

Über die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf abzählbaren Mengen und Solomons Algebra

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel
vorgelegt von
Yvonne Raden
Kiel 2009

Referent:

Korreferent:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Kiel, den

.....

Der Dekan

IN MEMORIAM

Manfred Schocker

(1970 – 2006)

*Requiem aeternam dona eis, Domine,
et lux perpetua luceat eis.*

*Missa pro defunctis,
Antiphona ad Introitum*

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird für eine endliche oder abzählbar unendliche Menge X die Struktur der *Campbell-Hausdorff-Gruppe* (im Sinne von A. Baider und R.C. Churchill [BC88]) untersucht. Dies geschieht anhand der Menge der homogenen unitären Bialgebren-Endomorphismen der freien assoziativen Algebra über X – bezüglich eines Coproduktes κ_X . Mit Hilfe dieses Coprodukts wird – ähnlich zum üblichen Konvolutionsprodukt – eine Verknüpfung \diamond auf der Menge \mathcal{H}_{κ_X} dieser Bialgebren-Endomorphismen definiert, die als (nicht-kommutative) Addition zusammen mit der üblichen Hintereinanderausführung von Endomorphismen als Multiplikation eine Rechts-Fastringstruktur auf \mathcal{H}_{κ_X} ergibt.

\mathcal{H}_{κ_X} ist genau für unendliches X isomorph zur Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X . Anderenfalls ist \mathcal{H}_{κ_X} isomorph zu einer echten Untergruppe und zu einer Faktorgruppe der Campbell-Hausdorff-Gruppe. Da jedoch die Campbell-Hausdorff-Gruppe für *endliche* Mengen isomorph in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ eingebettet werden kann, ermöglicht die Struktur-Analyse von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ auch Einblick in die Struktur der Campbell-Hausdorff-Gruppen auf *endlichen* Mengen. Wichtiges Hilfsmittel sind dabei die Exponential- und Logarithmusreihe.

Solomons Algebra und gewisse Linksideale von Solomons Algebra, beispielsweise die bekannte *peak*-Algebra, stehen in einem engen Zusammenhang mit den Bialgebren-Endomorphismen aus $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$: Man erhält jene Linksideale über die Bildmengen der $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismen. In dieser Arbeit wird die Struktur solcher $\kappa_{\mathbb{N}}$ -induzierter Linksideale weitgehend aufgeklärt, die zusätzlich einer bestimmten Bedingung an die lineare Basis genügen. Die Analyse ist eine Verallgemeinerung der Arbeit von M. Schocker zur *peak*-Algebra [Sch05]. Schließlich werden Beispiele für verschiedene Typen von $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismen, zum Teil mit zugehörigen Linksidealen in Solomons Algebra, vorgestellt.

Abstract

In this thesis we investigate the structure of the *Campbell-Hausdorff group* over a finite or countably infinite set X (according to A. Baider and R.C. Churchill [BC88]). For this purpose we consider the homogeneous unitary bialgebra homomorphisms of the free associative algebra over X with respect to a coproduct κ_X . We denote this set of homomorphisms by \mathcal{H}_{κ_X} . Using this coproduct we define $\alpha \diamond \beta$ for $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$, based upon the notion of convolution. By this addition and by the usual composition of endomorphisms as multiplication, \mathcal{H}_{κ_X} is turned into a non-abelian, non-commutative right near-ring.

The group $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ occurs both as a subgroup and as a quotient group in the Campbell-Hausdorff group. The two groups are isomorphic to each other if (and only if) X is *not finite*. Within $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$, however, we are able to find an isomorphic copy of the Campbell-Hausdorff group over any *finite* set. Hence the structural analysis of the near-ring $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$

enables us to gain insight in the structure of the Campbell-Hausdorff group also in the case of *finite* sets. The exponential and logarithmic series are essential for the embedding. There is a close interrelationship between the elements of $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ and Solomon's algebra and some of its left ideals, for instance, the well-known peak algebra: these so called κ_X -induced left ideals can be obtained via image sets of $\kappa_{\mathbb{N}}$ -endomorphisms. We analyse κ_X -induced left ideals which additionally satisfy a certain property concerning their linear basis. To a large extent, we obtain a satisfying description of their structure. Our approach generalises the framework and proofs given by M. Schocker in [Sch05].

In conclusion, we give some examples for various types of $\kappa_{\mathbb{N}}$ -endomorphisms, partly throwing a short glance at their related left ideals.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	iii
1 Grundlagen	1
1.1 Worte und Permutationen	1
1.1.1 Freie Monoide und Monoidalgebren	1
1.1.2 Die innere Algebra \mathcal{P} der Permutationen	2
1.1.3 Polya-Aktion und assoziierte Worte	2
1.1.4 Das Konvolutionsprodukt auf \mathcal{P} und die Bialgebra $(\mathcal{P}, \star, \downarrow)$	3
1.1.5 Solomons Algebra	4
1.2 Exponentialfunktion und Logarithmus über \mathbb{N}_0 -gradierten Algebren	5
1.2.1 Die Summengradierung in KX^*	8
1.3 \mathbb{N}_0 -gradierte Bialgebren	9
1.3.1 Zwei Bialgebrenstrukturen auf KX^*	11
1.4 κ_X -Endomorphismen und resistente Buchstaben	13
2 Über die Struktur der Campbell-Hausdorff-Gruppe	14
2.1 Die Verknüpfung \diamond auf \mathcal{H}_{κ_X} und ein Monomorphismus in die Campbell- Hausdorff-Gruppe auf X	17
2.2 Die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X als Untergruppe von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$	22
2.3 Der unitäre null-symmetrische Rechts-Fastring $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$	23
2.3.1 Grundlegendes über Rechts-Fastringe	23
2.3.2 \mathcal{H}_{κ_X} als Fastring	26
2.4 Über die Struktur des Fastringes $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$	30
2.4.1 Die Fastring-Epimorphismen c_n und das Fastring-Ideal \mathcal{K}_X	30
2.4.2 Idempotente in $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$	35
2.4.3 Eine absteigende Kette von Fastring-Idealen in \mathcal{H}_{κ_X}	36
2.4.4 Über die Struktur von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$ und einiger seiner Faktorringe	40
2.5 Eine Metrik auf $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$	43

3	Die Struktur r-homogen κ-induzierter Linksideale in \mathcal{D}	51
3.1	κ -induzierte Linksideale und Lie-Idempotente	52
3.2	Über eine Klasse von assoziativen Algebren	56
3.2.1	Rechts- bzw. linksartinsche assoziative Algebren	56
3.2.2	Die Struktur einer speziellen Klasse von auflösbaren Algebren	58
3.3	Anwendung auf Solomons Algebra	67
3.3.1	Jacobson-Radikal und Cartan-Invarianten von $\mathcal{D}_{n,\eta}$	68
3.3.2	Zur Loewy-Reihe von $\mathcal{D}_{n,\eta}$	69
4	Beispiele: κ-Endomorphismen und Linksideale in \mathcal{D}	73
4.1	Zwei Beispiele für r -homogene κ -Endomorphismen und ihre Linksideale in \mathcal{D}	74
4.1.1	Die <i>peak</i> -Algebra	74
4.1.2	Das <i>derangement</i> -Idempotent	75
4.2	Ein nicht r -homogener κ -Endomorphismus außerhalb von \mathcal{K}	77
4.3	Ein nil-konvergenter κ -Endomorphismus	77
	Symbolverzeichnis	83
	Literaturverzeichnis	86

Einleitung

Bekanntlich ist für komplexe Zahlen x und y

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad \text{und} \quad \log(xy) = \log x + \log y.$$

Diese Regeln gelten, weil x und y miteinander vertauschbar sind: $xy = yx$. Über die Reihendarstellung – $\exp a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$ und $\log(1+a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} a^n$ – lassen sich *Exponential* und *Logarithmus* – ein Konvergenzbegriff vorausgesetzt – auch auf anderen Strukturen etablieren. Oft wird dies etwa für lineare Operatoren von Banachräumen gemacht (mit Anwendung etwa in der Quantenmechanik), das *Matrixexponential* ist ein Hilfsmittel zur Lösung linearer Differentialgleichungssysteme. In nicht-kommutativen Strukturen gelten jedoch die obigen Additionstheoreme nicht mehr. Stattdessen begegnet einem die nach H.F. Baker, J.E. Campbell und F. Hausdorff benannte Reihe als Lösung für z in der Gleichung $e^x e^y = e^z$:

$$(1) \quad z = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}[[x, y], y] + \frac{1}{12}[[y, x], x] - \frac{1}{24}[[[x, y], y], x] + \dots,$$

wobei $[x, y] := xy - yx$ sei. Wir verweisen auf [Cam97, Cam98, Bak05, Hau06]; eine geschlossene Formel für die Reihe und eine Zusammenstellung der Arbeiten von Baker, Campbell und Hausdorff ist in [Reu], Kapitel 3, zu finden. Die Berechnung der Reihe – genauer gesagt: ihrer Koeffizienten – war in der Vergangenheit oft Gegenstand mathematischer Forschung (vgl. etwa das ausgedehnte Literaturverzeichnis in [MKS]), und ist es bis heute.

Ist $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ eine \mathbb{N}_0 -gradierte (unitäre assoziative) Algebra, d.h. $A_n A_m \subseteq A_{n+m}$, so ist die Kompletterung $\widehat{A} := \prod_{n \geq 0} A_n$ mit Cauchy-Produkt wieder eine (unitäre assoziative) Algebra. Die Menge $1_A + \prod_{n \geq 1} A_n$ ist bezüglich Cauchy-Produkt eine Gruppe.

Sei X eine Menge und $A\langle X \rangle$ die von X über einem Körper K frei erzeugte assoziative Algebra; wir nennen die Multiplikation *Konkatenation* und bezeichnen ihre Linearisierung $A\langle X \rangle \otimes A\langle X \rangle \longrightarrow A\langle X \rangle$, $v \otimes w \mapsto vw$, mit *conc*. Sei $\mathcal{L}\langle X \rangle$ die von X erzeugte Lie-Teilalgebra der zu $A\langle X \rangle$ assoziierten Lie-Algebra. Beide Algebren sind \mathbb{N}_0 -gradiert (etwa über die *Länge der Worte*), besitzen also Kompletterungen $\widehat{A\langle X \rangle}$ bzw. $\widehat{\mathcal{L}\langle X \rangle}$, die jeweils wieder Algebren sind. $\widehat{A\langle X \rangle}$ wird auch *Magnus-Algebra* genannt, die

Gruppe $1_{A\langle X \rangle} + \prod_{n \geq 1} A\langle X \rangle_n$ – bezüglich Cauchy-Produkt der Konkatenation – heißt *Magnus-Gruppe* (siehe [Bou]). Die Menge der Exponentiale der Lie-Elemente $\exp(\widehat{\mathcal{L}\langle X \rangle})$ ist bezüglich Konkatenation eine Untergruppe der Magnus-Gruppe (siehe [Car56] oder etwa [Reu], Cor. 3.3). Für alle $x, y \in \widehat{\mathcal{L}\langle X \rangle}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $z \in \widehat{\mathcal{L}\langle X \rangle}$ mit $\exp(x)\exp(y) = \exp(z)$; das z wird durch die BCH-Reihe (1) beschrieben. Wir nennen diese Gruppe daher die *Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X* . Ganz im Gegensatz zu den Koeffizienten der Baker-Campbell-Hausdorff-Reihe ist die Struktur der Campbell-Hausdorff-Gruppe sehr wenig untersucht, vgl. [BC88, Mur04].

In der vorliegenden Arbeit nähern wir uns der Campbell-Hausdorff-Gruppe in einer anderen Realisierung – nämlich über eine Menge von unitären Bialgebren-Endomorphismen der freien assoziativen Algebra über einem höchstens abzählbar unendlichen Alphabet. Es ist von großem technischen Vorteil, für X die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} oder, wenn X nur endlich viele – sagen wir: m Elemente enthält, das Anfangsstück $\{1, 2, \dots, m\}$ von \mathbb{N} zu wählen. Das von X frei erzeugte freie Monoid bezeichnen wir mit X^* ; die Konkatenation schreiben wir wie folgt: $q.r$ für $q, r \in X^*$ – eine Schreibweise, die auch für Datumsangaben üblich ist (vergleiche auch die Satznummerierung in der vorliegenden Arbeit). Es sei KX^* ein Vektorraum mit Basis X^* über einem Körper K . Dann ist KX^* eine von X frei erzeugte assoziative Algebra. Wir versehen KX^* zusätzlich zu dem üblichen Coprodukt δ_X , das durch $n \mapsto n \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes n$ für alle $n \in X$ gegeben ist, mit einem weiteren Coprodukt κ_X . Dieses ist durch

$$n\kappa_X := n \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes n + \sum_{i=1}^{n-1} i \otimes (n-i) \quad \text{für alle } n \in X$$

eindeutig bestimmt. Wir betrachten die Bialgebren-Endomorphismen bezüglich κ_X – das sind solche Algebren-Endomorphismen η von KX^* , die mit κ_X vertauschbar sind in folgendem Sinne:

$$\eta\kappa_X = \kappa_X(\eta \otimes \eta).$$

Dabei beschränken wir uns auf sog. *zerlegungshomogene* Endomorphismen, die also die *Zerlegungsgradierung* $KX^* = \bigoplus_{n \geq 0} Z_n^X$ mit den jeweils endlich-dimensionalen homogenen Teilräumen

$$Z_n^X := \langle q_1 \dots q_k \mid q_1 \dots q_k \in X^*, q_1 + \dots + q_k = n \rangle_K$$

respektieren: $Z_n^X \eta \subseteq Z_n^X$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe des Coproduktes κ_X etablieren wir eine Verknüpfung \diamond auf der Menge \mathcal{H}_{κ_X} aller homogenen unitären κ_X -Endomorphismen folgendermaßen: Für $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ sei $\alpha \diamond \beta$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von $(\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc})|_X$ zu einem unitären Algebren-Endomorphismus.¹

¹Diese Bildung erinnert an das übliche Konvolutionsprodukt, das mittels δ_X auf $\text{End } KX^*$ gebildet wird. In jenem Falle allerdings ist $\alpha \star \beta := \delta_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc}$ per se ein Algebren-Endomorphismus.

Die beiden Bialgebren $(KX^*, \text{conc}, \kappa_X)$ und $(KX^*, \text{conc}, \delta_X)$ sind erstaunlicherweise isomorph. Der durch \exp und \log vermittelte Isomorphismus Φ_X spielt eine wichtige Rolle in der gesamten Arbeit, wie im folgenden Absatz erklärt wird.

Hat man beim konkreten Rechnen in der Campbell-Hausdorff-Gruppe mit der BCH-Reihe (1) zu tun, so ist dagegen das Rechnen mit den Elementen von \mathcal{H}_{κ_X} vergleichsweise leicht: Die Wirkung der Endomorphismen muß immer nur auf den Buchstaben des Alphabetes X überprüft werden. Ist nun X abzählbar unendlich – wir nehmen $X = \mathbb{N}$ –, so ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \Phi)$ isomorph zur Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X . Einen Gruppen-Isomorphismus erhalten wir mit Hilfe des Bialgebren-Isomorphismus $\Phi_{\mathbb{N}}$ von $(K\mathbb{N}^*, \text{conc}, \kappa_{\mathbb{N}})$ auf $(K\mathbb{N}^*, \text{conc}, \delta_{\mathbb{N}})$. Ist X hingegen endlich, so ist der durch Φ_X vermittelte Gruppen-Homomorphismus zwar surjektiv von der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf \mathcal{H}_{κ_X} , aber nicht injektiv. Wir können jedoch mit Hilfe von $\Phi_{\mathbb{N}}$ die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X – für beliebiges höchstens abzählbares X – isomorph einbetten in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$. Kennt man also die Struktur von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ und damit die der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf abzählbar unendlichen Alphabeten, so kann man ebenfalls Einblick in die Struktur der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf endlichen Alphabeten erhalten. Dies wird jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht explizit durchgeführt.

Auch in anderer Hinsicht ist \mathcal{H}_{κ_X} interessant: Bekanntlich ist die freie assoziative Algebra $(K\mathbb{N}^*, +, \text{conc})$ isomorph zur direkten Summe aller Solomon-Algebren $\mathcal{D} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{D}_n$ versehen mit dem Konvolutionsprodukt \star als Multiplikation. (\mathcal{D} wird in der direkten Summe $\mathcal{P} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} K\mathcal{S}_n$ aller Gruppenalgebren der symmetrischen Gruppen von den Identitäten $\Xi^n := id_n \in \mathcal{S}_n$ als Konvolutionsalgebra frei erzeugt: $\mathcal{D} = \langle \Xi^n \mid n \in \mathbb{N} \rangle_{\star}$.) Mit dem bekannten Coprodukt \downarrow ist $(\mathcal{D}, \star, \downarrow)$ eine Bialgebra (siehe etwa [MR95] oder [BS]). Nimmt man als Isomorphismus die Abbildung Ξ , die durch $n \mapsto \Xi^n$ gegeben ist, so gilt

$$\Xi^{n\kappa_{\mathbb{N}}} = \Xi^n \downarrow ,$$

d.h. Ξ ist auch ein Bialgebren-Isomorphismus von $(K\mathbb{N}^*, \text{conc}, \kappa_{\mathbb{N}})$ auf $(\mathcal{D}, \star, \downarrow)$.

Wir bezeichnen mit dem Symbol $*$ die von den symmetrischen Gruppen herstammende *innere Multiplikation* in \mathcal{D} . Für jeden homogenen $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismus η und jedes Wort $q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*$ gilt mit $n := q_1 + \dots + q_k$

$$\Xi^q * \Xi^{n\eta} = \Xi^{q\eta} ,$$

d.h. $\mathcal{D}_{\eta} := (\text{Bild } \eta)\Xi$ ist ein Linksideal von $(\mathcal{D}, +, *)$ und $\mathcal{D}_{n,\eta} := \mathcal{D}_{\eta} \cap \mathcal{D}_n$ ein Linksideal der Solomon-Algebra \mathcal{D}_n . Jeder homogene $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismus vermittelt also ein Linksideal von Solomons Algebra. Die bekannte *peak*-Algebra ist ein Beispiel für ein solches Linksideal, wie auch Solomons Algebra selbst: über die Identität auf $K\mathbb{N}^*$.

Die *peak*-Algebra besitzt einen sie vermittelnden homogenen $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismus π , der

die folgende Basis-Eigenschaft erfüllt: Bild π wird als Algebra frei erzeugt von den Bildern der *resistenten* Buchstaben – das sind die Buchstaben n , die selbst wieder mit einem Koeffizienten verschieden von 0_K als Summand in $n\pi$ vorkommen. Wir nennen allgemein κ_X -Endomorphismen mit dieser Basis-Eigenschaft *r-homogen*.

Die *peak*-Algebra gehört also zur Klasse der sog. *r-homogen induzierten* Linksideale von \mathcal{D} . Deren Struktur läßt sich weitgehend aufklären. Die Strukturuntersuchung in der vorliegenden Arbeit verallgemeinert die Arbeit von M. Schocker [Sch05] zur *peak*-Algebra unter Einbeziehung von [BL93, BL96, BL02] zur Solomon-Algebra.

Über die Struktur der $\kappa_{\mathbb{N}}$ -induzierten Linksideale, die man nicht über einen *r*-homogenen $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismus erhalten kann, ist allgemein bislang nichts bekannt. Wir geben in dieser Arbeit immerhin ein Beispiel mit kurzer Strukturanalyse an.

Das erste Kapitel macht den Leser mit den Schreibweisen und umfassend mit den Grundlagen vertraut. In der gesamten vorliegenden Arbeit werden nur wohlbekannte Resultate etwa aus der Theorie assoziativer Algebren vorausgesetzt.

Im zweiten Kapitel wird zunächst gezeigt, daß – wie oben bereits erwähnt – δ_X und κ_X zwei isomorphe Bialgebren-Strukturen auf KX^* etablieren. Der Beweis verwendet \exp und \log zur Konstruktion eines Isomorphismus Φ_X , welcher für das Folgende grundlegend ist, etwa für die Konstruktion eines Monomorphismus von \mathcal{H}_{κ_X} in die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X oder die Einbettung der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$.

Auf \mathcal{H}_{κ_X} gibt es in natürlicher Weise eine Multiplikation: die *Hintereinanderausführung* von Endomorphismen, die wir mit der Abkürzung HEA versehen. Fassen wir die Verknüpfung \diamond als (nicht-abelsche) Addition auf, so trägt \mathcal{H}_{κ_X} mit dieser Multiplikation eine Rechts-Fastring-Struktur, und zwar ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$ ein *nicht-abelscher, nicht-kommutativer null-symmetrischer unitärer Rechts-Fastring*. (Grundlegendes zu Fastringen wird in einem kurzen Abschnitt dargelegt.) Fastring-Ideale sind bezüglich Addition Normalteiler. Daher ist eine Strukturuntersuchung eines Fastringes mittels Fastring-Idealen, wie aus der Ringtheorie gewohnt, ebenfalls eine solche der additiven Gruppe.

Der Schlüssel zur Struktur von \mathcal{H}_{κ_X} sind die Abbildungen $c_n : \mathcal{H}_{\kappa_X} \rightarrow K, \eta \mapsto \eta c_n$, für jedes $n \in X$, die jedem $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ den Koeffizienten von n in $n\eta \in Z_n^X$ zuordnet. Wir zeigen, daß die Abbildung c_n für jedes $n \in X$ ein Fastring-Epimorphismus auf den Körper K ist. Der Durchschnitt aller Kerne der Abbildungen $c_n, n \in X$, ist ein Fastring-Ideal, das wir \mathcal{K}_X nennen. Dessen Faktorfastring ist isomorph zum (kommutativen) Ring aller Abbildungen von X in K – mit komponentenweiser Addition und Multiplikation.

Wir geben eine absteigende Fastring-Idealkette in \mathcal{H}_{κ_X} an, die bezüglich \diamond eine absteigende Zentralreihe ist. Die sukzessiven Faktoren der Kette sind wiederum Ringe, die jeweils ein nilpotentes, genauer: Zero-Ideal mit dem Körper K als Faktoring besitzen.

Alle Betrachtungen über \mathcal{H}_{κ_X} haben wir für ein höchstens abzählbares Alphabet X angestellt. Im Falle eines *endlichen* Alphabetes ist das Fastring-Ideal \mathcal{K}_X genau die Menge aller nilpotenten Elemente (bezüglich HEA) von \mathcal{H}_{κ_X} . Ist X unendlich – also $X = \mathbb{N}$ nach unse-

rer Konvention –, so ist jedes Element aus $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ immerhin eingeschränkt auf jede homogene Komponente $Z_n^{\mathbb{N}}$ nilpotent. Bezüglich einer geeigneten Metrik ist die HEA-Potenzen-Folge für jedes Element aus $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Wir nennen die Elemente aus $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ daher *nilkonvergent*. Bei der Metrik handelt es sich um die von der Zerlegungsgradierung auf $K\mathbb{N}^*$ herrührende Metrik, welche mit Hilfe von \exp , \log und dem Isomorphismus $\Phi_{\mathbb{N}}$ auf $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ übertragen wird.

Einige topologische Betrachtungen über $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ und $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ beschließen das zweite Kapitel – z.B. ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ eine topologische Gruppe.

Im dritten Kapitel untersuchen wir die innere Struktur der r -homogen induzierten Linksideale von \mathcal{D} . Eine algebrentheoretische Analyse dieser Linksideale liefert eine weitgehende Aufklärung ihrer Struktur. Insbesondere erhalten wir auf diesem Wege erneut die Resultate aus [Sch05] über die Struktur der *peak*-Algebra, etwa über die irreduziblen Links-Moduln, Zerlegung in unzerlegbare Linksideale und Cartan-Invarianten.

Das letzte kurze Kapitel illustriert die Theorie der κ_X -Endomorphismen an einigen Beispielen.

Zum Abschluß der Vorrede möchte ich nicht versäumen meinen Dank auszudrücken. Ich bin sehr dankbar für die drei wunderbar freien und intensiven Jahre, die ich durch das Stipendium des Evangelischen Studienwerk Villigst e.V. verleben durfte. Ohne die finanzielle Unterstützung von Villigst wäre meine Promotion nicht möglich gewesen. Darüber hinaus bin ich in Villigst einigen Menschen begegnet, die meinen Horizont erweitert und mein Leben sehr bereichert haben. Danke, Christian!

Dieter Blossenohl und Hartmut Laue danke ich herzlich für die Betreuung, die vielen Gelegenheiten, im Oberseminar über meine Arbeit vorzutragen, die anregenden und fruchtbaren Diskussionen und ihre Unterstützung weit über das Fachliche hinaus. Mein ebenso herzlicher Dank gilt den (Ex-)Teilnehmern des Oberseminars Algebrentheorie und „Fachfremden“ des Mathematischen Seminars, im besonderen Anna-Louise Paasch, Sebastian Grensing, Gyde Autzen und Thorsten Bauer, für die zahlreichen freundschaftlichen Gespräche, fachlichen Diskussionen und so manchen Beistand und Hilfe in schwierigen Zeiten. Ganz besonders herzlich danke ich meinen Eltern für ihre uneingeschränkte Unterstützung in allen Lebenslagen, ihre Geduld über all die Jahre hinweg und dafür, daß sie immer an mich geglaubt haben und gegenüber meinen Interessen und Neigungen immer offen waren. Die unschätzbar wertvollen Anregungen und Hinweise von Manfred Schocker haben – zusammen mit Überlegungen von Dieter Blossenohl dazu – den Grundstein für meine Arbeit gelegt. Seinem Andenken widme ich meine Dissertation.

Bevor wir beginnen, vereinbaren wir:

Generalvoraussetzung.

In allen folgenden Kapiteln sei K immer ein Körper, der die rationalen Zahlen \mathbb{Q} als Primkörper enthält. Es sei denn, es wird etwas anderes gesagt.

Es sei X eine nicht-leere, höchstens abzählbare Menge. Ist X endlich, so gibt es eine Bijektion von einem Anfangsstück der natürlichen Zahlen auf X , und ist X unendlich, so gibt es eine Bijektion von \mathbb{N} auf X : Wir betrachten o.B.d.A. nur Anfangsstücke von \mathbb{N} oder \mathbb{N} selbst. Sei also $X = \mathbb{N}$ oder, falls X endlich ist, $X = \underline{m} := \{1, \dots, m\}$ für $m := \#X$.

Kapitel 1

Grundlagen

Die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit \mathbb{N} und zählen die Null *nicht* dazu. Für $\mathbb{N} \cup \{0\}$ schreiben wir \mathbb{N}_0 . Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\underline{n} := \{m \mid m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$ (damit also $\underline{0} = \emptyset$), sowie $\underline{n}_0 := \underline{n} \cup \{0\}$.

Für jede (assoziative) Algebra $(A, +, \cdot)$ bezeichne $A \otimes A$ ein Tensorprodukt von A mit sich selbst über K und \cdot_\otimes die durch \cdot auf $A \otimes A$ induzierte Verknüpfung:

$$\forall a, b, c, d \in A \quad (a \otimes b) \cdot_\otimes (c \otimes d) = (a \cdot b) \otimes (c \cdot d).$$

$(A \otimes A, \cdot_\otimes)$ ist ebenfalls eine (assoziative) Algebra.

Ist A unitär und e eine Eins von A , so ist auch $A \otimes A$ unitär mit neutralem Element $e \otimes e$.

Da wir überwiegend Strukturen mit mehreren Verknüpfungen betrachten, werden wir in der Regel für multiplikative Potenzen die jeweils gemeinte Verknüpfung zur Kennzeichnung mit in den Exponenten schreiben, z.B. $m^{*n} := \underbrace{m * \dots * m}_{n\text{-mal}}$ im Falle einer Halbgruppe $(M, *)$.

1.1 Worte und Permutationen

1.1.1 Freie Monoide und Monoidalgebren

Wir bezeichnen mit X^* ein freies Monoid über dem *Alphabet* X und schreiben $q.r$ für die Verknüpfung in X^* – die *Konkatenation*. Das neutrale Element von X^* , das leere Wort, bezeichnen wir mit 1_{X^*} . Mit KX^* bezeichnen wir die Monoidalgebra von X^* über K – diese ist eine freie assoziative Algebra, frei erzeugt von X , mit Einselement 1_{X^*} – und mit $\text{conc} : KX^* \otimes KX^* \longrightarrow KX^*$ die Linearisierung der Konkatenation.

Zu jedem Element q von X^* gibt es ein $k \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmte $q_1, \dots, q_k \in X$ derart, daß $q = q_1 \dots q_k$ ist. Wir nennen q_1, \dots, q_k die *Buchstaben* des Wortes q und $\ell(q) := k$ die *Länge* von q . ($\ell : X^* \longrightarrow \mathbb{N}_0$ ist der eindeutig bestimmte Monoidhomomorphismus von (X^*, \cdot) in $(\mathbb{N}_0, +)$ mit $\ell(n) = 1$ für alle $n \in X$.)

Auch die Identität auf X besitzt eine eindeutige Fortsetzung $\text{sum} : (X^*, \cdot) \longrightarrow (\mathbb{N}_0, +)$; es ist $\text{sum}(q_1 \dots q_k) = q_1 + \dots + q_k$.

Ist $\text{sum } q = n \in \mathbb{N}_0$, so heißt q *Zerlegung von n* , in Zeichen $q \models n$. Ist $q = q_1 \dots q_k \models n$ und außerdem $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_k$, so heißt q *Partition* von n , symbolisch $q \vdash n$. Das leere Wort 1_{X^*} ist das einzige Wort der Länge 0, die einzige Zerlegung und auch die einzige Partition von 0:

$$\ell(1_{X^*}) = 0, \quad 1_{X^*} \models 0, \quad 1_{X^*} \vdash 0.$$

Seien $r, q = q_1 \dots q_k \in X^*$. Wir schreiben $r \models q$, falls es Worte $r_1^{[q]}, \dots, r_k^{[q]} \in X^*$ derart gibt, daß

$$r = r_1^{[q]} \dots r_k^{[q]} \quad \text{und} \quad r_i^{[q]} \models q_i \quad \text{für alle } i \in \underline{k}.$$

Wir definieren noch die *lexikographische Ordnung* auf X^* :

Für alle $q = q_1 \dots q_k, r = r_1 \dots r_l \in X^*$ setzen wir

$$q <_{\text{lex}} r \quad :\Leftrightarrow \quad \text{entweder gibt es ein } j \in \underline{k} \text{ mit } j \leq l \text{ und } q_1 = r_1, q_2 = r_2, \dots, \\ q_{j-1} = r_{j-1}, q_j < r_j, \text{ oder } k < l \text{ und } q_1 = r_1, \dots, q_k = r_k.$$

1.1.2 Die innere Algebra \mathcal{P} der Permutationen

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen wir mit \mathcal{S}_n die Menge der Permutationen von \underline{n} . Dabei ist $\mathcal{S}_0 = \{\emptyset\}$. Für $\pi = \{(1, 1\pi), (2, 2\pi), \dots, (n, n\pi)\} \in \mathcal{S}_n$ schreiben wir in Wortnotation

$$\pi = 1\pi \, 2\pi \, 3\pi \dots n\pi.$$

Mit id_n bezeichnen wir die Identität in \mathcal{S}_n . Sei $\mathcal{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{S}_n$ und $\mathcal{P} := \langle \mathcal{S} \rangle_K$ ein Vektorraum mit Basis \mathcal{S} . Wir definieren für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ und alle $\alpha \in \mathcal{S}_n$ und $\beta \in \mathcal{S}_m$

$$\alpha * \beta := \begin{cases} \alpha\beta & , \text{ falls } m=n, \\ 0_{\mathcal{P}} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Durch bilineare Fortsetzung erhalten wir eine assoziative Algebra $(\mathcal{P}, +, *)$. Offensichtlich ist $K\mathcal{S}_n := \langle \mathcal{S}_n \rangle_K \leq_K \mathcal{P}$ ein Ideal von \mathcal{P} und $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} K\mathcal{S}_n$.

1.1.3 Poly-Aktion und assoziierte Worte

Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei $X^{(n)}$ die Menge aller $q \in X^*$ mit $\ell(q) = n$. Offenbar ist $X^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^{(n)}$ (disjunkte Vereinigung). Für jedes $q = q_1 \dots q_n \in X^{(n)}$ und $\sigma \in \mathcal{S}_n$ sei

$$(*) \quad \sigma q := q_{1\sigma} \dots q_{n\sigma}.$$

Dann gilt für alle $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$: $(\sigma\tau)q = \sigma(\tau q)$. Offenbar ist $id_n q = q$, also ist durch $(*)$ und lineare Fortsetzung eine Linksaktion von \mathcal{S}_n auf $KX^{(n)}$ definiert – die *Poly-Aktion*.

Wir nennen $q, r \in X^{(n)}$ *assoziiert* ($q \approx r$), wenn es $\sigma \in \mathcal{S}_n$ mit $\sigma q = r$ gibt.
Ist $q \models n$, so sei

$$q^? := \frac{n!}{\#C_q},$$

wobei C_q die Konjugiertenklasse von \mathcal{S}_n ist, deren Elemente eine zu q assoziierte Zykelpartition besitzen.

1.1.4 Das Konvolutionsprodukt auf \mathcal{P} und die Bialgebra $(\mathcal{P}, \star, \downarrow)$

Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ und $n := k + l$. Für $\alpha \in \mathcal{S}_k$ und $\beta \in \mathcal{S}_l$ definieren wir $\alpha \# \beta$ durch

$$i(\alpha \# \beta) := \begin{cases} i\alpha & , \text{ falls } i \in \underline{k}, \\ (i - k)\beta + k & , \text{ falls } i \in \underline{l} \setminus \underline{k}. \end{cases}$$

So ist beispielsweise

$$21 \# 231 = 21453.$$

Es sei

$$(2) \quad \Xi^{k,l} := \sum \{ \sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma|_{\underline{k}} \text{ und } \sigma|_{\underline{l}+k} \text{ sind monoton wachsend} \},$$

zum Beispiel:

$$\begin{aligned} \Xi^{2,3} &= 12345 + 13245 + 14235 + 15234 + 23145 \\ &\quad + 24135 + 25134 + 34125 + 35124 + 45123. \end{aligned}$$

Durch

$$\alpha \star \beta := (\alpha \# \beta) * \Xi^{k,l}$$

und bilineare Fortsetzung erhalten wir das *Konvolutionsprodukt* \star auf \mathcal{P} . Auch für die Verknüpfung \star geben wir ein Beispiel:

$$\begin{aligned} 21 \star 231 &= 21453 * \Xi^{2,3} \\ &= 21453 + 31452 + 41352 + 51342 + 32451 \\ &\quad + 42351 + 52341 + 43251 + 53241 + 54231. \end{aligned}$$

$(\mathcal{P}, +, \star)$ ist eine unitäre assoziative Algebra mit der leeren Abbildung $\emptyset \in \mathcal{S}_0$ als Einselement.

Wir definieren nun ein Coprodukt auf \mathcal{P} . Sei dazu $n \in \mathbb{N}_0$ und $\pi \in \mathcal{S}_n$. Mit

$$\pi \downarrow := \sum_{k \in \underline{n}_0} \alpha_k \otimes \beta_k$$

erhalten wir nach linearer Fortsetzung die Coalgebra $(\mathcal{P}, +, \downarrow)$. Dabei sind $\alpha_k \in \mathcal{S}_k$ und $\beta_k \in \mathcal{S}_{n-k}$ eindeutig bestimmt durch die Bedingungen

$$\forall i, j \in \underline{k} \quad i\alpha_k^{-1} < j\alpha_k^{-1} \Leftrightarrow i\pi^{-1} < j\pi^{-1}$$

und

$$\forall i, j \in \underline{n} \setminus \underline{k} \quad i\beta_k^{-1} < j\beta_k^{-1} \Leftrightarrow i\pi^{-1} < j\pi^{-1}.$$

Es gilt für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{P}$

$$(\alpha \star \beta) \downarrow = \alpha \downarrow \star_{\otimes} \beta \downarrow,$$

d.h. $(\mathcal{P}, +, \star, \downarrow)$ ist eine Bialgebra, wie in [MR95] und in [Jöl99] gezeigt wird.

Zur Verdeutlichung der Wirkung von \downarrow sehen wir uns ein Beispiel an. Es ist

$$3142 \downarrow = \emptyset \otimes 3142 + 1 \otimes 231 + 12 \otimes 12 + 312 \otimes 1 + 3142 \otimes \emptyset.$$

1.1.5 Solomons Algebra

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach (2)

$$\Xi^n = id_n;$$

wir setzen für alle $q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*$

$$\Xi^q := \Xi^{q_1} \star \dots \star \Xi^{q_k} \in K\mathcal{S}_{\text{sum } q}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathcal{D}_n := \langle \Xi^q \mid q \models n \rangle_K.$$

Nach [Sol76] ist \mathcal{D}_n eine Teilalgebra der Gruppenalgebra KS_n . Wir nennen \mathcal{D}_n daher die *Solomon-Algebra*. Offenbar enthält \mathcal{D}_n die Identität $id_n = \Xi^n$.

Bekanntlich ist $\{\Xi^q \mid q \models n\}$ eine Basis von \mathcal{D}_n .

Setzt man

$$\mathcal{D} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}_n,$$

so ist \mathcal{D} eine Teilalgebra von $(\mathcal{P}, +, \star)$ und $\{\Xi^q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$ eine Basis von \mathcal{D} .

Für alle $q, r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Xi^q \star \Xi^r = \Xi^{q \cdot r},$$

d.h. \mathcal{D} ist auch eine Teilalgebra von $(\mathcal{P}, +, \star)$. Als Algebra ist $(\mathcal{D}, +, \star)$ isomorph zu $(K\mathbb{N}^*, +, \cdot)$, und $\{\Xi^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist ein freies Erzeugendensystem der freien assoziativen Algebra $(\mathcal{D}, +, \star)$.

Es gilt der folgende

1.1.1 Satz (Multiplikatives Reziprozitätsgesetz). *Für alle $x, y, z \in \mathcal{D}$ gilt*

$$(x \star y) \star z = ((x \otimes y) \star_{\otimes} z \downarrow) \mu_{\star},$$

wobei $\mu_{\star} : \mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ die Linearisierung des Konvolutionsproduktes sei.

Dieses multiplikative Reziprozitätsgesetz (siehe [GKL⁺]), welches man als eine Art Distributivgesetz auffassen kann, stellt eine Verbindung zwischen innerem Produkt und Konvolutionsprodukt in \mathcal{D} her. Es gilt auch allgemeiner, was wir in unserem Zusammenhang aber nicht benötigen werden.

1.2 Exponentialfunktion und Logarithmus über \mathbb{N}_0 -gradierten Algebren

Ein K -Vektorraum A heißt \mathbb{N}_0 -gradiert, wenn $A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n$ direkte Summe von Unterräumen A_n ist. Wir setzen

$$\hat{A} := \prod_{n=0}^{\infty} A_n$$

als das kartesische Produkt der Unterräume A_n und betrachten A in naheliegender Weise als Teilraum von \hat{A} . Für alle $0_{\hat{A}} \neq S = (s_0, s_1, \dots) \in \hat{A}$ mit $s_n \in A_n$ bezeichne $p_n(S) := s_n$ die n -te *homogene Komponente* von S . Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist also p_n die Projektion von \hat{A} auf die n -te *homogene Komponente* A_n .

Wir nennen $G(S) := \min\{n \mid s_n \neq 0_A\}$ das *Gewicht* von S und setzen

$$|S| := e^{-G(S)}.$$

Außerdem sei $|0_{\hat{A}}| := 0$ und für alle $S, T \in \hat{A}$

$$d(S, T) := |S - T|.$$

1.2.1 Proposition. (\hat{A}, d) ist ein vollständiger metrischer Vektorraum. Für alle $S, T \in \hat{A}$ gilt die ultrametrische Ungleichung

$$|S + T| \leq \max\{|S|, |T|\}.$$

Ist $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \hat{A}$ eine Nullfolge, so ist $\sum_{i \geq 1} i\varphi$ konvergent. Mit der Konvention $A \leq \hat{A}$ ist A dicht in \hat{A} , und für jedes $S = (s_1, s_2, \dots) \in \hat{A}$ ist

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i.$$

Ist darüber hinaus A eine Algebra mit der Eigenschaft, daß für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$$

ist, so nennen wir A eine \mathbb{N}_0 -gradierte Algebra. Besitzt A ein Einselement 1_A , so ist $1_A \in A_0$. Die Multiplikation auf A läßt sich als Cauchy-Produkt zu einer Multiplikation auf \hat{A} fortsetzen. Man setze nämlich für alle $S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ und $T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i$

$$S \cdot T := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n s_i \cdot t_{n-i} \right).$$

Dabei ist dann $p_n(S \cdot T) = \sum_{i=0}^n s_i \cdot t_{n-i} \in A_n$ und

$$(3) \quad G(S \cdot T) \geq G(S) + G(T), \quad \text{also auch } |S \cdot T| \leq |S| \cdot |T|,$$

wie man sich leicht überlegt. Mit diesem Produkt ist \widehat{A} eine unitäre Algebra mit Einselement 1_A und A eine Teilalgebra. \widehat{A} wird *Magnus-Algebra* genannt, siehe etwa [Bou].

Sei $B = \bigoplus_{n=0}^{\infty} B_n$ ein weiterer \mathbb{N}_0 -graduierter Vektorraum. Eine Abbildung $\alpha : A \rightarrow B$ heißt *homogen*, wenn $A_n \alpha \subseteq B_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Jede solche homogene Abbildung besitzt genau eine stetige Fortsetzung $\widehat{\alpha} : \widehat{A} \rightarrow \widehat{B}$. Für alle $S = \sum_{i=0}^{\infty} s_i$ mit $s_i \in A_i$ ist

$$S\widehat{\alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \alpha.$$

Ist α linear bzw. ein Algebrenhomomorphismus, so ist auch $\widehat{\alpha}$ linear bzw. ein Algebrenhomomorphismus. Ein wichtiger Spezialfall ist

$$A \otimes A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\bigoplus_{i=0}^n A_i \otimes A_{n-i} \right).$$

Wir setzen

$$\mathcal{A}_n := \bigoplus_{i=0}^n A_i \otimes A_{n-i}.$$

Es ist dann $\mathcal{A}_n \otimes \mathcal{A}_m \subseteq \mathcal{A}_{n+m}$, also $A \otimes A$ ein \mathbb{N}_0 -graduierter Vektorraum. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathfrak{A} := \widehat{A \otimes A} = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n.$$

In der Tat ist $\widehat{\mathcal{A}} \otimes \widehat{\mathcal{A}}$ bis auf Isomorphie ein Untervektorraum von \mathfrak{A} . Zum Beweis definieren wir eine Abbildung von $\widehat{A} \times \widehat{A}$ in \mathfrak{A} durch

$$(S, T) \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n s_i \otimes t_{n-i} \right)$$

für alle $S = \sum_i s_i$ und $T = \sum_i t_i$ aus \mathfrak{A} mit $s_i, t_i \in A_i$. Diese Abbildung ist bilinear, läßt sich also über das Tensorprodukt linearisieren. Die Abbildung

$$(4) \quad S \otimes T \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n s_i \otimes t_{n-i} \right)$$

ist linear, aber auch injektiv, wie wir jetzt zeigen wollen. Seien dazu $\{S_1, \dots, S_k\}$ und $\{T_1, \dots, T_l\}$ linear unabhängige Teilmengen von \widehat{A} . Zu zeigen ist, daß $\{S_i \otimes T_j \mid 1 \leq k, 1 \leq l\}$ eine linear unabhängige Teilmenge von \mathfrak{A} ist. Für alle n ist

$$\widehat{A} = \bigoplus_{i=0}^n A_i \oplus \prod_{i \geq n+1} A_i,$$

und dabei $\bigoplus_{i=0}^n A_i \subseteq A$. Ist $S = \sum_i s_i \in \widehat{A}$, so ist entsprechend

$$S = \sum_{i=0}^n s_i + \sum_{i \geq n+1} s_i.$$

Zur Abkürzung setzen wir $S^a(n) := \sum_{i=0}^n s_i$. Da S_1, S_2, \dots, S_n aus \widehat{A} linear unabhängig sind, gibt es ein m derart, daß $S_1^a(m), S_2^a(m), \dots, S_n^a(m) \in A$ linear unabhängig sind. Da auch T_1, T_2, \dots, T_l linear unabhängig sind, kann man m so wählen, daß auch noch $T_1^a(m), T_2^a(m), \dots, T_l^a(m) \in A$ linear unabhängig sind. Dann ist aber auch die Teilmenge $\{S_i^a(m) \otimes T_j^a(m) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l\}$ von $A \otimes A \subseteq \mathfrak{A}$ linear unabhängig, woraus die Behauptung folgt.

Ist A außerdem eine unitäre Algebra, so besitzt \mathfrak{A} Teilalgebren isomorph zu \widehat{A} , die linear disjunkt sind, deren Produkt also ein Tensorprodukt von \widehat{A} mit sich selbst ist. Dazu setzen wir für $S = \sum_i s_i \in \widehat{A}$ mit $s_i \in A_i$

$$S \bullet 1_A := \sum_i (s_i \otimes 1_A) \in \mathfrak{A}.$$

Es ist also $S \bullet 1_A$ das Bild von $S \otimes 1_A \in \widehat{A} \otimes 1_A$ unter (4). Die Abbildung $\widehat{A} \rightarrow \mathfrak{A}$, $S \mapsto S \bullet 1_A$ ist eine injektive lineare Abbildung, deren Bild wir mit $\widehat{A} \bullet 1_A$ bezeichnen. Analog definieren wir $1_A \bullet \widehat{A}$. Dann ist $K1_{\mathfrak{A}} = 1_A \otimes 1_A$ der Durchschnitt dieser beiden Unterräume von \mathfrak{A} . Ist $T = \sum_i t_i \in \widehat{A}$ ein weiteres Element von \widehat{A} , so ist

$$\begin{aligned} (S \bullet 1_A) \cdot (1_A \bullet T) &= \left(\sum_i (s_i \otimes 1_A) \right) \cdot \left(\sum_i (1_A \otimes t_i) \right) \\ &= \sum_n \left(\sum_{i=0}^n s_i \otimes t_{n-i} \right) \\ &= \left(\sum_i (1_A \otimes t_i) \right) \cdot \left(\sum_i (s_i \otimes 1_A) \right) \\ &= (T \bullet 1_A) \cdot (S \bullet 1_A). \end{aligned}$$

Wie oben (siehe (4)) gezeigt, ist die Abbildung $S \otimes T \mapsto \sum_{i,j} s_i \otimes t_j$ eine lineare Einbettung von $\widehat{A} \otimes \widehat{A}$ in \mathfrak{A} . Die Bilder von $\widehat{A} \otimes 1_A$ und $1_A \otimes \widehat{A}$ sind elementweise vertauschbar. Daher können wir die von den Teilalgebren $\widehat{A} \bullet 1_A$ und $1_A \bullet \widehat{A}$ erzeugte Teilalgebra von \mathfrak{A} mit dem Tensorprodukt $\widehat{A} \otimes \widehat{A}$ identifizieren. Statt $(S \bullet 1_A) \cdot (1_A \bullet T)$ schreiben wir einfach $S \otimes T$.² In diesem Sinne ist nun

$$S \otimes T = \left(\sum_i (s_i \otimes 1_A) \right) \cdot \left(\sum_i (1_A \otimes t_i) \right) = \sum_n \left(\sum_{j=0}^n s_j \otimes t_{n-j} \right)$$

²I.a. ist $\mathfrak{A} := \widehat{\widehat{A} \otimes \widehat{A}}$ nicht gleich $\widehat{A} \otimes \widehat{A}$. Man nennt $\mathfrak{A} := \widehat{\widehat{A} \otimes \widehat{A}}$ auch das komplettierte Tensorprodukt und schreibt $\widehat{\widehat{A} \otimes \widehat{A}}$.

oder kurz

$$\left(\sum_i s_i \right) \otimes \left(\sum_j t_j \right) = \sum_{i,j} (s_i \otimes t_j).$$

1.2.2 Definition. Sei $S \in \hat{A}$ mit $G(S) \geq 1$. Wegen (3) ist $G(S^n) \geq n$, insbesondere $(S^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge und für beliebige Koeffizienten $a_n \in K$ die Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n S^n$ konvergent. Wir setzen

$$\exp(S) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!} \quad \text{und} \quad \log(1_A + S) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} S^n.$$

Man rechnet wie üblich nach

$$(5) \quad \log(\exp S) = S \quad \text{und} \quad \exp(\log(1_A + S)) = 1_A + S.$$

1.2.3 Bemerkung. Seien $S, T \in \hat{A}$ mit $G(S) \geq 1 \leq G(T)$, also $S, T \in \text{Kern}(p_0)$. Sind S und T vertauschbar, so gelten die **Additionstheoreme**

$$\begin{aligned} \exp(S + T) &= \exp S \cdot \exp T \\ \log((1_A + S) \cdot (1_A + T)) &= \log(1_A + S) + \log(1_A + T). \end{aligned}$$

1.2.1 Die Summengradierung in KX^*

Bezeichnen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Z_n^X das K -lineare Erzeugnis aller Zerlegungen von n mit Buchstaben aus X , also

$$Z_n^X := \langle q \in X^* \mid q \models n \rangle_K,$$

so ist mit $Z_0^X := \langle 1_{X^*} \rangle_K$

$$KX^* = \bigoplus_{n \geq 0} Z_n^X.$$

Offenbar ist für alle $k, l \in \mathbb{N}_0$

$$Z_k^X \cdot Z_l^X \subseteq Z_{k+l}^X,$$

also KX^* eine \mathbb{N}_0 -gradierte Algebra. Dies ist die *Summengradierung* oder *Zerlegungsgradierung*; es gibt daneben auch die *Längengradierung* (über die Länge der Worte), die wir aber nicht betrachten werden.

Wir bemerken noch:

$$\forall n \in X \quad Z_n^X = Z_n^{\mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus X \quad Z_n^X \subset Z_n^{\mathbb{N}}.$$

Es ist allgemein für jedes $L = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \in \text{Kern } p_0$ mit $\lambda_n \in Z_n^X$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(L)^{\cdot n} = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}^* \\ \ell(q) = n}} \lambda_q,$$

wie man sich leicht überlegt, und somit

$$\exp(L) = \sum_{q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\ell(q)!} \lambda_q = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}^* \\ q \models n}} \frac{1}{\ell(q)!} \lambda_q,$$

also

$$(6) \quad p_n(\exp(L)) = \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}^* \\ q \models n}} \frac{1}{\ell(q)!} \lambda_q$$

– dabei sei $\lambda_q := \lambda_{q_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{q_k} (\in Z_n^X)$ für alle $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_k \in \mathbb{N}^*$, sowie

$$(7) \quad \log(1_{X^*} + L) = \sum_{n \geq 1} \sum_{\substack{q \in \mathbb{N}^* \\ q \models n}} \frac{(-1)^{\ell(q)-1}}{\ell(q)} \lambda_q.$$

Speziell für

$$N_X := \sum_{n \in X} n = \begin{cases} \sum_{n=1}^m n \in KX^* & , \text{ falls } X = \underline{m}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n \in \widehat{KX^*} & , \text{ falls } X = \mathbb{N}. \end{cases}$$

ist

$$(8) \quad (N_X)^{\cdot n} = \sum_{\substack{q \in X^* \\ \ell(q)=n}} q,$$

also

$$(9) \quad \exp(N_X) = \sum_{n \geq 0} \frac{(N_X)^{\cdot n}}{n!} = \sum_{q \in X^*} \frac{q}{\ell(q)!} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models n}} \frac{q}{\ell(q)!} \right),$$

sowie

$$(10) \quad \log(1_{X^*} + N_X) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (N_X)^{\cdot n} = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models n}} \frac{(-1)^{\ell(q)-1}}{\ell(q)} q \right).$$

1.3 \mathbb{N}_0 -gradierte Bialgebren

Sei $(A, +, \cdot)$ eine unitäre \mathbb{N}_0 -gradierte K -Algebra und $\delta : A \rightarrow A \otimes A$ ein homogener, unitärer Algebrenhomomorphismus, also $(A, +, \cdot, \delta)$ eine Bialgebra. Dann ist $\widehat{\delta} : \widehat{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ zwar ein Algebrenhomomorphismus, aber \widehat{A} mit $\widehat{\delta}$ i.a. keine Bialgebra, weil das Bild von $\widehat{\delta}$ nicht unbedingt in $\widehat{A} \otimes \widehat{A}$ enthalten ist. Ein Element $a \in A$ heißt *primitiv bezüglich δ* , wenn

$$a\delta = a \otimes 1_A + 1_A \otimes a$$

ist. Setzt man $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$ für alle $a, b \in A$, so ist A mit dieser Verknüpfung eine Lie-Algebra. Man rechnet nach, daß $[a, b]\delta = [a\delta, b\delta]_{\mathfrak{A}}$ ist, wobei $[\ , \]_{\mathfrak{A}}$ die Lie-Multiplikation in \mathfrak{A} bezeichnet. Nun folgt leicht, daß $\mathcal{L}_\delta := \{x \in A \mid x \text{ primitiv bzgl. } \delta\}$ eine Teilalgebra von $(A, [\ , \])$ ist. Da δ homogen ist, ist ein Element $a \in A$ genau dann primitiv, wenn seine homogenen Komponenten primitiv sind. Insbesondere ist \mathcal{L}_δ ein homogener Teilraum von A , d.h. es gilt mit $\mathcal{L}_{\delta,n} := \mathcal{L}_\delta \cap A_n$

$$\mathcal{L}_\delta = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{L}_{\delta,n}.$$

(Da 1_{X^*} nicht δ -primitiv ist, ist $\mathcal{L}_{\delta,0} = \{0_{KX^*}\}$.) Wir können $\widehat{\mathcal{L}}_\delta = \prod_{n \geq 0} \mathcal{L}_{\delta,n}$ als Lie-Teilalgebra von $(\widehat{A}, [\ , \]_{\widehat{A}})$ ansehen, wobei analog $[\ , \]_{\widehat{A}}$ das Lie-Produkt in \widehat{A} bezeichnet.

1.3.1 Proposition (vgl. [Reu], Theorem 3.1). *Sei $S \in \widehat{A}$. Es sind äquivalent*

$$(i) \ S \in \widehat{\mathcal{L}}_\delta$$

$$(ii) \ S\widehat{\delta} = S \otimes 1_A + 1_A \otimes S.$$

Beweis: Sei $S = \sum_i s_i$ mit $s_i \in A_i$. Dann ist $S\widehat{\delta} = \sum_i s_i \delta$. Gilt (i), so folgt

$$\begin{aligned} S\widehat{\delta} &= \sum_i s_i \otimes 1_A + \sum_i 1_A \otimes s_i \\ &= \left(\sum_i s_i \right) \otimes 1_A + 1_A \otimes \left(\sum_i s_i \right) \\ &= S \otimes 1_A + 1_A \otimes S. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgt wegen $s_i \delta \in A_i \otimes 1_A + \bigoplus_{j=1}^{i-1} A_j \otimes A_{i-j} + 1_A \otimes A_i$ aus (ii), daß $s_i \delta \in A_i \otimes 1_A + 1_A \otimes A_i$ ist, also (i). \square

1.3.2 Satz (vgl. [Reu], Theorem 3.2). *Sei $S \in \widehat{A}$. Es sind äquivalent:*

$$(i) \ S \in \widehat{\mathcal{L}}_\delta;$$

$$(ii) \ p_0(S) = 0 \text{ und } \exp(S)\widehat{\delta} = \exp(S) \otimes \exp(S).$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} (\exp S) \otimes (\exp S) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{S^k}{k!} \otimes \frac{S^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S^k \otimes S^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (S \otimes 1_A + 1_A \otimes S)^n. \end{aligned}$$

Da $\widehat{\delta}$ ein stetiger Algebrenhomomorphismus ist, folgt

$$(\exp S)\widehat{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S\widehat{\delta})^n}{n!}.$$

Ist $S \in \widehat{\mathcal{L}}_{\delta}$, so folgt (ii) mit 1.3.1.

Gilt umgekehrt (ii), so folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S\widehat{\delta})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (S \otimes 1_A + 1_A \otimes S)^n,$$

d.h. $\exp(S\widehat{\delta}) = \exp(S \otimes 1_A + 1_A \otimes S)$.³ Die Anwendung von \log und erneut 1.3.1 liefern (i). \square

1.3.1 Zwei Bialgebrenstrukturen auf KX^*

Wegen der Freiheit von KX^* gibt es einen eindeutig bestimmten Algebrenhomomorphismus $\delta_X : KX^* \rightarrow KX^* \otimes KX^*$ derart, daß die Buchstaben primitiv bezüglich δ_X sind:

$$n\delta_X = n \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes n \quad \text{für alle } n \in X.$$

Nach den Sätzen von Friedrichs und Witt ist die Menge $\mathcal{L}_{\delta_X} := \{x \in KX^* \mid x \text{ ist } \delta_X\text{-primitiv}\}$ die von X frei erzeugte freie Lie-Algebra und KX^* ihre assoziative Einhüllende.

Auf diese natürliche Weise ist KX^* mit Konkatenation und dem Coprodukt δ_X eine (\mathbb{N}_0 -gradierte) Bialgebra.

Diese Bialgebrenstruktur gibt es in jeder freien assoziativen Algebra, unabhängig vom Alphabet. Ist das Alphabet wie in unserem Falle abzählbar, so können wir ein Coprodukt $\kappa_X : KX^* \rightarrow KX^* \otimes KX^*$ wie folgt definieren:

$$n\kappa_X := n \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes n + \sum_{i=1}^{n-1} i \otimes (n-i)$$

für alle $n \in X$ und Fortsetzung zu einem Algebrenhomomorphismus. Wir schreiben abkürzend auch

$$n\kappa_X = \sum_{i=0}^n i \otimes (n-i)$$

mit der Konvention, für 0 stets 1_{X^*} zu nehmen.

Mit κ_X und Konkatenation ist KX^* auch eine (\mathbb{N}_0 -gradierte) Bialgebra.

Wir werden zeigen, daß die beiden Bialgebren $(KX^*, \text{conc}, \delta_X)$ und $(KX^*, \text{conc}, \kappa_X)$ isomorph sind.

³Es sei angemerkt, daß auch $\widehat{A \otimes A}$ eine \mathbb{N}_0 -gradierte Algebra ist.

1.3.3 Beispiel.

$$\begin{aligned}
(2.3)\kappa_X &= (2\kappa_X).(3\kappa_X) \\
&= (2 \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes 2 + 1 \otimes 1).(3 \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes 3 + 1 \otimes 2 + 2 \otimes 1) \\
&= 2.3 \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes 2.3 + 2 \otimes 3 + 2.1 \otimes 2 + 2.2 \otimes 1 + 3 \otimes 2 \\
&\quad + 1 \otimes 2.2 + 2 \otimes 2.1 + 1.3 \otimes 1 + 1 \otimes 1.3 + 1.1 \otimes 1.2 + 1.2 \otimes 1.1.
\end{aligned}$$

1.3.4 Definition. Ein m -Tupel $\xi : \underline{m} \rightarrow K\underline{m}^*$ bzw. eine Folge $\xi : \mathbb{N} \rightarrow K\mathbb{N}^*$ nennen wir κ_X -Tupel bzw. κ_X -Folge ('series of divided powers'), wenn

$$\xi_n \kappa_X = \sum_{i=0}^n \xi_i \otimes \xi_{n-i}$$

für alle $n \in X$ ist.

Bereits bei P. Cartier in [Car56] zu finden ist der folgende

1.3.5 Satz (Campbell-Hausdorff-Gruppe). $1_{X^*} + \text{Kern } p_0$ ist eine Gruppe bzgl. conc und $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ eine Untergruppe dieser Gruppe.

$(1_{X^*} + \text{Kern } p_0, \text{conc})$ heißt Magnus-Gruppe (siehe [Bou]), und wir nennen $(\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}), \text{conc})$ die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X .

Beweis: Sei $S \in \text{Kern } p_0$. Es ist dann $(S^n)_n$ eine Nullfolge, also die alternierende geometrische Reihe $T := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n S^n$ konvergent und $(1_{X^*} + S).T = T.(1_{X^*} + S) = 1_{X^*}$. Da offenbar $1_{X^*} + \text{Kern } p_0$ eine Halbgruppe und $1_{X^*} \in 1_{X^*} + \text{Kern } p_0$ ist, folgt die erste Behauptung.

Weiter ist $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}) \subseteq 1_{X^*} + \text{Kern } p_0$. Nach 1.3.2 ist $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ die Menge aller $S \in 1_{X^*} + \text{Kern } p_0$ mit der Eigenschaft

$$S\widehat{\delta_X} = S \otimes S.$$

Es ist $1_{\widehat{KX^*}}\widehat{\delta_X} = 1_{X^*}\widehat{\delta_X} = 1_{X^*} \otimes 1_{X^*} = 1_{\widehat{KX^*}} \otimes 1_{\widehat{KX^*}}$, also $1_{X^*} \in \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$. Die Menge $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ ist multiplikativ abgeschlossen:

$$(S.T)\delta_X = S\delta_X \cdot_{\otimes} T\delta_X = (S \otimes S) \cdot_{\otimes} (T \otimes T) = S.T \otimes S.T.$$

Ist $X \in 1_{X^*} + \text{Kern } p_0$ invertierbar, so ist auch $X \otimes X$ invertierbar und $(X \otimes X)^{\otimes(-1)} = X^{\cdot(-1)} \otimes X^{\cdot(-1)}$. Es folgt auch die zweite Behauptung. (Siehe [Reu], vor Cor. 3.3 und Cor. 3.3) \square

1.4 κ_X -Endomorphismen und resistente Buchstaben

Ein Algebrenendomorphismus η von KX^* heißt *Bialgebrenendomorphismus bezüglich κ_X* oder kurz κ_X -Endomorphismus, wenn das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} KX^* & \xrightarrow{\kappa_X} & KX^* \otimes KX^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \otimes \eta \\ KX^* & \xrightarrow{\kappa_X} & KX^* \otimes KX^* \end{array}$$

Ein Algebrenhomomorphismus von KX^* in $KX^* \otimes KX^*$ ist durch seine Einschränkung auf X vollkommen bestimmt. Daher ist η genau dann ein κ_X -Endomorphismus, wenn

$$n\eta\kappa_X = n\kappa_X(\eta \otimes \eta) \quad \text{für alle } n \in X$$

gilt. Offenbar ist die Identität $\text{id}_X := \text{id}_{KX^*}$ auf KX^* ein κ_X -Endomorphismus. Umgekehrt läßt sich jedes m -Tupel bzw. jede Folge $\xi : X \rightarrow KX^*$, $n \mapsto \xi_n$, eindeutig zu einem Algebrenendomorphismus ξ^{KX^*} von KX^* fortsetzen. Diese Fortsetzung ist also genau dann ein κ_X -Endomorphismus, wenn für alle $n \in X$ gilt:

$$\xi_n \kappa_X = \sum_{i=0}^n \xi_i \otimes \xi_{n-i},$$

wenn also ξ ein κ_X -Tupel bzw. eine κ_X -Folge ist.

Sei $\eta : KX^* \rightarrow KX^*$ eine Abbildung. Wir nennen $q \in X^*$ *η -resistent*, wenn der Koeffizient von q in $q\eta$ verschieden von 0_K ist. Offenbar gilt für alle $r, s \in X^*$

$$r.s \text{ ist } \eta\text{-resistent} \quad \Leftrightarrow \quad r, s \text{ sind } \eta\text{-resistent}.$$

Insbesondere ist $q \in X$ genau dann η -resistent, wenn alle Buchstaben von q η -resistent sind. Schließlich nennen wir η *harmlos*, wenn alle $n \in X$ entweder η -resistent sind oder im Kern von η liegen. Ein einfaches Dreiecks-Argument zeigt

1.4.1 Bemerkung. Ist $\eta : KX^* \rightarrow KX^*$ ein homogener, harmloser κ_X -Endomorphismus, so ist $\{q\eta \mid q \text{ ist } \eta\text{-resistent}\}$ eine Basis von $\text{Bild } \eta$.

1.4.2 Definition und Bemerkung. Wir bezeichnen die Menge aller η -resistenten Buchstaben $n \in X$ mit X_η . Ein homogener κ_X -Endomorphismus η heiße *r-homogen*, wenn gilt:

$$\{q\eta \mid q \in X^*, q \text{ } \eta\text{-resistent}\} \text{ ist eine Basis von } \text{Bild } \eta.$$

Man beachte dabei: 1_{X^*} ist η -resistent, denn 1_{X^*} besitzt keine Buchstaben. Harmlose κ_X -Endomorphismen etwa sind r-homogen wie auch derjenige unitäre Algebren-Endomorphismus ε_X von KX^* , der durch $n \mapsto 0_{KX^*}$ für alle $n \in X$ gegeben ist.

Erneut mit einem einfachen Dreiecks-Argument überlegt man sich für jeden homogenen κ_X -Endomorphismus η leicht:

1.4.3 Bemerkung. Ist $X_\eta = X$, so ist η bijektiv.

Kapitel 2

Über die Struktur der Campbell-Hausdorff-Gruppe

Wir geben hier zunächst den Isomorphismus Φ_X zwischen den Bialgebren $(KX^*, \text{conc}, \kappa_X)$ und $(KX^*, \text{conc}, \delta_X)$ an.

Sei \mathcal{H}_{κ_X} die Menge aller zerlegungshomogenen unitären Bialgebren-Endomorphismen von KX^* bezüglich κ_X . Wir definieren mit κ_X und conc eine Verknüpfung \diamond auf \mathcal{H}_{κ_X} . Daß durch \diamond eine Gruppenstruktur auf \mathcal{H}_{κ_X} gegeben ist, zeigen wir indirekt mit einem Epimorphismus von der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf \mathcal{H}_{κ_X} . Der Bialgebren-Isomorphismus Φ_X von $(KX^*, \text{conc}, \kappa_X)$ auf $(KX^*, \text{conc}, \delta_X)$ spielt eine wichtige Rolle dabei.

Im Falle eines abzählbar unendlichen Alphabetes X ist der Gruppen-Epimorphismus auch injektiv und somit $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ eine alternative Realisierung der Campbell-Hausdorff-Gruppe. Ist das Alphabet X endlich, so können wir, wieder mit Hilfe von Φ_X , einen Monomorphismus von \mathcal{H}_{κ_X} in die Campbell-Hausdorff-Gruppe angeben. Insgesamt erscheint \mathcal{H}_{κ_X} als Unter- und als Faktorgruppe von $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$. Darüber hinaus aber liefert uns $\Phi_{\mathbb{N}}$ auch einen Gruppen-Monomorphismus von $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ für jedes *endliche* Alphabet X in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$. Daher ermöglicht die Untersuchung von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ ebenfalls Einsicht in die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf endlichen Alphabeten. Wir betrachten allgemein die Struktur von \mathcal{H}_{κ_X} , insbesondere also die von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$, führen den Schritt zu den Campbell-Hausdorff-Gruppen auf endlichen Alphabeten aber nicht mehr explizit durch.

Mit der Hintereinanderausführung HEA haben wir eine weitere Verknüpfung auf \mathcal{H}_{κ_X} . Diese Multiplikation macht \mathcal{H}_{κ_X} zusammen mit der (nicht-abelschen) Addition \diamond zu einem Rechts-Fastring. Nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen der Fastring-Theorie zeigen wir, daß \mathcal{H}_{κ_X} für Alphabete mit mindestens drei Buchstaben *kein* Ring ist: Das Links-Distributivgesetz gilt hier nicht, wie wir an einem Beispiel sehen. Ist jedoch $\#X = 2$, so ist \mathcal{H}_{κ_X} ein Ring, nämlich isomorph zu $K \times K$ (mit komponentenweiser Addition und Multiplikation).

Betrachten wir die Abbildung $c : \mathcal{H}_{\kappa_X} \longrightarrow K$, die jedem Endomorphismus $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ für jeden Buchstaben $n \in X$ dessen Koeffizienten ηc_n im Bild unter η zuordnet, so handelt es sich hierbei um einen Fastring-Homomorphismus, und die Faktorstruktur von \mathcal{H}_{κ_X} modulo dem Kern dieser Abbildung \mathcal{K}_X dieser Abbildung ist isomorph zum m -fachen kartesischen Produkt des Körpers K bzw. zum Ring der Folgen $K^{\mathbb{N}}$, somit ein Jacobson-halbeinfacher Integritätsbereich.

Die sich kanonisch ergebenden Repräsentanten der Restklassen von \mathcal{K}_X sind sämtlich r -homogen⁴ und somit Vertreter der Klasse von κ_X -Endomorphismen, für die wir im dritten Kapitel dieser Arbeit für den Fall $X = \mathbb{N}$ die Struktur der zugehörigen Linksideale in Solomons Algebra weitgehend aufklären.

Unter diesen Repräsentanten finden wir eine Menge von einseitig orthogonalen Idempotenten des Fastrings \mathcal{H}_{κ_X} .

Wir geben ferner eine absteigende Zentralreihe (bezüglich \oplus) an, die zugleich eine absteigende Kette von Fastring-Idealen von \mathcal{H}_{κ_X} ist, deren sukzessive Faktoren sämtlich Ringe sind, und betrachten kurz die Struktur dieser Ringe. Die Ergebnisse fassen wir zusammen im Hauptsatz 2.4.24 (S. 42).

Beginnen wir mit der Bialgebren-Isomorphie.

2.0.4 Proposition. *Sei $\xi : X \rightarrow KX^*$ ein m -Tupel bzw. eine Folge und $S := 1_{X^*} + \sum_{n \in X} \xi_n \in \widehat{KX^*}$. Es sind äquivalent:*

(i) ξ ist ein κ_X -Tupel bzw. eine κ_X -Folge;

(ii) $S\widehat{\kappa_X} = S \otimes S$.⁵

Beweis: Es ist mit der Konvention $\xi_0 := 1_{X^*}$

$$S\widehat{\kappa_X} = \sum_{n \in X \cup \{0\}} \xi_n \kappa_X \quad \text{und} \quad S \otimes S = \sum_{k, l \in X \cup \{0\}} \xi_k \otimes \xi_l = \sum_{n \in X \cup \{0\}} \left(\sum_{k=0}^n \xi_k \otimes \xi_{n-k} \right).$$

Also ist $S\widehat{\kappa_X} = S \otimes S$ genau dann, wenn $\xi_n \kappa_X = \sum_{k=0}^n \xi_k \otimes \xi_{n-k}$ für alle $n \in X$ ist, denn κ_X ist homogen. \square

Man überlegt sich leicht:

$$(11) \quad (1_{X^*} + N_X)\widehat{\kappa_X} = (1_{X^*} + N_X) \otimes (1_{X^*} + N_X)$$

⁴D.h., die Bilder der resistenten Buchstaben erzeugen das ganze Bild des Endomorphismus.

⁵Elemente S der Kompletierung einer \mathbb{N}_0 -gradierten Bialgebra (A, δ) mit der Eigenschaft $S\widehat{\delta} = S \otimes S$ werden in der Literatur δ -grouplike genannt.

2.0.5 Satz. $(KX^*, \text{conc}, \delta_X)$ und $(KX^*, \text{conc}, \kappa_X)$ sind als Bialgebren isomorph.

Beweis: Wir setzen

$$y_j := p_j(\exp(N_X)) = \sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models j}} \frac{1}{\ell(q)!} q \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen (5) ist für alle $n \in X$

$$(*) \quad n = \sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models n}} \frac{(-1)^{\ell(q)-1}}{\ell(q)} y_q,$$

wobei wie üblich $y_q := y_{q_1} \cdot \dots \cdot y_{q_k}$ gesetzt sei für $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_k$. Daraus folgt, daß $\{y_n \mid n \in X\}$ ein freies Erzeugendensystem von KX^* ist – denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens so viele y_q 's wie q 's in Z_n^X , und $\{y_q \mid q \in X^*, q \models n\}$ spannt Z_n^X auf.

Wegen $X \subseteq \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ ist $N_X \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$, nach 1.3.2 daher

$$\sum_{j=0}^{\infty} y_j \delta_X = \exp(N_X) \widehat{\delta_X} = \exp(N_X) \otimes \exp(N_X) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^j y_i \otimes y_{j-i} \right),$$

also insbesondere

$$(**) \quad \left(\sum_{j \in X \cup \{0\}} y_j \right) \widehat{\delta_X} = \sum_{j \in X \cup \{0\}} \left(\sum_{i=0}^j y_i \otimes y_{j-i} \right).$$

Wegen (11) wird durch

$$\Phi_X : j \mapsto y_j \quad \text{für alle } j \in X, \quad \text{also} \quad (1_{X^*} + N_X) \widehat{\Phi_X} = \sum_{j \in X \cup \{0\}} y_j,$$

ein homogener Algebrenautomorphismus definiert mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} (1_{X^*} + N_X) \widehat{\kappa_X} \widehat{\Phi_X} \otimes \widehat{\Phi_X} &= ((1_{X^*} + N_X) \otimes (1_{X^*} + N_X)) \widehat{\Phi_X \otimes \Phi_X} \\ &= \sum_{n \in X \cup \{0\}} \left(\sum_{i=0}^n i \Phi_X \otimes (n-i) \Phi_X \right) \\ &\stackrel{(**)}{=} (1_{X^*} + N_X) \widehat{\Phi_X} \widehat{\delta_X}, \end{aligned}$$

also $n \kappa_X(\Phi_X \otimes \Phi_X) = n \Phi_X \delta_X$ für alle $n \in X$. Daraus folgt

$$(12) \quad \kappa_X(\Phi_X \otimes \Phi_X) = \Phi_X \delta_X.$$

□

Eine einfache Folgerung aus (12) ist

$$(13) \quad \widehat{\kappa_X}(\widehat{\Phi_X} \otimes \widehat{\Phi_X}) = \widehat{\Phi_X} \widehat{\delta_X}.$$

Es ist $\mathcal{L}_{\kappa_X} \Phi_X = \mathcal{L}_{\delta_X}$, wie man sich schnell überlegt. Wir halten außerdem fest:

$$(14) \quad n\Phi_X^{-1} = \sum_{\substack{q \in X^* \\ q \neq n}} \frac{(-1)^{\ell(q)-1}}{\ell(q)} q = p_n(\log(1_{X^*} + N_X)) \quad \text{für alle } n \in X.$$

Dies folgt leicht mit (*) im vorigen Beweis und der Tatsache, daß Φ_X ein *Algebren*-Homomorphismus ist.

2.1 Die Verknüpfung \diamond auf \mathcal{H}_{κ_X} und ein Monomorphismus in die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X

2.1.1 Definition. Wir bezeichnen die Menge aller unitären homogenen κ_X -Endomorphismen von KX^* mit \mathcal{H}_{κ_X} , also

$$\mathcal{H}_{\kappa_X} := \{ \eta \in \text{End}(KX^*, +, \text{conc}) \mid 1_{X^*} \eta = 1_{X^*}, \forall n \in \mathbb{N} \ Z_n^X \eta \subseteq Z_n^X, \eta \kappa_X = \kappa_X(\eta \otimes \eta) \}.$$

Mit $\alpha \diamond \beta$ bezeichnen wir für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ die eindeutige Fortsetzung von

$$(\kappa_X(\alpha \otimes \beta) \text{conc})|_X$$

zu einem unitären Algebrenendomorphismus bezüglich Konkatination. Es ist also für alle $n \in X$

$$n(\alpha \diamond \beta) = n\alpha + n\beta + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha.(n-i)\beta,$$

wofür wir abkürzend

$$n(\alpha \diamond \beta) = \sum_{i=0}^n i\alpha.(n-i)\beta$$

schreiben wollen mit der folgenden Konvention: $0\eta := 1_{X^*}$ für alle $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Offenbar ist $\alpha \diamond \beta$ zerlegungshomogen.

Wir bezeichnen mit ε_X den eindeutig bestimmten unitären Algebren-Endomorphismus von KX^* mit $n\varepsilon_X = 0_{KX^*}$ für alle $n \in X$. Es ist $\varepsilon_X \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ und offenbar neutrales Element bezüglich \diamond .

2.1.2 Beispiel. Seien η_1 und ι die durch

$$n\eta_1 := \frac{1}{n!} \cdot 1.^n \quad \text{und} \quad n\iota := (-1)^n n$$

gegebenen κ_X -Endomorphismen (siehe (38) und (40)). Es ist

$$\begin{aligned}
2.3(\eta_1 \diamond \iota) &= (2\eta_1 + 2\iota + (1\eta_1).(1\iota)) \cdot (3\eta_1 + 3\iota + (1\eta_1).(2\iota) + (2\eta_1).(1\iota)) \\
&= \left(\frac{1}{2} 1.1 + 2 - 1.1\right) \cdot \left(\frac{1}{6} 1.1.1 - 3 + 1.2 - \frac{1}{2} 1.1.1\right) \\
&= \left(2 - \frac{1}{2} 1.1\right) \cdot \left(-3 + 1.2 - \frac{1}{3} 1.1.1\right) \\
&= -2.3 + 2.1.2 - \frac{1}{3} 2.1.1.1 + \frac{1}{2} 1.1.3 - \frac{1}{2} 1.1.1.2 + \frac{1}{6} 1.1.1.1.1.
\end{aligned}$$

Wir werden nun zeigen, daß $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ eine Gruppe mit neutralem Element ε_X ist.

2.1.3 Bemerkung. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ gilt:

$$1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha \diamond \beta} = (1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}).(1_{X^*} + N_X \widehat{\beta}).^6$$

Sind α, β vertauschbar, so sind auch $1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}$ und $1_{X^*} + N_X \widehat{\beta}$ vertauschbar.

Beweis: Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$.

$$\begin{aligned}
1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha \diamond \beta} &= 1_{X^*} + \sum_{n \in X} n(\alpha \diamond \beta) \\
&= 1_{X^*} + \sum_{n \in X} n\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc} \\
&= 1_{X^*} + \sum_{n \in X} \left(1_{X^*}.n\beta + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha.(n-i)\beta + n\alpha.1_{X^*}\right) \\
&= (1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}).(1_{X^*} + N_X \widehat{\beta}).
\end{aligned}$$

□

2.1.4 Bemerkung und Definition. Für jedes Element der komplettierten freien Lie-Algebra $\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ über X , etwa $L = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ mit $\lambda_n \in Z_n^X$, bezeichnen wir mit η_L die eindeutig bestimmte Fortsetzung von

$$n \mapsto p_n(\exp(L)\widehat{\Phi_X}^{-1}) = p_n(\exp(L))\Phi_X^{-1} = p_n(\exp(L\widehat{\Phi_X}^{-1})) \quad \text{für alle } n \in X$$

zu einem unitären Algebrenendomorphismus von KX^* . Offenbar ist η_L homogen.⁷

Es ist nach (6)

$$p_n(\exp(L)) = \sum_{\substack{q \models n \\ q \in \mathbb{N}^*}} \frac{1}{\ell(q)!} \lambda_q,$$

⁶Man kann die Verknüpfung \diamond auch so definieren: Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ sei $\alpha \diamond \beta$ derjenige homogene unitäre Endomorphismus von $(KX^*, +, \text{conc})$, der durch $n \mapsto p_n((1_{X^*} + N_X^\alpha).(1_{X^*} + N_X^\beta))$ gegeben ist. Folgerung: $(\alpha \diamond \beta)|_X = (\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc})|_X$.

⁷Wegen $\widehat{\mathcal{L}_{\kappa_X}}\widehat{\Phi_X} = \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ kann man alternativ auch mit einem Element aus $\widehat{\mathcal{L}_{\kappa_X}}$ beginnen. Mit diesen Elementen läßt sich leichter rechnen, da der Isomorphismus $\widehat{\Phi_X}^{-1}$ nicht mehr angewendet werden muß, doch kennen wir \mathcal{L}_{κ_X} bei weitem nicht so gut wie \mathcal{L}_{δ_X} .

und da $\lambda_q \in Z_n^X$ Linearkombination von Worten $r \in X^*$ mit $r \leq_{lex} q$ ist, ist der Koeffizient von n in $p_n(\exp L)$ gleich dem Koeffizienten von n in $\lambda'_n = p_n(L)$.

Und für jeden homogenen κ_X -Endomorphismus α sei

$$L_\alpha := \log(1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}) \widehat{\Phi_X}.$$

Es ist η_L ein κ_X -Endomorphismus und $L_\alpha \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$: Sei $L \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$. Dann ist nach (13) und 1.3.2

$$\exp(L) \widehat{\Phi_X}^{-1} \widehat{\kappa_X} = \exp(L) \widehat{\Phi_X}^{-1} \otimes \exp(L) \widehat{\Phi_X}^{-1}.$$

Da $(n\eta)_{n \in X}$ also ein κ_X -Tupel bzw. eine κ_X -Folge ist, folgt mit 2.0.4: $\eta_L \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$.

Sei nun $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Die zuvor zitierten Sätze liefern uns auch die zweite Behauptung, denn mit $S := (1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}) \widehat{\Phi_X}$ ist $S \widehat{\delta_X} = S \otimes S$, da $(1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha})$ ein κ_X -Tupel bzw. eine κ_X -Folge ist. Ergo: $S \in \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$, somit $L_\alpha \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$.

2.1.5 Satz. Die Abbildung

$$H_X : \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\kappa_X}, S \mapsto \eta(\log S),$$

ist ein Homomorphismus bezüglich conc und \oplus und surjektiv auf \mathcal{H}_{κ_X} . Die Abbildung

$$\Lambda_X : \mathcal{H}_{\kappa_X} \longrightarrow \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}), \alpha \mapsto \exp(L_\alpha),$$

ist ein Monomorphismus bezüglich \oplus und conc .⁸

Beweis: Seien $S, T \in \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$. Für alle $n \in X$ ist

$$n(\eta(\log S) \oplus \eta(\log T)) = \sum_{i=0}^n i \eta(\log S) \cdot (n-i) \eta(\log T)$$

⁸Wir können den Monomorphismus Λ_X zerlegen in vertraute Abbildungen. Dazu definieren wir auf $\widehat{KX^*}$ die $*$ -Verknüpfung wie folgt: Für alle $S, T \in \widehat{KX^*}$ sei

$$S * T := S + T + S.T.$$

Mit 2.1.3 erhält man nach distributivem Ausmultiplizieren für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$

$$N_X \widehat{\alpha} \oplus \widehat{\beta} = N_X \widehat{\alpha} + N_X \widehat{\beta} + (N_X \widehat{\alpha}) \cdot (N_X \widehat{\beta}).$$

Also ist die Abbildung $\alpha \mapsto N_X \widehat{\alpha}$ ein Monomorphismus von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ in $(\widehat{KX^*}, *)$. Da $\widehat{KX^*}$ unitär ist, ist $(\widehat{KX^*}, *)$ isomorph zu $(\widehat{KX^*}, \text{conc})$ – via $S \mapsto 1_{X^*} + S$. Zusammen erhalten wir einen Monomorphismus von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ in die Magnus-Gruppe $(1_{X^*} + \text{Kern } p_0, \text{conc})$. Zudem ist $1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}$, wie wir wissen, invertierbar in $(\widehat{KX^*}, \text{conc})$ – also $N_X \widehat{\alpha}$ quasiregulär. Genauer gesagt also ist die Abbildung $\alpha \mapsto N_X \widehat{\alpha}$ ein Monomorphismus von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ in die Einheitengruppe $Q(\widehat{KX^*})$ bezüglich $*$.

Das anschließende Anwenden des Algebren-Isomorphismus $\widehat{\Phi_X}$ überführt die nun erhaltene Untergruppe der Magnus-Gruppe in die Campbell-Hausdorff-Gruppe: Denn $\widehat{\Phi_X}$ macht Elemente $S \in \widehat{KX^*}$ mit der Eigenschaft $S \widehat{\delta_X} = S \otimes S$ zu Elementen mit der Eigenschaft $S \widehat{\delta_X} = S \otimes S$.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n p_i(\widehat{S\Phi_X^{-1}}) \cdot p_{n-i}(\widehat{T\Phi_X^{-1}}) \\
&= \left(\sum_{i=0}^n p_i(S) \cdot p_{n-i}(T) \right) \Phi_X^{-1} \\
&= p_n(S.T) \Phi_X^{-1} \\
&= n\eta(\log(S.T)) ,
\end{aligned}$$

also $(S.T)H_X = (S H_X) \diamond (T H_X)$. Da für jedes $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$, wie wir bereits am Ende von 2.1.4 gezeigt haben, $L_\alpha \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ ist und für alle $n \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
n\eta_{L_\alpha} &= p_n(\exp(L_\alpha) \widehat{\Phi_X}^{-1}) \\
&= p_n(\exp(\log(1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}) \widehat{\Phi_X}) \widehat{\Phi_X}^{-1}) \\
&= p_n(\exp(\log(1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}))) \\
&= p_n(1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}) \\
&= n\alpha ,
\end{aligned}$$

ist H_X surjektiv auf \mathcal{H}_{κ_X} .

Die Injektivität von Λ_X ist offensichtlich, da Φ_X eine Bijektion ist und ein κ_X -Endomorphismus durch die Bilder aller Buchstaben aus X eindeutig bestimmt ist. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ gilt nach 2.1.3

$$\begin{aligned}
\exp(L_{\alpha \diamond \beta}) &= (1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha \diamond \beta}) \widehat{\Phi_X} \\
&= ((1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha}) \cdot (1_{X^*} + N_X \widehat{\beta})) \widehat{\Phi_X} \\
&= (\exp L_\alpha) \cdot (\exp L_\beta) ,
\end{aligned}$$

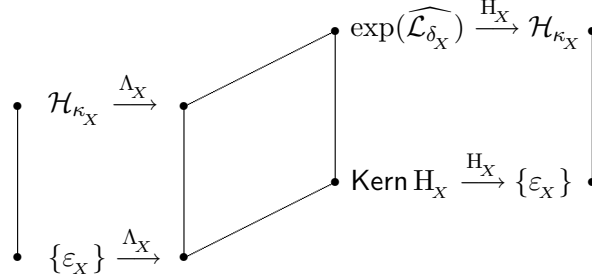
also

$$(\alpha \diamond \beta) \Lambda_X = (\alpha \Lambda_X) \cdot (\beta \Lambda_X) .$$

□

2.1.6 Korollar. $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ ist eine Gruppe, da isomorph zu einer Untergruppe der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X . Zugleich ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ isomorph zu einer Faktorgruppe der Campbell-Hausdorff-Gruppe: \mathcal{H}_{κ_X} „komplementiert“ Kern H_X in $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$. □

Die Situation stellt sich im Hasse-Diagramm wie folgt dar:



Im Beweis von 2.1.5 haben wir bereits gezeigt:

$$\forall \alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X} \quad \eta_{L\alpha} = \alpha,$$

d.h. $\Lambda_X H_X = id_{\mathcal{H}_{\kappa_X}}$. Andersherum ist die Lage wie folgt:

2.1.7 Satz. *Es gilt*

$$\forall S \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}} \quad L_{\eta_S} = S \quad \Leftrightarrow \quad X = \mathbb{N}.$$

D.h.: Genau im Fall $X = \mathbb{N}$ ist der Monomorphismus Λ_X surjektiv auf die Campbell-Hausdorff-Gruppe, der Epimorphismus H_X injektiv und beide Abbildungen zueinander inverse Isomorphismen: $H_X \Lambda_X = id_{\mathcal{H}_{\kappa_X}}$.

Noch einmal anders: Genau für $X = \mathbb{N}$ ist \mathcal{H}_{κ_X} isomorph zur Campbell-Hausdorff-Gruppe.

Beweis: Genau im Falle $X \neq \mathbb{N}$ gibt es $S, T \in \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ mit den Eigenschaften $p_n(S) = p_n(T)$ für alle $n \in X$ und $S \neq T$. Es gilt dann

$$n\eta_{(\log S)} = p_n(S)\Phi_X^{-1} = p_n(T)\Phi_X^{-1} = n\eta_{(\log T)}$$

für alle $n \in X$, also $\eta_{(\log S)} = S H_X = T H_X = \eta_{(\log T)}$. Der Rest ist klar. □

Da wir indirekt bewiesen haben, daß $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ eine Gruppe ist, wissen wir also, daß jedes $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ invertierbar ist. Wir kennen aber noch nicht die konkrete Gestalt der inversen Elemente. Diese geben wir jetzt an:

2.1.8 Satz und Notation. *Sei $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Es ist durch*

$$n \mapsto \sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models n}} (-1)^{\ell(q)} q\alpha$$

das Inverse von α in \mathcal{H}_{κ_X} gegeben, welches wir mit $\diamond\alpha$ bezeichnen wollen. Wir schreiben kurz $\alpha \diamond \beta$ statt $\alpha \diamond (\diamond\beta)$.

Beweis: Nach 1.3.5 ist $1_{X^*} + N_X \hat{\alpha}$ invertierbar in $\widehat{KX^*}$ und

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n (N_X \hat{\alpha})^n = \sum_{(8) \atop q \in X^*} (-1)^{\ell(q)} q \alpha = \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models n}} (-1)^{\ell(q)} q \alpha$$

das Inverse von $1_{X^*} + N_X \hat{\alpha}$. Mit 2.1.3 folgt die Behauptung. \square

2.1.9 Bemerkung. Sind α, β vertauschbare homogene κ_X -Endomorphismen, so ist

$$L_{\alpha \Phi \beta} = L_{\alpha} + L_{\beta}.$$

Dies folgt unmittelbar mit 2.1.3, und 1.2.3.

2.1.10 Bemerkung. Sei $S = \sum_{n \geq 1} s_n \in \widehat{KX^*}$ mit $s_n \in Z_n^X$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Isomorphismus $\widehat{\Phi_X}^{-1}$ ändert für jedes $n \in X$ den Koeffizienten von n in s_n nicht: Der Koeffizient von n in s_n ist gleich dem Koeffizienten von n in $s_n \Phi_X^{-1}$:

Nach (14) ist für $s_n = \sum_{(q \in X^*, q \models n)} a_q q$ mit geeigneten $a_q \in K$

$$s_n \Phi_X^{-1} = \sum_{\substack{q \in X^* \\ q \models n}} a_q \sum_{r^{[1]} \models q_1} \cdots \sum_{r^{[\ell(q)]} \models q_{\ell(q)}} \frac{(-1)^{\ell(r^{[1]}) + \cdots + \ell(r^{[\ell(q)]}) - \ell(q)}}{\ell(r^{[1]}) \cdots \ell(r^{[\ell(q)]})} r^{[1]} \cdots r^{[\ell(q)]}.$$

Man sieht nun sofort, daß a_n auch der Koeffizient von n in $p_n(S \widehat{\Phi_X}^{-1}) = s_n \Phi_X^{-1}$ ist.

Insgesamt gilt daher der

2.1.11 Satz. Zu jeder Teilmenge M von X gibt es einen homogenen κ_X -Endomorphismus, für den M genau die Menge aller resistenten Buchstaben ist. Ist andersherum $L \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$, so ist für jedes $n \in X$ der Koeffizient von n in $p_n(L)$ gleich dem Koeffizienten von n in n_{η_L} . Ist M die Menge aller $n \in X$, für die der Koeffizient von n in $p_n(L)$ ungleich 0 ist, so ist $M = X_{\eta_L} = \{n \in X \mid n \text{ ist } \eta_L\text{-resistent}\}$.

Beweis: Sei $M \subseteq X$. Dann ist $L := \sum M \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$, also $\eta_L \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ mit $\mathbb{N}_{\eta_L} = M$ nach 2.1.10 und 2.1.4. Ebenfalls deswegen gilt das über η_L , $L \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$, in der Behauptung Gesagte. \square

2.2 Die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X als Untergruppe von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$

Wir haben gezeigt, daß die Campbell-Hausdorff-Gruppe $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\mathbb{N}}}})$ via $H_{\mathbb{N}}$ isomorph zu $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ ist (siehe 2.1.7). Offenbar ist $\mathcal{L}_{\delta_X} \subseteq \mathcal{L}_{\delta_{\mathbb{N}}}$, also $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ eine Untergruppe von $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\mathbb{N}}}})$. Wir finden daher auch $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}})$ als Untergruppe in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$. Die Strukturanalyse von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ liefert uns – durch „Hineinschneiden“ – somit zugleich Einblick in die Struktur jeder Campbell-Hausdorff-Gruppe auf einem *endlichen* Alphabet.

Wir geben in diesem Abschnitt die Trägermenge der Campbell-Hausdorff-Gruppe auf X in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ an.

Mit $H_{\mathbb{N}}^{\underline{m}}$ bezeichnen wir die Einschränkung von $H_{\mathbb{N}}$ auf $\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\underline{m}}}})$. Die Abbildung $H_{\mathbb{N}}^{\underline{m}} : \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\underline{m}}}}) \rightarrow \mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ ist ein Monomorphismus bezüglich conc und \diamond , und $\text{Bild}(H_{\mathbb{N}}^{\underline{m}})$ eine Untergruppe von $(\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}, \diamond)$ – isomorph zur Campbell-Hausdorff-Gruppe auf \underline{m} .

2.2.1 Satz. *Es ist*

$$\text{Bild}(H_{\mathbb{N}}^{\underline{m}}) = \left\{ \eta \in \mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad n\eta \in Z_n^{\underline{m}} \right\},$$

d.h. $\text{Bild}(H_{\mathbb{N}}^{\underline{m}})$ ist genau die Menge aller $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismen, die jedes $n \in \mathbb{N}$ auf eine Linearkombination von Worten lediglich über dem Alphabet \underline{m} abbildet.

Beweis: Sei $L \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\underline{m}}}}$. Dann ist $(\exp L)H_{\mathbb{N}}^{\underline{m}} = (\exp L)H_{\mathbb{N}} = \eta_L$ nach Definition (2.1.4 und 2.1.5), sowie $n\eta_L = p_n(\exp L)\Phi_{\mathbb{N}}^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar ist $p_n(\exp L) \in Z_n^{\underline{m}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ – siehe (6). Aus (14) sieht man sofort: $n\Phi_{\mathbb{N}}^{-1} \in Z_n^{\underline{m}}$ für jedes $n \in \underline{m}$. Zusammen ergibt dies: $n\eta_L \in Z_n^{\underline{m}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Das zeigt die Inklusion „ \subseteq “.

Sei andersherum $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ dergestalt, daß $n\eta \in Z_n^{\underline{m}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist $\exp(L_{\eta})$ mit $L_{\eta} = \log(1_{\mathbb{N}^*} + N_{\mathbb{N}}\hat{\eta})\hat{\Phi}_{\mathbb{N}} \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\underline{m}}}}$ das eindeutig bestimmte Urbild von η unter $H_{\mathbb{N}}$, siehe wieder 2.1.4 und 2.1.5. Nach Wahl von η ist $\log(1_{\mathbb{N}^*} + N_{\mathbb{N}}\hat{\eta}) \in K_{\underline{m}}^*$. Da für jedes $n \in \underline{m}$ wieder $n\Phi_{\mathbb{N}} = \sum_{q \models n} \frac{1}{\ell(q)!} q \in Z_n^{\underline{m}}$ ist, erhalten wir zusammen: $L_{\eta} \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\underline{m}}}}$. Dies ist die Inklusion „ \supseteq “. \square

2.3 Der unitäre null-symmetrische Rechts-Fastring $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$

Wie wir zuvor gezeigt haben, ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ eine (nicht-abelsche) Gruppe mit neutralem Element ε_X . Später werden wir noch zeigen, daß $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \text{HEA})$ ein Monoid mit neutralem Element id_X ist und für \diamond und HEA das Rechts-Distributivgesetz gilt. Somit ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$ ein sogenannter *unitärer Rechts-Fastring*, der sogar *null-symmetrisch* ist, d.h.

$$\alpha \varepsilon_X = \varepsilon_X \alpha = \alpha \quad \text{für alle } \alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}.$$

Die zweite Gleichheit ist trivial, und für alle $n \in X$ ist $n\alpha \varepsilon_X \in Z_n^X \varepsilon_X = \{0_{KX^*}\}$.

2.3.1 Grundlegendes über Rechts-Fastringe

Wir werden nun kurz einige grundlegende Dinge aus der Theorie der Fastringe zusammenfassen. Das Folgende ist aus der Monographie [Pilz] entnommen. Wir verweisen für darüber Hinausgehendes auch auf [Clay].

2.3.1 Definition und Konvention. Eine Menge N mit zwei Verknüpfungen $+$ und \cdot , die die folgenden Eigenschaften

- (i) $(N, +)$ ist eine (nicht notwendig abelsche) Gruppe;
- (ii) (N, \cdot) ist eine Halbgruppe;
- (iii) es gilt das Rechts-Distributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$ für alle $a, b, c \in N$;

besitzt, nennen wir einen *Rechts-Fastring*. Das neutrale Element der Gruppe $(N, +)$ bezeichnen wir mit 0_N , das neutrale Element von (N, \cdot) mit 1_N , falls es existiert. Wenn wir im folgenden nur kurz von *Fastringen* sprechen, so meinen wir immer Rechts-Fastringe. Ein *unitärer* Fastring ist ein Fastring, dessen multiplikative Halbgruppe ein neutrales Element besitzt.

2.3.2 Bemerkung. Für alle $n, m \in N$ ist $0_N \cdot n = 0_N$ und

$$-(nm) = (-n)m,$$

wie man sich leicht überlegt. Jedoch gilt nicht unbedingt $n \cdot 0_N = 0_N$ und $-(nm) = n(-m)$!

2.3.3 Definition und Bemerkung. Die Menge

$$N_0 := \{n \in N \mid n \cdot 0_N = 0_N\}$$

heißt der *null-symmetrische Teil* von N , die Menge

$$N_c := N \cdot 0_N$$

der *konstante Teil* von N : Für jedes $n \in N_c$ ist $nm = n$ für alle $m \in N$, denn $nm = (n' \cdot 0_N)m = n'(0_N \cdot m) = n' \cdot 0_N = n$ mit geeignetem $n' \in N$.

Beide Mengen sind Teilfastringe von N , N_0 sogar ein Normalteiler von $(N, +)$: Die Gruppe $(N, +)$ ist semidirektes Produkt von $(N_0, +)$ mit $(N_c, +)$.

Ist $N_0 = N$, so heißt N *null-symmetrisch*.

Ein Teilfastring M von N heißt *invariant*, wenn $MN \subseteq M$ und $NM \subseteq M$ ist.

2.3.4 Definition und Bemerkung. Eine Teilmenge I von N heißt *(Fastring-)Ideal*⁹, wenn gilt:

- (i) $(I, +)$ ist ein Normalteiler von $(N, +)$;
- (ii) $IN \subseteq I$;
- (iii) für alle $x, y \in N$ und alle $a \in I$ ist $x(a + y) - xy \in I$, also $x(a + y) \equiv xy$ modulo I .

⁹Wir werden abweichend von der Literatur immer den Zusatz „Fastring-“ vor „Ideal“ schreiben, da in unserem Zusammenhang immer wieder auch Ringe als Teil- oder Faktor-Strukturen auftauchen.

Hat I nur die Eigenschaften (i) und (ii), so heißt I ein *Fastring-Rechtsideal*. I mit den Eigenschaften (i) und (iii) heißt *Fastring-Linksideal*.

Fastring-Ideale sind i.a. nicht genau die invarianten Teilfastringe. So ist etwa in jedem Fastring N der Teilfastring N_c invariant, denn

$$\begin{aligned} NN_c &= N(N \cdot 0_N) = (NN) \cdot 0_N \subseteq N \cdot 0_N = N_c \quad \text{und} \\ N_c N &= (N \cdot 0_N)N = N(0_N \cdot N) \subseteq N\{0_N\} = N \cdot 0_N = N_c; \end{aligned}$$

aber für nicht-abelsche Gruppen G ist die Menge der konstanten Abbildungen der Gruppe in sich selbst kein Normalteiler des Fastringes aller Abbildungen von G nach G (mit bildweiser Addition und Hintereinanderausführung). Es gilt jedoch der

2.3.5 Satz. *Ist N ein null-symmetrischer Fastring und I ein Fastring-Ideal von N , so ist $IN \subseteq I$ und $NI \subseteq I$.*

Beweis: Sei $a \in I$ und $n \in N$. Dann ist $na = n(a + 0_N) - n0_N \in I$. □

2.3.6 Bemerkung und Definition. Die Fastring-Ideale sind Teilfastringe und genau die Kerne von Fastring-Homomorphismen.

Seien N und N' Fastringe. Eine Abbildung $\varphi : N \longrightarrow N'$ heißt ein *Fastring-Homomorphismus*, wenn $(m + n)\varphi = m\varphi + n\varphi$ und $(mn)\varphi = m\varphi \cdot n\varphi$ für alle $m, n \in N$ ist. Homomorphie- und Isomorphiesätze gelten in gewohnter Weise auch für Fastringe.

Abschließend stellen wir noch fest:

2.3.7 Satz. *Sind I, J Ideale eines Fastringes N derart, daß N/I und N/J distributive, kommutative, abelsche Fastringe – also kommutative Ringe – sind, so ist auch $N/(I \cap J)$ ein kommutativer Ring.* □

2.3.8 Bemerkung. Sei N ein Fastring, und seien M, M' invariante Teilfastringe. Dann gilt: $MM' \subseteq M \cap M'$. Daher ist für zwei Ideale I und J eines null-symmetrischen Fastringes wie gewohnt $IJ \subseteq I \cap J$.

Auf jeden Fastring kann man \mathbb{Z} wirken lassen wie üblich:

$$\begin{aligned} 0 * n &:= 0_N, \\ k * n &:= (k - 1) * n + n = \underbrace{n + \cdots + n}_{k\text{-mal}} \quad \text{und} \\ (-k) * n &:= -(k * n) \end{aligned}$$

für alle $n \in N$ und $k \in \mathbb{N}$. Es gilt dann für alle $z \in \mathbb{Z}$

$$z * (mn) = (z * m)n,$$

jedoch i.a. *nicht*: $z * (mn) = m(z * n)$ oder $z * (m + n) = z * m + z * n$!
 Insbesondere ist für jede Links-Eins e von N

$$(15) \quad z * n = (z * e)n .$$

2.3.9 Bemerkung und Notation. Die Verknüpfung \diamond ist – wir gehen gleich genauer darauf ein – die (nicht-abelsche) Addition eines Fastringes. Wir verwenden daher additive Schreibweise für Inverse und werden von \diamond -*Vielfachen* statt von \diamond -*Potenzen* sprechen. Ganzzahlige Vielfache von κ_X -Endomorphismen in $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ wollen wir zusammen mit dem Verknüpfungssymbol notieren, wie wir es für Potenzen auch verabredet haben, und schreiben daher

$$(\diamond k)\alpha := \underbrace{\alpha \diamond \dots \diamond \alpha}_{k\text{-mal}} \quad \text{und} \quad (\diamond k)\alpha := (\diamond(-k))\alpha := \diamond((\diamond k)\alpha) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} .$$

Es ist also

$$n((\diamond k)\alpha) = \sum_{i=0}^n i((\diamond(k-1))\alpha).(n-i)\alpha .$$

2.3.2 \mathcal{H}_{κ_X} als Fastring

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Dann ist auch die Hintereinanderausführung (HEA) $\alpha\beta$ von α und β ein homogener κ_X -Endomorphismus:

$$\begin{aligned} \kappa_X(\alpha\beta \otimes \alpha\beta) &= \kappa_X((\alpha \otimes \alpha)(\beta \otimes \beta)) \\ &= (\kappa_X(\alpha \otimes \alpha))(\beta \otimes \beta) \\ &= (\alpha\kappa_X)(\beta \otimes \beta) \\ &= \alpha(\kappa_X(\beta \otimes \beta)) \\ &= \alpha(\beta\kappa_X) \\ &= (\alpha\beta)\kappa_X , \end{aligned}$$

da $\beta \otimes \beta$ ein Algebrenendomorphismus ist, und da $(KX^*, \text{conc}, \kappa_X)$ eine Bialgebra ist. Es gilt also der

2.3.10 Satz. $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \text{HEA})$ ist ein Monoid mit neutralem Element id_X – der Identität auf KX^* . □

2.3.11 Bemerkung. Für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ gilt das Rechts-Distributivgesetz:

$$(\alpha \diamond \beta)\gamma = (\alpha\gamma) \diamond (\beta\gamma) ,$$

denn: Für alle $n \in X$ ist

$$\begin{aligned}
 n(\alpha \diamond \beta)\gamma &= n(\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc})\gamma \\
 &= n\kappa_X((\alpha \otimes \beta)(\gamma \otimes \gamma))\text{conc} \\
 &= n\kappa_X((\alpha\gamma) \otimes (\beta\gamma))\text{conc} \\
 &= n((\alpha\gamma) \diamond (\beta\gamma)).
 \end{aligned}$$

Das Links-Distributivgesetz hingegen gilt i. a. nicht, sondern nur in einigen Spezialfällen. Wir geben zunächst ein Gegenbeispiel:

Sei $\#X \geq 3$, also nach unserer Verabredung $\mathfrak{Z} \subseteq X$, und seien φ, α die homogenen κ_X -Endomorphismen, die durch

$$n\varphi := \sum_{q \models n} (-1)^{n-\ell(q)} q$$

und

$$n\alpha := \sum_{i=0}^n (-1)^i i \cdot (n-i)$$

gegeben sind (siehe 4.2.2 und (39)). Wir zeigen:

$$(*) \quad \varphi(\alpha \diamond \text{id}_X) \neq \varphi\alpha \diamond \varphi.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
 1\varphi &= 1; \\
 2\varphi &= 1.1 - 2; \\
 3\varphi &= 3 - 1.2 - 2.1 + 1.1.1; \\
 1\alpha &= 0_{KX^*}; \\
 2\alpha &= 2 + 2 - 1.1; \\
 1(\alpha \diamond \text{id}_X) &= 1\alpha + 1 = 1; \\
 2(\alpha \diamond \text{id}_X) &= 2\alpha + 2 + 1\alpha.1 = 2\alpha + 2.
 \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
 3\varphi(\alpha \diamond \text{id}_X) &= 3(\alpha \diamond \text{id}_X) - (1.2)\alpha \diamond \text{id}_X - (2.1)\alpha \diamond \text{id}_X + (1.1.1)\alpha \diamond \text{id}_X \\
 &= 3\alpha + 3 + 2\alpha.1 - 1.(2\alpha + 2) - (2\alpha + 2).1 + 1.1.1 \\
 &= 3\alpha + 3 - 1.2 - 2.1 + 1.1.1 - 1.2\alpha
 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}
 3(\varphi\alpha \diamond \varphi) &= 3\varphi\alpha + 3\varphi + 1\varphi\alpha.2\varphi + 2\varphi\alpha.1\varphi \\
 &= 3\alpha + 3 - 1.2 - 2.1 + 1.1.1 + (1.1 - 2)\alpha.1 \\
 &= 3\alpha + 3 - 1.2 - 2.1 + 1.1.1 - 2\alpha.1;
 \end{aligned}$$

und es ist

$$1.2\alpha = 1.2 + 1.2 - 1.1.1 \neq 2.1 + 2.1 - 1.1.1 = 2\alpha.1.$$

Dies zeigt (*).

Im Falle eines zweielementigen Alphabets, also $X = \underline{2}$ nach unserer Konvention, ist die Gruppe $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ abelsch, und es gilt das Links-Distributivgesetz, d.h. $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$ ist ein Ring. Dies kann man nachrechnen, wir werden aber an späterer Stelle einen kurzen algebraischen Beweis geben.

Für spezielle Elemente gilt auch über größeren Alphabeten das Links-Distributivgesetz, wie wir nun kurz überlegen.

2.3.12 Satz. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ und alle $\gamma \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ mit der Eigenschaft $\text{Bild } \gamma \subseteq \langle X \rangle_K$ gilt:

$$\gamma(\alpha \diamond \beta) = (\gamma\alpha) \diamond (\gamma\beta).$$

Beweis: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$, und es gelte $\text{Bild } \gamma \subseteq \langle X \rangle_K$. Für alle $n \in X$ ist dann $n\gamma = k_n n$ mit geeignetem $k_n \in K$ und

$$\begin{aligned}
 n((\gamma\alpha) \diamond (\gamma\beta)) &= n\kappa_X(\gamma\alpha \otimes \gamma\beta)\text{conc} \\
 &= n(\kappa_X(\gamma \otimes \gamma))(\alpha \otimes \beta)\text{conc} \\
 &= n\gamma\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc} \\
 &= k_n n\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc} \\
 &= k_n n(\alpha \diamond \beta) \\
 &= n\gamma(\alpha \diamond \beta).
 \end{aligned}$$

Das zeigt wieder die Behauptung. □

Die Voraussetzung an γ in 2.3.12 bedeutet: γ ist sowohl zerlegungs- als auch längenhomogen, also im wesentlichen so gut wie id_X , denn $n\gamma = f_n n$, wobei $f = (f_n)_{n \in X} \in K^X$ ein m -Tupel bzw. eine Folge ist. Es ist jedoch keineswegs so, daß dieses Links-Distributivgesetz *ausschließlich* für γ mit $n\gamma = f_n n$ gilt, wie wir uns im folgenden kurz überlegen wollen.

Man sieht sofort, daß

$$n(\text{id}_X \diamond \text{id}_X) = n\kappa_X \text{conc}$$

ist. Diese Gleichheit gilt aber nicht nur für Buchstaben:

2.3.13 Satz. *Für alle $q \in X^*$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) $q(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) = q \kappa_X \text{ conc}$;
- (ii) q ist Konkatinationspotenz eines einzelnen Buchstaben:
 $q = n^{\cdot k}$ mit $n \in X$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Sei $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_k \in X^*$. Es gilt zum einen

$$\begin{aligned}
 q \kappa_X \text{ conc} &= (q_1 \kappa_X) \cdot_{\otimes} \dots \cdot_{\otimes} (q_k \kappa_X) \text{ conc} \\
 &= \left(\left(\sum_{i_1=0}^{q_1} i_1 \otimes (q_1 - i_1) \right) \cdot_{\otimes} \dots \cdot_{\otimes} \left(\sum_{i_k=0}^{q_k} i_k \otimes (q_k - i_k) \right) \right) \text{ conc} \\
 &= \sum_{i_1=0}^{q_1} \dots \sum_{i_k=0}^{q_k} i_1 \cdot \dots \cdot i_k \cdot (q_1 - i_1) \cdot \dots \cdot (q_k - i_k) =: (*)
 \end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}
 q(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) &= q_1(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) \cdot \dots \cdot q_k(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) \\
 &= (q_1 \kappa_X \text{ conc}) \cdot \dots \cdot (q_k \kappa_X \text{ conc}) \\
 &= \left(\sum_{j_1=0}^{q_1} j_1 \otimes (q_1 - j_1) \right) \cdot_{\otimes} \dots \cdot_{\otimes} \left(\sum_{j_k=0}^{q_k} j_k \otimes (q_k - j_k) \right) \\
 &= \sum_{j_1=0}^{q_1} \dots \sum_{j_k=0}^{q_k} j_1 \cdot (q_1 - j_1) \cdot j_2 \cdot (q_2 - j_2) \cdot \dots \cdot j_k \cdot (q_k - j_k) =: (**).
 \end{aligned}$$

Ist nun q eine Konkatinationspotenz eines einzelnen Buchstaben, etwa $q = n^{\cdot k}$, so ist offenbar $(*) = (**)$.

Sei q keine Konkatinationspotenz eines einzelnen Buchstaben. Dann gibt es ein $i \in \underline{k}$ derart, daß $q_i > q_j$ für alle $j \in \underline{k} \setminus \{i\}$ ist. Man kann sich nun leicht überlegen, daß es – im Falle $i \neq 1$ – in $(*)$ einen Summanden gibt, dessen i -ter Buchstabe gerade q_i ist. Jedoch ist q_i niemals i -ter Buchstabe eines Summanden in $(**)$: An i -ter Stelle stehen immer echt kleinere Buchstaben.

Im Falle $i = 1$ überlegt man sich solches für den zweiten Buchstaben aller Summanden beider Summen.

Es folgt $(*) \neq (**)$ und damit die Behauptung. \square

2.3.14 Korollar. *Ist $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ derart, daß $n\eta$ eine Linearkombination von Konkatinationspotenzen einzelner Buchstaben für alle $n \in X$ ist, so gilt*

$$\eta(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) = \eta \oplus \eta.$$

Beweis: Sei $n\eta = \sum_{q \models n} k_q q$ und $k_q \in K$ für jedes $n \in X$ höchstens für solche q verschieden von 0_K , die Potenzen einzelner Buchstaben sind. Mit 2.3.13 erhalten wir

$$\begin{aligned}
 n\eta(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) &= \sum_{q \models n} k_q q(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) \\
 &= \sum_{q \models n} k_q q \kappa_X \text{conc} \\
 &= n\eta \kappa_X \text{conc} \\
 &= n\kappa_X(\eta \otimes \eta) \text{conc} \\
 &= n(\eta \oplus \eta).
 \end{aligned}$$

□

Bezeichnen wir mit η_1 den homogenen κ_X -Endomorphismus, der durch $n \mapsto \frac{1}{n!} 1^n$ gegeben ist, so erfüllt η_1 die Voraussetzung von 2.3.14. Es ist also $\eta_1(\text{id}_X \oplus \text{id}_X) = \eta_1 \oplus \eta_1$, was man hier natürlich auch einfach nachrechnen kann.

Dieses Beispiel zeigt – wie 2.3.14 –, daß die Links-Distributivität nicht auf gleichzeitig längen- und zerlegungshomogene κ_X -Endomorphismen beschränkt ist. Gleichwohl dürfte es bei solchen sehr speziellen Ausnahmen bleiben. Dies ist zu vermuten, da in 2.3.14 mit $\text{id}_X \oplus \text{id}_X$ die gewissermaßen einfachste nicht-triviale \oplus -Summe schon eine starke Bedingung für den linken HEA-Faktor erfordert.

2.4 Über die Struktur des Fastringes $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus, \text{HEA})$

2.4.1 Die Fastring-Epimorphismen c_n und das Fastring-Ideal \mathcal{K}_X

Wir haben uns bisher nur dafür interessiert, ob der Koeffizient von $n \in X$ in $n\eta$, $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$, verschieden von 0_K ist oder nicht, also ob n ein η -resistenter Buchstabe ist oder nicht.

Nun sehen wir uns diesen Koeffizienten etwas genauer an und erhalten für jedes $n \in X$ einen Fastring-Epimorphismus auf den zugrundeliegenden Körper K . Die Kerne dieser Epimorphismen liefern eine Kette von Fastring-Idealen in \mathcal{H}_{κ_X} – also insbesondere eine Kette von Normalteilern in der Gruppe $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$. Der Durchschnitt über alle Kerne ist ein Fastring-Ideal von \mathcal{H}_{κ_X} , dessen Faktor-Fastring ein Jacobson-halbeinfacher Integritätsbereich ist: das m -fache kartesische Produkt des Körpers K bzw. den Ring aller Folgen $K^{\mathbb{N}}$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation.

2.4.1 Definition. Wir bezeichnen mit c_n für jedes $n \in X$ die Abbildung von \mathcal{H}_{κ_X} nach K , die jedem $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ den Koeffizienten von n in $n\eta$ zuordnet: $c_n : \mathcal{H}_{\kappa_X} \longrightarrow K, \eta \mapsto \eta c_n$.

2.4.2 Satz. Die Koeffizienten-Abbildungen c_n , $n \in X$, sind Fastring-Homomorphismen von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus, \text{HEA})$ in den Körper $(K, +, \cdot)$, die wegen $\text{id } c_n = 1_K$ auch unitär sind. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ ist also

$$(16) \quad (\alpha \oplus \beta) c_n = \alpha c_n + \beta c_n,$$

und

$$(17) \quad (\alpha\beta) c_n = (\alpha c_n)(\beta c_n).$$

Beweis: Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Für alle $n \in X$ ist $n(\alpha \oplus \beta) = n\alpha + n\beta + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha \cdot (n-i)\beta$. Für jedes $q \models n$ gibt es $a_q, b_q \in K$ so, daß $n\alpha = \sum_{q \models n} a_q q$ und $n\beta = \sum_{q \models n} b_q q$. Damit ist

$$n(\alpha \oplus \beta) = (a_n + b_n)n + \sum_{n \neq q \models n} (a_q + b_q)q + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha \cdot (n-i)\beta.$$

In den beiden hinteren Summen ist n jeweils kein Summand. $a_n + b_n$ ist also der Koeffizient von n in $n(\alpha \oplus \beta)$.

Für alle $n \in X$ ist

$$n(\alpha\beta) = a_n n\beta + \sum_{n \neq q \models n} a_q q\beta = a_n b_n n + \sum_{n \neq q \models n} c_q q$$

mit geeigneten $c_q \in K$ für alle $n \neq q \models n$ sei. In der hinteren Summe kommt n als Summand nicht mehr vor, d.h. $a_n b_n$ ist der Koeffizient von n in $n(\alpha\beta)$. \square

2.4.3 Korollar. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\text{Kern } c_n$ ein Fastring-Ideal von \mathcal{H}_{κ_X} und $\mathcal{H}_{\kappa_X} / \text{Kern } c_n$ ein nullteilerfreier, unitärer, distributiver, kommutativer und abelscher Fastring, also ein Integritätsbereich. Insbesondere ist $(\text{Kern } c_n, +)$ ein Normalteiler von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$. \square

Mehr noch: Für jedes $n \in X$ ist $\mathcal{H}_{\kappa_X} / \text{Kern } c_n$ ein Körper, wie man als Korollar zu 2.1.11 erhält:

2.4.4 Korollar. Sei $n \in \mathbb{N}$. Der Koeffizienten-Homomorphismus c_n ist surjektiv auf K .

Beweis: Sei $k \in K$. Wir setzen $L := k \cdot n$. Dann ist $L \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$, somit $\eta_L \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ nach 2.1.4 und $\eta_L c_n = k$ nach 2.1.11. \square

Wir fassen zusammen: Für alle $n, m \in X$ ist

- $\mathcal{H}_{\kappa_X} / \text{Kern } c_n \cong K$ (als Fastringe), $\mathcal{H}_{\kappa_X} / \text{Kern } c_n \cong K$ also ein Körper;
- $\text{Kern } c_n$ ein maximales Fastring-Ideal von \mathcal{H}_{κ_X} ;
- $\text{Kern } c_n$ ein maximales Fastring-Linksideal von \mathcal{H}_{κ_X} ;
- $\text{Kern } c_n \oplus \text{Kern } c_m = \mathcal{H}_{\kappa_X}$, sofern $n \neq m$ ist.

2.4.5 Definition. Wir setzen

$$\mathcal{K}_X := \{\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X} \mid X_\eta = \emptyset\} = \bigcap_{n \in X} \text{Kern } c_n$$

und bezeichnen mit c_X die Abbildung von \mathcal{H}_{κ_X} in die Menge K^X aller m -Tupel bzw. Folgen über K , die jedem $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ das Koeffizienten-Tupel bzw. die Koeffizienten-Folge $(\alpha c_n)_{n \in X}$ zuordnet.

2.4.6 Satz. *Die Abbildung*

$$c_X : \mathcal{H}_{\kappa_X} \longrightarrow K^X, \alpha \mapsto (X \longrightarrow K, n \mapsto \alpha c_n),$$

ist ein unitärer Fastring-Epimorphismus von \mathcal{H}_{κ_X} auf den Ring K^X (wie üblich mit bildweiser Addition und Multiplikation) mit \mathcal{K}_X als Kern. Daher ist $\mathcal{H}_{\kappa_X}/\mathcal{K}_X$ ein Jacobson-halbeinfacher kommutativer unitärer Ring.

Beweis: Wegen 2.4.2 ist c_X ein Fastring-Homomorphismus; offenbar ist $\text{Kern } c_X = \mathcal{K}_X$ und c_X unitär. Auch ist c_X surjektiv: Sei $f = (f_n)_{n \in X} \in K^X$. Es ist $L_f := \sum_{n \in X} f_n \cdot n \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ (da $X \subset \mathcal{L}_{\delta_X}$) und somit nach 2.1.11 $\eta_{L_f} \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ und

$$\eta_{L_f} c_n = f_n$$

für alle $n \in X$, also $\eta_{L_f} c_X = f$. □

2.4.7 Bemerkung. Die Elemente $\alpha \in \mathcal{K}_X$ besitzen folgende Eigenschaft

$$\forall n \in X \exists k \in \mathbb{N} \quad n \alpha^k = 0_K,$$

denn da kein Buchstabe resistant ist, wird jedes $q \models n$ durch α auf eine Linearkombination echter Zerlegungen von n abgebildet. D.h. alle vorkommenden Buchstaben sind lexikographisch echt kleiner als n . Also ist spätestens $n \alpha^n = 0_K$.

Ist X endlich, nach unserer Verabredung also $X = \underline{m}$, so ist spätestens $\alpha^m = \varepsilon_X = 0_{\mathcal{H}_{\kappa_X}}$ – kurz: α ist nilpotent.

Ist $X = \mathbb{N}$ so können wir immerhin folgendes sagen:

Die Elemente aus $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ sind eingeschränkt auf jede homogene Komponente $Z_n^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$, nilpotent. Wir nennen solche Elemente *nil-konvergent*.

Der einzige zugleich nilpotente (bzw. nil-konvergente) und r -homogene κ_X -Endomorphismus ist ε_X .

2.4.8 Bemerkung. Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Für alle $n \in X$ ist der Koeffizient von n in $n(\alpha \diamond \beta)$ gleich der Summe des Koeffizienten von n in $n\alpha$ und in $n\beta$ nach (16), somit

$$X_{\alpha \diamond \beta} \subseteq X_\alpha \cup X_\beta.$$

Insbesondere ist $((\oplus k)\alpha)c_n = k \cdot (\alpha c_n)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$; es gilt daher für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$(18) \quad X_{(\oplus k)\eta} = X_\eta.$$

Außerdem wissen wir nach (17)

$$X_{\alpha\beta} = X_\alpha \cap X_\beta,$$

insbesondere für alle $m \in \mathbb{N}$

$$X_{\alpha^m} = X_\alpha.$$

Die letzte Zeile der vorigen Bemerkung zeigt sofort: Jedes nilpotente Element des Fastringes \mathcal{H}_{κ_X} liegt in \mathcal{K}_X . Wir erhalten zusammen mit 2.4.7:

2.4.9 Korollar. \mathcal{K}_X ist genau die Menge aller nilpotenten Elemente, falls X endlich ist, bzw. genau die Menge aller nil-konvergenten Elemente von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus, \text{HEA})$, falls X unendlich ist. \square

Wir verabreden abkürzend noch für jedes $f \in K^X$ – der Menge aller Abbildungen von X nach K –

$$\eta_f := \eta_{L_f},$$

dabei L_f wie im Beweis von 2.4.6, und überlegen uns folgendes:

2.4.10 Satz. Für jedes $f \in K^X$ ist η_f r -homogen.

Beweis: Sei $f \in K^X$. Ist $f = 0_{K^X}$, so ist $\eta_f = \varepsilon_X$, also r -homogen. Sei $f \neq 0_{K^X}$. Für alle $n \in X$ ist nach (6), nach Definition von η_f und wegen $X_{\eta_f} = \{n \in X \mid f_n \neq 0_K\}$

$$(19) \quad n\eta_f = \sum_{\substack{q \in (X_{\eta_f})^* \\ q \models n}} \frac{f_q}{\ell(q)!} q\Phi_X^{-1},$$

wobei $f_q := \prod_{i \in \underline{k}} f_{q_i} \in K$ für jedes $q = q_1 \dots q_i \in X^*$ sei. (f besitzt eine eindeutig bestimmte Fortsetzung zu einem Monoid-Homomorphismus von (X^*, conc) in (K, \cdot) , den wir also ebenfalls mit f bezeichnen.)

Wir zeigen:

$$(*) \quad \forall n \in X_{\eta_f} \quad n\Phi_X^{-1} \in \left\langle r\eta_f \mid r \in (X_{\eta_f})^*, q \models n \right\rangle_K$$

– durch Induktion über die Elemente von X_{η_f} .

Offenbar ist $X_{\eta_f} \neq \emptyset$. Sei $\tilde{m} := \min X_{\eta_f}$. Dann ist $\tilde{m}\eta_f = f_{\tilde{m}} \cdot \tilde{m}\Phi_X^{-1}$, also

$$\tilde{m}\Phi_X^{-1} = (f_{\tilde{m}})^{-1} \cdot \tilde{m}\eta_f.$$

Sei nun $n \in X_{\eta_f}$, und für alle $n' \in X_{\eta_f}$, $n' < n$, sei $n'\Phi_X^{-1} \in \langle r\eta_f \mid r \in (X_{\eta_f})^*, q \models n' \rangle_K$. Es ist

$$n\eta_f = \sum_{\substack{q \in (X_{\eta_f})^* \\ q \models n}} \frac{f_q}{\ell(q)!} q\Phi_X^{-1} = f_n \cdot n\Phi_X^{-1} + \sum_{\substack{q \in (X_{\eta_f})^* \\ n \neq q \models n}} \frac{f_q}{\ell(q)!} q\Phi_X^{-1},$$

also

$$n\Phi_X^{-1} = \frac{1}{f_n} n\eta_f - \sum_{\substack{q \in (X_{\eta_f})^* \\ n \neq q \models n}} \frac{f_q}{f_n \cdot \ell(q)!} q\Phi_X^{-1}$$

und $q\Phi_X^{-1} \in \langle r\eta_f \mid r \in (X_{\eta_f})^*, q \models n \rangle_K$ für jede η_f -resistente Zerlegung $q \neq n$ von n nach Induktionsvoraussetzung, und da Φ_X^{-1} ein Algebrenhomomorphismus ist. Das zeigt (*). Insgesamt ist also $n\eta_f \in \langle r\eta_f \mid r \in (X_{\eta_f})^*, q \models n \rangle_K$, daher $(X_{\eta_f})^*$ ein Erzeugendensystem für $\text{Bild } \eta_f$ und also eine Basis. \square

2.4.11 Korollar. Die Menge $\{\eta_f \mid f \in K^X\}$ ist ein r -homogenes Repräsentantensystem für die Restklassen nach \mathcal{K}_X : Jedes Element α von \mathcal{H}_{κ_X} ist \diamond -Summe eines nilpotenten bzw. nil-konvergenten κ_X -Endomorphismus α_{nil} und eines r -homogenen κ_X -Endomorphismus α_r :

$$\alpha = \alpha_{\text{nil}} \diamond \alpha_r.$$

Beweis: Die Behauptung folgt unmittelbar aus 2.4.6 und 2.4.10. \square

2.4.12 Bemerkung. Nach (18) und 1.4.3 ist $(\diamond k)\text{id}_X$ bijektiv für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, denn $X_{(\diamond k)\text{id}_X} = X_{\text{id}_X} = X$.

Damit und mit einer Fastring-Rechnung können wir leicht zeigen, daß $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ keine Elemente endlicher Ordnung besitzt:

2.4.13 Satz. Sei $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\text{Bild } ((\diamond k)\eta) = \text{Bild } \eta.$$

Beweis: Sei $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mit (15) und 2.4.12 erhalten wir

$$\text{Bild } ((\diamond k)\eta) = \text{Bild } (((\diamond k)\text{id}_X)\eta) = (\text{Bild } ((\diamond k)\text{id}_X))\eta = (KX^*)\eta = \text{Bild } \eta.$$

\square

2.4.14 Korollar. $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ ist torsionsfrei.

Beweis: Sei $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$ von endlicher Ordnung, und sei $l \in \mathbb{N}$ derart, daß $(\diamond l)\eta = \varepsilon_X$. Dann ist

$$\langle 1_{X^*} \rangle_K = \text{Bild } \varepsilon_X = \text{Bild } ((\diamond l)\eta) = \text{Bild } \eta$$

nach 2.4.13, also $\eta = \varepsilon_X$, da offenbar $n\eta = 0_{KX^*}$ für alle $n \in X$ ist. \square

2.4.15 Bemerkung. Die Torsionsfreiheit von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ sieht man ebenso schnell mittels Additionstheorem für \exp :

Die Campbell-Hausdorff-Gruppe $(\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}), \text{conc})$ ist torsionsfrei, denn: Sei $L \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ und $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $(\exp L)^{\cdot n} = 1_{X^*}$ ist. Mit dem Additionstheorem erhält man:

$$1_{X^*} = (\exp L)^{\cdot n} = \exp \left(\sum_{i=1}^n L \right) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n L = 0_{\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}} \Leftrightarrow L = 0_{\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}}.$$

Nach 2.1.5 ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ isomorph zu einer Untergruppe der Campbell-Hausdorff-Gruppe, besitzt daher auch keine Elemente endlicher Ordnung.

2.4.2 Idempotente in $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus, \text{HEA})$

Wir geben eine (ggf. endliche) Folge von Idempotenten im Fastring \mathcal{H}_{κ_X} an:

Sei $n \in X$. Es ist $n \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$, somit $\eta_n \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Wir wissen, wegen $X_{\eta_n} = \{n\}$, nach (19): Für alle $j \in X$ ist

$$j\eta_n = 0_{KX^*},$$

falls n kein Teiler von j ist, sowie für $j = k \cdot n$

$$j\eta_n = \frac{1}{k!} (n^{\cdot k}) \Phi_X^{-1} = \frac{1}{k!} (n\Phi_X^{-1})^{\cdot k},$$

da $n^{\cdot k}$ die einzige η_n -resistente Zerlegung von j ist. Insbesondere ist

$$(20) \quad n\eta_n = n\Phi_X^{-1},$$

also

$$(21) \quad j\eta_n = \frac{1}{k!} (n\eta_n)^{\cdot k}.$$

2.4.16 Satz. Für alle $n \in X$ ist η_n ein Idempotent im Fastring $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus, \text{HEA})$.

Beweis: Sei $n \in X$. Für alle $j \in X$ mit $n \nmid j$ ist

$$j\eta_n^2 = 0_{KX^*} \eta_n = 0_{KX^*};$$

und es ist nach (14)

$$(*) \quad n\eta_n^2 = n\Phi_X^{-1}\eta_n = n\eta_n + \sum_{n \neq r \models n} \frac{(-1)^{\ell(r)-1}}{\ell(r)} r\eta_n = n\eta_n,$$

da $r\eta_n = 0_{KX^*}$ für alle $n \neq r \models n$ ist.

Sei nun etwa $j = k \cdot n$. Dann ist

$$j\eta_n^2 \stackrel{(21)}{=} \frac{1}{k!} (n\eta_n)^{\cdot k} \eta_n = \frac{1}{k!} (n\eta_n^2)^{\cdot k} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{k!} (n\eta_n)^{\cdot k} \stackrel{(21)}{=} j\eta_n.$$

□

2.4.17 Bemerkung. Für alle $n, k \in X$ gilt:

$$n > k \quad \Rightarrow \quad \eta_k \eta_n = 0_{\mathcal{H}_{\kappa_X}} = \varepsilon_X.$$

2.4.18 Bemerkung. Es ist $\eta_1 \diamond \eta_2 \diamond \eta_3 \neq \text{id}_{\mathfrak{g}}$, wie wir kurz mit (20) und (21) nachrechnen:

$$\begin{aligned} 3(\eta_1 \diamond \eta_2 \diamond \eta_3) &= 3(\eta_1 \diamond \eta_2) + 3\eta_3 + \sum_{i=1}^2 i(\eta_1 \diamond \eta_2) \cdot (3-i)\eta_3 \\ &= 3(\eta_1 \diamond \eta_2) + 3\eta_3 \\ &= 3\eta_3 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + \sum_{i=1}^2 i\eta_1 \cdot (3-i)\eta_2 \\ &= 3\eta_3 + 3\eta_1 + 3\eta_2 + (1\eta_1) \cdot (2\eta_2) \\ &= 3\Phi_X^{-1} + 0_{KX^*} + \frac{1}{3!} (1\Phi_X^{-1}) \cdot 3 + (1\Phi_X^{-1}) \cdot (2\Phi_X^{-1}) \\ &= (3 + \frac{1}{3!} 1.1.1 + 1.2)\Phi_X^{-1} \\ &\neq 3 = 3 \text{id}_{\mathfrak{g}}, \end{aligned}$$

da $3 + \frac{1}{3!} 1.1.1 + 1.2 \neq 3\Phi_X$ ist.

2.4.3 Eine absteigende Kette von Fastring-Idealen in \mathcal{H}_{κ_X}

Wir setzen

$$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(0)} := \mathcal{H}_{\kappa_X}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} := \left\{ \alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X} \mid Z_1^X + \cdots + Z_n^X \leq \text{Kern } \alpha \right\}.$$

2.4.19 Satz. Im Falle $X = \mathbb{N}$ ist $\mathcal{H}_{\kappa_X} = \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(0)} \supset \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(1)} \supset \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(2)} \supset \cdots \supset \{\varepsilon_X\}$ eine bis zu $\{\varepsilon_X\}$ echt absteigende Kette von Fastring-Idealen. Ist X endlich und $\#X = m$, so ist auch die Fastring-Ideal-Kette endlich, und es ist $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(m)} = \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(m+j)} = \{\varepsilon_X\}$ für alle $j \in \mathbb{N}$; d.h. $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ ist eine nilpotente Gruppe.

Die sukzessiven Faktoren $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} / \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ sind für alle $n \in \mathbb{N}_0$ Ringe.

Wir zeigen zunächst die Fastring-Ideal-Eigenschaften in $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$. Die Aussagen über die Kette für $X = \mathbb{N}$ bzw. $X = \underline{m}$ sind trivial. Zum Beweis der letzten Aussage des Satzes verwenden wir weiter unten einen Fastring-Monomorphismus des Faktorfastrings $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} / \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ in einen geeigneten Ring.

Sei nun $n \in X \cup \{0\}$ und im endlichen Falle $n < m = \#X$ – ansonsten ist nichts zu zeigen, da dann $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} = \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(m)} = \{\varepsilon_X\}$ ist.

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$. Für $i \leq n$ ist

$$i(\alpha \diamond \beta) = 0_{KX^*} = i\alpha + i\beta,$$

und es ist

$$(22) \quad (n+1)(\alpha \diamond \beta) = (n+1)\alpha + (n+1)\beta,$$

also

$$(n+1)(\alpha \diamond \beta) = (n+1)(\beta \diamond \alpha).$$

Auch sieht man sofort aus 2.1.8:

$$(n+1)(\diamond \alpha) = -(n+1)\alpha.$$

Daher ist ebenfalls sofort klar:

$$(23) \quad \alpha \diamond \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)} = \beta \diamond \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)} \Leftrightarrow (n+1)\alpha = (n+1)\beta.$$

Offenbar ist $\varepsilon_X \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$, also $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} \neq \emptyset$. Für alle $j \in \underline{n}$ ist

$$\begin{aligned} j(\alpha \diamond \beta) &= j\alpha + j(\diamond \beta) + \sum_{l=1}^{j-1} l\alpha.(j-l)(\diamond \beta) \\ &= j(\diamond \beta) = \sum_{q \models j} (-1)^{\ell(q)} q\beta \\ &= 0_{KX^*}, \end{aligned}$$

somit $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$ eine Untergruppe von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$.

Sei nun $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Für alle $i \in \underline{n}$ ist

$$(24) \quad i(\alpha \diamond \eta) = i\alpha + i\eta + \sum_{l=1}^{i-1} l\alpha.(i-l)\eta = i\eta,$$

und daher

$$\begin{aligned} j(\diamond \eta \diamond \alpha \diamond \eta) &= j(\diamond \eta) + j(\alpha \diamond \eta) + \sum_{l=1}^{j-1} l(\diamond \eta).(j-l)(\alpha \diamond \eta) \\ &= j(\diamond \eta) + j\eta + \sum_{l=1}^{j-1} l(\diamond \eta).(j-l)\eta \\ &= j(\diamond \eta \diamond \eta) \\ &= j\varepsilon_X \\ &= 0_{KX^*}, \end{aligned}$$

also $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$ ein Normalteiler von \mathcal{H}_{κ_X} .

$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(0)} = \mathcal{H}_{\kappa_X}$ ist trivialerweise ein Fastring-Ideal. Sei nun $n \neq 0$. Offenbar ist $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}\mathcal{H}_{\kappa_X} \subseteq \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$. Zu zeigen bleibt

$$(*) \quad \gamma(\alpha \diamond \eta) \diamond (\gamma\eta) \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$$

für alle $\eta, \gamma \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$. Seien $\eta, \gamma \in \mathcal{H}_{\kappa_X}$, $i \in \underline{n}$ und weiterhin $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$. Nach (24) ist $q(\alpha \diamond \eta) = q\eta$ für alle $q \models i$. Es folgt

$$\begin{aligned} i(\gamma(\alpha \diamond \eta) \diamond (\gamma\eta)) &= \sum_{j=0}^i j\gamma(\alpha \diamond \eta) \cdot (i-j)(\diamond(\gamma\eta)) \\ &= \sum_{j=0}^i j\gamma\eta \cdot (i-j)(\diamond(\gamma\eta)) \\ &= i(\gamma\eta \diamond (\gamma\eta)) \\ &= i\varepsilon_X \\ &= 0_{KX^*}. \end{aligned}$$

Das zeigt (*). Insgesamt ist $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$ also ein Fastring-Ideal von \mathcal{H}_{κ_X} .

Man kann einfach nachrechnen, daß in jedem sukzessiven Faktor dieser Idealkette das Links-Distributivgesetz gilt. Wir geben stattdessen für jeden Faktor einen Monomorphismus in einen Ring an.

Es ist $(n+1)\alpha = \sum_{q \models n+1} k_q q$ mit geeigneten $k_q \in K$ und daher

$$(25) \quad (n+1)\alpha\beta = k_{n+1}(n+1)\beta = (\alpha c_{n+1})\beta.$$

Bei lexikographisch absteigender Anordnung aller 2^n Zerlegungen von $n+1$ erhalten wir folgende Matrixdarstellung für $\alpha|_{Z_{n+1}^X}$:

$$\begin{pmatrix} * & \dots & * \\ 0_K & \dots & 0_K \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_K & \dots & 0_K \end{pmatrix} \in K^{2^n \times 2^n}.$$

Offenbar ist genau für alle $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ die darstellende Matrix von $\alpha|_{Z_{n+1}^X}$ die Nullmatrix $0_{K^{2^n \times 2^n}}$. Zusammen mit (22), (23) und (25) bedeutet dies:

Das Einschränken von κ_X -Endomorphismen aus $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$ auf Z_{n+1}^X liefert einen Ring-Monomorphismus von $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ in den Teilring der $K^{2^n \times 2^n}$ -Matrizen, der aus den Matrizen besteht, die höchstens in der ersten Zeile Einträge verschieden von 0_K haben.

Damit ist sofort klar, daß in $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ auch das Links-Distributivgesetz gilt, jeder sukzessive Faktor also ein (i.a. nicht-kommutativer) Ring ist; und Satz 2.4.19 ist vollständig bewiesen.

$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ ist nicht nur abelsch, d.h. es gilt $\left[\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}, \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}\right]_{\oplus} \subseteq \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$, sondern es gilt darüber hinaus der

2.4.20 Satz. *Für alle $k, j \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$\left[\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(k)}, \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(j)}\right]_{\oplus} \subseteq \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(k+j+1)}.$$

Insbesondere ist

$$\left[\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(k)}, \mathcal{H}_{\kappa_X}\right]_{\oplus} \subseteq \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(k+1)},$$

die Reihe $\mathcal{H}_{\kappa_X} = \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(0)} \supset \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(1)} \supset \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(2)} \supset \dots \supset \{\varepsilon_X\}$ also eine absteigende Zentralreihe in $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$.¹⁰

Beweis: Seien $k, j \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(k)}$, $\beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(j)}$.

Es ist für alle $l \in \underline{k+j+1} \cap X$

$$\sum_{i=1}^{l-1} i\alpha \cdot (l-i)\beta = 0_{KX^*},$$

da immer $i\alpha = 0_{K^*}$ oder $(l-i)\beta = 0_{K^*}$ ist, denn:

Denn es ist $l-1 \leq k+j$, und im Falle $i \leq k$ ist $i\alpha = 0_{KX^*}$, und im Falle $k+1 \leq i \leq l-1$ ist $l-i \leq l-k-1 \leq k+j+1-k-1 = j$, also $(l-i)\beta = 0_{KX^*}$. Es folgt daher für alle $l \in \underline{k+j+1} \cap X$

$$(*) \quad l(\alpha \oplus \beta) = l\alpha + l\beta = l(\beta \oplus \alpha),$$

und somit auch

$$l(\oplus(\beta \oplus \alpha)) = \sum_{q=l} (-1)^{\ell(q)} q(\beta \oplus \alpha) = \sum_{q=l} (-1)^{\ell(q)} q(\alpha \oplus \beta) = l(\oplus(\alpha \oplus \beta)).$$

¹⁰Gemeint ist jeweils der Gruppen-Kommutator in $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$.

Damit folgt insgesamt für alle $l \in \underline{k+j+1} \cap X$

$$\begin{aligned}
l(\alpha \diamond \beta \diamond \alpha \diamond \beta) &= l((\alpha \diamond \beta) \diamond (\diamond \alpha \diamond \beta)) \\
&= l((\alpha \diamond \beta) \diamond (\diamond(\beta \diamond \alpha))) \\
&= \sum_{i=0}^l i(\alpha \diamond \beta) \cdot (l-i)(\diamond(\beta \diamond \alpha)) \\
&= \sum_{i=0}^l i(\alpha \diamond \beta) \cdot (l-i)(\diamond(\alpha \diamond \beta)) \\
&= l((\alpha \diamond \beta) \diamond (\alpha \diamond \beta)) \\
&= l \varepsilon_X \\
&= 0_{KX^*},
\end{aligned}$$

ergo $[\alpha, \beta]_{\diamond} \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(k+j+1)}$.

□

2.4.4 Über die Struktur von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond, \text{HEA})$ und einiger seiner Faktorringe

Wir sehen uns nun die Struktur der Faktor-Ringe ein wenig genauer an.

Wie zuvor sei $n \in X$, und $n < \#X = m$, falls X endlich ist.

Ist $\alpha \in \text{Kern } \mathbf{c}_{n+1} \cap \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$, so ist

$$(n+1)\alpha^2 = 0_{KX^*},$$

wie man mit (25) sofort sieht. Mehr noch:

Für alle $\beta \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$ ist

$$(n+1)\alpha\beta = 0_{KX^*};$$

es gilt der

2.4.21 Satz.

- (i) $\alpha \diamond \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ ist genau im Falle $\alpha \mathbf{c}_{n+1} = 1_K$ idempotent und Links-Eins;
- (ii) $\left\{ \eta \diamond \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)} \mid \eta \in \text{Kern } \mathbf{c}_{n+1} \right\}$ ist der Links-Annulator von $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} / \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$;
- (iii) im Falle $\alpha \mathbf{c}_{n+1} = 1_K$ und $\beta \mathbf{c}_{n+1} = 0_K$ ist auch $(\alpha \diamond \beta) \diamond \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ idempotent.

Beweis: Wir sagen nur noch kurz etwas zu (iii):

Sei e eine Links-Eins eines Ringes R und x ein Element des Links-Annulators von R . Dann ist

$$(e + x)^2 = e^2 + ex + xe + x^2 = e + x.$$

□

In Verbindung mit \mathcal{K}_X können wir nun Einblick in die Struktur der Ringe $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ nehmen, und damit in die von \mathcal{H}_{κ_X} . Es sei noch einmal daran erinnert, daß die Campbell-Hausdorff-Gruppe $(\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}), \text{conc})$ im Falle $X = \mathbb{N}$ isomorph zu $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \diamond)$ ist und ebenfalls isomorph eingebettet werden kann in $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$.

Zunächst einmal ist $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(1)} = \text{Kern } c_1$, also nach 2.4.4

$$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(0)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(1)} = \mathcal{H}_{\kappa_X}/\text{Kern } c_1 \cong K.$$

2.4.22 Definition und Bemerkung. Wir setzen

$$I_n := \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)} \diamond (\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} \cap \mathcal{K}_X) = \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} \cap (\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)} \diamond \mathcal{K}_X).$$

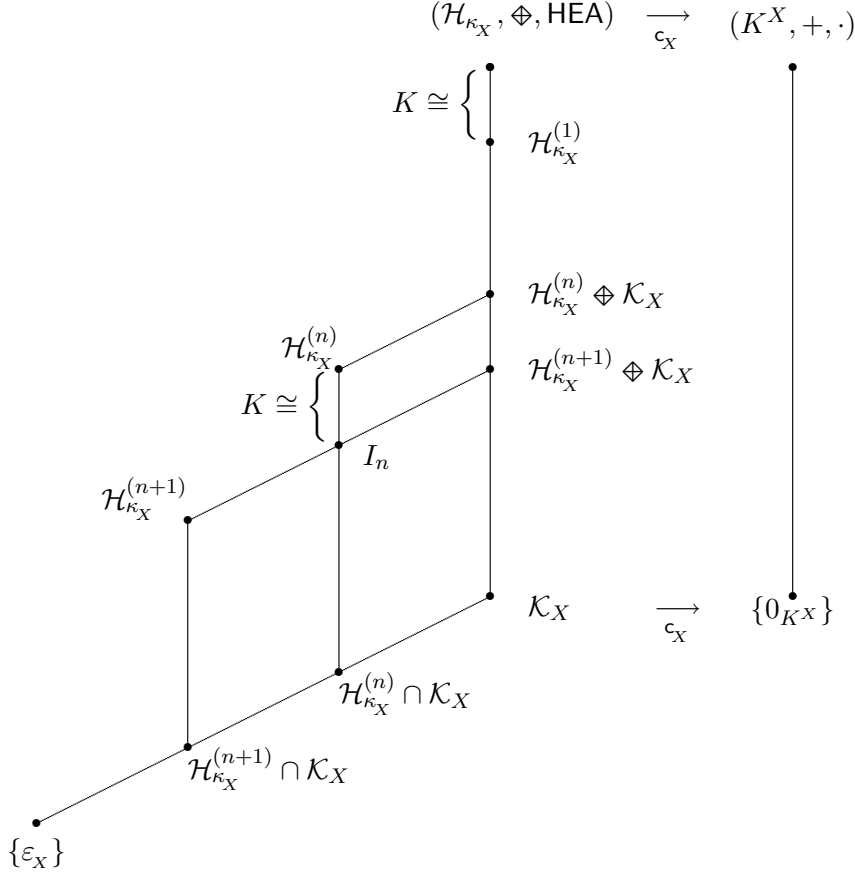
I_n ist dann ein Fastring-Ideal von \mathcal{H}_{κ_X} ; und nach 2.4.21(ii) ist $I_n/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ der Links-Annulator von $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ und insbesondere ein Zero-Ideal dieses Ringes.

2.4.23 Satz. *Es ist*

$$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/I_n \cong K.$$

Beweis: Genau für alle $\alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)} \setminus I_n$ ist $\alpha c_{n+1} \neq 0_K$. Sei $a \in K$. Dann ist $a \cdot (n+1) \in \widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}$ und $\eta_{a \cdot (n+1)} \in \mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$, sowie $\eta_{a \cdot (n+1)} c_{n+1} = a$. D.h. die Einschränkung von c_{n+1} auf $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$ ist immer noch surjektiv auf K , mit I_n als Kern. □

Wir sehen uns die Situation in einem Hasse-Diagramm an:



und fassen die Ergebnisse zusammen im

2.4.24 Hauptsatz. (i) $\mathcal{H}_{\kappa_X}/\mathcal{K}_X$ ist via c_X isomorph zum Ring K^X mit komponentenweiser Addition und Multiplikation, somit ein kommutativer unitärer Ring.

(ii) \mathcal{K}_X ist die Menge aller nilpotenten (falls X endlich) bzw. nil-konvergenten (falls $X = \mathbb{N}$) Elemente von \mathcal{H}_{κ_X} .

(iii) $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$, $n \in X \cup \{0\}$, ist eine bis zu $\{\varepsilon_X\}$ absteigende Zentralreihe. Diese ist endlich, falls X endlich ist; dann ist nämlich $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(m)} = \{\varepsilon_X\}$ mit $m = \#X$.

(iv) $\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}/\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n+1)}$ ist ein unitärer Ring und modulo seinem eigenen Linksannullator isomorph zu K via c_{n+1} .

(v) $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ ist torsionsfrei.

(vi) Für alle $n \in X$ ist der zu n gehörende κ_X -Endomorphismus η_n idempotent; für alle $l, n \in X$ ist $\eta_l \eta_n = \varepsilon_X$, falls $l < n$.

Die Aussagen sind bereits bewiesene Sätze, siehe 2.4.6, 2.4.9, 2.4.14, 2.4.16, 2.4.17, 2.4.19, 2.4.20, 2.4.22 und 2.4.23.

2.4.25 Korollar. Sei $X = \underline{2}$. Dann ist \mathcal{H}_{κ_X} ein kommutativer Ring, nämlich isomorph zu $K \times K$ mit komponentenweiser Addition und Multiplikation.

Beweis: Wir zeigen: $\mathcal{K}_X = \{\varepsilon_X\}$. Sei dazu $\alpha \in \mathcal{K}_X = \text{Kern } c_1 \cap \text{Kern } c_2$, also $1\alpha = 0_{KX^*}$ und $2\alpha = k \cdot 1.1$ mit geeignetem $k \in K$. Da α ein κ_X -Endomorphismus ist, folgt wegen

$$2\alpha\kappa_X = k \cdot (1.1)\kappa_X = k \cdot (1.1 \otimes 1_{X^*} + 2 \cdot (1 \otimes 1) + 1_{X^*} \otimes 1.1)$$

und

$$2\kappa_X(\alpha \otimes \alpha) = 2\alpha \otimes 1_{X^*} + 1\alpha \otimes 1\alpha + 1_{X^*} \otimes 2\alpha = k \cdot (1.1 \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes 1.1)$$

nach Vergleich beider Gleichungen: $k = 0_K$, also $\alpha = \varepsilon_X$. □

2.4.26 Bemerkung. Analog im Fall $X = \underline{3}$ nachgerechnet mit der Bedingung $\alpha\kappa_X = \kappa_X(\alpha \otimes \alpha)$ gelangt man für $\alpha \in \mathcal{K}_X = \text{Kern } c_1 \cap \text{Kern } c_2 \cap \text{Kern } c_3$ zur Einsicht

$$\begin{aligned} 1\alpha &= 0_{KX^*} \quad , \\ 2\alpha &= 0_{KX^*} \quad \text{und} \\ 3\alpha &= k \cdot (1.2 - 2.1) \quad \text{mit geeignetem } k \in K. \end{aligned}$$

Es ist also $\mathcal{K}_X = \langle \eta_{[1,2]_{\text{conc}}} \rangle_K$ – siehe Abschnitt 4.3.

Das zeigt auch: Sowohl für zwei- als auch für dreielementige Alphabete ist \mathcal{K}_X die Kommutatorgruppe von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$.

Ob \mathcal{K}_X für jedes höchstens abzählbare Alphabet die Kommutatorgruppe von $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus)$ ist, ist bislang ungeklärt.

2.5 Eine Metrik auf $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$

Wir haben in 2.4.7 festgestellt, daß im Fall eines endlichen Alphabets X jedes Element aus $\mathcal{K}_X = \bigcap_{n \in X} \text{Kern } c_n$ nilpotent ist. Im Falle $X = \mathbb{N}$ haben wir die Elemente aus $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ *nil-konvergent* genannt: eingeschränkt auf jede homogene Komponente $Z_n^{\mathbb{N}}$ von $K\mathbb{N}^*$ sind sie nilpotent.

Wir führen in diesem Abschnitt eine Metrik auf $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ ein. Genauer gesagt transportieren

wir die durch die Zerlegungsgradierung auf KN^* gegebene Metrik von $\widehat{KN^*}$ bzw. von $\widehat{\mathcal{L}_{\delta_{\mathbb{N}}}}$ nach $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$. Wir werden sehen, daß die Folge der HEA-Potenzen genau für die Elemente von $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ in dieser Metrik eine Nullfolge ist, daß $(\mathcal{H}_{\kappa}, \diamond)$ eine topologische Gruppe und $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ vollständig, $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}} \setminus \mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ offen und $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ eine nirgends dichte abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{H}_{\kappa_{\mathbb{N}}}$ ist.

Da wir uns in diesem Abschnitt ausschließlich mit dem abzählbar unendlichen Alphabet \mathbb{N} befassen, werden wir ab jetzt überall den Index \mathbb{N} weglassen. Wir schreiben also nur noch $\kappa, \delta, \mathcal{H}_{\kappa}, \mathcal{K}, \varepsilon, \text{id}$ und so weiter. Auch schreiben wir kurz Z_n statt $Z_n^{\mathbb{N}}$ und \mathcal{L} statt \mathcal{L}_{δ} .

Für alle $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa} \setminus \{\varepsilon\}$ sei

$$G(\eta) := \min \{n \in \mathbb{N} \mid n\eta \neq 0_{KN^*}\} \quad \text{und} \quad G(\varepsilon) := \infty$$

das Gewicht von η bzw. ε , sowie

$$|\eta| := e^{-G(\eta)} \quad \text{und} \quad |\varepsilon| := 0.$$

Es ist offensichtlich

$$G(\eta) = \min \{n \in \mathbb{N} \mid Z_n \eta \not\subseteq \text{Kern } \eta\}.$$

Weiter sei für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa}$

$$d(\alpha, \beta) := |\alpha \diamond \beta|.$$

Offenbar ist

$$d : \mathcal{H}_{\kappa} \times \mathcal{H}_{\kappa} \longrightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto d(\alpha, \beta),$$

positiv definit. Für alle $\eta \in \mathcal{H}_{\kappa} \setminus \{\varepsilon\}$ gilt

$$(26) \quad G(\eta) = G(\diamond \eta),$$

denn: Sei $m := G(\eta)$. Dann ist $n\eta = 0_{KN^*}$ für alle $n \in \underline{m-1}$, also $n(\diamond \eta) = \sum_{q \models n} (-1)^{\ell(q)} q\eta = 0_{KN^*}$, da q nur Buchstaben $\leq_{lex} n$ besitzt. Eben aus diesem Grunde ist auch

$$m(\diamond \eta) = -m\eta + \sum_{m \neq q \models m} (-1)^{\ell(q)} q\eta = -m\eta \neq 0_{KN^*}.$$

d ist außerdem symmetrisch, wie man schnell mit (26) einsieht.

Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n(\alpha \diamond \beta) = n\alpha + n\beta + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha \cdot (n-i)\beta.$$

Es ist

$$(27) \quad G(\alpha \diamond \beta) \geq \min\{G(\alpha), G(\beta)\} =: m,$$

denn:

$$m(\alpha \diamond \beta) = m\alpha + m\beta.$$

Zusammen mit (26) erhalten wir

$$e^{-G(\alpha \diamond \beta)} \leq e^{-\min\{G(\alpha), G(\beta)\}},$$

also

$$d(\alpha, \beta) \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\}.$$

Dies alles zeigt:

2.5.1 Satz. (\mathcal{H}_κ, d) ist ein ultrametrischer Raum. □

2.5.2 Lemma. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\kappa$, $\alpha \neq \beta$, ist

$$G(\alpha \diamond \beta) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid p_n(L_\alpha) \neq p_n(L_\beta)\} = G(L_\alpha - L_\beta).$$

Beweis: Nach 2.1.9 ist $0_{\widehat{\mathcal{L}}} = L_\varepsilon = L_{\alpha \diamond \alpha} = L_\alpha + L_{\diamond \alpha}$ für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\kappa$, also $L_{\diamond \alpha} = -L_\alpha$, somit

$$(*) \quad p_n(L_{\diamond \alpha}) = -p_n(L_\alpha)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Setzen wir wie üblich $p_q(L_\alpha) := p_{q_1}(L_\alpha) \cdot \dots \cdot p_{q_k}(L_\alpha)$, so erhalten wir mit 2.1.4 und wegen $\alpha = \eta_{L_\alpha}$ und $\diamond \beta = \eta_{(-L_\beta)}$ nach 2.1.7

$$\begin{aligned} n(\alpha \diamond \beta) &= n\alpha + n \diamond \beta + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha \cdot (n-i)(\diamond \beta) \\ &= \sum_{q \models n} \frac{1}{\ell(q)!} p_q(L_\alpha) \Phi^{-1} + \sum_{q \models n} \frac{1}{\ell(q)!} p_q(L_{\diamond \beta}) \Phi^{-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} i\alpha \cdot (n-i) \diamond \beta \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(p_n(L_\alpha) - p_n(L_\beta) \right) \Phi^{-1} + \sum_{n \neq q \models n} \frac{1}{\ell(q)!} \left(p_q(L_\alpha) + (-1)^{\ell(q)} p_q(L_\beta) \right) \Phi^{-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{r \models i} \sum_{s \models n-i} \frac{(-1)^{\ell(s)}}{\ell(r)! \ell(s)!} p_r(L_\alpha) \cdot p_s(L_\beta) \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} w(n, \alpha, \beta) &:= \sum_{n \neq q \models n} \frac{1}{\ell(q)!} \left(p_q(L_\alpha) + (-1)^{\ell(q)} p_q(L_\beta) \right) \Phi^{-1} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{r \models i} \sum_{s \models n-i} \frac{(-1)^{\ell(s)}}{\ell(r)! \ell(s)!} p_r(L_\alpha) \cdot p_s(L_\beta) \Phi^{-1}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $w(n, \alpha, \alpha) = 0_{K\mathbb{N}^*}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Seien nun $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\kappa$, $\alpha \neq \beta$ und $m := \min \{n \in \mathbb{N} \mid p_n(L_\alpha) \neq p_n(L_\beta)\}$. Für alle $n \in \underline{m-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned} n(\alpha \diamond \beta) &= \left(p_n(L_\alpha) - p_n(L_\beta)\right) \Phi^{-1} + w(n, \alpha, \beta) \\ &= \left(p_n(L_\alpha) - p_n(L_\alpha)\right) \Phi^{-1} + w(n, \alpha, \alpha) \\ &= 0_{K\mathbb{N}^*}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$m(\alpha \diamond \beta) = \left(p_m(L_\alpha) - p_m(L_\beta)\right) \Phi^{-1} + w(m, \alpha, \beta),$$

und man sieht leicht, daß auch $w(m, \alpha, \beta) = w(m, \alpha, \alpha)$ ist. Es folgt

$$m(\alpha \diamond \beta) = \left(p_m(L_\alpha) - p_m(L_\beta)\right) \Phi^{-1} \neq 0_{K\mathbb{N}^*}.$$

Das zeigt $m = G(\alpha \diamond \beta)$ und die Behauptung, da die zweite Gleichheit per definitionem gilt. \square

Dieses Lemma zeigt also

2.5.3 Satz. Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\kappa$, bzw. $S, T \in \widehat{\mathcal{L}}$, ist

$$d(\alpha, \beta) = d(L_\alpha, L_\beta), \quad \text{bzw. } d(S, T) = d(\eta_S, \eta_T).$$

Anders gesagt, die Abbildungen

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{L}} &\longrightarrow \mathcal{H}_\kappa, \quad L \mapsto \left(\eta_L : n \mapsto p_n(\exp L) \Phi^{-1}\right) \quad \text{und} \\ \mathcal{H}_\kappa &\longrightarrow \widehat{\mathcal{L}}, \quad \eta \mapsto L_\eta = \log(1_{X^*} + N\widehat{\eta})\widehat{\Phi} \end{aligned}$$

sind zueinander inverse bijektive Isometrien zwischen den beiden metrischen Räumen $(\widehat{\mathcal{L}}, d)$ und (\mathcal{H}_κ, d) . Da $\widehat{\mathcal{L}}$ vollständig ist, ist somit auch \mathcal{H}_κ vollständig. \square

Nun da wir eine Metrik auf \mathcal{H}_{κ_X} haben, wollen wir uns den nil-konvergenten Elementen zuwenden:

2.5.4 Bemerkung. Für alle $\alpha \in \mathcal{K}$ ist $(|\alpha^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge: Die Folge der HEA-Potenzen von α konvergiert gegen $\varepsilon = 0_{\mathcal{H}_\kappa}$.

Beweis: Sei $\alpha \in \mathcal{K}$, also $\mathbb{N}_\alpha = \emptyset$, i.e. für alle $m \in \mathbb{N}$ ist $\alpha c_m = 0_K$. Somit ist der lexikographisch größte Summand von $m\alpha$ kleiner oder gleich $(m-1) \cdot 1$. Offenbar ist für alle $n \in \mathbb{N}$ spätestens $n(\alpha^n) = 0_{K\mathbb{N}^*}$ wegen $\mathbb{N}_\alpha = \emptyset$. Das zeigt: $G(\alpha^n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, also $d(\alpha^n, \varepsilon) = |\alpha^n| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. \square

2.5.5 Definition und Bemerkung. Wir nennen $\alpha \in \mathcal{H}_\kappa$ *nil-konvergent*, wenn $(|\alpha^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Die Elemente von \mathcal{K} sind also sämtlich nil-konvergent.

2.5.6 Bemerkung. Sei $\alpha \in \mathcal{H}_\kappa$, $\mathbb{N}_\alpha \neq \emptyset$ und $m := \min \mathbb{N}_\alpha$. Dann konvergiert die Folge $(|\alpha^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen e^{-m} , ist also keine Nullfolge.

Beweis: Da $\mathbb{N}_\alpha \cap \underline{m-1} = \emptyset$ ist, ist $i\alpha^m = 0_{K\mathbb{N}^*}$ für alle $i \in \underline{m-1}$. Wegen $(\alpha^n)\mathbf{c}_m = (\alpha\mathbf{c}_m)^n \neq 0_K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $m\alpha^n \neq 0_{K\mathbb{N}^*}$. Insgesamt ist die Teilfolge $(|\alpha^n|)_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}}$ konstant:

$$(|\alpha^n|)_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}} = (e^{-m})_{n \in \mathbb{N}_{\geq m}}$$

– wegen $e^{-m} \neq 0$ also keine Nullfolge. □

Wir wiederholen an dieser Stelle die Aussage von 2.4.9 im Falle $X = \mathbb{N}$:

2.5.7 Satz. *Es ist $\mathcal{K} = \{\alpha \in \mathcal{H}_\kappa \mid \alpha \text{ nil-konvergent}\}$.*

Beweis: Klar nach 2.5.4 und 2.5.6. □

Es folgen nun noch einige topologische Betrachtungen über die topologische Gruppe $(\mathcal{H}_\kappa, \oplus)$.

2.5.8 Satz. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\text{Kern } \mathbf{c}_n$ abgeschlossen, somit auch $\mathcal{K} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \text{Kern } \mathbf{c}_n$; und $\mathcal{H}_\kappa \setminus \mathcal{K}$ ist offen. Darüber hinaus ist \mathcal{K} nirgends dicht, d.h. \mathcal{K} besitzt keine inneren Punkte.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, daß $\mathcal{H}_\kappa \setminus \text{Kern } \mathbf{c}_n$ offen ist. Sei also $\alpha \in \mathcal{H}_\kappa \setminus \text{Kern } \mathbf{c}_n$, d.h. $\alpha\mathbf{c}_n \neq 0_{K\mathbb{N}^*}$. Wir setzen $\vartheta := e^{-n}$.¹¹ Für alle $\beta \in U_\vartheta(\alpha)$ ist

$$\vartheta > d(\alpha, \beta) = d(L_\alpha, L_\beta) = e^{-G(L_\alpha - L_\beta)},$$

also

$$n = \ln \frac{1}{\vartheta} < G(L_\alpha - L_\beta).$$

Daher ist $p_{n'}(L_\alpha) = p_{n'}(L_\beta)$ für alle $n' \in \underline{n}$, insbesondere $p_n(L_\alpha) = p_n(L_\beta)$, ergo $\beta\mathbf{c}_n = \alpha\mathbf{c}_n \neq 0_{K\mathbb{N}^*}$. Das zeigt $U_\vartheta(\alpha) \subseteq \mathcal{H}_\kappa \setminus \text{Kern } \mathbf{c}_n$.

Sei nun $\alpha \in \mathcal{K}$ und $\vartheta \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir setzen $m := \min \{n \in \mathbb{N} \mid n > \ln(\frac{1}{\vartheta})\}$. Bezeichne $S(m)$ das Element aus $\widehat{\mathcal{L}}$, welches durch

$$p_n(S(m)) := \begin{cases} p_n(L_\alpha) & , \text{ falls } n \leq \ln(\frac{1}{\vartheta}), \\ m & , \text{ falls } n = m, \\ 0_{K\mathbb{N}^*} & , \text{ sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Dann ist $\eta_{(S(m))}\mathbf{c}_m = 1$ nach 2.1.11, also $\beta := \eta_{(S(m))} \notin \mathcal{K}$, und wegen $G(L_\alpha - L_\beta) = G(L_\alpha - S(m)) = m > \ln(\frac{1}{\vartheta})$

$$d(\alpha, \beta) = d(L_\alpha, L_\beta) = e^{-G(L_\alpha - L_\beta)} < \vartheta,$$

¹¹Man beachte, daß die Wahl von ϑ nicht von α abhängt!

also $U_{\vartheta}(\alpha) \cap (\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}) \neq \emptyset$. Das zeigt: $\overline{\mathring{\mathcal{K}}} = \mathring{\mathcal{K}} = \emptyset - \mathcal{K}$ ist eine nirgends dichte abgeschlossene Teilmenge von \mathcal{H}_{κ} . \square

2.5.9 Bemerkung. Alle Kern \mathfrak{c}_n , $n \in \mathbb{N}$, besitzen innere Punkte, sind also nicht so „dünn“ wie \mathcal{K} : Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \text{Kern } \mathfrak{c}_n$. Für $\vartheta := e^{-m}$ ist $U_{\vartheta}(\alpha) \subseteq \text{Kern } \mathfrak{c}_n$ mit dem gleichen Argument, welches im obigen Beweis die Offenheit von $\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \text{Kern } \mathfrak{c}_n$ liefert.

Wir fassen zusammen:

- $\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}$ ist offen, also sein eigenes Inneres;
- \mathcal{K} ist abgeschlossen: $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$;
- \mathcal{K} ist nirgends dicht, d.h. das Innere von \mathcal{K} ist leer: $\mathring{\mathcal{K}} = \emptyset$;
- \mathcal{K} ist sein eigener Rand: $\partial\mathcal{K} = \overline{\mathcal{K}} \setminus \mathring{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \setminus \emptyset = \mathcal{K}$;
- \mathcal{H}_{κ} ist der Abschluß von $\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}$: $\overline{\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}} = \overline{\mathcal{H}_{\kappa}} \setminus \mathring{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{H}_{\kappa}} = \mathcal{H}_{\kappa}$;
- \mathcal{K} ist auch der Rand von $\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}$, weil der Abschluß von $\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}$ eben \mathcal{H}_{κ} ist und $\mathcal{H}_{\kappa} \setminus \mathcal{K}$ offen.

2.5.10 Bemerkung. Für jedes $\gamma \in \mathcal{H}_{\kappa}$ ist die Rechts-Translation mit γ bezüglich \diamond eine Isometrie und somit (gleichmäßig) stetig: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}_{\kappa}$. Es ist

$$\begin{aligned} d(\alpha \diamond \gamma, \beta \diamond \gamma) &= \left| \alpha \diamond \gamma \diamond (\beta \diamond \gamma)^{\star_{\kappa}(-1)} \right| \\ &= |\alpha \diamond \beta| = d(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß auch die Links-Translationen und das Invertieren Isometrien, also stetig, sind, bemerken wir, daß für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa}$ das Gewicht von $\alpha \diamond \beta$ genau das Gewicht von $\beta \diamond \alpha$ ist. Dies folgt sofort aus 2.5.2:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa} \quad G(\alpha \diamond \beta) = G(\beta \diamond \alpha),$$

also

$$(28) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathcal{H}_{\kappa} \quad |\alpha \diamond \beta| = |\beta \diamond \alpha|.$$

2.5.11 Proposition. Das Invertieren und die Links-Translation mit $\gamma \in \mathcal{H}_{\kappa}$ bezüglich \diamond sind Isometrien, also (gleichmäßig) stetig.

Beweis: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}_{\kappa}$. Es folgt mit mehrfacher Anwendung von (28)

$$\begin{aligned} d(\diamond \alpha, \diamond \beta) &= |\diamond \alpha \diamond \beta| = |\beta \diamond \alpha| \\ &= d(\beta, \alpha) = d(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 d(\gamma \diamond \alpha, \gamma \diamond \beta) &= \left| (\gamma \diamond \alpha) \diamond (\gamma \diamond \beta)^{\star_\kappa(-1)} \right| \\
 &= |(\diamond \beta \diamond \gamma) \diamond (\gamma \diamond \alpha)| \\
 &= |\diamond \beta \diamond \alpha| = |\alpha \diamond \beta| \\
 &= d(\alpha, \beta) .
 \end{aligned}$$

□

2.5.12 Satz. $(\mathcal{H}_\kappa, \diamond)$ ist bezüglich der Metrik d eine topologische Gruppe.

Beweis: Klar nach 2.5.10 und 2.5.11. □

Auch mit der Multiplikation HEA des Rechts-Fastringes \mathcal{H}_κ verträgt sich die Metrik, zumindest bei Multiplikation von rechts, wie wir nun kurz zeigen.

Für alle $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\kappa$ ist (vgl. (27))

$$(29) \quad G(\alpha\beta) \geq \max \{G(\alpha), G(\beta)\} ,$$

denn seien $\alpha, \beta \in \mathcal{H}_\kappa \setminus \{\varepsilon\}$, $n := G(\alpha)$ und $m = G(\beta)$. (Der Fall $\varepsilon \in \{\alpha, \beta\}$ ist trivial.)

Im Falle $n \leq m$ ist für alle $n' \in \mathbb{N}$, $n' < m$, mit geeigneten $k_q \in K$ ($q \models n'$ bzw. $q \models m$)

$$n'(\alpha\beta) = \sum_{q \models n'} k_q q \beta = 0_{K\mathbb{N}^*}$$

und

$$m(\alpha\beta) = \sum_{q \models m} k_q q \beta = m\beta \neq 0_{K\mathbb{N}^*} ,$$

also

$$G(\alpha\beta) = G(\beta) = \max \{G(\alpha), G(\beta)\} ,$$

während im Falle $n > m$ für alle $n' \in \mathbb{N}$, $n' < n$

$$n'(\alpha\beta) = 0_{K\mathbb{N}^*} \beta = 0_{K\mathbb{N}^*}$$

ist, also

$$G(\alpha\beta) \geq G(\alpha) = \max \{G(\alpha), G(\beta)\} .$$

Damit können wir den folgenden Satz beweisen:

2.5.13 Satz. Auch die Rechtsmultiplikation im HEA-Sinne in \mathcal{H}_κ ist gleichmäßig stetig. Genauer gilt für alle $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}_\kappa$

$$d(\alpha\gamma, \beta\gamma) \leq \min \{d(\alpha, \beta), |\gamma|\} .$$

Beweis: Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}_\kappa$. Es ist

$$(\alpha\gamma) \diamond (\beta\gamma) = (\alpha\gamma) \diamond ((\diamond\beta)\gamma) = (\alpha \diamond \beta)\gamma.$$

Mit (29) folgt daher aus den obigen Überlegungen

$$d(\alpha\gamma, \beta\gamma) = |(\alpha\gamma) \diamond (\beta\gamma)| = |(\alpha \diamond \beta)\gamma| \leq \min \{d(\alpha, \beta), |\gamma|\},$$

also in jedem Falle

$$d(\alpha\gamma, \beta\gamma) \leq d(\alpha, \beta).$$

□

2.5.14 Bemerkung. Über die Linksmultiplikation im HEA-Sinne können wir keine entsprechende Aussage machen, möglicherweise auch nicht erwarten: Im obigen Beweis haben wir das Rechts-Distributivgesetz gebraucht.

Kapitel 3

Die Struktur \mathbf{r} -homogen κ -induzierter Linksideale in Solomons Algebra

Im folgenden sei das Alphabet X abzählbar unendlich, also $X = \mathbb{N}$ im Sinne unserer Standardkonvention. Da wir uns hier auf dieses eine Alphabet beschränken, werden wir wie bereits im vorangegangenen Abschnitt über die Metrik den Index X weglassen.

Wir betrachten hier die Struktur solcher κ -induzierter Linksideale in \mathcal{D}_n , welche durch \mathbf{r} -homogene κ -Endomorphismen vermittelt werden; in diesem Falle sind die Bilder der resistenten Worte eine Basis des Bildes.

Die in [Sch05] ausführlich untersuchte *peak*-Algebra ist ein Beispiel für ein solches Linksideal (siehe Abschnitt 4.1.1); auch zum *derangement*-Idempotent gibt es ein solches (siehe Abschnitt 4.1.2). Die \mathbf{r} -homogen induzierten Linksideale sind alle nach dem gleichen Muster gebaut: Es gibt eine K -Basis bestehend aus primitiven Idempotenten, die bestimmten Bedingungen genügen, etwa die Multiplikation der Basis-Elemente betreffend.

Die Ergebnisse aus [Sch05] über die Modulstruktur der *peak*-Algebra – dort Abschnitt 10 – sind ohne weiteres zu verallgemeinern für \mathbf{r} -homogen induzierte Linksideale von Solomons Algebra. Wir analysieren zu diesem Zwecke die Struktur einer Klasse assoziativer Algebren, die u.a. die oben angedeuteten Idempotent-Basis-Bedingungen erfüllen. Dabei beginnen wir mit möglichst wenigen Voraussetzungen an die Algebren. Schrittweise nehmen wir weitere Voraussetzungen hinzu bis zur Forderung der Existenz einer Eins in der Algebra. Die so gewonnenen Struktur-Einsichten werden dann auf κ -induzierte Linksideale übertragen und z.T. noch vertieft. Wir erhalten Kenntnis über die irreduziblen Links-Moduln, eine Zerlegung in unzerlegbare Linksideale, Cartan-Invarianten und ansatzweise über die absteigende Loewy-Reihe.

Es sei η ein homogener κ -Endomorphismus.

Die Algebra $(\mathcal{D}, +, \star)$ ist wie $K\mathbb{N}^*$ eine freie assoziative Algebra, frei erzeugt z.B. von $\{\Xi^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Die Abbildung

$$\Xi : K\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathcal{D}, \quad q \mapsto \Xi^q,$$

ist ein Isomorphismus von $(K\mathbb{N}^*, +, \text{conc})$ auf $(\mathcal{D}, +, \star)$. Wegen

$$\Xi^n \downarrow = \sum_{i=0}^n \Xi^{n-i} \otimes \Xi^i$$

ist Ξ ein Bialgebrenisomorphismus von $(K\mathbb{N}^*, \text{conc}, \kappa)$ auf $(\mathcal{D}, \star, \downarrow)$. Anders gesagt bedeutet dies

$$(30) \quad \Xi \downarrow = \kappa(\Xi \otimes \Xi).$$

Die Algebra $(\mathcal{D}, \star, \downarrow)$ ist also frei von der Menge $\{\Xi^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ erzeugt und \mathbb{N}_0 -gradiert. Die Lie-Algebra der bezüglich \downarrow primitiven Elemente bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$.

3.1 κ -induzierte Linksideale und Lie-Idempotente

3.1.1 Definition. Wir setzen

$$\mathcal{D}_{\eta} := (\text{Bild } \eta)\Xi$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}_{n,\eta} := \mathcal{D}_{\eta} \cap \mathcal{D}_n.$$

3.1.2 Lemma. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \models n$

$$\Xi^q * \Xi^{n\eta} = \Xi^{q\eta}.$$

Insbesondere ist $\mathcal{D}_{n,\eta} = \mathcal{D}_n * \Xi^{n\eta}$ ein Linksideal in $(\mathcal{D}_n, +, *)$ und $\mathcal{D}_{\eta} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{n,\eta}$ ein Linksideal in $(\mathcal{D}, +, *)$.

Beweis: Sei $q = q_1 \cdots q_k \models n$. Dann folgt mit 1.1.1 und (30)

$$\begin{aligned} \Xi^q * \Xi^{n\eta} &= (\Xi^{q_1 \cdots q_{k-1}} \star \Xi^{q_k}) * \Xi^{n\eta} \\ &= ((\Xi^{q_1 \cdots q_{k-1}} \otimes \Xi^{q_k}) *_{\otimes} \Xi^{n\eta} \downarrow) \mu_{\star} \\ &= \left((\Xi^{q_1 \cdots q_{k-1}} \otimes \Xi^{q_k}) *_{\otimes} \left(\sum_{j=0}^n \Xi^{(n-j)\eta} \otimes \Xi^{j\eta} \right) \right) \mu_{\star} \\ &= \left(\Xi^{q_1 \cdots q_{k-1}} * \Xi^{(n-q_k)\eta} \right) \star \Xi^{q_k \eta}. \end{aligned}$$

Eine leichte Induktion nach k zeigt die erste Behauptung. Der Rest ist klar. \square

3.1.3 Bemerkung. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, ferner $q \models n$ und $r \models m$. Wegen

$$\begin{aligned} (\Xi^q * \Xi^{n\eta}) \star (\Xi^r * \Xi^{m\eta}) &= \Xi^{q\eta} \star \Xi^{r\eta} \\ &= \Xi^{q\eta \cdot r\eta} \\ &= \Xi^{(q \cdot r)\eta} \\ &= \Xi^{q \cdot r} * \Xi^{(n+m)\eta} \\ &= (\Xi^q \star \Xi^r) * \Xi^{(n+m)\eta} \end{aligned}$$

ist die simultane Multiplikation mit $(\Xi^{n\eta})_{n \geq 0}$ ein Algebren-Epimorphismus von $(\mathcal{D}, +, \star)$ auf $(\mathcal{D}_\eta, +, \star)$. Setzt man $S^\eta := \sum_{n \geq 1} \Xi^{n\eta}$, so bedeutet dies

$$\widehat{\mathcal{D}} * (\emptyset + S^\eta) = \widehat{\mathcal{D}_\eta}.$$

Weiter ist

$$\mathcal{D}_{n,\eta} \downarrow \subseteq \mathcal{D}_{n,\eta} \otimes \mathcal{D}_{n,\eta},$$

also $\mathcal{D}_{n,\eta}$ eine Teilbialgebra von $(\mathcal{D}_n, *, \downarrow)$ und \mathcal{D}_η eine Teilbialgebra von $(\mathcal{D}, \star, \downarrow)$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \Xi^{q\eta} \downarrow &= (q\eta)\Xi \downarrow \\ &= q\eta\kappa(\Xi \otimes \Xi) \\ &= q\kappa(\eta \otimes \eta)(\Xi \otimes \Xi) \\ &= q\kappa(\eta\Xi \otimes \eta\Xi) \subseteq \mathcal{D}_{n,\eta} \otimes \mathcal{D}_{n,\eta}. \end{aligned}$$

3.1.4 Definition und Bemerkung. Ein Idempotent $e \in K\mathcal{S}_n$ heißt *Lie-Idempotent*, wenn gilt: $eK\mathcal{S}_n = \omega_n K\mathcal{S}_n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$e\omega_n = \omega_n \quad \text{und} \quad \omega_n e = ne.$$

Dabei ist $\omega_n := \sum_{r \models n} (-1)^{\ell(r)-1} r_\dagger \Xi^r$ und r_\dagger der letzte Buchstabe von r . Ist $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_k$, so ist $\omega_q := \omega_{q_1} \star \dots \star \omega_{q_k}$. Bekanntlich ist auch $\{\omega_q \mid q \models n\}$ eine Basis von \mathcal{D}_n .

Für alle $x, \alpha \in K\mathcal{S}_n$, α Lie-Idempotent, gilt:

$$x \text{ Lie-Idempotent} \quad \Leftrightarrow \quad x\alpha = \alpha \wedge \alpha x = x.$$

Für jedes bezüglich \downarrow primitive Element $\alpha \in K\mathcal{S}_n$ und jedes $q \models n$ gilt

$$(31) \quad \Xi^q \alpha = 0 \quad \text{falls} \quad \ell(q) > 1$$

– zum Beweis siehe etwa [BBG]. Insbesondere gilt dies für Lie-Idempotenten.¹²

¹²Da ω_n primitiv ist, ist jedes Lie-Idempotent primitiv.

3.1.5 Proposition. Ist $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathcal{D}} \cap \mathcal{D}_n$ ein Idempotent, so ist

$$\alpha = \Xi_n + \sum_{n \neq q \models n} b_q \Xi^q$$

mit geeigneten $b_q \in K$.

Beweis: Klar wegen (31). □

3.1.6 Proposition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (i) n ist η -resistent;
- (ii) für alle Lie-Idempotente $\alpha \in \mathcal{D}_n$ gibt es ein $k \in K \setminus \{0\}$ derart, daß $k\alpha\Xi^{nn}$ ein Lie-Idempotent in $\mathcal{D}_{n,\eta}$ ist;
- (iii) es gibt ein Lie-Idempotent $\alpha \in \mathcal{D}_n$ und ein $k \in K \setminus \{0\}$ derart, daß $k\alpha\Xi^{nn}$ ein Lie-Idempotent in $\mathcal{D}_{n,\eta}$ ist.

Beweis: Sei $k_q \in K$ der Koeffizient von q in $n\eta$ für alle $q \models n$. Es gilt für alle Lie-Idempotente $\alpha \in \mathcal{D}_n$:

$$\begin{aligned} \Xi^{nn}\alpha &= \sum_{q \models n} k_q \Xi^q \alpha \\ &= k_n \Xi^n \alpha + \sum_{n \neq q \models n} k_q \Xi^q \alpha \\ &\stackrel{(31)}{=} k_n \alpha. \end{aligned}$$

Ist $k_n \neq 0$, also n η -resistent, und $\alpha \in \mathcal{D}_n$ ein Lie-Idempotent, so folgt:

$$(\alpha\Xi^{nn})\alpha = \alpha(\Xi^{nn}\alpha) = k_n \alpha^2 = k_n \alpha,$$

und

$$\alpha(\alpha\Xi^{nn}) = \alpha^2 \Xi^{nn} = \alpha\Xi^{nn}.$$

Also ist $\frac{1}{k_n} \alpha\Xi^{nn}$ ein Lie-Idempotent in $\mathcal{D}_{n,\eta}$. Das zeigt (ii).

Für (ii) \Rightarrow (iii) ist nichts zu zeigen.

(iii) \Rightarrow (i) zeigen wir durch Kontraposition. Sei also n nicht η -resistent und $\alpha \in \mathcal{D}_n$ ein Lie-Idempotent. Es ist dann $k_n = 0$, also $(\alpha\Xi^{nn})\alpha = 0 \neq k\alpha$ für alle $k \in K \setminus \{0\}$. Also ist $k\alpha\Xi^{nn}$ kein Lie-Idempotent für alle $k \in K \setminus \{0\}$. □

Ein Lie-Idempotent $\alpha \in \mathcal{D}_\eta$ nennen wir η -Lie-Idempotent.

3.1.7 Korollar. Ist $n \in \mathbb{N}$ ein η -resistenter Buchstabe, so enthält $\mathcal{D}_{n,\eta}$ ein Lie-Idempotent. Ist dann $\alpha \in \mathcal{D}_n$ ein Lie-Idempotent, so ist das lineare Erzeugnis aller η -Lie-Idempotenten in $K\mathcal{S}_n$ genau $\alpha\mathcal{D}_{n,\eta}$.

Beweis: Ist n η -resistent, so enthält $\mathcal{D}_{n,\eta}$ nach 3.1.6 das Lie-Idempotent $\frac{1}{n} \omega_n \Xi^{n\eta}$. Das lineare Erzeugnis aller Lie-Idempotenten in \mathcal{D}_n ist $\omega_n \mathcal{D}_n$ [BL93]. Sei $n \in \mathbb{N}$, n η -resistent, und $\alpha \in \mathcal{D}_n$ ein Lie-Idempotent. Die definierenden Gleichungen $\omega_n \alpha = n\alpha$ und $\alpha \omega_n = \omega_n$ implizieren $\omega_n \mathcal{D}_n = \alpha \mathcal{D}_n$. Daher ist das lineare Erzeugnis aller η -Lie-Idempotenten in $K\mathcal{S}_n$

$$\alpha \mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_{n,\eta} = \alpha \mathcal{D}_{n,\eta}.$$

□

Eine Folge $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{D}$ heißt eine (*homogene*) *Liefolge*, wenn $\frac{1}{n} \gamma_n (\in \mathcal{D}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Lie-Idempotent ist. Wir setzen dann $\gamma_q := \gamma_{q_1} \star \cdots \star \gamma_{q_k}$ für alle $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_k \in \mathbb{N}^*$. Sind γ und δ zwei Lie-Folgen in \mathcal{D} , so gilt für alle $q, r \in \mathbb{N}^*$

$$(32) \quad \delta_r \gamma_q = r^? \gamma_r, \quad \text{falls } q \approx r$$

(siehe [PR99], Lemma 3.1(ii)). Insbesondere ist $\frac{1}{q^?} \gamma_q$ ein Lie-Idempotent für alle $q \in \mathbb{N}^*$. Aus 3.1.5 folgt mit einem einfachen Dreiecks-Argument

3.1.8 Proposition. *Ist γ eine Liefolge, so ist $\{\frac{1}{q^?} \gamma_q \mid q \models n\}$ eine Basis von \mathcal{D}_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Genauer gilt*

$$\frac{1}{q^?} \gamma_q = \Xi^q + \sum_r b_r \Xi^r,$$

wobei über solche $r \models n$ zu summieren ist, die lexikographisch kleiner als q sind.

3.1.9 Satz (vgl. Main Theorem 7 in [Sch05]). *Sei η ein r -homogener κ -Endomorphismus und $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine homogene Lie-Folge in \mathcal{D} derart, daß $\gamma_n \in \mathcal{D}_{n,\eta}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}_\eta$. Dann ist $B := \{\frac{1}{q^?} \gamma_q \mid q \in \mathbb{N}^*, q \text{ ist } \eta\text{-resistent}\}$ eine Basis von \mathcal{D}_η aus Idempotenten. γ induziert einen Algebren-Isomorphismus von $(K(\mathbb{N}_\eta)^*, +, \text{conc})$ auf $(\mathcal{D}_\eta, +, \star)$ durch Einschränkung. Insbesondere ist $G := \{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}_\eta\}$ ein freies Erzeugendensystem von $(\mathcal{D}_\eta, +, \star)$. Die Menge der primitiven Elemente $\text{Prim}(\mathcal{D}_\eta)$ in $(\mathcal{D}_\eta, \star, \downarrow)$ ist eine freie Lie-Algebra, frei erzeugt von der Menge G , und $(\mathcal{D}_\eta, +, \star)$ ist ihre assoziative Einhüllende. Es gilt:*

$$\text{Prim}(\mathcal{D}_\eta) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_\eta} \gamma_n \mathcal{D}_{n,\eta}.$$

Beweis: Wir wissen: $\{\frac{1}{q^?} \gamma_q \mid q \in \mathbb{N}^*\}$ ist eine Basis von \mathcal{D} aus Idempotenten – wegen (32), und da $\gamma : K\mathbb{N}^* \longrightarrow \mathcal{D}$, $\sum_q k_q q \mapsto \sum_q k_q \gamma_q$, ein Algebren-Isomorphismus ist. B ist also linear unabhängig und daher aus Dimensionsgründen eine Basis von \mathcal{D}_η .

Wir können $K\mathbb{N}_\eta^*$ als eine Teilalgebra von $K\mathbb{N}^*$ betrachten. Insbesondere induziert γ einen Algebren-Isomorphismus $K\mathbb{N}_\eta^* \longrightarrow \mathcal{D}_\eta$.

Ist nun $\varphi \in \mathcal{D}_n$ primitiv, so ist $\Xi^q \varphi = 0$ für alle $q \models n$ mit $\ell(q) > 1$ nach (31). Mit der Proposition 1.2 aus [BL96] folgt:

$$\varphi = \frac{1}{n} n \Xi^n \varphi = \frac{1}{n} \left(\sum_{r \models n} (-1)^{\ell(r)+1} r_{\dagger} \Xi^r \right) \varphi = \frac{1}{n} \omega_n \varphi \in \omega_n \mathcal{D}_n,$$

wobei r_{\dagger} der letzte Buchstabe von $r \models n$ sei. Andererseits ist jedes Element aus $\omega_n \mathcal{D}_n$ primitiv, also $\text{Prim}(\mathcal{D}) = \bigoplus_{n \geq 0} \omega_n \mathcal{D}_n$. Insbesondere ist die Menge der primitiven Elemente in $\mathcal{D}_{n,\eta}$ gerade $\omega_n \mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_{n,\eta} = \omega_n \mathcal{D}_{n,\eta} = \gamma_n \mathcal{D}_{n,\eta}$. Offenbar erzeugen die Elemente $\omega_{\ell(q)} q$ ($q \in \mathbb{N}^*$, q η -resistent) linear die von \mathbb{N}_η frei erzeugte Lie-Algebra $\mathcal{L} \langle \mathbb{N}_\eta \rangle$. Das Bild von $\mathcal{L} \langle \mathbb{N}_\eta \rangle$ unter γ ist gerade

$$\mathcal{L} \langle \mathbb{N}_\eta \rangle \gamma = \left\langle \gamma_{\omega_{\ell(q)} q} \mid q \in \mathbb{N}^*, q \text{ } \eta\text{-resistent} \right\rangle_K.$$

Mit (32) und Proposition 2.1 in [BL96] folgt:

$$(33) \quad \omega_n \gamma q = \frac{1}{q?} \omega_n \omega_q \gamma q = q_1 \frac{1}{q?} \omega_{\omega_{\ell(q)} q} \gamma q = q_1 \gamma_{\omega_{\ell(q)} q},$$

also $\text{Prim}(\mathcal{D}_\eta) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_\eta} \omega_n \mathcal{D}_{n,\eta} = \mathcal{L} \langle \mathbb{N}_\eta \rangle \gamma$. Die Behauptung folgt nun, da $\mathcal{L} \langle \mathbb{N}_\eta \rangle$ frei über \mathbb{N}_η ist. \square

3.2 Über eine Klasse von assoziativen Algebren

3.2.1 Rechts- bzw. linksartinsche assoziative Algebren

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins.

3.2.1 Definition und Bemerkung. Sei A eine assoziative R -Algebra. Wir setzen

$$\mathcal{J}(A) := \bigcap \{ \text{Kern } \zeta \mid \zeta \text{ irreduzible Algebren-Darstellung oder } \zeta = 0 \}$$

und nennen dies das *Jacobson-Radikal von A* .

Ein Rechtsideal R von A heißt *modular*, wenn es ein $e \in A$ gibt, sodaß gilt:

$$\forall x \in A \quad R + x = R + ex,$$

analog für Linksideale. (Ist A linksunitär (bzw. rechtsunitär), so ist jedes Rechtsideal (bzw. jedes Linksideal) modular.) Es gilt:

$$\mathcal{J}(A) = \bigcap \{ L \mid L \text{ maximales modulares Linksideal von } A \text{ oder } L = A \}.$$

Eine Teilmenge T von A heißt *nil*, wenn jedes Element von T nilpotent ist. Sei \mathcal{X} die Menge der nilen Ideale von A . Dann heißt

$$\mathcal{N}(A) := \sum_{I \in \mathcal{X}} I$$

das *Nil-Radikal von A* . $\mathcal{N}(A)$ ist nil und enthält jedes nilpotente einseitige Ideal von A . Im allgemeinen gilt

$$\mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{J}(A).$$

3.2.2 Definition und Bemerkung. Eine assoziative Algebra A heißt *semiprimär*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) A ist unitär;
- (ii) $\mathcal{N}(A)$ ist nilpotent;
- (iii) $A/\mathcal{N}(A)$ ist vollreduzibel (bezüglich $\rho_{A/\mathcal{N}(A)}$).

Nach dem Satze von Wedderburn-Artin ist jede *rechtsartinsche unitäre* assoziative Algebra semiprimär.

Es gilt der folgende

3.2.3 Satz. *Sei A eine semiprimäre assoziative Algebra. Dann gilt:*

$$\mathcal{N}(A) = \bigcap \{M \mid M \text{ ist maximales Rechtsideal von } A\} = \mathcal{J}(A).$$

3.2.4 Bemerkung. Sei A eine rechtsartinsche assoziative Algebra. Nach dem Satze von Wedderburn-Artin ist $A/\mathcal{N}(A)$ (als Algebra) isomorph zu einer direkten Summe von vollen Matrixringen über Schiefkörpern. Ist $A/\mathcal{N}(A)$ kommutativ, so ist $A/\mathcal{N}(A)$ isomorph zu einer direkten Summe von Körpern.

3.2.5 Bemerkung. In rechtsartinschen assoziativen Algebren ist das Nilradikal nilpotent.

3.2.6 Definition. Sei A eine rechtsartinsche assoziative Algebra. A heißt *auflösbar*, wenn $A/\mathcal{N}(A)$ kommutativ ist.

3.2.7 Satz. *Sei A eine auflösbare Algebra. $A/\mathcal{N}(A)$ besitzt keine von 0_A verschiedenen nilpotenten Elemente.*

Beweis: Klar nach 3.2.32. □

Das folgende Korollar ist eine leicht verallgemeinerte Version¹³ des Hilfssatzes 5.5 in [Bau01]:

3.2.8 Korollar. *Sei A eine auflösbare Algebra und B eine Teilalgebra von A . Dann ist $\mathcal{N}(B) = \mathcal{N}(A) \cap B$ und $B/\mathcal{N}(B)$ ist ebenfalls kommutativ. D.h.: Teilalgebren auflösbarer Algebren sind auflösbar.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathcal{N}(A)$ nilpotent. Also ist $B \cap \mathcal{N}(A)$ ein nilpotentes Ideal, somit $B \cap \mathcal{N}(A) \subseteq \mathcal{N}(B)$. Es gilt:

$$B/(B \cap \mathcal{N}(A)) \cong (B + \mathcal{N}(A))/\mathcal{N}(A) \leq A/\mathcal{N}(A).$$

Nach 3.2.7 ist jedes nilpotente Element von B schon ein Element von $B \cap \mathcal{N}(A)$. Das zeigt $\mathcal{N}(B) \subseteq B \cap \mathcal{N}(A)$ und die Kommutativität von $B/\mathcal{N}(B)$. □

¹³Dort wird der Satz nur für *endlich-dimensionale unitäre* Algebren über Körpern gezeigt.

3.2.9 Bemerkung. Alles hier Gesagte gilt entsprechend für linksartinsche assoziative Algebren, ggf. mit Rechts-Eins.

3.2.2 Die Struktur einer speziellen Klasse von auflösbaren Algebren

Sei hier – abweichend von der Generalvoraussetzung – K ein beliebiger Körper.

3.2.10 Bemerkung. Sei A eine assoziative K -Algebra und M ein A -Links-Modul mit $\dim_K M = 1$, sowie $e \in A$ idempotent. Dann gilt

$$\forall m \in M \quad e \cdot m = m \quad \text{oder} \quad \forall m \in M \quad e \cdot m = 0,$$

denn: Die zu M gehörige Algebrendarstellung $\zeta : A \longrightarrow \text{End}_K(M)$ ist ein Algebren-Homomorphismus, daher $e\zeta$ ein Idempotent – außerdem $\text{End}_K(M) \cong K$.

Es gilt also $e \cdot M = M$ oder $e \cdot M = 0$.

Sei N ein vollreduzierbarer A -Modul, der M -homogen ist. Dann gilt auch $e \cdot n = 0$ für alle $n \in N$ oder $e \cdot n = n$ für alle $n \in N$, also $e \cdot N = N$ oder $e \cdot N = 0$.

3.2.11 Bemerkung und Definition. Sei A eine linksartinsche assoziative Algebra und $e \in A \setminus \{0\}$ ein primitives Idempotent. Dann ist Ae A -direkt-unzerlegbar. Unter den echt in Ae enthaltenen Linksidealen von A gibt es genau ein maximales, das wir mit $M(Ae)$ bezeichnen. Es ist $M(Ae) = Ae \cap \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A)e$.

Wir setzen

$$M^e := Ae/M(Ae).$$

Sei V ein A -Links-Modul. Dann gilt:

$$V \cong_A M^e \quad \Leftrightarrow \quad V \text{ ist irreduzibel und } e \cdot V \neq \{0\}.$$

Dies ist etwa in [Lam] zu finden.

Damit folgt:

3.2.12 Bemerkung. Sei A eine linksartinsche assoziative Algebra, und seien $e, f \in A$ primitive Idempotenten. Dann gilt

$$M^e \not\cong_A M^f \quad \Leftrightarrow \quad eM^f = 0.$$

3.2.13 Generalvoraussetzung. Sei A eine linksartinsche assoziative K -Algebra, \mathcal{B} eine K -Basis von A , bestehend aus primitiven Idempotenten. Wir definieren für alle $e, f \in \mathcal{B}$:

$$e \sim f \quad :\Leftrightarrow \quad M^e \cong_A M^f.$$

\sim ist eine Äquivalenzrelation auf \mathcal{B} ; wir bezeichnen mit $[e]_{\sim}$ die Äquivalenzklasse von e bezüglich \sim . Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{B}$ ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen in \mathcal{B} bezüglich \sim .

Es sei A' eine Teilalgebra von A und $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{R}$ derart, daß

$$\mathcal{B}' := \bigcup_{e \in \mathcal{R}'} [e]_{\sim}$$

eine Basis von A' ist.

3.2.14 Bemerkung.

- (i) Ist ein Idempotent $e \in A'$ primitiv in A , so ist e trivialerweise auch primitiv in A' . Die Teilalgebra A' hat also im wesentlichen die gleichen Eigenschaften wie A : eine K -Basis aus primitiven Idempotenten etc. Wir formulieren im folgenden viele Aussagen für A' , und mit $A' := A$ gelten diese sofort auch für A selbst.
- (ii) Sei V ein irreduzibler A' -Links-Modul. Für alle $e \in \mathcal{R}'$ sei $V \not\cong_{A'} M^e$. Dann ist $e \cdot V = 0$ für alle $e \in \mathcal{B}'$, also V ein A' -Zero-Modul. Dies folgt mit der letzten Aussage aus 3.2.11.

3.2.15 Korollar. Sei M ein vollreduzierbarer A' -Modul. Jeder irreduzible Summand von M ist entweder isomorph zu einem M^e , $e \in \mathcal{R}'$, oder ein (eindimensionaler) Zero-Modul. \square

3.2.16 Bemerkung. Erfüllen zwei Idempotenten e und f einer assoziativen Algebra B die Gleichungen

$$ef = e \quad \text{und} \quad fe = f,$$

so ist

$$Be = Bef \subseteq Bf = Bfe \subseteq Be,$$

also $Be = Bf$.

Fordert man „ $e \sim f \Rightarrow ef = e$ “, so gilt also sogar

$$M^e = M^f$$

statt nur $M^e \cong_{A'} M^f$ für $e \sim f$.

3.2.17 Generalvoraussetzung (Zusatz). Es gelte:

- (i) $\forall e, f \in \mathcal{B} \quad e \sim f \Rightarrow ef = e,$
- (ii) $\forall e \in \mathcal{B} \quad \dim_K M^e = 1.$

3.2.18 Bemerkung.

- (i) Die Umkehrung „ $ef = e \Rightarrow e \sim f$ “ von (i) in 3.2.17 gilt immer.
- (ii) Für alle $e \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$ und alle $f \in \mathcal{B}'$ gilt

$$fM^e = 0,$$

da $e \not\sim f$, d.h. M^e ist ein A' -Zero-Modul. Da nach 3.2.15 jeder irreduzible A -Links-Modul M eindimensional ist, ist M auch ein *irreduzibler* A' -Links-Modul.

3.2.19 Bemerkung. Sei M ein vollreduzierbarer A' -Modul. Für alle $e \in \mathcal{B}'$ ist $e \cdot M$ die M^e -homogene Komponente von M .

Beweis: Wir bezeichnen mit M_e für jedes $e \in \mathcal{B}'$ die M^e -homogene Komponente von M . Es ist dann $M = M_0 \oplus \bigoplus_{e' \in \mathcal{R}'} M_{e'}$, wobei M_0 die Zero-Komponente von M sei. Sei $e \in \mathcal{B}'$ und $f \in \mathcal{R}'$ mit $e \sim f$. Dann gilt:

$$e \cdot M = e \cdot M_0 \oplus \bigoplus_{e' \in \mathcal{R}'} e \cdot M_{e'} = e \cdot M_f = M_f$$

nach 3.2.12 und 3.2.10. □

Für das nun Folgende fordern wir zusätzlich: \mathcal{R} sei **endlich**.

In dieser Situation läßt sich das folgende Lemma beweisen, welches eine verallgemeinerte Version von Lemma 10.7 in [Sch05] ist. Jenes dient dort der Untersuchung der absteigenden Loewy-Reihe in der *peak*-Algebra.

3.2.20 Lemma (vgl. Lemma 10.7 in [Sch05]). *Sei M ein A' -Links-Modul und U ein Teilmodul von M mit den Eigenschaften*

- (i) M/U ist ein A' -Zero-Modul;
- (ii) U ist vollreduzierbar;

Dann ist M vollreduzierbar.

Beweis: Sei \widehat{M} ein direktes Vektorraum-Komplement zu U in M , also $M = U \oplus \widehat{M}$. Wegen (i) ist

$$(*) \quad e \cdot m \in U$$

für alle $m \in M$ und alle $e \in \mathcal{B}'$. Insbesondere ist $\text{Bild } \varphi \subseteq U$ für den K -linearen Endomorphismus

$$\varphi : M \longrightarrow M, m \mapsto \sum_{e' \in \mathcal{R}'} e' \cdot m.$$

Sei $\psi := id_{\widehat{M}} - \varphi|_{\widehat{M}}: \widehat{M} \longrightarrow M$. Dann gilt auch $\text{Bild } \psi \oplus U = M$, wie man sich mit (*) leicht überlegt. Wir zeigen nun: $\text{Bild } \psi$ ist ein A' -Zero-Modul und somit vollreduzibel.

Sei dazu $e \in \mathcal{B}'$, $\widehat{m} \in \widehat{M}$ und $f \in \mathcal{R}'$ derart, daß $e \sim f$.

Für alle $e' \in \mathcal{R}'$ ist wegen (i)

$$e' \cdot M = e'e' \cdot M \subseteq e' \cdot U \subseteq e' \cdot M,$$

also $e' \cdot M = e' \cdot U$ die $M^{e'}$ -homogene Komponente von U wegen (ii) und 3.2.19. Für alle $e' \in \mathcal{R}' \setminus \{f\}$ ist daher nach 3.2.18

$$ee' \cdot M = e(e' \cdot U) = 0,$$

da $e' \not\sim f \sim e$. Es folgt:

$$e \cdot \widehat{m}\psi = e \cdot \widehat{m} - \sum_{e' \in \mathcal{R}'} ee' \cdot \widehat{m} = e \cdot \widehat{m} - ef \cdot \widehat{m} = 0$$

wegen $ef = e$. □

3.2.21 Bemerkung. Sei B eine assoziative Algebra, und sei M ein B -Links-Modul. Es gebe ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Kette von Teilmoduln $M_0 = M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n = \{0\}$ derart, daß M_{i-1}/M_i für alle $i \in \underline{n}$ ein B -Zero-Modul ist. Dann ist M ein B^n -Zero-Modul¹⁴: Es ist

$$B^n \cdot M = B^{n-1}(B \cdot M) \subseteq B^{n-2}(B \cdot M_1) \subseteq \dots \subseteq B \cdot M_{n-1} \subseteq M_n = \{0\}.$$

Besitzt B eine K -Basis \mathcal{C} aus Idempotenten, so ist M sogar ein B -Zero-Modul, da dann $B^2 = B$ ist:

Sei $b \in B$, und seien $k_e \in K$ für alle $e \in \mathcal{C}$ so, daß $b = \sum_{e \in \mathcal{C}} k_e e$ ist. Dann ist $b = \sum_{e \in \mathcal{C}} k_e e^2 \in B^2$, also $B \subseteq B^2$, somit $B^2 = B$.

3.2.22 Definition. Sei B eine K -Algebra. Das *Radikal* eines B -Links-Moduls M ist definiert durch

$$\text{Rad}_B M := \bigcap \{N \mid N \text{ ist maximaler } B\text{-Links-Teilmodul von } M \text{ oder } N = M\}.$$

Die *absteigende Loewy-Reihe* von M ist die Kette der Teilmoduln $\text{Rad}_B^{(j)} M$, definiert durch $\text{Rad}_B^{(0)} M := M$ und $\text{Rad}_B^{(j)} M := \text{Rad}_B(\text{Rad}_B^{(j-1)} M)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

3.2.20 und 3.2.21 liefern:

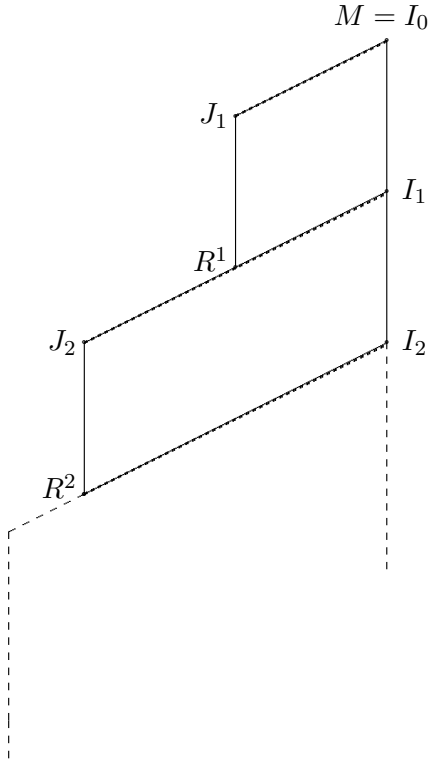
Mithilfe der absteigenden Loewy-Reihe eines A -Moduls M läßt sich eine absteigende Kette von A' -Teilmoduln von M derart finden, daß jeder der sukzessiven Faktoren keinen A' -Zero-Kompositionsfaktor besitzt. Genauer gilt:

¹⁴Mit B^n meinen wir den additiven Abschluß der Menge aller n -fachen Produkte in B .

3.2.23 Satz. Sei M ein A -Modul. Es gibt eine Kette von A' -Links-Teilmoduln $I_0 = M \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq \{0\}$ von M und eine Kette von A -Links-Teilmoduln $J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq \{0\}$ von M derart, daß für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) $\text{Rad}_A^{(j)} M \subseteq I_j$;
- (ii) $\text{Rad}_A^{(j)} M \subseteq J_j \subseteq \text{Rad}_A^{(j-1)} M$;
- (iii) $I_j / \text{Rad}_A^{(j)} M$ ist ein A' -Zero-Modul;
- (iv) $\text{Rad}_A^{(j-1)} M / J_j$ ist ein A' -Zero-Modul, $J_j / \text{Rad}_A^{(j)} M$ besitzt keine A' -Zero-Kompositionsfaktoren;
- (v) $I_{j-1} / \text{Rad}_A^{(j)} M = J_j / \text{Rad}_A^{(j)} M \oplus I_j / \text{Rad}_A^{(j)} M$.

Beweis: durch Induktion.



Sei $R^i := \text{Rad}_A^{(i)} M$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da M/R^1 vollreduzibel ist (als A -Modul), gibt es einen A -Links-Teilmodul J_1 von $M = R^0$ derart, daß $R^1 \subseteq J_1$ und in M/J_1 jeder Faktor einer A -Kompositionsreihe von M/R^1 als A' -Modul ein Zero-Modul ist und J_1/R^1 keinen A' -Zero-Kompositionsfaktor mehr besitzt. Auch gibt es einen A -Links-Teilmodul I_1 von M derart, daß $R^1 \subseteq I_1$ und $M/R^1 = J_1/R^1 \oplus I_1/R^1$.

Wegen $M/J_1 \cong_{A'} I_1/R^1$ ist I_1/R^1 nach 3.2.21 ein A' -Zero-Modul.

Sei $k \in \mathbb{N}$, J_k ein A -Links-Teilmodul von M und I_k ein A' -Links-Teilmodul von M mit den Eigenschaften (i) – (v) für $j = k$. R^k/R^{k+1} ist als A -Modul vollreduzibel. Es gibt also wieder einen A -Links-Teilmodul J_{k+1} von M mit den Eigenschaften (ii) und (iv) für $j = k + 1$ nach 3.2.21. Auch nach 3.2.21 und wegen (iii) ist I_k/J_{k+1} ein A' -Zero-Modul. Außerdem ist J_{k+1}/R^{k+1} vollreduzibel – als A -Modul und somit als

A' -Modul. Daher ist I_k/R^{k+1} nach 3.2.20 als A' -Modul vollreduzibel. Also gibt es einen A' -Teilmodul I_{k+1} von M mit den Eigenschaften (i) und (v) für $j = k + 1$. Da $I_{k+1}/R^{k+1} \cong_{A'} I_k/J_{k+1}$ ist, hat I_{k+1} auch die Eigenschaft (iii) für $j = k + 1$. \square

3.2.24 Satz und Definition. Sei M ein A -Links-Modul, und es gebe ein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\text{Rad}_A^{(m)}(M) = \{0\}$. Dann gibt es einen A' -Links-Teilmodul $I_{A'}(M)$ von M derart, daß

jeder Kompositionsfaktor von $I_{A'}(M)$ als A' -Modul trivial ist und $M/I_{\tilde{A}}(M)$ keine A' -Zero-Faktoren besitzt. $I_{\tilde{A}}(M)$ ist dann ein A' -Zero-Modul.

Beweis: Mit $I_{A'}(M) := I_m$ folgt die Behauptung aus 3.2.23. \square

3.2.25 Bemerkung. Ist A' ein Linksideal von A und erfüllt A' als A -Modul die Voraussetzung aus 3.2.24 an die Loewy-Reihe, so sind im Falle $M = A'$ die J_j und I_j ($j \in \mathbb{N}$) Linksideale von A' ; also ist insbesondere $I_{\tilde{A}}(A')$ ein Linksideal.

3.2.26 Definition und Bemerkung. Sei B eine assoziative Algebra, $y \in B$. Der *Rechts-Annulator* von y ist die Menge

$$\text{Ann}_r(y) := \{z \mid z \in B, yz = 0_B\}.$$

$\text{Ann}_r(y)$ ist ein Rechtsideal von B . Wir setzen für jede Teilmenge Y von B

$$\text{Ann}_r(Y) := \bigcap_{y \in Y} \text{Ann}_r(y).$$

Dann ist auch $\text{Ann}_r(Y)$ ein Rechtsideal von B .

3.2.27 Satz. Es ist unter den Voraussetzungen von 3.2.25

$$I_{A'}(A') = \text{Ann}_r(A') \cap A',$$

also $I_{A'}(A')$ ein Ideal von A' .

Beweis: Da $I_{A'}(A')$ ein A' -Zero-Modul ist, ist $I_{A'}(A') \subseteq \text{Ann}_r(\tilde{A}) \cap A'$. Sei $x \in \text{Ann}_r(A') \cap A'$. Dann ist $\langle x \rangle_K$ ein irreduzibler A' -Zero-Links-Modul. Nach Definition von $I_{A'}(A')$ in 3.2.24 ist $x \in I_{A'}(A')$. Der Rest ist klar wegen 3.2.25 und 3.2.26. \square

3.2.28 Satz. Sei M ein A -Links-Modul. Es gelte: $M = \bigoplus_{i \in \underline{n}} U_i$ mit Teilmoduln U_i von M und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$I_{A'}(M) \cong_{A'} \bigoplus_{i \in \underline{n}} I_{A'}(U_i).$$

Beweis: Klar nach Konstruktion von $I_{A'}(M)$ im Beweis von 3.2.23, bzw. von $I_{A'}(U_i)$, $i \in \underline{n}$, da $\text{Rad}_A^{(j)}(U_i) = U_i \cap \text{Rad}_A^{(j)}(M)$ für alle $i \in \underline{n}$ und $j \in \mathbb{N}$ ist. \square

Ab hier braucht \mathcal{R} **nicht** mehr **endlich** zu sein.

3.2.29 Bemerkung. Da die $e \in \mathcal{B}$ idempotent sind, ist $A = \sum_{e \in \mathcal{B}} Ae$, mit (i) aus 3.2.17 sogar $A = \sum_{e \in \mathcal{R}} Ae$ nach 3.2.16.

3.2.30 Generalvoraussetzung (Zusatz 2). Es gelte:

$$(iii) \quad \forall e, f \in \mathcal{B} \quad ef \in \langle [f]_{\sim} \rangle_K .$$

Damit und mit (i) aus 3.2.17 ist

$$(34) \quad Ae = \langle [e]_{\sim} \rangle_K$$

für alle $e \in \mathcal{R}$ und

$$(35) \quad A = \bigoplus_{e \in \mathcal{R}} Ae ,$$

denn: Sei $e \in \mathcal{B}$ und $f \in \mathcal{R}$ so, daß $e \sim f$. Dann ist $f = fe \in Ae$, also $\langle [e]_{\sim} \rangle_K \subseteq Ae$. Andererseits ist $e'e \in \langle [e]_{\sim} \rangle_K$ für alle $e' \in \mathcal{B}$, also auch $Ae \subseteq \langle [e]_{\sim} \rangle_K$. Insbesondere ist die Summe $\sum_{e \in \mathcal{R}} Ae$ direkt.

3.2.31 Bemerkung. Sei B eine assoziative K -Algebra und V ein eindimensionaler B -Modul; ζ sei die zugehörige Algebrendarstellung. Dann ist

$$\text{End}_B(V) = C_{\text{End}_K(V)}(B\zeta) = \text{End}_K(V) ,$$

da $\text{End}_K(V) \cong K$ kommutativ ist.

Für alle $e \in \mathcal{R}$ ist also nach (ii) in 3.2.17

$$(36) \quad \text{End}_A(M^e) \cong K .$$

3.2.32 Satz. $A/\mathcal{N}(A)$ ist kommutativ, d.h. A ist auflösbar.

Beweis: Wegen (35), 3.2.12 und 3.2.13 ist $A = \bigoplus_{e \in \mathcal{R}} Ae$ mit paarweise nicht isomorphen Ae . Mit dem Satz von Wedderburn-Artin ist daher

$$A/\mathcal{N}(A) \cong \bigoplus_{e \in \mathcal{R}} \text{End}_A(Ae/M(Ae))^- \cong \bigoplus_{e \in \mathcal{R}} K$$

wegen (36). □

3.2.33 Korollar. Für alle $e \in \mathcal{R}$ ist

$$M(Ae) = Ae \cap \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(Ae) .$$

Beweis: Mit 3.2.8 angewandt auf die auflösbare Algebra A und die Teilalgebra Ae folgt die Behauptung. □

3.2.34 Generalvoraussetzung (Zusatz 3). Sei zudem nun

$$(iv) \quad A \text{ unitär.}$$

3.2.35 Bemerkung. Da A nach Voraussetzung linksartinsch und unitär ist, ist A semi-primär. Mit 3.2.3 und nach Definition des Modul-Radikals ist daher

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{J}(A) = \text{Rad}_A(A).$$

Wegen (35) gilt daher

$$(37) \quad M(Ae) = Ae \cap \mathcal{N}(A) = Ae \cap \text{Rad}_A(A) = \text{Rad}_A(Ae)$$

für alle $e \in \mathcal{R}$.

3.2.36 Satz. $A/\text{Rad}_A A$ ist kommutativ.

Beweis: Klar nach 3.2.32 und 3.2.35. □

3.2.37 Korollar. Für alle $e \in \mathcal{R}$ ist $\text{Rad}_A(Ae) = \{a \in Ae \mid a \text{ ist nilpotent}\}$.

Beweis: Sei $e \in \mathcal{R}$. A ist auflösbar nach 3.2.32, somit auch Ae wegen 3.2.8. Zusammen mit (37) und 3.2.33 liefert 3.2.7 die Behauptung. □

3.2.38 Satz. Für alle $e \in \mathcal{R}$ ist $\{e - f \mid e \neq f \in [e]_{\sim}\}$ eine Basis von $\text{Rad}_A(Ae)$.

Beweis: Sei $e \in \mathcal{R}$. Für alle $f \in [e]_{\sim}$ ist

$$(e - f)^2 = e^2 - ef - fe + f^2 = e - e - f + f = 0,$$

also $e - f \in \text{Rad}_A(Ae) = M(Ae)$. Wegen $\dim_K \langle e - f \mid e \neq f \in [e]_{\sim} \rangle_K = \#[e]_{\sim} - 1 = \dim_K(Ae) - 1$ nach (34) zeigt dies mit 3.2.13 die Behauptung. □

Sei $e \in \mathcal{R}'$. Wegen $A' \subseteq A$ ist $A'e \subseteq Ae$. Außerdem ist $Ae = \langle [e]_{\sim} \rangle_K \leq_K A'$, also $Ae = Ae^2 \subseteq A'e$. Es gilt daher die

3.2.39 Bemerkung. Für alle $e \in \mathcal{R}'$ ist $A'e = Ae$, also

$$A' = \bigoplus_{e \in \mathcal{R}'} A'e = \bigoplus_{e \in \mathcal{R}'} Ae, \text{ sowie } A = A' \oplus \bigoplus_{e \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}'} Ae.$$

3.2.40 Bemerkung. Sei B eine assoziative K -Algebra und M ein B -Links-Modul, sowie N ein B -Teilmodul von M der Co-Dimension 1. Dann ist N auch ein maximaler C -Teilmodul von M für jede Teilalgebra C von B .

3.2.41 Definition. Sei B eine assoziative Algebra und M ein B -Modul. Ist N ein maximaler Teilmodul von M , so schreiben wir zur Abkürzung:

$$N <_B M.$$

3.2.42 Proposition. *Sei B eine assoziative K -Algebra. Alle irreduziblen B -Moduln seien eindimensional. Für jeden B -Links-Modul M und jede Teilalgebra C von B ist dann*

$$\text{Rad}_C M \subseteq \text{Rad}_B M.$$

Beweis: Nach 3.2.40 ist

$$\text{Rad}_C M = \bigcap \{N \mid N <_C M \vee N = M\} \subseteq \bigcap \{N \mid N <_B M \vee N = M\} = \text{Rad}_B M.$$

□

3.2.43 Satz. *Sei B ein Linksideal und direkter Summand von A . Dann gilt:*

$$\text{Rad}_B B = \text{Rad}_A B = \mathcal{J}(B) = \mathcal{N}(B), \quad \text{und} \quad B/\text{Rad}_B B \text{ ist kommutativ.}$$

Beweis: Da B direkter Summand von A ist, ist B rechtsunitär, also $\text{Rad}_B B = \mathcal{J}(B)$. Mit 3.2.42 ist $\text{Rad}_B B \subseteq \text{Rad}_A B$. Nach 3.2.8 ist $\mathcal{N}(B) = B \cap \mathcal{N}(A)$. Wegen $\mathcal{N}(A) = \mathcal{J}(A) = \text{Rad}_A(A)$ und da B ein direkter Summand von A ist, folgt insgesamt:

$$\text{Rad}_A B \supseteq \text{Rad}_B B = \mathcal{J}(B) \supseteq \mathcal{N}(B) = B \cap \text{Rad}_A A = \text{Rad}_A B.$$

Der Rest ist klar.

□

3.2.44 Korollar. *Für alle $e \in \mathcal{R}$ ist*

$$\text{Rad}_{Ae}(Ae) = \text{Rad}_A(Ae) = \text{Rad}_{A'}(Ae).$$

$M(Ae)$ ist das eindeutig bestimmte maximale Linksideal von Ae .

Beweis: Sei $e \in \mathcal{R}$. Ae ist ein (rechtsunitäres) Linksideal und direkter Summand von A . Anwendung von 3.2.43 auf $B := Ae$ ergibt $\text{Rad}_{Ae} Ae = \text{Rad}_A Ae$. 3.2.42 mit $B := A'$ und $C := Ae$ liefert $\text{Rad}_{Ae} Ae \subseteq \text{Rad}_{A'} Ae$, und mit $B := A$ und $C := A'$ erhalten wir $\text{Rad}_{A'} Ae \subseteq \text{Rad}_A Ae$. Insgesamt ist daher

$$\text{Rad}_A Ae = \text{Rad}_{Ae} Ae \subseteq \text{Rad}_{A'} Ae \subseteq \text{Rad}_A Ae.$$

Der Rest folgt mit (37), da $M(Ae)$ ein maximales Linksideal von Ae ist.

□

3.2.45 Korollar. *Es gilt*

$$\text{Rad}_{A'}(A') = \bigoplus_{e \in \mathcal{R}'} \text{Rad}_{A'}(Ae) = \text{Rad}_A(A') = \langle e - f \mid e \sim f \in \mathcal{R}' \rangle_K;$$

und $A'/\text{Rad}_{A'}(A')$ ist kommutativ mit der Dimension $\# \mathcal{R}'$.

Beweis: A' ist ein direkter Summand und Linksideal von A . Anwendung von 3.2.43 liefert

$$\text{Rad}_A(A') = \text{Rad}_{A'}(A') = \mathcal{J}(A') = \mathcal{N}(A').$$

Die letzte Gleichheit folgt aus 3.2.38, wie auch die Kommutativität von $A'/\text{Rad}_{A'}(A')$. Die Aussage über die Dimension erhält man wegen

$$A'/\text{Rad}_{A'}(A') \cong \bigoplus_{e \in \mathcal{R}'} Ae/\text{Rad}_{A'}(Ae) \stackrel{3.2.44}{=} \bigoplus_{e \in \mathcal{R}'} Ae/\text{Rad}_A(Ae) \bigoplus_{e \in \mathcal{R}'} M^e.$$

□

3.3 Anwendung auf Solomons Algebra

Wir werden im nun folgenden die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.2 auf die Algebra $A = \mathcal{D}_n$ mit der Teilalgebra $A' = \mathcal{D}_{n,\eta}$ übertragen und unsere Einsicht in die Struktur ein wenig vertiefen.

Dazu sei weiterhin η ein r -homogener κ -Endomorphismus.

\mathcal{D}_n mit der Basis $\mathcal{B} = \{\nu_q \mid q \models n\}$, dabei $\nu_q := \frac{1}{q!} \omega_q$, ist eine Algebra mit den Eigenschaften aus 3.2.13, 3.2.17, 3.2.30 und 3.2.34¹⁵.

Dies erhält man mit der ω -Multiplikationsformel und etwa den folgenden zwei Propositionen aus [Sch05] (dort 10.1 und 10.2) – vergleiche auch [BL96]:

3.3.1 Proposition. *Sei γ eine homogene Lie-Folge in \mathcal{D} und $n \in \mathbb{N}$. γ bildet jede Assoziiertenklasse $\{q \mid q \approx p\}$ ($p \vdash n$) auf den unzerlegbaren \mathcal{D}_n -Links-Modul*

$$\Lambda^p := \mathcal{D}_n \gamma_p = \langle \gamma_q \mid q \approx p \rangle_K$$

ab; und es gilt: $\mathcal{D}_n = \bigoplus_{p \vdash n} \Lambda^p$. Weiter ist $\Lambda^p \cong \mathcal{D}_n \omega_p$ als \mathcal{D}_n -Links-Modul.

3.3.2 Proposition. *Sei γ eine homogene Lie-Folge in \mathcal{D} und $n \in \mathbb{N}$, $p \vdash n$. Dann enthält Λ^p einen eindeutig bestimmten maximalen Λ^p -Links-Modul, nämlich $\Lambda^p \cap \text{Kern } c_n = \langle \gamma_p - \gamma_q \mid q \approx p \rangle_K$.¹⁶ Insbesondere ist Λ^p unzerlegbar als Λ^p -Links-Modul.*

Wir wissen außerdem, daß $\langle \gamma_p - \gamma_q \mid q \approx p \rangle_K$ ein Linksideal von \mathcal{D}_n ist, d.h. $M(\Lambda^p) = \langle \gamma_p - \gamma_q \mid q \approx p \rangle_K$ ist von der Co-Dimension 1 in Λ^p .

Die letzte noch fehlende Voraussetzung an eine solche Idempotenten-Basis von \mathcal{D}_n liefert (32).

3.3.3 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist p eine η -resistente Zerlegung von n , so schreiben wir $p \models_\eta n$ bzw. $p \vdash_\eta n$, falls p eine η -resistente Partition von n ist.

$\mathcal{D}_{n,\eta}$ erfüllt die Forderungen aus 3.2.17 an A' – da wir mit η einen r -homogenen κ -Endomorphismus gewählt haben. Insgesamt erhalten wir:

3.3.4 Satz (vgl. Main Theorem 10 in [Sch05]). *Es gibt eine homogene Lie-Folge γ in \mathcal{D} derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{D}_n = \bigoplus_{p \vdash n} \mathcal{D}_n * \gamma_p \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_{n,\eta} = \bigoplus_{p \vdash_\eta n} \mathcal{D}_n * \gamma_p$$

*ist. Dabei sind die $\mathcal{D}_n * \gamma_p$ unzerlegbare Linksideale von \mathcal{D}_n . Es ist also $\mathcal{D}_{n,\eta}$ ein direkter Summand des regulären \mathcal{D}_n -Links-Moduls.*

Beweis: Dies folgt mit oben Gesagtem, 3.1.9 und 3.2.39. □

¹⁵Die Äquivalenzrelation \sim auf \mathcal{B} ist gegeben durch die Relation \approx auf \mathbb{N}^* .

¹⁶Dabei sei $c_n : \mathcal{D}_n \longrightarrow \text{Cl}_K(\mathcal{S}_n)$ der Solomon-Epimorphismus, der durch $\Xi^q \mapsto \xi^q$ für alle $q \models n$ gegeben ist.

3.3.1 Jacobson-Radikal und Cartan-Invarianten von $\mathcal{D}_{n,\eta}$

Sei nun γ eine homogene Lie-Folge in \mathcal{D} und $\gamma_n \in \mathcal{D}_{n,\eta}$ für alle $n \in \mathbb{N}_\eta$. Sei $n \in \mathbb{N}$.

3.3.5 Korollar (vgl. Corollary 10.3 in [Sch05]). *Für alle $p \vdash_\eta n$ ist*

$$\text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\eta}} \Lambda^p = \text{Kern } c \cap \Lambda^p = \text{Rad}_{\mathcal{D}_n} \Lambda^p .$$

Insbesondere ist

$$\text{Rad } \mathcal{D}_{n,\eta} = \bigoplus_{p \vdash_\eta n} \text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\eta}} \Lambda^p = \text{Kern } c|_{\mathcal{D}_{n,\eta}} = \langle \gamma_p - \gamma_q \mid q \approx p \vdash_\eta n \rangle_K ;$$

und $\mathcal{D}_{n,\eta}/\text{Rad } \mathcal{D}_{n,\eta}$ ist kommutativ mit der Dimension $\# \{p \mid p \vdash_\eta n\}$.

Beweis: Klar nach 3.2.44 und 3.2.45. □

Wir definieren wie in [BL02]

$$M^p := M^{\gamma_p} = \Lambda^p / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n} \Lambda^p$$

für alle $p \models n$.

3.3.6 Satz. *Es gebe Buchstaben in \mathbb{N} , die nicht η -resistent sind. Sei dann $k := \min\{m \in \mathbb{N} \mid m \text{ nicht } \eta\text{-resistent}\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < k$ ist dann $\mathcal{D}_{n,\eta} = \mathcal{D}_n$; \mathcal{D}_n besitzt also keine Zero-Moduln als Kompositionsfaktoren. Ist $n \geq k$ und $q^{(k)} := (n-k).k$, so ist $M^{q^{(k)}}$ ein $\mathcal{D}_{n,\eta}$ -Zero-Modul. (Im Falle $k = n$ ist $q^{(k)} = n$.)*

Beweis: Im Falle $n < k$ sind alle Zerlegungen von n η -resistent. Sei also $n \geq k$ und $p \models_\eta n$. Dann ist $p \not\approx q^{(k)}$, also $\frac{1}{p?} \gamma_p \not\sim \frac{1}{q^{(k)}?} \gamma_{q^{(k)}}$, und nach 3.2.12 ist dann $\gamma_p M^{q^{(k)}} = 0$, also $\text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\eta}} M^{q^{(k)}} = 0$. □

3.3.7 Definition und Bemerkung. Seien k und $q^{(k)}$ wie in 3.3.6. Wir definieren

$$M_\eta^0 := M^{q^{(k)}} .$$

M_η^0 ist dann ein $\mathcal{D}_{n,\eta}$ -Zero-Modul.

3.3.8 Korollar. *Sei k wie in 3.3.6. Im Falle $n \geq k$ repräsentieren M^p , $p \vdash_\eta n$, und M_η^0 die Isomorphieklassen der irreduziblen $\mathcal{D}_{n,\eta}$ -Moduln. Für alle $q \vdash n$, die nicht η -resistent sind, ist $M_{\mathcal{D}_{n,\eta}}^0 \cong M^q$.*

Beweis: Dies folgt mit 3.2.15 und 3.3.6. □

Aus der Proposition 1.1 in [BL02] folgt direkt die

3.3.9 Proposition (vgl. Proposition 10.6 in [Sch05]). *Sei M ein endlich-dimensionaler \mathcal{D}_n -Links-Modul. Dann ist für alle $p \vdash_\eta n$ die Vielfachheit von M^p in einer $\mathcal{D}_{n,\eta}$ -Kompositionsreihe von M gleich*

$$[M, M^p]_{\mathcal{D}_{n,\eta}} := \dim \gamma_p M,$$

welche auch die Vielfachheit $[M, M^p]_{\mathcal{D}_n}$ von M^p in einer \mathcal{D}_n -Kompositionsreihe von M ist. Die Vielfachheit von M_η^0 in einer $\mathcal{D}_{n,\eta}$ -Kompositionsreihe von M ist

$$[M, M_\eta^0]_{\mathcal{D}_{n,\eta}} = \sum_{\substack{p \vdash n \\ p \not\vdash_\eta n}} [M, M^p]_{\mathcal{D}_n} = \dim M - \sum_{p \vdash_\eta n} [M, M^p]_{\mathcal{D}_{n,\eta}} = \dim I_{\mathcal{D}_{n,\eta}}(M).$$

□

Jedes Wort $r \in \mathbb{N}^*$ besitzt eine eindeutig bestimmte Zerlegung $r = r^{(1)} \dots r^{(l)}$ in Lyndon-Worte $r^{(1)}, \dots, r^{(l)} \in \mathbb{N}^*$ derart, daß $r^{(1)} \geq_{lex} \dots \geq_{lex} r^{(l)}$ [Gar]. Ist $r \models n$, so ist die *Lyndon-Summen-Zerlegung (Lyndon sum composition)* von r definiert durch

$$\text{LSC}(r) := (\text{sum } r^{(1)}) \dots (\text{sum } r^{(l)}).$$

Nun zu den *Cartan-Invarianten*

$$c_{p,q} := [\Lambda^q, M^p]_{\mathcal{D}_{n,\eta}} \quad (p, q \vdash_\eta n)$$

von $\mathcal{D}_{n,\eta}$, welche man sofort aus [BL02] erhält:

3.3.10 Korollar (vgl. Corollary 10.7 in [Sch05]). *Die Cartan-Matrix von $\mathcal{D}_{n,\eta}$ ist gegeben durch*

$$c_{p,q} = [\Lambda^q, M^p]_{\mathcal{D}_n} = \# \{r \models n \mid r \approx q, \text{LSC}(r) \approx p\}$$

für alle $p, q \vdash_\eta n$.

Beweis: Die erste Gleichheit folgt aus 3.3.9. Es ist

$$[\Lambda^q, M^p]_{\mathcal{D}_n} = \dim \gamma_p \Lambda^q = \dim \gamma_p \mathcal{D}_n \gamma_q \stackrel{3.3.1}{=} \dim \gamma_p \mathcal{D}_n \omega_q \stackrel{(32)}{=} \dim \omega_p \mathcal{D}_n \omega_q.$$

Nun folgt die zweite Gleichheit aus dem Corollary 2.1 in [BL02].

□

3.3.2 Zur Loewy-Reihe von $\mathcal{D}_{n,\eta}$

3.3.11 Bemerkung (vgl. 3.2.25). Im Falle $M = \mathcal{D}_{n,\eta}$ sind die J_j und I_j ($j \in \mathbb{N}$) Linksideale von $\mathcal{D}_{n,\eta}$; insbesondere ist $I_{\mathcal{D}_{n,\eta}}(\mathcal{D}_{n,\eta})$ ein Linksideal.

Direkt aus 3.2.27 folgt das

3.3.12 Korollar. *Es ist*

$$I_{\mathcal{D}_{n,\eta}}(\mathcal{D}_{n,\eta}) = \text{Ann}_r(\mathcal{D}_{n,\eta}),$$

insbesondere $I_{\mathcal{D}_{n,\eta}}(\mathcal{D}_{n,\eta})$ ein Ideal von $\mathcal{D}_{n,\eta}$.

Wir betrachten nun den Spezialfall $\eta := \pi$ und die *peak*-Algebra $\mathcal{D}_{n,\pi}$ (siehe Abschnitt 4.1.1). Das folgende Korollar aus 3.2.20 ist ein Auszug aus dem Beweis des Corollary 10.8 in [Sch05].

3.3.13 Korollar. *Für jedes $p \vdash_\pi n$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ ist $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j-1)} \Lambda^p / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j)} \Lambda^p$ ein $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Modul und $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j-1)} \Lambda^p / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p$ als $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Modul vollreduzibel.*

Beweis: (vgl. Beweis von 10.8 in [Sch05]) Sei $p \vdash_\pi n$ und $R^i := \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(i)} \Lambda^p$ für jedes $i \in \mathbb{N}$. Dann ist R^i / R^{i+1} als \mathcal{D}_n -Modul vollreduzibel. Sei $i \in \mathbb{N}_0$ und $r \vdash n$ so, daß M^r isomorph zu einem irreduziblen Faktor von R^i / R^{i+1} ist. Nach Theorem 2.2 in [BL02] ist $\ell(r) = \ell(p) - i$ und p assoziiert zu einer Zerlegung von r . Insbesondere ist R^{2j-1} / R^{2j} ein $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Modul für alle $j \in \mathbb{N}$, da r nicht ungerade (also nicht π -resistent) ist für $\ell(r) = \ell(p) - (2j - 1)$. R^{2j} / R^{2j+1} ist auch als $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Modul vollreduzibel. Wendet man nun 3.2.20 auf $M = R^{2j-1} / R^{2j+1}$ und $U = R^{2j} / R^{2j+1}$ an, so folgt die Vollreduzibilität von R^{2j-1} / R^{2j+1} als $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Modul. \square

Trivial ist:

$$\text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\eta}}^{(i)} \Lambda^q \subseteq \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(i)} \Lambda^q$$

für alle $q \vdash_\eta n$ und $i \in \mathbb{N}$. Schocker zeigt in [Sch05] für den Fall $\eta = \pi$ sogar folgendes:

3.3.14 Korollar (vgl. 10.8 in [Sch05]). *Für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $p \vdash_\pi n$ ist*

$$\text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\pi}}^{(j)} \Lambda^p \subseteq \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j-1)} \Lambda^p.$$

Beweis: Wegen $\text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\pi}} \Lambda^p = \text{Rad}_{\mathcal{D}_n} \Lambda^p$ folgt die Behauptung mittels einer leichten Induktion und 3.3.13. \square

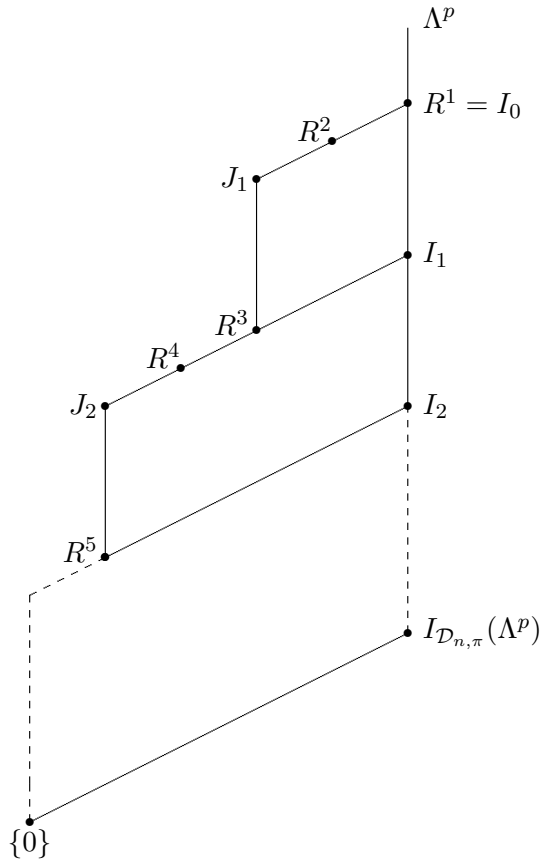
Der nächste Satz ist wie 3.2.23 eine Folgerung aus 3.2.20 und 3.2.21. Aufgrund von 3.3.13 kann man für den direkten Summanden Λ^p ($p \vdash_\pi n$) von $\mathcal{D}_{n,\pi}$ genauer sagen:

3.3.15 Satz. *Sei $p \vdash_\pi n$. Es gibt eine Kette von Linksidealen $\Lambda^p \supseteq I_0 = \text{Rad}_{\mathcal{D}_n} \Lambda^p \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq \{0\}$ und eine Kette von Linksidealen $\Lambda^p \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots \supseteq \{0\}$ derart, daß für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt:*

- (i) $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p \subseteq I_j$;
- (ii) $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p \subseteq J_j \subseteq \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j)} \Lambda^p$;
- (iii) $I_j / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p$ ist ein $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Modul;

- (iv) $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j)} \Lambda^p / J_j$ ist ein $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Modul, $J_j / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p$ besitzt keine $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Kompositionsfaktoren;
- (v) $I_{j-1} / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p = J_j / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p \oplus I_j / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p$.

Beweis: durch Induktion.



Sei wieder $R^i := \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(i)} \Lambda^p$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Nach 3.3.13 ist R^1/R^3 vollreduzibel als $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Modul. Es gibt daher ein Linksideal J_1 von Λ^p derart, daß $R^3 \subseteq J_1 \subseteq R^1$ und R^1/J_1 ein $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Modul ist nach 3.2.21 und J_1/R^3 keinen $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Faktor enthält.

Wieder nach 3.3.13 ist dann $J_1 \subseteq R^2$. Weiter gibt es ein Linksideal I_1 von Λ^p mit $R^3 \subseteq I_1 \subseteq R^1 = I_0$ und $I_0/R^3 = J_1/R^3 \oplus I_1/R^3$. Es ist dann $I_1/R^3 \cong_{\mathcal{D}_{n,\pi}} R^1/J_1$, also ein Zero-Modul.

Sei $k \in \mathbb{N}$, und seien J_k, I_k Linksideale von Λ^p mit den Eigenschaften (i) – (v) für $j = k$. Dann ist $I_k/R^{2(k+1)}$ ein Zero-Modul nach (iii), 3.2.21 und 3.3.13, sowie $R^{2(k+1)}/R^{2(k+1)+1}$ als $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Modul vollreduzibel.

Mit 3.2.20 und wieder 3.2.21 folgt die Existenz eines Linksideals J_{k+1} von $\mathcal{D}_{n,\pi}$ mit den Eigenschaften (ii) und (iv) für $j = k + 1$.

Auch gibt es ein Linksideal I_{k+1} mit den Eigenschaften (i) und (v) für $j = k + 1$. Wegen $I_{k+1}/R^{2(k+1)+1} \cong_{\mathcal{D}_{n,\pi}} I_k/J_{k+1}$ erfüllt I_{k+1} auch (iii). \square

3.3.16 Bemerkung. Falls $\ell(p) \geq 2$ ist, ist $R^1 \neq \{0\}$, also $I_{\mathcal{D}_{n,\pi}}(\Lambda^p) \neq \{0\}$.

Damit und mit 3.2.28 erhält man direkt das

3.3.17 Korollar. Für $n \geq 2$ ist

$$I_{\mathcal{D}_{n,\pi}}(\mathcal{D}_{n,\pi}) \cong \bigoplus_{p \vdash_\pi n} I_{\mathcal{D}_{n,\pi}}(\Lambda^p) \neq \{0\}.$$

\square

3.3.18 Bemerkung. Ist $p = k \cdot 1^{(n-k)}$, $k \in \mathbb{N}$ ungerade, also p eine sog. *Haken-Partition*, so besitzt $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j)} \Lambda^p / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j+1)} \Lambda^p$ nach Theorem 2.2 in [BL02] keine $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Zero-Moduln für jedes $j \in \mathbb{N}$:

Jede potenzfreie Vergrößerung r von zu p Assoziierten mit $\ell(r) = \ell(p) - 2j$ ist ungerade. In diesem Fall ist $J_j = \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j)} \Lambda^p$ für jedes $j \in \mathbb{N}$.

In [Sch05] wird vermutet, daß die absteigende Loewy-Reihe von Λ^p (als $\mathcal{D}_{n,\pi}$ -Modul) gerade die Teilkette der absteigenden Loewy-Reihe von Λ^p (als \mathcal{D}_n -Modul) ist, die aus Λ^p und den ungeraden Loewy-Schritten $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(2j-1)} \Lambda^p$, $j \in \mathbb{N}$, besteht. Ein Beweis für diese Vermutung wird für den Fall gegeben, daß p eine Haken-Partition ist – siehe dort Lemma 10.9.

Anders ist die Lage (vermutlich) im Fall $\eta := \tau = \eta_1 \diamond \text{id}$, jedenfalls:

3.3.19 Bemerkung. Sei $q \vdash_\tau n$, $i \in \mathbb{N}$, und sei $r \vdash n$ so, daß M^r ein Kompositionsfaktor von $\text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(i)} \Lambda^q / \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(i+1)} \Lambda^q$ ist. Nach Theorem 2.2 in [BL02] ist dann q assoziiert zu einer Zerlegung von r . Daher enthält auch r nur τ -resistente Buchstaben. Es gilt:

Jeder \mathcal{D}_n -Kompositionsfaktor der \mathcal{D}_n -Loewy-Reihe von Λ^q ist ein *nicht-trivialer* $\mathcal{D}_{n,\tau}$ -Modul.

Allgemeiner formulieren wir die

3.3.20 Vermutung. Sei $q \vdash_\eta n$. Alle potenzfreien Vergrößerungen von zu q Assoziierten seien η -resistent. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$\text{Rad}_{\mathcal{D}_{n,\eta}}^{(i)} \Lambda^q = \text{Rad}_{\mathcal{D}_n}^{(i)} \Lambda^q .$$

Ist etwa die Menge der η -resistenten Buchstaben \mathbb{N}_η additiv abgeschlossen, so ist die Voraussetzung aus 3.3.20 für jedes $q \vdash_\eta n$ erfüllt.

Kapitel 4

Beispiele für homogene κ -Endomorphismen und κ -induzierte Linksideale in \mathcal{D}

Wir geben in diesem Kapitel für jeden in dieser Arbeit eine Rolle spielenden Typ von κ -Endomorphismus Beispiele an: zwei r -homogene, einer davon idempotent, einen nilkonvergenten und einen nicht r -homogenen außerhalb von \mathcal{K} . Wir benutzen dazu das Alphabet \mathbb{N} , da wir auch zum Teil die zugehörigen Linksideale in Solomons Algebra betrachten.

Mit Hilfe von zwei der hier angegebenen κ -Endomorphismen haben wir im Kapitel 2 ein Gegenbeispiel konstruiert (Links-Distributivgesetz). Dafür war ein mindestens 3-elementiges Alphabet nötig. (Zur Erinnerung: Im Fall $\#X = 2$ ist $(\mathcal{H}_{\kappa_X}, \oplus, \text{HEA})$ ein Ring.) Durch Einschränken auf den Definitionsbereich $K\underline{m}^*$ lassen sich die hier angegebenen $\kappa_{\mathbb{N}}$ -Endomorphismen in $\kappa_{\underline{m}}$ -Endomorphismen überführen, leisten somit auch in \mathcal{H}_{κ_X} Gewünschtes.

Neben id ist für jedes $a \in K$ die Folge $n \mapsto a^n \cdot n$ ein weiteres Beispiel für eine κ -Folge, wie man leicht nachprüft. Allgemeiner ist für jede κ -Folge α und jedes $a \in K$ auch $n \mapsto a^n \cdot n\alpha$ eine κ -Folge.

Daher ist der Endomorphismus ι , gegeben durch

$$(38) \quad n\iota := (-1)^n n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, ein κ -Endomorphismus.

4.1 Zwei Beispiele für r -homogene κ -Endomorphismen und ihre Linksideale in \mathcal{D}

Die folgenden beiden Beispiele (*peak*-Algebra und Algebra zum *derangement*-Idempotent) entstammen einer unveröffentlichten Arbeit von D. Blessenohl. Wir übernehmen hier nur das Wichtigste.

4.1.1 Die *peak*-Algebra

Wie man aus der Definition von \downarrow in Abschnitt 1.1.4 leicht abliest, ist

$$\Delta^{1..n} \downarrow = \sum_{i=0}^n \Delta^{1..i} \otimes \Delta^{1..(n-i)},$$

wobei $\Delta^{1..n} := n(n-1) \cdots 21 \in \mathcal{S}_n$ ist. Wegen

$$\Delta^{1..n} = \sum_{q \models n} (-1)^{n-\ell(q)} \Xi^q$$

ist daher

$$(39) \quad \varphi : n \mapsto \sum_{q \models n} (-1)^{n-\ell(q)} q$$

eine κ -Folge, deren Fortsetzung zu einem κ -Endomorphismus wir ebenfalls mit φ bezeichnen (vgl. auch [GKL⁺]). Wir setzen

$$\pi := \varphi \diamond \text{id}.$$

Nach 2.1.6 ist π ein (homogener) κ -Endomorphismus, der aber – wie aus der folgenden Proposition ersichtlich – nicht harmlos ist.

4.1.1 Proposition. *Für alle $q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*$ ist*

$$q\pi = 2^{\ell(q)} \sum_{\substack{r \models q \\ F_q(r) \text{ ungerade}}} (-1)^{n-\ell(r)} r.$$

Dabei ist $F_q(r)$ definiert als das Produkt aller $r_{\dagger}^{[q_i]}$, $r^{[q_i]} \models q_i$ für alle $i \in \underline{k}$, und der Index \dagger bezeichnet den letzten Buchstaben eines Wortes. Insbesondere ist

$$n\pi = 2 \sum_{\substack{r \models n \\ r_{\dagger} \text{ ungerade}}} (-1)^{n-\ell(r)} r$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und n genau dann π -resistent, wenn n ungerade ist. Außerdem ist $q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*$ genau dann π -resistent, wenn q_1, \dots, q_k ungerade sind. Ein solches Wort q nennen wir ebenfalls ungerade.

Beweis: Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
n\pi &= \sum_{i=0}^n (n-i)\varphi.i \\
&= \sum_{q \models n} (-1)^{n-\ell(q)} q + \sum_{i=1}^n \sum_{r \models n-i} (-1)^{n-i-\ell(r)} r.i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{s \models n-i} (-1)^{n-\ell(s)-1} s.i + \sum_{i=1}^n \sum_{r \models n-i} (-1)^{n-i-\ell(r)} r.i \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{s \models n-i} \left((-1)^{n-\ell(s)-1} + (-1)^{n-\ell(s)-i} \right) s.i \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ ungerade}}}^n 2 \sum_{s \models n-i} (-1)^{n-\ell(s)-1} s.i \\
&= 2 \sum_{\substack{r \models n \\ r \uparrow \text{ ungerade}}} (-1)^{n-\ell(r)} r.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist n genau dann π -resistent, wenn n ungerade ist. Ist $q = q_1 \dots q_k \models n$, so folgt nun leicht

$$\begin{aligned}
q\pi &= q_1\pi \dots q_k\pi \\
&= 2^k \left(\sum_{\substack{r^{[q_1]} \models q_1 \\ r \uparrow^{[q_1]} \text{ ungerade}}} (-1)^{q_1-\ell(r^{[q_1]})} r^{[q_1]} \right) \dots \left(\sum_{\substack{r^{[q_k]} \models q_k \\ r \uparrow^{[q_k]} \text{ ungerade}}} (-1)^{q_k-\ell(r^{[q_k]})} r^{[q_k]} \right) \\
&= 2^{\ell(q)} \sum_{\substack{r \models q \\ F_q(r) \text{ ungerade}}} (-1)^{n-\ell(r)} r.
\end{aligned}$$

□

Wegen $1 \cdot^n \models q$ ist $q\pi \neq 0_{K\mathbb{N}^*}$ für jedes $q \models n$. Die Algebra \mathcal{D}_π ist die von Schocker [Sch05] ausführlich behandelte *peak*-Algebra. Nach Schocker ist $\mathcal{B} := \{\Xi^{q\pi} \mid q \text{ ungerade}\}$ eine Basis von \mathcal{D}_π , also $\mathcal{B}\Xi^{-1} = \{q\pi \mid q \text{ ungerade}\}$ eine Basis von $\text{Bild } \pi$ und somit π r -homogen. Man kann zeigen, daß die Dimension von $\mathcal{D}_{n,\pi}$ gerade die n -te Fibonacci-Zahl F_n ist.

4.1.2 Das *derangement*-Idempotent

Nach (14), (20) und (21) ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(40) \quad n\eta_1 = \frac{1}{n!} \cdot 1 \cdot^n,$$

und wir wissen: $\eta_1 \in \mathcal{H}_\kappa$, wie auch $\eta_{-1} := \eta_f \in \mathcal{H}_\kappa$ für $f := \{(1, -1)\} \in K^\mathbb{N}$. Mit (14) und (19) sieht man sofort:

$$n\eta_{-1} = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot 1^{\cdot n}.$$

Wir setzen $\tau := \eta_{-1} \diamond \text{id}$. Dann ist

$$n\tau = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \cdot 1^{\cdot i} \cdot (n-i)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere $1\tau = 0_{K\mathbb{N}^*}$. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n\tau\tau = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \cdot \underbrace{1\tau \cdot \dots \cdot 1\tau}_i \cdot (n-i)\tau = n\tau,$$

d.h. τ ist ein idempotenter, homogener, harmloser κ -Endomorphismus, sogar $\tau c_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Also ist auch τ r -homogen, somit $\{q\tau \mid q\tau\text{-resistent}\} = \{q\tau \mid 1 \text{ ist kein Buchstabe von } q\}$ eine Basis von $\text{Bild } \tau$. Man kann zeigen, daß die Dimension von \mathcal{D}_τ die $(n-1)$ -te Fibonacci-Zahl F_{n-1} ist.

$\Xi^{n\tau}$ ist das von Schocker in [Sch03] behandelte *derangement*-Idempotent.

Nebenbei bemerkt sind η_1 und $\eta_{-1} \diamond \eta_1$ \diamond -invers zueinander:

$$\eta_1 \diamond \eta_{-1} = \varepsilon = \eta_{-1} \diamond \eta_1,$$

wie man sich auf verschiedene Arten überlegen kann. Einfach nachgerechnet ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n(\eta_1 \diamond \eta_{-1}) &= \sum_{i=0}^n (n-i)\eta_1 \cdot i\eta_{-1} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)!} \cdot 1^{\cdot (n-i)} \cdot \frac{(-1)^i}{i!} \cdot 1^{\cdot i} \\ &= \frac{1}{n!} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \right) 1^{\cdot n} \\ &= 0_{K\mathbb{N}^*} \\ &= n\varepsilon. \end{aligned}$$

Man sieht aber auch sofort, daß η_1 und η_{-1} miteinander vertauschbar sind bezüglich \diamond . Mit 2.1.9 gelangt man dann wegen $\eta_{(0_\mathcal{L})} = \varepsilon$ zur selben Einsicht.

4.2 Ein nicht r -homogener κ -Endomorphismus außerhalb von \mathcal{K}

Für jeden homogenen κ -Endomorphismus η ist folgendes eine notwendige Bedingung für r -Homogenität: Jeder Buchstabe, der nicht im Kern liegt, muß eine η -resistente Zerlegung besitzen.

4.2.1 Satz. *Sei $\eta \in \mathcal{H}_\kappa$. Gibt es ein $n \in \mathbb{N} \setminus \text{Kern } \eta$ derart, daß n keine η -resistenten Zerlegungen besitzt, so ist η nicht r -homogen.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \text{Kern } \eta$, und n besitze keine η -resistenten Zerlegungen. Insbesondere ist dann $n \notin \mathbb{N}_\eta$. Da η homogen ist, ist $n\eta \in Z_n$. Da aber

$$Z_n \cap \langle q\eta \mid q \in \mathbb{N}_\eta^* \rangle_K = \langle q\eta \mid q \vdash_\eta n \rangle_K = \{0_K\}$$

ist – denn $\{q \mid q \vdash_\eta n\} = \emptyset$ –, folgt: $n\eta \notin \langle q\eta \mid q \in \mathbb{N}_\eta^* \rangle_K$. Daher ist $\{q\eta \mid q \in \mathbb{N}_\eta^*\}$ keine Basis von $\text{Bild } \eta$, d.h. η ist nicht r -homogen. \square

4.2.2 Bemerkung. Sei $\alpha := \iota \diamond \text{id}$. Dann ist α ein homogener κ -Endomorphismus, und für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$n\alpha = \sum_{i=0}^n (-1)^i i \cdot (n-i).$$

Offenbar ist $\mathbb{N}_\alpha = 2 \cdot \mathbb{N}$ – die α -resistenten Buchstaben sind genau die geraden natürlichen Zahlen – und $\text{Kern } \alpha \cap \mathbb{N} = \{1\}$. Da also $3 \notin \text{Kern } \alpha$ ist und keine α -resistenten Zerlegungen besitzt, ist α nach 4.2.1 nicht r -homogen.

Da aber sowohl ι als auch id offenbar bijektiv und r -homogen sind, zeigt dieses Beispiel:

4.2.3 Satz. *Weder die r -homogenen noch die bijektiven κ -Endomorphismen bilden bezüglich \diamond eine Unterstruktur von $(\mathcal{H}_\kappa, \diamond)$.* \square

Nebenbei bemerkt ist mit $\eta_1 : n \mapsto \frac{1}{n!} 1^n$ und $\eta_{-1} : n \mapsto (-1)^n \frac{1}{n!} 1^n$

$$\eta_1 \iota = \eta_{-1} = \iota \eta_1.$$

4.3 Ein nil-konvergenter κ -Endomorphismus mit nilpotentem Linksideal in \mathcal{D}_n

Wir betrachten nun den zum Element $[1, 2]_{\text{conc}} = 1.2 - 2.1 \in \mathcal{L} \subseteq \widehat{\mathcal{L}}$ gehörigen κ -Endomorphismus: Es ist

$$N\widehat{\eta_{[1,2]_{\text{conc}}}} = \exp([1, 2]_{\text{conc}}) \widehat{\Phi}^{-1},$$

daher zeigen wir zunächst folgenden

4.3.1 Satz. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $m := a + b$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$([a, b]_{\text{conc}})^n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n}} \text{sgn}(\sigma) \sigma((a.b)^n) \in Z_{mn},$$

wobei sgn das Signum einer Permutation, $\mathcal{S}_{2 \cdot n}$ die Standard-Young-Untergruppe¹⁷ von \mathcal{S}_{2n} und in der Summe auf der rechten Seite Polya-Aktion gemeint sei.

Beweis: durch Induktion. Für $n = 1$ ist

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_2} \text{sgn}(\sigma) \sigma a.b = a.b - b.a = [a, b]_{\text{conc}}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\begin{aligned} ([a, b]_{\text{conc}})^n &= ([a, b]_{\text{conc}})^{(n-1)} \cdot [a, b]_{\text{conc}} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot (n-1)}} \text{sgn}(\sigma) \sigma((a.b)^{(n-1)}) \right) \cdot (a.b - b.a) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot (n-1)}} \text{sgn}(\sigma) \left((\sigma(a.b)^{(n-1)}) \cdot a.b - (\sigma(a.b)^{(n-1)}) \cdot b.a \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot (n-1)}} \text{sgn}(\sigma) \left((\sigma \# 12)(a.b)^n - (\sigma \# 21)(a.b)^n \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot (n-1)}} \text{sgn}(\sigma) \left(\text{sgn}(\sigma) (\sigma \# 12) + \text{sgn}(\sigma \# 21) (\sigma \# 21) \right) (a.b)^n \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_{2 \cdot n}} \text{sgn}(\tau) \tau((a.b)^n). \end{aligned}$$

□

Mit der Voraussetzung von 4.3.1 ist

$$(41) \quad n\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} = p_n(\exp([a, b]_{\text{conc}}))\Phi^{-1} = \begin{cases} \frac{1}{(\frac{n}{m})!} ([a, b]_{\text{conc}})^{(\frac{n}{m})} \Phi^{-1} & , \text{ falls } m \mid n, \\ 0_{K\mathbb{N}^*} & , \text{ sonst,} \end{cases}$$

im Falle $n = l \cdot (a + b)$ also

$$(42) \quad n\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} = \frac{1}{l!} ([a, b]_{\text{conc}})^l \Phi^{-1} = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot l}} \text{sgn}(\sigma) \sigma((a.b)^l) \Phi^{-1}.$$

Offenbar ist $\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} \in \mathcal{K}$. Speziell im Fall $a = 1, b = 2$ ist für jedes $n = 3 \cdot l$

$$(43) \quad n\eta_{[1,2]_{\text{conc}}} = \frac{1}{l!} ([1, 2]_{\text{conc}})^l = \frac{1}{l!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot l}} \text{sgn}(\sigma) \sigma((1.2)^l),$$

denn eine leichte Induktion zeigt:

¹⁷Diese ist isomorph zu $\underbrace{\mathcal{S}_2 \times \dots \times \mathcal{S}_2}_{n\text{-mal}}$; ein typisches Element für $n = 4$ ist etwa $\sigma = 21346587$.

4.3.2 Bemerkung. Für alle $l \in \mathbb{N}$ ist $([1, 2]_{\text{conc}})^l \Phi^{-1} = ([1, 2]_{\text{conc}})^l$. Denn es ist

$$(1.2 - 2.1)\Phi^{-1} = 1.(2 - \frac{1}{2} \cdot 1.1) - (2 - \frac{1}{2} \cdot 1.1).1 = 1.2 - \frac{1}{2} \cdot 1.1.1 - 2.1 + \frac{1}{2} \cdot 1.1.1 = 1.2 - 2.1.$$

Aus (41) ersieht man sofort:

$$\text{Bild } \eta_{[a,b]_{\text{conc}}} = \langle q\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} \mid q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \underline{k} \ (a+b) \mid q_i \rangle_K.$$

4.3.3 Definition. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*$. Wir sagen, n teilt q (in Zeichen $n \mid q$), wenn n jeden Buchstaben q_i von n teilt.

Erneut unter der Voraussetzung von 4.3.1 erhalten wir für $q = q_1 \dots q_k \in \mathbb{N}^*$ mit $(a+b) \mid q$, $l_i := \frac{q_i}{a+b}$ ($i \in \underline{k}$) und $l := \frac{\text{sum}(q)}{a+b} = l_1 + \dots + l_k$ aus (42)

$$q\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} = \frac{1}{l_1! \dots l_k!} ([a, b]_{\text{conc}})^l \Phi^{-1} \in \langle (\text{sum}(q))\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} \rangle_K.$$

Das zeigt:

4.3.4 Satz. Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $m := a + b$ und $a \neq b$, also $[a, b]_{\text{conc}} \neq 0_{K\mathbb{N}^*}$. Es ist

$$\text{Bild } \eta_{[a,b]_{\text{conc}}} = \langle k\eta_{[a,b]_{\text{conc}}} \mid k \in \mathbb{N} \rangle_K,$$

also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\dim_K(\text{Bild } \eta_{[a,b]_{\text{conc}}} \cap Z_n) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } m \mid n, \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Somit ist das von $\eta_{[a,b]_{\text{conc}}}$ induzierte Linksideal $\mathcal{D}_{n, \eta_{[a,b]_{\text{conc}}}}$ von Solomons Algebra – falls verschieden vom Null-Ideal $\{0_{\mathcal{D}_n}\}$ – irreduzibel:

$$\mathcal{D}_{n, \eta_{[a,b]_{\text{conc}}}} = (\text{Bild } \eta_{[a,b]_{\text{conc}}} \cap Z_n)\Xi = \langle \Xi^{n\eta_{[a,b]_{\text{conc}}}} \rangle_K.$$

□

Insbesondere ist im Falle $3 \mid n$ (etwa $n = 3 \cdot l$) nach (43)

$$\text{Bild } \eta_{[1,2]_{\text{conc}}} \cap Z_n = \langle ([1, 2]_{\text{conc}})^l \rangle_K \text{ und } \mathcal{D}_{n, \eta_{[1,2]_{\text{conc}}}} = \langle \Xi^{([1,2]_{\text{conc}})^l} \rangle_K.$$

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{D}_{n, \eta_{[1,2]_{\text{conc}}}}$ im Radikal von \mathcal{D}_n liegt, also nilpotent ist. Dazu überlegen wir uns zunächst folgenden

4.3.5 Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\Xi^{([1,2]_{\text{conc}})^n} = \frac{1}{2^n} \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^n}.$$

Für den Beweis benötigen wir die Basistransformationsformel von der ω -Basis zur Ξ -Basis aus $[\text{GKL}^+]$:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $q = q_1 \cdot \dots \cdot q_k \models n$. Es ist

$$\omega_q = \sum_{r \models q} (-1)^{\ell(r) - \ell(q)} F_q(r) \Xi^r .$$

Dabei ist $F_q(r)$ für jede Zerlegung r von q definiert wie in 4.1.1.

Beweis von 4.3.5: Es ist

$$\frac{1}{2} \omega_{[1,2]} = \frac{1}{2} (\omega_{1.2} - \omega_{2.1}) = \frac{1}{2} (2\Xi^{1.2} - \Xi^{1.1.1} - 2\Xi^{2.1} + \Xi^{1.1.1}) = \Xi^{[1,2]_{\text{conc}}} .$$

Nun folgt induktiv für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \Xi^{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} &= \Xi^{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot (n-1)} \cdot [1,2]_{\text{conc}}} \\ &= \Xi^{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot (n-1)}} \star \Xi^{[1,2]_{\text{conc}}} \\ &= \left(\frac{1}{2^{n-1}} \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot (n-1)}} \right) \star \left(\frac{1}{2} \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot (n-1)} \cdot [1,2]_{\text{conc}}} \\ &= \frac{1}{2^n} \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} . \end{aligned}$$

□

Das zeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathcal{D}_{3n, \eta_{[1,2]_{\text{conc}}}} = \left\langle \Xi^{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} \right\rangle_K = \left\langle \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} \right\rangle_K .$$

4.3.6 Satz. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\omega_{3 \cdot n} \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} = 3^n n! \omega_{([1,2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} ,$$

d.h. das irreduzible Linksideal $\mathcal{D}_{3n, \eta_{[1,2]_{\text{conc}}}}$ ist isomorph zu $\mathcal{D}_n \omega_{3 \cdot n}$.

Zum Beweis brauchen wir noch eine

4.3.7 Proposition. Sei $x \in \mathcal{L}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$x^{\cdot n} \delta = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{\cdot i} \otimes x^{\cdot n-i} .$$

Beweis: Im Falle $n = 1$ gilt die Behauptung nach dem Satz von Friedrichs, denn x ist bezüglich δ primitiv. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
x^n \delta &= x^{(n-1)} \delta \cdot_{\otimes} x \delta \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (x^i \otimes x^{n-1-i}) \cdot_{\otimes} (x \otimes \emptyset + \emptyset \otimes x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} (x^{(i+1)} \otimes x^{n-1-i} + x^i \otimes x^{n-i}) \\
&= \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{j-1} x^j \otimes x^{n-j} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} x^i \otimes x^{n-i} \\
&= x^n \otimes \emptyset + \emptyset \otimes x^n + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} \right) x^i \otimes x^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i}.
\end{aligned}$$

□

Beweis von 4.3.6: durch Induktion. Im Falle $n = 1$ erhält man mit (33) und wegen $\omega_2 = 12 - 21$

$$\begin{aligned}
\omega_3 \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} &= \omega_3 \omega_{1,2} - \omega_3 \omega_{2,1} = \omega_{\omega_2 1,2} - 2 \omega_{\omega_2 2,1} \\
&= \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} - 2 \omega_{[2,1]_{\text{conc}}} = \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} + 2 \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} \\
&= 3 \omega_{[1,2]_{\text{conc}}}.
\end{aligned}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Wir erhalten induktiv und mit dem Multiplikativen Reziprozitätsgesetz 1.1.1:

$$\begin{aligned}
\omega_{3 \cdot n} \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot n} &= \left((\omega_{3 \cdot (n-1)} \otimes \omega_3) \star_{\otimes} \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot n} \downarrow \right) \mu_{\star} \\
&= \left((\omega_{3 \cdot (n-1)} \otimes \omega_3) \star_{\otimes} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot i} \otimes \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot (n-i)} \right) \mu_{\star} \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \omega_{3 \cdot (n-1)} \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot i} \star \omega_3 \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot (n-i)} \\
&= \binom{n}{n-1} \omega_{3 \cdot (n-1)} \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot (n-1)} \star \omega_3 \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} \\
&= 3n (\omega_{3 \cdot (n-1)} \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot (n-1)}) \star \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} \\
&= 3n (3^{n-1} (n-1)!) \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot (n-1)} \star \omega_{[1,2]_{\text{conc}}} \\
&= 3^n n! \omega_{([1,2]_{\text{conc}}) \cdot n}.
\end{aligned}$$

□

Nach 4.3.1 ist

$$\begin{aligned} ([1, 2]_{\text{conc}})^{\cdot n} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n}} \text{sgn}(\sigma) \sigma((1.2)^{\cdot n}) \\ &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n} \\ \text{sgn}(\sigma) = 1}} \sigma((1.2)^{\cdot n}) - \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n} \\ \text{sgn}(\sigma) = -1}} \sigma((1.2)^{\cdot n}). \end{aligned}$$

Offenbar gibt es eine Bijektion zwischen den Mengen $\{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n} \mid \text{sgn}(\sigma) = 1\}$ und $\{\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n} \mid \text{sgn}(\sigma) = -1\}$, und für alle $\sigma \in \mathcal{S}_{2 \cdot n}$ ist $\sigma((1.2)^{\cdot n}) \approx (1.2)^{\cdot n}$. Es folgt:

4.3.8 Satz. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\omega_{([1, 2]_{\text{conc}})^{\cdot n}} \in \langle \omega_q - \omega_{q'} \mid q' \approx q \approx (1.2)^{\cdot n} \rangle_K \subseteq \text{Rad } \mathcal{D}_{3n},$$

d.h. $\mathcal{D}_{3n, \eta_{[1, 2]_{\text{conc}}}}$ ist nilpotent.

□

Symbolverzeichnis

X	o.B.d.A. $X = \mathbb{N}$ oder $X = \underline{m}$ für $m := \#X$	1
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen ohne 0	1
\mathbb{N}_0	$\mathbb{N} \cup \{0\}$	1
\underline{n}	$\{m \mid m \in \mathbb{N}, m \leq n\}$	1
\underline{n}_0	$\underline{n} \cup \{0\}$	1
$A \otimes A$	Tensorprodukt von A mit sich selbst, gebildet über K	1
\cdot_{\otimes}	Multiplikation im Tensorprodukt einer Algebra	1
m^{*n}	$\underbrace{m * \cdots * m}_{n\text{-mal}}$ in einer Halbgruppe $(M, *)$	1
X^*	freies Monoid über X	1
1_{X^*}	neutrales Element in X^*	1
KX^*	Monoidalgebra über X	1
conc	Linearisierung der Konkatenation	1
$\ell(q)$	Länge von $q \in X^*$	1
$sum(q)$	$\sum q_i$	2
\models	Zerlegung	2
\vdash	Partition	2
$<_{lex}$	lexikographische Ordnung	2
\mathcal{S}_n	Symmetrische Gruppe auf \underline{n}	2
id_n	Identität in \mathcal{S}_n	2
\mathcal{S}	$\bigcup_n \mathcal{S}_n$	2
\mathcal{P}	Bialgebra der Permutationen	2
$\alpha * \beta$	inneres Produkt auf \mathcal{P}	2
$X^{(n)}$	Menge aller $q \in X^*$ mit $\ell(q) = n$	2
σq	Polya-Aktion	2
$q \approx r$		3
$q?$		3
$\alpha \# \beta$		3
$\Xi^{k,l}$		3
$\alpha \star \beta$	Konvolutionsprodukt auf \mathcal{P}	3
$\pi \downarrow$	Coproduct auf \mathcal{P}	3
Ξ^q		4
\mathcal{D}_n	Solomon-Algebra	4
\mathcal{D}	$\bigoplus_n \mathcal{D}_n$	4

μ_\star	Linearisierung des Konvolutionsproduktes	4
\widehat{A}	Komplettierung	5
$p_n(S)$	n -te homogene Komponente	5
$G(S)$	Gewicht von S	5
$ S $	$e^{-G(S)}$	5
$d(S, T)$	$ S - T $	5
$\widehat{\alpha}$	stetige Fortsetzung von α	6
$\exp(S)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^n}{n!}$	8
$\log(1_A + S)$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} S^n$	8
Z_n^X	$\langle q \in X^* \mid q \models n \rangle_K$	8
N_X	$\sum_{n \in X} n = \begin{cases} \sum_{n=1}^m n \in KX^* & , \text{ falls } X = \underline{m}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n \in \widehat{KX^*} & , \text{ falls } X = \mathbb{N} \end{cases}$	9
\mathcal{L}_δ	Menge der δ -primitiven Elemente	10
δ_X	Coproduct: $n\delta_X = n \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes n$	11
κ_X	Coproduct: $n\kappa_X = \sum_{i=0}^n i \otimes (n - i)$	11
X_η	Menge aller η -resistenten Buchstaben	13
id_X	Identität auf KX^*	13
Φ_X	$j \mapsto p_j(\exp(N_X))$	16
Φ_X^{-1}	$j \mapsto p_j(\log(!_{X^*} + N_X))$	17
\mathcal{H}_{κ_X}	Menge der homogenen unitären κ_X -Endomorphismen	17
$\alpha \diamond \beta$	Fortsetzung von $(\kappa_X(\alpha \otimes \beta)\text{conc}) _X$	17
ε_X	Projektion auf Z_0^X	17
η_L	Fortsetzung von $n \mapsto p_n(\exp(L)\widehat{\Phi_X}^{-1})$	18
L_α	$\log(1_{X^*} + N_X \widehat{\alpha})\widehat{\Phi_X}$	19
H_X	$\exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}) \longrightarrow \mathcal{H}_{\kappa_X}, S \mapsto \eta(\log S)$	19
Λ_X	$\mathcal{H}_{\kappa_X} \longrightarrow \exp(\widehat{\mathcal{L}_{\delta_X}}), \alpha \mapsto \exp(L_\alpha)$	19
$\diamond \alpha$	Inverses von α bezüglich \diamond	21
HEA	Hintereinanderausführung von Endomorphismen	23
$(\diamond k)\alpha$	$\underbrace{\alpha \diamond \dots \diamond \alpha}_{k\text{-mal}}$	26
αc_n	Koeffizient von n in $n\alpha$	30
\mathcal{K}_X	$\bigcap_{n \in X} \text{Kern } c_n$	32
c_X	$\alpha \mapsto (\alpha c_n)_{n \in X}$	32
L_f	$\sum_{n \in X} f_n \cdot n$	32
K^X	Abbildungen von X nach K	33
η_f	η_{L_f}	33
$\mathcal{H}_{\kappa_X}^{(n)}$	$\left\{ \alpha \in \mathcal{H}_{\kappa_X} \mid Z_1^X + \dots + Z_n^X \leq \text{Kern } \alpha \right\}$	36
$G(\eta)$	Gewicht von η	44
$ \eta $	$e^{-G(\eta)}$	44
$d(\alpha, \beta)$	$ \alpha \diamond \beta $	44
$\mathcal{L}_{\mathcal{D}}$	\downarrow -primitive Elemente in \mathcal{D}	52
\mathcal{D}_η	$(\text{Bild } \eta)\Xi$	52

$\mathcal{D}_{n,\eta}$	$\mathcal{D}_\eta \cap \mathcal{D}_n$	52
ω_n	$\sum_{r \models n} (-1)^{\ell(r)-1} r_\dagger \Xi^r$	53
$\mathcal{J}(A)$	Jacobson-Radikal	56
$\mathcal{N}(A)$	Nil-Radikal	56
$M(Ae)$	$Ae \cap \mathcal{N}(A)$	58
M^e	$Ae/M(Ae)$	58
\mathcal{B}	K -Basis einer K -Algebra A aus Idempotenten	58
\sim	Äquivalenzrelation auf \mathcal{B}	59
$[e]_\sim$	Äquivalenzklasse	59
\mathcal{R}	Repräsentantensystem für Äquivalenzklassen in \mathcal{B}	59
A'		59
\mathcal{R}'		59
\mathcal{B}'		59
$\text{Rad}_B M$	Modul-Radikal	61
$\text{Rad}_B^{(j)} M$	j -ter Loewy-Schritt	61
$\text{Ann}_r(y)$	Rechts-Annulator	63
$\text{Ann}_r(Y)$	$\bigcap_{y \in Y} \text{Ann}_r(y)$	63
$N <_B M$	N maximaler B -Teilmodul von M	65
Λ^p	unzerlegbarer \mathcal{D}_n -Links-Modul	68
M^p	$\Lambda^p / \text{Rad}_{D_n} \Lambda^p$	68
M_η^0		68
$[M, M^p]_{\mathcal{D}_{n,\eta}}$	$\dim \gamma_p M$	69
$\text{LSC}(r)$	Lyndon-Summen-Zerlegung	69
$c_{p,q}$	Cartan-Invarianten	69

Literaturverzeichnis

- [Bak05] H.F. Baker. Alternants and continuous groups. *Proc. London Math. Soc.*, 3: 24-47, 1905.
- [Bau01] T. Bauer. Über die Struktur der Solomon-Algebren. *Bayreuth. Math. Schr.*, 63: 1-102, 2001.
- [BBG] F. Bergeron, N. Bergeron, A. Garsia. *Idempotents for the free Lie algebra and q-enumeration*, in D. Stanton (Ed.), Invariant Theory and Tableaux, of IMA Volumes in Math. and its Appl., Vol. 19, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, pp. 166-190, 1990.
- [BC88] A. Baider, R. C. Churchill. The Campbell-Hausdorff group and a polar decomposition of graded algebra automorphisms. *Pacific J. Math.*, 131 No 2: 219-235, 1988.
- [BL93] D. Blessenohl, H. Laue. Algebraic combinatorics related to the free Lie algebra. *Publ. IRMA Srasbourg, Actes 29^e Séminaire Lotharingien*, P. 1-21, 1993.
- [BL96] D. Blessenohl, H. Laue. On the descending Loewy series of Solomon's descent algebra. *J. Algebra*, 180: 698-724, 1996.
- [BL02] D. Blessenohl, H. Laue. The module structure of Solomon's descent algebra. *J. Austral. Math. Soc.*, 72: 317-333, 2002.
- [Bou] N. Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras, chapter 1-3*. Springer, 1998.
- [BS] D. Blessenohl, M. Schocker. *Noncommutative Character Theory of the Symmetric Group*. Imperial College Press, 2005.
- [Cam97] J.E. Campbell. On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups. *Proc. London Math. Soc.*, 1, 28: 381-390, 1897.
- [Cam98] J.E. Campbell. On a law of combination of operators (second paper). *Proc. London Math. Soc.*, 1, 29: 14-32, 1898.
- [Car56] P. Cartier. Démonstration algébrique de la formule de Hausdorff. *Bull. Soc. Math. France*, 84: 241-309, 1956.
- [Clay] J.R. Clay. *Nearrings. Geneses and Applications*. Oxford University Press, 1992.

- [Gar] A. M. Garsia. *Combinatorics of the free Lie algebra and the symmetric group*, in: P. H. Rabinowitz, E. Zehnder (Eds.), *Analysis, etc.*, Academic Press, Boston, pp. 309-382.
- [GKL⁺] L.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. Retakh, J.-Y. Thibon. Non-commutative symmetric functions. *Adv. in Math.*, 112(2): 218-348, 1995.
- [Hau06] F. Hausdorff. Die symbolische Exponentialfunktion in der Gruppentheorie. *Leipziger Berichte*, 58: 19-48, 1906.
- [Jöl99] A. Jöllenbeck. Nichtkommutative Charaktertheorie der symmetrischen Gruppen. *Bayreuth. Math. Schr.*, 56: 1-41, 1999.
- [Lam] T.Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*, 2nd ed. Bd. 131. New York, Springer, 2001.
- [MKS] W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar. *Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations*, 2nd rev. ed. New York Dover Publ., 1976.
- [MR95] C. Malvenuto, C. Reutenauer. Duality between Quasi-Symmetric Functions and the Solomon Descent Algebra. *J. Algebra*, 177: 967-982, 1995.
- [Mur04] J. Murdock. Hypernormal form theory: foundations and algorithms. *J. Differential Equations*, 205: 424-465, 2004.
- [Pilz] G. Pilz. *Near-Rings*, rev. ed. Amsterdam, North-Holland Publ. Co., 1983.
- [PR99] F. Patras, C. Reutenauer. Higher Lie Idempotents. *J. Algebra*, 222: 51-64, 1999.
- [Reu] C. Reutenauer. *Free Lie Algebras*. Vol.7 of *London Mathematical Society Monographs, new series*. Oxford Univeresity Press, 1993.
- [Sch03] M. Schocker. Idempotents for Derangement Numbers. *Discrete Math.*, 269: 239-248, 2003.
- [Sch05] M. Schocker. The peak algebra of the symmetric group revisited. *Adv. in Math.*, 192: 259-309, 2005.
- [Sol76] L. Solomon. A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group. *J. Algebra*, 41: 255-264, 1976.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Yvonne Raden
Anschrift: Kolberger Straße 1
D-24589 Nortorf
Geburtsdatum, -ort: 16.06.1976 in Neumünster
Familienstand: ledig
Staatsangehörigkeit: deutsch

Schul-/Berufsausbildung:

06/1995 Abitur am Helene-Lange-Gymnasium in Rendsburg
08/1995 – 07/1997 Theodor-Litt-Schule, Neumünster: Berufsfachschule
für Pharmazeutisch-Technische Assistenten (PTA),
08/1997 – 01/1998 Berufsbezogenes Praktikum (PTA)
in der Apotheke 403, Kiel
02/1998 staatliche Prüfung zur PTA

Studium:

WS 1998/99 – SS 1999 Studium an der Technischen Universität Hamburg-Harburg,
Studiengang Allgemeine Ingenieurwissenschaften
(Schwerpunkt Elektrotechnik)
WS 1999/2000 Wechsel zur Christian-Albrechts-Universität zu Kiel (CAU),
Studiengang: Elektrotechnik
SS 2000 – SS 2005 Wechsel zum Studiengang Diplom-Mathematik an der CAU
(12 Fachsemester) mit Nebenfach Elektrotechnik
Abschluß: Diplom-Mathematikerin
Abschlußnote: sehr gut
seit WS 2005/06 Promotionsstudium an der CAU als Stipendiatin
des ESW Villigst, Fach: Mathematik

Berufstätigkeit:

04/1998 – 08/1998 Wissenschaftliche Hilfskraft bei der Fraunhofer-Gesellschaft
zur Förderung der angewandten Forschung e.V.,
Fraunhofer-Institut für Siliziumtechnologie in Itzehoe
WS 2001/02 – SS 2005 Wissenschaftliche Hilfskraft
am Mathematischen Seminar der CAU
11/2005 – 02/2006 Werkvertrag am Mathematischen Seminar der CAU

Kiel, 21. April 2009

Versicherung an Eides Statt

Hiermit erkläre ich, daß die von mir eingereichte Dissertation mit dem Titel

Über die Campbell-Hausdorff-Gruppe auf abzählbaren Mengen und Solomons Algebra,

abgesehen von der wissenschaftlichen Beratung durch Prof. Dr. D. Blessenohl und Prof. Dr. H. Laue, meine eigene Arbeit ist, verfaßt unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis. Sie ist bisher weder ganz noch zum Teil veröffentlicht oder zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen.

Kiel, 21. April 2009