersuchungen auf D , erzeugte verwendet.

Dieser Prozeß X erfüllt die Fixpunktgleichung

$$(X(s))_{s \in [0,1]} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(1 + \mathbb{1}_{U \geq s} \cdot X\left(\frac{s}{U}\right) + \mathbb{1}_{U < s} \cdot \bar{X}\left(\frac{s-U}{1-U}\right)\right)_{s \in [0,1]} \quad (1)$$

mit U gleichverteilt auf I und U, X, \bar{X} unabhängig und $X \sim \bar{X}$. In [GR] wurde weiterhin gezeigt, daß die Konvergenz $X^n \rightarrow X$ zur Skorohod-Topologie für den 3-FIND-Algorithmus nicht gegeben ist.

Eine Übersicht über die Ergebnisse der mathematischen Analyse des FIND-Algorithmus findet sich in [Rös].

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einer allgemeinen Form der Fixpunktgleichung (1)

$$(X(s))_{s \in I} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I}, \quad (2)$$

dabei sind die $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uiv Prozesse mit Verteilung X , unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$. Die I_i sind zufällige Teilintervalle von I , die A_i zufällige stetige Funktionen, die B_i zufällige stetige monoton steigende Funktionen in I und C zufällige stetige Funktionen.

Diese allgemeine Fixpunktgleichung (2) umfaßt nicht nur den vorgestellten Standardfall 2-FIND (1), sondern auch den Grenzwert der Varianten „Median von $2k+1$ “ sowie der Aufteilung in mehrere Teilintervalle.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist Theorem 65, das aussagt:

Unter der Voraussetzung

$$P\left(\sup_{t \in I} \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{t \in I_i} |A_i(t)| \geq 1\right) = 0 \quad (62)$$

und weiteren Endlichkeitsbedingungen existiert ein Prozeß X mit Werten in D und mit derselben Verteilung wie

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I};$$

mit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uiv Prozesse mit Verteilung X .

Prozeßgleichungen dieser Art treten bei der Untersuchung von Zufallsbäumen, Tiefensuchalgorithmen und ähnlich rekursiv definierten Strukturen auf.

Seien Zufallsgrößen $(Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in \mathbb{R}^n über eine Rekursionsformel der folgenden Art definiert:

$$Y^n(k) = \sum_{l=1}^n \sum_{i \in \mathbb{N}} A_{l,i}^n(k) \cdot Y_i^k \circ B_{l,i}^n(k) + C^n(k);$$

mit $(Y_i^k)_{i \in \mathbb{N}}$ iiv, $A_{l,i}^n(k)$, $C^n(k)$ Zufallsgrößen in \mathbb{R} und $B_{l,i}^n(k)$ Zufallsgrößen in $\{1, \dots, l\}$

Dann erhalten wir mittels Skalierung und geeigneter Fortsetzung auf das Einheitsintervall sowie einer geeignete Normierung Zufallsgrößen $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Pfaden im Raum D , also $X^n(\frac{k}{n}) = f_n \cdot Y^n(k)$ wobei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Normierungsfaktoren sind. In [ER] werden Bedingungen angegeben, unter denen die X^n bezüglich der L^p -Topologie konvergieren.

Konvergieren die X^n in Verteilung gegen einen Prozeß X , dann ist X unter den genannten Voraussetzungen Fixpunkt einer Prozeßgleichung der Form (2). Diese Arbeit liefert die Existenz so eines Prozesses mit Verteilung X , der Pfade im Raum D hat.

In der Praxis wird die Lösung X der Prozeßgleichung dazu verwendet, Aussagen über die diskreten Prozesse Y^n zu erhalten. Dazu wird zu gegebenen n und k der Wert $Y^n(k) = f_n^{-1} \cdot X^n(\frac{k-1}{n})$ durch $f_n^{-1} \cdot X(\frac{k-1}{n})$ approximiert. Dies legt nahe, die Konvergenz der X^n zu X über die endlichdimensionalen Marginalverteilungen zu betrachten.

Der mathematische Grund für diesen Ansatz ist, daß die Prozesse in D schon durch die endlichdimensionalen Marginalverteilungen eindeutig bestimmt sind.

Für die Untersuchung werden wir Prozesse $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf D definieren mit

$$(Z^{n+1}(s))_{s \in I} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot Z_i^n(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in I}.$$

Diese Z^n bilden eine Cauchyfolge bei der die endlichdimensionalen Marginalverteilungen gleichmäßig konvergieren. Wir zeigen, daß $\sup_{s \in I} Z^n(s)$ gleichmäßig in n exponentielles Endverhalten hat. Weiter schätzen wir die Anzahl der Sprünge kleiner als ein vorgegebenes ε der Pfade der Z^n ab. Ein Theorem von Dubins ([DH]) gibt die Existenz eines Prozesses Z mit Pfaden in D , gegen den die Z^n in Verteilung konvergieren. Dieser Prozeß Z erfüllt die Fixpunktgleichung (2).

Als zweite stochastische Fixpunktgleichung betrachten wir

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C \tag{3}$$

für Zufallsgrößen X , $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und C auf \mathbb{R} und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uiv zu X . Die Existenz eines Fixpunktes für die stochastische Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \sup_{i=1}^k (A_i X_i + C_i) \quad (4)$$

mit nur endlich vielen Termen wurde in [NS] gezeigt. In dem Beweis von (4) wurde die Kontraktionsmethode angewendet, die Kontraktionsbedingung ist $E \sum_{i=1}^k |A_i|^p < 1$. In [RS] wurde exponentielles Endverhalten des Fixpunktes bewiesen.

In unserem Beweis für die Fixpunktgleichung (3) wir schwächen wir im Vergleich zu (4) die Endlichkeitsbedingung auf $\text{esssup} |\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{A_i \neq 0}| < \infty$ ab und erhalten mit einer geänderten Kontraktionsbedingung über ein Monotonieargument den Satz 41:

Es gelte $P(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i = 1) = 0$, weiter habe C exponentielles Endverhalten.

Dann existiert eine Zufallsgröße Z auf \mathbb{R} mit exponentiellem Endverhalten, die die Gleichung

$$Z \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i Z_i + C$$

erfüllt, mit $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uiv Zufallsgrößen mit Verteilung Z .

Dieses Ergebnis verwenden wir, um den Prozeß X abzuschätzen. Wir erhalten ein exponentielles Endverhalten von $\sup_{s \in I} X(s)$.

Im Anhang untersuchen wir die Wasserstein-Metriken d_p , definiert durch

$$\begin{aligned} d_p(\mu, \nu) &:= \inf \left\{ \left(\int \|x - y\|^p \pi(dx, dy) \right)^{\frac{1}{p}} \mid \pi(\cdot, B) = \alpha, \pi(B, \cdot) = \beta \right\} \\ &= \inf \left\{ \left(\int \|X - Y\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid X \sim \alpha, Y \sim \beta \right\}. \end{aligned}$$

Diese Metriken sind die Grundlage der im Abschnitt 2 definierten Metriken auf den Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf D .

Die Standardreferenz für die Wasserstein-Metriken ist [BF]. Leider enthält der Artikel nur Beweiseideen, die ich nicht für allgemeine separable Banachräume nachvollziehen konnte. Daher werden wir im Anhang die Wasserstein-Metriken für separable endlichdimensionale Banachräume $(B, \|\cdot\|)$, versehen mit der Borel- σ -Algebra \mathfrak{B} , untersuchen.

Wir beweisen, daß die Räume der Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathfrak{B} versehen mit der Wasserstein-Metrik vollständige metrische Räume sind. Weiter zeigen wir den Zusammenhang der d_p -Konvergenz und der schwache Konvergenz. Als drittes betrachten wir die Wasserstein-Metriken auf den Maßen auf \mathbb{R}^n und geben verschiedene Abschätzungen an.

1.1 Übersicht der Kapitel

In dieser Arbeit arbeiten wir mit dem Raum \mathfrak{M} der Wahrscheinlichkeitsmaße auf D . Auf \mathfrak{M} definieren wir in Abschnitt 2 Abstandsfunktionen D_p und untersuchen die metrischen Räume (\mathfrak{M}_p, D_p) .

In Abschnitt 3 definieren wir auf \mathfrak{M} einen Operator K durch

$$K(\varphi) = \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in [0,1]}, \quad (5)$$

untersuchen die Verträglichkeit mit den Metriken D_1 und D_2 und betrachten das Konvergenzverhalten von Cauchyfolgen.

Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{R} , die die stochastische Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C$$

erfüllen behandeln wir in Abschnitt 4. Die Ergebnisse übertragen wir auf $\sup_{s \in [0,1]} K^n(\delta_0)(s)$.

In Abschnitt 5 beschäftigen wir uns mit den $K^n(\delta_0)$ über eine Baumstruktur. Mit Hilfe expliziter Formeln schätzen wir die Sprünge von Prozessen $X^n \stackrel{\mathcal{D}}{=} K^n(\delta_0)$ ab.

Durch die Anwendung eines Theorems von Dubins erhalten wir über die Konvergenz der endlichdimensionalen Marginalverteilungen in Abschnitt 6 die Existenz eines stochastischen Prozesses mit Pfaden in D , dessen Verteilung Fixpunkt von K ist.

Der Anhang A umfaßt eine Untersuchung der Wasserstein-Metriken d_p für endlichdimensionale separable Banachräume. Zu den Ergebnissen gehören die Vollständigkeit sowie der Zusammenhang zwischen der d_p -Konvergenz und der schwachen Konvergenz. Weiter betrachten wir die Wassersteinmetriken für die Banachräume $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

Danksagung

Ich danke Prof. Dr. Uwe Rösler für seine engagierte Betreuung. Seine Tür stand immer für mich offen und er bot mir neben Hilfe zu mathematischen Problemen auch gerne seine Lebenserfahrung an.

Desweiteren danke ich auch den anderen Mitgliedern der Fachgruppe Stochastik, namentlich Prof. Dr. Albrecht Irle, Dr. Volkert Paulsen, Dr. Markus Wendt, Herrn Claas Prella und Herrn Jan Spitzmann für die schönen gemeinsamen Jahre. Vor allem die Gespräche beim täglichen Mensagang, die nicht nur von Mathematik handelten, werde ich vermissen.

2 Konstruktion der metrischen Räume (\mathfrak{M}_p, D_p)

In diesem Abschnitt betrachten wir den Raum \mathfrak{M} der Wahrscheinlichkeitsmaße auf der Borel- σ -Algebra von D bezüglich der Skorohod-Topologie. Wir versehen diesen mit einem Abstand D_p , der auf der Wasserstein-Metrik (siehe Anhang A) über die endlichdimensionalen Marginalverteilungen basiert. Ziel dieses Abschnittes ist es, die metrischen Räume (\mathfrak{M}_p, D_p) zu konstruieren und deren Cauchyfolgen in Hinblick auf Konvergenz zu untersuchen.

2.1 Der Raum \mathfrak{M}

Als erstes führen wir die Räume C und D ein.

Definition 1

Es sei I das halboffene Einheitsintervall $[0, 1)$.

Es sei C der Raum der stetigen, im Punkt 1 rechtsstetigen und beschränkten Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$, und D sei der Raum der Funktionen $I \rightarrow \mathbb{R}$, die rechtsstetig sind und deren linksseitiger Grenzwert im gesamten Intervall $[0, 1]$ existiert.

Für alle $J \subseteq \mathbb{R}$ seien $C(J)$ der Raum der Funktionen aus C mit Wertebereich J , analog $D(J)$.

C sei mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und D sei mit der Skorohod-Metrik d_0 (siehe [Bil, S. 111])

$$d_0(f, g) := \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \exists \lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ stetig, } \lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1, \right. \\ \left. \sup_{\substack{s, t \in [0, 1] \\ s \neq t}} \left| \log \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \leq \varepsilon, \right. \\ \left. \sup_{t \in I} |f(t) - g(\lambda(t))| \leq \varepsilon \right\} \quad (6)$$

versehen.

Die zu C beziehungsweise D gehörige σ -Algebra \mathfrak{C} beziehungsweise \mathfrak{D} sei jeweils die Borel- σ -Algebra.

Weiter seien C_{\nearrow} , $C_{\nearrow}(J)$, D_{\nearrow} und $D_{\nearrow}(J)$ die Unterräume der streng monoton steigenden Funktionen aus C , $C(J)$, D und $D(J)$.

Es gilt $C \subset D$ und $C_{\nearrow} \subset D_{\nearrow}$. Weiter ist die Nullabbildung, 0 genannt, Element von C .

Nach [Bil, Theorem 14.5] gilt:

Lemma 2

Die Maße auf \mathfrak{D} sind durch ihre endlichdimensionalen Verteilungen eindeutig bestimmt.

Als erstes charakterisieren wir die Zufallsgrößen auf C und D , siehe [Bil, S. 57, 128].

Lemma 3

Sei X eine Funktion von einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ in C beziehungsweise D .

Dann ist X eine Zufallsgröße mit Werten in (C, \mathfrak{C}) beziehungsweise (D, \mathfrak{D}) genau dann, wenn für alle $s \in I$ die Funktion

$$X_s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto X(\omega)(s) \tag{7}$$

eine Zufallsgröße in $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ ist.

Als nächstes betrachten wir die Komposition von Zufallsgrößen.

Lemma 4

Sei X eine Zufallsgröße mit Werten in D , sei B eine Zufallsgröße mit Werten in $D \nearrow (I)$.

Dann ist $X \circ B$ eine Zufallsgröße mit Werten in D .

Beweis: Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ der X und B zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum.

Da für alle $\omega \in \Omega$ die Funktion $B(\omega)$ aufsteigend ist, ist für alle ω die Funktion $(X \circ B)(\omega) \in D$.

Wir wollen nun Lemma 3 anwenden.

Wir werden die $X \circ B$ durch Zufallsgrößen $X \circ B_k$ mittels Diskretisierung auf die Werte $0, \dots, 1 - \frac{1}{k}$ approximieren.

Definiere für alle $k \in \mathbb{N}$

$$B_k : \Omega \rightarrow D, \quad B_k(\omega)(s) = \min \left\{ \frac{\lceil B(\omega)(s) \cdot k \rceil}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right\}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $s \in I$ ist $B_k(s)$ meßbar bezüglich $\mathfrak{B}(I)$, denn für alle $a \in I$ gilt

$$B_k(s)^{-1}([a, 1)) = B(s)^{-1} \left(\left[\min \left\{ \frac{\lceil a \cdot k \rceil}{k}, 1 - \frac{1}{k} \right\}, 1 \right), 1 \right) \in \mathfrak{A}.$$

Weiterhin gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $s \in I$ und alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} ((X \circ B_k)(s))^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega)(B_k(\omega)(s)) \in A\} \\ &= \bigcup_{t \in I} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega)(t) \in A \wedge B_k(\omega)(s) = t\} \\ &= \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\omega \in \Omega \mid X(\omega)\left(\frac{i}{k}\right) \in A \wedge B_k(\omega)(s) = \frac{i}{k}\} \\ &= \bigcup_{i=0}^{k-1} X\left(\frac{i}{k}\right)^{-1}(A) \cap B_k(s)^{-1}\left(\frac{i}{k}\right) \\ &\in \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Also ist $(X \circ B_k)(s)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $s \in I$ meßbar, damit ist auch $\limsup_{k \rightarrow \infty} (X \circ B_k)(s)$ als Limes Superior von Zufallsgrößen meßbar.

Ferner gilt für alle $s \in I$

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow \infty} (X \circ B_k)(s) &= \limsup_{k \rightarrow \infty} X\left(\min\left\{\frac{\lceil B(s) \cdot k \rceil}{k}, 1 - \frac{1}{k}\right\}\right) \\ &= X(B(s)) \end{aligned}$$

da X rechtsstetig ist.

Wir haben also gezeigt, daß $(X \circ B)(s)$ für alle $s \in I$ meßbar bezüglich $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ist.

Aus Lemma 3 folgt damit, daß $X \circ B$ Zufallsgröße in D ist. □

Nun betrachten wir die Konvergenz von $X^n \circ B$.

Lemma 5

Es sei $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen in D , die schwach gegen eine Zufallsgröße X in D konvergiert.

Es sei B eine Zufallsgröße in $D \nearrow (I)$, unabhängig von $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X .

Dann konvergiert $X^n \circ B$ schwach gegen $X \circ B$.

Beweis: Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig beschränkt.

Nach Lemma 4 sind $X \circ B$ und die $X^n \circ B$ Zufallsgrößen in D . Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_I f \, dP^{X,B} &= EE(f(X \circ B) \mid B) \\ &= EEf(X \circ B) \\ &= E \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(X^n \circ B) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} EEf(X^n \circ B) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} Ef(X^n \circ B) \end{aligned}$$

□

Definition 6

Definiere \mathfrak{M} als die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathfrak{D} .

Offensichtlich ist das Nullmaß δ_0 , das Punktmaß auf der 0-Funktion, Element von \mathfrak{M} .

Lemma 3 zeigt, daß für die Untersuchung der Zufallsgrößen auf D die endlichdimensionalen Marginalverteilungen von besonderem Interesse sind. Wir werden daher auf \mathfrak{M} einen Abstand definieren, der sich auf den Abstand der endlichdimensionalen Marginalien bezieht.

Definition 7

Definiere die Menge aller endlichen Teilmengen von I als

$$\mathfrak{S} := \{S \subset I : 0 < |S| < \infty\} \quad (8)$$

und die Menge aller endlichen Tupel mit Elementen aus I als

$$\tau\mathfrak{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I^n. \quad (9)$$

Weiter sei für alle $S \in \mathfrak{S}$ das zugehörige Tupel τS definiert durch

$$\tau S := (S_1, \dots, S_{|S|}) \quad (10)$$

mit $S = \{S_1, \dots, S_{|S|}\}$ und $S_1 < S_2 < \dots < S_{|S|}$.

Zu gegebenen $S \in \mathfrak{S}$ verwenden wir im Folgenden immer $S = \{S_1, \dots, S_{|S|}\}$ mit $S_1 < \dots < S_{|S|} \in \mathbb{R}$.

Definition 8

Sei für alle $R, S \in \mathfrak{S}$ mit $|R| = |S|$ die Transformationen

$$\begin{aligned} \Psi_{S,R} : \mathbb{R}^S &\rightarrow \mathbb{R}^R, & \Psi_{S,R}(f)(R_i) &= f(S_i) \\ \Psi_{S,R} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^S) &\rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R}^R), & A &\mapsto \{\Psi_{S,R}(f) \mid f \in A\} \end{aligned} \quad (11)$$

definiert.

Definition 9

Sei für alle $R \subseteq S \subseteq I$ die Projektion von $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^R)$ definiert durch

$$\Phi_{S,R} : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^S) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathbb{R}^R), \quad A \mapsto \{f \in \mathbb{R}^R \mid \exists g \in A : f = g|_R\}. \quad (12)$$

Eine Familie $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$, ψ_S Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$, heißt konsistent, wenn für alle $R \subseteq S \in \mathfrak{S}$ gilt:

$$\psi_R = \psi_S \circ \Phi_{S,R}^{-1}. \quad (13)$$

Für Wahrscheinlichkeitsmaße $\psi \in \mathfrak{M}$ schreibe kurz ψ_S für $\psi \circ \Phi_{I,S}^{-1}$ für alle $S \in \mathfrak{S}$ und schreibe ψ_s für $\psi_{\{s\}}$ für alle $s \in I$.

Für $S \in \mathfrak{S}$ und $f \in \mathbb{R}^I$ schreibe $f(S)$ für $(f(s))_{s \in S}$.

Ist $S \in \mathfrak{S}$, $J \subseteq I$ sowie $f \in \mathbb{R}^J$ schreibe $f(S)$ für $(f(s))_{s \in S \cap J}$.

Wir verwenden die gleiche Schreibweise für Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{R}^J .

2.2 Die Metrik D_p

Das Ziel in diesem Unterabschnitt ist es, ausgehend von \mathfrak{M} metrische Räume (\mathfrak{M}_p, D_p) mit $p \in [1, \infty)$ einzuführen. Den Metriken D_p liegen die Wasserstein-Metriken d_p (siehe Anhang A) auf den endlichdimensionalen Marginalverteilungen zugrunde. Wir nehmen für jeden Index $S \in \mathfrak{S}$ den Abstand der Marginalien bezüglich der Wasserstein-Metrik und gewichten diese entsprechend der Dimension der Indexe.

Definition 10

Definiere für alle $p \in [1, \infty)$

$$D_p : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty], \quad (\mu, \nu) \mapsto \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} \cdot d_p(\mu_S, \nu_S), \quad (14)$$

wobei die d_p zugrundeliegende Norm die $\|\cdot\|_p$ -Norm ist.

Definition 11

Definiere für alle $p \in [1, \infty)$

$$\mathfrak{M}_p := \{\mu \in \mathfrak{M} : D_p(\mu, \delta_0) < \infty\}. \quad (15)$$

Damit haben wir unsere Räume (\mathfrak{M}_p, D_p) definiert. Nun untersuchen wir deren Struktur.

Lemma 12

Für alle $p \in [1, \infty)$ ist (\mathfrak{M}_p, D_p) ein metrischer Raum.

Beweis: Sei $p \in [1, \infty)$.

Die Metrik-Eigenschaften übertragen sich direkt von d_p :

Seien $\mu, \nu, \psi \in \mathfrak{M}_p$.

Nichtnegativität:

$$D_p(\mu, \nu) \geq d_p(\mu_{\{0\}}, \nu_{\{0\}}) \geq 0.$$

Nullabstand:

$$\begin{aligned} D_p(\mu, \nu) = 0 \\ \Leftrightarrow \forall S \in \mathfrak{S} : d_p(\mu_S, \nu_S) = 0 \\ \Leftrightarrow \forall S \in \mathfrak{S} : \mu_S = \nu_S \\ \Leftrightarrow \mu = \nu \end{aligned}$$

da μ und ν nach Lemma 2 durch die endlichdimensionalen Marginalverteilungen eindeutig bestimmt sind.

Symmetrie:

$$\begin{aligned} D_p(\mu, \nu) &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} d_p(\mu_S, \nu_S) \\ &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} d_p(\nu_S, \mu_S) \\ &= D_p(\nu, \mu). \end{aligned}$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} D_p(\mu, \nu) &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} d_p(\mu_S, \nu_S) \\ &\leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} (d_p(\mu_S, \psi_S) + d_p(\psi_S, \nu_S)) \\ &\leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} d_p(\mu_S, \psi_S) + \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{p}} d_p(\psi_S, \nu_S) \\ &= D_p(\mu, \psi) + D_p(\psi, \nu). \end{aligned}$$

Damit ist (\mathfrak{M}_p, D_p) ein metrischer Raum. □

Offensichtlich gilt $\delta_0 \in \mathfrak{M}_p$ für alle $p \in [1, \infty)$.

Die Räume \mathfrak{M}_p bilden bezüglich der Inklusion eine absteigende Folge:

Lemma 13

Für alle $q < p \in [1, \infty)$ gilt

$$\mathfrak{M}_q \supseteq \mathfrak{M}_p. \tag{16}$$

Beweis: Seien $q < p \in [1, \infty)$. Sei $\mu \in \mathfrak{M}_p$.

Dann folgt aus den Eigenschaften der Wasserstein-Metrik (siehe Lemma 84)

$$\begin{aligned} D_q(\mu, \delta_0) &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{q}} d_q(\mu_S, \delta_0) \\ &\leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-\frac{1}{q}} d_p(\mu_S, \delta_0) \\ &= D_p(\mu, \delta_0) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

□

In Anlehnung an den Erwartungswert von Zufallsgrößen definieren wir die Funktion E auf den Maßen aus \mathfrak{M}_1 .

Definition 14

Definiere

$$E : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}^I, \quad (E(\psi))(s) = \int_{\mathbb{R}^{\{s\}}} x \psi_s(dx). \quad (17)$$

Also ist $(E(\psi))(s) = E(X_s)$ für X Zufallsgröße mit Werten in D und Verteilung ψ .

Damit gilt für alle $S \in \mathfrak{S}$ die Gleichung $E(\psi)_S = E(X(S))$.

2.3 Cauchyfolgen in \mathfrak{M}

Zum Abschluß dieses Abschnittes betrachten wir das Verhalten von Cauchyfolgen in (\mathfrak{M}_p, D_p) . Nach Definition der D_p konvergieren die endlichdimensionalen Marginalverteilungen von Cauchyfolgen in \mathfrak{M}_p gleichmäßig bezüglich d_p . Wir erhalten, daß der Grenzwert dieser Marginalverteilungen existiert und daß die Familie der Grenzwerte rechtsstetig ist.

Lemma 15

Sei $p \in [1, \infty)$, sei $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (\mathfrak{M}_p, D_p) .

Dann existiert eine konsistente Familie $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $((\mathbb{R}^S, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)))_{S \in \mathfrak{S}}$, so daß für alle $S \in \mathfrak{S}$ gilt

$$\psi_S^n \xrightarrow{d_p} \psi_S. \quad (18)$$

Beweis: Nach Definition der Metrik D_p ist für jedes $S \in \mathfrak{S}$ die Folge $(\psi_S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge bezüglich d_p .

Da nach Theorem 81 für alle $S \in \mathfrak{S}$ der Raum der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$ mit endlichem p -ten Moment versehen mit der d_p -Metrik vollständig ist, existiert für jedes $S \in \mathfrak{S}$ das Grenzmaß $\psi_S := \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_S^n$ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$.

Seien nun $R, S \in \mathfrak{S}$ mit $R \subset S$.

Aus den Eigenschaften der Wasserstein-Metrik folgt (siehe Satz 83)

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(\psi_S \circ \Phi_{S,R}^{-1}, \psi_S^n \circ \Phi_{S,R}^{-1}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(\psi_S, \psi_S^n) = 0,$$

also

$$\begin{aligned} 0 &\leq d_p(\psi_S \circ \Phi_{S,R}^{-1}, \psi_R) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(d_p(\psi_S \circ \Phi_{S,R}^{-1}, \psi_S^n \circ \Phi_{S,R}^{-1}) + d_p(\psi_S^n \circ \Phi_{S,R}^{-1}, \psi_R^n) + d_p(\psi_R^n, \psi_R) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(\psi_S \circ \Phi_{S,R}^{-1}, \psi_S^n \circ \Phi_{S,R}^{-1}) + \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(\psi_S^n \circ \Phi_{S,R}^{-1}, \psi_R^n) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} d_p(\psi_R^n, \psi_R) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und damit $\psi_R = \psi_S \circ \Phi_{S,R}^{-1}$.

Also ist ψ eine konsistente Familie. □

Definition 16

Eine Familie $\psi = (\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$ heißt rechtsstetig in Verteilung in $S \in \mathfrak{S}$, wenn für alle Folgen $(R^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ mit $|R^n| = |S|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Ist $(\tau R^n)_i \geq (\tau S)_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, |S|\}$ sowie $\|\tau S - \tau R^n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,

dann konvergiert die Folge $(\psi_{R^n} \circ \Psi_{S,R^n})_{n \in \mathbb{N}}$ schwach gegen ψ_S .

Die Familie ψ heißt rechtsstetig in Verteilung, wenn sie rechtsstetig in Verteilung in allen $S \in \mathfrak{S}$ ist.

Lemma 17

Sei X eine Zufallsgröße in D .

Dann ist $(\mathcal{L}(X(S)))_{S \in \mathfrak{S}}$ rechtsstetig in Verteilung.

Beweis: Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ der X zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum.

Es gilt für alle $R, S \in \mathfrak{S}$ mit $|S| = |R|$ und alle $f \in C_b(I)$

$$\begin{aligned} & \left\| \int f(X(R)(\omega)) P(d\omega) - \Psi_{S,R} \left(\int f(X(S)(\omega)) P(d\omega) \right) \right\|_2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{|S|} \left| \int f(X(R_i)(\omega)) P(d\omega) - \int f(X(S_i)(\omega)) P(d\omega) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Also reicht es, die Rechtsstetigkeit in allen $S \in \mathfrak{S}$ mit $|S| = 1$ zu zeigen.

Sei $s \in I$, sei $(r^n)_{n \in \mathbb{N}} \in [s, 1]$ mit $r^n - s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dann gilt für alle $f \in C_b(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int f(X(r^n)(\omega)) d\omega - \int f(X(s)(\omega)) d\omega \right| \\ & \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f(X(r^n)(\omega)) - f(X(s)(\omega))| d\omega \\ & \leq \int \limsup_{n \rightarrow \infty} |f(X(r^n)(\omega)) - f(X(s)(\omega))| d\omega \\ & = \int 0 d\omega \\ & = 0. \end{aligned}$$

Damit ist $(\mathcal{L}(X(S)))_{S \in \mathfrak{S}}$ rechtsstetig in Verteilung. □

Für ein $S \in \mathfrak{S}$ sei $R \searrow S$ die Schreibweise für:
 Für alle i ist $R_i \geq S_i$ und R_i konvergiert gegen S_i

Das folgende Lemma folgt aus:

$$d_p(\mathfrak{L}(X)(S), \mathfrak{L}(X)(R) \circ \Psi_{S,R}) \leq E \|X(S) - X(R) \circ \Psi_{S,R}\|_p$$

für alle $R, S \in \mathfrak{S}$ mit $|R| = |S|$.

Lemma 18

Sei $p \in [1, \infty)$, sei X Zufallsgröße mit Pfaden in D und $\|X\|_p < \infty$.
 Dann gilt für alle $S \in \mathfrak{S}$

$$d_p(\mathfrak{L}(X)(S), \mathfrak{L}(X)(R) \circ \Psi_{S,R}) \xrightarrow{R \searrow S} 0. \quad (19)$$

Mit diesen Lemmata können wir die Rechtsstetigkeit des Grenzwertes $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ einer Cauchyfolge in (\mathfrak{M}_p, D_p) beweisen.

Satz 19

Sei $p \in [1, \infty)$.

Sei $(\psi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in (\mathfrak{M}_p, D_p) .

Dann existiert eine konsistente Familie $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$, die Grenzwert der Marginalverteilungen von ψ^n in d_p ist.

Weiterhin ist $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ rechtsstetig in Verteilung.

Beweis: Die erste Aussage, die Existenz von $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ haben wir in Lemma 15 gezeigt, es ist also nur noch die Rechtsstetigkeit in Verteilung zu zeigen.

Sei $S \in \mathfrak{S}$.

Sei $(R^k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ Folge mit $|R^k| = |S|$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $R_i^k \geq S_i$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, |S|\}$ und $\|\tau S - \tau R^k\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Da d_p Metrik ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} d_p(\psi(R^k) \circ \Psi_{S,R^k}, \psi(S)) &\leq d_p(\psi(R^k) \circ \Psi_{S,R^k}, \psi^n(R^k) \circ \Psi_{S,R^k}) \\ &\quad + d_p(\psi^n(R^k) \circ \Psi_{S,R^k}, \psi^n(S)) \\ &\quad + d_p(\psi^n(S), \psi(S)). \end{aligned}$$

Weil ψ^n in D_p gegen ψ konvergiert, konvergiert für alle $T \in \mathfrak{S}$ die Maßfolge $(\psi^n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ in d_p gegen $\psi(T)$, und zwar gleichmäßig in T . Also konvergieren der erste und der dritte Summand gleichmäßig bezüglich k in n gegen 0.

Nach Lemma 18 konvergiert für alle $n \in \mathbb{N}$ die Maßfolge $(\psi^n(R^k) \circ \Psi_{S,R^k})_{k \in \mathbb{N}}$ in d_p gegen $\psi^n(S)$.

§ 2 Konstruktion der metrischen Räume (\mathfrak{M}_p, D_p)

Damit konvergiert $(\psi(R^k) \circ \Psi_{S,R^k})_{k \in \mathbb{N}}$ in d_p gegen $\psi(S)$, also auch schwach (siehe Satz 79).

Also ist ψ rechtsstetig im Punkt S .

□

3 Der Operator K

Um die Fixpunkte von Gleichung (2) zu untersuchen, betrachten wir den Operator K , der durch

$$K(\mu) = \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I}$$

gegeben ist, wobei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uiv Zufallsgrößen mit Werten in D mit Verteilung μ sind.

Im Anschluß an die Definition von K untersuchen wir, wie sich die Abstände $D_p(\cdot, \delta_0)$ für $p = 1, 2$ unter dem Operator K verhalten.

3.1 Definition

Definition 20

Sei $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in der Menge der halboffenen Intervalle $[a, b) \subseteq I$. Die zu den I_i gehörige σ -Algebra sei die, so daß die Zufallsfunktionen $\mathbb{1}_{[a, b)}$ mit Werten in D für alle $a, b \in I$ meßbar sind.

Definiere

$$(N(s))_{s \in I} := (\{i \in \mathbb{N} \mid s \in I_i\})_{s \in I}. \quad (20)$$

Weiter gelte

$$\bar{I} := \text{esssup}_\omega |\{i \in \mathbb{N} \mid I_i(\omega) \neq \emptyset\}| < \infty, \quad (21)$$

$$\bar{N} := \sup_{s \in I} \text{esssup}_\omega |N(s)(\omega)| < \infty. \quad (22)$$

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in D , sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in $D \setminus \{I\}$, sei C Zufallsgröße mit Werten in D .

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wollen wir die A_i und B_i immer als Funktionen mit Definitionsbereich I_i betrachten.

In diesem Unterabschnitt definieren wir einen Operator K auf \mathfrak{M} derart, daß für uiv Zufallsgrößen $X, (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ auf D , die die Gleichung

$$\begin{aligned} (X(s))_{s \in I} &\stackrel{\mathfrak{Q}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I} \\ &= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I} \end{aligned} \quad (2)$$

erfüllen, $\mathfrak{L}(X)$ Fixpunkt von K ist.

Zuerst betrachten wir die Wohldefiniertheit des rechten Terms.

Lemma 21

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in D .

Dann ist

$$\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in I} \quad (23)$$

eine Zufallsgröße mit Werten in D .

Beweis: Wir werden Lemma 3 anwenden.

Sei ω fest.

Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $(X_i \circ B_i) \in D$, da $X_i \in D$ und $B_i \in D \nearrow(I)$. Weiter sind die A_i und C Elemente von D . Da die I_i rechtshalboffene Intervalle sind und $\bar{I} < \infty$ ist gilt also

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i \cdot (X_i \circ B_i) + C \in D.$$

Sei nun $s \in I$.

Nach Lemma 4 ist $(X_i \circ B_i)(s)$ meßbar, damit auch als Komposition meßbarer Funktionen $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot (X_i \circ B_i)(s) + C(s)$.

Also ist nach Lemma 3 $\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot (X_i \circ B_i)(s) + C(s) \right)_{s \in I}$ eine Zufallsgröße mit Werten in D . □

Als nächstes zeigen wir die Unabhängigkeit bezüglich der Realisierung.

Lemma 22

Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familien von uiv Zufallsgrößen auf D , unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$. Es gelte für alle $i \in \mathbb{N}$, daß X_i und Y_i dieselbe Verteilung haben.

Dann gilt

$$\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in I} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot Y_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in I}. \quad (24)$$

Beweis: In diesem Beweis werden wir Lemma 2 anwenden, wir beweisen also die Aussage für die endlichdimensionalen Marginalverteilungen.

Sei $S \in \mathfrak{G}$. Sei $J \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$. Sei $d\nu$ eine Kurzschreibweise von:

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad (\mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s))_{s \in S} \in da_i, \quad (B_i(s))_{s \in S} \in db_i, \quad C(S) \in dc.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& P\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in S} \in J\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}} P\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in S} \in J \right. \\
&\quad \left. | \forall i \in \mathbb{N} (\mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s))_{s \in S} = a_i, (B_i(s))_{s \in S} = b_i, C(S) = c\right) d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}} P\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{i,s} X_i(b_{i,s}) + c_s\right)_{s \in S} \in J\right) d\nu \\
&= \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}} P\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{i,s} Y_i(b_{i,s}) + c_s\right)_{s \in S} \in J\right) d\nu \\
&= \dots \\
&= P\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot Y_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in S} \in J\right).
\end{aligned}$$

Also gilt nach Lemma 2 die Behauptung. □

Mit den Aussagen aus den beiden letzten Lemmata können wir den gewünschten Operator K definieren.

Definition 23

Definiere den Operator K auf \mathfrak{M} durch

$$\begin{aligned}
K : \mathfrak{M} &\rightarrow \mathfrak{M}, \\
\mu &\mapsto \mathfrak{L}\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I}\right) \\
&= \mathfrak{L}\left(\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I}\right),
\end{aligned} \tag{25}$$

dabei ist $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ und unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Offensichtlich gilt

$$K(\delta_0) = \mathfrak{L}(C). \tag{26}$$

3.2 Momente

In diesem Unterabschnitt werden wir für $p = 1, 2$ zeigen, daß, unter geeigneten Voraussetzungen, K eingeschränkt auf \mathfrak{M}_p ein Operator auf \mathfrak{M}_p ist. Dazu zeigen wir, daß die Endlichkeit von $D_p(\cdot, \delta_0)$ unter K erhalten bleibt (siehe Gleichung (15)).

Weiter werden wir Bedingungen angeben, unter denen $EK^n(\cdot)$ gegen einen Grenzwert konvergiert.

Satz 24

Sei $\mu \in \mathfrak{M}_1$.

Es gelte zusätzlich

$$\sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| < \infty \quad (27)$$

sowie

$$E \sup_{s \in I} |C(s)| < \infty. \quad (28)$$

Dann gilt

$$K(\mu) \in \mathfrak{M}_1. \quad (29)$$

Beweis: Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ und unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Dann gilt nach Lemma 82 für alle $S \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} & d_1(K(\mu)_S, \delta_0) \\ &= E \left\| \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in S} \right\|_1 \\ &= E \sum_{s \in S} \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) X_i(B_i(s)) + C(s) \right| \\ &= \sum_{s \in S} E \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) E(X_i(B_i(s)) \mid B_i(s)) + C(s) \right| \\ &\leq \sum_{s \in S} E \left(\sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \sup_{t \in I} |E(X_i(t))| + |C(s)| \right) \\ &= \sup_{t \in I} |E(X_1(t))| \cdot \sum_{s \in S} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| + \sum_{s \in S} E |C(s)| \\ &\leq \sup_{t \in I} d_1(\mu_t, \delta_0) \cdot |S| \cdot \sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| + |S| \cdot \sup_{s \in I} E |C(s)|. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 D_1(K(\mu), \delta_0) &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-1} d_1(K(\mu)_S, \delta_0) \\
 &\leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-1} \cdot \left(\sup_{t \in I} d_1(\mu_t, \delta_0) \cdot |S| \cdot \sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \right. \\
 &\quad \left. + |S| \cdot \sup_{s \in I} E |C(s)| \right) \\
 &\leq D_1(\mu, \delta_0) \cdot \sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| + \sup_{s \in I} E |C(s)| \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

also $K(\mu) \in \mathfrak{M}_1$. □

Wir betrachten nun das erste Moment von $K^n(\delta_0)$.

Definition 25

Sei $\mu \in \mathfrak{M}_1$.

Nach Satz 24 gilt $\sup_{s \in I} \int_{\mathbb{R}^{\{s\}}} |x| \mu_s(dx) < \infty$, also ist $\int_{\mathbb{R}^{\{s\}}} x \mu_s(dx) \in \mathbb{R}$ für alle $s \in I$.

Wir verwenden die im letzten Abschnitt eingeführte Definition 14

$$E : \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathbb{R}^I, \quad E(\mu)(s) = \int_{\mathbb{R}^{\{s\}}} x \mu_s(dx). \quad (17)$$

Ziel ist es zu zeigen, daß $EK^n(\cdot)$ gegen einen Grenzwert konvergiert. Dazu betrachten wir einen Operator L auf D mit $L(E(\mu)) = EK(\mu)$. Mit Hilfe der Kontraktionsmethode zeigen wir, daß L einen Fixpunkt besitzt. Gegen diesen konvergieren die Folgen $EK^n(\delta)$.

Lemma 26

Es gelte

$$\sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| < \infty \quad (27)$$

und

$$E \sup_{s \in I} |C(s)| < \infty. \quad (28)$$

Dann ist für alle $f \in D$

$$I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto E \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) f(B_i(s)) + C(s) \right)$$

Element von D .

Beweis: Sei $f \in D$.

Es ist $\|f\|_\infty < \infty$, also ist für alle ω

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in I} \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot f(B_i(s)) + C(s) \right) \\ & \leq \sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot \|f\|_\infty + \sup_{s \in I} C(s) \end{aligned}$$

integrierbar.

Sei $s \in I$, sei $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in I , die gegen s konvergiert.

Da die B_i Pfade in D haben, konvergiert $B_i(s_k)$ für alle ω .

Ist s_k absteigend, so gilt nach dem Satz der dominierten Konvergenz

$$\begin{aligned} & \int \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot f(B_i(s)) + C(s) \\ & = \int \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} B_i(s_k)\right) + C(s) \\ & = \int \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i \in N(s_k)} A_i(s_k) \cdot f(B_i(s_k)) + C(s_k) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \sum_{i \in N(s_k)} A_i(s_k) \cdot f(B_i(s_k)) + C(s_k). \end{aligned}$$

Ist s_k aufsteigend, so existiert ganz analog der Grenzwert

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow \infty} \int \sum_{i \in N(s_k)} A_i(s_k) \cdot f(B_i(s_k)) + C(s_k) \\ & = \int \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot \lim_{\substack{t \searrow \\ r \nearrow s}} B_i(r) f(t) + C(s). \end{aligned}$$

Also ist

$$\left(E \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot f(B_i(s)) + C(s) \right) \right)_{s \in I}$$

Element von D .

□

Definition 27

Definiere

$$L : D \rightarrow D, \quad f \mapsto \left(E \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot f(B_i(s)) + C(s) \right) \right)_{s \in I}. \quad (30)$$

Lemma 28

Es gilt für alle $\mu \in \mathfrak{M}$

$$E(K(\mu)) = L(E(\mu))$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E(K^n(\mu)) = L^n(E(\mu)). \quad (31)$$

Beweis: Sei $\mu \in \mathfrak{M}$ und sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ , unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Dann ist für alle $s \in I$

$$\begin{aligned} E(K(\mu))(s) &= E\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s)X_i(B_i(s)) + C(s)\right) \\ &= E\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s)E(X_i(B_i(s)) \mid B_i(s)) + C(s)\right) \\ &= E\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot E(\mu)(B_i(s)) + C(s)\right) \\ &= L(E(\mu)). \end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $E(K^n(\mu)) = L^n(E(\mu))$

$$E(K^{n+1}(\mu)) = L(E(K^n(\mu))) = L(L^n(E(\mu))) = L^{n+1}(E(\mu)),$$

daraus folgt nach Induktion die Behauptung. □

Als nächstes zeigen wir, daß L eine Kontraktion ist. Dafür müssen die A_i eine Kontraktionsbedingung erfüllen.

Satz 29

Es gelte

$$\sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| < 1. \quad (32)$$

Dann ist L eine Kontraktion mit genau einem Fixpunkt $m \in D$.

Weiter gilt

$$\|m\|_\infty < \infty. \quad (33)$$

Beweis: Seien $f, g \in D$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|L(f) - L(g)\|_\infty &= \sup_{s \in I} \left| E\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s)(f - g)(B_i(s))\right) \right| \\ &\leq \sup_{s \in I} E\left(\sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \cdot \|f - g\|_\infty\right) \\ &= \|f - g\|_\infty \cdot \sup_{s \in I} E\left(\sum_{i \in N(s)} |A_i(s)|\right), \end{aligned}$$

also ist L eine strikte Kontraktion in $(D, \|\cdot\|_\infty)$ und besitzt somit nach dem Banach'schen Fixpunktsatz [Bron, Abschnitt 12.2.2.3] genau einen Fixpunkt $m \in D$. Für diesen gilt

$$\|m\|_\infty < \infty.$$

□

Jetzt übertragen wir den Fixpunkt von L auf K .

Satz 30

Es gelte

$$\sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| < 1. \quad (32)$$

Dann ist für alle $\mu \in \mathfrak{M}$ die Folge $(E(K^n(\mu)))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ mit

$$E(K^n(\mu)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m. \quad (34)$$

Insbesondere gilt

$$m = \left(E \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot m(B_i(s)) + C(s) \right) \right)_{s \in I}. \quad (35)$$

Beweis: Wegen $E(K^n(\mu)) = L^n(E(\mu))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(E(K^n(\mu)))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Fixpunkt von L , also gegen m . Die Gleichung 35 ist die Fixpunkteigenschaft von m bezüglich L .

□

Als nächstes betrachten wir \mathfrak{M}_2 . Damit die Beschränktheit von $D_2(\cdot, \delta_0)$ unter K erhalten bleibt, brauchen wir Beschränktheit bezüglich des zweiten Moments für die Zufallsgrößen A_i und C .

Definition 31

Definiere

$$\bar{C} := \sup_{s \in I} |C(s)|. \quad (36)$$

Da C Pfade in D hat, gilt für alle ω :

$$\bar{C}(\omega) = \sup_{s \in I} |C(\omega)(s)| = \sup_{s \in I \cap \mathbb{Q}} |C(\omega)(s)|,$$

also ist \bar{C} als Supremum über abzählbar viele Zufallsgrößen eine Zufallsgröße.

Satz 32

Sei $\mu \in \mathfrak{M}_2$.

Es gelte

$$E\bar{C}^2 < \infty, \quad (37)$$

$$\sup_{s \in I} \sum_{i \in \mathbb{N}} E \mathbb{1}_{s \in I_i} |A_i(s)|^2 < \infty \quad (38)$$

und

$$\sup_{s \in I} E \left(|C(s)| \cdot \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \right) < \infty. \quad (39)$$

Dann gilt

$$D_2(K(\mu), \delta_0) < \infty. \quad (40)$$

Beweis:

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ und $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Dann gilt für alle $S \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} d_2^2(K(\mu)_S, \delta_0) &= E \left\| \left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in S} \right\|_2^2 \\ &= \sum_{s \in S} E \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right|^2 \\ &\leq \sum_{s \in S} \left(E \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) \cdot C(s)| + E|C(s)|^2 \right) \\ &\leq \sum_{s \in S} \left(E \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \right|^2 \cdot \sup_{t \in I} E|X_i(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + E(|C(s)| \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)|) \cdot \sup_{t \in I} |EX_i(t)| + E\bar{C}^2 \right). \end{aligned}$$

Damit gilt nach den Voraussetzungen

$$\begin{aligned}
 & D_2^2(K(\mu), \delta_0) \\
 & \leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-1} \cdot d_2^2(K(\mu)_S, \delta_0) \\
 & \leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-2} \sum_{s \in S} \left(E \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \right|^2 \cdot \sup_{t \in I} E |X_i(t)|^2 \right. \\
 & \quad \left. + E(|C(s)| \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)|) \cdot \sup_{t \in I} |EX_i(t)| \right. \\
 & \quad \left. + E\bar{C}^2 \right) \\
 & \leq D_2^2(\mu, \delta_0) \cdot \sup_{s \in I} E \left| \sum_{i \in N(s)} A_i(s) \right|^2 \\
 & \quad + D_1^2(\mu, \delta_0) \cdot \sup_{s \in I} E(|C(s)| \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)|) \\
 & \quad + E\bar{C}^2 \\
 & \stackrel{(38), (39), (37)}{<} \infty.
 \end{aligned}$$

□

Sind die Voraussetzungen aus Satz 32 erfüllt, dann auch die von Satz 24:
Die Bedingung (27) folgt durch

$$\begin{aligned}
 & \sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \\
 & \leq \sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} (|A_i(s)|^2 + 1) \\
 & = \sup_{s \in I} \sum_{i \in N} E \mathbb{1}_{s \in I_i} |A_i(s)|^2 + \sup_{s \in I} E |N(s)| \\
 & \leq \sup_{s \in I} \sum_{i \in N} E \mathbb{1}_{s \in I_i} |A_i(s)|^2 + \bar{N} \\
 & \stackrel{(38), (22)}{<} \infty,
 \end{aligned}$$

die Bedingung 28 folgt aus

$$E \sup_{s \in I} |C(s)| = E\bar{C} \stackrel{(37)}{<} \infty.$$

3.3 Find

Die Rekursionsformel des FIND-Prozesses ist (siehe [GR]):

$$\begin{aligned} & (K_F(\mu)(s))_{s \in I} \\ &= \left(1 + \mathbb{1}_{s < U} U \cdot X\left(\frac{s}{U}\right) + \mathbb{1}_{s \geq U} (1 - U) \cdot \bar{X}\left(\frac{s - U}{1 - U}\right) \right)_{s \in I} \end{aligned} \quad (41)$$

wobei U gleichverteilt auf I ist und X, \bar{X} uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ sind.

In die hier eingeführte Notation übersetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} (I_1, A_1, B_1)(s) &= ([0, U], U, \frac{s}{U}) \\ (I_2, A_2, B_2)(s) &= ([U, 1], 1 - U, \frac{s - U}{1 - U}) \\ (I_i, A_i, B_i)(s) &= (\emptyset, 0, 0) \quad \text{für } i \geq 3 \\ C &\equiv 1 \end{aligned}$$

Der FIND-Prozeß ist ein Spezialfall der Fixpunktgleichung 2 dahingehend, daß für alle ω fest gilt

1. die Intervalle I_i sind disjunkt;
2. die A_i sind konstant;
3. C ist konstant.

Die Werte für die Momente von Find sind

$$\begin{aligned} \bar{C} &= 1, \\ \sum_{i \in \{1,2\}} E \sup_{s \in I_i} |A_i(s)|^2 &= EU^2 + E(1 - U)^2 = 2 \cdot EU^2 = \frac{2}{3} < 1 \quad \text{sowie} \\ \sup_{s \in I} E \sum_{i \in N(s)} A_i(s)C(s) &= E(U \cdot 1) \vee E((1 - U) \cdot 1) = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Also überträgt K_F die Beschränktheit des ersten und des zweiten Moments. Weiter hat K_F einen Fixpunkt bezüglich des ersten Moments.

Die Momente von FIND werden u.a. in [GR] genauer betrachtet. Grübel und Rösler berechneten die explizite Form von Erwartungswert des Find-Prozesses X_F

$$EX_F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto 2 \cdot (1 - s \log s - (1 - s) \log(1 - s)).$$

Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung der n -ten Momente von FIND veröffentlichte Paulsen ([Paul]). Für ein $n \in \mathbb{N}$ erzeugt er über eine Differentialgleichung ein Gleichungssystem, aus dessen Lösung sich das n -te Moment ergibt. Als Beispiel wurde im Artikel das zweite Moment von FIND explizit ausgerechnet.

4 Der Supremumsoperator H

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Endverhalten von

$$\sup_{s \in I} K^n(\delta_0)(s)$$

abzuschätzen. Dazu betrachten wir einen neuen Operator H

$$\mathfrak{L}(X) \mapsto \mathfrak{L}\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C\right) \quad (42)$$

mit X Zufallsgröße auf \mathbb{R}_+ , $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Zufallsgrößen mit Werten in $[0, 1]$, C Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{R}_+ . Wir werden zeigen, daß $H^n(\delta_0)$ nach oben beschränkt ist und zeigen mit Hilfe dieser Schranke, daß $H^n(\delta_0)$ gleichmäßig exponentielles Endverhalten hat, das heißt, es existieren $x_0, \lambda > 0$ so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$H^n(\delta_0)[x, \infty) \leq e^{-\lambda(x-x_0)}.$$

Anschließend übertragen wir das Ergebnis auf $\sup_{s \in I} K^n(\delta_0)(s)$.

Das Supremum von Maßen wird in diesem Abschnitt bezüglich der stochastischen Ordnung genommen:

$$\left(\sup_{s \in I} K^n(\delta_0)(s)\right)([x, \infty)) = \sup_{s \in I} \left(K^n(\delta_0)(s)([x, \infty))\right) \quad (43)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Exponentielles Endverhalten für Supremumsoperatoren wurden in [NS] untersucht. In dem Artikel wird exponentielles Endverhalten angegeben für den Fixpunkt des Supremumsoperators sowie für die normierten Zufallsgrößen

$$Y^n = \frac{X^n - EX^n}{s_n} \quad (44)$$

mit $\mathfrak{L}(X^n) = H^n(\delta_0)$ und s_n Skalierungsfolge.

Definition 33

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen auf $[0, 1]$, sei C eine Zufallsgröße auf \mathbb{R}_+ , jeweils bezüglich der Borel- σ -Algebra. Sei

$$N := \{i \in \mathbb{N} : A_i \neq 0\}. \quad (45)$$

Wir definieren \mathfrak{H} als die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$.

Definition 34

Für $\mu \in \mathfrak{H}$ und $p \in [1, \infty)$ schreiben wir

$$\|\mu\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mu(dx)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (46)$$

also $\|\mu\|_p = \|X\|_p$ für jede Zufallsgröße X mit Verteilung μ .

Definiere für alle $p \in [1, \infty)$ die Menge $\mathfrak{H}_p := \{\mu \in \mathfrak{H} \mid \|\mu\|_p < \infty\}$.

Nun wollen wir sicherstellen daß wir den Operator H wie in 42 gewünscht definieren können.

Lemma 35

Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{R}_+ .
Dann ist

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C \tag{47}$$

eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{R}_+ .

Beweis: Für alle $i \in \mathbb{N}$ ist $A_i \cdot X_i$ als Produkt von Zufallsgrößen eine Zufallsgröße. Damit ist auch $\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i$ als Supremum über abzählbar viele Zufallsgrößen eine Zufallsgröße, also auch $\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C$. □

Der Beweis der Unabhängigkeit des Bildes von μ bezüglich der Realisierung X verläuft analog zu dem bezüglich K in Abschnitt 3.

Lemma 36

Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familien von uiv Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{R}_+ mit $X_1 \sim Y_1$.

Dann gilt

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C \stackrel{\text{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i Y_i + C. \tag{48}$$

Definition 37

Definiere den Operator

$$H : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \mu \mapsto \mathfrak{L}\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C\right), \tag{42}$$

wobei die $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ sowie unabhängig von $((A_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$ sind.

Offensichtlich gilt

$$H(\delta_0) = \mathfrak{L}(C). \tag{49}$$

Es gelte im folgenden für alle $p \in [1, \infty)$

$$\|C\|_p < \infty \tag{50}$$

sowie

$$\text{esssup } |N| < \infty. \tag{51}$$

Als nächstes untersuchen wir den Operator H auf Monotonie.

Lemma 38

Seien μ, ν Maße auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$ mit $\mu \leq \nu$.

Dann gilt

$$H(\mu) \leq H(\nu). \quad (52)$$

Beweis: Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familien von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung μ beziehungsweise ν , unabhängig von $((A_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$ und $X_i \leq Y_i$ punktweise für alle $i \in \mathbb{N}$.

Weil das Supremum als Operator monoton ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i + C\right) &= \mathfrak{L}\left(E\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot X_i \mid (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, C\right) + C\right) \\ &\leq \mathfrak{L}\left(E\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot Y_i \mid (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, C\right) + C\right) \\ &= \mathfrak{L}\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i \cdot Y_i + C\right). \end{aligned}$$

□

Es folgt, daß $H^n(\delta_0)$ eine monoton steigende Folge ist.

Definition 39

Eine Zufallsgröße X mit Werten in \mathbb{R} beziehungsweise ein Maß $\mathfrak{L}(X)$ habe exponentielles Endverhalten, wenn $\lambda, x_0 > 0$ existieren, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$P(X \geq x) \leq e^{-\lambda(x-x_0)}. \quad (53)$$

Nun beweisen wir die Existenz einer oberen Schranke von $(H^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemma 40

Es gelte

$$P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i = 1\right) = 0. \quad (54)$$

Weiter habe C exponentielles Endverhalten.

Dann existieren $\lambda > 0$ und $x_0 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist μ Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}_+ gegeben durch

$$\mu([x, \infty)) = e^{-\lambda(x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0, \quad (55)$$

dann gilt für alle $x \geq x_0$

$$H(\mu) \leq \mu. \quad (56)$$

Beweis: Seien $\lambda_1, x_1 > 0$ so daß für alle $x \geq x_1$ gilt

$$P(C \geq x) \leq e^{-\lambda(x-x_1)}$$

Definiere

$$\bar{A} := \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Wegen $P(\bar{A} = 1) = 0$ und $Ee^{\lambda_1 C} \in \mathbb{R}$ gilt $E\mathbb{1}_{\bar{A} > 1-\varepsilon} e^{\lambda_1 C} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$, also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\text{esssup } |N| \cdot E\mathbb{1}_{\bar{A} > 1-\varepsilon} e^{\lambda_1 C} \leq \frac{1}{3}. \quad (\text{a})$$

Setze $\lambda := (1 - \varepsilon)\lambda_1$.

Wegen $\text{esssup } |N| \cdot Ee^{\lambda_1 C} \in \mathbb{R}$ existiert ein $x_0 > 0$ mit

$$e^{-\lambda \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} x_0} \cdot \text{esssup } |N| \cdot E(e^{\lambda_1 \cdot C}) \leq \frac{1}{3} \quad (\text{b})$$

und

$$e^{-\lambda_1(x_0-x_1)} \leq \frac{1}{3}. \quad (\text{c})$$

Sei μ Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathbb{R}_+ gegeben durch

$$\mu([x, \infty)) = e^{-\lambda(x-x_0)} \quad \forall x \geq x_0. \quad (55)$$

Für alle $x \leq x_0$ gilt

$$H(\mu)([x, \infty)) \leq 1 \leq e^{-\lambda(x-x_0)}.$$

Sei $x > x_0$.

Seien $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ iiv Zufallsgrößen auf \mathbb{R}_+ mit Verteilung μ .

Dann gilt

$$\begin{aligned} & H(\mu)([x, \infty)) \\ &= P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C \geq x\right) \\ &= P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C \geq x \wedge C < x \wedge \bar{A} \leq 1 - \varepsilon\right) \\ &\quad + P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C \geq x \wedge C < x \wedge \bar{A} > 1 - \varepsilon\right) \\ &\quad + P(C \geq x) \\ &\leq P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} X_i \geq \frac{x-C}{1-\varepsilon} \wedge C < x \wedge \bar{A} \leq 1 - \varepsilon\right) \\ &\quad + P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} X_i \geq x - C \wedge C < x \wedge \bar{A} > 1 - \varepsilon\right) \\ &\quad + P(C \geq x) \\ &:= I + II + III. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
 I &\leq P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} X_i \geq \frac{x-C}{1-\varepsilon} \wedge C < x\right) \\
 &\leq E\left(\mathbb{1}_{C < x} P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} X_i \geq \frac{x-C}{1-\varepsilon} \mid C\right)\right) \\
 &\leq E\left(\mathbb{1}_{C < x} \sum_{i \in \mathbb{N}} P\left(X_i \geq \frac{x-C}{1-\varepsilon} \mid C\right)\right) \\
 &\leq E\left(\mathbb{1}_{C < x} \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda\left(\frac{x-C}{1-\varepsilon} - x_0\right)}\right) \\
 &= e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot e^{-\lambda\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}x} \cdot E\left(\mathbb{1}_{C < x} \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{\frac{\lambda C}{1-\varepsilon}}\right) \\
 &\leq e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot e^{-\lambda\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}x_0} \cdot \text{esssup } |N| \cdot E\left(e^{\frac{\lambda}{1-\varepsilon}C}\right) \\
 &= e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot e^{-\lambda\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}x_0} \cdot \text{esssup } |N| \cdot E\left(e^{\lambda_1 C}\right) \\
 &\stackrel{(b)}{\leq} e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
 II &\leq E\mathbb{1}_{C < x} \mathbb{1}_{\bar{A} > 1-\varepsilon} \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{-\lambda(x-C-x_0)} \\
 &= e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot E\mathbb{1}_{C < x} \mathbb{1}_{\bar{A} > 1-\varepsilon} \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{\lambda C} \\
 &\leq e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot \text{esssup } |N| \cdot E\mathbb{1}_{\bar{A} > 1-\varepsilon} e^{\lambda_1 C} \\
 &\stackrel{(a)}{\leq} e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
 III &\leq e^{-\lambda_1(x-x_1)} \\
 &= e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot e^{-(\lambda_1-\lambda)(x-x_0)} \cdot e^{-\lambda_1(x_0-x_1)} \\
 &\leq e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot e^{-\lambda_1(x_0-x_1)} \\
 &\stackrel{(c)}{\leq} e^{-\lambda(x-x_0)} \cdot \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Damit ist

$$P\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C \geq x\right) \leq I + II + III \leq e^{-\lambda(x-x_0)}.$$

□

Als erste Folgerung erhalten wir die Existenz eines Fixpunktes:

Satz 41

Es gelte

$$P(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i = 1) = 0. \quad (54)$$

Weiter habe C exponentielles Endverhalten.

Dann existiert ein Fixpunkt von H , der exponentielles Endverhalten hat.

Beweis: H ist monoton und $(H^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine aufsteigende Folge. Lemma 40 gibt die Existenz einer oberen Schranke μ von $(H^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ mit exponentiellen Endverhalten. Also konvergiert $(H^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Fixpunkt der durch μ in stochastischer Ordnung beschränkt ist und damit auch exponentielles Endverhalten hat. □

Die zweite Folgerung ist das gleichmäßige exponentielle Endverhalten der $H^n(\delta_0)$:

Satz 42 (exponentielle Abschätzung)

Es gelte

$$P(\sup_{i \in \mathbb{N}} A_i = 1) = 0 \quad (54)$$

und C habe exponentielles Endverhalten.

Dann existieren ein $\lambda > 0$ und ein $x_0 > 0$, so daß für alle $x \geq x_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$H^n(\delta_0)([x, \infty)) \leq e^{-\lambda(x-x_0)} \quad (57)$$

und

$$E(H^n(\delta_0)) \leq x_0 + \lambda. \quad (58)$$

Beweis: Seien λ, x_0 und μ wie in Lemma 40 gegeben.

Aus der Monotonie von H und wegen $\delta_0 \leq \mu$ folgt durch Induktion aus

$$H^n(\delta_0) \leq \mu \quad \Rightarrow \quad H^{n+1}(\delta_0) \leq H(\mu) \leq \mu$$

die gleichmäßige Beschränkung der $H^n(\delta_0)$ durch μ und damit das gleichmäßige exponentielle Endverhalten von $H^n(\delta_0)$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} E(H^n(\delta_0)) &\leq x_0 + \int_{x_0}^{\infty} e^{-\lambda(x-x_0)} dx \\ &= x_0 + e^{\lambda x_0} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x_0} \\ &= x_0 + \lambda. \end{aligned}$$

□

Jetzt schätzen wir mit Hilfe von H das Maß $K^n(\delta_0)$ ab. Dafür kehren wir zurück zu den I_i, A_i, B_i, C aus Abschnitt 3 und nutzen die gerade bewiesene Abschätzung für den Operator

$$H : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \mu \mapsto \mathfrak{L} \left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \cdot \sup_{\substack{i \in \bigcup_{s \in I} N(s)}} X_i + \sup_{s \in I} |C(s)| \right). \quad (59)$$

Satz 43

Definiere

$$\begin{aligned} \check{A} &:= \sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)|, \\ \check{N} &:= \bigcup_{s \in I} N(s), \\ \check{C} &:= \sup_{s \in I} |C(s)| = \overline{C}. \end{aligned} \quad (60)$$

Es gelte

$$\text{esssup} |\check{N}| < \infty, \quad (61)$$

$$P(\check{A} \geq 1) = 0 \quad \text{und} \quad (62)$$

$$\check{C} \text{ habe exponentielles Endverhalten.} \quad (63)$$

Dann existieren ein $\lambda > 0$ und ein $x_0 > 0$, so daß für alle $x \geq x_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{s \in I} K^n(\delta_0)(s)([x, \infty)) \leq e^{-\lambda(x-x_0)}. \quad (64)$$

Beweis: Als erstes ist zu zeigen, daß $\check{A}, \mathbb{1}_{i \in \check{N}}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie \check{C} meßbar bezüglich $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ sind.

Da $C(\omega)$ für alle ω rechtsstetig ist gilt

$$\sup_{s \in I} |C(\omega)(s)| = \sup_{t \in \mathbb{Q}} |C(\omega)(t)|.$$

Damit ist \check{C} als Supremum von abzählbar vielen Zufallsgrößen meßbar.

Analog läßt sich die Aussage für \check{A} zeigen.

Weiter gilt, da die I_i Zufallsgrößen auf halboffene Intervalle sind,

$$\check{N} = \bigcup_{s \in I} N(s) = \bigcup_{s \in I} \{i \in \mathbb{N} \mid s \in I_i\} = \bigcup_{s \in I \cap \mathbb{Q}} \{i \in \mathbb{N} \mid s \in I_i\}.$$

Also ist $\mathbb{1}_{i \in \check{N}} = \sup_{s \in I \cap \mathbb{Q}} \mathbb{1}_{s \in I_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ als Supremum abzählbar vieler Zufallsgrößen eine Zufallsgröße.

Wir betrachten

$$H : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \mu \mapsto \mathfrak{L}\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{i \in \check{N}} \check{A} \cdot X_i + \check{C}\right). \quad (65)$$

Nach den Voraussetzungen läßt sich Satz 42 auf dieses H anwenden.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung $K^n(\delta_0)$ und unabhängig von $((I_s)_{s \in I}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Dann ist $\sup_{s \in I} X_i(s)$ meßbar (analog zu \check{C}) und es gilt für alle $s \in I$

$$\begin{aligned} K(\mu)(s) &= \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right) \\ &\leq_s \mathfrak{L}\left(\left|\sum_{i \in N(s)} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right|\right) \\ &\leq_s \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \cdot \sup_{t \in I} |X_i(t)| + \sup_{r \in I} |C(r)|\right) \\ &\leq_s \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \cdot \sup_{i \in N(s)} \sup_{t \in I} |X_i(t)| + \check{C}\right) \\ &\leq \mathfrak{L}\left(\check{A} \cdot \sup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{i \in \check{N}} \sup_{t \in I} |X_i(t)| + \check{C}\right) \\ &= H(\mathfrak{L}(\sup_{t \in I} |X(t)|)). \end{aligned}$$

Damit läßt sich leicht per Induktion über n zeigen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt,

$$\begin{aligned} \sup_{s \in I} K^{n+1}(\delta_0)(s) &= \sup_{s \in I} K(K^n(\delta_0))(s) \\ &\leq H(\sup_{t \in I} K^n(\delta_0)(t)) \\ &\stackrel{\text{IS}}{\leq_s} H(H^n(\delta_0)) \\ &= H^{n+1}(\delta_0). \end{aligned}$$

Also folgt nach Satz 42, daß ein $\lambda > 0$ und ein $x_0 > 0$ existieren, so daß für alle $x \geq x_0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} &(\sup_{s \in I} K^n(\delta_0)(s))((-\infty, -x] \cup [x, \infty)) \\ &\leq H^n(\delta_0)([x, \infty)) \\ &\leq e^{-\lambda(x-x_0)}. \end{aligned}$$

□

Aus dem gleichmäßigen exponentiellen Endverhalten der $K^n(\delta_0)(s)$ folgt:

Lemma 44

Es gelte

$$P\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \geq 1\right) = 0 \quad \text{und} \quad (62)$$

$$\check{C} \text{ habe exponentielles Endverhalten.} \quad (63)$$

Dann gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E \sup_{s \in I} K^n(\delta_0)(s) < \infty.$$

4.1 Find

Für FIND ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in I} \left(1 + \mathbb{1}_{s \leq U} U \cdot X\left(\frac{s}{U}\right) + \mathbb{1}_{s > U} (1 - U) \cdot \bar{X}\left(\frac{s - U}{1 - U}\right) \right) \\ & \stackrel{\mathfrak{D}}{\leq} 1 + (U \vee (1 - U)) \cdot \left(\sup_{s \in I} X(s) + \sup_{s \in I} \bar{X}(s) \right), \end{aligned}$$

damit $\check{A} = (U \vee (1 - U))$, $\check{C} \equiv 1$ und $\check{N} \equiv \{1, 2\}$.

Die Voraussetzungen von Satz 43 sind also erfüllt.

Ein direkter Beweis der Formel für den Find-Prozeß

$$\sup_{s \in [0,1]} X(s) \stackrel{\mathfrak{D}}{=} 1 + U \sup_{s \in I} X(s) \vee (1 - U) \sup_{s \in I} \bar{X}(s) \quad (66)$$

findet sich in [GR, Theorem 12].

5 Die Baumstruktur der $K^n(\delta_0)$

In diesem Abschnitt konstruieren wir Zufallsgrößen X^n mit Verteilung $K^n(\delta_0)$ über eine Baumstruktur. Die Knoten entsprechen dabei den Iterationen. Wir untersuchen, wie sich die Intervalllängen verhalten und schätzen im zweiten Unterabschnitt den Abstand von $X^n(s)$ und $X^n(t)$ ab. Den Abschluß bildet eine Abschätzung der Sprünge von mindestens ε der X^n .

5.1 Baumstruktur

Definition 45

Sei $V := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathbb{N}^k$ die Knotenmenge des Baumes.

Für einen Knoten $v = (v_1, \dots, v_k) \in V$ bezeichne

- $|v|$ die Länge k ;
- $v_{|i} := (v_1, \dots, v_i)$ der Vorgängerknoten von v der Länge $i \in \{0, \dots, k\}$, dabei ist $v_{|0} = \emptyset$ gemeint;
- $v_i = (v_1, \dots, v_{|v|}, i)$ der i -te Nachfolgeknoten von v für $i \in \mathbb{N}$;
- $iv = (i, v_1, \dots, v_{|v|})$ der Knoten v am i -ten Teilbaum für $i \in \mathbb{N}$.

Für ein $k \in \mathbb{N}$ sei V_k die Menge aller Knoten der Länge k .

Sei $\left(\left((I_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, C^v \right) \right)_{v \in V}$ Familie von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung $\left((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C \right)$.

Definiere für alle $v \in V$ analog zu (20) $N^v(s) := \{i \in \mathbb{N} \mid s \in I_i^v\}$.

Als erstes führen wir die Rekursion der Intervalle durch. Die Anschauung ist die folgende: Bei einem Anwenden vom Operator K wird das Einheitsintervall I in die Teilintervalle I_1, I_2, \dots zufällig unterteilt. Dabei sind auch Überlappungen zugelassen. Bei einem erneuten Anwenden der Rekursionsprozedur werden die Teilintervalle wieder unterteilt, die Unterteilung hängt von den I_i^v und von den B_i^v ab. Die sich dadurch ergebenden Intervalle werden wir mit F^v bezeichnen. Die $F^{w,v}$ sind die sich ergebenden Intervalle vom Teilbaum mit Wurzel w .

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i = I. \quad (67)$$

Ansonsten ist $I \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen der Form $[a, b)$.

Ergänze die $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ zu $(I'_i)_{i \in \mathbb{N}}$ so, daß $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I'_i = I$ und $I'_{2i} = I_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, die I'_{2i-1} werden aufsteigend gewählt. Setze $(N'(s))_{s \in I} := (\{i \in \mathbb{N} \mid$

$s \in I'_i\})_{s \in I}$, setze weiter $A'_{2i} = A'_i$ und $A'_{2i-1} = 0$ sowie $B'_{2i} = b_i$, $B'_{2i-1} = \text{id}$ und $C' = C$.

Es ist

$$\begin{aligned} & \text{esssup} |\{i \in \mathbb{N} \mid I'_i \neq \emptyset\}| \\ & \leq 2 \cdot \text{esssup} |\{i \in \mathbb{N} \mid I_i \neq \emptyset\}| + 1 \\ & < \infty \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \sup_{s \in I} \text{esssup} |N'(s)| \\ & \leq \sup_{s \in I} \text{esssup} |N(s)| + 1 \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Betrachten wir den Teilbaum des Knotens w , dann bezeichnen wir die Intervalle bezüglich des Knotens v mit $F^{w,v}$.

Definition 46

Definiere rekursiv für alle $w, v \in V$

$$\begin{aligned} F^{w,\emptyset} & := I, \\ F^{w,iv} & := (B_i^w)^{-1}(F^{wi,v}). \end{aligned} \tag{68}$$

Schreibe kurz F^v für $F^{\emptyset,v}$.

Beachte, daß B_i^w als Funktion $I_i^w \rightarrow I$ betrachtet wird.

Da für alle $i \in \mathbb{N}$ die $(B_i^w)_{w \in V}$ uiv sind, gilt für alle $w, w', v \in V$

$$F^{w,v} \stackrel{\cong}{=} F^{w',v}. \tag{69}$$

Weiter sind die Werte der $F^{w,iv}$ Intervalle der Form $[a, b)$, weil die B_i^w stetige streng monoton steigende Pfade haben.

Es gilt für alle $w, v \in V$, $i \in \mathbb{N}$ und $s \in I$

$$\begin{aligned} s \in F^{w,iv} & \Leftrightarrow i \in N^w(s) \wedge B_i^w(s) \in F^{wi,v} \\ & \Leftrightarrow s \in I_i^w \wedge B_i^w(s) \in F^{wi,v}. \end{aligned} \tag{70}$$

Lemma 47

Für alle $w, v \in V$ gilt:

$$F^{w,v} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^{w,vi}. \quad (71)$$

Dabei können sich die $F^{w,vi}$ überlappen.

Es folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $w \in V$ gilt:

$$\bigcup_{v \in V, |v|=n} F^{w,v} = I. \quad (72)$$

Beweis: Wir beweisen das Lemma per Induktion über $|v|$.

IA: $v = \emptyset$

Es ist nach der Definition für alle $w \in V$

$$\begin{aligned} F^{w,\emptyset} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i^w = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B_i^w)^{-1}(I) \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B_i^w)^{-1}(F^{wi,\emptyset}) \\ &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^{w,\emptyset i}. \end{aligned}$$

IS: $v \rightarrow jv$

Sei $v \in V$, so daß für alle $w \in V$ die Behauptung gilt.

Dann gilt für alle $w \in V$ und $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^{w,jvi} &= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (B_j^w)^{-1}(F^{wj,vi}) \\ &= (B_j^w)^{-1} \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} F^{wj,vi} \right) \\ &\stackrel{IV}{=} (B_j^w)^{-1} (F^{wj,v}) \\ &= F^{w,jv}. \end{aligned}$$

□

Nach Definition 20 liegt ein $s \in I$ in höchstens \overline{N} Intervallen I_i . Damit läßt sich die Anzahl der Intervalle der k -ten Ebene, in denen s liegt, abschätzen:

Lemma 48

Für alle $w \in V$, $s \in I$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$|\{v \in V_k \mid s \in F^{w,v}\}| \leq \overline{N}^k. \quad (73)$$

Da sich die $F^{w,v}$ s überschneiden können ist eine weitergehende Untersuchung nötig, um auch die verschiedenen Überschneidungen zu erfassen.

Definition 49

Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ und ω die Äquivalenzrelation auf I durch

$$s \underset{\omega}{\overset{n}{\sim}} t \quad :\Leftrightarrow \quad \forall v \in V_n : s \in F^v(\omega) \Leftrightarrow t \in F^v(\omega), \quad (74)$$

also s und t sind zur Tiefe n äquivalent, wenn sie in genau denselben Teilintervallen $F^v(\omega)$ liegen für alle Knoten v der Länge n .

Bezeichne für alle $n \in \mathbb{N}$ die zu $\underset{\omega}{\overset{n}{\sim}}$ gehörige Zerlegung von I mit $I/\underset{\omega}{\overset{n}{\sim}}$.

Wir lassen im folgenden das ω weg.

Aufgrund der Rekursionsstruktur folgt aus $s \underset{\omega}{\overset{n}{\sim}} t$ auch $s \underset{\omega}{\overset{i}{\sim}} t$ für alle $i \leq n$.

Nun untersuchen wir die Größe der Zerlegung $I/\underset{\omega}{\overset{n}{\sim}}$.

Definition 50

Definiere rekursiv die Folge $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0$ durch

$$\kappa_n := \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 \cdot \bar{I} \cdot \kappa_{n-1}^{\bar{N}} & n > 0. \end{cases} \quad (75)$$

Lemma 51

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\text{esssup} |I/\underset{\omega}{\overset{n}{\sim}}| \leq \kappa_n. \quad (76)$$

Beweis: Wir beweisen für alle $w \in V$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage

$$\left| \left\{ \{t \in I \mid \forall v \in V_n : t \in F^{w,v} \Leftrightarrow s \in F^{w,v}\} \mid s \in I \right\} \right| \leq \kappa_n \quad (76')$$

per Induktion über n .

IA: $n = 0$

Sei $w \in V$.

Es ist $F^{w,\emptyset} = I$, also

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \{t \in I \mid \forall v \in V_0 : t \in F^{w,v} \Leftrightarrow s \in F^{w,v}\} \mid s \in I \right\} \right| \\ &= |\{I\}| \\ &= 1 \\ &= \kappa_0. \end{aligned}$$

IS: $n \rightarrow n + 1$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $w \in V$ die Gleichung (76') gilt.

Definiere

$$\mathfrak{J}^w := \{ \{i \in \mathbb{N} \mid s \in I_i^w\} \mid s \in I \}.$$

Die Mengen $J \in \mathfrak{J}^w$ geben an, daß es einen Punkt $s \in I$ gibt, der genau in den Intervallen $(I_i)_{i \in J}$ liegt.

$(\bigcap_{i \in J} I_i^w)_{J \in \mathfrak{J}^w}$ bildet offensichtlich eine Zerlegung von I .

Nach Definition 20 gilt:

Da die $(I_i^w)_{i \in \mathbb{N}}$ höchstens \bar{I} nichtleere Intervalle sind (siehe (21)), gilt für alle $w \in V$

$$|\mathfrak{J}^w| \leq 2 \cdot \bar{I} < \infty,$$

weiter ist nach (22)

$$\sup_{J \in \mathfrak{J}^w} |J| \leq \bar{N} < \infty.$$

Es gilt für alle $w \in V$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \{t \in I \mid \forall v \in V_{n+1} : t \in F^{w,v} \Leftrightarrow s \in F^{w,v}\} \mid s \in I \right\} \\ &= \bigcup_{J \in \mathfrak{J}^w} \left\{ \{t \in I \mid \forall v \in V_n \quad \forall j \in \mathbb{N} : t \in F^{w,jv} \Leftrightarrow s \in F^{w,jv}\} \right. \\ & \quad \left. \mid s \in \bigcap_{i \in J} I_i^w \right\} \\ &= \bigcup_{J \in \mathfrak{J}^w} \left\{ \bigcap_{j \in J} \{t \in I_j^w \mid \forall v \in V_n : t \in F^{w,jv} \Leftrightarrow s \in F^{w,jv}\} \right. \\ & \quad \left. \mid s \in \bigcap_{i \in J} I_i^w \right\} \end{aligned}$$

da ein $j \in J$ existiert mit $s \in F^{w,jv}$ und aus $t \notin I_j^w$ folgt $t \notin F^{w,jv}$.

Sei nun $J \in \mathfrak{J}^w$ und $s \in \bigcap_{i \in J} I_i^w$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \bigcap_{j \in J} \{t \in I_j^w \mid \forall v \in V_n : t \in F^{w,jv} \Leftrightarrow s \in F^{w,jv}\} \\ &= \bigcap_{j \in J} \{t \in I_j^w \mid \forall v \in V_n : t \in I_j^w \wedge B_j^w(t) \in F^{wj,v}\} \\ & \quad \Leftrightarrow s \in I_j^w \wedge B_j^w(s) \in F^{wj,v}\} \\ &= \bigcap_{j \in J} \{t \in I_j^w \mid \forall v \in V_n : B_j^w(t) \in F^{wj,v} \Leftrightarrow B_j^w(s) \in F^{wj,v}\}. \end{aligned}$$

Da für alle $j \in \mathbb{N}$ die $(F^{wj,v})_{|v|=n}$ nach Lemma 47 eine Zerlegung von I bilden, existiert für alle $j \in J$ und $s \in \bigcap_{i \in J} I_i^w$ ein $v \in V_n$ mit $B_j^w(s) \in F^{wj,v}$. Es folgt daher:

$$\begin{aligned} & \bigcap_{j \in J} \{t \in I_j^w \mid \forall v \in V_n : B_j^w(t) \in F^{wj,v} \Leftrightarrow B_j^w(s) \in F^{wj,v}\} \\ &= \bigcap_{j \in J} \{t' \in B_j^w(I_j^w) \mid \forall v \in V_n : t' \in F^{wj,v} \Leftrightarrow B_j^w(s) \in F^{wj,v}\}. \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \{t \in I \mid \forall v \in V_{n+1} : t \in F^{w,v} \Leftrightarrow s \in F^{w,v}\} \mid s \in I \right\} \right| \\ &= \left| \bigcup_{J \in \mathfrak{J}^w} \left\{ \bigcap_{j \in J} \{t' \in B_j^w(I_j^w) \mid \forall v \in V_n : t' \in F^{wj,v} \Leftrightarrow B_j^w(s) \in F^{wj,v}\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \mid s \in \bigcap_{i \in J} I_i^w \right\} \right| \\ &\leq \sum_{J \in \mathfrak{J}^w} \prod_{j \in J} \left| \left\{ \{t' \in B_j^w(I_j^w) \mid \forall v \in V_n : t' \in F^{wj,v} \Leftrightarrow B_j^w(s) \in F^{wj,v}\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \mid s \in \bigcap_{i \in J} I_i^w \right\} \right| \\ &\leq \sum_{J \in \mathfrak{J}^w} \prod_{j \in J} \left| \left\{ \{t' \in I \mid \forall v \in V_n : t' \in F^{wi,v} \Leftrightarrow s' \in F^{wi,v}\} \mid s' \in I \right\} \right| \\ &\stackrel{IV}{\leq} \sum_{J \in \mathfrak{J}^w} \prod_{j \in J} \kappa_n \\ &\leq 2 \cdot \bar{I} \cdot \kappa_n^{\bar{N}} \\ &= \kappa_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Der nächste Schritt ist es, die Länge der Intervalle $|F^v|$ abzuschätzen.

Lemma 52

Es gilt für alle $w, v \in V$ und $i \in \mathbb{N}$

$$|F^{w,iv}| = |(B_i^w)^{-1}(F^{wi,v})| \leq \sup_{s,t \in I_i} \frac{|s-t|}{|B_i(s) - B_i(t)|} \cdot |F^{wi,v}|. \quad (77)$$

Definition 53

Definiere die maximale Länge der Intervalle in der k -ten Generation durch

$$L_k := \max_{v \in V_k} |F^v|. \quad (78)$$

Erfüllen die B_i eine Kontraktionsbedingung, dann werden die Intervalle F^v in $|v|$ gleichmäßig exponentiell schnell gestaucht.

Lemma 54

Es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit

$$\alpha := E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \sup_{s, t \in I_i} \left(\frac{|s-t|}{|B_i(s) - B_i(t)|}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < 1. \quad (79)$$

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$P(L_k \geq \alpha^{\frac{k}{2}}) \leq \alpha^{\frac{k}{2}} \quad (80)$$

und

$$E(L_k) \leq \alpha^k. \quad (81)$$

Beweis: Sei für alle $k \in \mathbb{N}$ die Summe der p -ten Potenz der Intervalllängen $G_k := \sum_{v \in V_k} |F^v|^p$. Sei weiter \mathfrak{A}_1 die σ -Algebra, die durch die $(I_i^\emptyset)_{i \in \mathbb{N}}$ und

$(B_i^\emptyset)_{i \in \mathbb{N}}$ erzeugt ist. Setze $C_1 := \sup_{s, t \in I_i} \left(\frac{|s-t|}{|B_i(s) - B_i(t)|}\right)^p$.

Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} E(G_{k+1}) &= E(E(G_{k+1} \mid \mathfrak{A}_1)) \\ &= E(E\left(\sum_{v \in V_{k+1}} |F^v|^p \mid \mathfrak{A}_1\right)) \\ &= E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} E\left(\sum_{v \in V_k} |F^{iv}|^p \mid \mathfrak{A}_1\right)\right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 52}}{\leq} E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} E\left(\sum_{v \in V_k} C_1^p \cdot |F^{(i),v}|^p \mid \mathfrak{A}_1\right)\right) \\ &= E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} C_1^p \cdot E\left(\sum_{v \in V_k} |F^{(i),v}|^p\right)\right) \\ &= E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} C_1^p \cdot E\left(\sum_{v \in V_k} |F^v|^p\right)\right) \\ &= E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} C_1^p\right) \cdot E(G_k) \\ &= \alpha^p \cdot E(G_k). \end{aligned}$$

Aus $G_0 \equiv 1$ erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung $E(G_k) \leq \alpha^{kp}$.

Weil nach Definition $G_k \geq L_k^p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} P(L_k \geq \alpha^{\frac{k}{2}}) &= P(L_k^p \geq \alpha^{\frac{k}{2}p}) \\ &\stackrel{\text{Markoff}}{\leq} \alpha^{-\frac{k}{2}p} \cdot E(L_k^p) \\ &\leq \alpha^{-\frac{k}{2}p} \cdot E(G_k) \\ &\leq \alpha^{\frac{k}{2}p}, \end{aligned}$$

also die erste Behauptung.

Für die zweite Aussage schätze für $k \in \mathbb{N}$ mit der Minkowski-Ungleichung ab

$$E(L_k) \leq (E(L_k^p))^{\frac{1}{p}} \leq (E(G_k))^{\frac{1}{p}} \leq (\alpha^{pk})^{\frac{1}{p}} = \alpha^k.$$

□

5.2 Abschätzung

In diesem Unterabschnitt definieren wir mit Hilfe des gerade eingeführten Baumes Zufallsgrößen X^n mit Verteilung $K^n(\delta_0)$. Anschließend schätzen wir den Abstand von $X^n(s)$ und $X^n(t)$ für $s, t \in I$ ab.

Alle Gleichungen und Abschätzungen sind im folgenden ω -weise.

Zuerst betrachten wir die Hintereinanderausführung der B_i^v :

Definition 55

Für $w, v \in V$ definiere

$$\begin{aligned} B^{w, \emptyset}(s) &:= s \\ B^{w, vi}(s) &:= B_i^{wv} \circ B^{w, v}(s). \end{aligned} \tag{82}$$

Es ist für alle $w \in V$ und $i \in \mathbb{N}$

$$B^{w, i} = B_i^w. \tag{83}$$

Lemma 56

Es gilt für alle $w, v \in V$, $i \in \mathbb{N}$, und $s \in I$

$$B^{wi, v} \circ B_i^w(s) = B^{w, iv}(s). \tag{84}$$

Beweis: Der Beweis läuft durch Induktion über $|v|$.

IA: $v = \emptyset$

Es gilt für alle $w \in V$ und $i \in \mathbb{N}$

$$B^{wi, \emptyset} \circ B_i^w(s) = B_i^w(s) = B^{w, (i)}(s).$$

IS: $v \rightarrow vj$

Sei $v \in V$, so daß für alle $w \in V$ und $i \in \mathbb{N}$ die Gleichung (84) gilt.

Sei $w \in V$, sei $i \in \mathbb{N}$.

Dann gilt für alle $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} B^{wi,vj} \circ B_i^w(s) &= B_j^{(wi)v} \circ B^{wi,v} \circ B_i^w(s) \\ &\stackrel{IV}{=} B_j^{w(iv)} \circ B^{w,iv}(s) \\ &= B^{w,ivj}(s). \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma gibt den Zusammenhang der $B^{\emptyset,v}$ mit den $F^{v,w}$ an:

Lemma 57

Es gilt für alle $v, w \in V$ und $s \in I$

$$s \in F^{vw} \quad \Rightarrow \quad B^{\emptyset,v}(s) \in F^{v,w}. \quad (85)$$

Beweis: Wir beweisen das Lemma durch Induktion über $|v|$.

IA: $v = \emptyset$.

Die Aussage folgt aus $B^{\emptyset,\emptyset}(s) = s$ für alle $s \in I$.

IV: $v \rightarrow vi$.

Sei $v \in V$ so daß für alle $w \in V$ und $s \in I$ gilt:

$$s \in F^{vw} \quad \Rightarrow \quad B^{\emptyset,v}(s) \in F^{v,w}.$$

Sei $w \in V, i \in \mathbb{N}$ und $s \in F^{viw}$.

Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$B^{\emptyset,v}(s) \in F^{v,iw}$$

und damit nach Gleichung (70)

$$B^{vi}(s) = B_i^{\emptyset,v} \circ B^{\emptyset,v}(s) \in B_i^{\emptyset}(F^{v,iw}) = F^{vi,w}.$$

□

Wir werden nun anhand der Baumstruktur Zufallsgrößen $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugen die die Verteilung $K^n(\delta_0)$ haben.

Definition 58

Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V$

$$X_v^n := \begin{cases} 0 & \text{falls } |v| \geq n, \\ \left(\sum_{i \in N^v(s)} A_i^v(s) \cdot X_{vi}^n(B_i^v(s)) + C^v(s) \right)_{s \in I} & \text{falls } |v| < n. \end{cases} \quad (86)$$

Setze $X^n := X_{\emptyset}^n$.

Setze analog zum Abschnitt 4 für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V$

$$M_v^n := \sup_{s \in I} X_v^n(s). \quad (87)$$

Nach Definition von K haben die X^n die Verteilung $K^n(\delta_0)$.
Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V$ mit $|v| \geq n$

$$X_v^n \stackrel{\mathcal{D}}{=} X^{n-|v|}.$$

Aus der Unabhängigkeit der $\left((I_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i^v)_{i \in \mathbb{N}}, C^v \right)_{v \in V}$ folgt:
Für alle $k \in \mathbb{N}$ sind $(X_v^n)_{v \in V_k}$, $(M_v^n)_{v \in V_k}$ und für alle $w \in V$ auch $(B^{w,v})_{v \in V_k}$,
 $(F^{w,v})_{v \in V_k}$ Familien unabhängiger Zufallsgrößen.
Aus der Gleichverteilung folgt für alle $v \in V$, daß $(B^{w,v})_{w \in V}$ und $(F^{w,v})_{w \in V}$
Familien von gleichverteilten Zufallsgrößen sind.

Mit Hilfe der Rekursionsgleichung (86) lassen sich die X_v^n direkt hinschreiben:

Lemma 59

Es gilt für alle $v \in V$, alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $s \in I$

$$X_v^{|v|+n}(s) = \sum_{\substack{|w| < n \\ s \in F^{v,w}}} C^{vw} \circ B^{v,w}(s) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{w_k}^{vw|k-1} \circ B^{v,w|k-1}(s). \quad (88)$$

Beweis: Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n :

IA: $n = 0$

Nach Definition ist für alle $v \in V$ und alle $s \in I$

$$\begin{aligned} X_v^{|v|+0}(s) &= 0 \\ &= \sum_{\substack{|w| < 0 \\ s \in F^{v,w}}} C^{vw} \circ B^{v,w}(s) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{w_k}^{vw|k-1} \circ B^{v,w|k-1}(s) \end{aligned}$$

da die Summe leer ist.

IS: $n \rightarrow n + 1$

Sei $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $v \in V$ und alle $s \in I$ die Gleichung (88) erfüllt ist.

Sei $v \in V$, sei $s \in I$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} X_v^{|v|+n+1}(s) &= \sum_{i \in N^v(s)} A_i^v(s) \cdot X_{vi}^{|v|+n+1}(B_i^v(s)) + C^v(s) \\ &= \sum_{i \in N^v(s)} A_i^v(s) \cdot X_{vi}^{|v|+n}(B_i^v(s)) + C^v(s). \end{aligned}$$

Es ist für $w = \emptyset$

$$C^v(s) = C^{vw} \circ B^{v,w}(s) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{w_k}^{vw|_{k-1}} \circ B^{v,w|_{k-1}}(s).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_{vi}^{|vi|+n}(B_i^v(s)) &= \sum_{\substack{|w| < n \\ B_i^v(s) \in F^{vi,w}}} C^{v iw} \circ B^{vi,w}(B_i^v(s)) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{w_k}^{v iw|_{k-1}} \circ B^{vi,w|_{k-1}}(B_i^v(s)) \\ &= \sum_{\substack{0 < |iw| < n+1 \\ B_i^v(s) \in F^{vi,w}}} C^{v iw} \circ B^{v,iw}(s) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{(iw)_{k+1}}^{v(iw)|_k} \circ B^{v,(iw)|_k}(s) \\ &= \sum_{\substack{0 < |iw| < n+1 \\ B_i^v(s) \in F^{vi,w}}} C^{v iw} \circ B^{v,iw}(s) \cdot \prod_{k=2}^{|iw|} A_{(iw)_k}^{v(iw)|_{k-1}} \circ B^{v,(iw)|_{k-1}}(s). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} X_v^{|v|+n+1}(s) &= C^v(s) + \sum_{i \in N^v(s)} A_i^v(s) \sum_{\substack{0 < |iw| < n+1 \\ B_i^v(s) \in F^{vi,w}}} C^{v iw} \circ B^{v,iw}(s) \\ &\quad \cdot \prod_{k=2}^{|iw|} A_{(iw)_k}^{v(iw)|_{k-1}} \circ B^{v,(iw)|_{k-1}}(s) \\ &= C^v(s) + \sum_{i \in N^v(s)} \sum_{\substack{0 < |iw| < n+1 \\ B_i^v(s) \in F^{vi,w}}} C^{v iw} \circ B^{v,iw}(s) \\ &\quad \cdot \prod_{k=1}^{|iw|} A_{(iw)_k}^{v(iw)|_{k-1}} \circ B^{v,(iw)|_{k-1}}(s) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq |w| < n+1 \\ s \in F^{v,iw}}} C^{vw} \circ B^{v,w}(s) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{w_k}^{vw|_{k-1}} \circ B^{v,w|_{k-1}}(s). \end{aligned}$$

□

Wir schätzen als nächstes $|X^n(s) - X^n(t)|$ für dichte s, t mit Hilfe der Rekursionsgleichung ab.

Lemma 60

Es gelte

$$\begin{aligned} C_1 &:= \sup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{esssup}_{s, t \in I_i} \frac{|A_i(s) - A_i(t)|}{|s - t|} < \infty \\ C_2 &:= \operatorname{esssup}_{s, t \in I} \frac{|C(s) - C(t)|}{|s - t|} < \infty. \end{aligned} \quad (89)$$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$, sei $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$.

Sind $s, t \in I$ mit $s \stackrel{k}{\sim} t$, dann gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} &|X^n(s) - X^n(t)| \\ &\leq \sum_{\substack{|v| < k \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|_{j-1}} \circ B^{\emptyset, v|_{j-1}}(s)| \\ &\quad \cdot \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^v(B^{\emptyset, v}(s))} M_{vl}^n \right) \\ &\quad + 2 \cdot \sum_{\substack{|v| = k \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|_{j-1}} \circ B^{\emptyset, v|_{j-1}}(s)| \cdot M_v^n \end{aligned} \quad (90)$$

Beweis: Wir werden die Aussage allgemeiner beweisen:

Für alle $w \in V$, $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ und $s, t \in I$ mit $s \stackrel{k}{\sim} t$ gilt:

$$\begin{aligned} &|X_w^{|w|+n}(s) - X_w^{|w|+n}(t)| \\ &\leq \sum_{\substack{|v| < k \\ s \in F^{w, v}}} |B^{w, v}(s) - B^{w, v}(t)| \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{wv|_{j-1}} \circ B^{w, v|_{j-1}}(s)| \\ &\quad \cdot \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^{wv}(B^{w, v}(s))} M_{wvl}^{|w|+n} \right) \\ &\quad + 2 \cdot \sum_{\substack{|v| = k \\ s \in F^{w, v}}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{wv|_{j-1}} \circ B^{w, v|_{j-1}}(s)| \cdot M_{wv}^{|w|+n}. \end{aligned} \quad (90')$$

Für $w = \emptyset$ erhalten wir aus (90') die Gleichung (90).

Wir beweisen die Aussage per Induktion über n und k :

IA: $n = 0$

Sei $w \in V$. Dann ist wegen $\mathfrak{L}(X_w^{|w|}) = \delta_0$ für alle $s, t \in I$

$$|X_w^{|w|}(s) - X_w^{|w|}(t)| = |0 - 0| = 0.$$

IA: $k = 0$

Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Sei $w \in V$. Dann gilt für alle $s, t \in I$

$$|X_w^{|w|+n}(s) - X_w^{|w|+n}(t)| \leq 2 \cdot M_w^{|w|+n}.$$

IS: $(n, k) \rightarrow (n + 1, k + 1)$

Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, so daß für alle $w \in V$ die Gleichung (90') gilt.

Sei $w \in V$, seien $s, t \in I$ mit $s \stackrel{k+1}{\sim} t$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} & |X_w^{|w|+n+1}(s) - X_w^{|w|+n+1}(t)| \\ & \leq \left| \sum_{i \in N^w(s)} A_i^w(s) \cdot X_{wi}^{|w|+n+1}(B_i^w(s)) + C^w(s) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i \in N^w(t)} A_i^w(t) \cdot X_{wi}^{|w|+n+1}(B_i^w(t)) - C^w(t) \right| \\ & \leq \sum_{i \in N^w(s)} |A_i^w(s)| \cdot \left| X_{wi}^{|w|+n+1}(B_i^w(s)) - X_{wi}^{|w|+n+1}(B_i^w(t)) \right| \\ & \quad + \sum_{i \in N^w(s)} |A_i^w(s) - A_i^w(t)| \cdot |X_{wi}^{|w|+n+1}(B_i^w(t))| \\ & \quad + |C^w(s) - C^w(t)| \\ & \leq \sum_{i \in N^w(s)} |A_i^w(s)| \cdot \left| X_{wi}^{|wi|+n}(B_i^w(s)) - X_{wi}^{|wi|+n}(B_i^w(t)) \right| \\ & \quad + C_1 |s - t| \sum_{i \in N^w(s)} M_{wi}^{|w|+n+1} \\ & \quad + C_2 |s - t| \end{aligned}$$

Nun setzen wir die Induktionsvoraussetzung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
& |X_w^{|w|+n+1}(s) - X_w^{|w|+n+1}(t)| \\
& \leq \sum_{i \in N^w(s)} |A_i^w(s)| \sum_{\substack{|v| < k \\ B_i^w(s) \in F^{wi,v}}} |B^{wi,v}(B_i^w(s)) - B^{wi,v}(B_i^w(t))| \\
& \quad \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{wiv|j-1} \circ B^{wi,v|j-1}(B_i^w(s))| \\
& \quad \cdot \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^{wiv}(B^{wi,v}(B_i^w(s)))} M_{wivl}^{|wi|+n} \right) \\
& + 2 \cdot \sum_{i \in N^w(s)} |A_i^w(s)| \sum_{\substack{|v| = k \\ B_i^w(s) \in F^{wi,v}}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{wiv|j-1} \circ B^{wi,v|j-1}(B_i^w(s))| \cdot M_{wiv}^{|wi|+n} \\
& + |s - t| \cdot \left(C_2 + C_1 \sum_{i \in N^w(s)} M_{wi}^{|w|+n+1} \right) \\
& = \sum_{i \in N^w(s)} \sum_{\substack{0 < |iv| < k+1 \\ s \in F^{w,iv}}} |B^{w,iv}(s) - B^{w,iv}(t)| \\
& \quad \cdot |A_i^w(s)| \cdot \prod_{j=2}^{|iv|} |A_{(iv)_j}^{w(iv)|j-1} \circ B^{w,(iv)|j-1}(s)| \\
& \quad \cdot \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^{wiv}(B^{w,iv}(s))} M_{wivl}^{|w|+n+1} \right) \\
& + 2 \cdot \sum_{i \in N^w(s)} \sum_{\substack{|iv| = k+1 \\ s \in F^{w,iv}}} |A_i^w(s)| \cdot \prod_{j=2}^{|iv|} |A_{(iv)_j}^{w(iv)|j-1} \circ B^{w,(iv)|j-1}(s)| \cdot M_{wiv}^{|w|+n+1} \\
& + |s - t| \cdot \left(C_2 + C_1 \sum_{i \in N^w(s)} M_{wi}^{|w|+n+1} \right) \\
& = \sum_{\substack{0 \leq |v| < k+1 \\ s \in F^{w,v}}} |B^{w,v}(s) - B^{w,v}(t)| \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{wv|j-1} \circ B^{w,v|j-1}(s)| \\
& \quad \cdot \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^{wv}(B^{w,v}(s))} M_{wvl}^{|w|+n+1} \right) \\
& + 2 \cdot \sum_{\substack{|v| = k+1 \\ s \in F^{w,v}}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{wv|j-1} \circ B^{w,v|j-1}(s)| \cdot M_{wv}^{|w|+n+1}
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

□

Um $|X^n(s) - X^n(t)|$ gleichmäßig abzuschätzen, brauchen wir zusätzlich das folgende Lemma

Lemma 61

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$E\left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=k \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^k |A_{v_j}^{v|_{j-1}} \circ B^{\emptyset, v|_{j-1}}(s)|\right) \leq \left(E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)|\right)^k. \quad (91)$$

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über k .

IA: $k = 0$

Es ist

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=0 \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^0 |A_{v_j}^{v|_{j-1}} \circ B^{\emptyset, v|_{j-1}}(s)|\right) \\ = 1 \\ = \left(E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)|\right)^0. \end{aligned}$$

IS: $k \rightarrow k + 1$

Sei $k \in \mathbb{N}_0$, so daß (91) erfüllt ist.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& E\left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=k+1 \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^{k+1} |A_{v_j}^{v|_{j-1}} \circ B^{\emptyset, v|_{j-1}}(s)|\right) \\
&= E\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} \sum_{\substack{|v|=k \\ s \in F^{iv}}} A_i^\emptyset(s) \cdot \prod_{j=2}^{k+1} |A_{(iv)_j}^{(iv)|_{j-1}} \circ B^{\emptyset, (iv)|_{j-1}}(s)|\right) \\
&= E\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} A_i^\emptyset(s) \cdot \sum_{\substack{|v|=k \\ B_i^\emptyset(s) \in F^{(i), v}}} \prod_{j=2}^{k+1} |A_{(iv)_j}^{(iv)|_{j-1}} \circ B^{(i), v|_{j-2}} \circ B_i^\emptyset(s)|\right) \\
&\leq E\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} A_i^\emptyset(s) \cdot \sup_{t \in I} \sum_{\substack{|v|=k \\ t \in F^{(i), v}}} \prod_{j=1}^k |A_{v_j}^{iv|_{j-1}} \circ B^{(i), v|_{j-1}}(t)|\right) \\
&= E\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} A_i^\emptyset(s) \cdot \sup_{t \in I} E\left(\sum_{\substack{|v|=k \\ t \in F^{(i), v}}} \prod_{j=1}^k |A_{v_j}^{iv|_{j-1}} \circ B^{(i), v|_{j-1}}(t)|\right)\right) \\
&\stackrel{IV}{\leq} E\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} A_i^\emptyset(s) \cdot \sup_{t \in I} (E \sup_{r \in I} \sum_{i \in N(r)} |A_i(r)|)^k\right) \\
&= E\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} A_i^\emptyset(s) \cdot (E \sup_{r \in I} \sum_{i \in N(r)} |A_i(r)|)^k\right) \\
&= (E \sup_{r \in I} \sum_{i \in N(r)} |A_i(r)|)^{k+1}.
\end{aligned}$$

□

Nun folgt die abschließende Abschätzung von $|X^n(s) - X^n(t)|$.

Satz 62

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 43:

$$\text{esssup} \left| \bigcup_{s \in I} N(s) \right| < \infty, \quad (61)$$

$$P\left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \geq 1\right) = 0 \quad \text{und} \quad (62)$$

$$\sup_{s \in I} |C(s)| \text{ habe exponentielles Endverhalten.} \quad (63)$$

Weiter gelte

$$\begin{aligned}
& \sup_{i \in \mathbb{N}} \text{esssup}_{s, t \in I_i} \frac{|A_i(s) - A_i(t)|}{|s - t|} < \infty \\
& \text{esssup}_{s, t \in I} \frac{|C(s) - C(t)|}{|s - t|} < \infty,
\end{aligned} \quad (89)$$

$$E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| < 1 \quad (92)$$

und es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit

$$E \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \sup_{s, t \in I_i} \left(\frac{|s - t|}{|B_i(s) - B_i(t)|} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} < 1. \quad (93)$$

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P \left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} |X^n(s) - X^n(t)| > \varepsilon \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (94)$$

Beweis: Nach Markoff reicht es zu zeigen:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E \left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} |X^n(s) - X^n(t)| \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (94')$$

Nach Lemma 44 existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V$

$$EM_v^n \leq \lambda.$$

Definiere wie in Lemma 60

$$C_1 := \sup_{i \in \mathbb{N}} \text{esssup}_{s, t \in I_i} \frac{|A_i(s) - A_i(t)|}{|s - t|},$$

$$C_2 := \text{esssup}_{s, t \in I} \frac{|C(s) - C(t)|}{|s - t|}.$$

Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $v \in V$ und $s \in I$

$$\begin{aligned} & E \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^v(B^{\theta, v}(s))} M_{vl}^n \mid N^v, B^{\theta, v} \right) \\ &= E \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^v(B^{\theta, v}(s))} E(M_{vj}^n \mid N^v, B^{\theta, v}) \right) \\ &\leq E \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^v(B^{\theta, v}(s))} \lambda \mid N^v, B^{\theta, v} \right) \\ &\leq E \left(C_2 + C_1 \cdot \bar{N} \cdot \lambda \mid N^v, B^{\theta, v} \right) \\ &= C_2 + C_1 \cdot \bar{N} \cdot \lambda \\ &=: C_M \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Seien $\gamma, k \in \mathbb{N}$ mit $\gamma \leq k$.

Dann gilt nach Gleichung (90) und weil die A_i, B_i durch 1 beschränkt sind:

$$\begin{aligned}
& E\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} |X^n(s) - X^n(t)| \right) \\
& \leq E\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{|v| < k \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|j-1} \circ B^{\emptyset, v|j-1}(s)| \right. \\
& \quad \cdot \left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^v(B^{\emptyset, v}(s))} M_{vl}^n \right) \\
& \quad \left. + 2 \cdot \left(\sum_{\substack{|v|=k \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|j-1} \circ B^{\emptyset, v|j-1}(s)| \cdot M_v^n \right) \right) \\
& \leq E\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{|v| < k \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|j-1} \circ B^{\emptyset, v|j-1}(s)| \right. \\
& \quad \cdot E\left(C_2 + C_1 \cdot \sum_{l \in N^v(B^{\emptyset, v}(s))} M_{vl}^n \mid N^v, B^{\emptyset, v}, F^v \right) \\
& \quad \left. + 2 \cdot \left(\sum_{\substack{|v|=k \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|j-1} \circ B^{\emptyset, v|j-1}(s)| \cdot M_v^n \right) \right) \\
& \leq E\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{|v| < \gamma \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \cdot C_M \right) \\
& \quad + E\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{\gamma \leq |v| < k \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \cdot C_M \right) \\
& \quad + 2 \cdot E\left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=k \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|j-1} \circ B^{\emptyset, v|j-1}(s)| \cdot M_v^n \right) \\
& =: I + II + III.
\end{aligned}$$

Es seien $s, t \in I$ mit $s \stackrel{k}{\sim} t$. Sei $j \in \{0, \dots, \gamma\}$, sei $v \in V_j$ mit $s, t \in F^v$. Dann existiert nach Lemma 47 ein $w \in V$ mit $|w| + |v| = k$ und $s, t \in F^{vw}$. Damit sind nach Lemma 57 $B^{\emptyset, v}(s), B^{\emptyset, v}(t) \in F^{v, w}$, also gilt

$$|B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \leq |F^{v, w}|.$$

Definiere $\alpha := \sup_{s, t \in I_i} \left(\frac{|s-t|}{|B_i(s) - B_i(t)|} \right)^p$ (nach (93)) und $\beta := E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)|$ (nach (92)).

Es folgt

$$\begin{aligned}
I &= C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} E \left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{|v|=j \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \right) \\
&\leq C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} E \left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{|v|=j \\ s \in F^v}} \sup_{w \in V_{k-j}} |F^{v, w}| \right) \\
&= C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} E \left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=j \\ s \in F^v}} E \left(\sup_{w \in V_{k-j}} |F^{v, w}| \right) \right) \\
&= C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} E \left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=j \\ s \in F^v}} E \left(\sup_{w \in V_{k-j}} |F^w| \right) \right) \\
&\leq C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} E \left(\sup_{s \in I} |\{v \in V_j \mid s \in F^v\}| \right) \cdot E \left(\sup_{w \in V_{k-j}} |F^w| \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 48}}{\leq} C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} E \bar{N}^j \cdot E(L_{k-j}) \\
&\stackrel{\text{Lemma 54}}{\leq} C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} \bar{N}^j \cdot 2 \cdot \alpha^{\frac{k-j}{2}} \\
&= \alpha^{\frac{k}{2}} \cdot 2 \cdot C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} \bar{N}^j \cdot \alpha^{-\frac{j}{2}} \\
&\xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Für den zweiten Term ergibt sich aus Lemma 61

$$\begin{aligned}
II &= C_M \cdot \sum_{j=\gamma}^{k-1} E \left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} \sum_{\substack{|v|=j \\ s \in F^v}} |B^{\emptyset, v}(s) - B^{\emptyset, v}(t)| \right) \\
&\stackrel{\text{Lemma 61}}{\leq} C_M \cdot \sum_{j=\gamma}^{k-1} \beta^j \\
&= C_M \cdot \left(\frac{1 - \beta^k}{1 - \beta} - \frac{1 - \beta^\gamma}{1 - \beta} \right) \\
&\leq C_M \cdot \frac{\beta^\gamma}{1 - \beta} \\
&\xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Für den dritten Term ergibt sich aus Lemma 61

$$\begin{aligned}
 III &\leq 2 \cdot E \left(\sup_{s \in I} \sum_{\substack{|v|=k \\ s \in F^v}} \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v_{|j-1}} \circ B^{\theta, v_{|j-1}}(s)| \cdot \lambda \right) \\
 &\stackrel{\text{Lemma 61}}{\leq} 2 \cdot \lambda \cdot \beta^k \\
 &\longrightarrow_{k \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 &E \left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \stackrel{k}{\sim} t}} |X^n(s) - X^n(t)| \right) \\
 &\leq \alpha^{\frac{k}{2}} \cdot 2 \cdot C_M \cdot \sum_{j=0}^{\gamma-1} \bar{N}^j \cdot \alpha^{-\frac{j}{2}} + \beta^\gamma \cdot \frac{C_M}{1-\beta} + \beta^k \cdot 2 \cdot \lambda \\
 &\longrightarrow_{k, \gamma \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

□

Zum Schluß schätzen wir die ε -Sprünge der X^n ab.

Definition 63

Für alle $\varepsilon > 0$, $S \in \mathfrak{S}$ und $f \in \mathbb{R}^S$ definiere

$$\begin{aligned}
 N_{\varepsilon, S}(f) &:= \sup \{ r \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \dots, s_r, t_1, \dots, t_r \in S, \\
 &\quad s_1 < t_1 < s_2 < \dots < t_n, \\
 &\quad \forall i \in \{1, \dots, r\} : |f(s_i) - f(t_i)| > \varepsilon \}
 \end{aligned}$$

als die maximale Anzahl an disjunkten Sprüngen in $f|_S$ von mindestens ε .

Satz 64

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 62:

$$\text{esssup} \left| \bigcup_{s \in I} N(s) \right| < \infty, \tag{61}$$

$$P \left(\sup_{s \in I} \sum_{i \in N(s)} |A_i(s)| \geq 1 \right) = 0, \tag{62}$$

$$\sup_{s \in I} |C(s)| \text{ habe exponentielles Endverhalten,} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}
 &\sup_{i \in \mathbb{N}} \text{esssup}_{s, t \in I_i} \frac{|A_i(s) - A_i(t)|}{|s - t|} < \infty, \\
 &\text{esssup}_{s, t \in I} \frac{|C(s) - C(t)|}{|s - t|} < \infty,
 \end{aligned} \tag{89}$$

$$E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| < 1 \quad (92)$$

und es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit

$$E \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \sup_{s, t \in I_i} \left(\frac{|s - t|}{|B_i(s) - B_i(t)|} \right)^p \right) < 1. \quad (93)$$

Dann gilt für die Folge $(\kappa_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (siehe Definition 50), daß für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathfrak{S}} \sup_{n \in \mathbb{N}} P(N_{\varepsilon, S}(X^n(S)) > \kappa_k + 1) = 0. \quad (95)$$

Beweis: Sei $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie in Definition 58 definiert. Sei $\varepsilon > 0$.

Da die Marginalverteilungen der X^n für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Marginalverteilungen von X in Verteilung konvergieren reicht es, die Behauptung für X^n gleichmäßig in n zu zeigen.

Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $S \in \mathfrak{S}$ und alle $\omega \in \Omega$

$$\begin{aligned} N_{\varepsilon, S}(f) &\leq \sup \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists (s_i)_1^r, (t_i)_1^r \in S \quad s_1 < t_1 < s_2 < \dots < t_r \right. \\ &\quad \left. \forall i \in \{1, \dots, r\} : |f(s_i) - f(t_i)| > \varepsilon \right\} \\ &\leq \sup \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists (s_i)_1^r, (t_i)_1^r \in S \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} : \right. \\ &\quad \left. \exists v \in V_k(\omega) : (s_i \in F^v(\omega), t_i \notin F^v(\omega)) \right. \\ &\quad \left. \vee (s_i \notin F^v(\omega), t_i \in F^v(\omega)) \right\} \\ &\quad + \sup \left\{ r \in \mathbb{N} \mid \exists (s_i)_1^r, (t_i)_1^r \in S \quad \forall i \in \{1, \dots, r\} : \right. \\ &\quad \left. s_i \overset{k}{\sim} t_i \wedge |f(s_i) - f(t_i)| > \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Lemma 51}}{\leq} \kappa_k + N_{\varepsilon, S}^*(f, k).$$

Also gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq k}$ und $S \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} &P(N_{\varepsilon, S}(X^n(S)) \geq \kappa_k + 1) \\ &\leq P(N_{\varepsilon, S}^*(X^n(S), k) \geq 1) \\ &= P(\exists s, t \in S : s \overset{k}{\sim} t \wedge |X^n(s) - X^n(t)| > \varepsilon) \\ &= P\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \overset{k}{\sim} t}} |X^n(s) - X^n(t)| > \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Nach Satz 62 gilt damit für alle $S \in \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathfrak{S}} \sup_{n \in \mathbb{N}} P\left(N_{\varepsilon, S}(X^n(S)) \geq \kappa_k + 1 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{S \in \mathfrak{S}} \sup_{n \in \mathbb{N}} P\left(\sup_{\substack{s, t \in I \\ s \overset{k}{\sim} t}} |X^n(s) - X^n(t)| > \varepsilon \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

5.3 Find

Wie wir schon in Abschnitt 3.3 bemerkten, haben die A_i und C als Werte nur konstante Funktionen. Daher gilt

$$\sup_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{esssup}_{s, t \in I_i} \frac{|A_i(s) - A_i(t)|}{|s - t|} = 0$$

und

$$\operatorname{esssup}_{s, t \in I} \frac{|C(s) - C(t)|}{|s - t|} = 0.$$

Es ist (siehe Lemma 61)

$$E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| = E(U \vee (1 - U)) = \frac{3}{4} < 1.$$

Weiter ist für alle $p \in (1, \infty)$ (siehe Lemma 54)

$$\begin{aligned} & E \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \sup_{s, t \in I_i} \left(\frac{|s - t|}{|B_i(s) - B_i(t)|} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= E \left(\left(\sup_{s, t \in [0, U)} \left(\frac{|s - t|}{\left| \frac{s}{U} - \frac{t}{U} \right|} \right)^p + \sup_{s, t \in [U, 1)} \left(\frac{|s - t|}{\left| \frac{1-s}{1-U} - \frac{1-t}{1-U} \right|} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &= E(U^p + (1 - U)^p)^{\frac{1}{p}} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Durch zwei Besonderheiten des FIND-Prozesses vereinfacht sich die Abschätzung $|X^n(s) - X^n(t)|$ sehr:

1. Da die I_i disjunkt sind, liegt für alle $k \in \mathbb{N}$ jedes $s \in I$ nur in genau einem F^v mit $v \in V_k$;
2. Weil die A_i und das C als Werte nur konstante Funktionen haben, ist der erste Term der Abschätzung (90) gleich 0.

Damit gilt: Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $s, t \in I$ mit $s \stackrel{k}{\sim} t$ existiert ein $v \in V_k$ mit $s, t \in F^v$ und es gilt:

$$|X^n(s) - X^n(t)| \leq 2 \cdot M_v^n \cdot \prod_{j=1}^{|v|} |A_{v_j}^{v|j-1} \circ B^{\emptyset, v|j-1}(s)|.$$

6 Der Hauptsatz

Dieser Abschnitt enthält den Hauptsatz der Arbeit der besagt, daß es einen Prozeß X mit Werten in D gibt, der die Fixpunktgleichung 2 erfüllt, unter Endlichkeitsbedingungen und unter der Voraussetzung, daß die $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Kontraktionsbedingung erfüllen.

Theorem 65

Sei $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in der Menge der halboffenen Intervalle $[a, b) \subseteq I$. Die zu den I_i gehörige σ -Algebra sei die, so daß die Zufallsfunktionen $\mathbb{1}_{I_i}$ mit Werten in D für alle $i \in \mathbb{N}$ meßbar sind.

Sei $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in $C([-1, 1])$,

sei $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Familie von Zufallsgrößen mit Werten in $C_{\nearrow}(I)$,

sei C Zufallsgröße mit Werten in C .

Sei $(N(s))_{s \in I} := (\{i \in \mathbb{N} \mid s \in I_i\})_{s \in I}$.

Es gelte

$$\text{esssup}_{\omega} |\{i \in \mathbb{N} \mid I_i(\omega) \neq \emptyset\}| < \infty, \quad (21)$$

$$\text{esssup} \left| \bigcup_{s \in I} N(s) \right| < \infty, \quad (61)$$

$$P\left(\sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| \geq 1\right) = 0, \quad (62)$$

$$\sup_{s \in I} |C(s)| \text{ habe exponentielles Endverhalten.} \quad (63)$$

Außerdem gelte

$$\begin{aligned} \sup_{i \in \mathbb{N}} \text{esssup} \sup_{s, t \in I_i} \frac{|A_i(s) - A_i(t)|}{|s - t|} < \infty, \\ \text{esssup}_{s, t \in I} \frac{|C(s) - C(t)|}{|s - t|} < \infty \end{aligned} \quad (89)$$

und es existiere ein $p \in [1, \infty)$ mit

$$E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \sup_{s, t \in I_i} \frac{|s - t|^p}{|B_i(s) - B_i(t)|^p}\right) < 1. \quad (93)$$

Dann gibt es einen Prozeß $(X_s)_{s \in I}$ mit Werten in D , der Fixpunkt der Gleichung

$$(X(s))_{s \in I} \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in I} \quad (2)$$

ist, mit X_i uiv zu X und unabhängig zu $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Dieser Prozeß X hat exponentielles Endverhalten.

Der Hauptsatz gibt Bedingungen an, unter denen ein Fixpunkt vom Operator K aus Abschnitt 3 existiert.

Für den Beweis werden wir im ersten Schritt zeigen, daß $(K^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge besitzt. Am Ende von Abschnitt 3 haben wir gesehen, daß die endlichdimensionalen Marginalien dieser Cauchyfolge gegen eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen konvergiert. Um zu zeigen, daß es zu dieser Familie ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathfrak{D} gibt, verwenden wir anschließend das folgende Theorem, bewiesen von Dubins [DH]:

Theorem 66 (Dubins)

Sei $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{G}}$ Familie von konsistenten Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Dann existiert ein stochastischer Prozeß $(X_s)_{s \in I}$ mit Werten in (D, \mathfrak{D}) und endlichen Marginalverteilungen $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{G}}$ genau dann, wenn gilt:

1. $(\psi_S)_{S \in \mathfrak{G}}$ ist rechtsstetig in Verteilung und
2. für alle $\varepsilon > 0$ und alle $\beta > 0$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$ so daß für alle $S \in \mathfrak{G}$ gilt

$$\psi_S(\{g \in \mathbb{R}^S \mid N_{\varepsilon, S}(g) > k\}) < \beta.$$

Für den Beweis vom Hauptsatz benötigen wir, daß $(K^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Diese Aussage werden wir über die Formel 88 für die X^n beweisen. An Notation verwenden wir dieselbe wie im vorherigen Abschnitt 5.

Lemma 67

Es gelte

$$E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| < 1, \tag{92}$$

$$E \sup_{s \in I} |C(s)| < \infty. \tag{28}$$

Dann ist $(K^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (\mathfrak{M}_1, D_1) .

Beweis: Wegen $\delta_0 \in \mathfrak{M}_1$ ist nach Satz 24 $(K^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in (\mathfrak{M}_1, D_1) .

Um die Cauchy-Eigenschaft zu beweisen, zeigen wir für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$D_1(K^n(\delta_0), K^{n+1}(\delta_0)) < E\bar{C} \cdot \left(E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| \right)^n.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Nach Lemma 59 gilt für alle $s \in I$

$$\begin{aligned}
& E|(X^{n+1} - X^n)(s)| \\
&= E \left| \sum_{\substack{|w|=n \\ s \in F^{\emptyset,w}}} C^w \circ B^{\emptyset,w}(s) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s) \right| \\
&\leq E \sum_{\substack{|w|=n \\ s \in F^{\emptyset,w}}} E(|C^w \circ B^{\emptyset,w}(s)| | B^{\emptyset,w}(s)) \cdot \prod_{k=1}^{|w|} |A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s)| \\
&\leq \sup_{t \in [0,1]} E|C^w(t)| \cdot E \sum_{\substack{|w|=n \\ s \in F^{\emptyset,w}}} \prod_{k=1}^{|w|} |A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s)|
\end{aligned}$$

wegen der Unabhängigkeit der $((I_i^w)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i^w)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i^w)_{i \in \mathbb{N}}, C^w)$ in w .

Weiter gilt für alle $s \in I$

$$\begin{aligned}
& E \sum_{\substack{|w|=n \\ s \in F^{\emptyset,w}}} \prod_{k=1}^{|w|} |A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s)| \\
&= E \sum_{\substack{|w|=n-1 \\ s \in F^w}} \prod_{k=1}^{|w|} |A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s)| \cdot \sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ s \in F^{wi}}} |A_i^w \circ B^{\emptyset,w}(s)| \\
&= E \sum_{\substack{|w|=n-1 \\ s \in F^w}} \prod_{k=1}^{|w|} |A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s)| \cdot E \left(\sum_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ t \in I_i^w}} |A_i^w \circ B^{\emptyset,w}(s)| \mid B^{\emptyset,w}(s) \right) \\
&\leq E \sum_{\substack{|w|=n-1 \\ s \in F^w}} \prod_{k=1}^{|w|} |A_{w_k}^{w^{(k-1)}} \circ B^{\emptyset,w^{(k-1)}}(s)| \cdot E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)|
\end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{Induktion}}{\leq} E \left(\sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| \right)^n.$$

Also gilt für alle $s \in I$

$$|(X^{n+1} - X^n)(s)| \leq \sup_{t \in [0,1]} E|C^w(t)| \cdot E \left(\sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| \right)^n$$

und damit

$$\begin{aligned}
 D_1(K^{n+1}(\delta_0), K^n(\delta_0)) &\leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-1} E \| (X^{n+1} - X^n)(S) \|_1 \\
 &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-1} \sum_{s \in S} E |(X^{n+1} - X^n)(s)| \\
 &\leq \sup_{S \in \mathfrak{S}} |S|^{-1} \sum_{s \in S} \sup_{t \in [0,1]} E |C(t)| \cdot (E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)|)^n \\
 &= \sup_{t \in [0,1]} E |C(t)| \cdot (E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)|)^n.
 \end{aligned}$$

Wegen $E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| < 1$ ist damit $(K^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. □

Beweis vom Theorem 65:

Aus der Gleichung (62) folgt

$$E \sup_{t \in I} \sum_{i \in N(t)} |A_i(t)| < 1. \tag{92}$$

Da $\sup_{s \in I} |C(s)|$ exponentielles Endverhalten hat (63) gilt weiterhin

$$E \sup_{s \in I} |C(s)| < \infty. \tag{28}$$

Also ist nach dem Lemma 67 $(K^n(\delta_0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (\mathfrak{M}_1, D_1) bezüglich der Metrik D_1 .

Satz 19 besagt, daß eine rechtsstetige konsistente Familie $(\varphi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^S)$ existiert, so daß die Marginalverteilungen von $K^n(\delta_0)$ in d_1 gegen die φ_S konvergieren.

Auf diese Familie $(\varphi_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ wollen wir das Theorem 66 anwenden.

Die erste Bedingung ist nach Satz 19 erfüllt.

Für die zweite Bedingung verwenden wir Satz 64.

Sei $\varepsilon > 0$.

Aus der Konvergenz von $K^n(\delta_0)_S$ gegen φ_S in d_1 folgt die schwache Konvergenz von $K^n(\delta_0)_S$ gegen φ_S (siehe Satz 79). Also folgt aus Satz 64

$$\begin{aligned}
 &\sup_{S \in \mathfrak{S}} \varphi_S(\{g \in \mathbb{R}^S \mid N_{\varepsilon, S}(g) > \kappa_k + 1\}) \\
 &= \sup_{S \in \mathfrak{S}} \lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}^n(\delta_0)_S(\{g \in \mathbb{R}^S \mid N_{\varepsilon, S}(g) > \kappa_k + 1\}) \\
 &\quad \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

und damit die zweite Bedingung von Theorem 66.

Nach dem Theorem von Dubins existiert daher ein Prozeß $X = (X_s)_{s \in I}$ mit Werten in D und Marginalverteilungen φ_S .

Sei $(X^n)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von Zufallsgrößen mit $X^n \sim K^n(\delta_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung X .

Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ $(X_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von uiv Zufallsgrößen mit Verteilung X^n und unabhängig von $((I_i)_{i \in \mathbb{N}}, (A_i)_{i \in \mathbb{N}}, (B_i)_{i \in \mathbb{N}}, C)$.

Nach Lemma 5 gilt damit

$$\begin{aligned}
 X &\stackrel{\mathfrak{D}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}(X^{n+1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} K(\mathfrak{L}(X^n)) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i^n(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in S} \\
 &= \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_i^n\right)(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in S} \\
 &= \mathfrak{L}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in S} \\
 &= K(\mathfrak{L}(X)),
 \end{aligned}$$

also ist $\mathfrak{L}(X)$ Fixpunkt von K und X erfüllt die Prozeßgleichung

$$(X)_{s \in I} \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s)\right)_{s \in I}. \quad (2)$$

Da nach Satz 43 die $K^n(\delta_0)$ gleichmäßig exponentielles Endverhalten haben, hat auch $\mathfrak{L}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} K^n(\delta_0)$ exponentielles Endverhalten. □

7 Ausblick

In dieser Arbeit haben wir die Existenz eines Prozesses X , der die Fixpunktgleichung

$$(X(s))_{s \in I} \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{1}_{s \in I_i} \cdot A_i(s) \cdot X_i(B_i(s)) + C(s) \right)_{s \in I} \quad (2)$$

erfüllt, bewiesen. In der Einleitung betrachteten wir als Motivation diskrete rekursiv definierte Prozesse Y^n und deren skalierten und normierten Formen X^n . Diese X^n haben Pfade in D und sie konvergieren in L_p gegen einen Prozeß X , der die Prozeßgleichung 2 erfüllt (siehe [ER]).

Der nächste Schritt ist es zu zeigen, daß die endlichdimensionalen Marginalverteilungen $(X_S^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen X_S konvergieren. Damit läßt sich zu gegebenen $k, n \in \mathbb{N}$ die Zufallsgröße $Y^n(k)$ durch $f_n^{-1} \cdot X(\frac{k}{n})$ approximieren sowie die Güte der Approximation angeben.

Als zweites Ergebnis haben wir im Abschnitt 4 gezeigt, daß eine Zufallsgröße X mit Werten in \mathbb{R} existiert, die die Fixpunktgleichung

$$X \stackrel{\mathfrak{D}}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} A_i X_i + C$$

erfüllt mit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig identisch verteilt zu X . Von dieser Zufallsgröße X haben wir das exponentielles Endverhalten betrachtet. Weitere Untersuchung umfassen unter anderem die diskrete Approximation.

A Die Wasserstein-Metrik

In diesem Abschnitt werden wir die Wasserstein-Metrik d_p untersuchen. Die Wasserstein-Metrik ist eine Metrik auf den Wahrscheinlichkeitsmaßen auf der Borel- σ -Algebra eines separablen Banachraumes.

Im ersten Unterabschnitt bringen wir die Definition des d_p -Abstandes. Die Metrikeigenschaften beweisen wir im zweiten Unterabschnitt und untersuchen anschließend die Struktur der Familie $((\Gamma_p, d_p))_{p \geq 1}$. Im dritten Unterabschnitt betrachten wir den Zusammenhang zwischen der d_p -Konvergenz und der schwachen Konvergenz. Damit beweisen wir anschließend die Vollständigkeit von (Γ_p, d_p) . Im letzten Unterabschnitt beschäftigen wir uns mit dem Spezialfall der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$. Wir beweisen Abschätzungen über die $\|\cdot\|_p$ -Normen, Abschätzungen über die Dimensionen und geben eine explizite Formel für den d_p -Abstand in dem Fall $d = 1$ an.

A.1 Der Wasserstein-Abstand d_p

Sei $(B, \|\cdot\|)$ ein endlichdimensionaler separabler Banachraum, sei \mathfrak{B} die zugehörige Borel- σ -Algebra.

Definition 68

Für alle $p \in [1, \infty)$ definiere

$$\Gamma_p^{\mathfrak{B}} := \left\{ \gamma \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } \mathfrak{B} \mid \int \|x\|^p \gamma(dx) < \infty \right\}. \quad (96)$$

Definition 69

Definiere die Funktion

$$\begin{aligned} d_p^{(B, \|\cdot\|)} : \Gamma_p^{\mathfrak{B}} \times \Gamma_p^{\mathfrak{B}} &\rightarrow [0, \infty), \\ d_p^{(B, \|\cdot\|)}(\alpha, \beta) &= \inf \left\{ \left(\int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \mid \right. \\ &\quad \pi \text{ Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (B \times B, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}), \\ &\quad \left. \pi(\cdot \times B) = \alpha, \pi(B \times \cdot) = \beta \right\} \end{aligned} \quad (97)$$

Das Integral ist endlich:

Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $(B \times B, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B})$ mit Marginalien α

und β gilt nach der Minkowski-Ungleichung (siehe [Schü, Lemma 43, S. 60])

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B \times B} \|x\|^p \pi(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B \times B} \|y\|^p \pi(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\int_B \|x\|^p \alpha(dx) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_B \|y\|^p \beta(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Wir schreiben Γ_p statt $\Gamma_p^{\mathfrak{B}}$ sowie d_p statt $d_p^{(B, \|\cdot\|)}$, sofern der Banachraum durch den Kontext gegeben ist.

Im Folgenden sei, sofern nicht anders angegeben, stets $p \in [1, \infty)$.

Lemma 70

Das Infimum in Definition 69 wird angenommen.

Für den Beweis brauchen wir noch die folgenden zwei Aussagen der Funktionalanalysis:

Der Darstellungssatz von Riesz (siehe [Schü, Korollar 13, S. 203]) gibt einen Isomorphismus zwischen den signierten Radonmaßen und den linearen Operatoren auf dem Raum der stetigen beschränkten Funktionen auf einem Kompaktum an:

Satz 71 (Darstellungssatz von Riesz)

Es sei K ein kompakter Hausdorff-Raum. Definiere $M(K)$ als den Raum der signierten Radonmaße auf K .

Dann ist $C_b(K)^*$ isometrisch isomorph zu $M(K)$.

Der isometrische Isomorphismus ist gegeben durch

$$I : M(K) \rightarrow C_b(K)^*, \quad I(\mu)(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Die Kompaktheit der Einheitskugel von $C_b(K)^*$ bezüglich der schwachen Topologie folgt aus dem Satz von Alaoglu (siehe [DS, Theorem V.4.2.2, S. 424]):

Satz 72 (Alaoglu)

Es sei X ein normierter Vektorraum.

Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel in X^* schwach-kompakt.

Um den Satz von Riesz anwenden zu können, betrachten wir die abgeschlossenen Kugeln um die 0 mit Radius $r \in \mathbb{R}$:

Definition 73

Bezeichne für alle $r > 0$ die abgeschlossene Kugel um die 0 mit Radius r mit

$$B_r := \{x \in B \mid \|x\| \leq r\}. \quad (98)$$

Da B endlichdimensional ist, ist die abgeschlossene Einheitskugel B_1 von B kompakt (siehe [DS, Theorem IV.3.3.5, S. 245]) und damit ist für alle $r > 0$ auch B_r kompakt.

Beweis von Lemma 70: Sei $p \in [1, \infty)$. Seien $\alpha, \beta \in \Gamma_p^{\mathfrak{B}}$.

Die Annahme des Infimums beweisen wir in folgenden Schritten:

1. für alle $r \in \mathbb{N}$ wird das Infimum von $\int_{B_r \times B_r} \|x - y\|^p \pi(d(x, y))$ mit einem π_r angenommen;
2. die π_r konvergieren schwach gegen ein π_∞ ;
3. Das Infimum in Definition 69 wird mit π_∞ angenommen.

Da $(B, \|\cdot\|)$ endlichdimensionaler separabler Banachraum ist, ist auch der Raum $(B \times B, \|\cdot\|_1)$ ein endlichdimensionaler separabler Banachraum.

Sei $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ mit

$$\begin{aligned} \pi_n(\cdot \times B) &= \alpha, \\ \pi_n(B \times \cdot) &= \beta \quad \text{und} \\ d_p^p(\alpha, \beta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)). \end{aligned} \quad (a)$$

Wegen $\int \|x\|^p \alpha(dx), \int \|x\|^p \beta(dx) < \infty$ und weil α, β Wahrscheinlichkeitsmaße sind, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $r_\varepsilon > 0$ mit

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^c} \|x\|^p \alpha(dx) \right)^p &\leq \varepsilon, & \alpha(B_{r_\varepsilon}^c) &\leq \varepsilon, \\ \left(\int_{B_{r_\varepsilon}^c} \|x\|^p \beta(dx) \right)^p &\leq \varepsilon, & \beta(B_{r_\varepsilon}^c) &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (b)$$

Es gilt damit für alle $\varepsilon > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \pi_n((B_{r_\varepsilon} \times B_{r_\varepsilon})^c) &\leq \pi_n(B_{r_\varepsilon}^c \times B) + \pi_n(B \times B_{r_\varepsilon}^c) \\ &= \alpha(B_{r_\varepsilon}^c) + \beta(B_{r_\varepsilon}^c) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (c)$$

Außerdem ist für alle $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $r \geq r_\varepsilon$

$$\begin{aligned} & \left(\int_{(B_r \times B_r)^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B_r^c \times B_r^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + \left(\int_{B_r^c \times B_r} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \quad + \left(\int_{B_r \times B_r^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Nach der Minkowski-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_r^c \times B_r^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B_r^c \times B_r^c} \|x\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_r^c \times B_r^c} \|y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B_r^c \times B} \|x\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B \times B_r^c} \|y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\int_{B_r^c} \|x\|^p \alpha(dx) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{B_r^c} \|y\|^p \beta(dy) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_r^c \times B_r} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B_r^c \times B_r} (\|x\| + r)^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{B_r^c \times B_r} (2 \cdot \|x\|)^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq 2 \cdot \left(\int_{B_r^c} \|x\|^p \alpha(dx) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq 2 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

und analog

$$\left(\int_{B_r \times B_r^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2 \cdot \varepsilon$$

Zusammen folgt: für alle $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $r \geq r_\varepsilon$ gilt

$$\left(\int_{(B_r \times B_r)^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \leq 6 \cdot \varepsilon. \quad (\text{d})$$

Jetzt schränken wir die Wahrscheinlichkeitsmaße π_n auf $\mathfrak{B}(B_r \times B_r)$ ein und zeigen die Konvergenz der Einschränkungen $\pi_{n,r}$ gegen ein Maß π_r auf $\mathfrak{B}(B_r \times B_r)$.

Definiere für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N}$ die Projektion von π_n auf $B_r \times B_r$

$$\pi_{n,r} : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}, \quad \pi_{n,r}(A) = \pi_n(A \cap (B_r \times B_r)).$$

Wir betrachten die $\pi_{n,r}$ je nach Kontext als Maße auf $\mathfrak{B}(B \times B)$ als auch als Maße auf $\mathfrak{B}(B_r \times B_r)$.

Es gilt für alle $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $r \geq r_\varepsilon$ und alle $A \in \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} |\pi_n(A) - \pi_{n,r}(A)| &= \pi_n(A) - \pi_n(A \cap (B_r \times B_r)) \\ &\leq \pi_n(A \cap (B \times B_r^c)) + \pi_n(A \cap (B_r^c \times B)) \\ &\leq \beta(B_r^c) + \alpha(B_r^c) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{e})$$

Da $B_r \times B_r$ kompakt ist, existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz 71 für alle $r \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ein $f_{n,r} \in C_b(B_r \times B_r)^*$ isomorph zu $\pi_{n,r}$ (als Maß auf $\mathfrak{B}(B_r \times B_r)$).

Es gilt für alle $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und alle $g \in C_b(B_r \times B_r)$ mit $\|g\|_\infty \leq 1$

$$\begin{aligned} |f_{n,r}(g)| &= \left| \int_{B_r \times B_r} g(x, y) \pi_{n,r}(d(x, y)) \right| \\ &\leq \int_{B_r \times B_r} |g(x, y)| \pi_{n,r}(d(x, y)) \\ &\leq \int_{B_r \times B_r} 1 \pi_{n,r}(d(x, y)) \\ &= \pi_n(B_r \times B_r) \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

Also liegen alle $f_{n,r}$ in der abgeschlossenen Einheitskugel von $C_b(B_r \times B_r)^*$. Nach Satz 72 (Alaoglu) existiert damit für alle $r \in \mathbb{N}$ ein $f_r \in C_b(B_r \times B_r)$ und eine Teilfolge $(f_{n_i^r, r})_{i \in \mathbb{N}}$ mit $f_{n_i^r, r} \rightarrow f_r$ schwach.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte: $(n_i^{r+1})_{i \in \mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(n_i^r)_{i \in \mathbb{N}}$.

Sei π_r das nach dem Darstellungssatz von Riesz zu f_r isomorphe Maß auf $\mathfrak{B}(B_r \times B_r)$.

Aus der schwachen Konvergenz der $f_{n_i^r, r}$ gegen f_r folgt für alle $f \in C_b(B_r \times B_r)$:

$$\int f d\pi_{n_i^r, r} \rightarrow \int f d\pi_r,$$

also konvergiert $\pi_{n_i^r, r}$ schwach gegen π_r .

Zum Schluß beweisen wir die Konvergenz der Maße π_r gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß π_∞ und zeigen, daß mit dem π_∞ das Infimum in Definition 69 angenommen wird.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die $\pi_{n, r}$ in r aufsteigend, daher auch die $f_{n, r}$. Damit ist der Grenzwert f_r aufsteigend in r , also auch die π_r .

Weiterhin sind die $\pi_{n, r}$ in n und r durch 1 beschränkt, also sind auch die π_r in r durch 1 beschränkt.

Damit konvergiert $\pi_r(A)$ für alle $A \in \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ für $r \rightarrow \infty$.

Definiere

$$\pi_\infty : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}, \quad \pi_\infty(A) = \lim_{r \rightarrow \infty} \pi_r(A).$$

Aus der Monotonie der π_r folgt, daß π_∞ ein Maß auf $B \times B$ ist, der Grenzwert der π_r in Verteilung.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \pi_\infty(B \times B) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \pi_r(B \times B) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi_{r_\varepsilon}(B \times B) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \pi_{n_i^{r_\varepsilon}, r_\varepsilon}(B \times B) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \pi_{n_i^{r_\varepsilon}, r_\varepsilon}(B \times B) - \pi_{n_i^{r_\varepsilon}}(B \times B) + \pi_{n_i^{r_\varepsilon}}(B \times B) \\ &= 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} \pi_{n_i^{r_\varepsilon}, r_\varepsilon}(B \times B) - \pi_{n_i^{r_\varepsilon}}(B \times B). \end{aligned}$$

Nach (e) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\varepsilon > 0$

$$|\pi_{n, r_\varepsilon}(B \times B) - \pi_n(B \times B)| \leq 2\varepsilon$$

also gilt $\pi_\infty(B \times B) = 1$. Damit ist π_∞ ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Nun zeigen wir: $\pi_\infty(\cdot \times B) = \alpha$:

Sei $g \in C_b(B)$.

Die Funktion $B \times B \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x)$ ist Element von $C_b(B \times B)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $r \geq r_\varepsilon$ mit

$$\left| \int g(x) \pi_\infty(dx \times B) - \int g(x) \pi_r(dx \times B) \right| < \varepsilon,$$

sei $n = n_i^r \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| \int g(x) \pi_r(dx \times B) - \int g(x) \pi_{n,r}(dx \times B) \right| < \varepsilon.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int g(x) \pi_\infty(dx \times B) - \int g(x) \alpha(dx) \right| \\ & \leq \left| \int g(x) \pi_\infty(dx \times B) - \int g(x) \pi_r(dx \times B) \right| \\ & \quad + \left| \int g(x) \pi_r(dx \times B) - \int g(x) \pi_{n,r}(dx \times B) \right| \\ & \quad + \left| \int g(x) \pi_{n,r}(dx \times B) - \int g(x) \pi_n(dx \times B) \right| \\ & \quad + \left| \int g(x) \pi_n(dx \times B) - \int g(x) \alpha(dx) \right| \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon \\ & \quad + \left| \int_{(B_r \times B_r)^c} g(x) \pi_n(dx \times B) \right| \\ & \quad + \left| \int g(x) \alpha(dx) - \int g(x) \alpha(dx) \right| \\ & \leq 2\varepsilon + \|g\|_\infty \cdot \pi_n((B_{r_\varepsilon} \times B_{r_\varepsilon})^c) \\ & \stackrel{(c)}{\leq} 2\varepsilon + \|g\|_\infty \cdot 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da g und ε frei gewählt waren folgt $\pi_\infty(\cdot \times B) = \alpha$.

Analog läßt sich $\pi_\infty(B \times \cdot) = \beta$ zeigen.

Nun müssen wir nur noch $(\int \|x - y\|^p \pi_\infty(d(x, y)))^{\frac{1}{p}}$ gegen $d_p(\alpha, \beta)$ abschätzen.

Sei $\varepsilon > 0$.

Weil π_∞ Grenzwert der π_r in Verteilung ist existiert ein $r \geq r_\varepsilon$ mit

$$\left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_r(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x - y\|^p \pi_\infty(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| < \varepsilon.$$

Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x - y\|^p \pi_{n,r}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \leq \left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) - \int \|x - y\|^p \pi_{n,r}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \leq \left(\int_{(B_r \times B_r)^c} \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \stackrel{(d)}{\leq} 6 \cdot \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Nach (a) und der Konvergenz der $\pi_{n_i^r, r}$ zu π_r existiert ein $n = n_i^r \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| d_p(\alpha, \beta) - \left(\int \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| < \varepsilon$$

und

$$\left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_{n,r}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x - y\|^p \pi_r(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| < \varepsilon.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 & \left| d_p(\alpha, \beta) - \left(\int \|x - y\|^p \pi_\infty(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \leq \left| d_p(\alpha, \beta) - \left(\int \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \quad + \left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_n(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x - y\|^p \pi_{n,r}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \quad + \left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_{n,r}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x - y\|^p \pi_r(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \quad + \left| \left(\int \|x - y\|^p \pi_r(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x - y\|^p \pi_\infty(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \right| \\
 & \leq \varepsilon + 6\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Da ε frei gewählt war folgt

$$d_p(\alpha, \beta) = \left(\int \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Also wird das Minimum in Definition 69 durch π_∞ angenommen. □

Für $\alpha, \beta \in \Gamma_p$ bezeichne $\pi_{\alpha\beta}^p$, kurz $\pi_{\alpha\beta}$, ein Wahrscheinlichkeitsmaß, mit dem das Infimum von $d_p(\alpha, \beta)$ angenommen wird.

Ist eines der Maße das Nullmaß, dann läßt sich der d_p -Abstand nach der Definition explizit angeben:

Lemma 74

Sei $\alpha \in \Gamma_p$.

Dann gilt

$$d_p(\alpha, \delta_0) = \left(\int_B \|x\|^p \alpha(dx) \right). \quad (99)$$

Beweis: Sei $\alpha \in \Gamma_p$.

Es gilt für alle $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

$$0 \leq \pi_{\alpha, \delta_0}(A \times B \setminus \{0\}) \leq \pi_{\alpha, \delta_0}(B \times B \setminus \{0\}) = \delta_0(B \setminus \{0\}) = 0$$

und

$$\pi_{\alpha, \delta_0}(A \times \{0\}) = \pi_{\alpha, \delta_0}(A \times B) - \pi_{\alpha, \delta_0}(A \times B \setminus \{0\}) = \alpha(A).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} d_p^p(\alpha, \delta_0) &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \\ &= \int_{B \times \{0\}} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) + \int_{B \times B \setminus \{0\}} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \\ &= \int_B \|x - 0\|^p \pi(d(x, 0)) \\ &= \int_B \|x\|^p \alpha(dx). \end{aligned}$$

□

A.2 Die metrischen Räume (Γ_p, d_p)

Theorem 75

Für alle $p \in [1, \infty)$ ist (Γ_p, d_p) ein metrischer Raum.

Für den Beweis der Dreiecksungleichung verwenden wir das folgende Lemma:

Lemma 76

Seien π_1, π_3 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathfrak{B}(B \times B)$.

Es existiere ein Wahrscheinlichkeitsmaß β auf \mathfrak{B} , so daß für alle $A \in \mathfrak{B}$ gilt:

$$\pi_1(B \times A) = \beta(A) = \pi_3(A \times B). \quad (100)$$

Dann existieren ein Maß π auf $\mathfrak{B}(B \times B \times B)$ und Wahrscheinlichkeitskerne

$$\begin{aligned} K_1 : B \times \mathfrak{B} &\rightarrow [0, 1], \\ K_3 : B \times \mathfrak{B} &\rightarrow [0, 1], \end{aligned} \quad (101)$$

so daß für alle $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{B}$ gilt

$$\begin{aligned} \pi(A_1 \times A_2 \times B) &= \pi_1(A_1 \times A_2), \\ \pi(B \times A_2 \times A_3) &= \pi_3(A_2 \times A_3), \\ \pi(A_1 \times A_2 \times A_3) &= \int_{A_2} K_1(y, A_1) \cdot K_3(y, A_3) \beta(dy). \end{aligned} \quad (102)$$

Das Lemma besagt, daß zwei Maße, die eine gleiche Marginalverteilung haben, verbunden werden können.

Auf Zufallsgrößen übersetzt: Sind X, Y, \bar{Y}, Z Zufallsgrößen auf (B, \mathfrak{B}) mit $Y \sim \bar{Y}$, dann existieren Zufallsgrößen X', Y', Z' mit $(X', Y') \sim (X, Y)$ und $(Y', Z') \sim (\bar{Y}, Z)$, so daß gegeben Y' die Zufallsgrößen X' und Z' unabhängig sind.

Beweis: Da (B, \mathfrak{B}) ein separabler Borel-Raum ist, ist (B, \mathfrak{B}) maßtheoretisch isomorph zu $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ (siehe [Rös2, Satz 26, Seite 20]).

Es gelte daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $B = \mathbb{R}$.

Betrachte

$$X : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \pi_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})), \quad (x, y) \mapsto x$$

und

$$Y : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \pi_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})), \quad (x, y) \mapsto y.$$

X und Y sind Zufallsgrößen auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$.

Wir betrachten die fast sicher eindeutig bestimmte bedingte Erwartung $E(X | Y)$ (siehe [Rös2, Abschnitt 6.4, Seite 50]). Zu dieser existiert ein Wahrscheinlichkeitskern K_1 mit

$$K_1 : \mathbb{R} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad (y, A) \mapsto E(\mathbb{1}_A | Y^{-1}(y)).$$

Wir transformieren nun X mit Hilfe von K_1 zu einer Zufallsgröße X' mit derselben Verteilung wie X .

Sei U gleichverteilt auf $[0, 1]$ und unabhängig von Y .

Definiere über die Linksinverse

$$X' := K_1(Y, (-\infty, \cdot])^{-1}(U).$$

Um zu erhalten, daß X eine Zufallsgröße ist, müssen wir zeigen, daß X' meßbar ist. Es reicht zu zeigen: Für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist $X'^{-1}((-\infty, q])$ meßbar.

Sei $q \in \mathbb{Q}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} X'^{-1}((-\infty, q]) &= \left\{ \omega \mid \sup\{x \in \mathbb{R} \mid K_1(Y(\omega), (-\infty, x]) < U(\omega)\} \leq q \right\} \\ &= \left\{ \omega \mid \forall r > q : K_1(Y(\omega), (-\infty, r]) \geq U(\omega) \right\}^c \\ &= \left\{ \omega \mid \forall r > q, r \in \mathbb{Q} : K_1(Y(\omega), (-\infty, r]) \geq U(\omega) \right\}^c \\ &= \bigcap_{\substack{r > q \\ r \in \mathbb{Q}}} \left\{ \omega \mid K_1(Y(\omega), (-\infty, r]) \geq U(\omega) \right\}^c \\ &= \bigcap_{\substack{r > q \\ r \in \mathbb{Q}}} \left(\left(K_1(Y(\omega), (-\infty, r]) - U(\omega) \right)^{-1}([0, \infty)) \right)^c \\ &= \bigcap_{\substack{r > q \\ r \in \mathbb{Q}}} \left(K_1(Y(\omega), (-\infty, r]) - U(\omega) \right)^{-1}((-\infty, 0)), \end{aligned}$$

also ist $X'^{-1}((-\infty, q])$ als abzählbarer Schnitt meßbarer Mengen meßbar.

Weiter gilt, da Y und U unabhängig sind, für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 P(X' \in (-\infty, x]) &= P(K_1(Y, (-\infty, \cdot])^{-1}(U) \leq x) \\
 &= P(\sup\{a \in \mathbb{R} \mid K_1(Y, (-\infty, a]) < U\} \leq x) \\
 &= P(K_1(Y, (-\infty, x]) \geq U) \\
 &= \int P(K_1(Y, (-\infty, x]) \geq U \mid Y = y) P(Y \in dy) \\
 &= \int P(K_1(y, (-\infty, x]) \geq U) P(Y \in dy) \\
 &= \int K_1(y, (-\infty, x]) P(Y \in dy) \\
 &= \int P(X \in (-\infty, x] \mid Y = y) P(Y \in dy) \\
 &= P(X \in (-\infty, x]),
 \end{aligned}$$

also haben X und X' dieselbe Verteilung.

Für π_3 nutzen wir dasselbe Verfahren:

Wir betrachten die Zufallsgrößen

$$\begin{aligned}
 Y_3 : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \pi_2) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})), \quad (y, z) \mapsto y, \\
 Z : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}), \pi_2) &\rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R})), \quad (y, z) \mapsto z
 \end{aligned}$$

und finden zu diesen einen Kern

$$K_3 : \mathbb{R} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad (y, A) \mapsto E(\mathbb{1}_Z \mid Y_3^{-1}(y)).$$

Mit V gleichverteilt auf $[0, 1]$ und unabhängig von (Y, U) definieren wir die Zufallsgröße

$$Z'(\omega) = \sup\{z \in \mathbb{R} \mid K_3(Y(\omega), (-\infty, z]) < V(\omega)\}.$$

Wir zeigen analog wie bei X' , daß Z' dieselbe Verteilung wie Z hat. Dabei wird ausgenutzt, daß Y und Y_3 nach Voraussetzung dieselbe Verteilung haben, daß also gilt

$$\int K_3(y, (-\infty, z]) P(Y_3 \in dy) = \int K_3(y, (-\infty, z]) P(Y \in dy).$$

Nun betrachten wir die zu (X', Y, Z') gehörige Verteilung

$$\pi : \mathfrak{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto P((X', Y, Z') \in A).$$

Da X', Y, Z' nach Definition Zufallsgrößen sind, ist π ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$.

Jetzt müssen wir noch die Bedingungen 102 nachrechnen.

Seien $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \pi((-\infty, x] \times (-\infty, y] \times (-\infty, z]) \\
 &= P(X' \leq x \wedge Y \leq y \wedge Z' \leq z) \\
 &= \int_{(-\infty, y]} P(X' \leq x \wedge Z' \leq z \mid Y = b) P(Y \in db) \\
 &= \int_{(-\infty, y]} P(K_1(b, (-\infty, \cdot])^{-1}(U) \leq x \wedge K_3(b, (-\infty, \cdot])^{-1}(V) \leq z \\
 &\quad \mid Y = b) P(Y \in dy) \\
 &= \int_{(-\infty, y]} P(K_1(b, (-\infty, \cdot])^{-1}(U) \leq x \mid Y = b) \\
 &\quad \cdot P(K_3(b, (-\infty, \cdot])^{-1}(V) \leq z \mid Y = b) P(Y \in dy) \\
 &= \int_{(-\infty, y]} K_1(b, (-\infty, x]) \cdot K_3(b, (-\infty, z]) P(Y \in db).
 \end{aligned}$$

Da K_1 und K_3 Wahrscheinlichkeitskerne sind und das Integral eine additive und σ -stetige Abbildung ist, gilt damit die Aussage

$$\pi(A_1 \times A_2 \times A_3) = \int_{A_2} K_1(b, A_1) \cdot K_3(b, A_3) P(Y \in db)$$

für alle A_1, A_2, A_3 aus dem Erzeugnis von $\{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$, also für alle $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Weiter gilt für alle $A_1, A_2, A_3 \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
 \pi(A_1 \times A_2 \times \mathbb{R}) &= \int_{A_2} K_1(b, A_1) \cdot K_3(b, \mathbb{R}) P(Y \in db) \\
 &= \int_{A_2} K_1(b, A_1) P(Y \in db) \\
 &= \int_{A_2} P(X \in A_1 \mid Y = b) P(Y \in db) \\
 &= P(X \in A_1 \wedge Y \in A_2) \\
 &= \pi_1(A_1 \times A_2)
 \end{aligned}$$

und analog

$$\pi(\mathbb{R} \times A_2 \times A_3) = \pi_3(A_2 \times A_3).$$

□

Beweis von Theorem 75:

Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma_p$.

Nichtnegativität

Nach Definition gilt $d_p(\alpha, \beta) \geq 0$.

Nullabstand

Betrachte

$$\pi : \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto \alpha(\{a \in B : (a, a) \in A\})$$

Dann gilt offensichtlich $\pi(\cdot \times B) = \alpha$ und $\pi(B \times \cdot) = \alpha$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} d_p(\alpha, \alpha) &\leq \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \\ &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \cdot \mathbb{1}_{x=y} \alpha(dx) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Gelte nun $d_p(\alpha, \beta) = 0$.

Es gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$

$$\int_{A \times A^c} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \leq \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) = 0,$$

also $\pi(A \times A^c) = 0$.

Damit gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$

$$\alpha(A) = \pi(A \times B) = \pi(A \times A) + \pi(A \times A^c) = \pi(A \times A) = \dots = \beta(A),$$

also $\alpha = \beta$.

Symmetrie

Die Symmetrie $d_p(\alpha, \beta) = d_p(\beta, \alpha)$ folgt direkt aus der Definition.

Dreiecksungleichung

Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, verbinden wir $\pi_{\alpha,\beta}$ und $\pi_{\beta,\gamma}$ zu einem Maß π auf $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ mit Hilfe von Lemma 76. Seien also π , K_1 und K_3 zu $\pi_{\alpha,\beta}$ und $\pi_{\beta,\gamma}$ wie in Lemma 76 gegeben.

Definiere weiter das Maß π^* auf $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ durch

$$\pi^*(A_1 \times A_3) = \pi(A_1 \times \mathbb{R} \times A_3)$$

für alle $A_1, A_3 \in \mathfrak{B}$.

Es gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$

$$\pi^*(A \times \mathbb{R}) = \pi(A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \pi_{\alpha,\beta}(A \times \mathbb{R}) = \alpha(A)$$

sowie analog

$$\pi^*(\mathbb{R} \times A) = \gamma(A).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} d_p(\alpha, \gamma) &\leq \left(\int_{B \times B} \|x - z\|^p \pi^*(d(x, z)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B \times B} \|x - z\|^p \pi(d(x, \cdot, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{B \times B \times B} (\|x - y\| + \|y - z\|)^p \pi(d(x, y, z)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \left(\int_{B \times B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y, z)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\quad + \left(\int_{B \times B \times B} \|y - z\|^p \pi(d(x, y, z)) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Für den ersten Term ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \int_{B \times B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y, z)) \\
 &= \int_{B \times B \times B} \|x - y\|^p \int_{dy} K_1(b, dx) \cdot K_3(b, dz) \beta(db) \\
 &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \int_{dy} K_1(b, dx) \cdot K_3(b, B) \beta(db) \\
 &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \int_{dy} K_1(b, dx) \beta(db) \\
 &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi_{\alpha, \beta}(d(x, y)) \\
 &= d_p^p(\alpha, \beta),
 \end{aligned}$$

sowie analog für den zweiten Term

$$\int_{B \times B \times B} \|y - z\|^p \pi(d(x, y, z)) = d_p^p(\beta, \gamma).$$

Zusammen also

$$\begin{aligned}
 d_p(\alpha, \beta) &\leq \left(\int_{B \times B \times B} \|x - y\|^p \pi^*(d(x, y), dz) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\quad + \left(\int_{B \times B \times B} \|y - z\|^p \pi^*(d(x, y, z)) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= d_p(\alpha, \beta) + d_p(\beta, \gamma).
 \end{aligned}$$

□

Als nächstes betrachten wir für $p, q \in [1, \infty)$ den Zusammenhang zwischen (Γ_p, d_p) und (Γ_q, d_q) .

Lemma 77

Für alle $q < p \in [1, \infty)$ gilt

$$\Gamma_q \supseteq \Gamma_p. \tag{103}$$

Weiter gilt für alle $\alpha, \beta \in \Gamma_q$

$$d_p(\alpha, \beta) \leq d_q(\alpha, \beta). \tag{104}$$

Beweis: Seien $q < p \in [1, \infty)$. Sei $\Gamma \in \Gamma_p$.

Aus der Theorie der L_p -Räume folgt (siehe [Schü, Satz 6, Seite 65])

$$\left(\int \|x\|^q \gamma(dx) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int \|x\|^p \gamma(dx) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Damit haben wir gezeigt, daß $(\Gamma_p)_{p \in [1, \infty)}$ bezüglich der Inklusion eine absteigende Familie ist.

Seien nun $\alpha, \beta \in \Gamma_q$.

Nach der ersten Aussage sind $\alpha, \beta \in \Gamma_p$. Damit gilt

$$\begin{aligned} d_q(\alpha, \beta) &\leq \left(\int_{B \times B} \|x - y\|^q \pi_{\alpha\beta}^p(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi_{\alpha\beta}^p(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

□

In [BF] wird die Wasserstein-Metrik durch Zufallsgrößen definiert:

$$d_p(\alpha, \beta) := \inf \left\{ (E\|X - Y\|^p)^{\frac{1}{p}} \mid X \sim \alpha, Y \sim \beta \right\}. \quad (105)$$

Der folgende Satz zeigt, daß die Definitionen äquivalent sind.

Satz 78

Sind X, Y Zufallsgrößen über einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X \sim \alpha$ und $Y \sim \beta$, dann gilt

$$d_p(\alpha, \beta) \leq \left(\int \|X - Y\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = (E\|X - Y\|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (106)$$

Weiter existieren für gegebene α, β Zufallsgrößen X, Y , für die Gleichheit in (105) gilt.

Beweis: Seien X, Y Zufallsgrößen über $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ auf (B, \mathfrak{B}) mit Verteilung α beziehungsweise β .

Definiere das Maß π auf $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ durch

$$\pi(A_1 \times A_2) := P(X \in A_1 \wedge Y \in A_2) \quad \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{B}.$$

Es gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$

$$\pi(A \times B) = P(X \in A \wedge Y \in B) = P(X \in A) = \alpha(A),$$

also $\pi(\cdot \times B) = \alpha$ und analog $\pi(B \times \cdot) = \beta$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \|X(\omega) - Y(\omega)\|^p P(d\omega) \\ &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p P(X \in dx \wedge Y \in dy) \\ &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \\ &\geq d_p(\alpha, \beta)^p. \end{aligned}$$

Für die Existenz betrachte zu gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaßen α, β auf \mathfrak{B} die Zufallsgrößen

$$\begin{aligned} X &: (B \times B, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}, \pi_{\alpha, \beta}) \rightarrow B, & (x, y) &\mapsto x & \text{ und} \\ Y &: (B \times B, \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}, \pi_{\alpha, \beta}) \rightarrow B, & (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Diese sind α - beziehungsweise β -verteilt und $(\|X - Y\|^p)^{\frac{1}{p}}$ nimmt offensichtlich $d_p(\alpha, \beta)$ an. □

A.3 d_p -Konvergenz und schwache Konvergenz

Die d_p -Konvergenz hängt eng mit der schwachen Konvergenz zusammen, siehe [BF, Lemma 8.3]:

Satz 79

Seien $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, \alpha \in \Gamma_p$.

Dann sind äquivalent:

1. $d_p(\alpha_n, \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
2. $\alpha_n \rightarrow \alpha$ schwach und $\int \|x\|^p \alpha_n(dx) \rightarrow \int \|x\|^p \alpha(dx)$;
3. $\alpha_n \rightarrow \alpha$ schwach und $x \mapsto \|x\|^p$ gleichmäßig α_n -integrierbar;
4. $\int f d\alpha_n \rightarrow \int f d\alpha$ für alle stetigen f mit $f(x) = O(\|x\|^p)$ im Unendlichen.

Insbesondere ist die Konvergenz bezüglich der Wasserstein-Metrik äquivalent zur schwachen Konvergenz und zur Konvergenz vom p -ten absoluten Moment.

Im Beweis verwenden wir den folgenden Satz (Stone-Weierstraß, siehe [Schü, Satz 9, Seite 83]):

Satz 80

Es sei K ein kompakter, topologischer Raum und K' ein Teilraum von $C_b(K, \mathbb{R})$, so daß gilt:

- 1) K' enthält alle konstanten Funktionen,;
- 2) Die Funktionen von K' trennen die Punkte von K , d.h. für alle $x, y \in K$ mit $x \neq y$ gibt es eine Funktion $f \in K'$ mit $f(x) \neq f(y)$;
- 3) Für alle $f, g \in K'$ gilt $\max\{f, g\} \in K'$ und $\min\{f, g\} \in K'$.

Dann ist K' in $C(K, \mathbb{R})$ bezüglich der Normtopologie zur Norm $\|\cdot\|_\infty$ dicht, d.h. für alle $f \in C(K, \mathbb{R})$ und für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $g \in K'$ mit $\sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$.

Beweis von Satz 79:

1. \Rightarrow 2. Gelte $d_p(\alpha_n, \alpha) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left(\int \|x\|^p \alpha_n(dx) \right)^{\frac{1}{p}} - \left(\int \|x\|^p \alpha(x) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p(\alpha_n, \delta_0) - d_p(\alpha, \delta_0) \\ &\leq d_p(\alpha_n, \alpha) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Um die schwache Konvergenz $\alpha_n \rightarrow \alpha$ zu beweisen, zeigen wir zuerst die Konvergenz von $\int f d\alpha_n$ gegen $\int f d\alpha$ durch Lipschitz-Funktionen f . Im nächsten Schritt approximieren wir stetige beschränkte Funktionen durch Lipschitz-Funktionen.

Sei $f \in C_b(B)$ eine Lipschitz-Funktion, also $|f(x) - f(y)| \leq C \cdot \|x - y\|$ für alle $x, y \in B$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und X Zufallsgrößen auf B , so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d_p(\alpha_n, \alpha) = (E\|X_n - X\|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 & \left| \int f(x) \alpha_n(dx) - \int f(x) \alpha(dx) \right| \\
 &= |Ef(X_n) - Ef(X)| \\
 &\leq E|f(X_n) - f(X)| \\
 &\leq C \cdot E\|X_n - X\| \\
 &\leq C \cdot (E\|X_n - X\|^p)^{\frac{1}{p}} \\
 &= C \cdot d_p(\alpha_n, \alpha) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

Als nächstes approximieren wir die Funktionen aus $C_b(B)$ durch Lipschitz-Funktionen.

Es gilt:

- 1) Alle konstanten Funktionen auf B sind Lipschitz;
- 2) Für alle $x \in B$ ist $f_x : B \rightarrow \mathbb{R}$, $f_x(y) = \|x - y\|$ Lipschitz und f_x trennt x von allen Punkten $y \neq x$ aus B ;
- 3) Für alle f, g Lipschitz sind auch $\max\{f, g\}$ und $\min\{f, g\}$ Lipschitz.

Nach Satz 80 ist damit für alle $r > 0$ die Menge der Lipschitz-Funktionen dicht in $C_b(B)$ bezüglich der Normtopologie.

Weiter existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $r_\varepsilon > 0$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ gilt

$$\alpha_n(B_{r_\varepsilon}^c) < \varepsilon.$$

Sei nun $f \in C_b(B)$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Lipschitz-Funktion f_ε auf B_{r_ε} mit $\|f|_{B_{r_\varepsilon}} - f_\varepsilon\| < \varepsilon$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_B f \, d\alpha_n - \int_B f \, d\alpha \right| \\
 & \leq \left| \int_B f \, d\alpha_n - \int_{B_{r_\varepsilon}} f \, d\alpha_n \right| + \left| \int_{B_{r_\varepsilon}} f \, d\alpha_n - \int_{B_{r_\varepsilon}} f_\varepsilon \, d\alpha_n \right| \\
 & \quad + \left| \int_{B_{r_\varepsilon}} f_\varepsilon \, d\alpha_n - \int_{B_{r_\varepsilon}} f_\varepsilon \, d\alpha \right| \\
 & \quad + \left| \int_{B_{r_\varepsilon}} f_\varepsilon \, d\alpha - \int_{B_{r_\varepsilon}} f \, d\alpha \right| + \left| \int_{B_{r_\varepsilon}} f \, d\alpha - \int_B f \, d\alpha \right| \\
 & \leq \sup_{x \in B} |f(x)| \cdot \varepsilon + \varepsilon + \left| \int_{B_{r_\varepsilon}} f_\varepsilon \, d\alpha_n - \int_{B_{r_\varepsilon}} f_\varepsilon \, d\alpha \right| + \varepsilon + \sup_{x \in B} |f(x)| \cdot \varepsilon \\
 & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varepsilon \cdot 2 \cdot \left(1 + \sup_{x \in B} |f(x)| \right) \\
 & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Also konvergiert α_n schwach gegen α .

2. \Rightarrow 3. Aus $\int \|x\|^p \alpha_n(dx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int \|x\|^p \alpha(dx)$ folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int \|x\|^p \alpha_n(dx) < \infty.$$

3. \Rightarrow 4. Gelte 3.

Sei $f \in C(B)$ mit $f(x) = O(\|x\|^p)$.

Um die Konvergenz von $\int f \, d\alpha_n$ zu $\int f \, d\alpha$ zu beweisen, approximieren wir f durch beschränkte Funktionen.

Seien $r_1, C > 0$ so daß für alle $x \in B$ mit $\|x\|^p > r_1$ gilt

$$|f(x)| \leq C \cdot \|x\|^p.$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Nach 3. existiert ein $r_2 > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int \|x\|^p \cdot \mathbb{1}_{\|x\|^p > r_2} \, d\alpha_n < \varepsilon.$$

Definiere $r := \max\{r_1, r_2\}$,

$$g : B \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } \|x\| \leq r \\ f\left(x \cdot \frac{r}{\|x\|}\right) & \text{für } \|x\| > r \end{cases}$$

sowie $h := g - f$.

Offensichtlich ist g stetig. Weiter ist g beschränkt, da B_r kompakt, g stetig und $\text{Bild}(g) = \text{Bild}(g|_{B_r})$ ist. Damit läßt sich die Voraussetzung 3) auf g anwenden.

Weiter gilt für alle $x \in B$ mit $\|x\| \geq r$

$$|h(x)| \leq \left| f\left(x \cdot \frac{r}{\|x\|}\right) \right| + |f(x)| \leq C \cdot \left\| x \cdot \frac{r}{\|x\|} \right\|^p + C \cdot \|x\|^p \leq 2 \cdot C \cdot \|x\|^p$$

und damit $h = O(\|x\|^p)$.

Es ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \left| \int h \, d\alpha_n + \int h \, d\alpha \right| \\ & \leq \left| \int 2 \cdot C \cdot \|x\|^p \, d\alpha_n + \int 2 \cdot C \cdot \|x\|^p \, d\alpha \right| \\ & \leq 2 \cdot C \cdot 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & \left| \int f \, d\alpha_n - \int f \, d\alpha \right| \\ & \leq \left| \int g \, d\alpha_n - \int g \, d\alpha \right| + \left| \int h \, d\alpha_n + \int h \, d\alpha \right| \\ & \leq \left| \int g \, d\alpha_n - \int g \, d\alpha \right| + 2 \cdot C \cdot 2\varepsilon \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4 \cdot C \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Also gilt $\int f \, d\alpha_n \rightarrow \int f \, d\alpha$.

4. \Rightarrow 2. Gelte 4.

Mit $f(x) = \|x\|^p$ ergibt sich $\int \|x\|^p \, d\alpha_n \rightarrow \int \|x\|^p \, d\alpha$.

Ist $g \in C_b(B)$, dann gilt $g(x) = O(\|x\|^p)$.

Damit folgt $\int g \, d\alpha_n \rightarrow \int g \, d\alpha$.

3. \Rightarrow 1. Gelte 3.

Wir beweisen die Aussage in drei Schritten

- a) für Maße auf endlichen Mengen
- b) für Maße auf kompakten Mengen
- c) für allgemeine Maße

a) Es gelte: Die α_n und α haben Masse auf endlich vielen Punkten $x_1, \dots, x_k \in B$.

Wegen $\alpha_n \rightarrow \alpha$ schwach, gilt $\alpha_n(\{x_i\}) \rightarrow \alpha(\{x_i\})$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Sei X Zufallsgröße auf $\{x_1, \dots, x_k\}$ mit Verteilung α , seien X_n Zufallsgrößen auf $\{x_1, \dots, x_k\}$ mit Verteilung α_n für alle $n \in \mathbb{N}$ und $P(X = x_i \wedge X_n = x_i) = \min\{\alpha(\{x_i\}), \alpha_n(\{x_i\})\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, k\}$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} d_p^p(\alpha_n, \alpha) &\leq E\|X_n - X\|^p \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \|x_i - x_j\|^p \cdot P(X_n = i \wedge X = j) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mathbb{1}_{i \neq j} \cdot \|x_i - x_j\|^p \cdot P(X_n = i \wedge X = j) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mathbb{1}_{i \neq j} \cdot \sup_{r,s=1}^k \|x_r - x_s\|^p \cdot P(X_n = i \wedge X = j) \\ &= P(X_n \neq X) \cdot \sup_{r,s=1}^k \|x_r - x_s\|^p \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

b) Es gelte: Die α_n und α haben Masse auf einem kompakten $K \subseteq B$.

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann existiert eine endliche disjunkte ε -Überdeckung $(U_i)_{i=1}^k$ von K .

Wähle für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ einen Punkt x_i aus U_i .

Definiere $\tilde{\alpha}$ sowie $\tilde{\alpha}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch $\tilde{\alpha}(\{x_i\}) = \alpha(U_i)$ und $\tilde{\alpha}_n(\{x_i\}) = \alpha_n(U_i)$.

Dann sind $\tilde{\alpha}$ und die $\tilde{\alpha}_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße mit Masse auf endlich vielen Punkten, also gilt nach a) $d_p(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Definiere das Wahrscheinlichkeitsmaß π auf $\mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ durch

$$\pi(A_1 \times A_2) = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{x_i \in A_2} \cdot \alpha(A_1 \cap U_i).$$

Es gilt für alle $A \in \mathfrak{B}$

$$\pi(A \times B) = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{x_i \in B} \alpha(A \cap U_i) = \sum_{i=1}^k \alpha(A \cap U_i) = \alpha(A)$$

sowie

$$\pi(B \times A) = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{x_i \in A} \cdot \alpha(B \cap U_i) = \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{x_i \in A} \cdot \alpha(U_i) = \tilde{\alpha}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} d_p^p(\alpha, \tilde{\alpha}) &\leq \int_{B \times B} \|x - y\|^p \pi(d(x, y)) \\ &= \int_{B \times B} \|x - y\|^p \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{x_i \in dy} \alpha(dx \cap U_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{U_i \times B} \|x - y\|^p \mathbb{1}_{x_i \in dy} \alpha(dx) \\ &= \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \|x - x_i\|^p \alpha(dx) \\ &\leq \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \varepsilon^p \alpha(dx) \\ &= \varepsilon^p. \end{aligned}$$

Mit der gleichen Konstruktion für die α_n läßt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen

$$d_p(\alpha_n, \tilde{\alpha}_n) \leq \varepsilon.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} d_p(\alpha_n, \alpha) &\leq d_p(\alpha_n, \tilde{\alpha}_n) + d_p(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}) + d_p(\tilde{\alpha}, \alpha) \\ &\leq 2 \cdot \varepsilon^p + d_p(\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}) \\ &\stackrel{\text{nach a)}}{\underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow}} 2 \cdot \varepsilon^p \\ &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

c) Nach [Bil, Theorem 6.2] gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \subseteq B \text{ kompakt} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \alpha_n(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei K_ε wie oben.

Modifiziere α und die α_n zu $\hat{\alpha}$ und $\hat{\alpha}_n$ durch

$$\hat{\alpha}(A) = \alpha(A) + \mathbb{1}_{0 \in A} \alpha(K_\varepsilon^c).$$

Damit haben $\hat{\alpha}$ und $\hat{\alpha}_n$ Masse auf K_ε .

Seien X Zufallsgrößen auf B mit Verteilung α . Definiere die Zufallsgröße \hat{X} durch

$$\hat{X}(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{falls } X(\omega) \in K_\varepsilon \\ 0 & \text{falls } X(\omega) \in K_\varepsilon^c. \end{cases}$$

Dann gilt $\mathfrak{L}(\hat{X}) = \hat{\alpha}$.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} d_p^p(\alpha, \hat{\alpha}) &\leq \int_B \|X - \hat{X}\|^p \\ &= \int_{K_\varepsilon} \|X - \hat{X}\|^p + \int_{K_\varepsilon^c} \|X - \hat{X}\|^p \\ &= 0 + \int_{K_\varepsilon^c} \|X\|^p \\ &= \int_{K_\varepsilon^c} \|x\|^p d\alpha \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Analog läßt sich zeigen

$$d_p^p(\alpha_n, \hat{\alpha}_n) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Da $x \mapsto \|x\|^p$ nach 2. gleichmäßig α_n -integrierbar ist, folgt, daß die Konvergenz $d_p(\alpha_n, \hat{\alpha}_n) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ gleichmäßig in n ist.

Aus b) folgt

$$d_p(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

damit gilt

$$\begin{aligned} d_p(\alpha, \alpha_n) &\leq d_p(\alpha, \hat{\alpha}) + d_p(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_n) + d_p(\hat{\alpha}_n, \alpha_n) \\ &\leq d_p(\alpha, \hat{\alpha}) + d_p(\hat{\alpha}, \hat{\alpha}_n) + \sup_{i \in \mathbb{N}} d_p(\hat{\alpha}_i, \alpha_i) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} d_p(\alpha, \hat{\alpha}) + \sup_{i \in \mathbb{N}} d_p(\hat{\alpha}_i, \alpha_i) \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

□

Nun können wir die Vollständigkeit von d_p beweisen

Theorem 81

(Γ_p, d_p) ist ein vollständiger metrischer Raum.

Beweis: Sei α_n Cauchyfolge in (Γ_p, d_p) .

Wir verwenden von Satz 79 die Richtung 2. \rightarrow 1.

Sei $\varepsilon > 0$, sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d_p(\alpha_n, \alpha_{n_0}) \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int \|x\|^p \alpha_n(dx) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} d_p(\alpha_n, \delta_0) \\ &= \sup_{n < n_0} d_p(\alpha_n, \delta_0) + \sup_{n \geq n_0} d_p(\alpha_n, \delta_0) \\ &\leq \sup_{n < n_0} d_p(\alpha_n, \delta_0) + \sup_{n \in \mathbb{N}} (d_p(\alpha_n, \alpha_{n_0}) + d_p(\alpha_{n_0}, \delta_0)) \\ &\leq \sup_{n \leq n_0} d_p(\alpha_n, \delta_0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

also ist $x \mapsto \|x\|^p$ gleichmäßig α_n -integrierbar.

Nun müssen wir noch zeigen, daß ein $\alpha \in \Gamma_p$ existiert mit $\alpha_n \rightarrow \alpha$ schwach. Dazu verwenden wir das gleiche Verfahren wie im Beweis zum Lemma 70, der Annahme des Infimums. Die Aussagen lassen sich ganz analog beweisen. Wir schränken die α_n auf Kugeln K_r , $r > 0$ zu $\alpha_{n,r}$ ein. Diese $\alpha_{n,r}$ besitzen einen Häufungspunkt α_r bezüglich der schwachen Konvergenz. Die α_r sind aufsteigend gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß α . Damit ist α Häufungspunkt der α_n bezüglich der schwachen Konvergenz. Also gibt es eine Teilfolge α_{n_i} die schwach gegen α konvergiert. Zusammen mit der gleichmäßigen α_{n_i} -Integrierbarkeit von $\|x\|^p$ konvergieren nach Lemma 70 die α_{n_i} gegen α auch bezüglich der d_p -Metrik.

Damit ist α_n d_p -konvergent gegen α . □

A.4 Die Wasserstein-Metrik in $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$

Wir betrachten im folgenden als Banachräume die Räume \mathbb{R}^d für $d \in \mathbb{N}$.

Lemma 82

Sei die zugrundeliegende Norm auf \mathbb{R}^n die p -Norm $\|\cdot\|_p$.

Sei $\alpha \in \Gamma_p$, sei X Zufallsgröße mit Verteilung α .

Dann gilt

$$d_p(\alpha, \delta_0^n) = \|X\|_p. \tag{107}$$

Beweis: Es gilt nach Lemma 74

$$d_p^p(\alpha, \delta_0) = \int_{\mathbb{R}^d} \|x\|_p^p \alpha(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \mu(dx) = \|X\|_p^p.$$

□

Nun zeigen wir, daß Projektionen von \mathbb{R}^d auf $\mathbb{R}^{d'}$ den d_p -Abstand bezüglich der $\|\cdot\|_p$ -Norm nicht verschlechtern.

Satz 83

Seien $d, d' \in \mathbb{N}$ mit $d \leq d'$, sei $p \in [1, \infty)$. Sei $\Phi = \Phi_{\mathbb{R}^{d'}, \mathbb{R}^d}$ die Projektion von $\mathbb{R}^{d'}$ auf \mathbb{R}^d .

Seien $\alpha, \beta \in \Gamma_p^{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d'})}$.

Dann sind $\alpha \circ \Phi^{-1}$ und $\beta \circ \Phi^{-1} \in \Gamma_p^{\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)}$ und es gilt

$$d_p^{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)}(\alpha \circ \Phi^{-1}, \beta \circ \Phi^{-1}) \leq d_p^{(\mathbb{R}^{d'}, \|\cdot\|_p)}(\alpha, \beta). \quad (108)$$

Beweis: Definiere

$$\pi = \pi_{\alpha\beta} \circ (\Phi^{-1} \times \Phi^{-1}).$$

π ist ein Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1}) \otimes \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{d_1})$ mit

$$\begin{aligned} \pi(\cdot \times \mathbb{R}^{d_1}) &= \alpha \circ \Phi^{-1} & \text{und} \\ \pi(\mathbb{R}^{d_1} \times \cdot) &= \beta \circ \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & d_p^{(\mathbb{R}^{d_1}, \|\cdot\|_p)}(\alpha \circ \Phi^{-1}, \beta \circ \Phi^{-1}) \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_1}} \|x - y\|_p^p \pi(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_1}} \|x - y\|_p^p \pi_{\alpha\beta}(\Phi^{-1}(dx), \Phi^{-1}(dy)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_2}} \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_p^p \pi_{\alpha\beta}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_2}} \|x - y\|_p^p \pi_{\alpha\beta}(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ & = d_p^{(\mathbb{R}^{d_2}, \|\cdot\|_p)}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

□

Das folgende Lemma ist eine Ergänzung zu Lemma 77, der Abschätzung zwischen d_p und d_q . Der Unterschied zu Lemma 77 ist, daß sich die zu d_p und d_q gehörigen Normen unterscheiden.

Lemma 84

Für alle $q < p \in [1, \infty)$ und alle $\alpha, \beta \in \Gamma_p$ gilt:

$$d_q^{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_q)}(\alpha, \beta) \leq d_p^{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)}(\alpha, \beta). \quad (109)$$

Beweis: Seien $q < p \in [1, \infty)$, seien $\alpha, \beta \in \Gamma_p$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} d_q^{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_q)}(\alpha, \beta) &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \|x - y\|_q^q \pi_{\alpha\beta}^p(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n |x - y|^q \pi_{\alpha\beta}^p(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \sum_{i=1}^n |x - y|^p \pi_{\alpha\beta}^p(d(x, y)) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= d_p^{(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_p)}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

□

Zum Abschluß betrachten wir noch den Spezialfall $B = \mathbb{R}$. Dieser wurde in [DA] untersucht:

Satz 85

Es gelte $B = \mathbb{R}$. Seien $\alpha, \beta \in \Gamma_p$, seien F, G die zu α, β gehörenden Verteilungsfunktionen. Sei weiter U auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsgröße.

Dann gilt

$$d_p(\alpha, \beta) = (E|F^{-1}(U) - G^{-1}(U)|^p)^{\frac{1}{p}} \quad (110)$$

wobei F^{-1}, G^{-1} die Pseudo-Inversen zu F, G sind.

Aus diesem Ergebnis folgt insbesondere, daß sich die Zufallsgrößen von Satz 78, bei denen das Infimum angenommen wird, nur aus dem zugehörigen Maß α beziehungsweise β ergeben:

Lemma 86

Es gelte $B = \mathbb{R}$. Sei U auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsgröße.

Sei für alle $\alpha \in \Gamma_p$ die Zufallsgröße X_α definiert durch

$$X_\alpha = F_\alpha^{-1}(U) \quad (111)$$

wobei F_α^{-1} Pseudoinverse der zu α gehörenden Verteilungsfunktion ist.

Dann gilt für alle $\alpha, \beta \in \Gamma_p$

$$d_p(\alpha, \beta) = (E|X_\alpha - X_\beta|^p)^{\frac{1}{p}}. \quad (112)$$

B Notation

\mathbb{R}_+

ist die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen

$\mathfrak{P}(N)$

ist die Potenzmenge von N

$\mathfrak{L}(X)$

ist für eine Zufallsgröße X ein Maß mit Verteilung X

$X \stackrel{\mathcal{D}}{=} Y$

X und Y sind Zufallsgrößen mit derselben Verteilung

$X \sim \mu$

X ist Zufallsgröße mit Verteilung μ

uiv

steht für „unabhängig identisch verteilt“

$\mathfrak{B}(B)$

ist die Borel- σ -Algebra auf dem normierten Raum $(B, \|\cdot\|)$

$\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$

ist die Produkt- σ -Algebra der σ -Algebren \mathfrak{A} und \mathfrak{B}

$C(A, B)$

ist die Menge aller stetigen Funktionen von A nach B bzw. \mathbb{R}

$C_b(A)$

ist die Menge aller stetigen beschränkten Funktionen von A nach \mathbb{R}

$C_b(K)^*$

der Raum aller stetigen linearen Funktionale von $C_b(K)$ nach \mathbb{R}

δ_0

ist das Nullmaß: $\delta_0(A) = \mathbb{1}_{0 \in A}$

$f \equiv 0$

f ist die Nullfunktion

$f \vee g$

$= \max\{f, g\}$

$f \wedge g$

$= \min\{f, g\}$

$O(x)$

Landau-Symbol: $f(x) = O(g(x))$ gdw $\limsup_{x \rightarrow \infty} |f(x)/g(x)| < \infty$

Literatur

- [DA] G. Dall' Aglio, *Sugli estremi dei momenti delle funzioni di ripartizione doppia*
Ann. Scuola Normale Superiore Di Pisa, Cl. Sci 3(1):33–74. (1956)
- [BF] Bichel, Freedman, *Some asymptotic theory for the Bootstrap*
Annals of Statistics 9, 1996–1217 (1981)
- [Bil] Peter Billingsley, *Convergence of Probability Measures*
- [Bron] Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*
Verlag Harri Deutsch, 5. Auflage (2001)
- [DH] Lester E. Dubins und Marjoria G. Hahn, *A Characterization of the Families of Finite-Dimensional Distributions Associated with Countably Additive Stochastic Processes Whose Sample Path are in D*
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 43, 97–100 (1978)
- [DS] Dunford & Schwartz
Linear Operators, Part I: General Theory
Wiley Classics Library, (1988)
- [ER] Kord Eickmeyer, Ludger Rüschendorf, *A limit theorem for recursively defined processes in L^p*
<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/homepages/rueschendorf/papers/LimitTheoremRecursivProcesses.pdf>,
Preprint (2005)
- [GR] Rudolf Grübel, Uwe Rösler, *Asymptotic distribution theory for Hoare's selection algorithm*
Advanced Applied Probability 28, 252–269 (1996)
- [Ho] C.A.R. Hoare, *Algorithm 65, FIND*
Communication of the Association for Computing Machinery, 321–322 (1961)
- [Knof] Diether Knof, *Konvergenz von Find zu einem Maß auf $D[0, 1]$*
<http://www-computerlabor.math.uni-kiel.de/stochastik/knof/Texte/Diplom.korrigiert.pdf>,
(2003)

- [MR] Conrado Martínez und Salvador Roura, *Optimal sampling strategies in Quicksort and Quickselect*
SIAM J. Comput., 683–705 (Vol. 31, Nr. 3, 2001)
- [MPV] Conrado Martínez, Daniel Panario und Alfredo Viola, *Adaptive sampling for quickselect*
- [NS] Ralf Neininger und Ludger Rüschemdorf *Analysis of algorithms by the contraction method: additive and max-recursive sequences*
Interacting Stochastic Systems, Springer, 435–450, (2005)
- [Paul] Volkert Paulsen, *The moments of Find*
Journal of Applied Probability, 1079–1082 (Vol. 34, 1997)
- [Rös] Uwe Rösler, *Quickselect revisited*
Journal of the Iranian Statistical Society, 271–296 (Vol. 3, No. 2, 2004)
- [Rös2] Uwe Rösler, *Maßtheorie*
<http://www-computerlabor.math.uni-kiel.de/stochastik/roesler/vorlesung/mass/Mass.ps>,
(1998/1999)
- [RS] Ludger Rüschemdorf und Eva-Maria Schopp, *Exponential tail bounds for max-recursive sequences*
<http://www.stochastik.uni-freiburg.de/homepages/rueschendorf/papers/ExponentialBoundsAndTails.pdf>,
Preprint (2005)
- [Schü] Carsten Schütt, *Funktionalanalysis*,
<http://analysis.math.uni-kiel.de/schuett/lehre.html>,
(2. Juli 2004)

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name Diether Knof
Anschrift Muhliusstraße 101
24103 Kiel
Tel.: 0431 / 122 78 73
Staatsangehörigkeit deutsch
Geburtstag 28. Januar 1978
Geburtsort Norderstedt
Familienstand ledig

Schulbildung

08/1983 - 07/1987 Grundschule Falkenberg in Norderstedt
08/1987 - 06/1996 Copernicus-Gymnasium in Norderstedt
Abschluß: Allgemeine Hochschulreife

Hochschulausbildung

10/1996 - 11/2003 Studium der Mathematik mit Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Schwerpunkt: Stochastik
Abschluß Diplom
Thema: Laufzeitverhalten vom Suchalgorithmus „Quickselect“
11/2003 - 02/2007 Promotion
Schwerpunkt: Stochastik
Thema: Struktur von Fixpunkten aus Prozeßgleichungen

Ausgeübte Tätigkeiten

10/1998 - 12/2004 Arbeit als wissenschaftliche Hilfskraft im betriebswirtschaftlichen Institut, Bereich Produktion und Logistik
03/2001 - 12/2005 Dozent an der Volkshochschule Kiel
05/2005 - 04/2006 Assistentenvertretung in der Mathematik

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch meinen akademischen Lehrer Prof. Dr. Uwe Rösler, in Inhalt und Form selbst angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Desweiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.