

Lokalisierungen und Defekte in einer Spiral-Wirbelströmung

**Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel**

**vorgelegt von
Matti Heise**

**Kiel
14. Dezember 2007**

Referent:

Prof. Dr. G. Pfister

Koreferent:

Prof. Dr. H. G. Schuster

Tag der mündlichen Prüfung:

31. Januar 2008

Zum Druck genehmigt:

Kiel, 3. Februar 2008

.....

Der Dekan

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Hydrodynamik und nichtlineare Instabilitäten	5
2.1	Navier-Stokes-Gleichung	5
2.2	Das Taylor-Couette-System	6
2.3	Strukturbildung mittels hydrodynamischer Instabilitäten	8
2.3.1	Theorie dynamischer Systeme	9
2.3.2	Instabilitätsmechanismen	9
2.3.3	Stabilitätsanalyse für stationäre Zustände	10
2.3.4	Lokale Verzweigungstheorie	10
2.4	Konvektive und absolute Instabilität	13
2.4.1	Absolute Stabilität	13
2.4.2	Konvektive Instabilität	13
2.4.3	Absolute Instabilität	14
2.5	Taylor-Wirbelströmung	15
2.6	Spiral-Wirbelströmung	17
2.7	Symmetriebrechende Hopf-Verzweigung mit $O(2)$ -Symmetrie	19
2.7.1	Gebrochene Translationssymmetrie	20
2.7.2	Gebrochene Reflexionssymmetrie	22
3	Experimente und optische Messmethoden	23
3.1	Taylor-Couette-Experiment	23
3.2	Sichtbarkeitsmessungen	25
3.3	Laser-Doppler-Anemometrie	26
3.4	Zeitreihenaufnahme	28
3.5	Axiale Scans	28
4	Spiral-Wirbelströmung	32
4.1	Untersuchung mittels ortsfester Zeitreihen	32
4.2	Verzweigungsdiagramm	34
4.3	Untersuchung mittels axialer Scans	35
4.4	Frequenzabhängige Analyse	37
4.5	Stehende Wellen beim Einsatz der Spiralen	39

4.6	Zusammenfassung	42
5	Spiralen mit gebrochener Reflexionssymmetrie	43
5.1	Dynamik von Spiralen mit Durchfluss	44
5.2	Verzweigungsverhalten	45
5.3	Stabilitätsdiagramm	46
5.4	Modulierte Welle	48
5.5	Frequenzen	49
5.6	Zusammenfassung	50
6	Konkurrierende Moden	51
6.1	Spiral-Wirbelströmung und propagierende Taylorwirbel	51
6.2	Intermittenz	52
6.3	Stabilitätsdiagramm	53
6.4	Intermittenz im konvektiv und absolut instabilen Bereich	54
6.5	Zusammenfassung	56
7	Nichtlineare Spiralen	57
7.1	Ablösung des Defektes	57
7.2	P_+ -Zustand und P_+ -Defekt	63
7.3	Axialer Durchfluss	66
7.4	Stabilitätsdiagramm	70
7.5	Zusammenfassung	73
8	Lokalisierte Spiralen	74
8.1	Stehende Wellen (SW)	74
8.2	Lokalisierte Spiralen SPI_+	76
8.3	Lokalisierte Spiralen SPI_-	77
8.4	Verzweigungsverhalten von SPI_+	79
8.5	Verzweigungsverhalten von SPI_-	83
8.6	Stabilitätsdiagramm von SW, SPI_+ und SPI_-	86
8.7	Frequenzen von SW, SPI_+ und SPI_-	88
8.8	Einfluss rotierender Deckel	89
8.9	Lokalisierte Spiralen in längeren Systemen	91
8.10	Zusammenfassung	94
9	Retrograd rotierende Wellen	95
9.1	Rotierende Wellen	95
9.2	Stabilitätsdiagramm und Frequenzen	97
9.3	Einfluss azimuthaler Störungen	99
9.4	Zusammenfassung	103
10	Zusammenfassung	105

Kurzfassung

Ein klassisches Beispiel für ein nichtlineares komplexes System ist die Taylor-Couette-Strömung, die Strömung zwischen zwei konzentrisch rotierenden Zylindern. Das mathematische Modell für den Übergang zu der in dieser Arbeit untersuchten Spiral-Wirbelströmung in Form einer $O(2)$ -Symmetrie brechenden Hopf-Verzweigung, das besagt, dass hoch- und runterlaufende Spiralen global oder in Form einer Superposition auftreten können, galt bis vor wenigen Jahren als hinreichende Beschreibung für die experimentellen Beobachtungen im endlich langen System. Dieser Übergang ist aber prinzipiell komplizierter, weil eine in axialer Richtung laufende Welle im Experiment meist auf massive Deckelplatten trifft, die das endliche System in axialer Richtung begrenzen und zu einer inhomogenen Sekundärströmung führen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Spiral-Wirbelströmung in einer inhomogenen Grundströmung, wie sie durch die axialen Randbedingungen erzeugt wird. Der Fokus liegt auf der Analyse der raumzeitlichen Dynamik, des Verzweigungsverhaltens und der symmetriebrechenden Eigenschaften dieser Strömung im linearen und nichtlinearen Bereich.

Es konnte gezeigt werden, dass die Spiral-Wirbelströmung, die in einem ausreichend langen System als primäre Struktur aus der Grundströmung auftritt, stets zwei so genannte Ekman-Spiral-Defekte in der Nähe der beiden Deckelplatten beinhaltet, in denen prinzipiell beide Spiralmoden enthalten sind. Der eine Defekt erzeugt dabei die *Phase* der Spirale in der Nähe der einen Deckelplatte, die der andere Defekt entsprechend vernichtet. Das bedeutet, dass Spiralen niemals als reine globale Zustände auftreten. Ein axialer Durchfluss entfaltet die Verzweigungsstruktur dieser Spiral-Wirbelströmung, die symmetrisch bezüglich des axialen Durchflusses Re ist. Der symmetrische Fall ist Teil dieser Struktur, die sich in Form einer Hopf-Verzweigung mit erhaltener ($Re = 0$) oder gebrochener ($Re \neq 0$) Reflexionssymmetrie beschreiben lässt. Defekte bestimmen auch die Dynamik im nichtlinearen Parameterbereich *weit* entfernt von der Instabilität zur Spiral-Wirbelströmung, denn hier separiert ein solcher Defekt zwei in axialer Richtung laufende Spiralen räumlich. Die nichtlineare Modenkopplung der beiden Spiralen in diesem Defekt führt zu einer lokalisierten, stationären und axialsymmetrischen Mode, die unmittelbar mit seiner Existenz verbunden ist. Sein Auftreten erfolgt durch axiale Propagation dieses Defektes, die prinzipiell durch einen zusätzlichen axialen Durchfluss beeinflusst wird. Ein ausreichend 'starker' Durchfluss kann den Defekt vollständig aus dem System verdrängen. Die Defektpropagation ist dann Teil eines transienten Übergangsszenarios für einen Wechsel der Chiralität der Spirale. Lokalisierte Spiralen treten bei stärkerer Gegenrotation der Zylinder auf und werden nicht von der linearen Stabilitätsanalyse für den Fall unendlich langer Zylinder vorhergesagt. Der Übergang zu diesen lokalisierten Spiralen lässt sich in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung beschreiben, und ihr kritischer Punkt liegt stets unterhalb der linearen Stabilitätsschwelle für Spiralen. Diese lokalisierte Strömung, die ebenfalls aufgrund der Sekundärströmung in Form von Ekman-Spiral-Defekten existiert, unterscheidet sich in Wellenlänge und Frequenz von derjenigen aus der Stabilitätsanalyse im unendlich langen System. Ihre Ursache ist auf die Existenz der Deckelplatten zurückzuführen. Wellen können in der Taylor-Couette-Strömung auch retrograd rotieren, wie erstmals in dieser Arbeit gezeigt werden konnte. Die inhomogene Struktur der Grundströmung führt zu Defekten und lokalisierten Strukturen und bestimmt die Dynamik im linearen und nichtlinearen Bereich der Spiral-Wirbelströmung.

Abstract

A classical example for a nonlinear complex system is Taylor-Couette flow, i.e., the flow of a viscous fluid in the gap between two concentric, rotating cylinders. The transition from basic Couette flow to spiral vortex flow as studied in the present work has been modeled in form of an $O(2)$ symmetry breaking Hopf bifurcation towards up- and downward propagating spirals. Within this model, they can either appear as global spirals or in form of a superposition of both spirals. This has been considered as a sufficient description for the transition to spiral vortex flow in systems with finite axial length. However, the transition is generally more complicated, because pure axially traveling waves can not exist in systems with rigid end plates as often used in experiments to confine the fluid in axial direction. They induce an inhomogeneous secondary Ekman flow.

It is shown within this work that spiral vortices always include two so-called Ekman-spiral defects in the vicinity of the rigid end plates where both spiral modes coexist. One of the defects is generating the phase of the traveling spiral wave, whereas the other one is annihilating the phase. That implies, that spirals never appear as pure global states in real systems.

The bifurcation structure of spiral vortex flow is unfolded by an axial through flow Re and is symmetric with respect to this through flow. The symmetric case ($Re = 0$) is part of the whole bifurcation structure which can be described as a Hopf bifurcation with broken ($Re \neq 0$) reflection symmetry.

Defects separating two axially traveling spiral waves of different chirality determine the dynamic in the nonlinear parameter regime far away from the instability. Nonlinear mode coupling of these spirals leads to a localized, stationary, and axisymmetric mode. This mode is essential for the stability of the defect. It is generated by the phase generating spiral-Ekman defect and propagates into the bulk. This propagation is generally influenced by the axial through flow. A sufficiently strong through flow is able to blow the defect out of the system. This transient process is responsible for a change of the spiral chirality in an open flow.

Localized spirals appear at larger counter rotation rates of the cylinders and are not predicted by linear stability analysis for the case of cylinders with infinite length. They differ in wavelength and frequency from those spirals predicted by linear stability analysis. The transition towards these localized spirals can be described by a supercritical Hopf bifurcation which occurs always below linear instability. This localized flow only exists in the presence of a secondary circulation induced by rigid end plates.

As shown in this work for the first time, waves can also rotate retrogradely in Taylor-Couette flow. The inhomogeneous structure of the underlying basic flow induces defects and localized structures and determines the dynamic of spiral vortex flow in the linear and nonlinear regime.

Kapitel 1

Einleitung

Das Auftreten von Turbulenz ist bis heute ein großes ungelöstes Problem der Physik. Neben der grundsätzlichen Bedeutung als komplexes raumzeitliches Phänomen hat die Turbulenz eine enorme Relevanz in Anwendungen und Technologie. Die prinzipiellen Schwierigkeiten bei ihrem Verständnis resultieren aus der Nichtlinearität der zugrundeliegenden hydrodynamischen Grundgleichungen. Turbulenz wird in der aktuellen Forschung in unterschiedlichen hydrodynamischen Systemen, wie zum Beispiel in Scher- und Konvektionsströmungen, analysiert. Die Taylor-Couette-Strömung, die Strömung zwischen zwei konzentrischen rotierenden Zylindern, ist ein hydrodynamisches Testsystem und ein klassisches Beispiel für ein nichtlineares komplexes System. Es besitzt eine sehr einfache Geometrie und gilt als eines der am besten kontrollierbaren Experimente der Hydrodynamik. Darüber hinaus existiert mit der Navier-Stokes-Gleichung, die sogar als hinreichend für Turbulenz angesehen wird, eine mathematische Beschreibung der Hydrodynamik.

Besonders die Taylor-Wirbelströmung, die aufgrund einer Zentrifugalinstabilität der laminaren Grundströmung auftritt, zeigt im Experiment wegen der axialen Randbedingungen eine große Multiplizität von Lösungen, die im Fall von Chaos oder Turbulenz kompliziert miteinander wechselwirken können. Eine Strömung, in der unter der Annahme eines unendlich langen Systems nur zwei stabile Lösungen möglich sind, ist die Spiral-Wirbelströmung. Sie lässt sich als eine in azimuthaler Richtung rotierende und axiale Richtung laufende Welle auffassen und kann bei gegenrotierenden Zylindern auch als Folge der Zentrifugalinstabilität auftreten. Bis vor wenigen Jahren galt das mathematische Modell für den Übergang zur Spiral-Wirbelströmung unter Annahme unendlich langer Zylinder in Form einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung als hinreichende Beschreibung für die experimentellen Beobachtungen im endlich langen System. Aus theoretischer Sicht ist dieser Übergang jedoch prinzipiell komplizierter, weil eine in axiale Richtung laufende Welle in diesem Fall meist auf massive Deckelplatten trifft, die das endliche System axial begrenzen und somit die axiale Translationssymmetrie brechen. Mittlerweile hat sich sowohl experimentell als auch in numerischen Simulationen gezeigt, dass diese Symmetriebrechung insbesondere für 'kurze' Systeme von Bedeutung ist, weil dort statt laufender Spiralen stehende Wellen auftreten.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Spiral-Wirbelströmung in einer inhomogenen Grundströmung, wie sie durch die axialen Randbedingungen erzeugt wird. Der Fokus liegt auf

der Analyse der raumzeitlichen Dynamik, des Verzweigungsverhaltens und der symmetriebrechenden Eigenschaften dieser Strömung im linearen und nichtlinearen Bereich.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen: Im Anschluss an diese Einleitung wird in Kapitel 2 auf die Navier-Stokes-Gleichung zur quantitativen physikalischen Beschreibung der Strömung eingegangen werden. Es folgt die Vorstellung des verwendeten hydrodynamischen Systems, des Taylor-Couette-Systems. Anschließend wird eine qualitative Beschreibung von Übergängen mit Hilfe verzweigungstheoretischer Methoden sowie von konvektiven und absoluten Instabilitäten, einem Konzept, das das Anwachsverhalten von Störungen in offenen Systemen berücksichtigt, beschrieben. Es folgt die Präsentation der beiden wesentlichen Strömungszustände des Taylor-Couette-Systems, der Taylor-Wirbelströmung und der Spiral-Wirbelströmung, und endet mit der Betrachtung einer Hopf-Verzweigung bei Brechung unterschiedlicher Symmetrien.

In Kapitel 3 werden die verwendeten optischen Messmethoden und deren computergestützte Aufnahmen beschrieben. Ferner wird an dieser Stelle eine neue Analysemethode auf der Basis Doppler-verschobener Frequenzen präsentiert, mit deren Hilfe die raumzeitliche Dynamik der Strömung untersucht werden wird.

In Kapitel 4 werden eben diese raumzeitliche Dynamik sowie das Verzweigungsverhalten der Spiral-Wirbelströmung untersucht, die im Taylor-Couette-System bei gegenrotierenden Zylindern als erste Instabilität auftritt.

Im folgenden Kapitel 5 wird der Einfluss gebrochener Reflexionssymmetrie, realisiert durch einen axialen Durchfluss, bei diesem Übergang analysiert und mit theoretischen Erkenntnissen einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung mit gebrochener Reflexionssymmetrie verglichen.

Sehr viel komplexere raumzeitliche Dynamik ist Forschungsgegenstand der in Kapitel 6 beschriebenen Studie, in der ein intermittenter Strömungszustand untersucht wird, der sich durch einen irregulären Wechsel von insgesamt drei Moden auszeichnet.

In Kapitel 7 wird das Auftreten eines lokalisierten Defektes untersucht, der dazu in der Lage ist, zwei Spiralen unterschiedlicher Chiralität lokal voneinander zu separieren. Den Fokus dieses Kapitels bilden die Untersuchung des Verzweigungsverhaltens und die Erfassung der dynamischen Eigenschaften des lokalisierten Defektes.

Im Zuge des Kapitels 8 werden das Verzweigungsverhalten und die raumzeitliche Dynamik von lokalisierten Spiralen untersucht, die in Experiment und numerischer Simulation bei stärkerer Gegenrotation unter Berücksichtigung endlicher axialer Länge auftreten.

Da die in dieser Arbeit untersuchten Strömungszustände maßgeblich durch die Existenz von Deckelplatten bestimmt werden, wird in Kapitel 9 eine rotierende Welle studiert, die in sehr kurzen Systemen auftritt. Die Besonderheit dieses Strömungszustandes ist der Wechsel der Rotationsrichtung in Zusammenhang mit der Änderung des Verzweigungstyps von super- zu subkritisch.

Kapitel 2

Hydrodynamik und nichtlineare Instabilitäten

In diesem Kapitel soll zunächst auf die Navier-Stokes-Gleichung zur quantitativen physikalischen Beschreibung der Strömung eingegangen werden. Es folgt die Vorstellung des in der vorliegenden Arbeit verwendeten hydrodynamischen Systems, dem Taylor-Couette-System. Anschließend wird eine qualitative Beschreibung von Übergängen mit Hilfe der Verzweigungstheorie beschrieben. In Abschnitt 2.4 wird mit dem Konzept der konvektiven und absoluten Instabilitäten ein Modell präsentiert, welches das Anwachsverhalten von Störungen in offenen Systemen berücksichtigt. Es folgt die Beschreibung der beiden wesentlichen Strömungszustände, wie sie sowohl unter vereinfachten als auch unter physikalischen Randbedingungen in diesem System vorkommen. Dieses Kapitel endet mit einer Analyse der Eigenschaften einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung unter Berücksichtigung der entsprechenden Symmetrien.

2.1 Navier-Stokes-Gleichung

Als Teilgebiet der Mechanik befasst sich die Hydrodynamik mit den Eigenschaften von strömenden Flüssigkeiten. Dabei wird ausschließlich von Erscheinungen ausgegangen, die einen makroskopischen Charakter besitzen. Eine Grundgleichung der Hydrodynamik ist die Navier-Stokes-Gleichung, die aus der Kontinuitätsmechanik hervorgeht. Sie lässt sich aus den Newtonschen Gesetzen ableiten und ist im 19. Jahrhundert von C. Navier und G. Stokes formuliert worden [16, 17]:

$$\frac{d\vec{v}(\vec{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{x}, t) + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{1}{\rho} \vec{F}(\vec{x}, t). \quad (2.1)$$

Dabei ist:

- $\vec{v}(\vec{x}, t)$ Geschwindigkeit,
- $p(\vec{x}, t)$ Druck,
- ρ Dichte der Flüssigkeit,

η dynamische Viskosität,
 $\vec{F}(\vec{x}, t)$ externe Kraft.

Bei der Navier-Stokes-Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare, inhomogene Differentialgleichung, deren Lösbarkeit unmittelbar von den Randbedingungen des jeweiligen hydrodynamischen Systems abhängig ist. Auf der linken Seite von Gleichung (2.1) befindet sich die totale zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Auf der rechten Seite der Gleichung stehen zunächst die Kraft \vec{F} pro Dichte ρ aufgrund des Druckgradienten der Flüssigkeit und die innere Reibung durch die Viskosität der Flüssigkeit. Für inkompressible Flüssigkeiten wird zusätzlich noch die Kontinuitätsgleichung aufgestellt:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \nabla \vec{v}(x, t) = 0. \quad (2.2)$$

Häufig werden die Navier-Stokes-Gleichung in einer dimensionslosen Form aufgestellt. Diese dimensionslose Darstellung von typischen physikalischen Größen wird in der Hydrodynamik sehr häufig verwendet. Ein Beispiel für einen dimensionslosen Parameter ist die Reynoldszahl, die durch

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}. \quad (2.3)$$

definiert ist. Dabei sind U eine charakteristische Geschwindigkeit und L eine charakteristische Länge des Systems. Sie gibt ganz allgemein das Verhältnis von Trägheitskräften des Systems und der viskosen Kräften mit der kinematischen Viskosität ν an. Im Detail ist dieses Verhältnis spezifisch für die entsprechende physikalische Problemstellung. Im Allgemeinen treten bei kleinen Reynoldszahlen laminare Strömungen auf. Ein sehr berühmtes Beispiel ist dabei die Strömung durch ein Rohr, die im laminaren Bereich durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille mathematisch beschrieben wird. Aber auch in der Strömung einer Flüssigkeit zwischen zwei konzentrisch gelagerten, rotierbaren Zylindern, die als Taylor-Couette-Strömung bezeichnet wird und die den Gegenstand der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit darstellt, findet man bei kleinen Reynoldszahlen eine laminare Grundströmung, die als Couette-Strömung bezeichnet wird. Neben dieser Strömung tritt in der Taylor-Couette-Strömung eine große Vielzahl weiterer Strömungsformen auf [18–20].

2.2 Das Taylor-Couette-System

Das Taylor-Couette-System ist eines der klassischen Testsysteme der Hydrodynamik und der Physik nichtlinearer Systeme. M.M. Couette [21] und A. Mallock [22] haben das Taylor-Couette-System ursprünglich konzipiert, um die Viskosität von Flüssigkeiten zu bestimmen. Erst später ist dieser Versuchsaufbau dann von G.I. Taylor [23] zur Untersuchung von Strömungsinstabilitäten verwendet worden.

Das Taylor-Couette-System ist eines der am besten kontrollierbaren hydrodynamischen Experimente [18, 20, 24]. Es besteht aus zwei konzentrisch gelagerten Zylindern unterschiedlicher

Radien. Aufgrund der unterschiedlichen Radien entsteht im Raum zwischen den beiden Zylindern mit den Radien r_i (Innenzylinder) und r_a (Außenzylinder) ein Spalt der Breite $d = r_a - r_i$, in dem sich im Allgemeinen eine viskose und inkompressible Flüssigkeit befindet.

In Abbildung 2.1(a) ist ein solches System schematisch dargestellt. Bei der Rotation des Innen- oder Außenzylinders wird die viskose inkompressible Flüssigkeit aufgrund der Haftung an den Zylinderoberflächen in Abhängigkeit von ihrer Zähigkeit mitgezogen. Zusammen mit der normierten Länge des Systems $\Gamma = \frac{L}{d}$, die durch das Verhältnis von Länge L zu Spaltbreite d definiert wird, ist das Radienverhältnis $\eta = \frac{r_i}{r_a}$ ein wichtiger dimensionsloser geometrischer Parameter des Systems. In der Theorie werden häufig Systeme mit einer unendlichen Länge betrachtet. Für die numerische Untersuchung dieser unendlichen Systeme werden meist axial periodische Randbedingungen angenommen, beispielsweise in [18, 20, 25].

Unendlich lange Systeme sind in der Realität nicht möglich und experimentelle Realisierungen besitzen häufig oben und unten massive Deckelplatten, die das System in axialer Richtung begrenzen. Eine Vielzahl von experimentellen und auch numerischen Untersuchungen hat jedoch gezeigt, dass die Existenz der Deckelplatten und die Höhe des Systems einen wesentlichen Einfluss auf das Verzweigungsverhalten und die Dynamik der Strömung haben, z.B. [26–31].



Abbildung 2.1: Schematische Darstellung eines Taylor-Couette-Systems mit rotierenden Zylindern (a), mit rotierenden Deckelplatten (b) und mit zusätzlichem axialen Durchfluss (c).

Neben den bereits genannten geometrischen Parametern des Taylor-Couette-Systems lässt sich bei der Betrachtung von unabhängig voneinander rotierenden Zylindern eine innere (Re_i) und eine äußere (Re_a) Reynoldszahl definieren.

- Innenzylinder-Reynoldszahl: $Re_i = \frac{\omega_i r_i d}{\nu}$
- Außenzylinder-Reynoldszahl: $Re_a = \frac{\omega_a r_a d}{\nu}$

Dabei bezeichnen $\omega_{i,a}$ die Rotationsgeschwindigkeit und $r_{i,a}$ den Radius des Innen- bzw. des Außenzylinders, d die Spaltbreite und ν die kinematische Viskosität des Fluides.

In dieser Arbeit werden neben dem soeben beschriebenen Taylor-Couette-System mit unabhängig voneinander rotierenden Zylindern auch zwei weitere Modifikationen dieses *klassischen* Systems verwendet.

Im ersten Fall besteht dabei die Möglichkeit, die im *klassischen* System stationären Deckelplatten sowohl unabhängig voneinander als auch unabhängig von beiden Zylindern rotieren zu lassen. Im Zuge dieser Arbeit sind die beiden Deckelplatten stets fest miteinander gekoppelt. Eine schematische Darstellung dieses Taylor-Couette-Systems befindet sich in Abbildung 2.1(b). Als zusätzlicher Kontrollparameter ergibt sich in diesem System die Rotationsfrequenz der beiden Deckelplatten ω_e , die in vorherigen Untersuchungen [32, 33] durch das Verhältnis zur Innenzylinder-Drehfrequenz dimensionslos angegeben worden ist $\Omega = \omega_e / \omega_i$.

Im zweiten Fall wird das *klassische* System dahingehend modifiziert, dass ein zusätzlicher axialer Durchfluss variabel eingestellt werden kann. Durch diese Modifikation ändert sich der Charakter der Strömung von einer geschlossenen zu einer offenen Strömung in dem Sinne, dass jedes Flüssigkeitsteilchen nun nicht mehr dauerhaft im System verweilt, sondern das System nach einer endlichen Zeit verlässt. Experimentell erfolgt dieser axiale Durchfluss durch einen konstanten Druckgradienten, der durch ein Ventil außerhalb des in Abbildung 2.1(c) schematisch dargestellten Systems in seiner Stärke eingestellt werden kann. Um den axialen Durchfluss zu realisieren, sind zudem durchlässige Deckelplatten notwendig, die, wie in Abbildung 2.1(c) angedeutet, eine Vielzahl von Löchern aufweisen. Diese Löcher in den beiden Deckelplatten sind dabei so angeordnet, dass sowohl radiale als auch azimuthale Geschwindigkeiten vermieden werden. Die Anordnung der Löcher in den Deckelplatten ist so gewählt, dass sich das typische Poiseuille-Geschwindigkeitsprofil bestmöglich einstellt. Zusätzlich sind beide Platten völlig identisch, um die Reflexionssymmetrie des Systems zu erhalten. Neben den bereits erwähnten geometrischen Kontrollparametern des Systems und der inneren und äußeren Reynoldszahl lässt sich die Stärke des axialen Durchflusses ebenfalls mit Hilfe der Reynoldszahl beschreiben:

- Durchfluss-Reynoldszahl: $Re = \frac{\bar{v}_z d}{\nu}$

Dabei ist \bar{v}_z die axiale Geschwindigkeit des Durchflusses, die über den gesamten Querschnitt ($A = \pi(r_a^2 - r_i^2)$) gemittelt ist.

2.3 Strukturbildung mittels hydrodynamischer Instabilitäten

Der Begriff der Stabilität spielt in der Hydrodynamik eine wesentliche Rolle. Dabei liegt die Konzentration bei der Erforschung hydrodynamischer Instabilitäten auf dem Verhalten des Fluids

bei Variation entsprechend zur Verfügung stehender Kontrollparameter. Je nach Stabilität einer Strömung können physikalische Störungen sowohl räumlich als auch zeitlich anwachsen oder gedämpft werden. Für den Fall, dass die Strömung instabil ist, bewirkt eine Störung den Übergang zu einem neuen stabilen Strömungszustand. Insbesondere die Untersuchung dieser Übergänge erweist sich dabei als wesentlich und gibt Aufschluss über den zugrundeliegenden Instabilitätsmechanismus. Es existiert eine Vielzahl von Instabilitätsmechanismen und hydrodynamische Instabilitätsphänomene in der Natur [34]. An dieser Stelle soll mit der Zentrifugalinstabilität ein Mechanismus vorgestellt werden, der wesentlich für das Verständnis der vorliegenden Arbeit ist. Die Theorie dynamischer Systeme bildet dabei die Grundlage für die Beschreibung von Instabilitäten.

2.3.1 Theorie dynamischer Systeme

In diesem Abschnitt sollen wichtige Begriffe der Theorie dynamischer Systeme präsentiert werden. Eine umfassende Darstellung dieser Theorie findet sich beispielsweise in [35–37]. Oftmals führt die Erhöhung der Reynoldszahl in laminaren Strömungen zu Instabilitäten. Das heißt, dass Störungen im System nicht weiter gedämpft werden sondern anwachsen können. Ein laminarer Strömungszustand geht dabei in einen anderen Zustand über und wird von einer Sekundärströmung überlagert. Dabei können ganz unterschiedliche physikalische Mechanismen für diese Instabilität ursächlich sein.

2.3.2 Instabilitätsmechanismen

Aufgrund der Haftung an den Rändern wird die Flüssigkeit bei der Drehung des Innenzylinders in Rotation versetzt. Bei Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit und damit der Reynoldszahl Re_i tritt in diesem System eine Zentrifugalinstabilität auf. Unter Vernachlässigung der Viskosität des Fluides ist dieses Muster jedoch bei jeder Rotationsgeschwindigkeit instabil und die Flüssigkeit strömt auch bei langsamer Rotation des Innenzylinders aufgrund der im Vergleich zu der am Außenzylinder höheren Zentrifugalkraft nach außen. Wird jedoch ein viskoses Fluid berücksichtigt, so bildet sich bei leichter Rotation des Innenzylinders zunächst eine laminare Scherströmung aus, die als Couette-Strömung bezeichnet wird. Eine Erhöhung der Reynoldszahl führt zu einer Zunahme der Zentrifugalkraft. Bei einer kritischen Reynoldszahl $Re_{i,c}$ folgt das Auftreten einer Instabilität und das System wird *überkritisch*. Die Strömung, die im überkritischen Fall auftritt, wird als Taylor-Wirbelströmung bezeichnet. Dabei wird der azimuthalen Couette-Strömung eine sekundäre Wirbelströmung mit sowohl radialer als auch axialer Geschwindigkeitskomponente überlagert. Es ergeben sich torusförmige Wirbel, die in axialer Richtung eine Periodizität aufweisen. In der Umgebung einer Instabilität wird das grundlegende Verhalten durch die Konkurrenz zweier unterschiedlicher Prozesse bestimmt. Dabei handelt es sich bei dem einen Prozess um einen dämpfenden und bei dem anderen um einen *treibenden*. Für den Fall von rotierenden Fluiden ist der treibende Instabilitätsmechanismus stets die Zentrifugalkraft. Zentrifugalinstabilitäten treten jedoch auch in Form von so genannten 'Görtler-Wirbeln' in der Grenzschicht von konkaven Flächen und in Form der 'Taylor-Dean-Strömung' in der Poiseuille-Strömung in gekrümmten Rohren auf (siehe dazu beispielsweise [38]).

In Abschnitt 2.1 ist mittels Gleichung (2.1) bereits die Navier-Stokes-Gleichung vorgestellt worden. In ganz allgemeiner Form kann man diese nichtlineare, inhomogene Differentialgleichung als

$$\frac{d\vec{x}(\vec{\mu}, t)}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}) \quad (2.4)$$

auffassen. Dabei ist $\vec{x}(\vec{\mu}, t)$ ein n -dimensionaler Vektor im Zustandsraum des Systems, $\vec{\mu}$ ein m -dimensionaler Vektor im Kontrollparameterraum und $\vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu})$ eine nichtlineare Funktion. Die Kontrollparameter μ_1 bis μ_m können laut Gleichung (2.4) die Zustände des Systems beeinflussen. Ein Kontrollparameter ist ein Parameter, der bestimmend für den Charakter der Flüssigkeitsbewegung ist und im Experiment variiert werden kann, z.B. die Reynoldszahl Re_i . Bereits durch die Änderung nur eines Kontrollparameters können in dem jeweiligen System ganz neue Zustände entstehen. Eine solche Zustandsänderung kann auf unterschiedliche Arten erfolgen. Oftmals geht diese anhand so genannter Verzweigungen vonstatten. Mit der Strömung durch ein Rohr existiert jedoch auch ein sehr berühmtes Beispiel, bei dem eine solche Zustandsänderung in Form von Verzweigungen bei Erhöhung des Kontrollparameters nicht zu beobachten ist [39, 40]. Die Verzweigungstheorie bietet dabei die Möglichkeit einer Klassifizierung von Zustandsänderungen. Aufgabe dieser Theorie ist es, kritische Werte μ_{krit} zu bestimmen, bei denen eine Lösung in eine andere übergeht. Oberhalb von μ_{krit} existieren dann neue Lösungen. Das ist von großer Wichtigkeit, weil in vielen hydrodynamischen Anwendungen eine qualitative Aussage über eine Änderung des Systems aussagekräftiger ist als eine quantitative Aussage. In hydrodynamischen Systemen können diese qualitativen Systemänderungen beispielsweise das Auftreten von Wirbeln oder Oszillationen sein.

2.3.3 Stabilitätsanalyse für stationäre Zustände

Für stationäre Zustände \vec{x}_s vereinfacht sich Gleichung (2.4) zu

$$\vec{F}(\vec{x}_s, \vec{\mu}) = \vec{0}. \quad (2.5)$$

Diese stationären Zustände können jedoch entweder stabil oder instabil sein. Zur Klassifizierung der Stabilität wird die zeitliche Entwicklung nach einer infinitesimalen Störung untersucht. Kehrt der gestörte Zustand nach einer gewissen Zeit wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurück, so spricht man von einem stabilen Zustand. Kehrt der gestörte Zustand nicht zurück in den Ausgangszustand, so bezeichnet man ihn als instabil. Mathematisch lässt sich die Stabilität mit Hilfe der Jacobi-Matrix berechnen.

Ein Zustand wird stabil genannt, wenn die Eigenwerte der Jacobi-Matrix ausschließlich negative Realteile besitzen. Sobald mindestens ein positiver Realteil existiert, wird der Zustand als instabil bezeichnet. Ist der Realteil eines oder mehrerer Eigenwerte der Jacobi-Matrix gleich Null, so ist diesen Zustand marginal instabil [36].

2.3.4 Lokale Verzweigungstheorie

Nachfolgend sollen zwei wesentliche Verzweigungstypen vorgestellt werden, die anhand einfacher mathematischer Modelle, so genannter Normalformen, beschrieben werden können.

Die im Folgenden vorgestellten Modelle werden eindimensionale Verzweigungstypen genannt, denn die Änderung nur eines Kontrollparameters μ führt bei ihnen zu einer qualitativen Änderung der Dynamik. Die in Abschnitt 2.3.3 erwähnte Jacobi-Matrix reduziert sich dabei für den eindimensionalen Fall auf die partielle Ableitung nach x . Allgemein gehen bei einem System aus Gleichung 2.4 unter Variation eines Kontrollparameters häufig nur sehr wenige Eigenwerte gleichzeitig durch Null und die gesamte Dynamik aus Gleichung 2.4 lässt sich auf diese niederdimensionale Untermannigfaltigkeit reduzieren.

- **Gabelverzweigung**

An dieser Stelle soll die Gabelverzweigung vorgestellt werden. Zur Veranschaulichung betrachtet man die folgende Normalform:

$$\dot{x} = F(x, \mu) = x\mu - x^3 = x(\mu - x^2). \quad (2.6)$$

Durch Nullsetzen von \dot{x} ergeben sich

$$x_{s1} = 0 \quad \text{und} \quad x_{s2,3} = \pm\sqrt{\mu}$$

als Gleichgewichtslösungen von Gleichung (2.6).

Mit der partiellen Ableitung nach x

$$\left. \frac{\partial F(x, \mu)}{\partial x} \right|_{x_s} = -3x^2|_{x_s} + \mu \quad (2.7)$$

liefert eine Stabilitätsanalyse für $\mu < 0$ die stabile Lösung $x_{s1} = 0$. Für $\mu > 0$ wird diese Lösung nach Gleichung (2.7) instabil, und es entstehen daraus die beiden stabilen Lösungen $x_{s2,3} = \pm\sqrt{\mu}$.

Die stabilen und instabilen Lösungen dieses Verzweigungstyps sind in dem Verzweigungsdiagramm in Abbildung 2.2 zu erkennen.

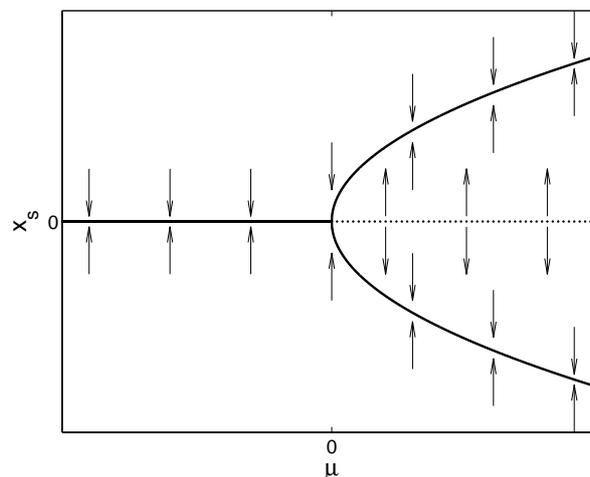


Abbildung 2.2: Verzweigungsdiagramm einer Gabel-Verzweigung. Die Pfeile deuten die Stabilität der entsprechenden Lösungen an.

- **Hopf-Verzweigung**

Bei dem bisher erwähnten Beispiel für ein Verzweigungsgrundmuster besitzt die Jacobi-Matrix ausschließlich reelle Eigenwerte. Die Jacobi-Matrix der Hopf-Verzweigung besitzt im Allgemeinen nicht nur reelle, sondern auch komplexe Eigenwerte. Dieser Verzweigungstyp ist nach dem Mathematiker E. Hopf benannt worden, der im Jahr 1942 den n-dimensionalen Fall dieser Verzweigung untersucht hat [41]. Die Normalform der Hopf-Verzweigung wird durch das folgende zweidimensionale Gleichungssystem

$$\dot{x} = -y + x\mu - x(x^2 + y^2) \quad (2.8)$$

$$\dot{y} = x + y\mu - y(x^2 + y^2) \quad (2.9)$$

dargestellt.

Zur Berechnung der Gleichgewichtszustände und deren Stabilität wird dieses gekoppelte Gleichungssystem in Polarkoordinaten transformiert, und es ergibt sich die folgende entkoppelte Darstellung:

$$\dot{r} = r(\mu - r^2) \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = 1. \quad (2.10)$$

Das Nullsetzen von \dot{r} in Gleichung (2.10) liefert die Gleichgewichtszustände

$$r_{s1} = 0 \quad \text{und} \quad r_{s2} = \sqrt{\mu}$$

und eine Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Jacobi-Matrix liefert für $\mu < 0$ die stabile Lösung $r_{s1} = 0$. Für $\mu > 0$ ist diese Lösung instabil und die Lösung $r_{s2} = \sqrt{\mu}$ ist stabil und führt im (x,y) -Zustandsraum zu einer geschlossenen Kurve, einem Grenzyklus. Das Verzweigungsdiagramm einer Hopf-Verzweigung ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

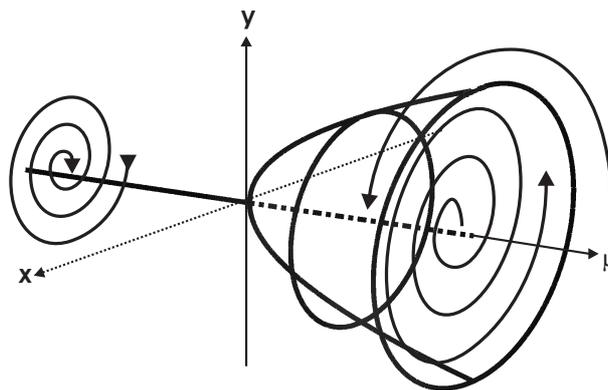


Abbildung 2.3: Verzweigungsdiagramm einer Hopf-Verzweigung. Die Pfeile an den Spiralen deuten die Stabilität der entsprechenden Lösungen an.

2.4 Konvektive und absolute Instabilität

Im Allgemeinen lassen sich hydrodynamische Systeme in offene und geschlossene Systeme klassifizieren. Ein geschlossenes System zeichnet sich dadurch aus, dass alle Flüssigkeitsteilchen in dem zu untersuchenden System verweilen. Bei einem offenen System hingegen verlässt jedes Flüssigkeitsteilchen nach einer endlichen Zeit das System und neue Teilchen gelangen hinein. Diese Eigenschaft eines offenen Systems verändert qualitativ das raumzeitliche Verhalten von Störungen, da auch diese in endlicher Zeit aus dem System propagieren können. Die Analyse von Instabilitäten in offenen Systemen erfordert die Berücksichtigung der dispersiven Eigenschaften bei der Ausbreitung einer Störung mit Hilfe des Konzeptes der konvektiven und absoluten Instabilitäten [42–44]. In den folgenden drei Abschnitten soll das raumzeitliche Verhalten einer identischen Anfangsstörung für einen absolut stabilen, konvektiv instabilen und absolut instabilen Grundzustand beschrieben werden. Die Störung soll bei diesen Darstellungen als ein raumzeitliches Wellenpaket aufgefasst werden, das mit der Gruppengeschwindigkeit v_g propagiert und die Amplitude A besitzt.

2.4.1 Absolute Stabilität

In Abbildung 2.4(a) ist die raumzeitliche Entwicklung einer Störung von einem Zeitpunkt t_1 zu einem darauf folgenden Zeitpunkt t_2 für den Fall eines absolut stabilen Grundzustandes schematisch dargestellt. Die Störung wird im Fall absoluter Stabilität gedämpft und das Anwachsverhalten der Amplitude A der Enveloppe des Wellenpaketes ist negativ. Aufgrund der Gruppengeschwindigkeit v_g ist das Wellenpaket räumlich von $z(t_1)$ (durchgezogene Linie) zu $z(t_2)$ (gestrichelte Linie) gewandert und im Zuge dieser Bewegung abgeklungen. Der gestörte Grundzustand geht im Fall absoluter Stabilität nach einer gewissen Zeit prinzipiell wieder in den ungestörten Grundzustand über.

2.4.2 Konvektive Instabilität

Im Gegensatz zum absolut stabilen Fall ist das Anwachsverhalten der Amplitude A der Enveloppe des Wellenpaketes eines konvektiv instabilen Grundzustandes stets, wie in Abbildung 2.4(b) schematisch dargestellt, positiv. Der Grundzustand ist auf jeden Fall instabil, weil hier die Störung prinzipiell anwächst. Das Anwachsverhalten ist allerdings nicht groß genug, um den Grundzustand auf Dauer räumlich zu destabilisieren. Das Wellenpaket ist somit zwar von t_1 (durchgezogene Linie) zu t_2 (gestrichelte Linie) angewachsen, die Amplitude der Störung klingt jedoch aufgrund der Gruppengeschwindigkeit v_g an jedem Ort $z(t)$ für $t \rightarrow \infty$ ab. Die Amplitude des Wellenpaketes zum Zeitpunkt t_1 am Ort $z(t_1)$ ist beispielsweise zum Zeitpunkt t_2 trotz positivem Anwachsverhalten der Amplitude vollständig abgeklungen. Demnach ist also das Auseinanderlaufen des Wellenpaketes für den konvektiv instabilen Grundzustand kleiner als die Gruppengeschwindigkeit v_g des gesamten Wellenpaketes. Falls es keine neue Störung im System gibt, stellt sich an jedem Ort für $t \rightarrow \infty$ der (instabile) Grundzustand wieder ein.

2.4.3 Absolute Instabilität

Auch im Fall der absoluten Instabilität ist das Anwachsverhalten der Amplitude A der Enveloppe des Wellenpaketes positiv. Das Wellenpaket läuft aber stärker auseinander als im konvektiv instabilen Fall. Der Schwerpunkt des Wellenpaketes bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit v_g in z -Richtung fort. Es zeigt sich dabei ein so starkes Anwachsverhalten der Amplitude A der Enveloppe, dass die Amplitude in jedem Punkt des Systems im zeitlichen Verlauf anwächst. Diese Störung bewirkt, dass der Grundzustand in jedem Punkt des Systems ausstirbt. Der Grundzustand ist in diesem Bereich absolut instabil gegenüber einer Störung.

Das Anwachsverhalten der Amplitude A der Enveloppe des Wellenpaketes ist für die absolute Instabilität schematisch für zwei aufeinander folgende Zeitpunkte t_1 (durchgezogene Linie) und $t_2 > t_1$ (gestrichelte Linie) in Abbildung 2.4 (c) gezeigt.

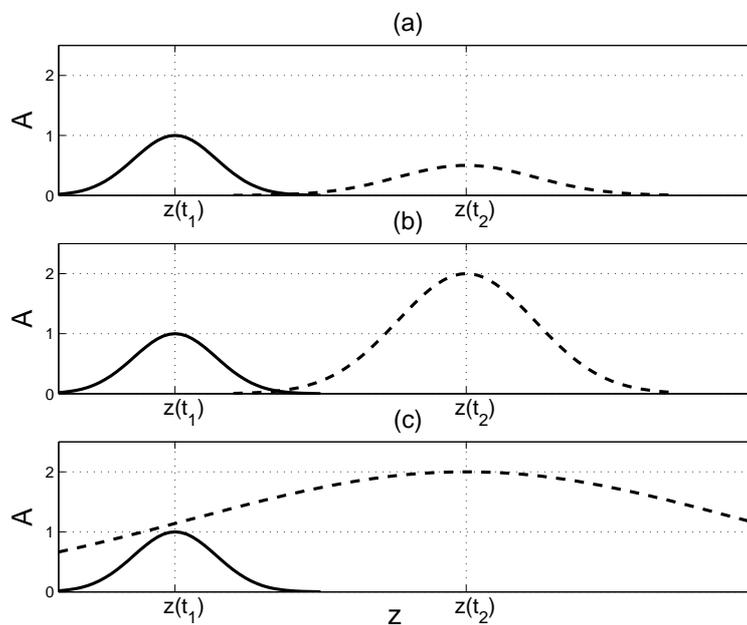


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung der zeitlichen Entwicklung der Amplitude A der Enveloppe eines Wellenpaketes im (a) absolut stabilen, (b) konvektiv instabilen und (c) absolut instabilen Bereich für zwei aufeinander folgende Zeitpunkte t_1 (durchgezogene Linie) und t_2 (gestrichelte Linie) (wobei gilt: $t_2 > t_1$)

Der Charakter der Instabilität wird immer bezüglich eines bestimmten Bezugssystems ermittelt. Beim Übergang zu einem anderen System kann sich dieser Charakter verändern. Diese Abhängigkeit vom Bezugssystem soll nachfolgend anhand zweier Beispiele verdeutlicht werden:

- Wählt man statt des Laborsystems nun das System, das sich gemeinsam mit dem Wellenpaket mit v_g bewegt, so wird die konvektive Instabilität zur absoluten Instabilität.

- Wählt man andererseits das Bezugssystem so, dass sich sein Zentrum genügend schnell vom Wellenpaket entfernt, so wird die absolute Instabilität beim Übergang zu diesem System zur konvektiven Instabilität.

Bei einer realistischen Fragestellung existiert vom experimentellen Standpunkt aus immer ein ausgezeichnetes Bezugssystem, bezüglich dessen auch die Instabilität zu untersuchen ist. Durch den eben erwähnten Einfluss des Bezugssystems bleibt die Unterscheidung von konvektiver und absoluter Instabilität also trotzdem sinnvoll.

Der Einfluss der Randbedingungen durch unterschiedliche Realisierungen experimenteller Systeme kann dabei einen wesentlichen Einfluss auf die jeweiligen Eigenschaften der Instabilität aufweisen. Im Einklang mit grundlegenden Untersuchungen in offenen Systemen [45, 46] haben numerische Berechnungen ergeben, dass die Ränder sowohl die Selektion der Moden beeinflussen als auch zu globalen Moden und zu einem komplizierten Verzweigungsverhalten führen können [47, 48]. Eine Anwendung dieses Konzepts auf die beiden wesentlichen Zustände bei unterschiedlichen Strömungen ist in einer Vielzahl von Untersuchungen durchgeführt worden [2, 43, 49–60].

2.5 Taylor-Wirbelströmung

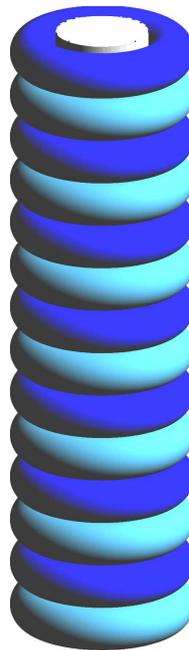


Abbildung 2.5: Schematische Darstellung der Taylor-Wirbelströmung aus [61]. Mittig in Grau ist der Innenzylinder des Taylor-Couette-Systems dargestellt. Die hellblau und dunkelblau dargestellten Tori stellen die gegenläufigen Wirbel dar.

Für ein unendlich langes Taylor-Couette-System mit stationärem oder langsam mit- bzw. ge-

genrotierendem Außenzylinder tritt stets die Taylor-Wirbelströmung als Folge der ersten Instabilität der Grundströmung auf, wie sie schematisch in Abbildung 2.5 dargestellt ist. Diese Strömung erscheint, wenn die Zentrifugalkräfte aufgrund der steigenden Winkelgeschwindigkeit des Innenzylinders, die Viskositätskräfte der Flüssigkeit übersteigen. Bei einer kritischen Winkelgeschwindigkeit des Innenzylinders bewegen sich schließlich Flüssigkeitsteilchen von innen nach außen und zwingen am Außenzylinder liegende Teilchen aufgrund der Inkompressibilität der Flüssigkeit nach innen zu wandern. Der Azimuthalströmung sind somit paarweise, gegensinnig rotierende, torusförmige Wirbel mit einer azimuthalen Wellenzahl $m = 0$ überlagert, siehe z.B. [20, 24, 25, 38]. Der Übergang von der Couette-Strömung zur axialsymmetrischen Taylor-Wirbelströmung kann unter der Annahme reibungsfreier Deckelplatten durch das Modell einer superkritischen Gabelverzweigung beschrieben werden [18]. Aufgrund der Translations-symmetrie bei axial periodischen Randbedingungen ergibt sich eine Entartung der superkritischen Gabelverzweigung, da die axiale Position der Taylor-Wirbel beliebig ist. Die Taylor-Wirbelströmung ist im Gegensatz zur Couette-Strömung nicht mehr translationsinvariant, es bleibt jedoch in axialer Richtung eine diskrete k -fache Symmetrie erhalten. Die Rotationssymmetrie und die Spiegelsymmetrie der Couette-Strömung bleiben auch nach dem Übergang erhalten. Numerische Untersuchungen gehen in der Regel entweder von unendlich langen Zylindern oder von axial periodischen Randbedingungen aus. Dabei wird im letzteren Fall die axiale Wellenzahl k auf einen konstanten Wert festgelegt. Beide Annahmen implizieren eine axiale Translationsinvarianz.

Bei linearen und schwach nichtlinearen Stabilitätsanalysen sind bereits kritische Wellenzahlen und kritische Reynoldszahlen in Abhängigkeit vom Radienverhältnis η für die Taylor-Wirbelströmung berechnet worden [25, 62]. Unter der Annahme axialer Translationsinvarianz und $\eta = 0.5$ beträgt die kritische Reynoldszahl $Re_{i,c} = 68.2$ für den Übergang von der Couette-Strömung zur Taylor-Wirbelströmung [63].

Aufgrund der endlichen axialen Ausdehnung des Taylor-Couette-Systems in allen experimentellen Realisierungen dieses Experimentes kommt es aufgrund der Haftbedingung der viskosen Flüssigkeit an den stationären Deckelplatten beim Einsatz der Innenzylinderrotation prinzipiell zu einer Induzierung einer Einwärtsströmung. Diese Einwärtsströmung lässt so genannte Ekman-Wirbel an den Rändern entstehen und es findet sich stets eine gerade Anzahl von Wirbeln [64], die bei weiterer Erhöhung der Innenzylinder-Reynoldszahl eine axialsymmetrische Wirbelstruktur im gesamten System induzieren [65, 66]. Aufgrund dieser Randbedingung sind demnach der Drehsinn, die axiale Wellenzahl und sogar die Phase der räumlichen Wirbelstruktur bereits vor dem kritischen Punkt unter der Annahme eines translationssymmetrischen Systems festgelegt. Es ist jedoch trotzdem möglich das Anwachsverhalten der normalen Taylor-Wirbelströmung durch eine Wurzelfunktion anzufitten, um für diesen Übergang die Lage des 'kritischen' Punktes zu bestimmen [62]. Für ausreichend lange Systeme ist eine 'kritische' Reynoldszahl $Re_{i,c} = 68.0$ für diesen Übergang experimentell bestimmt worden [64] und zeigt eine gute Übereinstimmung mit numerischen Ergebnissen [63]. Insbesondere die transiente Dynamik in der Nähe dieses numerisch und experimentell bestimmten Punktes ist jedoch anders, als es bei einer strukturinstabilen Gabelverzweigung zu erwarten wäre [67].

T.B. Benjamin und T. Mullin konnten die so genannte 'anomale' Taylor-Wirbelströmung bei sprunghafter Veränderung der Innenzylinder-Reynoldszahl sowohl in Form einer geraden als

auch einer ungeraden Anzahl von Wirbeln beobachten [28, 29, 68]. Obwohl numerische und experimentelle Untersuchungen für den Übergang zur normalen Taylor-Wirbelströmung, also der primären Lösung, sehr gut beschreiben, zeigt der entkoppelte Zustand der anomalen Taylor-Wirbelströmung ein quantitativ unterschiedliches Verhalten im Vergleich zur Theorie [64]. Der Verzweigungspunkt der Sattelknoten-Verzweigung des anomalen Astes dieser Verzweigung ist weit von dem Punkt entfernt, der durch das Anfitzen der Wurzelfunktion für den Übergang zur normalen Taylor-Wirbelströmung bestimmt worden ist. So findet sich beispielsweise bei einem Taylor-Couette-System mit $\eta = 0.5$ die Sattelknoten-Verzweigung der entkoppelten anomalen Taylor-Wirbelströmung erst bei einer Reynoldszahl von $2.5 \cdot Re_{i,c}$ mit $Re_{i,c} = 68.2$.

In einer theoretischen Studie beschreibt D.G. Schaeffer den Einfluss stationärer Deckelplatten im Vergleich zu unendlich langen Systemen mit Hilfe eines Homotopieparameters τ [69]. Dieser Homotopieparameter ist dabei so definiert, dass bei $\tau = 0$ axial periodische Randbedingungen und bei $\tau = 1$ experimentelle Randbedingungen in der Form stationärer Deckelplatten vorliegen.

2.6 Spiral-Wirbelströmung

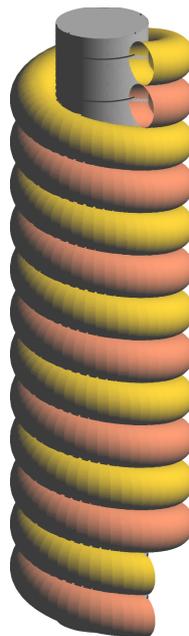


Abbildung 2.6: Schematische Darstellung der Spiral-Wirbelströmung aus [61]. Mittig in Grau ist der Innenzylinder des Taylor-Couette-Systems dargestellt. Die gelb und orange dargestellten Spiralen stellen die gegenläufigen Wirbel dar.

Das Taylor-Couette-System verhält sich bei gegenrotierenden Zylindern anders als bei der eben beschriebenen Taylor-Wirbelströmung. Da sich die Flüssigkeit am Innenzylinder entgegengesetzt zur Flüssigkeit am Außenzylinder bewegt, bildet sich zwischen diesen beiden Zylindern eine Schicht, an der die azimuthale Geschwindigkeitskomponente Null ist. Im Bereich zwischen

dieser Schicht und dem Innenzylinder tritt neben der bei schwacher Gegenrotation auftretenden Taylor-Wirbelströmung die so genannte Spiral-Wirbelströmung überkritisch auf.

Hierbei handelt es sich um eine Struktur, die sich spiralförmig entweder als Links- oder als Rechtsgewinde um den Innenzylinder 'wickelt'. In axialer Richtung propagieren die Wirbel in diesem Fall entweder nach oben oder nach unten, nachfolgend als SPI_{\uparrow} und SPI_{\downarrow} bezeichnet. Wie bei der Taylor-Wirbelströmung liegen dabei stets zwei gegenläufige Wirbel nebeneinander. Die Steigung der Spirale wird über die azimuthale Wellenzahl m angegeben, die beschreibt, wie viele Spiralen mit gleicher Drehrichtung durch die Ebene senkrecht zur axialen Achse laufen. In Abbildung 2.6 ist eine schematische Darstellung der Spiral-Wirbelströmung gezeigt.

Dieser Strömungszustand ist von E.R. Krueger et al. [70] 1966 mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse vorhergesagt und erstmals von H.A. Snyder [71] 1968 experimentell in der Taylor-Couette-Strömung bei $\eta = 0.2, 0.5, 0.8, 0.956$ und $\Gamma \approx 17$ beobachtet worden. Im Anschluss daran sind zahlreiche experimentelle und numerische Untersuchungen durchgeführt worden. Dabei haben Andereck et al. [19] für den Fall unabhängig voneinander rotierender Zylinder in Systemen mit $\eta = 0.883$ und $20 < \Gamma < 48$ Spiralwirbel in einem großen Parameterbereich für viele Außenzylinder-Reynoldszahlen als Folge der ersten Instabilität der Grundströmung beobachtet. Der Übergang von der Couette-Strömung zur nicht-axialsymmetrischen Spiral-Wirbelströmung kann unter der Annahme unendlich langer Zylinder in Form einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung beschrieben werden [18]. Die zeitperiodische Strömungseigenschaft resultiert hierbei aus der zugrundeliegenden Hopf-Verzweigung und die entgegengesetzten Propagationsrichtungen aus der symmetriebrechenden Eigenschaft der Verzweigung.

Bei langsam gegenrotierenden Zylindern besitzt die Spiral-Wirbelströmung eine azimuthale Wellenzahl $m = 1$, die bei zunehmender Gegenrotation jedoch zunimmt [63, 72]. In verschiedenen Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass die numerisch bestimmten Stabilitätskurven zur Spiral-Wirbelströmung [63] und die experimentell bestimmten Verzweigungspunkte für ein Taylor-Couette-System mit $\Gamma = 30$ in guter Übereinstimmung sind [73]. Am bikritischen Punkt, in dem sich die Stabilitätskurven der Taylor- und der Spiral-Wirbelströmung im (Re_i, Re_a) -Parameterraum kreuzen, ist der Einfluss vorliegender Symmetrie für den Fall unendlicher Zylinderlänge für die resultierende Verzweigungsstruktur theoretisch und numerisch untersucht worden [74–76]. Es konnten verschiedene Verzweigungsszenarien für den Übergang zur Taylor- und zur Spiral-Wirbelströmung identifiziert werden.

In experimentellen Untersuchungen wurde des Weiteren eine gute quantitative Übereinstimmung eines $\Gamma = 12$ Systems [77] mit numerischen Berechnungen unter der Annahme axialperiodischer Randbedingungen [78–80] gezeigt.

Unter axial periodischen Randbedingungen ist die Taylor-Wirbelströmung am Einsatz der Spiral-Wirbelströmung für $\eta = 0.5$ stets instabil. Die Existenz von stationären Deckelplatten induziert das Auftreten der Taylor-Wirbelströmung, und es treten bei einem so genannten 'schnellen Start', also der plötzlichen Erhöhung der Innenzylinder-Reynoldszahl von Null auf einen bestimmten Wert, zunächst transiente Taylor-Wirbel, die von den beiden Deckelplatten aus ins System propagieren, auf. Im Anschluss daran werden diese Wirbel immer stärker verformt, und es bilden sich zunächst lokal und dann auch global Spiralen aus. In der Nähe der Deckelplatten bilden sich zudem 'wellenartige' so genannte Ekman-Spiral-Defekte zwischen den Spiralen und den Ekman-Wirbeln aus [81]. Des Weiteren existieren in diesem Parameterbereich auch neue,

komplexe Strömungszustände [79, 82].

In kurzen Systemen ($\Gamma \leq 12$) kommt es infolge der Brechung der Translationssymmetrie zu den so genannten stehenden Wellen, deren Existenz zunächst theoretisch vorhergesagt [83–85] und mittlerweile sowohl experimentell als auch numerisch verifiziert worden ist [30, 31, 61, 86, 87]. Es gibt zwei Typen von stehenden Wellen, die sich beide durch die Überlagerung von hoch- und runterlaufenden Spiralen ergeben. Diese beiden Typen von stehenden Wellen unterscheiden sich jedoch in der Phasenbeziehung zwischen den beiden Spiralen, die entweder 0 oder π sein kann, voneinander.

Auch der Einfluss eines axialen Durchflusses auf die Stabilität der Spiral-Wirbelströmung ist experimentell und numerisch untersucht worden. Diese Untersuchungen beinhalten insbesondere die Anwendung des Konzeptes der konvektiven und absoluten Instabilitäten auf den Übergang von der Grundströmung zur Spiral-Wirbelströmung [2, 3, 51, 58, 88, 89]. Mit einer parametrischen Anregung der Zylinder oder des axialen Durchflusses ist es ferner gelungen, die Strömung bei Parametern zu stabilisieren, bei denen diese eigentlich instabil vorliegen sollte [90–93].

2.7 Symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung mit $O(2)$ -Symmetrie

Da der Übergang von der Couette-Strömung zu Spiralen bzw. stehenden Wellen sich sehr gut mit Hilfe einer Hopf-Verzweigung unter Berücksichtigung der entsprechenden Symmetrie beschreiben lässt [86], befasst sich der vorliegende Abschnitt mit einer superkritischen symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung unter der Annahme von $O(2)$ -Symmetrie. Diese Verzweigung wird durch die folgende Normalform beschrieben [85, 94, 95]:

$$\frac{dv}{dt} = (\mu + i\omega)v + a|v|^2v + b(|v|^2 + |w|^2)v \quad (2.11)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\mu - i\omega)w + \bar{a}|w|^2w + \bar{b}(|v|^2 + |w|^2)w \quad (2.12)$$

Hier bezeichnen v, w die komplexen Amplituden von hoch- und runterlaufenden Wellen, ω die Frequenz und a, b die komplexen Koeffizienten. Die Lösungen mit $|v| = |w|$ sind spiegelsymmetrisch und werden als stehende Wellen bezeichnet, wohingegen die nicht spiegelsymmetrischen Lösungen $|v| = 0$ und $|w| = 0$ als laufende Wellen charakterisiert werden. Am kritischen Punkt ergibt die lineare Stabilitätsanalyse zwei Paare konjugiert komplexer Eigenwerte, und es kommt zu einer simultanen Verzweigung von laufenden (LW) und stehenden Wellen (SW).

Das Stabilitätsverhalten dieser beiden Zustände ist von den Koeffizienten a, b abhängig, wie schematisch in Abbildung 2.7 dargestellt. Die durchgezogenen Linien kennzeichnen dabei stabile Lösungen und die gestrichelten Linien instabile. Es kommt am Verzweigungspunkt entweder zu stabilen laufenden Wellen (LW) und instabilen stehenden Wellen (SW), wie in (a) gezeigt, oder zu instabilen laufenden Wellen und stabilen stehenden Wellen, wie in (b) dargestellt. Da Spiralen im Taylor-Couette-System mit gegenrotierenden Zylindern und unendlich langen Zylindern als laufende Wellen betrachtet werden können, beziehen sich die Untersuchungen dieser Arbeit auf den Fall eines superkritischen Übergangs zu stabilen laufenden Wellen. Nachfolgend wird der

Einfluss gebrochener Symmetrien für diesen Fall untersucht. Im Kontext einer verzweigungstheoretischen Beschreibung geschieht dies durch symmetriebrechende Terme in der Normalform der oben angeführten Hopf-Verzweigung. In den nächsten beiden Abschnitten wird zunächst die Translationssymmetrie und anschließend die Reflexionssymmetrie des Systems gebrochen.

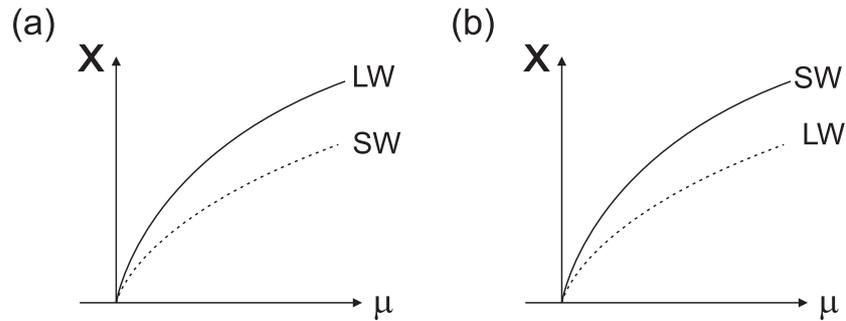


Abbildung 2.7: Zwei mögliche Verzweigungsdiagramme einer superkritischen symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung mit $O(2)$ -Symmetrie, bei der grundsätzlich stehende Wellen (SW) und laufende Wellen (LW) simultan in einem kritischen Punkt verzweigen. Je nach Koeffizienten können entweder (a) laufende Wellen oder (b) stehende Wellen stabil auftreten (aus [86]).

2.7.1 Gebrochene Translationssymmetrie

Der Einfluss einer gebrochenen Translationssymmetrie der superkritischen symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung kann durch folgende Veränderung in der Normalform beschrieben werden [83, 85, 96, 97]:

$$\frac{dv}{dt} = (\mu + i\omega)v + a|v|^2v + b(|v|^2 + |w|^2)v + \varepsilon\bar{w} \quad (2.13)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\mu - i\omega)w + \bar{a}|w|^2w + \bar{b}(|v|^2 + |w|^2)w + \bar{\varepsilon}v \quad (2.14)$$

Die Terme $\varepsilon\bar{w}$ und $\bar{\varepsilon}v$, die für die Brechung der Translationssymmetrie verantwortlich sind, verändern in Abhängigkeit der komplexen Koeffizienten a, b qualitativ die Verzweigungsstruktur zu den laufenden Wellen. So treten laufende Wellen nicht mehr als Folge der ersten Instabilität der Grundströmung auf. Ferner treten aufgrund der nicht vorhandenen Translationssymmetrie keine 'reinen' laufenden Wellen mehr auf. Es gibt aber Lösungen des endlichen Systems, die laufenden Wellen strukturell ähneln und daher im Einklang mit der Theorie im Folgenden als laufende Wellen bezeichnet werden. Des Weiteren können zwei unterschiedliche Typen stehender Wellen superkritisch aus der Grundströmung verzweigen. Diese stehenden Wellen können als Superposition gegeneinander laufender Wellen mit gleicher Amplitude aufgefasst werden. Beide Typen unterscheiden sich in der Phasendifferenz der beiden laufenden Wellen von 0 oder π voneinander und besitzen ferner unterschiedliche Symmetrien. Aufgrund dieser Phasenbeziehung werden

die stehenden Wellen mit SW_0 und SW_π bezeichnet. Während SW_0 eine rein räumliche Spiegelsymmetrie (die so genannte Z_2 -Symmetrie) besitzt, hat SW_π eine raumzeitliche Gleit-Zeit-Spiegelsymmetrie (so genannte $Z_{(2,\pi)}$ -Symmetrie). Der letztere Typ stehender Welle beinhaltet eine reine Reflexionssymmetrie mit einer gleichzeitigen azimuthalen Drehung um π .

Laufende Wellen können beispielsweise in Form einer super- oder subkritischen symmetriebrechenden Verzweigung aus den stehenden Wellen verzweigen, oder aber in Form einer zweiten superkritischen Hopf-Verzweigung aus stehenden Wellen zu modulierten Wellen resultieren. Modulierte Wellen entsprechen in dieser Betrachtung stets einer Bewegung auf einem zweidimensionalen Torus im Phasenraum. Eine der zugrundeliegenden Oszillationsfrequenzen ist mit den stehenden Wellen assoziiert, während die zweite Frequenz eine langsame Dynamik der Amplitudenverteilungen der superponierenden laufenden Wellen beinhaltet. In Form einer globalen Verzweigung [35, 98] treten daraufhin laufenden Wellen stabil im System auf.

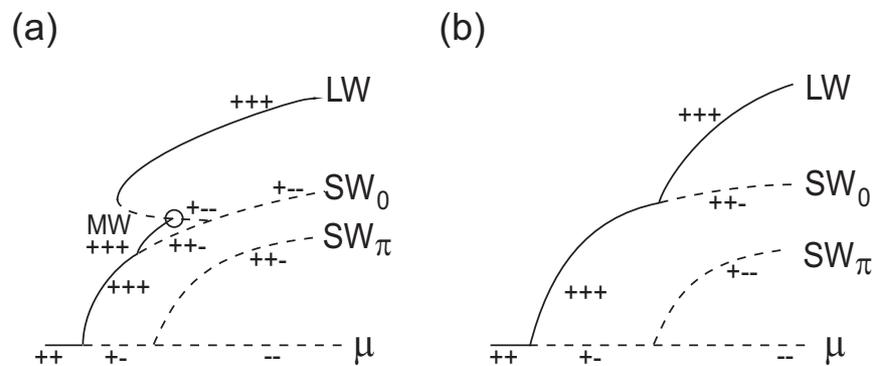


Abbildung 2.8: (a) und (b) zeigen mögliche Verzweigungsdiagramme für eine symmetriebrechende Hopf-Verzweigung mit gebrochener Translationssymmetrie. Stehende Wellen (SW_0 und SW_π) treten hier als Folge der ersten Instabilität der Grundströmung auf. Laufende Wellen (LW) und modulierte Wellen (MW) sind Folge von höheren Instabilitäten [85]. Der Kreis (\circ) kennzeichnet hier die Position einer globalen Verzweigung. Die Vorzeichen geben in diesen Abbildungen die Stabilitäten der einzelnen Lösungen an.

In Abbildung 2.8(a) und (b) sind zwei mögliche Verzweigungsszenarien für den Fall gebrochener Translationssymmetrie dargestellt. Die Vorzeichen geben dabei die Stabilität der Lösungen gegenüber infinitesimaler Störungen an.

Im Beispiel (a) verzweigt die Grundströmung in Form einer Hopf-Verzweigung zu SW_0 und anschließend in Form einer zweiten Hopf-Verzweigung zu modulierten Wellen. Bei weiterer Erhöhung des Kontrollparameters folgt eine globale homokline Verzweigung (\circ), die mit den laufenden Wellen verbunden ist.

Im Beispiel (b) treten hingegen nach der ersten superkritischen Hopf-Verzweigung zu SW_0 superkritisch laufende Wellen in Form einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung auf.

Für eine ausführlichere Darstellung sei an dieser Stelle auf [83–85, 94–97] verwiesen.

2.7.2 Gebrochene Reflexionssymmetrie

Der Effekt einer gebrochenen Spiegelsymmetrie kann mit Hilfe zusätzlicher additiver Terme $d\varepsilon$ und $-d\varepsilon$ in der Normalform der superkritischen symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung aus Gleichung 2.12 folgendermaßen beschrieben werden:

$$\frac{dv}{dt} = (\mu + i\omega)v + a|v|^2v + b(|v|^2 + |w|^2)v + d\varepsilon \quad (2.15)$$

$$\frac{dw}{dt} = (\mu - i\omega)w + \bar{a}|w|^2w + \bar{b}(|v|^2 + |w|^2)w - d\varepsilon. \quad (2.16)$$

Dabei ist d ein komplexer Koeffizient und ε ein Kontrollparameter, der das Maß der Symmetriebrechung angibt. Die beiden Paare komplex konjugierter Eigenwerte trennen sich somit, und es kommt zu zwei getrennten Lösungen von laufenden Wellen (LW_1 und LW_2), die beide unabhängig voneinander aus der Grundströmung verzweigen. Die primäre instabile Lösung der stehenden Wellen aus dem ungestörten System wird zu einer Lösung von modulierten Wellen, die als sekundäre Lösungen in der resultierenden Verzweigungsstruktur vorliegen können, und es kann entlang der Lösung der modulierten Welle zu neuen stationären Verzweigungen kommen [99, 100].

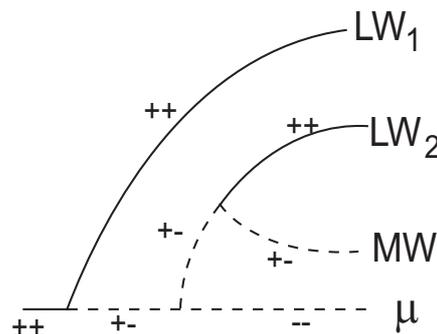


Abbildung 2.9: Mögliches Verzweigungsdiagramm bei gebrochener Spiegelsymmetrie einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung [99]. Es treten zwei Typen von laufenden Wellen (LW_1 und LW_2) auf, die beide unabhängig voneinander aus der Grundströmung verzweigen. Die Vorzeichen geben in diesen Abbildungen die Stabilitäten der einzelnen Lösungen an.

Das resultierende Verzweigungsverhalten ist auch in diesem Fall von den komplexen Koeffizienten a, b abhängig. In Abbildung 2.9 ist ein mögliches Verzweigungsdiagramm für diesen Fall dargestellt. Wie im vorigen Beispiel kennzeichnen die Vorzeichen an den Lösungsästen die Stabilität der einzelnen Lösungen. Die Grundströmung verzweigt hier in eine der beiden getrennten Lösungen der laufenden Wellen (LW_1). Die modulierten Wellen (MW) sind in diesem Beispiel instabil und treffen auf die sekundäre Lösung der laufenden Wellen (LW_2) und bei höheren Werten des Kontrollparameters liegen beide laufenden Wellen stabil vor.

Kapitel 3

Taylor-Couette-Experimente und optische Messmethoden

In diesem Kapitel werden die Taylor-Couette-Experimente sowie die berührungslosen Messmethoden und Auswertungstechniken beschrieben, die im Zuge der vorliegenden Arbeit verwendet und zum Teil neu entwickelt worden sind.

3.1 Taylor-Couette-Experiment

Die hier verwendeten Taylor-Couette-Experimente besitzen alle einen Außenzylinder aus Bor-Silikat-Glas, dessen Innenseite auf einen Radius von (25.000 ± 0.005) mm geschliffen ist. Der Innenzylinder besteht stets aus geschliffenem Edelstahl und besitzt einen Radius von (12.500 ± 0.005) mm. Beide Zylinder haben eine Exzentrizität von weniger als $5\mu\text{m}$. Die zwei stationären Deckelplatten, die das System in axialer Richtung unten und oben begrenzen, sind aus Plexiglas oder Aluminium gefertigt. Die obere Deckelplatte ist über einen verschiebbaren Schlitten in ihrer axialen Position variabel befestigt und mit Hilfe einer Mikrometerschraube in der Neigung einstellbar. Der Schlitten ermöglicht das Einstellen der gewünschten Länge L mit einer relativen Genauigkeit von 0.01 mm. Im Gegensatz dazu ist die untere Deckelplatte nicht in der axialen Position einstellbar.

Die Spaltbreite des Systems beträgt somit $d = 12.5$ mm und zwischen den beiden Zylindern befindet sich mit Silikonöl eine viskose Messflüssigkeit, deren Brechungsindex nahezu mit dem des Glaszylinders übereinstimmt und die bei einer Temperatur von 24°C eine Viskosität von $\nu \approx 10.6$ cSt aufweist. Das Silikonöl wird mit Latexteilchen eines Durchmessers von $6\mu\text{m}$ versetzt, die vom Laser-Doppler-Anemometer (LDA) zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit verwendet werden. Auf diese Messmethode wird im folgenden Abschnitt 3.3 noch detailliert eingegangen werden. Die Viskosität stellt in den Messungen die größte Ungenauigkeit dar und wird mittels eines Kapillarviskosimeters bei $T = 24^\circ\text{C}$ bestimmt. Da die Viskosität in die Reynoldszahl mit eingeht, lässt sich diese absolut auf $\frac{\Delta Re_{abs}}{Re} = 1\%$ bestimmen. Aufgrund dieser starken Temperaturabhängigkeit befindet sich der gesamte Versuchsaufbau in einem klimatisierten Raum. Zusätzlich wird der Taylorzylinder permanent mit Silikonöl, das auf eine Temperatur

von $(24.00 \pm 0.01)^\circ\text{C}$ temperiert ist, umspült. Mit dieser Stabilisierung der Temperatur lässt sich eine relative Genauigkeit von $\frac{\Delta Re}{Re} = 0.02\%$ erreichen.

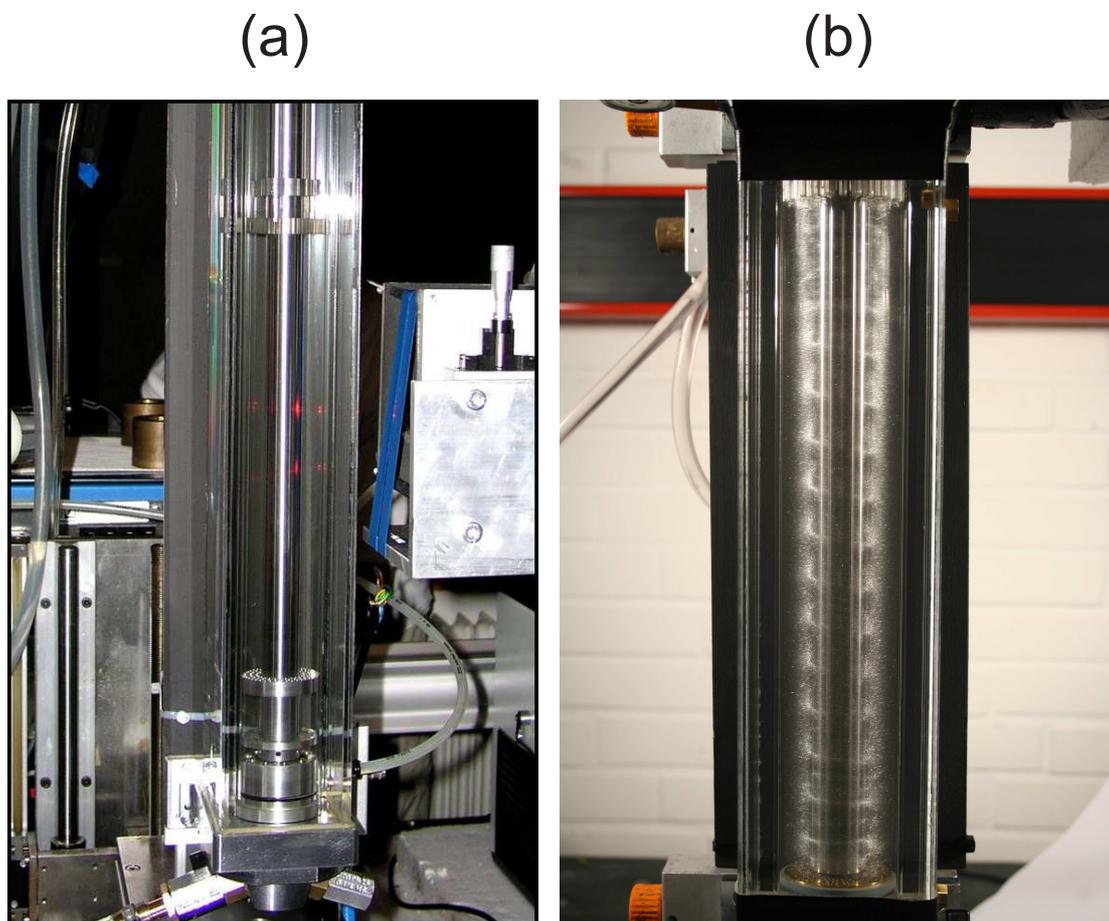


Abbildung 3.1: Photographien von zwei unterschiedlichen Taylor-Couette-Experimenten mit axialem Durchfluss für (a) die Messung mittels Laser-Doppler-Anemometrie und (b) Sichtbarkeitsmessungen. Im Sichtbarkeitsexperiment ist eine hochlaufende Spirale gezeigt.

Photographien von zwei im Zuge dieser Arbeit verwendeten Taylor-Couette-Experimenten sind in Abbildung 3.1 abgebildet. Es handelt sich bei beiden Systemen um Experimente, bei denen der axiale Durchfluss, der in diesem Fall von unten nach oben erfolgt, variabel einstellbar ist. In (a) erfolgt die Messung der Geschwindigkeit in zwei Punkten und das Laser-Doppler-Anemometer befindet sich auf der rechten Seite. Wie im Anschluss in Abschnitt 3.3 noch im Detail beschrieben wird, erfolgt diese Messung mittels zweier Laserstrahlen, die in einem Punkt zur Kreuzung gebracht werden. In dieser Abbildung sind zwei dieser gekreuzten Laserstrahlen in der Flüssigkeit zwischen den beiden Zylindern zu erkennen. Der Kasten aus Plexiglas mit rechteckigem Querschnitt, der die beiden Zylinder umschließt, dient der Anpassung der Brechungsindexe und

zur Thermostatisierung der Flüssigkeit zwischen den beiden Zylindern. Das in (b) dargestellte Experiment dient der Visualisierung der Strömungszustände, wie es in Abschnitt 3.2 beschrieben wird. Auch bei diesem System handelt es sich um eine Anlage mit axialem Durchfluss und eine hochlaufende Spirale ist als Strömungszustand in diesem Experiment sichtbar.

Um den Messort des LDA-Systems bestimmen zu können, wird dieser Taylorzylinder auf einen dreiachsigen Tisch montiert. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die z -Achse dieses Tisches mit einer automatischen Steuerung versehen worden, die es erlaubt, die Höhe des Messortes automatisch über eine neu entwickelte Messsoftware zu bestimmen. Diese Automatisierung ermöglicht das systematische und präzise Messen von axialen Scans der axialen Geschwindigkeit, bei denen der Messort während der Messung parallel zur axialen Achse der Taylorzylinder variiert wird. Eine genauere Beschreibung dieser Messmethode findet im Abschnitt 3.5 statt.

Die Rotation der beiden Zylinder wird mit jeweils einem Servomotor durchgeführt, auf dessen Achse sich ein optischer Drehgeber befindet, der ein Rechtecksignal mit 1000 *Pulsen* pro Umdrehung an die Drehzahlregelung liefert. Diese Regelung nutzt die zurückgeführte Frequenz, um sie mit einer vorgegebenen Drehfrequenz über eine PLL-Regelschleife abzugleichen. Diese Technik erlaubt es, Rotationsfrequenzen zwischen $f_{\min} = 0.4$ Hz und $f_{\max} = 40.0$ Hz mit einer Genauigkeit von $\Delta f = 1$ mHz einzustellen.

3.2 Sichtbarkeitsmessungen

Für die Erstellung von Photographien, welche die einzelnen Strömungszustände darstellen, und für die sich anschließende Bestimmung des Strömungszustandes sind neben den Messanlagen auch Sichtbarkeitsexperimente mit gleicher Geometrie verwendet worden. Als Fluid ist auch hier ein Silikonöl vorhanden, das mit Aluminiumpartikeln versetzt worden ist. Diese Aluminiumpartikel haben eine flache längliche Form und richten sich entlang der Strömungslinien in der Messflüssigkeit aus. LED-Lampen beleuchten das Fluid aus Richtung der oberen Deckelplatte und die Aluminiumpartikel reflektieren das Licht so, dass eine Abbildung des Strömungszustandes mittels einer Digitalkamera möglich wird. Diese Aufnahmen dienen jedoch nur zur Visualisierung und sollen im Folgenden nicht für quantitative Aussagen verwendet werden.

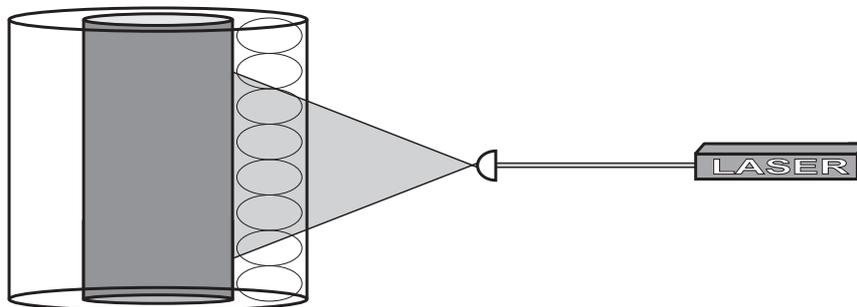


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung der Lichtschnitt-Technik.

Eine weitere Methode zur Visualisierung von Strömungen und zur Messung von Geschwindigkeitskomponenten ist die so genannte Lichtschnitt-Technik. Dazu wird ein Lichtschnitt in der Flüssigkeit erzeugt, indem ein Laserstrahl durch eine Zylinderlinse aufgeweitet wird, der dann eine Fläche im Spalt des Taylor-Couette-Systems ausleuchtet. In Abbildung 3.2 ist dieser Aufbau schematisch dargestellt. Mit einer Kamera aus Richtung des Normalenvektors der ausgeleuchteten Fläche lässt sich der Lichtschnitt beobachten und es lassen sich so Bilder der raumzeitlichen Struktur anfertigen, die unter Kenntnis der Belichtungszeit Rückschlüsse auf vorhandene Geschwindigkeitskomponenten zulassen. Natürlich kann dieses Verfahren auch dazu benutzt werden, Bilder von Strömungen aufzunehmen, ohne die Geschwindigkeitskomponenten mit Hilfe der Belichtungszeit zu berechnen.

Diese beiden Verfahren werden im Zuge dieser Arbeit zur Beobachtung der Strömung verwendet. Bei der Beobachtung mit dem Auge oder einer Kamera mit Hilfe der anfangs vorgestellten Methode bei Benutzung von Aluminiumpartikeln ist es erforderlich, die Streuteilchen in der Flüssigkeit auszutauschen, weil diese nicht gleichzeitig auch für die anschließend vorgestellte Messung mit Hilfe der Laser-Doppler-Anemometrie verwendet werden können.

3.3 Laser-Doppler-Anemometrie

Die Laser-Doppler-Anemometrie ist ein Verfahren zur berührungslosen lokalen Geschwindigkeitsmessung und kommt bei Strömungen von Flüssigkeiten und Gasen zum Einsatz. Das Laser-Doppler-Anemometer (LDA) kann zwar auf verschiedene Arten realisiert werden. An dieser Stelle soll jedoch lediglich die Kreuzstrahlmethode beschrieben werden, da hier ausschließlich diese Methode zur Anwendung kommt.

Das Verfahren der Laser-Doppler-Anemometrie beruht auf der Streuung von Laserlicht an kleinen Teilchen, die der Strömung folgen und so Rückschlüsse auf die vorliegende Strömungsgeschwindigkeit zulassen. Diese Streuteilchen sind der Flüssigkeit beigegeben und haben in diesem speziellen System einen Durchmesser von $6 \mu\text{m}$.

In einem Laser-Doppler-Anemometer wird ein Laserstrahl mittels eines Strahlteilers in zwei parallele Teilstrahlen gleicher Intensität zerlegt. Als Laser wird in diesem experimentellen Aufbau ein Helium-Neon-Laser verwendet. Durch eine Linse werden die Teilstrahlen in deren Fokus in einem speziellen Punkt in der Flüssigkeit zur Kreuzung gebracht. Im Kreuzungspunkt der beiden kohärenten Laserstrahlen entsteht dadurch ein räumliches Interferenzfeld, das nachfolgend als Messvolumen bezeichnet werden soll. Im Fall ebener Wellenfronten entsteht dort ein Interferenzmuster aus Ebenen mit abwechselnd hoher und niedriger Intensität, die sich abhängig von der Art der Interferenz (konstruktiv bzw. destruktiv) lokal ausbilden. Ein Streuteilchen, das von der strömenden Flüssigkeit mitgeführt wird und dabei das Streifenmuster im Messvolumen durchquert, verursacht in den einzelnen Ebenen mit hohen Lichtintensitäten eine Reihe von Lichtblitzen. Mit dem bislang dargestellten Aufbau ist es jedoch noch nicht möglich, aus dem zeitlichen Abstand dieser Lichtblitze durch das Interferenzstreifenmuster zwischen einer Bewegung von unten nach oben und der umgekehrten Bewegung zu unterscheiden. Aus diesem Grund werden zusätzlich zwei Braggzellen in die beiden Teilstrahlen eingebracht. Durch diese Braggzellen wird der eine Teilstrahl um 40.025 MHz und der andere um 40.125 MHz frequenzver-

schoben. Diese Differenzfrequenz von 100 kHz wird hier mit Δf bezeichnet. Beide Teilstrahlen werden anschließend mit der Linse im Spalt zwischen dem Innen- und dem Außenzyylinder zur Kreuzung gebracht.

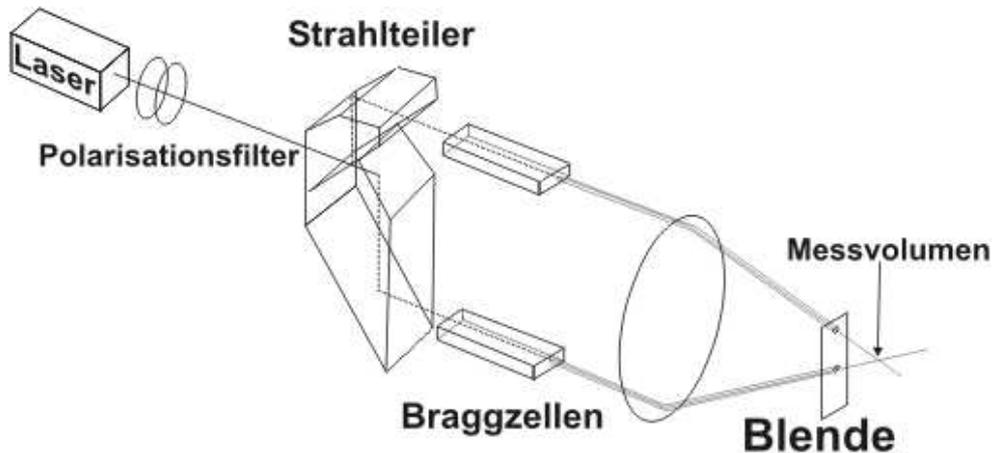


Abbildung 3.3: Schematische Darstellung der Sendeeinheit des verwendeten LDA-Systems.

Durch die Frequenzverschiebung zwischen den beiden Teilstrahlen entsteht im Kreuzungspunkt ein laufendes Interferenzstreifenmuster, in dem ein ruhendes Teilchen moduliertes Licht mit einer Frequenz von $f_D = 100$ kHz reflektiert. Mit diesem laufenden Muster ist es nun möglich, wie in Gleichung (3.1) angedeutet, über die Dopplerverschiebung des reflektierten Lichtes zwischen einer Bewegung nach oben und einer Bewegung nach unten durch das Messvolumen zu unterscheiden.

$$v_z \propto (f_D - \Delta f) \quad (3.1)$$

In den folgenden Messungen ist stets die axiale Geschwindigkeit v_z gemessen worden, technisch ist aber auch die Messung der radialen Geschwindigkeit v_r durch Drehen der Sendeeinheit um 90° möglich.

Die bereits erwähnten Lichtblitze werden mit einer Avalanche-Fotodiode detektiert. Das Signal der Avalanche-Fotodiode wird dann verstärkt und im Anschluss von einem Bandpass (10kHz - 200 kHz) gefiltert. Mit Hilfe eines 'Phase-Locked-Loop'-Trackers (PLL-Tracker) wird diese Frequenz in eine Spannung überführt. Der PLL-Tracker passt seine interne Frequenz des spannungsgesteuerten Oszillators (VCO) der des eingehenden Signals an und gibt die hierfür nötige Steuerspannung, die nach Gleichung (3.2) proportional zur Frequenz ist, aus.

Hierfür wird intern die Phasendifferenz zwischen dem eingehenden Signal und dem VCO bestimmt, woraus eine zur Phasendifferenz proportionale Spannung erzeugt wird, die wiederum den VCO steuert. Ist die Phasendifferenz Null, so ist die am VCO anliegende Spannung ein Maß für die Frequenz des Eingangssignals und damit für die momentane Strömungsgeschwindigkeit. Auf diese Weise folgt der interne Oszillator der eingespeisten Frequenz und die so erzeugte Spannung U_{PLL} ist proportional zu der eingespeisten Frequenz und somit auch proportional zu der gemessenen Geschwindigkeitskomponente, wie es durch Gleichung (3.2) noch einmal verdeutlicht wird.

$$v_u \propto U_{PLL}. \quad (3.2)$$

Die Spannung gelangt anschließend über einen Tiefpass zu einem weiteren Verstärker mit Offsetkorrektur, an den ein AD-Wandler mit einer Auflösung von 12 Bit angeschlossen ist. Ein Computer mit der bereits erwähnten Mess- und Steuersoftware übernimmt nun die Messwertaufnahme.

3.4 Zeitreihenaufnahme

Die elementare Messung am Taylor-Couette-System mittels des LDA-Systems ist das Aufzeichnen einer Zeitreihe einer ausgewählten Geschwindigkeitskomponente der Strömung in einem bestimmten Punkt des Systems. Hierzu wird zunächst ein charakteristischer Punkt im System ausgewählt und anschließend bei konstanter Systemhöhe Γ und Außenzylinder-Reynoldszahl Re_a eine Innenzylinder-Reynoldszahl Re_i eingestellt. Nach einer bestimmten Wartezeit, in der sich der Strömungszustand einstellt, wird nun eine entsprechende Zeitreihe aufgezeichnet.

3.5 Axiale Scans

Als weitaus aufwendiger stellt sich hingegen die folgende Weise der Messwertaufnahme heraus, die ebenfalls nach einer bestimmten Wartezeit bei konstanter Systemhöhe Γ , Außenzylinder-Reynoldszahl Re_a und Innenzylinder-Reynoldszahl Re_i durchgeführt wird. Sie ist in den nachfolgenden Untersuchungen ein sehr wichtiges Mittel zur Analyse der vorliegenden Strömungsmuster und ist im Zuge dieser Arbeit entwickelt worden. Prinzipiell wird auch hier vom Computer eine Zeitreihe aufgezeichnet, jedoch wird im Laufe dieser Messwertaufnahme die axiale Position des Messvolumens mit einer konstanten Geschwindigkeit von der oberen zur unteren Deckelplatte verändert. Sowohl in radialer als auch in azimuthaler Richtung bleibt die Position des Messvolumens während dieser Messung konstant. Um auch raumzeitliche Strukturen optimal aufzuzeichnen, ist es wichtig, die Fahrgeschwindigkeit des Messvolumens geschickt zu wählen. Wird es zu schnell bewegt, so erhält man ein Abbild des *aktuellen* Strömungszustandes, in dem jedoch keine Dynamik ersichtlich ist. Zur Illustration wird im Folgenden diese Art der Zeitreihenaufnahme exemplarisch für ein simuliertes statisches und zwei zeitabhängige Geschwindigkeitsfelder durchgeführt. Diese Daten werden anschließend miteinander verglichen.

In Abbildung 3.4(a) ist zur Verdeutlichung dieser Messmethode ein zeitlich konstantes und über die (axiale) Position räumlich periodisches Geschwindigkeitsprofil abgebildet. Für dieses Geschwindigkeitsprofil ist eine Sinuswelle der Amplitude $A = 1$ entlang des Ortes mit 20 Wellenlängen angenommen worden. Angedeutet durch die schwarze Linie wandert während eines axialen Scans der (axialen) Geschwindigkeit das Messvolumen nun mit konstanter Geschwindigkeit von oben nach unten bei fortschreitender Zeit durch das System. In (c) ist die hierbei aufgezeichnete Zeitreihe der axialen Geschwindigkeit als schwarze Linie dargestellt. Die rote Linie in (b) zeigt zum Vergleich das axiale Geschwindigkeitsprofil zum Zeitpunkt $t = 0$. In (d) und (e) sind zusätzlich zwei Ausschnitte aus dem Leistungsspektrum beider Geschwindigkeitsprofile gezeigt. Für

ein stationäres Geschwindigkeitsfeld ist demnach der axiale Scan der (axialen) Geschwindigkeit äquivalent zum *instantanen* Geschwindigkeitsprofil zu einem beliebigen Zeitpunkt t .

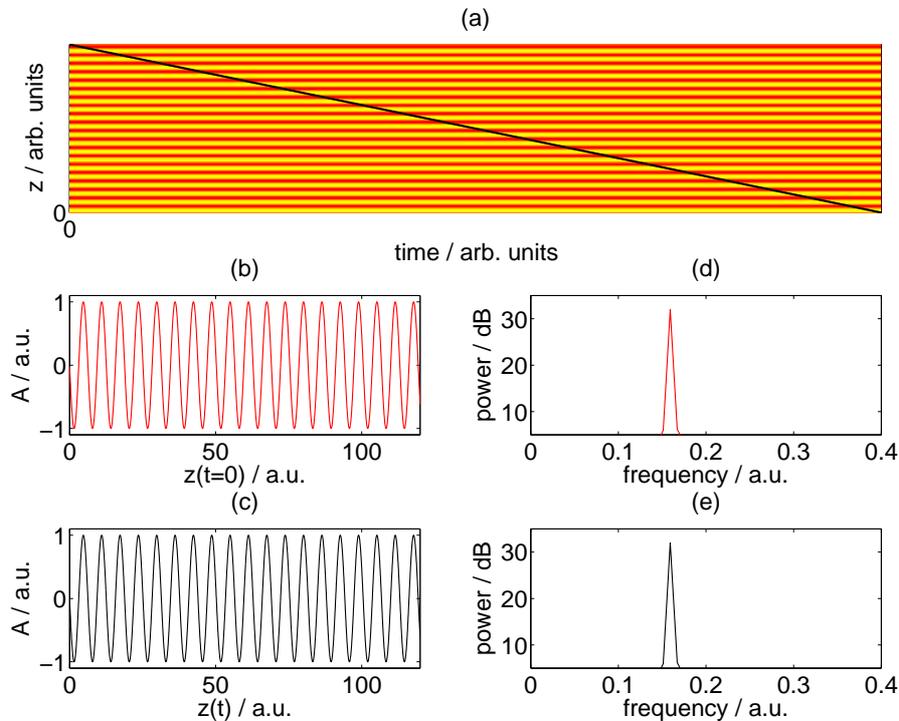


Abbildung 3.4: (a) Draufsicht auf das stehende Wellenfeld als Funktion von Ort und Zeit. Die schwarze Linie zeigt den raumzeitlichen Messweg. (b) Profil des Wellenfeldes bei $t = 0$ und (c) entlang des Messweges. (d) und (e) Leistungsspektren der Zeitreihen in (b) und (c).

In Abbildung 3.5(a) ist für eine laufende Welle die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes dargestellt. Diese besteht zum Zeitpunkt $t = 0$ ebenfalls aus 20 Sinuswellen mit der Amplitude 1. Die schwarze Linie soll wieder die raumzeitliche Position des Messvolumens widerspiegeln. Die hierbei aufgezeichnete Zeitreihe ist in (c) als schwarze Linie gezeigt und hat nun im Vergleich zur roten Linie in (b), die die örtliche Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ zeigt, einen unterschiedlichen Verlauf.

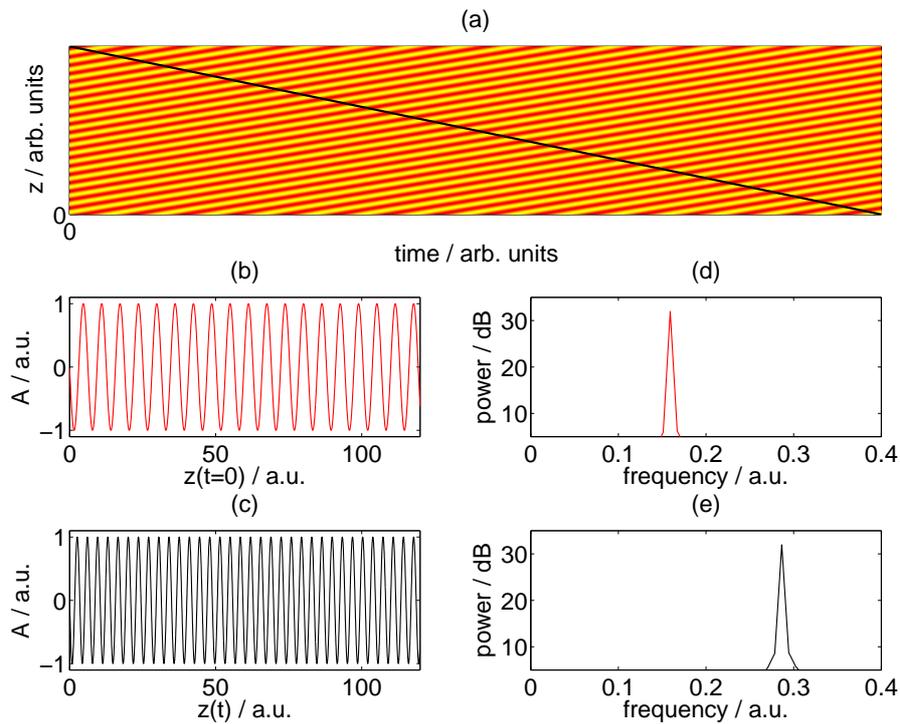


Abbildung 3.5: (a) Draufsicht auf das entgegenlaufende Wellenfeld als Funktion von Ort und Zeit. Die schwarze Linie zeigt den raumzeitlichen Messweg. (b) Profil des Wellenfeldes bei $t = 0$ und (c) entlang des Messweges. (d) und (e) Leistungsspektren der Zeitreihen in (b) und (c).

In (d) und (e) sind die entsprechenden Leistungsspektren gezeigt, aus denen erkennbar wird, dass es aufgrund der Bewegung des Beobachters nun zu einer Verschiebung der Frequenz aufgrund des Doppler-Effektes kommt. Da die Welle in diesem Fall dem Messvolumen entgegenläuft, erhöht sich die gemessene Frequenz, wohingegen es bei einer mitlaufenden Welle zu einer Verringerung der gemessenen Frequenz kommen würde. Mit dieser Technik lassen sich im Experiment die mit dem Beobachter laufenden Wellen eindeutig von denen unterscheiden, die sich entgegen der Bewegung des Beobachters bewegen. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 3.5 in derselben Darstellung ein mitlaufendes Wellenfeld mit entsprechender Verringerung der Frequenz aufgrund des Doppler-Effektes abgebildet.

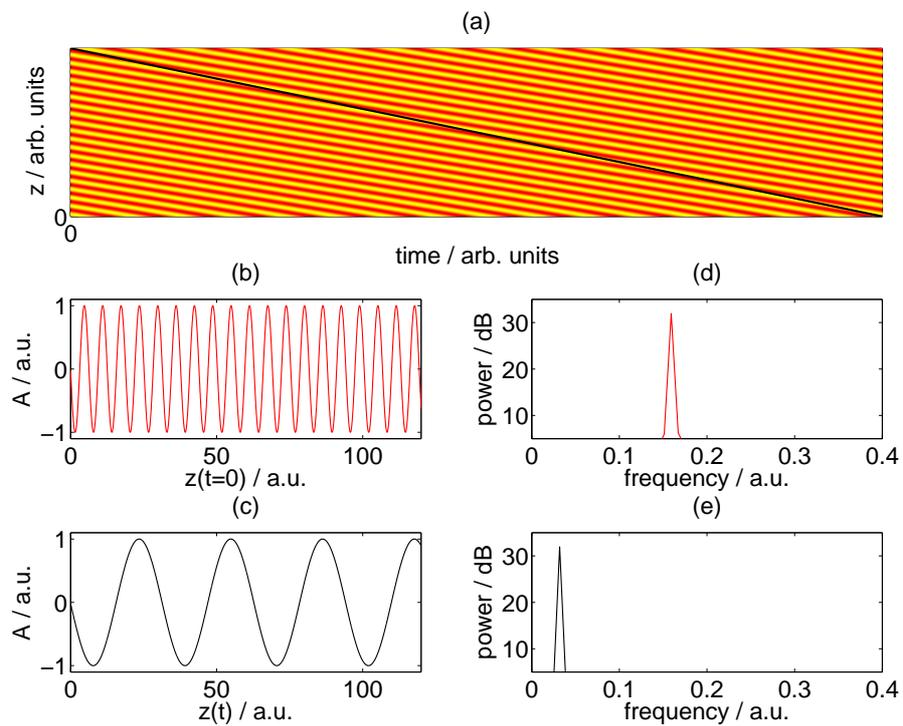


Abbildung 3.6: (a) Draufsicht auf das mitlaufende Wellenfeld als Funktion von Ort und Zeit. Die schwarze Linie zeigt den raumzeitlichen Messweg. (b) Profil des Wellenfeldes bei $t = 0$ und (c) entlang des Messweges. (d) und (e) Leistungsspektren der Zeitreihen in (b) und (c).

Kapitel 4

Spiral-Wirbelströmung

In diesem Kapitel wird die Spiral-Wirbelströmung untersucht, die im Taylor-Couette-System bei gegenrotierenden Zylindern als erste Instabilität auftritt. Im Experiment lassen sich bei diesem Strömungszustand sowohl hoch- (SPI \uparrow : azimuthale Wellenzahl $m = +1$) als auch runterlaufende Spiralen (SPI \downarrow : $m = -1$) beobachten. Nach der Anwendung der im Kapitel 3 vorgestellten Untersuchungsmethoden der Spiral-Wirbelströmung mittels ortsfester Zeitreihen werden die Spiralen zunächst verzweigungstheoretisch erfasst. Es folgt eine weiterführende Untersuchung der räumlichen Struktur dieser Strömung mit der im Zuge der vorliegenden Arbeit entwickelten Messmethode axialer Scans und deren Auswertung mit Hilfe Doppler-verschobener Frequenzen.

4.1 Untersuchung mittels ortsfester Zeitreihen

Die Untersuchung von SPI \uparrow und SPI \downarrow soll in diesem Abschnitt zunächst mit Hilfe von ortsfest aufgenommenen Zeitreihen durchgeführt werden. Da die Oszillationsfrequenzen dieser beiden Spiralen exakt gleich sind, lassen sie sich durch die alleinige Untersuchung dieser Zeitreihen nicht *eindeutig* voneinander unterscheiden [86].

Eine ortsfest aufgezeichnete Zeitreihe der axialen Geschwindigkeit v_z einer Spirale ist exemplarisch in Abbildung 4.1(a) gezeigt. Sie ist bei $\Gamma = 12$, $Re_a = -125.0$ und $Re_i = 120.4$ in der axialen Mitte des Systems gemessen worden und zeigt eine Oszillation mit konstanter Amplitude und fester Frequenz in der axialen Geschwindigkeit v_z .

Der in dieser Zeitreihe als roter Bereich angedeutete Zeitausschnitt ist in (b) noch einmal vergrößert dargestellt, um die Oszillation der axialen Geschwindigkeit zu verdeutlichen. Die Oszillation ergibt sich aus der entgegengesetzten Rotation der Wirbel, die bei der Messung der axialen Geschwindigkeit am äußeren Rand dieser Wirbel bei einem Abstand von 1 mm zum Innenzylinder erfasst wird.

In (c) ist zusätzlich das Leistungsspektrum der Zeitreihe (a) dargestellt. Es zeigt neben der Oszillationsfrequenz der Spirale von 0.371 Hz (Periode: 2.7 s) zusätzlich noch die erste Harmonische dieser Frequenz bei 0.742 Hz, die darauf zurückzuführen ist, dass die Oszillation in der axialen Geschwindigkeit nicht sinusförmig sondern leicht asymmetrisch in dem Sinne ist, dass die abfallende Flanke stets steiler als die aufsteigende ist, was durch die asymmetrische Form der

Spiralen zu erklären ist.

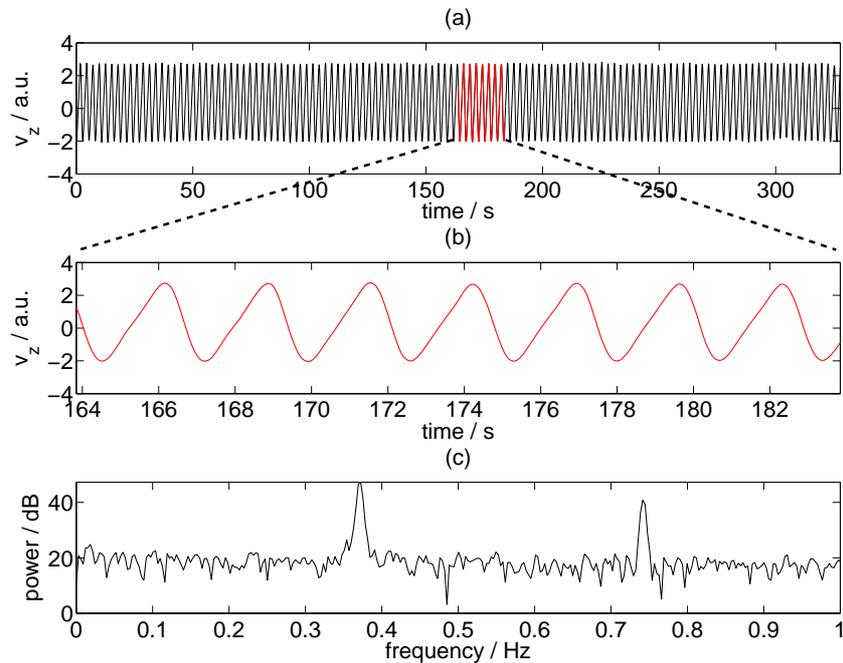


Abbildung 4.1: (a) Zeitreihe der axialen Geschwindigkeit v_z gemessen bei $\Gamma = 12.0$, $Re_a = -125.0$ und $Re_i = 120.4$ in der axialen Mitte des Systems bei einem radialen Abstand von 1 mm zum Innenzylinder. (b) Rot markierter Ausschnitt aus der gemessenen Zeitreihe (a). (c) Leistungsspektrum der gemessenen Zeitreihe (a)

Die Oszillationsfrequenz von 0.371 Hz stimmt für die hier verwendete Viskosität ($\nu = 10.6$ cSt) und Geometrie mit dem aus der linearen Stabilitätsanalyse (aus [101]) für den Fall unendlich langer Zylinder bekannten Wert von 0.386 Hz gut überein.

In Abbildung 4.2 sind drei Zeitreihen gezeigt, die alle bei $\Gamma = 12.0$ und $Re_a = -125.0$ in der axialen Mitte des Systems aufgezeichnet worden sind und sich ausschließlich durch Re_i voneinander unterscheiden.

In der Zeitreihe (a), die bei $Re_i = 116.2$ entstanden ist, zeigt sich keine axiale Geschwindigkeit v_z und die Couette-Strömung liegt noch in der axialen Mitte des Systems vor. In Zeitreihe (b) und (c) hingegen ist eine Oszillation der axialen Geschwindigkeit v_z um Null herum zu erkennen. Die Zeitreihen sind bei $Re_i = 118.3$ (b) und $Re_i = 120.4$ (c) gemessen worden und unterscheiden sich nur in der Amplitude, nicht aber in der Oszillationsfrequenz voneinander. Insbesondere das Auftreten der Oszillation mit der aus der linearen Stabilitätsanalyse bekannten Frequenz ist ein wichtiger Hinweis für die Existenz von Spiralen.

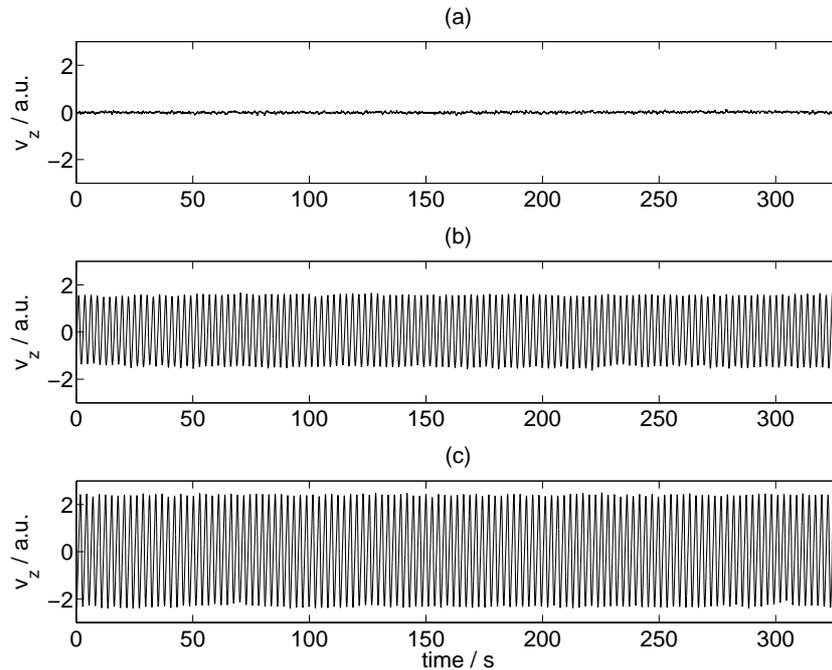


Abbildung 4.2: Drei Zeitreihen aufgenommen bei $\Gamma = 12.0$ und $Re_a = -125.0$ in der axialen Mitte des Systems: (a) $Re_i = 116.2$, (b) $Re_i = 118.3$ und (c) $Re_i = 120.4$.

4.2 Verzweigungsdiagramm

Um den Übergang von der Couette-Strömung zur Spiral-Wirbelströmung besser zu charakterisieren, hat sich neben dem Auftreten der für Spiralen typischen Oszillationsfrequenz auch die Lage der Maxima bzw. der Minima der axialen Geschwindigkeit v_z als Maß für die Amplitude bewährt (siehe beispielsweise [2]).

Jeder Punkt im Diagramm (a) der Abbildung 4.3 repräsentiert eine Zeitreihe, die für ein bestimmtes Re_i aufgezeichnet worden ist. Aus jeder Zeitreihe werden dann zunächst alle Minima bestimmt und aus diesen Minima anschließend der Mittelwert errechnet. Um die Annahme eines wurzelförmigen Anwachsverhaltens, wie es für eine superkritische Hopf-Verzweigung charakteristisch ist, zu bestätigen, ist in Abbildung 4.3(a) die Abhängigkeit der quadrierten Mittelwerte der Minima $\langle v_{z,Min} \rangle^2$ bezüglich Re_i dargestellt. Die Regressionsgerade (durchgezogene Linie) bestätigt dabei die Annahme des wurzelförmigen Zusammenhanges bezüglich $\langle v_{z,Min} \rangle$ und es ergibt sich als kritischer Punkt aus dieser Regression $Re_{i,c} = 117.2$ in guter Übereinstimmung mit dem berechneten Wert von $Re_{i,c,t} = 115.2$ [51]. Der Unterschied von $\Delta Re_i = 2$ lässt sich von experimenteller Sichtweise mit der absoluten Ungenauigkeit in der Bestimmung der kinematischen Viskosität ν von 1% erklären.

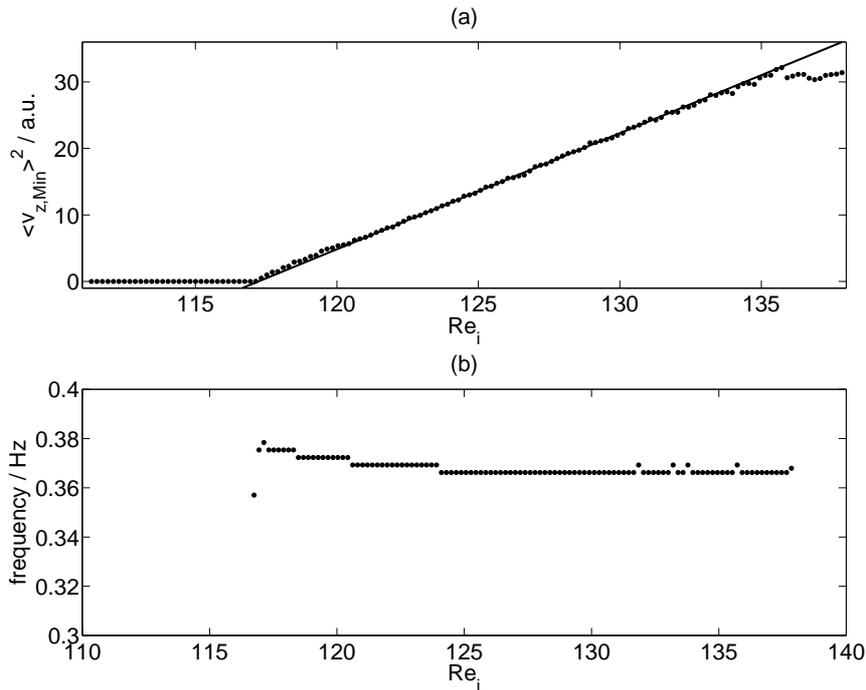


Abbildung 4.3: Übergang von der Couette-Strömung zur Spiral-Wirbelströmung bei $\Gamma = 12.0$ und $Re_a = -125.0$, gemessen in der axialen Mitte des Systems. (a) Mittelwerte der quadrierten Minima $\langle v_{z,Min} \rangle^2$ in Abhängigkeit von der Innenzylinder-Reynoldszahl Re_i mit Regressionsgeraden (durchgezogene Linie). (b) Darstellung der aus dem Leistungsspektrum detektierten Oszillationsfrequenz in Abhängigkeit von Re_i .

In (b) ist zusätzlich die Oszillationsfrequenz in Abhängigkeit von Re_i , also aus jeder gemessenen Zeitreihe aufgetragen. Diese Frequenz ergibt sich dabei aus dem Leistungsspektrum der entsprechenden Zeitreihe. Unterhalb von $Re_{i,c} = 117.2$ ist keine Frequenz zu ermitteln, jedoch oberhalb dieses Wertes wird eine entsprechende Oszillationsfrequenz detektiert. Diese Frequenz weist nur eine geringe Abhängigkeit von Re_i auf, aber oberhalb von $Re_i = 135.0$ ist in (a) eine deutliche Abweichung von der Regressionsgeraden zu erkennen und diese Werte sind aus diesem Grunde auch nicht für die lineare Regression verwendet worden. Auf die Ursache dieser Abweichungen soll an späterer Stelle in Kapitel 7 noch im Detail Bezug genommen werden.

4.3 Untersuchung mittels axialer Scans

In den vorherigen Abschnitten ist das Verhalten der Strömung an einem lokalen Messort in der axialen Mitte des Systems in Abhängigkeit vom Kontrollparameter Re_i betrachtet worden. Im vorliegenden Abschnitt wird eine Untersuchung der axialen Geschwindigkeit v_z mittels axialer Scans durchgeführt. Drei solche Scans sind in Abbildung 4.4 dargestellt. Dabei sind genau diejenigen drei Re_i aus der Abbildung 4.2 sowie eine Fahrgeschwindigkeit des Messvolumens

von $v_{\text{Scan},z} = 0.125 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ gewählt worden. Diese Fahrgeschwindigkeit soll auch für alle folgenden axialen Scans beibehalten werden.

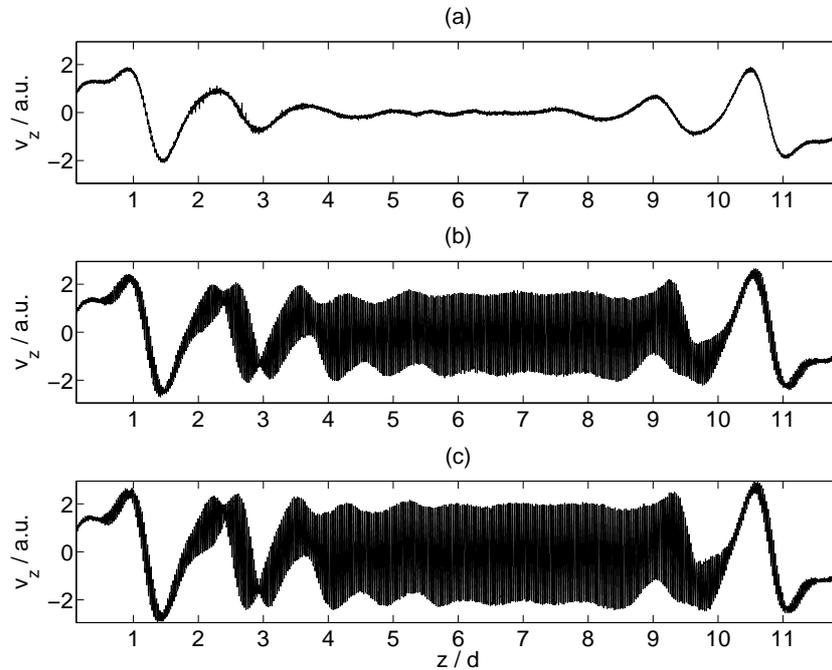


Abbildung 4.4: Axialer Scan der axialen Geschwindigkeit v_z bei $\Gamma = 12.0$ und $Re_a = -120.0$: (a) für die Couette-Strömung gemessen bei $Re_i = 114.5$ und (b) die Spiralen gemessen bei $Re_i = 118.3$ und (c) bei $Re_i = 120.4$.

In (a) ist für die Couette-Strömung bei $Re_i = 114.5$ ein axialer Scan der axialen Geschwindigkeit v_z gezeigt. Es ist an keiner axialen Position eine Oszillation in der axialen Geschwindigkeit zu erkennen. Wie erwartet, ist insbesondere in der axialen Mitte des Systems keine axiale Geschwindigkeit vorhanden, wohingegen jedoch in unmittelbarer Nähe der beiden Deckelplatten (unten: $0 - 3d$, oben: $9 - 12d$) eine endliche axiale Geschwindigkeit messbar ist, die auf den Einfluss der Deckelplatten und dem damit zusammenhängenden Auftreten der bereits erwähnten Ekman-Wirbelströmung zurückzuführen ist. Die Reflexionssymmetrie der Strömung ist erhalten, denn das axiale Geschwindigkeitsprofil ist zur axialen Mitte des Systems punktsymmetrisch. Da es sich bei dieser Strömung um eine stationäre Strömung mit stationären Wirbeln in der Nähe der Deckelplatten handelt, ist der gemessene axiale Scan äquivalent zur instantanen axialen Geschwindigkeit, wie allgemein in Abschnitt 3.5 gezeigt.

In den Diagrammen (b) und (c) sind zwei weitere axiale Scans bei höheren Re_i gezeigt - (b) $Re_i = 118.3$ und (c) $Re_i = 120.4$. Zu beachten ist, dass bei dieser Aufzeichnung eine, wie in Abschnitt 3.5 beschriebene, Variation in Ort und Zeit vorliegt und der in der Mitte schwarz erscheinende Bereich eine Oszillation besitzt, wie exemplarisch in Abbildung 4.1 gezeigt. Wie bereits aus den beiden Zeitreihen (b) und (c) in Abbildung 4.2 ersichtlich, unterscheiden sich die

beiden Messreihen in erster Linie durch ihre verschiedenen Amplituden voneinander. Die Zunahme der Amplitude ergibt sich, wie in Abschnitt 4.2 gezeigt, aus dem vergrößerten Abstand des Kontrollparameters zum kritischen Punkt $Re_{i,c}$. Die Oszillation in der axialen Geschwindigkeit v_z findet in einem weiten Bereich der Mitte des Systems statt. An den Rändern hingegen existiert zusätzlich eine Überlagerung mit der Ekman-Wirbelströmung, die sogar dazu führt, dass die Oszillation direkt an den Deckelplatten vollständig verschwindet. Eine genauere Untersuchung der Spiral-Wirbelströmung, wie sie im Experiment mit festen Deckelplatten zu beobachten ist, soll im folgenden Abschnitt mit einer im Zuge der vorliegenden Arbeit entwickelten Analyseverfahren erfolgen.

4.4 Frequenzabhängige Analyse

Wie bereits erwähnt, lassen sich die ortsfest aufgezeichneten Zeitreihen nicht eindeutig den hoch- oder runterlaufenden Spiralen zuordnen, da die Oszillationsfrequenzen von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ gleich sind. Diese Zuordnung lässt sich jedoch über eine spezielle Auswertung der eben beschriebenen axialen Scans erreichen, die nachfolgend beschrieben wird.

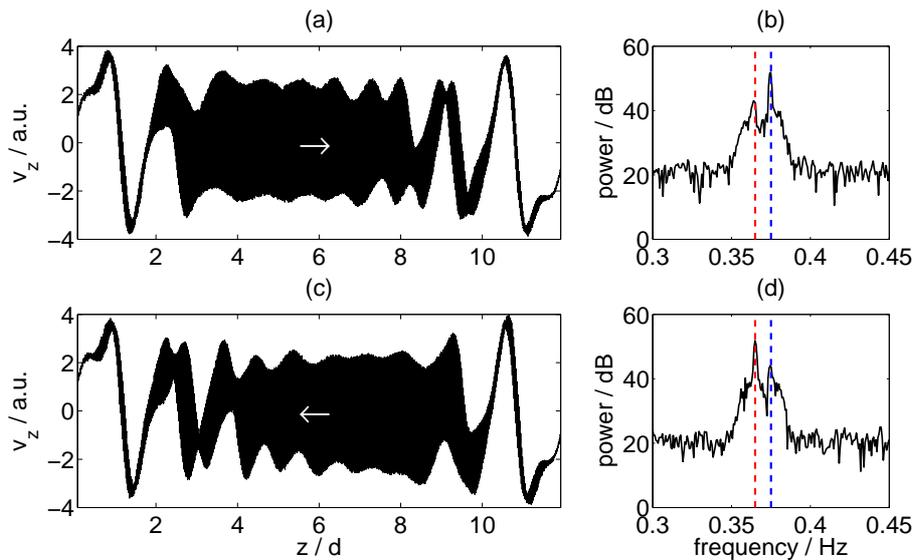


Abbildung 4.5: Axialer Scan der axialen Geschwindigkeit bei $\Gamma = 12.0$, $Re_a = -125.0$ und $Re_i = 120.0$. Darstellung (a) zeigt eine hochlaufende Spirale ($SPI\uparrow$) mit entsprechendem Leistungsspektrum in (b). (c) zeigt analog eine runterlaufende Spirale ($SPI\downarrow$) mit entsprechendem Leistungsspektrum in (d). Die gestrichelten Linien in (b) und (d) markieren die Oszillationsfrequenzen von $SPI\uparrow$ (blau) und $SPI\downarrow$ (rot).

In Abbildung 4.5 sind zwei solcher Scans für eine hoch- und eine runterlaufende Spirale gezeigt. Beide Scans sind bei $Re_a = -125.0$ und $Re_i = 120.0$ aufgezeichnet worden und werden mit (etwa) gleicher Wahrscheinlichkeit im Taylor-Couette-System vorgefunden. Dabei haben Sichtbarkeitsmessungen ergeben, dass es sich bei dem in (a) dargestellten Zustand um eine hochlaufende

Spirale ($\text{SPI}\uparrow$) handelt. In Abbildung 4.5(c) ist der axiale Scan einer runterlaufenden Spirale ($\text{SPI}\downarrow$) gezeigt. Beide Scans sind nicht mehr zur axialen Mitte punktsymmetrisch und die ursprünglich in der Couette-Strömung erhaltene axiale Reflexionssymmetrie wird beim Übergang zu Spiralen gebrochen. Die Symmetrie des Systems bleibt erhalten und der eine Zustand lässt sich durch Punktspiegelung in der axialen Mitte in den anderen überführen.

In (b) und (d) ist das Leistungsspektrum der in (a) bzw. (c) gezeigten axialen Scans gezeigt. Die zu erwartende einzelne Oszillationsfrequenz, die in den Zeitreihen in Abbildung 4.1 durch das Auftreten der Spiralen hervorgerufen wird, zeigt sich im Leistungsspektrum nun in der Form von zwei Peaks bei benachbarten Oszillationsfrequenzen. Die gestrichelten Linien in (b) und (d) markieren diese beiden Frequenzen von $\text{SPI}\uparrow$ (blau) und $\text{SPI}\downarrow$ (rot). Genau zwischen ihnen befindet sich die aus Abbildung 4.1 bekannte Frequenz von $f = 0.372$ Hz für den Fall einer LDA-Messung, die ohne Bewegung des Messvolumens durchgeführt wird.

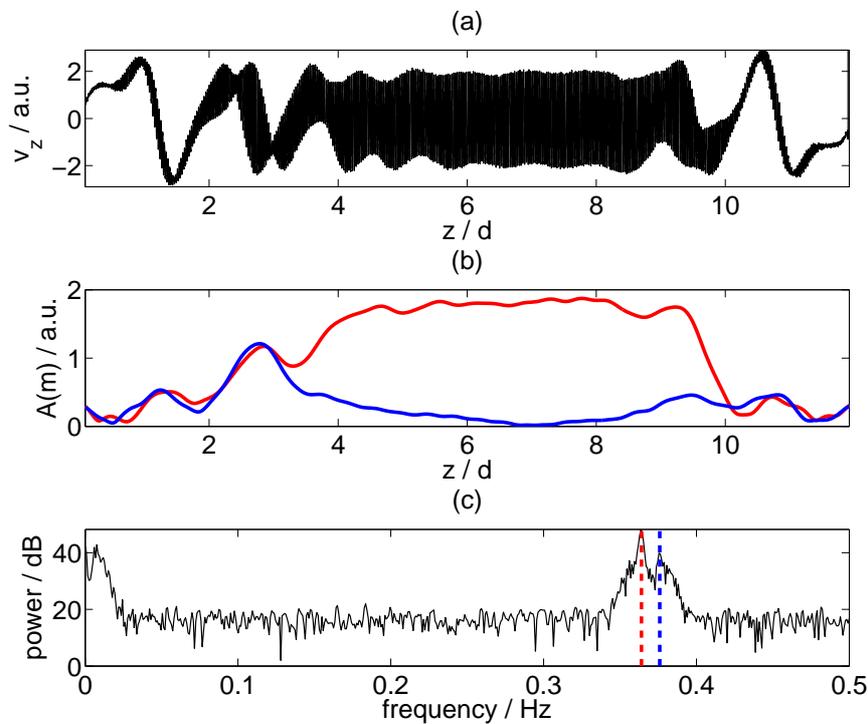


Abbildung 4.6: (a) Axialer Scan der axialen Geschwindigkeit v_z einer runterlaufenden Spirale bei $\Gamma = 12.0$, $Re_a = -120.0$ und $Re_i = 120.0$, (b) Amplituden $A(m)$ der beiden Spiralmoden: rot: $m = +1$ - $\text{SPI}\downarrow$ und blau: $m = -1$ - $\text{SPI}\uparrow$ und (c) Leistungsspektrum der Zeitreihe (a) mit Markierungen der in (b) untersuchten Frequenzen.

Da das Messvolumen des LDAs bei einem solchen axialen Scan prinzipiell von der oberen zur unteren Deckelplatte bewegt worden ist, erfährt die gemessene Frequenz einer propagierenden Spirale eine Frequenzverschiebung. Abhängig von der Propagationsrichtung dieser Spirale ergibt

sich nach dem Doppler-Effekt für SPI_{\downarrow} eine 'negative' und für SPI_{\uparrow} eine 'positive' Frequenzverschiebung, wie allgemein in Abschnitt 3.5 beschrieben. Der Frequenzpeak mit höherer spektraler Leistungsdichte gehört dann zu der Spirale, die sich in einem weiten Bereich in der axialen Mitte des Systems befindet. Die Auffälligkeit, dass auch der entsprechend andere Frequenzpeak im Spektrum zu erkennen ist, soll nachfolgend im Detail untersucht werden.

Für diese Untersuchung ist in Abbildung 4.6(a) ein axialer Scan einer Spirale bei $\Gamma = 12$, $Re_a = -120.0$ und $Re_i = 120.0$ gezeigt. Wie bereits anhand der Einhüllenden dieser Zeitreihe, deren Leistungsspektrum in (d) dargestellt ist, zu erkennen ist, handelt es sich bei diesem Zustand um SPI_{\downarrow} . Wieder zeigen sich zwei nebeneinander liegende Frequenzpeaks, bei denen, wie es bei SPI_{\downarrow} zu erwarten ist, derjenige mit niedriger Frequenz (rote Linie: 0.365 Hz) stärker ist als der mit höherer Frequenz (blaue Linie: 0.375 Hz). Da sich das Messvolumen immer von der oberen zur unteren Deckelplatte bewegt, lässt sich dieser Zustand bereits jetzt eindeutig als SPI_{\downarrow} klassifizieren. Des Weiteren ist im Leistungsspektrum in (c) auch ein Frequenzpeak bei 0.02 Hz zu erkennen, der sich der Ekman-Wirbelströmung zuordnen lässt und sich ausschließlich durch die Bewegung des LDA-Volumens durch die Strömung ergibt, denn diese Strömung ist ja stationär und weist bei ortsfester Messung keine Oszillation auf.

In (b) sind die Amplituden $A(m)$ der beiden *Spiralmoden* gezeigt. Diese Amplituden werden durch die Anwendung zweier Bandpässe auf den in (a) gezeigten axialen Scan der axialen Geschwindigkeit und der anschließenden Detektion der Amplitude aus dieser bandpassgefilterten Zeitreihe mit Hilfe der Hilbert-Transformation ermittelt. Der erste Bandpass deckt ausschließlich den Frequenzbereich in der näheren Umgebung von SPI_{\downarrow} ($m = +1$: 0.350 – 0.371 Hz) ab. Zwischen 4d und 9.5d ist eine starke Amplitude von SPI_{\downarrow} zu erkennen, die dann zu den Deckeln hin abfällt. Der zweite Bandpass ergibt die in blau dargestellten Amplituden und deckt den Frequenzbereich von SPI_{\uparrow} ($m = -1$: 0.371 – 0.390 Hz) ab (in (c) blau markiert). Auffällig ist hier, dass im Bereich zwischen unterer Deckelplatte und einer Höhe von ca. 4d beide Spiralmoden mit annähernd gleicher Amplitude auftreten.

Aufgrund dieser Tatsache sind bereits im axialen Scan in (a) im Bereich zwischen 2d bis 4d Knotenpunkte auf der unterliegenden Ekman-Wirbelströmung zu erkennen. Es zeigt sich aus dieser und anderen Messungen, die im Laufe der vorliegenden Arbeit durchgeführt worden sind, dass in endlichen Systemen keine *reinen* Spiralen zu finden sind, sondern sich grundsätzlich insbesondere an den Deckelplatten auch Anteile des entsprechend anderen Spiraltyps in den so genannten Ekman-Spiral-Defekten ausbilden. Das gleichzeitige Auftreten beider Spiraltypen in diesem lokalisierten Bereich führt damit zu einer Überlagerung und zu Knotenpunkten, die in diesem Bereich auf stehende Wellen schließen lassen.

4.5 Stehende Wellen beim Einsatz der Spiralen

In Abschnitt 4.2 ist bereits gezeigt worden, dass es sich bei dem Übergang aus der Couette-Strömung in die Spiral-Wirbelströmung sowohl um ein wurzelförmiges Anwachsverhalten der Amplitude als auch um das Auftreten einer Oszillation mit fester Frequenz handelt. Diese beiden Ergebnisse könnten allein schon ausschlaggebend dafür sein, für diesen Übergang bereits eine superkritische Hopf-Verzweigung anzunehmen, die am kritischen Punkt die Reflexionssymme-

trie der Strömung bricht.

Um jedoch zusätzlich noch einen genaueren Überblick auch über das räumliche Einsetzen der Spiral-Wirbelströmung zu erlangen, wird im Folgenden mittels eines axialen Scans, mit höchstmöglicher Auflösung bezüglich Re_i , die unmittelbare Umgebung des kritischen Punktes untersucht. In Abbildung 4.7 findet sich dazu ein Überblick über die dort auftretenden Zustände.

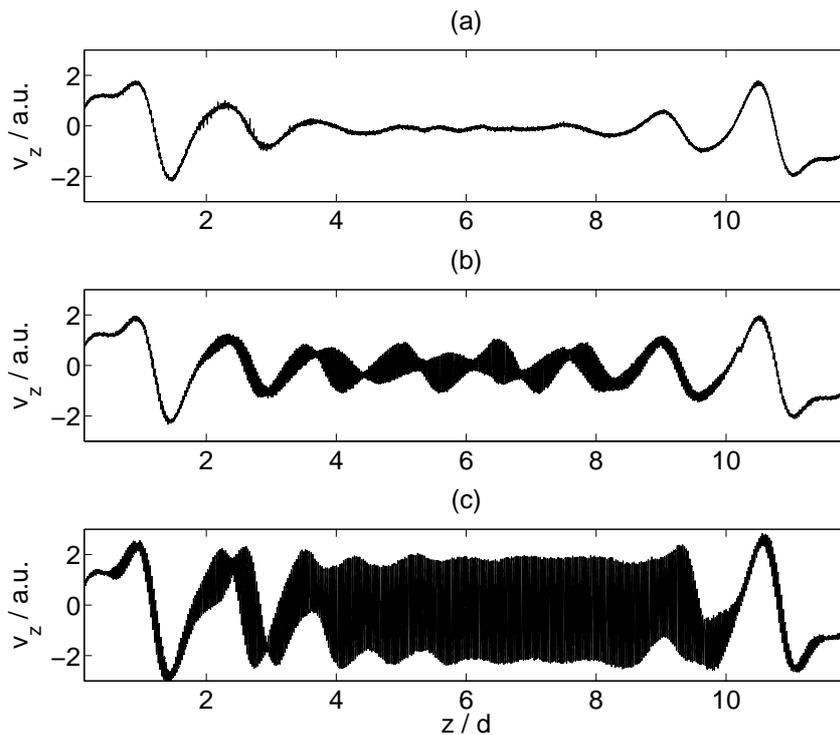


Abbildung 4.7: Axiale Scans der axialen Geschwindigkeit bei $Re_a = -120.0$ und $\Gamma = 12.0$ mit (a) $Re_i = 114.5$, (b) $Re_i = 115.3$ und (c) $Re_i = 120.4$.

In (a) ist der Ausgangszustand, die Couette-Strömung, zu erkennen, die mit der Ekman-Wirbelströmung überlagert ist. In der axialen Mitte des Systems ist keine axiale Geschwindigkeit zu erkennen, wie sie in Abschnitt 4.2 ebenfalls gezeigt worden ist. In (b) zeigt sich, dass sich nicht sofort SPI_{\downarrow} oder SPI_{\uparrow} voll ausbildet, sondern in der axialen Mitte des Systems Knotenpunkte, wie sie für *globale* stehende Wellen typisch sind, auftreten [30]. Diese stehenden Wellen existieren in diesen Messungen über einen Bereich von etwa $\Delta Re_i = 0.4$. In (c) ist dann der Endzustand einer runterlaufenden Spirale gezeigt, wie er bereits im vorherigen Abschnitt analysiert worden ist.

In Abbildung 4.8 wird dieser Zustand noch einmal in (a) mit den Amplituden beider Spiralmoden in (b) und dem Leistungsspektrum (c) gezeigt. Im Leistungsspektrum ist der für Spiralen typische Doppelpack gezeigt, der für die stehenden Wellen im Gegensatz zu Spiralen allerdings für beide Frequenzen (annähernd) gleiche spektrale Leistungsdichte besitzt.

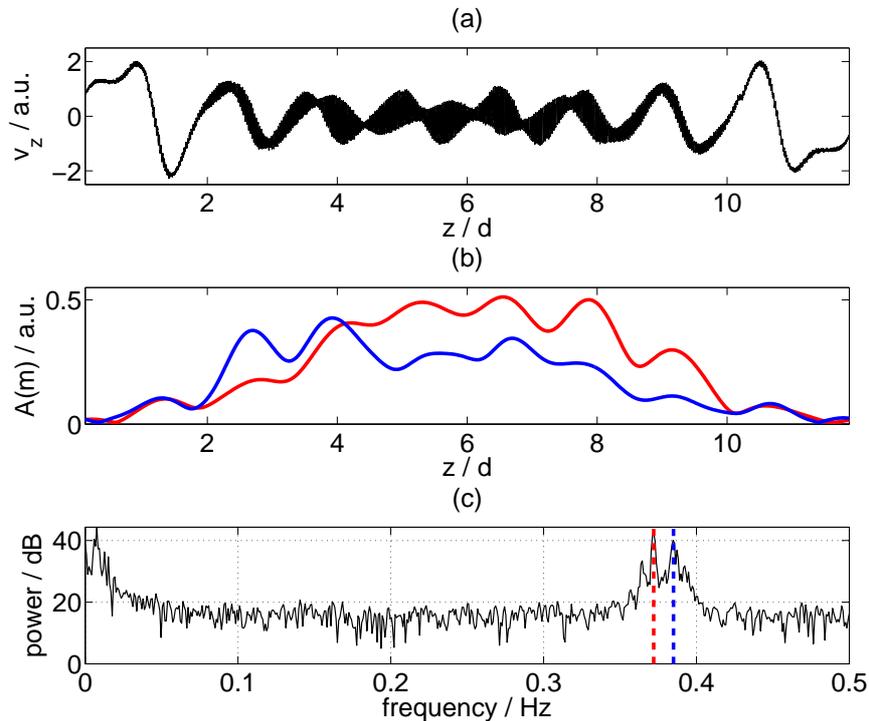


Abbildung 4.8: (a) Axialer Scan der axialen Geschwindigkeit bei $\Gamma = 12.0$, $Re_a = -120.0$ und $Re_i = 115.3$, (b) Amplituden $A(m)$ der beiden Spiralmoden: rot: $m = +1$ - SPI \downarrow und blau: $m = -1$ - SPI \uparrow und (c) Leistungsspektrum von (a) mit Markierungen der in (b) untersuchten Frequenzen.

In (b) sind die beiden Spiralamplituden $A(m)$ in Abhängigkeit der axialen Position dargestellt (rot: SPI \downarrow (0.360 – 0.378 Hz), blau: SPI \uparrow (0.378 – 0.400 Hz)). Im unteren Bereich (2 – 5d) ist zu erkennen, dass Anteile von SPI \uparrow und im oberen größeren Bereich (5 – 10d) Anteile von SPI \downarrow überwiegen. In beiden Bereichen besitzt auch die entsprechend andere Spiralmode eine nicht verschwindende Amplitude und es ergeben sich die für stehende Wellen typischen Knotenpunkte. Diese Knotenpunkte sind allerdings in ihrer axialen Position nicht fest und unterscheiden sich somit von *reinen* stehenden Wellen, wie sie beispielsweise in [30, 61] beschrieben sind.

Dieser Strömungszustand wird bei $Re_i = 115.5$ durch eine runterlaufende Spirale ersetzt, wie sie in Abbildung 4.7(c) bei $Re_i = 120.4$ dargestellt ist. Der Übergang in diese stehende Welle erfolgt zunächst unter Erhaltung der Reflexionssymmetrie und lässt sich als superkritische Hopf-Verzweigung mit Reflexionssymmetrie beschreiben. Bei weiterer Erhöhung von Re_i findet jedoch unter Brechung der Reflexionssymmetrie eine weitere Hopf-Verzweigung in die Spiral-Wirbelströmung statt [30, 31, 83, 84].

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel ist die Untersuchung von unterschiedlichen Spiraltypen ($SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$) erfolgt und mit Hilfe eines im Zuge der vorliegenden Arbeit entwickelten Auswertalgorithmus analysiert worden. Es konnte verifiziert werden, dass sich der Übergang von der Couette-Strömung zur Spiral-Wirbelströmung mit Hilfe einer Hopf-Verzweigung beschreiben lässt.

Im Detail kann jedoch zunächst ein Übergang zu stehenden Wellen unter Erhaltung der Reflexionssymmetrie stattfinden, der sich als superkritische Hopf-Verzweigung mit Reflexionssymmetrie beschreiben lässt. Bei weiterer Erhöhung von Re_i findet unter Brechung dieser Reflexionssymmetrie eine weitere Hopf-Verzweigung in die Spiral-Wirbelströmung eines Typs statt. In der Analyse der beiden Spiraltypen wird deutlich, dass beide 'global' auftreten, jedoch nicht nur eine Spiralmode beinhalten, sondern grundsätzlich auch die entsprechend andere Spiralmode in diesem Strömungszustand in den Ekman-Spiral-Defekten auftritt. Das bedeutet, dass Spiralen in einem solchen System niemals als reine globale Zustände auftreten.

Dieses Ergebnis zeigt, dass nicht nur die axiale Länge des Systems sondern bereits die Existenz von Deckelplatten einen wesentlichen Einfluss auf die Dynamik dieses primär auftretenden oszillatorischen Strömungszustandes haben.

Kapitel 5

Spiralen mit gebrochener Reflexionssymmetrie

Im vorliegenden Kapitel wird der Einfluss der gebrochenen Reflexionssymmetrie beim Übergang zu Spiralen in einem Taylor-Couette-System mit gegenrotierenden Zylindern untersucht. Dies wird mit theoretischen Ergebnissen zur symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung mit gebrochener Reflexionssymmetrie verglichen. Experimentell wird dabei die Reflexionssymmetrie des Systems mit Hilfe eines zusätzlichen axialen Durchflusses realisiert. Diese Modifikation der Taylor-Couette-Strömung, nachfolgend Spiral-Poiseuille-Strömung genannt, bietet einerseits eine geeignete experimentelle Kontrollierbarkeit symmetriebrechender Einflüsse auf die Strömung und andererseits ergibt sich durch die Wahl eines entsprechend langen Systems die Möglichkeit, den Effekt der gebrochenen Translationssymmetrie zu verringern.

Es hat sich gezeigt, dass in entsprechend langen Systemen ($\Gamma > 12$) der Einfluss der gebrochenen Translationssymmetrie nicht messbar ist [31]. Aus diesem Grund sind die vorliegenden Untersuchungen in einem System mit $\Gamma = 22.8$ durchgeführt worden. Zusätzlich sind in Voruntersuchungen zu konvektiven und absoluten Instabilitäten Übereinstimmungen mit theoretischen Konzepten offener hydrodynamischer Systeme für den Übergang zu Spiralen im Spiral-Poiseuille-System gefunden worden, für deren detaillierte Darstellung an dieser Stelle auf [2] verwiesen sei. Die experimentellen Ergebnisse zeigen dabei eine gute quantitative Übereinstimmung mit numerisch bestimmten Instabilitätsgrenzen, und dies, obwohl die Numerik von einem unendlich langen System ausgeht [51].

Das Ziel der Untersuchung dieses Kapitels ist es, die Anwendbarkeit verzweigungstheoretischer Konzepte und deren grundlegende Symmetriebetrachtungen auf den Fall gebrochener Reflexionssymmetrie beim Übergang von der Grundströmung, der so genannten Couette-Poiseuille-Strömung, zu hoch- und runterlaufenden Spiralen in einem Spiral-Poiseuille-System mit gegenrotierenden Zylindern zu betrachten.

5.1 Dynamik von Spiralen mit Durchfluss

Bei den nachfolgenden Ausführungen wird sowohl der Einfluss eines positiven (von unten nach oben) als auch eines negativen (von oben nach unten) Wertes der Durchfluss-Reynoldszahl Re auf diesen Übergang zu Spiralen betrachtet. Für positive Re zeigen sich dabei primäre $SPI\uparrow$ und für negative Re primäre $SPI\downarrow$ als Folge der ersten Instabilität der Grundströmung. Beide Spiralen propagieren folglich in Richtung des axialen Durchflusses stromabwärts. Prinzipiell finden sich in diesem Experiment auch stromaufwärts propagierende Spiralen, die jedoch sekundär auftreten.

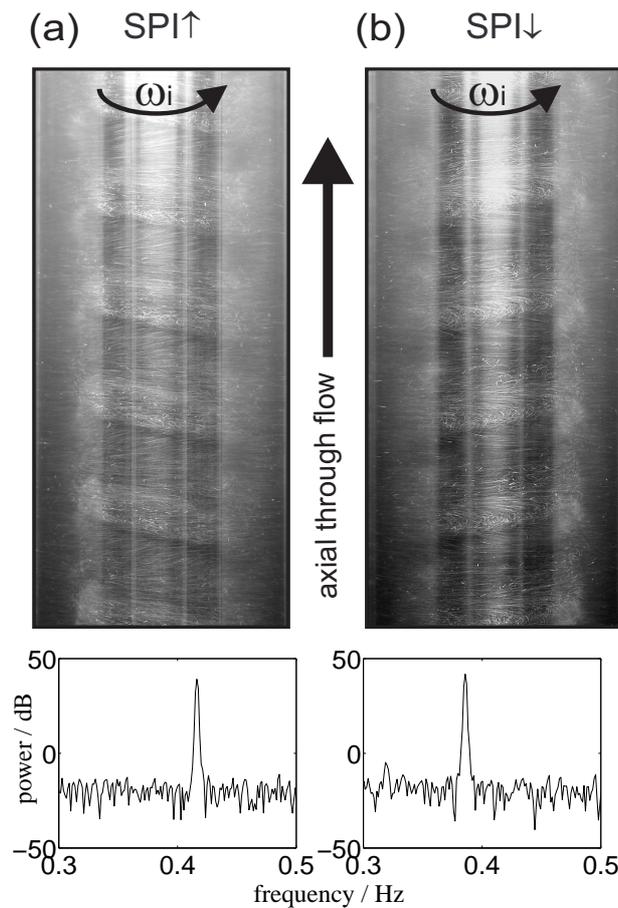


Abbildung 5.1: Sichtbarkeitsaufnahmen und Leistungsspektren der entsprechenden Zeitreihen für Spiralwirbel aufgezeichnet bei $\Gamma = 22.8$, $Re = 0.6$, $Re_a = -125.0$ und $Re_i = 125.0$ bei $SPI\uparrow$ (a) und $Re_i = 133.0$ bei $SPI\downarrow$ (b).

In Abbildung 5.1 sind zwei Sichtbarkeitsaufnahmen gezeigt, die bei unterschiedlichen Re_i aber ansonsten gleichen Parametern ($\Gamma = 22.8$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0.6$) aufgezeichnet worden sind. In (a) ist eine hochlaufende Spirale ($SPI\uparrow$), die mit dem axialen Durchfluss propagiert, gezeigt und in (b) ist eine runterlaufende Spirale ($SPI\downarrow$), deren Propagation gegen den axialen Durchfluss erfolgt, dargestellt. Als Folge des axialen Durchflusses findet sich bei der Aufzeichnung einer ortsfesten Zeitreihe mit Hilfe des LDAs eine Verschiebung der beiden Oszillationsfre-

quenzen der Spiralen, die somit auf sehr einfache Weise eindeutig identifiziert werden können. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass für den Fall eines geschlossenen Systems ohne axialen Durchfluss ($Re = 0$) beide Spiralfrequenzen gleich sind und eine ortsfeste LDA-Messung zur genauen Bestimmung des Strömungszustandes nicht hinreichend ist. In Kapitel 4 ist insbesondere aus diesem Grunde die Technik der axialen Scans zur Charakterisierung der unterschiedlichen Strömungszustände verwendet worden. So zeigt sich in den beiden Leistungsspektren aus Abbildung 5.1 aufgrund des positiven axialen Durchflusses jeweils ein Frequenzpeak, der im Vergleich zum Fall $Re = 0$ für $SPI\uparrow$ hin zu kleineren Frequenzen und für $SPI\downarrow$ hin zu größeren Frequenzen Doppler-verschoben ist. Der funktionale Zusammenhang für diese Frequenzverschiebung soll zum Ende dieses Kapitels noch genauer untersucht werden.

5.2 Verzweigungsverhalten

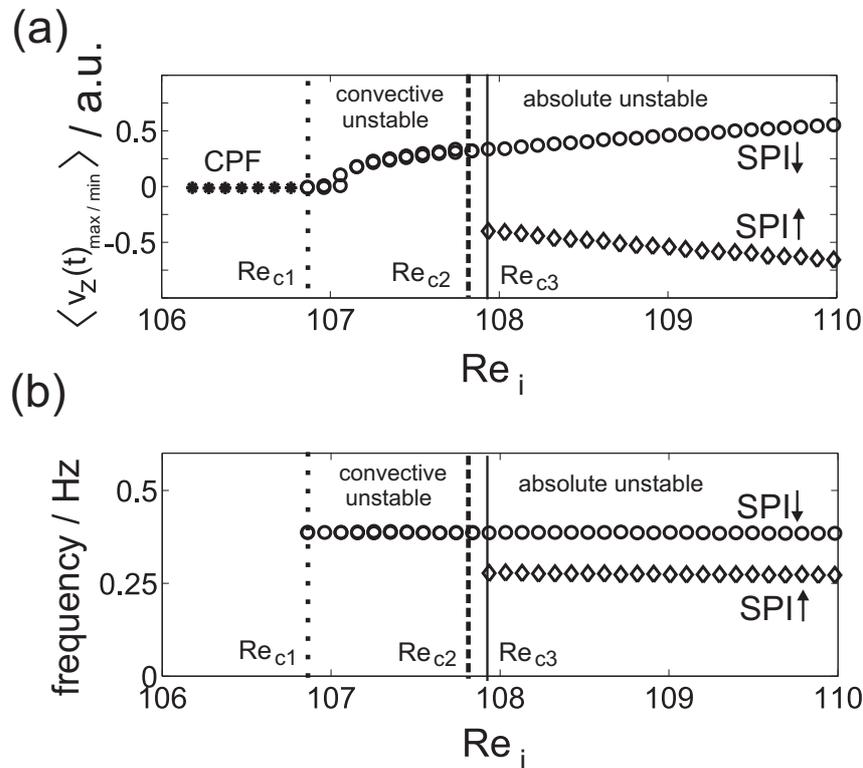


Abbildung 5.2: Verzweigungsdiagramm gemessen bei $\Gamma = 22.8$, $Re = -1.5$ and $Re_a = -100.0$: (a) Mittelwert der Maxima (\circ) der axialen Geschwindigkeit $v_z(t)$ in der axialen Mitte des Systems dargestellt als Maß der Amplitude von $SPI\downarrow$, Mittelwert der Minima (\diamond) als Maß für die Amplitude von $SPI\uparrow$. Laminare Couette-Poiseuille-Strömung (\bullet) wird konvektiv instabil bei Re_{c1} (gepunktete vertikale Linie) gegenüber $SPI\downarrow$ und absolut instabil bei Re_{c2} (gestrichelte vertikale Linie), $SPI\uparrow$ wird instabil bei Re_{c3} (durchgezogene vertikale Linie). (b) Oszillationsfrequenzen von $SPI\downarrow$ (\circ) und $SPI\uparrow$ (\diamond).

In Abbildung 5.2 ist das Verzweigungsverhalten der beiden Spiralen ($SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$) unter dem Einfluss eines negativen axialen Durchflusses (von oben nach unten) exemplarisch bei $\Gamma = 22.8$, $Re_a = -100.0$ und $Re = -1.5$ gezeigt. Experimentell ist dieses Verzweigungsdiagramm durch quasistatische Erhöhung von Re_i entstanden, wobei jeder Punkt eine ortsfest mit dem LDA aufgezeichnete Zeitreihe von etwa 10 Minuten repräsentiert. Als Ordnungsparameter dienen dabei für $SPI\uparrow$ die Mittelwerte der Minima (\diamond) und aus Gründen der besseren Unterscheidbarkeit in diesem Diagramm für $SPI\downarrow$ die Mittelwerte der Maxima (\circ) der axialen Geschwindigkeit $v_z(t)$. In (a) sind diese gegen den Kontrollparameter Re_i aufgetragen. Die gepunktete vertikale Linie, gekennzeichnet mit Re_{c1} , bezeichnet dabei den Übergang von der Couette-Poiseuille-Strömung zu konvektiv instabilen $SPI\downarrow$ (\bullet).

In Abbildung 5.2(b) ist zusätzlich die Oszillationsfrequenz gegen Re_i aufgetragen und es findet sich oberhalb dieser gepunkteten Linie eine feste Frequenz. Konvektiv instabil bezieht sich dabei auf die Grundströmung, die oberhalb dieser Grenze dahingehend instabil wird, dass nun Störungen, die in das System hinein getragen werden, prinzipiell wachstumsfähig sind und dazu in der Lage sein können, einen anderen Strömungszustand, hier Spiralen, anzuregen. So gilt das Auftreten der Oszillationsfrequenz der Spiralen als Maß für die Bestimmung dieser Instabilitätsgrenze. Der konvektiv instabile Bereich endet bei Re_{c2} an der gestrichelten vertikalen Linie. Oberhalb dieser Linie liegt die Grundströmung absolut instabil vor, wobei $SPI\downarrow$ dann als stabile Lösung auftritt. Aus Voruntersuchungen ist bereits bekannt, dass sich an dieser Stelle die Breite des Frequenzpeaks im Spektrum der entsprechenden Zeitreihen signifikant verringert. Zur detaillierten Beschreibung der Vorgehensweise für die Bestimmung dieser Grenze sei an dieser Stelle auf [2] verwiesen.

Startet man oberhalb der gestrichelten Linie mit $SPI\uparrow$, also mit der Spirale, die sich gegen den Strom bewegt, so bleibt diese bei quasistatischer Verringerung von Re_i bis hin zu Re_{c3} stabil. Diese Grenze ist in (a) und (b) durch die durchgezogene vertikale Linie gekennzeichnet. An dieser Grenze erfolgt der Übergang von $SPI\uparrow$ auf $SPI\downarrow$ in Form einer transienten quasiperiodischen Strömung, der so genannten modulierten Welle.

5.3 Stabilitätsdiagramm

In Abbildung 5.3(a) sind numerisch berechnete konvektive (gestrichelte Linie) und absolute (durchgezogene Linie) Instabilitätsschwellen derjenigen Spiralen in Abhängigkeit von Re aus [51] eingezeichnet, die mit dem Strom propagieren. Die konvektive Instabilitätsschwelle liegt dabei prinzipiell unterhalb der absoluten Schwelle. Für positive Durchflüsse sind ausschließlich die Stabilitätsschwellen für $SPI\uparrow$ und für negative Durchflüsse nur diejenigen für $SPI\downarrow$ eingezeichnet. Im Fall $Re = 0$ schneiden sich die konvektiven und absoluten Instabilitätsschwellen von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$. Die Punkte (\circ) in diesem Diagramm stellen die experimentell bestimmte absolute Instabilitätsgrenze Re_{c2} dar. Dabei handelt es sich um die mit dem Strom propagierende Spirale, wie dies exemplarisch in Abbildung 5.2 durchgeführt worden ist. Es findet sich eine gute quantitative Übereinstimmung dieser Werte mit der numerisch bestimmten absoluten Instabilitätsgrenze.

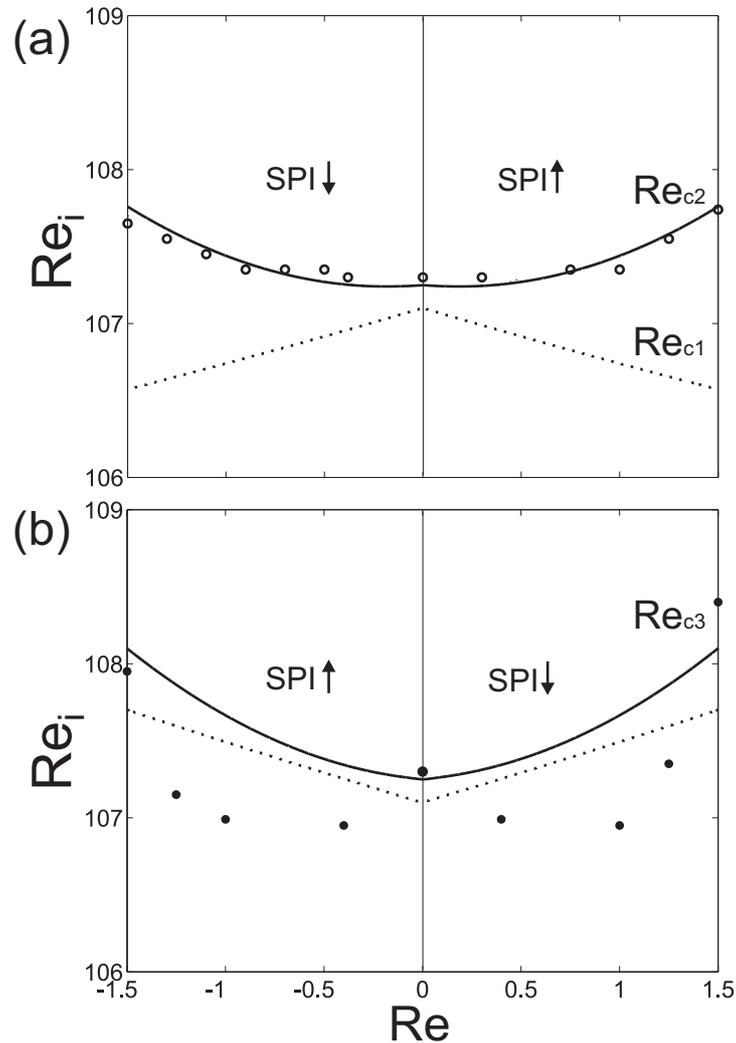


Abbildung 5.3: Stabilitätsdiagramm gemessen bei $\Gamma = 22.8$, $Re_a = -100.0$: (a,b) Numerisch bestimmte konvektive (gepunktete Linie) und absolute lineare Instabilität (durchgezogene Linie) der Couette-Poiseuille-Strömung zu SPI \uparrow und SPI \downarrow aus [51]. (a) Messungen der absoluten Instabilitätsgrenze (\circ) für abwärts propagierende SPI \downarrow bei $Re \leq 0$ und SPI \uparrow bei $Re \geq 0$. (b) Untere Instabilitätsschwelle (\bullet) für abwärts propagierende SPI \uparrow bei $Re \leq 0$ und SPI \downarrow bei $Re \geq 0$.

In Abbildung 5.3(b) sind analog die numerisch bestimmten Instabilitätsschwellen aus [51] gegen Re derjenigen Spiralen aufgetragen, die gegen den Strom propagieren. Eingezeichnet sind daher auch nur die numerisch berechneten konvektiven (gestrichelte Linie) und absoluten (durchgezogene Linie) Instabilitätsgrenzen aus [51] der stromaufwärts propagierenden Spiralen (SPI \uparrow für $Re \leq 0$ und SPI \downarrow für $Re \geq 0$). Die experimentell ermittelten Werte Re_{c3} , wie sie exemplarisch in Abbildung 5.2 bestimmt worden sind, sind zum Vergleich ebenfalls eingezeichnet (\bullet). Ausgehend von der entsprechend gegen den Strom propagierenden Spirale sind diese Werte dadurch bestimmt worden, dass der Kontrollparameter Re_i quasistatisch verringert worden ist. Re_{c3} ist dann der Wert, bei dem ein Übergang von der stromaufwärts propagierenden Spirale entweder

zur stromabwärts propagierenden Spirale oder direkt in den Grundzustand stattfindet. Die experimentell ermittelten Werte stimmen für den Fall $Re = 0$ gut mit den numerisch bestimmten Schwellen überein. Für $Re \neq 0$ liegt die numerisch berechnete Grenze jedoch zum Teil oberhalb der experimentell ermittelten Werte.

5.4 Modulierte Welle

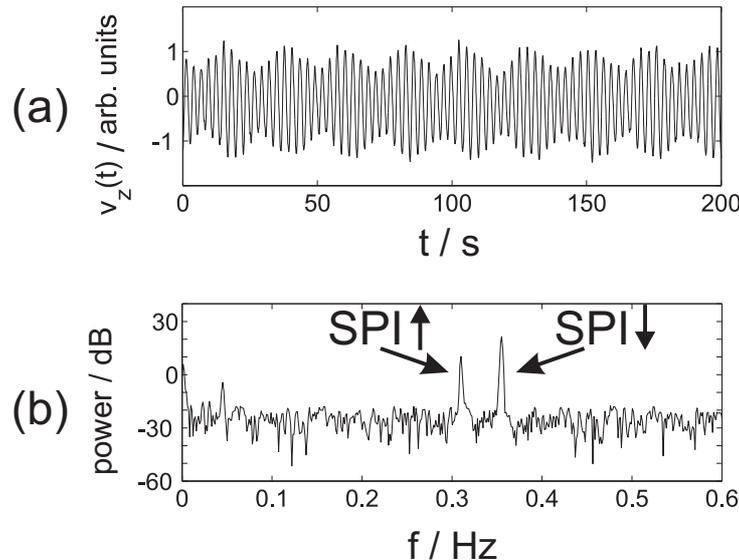


Abbildung 5.4: Transiente modulierte Welle beim Übergang von stromaufwärts zu stromabwärts propagierenden Spiralen: (a) Zeitreihe dieses Strömungszustandes bei $\Gamma = 22.8$, $Re_i = 107.0$, $Re_a = -100.0$ und $Re = -0.9$. (b) Entsprechende Frequenzpeaks von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ im Leistungsspektrum der Zeitreihe (a).

Bei der modulierten Welle handelt es sich um eine transiente quasiperiodische Strömung, die beim Übergang von der stromaufwärts zur stromabwärts propagierenden Spirale auftritt. In Abbildung 5.4(a) ist eine Zeitreihe dieser transient auftretenden Strömung, gemessen bei $Re_i = 107.0$, $Re_a = -100.0$ und $Re = -0.9$, gezeigt. In (b) ist auch ein Ausschnitt des Leistungsspektrums dieser Zeitreihe mit den beiden charakteristischen Frequenzpeaks von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ gezeigt. Anhand der Oszillationsfrequenzen der Spiralen im Leistungsspektrum lässt sich diese modulierte Welle als eine Überlagerung von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ beschreiben. Die Existenz einer modulierten Welle in diesen Verzweigungsszenarien unterstreicht die Gültigkeit der theoretischen Erkenntnisse und das gesamte Verzweigungsverhalten ist in Übereinstimmung mit der Theorie der symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung mit gebrochener Reflexionssymmetrie. Eine Folge der gebrochenen Reflexionssymmetrie ist dabei die Aufspaltung der symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung in zwei getrennte Äste (hier: $SPI\downarrow$ und $SPI\uparrow$), die unabhängig voneinander aus der Grundströmung verzweigen. Im Gegensatz zur 'geschlossenen' Taylor-Couette-Strömung ergibt

sich bei zusätzlichem axialen Durchfluss dabei die Aufspaltung in die beiden Spiralzustände an unterschiedlichen Re_i .

5.5 Frequenzen

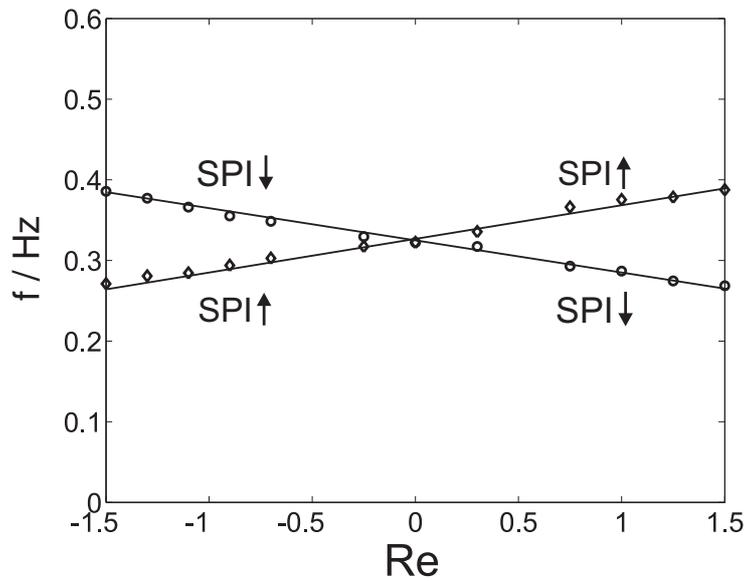


Abbildung 5.5: Oszillationsfrequenzen f von $\text{SPI}\uparrow$ (\circ) und $\text{SPI}\downarrow$ (\diamond) gemessen bei $\Gamma = 22.8$, $Re_i = 109.0$ und $Re_a = -100.0$: Die Frequenz f des primären abwärts (sekundär aufwärts) propagierenden Spiralen erhöht (verringert) sich unter dem Einfluss des axialen Durchflusses im Vergleich zum geschlossenen Fall $Re = 0$. Die Frequenz von $\text{SPI}\uparrow$ and $\text{SPI}\downarrow$ weist in diesem Bereich einen linearen Zusammenhang mit Re auf.

Bereits im Abschnitt 5.1 ist darauf hingewiesen worden, dass der axiale Durchfluss einen Einfluss auf die Oszillationsfrequenzen der Spiralen besitzt. Auf den genauen funktionalen Zusammenhang dieser Frequenzen soll im Folgenden eingegangen werden. In Abbildung 5.5 sind die gemessenen Oszillationsfrequenzen sowohl von $\text{SPI}\downarrow$ (\circ) als auch von $\text{SPI}\uparrow$ (\diamond) für unterschiedliche axiale Durchflüsse eingezeichnet. Die Frequenzen weisen dabei einen linearen Zusammenhang mit Re auf. Die beiden Linien in Abbildung 5.5 verdeutlichen diesen Zusammenhang. Die Frequenz der primären, stromabwärts propagierenden Spirale erhöht sich dabei unter dem Einfluss des axialen Durchflusses im Vergleich zum geschlossenen Fall $Re = 0$. Für die sekundär auftretenden stromaufwärts propagierenden Spiralen ergibt sich ebenfalls ein linearer Zusammenhang, der analog eine Verringerung der Frequenz zur Folge hat.

Der Stabilitätswechsel zwischen den primären und sekundären Spiralen findet dabei genau bei $Re = 0$ statt. Für $Re > 0$ sind $\text{SPI}\uparrow$ primär und $\text{SPI}\downarrow$ sekundär, für $Re < 0$ sind diese beiden Stabilitätsgrenzen vertauscht. Ist die Reflexionssymmetrie des Systems aufgrund eines axialen Durchflusses gebrochen, werden aus einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung zwei getrennte

Verzweigungen zu hoch- und runterlaufenden Spiralen. Es zeigt sich, dass der axiale Durchfluss in einem Taylor-Couette-System mit gegenrotierenden Zylindern eine geeignete symmetriebrechende Störung darstellt und somit die Verzweigungsstruktur bezüglich der Reflexionssymmetrie entfaltet.

5.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel ist der Einfluss eines axialen Durchflusses auf die Verzweigungsstruktur der Spiral-Wirbelströmung in der Spiral-Poiseuille-Strömung untersucht worden. Im Zuge dieser Arbeit ist die Beschreibung dieser Struktur in Form einer Hopf-Verzweigung mit erhaltener und gebrochener Reflexionssymmetrie erfolgt.

Diejenigen Spiralen, deren Propagation dabei mit dem Strom erfolgt, treten dabei primär von der Grundströmung in Form dieser Instabilität auf, wobei der Übergang grundsätzlich in einen konvektiv und einen absolut instabilen Bereich eingeteilt werden muss. Die experimentell ermittelte absolute Instabilitätsgrenze weist dabei eine quantitative Übereinstimmung mit numerisch bestimmten Werten für den Fall eines unendlich langen Systems auf.

Die Spirale, deren Struktur jedoch entgegen der Richtung des axialen Durchflusses erfolgt, tritt in der Strömung stets sekundär und mit endlicher Amplitude oberhalb des Verzweigungspunktes der primär auftretenden Spirale auf. Beim Übergang von der sekundären, stromaufwärts propagierenden Spirale zur primären, stromabwärts propagierenden Spirale findet sich des Weiteren ein transienter quasiperiodischer Zustand, der sich aus einer Überlagerung der beiden Spiralen ergibt. Die Verzweigungsstruktur ist symmetrisch bezüglich des axialen Durchflusses Re und zeigt, dass der symmetrische Fall Teil der hier dargestellten Verzweigungsstruktur mit erhaltener ($Re = 0$) und gebrochener ($Re \neq 0$) Reflexionssymmetrie ist.

Kapitel 6

Konkurrierende Moden

In dem Parameterbereich, der im Zuge des vorliegenden Kapitels untersucht wird, sind sowohl Taylorwirbel als auch die beiden Spiraltypen $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ zu beobachten. Anders als in den vorhergehenden Kapiteln zeichnet sich dieser Parameterbereich jedoch dadurch aus, dass diese drei Strömungszustände bei festen Kontrollparametern intermittent in der Strömung auftreten und sich zwischen diesen Strömungszuständen entsprechende Defekte bilden. Die 'einfachen' Taylorwirbel werden in diesem Bereich als propagierende Taylorwirbel bezeichnet, weil sie aufgrund eines axialen Durchflusses durch das System 'geschoben' werden. Da dieser intermittente Strömungszustand sowohl im konvektiv als auch im absolut instabilen Bereich der Grundströmung existiert, liegt der Fokus der hier dargestellten Untersuchungen auf der Charakterisierung des Zustandes in diesen beiden Bereichen. Die in diesem Kapitel durchgeführten Messungen sind alle bei $\Gamma = 22.8$ durchgeführt worden.

6.1 Spiral-Wirbelströmung und propagierende Taylorwirbel

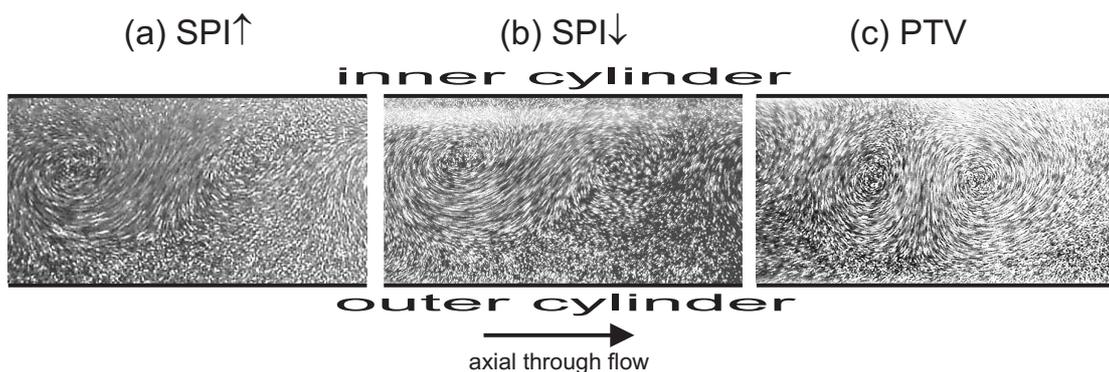


Abbildung 6.1: Photographien eines Laserlichtschnittes von (a) $SPI\uparrow$ bei $Re = -1.5$, (b) $SPI\downarrow$ bei $Re = 1.5$, beide gemessen bei $Re_i = 130$ und $Re_a = -100$, und (c) propagierende Taylorwirbel (PTV) bei $Re_i = 110$, $Re_a = -50$ und $Re = 3.0$.

In Abbildung 6.1 sind Photographien eines Laserlichtschnittes der drei oben erwähnten Strömungszustände $\text{SPI}\uparrow$ (a), $\text{SPI}\downarrow$ (b) und propagierende Taylorwirbel (c) gezeigt. Die beiden Spiraltypen sind bereits aus den vorherigen Kapiteln bekannt, werden hier jedoch nochmals gezeigt, um nachfolgend deren Unterschiede zu propagierenden Taylorwirbeln deutlich zu machen. Sie sind bei $Re_i = 130$ und $Re_a = -100$ bei positivem ($\text{SPI}\downarrow$: $Re = +1.5$) und negativem Durchfluss ($\text{SPI}\uparrow$: $Re = -1.5$) gemessen worden und propagieren in diesen Messungen stets gegen den axialen Durchfluss. Der Lichtschnitt der propagierenden Taylorwirbel in Abbildung 6.1(c) ist bei $Re_i = 110$, $Re_a = -50$ und $Re = 3.0$ gemessen worden. Im Vergleich weist die Spiral-Wirbelströmung eine andere Form als die propagierenden Taylorwirbel auf, denn die Wirbelpaare der Spiralen befinden sich aufgrund der stärkeren Gegenrotation näher am Innenzylinder. Des Weiteren besitzen die beiden Wirbel eines jeden Wirbelpaares im Fall der Spiralen eine unterschiedliche Größe, wohingegen sie im Fall der propagierenden Taylorwirbel etwa gleiche Abmaße aufweisen.

6.2 Intermittenz

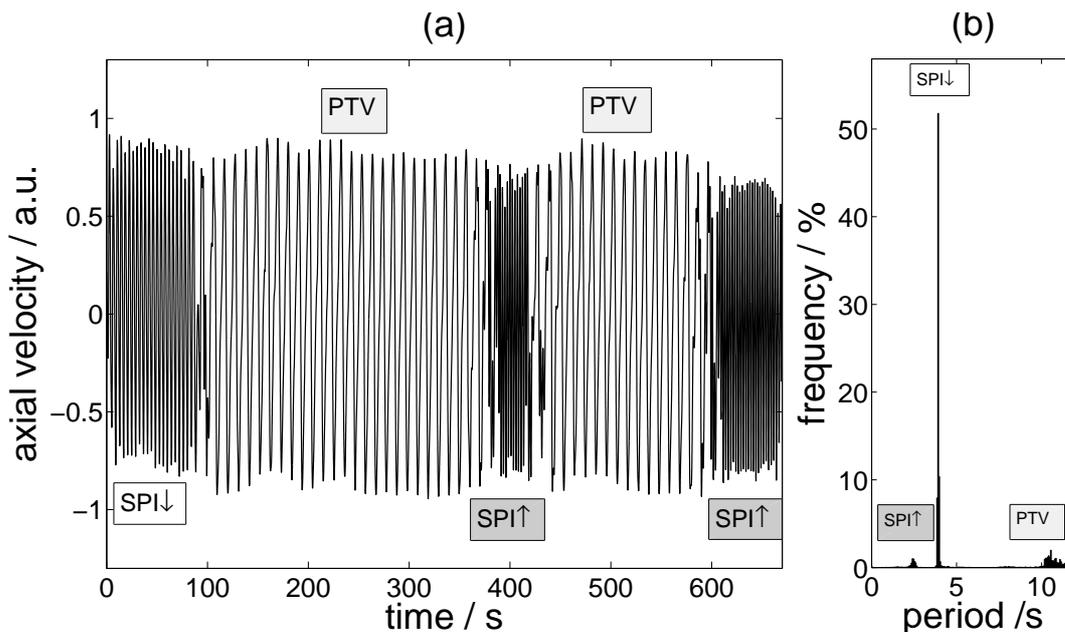


Abbildung 6.2: (a) Ausschnitt einer 24 Stunden langen Zeitreihe gemessen bei $Re = 3.75$, $Re_i = 125$ und $Re_a = -100$ und (b) Periodenverteilung der Gesamtzeitreihe. (a) zeigt exemplarisch die drei Zustände $\text{SPI}\uparrow$, $\text{SPI}\downarrow$ und PTV, welche alternierend auftreten. (b) zeigt die Verteilung der Perioden, wobei sich bestimmte Perioden den drei Zuständen $\text{SPI}\uparrow$, $\text{SPI}\downarrow$ und propagierende Taylorwirbel (PTV) zuordnen lassen.

Wie bereits erwähnt, existiert ein Parameterbereich, in dem die Zustände $\text{SPI}\uparrow$, $\text{SPI}\downarrow$ und pro-

pagierende Taylorwirbel zeitlich alternierend im System mit axialem Durchfluss auftreten. In Abbildung 6.2(a) ist der Wechsel dieser Strömungszustände aufgrund der unterschiedlichen Frequenzen in der Zeitreihe sichtbar. Diese Zeitreihe ist bei $Re_i = 125$, $Re_a = -100$ und $Re = 3.75$ gemessen worden und besitzt insgesamt eine Länge von 24 Stunden. Im dargestellten Ausschnitt sind 670 Sekunden dargestellt, und die Strömungszustände sind in dieser Zeitreihe entsprechend markiert. Die Zuordnung der Strömungszustände aus der LDA-Messung ist in Übereinstimmung mit einer mittels Lichtschnitt gemachten Untersuchung getroffen worden. Der Ausschnitt beginnt mit etwa 80 Sekunden der SPI_{\downarrow} -Strömung, auf die 300 Sekunden propagierende Taylor-Wirbel folgen. Anschließend lassen sich für 40 Sekunden SPI_{\uparrow} und dann 170 Sekunden propagierende Taylorwirbel detektieren, auf die SPI_{\uparrow} folgt. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass allein die Frequenz zur Charakterisierung des Strömungszustandes in fast jedem Parameterbereich zusammen mit der Form des Messsignales (unterschiedliche oder gleiche Wirbelgrößen) ausreichend ist, da die Frequenzen aufgrund des axialen Durchflusses verschoben sind.

In Abbildung 6.2(b) sind die relativen Häufigkeiten der Perioden der gesamten Zeitreihe in Form eines Histogrammes dargestellt. Diese Perioden sind mit Hilfe einer Hilbert-Transformation und der anschließenden Auswertung der Phasen ermittelt worden. Die einzelnen Peaks in diesem Histogramm lassen sich den drei Strömungszuständen folgendermaßen zuordnen: SPI_{\uparrow} : 2.4 Sekunden, SPI_{\downarrow} : 3.9 Sekunden und propagierende Taylorwirbel: 10.5 Sekunden. Alle drei Strömungszustände treten in dieser Messung mit unterschiedlichen Häufigkeiten auf, wobei die propagierenden Taylorwirbel insgesamt die längste Zeit im System existieren. Der Zustand von SPI_{\downarrow} zeigt eine sehr feste Periodendauer. Des Weiteren ist in der Zeitreihe keine Periodizität bezüglich der Abfolge oder der Dauer der einzelnen Zustände zu ermitteln.

6.3 Stabilitätsdiagramm

Die Abbildung 6.3 zeigt ein Stabilitätsdiagramm des hier untersuchten Parameterbereichs für $Re_a = -100$ in der (Re_i, Re) -Ebene. Die konvektive und absolute Instabilitätsgrenze sind sowohl experimentell (\bullet und \circ) als auch numerisch (gepunktete und durchgezogene Linie) bestimmt worden und in diesem Diagramm dargestellt. Die numerischen Berechnungen beziehen sich dabei auf Daten der linearisierten Navier-Stokes-Gleichung für den Fall eines unendlich langen Systems [51]. Die Grenze des Intermittenzbereichs (\diamond und gestrichelte Linie) bezieht sich auf gemessene Daten. Die Punkte (a), (b) und (c) auf der rechten Seite dieses Diagramms deuten die Messparameter der drei in Abbildung 6.4 gezeigten Zeitreihen an.

Als experimentelles Maß für die Bestimmung der konvektiven Instabilitätsgrenze dient das Auftreten der Frequenz der Spiral-Wirbelströmung in der entsprechend gemessenen Zeitreihe. Das Kriterium für die absolute Instabilitätsgrenze ist hingegen die Breite des Frequenzpeaks, wie in [2] beschrieben. Für $Re < 5.3$ existiert oberhalb der konvektiven Instabilitätsgrenze zunächst SPI_{\uparrow} , jedoch tritt bei weiterer Erhöhung von Re_i oberhalb der gestrichelten Linie der intermittente Strömungszustand auf. Im Bereich $5.3 \leq Re \leq 6.0$ überquert diese Grenze, oberhalb derer Intermittenz zu beobachten ist, sogar die absolute Instabilitätsgrenze.

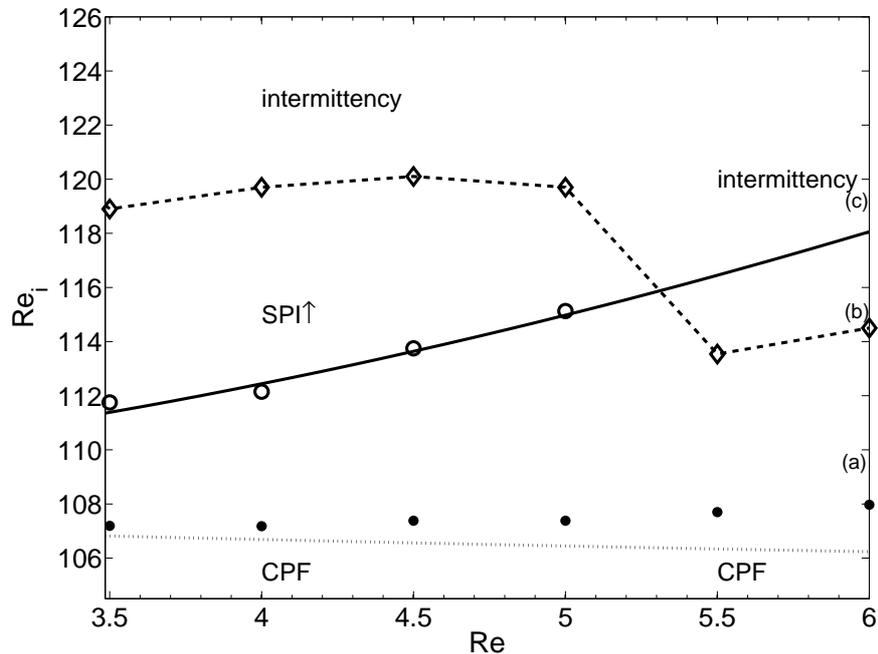


Abbildung 6.3: Stabilitätsdiagramm für $Re_a = -100$. Es ist die konvektive und absolute Instabilitätsgrenze auf der Basis gemessener (\bullet und \circ) und numerisch bestimmter (gepunktete und durchgezogene Linie) Werte eingezeichnet. Der intermittente Strömungszustand (intermittency) beginnt oberhalb der durch (\diamond und gestrichelte Linie) gekennzeichneten Linie. Die an den Punkten (a)-(c) gemessenen Zeitreihen werden in Abbildung 6.4 vorgestellt.

6.4 Intermittenz im konvektiv und absolut instabilen Bereich

Die Abbildung 6.4 zeigt drei Zeitreihen, deren Parameter in Abbildung 6.3 als (a), (b) und (c) gekennzeichnet sind. Alle drei Zeitreihen sind bei $Re = 6.0$ und $Re_a = -100$ aufgezeichnet worden. In Abbildung 6.4(a) ist eine Zeitreihe bei $Re_i = 108.57$ mit dem dazugehörigen Leistungsspektrum gezeigt. Im Leistungsspektrum auf der rechten Seite zeigt sich ein Frequenzpeak, der sich $SPI\uparrow$ zuordnen lässt. Aufgrund des höheren Durchflusses hat sich die Frequenz bzw. Periodendauer gegenüber der in Abbildung 6.2 gezeigten Zeitreihen verschoben. Als typisch konvektiv zeigt der Frequenzpeak dieser Zeitreihe bei $f_{SPI\uparrow} = 0.57$ Hz eine Verbreiterung gegenüber einer Zeitreihe, die im absolut instabilen Bereich gemessen worden ist.

In (b) ist eine Zeitreihe dargestellt, die bei $Re_i = 114.93$ und somit im konvektiv instabilen Parameterbereich liegt. Im Leistungsspektrum dieser Zeitreihe sind zwei Frequenzpeaks zu erkennen. Der Peak bei $f_{SPI\uparrow} = 0.57$ Hz lässt sich $SPI\uparrow$ und der Peak bei $f_{PTV} = 0.22$ Hz propagierenden Taylorwirbeln zuordnen. Auch hier sind die Frequenzpeaks verbreitert. Es treten ferner infolge

des irregulären Verhaltens dieser Strömung Seitenbänder im Leistungsspektrum auf. Die Zeitreihe selbst zeigt eine alternierende Folge der beiden oben genannten Zustände. Die einzelnen Zustände sind periodisch und von unterschiedlicher zeitlicher Dauer. Die Abfolge der Zustände ist aber immer noch irregulär.

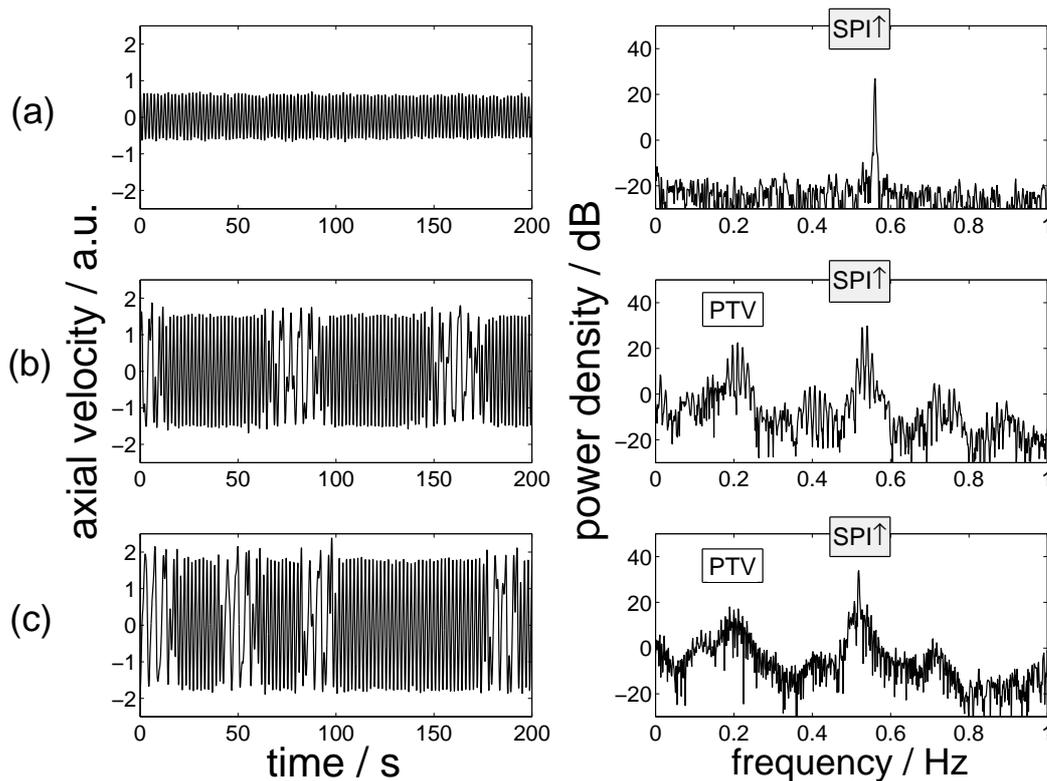


Abbildung 6.4: Ausschnitt unterschiedlicher Zeitreihen und entsprechende Leistungsspektren für (a) konvektive $SPI\uparrow$ ($Re_i = 108.57$) und jeweils irregulär alternierende (intermittency) Bereiche für (b) unterhalb ($Re_i = 114.93$) und (c) oberhalb der absoluten Instabilitätsgrenze von $SPI\uparrow$ ($Re_i = 118.91$). Die Gesamtzeitreihen besitzen jeweils eine Länge von 24 Stunden und sind bei $Re_a = -100$ und $Re = 6.0$ gemessen worden.

In Abbildung 6.4(c) ist eine bei $Re_i = 118.91$ gemessene Zeitreihe dargestellt. Auch in dieser Zeitreihe ist eine Abfolge zweier periodischer Schwingungen von $SPI\uparrow$ und propagierender Taylorwirbel zu erkennen. Im Leistungsspektrum zeigt sich auch hier eine Verbreiterung. Der wesentliche Unterschied der beiden Messungen (b) und (c) ist jedoch das Fehlen der Seitenbänder.

6.5 Zusammenfassung

Der Übergang der laminaren Grundströmung zu stromabwärts propagierenden Spiralen lässt sich unter axialem Durchfluss im Allgemeinen gut mit Hilfe numerisch und experimentell bestimmter konvektiver und absoluter Instabilitätsgrenzen beschreiben [2, 51]. Im Zuge der in diesem Kapitel durchgeführten Untersuchungen zeigte sich experimentell, dass oberhalb eines bestimmten axialen Durchflusses die absolute Instabilitätsschwelle der stromabwärts propagierenden Spirale durch ein intermittentes Auftreten von drei unterschiedlichen Strömungszuständen verdrängt wird. Im Allgemeinen wird dieser intermittente Strömungszustand in einem weiten Bereich im (Re_i, Re) -Parameterraum gefunden, jedoch tritt er bei $Re < 5.3$ nur oberhalb der absoluten Instabilitätsgrenze von $SPI\uparrow$ und erst bei $Re \geq 5.3$ unterhalb dieser Grenze im konvektiv instabilen Bereich auf. Dieser intermittente Strömungszustand zeichnet sich durch einen irregulären Wechsel der drei Strömungszustände $SPI\uparrow$, $SPI\downarrow$ und propagierende Taylorwirbel aus, die durch Defekte voneinander getrennt sind. Im konvektiv instabilen Bereich ist dieser Strömungszustand dadurch charakterisiert, dass sich im Leistungsspektrum neben den Frequenzen der drei entsprechenden Strömungszustände auch Seitenbänder finden, deren Auftreten im absolut instabilen Parameterbereich nicht beobachtet werden kann. Insgesamt zeigt diese intermittente Strömung eine sehr komplexe raumzeitliche Dynamik, die bei zusätzlichem axialen Durchfluss oberhalb einer bestimmten Schwelle im Fall der gegenrotierenden Taylor-Couette-Strömung auftreten kann.

Kapitel 7

Nichtlineare Spiralen

Die meisten Übergänge in der Taylor-Couette-Strömung treten, wie in den Kapiteln 4 und 5 gezeigt, in Form von Instabilitäten auf, in denen die Messung in einem einzigen Punkt des Systems oftmals ausreicht, um die qualitative Änderung des Systems eindeutig zu beschreiben. Im vorliegenden Kapitel wird eine 'globale' Strömung untersucht, die sich jedoch dadurch auszeichnet, dass in ihr ein lokalisierter Defekt auftritt. Dieser Defekt ist dazu in der Lage, zwei strukturierte Zustände lokal voneinander zu separieren, wie es auch, allerdings auf recht komplexe Weise, in der intermittenten Strömung, die in Kapitel 6 untersucht worden ist, der Fall ist. Bei diesen strukturierten Zuständen handelt es sich um Spiralen des Typs SPI_{\uparrow} und SPI_{\downarrow} , die bereits als 'globaler' Strömungszustand in Kapitel 4 beschrieben und deren Dynamik und Verzweigungsverhalten charakterisiert worden sind.

7.1 Ablösung des Defektes

Zu Beginn dieses Kapitels soll zunächst die Ablösung eines lokalisierten Defektes beschrieben werden, der sich bei Erhöhung von Re_i oberhalb eines bestimmten Wertes von einer der beiden Deckelplatten ablöst. Als Ausgangszustand ist dabei stets eine 'globale' Spirale, entweder SPI_{\uparrow} oder SPI_{\downarrow} , gewählt. Die Abbildung 7.1 basiert auf numerischen Berechnungen der Navier-Stokes-Gleichung und zeigt den zeitlichen Verlauf des radialen Geschwindigkeitsfeldes $v_r(z, t)$ in axialer Richtung z , das in der Spaltmitte bei $\Gamma = 16.0$, $Re_i = 140.0$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$ ermittelt worden ist. Grün steht dabei für positive und rot für negative radiale Geschwindigkeiten. In (a) ist die Entstehung dieses so genannten P_+ -Defektes gezeigt, der sich an der unteren Deckelplatte entwickelt, um dann axial nach oben zu propagieren. Die Bezeichnung P_+ -Defekt resultiert daher, dass der Strukturtransport beider Spiralen in Richtung der Deckelplatten erfolgt und demnach die Phase der Spiralen im Defekt 'erzeugt' (+) wird. Obwohl im Zuge dieses Kapitels auch der Einfluss eines axialen Durchflusses auf die Dynamik dieser Strömung untersucht werden soll, sei an dieser Stelle explizit darauf hingewiesen, dass die Propagation dieses Defektes seine Ursache nicht im axialen Durchfluss hat. Die Zeit t ist in dieser Darstellung in Einheiten der Diffusionszeit τ angegeben, die von der Spaltbreite $d = 12.5$ mm und der kinematischen Viskosität $\nu = 10.2$ cSt abhängig ist ($\tau = d^2/\nu$) und in nachfolgenden Messungen somit 15.32 s

beträgt. Die waagerechten (leicht modulierten) grünen Streifen in der Nähe der beiden Deckelplatten deuten dabei die Ekman-Wirbel an, die sich aufgrund der Deckelplatten dort ausbilden.

Auf der linken Seite der Abbildung 7.1(a) ist zwischen diesen beiden Ekman-Wirbeln eine Spirale des Typs $SPI\uparrow$ zu erkennen. Für diesen Strömungszustand befindet sich die Generierung der Phase an der unteren und ihre Vernichtung an der oberen Deckelplatte in den beiden so genannten Ekman-Spiral-Defekten [81]. In der zeitlichen Entwicklung der Strömung zeigt sich, dass an der unteren Deckelplatte, wo die Phase von $SPI\uparrow$ generiert wird, sich ein weiterer Defekt ablöst und unterhalb dieses Defektes eine Spirale des Typs $SPI\downarrow$ entsteht. Dieser P_+ -Defekt separiert dann die beiden Spiralen unterschiedlicher Chiralität räumlich voneinander und propagiert in Richtung der axialen Mitte des Systems. In (b) ist die zeitliche Entwicklung des Endzustandes mit dem P_+ -Defekt in der Mitte und den beiden Spiralen in der oberen ($SPI\uparrow$) und unteren Hälfte ($SPI\downarrow$) des Systems gezeigt. Dieser so genannte P_+ -Zustand ist stationär in dem Sinne, dass die Lage der Defekte sich nicht ändert, wobei sich sowohl die beiden lokalisierten Spiralen als auch die 'globalen' Spiralen dadurch auszeichnen, in azimuthaler Richtung zu rotieren und in axial entgegengesetzter Richtung zu propagieren.

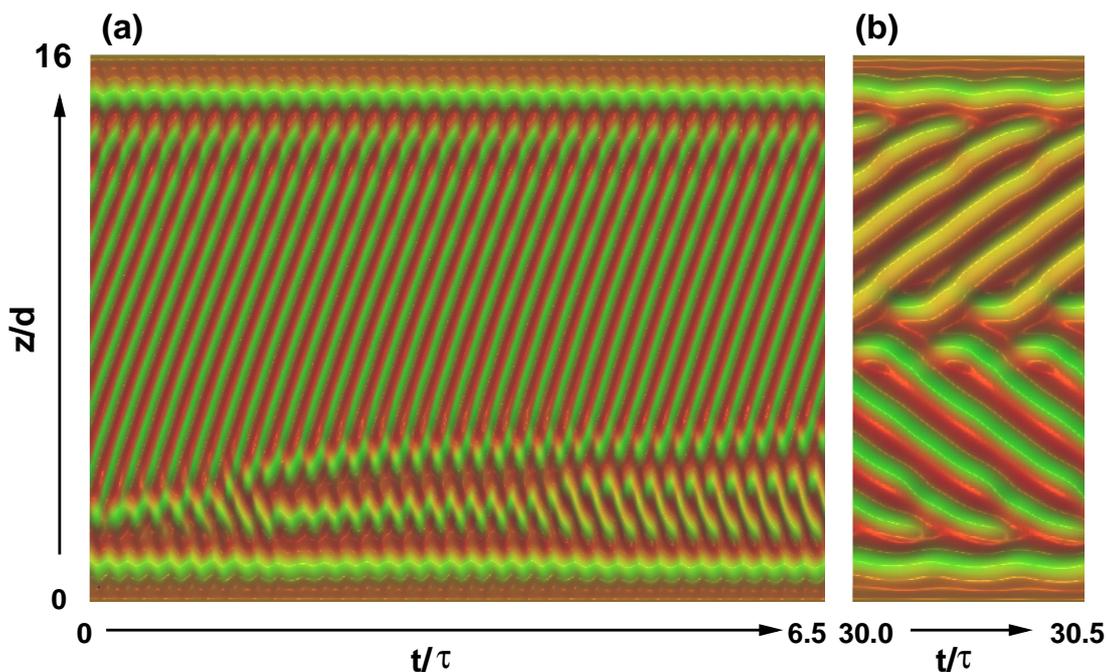


Abbildung 7.1: Raumzeitliche Darstellung der Entstehung eines P_+ -Defektes, der in eine 'globale' Spirale des Typs $SPI\uparrow$ propagiert: (a) und (b) zeigen das numerisch berechnete radiale Geschwindigkeitsfeld $v_r(z,t)$ in der Spaltmitte bei $\Gamma = 16.0$, $Re_i = 140.0$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$. In (a) ist die Entstehung des Defektes an der unteren Deckelplatte und seine anschließende Propagation in die Mitte des Systems gezeigt, (b) zeigt den finalen P_+ -Zustand, bestehend aus zwei Spiralen und dem P_+ -Defekt in der axialen Mitte des Systems.

Im Experiment ist neben Sichtbarkeitsmessungen die Aufnahme von ortsfesten Zeitreihen in Kombination mit axialen Scans zur Erfassung der raumzeitlichen Dynamik bei der Entstehung des P_+ -Zustandes in der Taylor-Couette-Strömung verwendet worden.

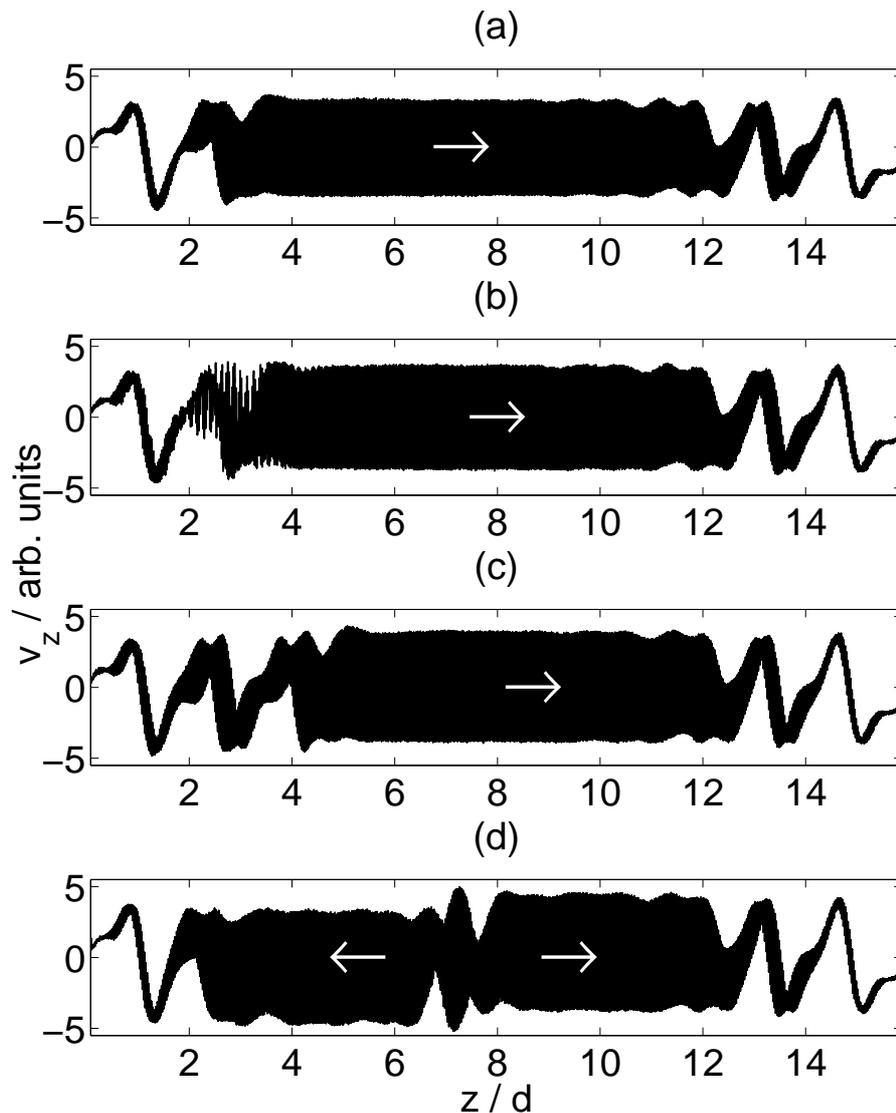


Abbildung 7.2: Axiale Scans gemessen bei $\Gamma = 16.00$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$ bei quasistatischer Erhöhung von Re_i : (a) $SPI \uparrow$ ($Re_i = 130.8$) (b) Modulationen an der unteren Deckelplatte ($Re_i = 134.2$), (c) Entstehung des P_+ -Defektes ($Re_i = 136.5$) und (d) P_+ -Zustand ($Re_i = 139.5$). Die weißen Pfeile deuten die axiale Propagationsrichtung der Spirale an.

Die experimentelle Beschreibung des in Abbildung 7.1(a) gezeigten Szenarios mit Hilfe axialer Scans, sowie der frequenzabhängigen Analyse dieser Messdaten sollen im Folgenden durchgeführt werden. In Abbildung 7.2 sind vier solcher Scans gezeigt, die alle bei quasistatischer Erhöhung von Re_i bei $\Gamma = 16.00$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$ gemessen worden sind.

Analog zu dem in Abbildung 7.1(a) gezeigten Szenario ist die $SPI\uparrow$ -Strömung dabei als Ausgangszustand gewählt worden. Dieser Zustand ist als axialer Scan in Abbildung 7.2(a) dargestellt und ist insbesondere in Bezug auf die beiden Defekte an den Deckelplatten in Kapitel 4 analysiert worden. Die hier dargestellte Messung ist bei $Re_i = 130.8$ aufgezeichnet worden und der weiße Pfeil deutet die axiale Propagationsrichtung der Spirale an. Die Spirale ist natürlich von endlicher Länge und oben und unten demnach durch so genannte Ekman-Spiral-Defekte begrenzt. Diese beiden Defekte unterscheiden sich dadurch, dass der untere phasenerzeugend und der obere phasenvernichtend ist. Bei quasistatischer Erhöhung von Re_i kommt es bei 134.2 dann, wie in (b) gezeigt, zum Auftreten einer modulierten Strömung in der Nähe der unteren Deckelplatte. Bis auf diese Modulation im unteren Teil sind in der Messung jedoch keine Unterschiede zu dem in (a) gezeigten Scan zu erkennen. Eine weitere Erhöhung von Re_i auf 136.5 verändert die Struktur der Strömung maßgeblich insbesondere in der Nähe der unteren Deckelplatte. Der axiale Scan zeigt in diesem Bereich neben der bereits vorhandenen Oszillation der axialen Geschwindigkeit, wie sie für Spiralen oder auch stehende Wellen charakteristisch ist, eine deutliche Veränderung in der Struktur des Ekman-Spiral-Defektes im Vergleich zu den Messungen in (a) und (b). Es zeigen sich statt des einen Ekman-Wirbelpaares nun zwei Wirbelpaare, die mit einer Oszillation der axialen Geschwindigkeit überlagert sind. Im weiteren Verlauf vergrößern sich die Wellenlängen dieser Wirbel immer weiter, bis die beiden Wirbel kollabieren und dann der finale P_+ -Zustand entsteht. Ein axialer Scan dieses Zustandes findet sich in (d), wobei sich der Defekt (ungefähr) in der axialen Mitte des Systems befindet und $SPI\downarrow$ in Richtung der unteren und $SPI\uparrow$ in Richtung der oberen Deckelplatte propagiert. Die Propagationsrichtungen dieser beiden Spiralen sind durch die beiden weißen Pfeile in (d) angedeutet.

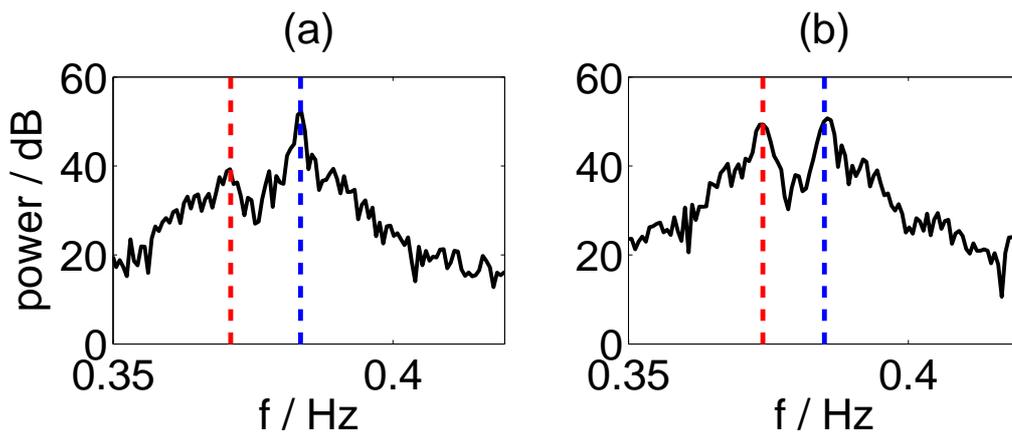


Abbildung 7.3: Leistungsspektren der axialen Scans aus Abbildung 7.2(a) und (d) gemessen bei $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$: (a) $SPI\uparrow$ ($Re_i = 130.8$) und (b) P_+ -Zustand ($Re_i = 139.5$).

Mit der Entstehung des P_+ -Zustandes verändert sich in dem System die Erzeugung und Vernichtung der Phase grundlegend, denn nun erfolgt die Generierung in der axialen Mitte des Systems und beide Ekman-Spiral-Defekte müssen zwangsläufig die dort generierte Phase vernichten.

Um den Unterschied der $SPI\uparrow$ -Strömung vom P_+ -Zustand auch bezüglich der auftretenden Frequenzen zu dokumentieren, sind in Abbildung 7.3(a) und (b) Ausschnitte der Leistungsspektren der axialen Scans aus Abbildung 7.2 von $SPI\uparrow$ (a) und dem P_+ -Zustand (d) gezeigt. Die Frequenzen von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ sind in diesen Spektren mit Hilfe der blauen und roten gestrichelten Linien markiert. Die Spektren unterscheiden sich im Wesentlichen dadurch, dass im Fall von $SPI\uparrow$ der Frequenzpeak von $SPI\uparrow$ im Vergleich zu dem von $SPI\downarrow$ höher ist, wohingegen beide Frequenzpeaks im Fall des P_+ -Zustandes nahezu gleiche spektrale Leistungsdichte aufweisen.

Mit dem bereits in Kapitel 4 beschriebenen Verfahren der Bandpassfilterung und der anschließenden Berechnung der Amplituden soll im Folgenden eine selektive Analyse bezüglich der Amplituden der beiden Spiraltypen ($SPI\downarrow$ und $SPI\uparrow$) erfolgen. In Abbildung 7.4(a)-(d) sind aus diesem Grunde die axialen Verteilungen der Amplituden der beiden Spiralmoden dargestellt, wobei die vier axialen Scans aus Abbildung 7.4(a)-(d) analysiert worden sind.

Für den Ausgangszustand $SPI\uparrow$, dessen axialer Scan in Abbildung 7.2(a) gezeigt ist, findet sich in der axialen Mitte des Systems ausschließlich die Amplitude von $SPI\uparrow$ (blaue Linie), wie in Abbildung 7.4(a) gezeigt, die zu den beiden Deckelplatten hin abfällt. In der Umgebung der beiden Deckelplatten findet sich immer auch die entsprechend andere Spiralmode $SPI\downarrow$ (rote Linie) wieder. Wie bereits in Kapitel 4 gezeigt, kommt es prinzipiell an beiden Deckelplatten, insbesondere jedoch an der oberen, an der die Phase von $SPI\uparrow$ vernichtet wird, im axialen Scan lokal zu einer Überlagerung der beiden Spiralen. Diese Überlagerung äußert sich neben dem Auftreten beider Spiralamplituden in Abbildung 7.2(a) durch die Entstehung von Knotenpunkten, die zumindest lokal auf stehende Wellen hindeuten.

Im axialen Scan in Abbildung 7.2(b), also bei weiterer Erhöhung von Re_i auf 134.2, ist eine Modulation in der Nähe der unteren Deckelplatte zu erkennen. Im Vergleich dieser Verteilung der Amplitude mit der aus Abbildung 7.4(a) zeigt sich an der Stelle, an der die Modulation zu beobachten ist, eine Verringerung der $SPI\uparrow$ -Amplitude und eine leichte Verschiebung der Nullstelle beider Spiralamplituden.

In Abbildung 7.4(c) ist die Nullstelle der beiden Spiralamplituden bei quasistatischer Erhöhung von Re_i auf 136.5 in axialer Richtung weiter nach oben propagiert und im Bereich links dieser Nullstelle sind die Amplituden an jeder axialen Position (in etwa) gleich groß. Im Bereich auf der rechten Seite der eben erwähnten Nullstelle ist die axiale Verteilung der Spiralamplituden nahezu unverändert.

In Abbildung 7.4(d) ist die axiale Verteilung der beiden Spiralmoden basierend auf dem axialen Scan des P_+ -Zustandes in Abbildung 7.2(d) gezeigt, der bei $Re_i = 139.5$ gemessen worden ist. Diese Messung unterscheidet sich vor allem im unteren Teil des Systems maßgeblich von allen bislang gezeigten axialen Amplitudenverteilungen, denn in diesem Bereich ist die Amplitude von $SPI\downarrow$ dominant und diejenige von $SPI\uparrow$ nur marginal vorhanden. In der axialen Mitte des Systems kreuzen sich die beiden Spiralamplituden, und die $SPI\uparrow$ -Amplitude wird gegenüber derjenigen von $SPI\downarrow$ dominant. Dieser Strömungszustand bleibt auch bei weiterer quasistatischer Erhöhung und sogar bei Veränderung der Systemlänge Γ stabil und wird erst bei etwa $Re_i = 150$ zugunsten der Taylor-Wirbelströmung instabil.

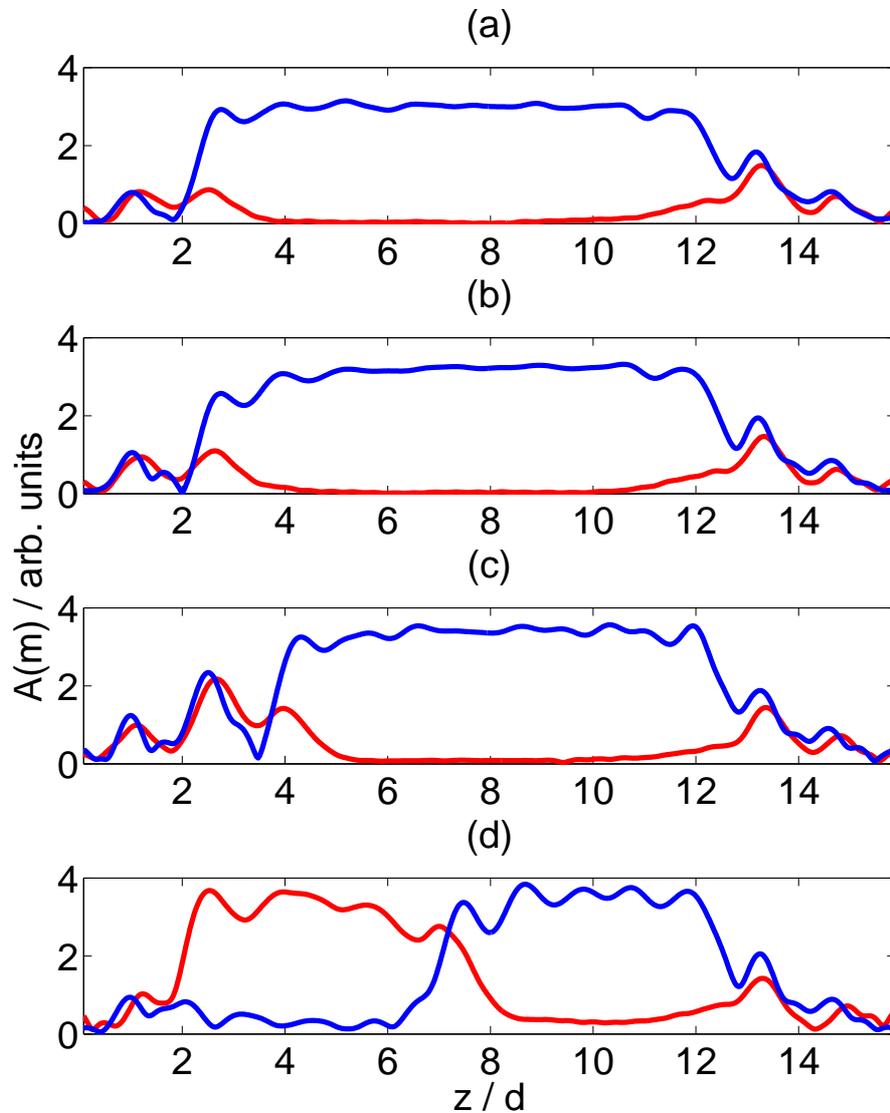


Abbildung 7.4: Axiale Verteilung der Amplituden der beiden Spiralmoden ($m = +1$ ($\text{SPI}\uparrow$): blaue Linie; $m = -1$ ($\text{SPI}\downarrow$): rote Linie) berechnet aus den axialen Scans in Abbildung 7.2 gemessen bei $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$: (a) $\text{SPI}\uparrow$ ($Re_i = 130.8$), (b) Modulationen an der unteren Deckelplatte ($Re_i = 134.2$), (c) Entstehung des P_+ -Defektes ($Re_i = 136.5$) und (d) P_+ -Zustand ($Re_i = 139.5$).

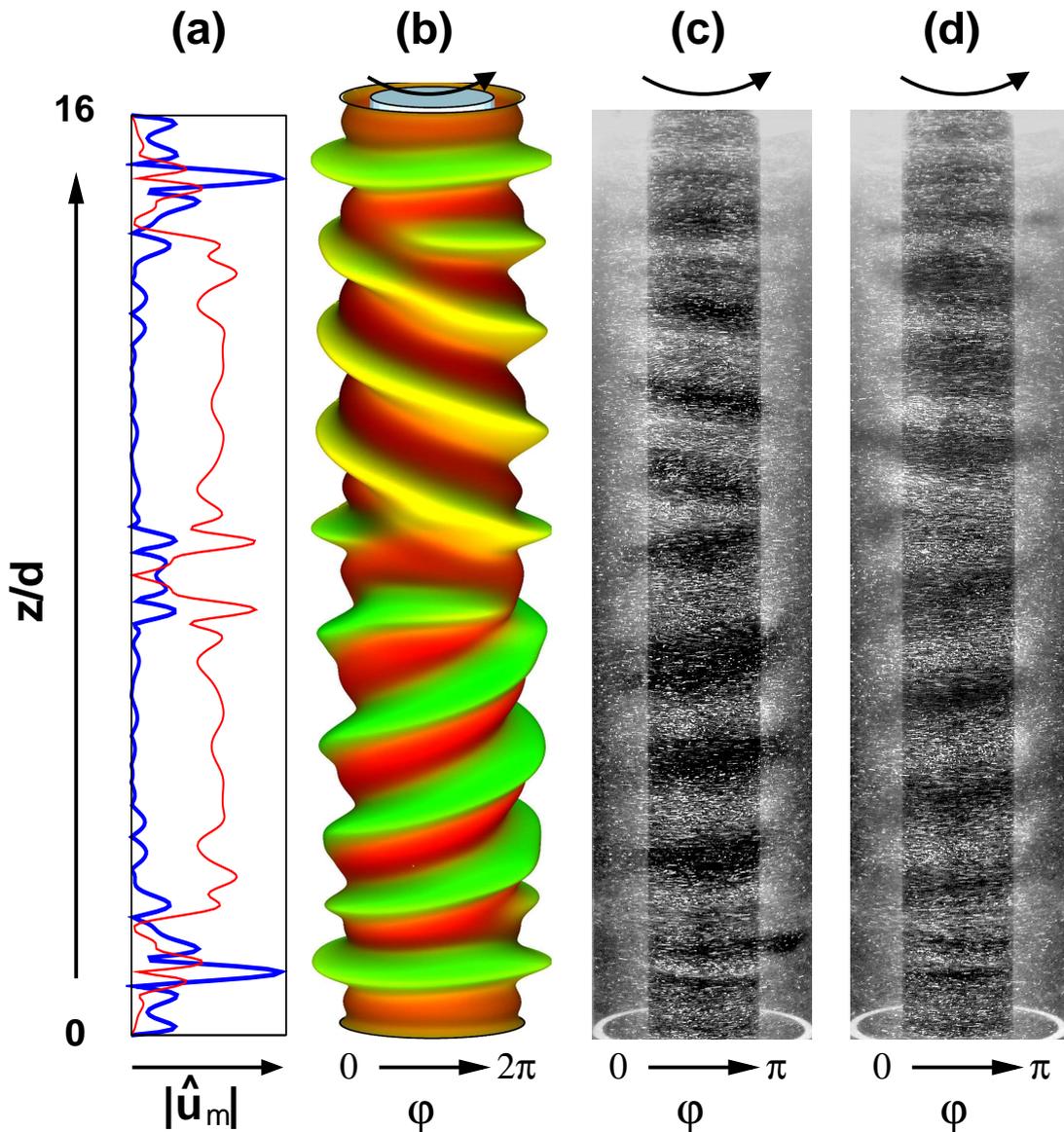
7.2 P_+ -Zustand und P_+ -Defekt

Abbildung 7.5: Visualisierung des stabilen P_+ -Zustandes: (a) azimutale Fourieramplituden $|\hat{u}_m(z)|$ für $m = 0$ (schwarze Linie) und $m = \pm 1$ (rote Linie) in der Spaltmitte. (b) Dreidimensionale Darstellung der radialen Geschwindigkeit $u(\varphi, z)$ in der Spaltmitte (aus Gründen der besseren Visualisierung ist der gesamte 2π -Zylinder zu erkennen). In (c) und (d) sind zwei aufeinander folgende Photoaufnahmen des P_+ -Zustandes im Experiment gezeigt. Die Parameter für alle Messungen sind $Re_i = 140.0$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$.

Das Auftreten von Domänen, wie sie auch für den P_+ -Zustand charakteristisch sind, ist in der Nähe des kritischen Punktes in der Literatur vielfach untersucht worden. In diesem linearen Bereich sind die Ordnungsparameter des Feldes klein, ändern sich langsam und die raumzeitliche Dynamik solcher Systeme wird oftmals mit Hilfe der Ginzburg-Landau-Gleichung modelliert. Einfache Beispiele für solche Systeme sind eindimensionale Strukturen von gegeneinander laufenden Wellen, die beispielsweise aufgrund einer superkritischen Hopf-Verzweigung in Systemen mit räumlicher Translations- und Reflexionssymmetrie auftreten [102–105]. Auch die Domänenwände zwischen zwei laufenden Wellen mit ihren Quellen (sources) und Senken (sinks) werden gut durch gekoppelte Ginzburg-Landau-Gleichungen mit langsam variierenden Amplituden der beiden kritischen Moden beschrieben [106, 107]. Weiter entfernt vom kritischen Punkt ergeben sich jedoch Abweichungen, die durch dieses Modell nicht ausreichend beschrieben werden können [103].

Der P_+ -Zustand lässt sich nicht mit Hilfe einer einfachen linearen Superposition zweier gegeneinander propagierender Wellen beschreiben, wie es klassisch durch das Modell der 'sources and sinks' erfolgt. Der wesentliche Unterschied zwischen dem P_+ -Zustand und einer einfachen Superposition zeigt sich besonders im Auftreten einer nichtlinear angetriebenen $m = 0$ -Mode. Im axialen Profil der azimuthalen Fourieramplituden $|\hat{u}_m(z)|$ in Abbildung 7.5(a) sind die $m = 0$ - (schwarze Linie) und $m = \pm 1$ -Amplituden (rote Linie) als axiales Profil dargestellt. Eine dreidimensionale Darstellung dieses Strömungszustandes, berechnet in der Spaltmitte, ist in Abbildung 7.5(b) gezeigt. Aus Gründen der besseren Visualisierung ist in dieser Darstellung der gesamte 2π -Zylinder dargestellt. In der Nähe des Defektes ist, wie in Abbildung 7.5(a) zu erkennen, der Anteil der $m = 0$ -Fourieramplitude immer endlich, wobei die $m = \pm 1$ -Amplitude in dem so genannten P_+ -Defekt selbst Null ist. Dabei ist die $m = 0$ -Amplitude axialsymmetrisch und stationär und unterscheidet sich somit im raumzeitlichen Verhalten maßgeblich von den beiden kritischen Spiralmoden. Da in der Nähe des kritischen Punktes kein solcher P_+ -Zustand existiert, scheinen die Amplituden der beiden Spiralmoden eine gewisse 'Größe' überschreiten zu müssen, um die $m = 0$ -Mode mit Hilfe nichtlinearer Modenkopplung zu generieren. In Abbildung 7.5(c) und (d) sind zwei aufeinander folgende Photographien des P_+ -Zustandes, wie er im Experiment zu beobachten ist, gezeigt. Die Parameter für alle in Abbildung 7.5 gezeigten Messungen sind $\Gamma = 16.0$, $Re_i = 140.0$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$.

Im Allgemeinen benötigt der P_+ -Zustand dabei keine Deckelplatten und damit auch keine inhomogene Ekman-Wirbelströmung, denn auch im axial periodischen System, das keine Deckelplatten aufweist, existiert dieser stabile Strömungszustand. Seine Existenz ist in numerischen Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung in langen axial periodischen Systemen ($\Gamma \approx 22$) verifiziert worden. Im einem solchen System existiert neben dem P_+ -Defekt, der Phase 'generiert', zwangsläufig auch ein so genannter P_- -Defekt, der die Phase, die im P_+ -Defekt generiert wird, 'vernichtet'. Beide Defekte werden dabei nichtlinear angetrieben, separieren räumlich die SPI_\uparrow - von der SPI_\downarrow -Mode und sind in diesem Parameterbereich stabil.

In Abbildung 7.5 ist der 'symmetrische' P_+ -Zustand in einer numerischen Simulation in (a) und (b) und im Experiment in (c) und (d) gezeigt. Die Bezeichnung 'symmetrisch' bezieht sich dabei auf die axiale Position des P_+ -Defektes in der axialen Mitte des Systems. Dieser Zustand lässt sich durch Spiegelung in der axialen Mitte in sich selbst überführen. Im Allgemeinen muss dieser Zustand jedoch nicht prinzipiell als symmetrischer Strömungszustand auftreten und bei

quasistatischer Erhöhung von Re_i tritt abhängig vom Ausgangszustand stets ein asymmetrischer P_+ -Zustand auf. Als Ausgangszustände dienen dabei die beiden Spiraltypen $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$. In Abbildung 7.6(a) und (c) sind axiale Scans dieser beiden Ausgangszustände gezeigt.

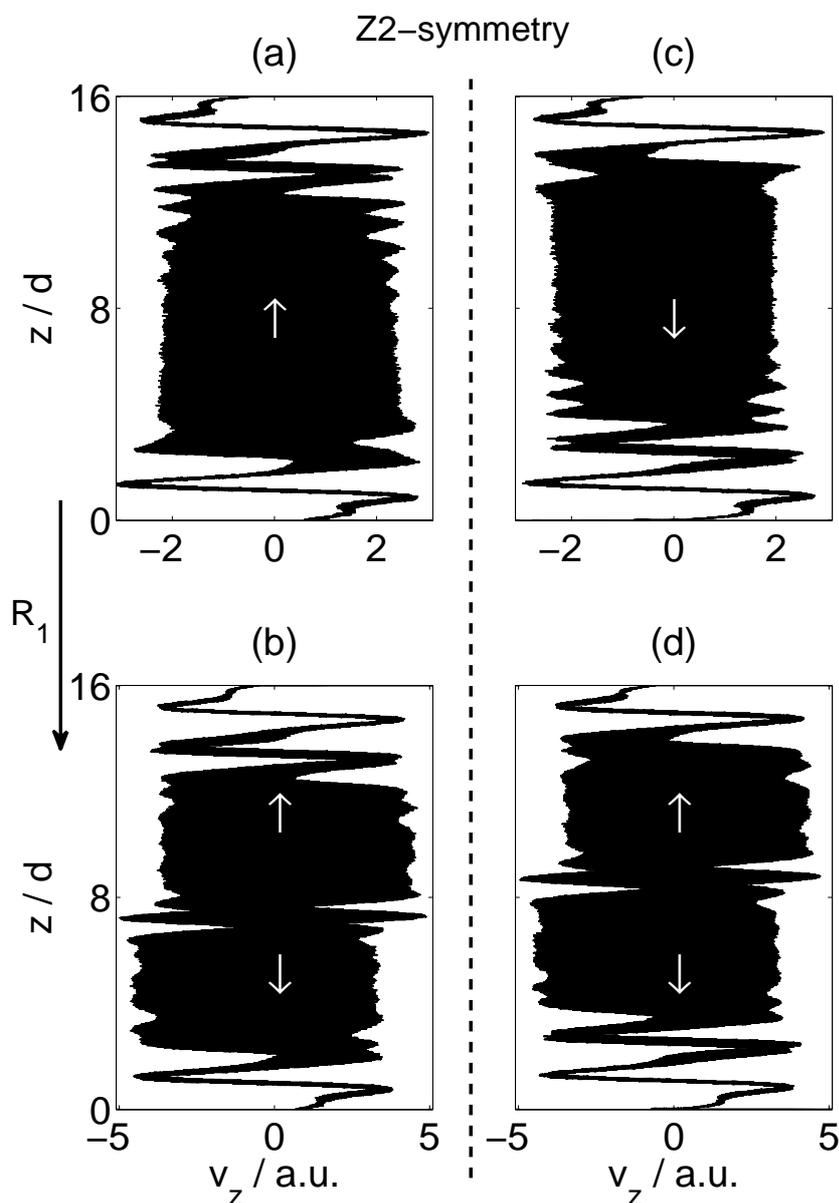


Abbildung 7.6: Axiale Scans gemessen bei $\Gamma = 16.00$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$ für $SPI\uparrow$ (a) und $SPI\downarrow$ (c), beide gemessen bei $Re_i = 122.6$, und für den P_+ -Zustand hervorgegangen aus $SPI\uparrow$ (b) und $SPI\downarrow$ (d) (beide gemessen bei $Re_i = 138.1$).

Für den Fall $SPI\uparrow$ in (a) deutet der weiße Pfeil die Propagationsrichtung der Spirale an und es zeigt sich im oberen Teil des Systems eine andere Ekman-Wirbelstruktur als im unteren Teil. Im unteren Teil ist ein Ekman-Wirbelpaar sichtbar, wohingegen im oberen zwei Wirbelpaare zu erkennen sind. Bei quasistatischer Erhöhung von Re_i löst sich nun von der unteren Deckelplatte ausgehend der P_+ -Defekt ab und zieht eine Spirale des Typs $SPI\downarrow$ hinter sich her zur axialen Mitte des Systems. Die axiale Mitte selbst wird von diesem Defekt allerdings nicht erreicht, und er bleibt leicht unterhalb dieser Position bei etwa $7.5d$ stehen. Ein axialer Scan dieses finalen, aber asymmetrischen P_+ -Zustandes ist in (b) dargestellt.

Im Fall des Ausgangszustandes von $SPI\downarrow$, als axialer Scan in (c) dargestellt, kehrt sich dieses Verhalten um: Im Ausgangszustand ($SPI\downarrow$) befinden sich die zwei Wirbelpaare diesmal unten und oben gibt es nur ein Wirbelpaar. Bei Erhöhung von Re_i löst sich in diesem Fall der P_+ -Defekt an der oberen Deckelplatte ab und zieht eine Spirale des Typs $SPI\uparrow$ hinter sich her in Richtung der axialen Mitte. Auch hier kommt der P_+ -Defekt kurz vor Erreichen der axialen Mitte bei etwa $8.5d$ zum Stillstand, wie der axiale Scan in (d) zeigt. Auffällig ist, dass sowohl die beiden Ausgangszustände $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ in (a) und (c) als auch die beiden asymmetrischen P_+ -Zustände zueinander jeweils Z_2 -symmetrisch sind, also durch Spiegelung in der axialen Mitte des Systems ineinander überführt werden können. Um dies zu dokumentieren sind sowohl beide Ausgangszustände ($Re_i = 122.6$) als auch die beiden P_+ -Zustände ($Re_i = 138.1$) in Abbildung 7.6 bei jeweils exakt gleichen Parametern gemessen worden ($\Gamma = 16.00$, $Re_a = -125.0$ und $Re = 0$).

7.3 Axialer Durchfluss

In diesem Abschnitt soll der Einfluss eines axialen Durchflusses auf die raumzeitliche Dynamik des P_+ -Zustandes analysiert werden. Wie bereits erwähnt, propagiert der P_+ -Defekt ohne axialen Durchfluss im Allgemeinen in Richtung der axialen Mitte des Systems und kommt dann bei sprunghafter Erhöhung genau dort bzw. bei quasistatischer Erhöhung von Re_i in der Nähe dieser Position zum Stehen. Bei zusätzlichem axialen Durchfluss ändert sich dieses Verhalten maßgeblich, denn bei entsprechend 'starkem' Durchfluss ist dieser sogar dazu in der Lage den Defekt mitsamt der vorher vorhandenen Spirale aus dem System zu schieben. In Abbildung 7.7 ist die Propagation des P_+ -Defektes anhand von vier sukzessive aufgenommenen Photographien dargestellt, wobei der axiale Durchfluss, angedeutet durch den Pfeil positiv, also von unten nach oben gerichtet, ist ($Re = +0.6$). Der Defekt, der die beiden Spiralen voneinander trennt, propagiert in Richtung des axialen Durchflusses durch das System. Eine genaue Untersuchung der Propagationsgeschwindigkeit dieses P_+ -Defektes ist mit dieser Methode jedoch nicht erfolgt und ist nachfolgend mit Hilfe von zwei in axial übereinander liegenden LDA-Messvolumen durchgeführt worden.

Die Bestimmung dieser Geschwindigkeit ist mit Hilfe von zwei stationären LDA-Messungen durchgeführt worden, die in einem axialen Abstand von 39 mm voneinander positioniert sind. Das untere dieser beiden LDA-Messvolumen ist dabei in der axialen Mitte des Systems positioniert. Aus der zeitlichen Differenz, mit welcher der P_+ -Defekt diese beiden Messpositionen passiert, lässt sich unter der Kenntnis des axialen Abstandes leicht auf die axiale Propagations-

geschwindigkeit des Defektes schließen.

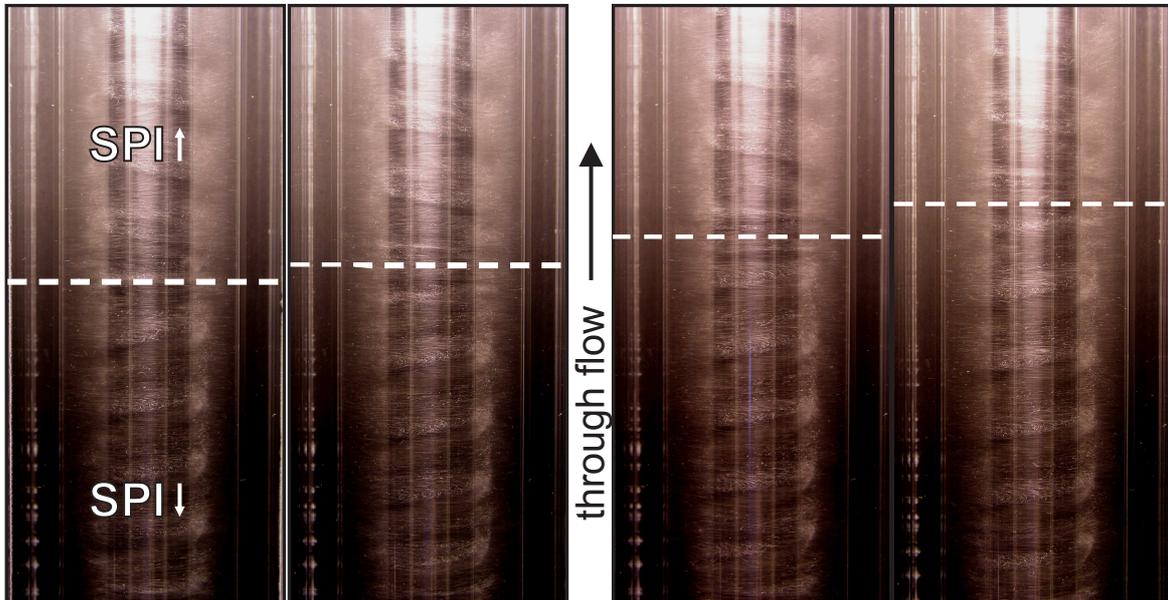


Abbildung 7.7: Photographien des propagierenden P_+ -Defektes im Experiment aufgenommen bei $\Gamma = 22.8$, $Re_a = -125$, $Re_i = 132.15$ und $Re = 0.30$. Der Defekt, der die beiden Spiralen voneinander trennt, propagiert in Richtung des axialen Durchflusses durch das System. Die zeitliche Abfolge läuft von links nach rechts, und der zeitliche Abstand zwischen den Photographien beträgt 15 Sekunden.

Streng genommen könnte sich die Propagationsgeschwindigkeit des P_+ -Defektes natürlich über diese Strecke verändern. Numerische Simulationen und Sichtbarkeitsmessungen dieser Propagation zeigen in diesem Bereich jedoch keine Abhängigkeit der Propagationsgeschwindigkeit. Exemplarisch sind zwei simultan aufgezeichnete Zeitreihen, die zur Bestimmung der Geschwindigkeit verwendet worden sind, in Abbildung 7.8 gezeigt.

In Abbildung 7.9 sind die experimentell (Δ) und numerisch (\blacktriangle) bestimmten Geschwindigkeiten des P_+ -Defektes v_d gegen Re aufgetragen. Die numerisch ermittelten Geschwindigkeiten beziehen sich auf Werte, die in der axialen Mitte des Systems bei sprunghafter Erhöhung von $Re_i = 120.0$ auf 140 ermittelt worden sind. Die experimentellen Werte sind ebenfalls in der axialen Mitte des Systems mit Hilfe der soeben beschriebenen Methode zweier axial versetzter LDA-Messvolumen, die einen bestimmten axialen Abstand voneinander aufweisen, ermittelt worden. Die experimentellen Messwerte sind nicht bei sprunghafter Erhöhung, sondern bei quasistatischer Erhöhung von Re_i ermittelt worden.

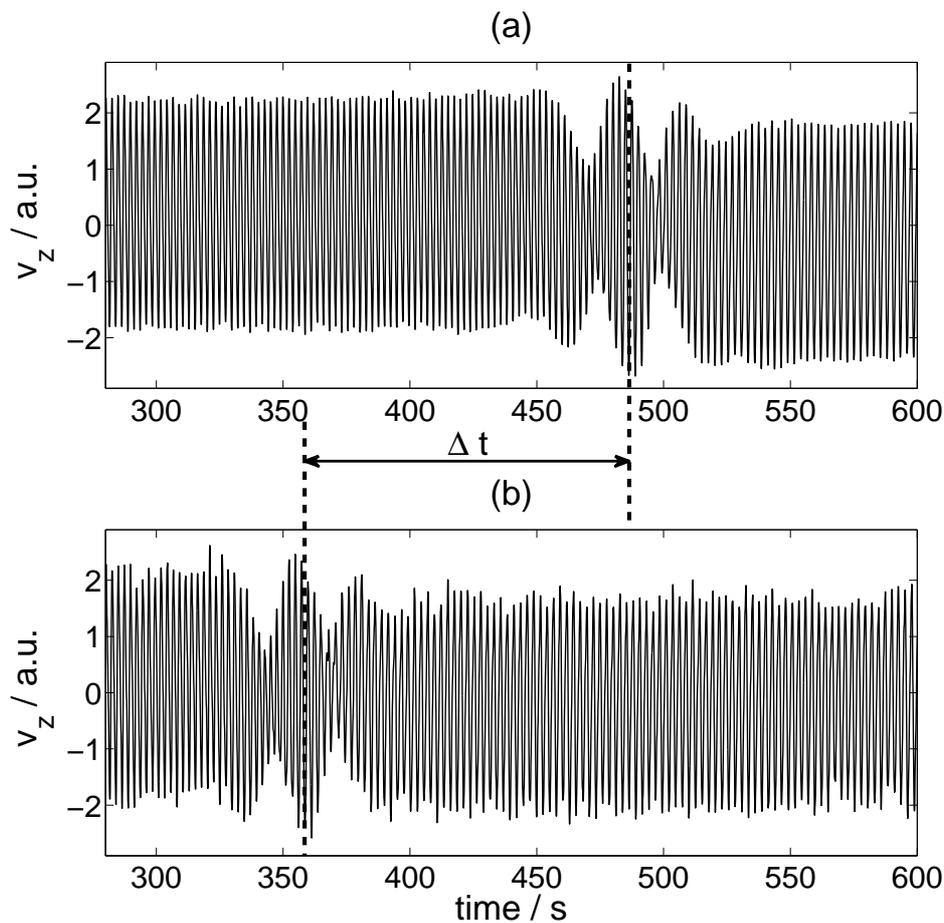


Abbildung 7.8: Gleichzeitig mittels LDA an zwei axialen Positionen des Systems aufgezeichnete Zeitreihen. Die Zeitreihe in (b) ist in der axialen Mitte des Systems und (a) 39 mm oberhalb der axialen Mitte bei $\Gamma = 22.8$, $Re_a = -125$, $Re_i = 127.2$ und $Re = 0.60$ gemessen worden. Aus der zeitlichen Differenz Δt , in dem der P_+ -Defekt an den beiden Messvolumen vorbei propagiert, lässt sich auf die Geschwindigkeit des Defektes v_D schließen.

Es zeigt sich eine lineare Abhängigkeit der Geschwindigkeit des P_+ -Defektes vom axialen Durchfluss Re , wie die Regressionsgerade (durchgezogene Linie) zeigt. Sie geht bei $Re = 0$ durch $v_d = 0$, weil der Defekt in diesem Fall in der axialen Mitte des Systems zum Stillstand kommt, und als Steigung ergibt sich sowohl aus den numerisch als auch aus den experimentell bestimmten Daten 1.06. Die Propagation des Defektes erfolgt demnach im Wesentlichen mit der mittleren Geschwindigkeit des axialen Durchflusses Re . In dieser Darstellung ist die Geschwindigkeit, wie es in numerischen Simulationen üblich ist, dimensionslos dargestellt. Mit der hier gewählten Spaltbreite von $d = 12.5$ mm und der kinematischen Viskosität von $\nu = 10.2$ mm²/s ergibt sich

für die Umrechnung in physikalische Einheiten mittels Multiplikation mit $v/d = 0.848$ mm/s. Numerische Simulationen und experimentelle Messungen zeigen, dass sich die Geschwindigkeit des Defektes v_D aufgrund der stationären Ekman-Wirbelströmung in der Nähe der Deckelplatten verringert.

Für Durchflüsse unterhalb von $Re = 0.2$ bleibt der Defekt dabei sogar an einer bestimmten axialen Position stehen. Nur ein 'ausreichend' großer Durchfluss ($Re > 0.2$) ist dazu in der Lage, den Defekt, und damit auch die mit dem Strom propagierende Spirale, vollständig aus dem System zu schieben. In diesem Fall stellt sich für positive Durchflüsse als globaler Zustand eine Spirale des Typs SPI_{\downarrow} , also eine Spirale, deren Strukturtransport gegen die Flussrichtung erfolgt, ein. Für einen vollständigen Überblick über die in diesem Parameterbereich auftretenden Strömungszustände, sowie ihrer Stabilität sei an dieser Stelle auf den nachfolgenden Abschnitt 7.4 verwiesen.

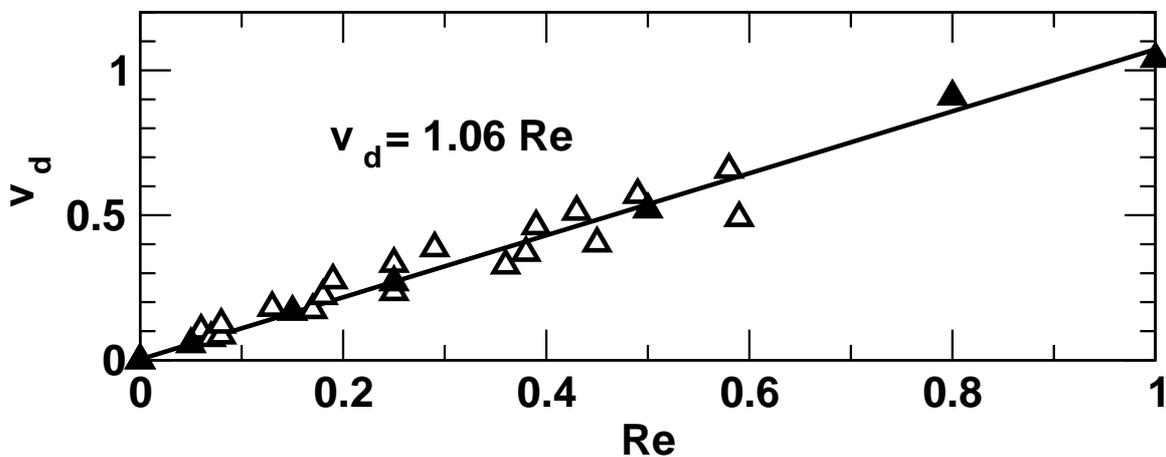


Abbildung 7.9: Darstellung der experimentell (Δ) und numerisch (\blacktriangle) bestimmten axialen Geschwindigkeiten des P_+ -Defektes v_d gegen Re . Die Symbole zeigen die Geschwindigkeit in der axialen Mitte des Systems bei sprunghafter Erhöhung von $Re_i = 120$ auf 140. Die Steigung der Regressionsgeraden (durchgezogene Linie) entspricht in etwa der mittleren Geschwindigkeit des axialen Durchflusses. Die Parameter für diese Messungen sind $\Gamma = 16.0$ und $Re_a = -125.0$.

Neben dem Einfluss des axialen Durchflusses auf die Propagationsgeschwindigkeit des Defektes wird auch ein systematisch anderes Verhalten bei der Ablösung des Defektes beobachtet. So kommt es, wie in Abbildung 7.10 in Form von drei axialen Scans gezeigt, zu Fluktuationen in der Nähe der unteren Deckelplatte bei 4 – 6d. An der oberen Deckelplatte sind diese Fluktuationen im Gegensatz dazu nicht zu beobachten und aus diesem Grunde ist dieser Teil des Systems hier auch nicht dargestellt. Alle drei Messreihen sind bei exakt gleichen Parametern ($\Gamma = 16.00$, $Re_a = -125.0$, $Re_i = 133.0$ und $Re = 0.35$) gemessen worden.

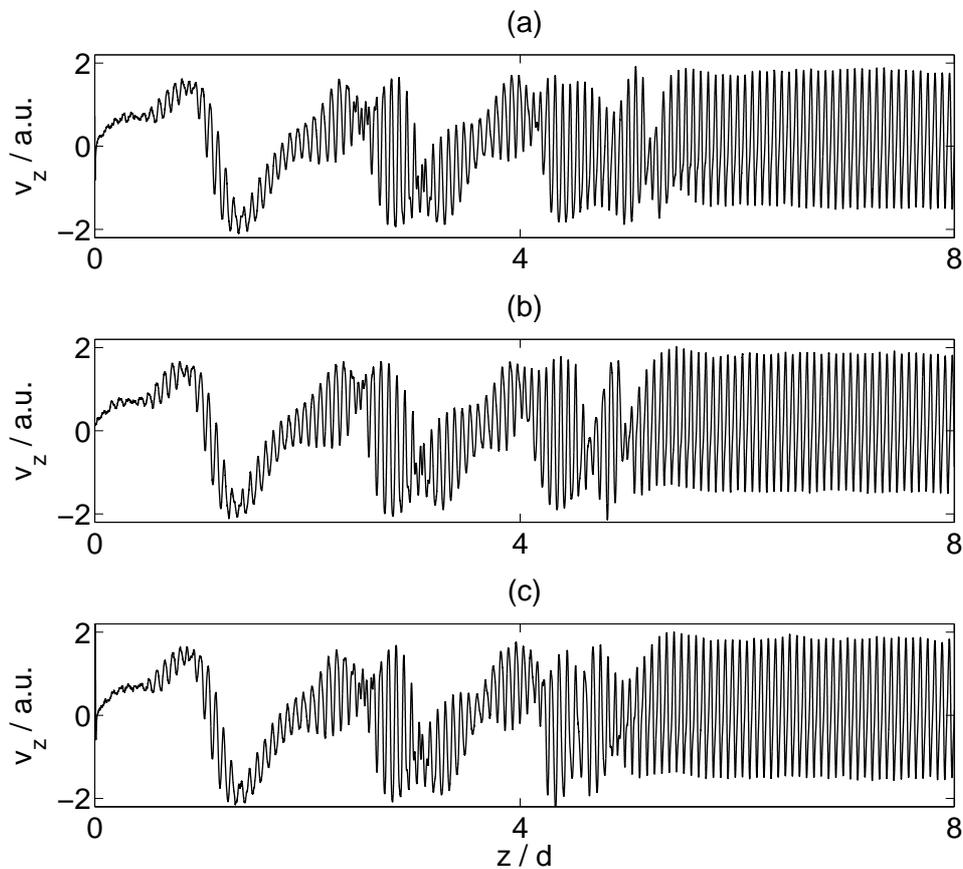


Abbildung 7.10: Ausschnitt von drei axialen Scans unmittelbar vor der Ablösung des P_+ -Defektes an der unteren Deckelplatte gemessen bei $\Gamma = 16.00$, $Re_a = -125.0$, $Re_i = 133.0$ und $Re = 0.35$.

7.4 Stabilitätsdiagramm

Im Folgenden sollen die Stabilität der im Zuge dieses Kapitels untersuchten Strömungszustände dargestellt sowie die unterschiedlichen Übergangsszenarien in Abhängigkeit des axialen Durchflusses diskutiert werden. In der Darstellung dieser Ergebnisse liegt dabei der Fokus auf denjenigen Messungen, die in Kombination von Experiment und numerischer Simulation der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung für ein System mit stationären Deckelplatten bei $\Gamma = 16.0$ beobachtet worden sind. Die Ergebnisse aus diesen Untersuchungen sind jedoch repräsentativ für die Umgebung dieses Parameters, denn Messungen an längeren ($\Gamma = 20.0$ und 22.8) sowie an kürzeren Systemen ($\Gamma = 12.0$ und 14.0) sind ebenfalls numerisch und experimentell durchgeführt worden. Sie unterscheiden sich aber kaum quantitativ von den hier dargestellten Ergebnissen für

$\Gamma = 16.0$.

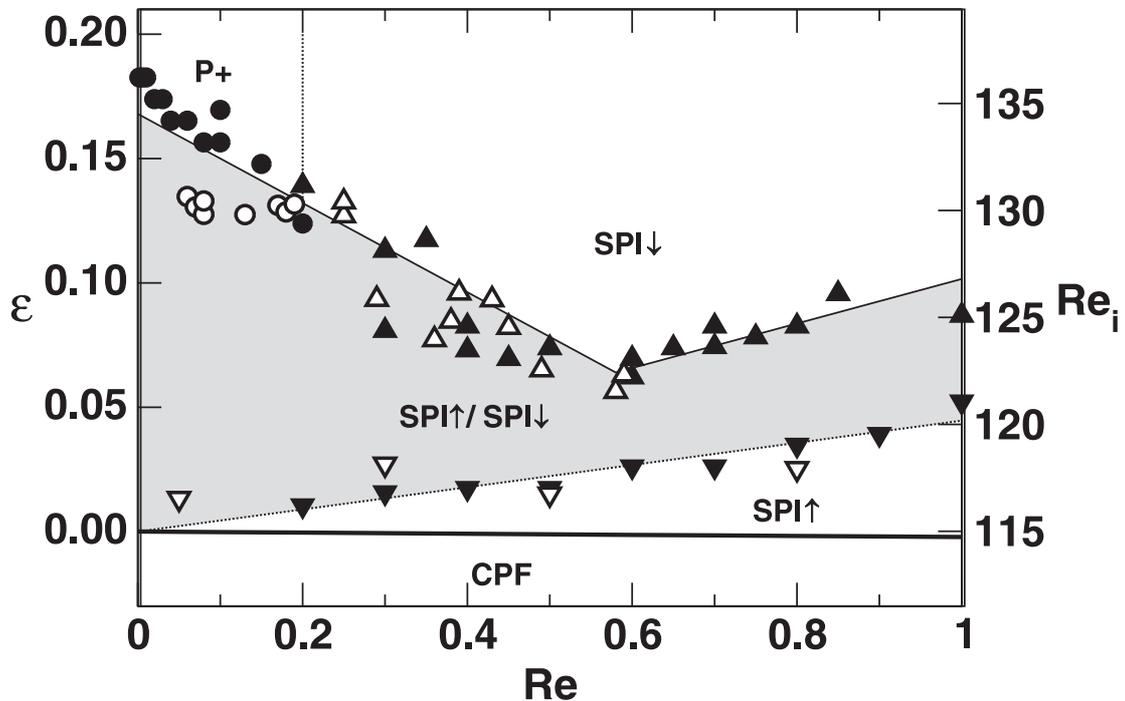


Abbildung 7.11: Stabilitätsdiagramm der Couette-Poiseuille-Strömung (CPF), von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ und des P_+ -Zustandes. Die nicht gefüllten (gefüllten) Symbole zeigen experimentelle (numerische) Ergebnisse. Die Stabilitätsbereiche sind durch Linien voneinander getrennt. Die nach oben (unten) gerichteten Symbole bezeichnen den Übergang von einer globalen $SPI\uparrow$ auf eine globale $SPI\downarrow$ ($SPI\downarrow$ auf $SPI\uparrow$). Die Kreise markieren den Übergang einer globalen $SPI\uparrow$ bzw. $SPI\downarrow$ zum stabilen P_+ -Zustand. Die vertikale Linie deutet die Grenze zwischen dem P_+ -Zustand und der globalen $SPI\downarrow$ -Strömung an. Die untere fast horizontale Linie repräsentiert die konvektive Instabilitätsschwelle der Spiralen. In diesem Bereich von Re und in der hier gewählten Auflösung sind die Verzweigungspunkte von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ nicht mehr voneinander zu unterscheiden. ε ist dabei ein Maß für den Abstand vom kritischen Punkt ($\varepsilon = Re_i - Re_{i,c}/R_{i,c}$). Die Re_i -Achse basiert auf den experimentell ermittelten Werten für $Re_{i,c} = 117.2$, der leicht oberhalb des numerischen Wertes von $Re_{i,c} = 115.2$ liegt.

Im Allgemeinen markieren die nicht gefüllten Symbole in Abbildung 7.11 die experimentellen und die gefüllten die numerischen Messwerte. Bei der Beschreibung dieses Stabilitätsdiagramms wird zunächst der Fall $Re = 0$ betrachtet, der in diesem Diagramm eine Sonderrolle einnimmt. Unterhalb der schwarzen Linie existiert nur eine einzige Lösung im System, die Couette-Strömung, die im Fall der Existenz von festen Deckelplatten mit der Ekman-Wirbelströmung überlagert ist. Oberhalb der schwarzen Linie findet sich dann der Übergang zur Spiral-Wirbelströmung in Form einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung. Im Experiment existiert diese

Verzweigung bei $Re_i = 117.2$, und die Strömung kann dann sowohl zu $SPI\uparrow$ als auch zu $SPI\downarrow$ verzweigen. Unter weiterer quasistatischer Erhöhung von Re_i kommt es dann zu einem Übergang von $SPI\uparrow$ bzw. $SPI\downarrow$ zum asymmetrischen P_+ -Zustand bei $Re_i = 135.2$, wie er in Abbildung 7.6(b) bzw. (d) in Form eines axialen Scans gezeigt ist. Das Übergangsszenario in Form eines propagierenden P_+ -Defektes ist in Abbildung 7.1 numerisch und in Abbildung 7.2 experimentell erfasst worden. Der P_+ -Zustand bleibt oberhalb dieses Re_i zunächst stabil und verliert dann bei $Re_i = 150$ seine Stabilität zugunsten der Taylor-Wirbelströmung. Die Werte für den Übergang zur Taylor-Wirbelströmung, der hier nicht weiter untersucht worden ist, liegen außerhalb des in diesem Diagramm dargestellten Parameterbereichs. Nach unten ist die Stabilität des P_+ -Zustandes ebenfalls begrenzt, denn unterhalb von $Re_i = 120$, also kurz vor dem Verzweigungspunkt der Spiralen, verschwindet der P_+ -Zustand zugunsten einer der beiden 'globalen' Spiralzustände ($SPI\uparrow$ oder $SPI\downarrow$) aus dem System.

Unter dem Einfluss eines positiven axialen Durchflusses wird die Grundströmung zur Couette-Poiseuille-Strömung (CPF). Die erste Instabilität zur Spiral-Wirbelströmung ist in Kapitel 5 untersucht worden. Sie kann in Form einer Hopf-Verzweigung mit gebrochener Reflexionssymmetrie verstanden werden. Eine Konsequenz dieser Untersuchung ist, dass für den Fall, dass die Reflexionssymmetrie aufgrund eines axialen Durchflusses gebrochen ist, aus einer symmetriebrechenden Hopf-Verzweigung nun zwei getrennte Verzweigungen zu $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ werden. Der axiale Durchfluss stellt somit eine geeignete symmetriebrechende Störung dar und entfaltet die Verzweigungsstruktur auf diese Weise bezüglich der Reflexionssymmetrie. Die untere fast horizontale Linie repräsentiert die konvektive Instabilitätsschwelle der Spiralen. Prinzipiell findet für einen positiven axialen Durchfluss primär stets der Übergang der Couette-Poiseuille-Strömung zu $SPI\uparrow$ statt. Dieser Strömungszustand ist nachfolgend stets der Ausgangszustand für weitere Untersuchungen. Für 'kleine' Durchflüsse ($0 < Re < 0.2$) verhält sich dieser Zustand bei weiterer quasistatischer Erhöhung von Re_i ganz ähnlich wie derjenige für $Re = 0$, denn es erfolgt bei einem bestimmten Re_i der Übergang zum 'asymmetrischen' P_+ -Zustand. Dieser Zustand wird mit der Stärke des Durchflusses zunehmend *asymmetrischer* und der P_+ -Defekt wird immer stärker in Richtung der oberen Ekman-Wirbel 'gedrückt'. Dieser 'kleine' axiale Durchfluss ist jedoch nicht in der Lage, den P_+ -Defekt aus dem System heraus propagieren zu lassen. Im Stabilitätsdiagramm ist der Übergang von $SPI\uparrow$ zu diesem asymmetrischen P_+ -Zustand in Form von Kreisen (\circ, \bullet) angedeutet.

Für 'stärkere' Durchflüsse ($0.2 \leq Re < 1.0$) wird der P_+ -Defekt mitsamt der mit dem Strom propagierenden Spirale ($SPI\uparrow$) vollständig aus dem System verdrängt und $SPI\downarrow$ bleibt als globaler Strömungszustand erhalten. Für diesen Fall ist der propagierende Defekt somit nur Teil eines transienten Übergangsszenarios von der mit dem Strom zur gegen den Strom propagierenden Spirale, also von $SPI\uparrow$ zu $SPI\downarrow$, wie es im Stabilitätsdiagramm in Form von ($\triangle, \blacktriangle$)-Symbolen und der vertikalen Linie angedeutet ist. Die durchgezogene Linie dient zusätzlich der besseren Übersicht und begrenzt den Bereich, in dem ausschließlich $SPI\downarrow$ stabil ist, nach unten. Der grau eingefärbte Bereich markiert den Bereich, in dem sowohl $SPI\uparrow$ als auch $SPI\downarrow$ stabil vorliegen. Die Stabilität von $SPI\downarrow$ ist dabei durch quasistatische Verringerung von Re_i untersucht worden. Unterhalb der gestrichelten Linie, die zur besseren Übersicht der gemessenen Werte eingezeichnet ist und den Verlauf der Messwerte ($\nabla, \blacktriangledown$) andeutet, findet dann bei Verringerung von Re_i der Übergang von $SPI\downarrow$ auf $SPI\uparrow$ statt. Demnach wird unterhalb dieser Linie und oberhalb der

Instabilitätsschwelle (waagerechte Linie) ausschließlich $\text{SPI} \uparrow$ beobachtet.

7.5 Zusammenfassung

Im Zuge der in diesem Kapitel dargestellten Studie sind das raumzeitliche Verhalten und die Verzweigungsstruktur eines neuartigen 'lokalisierten' Zustandes untersucht worden. Das dynamische Verhalten dieser Strömung sowie ihr Verzweigungsverhalten sind durch experimentelle Messungen und in Kooperation mit Ch. Hoffmann (Universität des Saarlandes) in Form von numerischen Simulationen der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung erforscht worden. Der lokalisierte, so genannte P_+ -Zustand beinhaltet dabei stets einen Defekt, der zwei in axialer Richtung laufende Spiralen räumlich separiert. Diese beiden Spiralen besitzen eine unterschiedliche azimuthale Wellenzahl ($m = \pm 1$) und treiben in diesem Defekt nichtlinear eine lokalisierte, stationäre und axialsymmetrische Mode der azimuthalen Wellenzahl $m = 0$ an. Die nichtlineare Modenkopplung der beiden Spiralen ist eine wichtige Eigenschaft des Defektes und wesentlich für seine Existenz. Der P_+ -Zustand entsteht bei Erhöhung des Kontrollparameters Re_i , und der P_+ -Defekt tritt dabei stets an der Deckelplatte auf, wo sich der phasengenerierende Ekman-Spiral-Defekt befindet. Mit seiner Entstehung wird der phasengenerierende Ekman-Spiral-Defekt zu einem phasenvernichtenden Defekt. Kurz nach der Entstehung des P_+ -Defektes propagiert dieser in Richtung der axialen Mitte und kommt in dessen Umgebung zum Stehen. Es entsteht je nach Art der Präparation entweder ein symmetrischer oder ein asymmetrischer stabiler P_+ -Zustand. Ein axialer Durchfluss ist prinzipiell dazu fähig, die Position des Defektes zu verändern, und ein 'starker' axialer Durchfluss ($Re \geq 0.2$) kann darüber hinaus den Defekt sogar ganz aus dem System verdrängen. Für diesen Fall ist der propagierende Defekt somit nur Teil eines transienten Übergangsszenarios, das einen Wechsel der Chiralität der Spiral-Wirbelströmung beinhaltet.

Kapitel 8

Lokalisierte Spiralen

Im Zuge dieses Kapitels soll das Verhalten von Spiralen bei stärkerer Gegenrotation untersucht werden. Zudem soll das Verzweigungsverhalten und die Dynamik der dort auftretenden Strömung mit numerischen Simulationen der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung sowie der linearen Stabilitätsanalyse verglichen werden. Der Schwerpunkt der hier durchgeführten Untersuchungen liegt auf der Taylor-Couette-Strömung mit einer axialen Länge von $\Gamma = 8.0$, wird am Ende dieses Kapitels jedoch auch auf längere Systeme ($\Gamma = 12.0, 16.0$ und 24.0) erweitert. Da bei einem System mit $\Gamma = 8.0$ für *moderate* Gegenrotationen stehende Wellen aus der Grundströmung in Form einer Hopf-Verzweigung verzweigen, wird zu Beginn dieses Kapitels zunächst der Strömungszustand der stehenden Wellen für dieses Γ untersucht und anschließend charakterisiert.

8.1 Stehende Wellen (SW)

In Abbildung 8.1(a) ist ein axialer Scan einer stehenden Welle gezeigt, der bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -120.0$ und $Re_i = 117.5$ gemessen worden ist. Es handelt sich um eine stehende Welle des Typs SW_π , die sich aus der Überlagerung von $SPI\uparrow$ und $SPI\downarrow$ ergibt. Der Index π deutet dabei auf die Phasenbeziehung der beiden partizipierenden Spiralen von π hin. Es existiert jedoch auch ein anderer Typ stehender Welle mit einer Phasenbeziehung von 0 (siehe dazu beispielsweise [30]). Deutlich sind in Abbildung 8.1(a) neben dem Ekman-Profil auch die für diesen Typ stehende Welle charakteristischen Knotenpunkte an den Maxima und Minima zu erkennen. Die Oszillation in der axialen Geschwindigkeit v_z nimmt dabei zu den Deckeln hin ab. In Abbildung 8.1(d) ist das entsprechende Leistungsspektrum des axialen Scans gezeigt. Die wesentlichen Frequenzpeaks aus diesem Spektrum sind durch die beiden farbigen und die schwarze Linie angedeutet. Die rote Linie kennzeichnet dabei die Frequenz von $SPI\downarrow$, die blaue Linie diejenige von $SPI\uparrow$. Mit Hilfe eines Bandpasses für diese beiden Frequenzbereiche und der anschließenden Bestimmung der Amplituden lässt sich nun das axiale Amplitudenprofil der beiden Spiralmoden bestimmen. Diese beiden Amplituden sind in Abbildung 8.1(b) gegen die axiale Position z dargestellt, und die farbigen Pfeile weisen auf die unterschiedlichen Propagationsrichtungen der beiden Spiralen hin. Jede Amplitude $A(m)$ lässt sich dabei in die entsprechend andere überführen, indem eine

Spiegelung in der axialen Mitte durchgeführt wird. Auch das Ekman-Profil lässt sich durch die Anwendung eines Bandpasses leicht aus dem eigentlichen axialen Scan extrahieren. Dieses Profil ist in Abbildung 8.1(c) dargestellt und zur besseren Vergleichbarkeit mit dem axialen Scan in Abbildung 8.1(a) ist hier auf die Berechnung der Amplituden verzichtet worden und es wird nur das Bandpass gefilterte Profil gezeigt.

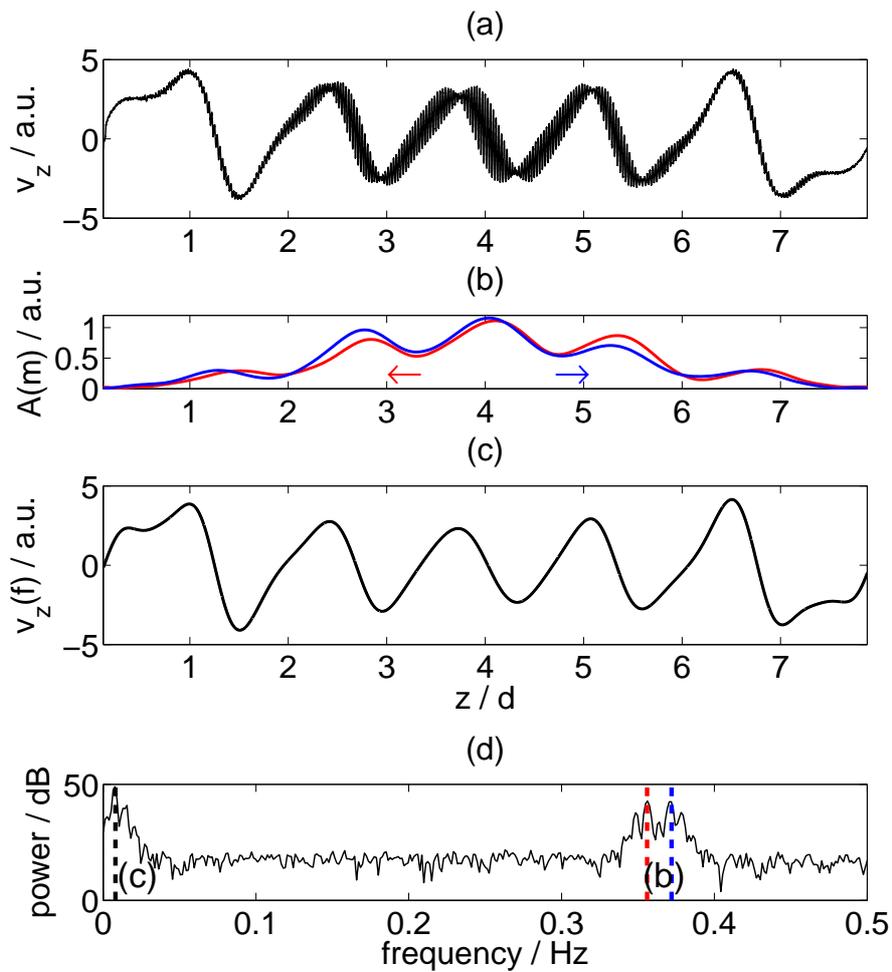


Abbildung 8.1: (a) Axialer Scan bei stehenden Wellen (SW) gemessen bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -120.0$ und $Re_i = 117.5$, (b) Amplituden $A(m)$ von $\text{SPI}\downarrow$: rot (0.340 – 0.365 Hz) und $\text{SPI}\uparrow$: blau (0.365 – 0.390 Hz), (c) Bandpass gefilterter axialer Scan (a) (0 – 0.025 Hz) und (d) Leistungsspektrum von (a). Die farbigen Linien in (d) markieren die in (b) und (c) analysierten Frequenzen.

8.2 Lokalisierte Spiralen SPI_+

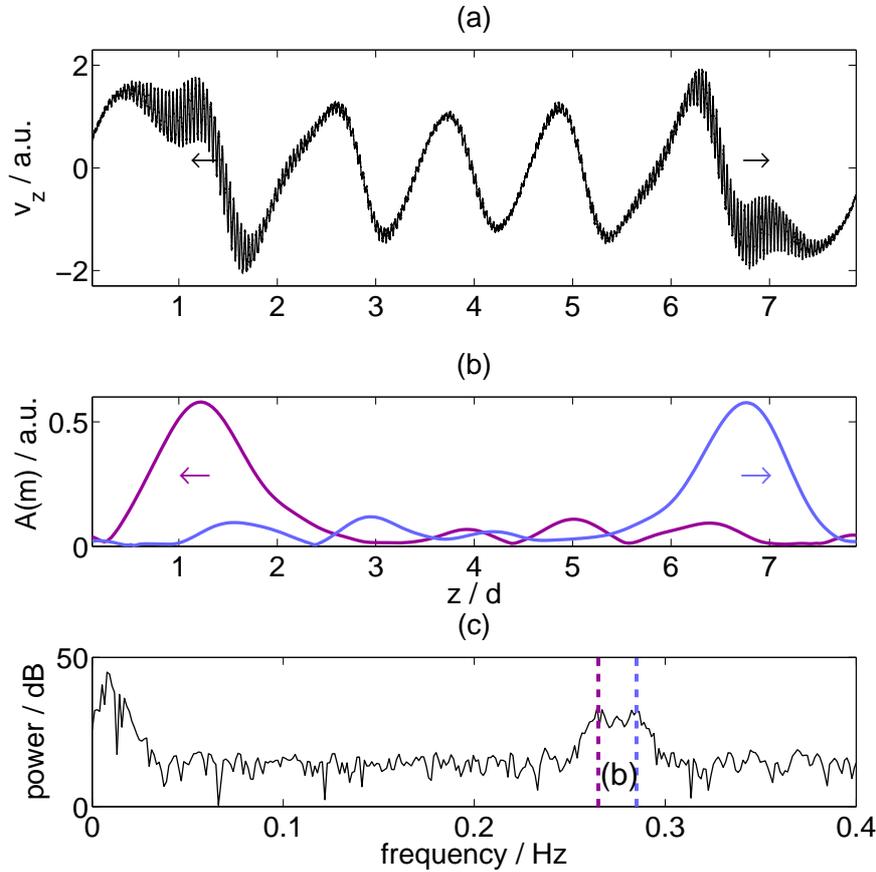


Abbildung 8.2: (a) Axialer Scan bei SPI_+ gemessen bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -156.0$ und $Re_i = 129.0$, (b) Amplituden $A(m)$ der runterlaufenden SPI_+ : violett (0.255 – 0.275 Hz) und hochlaufenden SPI_+ : hellblau (0.275 – 0.295 Hz) und (c) Leistungsspektrum von (a). Die farbigen Linien in (c) markieren die in (b) analysierten Frequenzen.

Bei Erhöhung der Gegenrotation auf Werte unterhalb von $Re_a \approx -150$ tritt eine neue Spiralstruktur auf. Charakteristisch für diese Spiralströmung ist ihre Lokalisierung in der Nähe der beiden Deckelplatten. In Abbildung 8.2(a) ist ein axialer Scan dieses neuen Spiraltyps gezeigt. Dieser Scan ist bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -156.0$ und $Re_i = 129.0$ gemessen worden und zeigt eine stark lokalisierte Oszillation in der Nähe der beiden Deckelplatten. Im Leistungsspektrum in Abbildung 8.2(c) zeigt sich, dass die Frequenzen dieser Spirale deutlich von denen, die typischerweise für Spiralen bzw. stehenden Wellen gefunden werden, hin zu niedrigeren Werten abweichen. Trotzdem findet sich ein Doppelpack im Spektrum, der auf eine Propagation der Spiralen in unterschiedliche axiale Richtungen hinweist. Bei der ortsaufgelösten Untersuchung mit Hilfe eines Bandpasses und der anschließenden Bestimmung der Amplituden zeigt sich, dass die

Amplitude der hochlaufenden Spirale (hellblau) an der oberen Deckelplatte lokalisiert ist, wohingegen die Amplitude der runterlaufenden Spirale (violett) an der unteren Deckelplatte lokalisiert ist. Dieser Typ Spirale sei nachfolgend aufgrund der Phasenerzeugung in der Mitte des System SPI_+ genannt. Er tritt in diesem Parameterbereich typischerweise vor dem Einsatz der stehenden Wellen auf.

Um die dreidimensionale Struktur dieser Strömung deutlich zu machen, ist in Abbildung 8.3 für genau diese Parameter die Visualisierung des radialen Geschwindigkeitsfeldes $v_r(\varphi, z)$ der SPI_+ in axialer und azimuthaler Richtung in der Spaltmitte ($r_i + 0.5d$) gezeigt. Die numerische Berechnung ist auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichung erfolgt [101]. Die hochlaufende SPI_+ mit Linksgewinde befindet sich im oberen, die runterlaufende SPI_+ mit Rechtsgewinde befindet sich im unteren Teil des Systems und die Reflexionssymmetrie dieser Strömung ist erhalten.

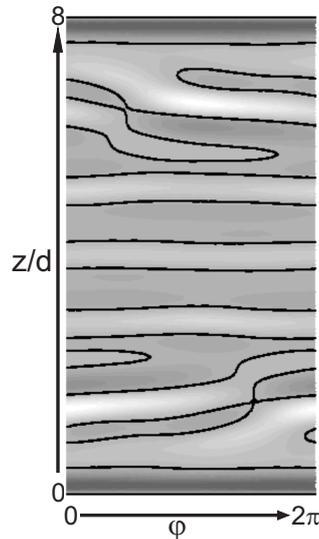


Abbildung 8.3: Visualisierung des radialen Geschwindigkeitsfeldes $v_r(\varphi, z)$ der SPI_+ in axialer und azimuthaler Richtung in der Spaltmitte ($r_i + 0.5d$) bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -156.0$ und $Re_i = 129.0$ numerisch berechnet auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichung. Die hochlaufende SPI_+ mit Linksgewinde befindet sich im oberen, die runterlaufende SPI_+ mit Rechtsgewinde befindet sich im unteren Teil des Systems .

8.3 Lokalisierte Spiralen SPI_-

Bei weiterer Erhöhung der Gegenrotation auf Werte unterhalb von $Re_a \approx -175$ ist das Auftreten einer weiteren Spiralstruktur zu beobachten, die ebenfalls eine eindeutige Lokalisierung in der Nähe der beiden Deckelplatten aufweist. In Abbildung 8.4(a) ist ein axialer Scan dieses Strömungszustandes gezeigt, der bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -200.0$ und $Re_i = 140.1$ gemessen worden ist. Die Form dieses Strömungszustandes unterscheidet sich in der Amplitudenverteilung von der eben diskutierten lokalisierten SPI_+ -Strömung. Im Leistungsspektrum dieses axialen Scans in

(c) ist neben dem Frequenzpeak der Ekman-Wirbelströmung wieder der für hoch- und runterlaufende Spiralen charakteristische Doppelpeak zu erkennen. Die beiden farbigen Linien im Spektrum markieren die entsprechenden Frequenzen dieser lokalisierten Spirale. Die orts aufgelöste, Bandpass basierte Analyse dieser Frequenzen führt zur Bestimmung der Amplituden dieser Spiralen in Abbildung 8.4(b). Es findet sich mit der so genannten SPI_- -Strömung das Gegenstück der eben erwähnten SPI_+ -Strömung, die sich dadurch auszeichnet, dass nun die Phase an den beiden Deckelplatten entsteht und in der Mitte des Systems vernichtet wird. In Abbildung 8.4(b) ist dies dadurch zu erkennen, dass die hochlaufende SPI_- an der unteren und die runterlaufende SPI_- an der oberen Deckelplatte lokalisiert ist. Angedeutet ist die Propagationsrichtung der Spiralen durch die farbigen Pfeile.

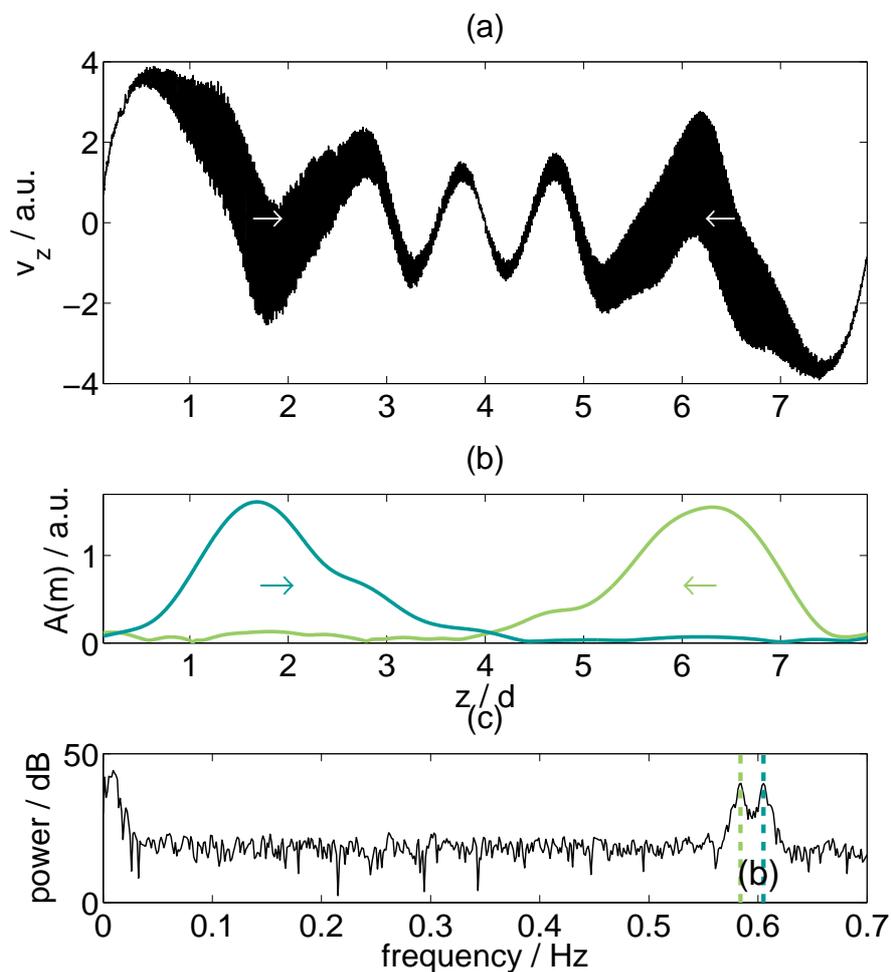


Abbildung 8.4: (a) Axialer Scan bei SPI_- gemessen bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -200.0$ und $Re_i = 140.1$, (b) Amplituden $A(m)$ der runterlaufenden SPI_- : grün (0.575 – 0.595 Hz) und hochlaufenden SPI_- : türkis (0.595 – 0.615 Hz) und (c) Leistungsspektrum von (a). Die farbigen Linien in (c) markieren die in (b) analysierten Frequenzen.

Auch der Strömungszustand der SPI_- findet sich in numerischen Simulationen der Navier-Stokes-Gleichung und in Abbildung 8.5 ist eine Visualisierung des radialen Geschwindigkeitsfeldes $v_r(\varphi, z)$ der SPI_- -Strömung in axialer und azimuthaler Richtung in der Spaltmitte bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -200.0$ und $Re_i = 137.0$ dargestellt [101]. Analog zur SPI_+ -Strömung zeigt sich hier eine spiralförmige Struktur der Strömung insbesondere in der Nähe der beiden Deckelplatten. Die Spirale mit Rechtsgewinde befindet sich im oberen, die mit Linksgewinde befindet sich im unteren Teil des Systems, wobei auch für diese Strömung somit die Reflexionssymmetrie erhalten ist. In dieser Visualisierung ist von der unterliegenden Ekman-Wirbelströmung nichts zu erkennen, weil diese bei stärkerer Gegenrotation (hier: $Re_a = -200.0$) vornehmlich in der Nähe des Innenzylinders auftritt und in der Spaltmitte kaum noch messbar ist.

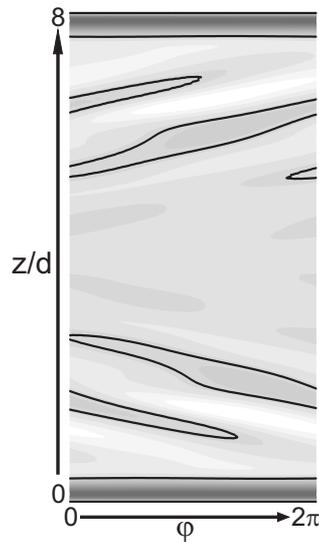


Abbildung 8.5: Visualisierung des radialen Geschwindigkeitsfeldes $v_r(\varphi, z)$ der SPI_- in axialer und azimuthaler Richtung in der Spaltmitte ($r_i + 0.5d$) bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -200.0$ und $Re_i = 137.0$ numerisch berechnet auf der Basis der Navier-Stokes-Gleichung. Die Spirale mit Rechtsgewinde befindet sich im oberen, die mit Linksgewinde befindet sich im unteren Teil des Systems.

8.4 Verzweigungsverhalten von SPI_+

In diesem Abschnitt soll zunächst das Verzweigungsverhalten von SPI_+ und im Anschluss an diesen Abschnitt das von SPI_- aus der Grundströmung heraus untersucht werden. In Abbildung 8.6 ist aus diesem Grund ein experimentelles Verzweigungsdiagramm, wie es bei $\Gamma = 8.0$ und $Re_a = -156.0$ an der axialen Position $h = 19.8$ mm und radial bei $r = r_i + 1$ mm aufgezeichnet worden ist, dargestellt. In (a) sind daher die quadrierten Mittelwerte der Minima einer jeden ortsfest gemessenen Zeitreihe von 10 Minuten $\langle v_{z,Min} \rangle^2$ gegen Re_i aufgetragen. Re_i ist während dieser Messungen quasistatisch um $\Delta Re \approx 0.2$ erhöht worden. Eine wesentliche Eigenschaft einer superkritischen Hopf-Verzweigung ist neben dem Auftreten einer 'festen' Fre-

quenz auch das wurzelförmige Anwachsverhalten der Amplitude oberhalb des kritischen Punktes. Für den Einsatz von SPI_+ müsste sich demnach oberhalb des kritischen Punktes in dieser Darstellung eine Gerade finden. Die erste vertikale, gestrichelte Linie kennzeichnet diesen kritischen Punkt, und es zeigt sich oberhalb dieses Punktes ein linearer funktionaler Zusammenhang. Die Regressionsgerade (durchgezogene Linie) in (a) berücksichtigt ausschließlich Wertepaare ($Re_i, \langle v_{z,Min} \rangle^2$) zwischen den beiden vertikalen gestrichelten Linien, und es ergibt sich als kritischer Punkt $Re_{i,c} = 128.7$. Wie in (b) zu erkennen, existiert oberhalb dieses Punktes auch die entsprechende Oszillationsfrequenz von SPI_+ und es besteht somit ein starker Hinweis auf eine Hopf-Verzweigung bei diesem Übergang.

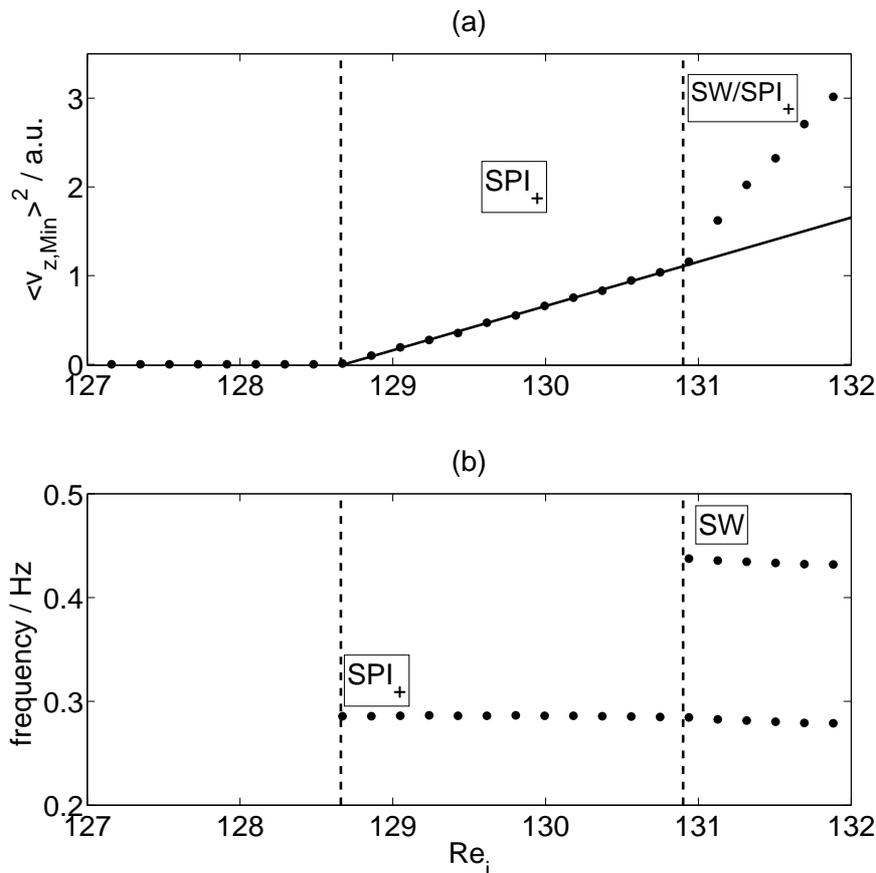


Abbildung 8.6: Experimentelles Verzweigungsdiagramm gemessen bei $\Gamma = 8.0$ und $Re_a = -156.0$ in der axialen Position $h = 19.8$ mm und radial bei $r = r_i + 1$ mm. (a) Quadrierte Mittelwerte der Minima $\langle v_{z,Min} \rangle^2$ aufgetragen gegen Re_i und (b) entsprechende Oszillationsfrequenzen der stehenden Wellen (SW) und der lokalisierten Spiralen SPI_+ dargestellt gegen Re_i . Die gestrichelten vertikalen Linien markieren die entsprechenden Verzweigungspunkte und die durchgezogene Linie in (a) basiert auf einer linearen Regression der Werte zwischen den beiden gestrichelten Linien.

Neben dem wurzelförmigen Anwachsverhalten der Amplitude bietet die Untersuchung der transienten Dynamik in der Nähe des kritischen Punktes $Re_{i,c}$ eine weitere experimentelle Möglichkeit zur Charakterisierung der zugrunde liegenden Verzweigung. Nach der Landau-Theorie müsste sich im Fall einer superkritischen Hopf-Verzweigung eine Divergenz der Zeitkonstanten τ mit $\tau \propto 1/\varepsilon$ in der Nähe dieses kritischen Punktes ergeben ('critical slowing down'), wobei ε ein Maß für den relativen Abstand vom kritischen Punkt ($\varepsilon = (Re_i - Re_{i,c})/Re_{i,c}$) ist [67, 108, 109]. Experimentell wird die Zeitkonstante τ durch die Messung einer ortsfesten Zeitreihe durchgeführt, wobei während dieser Messung eine schlagartige Erhöhung der Innenzylinder-Reynoldszahl Re_i von einem unterkritischen Wert ($\varepsilon < 0$) mit der Startamplitude $A_i = A(t=0)$ zu einem überkritischen Wert ($\varepsilon > 0$) erfolgt. Durch die Wahl von ε ist aufgrund des wurzelförmigen Anwachsverhaltens der Amplitude somit auch die Endamplitude $A_f = A_0\sqrt{\varepsilon}$ festgelegt. Das zeitliche Verhalten nach einem solchen 'Sprung' wird durch die folgende Gleichung 8.1 beschrieben, aus der anschließend mit Hilfe eines Fits die Zeitkonstante τ bestimmt werden kann.

$$A(t) = \frac{A_f e^{t/\tau_i}}{\sqrt{e^{2t/\tau_i} + (A_f/A_i)^2 - 1}} \quad (8.1)$$

Die Aufnahme von sechs solcher Zeitreihen ist für unterschiedliche überkritische Werte durchgeführt und anschließend mit Hilfe der Funktion aus 8.1 gefittet worden. Die so bestimmten Zeitkonstanten τ sind in Abbildung 8.7 (o) in Abhängigkeit vom relativen Abstand vom kritischen Punkt ε dargestellt. Als funktionaler Zusammenhang dieser Punkte ergibt sich anhand dieser experimentellen Werte $\tau \propto \varepsilon^{-0.994}$ und somit eine Bestätigung der Annahme einer superkritischen Hopf-Verzweigung, für die $\tau \propto \varepsilon^{-1}$ gelten muss.

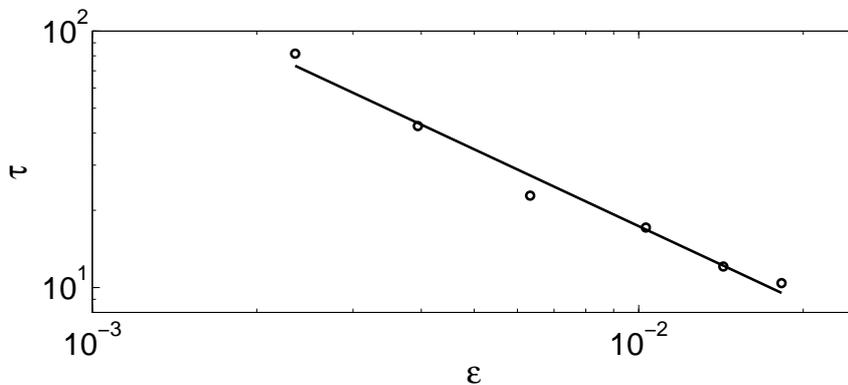


Abbildung 8.7: Zeitkonstanten τ der SPI_+ -Strömung in Abhängigkeit vom relativen Abstand zum kritischen Punkt ε gemessen bei $\Gamma = 8.0$ und $Re_a = -156.0$ in der axialen Position $h = 19.8$ mm und radial bei $r = r_i + 1$ mm. Die durchgezogene Linie basiert auf einem Fit mit $\tau \propto \varepsilon^{-0.994}$.

Auf die Abweichung von der Regressionsgeraden aus Abbildung 8.6(a) oberhalb der zweiten vertikalen gestrichelten Linie in Abbildung 8.6(a) wird nachfolgend noch im Detail Bezug genommen. Das Auftreten der Frequenz der stehenden Wellen (SW) für diesen Bereich ist jedoch bereits als erster Hinweis für die Koexistenz von SPI_+ und stehenden Wellen zu verstehen.

In Abbildung 8.8(a) ist ein axialer Scan der Strömung in diesem Parameterbereich ($\Gamma = 8.0$, $Re_a = -156.0$ und $Re_i = 130.8$) gezeigt. Ein Vergleich dieses axialen Scans mit dem aus Abbildung 8.2(a) zeigt bereits, dass nun auch in der axialen Mitte des Systems eine Oszillation messbar ist. Überraschend ist, dass im Leistungsspektrum dieses Scans in (d) zusätzlich zu den bereits bekannten Frequenzen der Ekman-Wirbelströmung und SPI_+ (violette und hellblaue Linie) ein weiterer Doppelpeak (rote und blaue Linie) im Spektrum zu erkennen ist.

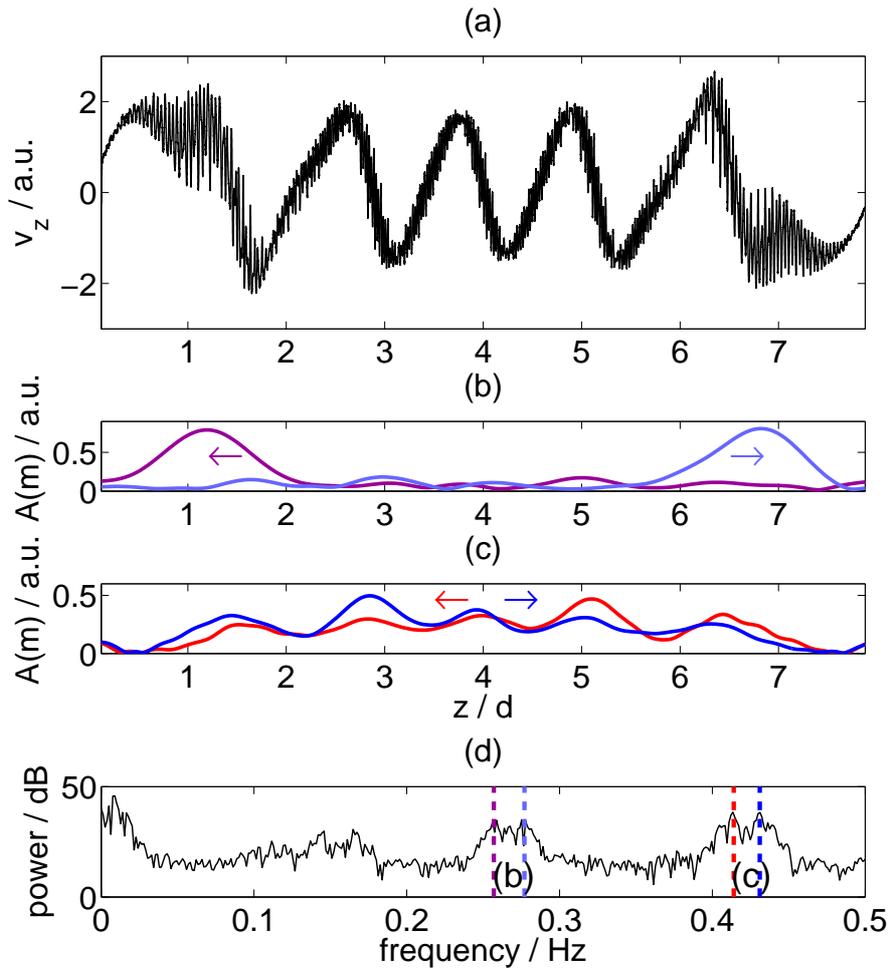


Abbildung 8.8: (a) Axialer Scan gemessen bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -156.0$ und $Re_i = 130.8$, (b) Amplituden $A(m)$ hochlaufende SPI_+ : violett (0.246 – 0.266 Hz) und runterlaufende SPI_+ : hellblau (0.266 – 0.286 Hz), (c) Amplituden $A(m)$ von SPI_- : rot (0.402 – 0.422 Hz) und SPI_+ : blau (0.422 – 0.442 Hz) und (d) Leistungsspektrum von (a). Die farbigen Linien in (d) markieren die in (b) und (c) analysierten Frequenzen.

Ein Vergleich dieser Frequenzen mit denen aus der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung führt, wie bereits für stehende Wellen und Spiralen im Experiment gezeigt (siehe

Kapitel 4), zu einer guten Übereinstimmung. Eine Bandpass basierte, orts aufgelöste Analyse der SPI_+ -Strömung ist in (b) dargestellt und zeigt die 'starke' Lokalisierung der beiden Spiralen an den beiden Deckelplatten. Die Propagationsrichtung der beiden Spiralen SPI_+ ist zusätzlich mit Pfeilen angedeutet. In (c) ist eine ähnliche Analyse, allerdings mit den Frequenzen des höherfrequenten Doppelpeaks, gezeigt. Die Amplituden von SPI_\uparrow (blau) und SPI_\downarrow (rot) sind über den gesamten axialen Bereich messbar, allerdings nimmt die Amplitude beider Spiralen in der Umgebung der Deckelplatten ab. Die Propagationsrichtung beider Spiralen ist zusätzlich durch farbige Pfeile angedeutet. Analog zu Abbildung 8.1 ist es möglich, die Amplitude der einen Spirale durch Spiegelung in der axialen Mitte in die Amplitude der anderen Spirale zu überführen.

8.5 Verzweigungsverhalten von SPI_-

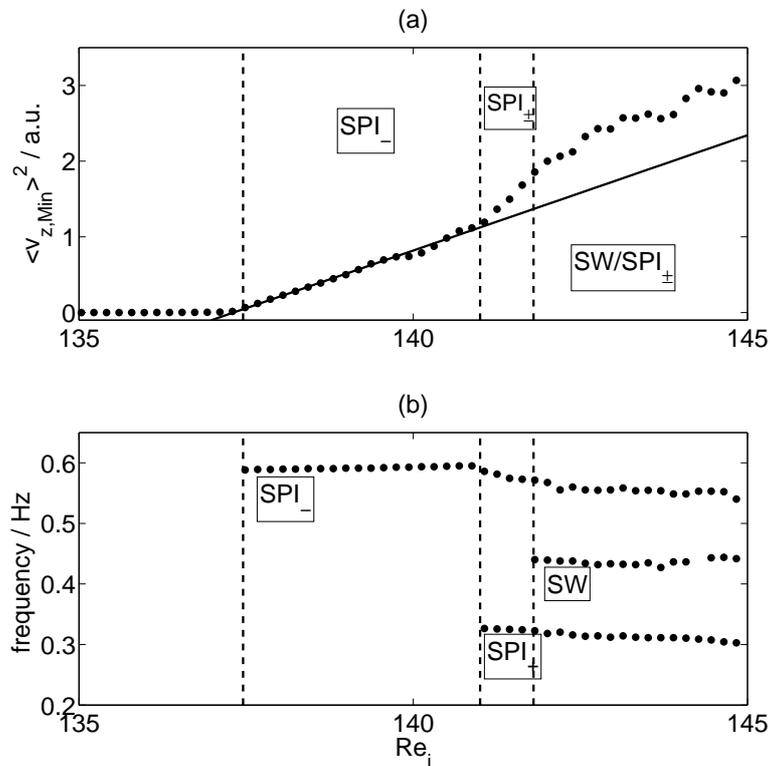


Abbildung 8.9: Experimentelles Verzweigungsdiagramm gemessen bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -200.0$ an der axialen Position $h = 28.2$ mm und radial bei $r = r_i + 1$ mm. (a) Quadrierte Mittelwerte der Minima $\langle v_{z,Min} \rangle^2$ aufgetragen gegen Re_i und (b) entsprechende Oszillationsfrequenzen der stehenden Wellen (SW) und der lokalisierten Spiralen SPI_+ und SPI_- dargestellt gegen Re_i . Die gestrichelten, vertikalen Linien markieren die entsprechenden Verzweigungspunkte, und die durchgezogene Linie in (a) basiert auf einer linearen Regression der Werte zwischen den beiden gestrichelten Linien.

In diesem Abschnitt soll das Verzweigungsverhalten von SPI_- aus der Grundströmung heraus untersucht werden. In Abbildung 8.9 ist aus diesem Grunde ein experimentelles Verzweigungsdiagramm dargestellt, wie es bei $\Gamma = 8.0$ und $Re_a = -200.0$ bei der axialen Position $h = 28.2$ mm und radial bei $r = r_i + 1$ mm aufgezeichnet worden ist. In (a) sind analog zum vorangegangenen Abschnitt die quadrierten Mittelwerte der Minima $\langle v_{z,Min} \rangle^2$ einer jeden ortsfest gemessenen Zeitreihe von 10 Minuten gegen Re_i aufgetragen. Re_i ist während dieser Messungen quasi-statisch um $\Delta Re \approx 0.2$ erhöht worden. Im experimentellen Verzweigungsdiagramm findet sich oberhalb des experimentell ermittelten kritischen Punktes von $Re_{i,c} = 137.3$ ebenfalls ein wurzelförmiges Anwachsverhalten der Amplitude. Dieser funktionale Zusammenhang wird durch die Regressionsgerade (durchgezogene Linie) gestützt. In (b) ist die Oszillationsfrequenz dieses Strömungszustandes gegen Re_i aufgetragen, und es findet sich zwischen den beiden ersten gestrichelten Linien eine Frequenz, die der SPI_- -Strömung zugeordnet werden kann. Es handelt sich bei diesem Übergang ebenfalls um eine superkritische Hopf-Verzweigung.

Analog zu Abbildung 8.7 sind die Zeitkonstanten τ auch für den Übergang der Grundströmung zur SPI_- -Strömung experimentell bestimmt worden. Das Ergebnis dieser Messungen findet sich in Abbildung 8.10. Auch hier zeigt sich mit $\tau \propto \varepsilon^{-0.878}$ nur eine geringe Abweichung von der erwarteten Abhängigkeit $\tau \propto 1/\varepsilon$. Dieser Übergang erfolgt somit ebenfalls in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung, da sowohl wurzelförmiges Anwachsverhalten als auch transiente Dynamik ('critical slowing down') in der Nähe des kritischen Punktes beobachtet wird.

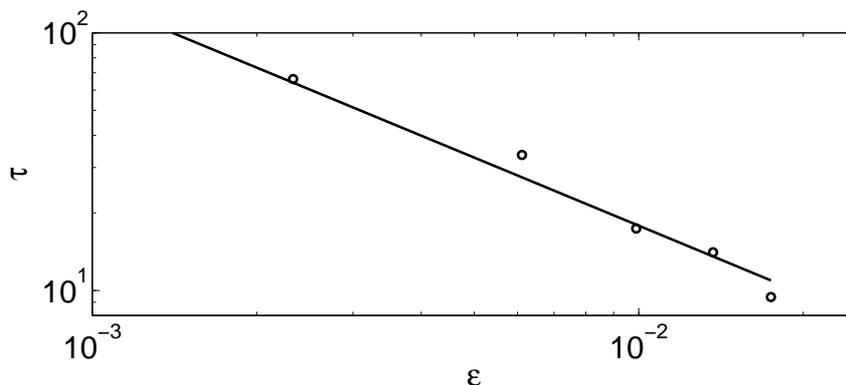


Abbildung 8.10: Zeitkonstante τ der SPI_+ -Strömung gemessen bei $\Gamma = 8.0$ und $Re_a = -200.0$ in der axialen Position $h = 19.8$ mm und radial bei $r = r_i + 1$ mm. Die durchgezogene Linie basiert auf einem Fit mit $\tau \propto \varepsilon^{-0.878}$.

Zwischen der zweiten und der dritten vertikalen gestrichelten Linie in Abbildung 8.9(b) findet sich neben dem Frequenzpeak von SPI_- ein weiterer Peak, der auf die andere (koexistierende) lokalisierte Spirallösung SPI_+ hindeutet. Oberhalb der dritten vertikalen gestrichelten Linie zeigt sich sogar die Koexistenz von SPI_+ , SPI_- -Strömung und stehenden Wellen (SW). In (a) ergibt sich aus dieser Koexistenz eine immer stärkere Abweichung von der Regressionsgeraden für höhere Re_i . Um das raumzeitliche Verhalten dieser koexistierenden Strömungszustände aufzuzeigen, ist in dem Parameterbereich oberhalb der dritten gestrichelten Linie bei $Re_i = 142.6$ ein axialer Scan dieser Strömung gemessen worden und in Abbildung 8.11(a) gezeigt. Bereits im

Leistungsspektrum in (e) sind insgesamt drei Doppelpicks mit Hilfe farbiger Linien markiert.

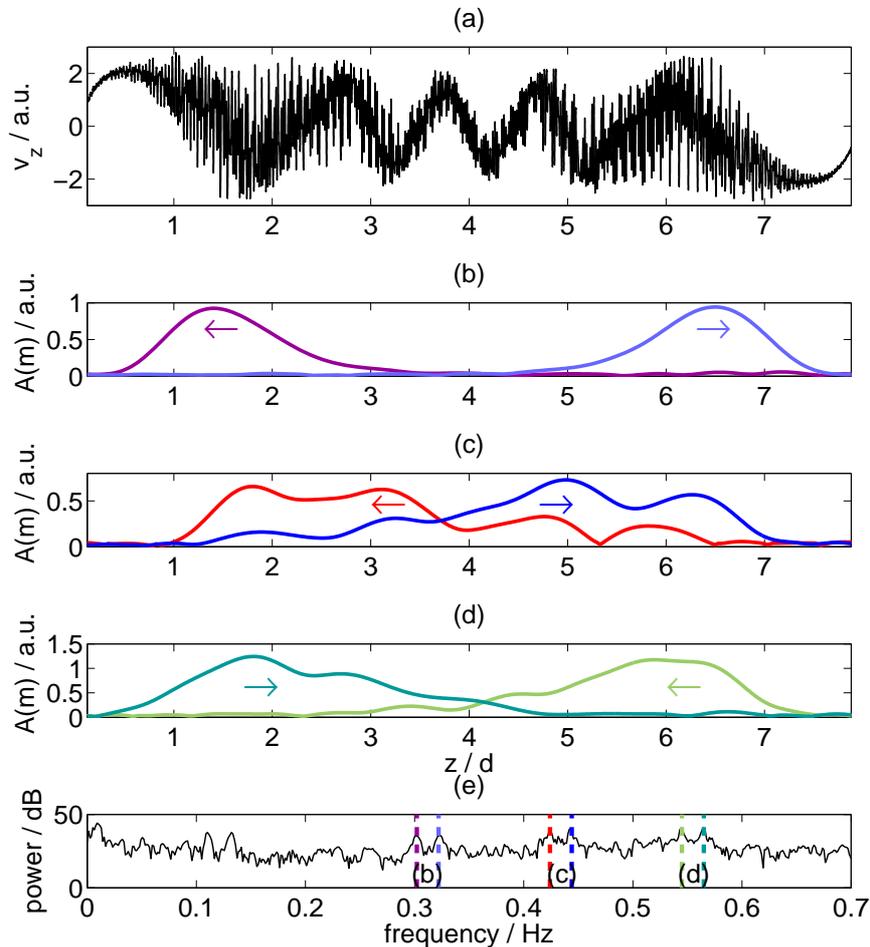


Abbildung 8.11: (a) Axialer Scan gemessen bei $\Gamma = 8.0$, $Re_a = -200.0$ und $Re_i = 142.6$, (b) Amplituden $A(m)$ der runterlaufenden SPI₊: violett (0.293 – 0.312 Hz) und hochlaufenden SPI₊: hellblau (0.312 – 0.332 Hz), (c) Amplituden $A(m)$ der SPI₋: rot (0.415 – 0.435 Hz) und SPI₊: blau (0.435 – 0.455 Hz), (d) Amplituden $A(m)$ der runterlaufenden SPI₋: grün (0.535 – 0.555 Hz) und hochlaufenden SPI₋: türkis (0.555 – 0.575 Hz) und (e) Leistungsspektrum von (a). Die farbigen Linien in (e) markieren die in (b)-(d) analysierten Frequenzen.

Die violette Linie markiert dabei die Frequenz von runterlaufenden und die hellblaue diejenige der hochlaufenden SPI₊-Strömung. Die axialen Amplitudenprofile $A(m)$ dieser lokalisierten SPI₊-Strömung sind in (b) gezeigt und durch die beiden farbigen Pfeile zusätzlich deren Propagationsrichtung angedeutet. Die hochlaufende SPI₊ befindet sich in der Nähe der oberen Deckelplatte, wohingegen die runterlaufende SPI₊ an der unteren Deckelplatte lokalisiert ist. Auch die Frequenzen von SPI₋ und SPI₊ sind in (e) durch die rote und blaue Linie markiert, sowie deren

Amplitudenverteilung in (c) dargestellt. SPI_{\uparrow} und SPI_{\downarrow} besitzen hauptsächlich in der Mitte die höchste Amplitude, die zu den beiden Deckelplatten hin abnimmt. In (d) sind die Amplituden der hoch- (türkis) und runterlaufenden (grün) SPI_{-} -Strömung analysiert. Bei dieser Strömung findet sich die hochlaufende Spirale vornehmlich im unteren und die runterlaufende im oberen Teil des Systems. Auch diese Frequenzen sind in (e) als farbige Linien markiert. Es ist zu beachten, dass die SPI_{-} -Strömung in diesem axialen Scan (wenn auch nur lokal) im Vergleich mit den anderen Strömungszuständen die größte Amplitude aufweist.

8.6 Stabilitätsdiagramm von SW, SPI_{+} und SPI_{-}

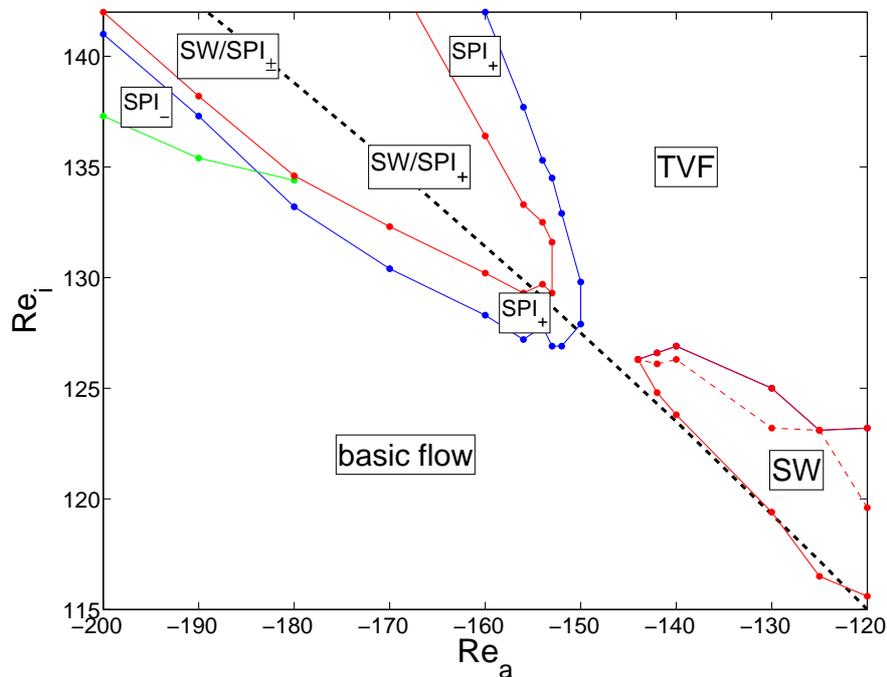


Abbildung 8.12: Stabilitätsdiagramm bei $\Gamma = 8.0$. Die gestrichelte Linie repräsentiert die Werte der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung bezüglich Spiralen mit einer azimuthalen Wellenzahl von $m = \pm 1$ für unendlich lange Zylinder. Stehende Wellen (SW) treten unmittelbar an dieser linearen Stabilitätsgrenze der Couette-Strömung (basic flow) (aus [101]) auf, wohingegen die Einsatzpunkte der lokalisierten Spiralen SPI_{+} und SPI_{-} signifikant unterhalb dieser numerisch bestimmten Grenze liegen. Die Region, in der lokalisierte Spiralen an den Deckelplatten und stehende Wellen im Hauptteil des Systems koexistieren, ist mit SW/SPI_{\pm} bezeichnet. Bei höheren Re_i tritt die Taylor-Wirbelströmung (TVF) auf.

In Abbildung 8.12 ist ein Stabilitätsdiagramm für den Bereich $Re_a = -120.0$ bis -200.0 gezeigt, das sowohl aus axialen Scans der axialen Geschwindigkeit als auch aus ortsfest aufge-

nommenen Zeitreihen unter Variation von Re_a erstellt worden ist. Als Ausgangszustand ist bei der Erhöhung von Re_i stets die Couette-Strömung und bei der Verringerung stets die Taylor-Wirbelströmung gewählt worden. Die Punkte im Diagramm repräsentieren Messwerte, und die durchgezogenen Linien verbinden diese zur besseren Darstellung. Im Bereich von $Re_a = -120.0$ bis -140.0 treten als Folge der ersten Instabilität in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung beide Typen von stehenden Wellen SW_0 und SW_π auf (hier allgemein mit SW markiert). Die kritischen Punkte dieser Verzweigung sind rot markiert und die untere rote Linie verbindet diese Punkte miteinander. Die schwarze gestrichelte Linie repräsentiert die numerisch bestimmte lineare Stabilitätsschwelle der $m = \pm 1$ -Strömung für unendlich lange Zylinder und stimmt mit diesen Messwerten quantitativ gut überein. Die stehenden Wellen werden oberhalb der Messpunkte, die mit der durchgezogenen roten Linie verbunden werden, gegenüber der Taylor-Wirbelströmung (TVF) instabil. Für diesen Übergang existiert eine Hysterese, die experimentell durch Erhöhung und Verringerung von Re_i bestimmt worden ist. Die Messpunkte an der gestrichelten roten Linie deuten dabei auf die experimentell bestimmten Werte bei der Verringerung hin. In dem Bereich zwischen den Messpunkten der gestrichelten und der durchgezogenen roten Linie existieren demnach beide Strömungszustände (SW und TVF) stabil.

In der Umgebung von $Re_a = -148.0(\pm 2.0)$ werden keine oszillatorischen Strömungszustände beobachtet. Es lässt sich in diesem Bereich ausschließlich eine Zunahme der Ekman-Wirbelströmung beobachten, die ohne erkennbaren Verzweigungspunkt kontinuierlich in die Taylor-Wirbelströmung übergeht. Unterhalb von $Re_a = -150.0$ ist in axialen Scans das Auftreten der SPI_+ -Strömung zu erkennen. Auch dieser Übergang wird durch eine superkritische Hopf-Verzweigung beschrieben. Diese Strömung setzt bei der blau markierten Linie ein und ist in dem Bereich, der mit SPI_+ markiert ist, stabil. Die SPI_+ -Strömung tritt dabei sogar unterhalb der linearen Stabilitätsschwelle für Spiralen mit der azimuthalen Wellenzahl $m = \pm 1$ auf. Im Bereich bis zu $Re_a = -153.0$ sind neben diesen Spiralen keine koexistierenden Strömungszustände zu finden. Erst oberhalb der rot markierten Linie in dem Bereich, der mit SW/SPI_+ markiert ist, kommt es zu einer Koexistenz von stehenden Wellen in der Mitte des Systems und der SPI_+ -Strömung lokalisiert an den beiden Deckelplatten. Bis zu $Re_a = -156.0$ ist diesbezüglich eine gute Übereinstimmung des Einsatzpunktes der stehenden Wellen mit den Werten aus der linearen Stabilitätsanalyse vorhanden. Für $Re_a < -156.0$ liegt der Einsatzpunkt der stehenden Wellen, die in diesem Regime zunächst mit SPI_+ koexistieren, sogar unterhalb dieser berechneten Werte. Bei weiterer Erhöhung von Re_i endet die Koexistenz bei den Messwerten der zweiten roten Linie, die das Verschwinden von stehenden Wellen in der Mitte des Systems repräsentiert. Ab hier existieren ausschließlich die lokalisierten SPI_+ , die dann oberhalb der schwarzen Linie zugunsten der Taylor-Wirbelströmung aus dem System verschwinden.

Für $Re_a < -185.0$ tritt primär SPI_- ebenfalls in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung auf, deren Einsatzpunkt durch die grünen Messpunkte markiert ist. Es schließt sich ein Parameterbereich an, der mit SW/SPI_\pm markiert ist und in dem alle drei Strömungszustände SW , SPI_+ und SPI_- koexistieren.

8.7 Frequenzen von SW, SPI_+ und SPI_-

Die aus den Leistungsspektren der entsprechenden Zeitreihen und auch der axialen Scans ermittelten Oszillationsfrequenzen der SPI_- - und SPI_+ -Strömung sowie der stehenden Wellen (SW) sind in Abbildung 8.13 in Abhängigkeit von Re_a aufgetragen.

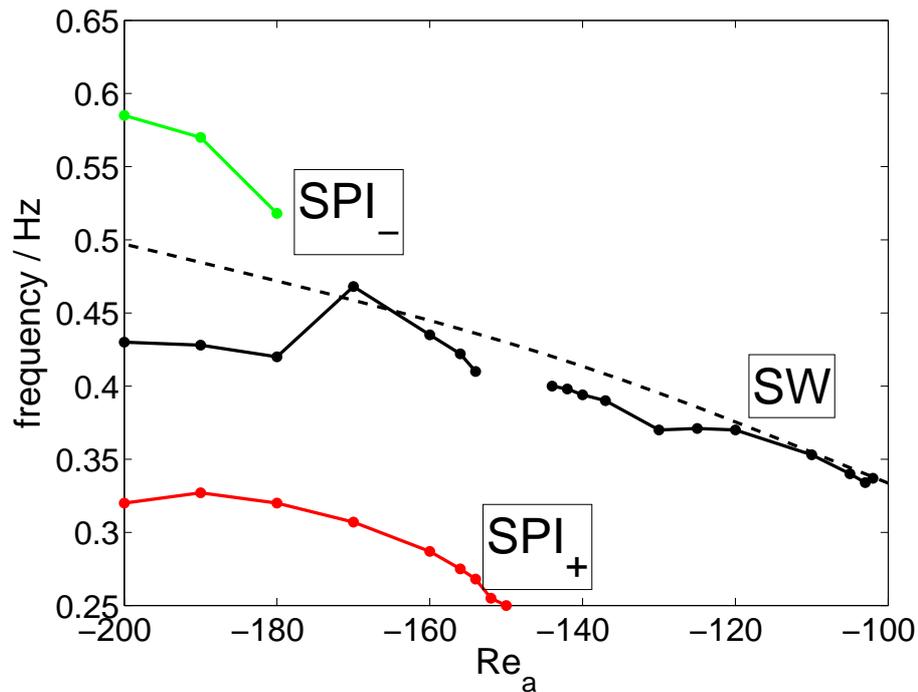


Abbildung 8.13: Darstellung der Oszillationsfrequenzen bei $\Gamma = 8.0$ von stehenden Wellen (SW) (schwarz), SPI_+ (rot) und SPI_- (grün) gegen Re_a . Die gestrichelte Linie repräsentiert dabei die Oszillationsfrequenzen der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung bezüglich Spiralen mit einer azimuthalen Wellenzahl von $m = \pm 1$ für unendlich lange Zylinder aus [101].

Die schwarze gestrichelte Linie repräsentiert zusätzlich die aus der linearen Stabilitätsanalyse bestimmten Frequenzen der $m = \pm 1$ -Spiralen für den Fall unendlich langer Zylinder. Die schwarzen Messpunkte stellen den Verlauf der Frequenzen dar, die den stehenden Wellen (SW) zugeordnet werden können und insbesondere in der axialen Mitte des Taylor-Couette-Systems zu detektieren sind. Diese Frequenz zeigt im Bereich von $Re_a = -120.0$ bis -160.0 Abweichungen und darüber hinaus einen Bereich, in dem die stehenden Wellen nicht existieren. Ab $Re_a = -150.0$ ist mit roten Messpunkten der Verlauf der Frequenz der SPI_+ -Strömung dargestellt, deren Werte analog zu denjenigen der stehenden Wellen mit zunehmender Re_a anwachsen und deren Werte prinzipiell unterhalb der Frequenzen der stehenden Wellen bzw. der aus der linearen Stabilitätsanalyse sind. Dieses Anwachsverhalten erfolgt jedoch nicht mit der gleichen Steigung wie bei stehenden Wellen, und bei $Re_a = -200.0$ fällt der Wert sogar. Ab $Re_a = -180.0$ ist in Grün der Verlauf der Frequenz der SPI_- -Strömung dargestellt, die noch stärker als die

beiden anderen Spiral-Frequenzen in Abhängigkeit von Re_a zunimmt. Die Werte dieser Oszillationsfrequenzen liegen prinzipiell oberhalb der Frequenz der stehenden Wellen bzw. derjenigen für Spiralen aus der linearen Stabilitätsanalyse.

8.8 Einfluss rotierender Deckel

In diesem Abschnitt wird der Einfluss rotierender Deckelplatten auf den Einsatzpunkt der stehenden Wellen und auch der lokalisierten Spiralen am Beispiel der SPI_+ -Strömung untersucht. In Abbildung 8.14(a) ist ein Stabilitätsdiagramm mit den Einsatzpunkten der beiden hier untersuchten Spiraltypen (SW und SPI_+) in Abhängigkeit der Rotationsfrequenz der beiden Deckelplatten dargestellt. Die Messwerte für den Einsatzpunkt der stehenden Wellen sind mit schwarzen Symbolen (\circ) markiert und werden zur besseren Übersicht durch eine schwarze durchgezogene Linie miteinander verbunden. Die schwarze gestrichelte Linie repräsentiert zum Vergleich die Werte aus der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung bezüglich der Spiralen mit einer azimuthalen Wellenzahl von $m = \pm 1$ für unendlich lange Zylinder, also ohne Berücksichtigung der Deckel und deren Rotation [101]. Die experimentell ermittelten Einsatzpunkte der lokalisierten Spiralen SPI_+ sind ebenfalls in diesem Diagramm eingetragen (rote Linie, \blacksquare).

Für den Fall stationärer Deckelplatten ($f_{end} = 0$ Hz) ergibt sich das folgende bekannte Szenario: Bereits vor der linearen Stabilitätsgrenze für $m = \pm 1$ Spiralen tritt an den beiden Deckelplatten des Systems lokalisiert die SPI_+ -Strömung auf, die bei weiterer Erhöhung von Re_i zu einer Koexistenz mit stehenden Wellen führt, wie exemplarisch in Abbildung 8.8 gezeigt ist. Qualitativ ändert sich an diesem Verhalten im Intervall $-0.11 \text{ Hz} \lesssim f_{end} \lesssim 0.29 \text{ Hz}$ nichts, wobei sich der Einsatzpunkt von SPI_+ bei positiver Rotation der Deckelplatten (mit dem Innenzylinder) um etwa eine Reynoldszahl nach unten und bei negativer Rotation um etwa eine Reynoldszahl nach oben verschiebt. Ähnlich verhalten sich auch die Einsatzpunkte der stehenden Welle, deren Verlauf sich jedoch oberhalb von $f_{end} = 0.2 \text{ Hz}$ hin zu kleineren Re_i verschiebt.

Bei $f_{end} = 0.29 \text{ Hz}$ kreuzen sich die beiden Linien, die die Einsatzpunkte der stehenden Wellen bzw. SPI_+ -Strömung verbinden. In diesem Fall verändert sich das oben beschriebene Szenario qualitativ, und bei Rotation der beiden Deckelplatten von $f_{end} > 0.29 \text{ Hz}$ treten die stehenden Wellen nun bereits vor den lokalisierten Spiralen in der Strömung auf. Ein Vergleich dieser Werte mit denen aus der linearen Stabilitätsanalyse für unendlich lange Zylinder zeigt für stehende Wellen eine deutliche Verlagerung des Einsatzpunktes dieses Strömungszustandes auf ca. acht Reynoldszahlen unterhalb dieser Grenze. Bei $f_{end} = 0.367 \text{ Hz}$ besitzt der Verlauf des Einsatzes stehender Wellen das Minimum bei $Re_i = 120.6$. Für $f_{end} = 0.367 \text{ Hz}$ steigt der Einsatzpunkt der stehenden Wellen wieder und kreuzt die rote Linie, die die Einsatzpunkte der lokalisierten Spirale SPI_+ verbindet bei $f_{end} = 0.58 \text{ Hz}$. Die Einsatzpunkte der SPI_+ -Strömung steigen oberhalb des ersten Kreuzungspunktes ($f_{end} = 0.29 \text{ Hz}$) von $Re_i = 123.5$ auf $Re_i = 127.0$ an. Eine Ausnahme ist der Messpunkt beim Minimum für stehende Wellen ($f_{end} = 0.367 \text{ Hz}$), an dem der Einsatzpunkt von SPI_+ deutlich von diesem Verlauf abweicht und nach oben hin verschoben ist.

Der Verlauf der Oszillationsfrequenzen f ist in Abbildung 8.14(b) ebenfalls in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz der beiden Deckelplatten dargestellt. Die Markierungen beziehen sich auf die ermittelten bzw. berechneten Frequenzen in (a), wobei die selbe Farbgebung gewählt worden

ist. Zusätzlich zu diesen Werten ist hier auch die Frequenz der Deckelplatten f_{end} als gestrichelte blaue Linie eingezeichnet. Die Frequenz am Einsatzpunkt der stehenden Wellen bleibt in Abhängigkeit von der Rotation der Deckelplatten nahezu konstant bei $f \approx 0.43$ Hz. Auffällig ist trotzdem, dass sich die drei Intervalle aus dem Stabilitätsdiagramm in (a) auch im Verlauf der Oszillationsfrequenz der stehenden Wellen wiederfinden. So liegt die Frequenz links des ersten Kreuzungspunktes stets oberhalb der Frequenz aus der linearen Stabilitätsanalyse. Im Intervall zwischen den beiden Kreuzungspunkten ($-0.11 \text{ Hz} \lesssim f_{end} \lesssim 0.24 \text{ Hz}$) liegt die Frequenz hingegen leicht unterhalb dieser Linie und verläuft im Intervall $0.24 \text{ Hz} \lesssim f_{end} \lesssim 0.58 \text{ Hz}$ dann wieder oberhalb derjenigen aus der linearen Stabilitätsanalyse. Im Wesentlichen parallel zu diesem Verlauf ist auch die Frequenz am Einsatzpunkt der lokalisierten SPI_+ -Strömung. Abweichungen finden sich jedoch, wenn die Oszillationsfrequenz der SPI_+ -Strömung in die Nähe der Rotation der beiden Deckelplatten kommt. In diesem Bereich ($0.27 \text{ Hz} \lesssim f_{end} \lesssim 0.41 \text{ Hz}$) kommt es zu Frequenzkopplung, und die Oszillationsfrequenz von SPI_+ 'folgt' der Frequenz der Deckelplatten.

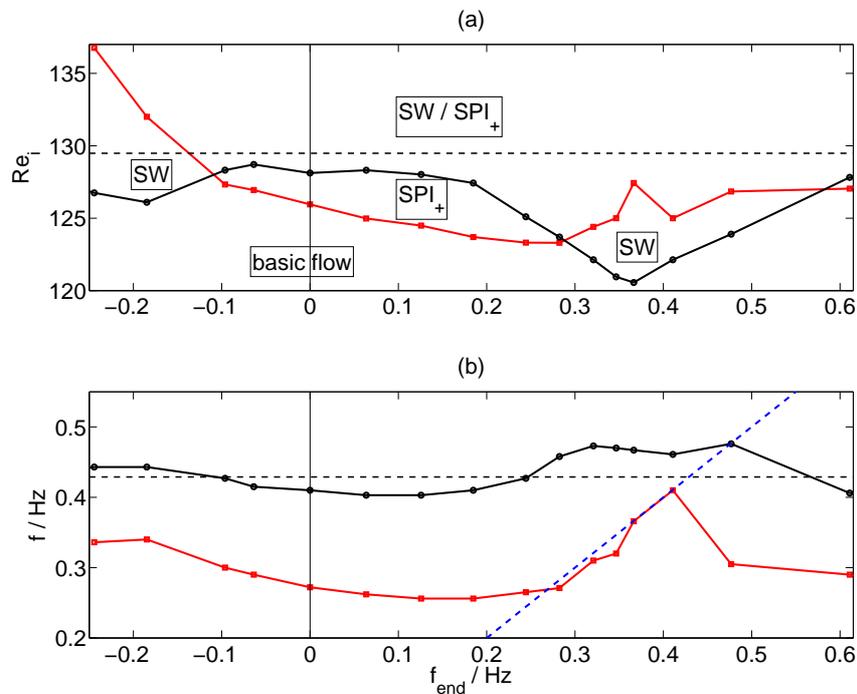


Abbildung 8.14: (a) Stabilitätsdiagramm der Grundströmung (basic flow) und (b) Abhängigkeit der Oszillationsfrequenzen f der stehenden Wellen (SW) (schwarze Linie, \circ) und der lokalisierten Spiralen (SPI_+) (rote Linie, \square) in Abhängigkeit von der Rotationsfrequenz der beiden Deckelplatten f_{end} gemessen bei $\Gamma = 8.0$ und $Re_a = -155$. Die schwarzen gestrichelten Linien repräsentieren die Werte der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung bezüglich Spiralen mit einer azimuthalen Wellenzahl von $m = \pm 1$ für unendlich lange Zylinder aus [101] und die blaue Linie in (b) deutet die Rotationsfrequenz der Deckelplatten an.

8.9 Lokalisierte Spiralen in längeren Systemen

Im Taylor-Couette-System mit $\Gamma = 8.0$ ist der Einfluss der Deckelplatten noch recht stark in dem Sinne, dass die Ekman-Wirbelströmung im gesamten axialen Bereich und insbesondere unmittelbar vor dem Einsatzpunkt der stehenden Wellen bzw. Spiralen messbar ist. Des Weiteren treten bei dieser Systemhöhe infolge der ersten Instabilität ausschließlich stehende Wellen und keine Spiralen auf. In dem vorliegenden Abschnitt wird das Taylor-Couette-System bei ähnlichen Reynoldszahlen jedoch in längeren Systemen bei $\Gamma = 12.0$ und anschließend bei $\Gamma = 16.0$ und 24.0 untersucht, um den Einfluss der Deckelplatten und der dadurch auftretenden Ekman-Wirbelstruktur auf die Entstehung der lokalisierten Spiralen zu betrachten. Ferner wird durch den Einsatz der Spiral-Wirbelströmung als möglicher koexistierender Strömungszustand die Reflexionssymmetrie der Strömung gebrochen.

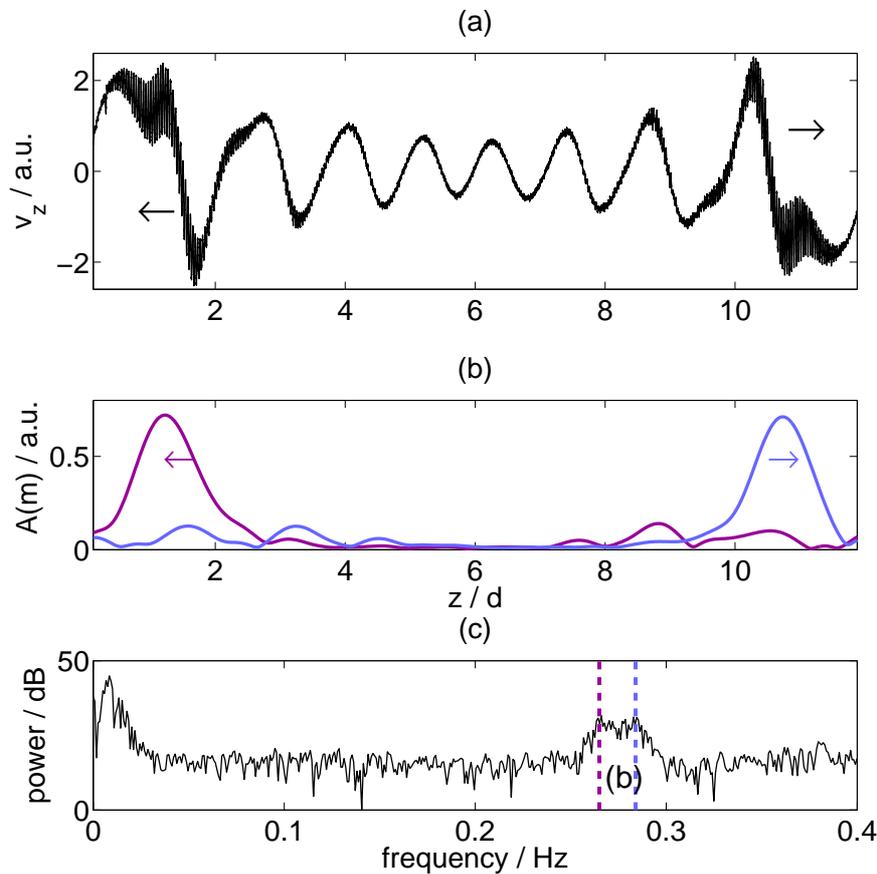


Abbildung 8.15: (a) Axialer Scan von SPI_+ gemessen bei $\Gamma = 12.0$, $Re_a = -155.0$ und $Re_i = 128.8$, (b) Amplituden $A(m)$ von runterlaufenden SPI_+ : violett (0.255 – 0.275 Hz) und hochlaufenden SPI_+ : blau (0.275 – 0.295 Hz) und (c) Leistungsspektrum von (a) mit den in (b) analysierten Frequenzen.

In Abbildung 8.15(a) ist ein axialer Scan der SPI_+ -Strömung bei $\Gamma = 12.0$, $Re_a = -155.0$ und $Re_i = 128.8$ gezeigt, also mit Ausnahme der Systemlänge bei ganz ähnlichen Parametern wie in Abbildung 8.2 dargestellt. Auch hier ist die Lokalisierung der Spiralen an den beiden Deckelplatten sichtbar. Des Weiteren zeigt sich die zur axialen Mitte des Systems hin leicht abfallende Amplitude der Ekman-Wirbelströmung. In (c) ist ein Ausschnitt des Leistungsspektrums von (a) gezeigt, wobei die beiden zur SPI_+ -Strömung gehörigen Frequenzpeaks mit Hilfe farbiger Linien markiert sind (runterlaufende SPI_+ : violette Linie und hochlaufende SPI_+ : blaue Linie). Das axiale Amplitudenprofil dieser beiden Spiralen wird in (b) analysiert und ist in qualitativer Übereinstimmung mit dem bei $\Gamma = 8.0$. Die hochlaufende SPI_+ befindet sich im oberen, wohingegen die runterlaufende SPI_+ sich hauptsächlich im unteren Teil des Systems befindet.

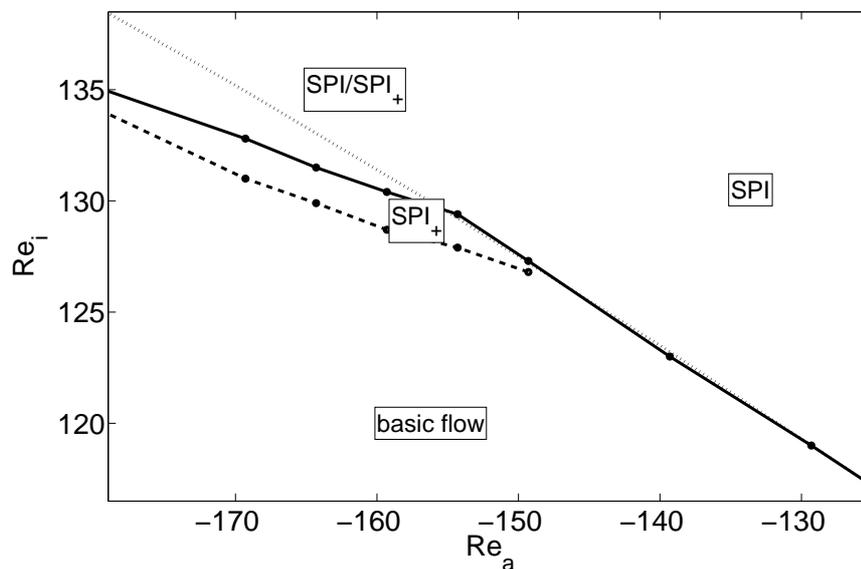


Abbildung 8.16: Stabilitätsdiagramm bei $\Gamma = 12.0$. Die gepunktete Linie repräsentiert die Werte der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung bezüglich Spiralen mit einer azimuthalen Wellenzahl von $m = \pm 1$. Spiralen (SPI) treten unmittelbar an dieser linearen Stabilitätsgrenze der Couette-Strömung (basic flow) aus [101] auf, wohingegen der Einsatzpunkt der lokalisierten Spiralen SPI_+ signifikant unterhalb dieser numerisch bestimmten Grenze liegt. Die Region, in der lokalisierte Spiralen an den Deckelplatten und Spiralen im Hauptteil des Systems koexistieren, ist mit SPI/SPI_+ bezeichnet. Bei höheren Re_i tritt die Taylor-Wirbelströmung (TVF) auf.

In Abbildung 8.16 ist das Stabilitätsdiagramm bei $\Gamma = 12.0$ gezeigt. Die gepunktete Linie repräsentiert Werte der linearen Stabilitätsanalyse der Couette-Strömung bezüglich der Spiralen mit der azimuthalen Wellenzahl von $m = \pm 1$ aus [101]. Im Experiment treten diese Spiralen für geringere Gegenrotationen ($Re_a \gtrsim -150$) mit einer erstaunlich guten Übereinstimmung mit Werten aus der linearen Stabilitätsanalyse auf. Stehende Wellen existieren bei diesem Übergang ausschließlich transient in unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes, wie in Kapitel 4 beschrie-

ben. Bei stärkerer Gegenrotation ($Re_a \lesssim -150$) liegt der Einsatzpunkt der lokalisierten Spiralen SPI_+ (gestrichelte Linie) signifikant unterhalb dieser numerisch bestimmten Grenze. Bei weiterer Erhöhung von Re_i koexistieren oberhalb der schwarzen Linie Spiralen in der axialen Mitte des Systems und SPI_+ in der Nähe der beiden Deckelplatten. Durch das Auftreten dieser Spiralen wird somit die Reflexionssymmetrie der Strömung gebrochen.

Auch bei noch längeren Systemen wird das Auftreten von lokalisierten Spiralen beobachtet, wie dies für die SPI_+ -Strömung in Abbildung 8.17 bei $Re_a = -160.0$ und $Re_i = 130.8$ in (a) bei $\Gamma = 16.0$ und in (b) bei $\Gamma = 24.0$ gemessen worden ist. Qualitativ zeigt sich in der Umgebung der beiden Deckelplatten dabei ein ähnliches Verhalten wie bei $\Gamma = 12.0$, allerdings fällt die Ekman-Struktur zur Mitte hin deutlich ab.

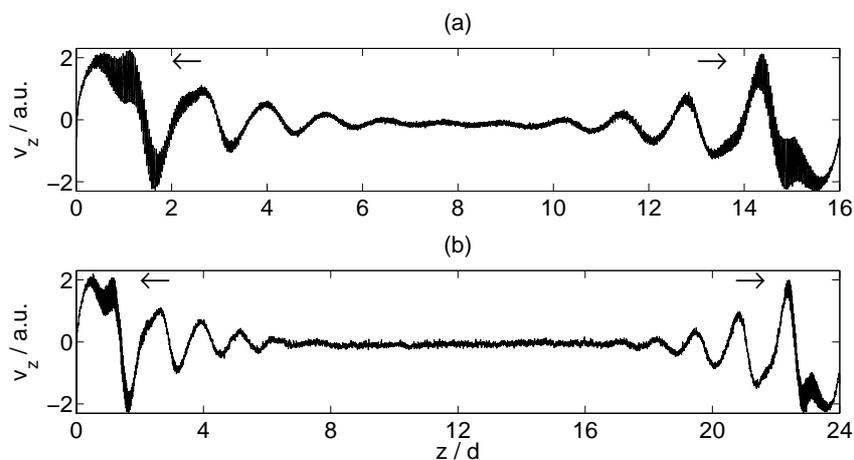


Abbildung 8.17: Zwei axiale Scans der SPI_+ -Strömung, die bei $Re_a = -160.0$ und $Re_i = 130.8$ und in (a) bei $\Gamma = 16.0$ bzw. in (b) bei $\Gamma = 24.0$ gemessen worden sind.

Wie bereits anhand von drei unterschiedlichen axialen Scans dokumentiert, ist das Auftreten der lokalisierten Spiralen von der Länge des Systems nahezu unabhängig, aber von der Existenz dieser Deckelplatten unmittelbar abhängig. In Abbildung 8.18 ist der Einsatzpunkt der lokalisierten Spirale SPI_+ in Abhängigkeit von der normierten Systemlänge Γ aufgetragen. Zum Vergleich sind auch die Werte aus der linearen Stabilitätsanalyse für Spiralen mit azimuthaler Wellenzahl $m = \pm 1$ bei unendlich langen Zylindern als gestrichelte schwarze Linie eingezeichnet. Die Einsatzpunkte der lokalisierten SPI_+ -Strömung liegen stets etwa drei Reynoldszahlen unterhalb dieser numerischen Grenze und abgesehen von einer leichten Abweichung bei $\Gamma = 8.0$, wo statt der Spiralen ausschließlich stehende Wellen als koexistierender Strömungszustand von SPI_+ auftreten, verändert sich der Einsatzpunkt der SPI_+ -Strömung im Intervall $10 \leq \Gamma \leq 24$ nicht.

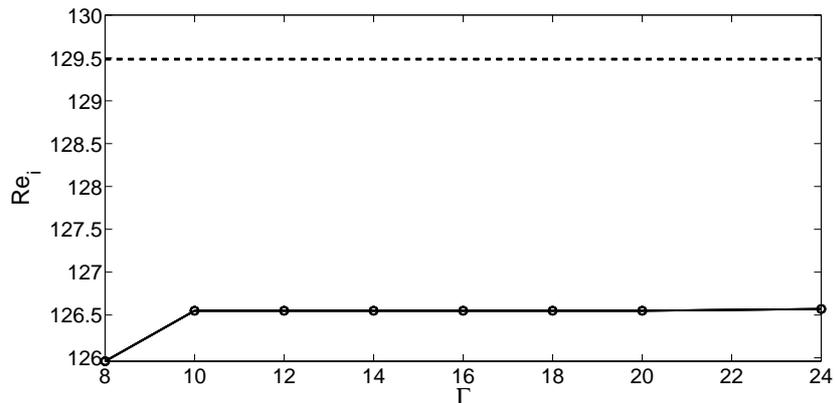


Abbildung 8.18: Abhängigkeit des Einsatzpunktes der SPI_+ -Strömung bei $Re_a = -155.0$ in Abhängigkeit von der normierten Systemlänge Γ . Die gestrichelte schwarze Linie zeigt die Werte aus der linearen Stabilitätsanalyse für Spiralen mit azimuthaler Wellenzahl $m = \pm 1$ bei unendlich langen Zylindern.

8.10 Zusammenfassung

Bei stärkerer Gegenrotation der Zylinder zeigt sich eine deutliche Abweichung der experimentellen Ergebnisse und numerischen Simulationen von der linearen Stabilitätsanalyse für den Fall unendlich langer Zylinder. Im Zuge der Untersuchungen dieses Kapitels ist erstmals die Existenz lokalisierter Spiralen, die in der Nähe der Deckelplatten auftreten, gezeigt worden. Die Propagation dieser laufenden, spiralförmigen Wellen bildet sich bei schwacher Gegenrotation in Richtung der Deckelplatten und bei stärkerer Gegenrotation in Richtung der axialen Mitte aus. Diese unterschiedlichen Typen von lokalisierten Spiralen treten jeweils unterhalb der linearen Stabilitätsschwelle für Spiralen auf und unterscheiden sich in Wellenlänge und Frequenz maßgeblich von denen aus der Stabilitätsanalyse im unendlich langen System. In der Nähe der linearen Stabilitätsschwelle ergibt sich ferner eine Koexistenz der lokalisierten Spiralen und, in Abhängigkeit von Γ , Spiralen bzw. stehenden Wellen. Eine Abhängigkeit der Einsatzpunkte der lokalisierten Spiralen bezüglich der Systemlänge Γ existiert jedoch nicht. Bei Rotation der beiden Deckelplatten mit oder gegen den Innenzylinder kann sich die Reihenfolge des Auftretens der lokalisierten Spiralen und der stehenden Wellen bzw. Spiralen umkehren. Am Auftreten, der Dynamik und der Struktur dieser lokalisierten Strömung ändert sich jedoch qualitativ nichts. Die lokalisierten Spiralen treten demnach ausschließlich im Taylor-Couette-System mit Deckelplatten auf. Ferner ist ihr Auftreten ausschließlich von der Existenz der Deckelplatten abhängig. Sowohl das dynamische Verhalten der Strömung als auch ihr Verzweigungsverhalten in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung sind im Zuge der vorliegenden Arbeit durch experimentelle Messungen erforscht worden. In Kooperation mit Ch. Hoffmann (Universität des Saarlandes) ist das Auftreten dieser Strömungsform ferner durch numerische Simulation der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung bestätigt worden.

Kapitel 9

Retrograd rotierende Wellen

Spiralen sind in azimuthaler Richtung rotierende Wellen und es hat sich im Zuge der vorangegangenen Kapitel gezeigt, dass es 'Effekte' an den axialen Rändern dieser Strömung sind, die das Verhalten dieser 'einfachen' rotierenden Welle signifikant beeinflussen. Der Frage nach der prinzipiellen Beeinflussbarkeit von rotierenden Wellen durch Ränder in axialer Richtung soll in diesem Kapitel nachgegangen werden, indem der Abstand der beiden Deckelplatten und somit Γ verringert wird. Es wird eine rotierende Welle im Zuge einer kombinierten experimentellen und numerischen Studie untersucht. Rotierende Wellen laufen im Taylor-Couette-System dabei meist in dieselbe Rotationsrichtung wie der Innenzylinder. Die Besonderheit der hier analysierten rotierenden Welle ist, dass die Bewegungsrichtung sowohl mit als auch gegen die Rotationsrichtung des Innenzylinders erfolgen kann. Im Zuge dieser Analyse hat sich gezeigt, dass Störungen der Rotationsinvarianz einen wesentlichen Einfluss auf Dynamik und Verzweigungsverhalten dieser rotierenden Welle haben. Das System mit perfekter Rotationsinvarianz wird dabei durch das numerische Modell der Navier-Stokes-Gleichung repräsentiert, wohingegen die Vermeidung azimuthaler Störungen im Experiment zwar minimiert werden kann, deren Eliminierung jedoch prinzipiell unmöglich ist. Eine weitere besondere Eigenschaft der hier untersuchten rotierenden Welle ist, dass sie unter bestimmten Bedingungen bei Einhaltung aller anderen Eigenschaften stationär im Laborsystem auftreten kann.

9.1 Rotierende Wellen

Bei der hier untersuchten rotierenden Welle handelt es sich um eine oszillatorische Einwirbel-Strömung, wie sie in der Taylor-Couette-Strömung für sehr kleine Geometrien in der Umgebung von $\Gamma \approx 1$ auftreten kann [110–114]. Bei allen Untersuchungen dieses Kapitels bleibt der Außenzylinder immer stationär ($Re_a = 0$).

In Abbildung 9.1(a) ist das radiale und axiale Geschwindigkeitsfeld der oszillatorischen Einwirbel-Strömung bei $\Gamma = 1.25$ aus numerischen Berechnungen der Navier-Stokes-Gleichung bei $Re_i = 1190.0$ gezeigt. Auf der linken Seite befindet sich der Innenzylinder, auf der rechten Seite der äußere Zylinder. In (b) ist die Photographie eines Lichtschnittes, der mit Hilfe eines Lasers aufgenommen worden ist, dargestellt. Dieser Lichtschnitt beleuchtet ebenfalls die radiale und

axiale Ebene bei einem bestimmten Winkel φ .

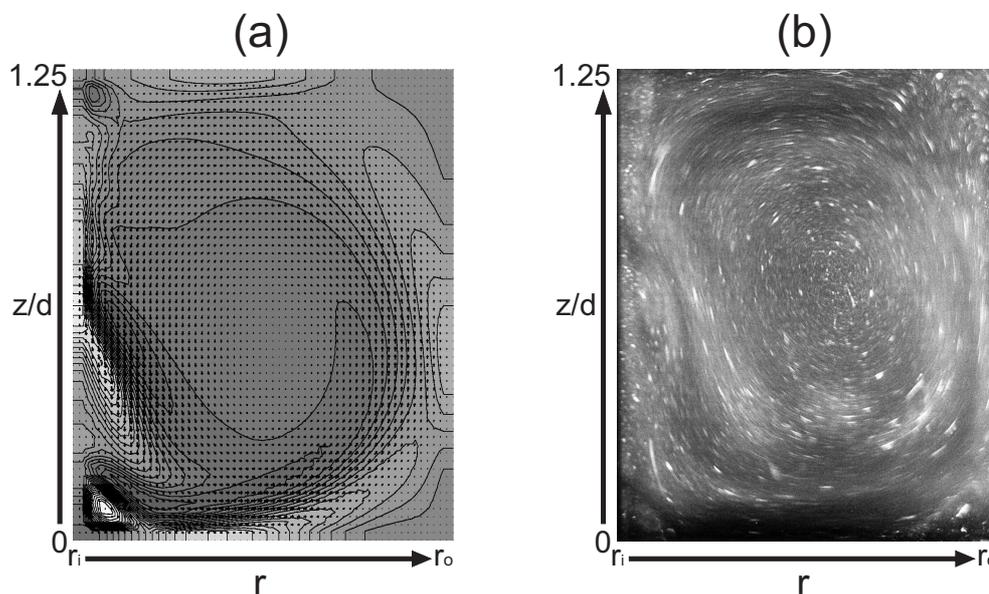


Abbildung 9.1: Darstellung des (r, z) -Geschwindigkeitsfeldes der oszillatorischen Einwirbel-Strömung bei $\Gamma = 1.25$ aus (a) numerischen Berechnungen der Navier-Stokes-Gleichung bei $Re_i = 1190.0$ und (b) Photographie eines Lichtschnittes bei $Re_i = 1200.0$.

Beide Bilder zeigen einen großen Wirbel mit einer Auswärtsströmung an der oberen und einer Einwärtsströmung an der unteren Deckelplatte. Demnach bewegt sich die Strömung am Innenzylinder nach oben und am Außenzylinder nach unten. In unmittelbarer Nähe des Innenzylinders findet sich des Weiteren ein zweiter kleiner Wirbel, der in der (r, z) -Ebene periodisch am Innenzylinder auf und ab schwingt.

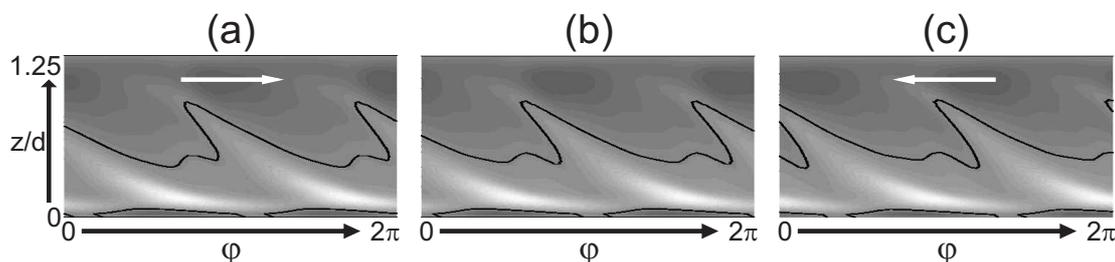


Abbildung 9.2: Visualisierung des radialen Geschwindigkeitsfeldes v_r in axialer (z) und azimuthaler (φ) Richtung in der Nähe des Innenzylinders ($r_i + 0.25d$) bei $\Gamma = 1.25$ aus numerischen Berechnungen bei (a) $Re_i = 1070.0$, (b) $Re_i = 1170.0$ und (c) $Re_i = 1240.0$. Die weißen Pfeile deuten die Propagationsrichtung der rotierenden Welle an.

Eine bessere Darstellung dieser Dynamik liefert aufgrund der Tatsache, dass es sich um eine rotierende Welle handelt, die Darstellung der axialen und azimuthalen Ebene bei einem bestimmten Radius r . In Abbildung 9.2 sind drei solche Visualisierungen in der (φ, z) -Ebene gezeigt, die in der Nähe des Innenzylinders ($r_i + 0.25d$) bei $\Gamma = 1.25$ numerisch berechnet worden sind. Der Innenzylinder rotiert in dieser Darstellung stets in φ -Richtung, also nach rechts in Richtung der schwarzen Pfeile. Wie bereits angedeutet, kann die Rotation der Welle mit azimuthaler Wellenzahl $m = 2$ sowohl mit als auch gegen die Drehrichtung des Innenzylinders erfolgen und bezogen auf das Laborsystem sogar zum Stehen kommen. Diese drei Fälle sind in diesem Diagramm gezeigt, wobei der weiße Pfeil stets die Rotationsrichtung der Welle angibt. Es ist zu erkennen, dass sich die Struktur der rotierenden Welle im Wesentlichen nicht verändert. Im ersten Fall (a), bei $Re_i = 1070.0$, läuft die Welle in Richtung des rotierenden Innenzylinders. In (b), bei $Re_i = 1170.0$, deutet das Fehlen des weißen Pfeils darauf hin, dass die Welle stationär ist und nicht mit dem Innenzylinder rotiert. Der letzte Fall ergibt sich durch weiteres Erhöhen von Re_i und zeigt in (c) bei $Re_i = 1240.0$ eine Welle, die gegen die Drehrichtung des Innenzylinders rotiert. In allen drei Visualisierungen ist die starke Anharmonizität der rotierenden Welle dargestellt, die besonders in der Nähe des Innenzylinders deutlich wird. Sie deutet auf das Auftreten des kleinen, axial propagierenden Wirbels in der Nähe des Innenzylinders hin, wie dies bereits in Abbildung 9.1 gezeigt ist.

9.2 Stabilitätsdiagramm und Frequenzen

Um den Prozess der Richtungsumkehr, wie er in diesem Parameterbereich beobachtet wird, genauer zu zeigen, ist in Abbildung 9.3(a) ein experimentelles Stabilitätsdiagramm der Einwirbel-Strömung abgebildet. Für $\Gamma > 1.15$ geht die stationäre Einwirbel-Strömung in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung in die soeben beschriebene rotierende Welle über. Die positive Oszillationsfrequenz dieser Strömung ($f > 0$) oberhalb dieses Verzweigungspunktes deutet dabei darauf hin, dass die Welle in Drehrichtung des Innenzylinders rotiert. Es ist zu beachten, dass diese Frequenzen mit Hilfe des LDAs im Laborsystem ermittelt worden sind und das nachträglich eingefügte Vorzeichen der Frequenz auf die Rotationsrichtung der Welle hindeuten soll. Demnach deutet ein negatives Vorzeichen auf die entgegengesetzte Rotationsrichtung hin. Eine Erhöhung von Re_i oder aber eine Reduzierung von Γ führt zunächst zu einer Verlangsamung der rotierenden Welle bis zum Stillstand ($f = 0$) und der anschließenden Beschleunigung in entgegengesetzter Richtung ($f < 0$). Frühere Untersuchungen haben diesen Typ von Verzweigung in Form einer homoklinen Sattelknoten-Verzweigung des Typs SNIPER charakterisiert, die sich in diesem Fall in einem endlichen Band in der (Re_i, Γ) -Ebene zeigt [113]. Im Zuge der vorliegenden Untersuchungen hat sich gezeigt, dass die rotierende Welle in diesem Band nicht verschwindet, sondern mit einer Rotationsfrequenz von Null 'stationär' auftritt. Dieser Bereich ist ebenfalls in das Stabilitätsdiagramm eingetragen und mit $f = 0$ gekennzeichnet. Auch der Übergang von der stationären Einwirbel-Strömung zur 'stationären' Welle ist möglich und erfolgt superkritisch sogar unterhalb des Verzweigungspunktes der rotierenden Welle für $1.09 \leq \Gamma \leq 1.15$.

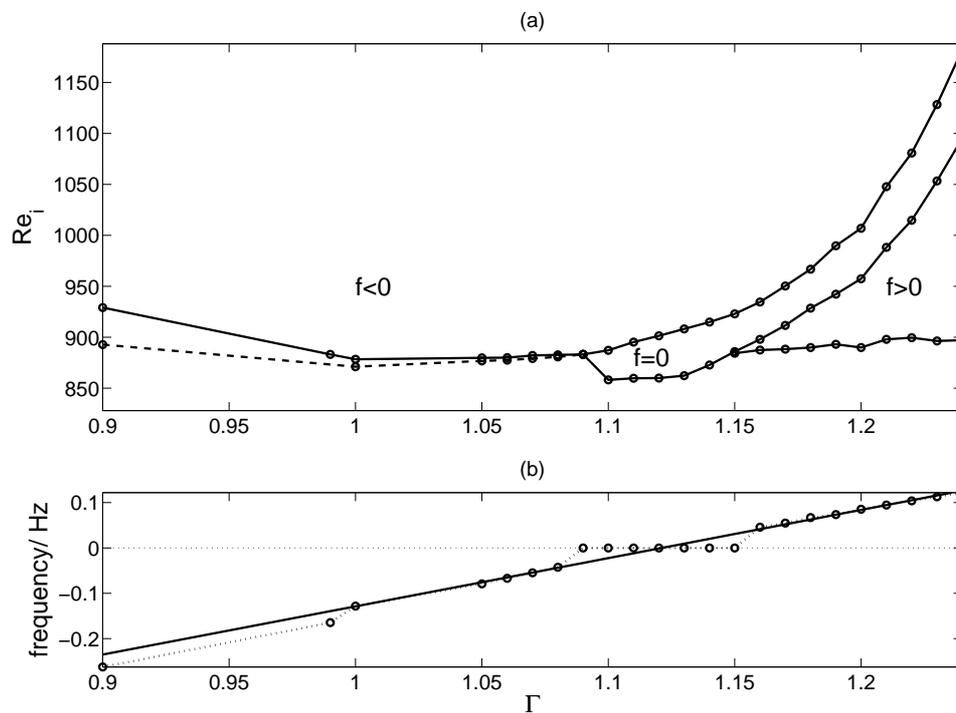


Abbildung 9.3: (a) Experimentelles Stabilitätsdiagramm der Einwirbel-Strömung. (b) Oszillationsfrequenzen der rotierenden Welle (\circ) am Einsatzpunkt ($f \geq 0$) und an der unteren Stabilitätsgrenze der Hysterese ($f < 0$). Die Regressionsgerade (durchgezogene Linie) bezieht sich auf die Umgebung der Richtungsumkehr der rotierenden Welle.

Für $\Gamma < 1.09$ zeigt sich der Übergang der stationären Einwirbel-Strömung zur entgegengesetzt rotierenden Welle. Dies ist im Stabilitätsdiagramm durch die Bezeichnung $f < 0$ angedeutet. In diesem Bereich findet sich ausschließlich eine Welle, die gegen die Drehrichtung des Innenzylinders rotiert. Dieser Übergang erfolgt in Form einer subkritischen Hopf-Verzweigung, deren Hysterese sich für kleinere Γ vergrößert. Dieser Hysteresebereich befindet sich im Stabilitätsdiagramm zwischen der durchgezogenen Linie, die den Übergang bei Erhöhung von Re_i andeutet, und der gestrichelten Linie, die analog denjenigen bei Verringerung von Re_i zeigt. Der Richtungswechsel der rotierenden Welle im Laborsystem führt zu einer Änderung der Verzweigungsstruktur von einer super- zu einer subkritischen Hopf-Verzweigung. Die entgegen der Innenzylinderrotation laufende Welle kann also nur mit einer endlichen Amplitude stabil auftreten.

Die gemessenen Oszillationsfrequenzen (\circ) der rotierenden Welle sind in Abbildung 9.3(b) gegen Γ aufgetragen. Aufgrund der starken Abhängigkeit bezüglich Re_i sind dabei für $\Gamma \geq 1.09$ die Werte am Einsatzpunkt der rotierenden Welle und im Bereich der Hysterese $\Gamma < 1.09$ diejenigen an der unteren Grenze des hysteretischen Regimes berücksichtigt worden. Negative Frequenzen

bezeichnen dabei wieder die rotierende Welle, die entgegen dem Innenzylinder läuft. Die durchgezogene Linie ist eine Regressionsgerade basierend auf Frequenzen im Bereich $1 \leq \Gamma \leq 1.25$, und die gestrichelte Linie verbindet die Messwerte aus Gründen der besseren Visualisierung. Es findet sich ein lineares Ansteigen der Frequenz von negativen bis hin zu positiven Frequenzen, das durch ein Plateau bei $f = 0$ bei $1.09 \leq \Gamma \leq 1.15$ unterbrochen wird. Unterhalb von $\Gamma = 1.00$ findet sich eine Abweichung von der linearen Abhängigkeit, und nichtlineare Effekte könnten in diesem Parameterbereich relevant werden.

9.3 Einfluss azimuthaler Störungen

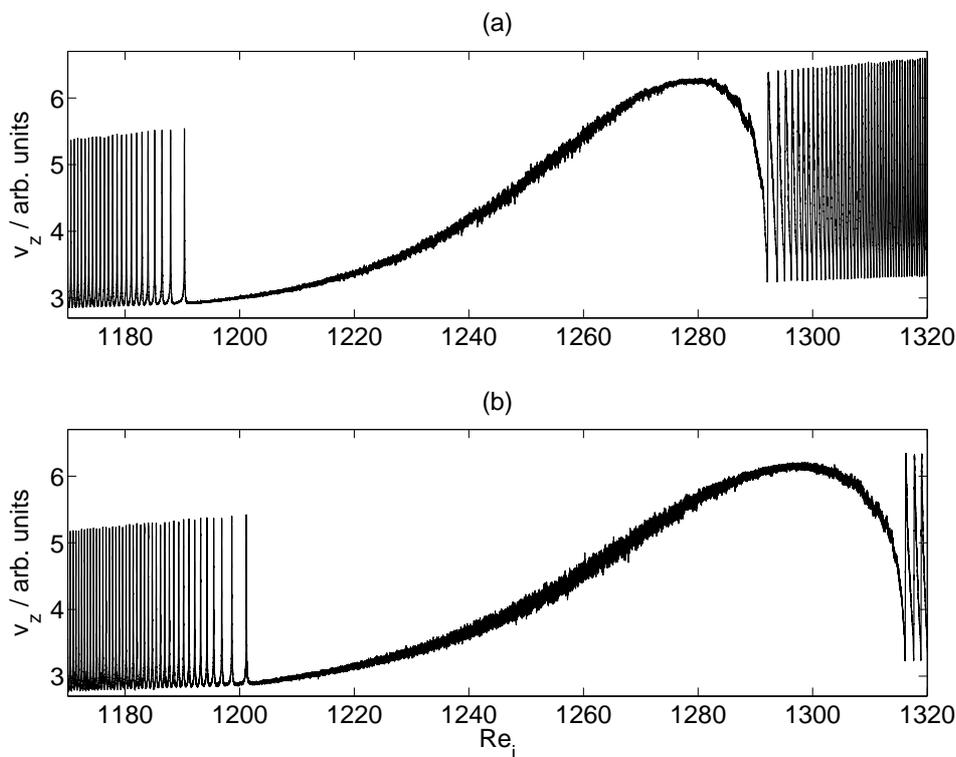


Abbildung 9.4: Reynoldszahl-Scan bei $\Gamma = 1.25$ (a) ohne (0.00°) und (b) mit (0.08°) zusätzlicher Verkipfung der oberen Deckelplatte.

Während sich die Richtungsumkehr der rotierenden Welle in numerischen Berechnungen bei einer bestimmten Reynoldszahl vollzieht, zeigt sich im Experiment ein endliches Intervall, in dem die Welle im Laborsystem steht. Bei weiterer Erhöhung von Re_i oder Verringerung von Γ findet dann die Richtungsumkehr statt. Wie bereits erwähnt, lässt sich dieses Verhalten als homokline Verzweigung des Typs SNIPER beschreiben. Diese wesentliche Diskrepanz zwischen Experi-

ment und Numerik lässt sich auflösen, indem azimuthale Störungen, also Störungen der Rotationsinvarianz, in Betracht gezogen werden. Das numerische Modell repräsentiert dabei die perfekte Rotationsinvarianz, die in experimentellen Realisierungen dieser Taylor-Couette-Strömung prinzipiell aufgrund unvermeidbarer Störungen gebrochen ist.

Um den starken Einfluss symmetriebrechender Störungen der Rotationsinvarianz zu dokumentieren, sind in Abbildung 9.4 zwei so genannte Reynoldszahl-Scans gezeigt. Bei beiden Messungen ist Re_i quasistatisch innerhalb von jeweils ca. 10 Stunden von 1170.0 auf 1320.0 erhöht worden. Diese Technik ermöglicht es, zwischen stationären und zeitabhängigen Strömungen zu unterscheiden, da sich im ersten Fall die axiale Geschwindigkeit v_z nicht ändert, wohingegen im zweiten Fall eine Oszillation von v_z zu beobachten ist. Das Re_i -Intervall, in dem die Welle stationär ist, befindet sich dabei im Scan (a) bei $1190.0 \leq Re_i \leq 1290.0$, und besitzt demnach eine Breite von $\Delta Re_i = 100.0$. Bereits eine sehr kleine zusätzliche Verkippung der oberen Deckelplatte um $\phi = 0.08^\circ$ führt zu einer Verschiebung des Re_i -Intervalls und zu einer deutlichen Vergrößerung des Intervalls auf $\Delta Re_i = 110.0$, wie in (b) zu erkennen ist.

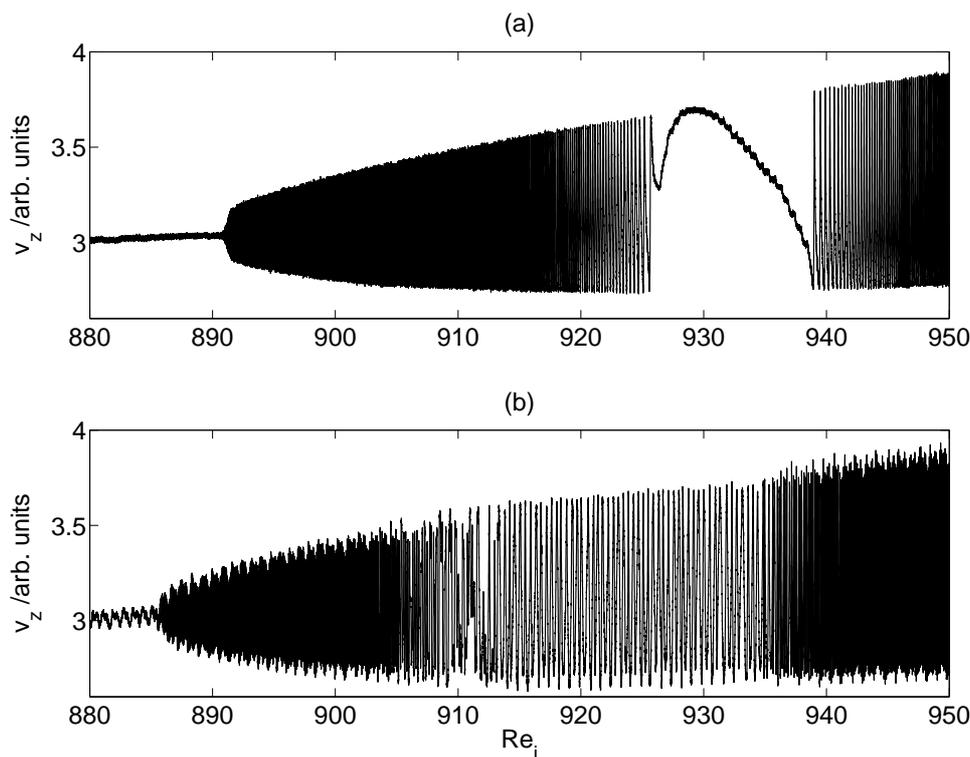


Abbildung 9.5: Reynoldszahl-Scan bei $\Gamma = 1.16$ für den Fall (a) stationärer und (b) langsam rotierender Deckelplatten ($f = 0.003$ Hz).

Ein weiterer Hinweis auf den Einfluss von Störungen auf die Rotationsinvarianz, die sich haupt-

sächlich durch die Ausrichtung der beiden Deckelplatten ergibt, findet sich in der Taylor-Couette-Strömung, in der zusätzlich beide Deckelplatten rotiert werden können. Der Reynoldszahl-Scan in Abbildung 9.5(a) zeigt zunächst das Verzweigungsszenario bei $\Gamma = 1.16$ in einem System mit stationären Deckelplatten. Die feste axiale Geschwindigkeit auf der linken Seite ($880.0 \leq Re_i \leq 892.0$) repräsentiert die stationäre Einwirbel-Strömung, die in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung zur rotierenden Welle verzweigt, und zunächst in Drehrichtung des Innenzylinders rotiert. Die entsprechenden Oszillationen in v_z zeigen sich in dieser zeitlichen Darstellung als schwarzer Streifen. Die Frequenz der Strömung nimmt jedoch mit steigendem Re_i ab, so dass in dieser Darstellung bei $Re_i = 920.0$ auch die Oszillation zu erkennen ist.

Bei $925.0 \leq Re_i \leq 938.0$ ist die Oszillation nicht mehr zu erkennen, und die Welle wird unter Erhaltung der Struktur zu einer stationären Strömung. Bei weiterer Erhöhung von Re_i ändert sich nachfolgend der Drehsinn der Welle, und die Oszillationsfrequenz nimmt weiter hin zu 'negativen' Frequenzen ab. Ein Reynoldszahl-Scan bei gleichen Parametern jedoch bei zusätzlicher sehr langsamer Rotation der Deckelplatten in Richtung der Drehrichtung des Innenzylinders ($f_{end} = 0.003$ Hz) ist in Abbildung 9.5(b) dargestellt. Es zeigt sich eine leichte Verschiebung des Einsatzpunktes der rotierenden Welle um etwa $\Delta Re_i = 5.0$. Des Weiteren verschwindet das Intervall, in dem die Oszillationsfrequenz Null ist und es ergibt sich aufgrund einer Überlagerung der Frequenz der Welle mit derjenigen der Deckelplatten eine Modulation, die in dieser Messung deutlich zu erkennen ist.

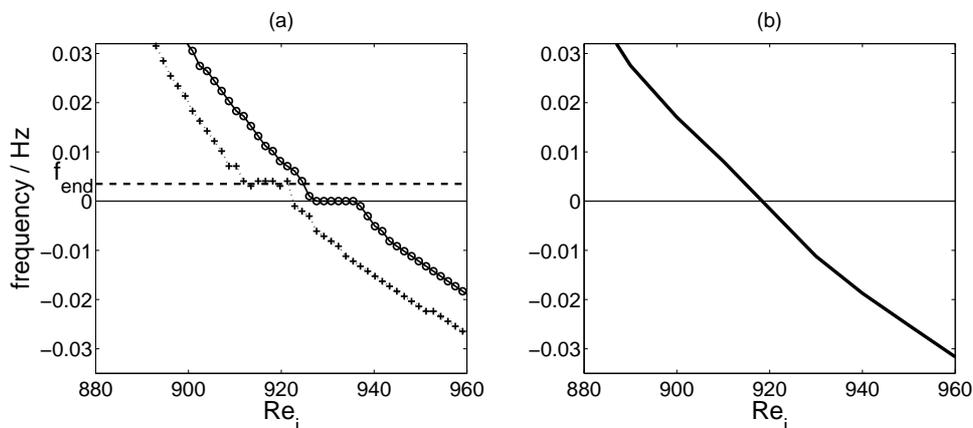


Abbildung 9.6: Oszillationsfrequenzen der rotierenden Welle aufgezeichnet bei $\Gamma = 1.16$: (a) durchgezogene Linie: stationäre Deckelplatten, gestrichelte Linie: langsam rotierende Deckelplatten ($f = 0.003$ Hz) und (b) numerisch berechnete Oszillationsfrequenzen für den Fall stationärer Deckelplatten.

Die Frequenzen der rotierenden Welle dieses Szenarios bei $\Gamma = 1.16$ sind in Abhängigkeit von Re_i in Abbildung 9.6 gezeigt. In (a) finden sich dabei die Frequenzen für den Fall stationärer Deckelplatten (o), in (b) sind diejenigen Frequenzen der entsprechenden numerischen Berechnungen gezeigt. Es ist zu erkennen, dass die Welle zunächst im Laborsystem in dieselbe Richtung

wie der Innenzylinder rotiert. Eine Erhöhung von Re_i bei festem Γ (hier: $\Gamma = 1.16$) führt sowohl im experimentellen System als auch im numerischen Modell zu einer Verlangsamung der Welle auf die Rotationsfrequenz Null. Im numerischen Modell existiert ein Punkt ohne Rotationsfrequenz, wohingegen sich im gestörten System mit stationären Deckelplatten, repräsentiert durch das Experiment, ein Intervall mit einer Rotationsfrequenz von Null ausbildet. Eine weitere Erhöhung von Re_i führt in beiden Systemen zu einer Verringerung der Frequenz, und die Welle rotiert im Laborsystem immer schneller, jedoch der Drehrichtung des Innenzylinder entgegen.

Ein ähnliches Szenario findet sich im Experiment auch für den Fall langsam mit $f_{end} = 0.003$ Hz rotierender Deckelplatten (angedeutet mit +). Es zeigt sich jedoch ein qualitativer Unterschied: Das Intervall, in dem die Rotationsfrequenz Null ist, befindet sich nun nicht mehr bei Null, sondern bei der Frequenz der Deckelplattenrotation f_{end} (gestrichelte Linie in (a)). Dies unterstreicht die Vermutung, dass der Einfluss von Störungen auf die Rotationsinvarianz sich hauptsächlich durch die Ausrichtung der beiden Deckelplatten ergibt und sich eine Frequenzkopplung der rotierenden Welle mit den drehenden Deckelplatten ergibt.

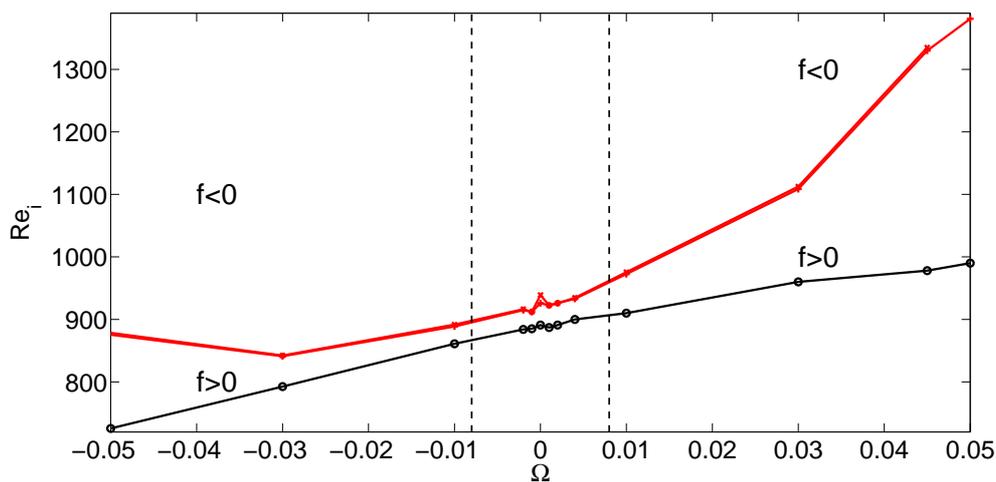


Abbildung 9.7: Experimentelles Stabilitätsdiagramm der Einwirbel-Strömung bei $\Gamma = 1.16$ in Abhängigkeit von der Deckelplattenrotation $\Omega = f_{end}/f_i$.

Es zeigt sich insbesondere für stärkere Rotationen der Deckelplatten eine Veränderung der physikalischen Gegebenheiten der Einwirbel-Strömung. Um diese Veränderung zu dokumentieren, ist in Abbildung 9.7 ein experimentelles Stabilitätsdiagramm gezeigt, das bei $\Gamma = 1.16$ gemessen worden ist. In diesem Diagramm ist Re_i gegen die normierte Frequenz der Deckelplattenrotation $\Omega = f_{end}/f_i$ aufgetragen. Die schwarze Linie, die die Messpunkte (○) verbindet, markiert den Übergang von stationärer Einwirbel-Strömung zu der rotierenden Welle. Die rotierende Welle oberhalb dieser Linie bewegt sich stets in Richtung der Innenzylinderrotation, besitzt also ein positives Vorzeichen. Die rote Linie mit den entsprechenden Messpunkten deutet die Reynoldszahlen Re_i an, bei denen die Rotationsfrequenz der Welle das Vorzeichen ändert. Oberhalb dieser

Linie rotiert die Welle demnach nur entgegen dem Innenzylinder. Zu einer Kopplung der rotierenden Welle mit der Drehfrequenz der beiden Deckelplatten kommt es allerdings nicht für alle Ω . Eine im 'Bezugssystem der Deckel' stationäre Welle findet sich nur in dem Intervall zwischen den beiden senkrechten gestrichelten Linien.

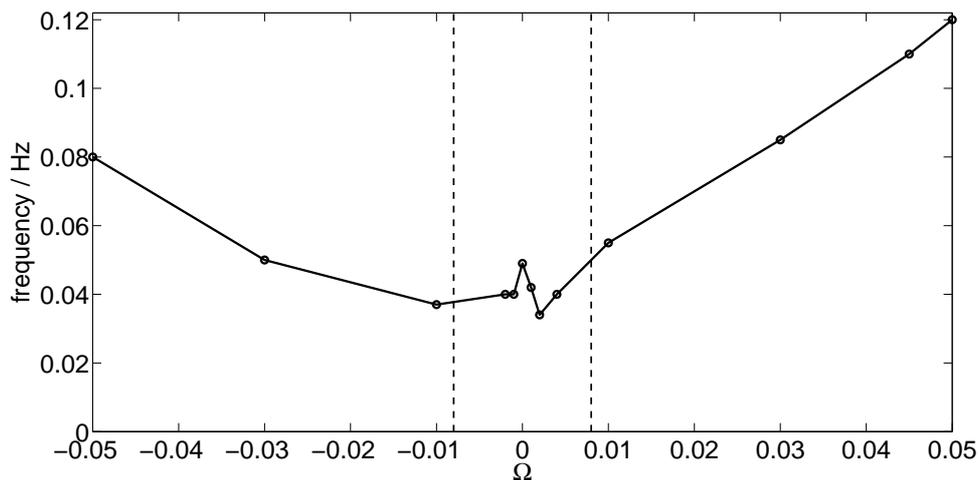


Abbildung 9.8: Oszillationsfrequenzen am Einsatzpunkt der rotierenden Welle bei $\Gamma = 1.16$ in Abhängigkeit von der Deckelplattenrotation $\Omega = f_{end}/f_i$.

In Abbildung 9.8 ist die Abhängigkeit der Oszillationsfrequenzen am Einsatzpunkt der rotierenden Welle bei $\Gamma = 1.16$ gezeigt. Wesentlich ist, dass diese Frequenzen prinzipiell ein positives Vorzeichen besitzen und die Welle demnach stets in Richtung des Innenzylinders rotiert. Auch in diesem Diagramm sind die Bereiche, in denen das 'Bezugssystem der Deckel' einen wesentlichen Einfluss auf die Lage des Plateaus besitzt, in Form der beiden senkrechten Linien eingezeichnet.

9.4 Zusammenfassung

In der Taylor-Couette-Strömung mit kleinem Γ tritt eine um den Innenzylinder rotierende Welle mit azimuthaler Wellenzahl $m = 2$ auf, die in der Lage ist, die Drehrichtung umzudrehen. Solch ein Verhalten ist im Taylor-Couette-System bislang noch nicht beobachtet worden. In einem System mit perfekter Rotationsinvarianz, repräsentiert durch das numerische Modell der Navier-Stokes-Gleichung, zeigt sich eine Abhängigkeit der Richtung und Geschwindigkeit dieser rotierenden Welle von der Reynoldszahl des Innenzylinders Re_i und der Systemlänge Γ . Diese Abhängigkeit beinhaltet die Richtungsumkehr in einem Punkt, der in der (Re_i, Γ) -Ebene zu einer Linie führt. Im experimentellen, gestörten System mit stationären Deckelplatten kehrt sich die Richtung der rotierenden Welle in einem Plateau um, in dem die Welle die Form beibehält,

aber im Laborsystem stationär ist. In der (Re_i, Γ) -Ebene führt dieses Plateau zu einem Band, in dem die Welle nicht rotiert sondern stationär bleibt. Die Änderung der Drehrichtung der rotierenden Welle bringt eine Änderung der Verzweigungsstruktur mit sich, denn der Übergang zu der mit dem Innenzylinder drehenden Welle erfolgt durch eine superkritische Hopf-Verzweigung, wohingegen die gegen den Innenzylinder drehende Welle subkritisch verzweigt, wie auch in vorherigen Untersuchungen numerisch für $\Gamma = 1.0$ bestätigt worden ist [112].

Die Verzweigungsstruktur des symmetrischen Systems könnte durch einen Verzweigungspunkt höherer Kodimension aufgefasst werden, denn die Frequenz der Hopf-Verzweigung geht auf Null indem Γ verringert wird, jedoch ist eine systematische, mathematische Analyse dieses Punktes mit gebrochener Reflexionssymmetrie aufgrund der resultierenden Lösungsvielfalt aufwendig und daher bislang noch nicht erfolgt.

Das Plateau im experimentellen System führt in der (Re_i, Γ) -Ebene zu einem Band und lässt sich auf die symmetriebrechenden Störungen der Rotationsinvarianz, resultierend aus der Ausrichtung der Deckelplatten, zurückführen. Dieses Band ist jedoch nicht Teil der Verzweigungsstruktur im symmetrischen Fall, weil es in den numerischen Simulationen nicht auftritt. Ferner kann das Plateau, das bei Rotationsfrequenz Null auftritt, durch eine 'langsame' Drehung der beiden Deckelplatten auf deren Rotationsfrequenz verschoben werden. Demnach kann das Auftreten dieses Plateaus auch auf die Kopplung der rotierenden Welle mit der Frequenz der Deckelplatten zurückgeführt werden.

Im Zuge dieses Kapitels ist gezeigt worden, dass eine gegen die Drehrichtung des Innenzylinders rotierende Welle in der Taylor-Couette-Strömung existiert und im Parameterraum, der durch Γ und Re_i aufgespannt wird, kontinuierlich mit der in Drehrichtung rotierenden Welle verbunden ist. Sowohl die Umkehrung der Drehrichtung als auch das Verzweigungsverhalten dieser Wellen organisieren sich in Form einer Verzweigung höherer Kodimension.

Kapitel 10

Zusammenfassung

Einer der fundamentalen Strömungszustände des Taylor-Couette-Systems für den Fall unendlich langer Zylinder ist die Spiral-Wirbelströmung, deren Dynamik und Verzweigungsverhalten vielfach numerisch untersucht worden sind. Bei dieser axial propagierenden Welle stellt sich grundsätzlich die Frage nach dem dynamischen Verhalten dieser Strömung in Systemen mit endlicher axialer Länge. Bereits vor Beginn dieser Arbeit war bekannt, dass in 'kurzen' Systemen primär stehende Wellen anstelle der Spiral-Wirbelströmung auftreten und die Verzweigungsstruktur somit maßgeblich verändern.

Es hat sich im Zuge dieser Arbeit erstmals gezeigt, dass die Spiral-Wirbelströmung im endlich langen System stets zwei so genannte Ekman-Spiral-Defekte aufgrund der beiden Deckelplatten ausbilden, wobei der eine Defekt die *Phase* der Spirale erzeugt und der andere diese vernichtet. Die Defekte dieser Spiral-Wirbelströmung beinhalten prinzipiell beide Spiralmoden und die Existenz der beiden Deckelplatten hat somit einen wesentlichen Einfluss auf die Dynamik dieses primär auftretenden oszillatorischen Zustandes der Taylor-Couette-Strömung [1].

Es konnte ferner zum ersten Mal gezeigt werden, dass ein axialer Durchfluss in der Lage ist, die Verzweigungsstruktur der Spiral-Wirbelströmung, die sich mit Hilfe einer Hopf-Verzweigung mit gebrochener Reflexionssymmetrie beschreiben lässt, zu entfalten. Die Verzweigungsstruktur ist symmetrisch bezüglich des axialen Durchflusses Re und lässt sich in Form einer Hopf-Verzweigung mit erhaltener ($Re = 0$) oder gebrochener ($Re \neq 0$) Reflexionssymmetrie beschreiben [2, 3].

Oberhalb eines bestimmten axialen Durchflusses wird der Strömungszustand der stromabwärts propagierenden Spirale durch einen intermittenten, komplexen Strömungszustand verdrängt, der sich durch einen irregulären Wechsel dreier unterschiedlicher Strömungszustände auszeichnet. Dieser Wechsel beinhaltet propagierende Defekte zwischen den lokalisiert auftretenden Strömungszuständen [4].

Defekte haben sich auch im nichtlinearen Bereich der Instabilität als fundamental erwiesen, was die Signifikanz von Defekten auch für komplexere Strömungszustände hervorhebt. In diesem Bereich separiert ein Defekt zwei in axialer Richtung laufende Spiralen räumlich. Die beiden Spiralen treiben innerhalb des Defektes eine lokalisierte, stationäre und axialsymmetrische Mode nichtlinear an. Diese nichtlineare Modenkopplung ist eine wichtige Eigenschaft des Defektes und wesentlich für seine Existenz. Der so genannte P_+ -Defekt tritt stets an der Deckelplatte auf,

an der sich der 'phasengenerierende' Ekman-Spiral-Defekt befindet und propagiert unmittelbar nach seiner Entstehung in Richtung der axialen Mitte. Ein axialer Durchfluss kann prinzipiell die Position dieses Defektes beeinflussen, und ein 'starker' axialer Durchfluss kann den Defekt sogar vollständig aus dem System verdrängen. Für den letzteren Fall ist der propagierende Defekt somit nur Teil eines transienten Übergangsszenarios, das einen Wechsel der Chiralität beinhaltet [5, 6].

Neuartige lokalisierte Spiralen konnten in der Nähe der Deckelplatten hingegen bei stärkerer Gegenrotation der Zylinder beobachtet werden. Ihr Auftreten wird von der linearen Stabilitätsanalyse für den Fall unendlich langer Zylinder nicht vorhergesagt. Der Übergang zu diesen lokalisierten Spiralen lässt sich in Form einer superkritischen Hopf-Verzweigung beschreiben, und die lokalisierten Spiralen treten stets unterhalb der linearen Stabilitätsschwelle für Spiralen auf und unterscheiden sich in Wellenlänge und Frequenz von denen aus der Stabilitätsanalyse im unendlich langen System. Die Ursache des Auftretens dieser lokalisierten Strömungsform ist auf die Existenz der Deckelplatten zurückzuführen [7].

Des Weiteren konnte erstmals eine retrograd rotierende Welle in der Taylor-Couette-Strömung beobachtet werden, die sogar in der Lage ist, die eigene Drehrichtung zu verändern. Abhängig von der Stärke der azimuthalen Störung erfolgt die Richtungsumkehr dieser rotierenden Welle entweder für den gestörten Fall in Form eines Plateaus oder im ungestörten Fall in einem einzigen Punkt. Die Änderung der Drehrichtung der rotierenden Welle bringt ferner eine Änderung der Verzweigungsstruktur von super- zu subkritisch mit sich [8].

In dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass die inhomogene Struktur der Grundströmung, die eine grundlegende Eigenschaft des Taylor-Couette-Systems und daher von fundamentaler Bedeutung ist, die Bildung der Spiral-Wirbelströmung entscheidend beeinflusst. Diese inhomogene Struktur führt zu einer Vielzahl von Defekten und lokalisierten Strukturen und beeinflusst die Dynamik sowohl im linearen als auch im nichtlinearen Bereich dieser Instabilität.

Literaturverzeichnis

Teile dieser Arbeit sind in referierten Zeitschriften eingereicht oder bereits veröffentlicht:

- [1] Heise, M. ; Küter, D. ; Abshagen, J. ; Pfister, G.: Spatio-temporal behavior of Spiral Vortex Flow. In: Journal of Physics: Conference Series (akzeptiert 2008)
- [2] Langenberg, J. ; Heise, M. ; Pfister, G. ; Abshagen, J.: Convective and absolute instabilities in counter-rotating Taylor-Couette flow. In: Theoretical and Computational Fluid Dynamics 18 (2004), Nr. 2–4, S. 97–103
- [3] Abshagen, J. ; Heise, M. ; Langenberg, J. ; Pfister, G.: Imperfect Hopf bifurcation in spiral Poiseuille flow. In: Physical Review E 75 (2007), Nr. 1, S. 016309
- [4] Heise, M. ; Abshagen, J. ; Menck, A. ; Pfister, G.: Intermittency in spiral Poiseuille flow. In: Journal of Physics: Conference Series 14 (2005), S. 94–100
- [5] Heise, M. ; Hoffmann, Ch. ; Abshagen, J. ; Pinter, A. ; Pfister, G. ; Lücke, M.: Stabilization of Domain Walls between Traveling Waves by Nonlinear Mode Coupling. In: Physical Review Letters 100 (2008), Nr. 5
- [6] Hoffmann, Ch. ; Heise, M. ; Abshagen, J. ; Altmeyer, S. ; Küter, D. ; Lücke, M. ; Pfister, G.: Spiral Vortex Domains in counter-rotating Taylor-Couette flow. In: Physical Review E (wird eingereicht)
- [7] Heise, M. ; Abshagen, J. ; Hochstrate, K. ; Küter, D. ; Pfister, G. ; Hoffmann, Ch.: Localized Spirals in Taylor-Couette flow. In: Physical Review E 77 (2008), Nr. 2
- [8] Abshagen, J. ; Heise, M. ; Pfister, G. ; Hoffmann, Ch.: Direction reversion of a rotating wave in Taylor-Couette flow. In: Journal of Fluid Mechanics (eingereicht 2007)
- [9] Heise, M. ; Hoffmann, Ch. ; Abshagen, J. ; Hochstrate, K. ; Altmeyer, S. ; Pfister, G. ; Lücke, M.: Endwall effects in Spiral vortex flow. In: Physical Review E (wird eingereicht)
- [10] Abshagen, J. ; Heise, M. ; Pfister, G.: Bifurcation behavior of standing waves. In: Journal of Physics: Conference Series (akzeptiert 2008)

Teile der Arbeit sind auf internationalen Konferenzen vorgestellt worden:

- [11] Heise, M. ; Langenberg, J. ; Pfister, G.: Counterrotating Taylor-Couette flow with axial throughflow. In: *Nonlinear Dynamics in Fluids*, 13th Couette-Taylor Workshop, Barcelona (Spanien), 2003, S. 26
- [12] Heise, M. ; Abshagen, J. ; Pfister, G.: Convective instabilities in a finite Couette-Poiseuille flow, 14th Couette-Taylor Workshop, Sapporo (Japan), 2005, S. 65–66
- [13] Heise, M. ; Abshagen, J. ; Pfister, G.: Convective instabilities in a finite open flow experiment, XXV. Dynamic Days, Berlin, 2005, S. 66
- [14] Abshagen, J. ; Heise, M. ; Pfister, G.: Suppression of symmetry breaking in steady Taylor-Couette flow, 15th Couette-Taylor Workshop, Le Havre (Frankreich), 2007, S. 12–14
- [15] Heise, M. ; Hoffmann, Ch. ; Abshagen, J. ; Lücke, M. ; Pfister, G.: Defect propagation in Spiral Poiseuille flow, 15th Couette-Taylor Workshop, Le Havre (Frankreich), 2007, S. 105–107

Verwendete Literatur:

- [16] Navier, J.L.M.: Sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques. In: *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 6 (1827), S. 389
- [17] Stokes, G.G.: On the theories of internal friction of fluid in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids. In: *Trans. Cambridge Philos. Soc* 8 (1845), S. 287
- [18] Chossat, P. ; Iooss, G.: *The Couette-Taylor Problem*. 1. Springer-Verlag, 1994
- [19] Andereck, C.D. ; Lui, S.S. ; Swinney, H.L.: Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 164 (1986), S. 155–183
- [20] Tagg, R.: The Couette-Taylor Problem. In: *Nonlinear Science Today* 4 (1994), Nr. 3, S. 1–25
- [21] Couette, M.M.: Sur un nouvel appareil pour l'étude du frottement des fluids. In: *Comptes Rendus* 107 (1888), S. 388
- [22] Mallock, A.: Determination of the viscosity of water. In: *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* (1923), Nr. 223, S. 289
- [23] Taylor, G.I.: Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders. In: *Proc. Roy. Soc. Lon.* 223 (1923), S. 289–343

- [24] Koschmieder, E.L.: Bénard cells and Taylor vortices. In: *Journal of Fluid Mechanics* 24 (1966), S. 521
- [25] DiPrima, R.C. ; Swinney, H.L.: Instabilities and transition in flow between concentric cylinders. In: *Hydrodynamic instabilities and the transition to turbulence*, Springer-Verlag, 1981, S. 139
- [26] Mullin, T.: Mutations of steady cellular flows in the Taylor experiment. In: *Journal of Fluid Mechanics* 121 (1982), S. 207–218
- [27] Cliffe, K.A.: Numerical calculations of the primary-flow exchange process in the Taylor problem. In: *Journal of Fluid Mechanics* 197 (1988), S. 57–79
- [28] Benjamin, T.B.: Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid - I. Theory. In: *Proc. Roy. Soc. London A* 359 (1978), S. 1
- [29] Benjamin, T.B.: Bifurcation phenomena in steady flows of a viscous fluid - II. Experiments. In: *Proc. Roy. Soc. London A* 359 (1978), S. 27
- [30] Langenberg, J. ; Pfister, G. ; Abshagen, J.: Standing waves in flow between finite counter-rotating cylinders. In: *Physical Review E* 68 (2003), Nr. 5, S. 056308
- [31] Langenberg, J. ; Pfister, G. ; Abshagen, J.: The effect of physical boundaries on oscillatory bifurcation in counterrotating Taylor–Couette flow. In: *Physics of Fluids* 16 (2004), Nr. 8, S. 2757–2762
- [32] Abshagen, J. ; Langenberg, J. ; Pfister, G. ; Mullin, T. ; Tavener, S.J. ; Cliffe, K.A.: Taylor-Couette flow with independently rotating end plates. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 18 (2004), Nr. 2-4, S. 129 – 136
- [33] Lang, M.: *Das Taylor-Couette-System mit unabhängig rotierenden Endplatten*, Institut für Experimentelle und Angewandte Physik der Universität Kiel, Diplomarbeit, 2003
- [34] Oertel, H. ; Delfs, J.: *Strömungsmechanische Instabilitäten*. 1. Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1996
- [35] Guckenheimer, J. ; Holmes, P.: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. 1. Springer-Verlag, 1986
- [36] Argyris, J. ; Faust, G. ; Haase, M.: *Die Erforschung des Chaos*. 1. Vieweg Verlag, 1994
- [37] Mullin, T.: *The nature of chaos*. 1. Oxford University Press, 1993
- [38] Egbers, C. ; Pfister, G.: *Physics of rotating fluids*. 1. Springer Verlag, Berlin, 2000
- [39] Reynolds, O.: An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 174 (1883), S. 935–982

- [40] Grossmann, S.: The onset of shear flow turbulence. In: *Review of Modern Physics* 72 (2000), Nr. 2, S. 603–618
- [41] Hopf, E.: Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems. In: *Sächsische Akademie der Wissenschaft, Leipzig* 94 (1942), S. 1
- [42] Huerre, P. ; Monkewitz, P.A.: Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 22 (1990), S. 473
- [43] Monkewitz, P.A.: The role of absolute and convective instability in predicting the behavior of fluid systems. In: *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 9 (1990), S. 395
- [44] Landau, L.D. ; Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band 6: Hydrodynamik*. 5. Akademie Verlag Berlin, 1991
- [45] van Saarloos, W. ; Hohenberg, P.C.: Fronts, pulses, sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equations. In: *Physica D* 56 (1992), Nr. 4, S. 303–367
- [46] Tobias, S.M. ; Proctor, M.R.E. ; Knobloch, E.: Convective and absolute instabilities of fluid flows in finite geometry. In: *Physica D* 113 (1998), Nr. 1, S. 43–72
- [47] Chomaz, J.-M. ; Couairon, A.: Against the wind. In: *Physics of Fluids* 11 (1999), Nr. 10, S. 2977–2983
- [48] Couairon, A. ; Chomaz, J.-M.: Absolute and convective instabilities, front velocities and global modes in nonlinear systems. In: *Physica D* 108 (1997), Nr. 3, S. 236–276
- [49] Babcock, K.L. ; Cannell, D.S. ; Ahlers, G.: Stability and noise in Taylor-Couette Flow with through flow. In: *Physica D* 61 (1992), S. 40
- [50] Babcock, K.L. ; Ahlers, G. ; Cannell, D.S.: Noise amplification in open Taylor-Couette flow. In: *Physical Review E* 50 (1994), Nr. 5, S. 3670
- [51] Pinter, A. ; Lücke, M. ; Hoffmann, C.: Spiral and Taylor vortex fronts and pulses in axial through-flow. In: *Physical Review E* 67 (2003), Nr. 2, S. 1–15
- [52] Tsamaret, A. ; Steinberg, V.: Competing states in a Taylor-Couette system with an axial flow. In: *Physical Review E* 49 (1994), Nr. 5, S. 4077–4086
- [53] Deissler, R.J.: Thermal sustained structure in convectively unstable systems. In: *Physical Review E* 49 (1994), S. 1
- [54] Recktenwald, A. ; Lücke, M. ; Müller, H.W.: Taylor vortex formation in axial through-flow: Linear and weakly nonlinear analysis. In: *Physical Review E* 48 (1993), Nr. 6, S. 4444
- [55] Lücke, M. ; Szprynger, A.: Noise sustained pattern growth: bulk versus boundary effects. In: *Physical Review E* 55 (1997), S. 5509

- [56] Szprynger, A. ; Lücke, M.: Noise sensitivity of sub- and supercritically bifurcating patterns with group velocities close to the convective-absolute instability. In: *Physical Review E* 67 (2003), Nr. 046301, S. 1–8
- [57] Tagg, R. ; Edwards, W.S. ; Swinney, H.L.: Convective versus absolute instability in flow between counter rotating cylinders. In: *Physical Review Letters* 42 (1990), S. 831
- [58] Takeuchi, D.I. ; Jankowski, D.F.: A numerical and experimental investigation of the stability of spiral Poiseuille flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 102 (1981), S. 101–126
- [59] Tsameret, A. ; Steinberg, V.: Noise modulated-propagating pattern in a convectively unstable system. In: *Physical Review Letters* 67 (1991), Nr. 24, S. 3392–3395
- [60] Tsameret, A. ; Steinberg, V.: Absolute and convective instabilities and noise-sustained structures in the Couette-Taylor system with an axial flow. In: *Physical Review E* 49 (1994), Nr. 2, S. 1291–1308
- [61] Hoffmann, Ch.: *Struktur, Dynamik und Bifurkationsverhalten von Spiralwirbeln im Taylor Couette System mit und ohne Durchfluss*, Universität des Saarlandes, Diss., 2005
- [62] Davey, A. ; di Prima R.C. ; Stuart, R.C.: On the instability of Taylor vortices. In: *Journal of Fluid Mechanics* 31 (1968), S. 17
- [63] Langford, W.F. ; Tagg, R. ; Kostelich, E.J. ; Swinney, H.L. ; Golubitzky, M.: Primary instabilities and bicriticality in flow between counter-rotating cylinders. In: *Physics of Fluids* 31 (1988), Nr. 4, S. 776–785
- [64] Pfister, G. ; Rehberg, I.: Space-dependent order parameter in circular Couette flow transitions. In: *Phys. Letters A* 83 (1981), S. 19
- [65] Abshagen, J.: *Organisation chaotischer Dynamik in der Taylor-Couette-Strömung*, Institut für Experimentelle und Angewandte Physik der Universität Kiel, Diss., 2000
- [66] Czarny, O. ; Serre, E. ; Bontoux, P. ; Lueptow, R.M.: Interaction between Ekman pumping and the centrifugal instability in Taylor-Couette flow. In: *Physics of Fluids* 15 (2003), S. 467
- [67] Abshagen, J. ; Meincke, O. ; Pfister, G. ; Cliffe, K.A. ; Mullin, T.: Transient dynamics at the onset of Taylor vortices. In: *Journal of Fluid Mechanics* 476 (2003), S. 335–343
- [68] Benjamin, T.B. ; Mullin, T.: Anomalous Modes in the Taylor Experiment. In: *Proc. Roy. Soc. London A* 377 (1981), Nr. 1770, S. 221–249
- [69] Schaeffer, D.G.: Qualitativ analysis of a model for boundary effects in the Taylor problem. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 87 (1980), S. 307

- [70] Krueger, E.R. ; Gross, A. ; di Prima, R.C.: On the relative importance of Taylor-vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 24 (1966), S. 521
- [71] Snyder, H.A.: Stability of Rotating Couette flow. I. Asymmetric Waveforms. In: *Physics of Fluids* 11 (1968), S. 728
- [72] Sanchez, J. ; Crespo, D. ; Marques, F.: Spiral vortices between concentric cylinders. In: *Appl. Sci. Res.* 51 (1993), S. 55–59
- [73] Tagg, R. ; Edwards, W.S. ; Swinney, H.L. ; Marcus, P.S.: Nonlinear standing waves in Couette-Taylor flow. In: *Physical Review A* 39 (1989), Nr. 7, S. 3734–3737
- [74] Golubitsky, M. ; Stewart, I.: Symmetry and Stability in Taylor-Couette flow. In: *SIAM Journal of Mathematical Analysis* 17 (1986), S. 249
- [75] Golubitsky, M. ; Langford, W. F.: Pattern formation and bistability in flow between counterrotating cylinders. In: *Physica D* 32 (1988), Nr. 3, S. 362–392
- [76] Golubitsky, M. ; Schaeffer, D.G.: *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*. 1. Springer-Verlag, 1985
- [77] Schulz, A.: *Verzweigungen und Strukturen in der Strömung zwischen unabhängig rotierenden Zylindern*, Institut für Experimentelle und Angewandte Physik der Universität Kiel, Diss., 2000
- [78] Hoffmann, Ch. ; Lücke, M.: Spiral vortices and Taylor vortices in the annulus between counter-rotating cylinders. In: *Physics of rotating fluids*, Springer Verlag, Berlin, 2000, S. 55–66
- [79] Antonijoan, J. ; F., Marques ; J., Sanchez: Non-linear spirals in the Taylor-Couette problem. In: *Physics of Fluids* 10 (1998), S. 829
- [80] Edwards, W.S. ; Tagg, R. ; Dornblaster, B.C. ; Swinney, H. ; Tuckermann, L.S.: Periodic Traveling Waves with Nonperiodic Pressure. In: *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 10 (1991), S. 205
- [81] Hoffmann, Ch. ; Lücke, M. ; Pinter, A.: Spiral vortices traveling between two rotating defects in the Taylor-Couette system. In: *Physical Review E* 72 (2005), Nr. 5, S. 056311
- [82] Czarny, O. ; Serre, E. ; Bontoux, P. ; Lueptow, R.M.: Spiral and wavy vortex flows in short counter-rotating Taylor-Couette cells. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 16 (2002), S. 5
- [83] Landsberg, A.S. ; Knobloch, E.: Oscillatory bifurcation with broken translation symmetry. In: *Physical Review E* 53 (1996), Nr. 4, S. 3579–3600

- [84] Knobloch, E. ; Pierce, R.: Spiral vortices in finite cylinders. In: *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow* Bd. 297, Plenum Press, New York, 1992, S. 83–90
- [85] Dangelmayr, G. ; Knobloch, E.: Hopf bifurcation with broken circular symmetry. In: *Nonlinearity* 4 (1991), S. 399–427
- [86] Langenberg, J.: *Verzweigungen in einer rotierenden Scherströmung mit gebrochener O(2)-Symmetrie*, Institut für Experimentelle und Angewandte Physik der Universität Kiel, Diss., 2003
- [87] Langenberg, J. ; Pfister, G. ; Abshagen, J.: Chaos from Hopf bifurcation in a fluid flow experiment. In: *Physical Review E* 70 (2004), Nr. 4, S. 046209
- [88] Pinter, A.: *Spiralwirbel im Taylor-Couette-System*, Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät II der Universität des Saarlandes, Diplomarbeit, 2001
- [89] Cotrell, D.L. ; Pearlstein, A.J.: The connection between centrifugal instability and Tollmien-Schlichting-like instability for spiral Poiseuille flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 509 (2004), S. 331–351
- [90] Marqués, F. ; Lopez, J.M.: Modulated Taylor-Couette Flow: Onset of spiral Modes. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 16 (2002), S. 59–69
- [91] Lopez, J.M. ; Marqués, F.: Taylor-Couette flow with axial oscillations of the inner cylinder: Floquet analysis of the base flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 348 (1997), S. 153–175
- [92] Meseguer, A. ; Marques, F.: On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Poiseuille flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 455 (2002), S. 129–148
- [93] Meseguer, A. ; Marques, F.: On the competition between centrifugal and shear instability in spiral Couette flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 402 (2002), S. 33–56
- [94] Knobloch, E.: Oscillatory convection in binary mixtures. In: *Physical Review A* 34 (1986), Nr. 2, S. 1538–1549
- [95] Crawford, J.D. ; Knobloch, E.: Symmetry and symmetry-breaking bifurcations in fluid dynamics. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 23 (1991), S. 341–387
- [96] Knobloch, E. ; Pierce, R.: Spiral vortices in finite cylinders. In: Andereck, D. (Hrsg.) ; Hayot, F. (Hrsg.): *Ordered and Turbulent Patterns in Taylor-Couette Flow* Bd. B297, NATO ASI Series, Plenum, New York, 1992, S. 83
- [97] Knobloch, E.: Dynamics of slowly varying wavetrains in finite geometry. Bd. m55. *Evolution of spontaneous structures in dissipative continuous systems*, Springer Verlag, Berlin, 1998, S. 399

- [98] Wiggins, S.: *Global bifurcations and chaos*. 1. Springer-Verlag, 1988
- [99] Crawford, J.D. ; Knobloch, E.: On degenerate Hopf bifurcation with broken $O(2)$ symmetry. In: *Nonlinearity* (1988), S. 617
- [100] Nagata, W.: A perturbed Hopf bifurcation with reflection symmetry. In: *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A: Mathematics* 117 (1991), S. 1–20
- [101] Hoffmann, Ch. Persönliche Mitteilung. 2007
- [102] Cross, M.C. ; Hohenberg, P.C.: Pattern formation outside of equilibrium. In: *Review of Modern Physics* 65 (1993), Nr. 3, S. 851
- [103] Habdas, P. ; Case, M.J. ; de Bruyn, J.R.: Behavior of sink and source defects in a one-dimensional traveling finger pattern. In: *Physical Review E* 63 (2001), Nr. 6, S. 066305
- [104] Pastur, L. ; Westra, M.-T. ; Snouck, D. ; van de Water, W. ; van Hecke, M. ; Storm, C. ; van Saarloos, W.: Sources and holes in a one-dimensional traveling-wave convection experiment. In: *Physical Review E* 67 (2003), Nr. 3, S. 036305
- [105] Ezersky, A.B. ; Latrache, N. ; Crumeyrolle, O. ; Mutabazi, I.: Competition of spiral waves with anomalous dispersion in Couette-Taylor flow. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 18 (2004), Nr. 2, S. 85 – 95
- [106] Couillet, P. ; Frisch, T. ; Plaza, F.: Sources and sinks of wave patterns. In: *Physica D* 62 (1993), Nr. 1-4, S. 75–79
- [107] van Hecke, M. ; Strom, C. ; van Saarloos, W.: Sources, sinks and wavenumber selection in coupled CGL equations and experimental implications for counter-propagating wave systems. In: *Physica D* 134 (1999), Nr. 1, S. 1–47
- [108] Pfister, G. ; Gerds, U.: Dynamics of Taylor wavy vortex flow. In: *Physics Letters A* 83 (1981), S. 23–25
- [109] Hof, B. ; Mullin, T.: Critical dynamics in oscillatory convection. In: *Magnetohydrodynamics* 37 (2001), Nr. 1-2, S. 119–126
- [110] Schulz, A. ; Pfister, G. ; Tavener, S.J.: The effect of outer cylinder rotation on Taylor-Couette flow at small aspect ratio. In: *Physics of Fluids* 15 (2003), Nr. 2, S. 417–425
- [111] Lücke, M. ; Mihelcic, M. ; Wingerath, K. ; Pfister, G.: Flow in a small annulus between concentric cylinders. In: *Journal of Fluid Mechanics* 140 (1984), S. 343–353
- [112] Marqués, F. ; Lopez, J.M.: Onset of three-dimensional unsteady states in small aspect-ratio Taylor-Couette flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 561 (2006), S. 255–277

- [113] Pfister, G. ; Schulz, A. ; Lensch, B.: Bifurcation and a route to chaos of an one-vortex-state in the Taylor-Couette flow. In: *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 10 (1991), Nr. 2, S. 247–252
- [114] Mullin, T. ; Toya, Y. ; Tavener, S.J.: Symmetry breaking and multiplicity of states in small aspect ratio Taylor-Couette flow. In: *Physics of Fluids* 14 (2002), Nr. 8, S. 2778–2787

Danksagungen

Ich bedanke mich bei:

Prof. Dr. Gerd Pfister

für die angenehme und lehrreiche Zeit, die ich in seiner Arbeitsgruppe verbringen durfte und insbesondere für die Diskussionen über physikalische Zusammenhänge beim Kaffee.

Dr. Jan Abshagen

für die interessanten Diskussionen rund um die nichtlineare Physik und seine Unterstützung beim Verfassen von Anträgen und Publikationen.

Dr. Christian Hoffmann

für die Hilfe bei der Erforschung der Spiral-Wirbelströmung aus der Sicht eines theoretischen Physikers.

René Woltmann und der gesamten Werkstatt

für die feinmechanische Perfektion, die bei der Planung und Realisierung der vielen Experimente enorm wichtig war.

Wolfgang Schumann, Heinz Horak und Mario Knüppel

für die außergewöhnliche Hilfsbereitschaft bei technischen und elektronischen Problemen.

Kerstin Hochstrate, Dennis Küter und Ole Staack

für die schöne gemeinsame Zeit im Labor und die erfolgreiche Zusammenarbeit.

meinen Eltern

die immer für mich da waren und mir diesen Weg erst ermöglicht haben.

Marie

fürs Zuhören, ihre aufmunternden Worte und ihre Geduld, wenn es mal wieder etwas länger wurde.

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name:	Heise
Vorname:	Matti
Adresse:	Caprivistraße 18 a, 24105 Kiel
Telefon:	0431-8888949
Geburtstag:	16.04.1976
Geburtsort:	Kiel
Familienstand:	ledig

Ausbildung

1982 – 1986	Grundschule: Max-Tau-Schule, Kiel
1986 – 1996	Gymnasium: Werner-Heisenberg-Gymnasium, Heide
07/1996	Abitur am Werner-Heisenberg-Gymnasium, Heide
1997 – 2000	Studium der Fachrichtung Physik-Diplom an der Universität Hamburg
2000 – 2003	Studium der Fachrichtung Physik-Diplom an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
2002 – 2003	Diplomarbeit am Institut für Experimentelle und Angewandte Physik bei Prof. G. Pfister: „Experimentelle Untersuchungen am Taylor-Couette-System mit axialem Durchfluss“
12/2003	Diplom (Gesamturteil: sehr gut)
07/2004 – 12/2005	Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Fraunhofer-Gesellschaft zur Förderung der angewandten Forschung e.V. im Auftrag der Forschungsanstalt der Bundeswehr für Wasserschall und Geophysik (FWG)
01/2005 – 03/2007	Promotionsstipendium des Landes Schleswig-Holstein
seit 04/2007	Wissenschaftliche Mitarbeiter an der Christian-Albrechts Universität zu Kiel (Projekt der Deutschen Forschungsgemeinschaft)

Erklärungen

Hiermit erkläre ich an Eides statt, die vorliegende Arbeit unter Anleitung meines akademischen Lehrers und nur mit Hilfe der angegebenen Quellen selbständig angefertigt zu haben. Des Weiteren versichere ich, dass diese Arbeit weder ganz noch zum Teil bei einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat.

Kiel, den 3. Februar 2008

Matti Heise