

Über die Hausdorff-Dimension der Juliamenge von Funktionen endlicher Ordnung

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel



vorgelegt von
Hendrik Schubert

Kiel
Mai 2007

Über die Hausdorff-Dimension der Juliamenge von Funktionen endlicher Ordnung

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel



vorgelegt von
Hendrik Schubert

Kiel
Mai 2007

Referent/in:

Prof. Dr. W. Bergweiler

Koreferent/in:

.....

Tag der mündlichen Prüfung:

.....

Zum Druck genehmigt:

Kiel,

Prof. Dr. J. Grotemeyer, Dekan

Zusammenfassung

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist der Satz, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion f aus der Funktionenklasse \mathcal{B} gleich zwei ist, falls die Ordnung der Funktion f zusätzlich endlich ist. Dabei besteht die Funktionenklasse \mathcal{B} aus den ganzen Funktionen, für die die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion, das heißt die Menge der endlichen kritischen und asymptotischen Werte, beschränkt ist. Ferner sagt man, dass eine ganze Funktion f endliche Ordnung hat, falls Konstanten $K, r_0 > 0$ derart existieren, dass

$$|f(z)| \leq \exp(|z|^K)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r_0$ gilt.

Zum Beweis unseres Hauptresultates werden wir mit Hilfe des sogenannten logarithmischen Variablenwechsels einer transzendenten Funktion aus der Klasse \mathcal{B} , der von Alexandre Eremenko und Mikhael Lyubich in das Gebiet der komplexen Dynamik eingeführt wurde, eine dynamisch definierte „geschachtelte“ Menge konstruieren, von der wir später zeigen werden, dass sie eine Teilmenge der Juliamenge ist. Der Konstruktionsansatz der „geschachtelten“ Menge, den wir dabei wählen werden, stammt aus einer Arbeit von Krzysztof Barański. Er beweist dort, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion endlicher Ordnung gleich zwei ist, falls die Funktion einen anziehenden Fixpunkt besitzt, dessen unmittelbares Einzugsgebiet ein Kompaktum enthält, das wiederum die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion enthält.

Nach einem Satz von Eremenko und Lyubich ist bei einer transzendenten Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} die sogenannte entkommende Menge, das heißt die Menge der Punkte, die unter Iteration von f nach ∞ gehen, eine Teilmenge der Juliamenge von f . Wir werden diesen Satz verallgemeinern und zeigen, dass schon die Menge der Punkte, die unter Iteration von f betragsmäßig „groß“ bleiben, in der Juliamenge enthalten ist. Aus dieser Verallgemeinerung des Satzes folgt dann, dass unsere „geschachtelte“ Menge eine Teilmenge der Juliamenge ist.

Zur Abschätzung der Hausdorff-Dimension unserer „geschachtelten“ Menge und somit auch der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion f endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} werden wir Methoden aus einer Arbeit von Curt McMullen benutzen. Er zeigt dort, dass sich die Hausdorff-Dimension einer Menge auf bestimmte Weise nach unten abschätzen lässt, falls die Menge gewisse Bedingungen, die sogenannten „Nesting conditions“, erfüllt. Wir werden zeigen, dass dies für unsere „geschachtelte“ Menge der Fall ist, wobei in diesem Zusammenhang die Endlichkeit der Ordnung der Funktion f eine essentielle Rolle spielen wird. Genauer gesagt werden wir unter Berücksichtigung der endlichen Ordnung der Funktion eine leicht abgeänderte Version des Ahlfors'schen Verzerrungssatzes beweisen, mit deren Hilfe wir zeigen werden, dass unsere „geschachtelte“ Menge die „Nesting conditions“ erfüllt.

Mit Hilfe der oben angesprochenen Abschätzung aus der Arbeit von McMullen folgt dann unser Hauptresultat. Eine genaue Analyse des Beweises wird uns abschließend noch mögliche Verallgemeinerungen dieses Satzes liefern.

Abstract

The main result of this thesis will be to show that the Julia set of any transcendental entire function of finite order in class \mathcal{B} has Hausdorff dimension two. Here we define \mathcal{B} as the set of all entire functions for which the set of finite singularities of the inverse function, that is to say the set of all finite critical and asymptotic values, is bounded. Furthermore, we say that an entire function f is of finite order if there exist $K, r_0 > 0$ such that

$$|f(z)| \leq \exp(|z|^K)$$

for all $z \in \mathbb{C}$ with $|z| > r_0$.

With the help of the so called logarithmic change of variables for a transcendental entire function in class \mathcal{B} which was introduced into iteration theory by Alexandre Eremenko and Mikhael Lyubich we will construct a dynamically defined "nested" set and show later on that this set is part of the Julia set. The method of construction of this "nested" set which we will choose is based on an article by Krzysztof Barański. He shows that the Julia set of a transcendental entire function of finite order has Hausdorff dimension two if the function has an attracting fixpoint whose immediate basin of attraction contains a compact set which again contains the set of finite singularities of the inverse function.

Eremenko and Lyubich used the logarithmic change of variables to prove that for any transcendental entire function in class \mathcal{B} the so called escaping set, that is to say the set of points which tend to ∞ under iteration, is part of the Julia set. We will generalize this theorem and show that even points for which the absolute value stays "large" under iteration lie in the Julia set. With the help of this generalization we will show that our "nested" set is part of the Julia set.

To estimate the Hausdorff dimension of our "nested" set and hence the Julia set of a transcendental entire function f of finite order in class \mathcal{B} we will use methods developed by Curt McMullen. He gives a lower bound for the Hausdorff dimension of a set which fulfills certain "nesting conditions". We will prove that these conditions are satisfied for our "nested" set. In this proof the assumption that f is of finite order will play an important role. More specifically, we will prove a slightly different version of the Ahlfors distortion theorem taking into account that our function has finite order. We will use this version to show that our "nested" set fulfills the "nesting conditions".

We will apply McMullen's estimation of the Hausdorff dimension and this will complete the proof of our main result. Finally, a detailed analysis of the proof will enable us to obtain some generalizations of our main result.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle in erster Linie bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Walter Bergweiler für all seine Unterstützung, seine zahllosen hilfreichen Anmerkungen und vor allem für die Zeit, die er sich immer wieder für meine Anliegen genommen hat, bedanken.

Des Weiteren gilt mein Dank allen Teilnehmern des Oberseminars „Komplexe Dynamik“ und hier insbesondere Martin Hemke und Heike Siebert, mit denen zusammen ich die ersten selbständigen Schritte in diesem Themengebiet im Rahmen einer gemeinsamen Seminararbeit unternommen habe.

Weiter bin ich dankbar für die finanzielle Unterstützung seitens des Mathematischen Seminars der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel und der German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie und meinen Freunden dafür bedanken, dass sie in der ganzen Zeit immer für mich da waren, wenn ich sie gebraucht habe.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Der Kontext und das Hauptresultat	1
2	Grundlagen	6
2.1	Unendliche Produkte	6
2.2	Dichte und Verzerrung	7
2.3	Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension	9
2.4	Extremale Länge	15
2.5	Singularitäten der Umkehrfunktion	17
2.6	Hyperbolische Metrik	20
2.7	Grundlagen aus der Iterationstheorie	24
3	Der logarithmische Variablenwechsel	28
3.1	Der logarithmische Variablenwechsel in der Klasse \mathcal{B}	28
3.2	Eine Teilmenge der Juliamenge	31
4	Eine „geschachtelte“ Menge	33
4.1	Die Konstruktion	33
4.2	Technische Lemmata	35
4.3	Der Beweis von Satz 4.1.1	48
5	Der Hauptsatz	50
5.1	Beweisidee	50
5.2	Der Beweis des Satzes 1.1.1	50
5.3	Eine Verallgemeinerung des Hauptresultates	52
	Verzeichnis der verwendeten Symbole	55
	Literaturverzeichnis	57
	Index	59

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Der Kontext und das Hauptresultat

Mit Hilfe der Iterationstheorie, deren Grundlagen unabhängig voneinander von den beiden französischen Mathematikern Pierre Fatou und Gaston Julia in ihren Arbeiten [16] und [19] zu Beginn des 20. Jahrhunderts gelegt wurden, kann man zu einer gegebenen ganzen Funktion f jeden Punkt der komplexen Zahlenebene entweder der Juliamenge oder der Fatoumenge zuordnen. Letztgenannte Menge besteht aus den Punkten, in deren Umgebung die Familie der Iterierten von f eine normale Familie bildet, das heißt, das Verhalten der Punkte aus dieser Umgebung unter Iteration von f ist in gewissem Sinne „stabil“ und „vorhersagbar“. Anders verhält es sich bei den Punkten aus der Juliamenge, die manchmal auch als „chaotische Menge“ bezeichnet wird. Für zwei beliebig nah beieinander liegende Punkte aus der Juliamenge kann das Iterationsverhalten stark differieren.

Verschiedenste Aspekte dieser beiden Mengen wurden seither erforscht, wobei die Möglichkeit ihrer Visualisierung mit Hilfe leistungsfähiger Computer in den Achtziger Jahren zu einem neuen Aufschwung der Theorie führte. Neben den ersten Fragen nach der grundlegenden Struktur dieser Mengen kamen zwangsläufig auch solche nach dem Maß und der Dimension auf. Um dabei der oftmals komplizierten und durch Selbstähnlichkeit geprägten Struktur der Mengen gerecht zu werden, legt man den Hausdorffschen Dimensionsbegriff zugrunde, der in Kapitel 2 erläutert wird. Anders als bei den beiden bekannteren Dimensionsbegriffen, der Dimension eines reellen Vektorraums und der topologischen Dimension, ist die Hausdorff-Dimension nicht zwangsläufig ganzzahlig. Sie wird deshalb manchmal auch mit dem lateinischen Wort für „gebrochen“ als „fraktale“ Dimension bezeichnet. Man nennt zudem eine Menge ein Fraktal, wenn ihre Hausdorff-Dimension größer als ihre topologische Dimension ist.

Noel Baker bewies 1975 in [3], dass die Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion Kontinua enthält, so dass ihre Hausdorff-Dimension größer gleich eins ist. Eine der wichtigsten Arbeiten zur Untersuchung der Hausdorff-Dimension der Juliamenge ganzer transzendenten Funktionen stammt aus dem Jahre 1987 von Curt McMullen [21]. Er zeigt unter anderem, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge jeder Funktion aus der sogenannten Exponentialfamilie $\{\lambda \exp : \lambda \neq 0\}$ gleich zwei ist. Die Methoden, die er dabei in seinem Beweis benutzt, wurden seitdem in fast allen Arbeiten aus diesem Kontext verwendet. Auch für uns stellen sie ein wichtiges Hilfsmittel dar, um das Hauptresultat dieser Arbeit zu beweisen. Es zeigt, dass sich McMullens Resultat auf eine viel größere Klasse von Funktionen verallgemeinern lässt. Dabei bezeichnen wir mit \mathcal{B} die Klasse der

ganzen Funktionen, für die die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion beschränkt ist. Diese Menge besteht aus den endlichen kritischen und asymptotischen Werten der Funktion. Wir werden in Kapitel 2 sehen, dass die Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion ganz allgemein in der Iterationstheorie eine wichtige Rolle spielt. Weiter sagen wir, dass eine ganze Funktion endliche Ordnung hat, falls $K, r_0 > 0$ derart existieren, dass

$$|f(z)| \leq \exp(|z|^K)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > r_0$ gilt. Mit Hilfe dieser beiden Begriffe können wir das Hauptresultat wie folgt formulieren.

Satz 1.1.1 *Die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} ist gleich zwei.*

Dass wir im obigen Satz nur ganze transzendente Funktionen betrachten, die in der Klasse \mathcal{B} liegen, scheint kanonisch zu sein, da man, wie wir in Kapitel 3 sehen werden, nur für solche Funktionen den von Alexandre Eremenko und Mikhael Lyubich in [14] beschriebenen sogenannten logarithmischen Variablenwechsel durchführen kann, welcher ein wichtiger Bestandteil des Beweises ist. Wir werden mit seiner Hilfe eine „geschachtelte“ Menge konstruieren, von der wir unter der Bedingung, dass f zusätzlich endliche Ordnung hat, zeigen können, dass ihre Hausdorff-Dimension je nach Ansatz der Konstruktion beliebig nahe an zwei liegt. Nach einem Satz aus oben erwähnter Arbeit [14] gilt für jede ganze transzendente Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} , dass die sogenannte entkommende Menge $I(f) := \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty\}$ eine Teilmenge der Juliamenge von f ist. Unsere „geschachtelte“ Menge ist zwar keine Teilmenge der entkommenden Menge, aber wie wir am Ende von Kapitel 3 zeigen werden, kann man den gerade erwähnten Satz von Eremenko und Lyubich dahingehend verallgemeinern, dass auch Punkte, die unter Iteration betragsmäßig „groß“ bleiben, eine Teilmenge der Juliamenge bilden. Wie wir in Kapitel 5 zeigen werden, können wir die Konstruktion unserer „geschachtelten“ Menge so durchführen, dass sie eine Teilmenge der eben beschriebenen Menge und somit auch der Juliamenge ist.

Wie erwähnt, benutzen wir zur Abschätzung der Hausdorff-Dimension unserer „geschachtelten“ Menge, dass die der Konstruktion zugrunde liegende Funktion endliche Ordnung besitzt. Dass der Satz 1.1.1 ohne die Voraussetzung der Endlichkeit der Ordnung der Funktion nicht gilt, folgt aus den Arbeiten von Gwyneth Stallard aus den Jahren 1990-2000. Sie zeigt zunächst in [29], dass zu vorgegebenem $\delta > 0$ eine ganze transzendente Funktion aus der Klasse \mathcal{B} so existiert, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge dieser Funktion kleiner als $1 + \delta$ ist. Später in [31] und [32] beweist sie dann die stärkere Aussage, dass zu jedem $d \in]1, 2[$ eine ganze transzendente Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} so existiert, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge gleich d ist. In [30] zeigt sie zudem noch, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer transzendenten Funktion aus der Klasse \mathcal{B} echt größer eins ist.

Wie wir in Kapitel 3 als Folgerung aus einem berühmten Satz von Lars Ahlfors sehen werden, ist für eine ganze Funktion f und alle $\delta > 0$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten der Menge $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| > \delta\}$ endlich, falls f endliche Ordnung hat. Wir bezeichnen diese Zusammenhangskomponenten auch als Tracts von f . Da sie eine wichtige Rolle beim logarithmischen Variablenwechsel spielen, werden wir für den Fall, dass die

Funktion f endliche Ordnung hat, die Notation des logarithmischen Variablenwechsels zu Beginn von Kapitel 4 für unsere Zwecke noch präzisieren können.

Teilresultate des Satzes 1.1.1 wurden 2001 von Masahiko Taniguchi [35] und 2006 von Krzysztof Barański [4] bewiesen. Taniguchi zeigt, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer strukturell endlichen, transzendenten Funktion eines jeden Typs gleich zwei ist, wobei sich eine strukturell endliche, transzendenten Funktion vom Typ (p, q) in der Form

$$f(z) = \int^z P(t) \exp(Q(t)) dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit zwei Polynomen P, Q , $\text{grad}(P) = p$ und $\text{grad}(Q) = q$ darstellen lässt. Barański beweist, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion endlicher Ordnung gleich zwei ist, falls die Funktion einen anziehenden Fixpunkt besitzt, dessen unmittelbares Einzugsgebiet ein Kompaktum enthält, das wiederum die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion enthält. In diesem Fall stimmt dann der unmittelbare Einzugsbereich des Fixpunktes mit der Fatoumenge überein. Es soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben, dass man Satz 1.1.1 auch mit Hilfe eines Artikels von Lasse Rempe [25] von 2006 aus dem Ergebnis von Barański ableiten kann. Da zum Verständnis dieses Artikels tiefliegende Erkenntnisse in den Bereichen der quasikonformen Abbildungen und der holomorphen Bewegungen erforderlich sind, erscheint es dennoch sinnvoll, einen direkten Beweis für Satz 1.1.1 zu geben. Die Beweisideen werden dabei im wesentlichen auf den oben angesprochenen Arbeiten von McMullen und Barański beruhen.

Eine genauere Betrachtung des Beweises liefert abschließend in Kapitel 5 eine Verallgemeinerung unseres Hauptresultates. Für eine ganze transzendenten Funktion f endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} sei $\delta > 0$ derart, dass die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion von f in $B(0, \delta/2)$, das heißt im Kreis mit Radius $\delta/2$ um den Nullpunkt, enthalten ist. Wie oben erwähnt ist dann die Anzahl R der Tracts, das heißt der Zusammenhangskomponenten von $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| > \delta\}$, endlich, da f endliche Ordnung hat. Sei $\mathcal{R} := \{1, \dots, R\}$ und $\{T_r : r \in \mathcal{R}\}$ die Menge der Tracts. Dann können wir die Verallgemeinerung unseres Hauptresultates wie folgt formulieren, wobei wir mit $\mathcal{J}(f)$ die Juliamenge von f bezeichnen.

Satz 1.1.2 *Sei f eine ganze transzendenten Funktion endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} . Weiter sei $\underline{r} := (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{R} und*

$$M_{\underline{r}} := \{z \in \mathcal{J}(f) : f^n(z) \in T_{r_n}\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{HD}(M_{\underline{r}}) = 2.$$

Vergleicht man die oben genannten Ergebnisse über die Hausdorff-Dimension der Juliamenge ganzer transzendenten Funktionen mit denen für rationale Funktionen, so lassen sich einige Unterschiede feststellen.

Anders als bei einer ganzen transzendenten Funktion ist die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer rationalen Funktion f nicht zwangsläufig größer gleich eins. Nach einem Satz von V. L. Garber [18] ist sie aber zumindest positiv, falls $\text{grad}(f) \geq 2$ ist.

Betrachtet man eine rationale hyperbolische Funktion f vom Grad größer gleich zwei, so gilt nach einem Satz von Dennis Sullivan [34], dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge von f echt kleiner zwei ist. Dabei bezeichnen wir eine ganze Funktion f im

Allgemeinen als hyperbolisch, falls der Abschluss der Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion von f in der Vereinigung von Einzugsbereichen anziehender periodischer Punkte enthalten ist. Wie wir an dem oben erwähnten Ergebnis von Barański sehen können, existieren im Gegensatz dazu ganze transzendente hyperbolische Funktionen, für die die Hausdorff-Dimension ihrer Juliamenge gleich zwei ist. Konkrete Beispiele hierfür sind durch die Funktionen $\lambda \exp$ mit $\lambda \in]0, 1/e[$ gegeben. Alle diese Funktionen besitzen einen anziehenden Fixpunkt, dessen unmittelbarer Einzugsbereich die einzige endliche Singularität der Umkehrfunktion, den asymptotischen Wert 0, enthält. Wie oben erwähnt, zeigte schon McMullen in [21], dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge dieser Funktionen gleich zwei ist. Das Maß ihrer Juliamenge ist nach demselben Artikel hingegen gleich 0. Eine weitere Klasse ganzer transzendenter Funktionen, die McMullen in [21] betrachtet, ist die Sinusfamilie $\{\sin(\alpha z + \beta) : \alpha \neq 0\}$. Er zeigt, dass die Juliamenge einer jeden Funktion aus der Sinusfamilie positives Maß hat und somit Hausdorff-Dimension zwei besitzt. Da jede der Funktionen $\lambda \sin$ mit $\lambda \in]0, 1[$ zu einer Funktion aus der Sinusfamilie konjugiert und, wie man sich überlegen kann, hyperbolisch ist, erhalten wir weitere Beispiele für ganze transzendente hyperbolische Funktionen, für die die Hausdorff-Dimension ihrer Juliamenge gleich zwei ist. Dabei folgt die Hyperbolizität der Funktionen aus der Tatsache, dass die einzigen beiden Singularitäten der Umkehrfunktion, die kritischen Werte λ und $-\lambda$, im Einzugsbereich des attraktiven Fixpunktes 0 liegen.

Die Funktionen der Sinusfamilie sind zudem Beispiele für ganze transzendente Funktionen, deren Juliamenge positives Maß bei nichtleerer Fatoumenge besitzt. Es war lange Zeit eine offene Frage, ob überhaupt rationale Funktionen mit dieser Eigenschaft existieren. Sie wurde erst kürzlich von Xavier Buff und Arnaud Chéritat [10] beantwortet, indem es ihnen gelang, Polynome mit nichtleerer Fatoumenge zu konstruieren, deren Juliamenge positives Maß besitzt.

Ein weiterer interessanter Aspekt der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} , der sehr intensiv untersucht wurde und auch heute noch wird, soll an dieser Stelle nicht unerwähnt bleiben. Es handelt sich dabei um die Struktur der Juliamenge von f bzw. der oben genannten Teilmenge $I(f)$. Robert Devaney und Michal Křych bewiesen 1984 in [13], dass für jede Funktion $\lambda \exp$ mit $\lambda \in]0, 1/e[$ die Menge $I(\lambda \exp)$ aus überabzählbar vielen Kurven besteht. Sie formen eine „Cantor-Menge von Kurven“, die in der Literatur als „Cantor-Bouquet“ bezeichnet wird. Bei diesen Funktionen tritt zudem ein erstaunliches Phänomen auf, das als „Dimensions-Paradoxon“ bezeichnet wird. Bogusława Karpińska zeigte 1999 in [20], dass die Hausdorff-Dimension der Vereinigung dieser Kurven ohne ihre Endpunkte gleich eins ist, während die Hausdorff-Dimension der Menge ihrer Endpunkte gleich zwei ist. Die Hausdorff-Dimension liegt also lax ausgedrückt „auf den Endpunkten“.

Barański übertrug die Ergebnisse von Devaney, Křych und Karpińska in der oben erwähnten Arbeit [4] auf die Klasse ganzer transzendenter Funktionen endlicher Ordnung, die einen anziehenden Fixpunkt besitzen, dessen unmittelbares Einzugsgebiet ein Kompaktum enthält, das wiederum die Menge der endlichen Singularitäten der jeweiligen Umkehrfunktion enthält.

Weiter zeigten Dierk Schleicher und Johannes Zimmer 2003 in [27], dass sich für Funktionen der Form $\lambda \exp$ mit $\lambda \neq 0$ jeder Punkt aus der Menge $I(\lambda \exp)$ durch eine Kurve in $I(\lambda \exp)$ mit ∞ verbinden lässt, was eine Vermutung von Eremenko für diese Klasse von Funktionen beweist.

Erst kürzlich wurde dieses Ergebnis von Günter Rottenfuß, Johannes Rückert, Lasse

Rempe und Dierk Schleicher in [26] auf die Klasse von Funktionen übertragen, mit der wir uns in dieser Arbeit beschäftigen, das heißt auf die Klasse ganzer transzendenter Funktionen endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} . Zudem zeigen sie, dass dieses Resultat ohne die Voraussetzung der Endlichkeit der Ordnung im Allgemeinen nicht gilt.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Unendliche Produkte

Das Konzept der unendlichen Produkte ist ähnlich dem der unendlichen Summen. Allerdings genießt die Null hier eine gewisse Ausnahmestellung. Wir definieren im folgenden Abschnitt zunächst den Begriff des unendlichen Produktes und seiner Konvergenz bzw. absoluten Konvergenz, um anschließend das Hauptresultat dieser Theorie formulieren zu können. Für weitere Informationen zu diesem Themengebiet verweisen wir auf das Buch von Conway [12].

Definition 2.1.1 (Konvergenz unendlicher Produkte) Sei $(z_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge. Dann heißt das unendliche Produkt $\prod_{j=0}^{\infty} z_j$ **konvergent**, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

- 1.) Es existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}_0$ so, dass $z_j \neq 0$ für alle $j \geq j_0$ ist.
- 2.) Es existiert der Grenzwert

$$p := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=j_0}^n z_j$$

mit $p \neq 0$.

Im Falle der Konvergenz setzt man dann

$$\prod_{j=0}^{\infty} z_j := p \prod_{j=0}^{j_0-1} z_j.$$

Bemerkung 2.1.1 Analog zur identischen Bezeichnungsweise einer Summe und der Folge der Partialsummen verwenden wir hier die Bezeichnung $\prod_{j=0}^{\infty} z_j$ sowohl für das Produkt als auch für die Folge der „Partialprodukte“.

Im Falle der Konvergenz von $\prod_{j=0}^{\infty} z_j$ gilt nach Definition insbesondere, dass $\prod_{j=0}^{\infty} z_j$ genau dann gleich Null ist, wenn ein $j_0 \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $z_{j_0} = 0$.

Da eine notwendige Bedingung für die Konvergenz eines unendlichen Produktes ist, dass die zugehörige Folge $(z_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ gegen 1 konvergiert, schreibt man oft für alle $j \in \mathbb{N}_0$ die Faktoren z_j in der Form $z_j = 1 + c_j$ für entsprechende $c_j \in \mathbb{C}$.

Definition 2.1.2 (Absolute Konvergenz unendlicher Produkte) Sei $(c_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge. Das Produkt $\prod_{j=0}^{\infty} (1 + c_j)$ heißt **absolut konvergent**, falls das Produkt $\prod_{j=0}^{\infty} (1 + |c_j|)$ konvergiert.

Da aus der absoluten Konvergenz von $\prod_{j=0}^{\infty} (1 + c_j)$ unmittelbar die Konvergenz von $\prod_{j=0}^{\infty} (1 + |c_j|)$ folgt, liefert der folgende Satz implizit ein Kriterium dafür, wann ein unendliches Produkt konvergiert.

Satz 2.1.1 Sei $(c_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ eine komplexe Folge. Dann konvergiert das Produkt $\prod_{j=0}^{\infty} (1 + c_j)$ genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ absolut konvergiert.

2.2 Dichte und Verzerrung

Im Folgenden werden wir das Maß einer Lebesgue-messbaren Menge $A \subset \mathbb{C}$ stets mit $\text{meas}(A)$ bezeichnen.¹ Mit Hilfe dieser Notation führen wir zunächst formal den Begriff der Dichte ein. Des Weiteren definieren wir den Begriff der Verzerrung einer Funktion auf einer Menge und betrachten, wie sich die Dichte unter einer holomorphen und injektiven Funktion mit endlicher Verzerrung verhält. Abschließend führen wir mit den Sätzen von Koebe die wohl wichtigsten Hilfsmittel der Funktionentheorie auf, um die Verzerrung einer Funktion auf einer Menge zu kontrollieren.

Definition 2.2.1 (Dichte) Seien $A, D \subset \mathbb{C}$ messbar. Dann wird

$$\text{dens}(A, D) := \frac{\text{meas}(A \cap D)}{\text{meas}(D)}$$

die **Dichte von A in D** genannt.²

Definition 2.2.2 (Verzerrung) Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt und f eine in einer Umgebung von D holomorphe Funktion. Man bezeichnet dann

$$L(f|_D) := \frac{\sup \{|f'(z)| : z \in D\}}{\inf \{|f'(z)| : z \in D\}}$$

als die **Verzerrung von f auf D** .

Bemerkung 2.2.1 Wenn aus dem Kontext klar ersichtlich ist, auf welcher Menge D die Verzerrung der Funktion f betrachtet wird, schreibt man zur Abkürzung auch $L(f)$ anstatt $L(f|_D)$.

Je näher die Verzerrung einer Funktion dem Wert 1 ist, desto mehr bleiben relative Abstände im Urbild der Funktion auch im Bild der Funktion erhalten. Sie werden also nicht so stark „verzerrt“, daher der Name. Wie sich die Verzerrung bei der Hintereinanderausführung von Funktionen nach oben abschätzen lässt, zeigt das folgende Lemma, das man mit Hilfe der Kettenregel beweist.

¹measure, engl.: Maß

²density, engl.: Dichte

Lemma 2.2.1 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt und f eine in einer Umgebung von D holomorphe Funktion. Weiter sei g eine in einer Umgebung von $f(D)$ definierte holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$L((g \circ f)|_D) \leq L(f|_D) L(g|_{f(D)}).$$

Der nächste Satz zeigt, wie sich die Dichte unter einer holomorphen und injektiven Funktion mit endlicher Verzerrung verhält.

Satz 2.2.1 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt und messbar. Sei f eine in einer Umgebung von D definierte injektive und holomorphe Funktion mit $L(f|_D) < \infty$. Dann gilt*

$$\frac{1}{L(f|_D)^2} \text{dens}(A, D) \leq \text{dens}(f(A), f(D)) \leq L(f|_D)^2 \text{dens}(A, D)$$

für alle messbaren Teilmengen A von D .

Beweis: Nach Transformationsformel gilt

$$\begin{aligned} \text{meas}(f(A)) &= \int_A |f'(z)|^2 dz \\ &\leq \sup\{|f'(z)|^2 : z \in A\} \int_A dz \\ &\leq \sup\{|f'(z)|^2 : z \in D\} \text{meas}(A). \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass

$$\text{meas}(f(A)) \geq \inf\{|f'(z)|^2 : z \in D\} \text{meas}(A)$$

ist. Also gilt die Behauptung des Satzes 2.2.1. \square

Wir betrachten nun den Koebeschen Verzerrungssatz. Nähere Details zum Beweis finden sich beispielsweise im Buch von Pommerenke [24]. Ebenso wie dort findet man den Satz in der Literatur im Allgemeinen nur für eine auf dem Einheitskreis holomorphe und injektive Funktion f mit $f'(0) = 1$. Hieraus lässt sich die unten formulierte Version des Satzes allerdings leicht herleiten. Wie der Name schon sagt, ist es mit Hilfe dieses Satzes möglich, die Verzerrung einer Funktion zu kontrollieren. Als eine Folgerung wird die für diese Arbeit typische Anwendung gegeben.

Satz 2.2.2 (Koebescher Verzerrungssatz) *Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Weiter sei $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt*

$$\frac{r-s}{(r+s)^3} |f'(z_0)| \leq |f'(z)| \leq \frac{r+s}{(r-s)^3} |f'(z_0)|$$

für alle $z \in B(z_0, r)$ und $s := |z - z_0|$.

Aus der Definition der Verzerrung einer Funktion folgt somit unmittelbar der erste Teil des folgenden Lemmas. Der zweite Teil ergibt sich durch eine elementare Rechnung.

Lemma 2.2.2 *Unter den Voraussetzungen des Koebeschen Verzerrungssatzes gilt*

$$L(f|_{B(z_0,s)}) \leq \left(\frac{r+s}{r-s}\right)^4$$

für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $s < r$. Insbesondere gilt

$$L(f|_{B(z_0,s)}) \leq 1 + 160 \frac{s}{r}$$

für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $2s < r$.

Auch der folgende Satz wird manchmal als „Koebescher Verzerrungssatz“ bezeichnet. Mit seiner Hilfe kann man direkt Abstände im Urbild einer Funktion mit den zugehörigen Abständen im Bild vergleichen.

Satz 2.2.3 (Koebescher 1/4-Satz) *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei $f : B(z_0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt*

$$f(B(z_0, r)) \supset B\left(f(z_0), \frac{1}{4} |f'(z_0)| r\right).$$

2.3 Hausdorff-Maß und Hausdorff-Dimension

Wir führen nun den nach Felix Hausdorff benannten Dimensionsbegriff ein, mit dessen Hilfe man auch fraktalen Mengen wie zum Beispiel der triadischen Cantormenge sinnvoll eine Dimension zuordnen kann. Wir beschränken uns dabei darauf, diese sogenannte Hausdorff-Dimension für beschränkte Teilmengen der Ebene zu definieren. Das Konzept lässt sich aber auch auf beschränkte Teilmengen des \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$ übertragen. Eine ausführliche Einführung in dieses Themengebiet liefert das Buch von Falconer [15]. Für die Definition der Hausdorff-Dimension benötigen wir zunächst den Begriff des Hausdorff-Maßes und hierfür wiederum den Begriff des Durchmessers einer Menge.

Definition 2.3.1 (Durchmesser) Sei $D \subset \mathbb{C}$ beschränkt. Dann wird

$$\text{diam}(D) := \sup\{|z - w| : z, w \in D\}$$

der **Durchmesser von D** genannt.³

Definition 2.3.2 (Hausdorff-Maß) Sei $A \subset \mathbb{C}$ beschränkt. Für alle $\varepsilon, s \in \mathbb{R}_{>0}$ setzen wir

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) := \inf \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam}(U))^s,$$

wobei das Infimum über alle abzählbaren Überdeckungen \mathcal{U} von A gebildet wird, so dass $\text{diam}(U) < \varepsilon$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt. Das (äußere) s – **dimensionale Hausdorff-Maß von A** wird dann definiert als

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A).$$

³*diameter*, engl.: Durchmesser

Definition 2.3.3 (Hausdorff-Dimension) Sei $A \subset \mathbb{C}$ beschränkt. Dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{HD}(A) := \sup\{s \in \mathbb{R}_{>0} : \mathcal{H}^s(A) = +\infty\}$$

die **Hausdorff-Dimension von A** .

Bemerkung 2.3.1 Man kann zeigen, dass

$$\mathcal{HD}(A) = \inf\{s \in \mathbb{R}_{>0} : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

für alle beschränkten Teilmengen A von \mathbb{C} gilt.

Wie man sich leicht anhand der Definition überlegen kann, besitzt die Hausdorff-Dimension folgende Eigenschaften.

Lemma 2.3.1 Sei $A \subset \mathbb{C}$ beschränkt. Dann gilt

$$\mathcal{HD}(B) \leq \mathcal{HD}(A)$$

für alle Teilmengen B von A .

Lemma 2.3.2 Sei $s \in \mathbb{R}_{>0}$ und I eine abzählbare Menge. Weiter sei A_i für alle $i \in I$ eine beschränkte Teilmenge von \mathbb{C} mit $\mathcal{HD}(A_i) \leq s$. Dann gilt

$$\mathcal{HD}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq s.$$

Lemma 2.3.3 Sei $A \subset \mathbb{C}$ beschränkt und A habe positives Lebesgue-Maß. Dann gilt

$$\mathcal{HD}(A) = 2.$$

Aufgrund der Komplexität der Definition ist es meistens nicht möglich, die Hausdorff-Dimension exakt zu berechnen. Für die in der Einleitung erwähnte triadische Cantormenge gelingt dies hingegen. Ihre Hausdorff-Dimension ist gleich $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. Eine Möglichkeit zur Abschätzung der Hausdorff-Dimension bietet das folgende Lemma. Da der Beweis überraschend kurz ist, nehmen wir ihn in diese Arbeit auf.

Lemma 2.3.4 Sei $A \subset \mathbb{C}$ kompakt und $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Es existiere ein Maß μ auf A und Konstanten $C, r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass

$$\mu(B) \leq C r^s$$

für jeden Kreis B mit Radius $r < r_0$ ist. Dann gilt

$$\mathcal{HD}(A) \geq s.$$

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\varepsilon < r_0$. Sei \mathcal{U} eine abzählbare Überdeckung von A bestehend aus Mengen $U_i, i \in \mathbb{N}$ derart, dass $\text{diam}(U_i) < \varepsilon$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Wir setzen

$$r_i := \text{diam}(U_i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann existiert für alle $i \in \mathbb{N}$ ein Punkt $z_i \in \overline{U_i}$ mit

$$B_i := B(z_i, r_i) \supset U_i.$$

Also gilt

$$A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i.$$

Da $r_i < r_0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ ist, folgt

$$0 < \mu(A) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i) \leq C \sum_{i \in \mathbb{N}} (r_i)^s$$

nach Voraussetzung und den Maßeigenschaften von μ , das heißt

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} (\text{diam}(U_i))^s = \sum_{i \in \mathbb{N}} (r_i)^s \geq \frac{\mu(A)}{C} > 0.$$

Folglich ist $\mathcal{H}^s(A) > 0$ und die Behauptung des Satzes 2.3.4 folgt aus der Definition der Hausdorff-Dimension. \square

Wir werden obiges Lemma in dieser Arbeit nicht direkt anwenden, aber es spielt eine wichtige Rolle im Beweis des folgenden Satzes aus der Arbeit von McMullen [21]. Für die Formulierung des Satzes benötigen wir aber zunächst noch folgende Definition.

Definition 2.3.4 (Nesting conditions) Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei \mathcal{K}_n eine endliche Menge von paarweise disjunkten, kompakten Teilmengen von \mathbb{C} , die keine Nullmengen sind. Wir setzen

$$\overline{\mathcal{K}}_n := \bigcup_{K \in \mathcal{K}_n} K$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und sagen, dass die so definierte Folge $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die **Nesting conditions** erfüllt, falls eine positive reelle Folge $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine positive reelle Nullfolge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ derart existieren, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende vier Bedingungen erfüllt sind.⁴

- 1.) Für alle $K \in \mathcal{K}_n$ existiert ein $K' \in \mathcal{K}_{n+1}$ mit

$$K' \subset K$$

(d.h. jedes Element aus \mathcal{K}_n enthält mindestens ein Element aus \mathcal{K}_{n+1}).

- 2.) Für alle $K \in \mathcal{K}_{n+1}$ existiert ein $K' \in \mathcal{K}_n$ mit

$$K \subset K'$$

(d.h. jedes Element aus \mathcal{K}_{n+1} ist in einem Element aus \mathcal{K}_n enthalten).

- 3.) Für alle $K \in \mathcal{K}_n$ gilt

$$\text{dens}(\overline{\mathcal{K}}_{n+1}, K) \geq \Delta_n.$$

⁴*nesting conditions*, engl.: „Verschachtelungsbedingungen“

4.) Für alle $K \in \mathcal{K}_n$ gilt

$$\text{diam}(K) \leq d_n.$$

Die folgende Abschätzung der Hausdorff-Dimension wurde von McMullen in [21] bewiesen. Da sie ein zentrales Hilfsmittel in dieser Arbeit sein wird, fügen wir an dieser Stelle eine Beweisskizze hinzu.

Satz 2.3.1 *Sei $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die die Nesting conditions aus Definition 2.3.4 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathcal{HD}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n\right) \geq 2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |\ln(\Delta_j)|}{|\ln(d_n)|}.$$

Beweisskizze Wir setzen

$$A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n$$

und

$$\delta := 2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |\ln(\Delta_j)|}{|\ln(d_n)|}.$$

Wir zeigen zunächst, dass

$$\mathcal{HD}(A) \geq \delta' \tag{2.1}$$

für alle $\delta' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\delta' < \delta$ ist. Sei dazu $\delta' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\delta' < \delta$. Nach Lemma 2.3.4 reicht es zu zeigen, dass ein Maß μ auf A und Konstanten $C(\delta'), r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ so existieren, dass

$$\mu(B) \leq C(\delta') r^{\delta'}$$

für alle Kreise B in \mathbb{C} mit Radius $r < r_0$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\text{meas}(\bar{\mathcal{K}}_1) = 1$. Wir konstruieren eine Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen wie folgt. Es sei μ_1 die Einschränkung des Lebesgue-Maßes auf $\bar{\mathcal{K}}_1$. Induktiv konstruiere μ_{n+1} für $n \in \mathbb{N}$ so, dass μ_{n+1} innerhalb jedes $K \in \mathcal{K}_n$ proportional ist zum Lebesguemaß auf $\bar{\mathcal{K}}_{n+1}$ und zwar so skaliert, dass

$$\mu_{n+1}(\bar{\mathcal{K}}_{n+1} \cap K) = \mu_n(K)$$

ist. Die so definierten Maße formen bezüglich der Folge $(\mathcal{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal in dem Sinne, dass

$$\mu_m(K) = \mu_n(K)$$

für alle $n \in \mathbb{N}, K \in \mathcal{K}_n$ und $m \geq n$ ist. Man kann zeigen, dass die Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergiert. Es sei μ der zugehörige Grenzwert. Dann ist der Träger von μ gleich A . Weiter kann man zeigen, dass

$$\mu(K) \leq \frac{\text{meas}(K)}{\prod_{j=1}^n \Delta_j}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathcal{K}_n$ ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Sei nun B ein Kreis mit Radius $r < d_1$ und $n \in \mathbb{N}$ so,

dass $d_n > r \geq d_{n+1}$ ist. Weiter sei \hat{B} die Vereinigung aller $K \in \mathcal{K}_{n+1}$, die einen nichtleeren Schnitt mit B haben. Dann ist $\text{diam}(\hat{B}) \leq 2 \text{diam}(B) = 4r$. Es folgt

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \mu(\hat{B}) \\ &\leq \frac{\text{meas}(\hat{B})}{\prod_{j=1}^n \Delta_j} \\ &\leq \frac{\pi(2r)^2}{\prod_{j=1}^n \Delta_j} \\ &= 4\pi r^{\delta'} \left[\frac{r^{2-\delta'}}{\prod_{j=1}^n \Delta_j} \right] \\ &\leq 4\pi \left[\frac{d_n^{2-\delta'}}{\prod_{j=1}^n \Delta_j} \right] r^{\delta'}. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der Term in eckigen Klammern für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert. Folglich ist er insbesondere beschränkt. Also gilt (2.1) und hieraus folgt unmittelbar die Behauptung des Satzes 2.3.1. \square

Bemerkung 2.3.2 Man kann die Nesting conditions analog auch für Teilmengen des \mathbb{R}^k , $k \in \mathbb{N}$ formulieren. Die Aussage des Satzes 2.3.1 gilt dann mit k anstatt 2. Für den Beweis muss man lediglich einige Konstanten anders wählen.

Des Weiteren kann man zeigen, dass die Hausdorff-Dimension invariant unter Bi-Lipschitz-Abbildungen ist. Aus Vollständigkeitsgründen fügen wir einen Beweis dieser Tatsache an.

Definition 2.3.5 (Bi-Lipschitz-Abbildung) Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann nennen wir f eine **Bi-Lipschitz-Abbildung**, falls eine Konstante $C \in \mathbb{R}_{>0}$ so existiert, dass

$$\frac{|x-y|}{C} \leq |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$$

für alle $x, y \in D$ gilt.

Lemma 2.3.5 Sei $D \subset \mathbb{C}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Bi-Lipschitz-Abbildung. Dann gilt

$$\mathcal{HD}(A) = \mathcal{HD}(f(A))$$

für alle beschränkten Teilmengen A von D .

Beweis: Sei A eine beschränkte Teilmenge von D und seien $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $s \in \mathbb{R}_{>0}$. Sei \mathcal{U} eine abzählbare Überdeckung von A mit $\text{diam}(U) < \varepsilon$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $U \subset D$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Da f eine Bi-Lipschitz-Abbildung ist, existiert $C \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\frac{|x-y|}{C} \leq |f(x) - f(y)| \leq C|x-y|$$

für alle $x, y \in D$. Daraus folgt

$$\frac{\text{diam}(U)}{C} \leq \text{diam}(f(U)) \leq C \text{diam}(U)$$

für alle $U \in \mathcal{U}$. Also ist $f(\mathcal{U}) := \{f(U) : U \in \mathcal{U}\}$ eine abzählbare Überdeckung von $f(A)$ mit $\text{diam}(f(U)) < \varepsilon C$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Es folgt

$$\frac{1}{C^s} \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam}(U))^s \leq \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam}(f(U)))^s \leq C^s \sum_{U \in \mathcal{U}} (\text{diam}(U))^s.$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$, das heißt auch $\varepsilon C \rightarrow 0$, folgt

$$\frac{1}{C^s} \mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(f(A)) \leq C^s \mathcal{H}(A).$$

Also ist $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ genau dann, wenn $\mathcal{H}^s(f(A)) < \infty$ ist. Folglich gilt die Behauptung des Lemmas 2.3.5. \square

Wir werden später in dieser Arbeit das obige Lemma verwenden, um die Hausdorff-Dimension des Bildes einer Teilmenge eines achsenparallelen Quadrates mit Seitenlänge kleiner π unter der Exponentialfunktion abzuschätzen. Dass die Einschränkung der Exponentialfunktion auf ein solches Quadrat eine Bi-Lipschitz-Abbildung ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.3.6 *Sei $Q \subset \mathbb{C}$ ein kompaktes achsenparalleles Quadrat mit Seitenlänge kleiner π . Dann ist $\exp|_Q$ eine Bi-Lipschitz-Abbildung.*

Beweis: Sei $K \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine konvexe kompakte Menge mit $\exp(Q) \subset K$. Dann gilt

$$C_1 := \max \left\{ \frac{1}{|z|} : z \in K \right\} < \infty.$$

Wir setzen ferner

$$C_2 := \max \left\{ \exp(\mathcal{R}e(z)) : z \in \partial Q \right\}.$$

Dann sind $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$. Seien nun $x, y \in Q$ und \log ein Zweig des Logarithmus mit $\log \circ \exp|_Q = \text{id}_Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x - y| &= \left| \log(\exp(x)) - \log(\exp(y)) \right| & (2.2) \\ &= \left| \int_{\exp(y)}^{\exp(x)} (\log)'(z) dz \right| \\ &\leq \int_{\exp(y)}^{\exp(x)} \frac{1}{|z|} dz \\ &\leq |\exp(x) - \exp(y)| \sup \left\{ \frac{1}{|z|} : z \in [\exp(y), \exp(x)] \right\} \\ &\leq C_1 |\exp(x) - \exp(y)|. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |\exp(x) - \exp(y)| &= \left| \int_y^x (\exp)'(z) dz \right| & (2.3) \\ &\leq \int_y^x |\exp(z)| dz \\ &\leq |x - y| \sup \left\{ |\exp(z)| : z \in [y, x] \right\} \\ &\leq |x - y| \sup \left\{ \exp(\mathcal{R}e(z)) : z \in [y, x] \right\} \\ &\leq C_2 |x - y|. \end{aligned}$$

Wir wählen $C := \max\{C_1, C_2\}$ und erhalten mit (2.2) und (2.3)

$$\frac{|x - y|}{C} \leq |\exp(x) - \exp(y)| \leq C|x - y|.$$

Also gilt die Behauptung des Lemmas 2.3.6. \square

2.4 Extremale Länge

In diesem Abschnitt definieren wir kurz den auf Arne Beurling und Lars Ahlfors zurückgehenden Begriff der extremalen Länge einer Kurvenschar und führen seine wichtigsten Eigenschaften auf. Später in dieser Arbeit wird insbesondere die konforme Invarianz der extremalen Länge eine wichtige Rolle spielen. Es sei angemerkt, dass die Definition der extremalen Länge in der Literatur nicht einheitlich ist. Wir benutzen in dieser Arbeit nicht die allgemeinste aber die für unsere Zwecke dienlichste Version. Eine ausführliche Einführung in dieses Gebiet bietet das Buch von Ahlfors [2].

Definition 2.4.1 (Zulässige Metrik) Sei \mathcal{L} eine Menge von lokal rektifizierbaren Kurven in der Ebene. Dann nennen wir eine Funktion $\rho : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ **zulässige Metrik** (für \mathcal{L}), falls ρ Borel-messbar ist und

$$\int_{\gamma} \rho(z)|dz| \geq 1$$

für alle Kurven $\gamma \in \mathcal{L}$ gilt.

Definition 2.4.2 (Extremale Länge) Sei \mathcal{L} eine Menge von lokal rektifizierbaren Kurven in der Ebene. Dann bezeichnen wir

$$\lambda(\mathcal{L}) := \frac{1}{\inf \left\{ \int_{\bigcup \mathcal{L}} \rho(z)^2 |dz|^2 : \rho \text{ zulässige Metrik} \right\}}$$

als die **extremale Länge von \mathcal{L}** .

Bemerkung 2.4.1 Reziprok zur extremalen Länge ist in der obigen Situation der sogenannte **Modul von \mathcal{L}** , der mit $M(\mathcal{L})$ bezeichnet wird, das heißt

$$M(\mathcal{L}) = \inf \left\{ \int_{\bigcup \mathcal{L}} \rho(z)^2 |dz|^2 : \rho \text{ zulässige Metrik} \right\}.$$

Mit Hilfe der Substitutionsregel und des Transformationssatzes kann man leicht einsehen, dass der Modul einer Menge von lokal rektifizierbaren Kurven konform invariant ist. Es gilt also das folgende Lemma.

Lemma 2.4.1 *Sei \mathcal{L} eine Menge von lokal rektifizierbaren Kurven in der Ebene. Sei $F : \bigcup \mathcal{L} \rightarrow F(\bigcup \mathcal{L})$ eine biholomorphe Abbildung. Dann gilt*

$$\lambda(\mathcal{L}) = \lambda(F(\mathcal{L}))$$

mit $F(\mathcal{L}) := \{F(\gamma) : \gamma \in \mathcal{L}\}$.

Lemma 2.4.2 *Seien \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 zwei Mengen von lokal rektifizierbaren Kurven in der Ebene mit $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$. Dann gilt*

$$\lambda(\mathcal{L}_1) \geq \lambda(\mathcal{L}_2).$$

Wir betrachten nun den sogenannten Ahlforschen Verzerrungssatz. Im Originalbeweis des Satzes benutzte Ahlfors in [1] Methoden des Flächen-Längen-Prinzips von Grötzsch. Ein späterer Beweis aus [2] basiert auf dem Konzept der extremalen Länge bzw. der daraus abgeleiteten extremalen Distanz. Wir werden den Satz in dieser Arbeit nicht direkt anwenden, aber wir werden mit Hilfe des zuvor definierten Begriffs der extremalen Länge eine Modifikation des Satzes beweisen, die ein wichtiger Bestandteil im Beweis des Hauptsatzes ist. Für die Formulierung des Verzerrungssatzes benötigen wir noch die Definition eines Streifengebietes.

Definition 2.4.3 (Streifengebiet) Sei $S \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann nennen wir S ein **Streifengebiet**, falls folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

1.) Es existiert eine stetige Kurve $\gamma :]0, 1[\rightarrow S$ mit

$$\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\gamma(t)) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \operatorname{Re}(\gamma(t)) = \infty .$$

2.) Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert ein $L_x \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass das lineare Maß jeder Komponente von $S \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = x\}$ kleiner gleich L_x ist.

Satz 2.4.1 (Ahlforscher Verzerrungssatz) *Sei S ein Streifengebiet und γ so wie in Definition 2.4.3. Für alle $x \in \mathbb{R}$ sei $\theta(x)$ das lineare Maß von $S \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = x\}$. Sei f eine auf S injektive und holomorphe Abbildung derart, dass $f(S)$ ein parallel zur reellen Achse verlaufendes Streifengebiet der Breite 1 ist und*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{Re}(f(\gamma(t))) = -\infty \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow 1} \operatorname{Re}(f(\gamma(t))) = \infty$$

gelten. Weiter seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ und

$$E_i := \{z \in S : \operatorname{Re}(z) = x_i\}$$

für $i \in \{1, 2\}$. Es gelte

$$\min\{\operatorname{Re}(f(z)) : z \in E_2\} \geq \max\{\operatorname{Re}(f(z)) : z \in E_1\}$$

und

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} \geq \frac{1}{2} .$$

Dann gilt

$$\min\{\operatorname{Re}(f(z)) : z \in E_2\} - \max\{\operatorname{Re}(f(z)) : z \in E_1\} \geq \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\theta(x)} - \frac{1}{\pi} \ln 32 .$$

2.5 Singularitäten der Umkehrfunktion

In diesem Abschnitt erläutern wir zunächst die Begriffe der transzendenten und der algebraischen Singularität der Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion. Daran anschließend stellen wir den Zusammenhang zwischen einer transzendenten Singularität der Umkehrfunktion und einem asymptotischen Wert her. Abschließend betrachten wir einen Satz von Ahlfors, der eine Abschätzung der Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten der Umkehrfunktion einer meromorphen Funktion mit Hilfe der Ordnung der Funktion liefert.

Wie wir im Abschnitt 2.7 sehen werden, spielen die Singularitäten der Umkehrfunktion eine zentrale Rolle in der Iterationstheorie. In dieser Arbeit sind sie zudem für die Durchführbarkeit des logarithmischen Variablenwechsels wichtig, den wir in Kapitel 3 einführen werden. Eine notwendige Voraussetzung hierfür ist, dass die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion beschränkt ist.

Definition 2.5.1 (Singularität der Umkehrfunktion von f) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Sei $a \in \hat{\mathbb{C}}$ und für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ bezeichne $D(a, r)$ den Kreis um a mit Radius r bezüglich der sphärischen Metrik. Für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ wählen wir eine Komponente $U(r)$ des Urbildes von $f^{-1}(D(a, r))$ derart, dass

$$U(r_1) \subset U(r_2)$$

für alle $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r_1 < r_2$ gilt.

Falls

$$\bigcap_{r>0} U(r) \neq \emptyset$$

ist, so existiert ein $z \in \mathbb{C}$ mit $\bigcap_{r>0} U(r) = \{z\}$. Es ist dann $a = f(z)$ und für den Fall, dass $a \in \mathbb{C}$ und $f'(z) \neq 0$ oder $a = \infty$ und z ein einfacher Pol von f ist, nennen wir z einen **gewöhnlichen Punkt von f** . Wenn hingegen $a \in \mathbb{C}$ und $f'(z) = 0$ oder $a = \infty$ und z ein mehrfacher Pol von f ist, so nennen wir z einen **kritischen Punkt von f** und a einen **kritischen Wert von f** . Wir sagen auch, dass **der kritische Punkt z über a liegt** oder dass eine **algebraische Singularität über a liegt**.

Falls

$$\bigcap_{r>0} U(r) = \emptyset$$

ist, sagen wir, dass die Abbildung

$$U : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{C}), r \mapsto U(r)$$

eine **transzendente Singularität der Umkehrfunktion von f** definiert. Zur Abkürzung nennen wir U auch eine transzendente Singularität von f und sagen, dass **die transzendente Singularität U von f über a liegt**. Wir nennen eine transzendente Singularität U **direkt**, falls ein $r_0 \in \mathbb{R}_{>0}$ existiert mit $f(z) \neq a$ für alle $z \in U(r_0)$.

Für den Fall, dass eine algebraische oder eine transzendente Singularität über a liegt, sagen wir auch, dass a eine **Singularität der Umkehrfunktion von f** ist.

Bemerkung 2.5.1 Als Beispiel für eine transzendenten Singularität betrachte man die Abbildung $r \mapsto \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < -r\}$. Sie definiert für die Exponentialfunktion eine direkte Singularität über 0. Beispiele für kritische Werte sind etwa durch die Punkte 1 und -1 bei der Sinusfunktion gegeben.

Es können aber auch mehrere transzendente Singularitäten sowie kritische Punkte über demselben Punkt liegen.

Zudem kann man analog zum obigen Konzept auch für eine Funktion $f : G \rightarrow H$ mit $G \subset \mathbb{C}$ und $H \subset \hat{\mathbb{C}}$ den Begriff der Singularität der Umkehrfunktion von f definieren.

Wir definieren nun den Begriff des asymptotischen Wertes und stellen im nächsten Satz den Zusammenhang zum Begriff der transzendenten Singularität her.

Definition 2.5.2 (Asymptotischer Wert) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorph und $a \in \hat{\mathbb{C}}$. Dann nennen wir a einen **asymptotischen Wert von f** , wenn eine gegen ∞ laufende Kurve γ in \mathbb{C} so existiert, dass

$$f(z) \rightarrow a$$

für $z \rightarrow \infty$, $z \in \operatorname{Spur}(\gamma)$ gilt. Wir nennen eine solche Kurve γ auch einen **zu a gehörigen asymptotischen Weg**.

Falls U eine über einem Punkt $a \in \hat{\mathbb{C}}$ liegende transzendente Singularität einer meromorphen Funktion f ist, so lässt sich folgendermaßen ein zu a gehöriger asymptotischer Weg konstruieren. Zu einer Nullfolge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wähle man sich für alle $n \in \mathbb{N}$ Punkte $z_n \in U(r_n)$ und verbinde z_n und z_{n+1} durch eine Kurve γ_n . Dann ist die aus den Kurven γ_n zusammengesetzte Kurve γ ein zu a gehöriger asymptotischer Weg, das heißt, a ist ein asymptotischer Wert.

Falls hingegen a ein asymptotischer Wert einer meromorphen Funktion f ist, so existiert mindestens eine transzendente Singularität von f über a . Man überlege sich hierfür, dass für einen zu a gehörigen asymptotischen Weg γ und alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ das „Endstück“ von γ , das aus den $z \in \operatorname{Spur}(\gamma)$ besteht, für die $f(z) \in D(a, r)$ ist, eine Teilmenge von $f^{-1}(D(a, r))$ ist. Man definiert dann $U(r)$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ als die Komponente von $f^{-1}(D(a, r))$, die das „Endstück“ von γ enthält und erhält auf diese Weise eine transzendente Singularität über a . Es gilt also der folgende Satz.

Satz 2.5.1 Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorph und $a \in \hat{\mathbb{C}}$. Falls U eine über a liegende transzendente Singularität von f ist, so ist a ein asymptotischer Wert von f . Falls umgekehrt a ein asymptotischer Wert von f ist, so existiert mindestens eine transzendente Singularität U von f über a .

Bemerkung 2.5.2 Für eine meromorphe Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ gilt mit der in Definition 2.5.1 eingeführten Bezeichnungsweise folglich, dass die Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion von f aus den kritischen und asymptotischen Werte von f besteht.

Falls a eine Singularität der Umkehrfunktion von f ist, so gilt mit $U(r)$ wie in Definition 2.5.1, dass die Abbildung $f|_{U(r)} : U(r) \rightarrow D(a, r)$ für kein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ bijektiv ist, womit sich die Namensgebung dieser Menge erklären lässt.

Den Zusammenhang zu der vielleicht gängigeren Methode der Definition einer Singularität der Umkehrfunktion liefert der folgende Satz.

Satz 2.5.2 Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorph und a sei eine Singularität der Umkehrfunktion von f . Dann existieren ein Punkt $w \in \hat{\mathbb{C}}$, ein in einer Umgebung von w definierter Zweig ϕ der Umkehrfunktion von f und ein w mit a verbindenden Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ so, dass ϕ für jedes $t \in [0, 1[$ längs des Weges $\gamma|_{[0, t]}$, jedoch nicht längs γ analytisch fortgesetzt werden kann.

Falls a ein asymptotischer Wert ist, so gilt

$$\phi(\gamma(t)) \rightarrow \infty \quad \text{für } t \rightarrow 1.$$

Falls a ein kritischer Wert ist, so existiert $z \in \mathbb{C}$ mit $f(z) = a$ derart, dass

$$\phi(\gamma(t)) \rightarrow z \quad \text{für } t \rightarrow 1$$

gilt.

Wie wir in der Einleitung gesehen haben, ist die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} nicht zwangsläufig gleich zwei. Unser Ziel ist es zu zeigen, dass dies der Fall ist, falls die Funktion f zusätzlich endliche Ordnung hat, das heißt grob gesprochen, dass das Wachstumsverhalten der Funktion für betragsmäßig große Werte in einem gewissen Sinne „kontrollierbar“ ist. Wie wir in Kapitel 3 sehen werden, ermöglicht uns die Endlichkeit der Ordnung von f eine im Beweis des Hauptresultates zentrale Abschätzung des Realteils der durch den logarithmischen Variablenwechsel aus f abgeleiteten Funktion F .

Definition 2.5.3 (Ordnung einer Funktion) Sei f eine ganze Funktion. Wir setzen für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$M(r) := \max\{|f(z)| : |z| = r\}.$$

Dann sagen wir, dass f **endliche Ordnung** hat, falls

$$\rho := \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(M(r)))}{\ln(r)} < \infty$$

ist. In diesem Fall nennen wir ρ die **Ordnung der Funktion** f . Falls $\rho = \infty$ ist, sagen wir, dass f **keine endliche Ordnung** hat.

Bemerkung 2.5.3 Um dem Leser ein Gefühl dafür zu vermitteln, welche ganzen Funktionen endliche Ordnung haben und welche nicht, betrachten wir zunächst die Abbildung $z \mapsto \exp(z^d)$ für $d \in \mathbb{N}$. Man kann leicht nachrechnen, dass die Ordnung dieser Funktion gleich d ist. Allgemeiner ist für jedes Polynom P vom Grad $d \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Funktion $z \mapsto \exp(P(z))$ gleich d , während die Funktion $z \mapsto \exp(\exp(z))$ keine endliche Ordnung hat.

Der folgende Satz stammt von Ahlfors. Er liefert einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten einer Funktion und der Ordnung der Funktion. Der Beweis selbst und der daraus resultierende Beweis der berühmten Denjoy'schen Vermutung finden sich zum Beispiel im Buch von Nevanlinna [23].

Satz 2.5.3 (Ahlfors) Die Anzahl der direkten transzendenten Singularitäten einer meromorphen Funktion der Ordnung ρ ist für $\rho \geq 1/2$ höchstens gleich 2ρ und für $\rho < 1/2$ höchstens gleich 1.

Folglich gilt für die Anzahl N der direkten Singularitäten einer meromorphen Funktion f der Ordnung ρ stets $N \leq \max\{2\rho, 1\}$. Weiter kann man einer meromorphen Funktion mit $N \geq 2$ verschiedenen asymptotischen Werten mit Hilfe eines Satzes von Lindelöf N verschiedene transzendente Singularitäten über ∞ zuordnen. Da eine ganze Funktion den Wert ∞ nicht annimmt, ist in diesem Fall jede transzendente Singularität über ∞ direkt. Somit folgt aus obigem Satz der folgende Satz, der auch als Denjaysche Vermutung bekannt ist.

Satz 2.5.4 (Denjoy, Carleman, Ahlfors) *Sei $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ die Anzahl der verschiedenen asymptotischen Werte einer ganzen Funktion f . Falls f endliche Ordnung ρ hat, so ist*

$$N \leq 2\rho.$$

Bemerkung 2.5.4 Denjoy selbst bewies zunächst den Spezialfall, dass die zu den asymptotischen Werten gehörenden asymptotischen Wege vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen sind. Carleman zeigte, dass im allgemeinen Fall N kleiner gleich 5ρ ist. Ahlfors schließlich bewies obigen Satz in [1].

Mit Hilfe dieses Satzes lässt es sich auch relativ leicht einsehen, dass die in der Einleitung erwähnten Funktionen der Form

$$f(z) = \int^z P(t) \exp(Q(t)) dt, \quad z \in \mathbb{C}$$

mit zwei Polynomen P, Q und $p := \text{grad}(P)$, $q := \text{grad}(Q)$ aus der Arbeit von Taniguchi tatsächlich aus der Klasse \mathcal{B} sind. Man kann nachrechnen, dass eine solche Funktion f endliche Ordnung q hat. Nach dem vorangegangenen Satz besitzt f also nur endlich viele asymptotische Werte. Da zudem die Anzahl der Nullstellen von f' höchstens gleich p ist, ist auch die Anzahl der kritischen Werte von f endlich. Folglich existieren nur endlich viele Singularitäten der Umkehrfunktion von f , das heißt insbesondere, dass die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion von f beschränkt ist. Somit ist das in der Einleitung genannte Resultat von Taniguchi auch ein Teilresultat des Satzes 1.1.1. Ganze Funktionen, für die die Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion endlich ist, fasst man auch in der Klasse \mathcal{S} , der sogenannten Speiserklasse, zusammen. Zur Bedeutung dieser Funktionenklasse in der Iterationstheorie vergleiche man Abschnitt 2.7.

2.6 Hyperbolische Metrik

In diesem Abschnitt leiten wir ausgehend vom Lemma von Schwarz-Pick zunächst den Begriff der hyperbolischen Metrik auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet her. Anschließend folgt ein Überblick über die wichtigsten Ergebnisse in diesem Kontext. Anders als zumeist zuvor beweisen wir fast alle hier aufgeführten Lemmata, da wir keinen geeigneten Übersichtsartikels finden konnten, in dem sie in der von uns gewünschten Form enthalten sind. Man findet Teile dieses Abschnitts in den Büchern von Ahlfors [2] und Beardon [7], die zudem eine allgemeinere Einführung in dieses Themengebiet geben.

Lemma 2.6.1 (Schwarz-Pick) *Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Abbildung. Dann gilt*

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Bemerkung 2.6.1 Für eine Möbiustransformation τ des Einheitskreises gilt stets Gleichheit im Lemma von Schwarz-Pick. Dies folgt mit Hilfe einer einfachen Rechnung aus der Tatsache, dass in diesem Fall $\theta \in [0, 2\pi[$ und $a \in \mathbb{D}$ so existieren, dass τ eine Darstellung der Form

$$\tau(z) = \exp(i\theta) \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad z \in \mathbb{D}$$

besitzt.

Definition 2.6.1 (Hyperbolische Metrik) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ eine biholomorphe Abbildung. Wir setzen

$$\rho_G : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, (w_1, w_2) \mapsto \inf_{\gamma} \int \frac{|(f^{-1})'(w)|}{1 - |f^{-1}(w)|^2} |dw|,$$

wobei das Infimum über alle rektifizierbaren Kurven γ in G gebildet wird, die w_1 und w_2 verbinden. Wir nennen ρ_G die **hyperbolische Metrik auf G** .

Bemerkung 2.6.2 Da sich alle anderen Funktionen, die \mathbb{D} biholomorph auf G abbilden, in der Form $f \circ \tau$ mit einer Möbiustransformation des Einheitskreises τ darstellen lassen, ist obige Definition nach Bemerkung 2.6.1 unabhängig von der Wahl von f .

Man kann den Begriff der hyperbolischen Metrik auch für mehrfach zusammenhängende Gebiete sinnvoll verallgemeinern. Die biholomorphe Abbildung wird dabei durch eine Überlagerungsabbildung ersetzt. Da für unsere Zwecke die obige Definition vollkommen ausreicht, verzichten wir an dieser Stelle auf Details.

Die hyperbolische Metrik der rechten Halbebene lässt sich nach dem Buch von Beardon [7] folgendermaßen darstellen.

Lemma 2.6.2 Für alle $z_1, z_2 \in H' := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ gilt

$$\rho_{H'}(z_1, z_2) = 2 \operatorname{arsinh} \left(\frac{|z_1 - z_2|}{2\sqrt{\operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)}} \right).$$

Inbesondere gilt

$$\rho_{H'}(z_1, z_2) = \ln \left(\frac{\operatorname{Re}(z_2)}{\operatorname{Re}(z_1)} \right)$$

für alle $z_1, z_2 \in H'$ mit $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ und $\operatorname{Re}(z_1) < \operatorname{Re}(z_2)$.

Zur näheren Untersuchung der hyperbolischen Metrik beschäftigen wir uns nun mit dem Integranden des in Definition 2.6.1 auftauchenden Kurvenintegrals, der sogenannten Dichte der hyperbolischen Metrik. Als Folgerung erhalten wir einen Beweis für die konforme Invarianz der hyperbolischen Metrik. Des Weiteren schätzen wir die Dichte der hyperbolischen Metrik nach oben und unten ab, wodurch wir Abschätzungen für die hyperbolische Metrik selbst bekommen.

Definition 2.6.2 (Dichte der hyperbolischen Metrik) Unter den Voraussetzungen von Definition 2.6.1 nennt man die Abbildung

$$\varrho_G : G \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, w \mapsto \frac{|(f^{-1})'(w)|}{1 - |f^{-1}(w)|^2}$$

die **Dichte der hyperbolischen Metrik auf G** .

Bemerkung 2.6.3 Offensichtlich gilt

$$\varrho_{\mathbb{D}}(z) = \frac{1}{1 - |z|^2}$$

für alle $z \in \mathbb{D}$.

Lemma 2.6.3 Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete und $f : G \rightarrow H$ eine holomorphe Abbildung. Dann gilt

$$\varrho_G(w) \geq |f'(w)| \varrho_H(f(w))$$

für alle $w \in G$.

Beweis: Sei $w \in G$. Weiter seien $g : \mathbb{D} \rightarrow G$ und $h : \mathbb{D} \rightarrow H$ biholomorphe Abbildungen. Dann gilt

$$\varrho_G(w) = |(g^{-1})'(w)| \varrho_{\mathbb{D}}(g^{-1}(w)) \quad (2.4)$$

und

$$\varrho_H(f(w)) = |(h^{-1})'(f(w))| \varrho_{\mathbb{D}}(h^{-1}(f(w))) \quad (2.5)$$

nach Definition und Bemerkung 2.6.3. Da $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $z \mapsto (h^{-1} \circ f \circ g)(z)$ holomorph ist, folgt aus dem Lemma von Schwarz-Pick, dass

$$|F'(z)| \varrho_{\mathbb{D}}(F(z)) \leq \varrho_{\mathbb{D}}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt. Da $g^{-1}(w) \in \mathbb{D}$ ist, folgt hieraus

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathbb{D}}(g^{-1}(w)) &\geq |F'(g^{-1}(w))| \varrho_{\mathbb{D}}(h^{-1}(f(w))) \\ &= |(h^{-1})'(f(w))| |f'(w)| |g'(g^{-1}(w))| \varrho_{\mathbb{D}}(h^{-1}(f(w))) \\ &= |f'(w)| \varrho_H(f(w)) |g'(g^{-1}(w))| \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit Hilfe von (2.5) und der Definition von F . Aus (2.4) und (2.6) folgt somit

$$\begin{aligned} \varrho_G(w) &= |(g^{-1})'(w)| \varrho_{\mathbb{D}}(g^{-1}(w)) \\ &\geq |(g^{-1})'(w)| |g'(g^{-1}(w))| |f'(w)| \varrho_H(f(w)) \\ &= |f'(w)| \varrho_H(f(w)) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion von g . Also gilt die Behauptung des Lemmas 2.6.3 \square

Da für zwei einfach zusammenhängende Gebiete $G, H \subset \mathbb{C}$ mit $G \subset H$ offensichtlich die Identität auf G eine holomorphe Abbildung von G nach H ist, folgt aus Lemma 2.6.3 unmittelbar das nächste Lemma.

Lemma 2.6.4 Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete mit $G \subset H$. Dann gilt

$$\varrho_H(w) \leq \varrho_G(w)$$

für alle $w \in G$.

Falls in den Voraussetzungen von Lemma 2.6.3 die Funktion f sogar biholomorph ist, so ist die im Beweis von Lemma 2.6.3 auftretende Funktion $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ebenfalls biholomorph, das heißt, dass F eine Möbiustransformation des Einheitskreises ist. Aus Bemerkung 2.6.1 folgt somit die Gleichheit in (2.6). Folglich erhalten wir als eine weitere Folgerung aus Lemma 2.6.3 das nachfolgende Lemma.

Lemma 2.6.5 *Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete und $f : G \rightarrow H$ eine biholomorphe Abbildung. Dann gilt*

$$\varrho_G(w) = |f'(w)| \varrho_H(f(w))$$

für alle $w \in G$.

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir leicht die konforme Invarianz der hyperbolischen Metrik einsehen.

Lemma 2.6.6 *Seien $G, H \subset \mathbb{C}$ zwei einfach zusammenhängende Gebiete und $f : G \rightarrow H$ eine biholomorphe Abbildung. Dann gilt*

$$\rho_G(w_1, w_2) = \rho_H(f(w_1), f(w_2))$$

für alle $w_1, w_2 \in G$.

Beweis: Seien $w_1, w_2 \in G$ und γ eine rektifizierbare Kurve in G , die w_1 und w_2 verbindet. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \varrho_G(w) |dw| = \int_{\gamma} |f'(w)| \varrho_H(f(w)) |dw| = \int_{f(\gamma)} \varrho_H(v) |dv|$$

mit Hilfe von Lemma 2.6.5 und der Substitutionsregel. Die Behauptung des Lemmas 2.6.6 folgt somit aus der Definition der hyperbolischen Metrik, da $f(\gamma)$ eine rektifizierbare Kurve in H ist, die $f(w_1)$ und $f(w_2)$ verbindet. \square

Es folgen nun Abschätzungen für die Dichte der hyperbolischen Metrik nach oben und unten.

Lemma 2.6.7 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gilt*

$$\varrho_G(w) \geq \frac{1}{4 \operatorname{dist}(w, \partial G)}$$

für alle $w \in G$.

Beweis: Sei $w \in G$. Weiter sei $f : \mathbb{D} \rightarrow G$ biholomorph mit $f(0) = w$. Dann gilt

$$\varrho_G(w) = |(f^{-1})'(w)| \varrho_{\mathbb{D}}(f^{-1}(w)) = |(f^{-1})'(w)| \varrho_{\mathbb{D}}(0) = |(f^{-1})'(w)|.$$

Da f biholomorph ist, folgt aus dem Koebeschen 1/4-Satz, dass

$$G = f(\mathbb{D}) \supset B\left(f(0), \frac{1}{4} |f'(0)|\right) = B\left(w, \frac{1}{4} |f'(0)|\right)$$

gilt, das heißt

$$\frac{1}{4} |f'(0)| \leq \text{dist}(w, \partial G).$$

Es folgt

$$|(f^{-1})'(w)| = \frac{1}{|f'(0)|} \geq \frac{1}{4 \text{dist}(w, \partial G)}.$$

Also gilt die Behauptung des Lemmas 2.6.7. \square

Lemma 2.6.8 *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann gilt*

$$\varrho_G(w) \leq \frac{1}{\text{dist}(w, \partial G)}$$

für alle $w \in G$.

Beweis: Sei $w \in G$. Wir setzen $r := \text{dist}(w, \partial G)$. Dann ist $B(w, r) \subset G$. Es folgt

$$\varrho_G(w) \leq \varrho_{B(w,r)}(w)$$

mit Hilfe von Lemma 2.6.4. Also reicht es zu zeigen, dass

$$\varrho_{B(w,r)}(w) = \frac{1}{\text{dist}(w, \partial G)}$$

ist. Sei dazu $f : \mathbb{D} \rightarrow B(w, r)$, $z \mapsto zr + w$. Dann ist f biholomorph. Weiter gilt

$$f^{-1}(z) = \frac{z}{r} - \frac{w}{r}$$

für alle $z \in B(w, r)$. Es folgt

$$\varrho_{B(w,r)}(w) = |(f^{-1})'(w)| \varrho_{\mathbb{D}}(f^{-1}(w)) = \frac{1}{r} \varrho_{\mathbb{D}}(0) = \frac{1}{r}.$$

Also gilt die Behauptung des Lemmas 2.6.8. \square

2.7 Grundlagen aus der Iterationstheorie

In diesem Abschnitt definieren wir zunächst die für die Iterationstheorie grundlegenden Begriffe der Normalität einer Familie von Funktionen sowie der Fatou- und Juliamenge einer ganzen Funktion. Daran anschließend geben wir einen kurzen Einblick in die Iterationstheorie.

Definition 2.7.1 (Normale Familien) Sei $G \subset \hat{\mathbb{C}}$ offen und \mathcal{F} eine Familie von Funktionen von G nach $\hat{\mathbb{C}}$. Dann heißt \mathcal{F} normal, falls jede Folge in \mathcal{F} eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Für $z_0 \in G$ heißt \mathcal{F} normal in z_0 , falls eine Umgebung U von z_0 so existiert, dass $\{f|_U : f \in \mathcal{F}\}$ normal ist.

Bemerkung 2.7.1 Wir bezeichnen im Folgenden die n -te Iterierte von f mit f^n , das heißt

$$f^n := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n\text{-mal}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Definition 2.7.2 (Fatou- und Juliamenge) Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann heißt

$$\mathcal{F}(f) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \{f^n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist normal in } z \right\}$$

die **Fatoumenge** von f und

$$\mathcal{J}(f) := \mathbb{C} \setminus \mathcal{F}(f)$$

die **Juliamenge** von f .

Bemerkung 2.7.2 Die Fatoumenge besteht also aus den Punkten, in denen die Familie der Iterierten von f normal ist. Folglich existiert für alle $z \in \mathcal{F}(f)$ eine Umgebung U von z derart, dass die Folge der Iterierten von f eingeschränkt auf U , das heißt $(f^n|_U)_{n \in \mathbb{N}}$, eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. Wir benutzen daher im Folgenden auch die Formulierung, dass **die Folge der Iterierten von f normal in z ist**.

In manchen Fällen wird bei der Definition der Fatou- und Juliamenge anstatt der komplexen Ebene auch die Riemannsche Sphäre betrachtet, was für rationale Funktionen geeigneter ist. Für transzendente Funktionen besteht in diesem Fall der einzige Unterschied darin, dass ∞ dann zusätzlich zur Juliamenge gehört.

Aus der obigen Definition folgt, dass die Fatoumenge offen und die Juliamenge abgeschlossen ist. Sie sind beide invariant unter f . Falls f nicht konstant und keine Möbiustransformation ist, was wir im Folgenden immer annehmen, ist die Juliamenge nicht leer, perfekt und falls sie ungleich der komplexen Ebene ist, besitzt sie leeres Inneres.

Das Verhalten von Punkten aus derselben Fatoukomponente ähnelt sich aufgrund der Normalität der Iteriertenfolge von f . Der Klassifikationssatz liefert zusätzlich eine vollständige Beschreibung dieses Verhaltens in periodischen und somit auch präperiodischen Komponenten der Fatoumenge. Dabei bezeichnet man eine Komponente der Fatoumenge als präperiodisch, falls sie durch eine Iterierte von f in eine periodische Komponente der Fatoumenge abgebildet wird. Der Klassifikationssatz unterteilt die periodischen Komponenten der Fatoumenge in Böttcher-, Schröder-, Leau-, Bakergebiete, Hermanringe und Siegelscheiben. Sei U eine periodische Komponente der Fatoumenge der Periode p . Dann wird U als Böttchergebiet bezeichnet, falls U einen periodischen Punkt z der Periode p derart enthält, dass der Multiplikator $\lambda := (f^p)'(z)$ von z gleich 0 ist. Falls U einen periodischen Punkt z der Periode p derart enthält, dass der Multiplikator λ von z betragsmäßig kleiner 1 aber ungleich 0 ist, nennt man U ein Schrödergebiet. Sowohl für ein Böttcher- als auch für ein Schrödergebiet U gilt dann

$$f^{np}|_U \rightarrow z \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Enthält ∂U einen periodischen Punkt z der Periode p mit Multiplikator 1 derart, dass

$$f^{np}|_U \rightarrow z \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt, so heißt U Leaugebiet. Weiter bezeichnen wir U als Bakergebiet, falls

$$f^{np}|_U \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Die sogenannten singulären Gebiete, der Hermanring und die Siegelscheibe, lassen sich wie folgt beschreiben. Falls eine bijektive meromorphe Abbildung $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow U$ und ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so existieren, dass

$$\varphi(\lambda z) = f^p(\varphi(z))$$

für $\lambda := \exp(2\pi i\alpha)$ und alle $z \in \mathbb{D}$ gilt, nennen wir U eine Siegelscheibe. Schließlich bezeichnen wir U als Hermanring, falls $r, R > 0$ mit $r < R$, eine bijektive meromorphe Abbildung $\varphi : \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\} \rightarrow U$ und ein $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ so existieren, dass

$$\varphi(\lambda z) = f^p(\varphi(z))$$

für $\lambda := \exp(2\pi i\alpha)$ und alle $r < |z| < R$ gilt. Es lässt sich jedoch zeigen, dass bei ganzen Funktionen keine Hermanringe auftreten.

Der Klassifikationssatz wird um so bedeutsamer für rationale Funktionen, da hier nach dem Satz von Sullivan keine wandernden Gebiete existieren, das heißt, jede Komponente der Fatoumenge ist präperiodisch und wird somit durch eine Iterierte auf eine periodische Komponente abgebildet, welche dann von einem der oben beschriebenen Typen ist. Zudem vereinfacht sich der Klassifikationssatz für rationale Funktionen, da keine Bakergebiete auftreten können.

Das Iterationsverhalten einer Funktion f wird in hohem Maße von der Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion bzw. der postkritische Menge von f beeinflusst. Dabei ist die letztgenannte Menge der Abschluss der Vereinigung über die Menge aller Bilder von Elementen aus der Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion von f unter einer Iterierten von f . Sowohl Zykel von Böttcher-, Schröder- als auch Leaugebieten haben einen nichtleeren Schnitt mit der Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion von f . Für einen Zykel von Bakergebieten gilt dies nicht zwangsläufig, aber es gibt gewisse Kriterien, unter denen das der Fall ist. Man vergleiche hierzu die Arbeit von W. Bergweiler [9]. Für ein singuläres Gebiet gilt, dass der Rand dieser Fatoukomponente eine Teilmenge der postkritischen Menge ist. Allgemein lassen sich somit alleine durch die Betrachtung der Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion bzw. der postkritischen Menge Rückschlüsse auf das Iterationsverhalten der Funktion auf der Fatoumenge ziehen. In manchen Fällen wird es dadurch schon komplett bestimmt. Da rationale Funktionen keine asymptotischen Werte besitzen, besteht die Menge der Singularitäten der Umkehrfunktion hier zudem einzig aus den kritischen Werten.

Eine weitere wichtige Klasse von Funktionen, die in diesem Zusammenhang betrachtet wird, ist die in Abschnitt 2.5 schon kurz erwähnte Speiserklasse \mathcal{S} . Sie besteht aus allen ganzen Funktionen, für die die Menge der Singularitäten der Umkehrfunktionen endlich ist. Man kann den Beweis des Satzes von Sullivan dahingehend verallgemeinern, dass auch für eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ folgt, dass die Fatoumenge von f keine wandernden Gebiete enthält. Eine ausführliche Betrachtung der Klasse \mathcal{S} findet sich in der Arbeit von A. Eremenko und M. Lyubich [14].

Im Vergleich zur Fatoumenge ist das Iterationsverhalten für Punkte aus der Juliamenge viel komplizierter. In jeder Umgebung eines Punktes liegen sowohl Punkte, deren Vorwärtsorbit dicht in der Juliamenge liegt, als auch abstoßende periodische Punkte der Funktion. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass die Juliamenge einer Funktion f gleich

dem Abschluss der Menge der abstoßenden periodischen Punkte von f ist. P. Fatou und G. Julia bewiesen den zugehörigen Satz unabhängig voneinander für rationale Funktionen in ihren Arbeiten [16] bzw. [19] und legten den Grundstein für die heutige Iterationstheorie.

Wir verzichten hier auf eine ausführlichere Einführung in das Gebiet der komplexen Dynamik, da es zum weiteren Verständnis der Arbeit nicht erforderlich ist. Es sei aber auf die Bücher von A. F. Beardon [6], J. Milnor [22] und N. Steinmetz [33] verwiesen, die einen tieferen Einblick in die Theorie liefern. Die dort betrachteten Funktionen sind rational, aber die Konzepte gelten auch für transzendente Funktionen. Man vergleiche in diesem Zusammenhang die Arbeit von W. Bergweiler [8].

Kapitel 3

Der logarithmische Variablenwechsel

In diesem Kapitel erklären wir zunächst den sogenannten logarithmischen Variablenwechsel für eine ganze transzendente Funktion aus der Klasse \mathcal{B} . Viele der folgenden Aussagen sind allgemein bekannt. Hierfür sei insbesondere auf die Arbeit von Eremenko und Lyubich [14] verwiesen. Wir verzichten deshalb auf die zugehörigen Beweise. Im zweiten Teil des Kapitels zeigen wir, dass bei einer ganzen transzendenten Funktion aus der Klasse \mathcal{B} die Juliamenge nicht nur die entkommene Menge umfasst, sondern auch die Menge der Punkte, die unter Iteration betragsmäßig „groß“ bleiben.

3.1 Der logarithmische Variablenwechsel in der Klasse \mathcal{B}

Im Folgenden werden wir für eine ganze Funktion f die Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion von f mit $\mathbf{sing}(f^{-1})$ bezeichnen.

Definition 3.1.1 (Die Funktionenklasse \mathcal{B}) Wir bezeichnen mit \mathcal{B} die Klasse ganzer Funktionen, für die die Menge $\mathbf{sing}(f^{-1})$ beschränkt ist.

Die beiden folgenden Sätze stammen aus der Arbeit von Eremenko und Lyubich [14]. Detailliertere Beweise finden sich auch in den Arbeiten von Bock [11] und Schubert [28].

Satz 3.1.1 Sei $f \in \mathcal{B}$ eine ganze transzendente Funktion. Sei $\delta = \delta(f) \in \mathbb{R}_{>1}$ so, dass $\mathbf{sing}(f^{-1}) \subset B(0, \delta/2)$ und $|f(0)| < \delta$ ist. Sei

$$A := \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \delta)} \quad \text{und} \quad G := f^{-1}(A).$$

Dann ist jede Zusammenhangskomponente von G einfach zusammenhängend und berandet von einer nicht geschlossenen analytischen Kurve, deren beide Enden nach ∞ laufen.

Wir werden die Zusammenhangskomponenten von G im Folgenden als **Tracts** bezeichnen.

Satz 3.1.2 (Der logarithmische Variablenwechsel in der Klasse \mathcal{B}) Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1.1 gegeben. Weiter sei U das Urbild von G unter der Exponentialfunktion und

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > \ln(\delta)\}.$$

Dann existiert eine holomorphe Funktion $F : U \rightarrow H$ mit

$$f \circ \exp|_U = \exp \circ F, \quad (3.1)$$

deren Einschränkung auf jede Zusammenhangskomponente von U biholomorph ist. Man bezeichnet F als **die durch den logarithmischen Variablenwechsel aus f abgeleitete Funktion**.

Wir werden die Zusammenhangskomponenten von U im Folgenden auch als **logarithmische Tracts** bezeichnen.

Bemerkung 3.1.1 Nach Satz 3.1.1 ist $|f(0)| < \delta$. Also existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass $B(0, \varepsilon) \cap G = \emptyset$ ist. Da $G = \exp(U)$ ist, folgt, dass ein $x \in \mathbb{R}$ so existiert, dass

$$\operatorname{Re}(z) \geq x$$

für alle $z \in U$ gilt. Wir erhalten somit, dass alle logarithmischen Tracts in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq x\}$ enthalten sind.

Bemerkung 3.1.2 Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.2 gilt

$$(f^n \circ \exp)(z) = (\exp \circ F^n)(z)$$

für die durch den Satz definierte Funktion F , alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in U$, für die die rechte Seite der Gleichung definiert ist.

Das Iterationsverhalten von F lässt somit Rückschlüsse auf das von f zu und umgekehrt. Der „Vorteil“ der Funktion F im Vergleich zur Funktion f ist, dass die erstgenannte eingeschränkt auf einen logarithmischen Tract biholomorph ist. Folglich sind hier die Sätze von Koebe anwendbar. Eine wichtige Rolle im Beweis des nächsten Lemmas aus [14] spielt beispielsweise der Koebesche 1/4-Satz.

Lemma 3.1.1 Sei δ so definiert wie in Satz 3.1.1. Weiter seien U und F so definiert wie in Satz 3.1.2. Dann gilt

$$|F'(z)| \geq \frac{1}{4\pi} \left(\operatorname{Re}(F(z)) - \ln(\delta) \right)$$

für alle $z \in U$.

Im Beweis des Lemmas 3.1.1 verwenden Eremenko und Lyubich zunächst den Koebeschen 1/4-Satz, um die folgende Abschätzung zu zeigen, aus der dann das obige Lemma mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion folgt.

Lemma 3.1.2 Sei δ so definiert wie in Satz 3.1.1. Weiter seien U, H und F so definiert wie in Satz 3.1.2 und W eine Zusammenhangskomponente von U . Dann gilt

$$\left| \left((F|_W)^{-1} \right)'(z) \right| \leq \frac{4\pi}{\operatorname{Re}(z) - \ln(\delta)}$$

für alle $z \in H$.

Man beachte, dass wir bei den bisherigen Sätzen und Lemmata in diesem Kapitel nicht vorausgesetzt haben, dass die Funktion f endliche Ordnung hat. Falls dies der Fall ist, so ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von G endlich. Dies folgt unmittelbar aus Satz 2.5.3 mit Hilfe der Tatsache, dass man jedem Tract auf kanonische Weise mindestens eine direkte transzendente Singularität der Umkehrfunktion zuordnen kann. Es gilt also folgender Satz.

Satz 3.1.3 *Es seien die Voraussetzungen von Satz 3.1.1 gegeben. Zusätzlich habe f endliche Ordnung. Dann ist die Anzahl der Tracts endlich.*

Des Weiteren folgt unter der zusätzlichen Voraussetzung der Endlichkeit der Ordnung von f auch eine Abschätzung des Realteils von F . Aufgrund der essentiellen Bedeutung dieser Abschätzung für den Beweis des Hauptsatzes beweisen wir sie an dieser Stelle.

Satz 3.1.4 *Es seien die Voraussetzungen der Sätze 3.1.1 und 3.1.2 gegeben. Zusätzlich habe f endliche Ordnung ρ . Sei F die aus f durch den logarithmischen Variablenwechsel abgeleitete Funktion. Dann existiert eine Konstante $A \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass*

$$\operatorname{Re}(F(z)) \leq \exp(A \operatorname{Re}(z))$$

für alle $z \in U$ gilt.

Beweis: Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Da f endliche Ordnung ρ hat, existiert ein $r(\varepsilon) \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\frac{\ln(\ln(M(r)))}{\ln(r)} < \rho + \varepsilon \quad (3.2)$$

für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $r > r(\varepsilon)$ gilt. Sei $z \in U$. Dann ist $\exp(z) \in G$. Sei $s := |\exp(z)|$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $s > r(\varepsilon)$. Aus (3.2) folgt

$$\begin{aligned} \rho + \varepsilon &> \frac{\ln(\ln(|f(\exp(z))|))}{\ln(|\exp(z)|)} \\ &= \frac{\ln(\ln(|\exp(F(z))|))}{\ln(\exp(\operatorname{Re}(z)))} \\ &= \frac{\ln(\ln(\exp(\operatorname{Re}(F(z))))}{\operatorname{Re}(z)} \end{aligned}$$

mit Hilfe von Satz 3.1.2. Also gilt

$$\ln(\operatorname{Re}(F(z))) < (\rho + \varepsilon) \operatorname{Re}(z),$$

das heißt

$$\operatorname{Re}(F(z)) < \exp((\rho + \varepsilon) \operatorname{Re}(z)).$$

Hieraus folgt die Behauptung des Satzes 3.1.4. □

3.2 Eine Teilmenge der Juliamenge

Mit Hilfe des logarithmischen Variablenwechsels und Lemma 3.1.2 beweisen Eremenko und Lyubich folgenden Satz in [14].

Satz 3.2.1 *Sei $f \in \mathcal{B}$ eine ganze transzendente Funktion und $z \in \mathbb{C}$. Falls*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty$$

gilt, so ist $z \in \mathcal{J}(f)$.

Nach dem obigen Satz ist also bei einer ganzen transzendenten Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} die sogenannte **entkommene Menge**

$$I(f) := \{z \in \mathbb{C} : f^n(z) \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty\}$$

eine Teilmenge der Juliamenge. Wir werden später im Beweis des Hauptsatzes eine Menge konstruieren, deren Hausdorff-Dimension je nach Ansatz der Konstruktion beliebig nahe zwei ist. Diese Menge ist zwar keine Teilmenge der entkommenden Menge aber dem nächsten Satz zufolge eine Teilmenge der Juliamenge. Der Satz stellt zwar eine Verschärfung des obigen Satzes dar, der Beweis folgt aber derselben Idee.

Satz 3.2.2 *Sei $f \in \mathcal{B}$ eine ganze transzendente Funktion. Weiter sei $\delta = \delta(f)$ so wie in Satz 3.1.1 definiert und $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a > \exp(8\pi + \ln(\delta))$. Dann gilt*

$$\{z \in \mathbb{C} : \liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| \geq a\} \subset \mathcal{J}(f).$$

Beweis: Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(z_0)| \geq a.$$

Annahme : $z_0 \in \mathcal{F}(f)$.

Dann ist die Folge der Iterierten normal in z_0 , das heißt, dass eine Teilfolge der auf eine Umgebung von z_0 eingeschränkten Iteriertenfolge lokal gleichmäßig konvergiert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die Einschränkung der Iteriertenfolge auf diese Umgebung schon lokal gleichmäßig konvergent. Sei $a' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a > a' > \exp(8\pi + \ln(\delta))$. Dann existiert zu a' ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(z)| \geq a'$$

für alle $z \in B(z_0, \varepsilon)$ gilt. Sei $a'' \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a' > a'' > \exp(8\pi + \ln(\delta))$. Dann existiert zu a'' ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|f^n(z)| > a'' \tag{3.3}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ und $z \in B(z_0, \varepsilon)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n_0 = 0$. Wir definieren

$$B_0 := B(z_0, \varepsilon) \text{ und } B_n := f^n(B_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei U wie in den Voraussetzungen von Satz 3.1.2 definiert und C_0 eine Komponente von $\{z \in U : \exp(z) \in B_0\}$. Weiter sei F die durch den logarithmischen Variablenwechsel aus f abgeleitete Funktion und

$$C_n := F^n(C_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus Bemerkung 3.1.2 und (3.3) folgt, dass

$$\exp(F^n(C_0)) = f^n(\exp(C_0)) = f^n(B_0) = B_n \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B(0, a'')}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Folglich ist

$$\exp(\operatorname{Re}(F^n(z))) = |\exp(F^n(z))| > a''$$

für alle $n \in \mathbb{N}, z \in C_0$, das heißt

$$\operatorname{Re}(F^n(z)) > \ln(a''). \quad (3.4)$$

Nach Lemma 3.1.1 gilt

$$|F'(z)| \geq \frac{1}{4\pi} (\operatorname{Re}(F(z)) - \ln(\delta))$$

für alle $z \in U$. Daraus folgt mit (3.4) und der Wahl von a'' , dass

$$\begin{aligned} |(F^n)'(z)| &= |(F \circ F^{n-1})'(z)| \\ &= |F'(F^{n-1}(z))| |(F^{n-1})'(z)| \\ &\geq \frac{1}{4\pi} (\operatorname{Re}(F^{n-1}(z)) - \ln(\delta)) |(F^{n-1})'(z)| \\ &> \frac{1}{4\pi} (\ln(a'') - \ln(\delta)) |(F^{n-1})'(z)| \\ &> 2 |(F^{n-1})'(z)| \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}, z \in C_0$ gilt. Induktiv folgt

$$|(F^n)'(z)| > 2^n \quad (3.5)$$

für alle $n \in \mathbb{N}, z \in C_0$. Sei nun $c_0 \in C_0$ und $c_n := F^n(c_0) \in C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei

$$d_n := \sup\{r \in \mathbb{R}_{>0} : B(c_n, r) \subset C_n\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da $C_n \subset U$ ist und U nach Definition keine vertikalen Segmente der Länge 2π enthält, gilt dann

$$d_n \leq \pi \quad (3.6)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Andererseits ist $F^n|_{C_0} : C_0 \rightarrow C_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eine biholomorphe Abbildung, so dass

$$d_n \geq \frac{1}{4} |(F^n)'(c_0)| d_0 \geq 2^{n-2} d_0$$

nach dem Koebeschen 1/4-Satz und (3.5) gilt. Dies ist ein Widerspruch zu (3.6). Also ist die Annahme falsch und es gilt die Behauptung des Satzes 3.2.2. \square

Kapitel 4

Eine „geschachtelte“ Menge

Das Ziel dieses Kapitels ist es, zu einer ganzen transzendenten Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} mit endlicher Ordnung und gegebenem $M \in \mathbb{N}$ eine Teilmenge der im vorherigen Kapitel im Zusammenhang mit dem logarithmischen Variablenwechsel von f definierten Menge U zu konstruieren, deren Hausdorff-Dimension größer als $2 - c/M$ für eine einzig von f abhängige Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ist. Im ersten Abschnitt beschreiben wir die Konstruktion dieser Menge und geben die zugehörige Abschätzung der Hausdorff-Dimension in Form des Satzes 4.1.1. Dabei präzisieren wir zunächst die Notationen des logarithmischen Variablenwechsels, da nach Satz 3.1.3 die Anzahl der Tracts von f endlich ist. Im Zweiten Abschnitt des Kapitels beweisen wir einige technischen Lemmata, die wir später im Beweis des Satzes 4.1.1 benötigen, der dann im letzten Abschnitt erfolgt. Durch diese Anordnung soll eine größere Transparenz der eigentlichen Beweisidee erreicht werden.

4.1 Die Konstruktion

Sei $f \in \mathcal{B}$ eine ganze transzendente Funktion und f habe endliche Ordnung. Seien $\delta \in \mathbb{R}_{>1}$ und die Mengen A, G, U und H so definiert wie in den Sätzen 3.1.1 und 3.1.2. Sei R die Anzahl der Tracts. Dann ist R nach Satz 3.1.3 endlich. Wir setzen

$$\mathcal{R} := \{1, \dots, R\}$$

und bezeichnen die Tracts im Folgenden mit $T_r, r \in \mathcal{R}$. Für alle $r \in \mathcal{R}$ sei L_0^r ein logarithmischer Tract mit $\exp(L_0^r) = T_r$, das heißt, L_0^r ist eine einfach zusammenhängende Teilmenge von U , die keine vertikalen Segmente der Länge 2π enthält. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$\text{dist}(L_0^r, L_0^{r'}) \leq 2\pi$$

für alle $r, r' \in \mathcal{R}$. Aufgrund der $2\pi i$ -Periodizität der Exponentialfunktion gilt

$$\exp(L_0^r + 2\pi i s) = T_r$$

für alle $r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$. Wir setzen

$$L_s^r := L_0^r + 2\pi i s$$

für alle $r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$U = \bigcup_{r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}} L_s^r.$$

Sei $F : U \rightarrow H$ die durch den logarithmischen Variablenwechsel aus f abgeleitete Funktion. Dann ist $F|_{L_s^r} : L_s^r \rightarrow H$ nach Satz 3.1.2 für alle $r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$ biholomorph. Wir setzen

$$G_s^r := \left(F|_{L_s^r} \right)^{-1}$$

für alle $s \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R}$.

Zum besseren Verständnis der folgenden bloßen Definition unserer „geschachtelten“ Menge beschreiben wir an dieser Stelle zunächst die Konstruktion.

Konstruktionsanleitung Zu einem vorgegebenen $M \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $K_{m,j}$ ein abgeschlossenes achsenparalleles Quadrat mit Seitenlänge $2^m - 2$ und von m und j abhängiger Lage in der rechten Halbebene. Dabei ist der Abstand von $K_{m,j}$ zur imaginären Achse gleich $2^m + 1$. Mit wachsendem Abstand zur imaginären Achse wächst also auch die Seitenlänge der Quadrate. Falls $j \geq 0$ ist, liegt $K_{m,j}$ zudem in der oberen Halbebene und der Abstand von $K_{m,j}$ zur reellen Achse ist gleich $j 2^m + 1$. Falls $j < 0$ ist, liegt $K_{m,j}$ hingegen in der unteren Halbebene und der Abstand zur reellen Achse ist gleich $|(j+1) 2^m + 1|$. Die Menge all dieser Quadrate bezeichnen wir mit \mathcal{K}_0 . Da zwei Quadrate aus \mathcal{K}_0 mindestens den Abstand zwei zueinander haben, sind sie insbesondere disjunkt. Wir definieren dann im nächsten Schritt eine Menge \mathcal{K}_1 , die aus allen zusammenhängenden Teilmengen von Quadraten aus \mathcal{K}_0 besteht, die unter der Funktion F auf ein Quadrat aus \mathcal{K}_0 abgebildet werden. Induktiv definieren wir dann für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge \mathcal{K}_{n+1} als die Menge aller zusammenhängenden Teilmengen von \mathcal{K}_n , die unter F auf ein Element aus \mathcal{K}_n abgebildet werden. Anders ausgedrückt besteht die Menge \mathcal{K}_n für alle $n \in \mathbb{N}$ aus den zusammenhängenden Teilmengen der Quadrate aus \mathcal{K}_0 , die unter F^n auf ein Quadrat aus \mathcal{K}_0 abgebildet werden. Für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{K}_n(m, j)$ die Menge der Elemente aus \mathcal{K}_n , die im Quadrat $K_{m,j}$ enthalten sind. Mit der bei der Definition der Nesting conditions 2.3.4 eingeführten Notation können wir unsere „geschachtelte Menge“ dann für beliebiges $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ definieren als $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{K}_n}(m, j)$.

Sei $M \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass

- 1.) $2^M - \ln(\delta) > 46$,
- 2.) $2^M \sqrt{2} \leq 3(2^{M-1}) - \ln(\delta)$,
- 3.) $2^M > 5 \ln(\delta)$,
- 4.) $\frac{(2^M - 48)^2}{2^{M+1} - 24} \geq \frac{2^M}{3}$,
- 5.) $\frac{1}{6\pi} \left(1 - \frac{48 + 2\pi}{2^M} \right) \geq \frac{1}{20}$,
- 6.) $\ln\left(2^M - \ln(\delta)\right) - \ln(4\pi) \geq \frac{1}{2} M \ln 2$

ist. Wir verwenden später in dieser Arbeit explizit die obigen Abschätzungen. Es lässt sich jedoch nachrechnen, dass 1.) - 6.) gelten, falls

$$M \geq \max \left\{ 10, \frac{2 \ln(4\pi + \ln(\delta))}{\ln 2} \right\}$$

ist.

Wir definieren

$$K_{m,j} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [2^m + 1, 2^{m+1} - 1], \operatorname{Im}(z) \in [j 2^m + 1, (j + 1) 2^m - 1]\}$$

und

$$I_{m,j} := \{(r, s) \in \mathcal{R} \times \mathbb{Z} : G_s^r(K_{m,j}) \subset K_{m',j'} \text{ für } m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j' \in \mathbb{Z}\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$. Weiter definieren wir induktiv

$$\mathcal{K}_0 := \{K_{m,j} : m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$\mathcal{K}_{n+1} := \{G_s^r(K) : K \in \mathcal{K}_n, (r, s) \in I_{m,j} \text{ mit } K \subset K_{m,j}\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Weiter sei

$$\mathcal{K}_n(m, j) := \{K \in \mathcal{K}_n : K \subset K_{m,j}\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$. Schließlich setzen wir zur Abkürzung noch

$$\bar{\mathcal{K}}_n := \bigcup_{K \in \mathcal{K}_n} K$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\bar{\mathcal{K}}_n(m, j) := \bigcup_{K \in \mathcal{K}_n(m, j)} K$$

für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$.

Satz 4.1.1 *Es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass*

$$\mathcal{H}D\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j)\right) \geq 2 - \frac{c}{M}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ gilt.

Bemerkung 4.1.1 Die Konstante c aus obigem Satz hängt einzig von der Funktion f ab.

4.2 Technische Lemmata

Um zu gegebenem $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ die Hausdorff-Dimension der Menge $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j)$ abschätzen zu können, verwenden wir später im Beweis des Satzes 4.1.1, dass die Folge $(\mathcal{K}_n(m, j))_{n \in \mathbb{N}}$ die Nesting conditions aus Definition 2.3.4 erfüllt. Vorangiges Ziel dieses Abschnitts ist es, für alle $n \in \mathbb{N}$ „geeignete“ Konstanten Δ_n so zu finden, dass

$$\operatorname{dens}(\bar{\mathcal{K}}_{n+1}(m, j), K) \geq \Delta_n$$

für alle $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$ gilt. Es wird sich zeigen, dass wir darauf verzichten können, die Konstanten Δ_n in Abhängigkeit von n zu wählen. Die zugehörige Abschätzung findet sich im abschließenden Lemma 4.2.8. Alle Lemmata zuvor dienen als Hilfsmittel zum

Beweis dieses Lemmas. Als Nebenprodukt eines dieser Lemmata erhalten wir zudem für alle $n \in \mathbb{N}$ „geeignete“ Konstanten d_n derart, dass

$$\text{diam}(K) \leq d_n$$

für alle $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$ gilt.

Wir beginnen mit einem Lemma, dessen Beweis auf dem Konzept der extremalen Länge und der Abschätzung des Realteils von F aus Satz 3.1.4 beruht. Es findet sich bis auf einige Änderungen auch in Barańskis Artikel [4]. Das Lemma besagt, dass wenn man die Halbebene H beliebig weit nach rechts verschiebt, das Lebesgue-Maß des Schnittes des Urbildes dieser verschobenen Halbebene unter der Umkehrfunktion der Einschränkung von F auf einen logarithmischen Tract mit einem vertikalen Streifen gewisser Breite in Abhängigkeit dieser Breite nach unten abgeschätzt werden kann.

Lemma 4.2.1 *Es existieren Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}_{>0}$ derart, dass*

$$\text{meas}\left(G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > a\}) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) \in]x_1, x_2[)\right) > c_1 \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2}$$

für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a > 1 + \ln(\delta)$, $r \in \mathcal{R}$, $s \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_2 > x_1 > c_2 \ln(a) + c_3$ ist.

Beweis: Seien $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a > 1 + \ln(\delta)$, $r \in \mathcal{R}$, $s \in \mathbb{Z}$. Weiter sei $l : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung der Menge $G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) = a\})$ mit

$$\mathcal{R}e(l(0)) = \inf\{\mathcal{R}e(l(t)) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir zeigen zunächst, dass von a unabhängige Konstanten $c', c'' \in \mathbb{R}_{>0}$ existieren mit

$$\mathcal{R}e(l(0)) < c' \ln(a) + \frac{c''}{2}. \quad (4.1)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte dabei $\mathcal{R}e(l(0)) \geq 0$. Wir setzen

$$b := 1 + \ln(\delta)$$

und definieren $l_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ als eine Parametrisierung der Menge $G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) = b\})$ mit

$$\mathcal{R}e(l_b(0)) = \inf\{\mathcal{R}e(l_b(t)) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Dann gilt nach Voraussetzung $b < a$ und folglich

$$\mathcal{R}e(l_b(0)) \leq \mathcal{R}e(l(0)). \quad (4.2)$$

Sei

$$z_0 := a + i \mathcal{I}m(F(l_b(0))).$$

Dann ist $G_s^r(z_0) \in G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) = a\})$. Folglich gilt

$$\mathcal{R}e(G_s^r(z_0)) \geq \mathcal{R}e(l(0)). \quad (4.3)$$

Nach Lemma 2.6.2 gilt

$$\rho_{H'}(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{\mathcal{R}e(z_2)}{\mathcal{R}e(z_1)}\right)$$

für alle $z_1, z_2 \in H' = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > 0\}$ mit $\mathcal{I}m(z_1) = \mathcal{I}m(z_2)$ und $\mathcal{R}e(z_1) < \mathcal{R}e(z_2)$. Da $g : H \rightarrow H'$, $z \mapsto z - \ln(\delta)$ offensichtlich biholomorph ist, folgt

$$\begin{aligned} \rho_H(F(l_b(0)), z_0) &= \rho_{H'}(g(F(l_b(0))), g(z_0)) \\ &= \rho_{H'}(F(l_b(0)) - \ln(\delta), z_0 - \ln(\delta)) \\ &= \ln\left(\frac{\mathcal{R}e(z_0) - \ln(\delta)}{\mathcal{R}e(F(l_b(0))) - \ln(\delta)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{a - \ln(\delta)}{b - \ln(\delta)}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

mit Hilfe der konformen Invarianz der hyperbolischen Metrik aus Lemma 2.6.6. Da L_s^r ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, das keine vertikalen Segmente der Länge 2π enthält, gilt insbesondere $\text{dist}(w, \partial L_s^r) < \pi$. Mit Hilfe von Lemma 2.6.6, Lemma 2.6.7, (4.2) und (4.3) folgt

$$\begin{aligned} &\rho_H(F(l_b(0)), z_0) \\ &= \rho_{L_s^r}(l_b(0), G_s^r(z_0)) \\ &= \inf \left\{ \int_{\gamma} \varrho_{L_s^r}(w) |dw| : \right. \\ &\quad \left. \gamma \text{ rektifizierbare Kurve in } L_s^r, \text{ die } l_b(0) \text{ und } G_s^r(z_0) \text{ verbindet} \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \int_{\gamma} \frac{1}{4 \text{dist}(w, \partial L_s^r)} |dw| : \right. \\ &\quad \left. \gamma \text{ rektifizierbare Kurve in } L_s^r, \text{ die } l_b(0) \text{ und } G_s^r(z_0) \text{ verbindet} \right\} \\ &\geq \frac{1}{4\pi} \inf \left\{ L(\gamma) : \gamma \text{ rektifizierbare Kurve in } L_s^r, \text{ die } l_b(0) \text{ und } G_s^r(z_0) \text{ verbindet} \right\} \\ &\geq \frac{1}{4\pi} |l_b(0) - G_s^r(z_0)| \\ &\geq \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e(G_s^r(z_0) - l_b(0)) \\ &\geq \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e(l(0) - l_b(0)). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aus (4.4) und (4.5) folgt

$$\frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e(l(0)) \leq \ln(a - \ln(\delta)) + \frac{1}{4\pi} \mathcal{R}e(l_b(0)) - \ln(b - \ln(\delta)).$$

Da $b - \ln(\delta) = 1$ und $\ln(a - \ln(\delta)) < \ln(a)$ ist, folgt

$$\mathcal{R}e(l(0)) \leq 4\pi \ln(a) + \mathcal{R}e(l_{1+\ln(\delta)}(0)).$$

Also gilt (4.1) mit der Wahl

$$c' := 4\pi \quad \text{und} \quad c'' := 2 \max \left\{ \mathcal{R}e \left(l_{1+\ln(a)}(0) \right), 1 \right\}.$$

Wir definieren nun

$$l_+ := l(\mathbb{R}_+) \quad \text{und} \quad l_- := l(\mathbb{R}_-).$$

Dann sind l_+ und l_- Kurven von $l(0)$ nach ∞ . Nach (4.1) schneiden l_+ und l_- dann die Senkrechte $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) = x\}$ für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x > c' \ln(a) + c''$. Weiter seien $t_+(x), t_-(x) \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\mathcal{I}m(l(t_+(x))) = \sup\{y \in \mathbb{R} : x + iy \in l_+\}$$

und

$$\mathcal{I}m(l(t_-(x))) = \inf\{y \in \mathbb{R} : x + iy \in l_+\}$$

für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x > c' \ln(a) + c''$ gilt. Mit Hilfe von geometrischen Überlegungen kann man leicht einsehen, dass für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x > c' \ln(a) + c''$ ein $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ derart existiert, dass entweder

$$z_+(x) := l(t_+(x)) + i\varepsilon(x) \quad \text{oder} \quad z_-(x) := l(t_-(x)) - i\varepsilon(x)$$

in $G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > a\})$ enthalten ist. Wir wählen nun für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$, für die $x > c' \ln(a) + c''$ ist, ein $\varepsilon(x) \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$|\{z_+(x), z_-(x)\} \cap G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > a\})| = 1$$

ist, und bezeichnen das in Abhängigkeit von x und $\varepsilon(x)$ eindeutig bestimmte Element des Schnitts mit $z(x, \varepsilon(x))$. Weiter bezeichnen wir für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$, für die $x > c' \ln(a) + c''$ ist, mit $I(x)$ diejenige Komponente von $G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > a\}) \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) = x\}$, die den Punkt $z(x, \varepsilon(x))$ enthält. Zudem bezeichnen wir mit $\theta(x)$ das lineare Maß von $I(x)$. Durch geeignete Wahl von $\varepsilon(x)$ zu gegebenem x können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Abbildung

$$\theta : \{x \in \mathbb{R}_{>0} : x > c' \ln(a) + c''\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto \theta(x)$$

Borel-messbar ist. Seien nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x_2 > x_1 > c' \ln(a) + c''$. Wir setzen

$$\mathcal{L} := \{I(x) : x \in]x_1, x_2[\}.$$

Dann ist \mathcal{L} eine Menge von rektifizierbaren Kurven in der Ebene. Wir zeigen zunächst

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\theta(x)} dx \leq \frac{1}{\lambda(\mathcal{L})}. \quad (4.6)$$

Sei dazu ρ eine zulässige Metrik für \mathcal{L} . Dann folgt

$$\begin{aligned} 1 &\leq \int_{I(x)} \rho(z) |dz| \\ &\leq \left(\int_{I(x)} \rho(z) |dz| \right)^2 \\ &\leq \int_{I(x)} \rho(z)^2 |dz| \int_{I(x)} 1^2 |dz| \\ &= \theta(x) \int_{I(x)} \rho(z)^2 |dz| \end{aligned}$$

mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung für alle $x \in]x_1, x_2[$, das heißt

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\theta(x)} dx &\leq \int_{x_1}^{x_2} \int_{I(x)} \rho(z)^2 |dz| dx \\ &= \int_{\bigcup \mathcal{L}} \rho(z)^2 |dz|^2. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\theta(x)} dx \leq \inf \left\{ \int_{\bigcup \mathcal{L}} \rho(z)^2 |dz|^2 : \rho \text{ zulässige Metrik für } \mathcal{L} \right\}.$$

Somit folgt (4.6) aus der Definition der extremalen Länge.

Aufgrund der konformen Invarianz der extremalen Länge gilt nach Lemma 2.4.1

$$\lambda(\mathcal{L}) = \lambda(F(\mathcal{L})) \quad (4.7)$$

mit $F(\mathcal{L}) := \{F(I(x)) : x \in]x_1, x_2[\}$. Da f eine Funktion endlicher Ordnung ist, existiert nach Satz 3.1.4 zudem ein $A \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\Re(F(z)) \leq \exp(A\Re(z)) \quad (4.8)$$

für alle $z \in L_s^r$ gilt. Wir zeigen nun

$$\frac{1}{\lambda(F(\mathcal{L}))} \leq \frac{Ax_2}{\pi} + 1. \quad (4.9)$$

Nach (4.8) ist $\bigcup F(\mathcal{L})$ in dem senkrechten Streifen

$$\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \in [a, \exp(Ax_2)]\}$$

enthalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$\bigcup F(\mathcal{L}) \cap B(F(l(0)), 1) = \emptyset.$$

Andernfalls vergrößere man die Konstante c'' aus (4.1). Also existiert ein Gebiet V mit $\bigcup F(\mathcal{L}) \subset V$ derart, dass der Rand von V eine Jordankurve ist, die sich aus den folgenden vier Kurven zusammensetzt.

- 1.) Einem senkrechten Segment $J_+ \subset F(l_+) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = a\}$,
- 2.) einem senkrechten Segment $J_- \subset F(l_-) \subset \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = a\}$,
- 3.) der rechten Hälfte des Kreises $\partial B(F(l(0)), 1)$,
- 4.) einer Kurve in $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > a\}$, die die Endpunkte von J_+ und J_- verbindet und den Punkt $F(l(0)) + \exp(Ax_2)$ enthält.

Dann ist $F(\mathcal{L})$ eine Teilmenge der Menge aller lokal rektifizierbaren Kurven, die in V liegen und J_+ und J_- verbinden. Wir bezeichnen diese Menge mit \mathcal{L}' . Dann gilt

$$\lambda(F(\mathcal{L})) \geq \lambda(\mathcal{L}') \quad (4.10)$$

nach Lemma 2.4.2. Wir definieren

$$g : \mathbb{C} \setminus \{F(l(0))\} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{\pi} \operatorname{Log}(z - F(l(0)))$$

mit Log als Hauptzweig des Logarithmus. Dann ist $W := g(V)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, das von einer Jordankurve berandet wird, die sich aus den vier folgenden Kurven zusammensetzt.

- 1.) Einem horizontalen Segment $J'_+ \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 1/2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$,
- 2.) einem horizontalen Segment $J'_- \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = -1/2, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$,
- 3.) einem senkrechten Segment $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in [-1/2, 1/2], \operatorname{Re}(z) = 0\}$,
- 4.) einer Kurve in $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) \in [-1/2, 1/2]\}$, die die Endpunkte von J'_+ und J'_- verbindet und den Punkt Ax_2/π enthält.

Da $g|_V : V \rightarrow W$ biholomorph ist, folgt

$$\lambda(g(\mathcal{L}')) = \lambda(\mathcal{L}') \quad (4.11)$$

aufgrund der konformen Invarianz der extremalen Länge. Dabei ist $g(\mathcal{L}')$ die Menge aller lokal rektifizierbaren Kurven, die in W liegen und J'_+ und J'_- verbinden. Wir definieren nun

$$\rho_0(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls } \operatorname{Re}(z) < \frac{Ax_2}{\pi} + 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_{\gamma} \rho_0(z) |dz| \geq 1 \quad (4.12)$$

für alle $\gamma \in g(\mathcal{L}')$, da das Integral auf der linken Seite nach Definition von ρ_0 gleich der Länge der Teilstücke der Spur von γ ist, die in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \frac{Ax_2}{\pi} + 1\}$ liegen. Da ρ_0 ferner Borel-messbar ist, ist ρ_0 zulässig für $g(\mathcal{L}')$. Weiter gilt

$$\int_{\bigcup g(\mathcal{L}')} \rho_0(z)^2 |dz|^2 \leq \frac{Ax_2}{\pi} + 1, \quad (4.13)$$

da das Integral auf der linken Seite nach Definition von ρ_0 gleich dem Flächeninhalt von W geschnitten mit der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < \frac{Ax_2}{\pi} + 1\}$ ist. Aus (4.10), (4.11), (4.12) und (4.13) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(F(\mathcal{L}))} &\leq \frac{1}{\lambda(\mathcal{L}')} \\ &= \frac{1}{\lambda(g(\mathcal{L}'))} \\ &= \inf \left\{ \int_{\bigcup g(\mathcal{L}')} \rho(z)^2 |dz|^2 : \rho \text{ zulässige Metrik für } g(\mathcal{L}') \right\} \\ &\leq \int_{\bigcup g(\mathcal{L}')} \rho_0(z)^2 |dz|^2 \\ &\leq \frac{Ax_2}{\pi} + 1. \end{aligned}$$

Also gilt die Abschätzung (4.9).

Wir zeigen nun die eigentliche Behauptung des Lemmas 4.2.1. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dabei $Ax_2 > \pi$. Aus (4.6), (4.7) und (4.9) folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\theta(x)} \leq \frac{1}{\lambda(\mathcal{L})} = \frac{1}{\lambda(F(\mathcal{L}))} \leq \frac{Ax_2}{\pi} + 1 < \frac{2Ax_2}{\pi}. \quad (4.14)$$

Daraus folgt mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} (x_2 - x_1)^2 &= \left(\int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{\theta(x)}}{\sqrt{\theta(x)}} dx \right)^2 \\ &\leq \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\theta(x)}} \right)^2 dx \int_{x_1}^{x_2} (\sqrt{\theta(x)})^2 dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\theta(x)} dx \int_{x_1}^{x_2} \theta(x) dx \\ &< \frac{2Ax_2}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} \theta(x) dx. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} &\text{meas}(G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > a\}) \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \in]x_1, x_2[\}) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \text{meas}(\{y \in \mathbb{R} : \text{Re}(G_s^r(x + iy)) > a\}) dx \\ &\geq \int_{x_1}^{x_2} \theta(x) dx \\ &> \frac{\pi(x_2 - x_1)^2}{2Ax_2}. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas 4.2.1 folgt aus der Wahl $c_1 := \frac{\pi}{2A}$, $c_2 := c'$ und $c_3 := c''$. \square

Bemerkung 4.2.1 Der Beweis zeigt, dass die Konstanten c_1 und c_3 lediglich von f abhängen, während die Konstante c_2 sogar eine absolute Konstante ist.

Der aufmerksame Leser wird in Abschätzung (4.14) Ähnlichkeit zu der Abschätzung des in Abschnitt 2.4 aufgeführten Ahlforsschen Verzerrungssatzes erkennen. Anders als Barański verwenden wir im Beweis des Lemmas den Satz aber nicht sondern kommen durch die Einführung der speziellen Metrik ρ_0 auf Abschätzung (4.14). Wir haben somit implizit eine leicht abgeänderte Version des Ahlforschen Verzerrungssatzes 2.4.1 unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen, dass die dort definierte Funktion f endliche Ordnung hat.

Zusätzlich zu den in Abschnitt 4.1 gemachten Definitionen benötigen wir für die folgenden Lemmata noch weitere Definitionen. Wir setzen

$$\hat{K}_{m,j} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \in [2^m, 2^{m+1}], \text{Im}(z) \in [j 2^m, (j+1) 2^m]\}$$

und

$$\tilde{K}_{m,j} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \in [2^m + 24, 2^{m+1} - 24], \text{Im}(z) \in [j 2^m + 24, (j+1) 2^m - 24]\}$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$.

Wir schätzen nun zunächst mit Hilfe von Lemma 3.1.2 den Durchmesser des Bildes eines eben definierten Quadrates $\hat{K}_{m,j}$ unter der Umkehrfunktion der Einschränkung von F auf einen logarithmischen Tract ab.

Lemma 4.2.2 *Für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\text{diam}(G_s^r(\hat{K}_{m,j})) < 23 .$$

Beweis: Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$. Da $\hat{K}_{m,j} \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2^m\}$ ist, folgt mit Hilfe von Lemma 3.1.2, dass

$$|(G_s^r)'(z)| \leq \frac{4\pi}{2^m - \ln(\delta)}$$

für alle $z \in \hat{K}_{m,j}$ gilt. Aus der Wahl von M folgt insbesondere, dass

$$\frac{2^{m'}}{2^{m'} - \ln(\delta)} \leq \frac{5}{4}$$

für alle $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}$ ist. Somit gilt

$$\begin{aligned} \text{diam}(G_s^r(\hat{K}_{m,j})) &\leq \sup\{|(G_s^r)'(z)| : z \in \hat{K}_{m,j}\} \text{diam}(\hat{K}_{m,j}) \\ &\leq \frac{4\pi}{2^m - \ln(\delta)} 2^m \sqrt{2} \\ &< 5\sqrt{2}\pi \\ &< 23. \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung des Lemmas 4.2.2. □

Aus der Definition von $\hat{K}_{m,j}$ und $\tilde{K}_{m,j}$ für $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$ und $j \in \mathbb{Z}$ folgt mit Hilfe von Lemma 4.2.2 unmittelbar das nächste Lemma.

Lemma 4.2.3 *Seien $m, m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j, j' \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$. Falls*

$$G_s^r(\hat{K}_{m',j'}) \cap \tilde{K}_{m,j} \neq \emptyset$$

ist, so gilt

$$G_s^r(\hat{K}_{m',j'}) \subset K_{m,j}.$$

Nach Definition ist $K_{m,j} \subset \hat{K}_{m,j}$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$, das heißt, es ist auch $G_s^r(K_{m,j}) \subset G_s^r(\hat{K}_{m,j})$ für alle $r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$. Wie das nächste Lemma zeigt, finden wir aber eine absolute Konstante c_4 so, dass das Maß von $G_s^r(K_{m,j})$ größer gleich dem von $G_s^r(\hat{K}_{m,j})$ multipliziert mit c_4 ist. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass wir mit Hilfe des Koebeschen Verzerrungssatzes die Verzerrung von G_s^r auf $\hat{K}_{m,j}$ abschätzen können.

Lemma 4.2.4 *Es existiert eine Konstante $c_4 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass*

$$\text{meas}(G_s^r(K_{m,j})) \geq c_4 \text{meas}(G_s^r(\hat{K}_{m,j}))$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$, $j \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathcal{R}$, $s \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis: Wir wählen

$$c_4 := \frac{1}{3^{616}}.$$

Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$, $j \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathcal{R}$, $s \in \mathbb{Z}$. Sei z_0 der Mittelpunkt von $\hat{K}_{m,j}$. Da

$$\text{diam}(\hat{K}_{m,j}) = 2^m \sqrt{2}$$

ist, ist folglich

$$\hat{K}_{m,j} \subset B(z_0, 2^{m-1} \sqrt{2}).$$

Nach Wahl von M gilt insbesondere $2^{m'} \sqrt{2} \leq 3(2^{m'-1}) - \ln(\delta)$ für alle $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}$, das heißt

$$B(z_0, 2^m \sqrt{2}) \subset H.$$

Aus Lemma 2.2.2, der Folgerung aus dem Koebeschen Verzerrungssatz, folgt somit

$$L(G_{s|\hat{K}_{m,j}}^r) \leq 1 + \frac{160}{2} = 3^4.$$

Weiter gilt nach Wahl von M insbesondere, dass $m' \geq 3$ für alle $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}$ ist. Es folgt

$$\begin{aligned} \text{dens}(G_s^r(K_{m,j}), G_s^r(\hat{K}_{m,j})) &\geq \frac{1}{L^2(G_{s|\hat{K}_{m,j}}^r)} \text{dens}(K_{m,j}, \hat{K}_{m,j}) \\ &\geq \frac{1}{3^8} \left(\frac{2^m - 2}{2^m} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{3^8} (1 - 2^{-2})^2 \\ &= c_4 \end{aligned}$$

mit Hilfe von Satz 2.2.1. Also gilt die Behauptung des Lemmas 4.2.4. \square

Die Konstante c_4 aus dem Lemma zuvor wird im nächsten Lemma dazu verwendet, um das Maß der beiden folgenden Mengen gegeneinander abzuschätzen. Die erste Menge besteht aus dem Schnitt eines der „Ausgangsquadrate“ $K_{m,j}$, das heißt einem Element aus \mathcal{K}_0 , mit $\bar{\mathcal{K}}_1$, das heißt der Vereinigung von Bildern von „Ausgangsquadrate“ unter einer Umkehrfunktion der Einschränkung von F auf einen logarithmischen Tract, die in einem „Ausgangsquadrat“ enthalten sind. Die zweite Menge besteht aus dem Schnitt des im Vergleich zu $K_{m,j}$ kleineren Quadrates $\tilde{K}_{m,j}$ mit der Vereinigung aller Bilder der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2^M\}$ unter einer Umkehrfunktion der Einschränkung von F auf einen logarithmischen Tract.

Lemma 4.2.5 *Sei c_4 die Konstante aus Lemma 4.2.4. Dann gilt*

$$\text{meas}(K_{m,j} \cap \bar{\mathcal{K}}_1) \geq c_4 \text{meas}\left(\tilde{K}_{m,j} \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}} G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \geq 2^M\})\right)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$, $j \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$. Nach Definition gilt

$$\bigcup_{m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j' \in \mathbb{Z}} \hat{K}_{m', j'} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\}. \quad (4.15)$$

Seien nun $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j' \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$ mit

$$G_s^r(\hat{K}_{m', j'}) \cap \tilde{K}_{m, j} \neq \emptyset.$$

Dann gilt

$$G_s^r(K_{m', j'}) \subset G_s^r(\hat{K}_{m', j'}) \subset K_{m, j} \quad (4.16)$$

nach Lemma 4.2.3. Aus Lemma 4.2.4 folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}(K_{m, j} \cap G_s^r(K_{m', j'})) &= \operatorname{meas}(G_s^r(K_{m', j'})) \\ &\geq c_4 \operatorname{meas}(G_s^r(\hat{K}_{m', j'})) \\ &\geq c_4 \operatorname{meas}(\tilde{K}_{m, j} \cap G_s^r(\hat{K}_{m', j'})). \end{aligned}$$

Nach (4.16) gilt zudem $G_s^r(K_{m', j'}) \in \mathcal{K}_1$. Somit folgt die Behauptung des Lemmas 4.2.5 mit Hilfe von (4.15). \square

Wir schätzen im nächsten Lemma zunächst die Dichte von $\overline{\mathcal{K}_1}$ in $K_{m, j}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ durch eine lediglich von f abhängige Konstante c_5 nach unten ab, womit wir, wie wir später sehen werden, ein wichtiges Etappenziel dieses Abschnitts erreicht haben.

Lemma 4.2.6 *Es existiert eine Konstante $c_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass*

$$\operatorname{dens}(\overline{\mathcal{K}_1}, K_{m, j}) > c_5$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beweis: Sei c_1 die Konstante aus Lemma 4.2.1 und c_4 die Konstante aus Lemma 4.2.4. Wir wählen

$$c_5 := \frac{c_1 c_4}{20}.$$

Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\operatorname{meas}(K_{m, j} \cap \overline{\mathcal{K}_1}) \\ &\geq c_4 \operatorname{meas}\left(\tilde{K}_{m, j} \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}} G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

nach Lemma 4.2.5. Da für alle $r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}$

$$G_0^r = G_s^r - 2\pi i s$$

ist, folgt

$$\begin{aligned} &\operatorname{meas}\left(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [x_1, x_2], \operatorname{Im}(z) \in [y, y + 2\pi]\}\right) \\ &\quad \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}} G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\}) \\ &= \operatorname{meas}\left(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [x_1, x_2]\} \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}} G_0^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})\right) \end{aligned}$$

für alle $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte

$$2^{m'} + 24 > c_2 \ln(2^M) + c_3 \quad (4.18)$$

für alle $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}$ mit c_2 und c_3 als den Konstanten aus Lemma 4.2.1. Wir setzen nun

$$x_1 := 2^m + 24 \quad \text{und} \quad x_2 := 2^{m+1} - 24.$$

Dann ist

$$\tilde{K}_{m,j} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [x_1, x_2], \operatorname{Im}(z) \in [j2^m + 24, (j+1)2^m - 24]\}$$

ein Quadrat mit Seitenlänge $2^m - 48$. Folglich lässt sich eine Seite in mindestens $\frac{2^m - 48}{2\pi} - 1$ Segmente der Länge 2π aufteilen. Es folgt

$$\begin{aligned} & \operatorname{meas}\left(\tilde{K}_{m,j} \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}, s \in \mathbb{Z}} G_s^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})\right) \\ & \geq \left(\frac{2^m - 48}{2\pi} - 1\right) \operatorname{meas}\left(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in]x_1, x_2[\} \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}} G_0^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})\right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Nach der Wahl von M gilt

$$\frac{(2^{m'} - 48)^2}{2^{m'+1} - 24} \geq \frac{2^{m'}}{3}$$

für alle $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}$. Da nach (4.18) insbesondere $x_2 > x_1 > c_2 \ln(2^M) + c_3$ ist, folgt

$$\begin{aligned} & \operatorname{meas}\left(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in]x_1, x_2[\} \cap \bigcup_{r \in \mathcal{R}} G_0^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})\right) \\ & \geq \operatorname{meas}\left(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in]x_1, x_2[\} \cap G_0^1(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})\right) \\ & > c_1 \frac{(x_2 - x_1)^2}{x_2} \\ & = c_1 \frac{(2^m - 48)^2}{2^{m+1} - 24} \\ & > \frac{c_1}{3} 2^m \end{aligned} \quad (4.20)$$

mit Hilfe von Lemma 4.2.1. Weiter gilt nach Wahl von M insbesondere

$$\frac{1}{6\pi} \left(1 - \frac{48 + 2\pi}{2^{m'}}\right) \geq \frac{1}{20}$$

für alle $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}$. Aus (4.17), (4.19) und (4.20) folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}(K_{m,j} \cap \bar{\mathcal{K}}_1) & > c_4 \left(\frac{2^m - 48}{2\pi} - 1\right) \frac{c_1}{3} 2^m \\ & \geq \frac{c_1 c_4}{20} 4^m. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \operatorname{dens}(\bar{\mathcal{K}}_1, K_{m,j}) & = \frac{\operatorname{meas}(K_{m,j} \cap \bar{\mathcal{K}}_1)}{\operatorname{meas}(K_{m,j})} \\ & \geq \frac{c_1 c_4}{20} \frac{4^m}{(2^m - 2)^2} \\ & > \frac{c_1 c_4}{20}. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas 4.2.6 folgt somit aus der Wahl von c_5 . \square

Um aus der Abschätzung des Lemmas zuvor eine für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ und $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$ gültige Abschätzung für die Dichte von $\bar{K}_{n+1}(m, j)$ in K zu erhalten, zeigen wir im nächsten Lemma, dass wir die Verzerrung der n -fachen Hintereinanderausführung von Umkehrfunktionen der Einschränkung von F auf logarithmische Tracts auf einem „Ausgangsquadrat“ $K_{m', j'}, m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j' \in \mathbb{Z}$ unabhängig von n kontrollieren können.

Lemma 4.2.7 *Sei $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ und $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$. Seien $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j' \in \mathbb{Z}$ mit $F^n(K) = K_{m', j'} \in \mathcal{K}_0$. Weiter seien $r_i \in \mathcal{R}, s_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ derart, dass*

$$\left(G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0} \right) (K_{m', j'}) = K$$

für die Funktionen $G_{s_0}^{r_0}, \dots, G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}}$ gilt. Sei

$$\psi := \left(G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0} \right) |_{K_{m', j'}}.$$

Dann gilt

$$\text{diam}(K) \leq 23 \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^{n-1}$$

und

$$L(\psi) \leq 3^4 \exp\left(\frac{1840}{\pi}\right).$$

Beweis: Nach Lemma 2.2.1 gilt

$$L(\psi) \leq L\left(G_{s_0|K_{m', j'}}^{r_0}\right) \cdot \dots \cdot L\left(G_{s_{n-1}|(G_{s_{n-2}}^{r_{n-2}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0})(K_{m', j'})}\right). \quad (4.21)$$

Analog wie im Beweis von Lemma 4.2.4 kann man zeigen, dass

$$L\left(G_{s_0|K_{m', j'}}^{r_0}\right) \leq 3^4 \quad (4.22)$$

ist. Sei nun $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Dann existiert ein Punkt z_0 mit $\mathcal{R}e(z_0) > 2^M$ so, dass $\left(G_{s_{k-1}}^{r_{k-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0}\right)(K_{m', j'})$ Teilmenge eines Kreises mit Radius

$$r := \text{diam}\left(\left(G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0}\right)(K_{m', j'})\right)$$

um z_0 ist. Nach Wahl von M und Lemma 4.2.2 folgt

$$2r < 46 < 2^M - \ln(\delta).$$

Da $B(z_0, 2^M - \ln(\delta)) \subset H$ ist, ist die Einschränkung von $G_{s_k}^{r_k}$ auf $B(z_0, 2^M - \ln(\delta))$ definiert und dort holomorph und injektiv. Mit Lemma 2.2.2, der Folgerung aus dem Koebeschen Verzerrungssatz, folgt

$$\begin{aligned} & L\left(G_{s_k|G_{s_{k-1}}^{r_{k-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0}(K_{m', j'})}\right) \\ & \leq 1 + 160 \frac{\text{diam}\left(\left(G_{s_{k-1}}^{r_{k-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0}\right)(K_{m', j'})\right)}{2^M - \ln(\delta)}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nach Lemma 4.2.2 und induktiver Anwendung von Lemma 3.1.2 gilt

$$\begin{aligned}
& \text{diam}\left((G_{s_{k-1}}^{r_{k-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0})(K_{m',j'})\right) \\
& < \text{diam}\left(G_{s_0}^{r_0}(K_{m',j'})\right) \sup \left\{ |(G_{s_{k-1}}^{r_{k-1}} \circ \dots \circ G_{s_1}^{r_1})'(z)| : z \in G_{s_0}^{r_0}(K_{m',j'}) \right\} \quad (4.24) \\
& < 23 \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^{k-1}
\end{aligned}$$

für alle $k \in \{1, \dots, n\}$. Insbesondere gilt also

$$\text{diam}(\psi(K_{m',j'})) \leq 23 \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^{n-1}.$$

Da nach Definition $\psi(K_{m',j'}) = K$ ist, folgt also der erste Teil der Behauptung. Nach Wahl von M gilt insbesondere $4\pi < 2^M - \ln(\delta)$. Somit konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{920}{\pi} \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^k.$$

Nach Satz 2.1.1 konvergiert dann das unendliche Produkt

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{920}{\pi} \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^k \right)$$

ebenfalls. Aus (4.21), (4.22), (4.23) und (4.24) folgt

$$\begin{aligned}
\ln(L(\psi)) & \leq \ln \left(3^4 \cdot \prod_{k=2}^n \left(1 + 160 \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^{k-1} \frac{23}{2^M - \ln(\delta)} \right) \right) \\
& \leq \ln \left(3^4 \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 + \frac{3680}{4\pi} \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^k \right) \right) \\
& = \ln 3^4 + \sum_{k=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{920}{\pi} \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^k \right) \\
& \leq \ln 3^4 + \frac{920}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^k \\
& = \ln 3^4 + \frac{920}{\pi} \frac{1}{1 - \frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)}}.
\end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas 4.2.7 folgt, da nach Wahl von M insbesondere

$$\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \leq \frac{1}{2}$$

ist. □

Mit Hilfe der beiden vorangegangenen Lemmata und Satz 2.2.1 folgt leicht das folgende Lemma.

Lemma 4.2.8 Sei c_5 die Konstante aus Lemma 4.2.6. Seien $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ und $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$. Dann gilt

$$\text{dens}(\overline{\mathcal{K}}_{n+1}(m, j), K) \geq c_5 \left(3^4 \exp\left(\frac{1840}{\pi}\right) \right)^{-2}.$$

Beweis: Seien $m' \in \mathbb{N}_{\geq M}, j' \in \mathbb{Z}$ mit $F^n(K) = K_{m', j'}$. Weiter seien $r_i \in \mathcal{R}, s_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in \{0, \dots, n-1\}$ derart, dass

$$\left(G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0} \right) (K_{m', j'}) = K$$

für die Funktionen $G_{s_0}^{r_0}, \dots, G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}}$ gilt. Wir setzen

$$\psi := \left(G_{s_{n-1}}^{r_{n-1}} \circ \dots \circ G_{s_0}^{r_0} \right)_{|K_{m', j'}}.$$

Dann gilt

$$\psi(K_{m', j'}) = K$$

und

$$\psi(K_{m', j'} \cap \overline{\mathcal{K}}_1) = K \cap \overline{\mathcal{K}}_{n+1} = K \cap \overline{\mathcal{K}}_{n+1}(m, j).$$

Mit Hilfe von Lemma 4.2.6 und Satz 2.2.1 folgt

$$\begin{aligned} \text{dens}(\overline{\mathcal{K}}_{n+1}(m, j), K) &= \frac{\text{meas}(K \cap \overline{\mathcal{K}}_{n+1}(m, j))}{\text{meas}(K)} \\ &= \frac{\text{meas}(\psi(K_{m', j'} \cap \overline{\mathcal{K}}_1))}{\text{meas}(\psi(K_{m', j'}))} \\ &= \text{dens}(\psi(K_{m', j'} \cap \overline{\mathcal{K}}_1), \psi(K_{m', j'})) \\ &\geq \frac{1}{L^2(\psi)} \text{dens}(\overline{\mathcal{K}}_1, K_{m', j'}) \\ &\geq \frac{c_5}{L^2(\psi)}. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Lemmas 4.2.8 folgt somit aus Lemma 4.2.7. \square

4.3 Der Beweis von Satz 4.1.1

Seien $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$. Sei c_5 die Konstante aus Lemma 4.2.6. Wir definieren

$$\Delta := c_5 \left(3^4 \exp\left(\frac{1840}{\pi}\right) \right)^{-2}$$

und

$$d_n := 23 \left(\frac{4\pi}{2^M - \ln(\delta)} \right)^{n-1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathcal{K}_n(m, j)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Vereinigung von disjunkten, kompakten Mengen mit positivem Maß derart, dass jedes $K \in \mathcal{K}_{n+1}(m, j)$ enthalten

ist in einem $K' \in \mathcal{K}_n(m, j)$ und jedes Element $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$ mindestens ein Element $K' \in \mathcal{K}_{n+1}(m, j)$ enthält. Nach Lemma 4.2.8 gilt

$$\text{dens}(\overline{\mathcal{K}_{n+1}(m, j)}, K) \geq \Delta$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$. Weiter gilt nach Lemma 4.2.7

$$\text{diam}(K) \leq d_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathcal{K}_n(m, j)$. Da die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offensichtlich eine Nullfolge ist, erfüllt die Folge $(\mathcal{K}_n(m, j))_{n \in \mathbb{N}}$ die Nesting conditions aus Definition 2.3.4. Nach Satz 2.3.1 gilt somit

$$\mathcal{HD}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathcal{K}_n(m, j)}\right) \geq 2 - \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |\ln(\Delta)|}{|\ln(d_n)|}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |\ln(\Delta)|}{|\ln(d_n)|} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left| \frac{\ln(\Delta)}{\ln 23 + (n-1)(\ln(4\pi) - \ln(2^M - \ln(\delta)))} \right| \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\ln(\Delta)}{\frac{\ln 23}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} (\ln(4\pi) - \ln(2^M - \ln(\delta)))} \right| \\ &= \frac{|\ln(\Delta)|}{\ln(2^M - \ln(\delta)) - \ln(4\pi)}. \end{aligned}$$

Nach der Wahl von M gilt insbesondere

$$\ln(2^M - \ln(\delta)) - \ln(4\pi) \geq \frac{1}{2} M \ln 2.$$

Es folgt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |\ln(\Delta)|}{|\ln(d_n)|} \leq \frac{2|\ln(\Delta)|}{M \ln 2}.$$

Die Behauptung des Satzes 4.1.1 folgt somit aus der Wahl

$$c := \frac{2|\ln(\Delta)|}{\ln 2}.$$

□

Bemerkung 4.3.1 Da die Konstante Δ lediglich von der Konstanten c_5 und die Konstante c_5 wiederum lediglich von f abhängt, hängt obige Konstante c somit ebenfalls nur von f ab.

Kapitel 5

Der Hauptsatz

Es folgt nun der Beweis des Satzes 1.1.1, der besagt, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge einer ganzen transzendenten Funktion endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} gleich zwei ist.

5.1 Beweisidee

Zu einer gegebenen ganzen transzendenten Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} mit endlicher Ordnung konstruieren wir zunächst wie in Kapitel 4 in Abhängigkeit von $M \in \mathbb{N}$ eine „geschachtelte Menge“ in U mit Hausdorff-Dimension größer gleich $2 - c/M$ mit c als der Konstanten aus Satz 4.1.1. Folglich finden wir auch ein kompaktes achsenparalleles Quadrat Q mit Seitenlänge kleiner π so, dass die Hausdorff-Dimension des Schnitts unserer „geschachtelten Menge“ mit Q ebenfalls größer gleich $2 - c/M$ ist. Wie wir mit Hilfe von Satz 3.2.2 zeigen können, ist das Bild dieses Schnitts unter der Exponentialfunktion eine Teilmenge der Juliamenge von f und besitzt, da $\exp|_Q$ nach Lemma 2.3.6 eine Bi-Lipschitz-Abbildung ist, nach Lemma 2.3.5 die gleiche Dimension wie der Schnitt selbst. Folglich ist die Hausdorff-Dimension der Juliamenge von f größer gleich $2 - c/M$. Die Behauptung des Satzes 1.1.1 folgt somit aus dem Grenzübergang $M \rightarrow \infty$.

5.2 Der Beweis des Satzes 1.1.1

Sei f eine ganze transzendenten Funktion endlicher Ordnung aus der Klasse \mathcal{B} . Weiter sei $\delta \in \mathbb{R}_{>1}$ so definiert wie in Satz 3.1.1 und $M \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass M die Abschätzungen 1.) - 6.) vor Satz 4.1.1 erfüllt. Wir definieren analog zu den Voraussetzungen von Satz 4.1.1 für alle $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$ die Mengen $K_{m,j}$ und $\bar{K}_n(m, j)$. Seien nun $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}$. Nach Satz 4.1.1 existiert dann eine Konstante $c \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass

$$\mathcal{HD}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n(m, j)\right) \geq 2 - \frac{c}{M} \quad (5.1)$$

ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ und Q_1, \dots, Q_N seien achsenparallele kompakte Quadrate mit Seitenlänge kleiner π derart, dass

$$K_{m,j} \subset \bigcup_{k=1}^N Q_k$$

ist. Da $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \subset K_{m, j}$ ist, folgt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) = \bigcup_{k=1}^N \left(Q_k \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right).$$

Nach Lemma 2.3.2 existiert also ein $k_0 \in \{1, \dots, N\}$ mit

$$\mathcal{HD} \left(Q_{k_0} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) = \mathcal{HD} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right). \quad (5.2)$$

Da $\exp|_{Q_{k_0}}$ nach Lemma 2.3.6 eine Bi-Lipschitz-Abbildung ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{HD} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) &= \mathcal{HD} \left(Q_{k_0} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) \\ &= \mathcal{HD} \left(\exp \left(Q_{k_0} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) \right) \\ &\leq \mathcal{HD} \left(\exp \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

mit Hilfe von Lemma 2.3.1, Lemma 2.3.5 und (5.2). Wir zeigen nun, dass

$$\exp \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) \subset \mathcal{J}(f) \quad (5.4)$$

ist. Sei dazu $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j)$. Weiter sei F die aus f durch den logarithmischen Variablenwechsel abgeleitete Funktion. Dann gilt nach Konstruktion

$$\operatorname{Re}(F^n(z_0)) \geq 2^M \quad (5.5)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter gilt nach Wahl von M insbesondere

$$\exp(2^M) > \exp(8\pi + \ln(\delta)). \quad (5.6)$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f^n(\exp(z_0))| &= |\exp(F^n(z_0))| \\ &= \exp(\operatorname{Re}(F^n(z_0))) \\ &\geq \exp(2^M) \end{aligned}$$

nach Bemerkung 3.1.2 und (5.5). Es folgt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} |f^n(\exp(z_0))| \geq \exp(2^M).$$

Hieraus folgt (5.4) mit Hilfe von (5.6) und Satz 3.2.2.

Insgesamt folgt schließlich

$$\begin{aligned} \mathcal{HD}(\mathcal{J}(f)) &\geq \mathcal{HD} \left(\exp \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) \right) \\ &\geq \mathcal{HD} \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \right) \\ &\geq 2 - \frac{c}{M} \end{aligned}$$

mit Hilfe von Lemma 2.3.1, (5.1), (5.3) und (5.4). Die Behauptung des Satzes 1.1.1 folgt somit aus dem Grenzübergang $M \rightarrow \infty$. \square

Anmerkung zum Beweis Im Vergleich zur Arbeit von Barański besteht im allgemeinen Fall die Schwierigkeit, die Verzerrung der Funktion ψ aus Lemma 4.2.7, das heißt der n -fachen Hintereinanderausführung von Umkehrfunktionen der Einschränkung von F auf logarithmische Tracts, auf einem Quadrat unabhängig von n abzuschätzen. Unter den Voraussetzungen, die Barański in seiner Arbeit macht, ist die Funktion ψ in der gesamten Halbebene H definiert und dort injektiv. Dies folgt aus der Tatsache, dass bei ihm nicht nur die endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion von f in einem Kompaktum enthalten sind, das wiederum im Einzugsbereich eines attraktiven Fixpunktes enthalten ist, sondern auch die endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion jeder Iterierten von f . Folglich enthält H keine Singularitäten von F^{-n} für alle $n \in \mathbb{N}$. Zur Abschätzung der Verzerrung von ψ auf einem Quadrat kann er daher ohne weiteres den Satz von Koebe anwenden und erhält sofort eine von n unabhängige Abschätzung.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass Barański daraus, dass H für alle $n \in \mathbb{N}$ keine Singularitäten von F^{-n} enthält und die Fatoumenge von f einzig aus dem unmittelbaren Einzugsbereich eines Fixpunktes besteht, folgern kann, dass

$$\mathcal{HD}(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{HD}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F^{-n}(H)\right)$$

ist, so dass die Behauptung bei ihm direkt aus

$$\mathcal{HD}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j)\right) = 2 \quad \text{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\mathcal{K}}_n(m, j) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F^{-n}(H)$$

folgt, ohne dass er den Satz 3.2.1 von Eremenko und Lyubich verallgemeinern muss.

Anders als Barański, der im Beweis des Lemmas 4.2.1 neben dem Konzept der extremalen Länge auch den Ahlforsschen Verzerrungssatz anwendet, benutzen wir zudem diesen Satz nicht, sondern beweisen mit Hilfe der extremalen Länge vielmehr implizit eine modifizierte Version des Satzes.

5.3 Eine Verallgemeinerung des Hauptresultates

Der Beweis des Satzes zeigt insbesondere, dass unter der Voraussetzung, dass eine ganze transzendente Funktion f aus der Klasse \mathcal{B} nur einen einzigen Tract T so besitzt, dass mit $M_T(r) := \{|f(z)| : z \in T \text{ mit } |z| = r\}$ für alle $r \in \mathbb{R}_{>0}$

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln(M_T(r)))}{\ln(r)} < \infty$$

gilt, schon folgt, dass $\mathcal{HD}(\mathcal{J}(f)) = 2$ ist. Es reicht also lax ausgedrückt „endliche Ordnung der Funktion f in einem einzigen Tract“. Man vergleiche hierzu insbesondere Lemma 4.2.6 und hier im speziellen Abschätzung (4.20).

Falls f mehr als einen Tract besitzt, könnten wir zudem in der eben genannten Abschätzung anstatt $G_0^1(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})$ auch $G_0^r(\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq 2^M\})$

für jedes beliebige $r \in \mathcal{R}$ einfügen, ohne dass es den weiteren Beweis ändern würde. Wir erhalten somit, dass schon

$$\text{dens}\left(\overline{\mathcal{K}}_1 \cap \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} L_s^r, K_{m,j}\right) > c_5$$

für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq M}, j \in \mathbb{Z}, r \in \mathcal{R}$ gilt. Mit Hilfe dieser verallgemeinerten Abschätzung kann man durch ähnliche Argumentation wie im Beweis von Satz 1.1.1 zeigen, dass für eine Folge $\underline{r} := (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{R} die Hausdorff-Dimension der Menge

$$\left\{ z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n(m, j) : F^n(z) \in \bigcup_{s \in \mathbb{Z}} L_s^{r_n} \right\}$$

gleich zwei ist. Es ist dann insbesondere auch die Hausdorff-Dimension der Menge

$$\left\{ z \in \exp\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n(m, j)\right) : f^n(z) \in T_{r_n} \right\}$$

gleich zwei. Da $\exp(\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{K}_n(m, j))$ eine Teilmenge der Juliamenge von f ist, folgt somit, dass die Hausdorff-Dimension der in Satz 1.1.2 betrachteten Menge $M_{\underline{r}}$ gleich zwei ist.

Dieser Satz gestattet uns folgende Anwendung. Nach McMullens Artikel [21] ist das Maß der Juliamenge der Sinusfunktion positiv, das heißt nach Lemma 2.3.3, dass die Hausdorff-Dimension der Juliamenge der Sinusfunktion gleich zwei ist. Weiter kann man zeigen, dass sowohl in der oberen als auch in der unteren Halbebene ein Tract der Sinusfunktion enthalten ist. Sei $T(+)$ der in der oberen Halbebene enthaltene Tract und $T(-)$ der in der unteren. Dann gilt für jede Folge $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in der Menge $\{+, -\}$, dass die Hausdorff-Dimension der Menge

$$\{z \in \mathcal{J}(\sin) : \sin^n(z) \in T(r_n)\}$$

ebenfalls gleich zwei ist.

McMullen beweist zudem in [21], dass das Maß der Juliamenge der Funktionen $\lambda \exp$ mit $\lambda \in]0, 1/e[$ gleich Null ist. Es erscheint plausibel zu sein, dass sich die dort angewandten Methoden auf die Mengen $\{z \in \mathcal{J}(\sin) : \sin^n(z) \in T(r_n)\}$ übertragen lassen. Es ist also davon auszugehen, dass diese Teilmengen der Juliamenge der Sinusfunktion im Gegensatz zur Juliamenge selbst kein positives Maß haben.

Verzeichnis der verwendeten Symbole

\mathbb{N}	die natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Q}	die rationalen Zahlen
\mathbb{R}	die reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{>0}$	die positiven reellen Zahlen
\mathbb{C}	die komplexen Zahlen
$\hat{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
\mathbb{D}	$\{z \in \mathbb{C} : z < 1\}$
\overline{X}	Abschluss der Menge X
∂X	Rand der Menge X
$\text{diam}(X)$	Durchmesser der Menge X , 9
$\mathcal{P}(X)$	Potenzmenge der Menge X
$\text{meas}(X)$	Lebesgue-Maß der Menge X
$\mathcal{H}^s(X)$	s – dimensionales Hausdorff-Maß der Menge X , 9
$\mathcal{HD}(X)$	Hausdorff-Dimension der Menge X , 10
$\text{dens}(X, Y)$	Dichte von X in Y , 7
$L(f _X)$	Verzerrung von f auf der Menge X , 7
$\text{dist}(z, Y)$	$\text{dist}(\{z\}, Y)$
$\text{dist}(X, Y)$	$\inf\{ x - y : x \in X, y \in Y\}$
$\text{grad}(P)$	Grad eines Polynoms P
$M(r)$	$\max\{ f(z) : z = r\}$ für eine ganze Funktion f , 19
$B(a, r)$	Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius r bezüglich der Betragsmetrik
$D(a, r)$	Kreisscheibe mit Mittelpunkt a und Radius r bezüglich der sphärischen Metrik
ρ_G	hyperbolische Metrik auf G , 21
ϱ_G	Dichte der hyperbolischen Metrik auf G , 21
$\lambda(\mathcal{L})$	extremale Länge einer Kurvenschar \mathcal{L} , 15
$M(\mathcal{L})$	Modul einer Kurvenschar \mathcal{L} , 15
$\text{Spur}(\gamma)$	Spur der Kurve γ
$\mathcal{F}(f)$	Fatoumenge von f , 25
$\mathcal{J}(f)$	Juliamenge von f , 25
$I(f)$	entkommene Menge, 31
$\text{sing}(f^{-1})$	Menge der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion von f , 28

\mathcal{B}	Klasse ganzer Funktionen, für die die Menge $\text{sing}(f^{-1})$ beschränkt ist, 28
\mathcal{S}	Speiserklasse, 26
$\delta = \delta(f)$	positive reelle Zahl, so dass $\text{sing}(f^{-1}) \subset B(0, \delta/2)$, 28
A	$\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, \delta)}$, 28
G	$f^{-1}(A)$, 28
U	Urbild von G unter der Exponentialfunktion, 28
H	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > \ln(\delta)\}$, 28
H'	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$, 21
F	die aus f durch den logarithmischen Variablenwechsel abgeleitete Funktion, 29
R	Anzahl der Tracts, 33
\mathcal{R}	$\{1, \dots, R\}$, 33
T_r	Tract, 33
$(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Folge in der Menge \mathcal{R} , 3
$M_{\underline{r}}$	von der Folge $\underline{r} := (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abhängige Teilmenge der Juliamenge, 3
L_s^r	zum Tract T_r gehöriger logarithmischer Tract mit von s abhängiger Lage in der Ebene, 33
G_s^r	$(F _{L_s^r})^{-1}$, 34
M	Konstante aus Satz 4.1.1, 34
\mathcal{K}_0	Menge aller Quadrate $K_{m,j}$, $m \in \mathbb{N}_{\geq M}$, $j \in \mathbb{Z}$, 35
\mathcal{K}_n	Menge aller zusammenhängenden Teilmengen der Elemente aus \mathcal{K}_0 , die durch F^n auf ein Element aus \mathcal{K}_0 abgebildet werden, 35
$\overline{\mathcal{K}}_n$	Vereinigung der Elemente aus \mathcal{K}_n , 35
$K_{m,j}$	Quadrat mit von m und j abhängiger Lage in der Ebene mit Seitenlänge $2^m - 2$, 35
$\mathcal{K}_n(m, j)$	Menge der Elemente von \mathcal{K}_n , die in $K_{m,j}$ enthalten sind, 35
$\overline{\mathcal{K}}_n(m, j)$	Vereinigung der Elemente von $\mathcal{K}_n(m, j)$, 35
$\hat{K}_{m,j}$	Quadrat mit von m und j abhängiger Lage in der Ebene mit Seitenlänge 2^m , 41
$\tilde{K}_{m,j}$	Quadrat mit von m und j abhängiger Lage in der Ebene mit Seitenlänge $2^m - 48$, 41
c_1, c_2, c_3	Konstanten aus Lemma 4.2.1, 36
c_4	Konstante aus Lemma 4.2.4, 43
c_5	Konstante aus Lemma 4.2.6, 44
c	Konstante aus Satz 4.1.1, 35

Literaturverzeichnis

- [1] AHLFORS, L. V. *Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen*, Acta Soc. Sci. Fenn., Nov. Ser. A1, 9 (1930), 1-40
- [2] AHLFORS, L. V. *Conformal invariants-Topics in geometric function theory*, McGraw-Hill Book Co., 1973
- [3] BAKER, I. N. *The domains of normality of an entire function*, Ann. Acad. Sci. Ser. A. I. Math. 1 (1975), 277-283
- [4] BARAŃSKI, K. *Hausdorff dimension of hairs and ends for entire maps of finite order*, Preprint
- [5] BAUER, H. *Maß- und Integrationstheorie*, De Gruyter, 1991
- [6] BEARDON, A. F. *Iteration of rational functions*, Springer, 1991
- [7] BEARDON, A. F. *Algebra and geometry*, Cambridge University Press, 2005
- [8] BERGWEILER, W. *Iteration of meromorphic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), 151-188
- [9] BERGWEILER, W. *Singularities in Baker Domains*, Comput. Methods Funct. Theory 1 (2001), 41-49
- [10] BUFF, X. und CHÉRITAT, A. *Ensembles de Julia quadratiques de mesure de Lebesgue strictement positive*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341 (2005), 669-674
- [11] BOCK, H. *Über das Iterationsverhalten meromorpher Funktionen auf der Juliamenge*, Dissertation RWTH Aachen, Aachener Beiträge zur Mathematik, 1998
- [12] CONWAY, J. *Functions of one complex variable*, Springer, 1978
- [13] DEVANEY, R. und KRYCH, M. *Dynamics of $\exp(z)$* , Ergod. Th. & Dynam. Sys. 4 (1984), 35-52
- [14] EREMENKO, A. und LYUBICH, M. *Dynamical properties of some classes of entire functions*, Ann. Inst. Fourier 42 (1992), 989-1019
- [15] FALCONER, K. J. *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985
- [16] FATOU, P. *Sur l'itération des fonctions transcendentes entières*, Acta Math. 47 (1926), 337-370

- [17] FISCHER, W. und LIEB, I. *Funktionentheorie*, Vieweg, 1994
- [18] GARBER, V. L. *On the iteration of rational functions*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 84 (1978), 497-505
- [19] JULIA, G. *Sur l'itération des fonctions rationnelles*, J. Math. Pures Appl. 4 (1918), 47-245
- [20] KARPÍŃSKA, B. *Hausdorff dimension of the hairs without endpoints for $\lambda \exp(z)$* , C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 328 (1999), 1039-1044
- [21] MCMULLEN, C. *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 300 (1987), 329-342
- [22] MILNOR, J. *Dynamics in one complex variable*, Vieweg, 2000
- [23] NEVANLINNA, R. *Eindeutige analytische Funktionen*, Springer, 1936
- [24] POMMERENKE, C. *Boundary behaviour of conformal maps*, Springer, 1992
- [25] REMPE, L. *Rigidity of escaping dynamics for transcendental entire functions*, ArXiv:math.DS/0605058 (2006)
- [26] ROTTENFUSSER, G., RÜCKERT, J., REMPE, L. und SCHLEICHER, D. *Dynamic rays of bounded-type entire functions*, Preprint
- [27] SCHLEICHER, D. und ZIMMER, J. *Escaping points of exponential maps*, J. London Math. Soc. 67 (2003), 380-400
- [28] SCHUBERT, H. *Über das Maß der Fatoumenge trigonometrischer Funktionen*, Diplomarbeit an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 2003
- [29] STALLARD, G. M. *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions I*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 11 (1991), 769-777
- [30] STALLARD, G. M. *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions II*, Math. Proc. Camb. Philos. So. 119 (1996), 513-536
- [31] STALLARD, G. M. *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions III*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 122 (1997), 223-244
- [32] STALLARD, G. M. *The Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions IV*, J. London Math. Soc. 61 (2000), 471-488
- [33] STEINMETZ, N. *Rational Iteration*, De Gruyter, 1993
- [34] SULLIVAN, D. *Conformal dynamical systems*, Lecture Notes in Math., 1007 (1983), 725-752
- [35] TANIGUCHI, M. *Size of Julia set of a structurally finite transcendental entire function*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 135 (2003), 181-192

Index

- Abbildung
 - Bi-Lipschitz-, 13
- Dichte, 7
 - der hyperbolischen Metrik, 21
- Durchmesser, 9
- Funktionenklasse
 - \mathcal{B} , 28
 - \mathcal{S} , 26
- Gebiet
 - Baker-, 26
 - Böttcher-, 25
 - Leau-, 25
 - Schröder-, 25
- Hausdorff
 - Dimension, 10
 - Maß, 9
- Hermanring, 26
- Länge
 - extremale, 15
- Menge
 - der endlichen Singularitäten der Umkehrfunktion, 28
 - entkommende, 31
 - Fatou-, 25
 - Julia-, 25
 - postkritische, 26
- Metrik
 - hyperbolische, 21
 - zulässige, 15
- Modul, 15
- Nesting conditions, 11
- Normalität, 24
- Ordnung
 - einer Funktion, 19
- Punkt
 - gewöhnlicher, 17
 - kritischer, 17
- Siegelscheibe, 26
- Singularität der Umkehrfunktion, 17
 - algebraische, 17
 - transzendente, 17
 - direkte, 17
- Streifengebiet, 16
- Tract, 28
 - logarithmischer, 29
- unendliches Produkt
 - konvergentes, 6
 - absolut konvergentes, 7
- Variablenwechsel
 - logarithmischer, 28
- Verzerrung, 7
- Verzerrungssatz
 - Ahlforsscher, 16
 - Koebescher, 8
- Weg
 - asymptotischer, 18
- Wert
 - asymptotischer, 18
 - kritischer, 17

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion unter Einhaltung guter wissenschaftlicher Praxis selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit hat weder ganz noch in Teilen an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des Weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 25.05.2007

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Schubert, Hendrik
Geburtsdatum und -ort	29.07.1975, Bremen
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schule

1982-1986	Grundschule Kirchweyhe
1986-1988	Orientierungsstufe Lahausen
1988-1995	Gymnasium Syke
1995	Abitur

Zivildienst

1995-1996	Delme-Werkstätten für Behinderte
-----------	----------------------------------

Hochschule

ab WS 96/97	Studium der Mathematik mit Nebenfach BWL an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
1998	Vordiplom
1999-2003	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Seminar der CAU Kiel
2003	Diplom
2003-2006	Wissenschaftlicher Angestellter am Mathematischen Seminar der CAU Kiel
2006-2007	Stipendiat der German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development

Kiel, den 25.05.07

