

DISSERTATION

Aktive Galaxienkerne und die
Abhängigkeit ihrer Leuchtkraftfunktion
von der kosmologischen Beschreibung

Jan Hofmann

Aktive Galaxienkerne und die Abhängigkeit ihrer
Leuchtkraftfunktion von der kosmologischen Beschreibung

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Christian-Albrechts-Universität

zu Kiel

vorgelegt von

Diplom-Physiker: Jan Andreas Hofmann

Geboren in: Heilbronn / Neckargartach

Kiel

2009

Referent:

Korreferent:

Tag der mündlichen Prüfung:

Zum Druck genehmigt: Kiel,

Der Dekan

Zusammenfassung

Aktive Galaxienkerne und die Abhängigkeit ihrer Leuchtkraftfunktion von der kosmologischen Beschreibung

Im ersten Teil der Arbeit wird ein auf dem Extended-Press-Schechter-Formalismus beruhendes Monte-Carlo-Verfahren zur Erzeugung der Verschmelzungsgeschichten von Halos Dunkler Materie diskutiert. Mittels diesem wird der Einfluss unterschiedlicher kosmologischer Beschreibungen auf die Verschmelzungswahrscheinlichkeiten von Galaxien untersucht. Daraus wird dann deren Auswirkung auf die Leuchtkraftfunktion von Aktiven Galaxienkernen abgeleitet. Dabei lässt sich zeigen, dass sich eine Änderung der verwendeten Kosmologie im wesentlichen auf die zeitliche Lage und Ausdehnung der Leuchtkraftfunktion auswirkt. Festgestellt wird weiterhin eine starke Abhängigkeit der internen Struktur der Leuchtkraftfunktion von der verwendeten Beschreibung der Aktivitätsphase des betrachteten Aktiven Galaxienkerns. Desweiteren wurden Hinweise auf das beobachtete anti-hierarchische Verhalten der Leuchtkraftfunktion gefunden.

Im zweiten Teil wird ein neues Modell zur Beschreibung von Aktiven Galaxienkernen vorgestellt, das erstmals durchgängig in der Lage ist, den Gastransport von galaktischem Maßstab bis hinab zur Akkretion auf das zentrale Schwarze Loch zu verfolgen. Dies wird durch Kombination eines großskaligen Modells für die Galaxienentwicklung und eines kleinskaligen Modells für die Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben erreicht. Mit diesem Modell werden in ersten Beispielrechnungen bereits vielversprechende Ergebnisse erzielt. So werden mit dem neuen Modell unphysikalische Vorhersagen über das Schwarzwachstum aus älteren Modellen, die noch mit einer parametrisierten Beschreibung der Akkretion arbeiten, hinfällig.

Im letzten Teil wird die Auswirkung einer geänderten Annahme über die Sternentstehungseffizienz in Akkretionsscheiben untersucht. Dabei handelt es sich um die Annahme, dass die Sternentstehung direkt oder indirekt zu einer Fragmentierung der Akkretionsscheiben führt, sowie diese Keplersch selbstgravitierend werden. Dies führt zu einem alternativen Modell über den Ablauf des in einer Aktiven Galaxie stattfindenden Schwarzwachstums. Eine charakteristische Vorhersage dieses Modells sind moderate Werte für den Spinparameter der Schwarzen Löcher.

Abstract

Active Galactic Nuclei and the influence of the cosmological model on the luminosity function

In the first section of this thesis, an Extended Press-Schechter formalism based Monte-Carlo simulation is discussed, in order to generate the merger history of dark matter halos. This simulation is further used to analyse the influence of different cosmological characterisations on the merger history of galaxies, and derived from these results, the luminosity of Active Galactic Nuclei is appraised. During the process it can be shown, that an alteration of the underlying cosmology has major effects on the temporal position and extension of the luminosity function. A strong dependency of the internal structure of the luminosity function with the actual description of the Active Galactic Nuclei's active phase has been clearly stated. Apart from this, the observed anti-hierarchical behaviour of the luminosity function is rudimentarily found.

The subsequent section of the thesis presents a new model for a characterisation of the Active Galactic Nuclei, which is able to track gas transport continuously from galactic scale down to accretion of the central black hole for the first time. This is being realized by the combination of a large scale model for galaxy formation and a smaller one for time development of accretion disks. First calculations with this combined model already show promising results, hence non-physical prognoses about the growth of black holes, made by former models which used parametrisations are eradicated.

In the final part, the impact of a changed assumption about the star formation efficiency in accretion disks is being explored. The underlying assumption here implicates a direct or indirect fragmentation of the accretion disk by the star formation, as soon as Keplerian self gravitation of the accretion disks take place. All these lead to an alternative model for the devolution of black hole growth in an active galaxy. Typical for this model are moderate values for the spin parameter of these black holes.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	1
1.1	Aktive Galaxienkerne	2
1.1.1	Leuchtkraftfunktion	4
1.2	Entwicklung von Schwarzen Löchern	9
2	Semi-analytische Beschreibung der Entwicklung von DM Halomassen	11
2.1	Extended-Press-Schechter-Formalismus	12
2.1.1	Grundprinzip	13
2.1.2	Massenfunktion	14
2.1.3	Mergerraten	17
2.2	Monte-Carlo-Bäume	18
2.2.1	Binary Limit	19
2.2.2	N-Zweige mit Akkretion	21
2.3	Technische Umsetzung	24
2.3.1	Datenstruktur	24
2.3.2	Bestimmung der Zeitschrittlänge	27
2.3.3	„Ziehen“ der Massen und Bestimmung ihrer maximalen Anzahl	28
2.3.4	Numerische Umkehr von Funktionen	29
2.3.5	Gaußsche Zufallszahlen	30
2.3.6	Programmablauf	33
2.4	Vergleich mit EPS	36
2.5	Auswirkung unterschiedlicher Kosmologien	39
2.5.1	Mergerraten	41
2.5.2	Abschätzung zur Leuchtkraftfunktion	47
3	Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben in AGNs	57
3.1	Modellbeschreibung	58
3.2	Grundgleichungen des Entwicklungsmodells	60
3.2.1	Hydrodynamische Grundgleichungen	60
3.2.2	Radiale Impulsgleichung	61
3.2.3	Azimutale Impulsgleichung	63
3.2.4	Entwicklungsgleichungen	64
3.2.5	Viskositätsbeschreibung	64
3.2.6	Zeitskalen	65

3.3	Technische Umsetzung	67
3.3.1	Diskretisierung	67
3.3.2	Randbedingungen	68
3.3.3	Programmablauf	71
4	Kombinierte numerische Simulation von Galaxienverschmelzung und SL-Wachstums	75
4.1	Großskalige Simulation für Galaxienverschmelzungen	76
4.1.1	Parametrisiertes Schwarzwachstum und Feedback	77
4.2	Mehrskalige Simulationen	80
4.2.1	Modifikationen des Zeitentwicklungsmodells	80
4.2.2	Realisierung der Modellkombination	81
4.3	Erste Ergebnisse	83
5	Die Massen- und Spinentwicklung von Schwarzen Löchern in AGNs	87
5.1	Modellvorstellungen	87
5.2	Spinentwicklung	88
5.2.1	Spinausrichtung	88
5.2.2	Spinbetragsänderung	93
5.3	Wachstum der Schwarzwachstum	95
5.4	Akkretionsepisoden	98
5.4.1	Drehimpuls der Akkretionsscheibe	99
5.5	Technische Umsetzung und Tests	102
5.6	Ergebnisse	105
5.6.1	Massen- und Spinbetragsentwicklung	105
5.6.2	Mittlerer Kerrparameter	109
5.6.3	Spinrichtung	112
6	Diskussion und Ausblick	115
A	Herleitung der Friedmann-Gleichung	119
B	Quintessenzparameter und kritische Dichteüberhöhung	121
C	Herleitung des Flächendichteverlaufs für vollständig selbstgravitierende Scheiben	123
D	Rechtfertigung der Modellannahmen für die Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben	125
	Literaturverzeichnis	129
	Danksagung	137

Abbildungsverzeichnis

1.1	Künstlerische Darstellung einer AGN	3
1.2	Leuchtkraftfunktion von AGNs im Bereich von 0.5–2 keV	5
1.3	Leuchtkraftfunktion von AGNs im Bereich von 2–10 keV	5
1.4	Millennium Simulation	6
1.5	Zeitlicher Verlauf einer Galaxienverschmelzung	7
1.6	Centaurus A	8
2.1	Schematische Darstellung eines <i>Mergertrees</i>	11
2.2	k-Raum Filter	15
2.3	Trajektorie $\delta(M)$	17
2.4	Flussdiagramm für Monte-Carlo-Bäume	22
2.5	Baumstruktur	25
2.6	Zeitstrang	27
2.7	Gaußsche Zufallszahlen	32
2.8	Struktur einer Mergergeschichte	36
2.9	Struktur einer Mergergeschichte, (Zoom)	36
2.10	Massenentwicklung während einer Mergergeschichte	37
2.11	Vergleich mit EPS-Formalismus ($M_0 = 5 M_c$)	38
2.12	Vergleich mit EPS-Formalismus ($M_0 = 500 M_c$)	39
2.13	Vergleich mit EPS-Formalismus, unterschiedliche Kosmologien	42
2.14	Häufigkeiten von Major Mergern, $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{1.0; 0.0\}$	43
2.15	Häufigkeiten von Major Mergern, $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$	43
2.16	Vergleich der Verschmelzungshäufigkeiten	44
2.17	Zeitliche Entwicklung von Ω_M und Ω_Λ	45
2.18	Vergleich der Verschmelzungshäufigkeiten, EDE	46
2.19	Zeitliche Entwicklung der kritischen Dichteüberhöhung	47
2.20	Massenentwicklung eines SLs mit Eddington-Limit	50
2.21	t_{eq} vs. τ	52
2.22	Leuchtkraftfunktionen: unterschiedliche Kosmologien	55
3.1	Scheibengeometrie	58
3.2	<i>Staggered grid</i>	68
3.3	Äußere Randbedingung: Anfangsverteilung der Flächendichte	69
3.4	Äußere Randbedingung: anfängliches Strömungsverhalten	70
3.5	Äußere Randbedingung: Zoom auf das anfängliche Strömungsverhalten	70

3.6	Flussdiagramm der Zeitentwicklung	73
4.1	Einfluss des Schwarzwlochfeedbacks auf seine Massenentwicklung	76
4.2	Schwarzwlochfeedback bei isolierten Galaxien	78
4.3	Schwarzwlochfeedback bei verschmelzende Galaxien	78
4.4	SL-Wachstum: Bondi-Hoyle vs. kombiniertem Modell	84
4.5	Schwarzwlochmasse vs. Akkretionsscheibenmasse	85
4.6	Massenzu- und abfluss in bzw. aus der Akkretionsscheibe	85
5.1	Anfangszustand einer Akkretionsphase	89
5.2	Graphische Darstellung der Spinausrichtung	93
5.3	Funktionsverlauf von $\epsilon(a)$	97
5.4	<i>Warped disk</i>	100
5.5	Flussdiagramm, SL-Massen- und Spinentwicklung	103
5.6	Testrechnung 1 zur Simulation der Massen- und Spinentwicklung	104
5.7	Testrechnung 2 zur Simulation der Massen- und Spinentwicklung	104
5.8	Testrechnung 3 zur Simulation der Massen- und Spinentwicklung	105
5.9	Testrechnung 4 zur Simulation der Massen- und Spinentwicklung	105
5.10	Massen- und Spinbetragsentwicklung, $\alpha_2 = 0.03$	106
5.11	r_w vs. r_{KSG}	108
5.12	Massen- und Spinbetragsentwicklung, $\alpha_2 = 1.0$	109
5.13	Spinbetragsverteilung, $\alpha_2 = 0.03$	110
5.14	Spinbetragsverteilung, $\alpha_2 = 1.0$	110
5.15	Funktionsverlauf von $\epsilon(a)$ plus symmetrisierter Form	111
5.16	Entwicklung von $\hat{\mathbf{J}}_{bh}$	113
D.1	$v_r \ll v_\phi$	127

Tabellenverzeichnis

2.1	Eingabewerte der Monte-Carlo-Simulation	34
2.2	Ausgabewerte: Baumstruktur / Zeitstrang	35
2.3	Abhängigkeiten zwischen: \dot{M}_{bh} , τ und ΔM	53
3.1	Eingabewerte des Zeitentwicklungsmodells	71
5.1	Spezifischer Drehimpuls und ISCO für $a = 0, 1, -1$	94
B.1	ω_{de} vs. $1 + z$	121
B.2	δ_{c} vs. $1 + z$	122

1 Motivation

„Die Größenordnung der mittleren Massendichte im Weltraum beträgt ein Sandkorn pro Erdvolumen!“

[Edwin Powell Hubble]

Was der US-amerikanische Astronom Edwin Hubble aber seinerzeit nicht wissen konnte war, dass er mit der Massendichte nur einen kleinen Teil der Gesamtenergiedichte des Weltraums beschrieben hatte. Denn unserer heutigen Auffassung nach teilt sich diese in die folgenden Bestandteile auf: Materie, Strahlung und die sogenannte *Dunkle Energie*. Erstmals theoretisch vorhergesagt wurde sie zwar bereits von Albert Einstein, der sie in seiner Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) in Form der sogenannten *kosmologischen Konstanten* in den Feldgleichungen der ART eingeführt hatte. Die ersten beobachteten Hinweise auf diese neue Energieform lieferte aber erst das 1990 gestartete und nach Hubble selbst benannte Weltraumteleskop, als man bei der Beobachtung ferner Supernovae eine sich beschleunigende kosmische Expansion fand. Von diesen anfänglichen Entdeckungen ausgehend, konnte in den letzten Jahren durch die genauere Vermessung des kosmischen Mikrowellen-Hintergrundes (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, WMAP¹) und mit Hilfe von groß angelegten Himmelsdurchmusterungen (2-degree-Field, 2dF²; Sloan Digital Sky Survey, SDSS³) die Bestimmung der wesentlichen kosmologischen Parameter erheblich verbessert werden. Im Besonderen betrifft dies eben die oben genannte Aufteilung der Gesamtenergiedichte des heutigen Universums auf die einzelnen, dazu beitragenden Bestandteile. So wird der Anteil der Materiedichte an der Gesamtenergiedichte, mit $\Omega_{M,0}$ bezeichnet, mit Hilfe der obigen Messungen zu: $\Omega_{M,0} = 0.30 \pm 0.04$ bestimmt. Der größte Teil hiervon wird dabei durch Dunkle Materie gestellt. Der Anteil an baryonischer Materie $\Omega_{b,0}$, aus der zum Beispiel die Sterne und Planeten aufgebaut sind, fällt hingegen mit einem Anteil von lediglich $\Omega_{b,0} = 0.047 \pm 0.006$ kaum ins Gewicht. Auch der Anteil der Strahlungsdichte $\Omega_{R,0}$ in unserem heutigen Universum ist mit $\Omega_{R,0} = (2.494 \pm 0.007) \times 10^{-5}$ extrem gering. Der Hauptteil der Gesamtenergiedichte, immerhin $70 \pm 0.4\%$, werden durch die Dunkle Energie $\Omega_{\Lambda,0}$ gestellt. Da diese Energieform nicht nur in Bezug auf die Energiedichte dominierend ist, sondern auch bis heute am wenigsten verstanden, werden stets neue Möglichkeiten gesucht mehr über sie zu erfahren. Mögliche beobachtbare Auswirkungen der Dunklen Energie, wie zum Beispiel ihr

¹<http://map.gsfc.nasa.gov/>

²<http://magnum.anu.edu.au/TDFgg/>

³<http://www.sdss.org/>

Einfluss auf die Strukturbildung im Universum, liegen dabei immer auf kosmologischem Maßstab. Um theoretische Vorhersagen bezüglich dieser Auswirkungen überprüfen und somit Rückschlüsse auf die Natur der Dunklen Energie gewinnen zu können, müssen also Beobachtungen auf kosmologischem Maßstab verwendet werden. Dazu werden Beobachtungsgrößen benötigt, die über einen möglichst weiten Teil der Entwicklung des Universums zugänglich sind. Als eine solche Beobachtungsgröße bietet sich aufgrund ihrer extrem hohen Werte von bis zu 10^{47} erg/s die Leuchtkraft von sogenannten *Aktiven Galaxiekernen* (AGN) an, die damit ungefähr 10^{14} Sonnenleuchtkräften entspricht. Aufgrund dieser enormen Leuchtkraft können diese Objekte weit zurück in die Entwicklungsgeschichte des Universums beobachtet werden bis zu Rotverschiebungen von $z \approx 6$, was einem Alter des Universums von weniger als einer Milliarde Jahren entspricht. Die Objekte mit aktuell höchster Rotverschiebung aus dieser Klasse stellen der von Fan et al. (2003) entdeckte Quasar SDSS J1148+5251 bei $z = 6.42$ und der von Willott et al. (2007) im Rahmen des Canada-France High- z Quasar Surveys (CFHQS) beobachtete Quasar CFHQS J2329-0301 bei $z = 6.43$ dar. Diese Objekte liefern also eine Beobachtungsgröße, die auf Einflüsse der Dunklen Energie hin untersucht werden können. Sie werfen aber gleichzeitig selbst neue Fragen auf, so zum Beispiel nach dem physikalischen Prozess, der diese Leuchtkräfte hervorbringt, oder nach dem Mechanismus ihrer Entstehung selbst, besonders unter Berücksichtigung der relativ kurzen dafür zur Verfügung stehenden Zeitspannen. Es handelt sich bei ihnen also sowohl um intrinsisch interessante Objekte, als auch um vielversprechende Tracer zur weiteren Erforschung der Dunklen Energie.

1.1 Aktive Galaxienkerne

Bei Aktiven Galaxienkernen handelt es sich um einen Oberbegriff für eine Objektklasse, zu der neben den oben erwähnten Quasaren unter anderem auch die Seyfert-Galaxien (Typ I und II), BL Lac-Objekte oder Blazare zählen. Auch wenn sich die Spektren dieser Objekte zum Teil erheblich voneinander unterscheiden, was historisch zu den einzelnen Untergruppen geführt hat, so glaubt man heute, dass es sich bei all diesen Objekten nur um verschiedene Erscheinungsformen ein und desselben Objekttyps handelt. Die unterschiedlichen Erscheinungsformen können dabei wie im Fall von Seyfert-Galaxien des Typs I und II als ein Projektionseffekt erklärt oder wie im Fall von BL Lac-Objekten gegenüber Seyfert-Galaxien darauf zurückgeführt werden, dass sie in unterschiedlichen Arten von Galaxien beheimatet sind. Der zentrale Bestandteil all dieser Objekte aber stellt ein Supermassereiches Schwarzes Loch (SMBH) dar, das über sein Wachstum direkt mit der Erzeugung der enormen Leuchtkräfte verbunden ist. Dabei werden sowohl die Verschmelzung mit anderen Schwarzen Löchern, als auch das „Verschlucken“ von Sternen sowie die Akkretion von interstellarer Materie als mögliche Wachstumsprozesse diskutiert. All diesen Prozessen ist dabei gemein, dass sie für einen effektiven Ablauf eine gravitative Wechselwirkung oder besser eine Verschmelzung zwischen Galaxien benötigen. Im ersten Fall ist dies offensichtlich, da ja erst die Verschmelzung mit weiteren

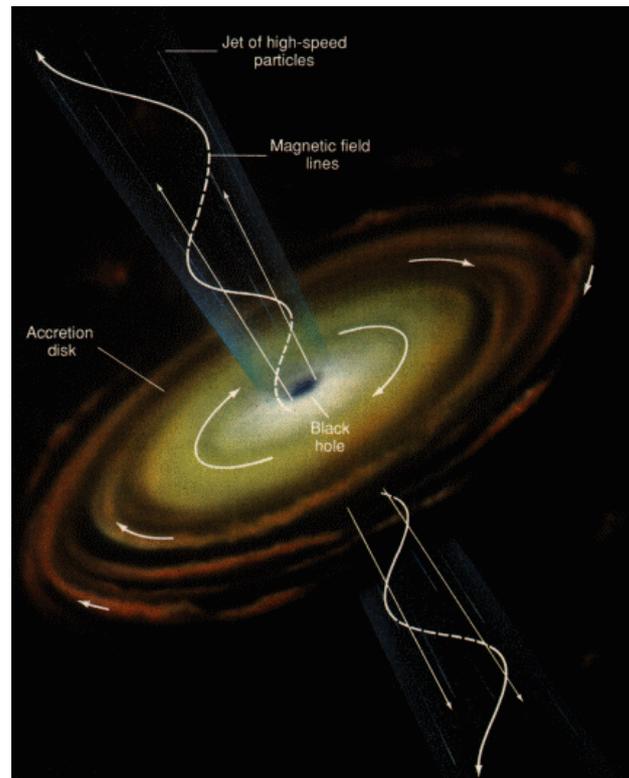


Abbildung 1.1: Künstlerische Darstellung, die die wesentlichen Elemente einer AGN in Bezug auf den Energieerzeugungsmechanismus, nämlich die Akkretionsscheibe und das zentrale Schwarze Loch, enthält. Außerdem sind noch die bei manchen AGNs vorhandenen Jetkomponenten mit aufgenommen. [Southernmaine Astronomers⁴]

Galaxien neue SMBHs einbringt, mit denen eine Verschmelzung stattfinden kann. Im zweiten Fall führt die Wechselwirkung auf Galaxienebene zu einer starken Störung des Gravitationspotentials und somit auch zu einer Störung der Sternorbitale, was wiederum zu erhöhter Gezeitenzerstörung und anschließender Akkretion von Sternen durch das SMBH führt. Im dritten Fall führen gravitative Drehmomente, die durch Wechselwirkungen und Verschmelzungen von Galaxien effektiv hervorgerufen werden, zu einem hohen Masseneinstrom von interstellarem Material in die Zentren von Galaxien, das dann zur Akkretion zur Verfügung steht. Auch wenn sicher alle drei Prozesse während einer Galaxienverschmelzung gleichzeitig ablaufen, so scheint doch die dritte Methode, die Akkretion, für das Wachstum der SMBH am wichtigsten. Insofern sind für die Erzeugung der Leuchtkraft das zentrale Schwarze Loch (SL) und die es umgebende Akkretionsscheibe die wichtigsten Komponenten des in Abbildung 1.1 dargestellten schematischen Aufbaus von AGNs. Denn die bei der Akkretion auf das Schwarze Loch freigesetzte potentielle Energie der Materie ist der Ursprung der enormen Leuchtkräfte der AGNs. Der Prozess

⁴<http://www.southernmaineastronomers.org/HTML/MeetingSchedule.html>

der Akkretion ist dabei in Bezug auf Energiegewinnung weitaus effektiver als die nukleare Energieerzeugung durch Verschmelzung von Wasserstoff zu Helium, die als Quelle der meisten leuchtenden Objekte im Universum dient. Um die extrem hohen Leuchtkräfte der AGNs aber aufrecht halten zu können, müssen trotz der Effektivität der Akkretion große Mengen an Material in die Zentren der entsprechenden Galaxien als „Treibstoff“ transportiert werden. Ein solcher Transport kann aber weder mit viskoser Reibung, die auf galaktischen Maßstäben nicht effektiv genug ist, noch mit kleinskaligen Galaxienbalken, die aktuelle Beobachtungen als treibenden Mechanismus ausschließen, erklärt werden. Deshalb werden die oben erwähnten gravitativen Drehmomente als wesentlicher Prozess angesehen, der für einen ausreichend hohen Masseneinstrom in die Zentren von Galaxien sorgt und dort die Möglichkeit der Ausbildung von Aktiven Galaxienkernen gewährt. Da diese gravitativen Drehmomente aber am effektivsten durch gravitative Wechselwirkungen und Verschmelzungen von Galaxien hervorgerufen werden, werden diese Ereignisse als Auslöser für AGN-Phasen angesehen. Beobachtungen von Moles et al. (1995), die AGNs bevorzugt in wechselwirkenden oder verschmelzenden Galaxien gefunden haben, bestärken diese Sichtweise.

1.1.1 Leuchtkraftfunktion

Wie oben bereits erwähnt, stellt die Leuchtkraft der AGNs beziehungsweise die mittels einer Himmelsdurchmusterung erhältliche Leuchtkraftfunktion eine interessante Beobachtungsgröße dar. Die Leuchtkraftfunktion stellt dabei ein Maß dafür dar, wieviele AGNs welcher Leuchtkraft zu welchen Zeiten der kosmologischen Entwicklung zu beobachten sind. Die Abbildungen 1.2 und 1.3 zeigen zwei Messungen einer solchen Leuchtkraftfunktion von Hasinger et al. (2005) bei 0.5–2 keV beziehungsweise von Ueda et al. (2003) bei 2–10 keV, also im weichen, respektive harten Röntgenbereich. Das erstaunliche an diesen Messungen ist, dass sie ein sogenanntes *anti-hierarchisches* Verhalten der AGNs aufzeigen. Das heißt, leuchtkräftigere AGNs weisen ein Maximum in ihrer Verteilung bei höheren Werten für die Rotverschiebung z und damit früher in der Entwicklung des Universums auf als leuchtschwächere. Dies scheint zunächst einem hierarchischen Aufbau des Universums, wie er zur Zeit allgemein angenommen wird, zu widersprechen. In einem solchen hierarchischen Universum bilden sich zuerst massearme und damit auch leuchtschwächere Strukturen. Erst aus ihrem sukzessiven Verschmelzen bilden sich dann nach und nach massereichere, leuchtkräftigere Strukturen. Um das beobachtete Verhalten verstehen zu können, scheint also ein detailliertes Wissen über die Entstehung der Leuchtkraftfunktion notwendig zu sein. Dabei sind für ihren Aufbau zwei Fragen wesentlich: erstens, zu welcher Zeit in der Entwicklung des Universums gab es wieviele und welche AGNs und welche Auswirkung haben unterschiedliche Annahmen über die gültige Kosmologie, also zum Beispiel über das Wesen der Dunklen Energie, auf diese Verteilung. Zweitens, wie läuft eine solche Aktivitätsphase im Detail ab, besonders unter Berücksichtigung der die Leuchtkraft erzeugenden Prozesse. Um diesen Fragen nachgehen zu können, kann mittels Modellierung der Leuchtkraftfunktion von AGNs das diesen Modellen

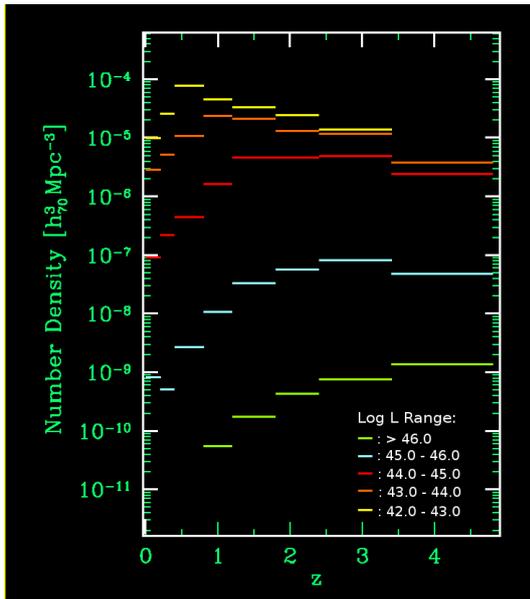


Abbildung 1.2: Räumliche Anzahldichte der AGNs gegenüber der Rotverschiebung z . Dabei entsprechen die unterschiedlichen Farben von gelb bis grün unterschiedlichen Röntgenleuchtkräften bei 0.5–2 keV. [nach Hasinger et al. (2005)]

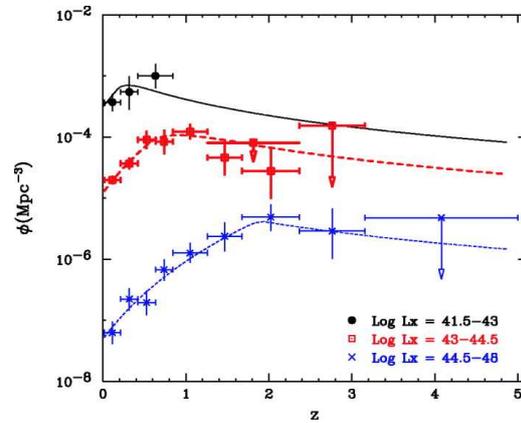


Abbildung 1.3: Räumliche Anzahldichte von AGNs gegenüber der Rotverschiebung z . Die Farbkodierung von schwarz bis blau steht für unterschiedliche Röntgenleuchtkräfte bei 2–10 keV. [Ueda et al. (2003)]

zugrunde liegende Verständnis über das Auftreten und den Ablauf von AGNs überprüft und erweitert werden. Dabei werden zur Modellierung von AGN-Leuchtkraftfunktion folgende Komponenten benötigt:

Verschmelzungswahrscheinlichkeiten der Galaxien

Da die Verschmelzung von Galaxien als der auslösende Prozess für eine AGN verstanden wird, ist es für die Bestimmung der Leuchtkraftfunktion notwendig, die Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse zu kennen. Diese Wahrscheinlichkeiten entsprechen dabei denjenigen für die Verschmelzung der Dunkle Materie Halos in denen die Galaxien beheimatet sind. Damit wird die Frage nach der Häufigkeit und der zeitlichen Verteilung der Galaxienverschmelzungen zu einer Frage nach der Strukturbildung im Universum. Abbildung 1.4 zeigt das Ergebnis einer möglichen Herangehensweise an diese Fragestellung. Genauer stellt sie einen mehrfachen Zoom auf einen Ausschnitt aus der sogenannten *Millennium Simulation* dar. Dabei handelt es sich um eine Nbody-Simulation der Strukturbildung im Universum, die die Entwicklung der Dichteverteilung der Dunklen Materie in einem Kubus mit einer Kantenlänge von circa 500 Mpc/h mittels ihrer Repräsentation durch circa 10^{10} Teilchen verfolgt. Auch wenn diese Art der Simulation der Strukturbildung und nicht zuletzt die *Millennium Simulation* sowie ihr Nachfolger *Millennium Simulation II*

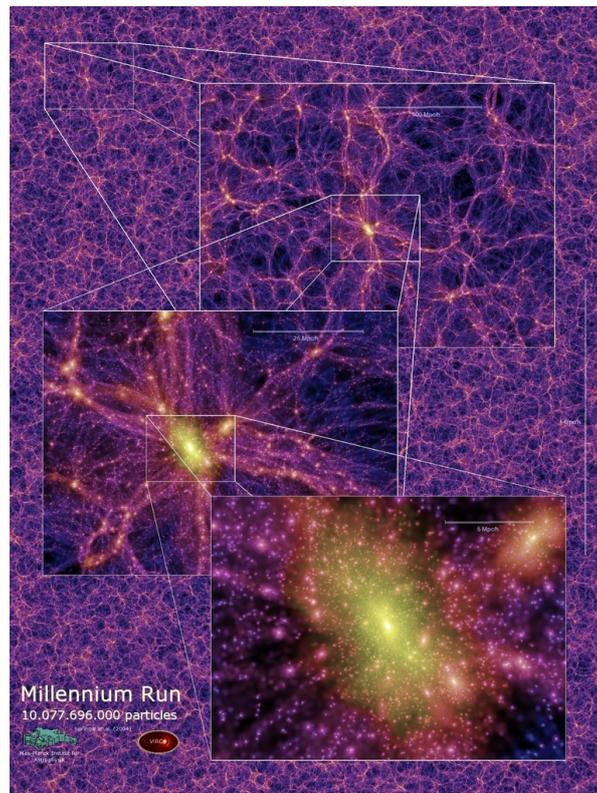


Abbildung 1.4: Projektion der Dichteverteilung der Dunklen Materie eines 15 Mpc/h dicken Schnittes für die Ergebnisse der Millennium Simulation zum Zeitpunkt $z = 0$. Die zusätzlich abgebildeten Zoomschritte entsprechen jeweils einer Vergrößerung um den Faktor vier. [Millennium Simulation]

selbst große Beiträge zum Verständnis bezüglich der Strukturbildung geleistet haben, sind sie doch aufgrund des mit ihnen verbundenen enormen Aufwandes (ca. 350 000 Prozessorstunden) nicht für die obige Fragestellung geeignet. Denn um den Einfluss unterschiedlicher Kosmologien oder allgemein von Änderungen in den Modellvorstellungen studieren zu können, sind Parameterstudien unerlässlich. Diese sind aber mit so aufwendigen Simulationen wie der oben dargestellten nicht realisierbar. Deshalb wird in Kapitel 2 eine andere Herangehensweise für dieses Problem vorgestellt, die die Möglichkeit bietet, Auswirkungen geänderter kosmologischer Modelle und dabei insbesondere die Auswirkung einer *frühen Dunklen Energie* auf die Verschmelzungswahrscheinlichkeiten der Galaxien zu untersuchen.

Ablauf der Galaxienwechselwirkungen

Zur Beantwortung der zweiten Frage nach dem detaillierten Ablauf einer AGN muss zunächst die großräumige Verschmelzung der Galaxien betrachtet werden. Die in seinem Verlauf auftretenden gravitativen Drehmomente wurden ja als der wesentliche Prozess

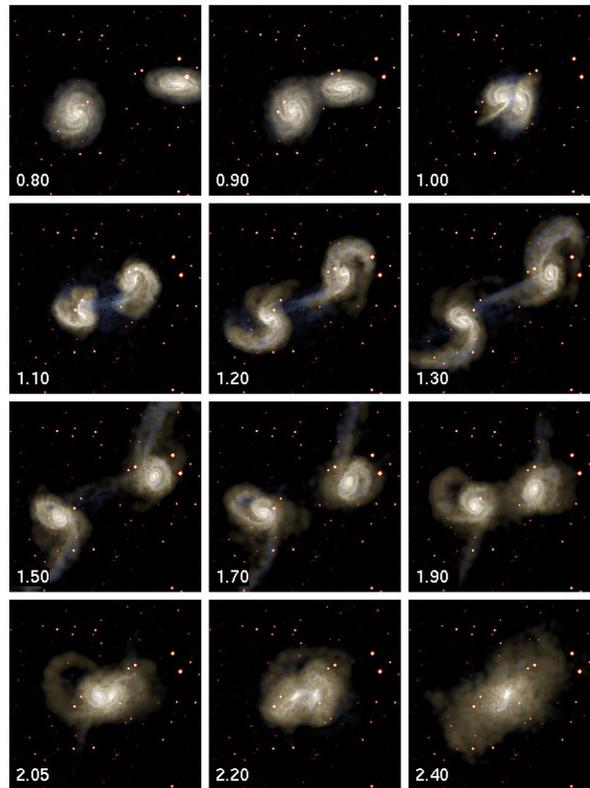


Abbildung 1.5: Typisches Beispiel für die Zeitentwicklung einer simulierten Galaxienverschmelzung. In dem dargestellten Fall verschmelzen zwei gleiche Galaxien unter ihrer gegenseitigen Schwerkraft miteinander. Die Zahlen in den einzelnen Bildern geben die Zeit in Milliarden Jahren seit dem Start der Simulation an. [Springel (1999)]

für den damit einhergehenden Einfall von interstellarem Material in das Zentrum des neu entstehenden Stoßproduktes eingeführt. Die Ergebnisse einer Computersimulation eines solchen Verschmelzungsvorgangs von Springel (1999) sind in Abbildung 1.5 dargestellt. Dabei zeigen die einzelnen Bilder Zeitpunkte zwischen 0.8 und 2.4 Ga nach Rechenbeginn. Diese Betrachtungen über den großskaligen Masseneinstrom in die Zentren der Verschmelzungsprodukte können allerdings nicht losgelöst von den sich daran anschließenden Akkretionsprozessen auf das zentrale Schwarze Loch, den die AGN definierenden Vorgang, betrachtet werden. Dies liegt an den diese beiden Prozesse verbindenden Feedbackeffekten des akkretierenden Schwarzen Lochs auf seine umgebende Galaxie, siehe hierzu Johansson et al. (2009). Dass es, die Zentren von AGNs mit ihren Heimatgalaxien verbindende Prozesse geben muss, wird auch durch die zwischen ihnen bestehende $M_{\text{bh}}-\sigma$ Korrelation (Ferrarese & Merritt, 2000; Gebhardt et al., 2000; Tremaine et al., 2002) oder die $M_{\text{bh}}-M_{\text{bulge}}$ Korrelation (Magorrian et al., 1998; Marconi & Hunt, 2003; Häring & Rix, 2004) sichtbar. Diese Korrelationen stellen Beziehungen zwischen der Schwarzslochmasse M_{bh} und der Geschwindigkeitsdispersion im galaktischen Bulge σ beziehungsweise der

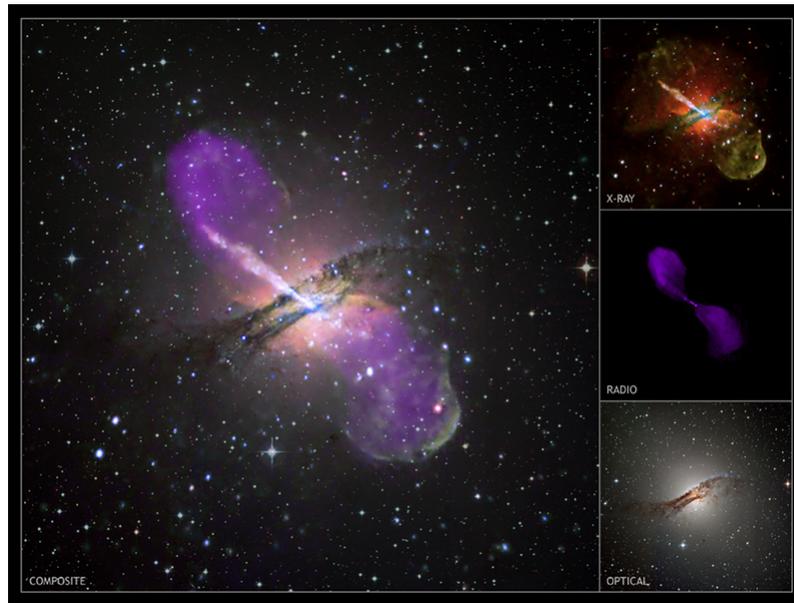


Abbildung 1.6: Rechts: Drei Einzelaufnahmen von Centaurus A und zwar von oben nach unten, im Röntgen-, Radio- und optischen Frequenzbereich. Links: Kombiniertes Bild dieser Einzelaufnahmen. Bei Centaurus A handelt es sich mit einem Abstand von circa 11×10^6 Lichtjahren um die uns am nächsten gelegene AGN. [Astronomy Picture of the Day (10. Januar 2008)]

Bulgemasse M_{bulge} her. Ein erster erfolgreicher „prove of concept“ für ein Modell, das selbstkonsistent sowohl die Verschmelzung von Galaxien als auch den dadurch hervorgerufenen Akkretionsprozess auf das zentrale Schwarze Loch des AGNs beschreiben kann, wird in Kapitel 4 vorgestellt.

Ablauf der Akkretion als energieerzeugender Prozess

Der sich an den großskaligen Einstrom von Materie in die AGN anschließende Prozess ist die Akkretion dieses Materials durch eine Akkretionsscheibe. Der wesentliche in einer solchen Scheibe ablaufende Prozess ist die Trennung von Drehimpuls und Materie. Dabei wird wenig Materie mit viel Drehimpuls zu größeren Radien transportiert, um so viel Materie, die jetzt einen geringeren Drehimpuls aufweist, einen weiteren Einfall ins Zentrum zu ermöglichen. Wie oben bereits erwähnt, hat dieser Prozess über die Freisetzung der potentiellen Energie der akkretierten Materie die Erzeugung enormer Energiemengen zur Folge, die zu einer Aufheizung der Akkretionsscheibe und schließlich bei ihrer Kühlung direkt oder indirekt zu den hohen Leuchtkräften der AGN führt. Die Abbildung 1.6 zeigt mehrere Aufnahmen von *Centaurus A*, des uns am nächsten gelegenen AGN. Dabei stellen die kleinen Bilder einzelne Aufnahmen in unterschiedlichen Wellenlängenbereichen und die große Abbildung ihre Kombination dar. Das untere der kleinen Bilder zeigt dabei eine Aufnahme im Optischen. In diesem Spektralbereich dominiert die direkte ther-

mische Abstrahlung der Akkretionsscheibe. Für die Erzeugung der Leuchtkräfte in den beiden anderen beobachteten Spektralbereichen (Oben: Röntgen-, Mitte: Radiobeobachtungen) sind, außer zum Teil im weichen Röntgenbereich, nichtthermische Effekte wie der Synchrotroneffekt oder die inverse Comptonstreuung verantwortlich. Aber auch die dabei freigesetzten Energien speisen sich indirekt aus der umgesetzten potentiellen Energie. Generell gilt, dass der Großteil der Leuchtkraft ($\geq 90\%$) in einem spektralen Bereich von 3 nm – $300\text{ }\mu\text{m}$, in dem die thermische Abstrahlung dominiert, freigesetzt wird. In Kapitel 3 wird ein Modell für Akkretionsscheiben beschrieben, das deren zeitlicher Entwicklung folgen kann und somit dem Masseneinstrom auf das zentrale Schwarze Loch und damit schließlich der Energieerzeugung in AGNs. Dieses Modell wird auch in Kapitel 4 für das dort angestrebte kombinierte Modell der Galaxienverschmelzung und der Akkretion des Zentralobjektes verwendet.

1.2 Entwicklung von Schwarzen Löchern

Auch wenn feststehen dürfte, dass das Wachstum der zentralen Schwarzen Löcher in AGNs im wesentlichen durch Akkretion von interstellarer Materie vonstatten geht und, dass diese Akkretion mittels einer Scheibe stattfindet, was sich direkt aus der Tatsache der Erhaltung des Drehimpulses ergibt, so bleiben doch noch viele Fragen über die Details dieses Vorgangs offen. Und diese Details über die Gestalt oder den exakten Mechanismus des viskosen Transports in der Scheibe werden Auswirkungen haben auf den genauen Ablauf der Aktivitätsphasen. So ist zum Beispiel die Frage nicht endgültig geklärt, über welche räumliche Ausdehnung hinweg ein viskoser Transport den Masseneinstrom auf das Zentrum gewährleisten kann. Dieser ist in Bezug auf die Zeitskalen zwar bereits ab circa 100 pc möglich und könnte somit direkt das durch die gravitativen Drehmomente bis dorthin gebrachte Material weitertransportieren, aber dazu muss sich eine Akkretionsscheibe auch über diese Ausdehnung als durchgängig erweisen. Dies bedeutet insbesondere, dass sie über weite Teile als selbstgravitierende Scheibe bestehen können muss. Um dabei trotzdem als zusammenhängendes Objekt existieren zu können, dürfen die Sternentstehungsrate und die mit ihr verbundenen Feedbackeffekte der Sterne, wie zum Beispiel Supernovae Ausbrüche, auf die Scheibe nicht zu groß werden, da dies sonst zu einer Fragmentierung der Scheibe und damit zu einem Unterbrechen des Akkretionsflusses führen würde. Eine solche moderate Sternentstehungsrate liegt der in Kapitel 3 verwendeten Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Akkretionsscheibe zugrunde. Allerdings ist einzuräumen, dass die dabei verwendeten Annahmen von bisherigen Beobachtungen noch nicht einwandfrei bewiesen werden konnten. Deshalb werden in Kapitel 5 auch die Auswirkungen untersucht, die sich als Folge der gegenteiligen Annahme ergeben würden, nämlich bei Fragmentieren der Scheiben als Reaktion auf Selbstgravitation. Das besondere Augenmerk der Betrachtungen in diesem Kapitel liegt dabei auf den daraus folgenden Auswirkungen auf die Entwicklung des Schwarzen Lochs selbst.

2 Semi-analytische Beschreibung der Entwicklung von DM Halomassen

Unsere heutige Vorstellung in Bezug auf die Strukturbildung im Universum geht davon aus, dass Strukturen in hierarchischer Weise, vom Kleinen zum Großen hin, entstanden sind. Dieser Vorstellung liegt die Annahme zu Grunde, dass die ersten Strukturen eine direkte Folge von kleinen, möglicherweise durch Quantenfluktuationen hervorgerufenen, Störungen in der Homogenität der Dichte sind. Diese sogenannten *Gaußschen Dichtefluktuationen* wurden dann in einer inflationären Phase ausgedehnt. In den gängigsten kosmologischen Modellen, wie dem *cold dark matter* (CDM) oder verwandten Modellen, nimmt die Amplitude dieser Fluktuationen mit größer werdenden Skalen ab. Das führt dazu, dass als erstes in kleinskaligen Gebieten die Eigengravitation den Druck der Expansion überwindet und gebundene virialisierte Strukturen bildet. Diese massearmen Strukturen bauen dann durch sukzessives Verschmelzen immer massereichere Strukturen auf. Das Schema dieser Strukturbildung wird in Abbildung 2.1 dargestellt. Die gravita-

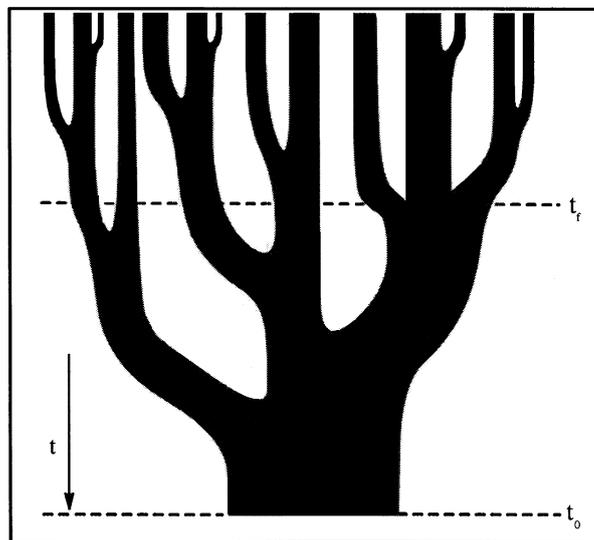


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung der zeitlichen Massenentwicklung gebundener, virialisierter Gebiete in einem hierarchischen Universum. Im Rahmen eines solchen Modells wird angenommen, dass sich aus massearmen Strukturen (schmale Äste) durch sukzessives Verschmelzen in Form eines sogenannten *Mergertrees* nach und nach massereichere Strukturen (breite Äste) bilden.

tiv gebundenen, in Bezug auf ihre Umgebung überdichten Regionen stellen Gebiete dar, in denen Galaxienentstehung auftritt. Umgekehrt können Galaxien auch als Tracer für diese Regionen verwendet werden. Ihre Entwicklung kann im Rahmen von N-body Simulationen untersucht werden. Ein prominenter Vertreter dieser Art von Simulationen ist die *Millennium Simulation* (Springel et al., 2005b). Ein allgemeines Problem für N-body Simulationen stellt der enorme Massenbereich der gleichzeitig aufzulösenden Objekte dar; von Zwerggalaxien mit circa $10^9 M_{\odot}$ bis hin zu Galaxienhaufen mit circa $10^{15} M_{\odot}$ (dies gilt auch für die oben erwähnte *Millennium Simulation*). Die damit verbundenen Anforderungen an die Rechnerleistung machen darüber hinaus eine großangelegte Parameterstudie zumindest zur Zeit noch unmöglich. Deshalb ist es wichtig, noch auf anderem Wege die Strukturentwicklung zu untersuchen. Ein solcher alternativer Untersuchungsansatz wird in Abschnitt 2.1 vorgestellt. Abschnitt 2.2 stellt dar, wie daraus beispielhafte Entwicklungsgeschichten, sowie die relevanten Mittelwerte gewonnen werden können. Danach wird in Abschnitt 2.3 auf Details bei der technischen Umsetzung eingegangen, anschließend wird in Abschnitt 2.4 das Verfahren getestet, bevor in Abschnitt 2.5 auf die Auswirkung unterschiedlicher den Betrachtungen zugrunde liegenden Kosmologien eingegangen wird.

2.1 Extended-Press-Schechter-Formalismus

Eine Methode, die Massenentwicklung gravitativ gebundener, virialisierter Gebiete (Halos) zu verfolgen, wurde von Press & Schechter (1974) vorgestellt. Ihr semi-analytisches Modell beschreibt den Aufbau massereicher Halos aus hierarchischem, dissipationslosem Verschmelzen masseärmerer Halos und ist für ein Universum mit anfänglichen Dichtefluktuationen in Form eines Gaußschen Zufallfeldes gedacht. In seiner ursprünglichen Form war dieses Modell darauf ausgelegt, die Anzahldichte von Halos einer gewissen Masse in Abhängigkeit der Zeit, dargestellt durch die Rotverschiebung z , zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnung wurden mit denen aus N-body Simulationen verglichen (Efstathiou et al., 1988; Lacey & Cole, 1994; Gross et al., 1998, etc.) und zeigen eine gute Übereinstimmung. Das Modell von Press & Schechter (1974) wurde später dahingehend erweitert, dass es die Wahrscheinlichkeiten für ein Testteilchen in einem Halo einer Rotverschiebung z_0 und Masse M_0 angibt, das zu einem früheren Zeitpunkt z_1 in einem Halo mit kleinerer Masse M_1 eingebunden war (Bond et al., 1991; Bower, 1991). Dies führt zu einem Ausdruck für die abhängige Massenfunktion. Das ursprüngliche Modell kann auch dahingehend erweitert werden, dass es die Lebenszeiten, Entstehungszeiten sowie die Mergerraten für Halos bestimmen kann (Lacey & Cole, 1993). Im nachfolgenden Abschnitt soll nun das Grundprinzip des ursprünglichen Modells, zusammen mit den für diese Arbeit relevanten Erweiterungen, vorgestellt werden.

2.1.1 Grundprinzip

Entscheidend für die Beantwortung der Frage, wann ein Gebiet unter der Einwirkung seiner Eigengravitation kollabiert, ist die Entwicklung seiner relativen Dichteüberhöhung δ , definiert als Quotient der absoluten Dichteüberhöhung $\Delta\rho$ und der mittleren Dichte ρ :

$$\delta = \frac{\Delta\rho}{\rho}. \quad (2.1)$$

Solange diese relative Dichteüberhöhung klein gegen Eins ist, folgt ihre Entwicklung folgender Relation aus der linearen Entwicklungstheorie:

$$\delta(x, t) = \delta(x, t_0) \frac{D(t)}{D(t_0)} \quad \text{für: } \delta \ll 1. \quad (2.2)$$

Dabei steht $D(t)$ für den linearen Wachstumsfaktor der Dichteüberhöhung und x für eine mitbewegte Raumkoordinate. Diese Beziehung gibt die Entwicklung der Dichteüberhöhung eines Gebietes an, solange sich $\delta(x, t)$ nicht Eins annähert. Ab dann werden nicht-lineare Effekte relevant, die zum Kollaps des Gebietes und damit zum Entstehen eines virialisierten Halos führen. Für den Zeitpunkt des Kollapses kann eine kritische relative Dichteüberhöhung δ_c abgeschätzt werden, indem die lineare Entwicklung eines einzelnen, isolierten Halos betrachtet wird.

Auch wenn aus physikalischer Sicht die zeitliche Entwicklung in den sich aufbauenden relativen Dichteüberhöhungen steckt, ist es für die numerische Behandlung praktischer, sie von ihnen zu lösen und der kritischen relativen Dichteüberhöhung zuzuschreiben. Dazu wird die relative Dichteüberhöhung auf einen beliebigen Zeitpunkt t_0 festgelegt: $\delta_0(x) = \delta(x, t_0)$ und die Zeitentwicklung wird in die Abweichung der kritischen relativen Dichteüberhöhung $\delta_{0,c}(t)$ von ihrem Wert bei $t = t_0$ geschoben. Damit wird sich der kritische Wert mit fortschreitender Zeit absenken, analog zu den sich aufbauenden Dichteüberhöhungen. Mit Hilfe dieser Betrachtungsweise kann jetzt zu einem beliebigen Zeitpunkt t festgestellt werden, welche Gebiete bereits kollabiert sind, indem überprüft wird, ob die Aussage $\delta_0(x) > \delta_{0,c}(t)$ gilt. In der weiteren Betrachtung wird die Indizierung mit 0 weggelassen. Die scheinbare Zeitentwicklung für δ_c wird in Lacey & Cole (1993) durch:

$$\begin{aligned} \delta_c(t) &= \frac{3}{2} D(t_0) \left[1 + \left(\frac{t_\Omega}{t} \right)^{2/3} \right] & (\Omega < 1) \\ &= \frac{2(12\pi)^{2/3}}{20} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2/3} & (\Omega = 1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

beschrieben. Dabei gilt $t_\Omega = \pi H^{-1} \Omega (1 - \Omega)^{-3/2}$. Desweiteren steht H für die Hubblekonstante und Ω für den kosmologischen Dichteparameter. Diese Beschreibung gilt für hierarchische Kosmologien mit *kalter Dunkler Materie* (CDM) wie zum Beispiel den Modellen in Efstathiou et al. (1992).

Die Grundidee der hier beschriebenen Methode liegt darin die Massenentwicklung von Halos um Testteilchen zu betrachten. Wichtig ist dabei die Zuordnungsvorschrift des

Halos, in dem sich ein Testteilchen befindet. Dazu wird um ein Testteilchen eine Sphäre gelegt und die mittlere relative Dichteüberhöhung innerhalb der Sphäre berechnet. Nun wird die Sphäre sukzessive vergrößert und erneut die mittlere Überdichte bestimmt. Der sich hieraus ergebenden Verlauf kann mittels der Trajektorie,

$$\delta(M, x) = \left\langle \frac{\Delta\rho}{\rho} \right\rangle_M \quad (2.4)$$

dargestellt werden. Einem Testteilchen am Ort x zum Zeitpunkt t wird nun diejenige Halomasse zugeordnet, bei der ihre Trajektorie zum letztenmal den aktuell kritischen Wert von $\delta_c(t)$ überschreitet. Auf diese Art und Weise wird sichergestellt, dass dem Testteilchen die Masse der größten gravitativ gebundenen Sphäre zugeordnet wird, die es umgibt. Dies klärt auch das sogenannte *cloud-in-cloud* Problem (Bardeen et al., 1986; Peacock & Heavens, 1990), das entsteht, wenn nicht sichergestellt werden kann, dass ein Halo nicht selbst Teil eines noch größeren Halos ist.

2.1.2 Massenfunktion

Um aus der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen Zuordnungsvorschrift eine Aussage über die Massenfunktion der dabei zugeordneten Halos zu gewinnen, betrachtet man die Fouriertransformation des Dichtefeldes:

$$\delta(x) = \sum_k \delta_k \exp(ik \cdot x). \quad (2.5)$$

Das Besondere hierbei ist, dass unter der oben gemachten Annahme eines Gaußschen Zufallsfeldes die einzelnen Fourierkomponenten δ_k unabhängige Zufallszahlen sind. Für die Zuordnung selbst ist die oben beschriebene Mittelung über eine Sphäre um das Testteilchen nötig. Mathematisch wird dies durch eine Faltung mit einer sogenannten *window-function* W bewerkstelligt. Die Funktion $W_M(r)$ ist sphärisch symmetrisch und auf einen Radius r derart beschränkt, dass die sich in diesem Radius eingeschlossene Masse zu M ergibt. Angewandt auf das Dichtefeld $\delta(x)$ um den Ort x ergibt sich hieraus die Trajektorie $\delta(M, x)$. Die zugehörige Fourierdarstellung lautet:

$$\begin{aligned} \delta(M, x) &= \int W_M(|x - y|) \delta(y) d^3y \\ &= \sum_k \delta_k \hat{W}_M(k) \exp(ik \cdot x), \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit $\hat{W}_M(k)$ als der Fouriertransformierten der räumlichen *window-function* $W_M(r)$,

$$\hat{W}_M(k) = \int W_M(x) \exp(-ik \cdot x) d^3x. \quad (2.7)$$

Die exakte Wahl der Form der *window-function* lässt eine gewisse Freiheit zu, aber physikalisch sinnvollerweise ist sie innerhalb von r nahe Eins und geht außerhalb davon schnell

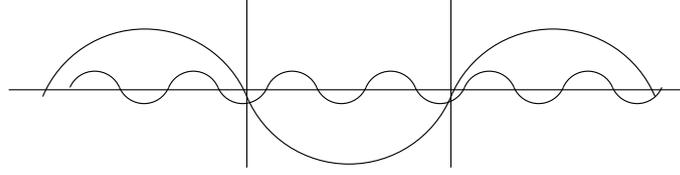


Abbildung 2.2: Moden mit Wellenzahlen größer der kritischen, und damit Wellenlängen kleiner der Ausdehnung der zu mittelnden Sphäre, leisten bei einer Mittelung über den betrachteten Raum keinen effektiven Beitrag und werden deshalb durch die k -Raum Filterung unterdrückt.

gegen Null. Eine naheliegende Form wäre also eine Stufenfunktion bei r . Eine andere mögliche Wahl ist eine sogenannte *scharfe k -Raum Filterung*:

$$\hat{W}_M(k) = \begin{cases} 1 & k < k_{\text{crit}}(M) \\ 0 & k > k_{\text{crit}}(M) \end{cases}, \quad k_{\text{crit}} \approx \frac{1}{r} \propto M^{-1/3} \quad (2.8)$$

was einer Stufenfunktion im k -Raum entspricht. Dabei werden die Beiträge aller Moden mit einer Wellenzahl kleiner einer kritischen Wellenzahl voll berücksichtigt und die mit größerer Wellenzahl unterdrückt. Die dieser Form der *window-function* zugrundeliegenden Idee ist in Abbildung 2.2 skizziert. In der Abbildung sind nicht die Wellenzahlen, sondern die zugehörigen Wellenlängen skizziert, die unterdrückten Wellenzahlen werden hier durch Wellenlängen dargestellt, die kleiner sind als eine kritische Wellenlänge, die der Ausdehnung der zu mittelnden Sphäre entspricht. Daraus wird ersichtlich, dass ihr Beitrag mit sinkender Wellenlänge bei einer Mittelung über diesen Bereich immer unbedeutender wird. Der Vorteil, den diese Wahl der *window-function* mit sich bringt, wird besonders klar, wenn für die Massenskala eine neue Größe eingeführt wird. Diese Größe $S(M)$ ist die Varianz des Dichtefeldes, gefaltet mit der *window-function* $\hat{W}_M(k)$ über eine Sphäre mit Masseninhalt M :

$$\begin{aligned} S(M) = \sigma^2(M) &= \langle |\delta(M, x)|^2 \rangle \\ &= \sum_k \langle |\delta(k)|^2 \rangle \hat{W}_M(k). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Größe $|\delta(M, x)|^2$ wird dabei über unterschiedliche Orte x , oder gleichbedeutend über unterschiedliche Realisierungen des Dichtefeldes $\delta(x)$, gemittelt. $S(M)$ ist damit eine mit steigender Masse fallende Funktion, sobald $\hat{W}_M^2(k)$ monoton mit M fällt, was bei obiger Wahl gewährleistet ist. Die dahinter stehende physikalische Aussage ist das Abnehmen der gemittelten Dichtefluktuation mit zunehmender Größe der Sphäre.

In dieser Darstellung wird der Verlauf der Trajektorien $\delta(S)$ zu einer echten Brownschen Bewegung, da jeder weitere Schritt in $\delta(S)$ aufgrund einer Erhöhung von $S(k_{\text{crit}})$ aus einem Satz von Fourierkomponenten $\delta(k)$, die unabhängig von den bisher einbezogenen Komponenten sind, stammt. So lassen sich die Trajektorien $\delta(S)$ mit einer einfachen Diffusionsgleichung beschreiben:

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \delta^2}. \quad (2.10)$$

Dabei stellt $Q(\delta, S)$ die Anzahldichte der Trajektorien bei S im Intervall von δ bis $\delta + d\delta$ dar. Die Größe S entspricht dabei der Zeitvariablen der Diffusionsgleichung. Die Trajektorien beginnen alle bei $S = 0, \delta = 0$ und „diffundieren“ von dort aus für steigende Werte von S davon. Dieser Ausgangspunkt entspricht der Aussage, dass eine Sphäre, die alle Masse einschließt ($S = 0$), keine Dichteüberhöhung ($\delta = 0$) gegenüber der mittleren Dichte des Universums hat.

Um berechnen zu können welcher Bruchteil der Trajektorien bei einer bestimmten Masse M oder dem äquivalenten $S(M)$ oberhalb der dort herrschenden kritischen Dichteüberhöhung $\delta_{\text{crit}}(t)$ liegt, aber unterhalb für alle größeren Massen beziehungsweise kleineren Werte für $S(M)$, muss Gleichung (2.10) mit einer absorbierenden Grenze ω bei $\omega = \delta_{\text{crit}}(t)$ gelöst werden. Die eindeutige Lösung für ein solches Problem wurde bereits von Chandrasekhar (1943) mit

$$Q(\delta, S, \omega) d\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi S}} \left[\exp\left(-\frac{\delta^2}{2S}\right) - \exp\left(-\frac{(\delta - 2\omega)^2}{2S}\right) \right] d\delta \quad (2.11)$$

angegeben. Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Trajektorie, genau im Bereich von S bis $S + dS$ von der Barriere ω „geschluckt“ zu werden, muss gleich sein mit der Abnahme der Trajektorien, die unterhalb der Barriere verbleiben. Daraus folgt

$$\begin{aligned} f(S, \omega) &= -\frac{\partial}{\partial S} \int_{-\infty}^{\omega} Q d\delta \\ &= -\left[\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \delta} \right]_{-\infty}^{\omega}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

wobei zum Erhalt der zweiten Relation die Gleichung (2.10) eingesetzt wurde. Die Größe $f(S, \omega)$ beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsdichte, so dass $f(S, \omega)dS$ die Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine Trajektorie im Bereich S bis $S + dS$ die Barriere ω überschreitet, bis dahin aber stets unterhalb davon geblieben ist. Ersetzt man nun Q in Gleichung (2.12) mit Hilfe von Gleichung (2.11), so erhält man für die eben beschriebene Wahrscheinlichkeit:

$$f(S, \omega) dS = \frac{\omega}{\sqrt{2\pi S^{3/2}}} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2S}\right) dS. \quad (2.13)$$

Dieser Ausdruck gibt also an, mit welcher Wahrscheinlichkeit einer Trajektorie und damit auch dem mit ihr verbundenen Testteilchen ein bestimmter Wert für S zugeordnet werden muss. Mit Gleichung (2.9) stellt dies nichts anderes dar als die gesuchte Massenfunktion. Der Anteil P der Masse in Halos größer einer Grenzmasse M kann durch Aufintegrieren von Gleichung (2.13) von $S = 0$ bis $S = S(M)$ errechnet werden:

$$P(> M, t) = P(< S, \omega) = \text{erfc}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2S}}\right). \quad (2.14)$$

Daraus folgt, dass für $M \rightarrow 0$, und damit für $S \rightarrow \infty$, $P(> M) \rightarrow 1$ gilt und damit alle Materie einem Halo, wenn auch beliebig kleiner Masse, zugeordnet ist.

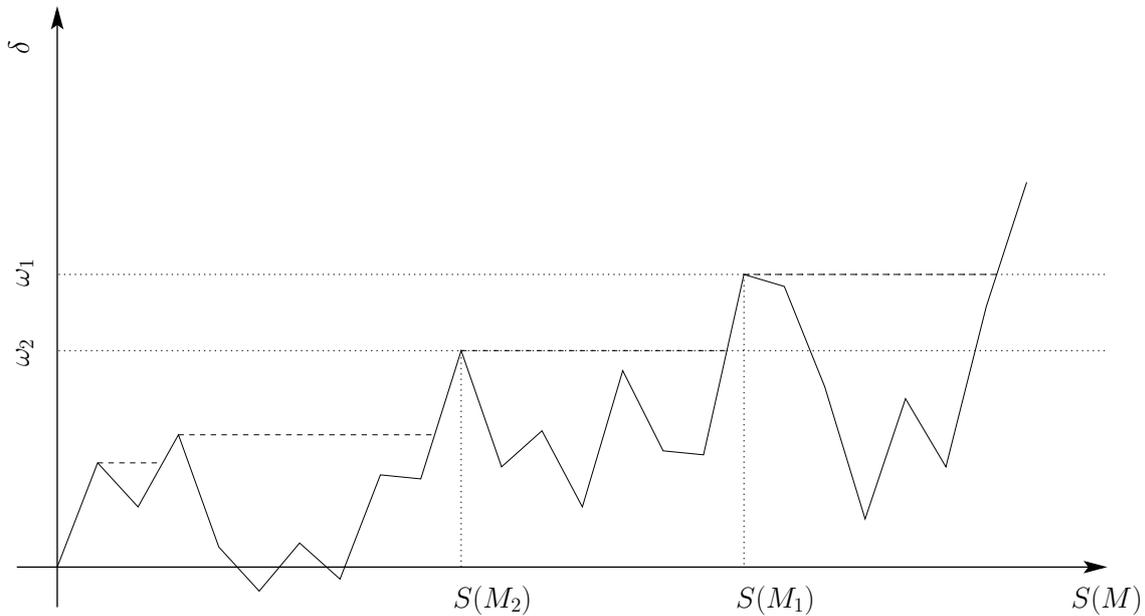


Abbildung 2.3: Beispielhafte Realisierung einer Trajektorie $\delta(M)$. Desweiteren ist die Massenentwicklung des zugehörigen Halos eingetragen (gestrichelte Linie).

2.1.3 Mergerraten

Um zu verdeutlichen, wie sich aus der Betrachtungsweise der Haloentwicklung in Form von Trajektorien $\delta(S)$ eine Mergerrate gewinnen lässt, ist in Abbildung 2.3 ein Beispiel für eine solche Trajektorie dargestellt. Gezeigt wird der Verlauf von $\delta(S)$ gegen S . Wie oben bereits beschrieben, beginnen alle Trajektorien im Ursprung bei $S = 0, \delta = 0$ und entwickeln sich von dort aus weiter. Die zu jedem Zeitpunkt t aktuelle Halomasse ergibt sich aus demjenigen Wert für S , bei dem die Trajektorie den zu dieser Zeit gültigen Grenzwert ω zum ersten Mal überschreitet. Da sich dieser Grenzwert, wie in Abschnitt 2.1.1 erläutert, mit der Zeit absenkt und $S(M)$ mit steigender Halomasse monoton kleiner wird, sind die physikalisch interessanten Größen der Entwicklung, nämlich die Halomasse in Abhängigkeit der Zeit, entgegen den Achsenrichtungen gerichtet. Die Halos entwickeln sich also in Abbildung 2.3 von rechts oben nach links unten. Sie folgen dabei aber nicht strikt den Trajektorien, sondern zeigen Sprünge in $S(M)$ auf. Diese Sprünge kommen zustande, wenn eine Trajektorie $\delta(S)$ den Grenzwert ω bei S überschreitet, danach aber wieder abfällt und den mit einem früheren Zeitpunkt verbundenen Grenzwert $\omega + d\omega$ erst bei einem Wert von $S + \Delta S$ übersteigt. Diese Sprünge in $S(M)$ sind mit plötzlichen Massenzunahmen der Halos verbunden und können mit entsprechenden Mergern identifiziert werden. Die kontinuierliche Massenzunahme entspricht dann dem Aufakkretieren von sehr kleinen Halos. Dabei gibt es keinen prinzipiellen Unterschied zwischen Mergern und Aufakkretieren, die Unterscheidung kommt einzig durch die Auflösungsgenauigkeit in $S(M)$ -Richtung zustande.

Ein Anwachsen eines Halos mit Masse M_1 zu einer Masse M_2 im Zeitintervall t_1 bis t_2 entspricht also der Aussage, dass die zugehörige Trajektorie bei $S(M_2) + dS$ zum erstenmal die Barriere $\omega(t_2)$ überschreitet und bei $S(M_1) + dS$ die Barriere $\omega(t_1)$. Dies entspricht derselben Fragestellung wie in Abschnitt 2.1.2, wenn man die Menge der betrachteten Trajektorien auf die Untermenge begrenzt, die eben bei $S(M_2) + dS$ das erste Mal $\omega(t_2)$ überschreitet:

$$f(S_1, \omega_1 | S_2, \omega_2) dS_1 = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2\pi}\Delta S^{3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2}{2\Delta S}\right) dS_1. \quad (2.15)$$

$$(S_1 - S_2) = \Delta S, \quad (\omega_1 - \omega_2) = \Delta\omega$$

$$S_1 > S_2, \quad \omega_1 > \omega_2$$

Dabei stehen die indizierten Größen wie S_1 für $S(M_1)$. Die Gleichung (2.15) beschreibt die Wahrscheinlichkeit für einen Halo der Masse M_2 zum Zeitpunkt t_2 , unter anderem aus einem Halo der Masse M_1 zum Zeitpunkt t_1 aufgebaut zu sein. Die Multiplikation mit dem Faktor M_2/M_1 führt von einer Massen- zu einer Anzahlgewichtung:

$$\frac{dP}{dM_1}(M_1, t_1 | M_2, t_2) dM_1 = \frac{M_2}{M_1} f(S_1, \omega_1 | S_2, \omega_2) \left| \frac{dS_1}{dM_1} \right| dM_1. \quad (2.16)$$

Die Gleichung (2.15) lässt sich aber auch dahingehend umformen, dass sie angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich ein Halo M_1, t_1 in einen Halo M_2, t_2 entwickelt:

$$f(S_2, \omega_2 | S_1, \omega_1) dS_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{S_1}{S_2 \Delta S} \right)^{3/2} \frac{\omega_2 \Delta\omega}{\omega_1} \exp\left(-\frac{(\omega_2 S_1 - \omega_1 S_2)^2}{2S_1 S_2 \Delta S}\right) dS_2. \quad (2.17)$$

Es kann hierbei allerdings keine Aussage darüber getroffen werden, ob dieser Zuwachs durch einen Merger oder durch mehrere kleinere Massenschritte erfolgt ist. Um zu einer Mergerrate zu gelangen, muss der Übergang $t_1 \rightarrow t_2$ gemacht werden. Damit wird sichergestellt, dass die Massenänderung plötzlich und damit in Form *eines* Mergers erfolgt:

$$f(S_1 \rightarrow S_2, \omega) dS_2 d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{S_1}{S_2 \Delta S} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega^2 \Delta S}{2S_1 S_2}\right) dS_2 d\omega. \quad (2.18)$$

2.2 Monte-Carlo-Bäume

Während im vorherigen Abschnitt aufgezeigt wurde, wie mit Hilfe des *Extended-Press-Schechter* (EPS) Formalismus die Massenfunktion sowie die Mergerraten der Halos bestimmt werden können, so kann damit doch nichts über die individuelle Entstehungsgeschichte eines einzelnen Halos ausgesagt werden. Für die sich in diesen Halos bildenden und entwickelnden Galaxien ist aber anzunehmen, dass nicht nur die statistischen Größen, sondern eben auch dieser individuelle Verlauf der Entwicklung ihrer zugehörigen Halos

für die eigene Entwicklung entscheidend sein wird. So wird sich zum Beispiel eine Galaxie anders entwickeln, wenn ihr Halo sich durch stete Akkretion oder aber durch einige wenige Merger zu einer höheren, wenn auch identischen, Masse entwickelt hat. Deshalb ist es wichtig nicht nur die statistischen Aussagen der Massenfunktion oder der Mergeraten angeben zu können, sondern auch die Entwicklung der einzelnen Halos. Diese wird in Form sogenannter „Bäume“ dargestellt, da sich aus vielen kleinen Anfangshalos im Laufe der Zeit durch stetes Verschmelzen massereichere Halos bilden, oder zeitlich umgekehrt betrachtet diese eben durch „Verzweigen“ in immer masseärmere Halos zerfallen. Abbildung 2.1 zeigt schematisch einen solchen *Merger-Baum*. Auch wenn es in diesem Abschnitt darum geht, die individuelle Entwicklung einzelner Halos zu verfolgen, müssen diese Entwicklungen im Mittel natürlich wieder die Relationen aus Abschnitt 2.1 erfüllen. Diese Anforderung stellt eine geeignete Form zur Kontrolle des vorgestellten Verfahrens dar, siehe Abschnitt 2.4. Das nachfolgende Verfahren basiert auf einer Idee von Somerville & Kolatt (1999).

2.2.1 Binary Limit

Wie oben bereits angedeutet, bestehen grundsätzlich zwei Möglichkeiten der Entwicklung eines Halos zu folgen. Die „physikalische Variante“ folgt ihrem Aufbau aus kleinen, massearmen Strukturen durch sukzessives Verschmelzen hin zu größeren, massereicheren Strukturen. Die der „Physik entgegen“ gerichtete Variante zerbricht entgegen ihrer eigentlichen zeitlichen Ablafrichtung die Halos stückweise in ihre Bestandteile. Auch wenn keiner der beiden Ansätze einen prinzipiellen Vorteil gegenüber dem anderen bietet und beide zu den gleichen Ergebnissen führen müssen, so gibt es doch einen praktischen Unterschied. Dieser liegt darin, dass über die Massenverteilung der Halos zu Beginn des Universums (Beginn der Simulation in physikalischer Richtung) von Seiten der Beobachtung nur sehr eingeschränkt Daten zur Verfügung stehen, während die Massenverteilung der Halos im lokalen Umfeld (Beginn der Simulation entgegen des zeitlichen Ablaufs) wesentlich besser vermessen ist. Die Möglichkeit, die Anfangswerte der Simulationen mit realen Messdaten zu verbinden, spricht also dafür, die Entwicklung der Halos entgegen ihrer eigentlichen physikalischen Ablafrichtung zu betrachten.

Der Grundgedanke des Verfahrens besteht darin, einen Halo der Masse M_0 zum Zeitpunkt t_0 gemäß der Verteilung (2.16) in seine Bestandteile zum früheren Zeitpunkt $t_1 = t_0 + \Delta t$ zu zerlegen. Für diese Bestandteile wird dann der Vorgang rekursiv solange wiederholt bis die Entwicklung zurück hin zu einem festgelegten Zeitpunkt t_{begin} verfolgt wurde. Dabei ergibt sich aber bereits bei der Auswahl der Bestandteile nach Gleichung (2.16) das Problem, dass diese Funktion für massearme Bestandteile, also $M \rightarrow 0$, divergiert. Betrachtet man hingegen Gleichung (2.15), zeigt sich, dass die damit verbundene Masse selbst nicht divergent ist, es muss also bei der Wahl der Bestandteile auf die Massenverteilung zurückgegriffen werden. Zusätzlich wird eine effektive Grenzmasse M_c eingeführt, die festlegt, ob die Entwicklungsgeschichte des entsprechenden Halos weiterverfolgt wird oder nicht. Dabei sollen diejenigen Halos mit einer Masse über der Grenzmasse als Be-

standteile und die mit kleinerer Masse als akkretiertes Material bezeichnet werden. Die Ergebnisse selbst dürfen dabei nicht von der Wahl dieser Grenzmasse beeinflusst werden, da diese Unterscheidung letztlich physikalisch unbegründet ist und nur dazu dient, die Anzahl der zu betrachtenden Bestandteile endlich zu halten.

Zusammenfassend werden an das Verfahren folgende Anforderungen gestellt:

- Unterscheidung zwischen Bestandteilen und akkretierter Masse
- Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Wahl der Grenzmasse M_c
- Wiedergabe der Massenverteilung, sowie der Mergerraten
- Gleiche Behandlung der Bestandteile, unabhängig von der Reihenfolge in der sie bestimmt wurden
- Massenerhaltung
- Numerisch robust, effizient

Zum dritten Punkt ist hinzuzufügen, dass die gleichzeitige Forderung nach Erhalt der Massenverteilung sowie der Mergerraten dazu führt, dass für die Bestandteile statistisch nicht nur die Verteilung der Massen beachtet werden muss, sondern auch die ihrer Anzahl. Die mittlere Anzahl \bar{N} der Bestandteile eines Halos der Masse M_0 für einen Zeitschritt von $t_0 \rightarrow t_1$ lässt sich dabei durch Integrieren von Gleichung (2.16) bestimmen:

$$\bar{N} = \int_{M_c}^{M_0} \frac{M_0}{M} P(M, t_1 | M_0, t_0) dM. \quad (2.19)$$

Die Integrationsgrenzen sind dabei durch die Grenzmasse der Akkretion M_c sowie die Halomasse M_0 bestimmt. Der vierte Punkt beschreibt das Problem, dass eine Massenauswahl für die Bestandteile oder akkretierte Materie durch Gleichung (2.15) auf der Massenverteilung für *einen* Bruchteil des untersuchten Halos beruht, und es keinesfalls gewährleistet ist, dass sich mehrere dadurch nacheinander ausgewählte Bruchteile sinnvoll zu dem untersuchten Halo zusammensetzen lassen. Um dieses Problem zu umgehen, werden die einzelnen Zeitschritte so klein gewählt, dass angenommen werden kann, dass der Halo in diesem Zeitintervall nur in zwei Teile zerfällt und Dreier- oder höhere Kombinationen vernachlässigt werden können. Diese Annahme wird als *Binary Limit* bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeit P für eine Änderung der Halomasse M_0 um ΔM im betrachteten Zeitschritt Δt , dargestellt in den Größen $S(M)$ und $\omega(t)$, ist gemäß Gleichung (2.15) gegeben durch:

$$P(\Delta S, \Delta \omega) d\Delta S = \frac{\Delta \omega}{\sqrt{2\pi\Delta S^3/2}} \exp\left(-\frac{\Delta \omega^2}{2\Delta S}\right) d\Delta S. \quad (2.20)$$

Betrachtet man hierfür die Substitution

$$x \equiv \frac{\Delta \omega}{\sqrt{\Delta S}}, \quad (2.21)$$

so wird die obige Verteilungsfunktion zu einer einfachen Gaußverteilung von x mit einem Erwartungswert von 0 und einer Standardabweichung von 1,

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right). \quad (2.22)$$

Die obige Substitution legt die Wahl des Zeitschrittes zu

$$\Delta\omega \leq \sqrt{\frac{dS(M_0)}{dM} \Delta M_{\text{step}}} \quad (2.23)$$

nahe, da dies für $M_{\text{step}} \ll M_c < M_0$ dazu führt, dass eine Massenänderung größer der Grenzmasse zu einem seltenen Ereignis wird und somit Dreier- und höhere Kombinationen von Bestandteilen, also Massenänderungen über M_c , unterdrückt werden. Dabei ist zu beachten, dass die Wahl des Zeitschrittes prinzipiell keine Auswirkung auf das Ergebnis hat. Erst die Forderung des Binary Limits macht eine möglichst kleine Wahl für Δt nötig, um die damit verbundenen Annahmen erfüllen zu können. Andererseits führt eine zu kleine Wahl des Zeitschrittes zu einem Anwachsen des numerischen Rauschens, so dass hier ein empirisches Abwägen stattfinden muss. Die obige Wahl des Zeitschrittes skaliert durch den Term $dS(M_0)/dM$ mit der Halomasse M_0 . Dies führt dazu, dass massereichere Halos einen kleineren Zeitschritt benötigen, was ihren intrinsisch höheren Wechselwirkungsquerschnitt widerspiegelt.

Ein einzelner Schritt in dem hier vorgestellten Verfahren besteht also zum ersten aus dem Bestimmen des Zeitschritts gemäß Gleichung (2.23). Danach wird für x , gemäß Abschnitt 2.3.5, eine Gauß-verteilte Zufallszahl bestimmt und diese mittels Gleichung (2.21) in eine Schrittweite ΔS umgerechnet. Die neue Halomasse M_1 ergibt sich daraus zu $M_1(S + \Delta S)$. Gemäß der Forderung des Binary Limits stellt die Restmasse $\Delta M = M_0 - M_1$ einen zweiten Halo dar. Jetzt wird für beide Halos überprüft, ob ihre jeweilige Masse über der Grenzmasse für Akkretion liegt. Trifft dies zu, wird dieser Halo zu einem Bestandteil und seine Entwicklung wird rekursiv weiterverfolgt. Trifft dies nicht zu, wird der Halo zur akkretierter Materie M_{acc} hinzuaddiert und seine Untersuchung eingestellt. Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis alle Halos zu Bruchstücken kleiner der Grenzmasse zerfallen sind oder der Zeitpunkt t_{begin} erreicht wurde.

2.2.2 N-Zweige mit Akkretion

Das in Abschnitt 2.2.1 vorgestellte Mergerverfahren, erstmalig von Cole & Kaiser (1988) oder Lacey & Cole (1993) verwendet, führt zu einer Überhäufung von Halos im Vergleich zu den Vorhersagen des EPS-Formalismus (siehe dazu Somerville & Kolatt (1999) und darin speziell Abbildung 2). Um diese Überhäufung zu korrigieren, werden in diesem Abschnitt einige Verbesserungen des obigen Verfahrens eingeführt, die schließlich zu einem Verfahren mit *N-Zweigen mit Akkretion* führen, welches als Flussdiagramm in Abbildung 2.4 dargestellt ist. Die Forderung aus Abschnitt 2.2.1, dass ein Halo in einem Zeitschritt

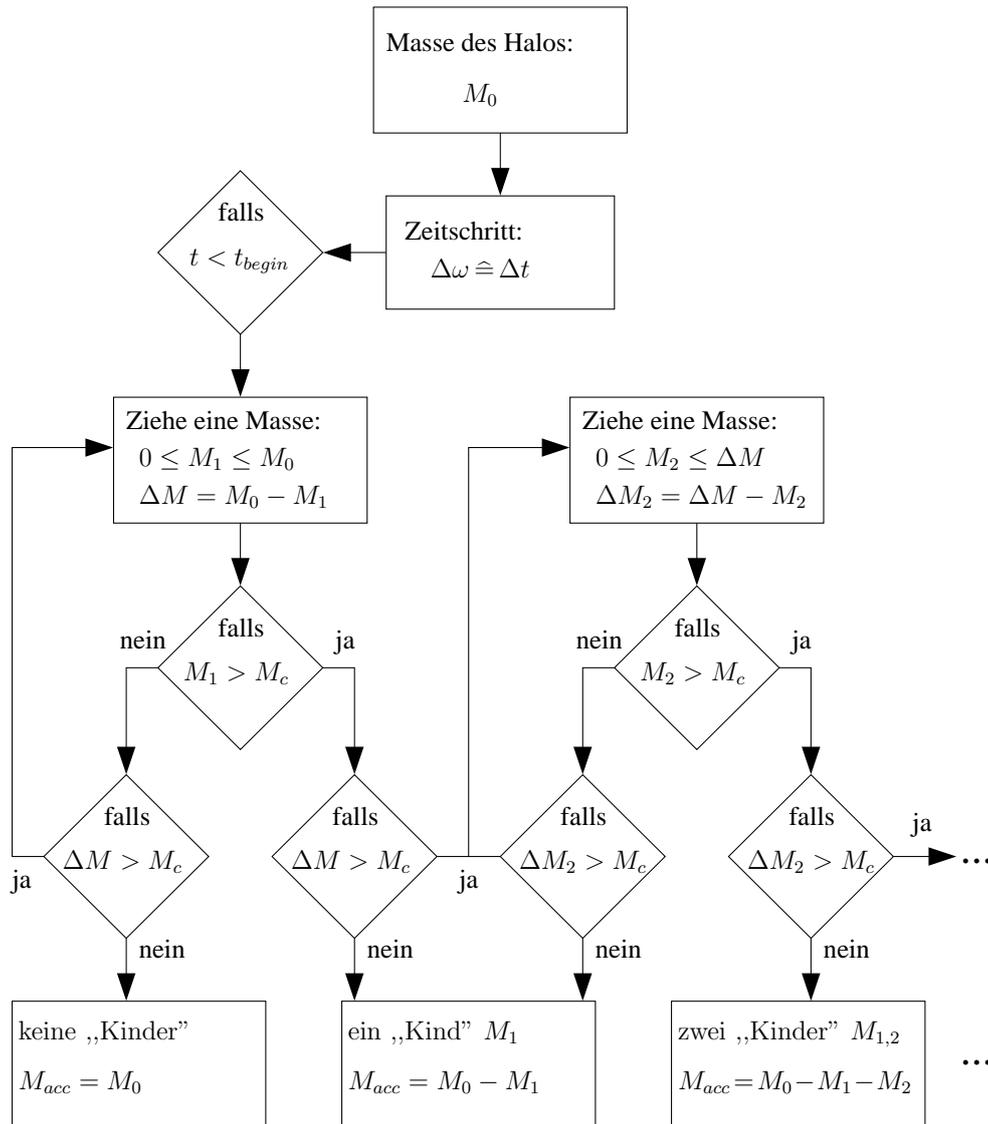


Abbildung 2.4: Flussdiagramm für das Verfahren zur Erstellung von Monte-Carlo-Bäumen.

genau in zwei Teilstücke zerfallen muss, steht der Divergenz der Anzahlverteilung aus Gleichung (2.16) für $M \rightarrow 0$ entgegen. Für kleine Teilmassen kann die statistisch erwartete Anzahl also nicht bis zur Vernachlässigbarkeit reduziert werden. Ein weiteres Problem stellt die Verletzung der vierten Anforderung dar, nämlich die Gleichbehandlung der Teilstücke unabhängig von ihrer Reihenfolge. Wird das erste Teilstück noch gemäß der Verteilung aus Gleichung (2.15) bestimmt, so wird für das zweite Teilstück die Restmasse angesetzt. Dies ist aber ein offensichtlicher Verstoß gegen die geforderte Gleichbehandlung. Diese Punkte lassen sich dadurch verbessern, dass man die Beschränkung auf zwei Teilstücke in eine Beschränkung auf zwei Bestandteile umformuliert.

Nach dieser Änderung sieht der Ablauf eines Zeitschrittes folgendermaßen aus:

- Berechnung des Zeitschrittes $\Delta\omega$ aus Gleichung (2.23)
- „Ziehen“ einer Masse M aus dem Bereich $0 < M < M_0$, gemäß Verteilung (2.15)
- Test der Masse M auf M_c :
 - Falls $M > M_c$, wird die gezogene Masse zum n -ten Bestandteil $M_n = M$
 - Falls $M < M_c$, wird die Masse M zu der akkretierten Masse hinzuaddiert
- Berechnen der Restmasse $\Delta M = M_0 - M$
- Test der Restmasse ΔM auf M_c :
 - Falls $\Delta M > M_c$, wird erneut eine Masse M gezogen, mit der neuen Beschränkung $0 < M < \Delta M$, solange für die Anzahl n der gefundenen Bestandteile $n < 2$ gilt, ansonsten wird ΔM zur akkretierten Masse addiert und der Zeitschritt ist beendet
 - Falls $\Delta M < M_c$, wird die Masse ΔM zu der akkretierten Masse hinzuaddiert und der Zeitschritt ist beendet
- Der Vorgang wird für jeden gefundenen Bestandteil rekursiv wiederholt

Diese Änderung führt zu einer Erhöhung der akkretierten Masse, da jetzt Halos im Prinzip vollständig aus Teilstücken mit Massen kleiner als der Grenzmasse M_c aufgebaut sein dürfen. Weiterhin wird die Restmasse komplett zu akkretierter Masse erklärt, sobald zwei Bestandteile identifiziert wurden, auch wenn die Restmasse noch über der Grenzmasse liegt und somit noch Bestandteile enthalten könnte. Auch wenn durch die Wahl des Zeitschrittes sichergestellt wurde, dass dieser Fall nur selten eintritt, hat er dennoch einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss auf die Halovertelung. Er führt zu einer, wenn auch wesentlich schwächeren, Unterhäufigkeit gegenüber der EPS-Vorhersage, siehe Abbildung 5 in Somerville & Kolatt (1999). Indem man die Beschränkung auf zwei Bestandteile aufgibt beziehungsweise durch eine neue Bedingung ersetzt, die an die statistisch zu erwartende mittlere Anzahl der Bestandteile, Gleichung (2.19), anknüpft (Gottlöber et al., 2001), lässt sich dies korrigieren. Die Möglichkeit von mehr als zwei Bestandteilen heißt aber nicht, dass nicht weiterhin mehr als M_c an Material in einem Zeitschritt zu akkretierter Materie werden kann. Das Verfahren lässt nämlich beliebig viele Akkretionsvorgänge zu und somit kann die akkretierte Materie M_{acc} weiterhin den kompletten Bereich von $0 \leq M_{\text{acc}} \leq M_0$ annehmen. Von den in obiger Aufzählung geforderten Punkten erfüllt das Verfahren die Punkte Eins bis Drei sowie Punkt Sechs, siehe hierzu die Tests in Abschnitt 2.4. Die Punkte Vier und Fünf können allerdings nicht gleichzeitig exakt erfüllt werden. So hat die hier umgesetzte exakte Massenerhaltung zur Folge, dass die Verteilungsfunktion für die Wahl der einzelnen Teilstücke jeweils die Verteilungsfunktion für ein weiteres Teilstück mit dem Massenbereich $0 \leq M_n \leq M_0 - \sum_{i=1}^{n-1} M_i$ darstellt, und somit durchaus

von der Reihenfolge abhängig ist. In einem alternativen Ansatz erfüllen Kauffmann & White (1993) Punkt Vier exakt, können dafür aber die Massenerhaltung nur näherungsweise gewährleisten.

2.3 Technische Umsetzung

Wurde im letzten Abschnitt das Verfahren zur Erstellung der *Mergergeschichte* von Halos vorgestellt, soll nun auf die praktische Umsetzung dieses Verfahrens in einer Computersimulation eingegangen werden. Als Programmiersprache wurde dabei C++ verwendet. C++ bietet dabei als eine sogenannte objektorientierte Programmiersprache die Möglichkeit, Daten und darauf operierende Funktionen in als Klassen bezeichnete Objekte zusammenzufassen, um so für eine klare Programmstruktur zu sorgen. Bei der programmiertechnischen Umsetzung wurde von dieser Möglichkeit, eigene Klassen definieren zu können, Gebrauch gemacht. Im Abschnitt 2.3.1 sollen die wesentlichen dieser Klassen mit ihren Inhalten sowie ihren Verknüpfungen zur Gesamtstruktur des Programms erläutert werden. In den darauffolgenden Abschnitten 2.3.2–2.3.5 werden dann die wichtigsten Funktionen im Detail behandelt, bevor in Abschnitt 2.3.6 auf die administrativen Aufgaben (Ein- und Ausgabe) des Programms eingegangen wird.

2.3.1 Datenstruktur

Wie in Abschnitt 2.2 dargestellt, lässt sich die Mergergeschichte eines Halos in Form eines „Baumes“ darstellen. Die natürlichste Umsetzung einer solchen Struktur in numerischen Programmen lässt sich über sogenannte Listen realisieren. Die Abbildung 2.5 zeigt solch eine Realisierung. Bei den dort dargestellten Instanzen: *Kopf*, *Elternhalo*, *Bestandteil* und *Halo* handelt es sich jeweils um eine der oben erwähnten Klassen. Die Klasse *Elternhalo* stellt einen Container dar, der jeweils die Mergergeschichte eines Halos enthält. Sollen in einer Simulation die Mergergeschichten mehrerer Halos untersucht werden, wird für jeden Halo ein solcher Container angelegt. Die Container werden untereinander durch eine doppelt verkettete Liste verbunden. Bei der als *Kopf* bezeichneten Instanz handelt es sich

<u>Elternhalo:</u>			<u>Funktionen:</u>	
<u>Daten:</u>			<u>insert</u>	fügt einen neuen Container in die Liste ein
tree_id	Nummer des <i>Elternhalos</i>			
t_0	Anfangszeitpunkt der Simulation			
M_0	Anfangsmasse des Halos			
Merger_Ptr	Pointer auf die diesem Container zugeordnete Mergergeschichte			

Baumstruktur:

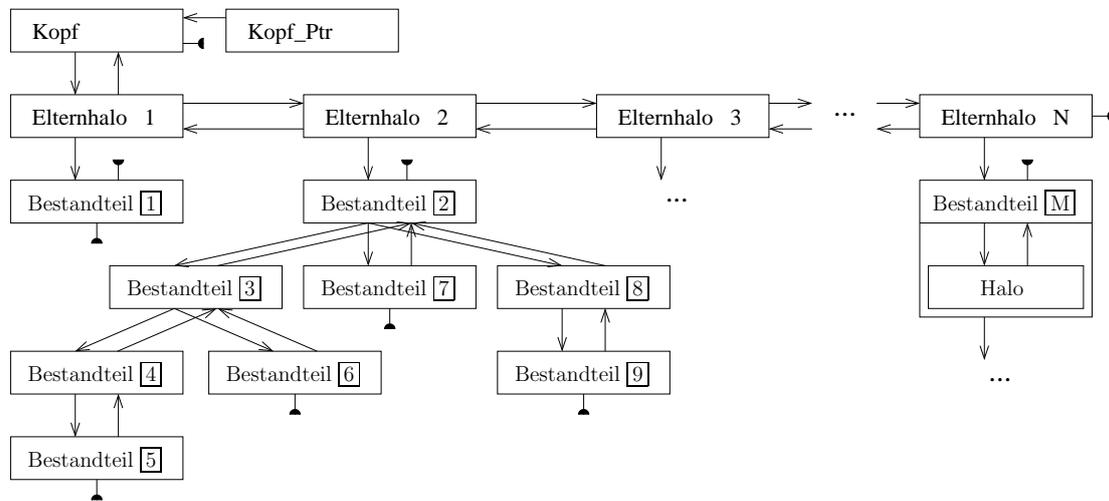


Abbildung 2.5: Strukturierung der Simulationsdaten in Form einer Baumstruktur. Die Pfeile zwischen den einzelnen Elementen symbolisieren Pointer. NULL-Pointer sind durch die kurzen in Halbkreisen endenden Pfeile dargestellt. Der Pointer *Kopf_Ptr* auf das Objekt *Kopf* ist wegen seiner exklusiven Stellung als statisch erzeugte Instanz als eigenes Element abgebildet.

formal ebenfalls um einen *Elternhalo*, dem allerdings keine Mergergeschichte zugewiesen wird, sondern der nur zur Handhabung der Liste benötigt wird. Nur der *Kopf* und sein Pointer (*Kopf_Ptr*) werden statisch erzeugt, während die restlichen Elemente alle dynamisch während des laufenden Programms erstellt werden. Bei der Klasse *Bestandteil* handelt es sich ebenfalls um einen Container. Er wird zur Realisierung der Mergergeschichte in Form einer Baumstruktur verwendet. Dem ersten *Bestandteil* (bzw. seinem *Halo*, siehe weiter unten) wird dabei seine Ausgangsmasse M_0 sowie die Anfangszeit t_0 vom zugehörigen *Elternhalo* übergeben. Dann wird für diese Werte ein Zeitschritt gemäß Abschnitt 2.2.2 ausgeführt. Nun wird für jeden neuen Bestandteil ein neuer Container der Klasse

<u>Bestandteil:</u>			
<u>Daten:</u>		<u>Funktionen:</u>	
ID	Nummer des <i>Bestandteils</i>	timestep	führt einen Zeitschritt gemäß Abschnitt 2.2.2 aus
up_Ptr	Pointer auf den erzeugenden <i>Bestandteil</i>		
down_Ptr's	Pointer auf die erzeugten <i>Bestandteile</i>		
Halo_Ptr	Pointer auf den eingebundenen <i>Halo</i>		

Bestandteil erzeugt und die entsprechenden Verknüpfungen angelegt. Auf diesen neuen *Bestandteilen* wird nun rekursiv der nächste Zeitschritt ausgeführt. Dies erklärt auch die Nummerierung der *Bestandteile* in Abbildung 2.5. So zerfällt in diesem Beispiel *Bestandteil 2* in drei Teile, diese haben aber keine aufeinanderfolgende Nummern, da für den ersten *Bestandteil* (NR. 3) direkt nach dessen Erzeugung der nächste Zeitschritt ausgelöst wird, so dass die *Bestandteile 4–6* vor dem *Bestandteil 7* bearbeitet werden. Der Vorteil dieser Art der Nummerierung besteht darin, dass sich zusammen mit der Entstehungszeit der *Bestandteile* die Baumstruktur und deren innere Abhängigkeit jederzeit rekonstruieren lässt. Die wesentlichen Schritte eines Zeitschrittes, die Bestimmung der Zeitschrittlänge Δt und das „Ziehen“ einer Masse, werden dabei nicht in den *Bestandteilen* selbst, sondern in den in ihnen eingebundenen *Halos* ausgeführt. Somit kann die Struktur von ihren Inhalten getrennt und so zu einer klareren Programmaufteilung und einem höheren Grad an Freiheit bezüglich Änderungen gelangt werden. Ein *Halo* selbst verfügt dieser Logik folgend über keinerlei Information bezüglich seiner Position in der untersuchten Mergergeschichte, sondern speichert nur die Größen, die das von ihm beschriebene *Bestandteil* charakterisieren. Desweiteren bietet diese Klasse die nötigen Funktionen um einen Zeitschritt des Algorithmus aus Abschnitt 2.2.2 durchzuführen. Diese Funktionen sowie einige dabei benötigte Hilfsfunktionen werden in den Abschnitten 2.3.2–2.3.5 ausführlich beschrieben. Die Trennung von Inhalt und Struktur erlaubt es, die Mergergeschichten der untersuchten *Halos* außer in der oben beschriebenen Baumstruktur auch noch in anderen Formen, wie zum Beispiel der eines Zeitstrangs, zu ordnen, siehe Abbildung 2.6. Dazu wird *Bestandteil_T* als weitere Containerklasse eingeführt. Sie gleicht der Klasse *Bestandteil* darin, dass sie nur zur Realisierung einer Struktur dient, nicht aber zum Speichern von Inhalten. Dies geschieht nämlich wieder in einem *Halo*. Bei der umgesetzten Struktur handelt es sich um eine einfache zeitliche Anordnung der *Bestandteile*. Dazu wird erneut eine doppelt verkettete Liste verwendet. Die Instanz *Kopf_T*, die formal von der Klasse *Bestandteil_T* ist, wird als statisch erzeugtes Element für den Zugriff auf die Liste benötigt. Die Nummerierung der Container wird von der Baumstruktur über-

<u>Halo:</u>	
<u>Daten:</u>	<u>Funktionen:</u>
M	Masse des Bestandteils
t	Zeitpunkt der Erzeugung des Bestandteils
number_child	Anzahl der erzeugten Bestandteile
Δt	Zeitschrittlänge
M_{acc}	Menge der akkretierten Materie
	gen_delta_z Bestimmung der Zeitschrittlänge Δt (2.3.2)
	pick „ziehen“ einer Masse nach Gl. (2.15), (2.3.3)
	n_mean bestimmen der maximalen Anzahl an Bestandteilen (2.3.3)

Zeitstrang:

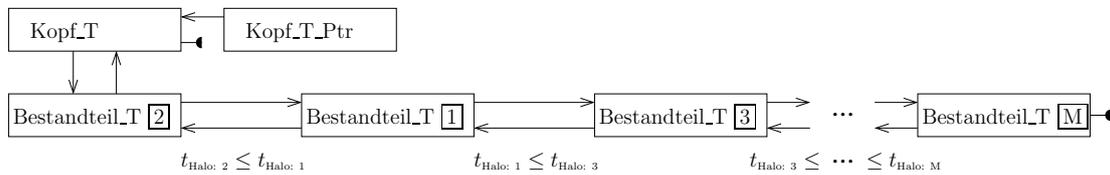


Abbildung 2.6: Strukturierung der Simulationsdaten in Form eines Zeitstrangs. Die Nummerierung der Container ist aus der Baumstruktur übernommen, siehe Abbildung 2.5. Die angegebene zeitliche Reihenfolge stellt nur eine beispielhafte Konfiguration dar.

nommen, um eine klare Zuordnung zwischen diesen Strukturen zu ermöglichen, so dass *Bestandteil_T M* mit dem selben *Halo* verknüpft ist wie *Bestandteil M*. Es werden also die selben Inhalte bei unterschiedlicher Strukturierung gespeichert. Diese Freiheit bietet den Vorteil, die Simulationsergebnisse je nach Fragestellung in angemessener Form zu ordnen. Um beispielsweise die Übereinstimmung mit dem EPS-Formalismus zu überprüfen, ist nur entscheidend wann und wieviele Bestandteile welcher Masse vorhanden sind. Diese Information lässt sich erheblich einfacher aus dem Zeitstrang gewinnen als aus der Baumstruktur. Ist man andererseits beispielsweise an den Massenverhältnissen der Bestandteile eines Mergers interessiert, benötigt man die in der Baumstruktur enthaltenen Zuordnungen zwischen den einzelnen Bestandteilen.

<u>Bestandteil_T:</u>			<u>Funktionen:</u>
<u>Daten:</u>			
ID	Nummer des <i>Bestandteils_T</i>	insert	fügt den <i>Bestandteil_T</i> an der zeitlich richtigen Stelle in den Zeitstrang ein
next_Ptr	Pointer auf das zeitlich nächste Element		
last_Ptr	Pointer auf das zeitlich zuvorkommende Element		
Halo_Ptr	Pointer auf den eingebundenen <i>Halo</i>		

2.3.2 Bestimmung der Zeitschrittlänge

Die Bestimmung der Zeitschrittlänge erfolgt mittels der Funktion *gen_delta_z* der Klasse *Halo* und wird gemäß Gleichung (2.23):

$$\Delta\omega \leq \sqrt{\frac{dS(M_0)}{dM} \Delta M_{\text{step}}},$$

berechnet. Dabei wird für die Größe ΔM_{step} , für die $\Delta M_{\text{step}} \ll M_c < M_0$ gefordert wurde, $\Delta M_{\text{step}} = 0.01 M_c$ verwendet. Desweiteren wird eine zusätzliche Skalierung der Art

$$\Delta\omega \cdot \left[b + a \log_{10} \left(\frac{M_0}{M_c} \right) \right] \quad (2.24)$$

mit $a = 0.3$ und $b = 0.8$ eingeführt. Mit Hilfe dieser Skalierung kann eine optimale Erfüllung sowohl der Anzahl-, als auch der Massenverteilung der Halos erzielt werden (siehe Somerville & Kolatt, 1999). Wie der Funktionsname bereits andeutet, wird innerhalb der Simulation die kosmologische Rotverschiebung z :

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1 \quad (2.25)$$

als Zeiteinheit verwendet. Die Größe $a(t)$ steht für den sogenannten Skalenfaktor. Die Umrechnung zwischen ω und t beziehungsweise z ist durch Gleichung (2.3) gegeben. Für die dabei benötigte Beschreibung der jeweils verwendeten Kosmologie wird auf ein Programmpaket von Bartelmann (2007) zurückgegriffen.

2.3.3 „Ziehen“ der Massen und Bestimmung ihrer maximalen Anzahl

Das „Ziehen“ der Massen erfolgt in der Funktion *pick* der Klasse *Halo*. Dazu wird die Masse M_0 des Halos, auf den der Zeitschritt angewendet wird, mittels Gleichung (2.9) in die zugehörige Varianz $S(M)$ des Dichtefeldes umgerechnet. Hierbei wird erneut das Kosmologiepaket von Bartelmann (2007) verwendet. Durch Erzeugen einer Gauß-verteilten Zufallszahl x , siehe Abschnitt 2.3.5, kann nun ein ΔS mit Hilfe von Gleichung (2.21) erzeugt werden:

$$\Delta S = \left(\frac{\Delta\omega}{x} \right)^2. \quad (2.26)$$

Daraus ergibt sich die Varianz des gezogenen Teils zu $S + \Delta S$. Da Gleichung (2.9) analytisch nicht umkehrbar ist, muss zur Rückrechnung der Varianz $S + \Delta S$ zur Masse M_1 des neuen Teilstücks auf eine numerische Umkehrung zurückgegriffen werden (siehe hierzu Abschnitt 2.3.4). Da in Abschnitt 2.2.2 die Annahme des Binary Limits aufgegeben wurde, ist es möglich und sehr wahrscheinlich, dass während eines Zeitschrittes mehrfach Massen gezogen werden müssen. Dabei gilt für die n -te Masse:

$$M_n \leq M_{\text{current}} = M_0 - M_{\text{acc}} - \sum_{i=0}^m M_m. \quad (2.27)$$

Dabei steht M_{acc} für die bisher in diesem Zeitschritt gezogene und akkretierte Masse, die Summe beschreibt die Gesamtmasse der bisher gezogenen m Bestandteile. M_{current} steht für die Restmasse. Da aber alle Massen aus der Verteilung (2.15) gezogen werden müssen, um die Anforderungen aus Abschnitt 2.2.1 an das Verfahren zu erfüllen, ist dies

auf diesem Wege keinesfalls gesichert. Konkret bedeutet das für das obige Verfahren, dass $S + \Delta S$ kleiner sein kann als $S(M_{\text{current}})$, also die Bedingung (2.27) verletzt wurde. Um dies abzufangen muss das Verfahren in *pick* erweitert werden. Dazu wird der erlaubte Massenbereich $0 \leq M_n \leq M_{\text{current}}$ in einen erlaubten Bereich für ΔS umgerechnet:

$$S(0) - S(M_0) \geq \Delta S \geq S(M_{\text{current}}) - S(M_0). \quad (2.28)$$

Dabei ist $S(0) - S(M_0)$ gemäß Gleichung (2.9) unendlich, so dass ΔS effektiv nur nach unten beschränkt ist. Diese Schranke wird mit Gleichung (2.21) in eine Obergrenze x_{max} für die Gaußsche Zufallszahl umgerechnet. Jetzt bestimmt man die Wahrscheinlichkeit, für eine Gauß-verteilte Zufallszahl unter dieser Grenze zu liegen. Diese ist durch das Integral der Gaußverteilung von Null bis x_{max} bestimmt und kann durch die Fehlerfunktion von $(x_{\text{max}}/\sqrt{2})$ ausgedrückt werden:

$$\text{erf}(x_{\text{max}}/\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_{\text{max}}/\sqrt{2}} \exp(-x'^2) dx'. \quad (2.29)$$

$\text{erf}(x_{\text{max}}/\sqrt{2})$ stellt damit die Obergrenze des Wertebereichs dar, den die Fehlerfunktion für die erlaubten Gaußschen Zufallszahlen annehmen kann. Aus diesem Wertebereich wird jetzt durch Multiplikation mit einer auf dem Bereich $[0:1]$ gleichverteilten Zufallszahl ein Wert gezogen. Durch Invertierung der Fehlerfunktion, siehe Abschnitt 2.3.4, kann diesem Wert das entsprechende x zugewiesen werden. Die auf diese Weise erzeugten x sind wieder Gauß-verteilt und zusätzlich auf den erlaubten Bereich beschränkt. Prinzipiell könnte die obige Routine, die mit direkt gezogenen Gaußschen Zufallszahlen arbeitet, durch ihre Erweiterung komplett ersetzt werden. Dies ist jedoch aus numerischer Sicht ungünstig, da die erweiterte Version erheblich mehr Rechenzeit beansprucht, so dass in der Funktion *pick* immer erst mit dem einfachen Verfahren gearbeitet wird und erst bei einem Verstoß gegen Gleichung (2.27) auf die erweiterte Version zurückgegriffen wird.

Die Bestimmung der maximalen Anzahl der Bestandteile, die während einem Zeitschritt aus einem Halo hervorgehen dürfen, geschieht in der Funktion *n_mean* der Klasse *Halo*. Eine erneute Einschränkung der Anzahl der Bestandteile nach Aufhebung des Binary Limits wird notwendig, da dieser Schritt zu einer leichten Überhäufigkeit von Bestandteilen gegenüber den Vorhersagen des EPS-Formalismus führt. Dies kann korrigiert werden, indem die maximale Anzahl an die statistisch zu erwartende Anzahl der Bestandteile, entsprechend Gleichung (2.19), geknüpft wird. Eine empirische, von Gottlöber et al. (2001) bestimmte Vorschrift, legt die maximale Anzahl auf den Erwartungswert plus einem Offset fest. Dieser ist ein Eingabewert der Simulation und liegt optimalerweise in der Größenordnung des Erwartungswertes.

2.3.4 Numerische Umkehr von Funktionen

In Abschnitt 2.3.3 wurde bei der Erklärung der Funktion *pick* zweimal auf die Notwendigkeit für eine Umkehrung einer analytisch nicht umkehrbaren Funktion hingewiesen. Bei

den beiden Funktionen handelt es sich um die Fehlerfunktion (Gleichung 2.29) sowie um Gleichung (2.9), die die Abhängigkeit der Varianz von der Masse beschreibt: $S = S(M)$. Numerisch kann eine Umkehrung wie folgt erreicht werden:

Sei $f(x) = y$ eine monotone Funktion und $x_{\text{low}} < x_1 < x_{\text{high}}$, dann stellt x_1 die einzige Nullstelle der Funktion $g(x) = f(x) - f(x_1)$ dar und diese liegt im Bereich von $]x_{\text{low}} : x_{\text{high}}[$. Das Auffinden dieser Nullstelle von $g(x)$ kommt damit einer Umkehrung der Funktion $f(x)$ gleich, da aus dem Funktionswert $f(x_1)$ der Wert von x_1 berechnet wurde. Für die beiden in *pick* benötigten Funktionen ist sowohl die Forderung nach Monotonie erfüllt, als auch eine Bestimmung von x_{low} sowie x_{high} möglich. Im Fall der Fehlerfunktion kann x_{low} zu Null und x_{high} zu der in Abschnitt 2.3.3 berechneten Obergrenze x_{max} bestimmt werden. Für die Abhängigkeit der Varianz von der Masse wird x_{low} ebenfalls auf Null und x_{high} auf die aktuelle Restmasse M_{current} festgelegt. Zur Nullstellensuche wird die Routine *rtbis* aus *Numerical Recipes (Kapitel 9.1)* verwendet. Es handelt sich dabei um ein sogenanntes *Bisection*-Verfahren. Für dieses mit einer Intervallschachtelung arbeitende Verfahren wird die Angabe zweier Grenzwerte (x_{low} und x_{high}) benötigt, deren Funktionswerte unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Dies ist in den obigen Fällen gewährleistet, da die Grenzwerte die Nullstelle einschließen und die betrachteten Funktionen monoton sind. Das Verfahren berechnet in einem ersten Schritt das Vorzeichen für $g((x_{\text{low}} + x_{\text{high}})/2)$ und ersetzt dann denjenigen Grenzwert durch $(x_{\text{low}} + x_{\text{high}})/2$, der dasselbe Vorzeichen aufweist. Durch weitere iterative Schritte kann die Nullstelle bis auf die gewünschte Genauigkeit x_{accuracy} bestimmt werden. Dazu werden n Iterationsschritte benötigt:

$$n = \log_2 \left(\frac{x_{\text{high}} - x_{\text{low}}}{x_{\text{accuracy}}} \right). \quad (2.30)$$

Das Verfahren weist damit eine eher moderate Konvergenzgeschwindigkeit (lineare Konvergenz) auf, findet dafür aber immer die eingeschlossene Nullstelle. Andere Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit (wie z. B. das Sekantenverfahren) bieten hingegen keine absolute Sicherheit beim Auffinden der Nullstelle. Die gewünschte Genauigkeit mit der die Nullstelle gefunden werden soll, ist ein Eingabewert der Simulation.

2.3.5 Gaußsche Zufallszahlen

Ein wesentlicher Bestandteil eines Zeitschrittes im Verfahren zur Erzeugung der Monte-Carlo-Bäume von Abschnitt 2.2.1 ist das Erstellen von Gauß-verteilten Zufallszahlen. Zur Erzeugung dieser Zufallszahlen wird wie folgt vorgegangen:

Die Funktion $p(x)$ sei eine Verteilungsfunktion von gleichverteilten Zufallszahlen auf dem Intervall $[0 : 1]$:

$$p(x) dx = \begin{cases} dx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.31)$$

Eine solche Verteilung kann zum Beispiel mittels den in *Numerical Recipes (Kapitel 7.1)* beschriebenen Algorithmen erzeugt werden. Durch Anwenden der Funktion $f(x) = y(x)$

auf die Variable x lassen sich beliebig viele weitere Verteilungen erzeugen, die daraus resultierende neue Verteilungsfunktion ergibt sich zu:

$$p(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|. \quad (2.32)$$

Dies lässt sich auf mehrere Dimensionen erweitern:

$$p(y_1, y_2, \dots) = p(x_1, x_2, \dots) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial(y_1, y_2, \dots)} \right|. \quad (2.33)$$

Dabei steht $p(1, 2, \dots)$ für die jeweilige verknüpfte Verteilungsfunktion von $x_{1,2,\dots}$ beziehungsweise $y_{1,2,\dots}$, sowie $|\partial(\dots)/\partial(\dots)|$ für die zugehörige Jacobideterminante.

Um hiermit Gauß-verteilte Zufallszahlen zu erzeugen, verwendet man nach Box & Muller (1958) in einem zweidimensionalen Raum die folgenden Funktionen $f_{1,2}(x)$:

$$\begin{aligned} f_1(x) = y_1 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) \\ f_2(x) = y_2 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Daraus folgt für x_1 beziehungsweise x_2 :

$$x_1 = \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \quad (2.35)$$

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{y_2}{y_1}\right). \quad (2.36)$$

Die einzelnen Komponenten der Jacobimatrix ergeben sich damit unter Verwendung der Gleichung (2.35) und (2.36) zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} &= -y_1 \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} &= -y_2 \exp\left(-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right) \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+(y_2/y_1)^2} \left[-\frac{y_2}{y_1^2}\right] & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+(y_2/y_1)^2} \left[\frac{1}{y_1}\right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Determinante bestimmt sich demnach folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ &= - \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_1^2}{2}\right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y_2^2}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Da es sich dabei um das Produkt zweier Gaußverteilungen handelt, die jeweils nur von y_1 beziehungsweise y_2 abhängen, gilt für beide y , dass sie unabhängig voneinander Gaußverteilt sind. Aus zwei gleichförmig verteilten Zufallszahlen $x_{1,2}$ können also mittels der

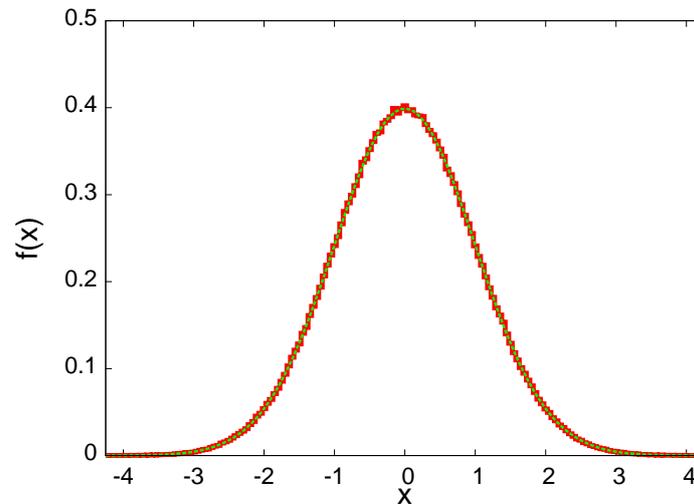


Abbildung 2.7: Vergleich der Verteilung von einer Million Zufallszahlen, die mit dem Verfahren aus Abschnitt 2.3.5 erzeugt wurden (Rot), mit der angestrebten Gaußverteilung (Grün). Beide Verteilungen sind normiert dargestellt.

Transformation (2.34) zwei Gauß-verteilte Zufallszahlen $y_{1,2}$ gewonnen werden. Aus numerischer Sicht hat diese Transformation den Nachteil, dass sie die Berechnung der CPU zeitintensiven, trigonometrischen Funktionen \sin und \cos benötigt. Dies lässt sich jedoch umgehen, wenn statt mit gleichverteilten Zufallszahlen $x_{1,2}$ auf dem Gebiet $[0 : 1]$ mit solchen auf dem Gebiet $[-1 : 1]$ gerechnet wird: $v_{1,2}$. Diese neuen Zufallszahlen sollen die Abszisse v_1 beziehungsweise Ordinate v_2 eines beliebigen Punktes innerhalb des Einheitskreises darstellen. Dann lässt sich aus der Summe ihrer Quadrate wieder eine gleichverteilte Zufallszahl w im Bereich $[0 : 1]$ erzeugen, die als x_1 für die Box-Muller-Transformation dienen kann:

$$w = v_1^2 + v_2^2. \quad (2.39)$$

Der wesentliche Vorteil dieser neuen Zufallszahlen ergibt sich dadurch, dass sich die Kosinus- beziehungsweise Sinusberechnungen für einen zufälligen Winkel $2\pi x_2$ nun als v_1/\sqrt{w} beziehungsweise v_2/\sqrt{w} darstellen lassen und somit die zeitlich teuren Funktionsaufrufe des Sinus und Kosinus gespart werden können. Die Transformation (2.34) geschrieben in Abhängigkeit von $v_{1,2}, w$ lautet damit:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln w} \frac{v_1}{\sqrt{w}} = v_1 \sqrt{\frac{-2 \ln w}{w}} \\ y_2 &= v_2 \sqrt{\frac{-2 \ln w}{w}}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Abbildung 2.7 zeigt die Verteilung von einer Million Zufallszahlen, die mit dem hier vorgestellten Verfahren erzeugt wurden im Vergleich zur geforderten Gaußverteilung.

2.3.6 Programmablauf

Der konkrete Ablauf einer Simulation startet mit dem Einlesen der benötigten Eingabewerte. Diese sind in der Tabelle 2.1 zusammengestellt und sollen im Folgenden kurz erläutert werden:

- **mode:** Ermöglicht die Wahl zwischen zwei grundlegend verschiedenen Ablaufmodi des Programms. So kann das Programm zum einen dazu verwendet werden, neue Mergergeschichten zu berechnen (*gen_tree*), aber auch die Ergebnisse aus alten Rechnungen einzulesen und sie wieder in ihre Baumstruktur zu bringen (*recover*). So sind weitere Analysen möglich, vor allem aber das sukzessive Einlesen beliebig vieler Rechnungen, so dass die Berechnung der Mergergeschichten mehrerer *Elternhalos* getrennt durchgeführt werden kann, ihre Ergebnisse dann aber vereint analysiert werden können.
- t_0 (ausgedrückt durch z): Zeitpunkt, von dem aus die Mergergeschichte der *Elternhalos* zurückverfolgt wird. Üblicherweise wird dieser Zeitpunkt auf „Heute“ gesetzt, so dass $z = 0$ gilt.
- # Elternhalos (N): Anzahl der Elternhalos, die in dieser Rechnung betrachtet werden sollen.
- Maximale Anfangsmasse: Dies entspricht der Masse der *Elternhalos*, falls mit einer konstanten Anfangsmasse gerechnet wird, und der Obergrenze einer ansonsten beliebig wählbaren Massenverteilung. Eine häufig gewählte Form der Massenverteilung ist z.B. die von dem EPS-Formalismus vorhergesagte Massenverteilung zum Zeitpunkt t_0 . Ausserdem legt dieser Wert die Obergrenze des Histogramms in Massenrichtung fest.
- M_c : beschreibt den Übergang von Bestandteilen zu akkretierter Masse, siehe Abschnitt 2.2.1.
- t_{begin} (ausgedrückt durch z): legt fest, bis zu welcher Rotverschiebung die Mergergeschichte eines *Elternhalos* maximal zurückverfolgt wird. Der Index $_{\text{begin}}$ soll dabei andeuten, dass aus physikalischer Sicht die Entwicklung dort begonnen hat.
- x_{accuracy} : legt die Genauigkeit fest, mit der die Masse eines Halos bei der numerischen Umkehrung von $S(M)$ bestimmt werden soll. Dieser Wert wird üblicherweise auf 1% von M_c gesetzt.
- Massenauflösung (Histogramm): legt die Binbreite des Histogramms in Massenrichtung fest.
- Zeitauflösung (Histogramm): legt die Binbreite des Histogramms für die Zeit fest. Die Auflösung wird üblicherweise so gewählt, dass 10 Bins pro $\Delta z = 1$ zur Verfügung stehen.
- Offset (Anzahl der Bestandteile): regelt die maximale Anzahl an Bestandteilen, die pro Zeitschritt entstehen dürfen, siehe Abschnitt 2.3.3.

Eingabewert	Datentyp	mögliche / übliche Werte	Einheit
mode	Bool	0 / 1	-
t_0 (ausgedrückt durch z)	Double	0	-
# Elternhalos (N)	Integer	1 - 1000	-
Maximale Anfangsmasse	Double	$5 \times 10^{10} - 5 \times 10^{14}$	M_{\odot}
M_c	Double	10^{10}	M_{\odot}
t_{begin} (ausgedrückt durch z)	Double	7.5	-
x_{accuracy}	Double	10^8	M_{\odot}
Massenauflösung (Histogramm)	Integer	30	-
Zeitauflösung (Histogramm)	Integer	75	-
Offset (Anzahl der Bestandteile)	Integer	2 - 3	-
$x_{\text{high, max}}$	Double	5.0	-
erf(x)-Auflösung	Integer	100	-
radius (Kosmologie)	Double	8.0	-
σ_{radius} (Kosmologie)	Double	0.6	-
hubble (Kosmologie)	Double	0.71	-
Ω_M (Kosmologie)	Double	0.3 - 1.0	-
Ω_{Λ} (Kosmologie)	Double	0.7 - 0.0	-

Tabelle 2.1: Liste aller benötigten Eingabewerte.

- $x_{\text{high, max}}$: Obergrenze des Arguments, bis zu der die Tabelle für die Fehlerfunktion angelegt wird.
- erf(x)-Auflösung: legt die Auflösung der Tabelle für die Fehlerfunktion fest.
- radius, σ_{radius} (Kosmologie): σ_{radius} normiert die Fluktuationen des Dichtefeldes durch Vorgabe eines Wertes für die mittlere Amplitude der Dichtefluktuations einer Kugel des Radius: *radius* in pc für den Zeitpunkt $z = 0$.
- hubble (Kosmologie): legt als dimensionslose Größe den Wert des Hubbleparameters $H(t)$ für $z = 0$ fest, $H_0 = \text{hubble} \cdot 100 \text{ km/s/Mpc}$.
- Ω_M (Kosmologie): gibt den Anteil der Materiedichte an der kritischen Dichte an.
- Ω_{Λ} (Kosmologie): gibt den Anteil der Dunklen Energie an der kritischen Dichte an.

Der weitere Ablauf der Simulation hängt dann von der Wahl des Modus ab. Wurde der *recover* Modus gewählt, müssen nun die einzulesenden Dateien angegeben werden, die weiteren Eingabewerte werden von den eingelesenen Dateien übernommen. Für die eingelesenen Daten werden nun die in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen Strukturen (Baumstruktur und Zeitstrang) rekonstruiert.

Wurde der *gen_tree* Modus gewählt, wird für eine schnellere Berechnung der Fehlerfunktion eine Tabelle für die Funktionswerte von erf(x) für den Bereich von $0 \leq x \leq x_{\text{high, max}}$ angelegt. Für erf($x > x_{\text{high, max}}$) wird der Funktionswert auf Eins gesetzt. Danach

Ausgabewert	Datentyp	Baumstruktur / Zeitstrang	Einheit
ID	Integer	X / X	-
Position	Double	X / -	-
z	Double	X / X	-
M	Double	X / X	M_{\odot}
M_{acc}	Double	X / X	M_{\odot}
number_child	Integer	X / X	-
z_{child}	Double	X / X	-
z_{parent}	Double	X / -	-

- ID: ist die in Abschnitt 2.3.1 eingeführte unitäre Nummer der Containerklasse *Bestandteil* beziehungsweise *Bestandteil_T* des aktuellen Bestandteils.
- Position: stellt eine Hilfsgröße dar, die zur Visualisierung der Baumstruktur benötigt wird, siehe dazu die Abbildungen 2.8 und 2.9.
- z : gibt den Zeitpunkt an, zu dem der Zeitschritt für den aktuellen Bestandteil ausgelöst wurde.
- M : stellt die Gesamtmasse des aktuellen Bestandteils dar.
- M_{acc} : steht für die Masse, die während des Zeitschritts zu akkretierter Masse wurde.
- number_child: gibt die Anzahl der „gefundenen“ Bestandteile an.
- z_{child} : ergibt sich als Summe aus z plus der Zeitschrittweite Δt .
- z_{parent} : steht für den Zeitpunkt, zu dem derjenige Zeitschritt ausgelöst wurde, aus dem der aktuelle Bestandteil hervorgegangen ist.

Tabelle 2.2: Ausgabewerte der Baumstruktur sowie des Zeitstrangs.

wird in einer Schleife von 1 bis N für jeden der N *Elternhalos* die Berechnung seiner Mergergeschichte gestartet. Dazu bekommt jeder *Elternhalo* von der globalen Funktion *anfangsmasse* eine Anfangsmasse zugeteilt, die entweder konstant sein oder einer vorgegebenen Verteilung folgen kann.

Für beide Modi hat das Programm nun die in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen Strukturen angelegt. Diese Ergebnisse können in unterschiedlichen Ausgabeformaten abgespeichert werden. Dabei steht jeder der beiden in Abschnitt 2.3.1 dargestellten Strukturen ein eigenes Ausgabeformat zur Verfügung. So kann für den Zeitstrang eine Ausgabe angelegt werden, die die Daten der Bestandteile in chronologischer Reihenfolge in eine Ausgabedatei schreibt. Dazu wird die Liste des Zeitstrangs abgearbeitet und nacheinander in jedem *Bestandteil_T* die Ausgabe der Daten des in diesem Container gespeicherten *Halos* ausgeführt. Dies geschieht mittels der Funktion *plot_content* des *Halos*. Die dabei üblicherweise ausgegebenen Daten sind in Tabelle 2.2 zusammengestellt und erläutert. Für die Ausgabe der Baumstruktur wird, wie im Fall des Zeitstrangs, auf die Struktur selbst zurückgegriffen. Dazu wird wie bei der Erzeugung der Struktur von jedem Bestandteil

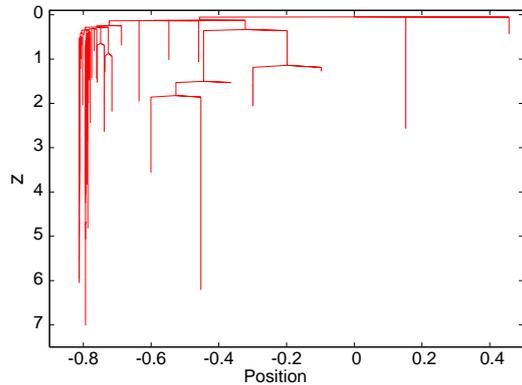


Abbildung 2.8: Baumstruktur einer Mergergeschichte. Dazu wird die Rotverschiebung z zum Entstehungszeitpunkt eines Bestandteils gegen die Größe: Position aufgetragen, die sich aus der Elternposition und der Anzahl der Kinder errechnet.

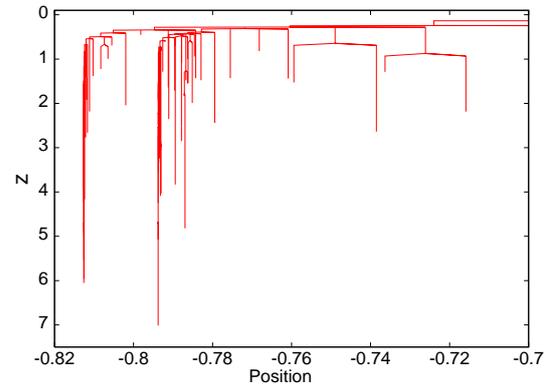


Abbildung 2.9: Verdeutlichung der Komplexität der Mergergeschichten durch einen Zoom auf den Positionsbereich von -0.82 bis -0.7 .

rekursiv die Ausgabe der ihn aufbauenden Bestandteile aufgerufen. Die ausgegebenen Daten sind also nach den ID Nummern sortiert. Für die Ausgabe selbst wird mittels eines überladenen Funktionsaufrufes eine angepasste Form der Funktion *plot_content* der Klasse *Halo* verwendet. Dies ist notwendig, da sich die Ausgabewerte von denen des Zeitstrangs unterscheiden, siehe Tabelle 2.2. Mittels der dort aufgeführten Größe *Position*, die sich für jeden Halo aus der Elternposition und der Anzahl der Kinder ergibt, lässt sich die Baumstruktur in Anlehnung an Skizze 2.5 graphisch darstellen, siehe hierzu Abbildungen 2.8 und 2.9. Abbildung 2.10 zeigt die zugehörige Entwicklung der Halomassen in Abhängigkeit der Rotverschiebung z . Neben der Ausgabe der Simulationsergebnisse werden auch die für die Simulation verwendeten Eingabewerte in einer gesonderten Ausgabedatei abgespeichert. Dies dient nicht nur zur Dokumentation, sondern ist vor allem für die spätere Weiterverarbeitung mittels *recover* notwendig.

2.4 Vergleich mit EPS

Der Vergleich mit den Vorhersagen des EPS-Formalismus ist der wichtigste Test des Mergerverfahrens mittels Monte-Carlo-Bäumen. So müssen sich über viele Bäume gemittelt diese Vorhersagen mit dem Monte-Carlo-Verfahren reproduzieren lassen, da es zur Bestimmung der einzelnen Verschmelzungsereignisse die Wahrscheinlichkeiten aus dem EPS-Formalismus verwendet. Die wichtigste Vergleichsgröße stellt dabei die Anzahlverteilung von Bestandteilen gewisser Masse in Abhängigkeit von der Zeit dar. Die Vorhersagen des EPS-Formalismus für diese Größe werden aus Gleichung (2.13) gewonnen. Um eine Vergleichsgröße aus den Simulationsergebnissen zu gewinnen, muss für diese ein zweidimensionales Histogramm angelegt werden, in dem die Bestandteile sowohl nach

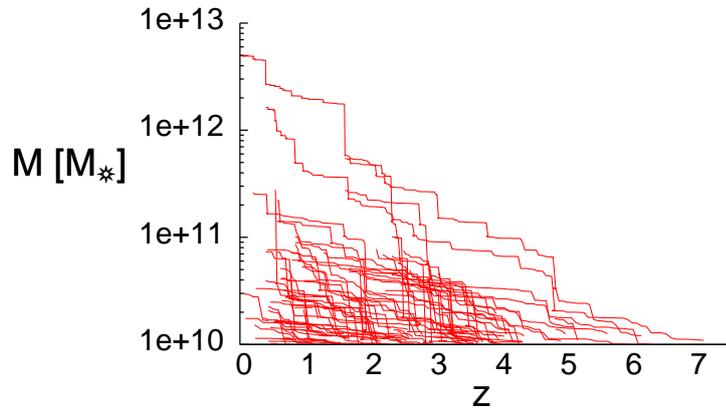


Abbildung 2.10: Entwicklung der Halomassen aufgetragen über die Rotverschiebung z . Die vertikalen Sprünge in der Masse entsprechen dabei Verschmelzungen mehrerer Halos. Die für Werte von $z > 0$ abbrechenden Entwicklungen stehen für Halos, die mit einem massereicheren Halos verschmolzen sind, da bei einer Verschmelzung immer der Entwicklung des massereichsten Bestandteils gefolgt wird.

ihrer Masse als auch nach dem Zeitpunkt ihrer Entstehung einsortiert werden. Für die Einteilung bezüglich der Zeit wird die Gesamtdauer der Simulation ($t_0 - t_{\text{begin}}$) in lineare Bins aufgeteilt, mit einer Binbreite gemäß der Zeitauflösung. Für die Einteilung der Massen werden logarithmisch äquidistante Bins auf dem Massenbereich (Maximale Anfangsmasse $-M_c$) gemäß der Massenauflösung angelegt. Die hierbei verwendeten Parameter sind in der Eingabe festzulegen (siehe hierzu Abschnitt 2.3.6). Aus Schnitten durch diese zweidimensionalen Histogramme längs konstanter Werte für die Zeit lassen sich massenabhängige Anzahlverteilungen für diese Zeitpunkte gewinnen, die mit den Vorhersagen des EPS-Formalismus verglichen werden können. Dazu müssen die Einträge in das Histogramm mit der Binbreite in Massenrichtung und der Anzahl der zur Analyse verwendeten Mergergeschichten normiert werden. Für die beiden in Abbildung 2.11 und 2.12 dargestellten Vergleiche des Monte-Carlo-Verfahrens mit dem EPS-Formalismus wurde die Anfangsmasse der Elternhalos konstant gehalten. Um die in Abschnitt 2.2.1 geforderte Unabhängigkeit des Verfahrens von der Wahl der Grenzmasse M_c zu überprüfen, wurde die Anfangsmasse in einem Beispiel zu $5M_c$ und in dem anderen zu $500M_c$ gewählt. Die Wahl der, den jeweiligen Simulationen zugrunde liegenden, Kosmologien ist für beide Beispiele dieselbe. Aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit mit den Testergebnissen von Somerville & Kolatt (1999) wurde analog ein sogenanntes *Einstein-de Sitter-Universum* gewählt, ein flaches, rein materiedominiertes Weltbild ($\Omega_M = 1.0$; $\Omega_\Lambda = 0.0$). Zur Beschreibung der Dunklen Materie wurde das τ CDM Modell mit der Parameterwahl von Efstathiou et al. (1992) verwendet. Diese Parameterwahl für r_{radius} und $\sigma_{r_{\text{radius}}}$ entspricht den Angaben der Standardwerte in der Tabelle 2.1. Für das Beispiel mit der Anfangsmasse $5M_c$ wird der Vergleich für die Zeitpunkte $z = 0.1, 0.2, 1.0$ und 3.0 angestellt, für das zweite Beispiel mit der Anfangsmasse $500M_c$ sind die Zeitpunkte $z = 0.2, 1.0,$

2 Semi-analytische Beschreibung der Entwicklung von DM Halomassen

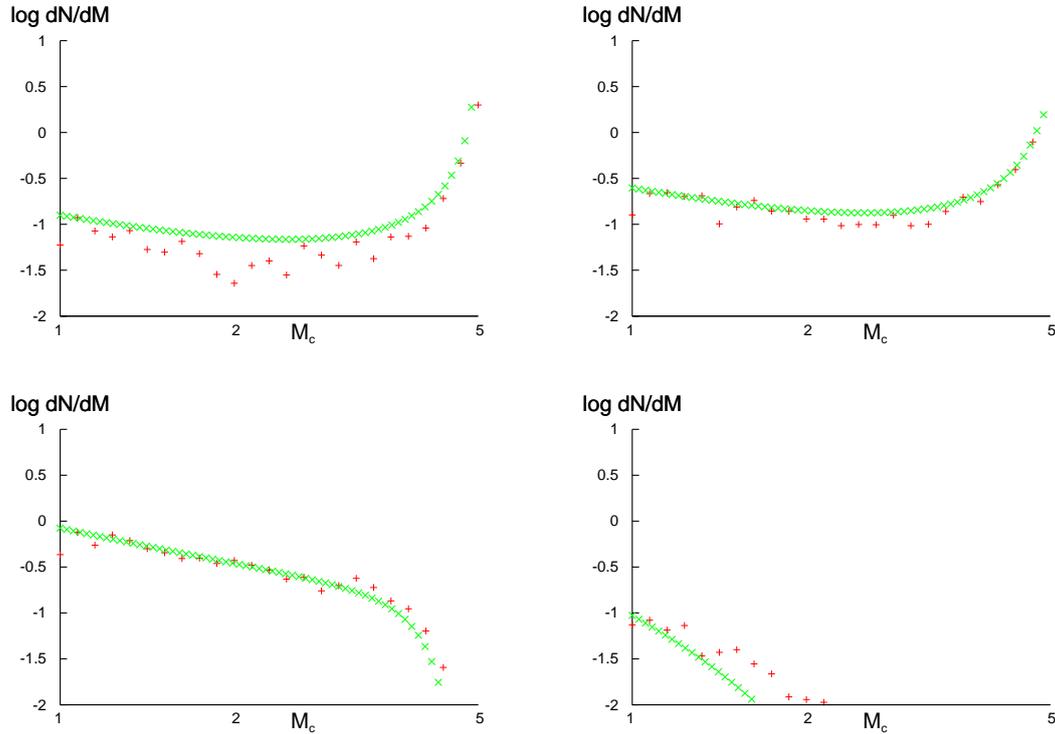


Abbildung 2.11: Anzahlverteilung der Bestandteile für einen Halo mit einer Anfangsmasse von $5 M_c$ zu den vier Zeitpunkten $z = 0.1$ (oben links), 0.2 (oben rechts), 1.0 (unten links) und 3.0 (unten rechts). Zum direkten Vergleich werden jeweils in Rot die Ergebnisse aus den Monte-Carlo-Simulationen und in Grün die Vorhersagen des EPS-Formalismus abgebildet. Als Einheit der Masse wurde die Grenzmasse M_c verwendet.

3.0 und 6.0 für die Vergleiche gewählt. Diese unterschiedliche Wahl der Zeitpunkte rührt daher, dass die kleineren Anfangsmassen bis zu einer Zeit $z = 6.0$ bereits vollständig in akkretierte Materie zerfallen sind. Abbildung 2.12 zeigt für den Vergleich zwischen den Vorhersagen des EPS-Formalismus und den Simulationsergebnissen bei der Wahl der größeren Anfangsmassen für alle dargestellten Zeitpunkte und damit für einen Zeitraum von circa einem Ga sehr gute Übereinstimmungen. Dies rechtfertigt somit das verwendete Monte-Carlo-Verfahren zur Simulation von Mergergeschichten. Auch der Vergleich mit der Wahl der kleineren Anfangsmassen, siehe Abbildung 2.11, zeigt eine weitgehende Übereinstimmung. Für den Zeitpunkt $z = 0.1$ treten allerdings leichte Abweichungen auf, denen eine zu kleine Wahl des Quotienten aus Anfangsmasse und Grenzmasse zugrunde liegt. Der Einfluss der Grenzmasse wird jedoch vernachlässigbar, so wie die betrachteten Massen grösser als $10 M_c$ werden. Umgekehrt bedeutet dies, dass die Grenzmasse so gewählt werden muss, dass für alle Bestandteile, die mit physikalischen Objekten assoziiert werden sollen (Galaxien oder Galaxienhaufen), diese Massenbedingung explizit erfüllt sein muss.

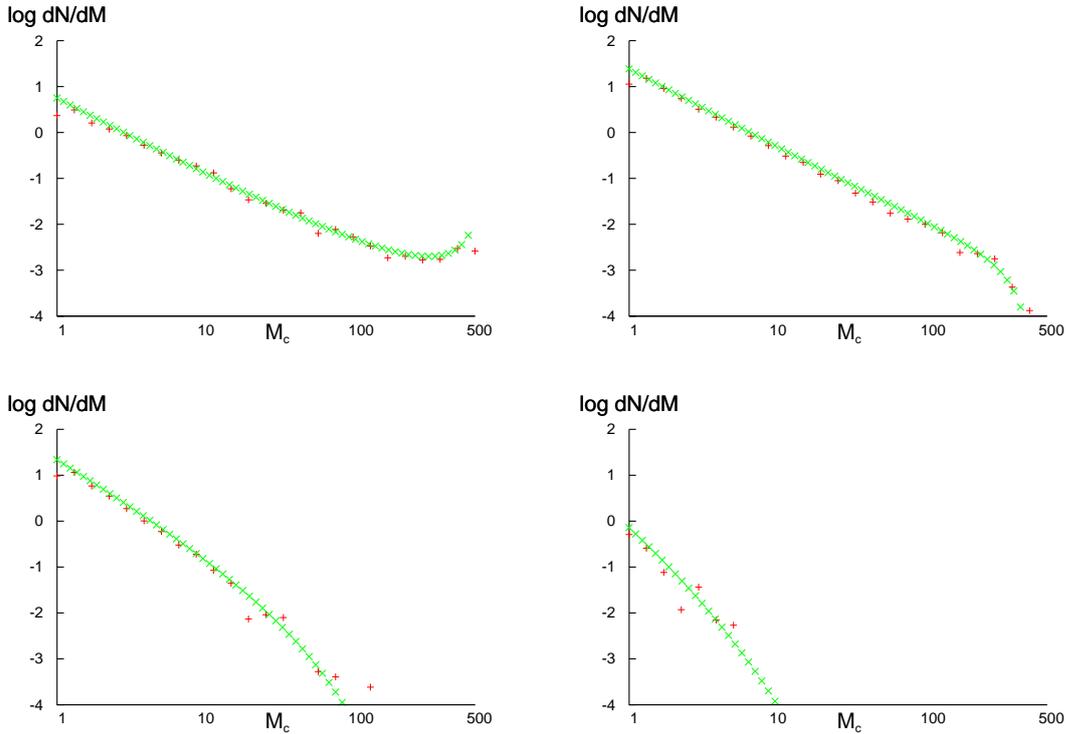


Abbildung 2.12: Anzahlverteilung der Bestandteile für einen Halo mit einer Anfangsmasse von $500M_c$ zu den vier Zeitpunkten $z = 0.2$ (oben links), 1.0 (oben rechts), 3.0 (unten links) und 6.0 (unten rechts). Zum direkten Vergleich werden jeweils in Rot die Ergebnisse aus den Monte-Carlo-Simulationen und in Grün die Vorhersagen des EPS-Formalismus abgebildet. Als Einheit der Masse wurde die Grenzmasse M_c verwendet.

2.5 Auswirkung unterschiedlicher Kosmologien

Die bisherige Verwendung eines Einstein-de Sitter-Universums als kosmologische Modellgrundlage begründete sich in der besseren Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen der Somerville & Kolatt (1999) Simulationen. Jetzt sollen andere Kosmologien und ihr Einfluss auf die Simulationsergebnisse diskutiert werden. Die hier betrachteten unterschiedlichen kosmologischen Modelle werden dabei durch verschiedene Annahmen für die Parameter in der sogenannten *Friedmann-Gleichung* gewonnen:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{m,0} a^{-3}(t) - \frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.41)$$

Zur Herleitung der Friedmann-Gleichung siehe Anhang A. Die Größe k in Gleichung (2.41) steht dabei für den Krümmungsparameter, $a(t)$ für den Skalenfaktor, ρ_m für die Materiedichte und Λ für die kosmologische Konstante.

Unter Einführung einer Reihe dimensionsloser Größen,

$$\Omega_{M,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0} \quad \Omega_{\Lambda,0} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad \Omega_k = -\frac{kc^2}{H_0^2}, \quad (2.42)$$

den sogenannten *Dichteparametern*, kann die Friedmann-Gleichung wie folgt umgeschrieben werden:

$$H^2(t) = H_0^2 [\Omega_{M,0} a^{-3}(t) + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_k a^{-2}(t)] \quad (2.43)$$

Wertet man diese Gleichung für den Zeitpunkt $t = t_0$ (heute), bei dem $a(t)$ auf 1 gesetzt wird, aus, so ergibt sich folgender Zusammenhang für die Dichteparameter:

$$1 - \Omega_{M,0} - \Omega_{\Lambda,0} = \Omega_k. \quad (2.44)$$

Das Verhältnis der Dichteparameter der unterschiedlichen Energieformen (die mit der Strahlung verbundene Energiedichte wurde hier vernachlässigt) gibt also die mit Ω_k verbundene Krümmung der globalen Raumzeit an. Diese wird, auf die heute zur Verfügung stehenden Beobachtungsdaten gestützt, für die weitere Betrachtung als Null angenommen. Es werden also nur „flache“ Weltmodelle berücksichtigt. Damit folgt aus Gleichung (2.44) ein einfacher Zusammenhang zwischen dem Dichteparameter der Materie (sowohl baryonische wie auch Dunkle Materie) Ω_M und dem mit der kosmologischen Konstanten verbundenen Dichteparameter der Dunklen Energie Ω_Λ :

$$\Omega_{M,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1. \quad (2.45)$$

Aus der zeitlichen Entwicklung der Dichteparameter der Materie:

$$\Omega_M(a) = \frac{8\pi G}{3H^2(a)} \rho_{m,0} a^{-3} = \frac{\Omega_{M,0}}{a + \Omega_{M,0}(1-a) + \Omega_{\Lambda,0}(a^3 - a)} \quad (2.46)$$

und der Dunklen Energie:

$$\Omega_\Lambda(a) = \frac{\Lambda}{3H^2(a)} = \frac{\Omega_{\Lambda,0} a^3}{a + \Omega_{M,0}(1-a) + \Omega_{\Lambda,0}(a^3 - a)} \quad (2.47)$$

ergibt sich, dass diese Aussage von Gleichung (2.45), wenn sie bei $t = t_0$ erfüllt ist auch für alle anderen Zeiten erhalten bleibt. Die auf diese Art beschriebenen Weltmodelle, bei denen die Dunkle Energie auf eine kosmologische Konstante zurückgeführt und eine Dunkle Materiekomponente als Teil der Materiedichte angesetzt wird, werden als Λ CDM Modelle bezeichnet.

Nun sollen die Auswirkungen einer Variation dieser Dichteparameter auf die Ergebnisse der Simulation der Mergergeschichten untersucht werden. Dazu muss jedoch zunächst gezeigt werden, dass die Simulationsergebnisse auch für Kosmologien, die von einem Einstein-de Sitter-Universum abweichen, mit den Vorhersagen des EPS-Formalismus

übereinstimmen. Abbildung 2.13 zeigt dies für eine Auswahl der betrachteten Kosmologien. Für den Vergleich in Abbildung 2.13 wurde für die Anfangsmasse der Halos $M = 500M_c$ gewählt. Alle übrigen Parameter wurden aus Abschnitt 2.4 übernommen. Wie der Abbildung 2.13 entnommen werden kann, ist für alle dargestellten Kosmologien eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Simulationsergebnissen und den theoretischen Vorhersagen gegeben.

2.5.1 Mergerraten

Unterschiedliche Werte der kosmologischen Konstante

Um die Auswirkungen der Verwendung unterschiedlicher Kosmologien auf die ursprünglich die Arbeit motivierende Leuchtkraftfunktion der AGNs untersuchen zu können, soll nun als Zwischenschritt auf die sich ändernden Mergerraten in Abhängigkeit von der verwendeten Kosmologie eingegangen werden. Der wesentliche Unterschied zur Betrachtung der Anzahlverteilung der Bestandteile aus Abschnitt 2.4 liegt darin, dass nun ein Bestandteil nur noch dann berücksichtigt wird, wenn er im letzten Zeitschritt in mehr als einen Bestandteil plus akkretiertem Material zerfallen ist; also mindestens in zwei echte Bestandteile. Die Betrachtung löst sich damit vom Bestandteil selbst und geht hin zu dem Ereignis des Verschmelzens von Bestandteilen. Diese Vorgänge sind in Abbildung 2.10 als vertikale Stufen in der zeitlichen Massenentwicklung beziehungsweise in Abbildung 2.8 als Gabelungen der Pfade aufzufinden. Unter der Maßgabe AGNs zu studieren ist dies sinnvoll, da angenommen wird, dass eben der Vorgang der Verschmelzung von Galaxien den Auslöser für eine Aktivitätsphase darstellt. Dabei soll eine weitere Einschränkung gemacht werden: da es sich bei der Verschmelzung um einen sogenannten *Major Merger* handeln soll, darf das Massenverhältnis für den Fall der Verschmelzung von genau zwei Galaxien nicht größer sein als 3 : 1. Da der verwendete Simulationscode auch Verschmelzungen von mehr als zwei Bestandteilen in einem Zeitschritt zulässt, wurde die Definition des Massenverhältnisses M_{frac} wie folgt verallgemeinert:

$$M_{\text{frac}} = \sum_{i=1}^n \frac{M_i}{M_{\text{tot}} - M_i}. \quad (2.48)$$

Dabei steht M_{tot} für die an der Verschmelzung beteiligte Gesamtmasse und n für die Anzahl der verschmelzenden Bestandteile. Aus der oben geforderten Bedingung eines Major Mergers als Auslöser für eine AGN ergibt sich damit ein oberes Limit von $M_{\text{frac}} \approx 3.3$ für das Massenverhältnis. Für die auf diese Weise ausgewählten Verschmelzungsereignisse wird analog zu Abschnitt 2.4 ein Histogramm in M_{tot} und z angelegt. Wie auch in Abschnitt 2.4 wird das Histogramm in z -Richtung linear und in M -Richtung logarithmisch gebint. Für die beiden Annahmen des Dichteparameterpaares $\{\Omega_{\text{M},0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{1.0; 0.0\}$ sowie $\{0.3; 0.7\}$ sind die jeweiligen Histogramme in den Abbildungen 2.14 beziehungsweise 2.15 dargestellt. Die Farbskala gibt die Anzahl der Ereignisse für den jeweili-

2 Semi-analytische Beschreibung der Entwicklung von DM Halomassen

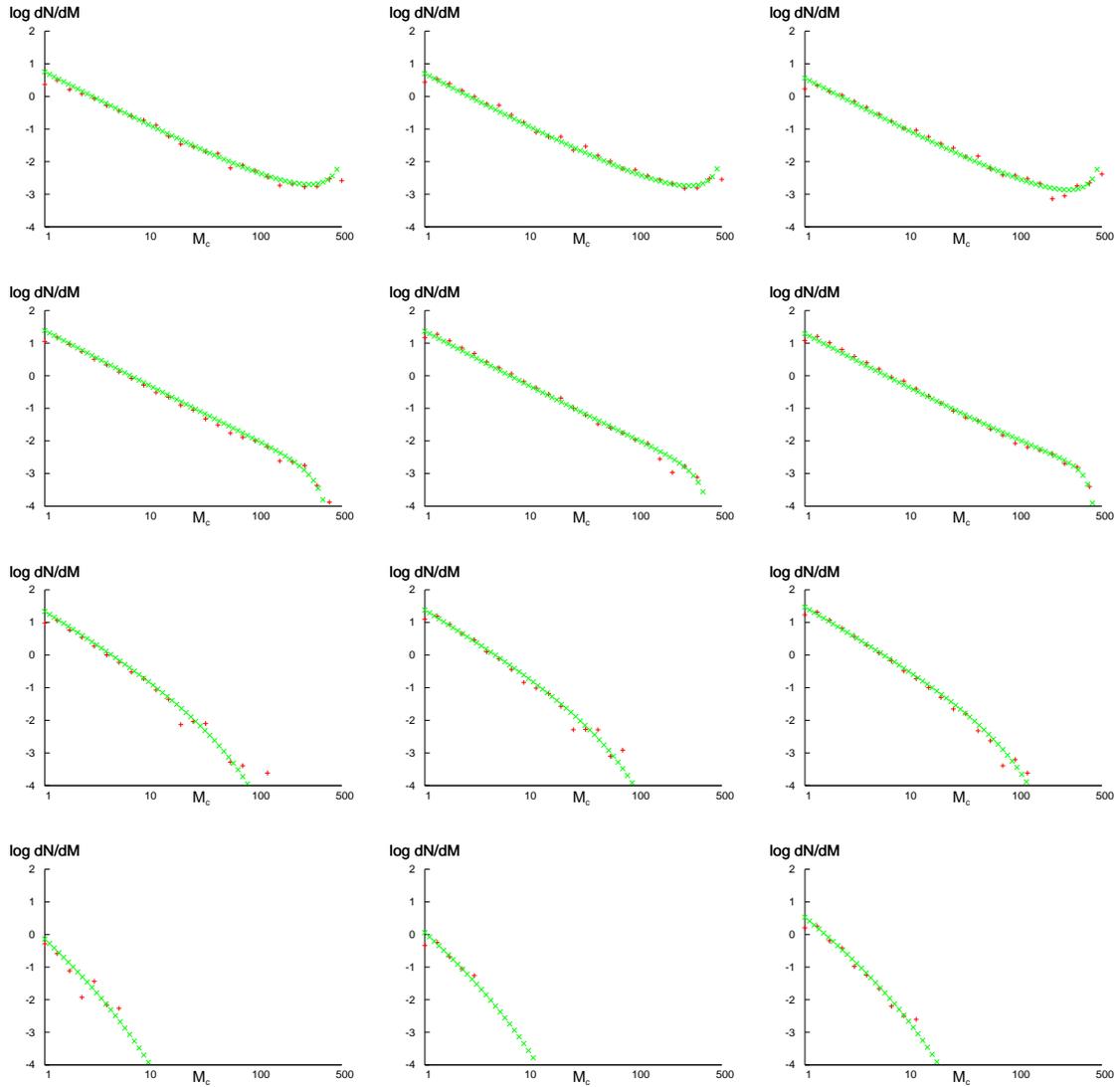


Abbildung 2.13: Anzahlverteilung der Bestandteile für einen Halo mit einer Anfangsmasse von $500 M_c$ zu den vier Zeitpunkten $z = 0.2$ (1. Zeile), 1.0 (2. Zeile), 3.0 (3. Zeile) und 6.0 (4. Zeile) für die Dichteparameterpaare $\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0} = 1.0; 0.0$ (1. Spalte), $0.7; 0.3$ (2. Spalte) und $0.3; 0.7$ (3. Spalte). Zum direkten Vergleich werden jeweils in Rot die Ergebnisse aus den Monte-Carlo-Simulationen und in Grün die Vorhersagen des EPS-Formalismus abgebildet. Als Einheit der Masse wurde die Grenzmasse M_c verwendet.

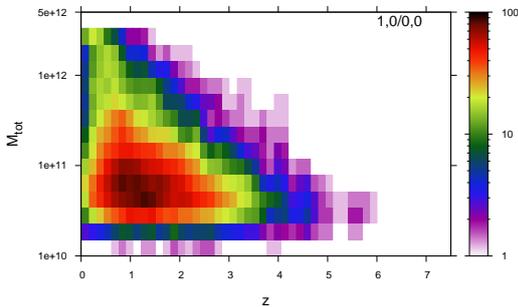


Abbildung 2.14: Histogramm der Häufigkeiten von Verschmelzungen in Abhängigkeit der daran beteiligten Gesamtmasse sowie der Rotverschiebung. Die farbkodierten Häufigkeiten beruhen auf der Berechnung von 200 Mergeschichten von Halos mit einer Anfangsmasse von $500 M_{\odot}$, denen ein Einstein-de Sitter-Universum als kosmologische Beschreibung zugrunde liegt.

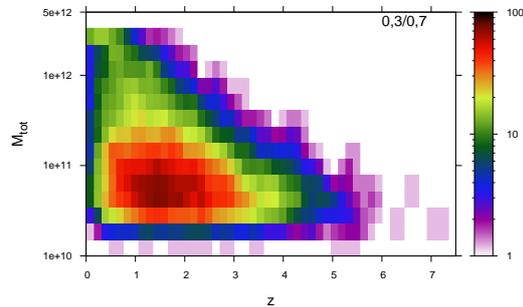


Abbildung 2.15: Histogramm der Häufigkeiten von Verschmelzungen in Abhängigkeit der daran beteiligten Gesamtmasse sowie der Rotverschiebung. Den, wie in Abbildung 2.14, 200 Mergeschichten liegt eine Λ CDM Kosmologie mit $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$ als Wahl der Dichteparameter zugrunde.

gen $M_{\text{tot}} - z$ Bereich an. Abbildung 2.14 stellt damit den Fall eines Einstein-de Sitter-Universums dar, während die Parameterwahl von Abbildung 2.15 sich an den Vorgaben aktueller Beobachtungen orientiert. Um die in diesen Abbildungen schon zu erahnende Auswirkung der unterschiedlichen Kosmologien besser sichtbar zu machen, zeigt Abbildung 2.16 die Änderungen der jeweiligen Mergerraten in Abhängigkeit zu dem in Abbildung 2.15 dargestellten Fall $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$. Der durch die Farbskala angegebene Wert wird als die Differenz zwischen der Mergerrate der betrachteten Kosmologie und der zur Normierung gewählten Kosmologie geteilt durch deren Summe errechnet. Wie aus der Serie der Bilder eindeutig zu entnehmen ist, führt eine Erhöhung des Dichteparameters der Dunklen Energie Ω_{Λ} , in Form einer höheren kosmologischen Konstante, zu einem steten Verschieben der Häufigkeiten der Mergerereignisse hin zu höheren z -Werten. Dabei ergeben sich zwischen dem Fall eines Einstein-de Sitter-Universums und der zur Normierung gewählten Kosmologie Abnahmen der Mergerraten bei niedrigen beziehungsweise Zunahmen bei hohen z -Werten von jeweils bis zu einem Faktor Fünf. Vergleichbare Änderungen treten bei einer weiteren Erhöhung der kosmologischen Konstante bis zu einem Wert von $\Omega_{\Lambda,0} = 0.95$ auf. Die den Simulationen zugrunde liegende Wahl der Dichteparameter beeinflusst damit massiv die Entwicklungsgeschichte der DM Halos und damit der Strukturbildung im Universum ganz allgemein.

Frühe Dunkle Energie

Aktuelle Beobachtungsdaten legen Dichteparameter von $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$ nahe. Einen wichtigen Beitrag zur Absicherung dieser Werte haben die Messungen der WMAP

2 Semi-analytische Beschreibung der Entwicklung von DM Halomassen

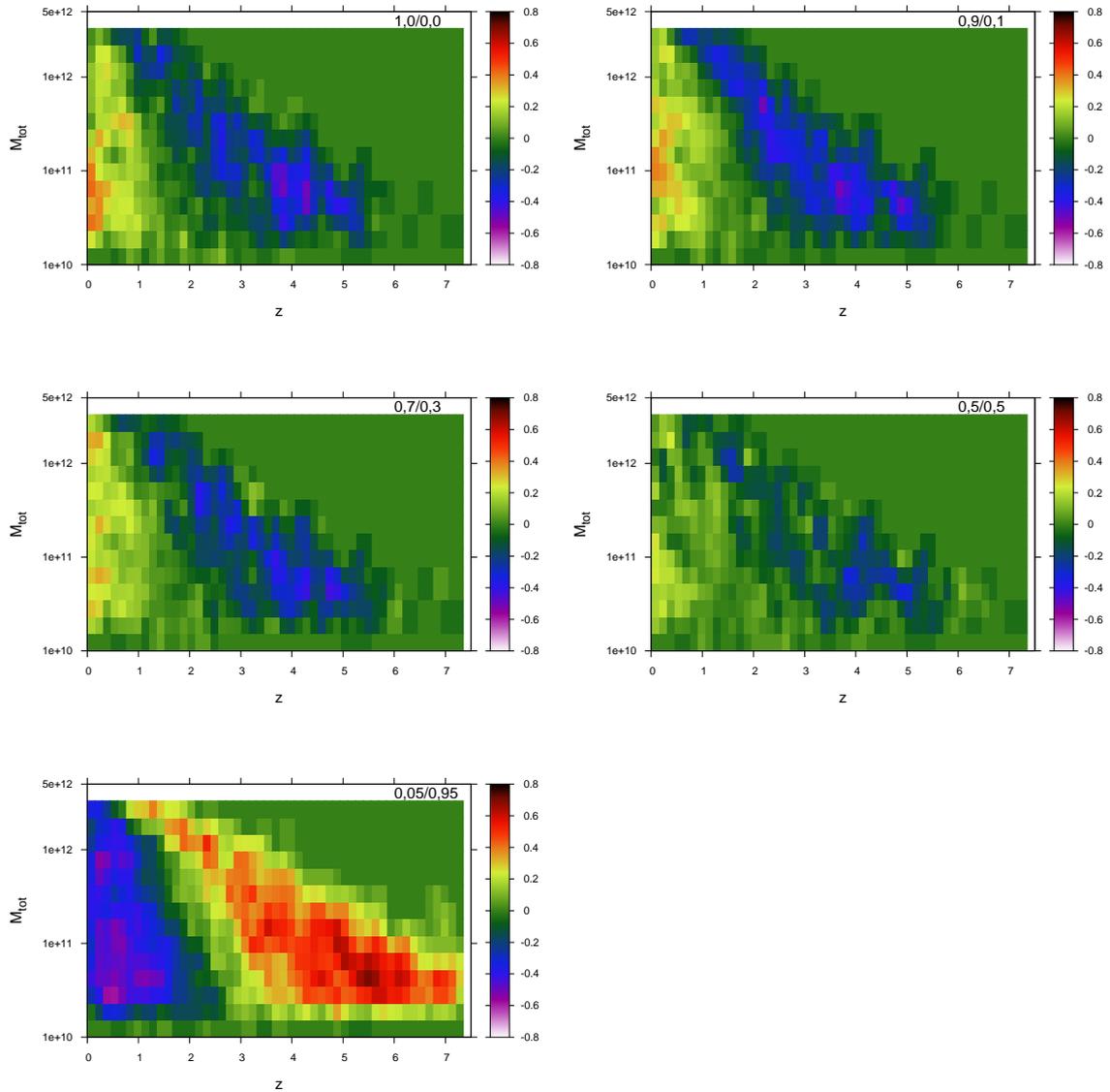


Abbildung 2.16: Relative Häufigkeiten einer Auswahl an Λ CDM Kosmologien im Vergleich zu der als Norm gewählten Kosmologie mit $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$, siehe Abbildung 2.15. Die Verhältnisse sind durch die Farbkodierung gegeben. Die ausgewählten Dichteparameterpaare sind dabei $\{1.0; 0.0\}$ oben links, $\{0.9; 0.1\}$ oben rechts, $\{0.7; 0.3\}$ mitte links, $\{0.5; 0.5\}$ mitte rechts sowie $\{0.05; 0.95\}$ unten links. Die relativen Häufigkeiten werden als die Differenz der Häufigkeiten zwischen der betrachteten und der Normkosmologie geteilt durch die Summe der Häufigkeiten berechnet. Zur Summe wird dabei ein Offset von 5 gezählt, um die Abweichungen an den Rändern, wo nur einige wenige Verschmelzungen pro $M_{\text{tot}} - z$ Bin in die Histogramme eingetragen sind, nicht überzubewerten. Da in den Kerngebieten mehrere hundert Verschmelzungen pro Histogramm eingetragen sind, führt der Offset dort nur zu geringen Abweichungen. Den Vergleichen liegt jeweils ein Ensemble aus 200 Mergergeschichten mit einer festen Anfangsmasse von $500 M_{\text{C}}$ zugrunde.

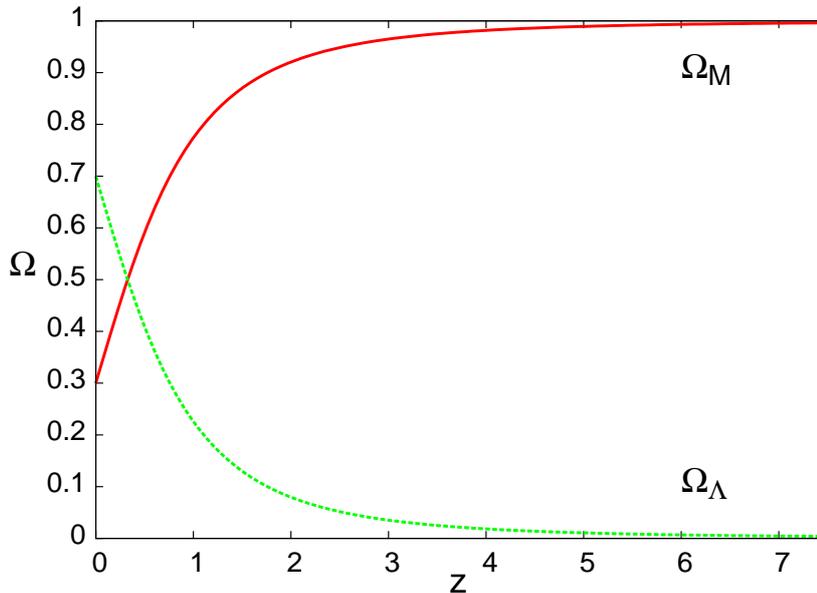


Abbildung 2.17: Zeitliche Entwicklung der Dichteparameter Ω_M , in Rot, und Ω_Λ , in Grün, für die Annahmen einer kosmologischen Konstante.

Mission sowie der großen Himmelsdurchmusterungen 2-degree-Field (2dF) und das Sloan Digital Sky Survey (SDSS) geleistet. Aber auch wenn damit eine moderate Dominanz der Dunklen Energie über die Materie in unserem heutigen Universum als relativ gesichert angesehen werden kann, siehe zum Beispiel Tegmark et al. (2004) oder Hawkins et al. (2003), so ist doch relativ wenig über die zeitliche Entwicklung der Dunklen Energie bekannt. Diese Frage ist natürlich hinfällig, wenn man wie bisher angenommen, die Dunkle Energie als das Ergebnis einer kosmologischen Konstanten auffasst, da sie dann keiner zeitlichen Entwicklung unterliegt. Dann muss jedoch erklärt werden, warum gerade heute ihr Beitrag von der selben Größenordnung ist wie der Beitrag der Materie. Betrachtet man nämlich die Gleichungen (2.46) und (2.47) so sieht man, dass für frühere Zeiten ($a \rightarrow 0$) der Dichteparameter der Materie Ω_M gegen Eins und der der Dunklen Energie Ω_Λ gegen Null geht. Abbildung 2.17 stellt den Verlauf der Dichteparameter in Abhängigkeit der kosmologischen Rotverschiebung z dar, dabei wurde der Zusammenhang:

$$1 + z = \frac{1}{a}, \quad (2.49)$$

verwendet. Unser Universum durchläuft also bei der Verwendung einer kosmologischen Konstante zur Zeit eine ausgezeichnete Phase seiner Entwicklung. Um diesen „Zufall“ nicht annehmen zu müssen, wurden mehrere Vorschläge für eine zeitlich variable Dunkle Energie gemacht. Viele dieser Modelle führen ein durch die Elementarteilchenphysik motiviertes Skalarfeld für die Beschreibung der Dunklen Energie ein (Wetterich, 1988; Peebles & Ratra, 1988; Brax & Martin, 2000, etc.), welches in der Literatur häufig als Cos-

mon oder Quintessenz bezeichnet wird. Dessen Druck P_{de} und Energiedichte ρ_{de} werden durch die Zustandsgleichung einer perfekten Flüssigkeit miteinander verknüpft:

$$P_{\text{de}} = \omega_{\text{de}} \rho_{\text{de}} c^2. \quad (2.50)$$

Der Quintessenzparameter $\omega_{\text{de}}(z)$ stellt als Funktion der Zeit dabei die Erweiterung gegenüber der kosmologischen Konstante dar, für die stets $\omega_{\text{de}} = -1$ gelten würde. Der genaue Verlauf von $\omega_{\text{de}}(z)$ hängt vom verwendeten Modell ab. Das hier betrachtete Beispiel für eine Kosmologie mit früher Dunkler Energie verwendet eine von Wetterich (2004) vorgeschlagene Parametrisierung für $\omega_{\text{de}}(z)$. Die kosmologischen Parameter entsprechen dem Modell (II) aus Bartelmann et al. (2006). Die Tabellen B.1 und B.2 im Anhang B geben den Verlauf von $\omega_{\text{de}}(z)$ in Abhängigkeit von $1+z$ beziehungsweise die sich hieraus ergebenden Werte für die kritische Dichteüberhöhung δ_c an. Abbildung 2.18 zeigt analog zu Abbildung 2.16 die Abweichung der Mergerhäufigkeiten bei Verwendung einer Kosmologie mit früher Dunkler Energie gegenüber einer Λ CDM Kosmologie mit einer Wahl von $\{\Omega_{\text{M},0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$. Wie der Abbildung entnommen werden kann, hat ein frü-

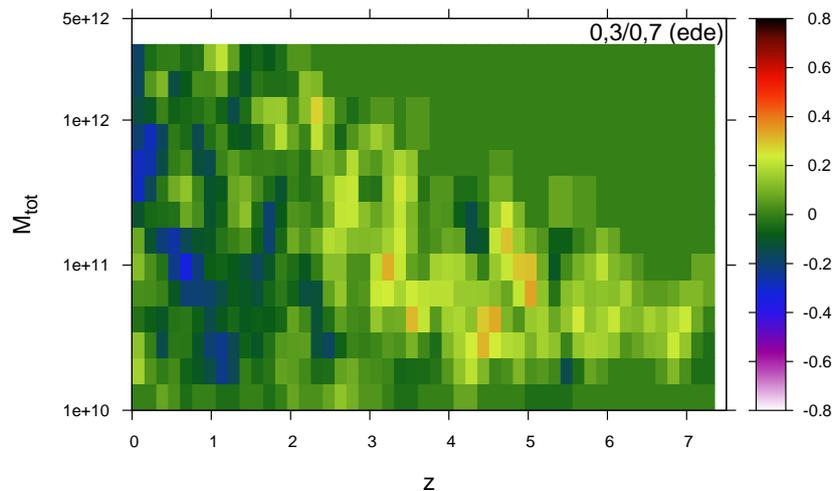


Abbildung 2.18: Analog zu Abbildung 2.16 sind die relativen Verschmelzungshäufigkeiten bei der Verwendung des Modells (II) aus Bartelmann et al. (2006) als Kosmologie mit früher Dunkler Energie dargestellt.

her Anteil an Dunkler Energie eine weitere Verlagerung der Mergerhäufigkeiten hin zu noch höheren Rotverschiebungen zur Folge. Dies kann durch die bei dieser Beschreibung der Dunklen Energie abgesenkten Werte des kritischen Dichteparameters δ_c verstanden werden, siehe Bartelmann et al. (2006). Abbildung 2.19 zeigt die Entwicklung des kritischen Dichteparameters für das Modell mit früher Dunkler Energie sowie für das Λ CDM Modell mit $\{\Omega_{\text{M},0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$.

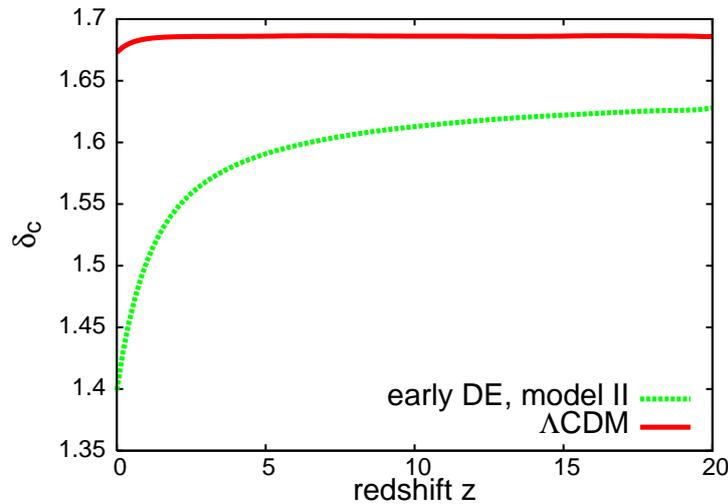


Abbildung 2.19: Kritische Dichteüberhöhung δ_c als Funktion der Rotverschiebung z für eine Λ CDM Kosmologie mit $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$ (Rot) und für eine Kosmologie mit früher Dunkler Energie (Modell (II) aus Bartelmann et al., 2006) (Grün). [Bartelmann et al. (2006)].

2.5.2 Abschätzung zur Leuchtkraftfunktion

Die im letzten Abschnitt dargestellten Häufigkeitsverteilungen der sogenannten Major Merger in Abhängigkeit der daran beteiligten Massen sowie der Rotverschiebung stellen die Grundlage für eine Berechnung der Leuchtkraftfunktion von AGNs dar. Diese Major Merger werden nämlich als die Hauptauslöser für diese Aktivitätsphasen angesehen (Genzel et al., 1998; McLure et al., 1999; Canalizo & Stockton, 2001, etc.). In diesem Abschnitt soll nun mittels einer ersten Abschätzung für den Verlauf der AGN Phasen die prinzipielle Auswirkung der unterschiedlichen Annahmen für das kosmologische Modell auf die sich daraus ergebende Leuchtkraftfunktion untersucht werden.

Zur Akkretion zur Verfügung stehende Materie

Bei den an den Major Mergern beteiligten Massen handelt es sich bei den bisherigen Betrachtungen stets um die Gesamtmassen der zugehörigen DM Halos. Aus diesen muss nun durch eine Reihe von Abschätzungen die zur Akkretion auf das zentrale Schwarze Loch des AGNs und damit für die Energieerzeugung zur Verfügung stehende Masse bestimmt werden. Seien M_1 und M_2 die Massen zweier an einem Major Merger beteiligten DM Halos, so wird die baryonische Scheibenmasse der in diesen Halos eingebetteten Galaxien zu $(M_1 + M_2)m_d$ abgeschätzt. Für den Parameter m_d wird der in der Literatur gebräuchliche Wert von 0.041 verwendet, siehe zum Beispiel Springel et al. (2005a) oder Johansson et al. (2009). Diese Scheibenmasse schließt sowohl eine Gaskomponente als auch eine stellare Komponente ein. Für die Akkretion steht nur die Gaskomponente zur Verfügung, da die Sternkomponente als stoßfreies System betrachtet werden kann und

damit der zur Akkretion führenden Viskosität nicht unterliegt. Die Masse reduziert sich damit um den weiteren Faktor f_{gas} , den Massenanteil der Gaskomponente, der im Rahmen dieser Abschätzung auf 0.2 festgelegt wird. Im nächsten Schritt wird der Bruchteil f_{in} der Gaskomponente angegeben, der als Folge des Major Mergers in den zentralen Bereich ($< 300\text{pc}$) der sich neu ausbildenden Galaxie getrieben wird und damit die zentrale Akkretionsscheibe mitformt. Hierfür geben numerische Simulationen von Naab & Burkert (2001a) für einen 1 : 1 beziehungsweise einen 3 : 1 Merger Werte von circa 0.5 beziehungsweise 0.3 an. Für dazwischenliegende Massenverhältnisse wird linear interpoliert. Da in Abschnitt 2.5.1 Major Merger zu Verschmelzungen mit einem Massenverhältnis von höchstens 3 : 1 definiert wurden, ist damit der ganze mögliche Wertebereich der Massenverhältnisse abgedeckt. Somit ergibt sich die zur Akkretion zur Verfügung stehende Masse ΔM aus den DM Halomassen mittels:

$$\Delta M = (M_1 + M_2) m_d f_{\text{gas}} f_{\text{in}}. \quad (2.51)$$

Beschreibung einer Akkretionsphase

Im Rahmen dieser Abschätzung soll nun angenommen werden, dass die Masse ΔM die Gesamtmasse der Akkretionsscheibe um das zentrale Schwarze Loch der AGN sei. Ihr zeitlicher Aufbau durch das während einer Verschmelzung in den zentralen Bereich der AGN strömende Gas wird vernachlässigt und die Scheibe mit ihrer Gesamtmasse und ohne weiteren Zustrom als gegeben angenommen. Diese Vereinfachung wird durch den diffusiven Charakter der viskosen Akkretion gestützt (siehe hierzu Abschnitt 4.3). Die Akkretionsrate \dot{M}_{bh} auf das Schwarze Loch kann als Quotient aus Scheibenmasse und viskoser Zeitskala τ_{visc} abgeschätzt werden:

$$\dot{M}_{\text{bh}} = \frac{\Delta M}{\tau_{\text{visc}}}. \quad (2.52)$$

Die viskose Zeitskala

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{r_a^2}{\nu} = \frac{1}{\beta \omega(r_a)} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{r_a^3}{G \Delta M}}, \quad (2.53)$$

dient desweiteren der Abschätzung der „Brenndauer“ einer Aktivitätsphase. Die Größe r_a steht für den Außenrand der Scheibe, für den die Winkelgeschwindigkeit $\omega(r_a)$ als Keplersche Rotation bestimmt wird. Desweiteren wurde für die Berechnung der Winkelgeschwindigkeit die Selbstgravitation in Form der Monopolnäherung (Mineshige & Umemura, 1997) verwendet und für den in Akkretionsscheiben in AGNs stets gültigen Fall $\Delta M \gg M_{\text{bh}}$ vereinfacht. Für die Viskosität ν wurde die sogenannte β -Parametrisierung von Duschl et al. (2000) verwendet:

$$\nu_{\beta} = \beta r^2 \omega \quad \text{mit: } \beta = 10^{-3}. \quad (2.54)$$

Für die Akkretionsrate auf das zentrale Schwarze Loch muss allerdings das sogenannte Eddington-Limit beachtet werden. Das Eddington-Limit gibt eine Grenzleuchtkraft L_{Edd}

an, für die der auf die Scheibenmaterie wirkende und nach außen gerichtete Strahlungsdruck die nach innen gerichtete Gravitation ausgleicht, siehe Abschnitt 5.3:

$$L_{\text{Edd}} \approx 1.3 \times 10^{38} \underbrace{\frac{\text{erg}}{\text{s} M_{\odot}}}_A M_{\text{bh}}. \quad (2.55)$$

Damit hängt sie ausschließlich von der aktuellen Masse M_{bh} des Schwarzen Lochs ab. Über den Zusammenhang zwischen der akkretionsbedingten Leuchtkraft L_{acc} und der Akkretionsrate \dot{M} :

$$L_{\text{acc}} = \epsilon c^2 \dot{M}, \quad (2.56)$$

lässt sich die durch das Eddington-Limit verursachte maximale Akkretionsrate \dot{M}_{Edd} des Schwarzen Lochs mit:

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{A}{\epsilon c^2} M_{\text{bh}}, \quad (2.57)$$

bestimmen. Der Parameter ϵ , der auf 0.1 gesetzt wird, gibt dabei die Akkretionseffizienz an, wie in Abschnitt 5.3 diskutiert wird. Für die in Gleichung (2.52) abgeschätzte Akkretionsrate ergeben sich somit die beiden möglichen Fälle:

- $\dot{M}_{\text{bh}} > \dot{M}_{\text{EDD}}$:

$$\dot{M} = \dot{M}_{\text{EDD}} \quad \rightarrow \quad M_{\text{bh}}(t) = M_{\text{bh},0} \exp\left(\frac{A}{\epsilon c^2} t\right), \quad (2.58)$$

- $\dot{M}_{\text{bh}} < \dot{M}_{\text{EDD}}$:

$$\dot{M} = \dot{M}_{\text{bh}} \quad \rightarrow \quad M_{\text{bh}}(t) = M_{\text{bh}}(t_{\text{eq}}) + \dot{M}_{\text{bh}} t. \quad (2.59)$$

Für die Schwarzlochmasse $M_{\text{bh},0}$ zu Beginn einer Aktivitätsphase wurde der feste Wert von $10^5 M_{\odot}$ verwendet, siehe hierzu Lodato & Natarajan (2007). Abbildung 2.20 zeigt eine beispielhafte Entwicklung der Schwarzlochmasse für den Fall $\dot{M}_{\text{bh}} > \dot{M}_{\text{EDD}}$ zu Beginn der Entwicklung. Der Übergang zwischen den beiden oben definierten Fällen findet bei $t = t_{\text{eq}}$ statt. Dies ist der Zeitpunkt für den $\dot{M}_{\text{bh}} = \dot{M}_{\text{EDD}}$ gilt. Aus Kombination der Gleichungen (2.52) und (2.57) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta M}{\tau_{\text{visc}}} &= \frac{A}{\epsilon c^2} M_{\text{bh}} \\ M_{\text{bh}}(t_{\text{eq}}) &= \frac{\Delta M \epsilon c^2}{\tau_{\text{visc}} A}, \end{aligned} \quad (2.60)$$

für die Schwarzlochmasse $M_{\text{bh}}(t_{\text{eq}})$ zu diesem Zeitpunkt. Setzt man Gleichung (2.60) in Gleichung (2.58) ein, so erhält man für t_{eq} folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} t_{\text{eq}} &= \frac{\epsilon c^2}{A} \ln\left(\frac{M_{\text{bh}}(t_{\text{eq}})}{M_{\text{bh},0}}\right) \\ &= \frac{\epsilon c^2}{A} \ln\left(\frac{1}{M_{\text{bh},0}} \frac{\Delta M \epsilon c^2}{\tau_{\text{visc}} A}\right). \end{aligned} \quad (2.61)$$

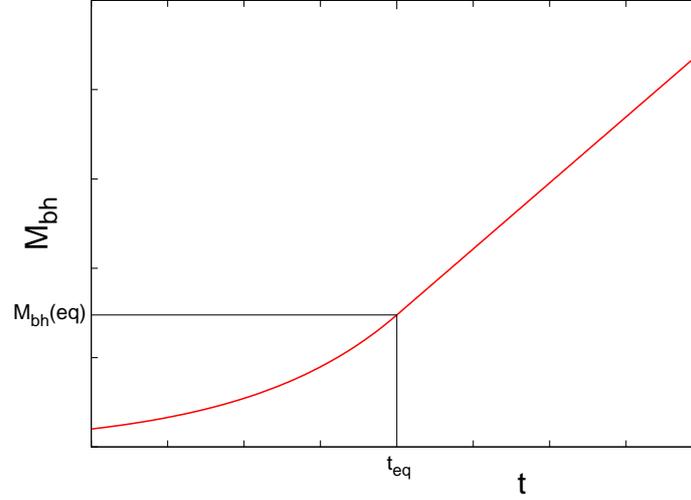


Abbildung 2.20: Massenzunahme des zentralen Schwarzen Lochs durch Akkretion unter Berücksichtigung des Eddington-Limits. Dies führt zu einem exponentiellen Anwachsen des Schwarzen Lochs bis der durch das Eddington-Limit erlaubte Massenfluss dem von der Akkretionsscheibe gelieferten Massenfluss entspricht. Dies ist zum Zeitpunkt t_{eq} (Gleichung 2.61) und bei einer Masse $M_{\text{bh}}(t_{\text{eq}})$ (Gleichung 2.60) erfüllt. Danach wächst das Schwarze Loch linear mit dem zur Verfügung gestellten Massenfluss.

Zusammenhang zwischen der Scheibenmasse und dem Scheibenaußenrand

Die Abschätzung für die Brenndauer τ_{visc} ist von dem Außenrand r_a der Akkretionsscheibe abhängig. Da diese Größe nicht aus den Simulationen der Mergergeschichte der DM Halos gewonnen werden kann, muss für sie eine weitere Annahme gemacht werden. Dazu soll eine Abhängigkeit zwischen r_a und ΔM von der Form:

$$r_a \propto \Delta M^\alpha, \quad (2.62)$$

angenommen werden, ohne zunächst α näher zu bestimmen. Mittels Gleichung (2.62) lassen sich folgende Proportionalitäten angeben:

$$\tau_{\text{visc}} \propto \Delta M^{\frac{1}{2}(3\alpha-1)} \quad (2.63)$$

$$\dot{M}_{\text{bh}} \propto \Delta M^{\frac{3}{2}(1-\alpha)} \quad (2.64)$$

$$M_{\text{bh}}(t_{\text{eq}}) \propto \Delta M^{\frac{3}{2}(1-\alpha)} \quad (2.65)$$

$$t_{\text{eq}} \propto \ln \Delta M^{\frac{3}{2}(1-\alpha)}. \quad (2.66)$$

Eine Möglichkeit zur Konkretisierung von α ist die Annahme einer festen Flächendichte Σ_1 am Außenrand einer Akkretionsscheibe unabhängig von deren Gesamtmasse. Für

die hier betrachteten, vollständig selbstgravitierenden Akkretionsscheiben, die einen Flächendichteverlauf von

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-1} \quad (2.67)$$

aufweisen (zur Herleitung des Flächendichteverlaufs siehe Anhang C), lässt sich damit der Parameter α wie folgt bestimmen:

Aus Gleichung (2.67) ergibt sich für Σ_0 und Σ_1 :

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv \Sigma(r_a) = \Sigma_0 r_a^{-1} \\ \Sigma_0 &= \Sigma_1 r_a. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Die Gesamtmasse der Akkretionsscheibe ΔM ergibt sich als radiales Integral über die Flächendichte hin bis zum Aussenrand r_a :

$$\Delta M = \int_0^{r_a} 2\pi r \Sigma(r) dr. \quad (2.69)$$

Setzt man Gleichung (2.68) in Gleichung (2.69) ein und löst das Integral, erhält man schließlich den gesuchten Zusammenhang zwischen ΔM und r_a :

$$\begin{aligned} \Delta M &= \int_0^{r_a} 2\pi r \Sigma_0 r^{-1} dr \\ &= 2\pi \Sigma_0 \int_0^{r_a} dr \\ &= 2\pi \Sigma_1 r_a r_a \\ \rightarrow r_a &\propto \Delta M^{0.5}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Damit ergibt sich für den Parameter α ein Wert von 0.5.

Eine weitere mögliche Annahme zur Konkretisierung von α ist die eines festen Außenradius r_a , unabhängig von der Masse ΔM der Akkretionsscheibe. Diese Annahme führt zu $\alpha = 0$.

Um mittels der hier vorgestellten Abschätzung und (gemäß Abschnitt 2.5.1) auf Mergerhäufigkeiten basierend die Leuchtkraftfunktion der AGNs zu bestimmen, wird für jedes einzelne Verschmelzungsereignis die zeitliche Entwicklung seiner Leuchtkraft bestimmt. Dazu wird zuerst bestimmt, ob und wenn ja, wie lange sich die betrachtete AGN im Eddington-limitierten Fall befindet. Abbildung 2.21 zeigt dafür das Verhältnis t_{eq}/τ in Abhängigkeit der Masse ΔM für beide Fälle von α . Anschließend wird mittels der jeweils gültigen Massenflüsse \dot{M}_{Edd} oder \dot{M}_{bh} sowie Gleichung (2.56) die aktuelle Leuchtkraft bestimmt. Hierzu wird allerdings noch eine Normierung benötigt, da bisher für die Beziehung zwischen ΔM und r_a nur eine Proportionalität angegeben wurde. Als Normierung wird das Wertepaar $\Delta M \approx 10^{10} M_{\odot}$ und $r_a \approx 300 \text{pc}$ für *ultra-luminous infrared galaxies* (ULIRGs), einer Untergruppe der AGNs, verwendet (siehe Lonsdale et al., 2006). In ein in z -Richtung linear und in L -Richtung logarithmisch gebintes Histogramm wird nun für jede AGN für alle durch seine Brenndauer überspannten z -Bins ein Eintrag im jeweiligen

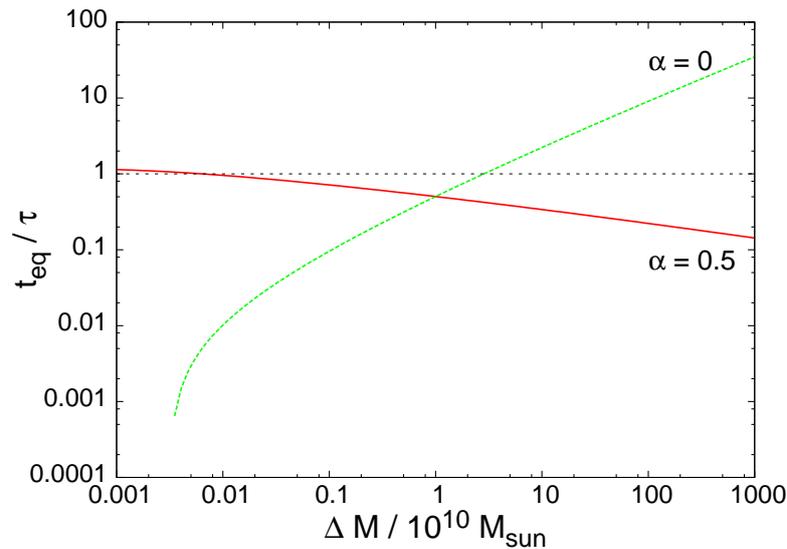


Abbildung 2.21: Verhältnis der Zeitspanne t_{eq} bis zum Ende der Eddington-limitierten Phase und der gesamten Brenndauer τ aufgetragen gegen die Scheibenmasse und normiert auf $10^{10}M_{\odot}$, in Grün für $\alpha = 0$ und in Rot für $\alpha = 0.5$. Liegt dieses Verhältnis über dem in Schwarz markierten Wert von Eins, wird die Eddington-limitierte Phase nicht verlassen. Das Abbrechen der Grünen Kurve am linken unteren Rand zeigt an, dass für noch kleinere Scheibenmassen und $\alpha = 0$ das Eddington-Limit von Anfang an erfüllt ist.

$z - L$ -Bereich vorgenommen. Dabei wird das jeweilige $L(z)$ gemäß der oben beschriebenen Methode errechnet. Der Beginn des „Brennens“ der AGN wird durch den Zeitpunkt des ihn auslösenden Mergers plus einer Latenzzeit von $t_{\text{offset}} = f_{\text{in}}(1 : 1) / f_{\text{in}} \cdot 5 \times 10^8 \text{ a}$, gemäß Naab & Burkert (2001a) festgelegt. Abbildung 2.22 zeigt die Ergebnisse für ein Einstein-de Sitter-Universum, eine Λ CDM Kosmologie mit $\{\Omega_{\text{M},0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$ sowie dem Modell (II) von Bartelmann et al. (2006) mit früher Dunkler Energie für je beide Fälle für α . Zur Erstellung der Mergerhäufigkeiten wurden jeweils Ensembles von 100 Mergergeschichten mit zufälligen Anfangsmassen M_0 aus dem Wertebereich $10^{10}M_{\odot} < M_0 < 5 \times 10^{14}M_{\odot}$ verwendet. Die Verteilung der Anfangsmassen folgt den jeweiligen Vorhersagen des EPS-Formalismus für den Zeitpunkt t_0 unter Verwendung der entsprechenden Kosmologie. Die Abbildung zeigt farbkodiert die räumliche AGN Dichte in relativen Einheiten in Abhängigkeit von der Rotverschiebung sowie der Leuchtkraft. Die Leuchtkraft wurde dabei auf diejenige Leuchtkraft normiert, die mittels der obigen Abschätzung einer AGN mit $\Delta M = 10^{10}M_{\odot}$ zugeordnet wird.

Vergleicht man die Ergebnisse spaltenweise, also jeweils für die gleiche Wahl von α , so zeigt die Abbildung, dass sich für die unterschiedlichen Kosmologien die Leuchtkraftfunktion in ihrer Struktur nur gering ändert. Die gesamte Verteilung jedoch verlagert und verbreitert sich vom Einstein-de Sitter-Universum über die Λ CDM Kosmologie bis hin zur Kosmologie mit früher Dunkler Energie hin zu höheren Werten von z . Dies liegt offensichtlich an der in den Abbildungen 2.16 und 2.18 dargestellten Verteilungen der Verschmelzungen. Die Struktur der Leuchtkraftverteilung scheint hingegen fast ausschließ-

α	0.5	0.0
\dot{M}_{bh}	$\Delta M^{\frac{3}{4}}$	$\Delta M^{\frac{3}{2}}$
τ	$\Delta M^{\frac{1}{4}}$	$\Delta M^{-\frac{1}{2}}$

Tabelle 2.3: Proportionalitäten zwischen \dot{M}_{bh} , τ und ΔM für $\alpha = 0.0$ und 0.5 .

lich von dem für die Aktivitätsphase angenommenen Modell abzuhängen. Die beiden unterschiedlichen Ergebnisse für $\alpha = 0.0$ und 0.5 spiegeln die unterschiedliche Bedeutung des Eddington-Limits für das jeweilige Modell, wie sie Abbildung 2.22 entnommen werden kann, wider. So befinden sich die AGNs für $\alpha = 0.5$ für den gesamten physikalisch interessanten Massenbereich $\Delta M \lesssim 10^{10} M_{\odot}$ den Großteil ihrer Brenndauer τ im Eddington-limitierten Fall. Während für Massen ab circa $2 \times 10^8 M_{\odot}$ noch das Ende des Eddington-limitierten Falls erreicht wird, befinden sich AGNs niedrigerer Massen während ihrer gesamten Brenndauer im limitierten Fall, was wiederum zu einer Abnahme der Leuchtkraftfunktion für Leuchtkräfte $\lesssim 0.01$ in den Einheiten aus Abbildung 2.22 führt. Für $\alpha = 0.0$ hingegen, spielt das Eddington-Limit keine nennenswerte Rolle, so dass die Leuchtkraftfunktion für geringe Leuchtkräfte wesentlich stärker ausgeprägt ist. Abgesehen von der unterschiedlichen Wichtigkeit des Eddington-Limits verändert der Wert von α gemäß den Gleichungen (2.63) und (2.64) auch die Abhängigkeiten der Leuchtkraft sowie der Brenndauer von der Scheibenmasse. Tabelle 2.3 stellt die sich konkret ergebenden Proportionalitäten zusammen. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass im Fall von $\alpha = 0.5$ die Proportionalität für den Massenfluss \dot{M}_{bh} fast nicht zum Tragen kommt, da der Massenfluss wie oben beschrieben nahezu ständig durch das Eddington-Limit begrenzt wird und daher der von der Scheibenmasse unabhängige Massenfluss \dot{M}_{Edd} verwendet werden muss. Im Vergleich zu dem Modell mit $\alpha = 0.5$, führt ein α von 0.0 zu einem steileren Verlauf der Massenflussrate und damit auch der Leuchtkraft, und zum anderen zu einer Antiproportionalität zwischen der Brenndauer und der Scheibenmasse. Dies führt zu kurzen leuchtkräftigen Aktivitätsphasen für massereiche AGNs und längeren leuchtarmeren für masseärmere AGNs. Um zu dieser Antiproportionalität zu gelangen, ist neben dem Wert von α vor allem die Viskositätsbeschreibung wichtig, die die einzige strukturverändernde Wahl für das obige Modell einer Aktivitätsphase ist. Erst die Verwendung der β -Viskosität als Erweiterung der α -Viskosität von Shakura & Sunyaev (1973) erlaubt ihr Auftreten (Hofmann, 2005). Während das Modell mit $\alpha = 0.5$ noch eine eindeutig hierarchische Leuchtkraftfunktion, also ein Maximum der Leuchtkraftfunktion bei niedrigeren z -Werten für steigende Leuchtkräfte vorhersagt, ergibt sich für $\alpha = 0.0$ wie durch die Konturlinien angedeutet wird, eine weitgehende z -Unabhängigkeit, bis hin zu Anzeichen einer anti-hierarchischen Entwicklung (Λ CDM Kosmologie für $0.01 < L < 1$). Auch wenn das hier verwendete Modell noch zu einfach ist um damit Beobachtungen der Leuchtkraftfunktion von AGNs wie etwa die von Ueda et al. (2003) oder Hasinger et al. (2005) repro-

duzieren und mittels ihnen die möglichen Werte der verwendeten Parameter einschränken zu können, so zeigt es doch bereits auf, wie der beobachtete anti-hierarchische Verlauf erklärt werden könnte. Außerdem gibt es klare Hinweise darauf, dass unterschiedliche kosmologische Modelle nur einen schwachen Einfluss auf die Struktur der Leuchtkraftfunktion haben und ihr wesentlicher Einfluss in einer Verschiebung und Ausdehnung der Leuchtkraftfunktion in z -Richtung liegt. Für die Struktur selber ist dagegen eine möglichst genaue Beschreibung des Ablaufs einer AGN von Nöten. Mit dieser Aufgabe befassen sich die Kapitel 3 und 4.

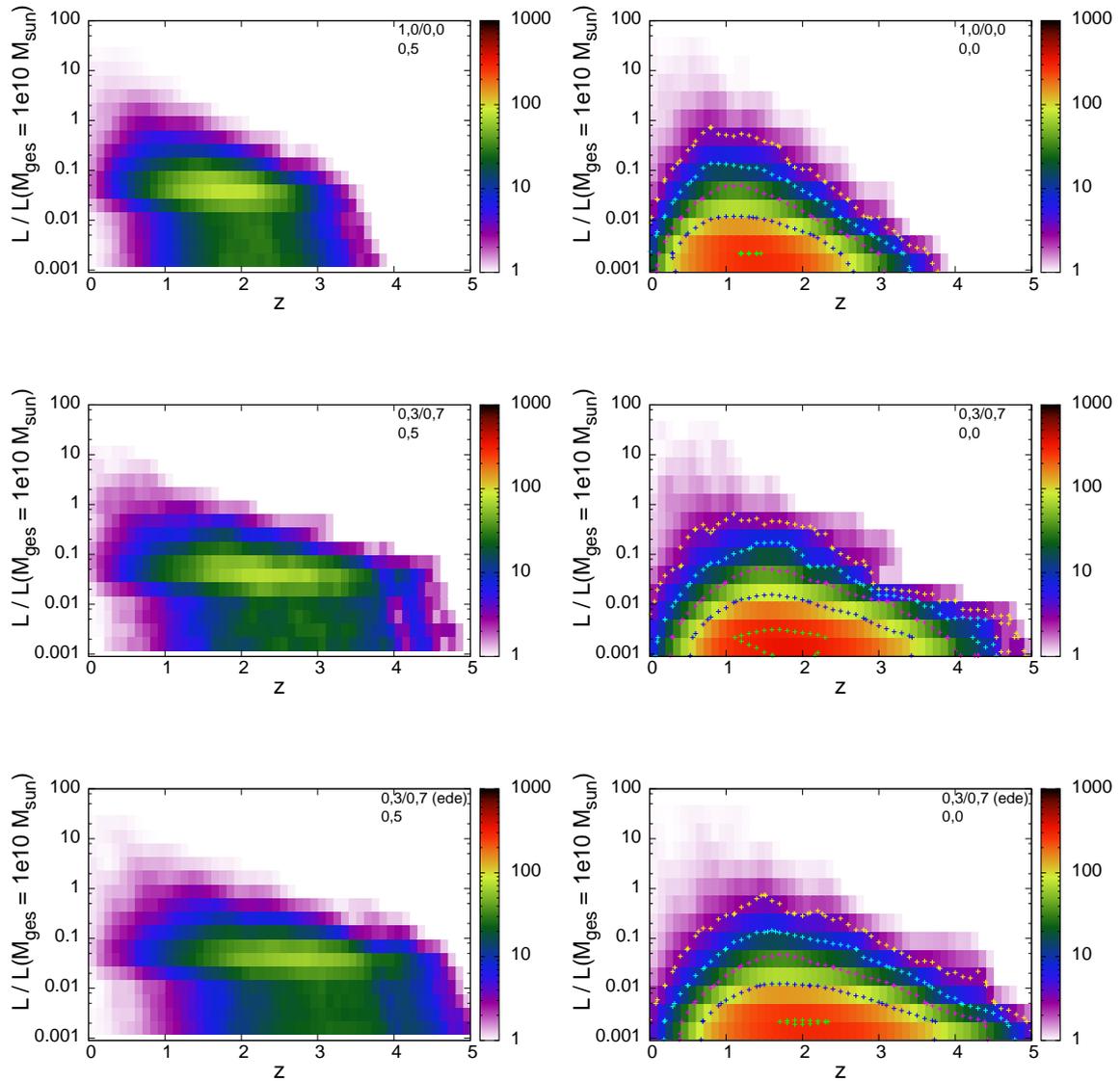


Abbildung 2.22: Relative räumliche Dichte von AGNs in Abhängigkeit der Rotverschiebung z sowie der Leuchtkraft L . Die relativen räumlichen Dichten sind farbkodiert dargestellt. Für die Ergebnisse der linken Spalte wurde der Parameter α zu 0.5 gewählt, für die der Rechten zu 0.0. Die obere Zeile zeigt die Ergebnisse für ein Einstein-de Sitter-Universum, die mittlere die für eine Λ CDM Kosmologie mit $\{\Omega_{M,0}; \Omega_{\Lambda,0}\} = \{0.3; 0.7\}$ und die untere Zeile die für das Modell (II) aus Bartelmann et al. (2006) mit früher Dunkler Energie.

3 Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben in AGNs

In Abschnitt 2.5.2 wurde die Leuchtkraftfunktion mittels eines relativ einfachen Modells für den Ablauf der Materieakkretion auf das zentrale Schwarze Loch abgeschätzt. Dies war notwendig, da die bei der Akkretion freigesetzte potentielle Energie $E_{\text{pot,free}}$ die Quelle der starken Leuchtkräfte der AGNs ist. Gemäß Gleichung (2.56) berechnet sich die Leuchtkraft aus dem Produkt der Akkretionseffizienz ϵ , dem Massenfluss \dot{M} auf das Schwarze Loch und c^2 . Dass für die Leuchtkraftgewinnung nur die Akkretionsrate auf das Schwarze Loch selbst von Interesse ist, liegt am $1/r$ -Verlauf der potentiellen Energie, aufgrund dessen der Großteil der Energie erst im innersten Bereich der Akkretionsscheibe freigesetzt wird. Der Parameter ϵ beschreibt dabei die angesetzte Akkretionseffizienz, die von der maximalen Effizienz einer Akkretion von Materie aus dem Unendlichen bis hinab zum Schwarzschildradius r_s , die sich aus:

$$\begin{aligned} E_{\text{pot,free}} &= \frac{GM_{\text{bh}}m}{r_s} - \frac{GM_{\text{bh}}m}{r_\infty} \\ &= \frac{1}{2}mc^2 \quad \text{mit: } r_s = \frac{2GM_{\text{bh}}}{c^2}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

zu $1/2$ ergibt, abweicht. Die Größe M_{bh} steht dabei für die Masse des Schwarzen Lochs. Die maximale Effizienz, bei der 50% der Ruhemasse der akkretierten Materie an potentieller Energie freigesetzt würde, kann bei realen AGNs nicht erreicht werden, da der Akkretionsprozess nicht erst am Schwarzschildradius, sondern bereits am sogenannten *innermost stable circular orbit* (ISCO) beendet wird. Der ISCO stellt eine von der Metrik des Schwarzen Lochs abhängig Größe dar, wie in Abschnitt 5.3 erläutert wird. Desweiteren vernachlässigt Gleichung (3.1), dass ein Teil der freigesetzten potentiellen Energie in Form von kinetischer Energie zusammen mit der Materie aufakkretiert wird. Auch relativistische und weitere Effekte wie das sogenannte *photon trapping*, siehe zum Beispiel Ohsuga & Mineshige (2002), müssen berücksichtigt werden. All dies zusammen führt zu einem realistischen Wert der Akkretionseffizienz ϵ von ungefähr 0.1.

Die für einen konkreten Fall wesentlichere Größe zur Bestimmung der Leuchtkraft ist der Massenfluss auf das zentrale Schwarze Loch. Um ihn realistischer bestimmen zu können als es die Abschätzungen aus Abschnitt 2.5.2 erlauben, wird in diesem Kapitel ein numerisches Verfahren zur Simulation der zeitlichen Entwicklung von Akkretionsscheiben vorgestellt. Abschnitt 3.1 stellt die zugrundeliegenden Vorstellungen und Annahmen

dieses Modells zusammen. Im Anschluss werden in Abschnitt 3.2 die wesentlichen Entwicklungsgleichungen des Modells aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik abgeleitet. Abschnitt 3.3 geht auf die technische Umsetzung des Modells ein. Die verwendeten Modellannahmen werden in Anhang D überprüft und gerechtfertigt.

3.1 Modellbeschreibung

Zur einfacheren Beschreibung der Akkretionsscheiben im Rahmen des hier vorgestellten Entwicklungsmodells werden Zylinderkoordinaten (r, z, φ) als das der Problemgeometrie am besten angepasste Koordinatensystem verwendet. Dies ist insbesondere deshalb sinnvoll, da für die Akkretionsscheiben Rotationssymmetrie angenommen wird. Dies bedeutet, dass alle partiellen Ableitungen in φ -Richtung identisch zu Null gesetzt werden: $\partial_\varphi \equiv 0$. Zusätzlich wird eine Spiegelsymmetrie bezüglich der $r - \varphi$ -Ebene verwendet. Abbildung 3.1 zeigt diese Anordnung zusammen mit einigen Festlegungen bezüglich der

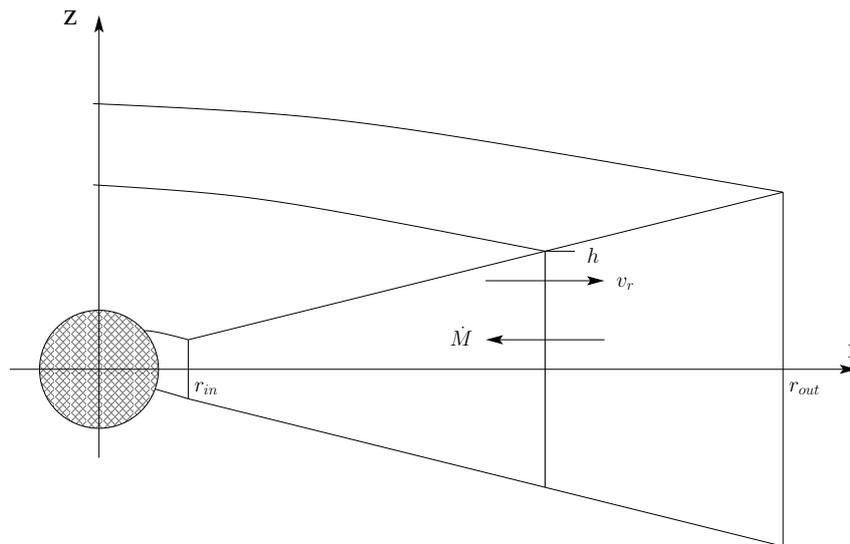


Abbildung 3.1: Festlegung der für die Akkretionsscheiben angenommenen Geometrie sowie der Bedeutung der wesentlichen geometrischen Größen.

Nomenklatur. Die Höhe der Scheibe über der $r - \varphi$ -Ebene wird mit $h(r)$ bezeichnet und der Innen- beziehungsweise Aussenrand der Scheibe mit r_{in} respektive r_{out} . Für die Radialgeschwindigkeit v_r werden positive Werte als nach außen gerichtet definiert, für den Massenfluss \dot{M} hingegen stellen positive Werte einen in Richtung des Zentrums gerichteten Massenfluss, eine *Akkretion*, dar. Der Massenfluss ist gegeben durch:

$$\dot{M} = -2\pi r v_r \Sigma. \quad (3.2)$$

Dabei bezeichnet Σ die Flächendichte:

$$\Sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \, dz. \quad (3.3)$$

Das griechische ρ steht für die Dichte. Da außerhalb der Scheibe, also für $z > h$, $\rho \approx 0$ gilt, wird Gleichung (3.3) zu:

$$\Sigma = \int_{-h}^{+h} \rho \, dz. \quad (3.4)$$

Als weitere Annahme bezüglich der Geometrie der Akkretionsscheiben, die für Akkretionsscheiben in AGNs gerechtfertigt ist, wird die Scheibe als geometrisch dünn angenommen. Somit gilt überall in der Scheibe die Relation:

$$h(r) \ll r. \quad (3.5)$$

Wie in Abschnitt 3 erklärt, stellt die Berechnung des Massenflusses auf das zentrale Schwarze Loch die wesentliche Aufgabe dieser Simulation von Akkretionsscheiben dar. Um dies zu erreichen ist es notwendig, die zeitliche Entwicklung der Radialstruktur zu beschreiben. Die genaue Kenntnis der vertikalen Struktur der Akkretionsscheiben ist dagegen nicht von Nöten, da sie auf den Zeitskalen der radialen, zeitlichen Entwicklung als praktisch immer im Gleichgewicht befindlich angesehen werden kann. Dies meint hier, dass sich die Vertikalstruktur sehr viel schneller auf Veränderungen der radialen Struktur einstellt als diese Veränderungen selbst von statten gehen (siehe hierzu Abschnitt 3.2.6). Dies erlaubt den Übergang in die sogenannte *Ein-Zonen-Näherung*, bei der z -abhängige Größen durch ihre über die Höhe gemittelten Werte ausgedrückt werden:

$$\bar{\chi} = \frac{1}{h} \int_0^h \chi \, dz. \quad (3.6)$$

Damit gelangt man zu einer eindimensionalen Beschreibung der Zeitentwicklung der Radialstruktur von Akkretionsscheiben und mit ihr auch zu einer Beschreibung für die Zeitentwicklung von AGNs, wenn angenommen wird, dass der im zentralen Bereich einer AGN (~ 100 pc) wesentliche Transportprozeß für das Wachstum des Schwarzen Lochs die viskose Akkretion von Gas mittels einer Akkretionsscheibe darstellt. Diese auch in dem Modell aus Abschnitt 2.5.2 verwendete Vorstellung impliziert eine vernachlässigbar geringe Sternentstehungseffizienz f_* in der gesamten Akkretionsscheibe, so dass sie weder durch die direkte Umwandlung des Gases in Sterne, noch durch deren Rückwirkung den Akkretionsfluss nennenswert beeinträchtigt bzw. zu einer Fragmentierung der Akkretionsscheibe führt. Da diese Annahme bisher durch Beobachtungsdaten nicht eindeutig zu bestätigen ist, untersucht Kapitel 5 die Konsequenzen einer geänderten Annahme bezüglich der Sternentstehungseffizienz auf den Ablauf der Aktivitätsphasen und des damit verbundenen Wachstums der zentralen Schwarzen Löcher. Die geänderten Annahmen führen dabei, in den Bereichen der Scheibe in denen Selbstgravitation wesentlich ist, direkt oder indirekt zu einer Auflösung der Akkretionsscheibe durch die Sternentstehung.

3.2 Grundgleichungen des Entwicklungsmodells

In den folgenden Abschnitten werden vektorielle Größen gekennzeichnet, indem sie in **bold** geschrieben werden.

3.2.1 Hydrodynamische Grundgleichungen

Das zweite Newtonsche Axiom beschreibt die Bewegung von Massepunkten unter Einwirkung einer Kraft \mathbf{F} :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (3.7)$$

Die Kontinuumsmechanik verallgemeinert diese Beziehung auf sogenannte Newtonsche Flüssigkeiten und Gase. Dazu wird der Teilchenimpuls \mathbf{p} durch die zugehörige Impulsdichte ersetzt und die Kraft \mathbf{F} in eine interne Druckkomponente und eine externe Komponente \mathbf{F}_{ext} aufgeteilt, die alle äußeren Kräfte einschließt. Mit diesen Ersetzungen lässt sich das zweite Newtonsche Axiom für ein betrachtetes Volumenelement ΔV wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dt}(\rho(\mathbf{x}, t)\Delta V \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{F}_{\text{Druck}} + \mathbf{F}_{\text{ext}}. \quad (3.8)$$

Unter Berücksichtigung der Kettenregel, wobei \mathbf{x} für eine dreidimensionale Raumkoordinate steht, und der Division durch das Volumenelement ΔV ergeben sich die sogenannten kompressiblen *Navier-Stokes-Gleichungen*:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \rho \nabla \Phi. \quad (3.9)$$

Darin werden als externe Kräfte neben der Gravitation ($-\rho \nabla \Phi$) auch Reibungskräfte ($\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$) berücksichtigt. Neben der Dichte ρ und der Geschwindigkeit \mathbf{v} , die hier als Feldgrößen zu verstehen sind, steht ∇ für den Nabla-Operator, P für den Druck, Φ für das Gravitationspotential einer externen Massenverteilung und σ_{ij} für den Spannungstensor:

$$\sigma_{ij} = \nu \rho \left[(\partial_{x_j} v_i + \partial_{x_i} v_j) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k} v_k \right], \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.10)$$

Hier ist δ_{ij} das Kronecker-Delta. Die später benötigten Ausdrücke für die einzelnen Komponenten in Zylinderkoordinaten können zum Beispiel in Spurk (1996) nachgeschlagen werden.

Als weitere Grundgleichung lässt sich die Kontinuitätsgleichung für Fluide wie folgt umschreiben:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (3.11)$$

3.2.2 Radiale Impulsgleichung

Bei den Navier-Stokes-Gleichungen (3.9) handelt es sich um einen Satz von drei nicht-linearen partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung, dargestellt in kartesischen Koordinaten \mathbf{x} . Transformiert man diese Gleichungen in Zylinderkoordinaten und verwendet den Zusammenhang (3.4), um die Dichte gegen die Flächendichte zu ersetzen, und berücksichtigt schließlich die in Abschnitt 3.1 eingeführten Symmetrien, so schreibt sich die Navier-Stokes-Gleichung in radialer Richtung als:

$$\frac{\partial \Sigma v_r}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r^2) - \frac{\Sigma v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} + f(v), \quad (3.12)$$

wobei $f(v)$ für den Reibungsterm steht. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich durch Anwenden der Produktregel auf die ersten beiden Terme wie folgt umschreiben:

$$\underbrace{\Sigma \frac{\partial v_r}{\partial t}}_{\approx 0} + \underbrace{v_r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r)}_{=0 \text{ Kontinuitätsgl.}} + \underbrace{\Sigma v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}}_{\ll} - \frac{\Sigma v_\phi^2}{r} = \dots \quad (3.13)$$

Die Summe des zweiten und dritten Terms lässt sich mit der mit v_r multiplizierten und entsprechend der Navier-Stokes-Gleichung umgeschriebenen Kontinuitätsgleichung identifizieren:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Sigma v_r) = 0. \quad (3.14)$$

Sie wird somit zu Null. Zur weiteren Vereinfachungen werden folgende Relationen eingeführt:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} \approx \frac{v_r}{r} \quad (\text{a}), \quad v_r \ll v_\phi \quad (\text{b}), \quad \frac{\partial v_r}{\partial t} \approx 0 \quad (\text{c}). \quad (3.15)$$

Dabei handelt es sich bei (3.15, a) um die Annahme, dass der Verlauf der radialen Geschwindigkeit keinen starken lokalen Schwankungen unterliegt, was im Fall von Akkretionsscheiben in AGNs gewährleistet ist. Zur Rechtfertigung der Relation (3.15, b) sei auf Anhang D verwiesen. Die Relation (3.15, c) wiederum stellt die Annahme von Stationarität oder zumindest Quasistationarität dar, siehe hierzu Hofmann (2005). Mit Hilfe dieser Vereinfachungen lässt sich Gleichung (3.13) nun wie folgt schreiben:

$$-\frac{\Sigma v_\phi^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} + f(v). \quad (3.16)$$

Ersetzt man den Druck durch $P \approx \Sigma c_s^2$ mit c_s als der Schallgeschwindigkeit und verwendet die Forderung einer geometrisch dünnen Scheibe, aus der folgt, dass $c_s^2 \ll v_\phi^2$ gilt (siehe Anhang D), so vereinfacht sich dies weiter zu:

$$\begin{aligned} -\frac{\Sigma v_\phi^2}{r} &= -\underbrace{\frac{\partial \Sigma c_s^2}{\partial r}}_{\ll} - \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} + f(v) \\ &= -\frac{\Sigma v_\phi^2}{r} = -\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} + f(v). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Der Reibungsterm $f(\mathbf{v})$ hat unter der angenommenen Symmetrie und in Zylinderkoordinaten folgende Form:

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r}. \quad (3.18)$$

Setzt man hierfür die einzelnen Komponenten, die sich gemäß Spurk (1996) zu:

$$\sigma_{rr} = 2\nu\Sigma \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{v_r}{r} \right) \quad (3.19)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = 2\nu\Sigma \left(\frac{2}{3} \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \quad (3.20)$$

ergeben ein, so erhält man folgenden Ausdruck für $f(\mathbf{v})$:

$$f(\mathbf{v}) = \frac{\nu\Sigma}{r} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} - \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \left(\frac{v_r}{r} \right)}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \right]. \quad (3.21)$$

Zusammen mit Gleichung (3.15, a) und unter Verwendung der β -Viskosität als Beschreibung für die kinematische Viskosität ν , aus Abschnitt 3.2.5, wird daraus:

$$f(\mathbf{v}) \approx \beta \nu_\phi \Sigma \left[\frac{4}{3} \left(\frac{v_r}{r^2} - \frac{v_r}{r} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{v_r}{r^2} + \frac{v_r}{r} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Der Reibungsterm kann also gemäß Annahme (3.15, b) gegenüber dem Fliehkraftterm ($-\Sigma v_\phi^2/r$) vernachlässigt werden. Die radiale Impulsgleichung reduziert sich somit zu der Aussage, dass die nach innen gerichtete Gravitation von der Fliehkraft kompensiert wird:

$$-\frac{\Sigma v_\phi^2}{r} = -\Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (3.23)$$

Reibungsterme oder Druckgradienten sind für dieses Gleichgewicht in erster Näherung zu vernachlässigen.

Das Gravitationspotential Φ , das durch die Poissongleichung beschrieben wird, kann unter Verwendung der Monopolnäherung, siehe Mineshige & Umemura (1997), wie folgt angegeben werden:

$$\Phi = -\frac{G(M_{\text{bh}} + M(r))}{r}. \quad (3.24)$$

Dabei wird im Rahmen der Monopolnäherung angenommen, dass das Gravitationspotential in einer Akkretionsscheibe bei einem Zentralabstand r durch eine Punktmasse im Zentrum beschrieben werden kann, wobei diese Masse der des zentralen Schwarzen Lochs M_{bh} plus der innerhalb von r eingeschlossenen Scheibenmasse $M(r)$ entspricht. Diese bestimmt sich als:

$$M(r) = \int_{r_{\text{in}}}^r 2\pi r' \Sigma(r') dr'. \quad (3.25)$$

Damit lässt sich aus Kombination der Gleichungen (3.23) und (3.24) die Winkelgeschwindigkeit $\Omega = v_\phi/r$ innerhalb der Akkretionsscheibe zu:

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{G(M_{\text{bh}} + M(r))}{r^3}}, \quad (3.26)$$

berechnen.

3.2.3 Azimutale Impulsgleichung

Als nächstes soll nun die Navier-Stokes-Gleichung in azimutaler Richtung betrachtet werden. Unter Verwendung der selben Symmetrien und Koordinaten wie im letzten Abschnitt ergibt sich dafür:

$$\frac{\partial \Sigma v_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi \Sigma v_r) + \frac{v_\phi \Sigma v_r}{r} = f(v). \quad (3.27)$$

Dabei steht $f(v)$ wieder für den entsprechenden Reibungsterm. Dieser lautet in diesem Fall:

$$\begin{aligned} f(v) &= \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\partial r} + \frac{\sigma_{r\phi}}{r} \\ &= \frac{\partial v \Sigma}{\partial r} \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right) + v \Sigma \left(\frac{\partial^2 v_\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v \Sigma r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Dabei wurde gemäß Spurk (1996):

$$\sigma_{r\phi} = v \Sigma \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right), \quad (3.29)$$

verwendet. Setzt man Gleichung (3.28) in Gleichung (3.27) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma v_\phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi \Sigma v_r) + \frac{v_\phi \Sigma v_r}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v \Sigma r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial r \Sigma \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Omega r \Sigma v_r) + \frac{r \Omega \Sigma v_r}{r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v \Sigma r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) &= 0 \\ \frac{\partial r^2 \Sigma \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Omega r \Sigma v_r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r v \Sigma r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

und damit die der Symmetrie und den Koordinaten entsprechende Form der Erhaltungsgleichung des Drehimpulses $r^2 \Sigma \Omega$.

3.2.4 Entwicklungsgleichungen

Die beiden Erhaltungsgleichungen der Masse (3.14) und des Drehimpulses (3.30) stellen gekoppelte Gleichungen für die Flächendichte Σ und die Radialgeschwindigkeit v_r dar. Durch Kombination der Gleichungen ist es möglich sie zu entkoppeln und die zeitliche Entwicklungsgleichung für die Flächendichte sowie die zugehörige Gleichung für die Radialgeschwindigkeit zu erhalten. Dazu werden die ersten beiden Terme in Gleichung (3.30) teilweise ausdifferenziert:

$$r^2\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial t} + r^2\Omega\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{r^2\Omega}{r}\frac{\partial r\Sigma v_r}{\partial r} + \frac{r\Sigma v_r}{r}\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\Sigma r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = 0. \quad (3.31)$$

Damit wird die Summe des zweiten und dritten Terms gemäß Gleichung (3.14) identisch zu Null. Löst man nun nach v_r auf, erhält man die Gleichung für die Radialgeschwindigkeit:

$$v_r = \frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\Sigma r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) - r^3\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial t}}{r\Sigma\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r}}. \quad (3.32)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (3.14) führt dies zu der gesuchten Gleichung für die Zeitentwicklung der Flächendichte:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial r}\left(rv\Sigma r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) - r^3\Sigma\frac{\partial\Omega}{\partial t}}{\frac{\partial r^2\Omega}{\partial r}}\right] = 0. \quad (3.33)$$

3.2.5 Viskositätsbeschreibung

Für die kinematische Viskosität ν steht bis heute keine zufriedenstellende Beschreibung zur Verfügung. Außer Frage steht zwar, dass es sich bei den Strömungen in Akkretionsscheiben um turbulente Strömungen handelt, es ist aber nicht geklärt welcher physikalische Prozess diese turbulente Viskosität antreibt. Allgemein kann eine solche Viskosität als Produkt einer turbulenten Längen- und Geschwindigkeitsskala beschrieben werden:

$$\nu_{\text{turb}} = l_{\text{turb}}v_{\text{turb}}. \quad (3.34)$$

Aufgrund des fehlenden zugrundeliegenden Prozesses wird bei der Beschreibung der Viskosität auf Parametrisierungen zurückgegriffen. Dabei hat sich die sogenannte α -Parametrisierung von Shakura & Sunyaev (1973):

$$\nu_{\alpha} = \alpha hc_s, \quad (3.35)$$

bei der Beschreibung von nicht selbstgravitierenden Akkretionsscheiben als sehr erfolgreich erwiesen. Für diesen Spezialfall kann die MRI (magneto-rotational instability) (siehe z.B.: Velikhov, 1959; Balbus, 2003) auch einen möglichen zugrundeliegenden physikalischen Prozess liefern. Dieser Prozess kann aber nach Bardou et al. (1998) nicht auf

den allgemeinen Fall von selbstgravitierenden Scheiben erweitert werden. Generell liefert die α -Viskosität für die viskosen Zeitskalen in selbstgravitierenden Systemen wie zum Beispiel AGNs viel zu lange Zeitspannen, um für die beobachteten frühen massereichen Schwarzen Löcher ($z > 6$; $M_{\text{bh}} > 10^9 M_{\odot}$) weiterhin Akkretion als die wesentliche Wachstumsform beibehalten zu können. Dieses Problem gilt nach Shlosman et al. (1989) auch allgemein für galaktische Zentren.

Eine Parametrisierung, die auch im Fall von selbstgravitierenden Scheiben eine sinnvolle Beschreibung liefert, wurde von Duschl et al. (2000) vorgeschlagen. Diese sogenannte β -Viskosität parametrisiert die turbulente Viskosität wie folgt:

$$v_{\beta} = \beta r v_{\phi}. \quad (3.36)$$

Auch für diese Viskositätsbeschreibung konnte in Gravitationsinstabilitäten von Britsch & Duschl (2005) und Duschl & Britsch (2006) ein möglicher zugrundeliegender Mechanismus gefunden werden. Ein wichtiger Punkt ist dabei, dass die β -Viskosität keine Alternative, sondern eine Erweiterung zur α -Viskosität darstellt (Duschl et al., 2000). Im Rahmen des hier vorgestellten Zeitentwicklungsmodells wird eine modulare Viskositätsbeschreibung verwendet, diese kann sowohl die unterschiedlichen Parametrisierungen als auch Erweiterungen wie zum Beispiel eine β -Viskositätsbeschreibung mit Dissipationslimit realisieren (Hofmann, 2005). Als Standardbeschreibung wird in dieser Arbeit die β -Viskosität gewählt.

3.2.6 Zeitskalen

Nachfolgend sind die wesentlichsten Zeitskalen für Akkretionsscheiben aufgelistet:

- die dynamische Zeitskala τ_{dyn} gibt an, wie lange Information zur Ausbreitung in azimuthaler Richtung benötigt:

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{1}{\Omega}, \quad (3.37)$$

- die Freifall-Zeitskala τ_{ff} stellt eine Abschätzung für einen radialen Kollaps dar:

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{1}{G\rho}} \approx \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = \tau_{\text{dyn}}, \quad (3.38)$$

- die hydrostatische Zeitskala τ_{hydro} gibt an, wie lange Information in vertikaler Richtung zur Ausbreitung benötigt:

$$\tau_{\text{hydro}} = \frac{h}{c_s}, \quad (3.39)$$

sie stellt damit eine Abschätzung dafür dar, wie schnell sich die vertikale Struktur zum Beispiel auf Veränderungen der radialen Struktur anpassen kann,

- die viskose Zeitskala τ_{visc} gibt die Zeit an, die Information zur Ausbreitung in radialer Richtung benötigt:

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{r^2}{\nu} \quad \wedge \quad \tau_{\text{visc}} = \frac{r}{v_r}. \quad (3.40)$$

In Abschnitt 3.1 wurde angemerkt, dass sich die Vertikalstruktur einer Akkretionsscheibe sehr viel schneller auf Störungen durch Veränderungen der radialen Struktur einstellt als diese auftreten. Übertragen auf die eben eingeführten Zeitskalen ist dies gleichbedeutend mit der Aussage:

$$\tau_{\text{hydro}} \ll \tau_{\text{visc}}. \quad (3.41)$$

Um dies zu zeigen, geht man von dem in Anhang D hergestellten Zusammenhang zwischen h und r sowie c_s und v_ϕ aus. Da hierfür eine Unterscheidung der beiden Fälle einer selbstgravitierenden und nicht selbstgravitierenden Akkretionsscheibe nötig war, muss auch hier die obige Aussage für beide Fälle nachgewiesen werden.

Nicht selbstgravitierende Akkretionsscheiben:

Für den Fall nicht selbstgravitierender Akkretionsscheiben geht man dazu von Gleichung (D.8) aus:

$$\frac{h}{r} = \frac{c_s}{v_\phi}.$$

Unter Zuhilfenahme dieser Gleichung lässt sich τ_{hydro} wie folgt umschreiben:

$$\tau_{\text{hydro}} = \frac{h}{c_s} = \frac{r}{v_\phi} = \beta \frac{r^2}{\beta r v_\phi}. \quad (3.42)$$

Dabei wurde im zweiten Schritt mit βr erweitert. Der Nenner $\beta r v_\phi$ kann nun als die Viskosität im Rahmen der verwendeten β -Parametrisierung identifiziert werden. Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen τ_{hydro} und τ_{visc} :

$$\tau_{\text{hydro}} = \beta \frac{r^2}{\nu} = \beta \tau_{\text{visc}}. \quad (3.43)$$

Aus $\beta = 10^{-3}$ – 10^{-2} und damit $\ll 1$ folgt die gesuchte Aussage.

Selbstgravitierende Akkretionsscheiben:

Für den selbstgravitierenden Fall muss Gleichung (D.12) verwendet werden:

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{v_\phi^2}.$$

Damit kann die hydrostatische Zeitskala folgendermaßen dargestellt werden:

$$\tau_{\text{hydro}} = \frac{h}{c_s} = \frac{1}{2} \frac{rc_s}{v_\phi^2} \ll \frac{1}{2} \frac{r}{v_\phi} = \frac{1}{2} \beta \frac{r^2}{\beta r v_\phi}. \quad (3.44)$$

Im zweiten Schritt wurde dabei die Aussage $c_s \ll v_\phi$ verwendet und für den dritten Schritt erneut mit βr erweitert. Gemäß des nicht selbstgravitierenden Falles folgt daraus die gesuchte Aussage, nur in diesem Fall sogar noch um den Faktor $0.5 c_s/v_\phi$ verstärkt.

3.3 Technische Umsetzung

3.3.1 Diskretisierung

Zur numerischen Umsetzung der in Abschnitt 3.2 hergeleiteten Entwicklungsgleichungen wird ein explizites Euler-Verfahren gewählt. Dafür wird zwischen r_{in} und r_{out} ein logarithmisch äquidistantes Gitter mit N Stützstellen erstellt. Der Radius r_{in} wird dabei mit dem Innenrand der ersten Gitterzelle identifiziert und r_{out} entsprechend mit dem Außenrand der letzten Gitterzelle. Für das Gitter wurde die Form eines sogenannten *staggered grid* verwendet, bei dem die Flussgrößen auf den Zellgrenzen und die übrigen Größen in den Zellmitten des Gitters definiert sind. In ihrer diskretisierten Form lauten die Gleichungen (3.32) und (3.33) damit:

$$v_r^i = \frac{\frac{vec_a^{i+1} - vec_a^i}{\Delta r^{i+1}} - vec_b^i}{\left(\frac{\partial j^i}{\partial r}\right)_{\text{pl}} \sqrt{r^{i+2} r^{i+1}} \sqrt{\Sigma^{i+1} \Sigma}} \quad (3.45)$$

$$\Sigma_{\text{new}}^i = \Sigma^i - \frac{1}{r^{i+1}} \frac{\Delta t}{\Delta r_{\text{pl}}^i} \left[v_r^i \sqrt{r^{i+2} r^{i+1}} \sqrt{\Sigma^{i+1} \Sigma} - v_r^{i+1} \sqrt{r^{i+1} r^i} \sqrt{\Sigma^i \Sigma^{i-1}} \right]. \quad (3.46)$$

Der Index $_{\text{new}}$ markiert eine Größe des nächsten Zeitschrittes $t + \Delta t$. Gleichung (3.45) verwendet folgende neu eingeführte Variablen:

$$vec_a^i = (r^{i+1})^3 v^i \Sigma^i \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right)^i \quad (3.47)$$

$$vec_b^i = \sqrt{r^{i+2} r^{i+1}} \sqrt{\Sigma^{i+1} \Sigma^i} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial t}\right)_{\text{pl}}^i \quad (3.48)$$

$$j^i = (r^{i+1})^2 \Omega^i. \quad (3.49)$$

Abbildung 3.2 zeigt die Festlegung der einzelnen diskretisierten Größen, sowie die numerische Umsetzung der Ableitungen in Differenzenquotienten. Dabei muss bei der Umsetzung der Ableitungen der Advektionsterme ein sogenanntes *up-wind* Verfahren verwendet werden, damit sich keine Information entgegen der physikalischen Flussrichtung ausbreiten kann.

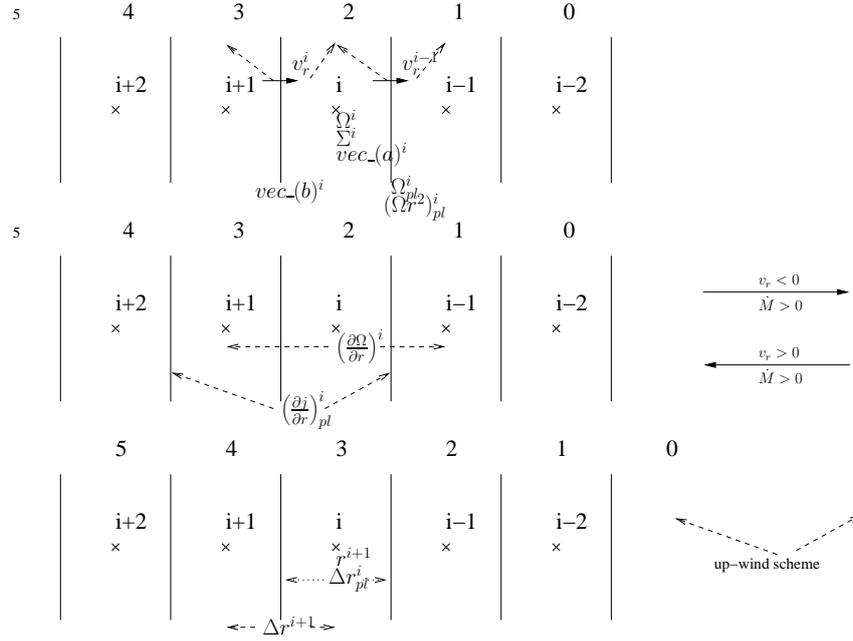


Abbildung 3.2: Diskretisierung auf einem *staggered grid*. Die unterste Zeile zeigt, dass die Radien und ihre Differenzen auf einem, gegenüber den restlichen Größen, um einen Gitterpunkt verschobenen Gitter definiert sind. Dies ist für die räumlichen Ableitungen notwendig, um auch der mit dem innersten Gitterpunkt verbundenen Zelle eine Breite Δr zuordnen zu können.

Die Breite Δt eines einzelnen Zeitschrittes wird jeweils nach der sogenannten *Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung* (CFL) von Courant et al. (1928) festgelegt. Diese führt die sogenannte *Courant-Zahl* N_c ein:

$$N_c = \frac{v_r \Delta t}{\Delta r}. \quad (3.50)$$

Die *CFL*-Bedingung besagt dabei, dass explizite Euler-Verfahren nur für $N_c < 1$ stabil sind. Unter dieser Voraussetzung wird für jede Gitterzelle das maximale Δt bestimmt und deren Minimum als nächste Zeitschrittbreite für die ganze Scheibe verwendet.

3.3.2 Randbedingungen

Für die Randbedingung am Innenrand r_{in} wird die für dünne Akkretionsscheiben übliche Forderung eines verschwindenden inneren Drehmoments G verwendet:

$$G(r_{in}) = 2\pi r \Sigma r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r} \equiv 0. \quad (3.51)$$

Realisiert wird diese Bedingung durch das Setzen von $\Sigma(r_{in})$ auf Null, sie stellt damit eine Abflussrandbedingung dar.

Am Außenrand wird keine klassische Randbedingung im eigentlichen Sinn gewählt. Stattdessen wird der Simulationsbereich um zusätzliche radiale Gitterpunkte erweitert, in die hinein Masse, die als Ergebnis der Zeitentwicklung über r_{out} ausströmt, einfließen kann. Abbildung 3.3 zeigt eine Anfangskonfiguration für eine solche äußere Randbedingung. Um numerische Probleme zu umgehen, die mit einer verschwindenden Flächendichte zu-

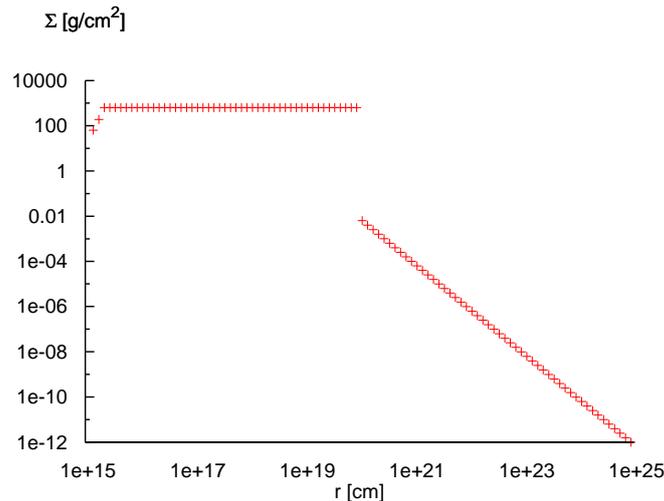


Abbildung 3.3: Umsetzung der äußeren Randbedingung durch geeignete Wahl der Anfangsverteilung der Flächendichte.

sammenhängen, wird der zusätzliche Außenbereich zu Simulationsbeginn mit einer sehr geringen, aber von Null verschiedenen, Flächendichte gefüllt. Die sich im zusätzlich eingeführten Außenbereich befindliche Masse muss dabei gegenüber der eigentlichen Scheibenmasse vernachlässigbar bleiben. Dies wird erreicht, indem die Flächendichte des ersten zusätzlichen Gitterpunktes auf circa 10^{-5} mal der Flächendichte des letzten echten Gitterpunktes gesetzt wird und von dort an mit r^{-2} nach außen abfällt. Die mit den zusätzlichen Gitterpunkten assoziierten Ringmassen bleiben damit konstant. Am neuen Außenrand kann nun eine einfache Randbedingung, etwa eine verschwindende Flächendichte, gesetzt werden. Es muss nur darauf geachtet werden, dass sich während des Entwicklungszeitraums, den die Simulation abdeckt, keine Information vom echten Scheibenrand bis zum neuen Außenrand und wieder zurück bewegen kann. Dies würde sonst zur Aufnahme von Fehlern in die Simulation bedingt durch die Reflexionen am neuen Außenrand führen. Dies ist aber leicht zu erreichen, da das radiale Gitter logarithmisch gewählt wurde und somit bereits für wenige zusätzliche Gitterpunkte sehr große Entfernungen mit dem hinzugefügten Außenbereich überdeckt werden. Die Abbildungen 3.4 und 3.5 zeigen das typische Verhalten einer Akkretionsscheibe zu Beginn einer Simulation unter Verwendung der eben beschriebenen Randbedingung. Dabei zeigt sich, dass zuerst ein Teil der äußeren Akkretionsscheibe nach außen abfließt, bis sich das zu den Anfangsbedingungen

3 Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben in AGNs

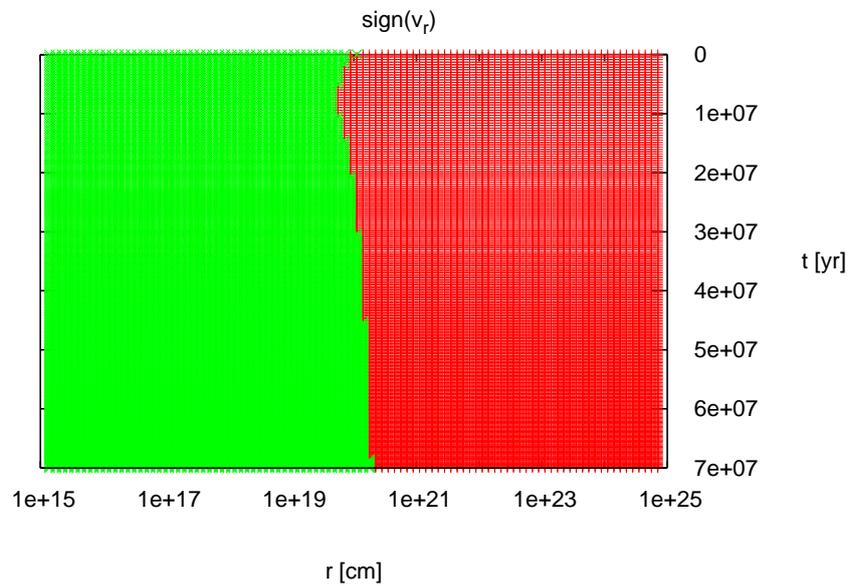


Abbildung 3.4: Anfängliches Strömungsverhalten am Außenrand einer Akkretionsscheibe als Reaktion auf die verwendete Randbedingung. Die Farbkodierung zeigt dabei das Vorzeichen der Strömung: Grün, nach innen gerichtete Strömung; Rot, nach außen gerichtete Strömung.

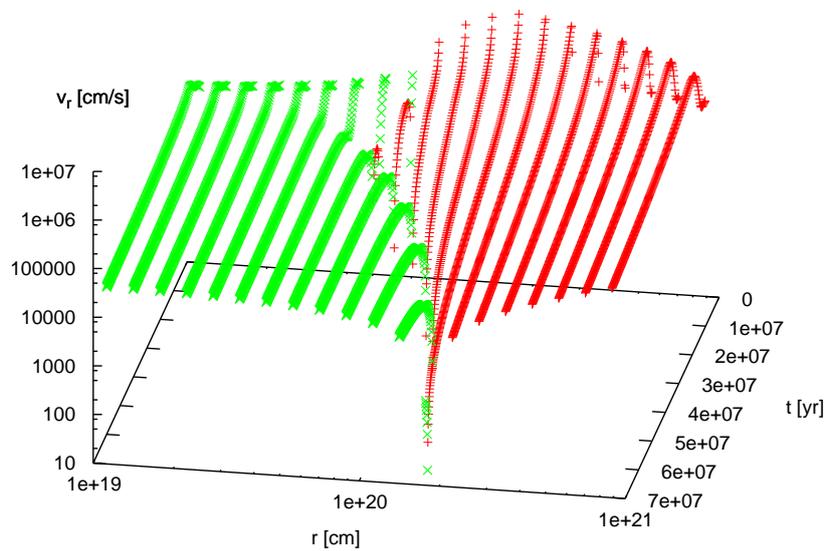


Abbildung 3.5: Zoom auf die anfänglichen Strömungsbedingungen am Außenrand einer Akkretionsscheibe. Es gilt dieselbe Farbkodierung wie in Abbildung 3.4.

der gewählten Akkretionsscheibe passende Flächendichtenprofil eingestellt hat. Danach dominiert auch in diesem Teil wieder der charakteristische Mechanismus einer Akkretionsscheibe, Trennung von Drehimpuls und Masse, und führt zu einem Umkehren des Massenflusses und damit zu Akkretion. Für eine ausführlichere Beschreibung der Randbedingung sei auf Duschl & Strittmatter (2009) verwiesen.

3.3.3 Programmablauf

Zur konkreten Umsetzung des Zeitentwicklungsmodells wurde ein Simulationscode in C++ geschrieben, dessen wesentliche Strukturierung in Abbildung 3.6 dargestellt ist. Bei diesem Code handelt es sich in weiten Teilen um die Übersetzung eines von Duschl & Strittmatter (2009) in *Fortran* geschriebenen Zeitentwicklungscode für Akkretionsscheiben. Das Modell benötigt die in Tabelle 3.1 zusammengestellten Eingabewerte, aus denen sich die Scheibengeometrie und der Anfangszustand ergeben.

Eingabewert	Datentyp	mögliche / übliche Werte	Einheit
restore_switch	Bool	0 \vee 1	-
number_of_grid_points	Integer	~ 100	-
max_timesteps	Integer	$\sim 10^8$	-
initial_timesteps	Integer	-	-
cfl_damping	Double	0.5 (< 1.0)	-
beta_viscosity	Double	$10^{-3} - 10^{-2}$	-
accretion_efficiency	Double	~ 0.1	-
$r_{\text{in}}(\log_{10})$	Double	15	[cm]
$r_{\text{out}}(\log_{10})$	Double	20.5	[cm]
m_central	Double	10^5	[M_{\odot}]
m_disk	Double	10^{10}	[M_{\odot}]
sigma_initial_exponent	Double	-1.0 – 0.0	-
mass_flow_rate	Double	$\sim 0 - 1$	[M_{\odot}/a]
mass_flow_switch	Integer	0 / Inputfile	-

Tabelle 3.1: Eingabewerte des Zeitentwicklungsmodells.

Die einzelnen Eingabewerte haben dabei folgende Bedeutung:

- restore_switch: erlaubt zwischen dem Aufsetzen einer neuen Simulation (0) und dem Fortführen einer alten Simulation (1) zu wählen.
- number_of_grid_points: legt die Anzahl der verwendeten radialen Gitterpunkte zwischen r_{in} und r_{out} fest.
- max_timesteps: bestimmt über wie viele Zeitschritte die Entwicklung der untersuchten Akkretionsscheibe simuliert wird.

- `initial_timestep`: wird bei Fortführung einer alten Simulation auf den Wert des letzten Zeitschritts der alten Simulation gesetzt.
- `cfl_damping`: gibt einen Faktor an, mit dem der aus der CLF-Bedingung gewonnene Zeitschritt modifiziert werden kann.
- `beta_viscosity`: legt die Wahl des β -Parameters bei der Verwendung der β -Viskosität fest.
- `accretion_efficiency`: legt die Akkretionseffizienz fest, siehe dazu Abschnitt 5.3.
- `rin`: bestimmt bis wie nahe an das zentrale Schwarze Loch heran die Akkretionsscheibe simuliert wird. Der in Tabelle 3.1 angegebene Wert zusammen mit denen für `rout`, `mcentral` und `mdisk` legt die wesentlichen Größen einer als Standardmodell bezeichneten Akkretionsscheibe fest.
- `rout`: legt den Außenrand der Akkretionsscheibe fest, siehe hierzu Abschnitt 3.3.2.
- `mcentral`: bestimmt die Anfangsmasse des Zentralobjekts.
- `mdisk`: legt die anfängliche Gesamtmasse der Akkretionsscheibe fest.
- `sigma_initial_exponent`: gibt den Exponenten μ an, der die anfängliche Flächendichtenverteilung $\Sigma(r) = \Sigma_0 r^\mu$ bestimmt. Der Wert von Σ_0 wird dabei über die vorgegebene Gesamtmasse der Scheibe festgelegt.
- `mass_flow_rate`: erlaubt die Angabe eines konstanten Massenzustroms auf die Akkretionsscheibe.
- `mass_flow_switch`: legt fest, ob ein konstanter Massenzustrom (0) oder ein Massenzustrom gemäß eines Eingabefiles verwendet werden soll.

Die eigentliche Simulation verläuft in Form einer Schleife über die einzelnen Zeitschritte. Dabei wird zu Beginn mit Hilfe des in Abschnitt 3.3.1 beschriebenen CFL-Kriteriums die aktuelle Zeitschrittweite errechnet, um anschließend aus den Entwicklungsgleichungen (3.45) und (3.46) die für diesen neuen Zeitschritt gültige Flächendichtenverteilung zu bestimmen. Darauf aufbauend können nun die weiteren Größen wie z.B.: Drehimpulsverteilung aber auch die aktuelle Scheiben- sowie Schwarzslochmasse und insbesondere die gesuchte aktuelle Masseneinstromrate auf das zentrale Schwarze Loch gewonnen werden. Diese wird noch auf das Eddington-Limit hin überprüft und gegebenenfalls korrigiert (siehe Abschnitt 2.5.2). Dabei wird angenommen, dass die durch das Eddington-Limit an der Akkretion gehinderte Materie als Ausfluss die Scheibe verlässt. Abschließend werden die aktuellen Werte, wenn für diesen Zeitschritt gewünscht, in eine Ausgabedatei geschrieben. Dieser Ablauf wird solange wiederholt bis die als Eingabewert vorgegebene Anzahl an Zeitschritten abgearbeitet wurde.

Flussdiagramm der Zeitentwicklung

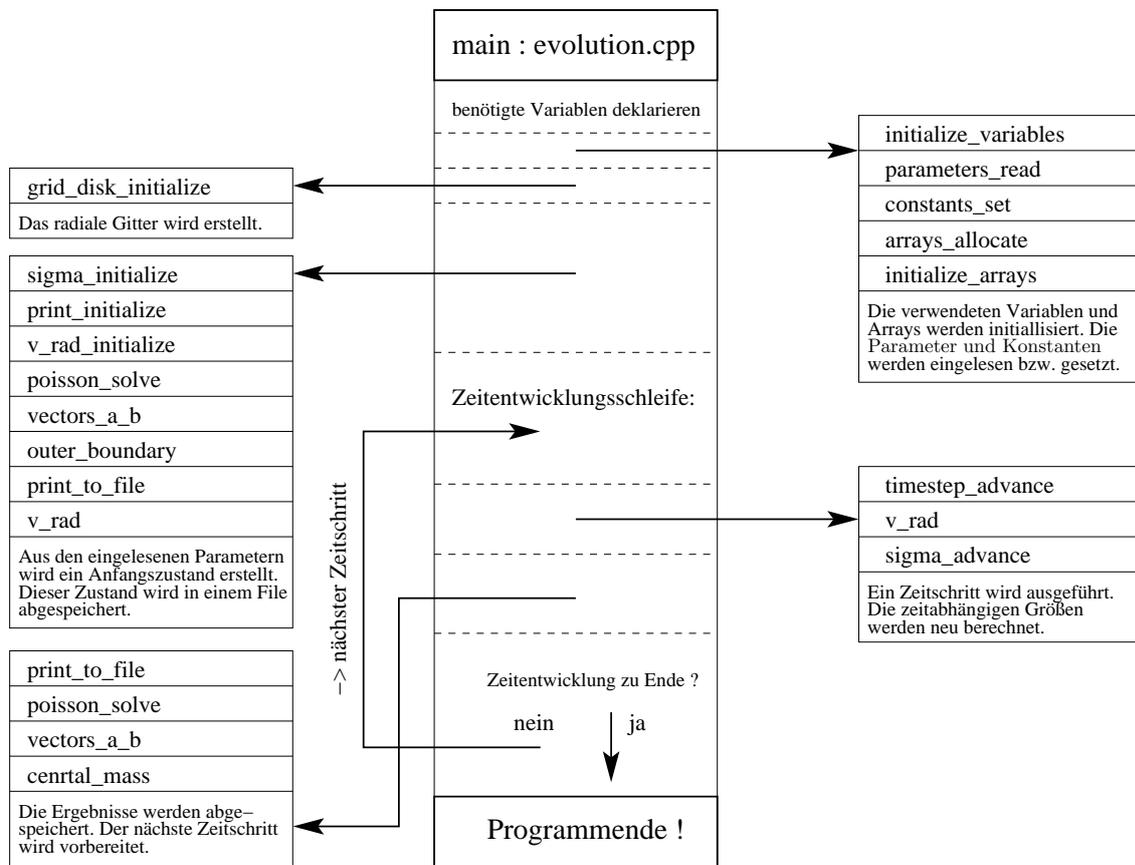


Abbildung 3.6: Flussdiagramm des Programmablaufs für das Zeitentwicklungsmodell der Akkretionsscheiben.

Während des Aktualisierens der Flächendichte besteht die Möglichkeit, einen externen Masseneinstrom zu berücksichtigen. Dabei bietet der Code neben der klassischen Möglichkeit eines konstanten Zustroms über den Außenrand der Scheibe auch die Möglichkeit den Zustrom sowohl zeitlich als auch räumlich zu variieren. Ein solcher Zustrom wird dabei ausschließlich durch Anpassen der Flächendichte realisiert. Für die zuströmende Materie wird demnach der spezifischen Drehimpuls, der zu dem jeweiligen Einströmradius gehört, angenommen. Um die Akkretionsscheiben in den Zentren von AGNs zu simulieren ist die Möglichkeit einen Materiezustrom möglichst flexibel realisieren zu können unabdingbar. Der Zustrom von Material aus den äußeren Regionen der wechselwirkenden Galaxien, die den AGN ausgelöst haben, wird ja gerade als die Quelle der Aktivität angesehen.

4 Kombinierte numerische Simulation der Galaxienverschmelzung und des Schwarzwachstums

Um zu einer ersten Abschätzung für die Leuchtkraftfunktion der AGNs zu gelangen, wurde in Abschnitt 2.5.2 ein Reihe von Annahmen verwendet. So wurde zum Beispiel die Wachstumsrate des Schwarzen Lochs mittels eines relativ einfachen Modells bestimmt. Um dies zu verbessern wurde in Kapitel 3 ein Zeitentwicklungsmodell für die zentrale Akkretionsscheibe um das Schwarze Loch vorgestellt. Dieses Entwicklungsmodell bedarf aber sowohl der Vorgabe der Masse der Akkretionsscheibe als auch des externen Massenzustroms auf die Scheibe. Im Fall von AGNs kommt dem zweiten Punkt besondere Bedeutung zu, da sich die Akkretionsscheibe um das während des Mergers neu entstandene Zentrum des Stoßprodukts ebenfalls neu ausbilden muss. Der wesentliche Prozess, der zu einem Masseneinstrom ins Zentrum ($\lesssim 100$ pc) und damit zur Ausbildung der Akkretionsscheibe führt, sind gravitative Drehmomente, die während der Galaxienverschmelzung auftreten. Um den Verlauf von AGN-Aktivitätsphasen mittels des Entwicklungsmodells für Akkretionsscheiben berechnen zu können, wird demnach eine möglichst detaillierte Aussage über den Masseneinstrom ins Zentrum als Reaktion auf eine Galaxienverschmelzung benötigt.

Numerische Simulationen zu Galaxienverschmelzungen, die diese Aussagen liefern können, wurden zum Beispiel von Hernquist (1992); Barnes (1998); Naab & Burkert (2001b), (2003) oder Naab et al. (2006) durchgeführt. Rechnungen dieser Art jedoch einfach als Bindeglied zwischen der Entwicklung von Dark Matter Halomassen (Kapitel 2) und der Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben (Kapitel 3) zu verwenden, wird der Physik in AGNs nicht gerecht. So haben Arbeiten von Springel et al. (2005a) und Johansson et al. (2009) gezeigt, dass das Feedback des akkretierenden Schwarzen Lochs, in Form der dabei freigesetzten Energie, auf seine Galaxie einen wichtigen Einfluss in Bezug auf den Masseneinstrom ins Zentrum der AGN und damit auch auf das Wachstum des Schwarzen Lochs selbst hat. Dieser Einfluss ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Es können demnach nicht einfach Simulationen für Galaxienverschmelzungen und für die Entwicklung der zentralen Akkretionsscheibe nacheinander ausgeführt werden. Vielmehr müssen die mit der Akkretion verbundenen Feedbackeffekte selbstkonsistent in die Simulation der Galaxienverschmelzung eingebaut werden. Zur Umsetzung dieser Aufgabe wurde eine Kooperation mit der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. Burkert von der Universitäts-Sternwarte

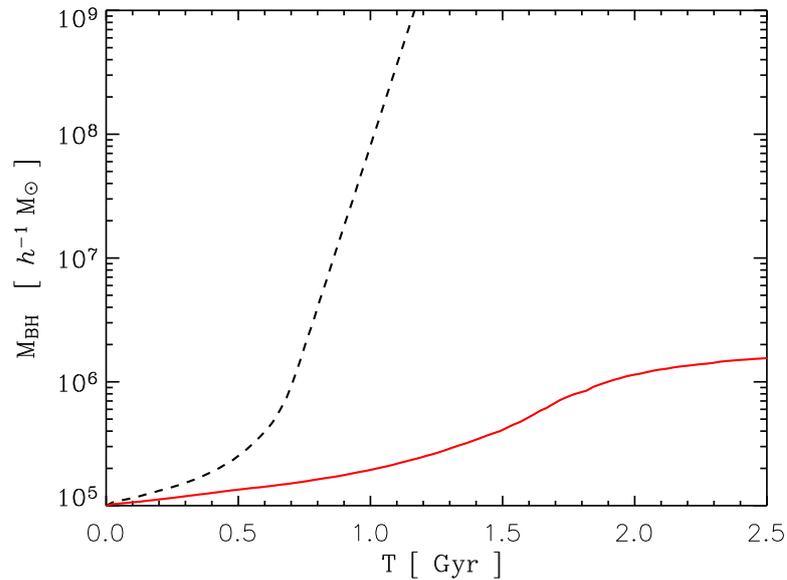


Abbildung 4.1: Massenentwicklung des zentralen Schwarzen Lochs gemäß der Parametrisierung von Bondi und Hoyle mit (Rot) und ohne (schwarz) Berücksichtigung des Feedbackeffekts. Für die Simulation wurde die Entwicklung einer isolierten Galaxie mit $M_{\text{tot}} = 1 \times 10^{12} M_{\odot}$ und einem Massenanteil des Gases an der Scheibenkomponente von $f_{\text{gas}} = 0.1$ betrachtet. [Springel et al. (2005a)]

München, Fakultät für Physik der Ludwig Maximilians Universität, eingegangen.

Abschnitt 4.1 stellt das von dieser Gruppe eingebrachte Modell zur Simulation von Galaxienverschmelzungen kurz vor und geht auf die ersten, noch durch einfache Parametrisierung realisierten, Versuche zum selbstkonsistenten Einbau der Feedbackeffekte ein. Daran anschließend wird in Abschnitt 4.2 diskutiert wie das Zeitentwicklungsmodell aus Kapitel 3 mit dem Modell der Galaxienverschmelzungen kombiniert wird, um damit selbstkonsistent und physikalisch realistischer als bisher möglich den Verlauf einer Aktivitätsphase eines AGNs als Reaktion auf eine Galaxienverschmelzung simulieren zu können. Abschnitt 4.3 stellt den aktuellen Stand und erste Ergebnisse dieses Projektes vor.

4.1 Großskalige Simulation für Galaxienverschmelzungen

Das verwendete numerische Modell zur Simulation von Galaxienverschmelzungen stellt eine von Johansson et al. (2009) erweiterte und verbesserte Variante des *GADGET-2* Codes von Springel et al. (2005a) dar. Dabei handelt es sich um einen *Nbody / SPH* hybrid Code, der in der Programmiersprache *C* geschrieben und unter Verwendung von *MPI* parallelisiert wurde. Auf Grund der Verwandtschaft der Sprachen *C* und *C++*, die für das Entwicklungsmodell der Akkretionsscheiben verwendet wurde, eignet es sich besonders gut für das Projekt der Kombination der Codes.

Das Modell beschreibt dabei die einzelnen Galaxien als in ihren Dark Matter Halos eingebettete Objekte. Diese werden als Komposition einer stoßfreien Komponente (*Nbody*), bestehend aus einer stellaren Scheibe, eines stellaren Bulges und dem Dark Matter Halo, sowie aus einer *SPH*-Komponente für eine gasförmige Scheibe und einem zentralen Schwarzen Loch synthetisiert. Wird dem gesamten Halo dabei die Masse M_{tot} zugewiesen, verteilt sich diese wie folgt auf die einzelnen Komponenten:

$$M_{\text{disk}} = m_{\text{d}} M_{\text{tot}} \quad (4.1)$$

$$M_{\text{gas}} = f_{\text{gas}} M_{\text{disk}} \quad (4.2)$$

$$M_{\star} = (1 - f_{\text{gas}}) M_{\text{disk}}. \quad (4.3)$$

Dabei gibt m_{d} den Anteil der Gesamtmasse an, den die Scheibenkomponenten zusammen ausmachen. Der Gasanteil f_{gas} legt dann die Aufteilung dieser Masse M_{disk} auf die stellare Scheibe M_{\star} und die gasförmige Scheibe M_{gas} fest. Für die sphärischen Komponenten gilt desweiteren folgende Aufteilung:

$$M_{\text{bulge}} = m_{\text{b}} M_{\text{tot}} \quad \text{mit: } m_{\text{b}} = \frac{1}{3} m_{\text{d}} \quad (4.4)$$

$$M_{\text{halo}} = M_{\text{tot}} - (M_{\text{disk}} + M_{\text{b}} + M_{\text{bh},0}). \quad (4.5)$$

Die Masse des Dark Matter Halos M_{halo} berechnet sich demnach als Differenz aus der Gesamtmasse des betrachteten Systems und der Masse der Galaxie, die sich aus den Scheibenkomponenten sowie der stellaren Bulgekomponente M_{b} und der Anfangsmasse des Schwarzen Lochs $M_{\text{bh},0}$ ergibt. Wie auch in Abschnitt 2.5.2 benötigt dieses Modell die Vorgabe der Parameter m_{d} und f_{gas} . Die dort zusätzlich benötigte Angabe f_{in} als Anteil der Masse, die in den Zentralbereich ($\lesssim 100 \text{ pc}$) um das Schwarze Loch fließt, ist hier aber nicht mehr notwendig, sondern ergibt sich als ein Ergebnis des Modells.

Für die auf diese Art und Weise aufgesetzten Galaxien kann nun die zeitliche Entwicklung simuliert werden. Dabei wird sowohl Kühlung des Gases durch $\text{H} + \text{He}$ Linienabstrahlung wie auch selbstregulierte Sternentstehung unter Berücksichtigung des Feedbacks durch Supernova II Explosionen berücksichtigt. Es können sowohl Systeme mit einer Galaxie als isoliertes Objekt (siehe Abbildungen 4.1 und 4.2) wie auch mit zwei Galaxien, die miteinander wechselwirken (siehe Abbildung 4.3), betrachtet werden. Zur genaueren Beschreibung des Modells und seiner technischen Umsetzung sei auf Springel et al. (2005a) und Johansson et al. (2009) verwiesen.

4.1.1 Parametrisiertes Schwarzlochwachstum und Feedback

Wie oben bereits erwähnt wird schon seit einiger Zeit akzeptiert, dass die Feedbackeffekte des Schwarzen Lochs sowohl für seine eigene als auch für die Entwicklung der ganzen Galaxie von großer Bedeutung sind (Binney & Tabor, 1995; Silk & Rees, 1998; Ciotti & Ostriker, 2001, etc.). Um diese Effekte berücksichtigen zu können, wurden erste Versuche unternommen, das Schwarzlochwachstum und das damit verbundene Feedback

4 Kombinierte numerische Simulation von Galaxienverschmelzung und SL-Wachstums

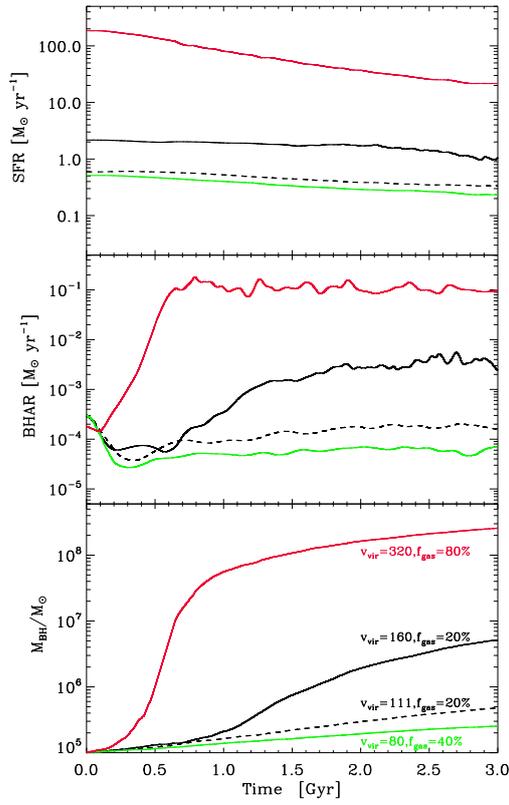


Abbildung 4.2: Entwicklung von isolierten Galaxien unter Berücksichtigung des Schwarzlochfeedbacks. Dabei sind die Sternentstehungsrate (Oben), die Akkretionsrate des Schwarzen Lochs (Mitte) und die Schwarzwlochmasse (Unten) dargestellt. Die betrachteten Galaxien haben dabei eine Gesamtmasse und einen Gasanteil von $M_{\text{tot}} = 1 \times 10^{13} M_{\odot} | f_{\text{gas}} = 0.8$ (Rot), $1.25 \times 10^{12} M_{\odot} | 0.2$ (Schwarz), $4 \times 10^{11} M_{\odot} | 0.2$ (Schwarz, gestrichelt) und $1.56 \times 10^{11} M_{\odot} | 0.4$ (Grün). [Johansson et al. (2009)]

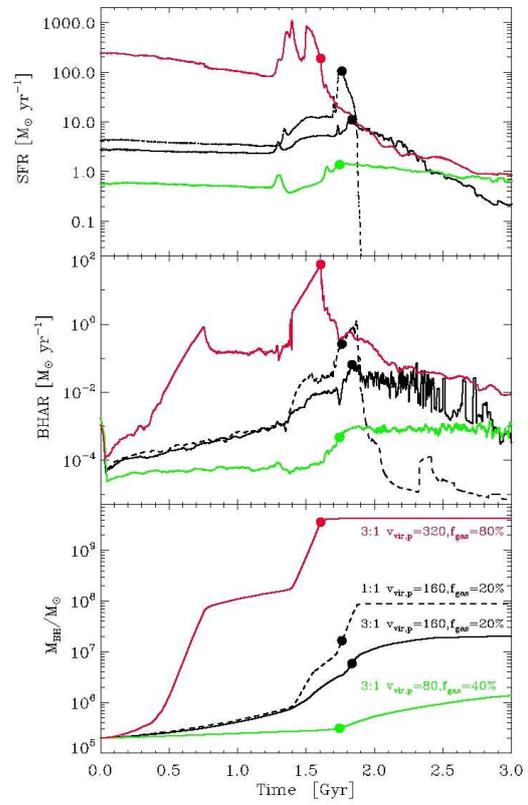


Abbildung 4.3: Entwicklung von verschmelzenden Galaxien unter Berücksichtigung des Schwarzlochfeedbacks. Die Galaxienmassen der massereicheren Galaxien und die Gasanteile beider Galaxien entsprechen denen aus Abbildung 4.2. Für die wechselwirkenden Galaxien wurde dabei außer für den schwarz gestrichelt dargestellten Fall, der einen 1:1 Merger darstellt, stets ein Verhältnis von 3:1 verwendet. Die Kreise markieren die Zeitpunkte der Verschmelzung der zugehörigen Schwarzen Löcher. [Johansson et al. (2009)]

in Simulationen für Galaxienverschmelzungen in parametrisierter Form einzubauen. Die Notwendigkeit auf eine parametrisierte Form zurückgreifen zu müssen, liegt an der zu geringen räumlichen Auflösung dieser Simulationen. So kann das im letzten Abschnitt vorgestellte Modell eine räumliche Auflösung von der Größenordnung etlicher zehn bis circa einhundert Parsec erreichen und ist damit um mehrere Größenordnungen zu grob, um den Akkretionsprozeß auf das Schwarze Loch auflösen zu können. Deshalb wurde als erste Beschreibung auf eine einfache Bondi-Hoyle-Akkretion zurückgegriffen (Bondi & Hoyle, 1944; Bondi, 1952), um die nicht aufgelöste Akkretion auf das Schwarze Loch

durch die aufgelöste großskalige Gasverteilung zu parametrisieren. Im Rahmen dieser Näherung ergibt sich die Akkretionsrate \dot{M}_{bondi} zu,

$$\dot{M}_{\text{bondi}} = \frac{4\pi\mu G^2 M_{\text{bh}}^2 \rho}{(c_s^2 + v^2)^{3/2}}. \quad (4.6)$$

Dabei geben die Größen ρ und c_s die Dichte beziehungsweise die Schallgeschwindigkeit des Gases an, v steht für die Geschwindigkeit des Schwarzen Lochs relativ zum Gas und μ ist ein dimensionsloser Parameter. Dessen Wert, der in den ursprünglichen Arbeiten als von der Größenordnung von ~ 1 eingeführt wurde, muss hier auf Werte von circa 100 gesetzt werden, um so das fehlende Auflösungsvermögen der direkten Umgebung um das Schwarze Loch und die dort herrschenden höheren Dichten zu kompensieren (Khalatyan et al., 2008; Johansson et al., 2009).

Für den auf diese Weise ermittelten Massenfluss wird das in den Abschnitten 2.5.2 und 5.3 beschriebene Eddington-Limit als obere Grenze angesetzt. Der aktuelle Massenfluss auf das Schwarze Loch \dot{M}_{bh} ergibt sich demnach als Minimum der beiden Massenflüsse:

$$\dot{M}_{\text{bh}} = \min [\dot{M}_{\text{bondi}}, \dot{M}_{\text{edd}}]. \quad (4.7)$$

Für diesen Massenfluss wird nach Gleichung (2.56) folgende Leuchtkraft erreicht:

$$L_{\text{acc}} = \epsilon c^2 \dot{M}_{\text{bh}}.$$

Um das Feedback dieser Leuchtkraft auf die das Schwarze Loch umgebende Gasverteilung zu erhalten, wird angenommen, dass ein Bruchteil ϵ_f thermisch mit dem Gas koppelt,

$$\dot{E}_{\text{feed}} = \epsilon_f \epsilon c^2 \dot{M}_{\text{bh}}. \quad (4.8)$$

Die Größe \dot{E}_{feed} gibt demnach die Leistung an, mit der die thermische Energie des umgebenden Gases erhöht wird. Der Parameter ϵ_f wird auf ~ 0.05 festgelegt, um die Simulationsergebnisse mit den Beobachtungen der $M_{\text{bh}} - \sigma$ Relation von Di Matteo et al. (2005) in Übereinstimmung zu bringen. Wie Gleichung (4.6) entnommen werden kann, hat ein Erhöhen der thermischen Energie und damit der Schallgeschwindigkeit c_s ein Absinken der Akkretionsrate zur Folge. Die Auswirkungen dieses Feedbacks sind für isolierte Galaxien in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt. Wobei erstere den direkten Vergleich der Massenentwicklung des zentralen Schwarzen Lochs mit und ohne Feedback zeigt, und letztere eine Reihe von Simulationen mit Feedback aber unterschiedlichen Parameterwerten für M_{tot} und f_{gas} . Bei diesen Simulationen der isolierten Galaxien zeigt sich der Einbau des Feedbacks im wesentlichen in einer Art neuem Limit für das Schwarzlochwachstum, siehe hierzu den mittleren Teil aus Abbildung 4.2. Dabei führt das Feedback ab einem bestimmten Massenfluss zu einer so starken Erhöhung der thermischen Energie des umgebenden Gases, dass der quadratische Anstieg der Bondi-Hoyle-Akkretion mit der Schwarzlochmasse kompensiert wird und sich ein nahezu konstanter Massenfluss einstellt. Für wechselwirkende Galaxien zeigt Abbildung 4.3, dass der mit dem Verschmelzen der zwei ursprünglichen Galaxienkerne verbundene Anstieg des Massenflusses zu einem so starken Feedback führen kann, dass sämtliches Gas aus der Umgebung

des Schwarzen Lochs ausgeblasen wird und somit das Schwarzwachstum komplett beendet oder zumindest extrem eingeschränkt wird.

4.2 Mehrskalige Simulationen

Auch wenn der im letzten Abschnitt vorgestellte Versuch zum selbstkonsistenten Einbau des Schwarzwachstums noch mittels einer groben Parametrisierung umgesetzt ist und die benötigten, unphysikalisch hohen Werte für μ aufzeigen, dass ein Teil der Physik des Akkretionsprozesses unaufgelöst bleibt, so konnten doch die prinzipielle Bedeutung und die zu erwartenden Auswirkungen des Feedbacks aufgezeigt werden. Diese Bestätigung der Bedeutung des Feedbacks rechtfertigt auch den Einbau von physikalischeren Modellen zur Beschreibung des zentralen Akkretionsprozesses als eine einfache Bondi-Hoyle-Akkretion. Wie bereits oben erwähnt, soll dies durch Kombination des Entwicklungsmodells für Akkretionsscheiben aus Kapitel 3 mit dem in Abschnitt 4.1 vorgestellten Modell für Galaxienverschmelzungen realisiert werden. In den folgenden Abschnitten wird erst auf die dafür benötigten Anpassungen des Zeitentwicklungsmodells eingegangen und dann diskutiert, wie die Schnittstellen zwischen den Modellen umgesetzt wurden.

4.2.1 Modifikationen des Zeitentwicklungsmodells

Um das Entwicklungsmodell aus Kapitel 3 als sogenanntes *sub-resolution* Modell für den Akkretionsprozess im Rahmen des Modells für Galaxienverschmelzungen verwenden zu können, wurde der Code dahingehend umgeschrieben, dass die in Abschnitt 3.3.3 beschriebene Zeitschleife als eigene Funktion aufgerufen werden kann. Dieser muss dann als Übergabewert mitgeteilt werden, für welche Zeitspanne die Entwicklung berechnet werden soll und gegebenenfalls welcher externe Massenzustrom vorliegt. Neben der Vorgabe des eigenen Abbruchkriteriums *max_timesteps* werden folgende weitere Eingabewerte überflüssig, weil sie sich aus dem Modell der Galaxienverschmelzung ergeben oder anderweitig hinfällig wurden:

- *restore_switch*, *initial_timesteps*: Die Möglichkeit eine Rechnung zu unterbrechen und später fortzusetzen ist im Galaxienverschmelzungscode nicht implementiert und somit auch für den Akkretionsscheibencode nicht länger sinnvoll.
- *m_central*: Die Anfangsmasse des zentralen Schwarzen Lochs muss natürlich mit der im Galaxienverschmelzungscode verwendeten übereinstimmen und wird deshalb von dort übernommen.
- *m_disk*: Die Anfangsmasse der Akkretionsscheibe wird durch Extrapolation des anfänglichen Flächendichteverlaufs für die Gasscheibe der Galaxie über die Ausdehnung der Akkretionsscheibe gewonnen.

- `mass_flow_rate`, `mass_flow_switch`: Der externe Massenzufluss wird wie oben erwähnt als Übergabegröße an die Funktion, die die Zeitschleife enthält, weitergegeben.

Der Radius r_{out} für den Außenrand der Akkretionsscheibe wird sinnvollerweise so gewählt, dass er dem räumlichen Auflösungsvermögen des Modells für die Galaxienverschmelzung entspricht (ca. 100 pc), so dass der Transport des Gases, erst durch die großräumige Struktur der Galaxie und dann durch die Akkretionsscheibe bis hin zum Schwarzen Loch, vom kombinierten Modell stets aufgelöst werden kann.

4.2.2 Realisierung der Modellkombination

Der konkrete Simulationsablauf des kombinierten Modells beginnt mit den Initialisierungsroutinen des Galaxienverschmelzungscodes, an die sich die Initialisierung der Akkretionsscheibe anschließt. Dabei sind die im letzten Abschnitt beschriebenen Änderungen für die Eingabewerte der Akkretionsscheibe zu berücksichtigen. Der weitere Programmablauf findet in sogenannten *nested timesteps* statt. Dabei wird zuerst ein Zeitschritt Δt_{sph} des Galaxienverschmelzungscodes ausgeführt, um anschließend die Entwicklung der Akkretionsscheibe über diesen Zeitschritt zu verfolgen. Typischerweise herrscht dabei zwischen der Zeitschrittlänge des Galaxienverschmelzungscodes und der Zeitschrittlänge Δt_{akk} des Entwicklungscodes der Akkretionsscheibe ein Verhältnis von:

$$\Delta t_{\text{sph}} \approx 1000 \Delta t_{\text{akk}} . \quad (4.9)$$

Es wird also nach jedem Zeitschritt des Galaxienverschmelzungscodes die Zeitschleife des Akkretionsscheibencodes aufgerufen und dann solange wiederholt, bis die interne Zeit der Akkretionsscheibe wieder mit der des Galaxienverschmelzungscodes übereinstimmt.

Die eigentliche Verschmelzung der Codes findet dabei in Form von Übergabe- und Rückgabewerten zwischen dem Galaxienverschmelzungscodes und der Funktion der Zeitschleife des Entwicklungscodes der Akkretionsscheibe statt. So wird der Funktion der Zeitschleife neben dem abzuarbeitenden Zeitschritt auch mitgeteilt, wieviel Masse aus der großskaligen Gasscheibe in diesem Zeitschritt in den inneren Bereich um das Schwarze Loch geflossen ist. Der weitere Transport dieser Masse könnte vom Galaxienverschmelzungscodes nicht mehr aufgelöst werden und deshalb wurde bisher sein Einfluss auf das Schwarzlochwachstum parametrisiert dargestellt. Jetzt aber kann dieser Masseneinfluss als externer Massenzustrom auf die Akkretionsscheiben verstanden und somit weiter verfolgt werden. Der Rückgabewert der Zeitschleife an den Galaxienverschmelzungscodes stellt die neue Schwarzlochmasse am Ende des Zeitschrittes dar. Dies wird zum einen zum Aktualisieren des Galaxienverschmelzungscodes benötigt und ermöglicht zum anderen die Berechnung des über die Zeitspanne Δt_{sph} aufintegrierten Masseneinstroms \dot{M}_{sph} auf das Schwarze Loch zu:

$$\dot{M}_{\text{sph}} = \frac{M_{\text{bh}}(t) - M_{\text{bh}}(t + \Delta t_{\text{sph}})}{\Delta t_{\text{sph}}} . \quad (4.10)$$

Damit kann dann gemäß Gleichung (2.56) und Gleichung (4.8) die aktuelle Stärke des Feedbacks bestimmt werden.

Um den Masseneinstrom auf die Akkretionsscheibe zu erhalten, wird in jedem Zeitschritt Δt_{sph} für jedes SPH-Teilchen, das ein Teil der Gasscheibe mit Masse M_{part} repräsentiert, eine Reihe von Tests ausgeführt, um festzustellen ob dieses Teilchen auf die Akkretionsscheibe übergeht:

- Positionstest:

Als erstes wird getestet, ob sich ein SPH-Teilchen im Einflussbereich der Akkretionsscheibe befindet:

$$|\mathbf{x}_{\text{sph}} - \mathbf{x}_{\text{bh}}| < r_{\text{out}}, \quad (4.11)$$

dabei stehen \mathbf{x}_{sph} und \mathbf{x}_{bh} für die Positionsvektoren des SPH-Teilchens beziehungsweise des Schwarzen Lochs.

- Geschwindigkeitstests:

Falls sich ein Teilchen im Einflussbereich der Akkretionsscheibe befindet, muss außerdem getestet werden, ob es dort auch verbleibt. Dazu wird nacheinander überprüft ob:

- die Azimutalgeschwindigkeit $v_{\text{sph},\varphi}$ des SPH-Teilchens das Äquivalent der sogenannten *ersten kosmischen Geschwindigkeit* (Kreisbahngeschwindigkeit) für den Außenrand der Akkretionsscheibe überschreitet:

$$v_{\text{sph},\varphi} = \sqrt{\frac{G(M_{\text{bh}} + M(r_{\text{out}}))}{r_{\text{out}}}}. \quad (4.12)$$

Dabei wurde erneut die Monopolnäherung zur Beschreibung des Gravitationspotentials verwendet, siehe hierzu Abschnitt 3.2.2. Die obige Forderung kann auch in Form einer Bedingung für den Drehimpuls gestellt werden und besagt dann, dass der Betrag des spezifischen Drehimpulses des SPH-Teilchens j_{part} kleiner sein muss als der entsprechende Wert für Keplersche Rotation am Außenrand der Scheibe:

$$j_{\text{part}} < j_{\text{kep}}(r_{\text{out}}). \quad (4.13)$$

- der Betrag der Geschwindigkeit des SPH-Teilchens v_{sph} das Äquivalent der sogenannten *zweiten kosmischen Geschwindigkeit* (Fluchtgeschwindigkeit) des Systems Schwarzes Loch plus Akkretionsscheibe überschreitet:

$$v_{\varphi} = \sqrt{\frac{2G(M_{\text{bh}} + M(r_{\text{out}}))}{r_{\text{out}}}}. \quad (4.14)$$

- Test auf weitere Schwarze Löcher:

Als letztes muss im Fall einer Simulation von wechselwirkenden Galaxien, bei der

die ursprünglich den einzelnen Galaxien zugehörigen Schwarzen Löcher noch nicht verschmolzen sind, überprüft werden, ob ein SPH-Teilchen, das alle bisherigen Bedingungen erfüllt hat, nicht von einem anderen Schwarzen Loch stärker gebunden wird.

Die in einem Zeitschritt Δt_{sph} auf die Akkretionsscheibe einströmende Masse M_{ext} ergibt sich demnach als Summe über die SPH-Teilchenmassen, die alle obigen Bedingungen erfüllen $M_{\text{part, akk}}$:

$$M_{\text{ext}} = \sum M_{\text{part, akk}}. \quad (4.15)$$

Diese Masse führt, über den Zeitschritt Δt_{sph} gemittelt, zu dem aktuellen externen Masseneinfluss \dot{M}_{ext} auf die Akkretionsscheibe:

$$\dot{M}_{\text{ext}} = \frac{M_{\text{ext}}}{\Delta t_{\text{sph}}}. \quad (4.16)$$

Dieser Masseneinstrom wird dann, räumlich durch eine Gaußfunktion geglättet, auf den Außenrand der Akkretionsscheibe aufgebracht.

4.3 Erste Ergebnisse

Im folgenden Abschnitt soll nun in einer Art „prove of concept“ an einem einfachen Beispiel gezeigt werden, dass die oben beschriebene Kombination der Codes technisch umsetzbar ist und bereits zu ersten Ergebnissen führt. Dazu wird von Seiten des Galaxiencodes die Entwicklung einer isolierten Galaxie aufgesetzt, für die folgende Parameter gewählt wurden:

$$\begin{aligned} M_{\text{tot}} &= 1.25 \times 10^{12} M_{\odot} \\ m_{\text{d}} &= 0.041 \\ f_{\text{gas}} &= 0.2. \end{aligned}$$

Die Anfangsmasse des Schwarzen Lochs wurde auf:

$$M_{\text{bh},0} = 1 \times 10^5 M_{\odot},$$

festgelegt. Die der Akkretionsscheibe ergibt sich dann gemäß der Beschreibung aus Abschnitt 4.2.1 zu:

$$M_{\text{disk},0} \approx 4.7 \times 10^6 M_{\odot}.$$

In den Abbildungen 4.4 bis 4.6 werden als erste Ergebnisse die Entwicklung der Schwarzen Loch- sowie der Scheibenmasse und der externe Masseneinstrom auf die Scheibe sowie der Massenstrom aus der Scheibe auf das zentrale Schwarze Loch über eine Entwicklungszeit von 3 Ga dargestellt. Da bei dieser Simulation auch der Feedbackeffekt der Akkretion des

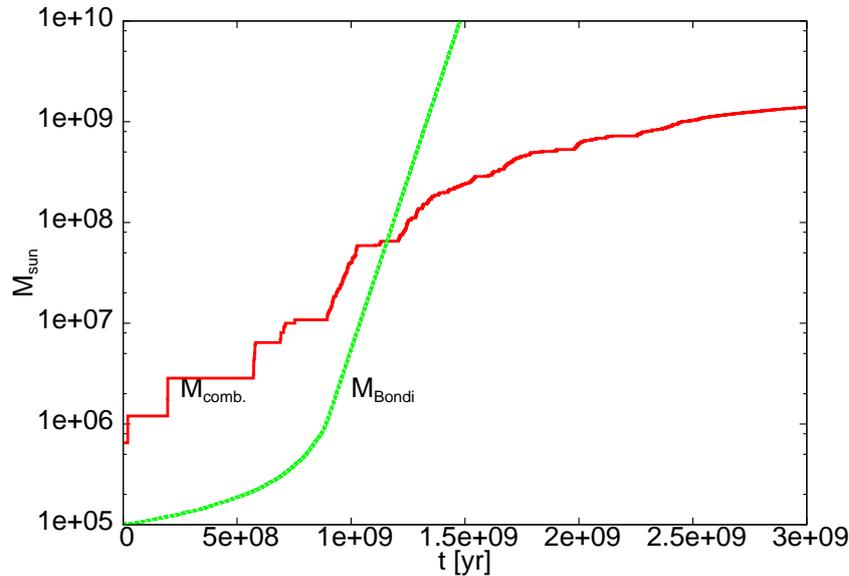


Abbildung 4.4: Die Entwicklung der Schwarzwachstumsmasse M_{bondi} , (Grün) die aus der Bondi-Hoyle-Parametrisierung folgt, wird derjenigen Masse M_{comb} (Rot) die mit Hilfe des kombinierten Modells gewonnen wurde und die für die Gesamtmasse des Systems: Schwarzes Loch und Akkretionsscheibe steht, gegenübergestellt.

Schwarzen Lochs vernachlässigt wurde, müssen die Ergebnisse mit denen aus Abbildung 4.1 für den Fall ohne Feedback verglichen werden.

Dazu stellt Abbildung 4.4 das gemeinsame Wachstum von Akkretionsscheibe und Schwarzen Loch M_{comb} , welches sich aus dem kombinierten Modell ergibt, dem Wachstum der Schwarzwachstumsmasse M_{bondi} , wie es für eine Galaxie mit gleicher Parameterwahl durch die einfache Bondi-Hoyle-Parametrisierung vorhergesagt wird, gegenüber. Der wesentliche Unterschied ist dabei, dass der bei einer Verwendung der Parametrisierungsbeschreibung entstehende Massenexzess aufgehoben wird. Dies wurde schon allein durch die Änderung der Wachstumsbeschreibung für das Schwarze Loch, von einer Bondi-Hoyle-Parametrisierung hin zu einer Einfallbedingung auf eine Akkretionsscheibe plus anschließender Akkretion durch diese Scheibe, und ohne Einbau des Schwarzwachstumfeedbacks, erreicht. Diese Aufhebung des unphysikalischen exponentiellen Wachstums des Schwarzen Lochs stellt damit ein erstes Indiz dafür dar, dass die Beschreibung mit Hilfe des kombinierten Modells physikalisch sinnvoller ist. Abbildung 4.5 zeigt die Aufteilung der in Abbildung 4.4 gemeinsam dargestellten Masse M_{comb} in seine beiden Bestandteile, die Schwarzwachstum- und die Scheibenmasse. Dabei haben die in den Abbildungen dargestellten Sprünge in den Massenentwicklungen ihren Ursprung in der Diskretisierung der Gasmasse im Galaxiencode in Form einzelner SPH-Teilchen. Abbildung 4.6 stellt dazu den Vergleich zwischen der Massenzunahme der Akkretionsscheibe durch Einfall eben dieser SPH-Teilchen, gemäß den in Abschnitt 4.2.2 beschriebenen Regeln, und der Mas-

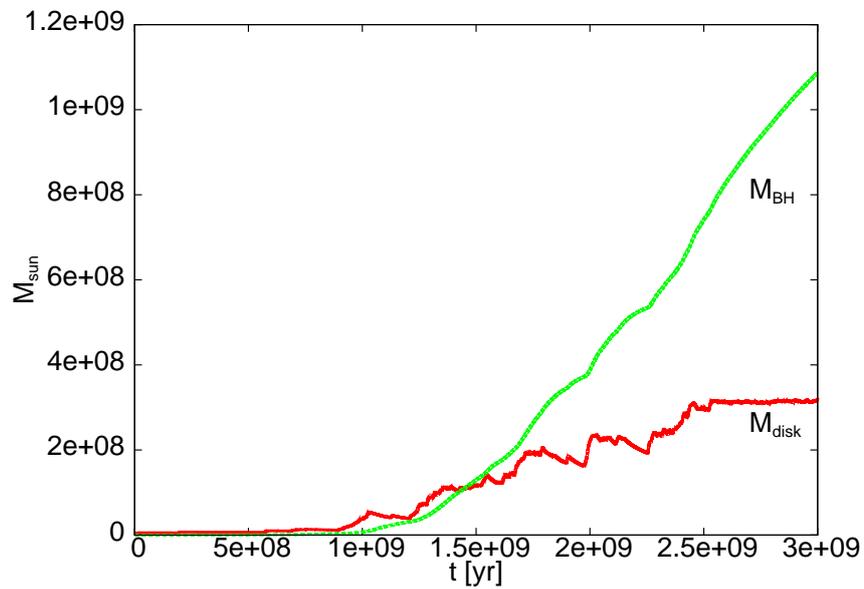


Abbildung 4.5: Aufteilung der in Abbildung 4.4 dargestellten Masse M_{comb} auf ihre Bestandteile, das zentrale Schwarze Loch M_{bh} (Grün) und die es umgebende Akkretionsscheibe M_{disk} (Rot).

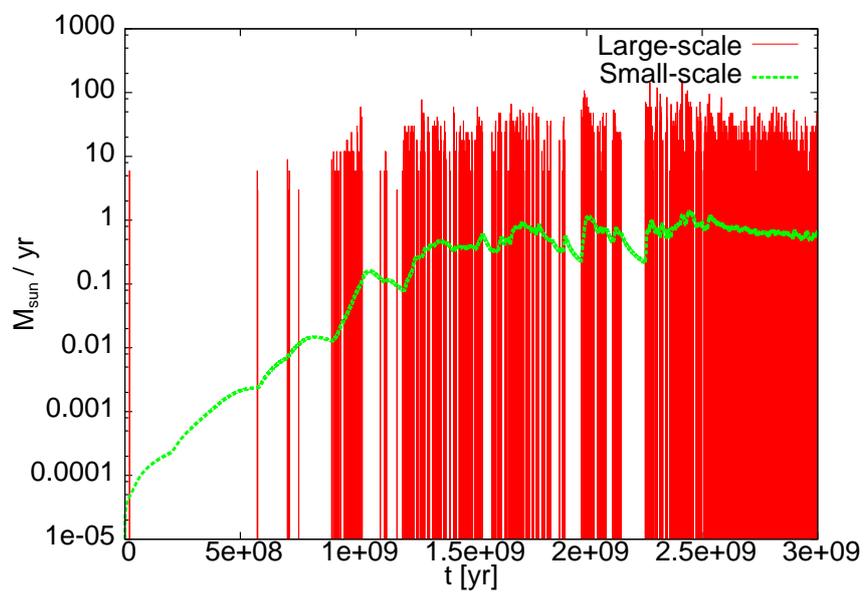


Abbildung 4.6: Der aus einer diskreten Anzahl von einfallenden SPH-Teilchen bestehende Massenzufluss auf die Akkretionsscheibe (Rot) wird zusammen mit dem daraus resultierenden, kontinuierlichen Massenabfluss aus der Scheibe auf das Schwarze Loch dargestellt.

senabnahme der Scheibe durch Akkretion auf das zentrale Schwarze Loch dar. Durch die Berücksichtigung der Akkretionsscheibe als der wesentliche Ort, der eine Akkretion auf das Schwarze Loch ermöglicht, führt der Einfall von SPH-Teilchen ins Zentrum nicht mehr zu einer direkten und diskontinuierlichen Massenzunahme des Schwarzen Lochs, sondern muss erst durch die Akkretionsscheibe prozessiert werden, bevor es zu einer Erhöhung der Schwarzlochmasse beiträgt. Dabei führt die Physik der Akkretionsscheibe nicht nur zu einer Glättung der diskontinuierlich einfallenden Gasmasse. Vielmehr stellt sich sogar ab der Hälfte der Simulation ein nahezu stationärer Zustand für die Akkretionsscheibe ein, wie an der ungefähr konstanten Scheibenmasse in Abbildung 4.5 und dem unverändert bei circa $1 M_{\odot}/a$ liegenden Masseneinstrom auf das Schwarze Loch zu erkennen ist (Abbildung 4.6).

5 Die Massen- und Spinentwicklung von Schwarzen Löchern in AGNs

Der Großteil der Arbeiten, die in diesem Kapitel vorgestellt werden, sind im Rahmen eines DAAD-Stipendiums in der Arbeitsgruppe von Prof. A.R. King an der Universität von Leicester entstanden. Die Ergebnisse wurden publiziert unter King et al. (2008).

5.1 Modellvorstellungen

Die grundlegenden Modellvorstellungen über das Zustandekommen und den Ablauf von Aktivitätsphasen in Galaxienkernen (AGNs), die den Arbeiten in diesem Kapitel zugrunde liegen, sind von den im Hauptteil der Arbeit verwendeten verschieden. Zwar wird auch hier davon ausgegangen, dass Galaxienverschmelzungen beziehungsweise deren Wechselwirkungen der grundlegende Auslöser für das Auftreten von AGNs sind, der entscheidende Unterschied liegt jedoch in der Abschätzung der Sternentstehungseffizienz f_* innerhalb der sich ausbildenden Akkretionsscheibe um das zentrale Schwarze Loch (SL). Da die Sternentstehungseffizienz bisher durch Beobachtungsdaten nicht eindeutig festgelegt werden kann, muss die Auswirkung unterschiedlicher Annahmen darüber getestet werden. Im Hauptteil wird angenommen, dass diese Sternentstehungseffizienz überall in der Scheibe gering ist und ihr Einfluss, sowie ihre Rückwirkung auf die Akkretionsscheibe vernachlässigt werden kann. Jetzt allerdings soll angenommen werden, dass f_* nicht mehr vernachlässigbar ist sobald die Akkretionsscheibe Keplersch selbstgravitierend (KSG) wird: $M_{\text{KSG}} \sim (h/r) M_{\text{bh}}$. Die Größe h steht für die halbe, vertikale Ausdehnung der Scheibe beim Zentralabstand r und M_{bh} für die Masse des zentralen Schwarzen Lochs. Es wird vielmehr angenommen, dass f_* in diesem Bereich groß genug ist, um das Gas der sich bildenden Akkretionsscheibe komplett in Sterne umzuwandeln beziehungsweise durch deren Rückwirkung auszustoßen (Paczynski, 1978; King & Pringle, 2007). Diese Annahme begrenzt die zur Akkretion auf das SL zur Verfügung stehende Masse auf M_{KSG} . Da stets $h/r \ll 1$ gilt, handelt es sich hierbei nur um einen Bruchteil der SL-Masse. Kosmologische großskalige Struktursimulationen z.B. von Di Matteo et al. (2005) oder Li et al. (2007) legen hingegen nahe, dass die Massenzunahme ΔM_{merger} des zentralen SLs als Reaktion auf eine Galaxienverschmelzung von der selben Größenordnung ist wie die Zentralmasse selbst. Aus dieser Diskrepanz zwischen M_{KSG} und ΔM_{merger} folgt, dass die Massenzunahme, bei diesen Modellannahmen, über das Aufakkretieren zahlreicher, also $\sim \Delta M_{\text{merger}}/M_{\text{KSG}}$, durch ihre Selbstgravitation beschränkter, Akkretionsphasen gesche-

hen muss. Da das Gas, das diese Scheiben bildet, nahezu seinen gesamten Drehimpuls abgeben muss, z.B. durch Wolken-Wolken-Wechselwirkungen, um in die unmittelbare Nähe des SLs gelangen zu können, ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Ausrichtung der sich daraus ergebenden Akkretionsscheiben im wesentlichen zufällig verteilt sein wird. Der Gastransport innerhalb der AGN, ab circa 100 pc, der bisher durchgängig mit Hilfe einer Akkretionsscheibe beschrieben wurde, wird damit zerlegt in einen kleinen (ab ca. 0.01 – 0.1 pc) inneren Bereich durch Selbstgravitation begrenzter Akkretion und einen äußeren Bereich in dem der Transport als Ergebnis der Wolken-Wolken-Wechselwirkungen angesehen wird. Zur näheren Erläuterung des Zusammenhangs dieses durch gravitative Instabilitäten getriebenen Transportprozesses zur bisher verwendeten Akkretionsbeschreibung mittels β -Viskosität sei auf Britsch (2006) verwiesen. Dieser Teil der Arbeit soll sich aber bevorzugt mit den Konsequenzen der durch Selbstgravitation begrenzten, chaotisch angeordneten Akkretionsphasen, sowohl auf die Spinentwicklung der Schwarzen Löcher (Abschn. 5.2), als auch auf ihr Wachstum (Abschn. 5.3) befassen. Dazu wird in den Abschnitten 5.4–5.5 sowohl auf Details der physikalischen Annahmen, so wie auf die technische Umsetzung des Modells eingegangen. Zum Abschluss des Kapitels in Abschnitt 5.6 werden die Ergebnisse der aus diesem Modell entstandenen Simulationen über das Wachstum Schwarzer Löcher vorgestellt.

5.2 Spinentwicklung

Der Spin eines Schwarzen Lochs wird durch seine umgebende Akkretionsscheibe auf zweierlei Arten beeinflusst: Zum einen wird durch Aufakkretieren von Material der spezifische Drehimpuls, den dieses Material am *innermost stable circular orbit* (ISCO) besitzt, auf das SL übertragen (Abschn. 5.2.2). Zum anderen wirkt zwischen dem Schwarzen Loch und jeder Akkretionsscheibe, die nicht perfekt parallel oder antiparallel zum Spin des SLs ausgerichtet ist, der Lense-Thirring (LT) Effekt (Abschn. 5.2.1). Da der LT Effekt mittels eines wesentlich größeren Hebelarms arbeitet und das Aufakkretieren von Masse, bis zu einer erheblichen Änderung seiner Masse, den Spin des SLs nicht nennenswert ändern kann, ist die Zeitskala der Wirkung des LT Effekts sehr viel kleiner als die des Aufakkretierens von Masse (Rees, 1978; Natarajan & Pringle, 1998). Da die Orientierung der Akkretionsscheiben als zufällig angenommen wird, stellt Abbildung 5.1 den allgemeinen Anfangszustand einer Akkretionsphase dar.

5.2.1 Spinausrichtung

Lense-Thirring Effekt und Kerrparameter

Lense-Thirring Effekt

Der Lense-Thirring Effekt führt zu einer Präzession des lokalen Drehimpulses der Akkretionsscheibe im Gravitationsfeld des SLs aufgrund dessen Eigenrotation. Dabei kann

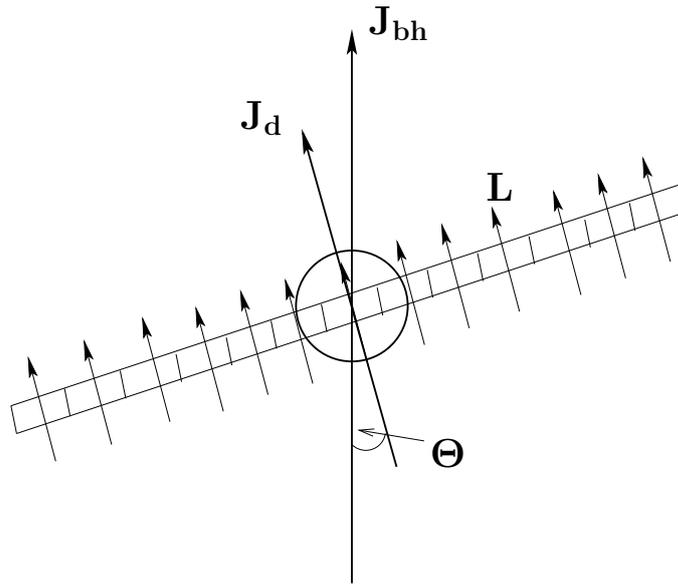


Abbildung 5.1: Anfangszustand einer Akkretionsphase. Dabei stellt \mathbf{J}_d den Gesamtdrehimpulsvektor der Akkretionsscheibe, \mathbf{J}_{bh} den Spin des Schwarzen Lochs und Θ den Winkel zwischen diesen dar. $\mathbf{L}(r)$ steht für die spezifische Drehimpulsdichte der Scheibe an der Stelle r .

das Gravitationsfeld der Schwarzschildmetrik, also des nichtrotierenden SLs, analog zum Coulombfeld einer sphärischen Ladungsverteilung gesehen werden. Dieser Felder sind beide statisch und isotrop. Eine Rotation der Ladungsverteilung führt zu einem zusätzlichen statischen, nichtisotropen Magnetfeld, entsprechend führt die Rotation einer Massenverteilung zu einem *gravitomagnetischen* Feld. Der Lense-Thirring Effekt, der die Auswirkungen dieses Feldes beschreibt, führt zu einer Koppelung des Drehimpulses der Akkretionsscheibe mit dem Spin des Schwarzen Lochs. Konkret führt diese Koppelung zu einem Drehmoment, das auf den Drehimpuls der Scheibe wirkt (Kumar & Pringle, 1985),

$$\left. \frac{\partial \mathbf{L}(r)}{\partial t} \right|_{LT} = \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{L}(r). \quad (5.1)$$

$\mathbf{L}(\mathbf{r})$ steht für die spezifische Drehimpulsdichte der Scheibe an der Stelle r und $\boldsymbol{\Omega}_p$ für die dort induzierte Präzessionsrate. Diese ist gegeben durch:

$$\boldsymbol{\Omega}_p = \frac{\boldsymbol{\omega}_p}{r^3} \quad \text{mit} \quad (5.2)$$

$$\boldsymbol{\omega}_p = \frac{2G\mathbf{J}_{bh}}{c^2}, \quad (5.3)$$

wobei G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit sowie \mathbf{J}_{bh} der Spin des Schwarzen Lochs ist. Der Spin des SLs wird dabei als Bruchteil a [0 : 1] des maximal

möglichen Spins mittels Kerrparameter a angeben,

$$J_{\text{bh}} = aJ_{\text{bh, max}} \quad (5.4)$$

$$J_{\text{bh, max}} = \frac{GM_{\text{bh}}^2}{c}. \quad (5.5)$$

Die Auswirkung des LT Effektes auf das SL ergibt sich dann aus dem dritten Newtonschen Gesetz zu:

$$\frac{d\mathbf{J}_{\text{bh}}}{dt} = -2\pi \int \Omega_{\text{p}} \times \mathbf{L} r dr. \quad (5.6)$$

Hier und im Folgenden stehen in **bold** gedruckte Größen wie z.B.: \mathbf{J}_{bh} für vektorielle Größen und kursiv gedruckte Größen wie z.B.: J_{bh} für ihre Beträge.

Kerrparameter

Der spezifische Drehimpuls \hat{a} des SLs in geometrischen Einheiten ist gegeben durch:

$$\hat{a} = \frac{J_h}{M_{\text{bh}} c}. \quad (5.7)$$

Umgeschrieben zur dimensionslosen Größe wird daraus die Definition des Kerrparameters a :

$$a \equiv \frac{c^2}{GM_{\text{bh}}} \hat{a}. \quad (5.8)$$

Um seine Bedeutung als Bruchteil des maximal möglichen Spins zu verstehen schreibt man die Kerrmetrik in Boyer-Lindquist-Koordinaten auf,

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(1 - \frac{r_s r}{\rho^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{2r_s r}{\rho^2} \hat{a} \sin^2 \Theta d\varphi c dt \\ & - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\Theta^2 - \left(r^2 + \hat{a}^2 + \frac{r_s r}{\rho^2} \hat{a}^2 \sin^2 \Theta\right) \sin^2 \Theta d\varphi^2, \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit

$$\Delta \equiv r^2 - r_s r + \hat{a}^2 \quad (5.10)$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + \hat{a}^2 \cos^2 \Theta \quad (5.11)$$

und $r_s = 2GM_{\text{bh}}/c^2$ als Schwarzschildradius. Für $\hat{a} = 0$ reduziert sich dies zur Schwarzschildmetrik. Die Position des äußeren Ereignishorizontes $r_{\text{H,+}}$ ergibt sich als die größere der beiden Lösungen der quadratischen Gleichung $\Delta = 0$ zu:

$$r_{\text{H,+}} = \frac{r_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{r_s}{2}\right)^2 - \hat{a}^2} = \frac{r_s}{2} \left(1 + \sqrt{1 - a^2}\right), \quad (5.12)$$

unter Verwendung von Gleichung (5.8). Damit $r_{H,+}$ reelle Werte annehmen kann, ergibt sich die Bedingung $a^2 \leq 1$ für den Kerrparameter. Aus Gleichung (5.8) beziehungsweise (5.7) folgt damit für die Maximalwerte von \hat{a} beziehungsweise J_{bh} :

$$\hat{a}_{\max} = \frac{GM_{bh}}{c^2} \quad \text{und} \quad J_{bh, \max} = \frac{GM_{bh}^2}{c}. \quad (5.13)$$

Hiermit gelangt man schließlich zur bekannten Darstellung des Kerrparameters a als:

$$a = \frac{\hat{a}}{\hat{a}_{\max}} = \frac{J_{bh}}{J_{bh, \max}}. \quad (5.14)$$

Parallele oder antiparallele Ausrichtung

In früheren Betrachtungen zu den Auswirkungen des LT Effektes (Scheuer & Feiler, 1996) oder zum Wachstum Schwarzer Löcher (Volonteri et al., 2005; Volonteri & Rees, 2005) waren die Autoren sich stets darüber einig, dass die Wechselwirkung zwischen dem Drehimpuls der Scheibe und dem Spin des Schwarzen Lochs zu einer parallelen Ausrichtung zwischen Ihnen führt und damit zu einem stetigen *spin-up*. King et al. (2005) hingegen zeigten, dass auch eine stabile antiparallele Ausrichtung möglich ist. Um Unterscheidungskriterien zwischen diesen beiden Fällen aufzuzeigen, soll nun die Auswirkung des LT Effektes auf die Spinentwicklung erläutert werden.

Da Ω_p parallel zu \mathbf{J}_{bh} ausgerichtet ist (Gleichung 5.2) steht das durch den LT Effekt auf das SL wirkende Drehmoment (Gleichung 5.6) senkrecht auf dem Spin des SLs. Damit kann es auch in folgender Form dargestellt werden:

$$\frac{d\mathbf{J}_{bh}}{dt} = -K_1 \underbrace{[\mathbf{J}_{bh} \times \mathbf{J}_d]}_{\text{y-Achse}} - K_2 \underbrace{[\mathbf{J}_{bh} \times (\mathbf{J}_{bh} \times \mathbf{J}_d)]}_{\text{x-Achse}}. \quad (5.15)$$

\mathbf{J}_{bh} steht in diesem Bild parallel zur z-Achse. Führt man eine Skalarmultiplikation mit \mathbf{J}_{bh} aus,

$$\mathbf{J}_{bh} \cdot \frac{d\mathbf{J}_{bh}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dJ_{bh}^2}{dt} = 0, \quad (5.16)$$

sieht man, dass der Betrag des Spins unter dem Einfluss des LT Effektes eine zeitliche Konstante ist. Für die weitere Untersuchung führt man den Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J}_t = \mathbf{J}_{bh} + \mathbf{J}_d$ des Systems ein, mit \mathbf{J}_d als Gesamtdrehimpuls der Akkretionsscheibe und dem Winkel Θ_{bh} zwischen \mathbf{J}_t und dem Spin. Es gilt demnach $\cos \Theta_{bh} = \hat{\mathbf{J}}_d \cdot \hat{\mathbf{J}}_{bh}$. Dabei sind hier und im Folgenden Größen mit $\hat{}$ als Einheitsvektoren zu verstehen. Unter Verwendung von Gleichung (5.16) und der zeitlichen Konstanz von \mathbf{J}_t erhält man folgende Relation:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{bh} \cdot \mathbf{J}_t) = \mathbf{J}_t \cdot \frac{d\mathbf{J}_{bh}}{dt} = \mathbf{J}_d \cdot \frac{d\mathbf{J}_{bh}}{dt} \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{bh} \cdot \mathbf{J}_t) = K_2 [J_{bh}^2 J_d^2 - (\mathbf{J}_d \cdot \mathbf{J}_{bh})^2] \equiv A \geq 0. \quad (5.18)$$

Um die zweite Relation zu erhalten wurde Gleichung (5.15) verwendet. Da sowohl J_{bh} als auch J_{t} konstant sind führt dies zu:

$$\frac{d}{dt} \cos \Theta_{\text{bh}} \geq 0 \quad (5.19)$$

und somit zu einer stetigen Abnahme von Θ_{bh} . Der LT Effekt führt also dazu, dass $\hat{\mathbf{J}}_{\text{bh}}$ sich parallel zu $\hat{\mathbf{J}}_{\text{t}}$ ausrichtet.

Um das Verhalten von \mathbf{J}_{d} näher zu untersuchen betrachtet man die in Gleichung (5.18) eingeführte Größe A . Unter Verwendung der Definition von \mathbf{J}_{t} und der Konstanz von \mathbf{J}_{bh} führt dies zu,

$$A = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{\text{bh}} \cdot \mathbf{J}_{\text{t}}) = \frac{d}{dt}(J_{\text{bh}}^2 + \mathbf{J}_{\text{bh}} \cdot \mathbf{J}_{\text{d}}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{\text{bh}} \cdot \mathbf{J}_{\text{d}}). \quad (5.20)$$

Desweiteren gilt:

$$0 = \frac{d}{dt} J_{\text{t}}^2 = \frac{d}{dt}(J_{\text{bh}}^2 + 2\mathbf{J}_{\text{bh}} \cdot \mathbf{J}_{\text{d}} + J_{\text{d}}^2). \quad (5.21)$$

Daraus ergibt sich durch Umstellen nach $\frac{d}{dt} J_{\text{d}}^2$ und mit Hilfe von Gleichung (5.20) sowie der Aussage, dass $A \geq 0$ aus Gleichung (5.18), dass

$$\frac{d}{dt} J_{\text{d}}^2 = -2\mathbf{J}_{\text{d}} \cdot \frac{d\mathbf{J}_{\text{bh}}}{dt} = -2A \leq 0 \quad (5.22)$$

gilt. Das bedeutet, dass der Betrag von \mathbf{J}_{d} abnimmt während sich $\hat{\mathbf{J}}_{\text{bh}}$ an den Gesamtdrehimpuls \mathbf{J}_{t} anpasst. Das ist sinnvoll, da auch unter zeitlicher Konstanz des Gesamtdrehimpulses der Ausrichtungsprozess dissipativ ist. Da der Betrag des Spins ebenfalls konstant ist, muss diese Dissipation zu einer Verringerung des Scheibendrehimpulses führen, wie in Gleichung (5.22) gezeigt. Da der LT Effekt zur parallelen Ausrichtung von $\hat{\mathbf{J}}_{\text{bh}}$ in Richtung des Gesamtdrehimpulses führt, ist es offensichtlich, dass sich auch der Scheibendrehimpuls nur parallel oder antiparallel ausrichten kann. Um zu unterscheiden, wann welcher dieser Zustände eintritt, schreibt man den Kosinussatz für den Winkel Θ zwischen \mathbf{J}_{bh} und \mathbf{J}_{d} auf:

$$J_{\text{t}}^2 = J_{\text{bh}}^2 + J_{\text{d}}^2 - 2J_{\text{bh}}J_{\text{d}} \cos(\pi - \Theta). \quad (5.23)$$

Da $J_{\text{bh}}^2 > J_{\text{t}}^2$ eine sowohl notwendige wie hinreichende Bedingung für antiparallele Ausrichtung darstellt, folgt mit Gleichung (5.23) folgendes Unterscheidungskriterium. Für,

$$\cos \Theta < -\frac{J_{\text{d}}}{2J_{\text{bh}}}, \quad (5.24)$$

stellt sich eine antiparallele Ausrichtung ein. Daraus folgen die notwendigen Forderungen für eine antiparallele Ausrichtung:

$$\Theta > \frac{\pi}{2} \quad J_{\text{d}} < 2J_{\text{bh}}. \quad (5.25)$$

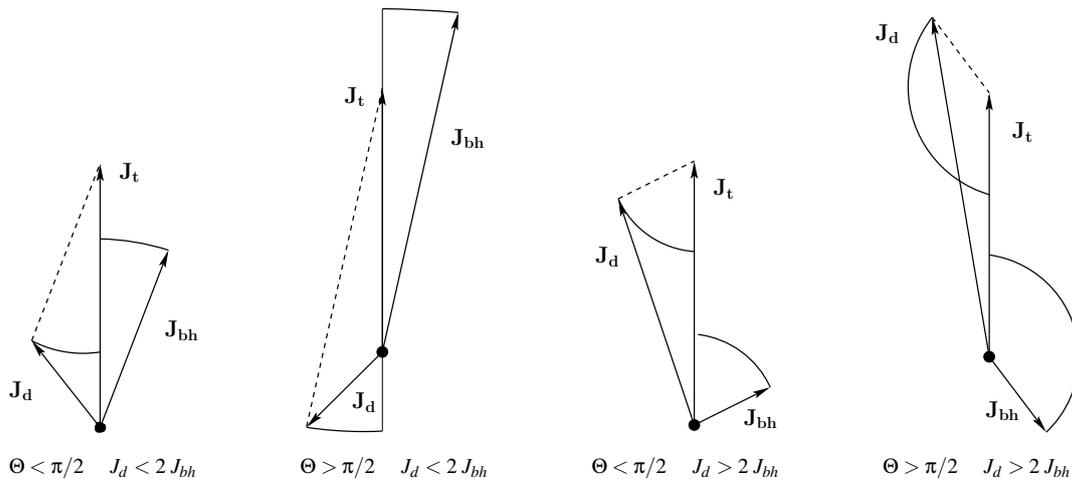


Abbildung 5.2: Graphische Darstellung der Spinausrichtung. Nur für den Fall $\Theta > \pi/2$ und $J_d < 2J_{bh}$ kann sich eine antiparallele Ausrichtung zwischen dem Spin des Schwarzen Lochs und dem Drehimpuls der Akkretionsscheibe einstellen.

Gleichung (5.25) erklärt nun, warum die früheren Untersuchungen, in denen immer $J_d \gg J_{bh}$ angenommen wurde, die parallele Ausrichtung als das einzige mögliche Ergebnis der Auswirkungen des LT Effektes angesehen haben. Falls aber $J_d < 2J_{bh}$ gilt, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für antiparallele Ausrichtung $P(\parallel)$ unter der oben motivierten Annahme von zufälliger Ausrichtung von $\hat{\mathbf{J}}_d$ zu:

$$P(\parallel) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{J_d}{2J_{bh}} \right). \quad (5.26)$$

Diese analytisch hergeleiteten Ergebnisse lassen sich auch graphisch nachvollziehen. Dazu werden in Abbildung 5.2 die möglichen Anfangskonfigurationen und die sich aus ihnen ergebenden Endzustände dargestellt.

5.2.2 Spinbetragsänderung

Dieser Abschnitt befasst sich nun mit der zu Anfang erwähnten zweiten Art der Beeinflussung des Spins, nämlich der Akkretion von dreimpulsbehafteter Materie. Da dieser Prozess wie oben ausgeführt sehr viel langsamer abläuft als der LT Effekt, soll angenommen werden, dass die parallele beziehungsweise antiparallele Ausrichtung zwischen der Akkretionsscheibe und dem Spin bereits abgeschlossen ist bevor nennenswerte Teile der Scheibe akkretiert werden konnten. Dies führt dazu, dass das Aufakkretieren von Materie ausschließlich den Betrag des Spins, nicht aber seine Ausrichtung beeinflusst. In Bezug auf die Betragsänderung ist natürlich mit einer parallelen Ausrichtung eine Erhöhung *spin-up* und mit einer antiparallelen Ausrichtung eine Erniedrigung *spin-down* des

a	- 1	0	+ 1
x	9	6	1
$j_{\text{spez.}}$	11	9	3

Tabelle 5.1: Zusammenstellung der Lage des ISCO in der Boyer-Lindquistkoordinate x , sowie des spezifischen Drehimpulses j für die Extremwerte des Spins $a = 0, 1, -1$.

Schwarzlochspins verbunden. Die Effektivität dieses Vorgangs hängt dabei vom spezifischen Drehimpuls j der akkretierten Materie ab. Diese wiederum ist abhängig von der Lage des ISCO, der seinerseits vom Spin des Schwarzen Lochs abhängt und durch den Kerrparameter a ausgedrückt wird (King & Pringle, 2006). Schreibt man diese Abhängigkeiten unter Zuhilfenahme der Boyer-Lindquist Koordinate $x = rc^2/(GM_{\text{bh}})$ für die Lage des ISCO auf, so ergeben sich die folgenden Zusammenhänge (Bardeen, 1970) für a und x :

$$a = \frac{x^{1/2}}{3} \left[4 - (3x - 2)^{1/2} \right], \quad (5.27)$$

sowie für den spezifischen Drehimpuls in Abhängigkeit von x :

$$j = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{GM_{\text{bh}}}{c} \left[1 + 2(3x - 2)^{1/2} \right]. \quad (5.28)$$

Die Grenzwerte dieser Abhängigkeiten für ein ruhendes Schwarzes Loch ($a = 0$), sowie ein mit maximal positivem ($a = 1$) und negativem ($a = -1$) Spin versehenen Schwarzen Loch sind in Tabelle 5.1 aufgetragen. Wie sofort ersichtlich wird, ist der *spin-down* aufgrund des größeren spezifischen Drehimpulses effektiver als der *spin-up*. Im Extremfall beträgt das Verhältnis 11 : 3. Nimmt man also eine zufällige Verteilung von Θ und $J_{\text{d}} < J_{\text{bh}}$ an, scheint dies zu einem Erwartungswert für ein mittleres \bar{a} nahe Null zu führen. Dies steht in einem starken Gegensatz zu Aussagen früherer Untersuchungen, die aufgrund der Annahme $J_{\text{d}} \gg J_{\text{bh}}$ stets zu einem Wert von \bar{a} nahe Eins kamen. Diese erste Betrachtung lässt allerdings außer Acht, dass die Behauptung $J_{\text{d}} < J_{\text{bh}}$ nicht allgemein gültig sein kann, da die daraus abgeleitete Aussage $\bar{a} \rightarrow 0$ den Spin des SLs ebenfalls gegen Null führt (Gleichung 5.5), so dass im Grenzfall $a \rightarrow 0$ gemäß den Kriterien aus (5.25) nur eine parallele Ausrichtung möglich ist, und damit ein erneuter *spin-up*. Zu betrachten sind daher die Größen: a) Wahrscheinlichkeit P für die Ausrichtung (antiparallel (\Downarrow) oder parallel (\Uparrow)),

$$P(\Downarrow) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{J_{\text{d}}}{2J_{\text{bh}}} \right) \quad P(\Uparrow) = 1 - P(\Downarrow), \quad (5.29)$$

und b) die Effektivität, mit der Akkretion in dieser Ausrichtung den Spin des SLs verändert,

$$\left. \frac{da}{dM_{\text{bh}}} \right|_{\Downarrow/\Uparrow}. \quad (5.30)$$

Zur Auswertung dieser Ableitungen verwendet man die in Bardeen (1970) angegebenen Gleichungen. Aus dem Zusammenspiel dieser beiden Größen folgt, dass sich a hinsichtlich folgender, neu gefundener, Aussage einstellen wird:

$$P(\Downarrow) \left. \frac{da}{dM_{\text{bh}}} \right|_{\Downarrow} = P(\Uparrow) \left. \frac{da}{dM_{\text{bh}}} \right|_{\Uparrow}. \quad (5.31)$$

Gleichung (5.31) beschreibt, dass das Produkt aus der Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ausrichtung und der Effektivität der Akkretion in dieser Ausrichtung für beide Ausrichtungen gleich sein muss. Dies führt zu der neuen Vorhersage von Schwarzen Löchern mit moderaten Werten für den mittleren Kerrparameter \bar{a} , wie in Abschnitt 5.6.2 näher erläutert wird.

5.3 Wachstum der Schwarzlochmasse

Außer eines *spin-ups* beziehungsweise *spin-downs* hat die Akkretion von Materie natürlich auch eine Zunahme der Masse des Schwarzen Lochs zur Folge. Die aktuelle Wachstumsrate \dot{M} hängt zum einen vom lokalen Zustand der Akkretionsscheibe in der unmittelbaren Umgebung des SLs ab, ist darüberhinaus aber nach oben durch ein von den Eigenschaften des SLs bestimmtes Limit begrenzt, dem sogenannten Eddington-Limit. Das Eddington-Limit gibt eine Grenzleuchtkraft L_{Edd} an, für die der auf die Scheibenmaterie wirkende und nach außen gerichtete Strahlungsdruck die nach innen gerichtete Gravitation ausgleicht (Frank et al., 1992):

$$\begin{aligned} L_{\text{Edd}} &= \frac{4\pi G M_{\text{bh}} m_p c}{\sigma_{\text{T}}}, \\ &\cong 1.3 \times 10^{38} (M_{\text{bh}}/M_{\odot}) \text{ erg s}^{-1}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Hierbei steht m_p für die Protonenmasse, σ_{T} für den Thomson Streuquerschnitt, und M_{\odot} für die Sonnenmasse. Für eine ausführlichere Behandlung des Eddington-Limits in Akkretionsscheiben sei auf Heinzeller & Duschl (2007) verwiesen. Die von einem Schwarzen Loch aufgrund von Akkretion hervorgebrachte Leuchtkraft ergibt sich aus:

$$L_{\text{acc}} = \epsilon c^2 \dot{M}_{\text{acc}}. \quad (5.33)$$

Die Quelle dieser Leuchtkraft ist die im Gravitationsfeld des SLs freigesetzte Bindungsenergie E_{free} ,

$$E_{\text{free}} = E(\infty) - E(\text{ISCO}) = \epsilon mc^2. \quad (5.34)$$

Dabei wurde angenommen, dass die Materie aus dem Unendlichen kommend bis zum ISCO akkretiert wurde, so dass ϵ die freigesetzte Energie als Bruchteil der Ruheenergie darstellt und damit als ein Maß für die Akkretionseffizienz agiert.

Die in Gleichung (5.33) verwendete Größe \dot{M}_{acc} ist nicht gleich der Wachstumsrate \dot{M} sondern über folgenden Zusammenhang mit ihr verknüpft:

$$\dot{M} = (1 - \epsilon)\dot{M}_{\text{acc}}. \quad (5.35)$$

Damit stellt sie die Massenakkretionsrate dar, deren inhärente Energie sich aufteilt auf das Wachstum des SLs und die Akkretionsleuchtkraft L_{acc} . Wie aus Gleichung (5.34) zu ersehen, ist die Lage des ISCO der wesentliche Parameter zur Bestimmung von ϵ . Für den Zusammenhang zwischen diesen Größen hat Bardeen (1970) folgende Gleichung angegeben:

$$\epsilon = 1 - \left[1 - \frac{2}{3x}\right]^{1/2}. \quad (5.36)$$

Dabei wurde zur Angabe des ISCO erneut auf die Boyer-Lindquist-Koordinate x zurückgegriffen. Die Lage des ISCO ist seinerseits ausschließlich durch den Spin des SLs bestimmt, siehe Abschnitt 5.2.2. Damit kommt man zu folgenden Abhängigkeiten:

1. Ein höherer Betrag des Spins führt nach Gleichung (5.27) zu einem kleineren Radius für den ISCO.
2. Ein kleinerer Wert für den ISCO wiederum hat nach Gleichung (5.36) eine größere Akkretionseffizienz ϵ zur Folge, da ein kleiner Wert für den ISCO bedeutet, dass sich die Akkretion tiefer in das Potential des SLs hinein ausdehnt.
3. Eine größere Akkretionseffizienz sorgt ihrerseits dafür, dass weniger Materie akkretiert werden muss, um die erlaubte Obergrenze der Leuchtkraft, das Eddington-Limit, zu erreichen. Sie hat also eine kleinere Wachstumsrate der Schwarzslochmasse zur Folge.

Abbildung 5.3 zeigt den Funktionsverlauf von $\epsilon(a)$.

1.) - 3.) besagen also, dass ein Schwarzes Loch mit hohem Spinparameter durch das Eddington-Limit in seinem Wachstum stärker beeinflusst wird als ein ruhendes SL oder eines mit moderatem Spinparameter. Zu welchen extremen Unterschieden in der Massenentwicklung eines Schwarzen Lochs dies führen kann, lässt sich leicht nachvollziehen (King & Pringle, 2006). Die maximale Wachstumsrate erhält man, wenn man in Gleichung (5.33) die Akkretionsleuchtkraft gleich der Eddington-Leuchtkraft setzt. Setzt man dies wiederum in Gleichung (5.35) ein, erhält man folgenden Ausdruck für \dot{M} :

$$\dot{M} = \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \frac{M_{\text{bh}}}{t_{\text{Edd}}}. \quad (5.37)$$

Dabei wurde t_{Edd} als,

$$t_{\text{Edd}} = \frac{\sigma_{\text{T}} c}{4\pi G m_{\text{p}}} \approx 4.5 \times 10^8 \text{ a}, \quad (5.38)$$

eingeführt. Die Akkretionseffizienz ϵ wird sich über die Entwicklung des Schwarzen Lochs hinweg selbst auch entwickeln. Ersetzt man allerdings ϵ durch den Minimalwert

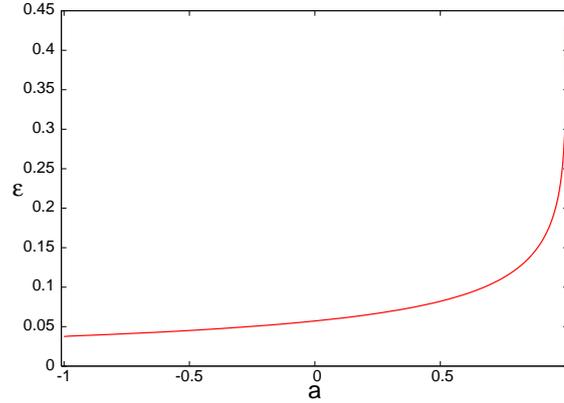


Abbildung 5.3: Zusammenhang zwischen der Akkretionseffizienz ϵ und dem Spinparameter a .

ϵ_{\min} während der Entwicklung, kann man ein oberes Limit für die Schwarzmlochmasse angeben. Dazu integriert man Gleichung (5.37):

$$\frac{M_{\text{bh}}}{M_0} < \exp \left[\left(\frac{1}{\epsilon_{\min}} - 1 \right) \frac{t}{t_{\text{Edd}}} \right]. \quad (5.39)$$

Die Integrationskonstante M_0 gibt dabei die Anfangsmasse, die sogenannte *seed mass*, des SLs an. Um die Auswirkungen eines hohen Spins auf die Massenentwicklung von Schwarzen Löchern deutlich zu machen, setzt man die Extremwerte für maximale Kerrlöcher $a = 1$ und ruhende SL $a = 0$ beziehungsweise die damit verbundenen Werte für ϵ in Gleichung (5.39) ein. Für $a = 1$ erhält man aus Abbildung 5.3: $\epsilon \approx 0.43$. Betrachtet man die Massenentwicklung über circa 1 Ga ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\text{bh}}}{M_0} &= \exp \left[\left(\frac{1}{0.43} - 1 \right) \frac{10^9 \text{ a}}{t_{\text{Edd}}} \right] \\ &\approx 20. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Das bedeutet, ein SL mit stetig maximalem Spin kann seine Anfangsmasse in einem Ga nur um einen Faktor 20 vergrößern. Betrachtet man hingegen ein ruhendes SL, für das sich ein ϵ von 0.057 ergibt, so erhält man für den gleichen Zeitraum einen Wert von $M_{\text{bh}}/M_0 \approx 9 \times 10^{15}$. Vergleicht man dies mit Beobachtungen von Supermassereichen Schwarzen Löchern (SMBH) mit Massen von $M_{\text{bh}} \approx 5 \times 10^9 M_{\odot}$, die bereits bei Rotverschiebungen von $z \approx 6$ gefunden wurden, sieht man, dass diese mit maximal rotierenden SLs nicht ohne weitere Annahmen (Volonteri & Rees, 2005; Begelman et al., 2006) erklärbar sind. Umgekehrt verlangen diese Beobachtungen, dass wenn von Anfangsmassen der Größenordnung $M_0 \approx 10 M_{\odot}$ ausgegangen wird, dass $\epsilon \leq 0.08$ und damit verbunden $a \leq 0.5$ gelten muss. Der mittlere Kerrparameter hingegen sollte noch kleiner sein, da bisher mit steter Akkretion gerechnet wurde.

5.4 Akkretionsepisoden

In den bisherigen Betrachtungen wurde die prinzipielle Auswirkung einer in vielen, durch Selbstgravitation begrenzten und zufällig angeordneten, Episoden ablaufenden Akkretion auf ein zentrales Schwarzes Loch bezüglich dessen Spin- und Massenentwicklung untersucht. In diesem Abschnitt sollen nun die Eigenschaften der einzelnen Akkretionsepisoden, soweit für die Erstellung der numerischen Simulationen benötigt, angegeben werden. Als Grundlage hierfür dienen die Arbeiten von Collin-Souffrin & Dumont (1990) über die Eigenschaften von stationären Scheiben in AGNs. Die Flächendichte Σ in der Scheibe wird dort als

$$\Sigma(r) = 7.5 \times 10^6 \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{-4/5} \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{-3/5} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right)^{3/5} M_8^{1/5} \left(\frac{r}{r_s} \right)^{-3/5} \text{ g cm}^{-2} \quad (5.41)$$

angegeben. Der Parameter α_1 steht hierbei für den Viskositätsparameter der klassischen α -Viskosität ν_1 von Shakura & Sunyaev (1973) und wird innerhalb des ganzen Kapitels konstant auf 0.03 gesetzt. M_8 steht für die Schwarzslochmasse in $10^8 M_\odot$. Der Schwarzschildradius r_s ergibt sich in diesen Einheiten zu:

$$r_s = 2.96 \times 10^{13} M_8 \text{ cm}. \quad (5.42)$$

Die innerhalb eines Radius r eingeschlossene Scheibenmasse $M_d(< r)$ ergibt sich dann durch Aufintegrieren der Flächendichten aus Gleichung (5.41) zu:

$$M_d(< r) = 2.94 \times 10^{34} \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{-4/5} \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{-3/5} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right)^{3/5} M_8^{11/5} \left(\frac{r}{r_s} \right)^{7/5} \text{ g}. \quad (5.43)$$

Die Höhe der Scheibe h über der Mittelebene wird von Collin-Souffrin & Dumont (1990) folgendermaßen angegeben:

$$\frac{h}{r} = 1.94 \times 10^{-3} \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{-1/10} \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{-1/5} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right)^{1/5} M_8^{-1/10} \left(\frac{r}{r_s} \right)^{1/20}. \quad (5.44)$$

Aus Kombination von Gleichung (5.43) mit Gleichung (5.44) und der Grenzbedingung für den Außenrand der Scheibe aus Abschnitt 5.1, also dem Erreichen von Keplerscher Selbstgravitation, ergibt sich für die Scheibenmasse einer Akkretionsepisode M_{episode} :

$$\begin{aligned} M_{\text{episode}} &= M_d = M_{\text{KSG}} \cong \frac{h}{r} M_{\text{bh}} \\ &= 2.76 \times 10^5 \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{-2/27} \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{-5/27} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right)^{5/27} M_8^{23/27} M_\odot. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Der Radius r_{KSG} bei dem diese Grenzbedingung erreicht wird ist dabei,

$$\frac{r_{\text{KSG}}}{r_s} = 1.13 \times 10^3 \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{14/27} \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{8/27} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right)^{-8/27} M_8^{-26/27}. \quad (5.46)$$

Um eine Zeitskala $\tau_{\text{episode}} = M_{\text{episode}}/\dot{M}$ für die Dauer einer solchen Episode angeben zu können, verwendet man die Akkretionsrate aus Gleichung (5.33), so dass sich für \dot{M} der Zusammenhang

$$\dot{M} = 0.245 \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{-1} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right) M_8 M_{\odot} \text{a}^{-1} \quad (5.47)$$

ergibt und damit für die Zeitskala:

$$\tau_{\text{episode}} = 1.12 \times 10^6 \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{-2/27} \left(\frac{\varepsilon}{0.1} \right)^{22/27} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}} \right)^{-22/27} M_8^{-4/27} \text{a}. \quad (5.48)$$

Setzt man Gleichung (5.45) in die Definition für die Zeitskala ein, lässt sich diese auch als

$$\tau_{\text{episode}} \cong (h/r)(M_{\text{bh}}/\dot{M}) \quad (5.49)$$

schreiben.

5.4.1 Drehimpuls der Akkretionsscheibe

Der Drehimpuls der Akkretionsscheibe \mathbf{J}_d wurde in den bisherigen Betrachtungen bereits verwendet, ohne jedoch näher zu definieren, was darunter zu verstehen ist. Für die Betrachtungen bezüglich der Spinbetragsänderungen aus Abschnitt 5.2.2 ist es auch nicht weiter wichtig die Größe scharf zu definieren, da hier nur der spezifische Drehimpuls am Innenrand der Scheibe, von dem aus auf das SL akkretiert wird, relevant ist. Für den Fall des Lense-Thirring Effektes ist der Drehimpuls der Scheibe jedoch entscheidend, da dieser den Spin des SLs mit dem Drehimpuls der Akkretionsscheibe koppelt, so dass hierfür eine konkrete Beschreibung des Scheibendrehimpulses benötigt wird. Die prinzipielle Auswirkung des LT Effektes auf das System Scheibe-SL, die parallele oder antiparallele Ausrichtung, wurde in Abschnitt 5.2.1 bereits diskutiert. Dort wurde auch in Gleichung (5.2) angegeben, dass die Präzessionsrate und damit auch das induzierte Drehmoment nach außen hin proportional zu r^{-3} abfällt. Die inneren Teile der Scheibe präzidieren also schneller als weiter außen gelegene Teile. Die dadurch entstehenden Scherbewegungen unterliegen einer viskosen Reibung, die durch den Parameter α_2 charakterisiert wird (Pringle, 1992). Diese viskose Reibung führt dazu, dass sich die Scheibe als Ganzes gleichmäßig ausrichtet. Allerdings gilt dies nicht für beliebig große Scheiben, sondern nur für den inneren Scheibenteil bis zu einem sogenannten *warp* Radius r_w . Der Radius r_w stellt eine Grenze dar, ab der die Unterschiede in der induzierten Präzession zu groß werden, um von der vertikalen Scherviskosität ν_2 ausgeglichen zu werden. Dieser Radius ist dadurch definiert, dass dort die Zeitskala τ_w der Ausbreitungsgeschwindigkeit des *warps* gleich der dort induzierten Präzessionsrate $1/\Omega_p$ ist (Lodato & Pringle, 2006):

$$\begin{aligned} \frac{r_w^2}{\nu_2} &\equiv \tau_w = \frac{1}{\Omega_p} \\ \Rightarrow r_w &= \frac{\omega_p}{\nu_2}. \end{aligned} \quad (5.50)$$

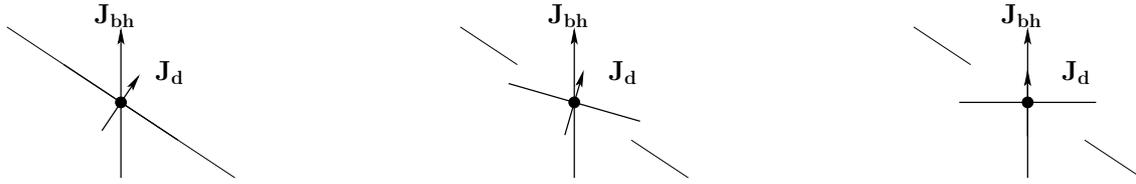


Abbildung 5.4: „Entzweibreach“ einer, gegenüber dem Spin seines SLs geneigten, Scheibe unter dem Einfluss des LT Effektes.

Dabei wurde Ω_p aus Gleichung (5.2) verwendet. Überspitzt ausgedrückt bedeutet das, dass sich die Scheibe für $r \ll r_w$ in Bezug auf den Spin des Schwarzen Lochs ausrichtet, und für $r \gg r_w$ seine ursprüngliche Orientierung beibehalten wird. Dies ist in Abbildung 5.4 skizziert. Bei dieser Auswirkung des LT Effektes auf eine gegenüber dem Spin seines SLs geneigte Akkretionsscheibe handelt es sich um den sogenannten Bardeen-Petterson-Effekt (Bardeen & Petterson, 1975). Der Radius r_w stellt somit eine effektive Grenze für den LT Effekt dar. Nach Lodato & Pringle (2007) lässt sich die vertikale Scherviskosität v_2 schreiben als:

$$v_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_1, \quad (5.51)$$

wobei der Parameter α_2 maximal ~ 1 wird. Setzt man dies zusammen mit der Definition von v_1

$$v_1 = \alpha_1 h^2 \Omega, \quad (5.52)$$

wobei für Ω hier die Keplerrotation angenommen wird, in Gleichung (5.50) ein, ergibt sich unter Zuhilfenahme von Gleichung (5.44) und der Definition des Schwarzschildradius folgende Relation für den *warp*-Radius:

$$\frac{r_w}{r_s} = 990 \left(\frac{\alpha_1}{0.03} \right)^{1/8} \left(\frac{\alpha_2}{0.03} \right)^{-5/8} a^{5/8} \left(\frac{\epsilon}{0.1} \right)^{1/4} \left(\frac{L}{0.1 L_{\text{Edd}}} \right)^{-1/4} M_8^{1/8}. \quad (5.53)$$

Diese Betrachtungen sind allerdings nur dann relevant, wenn der *warp*-Radius kleiner ist als der Außenrand der Akkretionsscheibe r_{KSG} . Es ergeben sich somit zwei Fälle:

1. $r_w < r_{\text{KSG}}$:

Da der Bardeen-Petterson Effekt zu einem „Entzweibreach“ der Akkretionsscheibe führt, müssen für diesen Fall zwei Drehimpulse angegeben werden. Der erste für den Teil der Scheibe innerhalb des *warp*-Radius und ein zweiter für den äußeren Teil. Für den ersten Teil wird der spezifische Drehimpuls j über den Radius aufintegriert:

$$J_{d, \text{innen}} = \int_{r_{\text{ISCO}}}^{r_w} j(r) \Sigma \pi r dr \quad \text{mit} \quad (5.54)$$

$$j(r) = \Omega r^2. \quad (5.55)$$

Hierbei steht Ω für die Winkelgeschwindigkeit. Für den äußeren Teil nimmt man an, dass wie oben angeführt, der *warp*-Radius eine effektive Grenze für den LT Effekt darstellt, so dass die Scheibenmasse ihm erst unterliegt sowie sie zu kleineren Radien akkretiert wurde, so dass für $J_{d, \text{innen}}$ folgt:

$$J_{d, \text{innen}} = (M_{\text{KSG}} - M_{\text{innen}})(GM_{\text{bh}}r_w)^{1/2}. \quad (5.56)$$

Eine Abschätzung ergibt:

$$J_d \leq M_{\text{KSG}}(GM_{\text{bh}}r_w)^{1/2}, \quad (5.57)$$

also das Produkt aus der Gesamtmasse und dem spezifischen Drehimpuls am *warp*-Radius.

2. $r_w > r_{\text{KSG}}$:

In diesem Fall tritt kein Zerbrechen der Scheibe auf, da die Scheibe vor Erreichen des *warp*-Radius durch die Keplersche Selbstgravitation begrenzt wird. In diesem Sinne limitiert r_{KSG} den *warp*-Radius. Der Gesamtdrehimpuls der Scheibe kann analog zum inneren Teil des ersten Falls bestimmt werden, auch hier kann eine ganz ähnliche Abschätzung getroffen werden:

$$J_d \leq M_{\text{KSG}}(GM_{\text{bh}}r_{\text{KSG}})^{1/2}, \quad (5.58)$$

das Produkt aus der Gesamtmasse und dem spezifischen Drehimpuls am Außenrand.

Da im zweiten Fall $r_w > r_{\text{KSG}}$ gilt, stellt die Abschätzung des ersten Falls eine allgemeingültige Aussage dar. Damit ergibt sich für das zur Unterscheidung zwischen paralleler und antiparalleler Ausrichtung entscheidende Verhältnis von Scheibendrehimpuls zu Spin nach Gleichung (5.25) unter Verwendung von Gleichung (5.5) folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \frac{J_d}{2J_{\text{bh}}} &\leq 0.061 a^{-11/16} \left(\frac{\alpha_1}{0.03}\right)^{-5/432} \left(\frac{\alpha_2}{0.03}\right)^{-5/16} \\ &\times \left(\frac{\varepsilon}{0.1}\right)^{-13/216} \left(\frac{L}{0.1L_{\text{Edd}}}\right)^{13/216} M_8^{-37/432}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Dies bestätigt, dass die parallele Ausrichtung nicht nur eine theoretische Möglichkeit darstellt, sondern dass unter den in diesem Kapitel gemachten Annahmen die notwendige Bedingung $J_d < 2J_{\text{bh}}$ für antiparallele Ausrichtung, außer für sehr kleine Werte von a , immer erfüllt ist. Abgesehen von α_2 beeinflussen alle anderen Größen diese Aussage aufgrund nur schwacher Abhängigkeiten nicht wesentlich.

5.5 Technische Umsetzung und Tests

In diesem Abschnitt soll detaillierter auf die Funktionsweise des numerischen Modells eingegangen werden, mit dem die oben gemachten theoretischen Aussagen untersucht wurden. Abbildung 5.5 zeigt die Struktur der dazu verwendeten Codes in Form von Flussdiagrammen. Die Codes sind in der Programmiersprache C++ geschrieben. Der in Abbildung 5.5 links dargestellte Programmblock *artificial_trees* setzt das zu untersuchende Szenario auf. Dabei ist es möglich, entweder die Entwicklung einzelner Schwarzer Löcher zu untersuchen, um Details ihrer Entwicklung genauer zu beobachten oder mehrere SLs gleichzeitig zu betrachten, um mittlere Größen abzuschätzen, siehe z.B. Abschnitt 5.6.2. Für jedes einzelne SL wird dabei festgelegt, über wieviele Akkretionsepisoden seine Entwicklung verfolgt werden soll. Mit diesen Szenarien als Eingabewerte wird dann die eigentliche Simulation *bh_evolve* initialisiert. Der wesentliche Teil, in dem die Auswirkungen einer Akkretionsepisode auf die Masse beziehungsweise den Spin des SLs berechnet werden, findet dabei in *merge_tree* statt. Da jede Episode die Ergebnisse der vorherigen Episode benötigt, ruft sich diese Funktion rekursiv so lange auf, bis die erste Episode erreicht ist, für diese werden dann in *assign* Anfangswerte für die Schwarzmass und ihren Spin festgelegt. Anhand einiger Testrechnungen soll nun die Auswirkung oben genannter Effekte verdeutlicht werden:

In Abschnitt 5.2.2 wurde ausgeführt, dass Akkretion in paralleler Ausrichtung nicht so effizient den Spin des SLs ändern kann wie Akkretion in antiparalleler Ausrichtung. Die Auswirkungen dieser Tatsache sind in zwei einfachen Testrechnungen (Abbildung 5.6 und 5.7) dargestellt. In beiden Testläufen wurde dabei eine Anfangsmasse von $10^6 M_{\odot}$ für das SL festgelegt. Die Massen einer Episode haben einen konstanten Wert von $10^4 M_{\odot}$. In Abbildung 5.6 hat das SL einen anfänglichen Spinparameter von $a = 0.2$. Es wurden 150 Akkretionsepisoden gerechnet, wobei sich stets parallele und antiparallele Ausrichtung abwechseln. Die Masse des SLs wurde während der Rechnung nicht verändert. An diesem Beispiel sieht man, dass eine Gleichverteilung von parallelen und antiparallelen Ausrichtungen zu einem erwarteten Kerrparameter von Null führt. Dabei ist die Annäherung an diesen Wert asymptotisch, da der Unterschied in der Effizienz von paralleler und antiparalleler Akkretion mit $a \rightarrow 0$ ebenfalls verschwindet. Der Testlauf der in Abbildung 5.7 dargestellt ist, unterscheidet sich von dem in Abbildung 5.6 dahingehend, dass diesmal das Wachstum des SLs mitberücksichtigt wurde und mit einem deutlich geringeren Kerrparameter von $a = 0.02$ als Startwert gerechnet wurde um die asymptotische Annäherung besser darstellen zu können. In einem dritten Testlauf (Abbildung 5.8) wird die abwechselnde Ausrichtung aufgeben und statt dessen mit zufälliger Ausrichtung gerechnet. Das Verhältnis zwischen paralleler und antiparalleler Ausrichtung ist aber noch immer ausgeglichen. Der Anfangswert für M_{bh} bleibt bei $10^6 M_{\odot}$, der für den Kerrparameter a beträgt 0.4. Die einzelnen Akkretionsepisoden haben bei diesem Testlauf eine konstante Masse von $5 \times 10^3 M_{\odot}$. Auch wenn die Annäherung an $a = 0$ nicht so glatt verläuft wie in den beiden ersten Beispielen ist immer noch offensichtlich, dass der Mittelwert des Spins gegen Null strebt. Im letzten Beispiel (Abbildung 5.9), bei dem $M_{\text{bh}} = 10^6 M_{\odot}$ und $a = 0.2$ als

Flussdiagramm

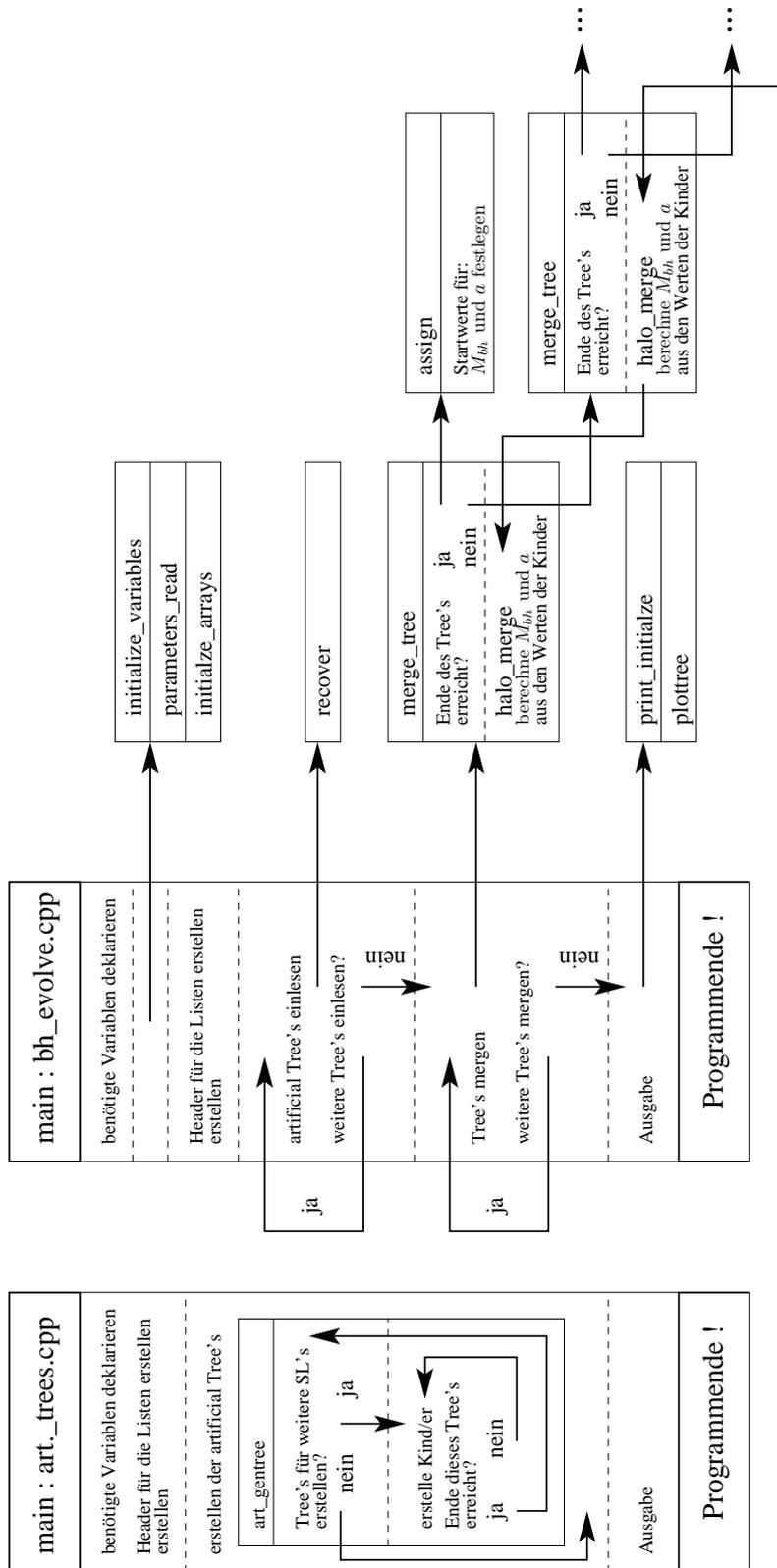


Abbildung 5.5: Struktur des numerischen Modells zur Simulation der SL-Massen- und Spinentwicklung.

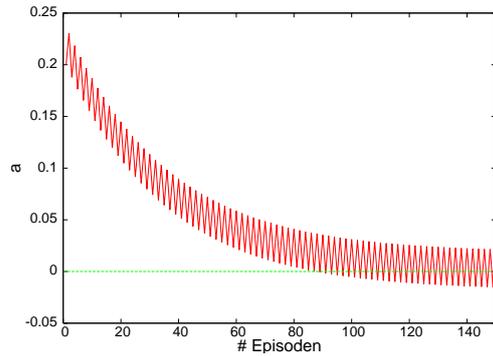


Abbildung 5.6: Testlauf zur Spinentwicklung. Die verwendeten Anfangswerte sind: $M_{\text{bh}} = 10^6 M_{\odot}$ und $a = 0.2$. Die einzelnen Episoden haben eine konstante Masse von $M_{\text{episode}} = 10^4 M_{\odot}$. Die Massenentwicklung des SLs durch die Akkretion wurde nicht berücksichtigt. Aufeinander folgende Episoden wurden immer wechselweise parallel und antiparallel ausgerichtet.

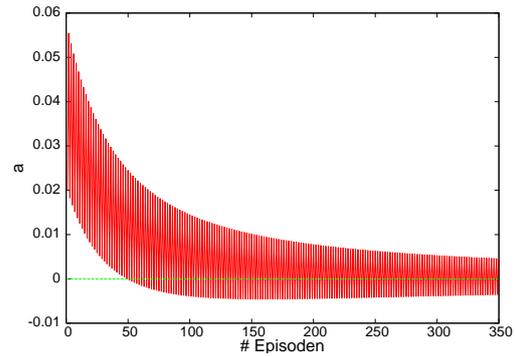


Abbildung 5.7: Testlauf zur Spinentwicklung. Die verwendeten Anfangswerte sind: $M_{\text{bh}} = 10^6 M_{\odot}$ und $a = 0.02$. Die einzelnen Episoden haben eine konstante Masse von $M_{\text{episode}} = 10^4 M_{\odot}$. Die Massenentwicklung des SLs durch die Akkretion wurde mit berücksichtigt. Aufeinander folgende Episoden wurden immer wechselweise parallel und antiparallel ausgerichtet.

Anfangswerte verwendet wurden, wird eine zufällige Verteilung der Anfangsausrichtungen von Scheibe zu Schwarzen Loch verwendet und mittels dem Kriterium aus Gleichung (5.24) entschieden, ob sich parallele oder antiparallele Akkretion einstellt. Auch die Masse der Akkretionsscheibe wird nun gemäß Gleichung (5.45) gewählt und nicht mehr auf einen konstanten Wert festgelegt. Es tritt der in Abschnitt 5.2.2 beschriebene Effekt ein, dass mit einem zunehmend kleiner werdenden Wert für a auch die Wahrscheinlichkeit für antiparallele Ausrichtung geringer wird und sich somit der in Gleichung (5.31) beschriebene asymptotische Wert für den Kerrparameter einstellt, der von Null verschieden ist. Der Drehimpuls der Akkretionsscheibe wird dabei gemäß Abschnitt 5.4.1 beschrieben. Für den Fall, dass der *warp*-Radius kleiner als der Außenrand der Akkretionsscheibe M_{KSG} ist, wird das oben genannte Kriterium zur Bestimmung der Ausrichtung auf den innerhalb des *warp*-Radius liegenden Teil und den außerhalb liegenden Teil der Scheibe getrennt angewandt. Für beide wird die gleiche Ausgangsorientierung der Scheibe in Bezug auf das SL verwendet, aber dennoch ist es gemäß Gleichung (5.24) möglich, dass sich für die beiden Teile unterschiedliche Aussagen über den Ausrichtungszustand ergeben. So kann sich der Fall einstellen, dass für den inneren Teil der Akkretionsscheibe alle Bedingungen aus Gleichung (5.25) erfüllt sind und somit eine antiparallele Ausrichtung vorhergesagt wird, der Gesamtdrehimpuls der inneren plus der äußeren Scheibe jedoch die Bedingung (5.25) verletzt, und sich somit eine parallele Ausrichtung einstellen muss. Dieser spezielle Fall, in dem sich zuerst ein kleiner Teil innerhalb eines *warps* antiparallel ausrichtet, um dann später durch einen äußeren, sich parallel ausrichtenden Teil ersetzt zu werden, wurde von Lodato & Pringle (2006) als *eventual alignment* bezeichnet, und wird dort in Abbildung (9) dargestellt.

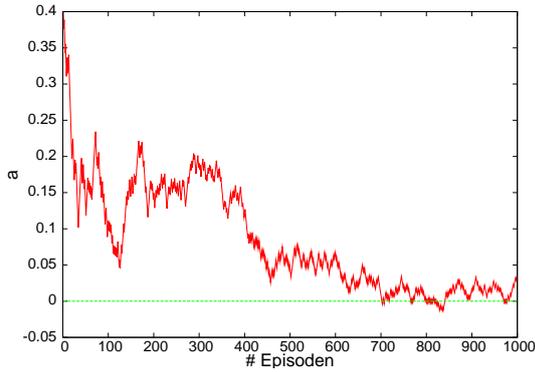


Abbildung 5.8: Testlauf zur Spinentwicklung. Die verwendeten Anfangswerte sind: $M_{\text{bh}} = 10^6 M_{\odot}$ und $a = 0.4$. Die einzelnen Episoden haben eine konstante Masse von $M_{\text{episode}} = 5 \times 10^3 M_{\odot}$. Die Massenentwicklung des SLs durch die Akkretion wurde mit berücksichtigt. Die Ausrichtung der einzelnen Episoden ist zufällig, aber gleichverteilt zwischen paralleler und antiparalleler Ausrichtung.

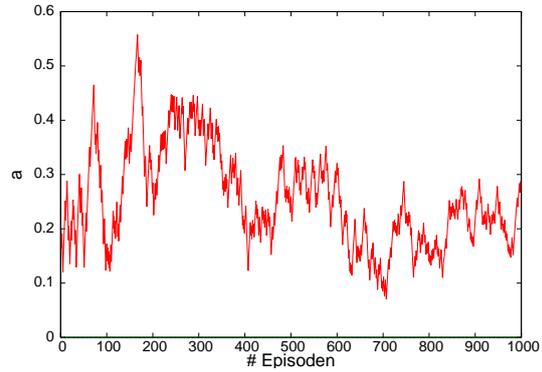


Abbildung 5.9: Testlauf zur Spinentwicklung. Die verwendeten Anfangswerte sind: $M_{\text{bh}} = 10^6 M_{\odot}$ und $a = 0.2$. Den einzelnen Episoden wurde die Masse M_{KSG} zugewiesen. Die Massenentwicklung des SLs durch die Akkretion wurde mit berücksichtigt, über die Ausrichtung der Episoden wurde gemäß den Kriterien aus (5.24) entschieden.

5.6 Ergebnisse

In den folgenden Abschnitten sollen nun die Auswirkungen der Annahme einer effektiven Sternentstehung vorgestellt werden. Dabei wurden die Ergebnisse mittels des in Abschnitt 5.5 präsentierten Modells erzeugt. In Abschnitt 5.6.1 wird auf die Massen- und Spinbetragsentwicklung des zentralen Schwarzen Lochs eingegangen, daran schließt sich die Betrachtung des zu erwartenden Mittelwertes für den Spinbetrag in Abschnitt 5.6.2 an. Abschließend wird in Abschnitt 5.6.3 die Entwicklung des Spinvektors diskutiert.

5.6.1 Massen- und Spinbetragsentwicklung

Für die Erzeugung der hier vorgestellten Ergebnisse wurden alle in diesem Kapitel erwähnten Effekte berücksichtigt. Darüber hinaus wurde angenommen, dass die Akkretion innerhalb der einzelnen Akkretionsphasen stets mit ihrem Eddington-Limit vonstatten geht. Dies erlaubt mit Hilfe von Gleichung (5.48) eine Zeitspanne für die einzelnen Episoden anzugeben. Bei dieser Zeitspanne handelt es sich daher um eine untere Grenze, sie wird in den Abbildungen 5.10 und 5.12 als *accretion time* bezeichnet. Dasweiteren ist zu beachten, dass in diesen Abbildungen eine stete Abfolge von Akkretionsepisoden angenommen wurde. Zur Festlegung der zeitlichen Abfolge aufeinander folgender Episoden wäre eine nähere Betrachtung des mit den Wolken-Wolken-Wechselwirkungen verbundenen Gastransports notwendig, der aber außerhalb der hier angestellten Betrachtungen liegt. Es handelt sich daher bei der *accretion time* auch in dieser Hinsicht um eine un-

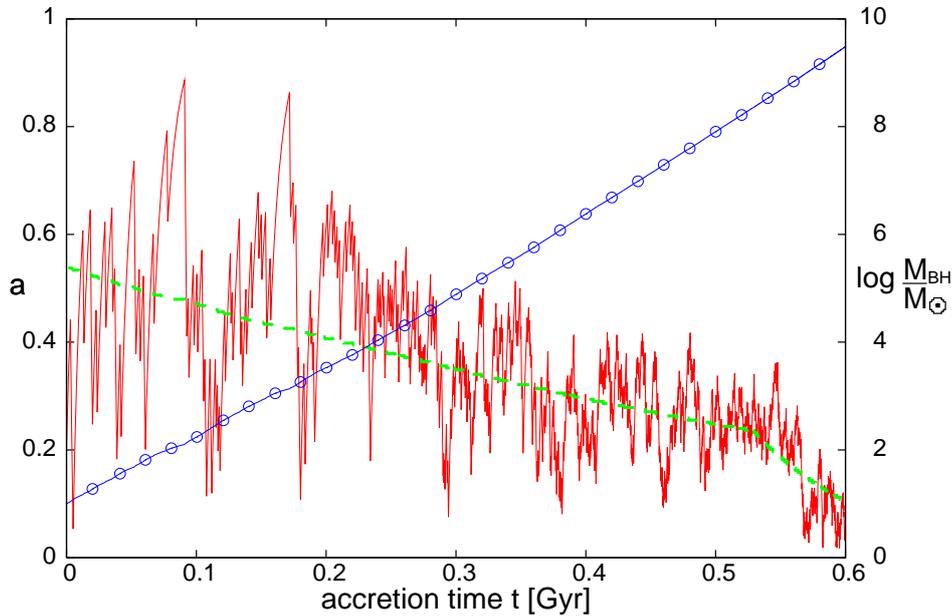


Abbildung 5.10: Numerische Simulation der Entwicklung der Schwarzwlochmasse (blaue Kreise) sowie des Spins des SLs (durchgezogene rote Linie) in Abhängigkeit der *accretion time*. Desweiteren ist der Erwartungswert für den Spin (gestrichelte grüne Linie) eingetragen. Der Knick dieses Verlaufs bei einer SL-Masse von circa $2 \times 10^8 M_\odot$ hängt mit dem Übergang von dem Regime $r_w < r_{KSG}$ in das Regime $r_w > r_{KSG}$ zusammen. Für die Simulation wurde stete Akkretion am Eddington-Limit angenommen. Der Anfangswert für die SL Masse beträgt $M_{bh,0} = 10M_\odot$, der für den Spin $a_0 = 0.2$. Für die Viskositätsparameter α_1 und α_2 wurde jeweils 0.03 gewählt.

tere Grenze für die Entwicklungszeit des untersuchten SLs. Abbildung 5.10 zeigt diese Entwicklung für ein Schwarzes Loch mit der Anfangsmasse von $10M_\odot$. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, wächst die Schwarzwlochmasse (blaue Kreise) in weniger als 0.6Ga auf circa $5 \times 10^9 M_\odot$ an. Hiermit ist das Modell in der Lage, die Beobachtung von eben solchen SMBHs bereits bei einem Alter des Universums von circa 1Ga ohne die Einführung von Phasen mit Akkretion oberhalb des Eddington-Limits zu erklären. Viel mehr als der theoretisch maximale Massenfluss stellt in unserem Modell die stete Zurverfügungstellung des erlaubten Massenzustroms die kritische Größe dar (siehe Definition der *accretion time*). In Abschnitt 5.3 wurde gefordert, dass der Kerrparameter (rote durchgezogene Linie) im Mittel unter circa 0.5 liegen müsse, um die oben angesprochene Beobachtung erklären zu können. Diese Forderung ist, wie der Abbildung entnommen werden kann, erfüllt. Als weitere Größe ist der zu erwartende Kerrparameter (grüne gestrichelte Linie) in Abbildung 5.10 eingetragen. Auch wenn der aktuelle Kerrparameter zum Teil erheblich um den in Gleichung (5.31) vorgegebenen Erwartungswert schwankt, ist doch eindeutig zu erkennen, dass er dem festgelegten Trend folgt. Die vor allem für kleinere Schwarzwlochmassen recht erheblichen Abweichungen sind Folge der zufälligen

Orientierung der Drehimpulsachse der Akkretionsscheibe in Bezug auf den Spin des SLs. Dass zufällig überhäufig auftretende Orientierungen, die zur selben Ausrichtung führen, einen besonders großen Effekt auf den Kerrparameter massearmer Löcher haben, ist zu verstehen, wenn man die Abhängigkeit des Drehimpulsverhältnisses der Akkretionsscheibe zum Spin des SLs betrachtet. Für den Quotienten J_d/J_{bh} ergibt sich aus Kombination von Gleichung (5.57) mit (5.5):

$$\begin{aligned} \frac{J_d}{J_{bh}} &\propto \frac{M_{KSG} M_{bh}^{1/2} r_w^{1/2}}{M_{bh} M_{bh}^{1/2} r_s^{1/2}} \\ &\propto M_{bh}^{-37/432}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Dabei wurde M_{KSG} durch Gleichung (5.45) und r_w durch Gleichung (5.53) ausgedrückt. Daraus folgt, dass mit zunehmender Masse des SLs die von einer Episode hervorgerufene Spinbetragsänderung immer kleiner wird und somit auch die Schwankungen um den Erwartungswert abnehmen. Gleichzeitig erklärt dies auch die Abnahme des Erwartungswertes \bar{a} mit zunehmender Masse des Schwarzen Lochs. Eine Reduktion des Quotienten $J_d/2J_{bh}$ bringt die Wahrscheinlichkeit für antiparallele Ausrichtung näher an ihren Maximalwert von 0.5, somit wird der Quotient $P_{\parallel}/P_{\uparrow}$ kleiner. Daraus folgt, dass auch der Unterschied zwischen den Effektivitäten der Akkretion in paralleler und antiparalleler Ausrichtung abnehmen muss, um weiterhin Gleichung (5.31) erfüllen zu können. Dies impliziert aber wie aus Tabelle 5.1 zu entnehmen, dass der Kerrparameter einen niedrigeren Wert annehmen wird. Außer der steten Abnahme von \bar{a} mit steigender SL-Masse zeigt der Verlauf bei einer SL-Masse von circa $2 \times 10^8 M_{\odot}$ einen plötzlichen Knick. Dieser hat seine Ursache im Übergang von dem Regime $r_w < r_{KSG}$ zu $r_w > r_{KSG}$. Ist im ersten Fall der Drehimpuls der Scheibe durch Gleichung (5.57) gegeben und damit der Quotient J_d/J_{bh} durch Gleichung (5.61) bestimmt, wird im zweiten Fall der *warp*-Radius durch den Außenrand der Scheibe begrenzt. Da dieser mit steigender SL-Masse wesentlich langsamer ansteigt ($r_w \propto M_{bh}^{9/8}$ vs. $r_{KSG} \propto M_{bh}^{1/27}$), fällt der Quotient der Drehimpulse steiler ab:

$$\begin{aligned} \frac{J_d}{J_{bh}} &\propto \frac{M_{KSG} M_{bh}^{1/2} r_{KSG}^{1/2}}{M_{bh} M_{bh}^{1/2} r_s^{1/2}} \\ &\propto M_{bh}^{-17/27}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Damit erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für antiparallele Ausrichtung und erzwingt somit einen geringeren Wert für \bar{a} . Der genaue Moment dieses Übergangs kann für die Entwicklung eines einzelnen SLs nicht exakt angegeben werden, da er von dem aktuellen Wert für a abhängt. Dieser Umstand kann sogar zu einem mehrfachen Wechsel zwischen den Regimes führen. Setzt man aber für die Berechnung des *warp*-Radius den Parameter a auf 0.2 fest, zeigt Abbildung 5.11 die Entwicklung und den Schnittpunkt der beiden Radien. Für den Fall $\alpha_2 = 0.03$ ergibt sich wie oben erwähnt eine SL-Masse von circa

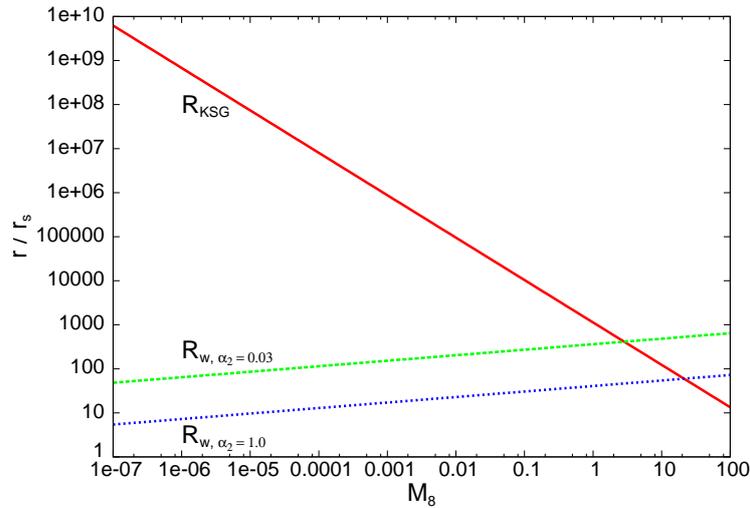


Abbildung 5.11: Verlauf des *warp*-Radius, sowie des Außenrandes der Scheibe r_{KSG} in Abhängigkeit der Schwarzschildmasse. Dabei sind die Radien jeweils in Einheiten des Schwarzschildradius und die SL-Masse in M_8 logarithmisch dargestellt. Für den *warp*-Radius wurde $a = 0.2$ gesetzt und die beiden Fälle $\alpha_2 = 0.03$ sowie $\alpha_2 = 1.0$ dargestellt.

$2 \times 10^8 M_\odot$ als Grenzmasse. Desweiteren ist in Abbildung 5.10 zu sehen, dass die Zunahme der Schwarzschildmasse in Phasen mit hohen Werten für a geringer ist als in Phasen mit niedrigem a . Dies bestätigt die in Abschnitt 5.3 angegebenen Abhängigkeiten.

Eine wesentliche Größe für die Entwicklung des Spins und damit auch der SL-Masse ist die Wahrscheinlichkeit P_\parallel für die antiparallele Ausrichtung, da sie letztendlich den Verlauf von a und damit die Wachstumsgeschwindigkeit des SLs festlegt. Sie hängt außer von dem Spin selbst effektiv nur von der Wahl des Parameters α_2 ab. Um die Auswirkungen einer geänderten Wahl dieses Parameters zu demonstrieren, zeigt Abbildung 5.12 dieselbe Simulation wie Abbildung 5.10, außer dass der Wert für α_2 auf 1 erhöht wurde. Zur Bestimmung der Orientierungen wurde dieselbe Serie an Zufallszahlen verwendet wie in der obigen Simulation, um die Auswirkungen der geänderten Wahl von α_2 zu verdeutlichen. Der Haupteffekt der geänderten Parameterwahl ist, dass der Erwartungswert für den Kerrparameter niedriger ist. Dies ist leicht einzusehen, wenn man die Abhängigkeit des Quotienten $J_d/2J_{\text{bh}}$ von α_2 betrachtet:

$$J_d/2J_{\text{bh}} \propto \alpha_2^{-5/16}. \quad (5.62)$$

Ein größerer Wert für α_2 führt zu einem kleineren Wert für den Quotienten und damit, der obigen Argumentation folgend, zu einem niedrigeren Wert für \bar{a} . Dies wiederum erlaubt ein schnelleres SL-Wachstum, was dazu führt, dass in weniger als 0.6 Ga *accretion time* bereits ein SL von mehr als $10^{10} M_\odot$ entsteht. Als weitere Auswirkung verschiebt sich der Übergang von $r_w < r_{\text{KSG}}$ zu $r_w > r_{\text{KSG}}$ hin zu größeren Massen für das SL. Dies ist wieder leicht an der Abhängigkeit des *warp*-Radius von α_2 (Gleichung 5.53) erkennbar.

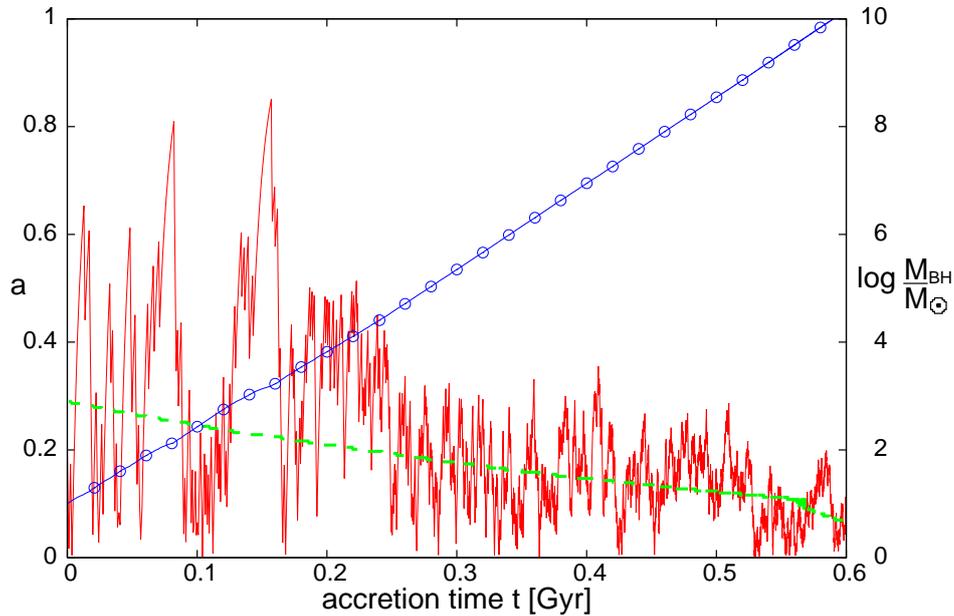


Abbildung 5.12: Vergleichssimulation zu Abbildung 5.10, mit geändertem Wert für $\alpha_2 = 1.0$.

5.6.2 Mittlerer Kerrparameter

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, unterliegt die Entwicklung des Kerrparameters, obwohl sie einem klaren Trend folgt, starken, hochfrequenten Schwankungen. Die Entwicklung des SLs wird somit nicht nachhaltig durch die Wahl des Anfangswertes des Kerrparameters a_0 beeinflusst. Desweiteren haben auch SL-SL Verschmelzungen, die bei vergleichbaren SL-Massen den Spin erheblich verändern können, keine langfristigen Auswirkungen auf den Kerrparameter. Nichtsdestotrotz können solche Ereignisse kurzfristig für sehr hohe Werte von a sorgen, wenn zwei SLs mit vergleichbaren Massen und nahezu parallelem Spin miteinander verschmelzen (Hughes & Blandford, 2003). Über die gesamte Population der SL-SL Verschmelzungen gemittelt, kamen Hughes & Blandford (2003) zu dem Ergebnis, dass sie zu einer Absenkung des erwarteten Kerrparameters führen. Die Begründung liegt dabei, wie in unserer Analyse über die Auswirkung der Akkretion, in der höheren Effizienz des *spin-downs* bei antiparalleler Ausrichtung gegenüber dem *spin-up* bei paralleler Ausrichtung. Aufgrund der sowohl der Entwicklung inhärenten Streuung als auch der Auswirkungen der SL-SL Verschmelzungen ist zum Vergleich mit Beobachtungen nur die Verteilung des Kerrparameters geeignet. Diese ist in den Abbildungen 5.13 und 5.14 jeweils für vier verschiedene SL-Massen zwischen $10^6 M_\odot$ – $10^9 M_\odot$ dargestellt. Die beiden Abbildungen unterscheiden sich in der Wahl des Parameters α_2 , der analog zu den Ergebnissen des vorherigen Abschnitts zu 0.03 beziehungsweise 1.0 gewählt wurde. Zur Erstellung der Histogramme wurden für 100 Rechnungen die Kerrparameter nach Werten für a und M_{bh} in Bins eingeteilt. Dabei wurde für den Kerrparameter eine Binbrei-

5 Die Massen- und Spinentwicklung von Schwarzen Löchern in AGNs

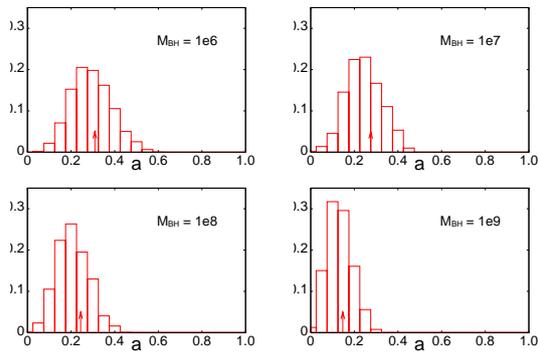


Abbildung 5.13: Verteilung des Kerrparameters abhängig von der SL-Masse um den Mittelwert (Pfeil) für die Wahl von $\alpha_2 = 0.03$.

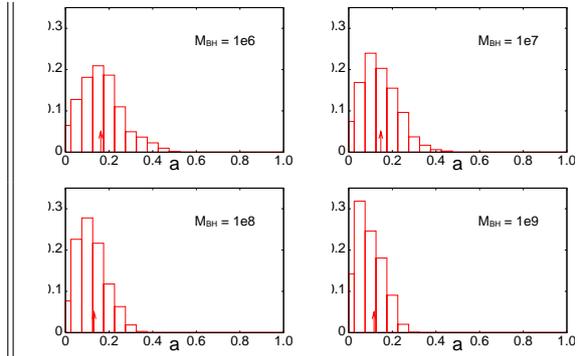


Abbildung 5.14: Verteilung des Kerrparameters abhängig von der SL-Masse um den Mittelwert (Pfeil) für die Wahl von $\alpha_2 = 1.0$.

te von 0.05 und für die Schwarzslochmasse eine logarithmische Binning mit zehn Bins pro Dekade gewählt. Die Histogramme sind jeweils normiert dargestellt. Aus diesen Verteilungen erhält man für den Massenbereich $10^6 M_\odot - 10^9 M_\odot$ und $\alpha_2 = 0.03$ einen Kerrparameter von $\sim 0.3 - 0.2$ mit Abweichungen $\Delta a \sim \pm 0.2$. Für $\alpha_2 = 1.0$ erhält man $a \sim 0.2 - 0.1$ mit einem Δa von ebenfalls $\sim \pm 0.2$. Dies steht sowohl im Widerspruch zu früheren Untersuchungen über die Spinverteilung von Schwarzen Löchern in AGNs (Scheuer & Feiler, 1996; Madau et al., 2004; Volonteri et al., 2005) als auch zu den früheren Überlegungen von King & Pringle (2006). Erstere haben dabei stets angenommen, dass der Drehimpuls der Akkretionsscheiben sehr viel größer sei als der Spin der Schwarzen Löcher. Sie haben somit die Möglichkeit der antiparallelen Ausrichtung ausgeschlossen und demzufolge Kerrparameter nahe Eins vorhergesagt. In den früheren Überlegungen von King & Pringle (2006) wurde auf eben diese Möglichkeit hingewiesen. Aus der höheren Effizienz des *spin-downs* folgerten sie, dass der Spin des SLs jeweils von der Größenordnung des Drehimpulses der letzten Akkretionsepisode sei, also nahe Null. In diesen Überlegungen wurde der in Abschnitt 5.2.2 aufgezeigte Effekt der „Selbstbegrenzung“ der Spinabnahme nicht mitberücksichtigt. Um sich zwischen den unterschiedlichen Vorhersagen entscheiden zu können, müssen nun Beobachtungsdaten über den Kerrparameter herangezogen werden. Ein Vorschlag zur Bestimmung eines mittleren Spinparameters beruht auf dem sogenannten Soltan (1982) Argument. Dies besagt, dass die Gesamtheit des Hintergrundlichtes im Universum mit niedriger Rotverschiebung auf das Wachstum von Schwarzen Löchern zurückzuführen ist. Daraus ergibt sich eine mittlere Akkretionseffizienz ϵ von ungefähr 0.1 (Wang et al., 2006; Treister & Urry, 2006; Hopkins et al., 2007) was formal zu einem mittleren Kerrparameter von $a \cong 0.67$ führt (siehe Abbildung 5.15). Das Problem dabei ist, dass die Abhängigkeit zwischen a und ϵ über weite Gebiete so schwach ist, dass die Beobachtungen ϵ besser als auf einen Faktor 2 festlegen müssen, um irgendwelche Werte, außer Werte sehr nahe bei Eins, für a ausschließen zu können. Dieses Problem wird noch dadurch verstärkt, dass aufgrund der unterschiedlichen Ausrichtungsmöglich-

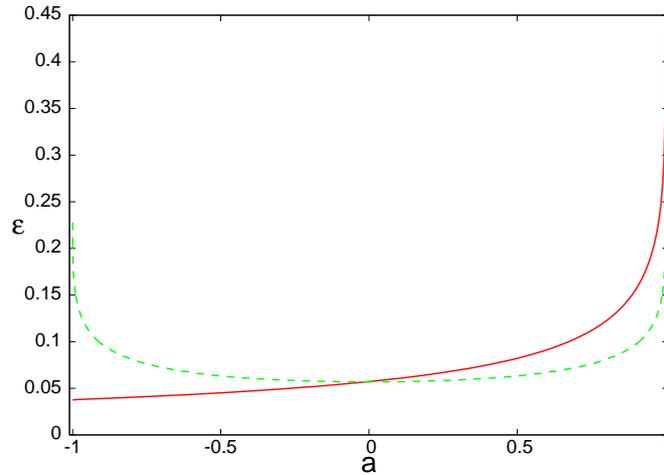


Abbildung 5.15: Zusammenhang zwischen der Akkretionseffizienz ε und dem Spinparameter a (Rot). In Grün ist die symmetrisierte Form $\varepsilon_{\pm} = 1/2[\varepsilon(a) + \varepsilon(-a)]$ dargestellt.

keiten eine Art symmetrisierte Form der Beziehung zwischen a und ε verwendet werden muss:

$$\varepsilon_{\pm} = P_{\parallel} \varepsilon(a) + P_{\parallel} \varepsilon(-a). \quad (5.63)$$

Für den Fall $P_{\parallel} = P_{\perp} = 0.5$ ist diese symmetrisierte Form ebenfalls in Abbildung 5.15 dargestellt, der genaue Wert von P_{\parallel} für zum Beispiel den Fall von $a = 0.2$ beträgt $\cong 0.4$. Um hieraus mit Hilfe des Soltan-Argumentes eine Aussage über den Kerrparameter treffen zu können, muss ε mit sehr hoher und bisher nicht erreichbarer Genauigkeit bestimmt werden. Ein weiterer Vorschlag zu einer Bestimmungsmethode des Spinparameters stammt von Streblyanska et al. (2005). Dieser Vorschlag beruht auf Beobachtungen von Eisenlinien im Röntgenspektrum der AGNs. Diese werden durch Modellspektren für rotierende wie nichtrotierende Schwarze Löcher angefitet. Dabei kamen die Autoren zu dem Ergebnis, dass der beste Fit von einem Schwarzen Loch mit einem inneren Emissionsrand von $3GM_{\text{bh}}/c^2$ stammt. Dies führt zu einem Spinparameter $a \geq 0.78$. Eine klare Bestimmung eines Innenrandes der Akkretionsscheibe scheint aber gemäß Untersuchungen von Asmus (2008) gar nicht möglich zu sein. Zusätzlich zu diesem grundlegenden Problem hat diese Methode ein „Biasproblem“, da ein höherer Wert von a zu einer höheren Effizienz des Akkretionsprozesses führt und damit zu stärkeren Eisenlinien. So befindet sich auch der mit dieser Methode von Brenneman & Reynolds (2006) für das System MCG-06-30-15 bestimmte Kerrparameter mit $a = 0.989^{+0.009}_{-0.002}$ bemerkenswert nahe am maximal erlaubten Wert. Aber da es sich bei den obigen Aussagen über den erwarteten Wert für a um statistische Aussagen handelt, sind einzelne Extremwerte für a , zum Beispiel durch SL-SL Verschmelzungen hervorgerufen, durchaus damit vereinbar. Abschließend bleibt zu sagen, dass keine der heute zur Verfügung stehenden Beobachtungsmethoden eine klare Aussage über die Verteilung der Spinparameter zentraler Schwarzer Löcher in AGNs treffen kann. Prinzipiell ist aber eine solche Bestimmung eine geeignete Methode um zu

untersuchen, ob die zu Beginn dieses Kapitels gemachte Annahme von hoher Sternentstehungseffizienz f_* und der damit verbundenen Beschränkung der Akkretionsscheiben durch Keplersche Selbstgravitation gerechtfertigt ist. Sollte dies durch das Auffinden moderater Werte für a bestätigt werden, könnte prinzipiell bei noch genauerer Bestimmung auch zwischen verschiedenen Werten für den Parameter α_2 unterschieden werden, dessen Auswirkungen auf die Verteilung von a oben ausführlich diskutiert wurde.

5.6.3 Spinrichtung

Bisher wurde nur die Entwicklung des Betrages J_{bh} des Spinvektors \mathbf{J}_{bh} des Schwarzen Lochs betrachtet und seine Ausrichtung vernachlässigt. Eine genauere Betrachtung der Ausrichtung lohnt aber, da der Spinvektor stets zu dem Drehimpulsvektor des inneren Teils der Akkretionsscheibe parallel oder antiparallel ausgerichtet ist und dies wiederum die angenommene Ausbreitungsrichtung einer vom System hervorgerufenen Jetkomponente darstellt (Sparks et al., 2000; Schmitt et al., 2003; Verdoes Kleijn & de Zeeuw, 2005). Die Ausrichtung der Jets kann also als Hinweis auf die Spinausrichtung des SLs verwendet werden. Betrachtet man nun die Entwicklung dieser Ausrichtung, so wurde in Abschnitt 5.2.1 gezeigt, dass sich der Spin des SLs immer in Richtung des Gesamtdrehimpulses aus SL Spin und Drehimpuls der Akkretionsscheibe ausrichtet. Bei einem anfänglichen Winkel Θ zwischen dem Spin des SLs und dem Drehimpuls der Akkretionsscheibe führt dies zu einer Ablenkung Ψ des Spins aus seiner Ausgangsposition gemäß:

$$\begin{aligned} \sin \Psi &= \frac{J_d}{J_t} \sin \Theta \\ &= \frac{J_d}{J_{\text{bh}}} \sin \Theta \left(1 + \frac{J_d^2}{J_{\text{bh}}^2} + 2 \frac{J_d}{J_{\text{bh}}} \cos \Theta \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

J_t wurde dabei durch Gleichung (5.23) ausgedrückt und $\cos(\pi - \Theta) = -\cos \Theta$ verwendet. Aus Gleichung (5.59) erkennt man, dass, außer für sehr kleine Werte von a , $J_d < J_{\text{bh}}$ gilt, so dass für obige Relation die Näherung:

$$\sin \Psi \cong \frac{J_d}{J_{\text{bh}}} \sin \Theta \quad (5.65)$$

angegeben werden kann. Konkret ergibt sich somit für die typischen Spinparameter $a = 0.25, 0.15$ für $\alpha_2 = 0.03, 1.0$ ein Verhältnis von $J_d/J_{\text{bh}} \approx 0.3, 0.15$. Daraus folgt für einen zufälligen anfänglichen Winkel Θ eine Ablenkung von $\Psi \lesssim 17.5^\circ, 8.5^\circ$. Dies lässt zwar zu, dass einige aufeinanderfolgende Episoden eine ähnliche Ausrichtung des SL Spins haben, aber über längere Zeit lässt sich damit keine ausgezeichnete Ausrichtung erhalten. Dies ist in Abbildung 5.16, die den Verlauf von $\hat{\mathbf{J}}_{\text{bh}}$ zeigt, veranschaulicht. Wenn aber der Spin nicht fest ausgerichtet sein kann, bedeutet das, dass es keine feste Beziehung zwischen der Jetausrichtung, die dadurch festgelegt wird, und der großräumigen unveränderlichen Struktur der *host*-Galaxie geben kann. Diese Aussage entspricht den

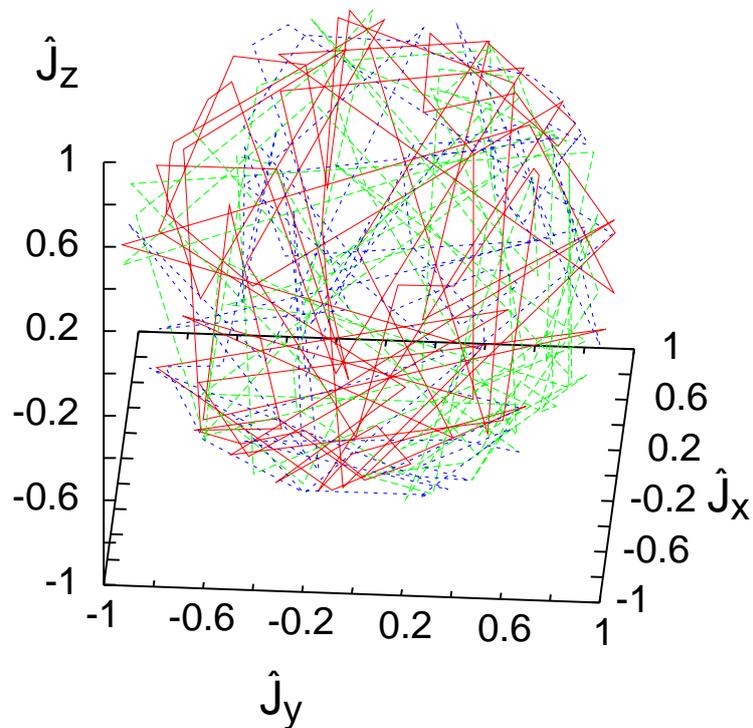


Abbildung 5.16: Entwicklung von $\hat{\mathbf{J}}_{\text{bh}}$. Der beispielhafte Verlauf zeigt, dass es keine ausgezeichnete Richtung für den Spin des SLs gibt. Dabei ist der zeitliche Verlauf farbkodiert (rot, grün, blau) und der Übersicht halber nur jeder zehnte Entwicklungsschritt eingetragen.

Beobachtungsergebnissen von zum Beispiel Nagar & Wilson (1999); Kinney et al. (2000) und Sajina et al. (2007). Somit kann das hier vorgestellte Modell diese Beobachtungen erklären, ohne dass weitere Annahmen hinzugefügt werden mussten, so dass dies als ein starker Hinweis auf die Gültigkeit der in diesem Kapitel gemachten Annahmen gewertet werden kann.

6 Diskussion und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde das Phänomen der Aktiven Galaxienkerne in zwei qualitativ unterschiedlichen Weisen betrachtet. Zum einen wurde ihre Leuchtkraftfunktion als mögliche Beobachtungsgröße vorgestellt, die sich zur Untersuchung der Einflüsse unterschiedlicher kosmologischer Modelle auf die Strukturbildung im Universum eignet. Zum anderen wurden Aktive Galaxienkerne als intrinsisch interessante Objekte näher betrachtet, besonders in Bezug auf die Quelle ihrer hohen Leuchtkräfte.

Einflüsse unterschiedlicher kosmologischer Modelle auf die Leuchtkraftfunktion von Aktiven Galaxienkernen

Zur Bestimmung dieser Einflüsse wurde in Kapitel 2 ein auf dem EPS-Formalismus beruhendes Monte-Carlo-Verfahren zur Erstellung von Mergergeschichten für Dunkle Materie Halos vorgestellt. Diese Mergergeschichten werden dabei durch die Verwendung unterschiedlicher kosmologischer Beschreibungen verändert. Da aber die Verschmelzung der Dunkle Materie Halos und damit auch der in ihnen eingebetteten Galaxien die Auslöser eines AGNs darstellen, muss dies auch deren Leuchtkraftfunktion beeinflussen. Um diese aus den Verschmelzungswahrscheinlichkeiten der Galaxien zu erhalten, wurden sie mit einem Modell für die Aktivitätsphase der Aktiven Galaxienkerne kombiniert. Eine Änderung der zugrunde liegenden kosmologischen Beschreibung führt dabei hauptsächlich zu einer Veränderung der zeitlichen Lage und Breite der Leuchtkraftfunktion. Es konnte gezeigt werden, dass mit zunehmendem Anteil der Dunklen Energie an der Gesamtenergiedichte eine stete Verschiebung der Leuchtkraftfunktion hin zu höheren Werten von z , sowie eine generelle Verbreiterung der Funktion einhergeht. Den selben Effekt hat der Übergang von einer Beschreibung der Dunklen Energie mittels einer kosmologischen Konstante hin zu einer Formulierung mit früher Dunkler Energie. Unabhängig von der gewählten Beschreibung hat eine Änderung der Kosmologie nur einen geringen Einfluss auf die interne Struktur der Leuchtkraftfunktion. Der internen Struktur wiederum konnte eine starke Abhängigkeit von dem verwendeten Modell zur Beschreibung der Aktivitätsphase nachgewiesen werden. So konnten bei geeigneter Beschreibung Hinweise auf das von Ueda et al. (2003) und Hasinger et al. (2005) beobachtete anti-hierarchische Verhalten gefunden werden. Diese Beobachtungen müssen also einem hierarchischen Aufbau des Universums, wie er in dieser Arbeit ja verwendet wurde, keineswegs widersprechen. Der starke Einfluss des konkreten Ablaufs eines AGNs auf die Leuchtkraftfunktion macht eine möglichst akkurate Beschreibung einer solchen Aktivitätsphase wünschenswert. So ist das in diesem Teil der Arbeit verwendete Modell noch nicht dazu geeignet um neben

den prinzipiellen Trends auch aus Vergleichen mit Beobachtungen Einschränkungen an die erlaubten Kosmologien machen zu können. Es ist also notwendig, den detaillierten Ablauf eines AGNs besser verstehen zu lernen, um so genauere Beschreibungen liefern zu können.

Beschreibung von Aktiven Galaxienkernen mittels eines mehrskaligen Modells

Aus den Ergebnissen des ersten Teils folgt die Forderung nach möglichst genauen und detaillierten Beschreibungen für den Ablauf einer Aktivitätsphase in einem AGN. Dabei wurden in der Literatur häufig die großskalige Verschmelzung der Galaxien und der sehr viel kleinskaligere eigentliche AGN mit seiner Akkretion auf das zentrale Schwarze Loch getrennt behandelt. Eine solche Trennung vernachlässigt aber die Wechselwirkung dieser beiden Teile aufeinander, wie zum Beispiel das Feedback des akkretierenden Schwarzen Lochs. Dabei handelt es sich um die Erhöhung der thermischen Energie der großräumigen Gasverteilung um das zentrale Schwarze Loch durch die bei der Akkretion erzeugte Leuchtkraft. Diese hat aber gemäß neueren Arbeiten einen erheblichen Einfluss auf die Entwicklung der Galaxien auch auf großen Skalen. Die beiden Teile sollten demnach nicht getrennt, sondern in einer einzigen, selbstkonsistenten Beschreibung zusammen betrachtet werden. In Kapitel 4 wird eine solche Beschreibung präsentiert. Dabei wird erstmals darauf verzichtet, einen der beiden Teile durch eine parametrisierte Beschreibung zu ersetzen. Stattdessen wird ein großskaliges Modell für die Beschreibung der Galaxienentwicklung mit einem kleinskaligen Modell für die Akkretionsprozesse um das Schwarze Loch kombiniert. Diese Beschreibung kann somit dem Transport des Gases beginnend auf galaktischem Maßstab und hinab bis zur Akkretion auf das zentrale Schwarze Loch konsistent folgen. Es konnte die praktische Realisierbarkeit einer solchen Modellkombination demonstriert werden. Auch wenn die dort vorgestellte Beispielrechnung noch relativ einfach gewählt ist, zeigt sie doch bereits erste Erfolge. So konnten durch Verwendung des kombinierten Modells wesentlich physikalischere Vorhersagen über das Schwarzwachstum erreicht werden, als dies für vergleichbare Rechnungen mit parametrisierten Beschreibungen für den Akkretionsprozess der Fall ist. Diese ersten bereits vielversprechenden Ergebnisse rechtfertigen somit den mit der Modellkombination verbundenen höheren Rechenaufwand gegenüber der parametrisierten Beschreibung und lassen eine Weiterentwicklung des Modells sinnvoll erscheinen.

Entwicklung des zentralen Schwarzen Lochs

In den bisher beschriebenen Teilen dieser Arbeit wurde der Massenfluss in den Zentren der AGNs ($\lesssim 100\text{pc}$) als durch eine Akkretionsscheibe vermittelt betrachtet. Da es sich im Fall von AGNs bei diesen Scheiben um selbstgravitierende Objekte handelt, wurde für die Viskositätsbeschreibung die für diesen Fall geeignete β -Viskosität verwendet. Mit dieser Beschreibung können die für AGNs beobachteten Zeitskalen reproduziert werden. Mit ihrer Auswirkung auf die viskose Zeitskala stellt die Viskositätsbeschreibung auch ei-

ne die innere Struktur der Leuchtkraftfunktion mit beeinflussende Größe dar. In Kapitel 5 wurden schließlich die Auswirkungen untersucht, die eine geänderte Annahme für den Ablauf des Massenflusses in AGNs auf die Entwicklung des zentralen Schwarzen Lochs mit sich bringt. Diese Änderung beruht auf der Annahme von einer durch Gravitationsinstabilitäten erhöhten Sternentstehungseffizienz in Akkretionsscheiben, die direkt oder indirekt zu einer Fragmentierung der Akkretionsscheiben führt, sowie diese selbstgravitierend werden. Der Massenfluss innerhalb der AGN teilt sich dann auf in kleine ($\lesssim 0.1$ pc) durch Selbstgravitation begrenzte Akkretionsphasen und einen in dem restlichen Teil ablaufenden Gastransport durch Wolken-Wolken-Wechselwirkungen. Der Schwerpunkt der Betrachtungen in Kapitel 5 liegt dabei auf den Auswirkungen dieser Annahme bezüglich des Schwarzlochwachstums durch die Akkretionsphasen. Es konnte gezeigt werden, dass dieses Modell zu moderaten Werten für den Spin des Schwarzen Lochs führt. Damit wird die Effizienz des Akkretionsprozesses in Bezug auf die Erzeugung von Leuchtkraft ebenfalls gering genug gehalten, um die Voraussetzung für das Entstehen von Supermassereichen Schwarzen Löchern in weniger als einer Milliarde Jahren zu liefern. Außerdem kann das Modell ohne Verwendung weiterer Annahmen die durch Beobachtungen nahegelegte Unabhängigkeit der Spinausrichtung des Schwarzen Lochs von der großskaligen Ausrichtung der zugehörigen Galaxie erklären. Als eine Vorhersage, die zwar bisherigen Beobachtungen noch weitestgehend verschlossen ist, und erst durch künftige Teleskope und Instrumente zugänglich gemacht werden muss, aber eine prinzipielle Überprüfbarkeit des Modells erlaubt, wurde die erwartete Verteilung des Schwarzlochspins angegeben. Als natürliche Erweiterung des Modells bietet sich eine echte Betrachtung des Gastransports über den gesamten AGN Bereich an. Damit sollte es möglich sein zu zeigen, ob der im Rahmen dieses Modells erreichbare schnelle Aufbau von SMBHs auch tatsächlich in Aktiven Galaxienkernen realisiert werden kann.

A Herleitung der Friedmann-Gleichung

Eine allen kosmologischen Modellen zugrunde liegende Annahme ist das sogenannte *Kosmologische Prinzip*. Eine mögliche Formulierung dieses Prinzips lautet:

„Im Universum sind alle Positionen und Richtungen gleichwertig.“

Diese Annahme stellt starke Einschränkungen an die Raumstruktur, die Metrik, des Kosmos. Die Metrik, welche die implizit vom Kosmologischen Prinzip geforderte Homogenität und Isotropie erfüllt, ist die sogenannte *Robertson-Walker-Metrik*:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\phi^2) \right). \quad (\text{A.1})$$

Der Parameter k steht dabei für den Krümmungsparameter und $a(t)$ für den Skalenfaktor. Verwendet man den mit dieser Metrik verbundenen metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ sowie dessen erste und zweite Ableitungen, von denen der sogenannte *Einsteintensor* $G_{\mu\nu}$ abhängt, um Einsteins Feldgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} + \Lambda c^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

auf die obige Metrik zu spezialisieren, so erhält man zwei Differentialgleichungen für $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (\text{A.4})$$

Diese Gleichungen lassen sich zu:

$$\frac{d}{dt} (a^3 \rho c^2) + p \frac{d}{dt} (a^3) = 0 \quad (\text{A.5})$$

kombinieren. Dabei stehen ρ und p für die Dichte bzw. den Druck der Materie im Universum. Diese wird im Großen und im Mittel als kontinuierliche, ideale Flüssigkeit beschrieben, so dass sich der Energie-Impuls-Tensor aus Gleichung (A.2) wie folgt schreiben lässt:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} p. \quad (\text{A.6})$$

A Herleitung der Friedmann-Gleichung

Nach der Annahme des kosmologischen Prinzips gilt sowohl für den Druck wie für die Dichte räumliche Homogenität, so dass es sich bei diesen Größen nur um von der Zeit abhängige Funktionen handeln kann:

$$\rho = \rho(t), \quad p = p(t). \quad (\text{A.7})$$

Die Materie wird nun in zwei unterschiedliche Arten unterteilt: eine relativistische, häufig auch als Strahlung bezeichnete Form und eine nichtrelativistische, auch Staub genannte Form. Für die relativistische Form ist der Druck durch:

$$p = \frac{\rho c^2}{3} \quad (\text{A.8})$$

gegeben. Für die nichtrelativistische Form kann in guter Näherung Druckfreiheit $p = 0$ angenommen werden. Für sie ergibt sich damit aus Gleichung (A.5):

$$\frac{d}{dt} (a^3 \rho_m c^2) = 0, \quad \rightarrow \quad \rho_m(t) = \rho_{m,0} a^{-3}. \quad (\text{A.9})$$

Der Index $_m$ zeigt dabei an, dass es sich nur um den nichtrelativistischen Teil der Materie handelt, für den relativistischen wird der Index $_{\text{rad}}$ verwendet. Für diesen Teil ergibt sich aus Gleichung (A.5):

$$\frac{d}{dt} (a^3 \rho_{\text{rad}} c^2) + \frac{\rho_{\text{rad}}}{3} \frac{d}{dt} (a^3), \quad \rightarrow \quad \rho_{\text{rad}}(t) = \rho_{\text{rad},0} a^{-4}. \quad (\text{A.10})$$

Setzt man die Gleichungen (A.9) und (A.10) zusammen mit der Definition für den Hubble Parameter $H(t)$:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad (\text{A.11})$$

in Gleichung (A.3) ein, so erhält man die Friedmann-Gleichung wie sie in Abschnitt 2.5 verwendet wird:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{m,0} a^{-3}(t) + \rho_{\text{rad},0} a^{-4}(t)) - \frac{kc^2}{a^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (\text{A.12})$$

B Quintessenzparameter und kritische Dichteüberhöhung

$(1+z)$	ω_{de}	$(1+z)$	ω_{de}	$(1+z)$	ω_{de}
1.0000	$-9.9691e-01$	1.9953	$-6.1695e-01$	3.9811	$-4.1894e-01$
1.0233	$-9.7913e-01$	2.0417	$-6.0827e-01$	4.0738	$-4.1406e-01$
1.0471	$-9.6183e-01$	2.0893	$-5.9977e-01$	4.1687	$-4.0927e-01$
1.0715	$-9.4497e-01$	2.1380	$-5.9144e-01$	4.2658	$-4.0456e-01$
1.0965	$-9.2856e-01$	2.1878	$-5.8329e-01$	4.3652	$-3.9993e-01$
1.1220	$-9.1257e-01$	2.2387	$-5.7530e-01$	4.4668	$-3.9538e-01$
1.1482	$-8.9699e-01$	2.2909	$-5.6748e-01$	4.5709	$-3.9091e-01$
1.1749	$-8.8181e-01$	2.3442	$-5.5981e-01$	4.6774	$-3.8651e-01$
1.2023	$-8.6701e-01$	2.3988	$-5.5230e-01$	4.7863	$-3.8218e-01$
1.2303	$-8.5258e-01$	2.4547	$-5.4494e-01$	4.8978	$-3.7793e-01$
1.2589	$-8.3850e-01$	2.5119	$-5.3772e-01$	5.0119	$-3.7374e-01$
1.2883	$-8.2477e-01$	2.5704	$-5.3065e-01$	5.1286	$-3.6963e-01$
1.3183	$-8.1138e-01$	2.6303	$-5.2371e-01$	5.2481	$-3.6558e-01$
1.3490	$-7.9831e-01$	2.6915	$-5.1691e-01$	5.3703	$-3.6160e-01$
1.3804	$-7.8555e-01$	2.7542	$-5.1024e-01$	5.4954	$-3.5768e-01$
1.4125	$-7.7309e-01$	2.8184	$-5.0370e-01$	5.6234	$-3.5382e-01$
1.4454	$-7.6093e-01$	2.8840	$-4.9729e-01$	5.7544	$-3.5003e-01$
1.4791	$-7.4905e-01$	2.9512	$-4.9099e-01$	5.8884	$-3.4629e-01$
1.5136	$-7.3745e-01$	3.0200	$-4.8481e-01$	6.0256	$-3.4262e-01$
1.5488	$-7.2612e-01$	3.0903	$-4.7875e-01$	6.1659	$-3.3900e-01$
1.5849	$-7.1504e-01$	3.1623	$-4.7280e-01$	6.3096	$-3.3544e-01$
1.6218	$-7.0422e-01$	3.2359	$-4.6697e-01$	6.4565	$-3.3193e-01$
1.6596	$-6.9364e-01$	3.3113	$-4.6123e-01$	6.6069	$-3.2848e-01$
1.6982	$-6.8329e-01$	3.3884	$-4.5561e-01$	6.7608	$-3.2508e-01$
1.7378	$-6.7318e-01$	3.4674	$-4.5008e-01$	6.9183	$-3.2173e-01$
1.7783	$-6.6329e-01$	3.5481	$-4.4466e-01$	7.0795	$-3.1844e-01$
1.8197	$-6.5361e-01$	3.6308	$-4.3933e-01$	7.2444	$-3.1519e-01$
1.8621	$-6.4415e-01$	3.7153	$-4.3409e-01$	7.4131	$-3.1199e-01$
1.9055	$-6.3489e-01$	3.8019	$-4.2895e-01$	7.5858	$-3.0884e-01$
1.9498	$-6.2582e-01$	3.8904	$-4.2390e-01$		

Tabelle B.1: Zusammenhang zwischen dem Quintessenzparameter ω_{de} und $1+z$ gemäß dem Modell (II) aus Bartelmann et al. (2006).

$(1+z)$	1.00	1.32	1.63	1.95	2.27	2.59	2.91	3.22
δ_c	1.4100	1.4630	1.4970	1.5210	1.5380	1.5510	1.5600	1.5680
$(1+z)$	3.54	3.86	4.17	4.49	4.81	5.13	5.44	5.76
δ_c	1.5760	1.5810	1.5860	1.5900	1.5940	1.5970	1.6000	1.6030
$(1+z)$	6.08	6.40	6.71	7.03	7.35	7.67		
δ_c	1.6050	1.6070	1.6100	1.6100	1.6120	1.6140		

Tabelle B.2: Zusammenhang zwischen dem kritischen Dichteparameter δ_c und $1+z$ gemäß dem Modell (II) aus Bartelmann et al. (2006).

C Herleitung des Flächendichteverlaufs für vollständig selbstgravitierende Scheiben

Unter der Annahme eines Potenzgesetzes für den radialen Verlauf der Flächendichte $\Sigma(r)$

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^\mu, \quad (\text{C.1})$$

ergibt sich für den Zusammenhang zwischen der Masse $M_{\text{disk}}(r)$ der Scheibe und dem Radius folgende Relation:

$$\begin{aligned} M_{\text{disk}}(r) &= \int_0^r 2\pi r' \Sigma(r') dr' \\ &\propto \int_0^r 2r'^{\mu+1} dr' \\ &\propto r^{\mu+2}. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Damit folgt für die Winkelgeschwindigkeit ω :

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{G(M_{\text{zentral}} + M_{\text{disk}})}{r^3}} \\ &\propto r^{\frac{\mu-1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Um zu Gleichung (C.3) zu gelangen, wurde neben Gleichung (C.2) auch die Aussage der vollständigen Selbstgravitation, nämlich das $M_{\text{zentral}} \ll M_{\text{disk}}$, verwendet. Für die radiale Ableitung von ω folgt damit:

$$\frac{\partial \omega}{\partial r} \propto r^{\frac{\mu-3}{2}}. \quad (\text{C.4})$$

Setzt man nun die Proportionalitäten aus den Gleichungen (C.1), (C.3) und (C.4) in Gleichung (3.32) für die Radialgeschwindigkeit v_r

$$v_r = \frac{\frac{\partial}{\partial r}(r v \Sigma r^2 \frac{\partial \omega}{\partial r})}{r \Sigma \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \omega)}, \quad (\text{C.5})$$

ein, so erhält man folgende Proportionalität zwischen v_r und r :

$$\begin{aligned} v_r &\propto \frac{\frac{\partial}{\partial r}(r(r^2 r^{\frac{\mu-1}{2}})r^\mu r^2 r^{\frac{\mu-3}{2}})}{r r^\mu \frac{\partial}{\partial r}(r^2 r^{\frac{\mu-1}{2}})} \\ &\propto r^{\frac{1}{2}(\mu+1)}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Dabei wurde für die Viskosität ν die β -Parametrisierung von Duschl et al. (2000) verwendet:

$$\nu_\beta = \beta r^2 \omega. \quad (\text{C.7})$$

Nimmt man für die Akkretionsscheibe Stationarität oder zumindest eine Quasistationarität an, bei der auf Kosten der Flächendichte des äußeren Teils der Scheibe die Flächendichte in weiten Teilen der inneren Scheibe konstant bleibt, so kann für den Massenfluss \dot{M} innerhalb der Scheibe folgende Relation verwendet werden:

$$\dot{M} = 2\pi r \Sigma v_r \equiv \text{const.} \quad (\text{C.8})$$

Für die Bestimmung von μ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} \Sigma v_r &\propto r^{-1} \\ r^\mu r^{\frac{1}{2}(\mu+1)} &\propto r^{-1} \\ \rightarrow \mu &= -1. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Daraus folgt für die Flächendichte $\Sigma(r)$ ein Verlauf gemäß:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 r^{-1}. \quad (\text{C.10})$$

D Rechtfertigung der Modellannahmen für die Zeitentwicklung von Akkretionsscheiben

$$h \ll r \rightarrow c_s \ll v_\phi:$$

In Abschnitt 3.2.2 wurde verwendet, dass aus der Forderung $h \ll r$ für eine geometrisch dünne Scheibe die Aussage $c_s \ll v_\phi$ folgt. Dies soll nun gezeigt werden. Dazu geht man von der Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts in vertikaler Richtung aus,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g_z, \quad (\text{D.1})$$

welche sich umgeschrieben, für die in Abschnitt 3.2.2 verwendete Ein-Zonen-Näherung, als:

$$\frac{P}{h} = \rho g_z, \quad (\text{D.2})$$

schreiben lässt. Die Größe g_z steht dabei für die vertikale Schwerebeschleunigung und kann allgemein in eine Summe aus einem globalen und einem lokalen Beitrag aufgeteilt werden:

$$g_z = g_{z,\text{global}} + g_{z,\text{lokal}}, \quad (\text{D.3})$$

Der globale Anteil $g_{z,\text{global}}$ ergibt sich aus der Projektion der Schwerebeschleunigung \mathbf{g}_r in z -Richtung. Diese wird durch die gravitative Anziehung des Zentralobjekts, bzw. bei Verwendung der Monopolnäherung, des Zentralobjekts plus der eingeschlossenen Scheibenmasse, hervorgerufen:

$$g_{z,\text{global}} = |\mathbf{g}_r| \frac{h}{r} = \frac{G(M_{\text{bh}} + M(r))}{r^2} \frac{h}{r} = \Omega^2 h. \quad (\text{D.4})$$

Für den Fall einer nicht selbstgravitierenden Akkretionsscheibe dominiert dieser Anteil g_z , wobei in diesem Fall dann definitionsgemäß auch $M(r)$ vernachlässigt werden kann.

Der zweite Anteil $g_{z,\text{lokal}}$, der im selbstgravitierenden Fall dominiert, wird durch die lokal vorhandene Massenverteilung hervorgerufen:

$$g_{z,\text{lokal}} = \left| -\frac{d\Phi}{dz} \right| = \int_0^z 4\pi G \rho dz = 2\pi G \Sigma. \quad (\text{D.5})$$

Aufgrund dieser beiden unterschiedlichen Regime für g_z muss die obige Behauptung sowohl für selbstgravitierende wie nicht selbstgravitierende Akkretionsscheiben getrennt gezeigt werden.

Nicht selbstgravitierender Fall:

Hierfür folgt aus Gleichung (D.1) und $g_z \approx g_{z,\text{global}}$:

$$\frac{P}{h} = \rho \Omega^2 h. \quad (\text{D.6})$$

Setzt man hierin die Definition der Winkelgeschwindigkeit $\Omega = v_\phi/r$ ein und verwendet für den Druck den Zusammenhang:

$$c_s = \sqrt{\kappa \frac{P}{\rho}}, \quad (\text{D.7})$$

wobei der Adiabatenindex κ im folgenden vernachlässigt wird, da er von der Größenordnung Eins ist, so gelangt man zu folgendem Ausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{\rho c_s^2}{h} &= \rho \frac{v_\phi^2}{r^2} h \\ \frac{h}{r} &= \frac{c_s}{v_\phi}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

und damit zu der gesuchten Aussage, dass aus $h \ll r$ auch $c_s \ll v_\phi$ folgt.

Selbstgravitierender Fall:

In diesem Fall folgt aus dem hydrostatischen Gleichgewicht und $g_z \approx g_{z,\text{lokal}}$ sowie unter Verwendung des selben Ausdrucks für P wie im obigen Fall:

$$\begin{aligned} \frac{P}{h} &= \rho 2\pi G \Sigma \\ c_s^2 &= 2\pi h G \Sigma. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Um zu der gesuchten Aussage zu gelangen, muss nun die Schallgeschwindigkeit aus Gleichung (D.9) mit der Azimuthalgeschwindigkeit in selbstgravitierenden Scheiben verglichen werden. Um einen geeigneten Ausdruck für diese Geschwindigkeit zu erhalten, betrachtet man Gleichung (3.26) für die Winkelgeschwindigkeit. Im Fall von selbstgravitierenden Scheiben kann darin die Masse des Zentralobjektes gegenüber der Scheibenmasse vernachlässigt und die Scheibenmasse wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_{r_{\text{in}}}^r 2\pi r' \Sigma(r') dr' \\ &\approx \pi r^2 \Sigma(r). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Dazu wurde angenommen, dass der wesentliche Beitrag zur Scheibenmasse durch die Ringmasse bei r gegeben ist. Dies ist gerechtfertigt, da die entsprechenden Ringflächen

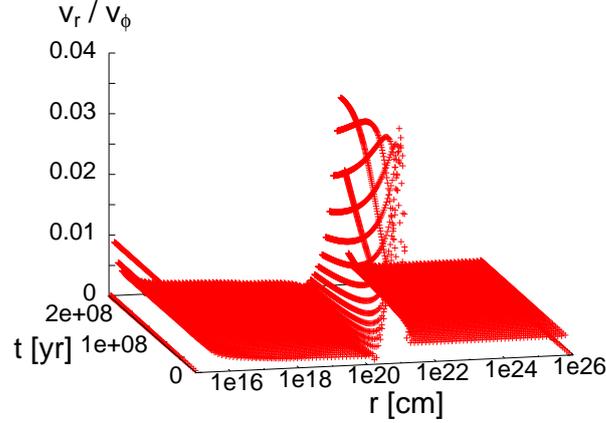


Abbildung D.1: Quotient aus der Radialgeschwindigkeit v_r geteilt durch die Azimuthalgeschwindigkeit v_ϕ aufgetragen über der räumlichen Ausdehnung und der zeitlichen Entwicklung einer Simulation mit $r_{\text{out}} \sim 100 \text{ pc}$, $M_{\text{bh}} = 1 \times 10^5 M_\odot$ und $M_{\text{disk}} = 1 \times 10^{10} M_\odot$.

mit r^2 ansteigen und gleichzeitig die Flächendichte im allgemeinen nach außen langsamer als r^{-2} abfällt. Setzt man diese Scheibenmasse in Gleichung (3.26) ein, erhält man unter erneuter Verwendung der Definition der Winkelgeschwindigkeit folgenden Ausdruck für die Azimuthalgeschwindigkeit:

$$v_\phi = \sqrt{\pi r G \Sigma}. \quad (\text{D.11})$$

Durch Division von Gleichung (D.9) durch das Quadrat von Gleichung (D.11) erhält man

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} \frac{c_s^2}{v_\phi^2}, \quad (\text{D.12})$$

und damit erneut die Bestätigung der anfänglichen Behauptung.

$v_r \ll v_\phi$:

Eine weitere Annahme in Abschnitt 3.2.2 war $v_r \ll v_\phi$. Um dies zu zeigen stellt Abbildung D.1 den Quotienten v_r/v_ϕ über alle Radien während einer Simulation über $\sim 2.5 \times 10^8 \text{ a}$ dar. Die hierfür verwendete Simulation orientiert sich mit einem Außenradius von $\sim 100 \text{ pc}$ und Anfangsmassen für das Schwarze Loch von $1 \times 10^5 M_\odot$ sowie $1 \times 10^{10} M_\odot$ für die Akkretionsscheibe an den in Kapitel 4 auftretenden Werten. Die Simulation ist ohne externen Massenzustrom gerechnet. Die in Abbildung D.1 dargestellte Bestätigung der Annahme gilt qualitativ aber für alle relevanten Parameterwahlen und auch bei externem Massenzustrom. Die maximalen Werte für v_r/v_ϕ treten dabei an den Rändern der Akkretionsscheibe auf, erreichen aber auch dort nur wenige Prozente.

Literaturverzeichnis

- Asmus, D. (2008). Where do accretion disks around black holes end?, Master's thesis, Christian-Albrechts-Universität Kiel 111
- Balbus, S. A. (2003). Enhanced Angular Momentum Transport in Accretion Disks. *Annual Review of Astronomy & Astrophysics* 41, 555–597, ADS 64
- Bardeen, J. M. (1970). Kerr Metric Black Holes. *Nature* 226, 64–+, ADS 94, 95, 96
- Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N. & Szalay, A. S. (1986). The statistics of peaks of Gaussian random fields. *The Astrophysical Journal* 304, 15–61, ADS 14
- Bardeen, J. M. & Petterson, J. A. (1975). The Lense-Thirring Effect and Accretion Disks around Kerr Black Holes. *The Astrophysical Journal Letters* 195, L65+, ADS 100
- Bardou, A., Heyvaerts, J. & Duschl, W. J. (1998). Influence of viscosity laws on the transition to the self-gravitating part of accretion disks. *Astronomy & Astrophysics* 337, 966–974, ADS 64
- Barnes, J. E. (1998). Dynamics of Galaxy Interactions. In *Saas-Fee Advanced Course 26: Galaxies: Interactions and Induced Star Formation*, eds. R. C. Kennicutt, Jr., F. Schweizer, J. E. Barnes, D. Friedli, L. Martinet & D. Pfenniger, 275–+, ADS 75
- Bartelmann, M. (2007). *Implemented functions and relations valid in Friedmann-Lemaitre cosmological models*, Ruprecht-Karls Universität Heidelberg, Institut für Theoretische Astrophysik, private Kommunikation 28
- Bartelmann, M., Doran, M. & Wetterich, C. (2006). Non-linear structure formation in cosmologies with early dark energy. *Astronomy & Astrophysics* 454, 27–36, ADS 46, 47, 52, 55, 121, 122
- Begelman, M. C., Volonteri, M. & Rees, M. J. (2006). Formation of supermassive black holes by direct collapse in pre-galactic haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 370, 289–298, ADS 97
- Binney, J. & Tabor, G. (1995). Evolving Cooling Flows. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 276, 663–+, ADS 77
- Bond, J. R., Cole, S., Efstathiou, G. & Kaiser, N. (1991). Excursion set mass functions for hierarchical Gaussian fluctuations. *The Astrophysical Journal* 379, 440–460, ADS 12
- Bondi, H. (1952). On spherically symmetrical accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 112, 195–+, ADS 78

- Bondi, H. & Hoyle, F. (1944). On the mechanism of accretion by stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 104, 273–+, ADS 78
- Bower, R. G. (1991). The evolution of groups of galaxies in the Press-Schechter formalism. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 248, 332–352, ADS 12
- Box, G. E. P. & Muller, M. E. (1958). A Note on the Generation of Random Normal Deviates. *Annals of Mathematical Statistics* 29, 610–611, Euclid 31
- Brax, P. & Martin, J. (2000). Robustness of quintessence. *Physical Review D* 61(10), 103502–+, ADS 45
- Brenneman, L. W. & Reynolds, C. S. (2006). Constraining Black Hole Spin via X-Ray Spectroscopy. *The Astrophysical Journal* 652, 1028–1043, ADS 111
- Britsch, M. (2006). Gravitational instability and fragmentation of self-gravitating accretion disks, *PhD thesis*, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg 88
- Britsch, M. & Duschl, W. J. (2005). Stability of self-gravitating accretion disks in galactic centers. *Astronomische Nachrichten* 326, 539–+, ADS 65
- Canalizo, G. & Stockton, A. (2001). Quasi-Stellar Objects, Ultraluminous Infrared Galaxies, and Mergers. *The Astrophysical Journal* 555, 719–743, ADS 47
- Chandrasekhar, S. (1943). Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics* 15, 1–89, ADS 16
- Ciotti, L. & Ostriker, J. P. (2001). Cooling Flows and Quasars. II. Detailed Models of Feedback-modulated Accretion Flows. *The Astrophysical Journal* 551, 131–152, ADS 77
- Cole, S. & Kaiser, N. (1988). Sunyaev-Zel'dovich fluctuations in the cold dark matter scenario. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 233, 637–648, ADS 21
- Collin-Souffrin, S. & Dumont, A. M. (1990). Line and continuum emission from the outer regions of accretion discs in active galactic nuclei. II - Radial structure of the disc. *Astronomy & Astrophysics* 229, 292–328, ADS 98
- Courant, R., Friedrichs, K. & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen* 100, 32–74 68
- Di Matteo, T., Springel, V. & Hernquist, L. (2005). Energy input from quasars regulates the growth and activity of black holes and their host galaxies. *Nature* 433, 604–607, ADS 79, 87
- Duschl, W. J. & Britsch, M. (2006). A Gravitational Instability-driven Viscosity in Self-gravitating Accretion Disks. *The Astrophysical Journal Letters* 653, L89–L92, ADS 65
- Duschl, W. J. & Strittmatter, P. A. (2009). Cosmogony of Super Massive Black Holes, Submitted 71

- Duschl, W. J., Strittmatter, P. A. & Biermann, P. L. (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *Astronomy & Astrophysics* 357, 1123–1132, ADS 48, 65, 124
- Efstathiou, G., Bond, J. R. & White, S. D. M. (1992). COBE background radiation anisotropies and large-scale structure in the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 258, 1P–6P, ADS 13, 37
- Efstathiou, G., Frenk, C. S., White, S. D. M. & Davis, M. (1988). Gravitational clustering from scale-free initial conditions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 235, 715–748, ADS 12
- Fan, X., Strauss, M. A., Schneider, D. P., Becker, R. H., White, R. L., Haiman, Z., Gregg, M., Pentericci, L., Grebel, E. K., Narayanan, V. K., Loh, Y.-S., Richards, G. T., Gunn, J. E., Lupton, R. H., Knapp, G. R., Ivezić, Ž., Brandt, W. N., Collinge, M., Hao, L., Harbeck, D., Prada, F., Schaye, J., Strateva, I., Zakamska, N., Anderson, S., Brinkmann, J., Bahcall, N. A., Lamb, D. Q., Okamura, S., Szalay, A. & York, D. G. (2003). A Survey of $z > 5.7$ Quasars in the Sloan Digital Sky Survey. II. Discovery of Three Additional Quasars at $z > 6$. *Astronomical Journal* 125, 1649–1659, ADS 2
- Ferrarese, L. & Merritt, D. (2000). A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies. *The Astrophysical Journal Letters* 539, L9–L12, ADS 7
- Frank, J., King, A. R. & Raine, D. (1992). Accretion Power in Astrophysics. *Cambridge Astrophysics Series*, ISBN 0 521 40306 5 95
- Gebhardt, K., Bender, R., Bower, G., Dressler, A., Faber, S. M., Filippenko, A. V., Green, R., Grillmair, C., Ho, L. C., Kormendy, J., Lauer, T. R., Magorrian, J., Pinkney, J., Richstone, D. & Tremaine, S. (2000). A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. *The Astrophysical Journal Letters* 539, L13–L16, ADS 7
- Genzel, R., Lutz, D., Sturm, E., Egami, E., Kunze, D., Moorwood, A. F. M., Rigopoulou, D., Spoon, H. W. W., Sternberg, A., Tacconi-Garman, L. E., Tacconi, L. & Thatte, N. (1998). What Powers Ultraluminous IRAS Galaxies? *The Astrophysical Journal* 498, 579–+, ADS 47
- Gottlöber, S., Klypin, A. & Kravtsov, A. V. (2001). Merging History as a Function of Halo Environment. *The Astrophysical Journal* 546, 223–233, ADS 23, 29
- Gross, M. A. K., Somerville, R. S., Primack, J. R., Holtzman, J. & Klypin, A. (1998). Cold dark matter variant cosmological models - I. Simulations and preliminary comparisons. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 301, 81–94, ADS 12
- Häring, N. & Rix, H.-W. (2004). On the Black Hole Mass-Bulge Mass Relation. *The Astrophysical Journal Letters* 604, L89–L92, ADS 7
- Hasinger, G., Miyaji, T. & Schmidt, M. (2005). Luminosity-dependent evolution of soft X-ray selected AGN. New Chandra and XMM-Newton surveys. *Astronomy & Astrophysics* 441, 417–434, ADS 4, 5, 53, 115

- Hawkins, E., Maddox, S., Cole, S., Lahav, O., Madgwick, D. S., Norberg, P., Peacock, J. A., Baldry, I. K., Baugh, C. M., Bland-Hawthorn, J., Bridges, T., Cannon, R., Colless, M., Collins, C., Couch, W., Dalton, G., De Propris, R., Driver, S. P., Efstathiou, G., Ellis, R. S., Frenk, C. S., Glazebrook, K., Jackson, C., Jones, B., Lewis, I., Lumsden, S., Percival, W., Peterson, B. A., Sutherland, W. & Taylor, K. (2003). The 2dF Galaxy Redshift Survey: correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 346, 78–96, ADS 45
- Heinzeller, D. & Duschl, W. J. (2007). On the Eddington limit in accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 374, 1146–1154, ADS 95
- Hernquist, L. (1992). Structure of merger remnants. I - Bulgeless progenitors. *The Astrophysical Journal* 400, 460–475, ADS 75
- Hofmann, J. A. (2005). Zeitentwicklung und Vertikalstruktur protostellarer Akkretionsscheiben., Master's thesis, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg 53, 61, 65
- Hopkins, P. F., Richards, G. T. & Hernquist, L. (2007). An Observational Determination of the Bolometric Quasar Luminosity Function. *The Astrophysical Journal* 654, 731–753, ADS 110
- Hughes, S. A. & Blandford, R. D. (2003). Black Hole Mass and Spin Coevolution by Mergers. *The Astrophysical Journal Letters* 585, L101–L104, ADS 109
- Johansson, P. H., Naab, T. & Burkert, A. (2009). Equal- and Unequal-Mass Mergers of Disk and Elliptical Galaxies with Black Holes. *The Astrophysical Journal* 690, 802–821, ADS 7, 47, 75, 76, 77, 78, 79
- Kauffmann, G. & White, S. D. M. (1993). The merging history of dark matter haloes in a hierarchical universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 261, 921–928, ADS 24
- Khalatyan, A., Cattaneo, A., Schramm, M., Gottlöber, S., Steinmetz, M. & Wisotzki, L. (2008). Is AGN feedback necessary to form red elliptical galaxies? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 387, 13–30, ADS 79
- King, A. R., Lubow, S. H., Ogilvie, G. I. & Pringle, J. E. (2005). Aligning spinning black holes and accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 363, 49–56, ADS 91
- King, A. R. & Pringle, J. E. (2006). Growing supermassive black holes by chaotic accretion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 373, L90–L92, ADS 94, 96, 110
- King, A. R. & Pringle, J. E. (2007). Fuelling active galactic nuclei. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 377, L25–L28, ADS 87
- King, A. R., Pringle, J. E. & Hofmann, J. A. (2008). The evolution of black hole mass and spin in active galactic nuclei. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 385, 1621–1627, ADS 87, 139

- Kinney, A. L., Schmitt, H. R., Clarke, C. J., Pringle, J. E., Ulvestad, J. S. & Antonucci, R. R. J. (2000). Jet Directions in Seyfert Galaxies. *The Astrophysical Journal* 537, 152–177, ADS 113
- Kumar, S. & Pringle, J. E. (1985). Twisted accretion discs - The Bardeen-Petterson effect. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 213, 435–442, ADS 89
- Lacey, C. & Cole, S. (1993). Merger rates in hierarchical models of galaxy formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 262, 627–649, ADS 12, 13, 21
- Lacey, C. & Cole, S. (1994). Merger Rates in Hierarchical Models of Galaxy Formation - Part Two - Comparison with N-Body Simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 271, 676–+, ADS 12
- Li, Y., Hernquist, L., Robertson, B., Cox, T. J., Hopkins, P. F., Springel, V., Gao, L., Di Matteo, T., Zentner, A. R., Jenkins, A. & Yoshida, N. (2007). Formation of $z \sim 6$ Quasars from Hierarchical Galaxy Mergers. *The Astrophysical Journal* 665, 187–208, ADS 87
- Lodato, G. & Natarajan, P. (2007). The mass function of high-redshift seed black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 377, L64–L68, ADS 49
- Lodato, G. & Pringle, J. E. (2006). The evolution of misaligned accretion discs and spinning black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 368, 1196–1208, ADS 99, 104
- Lodato, G. & Pringle, J. E. (2007). Warp diffusion in accretion discs: a numerical investigation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 381, 1287–1300, ADS 100
- Lonsdale, C. J., Farrah, D. & Smith, H. E. (2006). Ultraluminous Infrared Galaxies, ed. J. W. Mason. Springer Verlag, 285–+, ADS 51
- Madau, P., Merloni, A., Nayakshin, S. & Sunyaev, R. (2004). ESO Astrophys. Symp., Growing Black Holes. ESO, Garching, 3ff. 3 110
- Magorrian, J., Tremaine, S., Richstone, D., Bender, R., Bower, G., Dressler, A., Faber, S. M., Gebhardt, K., Green, R., Grillmair, C., Kormendy, J. & Lauer, T. (1998). The Demography of Massive Dark Objects in Galaxy Centers. *Astronomical Journal* 115, 2285–2305, ADS 7
- Marconi, A. & Hunt, L. K. (2003). The Relation between Black Hole Mass, Bulge Mass, and Near-Infrared Luminosity. *The Astrophysical Journal Letters* 589, L21–L24, ADS 7
- McLure, R. J., Kukula, M. J., Dunlop, J. S., Baum, S. A., O’Dea, C. P. & Hughes, D. H. (1999). A comparative HST imaging study of the host galaxies of radio-quiet quasars, radio-loud quasars and radio galaxies - I. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 308, 377–404, ADS 47
- Mineshige, S. & Umemura, M. (1997). Self-similar Collapse of a Self-gravitating Viscous Disk. *The Astrophysical Journal* 480, 167–+, ADS 48, 62

- Moles, M., Marquez, I. & Perez, E. (1995). The relation between dynamical perturbations, morphology, and nuclear activity in spiral galaxies. *The Astrophysical Journal* 438, 604–609, ADS 4
- Naab, T. & Burkert, A. (2001a). Gas Dynamics and Inflow in Gas-Rich Galaxy Mergers. In *The Central Kiloparsec of Starbursts and AGN: The La Palma Connection*, eds. J. H. Knapen, J. E. Beckman, I. Shlosman & T. J. Mahoney, Volume 249 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 735–+, ADS 48, 52
- Naab, T. & Burkert, A. (2001b). The Formation of Disks in Elliptical Galaxies. *The Astrophysical Journal Letters* 555, L91–L94, ADS 75
- Naab, T. & Burkert, A. (2003). Statistical Properties of Collisionless Equal- and Unequal-Mass Merger Remnants of Disk Galaxies. *The Astrophysical Journal* 597, 893–906, ADS 75
- Naab, T., Khochfar, S. & Burkert, A. (2006). Properties of Early-Type, Dry Galaxy Mergers and the Origin of Massive Elliptical Galaxies. *The Astrophysical Journal Letters* 636, L81–L84, ADS 75
- Nagar, N. M. & Wilson, A. S. (1999). The Relative Orientation of Nuclear Accretion and Galaxy Stellar Disks in Seyfert Galaxies. *The Astrophysical Journal* 516, 97–113, ADS 113
- Natarajan, P. & Pringle, J. E. (1998). The Alignment of Disk and Black Hole Spins in Active Galactic Nuclei. *The Astrophysical Journal Letters* 506, L97–L100, ADS 88
- Ohsuga, K. & Mineshige, S. (2002). The Photon-Trapping Effects in Black-Hole Accretion Flows. In *8th Asian-Pacific Regional Meeting, Volume II*, eds. S. Ikeuchi, J. Hearnshaw & T. Hanawa, 349–350, ADS 57
- Paczynski, B. (1978). A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astronomica* 28, 91–109, ADS 87
- Peacock, J. A. & Heavens, A. F. (1990). Alternatives to the Press-Schechter cosmological mass function. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 243, 133–143, ADS 14
- Peebles, P. J. E. & Ratra, B. (1988). Cosmology with a time-variable cosmological 'constant'. *The Astrophysical Journal Letters* 325, L17–L20, ADS 45
- Press, W. H. & Schechter, P. (1974). Formation of Galaxies and Clusters of Galaxies by Self-Similar Gravitational Condensation. *The Astrophysical Journal* 187, 425–438, ADS 12
- Pringle, J. E. (1992). A simple approach to the evolution of twisted accretion discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 258, 811–818, ADS 99
- Rees, M. J. (1978). Relativistic jets and beams in radio galaxies. *Nature* 275, 516–+, ADS 88
- Sajina, A., Yan, L., Lacy, M. & Huynh, M. (2007). Discovery of Radio Jets in $z \sim 2$ Ultraluminous Infrared Galaxies with Deep $9.7 \mu\text{m}$ Silicate Absorption. *The Astrophysical Journal Letters* 667, L17–L20, ADS 113

- Scheuer, P. A. G. & Feiler, R. (1996). The realignment of a black hole misaligned with its accretion disc. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 282, 291–+, ADS 91, 110
- Schmitt, H. R., Donley, J. L., Antonucci, R. R. J., Hutchings, J. B., Kinney, A. L. & Pringle, J. E. (2003). A Hubble Space Telescope Survey of Extended [O III] $\lambda 5007$ Å Emission in a Far-Infrared-Selected Sample of Seyfert Galaxies: Results. *The Astrophysical Journal* 597, 768–779, ADS 112
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *Astronomy & Astrophysics* 24, 337–355, ADS 53, 64, 98
- Shlosman, I., Frank, J. & Begelman, M. C. (1989). Bars within bars - A mechanism for fuelling active galactic nuclei. *Nature* 338, 45–47, ADS 65
- Silk, J. & Rees, M. J. (1998). Quasars and galaxy formation. *Astronomy & Astrophysics* 331, L1–L4, ADS 77
- Soltan, A. (1982). Masses of quasars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 200, 115–122, ADS 110
- Somerville, R. S. & Kolatt, T. S. (1999). How to plant a merger tree. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 305, 1–14, ADS 19, 21, 28, 37, 39
- Sparks, W. B., Baum, S. A., Biretta, J., Macchetto, F. D. & Martel, A. R. (2000). Face-on Dust Disks in Galaxies with Optical Jets. *The Astrophysical Journal* 542, 667–672, ADS 112
- Springel, V. (1999). On the Formation and Evolution of Galaxies, *PhD thesis*, Ludwig-Maximilians-Universität München 7
- Springel, V., Di Matteo, T. & Hernquist, L. (2005a). Modelling feedback from stars and black holes in galaxy mergers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 361, 776–794, ADS 47, 75, 76, 77
- Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., Navarro, J., Thacker, R., Croton, D., Helly, J., Peacock, J. A., Cole, S., Thomas, P., Couchman, H., Evrard, A., Colberg, J. & Pearce, F. (2005b). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. *Nature* 435, 629–636, ADS 12
- Spurk, J. H. (1996). *Strömungslehre* 60, 62, 63
- Streblyanska, A., Hasinger, G., Finoguenov, A., Barcons, X., Mateos, S. & Fabian, A. C. (2005). XMM-Newton observations of the Lockman Hole. III. A relativistic Fe line in the mean X-ray spectra of type-1 and type-2 AGN. *Astronomy & Astrophysics* 432, 395–400, ADS 111
- Tegmark, M., Strauss, M. A., Blanton, M. R., Abazajian, K., Dodelson, S., Sandvik, H., Wang, X., Weinberg, D. H., Zehavi, I., Bahcall, N. A., Hoyle, F., Schlegel, D., Scoccimarro, R., Vogeley, M. S., Berlind, A., Budavari, T., Connolly, A., Eisenstein, D. J., Finkbeiner, D., Frieman, J. A., Gunn, J. E., Hui, L., Jain, B., Johnston, D., Kent, S., Lin, H., Nakajima, R., Nichol, R. C.,

- Ostriker, J. P., Pope, A., Scranton, R., Seljak, U., Sheth, R. K., Stebbins, A., Szalay, A. S., Szapudi, I., Xu, Y., Annis, J., Brinkmann, J., Burles, S., Castander, F. J., Csabai, I., Loveday, J., Doi, M., Fukugita, M., Gillespie, B., Hennessy, G., Hogg, D. W., Ivezić, Ž., Knapp, G. R., Lamb, D. Q., Lee, B. C., Lupton, R. H., McKay, T. A., Kunszt, P., Munn, J. A., O'Connell, L., Peoples, J., Pier, J. R., Richmond, M., Rockosi, C., Schneider, D. P., Stoughton, C., Tucker, D. L., vanden Berk, D. E., Yanny, B. & York, D. G. (2004). Cosmological parameters from SDSS and WMAP. *Physical Review D* 69(10), 103501–+, ADS 45
- Treister, E. & Urry, C. M. (2006). The Evolution of Obscuration in Active Galactic Nuclei. *The Astrophysical Journal Letters* 652, L79–L82, ADS 110
- Tremaine, S., Gebhardt, K., Bender, R., Bower, G., Dressler, A., Faber, S. M., Filippenko, A. V., Green, R., Grillmair, C., Ho, L. C., Kormendy, J., Lauer, T. R., Magorrian, J., Pinkney, J. & Richstone, D. (2002). The Slope of the Black Hole Mass versus Velocity Dispersion Correlation. *The Astrophysical Journal* 574, 740–753, ADS 7
- Ueda, Y., Akiyama, M., Ohta, K. & Miyaji, T. (2003). Cosmological Evolution of the Hard X-Ray Active Galactic Nucleus Luminosity Function and the Origin of the Hard X-Ray Background. *The Astrophysical Journal* 598, 886–908, ADS 4, 5, 53, 115
- Velikhov, E. (1959). Stability of an Ideally Conducting Liquid Flowing Between Cylinders Rotating in a Magnetic Field. *Soviet Physics JETP* 36, 1398–1404 64
- Verdoes Kleijn, G. A. & de Zeeuw, P. T. (2005). A dichotomy in the orientation of dust and radio jets in nearby low-power radio galaxies. *Astronomy & Astrophysics* 435, 43–64, ADS 112
- Volonteri, M., Madau, P., Quataert, E. & Rees, M. J. (2005). The Distribution and Cosmic Evolution of Massive Black Hole Spins. *The Astrophysical Journal* 620, 69–77, ADS 91, 110
- Volonteri, M. & Rees, M. J. (2005). Rapid Growth of High-Redshift Black Holes. *The Astrophysical Journal* 633, 624–629, ADS 91, 97
- Wang, J.-M., Chen, Y.-M. & Zhang, F. (2006). Cosmological Evolution of the Duty Cycle of Quasars. *The Astrophysical Journal Letters* 647, L17–L20, ADS 110
- Wetterich, C. (1988). Cosmology and the fate of dilatation symmetry. *Nuclear Physics B* 302, 668–696, ADS 45
- Wetterich, C. (2004). Phenomenological parameterization of quintessence. *Physics Letters B* 594, 17–22, ADS 46
- Willott, C. J., Delorme, P., Omont, A., Bergeron, J., Delfosse, X., Forveille, T., Albert, L., Reylé, C., Hill, G. J., Gully-Santiago, M., Vinten, P., Crampton, D., Hutchings, J. B., Schade, D., Simard, L., Sawicki, M., Beelen, A. & Cox, P. (2007). Four Quasars above Redshift 6 Discovered by the Canada-France High-z Quasar Survey. *Astronomical Journal* 134, 2435–2450, ADS 2

Danksagung

Zu allererst möchte ich meinem Doktorvater *Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl* für seine stets freundliche und hilfreiche Art der Betreuung danken, die sich nicht nur auf den fachlichen Teil beschränkt hat, sondern auch darüber hinaus zum Beispiel in seiner Hilfe bei der Vermittlung und Realisierung meines Auslandsaufenthalts zum Tragen kam. Vielen Dank dafür!

Einen herzlichen Dank auch an *Prof. Dr. Holger Kersten* und *Prof. Dr. Robert Wimmer-Schweingruber* für die freundliche Übernahme des Korreferats dieser Arbeit beziehungsweise des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Weiterhin danke ich *Prof. Dr. Sebastian Wolf*, *Prof. Dr. Gerd Pfister*, *Prof. Dr. Eckhard Pehlke* sowie *Priv.-Doz. Dr. Dietmar Block* für die Bereitschaft der Prüfungskommission beizutreten.

Thanks a lot also to *Prof. Dr. Andrew R. King* who gave me the possibility to work as a part of his group for three months. The time at the Leicester University was very interesting and instructive, also thanks to the other group members. Here I especially want to mention *Peter Cousins*.

Ein großen Dank auch an *Prof. Dr. Andreas Burkert* und *Dr. Peter Johansson* für ihr Interesse und ihr Engagement an unserer Zusammenarbeit im Rahmen dieser Arbeit.

Auch bedanken möchte ich mich bei *Prof. Dr. Matthias Bartelmann* für die Bereitstellung seiner Kosmologie-Routinen und die hilfreichen Diskussionen diesbezüglich.

Mein Dank gilt außerdem *Frau Brigitte Kuhr* und *Herrn Holger Boll* für ihre stets freundliche Hilfe bei organisatorischen bzw. computerbezogenen Problemen.

Bei meinen Kollegen des *Instituts für Theoretische Physik und Astrophysik* möchte ich mich unter anderem für die netten Kaffeerunden mit teils intensiven Diskussionen über alle möglichen und unmöglichen Themen bedanken. Der Dank gilt dabei sowohl den restlichen „Exilheidelbergern“, die das Einleben hier in Kiel einfacher gemacht haben, als auch den „Nordlichtern“ für die freundliche Aufnahme. Besonderen Dank an *Daniel Asmus*, *Jürgen Sauter* und *Meiert Grootes* für das anspruchsvolle Training sowohl im sportlichen Bereich als auch im logischen Denken.

Für eine immer gemütliche und entspannte Atmosphäre in unserem Büro möchte ich mich bei *Dr. Alexandra Tachil* bedanken. Ich danke dir auch für die regelmäßigen Besuche im Fits, um den Kopf wieder frei zu bekommen.

Danksagung

Einen besonderen Dank auch an *Dr. Dominikus Heinzeller* für die äußerst angenehme Zeit unserer gemeinsamen WG und nicht zuletzt auch fürs Korrekturlesen dieser Arbeit.

Vielen Dank *Sabine Wolf* dafür, dass du gegen den Relativsatz gekämpft hast und dafür, dass du für die Verwendung von mehr als zwei unterschiedlichen Verben pro Seite gekämpft hast.

Zu guter Letzt möchte ich noch ganz besonders meiner Familie danken, auf deren Unterstützung ich mich während meines ganzen Studiums und auch jetzt speziell während meiner Promotion stets verlassen konnte. So verdanke ich zum Beispiel auch meinem Vater *Reinhold Hofmann* und meiner Schwester *Sonja Hofmann* eine Überprüfung der Orthographie dieser Arbeit.

Die Arbeit wurde zum Teil über den *Sonderforschungsbereich 439* der Deutschen Forschungsgemeinschaft und zum Teil von der *Universität Kiel* finanziert. Der Auslandsaufenthalt an der University of Leicester wurde durch den *Deutschen Akademischen Austausch Dienst* unterstützt.

Erklärung

Hiermit bestätige ich, dass

1. die Arbeit — abgesehen von der Beratung durch den Betreuer (Prof. Dr. W. J. Duschl) — in Inhalt und Form die eigene Arbeit ist,
2. die Arbeit keiner anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat oder vorliegt,
3. ein Teil der Arbeit veröffentlicht worden ist: King, Pringle, & Hofmann (2008),
4. die Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden ist.

[Jan Hofmann]