

Beiträge zur Analyse von Finanzmarktmodellen mit Transaktionskosten

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
Claas Prella

Kiel
Juli 2007

Referent: Prof. Dr. A. Irle
Koreferent: PD Dr. V. Paulsen
Tag der mündlichen Prüfung: 16.07.07
Zum Druck genehmigt: 18.07.07

Der Dekan, gez. Prof. Dr. Grotemeyer

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung von Finanzmarktmodellen, in denen für den An- und Verkauf von Finanzgütern Kosten anfallen, sogenannte Transaktionskosten.

Zentrales Thema ist dabei zunächst ein Portfoliooptimierungsproblem in einem verallgemeinerten Black-Scholes-Modell.

Im ersten Kapitel betrachten wir dabei einen allgemeinen Ansatz mit n Aktien und einem festverzinslichen Wertpapier. Die behandelte Optimierungsaufgabe besteht darin, die asymptotische Portfoliorendite

$$R = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log X_t)$$

zu maximieren, wobei X_t den Portfoliowert zum Zeitpunkt t bezeichnet. Die zugrundegelegte Transaktionskostenstruktur setzt sich aus fixen (d.h. zum Portfoliowert proportionalen) und proportionalen (d.h. zum Transaktionsvolumen proportionalen) Kosten zusammen. Wir leiten zunächst eine Darstellung des Wertprozesses her, in der keine absoluten Größen, sondern nur die relativen Anteile der Werte der Bestände in den einzelnen Aktien am Gesamtwert des Portfolios auftreten. Dies geschieht in der Hoffnung, daß diese sogenannten Wertanteile sich in gewisser Weise stationär verhalten. Tatsächlich gelingt es uns, für eine relativ flexible und plausibel erscheinende Klasse von Strategien (Konstante-Grenzen-Strategien) eine gewisse Art von Stationarität nachzuweisen. Wir können die asymptotische Rendite dann mit erneuerungstheoretischen Methoden auf das Verhalten der Wertanteile in einer „typischen“ Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten zurückführen.

Im zweiten Kapitel untersuchen wir dann speziell ein Modell mit nur 2 Aktien und keinem Bond. Wir unterscheiden dabei hinsichtlich der Transaktionskostenstruktur den Fall, daß die Transaktionskosten über das Konto einer (vorher ausgezeichneten) der Aktien abgebucht werden, und den Fall, daß die Transaktionskosten über ein zusätzliches Festgeldkonto abgebucht werden, welches bei jeder Transaktion durch entsprechende (Netto-)Aktienverkäufe ausgeglichen werden muß. In beiden Fällen können wir durch Zurückführung auf das bereits bekannte Ergebnis für ein entsprechendes Modell mit einer Aktie und einem Bond die optimalen Strategien bestimmen.

Zum Abschluß der Arbeit wenden wir uns schließlich der Frage zu, inwieweit Transaktionskosten geeignet sind, um Arbitragemöglichkeiten aus Finanzmärkten zu eliminieren (und somit mehr stochastische Prozesse als Preisprozesse verwendbar zu machen). In Verallgemeinerung eines bereits bekannten Resultats zeigen wir, daß für eine großen Klasse von Preisprozessen schon beliebig kleine und rein proportionale Transaktionskosten genügen, um die betrachteten Märkte arbitragefrei zu machen.

Abstract

In this thesis we investigate models for financial markets, in which an investor has to bear costs for buying or selling assets, so-called transaction costs.

At first, we focus on a portfolio optimization problem in a generalized Black-Scholes model.

In the first chapter we consider a general approach with n stocks and one bond. The treated problem is to maximize the asymptotic return

$$R = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log X_t)$$

of a portfolio, where X_t denotes the portfolio value at time t . The underlying transaction cost structure is composed of fixed (i.e. proportional to the portfolio value) and proportional (i.e. proportional to the transaction volume) costs. At first, we derive a representation of the value process, which depends not on absolute values, but only on the relative fractions of the total portfolio value, that the investor holds in the different stocks. This derivation is motivated by the hope, that these so-called risky fractions behave in some way stationarily. Indeed, we can show a certain kind of stationarity for a quite flexible and plausible class of strategies (Constant-Boundary strategies). Then, using renewal theoretic methods, we are able to describe the asymptotic return by the behaviour of the risky fractions in a “typical” period between two trading times.

In the second chapter we focus on a model with only 2 stocks and no bond. Regarding the transaction cost structure, we distinguish the case, that the transaction costs are debited from one of the two stock accounts, and the case, that the transaction costs are debited from an additional bank account, which has to be equalized by corresponding (net-)sellings of stocks. In both cases we can determine optimal strategies by reducing the problem to the already known result for the corresponding model with one stock and one bond.

In the last chapter, we finally investigate, to which extent transaction costs are qualified to eliminate arbitrage opportunities from financial markets (which could qualify a larger class of stochastic processes to be used as price processes). In generalization of an already known result, we show that for a large class of price processes arbitrarily small and pure proportional costs are sufficient to make the corresponding markets arbitrage free.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	6
1 Portfoliooptimierung unter fixen und proportionalen Transaktionskosten im n-Aktien-Fall	10
1.1 Portfoliooptimierung ohne Transaktionskosten	10
1.2 Fixe und proportionale Transaktionskosten	11
1.3 Konstante-Grenzen-Strategien	23
1.4 Anhang: Erneuerungstheorie für r -unabhängige Zufallsgrößen	35
2 Optimale Portfolios im 2-Aktien-Fall ohne Bond	39
2.1 Abbuchung der Transaktionskosten über ein Aktienkonto	39
2.2 Abbuchung der Transaktionskosten über ein Festgeldkonto	45
3 Arbitragefreiheit unter proportionalen Transaktionskosten	53
Literaturverzeichnis	59

Einleitung

In den klassischen Finanzmarktmodellen sowohl zur Derivatbewertung als auch zur Portfoliooptimierung wird in der Regel unterstellt, daß Investoren Finanzgüter stets beliebig oft und in beliebig hohem Ausmaß handeln können, ohne dafür Kosten tragen zu müssen. Nun ist wohlbekannt, daß diese Annahme nicht die Realität widerspiegelt. In der Praxis treten die verschiedensten Arten von Kosten für Transaktionen auf, z.B. Broker- bzw. Börsengebühren, Telefonkosten, Kosten zur Informationsbeschaffung, Opportunitätskosten für den investierten Zeitaufwand etc. All diese Kosten fassen wir im folgenden unter dem Begriff Transaktionskosten zusammen.

Natürlicherweise stellt sich nun die Frage, ob die Vernachlässigung von Transaktionskosten einen im Rahmen der beim Übergang von der Realität zum mathematischen Modell ohnehin erforderlichen Vereinfachung akzeptablen Abstraktionsschritt darstellt, oder ob die hierdurch begangene Verzerrung zu vollkommen unpraktikablen oder gar irreführenden Vorhersagen bzw. Handlungsempfehlungen führt. Dabei wird die Antwort im allgemeinen natürlich vom konkreten Modell und vor allem von dessen Verwendungszweck abhängen.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit Finanzmarktmodellen, in denen Transaktionskosten erfaßt und von herausgehobener Bedeutung für die Struktur der jeweils untersuchten Fragestellungen sind.

Im den ersten beiden Kapiteln, die den Hauptteil der Arbeit bilden, beschäftigen wir uns dabei mit einem Portfoliooptimierungsproblem in einem verallgemeinerten Black-Scholes-Modell. Im ersten Kapitel untersuchen wir ein Modell mit n Aktien und einen Bond. Das betrachtete Problem ist die Maximierung der asymptotischen Rendite

$$R = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log X_t), \quad (1)$$

wobei X_t den Portfoliowert zum Zeitpunkt t bezeichnet. Das entsprechende Problem ohne Transaktionskosten, das wir hier noch einmal kurz in Abschnitt 1.1 abhandeln, wurde bereits von Merton(1969) gelöst. Es stellt sich heraus, daß die optimale Strategie darin besteht, die relativen Anteile der Werte der Bestände in den einzelnen Aktien am gesamten Portfoliowert (im folgenden Wertanteile genannt) konstant gleich einem bestimmten Wert $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^n$ zu halten. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß diese Strategie kontinuierlichen Handel erfordert, also unendlich viele Transaktionen in beliebig kleinen Zeitintervallen. Dies ist natürlich alleine schon technisch nicht in der Realität umsetzbar; entscheidender ist aber, daß auch eine näherungsweise Umsetzung in der Realität kein zufriedenstellendes Ergebnis liefert, da der vom Modell vorgeschlagene sehr hochfrequente Handel zu sehr hohen Transaktionskosten führt. Die Hoffnung, daß ein Modell, in welchem Transaktionskosten vernachlässigt werden, zu einem auch mit Transaktionskosten plausiblen Ergebnis führt, schlägt hier also fehl.

Zur Gewinnung realistischerer Modelle wurden in der Literatur verschiedene Vorschläge zur Einbeziehung von Transaktionskosten gemacht, als gängige Typen seien hierbei

- konstante Kosten (jede Transaktion kostet einen festen Betrag),
- fixe Kosten (jede Transaktion kostet einen zum aktuellen Portfoliowert proportionalen Betrag),
- proportionale Kosten (jede Transaktion kostet einen zum Transaktionsvolumen proportionalen Betrag)

genannt. Dabei hängen sowohl die Berechenbarkeit als auch die Plausibilität der jeweiligen Lösungen natürlich neben der konkreten Modellspezifikation und der zu maximierenden Größe auch vom unterstellten Transaktionskostentyp ab. Im Spezialfall $n = 1$ wurde von Irle und Sass(2006) eine Lösung für das oben beschriebene Problem unter fixen und proportionalen Kosten gefunden, und es zeigte sich, daß diese eine plausible Struktur hat. Sie kann durch 4 Parameter $a^* < \alpha^* < \beta^* < b^*$ beschrieben werden. Der Investor greift stets ein, sobald der Wertanteil in der Aktie das Intervall (a^*, b^*) verläßt, da die Abweichung vom optimalen Wertanteil $\hat{\eta}$ dann gerade so groß ist, daß er zur Korrektur des Wertanteils erforderliche Kosten in Kauf nimmt. Da die Kosten eine fixe Komponente enthalten, handelt der Investor nicht nur in infinitesimalem Umfang, da sie aber auch eine proportionale Komponente enthalten, hängt der neu gewählte Wertanteil auch vom bestehenden Wertanteil ab: Ist dieser a^* , wählt der Investor α^* als neuen Wertanteil, ist dieser b^* , so wählt er β^* .

Motiviert durch dieses positive Ergebnis erscheint es sinnvoll, sich auch im n -Aktien-Fall mit einer aus fixen und proportionalen Kosten bestehenden Transaktionskostenstruktur zu beschäftigen. Die explizite Beschreibung einer optimalen Strategie erscheint zum gegenwärtigen Zeitpunkt jedoch utopisch.

Im ersten Kapitel werden wir immerhin ein Strukturresultat angeben, daß innerhalb einer „vernünftigen“ Klasse von Strategien die Zurückführung der asymptotischen Rendite auf das Verhalten der Wertanteile in einer „typischen“ Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten ermöglicht. Hierzu transformieren wir in Abschnitt 1.2 zunächst das Modell dahingehend, daß sowohl Handelsstrategien als auch der zugehörigen Wertprozeß nicht mehr von absoluten Größen, sondern nur noch von den Wertanteilen in den einzelnen Aktien abhängen. In Abschnitt 1.3 betrachten wir dann sogenannte Konstante-Grenzen-Strategien, die für den n -dimensionalen Fall die natürliche Verallgemeinerung jener oben vorgestellten Klasse von (durch 4 Parameter $a < \alpha < \beta < b$ beschreibbaren) Strategien bildet, in der sich im 1-Aktien-Fall die optimale befand. Wir weisen zunächst nach, daß die Folge der Wertanteile zu den Handelszeitpunkten $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Harris-Kette ist, und nutzen dies zur Konstruktion eines (allerdings um eine Periode verzögerten) Regenerationsschemas für den aus den Wertanteilen und den Zeitspannen zwischen den Handelszeitpunkten bestehenden Prozeß $(\pi_{\tau_k}, \tau_k - \tau_{k-1})_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Dies ermöglicht es uns schließlich, die oben angekündigte Darstellung der asymptotischen Rendite in der Form

$$R = r + \frac{E_\xi(h(\pi_{\tau_1}))}{E_\xi(\tau_1)}, \quad (2)$$

zu gewinnen, wobei r die zugrundegelegte Zinsrate ist, ξ die invariante Verteilung der Harris-Kette $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet, und h eine (konkret bestimmbare) Funktion ist. In einem Anhang zu Kapitel 1 werden schließlich einige erneuerungstheoretische Resultate für r -unabhängige Zufallsgrößen bewiesen, die in der Literatur nicht exakt in der zur Herleitung von (2) benötigten Form zu finden waren.

Im zweiten Kapitel betrachten wir eine Variante des im ersten Kapitel behandelten Modells ohne Bond und mit genau $n = 2$ Aktien. Wir untersuchen dabei zunächst den Fall, daß die Transaktionskosten über das Konto einer (vorher ausgezeichneten) der beiden Aktien abgebucht werden, für diese Buchung jedoch keine neuerlichen Transaktionskosten fällig werden. Unter Verwendung eines Numerairewechsels können wir dieses Modell auf die Situation mit einem Bond und einer Aktie zurückführen und somit eine optimale Strategie angeben. Als zweiten Ansatz betrachten wir dann den (etwas realistischeren) Fall, daß die Transaktionskosten über ein Festgeldkonto abgebucht werden, welches bei jeder Transaktion durch entsprechende (Netto-)Aktienverkäufe wieder ausgeglichen werden muß. Mit aufwendigeren Überlegungen als im ersten Fall können wir auch dieses Modell wieder auf die Situation mit einem Bond und einer Aktie zurückführen. Damit schließen wir die Behandlung des Portfoliooptimierungsproblems und des zugehörigen Modellrahmens ab, und wenden uns zum Abschluß der Arbeit noch einmal einer anderen Fragestellung im Zusammenhang mit Transaktionskosten zu.

Ein wohlbekanntes Problem in der Modellierung von Finanzmärkten ist, daß die Verwendung bestimmter stochastische Prozesse (wie z.B. Fraktionaler Brownscher Bewegung), die aus empirischer Sicht sehr gut zur Modellierung der Preisentwicklung von Finanzgütern geeignet erscheinen, in friktionslosen Märkten automatisch zu Arbitragemöglichkeiten führen. Wir beschäftigen uns im dritten und letzten Kapitel dieser Arbeit mit der Fragestellung, inwieweit Transaktionskosten geeignet sind, um solche unerwünschten Arbitragephänomene zu beseitigen. Guasoni(2006) zeigt, für eine große Klasse von stochastischen Prozessen bereits beliebig kleine und rein proportionale Kosten hinreichend sind, um eine gewisse Art von Arbitrage zu verhindern. Wir zeigen in dieser Arbeit, daß dieses Resultat sogar unter Verwendung eines schwächeren Arbitragebegriffs (nämlich ohne Berücksichtigung von Liquidationskosten) gültig bleibt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. A. Irle für die hervorragende Betreuung bedanken. Des weiteren danke ich Dr. Jörn Saß vom RICAM Linz für einige wertvolle Diskussionen. Außerdem danke ich allen Mitgliedern der Fachgruppe Stochastik am Mathematischen Seminar der CAU Kiel, insbesondere meinen Bürokollegen Dr. Markus Wendt und Dipl.-Math. Jan Spitzmann, für die ausgesprochen freundliche und kollegiale Atmosphäre. Schließlich möchte ich mich noch bei meinen Eltern und meinen Freunden, insbesondere Melanie Bletsch, für die „außermathematische“ Unterstützung in den letzten Jahren bedanken.

1 Portfoliooptimierung unter fixen und proportionalen Transaktionskosten im n -Aktien-Fall

1.1 Portfoliooptimierung ohne Transaktionskosten

Als Einstieg und Referenzpunkt soll in diesem Abschnitt das in dieser Arbeit behandelte Portfoliooptimierungsmodell zunächst ohne Transaktionskosten behandelt werden. Wie wir sehen werden, läßt sich ohne allzu große Mühe eine explizite Lösung finden. Dieses Problem wurde bereits in verschiedenen Arbeiten behandelt, für eine explizite Darstellung siehe etwa Morton und Pliska(1995).

Wir betrachten ein Modell mit einem Bond S^0 und n Aktien S^1, \dots, S^n . Der Preisprozeß $(S_t)_{t \in [0, \infty)} = ((S_t^0, \dots, S_t^n)^T)_{t \in [0, \infty)}$ genüge den stochastischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dS_t^0 &= rS_t^0 dt, \\ dS_t^i &= \mu_i S_t^i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} S_t^i dW_t^j, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (3)$$

mit den Startwerten $S_0^i = 1$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

Dabei seien $r \geq 0$, $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, $\sigma_{ij} \in \mathbb{R}$ so, daß die Matrix $\sigma = \{\sigma_{ij}\}_{i,j \in \{1, \dots, n\}}$ positiv definit ist, und schließlich $W = (W^1, \dots, W^n)^T$ ein n -dimensionaler Wienerprozeß mit Standardfiltration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$. Außerdem sei im folgenden $\mu := (\mu_1, \dots, \mu_n)^T$.

Es bezeichne η_t^i den Anteil des Gesamtwertes eines Portfolios, der im i -ten risikobehafteten Finanzgut gehalten wird. Ein zulässiger Anteilsprozeß sei in diesem Abschnitt ein \mathbb{R}^n -wertiger, zu \mathcal{F} adaptierter, progressiv-meßbarer, beschränkter Prozeß. Zu einem zulässigen Anteilsprozeß $(\eta_t)_{t \in [0, \infty)} = ((\eta_t^1, \dots, \eta_t^n)^T)_{t \in [0, \infty)}$ sei der Wertprozeß $(X_t^\eta)_{t \in [0, \infty)}$ bei Selbstfinanzierung gegeben durch die Lösung der SDE

$$\begin{aligned} dX_t^\eta &= \frac{(1 - \sum_{i=1}^n \eta_t^i) X_t^\eta}{S_t^0} dS_t^0 + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_t^i X_t^\eta}{S_t^i} dS_t^i \\ &= (1 - \sum_{i=1}^n \eta_t^i) X_t^\eta r dt + \sum_{i=1}^n \eta_t^i X_t^\eta (\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j) \end{aligned} \quad (4)$$

mit dem festen Anfangswert $X_0^\eta = X_0 > 0$.

Die Ito-Formel liefert

$$\begin{aligned}
d \log X_t^\eta &= \left(1 - \sum_{i=1}^n \eta_t^i\right) r dt + \sum_{i=1}^n \eta_t^i (\mu_i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} dW_t^j) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \eta_t^i \sigma_{ij}\right)^2 dt \\
&= \left((1 - \eta_t^T \bar{1})r + \eta_t^T \mu - \frac{1}{2} \eta_t^T \sigma \sigma^T \eta_t\right) dt + \eta_t^T \sigma dW_t,
\end{aligned} \tag{5}$$

wobei hier und im folgenden

$$\bar{1} = (1, \dots, 1)^T \tag{6}$$

sei. Gesucht sind die optimale asymptotische Rendite

$$\hat{R} := \sup_{\eta \text{ zulässig}} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log X_t^\eta) \tag{7}$$

und ein zulässiger Anteilsprozeß $\hat{\eta}$ mit

$$\hat{R} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log X_t^{\hat{\eta}}). \tag{8}$$

Gemäß (5) gilt für jedes zulässige η

$$E(\log X_t^\eta) = \log x + E\left(\int_0^t \left((1 - \eta_s^T \bar{1})r + \eta_s^T \mu - \frac{1}{2} \eta_s^T \sigma \sigma^T \eta_s\right) ds\right). \tag{9}$$

Da der Integrand konkav in η_s ist, ergibt sich $\hat{\eta}$ schon durch Berechnung der (eindeutig bestimmten) Nullstelle des zugehörigen Gradienten. Somit gilt

$$\hat{\eta} \equiv (\sigma \sigma^T)^{-1} (\mu - r \bar{1}). \tag{10}$$

Die optimale asymptotische Wachstumsrate ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\hat{R} &= (1 - \hat{\eta}^T \bar{1})r + \hat{\eta}^T \mu - \frac{1}{2} \hat{\eta}^T \sigma \sigma^T \hat{\eta} \\
&= r + \frac{1}{2} (\mu - r \bar{1})^T (\sigma \sigma^T)^{-1} (\mu - r \bar{1}).
\end{aligned} \tag{11}$$

1.2 Fixe und proportionale Transaktionskosten

Die im vorigen Abschnitt erhaltene Strategie zur Maximierung der asymptotischen Rendite besteht darin, die Wertanteile in den Aktien permanent gleich der erhaltenen Konstante $\hat{\eta}$ zu halten. Bezeichnet h_t^i die Anzahl der Einheiten der i -ten Aktie, die zum Zeitpunkt t gehalten werden, so ergibt sich also

$$h_t^i = \hat{\eta} \frac{X_t^{\hat{\eta}}}{S_t^i}, \tag{12}$$

wobei die explizite Gestalt von $X_t^{\hat{\eta}}$ aus (5) ablesbar ist. Hieraus läßt sich leicht ersehen, daß die gewünschte Strategie permanenten kontinuierlichen Handel erfordert. Da in der Praxis für jede Transaktion Kosten anfallen, ist die erhaltene Strategie also nicht einmal approximativ umsetzbar, da die Kosten in einem gegebenen Zeitintervall mit zunehmender Annäherung an kontinuierlichen Handel beliebig groß werden. Transaktionskosten stellen daher im Rahmen des betrachteten Portfoliooptimierungsproblems einen Aspekt der Realität dar, der nicht vernachlässigt werden sollte. In dieser Arbeit betrachten wir einen verhältnismäßig allgemeinen Typ von Transaktionskosten, der sowohl fixe Kosten (d.h. zum aktuellen Portfoliowert proportionale Kosten) als auch proportionale Kosten (d.h. zum Umfang der jeweiligen Transaktion proportionale Kosten) berücksichtigt. In diesem Abschnitt werden wir zunächst die oben beschriebene Transaktionskostenfunktion sowie die zur Beschreibung des Handels und der Portfolioentwicklung benötigten Begriffe einführen. Hauptziel wird es dann sein, das Portfoliooptimierungsproblem wie im Fall ohne Transaktionskosten so zu transformieren, daß anstelle absoluter Größen nur noch die Wertanteile in den einzelnen Aktien betrachtet werden.

Wir gehen von einem Modell aus, in dem kein short selling zugelassen ist. Es wird daher die Menge

$$\mathcal{M} := \{\pi = (\pi^1, \dots, \pi^n)^T \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n \pi^i \leq 1\} \quad (13)$$

später den zulässigen Bereich für die Wertanteile in den Aktien darstellen. Die Transaktionskostenfunktion sei im folgenden gegeben durch

$$c : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \mapsto (0, \infty), \quad (x, \Delta) \mapsto \delta x + \sum_{i=1}^n \gamma_i |\Delta_i|, \quad (14)$$

wobei $\delta \in (0, 1)$, $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in [0, 1 - \delta]$. Dabei bezeichnet δ den Anteil des Portfoliowertes und γ_i den Anteil des Transaktionsvolumens in der i -ten Aktie, der für jede Transaktion bezahlt werden muß.

Aus der Definition von c ergibt sich sofort

$$|c(x, \Delta) - c(x, \Delta')| < \sum_{i=1}^n |\Delta_i - \Delta'_i| \quad (15)$$

für alle $x > 0, \Delta, \Delta' \in \mathbb{R}^n$ mit $\Delta \neq \Delta'$ und

$$c(x, -\pi^1 x, \dots, -\pi^n x) < x \quad (16)$$

für alle $x > 0, \pi \in \mathcal{M}$.

Aus den Wertanteilen aller Aktien läßt sich unmittelbar der Anteil des Wertes der gehaltenen Bonds am Portfoliowert berechnen, da sich die Wertanteile zu 1 aufaddieren müssen. Es erweist sich deshalb die folgende Notation als nützlich: Für jedes $\pi = (\pi^1, \dots, \pi^n)^T \in \mathcal{M}$ sei im folgenden

$$\pi^0 := 1 - \sum_{i=1}^n \pi^i. \quad (17)$$

Wir können nun die wichtigsten Größen zur Formalisierung des Handels und der Portfolioentwicklung in unserem Modell einführen.

1.2.1 Definition

(i) Eine Impulskontrollstrategie $\tilde{K} = (\tau_k, \Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist gegeben durch Stopzeiten $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \infty$ mit $P(\tau_k \rightarrow \infty) = 1$ und durch \mathcal{F}_{τ_k} -meßbare \mathbb{R}^n -wertige Zufallsvariablen $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

(ii) Im folgenden sei ein festes Startvermögen $X_0 = x > 0$ gegeben. Eine Impulskontrollstrategie heißt zulässig, wenn zu jedem Startanteil $\pi_0 = \pi \in \mathcal{M}$ $(0, \infty)$ -wertige Prozesse

- $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ (Wertprozeß),
- $(V_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (neuer Wertprozeß)

und \mathcal{M} -wertige Prozesse

- $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)} = ((\pi_t^1, \dots, \pi_t^n)^T)_{t \in [0, \infty)}$ (Anteilsprozeß),
- $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0} = ((\eta_k^1, \dots, \eta_k^n)^T)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (neuer Anteilsprozeß)

so existieren, daß für alle für $k \in \mathbb{N}_0$ auf $\{\tau_k < \infty\}$ gilt

$$V_k = X_{\tau_k} - c(X_{\tau_k}, \Delta_k), \quad (18)$$

$$\eta_k^i = \frac{\pi_{\tau_k}^i X_{\tau_k} + \Delta_k^i}{V_k}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (19)$$

$$X_t = \sum_{i=0}^n \eta_k^i \frac{S_t^i}{S_{\tau_k}^i} V_k, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad (20)$$

$$\pi_t^i = \frac{\eta_k^i V_k S_t^i}{S_{\tau_k}^i X_t}, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad i \in \{1, \dots, n\}. \quad (21)$$

Im folgenden sei

$$P_\pi := P(\cdot | \pi_0 = \pi) \quad (22)$$

für alle $\pi \in \mathcal{M}$, und wir bezeichnen den bezüglich P_π gebildeten Erwartungswert mit E_π .

Soll deutlich gemacht werden, auf welche Impulskontrollstrategie \tilde{K} sich bestimmte Kenngrößen beziehen, so geschieht dies als Superindex, etwa $X_t^{\tilde{K}}$.

(iii) Zu einer zulässigen Impulskontrollstrategie \tilde{K} ist die asymptotische Rendite bei Startanteil $\pi \in \mathcal{M}$ gegeben durch

$$R^{\tilde{K}}(\pi) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_\pi(\log X_t^{\tilde{K}}). \quad (23)$$

Im Portfoliooptimierungsproblem ohne Transaktionskosten erwies es sich als nützlich, den Wertprozeß allein in Abhängigkeit von der Entwicklung der Wertanteile darzustellen. Unser Ziel ist nun, eine entsprechende Darstellung in der Situation mit Transaktionskosten zu gewinnen. Zunächst zeigen wir, daß eine Impulskontrollstrategie schon eindeutig durch die zugehörigen neuen Wertanteile bestimmt ist und daß umgekehrt jede zulässige Belegung der neuen Wertanteile durch eine geeignete Impulskontrollstrategie erreicht werden kann. Es läßt sich dann rechtfertigen, die Klasse der zulässigen Handelsstrategien nicht mehr über die Transaktionen selbst sondern über die neuen Wertanteile zu beschreiben.

1.2.2 Definition

Eine Neue-Wertanteile-Strategie (kurz NW-Strategie) $(\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist gegeben durch Stopzeiten $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \infty$ mit $P(\tau_k \rightarrow \infty) = 1$, und durch \mathcal{F}_{τ_k} -meßbare \mathcal{M} -wertige Zufallsvariablen η_k .

1.2.3 Lemma

Seien $x > 0$ und $\pi \in \mathcal{M}$.

(i) Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x, \pi) := \{ \Delta \in \mathbb{R}^n : \pi^i x + \Delta^i \geq 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}, \\ \pi^0 x - c(x, \Delta) - \sum_{i=1}^n \Delta^i \geq 0 \}. \end{aligned} \quad (24)$$

Dann ist $\mathcal{D}(x, \pi) \neq \emptyset$, und für alle $\Delta \in \mathcal{D}(x, \pi)$ gilt $x - c(x, \Delta) > 0$.

Eine Impulskontrollstrategie $(\tau_k, \Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist genau dann zulässig, wenn für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\Delta_k \in \mathcal{D}(X_{\tau_k}, \pi_{\tau_k})$.

(ii) Es sei

$$f_{x, \pi} : \mathcal{D}(x, \pi) \mapsto \mathcal{M}, \quad \Delta \mapsto \left(\frac{\pi^1 x + \Delta^1}{x - c(x, \Delta)}, \dots, \frac{\pi^n x + \Delta^n}{x - c(x, \Delta)} \right)^T. \quad (25)$$

Dann gilt $\eta_k^{\tilde{K}} = f_{X_{\tau_k}^{\tilde{K}}, \pi_{\tau_k}^{\tilde{K}}}(\Delta_k)$ für jede zulässige Impulskontrollstrategie \tilde{K} und jedes $k \in \mathbb{N}_0$, und die Abbildung $f_{x, \pi}$ ist eine Bijektion.

Beweis:

(i) Man beachte zunächst, daß für alle $\Delta \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$x - c(x, \Delta) = \sum_{i=1}^n (\pi^i x + \Delta^i) + (\pi^0 x - c(x, \Delta) - \sum_{i=1}^n \Delta^i). \quad (26)$$

Sei $\bar{\Delta} := (-\pi^1 x, \dots, -\pi^n x)^T$. Gemäß (16) gilt $x - c(x, \bar{\Delta}) > 0$ und somit folgt aus (26) sofort $\bar{\Delta} \in \mathcal{D}(x, \pi)$, also $\mathcal{D}(x, \pi) \neq \emptyset$.

Sei nun $\Delta \in \mathcal{D}(x, \pi)$. Dann zeigt (26) zunächst $x - c(x, \Delta) \geq 0$. Wären alle $n+1$ Summanden auf der rechten Seite 0, so folgte $\Delta = \bar{\Delta}$ und somit der Widerspruch $x - c(x, \bar{\Delta}) = 0$, also gilt $x - c(x, \Delta) > 0$.

Die letzte Aussage folgt nun sofort aus (18) und (19).

(ii) Die erste Aussage folgt wiederum sofort aus (18) und (19). Im folgenden seien f_1, \dots, f_n die Koordinatenfunktionen von $f_{x, \pi}$.

Wir zeigen zunächst, daß $f_{x, \pi}$ injektiv ist.

Angenommen, es existierten $\Delta, \tilde{\Delta} \in \mathcal{D}(x, \pi)$ mit $f_{x, \pi}(\Delta) = f_{x, \pi}(\tilde{\Delta})$ und $\Delta \neq \tilde{\Delta}$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß ein i mit $\Delta^i > \tilde{\Delta}^i$ existiert.

1. Fall: Es existiert ein j mit $\Delta^j < \tilde{\Delta}^j$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} f_i(\Delta) f_j(\tilde{\Delta}) &= \frac{(\pi^i x + \Delta^i)(\pi^j x + \tilde{\Delta}^j)}{(x - c(x, \Delta))(x - c(x, \tilde{\Delta}))} \\ &> \frac{(\pi^i x + \tilde{\Delta}^i)(\pi^j x + \Delta^j)}{(x - c(x, \Delta))(x - c(x, \tilde{\Delta}))} \\ &= f_i(\tilde{\Delta}) f_j(\Delta), \end{aligned} \quad (27)$$

ein Widerspruch.

2. Fall: Es gilt $\Delta^j \geq \tilde{\Delta}^j$ für alle j .

Dann gilt unter Beachtung von (15)

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^n f_j(\Delta) \right) \left(1 - \sum_{j=1}^n f_j(\tilde{\Delta}) \right) &= \frac{(\sum_{j=1}^n (\pi^j x + \Delta^j)) (\pi^0 x - c(x, \tilde{\Delta}) - \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta}^j)}{(x - c(x, \Delta))(x - c(x, \tilde{\Delta}))} \\ &> \frac{(\sum_{j=1}^n (\pi^j x + \tilde{\Delta}^j)) (\pi^0 x - c(x, \Delta) - \sum_{j=1}^n \Delta^j)}{(x - c(x, \Delta))(x - c(x, \tilde{\Delta}))} \\ &= \left(\sum_{j=1}^n f_j(\tilde{\Delta}) \right) \left(1 - \sum_{j=1}^n f_j(\Delta) \right), \end{aligned} \quad (28)$$

ein Widerspruch.

Also ist $f_{x, \pi}$ injektiv.

Wir zeigen nun, daß $f_{x,\pi}$ surjektiv ist.

Sei $b = (b^1, \dots, b^n)^T \in \mathcal{M}$. Es ist $f_{x,\pi}(\bar{\Delta}) = 0$, wir können also $b \neq 0$ und damit ohne Einschränkung $b_1 > 0$ annehmen.

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$\beta : [-\pi^1 x, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n, \quad y \mapsto (y, \frac{b^2}{b^1}(y + \pi^1 x) - \pi^2 x, \dots, \frac{b^n}{b^1}(y + \pi^1 x) - \pi^n x)^T, \quad (29)$$

und es seien β_1, \dots, β_n die Koordinatenfunktionen von β . Des weiteren sei

$$h : [-\pi^1 x, \infty) \mapsto \mathbb{R}, \quad y \mapsto \pi^0 x - c(x, \beta(y)) - \sum_{i=1}^n \beta_i(y). \quad (30)$$

h ist stetig, streng monoton fallend (wg. (15)) und unter Beachtung von (16) gilt

$$h(-\pi^1 x) > 0, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = -\infty. \quad (31)$$

Also existiert gemäß Zwischenwertsatz genau ein $m \in (-\pi^1 x, \infty)$ mit $h(m) = 0$, und insgesamt ergibt sich

$$\{y : h(y) \geq 0\} = [-\pi^1 x, m]. \quad (32)$$

Da alle Funktionen β_i streng monoton steigend sind, folgt nun direkt aus (24), daß

$$\{y : \beta(y) \in \mathcal{D}(x, \pi)\} = [-\pi^1 x, m] \quad (33)$$

gilt. Wegen

$$\sum_{i=1}^n f_i(\beta(-\pi^1 x)) = 0, \quad \sum_{i=1}^n f_i(\beta(m)) = 1 \quad (34)$$

existiert (wiederum gemäß Zwischenwertsatz) ein $y^* \in [-\pi^1 x, m]$ mit

$$\sum_{i=1}^n f_i(\beta(y^*)) = \sum_{i=1}^n b^i. \quad (35)$$

Dann ist $\Delta^* := \beta(y^*) \in \mathcal{D}(x, \pi)$, und es gilt

$$f_i(\Delta^*) = \frac{b^i}{b^1} f_1(\Delta^*) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, n\}, \quad (36)$$

$$\sum_{i=1}^n f_i(\Delta^*) = \sum_{i=1}^n b^i. \quad (37)$$

Hieraus folgt sofort $f_i(\Delta^*) = b^i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, also $f_{x,\pi}(\Delta^*) = b$ und somit die Behauptung.

1.2.4 Folgerung

Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \{\tilde{K} : \tilde{K} \text{ zulässige Impulskontrollstrategie}\} &\mapsto \{K : K \text{ NW-Strategie}\}, \\ \tilde{K} &\mapsto ((\tau_k^{\tilde{K}})_{k \in \mathbb{N}_0}, (\eta_k^{\tilde{K}})_{k \in \mathbb{N}_0}) \end{aligned} \quad (38)$$

ist eine Bijektion.

Beweis:

Sei $K = (\tau_k^K, \eta_k^K)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine NW-Strategie. Wir definieren

$$\Delta_0^K := f_{X_0, \pi_0}^{-1}(\eta_0^K) \quad (39)$$

und induktiv

$$\Delta_k^K := f_{X_{\tau_k^K}, \pi_{\tau_k^K}}^{-1}(\eta_k^K), \quad (40)$$

wobei $X_{\tau_k^K}, \pi_{\tau_k^K}$ wie in (18)-(21) definiert seien und somit bereits durch $\Delta_0^K, \dots, \Delta_{k-1}^K$ eindeutig festgelegt sind. Gemäß Lemma 1.2.3 (i),(ii) ist die Impulskontrollstrategie

$$\beta(K) := (\tau_k^K, \Delta_k^K)_{k \in \mathbb{N}_0} \quad (41)$$

zulässig, und aus Lemma 1.2.3 (ii) folgt, daß die hierdurch definierte Funktion β Umkehrabbildung zu f ist.

Aus der obigen Folgerung ergibt sich sofort, daß ebenso eine Bijektion zwischen solchen Impulskontrollstrategien mit Wertanteilen in bestimmten Teilmengen von \mathcal{M} und entsprechenden NW-Strategien besteht, für uns werden dabei später die Fälle $\text{int}(\mathcal{M})$ und

$$\mathcal{M}' = \{\pi \in \mathcal{M} : \pi^i > 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, n\}\} \quad (42)$$

von Bedeutung sein.

1.2.5 Bemerkung

Sei f die Bijektion aus Folgerung 1.2.4 und $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$. Es seien

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_2 &:= \{\tilde{K} \text{ zul. Impulskontrollstrategie} : \eta_k^{\tilde{K}} \in \mathcal{N} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}, \\ \mathcal{S}_2 &:= \{K \text{ NW-Strategie} : \eta_k^K \in \mathcal{N} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned} \quad (43)$$

Dann ist $f|_{\tilde{\mathcal{S}}_2}$ eine Bijektion zwischen $\tilde{\mathcal{S}}_2$ und \mathcal{S}_2 .

Folgerung 1.2.4 rechtfertigt, daß wir im folgenden NW-Strategien zur Beschreibung von Handelsstrategien heranziehen werden. Zunächst drücken wir nun die

Wertentwicklung eines Portfolios in Abhängigkeit von der Entwicklung der Wertanteile aus.

Im folgenden sei für $t \in [0, \infty)$

$$M_t := \sup\{k \in \mathbb{N}_0 : \tau_k < t\}. \quad (44)$$

1.2.6 Satz

Sei $(\tau_k, \Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine zulässige Impulskontrollstrategie mit $\eta_k^i > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$A_k^i := \text{sign}(\Delta_k^i) = \text{sign}\left(\eta_k^i \left(1 - \delta - \sum_{j=1}^n \gamma_j \left| \frac{\eta_k^j}{\eta_k^i} \pi_{\tau_k}^i - \pi_{\tau_k}^j \right| \right) - \pi_{\tau_k}^i\right). \quad (45)$$

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$V_k = \frac{1 - \delta + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i \pi_{\tau_k}^i}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i \eta_k^i} X_{\tau_k}. \quad (46)$$

(iii) Gilt $\eta_k \in \text{int}(\mathcal{M})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ (und somit auch $\pi_t \in \text{int}(\mathcal{M})$ für alle $t \in (0, \infty)$), so ist für alle $t \in (0, \infty)$

$$X_t = X_0 e^{rt} \frac{\eta_{M_t}^0}{\pi_t^0} \frac{1 - \delta + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_0^i \pi_0^i}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_0^i \eta_0^i} \prod_{k=1}^{M_t} \frac{\eta_{k-1}^0}{\pi_{\tau_k}^0} \frac{1 - \delta + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i \pi_{\tau_k}^i}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i \eta_k^i}. \quad (47)$$

Beweis:

(i) Seien $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Aus (18), (19) und (14) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta_k^i &= \eta_k^i (X_{\tau_k} (1 - \delta) - \sum_{j=1}^n \gamma_j |\Delta_k^j|) - \pi_{\tau_k}^i X_{\tau_k} \\ &= \eta_k^i (X_{\tau_k} (1 - \delta) - \sum_{j=1}^n \gamma_j \left| \frac{\eta_k^j}{\eta_k^i} (\pi_{\tau_k}^i X_{\tau_k} + \Delta_k^i) - \pi_{\tau_k}^j X_{\tau_k} \right|) - \pi_{\tau_k}^i X_{\tau_k}. \end{aligned} \quad (48)$$

Definiere nun allgemein für $x > 0, \eta, \pi \in \mathcal{M}$ mit $\eta^i > 0$

$$\begin{aligned} g_{x,\pi,\eta} : \quad \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R}, \\ z &\mapsto \eta^i (x(1 - \delta) - \sum_{j=1}^n \gamma_j \left| \frac{\eta^j}{\eta^i} (\pi^i x + z) - \pi^j x \right|) - \pi^i x. \end{aligned} \quad (49)$$

Wie man sofort nachrechnet, gilt $g_{x,\pi,\eta}(-\pi^i x) > -\pi^i x$, des weiteren ist $g_{x,\pi,\eta}$ stetig, konkav und für die rechtsseitige Ableitung gilt

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g'_{x,\pi,\eta}(z) < 0. \quad (50)$$

Es folgt, daß $g_{x,\pi,\eta}$ auf $(-\pi^i x, \infty)$ genau einen Fixpunkt z^* besitzt und daß gilt

$$\begin{aligned} \text{sign}(z^*) &= \text{sign}(g_{x,\pi,\eta}(0)) \\ &= \text{sign}(\eta^i(1 - \delta - \sum_{j=1}^n \gamma_j |\frac{\eta^j}{\eta^i} \pi^i - \pi^j|) - \pi^i). \end{aligned} \quad (51)$$

Wegen $\Delta_k^i = g_{X_{\tau_k}, \pi_{\tau_k}, \eta_k}(\Delta_k^i)$ folgt die Behauptung.

(ii) Aus (18), (19) und (14) ergibt sich

$$V_k = (1 - \delta)X_{\tau_k} - \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i (\eta_k^i V_k - \pi_{\tau_k}^i X_{\tau_k}), \quad (52)$$

auffösen nach V_k liefert (46).

(iii) (20) und (21) liefern für alle $k \in \mathbb{N}$ und $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$

$$X_t = (\eta_{k-1}^0 e^{r(t-\tau_{k-1})} + \sum_{i=1}^n \frac{\pi_t^i X_t}{V_{k-1}}) V_{k-1} \quad (53)$$

und somit

$$X_t = \frac{\eta_{k-1}^0}{\pi_t^0} e^{r(t-\tau_{k-1})} V_{k-1}. \quad (54)$$

Durch Einsetzen in (46) und Induktion ergibt sich

$$V_{M_t} = V_0 e^{r\tau_{M_t}} \prod_{k=1}^{M_t} \left(\frac{\eta_{k-1}^0}{\pi_{\tau_k}^0} \frac{1 - \delta + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i \pi_{\tau_k}^i}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i \eta_k^i} \right). \quad (55)$$

Die Behauptung folgt nun aus (46) und (54).

Wie bereits oben angekündigt, werden wir den Handel im folgenden nicht mehr durch Impulskontrollstrategien sondern durch NW-Strategien beschreiben. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

1.2.7 Definition

(i) Sei f die Bijektion aus Folgerung 1.2.4. Zu einer NW-Strategie K werden der Wertanteilsprozeß $(\pi_t^K)_{t \in [0, \infty)}$, der Wertprozeß $(X_t^K)_{t \in [0, \infty)}$ und die asymptotische Rendite R^K (bzw. $R^K(x)$) definiert durch die entsprechenden Größen zu der zugehörigen Impulskontrollstrategie $\tilde{K} = f^{-1}(K)$.

(ii) Die Art des Handels wird für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $\pi, \eta \in \mathcal{M}$ mit $\eta^i > 0$ definiert durch

$$A^i(\pi, \eta) := \text{sign}(\eta^i(1 - \delta - \sum_{j=1}^n \gamma_j |\frac{\eta^j}{\eta^i} \pi^i - \pi^j|) - \pi^i). \quad (56)$$

Zu einer gegebenen NW-Strategie K mit $\eta_k^i > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ setzen wir

$$(A_k^i)^K := A^i(\pi_{\tau_k}^K, \eta_k^K) \quad (57)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \{1, \dots, n\}$; gemäß Bemerkung 1.2.5 und Satz 1.2.6 (i) gilt also

$$(A_k^i)^K = \text{sign}((\Delta_k^i)^{f^{-1}(K)}), \quad (58)$$

wobei f wiederum die Bijektion aus Folgerung 1.2.4 ist.

(iii) Für alle $\pi, \eta \in \text{int}(\mathcal{M})$ sei

$$g(\pi, \eta) = \log\left(\frac{\eta^0}{\pi^0}\right) + \log\left(\frac{1 - \delta + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i(\pi, \eta) \pi^i}{1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i A_k^i(\pi, \eta) \eta^i}\right). \quad (59)$$

Für den Rest dieses Abschnitts sei eine NW-Strategie mit $\eta_k \in \text{int}(\mathcal{M})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Unter Benutzung von Satz 1.2.6 können wir die asymptotische Rendite einer solchen Strategie auf recht einfache Weise mit der oben eingeführten Funktion g beschreiben.

1.2.8 Bemerkung

Aus Satz 1.2.6 (iii) ergibt sich durch Logarithmieren und Indexverschiebung sofort

$$\log X_t = \log X_0 + rt + \log\left(\frac{\pi_0^0}{\pi_t^0}\right) + \sum_{k=0}^{M_t} g(\pi_{\tau_k}, \eta_k). \quad (60)$$

Gilt $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E(\log \pi_t^0) = 0$, so folgt also

$$R^K = r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E\left(\sum_{k=0}^{M_t} g(\pi_{\tau_k}, \eta_k)\right). \quad (61)$$

Die Darstellung (61) wird der wesentliche Ausgangspunkt unserer Überlegungen in Abschnitt 1.3 sein. Wir brauchen außerdem noch einige technische Resultate über die Entwicklung des Wertanteilsprozesses zwischen zwei Handelszeitpunkten.

Hierzu erweist es sich als nützlich, den Wertprozeß ohne Handel $(\bar{X}_t)_{t \in [0, \infty)}$ und den Anteilsprozeß ohne Handel $(\bar{\pi}_t)_{t \in [0, \infty)}$ einzuführen, welche definiert sind durch

$$\bar{X}_t := \sum_{i=0}^n \eta_0^i V_0 S_t^i, \quad \bar{\pi}_t^i := \frac{\eta_0^i V_0 S_t^i}{\bar{X}_t}. \quad (62)$$

für alle $t \in [0, \infty)$ und $i \in \{1, \dots, n\}$.

1.2.9 Satz

Der Prozeß $(\bar{\pi}_t)_{t \in [0, \infty)}$ genügt den stochastischen Differentialgleichungen

$$d\bar{\pi}_t^i = (\bar{\pi}_t^i((e_i - \bar{\pi}_t)^T(\mu - r\bar{1} - \sigma\sigma^T\bar{\pi}_t)))dt + (\bar{\pi}_t^i(e_i - \bar{\pi}_t)^T\sigma)dW_t \quad (63)$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, wobei e_i den i -ten Einheitsvektor bezeichne.

Der infinitesimale Generator \mathcal{L} von $(\bar{\pi}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ist folglich gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u(x) &= \sum_{i=1}^n x_i(e_i - x)^T(\mu - r\bar{1} - \sigma\sigma^T x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j (e_i - x)^T \sigma \sigma^T (e_j - x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \end{aligned} \quad (64)$$

für alle $u \in C^2(\text{int}(\mathcal{M}))$.

Beweis:

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Für $l \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$g_l := \eta_0^l V_0. \quad (65)$$

Dann gilt für alle $t \in [0, \infty)$

$$g_l S_t^l = \bar{\pi}_t^l \bar{X}_t. \quad (66)$$

Es folgt

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t &= \sum_{l=0}^n g_l dS_t^l \\ &= (r\bar{\pi}_t^0 + \sum_{l=1}^n \mu_l \bar{\pi}_t^l) \bar{X}_t dt + \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{\pi}_t^l \bar{X}_t \sigma_{lj} dW_t^j, \end{aligned} \quad (67)$$

$$d[\bar{X}]_t = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{l=1}^n \bar{\pi}_t^l \bar{X}_t \sigma_{lj} \right)^2 dt, \quad (68)$$

$$d[S^i, \bar{X}]_t = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{\pi}_t^l \bar{X}_t \sigma_{lj} \sigma_{ij} S_t^i dt. \quad (69)$$

Die Ito-Formel liefert nun

$$\begin{aligned}
d\bar{\pi}_t^i &= d\frac{g_i S_t^i}{\bar{X}_t} \\
&= \frac{g_i}{\bar{X}_t} dS_t^i - \frac{g_i S_t^i}{\bar{X}_t^2} d\bar{X}_t - \frac{g_i}{\bar{X}_t^2} d[S^i, \bar{X}]_t + \frac{g_i S_t^i}{\bar{X}_t^3} d[\bar{X}]_t \\
&= \bar{\pi}_t^i \mu_i dt + \sum_{j=1}^n \bar{\pi}_t^i \sigma_{ij} dW_t^j \\
&\quad - \bar{\pi}_t^i (r\bar{\pi}_t^0 + \sum_{l=1}^n \mu_l \bar{\pi}_t^l) dt - \bar{\pi}_t^i (\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{\pi}_t^l \sigma_{lj}) dW_t^j \\
&\quad - \bar{\pi}_t^i (\sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{\pi}_t^l \sigma_{lj} \sigma_{ij}) dt + \bar{\pi}_t^i (\sum_{j=1}^n (\sum_{l=1}^n \bar{\pi}_t^l \sigma_{lj})^2) dt \\
&= (\bar{\pi}_t^i ((e_i - \bar{\pi}_t)^T (\mu - r\bar{1} - \sigma \sigma^T \bar{\pi}_t))) dt + (\bar{\pi}_t^i (e_i - \bar{\pi}_t)^T \sigma) dW_t. \quad (70)
\end{aligned}$$

Eine in Abschnitt 1.3 entscheidend benötigte Eigenschaft des Anteilsprozesses ist, daß der infinitesimale Generator des zugehörigen Prozesses ohne Handel gleichmäßig elliptisch auf (in \mathbb{R}^n) abgeschlossenen Teilmengen von $int(\mathcal{M})$ ist. Dies wird im folgenden Satz nachgewiesen.

1.2.10 Satz

Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\begin{aligned}
\Sigma(x) &:= (x_i x_j (e_i - x)^T \sigma \sigma^T (e_j - x))_{i,j \in \{1, \dots, n\}} \\
&= \text{Diag}(x) (E_n - \bar{1} x^T) \sigma \sigma^T (E_n - \bar{1} x^T)^T \text{Diag}(x), \quad (71)
\end{aligned}$$

wobei E_n die n -dimensionale Einheitsmatrix und $\text{Diag}(x)$ die Matrix mit den Einträgen von x auf der Diagonalen und 0 außerhalb der Diagonalen bezeichne. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\bar{A} \subseteq int(\mathcal{M})$. Dann existieren λ, Λ mit $0 < \lambda < \Lambda$ so, daß für alle $x \in A$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lambda v^T v \leq v^T \Sigma(x) v \leq \Lambda v^T v. \quad (72)$$

Beweis:

Sei $x \in int(\mathcal{M})$. Offensichtlich sind $\text{Diag}(x)$ und σ invertierbar. Durch elementare Zeilenumformungen (Subtraktion der 1. Zeile von der i -ten Zeile für $i = 2, \dots, n$) läßt sich $(E_n - \bar{1} x^T)$ in die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 - x_1 & -x_2 & -x_3 & \dots & -x_n \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

transformieren, was die Invertierbarkeit von $(E_n - \bar{1}x^T)$ zeigt. Somit ist $\Sigma(x)$ positiv definit. Wir setzen nun für alle $x \in \bar{A}$

$$g_1(x) := \inf_{v^T v=1} v^T \Sigma(x) v, \quad g_2(x) := \sup_{v^T v=1} v^T \Sigma(x) v. \quad (74)$$

Für jedes $x \in \bar{A}$ ist die Abbildung $v \mapsto v^T \Sigma(x) v$ stetig, also gilt

$$0 < g_1(x) \leq g_2(x) < \infty. \quad (75)$$

Nun folgt (da g_1 und g_2 auch stetig sind)

$$0 < \inf_{x \in \bar{A}} g_1(x) \leq \sup_{x \in \bar{A}} g_2(x) < \infty, \quad (76)$$

also leisten

$$\lambda := \inf_{x \in \bar{A}} g_1(x), \quad \Lambda := \sup_{x \in \bar{A}} g_2(x) \quad (77)$$

das Gewünschte.

1.3 Konstante-Grenzen-Strategien

Der wesentliche Nutzen der Betrachtung von Wertanteilen statt absoluten Größen bestand im Portfoliooptimierungsproblem ohne Transaktionskosten darin, daß sich das optimale Verhalten des Investors im Zeitablauf nicht mehr änderte. Die im vorigen Abschnitt gewonnene Darstellung (61) für die asymptotische Rendite einer NW-Strategie legt nahe, daß auch im Problem mit Transaktionskosten eine gewisse Art von Stationarität vorliegt.

Es erscheint daher das folgende Vorgehen eines Investors sinnvoll. Zu Beginn des betrachteten Zeitraums wählt er eine ihm günstig erscheinende Zusammenstellung der Wertanteile, welche sich dann durch die zufälligen Kursschwankungen der Aktien ändert und somit ungünstiger werden kann. Um Transaktionskosten zu vermeiden, akzeptiert der Investor diese Entwicklung bis zu einem gewissen Ausmaß. Sobald der Wertanteilsprozeß jedoch ein bestimmtes vorher festgelegtes Gebiet A verläßt, sieht er sich gezwungen zu intervenieren und die Wertanteile neu festzulegen, und zwar auf einen Punkt innerhalb des als günstig erachteten Gebiets A . Da die Transaktionskosten auch eine proportionale Komponente enthalten, wird die Wahl dieses neuen Wertanteils davon abhängen, auf welchem Randpunkt das Gebiet A verlassen wurde. Da das zukünftige Verhalten des Wertanteilsprozesses jedoch nicht von der insgesamt oder seit der letzten Transaktion vergangenen Zeit abhängt, werden diese Größen keinen Einfluß auf die Wahl des Investors haben; wir können jene daher als Funktion ϕ mit Definitionsbereich ∂A darstellen. Nun wartet der Investor erneut, bis der Wertanteilsprozeß

das Gebiet A verläßt, und wählt wiederum neue Wertanteile, die durch die Funktion ϕ bestimmt werden. Dieses Verhalten setzt er nun immer weiter fort.

Die in diesem Abschnitt erfolgende Untersuchung einer solchen Klasse von Strategien wird zusätzlich dadurch motiviert, daß die optimale Lösung für das von uns betrachtete Problem im Spezialfall $n = 1$ tatsächlich eine Strategie der beschriebenen Form ist, wie in der Arbeit von Irle und Sass(2006) gezeigt wird.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist, die asymptotische Rendite einer Strategie der oben beschriebenen Form durch die Konstruktion eines Regenerationsschemas auf das Verhalten der Wertanteile in einer „typischen“ Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten zurückzuführen.

Zunächst geben wir eine formale Definition der untersuchten Klasse von Strategien an.

1.3.1 Definition

Eine NW-Strategie $(\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heiße Konstante-Grenzen-Strategie (kurz KG-Strategie), wenn eine offene, zusammenhängende Menge A mit $\bar{A} \subseteq \text{int}(\mathcal{M})$, eine abgeschlossene Menge $B \subseteq A$ und eine meßbare Funktion $\phi : \mathcal{M} \mapsto B$ existieren mit

$$\eta_k = \phi(\pi_{\tau_k}), \quad \tau_{k+1} = \inf\{t \geq \tau_k \mid \pi_t \notin A\} \quad (78)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Wir bezeichnen eine KG-Strategie mit (A, B, ϕ) .

Des weiteren sei im folgenden

$$h : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x, \phi(x)). \quad (79)$$

Für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ sei im folgenden

$$P_\mu := \int P_x(\cdot) \mu(dx), \quad (80)$$

und wir bezeichnen den zugehörigen Erwartungswert mit E_μ .

Für jede KG-Strategie $K = (A, B, \phi)$ gilt gemäß (61) also

$$R^K(x) = r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_x \left(\sum_{k=0}^{M_t} h(\pi_{\tau_k}) \right). \quad (81)$$

Im folgenden sei eine KG-Strategie (A, B, ϕ) gegeben. Aus der starken Markov-eigenschaft des Preisprozesses der Finanzgüter folgt, daß $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ (bzgl. jedes Maßes P_x) eine zeit-homogene Markovkette mit Zustandsraum $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ ist, wobei hier und im folgenden $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ die Borelsche σ -Algebra auf einem topologischen Raum \mathcal{T} bezeichne. Es sei Q der Übergangskern zu $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$. Man beachte, daß für alle $k \geq 1$ sogar $\pi_{\tau_k} \in \partial A$ gilt, d.h. ∂A ist Zustandsraum der Markovkette $(\pi_{\tau_k})_{k \geq 1}$.

Der folgende Satz liefert die für die von uns beabsichtigte Konstruktion eines Regenerationsschemas entscheidende technische Eigenschaft von Q (bzw. von $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$). Der Beweis ist an den Beweis von Theorem 7.4.3 in Pinsky(1995) angelehnt.

1.3.2 Satz

Q ist ein streng aperiodischer Harris-Kern mit Regenerationsmenge \mathcal{M} , d.h. es existieren ein Wahrscheinlichkeitsmaß Ψ auf $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$ und ein $\alpha \in (0, 1)$ mit

$$Q(x, C) \geq \alpha \Psi(C) \quad (82)$$

für alle $x \in \mathcal{M}$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$.

Beweis:

Sei D offen mit C^2 -Rand, $\overline{B} \subseteq D$ und $\overline{D} \subseteq A$. Wir setzen

$$\tau_D := \inf\{t > 0 : \pi_t \notin D\}. \quad (83)$$

Nach Pinsky(1995, Theorem 3.6.5) existiert zu jedem $r \in C^2(\overline{D})$ ein $u_r \in C^2(\overline{D})$ mit

$$\mathcal{L}u_r = 0 \text{ auf } D, \quad u_r|_{\partial D} = r|_{\partial D}, \quad (84)$$

wobei \mathcal{L} der infinitesimale Generator des Anteilsprozesses ohne Handel gemäß (64) sei.

Da die Prozesse $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)}$ und $(\overline{\pi}_t)_{t \in [0, \infty)}$ auf $(0, \tau_1]$ und somit auch auf $(0, \tau_D]$ übereinstimmen, liefert die Feynman-Kac-Formel nun für alle $x \in \mathcal{M}$ (unter Beachtung von $P_x(\pi_0 = \phi(x)) = 1$)

$$E_x r(\pi_{\tau_D}) = E_x u_r(\pi_{\tau_D}) = u_r(\phi(x)). \quad (85)$$

Satz 1.2.10 zeigt, daß für \mathcal{L} die Harnack-Ungleichung (siehe Pinsky(1995, Theorem 4.0.1) gilt, d.h. es existiert ein $\alpha > 0$ so, daß für alle $r \in C^2(\overline{D})$ und alle $x, y \in \mathcal{M}$ gilt

$$\frac{E_y r(\pi_{\tau_D})}{E_x r(\pi_{\tau_D})} = \frac{u_r(\phi(x))}{u_r(\phi(y))} \geq \alpha. \quad (86)$$

Wir zeigen nun, daß für alle $x, y \in \mathcal{M}$ die Verteilungen $P_x^{\pi_{\tau_D}}$ und $P_y^{\pi_{\tau_D}}$ äquivalent sind mit

$$\frac{dP_y^{\pi_{\tau_D}}}{dP_x^{\pi_{\tau_D}}} \geq \alpha. \quad (87)$$

Angenommen, es existierte ein $A \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ mit

$$\frac{P_y^{\pi_{\tau_D}}(A)}{P_x^{\pi_{\tau_D}}(A)} < \alpha. \quad (88)$$

Wir können ohne Einschränkung $A \subseteq \overline{D}$ annehmen, da $P_x^{\pi_{\tau_D}}, P_y^{\pi_{\tau_D}}$ auf \overline{D} konzentriert sind. Da \overline{D} (mit einer beliebigen Norm versehen) polnischer Raum ist, existieren eine kompakte Menge $A' \subseteq A$ und eine offene Menge $A'' \supseteq A$ mit

$$\frac{P_y^{\pi_{\tau_D}}(A'')}{P_x^{\pi_{\tau_D}}(A')} < \alpha, \quad (89)$$

siehe z.B. Bauer(1990, Lemma 26.2). Sei nun r eine C^∞ -Zerlegung der Eins, d.h. es gelte $r \in C^\infty(\overline{D})$ mit $r|_{A'} \equiv 1$, $r|_{(A')^c} \equiv 0$ und $r(x) \in [0, 1]$ für alle $x \in \overline{D}$. Für dieses r gilt

$$\frac{E_y r(\pi_{\tau_D})}{E_x r(\pi_{\tau_D})} \leq \frac{P_y^{\pi_{\tau_D}}(A'')}{P_x^{\pi_{\tau_D}}(A')} < \alpha, \quad (90)$$

was den gewünschten Widerspruch liefert. Somit ist (87) nachgewiesen.

Wir fixieren nun ein (beliebiges) $x^* \in \mathcal{M}$ und setzen $\Psi := Q(x^*, \cdot)$. Dann folgt für alle $y \in \mathcal{M}$ und alle $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ mit der starken Markoveigenschaft von $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)}$

$$\begin{aligned} Q(y, C) &= P_y^{\pi_{\tau_1}}(C) \\ &= \int_{\partial D} P_y(\pi_{\tau_1} \in C | \pi_{\tau_D} = z) P_y^{\pi_{\tau_D}}(dz) \\ &\geq \alpha \int_{\partial D} P_y(\pi_{\tau_1} \in C | \pi_{\tau_D} = z) P_{x^*}^{\pi_{\tau_D}}(dz) \\ &= \alpha P_{x^*}^{\pi_{\tau_1}}(C) \\ &= \alpha \Psi(C). \end{aligned} \quad (91)$$

Die oben nachgewiesene Harris-Kern-Eigenschaft von Q könnte nun direkt zur Konstruktion eines Regenerationsschemas für den Prozeß $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ herangezogen werden. Da für die asymptotische Rendite jedoch zusätzlich die Zeitspannen $\tau_k - \tau_{k-1}$ zwischen zwei Handelszeitpunkten relevant sind, interessieren wir uns für den Prozeß $(\pi_{\tau_k}, \tau_k - \tau_{k-1})_{k \in \mathbb{N}_0}$. Zu dessen Untersuchung führen wir zunächst einige Bezeichnungen ein.

Im folgenden seien α und Ψ wie in Satz 1.3.2 gewählt. Sei $S := \mathcal{M} \times [0, \infty) \times \{0, 1\}$ und $\mathcal{S} := \mathcal{B}(S)$. Für $\eta \in \{0, 1\}$ sei

$$p_\eta := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \eta = 0, \\ 1 - \alpha, & \text{falls } \eta = 1. \end{cases} \quad (92)$$

Des weiteren sei für alle $x \in \mathcal{M}$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$

$$\hat{Q}(x, C) := \frac{Q(x, C) - \alpha \Psi(C)}{1 - \alpha}. \quad (93)$$

Wir definieren einen Übergangskern Q^* auf (S, \mathcal{S}) durch

$$Q^*((x, t, 0), C \times D \times \{\eta\}) = p_\eta \Psi(C) \int P_x(\tau_1 \in D | \pi_{\tau_1} = y) \Psi(dy|C), \quad (94)$$

$$Q^*((x, t, 1), C \times D \times \{\eta\}) = p_\eta \hat{Q}(x, C) \int P_x(\tau_1 \in D | \pi_{\tau_1} = y) \hat{Q}(x, dy|C), \quad (95)$$

wobei die angegebenen Integrale 0 seien, wenn die verwendeten elementaren bedingten Wahrscheinlichkeitsmaße nicht existieren.

Sei $(\Omega', \mathcal{A}', (\tilde{P}_{(x,t,\eta)})_{(x,t,\eta) \in S}, (Z_k, t_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0})$ kanonisches Modell zu Q^* . Wir setzen

$$\tilde{P}_x := \alpha \tilde{P}_{(x,0,0)} + (1 - \alpha) \tilde{P}_{(x,0,1)} \quad (96)$$

und

$$\tilde{P}_\mu := \int \tilde{P}_x(\cdot) \mu(dx) \quad (97)$$

für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$.

Wir schreiben im folgenden oft kurz \tilde{P} für $\tilde{P}_{(x,t,\eta)}$, wenn die jeweilige Aussage für alle $\tilde{P}_{(x,t,\eta)}$ gilt.

Des weiteren seien $\mathcal{A}_k := \sigma((Z_j, t_j)_{0 \leq j \leq k})$ und $\mathcal{C}_k := \sigma((Z_j, t_j, \eta_j)_{0 \leq j \leq k})$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Schließlich definieren wir Zufallsgrößen $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$T_0 := 0, \quad T_j := \inf\{k > T_{j-1} : \eta_{k-1} = 0\}. \quad (98)$$

Das folgende Lemma zeigt, wie die Harris-Eigenschaft der Markov-Kette $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ benutzt werden kann, um ein „um eine Periode verzögertes“ Regenerationsschema für die Markov-Kette $(\pi_{\tau_k}, \tau_k - \tau_{k-1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ zu konstruieren.

Insbesondere zeigt Teil (iv), daß das zukünftige Verhalten des (mit $(\pi_{\tau_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ verteilungsgleichen) Prozesses $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ab einem der Zeitpunkte T_j ($j \in \mathbb{N}$) weder von j noch vom Verhalten des Prozesses bis zu diesem Zeitpunkt abhängt. Die Zeitpunkte $(T_j)_{j \in \mathbb{N}}$ werden daher auch als Regenerationszeiten von $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet.

Im folgenden gelte stets die Konvention $\tau_{-1} = 0$.

1.3.3 Lemma

(i) Für alle $x \in \mathcal{M}$ und alle $C \in \mathcal{B}((\mathcal{M} \times [0, \infty))^{\mathbb{N}_0})$ gilt

$$P_x((\pi_{\tau_k}, \tau_k - \tau_{k-1})_{k \in \mathbb{N}_0} \in C) = \tilde{P}_x((Z_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in C). \quad (99)$$

(ii) Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist $T_j - 1$ Stopzeit bzgl. $(\mathcal{C}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ und für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ ist T_j randomisierte Stopzeit bzgl. $(\mathcal{A}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, d.h. für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\tilde{P}(T_j > k | \mathcal{A}_k) = \tilde{P}(T_j > k | \mathcal{A}_\infty). \quad (100)$$

(iii) Für alle $C \in \mathcal{B}(S^{\mathbb{N}_0})$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\tilde{P}((Z_{T_j+k}, t_{T_j+k}, \eta_{T_j+k})_{k \geq 1} \in C | \mathcal{C}_{T_j-1}) = \tilde{P}_\Psi((Z_k, t_k, \eta_k)_{k \geq 1} \in C). \quad (101)$$

(iv) Für alle $C \in \mathcal{B}((\mathcal{M} \times \{0, 1\})^{\mathbb{N}_0})$ und alle $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\tilde{P}((Z_{T_j+k}, \eta_{T_j+k})_{k \geq 0} \in C | \mathcal{C}_{T_j-1}) = \tilde{P}_\Psi((Z_k, \eta_k)_{k \geq 0} \in C). \quad (102)$$

Beweis:

(i) Sei $x \in \mathcal{M}$. Es genügt zu zeigen, daß die Prozesse $(\pi_{\tau_k}, \tau_k - \tau_{k-1})_{k \in \mathbb{N}_0}$ und $((Z_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}_0})$ (bzgl. P_x bzw. \tilde{P}_x) die gleiche Startverteilung und den gleichen Übergangskern besitzen. Seien $D \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$ und $E \in \mathcal{B}([0, \infty))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{P}_x((Z_0, t_0) \in D \times E) &= 1_{(x,0) \in D \times E} \\ &= P_x((\pi_0, \tau_0 - \tau_{-1}) \in D \times E), \end{aligned} \quad (103)$$

was die Gleichheit der Startverteilungen zeigt. Seien nun $m \in \mathbb{N}_0$, $z \in \mathcal{M}$ und $t \in [0, \infty)$. Da η_m von (Z_m, t_m) unabhängig ist (wie man leicht aus der Definition von Q^* abliest), gilt

$$\begin{aligned} &\tilde{P}_x((Z_{m+1}, t_{m+1}) \in D \times E | Z_m = z, t_m = t) \\ &= \alpha \tilde{P}_x((Z_{m+1}, t_{m+1}) \in D \times E | Z_m = z, t_m = t, \eta_m = 0) \\ &\quad + (1 - \alpha) \tilde{P}_x((Z_{m+1}, t_{m+1}) \in D \times E | Z_m = z, t_m = t, \eta_m = 1) \\ &= \alpha Q^*((z, t, 0), D \times E \times \{0, 1\}) + (1 - \alpha) Q^*((z, t, 1), D \times E \times \{0, 1\}) \\ &= \alpha \Psi(D) \int P_z(\tau_1 \in E | \pi_{\tau_1} = y) \Psi(dy | D) \\ &\quad + (1 - \alpha) \hat{Q}(z, D) \int P_z(\tau_1 \in E | \pi_{\tau_1} = y) \hat{Q}(z, dy | D) \\ &= \alpha \int P_z(\tau_1 \in E | \pi_{\tau_1} = y) \Psi(dy \cap D) \\ &\quad + (1 - \alpha) \int P_z(\tau_1 \in E | \pi_{\tau_1} = y) \hat{Q}(z, dy \cap D) \\ &= \int P_z(\tau_1 \in E | \pi_{\tau_1} = y) Q(z, dy \cap D) \\ &= P_z(\tau_1 \in E \cap \pi_{\tau_1} \in D) \\ &= P_x((\pi_{\tau_{m+1}}, \tau_{m+1} - \tau_m) \in D \times E | \pi_{\tau_m} = z, \tau_m - \tau_{m-1} = t). \end{aligned} \quad (104)$$

(ii) Seien $j, k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\{T_j > k\} = \{|\{m \leq k-1 : \eta_m = 0\}| \leq j-1\} \in \mathcal{C}_{k-1}, \quad (105)$$

also ist $T_j - 1$ Stopzeit bzgl. $(\mathcal{C}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

Die zweite Aussage ist für $j = 0$ oder $k = 0$ trivial, wir zeigen also für $j, k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{P}(T_j > k | \mathcal{A}_k) = \tilde{P}(T_j > k | \mathcal{A}_\infty). \quad (106)$$

Man beachte zunächst, daß für alle $C \in \mathcal{B}(S^{\mathbb{N}_0})$ gilt

$$\begin{aligned}
& \tilde{P}((Z_{k+l}, t_{k+l}, \eta_{k+l})_{l \geq 1} \in C | \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_k) \\
&= \tilde{E}(\tilde{P}((Z_{k+l}, t_{k+l}, \eta_{k+l})_{l \geq 1} \in C | \mathcal{C}_k) | \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_k) \\
&= \tilde{E}(\tilde{P}_{(Z_k, t_k, \eta_k)}((Y_l, t_l, \eta_l)_{l \geq 1} \in C) | \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_k) \\
&= \alpha \tilde{P}_{(Z_k, t_k, 0)}((Y_l, t_l, \eta_l)_{l \geq 1} \in C) + (1 - \alpha) \tilde{P}_{(Z_k, t_k, 1)}((Y_l, t_l, \eta_l)_{l \geq 1} \in C),
\end{aligned}$$

wobei für die letzte Gleichheit zu beachten ist, daß η_k unabhängig von $\sigma(\mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_k)$ ist. Sei

$$\mathcal{C}_{k+1, \infty} := \sigma((Z_{k+l}, t_{k+l}, \eta_{k+l})_{l \geq 1}). \quad (107)$$

Die obige Rechnung zeigt (da der erhaltene Ausdruck \mathcal{A}_k -meßbar ist), daß für alle $F \in \mathcal{C}_{k+1, \infty}$ gilt

$$\tilde{P}(F | \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_k) = \tilde{P}(F | \mathcal{A}_k). \quad (108)$$

Wir wollen nun folgern, daß für alle $G \in \mathcal{C}_{k-1}$ gilt

$$\tilde{P}(G | \mathcal{A}_k, \mathcal{C}_{k+1, \infty}) = \tilde{P}(G | \mathcal{A}_k) \quad (109)$$

und somit erst recht

$$\tilde{P}(G | \mathcal{A}_\infty) = \tilde{P}(G | \mathcal{A}_k), \quad (110)$$

was mit $G := \{T_j > k\}$ die Behauptung liefert.

Seien dazu $F \in \mathcal{C}_{k+1, \infty}$, $G \in \mathcal{C}_{k-1}$ und $H \in \mathcal{A}_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{F \cap H} 1_G d\tilde{P} &= \int_{G \cap H} 1_F d\tilde{P} \\
&= \int_{G \cap H} \tilde{P}(F | \mathcal{C}_{k-1}, \mathcal{A}_k) d\tilde{P} \\
&= \int_{G \cap H} \tilde{P}(F | \mathcal{A}_k) d\tilde{P} \\
&= \int_G \tilde{P}(F \cap H | \mathcal{A}_k) d\tilde{P} \\
&= \int_{F \cap H} \tilde{P}(G | \mathcal{A}_k) \tilde{P}(F \cap H | \mathcal{A}_k) d\tilde{P} \\
&= \int_{F \cap H} \tilde{P}(G | \mathcal{A}_k) d\tilde{P}. \quad (111)
\end{aligned}$$

(iii) Seien $C \in \mathcal{B}(S^{\mathbb{N}_0})$ und $j \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \tilde{P}((Z_{T_j+k}, t_{T_j+k}, \eta_{T_j+k})_{k \geq 1} \in C | \mathcal{C}_{T_j-1}) \\
&= \tilde{E}(\tilde{P}((Z_{T_j+k}, t_{T_j+k}, \eta_{T_j+k})_{k \geq 1} \in C | \mathcal{C}_{T_j}) \mathcal{C}_{T_j-1}) \\
&= \tilde{E}(\tilde{P}_{(Z_{T_j}, 0, \eta_{T_j})}((Z_k, t_k, \eta_k)_{k \geq 1} \in C) | \mathcal{C}_{T_j-1}) \\
&= \tilde{E}_{(Z_{T_j-1}, 0, 0)}(\tilde{P}_{(Z_1, 0, \eta_1)}((Z_k, t_k, \eta_k)_{k \geq 1} \in C)) \\
&= \alpha \int \tilde{P}_{(x, 0, 0)}((Z_k, t_k, \eta_k)_{k \geq 1} \in C) \Psi(dx) \\
&\quad + (1 - \alpha) \int \tilde{P}_{(x, 0, 1)}((Z_k, t_k, \eta_k)_{k \geq 1} \in C) \Psi(dx) \\
&= \tilde{P}_\Psi((Z_k, t_k, \eta_k)_{k \geq 1} \in C). \tag{112}
\end{aligned}$$

(iv) Die Aussage läßt sich analog zu (iii) beweisen.

Per Definition ist T_1 bezüglich \tilde{P}_Ψ geometrisch verteilt mit Parameter α , also gilt $\tilde{E}_\Psi(T_1) = \frac{1}{\alpha} < \infty$. Gemäß Alsmeyer (1991, 8.3.1) wird somit durch

$$\xi(C) := \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} 1_{\{Z_k \in A\}}\right) \tag{113}$$

(für alle $C \in \mathcal{B}(\mathcal{M})$) die eindeutig bestimmte invariante Verteilung von $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ definiert. Mit dem üblichen Erweiterungsschluß ergibt sich, daß für jede positive oder beschränkte meßbare Funktion $f : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ gilt

$$\int f(x) \xi(dx) = \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} f(Z_k)\right). \tag{114}$$

Das vorstehende Lemma wird uns in Satz 1.3.5 die Zurückführung der asymptotischen Rendite auf das Verhalten des Prozesses $(Z_k, t_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in einem Zyklus zwischen zwei Regenerationzeiten ermöglichen. Das nun folgende Lemma ermöglicht dann die Zurückführung auf das Verhalten des Prozesses in einer „typischen“ Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten.

1.3.4 Lemma

(i) Es gilt

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} \tilde{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T_2-1} t_k\right) < \infty \tag{115}$$

und

$$\tilde{E}_\xi(t_1) = \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=T_1}^{T_2-1} t_k\right). \tag{116}$$

(ii) Es gilt für jedes beschränkte, meßbare f

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} \tilde{E}_x \left(\sum_{k=0}^{T_1-1} |f(Z_k)| \right) < \infty \quad (117)$$

und

$$\tilde{E}_\xi(f(Z_1)) = \alpha \tilde{E}_\Psi \left(\sum_{k=0}^{T_1-1} f(Z_k) \right). \quad (118)$$

Beweis:

(i) Wir zeigen zunächst

$$\sup_{x \in \mathcal{M}} E_x(\tau_1) < \infty. \quad (119)$$

Sei \mathcal{L} der infinitesimale Generator von $(\bar{\pi}_t)_{t \in [0, \infty)}$ (siehe (64)). Des weiteren sei $u : \bar{A} \mapsto \mathbb{R}$ stetig und erfülle die Gleichung $\mathcal{L}u = 1$ auf A (zur Existenz von u siehe Pinsky(1995, Theorem 3.3.1)). Dann liefert die Feynman-Kac-Formel für alle $x \in \mathcal{M}$ und alle $m \in \mathbb{N}$

$$E_x(u(\pi_{\tau_1 \wedge m})) = u(\phi(x)) + E_x \left(\int_0^{\tau_1 \wedge m} \mathcal{L}u(\pi_s) ds \right) \quad (120)$$

und somit

$$E_x(\tau_1 \wedge m) \leq 2 \sup_{y \in \bar{A}} |u(y)|. \quad (121)$$

Per Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz die gewünschte Aussage (119).

Im folgenden sei

$$M := \frac{\sup_{x \in \mathcal{M}} E_x(\tau_1)}{\min\{\alpha, 1 - \alpha\}}. \quad (122)$$

Für alle $x \in \mathcal{M}$, $t \in [0, \infty)$ und $D \in \mathcal{B}([0, \infty))$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{(x,t,0)}(t_1 \in D) &= \int P_x(\tau_1 \in D | \pi_{\tau_1} = y) \Psi(dy) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int P_x(\tau_1 \in D | \pi_{\tau_1} = y) Q(x, dy) \\ &= \frac{1}{\alpha} P_x(\tau_1 \in D) \end{aligned} \quad (123)$$

und somit

$$\tilde{E}_{(x,t,0)}(t_1) \leq M, \quad (124)$$

entsprechend ergibt sich

$$\tilde{P}_{(x,t,1)}(t_1 \in D) \leq \frac{1}{1 - \alpha} P_x(\tau_1 \in D) \quad (125)$$

und somit

$$\tilde{E}_{(x,t,1)}(t_1) \leq M, \quad (126)$$

insgesamt also

$$\tilde{E}_{(x,t,\eta)}(t_1) \leq M \quad (127)$$

für alle $(x, t, \eta) \in S$.

Nun ergibt sich für alle $x \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x\left(\sum_{k=0}^{T_2-1} t_k\right) &= \tilde{E}_x\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k 1_{\{T_2 > k\}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_x(\tilde{E}_x(t_k 1_{\{T_2 > k\}} | \mathcal{C}_{k-1})) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_x(1_{\{T_2 > k\}} \tilde{E}_x(t_k | \mathcal{C}_{k-1})) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_x(1_{\{T_2 > k\}} \tilde{E}_{(Z_{k-1}, t_{k-1}, \eta_{k-1})}(t_k)) \\ &\leq M \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_x(T_2 > k) = M \tilde{E}_x(T_2) < \infty. \end{aligned} \quad (128)$$

Somit ist (115) gezeigt. Wir zeigen nun (116).

Es gilt (unter Beachtung der Tatsache, daß $P(T_1 > k | \mathcal{A}_\infty)$ \mathcal{A}_k -meßbar ist)

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\xi(t_1) &= \int \tilde{E}_x(t_1) \xi(dx) = \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} \tilde{E}_{Z_k}(t_1)\right) \\ &= \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} \tilde{E}_\Psi(t_{k+1} | \mathcal{A}_k)\right) = \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_\Psi(t_{k+1} | \mathcal{A}_k) 1_{\{T_1 > k\}}\right) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_\Psi(\tilde{E}_\Psi(\tilde{E}_\Psi(t_{k+1} | \mathcal{A}_k) 1_{\{T_1 > k\}} | \mathcal{A}_\infty)) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_\Psi(\tilde{P}_\Psi(T_1 > k | \mathcal{A}_\infty) \tilde{E}_\Psi(t_{k+1} | \mathcal{A}_k)) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_\Psi(\tilde{E}_\Psi(\tilde{E}_\Psi(t_{k+1} 1_{\{T_1 > k\}} | \mathcal{A}_\infty) | \mathcal{A}_k)) \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{E}_\Psi(t_{k+1} 1_{\{T_1 > k\}}) = \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} t_{k+1}\right) \\ &= \alpha(\tilde{E}_\Psi(t_{T_1}) + \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=1}^{T_1-1} t_k\right)) = \alpha(\tilde{E}_\Psi(t_{T_1}) + \tilde{E}_\Psi(\tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=T_1+1}^{T_2-1} t_k | \mathcal{C}_{T_1-1}\right))) \\ &= \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=T_1}^{T_2-1} t_k\right), \end{aligned} \quad (129)$$

wobei die vorletzte Gleichheit aus Lemma 1.3.3 (iii) folgt.

(ii) Unter Beachtung der Beschränktheit von f läßt sich (117) analog zu (115) nachweisen. Des weiteren gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_\xi(f(Z_1)) &= \int \tilde{E}_x(f(Z_1))\xi(dx) \\
&= \int \int f(y)Q(x, dy)\xi(dx) \\
&= \int f(x)\xi(dx) \\
&= \alpha \tilde{E}_\Psi\left(\sum_{k=0}^{T_1-1} f(Z_k)\right). \tag{130}
\end{aligned}$$

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Kapitels und liefert die zu Beginn des Abschnitts angekündigte Zurückführung der asymptotischen Rendite auf das Verhalten der Wertanteile in einer typischen Periode zwischen zwei Handelszeitpunkten.

1.3.5 Satz

Für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt

$$R^K(x) = r + \frac{E_\xi(h(\pi_{\tau_1}))}{E_\xi(\tau_1)}. \tag{131}$$

Beweis:

Sei $x \in \mathcal{M}$. Für alle $t \in [0, \infty)$ sei

$$\tilde{M}_t := \sup\{k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{l=0}^k t_l \leq t\}. \tag{132}$$

Es gilt mit M_t gemäß (44)

$$\begin{aligned}
R^K(x) &= r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_x\left(\sum_{k=0}^{M_t} h(\pi_{\tau_k})\right) \\
&= r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \tilde{E}_x\left(\sum_{k=0}^{\tilde{M}_t+1} h(Z_k)\right), \tag{133}
\end{aligned}$$

wobei für letztere Gleichheit die Beschränktheit von h zu beachten ist.

Für alle $j \in \mathbb{N}_0$ seien

$$Y_j := \sum_{k=T_j}^{T_{j+1}-1} h(Z_k), \quad d_j := \sum_{k=T_j}^{T_{j+1}-1} t_k \tag{134}$$

und für alle $t \in [0, \infty)$ sei

$$N(t) := \inf\{m \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^m d_j > t\}. \quad (135)$$

Wir zeigen nun

$$R^K(x) = r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \tilde{E}_x \left(\sum_{j=0}^{N(t)} Y_j \right). \quad (136)$$

Hierzu beachte man zunächst, daß $\tilde{M}_t + 1$ wegen

$$\{\tilde{M}_t + 1 > k\} = \left\{ \sum_{l=1}^k t_l \leq t \right\} \in \mathcal{C}_k \quad (137)$$

Stopzeit bzgl. $(\mathcal{C}_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist. Sei nun $K := \sup_{y \in \mathcal{M}} |h(y)|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{E}_x \left(\sum_{j=0}^{N(t)} Y_j \right) - E_x \left(\sum_{k=0}^{\tilde{M}_t+1} h(Z_k) \right) \right| \\ & \leq \tilde{E}_x \left(\sum_{k=\tilde{M}_t+2}^{T_{N(t)+1}-1} |h(Z_k)| \right) \\ & \leq K \tilde{E}_x \left((T_{N(t)+1} - 1) - (\tilde{M}_t + 1) \right) \\ & = K \tilde{E}_x \left(\inf\{k \geq 0 : \eta_{k+\tilde{M}_t+1} = 0\} \right) \\ & = K \tilde{E}_x \left(\tilde{E}_{(Z_{\tilde{M}_t+1}, t_{\tilde{M}_t+1}, \eta_{\tilde{M}_t+1})} \left(\inf\{k \geq 0 : \eta_k = 0\} \right) \right) \\ & \leq \frac{K}{\alpha}, \end{aligned} \quad (138)$$

also gilt die gewünschte Darstellung (136).

Im folgenden sei für alle $m \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{G}_m := \sigma((Y_j, d_j)_{0 \leq j \leq m}). \quad (139)$$

Analog zu (137) läßt sich zeigen, daß $N(t)$ Stopzeit bzgl. $(\mathcal{G}_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ ist. Gemäß Lemma 1.3.3 (iv) ist $(Y_j)_{j \geq 1}$ bzgl. \tilde{P}_x Folge identisch verteilter Zufallsgrößen; es gilt $\tilde{P}_x^{Y_1} = \tilde{P}_\Psi^{Y_0}$ und für alle $j \geq 1$ ist Y_j unabhängig von \mathcal{G}_{j-1} . Des weiteren ist gemäß Lemma 1.3.4 (ii) Y_j für alle $j \in \mathbb{N}_0$ integrierbar. Somit liefert die verallgemeinerte Waldsche Gleichung (Anhang zu Kapitel 1, Satz 1.4.1)

$$\begin{aligned} R^K(x) &= r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \tilde{E}_x \left(\sum_{j=0}^{N(t)} Y_j \right) \\ &= r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\tilde{E}_x(Y_0) + \tilde{E}_x(N(t)) \tilde{E}_x(Y_1)) \\ &= r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \tilde{E}_x(N(t)) \tilde{E}_\Psi(Y_0). \end{aligned} \quad (140)$$

Es seien nun

$$\bar{\mathcal{G}}_m := \mathcal{G}_{m+1} \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0, \quad (141)$$

$$\bar{d}_0 := d_0 + d_1, \quad (142)$$

$$\bar{d}_j := d_{j+1} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}, \quad (143)$$

$$S_m := d_0 + d_1 + \sum_{j=2}^{m+1} d_j \quad (144)$$

$$= \sum_{j=0}^m \bar{d}_j \text{ für alle } m \in \mathbb{N}_0. \quad (145)$$

Gemäß Lemma 1.3.3 (iii) ist $(\bar{d}_j)_{j \geq 1}$ bzgl. \tilde{P}_x Folge identisch verteilter Zufallsgrößen und für alle $j \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist \bar{d}_j unabhängig von $\bar{\mathcal{G}}_{j-2}$. Gemäß Lemma 1.3.4 (i) ist \bar{d}_j für alle $j \in \mathbb{N}_0$ \tilde{P}_x -integrierbar.

Des weiteren gilt

$$N(t) + 1 = \inf\{m \in \mathbb{N}_0 : S_m > t\}. \quad (146)$$

Das verallgemeinerte elementare Erneuerungstheorem (Anhang zu Kapitel 1, Satz 1.4.2) und wiederum Lemma 1.3.3 (iii) liefern somit

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \tilde{E}_x(N(t) + 1) &= \frac{1}{\tilde{E}_x(\bar{d}_1)} \\ &= \frac{1}{\tilde{E}_x(d_2)} \\ &= \frac{1}{\tilde{E}_\Psi(d_1)}. \end{aligned} \quad (147)$$

Insgesamt ergibt sich nun unter Beachtung von Lemma 1.3.4

$$\begin{aligned} R^K(x) &= r + \liminf_{t \rightarrow \infty} \tilde{E}_\Psi(Y_0) \frac{\tilde{E}_x(N(t))}{t} \\ &= r + \frac{\tilde{E}_\Psi(Y_0)}{\tilde{E}_\Psi(d_1)} \\ &= r + \frac{\tilde{E}_\xi(h(Z_1))}{\tilde{E}_\xi(t_1)} \\ &= r + \frac{E_\xi(h(\pi_{\tau_1}))}{E_\xi(\tau_1)}. \end{aligned} \quad (148)$$

1.4 Anhang: Erneuerungstheorie für r -unabhängige Zufallsgrößen

In diesem Anhang zu Kapitel 1 sollen die beiden im Beweis von Satz 1.3.5 benutzten erneuerungstheoretischen Sätze (Waldsche Gleichung, elementares Erneuerungstheorem) in den dort benötigten Versionen bewiesen werden. Alle in

diesem Anhang angegebenen Aussagen sind geringfügige Modifikationen entsprechender Darstellungen in Janson(1983).

Im folgenden sei $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ein integrierbarer stochastischer Prozeß, der adaptiert zu einer Filtration $(\mathcal{A}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ist. Für alle $i, j \geq 1$ seien X_i und X_j identisch verteilt. Des weiteren existiere ein $r \in \mathbb{N}_0$ so, daß $(X_{j+i})_{i \geq r+1}$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ unabhängig von \mathcal{A}_j ist, im folgenden sei r so gewählt. Schließlich sei

$$S_m := \sum_{j=0}^m X_j \quad (149)$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

1.4.1 Satz (Waldsche Gleichung)

Sei τ eine integrierbare Stopzeit (bzgl. $(\mathcal{A}_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$). Dann gilt

$$E(S_{\tau+r}) = E(X_0) + E(\tau + r)E(X_1). \quad (150)$$

Beweis:

Wir nehmen zunächst an, daß $X_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned} E(S_{\tau+r}) &= E(S_r) + \sum_{j=1}^{\infty} E(X_{j+r} 1_{\{\tau \geq j\}}) \\ &= E(X_0) + rE(X_1) + \sum_{j=1}^{\infty} E(1_{\{\tau \geq j\}} \underbrace{E(X_{j+r} | \mathcal{A}_{j-1})}_{=E(X_1)}) \\ &= E(X_0) + (r + \sum_{j=1}^{\infty} P(\tau \geq j))E(X_1) \\ &= E(X_0) + (E(\tau) + r)E(X_1). \end{aligned} \quad (151)$$

Durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil ergibt sich nun die Behauptung in voller Allgemeinheit.

1.4.2 Lemma

Sei $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge integrierbarer Stopzeiten mit $E(\tau_n) \in (0, \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\tau_n) = \infty$. Dann gilt

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(|X_{\tau_n}|)}{E(\tau_n)} = 0, \quad (152)$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(S_{\tau_n})}{E(\tau_n)} = E(X_1). \quad (153)$$

Beweis:

(i) Wir zeigen, daß für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{E(|X_{\tau_n}|)}{E(\tau_n)} < \varepsilon. \quad (154)$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei $M > 0$ so groß, daß gilt $E(|X_1|1_{\{|X_1|>M\}}) < \varepsilon$. Nun gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ (unter Beachtung von Satz A1)

$$\begin{aligned}
E(|X_{\tau_n}|) &= E(|X_{\tau_n}|1_{\{|X_{\tau_n}|>M\}}) + E(|X_{\tau_n}|1_{\{|X_{\tau_n}|\leq M\}}) \\
&\leq E\left(\sum_{j=0}^{\tau_n+r} |X_j|1_{\{|X_j|>M\}}\right) + M \\
&= E(|X_0|1_{\{|X_0|>M\}}) + E(\tau_n + r)E(|X_1|1_{\{|X_1|>M\}}) + M \\
&< \varepsilon E(\tau_n) + r\varepsilon + M + E(|X_0|),
\end{aligned} \tag{155}$$

es folgt die Behauptung.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (unter Beachtung von Satz A1)

$$\begin{aligned}
\frac{E(S_{\tau_n})}{E(\tau_n)} &= \frac{E(S_{\tau_n+r}) - \sum_{i=1}^r E(X_{\tau_n+i})}{E(\tau_n)} \\
&= \frac{E(X_0) + E(X_1)E(\tau_n + r)}{E(\tau_n)} - \sum_{i=1}^r \frac{E(X_{\tau_n+i})}{E(\tau_n)} \\
&= E(X_1) + \frac{r + E(X_0)}{E(\tau_n)} - \sum_{i=1}^r \frac{E(X_{\tau_n+i})}{E(\tau_n)}.
\end{aligned} \tag{156}$$

Da $\tau_n + i$ Stopzeit ist, folgt aber für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ aus (155)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E(|X_{\tau_n+i}|)}{E(\tau_n)} = 0, \tag{157}$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

1.4.3 Lemma

Es gelte $X_j \geq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ und $E(X_1) > 0$. Für alle $t \in [0, \infty)$ sei

$$N(t) := \inf\{m \in \mathbb{N} : S_m > t\}. \tag{158}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad &\lim_{t \rightarrow \infty} E(N(t)) = \infty, \\
\text{(ii)} \quad &E(N(t)) < \infty \text{ für alle } t \in [0, \infty).
\end{aligned} \tag{159}$$

Beweis:

(i) Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für r -unabhängige Zufallsgrößen folgt

$$P(\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty) = 1 \tag{160}$$

und somit aus dem Lemma von Fatou die Behauptung.

(ii) Sei $t \in [0, \infty)$. Aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für r -unabhängige Zufallsgrößen folgt

$$P(N(t) < \infty) = 1. \quad (161)$$

Wegen

$$N(t) \leq \inf\{m \in \mathbb{N} : \sum_{j=0}^m (X_j \wedge 1) > t\} \quad (162)$$

können wir ohne Einschränkung $X_j \leq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$ annehmen. Es gilt dann für alle $M \in \mathbb{N}$ einerseits

$$S_{(N(t) \wedge M)+r} \leq S_{N(t)+r} \leq t + 1 + r, \quad (163)$$

andererseits gemäß Satz A1

$$\begin{aligned} E(S_{(N(t) \wedge M)+r}) &= E((N(t) \wedge M) + r)E(X_1) + E(X_0) \\ &\geq E(N(t) \wedge M)E(X_1), \end{aligned} \quad (164)$$

insgesamt also

$$E(N(t) \wedge M) \leq \frac{t + 1 + r}{E(X_1)}. \quad (165)$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt die gewünschte Integrierbarkeit von $N(t)$.

1.4.4 Satz (elementares Erneuerungstheorem)

Unter den Voraussetzungen von Lemma A3 gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{E(X_1)}. \quad (166)$$

Beweis:

Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $[0, \infty)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$. Gemäß Lemma A3 ist $N(t_n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ integrierbar und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} E(N(t_n)) = \infty$. Wegen

$$0 < S_{N(t_n)} - t_n \leq X_{N(t_n)} \quad (167)$$

(für alle $n \in \mathbb{N}$) folgt nun aus Lemma A2 (i)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{N(t_n)} - t_n}{E(N(t_n))} = 0 \quad (168)$$

und somit unter Beachtung von Lemma A2 (ii)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{E(N(t_n))} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{S_{N(t_n)}}{E(N(t_n))} + \frac{t_n - S_{N(t_n)}}{E(N(t_n))} \right) \\ &= E(X_1), \end{aligned} \quad (169)$$

womit die Behauptung nachgewiesen ist.

2 Optimale Portfolios im 2-Aktien-Fall ohne Bond

In diesem Kapitel soll das bisher behandelte Portfolio-Optimierungsproblem für den Fall eines aus $n = 2$ Aktien und keinem Bond bestehenden Marktes untersucht werden. Konkret unterscheiden wir dabei zwei Modelle hinsichtlich der Transaktionskostenstruktur.

In Abschnitt 2.1 gehen wir davon aus, daß die für eine Transaktion anfallenden Kosten vom Guthaben in einer der Aktien abgebucht werden, wobei für diese Buchung keine weiteren Kosten anfallen. Dieser Ansatz ist nicht als Spezialfall im in Kapitel 1 betrachteten Modell enthalten, ermöglicht jedoch die Charakterisierung der optimale Strategie durch eine relativ einfache Zurückführung auf die Ergebnisse von Irle und Sass(2006).

In Abschnitt 2.2 gehen wir davon aus, daß zwar ein Festgeldkonto (bzw. ein Bond) existiert, über das die Transaktionen abgebucht werden, der Investor jedoch nur in die Aktien investieren möchte, und somit den Wert im Festgeldkonto gleich 0 hält. Dieses Modell läßt sich als Spezialfall des in Kapitel 1 betrachteten ansehen und unterscheidet sich von diesem lediglich in der betrachteten Klasse von Strategien. Mit etwas mehr Aufwand als in Abschnitt 2.1 läßt sich wiederum das Vorgehen von Irle und Sass(2006) übertragen, um die optimale Strategie charakterisieren zu können.

2.1 Abbuchung der Transaktionskosten über ein Aktienkonto

Wie in Kapitel 1 seien die Aktienkurse S^1, S^2 gegeben durch

$$dS_t^1 = \mu_1 S_t^1 dt + \sigma_{11} S_t^1 dW_t^1 + \sigma_{12} S_t^1 dW_t^2, \quad (170)$$

$$dS_t^2 = \mu_2 S_t^2 dt + \sigma_{21} S_t^2 dW_t^1 + \sigma_{22} S_t^2 dW_t^2, \quad (171)$$

mit den Startwerten $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und Parametern $\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22} \in \mathbb{R}$ so, daß die Matrix $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,2}$ positiv definit ist, sowie einem zweidimensionalen Wienerprozeß (W^1, W^2) mit zugehöriger Standardfiltration \mathcal{F} .

Wir betrachten ein Modell, in dem bei jeder Transaktion der Wert der Käufe der einen Aktie durch Verkäufe der anderen Aktie in gleicher Höhe refinanziert werden muß. Die Kosten für eine solche Transaktion werden dann vom Guthaben in der ersten Aktie abgebucht; für diese Buchung werden keine weiteren Kosten fällig. Es ist jede Transaktion also schon eindeutig bestimmt durch die Transaktion $\Delta = \Delta^2$ im 2. Finanzgut. Als Kostenfunktion betrachten wir in Analogie zu Kapitel 1 für gegebene $\delta, \gamma_1, \gamma_2$ die Funktion

$$\begin{aligned} c : (0, \infty) \times \mathbb{R} &\mapsto (0, \infty), (x, \Delta) \mapsto \delta x + \gamma_1 |-\Delta| + \gamma_2 |\Delta| \\ &= \delta x + \gamma |\Delta|, \end{aligned} \quad (172)$$

wobei $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ gesetzt wurde und wir im folgenden $\delta \in (0, 1), \gamma \in [0, 1 - \delta)$ annehmen.

Die betrachtete Klasse von Handelsstrategien und die Definition der relevanten Kenngrößen der Portfolioentwicklung übertragen sich in natürlicher Weise aus Definition 1.2.1. Man beachte allerdings, daß der für die Wertanteile zugelassene Bereich nicht \mathcal{M} sondern $\text{int}(\mathcal{M})$ entspricht.

2.1.1 Definition und Bemerkung

(i) Eine Impuls-Kontroll-Strategie $\tilde{K} = (\tau_k, \Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei in diesem Abschnitt gegeben durch Stopzeiten $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \infty$ mit $P(\tau_k \rightarrow \infty) = 1$ und durch $(0, 1)$ -wertige \mathcal{F}_{τ_k} -meßbare Zufallsgrößen $(\Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$.

(ii) Im folgenden sei ein festes Startvermögen $X_0 = x > 0$ gegeben. Eine Impulskontrollstrategie heißt zulässig, wenn zu jedem Startanteil $\pi_0 = \pi \in (0, 1)$ $(0, \infty)$ -wertige Prozesse

- $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ (Wertprozeß),
- $(V_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (neuer Wertprozeß)

und $(0, 1)$ -wertige Prozesse

- $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)}$ (Anteilsprozeß),
- $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ (neuer Anteilsprozeß)

so existieren, daß für alle für $k \in \mathbb{N}$ auf $\{\tau_k < \infty\}$ gilt

$$V_k = X_{\tau_k} - c(X_{\tau_k}, \Delta_k), \quad (173)$$

$$\eta_k = \frac{\pi_{\tau_k} X_{\tau_k} + \Delta_k}{V_k}, \quad (174)$$

$$X_t = \left((1 - \eta_k) \frac{S_t^1}{S_{\tau_k}^1} + \eta_k \frac{S_t^2}{S_{\tau_k}^2} \right) V_k, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \quad (175)$$

$$\pi_t = \frac{\eta_k V_k S_t^2}{S_{\tau_k}^2 X_t}, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \quad (176)$$

Wie in Kapitel 1 sei

$$P_\pi := P(\cdot | \pi_0 = \pi) \quad (177)$$

für alle $\pi \in \mathcal{M}$, und wiederum bezeichnen wir den bezüglich P_π gebildeten Erwartungswert mit E_π .

(iii) Zu einer Impuls-Kontroll-Strategie \tilde{K} ist die asymptotische Rendite bei Startanteil $\pi \in \mathcal{M}$ gegeben durch

$$R^{\tilde{K}}(\pi) = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E_\pi(\log X_t^{\tilde{K}}). \quad (178)$$

Wie in Kapitel 1 läßt sich zeigen, daß die Portfolioentwicklung schon an der Entwicklung des Wertanteils und des neuen Wertanteils ablesbar ist. Die Aussagen in den Bemerkungen 2.1.2 und 2.1.3 lassen sich analog zu (bzw. als Spezialfälle von) Folgerung 1.2.4, Bemerkung 1.2.5 bzw. Satz 1.2.6 nachweisen.

2.1.2 Bemerkung

Sei $(\tau_k, \Delta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine zulässige Impulskontrollstrategie.

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$A_k = \text{sign}(\Delta_k) = \text{sign}(\eta_k(1 - \delta) - \pi_{\tau_k}^i). \quad (179)$$

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$V_k = \frac{1 - \delta + \gamma A_k \pi_{\tau_k}}{1 + \gamma A_k \eta_k}. \quad (180)$$

2.1.3 Definition und Bemerkung

Eine NW-Strategie $(\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei in diesem Abschnitt gegeben durch Stopzeiten $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \infty$ mit $P(\tau_k \rightarrow \infty) = 1$, und durch $(0,1)$ -wertige \mathcal{F}_{τ_k} -meßbare Zufallsgrößen η_k . Es gilt:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \{ \tilde{K} : \tilde{K} \text{ zulässige Impulskontrollstrategie} \} &\mapsto \{ K : K \text{ NW-Strategie} \}, \\ \tilde{K} &\mapsto ((\tau_k^{\tilde{K}})_{k \in \mathbb{N}_0}, (\eta_k^{\tilde{K}})_{k \in \mathbb{N}_0}) \end{aligned} \quad (181)$$

ist eine Bijektion.

Wie in Definition 1.2.9 definieren wir Anteilsprozeß, Wertprozeß und asymptotische Rendite einer NW-Strategie durch die entsprechenden Größen der zugehörigen Impulskontrollstrategie, und es sei

$$A(\pi, \eta) = \text{sign}(\eta(1 - \delta) - \pi) \quad (182)$$

für alle $\pi, \eta \in (0, 1)$.

Eine NW-Strategie $(\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ heiße KG-Strategie, falls $0 < a < \alpha < \beta < 1$ existieren mit $\eta_0 \in \{\alpha, \beta\}$ und

$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : \pi_t \in (a, b)\}, \quad (183)$$

$$\eta_k = \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \pi_{\tau_k} = a, \\ \beta, & \text{falls } \pi_{\tau_k} = b \end{cases} \quad (184)$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wir bezeichnen eine KG-Strategie im folgenden mit (a, α, β, b) .

Die Zurückführung auf die Ergebnisse von Irle und Sass(2006) erfolgt durch einen Numerairewechsel. Zu einer NW-Strategie $K = (\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ seien im folgenden Prozesse $(\tilde{S}_t^1)_{t \in [0, \infty)}$, $(\tilde{S}_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ und $(\tilde{X}_t)_{t \in [0, \infty)}$ definiert durch

$$\tilde{S}_t^1 = \frac{S_t^1}{S_t^1} = 1, \quad \tilde{S}_t^2 = \frac{S_t^2}{S_t^1}, \quad \tilde{X}_t = \frac{X_t}{S_t^1}, \quad (185)$$

und es sei wiederum $M_t = \sup\{k \in \mathbb{N}_0 : \tau_k < t\}$.

2.1.4 Satz

Es seien

$$\tilde{\mu} = \mu_2 - \mu_1 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{21} - \sigma_{12}\sigma_{22}, \quad (186)$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{(\sigma_{21} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{12})^2}, \quad (187)$$

$$\tilde{W}_t = \frac{1}{\tilde{\sigma}}((\sigma_{21} - \sigma_{11})W_t^1 + (\sigma_{22} - \sigma_{12})W_t^2), \quad (188)$$

$$\bar{\Gamma}(\pi, \eta) = \log \frac{1 - \delta + \gamma A(\pi, \eta)\pi}{1 + \gamma A(\pi, \eta)\eta} \quad (189)$$

für alle $\pi, \eta \in [0, 1]$.

Dann ist $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein Wienerprozeß und es gilt

$$d\tilde{S}_t^2 = \tilde{\mu}\tilde{S}_t^2 dt + \tilde{\sigma}\tilde{S}_t^2 d\tilde{W}_t, \quad (190)$$

$$\begin{aligned} \pi_t &= \pi_0 + \int_{[0, t]} \pi_s(1 - \pi_s)(\tilde{\mu} - \tilde{\sigma}^2\pi_s) ds \\ &\quad + \int_{[0, t]} \pi_s(1 - \pi_s)\tilde{\sigma} d\tilde{W}_s + \sum_{k=0}^{M_t} (\eta_k - \pi_{\tau_k}) \end{aligned} \quad (191)$$

$$\log X_t = \log x + \int_{[0, t]} \pi_s(\tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2\pi_s) ds \quad (192)$$

$$+ \int_{[0, t]} \tilde{\sigma}\pi_s d\tilde{W}_s + \sum_{k=0}^{M_t} \bar{\Gamma}(\pi_{\tau_k}, \eta_k). \quad (193)$$

Beweis:

Die Wienerprozeßeigenschaft von $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ist offensichtlich. Des weiteren liefert die Ito-Formel

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t^2 &= -\frac{S_t^2}{(S_t^1)^2} dS_t^1 + \frac{1}{S_t^1} dS_t^2 + \frac{S_t^2}{(S_t^1)^3} d[S^1]_t - \frac{1}{(S_t^1)^2} d[S^1, S^2]_t \\ &= -\tilde{S}_t^2(\mu_1 dt + \sigma_{11} dW_t^1 + \sigma_{12} dW_t^2) + \tilde{S}_t^2(\mu_2 dt + \sigma_{21} dW_t^1 + \sigma_{22} dW_t^2) \\ &\quad + \tilde{S}_t^2(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2) dt - \tilde{S}_t^2(\sigma_{11}\sigma_{21} + \sigma_{12}\sigma_{22}) dt \\ &= \tilde{\mu}\tilde{S}_t^2 dt + \tilde{\sigma}\tilde{S}_t^2 d\tilde{W}_t. \end{aligned} \quad (194)$$

Wir setzen nun $g_k^1 = \frac{(1-\eta_k)V_k}{S_{\tau_k}^1}$ und $g_k^2 = \frac{\eta_k V_k}{S_{\tau_k}^2}$ für $k \in \mathbb{N}_0$. Es sind g_k^1, g_k^2 \mathcal{F}_{τ_k} -meßbar und auf jedem Intervall $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ gilt

$$\pi_t = \frac{g_k^2 S_t^2}{g_k^1 S_t^1 + g_k^2 S_t^2} = \frac{g_k^2 \tilde{S}_t^2}{g_k^1 + g_k^2 \tilde{S}_t^2}. \quad (195)$$

Der Anteilsprozeß $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)}$ stimmt folglich mit der entsprechenden Strategie im Modell mit einem Bond bei Zinsrate $r = 0$ und nur einer Aktie mit Parametern $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$ und Wienerprozeß $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, \infty)}$ überein. Die in der Behauptung angegebene Darstellung von π_t ergibt sich somit als Spezialfall von Satz 1.2.9.

Zum Nachweis der angegebenen Darstellung von $\log \tilde{X}_t$ beachte man zunächst, daß auf jedem Intervall $(\tau_k, \tau_{k+1}]$ gilt

$$\begin{aligned} \tilde{X}_t &= \frac{(1-\pi_t)\tilde{X}_t}{\tilde{S}_t^1} \tilde{S}_t^1 + \frac{\pi_t \tilde{X}_t}{\tilde{S}_t^2} \tilde{S}_t^2 \\ &= \frac{(1-\eta_k)V_k}{\tilde{S}_{\tau_k}^1} \tilde{S}_t^1 + \frac{\eta_k V_k}{\tilde{S}_{\tau_k}^2} \tilde{S}_t^2. \end{aligned} \quad (196)$$

Unter Beachtung von $d\tilde{S}_t^1 = 0$ ergibt sich nun (auf $(\tau_k, \tau_{k+1}]$)

$$d\tilde{X}_t = \frac{\eta_k V_k}{\tilde{S}_{\tau_k}^2} d\tilde{S}_t^2 = \frac{\pi_t \tilde{X}_t}{\tilde{S}_t^2} d\tilde{S}_t^2 = \pi_t \tilde{X}_t (\tilde{\mu} dt + \tilde{\sigma} d\tilde{W}_t), \quad (197)$$

und folglich mit der Ito-Formel

$$\log \tilde{X}_t = \log V_k + \int_{[0,t]} \tilde{\mu} \pi_s ds + \int_{[0,t]} \tilde{\sigma} \pi_s d\tilde{W}_s - \int_{[0,t]} \frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2 \pi_s^2 ds. \quad (198)$$

Gemäß Bemerkung 2.1.2 gilt

$$V_k = \frac{1 - \delta + \gamma A(\pi_{\tau_k}, \eta_k) \pi_{\tau_k}}{1 + \gamma A(\pi_{\tau_k}, \eta_k) \eta_k}, \quad (199)$$

insgesamt erhalten wir somit die in der Behauptung angegebene Darstellung für $\log X_t$.

2.1.5 Lemma

Sei K^* eine NW-Strategie mit

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \log \tilde{X}_t^{K^*} = \sup_{K \text{ NW-Strategie}} \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} E \log \tilde{X}_t^K. \quad (200)$$

Dann gilt

$$R^{K^*} = \sup_{K \text{ NW-Strategie}} R^K. \quad (201)$$

Beweis:

Es gilt für jede NW-Strategie K

$$E \log \tilde{X}_t^K = E \log X_t^K - E \log S_t^1 = E \log X_t^K - (\mu_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2))t \quad (202)$$

und somit

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} E \log \tilde{X}_t^K = R^K - (\mu_1 - \frac{1}{2}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2)). \quad (203)$$

Das vorstehende Lemma zeigt, daß bei der Suche nach einer optimalen Strategie der Wertprozeß $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ zu einer NW-Strategie durch $(\tilde{X}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ersetzt werden kann. Dieser Prozeß ist aber gerade mit dem Wertprozeß zur entsprechenden NW-Strategie in dem von Irle und Sass(2006) betrachteten Modell mit einem Bond bei Zinsrate $r = 0$ und einer Aktie identisch mit Parametern $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$ und Wienerprozeß $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, \infty)}$ identisch. Wir können somit ohne weiteren Beweis das im genannten Artikel gewonnene Resultat zur Charakterisierung einer optimalen NW-Strategie übertragen. Dieses besagt, daß die optimale Strategie eine CB-Strategie (a, α, β, b) ist, wobei die auftretenden Parameter a, α, β, b durch (numerische) Lösung gewisser Gleichungen bestimmt werden können, siehe Satz 2.1.6 und Satz 2.1.7. Die Grundidee zur Herleitung der Gleichungen kann an entsprechender Stelle in dem in Abschnitt 2.2 betrachteten Modell abgelesen werden, wo eine ausführlichere Argumentation zur Zurückführung auf das Modell mit einem Bond und einer Aktie erforderlich sein wird.

2.1.6 Satz

Es gelte

$$\hat{\eta} = \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} \in (0, 1), \quad \hat{\eta} \neq \frac{1}{2}. \quad (204)$$

Für $x, c \in (0, 1)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$g(x; c, \lambda) = \frac{(\frac{1-x}{x})^{2\hat{\eta}-1}}{x(1-x)R_1} ((\lambda - R_1 x) (\frac{x}{1-x})^{2\hat{\eta}-1} - (\lambda - R_1 c) (\frac{c}{1-c})^{2\hat{\eta}-1}). \quad (205)$$

Dann existieren eindeutig bestimmte $c^* \in (0, 1), \lambda^* \in \mathbb{R}, 0 < a < \alpha < \beta < b < 1$ so, daß die folgenden Gleichungen erfüllt sind:

$$g(b; c^*, \lambda^*) = -\frac{\gamma}{1 - \delta - \gamma b}, \quad (206)$$

$$g(\beta; c^*, \lambda^*) = -\frac{\gamma}{1 - \gamma \beta}, \quad (207)$$

$$\int_{\beta}^b g(x; c^*, \lambda^*) dx = \log \frac{1 - \delta - \gamma b}{1 - \gamma \beta}, \quad (208)$$

$$g(a; c^*, \lambda^*) = \frac{\gamma}{1 - \delta + \gamma a}, \quad (209)$$

$$g(\alpha; c^*, \lambda^*) = \frac{\gamma}{1 + \gamma \alpha}, \quad (210)$$

$$\int_{\alpha}^a g(x; c^*, \lambda^*) dx = -\log \frac{1 - \delta + \gamma a}{1 + \gamma \alpha}. \quad (211)$$

2.1.7 Satz

Seien a, α, β, b die Parameter aus Satz 2.1.6 und $K^* = (a, \alpha, \beta, b)$. Gilt $\alpha \geq \frac{a}{1-\delta}$, so ist K^* Lösung des Portfoliooptimierungsproblems, d.h.

$$R^{K^*} = \sup_{K \text{ NW-Strategie}} R^K, \quad (212)$$

und λ^* ist die zugehörige asymptotische Rendite.

2.1.8 Bemerkung

Für $\hat{\eta} = \frac{1}{2}$ ist in Satz 2.1.6 die Funktion

$$g(x; c, \lambda) = \frac{1}{x(1-x)} \int_c^x \left(\frac{\lambda}{\sigma^2} - \frac{1}{2} y(1-y) \right) \frac{2}{y(1-y)} dy \quad (213)$$

zu verwenden, Satz 2.1.7 bleibt dann in ansonsten unveränderter Form gültig.

2.2 Abbuchung der Transaktionskosten über ein Festgeldkonto

Wie in Abschnitt 2.1 seien die Aktienkurse S^1, S^2 gegeben durch

$$dS_t^1 = \mu_1 S_t^1 dt + \sigma_{11} S_t^1 dW_t^1 + \sigma_{12} S_t^1 dW_t^2, \quad (214)$$

$$dS_t^2 = \mu_2 S_t^2 dt + \sigma_{21} S_t^2 dW_t^1 + \sigma_{22} S_t^2 dW_t^2, \quad (215)$$

mit den Startwerten $S_0^1 = S_0^2 = 1$ und Parametern $\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22} \in \mathbb{R}$ so, daß die Matrix $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1,2}$ positiv definit ist, sowie unabhängigen Wienerprozessen W^1, W^2 .

Das nun betrachtete Modell unterscheidet sich vom in Abschnitt 2.1 betrachteten dadurch, daß die Transaktionskosten nicht mehr über das Guthaben in einer Aktie sondern über ein Festgeldkonto abgebucht werden; diese Buchung muß stets genau durch entsprechende Aktienverkäufe ausgeglichen werden. Formal kann dieses Modell als Spezialfall des in Kapitel 1 eingeführten Modells mit $n = 2$ Aktien

gesehen werden, wobei der Startanteil im Bond durch $\pi_0^0 = 0$ gegeben ist und die asymptotische Rendite nun über die Strategiemenge

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{K} \text{ zul. Impulskontrollstrategie} : \eta_k^0 = 0, \eta_k^1 > 0, \eta_k^2 > 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\} \quad (216)$$

zu maximieren ist. Im folgenden sei

$$\mathcal{S} = \{(\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \text{ NW-Strategie} : \eta_k^0 = 0, \eta_k^1 > 0, \eta_k^2 > 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0\}. \quad (217)$$

Gemäß Bemerkung 1.2.5 existiert eine Bijektion zwischen $\tilde{\mathcal{S}}$ und \mathcal{S} . Das Optimierungsproblem kann also zurückgeführt werden auf die Bestimmung einer Strategie $K^* \in \mathcal{S}$ mit

$$R^{K^*} = \sup_{K \in \mathcal{S}} R^K. \quad (218)$$

Eine Strategie $(\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}$ heiße KG-Strategie, falls $0 < a < \alpha < \beta < b < 1$ existieren mit $\eta_0 \in \{(1 - \alpha, \alpha)^T, (1 - \beta, \beta)^T\}$ und

$$\tau_k = \inf\{t > \tau_{k-1} : \pi_t^2 \notin (a, b)\}, \quad (219)$$

$$\eta_k = \begin{cases} (1 - \alpha, \alpha)^T, & \text{falls } \pi_{\tau_k}^2 = a, \\ (1 - \beta, \beta)^T, & \text{falls } \pi_{\tau_k}^2 = b \end{cases} \quad (220)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen eine KG-Strategie im folgenden mit (a, α, β, b) .

Wie in Abschnitt 2.1 wollen wir das Problem mit einem Numerairewechsel auf die Situation mit einem Bond und einer Aktie zurückführen. Im folgenden sei ein $K = (\tau_k, \eta_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathcal{S}$ mit zugehörigem Anteilsprozeß $(\pi_t)_{t \in [0, \infty)}$, Wertprozeß $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ und neuem Wertprozeß $(V_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ gegeben. Die Prozesse $(\tilde{S}_t^1)_{t \in [0, \infty)}$, $(\tilde{S}_t^2)_{t \in [0, \infty)}$ und $(\tilde{X}_t)_{t \in [0, \infty)}$ seien wie in Abschnitt 2.1 definiert, und es sei wieder $M_t = \sup\{k : \tau_k < t\}$.

Des weiteren setzen wir für $i = 1, 2$ und $\pi^2, \eta^2 \in (0, 1)$

$$\tilde{A}^i(\pi^2, \eta^2) = A^i((1 - \pi^2, \pi^2)^T, (1 - \eta^2, \eta^2)^T), \quad (221)$$

wobei A^i die in Definition 1.2.9 eingeführte Art des Handels ist.

2.2.1 Satz

Es seien

$$\tilde{\mu} = \mu_2 - \mu_1 + \sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{21} - \sigma_{12}\sigma_{22}, \quad (222)$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{(\sigma_{21} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{12})^2}, \quad (223)$$

$$\tilde{W}_t = \frac{1}{\tilde{\sigma}}((\sigma_{21} - \sigma_{11})W_t^1 + (\sigma_{22} - \sigma_{12})W_t^2), \quad (224)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(\pi^2, \eta^2) &= \log \frac{1 - \delta + \gamma_1 \tilde{A}^1(\pi^2, \eta^2)(1 - \pi^2) + \gamma_2 \tilde{A}^2(\pi^2, \eta^2)\pi^2}{1 + \gamma_1 \tilde{A}^1(\pi^2, \eta^2)(1 - \eta^2) + \gamma_2 \tilde{A}^2(\pi^2, \eta^2)\eta^2} \\ &\text{für alle } \pi^2, \eta^2 \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (225)$$

Dann ist $(\widetilde{W}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein Wienerprozeß und es gilt

$$d\widetilde{S}_t^2 = \widetilde{\mu}\widetilde{S}_t^2 dt + \widetilde{\sigma}\widetilde{S}_t^2 d\widetilde{W}_t, \quad (226)$$

$$\begin{aligned} \pi_t^2 &= \pi_0^2 + \int_{[0,t]} \pi_s^2(1 - \pi_s^2)(\widetilde{\mu} - \widetilde{\sigma}^2\pi_s^2)ds \\ &\quad + \int_{[0,t]} \pi_s^2(1 - \pi_s^2)\widetilde{\sigma}d\widetilde{W}_s + \sum_{k=0}^{M_t} (\eta_k^2 - \pi_{\tau_k}^2) \end{aligned} \quad (227)$$

$$\log \widetilde{X}_t = \log \widetilde{X}_0 + \int_{[0,t]} \pi_s^2(\widetilde{\mu} - \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2\pi_s^2)dt \quad (228)$$

$$+ \int_{[0,t]} \widetilde{\sigma}\pi_s^2 d\widetilde{W}_s + \sum_{k=0}^{M_t} \overline{\Gamma}(\pi_{\tau_k}^2, \eta_k^2). \quad (229)$$

Beweis:

Alle Aussagen bis auf die angegebene Darstellung von $\log X_t$ ergeben sich exakt wie in Satz 2.1.4. Ebenfalls wie in Satz 2.1.4 ergibt sich

$$\log \widetilde{X}_t = \log V_k + \int_{[0,t]} \widetilde{\mu}\pi_s^2 ds + \int_{[0,t]} \widetilde{\sigma}\pi_s^2 d\widetilde{W}_s - \int_{[0,t]} \frac{1}{2}\widetilde{\sigma}^2(\pi_s^2)^2 ds. \quad (230)$$

Gemäß Satz 1.2.6 (ii) gilt

$$V_k = \frac{1 - \delta + \gamma_1 A_k^1 \pi_{\tau_k}^1 + \gamma_2 A_k^2 \pi_{\tau_k}^2}{1 + \gamma_1 A_k^1 \eta_k^1 + \gamma_2 A_k^2 \eta_k^2}, \quad (231)$$

wobei in der nun verwendeten Notation $A_k^i = \widetilde{A}^i(\pi_{\tau_k}, \eta_k)$ für $i = 1, 2$ gilt. Wegen $\pi_{\tau_k}^1 = 1 - \pi_{\tau_k}^2$ und $\eta_k^1 = 1 - \eta_k^2$ ergibt sich somit

$$V_k = \frac{1 - \delta + \gamma_1 \widetilde{A}^1(\pi_{\tau_k}^2, \eta_k^2)(1 - \pi_{\tau_k}^2) + \gamma_2 \widetilde{A}^2(\pi_{\tau_k}^2, \eta_k^2)\pi_{\tau_k}^2}{1 + \gamma_1 \widetilde{A}^1(\pi_{\tau_k}^2, \eta_k^2)(1 - \eta_k^2) + \gamma_2 \widetilde{A}^2(\pi_{\tau_k}^2, \eta_k^2)\eta_k^2}, \quad (232)$$

insgesamt erhalten wir somit die in der Behauptung angegebene Darstellung für $\log \widetilde{X}_t$.

Exakt wie in Lemma 2.1.5 kann gezeigt werden, daß bei der Suche nach einer optimalen Strategie der Wertprozeß $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ durch den oben eingeführten transformierten Wertprozeß $(\widetilde{X}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ersetzt werden kann. In Verbindung mit Satz 2.2.1 folgt, daß sich das zu lösende Optimierungsproblem von dem von Irle und Sass(2006) behandelten allein in der Gestalt der jeweils in der Darstellung des Wertprozesses auftretenden Funktion $\overline{\Gamma}$ unterscheidet. Wir wollen nun zunächst

eine einfachere Darstellung von $\bar{\Gamma}$ angeben, und können dann in Analogie zum genannten Artikel anstelle von $\bar{\Gamma}$ eine modifizierte Funktion Γ verwenden, mit der sich das Problem schließlich lösen läßt.

Im folgenden seien

$$k_1 = \frac{1 - \gamma_1}{1 - \delta - \gamma_1}, \quad k_2 = \frac{1 - \gamma_2}{1 - \delta - \gamma_2}. \quad (233)$$

2.2.2 Lemma

(i) Für alle $x, y \in [0, 1]$ gilt

$$\tilde{A}^1(x, y) = \text{sign}((1 - y) - k_2(1 - x)), \quad (234)$$

$$\tilde{A}^2(x, y) = \text{sign}(y - k_1x) \quad (235)$$

und somit

$$\bar{\Gamma}(x, y) = \begin{cases} \log \frac{1 - \delta + \gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2)x}{1 + \gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2)y}, & \text{falls } y \leq k_2x - (k_2 - 1), \\ \log \frac{1 - \delta - \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1)x}{1 - \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1)y}, & \text{falls } y \in (k_2x - (k_2 - 1), k_1x), \\ \log \frac{1 - \delta - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)x}{1 - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)y}, & \text{falls } y \geq k_1x. \end{cases} \quad (236)$$

Beweis:

(i) Seien $x, y \in [0, 1]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{A}^1(x, y) &= \text{sign}((1 - y)(1 - \delta - \gamma_2) \left| \frac{y(1 - x)}{1 - y} - x \right| - (1 - x)) \\ &= \text{sign}((1 - y)(1 - \delta) - \gamma_2|x - y| - (1 - x)). \end{aligned} \quad (237)$$

Ist $x > y$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{A}^1(x, y) &= \text{sign}((1 - y)(1 - \delta - \gamma_2) - (1 - x)(1 - \gamma_2)) \\ &= \text{sign}((1 - y) - k_2(1 - x)). \end{aligned} \quad (238)$$

Ist $x \leq y$, so gilt (unter Beachtung von $k_2 > 1$)

$$\begin{aligned} \tilde{A}^1(x, y) &= \text{sign}((x - y)(1 + \gamma_2) - (1 - y)\delta) \\ &= -1 \\ &= \text{sign}((1 - y) - k_2(1 - x)). \end{aligned} \quad (239)$$

Die in der Behauptung angegebene Darstellung für \tilde{A}^2 ergibt sich analog. Die angegebene Darstellung für $\bar{\Gamma}$ folgt nun durch Einsetzen in (225).

2.2.3 Lemma

Für $x, y \in [0, 1]$ sei

$$\Gamma(x, y) = \begin{cases} \log \frac{1 - \delta + \gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2)x}{1 + \gamma_1 - (\gamma_1 + \gamma_2)y}, & \text{falls } y \leq x, \\ \log \frac{1 - \delta - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)x}{1 - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)y}, & \text{falls } y > x. \end{cases} \quad (240)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}(x, y) &< \Gamma(x, y), \text{ falls } y \in (k_2x - (k_2 - 1), k_1x). \\ \bar{\Gamma}(x, y) &= \Gamma(x, y), \text{ falls } y \notin (k_2x - (k_2 - 1), k_1x).\end{aligned}\quad (241)$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst $\bar{\Gamma}(x, y) < \Gamma(x, y)$ für alle $x, y \in (0, 1)$ mit $y \in (x, k_1x)$. Sei dazu $x \in [0, 1]$ fest und

$$f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1 - \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1)y}{1 - \delta - \gamma_1 - (\gamma_2 - \gamma_1)x} - \frac{1 - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)y}{1 - \delta - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)x}. \quad (242)$$

Dann gilt für alle $y \in (0, 1)$

$$f'(y) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{1 - \delta - \gamma_1 + (\gamma_1 - \gamma_2)x} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{1 - \delta - \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2)x} < 0, \quad (243)$$

da für konstantes $c > 0$ die Abbildung $z \mapsto \frac{z}{c-z}$ monoton auf $(-\infty, c)$ ist.

Des weiteren ist $f(k_1x) = 0$, also gilt $f(y) > 0$ und somit $\bar{\Gamma}(x, y) < \Gamma(x, y)$ für alle $y \in (x, k_1x)$.

Für $y \in (k_2x - (k_2 - 1), x]$ läßt sich die Ungleichung $\bar{\Gamma}(x, y) < \Gamma(x, y)$ unter Beachtung von $1 - y \in (1 - x, k_2(1 - x))$ analog nachweisen. Die Gleichheit $\bar{\Gamma}(x, y) = \Gamma(x, y)$ für $y \notin (k_2x - (k_2 - 1), k_1x)$ gilt direkt nach Definition.

Im folgenden werden wir ein modifiziertes Problem betrachten, welches sich dadurch ergibt, daß in der Darstellung des Wertprozesses in Satz 2.2.1 die Funktion $\bar{\Gamma}$ durch Γ ersetzt wird. Dies läßt sich folgendermaßen rechtfertigen. Zu einer NW-Strategie K seien $\bar{R}(K)$ bzw. $R(K)$ die asymptotischen Renditen aus dem ursprünglichen bzw. aus dem modifizierten Portfoliooptimierungsproblem. Wir werden später zeigen, daß die optimale Strategie für das modifizierte Problem eine KG-Strategie $K^* = (a, \alpha, \beta, b)$ ist. Falls die Bedingungen

$$\alpha \geq k_1a, \quad 1 - \beta \geq k_2(1 - b) \quad (\Leftrightarrow \beta \leq k_2b - (k_2 - 1)) \quad (244)$$

erfüllt sind, so gilt gemäß Lemma 2.2.3 für jede NW-Strategie K

$$\bar{R}(K) \leq R(K) \leq R(K^*) = \bar{R}(K^*), \quad (245)$$

also ist K^* dann auch eine optimale Strategie für das ursprüngliche Problem.

Wir wollen nun das Vorgehen von Irle und Sass(2006) auf die vorliegende Situation übertragen. Im folgenden sei \mathcal{L} der infinitesimale Generator des Anteilprozesses ohne Handel, d.h.

$$\mathcal{L}v(x) = x(1 - x)(\tilde{\mu} - \tilde{\sigma}^2x)v'(x) + \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2x^2(1 - x)^2v''(x). \quad (246)$$

Mit einem Hamilton-Jacobi-Bellman-Ansatz ergeben sich die folgenden hinreichenden Bedingungen für die Optimalität einer KG-Strategie.

2.2.4 Satz

Sei (a, α, β, b) eine KG-Strategie. Falls eine beschränkt stetig differenzierbare, stückweise zweimal stetig differenzierbare Funktion $v : (0, 1) \mapsto \mathbb{R}$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\mathcal{L}v(x) + h(x) - \lambda \leq 0 \text{ für alle } x \in (0, 1) \quad (247)$$

$$v(y) - v(x) + \Gamma(x, y) \leq 0 \text{ für alle } x, y \in (0, 1) \quad (248)$$

$$\mathcal{L}v(x) + h(x) - \lambda = 0, \quad x \in (a, b) \quad (249)$$

$$v(\beta) - v(b) + \Gamma(b, \beta) = 0, \quad (250)$$

$$v(\alpha) - v(a) + \Gamma(a, \alpha) = 0, \quad (251)$$

so ist (a, α, β, b) Lösung des modifizierten Portfoliooptimierungsproblems. Gilt $\alpha \geq k_1 a$ und $(1 - \beta) \geq k_2(1 - b)$, so ist diese Strategie also auch Lösung des ursprünglichen Portfoliooptimierungsproblems.

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich exakt wie in Theorem 4.1 und Remark 4.2 in Irle und Sass(2006).

Unser Ziel ist nun die Konstruktion solcher $a, \alpha, \beta, b, \lambda, v$, die (247)-(251) erfüllen. Wir unterstellen im folgenden zunächst

$$\hat{\eta} := \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}^2} \in (0, 1), \quad \hat{\eta} \neq \frac{1}{2}. \quad (252)$$

Des weiteren sei wie in Abschnitt 2.1

$$R_1 = \tilde{\mu} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2. \quad (253)$$

Für jedes $c \in (0, 1)$ wird (bis auf eine Konstante) eine Lösung v_c der Differentialgleichung $\mathcal{L}v(x) + h(x) - \lambda = 0$ charakterisiert durch ihre Ableitung

$$v'_c(x) = \frac{\left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\hat{\eta}-1}}{x(1-x)R_1} \left((\lambda - R_1 x) \left(\frac{x}{1-x}\right)^{2\hat{\eta}-1} - (\lambda - R_1 c) \left(\frac{c}{1-c}\right)^{2\hat{\eta}-1} \right). \quad (254)$$

Wir geben für die gesuchte Funktion v folgende Struktur vor:

$$v(x) = \begin{cases} v_c(\alpha) + \Gamma(x, \alpha), & \text{falls } x \leq a, \\ v_c(x), & \text{falls } x \in (a, b), \\ v_c(\beta) + \Gamma(x, \beta), & \text{falls } x \geq b. \end{cases} \quad (255)$$

Es sollen nun zunächst notwendige Bedingungen an die Parameter $a, \alpha, \beta, b, \lambda, c$ hergeleitet werden.

Da v stetig differenzierbar sein soll, ergeben sich die Bedingungen

$$v_c(b-) = v(b), \quad v'_c(b-) = v'(b+), \quad (256)$$

$$v_c(a+) = v(a), \quad v'_c(a+) = v'(a-). \quad (257)$$

Aus (248), (250) und (251) folgt außerdem, daß die Abbildungen

$$x \mapsto v(x) - v(b) + \Gamma(b, x), \quad x \mapsto v(x) - v(a) + \Gamma(a, x)$$

in β bzw. α lokale Maxima haben, also gilt

$$v'_c(\beta) = -\frac{\partial}{\partial y}\Gamma(b, y)|_{y=\beta}, \quad (258)$$

$$v'_c(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial y}\Gamma(a, y)|_{y=\alpha}. \quad (259)$$

Im folgenden setzen wir

$$g(x) = v'_c(x) \quad (260)$$

und schreiben $g(x; c, \lambda)$, wenn darüber hinaus die Abhängigkeit von den Parametern c, λ ausgedrückt werden soll. Schließlich setzen wir

$$\gamma_s = \gamma_1 + \gamma_2. \quad (261)$$

Die Bedingungen (256)-(259) lauten nun ausformuliert

$$g(b; c, \lambda) = -\frac{\gamma_s}{1 - \delta + \gamma_1 - \gamma_s b}, \quad (262)$$

$$g(\beta; c, \lambda) = -\frac{\gamma_s}{1 + \gamma_1 - \gamma_s \beta}, \quad (263)$$

$$\int_{\beta}^b g(x; c, \lambda) dx = \log \frac{1 - \delta + \gamma_1 - \gamma_s b}{1 + \gamma_1 - \gamma_s \beta}, \quad (264)$$

$$g(a; c, \lambda) = \frac{\gamma_s}{1 - \delta - \gamma_1 + \gamma_s a}, \quad (265)$$

$$g(\alpha; c, \lambda) = \frac{\gamma_s}{1 - \gamma_1 + \gamma_s \alpha}, \quad (266)$$

$$\int_{\alpha}^a g(x; c, \lambda) dx = -\log \frac{1 - \delta - \gamma_1 + \gamma_s a}{1 - \gamma_1 + \gamma_s \alpha}. \quad (267)$$

Die obigen Bedingungen unterscheiden sich von den entsprechenden von Irle und Sass(2006) erhaltenen (in dieser Arbeit in (206)-(211) angegebenen) nur im jeweiligen Auftreten eines zusätzlichen Summanden γ_1 bzw. $-\gamma_1$ auf den rechten Seiten der Gleichungen. Das Vorgehen aus dem genannten Artikel läßt sich nun ohne (inhaltliche) Änderungen übertragen, es ist lediglich jeweils der zusätzliche Summand in den Rechnungen zu berücksichtigen, was aber an keiner Stelle zu Problemen führt. Daher können wir nun in Analogie zu Satz 2.1.6 und Satz 2.1.7 auch für das in diesem Abschnitt betrachtete Modell die optimale Lösung charakterisieren.

2.2.5 Satz

Es existieren eindeutig bestimmte $c^* \in (0, 1)$, $\lambda^* \in \mathbb{R}$, $0 < a < \alpha < \beta < b < 1$ so, daß die Gleichungen (262)-(267) erfüllt sind.

2.2.6 Satz

Seien a, α, β, b die Parameter aus Satz 2.2.5 und $K^* = (a, \alpha, \beta, b)$. Gilt $\alpha \geq k_1 a$ und $1 - \beta \geq k_2(1 - b)$, so ist K^* Lösung des Portfoliooptimierungsproblems, d.h.

$$R^{K^*} = \sup_{K \text{ NW-Strategie}} R^K, \quad (268)$$

und λ^* ist die zugehörige asymptotische Rendite.

2.2.7 Bemerkung

Analog zu Bemerkung 2.1.8 kann Satz 2.2.6 auf den Fall $\hat{\eta} = \frac{1}{2}$ übertragen werden.

3 Arbitragefreiheit unter proportionalen Transaktionskosten

Die Notwendigkeit der Einbeziehung von Transaktionskosten in das in den ersten beiden Kapiteln verwendete Modell wurde vor allem damit begründet, daß das Portfoliooptimierungsproblem im Fall ohne Transaktionskosten zu einer praktisch nicht einmal von der Struktur her umsetzbaren Lösung führte. Ein weiteres gewichtiges Argument zur Einbeziehung von Transaktionskosten in die Modellierung von Finanzmärkten könnte darin bestehen, daß durch deren Berücksichtigung gegebenenfalls Arbitragemöglichkeiten eliminiert werden könnten, wodurch eine größere Klasse von Preisprozessen zur Modellierung verwendet werden könnte. Dieser Frage wollen wir uns in diesem (sehr kurzen) abschließenden Kapitel zuwenden. Da wohlbekannt ist, daß das in den ersten beiden Kapiteln verwendete Modell schon ohne Transaktionskosten arbitragefrei ist (siehe z.B. Irle(2003, Kap.13)), verlassen wir nicht nur Problemstellung sondern auch den Modellrahmen der ersten beiden Kapitel.

In den klassischen Finanzmarktmodellen werden üblicherweise Semimartingale zur Modellierung von Aktienkursen verwendet. Die Verwendung anderer stochastischer Prozesse führt in friktionslosen Märkten zu Problemen, da sich zeigen läßt, daß alle Prozesse außer Semimartingalen dort zwingend zu unerwünschten Arbitragephänomenen führen, siehe etwa Delbaen und Schachermayer(1994, Theorem 7.2). Jedoch sprechen viele in empirischen Daten auffindbare Effekte für die Verwendung von Prozessen, die keine Semimartingale sind. So lassen sich z.B. Langzeitabhängigkeiten zwischen Aktienrenditen gut mit der Zugrundelegung einer Fraktionalen Brownsche Bewegung erfassen, welche im allgemeinen (für Hurst-Parameter $H \neq \frac{1}{2}$) kein Semimartingal ist; in der Literatur wurde bereits in diversen Arbeiten explizit für Fraktionale Brownsche Bewegung die Existenz von Arbitragemöglichkeiten nachgewiesen, siehe z.B. Rogers(1997), Salopek(1998), Cheridito(2003).

Es stellt sich also die Frage, wie dieser scheinbare Widerspruch zwischen Theorie und Praxis durch die Integration weiterer Aspekte des realen Handels in die entsprechenden Modelle aufgelöst werden kann. Die Minderung des Profits eines Investors durch Einbeziehung von Transaktionskosten ist dabei ein sicherlich sehr naheliegender Ansatz. Tatsächlich zeigt Guasoni(2006), daß in einer großen Klasse von Preisprozessen bereits unter proportionalen Transaktionskosten keine Arbitragemöglichkeiten bestehen können.

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, daß dieses Resultat sogar unter einem schwächeren Arbitragebegriff als dem von Guasoni verwendeten Gültigkeit behält.

Wir betrachten ein Modell bestehend aus einem Bond und einer Aktie. Wir unterstellen der Einfachheit halber eine Zinsrate $r = 0$ und somit einen Bondpreis konstant gleich 1, was sich rechtfertigen läßt, indem man alle Preise als Forwardpreise auffaßt. Der Aktienpreisprozeß $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ sei ein strikt positiver, zu einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ adaptierter stochastischer Prozeß, dessen sämtliche Pfade cadlag (d.h. rechtsseitig stetig mit existierenden linksseitigen Grenzwerten) sind. Des weiteren fordern wir aus technischen Gründen, daß $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ quasi-linksstetig ist, d.h. für jede previsible Stopzeit τ gelte $X_\tau = X_{\tau-}$.

Bevor wir die zur Beschreibung des Handels erforderlichen Begriffe formal definieren, geben wir zur Motivation einige heuristische Erläuterungen und Vorüberlegungen an. Wir betrachten im folgenden ausschließlich selbstfinanzierende Handelsstrategien, diese können (bei gegebenem Startkapital) schon vollständig durch die Anzahl der zu jedem Zeitpunkt t gehaltenen Aktien $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$ charakterisiert werden. Jeder An- und Verkauf von Aktien führt zu einer entsprechenden gegenläufigen Buchung gleichen Wertes auf dem Bondkonto und außerdem zu einer Abbuchung eines festen proportionalen Anteils des Wertes der Transaktion, $kX_t|\Delta\theta_t|$ ($k \in (0, 1)$). Da Strategien $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$ von unbeschränkter Variation auf einem Zeitintervall $[0, t]$ zu unendlich hohen Kosten führten, genügt es, Strategien von lokal beschränkter Variation zu betrachten. Wir können dann den Wertprozeß zu einer Handelsstrategie einführen als

$$V_t = \int_{[0, t]} \theta_s dX_s - \int_{[0, t]} kX_s d|D\theta|_s. \quad (269)$$

Dabei bezeichne $|D\theta|_s$ (pfadweise) die Totalvariation von $(\theta_r)_{r \in [0, s]}$, und das zweite Integral sei als gewöhnliches Stieltjes-Integral definiert. Da wir die Klasse der Semimartingale als Preisprozesse verlassen haben, können wir zur formalen Definition des ersten Integrals nicht auf das gewöhnliche stochastische Integral zurückgreifen. Da wir als Integranden jedoch nur Prozesse von lokal beschränkter Variation betrachten, können wir das erste Integral bereits unter den oben an $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ gestellten Bedingungen sinnvoll definieren, und zwar sogar pfadweise. Es sei darauf hingewiesen, daß dieser nun eingeführte Integralbegriff mit dem gewöhnlichen stochastischen Integral zusammenfällt, wenn X ein Semimartingal ist, siehe Dellacherie und Meyer(1982, Kapitel VIII)

3.1 Definition

Sei $g : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ eine Cadlag-Funktion und $h : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ eine linksseitig stetige Funktion von lokal beschränkter Variation. Dann ist die Funktion $s \mapsto h(s+) = \lim_{t \downarrow s} h(t)$ rechtsseitig stetig und von lokal beschränkter Variation. Wir definieren für $-\infty < a < b < \infty$

$$\int_{[a, b]} h(s) dg(s) := h(b+)g(b) - h(a)g(a-) - \int_{[a, b]} g(s) dh(s+), \quad (270)$$

wobei das Integral auf der rechten Seite ein gewöhnliches Stieltjes-Integral sei. Ist g von lokal beschränkter Variation, so fällt das in (270) definierte Integral mit dem entsprechenden Stieltjes-Integral zusammen, siehe z.B. Hewitt und Stromberg(1965, Theorem 21.67). Wir müssen also in der Notation im folgenden nicht zwischen diesen Integralbegriffen unterscheiden.

Der oben eingeführte Integralbegriff kann auch auf beliebiges h von lokal beschränkter Variation ausgedehnt werden, jedoch zeigt Guasoni(2002, Proposition 2.5), daß für jeden previsible Prozeß $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$, jeden Prozeß $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$, der den oben genannten Bedingungen genügt, und jedes $t > 0$ unter der Konvention $\theta_{0-} = 0$ gilt

$$\int_{[0,t]} \theta_s dX_s = \int_{[0,t]} \theta_{s-} dX_s. \quad (271)$$

Wir können uns daher bei der nun erfolgenden Formalisierung des Handels auf linksseitig stetige Handelsstrategien beschränken und den Integralbegriff aus Definition 3.1 zugrundelegen.

3.2 Definition

Eine Handelsstrategie ist ein adaptierter, linksseitig stetiger Prozeß von lokal beschränkter Variation. Sei $k \in (0, 1)$ der Transaktionskostenfaktor. Der Wertprozeß $(V_t)_{t \in [0, \infty)}$ zu einer Handelsstrategie $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$ ist gegeben durch

$$V_t = \int_{[0,t]} \theta_s dX_s - \int_{[0,t]} k X_s d|D\theta|_s. \quad (272)$$

Eine Handelsstrategie heißt zulässig, wenn ein $M \in \mathbb{R}$ mit $V_t > M$ für alle $t \geq 0$ existiert. Eine zulässige Handelsstrategie heißt Arbitrage auf $[0, T]$, falls gilt

$$V_T \geq 0 \text{ } P\text{-f.s.}, \quad P(V_T > 0) > 0. \quad (273)$$

Schließlich heißt ein Modell arbitragefrei auf $[0, T]$, wenn keine Arbitrage auf $[0, T]$ existiert.

Es sei darauf hingewiesen, daß sich der hier eingeführte Wertprozeß von dem von Guasoni(2006) verwendeten darin unterscheidet, daß in der genannten Arbeit noch Liquidationskosten in Höhe von $kX_t\theta_t$ einbezogen werden. Die Einbeziehung von Liquidationskosten erscheint nicht zwingend, da zum Ende des betrachteten Zeithorizonts T die Aktien nicht unbedingt wieder verkauft werden. Zum einen ist denkbar, daß sie zur Erfüllung einer aus einer short position resultierenden Verpflichtung verwendet werden, die vor Beginn des im Modell betrachteten Zeitraumes eingegangen wurde. Zum anderen ist es ebenso denkbar, daß ein gegebener Aktienbestand aus spekulativen Gründen auch nach dem Zeitpunkt T gehalten werden soll.

Durch die Nichtberücksichtigung von Liquidationskosten erhalten wir insbesondere einen schwächeren Arbitragebegriff: Es sind nun auch solche Handelsstrategien eine Arbitrage, bei der einem negativen Betrag auf dem Bondkonto ein höherer positiver Betrag auf dem Aktienkonto gegenübersteht, der jedoch (aufgrund der Transaktionskosten) nicht ausreicht, um durch einen Verkauf sämtlicher Aktien den Fehlbetrag auf dem Bondkonto auszugleichen.

Der folgende Satz zeigt, daß wir auch mit diesem schwächeren Arbitragebegriff unter einer großen Klasse von Preisprozessen Arbitragefreiheit erhalten.

3.3 Satz

Sei $T > 0$ und $c := \frac{k}{3}$.

Es gelte

$$P\left(\sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{X_\tau}{X_t} - 1 \right| < c, \tau < T\right) > 0 \quad (274)$$

für alle Stopzeiten τ mit $P(\tau < T) > 0$.

Dann ist das betrachtete Finanzmarktmodell arbitragefrei auf $[0, T]$.

Beweis:

Sei $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$ eine Handelsstrategie mit $V_T \geq 0$. Wir setzen

$$\tau := T \wedge \inf\{t : \theta_t \neq 0\}, \quad (275)$$

$$\varepsilon_t := X_t - X_{\tau \wedge t} \text{ für alle } t \in [0, T], \quad (276)$$

$$X_{min} := \inf_{t \in [\tau, T]} X_t, \quad (277)$$

$$A := \left\{ \sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{X_\tau}{X_t} - 1 \right| < c \right\} \cap \{\tau < T\}. \quad (278)$$

Gilt $P(\tau < T) = 0$, so folgt

$$\theta_t = 0 \text{ für alle } t \in [0, T] \text{ } P\text{-f.s.}, \quad (279)$$

also ist $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$ dann keine Arbitrage auf $[0, T]$.

Gelte nun $P(\tau < T) > 0$. Nach Voraussetzung ist dann auch $P(A) > 0$. Auf A gilt $|\varepsilon_t| < cX_t$ für alle $t \in [0, T]$ und somit

$$\begin{aligned} V_T &= \int_{[\tau, T]} \theta_s dX_{\tau \wedge s} + \int_{[\tau, T]} \theta_s d\varepsilon_s - \int_{[\tau, T]} kX_s d|D\theta|_s \\ &= \theta_T \varepsilon_T - \int_{[\tau, T]} \varepsilon_s dD\theta_s - \int_{[\tau, T]} kX_s d|D\theta|_s \\ &< cX_T |\theta_T| + \int_{[\tau, T]} cX_s d|D\theta|_s - \int_{[\tau, T]} kX_s d|D\theta|_s \\ &\leq cX_T |D\theta|_T + (c - k)X_{min} |D\theta|_T \\ &= \frac{1}{3}k |D\theta|_T (X_T - 2X_{min}) \\ &< 0. \end{aligned} \quad (280)$$

Für die letzte Ungleichung beachte man dabei, daß auf A gilt $|D\theta|_T > 0$ sowie $(1 - c)X_T < X_\tau < (1 + c)X_{min}$, was

$$\frac{X_T}{X_{min}} < \frac{1 + c}{1 - c} < 2 \quad (281)$$

impliziert. Wegen $P(A) > 0$ folgt, daß $(\theta_t)_{t \in [0, \infty)}$ auch in diesem Fall keine Arbitrage auf $[0, T]$ ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß Guasoni(2006) mit dem von ihm verwendeten strengeren Arbitragebegriff (mit Einbeziehung von Liquidationskosten) ein dem obigen Satz entsprechendes Resultat erhält, wobei sich dort sogar die im allgemeinen etwas schwächere Bedingung

$$P\left(\sup_{t \in [\tau, T]} \left| \frac{X_\tau}{X_t} - 1 \right| < k, \tau < T\right) > 0 \quad (282)$$

als hinreichend für Arbitragefreiheit erweist. Er zeigt dann, daß diese Bedingung für eine große Klasse von Prozessen erfüllt ist. Es läßt sich jedoch mit unverändertem Beweis zeigen, daß diese Prozesse sogar die Bedingung (274) erfüllen. Zur Beschreibung der angesprochenen Klasse von Prozessen führen wir zunächst den Begriff des klebrigen Prozesses ein.

3.4 Definition

Ein progressiv-meßbarer Prozeß $(Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ heißt klebrig, wenn für alle $\varepsilon, T > 0$ und alle Stopzeiten τ mit $P(\tau < T) > 0$ gilt

$$P\left(\sup_{t \in [\tau, T]} |Y_\tau - Y_t| < \varepsilon, \tau < T\right) > 0. \quad (283)$$

Im folgenden genüge $(X_t)_{t \in [0, \infty)}$ weiterhin den zu Beginn dieses Abschnitts genannten Bedingungen.

3.5 Satz

Ist $(\log X_t)_{t \in [0, \infty)}$ klebrig, so ist Bedingung (274) für jedes $k > 0$ erfüllt; insbesondere ist dann also das von uns betrachtete Finanzmarktmodell arbitragefrei auf jedem Intervall $[0, T]$.

Beweis:

Siehe Guasoni(2006, Corollary 2.1), wobei die auftretende Konstante k durch $\frac{k}{3}$ zu ersetzen ist.

Das folgende aus der Arbeit von Guasoni(2006) übernommene Resultat zeigt, daß alle starken Markov-Prozesse, die einer technischen Zusatzbedingung genügen, und die Fraktionale Brownsche Bewegung klebrige Prozesse sind. Insbesondere

führt die Modellierung der logarithmierten Aktienkurse mit diesen Prozessen bei proportionalen Transaktionskosten also auch unter unserem schwächeren Arbitragebegriff zu einem arbitragefreien Modell.

3.6 Satz

Sei $Y_t := \log X_t$ für alle $t \in [0, \infty)$.

(i) Ist $(Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein starker Markov-Prozeß, und gilt für alle endlichen Stopzeiten τ und alle $y \in \mathbb{R}$

$$P(\inf\{t > 0 : Y_{\tau+t} = y\} = 0 | Y_\tau = y) = 1, \quad (284)$$

so ist $(Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ klebrig.

(ii) Sei $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ stetig, $\sigma > 0$, $(B_t^H)_{t \in [0, \infty)}$ eine Fraktionale Brownsche Bewegung mit Hurst-Parameter $H \in (0, 1)$ und schließlich

$$Y_t = f(t) + \sigma B_t^H \quad (285)$$

für alle $t \in [0, \infty)$. Dann ist $(Y_t)_{t \in [0, \infty)}$ klebrig.

Beweis:

Siehe Guasoni(2006, Proposition 3.1 und 5.1).

Literaturverzeichnis

Alsmeyer, G.(1991): Erneuerungstheorie,
Teubner

Bauer, H.(1990): Maß- und Integrationstheorie,
de Gruyter

Cheridito, P.(2003): Arbitrage in fractional brownian motion markets,
Finance and Stochastics 7, 533-553

Delbaen, F., Schachermayer, W.(1994): A general version of the fundamental theorem of asset pricing,
Mathematische Annalen 300, 463-520

Dellacherie, C., Meyer, P.-A.(1982): Probabilities and Potential B,
North-Holland Publishing Co.

Guasoni, P.(2006): No arbitrage under transaction costs, with fractional brownian motion and beyond,
Mathematical Finance 16, 569-582

Hewitt, E., Stromberg, K.(1965): Real and Abstract Analysis,
Springer

Irle, A.(2003): Finanzmathematik - Die Bewertung von Derivaten,
Teubner

Irle, A., Sass, J.(2006): Optimal portfolio policies under fixed and proportional transaction costs,
Advances in Applied Probability 38, 916-942

Janson, S.(1983): Renewal theory for m -dependent variables,
Annals of Probability 11, 558-568

Merton, R.C.(1969): Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous case,
Review of Economics and Statistics 51, 247-257

Morton, A.J., Pliska, S.R.(1995): Optimal portfolio management with fixed transaction costs,
Mathematical Finance 5, 337-356

Pinsky, R.G.(1995): Positive harmonic functions and diffusion,
Cambridge University Press

Rogers, L.C.G.(1997): Arbitrage with fractional brownian motion,
Mathematical Finance 7, 95-105

Salopek, D.M.(1998): Tolerance to arbitrage,
Stochastic Processes and their Applications 76, 217-230

Lebenslauf

- geboren am 22.06.1980 in Heidelberg
- August 1986 - Juni 1998: Schulbesuch in St.Peter-Ording
- Juni 1998: Abitur am Nordseegymnasium St.Peter-Ording
- August 1998 - August 1999: Zivildienst in Altenheimen in Hamburg und München
- Oktober 1999 - Februar 2005: Studium an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
- März 2004: Diplom in Mathematik (Note: mit Auszeichnung)
- Februar 2005: Diplom in Volkswirtschaftslehre (Note: sehr gut(1,1)), ausgezeichnet mit dem Erich-Schneider-Preis
- seit Februar 2005: Doktorand und wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Seminar der CAU Kiel

Erklärung

Ich versichere an Eides Statt, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt zu haben. Die einzigen Hilfsmittel waren die angegebene Literatur sowie der Rat meines akademischen Lehrers.

Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 10.07.07