

**Das globale $C^*(G, T)$ -Problem
in endlichen Gruppen
der lokalen Charakteristik p**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von
Gyde Autzen

Kiel

2009

Referent/in: Prof. Dr. B. Stellmacher

Korreferent/in: Prof. Dr. R. Farnsteiner

Tag der mündlichen Prüfung: 10.07.2009

Zum Druck genehmigt: Kiel, den

.....
Der Dekan

Zusammenfassung

Sei G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $|G|$, $T \in \text{Syl}_p(G)$. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das $C^*(G, T)$ -Problem in Gruppen der lokalen Charakteristik p .

Wir sagen, dass G lokale Charakteristik p hat, falls für jede p -lokale Untergruppe L von G , d.h. $L = N_G(X)$ für eine nichttriviale p -Untergruppe X von G , $C_L(O_p(L)) \leq O_p(L)$ gilt.

Das $C^*(G, T)$ -Problem besteht darin, die Struktur einer (einfachen) Gruppe von lokaler Charakteristik p zu bestimmen, die nicht von den Normalisatoren gewisser charakteristischer Untergruppen von T erzeugt wird:

$$G \neq \langle C_G(\Omega(Z(T))), \{N_G(C) \mid 1 \neq C \text{ char } B(T)\} \rangle,$$

wobei $B(T)$ die Baumann-Untergruppe von T bezeichne. Wir schreiben in diesem Fall $G \neq C^*(G, T)$.

Unter den Voraussetzungen, dass G lokale Charakteristik p hat und dass $O_p(G) = 1$ sowie $G \neq C^*(G, T)$ gilt, können wir die Struktur gewisser maximaler p -lokaler Untergruppen von G stark einschränken. Diese lokale Analyse dient uns als Hilfsmittel, um globale Aussagen über die Gruppe G treffen zu können.

Im Fall $p \neq 2$ sind wir in der Lage, unter gewissen Zusatzvoraussetzungen und unter Benutzung einer \mathcal{K} -Gruppen-Annahme gewisse einfache Gruppen mit $G \neq C^*(G, T)$ zu klassifizieren. Für $p = 2$ allerdings brauchen wir diese zusätzlichen Annahmen nicht und können hier die Struktur von G in größerer Allgemeinheit bestimmen.

Das $C^*(G, T)$ -Problem ist für die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppe von Belang. Es wurde, ausgehend von der Frage nach der Struktur der einfachen Gruppen, die keine Thompson-Faktorisierung besitzen, von Aschbacher, Foote, Solomon et al. für $p = 2$ gelöst. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind einerseits eine Verallgemeinerung dieser Resultate und stellen andererseits einen alternativen Ansatz zur Behandlung des Problems für $p = 2$ dar.

Abstract

Let G be a finite group, p a prime dividing the order of G and $T \in \text{Syl}_p(G)$. In this thesis we investigate the so called $C^*(G, T)$ -problem in groups of local characteristic p .

We say that a group is of local characteristic p , if for every p -local subgroup L of G , i.e. $L = N_G(X)$ for some non-trivial p -subgroup X of G , we have $C_L(O_p(L)) \leq O_p(L)$.

The $C^*(G, T)$ -problem is to determine the structure of a (simple) group of local characteristic p , which is not generated by the normalizers of certain characteristic subgroups of T :

$$G \neq \langle C_G(\Omega(Z(T))), \{N_G(C) \mid 1 \neq C \text{ char } B(T)\} \rangle.$$

Here, $B(T)$ denotes the Baumann subgroup of T . For brevity, we use the notation $G \neq C^*(G, T)$.

We are able to give some restrictions on the structure of certain maximal p -locals of G under the assumption that G is of local characteristic p with $O_p(G) = 1$ and $G \neq C^*(G, T)$. This local analysis is the key to the investigation of the global structure of the group G .

Adding a few other assumptions in the case $p \neq 2$ and using a \mathcal{K} -group hypothesis we are able to identify some of the finite simple groups G with $G \neq C^*(G, T)$. For $p = 2$, however, we do not need these additional assumptions and can determine the structure of G in a more general manner.

The $C^*(G, T)$ -problem occurs in the classification of the finite simple groups. Based on the classification of simple groups that are not Thompson factorizable, Aschbacher, Foote, Solomon et al. solved it for $p = 2$.

Our results are a generalization of their work and we give an alternative way of solving the problem in the case $p = 2$, respectively.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Preliminarien	7
2.1	Allgemeine Hilfssätze	7
2.2	Moduln und Offender	12
2.3	Ein Maximalitätskonzept	16
2.4	Eigenschaften von Blöcken	17
3	Existenz und Eindeutigkeit von Blöcken	23
3.1	Zwei Eindeutigkeitsätze	24
3.2	$C^*(T) = \{M\}$ und $C^*(G, T) \not\leq M$	25
3.2.1	$\Omega(Z(T)) \not\leq Z(P)$	27
3.2.2	$\Omega(Z(T)) \leq Z(P)$	38
3.2.3	Zusammenfassung	51
4	Lokale Struktur und $B(T)$-Blöcke	53
4.1	Allgemeines	54
4.2	Gewöhnlich lineare Blöcke	61
4.3	Exzeptionelle Blöcke	64
4.4	Symmetrische Blöcke	67
4.4.1	$E/W_E \cong A_3$	68
4.4.2	$E/W_E \cong A_5$ mit symmetrischem Modul	72
5	Abschließende lokale Analyse	77
6	Fusion von p-Elementen	85
7	Die Beweise der Sätze 1 bis 7	101
A	Anhang - Charakterisierungssätze	105
	Literaturverzeichnis	109
	Symbolverzeichnis und Index	111

Kapitel 1

Einleitung

Sei G eine endliche ¹ Gruppe, p eine Primzahl, die $|G|$ teilt, $T \in \text{Syl}_p(G)$. Eine Untergruppe $H \leq G$ heißt **p -lokal**, falls $H = N_G(X)$ gilt für eine p -Untergruppe $1 \neq X \leq G$.

Im Rahmen der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen haben sich die Gruppen der lokalen Charakteristik 2, d.h. Gruppen in denen $C_L(O_2(L)) \leq O_2(L)$ für jede 2-lokale Untergruppe L gilt, als wichtig erwiesen, u.a. weil in ihnen Zentralisatoren von Involutionen starken Struktureinschränkungen genügen müssen, zur Erläuterung siehe z.B. den Übersichtsartikel [Sol1].

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns verallgemeinernd mit Gruppen der lokalen Charakteristik p , d.h. Gruppen, in denen $C_L(O_p(L)) \leq O_p(L)$ für jede p -lokale Untergruppe L gilt. Das Studium solcher Gruppen ist für ein Projekt von Belang, das von Meierfrankenfeld et al. initiiert wurde und in dessen Rahmen die Revision der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen betrieben wird, siehe [MSS].

Ein Hauptbeispiel für endliche Gruppen der lokalen Charakteristik p sind die Gruppen vom Lietyp über einem endlichen Körper der Charakteristik p .

Wir wollen uns in dieser Arbeit der globalen Struktur einer Gruppe nähern, indem wir durch Eigenschaften gewisser ihrer p -lokalen Untergruppen auf Eigenschaften der ganzen Gruppe schließen und z.T. sogar G bis auf Isomorphie identifizieren können.

Das Studium endlicher Gruppen ist in der Tat schon seit langem mit dem Studium ihrer p -lokalen Untergruppen verknüpft. Bereits in der 1872 erschienen Arbeit [Syl], in der die Existenz und Konjugiertheit der heute als p -Sylow-Untergruppen bekannten Untergruppen bewiesen wird, finden sie eine erste Erwähnung.

Als Meilensteine in der lokalen Gruppentheorie sind aber sicherlich insbesondere die Arbeiten von Thompson über normale p -Komplemente, die Nilpotenz des Frobeniuskerns und die Klassifikation der N -Gruppen Ende der 50er und in den 60er Jahren des 20. Jahrhunderts zu nennen, siehe z.B. [Th1] und [Th2].

¹Alle in dieser Arbeit vorkommenden Gruppen seien endlich, auch wenn dies nicht immer explizit gesagt wird.

Im Rahmen dieser Untersuchungen rückte eine gewisse charakteristische Untergruppe von T in den Fokus des Interesses.

Sie ist heute als **Thompson-Untergruppe** von T bekannt und ist folgendermaßen definiert:

$$J(T) := \langle A \mid A \leq T \text{ ist elementarabelsch von maximaler Ordnung} \rangle.$$

Man sagt, G besitzt eine Thompson-Faktorisierung bzw. G ist **Thompson-faktorisierbar**, falls gilt

$$G = C_G(\Omega(Z(T)))N_G(J(T)).$$

Hat G Charakteristik p , (d.h. $C_G(O_p(G)) \leq O_p(G)$), so stoßen wir auf die Frage nach Thompson-Faktorisierbarkeit in folgender natürlicher Weise:

Sei $Z := \Omega(Z(T))$ und $V := \langle Z^G \rangle$, $\bar{G} := G/C_G(V)$. Dann gilt

- (i) V ist elementarabelsch.
- (ii) V ist ein treuer $GF(p)\bar{G}$ -Modul.

Ist nun $J(T) \leq C_G(V)$, so ist $J(T) \leq C_T(V)$, also ist $J(C_T(V)) = J(T)$ und es folgt mit dem Frattini-Argument

$$G = C_G(V)N_G(C_T(V)) \leq C_G(Z)N_G(J(T)),$$

d.h. G ist in der Tat Thompson-faktorisierbar. Ist $J(T) \not\leq C_G(V)$, so gibt es eine ordnungsmaximale elementarabelsche Untergruppe A von T mit $[V, A] \neq 1$. Für die Operation von A (bzw. \bar{A}) auf V gelten dann gewisse Regeln, die uns auf den Begriff des Offenders führen, siehe dazu Kapitel 2.2.

Das Vorhandensein von Offendern wiederum unterwirft die Struktur von G starken Restriktionen, siehe dazu z.B. [Asch2].

Ausgehend von diesen Überlegungen können wir uns allgemeiner fragen, was sich über eine Gruppe der Charakteristik p sagen lässt, für die

$$G \neq \langle C_G(\Omega(Z(T))), N_G(J(T)) \rangle$$

gilt.

Um eine weitere Verallgemeinerung dieses Problems zu formulieren, definieren wir zwei weitere Untergruppen von G , von denen die erste als **Baumann-Untergruppe** bekannt ist. Sie ist ebenso wie $J(T)$ eine charakteristische Untergruppe von T , hat jedoch die zusätzliche Eigenschaft, dass sie unter gewissen Voraussetzungen p -SyLOWuntergruppe ihres normalen Abschlusses ist, siehe dazu [Bau1].

$$B(T) := C_T(\Omega(Z(J(T)))), \text{ die Baumann-Untergruppe von } T,$$

$$C^*(G, T) := \langle C_G(\Omega(Z(T))), \{N_G(C) \mid 1 \neq C \text{ char } B(T)\} \rangle.$$

Offensichtlich ist $\langle C_G(\Omega(Z(T))), N_G(J(T)) \rangle \leq C^*(G, T)$ und G ist insbesondere nicht Thompson-faktorierbar, falls $G \neq C^*(G, T)$ gilt.

Nun sind wir in der Lage, das lokale und das globale **$C^*(G, T)$ -Problem** zu formulieren:

Das lokale $C^*(G, T)$ -Problem:

G habe Charakteristik p und es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Was lässt sich über die Struktur von G sagen?

Das globale $C^*(G, T)$ -Problem:

G habe lokale Charakteristik p , es sei $O_p(G) = 1$ und es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Was lässt sich über die Struktur von G sagen? Kann, falls G einfach ist, gezeigt werden, dass G eine „bekannte“ einfache Gruppe ist?

Eine wichtige Familie von Beispielen für Gruppen, die die Voraussetzungen des globalen $C^*(G, T)$ -Problems erfüllen, sind die projektiven speziellen linearen Gruppen $PSL_3(p^n)$ über einem endlichen Körper der Charakteristik p . Wie wir später sehen werden, sind dies tatsächlich Hauptbeispiele für obige Konfiguration.

Offensichtlich ist die Lösung des lokalen $C^*(G, T)$ -Problems ein wichtiger Schlüssel zur Klärung des globalen Problems. Für $p = 2$ wurde sowohl für das lokale als auch für das globale Problem von Aschbacher, Foote, Solomon et al. u.a. in [Asch1], [Asch2], [Sol2], [SW] und [Fo] ein Resultat präsentiert.

Schließlich gelang es Bundy, Hebbinghaus und Stellmacher in [BHS] auch das lokale $C^*(G, T)$ -Problem für beliebige Primzahlen zu klären. Dieser Beitrag beinhaltet als Spezialfall auch die Resultate aus [Asch1] und [Asch2]. Zu bemerken ist hierbei insbesondere, dass die Methoden in [BHS] sich einerseits wesentlich von denen ihrer Vorgänger unterscheiden und dass andererseits hier das Konzept der von Aschbacher eingeführten *blocks* (später auch *Aschbacher blocks* genannt) aufgegriffen und zum Begriff der **$B(T)$ -Blöcke** modifiziert wurde.

Diese sind vornehmlich Untergruppen E von G mit

$$E/O_p(E) \cong SL_2(q) \text{ und}$$

$$O_p(E) = \Omega(Z(O_p(E))) \text{ ist ein natürlicher } SL_2(q) \text{-Modul.}$$

Diese Blöcke ähneln in ihrem Verhalten den Komponenten und haben überdies nützliche Einbettungseigenschaften.

Zur Definition von $B(T)$ -Blöcken und natürlichen Moduln siehe die Abschnitte 2.4 und 2.2.

Das Hauptresultat aus [BHS] lautet folgendermaßen

Satz 1.1 (Lokaler $C^*(G, T)$ -Satz) Sei G von Charakteristik p , $T \in \text{Syl}_p(G)$, und es gelte $G \neq C^*(G, T)$. Dann gibt es $B(T)$ -Blöcke G_1, \dots, G_r von G , so dass folgende Aussagen gelten:

- (i) $\{G_1, \dots, G_r\}^G = \{G_1, \dots, G_r\}$.
- (ii) $[G_i, G_j] = 1$ für alle $i \neq j$.
- (iii) $G = C^*(G, T)G_0$, wobei $G_0 := \prod_{i=1}^r G_i$.
- (iv) Jeder $B(T)$ -Block von G , der nicht in $C^*(G, T)$ liegt, ist in einem der G_i enthalten.

Dieser Satz und die Resultate der Diplomarbeit [Aut], die in den Abschnitten 2.4 und 3.1 genannt werden, bilden die Grundlage der vorliegenden Arbeit, in der wir uns mit folgender Situation beschäftigen:

Voraussetzung:

Sei G eine endliche Gruppe, p ein Primteiler von $|G|$ und $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $O_p(G) = 1$, G habe lokale Charakteristik p und es sei $G \neq C^*(G, T)$.

In der vorliegenden Arbeit sollen ausgehend von obiger Voraussetzung Strukturaussagen über die Gruppe G getroffen werden, vergleichbar mit den Resultaten aus [Sol2] und [SW]. In der Tat werden die Ergebnisse jener beiden Beiträge sich als Spezialfall unserer Ergebnisse herausstellen.

Satz 1 Sei p eine Primzahl, G eine Gruppe der lokalen Charakteristik p und $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $O_p(G) = 1$ und $G \neq C^*(G, T)$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) G besitzt eine stark p -eingebettete Untergruppe.
- (ii) Es existieren maximale p -lokale Untergruppen L_1 und L_2 , $S \in \text{Syl}_p(L_1)$ mit $B(S) \leq L_1 \cap L_2$ und für $M_i := \langle B(S)^{L_i} \rangle$ und $i \in \{1, 2\}$ gilt
 - (a) $T = B(T) = S$ oder $|N_G(B(S)) : N_{L_1}(B(S))|$ ist eine p -Potenz,
 - (b) $O_p(L_i) \leq B(S)$, $M_i/O_p(L_i) \cong \text{SL}_2(q)'$ für eine p -Potenz q ,
 - (c) $O_p(L_i)/Z(M_i)$ ist ein natürlicher $\text{SL}_2(q)$ -Modul für M_i und $|Z(M_i)| \in \{1, q\}$
oder
 $q = 4$ und $O_2(M_i)/Z(M_i)$ ist ein natürlicher A_5 -Modul für M_i
oder
 $p = 3$ und $O_3(L_i)/\Omega(Z(O_3(L_i)))$ und $\Omega(Z(O_3(L_i)))/Z(M_i)$ sind natürliche $\text{SL}_2(q)$ -Moduln für M_i und $|Z(M_i)| = q$.
 - (d) $O^p(M_i)$ ist ein maximaler $B(S)$ -Block von G .
- (iii) $p = 2$, es existiert genau eine maximale 2-lokale Untergruppe, die T enthält und nicht in $C^*(G, T)$ liegt und es ist $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.

Mit Hilfe des obigen Satzes können wir mit gewissen Zusatzvoraussetzungen z.T. sogar den Isomorphietyp von G bestimmen, falls G einfach ist.

Bevor wir dazu kommen, wollen wir die Resultate, die sich neben und aus Satz 1 ergeben, detaillierter formulieren. Hierbei ergeben sich drei wesentliche Sätze, die wir für $p \in \{2, 3\}$ und $p \geq 5$ jeweils separat formulieren wollen. Zu jedem dieser abstrakten Sätze erhalten wir außerdem einen korrespondierenden Satz, der - wie schon angekündigt - weitestgehend eine Bestimmung für einfaches G beinhaltet.

Satz 2 Sei $p \geq 5$ eine Primzahl, G eine K -echte Gruppe der lokalen Charakteristik p und $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $G \neq C^*(G, T)$ und $O_p(G) = 1$. Es gebe verschiedene maximale p -lokale Untergruppen M und N von G mit $T \leq M \cap N$ und es sei $M \not\leq C^*(G, T)$. Sei E ein maximaler $B(T)$ -Block von M mit $E \not\leq C^*(G, T)$, $E/O_p(E) \cong \text{SL}_2(p^n)$. Sei F ein maximaler $B(T)$ -Block von N . Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) $|T| = p^3$ und T ist extraspeziell.
- (ii) $\langle E, F \rangle \cong \text{PSL}_3(p^n)$ und $N_G(\langle E, F \rangle) = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ ist stark p -eingebettet in G .

Satz 3 Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 2. Zusätzlich sei G einfach und $n > 1$. Dann ist $G \cong \text{PSL}_3(p^n)$.

Satz 4 Sei G eine Gruppe der lokalen Charakteristik 2 und $T \in \text{Syl}_2(G)$. Es sei $O_2(G) = 1$, $O^2(G) = G$ und $G \neq C^*(G, T)$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) G besitzt eine stark 2-eingebettete Untergruppe.
- (ii) T ist eine Dieder- oder Semidiedergruppe.
- (iii) $|T| \leq 2^{10}$.
- (iv) Ein maximaler $B(T)$ -Block E von G mit $E \not\leq C^*(G, T)$ ist vom $\text{SL}_2(2^n)$ -Typ mit $n \geq 3$, $T = B(T)$ und T hat Nilpotenzklasse 2.

Satz 5 Sei G eine einfache Gruppe der lokalen Charakteristik 2, $T \in \text{Syl}_2(G)$ und es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen

$$\text{PSL}_2(q), q = 11 \text{ oder } q = 2^k \pm 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \text{PSL}_3(3), \text{PSU}_4(3^2), \\ M_{11}, M_{22}, M_{23}, J_3, \text{PSL}_2(2^n), \text{Sz}(2^{2n-1}), \text{PSU}_3(2^n), \text{PSL}_3(2^n), \text{PSp}_4(2^n), n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Satz 6 Sei G eine \mathcal{K} -echte Gruppe der lokalen Charakteristik 3 und $T \in \text{Syl}_3(G)$. Es gelte $O_3(G) = 1$ und $G \neq C^*(G, T)$. Es gebe verschiedene maximale 3-lokale Untegruppen M und N von G mit $T \leq M \cap N$ und $M \not\leq C^*(G, T)$.

Sei E ein maximaler $B(T)$ -Block von M mit $E \not\leq C^*(G, T)$, $E/O_3(E) \cong SL_2(3^n)'$. Sei F ein maximaler $B(T)$ -Block von N . Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) $|T| \in \{3^3, 3^6\}$ und T ist extraspeziell oder hat Nilpotenzklasse 3.
- (ii) E ist exzeptionell, $\langle E, F \rangle \cong G_2(3^n)$ und $N_G(\langle E, F \rangle) = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ ist stark 3-eingebettet in G .
- (iii) E ist nicht exzeptionell, $\langle E, F \rangle \cong PSL_3(3^n)$ und $N_G(\langle E, F \rangle) = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ ist stark 3- eingebettet in G .

Satz 7 Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 6. Zusätzlich sei G einfach und $n > 1$. Dann ist $G \cong PSL_3(3^n)$ oder $G \cong G_2(3^n)$.

Es sei erwähnt, dass die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen für die Sätze 1, 4 und 5 nicht vorausgesetzt wird. Für die Sätze 2, 3, 6 und 7 geht sie in der Form ein, dass G als eine \mathcal{K} -echte Gruppe vorausgesetzt wird, d.h. dass die Hauptfaktoren aller echten Untergruppen von G „bekannte“ einfache Gruppen sind. Für die Zwecke der Revision der Klassifikation bedeutet dies jedoch keine Einschränkung.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle bei Prof. Dr. B. Stellmacher für die Betreuung und Hilfestellung während der Entstehung dieser Dissertation und für die ergiebige Diskussion aller auftretenden Fragen herzlich bedanken.

Kapitel 2

Preliminarien

In diesem Kapitel werden wir in mehreren Abschnitten die Hilfsmittel zusammentragen, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit brauchen werden. Hierbei beinhaltet der erste Abschnitt allgemeine gruppentheoretische Lemmata. Im zweiten Abschnitt geben wir Definitionen und grundlegende Eigenschaften von Offendern und natürlichen $SL_2(q)$ - und S_{2n+1} - bzw. A_{2n+1} -Moduln, bevor wir im dritten Abschnitt eine gewisse Menge von p -Untergruppen und ein Maximalitätskonzept dafür vorstellen. Im vierten und letzten Abschnitt schließlich wenden wir uns den für die vorliegende Arbeit sehr wichtigen $B(T)$ -Blöcken zu. Im gesamten Kapitel wird, sofern es möglich ist, auf Beweise verzichtet und der Leser stattdessen auf Literaturquellen verwiesen.

2.1 Allgemeine Hilfssätze

Die folgenden Lemmata sind größtenteils wohlbekannte Hilfsmittel. Wir werden sie im Verlauf dieser Arbeit meist benutzen, ohne sie explizit zu zitieren.

Elementare Eigenschaften teilerfremder Operation werden vorausgesetzt. Eine Darstellung findet sich z.B. in [KS] oder [Hu].

Lemma 2.1 (Thompson-Transfer-Lemma) *Sei S eine 2-Sylowuntergruppe der Gruppe G und $U \leq S$ mit $|S : U| = 2$. Ist $s \in S$ eine Involution mit $s^G \cap U = \emptyset$, so ist $s \notin O^2(G)$.*

Beweis: [KS, 12.1.1] □

Lemma 2.2 *Sei p eine Primzahl und K ein endlicher Körper der Charakteristik p . K besitze einen Körperautomorphismus σ der Ordnung p . Dann ist $[K, \sigma, \sigma] \neq 0$ oder $p = 2$.*

Beweis: Es gelte $[K, \sigma, \sigma] = 0$, also $[K, \sigma] \leq C_K(\sigma)$. $K_0 := C_K(\sigma)$ ist ein Teilkörper von K und es ist $\dim_{K_0} K = p$. Also ist $|K| = |K_0|^p$.

Wegen der quadratischen Operation von σ auf K ist andererseits nach [KS, 9.1.1] $|K| \leq |K_0|^2$ und es folgt $p = 2$. □

Lemma 2.3 Sei P eine nichtabelsche 2-Gruppe der Ordnung 2^n , $n > 1$. P habe Nilpotenzklasse $n - 1$ oder es sei $|P/P'| = 4$.

Dann ist P eine Diedergruppe, eine Semidiedergruppe oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe.

Beweis: [Gor, Kapitel 5, Theorem 4.5] □

Lemma 2.4 Sei G eine endliche Gruppe, $\pi \subseteq \mathbb{P}$ und P eine π -Halluntergruppe von G . Mit $G'(\pi)$ bezeichnen wir den kleinsten Normalteiler von G mit abelscher π -Faktorgruppe.

Dann gilt $P/P \cap G' \cong G/G'(\pi)$.

Beweis: [KS, 7.1.3] □

Lemma 2.5 (1. Satz von Grün) Sei G eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$ und $T \in \text{Syl}_p(G)$. Dann gilt $T \cap G' = \langle T \cap N_G(T)', \{T \cap S', S \in \text{Syl}_p(G)\} \rangle$.

Beweis: [Hu, Kapitel IV, Absatz 3, 3.4] □

Lemma 2.6 Sei $G = \text{PSL}_2(q)$, $q > 3$ ungerade. G habe lokale Charakteristik 2. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

(i) $q = 11$.

(ii) Es existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $q = 2^k + 1$ oder $q = 2^k - 1$.

Beweis: Nach dem Satz von Dickson (siehe z.B. [Hu, 8.27]) existieren $D_1, D_2 \leq G$ mit $D_1 \cong D_{q-1}$, $D_2 \cong D_{q+1}$.¹

1. Fall: D_i ist keine maximale Untergruppe für ein $i = 1, 2$.

Dann besitzt (wiederum nach dem Satz von Dickson) G eine Untergruppe U , die D_i enthält und isomorph ist zu A_4 , S_4 oder A_5 .

Ist $U \cong A_4$, so ist $D_i \cong V_4$ und somit $i = 1$ und $q = 5$.

Ist $U \cong S_4$, so ist entweder $D_i \cong V_4$ und $q = 5$ oder $D_i \cong S_3$ und $q \in \{5, 7\}$ oder $D_i \cong D_8$ und $q \in \{7, 9\}$.

Ist $U \cong A_5$, so ist entweder $D_i \cong V_4$ und $q = 5$ oder $D_i \cong S_3$ und $q \in \{5, 7\}$ oder $D_i \cong D_{10}$ und $q \in \{9, 11\}$.

2. Fall: D_1 und D_2 sind maximale Untergruppen von G .

Es ist $Z(D_i) \neq 1$ für ein $i \in \{1, 2\}$. Da G einfach ist, gilt dann $D_i = C_G(Z(D_i))$, also ist D_i eine 2-lokale Untergruppe von G .

Sei $z_i \in D_i$ mit $|D_i : \langle z_i \rangle| = 2$. Dann ist $O_2(D_i) \leq \langle z_i \rangle \leq C_{D_i}(O_2(D_i))$.

Da D_i laut Voraussetzung Charakteristik 2 hat, folgt $o(z_i) = 2^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$.

Ist $i = 1$, so folgt also $q = 2^{l+1} + 1$, ist $i = 2$, so folgt $q = 2^{l+1} - 1$. □

¹Mit D_n bezeichnen wir stets die Diedergruppe der Ordnung n .

Aus dem Schurschen Lemma und dem Satz von Wedderburn über endliche Schiefkörper erhalten wir folgende Aussage:

Lemma 2.7 *Sei G eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$ und V ein endlicher, irreduzibler $GF(p)G$ -Modul. Dann ist $C_{\text{End}(V)}(G)$ ein Körper.*

□

Lemma 2.8 *Sei G von Charakteristik p und $L \leq G$. Dann ist L von Charakteristik p , falls eine der folgenden Bedingungen gilt:*

- (i) $L \trianglelefteq G$.
- (ii) $O_p(G) \leq L$.
- (iii) $L \trianglelefteq \langle L, O_p(G) \rangle$.
- (iv) $O_p(G) \leq N_G(L)$.

Beweis: [BHS, 2.2].

□

Definition 2.9 *Sei P eine endliche Gruppe, $X \in \text{Syl}_p(P)$. Dann ist P **minimal parabolisch** (bezüglich p), falls $X \not\trianglelefteq P$ gilt, und falls X in genau einer maximalen Untergruppe von P liegt.*

Lemma 2.10 *Sei P eine bezüglich p minimal parabolische Gruppe, $X \in \text{Syl}_p(P)$. Sei M die eindeutig bestimmte maximale Untergruppe von P , die X enthält. Sei $N \trianglelefteq P$. Dann gilt:*

- (i) *Ist $N \leq M$, so ist $N \cap X \trianglelefteq P$.*
- (ii) *Ist $N \not\leq M$, so ist $O^p(P) \leq N$.*

Beweis: [Aut, 2.8]

□

Lemma 2.11 (Erzeugungssatz) *Sei H eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$ und $T \in \text{Syl}_p(H)$. Sei $\mathcal{P}_H(T)$ die Menge aller minimal parabolischen Untergruppen von H , die T enthalten. Dann gilt*

$$H = \langle \mathcal{P}_H(T) \rangle N_H(T).$$

Beweis: Sei H ein minimales Gegenbeispiel, d.h. $H_0 := \langle \mathcal{P}_H(T) \rangle N_H(T)$ ist eine echte Untergruppe von H .

Sei M eine maximale Untergruppe von H mit $T \leq M$. Wegen der Minimalität von H als Gegenbeispiel gilt

$$M = \langle \mathcal{P}_M(T) \rangle N_M(T) \leq H_0.$$

Das heißt, H_0 ist die einzige maximale Untergruppe von H , die T enthält.

Dann ist aber H selber minimal parabolisch, also $H \in \mathcal{P}_H(T)$ und insbesondere $H = H_0$, ein Widerspruch. \square

Lemma 2.12 *Sei P eine bezüglich p minimal parabolische Gruppe der Charakteristik p , $X \in \text{Syl}_p(P)$ und $V := \Omega(Z(O_p(P)))$. Weder $\Omega(Z(X))$ noch $B(X)$ seien normal in P , und es gelte $P/C_P(V) \cong \text{SL}_2(p^m)$.*

Dann ist $B(X) \in \text{Syl}_p(\langle B(X)^P \rangle)$.

Beweis: [PPS, 2.7]. \square

Lemma 2.13 *$\text{SL}_2(p^m)$ ist minimal parabolisch bezüglich p .*

Beweis: [Aut, 2.10] \square

Lemma 2.14 *Sei $n \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \{0, 1\}$ und $G = S_{2n+\epsilon}$. Sei $Y := \langle (1\ 2), \dots, (2n-1\ 2n) \rangle$. Dann gelten folgende Aussagen*

(i) $C_G(Y) = Y$.

(ii) $N_G(Y) \cong Y.S_n$, d.h. $N_G(Y)/Y \cong S_n$.

(iii) $N_G(Y)$ ist transitiv auf $\{(1\ 2), \dots, (2n-1\ 2n)\}$.

(iv) Sind $m_1 > \dots > m_r \in \mathbb{N}$ mit $2n = \sum_{i=1}^r 2^{m_i}$ und $T \in \text{Syl}_2(G)$, so ist T isomorph zu einer 2-Sylowuntergruppe von $S_{2^{m_1}} \times \dots \times S_{2^{m_r}}$.

(v) Ist $2n + \epsilon \neq 4$, so ist $O_2(G) = 1$.

Beweis: Die Aussagen (i) - (iii) folgen durch einfache Rechnung in G .

Für Aussage (iv) genügt es einzusehen, dass jede 2-Potenz, die $(2n)!$ teilt bereits $\prod_{i=1}^r (2^{m_i})!$ teilt:

Ist $r = 1$, so gilt dies offensichtlich. Ist $r > 1$, so ist $\frac{(2n)!}{(2^{m_1})!} \equiv (2n - 2m_1)! \pmod{(2^{m_1})!}$.

Wegen der Maximalität von m_1 (beachte $2^{m_1} > n$) teilt jede 2-Potenz, die $\frac{(2n)!}{(2^{m_1})!}$ teilt, bereits $(2^{m_1})!$, wegen der obigen Kongruenz dann also auch $(2n - 2^{m_1})!$. Induktiv folgt nun das gewünschte.

Aussage (v) folgt aus den Tatsachen, dass $A_{2n+\epsilon}$ einfach ist für $2n + \epsilon \geq 5$ und dass S_3 nicht abelsch ist. \square

Lemma 2.15 *Sei p eine ungerade Primzahl und q eine p -Potenz mit $q \geq 5$. Dann haben $G_1 := PSL_3(q)$ und $G_2 := PSU_3(q^2)$ nicht lokale Charakteristik 2.*

Beweis: In G_1 gibt es eine Involution t mit $C_{G_1}(t) \cong GL_2(q)$.²

Sei 2^m die höchste 2-Potenz, die $q - 1$ teilt. Wegen $q \geq 4$ liegt dann $O_2(C_{G_1}(t))$ in $Z(C_{G_1}(t))$ und hat die Ordnung 2^m . Offensichtlich hat damit $C_{G_1}(t)$ nicht Charakteristik 2 und damit hat G_1 nicht lokale Charakteristik 2.

Auch in G_2 erhalten wir auf solche eine Weise eine Involution, deren Zentralisator nicht Charakteristik 2 hat. \square

Lemma 2.16 *$G = A_7$ hat nicht lokale Charakteristik 2.*

Beweis: Sei X_1 der Zentralisator der Punkte 5, 6 und 7 in G und X_2 der Zentralisator der Punkte 1, 2, 3 und 4 in G . Dann ist $N_G(O_2(X_1))$ eine maximale Untergruppe von G und $|N_G(O_2(X_1)) : (X_1 \times X_2)| = 2$. Es ist $O_2(N_G(O_2(X_1))) = O_2(X_1)$ und $X_2 \leq C(O_2(X_1))$, also hat G nicht lokale Charakteristik 2. \square

²Repräsentiert wird diese Involution zum Beispiel von der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Moduln und Offender

Sei im folgenden stets G eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$ und V ein endlicher $GF(p)G$ -Modul.

Notation 2.17 Wir bezeichnen mit $\mathcal{A}(G)$ die Menge der ordnungsmaximalen elementarabelschen p -Untergruppen von G .

Definition 2.18 Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}_G(V)$ die Menge aller Untergruppen A von G mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $[V, A] \neq 1$.
- (ii) $|A/C_A(V)||C_V(A)| \geq |B/C_B(V)||C_V(B)|$ für alle $B \leq A$.
- (iii) $A/C_A(V)$ ist eine elementarabelsche p -Gruppe.

Die Elemente von $\mathcal{O}_G(V)$ heißen **Offender von G auf V** .

Bemerkung 2.19 Sei $A \in \mathcal{O}_G(V)$. Dann ist $|V/C_V(A)| \leq |A/C_A(V)|$.

Beweis: Setze $B = 1$ in der Definition. □

Untergruppen A von G , für die

$$|V/C_V(A)| \leq |A/C_A(V)|$$

gilt, heißen **schwache Offender**.

Bemerkung 2.19 besagt also, dass Offender stets auch schwache Offender sind.

Gilt für ein $A \in \mathcal{O}_G(V)$ in 2.19 die strikte Ungleichung, so heißt A ein (schwacher) **Overoffender**.

Lemma 2.20 Ist G minimal parabolisch bezüglich p und $A \in \mathcal{O}_G(V)$, so ist

$$|V/C_V(A)| = |A/C_A(V)|,$$

d.h. minimal parabolische Gruppen besitzen keine (schwachen) Overoffender.

Beweis: [MS, 1.8] □

Lemma 2.21 Sei V ein elementarabelscher p -Normalteiler von G . Dann gilt

$$\{A \in \mathcal{A}(G) \mid [A, V] \neq 1\} \subseteq \mathcal{O}_G(V).$$

Beweis: [Aut, 2.14] □

Lemma 2.22 *Sei P eine bezüglich p minimal parabolische Gruppe, die treu auf der elementarabelschen Gruppe V operiert. Es sei $O_p(P) = 1$ und $\mathcal{O}_P(V) \neq \emptyset$. Dann gilt $[C_V(T), P] \neq 1$ für alle $T \in \text{Syl}_p(P)$*

Beweis: [BHS, 5.6] □

Lemma 2.23 *Sei P eine bezüglich p minimal parabolische Gruppe, $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $[\Omega(Z(T)), P] = 1$ und $J(T) \not\trianglelefteq P$. Dann ist $[\Omega(Z(O_p(P))), O^p(P)] = 1$.*

Beweis: Setze $V := \Omega(Z(O_p(P)))$.

Angenommen, $O^p(P) \not\leq C_P(V)$. Dann gilt nach 2.10

$$C_T(V) = O_p(P).$$

Setzen wir $\bar{P} := P/C_P(V)$, so ist also \bar{P} eine minimal parabolische Gruppe und $O_p(\bar{P}) = 1$. Offensichtlich ist \bar{P} treu auf V .

Wäre $\mathcal{O}_P(V) = \emptyset$, so folgte insbesondere $A \leq C_P(V)$ für alle $A \in \mathcal{A}(T)$ und damit wäre $J(T) \leq O_p(P)$, also

$$J(T) = J(O_p(P)) \text{ char } O_p(P), \text{ also } J(T) \trianglelefteq P,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\mathcal{O}_P(V) \neq \emptyset$ und damit auch $\mathcal{O}_{\bar{P}}(V) \neq \emptyset$. Damit erfüllen \bar{P} und V die Voraussetzungen von 2.22 und es folgt insbesondere

$$[C_V(\bar{T}), \bar{P}] \neq 1.$$

Andererseits ist $C_V(\bar{T}) = C_V(T) = \Omega(Z(T))$ und $[\Omega(Z(T)), P] = 1$, ein Widerspruch. □

Definition 2.24 *Sei X eine Gruppe, $W \neq 1$ ein endlicher, einfacher $GF(p)X$ -Modul.*

(i) *Ist $X \cong SL_2(p^m)$, so heißt W ein **natürlicher $SL_2(p^m)$ -Modul** (für X), falls gilt:*

(a) $F := \text{Hom}_X(W) \cong GF(p^m)$,

(b) W ist ein einfacher 2-dimensionaler FX -Modul.

Für $SL_2(p^m)'$ anstelle von $SL_2(p^m)$ nennen wir den korrespondierenden Modul einen natürlichen $SL_2(p^m)'$ -Modul.

(ii) *Ist $p = 2$, $X \cong S_{2m+1}$, so heißt W ein **natürlicher S_{2m+1} -Modul** (für X), falls W zu dem nichttrivialen einfachen Abschnitt des $GF(2)S_{2m+1}$ -Permutationsmoduls isomorph ist.*

Für A_{2m+1} anstelle von S_{2m+1} nennen wir den korrespondierenden Modul einen natürlichen A_{2m+1} -Modul.

Lemma 2.25 Sei $n \in \mathbb{N}$, V ein natürlicher A_{2n+1} -Modul, $D := C_{\text{End}(V)}(A_{2n+1})$. Ist $n \neq 1$, so ist $D \cong GF(2)$.

Beweis: D ist nach 2.7 ein Körper und A_{2n+1} operiert D -linear auf V . Sei $\sigma \in S_{2n+1}$ eine Transposition.

Gilt $D = C_D(\sigma)$, so ist $D = C_{\text{End}(V)}(S_{2n+1})$ und S_{2n+1} operiert D -linear auf V . Insbesondere ist dann $C_V(\sigma)$ ein D -Unterraum von V und es folgt $|D| \leq |V : C_V(\sigma)| = 2$, also $D \cong GF(2)$.

Es gelte also $C_D(\sigma) \subsetneq D$. Dann induziert σ einen involutorischen Körperautomorphismus auf D . Damit existiert $k \in D$ mit $k^\sigma = k^{-1} \neq k$. Sei $0 \neq v \in C_V(\sigma)$. Dann gilt

$$vk\sigma = v\sigma k^{-1} = vk^{-1} \neq vk.$$

Also folgt $C_V(\sigma) \cap C_V(\sigma)k = \{0\}$.

Andererseits sind $C_V(\sigma)$ und $C_V(\sigma)k$ Hyperebenen von V .

Es folgt $|V| = 4$ und somit die Behauptung. \square

Lemma 2.26 Sei $G \cong S_{2m+1}$, $T \in \text{Syl}_2(G)$, U ein $GF(2)G$ -Modul. Es gelte:

(i) $U = [U, O^2(G)]C_U(T)$.

(ii) $[U, O^2(G)]/C_{[U, O^2(G)]}(O^2(G))$ ist ein natürlicher S_{2m+1} -Modul.

Dann gilt:

$$U = C_U(O^2(G)) \times [U, O^2(G)],$$

insbesondere ist $[U, O^2(G)]$ ein natürlicher S_{2m+1} -Modul.

Beweis: [BHS, 2.13]. \square

Lemma 2.27 Sei $G \cong S_{2m+1}$. Sei V ein natürlicher S_{2m+1} -Modul. Sei $A \in \mathcal{O}_G(V)$. Dann gilt:

(i) A wird von paarweise vertauschbaren Transpositionen von G erzeugt.

(ii) $[V, A, A] = 1$.

(iii) $|V/C_V(A)| = |A|$.

Insbesondere besitzt A_{2m+1} keine Offender auf dem natürlichen Modul.

Beweis: [BHS, 2.15]. \square

Satz 2.28 *G habe Charakteristik p , und V sei ein $GF(p)G$ -Modul. Seien $E \trianglelefteq G$, $A \in \mathcal{O}_G(V)$ mit $[E, A] \neq 1$ und $W := [V, E]$.
Es gelte*

- (i) $E \cong SL_2(p^m)'$ oder $p = 2$ und $E \cong A_{2m+1}$ und
- (ii) $W/C_W(E)$ ist ein natürlicher $SL_2(p^m)'$ - bzw. A_{2m+1} -Modul für E .

Dann gilt:

- (i) $A \leq N_G(E)$.
- (ii) $\overline{EA} := EA/C_{EA}(W) \cong SL_2(p^m)$ und $\overline{A} \in \text{Syl}_p(\overline{EA})$ oder $p = 2$, $\overline{EA} \cong S_{2m+1}$ und \overline{A} wird von paarweise vertauschbaren Transpositionen erzeugt.
- (iii) $[W, A, A] = 1$.
- (iv) $|A/C_A(W)| = |W/C_W(A)|$

Beweis: Siehe [BHS, 2.16]. □

Lemma 2.29 *Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$, $q := p^n$. Sei $G := SL_2(q)$, V der natürliche Modul für G . Sei $S \in \text{Syl}_p(G)$.*

Es gilt

- (i) $[V, S, S] = 1$.
- (ii) $|C_V(S)| = |[V, S]| = q$.
- (iii) Ist $x \in G \setminus S$ ein p -Element, so gilt $G = \langle S, x \rangle$.
- (iv) Für jedes $0 \neq v \in C_V(S)$ gilt $\langle v^{N_G(S)} \rangle = C_V(S)$.
- (v) Für jedes $1 \neq x \in S$ ist $C_V(x) = C_V(S)$.
- (vi) Ist $w \in V \setminus C_V(S)$, so ist $[w, S] = C_V(S)$.
- (vii) Ist $V_0 \leq V$ mit $\dim_{GF(q)}(V_0) = 1$, so existiert $S_0 \in \text{Syl}_p(G)$ mit $V_0 = C_V(S_0)$.
- (viii) S ist transitiv auf $\text{Syl}_p(G) \setminus \{S\}$.
- (ix) Ist $\sigma \in \text{Aut}(G)$ ein p -Element mit $[S, \sigma] = 1$, so ist $\sigma \in \text{Inn}(G)$.

Beweis: Die Aussagen (i) - (viii) sind wohlbekannt bzw. folgen mit einfacher Rechnung in $SL_2(q)$.

Zu (ix): Sei $\sigma \in \text{Aut}(G)$ ein p -Element mit $S \leq C_G(\sigma)$, sei $T \in \text{Syl}_p(G) \setminus \{S\}$.

Dann existiert nach (viii) ein $s \in S$ mit $T^\sigma = T^s$, d.h. σs^{-1} induziert einen Automorphismus der p -Gruppe T und insbesondere ist $C_T(\sigma s^{-1}) \neq 1$. Sei $1 \neq x \in C_T(\sigma s^{-1})$. Dann ist $G = \langle S, x \rangle$ und es folgt $\sigma s^{-1} = \text{id}$, also $\sigma \in \text{Inn}(G)$. □

2.3 Ein Maximalitätskonzept

Die folgenden Lemmata entsprechen den Lemmata 2.21 - 2.23 in [Aut] und werden ebenda bewiesen.

Am Anfang wollen wir den schon weiter oben erwähnten Begriff der stark p -eingebetten Untergruppe definieren:

Definition 2.30 Sei X eine endliche Gruppe, $Y \leq X$ und p eine Primzahl, die $|Y|$ teilt. Dann heißt Y stark p -eingebettet in X , falls die Ordnung von $Y \cap Y^x$ für alle $x \in X \setminus Y$ nicht durch p teilbar ist.

Es gelte die

Voraussetzung 2.31 Sei G eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$. G sei von lokaler Charakteristik p mit $O_p(G) = 1$. Sei $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Sei $H < G$ mit $C^*(G, T) \leq H$. Mit $\mathcal{T}(H)$ bezeichnen wir die Menge aller p -Untergruppen $S \neq 1$ von H , für die es eine p -lokale Untergruppe L gibt mit $S \leq L \not\leq H$.

Lemma 2.32 H ist genau dann stark p -eingebettet in G , wenn $\mathcal{T}(H)$ leer ist.

□

Für eine p -Gruppe X sei $a(X) := |A|$, $A \in \mathcal{A}(X)$.

Mit $\mathcal{T}^*(H)$ bezeichnen wir die Elemente S von $\mathcal{T}(H)$, die maximal im folgenden Sinn sind:

- (i) Für alle $S_0 \in \mathcal{T}(H)$ ist $a(S_0) \leq a(S)$.
- (ii) Für alle $S_0 \in \mathcal{T}(H)$ mit $a(S_0) = a(S)$ ist $|B(S_0)| \leq |B(S)|$.
- (iii) Für alle $S_0 \in \mathcal{T}(H)$ mit $a(S_0) = a(S)$ und $|B(S_0)| = |B(S)|$ ist $|S_0| \leq |S|$.

Lemma 2.33 Seien $S \in \mathcal{T}^*(H)$ mit $S \leq T$, $L \leq G$ p -lokal mit $S \leq L \not\leq H$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) $S \in \text{Syl}_p(L)$.
- (ii) $C^*(G, S) \leq H$.
- (iii) $L \neq C^*(L, S)$.

□

Lemma 2.34 Seien $S \in \mathcal{T}^*(H)$ mit $S \leq T$, $L \leq G$ p -lokal mit $B(S) \leq L \not\leq H$. Sei $B(S) \leq S_0 \in \text{Syl}_p(L)$. Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) $S_0 \leq H$.
- (ii) $C^*(L, S_0) \leq C^*(G, S)$, insbesondere ist $L \neq C^*(L, S_0)$.
- (iii) $O_p(L) \leq H$.

□

2.4 Eigenschaften von Blöcken

In diesem Abschnitt sammeln wir für die spätere Analyse relevante Resultate über $B(T)$ -Blöcke. Die Aussagen 2.39 bis 2.52 entsprechen hierbei im wesentlichen dem Kapitel 3.1 der Diplomarbeit [Aut], so dass wir auf Einzelreferenzen verzichten und den Leser insgesamt für o.g. Lemmata auf die erwähnte Quelle verweisen.

Wir beginnen mit der Definition eines $B(T)$ -Blocks:

Definition 2.35 Sei S eine p -Untergruppe von G , und sei $E \leq G$. Setze $W := \Omega(Z(O_p(E)))$. E heißt **$B(S)$ -Block** (oder **Block**) von G , falls gilt:

- (i) $E = O_p(E) = [E, B(S)]$, $[O_p(E), E] = O_p(E)$, $[E, \Omega(Z(S))] \neq 1$.
- (ii) $E/O_p(E) \cong SL_2(p^n)'$ oder $p = 2$ und $E/O_2(E) \cong A_{2m+1}$, und $W/C_W(E)$ ist ein natürlicher $SL_2(p^n)'$ - bzw. A_{2m+1} -Modul für $E/O_p(E)$.
- (iii) $O_p(E) = W$ oder
 - (a) $p = 3$ und $O_3(E)/W$ ist ein natürlicher $SL_2(3^n)'$ -Modul,
 - (b) $O_3(E)' = \Phi(O_3(E)) = Z(E) = C_W(E)$ und $|Z(E)| = 3^n$, und
 - (c) kein Element von $B(S) \setminus C_{B(S)}(W)$ operiert quadratisch auf $O_3(E)/Z(E)$.

Ist $E/O_p(E) \cong SL_2(p^n)'$, so nennen wir E einen **linearen Block**, ansonsten einen **symmetrischen Block**. Gelten (a)-(c) aus (iii), so heißt E ein **exzeptioneller Block**.

Wollen wir über lineare Blöcke sprechen und exzeptionelle Blöcke explizit ausschließen, so sagen wir E ist **gewöhnlich linear**.

Wir sagen, **E ist vom X -Typ**, wenn $E/O_p(E) \cong X$ gilt.

Ist S eine p -Untergruppe von G , so definieren wir

$$C^*(S) := \{L \leq G \mid L \text{ ist maximal } p\text{-lokal und } B(S) \leq L \not\leq C^*(G, S)\},$$

$$\mathcal{B}(S) := \{E \leq G \mid E \text{ ist } B(S)\text{-Block, } E \not\leq C^*(G, S)\}.$$

Mit $\mathcal{B}^*(S)$ bezeichnen wir die bezüglich Inklusion maximalen Elemente von $\mathcal{B}(S)$. Ist $L \leq G$, so bezeichne $\mathcal{B}_L(S)$ (bzw. $\mathcal{B}_L^*(S)$) die Menge der Elemente von $\mathcal{B}(S)$ (bzw. $\mathcal{B}^*(S)$), die in L liegen.

Zunächst wollen wir zwei nützliche Ergebnisse aus [BHS] festhalten:

Satz 2.36 Sei $X \in \text{Syl}_p(G)$ und F ein $B(X)$ -Block.

Dann ist $C_G(\Omega(Z(O_p(F)))) \leq N_G(F)$.

Beweis: [BHS, 6.6]. □

Lemma 2.37 Sei $X \in \text{Syl}_p(G)$, F ein maximaler $B(X)$ -Block von G und $W_F := [\Omega(Z(O_p(F))), F]$.

Sei $g \in G$ und $F_0 \leq FC_G(W_F)$ ein maximaler $B(X^g)$ -Block. Dann ist $F_0 = F$ oder $[W_F, F_0] = 1$.

Beweis: [BHS, 6.10] □

Wir arbeiten von nun an unter der folgenden Voraussetzung:

Voraussetzung 2.38 *Es gelte Voraussetzung 2.31. Zusätzlich besitze G keine stark p -eingebettete Untergruppe, die $C^*(G, T)$ enthält. Weiter seien stets $H < G$ mit $C^*(G, T) \leq H$, $S \in \mathcal{T}^*(H)$ mit $S \leq T$, E ein maximaler $B(S)$ -Block und $W_E := \Omega(Z(O_p(E)))$.*

Bemerkung 2.39 *Es gilt $EB(S) = \langle B(S)^E \rangle$.*

□

Lemma 2.40 *Sei $L \leq G$ von Charakteristik p , und es gelte $EB(S) \leq L$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i) $E = O^p(EO_p(L))$ und $[W_E, E] \leq \Omega(Z(O_p(L)))$.
- (ii) Ist E nicht exzeptionell, so ist $O_p(E) \leq \Omega(Z(O_p(L)))$ und $[O_p(L), E] = W_E$.
- (iii) Ist E exzeptionell, so ist $Z(E)[W_E, E] = W_E \leq \Omega(Z(O_3(L)))$ und entweder $O_3(E) \leq O_3(L)$ oder $[O_3(L), E] = [W_E, E]$.

□

Lemma 2.41 *Es existiert $A \in \mathcal{A}(S)$ mit $[W_E, A] \neq 1$.*

□

Lemma 2.42 *Sei $\overline{EB(S)} := EB(S)/O_p(EB(S))$. Dann gilt:*

- (i) $C_{EB(S)}(W_E) = O_p(EB(S))$, insbesondere hat $EB(S)$ Charakteristik p .
- (ii) Ist $A \in \mathcal{O}_{EB(S)}(W_E)$, so gilt für alle $B \leq A$:

$$|B/C_B(W_E)||C_{W_E}(B)| = |\overline{B}||C_{W_E}(\overline{B})| \text{ und } C_{\overline{B}}(W_E) = 1.$$

Insbesondere ist $\overline{A} \in \mathcal{O}_{\overline{EB(S)}}(W_E)$.

□

Wir erhalten aus 2.21 und 2.42 mit $\overline{EB(S)} := EB(S)/O_p(EB(S))$:

Korollar 2.43 *Für alle $A \in \mathcal{A}(S)$ mit $[W_E, A] \neq 1$ gilt: $\overline{A} \in \mathcal{O}_{\overline{EB(S)}}(W_E)$. Insbesondere besitzt $\overline{EB(S)}$ Offender auf W_E .*

□

Lemma 2.44 Sei $\overline{EB(S)} := EB(S)/O_p(EB(S))$. Dann gilt:

- (i) Ist $p = 2$, $E/O_2(E) \cong A_{2m+1}$, so ist $\overline{EB(S)} \cong S_{2m+1}$ und $\overline{B(S)}$ wird von einer maximalen Menge paarweise vertauschbarer Transpositionen erzeugt.
- (ii) Ist $E/O_p(E) \cong SL_2(p^m)'$, so ist $\overline{EB(S)} \cong SL_2(p^m)$, und es gilt: $\overline{B(S)} \in \text{Syl}_p(\overline{EB(S)})$.

□

Korollar 2.45 Sei E linear. Dann ist $EB(S)$ minimal parabolisch bezüglich p .

□

Lemma 2.46 Ist E linear, so ist $B(S) \in \text{Syl}_p(EB(S))$, insbesondere ist $E \cap B(S) \in \text{Syl}_p(E)$.

□

Lemma 2.47 Es gilt $O_p(E) \leq B(S)$, insbesondere $O_p(E) \trianglelefteq B(S)$.

□

Lemma 2.48 Ist $L \in \mathcal{C}^*(S)$ mit $E \in \mathcal{B}_L^*(S)$, so gilt $N_L(W_E) \leq N_G(E)$.

□

Lemma 2.49 Es ist $C_{B(S)}(W_E/Z(E)) = C_{B(S)}(W_E)$ und $C_{W_E}(E) = Z(E)$.

□

Lemma 2.50 Sei E nicht exzeptionell. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) $Z(E) = 1$.
- (ii) $p = 2$, $E/O_2(E) \cong SL_2(2^m)$ $m > 1$.

□

Lemma 2.51 Ist $p = 2$, E vom $SL_2(2^m)'$ -Typ, so gilt $|Z(E)| \leq 2^m$.

□

Lemma 2.52 Sei F ein $B(S)$ -Block und es gebe keine p -Untergruppe $\neq 1$, die von E und F normalisiert wird. Setze $W_F := \Omega(Z(O_p(F)))$. E und F seien linear mit $E/O_p(E) \cong SL_2(q)'$, $F/O_p(F) \cong SL_2(q^*)'$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) $[W_E, W_F] = 1$, falls E oder F exzeptionell ist.
- (ii) $C_{W_E}(W_F) = [W_E, W_F] = C_{W_F}(W_E)$, falls E und F nicht exzeptionell sind. (Dann ist insbesondere $q = q^*$.)

□

Lemma 2.53 Sei $Q_E := O_p(EB(S))$ Dann ist $Q_E \leq B(S)$.

Beweis: Ist E nicht symmetrisch, so folgt die Aussage aus 2.46. Sei also E symmetrisch. Wir dürfen annehmen, daß $S \cap E \in Syl_2(E)$ und damit $(S \cap E)B(S) \in Syl_2(EB(S))$ ist. Also ist $Q_E \leq (S \cap E)B(S)$.

Sei also $z \in Q_E$, $x \in S \cap E$, $y \in B(S)$ mit $z = xy$. Dann gilt wegen 2.40 insbesondere

$$1 = [C_{W_E}(B(S)), z] = [C_{W_E}(B(S)), y][C_{W_E}(B(S)), x]^y.$$

Wegen $[C_{W_E}(B(S)), y] = 1$ ist dann auch $[C_{W_E}(B(S)), x] = 1$, also

$$x \in C_E(C_{W_E}(E \cap B(S))) = B(S) \cap E,$$

insgesamt also $z \in B(S)$ und somit die Behauptung. \square

Lemma 2.54 Setze $Q_E := O_p(EB(S))$, $\widetilde{Q}_E := Q_E/C_{B(S)}(E)$ und $\overline{EB(S)} := EB(S)/Q_E$. Dann gilt

- (i) Ist E nicht exzeptionell, so ist \widetilde{Q}_E ein natürlicher Modul für $\overline{EB(S)}$, insbesondere ist $Q_E = W_E C_{B(S)}(E)$.
- (ii) Ist E exzeptionell, so sind \widetilde{W}_E und $\widetilde{Q}_E/\widetilde{W}_E$ natürliche Moduln für $\overline{EB(S)}$, insbesondere ist $Q_E = O_3(E)C_{B(S)}(E)$.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\Phi(Q_E) \leq C_{B(S)}(E)$ gilt, dann folgen die Aussagen aus 2.26, falls E symmetrisch ist, bzw. [BHS, 3.5], falls E linear ist.

$W_E/Z(E)$ ist insbesondere ein irreduzibler $\overline{EB(S)}$ -Modul, also ist $W_E \leq \Phi(Q_E)$ oder $W_E \cap \Phi(Q_E) \leq Z(E)$. Im ersten Fall wäre aber $[E, Q_E] \leq \Phi(Q_E)$ und somit wegen teilerfremder Operation $[E, Q_E] = 1$, ein Widerspruch. Also ist

$$[\Phi(Q_E), E] = [\Phi(Q_E), E, E] \leq [W_E \cap \Phi(Q_E), E] \leq [Z(E), E] = 1.$$

\square

Lemma 2.55 Sei E exzeptionell. Dann ist

$$Q_E = C_{B(S)}(W_E) = \{x \in B(S) \mid x \text{ ist quadratisch auf } O_3(E)/Z(E)\} =: U.$$

Beweis: Die erste Gleichheit gilt nach 2.42. $U \leq Q_E$ gilt nach Definition exzeptioneller Blöcke. Also reicht zu zeigen

$$[O_3(E), Q_E, Q_E] \leq Z(E).$$

Setze $K := [O_3(E), Q_E]$. Dann ist $K \leq O_3(E)$. Nach 2.54 ist $Q_E = O_3(E)C_{B(S)}(E)$. Also gilt

$$\begin{aligned} [K, Q_E] &= [K, O_3(E)C_{B(S)}(E)] = [K, O_3(E)][K, C_{B(S)}(E)] \\ &= [K, O_3(E)] \leq O_3(E)' = Z(E), \end{aligned}$$

und es folgt die Behauptung. \square

Lemma 2.56 $O^p(C_G(W_E)) = O^p(C_G(E))$.

Beweis: Sei zunächst $E/O_p(E) \cong A_3, SL_2(3)'$.

Dann ist $E = \langle (E \cap B(S)), (E \cap B(S))^x \rangle$ für ein $x \in E \setminus N_E(E \cap B(S))$.

(Ist E linear, so gilt diese Erzeugniseigenschaft sogar für alle

$x \in E \setminus N_E(E \cap B(S))$.)

Sei $R \leq C_G(W_E)$ eine p' -Untergruppe. Dann gilt - man beachte 2.36 und demnach $C_G(W_E) \leq C_G(E/W_E) \leq N_G(E \cap B(S))$ -

$$[E \cap B(S), R] = [E \cap B(S), R, R] \leq [W_E, R] = 1,$$

also

$$[E \cap B(S), O^p(C_G(W_E))] = 1,$$

also auch

$$[(E \cap B(S))^x, O^p(C_G(W_E))] = 1 \text{ für } x \in E \setminus N_E(E \cap B(S)),$$

also

$$[E, O^p(C_G(W_E))] = 1.$$

Sei nun $E/O_p(E) \cong X \in \{A_3, SL_2(3)'\}$. Ist R eine $\{2, 3\}'$ -Gruppe, so folgt wegen teilerfremder Operation $[E, R] = 1$.

Ist $E/O_2(E) \cong A_3$ und R eine 3-Gruppe, so existiert eine R -invariante 3-Sylowuntergruppe E_0 von E und es folgt

$$[E_0, R] \leq E_0 \cap W_E = 1, \text{ also wieder } [E, R] = 1.$$

Analog erhält man $[E, R] = 1$, falls $E/O_3(E) \cong SL_2(3)'$ und R eine 2-Gruppe ist.

Damit gilt die Behauptung. □

Lemma 2.57 Sei E symmetrisch, $E/W_E \cong A_{2n+1}$, $\overline{EB(S)} := EB(S)/O_2(EB(S))$. Sei $\overline{B(S)} = \langle (1\ 2), \dots, (2n-1\ 2n) \rangle$. Es gelte $E \not\leq C^*(G, S)$. Dann ist $\overline{EB(S)} \cap C^*(G, S) \cong S_{2n}$, wobei diese Untergruppe dem Stabilisator des Punktes $2n+1$ in S_{2n+1} entspricht.

Beweis: Dies folgt aus [BHS, 2.11] □

Kapitel 3

Existenz und Eindeutigkeit von Blöcken

In diesem Kapitel arbeiten wir mit den folgenden Voraussetzungen.

Voraussetzung 3.1 *Sei G eine endliche Gruppe, $p \in \mathbb{P}$. G sei von lokaler Charakteristik p mit $O_p(G) = 1$. Sei $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $G \neq C^*(G, T)$.*

Voraussetzung 3.2 *Es gelte Voraussetzung 3.1. Es existiere $C^*(G, T) \leq H < G$ mit $T(H) \neq \emptyset$.*

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels präsentieren wir die Resultate aus der Diplomarbeit [Aut], die einen Ausgangspunkt für die weitere Analyse darstellen. Es geht hierbei um das Zusammenspiel zwischen gewissen maximalen p -lokalen Untergruppen und ihren $B(T)$ -Blöcken: Unter gewissen Voraussetzungen existiert genau eine maximale p -lokale Untergruppe, die einen vorgegebenen Block gemeinsam mit $B(T)$ enthält und dieser Block ist dann ein Normalteiler dieser p -lokalen Untergruppe.

Im Detail finden sich diese Ergebnisse in den Sätzen 3.3, der sich vielfach als nützliches Hilfsmittel erweisen wird, und 3.7.

Im Abschnitt 3.2 analysieren wir einen in Satz 3.7 auftretenden Fall mit dem Ziel, die Eindeutigkeit gewisser Blöcke zu zeigen bzw. die Ausnahmen dazu zu beschreiben.

3.1 Zwei Eindeutigkeitssätze

Wie angekündigt geben wir hier die Hauptergebnisse der Diplomarbeit [Aut] an.

Satz 3.3 (1. Eindeutigkeitssatz) *Es gelte 3.2. Sei $S \in \mathcal{T}^*(H)$ und $E \in \mathcal{B}^*(S)$. Dann existiert genau ein $M \in \mathcal{C}^*(S)$ mit $E \leq M$. Überdies gilt $E \trianglelefteq M$.*

Beweis: [Aut, 3.20] □

Lemma 3.4 *Es gelte 3.2. Sei $S \in \mathcal{T}^*(H)$ und seien $E, F \in \mathcal{B}^*(S)$ mit $E \neq F$, $W_E := \Omega(Z(O_p(E)))$, $W_F := \Omega(Z(O_p(F)))$. Seien $M, \hat{M} \in \mathcal{C}^*(S)$ mit $EB(S) \leq M$, $FB(S) \leq \hat{M}$. Es gelte $M \neq \hat{M}$.*

(i) *Sind E und F nicht exzeptionell, so ist*

$$[W_E, W_F] \neq 1.$$

(ii) *Ist E exzeptionell, so ist*

$$[O_3(E), O_3(F)] \not\leq Z(F).$$

Beweis: [Aut, 3.21] □

Satz 3.5 *Es gelte 3.2. Sei $S \in \mathcal{T}^*(H)$ und es gelte $|\mathcal{C}^*(S)| \geq 2$. Dann gilt für alle $M \in \mathcal{C}^*(S)$*

$$|\mathcal{B}_M^*(S)| = 1.$$

Beweis: [Aut, 4.1] □

Lemma 3.6 *Es gelte 3.2. Es sei $B(T) \notin \mathcal{T}(H)$ und $S \in \mathcal{T}^*(H)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) $|\mathcal{C}^*(S)| \geq 2$.

(ii) *Jedes $L \in \mathcal{C}^*(S)$ besitzt genau einen maximalen $B(S)$ -Block F , der nicht in $\mathcal{C}^*(G, S)$ liegt, und es gilt $F \trianglelefteq L = FC^*(L, S_0)$, wobei $B(S) \leq S_0 \in \text{Syl}_p(L)$.*

Beweis: [Aut, 4.2] □

Satz 3.7 (2. Eindeutigkeitsatz) ¹ Es gelte 3.1. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) Es existiert $C^*(G, T) \leq M_0 < G$, so daß M_0 stark p -eingebettet ist.
- (ii) $C^*(T) \neq \emptyset$ und für alle $M \in C^*(T)$ gilt: M besitzt genau einen maximalen $B(T)$ -Block E , der nicht in $C^*(G, T)$ liegt, und es gilt $E \trianglelefteq M$ und $M = EC^*(M, T_0)$, wobei $B(T) \leq T_0 \in \text{Syl}_p(M)$.
- (iii) Es existiert $1 \neq S < T$ mit $B(S) \neq B(T)$ und $|C^*(S)| \geq 2$, und jedes $L \in C^*(S)$ besitzt genau einen maximalen $B(S)$ -Block F , der nicht in $C^*(G, S)$ liegt, und es gilt $F \trianglelefteq L$ und $L = FC^*(L, S_0)$, wobei $B(S) \leq S_0 \in \text{Syl}_p(L)$.
- (iv) $C^*(T) = \{M\}$, und es existiert ein minimal parabolisches $T \leq P \leq C^*(G, T)$ mit folgenden Eigenschaften
 - (a) $P \cap M$ ist die maximale Untergruppe von P , die T enthält,
 - (b) $O_p(\langle M, P \rangle) = 1$,
 - (c) $\Omega(Z(O_p(M))) \not\leq O_p(P)$ oder M besitzt genau einen maximalen $B(T)$ -Block, der nicht in $C^*(G, T)$ liegt.

Beweis: Dies ist [Aut, Satz 2] in Verbindung mit [Aut, 4.3]. □

3.2 $C^*(T) = \{M\}$ und $C^*(G, T) \not\leq M$

Wie im Vorwort zu diesem Abschnitt angekündigt wollen wir uns im folgenden dem Fall (iv) aus Satz 3.7 widmen, d.h. es gelte

Voraussetzung 3.8 (M-Uniqueness) Es gelte 3.2 und es gebe genau eine maximale p -lokale Untergruppe M , die $B(T)$ enthält und nicht in $C^*(G, T)$ enthalten ist. Überdies gelte $C^*(G, T) \not\leq M$.

Man beachte, dass Voraussetzung 3.8 impliziert, dass $N_G(B(T)) \leq M$ gilt.

Seien also E_1, \dots, E_r die (nach 1.1 existierenden) maximalen $B(T)$ -Blöcke von M , die nicht in $C^*(M, T)$ liegen. Für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ sei

$$W_i := \Omega(Z(O_p(E_i))), \quad Z_i := W_i \cap Z(B(T)).$$

Wir setzen

$$W := \prod W_i, \quad U := \prod Z_i.$$

Sei außerdem P die in Satz 3.7 (iv) erwähnte minimal parabolische Untergruppe in $C^*(G, T)$ und $Z_0 := C_T(O^p(P))$.

Falls möglich, wählen wir P so, dass $[P, \Omega(Z(T))] \neq 1$ gilt.

¹Die Eindeutigkeit im Namen bezieht sich hier auf die in den Fällen (ii) und (iii) geltende Eindeutigkeit der $B(T)$ -Blöcke.

Lemma 3.9 $J(T) \not\leq O_p(P)$.

Beweis: Angenommen, $J(T) \leq O_p(P)$. Dann ist $J(T) = J(O_p(P)) \trianglelefteq P$.

Also ist $P \leq N_G(J(T))$ und insbesondere $N_G(J(T)) \not\leq M$.

Es folgt weiter

$$\Omega(Z(B(T))) = \Omega(Z(J(T))) \trianglelefteq P.$$

Nach 2.10 ist dann

$$[\Omega(Z(J(T))), O^p(P)] = 1$$

oder

$$B(T) = C_T(\Omega(Z(J(T)))) \leq O_p(P).$$

Wäre $B(T) \leq O_p(P)$, so wäre $B(T) = B(O_p(P)) \trianglelefteq P$, also

$$P \leq N_G(B(T)) \leq M,$$

ein Widerspruch.

Also ist $O^p(P) \leq C_P(\Omega(Z(J(T))))$. Wegen $Z_i \leq \Omega(Z(J(T)))$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ folgt daraus bereits $r = 1$.

Ist $1 \neq C_{B(T)}(E_1)$, so ist wegen $C_{B(T)}(E_1) \trianglelefteq B(T)$ auch

$$\Omega(Z(B(T))) \cap C_{B(T)}(E_1) = C_{\Omega(Z(B(T)))}(E_1) \neq 1$$

und wir erhalten ein $x \in \Omega(Z(J(T)))$ mit

$$E_1, O^p(P), B(T) \leq C_G(x),$$

im Widerspruch zu 3.3. Also ist $C_{B(T)}(E_1) = 1$.

Dann folgt aber $J(T) = B(T)$ und wir erhalten nach 2.54

$$P \leq N_G(B(T)) \leq M,$$

ein Widerspruch. □

Nachdem nun das nützliche Lemma 3.9 bewiesen ist, nehmen wir für die weitere Analyse folgende Fallunterscheidung vor:

Fall I: $\Omega(Z(T)) \not\leq Z(P)$.

Fall II: $\Omega(Z(T)) \leq Z(P)$.

Diese Unterscheidung ist dadurch motiviert, dass P aufgrund von 3.9 genau dann Thompson-faktorisiert ist, wenn Fall II gilt.

In den beiden folgenden Abschnitten werden wir zeigen, dass Fall II nur in (in einem gewissen Sinne) „kleinen“ Ausnahmesituationen eintreten kann und dass in Fall I stets $r = 1$ gilt und P selber einen Normalteiler besitzt, der wie ein $B(T)$ -Block behandelt werden kann - und auch tatsächlich einer ist, wie wir in Kapitel 4 sehen werden.

Wir beginnen mit dem (im Hinblick auf die Struktur von P unkomplizierteren) Fall I, in dem $[\Omega(Z(T)), P] \neq 1$ gilt und in dem P somit nicht Thompson-faktorisiert ist.

3.2.1 $\Omega(Z(T)) \not\leq Z(P)$

Es gelte $\Omega(Z(T)) \not\leq Z(P)$. Wegen $J(T) \not\leq O_p(P)$ ist dann der lokale $C^{**}(G, T)$ -Satz ² auf P anwendbar. Er besagt folgendes:

Ist $V := \Omega(Z(O_p(P)))$ und $\overline{P} := P/C_P(V)$, so existieren Untergruppen F_1, \dots, F_s von P mit

- (i) $\overline{P} = \overline{J(P)T}$ und $\overline{J(P)} = \overline{F_1} \times \dots \times \overline{F_s}$.
- (ii) \overline{T} ist transitiv auf $\{\overline{F_1}, \dots, \overline{F_s}\}$.
- (iii) $V = C_V(\overline{F_1} \times \dots \times \overline{F_s}) \prod_{j=1}^s [V, F_j]$, wobei $[V, F_j, F_i] = 1$ für $i \neq j$.
- (iv) $\overline{F_j} \cong SL_2(p^k)$ oder $p = 2$ und $\overline{F_j} \cong S_{2^{k+1}}$ für ein k .
- (v) $[V, F_j]/C_{[V, F_j]}(F_j)$ ist ein natürlicher Modul für $\overline{F_j}$.

Bemerkung 3.10 $O_p(P) = C_T(V) = C_T(V/C_V(F_1 \cdots F_s))$.

□

Für jedes $1 \leq j \leq s$ setzen wir $V_j := [V, F_j]$.

²[BHS, Theorem 1.8]

Analog zur Begriffsbildung bei Blöcken nennen wir F_j

- **linear**, falls $F_j/C_{F_j}(V_j) \cong SL_2(p^k)$ ist, und
- **symmetrisch**, falls $F_j/C_{F_j}(V_j) \cong S_{2^k+1}$ ist.

Offenbar ist die einzige Situation, in der F_j sowohl symmetrisch als auch linear ist, $F_j/C_{F_j}(V_j) \cong S_3$.

Ziel dieses Unterabschnitts ist folgender Satz:

Satz 3.11 *Es gelte 3.8 und E sei ein maximaler $B(T)$ -Block von M mit $E \not\leq C^*(G, T)$. Sei P wie in Satz 3.7(iv) und es gelte $[\Omega(Z(T)), P] \neq 1$. Setze $V := \Omega(Z(O_p(P)))$. Dann besitzt P einen Normalteiler F mit $P = FT$, $F/O_p(F) \cong SL_2(q)$ für eine p -Potenz q und $[V, F]/C_{[V, F]}(F)$ ist ein natürlicher $SL_2(q)$ -Modul für $F/O_p(F)$. Überdies gilt*

- (i) $E \trianglelefteq M$.
- (ii) $[O_p(E), V] \neq 1 \neq [\Omega(Z(O_p(E))), O_p(P)]$.
- (iii) $C_P(V) = O_p(P)$.
- (iv) $F/O_p(F) \cong EB(T)/O_p(EB(T))$.

Um obigen Satz zu beweisen, werden wir im folgenden eine Reihe von Lemmata beweisen, deren gemeinsames Ziel es ist, $r = 1 = s$ zu zeigen, woraus ein Teil der Aussagen von 3.11 folgen wird.

Lemma 3.12

- (i) $V \leq B(T)$.
- (ii) $\mathcal{A}(O_p(P)) \leq \mathcal{A}(T)$, insbesondere ist $J(O_p(P)) \leq J(T) \cap O_p(P)$.
- (iii) Ist $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $W_i \leq O_p(P)$, so ist $W_i \leq J(O_p(P))$.

Beweis: (i): Wäre $[V, J(T)] = 1$, so wäre $V \leq \Omega(Z(J(T)))$ und somit $B(T) \leq C_T(V) = O_p(P)$, ein Widerspruch.

Also existiert $A \in \mathcal{A}(T)$ mit $[V, A] \neq 1$. Dann ist A ein Offender auf V , also gilt

$$|A/C_A(V)| \geq |V/C_V(A)|.$$

Da es in minimal parabolischen Gruppen keine Over-Offender gibt, gilt also Gleichheit und somit

$$|A| = \frac{|V||C_A(V)|}{|C_V(A)|} = \frac{|V||C_A(V)|}{|A \cap V|} = |VC_A(V)|.$$

Also ist $VC_A(V) \in \mathcal{A}(T)$ und somit $V \leq VC_A(V) \leq J(T) \leq B(T)$.

(ii): Es gilt $VC_A(V) \in \mathcal{A}(T)$ für jedes $A \in \mathcal{A}(T)$ mit $[V, A] \neq 1$. Wegen $C_T(V) = O_p(P)$ ist aber für solch ein A auch $VC_A(V) \leq O_p(P)$. Es folgt die Behauptung.

(iii): Sei $A \leq \mathcal{A}(T)$ mit $W_i \leq A$. Ist $[V, A] = 1$, so ist $A \in \mathcal{A}(O_p(P))$, also $W_i \leq A \leq J(O_p(P))$. Ist $[V, A] \neq 1$, so ist wie in (ii) $VW_i \leq VC_A(V) \in \mathcal{A}(O_p(P))$, also wieder $W_i \leq J(O_p(P))$. \square

Korollar 3.13 Sind E_1, \dots, E_r linear, so ist für jedes $i \in \{1, \dots, r\}$ $[W_i, V] = 1$ oder $[W_i, V] = Z_i$.

Bemerkung 3.14 Sind E_1, \dots, E_r nicht exzeptionell und $[V, W] \neq 1$, so operieren V und W als Offender aufeinander. \square

Lemma 3.15 Sei E_1 nicht exzeptionell und es gelte $[W_1, V] = 1$. Dann ist $r = 1$ und $\langle W_1^P \rangle$ ist nicht abelsch.

Beweis: Es ist $W_1 \leq C_T(V) = O_p(P)$. Also ist auch $\langle W_1^P \rangle \leq O_p(P)$. Angenommen, $\langle W_1^P \rangle$ wäre abelsch. Dann ist insbesondere $\langle W_1^P \rangle \leq C_T(W_1)$. Nach 2.36 und 2.37 ist $\langle W_1^P \rangle \leq N_G(E_1)$ und es folgt

$$[E_1, \langle W_1^P \rangle] \leq C_{E_1}(W_1) = W_1 \leq \langle W_1^P \rangle,$$

also $E_1, P \leq N_G(\langle W_1^P \rangle)$ und somit nach 3.3 $P \leq M$, ein Widerspruch.

Also ist $\langle W_1^P \rangle$ nicht abelsch. W_1 wird wegen 3.12 (iii) von $\langle W_1^P \rangle$ normalisiert und es gilt $[W_1, W_1^h] \leq W_1 \cap W_1^h$ für alle $h \in P$. Dann existiert $g \in P$ mit

$$Z(B(T)) \cap Z(B(T))^g \geq W_1 \cap W_1^g \geq [W_1, W_1^g] \neq 1.$$

Wäre $r \neq 1$, so gälte für alle $j \neq 1$

$$E_j, E_j^g, B(T), B(T)^g \leq C_G(W_1 \cap W_1^g),$$

und somit nach 3.3 $M = M^g$, also $g \in M$ und somit $[W_1, W_1^g] = 1$, ein Widerspruch.

Also ist $r = 1$ und es gilt die Behauptung. \square

Lemma 3.16 Sei E_1 exzeptionell. Dann ist $[W_1, V] = 1$. Ist $[O_3(E_1), V] = 1$, so gilt überdies $r = 1$ und $[W_1, \langle O_3(E_1)^P \rangle] \neq 1$.

Beweis: Es gilt $[O_3(E_1), V, V] \leq V' = 1$, laut Definition also $[W_1, V] = 1$. Es gelte $[O_3(E_1), V] = 1$. Dann ist $O_3(E_1) \leq O_3(P)$. Angenommen, $[W_1, \langle O_3(E_1)^P \rangle] = 1$. Dann ist wegen 2.36 und 2.37 $\langle O_3(E_1)^P \rangle \leq N_G(E_1)$ und es folgt

$$[E_1, \langle O_3(E_1)^P \rangle] \leq C_{E_1}(W_1) = O_3(E_1) \leq \langle O_3(E_1)^P \rangle,$$

also $P, E_1 B(T) \leq N_G(\langle O_3(E_1)^P \rangle)$, also nach 3.3 $P \leq M$, ein Widerspruch.

Also existiert $g \in P$ mit $1 \neq [W_1, O_3(E_1)^g] \leq W_1 \cap O_3(E_1)^g \leq O_3(E_1)^g$, also ist auch $Z(B(T)) \cap Z(B(T))^g \geq W_1 \cap W_1^g \neq 1$.

Wäre nun $r > 1$ so wäre

$$B(T), B(T)^g, E_2, E_2^g \leq C_G(W_1 \cap W_1^g),$$

Also nach 3.3 $M = M^g$ und somit insbesondere $[W_1, O_3(E_1)^g] = 1$, ein Widerspruch. \square

Bemerkung 3.17 $C_V(\overline{F_1} \times \dots \times \overline{F_s}) \leq Z(J(T))$, insbesondere ist

$$[C_V(\overline{F_1} \times \dots \times \overline{F_s}), W_i] = 1$$

für alle $i \in \{1, \dots, r\}$.

Lemma 3.18 $[V, O_p(E_1)] \neq 1$ oder $E_1/W_1 \cong A_3$.

Beweis: Sei $E_1/W_1 \not\cong A_3$.

Angenommen, $[V, O_p(E_1)] = 1$. Dann ist nach 3.15 und 3.16 $r = 1$. Setze $E := E_1$, $W_E := W_1$, $Q_E := O_p(EB(T))$.

Sei zunächst E gewöhnlich linear, $E/W_E \cong SL_2(q)'$. (Laut Voraussetzung ist dann $q \neq 2$.) Nach 3.15 existiert dann ein $g \in P \setminus P \cap M$ mit $[W_E, W_E^g] \neq 1$. Dann gilt wegen der Operation von $B(T)$ auf W_E

$$C_{W_E}(W_E^g) = W_E \cap W_E^g = C_{W_E^g}(W_E),$$

$EW_E^g/O_p(EW_E^g) \cong SL_2(q)$ und

$$W_E \leq O_p(EW_E^g) \leq C_{B(T)}(W_E) \stackrel{2.54}{=} W_E C_{B(T)}(E),$$

also $O_p(EW_E^g) = W_E$.

Ist $q \neq 3$, so folgt also $W_E^g \leq E$ und damit

$$[W_E^g, B(T)] = [W_E^g, W_E] \leq W_E \cap W_E^g,$$

also $B(T) \leq N_G(W_E^g) = N_G(E^g)$. Damit ist aber E^g ein $B(T)$ -Block, der nicht in $C^*(G, T)$ liegt, also $E^g = E$, ein Widerspruch zu $g \in P \setminus P \cap M$.

Nun gelte $q = 3$. Wir setzen $\widetilde{Q}_E := Q_E/C_{B(T)}(E)$ und $\widetilde{EB(T)} := B(T)/Q_E$. Dann gilt

$$\widetilde{V} = C_{\widetilde{Q}_E}(\widetilde{B(T)}), \text{ also } |V : C_V(E)| = 3,$$

und wir erhalten

$$C_P(V) \leq B(T)C_M(W_E),$$

also

$$O^3(C_P(V)) \leq O^3(C_M(W_E)) = O^3(C_M(E))$$

und damit

$$O^3(C_P(V)) = 1, \text{ d.h. } C_P(V) = O_3(P).$$

Wegen 3.3 ist $C_V(E) \cap C_V(P) = 1$, also $C_V(P) = 1$ oder $\tilde{V} = \widetilde{C_V(P)}$.

Im ersten Fall ist V ein irreduzibler P -Modul und wir erhalten $V \leq \langle W_E^P \rangle$. Dann ist auch $V \leq \langle W_E^P \rangle'$ oder $V \cap \langle W_E^P \rangle' = 1$. Gilt das erste, so erhalten wir einen Widerspruch wegen $\langle W_E^P \rangle' = \Phi(\langle W_E^P \rangle) = W_E \cap W_E^g$. Gilt jedoch das zweite, so folgt $\langle W_E^P \rangle' = 1$ - beachte $V = \Omega(Z(O_3(P)))$ und $\langle W_E^P \rangle' \leq O_3(P)$. Dies ist ein Widerspruch zu $[W_E, W_E^g] \neq 1$.

Im zweiten Fall wird $C_{\overline{Q_E}}(\overline{B(T)})$ von $\overline{P \cap M}$ zentralisiert und es folgt $P \cap M \leq B(T)$, was wegen der Struktur von $P/O_3(P)$ nicht sein kann, beachte, dass $P \cap M$ eine maximale Untergruppe von P ist.

Sei nun E exzeptionell, $E/O_3(E) \cong SL_2(3^n)'$. Sei $g \in P \setminus P \cap M$ mit $[W_E, O_3(E)^g] \neq 1$. Nach 3.16 ist $[W_E, W_E^g] = 1$, also gilt

$$W_E \leq O_3(E^g W_E) \leq O_3(E^g B(T)^g) \stackrel{2.54}{=} O_3(E^g) C_{B(T)^g}(E^g),$$

also

$$O_3(E^g W_E) = O_3(E^g) W_E = O_3(E^g) C_{W_E}(E^g).$$

Es ist $C_{W_E}(E^g) \cap Z(E) = 1$ und $|C_{W_E}(E^g)| \leq |C_{W_E}(O_3(E^g))| = q^2$, also

$$|C_{W_E}(E^g)| \leq q, \quad |W_E \cap O_3(E^g)| \geq q^2.$$

Es gilt

$$W_E \cap O_3(E^g) \leq C_{W_E^g}(O_3(E)),$$

also

$$|W_E \cap O_3(E^g)| = q^2.$$

Es folgt

$$W_E = (W_E \cap O_3(E^g)) \times C_{W_E}(E^g).$$

Aber dann gilt

$$[W_E, O_3(E^g)] = [W_E \cap O_3(E^g), O_3(E^g)] \leq (W_E \cap O_3(E^g)) \cap Z(E^g) = 1,$$

ein Widerspruch.

Sei nun E symmetrisch, $E/W_E \cong A_{2n+1}$, $n > 1$. Sei $g \in P \setminus P \cap M$ mit $[W_E, W_E^g] \neq 1$. Dann gilt $EW_E^g/O_2(EW_E^g) \cong S_{2n+1}$ und außerdem

$$|W_E : W_E \cap W_E^g| = |W_E^g : W_E \cap W_E^g|. (*)$$

Es folgt

$$|W_E^g : C_{W_E^g}(W_E)| = 2^n.$$

Damit gilt $O_2(EW_E^g) = W_E$ und weiter $|W_E^g : W_E^g \cap E| = 2$.

Andererseits ist $C_{W_E^g}(W_E) \leq W_E^g \cap E$ und $W_E^g \cap E$ invariant unter W_E und damit muss wegen (*) $n = 1$ gelten, ein Widerspruch. \square

Lemma 3.19 Sei $E_1/W_1 \cong A_3$ und $[V, W_1] = 1$. Dann ist $P/O_2(P) \cong S_3$.

Beweis: Wir setzen $E := E_1$ und $W_E := W_1$ - beachte, dass $r = 1$ ist wegen $[V, W_1] = 1$. Setze $Q_E := O_2(EB(T))$, $\widetilde{Q}_E := Q_E/C_{B(T)}(E)$, $\overline{M} := M/C_M(W_E)$. Dann ist $\overline{M} \cong S_3$ und \widetilde{Q}_E ein natürlicher Modul für \overline{M} .

Sei $g \in P$ mit $[W_E, W_E^g] \neq 1$. Dann ist

$$|W_E^g : W_E^g \cap E| = |W_E^g : W_E^g \cap W_E| = 2, \quad EW_E^g \cong S_4,$$

$$B(T) = W_E W_E^g C_{B(T)}(E).$$

Wir können annehmen, dass $[V_1, B(T)] \neq 1$ gilt. Dann ist

$$1 \neq [V_1, B(T)] = [V_1, C_{B(T)}(E)] \leq C_{V_1}(EB(T)).$$

Insbesondere ist dann $s = 1$, da sonst $F_2, EB(T) \leq C_G(C_{V_1}(EB(T)))$ wäre, im Widerspruch zu 3.3. Also ist $P = F_1 T$.

Weiter ist $V_1 \leq Q_E \stackrel{2.54}{=} W_E C_{B(T)}(E)$ und wegen $B(T) = W_E^g Q_E$ folgt

$$1 \stackrel{E \notin N_G(V_1)}{\neq} \widetilde{V}_1 \leq C_{\widetilde{Q}_E}(B(T)),$$

also

$$|\widetilde{Q}_E : \widetilde{V}_1| = 2 = |\widetilde{V}_1| = |V_1 : C_{V_1}(E)|.$$

Da $C_{V_1}(E)$ invariant unter $P \cap M$ ist, folgt aus der letzten Gleichheit

$$V_1 = C_{V_1}(E) \times C_{V_1}(F_1) \quad \text{und} \quad |C_{V_1}(F_1)| = 2$$

oder

$$C_{V_1}(F_1) = 1 \quad \text{und} \quad P/C_P(V) \cong S_3.$$

Gelte zunächst $V_1 = C_{V_1}(E) \times C_{V_1}(F_1)$ und $|C_{V_1}(F_1)| = 2$. Dann gilt dieselbe Zerlegung auch für den $B(T)^g$ -Block E^g , also $V_1 = C_{V_1}(E^g) \times C_{V_1}(F_1)$.

Dann folgt $[V_1, B(T)] = [C_{V_1}(E), B(T)] \leq Z(EB(T))$ und ebenso $[V_1, B(T)^g] \leq Z(EB(T))^g$. Wegen 3.3 ist $Z(EB(T)) \cap Z(EB(T))^g = 1$ - ansonsten müsste $M = M^g$ und insbesondere $[W_E, W_E^g] = 1$ gelten.

Also ist $[V_1, B(T)] \cap [V_1, B(T)^g] = 1$ und $C_{V_1}(F_1) \not\leq [V_1, B(T)][V_1, B(T)^g]$. Nun ist $[V_1, B(T)] \times [V_1, B(T)^g]$ invariant unter $\langle B(T), B(T)^g \rangle \geq O^2(P)$, aber andererseits ist $[V_1, F_1] = V_1$, ein Widerspruch.

Es gelte $C_{V_1}(F_1) = 1$ und $P/C_P(V) \cong S_3$. Dann ist $|V_1 : C_{V_1}(E)| = 2$ und $\widetilde{V}_1 = C_{\widetilde{Q}_E}(\overline{B(T)})$, also

$$\overline{C_P(V)} \leq C_{\overline{M}}(C_{\widetilde{Q}_E}(\overline{B(T)})) = \overline{B(T)},$$

d.h.

$$C_P(V) \leq B(T)C_M(W_E)$$

und damit

$$O^2(C_P(V)) \leq O^2(C_M(W_E)) \stackrel{2.56}{=} O^2(C_M(W_E)).$$

Wegen 3.3 ist damit $O^2(C_P(V)) = 1$, also $P/O_2(P) \cong S_3$. □

Lemma 3.20 Sei $E_1/W_1 \cong A_3$. Dann ist $[V, W_1] \neq 1$.

Beweis: Angenommen, $[W_1, V] = 1$. Setze $E := E_1$, $W_E := W_1$.

Dann ist nach 3.19 $P/O_2(P) \cong S_3$.

Also ist $|W_E^P| = 3$, etwa $W_E^P = \{W_E, W_E^g, W_E^h\}$, und $[W_E, W_E^g] \neq 1 \neq [W_E, W_E^h]$.

Setze $W_P := \langle W_E^P \rangle$, $Y := C_{B(T)}(E)$. Es gilt

$$|W_P| = 16, |W_P : W_P \cap Q_E| = 2, \text{ und } W_P \cap Q_E = W_E \times (Y \cap W_P)$$

(beachte $W_E \leq W_P \cap Q_E \leq W_E \times Y$), also $|Y \cap W_P| = 2$ und damit ist $W_P \cap Q_E$ elementarabelsch. Dann besteht W_P wegen der Operation von P nur aus Involutionsen, ist also abelsch - ein Widerspruch. □

Aus 3.18 und 3.20 folgt insgesamt

Lemma 3.21 $[V, O_p(E_1)] \neq 1$. □

Wegen Bemerkung 3.17 existiert ein $j \in \{1, \dots, s\}$ mit $[W_1, V_j] \neq 1$. OBdA sei dabei $j = 1$.

Lemma 3.22 $r = 1$ oder $s = 1$.

Beweis: Falls $r > 1$ und $s > 1$ wäre, so folgte $1 \neq [W_1, V_1] \leq C_{Z(B(T))}(\langle E_2, F_2 \rangle) = 1$, ein Widerspruch. \square

Lemma 3.23 E_1 symmetrisch $\iff F_1$ symmetrisch.

Beweis: Sei zunächst E_1 symmetrisch.

Angenommen, $F_1/C_{F_1}(V_1) \cong SL_2(2^k)$, $k > 1$. Dann gilt für alle $a \in W_1 \setminus C_{W_1}(V_1)$

$$C_{V_1}(a) = C_{V_1}(W_1).$$

Sei $b \in V_1 \setminus C_{V_1}(W_1)$, so dass b in $E_1B(T)/O_2(E_1B(T))$ eine Transposition ist. Dann gilt

$$|W_1 : C_{W_1}(b)| = 2.$$

Es ist

$$|W_1 : C_{W_1}(V_1)| = |V_1 : C_{V_1}(W_1)|,$$

also wegen $k > 1$

$$C_{W_1}(V_1) \subsetneq C_{W_1}(b).$$

Sei $c \in C_{W_1}(b) \setminus C_{W_1}(V_1)$. Dann gilt $b \in C_{V_1}(c) = C_{V_1}(W_1)$, ein Widerspruch.

Die andere Implikation folgt analog. \square

Lemma 3.24 $r = 1$.

Beweis: Angenommen, es wäre $r > 1$. Wegen 3.22 ist dann $s = 1$.

Dann ist $P = F_1T$ und $F_1/C_{F_1}(V_1) \cong SL_2(p^k)$ oder $F_1/C_{F_1}(V_1) \cong S_{2^{k+1}}$. Sei zunächst E_1 linear, $E_1/O_p(E_1) \cong SL_2(q)'$. Dann ist nach 3.23 $F_1/C_{F_1}(V_1) \cong SL_2(p^k)$ und es gilt weiter

3.24.1 $p^k = q$.

Es ist $q = |O_p(E_1)/C_{O_p(E_1)}(V_1)|$. Weiter gilt $|O_p(E_1)/C_{O_p(E_1)}(V_1)| \geq |V_1/C_{V_1}(O_p(E_1))|$ oder $|O_p(E_1)/C_{O_p(E_1)}(V_1)| \leq |V_1/C_{V_1}(O_p(E_1))|$. Nach 2.20 muss bereits Gleichheit gelten. Damit folgt 3.24.1.

3.24.1 wiederum ergibt

3.24.2

$$\begin{aligned} q &= |J(T)/C_{J(T)}(V_1)| = |O_p(E_1)C_{J(T)}(V_1)/C_{J(T)}(V_1)| \\ &= |O_p(E_2)C_{J(T)}(V_1)/C_{J(T)}(V_1)|. \end{aligned}$$

Und damit gilt

3.24.3 $[V_1, O_p(E_1)] = [V_1, J(T)] = [V_1, O_p(E_2)] \leq O_p(E_2) \cap V_1$.

Insbesondere wird also $[O_p(E_1), V_1]$ von E_1 zentralisiert, ein Widerspruch.

Sei nun E_1 nicht linear, $E_1/W_1 \cong A_{2n+1}$. Dann gilt nach 3.23

$$F_1/C_{F_1}(V_1) \cong S_{2^{k+1}}.$$

Setze $\bar{P} := P/C_P(F_1/C_{F_1}(V_1)) \cong S_{2^{k+1}}$.

Dann gilt $\bar{W} \trianglelefteq \bar{P} \cap \bar{M}$ und $\bar{P} \cap \bar{M}$ ist eine maximale Untergruppe von \bar{P} .

Als Offender wird \bar{W} von einer Menge paarweise vertauschbarer Transpositionen erzeugt, oBdA also

$$\bar{W} = \langle (1\ 2), \dots, (2l-1\ 2l) \rangle$$

für ein $l \leq 2^{k-1}$. Dann ist

$$\overline{P \cap M} \leq N_{\bar{P}}(\bar{W}) \cong (\bar{W}.S_l) \times S_{2^k-2l+1}.$$

Da $\overline{P \cap M}$ eine maximale Untergruppe von \bar{P} ist, gilt also

$$\overline{P \cap M} \cong (\bar{W}.S_l) \times S_{2^k-2l+1}.$$

Ist $l > 1$, so ist $\bar{W}.S_l$ eine echte Untergruppe von S_{2l} . Wegen der Maximalität von $\overline{P \cap M}$ muss also $l = 1$ gelten. Dann ist aber insbesondere $\bar{W}_1 = \bar{W}_2$ und somit

$$[V, W_1] = [V, W_2] \leq V \cap W_2 \leq C_W(E_1),$$

also $[V, W_1] = 1$, ein Widerspruch. \square

Notation 3.25 Sei im folgenden $E := E_1$, $W_E := W_1$.

Lemma 3.26 $s = 1$.

Beweis: Wäre $s > 1$, so wäre nach [BHS, 5.5] $W_E \leq F_1 \cap F_2 \leq C_P(V)$, ein Widerspruch. \square

Notation 3.27 Sei im folgenden $F := F_1$, $W_F := V_1$.

Lemma 3.28 Ist F symmetrisch, so ist $F/C_F(W_F) \cong S_3$

Beweis: Sei $\bar{F} := F/C_F(W_F) \cong S_{2^{k+1}}$. Dann ist auch $\bar{P} = P/C_P(W_F) \cong S_{2^{k+1}}$, \bar{W}_E ist ein Offender auf W_F und wird somit von paarweise vertauschbaren Transpositionen erzeugt. $\bar{B}(T)$ ist nach 2.28 ein maximaler Offender auf W_F und wird von einer maximalen Menge paarweise vertauschbarer Transpositionen erzeugt. $N_{\bar{P}}(\bar{B}(T)) = \overline{N_P(B(T))}$ ist nach 2.14 transitiv auf dieser Menge von Transpositionen, liegt aber in $\bar{P} \cap \bar{M}$ und normalisiert somit \bar{W}_E . Also ist $\overline{W_E} = \bar{B}(T)$, $|\overline{W_E}| = 2^k$, $\bar{P} \cap \bar{M} \cong 2^k.S_k$. Allerdings ist $\bar{P} \cap \bar{M}$ eine maximale Untergruppe von \bar{P} . Diese Konfiguration ist nur möglich, falls $k = 1$ gilt. \square

Lemma 3.29 $C_P(V) = O_p(P)$.

Beweis: Setze $\overline{M} := M/C_M(W_E)$.

Wegen $[O^p(P), V] \neq 1$ ist $C_P(V) \leq P \cap M$. Ist E nicht exzeptionell, so ist wegen $[W_E, V] \neq 1$

$$(V \cap W_E)Z(E) = [W_E, V]Z(E) = C_{W_E}(B(T)).$$

Mit $\widetilde{W}_E := W_E/Z(E)$ folgt $\overline{C_P(V)} \leq C_{\overline{M}}(\widetilde{V \cap W_E}) = \overline{B(T)}$, also

$$C_P(V) \leq B(T)C_M(E/W_E), \text{ also } O^p(C_P(V)) \leq O^p(C_M(W_E)) \stackrel{2.56}{=} O^p(C_M(E)).$$

Wegen 3.3 ist also $O^p(C_P(V)) = 1$.

Sei E exzeptionell. Dann ist $[O_3(E), V] \not\leq W_E$, also

$$[O_3(E), V]W_E/W_E = C_{O_3(E)/W_E}(\overline{V}) = C_{O_3(E)/W_E}(\overline{B(T)})$$

und damit

$$\overline{C_P(V)} \leq C_{\overline{M}}(C_{O_3(E)/W_E}(\overline{B(T)})) = \overline{B(T)}.$$

Wie oben ist damit $O^p(C_P(V)) \leq O^p(C_M(E))$, also $O^p(C_P(V)) = 1$ wegen 3.3. \square

Lemma 3.30 Sei E symmetrisch, $E/W_E \cong A_{2n+1}$. Dann ist $n = 1$.

Beweis: Nach 3.23, 3.28 und 3.29 ist $P/O_2(P) \cong S_3$. Daraus und wegen $W_E \not\leq O_2(P)$ folgt $T = W_E O_2(P)$, $B(T) = W_E(O_2(P) \cap B(T))$. Setze $\overline{EB(T)} := EB(T)/O_2(EB(T))$. Dann ist $\overline{EB(T)} \cong S_{2n+1}$. V ist ein Offender auf W_E , also gibt es paarweise vertauschbare Transpositionen $\sigma_1, \dots, \sigma_l \in \overline{EB(T)}$, die \overline{V} erzeugen. OBdA gelte

$$\overline{V} = \langle (1 \ 2), \dots, (2l-1 \ 2l) \rangle.$$

Es ist

$$2^l = |\overline{V}| = |V : C_V(W_E)| = |W_F : C_{W_F}(W_E)| = 2,$$

also ist $\overline{V} = \langle (1 \ 2) \rangle$ und damit $|[W_E, V]| = 2$. Dann ist

$$N_{\overline{EB(T)}}(\overline{V}) = C_{\overline{EB(T)}}(\overline{V}) = \overline{V} \times S_{2n-1},$$

wobei diese symmetrische Gruppe $Stab_{S_{2n+1}}(1, 2)$ entspricht. Sei $X \leq EB(T)$ das Urbild von o.g. S_{2n-1} . Es folgt

$$[V, X] \leq C_{W_E}(V) = O_2(P) \cap W_E.$$

Angenommen, $[V, X] \not\leq V$. Dann ist $[V, X, O_2(P)] \neq 1$.

Es ist $[V, O_2(P), X] = 1$ und $[V, X, O_2(P)] < [V, X]$. Eine Überlegung unter Benutzung der Witt-Identität liefert dann $[X, O_2(P), V] < [X, V]$, im Widerspruch zu $[X, O_2(P)] \geq [X, O_2(P) \cap B(T)] = X$.

Also gilt $X \leq N_G(V)$. Wegen der vorausgesetzten M -Uniqueness, $P \leq N_G(V)$ und $B(T) \leq N_G(V)$ ist $N_G(V) \leq C^*(G, T)$. Insbesondere ist $X \leq C^*(G, T) \cap EB(T)$, aber nach 2.57 ist

$$C^*(G, T) \cap EB(T) / O_2(EB(T)) \cong S_{2n},$$

allerdings auf den ersten $2n$ Punkten, ein Widerspruch, falls $n > 1$. □

Lemma 3.31 *Sei E nicht exceptionell. Dann ist $B(T) = O_p(P)O_p(M)$ und $O_p(M)$ und $O_p(P)$ sind elementarabelsch. Überdies ist $O_p(M) = O_p(EB(T))$.*

Beweis: Da W_E und W_F als Offender aufeinander operieren und weil $[W_E, O_p(M)] = 1 = [W_F, O_p(P)]$ gilt, ist

$$W_E \leq C_T(W_E) \leq W_E O_p(P), \quad W_F \leq O_p(P) \leq W_F C_T(W_E).$$

Es folgt

$$C_T(W_E) = W_E C_{O_p(P)}(W_E), \quad O_p(P) = W_F C_{O_p(P)}(W_E)$$

und damit

$$\Phi(C_T(W_E)) = \Phi(C_{O_p(P)}(W_E)) = \Phi(O_p(P)).$$

Da $C_T(W_E)$ - und damit auch $\Phi(C_T(W_E))$ - von E und $B(T)$ normalisiert wird, folgt nach 3.3 $\Phi(C_T(W_E)) = 1$, also sind $C_T(W_E)$ und $O_p(P)$ elementarabelsch.

Daraus folgt $O_p(P), C_T(W_E) \in \mathcal{A}(T)$. Also ist $C_T(W_E) = C_{B(T)}(W_E) = O_p(EB(T))$.

Wegen $O_p(M) \leq C_T(W_E)$ und da M Charakteristik p hat, folgt daraus die Behauptung. □

Lemma 3.32 $EB(T) / O_p(EB(T)) \cong F / O_p(F)$.

Beweis: Nach 3.30 existiert eine p Potenz q mit $EB(T) / O_p(EB(T)) \cong SL_2(q)$ und nach 3.28 existiert ebenso eine p -Potenz q^* mit $F / O_p(F) \cong SL_2(q^*)$. Es ist $O_p(E) \leq B(T)$ und $[O_p(E), W_F] \not\leq C_{W_F}(F)$.

Es folgt wegen der Operation von $B(T)$ auf W_F und $O_p(E)$:

$$q^* = |W_F : C_{W_F}(O_p(E))| = |O_p(E) : C_{O_p(E)}(W_F)| = q$$

und damit die Behauptung. □

Aus den Lemmata 3.21, 3.24, 3.26, 3.28, 3.29, 3.30 und 3.32 folgt nun die Aussage von Satz 3.11.

3.2.2 $\Omega(Z(T)) \leq Z(P)$

Es gelte $[\Omega(Z(T)), P] = 1$. Aus 2.23 folgt dann

Lemma 3.33 $[\Omega(Z(O_p(P))), O^p(P)] = 1$.

□

Zunächst werden wir in einigen Lemmata eine Reihe von Aussagen vorstellen, die von der Operation von M auf W nur oberflächlichen Gebrauch machen. Später werden wir dann die Situation, dass die E_i symmetrisch sind, getrennt von der Situation, in der die E_i linear sind, betrachten.

Lemma 3.34

- (i) $Z_0 \cap C_T(E_i) = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$.
- (ii) $C_T(E_1 \cdot \dots \cdot E_r) = 1$, insbesondere ist $C_{W_i}(E_i) = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$.
- (iii) $O_p(M) = W$, insbesondere ist $W \in \mathcal{A}(T)$.
- (iv) $O_p(P)$ ist transitiv auf $\{E_1, \dots, E_r\}$.

Beweis: (i): Angenommen, es existierte ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $Z_0 \cap C_T(E_i) \neq 1$. Dann wäre auch $Z_0 \cap C_T(E_i) \cap Z(B(T)) \neq 1$ und somit

$$B(T), E_i, O^p(P) \leq C_G(x)$$

für alle $1 \neq x \in Z_0 \cap C_T(E_i) \cap Z(B(T))$. Nach 3.3 wäre dann $O^p(P) \leq M$, ein Widerspruch.

(ii): Angenommen, $C_T(E_1 \cdot \dots \cdot E_r) \neq 1$. Es ist $C_T(E_1 \cdot \dots \cdot E_r) \trianglelefteq T$ und damit

$$1 \neq C_T(E_1 \cdot \dots \cdot E_r) \cap \Omega(Z(T)) \leq C_T(E_1 \cdot \dots \cdot E_r) \cap Z_0 \leq C_T(E_1) \cap Z_0 = 1,$$

ein Widerspruch.

(iii): Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Dann ist $W_i \cap \Phi(O_p(M))$ invariant unter E_i , also (da nach (ii) W_i ein natürlicher und damit insbesondere irreduzibler E_i -Modul ist)

$$W_i \cap \Phi(O_p(M)) = 1 \text{ oder } W_i \leq \Phi(O_p(M)).$$

Im zweiten Fall wäre E_i trivial auf $O_p(M)/\Phi(O_p(M))$, dann würde aber (wegen teilerfremder Operation) jede p' -Untergruppe von E_i auf $O_p(M)$ zentralisieren, im Widerspruch zu $C_M(O_p(M)) \leq O_p(M)$. Also ist $W_i \cap \Phi(O_p(M)) = 1$ und damit $[E_i, \Phi(O_p(M))] = 1$, also gilt (wieder nach (ii)) $\Phi(O_p(M)) = 1$. Also ist

$$O_p(M) = \Omega(Z(O_p(M))) = J(O_p(M)) \leq J(T).$$

Es gilt dann für alle $i \in \{1, \dots, r\}$:

$$O_p(M) = W_i \times C_{O_p(M)}(E_i),$$

also auch

$$O_p(M) = W \times C_{O_p(M)}\left(\prod_{i=1}^r E_i\right),$$

und damit folgt nach (ii) die Behauptung.

(iv): Angenommen, $O_p(P)$ wäre nicht transitiv auf $\{E_1, \dots, E_r\}$. Dann existiert oBdA ein $l < r$, so dass $\{E_1, \dots, E_l\}$ eine $O_p(P)$ -Bahn ist. Insbesondere wird dann $W_1 \cdots W_l$ von $O_p(P)$ normalisiert, also $1 \neq (W_1 \cdots W_l) \cap \Omega(Z(O_p(P))) \leq B(T)$, also auch $(Z_1 \cdots Z_l) \cap \Omega(Z(O_p(P))) \neq 1$. Dann folgt

$$B(T), E_{l+1}, O^p(P) \leq C_G((Z_1 \cdots Z_l) \cap \Omega(Z(O_p(P))))),$$

und damit nach 3.3 $O^p(P) \leq M$, ein Widerspruch. \square

Bemerkung 3.35 Aus 3.34 folgt insbesondere, dass E_1, \dots, E_r nicht exzeptionell sind.

Sei $Z_0 \leq V \trianglelefteq P$, so dass V/Z_0 ein Hauptfaktor von P ist. V sei dabei minimal (bezüglich der Ordnung) mit dieser Eigenschaft.

Lemma 3.36 $[V, O_p(P)] \leq Z_0$ und $[V, O_p(P)] \neq 1$.

Beweis: Die erste Eigenschaft folgt direkt aus der Definition von V . (Man beachte, dass V/Z_0 insbesondere ein irreduzibler P -Modul ist.)

Die zweite Eigenschaft folgt aus 3.33 \square

Lemma 3.37 $O_p(P) \cap B(T) \not\leq W$.

Beweis: Angenommen, $O_p(P) \cap B(T) \leq W$.

Setze $\overline{M} := M/W$. Dann ist $[\overline{O_p(P)}, \overline{B(T)}] = 1$, also $\overline{O_p(P)} \leq \overline{B(T)}$ und es folgt

$$O_p(P) \leq B(T), \text{ also } W \geq O_p(P) \cap B(T) = O_p(P),$$

insbesondere folgt

$$[V, O_p(P)] \leq W' = 1$$

im Widerspruch zu 3.36. \square

Lemma 3.38 $[W_1, V] \neq 1$, d.h. $W \not\leq O_p(P)$.

Beweis: Angenommen, $[W_1, V] = 1$. Dann ist $W_1 \leq C_T(V) \leq O_p(P)$, also auch (nach 3.34)

$$W = \langle W_1^{O_p(P)} \rangle \leq O_p(P),$$

also $\mathcal{A}(O_p(P)) \subseteq \mathcal{A}(T)$. Damit folgt aber wegen $W \in \mathcal{A}(T)$

$$W = J(O_p(P)) \text{ oder } J(T) \leq O_p(P).$$

In beiden Fällen folgt $P \leq M$, ein Widerspruch. \square

Lemma 3.39 $r \leq 2$. Insbesondere ist $r = 1$, falls $p \neq 2$.

Beweis: Sei $r \neq 1$ und $t \in O_p(P)$ (gemäß 3.34) mit $E_1^t = E_2$.

Es ist

$$[W_1, t] \leq (W_1 \times W_2) \cap O_p(P) \text{ und } [[W_1, t], V] \leq Z_0 \cap (Z_1 \times Z_2).$$

Angenommen, $r > 2$.

Dann wäre $W_1 \times W_2 \leq C_T(E_3)$ - also wegen 3.34 $(W_1 \times W_2) \cap Z_0 = 1$, insbesondere $(Z_1 \times Z_2) \cap Z_0 = 1$ und somit $[[W_1, t], V] = 1$.

Andererseits ist $1 \neq [Z_1, t] = [[W_1, t], V]$, ein Widerspruch.

Also ist $r = 2$ und somit wegen der Transitivität von $O_p(P)$ auf $\{E_1, \dots, E_r\}$ insbesondere $p = 2$. \square

Bis hierher war es unerheblich, ob die in M liegenden Blöcke linear oder symmetrisch sind. Für die weitere Untersuchung wollen wir diese Fälle jedoch unterscheiden, da die Modulstruktur von W für die weitere Analyse wichtig sein wird. Zunächst widmen wir uns dabei dem Fall, dass die Blöcke von M symmetrisch sind. Hierbei setzen wir uns zwei Hauptziele:

Zum einen wollen wir zeigen, dass symmetrische Blöcke in einem gewissen Sinn „klein“ sind, d.h. dass nicht beliebig große alternierende Gruppen vorkommen können.

Zum anderen wollen wir die Anzahl der Blöcke von M beschränken, genauer wollen wir folgenden Satz beweisen:

Satz 3.40 *Es gelte $[\Omega(Z(T)), P] = 1$, $E_1/W_1 \cong A_{2n+1}$. Dann ist $n \leq 2$ und es gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $r = 1$ und $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.

(ii) $n = 1$, $r = 2$ und $|T| = 2^7$.

Sei also im folgenden E_1 symmetrisch, $E_1/W_1 \cong A_{2n+1}$. Sei $H := C_G(\Omega(Z(T)))$, $Q := O_2(H)$.

Lemma 3.41 $[W, Q] \neq 1$.

Beweis: Angenommen, $[W, Q] = 1$. Dann ist nach 3.34 $Q \leq W$. Andererseits ist $W \leq C_H(Q) \leq Q$. Insgesamt ist also $W = Q$ und insbesondere

$$H \leq N_G(Q) = N_G(W) \leq M,$$

ein Widerspruch. □

Lemma 3.42 $n \leq 2$.

Beweis: Wegen 3.39 ist $r \leq 2$. Wir führen den Beweis für $r = 2$. Der Beweis im Fall $r = 1$ läuft weitestgehend analog.

Sei $t \in O_2(P)$ mit $E_1^t = E_2$. Dann ist $\overline{M} := M/W \cong S_{2n+1} \wr 2$. Seien $m_1 > \dots > m_k \in \mathbb{N}_0$ mit $2n = \sum_{i=0}^k 2^{m_i}$. Dann gilt

$$\overline{H \cap M} = C_{\overline{M}}(\Omega(Z(T))) \cong \bigotimes_{i=0}^k S_{2^{m_i}} \wr 2 \leq S_{2n} \wr 2.$$

Hierbei entsprechen diese S_{2n} jeweils im Stabilisator (in S_{2n+1}) des Punktes $2n + 1$, vgl. 2.57.

Die Moduln W_1 und W_2 gestatten dann eine entsprechende Zerlegung

$$W_j = W_j^{(2^{m_1})} \times \dots \times W_j^{(2^{m_k})}, \quad |W_j^{(2^{m_i})}| = 2^{2^{m_i}},$$

$j \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Sei $s_1 \in C_{W_1^{(2^{m_1})}}(S_{2^{m_1}})$, $s := [s_1, t]$. Dann ist $s \in \Omega(Z(T))$. Weiter ist

$$C_{\overline{M}}(s) \cong (S_{2^{m_1}} \times S_{2n+1-2^{m_1}}) \wr 2,$$

wobei die symmetrischen Gruppen vom Grad $2n+1-2^{m_1}$ jeweils dem Stabilisator (in S_{2n+1}) der ersten 2^{m_1} Punkte in $\{1, \dots, 2n+1\}$ entsprechen.

Andererseits ist $H \leq C_G(s)$ und damit (wegen der Eindeutigkeit von M)

$$C_G(s) \leq C^*(G, T).$$

Also ist $C_{\overline{M}}(s) \leq \overline{C^*(M, T)} \cong S_{2n} \wr 2$, wobei hier wieder die genannten S_{2n} den Punkt $2n+1$ stabilisieren, siehe 2.57. Dann muss aber $2n = 2^{m_1}$ gelten.

Wegen 3.41 ist $\overline{Q} \neq 1$, damit auch $O_2(\overline{H \cap M}) \neq 1$. Wegen $\overline{H \cap M} \cong S_{2^{m_1}} \wr 2$ folgt daraus $2^{m_1} \leq 4$, also $n \leq 2$ wie behauptet. □

Lemma 3.43 Sei $E_1/W_1 \cong A_5$. Dann ist $r = 1$.

Beweis: Angenommen, $r = 2$. Für $i \in \{1, 2\}$ setzen wir

$$Z_i^{(0)} := C_{W_i}(T \cap E_i B(T)), \quad Z^{(0)} := Z_1^{(0)} \times Z_2^{(0)}.$$

Es gilt $W_1 \cap Q \trianglelefteq T \cap (E_1 B(T))$ und damit auch

$$1 \neq W_1 \cap Q \cap Z(T \cap (E_1 B(T))) \leq C_{W_1}(T \cap (E_1 B(T))) = Z_1^{(0)}.$$

Wegen $|Z_1^{(0)}| = 2$ folgt dann $W_1 \cap Q \cap Z(T \cap (E_1 B(T))) = Z_1^{(0)}$, also insgesamt

3.43.1 $Z^{(0)} \leq Q$.

Setze $\bar{M} := M/W$. Dann ist $\bar{M} \cong S_5 \wr 2$ und $\overline{H \cap M} \cong S_4 \wr 2$. Sei $M_0 \leq M$ mit $\bar{M}_0 \cong S_5 \times S_5$. Offenbar ist $\bar{M}_0 \trianglelefteq \bar{M}$. Weiter gilt

3.43.2 $\bar{Q} \leq \bar{M}_0$ und $|\bar{Q}| = 16$.

Denn wäre $\bar{Q} \not\leq \bar{M}_0$, so wäre $E_1^a = E_2$ für $a \in Q \setminus M_0$ und es gälte

$$S_4 \cong [\overline{E_1 B(T) \cap H}, \bar{a}] \leq [\overline{M_0 \cap H}, \bar{Q}] \leq O_2(\overline{M_0 \cap H}),$$

ein Widerspruch.

Es ist $[\bar{Q}, \overline{H \cap M_0}] \neq 1$ und damit folgt wegen der Operation von $\overline{H \cap M_0}$ auf $O_2(\overline{H \cap M_0})$

$$\bar{Q} = O_2(\overline{H \cap M_0}),$$

also insbesondere $|\bar{Q}| = 16$. Also gilt 3.43.2

Setze $Z_H^{(0)} := \langle (Z^{(0)})^H \rangle$, $Z_P^{(0)} := \langle (Z^{(0)})^P \rangle$. Offenbar ist dann $Z_P^{(0)} \leq Z_H^{(0)}$.

Wäre $Z_H^{(0)} \leq W$, so wäre also auch $Z_P^{(0)} \leq W$ und damit $W \leq C_T(Z_P^{(0)})$. Da P minimal parabolisch ist, gilt

$$O^2(P) \leq C_P(Z_P^{(0)}) \text{ oder } C_T(Z_P^{(0)}) \leq O_2(P).$$

Im zweiten Fall erhalten wir einen Widerspruch zu 3.38, im ersten Fall folgt insbesondere $E_1, O^2(P) \leq C_G(Z_2^{(0)})$ und damit $P \leq M$, ein Widerspruch.

Insgesamt folgt also

3.43.3 $Z_H^{(0)} \not\leq W$.

3.43.3, die Operation von $\overline{H \cap M_0}$ auf $O_2(\overline{H \cap M_0})$ und $\bar{Z}_H^{(0)} \trianglelefteq \overline{H \cap M_0}$ ergeben dann

3.43.4 $\bar{Z}_H^{(0)} = O_2(\overline{H \cap M_0}) = \bar{Q}$.

Überdies erhalten wir

3.43.5 $W \cap Z_H^{(0)} \neq Z^{(0)}$, genauer gilt $|W : W \cap Z_H^{(0)}| \in \{2, 4\}$.

Offenbar ist $W \cap Z_H^{(0)}$ invariant unter $\overline{H \cap M}$. Wegen der Operation von \overline{M} auf W gilt dann einer der folgenden Fälle:

- (i) $W \cap Z_H^{(0)} = Z^{(0)}$,
- (ii) $|W : W \cap Z_H^{(0)}| \leq 4$.

Angenommen, $W \cap Z_H^{(0)} = Z^{(0)}$. Dann folgt

$$[W, Z_H^{(0)}] \leq W \cap Z_H^{(0)} = Z^{(0)}, [W, Z_H^{(0)}, Z_H^{(0)}] = 1,$$

was wegen der Operation von $\overline{Z_H^{(0)}}$ auf W nicht sein kann.

Also gilt (ii). Wäre $W \leq Z_H^{(0)}$, so wäre insbesondere $W \leq O_2(P)$, im Widerspruch zu 3.38. Also gilt 3.43.5 und insbesondere folgt

$$|W \cap Q : W \cap Z_H^{(0)}| \leq 2.$$

Wegen $\overline{Q} \leq \overline{M_0}$ ist $[Z^{(0)}, Q] = 1$, d.h. $Z^{(0)} \leq \Omega(Z(Q))$. Also gilt auch $Z_H^{(0)} \leq \Omega(Z(Q))$. Es folgt dann aber

$$W \cap Z_H^{(0)} \leq C_W(\overline{Q}) = Z^{(0)},$$

ein Widerspruch zu 3.43.5.

Also gilt die Behauptung. □

Insgesamt haben wir nun Satz 3.40 bewiesen.

Als nächstes wollen wir uns dem Fall widmen, in dem E_1 linear ist. Sei also von nun an stets E_1 linear und q eine p -Potenz mit $E_1/O_p(E_1) \cong SL_2(q)'$. Diese Untersuchung wird in zwei Fälle eingeteilt:

Fall IIa $[V, Z_1] \neq 1$.

Fall IIb $[V, Z_1] = 1$.

Offensichtlich gilt IIa genau dann, wenn $V \not\leq B(T)$ ist.

Fall IIa: Es gelte $[V, Z_1] \neq 1$.

Lemma 3.44

- (i) $[V \cap B(T), W_1] \neq 1$.
- (ii) $[V \cap B(T), w] \neq 1$ für alle $w \in W_1 \setminus Z_1$.
- (iii) $[V \cap B(T), W_i] \neq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$.

Beweis: (i): Angenommen, $[V \cap B(T), W_1] = 1$. Dann ist also wegen $V \cap B(T) \trianglelefteq O_p(P)$ und der Transitivität von $O_p(P)$ auf $\{W_1, \dots, W_r\}$

$$[V \cap B(T), W] = 1 \text{ also } V \cap B(T) \leq C_T(W) = W,$$

also auch

$$[V, B(T)] \leq W (*).$$

Dann wird jedes E_i von V normalisiert und V induziert nach 2.29 stets nur innere Automorphismen. Dann muss insbesondere $[Z_1, V] = 1$ gelten, ein Widerspruch.

(ii) und (iii) folgen unmittelbar aus (i). \square

Lemma 3.45 *Ist $r \neq 1$, so gilt $N_{O_2(P)}(E_1) = O_2(P) \cap B(T)$, insbesondere $|O_2(P) : O_2(P) \cap B(T)| = 2$.*

Beweis: Wegen 3.44 ist $V \geq [W_i, V \cap B(T)] = Z_i$ für $i \in \{1, 2\}$.

Ist $r \neq 1$, so gilt $r = 2 = p$ nach 3.39. Wegen $Z_1 = Z(B(T)) \cap E_1$ ist $N_{O_2(P)}(E_1) \leq N_{O_2(P)}(Z_1)$. Also gilt

$$[Z_1, N_{O_2(P)}(E_1)] \leq Z_1 \cap [V, O_2(P)] \leq Z_1 \cap Z_0 = 1,$$

und es folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.46 *Es gilt $U < W \cap V$, und V ist nicht abelsch.*

Beweis: Aus 3.44 folgt $Z_1 \leq [W_1, B(T) \cap V] \leq V$. Insbesondere ist also V nicht abelsch und wegen 3.36 $U \leq V$.

Angenommen, $W \cap V \leq U$. Dann ist $U = V \cap W$. Aber dann ist $[V, W] \leq V \cap W = U$, und wegen der Operation von $J(M)$ auf W folgt $V \leq B(T)$ und damit $[Z_1, V] = 1$, ein Widerspruch. \square

Lemma 3.47 *$r = 1$ oder $r = 2 = q$.*

Beweis: Sei $r > 1$. Dann ist nach 3.39 $r = 2 = p$. Wegen $[V, Z_1] \neq 1$ ist $V \not\leq B(T)$ und somit nach 3.45 $V \not\leq N_{O_2(P)}(E_1)$. Also existiert $t \in V$ mit $E_1^t = E_2$. Dann ist $[Z_1, t] \leq Z_0$.

Angenommen, $q > 2$. Dann ist insbesondere $|E_1 \cap B(T) : W_1| = q$ und $|E_1 \cap B(T) : Z_1| = q^2$.

3.47.1 $V \cap W = U[W_1, t]$, insbesondere ist $|W : V \cap W| = q$.

Es ist $U[W_1, t] \leq V \cap W$ und $U \cap [W_1, t] = [Z_1, t]$, also $|U[W_1, t]| = q^3$. Also ist $|W : V \cap W| \leq q$. Wäre $V \cap W > U[W_1, t]$, so wäre $V \cap W_1 > Z_1$. Dann folgte

$$Z_1 = [W_1 \cap V, V \cap B(T)] \leq Z_0,$$

ein Widerspruch. Also ist $V \cap W_1 = Z_1$, $V \cap W_2 = Z_2$ und damit $V \cap W/U$ in einer Diagonale in W/U enthalten. Damit folgt aber $|V \cap W/U| \leq q$, also $|V \cap W| \leq q^3$ und damit die Behauptung.

3.47.2 $O_2(P) \cap B(T) \cap E_1 \leq W_1$.

Ansonsten wäre

$$Z_1 = [V \cap W, O_2(P) \cap B(T) \cap E_1] \leq Z_0,$$

ein Widerspruch.

Also ist $O_2(P) \cap E_1 \cap B(T) = O_2(P) \cap W_1$.

3.47.3 $O_2(P) \cap W_1 \leq Z_1$.

Ansonsten wäre

$$Z_1 = [W_1 \cap O_2(P), V \cap B(T)] \leq [V, O_2(P)] \leq Z_0,$$

ein Widerspruch.

Aus 3.47.2 und 3.47.3 folgt:

3.47.4 $|E_1 \cap B(T) : O_2(P) \cap E_1 \cap B(T)| = q^2$.

Aus 3.47.2 folgt insbesondere $V \cap B(T) \cap E_i \leq W_i$, $i = 1, 2$, also liegt $W(V \cap B(T))/W$ in einer Diagonalen in $B(T)/W$ und somit folgt

3.47.5 $q \geq |(V \cap B(T))W : W| = |V \cap B(T) : V \cap W|$.

Setze $\bar{V} := V/Z_0$, $\tilde{P} := P/C_P(\bar{V})$. Es ist $C_T(\bar{V}) = O_2(P)$ und somit

3.47.6 $|\widetilde{B(T)}| \geq |E_1 \cap \widetilde{B(T)}| = q^2$.

Weiter gilt nach 3.47.1

$$[V \cap W, B(T)] = [U[W_1, t], B(T)] = [[W_1, t], B(T)] = [Z_1, t] \leq Z_0,$$

und somit

3.47.7 $\overline{V \cap W} \leq C_{\bar{V}}(\widetilde{B(T)})$.

Es folgt

$$\begin{aligned} |\bar{V} : C_{\bar{V}}(\widetilde{B(T)})| &\leq |\bar{V} : \overline{V \cap W}| = |V : V \cap W| = \\ &|V : V \cap B(T)| |V \cap B(T) : V \cap W| = 2|V \cap B(T) : V \cap W| \leq 2q. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt damit

$$|\bar{V} : C_{\bar{V}}(\widetilde{B(T)})| \leq |\widetilde{B(T)}|$$

und wegen $\Phi(B(T)) = U \leq V \leq O_2(P)$ ist $\widetilde{B(T)}$ elementarabelsch, also ein (schwacher) Offender auf V . Andererseits ist \widetilde{P} eine minimal parabolische Gruppe und besitzt somit nach 2.20 keine (schwachen) Overoffender, deswegen muss gelten

$$|\overline{V} : C_{\overline{V}}(\widetilde{B(T)})| = |\widetilde{B(T)}|,$$

also $q = 2$, ein Widerspruch. □

Korollar 3.48 $r = 1$ oder $M \cong S_4 \wr C_2$ und $|T| = 2^7$.

Beweis: Dies folgt aus 3.47. □

Fall IIb: Es gelte $[Z_1, V] = 1$.

Bemerkung 3.49

(i) $[V, U] = 1$.

(ii) $Z_1 \leq O_p(P)$.

(iii) $V \leq N_M(E_1)$.

Aus (iii) folgt $[W_1, V] = 1$ oder $[W_1, V] = Z_1$, wegen 3.38 gilt also:

Korollar 3.50 $[W_1, V] = Z_1$, insbesondere ist $Z_1 \leq V$. □

Lemma 3.51 Ist $r \neq 1$, so gilt $N_{O_2(P)}(E_1) = O_2(P) \cap B(T)$, insbesondere $|O_2(P) : O_2(P) \cap B(T)| = 2$.

Beweis: Sei $r \neq 1$. Dann ist $r = 2 = p$ nach 3.39.

Sei $t \in O_2(P)$ (gemäß 3.34) mit $E_1^t = E_2$.

Wegen $Z_1 = Z(B(T)) \cap E_1$ ist $N_{O_2(P)}(E_1) \leq N_{O_2(P)}(Z_1)$. Also gilt

$$[Z_1, N_{O_2(P)}(E_1)] \leq Z_1 \cap [V, O_2(P)] \leq Z_1 \cap Z_0 = 1,$$

und es folgt die Behauptung. □

Unser nächstes Ziel ist folgender Satz:

Satz 3.52 Sei $r > 1$. Dann ist $q = 2 = r$, $M \cong S_4 \wr C_2$ und $P \cong 2^{1+4+1}S_3$.

Für den Beweis von 3.52 werden wir zunächst eine Reihe von Hilfslemmata beweisen.

Sei also im folgenden $r > 1$. Dann ist nach 3.39 $r = 2 = p$. Außerdem sei $t \in O_2(P)$ mit $W_1^t = W_2$. (Solch ein t existiert wegen 3.34.)

Lemma 3.53 $U \not\leq Z_0$ und V ist abelsch.

Beweis: Wegen $r > 1$ ist $Z_1 \cap Z_0 = 1$, insbesondere also $Z_1 \not\leq Z_0$, somit $U \not\leq Z_0$. Wegen $Z_1 = [W_1, V] \leq V$ ist auch $U \leq V$. Und wegen $U \not\leq Z_0$ und der Irreduzibilität von V als P -Modul ist $Z_0 \langle U^P \rangle = V$, also ist V abelsch. \square

Lemma 3.54 *Es gilt:*

$$(i) \quad |W/W \cap O_2(P)| = q.$$

$$(ii) \quad |V/W \cap V| \leq q.$$

Beweis: (i): Da $[W_1, t]$ eine volle Diagonale in $W_1 \times W_2 = W$ ist, ist

$$|[W_1, t]| = q^2 = |U|.$$

Weiter ist $[Z_1, t] = [W_1, t] \cap U$ und somit $|[W_1, t]U| = q^3$. Wegen $[W_1, t]U \leq W \cap O_2(P)$ folgt also $|W/W \cap O_2(P)| \leq q$.

Es ist für $i = 1, 2$ weiter $[W_i \cap O_2(P), V] \leq Z_i \cap Z_0 = 1$ und somit $|W_i \cap O_2(P)| \leq q$. Also ist $|W_i/W_i \cap O_2(P)| \geq q$ und damit folgt (i).

(ii): Es gilt

$$[V \cap E_i, [W_i, t]] \leq Z_i \cap Z_0 = 1.$$

Daraus folgt $V \cap E_i \leq W_i$ für $i = 1, 2$. Also ist VW/W eine Diagonale und somit

$$|V/V \cap W| = |VW/W| \leq q.$$

\square

Lemma 3.55 $V \cap W = U$.

Beweis: Nach 3.53 ist V abelsch. Es folgt $V \cap W \leq C_W(V) = U \leq V \cap W$. \square

Lemma 3.56 *Setze $\bar{V} := V/C_V(O^2(P))$. Dann ist für alle $w \in W \setminus O_2(P)$ ist $C_{\bar{V}}(w) = \bar{U}$.*

Beweis: Es ist $WO_2(P)/O_2(P) = W_1O_2(P)/O_2(P)$. Sei $w \in W_1 \setminus O_2(P)$ und $C \leq V$ mit $\bar{C} = C_{\bar{V}}(w)$. Dann gilt

$$[w, C] \leq V \cap Z_0 \cap Z_1 = 1,$$

also $\bar{C} = \overline{C_V(w)}$. Wegen $w \notin U$ ist $C_V(w) = V \cap W$ klar. Sei nun $x \in W \setminus O_2(P)$. Dann existiert $y \in W_1 \setminus O_2(P)$ mit $C_{\bar{V}}(x) = C_{\bar{V}}(y) = \bar{U}$. Also ist $\overline{C_V(x)} \leq C_{\bar{V}}(x) = \bar{U} \leq \overline{C_V(x)}$ und es folgt die Behauptung. \square

Bemerkung 3.57 $[O_2(P) \cap B(T), W] = U \leq V$.

Setze $P^* := O^2(P)W$ und $\bar{V} := V/C_V(O^2(P))$.

Lemma 3.58 $P^*/C_{P^*}(\bar{V}) \cong SL_2(q)$, $|V/V \cap W| = q$, $WO_2(P^*) \in Syl_p(P^*)$ und \bar{V} ist ein natürlicher $SL_2(q)$ -Modul.

Beweis: Wegen 3.54 ist W ein Offender auf \bar{V} . Aus 2.20 folgt $|V/V \cap W| = q$ und aus [BHS, 4.14] zusammen mit 3.56 dann die restlichen Aussagen. \square

Bemerkung 3.59 Sei $x \in P^* \setminus N_{P^*}(WC_{P^*}(\bar{V}))$, $P_0 := \langle W, W^x \rangle$. Dann ist $P^* = P_0 C_{P^*}(\bar{V})$ und

$$P_0/C_{P_0}(\bar{V}) \cong P_0 C_{P^*}(\bar{V})/C_{P^*}(\bar{V}) = P^*/C_{P^*}(\bar{V}) \cong SL_2(q).$$

\bar{V} ist ein natürlicher $SL_2(q)$ -Modul für $P_0/C_{P_0}(\bar{V})$.

Sei im folgenden stets P_0 wie in obiger Bemerkung definiert.

Lemma 3.60 $[O^2(P_0), O_2(P)] \not\leq V$.

Beweis: Angenommen, $[O_2(P), O^2(P_0)] \leq V$. Dann ist

$$[O_2(P), O^2(P_0), V] = 1 = [V, O_2(P), O^2(P_0)].$$

Also auch

$$1 = [O^2(P_0), V, O_2(P)] = [V, O_2(P)],$$

ein Widerspruch zu 3.36. \square

Lemma 3.61 $q = 2$.

Beweis: Setze $X := O_2(P)/V$. Dann ist nach 3.51 und 3.57 $|X/C_X(W)| = 2$. Es ist $|X/C_X(P_0)| = |X/C_X(W) \cap C_X(W^x)| \in \{2, 4\}$. Wäre $C_X(W) = C_X(W^x)$, so wäre $|X/C_X(P_0)| = 2$ und es müsste insbesondere

$$[X, O^2(P_0)] = [X, O^2(P_0), O^2(P_0)] \leq [C_X(P_0), O^2(P_0)] = 1$$

gelten, d.h. $[O_2(P), O^2(P_0)] \leq V$, was 3.60 widerspricht. Also ist $|X/C_X(P_0)| = 4$ und $O^2(P_0) \not\leq C_{P_0}(X)$. Wäre $q > 2$, so könnte P_0 nicht nicht-trivial auf einer Gruppe der Ordnung 4 operieren. Es folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.62 $C_P(\bar{V}) = O_2(P)$, insbesondere ist $P/O_2(P) \cong S_3$.

Beweis: Sei $R \leq C_P(\bar{V})$ eine p' -Untergruppe. Dann gilt

$$[V, R] = [V, R, R] \leq [Z_0, R] = 1.$$

Also $R \leq C_G(V) \leq C_G(Z_1) \leq N_G(Z_1) \leq M$, beachte $E_2B(T) \leq N_G(Z_1)$. Insbesondere ist also $R \leq N_G(W)$. Es gilt dann weiter

$$[W, R] = [W, R, R] \leq [C_W(V), R] = [V \cap W, R] = 1,$$

also $R \leq C_G(W) = W$. Also $R = 1$. Es folgt die Behauptung. \square

Es gilt nun $M \cong S_4 \wr C_2$, also $|T| = 2^7$ und $P/O_2(P) \cong S_3$. Dabei hat P auf $O_2(P)$ wegen 3.58 und 3.60 zwei nichtzentrale Hauptfaktoren. Somit ist 3.52 bewiesen

Wir haben insgesamt gezeigt:

Lemma 3.63 *Gilt Fall II und ist E_1 linear, $E_1/O_p(E_1) \cong SL_2(q)'$, so ist $r = 1$ und $Z_1 \leq V$ oder $r = 2 = q$ und $M \cong S_4 \wr C_2$ und $|T| = 2^7$.*

Wir wollen die Aussage von 3.63 noch verschärfen, indem wir die Struktur von P im Zusammenspiel mit M näher analysieren. Das folgende Lemma ist insbesondere im Hinblick auf A.6 ein wichtiger Schritt in diese Richtung.

Lemma 3.64 *Es gelte Fall II und E_1 sei linear. Dann ist $p = 2$, $|T| = 2^7$ und es gilt einer der folgenden Fälle*

- (i) $M \cong S_4 \wr C_2$.
- (ii) $r = 1$, $E_1/W_1 \cong SL_2(4)$ und $[Z_1, V] \neq 1$.

Beweis: Wir können oBdA annehmen, dass E_1 linear ist und $r = 1$ gilt, da ansonsten aus dem Korollar zu 3.47 und 3.52 bereits folgt, dass $p = 2$ und $M \cong S_4 \wr C_2$ (und damit $|T| = 2^7$) gilt.

Setze $E := E_1$, $W_E := W_1$, $Z := Z_1$. Sei $E/W_E \cong SL_2(q)'$.

Sei zunächst $[Z, V] = 1$. Dann ist auch $[\langle Z^P \rangle, V] = 1$. Wäre $Z \leq Z_0$, so wäre $W_E \leq C_T(V/Z_0) \leq O_p(P)$, ein Widerspruch zu 3.38. Weil V/Z_0 ein irreduzibler $GF(p)P$ -Modul ist, folgt dann $V = \langle Z^P \rangle$, beachte $Z_0 \leq C_{W_E}(V) = Z$. Insbesondere ist dann V abelsch und wir erhalten

$$Z \leq V \cap W_E \leq C_{W_E}(V) = Z, \text{ also } V \cap W_E = Z.$$

Also gilt

$$q = |W_E : C_{W_E}(V)| \geq |V : C_V(W_E)|.$$

Da V elementarabelscher Normalteiler einer minimal parabolischen Gruppe ist, muss nach 2.20 Gleichheit gelten, d.h.

$$|V : V \cap W| = q.$$

Dann folgt aus 2.29

$$[w, V] = Z \text{ für alle } w \in W_E \setminus Z.$$

Wäre $O_p(P) \leq B(T)$, so wäre auch $[Z, O_p(P)] = 1$, also auch $[V, O_p(P)] = [\langle Z^P \rangle, O_p(P)] = 1$, im Widerspruch zu 3.36. Also ist $O_p(P) \not\leq B(T)$ und induziert damit Körperautomorphismen. Dann gilt insbesondere

$$[W_E, O_p(P)] \not\leq Z.$$

Also

$$Z = [W_E, O_p(P), V] \leq [O_p(P), V] \stackrel{3.34}{\leq} Z_0,$$

ein Widerspruch.

Also ist $[Z, V] \neq 1$, und V induziert Körperautomorphismen. Es gilt

$$[Z, V, V] \leq [Z_0, V] = 1$$

und es folgt $p = 2$, da ansonsten nach 2.2 ein Automorphismus von $GF(q)$ von der Ordnung p nicht quadratisch auf $GF(q)$ operiert.

Setze $\tilde{V} := V/Z_0$. Dann gilt wegen 2.20

$$|W_E : C_{W_E}(\tilde{V})| \geq |\tilde{V} : C_{\tilde{V}}(W_E)|.$$

Nach 3.44 ist $V \cap B(T) \not\leq W_E$, also ist

$$C_{W_E}(\tilde{V}) = Z, \text{ d.h. } |W_E : C_{W_E}(\tilde{V})| = q.$$

Sei $X \leq V$ das Urbild von $C_{\tilde{V}}(W_E)$. Dann ist $[W_E, X] \leq Z_0$ und damit $X \leq W_E$, beachte 2.29. Also $W_E \cap V = X$, d.h.

$$|\tilde{V} : \tilde{X}| = |V : X| = |VW/W : XW/W| = |V : V \cap W|.$$

Wir setzen $\overline{M} := M/W$ und wählen $\sigma \in \overline{V}$ mit $\overline{V} = (\overline{V} \cap \overline{B(T)}) \times \langle \sigma \rangle$. Da \overline{V} elementarabelsch, $\overline{T}/\overline{B(T)}$ jedoch zyklisch ist, ist $|V : V \cap B(T)| = 2$. Es gilt $\overline{V} \cap \overline{B(T)} \leq C_{\overline{B(T)}}(\sigma)$, also $|\overline{V} \cap \overline{B(T)}| \leq \sqrt{q}$ und schließlich $|\overline{V}| \leq 2\sqrt{q}$.

Es folgt $q = |W_E : C_{W_E}(\tilde{V})| \leq |\tilde{V} : C_{\tilde{V}}(W)| = |\tilde{V} : \tilde{X}| = |\overline{V}| \leq 2\sqrt{q}$, also $\sqrt{q} = 2$ - beachte, dass im Fall $q = 2$ stets $[Z_1, V] = 1$ gilt. □

Als Korollar aus Satz 3.40 und Lemma 3.64 erhalten wir

Korollar 3.65 *Ist $\Omega(Z(T)) \leq Z(P)$, so ist $p = 2$ und $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.* □

Detaillierter erhalten wir:

Satz 3.66 *Es sei $[\Omega(Z(T)), P] = 1$. Dann gelten folgende Aussagen:*

- (i) $p = 2$,
- (ii) $Z_1 \leq V$,
- (iii) $[Z_1, V] \neq 1$, falls $r = 1$,
- (iv) $r = 1$ oder $r = 2 = q$ und $M \cong S_4 \wr C_2$.

3.2.3 Zusammenfassung

Aus Gründen der Übersichtlichkeit und der besseren Zitierbarkeit fassen wir Satz 3.11 und Korollar 3.65 noch einmal in einem Satz zusammen:

Satz 3.67 *Es gelte Voraussetzung 3.8. Sei $T \leq P \leq C^*(G, T)$ minimal mit $P \not\leq M$. Falls möglich sei $P \not\leq C_G(\Omega(Z(T)))$ gewählt.*

Dann gilt einer der folgenden Fälle

(i) $P \leq C_G(\Omega(Z(T)))$, $p = 2$ und $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.

(ii) $P \not\leq C_G(\Omega(Z(T)))$, M besitzt genau einen maximalen $B(T)$ -Block E mit

$E \not\leq C^*(M, T)$, $E \triangleleft M$, es existiert ein Normalteiler F von P , so dass für $W_F := [\Omega(Z(O_p(P))), F]$ gilt

(a) $P = FT$,

(b) $F/O_p(F) \cong SL_2(p^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $W_F/C_{W_F}(F/O_p(F))$ ist ein natürlicher $SL_2(p^k)$ -Modul für $F/O_p(F)$,

(c) $O_p(P)O_p(M) = B(T)$,

(d) $O_p(M) \cap O_p(P) = Z(B(T))$, falls E nicht exzeptionell ist.

(e) $F/O_p(F) \cong EB(T)/O_p(EB(T))$.

Korollar 3.68 *Ist E ein maximaler $B(T)$ -Block von G mit $E \not\leq C^*(G, T)$, so ist $N_G(W_E) = N_G(E)$.*

□

Kapitel 4

Lokale Struktur und $B(T)$ -Blöcke

Wir arbeiten mit den folgenden Voraussetzungen.

Voraussetzung 4.1 Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl. G sei von lokaler Charakteristik p mit $O_p(G) = 1$. Sei $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Voraussetzung 4.2 Es gelte Voraussetzung 4.1. Es existiere $C^*(G, T) \leq H < G$ mit $\mathcal{T}(H) \neq \emptyset$. Sei $S \in \mathcal{T}^*(H)$.

Wir erinnern noch einmal daran, dass dank 3.5 und 3.67 folgender Satz gilt.

Satz 4.3 Es gelte 4.2. Sei $M \in \mathcal{C}^*(S)$. Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) M besitzt genau einen $B(S)$ -Block E und dieser ist ein Normalteiler von M . Überdies ist $M = EC^*(M, S)$. Ist $T \in \mathcal{T}(H)$, $\mathcal{C}^*(T) = \{M\}$ und $T \leq P \leq C^*(G, T)$ minimal mit $P \not\leq M$, so ist $\Omega(Z(T)) \not\leq Z(P)$.
- (ii) $p = 2$ und $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.

□

Voraussetzung und Notation 4.4 In diesem Kapitel gelte die Voraussetzung 4.2 und Fall (i) in 4.3. Weiter verabreden wir für die auftretenden Fälle:

- (i) Ist $|\mathcal{C}^*(S)| \geq 2$, so seien $E, F \in \mathcal{B}^*(S)$, $E \neq F$.
- (ii) Ist $B(T) \in \mathcal{T}(H)$, $\mathcal{C}^*(T) = \{M\}$ und $M \not\leq C^*(G, T)$, so seien E und F wie in 3.67(ii).

Für $X \in \{E, F\}$ setzen wir

$$W_X := \Omega(Z(O_p(X))), \quad Q_X := O_p(XB(S)), \quad Z_X := Z(XB(S)).$$

Es sei $M = N_G(E)$, $N = N_G(F)$.

4.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt beginnen wir die lokale Analyse mit Hilfe der Einsichten, die wir bis hierher gewonnen haben. Wir versuchen hierbei, die Lemmata möglichst einheitlich und für alle Typen von Blöcken simultan zu formulieren.

Lemma 4.5 *Gilt (ii) in 4.4, so ist $O^p(F)$ ebenfalls ein $B(T)$ -Block, der aber in $C^*(G, T)$ liegt.*

Beweis: Sei (gemäß 3.67) q eine p -Potenz mit $F/O_p(F) \cong SL_2(q) \cong EB(T)/Q_E$. Sei zunächst E nicht exzeptionell. Dann ist $O_p(E) = W_E$ und $O_p(F) \leq B(T)$ nach 3.31. Genauer gilt nach 3.31 sogar $O_p(F) = W_F$. Es ist $W_F = [W_F, F]C_{W_F}(F)$. Wegen 3.3 ist $C_{W_F}(F) \cap C_{B(T)}(E) = 1$ und wegen $C_{W_F}(F) \leq Q_E$ folgt wegen der Operation von $B(T)$ auf $Q_E/C_{B(T)}(E)$

$$|C_{W_F}(F)| \leq q.$$

Daraus und wegen $B(T) = W_E W_F C_{W_F}(F)$ folgt weiter

$$C_{B(T)}(E) = Z_E, \quad |Z_E| = |C_{W_F}(F)| \leq q.$$

Es gilt

$$[W_E, W_F] = C_{W_E}(W_F) = W_E \cap W_F \text{ und } \langle W_E^P \rangle = O^p(F).$$

Daraus folgt $[W_F, O^p(F)] = W_F$ und damit die Behauptung.

Sei nun E exzeptionell. Dann ist $W_E \leq O_3(F)$, $O_3(F)$ ist nicht abelsch und $B(T) = O_3(E)O_3(F)$.

Außerdem kann F in $O_3(F)$ höchstens zwei nichtzentrale Hauptfaktoren haben. Es gilt

$$[O_3(E), O_3(F)]W_E = (O_3(E) \cap O_3(F)) = C_{O_3(E) \text{ mod } W_E}(O_3(F)).$$

Außerdem ist

$$\langle O_3(E)^F \rangle = O^3(F)$$

und es folgt

$$[O_3(F), O^3(F)] = O_3(F).$$

Wir erhalten außerdem (mit Hilfe der Operation von $O_3(F)$ auf $O_3(E)/W_E$ und $W_E/Z(E)$), dass $O_3(F)/W$ elementarabelsch ist. [BHS, 3.5] liefert nun, dass $O_3(F)/W$ und $W/Z(F)$ jeweils natürliche $SL_2(q)$ -Moduln für $F/O_3(F)$ sind. Aus Ordnungsgründen folgt $|Z(F)| = q$ und damit ist $O^3(F)$ ein $B(T)$ -Block. □

Wegen 4.5 müssen wir im folgenden weitestgehend nicht mehr danach unterscheiden, ob (i) oder (ii) in 4.4 gilt- es sei denn natürlich, dass explizit $F \not\leq C^*(G, T)$ gebraucht werden sollte. Ggf. ersetzen wir F durch $O^p(F)$

Lemma 4.6 *Sei E symmetrisch, $E/W_E \cong A_{2n+1}$. Dann gilt*

$$W_F Q_E = B(T).$$

Beweis: Nach 2.44 ist $\overline{EB(T)} = EB(T)/Q_E \cong S_{2n+1}$ und nach 2.28 wird $\overline{B(T)}$ von einer maximalen Menge paarweise vertauschbarer Transpositionen erzeugt. OBdA gelte also

$$\overline{B(T)} = \langle (1\ 2), \dots, (2n-1\ 2n) \rangle.$$

$\overline{W_F}$ ist ebenfalls Offender auf W_E , wird also auch von vertauschbaren Transpositionen erzeugt und wir können dann annehmen, dass gilt

$$\overline{W_F} = \langle (1\ 2), \dots, (2l-1\ 2l) \rangle,$$

wobei $l \leq n$. Wir nehmen an, dass $l \neq n$ ist und wählen F (bzw. das Paar (E, F)) so, dass $|\overline{W_F}| = |W_F : C_{W_F}(W_E)| = |W_E : C_{W_E}(W_F)|$ minimal ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $|[W_E, W_F]|$ minimal gewählt ist.

Wäre

$$\overline{N_{EB(T)}(B(T))} = N_{\overline{EB(T)}}(\overline{B(T)}) \leq N_{\overline{EB(T)}}(\overline{W_F}),$$

so müsste wegen der Transitivität von $N_{\overline{EB(T)}}(\overline{B(T)})$ auf $\{(1\ 2), \dots, (2n-1\ 2n)\}$ bereits $\overline{W_F} = \overline{B(T)}$ gelten.

Also existiert $x \in N_{EB(T)}(B(T))$ mit $\overline{W_F} \neq \overline{W_F^x}$.

Wir erhalten

$$[W_F, W_F^x] \leq [W_E, W_F] \cap [W_E, W_F^x]$$

und wegen der minimalen Wahl von F (bzw. (E, F)) folgt dann

$$[W_E, W_F^x] = [W_F, W_F^x] = [W_E, W_F].$$

Daraus folgt aber $\overline{W_F} = \overline{W_F^x}$, ein Widerspruch.

Damit ist $B(T) = W_F Q_E$ und es somit gilt die Behauptung. □

Lemma 4.7 *Ist E symmetrisch, so ist auch F symmetrisch vom selben Typ wie E .*

Beweis: Beachte zunächst, dass $Z(E) = 1$ gilt wegen 2.50. Wir können wegen 3.28 und 3.32 annehmen, dass (i) in 4.4 gilt.

Sei $E/W_E \cong A_{2n+1}$. Dann gilt wegen 4.6

$$2^n = |W_E/C_{W_E}(W_F)| = |W_F/C_{W_F}(W_E)|.$$

Es ist also $C_{W_E}(W_F) = [W_E, W_F] = W_E \cap W_F = C_{W_F}(W_E)$ und damit folgt

$$|W_F| = |W_E \cap W_F|^2 = |W_E|.$$

Damit ist $F/W_F \cong A_{2n+1}$ oder $F/W_F \cong (SL_2(2^n))'$.

Angenommen, es gälte nicht ersteres. (Dann ist insbesondere $n \neq 1$.) Es ist dann $C_{W_F}(x) = C_{W_F}(W_E)$ für alle $x \in W_E \setminus W_F$. Sei $y \in W_F \setminus W_E$, so dass y in $EB(S)/Q_E$ eine Transposition induziert.

Dann gilt $|W_E : C_{W_E}(y)| = 2$, insbesondere ist $W_E \cap W_F \leq C_{W_E}(y)$. Sei $a \in C_{W_E}(y) \setminus W_F$.

Es ist dann $y \in C_{W_F}(a) = C_{W_F}(W_E) = W_E \cap W_F$, ein Widerspruch zur Wahl von y .

Somit ist $E/W_E \cong A_{2n+1} \cong F/W_F$. \square

Lemma 4.8 *Sei E exzeptionell. Dann ist auch F exzeptionell und $F/O_3(F) \cong E/O_3(E)$.*

Beweis: Angenommen, F wäre nicht exzeptionell. Dann gilt nach 2.54

$$Q_F = W_F \times C_{B(S)}(F), \quad Q_E = O_3(E)C_{B(S)}(E).$$

Sei $E/O_3(E) \cong SL_2(q)'$, $F/O_3(F) \cong SL_2(q^*)'$. Setze $\widetilde{FB(S)} := FB(S)/Q_F$. Dann ist nach 2.44 und 2.54

$$\widetilde{FB(S)} \cong SL_2(q^*)$$

und

$$\widetilde{Q_F} := Q_F/C_{B(S)}(F) \text{ ist ein natürlicher Modul für } \widetilde{FB(S)}.$$

Wir bemerken zunächst, dass wegen 3.3 gilt

4.8.1 $C_{B(S)}(E) \cap C_{B(S)}(F) = 1$, also

$$C_{B(S)}(E)C_{B(S)}(F) = C_{B(S)}(E) \times C_{B(S)}(F).$$

Außerdem ist $[O_3(E), W_F, W_F] \leq [O_3(E) \cap W_F, W_F] = 1$ und somit gilt laut Definition

4.8.2 $[W_E, W_F] = 1$, insbesondere ist $W_F \leq Q_E$.

Wir beweisen als nächstes:

4.8.3 (i) $B(S) = O_3(E)Q_F = Q_EC_{B(S)}(F)$,

(ii) $q = q^*$.

Wäre $[O_3(E), W_F] = 1$, so wäre

$$[E, W_F] \leq C_E(O_3(E)) = W_E, [F, W_E] \leq C_F(W_F) = W_F$$

also $E, F, B(S) \leq N_G(W_E W_F)$, im Widerspruch zu 3.3. Also ist $\widetilde{O_3(E)} \neq 1$.

Es gilt

$$q^* = |\widetilde{B(S)}| \geq |\widetilde{O_3(E)}| = |O_3(E) : C_{O_3(E)}(W_F)| \stackrel{2.28}{=} |W_F : C_{W_F}(O_3(E))| = q^*,$$

also $B(S) = O_3(E)Q_F$ und damit auch $B(S) = Q_EC_{B(S)}(F)$. Wegen $W_F \leq Q_E$ ist dann auch $B(S) = Q_EC_{B(S)}(F)$. Also gilt

$$q = |C_{O_3(E)/W_E}(B(S))| = |[O_3(E), B(S)]W_E/W_E| = |[O_3(E), C_{B(S)}(F)]W_E/W_E| \leq$$

$$|C_{O_3(E)}(F)W_E/W_E| \leq |C_{O_3(E)}(W_F)/W_E|,$$

also ist

$$q = |O_3(E)/W_E : C_{O_3(E)/W_E}(B(S))| \geq$$

$$|O_3(E) : C_{O_3(E)}(W_F)| = |W_F : C_{W_F}(O_3(E))| = q^*.$$

Wäre $|C_{W_E}(F)| > q^2$, so müsste $C_{W_E}(F) \cap Z(E) \neq 1$ gelten, beachte $|Z(E)| = q$. Das wäre ein Widerspruch zu 3.3. Also ist $|C_{W_E}(F)| \leq q^2$ und es folgt mit $W_EC_{B(S)}(F)/C_{B(S)}(F) \leq C_{Q_F/C_{B(S)}(F)}(B(S))$:

$$q^* \geq |W_EC_{B(S)}(F)/C_{B(S)}(F)| = |W_E : C_{W_E}(F)| \geq q.$$

Also gilt 4.8.3.

Da \widetilde{Q}_F ein natürlicher Modul für $\widetilde{FB}(S)$ ist, gilt insbesondere

$$|\widetilde{W}_E| \leq |C_{\widetilde{Q}_F}(\widetilde{B}(S))| = |C_{\widetilde{Q}_F}(\widetilde{O}_3(E))| = q,$$

also wegen $|W_E| = q^3$

$$|C_{W_E}(F)| \geq q^2.$$

Also gilt

$$\mathbf{4.8.4} \quad |C_{W_E}(F)| = q^2$$

und somit auch

$$\mathbf{4.8.5} \quad W_E = Z(E) \times C_{W_E}(F).$$

Setze nun $\widehat{Q}_E := Q_E/C_{B(T)}(E)W_E$. Dann ist \widehat{Q}_E nach 2.54 ein natürlicher Modul für $\widehat{EB}(S) := EB(S)/Q_E$ und es gilt

$$q = |C_{\widehat{Q}_E}(\widehat{B}(S))| = |C_{\widehat{Q}_E}(\widehat{C}_{B(S)}(F))| \geq |\widehat{W}_F| = |W_F : W_F \cap (W_EC_{B(S)}(E))| =$$

$$|W_F : C_{W_F}(O_3(E))| = |W_F : C_{W_F}(B(S))| = q,$$

also

$$\widehat{W}_F = C_{\widehat{Q}_E}(\widehat{B}(S)) = [\widehat{Q}_E, \widehat{B}(S)] = [\widehat{Q}_E, \widehat{C}_{B(S)}(F)] \leq \widehat{C}_{\widehat{Q}_E}(F),$$

d.h.

$$W_F \leq C_{Q_E}(F)W_EC_{B(S)}(E) \stackrel{4.8.5}{=} C_{Q_E}(F) \times C_{B(S)}(E) \leq C_{B(S)}(F) \times C_{B(S)}(E).$$

Dann folgt

$$4.8.6 \quad \widetilde{\widetilde{Q_F}} = \widetilde{\widetilde{W_F}} = \widetilde{\widetilde{C_{Q_F}(E)}}.$$

Aber dann folgt

$$[\widetilde{\widetilde{Q_F}}, \widetilde{\widetilde{B(S)}}] = [\widetilde{\widetilde{W_F}}, \widetilde{\widetilde{O_3(E)}}] = [\widetilde{\widetilde{C_{Q_F}(E)}}, \widetilde{\widetilde{O_3(E)}}] = 1,$$

ein Widerspruch.

Also ist F exzeptionell.

Also ist die Situation nun symmetrisch in E und F - wir können oBdA $q \geq q^*$ annehmen. Es folgt dann

$$\begin{aligned} q^* &= |B(S)/Q_F| = |O_3(E)Q_F/Q_F| = |O_3(E)/C_{O_3(E)}(W_F)| \geq |O_3(E) : C_{O_3(E)}(W_F)W_E| \\ &\geq |O_3(E) : [O_3(E), O_3(F)]W_E| = |O_3(E)/W_E : C_{O_3(E)/W_E}(B(S))| = q. \end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung. \square

Korollar 4.9 $E/O_p(E) \cong F/O_p(F)$ und es gilt

- (i) E symmetrisch $\iff F$ symmetrisch,
- (ii) E exzeptionell $\iff F$ exzeptionell,
- (iii) E gewöhnlich linear $\iff F$ gewöhnlich linear.

Beweis: Die Behauptung folgt aus 4.7, 4.8 und 2.52. \square

Lemma 4.10 Sei $D := Q_E \cap Q_F$. Dann gilt

- (i) $B(S) = O_p(E)Q_F = O_p(F)Q_E$.
- (ii) $Q_E = O_p(E)D$, $Q_F = O_p(F)D$.

Beweis: (i): Sind E und F nicht exzeptionell, so folgt die Behauptung aus 4.6 bzw. der Tatsache, dass W_E und W_F als Offender aufeinander operieren.

Seien also E und F exzeptionell. Dann ist $O_3(F) \not\leq Q_E$, $O_3(E) \not\leq Q_F$, insbesondere ist $W_E \not\leq [O_3(E), O_3(F)] \not\leq W_F$.

OBdA gelte $|O_3(E) : C_{O_3(E)}(O_3(F)/W_F)| \geq |O_3(F) : C_{O_3(F)}(O_3(E)/W_E)|$. Es folgt

$$q \geq |O_3(E) : C_{O_3(E)}(O_3(F)/W_F)| \geq |O_3(F) : C_{O_3(F)}(O_3(E)/W_E)| = q,$$

also überall Gleichheit und damit (i).

(ii) folgt aus (i). \square

Sei für den Rest dieses Abschnitts E nicht exzeptionell.

Lemma 4.11 Sei $D := Q_E \cap Q_F$. Dann gilt

- (i) Q_E ist elementarabelsch.
- (ii) $D = Z(B(S))$.

Beweis: (i): Laut 2.40 ist $[W_E, D] = 1 = [W_F, D]$ und somit nach 4.10

$$\Phi(Q_E) = \Phi(D) = \Phi(Q_F).$$

Also

$$E, F, B(S) \leq N_G(\Phi(D)).$$

Aus 3.3 folgt dann $\Phi(D) = 1$, also gilt (i).

(ii): Es ist $B(S) = Q_E Q_F$ und somit gilt $D \leq Z(B(S))$ wegen (i). Andererseits ist $D \leq Z(B(S)) \leq Q_E = W_E D$, also

$$Z(B(S)) = D(W_E \cap Z(B(S))) = D(W_E \cap W_F) = D.$$

□

Lemma 4.12 $Q_E = W_E Z_E$, insbesondere ist Q_E/Z_E ein natürlicher Modul für $EB(S)/Q_E$.

Beweis: Setze $\overline{EB(S)} := EB(S)/Q_E$.

Dann existiert $x \in E$ mit $\langle \overline{B(S)}, \overline{B(S)}^x \rangle = \overline{EB(S)}$, also wegen $Q_E \leq B(S)$ auch $EB(S) = \langle B(S), B(S)^x \rangle$ und insbesondere

$$Z(B(S)) \cap Z(B(S))^x = Z_E.$$

Es ist $W_E = (W_E \cap W_F)(W_E \cap W_F)^x$. Außerdem ist

$$W_E Z(B(S)) = Q_E = Q_E^x = W_E Z(B(S))^x.$$

Es folgt

$$(W_E \cap W_F)^x \leq Z(B(S))^x \leq W_E Z(B(S)) = (W_E \cap W_F)^x Z(B(S)).$$

Also

$$Z(B(S))^x = (W_E \cap W_F)^x (Z(B(S)) \cap Z(B(S))^x) = (W_E \cap W_F)^x Z_E \leq W_E Z_E.$$

4.10 liefert nun die Behauptung. □

Korollar 4.13 Ist $Z(E) = 1$, so gilt $Q_E = W_E \times Z_E$. □

Lemma 4.14 $Q_E \in \mathcal{A}(S)$.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}(S)$. Ist $[W_E, A] = 1$, so folgt $A \leq Q_E$ und somit mit 4.11 die Behauptung. Es gelte also $[W_E, A] \neq 1$.
Dann ist A ein Offender auf W_E , und es gilt

$$|A/A \cap Q_E| = |A/C_A(W_E)| = |W_E/C_{W_E}(A)| = |W_E/W_E \cap A|.$$

Also

$$|A| = \frac{|W_E||A \cap Q_E|}{|A \cap W_E|}.$$

Es ist $D \leq A \cap Q_E \leq W_E D$, somit folgt

$$A \cap Q_E = D(W_E \cap A) = D.$$

Wir erhalten

$$|A| = \frac{|W_E||D|}{|W_E \cap A|} = \frac{|Q_E||W_E \cap D|}{|W_E \cap A|} = |Q_E|.$$

Da Q_E nach 4.11 elementarabelsch ist, folgt die Behauptung. \square

Um weitere Struktureigenschaften von M erschließen zu können, werden wir uns in den folgenden drei Unterabschnitten jeweils mit einer separaten Sorte von Blöcken beschäftigen. Als erstes werden wir uns den gewöhnlich linearen Blöcken widmen, danach soll es um exzeptionelle Blöcke gehen. In beiden dieser Abschnitte ist ein Ziel, die Größe von $B(T)$ zu beschränken und letztlich zu zeigen, dass stets $Q_E = O_p(E)$ ist.

Zum Schluss werden wir uns mit symmetrischen Blöcken beschäftigen und insbesondere damit, dass es von dieser Sorte keine „großen“ Blöcke gibt.

4.2 Gewöhnlich lineare Blöcke

Sei in diesem Abschnitt E gewöhnlich linear und q eine p -Potenz mit $E/W_E \cong SL_2(q)'$.

Lemma 4.15 $|B(S)| \leq q^4$.

Beweis: Es gilt

$$|B(S)| = |B(S) : Q_E| |Q_E : Z_E| |Z_E| = q \cdot q^2 \cdot |Z_E|,$$

also genügt es zu zeigen, dass $|Z_E| \leq q$ gilt.

Wegen $Z_E \leq Z(B(T))$ ist insbesondere $Z_E \leq C_{B(S)}(W_F) = Q_F$.

Setze $\widetilde{Q}_F := Q_F/Z_F$. Dann ist \widetilde{Q}_F ein natürlicher Modul für $FB(S)/Q_F$. Es ist nach 3.3 $Z_E \cap Z_F = 1$ und somit $|Z_E| = |\widetilde{Z}_E|$. Offenbar ist $\widetilde{Z}_E \leq C_{\widetilde{Q}_F}(B(S))$, also $|\widetilde{Z}_E| \leq q$. Es folgt die Behauptung. \square

Lemma 4.16 *Ist $p = 2$, so liegt jede Involution von $B(S)$ in $Q_E \cup Q_F$. Insbesondere ist $\mathcal{A}(S) = \{Q_E, Q_F\}$.*

Beweis: Sei $t \in B(S)$ eine Involution. Dann existieren $q_E \in Q_E$, $q_F \in Q_F$ mit $t = q_E q_F$.

Angenommen, $q_E \notin Q_F$ und $q_F \notin Q_E$. Dann ist

$$C_{Q_E}(q_F) = Q_E \cap Q_F = C_{Q_F}(q_E).$$

Da aber $q_E q_F = t$ eine Involution ist, muss $[q_E, q_F] = 1$ gelten, also

$$q_F \in C_{Q_F}(q_E) = Q_E \cap Q_F,$$

ein Widerspruch.

Ist also $A \in \mathcal{A}(S)$, so gilt $A = (A \cap Q_E) \cup (A \cap Q_F)$, also $A = Q_E$ oder $A = Q_F$. \square

Satz 4.17 Sei $p = 2$. Dann ist $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \leq 2$.

Beweis: Sei $g \in N_G(B(S))$. Dann ist $Q_E^g \in \mathcal{A}(S)$, nach 4.16 also

$$Q_E^g \in \{Q_E, Q_F\}.$$

Das heißt

$$Q_E^{N_G(B(S))} \subseteq \{Q_E, Q_F\}.$$

Es folgt die Behauptung. □

Satz 4.18 Sei $p \neq 2$. Dann ist $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \in \{1, 2, q, q+1\}$.

Beweis: Setze $H := N_G(B(S))$. Dann gilt $|H : H \cap M| = |Q_E^H|$.¹

Für jedes $g \in H$ ist Q_E^g wiederum ein zu dem $B(S)$ -Block E^g gehöriger Normalteiler. Insbesondere gilt für alle $g, h \in H \setminus M$

$$Q_E \cap Q_E^g = Z(B(S)) = Q_E \cap Q_E^h.$$

Des weiteren ist $|B(S) : Z(B(S))| = q^2$, $|B(S) : Q_E| = q$ und somit folgt

$$|Q_E^H| \leq q + 1.$$

Sei $K \leq E \cap H$ zyklisch der Ordnung $q - 1$. Sei t die Involution in K . Dann ist $\langle t \rangle Q_E = Z(EB(S) \text{ mod } Q_E)$.

K operiert $GF(q)$ -linear auf dem $GF(q)$ -Vektorraum $B(S)/Z(B(S))$.

1. Fall: Es existiert $Q_E \neq Q_X \in Q_E^H$ mit $Q_X^t = Q_X$. Dann sei oBdA $Q_X = Q_F$. Wir zeigen zunächst, dass dann bereits $Q_F^K = Q_F$ gilt.

Zunächst gilt für alle $k \in K$

$$Q_F^k = Q_F^{tk} = Q_F^{kt},$$

also ist jedes Q_F^k t -invariant.

Angenommen, es existiert $k \in K$ mit $Q_F^k \neq Q_F$. Dann ist $B(S) = Q_F Q_F^k$, und es folgt

$$W_E \leq [B(S), t] = [Q_F Q_F^k, t] = Q_E \cap Q_F = Z(B(S)),$$

ein Widerspruch. Also ist Q_F bereits K -invariant.

Ist $Q_E^H = \{Q_E, Q_F\}$, so sind wir fertig. Es gelte also $|Q_E^H| \geq 3$.

$\overline{B(S)} := B(S)/Z(B(S))$ ist ein 2-dimensionaler $GF(q)$ -Vektorraum, der für die $GF(q)$ -linear operierende Gruppe K die verschiedenen Eigenräume $\overline{Q_E}$ und $\overline{Q_F}$ besitzt. Für $k \in K \setminus \langle t \rangle$ sind somit $\overline{Q_E}$ und $\overline{Q_F}$ die einzigen 1-dimensionalen k -invarianten $GF(q)$ -Unterräume von $\overline{B(S)}$.

Angenommen, es existiert $Q_U \in Q_E^H \setminus \{Q_E, Q_F\}$ mit $Q_U^t = Q_U$.

Dann ist $B(S) = Q_F W_U$ und es gilt

¹Offenbar ist $Q_E \trianglelefteq EN_M(B(T))$.

$$W_E = [W_E, t] \leq [B(S), t] = [Q_F Q_U, t] =$$

$$[Q_F, t][Q_U, t] = (Q_E \cap Q_F)(Q_E \cap Q_U) = Q_E \cap Q_F = Z(B(S)),$$

ein Widerspruch.

Also gilt für alle $x \in K \setminus \{1\}$ und $Q_U \in Q_E^H \setminus \{Q_E, Q_F\}$

$$Q_U^x \neq Q_U,$$

und somit folgt

$$q - 1 \geq |Q_E^H \setminus \{Q_E, Q_F\}| \geq |Q_U^K| = |K| = q - 1,$$

also $|Q_E^H| = q + 1$.

2. Fall: Für alle $Q_E \neq Q_X \in Q_E^H$ ist $Q_X^t \neq Q_X$.

Ist $Q_E^H = \{Q_E\}$, so ist nichts zu zeigen. Sei also $|Q_E^H| \geq 2$ vorausgesetzt. Insbesondere ist dann keines der $Q_E \neq Q_X$ invariant unter K . Dann ist $\overline{Q_E}$ der einzige 1-dimensionale $GF(q)$ -Unterraum von $\overline{B(S)}$, der K -invariant ist.

Angenommen, es existieren $1 \neq k \in K$ und $Q_E \neq Q_U \in Q_E^H$ mit $Q_U^k = Q_U$.

Dann gilt auch

$$Q_U^t = Q_U^{kt} = Q_U^{tk},$$

also ist auch $Q_U \neq Q_U^t$ invariant unter k .

Dann existieren in $\overline{B(S)}$ aber mindestens drei paarweise verschiedene 1-dimensionale $GF(q)$ -Unterräume (nämlich $\overline{Q_E}$, $\overline{Q_U}$ und $\overline{Q_U^t}$), die von k jeweils invariant gelassen werden.

Also muss bereits $k \in K \cap Z(GL(\overline{B(S)})) = \langle t \rangle$ und somit $k = t$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Für $Q_E \neq Q_U \in Q_E^H$ gilt also $N_K(Q_U) = 1$, d.h. $|Q_U^K| = q - 1$. Also hat Q_E^H mindestens q Elemente. Gäbe es noch ein Element in Q_E^H , so müsste es (aus arithmetischen Gründen) unter K invariant sein, im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt also $|Q_E^H| = q$. \square

Korollar 4.19 *Ist $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \neq q$, so ist $T \leq M \cap N$ und E und F können so gewählt werden, dass $N_F(B(S)) \leq N_G(W_E) = N_G(E)$ gilt.*

Beweis: Sei $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \neq q$.

Die erste Behauptung folgt dann aus der Tatsache, dass in einer p -Gruppe jede echte Untergruppe echt in ihrem Normalisator enthalten ist.

Ist $N_G(B(S)) \leq M$, so gilt insbesondere $N_F(B(S)) \leq N_G(W_E) = N_G(E)$.

Ist $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| = 2$, so sei $g \in N_G(B(S)) \setminus M$ und $F := E^g$. Dann ist $N_G(F) = N_G(W_F) = M^g$ und $N_{M^g}(B(S)) = (N_M(B(S)))^g = N_M(B(S))$ und es folgt die Behauptung.

Ist $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| = q + 1$, so operiert $N_E(B(S))$ auf

$$\mathcal{M} := \{W_E^x \mid x \in N_G(B(S)) \setminus M\}$$

und es gilt

$$|\mathcal{M}| = q, \quad |X^{N_E(B(S))}| \in \{1, q-1\} \text{ für alle } X \in \mathcal{M}.$$

Also existiert $X \in \mathcal{M}$ mit $N_E(B(S)) \leq N_G(X)$. Sei $g \in N_G(B(S))$ mit $X = W_E^g$. Dann erfüllt $F := E^g$ die Behauptung. □

4.3 Exzeptionelle Blöcke

In diesem Abschnitt sei E stets ein exzeptioneller Block und q eine 3-Potenz mit $E/O_3(E) \cong SL_2(q)'$. Wir setzen $D := Q_E \cap Q_F$.

Lemma 4.20 *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) D ist abelsch.
- (ii) $Q'_E = Z(E)$.
- (iii) $C_{B(S)}(F) \leq Z(Q_E)$, $C_{B(S)}(E) \leq Z(Q_F)$.
- (iv) $C_{B(S)}(E) = Z(E)$, insbesondere ist $Q_E = O_3(E)$ und $|B(S)| = q^6$.
- (v) $W_E \cap W_F = Z(B(S))$.
- (vi) $O_3(M) = O_3(E)$.

Beweis: (i): Es gilt nach 2.54

$$Q_E = O_3(E)C_{B(S)}(E), \quad Q_F = O_3(F)C_{B(S)}(F),$$

also

$$Q'_E = O_3(E)'(C_{B(S)}(E))' = Z(E)(C_{B(S)}(E))' \leq C_{B(S)}(E),$$

$$Q'_F = Z(F)(C_{B(S)}(F))' \leq C_{B(S)}(F).$$

Es folgt mit Hilfe von 3.3

$$D' \leq Q'_E \cap Q'_F \leq C_{B(S)}(E) \cap C_{B(S)}(F) = 1.$$

Also gilt (i).

(ii): Nach 4.10 ist $Q_E = O_3(E)D$, also

$$Q'_E = O_3(E)'[O_3(E), D]D' \stackrel{(i)}{=} Z(E)[O_3(E), D].$$

Es gilt

$$[O_3(E), D] \leq O_3(E) \cap Q'_E \leq O_3(E) \cap C_{B(S)}(E) = Z(E),$$

also insgesamt

$$Z(E) = O_3(E)' \leq Q'_E \leq Z(E)$$

und damit gilt (ii).

(iii): Zunächst gilt

$$[C_{Q_E}(F), Q_E] \leq C_{B(S)}(F) \cap Q'_E \leq C_{Z(E)}(F) = 1,$$

also

$$C_{Q_E}(F) \leq Z(Q_E) \leq W_E C_{B(S)}(E).$$

Also ist

$$[O_3(E), C_{B(S)}(F)] \leq C_{O_3(E)}(F) \leq W_E,$$

d.h. $C_{B(S)}(F) \leq C_{B(S)}(O_3(E)/W_E) = Q_E$. Also gilt (iii).

(iv): Setze $\widetilde{Q}_F := Q_F/C_{B(S)}(F)$. Dann ist $C_{B(S)}(E) \leq \widetilde{W}_F$, wegen $B(S) = O_3(E)Q_F$ also

$$C_{B(S)}(F) \leq C_{\widetilde{W}_F}(B(S)),$$

also

$$q \geq |C_{B(S)}(F)| = |C_{B(S)}(F)| \geq |Z(F)| = q.$$

Es folgt die Behauptung.

(v): Es gilt mit (iv)

$$Z(B(S)) = C_{B(S)}(O_3(E)) \cap C_{B(S)}(O_3(F)) = Z(O_3(E)) \cap Z(O_3(F)) = W_E \cap W_F.$$

(vi): Nach 2.40 ist $W_E \leq \Omega(Z(O_3(M)))$, also gilt mit (v) insbesondere

$$O_3(M) \leq C_S(W_E) \leq C_S(W_E \cap W_F) = C_S(Z(B(S))) \leq B(S).$$

Es folgt die Behauptung. □

Lemma 4.21 $W_E W_F = O_3(E) \cap O_3(F) \in \mathcal{A}(S)$.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}(S)$ mit $[W_E, A] \neq 1$. Dann ist

$$|A : A \cap O_3(E)| = q, \quad |A \cap W_E| \leq q^2, \quad |A \cap O_3(E) : A \cap W_E| \leq q.$$

Es folgt

$$|A| = |A : A \cap O_3(E)| |A \cap O_3(E) : A \cap W_E| |A \cap W_E| \leq q^4 = |W_E W_F|.$$

□

Bemerkung 4.22 $[O_3(E), O_3(F)] = W_E W_F = B(S)'$.

Korollar 4.23 $C_S(W_E) = O_3(E)$.

Beweis: Es gilt

$$C_S(W_E) \leq C_S(W_E \cap W_F) = C_S(Z(B(S))) = B(S)$$

und

$$O_3(E) \leq C_S(W_E) \leq O_3(E) C_S(W_F),$$

also

$$C_S(W_E) = O_3(E) C_S(W_E W_F).$$

Nach 4.21 ist $C_S(W_E W_F) = W_E W_F$ und es folgt die Behauptung. □

Satz 4.24 $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \leq 2$.

Beweis: OBdA gelte $N_G(B(S)) \neq N_M(B(S))$.

Setze $\overline{O_3(E)} = O_3(E)/Z(E)$.

Dann ist $\overline{O_3(E)}$ elementarabelsch und für jedes $x \in N_G(B(S)) \setminus N_M(B(S))$ ist $E^x \neq E$ ein weiterer $B(S)$ -Block. Nach der Bemerkung 4.22 gilt dann ist $[O_3(E), O_3(E)^x] = W_E W_E^x$. Sei im folgenden x so gewählt.

Angenommen, es existiert $y \in N_G(B(S)) \setminus N_M(B(S))$ mit $O_3(E)^x \neq O_3(E)^y \neq O_3(E)$. Dann gilt wiederum nach der Bemerkung 4.22

$$W_E W_E^x = [O_3(E), O_3(E)^x] = B(S)' = [O_3(E)^x, O_3(E)^y] = W_E^x W_E^y.$$

Es gilt $O_3(E)^x \equiv O_3(E)^y \pmod{O_3(E)} = C_E(\overline{O_3(E)})$ und damit

$$\overline{W_E} \leq \overline{W_E^x W_E^y} \leq C_{\overline{O_3(E)}}(O_3(E)^x),$$

ein Widerspruch. Damit gilt die Behauptung. □

Aus obigem Satz folgt:

Korollar 4.25 *Es gilt $T \leq M \cap N$ und E und F können so gewählt werden, dass $N_F(B(T)) \leq N_G(W_E) = N_G(E)$ gilt.*

□

4.4 Symmetrische Blöcke

In diesem Abschnitt sei E symmetrisch und $n \in \mathbb{N}$ mit $E/W_E \cong A_{2n+1}$.

Lemma 4.26 $|B(S)| \leq 2^{4n}$.

Beweis: Nach 2.44 gilt $|B(S) : Q_E| = 2^n$.
Weiter ist nach 4.13 $Q_E = W_E \times Z_E$ und damit insbesondere

$$|Q_E| = |W_E| \cdot |Z_E| = 2^{2n} \cdot |Z_E|.$$

Insgesamt folgt

$$|B(S)| = |B(S) : Q_E| |Q_E| = 2^n \cdot 2^{2n} \cdot |Z_E| = 2^{3n} \cdot |Z_E|.$$

Es ist $\widetilde{Q}_F := Q_F/Z_F$ ein natürlicher Modul für $\overline{FB(S)}$. Dann ist $\widetilde{Z}_E \leq C_{\widetilde{Q}_F}(B(S))$, insbesondere also $|\widetilde{Z}_E| \leq 2^n$.

Offenbar gilt $F, E, B(S) \leq N_G(Z_E \cap Z_F)$ und somit nach 3.3 $Z_E \cap Z_F = 1$. Also $|Z_E| = |\widetilde{Z}_E|$, und es folgt die Behauptung. □

Lemma 4.27 *Ist $n \geq 2$, so ist $C_M(E/W_E) = C_M(W_E)$.*

Beweis: Setze $C := C_M(E/W_E)$, $C_0 := C_M(W_E)$. Dann ist $C/C_0 \lesssim C_{\text{Aut}(W_E)}(E/W_E)$. Nach 2.25 ist $C_{\text{Aut}(W_E)}(E/W_E) = 1$, und es folgt die Behauptung. □

Satz 4.28 $n \leq 2$.

Beweis: Setze $C := C_M(E/W_E)$. Dann gilt $\overline{M} := M/C \cong S_{2n+1}$ und W_E ist natürlicher Modul für \overline{M} .

Sei $z \in W_E \cap W_F$, so dass $\overline{M}_1 := C_{\overline{M}}(z) \cong S_{2n}$ gilt. Dann ist $[W_E, M_1]$ isomorph zum vollen Permutationsmodul für \overline{M}_1 . Setze $P := O_2(C_G(z))$.

Angenommen, $n \geq 3$. Dann ist $O_2(\overline{M}_1) = 1$, insbesondere also $P \cap M \leq O_2(M_1) \leq C_G(W_E)$.

(Für die letzte Inklusion beachte man $n \geq 3$ und 4.27.)

Sei $x \in N_P(O_2(M_1))$. Dann gilt insbesondere $W_E^x \leq O_2(M_1)$ und somit $[W_E, W_E^x] = 1$.

Da E^x $B(S)$ -Block ist, folgt daraus bereits $E = E^x$. Also ist $N_P(O_2(M_1)) \leq N_G(E) = M$. Also $N_P(O_2(M_1)) = N_{P \cap M}(O_2(M_1)) \leq O_2(M_1)$. Es folgt somit $N_{PO_2(M_1)}(O_2(M_1)) = O_2(M_1)$, also $P \leq O_2(M_1) \leq C$.

Dann ist $[P, M_1 \cap E] \leq W_E$ invariant unter $(M_1 \cap E)$, somit $P \geq [P, M_1 \cap E] = [W_E, M_1 \cap E] =: H_E$ und $|W_E : H_E| = 2$.

Ebenso erhalten wir ein $H_F \subseteq P \cap W_F$ mit $|W_F : H_F| = 2$.

Dann ist $[W_E, H_F] \leq [W_E, P] = 1$ und somit $H_F \leq C_{W_F}(W_E)$. Es gilt andererseits

$$2 = |W_F : H_F| \geq |W_F : C_{W_F}(W_E)| = 2^n,$$

ein Widerspruch zur Annahme $n \geq 3$. □

Wir können Satz 4.28 auch folgendermaßen formulieren:

Korollar 4.29 *Für jeden $B(S)$ -Block E von G existiert eine Primzahlpotenz q mit*

$$E/O_p(E) \cong SL_2(q)'. \quad \square$$

Hierbei ist allerdings zu beachten, dass es im Fall $E/O_2(E) = E/W_E \cong A_5 \cong SL_2(4)$ zwei Möglichkeiten eines in unserem Sinne natürlichen Moduls gibt - den symmetrischen und den $GF(4)$ -linearen. Diese beiden Moduln sind nicht isomorph, so dass hier unterschieden werden muss.

Wir wollen in den zwei folgenden Unterabschnitten die Struktur von M näher untersuchen, wenn E symmetrisch ist und werden in beiden möglichen Fällen Aussagen über die 2-Sylowuntergruppen von G treffen können, die uns die Identifikation einer einfachen Gruppe, die unsere Voraussetzungen erfüllt, ermöglichen werden.

4.4.1 $E/W_E \cong A_3$

Es gelte $E/W_E \cong A_3$.

Lemma 4.30 *Sei $t \in B(S)$ eine Involution. Dann ist $t \in Q_E \cup Q_F$*

Beweis: Nach 4.10 ist $B(S) = Q_E Q_F$. Sei also $q_e \in Q_E$, $q_f \in Q_F$ mit $t = q_e q_f$. Dann ist $[q_e, q_f] = 1$. Wir dürfen annehmen, dass $q_e \notin Q_F$ gilt. Dann ist $B(S) = \langle q_e \rangle Q_F$, und dann

$$q_f \in C_{Q_F}(q_e) = C_{Q_F}(Q_E) = Z(B(S)) = Q_E \cap Q_F.$$

Also insgesamt $t = q_e q_f \in Q_E$. □

Lemma 4.31 *Es gilt $E^{N_G(B(S))} \subseteq \{E, F\}$, insbesondere gelten folgende Aussagen:*

- (i) $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \leq 2$,
- (ii) $N_M(B(S)) = N_N(B(S))$ und
- (iii) $S \cap M = S \cap N$.

Beweis: Sei $g \in N_G(B(S))$ mit $E^g \neq E$. E^g ist ebenfalls $B(S)$ -Block, und somit $[W_E, Q_E^g] \geq [W_E, W_E^g] \neq 1$, also $Q_E^g \not\leq Q_E$. Andererseits ist Q_E^g elementarabelsch und deswegen wegen 4.30

$$Q_E^g = (Q_E^g \cap Q_E) \cup (Q_E^g \cap Q_F).$$

Es folgt $Q_E^g \subseteq Q_F$, also $Q_E^g = Q_F$ und damit $E^g = F$.

Die Zusatzbehauptungen sind nun offensichtlich □

Lemma 4.32 *Es gilt $O_2(M) = C_S(E/W_E) = Q_E$. Insbesondere ist $S \cap M = B(S)$.*

Beweis: Setze $M_0 := E(S \cap M)$. Dann gilt offenbar

$$O_2(M) \leq C_S(E/W_E) = O_2(M_0).$$

Wir zeigen zunächst $O_2(M_0) = Q_E$.

Es ist $\overline{M_0} := M_0/O_2(M_0) \cong S_3$, und es gilt

$$1 \neq \overline{W_F} \leq \overline{O_2(N_0)},$$

wobei $N_0 := F(S \cap M)$. Es folgt $W_F \leq O_2(N_0) \leq W_F O_2(M_0)$, also $O_2(N_0) = W_F(O_2(N_0) \cap O_2(M_0))$, und ebenso $O_2(M_0) = W_E(O_2(M_0) \cap O_2(N_0))$. Also

$$\Phi(O_2(M_0)) = \Phi(O_2(M_0) \cap O_2(N_0)) = \Phi(O_2(N_0)).$$

Damit folgt mit 3.3 $\Phi(O_2(M_0)) = 1$, also ist $O_2(M_0)$ elementarabelsch. Wegen $Q_E \in \mathcal{A}(S)$ und $Q_E \leq O_2(M_0)$ also $Q_E = O_2(M_0) \geq O_2(M)$. Also $Q_E \leq C_M(O_2(M)) \leq O_2(M) \leq Q_E$ und damit die Behauptung. □

Korollar 4.33 $|S| \leq 2^5$.

Beweis: Es gilt

$$|S| = |S : S \cap M| \cdot |S \cap M| \leq 2 \cdot |B(S)| \leq 2 \cdot 2^4 = 2^5.$$

□

Lemma 4.34 *Ist $Z_E = 1$, so ist T eine Dieder- oder eine Semidiedergruppe.*

Beweis: Es ist wegen $Z_E = 1$

$$B(T) = W_E W_F \cong D_8. (*)$$

Sei zunächst $B(T) = B(S)$. Dann gilt

$$\Omega(Z(T)) \leq \Omega(Z(B(T))) = \Omega(Z(J(T))).$$

Wegen $Z_E = 1$ ist $|\Omega(Z(B(T)))| = 2$ und somit $\Omega(Z(T)) = \Omega(Z(J(T)))$.

Es folgt dann

$$T = C_T(\Omega(Z(T))) = C_T(\Omega(Z(J(T)))) = B(T)$$

und wegen (*) dann insbesondere die Behauptung.

Sei nun $B(S) \neq B(T)$, $S_0 := N_T(B(S))$. Wegen 4.31 ist $|S_0 : B(S)| = 2$. Sei $t \in S_0 \setminus B(S)$, $s \in W_E$ mit $W_E W_F = \langle s, s^t \rangle$. Sei

$$S_0 < S_1 < \dots < S_m = T$$

eine Subnormalreihe mit $|S_i : S_{i-1}| = 2$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$. Für jedes $i \in \{1, \dots, m\}$ sei $t_i \in S_i$ mit $S_i = S_{i-1}(t_i)$. Wir setzen $S_{-1} := B(S)$.

Wegen $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| = 2$ ist $N_T(B(S)) = S_0$ und für alle $i \geq 1$ ist $S_{i-2}^{t_i} \neq S_{i-2}$. Wir behaupten

4.34.1 *Für jedes $i \in \{0, \dots, m\}$ ist S_i eine Dieder- oder Semidiedergruppe.*

Für $i = 0$ ist dies offensichtlich. Sei also $i > 0$ und S_{i-1} sei eine Dieder- oder Semidiedergruppe der Ordnung 2^{n_i} .

Es gilt nach 2.3

$$|S_{i-1} : S'_{i-1}| = 4.$$

Wäre $|S_i : S'_i| \neq 4$, so müsste $S'_i = S'_{i-1}$ und somit $[S_{i-1}, t_i] \leq S'_{i-1}$ gelten. Das bedeutet aber, dass die Faktorgruppe S_{i-1}/S'_{i-1} von t_i zentralisiert wird. Wegen $S'_{i-1} \leq S_{i-2}$ erzwingt dies aber $S_{i-2}^{t_i} = S_{i-2}$, ein Widerspruch. Also ist nach 2.3 S_i eine Dieder-, eine Semidieder- oder eine verallgemeinerte Quaternionengruppe. Da letzteres nicht gilt (S_i besitzt offenbar mehr als eine Involution), ist damit S_i eine Dieder- oder Semidiedergruppe und induktiv folgt die Behauptung. \square

Mit Hilfe von 4.34 können wir G bestimmen, falls die Gruppe einfach ist:

Satz 4.35 *Es gelte Voraussetzung 4.2 und G sei einfach. Ein maximaler $B(S)$ -Block E sei vom A_3 -Typ und es gelte $Z(EB(S)) = 1$. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen*

$$PSL_2(q) \text{ für } q = 11 \text{ oder } q = 2^k \pm 1 \text{ für ein } k,$$

$$PSL_3(3) \text{ oder } M_{11}.$$

Beweis: Nach 4.34 sind die 2-Sylowuntergruppen von G Dieder- oder Semidiedergruppen. Die Behauptung folgt damit aus A.2 und A.3 in Verbindung mit der Voraussetzung, dass G lokale Charakteristik 2 hat und $G \neq C^*(G, T)$ gilt. \square

Lemma 4.36 Sei $Z_E \neq 1$, $Z_E = \langle z \rangle$. Dann ist $C_G(z) \cong S_4 \times C_2$.

Beweis: Es gilt

$$EB(S) \leq C_G(z)$$

und damit nach 3.3 $C_G(z) \leq M = EB(S)$, also

$$C_G(z) = EB(S) \cong S_4 \times C_2.$$

□

Lemma 4.37 Ist $Z_E \neq 1$ und $G = O^2(G)$, so ist $|T : B(S)| \leq 2$. Insbesondere ist $2^4 \leq |T| \leq 2^5$.

Beweis: Ist $Z_E \neq 1$, so gilt auch $Z_F \neq 1$ und $FB(S) \cong S_4 \times C_2 \cong EB(S)$. Seien $z_e \in Z_E$, $z_f \in Z_F$ mit $Z_E = \langle z_e \rangle$, $Z_F = \langle z_f \rangle$. Dann ist $\langle z_e z_f \rangle = Z(W_E W_F) = Z(J(S))$. Dann gilt für $X \in \{E, F\}$

z_x ist kein Quadrat in X .

Wegen $C_G(z_x) = X$ ist dann z_x auch kein Quadrat in G .

Allerdings ist $z_e z_f$ ein Quadrat in $W_E W_F$, also ist wegen der Operation von E auf W_E bzw. F auf W_F auch jede Involution in $W_E W_F$ ein Quadrat in G . Es folgt für $X \in \{E, F\}$:

$$z_x^G \cap W_E W_F = \emptyset.$$

Wäre $B(S) \in \text{Syl}_2(G)$, so müsste z_e nach 2.1 zu einer Involution in $W_E W_F$ konjugiert sein, ein Widerspruch.

Also ist $B(S) < T$ und damit auch $B(S) < N_T(B(S)) =: S_0$. Dann vertauscht S_0 Q_E und Q_F und $N_{S_0}(Q_E) = S \cap M = B(S) = N_{S_0}(Q_F)$, $|S_0 : S_0 \cap M| = 2$.

Angenommen, $S_0 < T$. Dann gilt auch $S_0 < N_T(S_0) \leq N_T(J(S_0))$. Also ist $B(S) = J(S) \neq J(S_0)$. Damit existiert $A \in \mathcal{A}(S_0)$ mit $A \not\leq J(S)$. Wegen $|Q_E| = 8$ muss $|A| \geq 8$ gelten. Andererseits gilt wegen der Operation von S_0 auf $\{Q_E, Q_F\}$ für alle $a \in A \setminus A \cap J(S)$

$$\Omega(C_{J(S)}(a)) = \langle z_e z_f \rangle.$$

Aber es ist $8 \leq |A| = 2 \cdot |A \cap J(S)| = 2 \cdot |C_{J(S)}(A)| \leq 4$, ein Widerspruch.

Also ist $J(S) = J(T)$ und $|T : J(T)| \leq 2$. Damit gilt die Behauptung.

□

Der Nutzen von Lemma 4.37 liegt in der Tatsache, dass in dieser Situation Satz A.6 anwendbar ist - wir werden dies im Beweis der Hauptsätze benutzen.

4.4.2 $E/W_E \cong A_5$ mit symmetrischem Modul

Es gelte $E/W_E \cong A_5$ und W_E sei natürlicher A_5 -Modul für E/W_E .

Lemma 4.38 *Seien $w_1, w_2 \in W_F$ mit $B(S) = \langle w_1, w_2 \rangle Q_E$. Dann liegt jede Involution in $B(S)$ in*

$$Q_E \cup Q_F \cup \langle w_1 \rangle C_{Q_E}(w_1) \cup \langle w_2 \rangle C_{Q_E}(w_2).$$

Beweis: Zunächst gilt:

$$|Q_E^\#| = |Z_E| \cdot 2^4 - 1$$

und

$$|Q_F \setminus Q_E \cap Q_F| = |Z_E| \cdot (2^4 - 2^2).$$

Setze $I_1 := \{w_1 a \mid a \in C_{Q_E}(w_1) \setminus Q_F\}$ und $I_2 := \{w_2 b \mid b \in C_{Q_E}(w_2) \setminus Q_F\}$.

Dann ist $|I_1| = 2^2 \cdot |Z_E| = |I_2|$ und weiter gilt für $\{i, j\} = \{1, 2\}$

$$I_i \cap (I_j \cup Q_E \cup Q_F) = \emptyset.$$

Somit erhalten wir in $I := Q_E^\# \cup Q_F^\# \cup I_1 \cup I_2$ folgende Anzahl von Involuntionen:

$$|Z_E| \cdot (2^4 + 2^4 - 2^2 + 2 \cdot 2^2) - 1 = |Z_E| \cdot (2^5 + 2^2) - 1.$$

Setze nun

$$J_1 := \{w_1 a \mid a \in Q_E \setminus C_{Q_E}(w_1)\}, \quad J_2 := \{w_2 b \mid b \in Q_E \setminus C_{Q_E}(w_2)\},$$

$$J_3 := \{w_1 w_2 c \mid c \in Q_E \setminus C_{Q_E}(w_1 w_2)\}.$$

Dann ist $o(x) = 4$ für jedes $x \in \bigcup_{i \leq 3} J_i$. Leicht sieht man, dass für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ gilt

$$J_i \cap (J_j \cup J_k) = \emptyset.$$

Damit gibt es also in $B(S)$ mindestens $|J_1| + |J_2| + |J_3|$ Elemente der Ordnung 4. Offenbar ist $|J_1| = |Z_E| \cdot 2^3 = |J_2|$ und $|J_3| = |Z_E| \cdot (2^4 - 2^2)$. Also liegen

$$|Z_E| \cdot (2^3 + 2^3 + 2^4 - 2^2) = |Z_E| \cdot (2^5 - 2^2)$$

Elemente (sämtlich von der Ordnung 4) in $J_1 \cup J_2 \cup J_3$.

Also

$$|I \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3| = |Z_E| \cdot (2^5 + 2^2 + 2^5 - 2^2) - 1 = |Z_E| \cdot 2^6 - 1 = |B(T)^\#|.$$

Somit liegen insbesondere sämtliche Involuntionen von $B(S)$ in I .

□

Lemma 4.39 *Es gilt $E^{N_G(B(S))} \subseteq \{E, F\}$, insbesondere gilt*

- (i) $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))| \leq 2$,
- (ii) $N_M(B(S)) = N_N(B(S))$ und
- (iii) $S \cap M = S \cap N$.

Beweis: Sei $g \in N_G(B(S))$ und es gelte $E \neq E^g$. Dann ist E^g ein $B(S)$ -Block und es ist $Q_E \neq Q_E^g$.
 Q_E^g ist elementarabelsch und somit gilt nach 4.38

$$Q_E^g = (Q_E \cap Q_E^g) \cup (Q_F \cap Q_E^g) \cup (\langle w_1 \rangle C_{Q_E}(w_1) \cap Q_E^g) \cup (\langle w_2 \rangle C_{Q_E}(w_2) \cap Q_E^g),$$

wobei $w_1, w_2 \in W_F$ mit $B(T) = \langle w_1, w_2 \rangle Q_E$.

Angenommen, $Q_E^g \neq Q_F$. Dann ist $Q_E \cap Q_E^g = Z(B(S)) = Q_F \cap Q_E^g$ (beachte 4.10) und wegen $Z(B(S)) \leq C_{Q_E}(w_1) \cap C_{Q_E}(w_2)$ folgt dann

$$Q_E^g = (\langle w_1 \rangle C_{Q_E}(w_1) \cap Q_E^g) \cup (\langle w_2 \rangle C_{Q_E}(w_2) \cap Q_E^g).$$

Dann ist oBdA $Q_E^g = \langle w_1 \rangle C_{Q_E}(w_1)$.

Dann folgt aber

$$Z(B(S)) \leq C_{Q_E}(w_1) \leq Q_E \cap Q_E^g = Z(B(S)),$$

ein Widerspruch.

Also ist $Q_E^g = Q_F$ und somit $E^g = F$. □

Lemma 4.40 *Es gilt $O_2(M) = C_S(E/W_E) = Q_E$. Insbesondere ist*

$$|S \cap M : B(S)| = 2.$$

Beweis: Setze $M_0 := E(S \cap M)$. Dann gilt offenbar

$$O_2(M) \leq C_S(E/W_E) = O_2(M_0).$$

Wir zeigen zunächst $O_2(M_0) = Q_E$.

Es ist $\overline{M_0} := M_0/O_2(M_0) \cong S_5$ und W_E ist ein natürlicher Modul für $\overline{M_0}$.

Es gilt dann mit $N_0 := F(S \cap M)$:

$$C_{\overline{M_0}}(C_{W_E}(\overline{B(S)})) = \overline{B(S)} = \overline{W_F} \leq \overline{O_2(N_0)} \leq C_{\overline{M_0}}(C_{W_E}(\overline{B(S)})).$$

Es ist also $\overline{O_2(N_0)} = \overline{W_F}$ und somit

$$W_F \leq O_2(N_0) \leq W_F O_2(M_0),$$

also

$$O_2(N_0) = W_F(O_2(N_0) \cap O_2(M_0)),$$

und ebenso

$$O_2(M_0) = W_E(O_2(M_0) \cap O_2(N_0)).$$

Also

$$\Phi(O_2(M_0)) = \Phi(O_2(M_0) \cap O_2(N_0)) = \Phi(O_2(N_0)).$$

Damit folgt $\Phi(O_2(M_0)) = 1$, also ist $O_2(M_0)$ elementarabelsch. Wegen $Q_E \in \mathcal{A}(S)$ und $Q_E \leq O_2(M_0)$ also $Q_E = O_2(M_0) \geq O_2(M)$. Also $Q_E \leq C_M(O_2(M)) \leq O_2(M) \leq Q_E$ und damit die Behauptung. \square

Korollar 4.41 $S \cap M \leq EB(S)$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} 2^3 &= |(S \cap M)C_M(E/W_E)/C_M(E/W_E)| = |S \cap M/C_S(E/W_E)| \\ &= |S \cap M/Q_E| \geq |(S \cap EB(S))/Q_E| = 2^3. \end{aligned}$$

Also $S \cap M = S \cap EB(T)$. \square

Lemma 4.42 $|Z_E| \leq 2$.

Beweis: OBdA gelte $Z_E \neq 1$.

Setze $\overline{FB(S)} := FB(S)/Q_F$. Dann ist $\widetilde{Q}_F := Q_F/Z_F$ ein natürlicher Modul für $\overline{FB(S)}$. Es gilt

$$1 \neq \widetilde{Z}_E \leq C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{S \cap M}) \leq C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(S)}).$$

Aus Ordnungsgründen folgt dann $|Z_E| = |\widetilde{Z}_E| = 2$. \square

Lemma 4.43 $C_M(E) = Z_E = Z(M)$.

Beweis: Da M Charakteristik 2 hat, folgt nach 4.40 zunächst

$$Z(M) \leq Q_E \cap C_M(E) = Z_E.$$

Weiter ist $[C_M(E), Q_E] \leq C_{Q_E}(Z_E) = Z_E$. Nach 4.42 folgt dann

$$[C_M(E), Q_E] = 1 \text{ oder } [C_M(E), Q_E] = Z_E.$$

Im ersten Fall folgt $C_M(E) \leq Q_E$, also $Z_E = C_M(E) \trianglelefteq M$ und somit nach 4.42

$$Z_E = Z(M).$$

Im zweiten Fall ist $Z_E = [C_M(E), Q_E] \trianglelefteq M$ und wieder nach 4.42

$$Z_E = Z(M).$$

Also gilt

$$C_M(E) \leq C_M(W_E) \cap C_M(Z_E) = C_M(Q_E) \leq Q_E,$$

und es folgt die Behauptung. \square

Korollar 4.44 $C_M(W_E) = Q_E$, insbesondere ist $M = EB(T)$.

Beweis: Nach 4.43 und 4.40 gilt

$$C_M(W_E) \leq C_M(W_E) \cap C_M(Z_E) = C_M(Q_E) = Q_E.$$

\square

Lemma 4.45 $Z_E = 1$.

Beweis: Angenommen, es wäre $Z_E \neq 1$. Dann gilt nach 4.43

$$M = C_G(Z_E).$$

Setze $\widetilde{Q}_F := Q_F/Z_F$, $\widetilde{N} := N/Q_F$.

\widetilde{Q}_F ist ein natürlicher Modul für \widetilde{N} .

Insbesondere ist $C_{\widetilde{N}}(\widetilde{Z}_E) \cong S_4$ und somit existiert $d \in N$ mit $o(d) = 3$ und

$$[Z_E, d] \leq Z_F.$$

Dann gilt

$$1 = [Z_E, d, d] = [Z_E, d].$$

Also ist $d \in C_N(Z_E)$.

Andererseits ist $C_N(Z_E) = M \cap N = N_M(B(S)) = S \cap M$, ein Widerspruch. \square

Lemma 4.46 $T \leq N_G(B(S))$, genauer $B(S) = B(T)$ und $|T : T \cap M| \leq 2$.

Beweis: Sei $S_1 := N_T(B(S))$, $S_0 := S_1 \cap M$, $S_0 \in \text{Syl}_2(M)$.

Nach 4.39 ist $|S_1 : S_0| \leq 2$ und wir können Gleichheit annehmen.

Angenommen, $S_1 \neq T$. Dann ist

$$S_1 < N_T(S_1) \leq N_T(B(S_1)) \leq N_T(J(S_1)).(*)$$

Für alle $x \in S_1 \setminus S_0$ gilt

$$S_1 = S_0 \langle x \rangle.$$

Wäre $\mathcal{A}(S_1) = \mathcal{A}(S_0)$, so folgte $J(S_1) = J(S_0) = B(S_0)$, im Widerspruch zu (*).

Also existiert $A \in \mathcal{A}(S_1)$ mit $A \not\leq S_0$. Sei $a \in A \setminus S_0$, d.h. $S_1 = S_0 \langle a \rangle$. Dann folgt

$$A \leq \langle a \rangle C_{S_0}(a).$$

Ist $A \cap S_0 \leq B(S_0)$, so folgt $|C_{S_0}(a)| \leq 2^2$, also

$$|A| \leq 2^3.$$

Aber für $B \in \mathcal{A}(S_0)$ gilt bereits $|B| = 2^4$, ein Widerspruch.

Ist $A \cap S_0 \not\leq B(S_0)$, so ist $|A \cap S_0 : A \cap B(S_0)| = 2$ und da A abelsch ist und wegen der Operation von S_0 auf W_E und W_F folgt

$$A \cap B(S_0) \leq C_{B(S_0)}(A \cap S_0) = \Omega(Z(S_0)).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} |A| &= |A : A \cap S_0| |A \cap S_0 : A \cap B(S_0)| |A \cap B(S_0)| \\ &\leq 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \end{aligned}$$

wiederum im Widerspruch zu $|B| = 2^4$ für $B \in \mathcal{A}(S_0)$.

Es folgt die Behauptung. □

Korollar 4.47 $2^7 \leq |T| \leq 2^8$. □

Das Korollar 4.47 ermöglicht wiederum eine Identifikation für einfaches G :

Satz 4.48 *Es gelte Voraussetzung 4.2 und G sei einfach. Ein maximaler $B(S)$ -Block E sei symmetrisch vom A_5 -Typ. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen*

$$U_4(3), M_{22}, M_{23}, J_3.$$

Beweis: Die Aussage folgt aus A.6. □

Kapitel 5

Abschließende lokale Analyse

In diesem Kapitel wollen wir, was die Analyse der lokalen Struktur anbelangt, die letzten Vorkehrungen treffen, um endgültig die in der Einleitung vorgestellten Sätze beweisen zu können. Da die Situation für symmetrische Blöcke in den Abschnitten 4.4.1 und 4.4.2 bereits besprochen wurde, soll es im folgenden ausschließlich um lineare Blöcke gehen.

Genauer wollen wir mit folgenden Voraussetzungen arbeiten:

Voraussetzung 5.1 Sei G eine endliche Gruppe, p eine Primzahl, $T \in \text{Syl}_p(G)$. G sei von lokaler Charakteristik p mit $O_p(G) = 1$ und es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Voraussetzung 5.2 Es gelte Voraussetzung 5.1. Es existiere $C^*(G, T) \leq H < G$ mit $T(H) \neq \emptyset$. Sei $S \in \mathcal{T}^*(H)$.

Voraussetzung und Notation 5.3 In diesem Kapitel gelte die Voraussetzung 5.2. Weiter gelte:

- (i) Ist $|C^*(S)| \geq 2$ gilt, so seien $E, F \in \mathcal{B}^*(S)$, $E \neq F$, $M := N_G(E)$, $N := N_G(F)$.
- (ii) Ist $B(T) \in \mathcal{T}(H)$, $C^*(T) = \{M\}$ und $M \not\leq C^*(G, T)$, so gelte (ii) in 3.67 und es seien E und F wie dort (d.h. in 3.67(ii)) beschrieben.

Gilt (ii) in 5.3, so ist $M = N_G(E)$ und wir setzen $N := N_G(F)$.

Wir setzen für $X \in \{E, F\}$:

$$W_X := \Omega(Z(O_p(X))), \quad Q_X := O_p(EB(S)), \quad Z_X := Z(EB(S)).$$

Voraussetzung 5.4 Es gelte Voraussetzung 5.3. Sei weiter E linear und q eine p -Potenz mit $E/O_p(E) \cong SL_2(q)'$. Falls $p \neq 2$ ist, so sei $|N_G(B(S)) : N_M(B(S))|$ teilerfremd zu p .

Bemerkung 5.5 *Offensichtlich impliziert Voraussetzung 5.4, dass $B(T) \in \mathcal{T}(H)$ gilt, wenn $p \neq 2$ ist, und somit $B(S) = B(T)$ ist. Wir werden deswegen im folgenden stets $B(T)$ statt des allgemeineren $B(S)$ schreiben.*

Für $p = 2$ ist $B(T) \in \mathcal{T}(H)$ nicht vorausgesetzt - wie das nächste Lemma zeigt, können wir es aber für $E/O_2(E) \not\cong A_3$ stets beweisen.

Lemma 5.6 *Sei $p = 2 \neq q$. Dann ist $B(S) = B(T)$.*

Beweis: Angenommen, $B(S) \neq B(T)$. Sei $S_1 := N_T(B(S))$, $S_0 := S_1 \cap M$. Dann ist nach 4.17

$$S_0 \in \text{Syl}_2(M), \quad |S_1 : S_0| = 2.$$

Wegen $S_1 \neq T$ gilt

$$S_1 < N_T(S_1) \leq N_T(J(S_1)).$$

Daraus folgt

$$\mathcal{A}(S_1) \neq \mathcal{A}(S_0).$$

Sei dann $A \in \mathcal{A}(S_1)$ mit $A \not\leq S_0$, $a \in A \setminus S_0$.

Dann gilt

$$S_1 = S_0 \langle a \rangle, \quad A \leq \langle a \rangle C_{S_0}(a) \leq \langle a \rangle Z(B(S)).$$

Es gilt dann

$$|A| \leq 2 \cdot |Z(B(S))| = 2 \cdot q \cdot |Z_E|.$$

Andererseits ist $Q_E \in \mathcal{A}(S_0)$ und

$$|Q_E| = q^2 \cdot |Z_E|.$$

Wegen $q \neq 2$ gilt also stets

$$|Q_E| > |A|,$$

ein Widerspruch.

Es folgt $B(S) \trianglelefteq T$ und $\mathcal{A}(S) = \mathcal{A}(T)$, d.h. $B(S) = B(T)$. □

Bemerkung 5.7 *Da der Fall $q = 2$ bereits in 4.4.1 geklärt wurde, können wir im folgenden, wenn es nötig ist, $q \neq 2$ annehmen.*

Insbesondere gehen wir stets davon aus, dass $B(T) = B(S)$ ist.

Voraussetzung 5.8 *Es gelte 5.4. Des weiteren seien E und F gemäß 4.19 bzw. 4.25 so gewählt, dass $N_F(B(T)) \leq M$ gilt.*

Bemerkung 5.9 $EN_M(B(T)) \leq N_G(EB(T)) \leq M$

□

Lemma 5.10 $EQ_E \trianglelefteq M$, insbesondere ist $Z_E \trianglelefteq M$.

Beweis: Ist E exzeptionell, so gilt $O_3(E) = Q_E = O_3(M)$ nach 4.20 und damit insbesondere die Behauptung. Wir können also annehmen, dass E nicht exzeptionell ist.

Es ist $O_p(M) \leq N_G(B(T))$ und somit wird $EB(T)$ von $O_p(M)$ normalisiert. Insbesondere gilt $[Z_E, O_p(M)] \leq Z_E \cap O_p(M)$.

Wäre $Z_E \cap O_p(M) = 1$, so folgte also $[Z_E, O_p(M)] = 1$. Da M Charakteristik p hat, wäre dann aber $Z_E \leq O_p(M)$, ein Widerspruch.

Also gilt $Z_E \cap O_p(M) \neq 1$.

Setze $\overline{FB(T)} := FB(T)/Q_F$, $\widetilde{Q}_F := Q_F/Z_F$. Dann ist $Z_E \cap \widetilde{O}_p(M) \neq 1$.

Es gilt $Z_E \cap \widetilde{O}_p(M) \leq C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)})$. Da \widetilde{Q}_F ein natürlicher Modul für $\overline{FB(T)}$ ist, folgt also

$$\langle Z_E \cap \widetilde{O}_p(M)^{N_{\overline{FB(T)}}} \rangle = C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)}).$$

Andererseits ist $Z_E \cap \widetilde{O}_p(M)$ invariant unter $N_{\overline{FB(T)}}$, man beachte 5.9 und Voraussetzung 5.4.

Also ist $Z_E \cap \widetilde{O}_p(M) = C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)})$ und insbesondere gilt $|Z_E \cap O_p(M)| = |Z_E \cap \widetilde{O}_p(M)| = |C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)})| = q$.

Es folgt also $Z_E \leq O_p(M)$ und damit gilt $Q_E \leq O_p(M)$.

Nun liefert 4.14 $\mathcal{A}(O_p(M)) \subseteq \mathcal{A}(T)$, also $B(O_p(M)) \leq B(T)$ und $Q_E \leq B(O_p(M)) \trianglelefteq M$.

Also ist $\langle Q_E^M \rangle \leq B(T)$. Es ist

$$EB(T) \geq E\langle Q_E^M \rangle \trianglelefteq M$$

und wegen der Operation von $B(T)$ auf W_E ist

$$E\langle Q_E^M \rangle = EQ_E \text{ oder } E\langle Q_E^M \rangle = EB(T).$$

Es folgt die Behauptung. □

Bemerkung 5.11 *Ist $q \geq 4$, so ist $E\langle Q_E^M \rangle = EQ_E = EB(T)$, also stets $EB(T) \trianglelefteq M$.*

Lemma 5.12 $|Z_E| \in \{1, q\}$. Ist $Z(E) \neq 1$, so gilt $Z(E) = Z_E$ und insbesondere $O_p(E) = Q_E$.

Beweis: Ist E exzeptionell, so ist nach 4.20 $O_3(E) = Q_E$ und insbesondere $Z(E) = Z_E$, also $|Z_E| = |Z(E)| = q$.

Sei also im folgenden E gewöhnlich linear und oBdA sei angenommen, dass $Z_E \neq 1$ gilt.

Es ist $Z_E \leq C_{B(T)}(Q_F) \leq Q_F$. Nach 3.3 ist $Z_E \cap Z_F = 1$ und somit $|Z_E| = |Z_E Z_F / Z_F|$.

Setze $\widetilde{Q}_F := Q_F / Z_F$, $\widetilde{FB}(T) := FB(T) / Q_F$. Nach 4.12 ist \widetilde{Q}_F ein natürlicher Modul für $\widetilde{FB}(T)$. Nach 5.10 und 5.19 ist $Z_E Z_F$ insbesondere invariant unter $N_{FB(T)}(B(T))$. Andererseits gilt nach 2.29 für jedes $1 \neq z \in Z_E$

$$\langle \widetilde{z}^{N_{\widetilde{FB}(T)}(\widetilde{B}(T))} \rangle = C_{\widetilde{Q}_F}(\widetilde{B}(T)).$$

Es folgt also

$$\widetilde{Z}_E = C_{\widetilde{Q}_F}(\widetilde{B}(T)),$$

insbesondere $|Z_E| = |\widetilde{Z}_E| = q$. Ist $p = 2$ und $Z(E) \neq 1$, so folgt ebenso: $q = |Z(E)| \leq Z_E = q$ und wegen $Z(E) \leq Z_E$ also $Z(E) = Z_E$.

Insgesamt folgt

$$|B(T)| = |B(T) : Q_E| \cdot |Q_E : Z_E| \cdot |Z_E| = q \cdot q^2 \cdot |Z_E| \in \{q^3, q^4\}.$$

□

Bemerkung 5.13 Wegen $q \cdot |Q_F| = |B(T)| = q \cdot |Q_E|$ gilt $|Z_E| = |Z_F|$.

□

Lemma 5.14 Ist $Z(E) = 1$, so ist $[N_F(B(T)), Z_E] = 1$

Beweis: Es gelte $Z(E) = 1$ und oBdA $Z_E \neq 1$.

Dann ist $(W_E \cap W_F) \times Z_E = Z(B(T)) = (W_E \cap W_F) \times Z_F$. Es folgt

$$Z_E \geq [Z_E, N_F(B(T))] \leq [Z(B(T)), N_F(B(T))] =$$

$$[W_E \cap W_F, N_F(B(T))][Z_F, N_F(B(T))] = [W_E \cap W_F, N_F(B(T))] \leq W_E,$$

insgesamt gilt also

$$[Z_E, N_F(B(T))] \leq W_E \cap Z_E = 1.$$

□

Lemma 5.15 $Q_E = O_p(E)$, insbesondere ist $B(T) \leq E$, falls $q \geq 4$.

Beweis: Ist E exzeptionell oder $p = 2$ und $Z(E) \neq 1$, so folgt die Aussage aus 4.20 und 5.12.

Sei also E gewöhnlich linear mit $Z(E) = 1$.

Angenommen, $Z_E \neq 1$. Sei $\widetilde{Q}_F := Q_F/Z_F$, $\overline{FB(T)} := FB(T)/Q_F$. Dann ist nach 5.12 $\widetilde{Z}_E = C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)})$ und es gilt

$$C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)}) = [C_{\widetilde{Q}_F}(\overline{B(T)}), \overline{N_F(B(T))}] = [\widetilde{Z}_E, \overline{N_F(B(T))}] \stackrel{5.14}{=} 1,$$

ein Widerspruch.

Also ist $Z_E = 1$ und damit $Q_E = W_E = O_p(E)$. □

Lemma 5.16 $O_p(M) = O_p(E)$.

Beweis: Wegen 5.15 ist insbesondere $Z(B(T)) \leq W_E$, also gilt

$$O_p(M) \leq C_T(W_E) \leq C_T(Z(B(T))) = B(T),$$

also $O_p(M) = Q_E$ und wieder mit 5.15 die Behauptung. □

Aus 5.15 erhalten wir mehrere Korollare:

Korollar 5.17 *Es gilt einer der folgenden Fllle:*

- (i) $p = 2$ und $|B(T)| \in \{q^3, q^4\}$. Dabei ist $|B(T)| = q^4 \iff Z(E) \neq 1$.
- (ii) $p \neq 2$, E ist nicht exzeptionell und $|B(T)| = q^3$.
- (iii) $p = 3$, E ist exzeptionell und $|B(T)| = q^6$.

Beweis: Folgt aus 5.15 zusammen mit 4.20 und 4.15. □

Korollar 5.18 $Q_F = O_p(F) = O_p(N)$.

Beweis: Man beachte, dass stets $O_p(N) \leq B(T)$ gilt, auch wenn (ii) in 5.3 gilt. Die erste Gleichheit gilt dann aus Ordnungsgründen (beachte $|Q_F| = |Q_E| = |O_p(E)| = |O_p(F)|$). Die zweite Gleichheit folgt nun aus

$$Z(B(T)) \leq W_F \leq \Omega(Z(O_p(N))).$$

□

Korollar 5.19 $M \cap N \leq N_M(B(T))$.

Beweis: Wegen 5.15 und 5.18 ist $B(T) = O_p(E)O_p(F)$ und somit

$$M \cap N \leq N_M(O_p(F)) \leq N_M(B(T)).$$

□

Lemma 5.20 *Es gilt $C_G(W_E) = O_p(M)$ und insbesondere $C_G(W_E) \leq C_M(E/O_p(E))$.*

Beweis: Wegen 5.15 ist $C_G(W_E) = O_p(M)$, falls E gewöhnlich linear ist. Ist E exzeptionell, so gilt wegen 5.16 und lokaler Charakteristik 3 $C_G(O_3(E)) = W_E$ (*). Angenommen, $C_G(W_E)$ wäre keine 3-Gruppe. Sei dann $R \leq C_G(W_E)$ eine 3'-Gruppe. Dann ist nach 2.56 auch $R \leq C_G(E)$ und insbesondere $[O_3(E), R] = 1$, im Widerspruch zu (*). Also ist stets $C_G(W_E) = O_p(E) \leq C$. \square

Wegen $\text{Aut}(SL_2(q)) \cong P\Gamma L_2(q)$ ¹ gilt die

Bemerkung 5.21 $M/C_M(E/O_p(E)) \lesssim P\Gamma L_2(q) \cong PGL_2(q) \rtimes \text{Gal}(q/p)$.

Korollar 5.22 $T \cap M/B(T)$ ist zyklisch.

Beweis: Dies folgt aus 5.21 und 5.16 \square

Korollar 5.23 *Ist $q = 3$, so ist $T = B(T)$ und*

$$|B(T)| \in \{3^3, 3^6\}.$$

Beweis: Wegen $\text{Gal}(3/3) = 1$ ist $T = B(T)$.

Ist E exzeptionell, so folgt mit 4.20

$$|B(T)| = 3^6.$$

Ist E gewöhnlich linear, so folgt aus 5.16

$$|B(T)| = 3^3.$$

\square

Lemma 5.24 *Es gelten folgende Aussagen:*

- (i) $N_G(E) = M = EN_M(B(T))$.
- (ii) $N_G(F) = N = FN_N(B(T))$.
- (iii) *Ist $B(T) \leq U \leq N_M(B(T))$ mit $|U : B(T)| = q - 1$, so dass U auf $W_E/Z(E)$ $GF(q)$ -lineare Abbildungen induziert und $U/B(T)$ zyklisch ist, so ist $U \leq N_M(B(T))$.*

Beweis: Die Aussagen folgen aufgrund der Struktur von $P\Gamma L_2(q)$, beachte 5.21. \square

¹siehe z.B. [Gor]

Lemma 5.25 $N_G(W_F) = N_G(O_p(F)) = N_G(F)$.

Beweis: Man beachte, dass es wegen $W_F \text{ char } O_p(F) \text{ char } F$ zum Nachweis der Behauptung genügt $N_G(W_F) \leq N_G(F)$ zu zeigen.²

Ist $F \not\leq C^*(G, T)$, so folgt die Behauptung aus 3.68.

Sei also $F \leq C^*(G, T)$, $H := N_G(W_F)$. Dann ist $N_G(B(T)) \leq M$ und wegen des über die Struktur von M bereits Gezeigten ist $N_F(B(T)) \trianglelefteq N_G(B(T))$.

Ist also $x \in N_H(B(T))$, so ist $N_F(B(T)) = N_{F^x}(B(T))$.

Dann gibt es für jedes $a \in F \setminus N_F(B(T))$ ein $b \in F^x \setminus N_{F^x}(B(T))$ mit

$$Z(B(T))^a = Z(B(T))^b.$$

Das heißt aber $ab^{-1} \in N_H(B(T))$ und damit $B(T)^a = B(T)^b$, also

$$F = \langle B(T), B(T)^a \rangle = \langle B(T), B(T)^b \rangle = F^x.$$

Also ist $N_H(B(T)) \leq N_G(F)$.

Sei $T \leq L \leq H$ minimal parabolisch. Wir können annehmen, dass $L \not\leq N_H(J(T)) = N_H(B(T))$ gilt. Ist dann $\Omega(Z(T)) \leq Z(L)$, so folgt aus 2.23

$$[O^p(L), W_F] \leq [O^p(L), \Omega(Z(O_p(L)))] = 1,$$

also $O^p(L) \leq C_G(W_F)$.

Ist $O^p(L) \leq C_G(W_F)$, so folgt nach 2.36 bereits $L \leq N_G(F)$. Wir können also annehmen

$$O_p(F) = C_T(W_F) = O_p(L) \text{ und damit } [\Omega(Z(T)), L] \neq 1.$$

Wegen $T \leq L$ enthält L einen Offender auf W_F nämlich $B(T)$. Wegen der bekannten Operation von $B(T)$ auf W_F ist $B(T)/O_p(F)$ der einzige in $T/O_p(F)$ liegende Offender von L auf W_F . Dann existiert $L_0 \leq L$ mit

$$L_0/O_p(F) \cong SL_2(q)$$

und $B(T) \leq L_0 \cap F$. Wie oben folgt dann $L_0 = F$ und mit [BHS, 4.14] folgt $L_0 \trianglelefteq L$, also $L \leq N_G(F)$.

Mit 2.11 folgt $H = \langle T \leq L \leq H \mid L \text{ ist minimal parabolisch} \rangle N_H(T) \leq N_G(F)$.

□

Lemma 5.26 $N_G(F)$ ist eine maximale p -lokale Untergruppe.

²Und ist F nicht exzeptionell, so ist in der Tat $W_F = O_p(F)$.

Beweis: Ist $F \not\leq C^*(G, T)$, so folgt die Aussage aus Satz 3.7.

Sei also $F \leq C^*(G, T)$ und sei $1 \neq X \leq T$ mit $N_G(F) = N_G(W_F) \leq N_G(X)$.

OBdA sei $X = O_p(N_G(X))$. Wegen der irreduziblen Operation von F auf $W_F/Z(F)$ gilt

$$W_F \leq X \text{ oder } X \cap W_F \leq Z(F).$$

Im zweiten Fall folgt aber $[X, F] = [X, F, F] = 1$, ein Widerspruch, da $N_G(X)$ Charakteristik p hat.

Also ist $W_F \leq X$. Dann muss aber bereits $X = W_F$ gelten oder F ist exzeptionell und $X = O_3(F)$. In beiden Fällen ist $N_G(X) = N_G(F)$. \square

Wir fassen die Ergebnisse der Kapitel 3, 4 und 5 in einem Satz zusammen:

Satz 5.27 *Es gelte Voraussetzung 5.2. Dann gilt einer der folgenden Fälle:*

(i) $p = 2$, $|T| \in \{2^3, 3^7\}$.

(ii) *Es gibt maximale p -lokale Untergruppen M_1, M_2 von G , $S \in \text{Syl}_p(M_1)$ und Normalteiler E_i von M_i , so dass für $i \in \{1, 2\}$ gilt:*

(a) $B(S) \leq M_1 \cap M_2$.

(b) E_i ist ein maximaler $B(S)$ -Block von M_i .

(c) $E_i = O^p(\langle B(S)^{M_i} \rangle)$.

(d) $M_i = N_G(E_i)$.

(e) $T \leq M_1 \cap M_2$ oder $|N_G(B(S)) : N_{M_1}(B(S))|$ ist eine p -Potenz.

(f) $O_p(E_i) = O_p(M_i)$ oder $T \not\leq M_1$.

(g) *Es existiert eine p -Potenz q mit $E_i/O_p(E_i) \cong SL_2(q)'$*

Beweis: Die Behauptung folgt aus 3.5, 3.67, 4.5, 4.18, 4.24, 4.28, 4.31, 4.32, 4.39, 4.40, 4.45, 5.16 und 5.26. \square

Kapitel 6

Fusion von p -Elementen

Das Ziel dieses vorletzten Kapitels ist es, das Konjugationsverhalten von p -Elementen in G zu studieren. Wir möchten vor allem zeigen, dass „meistens“ $T = B(T)$ gilt und führen somit die Studien aus dem vorigen Kapitel fort. Deshalb wollen wir auf die dort benutzten Bezeichnungen und die Voraussetzung 5.8 verweisen:

Voraussetzung 6.1 *Es gelte die Voraussetzung 5.8 und es seien die Bezeichnungen wie in Kapitel 5. Des weiteren sei, falls $p \neq 2$ ist, $T \leq M$.*

Wir erinnern daran, dass für $X \in \{E, F\}$ definiert sind:

$$W_X := \Omega(Z(O_p(X))), \quad Q_X := O_p(EB(S)), \quad Z_X := Z(EB(S)).$$

Wir werden in diesem Kapitel natürlich die bisher bewiesenen Resultate verwenden. Meistens werden wir sie explizit mit Zitaten versehen. An besonders wichtige Eigenschaften wollen wir aber an dieser Stelle kurz erinnern:

Erinnerung 6.2 *Es gelten folgende Aussagen:*

- $E \trianglelefteq M$,
- $O_p(M) = O_p(E)$,
- $F \trianglelefteq N$,
- $O_p(F) = O_p(N)$.

Erstes Ziel dieses Kapitels ist der

Satz 6.3 $T = B(T)$ oder $q = 4$.

Ist $p = q$, so ist $\text{Gal}(q/p) = 1$, also $B(T) = T$. Genauer gilt

Bemerkung 6.4 *Ist $q = p \neq 2$, so ist $|T| = p^3$ und T ist extraspeziell.*

Es gelte also im folgenden $q > p$. Wir setzen $Z := Z(B(T))$.

Um 6.3 beweisen zu können, wollen wir zunächst einsehen, dass keine Untergruppe von $T \cap M$, die nicht in $B(T)$ liegt, nach $B(T)$ hinein konjugiert werden kann. Es genügt, diese Eigenschaft für Untergruppen U von $T \cap M$ einzusehen, für die $|U : U \cap B(T)| = p$ gilt. Wir können also im folgenden annehmen, dass $|T \cap M : B(T)| = p$ gilt. Sei dann $A \leq T \cap M$, $|A| = p$, mit $T \cap M = B(T)A$.

Lemma 6.5 $C_G(B(T)) = Z$.

Beweis: $N_G(B(T))$ hat Charakteristik p . Ist $T = B(T)$, so ist also $O_p(N_G(B(T))) = B(T)$ und es folgt die Behauptung.

Sei also $T > B(T)$. Dann ist $N_E(B(T)) \not\leq N_G(T)$, d.h. $N_G(B(T))$ ist nicht p -abgeschlossen und es folgt auch in diesem Fall $O_p(N_G(B(T))) = B(T)$ und damit die Behauptung. \square

Wegen der Operation von $J(M)$ auf W_E und des in Abschnitt 5.1 gezeigten gilt

Bemerkung 6.6 $N_M(B(T)') = N_M(B(T))$.

Lemma 6.7 Ist $Z(E) \neq 1$, so ist $C_G(Z) = B(T)$ und $N_G(Z) = N_G(B(T))$.

Beweis: Ist $Z(E) \neq 1$, so ist auch $Z(F) \neq 1$ und $Z = Z(E)Z(F)$. Dann ist $C_G(Z) \leq C_G(Z(E)) \cap C_G(Z(F)) \leq M \cap N$. Wegen der Operation von M auf W_E ist $C_M(Z) = B(T)$ und damit gilt die erste Behauptung.

Insbesondere ist $B(T) = C_G(Z) \leq N_G(Z)$ und damit gilt die zweite Behauptung. \square

Lemma 6.8 Sind E und F exzeptionell, so ist $N_G(B(T)') = N_G(B(T))$.

Beweis: Wir erinnern zunächst daran, dass nach Bemerkung 4.22 $B(T)' = W_E W_F$ ist.

Setze $H := N_G((B(T)'))$.

Angenommen, $H \not\leq N_G(B(T))$. Sei dann $h \in H \setminus N_G(B(T))$.

Gilt $Z(E)Z(F) = Z \leq W_E^h$, so ist $W_E^h \trianglelefteq O_3(E)$ und $W_E^h \trianglelefteq O_3(F)$, also $B(T) = O_3(E)O_3(F) \leq N_G(W_E^h) = M^h$. Dann sind $B(T)$ und $B(T)^h$ unter M^h konjugiert, d.h. es existiert $m \in M$ mit $B(T)^{m^h} = B(T)^h$, was wiederum $B(T) = B(T)^{m^{-1}h}$ bedeutet. Dann ist auch $m \in N_M(B(T)') = N_M(B(T))$, also auch $h \in N_G(B(T))$ und wir erhalten einen Widerspruch.

Wir können also im folgenden annehmen, dass $Z(E) \not\leq W_E^h$ oder $Z(F) \not\leq W_E^h$ ist. OBdA gelte ersteres.

Ist $W_E^h \cap Z(E) \neq 1$, so ist nach 3.3 $O_3(E)^h \leq M$. Dann muss bereits $O_3(E)^h \leq B(T)$ und damit $O_3(E)^h \trianglelefteq B(T)$ gelten, beachte $(B(T)')' \leq O_3(E)^h$. Damit ist aber $B(T) \leq M^h$ und wir erhalten wie oben $h \in N_G(B(T))$. Ebenso für $W_E^h \cap Z(F) \neq 1$.

Wir können also sogar $W_E^h \cap Z(E) = 1 = W_E^h \cap Z(F)$ und damit $|Z \cap W_E^h| \leq q$ annehmen. Dann ist $|Z \cap W_E^h| = q$ und $W_E W_F = ZW_E^h$ - beachte $|W_E \cap W_E^h| \geq q^2$.

Setze $U := C_G(W_E \cap W_E^h)$, $Q_1 := O_3(U)$. Sei $x \in G$ mit $O_3(E) \leq C_{T^x}(W_E \cap W_E^h) \in \text{Syl}_3(U)$. Da $O_3(E)$ von ordnungsmaximalen elementarabelschen Untergruppen erzeugt wird, muss bereits $O_3(E) \leq B(T)^x$ gelten. Dann ist $Z^x \leq C_G(O_3(E)) = W_E$. Ist $Z^x \cap Z(E) \neq 1$, so folgt $B(T)^x \leq M$ und damit $O_3(E) \trianglelefteq B(T)^x$. Ist aber $Z^x \cap Z(E) = 1$, so muss $W_E = ZZ^x$ gelten und es folgt $O_3(E) \leq B(T) \cap B(T)^x$. Ist $O_3(E) \neq O_3(E)^x$, so folgt $B(T)^x = O_3(E)^x O_3(E)$, also $\Phi(B(T)^x) = (B(T)^x)' \leq O_3(E)$ und wieder $O_3(E) \trianglelefteq B(T)^x$.

Wir erhalten also stets $B(T)^x \leq M$.

Damit folgt $C_{B(T)^x}(W_E \cap W_E^h) = O_3(E)$. Also wird $O_3(E)$ von Q_1 normalisiert und wegen der Operation auf $O_3(E)$ muss dann $Q_1 \leq B(T)^x$ gelten, also $Q_1 \leq O_3(E)$. Insbesondere ist $[Z(E), Q_1] = 1$ und da U Charakteristik 3 hat folgt daraus $Z(E) \leq Q_1$, also auch $W_E = Z(E)(W_E \cap W_E^h) \leq Q_1$. Ebenso folgt $W_F \leq Q_1$, also $W_E W_F \leq Q_1 \leq O_3(E)$. Damit ist $Q_1 = O_3(E)$ oder $Q_1 = W_E W_F$. Im ersten Fall muss mit einem symmetrischen Argument auch $Q_1 = O_3(E)^h$ gelten und daraus folgt $h \in H \cap M \leq N_G(B(T))$, ein Widerspruch.

Im zweiten Fall ist $U \leq H$. Sei dann $R \leq U$ eine p' -Untergruppe. Dann erhalten wir mit dem Drei-Untergruppen-Lemma $[B(T), R, W_E W_F] \leq Z$, also $R \leq N_G(B(T))$. Also ist $O^p(U) \leq N_G(B(T))$ und damit $U \leq N_G(B(T))$. Aber dann muss $O_3(E) = U = O_3(E)^h$ gelten und wieder erhalten wir $h \in H \cap M \leq N_G(B(T))$, ein Widerspruch. \square

Lemma 6.9 *Ist $p \neq 2$, so existiert eine Involution $t_E \in E$ mit $[t_E, E] = O_p(E)$ und $t_E \in N_G(W_F)$, so dass $K := \langle t_F, t_E \rangle$ eine Kleinsche 4-Gruppe ist.*

Beweis: Offensichtlich existiert eine Involution $t_E \in E$ mit $[t_E, E] = O_p(E)$. t_E invertiert dann $W_E/Z(E)$.

Da W_E von t_F normalisiert wird, gilt $[t_E, t_F] \in C_G(W_E)$.

Andererseits ist nach 5.16 und 5.20 $C_G(W_E) = O_p(E)$, d.h. t_F normalisiert $\langle t_E \rangle O_p(E)$. Aber dann kann man, da es in $\langle t_E \rangle W_E$ ungerade viele Konjugierte von t_E gibt, t_E so wählen, daß $[t_E, t_F] = 1$ gilt. Dann ist K eine Kleinsche 4-Gruppe. Aus $[B(T), t_F] = O_p(F)$ folgt außerdem $t_E \in N_G(W_F)$. \square

Sei im folgenden $K = 1$, falls $p = 2$ und K wie in 6.9 sonst.

Lemma 6.10 *Sei $Z \leq V \leq T$ und V elementarabelsch und K -invariant. Dann ist $V \leq O_p(E)$ oder $V \leq O_p(F)$.*

Beweis: Ist $p = 2$, so folgt die Aussage aus 4.16 und 5.16.

Sei also $p \neq 2$. Da V abelsch ist gilt insbesondere $[V, Z] = 1$ und somit

$$V \leq C_T(Z(B(T))) = B(T) \leq E \cap F.$$

Dann ist $[V, t_X] \leq V \cap O_p(X)$ für $X \in \{E, F\}$. Da V abelsch ist, müssen sich $O_p(E) \cap V$ und $O_p(F) \cap V$ zentralisieren.

Ist E nicht exzeptionell, so folgt daraus wegen der Operation von W_E und W_F auf einander

$$V \cap W_E \leq Z \text{ oder } V \cap W_F \leq Z.$$

Ist $V \cap W_E = Z$, so folgt $[V, t_E] = Z$, also $V = Z \times C_V(t_E)$. Andererseits ist $C_{B(T)}(t_E) = C_{W_F}(t_E)$, da W_F von t_E normalisiert wird. Daraus folgt $V \leq W_F$.

Im zweiten Fall folgt mit einem symmetrischen Argument $V \leq W_E$.

Sei nun E exzeptionell. Dann gibt es drei Fälle:

- $V \cap O_3(E), V \cap O_3(F) \leq O_3(E) \cap O_3(F) = W_E W_F$,
- $V \cap O_3(E) \not\leq O_3(F)$ und $V \cap O_3(F) \leq W_E$
- $V \cap O_3(F) \not\leq O_3(E)$ und $V \cap O_3(E) \leq W_F$.

Es ist $V = [V, t_X] \times C_V(t_X) \leq (V \cap O_3(X))C_V(t_X)$ für $X \in \{E, F\}$. Ist $\{X, Y\} = \{E, F\}$, so wird $O_p(X)$ stets von t_Y normalisiert und es gilt $C_{B(T)}(t_Y) = C_{O_3(X)}(t_Y)$, also ist stets $V = (V \cap O_3(E))(V \cap O_3(F))$ und wegen der drei oben aufgeführten Fälle ist stets $V \leq O_3(E)$ oder $V \leq O_3(F)$. □

Bemerkung 6.11 *Ist $q = 4$, so erhalten wir mit den bisher gezeigten Resultaten $2^6 \leq |T| \leq 2^{10}$.*

Aufgrund obiger Bemerkung können wir im Fall $q = 4$ mit dem Satz A.6 den Isomorphietyp von G bestimmen, falls G einfach ist. Wie wir an den Beweisen der folgenden Lemmata sehen werden, taucht der Fall $q = 4$ in der Tat manches Mal als unliebsame Ausnahme auf. Da wir diesen Fall - wie oben angedeutet - anderweitig lösen können, wollen wir von jetzt an voraussetzen, dass $q \neq 4$ gilt.

Lemma 6.12 *Sei $z \in Z \setminus (Z(E) \cup Z(F))$ und $H := N_G(\langle z \rangle)$. Dann ist $H \leq N_G(B(T))$.*

Beweis: Sei $Q_H := O_p(H)$. Man beachte, dass H Charakteristik p hat und $K \leq H$ gilt. Wir können wegen der Operation von $N_E(B(T))$ auf W_E und $E \not\leq C_G(\Omega(Z(T)))$ annehmen, dass $z \in Z(T)$ gilt. Als erstes zeigen wir

6.12.1 $Z \leq Q_H$, und $V := \langle Z^H \rangle$ ist elementarabelsch.

Es gelte zunächst $[Q_H \cap B(T), W_E] = 1$. Dann ist $Q_H \cap B(T) \leq O_p(E)$ und damit $Q_H = (Q_H \cap O_p(E))B$, wobei $B = 1$, $|T : B(T)B| = 2$ oder $T = B(T)B$. Wäre $B \neq 1$, so wäre

$$[B(T), B] \leq Q_H \cap B(T) = Q_H \cap O_p(E),$$

im Widerspruch zur Operation von B auf $E/O_p(E)$ bzw. auf $B(T)/Z$.

Also ist $B = 1$ und damit $Q_H \leq O_p(E)$. Da H Charakteristik p hat, ist dann $Z \leq W_E \leq Q_H$. Insbesondere ist $Q_H \leq B(T)$ und somit ist $[Z, Z^h] = 1$ für alle $h \in H$. Also gilt dann 6.12.1.

Es gelte nun $[Q_H \cap B(T), W_E] \neq 1$. Dann ist

$$Q_H \geq [Q_H \cap B(T), W_E] = Z.$$

Angenommen, V wäre nicht abelsch. Dann existiert ein $g \in H$ mit $[Z, Z^g] \neq 1$. Dann gilt $[Z, Z^g, Z^g] = 1 = [Z^g, Z, Z]$, d.h. Z und Z^g operieren quadratisch aufeinander. Andererseits liegt - wegen $[Z, Z^g] \neq 1$ - Z^g nicht in $B(T)$, induziert also keine $GF(q)$ -linearen Automorphismen auf W_E . Nach 2.2 muss dann $p = 2$ sein. Es ist auch $[Z, Z^{g^{-1}}] \neq 1$ und es folgt wegen $p = 2$

$$\sqrt{q} = |Z : C_Z(Z^g)| = |Z^{g^{-1}} : C_{Z^{g^{-1}}}(Z)| = |Z^{g^{-1}} : Z^{g^{-1}} \cap B(T)| = 2,$$

also $q = 4$, ein Widerspruch.

Also ist V abelsch und damit elementarabelsch und somit gilt insgesamt 6.12.1.

Wegen 6.12.1 können wir 6.9 auf V anwenden. Dann gilt oBdA $V \leq O_p(E)$.

Wegen $C_G(V) \trianglelefteq H$ und $C_T(V) \leq B(T)$ haben auch $C_G(V)$ und $C_G(V)B(T)$ Charakteristik p .

Sei $Q_0 := O_p(C_G(V))$. Es gilt $Q_0 \leq Q_H \cap B(T)$.

Sei zunächst E nicht exzeptionell.

Da W_E die Faktoren der Normalreihe $1 \leq V \leq Q_0$ zentralisiert, gilt $W_E \leq Q_0$.

Ist auch $V \leq W_F$, so ist mit dem gleichen Argument $W_F \leq Q_0$, also

$$B(T) = W_E W_F \leq Q_0 \leq Q_H \trianglelefteq H.$$

Ist $V \not\leq W_F$, so ist $C_V(W_F) = Z$, also $Q_0 = B(T) \cap Q_0 = W_E$ und damit $Q_0 = W_E$. Aber dann ist $H \leq N_G(Q_0) \leq N_G(W_E) = N_G(E)$. Wegen $B(T) \trianglelefteq C_E(z)$ ist damit $B(T) \leq Q_H$.

Sei nun E exzeptionell und es gelte oBdA $V \leq O_3(E)$.

Dann zentralisiert W_E die Normalreihe $1 \leq V \leq Q_0$, also ist $W_E \leq Q_0$.

Ist $V \leq W_E$ oder $V \leq W_F$, so erhalten wir ebenso $O_3(E) \leq Q_0$ oder $O_3(F) \leq Q_0$, woraus dann $Q_0 \in \{O_3(E), O_3(F), B(T)\}$ folgt. In allen drei Fällen folgt $H \leq N_G(B(T))$ und wir sind fertig.

Wir können also im folgenden annehmen, dass $V \not\leq W_E$ und $V \not\leq W_F$ gilt. Dann ist $[O_3(E), V] \neq 1 \neq [O_3(F), V]$ und es folgt $Q_0 \leq W_E W_F$. Da $W_E W_F$ abelsch ist und $C_G(V)$ Charakteristik 3 hat, muss dann $Q_0 = W_E W_F$ und damit $H \leq N_G(W_E W_F)$ gelten. Nach 6.8 ist dann $H \leq N_G(B(T))$. □

Bemerkung 6.13 *Offensichtlich ist die Annahme, dass $T \neq B(T)$ gilt, im Beweis von 6.12 nicht unverzichtbar eingegangen - im Gegenteil kann man den Beweis für den Fall $T = B(T)$ noch entschlacken und gelangt zum selben Ergebnis.*

Wir werden also im weiteren Verlauf das Lemma 6.12 nicht noch einmal gesondert außerhalb der Annahme „ $T \neq B(T)$ “ beweisen, sondern es unabhängig von der Annahme benutzen.

Als Korollar aus Lemma 6.12 erhalten wir

Korollar 6.14 $N_G(Z) = N_G(B(T))$.

□

Lemma 6.15 A ist in G zu keiner Untergruppe aus Z konjugiert.

Beweis: Sei $q_0 := |\text{Fix}_{Z/Z(E)}(A)|$, $E_0 := C_E(A)$ und $W_0 := C_{W_E}(A)$.
Dann ist $E_0/O_p(E_0) \cong SL_2(q_0)$ und $W_0/Z(E_0)$ ist natürlicher Modul für $E_0/O_p(E_0)$.

Angenommen, es existiert ein $g \in G$ mit $A \leq Z^g$.

Ist $A \leq Z(E)^g$, so folgt wegen 3.3

$$E_0 \leq C_G(A) \leq M^g = E^g N_{M^g}(B(T^g)).$$

Aber dann ist $E_0 \leq E^g$ und $Z(E_0) \leq Z(E^g)$ und es folgt $EB(T), E^g B(T)^g \leq C_G(Z(E_0))$ und damit wieder wegen 3.3 $M = M^g$, also $g \in M$ und $A \leq Z^g \leq W_E$, ein Widerspruch. Mit demselben Argument ist $A \not\leq Z(F)^g$.

Sei $H := N_G(A)$. Wir wenden 6.12 auf H an und erhalten $B(T)^g \leq O_p(H)$.

Insbesondere wird $B(T)^g$ von E_0 normalisiert. Also ist $W_0 \cap B(T)^g$ invariant unter E_0 und $|W_0 : W_0 \cap B(T)^g| \leq p$. Da E_0 irreduzibel auf $W_0/Z(E_0)$ operiert und $|W_0 : Z(E_0)| \geq p^2$ gilt, folgt $W_0 \leq B(T)^g$.

Dann ist $Z^g \leq C_G(Z \cap W_0)$ und aus 6.12 folgt $Z^g \leq N_G(B(T))$. Dann ist $|Z^g : Z^g \cap B(T)| \leq p$, wir können 6.12 auf Z und $C_G(Z^g \cap B(T))$ anwenden und erhalten $Z \leq N_G(B(T)^g)$.

Insbesondere normalisieren sich Z und Z^g gegenseitig und wir erhalten

$$1 = [Z, Z^g, Z^g] \geq [Z, A, A].$$

Wegen 2.2 muss dann $p = 2$ sein.

Wie oben folgt dann $\sqrt{q} = |Z : C_Z(Z^g)| = 2$, also $q = 4$, ein Widerspruch.

□

Lemma 6.16 Sei $g \in G$ mit $Z \leq T^g$. Dann ist $Z \leq B(T^g)$.

Beweis: Sei $Z_0 := Z \cap B(T^g)$. Wegen $|Z/Z_0| \leq p$ können wir $|Z/Z_0| = p$, also $T^g = B(T)^g Z$, annehmen. Dann ist $|Z_0| = \frac{q}{p} \cdot |Z(E)|$. Wegen $q \neq p$ ist also $Z_0 \not\leq Z(E)$ und $Z_0 \not\leq Z(F)$, also $Z_0 \neq (Z_0 \cap Z(E)) \cup (Z_0 \cap Z(F))$ und wir können 6.12 anwenden. Es folgt $Z^g \leq C_G(Z_0) \leq N_G(B(T))$.

Aber dann ist $[Z^g, Z, Z] \leq [B(T), Z] = 1$, also auch $[Z^g, A^g, A^g] = 1$ und damit $p = 2$. Wieder erhalten wir $q = 4$, ein Widerspruch. \square

Lemma 6.17 Sei $B \leq B(T) \cap T^g$ für ein $g \in G$. Dann ist $B \leq B(T^g)$.

Beweis: Angenommen, $B \not\leq B(T^g)$. Dann ist $T^g = B(T)^g B$ und $B \not\leq Z$. Sei $C_T(B) \leq S \in \text{Syl}_p(N_G(B))$.

Dann ist $S = N_{T^h}(B)$ für ein $h \in G$ und $Z \leq N_{T^h}(B)$, also wegen 6.16 $Z \leq B(T^h)$ und somit insbesondere $[Z, Z^h] = 1$.

Also ist $Z^h \leq N_G(B(T))$. Wieder wegen 6.16 ist dann auch $Z^h \leq B(T)$.

Ist $|Z \cap Z^h| > q$, also $Z \cap Z^h \not\leq Z(E) \cup Z(F)$ und $Z \not\leq Z(E)^h \cup Z(F)^h$, so ist wegen 6.12 $B(T) \leq C_G(Z \cap Z^h) \leq N_G(B(T)^h)$ und $B(T)^h \leq C_G(Z \cap Z^h) \leq N_G(B(T))$. Dann muss aber bereits $B(T) = B(T)^h$ gelten und wir können T durch T^h ersetzen.

Ist $|Z \cap Z^h| \leq |Z(E)|$, so zentralisiert B in $B(T^h)/Z^h$ eine Untergruppe der Ordnung q , nämlich ZZ^h/Z^h , und es folgt $B \leq B(T^h)$ oder $p = 2$.

Im ersten Fall kann man wieder T durch T^h ersetzen.

Gelte also $p = 2$. Es gilt $ZZ^h \leq B(T)$ und ZZ^h ist elementarabelsch. Also folgt nach 4.16 und 5.16

$$ZZ^h \leq W_E \text{ oder } ZZ^h \leq W_F(*).$$

Wegen $|Z \cap Z^h| \leq |Z(E)|$ folgt aus Ordnungsgründen mit (*)

$$ZZ^h = W_E \text{ oder } ZZ^h = W_F.$$

OBdA gelte ersteres.

Ist $[W_E, B] = 1$, so folgt offenbar auch $[Z^h, B] = 1$ und damit $B \leq B(T)^h$ und wieder können wir $B(T) = B(T)^h$ annehmen.

Ist $[W_E, B] \neq 1$, so folgt $Z = [W_E, B] = [ZZ^h, B] = [Z^h, B]$ und insbesondere $q = |Z| = |[Z^h, B]| = \sqrt{q}$, ein Widerspruch.

Wir können also stets annehmen:

$$N_T(B) \in \text{Syl}_p(N_G(B)).$$

Setze $Q_B := O_p(N_G(B))$ und $W := \langle (Z \cap Q_B)^{N_G(B)} \rangle$. Wegen $Q_B \leq T$ ist $[Q_B, Z] \leq Z \cap Q_B$ und da $N_G(B)$ Charakteristik p hat, muss $Z \cap Q_B \neq 1$ gelten. Damit ist also auch $W \neq 1$. Wegen 6.15 ist außerdem $W \leq Q_B \cap B(T)$, d.h. $[W, Z] = 1$, also ist W elementarabelsch.

Dann zentralisiert Z die Normalreihe $1 \leq W \leq Q_B$, also ist $Z \leq Q_B$ und damit $W = \langle Z^{N_G(B)} \rangle$. Insbesondere ist $Z \leq W$ und damit gilt $W \trianglelefteq B(T)$, falls E nicht exzeptionell ist - denn $B(T)' = Z \leq W \leq B(T)$

Ist E exzeptionell, so setzen wir $U := B(T)' \stackrel{6.8}{=} W_E W_F$ und $U_B := \langle U \cap Q_B^{N_G(B)} \rangle$. Für $x \in N_G(B)$ ist $W \leq B(T)^x$, also $[(U \cap Q_B)^x, W] \leq Z^x$, und es folgt $[Z, (U \cap Q_B)^x, (U \cap Q_B)^x] = 1$. Damit ist $U \cap Q_B \leq N_T(B)$ quadratisch auf Z , kann also wegen 2.2 und $p = 3$ keine Körperautomorphismen induzieren.

Es folgt $U_B \leq B(T)$ und weiter $[U_B, B(T)] \leq U \cap Q_B \leq U_B$, also ist $U_B \trianglelefteq B(T)$.

Sei $Z_0 := C_{Z^g}(B)$. Dann ist $|Z_0| \geq \frac{q}{p} \cdot |Z(E)|$ und wegen 6.16 und der Tatsache, dass $W \trianglelefteq B(T)$ bzw. $U_B \trianglelefteq B(T)$ gilt, existiert $u \in N_G(W)$ bzw. $u \in N_G(U_B)$ mit $Z_0 \leq B(T)^u$. Wegen 6.12 und 6.15 folgt dann $Z^u \leq B(T)^g$. Wäre $|Z^u \cap Z^g| > |Z(E)^g|$, so erhielten wir mit 6.12 $B(T)^u = B(T)^g$. Dann ist aber $1 = [Z^u, B] = [Z^g, B] \neq 1$, ein Widerspruch.

Also ist $|Z^u \cap Z^g| \leq |Z(E)^g|$ und damit gibt es in $B(T)^g/Z^g$ eine Untergruppe der Ordnung q , die von B zentralisiert wird, nämlich $Z^u Z^g/Z^g$. Damit ist $p = 2$.

$Z^u Z^g$ ist dann eine elementarabelsche Untergruppe von $B(T)^g$, also gilt wegen $|Z^u Z^g| = |Z|^2$ und 4.16

$$Z^u Z^g = W_E^g \text{ oder } Z^u Z^g = W_F^g.$$

OBdA sei $Z^u Z^g = W_E^g$.

Ebenso ist aber $Z^u Z^g$ eine elementarabelsche Untergruppe von $B(T)^u$ und somit

$$Z^u Z^g = W_E^u \text{ oder } Z^u Z^g = W_F^u.$$

Im ersten Fall wäre $W_E^u = W_E^g$, also auch $E^u = E^g$ und damit $g^{-1}u \in N_G(E)$. Das heißt, B ist unter $N_G(E)$ zu einer Untergruppe von T , die nicht in $B(T)$ liegt, konjugiert, ein Widerspruch.

Also ist $W_E^g = W_F^u$, also $W_E^{gu^{-1}} = W_F$. Daraus folgt $|T : T \cap M| = 2$ und es existiert ein $t \in T$ mit $W_E = W_F^t = W_E^{gu^{-1}t}$, also $gu^{-1}t \in N_G(W_E) = N_G(E)$.

Aber auch dann ist B unter $N_G(E)$ zu einer Untergruppe von T , die nicht in $B(T)$ liegt, konjugiert und wir erhalten wieder einen Widerspruch.

Insgesamt folgt also $B \leq B(T)^g$ wie behauptet. \square

Nun haben wir die nötigen Hilfsmittel zusammengetragen, um Satz 6.3 beweisen zu können

Satz 6.4 $T = B(T)$ oder $q = 4$.

Der Beweis von Satz 6.3: Sei $x \in T \cap M \setminus B(T)$. Wir setzen

$$q_0 := |\text{Fix}_{GF(q)}(x)|, \quad W_X^0 := C_{W_X}(x), \quad X^0 := C_X(x)$$

für $X \in \{E, F\}$.

Dann gilt für $X \in \{E, F\}$:

$$|W_X^0/Z(X^0)| = q_0^2, \quad X^0/O_p(X^0) \cong SL_2(q_0), \quad \text{und}$$

$$W_X^0/Z(X^0) \text{ ist natürlicher Modul für } X^0/O_p(X^0).$$

Setze $H := C_G(x)$. Da H Charakteristik p hat, ist $C_H(O_p(H)) \leq O_p(H)$. Wegen 6.17 ist $x \notin B(T)^g$ für alle $g \in G$. Also ist $\langle x \rangle O_p(E^0) O_p(F^0) = \langle x \rangle C_{B(T)}(x) = C_T(x) \in \text{Syl}_p(H)$ und insbesondere werden E^0 und F^0 von $O_p(H)$ normalisiert.

$W_E^0/Z(E^0)$ ist ein natürlicher $SL_2(q_0)$ -Modul, insbesondere also ein irreduzibler E^0 -Modul. Wegen $E^0 \leq H$ ist $W_E^0 \cap O_p(H)$ invariant unter E^0 , also gilt

$$W_E^0 \leq O_p(H) \text{ oder } W_E^0 \cap O_p(H) \leq Z(E^0).$$

Angenommen, es gälte das zweite. Dann ist

$$[W_E^0, O_p(H), E^0] = 1 = [O_p(H), E^0, W_E^0],$$

also auch $[E^0, W_E^0, O_p(H)] = 1$. Das wiederum bedeutet

$$[E^0, W_E^0] \leq O_p(H) \cap W_E^0 \leq Z(E^0),$$

ein Widerspruch.

Also gilt $W_E^0 \leq O_p(H)$. Ebenso folgt $W_F^0 \leq O_p(H)$.

Ist E exzeptionell, folgt daraus

$$O_3(H) \geq [E^0, W_F^0] W_E^0 = O_3(E^0)$$

und ebenso erhalten wir $O_3(F^0) \leq O_3(H)$.

Ist E^0 nicht exzeptionell, so ist $W_X^0 = O_p(X^0)$, $X \in \{E, F\}$. Also ist H stets p -abgeschlossen und insbesondere ist

$$E^0 \leq N_G(O_p(E^0) O_p(F^0) \langle x \rangle).$$

Andererseits ist $O_p(E^0) O_p(F^0) \in \text{Syl}_p(E^0)$, ein Widerspruch zu $E^0/O_p(E^0) \cong SL_2(q_0)$.

Es folgt die Behauptung. □

Im Fall $p \neq 2$ ist nun $T = B(T)$ gezeigt. Ist $p = 2$, so wissen wir bereits, dass $T \cap M = B(T)$ gilt. Da wir uns im Hinblick auf die spätere Identifikation hauptsächlich für einfache Gruppen interessieren, ist der nächste Satz für uns von großem Interesse.

Satz 6.19 *Sei $p = 2$, $q > 4$ und $|T : B(T)| = 2$. Dann ist $G \neq O^2(G)$.*

Beweis: Sei $t \in T \setminus B(T)$. Dann ist offenbar

$$T = B(T)\langle t \rangle.$$

Wir zeigen zunächst

6.19.1 *t ist zu keinem Element aus $B(T)$ konjugiert.*

Angenommen, es existierte ein $g \in G$ mit $t \in B(T)^g$. Setze $Y := C_Z(t)$.

Sei zunächst t eine Involution. Dann existiert wegen 4.16 $X \in \{E, F\}$ mit $t \in W_X^g$. Wegen der Operation von X^g/W_X^g auf W_X^g können wir dann $t \in \Omega(Z(T^g))$ annehmen.

Nach 6.12 ist dann $C_G(t) \leq N_G(B(T))^g$, insbesondere ist $Y \leq N_G(B(T)^g)$.

Wir können dann $Y \leq T^g$ annehmen und erhalten

$$Y \leq B(T)^g \text{ oder } T^g = B(T)^g Y.$$

Im ersten Fall folgt, da Y elementarabelsch ist mit 4.16

$$Y \leq W_E^g \text{ oder } Y \leq W_F^g.$$

OBdA gelte ersteres und wir erhalten

$$W_E^g \leq C_G(Y) \leq N_G(B(T)).$$

Da W_E^g elementarabelsch ist, existiert ein $X \in \{E, F\}$ mit

$$W_E^g = W_X \text{ oder } |W_E^g : W_E^g \cap W_X| = 2.$$

Im ersten Fall erhalten wir $g \in N_G(E)$ oder $gt \in N_G(E)$, was beides im Widerspruch zu $t \in B(T)^g$ steht.

Im zweiten Fall erhalten wir jedoch aus Ordnungsgründen eine Hyperebene von W_X , die von t zentralisiert wird.

Dies ist ebenfalls ein Widerspruch, beachte $q > 4$.

Also ist $T^g = B(T)^g Y$ und damit

$$|Y : W_X^g \cap Y| = 2$$

für ein $X \in \{E, F\}$. Wegen $q > 4$ ist $|Y| \neq 2$ und wir erhalten

$$W_X^g \cap Y \neq 1.$$

Dann folgt

$$W_X^g \leq C_G(W_X^g \cap Y) \leq N_G(B(T))$$

und wir erhalten einen Widerspruch wie oben.

Also ist t keine Involution, d.h. $t \notin W_E^g \cup W_F^g$ und es folgt für $U := C_{B(T)^g}(t)$

$$Z^g \leq U \in \text{Syl}_2(C_G(t)).$$

Wir können dann $Y \leq U$ annehmen und da alle Involutionen von U in Z^g liegen, folgt insbesondere $Y \leq Z^g$.

Wir erhalten daraus

$$B(T) \leq N_G(B(T)^g), \quad B(T)^g \leq N_G(B(T))$$

und damit $B(T) = B(T)^g$, ein Widerspruch.

Damit gilt 6.19.1.

Es ist $T' \leq B(T)$ und 6.19.1 impliziert nun, dass für alle $S \in \text{Syl}_2(G)$ gilt

$$T \cap S' \leq B(T).$$

Des weiteren ist $N_G(T) \leq N_G(T/B(T))$ und wegen $|T : B(T)| = 2$ ist dann $[T, N_G(T)] \leq B(T)$, also $T \cap N_G(T)' \leq B(T)$.

Also ist

$$\langle T \cap N_G(T)', \{T \cap S', S \in \text{Syl}_2(G)\} \rangle \leq B(T).$$

Aus 2.4 und 2.5 folgt $G \neq O^2(G)$ und somit die Behauptung. \square

Aus Satz 6.19 folgt nun

Korollar 6.20 *Sei $p = 2$ und $q > 4$. Ist $G = O^2(G)$, so gilt $T = B(T)$. Insbesondere haben die 2-Sylowuntergruppen von G Nilpotenzklasse 2.*

\square

Obiges Korollar ergibt mit Satz A.5 und den Ergebnissen aus Kapitel 3 folgenden wichtigen Satz:

Satz 6.21 *Sei G eine endliche einfache Gruppe der lokalen Charakteristik 2, $T \in \text{Syl}_2(G)$. Es gelte $G \neq C^*(G, T)$ und G besitze keine stark 2-eingebettete Untergruppe. Sei E ein maximaler linearer $B(T)$ -Block von G mit $E/O_2(E) \cong SL_2(q)$. Dann gilt: Ist $q > 4$, so ist $G \cong PSL_3(q)$ oder $PSp_4(q)$.*

Setze $K := \langle E, F \rangle$. Wir haben gezeigt, dass $T = B(T)$ gilt, also insbesondere

$$\text{Syl}_p(E \cap F) \subseteq \text{Syl}_p(E) \cap \text{Syl}_p(F) \subseteq \text{Syl}_p(K) \subseteq \text{Syl}_p(G).$$

Somit erfüllt das Tripel $(E, F, E \cap F)$ die Voraussetzungen von A.7 bzw. A.8 und wir erhalten

Satz 6.22 *Ist $p \neq 2$, $q > p$ und E nicht exzeptionell, so ist $K \cong \text{PSL}_3(q)$.*

□

Satz 6.23 *Ist E exzeptionell, $E/O_3(E) \cong \text{SL}_2(3^n)$, so ist $K \cong G_2(3^n)$.*

□

Wegen Satz 6.21 nehmen wir im folgenden an, dass $p \neq 2$ gilt.

Mit Hilfe von Satz 6.22 erhalten wir nun eine Verschärfung von Satz 4.18.

Satz 6.24 $|\mathcal{B}^*(T)| \leq 2$, insbesondere $|N_G(B(T)) : N_M(B(T))| \leq 2$.

Beweis: Angenommen, es gäbe drei paarweise verschiedene Blöcke E_1, E_2, E_3 . Für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ gilt dann nach Satz 6.22 bzw. Satz 6.23

$$\langle E_i, E_j \rangle \cong \text{PSL}_3(q) \text{ oder } G_2(3^n).$$

Es folgt für $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$N_{E_i}(B(T)) \leq N_G(E_j).$$

Sei $t \in E_1$ mit $\langle t \rangle O_p(E_1) = Z(E_1 \text{ mod } O_p(E_1))$. Dann gilt

$$[O_p(E_j), t] \leq O_p(E_j), \quad j \in \{2, 3\}, \quad B(T) = O_p(E_2)O_p(E_3)$$

$$[B(T), t]Z(E_1) = [O_p(E_1), t]Z(E_1) = O_p(E_1) = [E_1, t]Z(E_1).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} [O_p(E_1), t] &\leq [B(T), t] = [O_p(E_2)O_p(E_3), t] = [O_p(E_2), t][O_p(E_3), t] \\ &\leq (O_p(E_1) \cap O_p(E_2))(O_p(E_1) \cap O_p(E_3)). \end{aligned}$$

Also liegt $[O_p(E_1), t]$ in Z , falls E_1 nicht exzeptionell ist, und in $C_{O_3(E_1) \text{ mod } W_1}(B(T))$, falls E_1 exzeptionell ist. In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch.

Es folgt die Behauptung.

□

Lemma 6.25 *Sei $1 \neq C$ char $B(T)$. Dann ist $C \in \{Z, B(T)', B(T)\}$ oder $F \leq C^*(G, T)$ und $C \in \{O_p(F), W_F\}$.*

Beweis: Sei zunächst E nicht exzeptionell. Dann ist $Z = B(T)'$. Sei $Z \neq C$. Wegen der transitiven Operation von $N_M(B(T))$ auf $Z^\#$ und weil $Z \cap C$ invariant unter $N_M(B(T))$ ist, folgt $Z \leq C$ oder $Z \cap C = 1$. Wegen $C \trianglelefteq B(T)$ kann zweiteres nicht gelten, also ist $Z \leq C$. Setze $\widehat{B(T)} := B(T)/Z$. Wegen der Operation von $N_M(B(T))$ auf $\widehat{B(T)}$ folgt dann

$$\widehat{W_E} \leq \widehat{C} \text{ oder } \widehat{W_F} \leq \widehat{C}.$$

Ist $W_F \leq C$ und $W_F < C$, so folgt $C = B(T)$ wegen der Operation von $N_F(B(T))$ auf $B(T)/W_F$. Ist $W_F = C$, so muss $F \leq C^*(G, T)$ gelten.

Ist $W_E \leq C$, so muss wegen $E \not\leq C^*(G, T)$ $W_E < C$ und damit $C = B(T)$ gelten.

Sei nun E exzeptionell. Dann ist $Z \cap C$ invariant unter $N_F(B(T))$ und damit gilt $Z \cap C \leq Z(F)$ oder $Z \leq CZ(F)$. Ebenso gilt $Z \cap C \leq Z(E)$ oder $Z \leq CZ(E)$. Wegen $C \trianglelefteq B(T)$ ist $Z \cap C \neq 1$ und somit kann nicht $Z \cap C \leq Z(E)$ und $Z \cap C \leq Z(F)$ gelten.

OBdA können wir annehmen, dass $Z \leq CZ(F)$ ist. Wegen $Z = Z(E)Z(F)$ folgt dann $Z = (C \cap Z(E))Z(F)$. Aus Ordnungsgründen muss dann $Z(E) \leq C$ sein, also $Z \leq C$.

Wäre $C \leq W_E$, so müsste wegen der Operation von $N_E(B(T))$ auf W_E bereits $C = W_E$ gelten, im Widerspruch zu $E \not\leq C^*(G, T)$. Also ist $C \not\leq W_E$.

Ist $C \leq W_F$, so folgt ebenfalls $C = W_F$ und damit $F \leq C^*(G, T)$. Ist $C \not\leq W_F$, so folgt $CW_F = W_EW_F = CW_E$. In $\overline{W_EW_F} := W_EW_F/Z$ ist $\overline{C \cap W_EW_F}$ eine unter $N_M(B(T))$ invariante Untergruppe. $N_M(B(T))$ induziert $GF(q)$ -lineare Abbildung auf dem zweidimensionalen $GF(q)$ -Vektorraum $\overline{W_EW_F}$. Dieser besitzt nur zwei $N_M(B(T))$ -invariante $GF(q)$ -Unterräume, nämlich $\overline{W_E}$ und $\overline{W_F}$. Daraus folgt $\overline{C \cap W_EW_F} = \overline{W_EW_F}$ und wegen $Z \leq C$ daraus $C \geq W_EW_F = B(T)'$.

Ist $B(T)' < C$, so ist $C \not\leq O_3(E)$ wegen $E \not\leq C^*(G, T)$ und es folgt $B(T) = CO_3(E)$. Ist $C \leq O_3(F)$, so muss bereits $C = O_3(F)$ und $F \leq C^*(G, T)$ gelten. Andernfalls folgt $B(T) = CO_3(F)$ und mit dem gleichen Argument wie oben - diesmal für $B(T)/W_EW_F$ statt für W_EW_F/Z - folgt $C = B(T)$.

□

Durch obiges Lemma, 6.6 und 6.8 können wir die Größe und Struktur von $C^*(G, T)$ erheblich einschränken.

Korollar 6.26 *Es gilt einer der folgenden Fälle*

- (i) $C^*(G, T) = N_G(B(T))$.
- (ii) $F \leq C^*(G, T)$ und $C^*(G, T) = \langle N_G(F), N_G(B(T)) \rangle$.

Beweis: Wegen $T = B(T)$ ist $\Omega(Z(T)) = \Omega(Z(B(T)))$ und wegen 6.12 folgt $C_G(\Omega(Z(T))) \leq N_G(B(T))$.

Der Rest der Behauptung folgt nun aus 5.26, 6.8, 6.14 und 6.25. □

Bemerkung 6.27 *Gilt (ii) im obigen Korollar, so ist wegen 5.24 $C^*(G, T) = \langle F, N_G(B(T)) \rangle$.*

Setze $K_0 := \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$. Dann ist aufgrund obiger Bemerkung $C^*(G, T) \leq K_0$, also $C^*(G, T) = C^*(K_0, T)$. Da die Struktur von K_0 uns nun bekannt ist, können wir folgern:

Bemerkung 6.28 *Wir können F so wählen, dass $F \not\leq C^*(G, T)$ gilt.*

Nach 5.24 ist $K_0 = \langle M, N \rangle$. Offenbar ist $K \trianglelefteq K_0$ und des weiteren gilt:

Lemma 6.29 *Sei L eine p -lokale Untergruppe, die $B(T)$ enthält. Dann ist $L \leq K_0$.*

Beweis: Wir können oBdA annehmen, dass L eine maximale p -lokale Untergruppe ist. Ist $L \leq C^*(G, T)$, so folgt nach 6.26 die Behauptung.

Ist aber $L \not\leq C^*(G, T)$, so muss wegen 6.24 bereits $L \in \{M, N\}$ gelten und es gilt wiederum $L \leq K_0$. \square

Lemma 6.30 *K_0 ist stark p -eingebettet in G .*

Beweis: Angenommen, es existiert ein $g \in G \setminus K_0$ mit $B(T)^g \cap K_0 \neq 1$. Dann können wir annehmen, dass $B(T) \cap B(T)^g \neq 1$ gilt. Sei $1 \neq x \in B(T) \cap B(T)^g$. Dann ist $\langle Z, Z^g \rangle \leq C_G(x)$.

Ist $x \in Z$, so folgt $B(T) \leq C_G(x)$, und wegen 6.29 dann $B(T)^g \leq C_G(x) \leq K_0$.

Dann sind $B(T)$ und $B(T)^g$ unter K_0 konjugiert. Wegen $N_G(B(T)) \leq K_0$ muss dann aber $g \in K_0$ gelten und wir erhalten einen Widerspruch.

Also ist $x \notin Z$. Wegen der Operation von E bzw. F auf W_E bzw. W_F können wir deshalb $x \notin W_E \cup W_F$ annehmen.

Sei E exzeptionell und $x \in O_3(E) \cup O_3(F)$. Dann können wir $x \in W_E W_F$ und damit $C_{B(T)}(x) = W_E W_F \in \text{Syl}_3(C_G(x))$ annehmen. (Beachte, dass $x \notin W_E \cup W_F$ ist und wir aufgrund des oben gezeigten annehmen können, dass $x \notin W_E^h \cup W_F^h$ für alle $h \in G$ gilt.) Da $C_G(x)$ Charakteristik 3 hat, muss dann $C_G(x)$ 3-abgeschlossen sein und damit insbesondere $Z^g \leq W_E W_F$ gelten.

Dann ist $W_E W_F \leq C_G(Z^g) \stackrel{6.12}{\leq} N_G(B(T)^g)$, also $W_E W_F \leq B(T)^g$. Insbesondere ist dann $W_E W_F \in \mathcal{A}(T^g)$ und es existiert $e \in E$ mit $W_E W_F = (W_E W_F)^{ge^g} = (W_E W_F)^{eg}$, also ist $eg \in N_G(W_E W_F) = N_G(B(T)) \leq K_0$. Wegen $e \in K_0$ muss dann auch $g \in K_0$ gelten und wir erhalten einen Widerspruch.

Es folgt $B(T)^g \cap O_p(E) = 1 = B(T)^g \cap O_p(F)$ für alle $g \in G \setminus K_0$ (*).

Sei nun $x \in B(T) \setminus (O_p(E) \cup O_p(F))$. Wir können auch hier annehmen, dass $x \notin O_p(E)^h \cup O_p(F)^h$ für alle $h \in G \setminus K_0$ gilt, da anderfalls obige Argumente mit $B(T)$ und $B(T)^h$ zum Widerspruch führen. Deswegen und wegen (*) ist $C_{B(T)}(x) \in \text{Syl}_p(C_G(x))$. Ist E nicht exzeptionell, so ist $C_{B(T)}(x)$ elementarabelsch von der Ordnung q^2 , andernfalls elementarabelsch von der Ordnung q^4 . In jedem Fall muss, weil $C_G(x)$ Charakteristik p hat, $C_G(x)$ p -abgeschlossen sein.

Insbesondere folgt damit $Z^g \leq C_{B(T)^g}(x) \leq C_{B(T)}(x)$ und andererseits ebenso $Z \leq B(T)^g$. Ist $Z \cap Z^g \neq 1$, so folgt mit 6.29 $B(T), B(T)^g \leq K_0$ und insbesondere, dass $B(T)$ und $B(T)^g$ unter K_0 konjugiert sind, was wie oben einen Widerspruch ergibt. Andernfalls ist aber $|ZZ^g| = |Z|^2 = C_{B(T)}(x)$, also $\langle B(T), B(T)^g \rangle \leq N_G(ZZ^g)$, aber dann ist wieder wegen 6.29 $B(T)^g \leq K_0$ und wieder sind $B(T)$ und $B(T)^g$ unter K_0 konjugiert und wir erhalten einen Widerspruch. □

Satz 6.31 $G = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ und ist G einfach, so ist $G = \langle E, F \rangle$.

Beweis: K_0 ist nach 6.30 stark p -eingebettet in G . Allerdings ist $F^*(K_0) = K \cong PSL_3(q)$, $q > p$, oder $F^*(K_0) \cong G_2(3^n)$ für ein $n > 1$, im Widerspruch zu A.9. Also ist $G = K_0$ und wegen $K \trianglelefteq K_0$ muss $G = K$ gelten, falls G einfach ist. □

Kapitel 7

Die Beweise der Sätze 1 bis 7

In diesem Kapitel wollen wir die Resultate der vorangegangenen Abschnitte zusammentragen, um die in der Einleitung bereits vorgestellten Sätze zu beweisen. Zugunsten der besseren Lesbarkeit wollen wir die betreffenden Sätze erneut angeben.

Satz 1 *Sei p eine Primzahl, G eine Gruppe der lokalen Charakteristik p und $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $O_p(G) = 1$ und $G \neq C^*(G, T)$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

- (i) *G besitzt eine stark p -eingebettete Untergruppe.*
- (ii) *Es existieren maximale p -lokale Untergruppen L_1 und L_2 , $S \in \text{Syl}_p(L_1)$ mit $B(S) \leq L_1 \cap L_2$ und für $M_i := \langle B(S)^{L_i} \rangle$ und $i \in \{1, 2\}$ gilt
 - (a) *$T = B(T) = S$ oder $|N_G(B(S)) : N_{L_1}(B(S))|$ ist eine p -Potenz,*
 - (b) *$O_p(L_i) \leq B(S)$, $M_i/O_p(L_i) \cong SL_2(q)'$ für eine p -Potenz q ,*
 - (c) *$O_p(L_i)/Z(M_i)$ ist ein natürlicher $SL_2(q)$ -Modul für M_i und $|Z(M_i)| \in \{1, q\}$
oder
 $q = 4$ und $O_2(M_i)/Z(M_i)$ ist ein natürlicher A_5 -Modul für M_i
oder
 $p = 3$ und $O_3(L_i)/\Omega(Z(O_3(L_i)))$ und $\Omega(Z(O_3(L_i)))/Z(M_i)$ sind natürliche $SL_2(q)$ -Moduln für M_i und $|Z(M_i)| = q$.**
- (d) *$O^p(M_i)$ ist ein maximaler $B(S)$ -Block von G .*
- (iii) *$p = 2$, es existiert genau eine maximale 2-lokale Untergruppe, die T enthält und nicht in $C^*(G, T)$ liegt und es ist $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.*

Der Beweis von Satz 1: Sei $H \leq G$ mit $C^*(G, T) \leq H < G$. Ist $\mathcal{T}(H) = \emptyset$, so ist H nach 2.32 stark p -eingebettet in G . Also gilt Fall (i) in Satz 1.

Ist $\mathcal{T}(H) \neq \emptyset$, so sei $S \in \mathcal{T}^*(H)$. Dann gilt nach 3.67 und 5.27 einer der folgenden Fälle

- $p = 2$, $T \in \mathcal{T}(H)$ und es existiert genau eine maximale 2-lokale Untergruppe M von G mit $M \not\leq C^*(G, T)$. Ist $T \leq P \leq C^*(G, T)$ minimal mit $P \not\leq M$, so ist $P \leq C_G(\Omega(Z(T)))$. Dann ist nach 3.67 $|T| \in \{2^3, 2^7\}$.
- Es existieren maximale p -lokale Untergruppen M_1 und M_2 von G wie in 5.27 (ii). Für diese gelten dann nach 5.27 die in Fall (ii) von Satz 1 aufgeführten Eigenschaften.

Insgesamt gilt also einer der Fälle (i), (ii) und (iii) in Satz 1. \square

Satz 2 Sei $p \geq 5$ eine Primzahl, G eine \mathcal{K} -echte Gruppe der lokalen Charakteristik p und $T \in \text{Syl}_p(G)$. Es gelte $G \neq C^*(G, T)$ und $O_p(G) = 1$. Es gebe verschiedene maximale p -lokale Untergruppen M und N von G mit $T \leq M \cap N$ und es sei $M \not\leq C^*(G, T)$. Sei E ein maximaler $B(T)$ -Block von M mit $E \not\leq C^*(G, T)$, $E/O_p(E) \cong SL_2(p^n)$. Sei F ein maximaler $B(T)$ -Block von N . Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) $|T| = p^3$ und T ist extraspeziell.
- (ii) $\langle E, F \rangle \cong PSL_3(p^n)$ und $N_G(\langle E, F \rangle) = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ ist stark p -eingebettet in G .

Der Beweis von Satz 2: Ist $E/O_p(E) \cong SL_2(p)$, so folgt aus 5.17, dass $|T| = |B(T)| = p^3$ ist. Außerdem ist $B(T)/Z$ elementarabelsch, $B(T)$ selber jedoch nicht. Da $|Z| = p$ gilt, muss also $B(T)' = \Phi(B(T)) = Z$ und damit $B(T)$ extraspeziell sein.

Ist $q > p$, so folgt aus 6.31, dass (ii) in 2 gilt. \square

Satz 3 Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 2. Zusätzlich sei G einfach und $n > 1$. Dann ist $G \cong PSL_3(p^n)$.

Der Beweis von Satz 3: Die Aussage folgt aus Satz 2 und 6.31. \square

Satz 4 Sei G eine Gruppe der lokalen Charakteristik 2 und $T \in \text{Syl}_2(G)$. Es sei $O_2(G) = 1$, $O^2(G) = G$ und $G \neq C^*(G, T)$. Dann gilt eine der folgenden Aussagen:

- (i) G besitzt eine stark 2-eingebettete Untergruppe.
- (ii) Ein maximaler $B(T)$ -Block E von G ist vom $SL_2(2)'$ -Typ und T ist eine Dieder- oder Semidiedergruppe.
- (iii) Ein maximaler $B(T)$ -Block E von G ist vom $SL_2(2)'$ - oder $SL_2(4)$ - bzw. A_5 -Typ und $|T| \leq 2^{10}$.
- (iv) Ein maximaler $B(T)$ -Block E von G mit $E \not\leq C^*(G, T)$ ist vom $SL_2(2^n)$ -Typ mit $n \geq 3$, $T = B(T)$ und T hat Nilpotenzklasse 2.

Der Beweis von Satz 4: Wir wenden Satz 1 an:

Gilt Fall (i) oder Fall (iii), so besitzt G entweder eine stark 2-eingebettete Untergruppe oder nach 3.67 ist ein maximaler $B(T)$ -Block E von G vom $SL_2(2)'$ oder $A_5/SL_2(4)$ -Typ und $|T| \in \{2^3, 3^7\}$ - insbesondere $|T| \leq 2^{10}$.

Also gelte Fall (ii). Sei E einer der dort angegebenen Blöcke. Ist $E/O_2(E) \cong A_3 \cong SL_2(2)'$, so folgt aus 4.34 und aus 4.37, dass Fall (ii) oder (iii) gilt.

Ist $E/O_2(E) \cong A_5 \cong SL_2(4)$, so folgt aus 4.47 und 6.11, dass $|T| \leq 2^{10}$ ist.

Ist $E/O_2(E) \cong SL_2(2^n)$ mit $n \geq 3$, so gilt nach 6.20 $T = B(T)$ und $T'' = 1$. □

Satz 5 Sei G eine einfache Gruppe der lokalen Charakteristik 2, $T \in Syl_2(G)$ und es gelte $G \neq C^*(G, T)$.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen

$$PSL_2(q), q = 11 \text{ oder } q = 2^k \pm 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, PSL_3(3), PSU_4(3^2),$$

$$M_{11}, M_{22}, M_{23}, J_3, PSL_2(2^n), Sz(2^{2n-1}), PSU_3(2^n), PSL_3(2^n), PSp_4(2^n), n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$$

Der Beweis von Satz 5: Wir können Satz 4 anwenden und haben in jedem der auftretenden Fälle Sätze zur Verfügung, um G zu bestimmen.

Gilt Fall (i), so ist G nach A.4 isomorph zu $PSL_2(2^n)$, $Sz(2^{2n-1})$ oder $PSU_3(2^n)$, $n \geq 2$.

Gilt Fall (ii), so erhalten wir mit den Sätzen A.2 und A.3 eine Liste möglicher Isomorphietypen für G . Von den in A.2 auftauchenden Gruppen haben (höchstens) die Gruppen $PSL_2(q)$ mit $q = 11$ oder $q = 2^k \pm 1$ und M_{11} lokale Charakteristik 2.

Von den in A.3 gelisteten Gruppen haben nach 2.15 $PSL_3(q)$ mit $q \neq 3$ und sämtliche $PSU_3(q)$ nicht lokale Charakteristik 2. In Fall (ii) muss G also zu einer der folgenden Gruppen isomorph sein:

$$PSL_2(q), q = 11 \text{ oder } q = 2^k \pm 1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, PSL_3(3), M_{11}.$$

Gilt Fall (iii), so ist A.6 anwendbar. Von den dort angegebenen Gruppen kommen in den bei uns auftretenden Situationen höchstens folgende vor:

- $PSL_2(q)$ mit $3 < q$ einer ungerade Primzahlpotenz und 2^{11} kein Teiler von $|PSL_2(q)|$,
- $PSL_3(3)$, $PSU_4(3^2)$, $A_8 \cong PSL_3(4)$,
- M_{11} , M_{22} , M_{23} , J_3 .

Siehe dazu den Atlas [CCNPW].

Gilt Fall (iv), so ist A.5 anwendbar. In Fall (iv) hat G den 2-Rang mindestens 6 und die 2-Sylowuntergruppen sind nicht paarweise disjunkt. Also muss dann $G \cong PSL_3(2^n)$ oder $G \cong PSp_4(2^n)$ gelten. \square

Satz 6 Sei G eine \mathcal{K} -echte Gruppe der lokalen Charakteristik 3 und $T \in Syl_3(G)$. Es gelte $O_3(G) = 1$ und $G \neq C^*(G, T)$. Es gebe verschiedene maximale 3-lokale Untegruppen M und N von G mit $T \leq M \cap N$ und $M \not\leq C^*(G, T)$.

Sei E ein maximaler $B(T)$ -Block von M mit $E \not\leq C^*(G, T)$, $E/O_3(E) \cong SL_2(3^n)'$. Sei F ein maximaler $B(T)$ -Block von N . Dann gilt einer der folgenden Fälle:

- (i) $|T| \in \{3^3, 3^6\}$ und T ist extraspeziell oder hat Nilpotenzklasse 3.
- (ii) E ist exzeptionell, $\langle E, F \rangle \cong G_2(3^n)$ und $N_G(\langle E, F \rangle) = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ ist stark 3-eingebettet in G .
- (iii) E ist nicht exzeptionell, $\langle E, F \rangle \cong PSL_3(3^n)$ und $N_G(\langle E, F \rangle) = \langle E, F, N_G(B(T)) \rangle$ ist stark 3- eingebettet in G .

Der Beweis von Satz 6: Die Behauptung folgt aus 5.23, 6.22, 6.23 und 6.31. \square

Satz 7 Seien die Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Satz 6. Zusätzlich sei G einfach und $n > 1$. Dann ist $G \cong PSL_3(3^n)$ oder $G \cong G_2(3^n)$.

Der Beweis von Satz 7: Die Behauptung folgt aus Satz 6 und 6.31. \square

Anhang A

Anhang - Charakterisierungssätze

In diesem Abschnitt wollen wir die Sätze angeben, die wir nach erfolgter lokaler Analyse zur Bestimmung der möglichen Isomorphietypen von G brauchen. Hierbei wird der Begriff der \mathcal{K} -echten Gruppe benötigt, den wir an dieser Stelle einführen wollen.

Definition A.1 Sei H eine endliche Gruppe.

H heißt \mathcal{K} -Gruppe, falls jeder einfache Abschnitt von H isomorph zu einer bekannten einfachen Gruppe ist, d.h. zu einer Gruppen von Primzahlordnung, einer alternierenden Gruppe, einer endlichen Gruppe vom Lietypp oder einer der 26 sporadischen Gruppen.

Wir nennen H eine \mathcal{K} -echte Gruppe, falls jede echte Untergruppe von H eine \mathcal{K} -Gruppe ist.

Satz A.2 (Gorenstein, Walter, 1964, [GW]) Sei G eine endliche einfache Gruppe. Die 2-Sylowuntergruppen von G seien Diedergruppen.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$PSL_2(q), q \equiv 1 \pmod{2}, \text{ oder } A_7.$$

Satz A.3 (Alperin, Brauer, Gorenstein, 1970, [ABG]) Sei G eine endliche einfache Gruppe. Die 2-Sylowuntergruppen von G seien Semidiedergruppen.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$PSL_3(q), q \equiv -1 \pmod{4}, PSU_3(q), q \equiv 1 \pmod{4}, \text{ oder } M_{11}.$$

Satz A.4 (Bender, 1971, [Ben]) Sei G eine endliche einfache Gruppe. G besitze eine stark 2-eingebettete Untergruppe.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$PSL_2(2^n), Sz(2^{2n-1}), PSU_3(2^n), n \geq 2.$$

Satz A.5 (Gilman, Gorenstein, 1975, [GG]) Sei G eine endliche einfache Gruppe, $S \in Syl_2(G)$. Es gelte $S' \leq Z(S)$.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

$$PSL_2(q), q \equiv \pm 7 \pmod{16}, \\ A_7, Sz(2^{2n-1}), PSU_3(2^n), PSL_3(2^n) \text{ oder } PSp_4(2^n), n \geq 2.$$

Satz A.6 (Beisiegel, 1977, [Bei]) Sei G eine endliche einfache Gruppe mit folgenden Eigenschaften:

- (i) 2^{11} teilt nicht $|G|$,
- (ii) Für jede Involution $t \in G$ hat $C_G(t)/O_{2'}(C_G(t))$ Charakteristik 2.

Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:

- (i) $PSL_2(q)$, wobei q eine ungerade Primzahlpotenz größer als 3 ist, so dass 2^{11} nicht $|PSL_2(q)|$ teilt, $PSL_3(3)$, $PSU_3(3^2)$, $PSU_4(3^2)$, $PSp_4(3)$, $G_2(3)$, A_7 , $A_8 \cong PSL_4(2)$,
- (ii) $PSL_2(2^n)$, wobei $2 \leq n \leq 10$, $PSL_3(4)$, $PSL_3(8)$, $PSL_5(2)$, $PSU_3(4^2)$, $PSU_3(8^2)$, $PSU_5(2^2)$, $PSp_4(4)$, $PSp_6(2)$, $Sz(2^3)$, $Sz(2^5)$,
- (iii) M_{11} , M_{22} , M_{23} , M_{24} , J_3 .

Satz A.7 (Parker, Rowley, 2006, [PR]) Sei G eine endliche Gruppe, $p \in \pi(G)$, $L_1, L_2 \leq G$, $L := \langle L_1, L_2 \rangle$. Es gelte

- (i) $L_1 \cap L_2$ enthält keinen nichttrivialen Normalteiler von L ,
- (ii) L ist eine \mathcal{K} -echte Gruppe,
- (iii) L hat lokale Charakteristik p ,
- (iv) $Syl_p(L_1 \cap L_2) \subseteq Syl_p(L)$,
- (v) Es existiert $a \in \mathbb{N}_{>1}$, so dass für $i \in \{1, 2\}$ gilt
 - (a) $L_i/O_p(L_i) \cong SL_2(p^a)$ und
 - (b) $O_p(L_i) = \Omega(O_p(L_i))$ ist elementarabelsch der Ordnung p^{2a} und ein natürlicher $SL_2(p^a)$ -Modul für $L_i/O_p(L_i)$.

Dann gilt:

$$\text{Ist } p^a \neq 4, \text{ so ist } L \cong PSL_3(p^a).$$

Satz A.8 (Parker, Rowley, 2006, [PR]) Sei G eine endliche Gruppe, $L_1, L_2 \leq G$, $L := \langle L_1, L_2 \rangle$. Es gelte

- (i) $L_1 \cap L_2$ enthält keinen nichttrivialen Normalteiler von L ,
- (ii) L ist eine \mathcal{K} -echte Gruppe,
- (iii) L hat lokale Charakteristik 3,
- (iv) $Syl_3(L_1 \cap L_2) \subseteq Syl_3(L)$,
- (v) Es existiert $a \in \mathbb{N}$, so dass für $i \in \{1, 2\}$ gilt
 - (a) $L_i/O_p(L_i) \cong SL_3(p^a)$ und
 - (b) $|O_3(L_i)| = 3^{5a}$, $|\Omega(O_3(L_i))| = 3^{3a}$, $O_p(L_i)' = Z(L_i)$ und $O_3(L_i)/\Omega(Z(O_3(L_i)))$ und $\Omega(Z(O_3(L_i)))/Z(L_i)$ sind natürliche $SL_2(3^a)$ -Moduln für $L_i/O_p(L_i)$.

Dann gilt $L \cong G_2(3^a)$.

Satz A.9 (Parker, Stroth, 2009, [PS2]) Sei G eine endliche Gruppe, p eine ungerade Primzahl. Für jede nichttriviale 2-Untergruppe T von G sei $N_G(T)$ eine \mathcal{K} -Gruppe. Sei H eine stark p -eingebettete Untergruppe von G . Dann ist $F^*(H)$ keine einfache Gruppe vom Lietypp vom Rang 2 über einem Körper der Charakteristik p außer höchstens $F^*(H) \cong PSL_3(p)$.

Literaturverzeichnis

- [ABG] J. L. Alperin, R. Brauer, D. Gorenstein, Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 151 (1970), 1-261.
- [Asch1] M. Aschbacher, A Factorization Theorem for 2-constrained Groups, *Proc. London Math. Soc.* (3) 43 (1981), no. 3, 450-477.
- [Asch2] M. Aschbacher, On the failure of the Thompson factorization in 2-constrained groups. *Proc. London Math. Soc.* (3) 43 (1981), no. 3, 425-449.
- [Aut] G. Autzen, Über $B(T)$ -Blöcke in Gruppen der lokalen Charakteristik p , Diplomarbeit, Kiel 2005
- [Bau1] B. Baumann, Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppe, *J. Algebra* 38 (1976), no. 1, 119–135.
- [Bei] B. Beisiegel, Über einfache endliche Gruppen mit Sylow-2-Gruppen der Ordnung höchstens 2^{10} , *Comm. Algebra* 5 (1977), no. 2, 113-170
- [Ben] H. Bender, Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festlässt, *J. Algebra* 17 (1971) 527-554.
- [BHS] D. Bundy, N. Hebbinghaus, B. Stellmacher, The Local $C(G, T)$ Theorem, *J. Algebra* 300 (2006), 741 - 789.
- [CCNPW] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of finite groups, Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, Oxford University Press, Eynsham, 1985
- [Fo] R. Foote, Component type theorems for finite groups in characteristic 2, *Illinois J. Math.* 26 (1982), Nr. 1, 62-111.
- [GG] R. Gilman, D. Gorenstein, Finite groups with Sylow 2-subgroups pf class two, I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 207 (1975), 1-101, II, *ibid.* 207 (1975),103-126.
- [Gor] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper & Row, New York 1968.
- [GW] D. Gorenstein, J. H. Walter, The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, I, *J. Algebra* 2 (1965) 85-151, II, *J. Algebra* 2 (1965) 218-270, III, *J. Algebra* 2 (1965) 354-393

- [Hu] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer 1967
- [KS] H. Kurzweil, B. Stellmacher, Theorie der endlichen Gruppen, Springer 1998.
- [MS] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, F -stability in finite groups, Trans. Amer. Math. Soc. 361 (2009), no. 5, 2509–2525
- [MSS] U. Meierfrankenfeld, B. Stellmacher, G. Stroth, Finite groups of local characteristic p : an overview, Durham 2001, 155–192, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003.
- [PPS] C. Parker, G. Parmeggiani, B. Stellmacher, The $P!$ -theorem, J. Algebra 263 (2003), Nr.1, 17–58.
- [PR] C. Parker, P. Rowley, Local characteristic p -completions of weak BN -pairs, Proc. London Math. Soc. (3) 93 (2006), no. 2, 325–394.
- [PS1] C. Parker, G. Stroth, Strongly p -embedded subgroups, arXiv:0901.0805v1
- [PS2] C. Parker, G. Stroth, On strongly p -embedded subgroups of Lie rank 2, arXiv:0901.3416
- [Sol1] R. Solomon, On finite simple groups and their classification, Notices Amer. Math. Soc. 42 (1995), no. 2, 231–239.
- [Sol2] R. Solomon, On certain 2-local blocks, Proc. London Math. Soc. (3) 43 (1981), no. 3, 478–498.
- [SW] R. Solomon, S. K. Wong, On $L_2(2^n)$ -blocks, Proc. London Math. Soc. (3) 43 (1981), no. 3, 499–519.
- [Syl] M. L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, Math. Ann. 5 (1872), no. 4, 584–594.
- [Th1] J. G. Thompson, Normal p -complements for finite groups. J. Algebra 1 (1964), 43–46.
- [Th2] J. G. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, I, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 383–437; II, Pacific J. Math. 33 (1970), 451–536; III, Pacific J. Math. 39 (1971), 483–534; I V, Pacific J. Math. 48 (1973), 511–592; V, Pacific J. Math. 50 (1974), 215–297; VI, Pacific J. Math. 51 (1974), 573–630.

Symbolverzeichnis und Index

$A(G)$	Menge der ordnungsmaximalen el.ab. Untergruppen	12
$B(T)$	Baumannuntergruppe	2
$\mathcal{B}(S)$	Menge von $B(S)$ -Blöcken	17
$B(T)$ -Block	17
$C^*(G, T)$	3
$\mathcal{C}^*(S)$	Menge von p -lokalen Untergruppen	17
Charakteristik p	1
$Gal(q/p)$	Galoisgruppe von $GF(q)$ über $GF(p)$	82
$J(T)$	Thompsonuntergruppe	2
\mathcal{K} -echte Gruppe	105
minimal parabolisch	9
natürlicher Modul	13
Offender	12
$\mathcal{O}_G(V)$	Menge der Offender	12
p -lokal	1
stark p -eingebettet	16
$\mathcal{T}(H)$	16

Lebenslauf

Persönliche Daten

- Name: Gyde Autzen
- Adresse: Adalbertstraße 17, 24106 Kiel
- Geburtsdatum und -ort: 25.10.1980, Flensburg
- Staatsangehörigkeit: deutsch
- Familienstand: verheiratet

Schule und Studium

- Grundschule, 1987 - 1991: Grundschule Lütjenburg
- weiterführende Schule, 1991 - 2000: Gymnasium des Kreises Plön im Hoffmann-von-Falersleben-Schulzentrum Lütjenburg, Abitur: 24.06.2000
- Grundstudium, 2000 - 2002: Studium der Mathematik mit dem Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Vordiplom: 02.09.2002
- Hauptstudium, 2002 - 2005: Studium der Mathematik mit dem Nebenfach Betriebswirtschaftslehre an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Diplom: 13.12.2005
- Promotion, seit 2006: Promotion auf dem Gebiet der Gruppentheorie am Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Tätigkeiten

- studentische Hilfskraft am Mathematischen Seminar der CAU zu Kiel, jeweils Vorlesungszeit der Semester SoSe 2002 - WiSe 2004/05 sowie WiSe 2005/2006
- wissenschaftliche Mitarbeiterin am Mathematischen Seminar der CAU zu Kiel seit 02.2006

Erklärung

Ich versichere an Eides Statt, die vorliegende Arbeit selbständig angefertigt zu haben.

Die einzigen Hilfsmittel waren die angegebene Literatur sowie der Rat meines wissenschaftlichen Lehrers.

Ich habe diese Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis verfasst und sie wurde bisher weder als Ganzes noch in Teilen veröffentlicht.

Des weiteren erkläre ich, bisher noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Gyde Autzen