

Projektionskonstanten endlich-dimensionaler Banachräume vom Gluskin-Typ

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von

Michael Saß

Kiel 2009

Referent: PD Dr. Carsten Schütt
Koreferent: Prof. Dr. Hermann König
Tag der mündlichen Prüfung: 04.02.2010
Zum Druck genehmigt: Kiel, 04.02.2010

Der Dekan

Danksagung

Mein Dank gilt zunächst Carsten Schütt für die hervorragende Betreuung dieser Arbeit.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen Kollegen Joscha Prochno und Stiene Riemer für ihre Hilfe bei der Revision der Arbeit bedanken.

Ich danke meinen Eltern und Schwiegereltern für ihre Unterstützung in den vergangenen Jahren.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Frau Judith Alina Saß sowohl für ihre sprachlichen Korrekturen als auch für ihre Unterstützung in den Momenten der Frustration bedanken.

Zusammenfassung

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Bestimmung der Projektionskonstante von endlich-dimensionalen Banachräumen X_r^* , deren Dualräume X_r durch Einheitskugeln der Form

$$\text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$$

für euklidische Einheitsvektoren w_1, \dots, w_r gegeben sind. Wir werden zunächst eine explizite Formel für die Norm einer gegebenen Projektion herleiten. Unter einigen technischen Zusatzannahmen an das Tupel $(w_i)_{i=1}^r$ können wir mit dieser Formel dann zeigen, dass die Projektionskonstante von unten asymptotisch durch $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty}$ beschränkt ist. Weiter erhalten wir, dass die Projektionskonstante bis auf globale Konstanten die Lösung des Minimierungsproblems

$$\inf \left\{ \max_{k \in \mathbb{N}_n} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp \right\}$$

ist, solange r asymptotisch kleiner als \sqrt{n} ist.

Weiterhin werden wir untersuchen, wie sich der Banach-Mazur Abstand der Räume X_r^* zu ℓ_∞^n in Abhängigkeit von w_1, \dots, w_r verändert. Um eine obere Abschätzung hiervon zu erhalten, werden wir Resultate von Bourgain und Tzafriri zur Invertierbarkeit großer Teilmatrizen von Matrizen nutzen. Hiermit geben wir eine Abschätzung des Banach-Mazur Abstands zu ℓ_∞^n für gut komplementierte n -dimensionale Teilräume von ℓ_∞^N an. Dieses nutzen wir dann aus, um eine Abschätzung des Banach-Mazur Abstands von ℓ_∞^n zu X_r^* anzugeben, die nur von der Projektionskonstante von X_r^* und dem Banach-Mazur Abstand eines durch eine asymptotisch optimale Projektion explizit gegebenen r -dimensionalen Teilraums von ℓ_∞^n zu ℓ_∞^r abhängt.

Wir werden die Methoden exemplarisch für den Spezialfall der Walsh Vektoren anwenden, wobei wir vorher erarbeitete Ergebnisse über den Sobczyk-Raum verwenden. Es stellt sich heraus, dass für diese Vektoren sowohl die Projektionskonstante als auch der Banach-Mazur Abstand zu ℓ_∞^n in der Größenordnung $\max\{1, \frac{r}{\sqrt{n}}\}$ liegt. Demgegenüber erhält man im Falle von zufällig gewählten Extrempunkte von $\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n$ die Größenordnung \sqrt{r} .

Abstract

In this thesis we will develop methods for determining the projection constant of an n -dimensional Banachspace X_r^* , whose dual space is give by the unit ball

$$\text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$$

for some euclidean unit vectors w_1, \dots, w_r . We will give an explicit formula for the norm of a given projection. With some further technical assupmtions concerning $(w_i)_{i=1}^r$ we will derive a lower bound for the projection constant, i.e. that it is always bounded from below by $\frac{1}{n} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty}$. Furthermore we will show, that the projection constant is up to some global constant the solution of the minimization problem

$$\inf \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp \right\},$$

as long as we assume r to be asymptotically less than \sqrt{n} .

To get an upper estimate we will use the famous results of Bourgain and Tzafriri on the invertibility of large submatrices of a matrix to get an upper bound for the Banach-Mazur distance of the space X_r^* to ℓ_∞^n . In a more abstract setting we will show, that the Banach-Mazur distance to ℓ_∞^n of a n -dimensional well-complemented subspaces of ℓ_∞^N can be estimated from above by an expression, depending only on the projection constant and the Banach-Mazur distance of a r -dimensional subspace of ℓ_∞^n to ℓ_∞^r . This subspace is given explicitly by an asymptotically optimal projection.

The developed methods we will apply to the case, when the w_i are Walsh vectors. We will show, that in this case the projection constant and the Banach-Mazur distance to ℓ_∞^n is in the order of $\max\{1, \frac{r}{\sqrt{n}}\}$. Considering on the other hand the case of choosing w_1, \dots, w_r randomly as extremal points of $\frac{1}{\sqrt{n}}B_\infty^n$ the order of growth is \sqrt{r} .

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	4
Kapitel 2. Grundlagen der lokalen Theorie	10
Kapitel 3. Der Raum von Sobczyk	23
3.1. Darstellung des n -dimensionalen Sobczyk-Raum im \mathbb{R}^n	24
3.2. Invarianten des Sobczyk-Raums	30
Kapitel 4. Störungen von ℓ_1^n	38
4.1. Grundlegende Betrachtungen und Zusammenfassung bekannter Ergebnisse	39
4.2. Teilräume von ℓ_∞^n und ihr Abstand zu ℓ_∞^k	43
4.3. Die Projektionskonstante von X_r^*	51
4.4. Volumensquotient von X_r	58
Kapitel 5. Asymptotisch optimale Projektionen	60
5.1. Größenordnung der Projektionskonstante für die Klasse $A_r(c)$	62
5.2. Größenordnung der Projektionskonstante für die Klasse $B_r(c)$	67
5.3. Zufällig gewählte Folgen von Vorzeichenvektoren	74
5.4. Der Fall der Walsh Vektoren	77

KAPITEL 1

Einleitung

Die lokale Theorie beschäftigt sich mit der Theorie endlich dimensionaler Banachräume. Im Gegensatz zu den qualitativen Fragen der unendlich dimensionalen Banachraumtheorie behandelt man im endlich dimensional ausschließlich quantitative Probleme. Zentral hierbei ist die Bestimmung von isometrischen Invarianten endlich-dimensionaler Banachräume, auch Parameter genannt, welche die geometrischen und analytischen Eigenschaften eines Raumes beschreiben. Gemein ist allen diesen Parametern, dass "ähnliche" Banachräume auch "ähnliche" Parameterwerte aufweisen. Eine quantitative Größe dieser "Ähnlichkeit" von Banachräumen stellt hierbei der Banach-Mazur Abstand dar. Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit wird auf der Berechnung der Projektionskonstante $\gamma_\infty(\cdot)$ einer großen Klasse von Räumen liegen (s. Definition 2.11). Es ist wohlbekannt, dass ℓ_∞^n bis auf isometrische Isomorphie der einzige Banachraum der Dimension n ist, dessen Projektionskonstante 1 ist (s. [Tomc], Proposition 33.2 bzw. [Nach]). Es stellt sich nun die Frage, ob sich dieses Resultat quantitativ verallgemeinern lässt.

So fragten Lindenstrauss und Pełczyński in [LiPe] in Problem 7:

PROBLEM 1. *Gibt es eine monotone Funktion $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, so dass für alle endlich-dimensionalen Banachräume X gilt*

$$d(X, \ell_\infty^{\dim(X)}) \leq f(\gamma_\infty(X))?$$

Um das Problem negativ zu lösen, müsste man also eine Folge von Banachräumen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren, für die die Projektionskonstante uniform beschränkt ist, deren Banach-Mazur Abstand zu $\ell_\infty^{\dim X_n}$ aber gegen ∞ geht. Es erweist sich jedoch häufig als ungemein schwierig, den Banach-Mazur Abstand zu ℓ_∞^n direkt zu berechnen. Als Abschätzung nach unten dient hierbei häufig gerade die Projektionskonstante, da diese in vielen Fällen leichter bestimmbar ist. Bekannt sind etwa die Räume mit maximaler Projektionskonstante, die in [KöT2] von König und Tomczak-Jaegermann charakterisiert wurden. Weitere Beispiele für Räume mit einer asymptotisch maximalen Projektionskonstante sind in [Köni] zu finden. Ebenfalls in diese Klasse fallen die ℓ_p^n Räume mit $1 \leq p \leq 2$, für die eine exakte Bestimmung der Asymptotik der Projektionskonstanten sich in [KSTJ] findet. In [Tomc] wird als vielversprechendstes Beispiel einer negativen Lösung von Problem 1 ein Beispiel von Wojtaszczyk (s. [Wojt], III.B.) genannt, welches eine beschränkte Projektionskonstante besitzt, während der Banach-Mazur Abstand dieses Raums zu ℓ_∞^n nach wie vor unbekannt zu sein scheint. Es ist jedoch kein universelles Verfahren bekannt, um die Projektionskonstante eines n -dimensionalen Banachraums zu berechnen.

Lindenstrauss und Pełczyński bewiesen weiterhin (s. [LiPe], Corollary 6 nach Theorem 6.1), dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass

$$d(X, \ell_\infty^{\dim(X)}) \leq C \gamma_\infty(X)^2 \text{ubc}(X)^2,$$

wobei $\text{ubc}(X)$ die unbedingte Basiskonstante von X bezeichne (s. Definition 2.3).

Hiermit erhält man, dass sich obiges Problem folgendermaßen verallgemeinern lässt:

PROBLEM 2. *Existiert eine Funktion $g : [1, \infty) \times [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$, so dass für alle endlich-dimensionalen Banachräume X, Y mit $X \subseteq Y$ gilt*

$$\text{ubc}(X) \leq g(\text{ubc}(Y), \inf\{\|P\| \mid P : Y \rightarrow Y \text{ Projektion auf } X\})?$$

In [Sza2] bewies Szarek, dass die Funktion aus Problem 1 nicht linear sein kann. Weiterhin ist durch Arbeiten von Zippin bekannt, dass eine solche Funktion aus Problem 1 existiert, falls die Projektionskonstante dicht bei 1 ist (s. [Zip1] und [Zip2]).

Sämtliche bekannten Beispielklassen, für die das Problem 1 positiv gelöst wurde, zeichnen sich dadurch aus, dass die Einheitskugeln der Dualräume viele Extrempunkte besitzen. Demhingegen sind keine Methoden bekannt, um diese Parameter für Banachräume zu berechnen, deren Dualräume Polytope mit wenigen Ecken sind. Es ist deshalb notwendig, Verfahren zu entwickeln, mit denen man die Projektionskonstante und den Banach-Mazur

Abstand zu ℓ_∞^n solcher Banachräume untersuchen kann. Genau dies zu erreichen, wird das Ziel dieser Arbeit sein. Wir werden dies im Folgenden konkretisieren.

Gluskin bewies in [Glus], dass der Durchmesser des n -dimensionalen Minkowski Kompaktums in der Größenordnung n ist. Hierzu konstruierte er eine Klasse von Räumen, deren Einheitskugeln die Form

$$(1.1) \quad \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, \chi_1(\omega), \dots, \chi_{2n}(\omega)\}$$

haben, wobei χ_1, \dots, χ_{2n} unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen sind, die uniform auf der euklidischen Sphäre verteilt sind. Gluskin zeigte, dass je zwei solche Räume mit hoher Wahrscheinlichkeit einen Banach-Mazur Abstand der Größenordnung n haben. Ein solcher randomisierter Ansatz ist jedoch zur Konstruktion einer negativen Lösung für Problem 1 ungeeignet, wie wir später begründen werden.

Wir wollen deshalb von dieser Grundidee ausgehend untersuchen, wie sich die Projektionskonstante entwickelt, wenn wir sukzessive eine gewisse Anzahl von euklidischen Einheitsvektoren zu B_1^n hinzufügen. Konkret heißt dies, dass wir für $r \in \mathbb{N}$ und $w_1, \dots, w_r \in \partial B_2^n$ den n -dimensionalen Banachraum X_r betrachten, dessen Einheitskugel durch

$$K_r := \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$$

gegeben ist. Interessieren wird uns hierbei, inwieweit sich die Projektionskonstante des Dualraums X_r^* und der Banach-Mazur Abstand $d(X_r^*, \ell_\infty^n)$ berechnen und gegebenenfalls vergleichen lassen.

PROBLEM 3. *Wie hängen $\gamma_\infty(X_r^*)$ und $d(X_r^*, \ell_\infty^n)$ von w_1, \dots, w_r ab?*

Der Lösung dieses Problems widmet sich der Großteil dieser Arbeit. Wir wollen die hierzu erzielten Resultate im weiteren Verlauf dieser Einführung kurz vorstellen und die Strategien ihrer Herleitung skizzieren.

Die Frage, ob man den Banach-Mazur Abstand des Raumes X_r^* zu ℓ_∞^n durch eine Funktion beschränken kann, die nur von $\gamma_\infty(X_r^*)$ abhängt, ist ein Spezialfall der allgemeineren Fragestellung, ob ein gut komplementierter r -dimensionaler Teilraum von ℓ_p^{n+r} dicht bei ℓ_p^r liegt. Dieses wichtige Problem wurde von Bourgain und Tzafriri in [BoT1] und anschließend von Johnson und Schechtman in [JoS1] untersucht. Unter anderem wurde (übertragen auf unsere Situation) in [BoT1] gezeigt, dass es eine Funktion f gibt, so dass $d(\ell_\infty^n, X_r^*) \leq f(\gamma_\infty(X_r^*), r)$ ist. Johnson und Schechtman konnten für $1 < p < \infty$ die

Resultate von Bourgain und Tzafriri stark verbessern und vereinfachen, indem sie Ergebnisse aus einer weiteren Arbeit von Bourgain und Tzafriri nutzten (s. [BoT2]). Für die in [JoS1] nur am Rande bearbeiteten Fälle $p = 1$ und $p = \infty$ wurden neben der auch hier erheblichen Vereinfachung der Beweise Verbesserungen in der funktionalen Abhängigkeit des Banach-Mazur Abstands $d(\ell_\infty^n, X_r^*)$ von r und $\gamma_\infty(X_r^*)$ vorgenommen. Sowohl in der Arbeit von Bourgain und Tzafriri als auch in jener von Johnson und Schechtman ist jedoch mit der Voraussetzung $r \leq c\sqrt{n}$ eine restriktive Bedingung an die Kodimension gegeben, die in unserem Falle zum Tragen käme.

Ähnlich wie in der Arbeit von Johnson und Schechtman geschehen, werden wir uns die bahnbrechende Arbeit von Bourgain und Tzafriri über Invertierbarkeit großer Teilmatrizen (s. [BoT2]) bzw. eine Verbesserung des Hauptsatzes dieser Arbeit im Falle von $p = 1$ und $p = \infty$ von Ball aus [BoT3] zu Nutze machen, um für beide Fälle die Anforderung an die Kodimension deutlich abzumildern. Genauer gesagt, werden wir zeigen, dass es ausreicht, r asymptotisch kleiner als $\frac{n}{\gamma_\infty(X_r^*)^2}$ zu wählen (s. Satz 4.9). Weiterhin können wir sowohl die funktionalen Zusammenhänge verbessern, als auch die Abhängigkeit von r durch den Banach-Mazur Abstand von ℓ_∞^n zu einem durch eine gute Projektion P (d.h. mit $\|P\| \sim \gamma_\infty(X_r^*)$) konkret gegebenen r -dimensionalen Teilraum Y_P von ℓ_∞^n ersetzen (s. Satz 4.12). In den genannten Arbeiten werden analog verwendete Räume zufällig konstruiert.

Um einerseits die Projektionskonstante direkt und andererseits damit dann den Raum Y_P bestimmen zu können, wollen wir in Kapitel 5 untersuchen, wie gute Projektionen aussehen und wie wir ihre Norm angeben können. Wir werden feststellen, dass die Projektionskonstante in vielen Fällen mindestens in der Größenordnung $\frac{r}{\sqrt{n}}$ wächst (s. Lemma 5.1). Dies zeigt, dass gerade die Fälle interessant sind, in denen r höchstens in der Größenordnung von \sqrt{n} liegt, was wiederum den Fokus auf kleine Werte für r legitimiert. Wir werden zeigen, dass unter einigen Zusatzvoraussetzungen an das Tupel $(w_i)_{i=1}^r$ für kleines r die Projektionskonstante im konkreten Fall durch ein einfaches Minimierungsproblem berechnet werden kann (s. Satz 5.6 und Satz 5.3). Hiermit wiederum stellen wir fest, dass die Projektionskonstante je nach Wahl der Vektoren sowohl beschränkt sein kann, bis hin dazu, dass sie in der Größenordnung \sqrt{r} liegt.

Mit diesen Methoden können wir dann zeigen, dass zumindest zufällig gewählte, normierte ± 1 -Vektoren mit hoher Wahrscheinlichkeit eine Projektionskonstante in der Größenordnung von \sqrt{r} liefern (s. Satz 5.8 und Lemma 5.9). Ein randomisierter Ansatz, wie der von Gluskin, ist somit für die Konstruktion eines Gegenbeispiels für Problem 1 in unserer

Situation wenig erfolgversprechend. Demgegenüber werden wir sehen, dass sowohl die Projektionskonstante als auch der Banach-Mazur Abstand $d(X_r^*, \ell_\infty^n)$ in der Größenordnung $\frac{r}{\sqrt{n}}$ wächst, falls wir als Folge der $(w_i)_{i=1}^r$ normierte Walsh Vektoren verwenden (s. Beispiel 5.11). Für dieses interessante Beispiel werden wir auch noch die Symmetrie-Konstante der Räume berechnen. Wir werden zeigen, dass für $r = \frac{n}{2}$ die Symmetrie-Konstante des Raums X_r^* asymptotisch mindestens in der Größenordnung $n^{\frac{1}{4}}$ liegt. Dies komplementiert die Arbeit von Figiel, Kwapien̄ and Pełczyński aus [FKP], in der ein n -dimensionaler Teilraum von ℓ_∞^{2n} konstruiert wurde, dessen Gordon-Lewis Konstante in der Größenordnung \sqrt{n} liegt.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert: Wir werden im nächsten Kapitel die für unseren Ansatz wesentlichen Definitionen und Resultate aus der Banachraumtheorie darstellen. Im Anschluss hieran gehen wir auf den bekannten Raum von Sobczyk ein und berechnen einige Invarianten von ihm. Ziel des Kapitels wird es sein, eine Beziehung zwischen der Projektionskonstante des Dualraums vom Raum von Sobczyk und seiner unbedingten Basiskonstante zu beweisen (s. Satz 3.12). Die in diesem Kapitel erhaltenen Resultate für Walsh Vektoren werden wir später im Abschnitt 5.4 verwenden. Kapitel 4 und Kapitel 5 beschäftigen sich dann mit der Klasse der Räume X_r . Hierbei sind in Kapitel 4 alle Resultate zusammengefasst, die keiner weiteren Annahmen an die Gestalt der Folge $(w_i)_{i=1}^r$ bedürfen, während das letzte Kapitel sowohl schärfere Ergebnisse zu zwei speziellen Klassen von Vektorenfolgen enthält, als auch den konkreten Fall der Walsh Vektoren beinhaltet.

Zur Notation: Wie dem Leser aufgefallen sein wird, verwenden wir die Standardnotation aus der Banachraumtheorie (s. [Tomc]). Für $1 \leq p \leq \infty$ bezeichnen wir den \mathbb{R}^n versehen mit der Norm $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ (bzw. $\|x\|_\infty = \max_{i \in \underline{n}} |x_i|$ für $p = \infty$) wie üblich als ℓ_p^n und die zugehörige Einheitskugel mit B_p^n . Die Standardbasis im \mathbb{R}^n wollen wir mit $(e_i)_{i=1}^n$ bezeichnen. Zu gegebenen Vektoren x_1, \dots, x_n in einem Banachraum X sei $[x_1, \dots, x_n]$ die lineare Hülle von x_1, \dots, x_n und falls X ein Teilraum des \mathbb{R}^n ist, X^\perp der euklidische Senkrechttraum. Mit $L(X, Y)$ geben wir den Raum aller stetigen linearen Operatoren von X nach Y an. Weiter bezeichnen wir zu $k, j \in \mathbb{N}$ mit

$$\delta_{k,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } k = j; \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

die Kronecker-Funktion und $k_{\lfloor} := \{1, \dots, k\}$. Zu $\sigma \subseteq \underline{n}$ definieren wir durch R_σ die natürliche Projektion vom \mathbb{R}^n auf die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{supp}(x) \subseteq \sigma\}$ und durch ℓ_p^σ den Teilraum $R_\sigma \ell_p^n$ von ℓ_p^n . Ist $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben, so bezeichnet $\text{diag}(x)$ die $n \times n$ Diagonalmatrix mit $\text{diag}(x)(i, i) = x_i$. Ist $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, so notieren wir andererseits mit $\text{diag}(T)$

die Diagonalmatrix, die wir erhalten, wenn wir alle anderen Einträge von T löschen, d.h. $\text{diag}(T) := \text{diag}((T(i, i))_{i=1}^n)$.

KAPITEL 2

Grundlagen der lokalen Theorie

Ziel dieses Abschnitts ist es, die für uns wesentlichen Begriffe und Sätze aufzuführen und zu erläutern. Wir werden nur dann auf die Beweise eingehen, wenn die entsprechenden Resultate nicht in der Standardliteratur angegeben werden, und uns auch ausschließlich auf die hier benötigten Sätze konzentrieren. Ein Anspruch auf Vollständigkeit kann in dem umfangreichen Gebiet der Banachraumtheorie nicht erfüllt werden.

Wir werden in der gesamten Arbeit ausschließlich reelle Banachräume betrachten, ohne dies stets neu zu erwähnen. Zu einem endlich-dimensionalen Banachraum X bezeichnen wir mit B_X die Einheitskugel von X . Zu einem gegebenen zur 0 symmetrischen konvexen Körper K im \mathbb{R}^n bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_K$ das Minkowski-Funktional von K . Es ist wohlbekannt, dass es sich hierbei um eine Norm handelt. Ist X ein Banachraum und $Y_1, Y_2 \subseteq X$ zwei disjunkte abgeschlossene Teilräume, so bezeichnen wir die direkte Summe der beiden Räume mit

$$Y_1 \oplus Y_2 := \{y_1 + y_2 \mid y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2\}.$$

Wir versehen den Raum mit der Norm

$$\|y_1 + y_2\|_{Y_1 \oplus Y_2} = \|y_1\|_1 + \|y_2\|_2.$$

Auf die in der Literatur übliche Indizierung \oplus_1 verzichten wir.

Unter einem Ellipsoid verstehen wir das affine Bild der euklidischen Kugel. Da alle n -dimensionalen Banachräume X isometrisch isomorph zum \mathbb{R}^n mit einer geeigneten Norm sind, lässt sich durch das Transportmaß des Lebesgueschen Maßes unter diesem Isomorphismus eine Volumensfunktion auf dem Banachraum X definieren. Weiterhin können wir mittels dieses Isomorphismus die Einheitskugel eines n -dimensionalen Banachraums als konvexen Körper im \mathbb{R}^n auffassen. Damit stehen uns Methoden der Konvexgeometrie zur Verfügung, wie etwa der Satz von John. In der Formulierung von Ball lässt sich der Satz auch zur Bestimmung der approximierenden Ellipsoide verwenden:

SATZ 2.1 (Satz von John, [Ball] Theorem 3.1). *Sei K ein konvexer Körper im \mathbb{R}^n . Dann enthält K genau ein Ellipsoid maximalen Volumens. Dieses Ellipsoid ist genau dann B_2^n , falls $B_2^n \subseteq K$ ist und euklidische Einheitsvektoren $(u_i)_{i=1}^m$ auf dem Rand von K existieren und positive Zahlen $(c_i)_{i=1}^m$ mit $\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$ und*

$$\sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2 = \|x\|_2^2$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

Bei einem symmetrischen Körper K kann man auf die Bedingung $\sum_{i=1}^m c_i u_i = 0$ verzichten.

Wir kommen nun zum wichtigsten Konzept, nämlich dem Banach-Mazur Abstand.

DEFINITION 2.2. Seien X, Y zwei isomorphe Banachräume. Dann ist der Banach-Mazur Abstand von X zu Y gegeben durch

$$d(X, Y) = \inf \left\{ \|T : X \rightarrow Y\| \|T^{-1} : Y \rightarrow X\| \mid T \in L(X, Y) \text{ ist ein Isomorphismus} \right\}.$$

Geometrisch bedeutet dies gerade

$$d(X, Y) = \inf \left\{ \lambda \cdot \mu \mid \frac{1}{\lambda} B_X \subseteq T B_Y \subseteq \mu B_X, T \in L(X, Y) \text{ ist ein Isomorphismus} \right\}.$$

Trivial, aber wichtig sind die Beziehungen

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) \cdot d(Y, Z) \text{ und } d(X, Y) = d(X^*, Y^*)$$

für isomorphe Banachräume X, Y und Z . Auf der Klasse der n -dimensionalen Banachräume ist $\log d$ eine Halbmetrik, wobei $d(X, Y) = 1$ gerade aussagt, dass X und Y isometrisch isomorph sind. Wir werden im Folgenden sprachlich nicht zwischen isometrisch isomorphen Räumen unterscheiden, d.h., sagen wir der Raum X sei der "einzige" Raum, der eine Eigenschaft hat, so meinen wir stets, dass er eindeutig bis auf isometrische Isomorphie ist.

Aus dem Satz von John erhält man unmittelbar, dass $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$ für jeden n -dimensionalen Banachraum X ist und hiermit wiederum $d(X, Y) \leq n$ für zwei n -dimensionale Banachräume X und Y .

Von den ℓ_p^n Räumen ist bekannt, dass sich die Norm eines Vektors nicht ändert, wenn man in der Basisdarstellung eines Vektors bzgl. der Standardbasis die Vorzeichen der Basiskoeffizienten ändert. Geometrisch entspricht dies der Symmetrie der jeweiligen Einheitskugeln bzgl. Spiegelung an den Koordinatenebenen. Beliebige endlich-dimensionale Banachräume müssen eine vergleichbare Eigenschaft nicht aufweisen - man kann allerdings mitunter Basen in Banachräumen finden, die diese Eigenschaft "fast" haben. Quantitativ lässt sich dies folgendermaßen angeben:

DEFINITION 2.3. Sei X ein n -dimensionaler Banachraum. Eine Basis $(x_i)_{i=1}^n$ von X heißt C -unbedingt, falls ein $C > 0$ existiert mit

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i x_i \right\| \leq C \cdot \left\| \sum_{i=1}^n t_i x_i \right\|$$

für alle Folgen von Skalaren $(t_i)_{i=1}^n$ und Vorzeichen $(\varepsilon_i)_{i=1}^n$.

Die unbedingte Basiskonstante der Basis $(x_i)_{i=1}^n$ ist das Infimum über alle $C > 0$, die die Ungleichung erfüllen, und wird mit $\text{ubc}((x_i)_{i=1}^n)$ bezeichnet. Das Infimum

$$\text{ubc}(X) := \inf\{\text{ubc}((y_i)_{i=1}^n) \mid (y_i)_{i=1}^n \text{ ist Basis von } X\}$$

nennen wir unbedingte Basiskonstante von X .

Besitzt ein n -dimensionaler Banachraum X eine K -unbedingte Basis $(x_i)_{i=1}^n$, dann ist für jede Folge von Skalaren $(\lambda_i)_{i=1}^n$ die Basis $(\lambda_i x_i)_{i=1}^n$ ebenfalls K -unbedingt. Auch die duale Basis $(x_i^*)_{i=1}^n$ von X^* ist in diesem Fall K -unbedingt. Durch einfaches Nachrechnen erhält man weiterhin

$$\text{ubc}(X) \leq \text{ubc}(Y) \cdot d(X, Y)$$

für zwei isomorphe endlich-dimensionale Banachräume X und Y . Mit dem Satz von John erhalten wir somit, dass jeder n -dimensionale Banachraum eine \sqrt{n} -unbedingte Basis besitzt. Wenn wir vom Vorliegen einer unbedingten Basis sprechen, meinen wir deshalb, dass die Klasse oder Folge der untersuchten Räume eine von der Dimension unabhängige unbedingte Basiskonstante besitzt.

DEFINITION 2.4. Ist $(x_i)_{i=1}^n$ eine Basis eines Banachraums X , so bezeichnen wir eine Basis $(y_j)_{j=1}^n$ von X^* als duale Basis, falls $y_j(x_i) = \delta_{j,i}$ für alle $i, j \in \underline{n}$ gilt.

Wie aus der linearen Algebra bekannt, ist die duale Basis eindeutig bestimmt.

Eine zentrale Ungleichung in der Funktionalanalysis ist die Khintchine-Ungleichung.

SATZ 2.5. Sei $1 \leq p < \infty$. Dann existieren Konstanten $a_p, b_p > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ gilt

$$a_p \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\text{Ave}_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \left| \sum_{i=1}^N \varepsilon_i x_i \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq b_p \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Haagerup berechnete in [Haag] die optimalen Konstanten. Wir werden $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $b_1 = 1$ verwenden, um die Anzahl der Bezeichnungen zu reduzieren.

Ein analoges Resultat gibt es für beliebige Banachräume nicht. Vielmehr ist es eine besondere Eigenschaft eines Banachraums, wenn eine der beiden Ungleichungen für beliebige Vektorenwahl gilt.

DEFINITION 2.6. Ein Banachraum X hat Rademacher-Typ p für $1 \leq p \leq 2$ bzw. Cotyp q für ein $q \geq 2$, falls eine Konstante $M < \infty$ existiert, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ und endlichen Folgen $(x_j)_{j=1}^N \in X^N$ gilt

$$\text{Ave}_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \left\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \right\| \leq M \left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

bzw.

$$\text{Ave}_{\varepsilon \in \{-1,1\}^N} \left\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \right\| \geq \frac{1}{M} \left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Wir nennen das Infimum über alle Konstanten M die Typ- p -, bzw. Cotyp- q -Konstante von X und bezeichnen sie mit $T_p(X)$ bzw. $C_q(X)$.

Da wir ausschließlich die Rademacher-Typ und -Cotyp Begriffe verwenden wollen, werden wir im Folgenden nur von Typ bzw. Cotyp sprechen.

Sind X, Y isomorphe Banachräume, so ist

$$T_p(X) \leq T_p(Y) \cdot d(X, Y) \text{ und } C_p(X) \leq C_p(Y) \cdot d(X, Y).$$

LEMMA 2.7 ([LiT2], Proposition 1.e.17). Sei $1 < p \leq 2$. Dann existiert eine Konstante $K_p > 0$, so dass für alle Banachräume X mit Typ p gilt, dass X^* Cotyp p^* hat und es ist $C_{p^*}(X^*) \leq K_p \cdot T_p(X)$, wobei $p^* = \frac{p}{p-1}$ ist.

Hierbei ist K_p die Konstante aus der Ungleichung von Kahane. Die Umkehrung ist sogar für endlich-dimensionale Banachräume falsch, da aus der Khintchine-Ungleichung direkt folgt, dass $C_2(\ell_1^n) \leq \sqrt{2}$ ist, andererseits aber $\lim_{n \rightarrow \infty} T_2(\ell_\infty^n) = \infty$ ist.

Wir werden im Verlauf der Arbeit insbesondere an den Typ-2- bzw. Cotyp-2-Konstanten interessiert sein. In Verbindung mit dem Vorliegen einer unbedingten Basis erhalten wir durch ein einfaches Mittelungsargument folgendes Resultat.

LEMMA 2.8. *Sei X ein n -dimensionaler Banachraum mit K -unbedingter normierter Basis $(x_i)_{i=1}^n$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}^n$*

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq K T_2(X) \|a\|_2$$

und

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \geq \frac{1}{K C_2(X)} \|a\|_2.$$

Dieses Lemma ist natürlich nur interessant, wenn sowohl die unbedingte Basiskonstante als auch entweder die Typ-2- oder Cotyp-2 Konstante "gut" sind.

Wir führen nun kurz die von uns genutzten Operatorenideale ein. Eine ausführliche Darstellung findet sich zum Beispiel in [Tomc] und [DJT].

DEFINITION 2.9. Seien X, Y Banachräume, $1 \leq p \leq \infty$, $T : X \rightarrow Y$ ein linearer Operator. Sei $I_{Y, Y^{**}} : Y \rightarrow Y^{**}$ die natürliche Inklusion.

(i) Wir sagen, T ist p -faktorisierend, falls es einen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und Operatoren $u : X \rightarrow L_p(\mu)$, $v : L_p(\mu) \rightarrow Y^{**}$ gibt mit $vu = I_{Y, Y^{**}} T$. In diesem Fall definieren wir die p -faktorisierende Norm durch

$$\gamma_p(T) := \inf \{ \|u\| \|v\| \mid u : X \rightarrow L_p(\mu), v : L_p(\mu) \rightarrow Y^{**}, vu = I_{Y, Y^{**}} T \}.$$

Ist T nicht p -faktorisierend, so setzen wir $\gamma_p(T) = \infty$. Weiterhin bezeichnen wir mit $\gamma_p(X) := \gamma_p(\text{Id}_X)$.

(ii) Wir sagen, T ist p -absolut summierend, falls es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_N \in X$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^N \|T x_i\|_Y^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \left(\sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} \sum_{i=1}^N |x^*(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Die p -absolut summierende Norm von T definieren wir als das Infimum über alle $C > 0$, die die Ungleichung erfüllen und bezeichnen sie mit $\pi_p(T)$.

Ist T nicht p -absolut summierend, so setzen wir $\pi_p(T) = \infty$. Weiterhin bezeichnen wir mit $\pi_p(X) := \pi_p(\text{Id}_X)$.

(iii) Wir sagen, T ist nuklear, falls es (möglicherweise abbrechende) Folgen $(x_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ in X^* und $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in Y gibt mit $T = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^* \otimes y_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^*\| \|y_j\| < \infty$.

Die nukleare Norm $\nu(T) = \inf \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^*\| \|y_j\|$, wobei das Infimum über alle nuklearen Darstellungen von T gebildet wird.

Da wir im endlich-dimensionalen Y mit Y^{**} identifizieren können, vereinfacht sich in diesem Fall die Situation der p -faktorierenden Abbildungen entsprechend. Man beachte, dass alle drei Normen die Operatornorm dominieren.

Es ist wohlbekannt, dass alle drei Typen von Abbildungen die sogenannte Idealeigenschaft erfüllen, nämlich

$$\pi_p(uTv) \leq \|u\| \pi_p(T) \|v\|,$$

$$\gamma_p(uTv) \leq \|u\| \gamma_p(T) \|v\|$$

und

$$\nu(uTv) \leq \|u\| \nu(T) \|v\|,$$

wobei u und v lineare Operatoren, T p -absolut summierend bzw. p -faktorierend und die jeweiligen Urbild- und Bildbereiche sinnvoll gewählt seien mögen. Damit erhält man unmittelbar das folgende

LEMMA 2.10. *Für zwei isomorphe Banachräume X und Y gelten*

$$(i) \pi_p(X) \leq \pi_p(Y) \cdot d(X, Y)$$

$$(ii) \gamma_p(X) \leq \gamma_p(Y) \cdot d(X, Y).$$

Für einen n -dimensionalen Banachraum X gilt weiterhin stets

$$\sqrt{n} \leq \pi_1(X) \leq n.$$

Die Invariante $\gamma_{\infty}(X)$ liefert noch weitere Informationen über einen Banachraum. Hierzu geben wir zunächst zwei weitere Definitionen.

DEFINITION 2.11. Sei X ein Banachraum, $t \geq 1$.

(i) Wir sagen, X hat die t -Fortsetzungseigenschaft, falls für alle Banachräume Z und abgeschlossenen Teilräume $Y \subseteq Z$ und für alle $T \in L(Y, X)$ eine Abbildung $\tilde{T} \in L(Z, X)$ existiert mit $\|\tilde{T}\| \leq t \cdot \|T\|$ und $\tilde{T}|_Y = T$. Wir definieren dann die Fortsetzungskonstante von X durch

$$\text{fs}(X) := \inf \{ \lambda \geq 1 : X \text{ hat die } \lambda\text{-Fortsetzungseigenschaft} \}.$$

(ii) Wir sagen X hat die t -Projektionseigenschaft, falls für alle Banachräume Z für die eine isometrische Einbettung $i : X \rightarrow Z$ existiert, eine Projektion $P : Z \rightarrow Z$ mit Bild $P = i(X)$ und $\|P\| \leq t$ existiert. Wir definieren dann die (absolute) Projektionskonstante von X durch

$$\lambda(X) := \inf \{ \lambda \geq 1 \mid X \text{ hat die } \lambda\text{-Projektionseigenschaft} \}.$$

(iii) Sei Z ein Banachraum, $i : X \rightarrow Z$ eine isometrische Einbettung. Wir definieren dann die relative Projektionskonstante von X in Z als

$$\lambda(X, Z) := \inf \{ \|P\| \mid P : Z \rightarrow Z \text{ ist Projektion auf } i(X) \}.$$

Durch koordinatenweise Anwendung des Satzes von Hahn-Banach erhält man, dass $\text{fs}(\ell_\infty) = 1$ ist. Dies lässt sich leicht auf beliebige Maßräume verallgemeinern.

SATZ 2.12 ([Wojt], III.B.2). *Ist $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum, so ist $\text{fs}(L_\infty(\mu)) = 1$.*

Ist ein Banachraum X isometrisch-isomorph einbettbar in einen Raum $L_\infty(\mu)$, etwa durch eine lineare Isometrie $i : X \rightarrow L_\infty(\mu)$, so ist

$$\lambda(X) = \inf \{ \|P\| \mid P : L_\infty(\mu) \rightarrow L_\infty(\mu) \text{ ist eine stetige Projektion auf } i(X) \}.$$

Diese beiden Beobachtung bilden den Kern des Beweises des wohlbekanntem

SATZ 2.13 ([Tomc], Proposition 32.1). *Sei X ein Banachraum. Dann ist*

$$\gamma_\infty(X) = \lambda(X) = \text{fs}(X).$$

Dieser Satz rechtfertigt, dass wir im Verlauf der Arbeit die Projektionskonstante eines Raumes X mit $\gamma_\infty(X)$ bezeichnen werden. Ein klassisches Resultat von Kadec und Snobar zeigt, dass

$$(2.1) \quad \gamma_\infty(X) \leq \sqrt{\dim(X)}$$

für einen endlich-dimensionalen Banachraum ist (s. [Tomc], Proposition 9.12, bzw. [KaSn]). Hieraus folgert man unter Verwendung des Prinzips der lokalen Reflexivität das nächste Lemma.

LEMMA 2.14 ([Wojt], III.B.11). *Sei Y ein reflexiver Banachraum, $X \subseteq Y$ ein Teilraum der Kodimension n . Dann ist $\lambda(X, Y) \leq \sqrt{n} + 1$.*

Ist $Y = \ell_\infty(I)$ für eine Indexmenge I , so ist damit insbesondere $\lambda(X) \leq \sqrt{n} + 1$.

Die Abschätzung (2.1) ist asymptotisch scharf, wie man an dem Beispiel der Räume ℓ_p^n mit $1 \leq p \leq 2$ einsehen kann (s. [KSTJ], Theorem 1). Andererseits konnten König und Tomczak-Jaegermann zeigen, dass sich die Abschätzung zu

$$\lambda(X) \leq \sqrt{\dim X} - \frac{c}{\sqrt{\dim X}}$$

für eine globale Konstante $c > 0$ verbessern lässt (s. [Köt1]). Demgegenüber zeigte König in [Köni], dass es keine Konstante $0 < c < 1$ gibt, so dass $\lambda(X) \leq c\sqrt{\dim X}$ für alle endlich-dimensionalen Banachräume X ist.

Einfach zu beweisen ist das folgende Resultat.

SATZ 2.15 ([Wojt], III.B.6). *Seien X, Y Banachräume. Dann ist*

$$\lambda(X) \leq \lambda(Y) \cdot d(X, Y).$$

Insbesondere haben wir damit für einen n -dimensionalen Banachraum X

$$\lambda(X) \leq d(X, \ell_\infty^n).$$

Ein weiteres wichtiges Resultat stammt von Schütt:

SATZ 2.16 ([Sch1]). *Sei X ein Banachraum mit einer normierten Basis $(x_i)_{i=1}^n$ und $(x_i^*)_{i=1}^n$ die hierzu duale Basis. Es sei $I : X^* \rightarrow \ell_2^n$ durch $I(\sum_{i=1}^n a_i x_i^*) = (a_i)_{i=1}^n$ definiert. Dann ist*

$$\frac{1}{\sqrt{2} \text{ubc}((x_i)_{i=1}^n)} \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \|I : X^* \rightarrow \ell_2^n\|^{-1} \leq \gamma_\infty(X) \leq d(X, \ell_\infty^n) \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| \text{ubc}((x_i)_{i=1}^n).$$

Man beachte hierbei, dass die Norm des Operators I sehr groß sein kann. In diesem Fall könnten möglicherweise $\gamma_\infty(X)$ und $d(X, \ell_\infty^n)$ verschiedene Größenordnungen haben.

Problematisch ist bei der Untersuchung von Problem 1, dass man Banach-Mazur Abstände nach unten häufig sehr schlecht abschätzen kann. Auch ist die Berechnung der Projektionskonstante eines Banachraums im konkreten Fall oft nicht trivial. Die letztere Schwierigkeit lässt sich in bestimmten Fällen umgehen, indem man sich eine Methode von Garling und Gordon zu Nutze macht, die die folgende Invariante benutzt (s. [GaGo]).

DEFINITION 2.17. Sei X ein Banachraum. Wir definieren die Symmetrie-Konstante von X durch

$$s(X) := \inf \left\{ \sup_{g \in G} \|g\| \mid G \text{ Gruppe von Isomorphismen von } X, G' = \{\lambda \text{Id} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \right\},$$

wobei G' die Menge aller Isomorphismen von X nach X ist, die mit jedem Element von G kommutieren.

Wir sagen, ein Raum X hat genügend Symmetrien, falls $s(X) = 1$ ist.

Auch hier ist $s(X) \leq s(Y) \cdot d(X, Y)$ für alle isomorphen Banachräume X und Y . Es ergibt sich nun

SATZ 2.18 ([GaGo], Theorem 3). *Sei X ein n -dimensionaler Banachraum. Dann ist*

$$n \leq \pi_1(X) \cdot \gamma_\infty(X) \leq n \cdot s(X)^2.$$

Die linke Ungleichung ist hierbei trivial. In einem Raum X mit genügend Symmetrien ist es deshalb ausreichend, statt direkt die Projektionskonstante die zumeist einfacher zu ermittelnde Größe $\pi_1(X)$ zu berechnen. So wurde etwa die Asymptotik der Projektionskonstante der ℓ_p^n Räume in [KSTJ] auf diese Weise ermittelt.

Weiterhin sind in Räumen mit genügend Symmetrien das John- und das Löwner-Ellipsoid bis auf einen Faktor gleich.

LEMMA 2.19 ([Tomc], Propositionen 16.3 und 16.4). *Sei X ein n -dimensionaler Banachraum mit genügend Symmetrien, \mathcal{E} das Ellipsoid maximalen Volumens, das in B_X enthalten ist. Dann ist*

(i) *das Ellipsoid minimalen Volumens, das B_X umfasst, ein Vielfaches von \mathcal{E} ,*

(ii) $d(X, \ell_2^n) = \|\text{Id} : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (X, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})\| \|\text{Id} : (X, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)\|$.

Auch bezüglich Dualisierung verhält sich die Eigenschaft gutartig.

LEMMA 2.20. *Sei X ein endlich-dimensionaler Banachraum mit genügend Symmetrien. Dann hat X^* genügend Symmetrien.*

Bevor wir mit dem Beweis des Lemmas beginnen, halten wir zunächst fest, dass falls T ein isometrischer Isomorphismus ist, dies auch T^* ist. In der Tat gilt für alle $x^* \in X^*$

$$\|T^*(x^*)\| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(Tx)| = \sup_{\|T^{-1}y\|=1} |x^*(y)| = \sup_{\|y\|=1} |x^*(y)| = \|x^*\|.$$

Die Bijektivität ergibt sich aus Dimensionsgründen.

BEWEIS. Es sei $A : X^* \rightarrow X^*$ ein Operator, der mit allen isometrischen Isomorphismen von X^* kommutiert. Wir zeigen, dass $A^* : X^{**} \rightarrow X^{**}$ mit allen isometrischen Isomorphismen von X^{**} kommutiert.

Sei $T : X \rightarrow X$ ein isometrischer Isomorphismus. Nach Vorbemerkung ist dann T^* ein isometrischer Isomorphismus auf X^* , d.h. es ist $T^*A = AT^*$. Damit ist dann auch $A^*T^{**} = T^{**}A^*$. Da X^{**} genügend Symmetrien hat, ist $A^* = c \cdot \text{Id}_{X^{**}}$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Sei $x \in X$ und $\hat{x} \in X^{**}$ das Bild von x unter der kanonischen Einbettung, $x^* \in X^*$ beliebig. Dann ist

$$A(x^*)(x) = \hat{x}(A(x^*)) = A^*(\hat{x})(x^*) = c\hat{x}(x^*) = cx^*(x).$$

□

Eine weitere wichtige Invariante ist der Volumensquotient.

DEFINITION 2.21. Sei X ein n -dimensionaler Banachraum mit Einheitskugel $B_X \subseteq \mathbb{R}^n$. Unter dem Volumensquotienten von X verstehen wir

$$\text{vr}(X) := \inf \left\{ \frac{\text{vol}(B_X)}{\text{vol}(\mathcal{E})} \mid \mathcal{E} \subseteq B_X \text{ ist ein Ellipsoid} \right\}.$$

Offensichtlich ist $\text{vr}(X) \leq \text{vr}(Y) \cdot d(X, Y)$ für isomorphe Banachräume X und Y . Weiterhin ist der Volumensquotient invariant unter linearen Isomorphismen und damit insbesondere unabhängig von den gewählten Koordinaten.

Ein tiefes Resultat von Bourgain und Milman stellt eine Verbindung zwischen dem Volumensquotienten und der Cotyp-2-Konstante eines Banachraums her.

SATZ 2.22 ([BoMi], Theorem 2). *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle endlich-dimensionalen Banachräume X gilt*

$$\text{vr}(X) \leq C \cdot C_2(X) \cdot (\log(C_2(X)))^4.$$

Die Rückrichtung gilt im Allgemeinen nicht. Allerdings kann man mittels des von Pisier eingeführten Konzepts des schwachen Cotyp eine auf dem Supremum der Volumensquotienten aller Teilräume beruhende Abschätzung für die Cotyp-2 Konstante erhalten, die nur logarithmisch von der Dimension abhängt (s. [Pisi]). Wir gehen hierauf nicht weiter ein.

Zuletzt kommen wir noch zur Gordon-Lewis Konstante.

DEFINITION 2.23. Sei X ein Banachraum. Dann ist die Gordon-Lewis Konstante von X definiert als

$$\mathcal{GL}(X) := \sup \left\{ \frac{\gamma_1(T)}{\pi_1(T)} \mid 0 \neq T : X \rightarrow \ell_2 \text{ ist 1-absolut-summierend} \right\}.$$

Wie für alle von uns betrachteten Parameter ist $\mathcal{GL}(X) \leq \mathcal{GL}(Y) \cdot d(X, Y)$ für isomorphe Banachräume X und Y . Mit Hilfe der Gordon-Lewis Konstante lässt sich die unbedingte Basiskonstante eines Banachraums nach unten abschätzen. Wir stellen die von uns benötigten Resultate kurz zusammen.

LEMMA 2.24 ([GoLe], Lemma 3.3). *Sei X ein Banachraum. Es gilt*

$$\mathcal{GL}(X) \leq \text{ubc}(X).$$

LEMMA 2.25 ([DJT], Proposition 17.10). *Sei X ein Banachraum mit $\mathcal{GL}(X) < \infty$ und Cotyp 2. Dann hat jeder Teilraum Y von X endliche \mathcal{GL} -Konstante und es ist*

$$\mathcal{GL}(Y) \leq \mathcal{GL}(X) b_4^2 C_2(X)^2,$$

wobei b_4 die entsprechende Konstante aus der Khintchine-Ungleichung ist.

LEMMA 2.26 ([DJT], Proposition 17.9). *Sei X ein Banachraum mit $\mathcal{GL}(X) < \infty$. Dann ist $\mathcal{GL}(X) = \mathcal{GL}(X^*)$.*

Das folgende Lemma geben wir mit Beweis an.

LEMMA 2.27. *Sei X ein n -dimensionaler Banachraum.*

Dann ist $\mathcal{GL}(X) \leq \gamma_\infty(X^)$.*

BEWEIS. Sei $T : X \rightarrow \ell_2^n$, $J : X^* \rightarrow L_\infty(\mu)$ eine isometrische Einbettung und $P \in L(L_\infty(\mu), L_\infty(\mu))$ eine Projektion auf X^* . Wir können J auf dem Bild invertieren, d.h. wir finden einen isometrischen Isomorphismus $\tilde{J} : \text{Bild } J \rightarrow X^*$ mit $\tilde{J} \circ J = \text{Id}_{X^*}$. Wir betrachten die folgende Faktorisierung von T^* , gegeben durch $J \circ T^* : \ell_2^n \rightarrow L_\infty(\mu)$, $\tilde{J} \circ P : L_\infty(\mu) \rightarrow X^*$. Dann ist

$$\begin{aligned} \gamma_\infty(T^* : \ell_2^n \rightarrow X^*) &\leq \left\| \tilde{J} \circ P : L_\infty(\mu) \rightarrow X^* \right\| \cdot \|J \circ T^* : \ell_2^n \rightarrow L_\infty(\mu)\| \\ &= \|P : L_\infty(\mu) \rightarrow L_\infty(\mu)\| \cdot \|T^* : \ell_2^n \rightarrow X^*\| \\ &= \|P : L_\infty(\mu) \rightarrow L_\infty(\mu)\| \cdot \|T : X \rightarrow \ell_2^n\|. \end{aligned}$$

Gehen wir nun zum Infimum über alle Projektionen über und verwenden $\gamma_p(S) = \gamma_{p^*}(S^*)$ (s. [Tomc] (13.7)), so ist

$$\gamma_1(T : X \rightarrow \ell_2^n) \leq \gamma_\infty(X^*) \|T : X \rightarrow \ell_2^n\|.$$

Da $\|T : X \rightarrow \ell_2^n\| \leq \pi_1(T : X \rightarrow \ell_2^n)$ haben wir

$$\mathcal{GL}(X) \leq \gamma_\infty(X^*).$$

□

Ein bemerkenswertes Beispiel von Figiel, Kwapien̄ und Pelczyński zeigt, dass Teilräume von ℓ_∞^n eine große Gordon-Lewis Konstante besitzen können. In Kombination mit dem vorherigen Lemma können also Teilräume von ℓ_∞^n eine Projektionskonstante in der Größenordnung \sqrt{n} haben.

SATZ 2.28 ([FKP], Theorem 1.1). *Es gibt eine Folge von Banachräumen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass*

- (i) X_n ein n -dimensionaler Teilraum von ℓ_∞^{2n} ist,
- (ii) $K > 0$ existiert, so dass $\mathcal{GL}(X_n) \geq K\sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Zuletzt geben wir noch eine Variante eines Lemmas von Figiel und Johnson an (s. Lemma 1.1 in [FiJo]).

LEMMA 2.29. *Sei E ein r -dimensionaler Teilraum von ℓ_∞^n .*

Ist $x \in E$ ein Extrempunkt von $B_E \cap B_\infty^n$, so ist

$$|\{j \in \underline{n} \mid |x(j)| = 1\}| \geq r.$$

BEWEIS. Wir nehmen an, es gibt mehr als $n - r$ Koordinaten $j \in \underline{n}$, für die $|x(j)| < 1$ ist. Bezeichnen wir die Menge dieser Koordinaten mit σ , so existiert aus Dimensionsgründen $y \in (\ell_\infty^\sigma \cap B_E) \setminus \{0\}$. Für ein $\varepsilon < \max_{j \in \sigma} 1 - |x(j)|$ ist dann $x = \frac{1}{2}(x + \varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$ im Widerspruch dazu, dass x ein Extrempunkt ist. \square

Der Raum von Sobczyk

Wir definieren die 2-dimensionale Walsh Matrix durch

$$W_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und zu $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, induktiv die n -dimensionale Walsh Matrix

$$W_n := \begin{pmatrix} W_{\frac{n}{2}} & W_{\frac{n}{2}} \\ W_{\frac{n}{2}} & -W_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Induktion zeigt, dass die Zeilen der n -dimensionalen Walsh Matrix paarweise orthogonal sind. Wir nennen die Zeilen auch Walsh Vektoren. Sei nun $n = 2^k$ fixiert und $U_n := \frac{1}{\sqrt{n}}W_n$. Offensichtlich ist U_n eine ℓ_2^n -Isometrie und selbstinvers. Wir definieren den n -dimensionalen Sobczyk-Raum durch

$$S_n := \{x \in \ell_1^{2n} \mid x = U_{2n}x\}.$$

Dieser Raum wurde von Sobczyk in [**Sobc**] konstruiert.

Da U_{2n} orthogonal ist, ist

$$P_n := \frac{1}{2}(\text{Id}_{2n} + U_{2n})$$

eine Projektion.

Das Bild von P_n ist S_n . Um dies einzusehen, betrachten wir ein $x \in \ell_1^{2n}$ mit $x = U_{2n}(x)$ und erhalten

$$P_n(x) = \frac{1}{2}(x + U_{2n}(x)) = x.$$

Ist x im Bild von P_n , dann ist $x = P_n(x)$ und damit

$$x = \frac{1}{2}(x + U_{2n}(x))$$

also $x = U_{2n}(x)$.

Wir bemerken noch, dass die Dimension von S_n gerade n ist, denn, da U_{2n} orthogonal und symmetrisch ist, hat U_{2n} genau $2n$ -Eigenwerte, die alle -1 oder 1 sind. Da weiterhin $\text{Spur } U_{2n} = 0$ ist, ist die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert 1 damit n .

3.1. Darstellung des n -dimensionalen Sobczyk-Raum im \mathbb{R}^n

Wir wollen den n -dimensionalen Sobczyk-Raum mittels einer geeigneten Norm auf dem \mathbb{R}^n darstellen.

LEMMA 3.1. Sei $(e_i)_{i=1}^{2n}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^{2n} .

(i) Es gilt

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i (I_{2n} + U_{2n}) e_i \right\|_1 = \left\| \left(I_n + \frac{1}{\sqrt{2}} U_n \right) (x) \right\|_1 + \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} U_n(x) \right\|_1.$$

(ii)

$$\|(I_{2n} + U_{2n})(e_i)\|_1 = \left\| e_i + \frac{1}{\sqrt{2n}} W_{2n} e_i \right\|_1 \in [\sqrt{2n} - 1, \sqrt{2n} + 1]$$

Insbesondere ist

$$(3.1) \quad \max \left\{ \|x\|_1, \frac{1}{\sqrt{2}} \|U_n(x)\|_1 \right\} \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i (I_{2n} + U_{2n}) e_i \right\|_1 \leq \|x\|_1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \|U_n(x)\|_1.$$

BEWEIS. (ii) ist offensichtlich, d.h. wir beweisen nur (i).

Es ist

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^n x_i (I_{2n} + U_{2n}) e_i \right\|_1 &= \left\| (I_{2n} + U_{2n}) (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)^t \right\|_1 \\
&= \left\| \left(I_{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \left\| \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \begin{pmatrix} W_n(x) \\ W_n(x) \end{pmatrix} \right\|_1 \\
&= \left\| x + \frac{1}{\sqrt{2n}} W_n(x) \right\|_1 + \left\| \frac{1}{\sqrt{2n}} W_n(x) \right\|_1 \\
&= \left\| x + \frac{1}{\sqrt{2}} U_n(x) \right\|_1 + \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} U_n(x) \right\|_1.
\end{aligned}$$

Zuletzt folgt (3.1) aus (i) mit der Dreiecksungleichung. \square

Bezüglich der Basis $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} (I_{2n} + U_{2n}) e_i \right)_{i=1}^n$ von S_n ist also die folgende Norm auf dem \mathbb{R}^n 4-äquivalent

$$\|x\|_S := \frac{1}{\sqrt{n}} \max\{\|x\|_1, \|U_n(x)\|_1\}.$$

Wir wollen im Folgenden ausschließlich mit dieser äquivalenten Norm arbeiten und den \mathbb{R}^n mit dieser Norm versehen als Sobczyk-Raum S_n bezeichnen. Dieses Vorgehen ist in der Tat unproblematisch, da sich alle von uns betrachteten Invarianten des ursprünglichen Raums nur um den Faktor 4 von denen des äquivalenten Raums unterscheiden.

Eine einfache Beobachtung stellt das folgende offensichtliche Lemma dar, bei dem es sich um einen Spezialfall des Dualitätsprinzips handelt.

LEMMA 3.2. *Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ n -dimensionale Banachräume. Sei $(x_i)_{i=1}^n$ eine Basis von X , $(y_i)_{i=1}^n$ eine Basis von Y . Es seien $(x_i^*)_{i=1}^n$ bzw. $(y_i^*)_{i=1}^n$ jeweils die dualen Basen.*

Gilt für alle $a \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|_X \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\|_Y,$$

so gilt für alle $b \in \mathbb{R}^n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n b_i y_i^* \right\|_{Y^*} \leq \left\| \sum_{i=1}^n b_i x_i^* \right\|_{X^*}.$$

BEWEIS. Sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\left\| \sum_{i=1}^n b_i y_i^* \right\|_{Y^*} = \sup_{a \neq 0} \frac{\sum_{i=1}^n b_i y_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j y_j \right)}{\left\| \sum_{j=1}^n a_j y_j \right\|_Y} \leq \sup_{a \neq 0} \frac{|\sum_{i=1}^n a_i b_i|}{\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|_X} = \left\| \sum_{i=1}^n b_i x_i^* \right\|_{X^*}.$$

□

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Sobczyk-Norm zu den ℓ_p^n -Normen verhält.

LEMMA 3.3. (i) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{n} \|W_n x\|_1.$$

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_S \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{4}} \|x\|_S.$$

(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$n^{-\frac{1}{4}} \|x\|_{S^*} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_{S^*} \leq \|x\|_1.$$

(iv) Für alle Folgen von Vorzeichen $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i=1}^n$ ist

$$\|\varepsilon\|_S = \sqrt{n} \quad \|\varepsilon\|_{S^*} = \sqrt{n}.$$

BEWEIS. (i) Wir zeigen die Behauptung mittels Induktion.

Für $n = 2^1$ erhalten wir

$$\max\{|x_1|, |x_2|\} = \frac{1}{2} (|x_1 + x_2| + |x_1 - x_2|) = \frac{1}{2} \|W_1(x_1, x_2)^t\|_1.$$

Weiterhin ist für $n = 2^m$ und $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2)\|_\infty &\leq \max\{\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty\} \\ &\leq \frac{1}{2^m} \max\{\|W_m(x_1)\|_1, \|W_m(x_2)\|_1\}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|(x_1, x_2)\|_\infty &\leq \frac{1}{2^{m+1}} (\|W_m(x_1 + x_2)\|_1 + \|W_m(x_1 - x_2)\|_1) \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \|W_{2m}(x_1, x_2)^t\|_1. \end{aligned}$$

(ii) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_S$ folgt unmittelbar aus (i).

Da U_n eine Isometrie bzgl. der 2-Norm ist, ist

$$\|x\|_S = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \{ \|x\|_1, \|U_n(x)\|_1 \} \leq \max \{ \|x\|_2, \|U_n(x)\|_2 \} = \|x\|_2.$$

Wir zeigen zuletzt $\|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{4}} \|x\|_S$. Dazu stellen wir fest, dass

$$\|x\|_S = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \{ \|x\|_1, \|U_n(x)\|_1 \} \geq \max \left\{ \|x\|_\infty, \frac{1}{\sqrt{n}} \|x\|_1 \right\}$$

ist.

Wir betrachten nun die Extrempunkte der letzten Norm, deren Einheitskugel gegeben ist durch

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in [-1, 1]^n, \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \in [-1, 1]^n, \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \right\}.$$

Es ist aber

$$\max \left\{ \|x\|_2 \mid x \in [-1, 1]^n, \sum_{i=1}^n |x_i| \leq \sqrt{n} \right\} = n^{\frac{1}{4}}.$$

(iii) Folgt direkt aus Lemma 3.2.

(iv) Es gilt

$$\sqrt{n} = \|\varepsilon\|_2 \stackrel{(i)}{\geq} \|\varepsilon\|_S = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \{ \|\varepsilon\|_1, \|U_n(\varepsilon)\|_1 \} \geq \sqrt{n}.$$

Außerdem erhalten wir

$$\sqrt{n} = \|\varepsilon\|_2 \leq \|\varepsilon\|_{S^*} = \sup_{\|x\|_S=1} \langle \varepsilon, x \rangle \leq \sup_{\|x\|_S=1} \|x\|_1 \leq \sup_{\|x\|_1=\sqrt{n}} \|x\|_1 = \sqrt{n}.$$

□

Tatsächlich sind alle Ungleichung in (ii) im obigen Lemma scharf. Um dies für die ersten beiden Ungleichungen einzusehen, genügt es, die Vektoren der Standardbasis einzusetzen. Für die letzte Ungleichung benötigen wir einen der Vektoren, die wir im folgenden Lemma konstruieren.

LEMMA 3.4. Sei $n = 4^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$w_{i,j}^n = (0, \dots, 0, \underbrace{W_{\sqrt{n}} e_j}_{i\text{-ter Block}}, 0, \dots, 0), \quad \text{für alle } i, j \in \sqrt{n}.$$

Dann ist

$$\|w_{i,j}^n\|_S = 1 \text{ und } \|w_{i,j}^n\|_{S^*} = \sqrt{n} \text{ f\"ur alle } i, j \in \underline{\sqrt{n}}.$$

BEWEIS. Es ist

$$\|w_{i,j}^n\|_S = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \left\{ \|w_{i,j}^n\|_1, \|U_n(w_{i,j}^n)\|_1 \right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \left\{ \sqrt{n}, \|U_n(w_{i,j}^n)\|_1 \right\}.$$

Hieraus erhalten wir direkt $\|w_{i,j}^n\|_S \geq 1$. Andererseits erhalten wir, da $W_{\sqrt{n}}$ eine orthogonale Matrix und $W_n = W_{\sqrt{n}}(W_{\sqrt{n}})$ ist,

$$\begin{aligned} \|W_n w_{i,j}^n\|_1 &= \sum_{\mu=1}^{\sqrt{n}} \|W_{\sqrt{n}}(\mu, i) W_{\sqrt{n}}(W_{\sqrt{n}} e_j)\|_1 \\ &= \sum_{\mu=1}^{\sqrt{n}} \|W_{\sqrt{n}}(\mu, i) \sqrt{n} e_j\| = n, \end{aligned}$$

d.h., dass $\langle W_n e_l, w_{i,j}^n \rangle \neq 0$ für \sqrt{n} -viele l ist und dann den Wert $\pm\sqrt{n}$ hat. Damit ist $\|w_{i,j}^n\|_S = 1$.

Damit erhalten wir auch

$$\|w_{i,j}^n\|_{S^*} = \sup_{\|x\|_S=1} \langle w_{i,j}^n, x \rangle \geq \langle w_{i,j}^n, w_{i,j}^n \rangle = \sqrt{n}.$$

Andererseits ist $\|x\|_{S^*} \leq \|x\|_1$ und damit

$$\|w_{i,j}^n\|_{S^*} \leq \|w_{i,j}^n\|_1 = \sqrt{n}.$$

□

Bei den $w_{i,j}^n$ handelt es sich um Extrempunkte von B_S , wie das folgende Lemma zeigt.

LEMMA 3.5. Sei X ein n -dimensionaler Banachraum, \mathcal{E} ein Ellipsoid, das B_X umfasst.

Ist $x \in \partial B_X \cap \partial \mathcal{E}$, so ist x Extrempunkt von B_X .

BEWEIS. Wir wählen $y, z \in B_X$ mit $\frac{1}{2}(y+z) = x$. Dann ist $\|y\|_{\mathcal{E}}, \|z\|_{\mathcal{E}} \leq 1$, d.h. $y, z \in \mathcal{E}$. Da $x \in \text{Ext}(\mathcal{E})$, ist $x = y = z$, was bedeutet, dass x Extrempunkt von B_X ist. □

Insbesondere ist also jedes $x \in B_S$ mit $\|x\|_2 = n^{\frac{1}{4}}$ Extrempunkt von B_S .

Wir zeigen nun eine Verschärfung der Normabschätzung aus Lemma 3.3. Hierzu benötigen wir ein einfaches Resultat über die Extrempunkte von S .

LEMMA 3.6. Sei $n = 4^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ ein Extrempunkt von B_S , so ist

$$\|x\|_1 = \|U_n x\|_1 = \sqrt{n}.$$

Es ist nicht klar, ob dieses Lemma auch ein hinreichendes Kriterium für Extrempunkte darstellt.

BEWEIS. Wir wollen zunächst festhalten, dass die Einheitsvektoren keine Extrempunkte von B_S sind. Hierzu zeigen wir, dass für alle $i, l \in \underline{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} W_{\sqrt{n}}(l, j) w_{i,j}^n = e_{(i-1)\sqrt{n}+l}$$

ist. Da der Träger des linken Vektors in der Menge $\{(i-1)\sqrt{n}+1, \dots, i\sqrt{n}\}$ enthalten ist, genügt es zu zeigen, dass für alle $i, m, l \in \underline{\sqrt{n}}$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} W_{\sqrt{n}}(l, j) w_{i,j}^n ((i-1)\sqrt{n}+m) = \delta_{m,l}$$

ist. In der Tat ist aber

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} W_{\sqrt{n}}(l, j) w_{i,j}^n ((i-1)\sqrt{n}+m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} W_{\sqrt{n}}(l, j) W_{\sqrt{n}}(m, j) = \delta_{m,l}.$$

Existiert ein Extrempunkt x von B_S mit $\|x\|_1 < \|U_n x\|_1$, so ist $U_n x$ ein Extrempunkt, der die inverse Ungleichung erfüllt, da Isomorphismen Extrempunkte auf Extrempunkte abbilden. Wir nehmen also an, dass ein Extrempunkt x von B_S mit $\|x\|_1 > \|U_n x\|_1$ existiert. Wir wählen $m \in \underline{n}$ mit $x(m) = \|x\|_\infty$, wobei wir gegebenenfalls ausnutzen, dass $-x$ ebenfalls ein Extrempunkt von B_S ist. Da die Einheitsvektoren keine Extrempunkte sind, existiert eine weitere von 0 verschiedene Koordinate, etwa $x(l)$. Sei $\sigma := \text{sgn}(x(l))$.

Mit $\varepsilon := \min \left\{ \frac{\|x\|_1 - \|U_n x\|_1}{2\sqrt{n}}, |x(l)| \right\}$ können wir Vektoren

$$y := x + \varepsilon e_m - \sigma \varepsilon e_l,$$

$$z := x - \varepsilon e_m + \sigma \varepsilon e_l,$$

konstruieren, die $\|y\|_S = \|z\|_S = 1$ und $x = \frac{1}{2}(y + z)$ erfüllen. Sowohl die letzte Gleichheit als auch $\|x\|_1 = \|y\|_1 = \|z\|_1 = 1$ ist offensichtlich. Um $\|U_n y\|_S \leq 1$ einzusehen, zeigen wir

noch $\|U_n y\|_1 \leq 1$. Die Abschätzung $\|U_n z\|_1 \leq 1$ ergibt sich dann analog. Es ist

$$\begin{aligned} \|U_n y\|_1 &= \|U_n(x + \varepsilon e_m - \sigma \varepsilon e_l)\|_1 \leq \|U_n x\|_1 + 2\varepsilon\sqrt{n} \\ &\leq \|U_n x\|_1 + \|x\|_1 - \|U_n x\|_1 = \|x\|_1 = 1. \end{aligned}$$

□

Damit können wir die angekündigte Normabschätzung zeigen.

LEMMA 3.7. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_{S^*} \leq \max \left\{ \sum_{j \in J} |x_j| \mid J \subseteq \underline{n}, |J| = \sqrt{n} \right\}.$$

BEWEIS. Sei $y \in \text{Ext}(B_S)$ mit $|\langle x, y \rangle| = \|x\|_{S^*}$. Dann ist mit Lemma 3.6 $\|y\|_1 = \sqrt{n}$ und mit Lemma 3.3 $\|y\|_\infty \leq 1$. Sei $I \subseteq \underline{n}$ mit $|I| = \sqrt{n}$ und

$$\sum_{j \in I} |x_j| = \max \left\{ \sum_{j \in J} |x_j| \mid J \subseteq \underline{n}, |J| = \sqrt{n} \right\}.$$

Wir stellen zunächst fest, dass

$$\sum_{j \in I^c} |y_j x_j| \leq \sum_{j \in I^c} |y_j| \min_{k \in I} |x_k| = \left(\sqrt{n} - \sum_{j \in I} |y_j| \right) \min_{k \in I} |x_k| \leq \sum_{j \in I} (1 - |y_j|) |x_j|$$

ist. Hiermit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n y_j x_j &\leq \sum_{j \in I} |y_j x_j| + \sum_{j \in I^c} |y_j x_j| \\ &= \sum_{j \in I} |x_j| - \sum_{j \in I} (1 - |y_j|) |x_j| + \sum_{j \in I^c} |y_j x_j| \leq \sum_{j \in I} |x_j| \leq \sum_{j=1}^{\sqrt{n}} |x_j^*|. \end{aligned}$$

□

3.2. Invarianten des Sobczyk-Raums

Wir zeigen nun, dass S_n genügend Symmetrien hat (s. Definition 2.17), und können dann den Banach-Mazur Abstand zum Hilbertraum angeben.

LEMMA 3.8. Die Diagonaloperatoren $\text{diag}(W_n e_i)$, $i = 1, \dots, n$, sind Isometrien von S_n .

S_n hat genügend Symmetrien.

BEWEIS. Zu $i \in \underline{n}$ sei die Matrix $D_i := \text{diag}(W_n e_i)$. Wir zeigen zunächst per Induktion, dass $\|W_n D_i x\|_1 = \|W_n x\|_1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

Für den Induktionsanfang $n = 2$ müssen wir dies nur für D_2 beweisen, da D_1 die Identität ist. Es ist für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1 \\ & = |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2| = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|_1. \end{aligned}$$

Für den Induktionsschritt nutzen wir aus, dass zu einem Walsh Vektor $w \in \mathbb{R}^{2^n}$ ein Walsh Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ existiert mit $w = (v, \varepsilon v)$. Da weiter für alle $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^n$, $i \in \underline{n}$ und $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_i & 0 \\ 0 & \varepsilon D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\|_1 \\ & = \left\| \begin{pmatrix} W_n D_i x^1 + \varepsilon W_n D_i x^2 \\ W_n D_i x^1 - \varepsilon W_n D_i x^2 \end{pmatrix} \right\|_1 \\ & = \|W_n D_i (x^1 + x^2)\|_1 + \|W_n D_i (x^1 - x^2)\|_1 \end{aligned}$$

und mit der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} & = \|W_n (x^1 + x^2)\|_1 + \|W_n (x^1 - x^2)\|_1 \\ & = \left\| \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \right\|_1, \end{aligned}$$

ist, erhalten wir für alle $j \in \underline{2n}$

$$\|D_j x\|_S = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \left\{ \|D_j x\|_1, \frac{1}{\sqrt{n}} \|W_{2n} D_j x\|_1 \right\} = \frac{1}{\sqrt{n}} \max \left\{ \|x\|_1, \frac{1}{\sqrt{n}} \|W_{2n} x\|_1 \right\} = \|x\|_S.$$

Wir zeigen nun noch, dass die von D_i , $i \in \underline{n}$, und U_n erzeugte Gruppe von Isometrien hinreichend groß ist. Sei nun A ein Operator, der mit diesen Isometrien kommutiert.

Insbesondere gilt dann $D_i A = A D_i$, d.h.

$$(W(i, l)A(k, l))_{k, l=1}^n = (W(i, k)A(k, l))_{k, l=1}^n$$

für alle $i \in \underline{n}$. Ist also $k \neq l$, dann existiert, da W_n vollen Rang hat, ein $i \in \underline{n}$ mit $W(i, k) \neq W(i, l)$, woraus $A(k, l) = 0$ folgt. Damit ist A eine Diagonalmatrix.

Es bleibt zu zeigen, dass $A(k, k) = A(l, l)$ für alle $k, l \in \underline{n}$ ist. Da U_n eine Isometrie von S_n ist, haben wir direkt

$$A(k, k)U_n(k, l) = (AU_n)(k, l) = (U_n A)(k, l) = A(l, l)U_n(k, l),$$

also $A(k, k) = A(l, l)$. □

Wir berechnen nun einige Invarianten von S und S^* :

SATZ 3.9. (i) Es ist $\sqrt{n} \leq \pi_1(S_n) \leq \sqrt{2n}$ und $\sqrt{\frac{n}{2}} \leq \gamma_\infty(S_n) \leq \sqrt{n}$.

(ii) Für die Cotyp-2-Konstante von S_n gilt $C_2(S_n) \leq 4 \cdot \sqrt{2}$.

(iii) B_2^n ist das Ellipsoid maximalen Volumens, das in B_S liegt und $n^{\frac{1}{4}}B_2^n$ ist das Ellipsoid minimalen Volumens, das B_S umfasst. Insbesondere ist $d(S_n, \ell_2^n) = d(S_n^*, \ell_2^n) = n^{\frac{1}{4}}$.

Weiter existiert ein von n unabhängiges $C > 0$, so dass $\text{vr}(S_n) \leq C$ ist.

(iv) $n^{-\frac{1}{4}}B_2^n$ ist das Ellipsoid maximalen Volumens, das in B_{S^*} liegt, und B_2^n ist das Ellipsoid minimalen Volumens, das B_{S^*} umfasst.

Weiterhin ist $\frac{2}{\sqrt{2\pi e}}n^{\frac{1}{4}} \leq \text{vr}(S_n^*) \leq n^{\frac{1}{4}}$.

(v) $\mathcal{GL}(S^*) = \mathcal{GL}(S) \leq 8 \cdot b_4^2$, wobei b_4 die Konstante aus der Khintchine-Ungleichung bezeichnet.

BEWEIS. (i) Die Ungleichung folgt direkt aus der Khintchine-Ungleichung und Lemma 3.3:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} |\langle \varepsilon, x \rangle| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \|x\|_S.$$

Damit gilt für alle $N \in \mathbb{N}$ und x_1, \dots, x_N

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \|x_j\|_S &\leq \frac{\sqrt{2n}}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \sum_{i=1}^N \left| \left\langle \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, x_i \right\rangle \right| \\ &\leq \sqrt{2n} \sup_{\|x^*\|_{S^*}=1} \sum_{i=1}^N |x^*(x_i)|. \end{aligned}$$

Damit ist $\pi_1(S) \leq \sqrt{2n}$.

Da der Sobczyk-Raum genügend Symmetrien hat, folgt die zweite Ungleichung aus Lemma 2.18.

(ii) Jeder Teilraum von L_1 also insbesondere ℓ_1^{2n} hat Cotyp 2 mit Konstante $\sqrt{2}$. Der Faktor 4 entstammt den Äquivalenzkonstanten.

(iii) Wir wählen im Satz von John als $(u_i)_{i=1}^n$ die Standardbasis $(e_i)_{i=1}^n$ und $c_i = 1$ für alle $i \in \underline{n}$. Da B_S symmetrisch ist, genügt es einzusehen, dass

$$\sum_{i=1}^n c_i \langle x, u_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = \|x\|_2^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

Damit ist B_2^n das Ellipsoid maximalen Volumens, das in B_S enthalten ist. Weiter ist nach Lemma 2.19 $n^{\frac{1}{4}} B_2^n$ das Ellipsoid minimalen Volumens, das B_S umfasst. Lemma 2.19 liefert nun ebenfalls den Banach-Mazur Abstand von S_n zu ℓ_2^n .

Nach Satz 2.22 existiert ein $C > 0$, so dass

$$\text{vr}(S_n) \leq C \cdot C_2(S_n) \cdot (\log(C_2(S_n)))^4 \stackrel{(ii)}{\leq} 6 \log(6)^4 C.$$

(iv) Die Ellipsoide erhalten wir wie in (iii). Außerdem ist offensichtlich

$$\text{vr}(S_n^*) \leq \text{vr}(\ell_2^n) d(S_n^*, \ell_2^n) = n^{\frac{1}{4}}.$$

Definieren wir

$$K := \text{conv} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \varepsilon_i e_i \mid \varepsilon \in \{-1, 1\}^n \right\},$$

so ist $K \subseteq B_{S^*}$, also

$$\text{vr}(S^*) = n^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\text{vol}(B_{S^*})}{\text{vol}(B_{\ell_2^n})} \right)^{\frac{1}{n}} \geq n^{\frac{1}{4}} \left(\frac{(2/\sqrt{n})^n}{(\sqrt{2\pi e}/n)^n} \right)^{\frac{1}{n}} = n^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{2\pi e}}.$$

(v) Nach Lemma 2.26 ist $\mathcal{GL}(S_n) = \mathcal{GL}(S_n^*)$. Wir wenden nun Lemma 2.25 an. Da $C_2(\ell_1^n) = \sqrt{2}$ und $\mathcal{GL}(\ell_1^n) \leq \text{ubc}(\ell_1^n) = 1$ ist, erhalten wir die Abschätzung, da die Norm von S_n 4-äquivalent zu der eines Teilraums von ℓ_1^{2n} ist. \square

Wir wollen nun zeigen, dass für jede K -unbedingte normierte Basis $(x_i)_{i=1}^n$ von S_n gilt, dass

$$K^2 \cdot \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_S \geq Cn^{\frac{3}{4}}$$

für eine globale Konstante $C > 0$ ist.

Wir formulieren das diesbezügliche Resultat in einer allgemeineren Situation und verwenden dann die von uns ermittelten Invarianten.

LEMMA 3.10. *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, alle n -dimensionalen Banachräume X mit einer K -unbedingten normierten Basis $(x_i)_{i=1}^n$ und genügend Symmetrien gilt*

$$d(X, \ell_2^n) \leq c \cdot C_2(X)^2 (\log(C_2(X)))^4 \cdot \frac{K^2 \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_X}{\sqrt{n}}.$$

Insbesondere gilt für den Sobczyk-Raum

$$C'n^{\frac{3}{4}} \leq K^2 \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_S$$

für eine globale Konstante C' .

BEWEIS. Es ist für alle $a \in \mathbb{R}^n$

$$K \cdot \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|_X \geq \operatorname{Ave}_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i \right\|_X \geq \frac{1}{C_2(X)} \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir definieren

$$B := \left\{ a \in \mathbb{R}^n \mid \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|_X \leq 1 \right\}$$

und erhalten direkt

$$B \subseteq K \cdot C_2(X) \cdot B_2^n.$$

Sei nun \mathcal{E} das Ellipsoid maximalen Volumens, das in B enthalten ist. Da X genügend Symmetrien hat, ist nach Lemma 2.19 das Ellipsoid minimalen Volumens, das B umfasst, gegeben durch $\lambda \mathcal{E}$, wobei $\lambda = d(X, \ell_2^n)$ ist. Nach obiger Rechnung ist aufgrund der Minimalität von \mathcal{E}

$$\operatorname{vol}(\lambda \mathcal{E})^{\frac{1}{n}} \leq K \cdot C_2(X) \operatorname{vol}(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \leq c \cdot \frac{K \cdot C_2(X)}{\sqrt{n}}$$

für eine globale Konstante $c > 0$, wobei wir das übliche vom Lebesgue Maß induzierte Volumen auf dem \mathbb{R}^n verwenden.

Sei $C > 0$ die Konstante aus Satz 2.22. Es ist

$$\text{vr}(X) = \left(\frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(\mathcal{E})} \right)^{\frac{1}{n}} \leq C \cdot C_2(X) \cdot (\log(C_2(X)))^4.$$

Wir schätzen nun das Volumen von B nach unten ab. Hierzu betrachten wir den Quader

$$Q := \text{conv} \left\{ \frac{\varepsilon}{K \|\sum_{i=1}^n x_i\|_X} \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}^n \right\} \subseteq \text{conv} \left\{ \frac{\varepsilon}{\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\|_X} \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}^n \right\} \subseteq B.$$

Damit ist

$$\text{vol}(B) \geq \text{vol}(Q) \geq \left(\frac{2}{K \|\sum_{i=1}^n x_i\|_X} \right)^n.$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\begin{aligned} d(X, \ell_2^n) &= \lambda = \left(\frac{\text{vol}(B)}{\text{vol}(\mathcal{E})} \frac{\text{vol}(\lambda \mathcal{E})}{\text{vol}(B)} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq C \cdot C_2(X) \cdot (\log(C_2(X)))^4 \cdot c \frac{C_2(X) K^2 \|\sum_{i=1}^n x_i\|_X}{2\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{2} c \cdot C \cdot C_2(X)^2 (\log(C_2(X)))^4 \cdot \frac{K^2 \|\sum_{i=1}^n x_i\|_X}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Für den Sobczyk-Raum erhalten wir aus Satz 3.9, dass $d(S_n, \ell_2^n) = n^{\frac{1}{4}}$ ist und eine Konstante $C' > 0$ existiert mit

$$\frac{1}{2} c C C_2(S_n)^2 (\log(C_2(S_n)))^4 \leq C'$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt ebenfalls der Zusatz. \square

LEMMA 3.11. *Sei X ein n -dimensionaler normierter Raum mit K -unbedingter normierter Basis $(x_i)_{i=1}^n$.*

Dann gilt für die duale Basis $(x_i^)_{i=1}^n$ des Dualraums X^**

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{X^*} \leq K \pi_1(X).$$

Hat X genügend Symmetrien, so gilt außerdem

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_X \left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{X^*} \leq \sqrt{2} K^3 C_2(X^*) n.$$

BEWEIS. Wir wählen $a = \sum_{i=1}^n a_i x_i \in X$ mit $\|a\| = 1$ und

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{X^*} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^* \right) (a) = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \right\|_{X^*} &= \sum_{i=1}^n x_i^*(a) = \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n |a_i| = \sum_{i=1}^n \|a_i x_i\| \\ &\leq \pi_1(X) \sup_{\|a^*\|_{X^*}=1} \sum_{i=1}^n |a^*(a_i x_i)| = \pi_1(X) \sup_{\|a^*\|_{X^*}=1} \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a^*(a_i x_i) \\ &= \pi_1(X) \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i x_i \right\|_X \leq \pi_1(X) K \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|_X = K \pi_1(X). \end{aligned}$$

Wir zeigen noch den Zusatz. Sei $I : X^* \rightarrow \ell_2^n$, $I \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j^* \right) = (a_j)_{j=1}^n$. Da nach Lemma 2.8

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j^* \right\| \geq \frac{1}{KC_2(X^*)} \|a\|_2$$

ist, ist $\|I\| \leq KC_2(X^*)$. Aus Satz 2.16 erhalten wir weiter

$$\frac{1}{\sqrt{2}K} \left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\| \leq \gamma_\infty(X) \|\text{Id} : X^* \rightarrow \ell_2^n\| \leq \gamma_\infty(X) KC_2(X^*).$$

Mit dem gezeigt ist also

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_X \left\| \sum_{j=1}^n x_j^* \right\|_{X^*} \leq \sqrt{2} K^3 C_2(X^*) \pi_1(X) \gamma_\infty(X).$$

Aus Satz 2.18 folgt nun die Behauptung. □

Wir fassen beide Resultate für den Sobczyk-Raum zusammen.

SATZ 3.12. *Es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass*

$$Cn^{\frac{3}{4}} \leq \text{ubc}(S_n)^3 \pi_1(S_n^*).$$

Weiter ist

$$C\gamma_\infty(S_n^*) \leq \text{ubc}(S_n)^3 n^{\frac{1}{4}}.$$

BEWEIS. Aus Lemma 3.10 erhalten wir

$$Cn^{\frac{3}{4}} \leq K^2 \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_S.$$

Wenden wir jetzt Lemma 3.11 auf S_n^* an, erhalten wir

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|_S \leq K \pi_1(S^*).$$

Zusammengefasst haben wir also die Behauptung. □

KAPITEL 4

Störungen von ℓ_1^n

Wir wollen in diesem Kapitel untersuchen, wie sich die Geometrie des Raumes ℓ_1^n verändert, wenn wir sukzessive bis zu n Vektoren zu der Einheitskugel B_1^n hinzufügen. D.h. wir betrachten zu einer gegebenen Folge $(w_i)_{i=1}^n$ im \mathbb{R}^n und $1 \leq r \leq n$ die Banachräume X_r mit der Einheitskugel

$$K_r = K_r(w_1, \dots, w_r) := \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}.$$

Wir wollen hierbei stets voraussetzen, dass die (w_i) und (e_i) Extrempunkte des konvexen Körpers K_r sind, d.h.

$$w_i \notin \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_r\}$$

für alle $i \in \underline{r}$ und

$$e_i \notin \text{absconv} \{e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$$

für alle $i \in \underline{n}$. Es ist wohlbekannt, dass die Norm des zugehörigen Banachraums gegeben ist durch

$$(4.1) \quad \|x\|_{K_r} = \inf \left\{ \|a\|_1 + \|b\|_1 \mid x = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^r b_i w_i \right\}.$$

Zentral ist nun die Frage, inwieweit der Banach-Mazur Abstand zu ℓ_1^n sich verändert, wenn r anwächst. Ebenso wollen wir untersuchen, wie sich die Projektionskonstante des Dualraums verändert und herausfinden, ob wir eine Beziehung zwischen der Projektionskonstante des Dualraums und dem Abstand $d(X_r^*, \ell_\infty^n)$ feststellen können. Wir erinnern hierbei an Problem 1, d.h. an die Frage, ob es eine Funktion $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ mit

$$d(X_r^*, \ell_\infty^n) \leq f(\gamma_\infty(X_r^*))$$

gibt. Wir wollen zu Beginn dieses Kapitels einige qualitative Aussagen treffen und dann im weiteren Verlauf ein Verfahren angeben, wie man eine von der Dimension n unabhängige obere Abschätzung des Banach-Mazur Abstands zu ℓ_1^n aufstellen kann. Wir werden hierbei Methoden von Jean Bourgain und Lior Tzafriri in einer für die Situation verbesserten Form anwenden, die uns erlauben $d(X_r, \ell_1^n)$ durch einen Term bestehend aus der Projektionskonstante von X_r^* und dem Banach-Mazur Abstand eines r -dimensionalen Raums zu ℓ_∞^r abzuschätzen. Bei letzterem Raum handelt es sich um das Komplement Y_P des Raumes X_r^* - aufgefasst als Teilraum von ℓ_∞^{n+r} - bezüglich einer guten Projektion P . Im Anschluss daran geben wir eine exakte Formel für die Projektionskonstante an und danach noch ein Kriterium, wie man den Banach-Mazur Abstand $d(Y_P, \ell_\infty^r)$ abschätzen kann.

4.1. Grundlegende Betrachtungen und Zusammenfassung bekannter Ergebnisse

Zur Berechnung von $d(X_r, \ell_1^n)$ kann man die folgende Methode benutzen.

LEMMA 4.1. *Seien $C_1, C_2 > 0$, $x_1, \dots, x_n \in C_1 K_r$. Für alle $j \in \underline{n}$ gebe es $c^j \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^n c_i^j x_i = e_j$ und für alle $j \in \underline{r}$ gebe es $\tilde{c}^j \in \mathbb{R}^n$ mit $\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^j x_i = w_j$ und $\|c^j\|_1 \leq C_2$ und $\|\tilde{c}^j\|_1 \leq C_2$.*

Dann ist $d(\ell_1^n, X_r) \leq C_1 \cdot C_2$.

BEWEIS. Sei $d \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$\left\| \sum_{i=1}^n d_i x_i \right\|_{K_r} \leq \sum_{i=1}^n |d_i| \|x_i\|_{K_r} \leq C_1 \|d\|_1.$$

Seien $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^r$ mit $\|\sum_{i=1}^n d_i x_i\|_{K_r} = \|a\|_1 + \|b\|_1$ und

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^n d_i x_i = \sum_{i=1}^n a_i e_i + \sum_{i=1}^r b_i w_i = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_i c_i^j + \sum_{i=1}^r b_i \tilde{c}_i^j \right) x_j.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert uns

$$d_j = \sum_{i=1}^n a_i c_i^j + \sum_{i=1}^r b_i \tilde{c}_i^j$$

für alle $j \in \underline{n}$. Hiermit ist nun

$$\begin{aligned} \|d\|_1 &= \sum_{j=1}^n |d_j| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n a_i c_i^j + \sum_{i=1}^r b_i \tilde{c}_i^j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| \max_{i \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n |c_i^j| + \sum_{i=1}^r |b_i| \max_{i \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n |\tilde{c}_i^j| \leq C_2 \left\| \sum_{i=1}^n d_i x_i \right\|_{K_r}, \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Ungleichung (4.1) verwendet haben. \square

Anhand des Lemmas sieht man auch, dass Vektoren mit einer kleinen 1-Norm wenig Einfluss haben. Durch Anordnung der $(w_i)_{i=1}^r$ nach abfallender 1-Norm, können wir also zu einer vorgegebenen Schranke C nur die Vektoren betrachten, deren 1-Norm oberhalb dieser liegt. Ist etwa $1 \leq r' \leq r$ mit $\|w_i\|_1 \leq C$ für $i > r'$, so ist also

$$d(X_r, \ell_1^n) \leq C d(X_{r'}, \ell_1^n).$$

Um dies direkt einzusehen, definieren wir

$$K := \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$$

und

$$K' := \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_{r'}\}.$$

Ist $T \in L(\ell_1^n, X_{r'})$ ein Isomorphismus mit $\|T\| \|T^{-1}\| = d(\ell_1^n, X_{r'}) = \lambda$ mit

$$TB_1^n \subseteq K_{r'} \subseteq \lambda TB_1^n,$$

so ist $w_s \in C \cdot \lambda TB_1^n$ für alle $r' < s \leq r$. Damit ist

$$TB_1^n \subseteq K_r \subseteq C \lambda TB_1^n,$$

d.h. $d(\ell_1^n, X_r) \leq C d(\ell_1^n, X_{r'})$.

Diese Beobachtung rechtfertigt es, nur Vektoren zu betrachten, die eine "große" 1-Norm haben. Tatsächlich werden wir insbesondere an Fällen interessiert sein, bei denen $\|w_i\|_1$ größenordnungsmäßig \sqrt{n} ist.

Wir stellen noch eine weitere qualitative Beobachtung an. Zwei Banachräume, deren Einheitskugeln sich nur durch einen einzelnen Extrempunkt voneinander unterscheiden, haben einen beschränkten Banach-Mazur Abstand, d.h. die Geometrie eines Banachraums ändert sich nicht sprunghaft durch Hinzufügen eines weiteren Extrempunkts zu seiner Einheitskugel.

LEMMA 4.2. *Sei K eine Einheitskugel mit $B_1^n \subseteq K \subseteq B_2^n$, $x \in S^{n-1} \cap K^c$, $K' := \text{absconv} \{K \cup \{x\}\}$.*

Dann ist $d(K', K) \leq 4$.

BEWEIS. Wir wählen nach Hahn-Banach $x^* \in \partial K^*$ mit $x^*(x) = \|x\|_K$ und definieren $T \in L(\mathbb{R}^n)$ durch $T = \text{Id} + x^* \otimes x$. Dann ist für $y \in K$

$$Ty = y + x^*(y)x \in 2K'.$$

Damit ist $TK \subseteq 2K'$. Weiter ist

$$\left(\frac{1}{\|x\|_K} + 1\right)x = T\left(\frac{x}{\|x\|_K}\right) \in TK.$$

Somit ist $x \in TK$.

Sei nun $y = \tilde{y} + tx \in K'$ mit $\|\tilde{y}\|_K + |t| \leq 1$ gemäß (4.1). Dann ist

$$y = T\tilde{y} - x^*(\tilde{y})x + tx \in 2TK,$$

wobei wir $|x^*(\tilde{y})| + |t| \leq 1$ verwenden. Damit ist $K' \subseteq 2TK$, d.h. $d(K', K) \leq 4$. \square

Die durch iterative Anwendung des Lemmas erhaltene Abschätzung $d(\ell_1^n, X_r) \leq 4^r$ ist natürlich uninteressant, da schon ab $r \geq \log_4(n)$ die triviale Abschätzung besser ist. Weiterhin ist es schon beim Hinzufügen von zwei weiteren Vektoren nicht klar, inwieweit man das obige Lemma durch ein direktes Argument verallgemeinern kann.

Um bessere Abschätzungen zu erhalten, betten wir X_r^* mittels der Standardeinbettung in einen Raum $\ell_\infty(I)$ ein. Sei hierzu $I := \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$. Wir definieren die Abbildung $J: X_r^* \rightarrow \ell_\infty(I)$ durch

$$Jx := (\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle, \langle x, w_1 \rangle, \dots, \langle x, w_r \rangle).$$

Damit ergibt sich für ein $x \in \ell_\infty(I)$:

$$x \in J(X_r^*) \Leftrightarrow \forall k \in \mathcal{L}: x_{n+k} = \langle (x_1, \dots, x_n), w_k \rangle.$$

Wir können somit X_r^* als Teilraum von ℓ_∞^{n+r} auffassen. In [BoT1] konnten Bourgain und Tzafriri zeigen, dass gut komplementierte Teilräume von ℓ_p^n Räumen "eindeutige" Komplemente haben, d.h. alle Räume, die den Raum gut komplementieren, sind in einer kleinen Kugel des Banach-Mazur Kompaktums enthalten.

SATZ 4.3 ([BoT1], Theorem 5). *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $K \geq 1$ existieren Konstanten $c = c(K) > 0$ und $C = C(K) < \infty$, so dass für zwei Zerlegungen*

$$\ell_p^n = X_1 \oplus Y_1 = X_2 \oplus Y_2$$

mit

- (i) $\dim X_1 = \dim X_2$ und $d(X_1, X_2) \leq K$,
- (ii) $\|P_{X_i} : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\|, \|P_{Y_i} : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\| \leq K$ für $i \in \underline{2}$,
- (iii) $\dim X_1 = \dim X_2 \leq c\sqrt{n}$

gilt

$$d(Y_1, Y_2) \leq C.$$

Es wäre wünschenswert, auf Bedingung (iii) verzichten zu können, da diese in unserer Situation bedeutet, dass $r \leq c\sqrt{n}$ sein muss, d.h., dass wir um diesen Satz anwenden zu können, nur eine entsprechende Anzahl von Vektoren zu B_1^n hinzufügen dürfen. Eine Voraussetzung der Form (iii) - d.h. eine Beschränkung der Dimension - ist jedoch in der Tat notwendig. In [JoS1] (Conjecture 1) wurde vermutet, dass ein Teilraum Y von ℓ_p^n , $1 < p < \infty$, dessen Dimension proportional zu n ist, dicht bei $\ell_p^{\dim(Y)}$ liegen muss. Dieses Problem scheint für diese p nach wie vor ungelöst. Figiel und Johnson haben andererseits in [FiJo] gezeigt, dass sich ℓ_∞^{2n} in zwei n -dimensionale Teilräume zerlegen lässt, deren Gordon-Lewis Konstante in der Dimension wächst. In dem von uns gewählten Zugang können wir daher eine derartige Beschränkung der zulässigen Werte für r nicht umgehen.

Eine Überprüfung der funktionalen Zusammenhänge der Konstanten in dem Beweis von Bourgain und Tzafriri liefert $C \sim K^9$. Wir können für $r \leq c\sqrt{n}$ dieses Resultat auf $Y := JX_r^*$ und $X := (\text{Id} - P)\ell_\infty^{n+r}$ anwenden, wobei $P : \ell_\infty^{n+r} \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ eine Projektion auf JX_r^* mit $\|P\| = \gamma_\infty(X_r^*)$ ist. Dies liefert uns eine Abschätzung der Form $d(\ell_\infty^n, X_r^*) \leq Cr^9$. Tatsächlich lässt sich durch einfache Modifikationen eine Abschätzung der Form

$$d(\ell_\infty^n, X_r^*) \leq C\gamma_\infty(X_r^*)^7 r^2$$

erreichen. Der Faktor r entstammt hierbei der Abschätzung des Banach-Mazur Abstands zweier zufällig konstruierter r -dimensionaler Räume.

Auf die Details werden wir nicht eingehen, da wir die Methode von Bourgain und Tzafriri in unserer Situation verbessern können. Hierbei müssen wir natürlich beachten, dass innerhalb der Arbeit [BoT1] wie erwähnt einer anderen Fragestellung nachgegangen wurde, weshalb dort einer Optimierung der Konstanten und funktionalen Abhängigkeiten keine Rechnung getragen wurde. Für uns ist dies allerdings insofern sehr wichtig, als dass wir die sehr restriktive Einschränkung $r \leq c\sqrt{n}$ aus (iii) des Satzes deutlich aufweichen können und somit unsere Resultate auch für größere r anwenden können. Tatsächlich werden wir für gut komplementierte Teilräume r in der Größenordnung von n wählen können. Ein weiterer erheblicher Vorteil unseres Ansatzes ist, dass in der Abschätzung anstelle des Banach-Mazur Abstands der Zufallsräume der Abstand zwischen konkret gegebenen Räumen auftritt.

4.2. Teilräume von ℓ_∞^n und ihr Abstand zu ℓ_∞^k

Wir wollen uns in diesem Abschnitt von der konkreten Fragestellung lösen und beliebige Teilräume von ℓ_∞^n betrachten. Wir beginnen mit zwei einfachen Lemmata.

LEMMA 4.4. *Seien X_1, X_2, Y_1 und Y_2 Banachräume, so dass X_1 und Y_1 , bzw. X_2 und Y_2 isomorph sind. Weiterhin seien $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ und $Y_1 \cap Y_2 = \{0\}$.*

Dann ist

$$d(X_1 \oplus_1 X_2, Y_1 \oplus_1 Y_2) \leq 2d(X_1, Y_1)d(X_2, Y_2).$$

BEWEIS. Seien $I : X_1 \rightarrow Y_1, J : X_2 \rightarrow Y_2$ Isomorphismen mit $\|I\| = \|J\| = 1$. Wir definieren $T : X_1 \oplus X_2 \rightarrow Y_1 \oplus Y_2$ durch $T(x_1 + x_2) = Ix_1 + Jx_2$.

Dann ist $T^{-1} : Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow X_1 \oplus X_2$ gegeben durch $T^{-1}(y_1 + y_2) = I^{-1}y_1 + J^{-1}y_2$.

Wir haben dann

$$\|T\| = \sup_{\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} = 1} \|Ix_1\| + \|Jx_2\| \leq 1$$

und

$$\begin{aligned} \|T^{-1}\| &= \sup_{\|y_1\|_{Y_1} + \|y_2\|_{Y_2} = 1} \|I^{-1}y_1\| + \|J^{-1}y_2\| \\ &\leq \sup_{\|y_1\|_{Y_1} = 1} \|I^{-1}y_1\| + \sup_{\|y_2\|_{Y_2} = 1} \|J^{-1}y_2\| \\ &\leq \|I^{-1}\| + \|J^{-1}\|, \end{aligned}$$

d.h.

$$d(X_1 \oplus_1 X_2, Y_1 \oplus_1 Y_2) \leq \|T\| \|T^{-1}\| \leq 2 \|I^{-1}\| \|J^{-1}\|.$$

Bilden wir auf der rechten Seite das Infimum über alle Isomorphismen I und J , so erhalten wir die Behauptung. \square

LEMMA 4.5. *Sei Z ein endlich-dimensionaler Banachraum, X, Y komplementierte Teilräume von Z , so dass $Z = X \oplus Y$ ist.*

Ist P_X die Projektion von Z auf X gegeben durch die direkte Summe, d.h. $P_X(x + y) = x$ für $x + y \in X \oplus Y$, so ist

$$d(Z, X \oplus_1 Y) \leq 3 \|P_X\|.$$

BEWEIS. Offensichtlich ist $P_Y = \text{Id} - P_X$ die durch die direkte Summe gegebene Projektion auf Y , d.h. zu gegebenem $z \in X$ ist

$$\|z\| \leq \|P_X z\| + \|P_Y z\| = \|z\|_{X \oplus_1 Y} \leq \|P_X\| \|z\| + (1 + \|P_X\|) \|z\| \leq 3 \|P_X\| \|z\|,$$

d.h.

$$\|z\| \leq \|z\|_{X \oplus_1 Y} \leq 3 \|P_X\| \|z\|.$$

\square

In [BoT2] wurde bewiesen, dass Operatoren auf ℓ_p^n für $1 \leq p \leq \infty$, deren Matrixdarstellung nur 0en auf der Diagonale hat, auf einem relativ großen Teilraum fast verschwinden, d.h. genauer, dass es einen Teilraum mit zu n proportionaler Dimension gibt, auf dem die Restriktion des Operators eine kleine Operatornorm hat. Der Beweis hierzu bedient sich stochastischer Methoden, so dass der konstruierte Teilraum probabilistisch gewählt wird. In den Fällen von Operatoren auf ℓ_1^n , ℓ_∞^n und ℓ_2^n lässt sich der Beweis sehr elementar und konstruktiv durchführen (s. [Bour] bzw. [SpSr] für den Hilbertraumfall). Wir geben hier aufgrund der besseren funktionalen Zusammenhänge zwischen den Konstanten eine Version des Satzes für $p = 1$ und $p = \infty$ wieder, die auf Keith Ball zurückgeht. Der Vollständigkeit halber geben wir den Beweis mit an.

LEMMA 4.6 ([BoT3], Theorem 1.3'). Sei $p \in \{1, \infty\}$, $T \in L(\ell_p^n, \ell_p^n)$. Für jedes $M \in \mathbb{N}$ existiert eine Partition $(\sigma_h)_{h=1}^M$ von \underline{n}_l mit

$$\max_{h \in \underline{M}_l} \|R_{\sigma_h}(T - \text{diag}(T))R_{\sigma_h} : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\| \leq \frac{2}{M} \|T : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\|.$$

Insbesondere existiert ein $\sigma \subseteq \underline{n}_l$ mit $|\sigma| \geq \frac{n}{M}$ und

$$\|R_\sigma(T - \text{diag}(T))R_\sigma : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\| \leq \frac{2}{M} \|T : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\|.$$

BEWEIS. Es genügt, den Beweis für $p = \infty$ durchzuführen, da wir den Fall $p = 1$ durch Übergang zu T^* erhalten.

Sei $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ die Matrixdarstellung von $T - \text{diag}(T)$ bezüglich der Standardbasis. Aufgrund der Homogenität können wir verlangen, dass

$$\|T - \text{diag}(T) : \ell_p^n \rightarrow \ell_p^n\| = \max_{i \in \underline{n}_l} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = 1$$

ist. Durch die Unbedingtheit der Operatornorm können wir weiterhin fordern, dass $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j \in \underline{n}_l$ und außerdem $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1$ für alle $i \in \underline{n}_l$ ist.

Wir nehmen zunächst weiterhin an, dass $a_{ij} > 0$ ist. Den allgemeinen Fall leiten wir dann am Ende des Beweises her.

Offensichtlich ist $(1, \dots, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1. Damit existiert ein Eigenvektor $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \neq 0$ von A^t zum Eigenwert 1, d.h. für alle $j \in \underline{n}_l$ ist $\sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ij} = \gamma_j$ und

$$\sum_{j=1}^n |\gamma_j| = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^n \gamma_i a_{ij} \right| \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |\gamma_i| a_{ij} = \sum_{i=1}^n |\gamma_i|.$$

Damit ist die Ungleichung in dieser Abschätzung tatsächlich eine Gleichheit. Da alle $a_{ij} > 0$ sind, haben damit alle γ_j dasselbe Vorzeichen. O.B.d.A. sei $\gamma_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^n \gamma_i = 1$. Wir erhalten aus der Eigenwertbeziehung, dass dann sogar $\gamma_i > 0$ für alle $i \in \underline{n}_l$ ist. Sei $\Sigma := (\sigma_h)_{h=1}^M$ eine Partition von \underline{n}_l , so dass die durch

$$f(\Sigma) = \sum_{h=1}^M \sum_{i,j \in \sigma_h} \gamma_i a_{ij}$$

definierte Funktion ihr Minimum annimmt. Wir behaupten, dieses Σ erfüllt die Behauptung. Falls nicht, existiert etwa in σ_1 ein l mit

$$\theta := \sum_{j \in \sigma_1} a_{lj} > \frac{2}{M}.$$

Wir definieren nun eine Partition Σ^s , $2 \leq s \leq M$ durch

$$\sigma_1^s := \sigma_1 \setminus \{l\}, \sigma_s^s := \sigma_s \cup \{l\} \text{ und } \sigma_h^s := \sigma_h \text{ für } h \notin \{1, s\}.$$

Für jedes $2 \leq t \leq M$ ist

$$f(\Sigma) - f(\Sigma^t) = \gamma_l \sum_{j \in \sigma_1} a_{lj} + \sum_{i \in \sigma_1} \gamma_i a_{il} - \gamma_l \sum_{j \in \sigma_t} a_{lj} - \sum_{i \in \sigma_t} \gamma_i a_{il}.$$

Hierbei nutzen wir aus, dass die Diagonale 0 ist, d.h. es ist $a_{ii} = 0$ für alle $i \in \underline{n}$. Damit ist dann

$$\begin{aligned} 0 &\geq f(\Sigma) - \frac{1}{M-1} \sum_{s=2}^M f(\Sigma^s) \\ &= \gamma_l \sum_{j \in \sigma_1} a_{lj} + \sum_{i \in \sigma_1} \gamma_i a_{il} - \frac{1}{M-1} \left[\sum_{s=2}^M \gamma_l \sum_{j \in \sigma_s} a_{lj} + \sum_{s=2}^M \sum_{i \in \sigma_s} \gamma_i a_{il} \right] \\ &= \gamma_l \sum_{j \in \sigma_1} a_{lj} + \sum_{i \in \sigma_1} \gamma_i a_{il} - \frac{1}{M-1} \left[\gamma_l \sum_{j \in \underline{n} \setminus \sigma_1} a_{lj} + \sum_{i \in \underline{n} \setminus \sigma_1} \gamma_i a_{il} \right] \\ &\geq \gamma_l \theta - \frac{1}{M-1} [\gamma_l(1-\theta) + \gamma_l] = \gamma_l \frac{\theta M - 2}{M-1} > 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch.

Wir lösen uns nun von der Annahme, dass $a_{ij} > 0$ ist. Hierzu addieren wir zu $\varepsilon > 0$ die Matrix $((1 - \delta_{i,j})\varepsilon)_{i,j=1}^n$ zu $(a_{ij}^n)_{i,j=1}^n$. Bezeichnen wir mit S den durch die Matrix $((1 - \delta_{i,j})\varepsilon)_{i,j=1}^n$ gegebenen Operator, so haben wir also gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \|R_{\sigma_h}(T - \text{diag}(T))R_{\sigma_h}\| &\leq \|R_{\sigma_h}(T - \text{diag}(T))R_{\sigma_h}\| + \varepsilon |\sigma_h| \\ &= \|R_{\sigma_h}(T + S - \text{diag}(T + S))R_{\sigma_h}\| \\ &\leq \frac{2}{L} \|T + S\| \leq \frac{2}{L} (\|T\| + \varepsilon n). \end{aligned}$$

Lassen wir ε gegen 0 gehen, folgt die Behauptung. \square

Um dieses Lemma anzuwenden, benötigen wir die folgende Formel.

LEMMA 4.7. Ist $P \in L(\ell_\infty^n, \ell_\infty^n)$ eine Projektion und r die Dimension des Bildes von P , so ist

$$\sum_{j=1}^n |\langle Pe_j, e_j \rangle| \leq \|P\| \cdot r.$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass $\nu(P) = \sum_{j=1}^n \|Pe_j\|_\infty$ ist. Da $P = \sum_{j=1}^n e_j \otimes Pe_j$ ist, genügt es zu zeigen, dass $\nu(P) \geq \sum_{j=1}^n \|Pe_j\|_\infty$ ist. Sei hierzu $P = \sum_{j=1}^N x_j^* \otimes y_j$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \|Pe_l\|_\infty &\leq \sum_{l=1}^n \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{j=1}^N x_j^*(e_l) \langle y_j, e_k \rangle \right| \\ &\leq \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{j=1}^N x_j^*(\varepsilon) \langle y_j, e_k \rangle \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \|x_j^*\|_1 \|y_j\|_\infty = \sum_{j=1}^N \|x_j^* \otimes y_j\| = \nu(P). \end{aligned}$$

Sei $X := \text{Bild } P$. Dann existieren mit dem Auerbach-Lemma (s. [Wern], Satz II.2.6) normierte Basen $(x_i)_{i=1}^r$ von X und $(x_i^*)_{i=1}^r$ von X^* , so dass $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$ für $i, j \in \underline{r}$ ist. Insbesondere ist damit $\nu(\text{Id}_X) \leq r$. Mit der Idealeigenschaft haben wir damit

$$\nu(P: \ell_\infty^n \rightarrow \ell_\infty^n) \leq \|P: \ell_\infty^n \rightarrow X\| \nu(\text{Id}_X) \|J: X \rightarrow \ell_\infty^n\| \leq \|P\| \cdot r,$$

wobei J die natürliche Einbettung ist.

Mit der Hölder-Ungleichung ist

$$\sum_{j=1}^n |\langle Pe_j, e_j \rangle| \leq \sum_{j=1}^n \|Pe_j\|_\infty,$$

womit das Lemma bewiesen ist. □

Man beachte, dass man im Allgemeinen auf die Norm der Projektion in der Ungleichung des Lemmas nicht verzichten kann. Um dies einzusehen, betrachte man die Projektion auf $[(1, 1)^t]$, die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

als Abbildung auf ℓ_∞^2 gegeben ist.

Der folgende Satz ist der Schlüssel dazu, die Technik von Bourgain und Tzafriri über Invertierbarkeit von Teilmatrizen auf unser Problem anzuwenden. Die angewendeten Methoden der folgenden beiden Sätze orientieren sich in Teilen an **[BoT1]**, **[BoT3]** und **[JoS1]**. Mit Ausnahme von Lemma 4.7 lassen sich sämtliche Beweisschritte auf offensichtliche Weise ebenfalls für ℓ_1^n anwenden. Ersetzt man dieses Lemma durch eines, das für ℓ_1^n gültig ist, so erhält man die analogen Resultate auch in diesem Fall. Da dies für unser Problem nicht relevant ist, verzichten wir darauf.

SATZ 4.8. *Seien $C > 0$, $r, n \in \mathbb{N}$, $r \leq \frac{n}{256C^2}$, $X \subseteq \ell_\infty^n$ ein Teilraum der Dimension $n - r$, $P_X \in L(\ell_\infty^n, \ell_\infty^n)$ eine Projektion auf X mit $\|P_X\| \leq C$.*

Dann existiert ein Teilraum G von X mit $\dim(G) = r$, $\sigma \subseteq \underline{n}$ mit $|\sigma| = n - r$, so dass mit $H := \ell_\infty^\sigma$ gilt

$$\ell_\infty^n = G \oplus H, \quad \|P_G\| \leq 2 \|P_X\| \quad \text{und} \quad d(G, \ell_\infty^r) \leq 2 \|P_X\|.$$

Hierbei bezeichne $P_G \in L(\ell_\infty^n, \ell_\infty^n)$ die bezüglich der direkten Summe gegebene Projektion auf G .

BEWEIS. Wir wählen ein $M \in \mathbb{N}$ mit $8 \|P_X\| < M \leq 16 \|P_X\|$. Nach Lemma 4.6 existiert $\sigma_1 \subseteq \underline{n}$ mit $|\sigma_1| \geq \frac{n}{M}$ und

$$\|R_{\sigma_1}(P_X - \text{diag}(P_X))R_{\sigma_1}\| \leq \frac{2}{M} \|P_X\| < \frac{2}{8 \|P_X\|} \cdot \|P_X\| = \frac{1}{4}.$$

Definieren wir

$$\sigma_2 := \left\{ i \in \sigma_1 : |\langle e_i, (\text{Id} - P_X)e_i \rangle| > \frac{1}{4} \right\},$$

so ist mit Lemma 4.7

$$\frac{|\sigma_2|}{4} < \sum_{j \in \sigma_2} |\langle P_X e_j, e_j \rangle| \leq \sum_{j=1}^n |\langle P_X e_j, e_j \rangle| \leq \|P_X\| \cdot r \leq 2 \|P_X\| \cdot r \leq \frac{n}{128 \|P_X\|}$$

und damit

$$|\sigma_1| - |\sigma_2| > \frac{n}{M} - \frac{n}{32 \|P_X\|} \geq \frac{n}{32 \|P_X\|} \geq 4r.$$

Deshalb existiert $\sigma_3 \subseteq \sigma_1 \setminus \sigma_2$ mit $|\sigma_3| = r$ und wir haben

$$\|R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} - R_{\sigma_3}\| \leq \|R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} - \text{diag}(R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3})\| + \|\text{diag}(R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3}) - R_{\sigma_3}\| < \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $\sigma := \underline{n} \setminus \sigma_3$ und $G := P_X \ell_\infty^{\sigma_3}$ haben wir für alle $u \in \ell_\infty^{\sigma_3}$

$$\|u\|_\infty \leq \|(R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} - R_{\sigma_3})u\|_\infty + \|R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} u\|_\infty \leq \frac{\|u\|_\infty}{2} + \|R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} u\|_\infty,$$

d.h.

$$\frac{\|u\|_\infty}{2} \leq \|R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} u\|_\infty.$$

Hiermit haben wir erhalten, dass für $u \in \ell_\infty^{\sigma_3}$ und $v \in \ell_\infty^\sigma$

$$\|P_X u + v\|_\infty \geq \|R_{\sigma_3}(P_X u + v)\|_\infty \geq \|R_{\sigma_3} P_X R_{\sigma_3} u\|_\infty \geq \frac{\|u\|_\infty}{2}$$

und damit $G \oplus H = \ell_\infty^n$ ist. Außerdem ist

$$\frac{\|u\|_\infty}{2} \leq \|P_X u\|_\infty \leq \|P_X\| \|u\|_\infty$$

für alle $u \in \ell_\infty^{\sigma_3}$, d.h. $d(G, \ell_\infty^{\sigma_3}) \leq 2 \|P_X\|$.

□

Wir erhalten damit eine Abschätzung für den Banach-Mazur Abstand in Abhängigkeit von der Projektionskonstante und dem Banach-Mazur Abstand des komplementären Teilraums zu ℓ_∞^r .

SATZ 4.9. *Sei $C > 0$, $r \leq \frac{n}{256C^2}$, X ein Teilraum von ℓ_∞^n mit Kodimension r . Existiert eine Projektion $P_X \in L(\ell_\infty^n, \ell_\infty^n)$ auf X mit $\|P_X\| \leq C$, so ist*

$$d(X, \ell_\infty^{n-r}) \leq 2^4 \cdot 3^4 \cdot \|P_X : \ell_\infty^n \rightarrow \ell_\infty^n\|^6 d(\ell_\infty^r, (\text{Id} - P_X)\ell_\infty^n).$$

BEWEIS. Seien G und H wie in Satz 4.8, $P_Y := \text{Id} - P_X$, $Y := P_Y \ell_\infty^n$, und $\tilde{Y} := P_H Y$, wobei P_H die durch die direkte Summe $\ell_\infty^n = G \oplus H$ gegebene Projektion bezeichne.

Wir zeigen

- (i) $d(X, G \oplus_1 (X \cap H)) \leq 6 \|P_X\|$
- (ii) $d(G \oplus_1 (X \cap H), \tilde{Y} \oplus_1 (X \cap H)) \leq 24 \|P_X\|^3 d(\ell_\infty^r, X)$
- (iii) $d(\tilde{Y} \oplus (X \cap H), \ell_\infty^{n-r}) \leq 9 \|P_X\|^2.$

Daraus folgt dann unmittelbar die Behauptung.

Wir zeigen (i). Es ist $X = X \cap (G \oplus H) = G \oplus (X \cap H)$, da $G \subseteq X$ ist. Weiter ist für jedes $x \in X$

$$P_H x = x - P_G x \in X,$$

d.h. $P_H X \subseteq X$. Insbesondere ist damit $P_H X = X \cap H$. Man beachte weiterhin, dass $\dim G = r$ und damit $\dim X \cap H = n - 2r$ ist.

Mit $X = G \oplus (X \cap H)$ und Lemma 4.5 haben wir

$$d(X, G \oplus_1 (X \cap H)) \leq 3 \|P_G\| \leq 6 \|P_X\|.$$

Um (ii) zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass $d(Y, \tilde{Y}) \leq 6 \|P_X\|^2$ ist, denn es ist $y = P_Y(y - P_G y)$ für alle $y \in Y$ und damit

$$3 \|P_X\| \|y\|_\infty \geq \|P_H\| \|y\|_\infty \geq \|P_H y\|_\infty = \|y - P_G y\|_\infty \geq \frac{\|y\|_\infty}{\|P_Y\|} \geq \frac{\|y\|_\infty}{2 \|P_X\|}.$$

Insbesondere sind damit Y und \tilde{Y} isomorph, d.h. sie haben die gleiche Dimension.

Mit Lemma 4.4 erhalten wir

$$\begin{aligned} & d\left(G \oplus_1 (X \cap H), \tilde{Y} \oplus_1 (X \cap H)\right) \\ & \leq 2d(G, \tilde{Y}) \leq 2d(G, \ell_\infty^r) d(\ell_\infty^r, Y) d(Y, \tilde{Y}) \leq 24 \|P_X\|^3 d(\ell_\infty^r, Y). \end{aligned}$$

Kommen wir als letztes zu (iii). Hier haben wir für alle $z \in H$

$$z = P_H z = P_H P_Y z + P_H P_X z \in \tilde{Y} \oplus (X \cap H),$$

wobei wir verwenden, dass $\dim \tilde{Y} = r$ und $\dim H = n - r$ ist. Damit erhalten wir nun

$$\begin{aligned} \|z\|_\infty & \leq \|P_H P_Y z\|_\infty + \|P_H P_X z\|_\infty = \|z\|_{\tilde{Y} \oplus_1 (H \cap X)} \\ & \leq \|P_H\| (\|P_Y z\|_\infty + \|P_X z\|_\infty) \leq 9 \|P_X\|^2 \|z\|_\infty, \end{aligned}$$

d.h. wir haben

$$d(\tilde{Y} \oplus_1 (X \cap H), \ell_\infty^{n-r}) \leq 9 \|P_X\|^2.$$

□

Wir können somit den Banach-Mazur Abstand von X_r zu ℓ_1^n durch die Anzahl der Störvektoren abschätzen, indem wir X_r^* in ℓ_∞^{n+r} einbetten und obigen Satz auf das eingebettete Bild von X anwenden. Außerdem nutzen wir statt der Standardabschätzung für den Banach-Mazur Abstand die auf Giannopoulos zurückgehende Abschätzung $d(\ell_\infty^r, Y_P) \leq C r^{\frac{5}{6}}$ für eine globale Konstante $C > 0$ (s. [Gian], Theorem 1), wobei Y_P das Komplement von X in ℓ_∞^{n+r} bezüglich der Projektion P bezeichne.

KOROLLAR 4.10. *Es gibt eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $C > 0$, alle $r \leq \frac{cn}{C^2}$ und alle $w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}^n$ mit $\gamma_\infty(X_r^*) \leq C$ gilt*

$$d(X_r, \ell_1^n) = d(X_r^*, \ell_\infty^n) \leq C \cdot \gamma_\infty(X_r^*)^6 \cdot r^{\frac{5}{6}}.$$

4.3. Die Projektionskonstante von X_r^*

Wir wollen nun eine Formel für die Projektionskonstante der Räume X_r^* finden. Wir identifizieren dazu den Raum erneut mittels der Standardeinbettung $J : X_r^* \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ als Teilraum von ℓ_∞^{n+r} , d.h.

$$Jx^* = \begin{pmatrix} x^*(e_1) \\ \vdots \\ x^*(e_n) \\ x^*(w_1) \\ \vdots \\ x^*(w_r) \end{pmatrix}.$$

Sei $P : \ell_\infty^{n+r} \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ eine Projektion auf $J(X_r^*)$. Dann ist

$$P = \sum_{i=1}^n \langle f_i, \cdot \rangle J e_i$$

für biorthonormale Vektoren $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}^{n+r}$. Wir schreiben nun $f_k = \sum_{i=1}^{n+r} a_i^k e_i$. Dann gilt für alle $j, k = 1, \dots, n$:

$$\delta_{j,k} = \langle f_k, J e_j \rangle = a_j^k + \sum_{i=1}^r w_i(j) a_{n+i}^k,$$

d.h.

$$(4.3) \quad a_j^k = \delta_{j,k} - \sum_{i=1}^r w_i(j) a_{n+i}^k.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\|P\| &= \max_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{n+r}} \left\| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n+r} \varepsilon_i a_i^k v_k \right\|_{\infty} \\
&= \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{n+r}} \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{i=1}^{n+r} \varepsilon_i a_i^k \right|, \max_{l \in \underline{r}} \left| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n+r} \varepsilon_i a_i^k w_l(k) \right| \right\} \\
&= \sup_{\varepsilon \in \{-1,1\}^{n+r}} \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{i=1}^{n+r} \varepsilon_i a_i^k \right|, \max_{l \in \underline{r}} \left| \sum_{i=1}^{n+r} \sum_{k=1}^n \varepsilon_i a_i^k w_l(k) \right| \right\} \\
&= \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \|a^k\|_1, \max_{l \in \underline{r}} \sum_{i=1}^{n+r} \left| \sum_{k=1}^n a_i^k w_l(k) \right| \right\}.
\end{aligned}$$

Mit (4.3) folgt weiter

$$\begin{aligned}
\|P\| &= \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \left\{ \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| + \left| 1 - \sum_{i \leq r} w_i(k) a_{n+i}^k \right| + \sum_{j \neq k} \left| \sum_{i \leq r} w_i(j) a_{n+i}^k \right| \right\}, \right. \\
&\quad \max_{l \in \underline{r}} \left\{ \sum_{i \leq r} \left| \sum_{k=1}^n w_l(k) a_{n+i}^k \right| \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n \left| \left(1 - \sum_{i \leq r} w_i(j) a_{n+i}^j \right) w_l(j) - \sum_{k \neq j} \sum_{i \leq r} w_i(j) a_{n+i}^k w_l(k) \right| \right\} \right\} \\
&= \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \left\{ \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| + \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i \leq r} w_i(j) a_{n+i}^k \right| \right\}, \right. \\
&\quad \left. \max_{l \in \underline{r}} \left\{ \sum_{i \leq r} \left| \sum_{k=1}^n w_l(k) a_{n+i}^k \right| + \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{k=1}^n \sum_{i \leq r} w_i(j) w_l(k) a_{n+i}^k \right| \right\} \right\}.
\end{aligned}$$

Offensichtlich erhalten wir für jede Wahl der $(a_{n+i}^k)_{i \in \underline{r}, k \in \underline{n}}$ eine Projektion mit der angegebenen Norm. Da wir alle Projektionen auf diese Weise erhalten, haben wir eine Formel für die Projektionskonstante des Raumes X_r^* .

Bevor wir dies in einem Satz festhalten, geben wir noch eine zweite äquivalente Formulierung an, die mitunter einfacher zu handhaben ist. Wir wählen $(b_m^i)_{i,m=1}^r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und

$v_i \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$ mit $a_{n+i} = \sum_{m=1}^r b_m^i w_m + v_i$ für alle $i \in \underline{r}$, d.h.

$$a_{n+i}^k = \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_m(k)$$

für alle $i \in \underline{r}$, $k \in \underline{n}$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \|P\| &= \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right| + \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right|, \right. \\ &\quad \max_{l \in \underline{n}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{k=1}^n w_l(k) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^r w_i(j) w_l(k) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right| + \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right|, \right. \\ &\quad \left. \max_{l \in \underline{n}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i \langle w_l, w_m \rangle \right| + \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i \langle w_l, w_m \rangle \right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Gehen wir zum Infimum über alle Wahlen von a_{n+i} , $i = 1, \dots, r$ über, haben wir damit eine präzise Formel für die Projektionskonstante gefunden. Man beachte, dass es sich bei der Abbildung, die die Matrix $(a_{n+i}^k)_{i \in \underline{r}, k \in \underline{n}}$ auf die Norm der zugehörigen Projektion abbildet, um eine stetige Abbildung handelt. Da weiterhin $\gamma_\infty(X_r^*) \leq \sqrt{r} + 1$ mit Lemma 2.14 ist, brauchen wir nur solche Projektionen zu betrachten, bei denen $|a_{n+i}^k| \leq \sqrt{r} + 1$ ist. Aus Kompaktheitsgründen existiert somit eine Matrix, deren zugehörige Projektion die Projektionskonstante liefert.

SATZ 4.11. Seien $w_1, \dots, w_r \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$K_r := \text{absconv} \{e_1, \dots, e_n, w_1, \dots, w_r\}$$

genau $2(n+r)$ Extrempunkte besitzt. Sei X_r der Banachraum, dessen Einheitskugel K_r ist.

Dann ist

$$\begin{aligned}
\gamma_\infty(X_r^*) &= \min_{(a_{n+i}^k)_{i \in \underline{r}, j \in \underline{n}} \in \mathbb{R}^{r \times n}} \left\{ \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \left\{ \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| + \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i=1}^r w_i(j) a_{n+i}^k \right| \right\} \right\} \right. \\
&\quad \left. \max_{l \in \underline{r}} \left\{ \sum_{i=1}^r |\langle w_l, a_{n+i} \rangle| + \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) \langle w_l, a_{n+i} \rangle \right| \right\} \right\} \\
&= \min \left\{ \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right| \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \right. \right. \\
&\quad \left. \max_{l \in \underline{r}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i \langle w_l, w_m \rangle \right| + \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) \sum_{m=1}^r b_m^i \langle w_l, w_m \rangle \right| \right\} \\
&\quad \left. \left| (b_m^i)_{i,m=1}^r, v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp \right. \right\}.
\end{aligned}$$

Wir wollen zum besseren Verständnis der Formel einige heuristische Betrachtungen anstellen. Fasst man das äußere Maximum in der Formel mit den a_{n+i}^k zu einer Summe zusammen, so besteht die Formel aus vier Summanden. Die ersten drei Terme sind klein, falls alle a_{n+i} klein gewählt werden. Wählt man etwa alle $a_{n+i} = 0$, so verschwinden diese Terme, während der vierte Term $\max_{i \in \underline{r}} \|w_i\|_1$ liefert. Der vierte Term verschwindet hingegen, wenn wir $(a_{n+i})_{i=1}^r$ biorthogonal zu $(w_i)_{i=1}^r$ wählen. Man beachte weiter, dass dann der dritte Term 1 wird. In diesem Fall liefern die ersten beiden Terme also die Größenordnung der Norm der Projektion. Kombiniert man beide Ansätze, erkennt man, dass die $l \in \underline{r}$, für die $\|w_l\|_1$ genügend klein ist, keinen Anteil an der Projektion liefern.

Da die Formel sehr unhandlich ist, wollen wir im nächsten Kapitel die in Frage kommenden Projektionen unter einigen Zusatzannahmen wie Orthogonalität der (w_i) und $\|w_i\|_1 \sim \sqrt{n}$ genauer bestimmen.

Wir wollen zuvor jedoch noch einmal darauf zurückkommen, wie man den Banach-Mazur Abstand $d((\text{Id} - P)\ell_\infty^{n+r}, \ell_\infty^r)$ berechnen kann. Ausgehend von einer Projektion P auf das eingebettete Bild von X_r^* bestimmen wir den komplementären Raum Y aus Satz 4.9, bzw. geben wir eine zu der Norm des Raums äquivalente Norm auf dem \mathbb{R}^r an.

Sei $P = \sum_{k=1}^n \langle f_k, \cdot \rangle J e_k : \ell_\infty^{n+r} \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ eine Projektion, wie sie vor Satz 4.11 definiert wurde.

Wir bezeichnen mit $(p_{ij})_{i,j=1}^{n+r}$ die Matrix bzgl. der Einheitsvektoren, die P beschreibt. Dann ist

$$\begin{aligned}
(p_{ij})_{i,j=1}^{n+r} &= (\langle Pe_j, e_i \rangle)_{i,j=1}^{n+r} = \left(\left\langle \sum_{k=1}^n \langle f_k, e_j \rangle J e_k, e_i \right\rangle \right)_{i,j=1}^{n+r} \\
&= \begin{pmatrix} f_1(1) & \dots & f_1(n) & f_1(n+1) & \dots & f_1(n+r) \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ f_n(1) & \dots & f_n(n) & f_n(n+1) & \dots & f_n(n+r) \\ \dots & \sum_{k=1}^n \langle f_k, e_j \rangle w_1(k) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \dots & \sum_{k=1}^n \langle f_k, e_j \rangle w_r(k) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 & a_{n+1}^1 & \dots & a_{n+r}^1 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_n^n & a_{n+1}^n & \dots & a_{n+r}^n \\ \dots & \sum_{k=1}^n a_j^k w_1(k) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ \dots & \sum_{k=1}^n a_j^k w_r(k) & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{c|c} (\delta_{j,i} - \sum_{m=1}^r w_m(j) a_{n+m}^i)_{i,j=1}^n & (a_j^i)_{i=1,j=n+1}^{n, n+r} \\ \hline (\sum_{k=1}^n (\delta_{j,k} - \sum_{m=1}^r w_m(j) a_{n+m}^k) w_{n-i}(k))_{i=n+1,j=1}^{n+r, n} & (\sum_{k=1}^n a_j^k w_{i-n}(k))_{i,j=n+1}^{n+r} \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $Q := \text{Id} - P$ als darstellende Matrix

$$(4.4) \quad \left(\begin{array}{c|c} (\sum_{m=1}^r w_m(j) a_{n+m}^i)_{i,j=1}^n & (-a_j^i)_{i=1,j=n+1}^{n, n+r} \\ \hline (-\sum_{k=1}^n (\delta_{j,k} - \sum_{m=1}^r w_m(j) a_{n+m}^k) w_{i-n}(k))_{i=n+1,j=1}^{n+r, n} & (\delta_{j,i} - \sum_{k=1}^n a_j^k w_{i-n}(k))_{i,j=n+1}^{n+r} \end{array} \right).$$

Wir wollen zeigen, dass die Vektoren

$$Qe_{n+i} = \begin{pmatrix} -a_{n+i}^1 \\ \vdots \\ -a_{n+i}^n \\ \delta_{i,1} - \langle a_{n+i}, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \delta_{i,r} - \langle a_{n+i}, w_r \rangle \end{pmatrix}, i = 1, \dots, r,$$

eine Basis von $Y_P := \text{Bild } Q$ darstellen.

Wir definieren

$$\left\| \sum_{i=1}^r b_i Qe_{n+i} \right\|_{\infty} = \max \left\{ \max_{k \in \mathcal{I}_1} \left| \sum_{i=1}^r b_i a_{n+i}^k \right|, \max_{l \in \mathcal{I}_2} \left| b_l - \sum_{i=1}^r b_i \langle a_{n+i}, w_l \rangle \right| \right\} =: \|b\|_{Y_P}.$$

Da die Dimension von Bild P gerade n und damit $\dim \text{Bild } Q = r$ ist, genügt es offensichtlich festzustellen, dass $\|\cdot\|_{Y_P} \geq \frac{1}{2n \max_{j \in \mathcal{I}_2} \|w_j\|_{\infty}} \|\cdot\|_{\infty}$ ist. Damit ist dann $(Qe_{n+i})_{i=1}^r$ eine Basis von Y_P .

Sei $b \in \mathbb{R}^r$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \max_{k \in \mathcal{I}_1} \left| \sum_{i=1}^r b_i a_{n+i}^k \right| &\geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| \sum_{i=1}^r b_i a_{n+i}^k \right| \\ &\geq \max_{l \in \mathcal{I}_2} \frac{1}{n \max_{j \in \mathcal{I}_2} \|w_j\|_{\infty}} \left| \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^r b_i a_{n+i}^k w_l(k) \right| \\ &= \frac{1}{n \max_{j \in \mathcal{I}_2} \|w_j\|_{\infty}} \max_{l \in \mathcal{I}_2} \left| \sum_{i=1}^r b_i \langle a_{n+i}, w_l \rangle \right|. \end{aligned}$$

Damit ist dann

$$\begin{aligned} 2 \|b\|_{Y_P} &\geq \max_{l \in \mathcal{I}_2} \left\{ \frac{1}{n \max_{j \in \mathcal{I}_2} \|w_j\|_{\infty}} \left| \sum_{i=1}^r b_i \langle a_{n+i}, w_l \rangle \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| b_l - \sum_{i=1}^r b_i \langle a_{n+i}, w_l \rangle \right| \right\} \geq \frac{1}{n \max_{j \in \mathcal{I}_2} \|w_j\|_{\infty}} \|b\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Wir fassen diese Beobachtungen in einem Satz zusammen.

SATZ 4.12. Sei $J : X_r^* \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ die kanonische Einbettung, $P : \ell_\infty^{n+r} \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ eine Projektion mit Bild $P = JX_r^*$, $Y_P := (\text{Id} - P)\ell_\infty^{n+r}$.

Dann ist durch $((\text{Id} - P)e_{n+i})_{i=1}^r$ eine Basis von Y_P gegeben.

Für jede invertierbare $(c_i^m)_{i,m=1}^r$ Matrix ist ebenfalls $x_m := \sum_{i=1}^r c_i^m (\text{Id} - P)e_{n+i}$, $m = 1, \dots, r$ eine Basis von Y_P und

$$\left\| \sum_{m=1}^r b_m x_m \right\|_\infty = \max \left\{ \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^k \right|, \max_{l \in \underline{r}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r c_i^m (\delta_{i,l} - \langle a_{n+i}, w_l \rangle) \right| \right\}.$$

Sind die a_{n+i} biorthogonal zu den w_l , so haben wir insbesondere

$$\left\| \sum_{m=1}^r b_m x_m \right\|_\infty = \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^k \right|.$$

Ein naheliegender Ansatz, den Banach-Mazur Abstand von Y_P zu ℓ_∞^r zu beschränken, ist der Versuch, eine $r \times r$ Teilmatrix der Matrix $(a_{n+i}^k)_{i \in \underline{r}, k \in \underline{n}}$ zu finden, die gut invertierbar ist.

LEMMA 4.13. Sei $C > 0$, es gelte $\langle a_{n+i}, w_j \rangle = \delta_{i,j}$ für $i, j \in \underline{n}$. Es gebe paarweise verschiedene $k_1, \dots, k_r \in \underline{n}$ und eine Matrix $(c_i^m)_{i,m=1}^r$ mit

$$\sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^{k_l} = \delta_{m,l}$$

für alle $m, l \in \underline{r}$.

Dann ist $d(Y_P, \ell_\infty^r) \leq \max_{k \in \underline{n}} \sum_{m=1}^r \left| \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^k \right|$.

Insbesondere ist $d(Y_P, \ell_\infty^r) \leq \max_{i \in \underline{r}} \|c_i\|_1 \|P\|$.

BEWEIS. Sei $b \in \mathbb{R}^r$. Dann ist

$$\max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^k \right| \leq \|b\|_\infty \max_{k \in \underline{n}} \sum_{m=1}^r \left| \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^k \right|.$$

Andererseits ist

$$\max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^k \right| \geq \max_{l \in \underline{r}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i}^{k_l} \right| = \|b\|_\infty.$$

Den Zusatz erhalten wir direkt aus Satz 4.11. \square

Ist $(a_{n+i})_{i=1}^r$ biorthogonal zu $(w_i)_{i=1}^r$, dann ist aus Dimensionsgründen eine $r \times r$ Teilmatrix von $(a_{n+i})_{i \in \underline{r}, k \in \underline{n}}$ invertierbar, d.h. die Existenz der k_1, \dots, k_r ist stets gegeben. Man beachte, dass es ausreicht, eine invertierbare Teilmatrix dieser Matrix zu finden, deren Inverse eine kleine Operatornorm als Operator auf ℓ_∞^r hat. Wie wir in Beispiel 5.11 sehen werden, ist diese Abschätzung allerdings im Allgemeinen zu grob, d.h. eine Inverse mit kleiner Norm muss nicht existieren.

Weiterhin wollen wir anmerken, dass selbst das analoge Problem im euklidischen noch offen ist. Dieses wurde von Kashin und Tzafriri in einem unveröffentlichten Artikel behandelt. Darauf aufbauend untersuchte Rudelson in [Rude], für welche $r \leq k \leq n$ eine gegebene $n \times r$ -Matrix $A = (a_{ij})_{i \in \underline{n}, j \in \underline{r}}$ mit orthonormalen Zeilen eine $k \times r$ -Untermatrix enthält, so dass die euklidische Norm auf \mathbb{R}^r äquivalent zu $\|R_I A^t\|_2$ ist, wobei I die Menge der k gewählten Koordinaten bezeichne. Er konnte zeigen, dass $k \leq Cr \log r \cdot t^2$ gewählt werden kann, wobei $t = \max_{j \in \underline{n}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{r}} \left(\sum_{i=1}^r |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ist.

4.4. Volumensquotient von X_r

Wir wollen zum Abschluss des Kapitels noch auf den Volumensquotienten des Raumes X_r eingehen. Für diese Invariante benötigen wir ein Lemma, um das Volumen eines Polytops abzuschätzen.

LEMMA 4.14. *Sei $M \subseteq \partial B_2^n$ eine endliche Menge, $K := \text{absconv } M$ ein konvexer Körper. Ist $2 \leq k \leq n$ mit $|M| \leq kn$, so ist*

$$\text{vol}(K)^{\frac{1}{n}} \leq C \cdot \frac{k}{n},$$

für eine globale Konstante $C > 0$.

BEWEIS. (i) Seien $x_1, \dots, x_n \in M$. Sei $T \in L(\mathbb{R}^n)$ die lineare Abbildung, die durch $Te_i = x_i$ definiert ist. Dann ist $\text{conv}\{x_1, \dots, x_n, 0\} = T(\text{conv}\{e_1, \dots, e_n, 0\})$ und damit erhalten wir mit der Hadamardschen Determinantenungleichung

$$\begin{aligned} \text{vol}(\text{conv}\{x_1, \dots, x_n, 0\}) &= |\det(T)| \text{vol}(\text{conv}\{e_1, \dots, e_n, 0\}) \\ &\leq \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \|Te_i\|_2 \leq \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

(ii) Wir zerlegen K in Simplizia, wobei wir den Satz von Caratheodory verwenden:

$$K = \bigcup_{x_1, \dots, x_n \in M} \text{conv} \{x_1, \dots, x_n, 0\}.$$

Wir erhalten damit unter Verwendung von (i) und der Stirlingformel für das Volumen von K die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \text{vol}(K)^{\frac{1}{n}} &\leq \binom{|M|}{n+1}^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{(nk)!}{(nk-n)!n!}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{2\pi nk}(nk)^{nk}e^{-nk}e^{\frac{1}{12(nk-1)}}}{(nk-n)^{nk-n}e^{-nk+n} \cdot n^{2n}e^{-2n}}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq C \frac{(nk)^k e^{-k}}{(nk-k)^{k-1} e^{-k+1} n^2} \leq \frac{2C}{e} \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

für eine globale Konstante $C > 0$. □

Da offensichtlich

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq B_1^n \subseteq K_r$$

ein Ellipsoid in K_r ist, liefert dieses Lemma

KOROLLAR 4.15. *Es gibt Konstanten $c, C > 0$, so dass für alle $r \in \underline{n}$ und $w_1, \dots, w_r \in \partial B_2^n$ gilt:*

$$\text{vr}(X_r) \leq c.$$

Der Volumensquotient ist somit für eine Untersuchung der Räume X_r nicht geeignet.

Asymptotisch optimale Projektionen

Wir werden in diesem Abschnitt asymptotisch optimale Projektionen für spezielle Wahlen der $(w_i)_{i=1}^r$ bestimmen und somit die Formel aus Satz 4.11 vereinfachen. Die Kenntnis solcher Projektionen ist außerdem notwendig, um den Raum Y_P darzustellen (s. Satz 4.12).

Da wir wie erwähnt zu untersuchen beabsichtigen, inwieweit sich die Klasse dieser Räume als Negativbeispiel für Problem 1 eignet, müssen wir weiterhin einerseits gewährleisten, dass der Banach-Mazur Abstand von X_r zu ℓ_1^n hinreichend groß sein kann und andererseits die Folge der Räume X_r^* eine in der Dimension beschränkte Projektionskonstante besitzt.

Um die Berechnungen zu vereinfachen, betrachten wir nur den Fall, dass $(w_i)_{i=1}^r$ ein Orthornormalsystem ist. Wie schon erwähnt, ist nur dann ein großer Banach-Mazur Abstand von X_r zu ℓ_1^n zu erwarten, falls die 1-Norm der w_i , $i = 1, \dots, r$ ebenfalls groß ist. Letzteres ist offensichtlich zumindest dann der Fall, wenn die Supremumsnorm der w_i , $i = 1, \dots, r$ entsprechend klein ist. Da in diesem Fall die in Frage kommenden Projektionen eine einfache Gestalt haben, werden wir gerade solche Wahlen der Folge $(w_i)_{i=1}^r$ speziell untersuchen.

Um eine exaktere Sprechweise zu gewährleisten, definieren wir für $c > 0$ zwei Klassen von Vektorenfolgen. Die Klasse $A_r(c)$ beschreibt die Menge aller r -Tupel euklidischer Einheitsvektoren, deren Koordinaten betraglich nicht größer sind als $\frac{c}{\sqrt{n}}$, d.h.

$$(5.1) \quad A_r(c) := \left\{ (w_i)_{i=1}^r \in (\partial B_2^n)^r \mid \forall l \in \underline{r}: \|w_l\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \right\}.$$

Als zweite Klasse wollen wir die r -Tupel euklidischer Einheitsvektoren definieren, deren 1-Norm in der Größenordnung \sqrt{n} ist. Aus technischen Gründen müssen wir hier jedoch etwas vorsichtiger vorgehen.

Wir wählen zu einer gegebenen Folge $(w_i)_{i=1}^r$ für alle $l \in \underline{r}$ einen Vektor

$$\varepsilon_l = \varepsilon_l((w_i)_{i=1}^r) \in B_\infty^n \cap [w_1, \dots, w_{l-1}, w_{l+1}, \dots, w_r]^\perp,$$

so dass gilt

$$(5.2) \quad \langle \varepsilon_l, w_l \rangle = \sup \{ \langle w_l, \varepsilon \rangle \mid \varepsilon \in B_\infty^n, \varepsilon \perp w_i \text{ für alle } i \neq l \}.$$

Man beachte, dass im Allgemeinen das Maximierungsproblem offensichtlich nicht eindeutig lösbar ist. Lemma 2.29 zeigt, dass die Extrempunkte der Menge, über die in (5.2) das Supremum gebildet wird, mindestens $n-r+1$ Koordinaten besitzt, die betraglich 1 sind. Da nach dem Satz von Krein-Milman das Supremum in einem Extrempunkt angenommen wird, können wir o.B.d.A. verlangen, dass ε_l ein Extrempunkt der Menge

$$(5.3) \quad B_\infty^n \cap [w_1, \dots, w_{l-1}, w_{l+1}, \dots, w_r]^\perp$$

ist.

Hiermit definieren wir

$$(5.4) \quad B_r(c) := \left\{ (w_i)_{i=1}^r \in (\partial B_2^n)^r \mid \forall l \in \underline{r}: \langle \varepsilon_l, w_l \rangle \geq c\sqrt{n} \right\}.$$

Wir halten fest, dass für orthonormale Vektoren $(w_i)_{i=1}^r$

$$(5.5) \quad \|w_l\|_1 \geq \langle w_l, \varepsilon_l \rangle \geq \frac{1}{\|w_l\|_\infty}$$

ist, d.h., dass für jedes $c > 0$ die Menge $A_r(c) \subseteq B_r(c)$ ist. Die linke Ungleichung erhalten wir dabei direkt aus der Hölder-Ungleichung. Für die rechte Ungleichung beachte man, dass für jedes $l \in \underline{r}$ der Vektor $\frac{1}{\|w_l\|_\infty} \cdot w_l$ in der Menge (5.3) enthalten ist.

Falls $(w_i)_{i=1}^r \in B(1)$ ist, so haben wir $|w_l(k)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für jedes $k \in \underline{n}$ und $l \in \underline{r}$. Wir wollen einen Vektor einer solchen Folge einen normierten Vorzeichenvektor nennen.

Es ist nicht klar, ob die Menge $B_r(c)$ alle r -Tupel von Vektoren enthält, deren 1-Norm größer als $f(c)\sqrt{n}$ für eine globale Funktion f ist. Wir werden in Lemma 5.7 darauf eingehen, dass dies zumindest im Falle einer beschränkten Projektionskonstante erfüllbar ist.

5.1. Größenordnung der Projektionskonstante für die Klasse $A_r(c)$

Wir wollen zunächst den Fall betrachten, dass $(w_i)_{i=1}^r \in A_r(c)$ ist. In diesem Fall haben wir eine einfache Abschätzung der Projektionskonstanten von X_r^* nach unten, welche wir im folgenden Lemma festhalten wollen. Weiter geben wir dort erneut die auf dem Resultat von Kadec und Snobar beruhende Abschätzung (s. (2.1)) nach oben an. Wir werden später sehen, dass beide Abschätzungen asymptotisch scharf sind.

LEMMA 5.1. *Sei $(w_i)_{i=1}^r$ ein Orthonormalsystem.*

Es ist

$$\frac{1}{4n} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \leq \gamma_\infty(X_r^*) \leq \sqrt{r} + 1.$$

Ist $(w_i)_{i=1}^r \in A(1)$, so gilt insbesondere

$$\gamma_\infty(X_r^*) \geq \frac{r}{4\sqrt{n}}.$$

BEWEIS. Die rechte Ungleichung ist einfach Lemma 2.14.

Aus Satz 4.11 folgt

$$\|P\| \geq \frac{1}{2} \left(\max_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{k=1}^n \sum_{i \leq r} w_i(j) a_{n+i}^k w_l(k) \right| \right).$$

Wir wenden nun die Hölder-Ungleichung für $p = 1$ an und erhalten

$$\begin{aligned} \|P\| &\geq \frac{1}{2} \left(\max_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{j=1}^r |a_{n+i}^k| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \left| \sum_{j=1}^n \left(w_l(j) w_l(j) - \sum_{k=1}^n \sum_{i \leq r} w_l(j) w_i(j) a_{n+i}^k w_l(k) \right) \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\max_{k \in \mathbb{N}_l} \sum_{j=1}^r |a_{n+i}^k| + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \left| 1 - \sum_{k=1}^n a_{n+i}^k w_l(k) \right| \right). \end{aligned}$$

Zuletzt wenden wir die umgekehrte Dreiecksungleichung an und erhalten

$$\|P\| \geq \frac{1}{2} \left(\max_{k \in \mathcal{N}_l} \sum_{j=1}^r |a_{n+i}^k| + \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \left| 1 - \left| \sum_{k=1}^n a_{n+l}^k w_l(k) \right| \right| \right).$$

Wir wollen zeigen, dass $\|P\| \geq \frac{1}{4n} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty}$ ist. Ist

$$\frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \left| 1 - \left| \sum_{k=1}^n w_l(k) a_{n+l}^k \right| \right| \geq \frac{1}{2r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty},$$

so sind wir fertig. Wir betrachten deshalb nur den Fall, dass

$$\frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \left| 1 - \left| \sum_{k=1}^n w_l(k) a_{n+l}^k \right| \right| < \frac{1}{2r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty}$$

ist.

Hieraus erhalten wir

$$\frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} - \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} \left| \sum_{k=1}^n w_l(k) a_{n+l}^k \right| < \frac{1}{2r} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty}$$

und damit

$$\frac{1}{2} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty} < \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^n \frac{|a_{n+l}^k w_l(k)|}{\|w_l\|_\infty} \leq \sum_{l=1}^r \sum_{k=1}^n |a_{n+l}^k|.$$

Nun ist

$$2\|P\| \geq \max_{k \in \mathcal{N}_l} \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| \geq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| \geq \frac{1}{2n} \sum_{l=1}^r \frac{1}{\|w_l\|_\infty}.$$

□

Ist $(w_i)_{i=1}^r \in A_r(c)$ für ein $c > 0$, so ist die Projektionskonstante also unbeschränkt, solange r asymptotisch größer als \sqrt{n} ist, d.h. der für die Konstruktion eines Gegenbeispiels zu Problem 1 interessante Fall ist $r \leq C\sqrt{n}$ für eine universelle Konstante $C > 0$. Untersuchen wir nun, wie eine Projektion $P : \ell_\infty^{n+r} \rightarrow \ell_\infty^{n+r}$ mit asymptotisch minimaler Norm (d.h. mit $\|P\|$ in der Größenordnung $\gamma_\infty(X_r^*)$) auf das eingebettete Bild von X_r^* aussieht. Wir verwenden im Folgenden durchgängig die Bezeichnungen aus Satz 4.11.

Um eine konkrete Formel für die Projektionskonstante herzuleiten, zeigen wir, dass von den vier Termen aus Satz 4.11 der zweite Term die anderen dominiert, solange r asymptotisch kleiner als \sqrt{n} ist.

Wir beginnen mit dem ersten Term. Es genügt für dieses Lemma, die Klasse $B_r(c)$ zu betrachten.

LEMMA 5.2. *Sei $c > 0$, $(w_i)_{i=1}^r \in B_r(c)$ ein Orthonormalsystem und $(d_i^k)_{i \in \underline{r}, k \in \underline{n}} \in \mathbb{R}^{r \times n}$ eine $r \times n$ -Matrix.*

Dann ist

$$\max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right| \geq \frac{c\sqrt{n}}{r} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{l=1}^r |d_l^k|.$$

BEWEIS. Da die in (5.2) definierten ε_l alle Supremumsnorm 1 haben, ist

$$\max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right| \geq \max_{k \in \underline{n}} \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n |\varepsilon_l(j)| \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right|.$$

Mit der Dreiecksungleichung haben wir dann

$$\begin{aligned} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right| &\geq \max_{k \in \underline{n}} \max_{l \in \underline{r}} \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_l(j) \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right| \\ &\geq \max_{k \in \underline{n}} \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r \left| \sum_{i=1}^r \langle w_i, \varepsilon_l \rangle d_i^k \right|. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Biorthogonalität von $(w_i)_{i=1}^r$ und $(\varepsilon_l)_{l=1}^r$ folgt nun

$$\max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right| \geq \max_{k \in \underline{n}} \frac{1}{r} \sum_{l=1}^r |\langle w_l, \varepsilon_l \rangle| |d_l^k|.$$

Verwenden wir nun noch (5.4), so erhalten wir

$$\max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) d_i^k \right| \geq c \frac{\sqrt{n}}{r} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{l=1}^r |d_l^k|.$$

□

Die Abschätzung aus dem vorherigen Lemma ist scharf. Wir werden in Abschnitt 5.4 ein Beispiel angeben, das für $c = 1$ Gleichheit liefert.

SATZ 5.3. Seien $c_1, c_2 > 0$, $(w_i)_{i=1}^r \in B_r(c_2)$ ein Orthonormalsystem, das zusätzlich erfülle, dass

$$(5.6) \quad \max_{k \in \underline{n}_l} \sum_{m=1}^r |w_m(k)| \leq c_1$$

ist.

Dann ist mit $V := [w_1, \dots, w_r]^\perp$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4 \max\{1, c_1\}} \inf \left\{ \max_{k \in \underline{n}_l} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in V \right\} \\ & \leq \gamma_\infty(X_r^*) \leq 1 + \left(1 + \frac{r}{c_2 \sqrt{n}} \right) \inf \left\{ \max_{k \in \underline{n}_l} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in V \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Seien $(b_m^i)_{m,i=1}^r$ und $v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]$ so gewählt, dass das Infimum in Satz 4.11 für diese angenommen wird. Dann gilt für alle $k \in \underline{n}_l$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| + \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r (b_m^i - \delta_{m,i}) w_m(k) \right) \right| \end{aligned}$$

und mit Dreiecksungleichung ist letzterer Term

$$\leq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| + \sum_{m=1}^r |w_m(k)| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(b_m^i - \delta_{m,i}) \right|.$$

Wir wenden jetzt die Voraussetzung (5.6) an und erhalten

$$(5.7) \quad \begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \\ & \leq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| + c_1 \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(b_l^i - \delta_{l,i}) \right|. \end{aligned}$$

Satz 4.11 liefert

$$\begin{aligned} \gamma_\infty(X_r^*) &\geq \frac{1}{2} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) \sum_{m=1}^r b_m^i \langle w_l, w_m \rangle \right|, \end{aligned}$$

woraus mit der Orthonormalität von $(w_i)_{i=1}^r$ folgt

$$\begin{aligned} \gamma_\infty(X_r^*) &\geq \frac{1}{2} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \delta_{k,j} - \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (\delta_{l,i} - b_l^i) \right| - 1. \end{aligned}$$

Wenden wir diese Ungleichung auf (5.7) an, erhalten wir

$$\sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + v_i(k)) \right| \leq 2 \cdot \max\{1, c_1\} (\gamma_\infty(X_r^*) + 1) \leq 4 \max\{1, c_1\} \gamma_\infty(X_r^*).$$

Damit haben wir die linke Ungleichung hergeleitet.

Für die rechte Abschätzung verwenden wir erneut Satz 4.11 und betrachten nur die Menge der Projektionen, die durch $b_m^i = \delta_{m,i}$ gegeben sind. Offensichtlich erhalten wir damit dann

$$\begin{aligned} \gamma_\infty(X_r^*) &\leq \max \left\{ \inf_{v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{m=1}^r |w_m(k) + v_m(k)| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n \left| \delta_{j,k} - \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + v_i(k)) \right|, 1 \right\}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung und Lemma 5.2 erhalten wir nun

$$\gamma_\infty(X_r^*) \leq 1 + \left(1 + \frac{r}{c_2 \sqrt{n}} \right) \inf_{v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + v_i(k)) \right|.$$

□

Man beachte, dass für $r \leq c_2\sqrt{n}$ die Anforderungen an $(w_i)_{i=1}^r$ im letzten Satz erfüllt sind, falls $(w_i)_{i=1}^r \in A_r(\max\{c_1, c_2\})$ ist. Damit haben wir eine Formel hergeleitet, die die Klasse $A_r(c)$ vollständig beschreibt, solange r asymptotisch kleiner als \sqrt{n} ist. Wir wollen jedoch auch r -Tupel von Vektoren zulassen, die (5.6) nicht erfüllen. Der nächste Abschnitt widmet sich deshalb der Übertragung dieses Resultats auf die gesamte Klasse $B_r(c)$.

5.2. Größenordnung der Projektionskonstante für die Klasse $B_r(c)$

Wir möchten die Abschätzung aus Satz 5.3 nun auf den Fall verallgemeinern, dass $(w_i)_{i=1}^r \in B_r(c)$ für eine globale Konstante $c > 0$ ist. Hierzu zeigen wir, dass auch unter dieser Voraussetzung von den vier Termen aus Satz 4.11 für kleine Werte von r der zweite Term die anderen dominiert. Die Abschätzung nach unten erweist sich jedoch als technischer.

LEMMA 5.4. *Sei $(w_i)_{i=1}^r$ ein Orthonormalsystem. Weiter seien $(b_m^i)_{m,i \in \underline{r}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ wie in Satz 4.11, ε_m durch (5.2) gegeben.*

Dann gilt für alle $i, m \in \underline{r}$

$$|\delta_{i,m} - b_i^m| \leq \frac{1}{\langle \varepsilon_m, w_m \rangle} \cdot \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right|.$$

BEWEIS. Da die Supremumsnorm der ε_l kleiner gleich 1 ist, haben wir zunächst

$$\max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right| \geq \max_{l,m \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n |\varepsilon_m(j)| \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (\delta_{l,i} - b_l^i) \right|$$

und dann mit der Dreiecksungleichung und der Biorthogonalität der $(w_i)_{i=1}^r$ und $(\varepsilon_l)_{l=1}^r$

$$\begin{aligned} \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right| &\geq \max_{l,m \in \underline{r}} \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_m(j) \sum_{i=1}^r w_i(j) (\delta_{l,i} - b_l^i) \right| \\ &\geq \max_{l,m \in \underline{r}} \left| \sum_{i=1}^r \langle w_i, \varepsilon_m \rangle (\delta_{l,i} - b_l^i) \right| \\ &\geq \max_{l,m \in \underline{r}} \langle w_m, \varepsilon_m \rangle |\delta_{l,m} - b_l^m|. \end{aligned}$$

Damit ist dann für alle $i, m \in \underline{r}$

$$\max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right| \geq \langle w_m, \varepsilon_m \rangle |\delta_{i,m} - b_i^m|,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt. \square

LEMMA 5.5. Sei $0 < c$, $r \leq \sqrt[3]{\frac{c^2 n}{9}}$ und $(w_i)_{i=1}^r \in B_r(c)$ ein Orthonormalsystem.

Dann ist

$$5\gamma_\infty(X_r^*)^2 \geq \inf \left\{ \max_{k \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp \right\}.$$

Man beachte, dass die Konstante c in der Abschätzung nicht auftaucht, da sie implizit in der Bedingung an r enthalten ist.

BEWEIS. Wir wählen eine Matrix $(b_m^i)_{i,m \in \underline{r}} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ und Vektoren $v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$, so dass das Minimum aus Satz 4.11 für diese Vektoren angenommen wird, d.h. die hierdurch gegebene Projektion P erfüllt $\|P\| = \gamma_\infty(X_r^*)$. Insbesondere ist dann nach Satz 4.11

$$(5.8) \quad \max_{k \in \underline{r}} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right| \leq \gamma_\infty(X_r^*),$$

$$(5.9) \quad \max_{k \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \leq 1 + \gamma_\infty(X_r^*)$$

und

$$(5.10) \quad \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right| \leq \gamma_\infty(X_r^*).$$

Mit Lemma 2.14 erhalten wir

$$(5.11) \quad \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) b_l^i \right| \leq 1 + \sqrt{r} \leq 2\sqrt{r}.$$

Wir wollen zunächst einsehen, dass die Matrix $(b_m^i)_{m,i=1}^r$ invertierbar ist. Hierzu betrachten wir die Matrix $(\delta_{m,i} - b_m^i)_{m,i=1}^r$. Für die Operatornorm aufgefasst als Operator auf ℓ_1^r

erhalten wir mit der Hölder-Ungleichung und Lemma 5.4 ,dass

$$(5.12) \quad \max_{i \in \underline{r}} \sum_{m=1}^r |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq r \max_{i,m \in \underline{r}} |\delta_{m,i} - b_m^i|$$

$$\leq r \max_{i \in \underline{r}} \frac{1}{\langle \varepsilon_i, w_i \rangle} \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{m=1}^r w_m(j) b_l^m \right|$$

ist. Mit (5.11) wird (5.12) zu

$$\max_{i \in \underline{r}} \sum_{m=1}^r |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq r \max_{i,m \in \underline{r}} |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq \max_{i \in \underline{r}} \frac{1}{\langle \varepsilon_i, w_i \rangle} 2r^{\frac{3}{2}}.$$

Wir verwenden jetzt die Eigenschaft der Klasse $B_r(c)$ aus (5.4) und erhalten

$$\max_{i \in \underline{r}} \sum_{m=1}^r |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq r \max_{i,m \in \underline{r}} |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq \frac{2r^{\frac{3}{2}}}{c\sqrt{n}},$$

woraus mit den Bedingungen an r folgt, dass

$$(5.13) \quad \max_{i \in \underline{r}} \sum_{m=1}^r |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq r \max_{i,m \in \underline{r}} |\delta_{m,i} - b_m^i| \leq \frac{2c\sqrt{n}}{3c\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$$

ist. Damit ist die Matrix $(b_m^l)_{m,l=1}^r$ invertierbar.

Damit finden wir für alle $m \in \underline{r}$ ein $\tilde{v}_m \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$, so dass für alle $i \in \underline{r}$ die Gleichung $v_i = \sum_{m=1}^r b_m^i \tilde{v}_m$ gilt.

Für jedes $k \in \underline{n}$ ist mit der Dreiecksungleichung

$$\sum_{i=1}^r |w_i(k) + \tilde{v}_i(k)| \leq \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i (w_m(k) + \tilde{v}_m(k)) \right|$$

$$+ \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r (b_m^i - \delta_{m,i}) (w_m(k) + \tilde{v}_m(k)) \right|.$$

Mit der Hölder-Ungleichung haben wir damit für alle $k \in \underline{n}$

$$\sum_{i=1}^r |w_i(k) + \tilde{v}_i(k)| \leq \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right|$$

$$+ r \max_{l,i \in \underline{r}} |b_l^i - \delta_{l,i}| \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)|.$$

Mit (5.13) haben wir

$$\sum_{i=1}^r |w_i(k) + \tilde{v}_i(k)| \leq \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right| + \frac{2}{3} \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)|$$

und damit

$$(5.14) \quad \frac{1}{3} \max_{k \in \underline{n}_l} \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)| \leq \max_{k \in \underline{n}_l} \sum_{i=1}^r \left| \sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right| \leq \gamma_\infty(X_r^*),$$

wobei wir im letzten Schritt (5.8) verwendet haben.

Weiterhin ist für jedes $k \in \underline{n}_l$ unter Ausnutzung der Definition der v_i

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \sum_{m=1}^r b_m^i (w_m(k) + \tilde{v}_m(k)) \right| \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left[w_i(k) + \tilde{v}_i(k) + \sum_{m=1}^r (w_m(k) + \tilde{v}_m(k)) (b_m^i - \delta_{m,i}) \right] \right| \right| \end{aligned}$$

und weiter mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$(5.15) \quad \begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \right| \\ & \geq \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + \tilde{v}_i(k)) \right| - \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^r w_i(j) (w_m(k) + \tilde{v}_m(k)) (b_m^i - \delta_{m,i}) \right| \right|. \end{aligned}$$

Mit erneuter Anwendung der Dreiecksungleichung und anschließend der Hölder-Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r \sum_{m=1}^r w_i(j) (w_m(k) + \tilde{v}_m(k)) (b_m^i - \delta_{m,i}) \right| \right| \\ & \leq \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (b_m^i - \delta_{m,i}) \right| \\ & \leq \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)| \max_{l \in \underline{r}_l} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (b_l^i - \delta_{l,i}) \right|, \end{aligned}$$

womit wir aus (5.15) folgern, dass

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \right| \\ & \geq \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + \tilde{v}_i(k)) \right| - \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)| \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (b_l^i - \delta_{l,i}) \right| \end{aligned}$$

für alle $k \in \underline{n}$ ist, bzw.

$$\begin{aligned} & \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + \tilde{v}_i(k)) \right| \\ & \leq \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \\ & \quad + \sum_{m=1}^r |w_m(k) + \tilde{v}_m(k)| \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (b_l^i - \delta_{l,i}) \right|. \end{aligned}$$

Nun wenden wir hierauf (5.14) an und erhalten

$$\begin{aligned} & \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + \tilde{v}_i(k)) \right| \\ & \leq \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) \left(\sum_{m=1}^r b_m^i w_m(k) + v_i(k) \right) \right| \\ & \quad + 3\gamma_\infty(X_r^*) \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (b_l^i - \delta_{l,i}) \right|. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (5.9) und (5.10) haben wir also gezeigt, dass Vektoren $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$ existieren, so dass

$$\max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) (w_i(k) + \tilde{v}_i(k)) \right| \leq 1 + \gamma_\infty(X_r^*) + 3\gamma_\infty(X_r^*)^2 \leq 5\gamma_\infty(X_r^*)^2$$

ist. Damit folgt die Behauptung. \square

Wir haben damit die von uns gewünschte Formel für die Projektionskonstante hergeleitet.

SATZ 5.6. Sei $0 < c$, $r \leq \sqrt[3]{\frac{c^2 n}{9}}$ und $(w_i)_{i=1}^r \in B_r(c)$ ein Orthonormalsystem.

Dann ist mit $V := [w_1, \dots, w_r]^\perp$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5} \inf \left\{ \max_{k \in \mathcal{N}_1} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in V \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \gamma_\infty(X_r^*) \leq 1 + \left(1 + \frac{r}{c\sqrt{n}} \right) \inf \left\{ \max_{k \in \mathcal{N}_1} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \mid v_1, \dots, v_r \in V \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die erste Abschätzung ist Lemma 5.5.

Wir wählen nun in Satz 4.11 $b_m^i := \delta_{m,i}$ und erhalten

(5.16)

$$\gamma_\infty(X_r^*) \leq 1 + \inf_{v_i \in [w_1, \dots, w_r]^\perp} \max_{k \in \mathcal{N}_1} \sum_{m=1}^r |w_m(k) + v_m(k)| + \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right|.$$

Weiter erhalten wir für alle $v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$ mit Lemma 5.2 angewendet auf $d_i^k = w_i(k) + v_i(k)$

$$\max_{k \in \mathcal{N}_1} \sum_{m=1}^r |w_m(k) + v_m(k)| \leq \frac{r}{c\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right|.$$

Hiermit folgt aus (5.16)

$$\gamma_\infty(X_r^*) \leq 1 + \left(1 + \frac{r}{c\sqrt{n}} \right) \inf_{v_i \in [w_1, \dots, w_r]^\perp} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right|.$$

□

Formal betrachten wir in diesem Satz ebenso wie in Satz 5.3 die Klasse $B_r(c)$. Im Gegensatz zu Satz 5.3 können wir in Satz 5.6 jedoch auf die restriktive Voraussetzung (5.6) verzichten.

Man kann unter den von uns getroffenen Annahmen im Allgemeinen nicht auf die $(v_i)_{i=1}^r$ verzichten. Um dies einzusehen, wähle man $r = 1$ und den Vektor

$$w_1 := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}} \right) \in \mathbb{R}^n.$$

Dann ist $\|w_1\|_2 = 1$, $\|w_1\|_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \sqrt{n-1})$ und $\|w_1\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Man erhält dann

$$\max_{k \in \mathcal{N}_1} \sum_{j=1}^n |w_1(j)w_1(k)| = \|w_1\|_1 \|w_1\|_\infty = \frac{1 + \sqrt{n-1}}{2},$$

während nach Lemma 2.14 die Norm einer optimalen Projektion höchstens 2 ist.

Generell wäre es wünschenswert, die Bedingung $\langle \varepsilon_l, w_l \rangle \geq c\sqrt{n}$ aus der Definition der Klasse $B_r(c)$ durch die allgemeinere Bedingung $\|w_l\|_1 \geq c\sqrt{n}$ zu ersetzen (s. (5.4) und (5.5)). Es ist nicht klar, ob Satz 5.6 auch für diese Klasse von Vektoren gültig bleibt. Wir können jedoch feststellen, dass für jedes Orthonormalsystem $(w_i)_{i=1}^r$ für das ein $C > 0$ existiert mit

$$\max_{l \in \underline{r}} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1, i \neq l}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \leq C,$$

die beiden Bedingungen äquivalent sind. Wir präzisieren dies im folgenden Lemma.

LEMMA 5.7. *Sei $(w_i)_{i=1}^r$ ein Orthonormalsystem, $r \leq \frac{1}{3} \|w_l\|_1$ für alle $l \in \underline{r}$.*

Sei $l \in \underline{r}$ fixiert, $v_1, \dots, v_r \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$. Dann ist

$$\frac{\|w_l\|_1}{3} \leq \langle \varepsilon_l, w_l \rangle \left(1 + \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1, i \neq l}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \right).$$

BEWEIS. Sei $I_1 := \{j \in \underline{n} \mid \text{sgn}(\varepsilon_l(j)) \neq \text{sgn}(w_l(j))\}$, $I_2 := \{j \in \underline{n} \mid |\varepsilon_l(j)| \neq 1\}$. Nach Lemma 2.29 ist $|I_2| \leq r$. Weiter ist $|\langle R_{I_1^c} \varepsilon_l, w_l \rangle| \geq \frac{1}{3} \|w_l\|_1$.

In der Tat ist

$$\begin{aligned} \|w_l\|_1 &\leq |\langle R_{I_1} \varepsilon_l, w_l \rangle| + |\langle R_{I_1^c} \varepsilon_l, w_l \rangle| + \sum_{j \in I_2} |w_l(j)| \\ &\leq 2 |\langle R_{I_1^c} \varepsilon_l, w_l \rangle| + \frac{1}{3} \|w_l\|_1. \end{aligned}$$

Sei nun $P = \text{Id} - \sum_{i=1, i \neq l}^r \langle w_i + v_i, \cdot \rangle w_i$, $z := P^* R_{I_1^c} \varepsilon_l$. Da wir mit der Hölder-Ungleichung

$$\|z\|_\infty = \max_{k \in \underline{n}} |\langle R_{I_1^c} \varepsilon_l, P e_k \rangle| \leq \max_{k \in \underline{n}} \|P e_k\|_1$$

haben, erhalten wir mit

$$\|P e_k\|_1 = \sum_{j=1}^n \left| \delta_{j,k} - \sum_{i=1, i \neq l}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right|,$$

dass

$$\|z\|_\infty \leq 1 + \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1, i \neq l}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right|$$

ist. Wir stellen nun noch fest, dass

$$\langle z, w_l \rangle = \langle R_{I_1^c} \varepsilon_l, P w_l \rangle = \langle R_{I_1^c} \varepsilon_l, w_l \rangle \geq \frac{1}{3} \|w_l\|_1.$$

□

Man beachte, dass

$$\begin{aligned} & \max_{l \in \mathcal{I}_1} \max_{k \in \mathcal{I}_l} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1, i \neq l}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| \\ & \leq \max_{k \in \mathcal{I}_l} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j)(w_i(k) + v_i(k)) \right| + \max_{l \in \mathcal{I}_1} \|w_l\|_1 \|w_l + v_l\|_\infty. \end{aligned}$$

Hierbei entspricht der erste Summand der rechten Seite der Ungleichung dem Term aus der Formel für die Projektionskonstante aus Satz 5.6. Es ist nicht klar, ob der zweite Summand beschränkt ist, jedoch ist zu vermuten, dass für jedes $l \in \mathcal{I}_1$ der Vektor $v_l \in [w_1, \dots, w_r]^\perp$ im Minimierungsproblem aus Satz 5.6 so gewählt werden muss, dass $\|w_l + v_l\|_\infty$ minimiert wird. In diesem Fall ist der zweite Summand in obiger Ungleichung beschränkt.

5.3. Zufällig gewählte Folgen von Vorzeichenvektoren

Man könnte in Anbetracht des Beweises des Satzes von Gluskin versuchen, eine Folge von Banachräumen Z_n mit beschränkter Projektionskonstante aber unbeschränktem Banach-Mazur Abstand zu $\ell_\infty^{\dim Z_n}$ zu konstruieren, indem man w_1, \dots, w_r als Folge unabhängiger n -dimensionaler Zufallsvektoren auffasst, deren Einträge durch $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ Bernoulli-Variablen gegeben sind, und $Z_n := X_r$ setzt. In diesem Fall ist die Projektionskonstante jedoch mit hoher Wahrscheinlichkeit unbeschränkt. Um dies einzusehen, benötigen wir das folgende Resultat von Giannopoulos und Milman.

SATZ 5.8 ([GiMi], Proposition 3.3). *Es gibt Konstanten $c, c' > 0$, so dass für alle $\rho \in (0, 1)$ eine Konstante $c_1(\rho) > 0$ existiert, so dass für alle $p \in (0, 2]$ und $m \geq c_1(\rho)p^{-2}n$ gilt, dass eine Menge $A \subseteq \{-1, 1\}^n$ mit $|A| = m$ mit Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \rho$ die Ungleichung*

$$c \|y\|_2 \leq \left(\frac{1}{|A|} \sum_{\varepsilon \in A} |\langle \varepsilon, y \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c' \|y\|_2$$

für alle $y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt.

Der Satz liefert uns nun, dass wir das folgende Lemma verwenden können. Damit erhalten wir für alle $\rho \in (0, 1)$ und $r \leq \frac{n}{c_1(\rho)}$, dass die Projektionskonstante mit Wahrscheinlichkeit größer als $1 - \rho$ größer als $\frac{c}{4}\sqrt{r}$ ist, wobei $c > 0$ die Konstante aus vorigem Satz ist. Man beachte, dass die Vektoren nicht orthogonal sein müssen.

LEMMA 5.9. Seien $w_1, \dots, w_r \in \partial B_2^n$ mit $|w_i(j)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ für alle $i \in \underline{r}$ und $j \in \underline{n}$.

Es sei

$$c := \sup \left\{ \tilde{c} > 0 \mid \forall a \in \mathbb{R}^r : \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) a(i) \right| \geq \tilde{c} \|a\|_2 \right\}.$$

Dann ist

$$\|P\| \geq \frac{c}{4} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{n} \max_{j \in \underline{r}} \|w_j\|_\infty}.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned} & \max_{l \in \underline{r}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) - \sum_{i=1}^r w_i(j) \langle w_l, a_{n+i} \rangle \right| \\ &= \max_{l \in \underline{r}} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \left| w_l(j) (1 - \langle w_l, a_{n+l} \rangle) - \sum_{i=1, i \neq l}^r w_i(j) \langle w_l, a_{n+i} \rangle \right| \\ &\geq \max_{l \in \underline{r}} c\sqrt{n} \left(|1 - \langle w_l, a_{n+l} \rangle|^2 + \sum_{i=1, i \neq l}^r |\langle w_l, a_{n+i} \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \max_{l \in \underline{r}} c\sqrt{n} |1 - \langle w_l, a_{n+l} \rangle|. \end{aligned}$$

Damit können wir o.B.d.A. verlangen, dass $\langle w_l, a_{n+l} \rangle \geq \frac{3}{4}$ für alle $l \in \underline{r}$ ist. Also haben wir

$$\begin{aligned} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) a_{n+i}^k \right| &\geq \max_{k \in \underline{n}} c\sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \max_{k \in \underline{n}} \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{r}} \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k| \\ &\geq \max_{k \in \underline{n}} \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{r}} \frac{1}{\max_{j \in \underline{r}} \|w_j\|_\infty} \sum_{i=1}^r |a_{n+i}^k w_i(k)|. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun das Maximum über k gegen das Mittel über k ab, verwenden die Dreiecksungleichung und erhalten

$$\begin{aligned} \max_{k \in \underline{n}} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r w_i(j) a_{n+i}^k \right| &= \frac{c}{\sqrt{r} \cdot n \max_{j \in \underline{n}} \|w_j\|_\infty} \sum_{i=1}^r |\langle a_{n+i}, w_i \rangle| \\ &\geq \frac{3c}{4\sqrt{n} \max_{j \in \underline{n}} \|w_j\|_\infty} \cdot \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Somit ist $\|P\| \geq \frac{c}{4} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{n} \max_{j \in \underline{n}} \|w_j\|_\infty}$. □

Sei für den Rest des Abschnitts n eine 2er-Potenz. Ist $r = \log_2(n)$, so können wir die Vektoren $w_1(\cdot), \dots, w_r(\cdot)$ als unabhängige $\pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ Bernoulli-Zufallsgrößen über $\Omega = \underline{n}$ auffassen. Dann stellen die Vektoren $(w_i(j))_{i=1}^r$, $j \in \underline{n}$, bis auf Faktor $\frac{1}{\sqrt{n}}$ sämtliche möglichen Vorzeichenkombinationen dar. Die Khintchine Ungleichung liefert in dem Fall, dass Lemma 5.9 mit $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ anwendbar ist. Wir haben also eine untere Abschätzung für die Projektionskonstante gefunden. Zusammen mit Lemma 5.1 haben wir die Größenordnung der Projektionskonstante bestimmt.

BEISPIEL 5.10. Ist $r = \log_2(n)$ und w_1, \dots, w_r die oben beschriebenen normierten Vorzeichenvektoren, dann ist

$$2\sqrt{\log_2(n)} \geq \gamma_\infty(X_r^*) \geq \frac{\sqrt{\log_2(n)}}{4\sqrt{2}}.$$

Weiter existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\gamma_\infty(X_r^*) \leq d(X_r^*, \ell_\infty^n) \leq C\gamma_\infty(X_r^*)^7.$$

BEWEIS. Wir zeigen noch die Abschätzung des Banach-Mazur Abstands.

Wir haben in obiger Rechnung gezeigt, dass die durch $a_{n+i} = w_i$ gemäß Satz 4.11 gegebene Projektion P asymptotisch optimal ist. Verwenden wir Satz 4.12 und wählen dort $c_i^m := \delta_{i,m}$, so ist

$$x_m = \sum_{i=1}^r c_i^m a_{n+i} = w_m, m = 1, \dots, r$$

eine Basis von Y_P ist. Dann ist aber

$$\left\| \sum_{m=1}^r b_m w_m \right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{\varepsilon \in \{-1,1\}^r} \sum_{m=1}^r \varepsilon_m b_m = \frac{1}{\sqrt{r}} \|b\|_1.$$

In diesem Fall ist also Y_P isometrisch isomorph zu ℓ_1^r und damit

$$d(Y_P, \ell_\infty^r) = d(\ell_1^r, \ell_\infty^r) \sim \sqrt{r} = \sqrt{\log_2(n)}.$$

Damit existiert nach Satz 4.9 eine Konstante $C > 0$, so dass

$$d(X_r^*, \ell_\infty^n) \leq C\gamma_\infty(X_r^*)^7$$

ist. Die andere Abschätzung ist trivial. \square

Diese Vorzeichenvektoren stellen somit einen Grenzfall dar, da für diese Räume die obere Abschätzung im Lemma 5.1 scharf ist. Wir wollen noch einsehen, dass die Resultate aus dem vorigen Abschnitt ebenfalls anwendbar sind.

5.4. Der Fall der Walsh Vektoren

Wir wollen nun als zweites den Spezialfall der normierten Walsh Vektoren betrachten, d.h. $w_i = U_n e_i$. Um die Existenz der Walsh Vektoren zu gewährleisten, sei n in diesem Abschnitt eine 2er Potenz. Da die Walsh Vektoren sehr symmetrisch konstruiert sind, stellt diese Situation ebenfalls einen Grenzfall dar und kontrastiert somit das Bild der Vorzeichenvektoren aus dem vorigen Beispiel insofern, als dass für dieses Beispiel die untere Abschätzung im Lemma 5.1 scharf ist. Wir werden fordern, dass r ein Teiler von n ist, d.h. es gibt ein $j \in \mathbb{N}$ mit $r = 2^j$.

BEISPIEL 5.11. *Ist r ein Teiler von n und $r \leq \frac{n^{\frac{3}{4}}}{32}$, so ist für $w_i = U_n e_i$*

$$\frac{r}{4\sqrt{n}} \leq \gamma_\infty(X_r^*) \leq 2 + \frac{r}{\sqrt{n}}$$

und

$$\gamma_\infty(X_r^*) \leq d(X_r^*, \ell_\infty^n) \leq 2^4 \cdot 3^4 \gamma_\infty(X_r^*)^6.$$

BEWEIS. Wir stellen fest, dass

$$(5.17) \quad \max_{k \in \underline{n}_l} \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r U_n e_i(j) U_n e_i(k) \right| = 1$$

ist, woraus mit Satz 5.3 für $r \leq \sqrt{n}$ und der Wahl $v_i = 0$ für alle $i \in \underline{r}$ die obere Abschätzung für die Projektionskonstante folgt.

Um (5.17) zu zeigen, verwenden wir, dass $W_n = W_r(W_{\frac{n}{r}})$ ist. Es gilt damit für alle $k = l + (m-1)\frac{n}{r} \in \underline{n}$, $m \in \underline{r}$, $l \in \underline{\frac{n}{r}}$

$$\begin{aligned}
(5.18) \quad & \sum_{j=1}^n \left| \sum_{i=1}^r U_n e_i(j) U_n e_i(k) \right| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n/r} \sum_{\nu=1}^r \left| \sum_{i=1}^r W_n \left(i, \mu + (\nu-1)\frac{n}{r} \right) \cdot W_n \left(i, l + (m-1)\frac{n}{r} \right) \right| \\
&= \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n/r} \sum_{\nu=1}^r \left| \sum_{i=1}^r W_{\frac{n}{r}}(\mu, 1) W_r(i, \nu) W_{\frac{n}{r}}(1, l) W_r(i, m) \right| \\
&= \sum_{\mu=1}^{n/r} \frac{r}{n} |W_{\frac{n}{r}}(1, \mu) W_{\frac{n}{r}}(1, l)| = 1.
\end{aligned}$$

Die untere Abschätzung erhalten wir direkt aus Lemma 5.1.

Wählen wir in Satz 4.12 $c_i^m = (U_n e_i)(m)$ und $a_{n+i} = U_n e_i$, so erhalten wir, dass

$$x_m = \sum_{i=1}^r (U_n e_i)(m) U_n e_i, \quad m = 1, \dots, r$$

eine Basis von Y_P ist und erhalten damit für $b \in \mathbb{R}^r$

$$\left\| \sum_{m=1}^r b_m x_m \right\|_{\infty} = \left\| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r (U_n e_i)(m) U_n e_i \right\|_{\infty}.$$

Wie in (5.18) zeigen wir nun, dass diese Basis einen isometrischen Isomorphismus zu ℓ_{∞}^r im Sinne der Bilder der Standardbasis induziert. Für festes $b \in \mathbb{R}^r$ ist

$$\left\| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r (U_n e_i)(m) U_n e_i \right\|_{\infty} = \max_{k \in \underline{n}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r (U_n e_i)(m) (U_n e_i)(k) \right|.$$

Verwenden wir nun erneut, dass $W_n = W_{\frac{n}{r}}(W_r)$ ist, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r (U_n e_i)(m) U_n e_i \right\|_{\infty} &= \frac{1}{n} \max_{\mu \in \underline{\frac{n}{r}}} \max_{\nu \in \underline{r}} \left| \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r W_n(i, m) W_{\frac{n}{r}}(\mu, 1) W_r(\nu, i) \right| \\
&= \frac{1}{n} \max_{\mu \in \underline{\frac{n}{r}}} \max_{\nu \in \underline{r}} \left| W_{\frac{n}{r}}(\mu, 1) \sum_{m=1}^r b_m \sum_{i=1}^r W_r(i, m) W_r(\nu, i) \right| \\
&= \frac{r}{n} \max_{\mu \in \underline{\frac{n}{r}}} \max_{\nu \in \underline{r}} |W_{\frac{n}{r}}(\mu, 1) b_{\nu}| = \frac{r}{n} \max_{\nu \in \underline{r}} |b_{\nu}|.
\end{aligned}$$

Zusammengefasst haben wir also

$$\left\| \sum_{m=1}^r b_m x_m \right\|_{\infty} = \frac{r}{n} \max_{m \in \underline{r}} |b_m| = \frac{r}{n} \|b\|_{\infty},$$

d.h. $d(Y_P, \ell_{\infty}^r) = 1$.

Mit Korollar 4.10 ist

$$d(X_r^*, \ell_{\infty}^n) \leq 2^4 \cdot 3^4 \gamma_{\infty}(X_r^*)^6.$$

□

Man beachte, dass wir in (5.17) keine Gleichheit haben, falls wir das Tupel von Vektoren $(w_i)_{i=1}^r$ durch $w_i = U_n e_{k_i}$, $i \in \underline{r}$, für eine r -elementige Menge $\{k_1, \dots, k_r\} \subseteq \underline{n}$ definieren, da wir für hinreichend großes n und kleines r auf diese Weise die Rademacher Vektoren generieren können. Wir wollen hierauf aber nicht weiter eingehen.

BEMERKUNG 5.12. Ist $r = 2^j \leq \frac{n}{2}$, so können wir den Abstand von X_r zu ℓ_1^n in dem Fall der Walsh Vektoren tatsächlich direkt berechnen.

BEWEIS. Wir setzen als Basis für $k \in \underline{r}$, $i \in \underline{\frac{n}{r}}$

$$z_{k,i} := U_n e_k + e_{k+(i-1)r}.$$

Dann ist zunächst

$$\begin{aligned} (5.19) \quad & \frac{1}{n/r} \sum_{i=1}^{n/r} (U_n e_k + e_{k+(i-1)r}) \\ &= U_n e_k + \frac{1}{n/r} \sum_{i=1}^{n/r} e_{k+(i-1)r} =: v_k \in \text{absconv} \{z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{n/r}\}. \end{aligned}$$

Dann ist für $j, l \in \underline{r}$ und $i \in \underline{\frac{n}{r}}$

$$\sum_{k=1}^r W_r(l, k) (U_n e_k) (j + (i-1)r) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^r W_r(l, k) W_r(j, k) W_{\frac{n}{r}}(1, i) = \frac{r}{\sqrt{n}} \delta_{j,l},$$

d.h. für alle $k \in \underline{n}$ und $l \in \underline{r}$ ist

$$\sum_{k=1}^r W_r(l, k) U_n e_k = \frac{r}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n/r} e_{l+(i-1)r}.$$

Weiterhin ist für alle $\mu \in \underline{r}$ und $\nu \in \frac{n}{r}$

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=1}^r W_r(l, k) \frac{1}{n/r} \sum_{i=1}^{n/r} e_{k+(i-1)r} \right) (\mu + (\nu - 1)r) \\ &= \frac{r}{n} W_r(l, \mu) = \frac{r}{n} W_r(l, \mu) W_{\frac{n}{r}}(1, \nu) = \frac{r}{\sqrt{n}} U_n e_l (\mu + (\nu - 1)r), \end{aligned}$$

d.h.

$$\sum_{k=1}^r W_r(l, k) \frac{1}{n/r} \sum_{i=1}^{n/r} e_{k+(i-1)r} = \frac{r}{\sqrt{n}} U_n e_l.$$

Damit haben wir

$$\sum_{k=1}^r W_r(l, k) v_k = \sum_{k=1}^r W_r(l, k) \left(U_n e_k + \frac{1}{n/r} \sum_{i=1}^{n/r} e_{k+(i-1)r} \right) = \frac{r}{\sqrt{n}} \left(U_n e_l + \sum_{i=1}^{n/r} e_{l+(i-1)r} \right).$$

Da $|W_r(l, k)| = 1$ ist, folgt deshalb

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U_n e_l + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n/r} e_{l+(i-1)r} \in \text{absconv} \{v_k : k \in \underline{n}\}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{n}\right) U_n e_l &= v_l - \frac{r}{n} \sum_{i=1}^{n/r} e_{l+(i-1)r} - \frac{r}{n} U_n e_l \\ &\in v_l + \frac{r}{\sqrt{n}} \text{absconv} \{v_k : k \in \underline{n}\} \\ &\subseteq \left(1 + \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \text{absconv} \{v_k : k \in \underline{n}\}. \end{aligned}$$

Mit (5.19) ist also

$$\left(1 - \frac{r}{n}\right) U_n e_l \in \left(1 + \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \text{absconv} \{z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{n/r}\}.$$

Da $r \leq \frac{n}{2}$ ist, ist also

$$U_n e_l \in 2 \left(1 + \frac{r}{\sqrt{n}}\right) \text{absconv} \{z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{n/r}\}.$$

Nun ist für alle $k \in \underline{r}$, $i \in \underline{\frac{n}{r}}$

$$\begin{aligned} e_{k+(i-1)\frac{n}{r}} &= (U_n e_k + e_{k+(i-1)\frac{n}{r}}) - U_n e_k \\ &\in \left(3 + 2\frac{r}{\sqrt{n}}\right) \text{absconv} \{z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{n/r}\} \\ &\subseteq \left(6 + 4\frac{r}{\sqrt{n}}\right) \text{absconv} \left\{\frac{1}{2}z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{n/r}\right\}. \end{aligned}$$

Damit haben wir

$$\text{absconv} \left\{\frac{1}{2}z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{\frac{n}{r}}\right\} \subseteq K_r \subseteq \left(6 + 4\frac{r}{\sqrt{n}}\right) \text{absconv} \left\{\frac{1}{2}z_{k,i} : k \in \underline{r}, i \in \underline{\frac{n}{r}}\right\},$$

also ist

$$d(B_1^n, X_r) = d(B_\infty^n, X_r^*) \leq \left(6 + 4\frac{r}{\sqrt{n}}\right).$$

Wir haben damit insbesondere mit Lemma 5.1

$$\gamma_\infty(X_r^*) \leq d(X_r^*, \ell_\infty^n) \leq 42\gamma_\infty(X_r^*).$$

□

Man beachte, dass wir im Beweis die Struktur der Walsh Vektoren explizit ausgenutzt haben, so dass eine direkte Verallgemeinerung auf andere Klassen von Vektoren nicht möglich ist.

Wir wollen diese speziellen Räume noch etwas genauer betrachten. So ergibt sich etwa trotz des symmetrischen Aufbaus der Walsh Vektoren eine große Symmetrie-Konstante. Um dies einzusehen, berechnen wir $\pi_1(X_r^*)$.

LEMMA 5.13. *Sei $w_i = U_n e_i$ für alle $i \in \underline{n}$.*

Ist $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$, so ist $\frac{n}{2} \leq \pi_1(X_r^) \leq n$.*

BEWEIS. Die Abschätzung nach oben ist bekannt. Es genügt somit, nur die Abschätzung nach unten durchzuführen.

Es gilt für $n = 2$, dass $1 \leq \pi_1(X_r^*) \leq 2$ ist. Wir können deshalb o.B.d.A. davon ausgehen, dass $n \geq 4$ ist und die Walsh Matrix für $n/2$ existiert. Wir bezeichnen hier mit e_k^n den k -ten Einheitsvektor des \mathbb{R}^n .

Sei $x_i := e_i^n - e_{i+\frac{n}{2}}^n$ für $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Dann ist $\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \|e_i^n - e_{i+\frac{n}{2}}^n\|_{X_r^*} = \frac{n}{2}$, wobei wir ausnutzen, dass $\langle x_i, U_n e_j \rangle = 0$ für alle $i, j \in \frac{n}{2}$ ist. Außerdem ist

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |\langle x_i, e_k^n \rangle| = 1$$

für alle $k \in \underline{n}$ und

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |\langle x_i, U_n e_k^n \rangle| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \left\langle e_i^n - e_{i+\frac{n}{2}}^n, \frac{1}{\sqrt{2}} \left(U_{\frac{n}{2}} e_k^{\frac{n}{2}}, U_{\frac{n}{2}} e_k^{\frac{n}{2}} \right)^t \right\rangle \right| = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left| \left\langle e_i^{\frac{n}{2}} - e_{i+\frac{n}{2}}^{\frac{n}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} U_{\frac{n}{2}} e_k \right\rangle \right| = 0$$

für alle $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, wobei wir verwenden, dass $U_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} U_{\frac{n}{2}} & U_{\frac{n}{2}} \\ U_{\frac{n}{2}} & -U_{\frac{n}{2}} \end{pmatrix}$ ist. Damit ist

$$\sup_{\|x\|_{X_r}=1} \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} |\langle x, x_i \rangle| = 1,$$

d.h. $\pi_1(X_r^*) \geq \frac{n}{2}$.

□

Man beachte, dass wir auch hier entscheidend ausgenutzt haben, dass die r normierten Walsh-Vektoren in $\{U_n e_1, \dots, U_n e_{\frac{n}{2}}\}$ sind.

Die Invariante $\pi_1(X_r^*)$ bleibt somit für $r = 1, \dots, \frac{n}{2}$ relativ konstant. Da die Walsh Vektoren bzgl. komponentenweiser Multiplikation eine Gruppe bilden, erhält man wie in Lemma 3.8, dass für $r = n$ der Raum X_n^* genügend Symmetrien hat. Daher ist $\pi_1(X_n^*) \leq 4\sqrt{n}$ (s. Lemma 5.1 und Satz 2.18). Das Lemma liefert mit Satz 2.18 direkt eine Abschätzung der Symmetrie-Konstante des Raums.

KOROLLAR 5.14. Sei $1 \leq r \leq \frac{n}{2}$ und $w_i = U_n e_i$ für alle $i \in \underline{r}$.

Es ist

$$s(X_r^*) \geq \sqrt{\frac{1}{8} \frac{r}{\sqrt{n}}}.$$

Weiter ist $s(X_n^*) = 1$.

BEWEIS. Wir verwenden, dass nach Satz 2.18

$$\gamma_\infty(X_r^*) \pi_1(X_r^*) \leq n s(X)^2$$

ist. Mit obigem Lemma und Beispiel 5.11 haben wir

$$\frac{r}{4\sqrt{n}} \frac{n}{2} \leq ns(X)^2,$$

d.h.

$$s(X) \geq \sqrt{\frac{1}{8} \frac{r}{\sqrt{n}}}.$$

□

Figiel, Kwapien̄ und Pelczyński haben in [FKP] ℓ_∞^{2n} in zwei n -dimensionale Rume zerlegt, deren Gordon-Lewis Konstante in der Groenordnung \sqrt{n} liegt. Ist $w_i = U_n e_i$, so haben wir fur $r = \frac{n}{2}$ einen n -dimensionalen Teilraum von $\ell_\infty^{\frac{3}{2}n}$ angegeben, dessen Symmetrie-Konstante in der Groenordnung $n^{\frac{1}{4}}$ liegt. In unserem Fall ist der Raum sogar konstruktiv angegeben.

Literaturverzeichnis

- [Ball] K. Ball: An elementary introduction to modern convex geometry, Flavors of Geometry (S.Levy ed.), Mathematical Sciences Research Institute Publications 31, Cambridge University Press (1997)
- [Beck] A. Beck: Probability in Banach spaces V: Proceedings of the International Conference Held in Medford, USA, July 16-27 1984, Lect. Notes 1153, Springer (1985)
- [Bern] S. J. Bernau: Small projections on $\ell_1(n)$, Texas Functional Analysis Seminar, Longhorn Notes, Univ. of Texas at Austin (1983), S.77-99
- [BoMi] J. Bourgain, V.D. Milman: New volume ratio properties for convex symmetric bodies in \mathbb{R}^n , Inventiones Math. 88 (1987), S. 319-340
- [BoSz] J. Bourgain, S. Szarek: The Banach-Mazur distance to the cube and the Dvoretzky-Rogers factorization, Israel J. Math. 62 (1988), S. 169-180
- [BoT1] J. Bourgain, L. Tzafriri: Complements of subspaces of ℓ_p^n , $p \geq 1$, which are uniquely determined, Geometrical Aspects of Functional Analysis, Israel Seminar, 1985-1986, Lecture Notes in Math. 1267, Springer-Verlag, Berlin (1987), S. 39-52
- [BoT2] J. Bourgain, L. Tzafriri: Invertibility of "large" submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis, Israel J. Math. 57 (1987), S. 137-224
- [BoT3] J. Bourgain, L. Tzafriri: Restricted invertibility of matrices and applications, Analysis at Urbana II, Proceedings of the Special Year in Modern Analysis at the University of Illinois, 1986-87, Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- [Bour] J. Bourgain: New classes of \mathcal{L}_p spaces, Lecture Notes in Math. 889, Springer-Verlag, Berlin (1981)
- [DJT] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [FiJo] T. Figiel, W. B. Johnson: Large subspaces of ℓ_∞^n and estimates of the Gordon-Lewis constant, Israel J. Math. 37 (1980), S. 92-112

-
- [FKP] T. Figiel, S. Kwapien and A. Pełczyński: Sharp estimates for the constants of local unconditional structure of Minkowski spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci.* 25 (1977), S. 1221-1226
- [GaGo] D. J. H. Garling, Y. Gordon: Relations between some constants associated with finite-dimensional Banach spaces, *Israel J. Math.* 9 (1971), S. 346-361
- [Gian] A. A. Giannopoulos: A note on the Banach-Mazur distance to the cube, *Operator Theory: Advances and Applications* 77 (1995), S. 67-73
- [GiMi] A. A. Giannopoulos, V. D. Milman: Concentration Property on Probability Spaces, *Advances in Mathematics* 156 (2000), S. 77-106
- [Glus] E. D. Gluskin: Diameter of the minkowski compactum is approximately equal to n , *Funct. Anal. Appl.* 15 (1981), S. 72-73
- [GoLe] Y. Gordon, D. R. Lewis: Absolutely summing operators and local unconditional structures, *Acta Mathematica* 133 (1974), S. 27-48
- [Haag] U. Haagerup: The best constants in the Khintchine inequality, *Studia Mathematica* 70 (1982), S. 231-283
- [JoS1] W. B. Johnson, G. Schechtman: On the distance of subspaces of ℓ_p^n to ℓ_p^k , *Transaction of the American Mathematical Society* 324 (1991), S. 319-329
- [JoS2] W. B. Johnson, G. Schechtman: Finite dimensional subspaces of L_p , *Handbook of the geometry of Banach Spaces, Volume I*, Elsevier (2001), S. 837-870
- [KaSn] M. I. Kadec, M. G. Snobar: Certain functionals on the Minkowski compactum, *Mat Zametki* 10, S.453-8, Englische Übersetzung: *Math Notes* 10 (1971), S. 694-696
- [Köni] H. König: Spaces with large projection constants, *Israel Journal of Math.* 50 No. 3 (1985), S. 181-188
- [Köt1] H. König, N. Tomczak-Jaegermann: Bounds for projection constants and 1-summing norms, *Transactions of the American Mathematical Society* 320 No.2 (1990), S. 799-823
- [Köt2] H. König, N. Tomczak-Jaegermann: Spaces with maximal projection constants, *Studia Math.* 159 (2003), S. 357-372
- [KSTJ] H. König, C. Schütt, N. Tomczak-Jaegermann: Projection constants of symmetric spaces and variants of Khintchine's inequality, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 511 (1999), de Gruyter, S. 1-42
- [LiPe] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński: Absolutely summing operators, *Studia Mathematica* 29 (1968)
- [LiT1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces I*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 92, Springer-Verlag, Berlin (1977)
- [LiT2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri: *Classical Banach Spaces II*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 97, Springer-Verlag, Berlin (1979)
- [Maur] B. Maurey: *Type, cotype and K -convexity*, Elsevier (2002)
- [Mil1] V. D. Milman: The concentration phenomenon and linear structure of finitedimensional normed spaces, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berkeley, Calif., 1986)*, Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1987), 961-975.
- [MiPi] V. D. Milman, G. Pisier: Banach spaces with a weak cotype 2 property, *Israel J. Math.* 54 (1986), S. 139-158

-
- [MiSc] V. D. Milman, G. Schechtman: Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces, Lecture Notes in Math. 1200, Springer-Verlag, Berlin (1986)
- [Nach] L. Nachbin: A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans AMS 68 (1950), S. 28-46
- [PiWe] A. Pietsch, J. Wenzel: Orthonormal Systems and Banach Spaces Geometry, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 70, Cambridge University Press, Cambridge (1998)
- [Pisi] G. Pisier: The volume of convex bodies and Banach space geometry, Cambridge University Press, Cambridge (1989)
- [Rude] M. Rudelson: Almost orthogonal submatrices of an orthogonal matrix, Israel J. Math. 111 No. 1 (1999), S. 143-155
- [Rudi] W. Rudin: Functional Analysis, International Series in Pure and Applied Math., Tata McGraw-Hill (2006)
- [Sch1] C. Schütt: The projection constants of finite dimensional spaces whose unconditional basis constant is 1, Israel Journal of Mathematics 30 (1978), S. 207-212
- [Sobc] A. Sobczyk: Projections in Minkowski and Banach spaces, Duke Math Journal 8 (1941), S. 78-106
- [SpSr] D. A. Spielman, N. Srivastava: An elementary proof of the Restricted Invertibility Theorem, <http://arxiv.org/abs/0911.1114>
- [Sza1] S. Szarek: Convexity, Complexity and High Dimensions, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006), Vol. II. European Math. Soc. (2006), 1599-1621
- [Sza2] S. Szarek: Spaces with large distance to ℓ_∞^n and Random Matrices, American Journal of Mathematics 112 (1990), S. 899-942
- [SzTo] S. Szarek, N. Tomczak-Jaegermann: On nearly Euclidean decomposition for some classes of Banach spaces, Compositio Math. 40 (1980), no. 3, S. 367-385.
- [Tomc] N. Tomczak-Jaegermann: Banach-Mazur distances and finite-dimensional Operator-Ideals, Longman Scientific & Technical, Essex (1989)
- [Wern] D. Werner: Funktionalanalysis, Springer-Verlag, Berlin (2002)
- [Wojt] P. Wojtaszczyk: Banach spaces for analysts, Cambridge University Press (1991)
- [Zip1] M. Zippin: The finite-dimensional P_λ -spaces with small λ , Israel Journal of Mathematics 39 (1981), 359-65
- [Zip2] M. Zippin: Errata to the paper 'The finite dimensional P_λ -spaces with small λ ', Israel Journal of Mathematics 48 (1984), 255-256

Lebenslauf

Persönliche Daten

Geburtsdatum: 06.05.1980

Geburtsort: Bad Segeberg

Staatsangehörigkeit: deutsch

Schulbildung

08.1990-06.1999 Klaus-Groth-Schule Neumünster

26.06.1999 Allgemeine Hochschulreife

Zivildienst

08.1999-06.2000 Pflegediakonie Neumünster

Studium

WS 1999/00 - Studium der Mathematik, Chemie und Informatik

WS 2006/07

17.1.2006 Erstes Staatsexamen in den Fächern Mathematik und Chemie

Titel der Staatsexamensarbeit: "Projektionen von Borel-Mengen"

20.4.2006 Abschluss der Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik

Titel der Diplomarbeit: "Stark geodätisch automatische Gruppen sind hyperbolisch"

17.7.2006 Erweiterungsprüfung zum 1. Staatsexamen im Fach Informatik

ab April 2006 Studium der Mathematik mit dem Ziel der Promotion an der CAU Kiel

Erklärung

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit bis auf die wissenschaftliche Beratung durch meinen Doktorvater selbstständig verfasst zu haben.

Die Arbeit ist unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis entstanden und ist bisher weder veröffentlicht, noch zur Veröffentlichung eingereicht worden, noch hat sie ganz oder zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen.

Des Weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 8. Februar 2010