

**ZULÄSSIGE GRUPPENWIRKUNGEN  
AUF HADAMARDRÄUMEN, IHREN  
VIRTUELLEN RÄNDERN UND  
ASSOZIIERTEN BÄUMEN**

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von  
Sebastian Gensing

Kiel, im Januar 2010



Referent:	Prof. Dr. Jens Heber
Korreferent:	Prof. Dr. Wilderich Tuschmann
Tag der mündlichen Prüfung:	9. Februar 2010
Zum Druck genehmigt:	9. Februar 2010

gez. Prof. Dr. Lutz Kipp, Dekan



## ZUSAMMENFASSUNG

Gegenstand der vorliegenden Dissertationsschrift ist die Untersuchung einer Klasse eigentlich diskontinuierlicher, kokompakter, isometrischer Gruppenwirkungen auf Hadamardräumen und der induzierten topologischen Wirkungen auf deren virtuellen Rändern.

In [CK02] beschreiben C. B. CROKE und B. KLEINER geometrische Daten einer Klasse sogenannter zulässiger Wirkungen, welche die topologische Konjugationsklasse der auf dem virtuellen Rand induzierten Wirkung eindeutig bestimmen. Insbesondere zeigen die Autoren, daß falls die geometrischen Daten zulässiger Wirkungen einer Gruppe auf zwei Hadamardräumen äquivalent sind, sich jede äquivariante Quasiisometrie stetig zu einem Homöomorphismus der virtuellen Ränder fortsetzen läßt. Dazu konstruieren sie eine aus der Graphenzerlegung der Gruppe abgeleitete geometrische Zerlegung des Hadamardraumes in sogenannte Ecken- und Kantenräume, wobei für eine nichtpositiv gekrümmte Graphenmannigfaltigkeit diese gerade den universellen Überlagerungen ihrer Seifertstücke bzw. derer Randtori entsprechen. Diese Zerlegung erlaubt es ihnen zu zeigen, daß jeder nicht zu einem einzelnen Eckenraum asymptotische geodätische Strahl bis auf uniform sublinearen Fehler dem quasiisometrischen Bild eines geodätischen Strahles in einem als Schablone bezeichneten Modellraum für die von dem geodätischen Strahl durchlaufene Folge von Kantenräumen entspricht.

Ferner fragen CROKE und KLEINER ebenda nach möglichen Verallgemeinerungen der vorgestellten Klasse von Wirkungen, welche ähnliche Stabilitätsaussagen zulassen. Geometrisch relevant sind insbesondere zulässige Wirkungen von höherem Rang, d.h. Wirkungen von Gruppen, in deren Graphenzerlegung die Kanten auch virtuell frei abelsche Gruppen von höherem Rang tragen und die damit eine natürliche Verallgemeinerung geometrischer Daten zulassen. Solche Wirkungen erlauben in der Tat eine zu [CK02] analoge Zerlegung des Hadamardraumes in Ecken- und Kantenräume und die Verallgemeinerung von Schablonen. Aber anders als im Falle niedriger Dimension, sind geodätische Strahlen im allgemeinen nicht auf Schablonen modellierbar. Damit lassen sich zulässige Wirkungen von höherem Rang auf einem Paar von Hadamardräumen angeben, deren verallgemeinerte geometrische Daten äquivalent sind, und eine äquivariante Quasiisometrie, welche keine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand besitzt. Somit ist die in [CK02] aufgeworfene Frage für die natürliche Verallgemeinerung negativ zu beantworten.



## ABSTRACT

We consider groups acting properly discontinuously and cocompactly by isometries on a Hadamard space, by which we refer to a complete, connected, and simply connected length space of non-positive curvature in the sense of A. D. ALEXANDROV. As an isometry of a Hadamard space extends canonically to a homeomorphism of its virtual boundary, i.e., asymptotic classes of geodesic rays endowed with the topology of uniform convergence on compact sets, any such action induces a topological action on the virtual boundary.

C. B. CROKE and B. KLEINER introduced in [CK02] a class of so-called admissible actions on Hadamard spaces and associated invariants, the geometric data of the action, which determine the topological conjugacy class of the boundary action. In particular, they show that any equivariant quasiisometry extends canonically to a homeomorphism between the virtual boundaries, provided the geometric data of two admissible actions coincide up to scale. From the graph of groups decomposition of the admissible group the authors derive an arrangement of convex subspaces in the Hadamard space, the edge and vertex spaces. In a non-positively curved graphmanifold these subspaces correspond to the universal covers of the Seifert pieces, resp. their boundary tori. Employing this decomposition they show that any geodesic ray which is not asymptotic to some vertex space can be approximated, up to uniformly sublinear error, by the quasiisometric image of a geodesic ray in a so-called template, a model space for the sequence of edge spaces intersected by the geodesic ray.

The present thesis addresses the question posed by CROKE and KLEINER in [CK02] as to what extent the methods unraveled therein might be applicable to a wider class of actions. Geometrically pertinent is the case of an admissible action of higher rank, i.e., virtually free abelian groups of higher rank being carried by the edges in the graph of groups decomposition, and the generalized notion of geometric data for such an action. Despite the fact that most of the construction as in [CK02] is indeed attainable in our generalized case, quasiisometries fail to relate geodesic rays in the Hadamard space to geodesic rays in a template as approximative as in the low dimensional case. Exploiting this repercussion, we show that, for the natural generalization, the aforementioned question has to be answered in the negative: There is an admissible action of higher rank on a pair of Hadamard spaces with equivalent generalized geometric data and an equivariant quasiisometry which does not extend continuously to the virtual boundary.





# INHALTSVERZEICHNIS

<b>EINLEITUNG</b>	<b>IX</b>
<b>1 HADAMARDRÄUME</b>	<b>1</b>
1.1 Geodätische Räume . . . . .	1
1.2 Quasiisometrien . . . . .	2
1.3 Isometrische Gruppenwirkungen . . . . .	3
1.4 Virtuelle Ränder . . . . .	5
1.5 Hyperbolische Räume . . . . .	6
<b>2 GRAPHEN UND GRUPPEN</b>	<b>8</b>
2.1 Graphen . . . . .	8
2.2 Gruppenwirkungen . . . . .	9
2.3 Graphen von Gruppen . . . . .	9
2.4 Fundamentalgruppen . . . . .	10
<b>3 ZULÄSSIGE WIRKUNGEN</b>	<b>13</b>
3.1 Zulässige Graphen von Gruppen . . . . .	13
3.2 Geometrische Beispiele . . . . .	17
3.3 Algebraische Beispiele . . . . .	19
3.4 Verallgemeinerte geometrische Daten . . . . .	24
<b>4 GEOMETRIE ZULÄSSIGER WIRKUNGEN</b>	<b>27</b>
4.1 Geometrische Zerlegung . . . . .	28
4.2 Routen . . . . .	30
4.3 Schablonen . . . . .	31
4.4 Blaupausen . . . . .	34
4.5 Der Fall $n=2$ . . . . .	36
<b>5 REKONSTRUKTION GEOMETRISCHER DATEN</b>	<b>41</b>
5.1 Reduktion . . . . .	42
5.2 Stabilität unter Quasiisometrien . . . . .	44
5.3 Geometrische Daten . . . . .	47
<b>6 EIN GEGENBEISPIEL</b>	<b>50</b>
6.1 Konstruktion . . . . .	51
6.2 Eigenschaften . . . . .	53
6.3 Spezielle Segmente . . . . .	61
6.4 Nichtfortsetzbarkeit . . . . .	69



## EINLEITUNG

Jeder Hadamardraum besitzt einen wohldefinierten virtuellen Rand, der aus den Asymptotenklassen geodätischer Strahlen, versehen mit der durch gleichmäßige Konvergenz stetiger Wege auf Kompakta induzierten Topologie, besteht. Jede Isometrie eines Hadamardraumes läßt sich in eindeutiger Weise zu einem Homöomorphismus seines virtuellen Randes fortsetzen und eine isometrische Gruppenwirkung auf einem Hadamardraum induziert so eine topologische Wirkung auf seinem virtuellen Rand.

M. GROMOV stellte in [Gro93] die Frage, ob für Wirkungen ein und derselben Gruppe auf zwei Hadamardräumen die von ihnen induzierten Wirkungen auf den virtuellen Rändern topologisch äquivalent seien. Diese Fragestellung hat ihre Ursprünge in den Arbeiten von D. V. ANOSOV und GROMOV über die Stabilität des geodätischen Flusses geschlossener Riemannscher Mannigfaltigkeiten von negativer Schnittkrümmung. In der Tat sind für ein Paar homotopieäquivalenter kompakter Riemannscher Mannigfaltigkeiten von negativer Schnittkrümmung die induzierten Wirkungen ihrer Fundamentalgruppe auf den virtuellen Rändern topologisch äquivalent. Diese Form von Randstabilität folgt allgemeiner für kokompakte, hyperbolische Hadamardräume aus der Tatsache, daß sich sogar jede äquivariante Quasiisometrie zwischen solchen Räumen in eindeutiger Weise stetig auf den virtuellen Rand fortsetzen läßt. Insbesondere ist damit der Homöomorphietyp des virtuellen Randes eindeutig bestimmt.

Schwächt man jedoch die Voraussetzung negativer Krümmung zu nicht-positiver Krümmung ab, so gilt im allgemeinen keine Randstabilität: Es existieren Beispiele von S. BUYALO [Buy98] sowie von C. B. CROKE und B. KLEINER [CK00] kokompakter Wirkungen einer Gruppe auf einem Paar von Hadamardräumen, deren virtuelle Ränder nicht homöomorph sind.

Aufbauend auf diesen Ergebnissen finden CROKE und KLEINER in [CK02] Klassen von Hadamardräumen mit äquivariant homöomorphen virtuellen Rändern. Für diese geben die Autoren eine Äquivalenzrelation für sogenannte zulässige Wirkungen an, welche den äquivarianten Homöomorphietyp des

virtuellen Randes und die topologische Konjugationsklasse der Gruppenwirkung auf ihm eindeutig bestimmen.

Beispielsweise ist die Wirkung der Fundamentalgruppe durch Decktransformationen auf einer dreidimensionalen Graphenmannigfaltigkeit nichtpositiver Schnittkrümmung eine im Sinne der Autoren zulässige Wirkung. Eine solche Mannigfaltigkeit besteht aus einer endlichen Anzahl von Seifertstücken, welche entlang ihrer Randkomponenten miteinander verklebt werden. Die Seifertstücke sind jeweils ein Produkt einer kompakten, orientierbaren Riemannschen Fläche mit Rand von negativer Eulercharakteristik und einer 1-Sphäre, ihre Randkomponenten also totalgeodätische 2-Tori. Die Fundamentalgruppe einer solchen Mannigfaltigkeit ist damit isomorph zu der Fundamentalgruppe eines endlichen Graphen von Gruppen, dessen Kantengruppen alle frei abelsch von Rang 2 sind und dessen Ecken jeweils das direkte Produkt einer nichtelementar hyperbolischen Gruppe mit einer unendlich zyklischen Gruppe tragen. Die geometrischen Daten bestehen dann für jede Ecke zum einen aus dem markierten Längenspektrum der Riemannschen Fläche ihres zugehörigen Seifertstückes und zum anderen aus den mit Vorzeichen behafteten Translationslängen der Elemente der Eckengruppe auf dem euklidischen Faktor der universellen Überlagerung des Seifertstückes. Die Autoren nennen die geometrischen Daten zweier Wirkungen äquivalent, wenn die Daten jeder Ecke sich nur jeweils um ein positives skalares Vielfaches unterscheiden, und können in diesem Falle zeigen, daß sich jede äquivariante Quasiisometrie stetig auf den virtuellen Rand fortsetzen läßt.

CROKE und KLEINER fragen in [CK02] nach möglichen Verallgemeinerungen der Klasse zulässiger Wirkungen und derer geometrischen Daten, für welche sich ähnliche Stabilitätsresultate formulieren lassen. Beispielsweise zeigen G. C. HRUSKA und KLEINER in [Hru05] und [HK05], daß jede Gruppe, welche eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien auf einem Hadamardraum mit isolierten Flachs wirkt, relativ hyperbolisch im Sinne von C. DRUȚU und M. SAPIR [DS05] ist; insbesondere bildet dann eine äquivariante Quasiisometrie zwischen zweien solcher Räume jeden geodätischen Strahl in eine uniform beschränkte Umgebung eines geodätischen Strahles ab und besitzt somit eine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand.

In der vorliegenden Arbeit werden eigentlich diskontinuierliche und kokompakte isometrische Wirkungen von Gruppen auf lokal kompakten Hadamardräumen untersucht, welche in einem gegenüber [CK02] verallgemeinerten

Sinne zulässig sind und eine naheliegende Definition geometrischer Daten erlauben. Mit der Definition für Zulässigkeit einer Wirkung in Abschnitt 3.1 erweitern wir die von CROKE und KLEINER betrachtete Klasse von Gruppen dahingehend, daß wir für die Kantengruppen und die maximal frei abelschen Normalteiler der Eckengruppen in der Graphenzerlegung der Gruppe virtuell frei abelsche Gruppen von höherem Rang zulassen.

In den weiteren Abschnitten von Kapitel 3 stellen wir einige Beispiele zulässiger Wirkungen von höherem Rang vor. Zunächst sind die Decktransformationswirkungen der Fundamentalgruppen endlicher Toruskomplexe oder verallgemeinerter Graphenmannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung Beispiele solcher Wirkungen. Des weiteren besitzt nach P. SCOTT und G. A. SWARUP, siehe [SS03] und [SS07], jede Gruppe mit Poincaré-Dualität eine Graphenzerlegung, welche für Fundamentalgruppen von geschlossenen, orientierbaren, nichtpositiv gekrümmten Mannigfaltigkeiten in etwa der geometrischen Zerlegung der Mannigfaltigkeit nach B. LEEB und SCOTT aus [LS00] entspricht. Die Ecken desjenigen Graphen von Gruppen, in welchen eine Gruppe mit Poincaré-Dualität nach [SS07] zerfällt, sind entweder von verallgemeinertem oder speziellem Seifert-Typ oder atoroidal; dabei entsprechen die Ecken von speziellem Seifert-Typ den einseitigen Tori und atoroidale Ecken den atoroidalen Untermannigfaltigkeiten in der geometrischen Zerlegung nach [LS00]. Wirkt eine Gruppe mit Poincaré-Dualität, deren Graphenzerlegung lediglich Ecken von verallgemeinertem Seifert-Typ enthält, auf einem lokal kompakten Hadamardraum, so ist diese Wirkung zulässig im Sinne der hier eingeführten Definition.

Eine derart verallgemeinerte zulässige Wirkung auf einem lokal kompakten Hadamardraum ermöglicht es uns, ähnlich wie in [CK02] eine Zerlegung des Raumes in eine Familie von Ecken- und Kantenräumen anzugeben. Mit dieser Zerlegung konstruieren wir für jeden geodätischen Strahl, welcher nicht asymptotisch zu einem Eckenraum ist, einen lokal euklidischen Hadamardraum, eine sogenannte Schablone, welcher die Folge der von dem geodätischen Strahl durchlaufenen Ecken- und Kantenräume approximiert. Sind die in Abschnitt 3.4 verallgemeinerten geometrischen Daten der Wirkungen einer zulässigen Gruppe auf zwei Hadamardräumen äquivalent, so läßt sich jede Schablone des einen Raumes mittels einer äquivarianten Quasiisometrie zu einer Schablone des anderen deformieren. Somit läßt sich die ursprüngliche Konstruktion von CROKE und KLEINER in weiten Teilen auf unseren Fall verallgemeinern. Eine Modellierung geodätischer Strahlen oder Segmente des Raumes in einer Schablone, woraus dann für zulässige

Wirkungen mit äquivalenten geometrischen Daten die stetige Fortsetzbarkeit äquivarianter Quasiisometrien auf den virtuellen Rand folgte, schlägt im allgemeinen jedoch fehl:

Als Gegenbeispiel konstruieren wir in Kapitel 6 zwei Wirkungen einer zulässigen Gruppe auf lokal kompakten Hadamardräumen, deren verallgemeinerte geometrische Daten äquivalent sind, und eine äquivariante Quasiisometrie, welche keine Fortsetzung auf den virtuellen Rand besitzt. Dies rührt daher, daß es geodätische Segmente gibt, deren quasiisometrische Bilder einen linear in ihrer Länge wachsenden Abstand zu den Mittelpunkten der ihre Endpunkte verbindenden Segmente aufweisen.

Wie in Abschnitt 6.3 im Rahmen der Diskussion dieses Gegenbeispiels deutlich wird, besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Existenz dieser speziellen Segmente und den zuvor in Abschnitt 5.1 konstruierten Teilräumen, welche zulässige Wirkungen von geringerem Rang auf den Komplementen ihrer euklidischen Faktoren tragen. Die Konstruktion der Segmente beruht im wesentlichen darauf, daß die verallgemeinerten geometrischen Daten nicht genügend Information tragen, um das Verhalten solcher geodätischer Strahlen zu beschreiben, welche wenigstens zwei verschiedene jener Teilräume durchlaufen.

Bei gegebener Randstabilität zeigen wir in Kapitel 5 durch ein Induktionsargument, daß viele der verallgemeinerten geometrischen Daten äquivalent sind; mithin scheint ihre Äquivalenz ein notwendiges Kriterium für die Fortsetzbarkeit äquivarianter Quasiisometrien darzustellen.

Es ist zu vermuten, daß sich in ähnlicher Weise erweiterte geometrische Daten definieren lassen, welche über die Fortsetzbarkeit äquivarianter Quasiisometrien auf den virtuellen Rand entscheiden und damit die topologische Konjugationsklasse der Wirkung auf dem virtuellen Rand bestimmen.

Mit den in Abschnitt 5.1 konstruierten Teilräumen wäre eine den Familien der Ecken- und Kantenräume ähnliche äquivariante geometrische Zerlegung des Hadamardraumes möglich, denn wie im darauffolgenden Abschnitt gezeigt wird, sind die Familien dieser Teilräume ebenfalls verträglich mit äquivarianten Quasiisometrien. Ein direkter Vergleich der Verläufe geodätischer Strahlen und quasiisometrischer Bilder geodätischer Strahlen innerhalb dieser Teilräume, von dem hier allerdings abgesehen wird, gäbe dann gegebenenfalls weiteren Aufschluß über deren Divergenzverhalten.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Heber meinen herzlichen Dank dafür aussprechen, daß er das Entstehen dieser Arbeit mit großer Hilfsbereitschaft, steter Ermutigung und konstruktiver Kritik begleitet und ermöglicht hat. Mein weiterer Dank gilt Herrn Professor Tuschmann und allen Teilnehmern des Oberseminares zur Differentialgeometrie, die mir sowohl mit fachlichen Diskussionen als auch mit freundschaftlicher Verbundenheit eine unverzichtbare Unterstützung waren.





# 1 HADAMARDRÄUME

Im folgenden erinnern wir an einige grundlegende Begriffe der Geometrie metrischer Räume nichtpositiver Krümmung und hyperbolischer Räume sowie isometrischer Gruppenwirkungen auf solchen. Die nächsten Abschnitte dienen vor allem dazu, Notationen festzulegen und einige im weiteren Verlauf der Arbeit häufig verwandte Ergebnisse vorzustellen. Die Ausführungen werden daher lediglich skizzenhaft sein. Ausführliche Darstellungen zu den Themen finden sich etwa bei W. BALLMANN [Bal95], M. BRIDSON und A. HAEFLIGER [BH99] oder M. GROMOV [Gro07]. Beweise werden wir nur für solche Aussagen führen, zu denen uns keine Referenzen bekannt sind. Alle weiteren finden sich, sofern kein expliziter Literaturverweis aufgeführt ist, in den oben genannten Quellen.

## 1.1 GEODÄTISCHE RÄUME NICHTPOSITIVER KRÜMMUNG

Ein Hadamardraum ist ein vollständiger, zusammenhängender und einfach zusammenhängender Längenraum nichtpositiver Krümmung im Sinne von ALEXANDROV. Nach dem Satz von HADAMARD-CARTAN ist die Metrik eines solchen Raumes konvex und damit eindeutig geodätisch, d.h. je zwei Punkte können durch ein eindeutiges geodätisches Segment miteinander verbunden werden. Geodätische Segmente hängen stetig von ihren Anfangs- und Endpunkten ab. Falls ein Hadamardraum lokal kompakt ist, so ist er nach dem Satz von HOPF-RINOW schon eigentlich, d.h. seine abgeschlossenen metrischen Bälle sind kompakt.

Es sei  $X$  ein lokal kompakter Hadamardraum und es bezeichne  $d_X$  seine Metrik. Für Punkte  $x, y \in X$  bezeichne  $\overline{xy}$  das Bild des sie verbindenden geodätischen Segmentes; eine Parametrisierung dieses Segmentes notieren wir ebenfalls mit  $\overline{xy}$ . Alle Geodätischen und geodätischen Strahlen oder Segmente verstehen wir, sofern nicht ausdrücklich anders erwähnt, als nach der Bogenlänge parametrisiert.

Eine abgeschlossene konvexe Teilmenge  $C$  von  $X$  ist selbst ein lokal kompakter Hadamardraum. Für ein  $x \in X$  sei die orthogonale Projektion von  $x$  auf  $C$  der eindeutig bestimmte Punkt  $\text{pr}_C(x)$  in  $C$ , für welchen  $d_X(x, \text{pr}_C(x)) = d_X(x, C)$  gilt. Die Abbildung  $\text{pr}_C : X \rightarrow C$  hat Lipschitzkonstante 1.

## 1.2 QUASIISOMETRIEN

Es seien  $X$  und  $X'$  metrische Räume. Eine Abbildung  $\Phi : X \rightarrow X'$  heißt  $(L, A)$ -quasiisometrische Einbettung von  $X$  in  $X'$ , wenn Konstanten  $L$  und  $A$  existieren, so daß für alle  $x, y \in X$  gilt:

$$\frac{1}{L}d_{X'}(\Phi(x), \Phi(y)) - A \leq d_X(x, y) \leq Ld_{X'}(\Phi(x), \Phi(y)) + A$$

Die Ungleichung auf der rechten Seite wird auch als  $(L, A)$ -Lipschitzbedingung und  $L$  als Lipschitzkonstante von  $\Phi$  bezeichnet.

Eine  $(L, A)$ -quasiisometrische Einbettung heißt  $(L, A)$ -Quasiisometrie, falls ihr Bild  $A$ -dicht in  $X'$  liegt. Die Räume  $X$  und  $X'$  heißen dann quasiisometrisch. Jede Quasiisometrie  $\Phi$  von  $X$  nach  $X'$  besitzt ein Quasiinverses, d.h. es existiert eine Quasiisometrie  $\Psi$  von  $X'$  nach  $X$ , so daß  $\sup_{x \in X} d_X(\Psi \circ \Phi(x), x)$  endlich ist.

Eine quasiisometrische Einbettung eines Intervalles in  $X$  wird Quasigeodätische genannt. Das Bild einer Geodätischen in  $X$  unter einer Quasiisometrie ist eine Quasigeodätische in  $X'$ .

Das Bild einer Quasigeodätischen liegt im allgemeinen nicht in endlichem Hausdorffabstand zu irgendeiner Geodätischen, wie man an dem Beispiel

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto \log(1 + \theta)e^{2\pi i\theta}$$

leicht sieht. Jede Quasiisometrie eigentlicher, geodätischer Räume induziert aber einen Homöomorphismus zwischen ihren Enden<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Die Komplemente kompakter Mengen in  $X$  bilden ein per Inklusion gerichtetes System  $\mathcal{C}$  und den Raum  $\text{Ends}(X) = \lim \mathcal{C}$  nennt man die Enden von  $X$ .

### 1.3 ISOMETRISCHE GRUPPENWIRKUNGEN

Eine Gruppe  $\Gamma$  wirke eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien auf einem lokal kompakten Hadamardraum  $X$ .

Nach dem Lemma von ŠVARC-MILNOR ist dann  $\Gamma$  endlich erzeugt und für jedes  $x \in X$  ist die Abbildung  $\Gamma \rightarrow X, \gamma \mapsto \gamma.x$  eine äquivariante Quasiisometrie bezüglich einer Wortmetrik<sup>2</sup> auf  $\Gamma$ . Insbesondere liegen alle Wortmetriken zu endlichen Erzeugendensystemen von  $\Gamma$  in ein und derselben Quasiisometrieklasse.

Jede Isometrie  $\gamma \in \Gamma$  ist halbeinfach, d.h. ihre Verschiebefunktion

$$\delta_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto d_X(\gamma.x, x)$$

nimmt ihr Minimum  $|\gamma|_X$  an. Für alle  $\alpha, \gamma \in \Gamma$  stimmt die Translationslänge  $|\gamma|_X$  von  $\gamma$  mit der seines Konjugierten  ${}^\alpha\gamma = \alpha\gamma\alpha^{-1}$  überein. Es bezeichne

$$\text{Min}_X(\gamma) = \{x \in X \mid \delta_\gamma(x) = |\gamma|_X\}$$

die Menge der von  $\gamma$  minimal verschobenen Punkte.

Für jedes  $\gamma \in \Gamma$  ist  $\text{Min}_X(\gamma)$  nicht leer und invariant unter jeder Isometrie, die mit  $\gamma$  kommutiert. Die Verschiebefunktion  $\delta_\gamma$  ist stetig und konvex und somit ist  $\text{Min}_X(\gamma)$  abgeschlossen und konvex. Ist  $\gamma$  hyperbolisch, so ist  $\text{Min}_X(\gamma)$  die Vereinigung der Bilder der Achsen von  $\gamma$  und zerfällt in ein metrisches Produkt  $Y \times \mathbb{R}$ , wobei  $Y$  ein vollständiger konvexer Teilraum von  $X$  ist und die reellen Fasern des Produktes genau den Achsen von  $\gamma$  entsprechen. Jede Isometrie, welche mit  $\gamma$  kommutiert, ist mit dieser Produktstruktur verträglich und zerfällt in das Produkt einer Isometrie von  $Y$  und einer Translation des reellen Faktors von  $\text{Min}_X(\gamma)$ .

Für eine Untergruppe  $\Lambda$  von  $\Gamma$  sei

$$\text{Min}_X(\Lambda) = \bigcap_{\gamma \in \Lambda} \text{Min}_X(\gamma).$$

---

<sup>2</sup> Ist  $\Sigma$  eine Menge von Erzeugern von  $\Gamma$ , so ist der Abstand zweier Gruppenelemente  $\alpha$  und  $\beta$  als die minimale Länge eines Wortes in  $\Sigma$  für  $\alpha^{-1}\beta$  definiert.

Ist  $Z$  eine frei abelsche Untergruppe in  $\Gamma$ , so gilt:

- (i)  $Z$  ist von endlichem Rang  $k$ .
- (ii)  $\text{Min}_X(Z)$  ist nichtleer und zerfällt in ein metrisches Produkt  $Y \times \mathbb{E}^k$  eines vollständigen, konvexen Teilraumes  $Y$  von  $X$  und eines euklidischen Raumes der Dimension  $k$ .
- (iii)  $\text{Min}_X(Z)$  ist invariant unter der Wirkung des Normalisators  $N_\Gamma(Z)$  und der Zentralisator  $C_\Gamma(Z)$  hat endlichen Index in  $N_\Gamma(Z)$ .
- (iv) Jede Isometrie  $\alpha \in N_\Gamma(Z)$  ist mit der Produktstruktur verträglich, d.h. identifizieren wir ein  $x \in \text{Min}_X(Z)$  mit seinen Koordinaten  $(\bar{x}, x_{\mathbb{E}})$  bezüglich obiger Produktzerlegung, dann gibt es Isometrien  $\bar{\alpha} \in \text{Iso}(Y)$  und  $\alpha_{\mathbb{E}} \in \text{Iso}(\mathbb{E}^k)$ , so daß  $\alpha.(\bar{x}, x_{\mathbb{E}}) = (\bar{\alpha}.\bar{x}, \alpha_{\mathbb{E}}.x_{\mathbb{E}})$  gilt.
- (v) Für jedes  $\alpha \in C_\Gamma(Z)$  ist  $\alpha_{\mathbb{E}}$  eine Translation von  $\mathbb{E}^k$ .
- (vi)  $Z$  wirkt trivial auf  $Y$  und kokompakt auf dem euklidischen Faktor, so daß der Quotient jeder euklidischen Faser nach  $Z$  ein  $k$ -dimensionaler Torus ist.
- (vii) Die induzierte Wirkung von  $N_\Gamma(Z)/Z$  auf  $Y$  ist eigentlich diskontinuierlich.

LEMMA 1.3.1 Es sei  $\Gamma$  eine Gruppe, welche eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf einem lokal kompakten Hadamardraum  $X$  operiert, und  $Z$  eine frei abelsche Untergruppe. Bezeichnen  $\zeta_1, \dots, \zeta_k$  freie Erzeuger von  $Z$ , so ist für jedes  $R > 0$  die Menge  $M_R = \{x \in X \mid \sum_{i \leq k} \delta_{\zeta_i}(x) \leq R\}$  invariant unter der Wirkung des Zentralisators  $C_\Gamma(Z)$  und diese Wirkung ist kokompakt.

BEWEIS: Zunächst stellen wir fest, daß  $M_R$  als abgeschlossene und konvexe Teilmenge in  $X$  selbst ein lokal kompakter Hadamardraum und somit eigentlich ist. Es genügt also zu zeigen, daß für jede Folge  $x_n \in M_R$  eine Folge  $\xi_n \in C_\Gamma(Z)$  existiert, so daß  $\xi_n.x_n$  eine konvergente Teilfolge besitzt:

Es sei  $x_n$  eine Folge in  $M_R$ . Da  $\Gamma$  kokompakt auf  $X$  wirkt, können wir  $\gamma_n \in \Gamma$  so wählen, daß  $\gamma_n = \gamma_n.x_n$  nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge gegen

ein  $\gamma_\infty$  konvergiert. Dann gilt für fast alle  $n \in \mathbb{N}$  und jedes  $i \leq k$ :

$$\begin{aligned} d_X(\gamma^n \zeta_i \cdot \gamma_\infty, \gamma_\infty) &\leq d_X(\gamma^n \zeta_i \cdot \gamma_\infty, \gamma^n \zeta_i \cdot \gamma_n) + d_X(\gamma^n \zeta_i \cdot \gamma_n, \gamma_n) + d_X(\gamma_n, \gamma_\infty) \\ &= 2d_X(\gamma_\infty, \gamma_n) + d_X(\zeta_i \cdot x_n, x_n) \\ &\leq 1 + R \end{aligned}$$

Da  $\Gamma$  eigentlich diskontinuierlich wirkt, ist damit  $\Sigma = \{\gamma^n \zeta_i \mid n \in \mathbb{N}, i \leq k\}$  endlich. Nach einem weiteren Übergang zu einer Teilfolge können wir also annehmen, die Folge  $n \mapsto (\gamma^n \zeta_1, \dots, \gamma^n \zeta_k) \in \Sigma^k$  sei konstant. Dann ist  $\xi_n = \gamma_1^{-1} \gamma_n \in C_\Gamma(Z)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $\xi_n \cdot x_n$  konvergiert gegen  $\gamma_1^{-1} \cdot \gamma_\infty \in M_R$ . ■

**KOROLLAR 1.3.2** Unter den Voraussetzungen von Lemma 1.3.1 wirken sowohl  $C_\Gamma(Z)$  als auch  $N_\Gamma(Z)$  kokompakt auf  $\text{Min}_X(Z)$  und sind endlich erzeugt.

**KOROLLAR 1.3.3** Ist unter den Voraussetzungen von Lemma 1.3.1 für ein  $R > 0$  die Menge  $M_R$  nichtleer, so haben  $M_R$  und  $\text{Min}_X(Z)$  endlichen Hausdorffabstand.

**BEWEIS:** Falls  $M_R$  nichtleer ist, gilt  $R > \min_{i \leq k} \{|\zeta_i|_X\}$ , also  $\text{Min}_X(Z) \subset M_R$ . Da  $C_\Gamma(Z)$  kokompakt auf  $M_R$  wirkt, existieren ein  $y \in M_R$  und eine Konstante  $D > 0$ , so daß  $M_R \subset C_\Gamma(Z) \cdot \overline{B}_D(y)$  gilt. Es sei  $z = \text{pr}_{\text{Min}_X(Z)}(y)$  und  $D' = D + d_X(y, z)$ . Ist dann  $x \in M_R$ , so finden wir ein  $\xi_x \in C_\Gamma(Z)$  mit  $\xi_x \cdot x \in \overline{B}_D(y) \cap M_R$ . Da  $\text{Min}_X(Z)$  invariant unter  $C_\Gamma(Z)$  ist, folgt damit

$$d_X(x, \text{Min}_X(Z)) \leq d_X(x, \xi_x^{-1} \cdot z) \leq d_X(\xi_x \cdot x, y) + d_X(y, z) \leq D' .$$

■

## 1.4 VIRTUELLE RÄNDER

Zwei geodätische Strahlen eines lokal kompakten Hadamardraumes  $X$  heißen asymptotisch, wenn der Hausdorffabstand ihrer Bilder beschränkt ist. Die Menge der Asymptotenklassen geodätischer Strahlen heißt virtueller Rand von  $X$  und wird mit  $\partial_\infty X$  notiert.

Da die Metrik auf  $X$  konvex ist, existiert für Punkte  $x \in X$  und  $\mathfrak{r} \in \partial_\infty X$  genau ein in  $x$  beginnender geodätischer Strahl in  $\mathfrak{r}$ , welchen wir mit  $\overline{x\mathfrak{r}}$  bezeichnen.

Ist andererseits  $c$  ein geodätischer Strahl in  $X$ , so bezeichne  $c(\infty)$  seine Äquivalenzklasse im virtuellen Rand.

Es seien  $x \in X$  und  $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ . Für  $x \in \partial_\infty X$  und  $\varepsilon, r > 0$  sei

$$U(x, r, \varepsilon) = \{a \in \overline{X} \setminus \overline{B}_r(c(0)) \mid d_X(\overline{xa}(r), \overline{xx}(r)) < \varepsilon\}.$$

Die von der Familie der  $U(x, r, \varepsilon)$  und den offenen Mengen von  $X$  erzeugte Topologie auf  $\overline{X}$  heißt Kegeltopologie; sie hängt nicht von der Wahl des Basispunktes  $x \in X$  ab. Identifizieren wir  $\overline{X}$  durch die Wahl eines Basispunktes mit der Menge der geodätischen Segmente oder Strahlen, welche in dem Basispunkt beginnen, so stimmt die durch gleichmäßige Konvergenz stetiger Wege auf Kompakta erzeugte Topologie darauf mit der Kegeltopologie überein.

Jede Isometrie von  $X$  besitzt eine kanonische Fortsetzung zu einem Homöomorphismus seines virtuellen Randes; eine isometrische Wirkung  $\Gamma \curvearrowright X$  induziert also eine Wirkung von  $\Gamma$  durch Homöomorphismen auf  $\partial_\infty X$ .

Es sei  $C$  eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von  $X$ . Dann ist  $\partial_\infty C$  abgeschlossen in  $\partial_\infty X$ . Hat  $C$  endlichen Hausdorffabstand zu einer weiteren abgeschlossenen konvexen Teilmenge  $C'$  von  $X$ , so gilt  $\partial_\infty C = \partial_\infty C'$ .

Der virtuelle Rand eines metrischen Produktes zweier Hadamardräume ist in natürlicher Weise homöomorph zum topologischen Join ihrer virtuellen Ränder. Insbesondere ist für einen Hadamardraum  $X$  der virtuelle Rand von  $X \times \mathbb{E}^n$  homöomorph zu der  $n$ -fachen Einhängung von  $\partial_\infty X$ , denn  $\partial_\infty \mathbb{E}^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$ .

## 1.5 HYPERBOLISCHE RÄUME

Für ein  $\delta > 0$  heißt ein geodätisches Dreieck eines geodätischen Raumes  $\delta$ -dünn, falls jede seiner Kanten in der  $\delta$ -Umgebung der anderen beiden Kanten enthalten ist. Ein  $\delta$ -hyperbolischer Raum ist ein geodätischer Raum, dessen geodätische Dreiecke alle  $\delta$ -dünn sind.

Ist  $X$  ein  $\delta$ -hyperbolischer Raum und  $\Phi$  eine Quasiisometrie von  $X$  nach  $X'$ , so ist  $X'$  auch  $\delta'$ -hyperbolisch für ein  $\delta'$ , welches von  $\delta$  und den Quasiisometrie konstanten von  $\Phi$  abhängt. Ein Raum heißt hyperbolisch, wenn er  $\delta$ -hyperbolisch für irgendein  $\delta$  ist.

Wie bereits bemerkt wurde, liegt das Bild einer  $(L, A)$ -Quasigeodätischen eines Hadamardraumes  $X$  nicht notwendig in beschränktem Hausdorffabstand zu einer Geodätischen. Ist  $X$  jedoch  $\delta$ -hyperbolisch, so existiert sogar eine Konstante  $C$ , so daß das Bild jeder  $(L, A)$ -Quasigeodätischen höchstens Hausdorffabstand  $C$  zu dem ihre Endpunkte verbindenden geodätischen Segment hat; dabei hängt  $C$  nur von  $L, A$  und  $\delta$  ab.

Damit kann man zeigen, daß jeder quasigeodätische Strahl einem eindeutig bestimmten Punkt im virtuellen Rand entspricht, womit sich jede Quasiisometrie zwischen hyperbolischen Räumen stetig zu einem Homöomorphismus ihrer virtuellen Ränder fortsetzen läßt.

Eine Gruppe heißt hyperbolisch im Sinne von GROMOV [GdlH90], wenn sie als metrischer Raum bezüglich einer Wortmetrik<sup>3</sup> hyperbolisch ist. Insbesondere ist eine Gruppe hyperbolisch, wenn sie eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf einem hyperbolischen Raum  $X$  wirkt. Eine hyperbolische Gruppe heißt elementar, falls sie entweder endlich oder virtuell unendlich zyklisch ist; sie ist also genau dann nichtelementar, wenn sie als metrischer Raum mehr als zwei Enden besitzt.

---

<sup>3</sup> Dies ist unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems, denn jede hyperbolische Gruppe ist endlich präsentiert.

## 2 GRAPHEN UND GRUPPEN

Das folgende Kapitel hält die wichtigsten Eigenschaften von Gruppenwirkungen auf Bäumen fest, welche im weiteren Verlauf der Arbeit Verwendung finden. Während das Buch von J. P. SERRE [Ser80] wohl als Standardwerk zu diesem Thema gelten darf, ist die hier gewählte Notation und Darstellungsweise eher an jene von W. DICKS und M. J. DUNWOODY in [DD89] angelehnt.

### 2.1 GRAPHEN

Ein Graph  $\mathcal{G}$  besteht aus einer nichtleeren Eckenmenge  $\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{G}$ , einer Kantenmenge  $\mathcal{E} = \mathcal{E}\mathcal{G}$  und Randabbildungen  $\partial^-$  und  $\partial^+$  von  $\mathcal{E}$  in  $\mathcal{V}$ .

Um den Kanten eine Orientierung zuweisen zu können, betrachten wir die Kantenmenge  $\bar{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \times \{-1, +1\}$  mit  $E^\pm = (E, \pm 1) \in \bar{\mathcal{E}}$  für eine Kante  $E \in \mathcal{E}$ . Durch  $E^+ \mapsto \partial^+ E$  und  $E^- \mapsto \partial^- E$  sind dann Randabbildungen von  $\bar{\mathcal{E}}$  in  $\mathcal{V}$  definiert, welche wir ebenso mit  $\partial^\pm$  bezeichnen. Ein Pfad in  $\mathcal{G}$  ist eine möglicherweise endliche Folge von Kanten  $E_k^{\varepsilon_k}$  in  $\bar{\mathcal{E}}$ , so daß jeweils  $\partial^+ E_k^{\varepsilon_k} = \partial^- E_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}}$ . Ein Pfad heißt reduziert, wenn  $E_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \neq E_k^{-\varepsilon_k}$  für alle  $k$  gilt. Ein Zykel ist ein nichttrivialer, reduzierter, endlicher Pfad  $E_1^{\varepsilon_1}, E_2^{\varepsilon_2}, \dots, E_n^{\varepsilon_n}$ , mit  $\partial^- E_1^{\varepsilon_1} = \partial^+ E_n^{\varepsilon_n}$ .

Der Einfachheit halber notieren wir für einen reduzierten Pfad lediglich die Folge von Kanten in  $\mathcal{E}$  und setzen damit voraus, daß es für jede Kante dieser Folge eine Orientierung gibt, so daß obige Bedingungen erfüllt sind.

Ein Graph heißt zusammenhängend, wenn je zwei seiner Ecken durch einen endlichen Pfad verbunden sind, und einfach zusammenhängend, wenn er keine Zykel besitzt. Dies stimmt offensichtlich für die geometrische Realisierung eines Graphen genau mit den entsprechenden topologischen Begriffen überein.



Ein Baum ist ein zusammenhängender und einfach zusammenhängender Graph. Die geometrische Realisierung eines Baumes ist ein hyperbolischer Raum, dessen geodätische Strahlen und Segmente genau den reduzierten Pfaden entsprechen.

## 2.2 GRUPPENWIRKUNGEN AUF GRAPHEN

Eine Gruppe  $\Gamma$  wirkt auf einem Graphen  $\mathcal{G}$ , falls  $\mathcal{V}$  und  $\mathcal{E}$   $\Gamma$ -Mengen und die Randabbildungen  $\Gamma$ -äquivariant sind; dann ist auch  $\mathcal{E}^\pm$  eine  $\Gamma$ -Menge. Für jede Kante  $E$  von  $\mathcal{G}$  ist ihr Stabilisator  $\Gamma_E$  in  $\Gamma$  eine Untergruppe der Stabilisatoren  $\Gamma_{\partial^- E}$  und  $\Gamma_{\partial^+ E}$  der zu ihr inzidenten Ecken. Falls  $\partial^- \times \partial^+ : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  injektiv ist, gilt sogar  $\Gamma_E = \Gamma_{\partial^- E} \cap \Gamma_{\partial^+ E}$  für jede Kante  $E$ .

Wirkt eine Gruppe  $\Gamma$  auf einem Graphen  $\mathcal{G}$ , so wird vermöge der Randabbildungen  $\Gamma.E \mapsto \Gamma.\partial^\pm E$  eine Graphenstruktur auf dem Quotienten  $\mathcal{G}/\Gamma$  induziert.

Es sei  $\Gamma$  eine Gruppe. Der Cayleygraph  $\mathcal{C}_\Sigma(\Gamma)$  von  $\Gamma$  bezüglich eines Erzeugendensystems  $\Sigma$  ist der Graph mit der Eckenmenge  $\Gamma$ , der Kantenmenge  $\Gamma \times \Sigma$  und Randabbildungen  $\partial^-(g, s) = g$  und  $\partial^+(g, s) = gs$ . Durch Linksmultiplikation wirkt  $\Gamma$  auf  $\mathcal{C}_\Sigma(\Gamma)$ .

Die Standardmetrik auf der geometrischen Realisierung des Cayleygraphen stimmt auf der Eckenmenge  $\Gamma$  genau mit der durch  $\Sigma$  induzierten Wortmetrik überein. Ist  $\Gamma$  endlich erzeugt, so sind alle Cayleygraphen von  $\Gamma$  bezüglich endlicher Erzeugendensysteme quasiisometrisch zueinander.

## 2.3 GRAPHEN VON GRUPPEN

Ein Graph von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  besteht aus einem zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{G}$ , einer Familie von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(A)$ ,  $A \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$ , und Monomorphismen  $\iota_E^\pm : \Gamma_{\mathcal{G}}(E) \hookrightarrow \Gamma_{\mathcal{G}}(\partial^\pm E)$ . Für  $E \in \mathcal{E}$  und  $V \in \mathcal{V}$  nennen wir  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  die Kantengruppe in  $E$  und  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  die Eckengruppe in  $V$ .

Ein Morphismus von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  in einen weiteren Graphen von Gruppen  $\Lambda_{\mathcal{H}}(\_)$  ist eine Graphenabbildung  $\phi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , zusammen mit einer Familie  $\{\Phi_A\}_{A \in \mathcal{E}_{\mathcal{G}} \cup \mathcal{V}_{\mathcal{G}}}$  von Gruppenhomomorphismen  $\Phi_A : \Gamma_{\mathcal{G}}(A) \rightarrow \Lambda_{\mathcal{H}}(\phi(A))$ , so daß  $\Phi_{\partial^{\pm}E} \circ \iota_E^{\pm} = \iota_{\phi(E)}^{\pm} \circ \Phi_E$  für alle Kanten  $E$  von  $\mathcal{G}$  gilt.

Wirkt eine Gruppe  $\Gamma$  auf einem zusammenhängenden Graphen  $\mathcal{X}$ , so erhält der Quotient  $\mathcal{G} = \mathcal{X} / \Gamma$  eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Struktur eines Graphen von Gruppen wie folgt: Für jede Ecke oder Kante  $A$  von  $\mathcal{G}$  wählen wir einen Repräsentanten  $a$  von  $A$  in  $\mathcal{X}$  und setzen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(A) = \Gamma_a$ . Für jeden solchen Repräsentanten  $e$  einer Kante  $E$  wählen wir  $\gamma_e^{\pm} \in \Gamma$  so, daß  $\gamma_e^{\pm} \partial^{\pm}e$  der gewählte Repräsentant von  $\partial^{\pm}E$  ist. Ist dann  $E$  eine Kante von  $\mathcal{G}$  und bezeichnen  $e$  und  $v^{\pm}$  die oben gewählten Repräsentanten von  $E$  und  $\partial^{\pm}E$ , so sind die Abbildungen  $\alpha \mapsto \gamma_e^{\pm} \alpha = \gamma_e^{\pm} \alpha \gamma_e^{\pm-1}$  von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E) = \Gamma_e < \Gamma_{\partial^{\pm}e}$  nach  $\gamma_e^{\pm} \Gamma_{\partial^{\pm}e} = \Gamma_{\gamma_e^{\pm} \cdot \partial^{\pm}e} = \Gamma_{\mathcal{G}}(\partial^{\pm}E)$  die geforderten Kantenmonomorphismen.

## 2.4 FUNDAMENTALGRUPPEN VON GRAPHEN VON GRUPPEN

Es sei  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  ein Graph von Gruppen und  $\mathcal{G}_0$  ein maximaler Teilbaum von  $\mathcal{G}$  mit Kantenmenge  $\mathcal{E}_0$ . Dann enthält  $\mathcal{G}_0$  alle Ecken von  $\mathcal{G}$ .

Die Fundamentalgruppe<sup>4</sup>  $\pi_1(\Gamma_{\mathcal{G}}(\_), \mathcal{G}_0)$  von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  in  $\mathcal{G}_0$  ist die durch Erzeuger und Relationen wie folgt präsentierte Gruppe: Die Erzeugermenge sei

$$\{\tau_E \mid E \in \mathcal{E}\} \cup \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \Gamma_{\mathcal{G}}(V).$$

Die Relationen seien die Relationen einer Präsentation jeder Eckengruppe und

$$\tau_E \iota_E^-(\gamma) \tau_E^{-1} = \iota_E^+(\gamma)$$

<sup>4</sup> Bezeichnet  $\mathcal{G}'$  die erste baryzentrische Unterteilung von  $\mathcal{G}$ , so entspricht ein Graph von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  genau einem  $\mathcal{G}'$ -Diagramm  $G$  in der Kategorie der Gruppen mit Monomorphismen und  $\pi_1(\Gamma_{\mathcal{G}}(\_), \mathcal{G}_0) \cong \text{colim } G$ ; siehe H. SCHUBERT [Sch70]. Die universelle Eigenschaft ist genau die Aussage von [DD89, Lemma 7.2].

für alle Kanten  $E$  von  $\mathcal{G}$  und  $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  sowie  $\tau_E = 1$ , falls  $E \in \mathcal{E}_0$ .

Die Isomorphieklasse der Fundamentalgruppe hängt nicht von der Wahl des maximalen Teilbaumes  $\mathcal{G}_0$  ab. Sind zwei Graphen von Gruppen isomorph, so sind auch ihre Fundamentalgruppen isomorph.

Es sei  $\mathcal{G}$  der Graph mit genau einer Kante  $E$  zwischen zwei Ecken  $V$  und  $W$ . Ist dann  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  ein Graph von Gruppen mit  $A = \Gamma_{\mathcal{G}}(V)$ ,  $B = \Gamma_{\mathcal{G}}(W)$  und  $C = \Gamma_{\mathcal{G}}(E)$ , so ist seine Fundamentalgruppe isomorph zu  $A *_C B$ , dem amalgamierten freien Produkt<sup>5</sup> von  $A$  und  $B$  über  $C$ .

Es sei  $\mathcal{G}$  der Graph mit genau einer Kante  $E$  und einer Ecke  $V = \partial^- E = \partial^+ E$ . Eine Graph von Gruppen über  $\mathcal{G}$  besteht dann genau aus zwei Gruppen  $A$  und  $C$ , sowie zwei Monomorphismen von  $C$  in  $A$ . Die Fundamentalgruppe eines solchen Graphen von Gruppen heißt HNN-Erweiterung von  $A$  über  $C$  und wird mit  $A *_C$  bezeichnet.<sup>6</sup>

Mit diesen beiden elementaren Konstruktionen läßt sich die Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  über einem endlichen Graphen  $\mathcal{G}$  bezüglich eines maximalen Teilbaumes  $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$  wie folgt berechnen: Ist  $E$  eine Kante von  $\mathcal{G}_0$ , so definieren wir einen neuen Graphen von Gruppen, indem wir die Kante  $E$  mit ihren beiden Ecken durch eine einzige Ecke ersetzen, welche als Eckengruppe das Amalgam  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\partial^- E) *_C \Gamma_{\mathcal{G}}(\partial^+ E)$  trägt. Nach einer endlichen Anzahl solcher Reduktionsschritte erhalten wir einen Graphen von Gruppen mit endlich vielen zu einer einzigen Ecke inzidenten Kanten, nämlich genau den Kanten in  $\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_0$ . Wie oben reduzieren wir den Graphen, indem wir sukzessive die verbleibenden Kanten löschen und dabei jeweils die Eckengruppe durch ihre HNN-Erweiterung über die betreffende Kantengruppe ersetzen. Die resultierende Gruppe ist isomorph zu der Fundamentalgruppe des Graphen von Gruppen.

<sup>5</sup> In diesem Falle ist  $\mathcal{G}' = \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet$  und ein Graph von Gruppen über  $\mathcal{G}'$  entspricht genau einem Pushoutdiagramm zweier Monomorphismen in der Kategorie der Gruppen.

<sup>6</sup> Schneidet man beispielsweise eine Riemannschen Fläche  $X$  von positivem Geschlecht entlang einer nichtseparierenden geschlossenen Geodätischen auf, so erhält man eine Riemannsche Fläche  $X'$  mit zwei zusätzlichen Randkomponenten  $Y_1, Y_2$ . Die beiden Einbettungen von  $S^1 \simeq Y_i \hookrightarrow X'$  induzieren zwei Monomorphismen  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \pi_1(X')$  und es gilt  $\pi_1(X) = \pi_1(X') *_Z$

Es sei  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  ein Graph von Gruppen mit Fundamentalgruppe  $\Gamma$ . Dann definieren die Eckenmenge

$$\tilde{\mathcal{V}} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \Gamma / \Gamma_{\mathcal{G}}(V)$$

und die Kantenmenge

$$\tilde{\mathcal{E}} = \bigcup_{E \in \mathcal{E}} \Gamma / \Gamma_{\mathcal{G}}(E)$$

mit den Randabbildungen

$$\gamma_{\Gamma_{\mathcal{G}}}(E) \mapsto \gamma_{\Gamma_{\mathcal{G}}}(\partial^{\pm} E)$$

einen Baum  $\mathcal{T}$ , auf welchem  $\Gamma$  so wirkt, daß der auf seinem Quotienten  $\mathcal{T}/\Gamma$  induzierte Graph von Gruppen isomorph zu  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  ist. Dieser Baum wird als Bass-Serre Baum bezeichnet. Dabei entspricht für eine Kante  $E \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_0$  der Erzeuger  $\tau_E$  einem Element der topologischen Fundamentalgruppe  $\pi_1(\mathcal{G})$  und wirkt als Translation auf  $\mathcal{T}$ ; insbesondere gilt  $\tau_E \cdot \partial^- e = \partial^+ e$  für einen Lift  $e$  von  $E$ .

### 3 ZULÄSSIGE WIRKUNGEN

Im folgenden verallgemeinern wir die Klasse von Gruppenwirkungen, welche von C. B. CROKE und B. KLEINER in [CK02] als zulässig bezeichnet werden.

Wir definieren die Wirkung einer Gruppe auf einem Hadamardraum als zulässig, wenn sie isomorph zu der Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen mit bestimmten Eigenschaften ist, und charakterisieren eine in diesem Sinne zulässige Wirkung durch die Wirkung der Gruppe auf ihrem Bass-Serre Baum.

Anhand einiger Beispiele werden wir erläutern, wie solche Wirkungen in natürlicher Weise auftreten.

In [CK02] klassifizieren die Autoren die in ihrem Sinne zulässigen Wirkungen durch eine auf den Ecken- und Kantengruppen der Graphenzerlegung der Gruppe definierte Familie von Funktionen. Diese sogenannten geometrischen Daten einer Wirkung besitzen für die von uns betrachtete Klasse von Wirkungen eine naheliegende Verallgemeinerung, welche wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels vorstellen werden.

#### 3.1 ZULÄSSIGE GRAPHEN VON GRUPPEN

Zwei Untergruppen  $A$  und  $B$  einer Gruppe  $G$  heißen kommensurabel, wenn  $A \cap B$  endlichen Index in  $A$  und in  $B$  hat; wir schreiben dann  $A \sim B$ . Die Untergruppen  $A$  und  $B$  heißen konjugiert kommensurabel, wenn es ein  $g \in G$  gibt, so daß  ${}^g A = \{gag^{-1} \mid a \in A\}$  und  $B$  kommensurabel sind. Die Untergruppe  $\text{Comm}_G(A) = \{g \in G \mid {}^g A \sim A\}$  heißt der Kommensurator von  $A$  in  $G$ .

Es sei  $\mathcal{P}$  eine Eigenschaft für Gruppen. Eine Gruppe  $G$  heißt virtuell  $\mathcal{P}$ , falls  $G$  eine Untergruppe von endlichem Index enthält, welche die Eigenschaft  $\mathcal{P}$  besitzt.

DEFINITION 3.1.1 Ein Graph von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  heiße zulässig von Rang  $k$ , falls  $\mathcal{G}$  endlich ist, mindestens eine Kante besitzt und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Jede Eckengruppe  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  ist eine Erweiterung einer nichtelementar hyperbolischen Gruppe  $\Delta(V)$  durch eine frei abelsche Untergruppe  $Z(V) < \Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  von Rang  $k-1$ .
- (ii) Jede Kantengruppe  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  ist virtuell frei abelsch von Rang  $k$ .
- (iii) Ist  $E$  eine zu einer Ecke  $V = \partial^{\varepsilon}E$  inzidente Kante, so sind für jedes  $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{G}}(V) \setminus \iota_E^{\varepsilon}(\Gamma_{\mathcal{G}}(E))$  die Untergruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  und  $\gamma\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  inkommensurabel. Ist  $E'$  eine weitere zu  $V$  inzidente Kante, so sind die Bilder von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  und  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E')$  in  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  nicht konjugiert kommensurabel.
- (iv) Ist  $E$  eine Kante, so erzeugen die Urbilder<sup>7</sup>  $\iota_E^{-1}Z(\partial^{-}E)$  und  $\iota_E^{+1}Z(\partial^{+}E)$  eine Untergruppe von endlichem Index in  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$ .

Wirkt eine Gruppe  $\Gamma$  eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien auf einem lokal kompakten Hadamardraum, so heiße diese Wirkung zulässig von Rang  $k$ , wenn  $\Gamma$  isomorph zu der Fundamentalgruppe eines zulässigen Graphen von Gruppen von Rang  $k$  ist.

BEMERKUNG 3.1.2 Es sei  $\Gamma$  eine Gruppe, welche eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf einem lokal kompakten Hadamardraum  $X$  wirkt. Die Wirkung ist genau dann zulässig von Rang  $k$ , wenn es einen  $\Gamma$ -endlichen  $\Gamma$ -Baum  $\mathcal{T}$  und eine  $\Gamma$ -quivalente Familie von Normalteilern  $Z_a$  der Isotropiegruppen  $\Gamma_a$  der Ecken und Kanten  $a$  von  $\mathcal{T}$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (i) Für jede Ecke  $v$  ist  $Z_v$  frei abelsch von Rang  $k-1$ ,  $\text{Comm}_{\Gamma}(Z_v) = \Gamma_v$  und  $\Gamma_v/Z_v$  ist nichtelementar hyperbolisch.
- (ii) Für jede Kante  $e$  ist  $Z_e$  frei abelsch von Rang  $k$ ,  $\Gamma_e/Z_e$  ist endlich und  $Z_{\partial^{\pm}e} < Z_e$ .
- (iii) Für zwei verschiedene, zu einer gemeinsamen Ecke inzidente Kanten  $e$  und  $e'$  sind  $Z_e$  und  $Z_{e'}$  inkommensurabel.

<sup>7</sup> Mit (i) können wir annehmen, jede Untergruppe  $Z(\partial^{\pm}E)$  liege im Bild von  $\iota_E^{\pm}$ , denn eine endliche Erweiterung einer hyperbolischen Gruppe ist wieder hyperbolisch.

BEWEIS: Wir zeigen zuerst, daß der Bass-Serre Baum  $\mathcal{T}$  eines zulässigen Graphen von Gruppen die geforderten Eigenschaften besitzt:

Für eine Kante  $e$  von  $\mathcal{T}$  sei  $Z_e$  der äquivariante Lift der normalen, frei abelschen Untergruppe von Rang  $k$  in  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\Gamma.e)$ . Des weiteren bezeichne  $Z_v$  den entsprechenden Lift des frei abelschen Normalteilers in  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$ .

Es seien  $e$  eine Kante von  $\mathcal{T}$  und  $v$  eine zu  $e$  inzidente Ecke. Da  $\Gamma_v$  durch halbeinfache Isometrien auf dem Hadamardraum  $X$  wirkt und  $Z_v$  normal in  $\Gamma_v$  ist, wird  $Z_v$  von einer Untergruppe von endlichem Index in  $\Gamma_v$  bereits zentralisiert. Ist also  $\xi \in Z_v$ , so gilt

$$\Gamma_{\xi.e} = \xi \Gamma_e \sim \xi (\Gamma_e \cap C_{\Gamma_v}(Z_v)) = \Gamma_e \cap C_{\Gamma_v}(Z_v) \sim \Gamma_e$$

und aus 3.1.1 folgt  $\xi \in \Gamma_e$ .

Da  $\mathcal{G}$  endlich ist, können wir nach eventuellem Übergang zu einer charakteristischen Untergruppe von endlichem Index in  $Z_v$  annehmen, es gelte  $Z_v < Z_e$  für jede zu einer Kante  $e$  inzidente Ecke  $v$ .

Es bleibt zu zeigen, daß  $\text{Comm}_{\Gamma}(Z_v) < \Gamma_v$  für jede Ecke  $v$  gilt: Zunächst stellen wir fest, daß für eine Kante  $e$  mit den Ecken  $v$  und  $w$ , sowohl  $Z_v \cap Z_w$  als auch  $Z_v Z_w$  als Untergruppen von  $Z_e$  selbst frei abelsch sind. Nach 3.1.1 (iv) hat  $Z_v Z_w$  endlichen Index in  $Z_e$ , ist mit 3.1.1 (ii) also von Rang  $k$ , und  $Z_v \cap Z_w$  hat Rang  $k-2$ . Sind dann  $e \neq e'$  zu einer gemeinsamen Ecke  $v$  inzidente Kanten, so ist  $\Gamma_e \cap \Gamma_{e'}$  kommensurabel zu  $Z_v$ . Es sei nun  $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_v$ . Dann existiert ein geodätisches Segment  $(v_0 e_1 v_1 \dots e_n v_n)$  der Länge  $n \geq 3$  in  $\mathcal{T}$  mit  $v_1 = v$  und  $v_{n-1} = \gamma.v$ . Wegen  $Z_v < Z_{e_1} < \Gamma_{v_0}$  und  ${}^{\gamma}Z_v = Z_{\gamma.v} < \Gamma_{v_n}$ , folgt aus

$$Z_v \cap {}^{\gamma}Z_v < \Gamma_{v_0} \cap \Gamma_{v_n} < (\Gamma_{e_1} \cap \Gamma_{e_2}) \cap (\Gamma_{e_2} \cap \Gamma_{e_3}) \sim Z_{v_1} \cap Z_{v_2} \cong \mathbb{Z}^{k-2},$$

daß  $Z_v$  und  ${}^{\gamma}Z_v$  nicht kommensurabel sind.

Ist andererseits  $\mathcal{T}$  ein Baum und  $\Gamma \curvearrowright \mathcal{T}$  eine Wirkung mit den geforderten Eigenschaften, so sind für den auf dem Quotienten  $\mathcal{G} = \mathcal{T}/\Gamma$  induzierten Graphen von Gruppen die ersten drei Eigenschaften von Definition 3.1.1 offensichtlich erfüllt. Es sei  $E$  eine Kante von  $\mathcal{G}$  und  $e \in E$  ein Lift nach  $\mathcal{E}\mathcal{T}$ . Wäre dann  $Z_{\partial^-e} Z_{\partial^+e}$  nicht von endlichem Index in  $Z_e$ , so wären  $Z_{\partial^-e}$  und  $Z_{\partial^+e}$  kommensurabel und  $\Gamma_{\partial^+e} < \text{Comm}_{\Gamma}(Z_{\partial^-e})$ , im Widerspruch zu 3.1.1 (i). ■

Insbesondere gilt also für eine zulässige Wirkung  $\Gamma \curvearrowright X$  von Rang  $k$

$$C_\Gamma(Z_a) \sim N_\Gamma(Z_a) = \text{Comm}_\Gamma(Z_a) = \Gamma_a$$

in jeder Ecke oder Kante  $a$  des Bass-Serre Baumes der Graphenzerlegung von  $\Gamma$ .

**BEMERKUNG 3.1.3** Es seien  $\Gamma$  eine Gruppe,  $X$  ein lokal kompakter Hadamardraum und  $\Gamma \curvearrowright X$  eine zulässige Wirkung von Rang  $k$ . Dann ist die Zerlegung von  $\Gamma$  in einen zulässigen Graphen von Gruppen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Der BEWEIS ist eine kleine Variation über [CK02, Lemma 3.7]:

Nach der vorangegangenen Bemerkung genügt es zu zeigen, daß für zwei zulässige Wirkungen von Rang  $k$  einer Gruppe  $\Gamma$  auf  $X$  mit Bass-Serre Bäumen  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}'$  mit den Eigenschaften (i) – (iii) aus 3.1.2 ein  $\Gamma$ -äquivanter Isomorphismus von  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{T}'$  existiert.

Zunächst zeigen wir, daß es zu jedem  $v \in \mathcal{V}\mathcal{T}$  genau einen Fixpunkt  $v' \in \mathcal{V}\mathcal{T}'$  von  $\Gamma_v$  gibt:

Es sei  $v$  eine Ecke von  $\mathcal{T}$ . Dann ist ein  $\xi \in Z_v$  entweder Element einer Isotropiegruppe eines Simplex oder besitzt eine eindeutig bestimmte Achse  $\rho$  in  $\mathcal{T}'$ .

Im zweiten Falle ist  $\rho$  invariant unter  $C_\Gamma(\xi)$ . Für ein  $\gamma \in C_\Gamma(\xi)$  sei  $\tau(\gamma) \in \mathbb{Z}$  seine Translationslänge auf  $\rho$  bezüglich der durch  $\xi$  induzierten Orientierung. Damit ist  $\tau$  ein Gruppenhomomorphismus von  $C_\Gamma(\xi)$  in  $\mathbb{Z}$  und seine Einschränkung auf  $C = C_\Gamma(\xi) \cap \Gamma_v$  liefert eine kurze exakte Sequenz  $1 \rightarrow N \rightarrow C \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Da  $\ker \tau$  in der Isotropiegruppe eines jeden Simplex von  $\rho$  enthalten ist, gilt insbesondere  $\ker \tau < \Gamma_{e'_i} \cap \Gamma_{e'_{i+1}} \sim Z_{v'_i}$  für zwei aufeinanderfolgende Kanten  $e'_i$  und  $e'_{i+1}$  in  $\rho$  mit gemeinsamer Ecke  $v'_i$ . Daher ist mit  $\ker \tau$  auch  $N$  virtuell frei abelsch und von Rang höchstens  $k-1$ . Dann ist wegen  $C/N \cong \mathbb{Z}$  einerseits  $C$  selbst virtuell frei abelsch und andererseits kommensurabel zu  $\Gamma_v$ , denn  $C_\Gamma(Z_v)$  und  $\Gamma_v$  sind kommensurabel und  $C_\Gamma(Z_v) < C_\Gamma(\xi)$ , im Widerspruch zu 3.1.2 (i).

Also ist für jedes  $\xi \in Z_v$  seine Fixpunktmenge  $\text{Fix}_{\mathcal{T}'}(\xi)$  nichtleer und  $Z_v$ -invariant und damit folgt, daß  $\text{Fix}_{\mathcal{T}'}(Z_v) = \bigcap_{\xi \in Z_v} \text{Fix}_{\mathcal{T}'}(\xi)$  nichtleer und  $\Gamma_v$ -invariant ist. Der Durchmesser von  $\text{Fix}_{\mathcal{T}'}(Z_v)$  beträgt höchstens 2, denn



wären  $e'_1, e'_2$  und  $e'_3$  aufeinanderfolgende Kanten in  $\text{Fix}_{\mathcal{T}'}(Z_v)$  und  $v'_1, v'_2$  die zwischen ihnen liegenden Ecken, so gälte

$$\mathbb{Z}^{k-1} \cong Z_v \langle \Gamma_{e'_1} \cap \Gamma_{e'_2} \cap \Gamma_{e'_3} \rangle \sim Z_{v'_1} \cap Z_{v'_2} \cong \mathbb{Z}^{k-2}.$$

Also fixiert  $\Gamma_v$  einen Simplex  $a$  von  $\text{Fix}_{\mathcal{T}'}(Z_v)$  und da  $\Gamma_v$  in keiner Isotropiegruppe einer Kante von  $\mathcal{T}'$  enthalten sein kann, ist  $a$  eine Ecke von  $\mathcal{T}'$  und eindeutig bestimmt.

Damit erhalten wir  $\Gamma$ -äquivalente Abbildungen zwischen  $\mathcal{V}\mathcal{T}$  und  $\mathcal{V}\mathcal{T}'$ . Man rechnet leicht nach, daß diese den gesuchten  $\Gamma$ -Isomorphismus von  $\mathcal{T}$  auf  $\mathcal{T}'$  induzieren. ■

## 3.2 GEOMETRISCHE BEISPIELE

### TORUSKOMPLEXE

Es sei  $T_i, i \leq m+1$ , eine Familie flacher 2-Tori, so daß es auf jedem Torus  $T_i$  zueinander nichthomotope, einfach geschlossene Geodätische  $\alpha_i$  und  $\beta_i$  mit  $l(\beta_i) = l(\alpha_{i+1})$  gibt. Diese Tori werden nun miteinander verklebt, indem wir für alle  $i < m$  die Geodätischen  $\beta_i$  und  $\alpha_{i+1}$  durch eine Isometrie miteinander identifizieren. Damit erhalten wir einen kompakten Raum  $Y$  und versehen diesen mit der induzierten Längenmetrik. Da die Bilder der Geodätischen konvexe Teilräume der Tori sind, ist diese Metrik nichtpositiv gekrümmt.

Die obige Konstruktion beschreibt einen Graphen mit  $m$  Ecken  $V_i = (T_i \cup T_{i+1}) / \{\beta_i = \alpha_{i+1}\}$  und  $m-1$  Kanten  $E_i = V_i \cap V_{i+1}$ . Daraus erhalten wir einen Graphen von Gruppen, indem wir jede Ecke oder Kante ihre Fundamentalgruppe tragen lassen. Dieser Graph von Gruppen ist zulässig: Jede Ecke ist homöomorph zu  $(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \times \mathbb{S}^1$  und ihre Fundamentalgruppe ist isomorph zu  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}$ . Eine Kante  $E_i$  ist inkompressibel in jeder der zu ihr inzidenten Ecken, d.h. die durch die Inklusionen  $E_i \subset V_i$  und  $E_i \subset V_{i+1}$  induzierten Abbildungen von  $\pi_1(E_i)$  in  $\pi_1(V_i)$  resp.  $\pi_1(V_{i+1})$  sind injektiv. Von zwei Erzeugern einer Kantengruppe  $\pi_1(E_i) = \pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$  wird der eine auf einen Erzeuger des unendlichen zyklischen Faktors und der andere auf einen Erzeuger der freien Gruppe in der benachbarten Eckengruppe abgebildet.

Die universelle Überlagerung  $\tilde{Y}$  von  $Y$  ist nach dem Satz von HADAMARD-CARTAN ein lokal kompakter Hadamardraum, auf welchem  $\pi_1(Y)$  eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien wirkt. Nach dem Satz von VAN KAMPEN ist  $\pi_1(Y)$  isomorph zu der Fundamentalgruppe des eben definierten Graphen von Gruppen; siehe etwa [May99].

Die Wirkung von  $\pi_1(Y)$  auf  $\tilde{Y}$  ist also zulässig von Rang 2.

## VERALLGEMEINERTE GRAPHENMANNIGFALTIGKEITEN

Eine verallgemeinerte Graphenmannigfaltigkeit der Dimension  $n+2$  ist eine geschlossene, differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$ , welche aus einer endlichen Anzahl sogenannter Blöcke  $M_i \cong N_i \times \mathbb{T}^n$  besteht, wobei jedes  $N_i$  eine kompakte, orientierbare Riemannsche Fläche mit nichttrivalem Rand und von negativer Eulercharakteristik ist. Eine Zusammenhangskomponente des Randes eines Blockes ist dann ein  $(n+1)$ -dimensionaler Torus. Die Blöcke werden nun derart untereinander verklebt, daß jeweils zwei dieser Tori, möglicherweise ein und desselben Blocks, durch einen Diffeomorphismus miteinander identifiziert werden. Dieser Diffeomorphismus soll die Torusfasern der Blöcke nicht homotop zueinander abbilden.

Dies definiert einen Graphen wie folgt: Für jeden Block  $M_i$  sei  $V_i$  ein Ecke. Zwei Ecken  $V_i$  und  $V_j$  sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn Randkomponenten von  $M_i$  und  $M_j$  miteinander identifiziert wurden; möglicherweise gilt hier  $i = j$  und die Kante ist eine Schleife.

Wie im vorangegangenen Beispiel erhalten wir so einen Graphen von Gruppen, dessen Ecken und Kanten genau die Fundamentalgruppen der sie definierenden Blöcke oder Randkomponenten tragen. Jede Kantengruppe ist frei abelsch von Rang  $n+1$  und jede Eckengruppe ist isomorph zu dem direkten Produkt einer Fuchsschen Gruppe mit einer frei abelschen Gruppe von Rang  $n$ .

Trägt  $M$  eine Riemannsche Metrik nichtpositiver Schnittkrümmung<sup>8</sup>, so folgt wie oben aus den Sätzen von HADAMARD-CARTAN und von VAN KAMPEN, daß die Wirkung  $\pi_1(M) \curvearrowright \tilde{M}$  zulässig von Rang  $n+1$  ist.

<sup>8</sup> In [Sve05] sind notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer solchen Metrik angegeben.

### 3.3 ALGEBRAISCHE BEISPIELE

Ist eine Gruppe isomorph zu der Fundamentalgruppe eines Graphen von Gruppen, so beschreibt jede Kante des Graphen eine Möglichkeit, die Gruppe als amalgamiertes freies Produkt oder als HNN-Erweiterung darzustellen. Eine Zerlegung einer Gruppe in einen Graphen von Gruppen, welcher bis auf Konjugation alle Untergruppen einer bestimmten Klasse, über denen die Gruppe als amalgamiertes freies Produkt oder als HNN-Erweiterung zerfällt, als Kantengruppen trägt, wird JSJ-Zerlegung genannt.

Diese Bezeichnung wurde von Z. SELA in [Sel97] für die ebenda behandelten Graphenzerlegungen torsionsfreier, hyperbolischer Gruppen geprägt. Sie bezieht sich auf die Betrachtungen charakteristischer Untermannigfaltigkeiten in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten von F. WALDHAUSEN [Wal68] und geht auf das folgende, später von W. H. JACO, P. B. SHALEN [JS79] und K. JOHANNSON [Joh79] bewiesene Resultat zurück: In jeder dreidimensionalen, kompakten, irreduziblen, orientierbaren Mannigfaltigkeit ohne Rand existiert eine minimale und bis auf Isotopie eindeutig bestimmte endliche Familie eingebetteter, inkompressibler, zweiseitiger Tori, so daß der Abschluß einer jeden Zusammenhangskomponente ihres Komplementes entweder eine Seifertfaserung trägt oder atoroidal ist und es für jeden eingebetteten, inkompressiblen Torus eine Homotopie in entweder einen Torus dieser Familie oder in ein Seifertstück gibt. Diese Familie von Tori definiert einen Graphen mit den Tori als Kanten und den Zusammenhangskomponenten ihres Komplementes als Ecken. Nach dem Satz von VAN KAMPEN besitzt die Fundamentalgruppe der Mannigfaltigkeit eine Graphenzerlegung über genau diesem Graphen. Da die eingebetteten, inkompressiblen Tori den frei abelschen Untergruppen von Rang 2 entsprechen, über denen die Fundamentalgruppe als amalgamiertes freies Produkt oder HNN-Erweiterung zerfällt, beschreibt dieser Graph alle solchen Zerlegungen bis auf Konjugation.

P. SCOTT und G. A. SWARUP beschreiben in [SS03] und [SS07] die JSJ-Zerlegungen von Gruppen mit Poincaré-Dualität in Dimension  $n$ . Unter Verwendung dieses Resultates können wir in Korollar 3.3.2 Bedingungen dafür angeben, wann die Wirkung einer solchen Gruppe auf einem Hadamardraum zulässig von Rang  $n - 1$  ist.

## KOHOMOLOGIE VON GRUPPEN

Für eine Gruppe  $\Gamma$  und einen  $\mathbb{Z}\Gamma$ -Modul  $M$  sind ihre Homologie und Kohomologie mit Koeffizienten in  $M$  als derivierte Funktoren

$$H_{\bullet}(\Gamma; M) = \text{Tor}_{\bullet}^{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}, M)$$

und

$$H^{\bullet}(\Gamma; M) = \text{Ext}_{\mathbb{Z}\Gamma}^{\bullet}(\mathbb{Z}, M)$$

definiert. Eine umfassende Darstellung dieser Theorie findet sich etwa bei K. S. BROWN [Bro82].

Diese Homologietheorien sind eng verwandt mit gewöhnlicher singulärer Homologie bzw. Kohomologie topologischer Räume: Es sei  $\Gamma$  eine Gruppe und  $K(\Gamma, 1)$  ein Eilenberg-MacLane Raum für  $\Gamma$ ; da wir vor allem an kokompakten Gruppenwirkungen interessiert sind, nehmen wir an,  $K(\Gamma, 1)$  sei kompakt<sup>9</sup>. Dann gilt

$$H_{\bullet}(\Gamma; M) = H_{\bullet}(K(\Gamma, 1); M)$$

und

$$H^{\bullet}(\Gamma; M) = H^{\bullet}(K(\Gamma, 1); M)$$

für jeden  $\mathbb{Z}\Gamma$ -Modul  $M$ .

## POINCARÉ-DUALITÄT FÜR GRUPPEN

Zur Definition von Poincaré-Dualität von Gruppen genügt uns die topologische Charakterisierung von (Ko-)Homologie von Gruppen. Der Darstellung von C. T. C. WALL [Wal03] folgend, erfüllt eine Gruppe  $\Gamma$  mit kompaktem<sup>10</sup> Eilenberg-MacLane Raum Poincaré-Dualität in Dimension  $n$ , wenn eine Fundamentalklasse  $\xi \in H_n(K(\Gamma, 1); \mathbb{Z})$  existiert, so daß für alle  $i \in \mathbb{N}$  und jeden Koeffizientenmodul  $M$  die Abbildung

$$\cap \xi : H^i(K(\Gamma, 1), M) \longrightarrow H_{n-i}(K(\Gamma, 1), M)$$

ein Isomorphismus ist.

<sup>9</sup> Allgemein gilt  $H^{\bullet}(\Gamma; M) = H_c^{\bullet}(K(\Gamma, 1); \mathcal{M})$  für einen  $\mathbb{Z}\Gamma$ -Modul  $M$  und ein System lokaler Koeffizienten  $\mathcal{M}$  auf  $K(\Gamma, 1)$  mit Werten in  $M$ .

<sup>10</sup> WALL läßt in [Wal03] allgemeiner endlich dominierte CW-Komplexe zu.

## JSJ-ZERLEGUNGEN VON GRUPPEN MIT POINCARÉ-DUALITÄT

Der folgende Satz wurde zunächst unter der zusätzlichen Voraussetzung,  $\Gamma$  erfülle Max- $c$ , von P. H. KROPHOLLER in [Kro90] und dann in der hier formulierten Allgemeinheit von SCOTT und SWARUP in [SS03] und [SS07] bewiesen:

THEOREM [SS07, Theorem. 5.1, S. 67] *Eine Gruppe  $\Gamma$  erfülle Poincaré-Dualität in Dimension  $n+2$  und sei nicht virtuell polyzyklisch. Dann ist  $\Gamma$  isomorph zu der Fundamentalgruppe eines endlichen Graphen von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Jede Kantengruppe ist virtuell polyzyklisch der Länge  $n+1$ .*
- (ii) *Eine Eckengruppe  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  ist entweder*
  - a) *von innerem Seifert-Typ, d.h.  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  ist eine Erweiterung einer virtuell polyzyklischen Gruppe  $\Lambda(V)$  der Länge  $n$  durch eine nichtelementare Fuchssche Gruppe  $\Phi(V)$  und jeder Lift einer peripheren Untergruppe von  $\Phi(V)$  nach  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  liegt in genau einer Kantengruppe einer zu  $V$  inzidenten Kante,*
  - b) *von speziellem Seifert-Typ, d.h. es gibt genau eine zu  $V$  inzidente Kante  $E$  und  $\Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  hat Index  $\leq 2$  in  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$ , oder*
  - c) *atoroidal, d.h. jede virtuell polyzyklische Untergruppe der Länge  $n+1$  in  $\Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  kann in eine Kantengruppe einer zu  $V$  inzidenten Kante konjugiert werden.*
- (iii) *Jede virtuell polyzyklische Untergruppe der Länge  $n+1$  in  $\Gamma$  ist, bis auf Konjugation, in einer Eckengruppe von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  enthalten.*

Die atoroidalen Ecken von  $\mathcal{G}$  definieren eine 2-Färbung der Eckenmenge  $\mathcal{V}_{\mathcal{G}}$ , d.h. jede Kante ist inzident zu einer atoroidalen Ecke und einer Ecke von entweder innerem oder speziellem Seifert-Typ. Ein bezüglich der Eigenschaften minimaler Graph von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

## ZULÄSSIGKEIT

Es sei  $\Gamma \curvearrowright X$  eine isometrische, eigentlich diskontinuierliche und kokompakte Wirkung einer Gruppe  $\Gamma$ , welche Poincaré-Dualität in Dimension  $n+2$  erfüllt, auf einem lokal kompakten Hadamardraum  $X$ .

Ferner sei  $\mathcal{T}$  der Bass-Serre Baum des Graphen von Gruppen aus [SS07, Theorem 5.1]. Dabei bezeichne  $\mathcal{E}$  seine Kantenmenge und  $\mathcal{V}_{\text{IST}}$  bzw.  $\mathcal{V}_{\text{ST}}$  die Menge der Ecken von innerem respektive speziellem Seifert-Typ, sowie  $\mathcal{V}_{\text{at}}$  die atoroidalen Ecken.

**PROPOSITION 3.3.1** Es existiert eine  $\Gamma$ -äquivalente Familie von Untergruppen  $\mathbb{Z}^n \cong Z_\nu \subset \Gamma_\nu$  für jede Ecke  $\nu$  von innerem Seifert-Typ und  $\mathbb{Z}^{n+1} \cong Z_e \subset \Gamma_e$  für jede Kante  $e$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $Z_\nu$  ist von endlichem Index in  $\Lambda_\nu$ .
- (ii)  $C_\Gamma(Z_\nu)$  ist von endlichem Index in  $\Gamma_\nu$ .
- (iii)  $Z_e$  ist von endlichem Index in  $\Gamma_e$ .
- (iv)  $C_\Gamma(Z_e)$  und  $\Gamma_e$  sind kommensurabel.
- (v) Sind  $e$  und  $e'$  zwei verschiedene, zu einer Ecke  $\nu$  von innerem Seifert-Typ inzidente Kanten, so ist  $Z_\nu$  mit endlichem Index in  $Z_e \cap Z_{e'}$  enthalten.
- (vi) Für jede Kante  $e$  deren Ecken  $\nu$  und  $\nu'$  von innerem Seifert-Typ sind, ist  $Z_\nu Z_{\nu'}$  eine Untergruppe von endlichem Index in  $Z_e$ .

**BEWEIS:** *ad* (i). Der Stabilisator  $\Gamma_\nu$  einer Ecke  $\nu$  von innerem Seifert-Typ ist, nach Definition, eine Erweiterung einer virtuell polyzyklischen Gruppe  $\Lambda_\nu$  der Länge  $n$  durch eine nichtelementare Fuchsische Gruppe  $\Phi_\nu$ . Da  $\Lambda_\nu$  eigentlich diskontinuierlich und durch halbeinfache Isometrien auf dem Hadamardraum  $X$  wirkt, ist  $\Lambda_\nu$  schon virtuell frei abelsch und wir finden eine in  $\Lambda_\nu$  charakteristische, frei abelsche Untergruppe  $Z_\nu$  von Rang  $n$ .

*ad* (iii). Ist  $e$  eine Kante von  $\mathcal{T}$ , so ist ihr Stabilisator  $\Gamma_e$  virtuell polyzyklisch der Länge  $n+1$  und wie oben wählen wir eine frei abelsche, charakteristische Untergruppe  $Z_e$  von Rang  $n+1$  in  $\Gamma_e$ .

Diese Familien können wir offensichtlich  $\Gamma$ -äquivalent wählen.

*ad* (ii). Da  $Z_v$  als charakteristische Untergruppe von  $\Lambda_v$  normal in  $\Gamma_v$  ist, wird sie von einer Untergruppe mit endlichem Index in  $\Gamma_v$  bereits zentralisiert. Weiter folgt  $C_\Gamma(Z_v) \subset \text{Comm}_\Gamma(\Lambda_v)$  aus der Kommensurabilität von  $Z_v$  und  $\Lambda_v$  und nach [SS07, Lemma 5.16, S. 82] gilt  $\text{Comm}_\Gamma(\Lambda_v) = \Gamma_v$ .

Der Lift einer peripheren Untergruppe in  $\Phi_v$  enthält  $\Lambda_v$ , also liegt  $\Lambda_v$  in jeder Kantengruppe einer zu  $v$  inzidenten Kante. Da  $\mathcal{T}/\Gamma$  endlich ist, können wir nach eventuellem Übergang zu einer Untergruppe von endlichem Index annehmen, daß für alle zu  $v$  inzidenten Kanten  $Z_v \subset Z_e$  gilt.

*ad* (iv). Ist  $e$  inzident zu einer Ecke  $v$  von innerem Seifert-Typ, so gilt  $C_\Gamma(Z_e) \subset C_\Gamma(Z_v) \subset \Gamma_v$  nach (ii) und aus [KR88, Lemma 2.2, S. 412] folgt  $C_\Gamma(Z_e) \subset \text{Comm}_\Gamma(\Gamma_e) \cap \Gamma_v = \text{Comm}_{\Gamma_v}(\Gamma_e) = \Gamma_e$ . Andernfalls ist  $e$  inzident zu einer Ecke  $w$  von speziellem Seifert-Typ und  $C_\Gamma(Z_e) \subset \Gamma_w$ : Ist  $\alpha \in C_\Gamma(Z_e) \setminus \Gamma_e$ , so stabilisiert  $Z_e$  jeden Simplex des Pfades von  $e$  nach  $\alpha.e$ . Je zwei aufeinanderfolgende Kanten dieses Pfades sind also kommensurabel und damit nach [KR88, Lemma 2.2] inzident zu einer Ecke von speziellem Seifert-Typ. Da  $\mathcal{T}$  keine zwei benachbarten solcher enthält, sind  $e$  und  $\alpha.e$  inzident zu der Ecke  $w$  von speziellem Seifert-Typ und es folgt  $\alpha \in \Gamma_w$ . Nach Eigenschaft (ii) aus [SS07, Theorem 5.1] hat  $\Gamma_e$  höchstens Index 2 in  $\Gamma_w$ .

*ad* (v). Für zwei verschiedene, zu  $v$  inzidente Kanten  $e$  und  $e'$  gilt  $Z_v \subset Z_e \cap Z_{e'}$  und es folgt  $\text{rk}(Z_e \cap Z_{e'}) \geq \text{rk} Z_v = n$ . Andererseits sind  $Z_e$  und  $Z_{e'}$  nicht kommensurabel, also gilt  $\text{rk}(Z_e \cap Z_{e'}) < \text{rk} Z_e = n+1$ .

*ad* (vi). Ist  $e$  eine Kante deren Ecken  $v$  und  $v'$  von innerem Seifert-Typ sind, so ist nach dem oben Bewiesenen  $Z_v Z_{v'}$  eine frei abelsche Untergruppe von Rang  $k$  in  $Z_e$  mit  $n \leq k \leq n+1$ . Gälte  $k = n$ , so wären  $Z_v$  und  $Z_{v'}$  kommensurabel und es folgte  $\Gamma_v = \text{Comm}_\Gamma(Z_v) = \text{Comm}_\Gamma(Z_{v'}) = \Gamma_{v'}$ . ■

**KOROLLAR 3.3.2** Sind die atoroidalen Ecken und die Ecken von speziellem Seifert-Typ der in [SS07, Theorem 5.1] definierten JSJ-zerlegung von  $\Gamma$  trivial<sup>11</sup>, so ist die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $X$  nach Bemerkung 3.1.2 zulässig von Rang  $n+1$ .

<sup>11</sup> In dem Sinne, daß ihre Kantenmonomorphismen sogar Isomorphismen sind.

Basierend auf der Vermutung von WALL [Wal03, Conjecture 10.5, S. 91], daß strikt atoroidale Poincaré-Dualitäts-Paare  $(G, \Omega)$  der Dimension 3 relativ hyperbolisch sind, könnten mit den in der Einleitung erwähnten Methoden von G. C. HRUSKA und KLEINER aus [Hru05] und [HK05] auch Resultate über Wirkungen einer Gruppe mit Poincaré-Dualität in Dimension 3 auf Hadamardräumen ohne die Einschränkung in Korollar 3.3.2 erzielt werden.

### 3.4 VERALLGEMEINERTE GEOMETRISCHE DATEN

Wir definieren nun die verallgemeinerten geometrischen Daten einer zulässigen Wirkung. Dazu sei  $\Gamma$  eine Gruppe, welche in zulässiger Weise von Rang  $n+1$  eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien auf einem lokal kompakten Hadamardraum  $X$  wirkt.

Es bezeichne  $\mathcal{T}$  den nach Bemerkung 3.1.3 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Bass-Serre Baum der Graphenzerlegung von  $\Gamma$ . Für eine Ecke  $v$  von  $\mathcal{T}$  ist dann die Teilmenge  $Y_v = \text{Min}_X(Z_v)$  der von  $Z_v \cong \mathbb{Z}^n$  minimal verschobenen Punkte von  $X$  ein nichtleerer,  $\Gamma_v$ -invarianter, abgeschlossener und konvexer Teilraum von  $X$  und zerfällt als metrisches Produkt  $Y_v \cong \overline{Y}_v \times \mathbb{E}_v$  eines konvexen Teilraumes  $\overline{Y}_v$  und eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes  $\mathbb{E}_v$ . Die Isometrien in  $\Gamma_v$  erhalten diese Produktstruktur, d.h. für jedes  $\gamma \in \Gamma_v$  gibt es Isometrien  $\overline{\gamma} \in \text{Iso}(\overline{Y}_v)$  und  $\gamma_{\mathbb{E}} \in \text{Iso}(\mathbb{E}_v)$ , so daß  $\gamma.(\overline{x}, x_{\mathbb{E}}) = (\overline{\gamma}.\overline{x}, \gamma_{\mathbb{E}}.x_{\mathbb{E}})$  für jedes  $x \in Y_v$  gilt, wobei wir  $x$  mit seinen Koordinaten  $(\overline{x}, x_{\mathbb{E}})$  bezüglich der Produktzerlegung identifizieren. Des weiteren wirkt  $Z_v$  trivial auf dem ersten Faktor und als Gitter auf dem euklidischen Faktor; der Quotient des euklidischen Faktors nach  $Z_v$  ist ein  $n$ -Torus. Die Wirkung von  $\Gamma_v$  auf  $\overline{Y}_v$  faktorisiert also über  $Z_v$ , so daß  $C_{\Gamma}(Z_v)/Z_v$  eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf dem lokal kompakten Hadamardraum  $\overline{Y}_v$  wirkt; insbesondere ist dann nach Bemerkung 3.1.2 (i)  $\overline{Y}_v$  ein hyperbolischer Raum mit mehr als zwei Enden.

Für das erste geometrische Datum definieren wir analog zu [CK02, Definition 3.9, S. 499] für jede Ecke  $v$  von  $\mathcal{T}$  die Abbildung, welche jeder Isometrie in  $\Gamma_v$  ihre Translationslänge auf dem hyperbolischen Faktor in  $Y_v$  zuordnet:

$$\text{MLS}_v : \Gamma_v \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \gamma \longmapsto |\overline{\gamma}|_{\overline{Y}_v}$$



Da die Wirkung von  $\Gamma_v$  auf  $\overline{Y}_v$  über  $Z_v$  faktorisiert, können wir  $\text{MLS}_v$  auch als eine auf der hyperbolischen Gruppe  $\Delta_v = \Gamma_v/Z_v$  definierte Abbildung<sup>12</sup> auffassen.

Für eine Ecke  $v$  von  $\mathcal{T}$  betrachten wir den reellen Vektorraum  $Z_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n$ . Die Fortsetzung der auf  $Z_v$  definierten Abbildung  $\zeta \mapsto |\zeta|_X^2$  ist eine quadratische Form auf  $Z_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Die durch Polarisierung dieser quadratischen Form induzierte Metrik sei mit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet, die zugehörige Norm mit  $\|\cdot\|$ . Vermöge der Wirkung von  $Z_v$  ist dann der euklidische Faktor  $\mathbb{E}_v$  in der Produktzerlegung von  $Y_v$  kanonisch isometrisch zu  $Z_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  mit der Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Wählen wir Erzeuger  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  von  $Z_v$ , so bilden diese eine Basis von  $Z_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ . Der Zentralisator von  $Z_v$  wirkt durch Translationen auf  $\mathbb{E}_v$ . Für ein  $\gamma \in C_\Gamma(Z_v)$  bezeichne dann  $\vec{\gamma} = (g_1, \dots, g_n)$  die Koordinaten seines Translationsvektors  $\gamma_{\mathbb{E}}$  in  $Z_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \cong \mathbb{E}_v$  bezüglich der Basis  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ .

Wir wählen nun für jede Ecke  $v$  von  $\mathcal{T}$  Erzeuger von  $Z_v$ . Diese Wahl sei  $\Gamma$ -äquivariant. Zu jeder Ecke  $v$  von  $\mathcal{T}$  definieren wir dann für das zweite geometrische Datum den Gruppenhomomorphismus

$$T_v : C_\Gamma(Z_v) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \gamma \longmapsto \vec{\gamma}.$$

Diese Abbildung trägt tatsächlich geometrische Informationen, wie man an dem folgenden Beispiel sieht:

Es sei  $Y$  der Cayleygraph der freien Gruppe  $\mathbb{F}_2$  auf zwei Erzeugern  $f_1, f_2$  und  $\phi$  der durch  $f_1 \mapsto 1$  und  $f_2 \mapsto 0$  auf  $\mathbb{F}_2$  definierte Gruppenhomomorphismus nach  $\mathbb{Z}$ . Dann wirkt für jedes  $t \in \mathbb{R}$  die Gruppe  $\mathbb{F}_1 \times \mathbb{Z}$  auf  $Y \times \mathbb{E}$  vermöge

$$(g, k).(y, r) = (g.y, r + k + t\phi(g)).$$

Dann gilt mit der Wahl des Erzeugers 1 von  $\mathbb{Z}$ :

$$T(g, k) = k + t\phi(g)$$

Die Familien  $\{\text{MLS}_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  und  $\{T_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  nennen wir die verallgemeinerten geometrischen Daten der zulässigen Wirkung  $\Gamma \curvearrowright X$ . Diese Familien sind invariant unter der Wirkung von  $\Gamma$ , denn die Familie  $\{Y_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  ist äquivariant

<sup>12</sup> Ist  $X$  eine Graphenmannigfaltigkeit, so entspricht  $\text{MLS}_v$  genau dem markierten Längenspektrum der Riemannschen Fläche in dem Seifertstück zu  $v$ .

und Translationslängen sind invariant unter Konjugation; insbesondere können wir die verallgemeinerten geometrischen Daten als auf den Ecken des Graphen  $\mathcal{G} = \mathcal{T}/\Gamma$  gegeben auffassen.

Es seien  $\Gamma \curvearrowright X'$  eine weitere zulässige Wirkung von Rang  $n+1$  und  $\{\text{MLS}'_\nu\}_{\nu \in \mathcal{V}}$  sowie  $\{\text{T}'_\nu\}_{\nu \in \mathcal{V}}$  die Familien ihrer verallgemeinerten geometrischen Daten. Die geometrischen Daten der Wirkungen heißen äquivalent, wenn für jede Ecke  $\nu$  des Baumes  $\text{T}'_\nu = \text{T}_\nu$  gilt<sup>13</sup> und ein  $\lambda(\nu) \in \mathbb{R}_{>0}$  existiert mit  $\text{MLS}'_\nu = \lambda(\nu)\text{MLS}_\nu$ .

---

<sup>13</sup> Dabei setzen wir voraus, daß für beide Wirkungen jeweils die gleichen Erzeuger von  $Z_\nu$ ,  $\nu \in \mathcal{V}$ , gewählt wurden.

## 4 GEOMETRIE ZULÄSSIGER WIRKUNGEN

In diesem Kapitel werden wir darlegen, wie sich die algebraische Zerlegung einer in zulässiger Weise auf einem lokal kompakten Hadamardraum wirkenden Gruppe in dessen lokaler Geometrie niederschlägt und damit eine äquivalente Zerlegung des Raumes ermöglicht.

Zunächst betrachten wir die Familie der Teilräume der von den frei abelschen Untergruppen der Ecken- und Kantenstabilisatoren minimal verschobenen Punkte des Hadamardraumes. Dies entspricht in etwa den Lifts der Tori bzw. der Seifertstücke einer Graphenmannigfaltigkeit in ihre universelle Überlagerung. Geeignete gewählte Tubenumgebungen dieser Teilräume bilden dann eine über die Ecken und Kanten des Bass-Serre Baumes indizierte lokal endliche Überdeckung des Hadamardraumes durch sogenannte Ecken- und Kantenräume.

Diese Zerlegung erlaubt eine Typisierung geodätischer Strahlen durch die von ihnen durchlaufene Folge von Kantenräumen. So ordnen wir jedem geodätischen Strahl des Hadamardraumes, welcher nicht asymptotisch zu einem Eckenraum ist, einen geodätischen Strahl in dem Bass-Serre Baumes zu, eine sogenannte Route. Andererseits läßt sich für jeden geodätischen Strahl des Baumes ein Modellraum, eine sogenannte Schablone, für die durch ihn gegebene Folge von Ecken- und Kantenräumen konstruieren.

Diese Schablonen sind innerhalb einer Äquivalenzklasse verallgemeinerter geometrischer Daten in dem folgenden Sinne universell: Sind die verallgemeinerten geometrischen Daten eines Paares zulässiger Wirkungen einer Gruppe auf lokal kompakten Hadamardräumen äquivalent, so ist jede Schablone des einen Raumes vermöge einer äquivalenten Quasiisometrie auch eine Schablone des anderen.

Diese Konstruktion entspricht für eine zulässige Wirkung von Rang 2 weitgehend<sup>14</sup> dem Ansatz von CROKE und KLEINER in [CK02]. Die

---

<sup>14</sup> Unsere Definition eines zulässigen Graphen von Gruppen von Rang 2 ist geringfügig allgemeiner als die in [CK02] verwandte.

Autoren können damit unter anderem zeigen, daß sich jede äquivalente Quasiisometrie stetig auf den virtuellen Rand fortsetzen läßt, falls die geometrischen Daten zweier solcher zulässiger Wirkungen äquivalent sind. In einer Skizze zum Beweis dieses Resultates werden wir im letzten Abschnitt des Kapitels erläutern, woran der Beweis einer Verallgemeinerung dieser Aussage für zulässige Wirkungen von höherem Rang scheitert.

Mit dem dabei zu beobachtende Effekt zeigen wir in Kapitel 6 an einem Beispiel, daß die verallgemeinerten geometrischen Daten nicht genügend Information tragen, als daß aus ihrer Äquivalenz die Fortsetzbarkeit einer äquivalenten Quasiisometrie folgte.

#### 4.1 GEOMETRISCHE ZERLEGUNG

Es sei im folgenden stets  $X$  eine lokal kompakter Hadamardraum und  $\Gamma \curvearrowright X$  eine zulässige Wirkung von Rang  $n + 1$ . Dabei bezeichne  $\mathcal{T}$  den nach Bemerkung 3.1.3 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Bass-Serre Baum dieser Wirkung.

Zur Definition der Ecken- und Kantenräume betrachten wir zunächst die durch die Graphenzerlegung der Gruppe beschriebene Kombinatorik der Familien  $\{\text{Min}_X(Z_{(\cdot)})\}$ , jeweils für die Ecken- oder Kantenmenge  $\mathcal{V}$  bzw.  $\mathcal{E}$  von  $\mathcal{T}$ . Die Konstruktion entspricht [CK02, Lemmata 3.11 – 3.15, S. 500 ff.].

Es sei  $Y_e = \text{Min}_X(Z_e) \cong \overline{Y}_e \times \mathbb{E}_e$  für jedes  $e \in \mathcal{E}$  und  $Y_v = \text{Min}_X(Z_v) \cong \overline{Y}_v \times \mathbb{E}_v$  für  $v \in \mathcal{V}$ ; dabei ist  $\overline{Y}_e$  kompakt, denn  $\Gamma_e/Z_e$  ist endlich,  $\overline{Y}_v$  ist hyperbolisch und es gilt  $\dim \mathbb{E}_e = n + 1 = 1 + \dim \mathbb{E}_v$ . Diese Familien abgeschlossener, konvexer Teilräume von  $X$  sind dann  $\Gamma$ -äquivalent.

**LEMMA 4.1.1** Die Familien  $\{Y_e\}_{e \in \mathcal{E}}$  und  $\{Y_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  sind lokal endlich: Für jedes  $R \geq 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so daß es für jedes  $x \in X$  höchstens  $N$  Simplexe  $a \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$  gibt, für welche  $Y_a \cap \overline{\mathbb{B}}_R(x)$  nicht leer ist.

**BEWEIS:** Für  $v \in \mathcal{V}$  seien  $\zeta_1^v, \dots, \zeta_n^v$  äquivalent gewählte Erzeuger von  $Z_v$ . Da  $\mathcal{G}$  endlich ist, gibt es eine uniforme Schranke  $D$  für die Translationslängen dieser Erzeuger.

Sind dann  $R > 0$  und  $x \in X$ , so können wir für alle  $v, w \in \mathcal{V}$  mit  $Y_v \cap \overline{\mathbb{B}}_R(x) \neq \emptyset \neq Y_w \cap \overline{\mathbb{B}}_R(x)$  annehmen,  $v$  und  $w$  lägen in ein und derselben der endlich

vielen  $\Gamma$ -Bahnen. Wegen  $d_X(\zeta_i^{\gamma \cdot v} \cdot x, x) \leq 2R + D$  ist  $\{\zeta_i^{\gamma \cdot v} \mid i \leq n, \gamma \in \Gamma\}$  endlich; insbesondere gibt es für jede Folge  $\gamma_n$  in  $\Gamma$  mit  $Y_{\gamma_n \cdot v} \cap \overline{\mathbb{B}}_R(x) \neq \emptyset$  nur endlich viele Elemente  $\zeta_i^{\gamma_n \cdot v} = \gamma_n \zeta_i^v \gamma_n^{-1}$ . Sind dann  $k, l \in \mathbb{N}$  mit  $\gamma_k \zeta_i^v \gamma_k^{-1} = \gamma_l \zeta_i^v \gamma_l^{-1}$  für alle  $i \leq n$ , so gilt  $\gamma_k^{-1} \gamma_l \in \cap_{i \leq n} C_\Gamma(\zeta_i^v) = C_\Gamma(Z_v) < \Gamma_v$ , und es folgt  $Y_{\gamma_k \cdot v} = Y_{\gamma_l \cdot v}$ .

Da  $\Gamma$  kokompakt auf  $X$  wirkt, kann eine Schranke auch unabhängig von  $x$  gewählt werden.

Der Beweis für die Kanten geht analog. ■

**KOROLLAR 4.1.2** Für jedes  $D \geq 0$  sind die Familien  $\{\overline{\mathbb{B}}_D(Y_e)\}_{e \in \mathcal{E}}$  und  $\{\overline{\mathbb{B}}_D(Y_v)\}_{v \in \mathcal{V}}$  lokal endlich und es existiert eine Konstante  $L(D) > 0$ , so daß für alle  $a, b \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$  aus  $d_{\mathcal{T}}(a, b) > L(D)$  schon  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) = \emptyset$  folgt.

**LEMMA 4.1.3** Es existieren Konstanten  $D, D'$  und  $R$ , so daß die Familien  $X_v = \overline{\mathbb{B}}_D(Y_v)$ ,  $v \in \mathcal{V}$ , und  $X_e = \overline{\mathbb{B}}_{D'}(Y_e)$ ,  $e \in \mathcal{E}$ , Überdeckungen von  $X$  sind sowie für jede Kante  $f$  von  $\mathcal{T}$  und die beiden Zusammenhangskomponenten  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  von  $\mathcal{T} \setminus f$  die beiden Teilmengen  $\cup_{e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}_1}} X_e \setminus X_f$  und  $\cup_{e \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}_2}} X_e \setminus X_f$  von  $X \setminus X_f$  bzw.  $\cup_{v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_1}} X_v \setminus \mathbb{B}_R(X_f)$  und  $\cup_{v \in \mathcal{V}_{\mathcal{T}_2}} X_v \setminus \mathbb{B}_R(X_f)$  von  $X \setminus \mathbb{B}_R(X_f)$  jeweils disjunkt, offen und abgeschlossen sind.

**BEWEIS:** Da  $\Gamma$  kokompakt auf  $X$  wirkt, können wir zunächst  $D$  so groß wählen, daß die  $D$ -Umgebungen der  $Y_v$  und  $Y_e$  ganz  $X$  überdecken. Es seien  $f$  eine Kante und  $a, b \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$  aus verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{T} \setminus f$  mit  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) \neq \emptyset$ . Dann wirkt  $\Gamma_a \cap \Gamma_b$  kokompakt auf  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b)$ :

Es sei  $x_k$  eine Folge in  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b)$ . Da  $\Gamma_a$  kokompakt auf  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a)$  wirkt, finden wir Elemente  $\gamma_k \in \Gamma_a$  so, daß wir nach eventuellem Übergang zu einer Teilfolge annehmen können,  $\gamma_k \cdot x_k$  konvergiere gegen ein  $x_\infty$  in  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a)$ . Für fast alle  $k$  gilt dann  $\gamma_k \cdot \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(x_\infty) \neq \emptyset$  und aus Lemma 4.1.1 folgt, daß  $\gamma_k \cdot b$  eine konstante Teilfolge enthält. Wir können also ohne Einschränkung annehmen, es gelte  $\gamma_1^{-1} \gamma_k \in \Gamma_a \cap \Gamma_b$  für alle  $k$ . Damit folgt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_1^{-1} \gamma_k \cdot x_k = \gamma_1^{-1} \cdot x_\infty$ .

Also ist  $d_X(Y_f, \cdot)$  auf  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b)$  beschränkt. Ferner ist die Menge der Paare  $\{(a, b) \mid a, b \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}, \overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) \neq \emptyset\}$  ebenfalls  $\Gamma$ -endlich:

Da  $\mathcal{G}$  endlich ist, genügt es zu zeigen, daß es für ein  $a \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$ , modulo der Wirkung von  $\Gamma_a$ , nur endlich viele  $b \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$  mit  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) \neq \emptyset$  gibt. Wir wählen  $x \in Y_a$  und  $R$  so, daß  $\overline{\mathbb{B}}_R(x)$  einen Fundamentalbereich

der  $\Gamma_a$ -Wirkung auf  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a)$  enthält. Dann gibt es zu jedem  $b \in \mathcal{E} \cup \mathcal{V}$  mit  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) \neq \emptyset$  ein  $\gamma_b \in \Gamma_a$ , so daß  $\overline{\mathbb{B}}_R(x) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_{\gamma_b \cdot b}) \neq \emptyset$ . Nach Lemma 4.1.1 existieren nur endlich viele solcher  $\gamma_b \cdot b$ .

Also finden wir unabhängig von der Wahl von  $f$  ein  $D'$  mit  $\overline{\mathbb{B}}_D(Y_a) \cap \overline{\mathbb{B}}_D(Y_b) \subset \overline{\mathbb{B}}_{D'}(Y_f)$ . ■

Wir nennen nun  $X_\nu = \overline{\mathbb{B}}_D(Y_\nu)$  den Eckenraum zu  $\nu \in \mathcal{V}$  und  $X_e = \overline{\mathbb{B}}_{D'}(Y_e)$  den Kantenraum zu  $e \in \mathcal{E}$ .

## 4.2 ROUTEN

Wir assoziieren zu jedem geodätischen Strahl in  $X$ , welcher nicht asymptotisch zu einem Eckenraum ist, eine sogenannte Route, nämlich einen geodätischen Strahl in  $\mathcal{T}$ , welcher fast alle Kanten enthält, deren Kantenräume der Strahl in  $X$  durchläuft; vergleiche „*itineraries*“ in [CK02, S. 502 ff.].

Es sei  $S \subset X$  ein Fundamentalbereich der  $\Gamma$ -Wirkung und  $\rho : S \rightarrow \mathcal{V}$  mit  $x \in X_{\rho(x)}$  für alle  $x \in S$ . Da  $\{X_\nu\}_{\nu \in \mathcal{V}}$  eine Überdeckung von  $X$  ist, können wir  $\rho$  in äquivarianter Weise auf  $X$  fortsetzen. Die so definierte Abbildung erfüllt eine Lipschitzbedingung:

Es sei  $D$  die Konstante aus Lemma 4.1.3 und  $L = L(2D)$  jene aus Korollar 4.1.2. Sind dann  $x, y \in X$  mit  $d_X(x, y) \leq D$ , so gilt  $\overline{\mathbb{B}}_{2D}(Y_{\rho(x)}) \cap \overline{\mathbb{B}}_{2D}(Y_{\rho(y)}) \neq \emptyset$  und es folgt  $d_{\mathcal{T}}(\rho(x), \rho(y)) \leq L$ . Für beliebige  $x, y \in X$  unterteilen wir das geodätische Segment von  $x$  nach  $y$  in  $D^{-1}d_X(x, y) + 1$  Teilstimente, deren Länge jeweils höchstens  $D$  beträgt, und erhalten  $d_{\mathcal{T}}(\rho(x), \rho(y)) \leq D^{-1}Ld_X(x, y) + L$ .

LEMMA 4.2.1 Es sei  $c$  ein geodätischer Strahl in  $X$ . Dann tritt einer der folgenden Fälle ein:

- (i)  $\rho \circ c$  ist unbeschränkt und liegt in endlichem Hausdorffabstand zu einem geodätischen Strahl  $\tau_c$  in  $\mathcal{T}$  mit Startpunkt  $\rho \circ c(0)$ . Für fast alle Kanten  $e$  in  $\tau_c$  schneidet  $c$  den Kantenraum  $X_e$ .
- (ii)  $\rho \circ c$  ist beschränkt und  $c$  verläuft nach endlicher Zeit in einem Eckenraum  $X_\nu$ . Die Simplizes, zu deren Ecken- oder Kantenräumen  $c$  asymptotisch ist, bilden einen Teilbaum  $\mathcal{T}_c$  in  $\mathcal{T}$ .

Ist  $c'$  ein weiterer, zu  $c$  asymptotischer Strahl in  $X$ , so ist  $\rho \circ c'$  genau dann beschränkt, wenn  $\rho \circ c$  beschränkt ist und es gilt entweder  $\mathcal{T}_{c'} = \mathcal{T}_c$  oder  $\tau_{c'}$  und  $\tau_c$  sind asymptotisch. Wir bezeichnen  $\tau_c$  als die Route von  $c$ .

BEWEIS: Ist  $v \in \mathcal{V}$ , so verbleibt  $c$  nach endlicher Zeit entweder in  $X_v$  oder in seinem Komplement, denn  $X_v$  ist konvex. Falls  $c$  jeden Eckenraum  $X_v$  schließlich verläßt, ist  $\rho \circ c$  unbeschränkt, denn  $\{X_v\}_{v \in \mathcal{V}}$  ist lokal endlich.

In diesem Falle finden wir eine Kante  $f$  in beliebig großem Abstand zu  $\rho \circ c(0)$  und ein  $N$ , so daß  $\rho \circ c(0)$  und  $\rho \circ c(N)$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{T} \setminus f$  liegen und  $d_{\mathcal{T}}(f, \rho \circ c(N)) > L(D')$  gilt. Dann liegen auch  $c(0)$  und  $c(N)$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $X \setminus X_f$ . Da es ein  $s \in (0, N)$  mit  $c(s) \in X_f$  gibt, folgt aus der Konvexität von  $X_f$ , daß  $c([N, \infty))$  ganz in einer Zusammenhangskomponente von  $X \setminus X_f$  liegt. Damit liegen für alle  $k \geq N$  auch  $\rho \circ c(0)$  und  $\rho \circ c(k)$  in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von  $\mathcal{T} \setminus f$  und bis zum Zeitpunkt  $d_{\mathcal{T}}(\rho \circ c(0), f)$  stimmen für alle  $k \geq N$  die geodätischen Segmente von  $\rho \circ c(0)$  nach  $\rho \circ c(k)$  überein. Diese konvergieren somit gleichmäßig gegen einen geodätischen Strahl  $\tau_c$  in  $\mathcal{T}$  mit den geforderten Eigenschaften. Jede Kante jenseits von  $f$  in dem geodätischen Segment von  $\rho \circ c(0)$  nach  $\rho \circ c(k)$  erfüllt dann ebenso obige Bedingungen und  $c$  durchläuft den zugehörigen Kantenraum.

Andernfalls ist  $c$  nach endlicher Zeit in einem Eckenraum  $X_v$  enthalten. Es bezeichne  $\mathcal{T}_c$  die Menge der Simplizes von  $\mathcal{T}$ , zu deren Ecken- oder Kantenräumen  $c$  asymptotisch ist. Ist  $e$  eine Kante in  $\mathcal{T}_c$ , so folgt mit der Inklusion  $\text{Min}_X(Z_e) \subset \text{Min}_X(Z_{\partial^+ e})$ , daß  $c$  zu dem Eckenraum jeder zu  $e$  inzidenten Ecke asymptotisch ist. Damit ist  $\mathcal{T}_c$  ein Teilgraph von  $\mathcal{T}$ . Mit einem Argument wie im Beweis von Lemma 4.1.3 folgt, daß für je zwei Ecken, zu deren Eckenräumen  $c$  asymptotisch ist,  $c$  auch asymptotisch zu dem Kantenraum jeder Kante des sie verbindenden Pfades ist. Also ist  $\mathcal{T}_c$  auch zusammenhängend. ■

### 4.3 SCHABLONEN

Der Konstruktion der „*templates*“ in [CK02, S. 507 ff.] folgend, wählen wir in  $\Gamma$ -äquivarianter Weise für jede Kante  $e$  von  $\mathcal{T}$  ein  $Z_e$ -invariantes

$(n+1)$ -Flach<sup>15</sup>  $F_e$  in  $Y_e \cong \overline{Y}_e \times \mathbb{E}_e$ , eine  $Z_e$ -äquivariante Isometrie  $\phi_e: \mathbb{E}^{n+1} \rightarrow F_e$  und für jedes Paar zu einer gemeinsamen Ecke  $\nu$  inzidenter Kanten  $e, e'$  ein minimales geodätisches Segment<sup>16</sup>  $\sigma_{(e,e')}$  von  $F_e$  nach  $F_{e'}$ . Die Flachs  $F_e$  und  $F_{e'}$  sind nicht parallel, denn  $Z_e$  und  $Z_{e'}$  sind inkommensurabel. Da  $Z_\nu \subset Z_e \cap Z_{e'}$  gilt, können wir ohne Einschränkung annehmen,  $\sigma_{(e,e')}$  sei bezüglich der Isometrie  $Y_\nu \cong \overline{Y}_\nu \times \mathbb{E}_\nu$  von der Gestalt  $t \mapsto (\overline{\sigma}_{(e,e')}(t), 0)$  für ein geodätisches Segment  $\overline{\sigma}_{(e,e')}$  in  $\overline{Y}_\nu$ . Die Wahl von  $\sigma_{(e,e')}$  definiert also einen flachen Streifen  $S_{(e,e')} \cong [0, l(\overline{\sigma}_{(e,e')})] \times \mathbb{E}^n$ , dessen Randkomponenten in  $F_e$  und  $F_{e'}$  liegen.

Für ein geodätisches Segment oder einen geodätischen Strahl  $\tau = (e_1, e_2, \dots)$  in  $\mathcal{T}$  sei  $\mathcal{T}$  ein zusammenhängender Raum, bestehend aus der disjunkten Vereinigung sogenannter Wände  $\mathcal{W}_i$ , jeweils isometrisch zu  $\mathbb{E}^{n+1}$ , welche entlang sogenannter Streifen  $\mathcal{S}_i$ , jeweils isometrisch zu  $[0, l_i] \times \mathbb{E}^n$ , mit  $l_i \geq 1$ , in folgender Weise miteinander verklebt seien: Für jeden Streifen  $\mathcal{S}_i$  sei die Randkomponente  $\{0\} \times \mathbb{E}^n$  mit einem affinen Teilraum in  $\mathcal{W}_i$  identifiziert und  $\{l_i\} \times \mathbb{E}^n$  mit einem ebensolchen in  $\mathcal{W}_{i+1}$ . Des weiteren trage  $\mathcal{T}$  die von den euklidischen Wänden und Streifen induzierte Längenmetrik, vermöge derer er zu einem lokal kompakten Hadamardraum wird.

Für eine Abbildung  $\phi$  von  $\mathcal{T}$  nach  $X$  und eine Konstante  $K$  heißt dann  $(\mathcal{T}, \phi)$  eine  $K$ -Schablone zu  $\tau$ , wenn für alle  $i$  die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(4.3.1) \quad d_{\mathcal{H}}(\phi(\mathcal{W}_i), X_{e_i}) < K$$

und

$$(4.3.2) \quad d_{\mathcal{H}}(\phi(\mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1}), X_{e_i} \cup S_{(e_i, e_{i+1})} \cup X_{e_{i+1}}) < K.$$

Sind  $p, q \in \mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1}$ , so gilt

$$(4.3.3) \quad |d_X(\phi(p), \phi(q)) - d_{\mathcal{T}}(p, q)| < K$$

<sup>15</sup> Ist  $\Gamma \curvearrowright X$  die Decktransformationswirkung der Fundamentalgruppe einer Graphenmannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung, so entsprechen diese Flachs gerade den Überlagerungen der Randkomponenten der Seifertstücke, also der totalgeodätischen Tori, in der universellen Überlagerung  $X$ .

<sup>16</sup> Für eine nichtpositiv gekrümmte Graphenmannigfaltigkeit ist dies genau der Lift eines geodätischen Repräsentanten eines Weges, welcher zwei Komponenten des Randes der Riemannschen Fläche eines Seifertstückes miteinander verbindet, in der Homotopieklasse relativ zu den Randkomponenten.



und für die proportional zur Bogenlänge auf dem Einheitsintervall parametrisierten Segmente  $c_{\mathcal{T}}$  von  $p$  nach  $q$  in  $\mathcal{T}$  und  $c_X$  von  $\phi(p)$  nach  $\phi(q)$  in  $X$  für alle  $t \in [0, 1]$  gilt:

$$(4.3.4) \quad d_X(\phi(c_{\mathcal{T}}(t)), c_X(t)) < K$$

Die Ränder  $\mathcal{L}_i^- = \mathcal{S}_{i-1} \cap \mathcal{W}_i \cong \mathbb{E}^n$  und  $\mathcal{L}_i^+ = \mathcal{W}_i \cap \mathcal{S}_i \cong \mathbb{E}^n$  der jeweiligen Streifen, welche in ein  $\mathcal{W}_i$  hinein bzw. hinausführen, bezeichnen wir als Säume. Diese sind für jedes  $i$  nichtparallel.

Analog zu [CK02, Lemma 4.5] zeigen wir, daß für hinreichend großes  $K$  zu jedem geodätischen Strahl oder Segment in  $\mathcal{T}$  eine  $K$ -Schablone  $(\mathcal{T}, \phi)$  existiert:

Es sei  $\tau = (e_1, e_2, \dots)$  ein geodätischer Strahl oder ein geodätisches Segment in  $\mathcal{T}$ . Für eine Kante  $e_i$  in  $\tau$  setzen wir  $\mathcal{W}_i = \mathbb{E}^{n+1}$ , sowie  $\mathcal{S}_i = [0, l_i] \times \mathbb{E}^n$ , für  $l_i = \max\{1, l(\bar{\sigma}_i)\}$  mit  $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}_{(e_i, e_{i+1})}$ . Dann sei

$$\mathcal{T} = (\cup_i \mathcal{W}_i \cup \cup_i \mathcal{S}_i) / \sim_{\tau},$$

wobei  $x \sim_{\tau} (0, y)$ , falls  $x \in \mathcal{W}_i$ ,  $(0, y) \in \mathcal{S}_i$  und  $\phi_{e_i}(x) = (\bar{\sigma}_i(0), y)$ , oder  $x \sim_{\tau} (l_i, y)$ , falls  $x \in \mathcal{W}_{i+1}$ ,  $(l_i, y) \in \mathcal{S}_i$  und  $\phi_{e_{i+1}}(x) = (\bar{\sigma}_i(l_i), y)$ , gelte. Es werden also eine disjunkte Vereinigung von  $(n+1)$ -Flachs entlang der Ränder der durch die geodätischen Segmente  $\sigma_{(e_i, e_{i+1})}$  definierten flachen Streifen miteinander verklebt. Durch eventuelle Streckung des Intervallfaktors eines Streifens erhält man eine  $(1, 1)$ -Quasiisometrie von  $\mathcal{S}_i$  auf  $\mathcal{S}_{(e_i, e_{i+1})}$ . Damit kann die Familie der Isometrien  $\phi_{e_i}$  zu einer Abbildung  $\phi : \mathcal{T} \rightarrow X$  fortgesetzt werden.

Da für jede Kante  $e$  der Durchmesser des Kompaktums  $X_e/Z_e$  uniform beschränkt ist, liegen  $X_e$  und  $F_e$  in uniform beschränktem Hausdorffabstand zueinander. Damit gilt (4.3.1) und nach Konstruktion von  $\phi$  auf den Streifen folgt (4.3.2) unmittelbar.

Es seien  $p, q \in \mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1}$ . Bezeichnet  $v$  die gemeinsame Ecke von  $e_i$  und  $e_{i+1}$ , so gilt

$$\phi(\mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1}) = F_{e_i} \cup \mathcal{S}_{(e_i, e_{i+1})} \cup F_{e_{i+1}} \subset Y_v \cong \bar{Y}_v \times \mathbb{E}_v$$

und bezüglich dieser Produktstruktur zerfällt  $\phi$  in das Produkt einer Abbildung von  $\mathbb{E} \cup_{0=0} [0, l_i] \cup_{l_i=0} \mathbb{E}$  in den hyperbolischen Raum  $\bar{Y}_v$  und einer Isometrie der euklidischen Faktoren.

Die so durch die Flachs  $F_{e_i}$  und  $F_{e_{i+1}}$  definierten Geodätischen in  $\overline{Y}_v$  sind nichtparallele Achsen zweier verschiedener hyperbolischer Isometrien in  $\Delta_v = \Gamma_v/Z_v$ . Die vier von ihnen definierten Punkte des virtuellen Randes sind paarweise verschieden, denn nach [CK02, Lemma 2.21] haben zwei hyperbolische Isometrien in  $\Delta_v$  genau dann einen gemeinsamen Fixpunkt in virtuellen Rand, wenn sie eine gemeinsame Achse besitzen. Für Punkte der Form  $p = (\overline{p}, 0)$  und  $q = (\overline{q}, 0)$  in  $(F_{e_i} \cup S_{(e_i, e_{i+1})} \cup F_{e_{i+1}}) \cap \overline{Y}_v \times \{0\}$  besagt nun [CK02, Lemma 2.9], daß das geodätische Segment  $\overline{pq}$  die Endpunkte von  $\overline{\sigma}_i$  in uniform beschränktem Abstand passiert. Damit folgen (4.3.3) und (4.3.4) aus der Tatsache, daß  $\phi$  auf einer Wand isometrisch und auf einem Streifen eine  $(1, 1)$ -Quasiisometrie ist.

#### 4.4 QUASIISOMETRISCHE BLAUPAUSEN VON SCHABLONEN

Es seien nun  $\Gamma \curvearrowright X$  und  $\Gamma \curvearrowright X'$  zulässige Wirkungen von Rang  $n+1$ , deren verallgemeinerte geometrische Daten äquivalent im Sinne von Abschnitt 3.4 sind und  $\Phi$  eine  $\Gamma$ -äquivalente Quasiisometrie von  $X$  nach  $X'$ . Ferner sei  $(\mathcal{T}, \phi)$  die im vorangegangenen Abschnitt konstruierte  $K$ -Schablone von  $X$  zu einem geodätischen Segment oder Strahl  $\tau$  in  $\mathcal{T}$ .

Wie in der Konstruktion von CROKE und KLEINER ist dann für ein geeignetes  $K'$ , welches nur von  $K$  und den Quasiisometriekonstanten von  $\Phi$  abhängt,  $(\mathcal{T}, \Phi \circ \phi)$  eine  $K'$ -Schablone von  $X'$  zu  $\tau$ :

Zunächst beweisen wir eine Verallgemeinerung von [CK02, Lemma 6.4].

LEMMA 4.4.1 Für jede Ecke  $v$  von  $\mathcal{T}$  liegt die Abbildung  $\Phi_v = \Phi|_{Y_v}$  in endlichem Hausdorffabstand zu einer  $C_\Gamma(Z_v)$ -äquivalenten Produktabbildung  $\overline{\phi}_v \times \phi_{\mathbb{E}_v}$  einer Quasiisometrie  $\overline{\phi}_v : \overline{Y}_v \rightarrow \overline{Y}'_v$  und einer affinen Abbildung  $\phi_{\mathbb{E}_v} : \mathbb{E}_v \rightarrow \mathbb{E}'_v$ .

BEWEIS: Für jedes  $x \in Y_v$  und  $\zeta \in Z_v$  gilt für die Verschiebefunktionen  $\delta'_\zeta(\Phi(x)) \leq L \delta_\zeta(x) + A$ . Damit folgt aus Korollar 1.3.3, daß  $\Phi(Y_v)$  und  $Y'_v$  endlichen Hausdorffabstand haben und wir können  $\Phi_v$  durch  $\text{pr}_{Y'_v} \circ \Phi_v$  ersetzen.

Für Basispunkte  $p \in Y_v$  und  $q = \Phi_v(p)$  können wir ohne Einschränkung annehmen, es gelte  $p = (\overline{p}, 0)$  und  $q = (\overline{q}, 0)$ . Genau wie im Beweis von [CK02,

Lemma 6.4] folgt aus der Kokompaktheit der Wirkungen von  $Z_\nu$  auf  $\mathbb{E}_\nu$  und  $\Delta_\nu$  auf  $\overline{Y}'_\nu$  die Existenz von Konstanten  $C$  und  $D$ , so daß

$$(4.4.2) \quad d_{\mathcal{H}}(\Phi_\nu(\{\overline{p}\} \times \mathbb{E}_\nu), \{\overline{q}\} \times \mathbb{E}'_\nu) \leq C$$

und mit  $\Lambda = \{\gamma \in C_\Gamma(Z_\nu) \mid d_{\mathbb{E}_\nu}(\gamma_{\mathbb{E}} \cdot 0, 0) \leq D\}$

$$(4.4.3) \quad d_{\mathcal{H}}(\Lambda \cdot (\overline{p}, 0), \overline{Y}_\nu \times \{0\}) \leq C$$

gilt.

Es bezeichnen  $I_\nu : \mathbb{E}_\nu \cong Z_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $I'_\nu : \mathbb{E}'_\nu \cong Z_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Koordinatenabbildungen bezüglich der in Abschnitt 3.4 zur Definition der verallgemeinerten geometrischen Daten gewählten Basis  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  und es sei  $\phi_{\mathbb{E}_\nu} = I'^{-1}_\nu \circ I_\nu$ . Ist dann  $\gamma = (\overline{\gamma}, \gamma_{\mathbb{E}}) \in C_\Gamma(Z_\nu)$ , so gilt für jedes  $x \in \mathbb{E}_\nu$

$$\begin{aligned} \phi_{\mathbb{E}_\nu}(\gamma_{\mathbb{E}} \cdot x) &= I'^{-1}_\nu(I_\nu(\gamma_{\mathbb{E}} \cdot x)) \\ &= I'^{-1}_\nu(I_\nu(x) + T_\nu(\gamma)) \\ &= I'^{-1}_\nu(I_\nu(x) + T'_\nu(\gamma)) \\ &= \gamma_{\mathbb{E}} \cdot \phi_{\mathbb{E}_\nu}(x) \end{aligned}$$

und  $\phi_{\mathbb{E}_\nu}$  ist  $C_\Gamma(Z_\nu)$ -äquivariant. Aus (4.4.2) folgt dann, daß  $\phi_{\mathbb{E}_\nu}$  und die Einschränkung von  $\Phi_\nu$  auf eine  $\mathbb{E}_\nu$ -Faser endlichen Hausdorffabstand haben.

Es bezeichne  $S \subset \overline{Y}_\nu$  einen Fundamentalbereich der Wirkung von  $C_\Gamma(Z_\nu)/Z_\nu$  auf  $\overline{Y}_\nu$ . Für jedes  $s \in S$  existiert dann ein  $\sigma \in \Lambda$ , so daß  $d_X(\sigma \cdot p, (s, 0)) \leq C$  gilt und mit  $\overline{\phi}_\nu(s) = \overline{\sigma} \cdot \overline{q}$  folgt

$$\begin{aligned} d_{X'}(\sigma \cdot \Phi_\nu(p), (\overline{\phi}_\nu(s), 0)) &= \sqrt{d_{\overline{Y}'_\nu}(\overline{\sigma} \cdot \overline{q}, \overline{\phi}(s))^2 + d_{\mathbb{E}'_\nu}(\sigma_{\mathbb{E}} \cdot 0, 0)^2} \\ &= \|\sigma_{\mathbb{E}} \cdot 0\|' \\ &\leq \|\phi_{\mathbb{E}_\nu}\|_{\text{op}} \|\sigma_{\mathbb{E}} \cdot 0\| \\ &= D \|\phi_{\mathbb{E}_\nu}\|_{\text{op}} \end{aligned}$$

Damit folgt aus (4.4.3), daß die  $C_\Gamma(Z_\nu)/Z_\nu$ -äquivariante Fortsetzung von  $\overline{\phi}_\nu$  eine Quasiisometrie von  $\overline{Y}_\nu$  nach  $\overline{Y}'_\nu$  ist  $\Phi_\nu$  und  $\overline{\phi}_\nu \times \phi_{\mathbb{E}}$  in endlichem Hausdorffabstand zueinander liegen. ■

Da  $\mathcal{G}$  endlich ist, können die Konstanten in dem vorangegangenen Lemma unabhängig von der Wahl der Ecke konstruiert werden.

Wir verändern nun die Metrik auf  $\mathcal{T}$  wie folgt: Für jedes  $i$  und die den Kanten  $e_i$  und  $e_{i+1}$  gemeinsame Ecke  $\nu$  betrachten wir die Zerlegung

$$\mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1} \cong (\mathbb{E} \cup_{0=0} [0, l_i] \cup_{l_i=0} \mathbb{E}) \times (Z_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}),$$

wobei  $Z_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  die in Abschnitt 3.4 definierte Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  trägt. Ersetzen wir diese durch  $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ , also die vermöge der  $Z_\nu$ -Wirkung auf  $X'$  induzierte Metrik von  $Z_\nu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , so folgt aus Lemma 4.4.1, daß die Einschränkung von  $\Phi \circ \phi$  auf den euklidischen Faktor von  $\mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1}$  in endlichem Hausdorffabstand zu einer Isometrie liegt. Die Metrik auf dem ersten Faktor skalieren wir mit  $\lambda(\nu)$ . Wie im Beweis von [CK02, Lemma 6.2] läßt sich zeigen, daß die den Schablonenraum  $\mathcal{T}$  definierenden Identifikationen auch bezüglich dieser neuen Metrik gelten.

Die Ungleichungen (4.3.1) und (4.3.2) der Definition einer Schablone sind dann offensichtlich erfüllt. Des weiteren verwenden wir [CK02, Lemma 2.9]: Es existiert eine Konstante  $D$ , so daß für alle  $\bar{p}, \bar{q} \in \bar{Y}_\nu$  eine auf  $\bar{Y}_\nu$  hyperbolische Isometrie  $\gamma \in C_\Gamma(Z_\nu)/Z_\nu$  existiert, deren Achse  $\bar{Y}_\nu$  im Abstand höchstens  $D$  zu  $\bar{p}$  und  $\bar{q}$  verläuft und für die  $d_{\bar{Y}_\nu}(\bar{\gamma} \cdot \bar{p}, \bar{q}) \leq D$  gilt. Damit folgen die Abschätzungen (4.3.3) und (4.3.4) für  $\Phi \circ \phi$  aus der Äquivarianz von  $\bar{\phi}_\nu$  aus Lemma 4.4.1.

## 4.5 DER FALL $N=2$

Eine Wirkung  $\Gamma \curvearrowright X$  nennen CROKE und KLEINER in [CK02] zulässig, wenn die Wirkung zulässig von Rang 2 im Sinne der Definition 3.1.1 ist und darüberhinaus folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Alle Kantengruppen sind frei abelsch<sup>17</sup> von Rang 2, es gilt also  $Z_e = \Gamma_e$  für jede Kante  $e$ .
- (ii) Für jede Ecke  $\nu$  von  $\mathcal{S}$  ist  $Z_\nu$  genau<sup>17</sup> das Zentrum von  $\Gamma_\nu$ .

Für eine in diesem Sinne zulässige Wirkung definieren die Autoren als zweites geometrisches Datum die Abbildung  $\tau_\nu : \Gamma_\nu \rightarrow \mathbb{R}$ , welche jedem  $\gamma \in \Gamma_\nu$  die bezüglich der Wahl eines Erzeugers von  $Z_\nu$  mit Vorzeichen

<sup>17</sup> Dies bedeutet keine echte Einschränkung, da in unserem Fall für jede Ecke oder Kante  $a$  der Zentralisator von  $Z_a$  zumindest endlichen Index in  $\Gamma_a$  hat und damit genügend Geometrie auf den Ecken- und Kantenräumen schon von den Zentralisatoren bestimmt wird.

versehene Translationslänge von  $\gamma$  auf dem eindimensionalen rellen Faktor von  $\text{Min}_X(Z_\nu) \cong \bar{Y}_\nu \times \mathbb{E}_\nu$  zuordnet.

Die geometrischen Daten zweier in diesem Sinne zulässiger Wirkungen  $\Gamma \curvearrowright X$  und  $\Gamma \curvearrowright X'$  heißen in [CK02, Definition 3.9, S. 499] äquivalent, wenn für jede Ecke  $\nu$  von  $\mathcal{T}$  positive Skalare  $\lambda(\nu)$  und  $\mu(\nu)$  existieren mit  $\text{MLS}'_\nu(\cdot) = \lambda(\nu)\text{MLS}_\nu(\cdot)$  und  $\tau'_\nu(\cdot) = \mu(\nu)\tau_\nu(\cdot)$ . Dies stimmt in diesem Falle mit unserer Definition überein, denn bezeichnet  $\zeta_\nu$  den Erzeuger von  $Z_\nu$  und gilt  $T'_\nu(\gamma) = T_\nu(\gamma) = g$ , so folgt  $\tau'_\nu(\gamma) = g\|\zeta_\nu\|' = \frac{\|\zeta_\nu\|'}{\|\zeta_\nu\|}\tau_\nu(\gamma)$  für alle  $\gamma \in \Gamma_\nu$ .

CROKE und KLEINER zeigen, daß die Wirkung der Gruppe  $\Gamma$  auf dem virtuellen Rand  $\partial_\infty X$  bis auf einen eindeutig bestimmten äquivarianten Homöomorphismus durch ihre geometrischen Daten festgelegt ist. Genauer gilt:

**THEOREM** [CK02, Theorem 1.3, S. 484] *Es sei  $\Gamma$  die Fundamentalgruppe eines zulässigen Graphen von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  und wirke eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien auf einem lokal kompakten Hadamardraum  $X$ .*

*Dann sind für jede Ecke  $\nu$  des Bass-Serre Baumes von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  die geometrischen Daten  $\text{MLS}_\nu$  und  $\tau_\nu$  bis auf positive Vielfache  $\lambda_\nu$  und  $\mu_\nu$  durch die Homöomorphieklasse der Wirkung von  $\Gamma$  auf dem virtuellen Rand von  $X$  bestimmt und bestimmen diese eindeutig.*

*Ist  $\Gamma \curvearrowright X'$  eine weitere solche Wirkung, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Die geometrischen Daten der Wirkungen  $\Gamma \curvearrowright X$  und  $\Gamma \curvearrowright X'$  sind äquivalent.*
- (ii) *Jede  $\Gamma$ -äquivariante Quasiisometrie von  $X$  nach  $X'$  besitzt eine kanonische Fortsetzung von  $X \cup \partial_\infty X$  nach  $X' \cup \partial_\infty X'$ .*
- (iii) *Die Wirkungen  $\Gamma \curvearrowright \partial_\infty X$  und  $\Gamma \curvearrowright \partial_\infty X'$  sind in eindeutiger Weise  $\Gamma$ -äquivariant homöomorph.*
- (iv) *Ist  $\Phi$  eine  $\Gamma$ -äquivariante Quasiisometrie von  $X$  nach  $X'$ , dann existiert eine reellwertige Funktion  $\theta$ , die im Unendlichen verschwindet, und für jeden geodätischen Strahl  $c$  in  $X$  ein geodätischer Strahl  $c'$  in  $X'$ , so daß für alle  $R \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt:*

$$d_{X'}(\Phi \circ c(R), c'(R)) \leq (1+R)\theta(R)$$

Existiert sogar ein  $\lambda > 0$  mit  $\text{MLS}' = \lambda \text{MLS}$  und  $\tau' = \lambda \tau$ , so ist der nach (iii) eindeutig bestimmte  $\Gamma$ -äquivariante Homöomorphismus zwischen den virtuellen Rändern eine Isometrie bezüglich der Tits-Metrik.

Wir werden im folgenden skizzieren, wie aus der Äquivalenz der geometrischen Daten zweier zulässiger Wirkungen von Rang 2 die Fortsetzbarkeit einer äquivarianten Quasiisometrie folgt. Dies wird Aufschluß darüber geben, woran eine Verallgemeinerung dieser Aussage auf zulässige Wirkungen von Rang  $\geq 3$  scheitert und worauf unser im Kapitel 6 vorgestelltes Gegenbeispiel beruht.

Von zentraler Bedeutung für den Beweis dieser Implikation ist das nachfolgend zitierte Theorem aus [CK02], welches für äquivalente geometrische Daten die Existenz einer Funktion  $\theta$  wie in (iv) sichert. Es beschreibt unter anderem, wie geodätische Strahlen und Segmente des Raumes  $X$  in einer Schablone zu ihrer Route modelliert sind. Wir geben hier nur die für die weitere Diskussion benötigten ersten beiden Abschätzungen wieder.

THEOREM [CK02, Theorem 5.1, S. 513] *Es existiert eine Funktion  $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\lim_{R \rightarrow \infty} \theta(R) = 0$ , welche nur von der Geometrie von  $X$  und einer Konstanten  $K$  abhängt, so daß für jede  $K$ -Schablone  $(\mathcal{T}, \phi)$  zu einem geodätischen Strahl oder Segment  $\tau$  von  $\mathcal{T}$  und für alle  $p, q \in \mathcal{T}$ ,  $o \in \overline{pq}$  und  $z \in \phi(p)\phi(q)$  gilt:*

$$(4.5.1) \quad d_X(\phi(o), \overline{\phi(p)\phi(q)}) \leq (1 + d_{\mathcal{T}}(p, o)) \theta(d_{\mathcal{T}}(p, o))$$

$$(4.5.2) \quad d_X(z, \phi(\overline{pq})) \leq (1 + d_X(\phi(p), z)) \theta(d_X(\phi(p), z))$$

Zur Konstruktion von  $\theta$  für die erste Ungleichung wird gezeigt, daß eine Konstante  $C$  und eine Abbildung  $C' : \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0$  existieren, so daß für jedes  $\psi > 0$  und alle  $p, q \in \mathcal{T}$  und  $o \in \overline{pq}$  gilt:

$$(4.5.3) \quad d_X(\phi(o), \overline{\phi(p)\phi(q)}) \leq C\psi d_{\mathcal{T}}(p, o) + C'(\psi)$$

Für  $\psi(R) = \min \{ \psi \mid C'(\psi) < \sqrt{R} \}$  ist dann mit

$$\theta(R) = \frac{C\psi(R) + C'(\psi(R))}{1 + R}$$

die Ungleichung (4.5.1) nach (4.5.3) erfüllt und es gilt  $\lim_{R \rightarrow \infty} \theta(R) = 0$ .

Die Existenz von  $C$  und  $C'$  wird in zwei Schritten bewiesen:

Zunächst werden Punkte  $o \in \overline{pq}$  betrachtet, welche nahe einer hohen Anzahl von Wänden der Schablone  $\mathcal{T}$  liegen, sogenannte  $\psi$ -cluster-Punkte: Schneidet das geodätische Segment  $\overline{pq} \cap \overline{\mathbb{B}}_{\psi d_{\mathcal{T}}(p,o)}(o)$  aufeinanderfolgende Wände  $\mathcal{W}_j, \dots, \mathcal{W}_{j+k}$ , so schneidet auch ein Ball vom Radius  $C_1 \psi d_{\mathcal{T}}(p, o)$  um  $\phi(o)$  die Folge der zugehörigen Kantenräume  $X_{e_j}, \dots, X_{e_{j+k}}$ . Ist dabei die Anzahl  $k+1$  der Wände größer als eine Konstante  $N$ , so gilt in einer solchen Konfiguration von Kantenräumen ein Analogon zu [CK02, Lemma 2.9]; letzteres besagt, daß in einem hyperbolischen Raum jedes geodätische Segment zwischen zwei nichtasymptotischen<sup>18</sup> Geodätischen die Randpunkte eines Segmentes minimaler Länge zwischen ihnen in uniformem Abstand passiert. Hier gilt, daß falls  $C_1 \psi d_{\mathcal{T}}(p, o)$  hinreichend groß ist, jedes in  $X_{e_j}$  beginnende und in  $X_{e_{j+k}}$  endende geodätische Segment einen Ball vom Radius  $C_2 \psi d_{\mathcal{T}}(p, o)$  um  $\phi(o)$  schneidet; insbesondere passiert das geodätische Segment  $\phi(p)\phi(q)$ , welches die Kantenräume  $X_{e_j}, \dots, X_{e_{j+k}}$  durchläuft, den Punkt  $\phi(o)$  im Abstand höchstens  $C_3 \psi d_{\mathcal{T}}(p, o) + C'_3(\psi)$ .

Ein Analogon dazu läßt sich sogar im Falle einer zulässigen Wirkung von Rang  $n \geq 3$ , also für höherdimensionale Schablonen, beweisen. So gilt etwa für  $n = 3$  die obige Aussage, falls der Ball um  $\phi(o)$  eine Mindestanzahl von Kantenräumen zu Kanten  $e_{k_j}$  von  $\mathcal{T}$  schneidet, für welche  $Z_{\partial^- e_{k_j}} \cap Z_{\partial^+ e_{k_j}}$  und  $Z_{\partial^- e_{k_{j+1}}} \cap Z_{\partial^+ e_{k_{j+1}}}$  inkommensurabel sind.

Im zweiten Schritt betrachten CROKE und KLEINER die Partition von  $\overline{pq}$  in maximale Teilsegmente  $\overline{p_i q_i}$ , innerhalb derer für jeden Punkt  $o$  der Ball  $\overline{\mathbb{B}}_{\psi d_{\mathcal{T}}(p,o)}(o)$  höchstens  $N$  Wände schneidet. Ein solches Teilsegment der Länge  $L$  durchläuft dann höchstens  $C_4 \log(1 + L)$  Wände. An dieser Stelle ist es von entscheidender Bedeutung, daß die Einschränkung der Schablonenabbildung  $\phi$  auf ein Teilstück  $\mathcal{W}_i \cup \mathcal{S}_i \cup \mathcal{W}_{i+1}$  eine  $(1, K)$ -Quasiisometrie ist, also Lipschitzkonstante 1 hat. Damit verschlechtert sich die Lipschitzkonstante von  $\phi$  entlang solcher Teilsegmente lediglich logarithmisch in deren Länge. Aus [CK02, Proposition 5.7] folgt damit, daß es einen Punkt  $w \in \overline{\phi(p_i)\phi(q_i)}$  gibt, für den  $d_X(\phi(o), w) \leq \psi d_{\mathcal{T}}(p, o) + C'_5(\psi)$  gilt. Da für die Randpunkte  $p_i$  und  $q_i$  des geodätischen Teilsegmentes bereits eine sublineare Abschätzung gilt, folgt dann aus der Konvexität der Metrik, daß man Konstanten  $C$  und  $C'(\psi)$  wählen kann, für welche (4.5.3) erfüllt ist.

<sup>18</sup> In dem Sinne, daß die vier von ihnen definierten Punkte des virtuellen Randes paarweise verschieden sind.

## CAVEAT LECTOR

Im Falle einer zulässigen Wirkung von Rang  $n \geq 3$  haben wir für solche maximalen Teilsegmente keine Schranke für die Anzahl der von ihnen durchlaufenen Kantenräume: Zwischen zwei Kanten  $e_{k_j}$  und  $e_{k_{j+1}}$ , für welche  $Z_{\partial^- e_{k_j}} \cap Z_{\partial^+ e_{k_j}}$  und  $Z_{\partial^- e_{k_{j+1}}} \cap Z_{\partial^+ e_{k_{j+1}}}$  inkommensurabel sind, können beliebig viele Kanten  $e_i$  mit  $k_j \leq i < k_{j+1}$  liegen, für die alle  $Z_{\partial^- e_i} \cap Z_{\partial^+ e_i}$  kommensurabel<sup>19</sup> sind. Wie an dem im letzten Kapitel dieser Arbeit diskutierten Gegenbeispiel deutlich wird, scheitert eine Verallgemeinerung von [CK02, Theorem 5.1] genau daran; siehe insbesondere den Paragraphen „REDUKTION“ in Abschnitt 6.2 und Abschnitt 6.3.

Die Fortsetzbarkeit einer äquivarianten Quasiisometrie ergibt sich nun aus [CK02, Theorem 5.1] wie folgt:

Sind  $x, y \in X$  und  $\tau = (e_1, \dots, e_n)$  ein geodätisches Segment in  $\mathcal{T}$  mit  $x \in X_{e_1}$  und  $y \in X_{e_n}$ , so entspricht  $\overline{xy}$  nach (4.5.1) bis auf sublineare Fehler einem geodätischen Segment in einer  $K$ -Schablone  $(\mathcal{T}, \phi)$  zu  $\tau$ . Wenn die geometrischen Daten der zulässigen Wirkungen von  $\Gamma$  auf  $X$  und  $X'$  übereinstimmen, ist  $(\mathcal{T}, \Phi \circ \phi)$  eine  $K'$ -Schablone zu  $\tau$  für geodätische Segmente in  $X'$ , wobei  $K'$  nur von  $K$  und den Quasiisometriekonstanten von  $\Phi$  abhängt. Nach nochmaligem Anwenden von [CK02, Theorem 5.1], nämlich Abschätzung (4.5.2), sind dann die Voraussetzungen des folgenden Lemmas erfüllt und  $\Phi$  besitzt eine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand von  $X$ .

LEMMA [CK02, Lemma 2.5, S. 488] *Es seien  $X$  und  $X'$  lokal kompakte Hadamardräume,  $x \in X$  und  $\Phi : X \rightarrow X'$  eine quasiisometrische Einbettung. Des weiteren existiere eine Funktion  $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\lim_{R \rightarrow \infty} \theta(R) = 0$ , so daß für jedes  $y \in X$  und alle  $z \in \overline{xy}$  gilt:*

$$d_{X'}(\Phi(z), \overline{\Phi(x)\Phi(y)}) \leq (1 + d_X(x, z)) \theta(d_X(x, z))$$

*Dann besitzt  $\Phi$  eine eindeutige Fortsetzung  $\overline{\Phi} : X \cup \partial_\infty X \rightarrow X' \cup \partial_\infty X'$ , die in jedem  $\mathfrak{x} \in \partial_\infty X$  stetig ist und deren Einschränkung auf den virtuellen Rand von  $X$  eine topologische Einbettung ist.*

<sup>19</sup> Ist die Wirkung von Rang 3, so gilt dies für einen Kantenpfad in dem im ersten Abschnitt des folgenden Kapitels definierten Teilbaum  $\mathcal{T}(e_{k_j})$ .



## 5 REKONSTRUKTION VON VERALLGEMEINERTEN GEOMETRISCHEN DATEN

Bevor wir im letzten Kapitel dieser Arbeit an einem Beispiel zeigen, daß die Äquivalenz der verallgemeinerten geometrischen Daten zweier zulässiger Wirkungen von Rang  $\geq 3$  keine hinreichende Bedingung für die Fortsetzbarkeit einer Quasiisometrie ist, werden wir im folgenden die Umkehrung diskutieren. CROKE und KLEINER zeigen für eine zulässige Wirkung  $\Gamma \curvearrowright X$  von Rang 2, daß die Äquivalenzklasse der geometrischen Daten eindeutig durch den Homöomorphietyp des virtuellen Randes bestimmt ist; insbesondere folgt damit, daß falls  $\Gamma \curvearrowright X'$  eine weitere solche Wirkung ist und sich eine äquivariante Quasiisometrie von  $X$  nach  $X'$  stetig auf den virtuellen Rand von  $X$  fortsetzen läßt, die geometrischen Daten der beiden Wirkungen äquivalent sind. Wir zeigen, daß falls sich eine bezüglich zweier zulässiger Wirkungen von Rang 3 äquivariante Quasiisometrie stetig auf den virtuellen Rand fortsetzen läßt, die verallgemeinerten geometrischen Daten der Wirkungen weitgehend übereinstimmen.

Im folgenden sei  $\Gamma \curvearrowright X$  eine zulässige Wirkung von Rang 3, d.h. die Gruppe  $\Gamma$  wirke eigentlich diskontinuierlich und kokompakt durch Isometrien auf  $X$  und es gebe einen  $\Gamma$ -Baum  $\mathcal{T}$  mit mindestens einer Kante, welcher die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Jede Isotropiegruppe  $\Gamma_v$  einer Ecke ist eine Erweiterung einer nichtelementar hyperbolischen Gruppe  $\Delta_v$  durch eine frei abelsche Gruppe  $Z_v < \Gamma_v$  von Rang 2.
- (ii) Jede Isotropiegruppe  $\Gamma_e$  einer Kante ist eine endliche Erweiterung einer frei abelschen Gruppe  $Z_e$  von Rang 3 und die Isotropiegruppen zweier zu einer gemeinsamen Ecke inzidenten Kanten sind inkommensurabel.
- (iii) Für jede Kante  $e$  hat  $Z_{\partial^-e}Z_{\partial^+e}$  endlichen Index<sup>20</sup> in  $Z_e$ .
- (iv) Die Familien  $\{Z_v\}_{v \in \mathcal{V}\mathcal{T}}$  und  $\{Z_e\}_{e \in \mathcal{E}\mathcal{T}}$  sind  $\Gamma$ -äquivariant.

<sup>20</sup> Dies ist äquivalent dazu, daß  $\text{Comm}_\Gamma(Z_v) = \Gamma_v$  für alle  $v \in \mathcal{V}$ .

## 5.1 REDUKTION

Zunächst konstruieren wir eine Familie von Teilräumen von  $X$ , welche jeweils einen eindimensionalen reellen Faktor so abspalten, daß wir eine zulässige Wirkung von Rang 2 auf dem nichteuklidischen zweiten Faktor erhalten. Auf diese Wirkungen können wir später [CK02, Theorem 1.3] anwenden.

Mit Bedingung (iii) sind insbesondere für jede Kante  $e$  von  $\mathcal{T}$  die Untergruppen  $Z_{\partial^-e}$  und  $Z_{\partial^+e}$  von  $Z_e$  inkommensurabel. Ihr Durchschnitt ist also unendlich zyklisch. Wir setzen  $Z_e^\cap = Z_{\partial^-e} \cap Z_{\partial^+e}$ .

**PROPOSITION 5.1.1** Für jede Kante  $e^*$  von  $\mathcal{T}$  existiert eine unendlich zyklische Untergruppe  $Z$  von  $Z_{e^*}^\cap$ , so daß die Wirkung von  $\check{\Gamma} = N_\Gamma(Z)/Z$  auf dem nichteuklidischen Faktor von  $\text{Min}_X(Z) \cong \check{X} \times \mathbb{E}$  zulässig von Rang 2 ist und ihr Bass-Serre Baum  $\check{\mathcal{T}}$  ein Teilbaum von  $\mathcal{T}$  ist.

**BEWEIS:** Der durch die Kantenmenge  $\{e \in \mathcal{E}\mathcal{T} \mid Z_e^\cap \sim Z_{e^*}^\cap\}$  definierte Teilgraph  $\check{\mathcal{T}}$  ist ein Baum, welcher wenigstens die Kante  $e^*$  enthält und auf dem  $\Gamma^* = \text{Comm}_\Gamma(Z_{e^*}^\cap)$  mit endlichem Quotienten  $\check{\mathcal{T}}/\Gamma^*$  wirkt:

Ist  $e$  eine Kante in  $\check{\mathcal{T}}$  und  $(v_0 e_1 v_1 \dots v_{n-1} e_n v_n)$  der minimale, reduzierte Weg von  $e = e_1$  nach  $e^* = e_n$  in  $\mathcal{T}$ , so gilt für alle  $1 < j < n$

$$Z_{e^*}^\cap \sim Z_e^\cap \cap Z_{e^*}^\cap < \Gamma_{v_0} \cap \Gamma_{v_n} < \Gamma_{e_{j-1}} \cap \Gamma_{e_j} \cap \Gamma_{e_{j+1}} \sim Z_{v_{j-1}} \cap Z_{v_j} = Z_{e_j}^\cap.$$

Damit ist  $\check{\mathcal{T}}$  zusammenhängend. Sind  $e \in \mathcal{E}\check{\mathcal{T}}$  und  $\gamma \in \Gamma^*$ , so gilt  $Z_{\gamma.e}^\cap = \gamma Z_e^\cap \sim \gamma Z_{e^*}^\cap \sim Z_{e^*}^\cap$ , womit  $\check{\mathcal{T}}$  invariant unter der Wirkung von  $\Gamma^*$  ist. Sind  $e \in \mathcal{E}\check{\mathcal{T}}$  und  $\gamma \in \Gamma$  mit  $\gamma.e \in \mathcal{E}\check{\mathcal{T}}$ , so gilt  $Z_{e^*}^\cap \sim Z_{\gamma.e}^\cap = \gamma Z_e^\cap \sim \gamma Z_{e^*}^\cap$ , also  $\gamma \in \Gamma^*$ . Somit ist die kanonische Abbildung  $\check{\mathcal{T}}/\Gamma^* \rightarrow \mathcal{T}/\Gamma$  injektiv, d.h. der Quotient  $\check{\mathcal{T}}/\Gamma^*$  ist endlich.

Es sei  $\mathcal{S}$  ein zusammenhängender Fundamentalbereich<sup>21</sup> der  $\Gamma^*$ -Wirkung auf  $\check{\mathcal{T}}$ . Dann ist  $Z = \bigcap_{e \in \mathcal{E}\mathcal{S}} Z_e^\cap$  ein zyklischer Normalteiler von  $\Gamma^*$ :

Da  $\mathcal{S}$  endlich ist, sind  $Z$  und  $Z_{e^*}^\cap$  kommensurabel und  $Z$  ist unendlich zyklisch. Wählen wir einen maximalen Teilbaum  $\mathcal{S}_0$  in  $\mathcal{S}$ , so ist nach Abschnitt 2.4

$$\Sigma = \{\tau_e \mid e \in \mathcal{E}\mathcal{S} \setminus \mathcal{E}\mathcal{S}_0\} \cup \bigcup_{v \in \mathcal{V}\mathcal{S}} \Gamma_v^*$$

<sup>21</sup> Wir verstehen hier Fundamentalbereich im strikten Sinne;  $\mathcal{S}$  wird i.A. also kein Teilgraph von  $\mathcal{T}$  sein.

ein Erzeugendensystem<sup>22</sup> von  $\Gamma^*$  und es genügt zu zeigen, daß  $\Sigma \subset N_\Gamma(Z)$  gilt. Es bezeichne  $\xi$  einen Erzeuger von  $Z$  und es sei  $\sigma \in \Sigma$ . Dann sind  $Z$  und  ${}^\sigma Z$  kommensurabel und es existieren  $k, l \in \mathbb{Z}$  mit  ${}^\sigma \xi^l = \xi^k$ . Da die Translationslänge von  $\xi$  invariant unter Konjugation und positiv ist, gilt  $l = \pm k$ . Ist  $\sigma \in \Gamma_v^*$  für eine Ecke  $v$  von  $\mathcal{S}$ , so gilt  ${}^\sigma \xi \in {}^\sigma Z_v = Z_{\sigma \cdot v} = Z_v$ . Falls  $\sigma = \tau_e$  für ein  $e \in \mathcal{E}\mathcal{S} \setminus \mathcal{E}\mathcal{S}_0$  gilt, so liegt die Ecke  $v = \partial^+(\tau_e \cdot e)$  in  $\mathcal{S}$  und es folgt  ${}^{\tau_e} \xi \in {}^{\tau_e} Z_e^\cap = Z_{\tau_e \cdot e}^\cap < Z_v$ . In jedem Falle existiert also ein  $v \in \mathcal{V}\mathcal{S}$  mit  $\{\xi, {}^\sigma \xi\} \subset Z_v$ , so daß  $\xi$  und  $\eta = ({}^\sigma \xi)\xi^{-1}$  kommutieren. Insbesondere ist  $\eta^k \xi^k = (\eta \xi)^k = {}^\sigma \xi^k = \xi^{\pm k}$ , also  $\eta^k = 1$ , und da  $Z_v$  frei abelsch ist, gilt schon  $\eta = 1$  und  ${}^\sigma Z = Z$ .

Die induzierte Wirkung von  $\check{\Gamma} = N_\Gamma(Z)/Z$  auf dem nichteuklidischen<sup>23</sup> Faktor von  $\text{Min}_X(Z) \cong \check{X} \times \mathbb{E}$  ist eigentlich diskontinuierlich und kokompakt; siehe Abschnitt 1.3, insbesondere Lemma 1.3.1.

Nach dem oben Bewiesenen ist  $Z$  in der Isotropiegruppe eines jeden Simplex von  $\check{\mathcal{S}}$  enthalten. Somit wirkt  $\check{\Gamma}$  auf  $\check{\mathcal{S}}$ , wobei  $\check{\Gamma}_a = (\Gamma_a \cap N_\Gamma(Z))/Z$  für eine Ecke oder Kante  $a$  gilt. Es bleibt zu zeigen, daß die Bedingungen (i) bis (iv) erfüllt sind:

Es sei  $v$  eine Ecke von  $\check{\mathcal{S}}$ . Mit  $Z < Z_v$  folgt aus  $Z_v < C_\Gamma(Z_v) < C_\Gamma(Z) \sim N_\Gamma(Z) = \Gamma^*$  zum einen, daß  $Z_v$  ein Normalteiler von  $\Gamma_v^*$  ist und zum anderen, daß  $\Gamma_v^*$  endlichen Index in  $\Gamma_v$  hat. Ferner ist  $Z_v/Z$  virtuell unendlich zyklisch und wir finden darin eine charakteristische, unendlich zyklische Untergruppe  $\check{Z}_v$  von endlichem Index. Die induzierte Wirkung von  $\check{\Delta}_v = \check{\Gamma}_v/\check{Z}_v$  auf dem hyperbolischen Raum  $\overline{Y}_v$  ist eigentlich diskontinuierlich und kokompakt, denn  $\check{\Delta}_v$  ist eine endliche Erweiterung von  $\Gamma_v^*/Z_v$ . Da  $\overline{Y}_v$  mehr als zwei Enden hat, ist  $\check{\Delta}_v$  nichtelementar hyperbolisch und es gilt (i).

Mit dem gleichen Argument wie oben gilt  $Z_e < \Gamma_e^*$  und  $\check{\Gamma}_e$  enthält die virtuell frei abelsche Rang 2 Untergruppe  $Z_e/Z$  von endlichem Index. Also gilt (ii).

Die beiden Kommensurabilitätsbedingungen folgen sofort aus der Tatsache, daß zwei Untergruppen in  $\check{\Gamma}$  genau dann kommensurabel sind, wenn ihre Lifts es sind.

Die so definierte Familie von Untergruppen ist offensichtlich  $\check{\Gamma}$ -äquivariant. ■

<sup>22</sup> Ein Element  $\tau_e$  für  $e \in \mathcal{E}\mathcal{S} \setminus \mathcal{E}\mathcal{S}_0$  wirkt dabei als Translation auf einer Geodätischen in  $\mathcal{T}$  durch  $e$ .

<sup>23</sup>  $\check{X}$  enthält mit  $\overline{Y}_{\partial-e^*}$  einen konvexen, nichteuklidischen Teilraum.

Für jede Kante  $e$  von  $\mathcal{T}$  erhalten wir so einen lokal kompakten Hadamardraum  $\check{X}(e)$  und darauf eine zulässige Wirkung von Rang 2 einer Gruppe  $\check{\Gamma}(e)$  mit Bass-Serre Baum  $\check{\mathcal{T}}(e)$ .

Die Konstruktion des Teilbaumes  $\check{\mathcal{T}}$  im Beweis von Proposition 5.1.1 ist offensichtlich unabhängig vom Rang der zulässigen Wirkung. Der Beweis, daß  $\text{Comm}_\Gamma(Z) = N_\Gamma(Z)$  gilt, läßt sich jedoch für höheren Rang nicht ohne weiteres verallgemeinern. Die Familie der  $\check{\mathcal{T}}(e)$  scheint allerdings eine<sup>24</sup> Struktur eines simplizialen  $\Gamma$ -Komplexes zu tragen. Mit den Methoden aus [Hae91] ermöglichte dies eine zu den Ecken- und Kantenräumen analoge Zerlegung des Hadamardraumes entlang der Überlagerung eines Komplexes von Gruppen.

## 5.2 STABILITÄT UNTER QUASIISOMETRIEN

Es seien  $\Gamma \curvearrowright X$  und  $\Gamma \curvearrowright X'$  zulässige Wirkungen von Rang 3 und  $\Phi$  eine  $\Gamma$ -äquivariante Quasiisometrie von  $X$  nach  $X'$ , welche zu einem äquivarianten Homöomorphismus  $\partial_\infty \Phi$  zwischen den virtuellen Rändern  $\partial_\infty X$  und  $\partial_\infty X'$  fortsetzbar sei.

Ist  $e$  eine Kante von  $\mathcal{T}$ , so sind nach Proposition 5.1.1 die Wirkungen  $\check{\Gamma}(e) \curvearrowright \check{X}(e)$  und  $\check{\Gamma}(e) \curvearrowright \check{X}'(e)$  zulässig, also insbesondere kokompakt. Damit sind auch  $\check{X} = \check{X}(e)$  und  $\check{X}' = \check{X}'(e)$  äquivariant quasiisometrisch. Wir wollen die Äquivalenz der verallgemeinerten geometrischen Daten der Wirkungen  $\Gamma \curvearrowright X$  und  $\Gamma \curvearrowright X'$  herleiten, indem wir [CK02, Theorem 1.3] auf die induzierten Wirkungen von Rang 2 anwenden. Dazu müssen wir zeigen, daß sich jede solche Quasiisometrie zu einem äquivarianten Homöomorphismus auf den virtuellen Rand fortsetzen läßt.

Es bezeichne  $Z = Z(e)$  die in Proposition 5.1.1 konstruierte unendlich zyklische Untergruppe von  $Z_e^\square$ . Aus Korollar 1.3.3 folgt dann wie im Beweis zu Lemma 4.4.1, daß  $\Phi(\text{Min}_X(Z))$  und  $\text{Min}_{X'}(Z)$  endlichen Hausdorffabstand haben. Insbesondere liegt damit das Bild von  $\partial_\infty \text{Min}_X(Z)$  unter  $\partial_\infty \Phi$  in  $\partial_\infty \text{Min}_{X'}(Z)$ .

---

<sup>24</sup> Die natürliche Wirkung von  $\Gamma$  auf  $\text{nerve}\{\check{\mathcal{T}}(e)\}$  ist nicht simplizial.

Die Produktzerlegung  $\text{Min}_X(Z) \cong \check{X} \times \mathbb{E}$  induziert einen Homöomorphismus

$$(5.2.1) \quad \partial_\infty \text{Min}_X(Z) \cong \partial_\infty (\check{X} \times \mathbb{E}) \cong \partial_\infty \check{X} * \partial_\infty \mathbb{R} \cong \partial_\infty \check{X} * \mathbb{S}^0 = \Sigma \partial_\infty \check{X}.$$

Somit ist der virtuelle Rand von  $\text{Min}_X(Z)$  homöomorph zu der Einhängung des virtuellen Randes von  $\check{X}$ . Entsprechendes gilt in  $X'$ .

Da die reellen Fasern in  $\text{Min}_X(Z)$  bzw.  $\text{Min}_{X'}(Z)$  genau die konvexen Hüllen der  $Z$ -Bahnen sind und  $\Phi$  äquivariant ist, liegt das Bild jeder  $\mathbb{E}$ -Faser unter  $\Phi$  in uniform beschränktem Hausdorffabstand zu einer  $\mathbb{E}$ -Faser. Bezüglich des Homöomorphismus in (5.2.1) sind damit die Pole der Einhängung  $\Sigma \partial_\infty \check{X}'$  genau die Bilder der Pole der Einhängung  $\Sigma \partial_\infty \check{X}$  unter  $\partial_\infty \Phi$ .

Im folgenden seien für ein  $x \in \text{Min}_X(Z)$  die Koordinaten bezüglich der Zerlegung  $\text{Min}_X(Z) \cong \check{X} \times \mathbb{E}$  mit  $(\check{x}, t_x)$  bezeichnet. Für Basispunkte  $x_0 \in \text{Min}_X(Z)$  und  $y_0 = \Phi(x_0)$  können wir ohne Einschränkung  $x_0 = (\check{x}_0, 0)$  und  $y_0 = (\check{y}_0, 0)$  annehmen.

Es genügt, die Fortsetzbarkeit einer einzigen äquivarianten Quasiisometrie zwischen  $\check{X}$  und  $\check{X}'$  zu zeigen, denn modulo  $\check{\Gamma}$  liegen je zwei solcher Quasiisometrien in endlichen Hausdorffabstand zueinander.

LEMMA 5.2.2 Die Abbildung  $\check{\Phi} = \text{pr}_{\check{X}'} \circ \text{pr}_{\text{Min}_{X'}(Z)} \circ \Phi|_{\check{X}}$  ist eine  $\check{\Gamma}$ -äquivariante Quasiisometrie und induziert einen  $\check{\Gamma}$ -äquivarianten Homöomorphismus von  $\partial_\infty \check{X}$  auf  $\partial_\infty \check{X}'$ .

BEWEIS: Erfüllt  $\Phi$  eine  $(L, A)$ -Lipschitzbedingung, so gilt dies auch für  $\check{\Phi}$ , denn jede Projektion hat Lipschitzkonstante 1. Da  $Z$  kokompakt auf den  $\mathbb{E}$ -Fasern wirkt, existiert eine Konstante  $C$ , so daß wir für jedes  $x \in \check{X} \times \{0\}$  ein  $\gamma_x \in Z$  mit  $d_{X'}(\check{\Phi}(\check{x}), \gamma_x \cdot \Phi(x)) \leq C$  finden. Damit gilt für alle  $x, y \in \check{X} \times \{0\}$ :

$$\begin{aligned} d_{\check{X}'}(\check{\Phi}(\check{x}), \check{\Phi}(\check{y})) &\geq d_{X'}(\gamma_x \cdot \Phi(x), \gamma_y \cdot \Phi(y)) - 2C \\ &= d_{X'}(\Phi(x), \Phi(\gamma_x^{-1} \gamma_y \cdot y)) - 2C \\ &\geq L^{-1} d_X(x, \gamma_x^{-1} \gamma_y \cdot y) - A - 2C \\ &= L^{-1} \sqrt{d_{\check{X}}(\check{x}, \check{y})^2 + |\gamma_x^{-1} \gamma_y|_X^2} - A - 2C \\ &\geq L^{-1} d_{\check{X}}(\check{x}, \check{y}) - A - 2C \end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, daß  $\check{\Phi}(\check{X})$  quasidicht in  $\check{X}'$  ist. Die  $\check{\Gamma}$ -Äquivarianz folgt unmittelbar aus der  $\Gamma$ -Äquivarianz von  $\Phi$ .

Wir zeigen zunächst, daß  $\check{\Phi}$  eine in  $\partial_\infty \check{X}$  stetige Fortsetzung auf  $\check{X} \cup \partial_\infty \check{X}$  besitzt:

Da  $\partial_\infty \Phi$  nach Voraussetzung stetig in  $\partial_\infty \check{X}$  ist, genügt es zu zeigen, daß für eine gegen ein  $\eta \in \partial_\infty \Phi(\partial_\infty \check{X})$  konvergente Folge  $\gamma_n = (\check{y}_n, t_n)$  in  $\text{Min}_{X'}(Z)$  die Folge  $\check{y}_n$  in  $\check{X}'$  gegen ein  $\check{\eta} \in \partial_\infty \check{X}'$  konvergiert. Für eine solche Folge ist dann für jedes  $R > 0$  die Folge  $n \mapsto \gamma_n^R = \text{pr}_{\overline{\mathbb{B}_R(\gamma_0)}}(\gamma_n)$  konvergent. Da  $\eta$  kein Pol der Einhängung ist und für geeignete  $n(R)$  die Folge  $\gamma_{n(R)}^R$  in  $R$  ebenfalls gegen  $\eta$  konvergiert, können wir für jedes  $r > 0$  also  $R > 0$  und  $N$  so wählen, daß  $d_{\check{X}'}(\check{y}_0, \text{pr}_{\check{X}'}(\gamma_{N+k}^R)) > r$  für alle  $k$  gilt. Nun ist mit  $d_{X'}(\gamma_0, \gamma_n) = \sqrt{d_{\check{X}'}(\check{y}_0, \check{y}_n)^2 + \|t_n\|^2}$  auch  $d_{\check{X}'}(\check{y}_0, \check{y}_n)$  eine unbeschränkte Folge, also gilt für hinreichend großes  $N$

$$\text{pr}_{\overline{\mathbb{B}_r(\check{y}_0)}}(\check{y}_{N+k}) = \text{pr}_{\overline{\mathbb{B}_r(\check{y}_0)}}(\text{pr}_{\check{X}'}(\gamma_{N+k}^R))$$

für alle  $k$ . Da Projektionen auf konvexe Teilmengen Abstände nicht vergrößern, ist damit  $\check{y}_n^r = \text{pr}_{\overline{\mathbb{B}_r(\check{y}_0)}}(\check{y}_n)$  eine Cauchyfolge. Also konvergiert  $\check{y}_n$  in  $\check{X}$  gegen ein  $\check{\eta} \in \partial_\infty \check{X}'$ .

Bezeichnet  $c$  die Parametrisierung von  $\overline{\gamma_0 \eta}$  nach der Bogenlänge, so ist  $\check{c} = \text{pr}_{\check{X}'} \circ c$  eine Parametrisierung des Strahles  $\overline{\check{y}_0 \check{\eta}}$  mit konstanter Geschwindigkeit  $\sqrt{1 - d_{X'}(\check{X}', c(1))^2}$ .

Es seien  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \partial_\infty \check{X}$  mit  $\partial_\infty \check{\Phi}(\mathfrak{x}_2) = \partial_\infty \check{\Phi}(\mathfrak{x}_1) = \check{\eta}$  und  $\check{c}$  die Bogenlängenparametrisierung von  $\overline{\check{y}_0 \check{\eta}} \subset \check{X}'$ . Dann existieren  $\theta_1, \theta_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , so daß für  $i \in \{1, 2\}$  der geodätische Strahl  $c_i : t \mapsto (\check{c}(t \cos \theta_i), t \sin \theta_i)$  ein Repräsentant von  $\partial_\infty \Phi(\mathfrak{x}_i)$  ist. Nach Wahl eines äquivarianten Quasiinversen zu  $\Phi$  finden wir dann Folgen  $x_n$  in  $\text{Min}_X(Z)$  und  $\gamma_n$  in  $Z$ , so daß  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \mathfrak{x}_1$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \cdot x_n = \mathfrak{x}_2$ . Da  $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in \partial_\infty \check{X}$  und  $\text{pr}_{\check{X}}(x_n) = \text{pr}_{\check{X}}(\gamma_n \cdot x_n)$  für alle  $n$  gilt, folgt  $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_2$ . Damit ist  $\partial_\infty \check{\Phi}$  injektiv.

Ein ähnliches Argument zeigt, daß  $\partial_\infty \check{\Phi}$  surjektiv und sein Inverses stetig ist. ■

### 5.3 GEOMETRISCHE DATEN

Ist nun  $v$  eine beliebige Ecke von  $\mathcal{T}$ , so folgt mit [CK02, Theorem 1.3] aus Lemma 5.2.2, daß für eine zu  $v$  inzidente Kante  $e$  die geometrischen Daten im Sinne von CROKE und KLEINER der Wirkungen  $\check{\Gamma}(e) \simeq \check{X}(e)$  und  $\check{\Gamma}(e) \simeq \check{X}'(e)$  äquivalent sind. Es existieren also für jede Ecke  $v$  in  $\check{\mathcal{T}}$  positive Konstanten  $\lambda(v)$  und  $\mu(v)$  mit

$$\check{\text{MLS}}'_v = \lambda(v)\check{\text{MLS}}_v$$

und

$$\check{\tau}'_v = \mu(v)\check{\tau}_v.$$

Es bezeichne  $\check{Y}_v$  den nichteuklidischen Faktor von  $\text{Min}_{\check{X}}(\check{Z}_v)$ . Da  $Z = Z(e)$  als Untergruppe von  $Z_v$  zentralisiert wird, können wir  $\overline{Y}_v$  als Unterraum von  $\check{X}$  auffassen. Aus der Konstruktion der Wirkung  $\check{\Gamma} \simeq \check{X}$  folgt, daß es eine Untergruppe  $\check{Z}_v$  von endlichem Index in  $Z_v$  gibt mit  $\check{Z}_v/Z = \check{Z}_v$ . Damit folgt aus

$$\overline{Y}_v \times \mathbb{E}^2 \cong \text{Min}_X(Z_v) \subset \text{Min}_{\check{X}}(\check{Z}_v) \times \mathbb{E} \cong \check{Y}_v \times \mathbb{E} \times \mathbb{E},$$

daß  $\overline{Y}_v$  in  $\check{Y}_v$  enthalten ist.

Es sei  $\gamma \in \Gamma_v$ . Da  $C_\Gamma(Z_v) < N_\Gamma(Z)$  und  $C_\Gamma(Z_v)$  endlichen Index in  $\Gamma_v$  hat, ist  $\Gamma_v \cap N_\Gamma(Z)$  von endlichem Index in  $\Gamma_v$ . Es existiert also ein  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $\check{\gamma}^k = \gamma^k Z \in \check{\Gamma}_v$  gilt. Bezeichnen dann  $\overline{\gamma}$  und  $\check{\gamma}$  die auf  $\overline{Y}_v$  bzw.  $\check{Y}_v$  induzierten Isometrien, so folgt:

$$\text{MLS}_v(\gamma) = |\overline{\gamma}|_{\overline{Y}_v} = \frac{1}{k} |\overline{\gamma}^k|_{\overline{Y}_v} = \frac{1}{k} |\check{\gamma}^k|_{\check{Y}_v} = \frac{1}{k} \check{\text{MLS}}_v(\check{\gamma}^k)$$

Also ist die auf  $\Gamma_v$  definierte Abbildung  $\text{MLS}_v$  schon eindeutig durch  $\check{\text{MLS}}_v$  bestimmt. Damit sind die verallgemeinerten geometrischen Daten  $\text{MLS}$  und  $\text{MLS}'$  äquivalent.

Zudem stimmen für all jene Ecken  $v$ , welche im Durchschnitt zweier verschiedener Teilbäume  $\check{\mathcal{T}}(e_1)$  und  $\check{\mathcal{T}}(e_2)$  liegen, die verallgemeinerten geometrischen Daten  $T_v$  und  $T'_v$  überein:

Es sei  $v$  eine Ecke von  $\mathcal{T}$  und  $e_1, e_2$  zu ihr inzidente Kanten, so daß  $Z_{e_1}^\cap$  und  $Z_{e_2}^\cap$  inkommensurabel<sup>25</sup> sind.

Wenden wir dann Proposition 5.1.1 auf die Kanten  $e_1$  und  $e_2$  an, so erhalten wir für jedes  $i \in \{1, 2\}$  eine unendlich zyklische Untergruppe  $Z_i < Z_{e_i}^\cap$ , so daß die induzierte Wirkung des Quotienten  $\check{\Gamma}_i = N_\Gamma(Z_i)/Z_i$  auf dem nichteuklidischen Faktor  $\check{X}_i$  von  $\text{Min}_X(Z_i)$  zulässig ist. Es bezeichne  $\check{Z}_{v,i}$  die im Beweis von Proposition 5.1.1 konstruierte unendlich zyklische Untergruppe von  $Z_v/Z_i$ ; dies ist genau der unendlich zyklische Normalteiler des Stabilisators von  $v$  in  $\check{\Gamma}_i$ , welcher die Bedingung (i) in Bemerkung 3.1.2 erfüllt. Da  $C_\Gamma(Z_v)$  eine Untergruppe von  $N_\Gamma(Z_i) \cap \Gamma_v$  ist, entspricht das zweite geometrische Datum im Sinne von [CK02] für jedes  $i \in \{1, 2\}$  nach Wahl eines Erzeugers von  $\check{Z}_{v,i}$  einer  $Z_i$ -invariante Abbildung  $\tau_i$  von  $C_\Gamma(Z_v)$  nach  $\mathbb{R}$ .

Wie in Abschnitt 3.4 fassen wir den zweidimensionalen euklidischen Faktor  $\mathbb{E}_v$  von  $\text{Min}_X(Z_v)$  als reellen Vektorraum  $Z_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  auf und versehen diesen mit der durch die quadratische Form  $Z_v \rightarrow \mathbb{R}, \zeta \mapsto |\zeta|_X^2$  induzierten Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Wählen wir dann Erzeuger  $\xi_1$  und  $\xi_2$  von  $Z_1$  resp.  $Z_2$ , so sind diese linear unabhängig, denn  $Z_1$  und  $Z_2$  sind inkommensurabel. Für  $i \in \{1, 2\}$  bezeichne  $w_i \in \mathbb{E}_v$  einen zu  $\xi_i$  orthogonalen Einheitsvektor, so daß für einen Lift  $\zeta_i$  des zur Definition von  $\tau_i$  gewählten Erzeugers von  $\check{Z}_{v,i}$  die Basen  $(w_i, \xi_i)$  und  $(\zeta_i, \xi_i)$  gleichorientiert sind. Damit können wir  $\tau_i$  als lineares Funktional von  $\mathbb{E}_v$  auffassen und es gilt  $\tau_i(\gamma) = \langle \gamma_{\mathbb{E}}, w_i \rangle$  für jedes  $\gamma \in C_\Gamma(Z_v)$ , wobei  $\gamma_{\mathbb{E}}$  hier den Translationsvektor von  $\gamma$  in  $\mathbb{E}_v$  bezeichne. Insbesondere folgt dann  $\tau_i(\xi_i) = 0$  und  $\tau_i(\xi_j) \neq 0$  für  $j \neq i$ , denn  $\xi_1$  und  $\xi_2$  sind linear unabhängig.

Die obige Diskussion gilt analog für  $X'$  und die im folgenden mit einem ' versehenen Bezeichnungen mögen darauf bezogen sein.

Da nach Lemma 5.2.2 die virtuellen Ränder von  $\check{X}_1$  und  $\check{X}'_1$  sowie  $\check{X}_2$  und  $\check{X}'_2$  äquivariant homöomorph sind, gibt es nach [CK02, Theorem 1.3] für jedes  $i \in \{1, 2\}$  eine positive Konstante  $\mu_i$  mit  $\tau'_i = \mu_i \tau_i$ . Für  $\gamma \in C_\Gamma(Z_v)$  seien  $(h_1, h_2)$

<sup>25</sup> Existierte keine solche Ecke, so gäbe es eine unendlich zyklische Untergruppe  $Z$  in  $\Gamma$ , deren Zentralisator von endlichem Index in  $\Gamma$  ist, und der Hausdorffabstand zwischen  $X$  und  $\text{Min}_X(Z) \cong \check{X} \times \mathbb{E}$  wäre endlich.



und  $(h'_1, h'_2)$  die Koordinaten der Translationsvektoren  $\gamma_{\mathbb{E}}$  resp.  $\gamma'_{\mathbb{E}}$  bezüglich der Basis  $\{\xi_1, \xi_2\}$ . Dann gilt für  $i, j \in \{1, 2\}$  mit  $i \neq j$

$$\tau_i(\gamma) = \langle h_1 \xi_1 + h_2 \xi_2, w_i \rangle = h_j \tau_i(\xi_j),$$

sowie

$$\tau'_i(\gamma) = \langle h'_1 \xi_1 + h'_2 \xi_2, w'_i \rangle = h'_j \tau'_i(\xi_j),$$

und mit

$$h'_j \tau'_i(\xi_j) = \tau'_i(\gamma) = \mu_i \tau_i(\gamma) = \mu_i h_j \tau_i(\xi_j) = h_j \tau'_i(\xi_j)$$

folgt  $h'_j = h_j$ , denn  $\tau'_i(\xi_j) = \mu_i \tau_i(\xi_j) \neq 0$ . Nach einem eventuellen Wechsel<sup>26</sup> der Basis von  $\mathbb{E}_v$  gilt also  $T_v(\gamma) = (h_1, h_2) = (h'_1, h'_2) = T'_v(\gamma)$ .

Damit stimmen die verallgemeinerten Daten  $T_{(\cdot)}$  und  $T'_{(\cdot)}$  in jeder solchen Ecke überein.

---

<sup>26</sup> Das Übereinstimmen der verallgemeinerten Daten  $T$  und  $T'$  hängt nicht von der Wahl der Erzeuger von  $Z_v$  oder einer Basis von  $\mathbb{E}_v$  ab.

## 6 EIN GEGENBEISPIEL

In diesem letzten Kapitel der Arbeit konstruieren wir ein Paar von zulässigen Wirkungen von Rang 3 einer Gruppe auf lokal kompakten Hadamardräumen mit äquivalenten verallgemeinerten geometrischen Daten und eine äquivariante Quasiisometrie, welche keine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand besitzt.

Dieses Gegenbeispiel entstand aus den Überlegungen, das im Abschnitt 4.5 diskutierte Stabilitätsresultat aus [CK02] für zulässige Wirkungen von Rang  $\geq 3$  zu verallgemeinern. Der Beweis von CROKE und KLEINER beruht wesentlich auf der Tatsache, daß für eine zulässige Wirkung von Rang 2 ein geodätisches Segment des Hadamardraumes bis auf uniform<sup>27</sup> sublinearen Fehler genau dem quasiisometrischen Bild eines geodätischen Segmentes der Schablone zu seiner Route entspricht.

Dies zu verallgemeinern scheitert an dem folgenden Effekt: Durchläuft in dem verallgemeinerten Fall ein geodätischer Strahl eine Folge von Ecken- und Kantenräumen, welche einen gemeinsamen euklidischen Faktor abspalten, so zerfällt auch die zugehörige Schablone in das Produkt eines euklidischen Faktors und einer Schablone von geringerer Dimension. Dann mögen zwar die nach der Bogenlänge reparametrisierten Projektionen seiner Teilsegmente auf den nichteuklidischen Faktor bis auf sublinearen Fehler geodätischen Segmenten in der niedrig dimensionalen Schablone entsprechen, die Divergenz der geodätischen Segmente im Produktraum kann aber dennoch proportional zur Laufzeit wachsen. In einem Amalgam zweier solcher Produkte können wir dann Teilsegmente solcher Strahlen derart zu geodätischen Segmenten zusammenfügen, daß keine mit [CK02, Lemma 2.5] vergleichbare sublineare Abschätzung erfüllt sein kann.

Wir entwerfen zunächst eine Familie untereinander homotopieäquivalenter kompakter metrischer Räume  $Y_\epsilon$  nichtpositiver Krümmung, deren universelle

---

<sup>27</sup> In dem Sinne, daß die Funktion  $\theta$  in [CK02, Theorem 5.1] nur von der Konstante  $K$  der Schablone abhängt.

Überlagerungen  $X_\varepsilon = \tilde{Y}_\varepsilon$  uns später als Gegenbeispiel dienen werden. Der zweite Abschnitt behandelt die geometrischen Eigenschaften der Decktransformationswirkungen  $\pi_1(Y_\varepsilon) \curvearrowright X_\varepsilon$ , deren Zulässigkeit wir in Proposition 6.2.2 nachweisen und von denen wir in Proposition 6.2.3 zeigen, daß ihre verallgemeinerten geometrischen Daten alle äquivalent sind. In dem darauffolgenden Abschnitt konstruieren wir in einem Paar  $X_0$  und  $X_\delta$  der universellen Überlagerungen jeweils eine Folge spezieller geodätischer Segmente, welche dann im letzten Abschnitt in Proposition 6.4.1 belegen, daß eine äquivariante Quasiisometrie  $\Phi_\delta : X_0 \rightarrow X_\delta$  keine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand besitzt.

## 6.1 KONSTRUKTION

Die im folgenden definierten Räume stellen eine milde Verallgemeinerung der in Abschnitt 3.2 als Beispiel vorgestellten Toruskomplexe dar.

Topologisch ist die Konstruktion recht einfach zu beschreiben: Wir beginnen mit einer endlichen Familie von 3-Tori. In jedem dieser Tori wählen wir ein Paar inkompressibler, nichthomotoper 2-Tori und Homöomorphismen zwischen jeweils zweien solcher 2-Tori, welche in verschiedenen 3-Tori liegen. Wir erhalten dann einen zusammenhängenden Raum, indem wir die 3-Tori entlang der Abbildungszylinder der Homöomorphismen miteinander verkleben.

Um eine solche Konstruktion auch geometrisch leicht verständlich zu gestalten, müssen wir bei der Wahl der Tori und der Abbildungszylinder ein wenig Sorgfalt walten lassen:

Für  $\varepsilon \geq 0$  und  $i \in \{0, \dots, 3\}$  seien  $\varepsilon_i = \varepsilon$  für  $i \in \{2, 3\}$  und  $\varepsilon_i = \varepsilon_x = 0$  für  $i \in \{0, 1\}$ , sowie  $E_x \cong E_i^\pm \cong \mathbb{T}^3 \times [0, \varepsilon_i]$  neun, eventuell aufgedickte, flache Tori mit Koordinaten  $(r, s, t; u)$ , wobei

$$(r, s, t; u)_i^\pm = \left( r + \frac{1}{\sqrt{2}}k, s + \frac{1}{\sqrt{2}}l, t + \sqrt{2}m; u \right)_i^\pm \quad \text{falls } i \in \{2, 3\},$$

$$(r, s, t; 0)_i^\pm = (r + k, s + l, t + \sqrt{2}m; 0)_i^\pm \quad \text{falls } i \in \{0, 1\},$$

und

$$(r, s, t; 0)_x = (r + \sqrt{2}k, s + \sqrt{2}l, t + \sqrt{2}m; 0)_x$$

für alle  $(k, l, m) \in \mathbb{Z}^3$  gelte. Diese Stücke werden nun entlang von zehn Zylindern  $C_x^\pm \cong C_i^\pm \cong \mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ , jeweils von entsprechendem<sup>28</sup> Durchmesser, mit Koordinaten  $(r, s, u)_x^\pm$  und  $(r, s, u)_i^\pm$  wie folgt verklebt:

$$(6.1.1) \quad \begin{array}{ll} (s, -s, t; 0)_0^\pm \sim (s, t; 0)_0^\pm & (s, t; 1)_0^\pm \sim (s, -s, t; 0)_1^\pm \\ (s, 0, t; 0)_1^\pm \sim (s, t; 0)_1^\pm & (s, t; 1)_1^\pm \sim (s, s, t; 0)_2^\pm \\ (0, s, t; \varepsilon)_2^\pm \sim (s, t; 0)_2^\pm & (s, t; 1)_2^\pm \sim (0, s, t; \varepsilon)_3^\pm \\ (s, s, t; 0)_3^\pm \sim (s, t; 0)_3^\pm & (s, t; 1)_3^\pm \sim (s, 0, t; 0)_0^\pm \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (s, -s, t; 0)_0^- \sim (s, t; 0)_x^- & (s, t; 1)_x^- \sim (s, 0, t; 0)_x \\ (s, t, 0; 0)_x^- \sim (s, t; 0)_x^- & (s, t; 1)_x^+ \sim (-s, s, t; 0)_0^+ \end{array}$$

Es sei  $Y_\varepsilon$  der Quotient der disjunkten Vereinigung der Tori und Zylinder nach der durch die eben definierten Relationen erzeugten Äquivalenzrelation:

$$Y_\varepsilon = (E_x \cup C_x^\pm \cup \bigcup_{0 \leq i \leq 3} (E_i^\pm \cup C_i^\pm)) / \sim$$

Vorsehen mit der von den euklidischen Teilräumen induzierten Längenmetrik  $d_{Y_\varepsilon}$ , wird  $Y_\varepsilon$  als Amalgam flacher Räume entlang konvexer Teilräume zu einem zusammenhängenden, vollständigen, lokal kompakten, geodätischen Raum nichtpositiver Krümmung.

Es bezeichnen  $\alpha_i^\pm, \beta_i^\pm$  und  $\gamma_i^\pm$ , sowie  $\alpha_x, \gamma_x^+$  und  $\gamma_x^-$  die Schleifen entlang der Koordinatenlinien des jeweiligen 3-Torus, also Repräsentanten der kanonischen Erzeuger seiner Fundamentalgruppe. Damit entsprechen die Identifikationen (6.1.1) den folgenden Relationen:

$$\alpha_0^\pm \beta_0^{\pm-1} \sim \alpha_1^\pm \beta_1^{\pm-1}, \quad \alpha_1^\pm \sim \alpha_2^\pm \beta_2^\pm, \quad \beta_2^\pm \sim \beta_3^\pm, \quad \alpha_3^\pm \beta_3^\pm \sim \alpha_0^\pm$$

und

$$\gamma_i^\pm \sim \gamma_{i+1}^\pm \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, 2, 3\},$$

sowie

$$\alpha_0^- \beta_0^{-1} \sim \alpha_x^-, \quad \gamma_0^- \sim \gamma_x^-$$

und

$$\alpha_0^+ \beta_0^{+1} \sim \alpha_x^+, \quad \gamma_0^+ \sim \gamma_x^+.$$

<sup>28</sup> In dem Sinne, daß die im folgenden definierten Relationen mit den  $\mathbb{Z}^3$ -Wirkungen auf  $E_x$  und den  $E_i^\pm$  verträglich sind.

Wie eben verwendet, verstehen wir die Indizes stets modulo 4. Des weiteren unterscheiden wir nicht zwischen diesen Repräsentanten und den von ihnen repräsentierten Elementen der Fundamentalgruppe.

Wir werden später, für ein positives  $\delta$ , das Paar von Räumen  $Y_0$  und  $Y_\delta$  miteinander vergleichen. Dabei werden wir in der Notation nicht berücksichtigen, welchem jener beiden Räume ein Torus oder ein Zylinder zugehörig ist. Dies wird aber im jeweiligen Kontext klar sein.

## 6.2 EIGENSCHAFTEN

Gegenstand unserer weiteren Diskussion werden die Decktransformationswirkungen der universellen Überlagerungen der im vorangegangenen Kapitel angefertigten Räume sein.

Für jeden dieser Räume erhalten wir aus dem Satz von VAN KAMPEN eine Graphenzerlegung der Fundamentalgruppe, von welcher wir zeigen, daß sie zulässig von Rang 3 ist. Mittels der in Abschnitt 2.4 durch die Graphenzerlegung gegebenen Präsentation der Fundamentalgruppe geben wir eine einfache Beschreibung der Geometrie der universellen Überlagerung an. Diese Zerlegung entspricht in etwa der in Abschnitt 4.1 konstruierten Familie der Ecken- und Kantenräume und besteht für  $\varepsilon = 0$  genau aus Schablonen. Anschließend betrachten wir, analog zum Abschnitt 5.1, eine Familie maximaler Teilräume, welche jeweils einen eindimensionalen euklidischen Faktor so abspalten, daß eine zulässige Wirkung von Rang 2 auf dem nichteuklidischen Faktor induziert wird. Die im letzten Abschnitt definierte äquivariante Quasiisometrie ist mit diesen Zerlegungen verträglich, so daß sich die im nächsten Abschnitt folgenden Berechnungen stark vereinfachen.

### GRAPHENZERLEGUNG DER FUNDAMENTALGRUPPE

Um mit Hilfe des Satzes von VAN KAMPEN die Fundamentalgruppe von  $Y_\varepsilon$  zu berechnen, betrachten wir eine Graphenzerlegung dieses Raumes: Es sei  $\mathcal{G}$  der Graph mit den acht Ecken

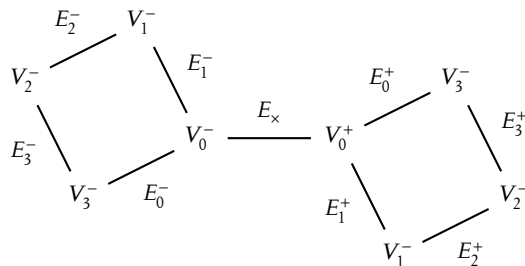
$$\begin{aligned} V_0^\pm &= E_0^\pm \cup_\sim C_0^\pm \cup_\sim E_1^\pm \cup_\sim C_x^\pm \cup_\sim E_x \\ V_i^\pm &= E_i^\pm \cup_\sim C_i^\pm \cup_\sim E_{i+1}^\pm \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

und neun Kanten

$$E_x = V_0^- \cap V_0^+$$

$$E_i^\pm = V_{i-1}^\pm \cap V_i^\pm \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

Also hat  $\mathcal{G}$  die folgende Gestalt:



Offensichtlich sind sowohl der gesamte Komplex  $Y_\varepsilon$  als auch jede seiner Ecken jeweils homotopieäquivalent zu einem Toruskomplex<sup>29</sup>.

Der Satz von VAN KAMPEN besagt nun, daß  $\pi_1(Y_\varepsilon)$  isomorph zu der Fundamentalgruppe des Graphen von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$ , welcher auf einer Ecke  $V$  oder Kante  $E$  die topologische Fundamentalgruppe  $\pi_1(V)$  resp.  $\pi_1(E)$  trägt. Dabei sind die Kantenmorphisms jeweils die durch die Inklusionen der Kanten  $\mathbb{T}^3 \simeq E \subset V$  induzierten Monomorphismen  $\pi_1(E) \hookrightarrow \pi_1(V)$ . Die Eckengruppen von  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  sind direkte Produkte von freien Gruppen mit frei abelschen Gruppen und die Kantengruppen sind frei abelsch. Genauer gilt:

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(V_i^\pm) = \pi_1(V_i^\pm) \cong \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}^2$$

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(V_0^\pm) = \pi_1(V_0^\pm) \cong \mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^2$$

und

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(E_x) \cong \Gamma_{\mathcal{G}}(E_i^\pm) = \pi_1(E_i^\pm) \cong \mathbb{Z}^3$$

Wir berechnen exemplarisch die Eckengruppe in  $V_0^-$ . Nach dem Satz von VAN

<sup>29</sup> Im Sinne des Beispiels aus Abschnitt 3.2.

KAMPEN ist  $\pi_1(V_0^-)$  der Colimes des folgenden Diagrammes:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(E_0^-) & & \pi_1(E_1^-) & & \pi_1(E_x) \\ & \swarrow & \nearrow & \swarrow & \nearrow \\ & \pi_1(C_0^-) & & \pi_1(C_x^-) & \end{array}$$

Wir berechnen zunächst den Colimes der beiden linken Abbildungen, also den Pushout der Inklusionen, welche gemäß (6.1.1) durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(C_0^-) &\longrightarrow \pi_1(E_0^-) \cong \mathbb{Z}^3 \\ (k, l) &\longmapsto (\alpha_0^- \beta_0^{-1})^k (\gamma_0^-)^l \longleftrightarrow (k, -k, l) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(C_0^-) &\longrightarrow \pi_1(E_1^-) \cong \mathbb{Z}^3 \\ (k, l) &\longmapsto (\alpha_1^- \beta_1^{-1})^k (\gamma_1^-)^l \longleftrightarrow (k, -k, l). \end{aligned}$$

gegeben sind. Der Pushout ist dann  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}^2$ : Bezeichnen  $f_0, f_1, f_2$  die Erzeuger der freien Gruppe  $\mathbb{F}_3$ , so induzieren die durch die Zuordnungen

$$(6.2.1) \quad \begin{array}{lll} \alpha_0^- \longmapsto (f_0; (0, 0)) & \beta_0^- \longmapsto (f_0; (-1, 0)) & \gamma_0^- \longmapsto (\emptyset; (0, 1)) \\ \alpha_1^- \longmapsto (f_1; (0, 0)) & \beta_1^- \longmapsto (f_1; (-1, 0)) & \gamma_1^- \longmapsto (\emptyset; (0, 1)) \end{array}$$

definierten Morphismen von  $\pi_1(E_0^-)$  bzw.  $\pi_1(E_1^-)$  nach  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}^2$  ein Pushoutdiagramm; wobei zu zeigen bliebe, daß die Abbildungen auch über die Relationen des Diagrammes faktorisieren und die universelle Eigenschaft erfüllt ist.

Ferner ist  $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^2$  ein Pushout der durch die beiden rechten Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \mathbb{F}_2 \times \mathbb{Z}^2 \\ (k, l) &\longmapsto (\emptyset; (k, l)) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^2 &\longrightarrow \pi_1(E_x) \cong \mathbb{Z}^3 \\ (k, l) &\longmapsto \alpha_x^k (\gamma_x^-)^l \longleftrightarrow (0, k, l), \end{aligned}$$

vermöge des durch die Zuordnungen

$$\begin{array}{lll} f_0 \longmapsto (f_0; (0, 0)) & f_1 \longmapsto (f_1; (0, 0)) & (k, l) \longmapsto (\emptyset; (k, l)) \\ \alpha_x \longmapsto (\emptyset; (1, 0)) & \gamma_x^+ \longmapsto (f_2; (0, 0)) & \gamma_x^- \longmapsto (\emptyset; (0, 1)) \end{array}$$

gegebenen Pushoutdiagrammes. Damit ist  $\pi_1(V_0^-)$  isomorph zu  $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^2$ .

## ZULÄSSIGKEIT UND GEOMETRISCHE DATEN

Es bezeichne  $\pi : X_\varepsilon \rightarrow Y_\varepsilon$  die universelle Überlagerung von  $Y_\varepsilon$ . Nach dem Satz von HADAMARD-CARTAN ist  $X_\varepsilon$  ein lokal kompakter Hadamardraum und die Gruppe<sup>30</sup>  $\Gamma = \pi_1(Y_\varepsilon)$  wirkt frei und kokompakt durch Isometrien auf  $X_\varepsilon$ .

PROPOSITION 6.2.2 Die Wirkung von  $\Gamma$  auf  $X_\varepsilon$  ist zulässig von Rang 3.

BEWEIS: Da  $\Gamma$  isomorph zu der Fundamentalgruppe des Graphen von Gruppen  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  ist, genügt es zu zeigen, daß dieser zulässig im Sinne der Definition 3.1.1 ist.

Die vorangegangene Diskussion hat bereits gezeigt, daß die Ecken- und Kantengruppen von der in Definition 3.1.1 (i) und (ii) geforderten Gestalt sind.

Das Zentrum einer Eckengruppe wird jeweils von der Fundamentalgruppe desjenigen Zylinders<sup>31</sup> erzeugt, dessen Ränder mit den in der Ecke enthaltenen Tori identifiziert werden. Die Urbilder der Zentren zweier benachbarten Eckengruppen erzeugen genau die zwischen ihnen liegende Kantengruppe: So sind beispielsweise  $V_0^-$  und  $V_1^-$  die Ecken der Kante  $E_1^-$ . Aus (6.2.1) folgt

$$Z(V_0^-) = \pi_1(C_0^-) = \langle (\emptyset; (1,0)), (\emptyset; (0,1)) \rangle \cong \langle \alpha_1^- \beta_1^{-1}, \gamma_1^- \rangle$$

und analoge Überlegungen zur Berechnung von  $\pi_1(V_1^-)$  zeigen

$$Z(V_1^-) = \pi_1(C_1^-) = \langle (f_1; (0,0)), (\emptyset; (0,1)) \rangle \cong \langle \alpha_1^-, \gamma_1^- \rangle.$$

Somit wird die Kantengruppe

$$\Gamma_{\mathcal{G}}(E_1^-) = \pi_1(E_1^-) \cong \langle \alpha_1^-, \beta_1^-, \gamma_1^- \rangle$$

von  $Z(V_0^-)$  und  $Z(V_1^-)$  erzeugt. Mit den verbleibenden Eckenpaaren verfährt man ähnlich und die Bedingung (iv) von Definition 3.1.1 ist erfüllt.

Wie man zum Beispiel an der durch (6.2.1) definierten Abbildung leicht sieht, werden die Bilder der Kantengruppen  $\mathbb{Z}^3 \cong \pi_1(E)$  jeweils von der durch einen Zylinder erzeugten Gruppe  $\mathbb{Z}^2 \cong \pi_1(C) < \pi_1(E)$  und einem Element

<sup>30</sup> Die Isomorphieklasse der Fundamentalgruppe von  $Y_\varepsilon$  ist natürlich unabhängig von  $\varepsilon$ .

<sup>31</sup> Die Ecken  $V_0^-$  und  $V_0^+$  enthalten zwar jeweils zwei Zylinder, deren Fundamentalgruppen in  $\pi_1(V_0^\pm)$  aber übereinstimmen.



des freien Faktors der Ecken­gruppe aufgespannt. Diese Erzeuger aus den freien Faktoren sind für verschiedene Kanten nicht identisch, also sind die Bilder der Kantengruppen nicht kommensurabel. Da in diesem Fall jedes  $\Delta(V_i^\pm) = \pi_1(V_i^-)/\pi_1(C_i^\pm)$  sogar frei ist, sieht man leicht ein, daß auch die Kom­mensurabilitätsbedingungen der Definition 3.1.1 (iii) erfüllt sind. ■

PROPOSITION 6.2.3 Für jedes  $\delta > 0$  sind die verallgemeinerten geometrischen Daten der Wirkungen von  $\Gamma$  auf  $X_0$  und  $X_\delta$  äquivalent.

BEWEIS: Es bezeichne  $\mathcal{T}$  den nach Bemerkung 3.1.3 bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten Bass-Serre Baum zu  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$ . Ist dann  $V_i^\pm$  eine Ecke von  $\mathcal{G}$  und  $v$  ein Lift von  $V_i^\pm$  nach  $\mathcal{T}$ , so ist für  $Z_v$ , also den Lift des Zentrums der Ecken­gruppe in die Isotropie­gruppe  $\Gamma_v$  von  $v$  der konvexe Teilraum  $\text{Min}_{X_\varepsilon}(Z_v)$  isometrisch zu der universellen Überlagerung von  $V_i^\pm$  mit der induzierten Längen­metrik. Der konvexe Teilraum  $V_2^- \subset Y_0$  wird durch die Abbildung

$$x \mapsto \begin{cases} (r, s, t; \delta)_i^- & \text{falls } x = (r, s, t; 0)_i^- \in E_i^- \text{ für } i \in \{2, 3\} \\ x & \text{falls } x \in C_2^- \end{cases}$$

in  $V_2^- \subset Y_\delta$  eingebettet. Damit ist ihr Lift nach  $X_0$  von  $\text{Min}_{X_0}(Z_v)$  in  $\text{Min}_{X_\delta}(Z_v)$  eine  $\Gamma_v$ -äquivalente isometrische Einbettung und die verallgemeinerten geometrischen Daten der  $\Gamma_v$ -Wirkung stimmen überein. Die Argumentation in den übrigen Fällen geht analog. ■

## GEOMETRISCHE ZERLEGUNG

Wir fassen  $\mathcal{G}$  als einen in dem Bass-Serre Baum  $\mathcal{T}$  zu  $\Gamma_{\mathcal{G}}(\_)$  enthaltenen Fundamentalbereich der Wirkung von  $\Gamma$  auf. Für eine Ecke  $V$  oder Kante  $E$  von  $\mathcal{G}$  verstehen wir dann, der in Abschnitt 2.4 beschriebenen Präsentation von  $\pi_1(\Gamma_{\mathcal{G}}(\_))$  entsprechend,  $\pi_1(V) = \Gamma_{\mathcal{G}}(V)$  und  $\pi_1(E) = \Gamma_{\mathcal{G}}(E)$  als Untergruppen von  $\Gamma \cong \pi_1(\Gamma_{\mathcal{G}}(\_))$ .

Nun ist  $Y_\varepsilon$  gerade so konstruiert, daß seine universelle Überlagerung  $X_\varepsilon$  genau aus der Vereinigung von Wänden<sup>32</sup>  $\mathcal{W}_e$ ,  $e \in \mathcal{E}\mathcal{T}$ , den universellen Überlagerungen der Kanten, und Streifen  $\mathcal{S}_{(e, e')}$ , den universellen Überlagerungen

<sup>32</sup> Wie wir nach der Definition der Quasiisometrie sehen werden, ist die Notation nicht von ungefähr an Abschnitt 4.3 angelehnt: Der Raum  $X_0$  besteht genau aus Schablonen für  $X_\varepsilon$ .

der Zylinder, besteht. Ist  $\mathcal{W}$  eine Zusammenhangskomponente von  $\pi^{-1}(E)$  für eine Kante  $E \subset Y_\varepsilon$  oder  $\mathcal{S}$  eine Zusammenhangskomponente von  $\pi^{-1}(C)$  für einen Zylinder  $C \subset Y_\varepsilon$ , so sagen wir  $\mathcal{W}$  bzw.  $\mathcal{S}$  sei vom Typ  $E$  resp.  $C$ . Die zwei Zusammenhangskomponenten des Randes eines Streifens liegen in genau zwei Wänden, und zwar wie folgt:

Sind  $e$  und  $e'$  Kanten in  $\mathcal{T}$  mit einer gemeinsamen Ecke  $v$ , so existieren  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ ,  $E, E' \in \mathcal{EG}$  und  $V \in \mathcal{VG}$  mit  $e = \gamma.E$ ,  $v = \gamma.V$ ,  $e' = \gamma'.E'$  und  $\gamma'\gamma^{-1} \in \Gamma_V$ . Die Gruppenelemente  $\gamma$  und  $\gamma'$  sind modulo  $Z_e \cap Z_{e'} = Z_v$  eindeutig bestimmt. Da  $V$  eine zu den Kanten  $E$  und  $E'$  inzidente Ecke ist, grenzen  $E$  und  $E'$  an einen Zylinder  $C \subset V$ . In  $X_e$  gilt dann:

$$\mathcal{W}_e = \mathcal{W}_{\gamma.E} = \gamma.\mathcal{W}_E \cong \begin{cases} \mathbb{E}^3 \times [0, \varepsilon] & \text{falls } \mathcal{W}_e \text{ vom Typ } E_2^\pm \text{ oder vom Typ } E_3^\pm \text{ ist} \\ \mathbb{E}^3 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\mathcal{S}_{(e,e')} \cong \mathbb{E}^2 \times [0, 1]$$

Dabei gilt  $\mathcal{W}_e = \text{Min}_{X_e}(Z_e)$  und  $Z_e \cong \mathbb{Z}^3$  wirkt durch Translationen kokompakt auf dem  $\mathbb{E}^3$ -Faktor und trivial auf dem eventuell vorhandenen Intervallfaktor von  $\mathcal{W}_e$ . Diejenige Randkomponente von  $\mathcal{S}_{(e,e')}$ , welche die Überlagerungsabbildung auf  $E \cap C$  abbildet, ist genau die konvexe Hülle einer Bahn von  $\mathbb{Z}^2 \cong Z_v < Z_e$  in  $\mathcal{W}_e$ . Diesen affinen, zweidimensionalen Teilraum der Wand  $\mathcal{W}_e$  bezeichnen wir als den Saum  $\mathcal{L}$  von  $\mathcal{S}_{(e,e')}$  in  $\mathcal{W}_e$ .

Es seien  $e_1, e_2$  und  $e_3$  aufeinanderfolgende Kanten von  $\mathcal{T}$ ,  $v_1$  und  $v_2$  die zwischen ihnen liegenden Ecken und  $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{(e_i, e_{i+1})}$  die an die Wand  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{e_2}$  grenzenden Streifen. Nach Proposition 6.2.2 sind  $Z_{v_1}$  und  $Z_{v_2}$  nicht kommensurabel in  $Z_{e_2}$ . Somit sind die konvexen Hüllen ihrer Bahnen, die Säume  $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}^- = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{W}$  und  $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}^+ = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{W}$ , nach eventueller Projektion auf den  $\mathbb{E}^3$ -Faktor in  $\mathcal{W}$  nichtparallele affine Hyperräume. Diese schneiden sich also in einer Geraden. Es bezeichnen  $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}^\cap = \mathcal{L}_{\mathcal{W}}^- \cap \mathcal{L}_{\mathcal{W}}^+$ , falls  $\mathcal{W} \cong \mathbb{E}^3$ , und  $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}^{\cap\pm}$  die Schnitte der entsprechend den Intervallfaktor entlang projizierten Säume; etwa  $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}^{\cap-} \hookrightarrow \mathbb{E}^3 \times \{0\}$  und  $\mathcal{L}_{\mathcal{W}}^{\cap+} \hookrightarrow \mathbb{E}^3 \times \{\varepsilon\}$ , falls  $\mathcal{W}$  vom Typ  $E_2^\pm$  oder vom Typ  $E_3^\pm$  ist.

## REDUKTION

Es bezeichne  $Y_\varepsilon^-$  den konvexen Teilraum  $V_0^- \cup V_1^- \cup V_2^- \cup V_3^-$  von  $Y_\varepsilon$ . Da jeder in  $Y_\varepsilon^-$  enthaltene Torus oder Zylinder einen von  $\gamma_i$  bzw.  $\gamma_x$  erzeugten  $\mathbb{S}^1$ -Faktor enthält und diese durch die Relationen (6.1.1) parallel miteinander identifiziert werden, zerfällt  $Y_\varepsilon^-$  als metrisches Produkt  $\check{Y}_\varepsilon^- \times \mathbb{S}^1$ .

Analog zur Konstruktion von  $Y_\varepsilon$  ist  $\check{Y}_\varepsilon^-$  ein Amalgam aus fünf, eventuell aufgedickten, flachen 2-Tori  $\check{E}_i^-$  und  $\check{E}_x$  entlang der Randkomponenten von fünf Zylindern  $\check{C}_i^-$  und  $\check{C}_x^-$ .

Fassen wir  $\check{Y}_\varepsilon^-$  als konvexen Teilraum in  $Y_\varepsilon$  auf, so definiert dies einen Teilgraphen  $\mathcal{G}^- \subset \mathcal{G}$  mit den vier Ecken

$$\begin{aligned}\check{V}_0^- &= \check{E}_0^- \cup_{\sim} \check{C}_0^- \cup_{\sim} \check{E}_1^- \cup_{\sim} \check{C}_x^- \cup_{\sim} \check{E}_x \\ \check{V}_i^- &= \check{E}_i^- \cup_{\sim} \check{C}_i^- \cup_{\sim} \check{E}_{i+1}^- \end{aligned}$$

und vier Kanten<sup>33</sup>

$$\check{E}_i^- = \check{V}_{i-1}^- \cap \check{V}_i^- .$$

Es bezeichne  $\check{\Gamma}_{\mathcal{G}^-}(-)$  den dadurch definierten Graphen von Gruppen.

Für einen Lift  $e$  von  $E_1^-$  nach  $\mathcal{T}$  gilt

$$Z_e^\cap = Z_{\partial^- e} \cap Z_{\partial^+ e} = \langle \alpha_1^- \beta_1^{-1}, \gamma_1^- \rangle \cap \langle \alpha_1^-, \gamma_1^- \rangle = \langle \gamma_1^- \rangle = \langle \gamma_x^- \rangle$$

und man sieht leicht ein, daß der in Abschnitt 5.1 durch Proposition 5.1.1 definierte Teilbaum  $\check{\mathcal{T}}(e)$  von  $\mathcal{T}$  isomorph zu dem Bass-Serre Baum von  $\check{\Gamma}_{\mathcal{G}^-}(-)$  ist.

Die kanonischen Erzeuger der Fundamentalgruppen der 2-Tori bezeichnen wir weiterhin mit  $\alpha^-$  und  $\beta^-$ , versehen mit den entsprechenden Indizes.

Es sei  $\check{\Gamma}$  die Fundamentalgruppe und  $\check{X}_\varepsilon^-$  die universelle Überlagerung von  $\check{Y}_\varepsilon^-$ . Dann gilt

$$\text{Min}_{X_\varepsilon}(\gamma_x^-) \cong \check{X}_\varepsilon^- \times \mathbb{E}$$

und

$$\check{\Gamma} \cong \pi_1(\check{\Gamma}_{\mathcal{G}^-}(-)) \cong C_\Gamma(\gamma_x^-) / \langle \gamma_x^- \rangle .$$

<sup>33</sup> Man beachte, daß  $\check{E}_x$  keine Kante von  $\mathcal{G}^-$  ist.

Wir fassen  $\check{X}_\varepsilon^-$  im folgenden als einen konvexen Teilraum<sup>34</sup> von  $X_\varepsilon$  auf.

Damit ist  $\check{X}_\varepsilon^-$  ein Hadamardraum auf welchem  $\check{\Gamma}$  in zulässiger Weise wirkt. Für  $\delta > 0$  sind die geometrischen Daten der Wirkungen von  $\check{\Gamma}$  auf  $\check{X}_0^-$  und  $\check{X}_\delta^-$  äquivalent.

Wie oben zerlegen wir  $\check{X}_\varepsilon^-$  in Wände

$$\check{W} \cong \begin{cases} \mathbb{E}^2 \times [0, \varepsilon] \\ \mathbb{E}^2 \end{cases}$$

und Streifen

$$\check{S} \cong \mathbb{E} \times [0, 1].$$

Es seien  $\check{L}_i^-$  und  $\check{L}_i^+$  die Säume zweier zu einer Wand  $\check{W}_i$  inzidenter Streifen  $\check{S}_{i-1}$  und  $\check{S}_i$ . Diese schneiden sich, nach eventueller Projektion entlang des Intervallfaktors einer aufgedickten Wand, in einem Punkt  $\check{o}_i$ , beziehungsweise in Punkten  $\check{o}_i^- \in \check{L}_i^-$  und  $\check{o}_i^+ \in \check{L}_i^+$ . Die Säume  $\check{L}_i^-$  sind Achsen zentraler Elemente der Eckengruppen. Die in (6.1.1) durch die Schleifen entlang der Koordinatenlinien der Zylinder definierten Erzeuger induzieren also eine Orientierung auf den Säumen. Wir sagen, ein Punkt in einem Saum liege oberhalb von  $\check{o}_i$ , wenn er auf der gleichen Seite von  $\check{o}_i$  liegt, wie dessen Bild unter dem Erzeuger des Zentrums, und andernfalls, er liege unterhalb.

Analog definieren wir  $Y_\varepsilon^+$ ,  $\check{Y}_\varepsilon^+$ ,  $\mathcal{G}^+$  und  $\check{X}_\varepsilon^+$ . Dabei gilt  $\check{\Gamma} \cong \pi_1(\check{Y}_\varepsilon^-) \cong \pi_1(\check{Y}_\varepsilon^+)$ .

## QUASIISOMETRIE

Wir definieren im folgenden für jedes  $\varepsilon \geq 0$  eine äquivariante Quasiisometrie von  $X_0$  nach  $X_\varepsilon$ , indem wir eine Homotopieäquivalenz zwischen den entsprechenden kompakten Quotienten auf deren universelle Überlagerungen hochheben. Die Homotopieäquivalenz von  $Y_0$  nach  $Y_\varepsilon$  streckt den Intervallfaktor der Zylinder  $C_2^\pm$  in  $Y_0$  um den Faktor  $(1 + 2\varepsilon)$  in die benachbarten aufgedickten Tori in  $Y_\varepsilon$  hinein, so daß die Bilder der Randkomponenten der Zylinder unter der Abbildung jeweils in den 3-Torusfasern von  $E_2^\pm$  oder  $E_3^\pm$  über der 0 zu liegen kommen.

<sup>34</sup> Zwei Lifts von  $\check{X}_\varepsilon$  nach  $x_\varepsilon$  unterscheiden sich gerade um eine Translation durch ein Vielfaches von  $\gamma_x^+$  oder ein  $\alpha \in \Gamma \setminus C_\Gamma(\gamma_x^+)$ .

Dazu fassen wir  $Y_0 \setminus (C_2^- \cup C_2^+)$  als in  $Y_\varepsilon$  eingebettet auf und definieren  $\phi_\varepsilon$  als die Fortsetzung dieser Einbettung durch die folgende Abbildung:

$$(s, t, r)_2^\pm \mapsto \begin{cases} (0, s, t; (1+2\varepsilon)r)_2^\pm \in E_2^\pm & \text{für } 0 \leq r \leq \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \\ (s, t, (1+2\varepsilon)r - \varepsilon)_2^\pm \in C_2^\pm & \text{für } \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon} \leq r \leq \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon} \\ (0, s, t; (1+2\varepsilon)(1-r))_3^\pm \in E_2^\pm & \text{für } \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon} \leq r \leq 1 \end{cases}$$

Dann induziert  $\phi_\varepsilon$  eine Homotopieäquivalenz zwischen  $Y_0$  und  $Y_\varepsilon$  und liftet zu einer stetigen, äquivarianten Quasiisometrie  $\Phi_\varepsilon$  von  $X_0$  nach  $X_\varepsilon$ .

Die Quasiisometrie  $\Phi_\varepsilon$  erhält offensichtlich den Typ einer Wand, d.h. ist  $\mathcal{W}$  eine Zusammenhangskomponente von  $\pi^{-1}(E_i) \subset X_0$ , so gilt  $\pi(\Phi_\varepsilon(\mathcal{W})) \subset E_i \subset X_\varepsilon$ . Insbesondere entspricht  $\Phi_\varepsilon$  für  $i \in \{2, 3\}$  dabei genau der kanonischen Einbettung  $\mathbb{E}^3 \times \{0\} \hookrightarrow \mathbb{E}^3 \times [0, \varepsilon]$ .

Damit ist diese Quasiisometrie eine universelle Schablonenabbildung in dem folgenden Sinne: Jede Wand in  $X_\varepsilon$  ist zweiseitig, also können wir jedem geodätischen Strahl oder Segment in eindeutiger Weise die von ihm durchlaufene Folge von Wänden zuordnen. Dies definiert eine Route in  $\mathcal{T}$  wie in Abschnitt 4.2. Verkleben wir wie oben beschrieben die von der Kantensfolge der Route vorgegebenen Wände und Streifen in  $X_0$ , so erhalten wir eine Schablone zu dieser Route. Die Einschränkung von  $\Phi_\varepsilon$  auf diesen Teilraum ist dann die Schablonenabbildung nach  $X_\varepsilon$ .

Ferner ist  $\Phi_\varepsilon$  mit der Zerlegung  $\check{X}_0^\pm \times \mathbb{E}$  bzw.  $\check{X}_\varepsilon^\pm \times \mathbb{E}$  verträglich und zerfällt als Produktabbildung  $\check{\Phi}_\varepsilon^\pm \times \text{id}_\mathbb{E}$ , wobei  $\check{\Phi}_\varepsilon^\pm$  eine äquivariante Quasiisometrie von  $\check{X}_0^\pm$  in  $\check{X}_\varepsilon^\pm$  ist. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die Einschränkung auf  $\check{X}_0^\pm$  ebenfalls mit  $\Phi_\varepsilon$ .

### 6.3 SPEZIELLE SEGMENTE

Wir werden nun eine Folge von Segmenten konstruieren, mit denen wir dann im letzten Abschnitt zeigen können, daß für  $\delta > 0$  die Quasiisometrie  $\Phi_\delta$  nicht auf den virtuellen Rand fortsetzbar ist.

### SPEZIELLE STRAHLEN

Wir definieren für beliebiges  $\varepsilon$  zunächst einen geodätischen Strahl in  $\check{X}_\varepsilon^-$ , welcher die Kanten  $\check{E}_0^-$  bis  $\check{E}_3^-$  in zyklischer Folge durchläuft.

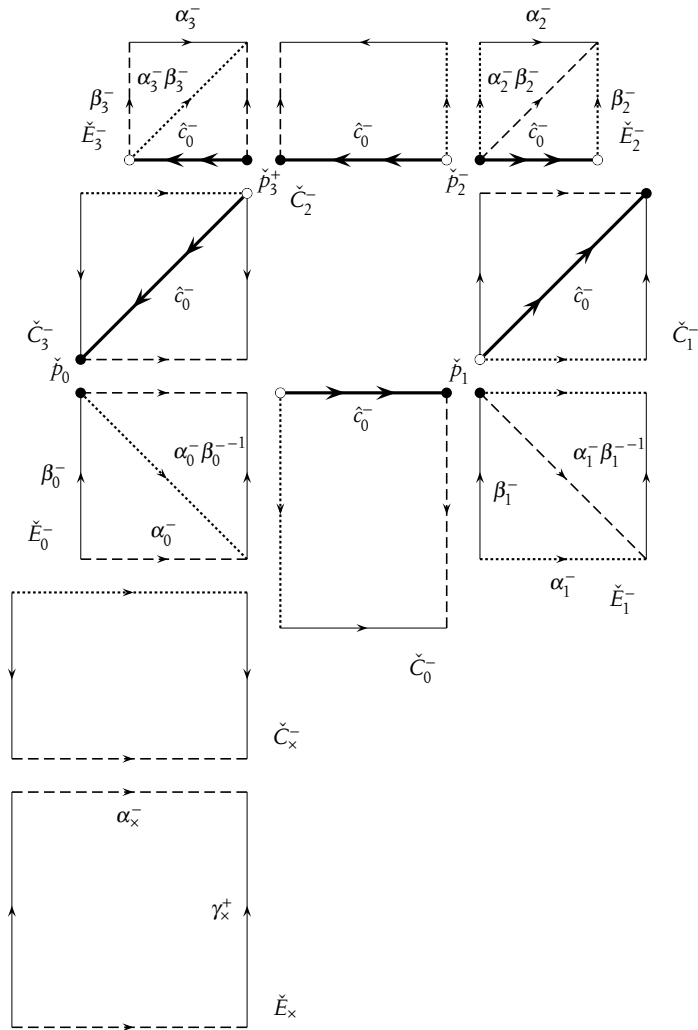


ABBILDUNG 6-A: Der Verlauf von  $\hat{c}_0^-$  in den Fundamentalbereichen der 2-Tori und Zylinder in  $\check{Y}_0^-$  ist fett gezeichnet und mit doppelten Pfeilen versehen. Gestrichelte bzw. gepunktete Linien benachbarter Fundamentalbereiche werden jeweils miteinander identifiziert.

Dafür seien

$$\begin{aligned} p_2^- &= (0, 0, 0; 0)_2^- \in E_2^-, & p_2^+ &= (0, 0, 0; \varepsilon)_2^- \in E_2^-, \\ p_3^- &= (0, 0, 0; \varepsilon)_3^- \in E_3^-, & p_3^+ &= (0, 0, 0; 0)_3^- \in E_3^-, \end{aligned}$$

sowie

$$p_i = (0, 0, 0; 0)_i^- \in E_i^- \text{ für } i \in \{0, 1\}$$

und  $\check{p}_i^\pm$  ihre Projektionen nach  $\check{E}_i^\pm$ . Dann gilt

$$\overline{\check{p}_2^- \check{p}_2^+} \cup \overline{\check{p}_2^+ \check{p}_3^-} \cup \overline{\check{p}_3^- \check{p}_3^+} = \overline{\check{p}_2^- \check{p}_3^+}.$$

Nun definieren wir  $\hat{c}_\varepsilon^-$  als den geodätischen Repräsentanten<sup>35</sup> von

$$\left[ \overline{\check{p}_0^- \check{p}_1^-} \cup \overline{\check{p}_1^- \check{p}_2^-} \cup (\alpha_2^- \beta_2^-)^2 \cup \overline{\check{p}_2^- \check{p}_3^-} \cup (\alpha_3^- \beta_3^-)^{-2} \cup \overline{\check{p}_3^- \check{p}_0^-} \right] \in \pi_1(\check{Y}_\varepsilon^-).$$

Abbildung 6-A ist eine Darstellung von  $\hat{c}_0^-$  in den Fundamentalbereichen der 2-Tori und Zylinder in  $\check{Y}_0^-$ .

Für einen Lift<sup>36</sup>  $\check{o}_0 \in \pi^{-1}(\check{p}_0)$  sei  $\check{c}_\varepsilon^-$  ein Lift von  $\hat{c}_\varepsilon^-$  nach  $\check{X}_\varepsilon^-$  mit Startpunkt  $\check{o}_0$ . Dann ist  $\check{c}_\varepsilon^-$  ein geodätischer Strahl, welcher Wände  $\check{W}_0, \check{W}_1, \check{W}_2, \check{W}_3, \check{W}_4, \check{W}_5, \dots$  des Types  $\check{E}_0^-, \check{E}_1^-, \check{E}_2^-, \check{E}_3^-, \check{E}_0^-, \check{E}_1^-, \dots$  der Reihenfolge nach durchläuft. Es sei jeweils  $\check{S}_i$  der Streifen zwischen  $\check{W}_i$  und  $\check{W}_{i+1}$ .

## LAUFZEITDIFFERENZ

Wir wollen nun für ein positives  $\delta$  den geodätischen Strahl  $\check{c}_\delta^-$  und das Bild von  $\check{c}_0^-$  unter  $\Phi_\delta$  in der universellen Überlagerung  $\check{X}_\delta^-$  miteinander vergleichen. Insbesondere werden wir zeigen, daß  $\hat{c}_0^-$  strikt kürzer als  $\hat{c}_\delta^-$  ist.

Abbildung 6-B skizziert die von  $\check{c}_\delta^-$  durchlaufene Konfiguration von Wänden und Streifen, sowie den Verlauf von  $\check{c}_\delta^-$  und  $\Phi_\delta \circ \check{c}_0^-$  darin.

<sup>35</sup> Wählen wir  $\mathcal{G}^- \setminus \check{E}_2^-$  als maximalen Teilbaum in  $\mathcal{G}^-$ , so entspricht dies bezüglich der Präsentation von  $\check{\Gamma} \cong \pi_1(\check{\Gamma}_{\mathcal{G}^-}(-); \mathcal{G}^- \setminus \check{E}_2^-)$  aus Abschnitt 2.4 genau dem Element  $(\alpha_2^- \beta_2^-)^2 \tau_{\check{E}_2^-} (\alpha_3^- \beta_3^-)^2$ .

<sup>36</sup> Jeder Lift von  $\check{p}_i^\pm$  ist in der Tat ein Schnittpunkt zweier Säume, denn  $\check{p}_i^\pm$  ist genau der Schnittpunkt zweier zu  $\check{E}_i^\pm$  inzidenter Zylinder.

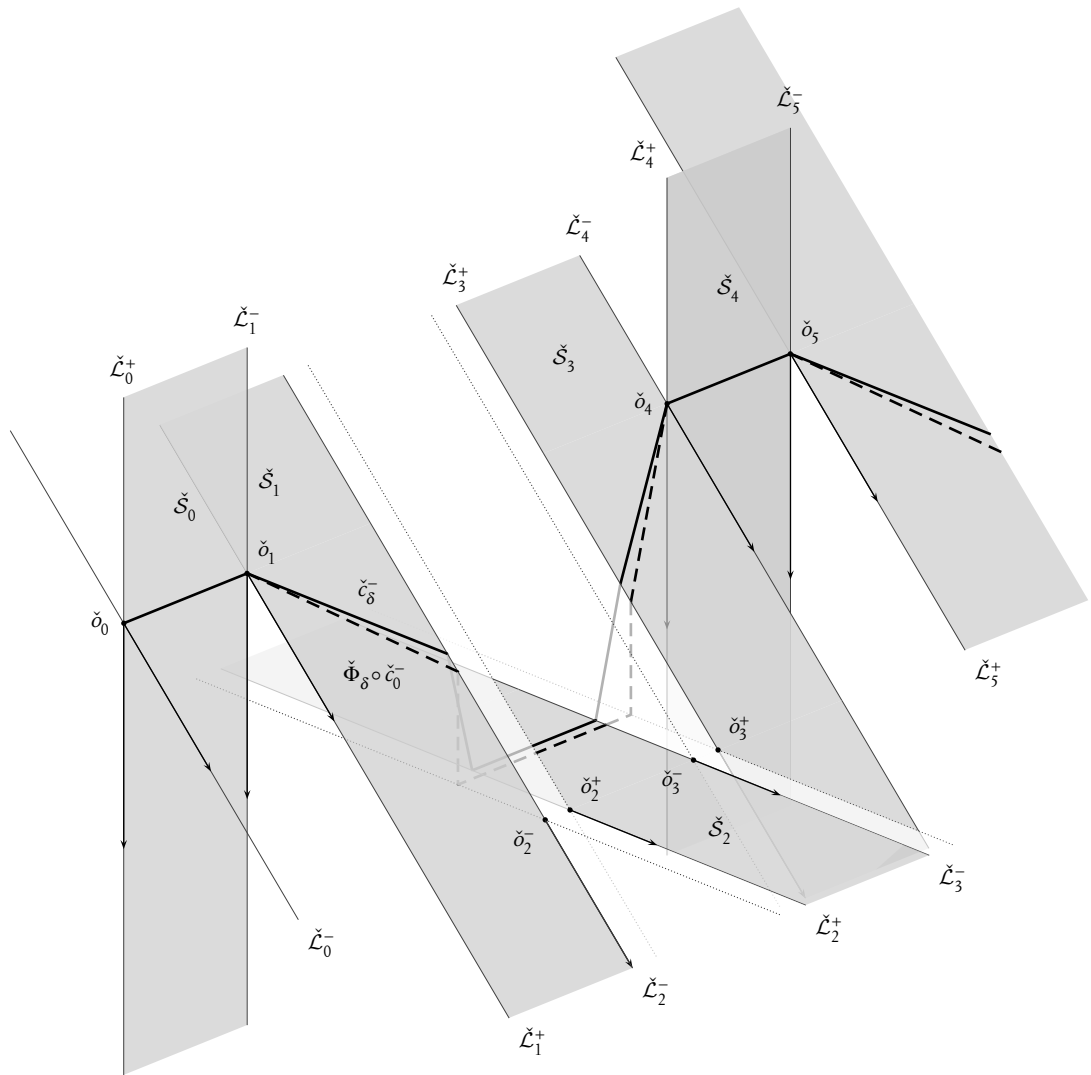


ABBILDUNG 6-B: Die Streifen sind grau hinterlegt, während die Wände transparent sind. Die Pfeile deuten die Translationsvektoren jener Erzeuger an, entlang derer die Tori mit den Zylindern verklebt wurden. Diese induzieren damit eine Orientierung des reellen Faktors der Streifen.  
 Die Lifts  $\check{o}_1$  und  $\check{o}_2^-$ , bzw.  $\check{o}_4$  und  $\check{o}_3^+$ , der Basispunkte  $\check{p}_1$  und  $\check{p}_2^-$ , bzw.  $\check{p}_0$  und  $\check{p}_3^+$ , sind entsprechend der Definition von  $\check{c}_\varepsilon^-$  um das zweifache der Translationslänge von  $\alpha_2^- \beta_2^- \sim \alpha_1^-$ , bzw.  $\alpha_3^- \beta_3^- \sim \alpha_0^-$ , entlang des reellen Faktors des Streifens  $\check{S}_2$  bzw.  $\check{S}_3$  versetzt.



Da  $\check{X}_\varepsilon^-$  stückweise euklidisch ist, genügt es im folgenden, stetige und auf den Wänden und Streifen lineare Wege zu betrachten. Wie man den Identifikationen (6.1.1) bzw. den darauf folgenden Erzeugerrelationen auf Seite 52 entnimmt, schneiden sich die Säume jeder Wand  $\mathcal{W}_i$ , nach eventueller Projektion entlang des Intervallfaktors, im Winkel  $\frac{\pi}{4}$ .

Aus Symmetriegründen passiert das geodätische Segment zwischen  $\check{o}_0$  und  $\check{o}_5$  die Mittellinie  $\check{C}$  des Streifens  $\check{S}_2$  im Winkel  $\frac{\pi}{2}$ ; vergleiche Abbildung 6-C und Abbildung 6-B. Wir bestimmen zunächst das geodätische Segment zwischen  $\check{o}_1$  und  $q_{\check{C}} = \text{pr}_{\check{C}}(\check{o}_1)$ , der orthogonalen Projektion von  $\check{o}_1$  auf  $\check{C}$ : Jedes geodätische Segment zwischen  $\check{o}_1$  und  $\check{C}$  schneidet den Saum  $\check{L}_2^-$  in einem Punkt  $\check{q}^-$ . Es genügt also, die durch  $\check{q}^- \in \check{L}_2^-$  stetig parametrisierte Familie von Wegen der Form  $\overline{\check{o}_1 \check{q}^-} \cup \overline{\check{q}^- \text{pr}_{\check{C}}(\check{q}^-)}$  zu betrachten. Für jedes  $\check{q}^- \in \check{L}_2^-$  schneidet das geodätische Segment von  $\check{q}^-$  nach  $\text{pr}_{\check{C}}(\check{q}^-)$  den Saum  $\check{L}_2^+$  in einem Punkt  $\check{q}^+$  und da  $\check{C}$  und  $\check{L}_2^+$  parallel sind, verläuft  $\overline{\check{q}^- \check{q}^+}$  senkrecht zu  $\check{L}_2^+$  in  $\check{W}_2$ . Für ein  $s \in \mathbb{R}$  sei  $\check{q}^-(s)$  der eindeutig bestimmte Punkt in  $\check{L}_2^-$ , dessen orthogonale Projektion auf  $\check{L}_1^+$  im Abstand  $s$  oberhalb von  $\check{o}_1$  liegt. Dann sind zum Beispiel  $\check{q}^-(0) = \text{pr}_{\check{L}_2^-}(\check{o}_1)$  und  $\check{q}^-(2) = \check{o}_2^-$ , denn  $\check{o}_2^- = (\alpha_2^- \beta_2^-)^2 \cdot \check{q}^-(0)$  und  $l(\alpha_2^- \beta_2^-) = 1$ . Entsprechend bezeichne  $\check{q}_{\check{C}}(s) = \text{pr}_{\check{C}}(\check{q}^-(s))$  und  $\check{q}^+(s)$  den Schnittpunkt von  $\overline{\check{q}^-(s) \check{q}_{\check{C}}(s)}$  und  $\check{L}_2^+$ .

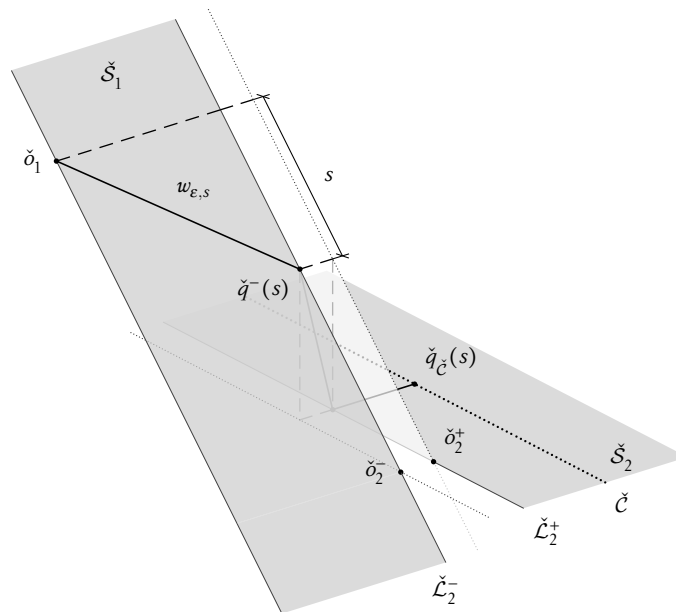


ABBILDUNG 6-C: Der Verlauf eines Weges  $w_{\varepsilon,s}$  für ein  $s \in (0, 2)$

Es sei  $w_{\varepsilon,s}$  der stetige Weg  $\overline{\check{o}_1 \check{q}^-(s)} \cup \overline{\check{q}^-(s) \check{q}_{\check{c}}(s)} \subset \check{X}_{\varepsilon}^-$ . Dann ist  $w_{\varepsilon,s}$  stückweise linear und es gilt

$$\begin{aligned} L(\varepsilon, s) &= l(w_{\varepsilon,s}) = d_{\check{X}_{\varepsilon}^-}(\check{o}_1, \check{q}^-(s)) + d_{\check{X}_{\varepsilon}^-}(\check{q}^-(s), \check{q}^+(s)) + d_{\check{X}_{\varepsilon}^-}(\check{q}^+(s), \check{q}_{\check{c}}(s)) \\ &= \sqrt{1+s^2} + \sqrt{\frac{1}{2}(2-s)^2 + \varepsilon^2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

wie man mit Hilfe der Abbildung 6-C leicht nachvollziehen kann. Das Längenfunktional  $L(\varepsilon, s)$  ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\varepsilon, s) = s(1+s^2)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{s}{2} - 1\right) \left(\frac{1}{2}(2-s)^2 + \varepsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Da  $L(\varepsilon, s)$  strikt konvex in  $s$  ist und

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\varepsilon, s) \Big|_{s=0} = -(2+\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} < 0$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial s} L(\varepsilon, s) \Big|_{s=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon^2\right)^{-\frac{1}{2}} \geq 0$$

gilt, nimmt  $L(\varepsilon, \cdot)$  genau ein globales Minimum in einem  $s_{\varepsilon} \in (0, 1]$  an. Des weiteren ist mit  $\varepsilon \mapsto L(\varepsilon, s)$  auch  $\varepsilon \mapsto L(\varepsilon, s_{\varepsilon})$  streng monoton wachsend. Da  $L(0, \cdot)$  wegen  $\frac{\partial}{\partial s} L(0, s) \Big|_{s=1} = 0$  sein Minimum in 1 annimmt, folgt  $L(\varepsilon, s_{\varepsilon}) > L(0, s_0)$  für jedes  $\varepsilon > 0$ .

Eine kleine Partie *Billard* in dem lokal euklidischen Hadamardraum  $\check{S}_0 \cup \check{W}_0 \cup \check{S}_1$ , welche wir in Abbildung 6-D nachgestellt haben, zeigt, daß für jedes  $s \in [-1, 1]$  das geodätische Segment  $\overline{\check{o}_0 \check{q}^-(s)}$  durch  $\check{o}_1$  verläuft: Es bezeichne  $\theta$  den orientierten Winkel zwischen  $\overline{\check{o}_0 \check{q}^-(s)}$  und  $\overline{\check{o}_0 \check{o}_1}$ . Ist dann  $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ , so trifft der Stoß  $\overline{\check{o}_0 \check{q}^-(s)}$  die Bande  $\check{L}_1^+$  oberhalb von  $\check{o}_1$  und läuft im Winkel  $\frac{\pi}{4} - \theta < \frac{\pi}{4}$  in die Bande  $\check{L}_2^-$ . Somit gilt

$$s = d_{\check{X}_{\varepsilon}^-}(\text{pr}_{\check{L}_1^+}(\check{q}^-(s)), \check{o}_1) = d_{\check{X}_{\varepsilon}^-}(\check{q}^-(s), \text{pr}_{\check{L}_2^-}(\check{o}_1)) > \cot\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) > 1.$$

Ist  $\theta \geq \frac{\pi}{4}$ , so läuft der Stoß  $\overline{\check{o}_0 \check{q}^-(s)}$  unter einem Winkel  $\leq \frac{\pi}{4}$  in einem Punkt oberhalb von  $\check{o}_1$  aus der Bande  $\check{L}_1^-$  in die Wand  $\check{W}_1$  und kann die Bande  $\check{L}_1^+$  zu keinem Zeitpunkt mehr erreichen. Für Winkel  $\theta < 0$  argumentiert man analog.

Diese Diskussion zeigt, daß der Strahl  $\check{c}_{\check{\delta}}^-$  so verläuft, wie in Abbildung 6-B dargestellt. Gemäß der Definition der Quasiisometrie  $\check{\Phi}_{\check{\delta}}$  entspricht darin die

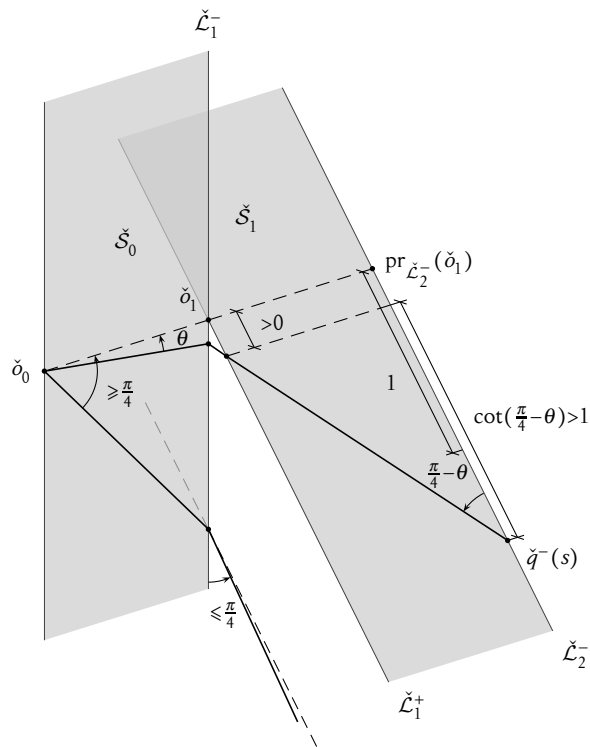


ABBILDUNG 6-D: Ein geodätisches Segment von  $\check{o}_0$  nach  $\check{L}_2^-$  für ein  $\theta < (0, \frac{\pi}{4})$  und ein geodätischer Strahl, welcher für  $\theta \geq \frac{\pi}{4}$  schließlich in  $\check{W}_1$  verbleibt.

gestrichelte Linie dem Weg  $\check{\Phi}_\delta \circ \check{c}_0^-$ . Ferner ist die Differenz der Längen

$$\check{l}_\delta = l(\hat{c}_\delta^-) = 1 + 2L(\delta, s_\delta)$$

und

$$\check{l}_0 = l(\hat{c}_0^-) = 1 + 2L(0, s_0)$$

der geodätischen Segmente  $\overline{\check{o}_0 \check{o}_4}$  in  $\check{X}_\delta^-$  einerseits und in  $\check{X}_0^-$  andererseits stets positiv.

### KONSTRUKTION DER SEGMENTE

Mit Hilfe der oben beschriebenen geodätischen Strahlen werden wir nun in jedem  $X_\varepsilon$  eine Folge geodätischer Segmente  $c_{\varepsilon, n}$  definieren, welche in  $X_\varepsilon^-$  beginnen und in  $X_\varepsilon^+$  enden und dabei eine wachsende Anzahl von Wänden vom Typ  $E_0^-, E_1^-, E_2^-$  und  $E_3^-$  zyklisch durchlaufen.

Setzen wir  $x_\varepsilon = (\check{c}_\varepsilon^-(0), 0) \in \check{X}_\varepsilon^- \times \mathbb{E} \subset X_\varepsilon$  für alle  $\varepsilon \geq 0$ , so können wir ohne Einschränkung  $\Phi_\varepsilon(x_0) = x_\varepsilon$  annehmen.

Zu jedem Zeitpunkt  $n\check{l}_\varepsilon$  endet das geodätische Segment  $\check{c}_\varepsilon^-|_{[0, n\check{l}_\varepsilon]}$  in einem Punkt  $\check{d}_{4n}^- \in \pi^{-1}(\check{p}_0^-)$ , also in einem Saum eines Streifens  $\check{S}_{x,n}^-$  vom Typ  $\check{C}_x^-$ . Das Segment kann dann durch ein Geradenstück der Länge 1 in dem Streifen  $\check{S}_{x,n}^-$ , parallel zu dessen Intervallfaktor, geodätisch fortgesetzt werden. Sein Endpunkt  $\check{q}_{\varepsilon,n}^-$  liegt dann in dem Saum  $\check{L}_{x,n}^-$  einer Wand  $\check{W}_{x,n}$  vom Typ  $\check{E}_x$ .

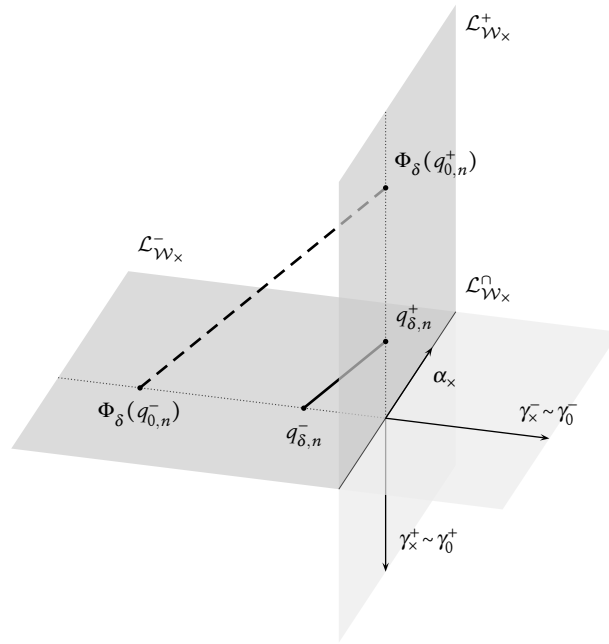


ABBILDUNG 6-E: Die Fortsetzung des Segmentes  $\check{c}_\delta^-|_{[0, n\check{l}_\delta]} \times \text{id}_\mathbb{E}$  und das Bild der Fortsetzung unter  $\Phi_\delta$  innerhalb der Wand  $\mathcal{W}_{x,n} \subset X_\delta$ .

Mit  $\overline{\check{c}_\varepsilon^-(0)\check{q}_{\varepsilon,n}^-} \times \text{id}_\mathbb{E}$  erhalten wir ein proportional zur Bogenlänge parametrisiertes geodätisches Segment in  $X_\varepsilon^-$ , welches zum Zeitpunkt  $n\check{l}_\varepsilon + 1$  den Saum  $\mathcal{L}_{x,n}^-$  einer Wand  $\mathcal{W}_{x,n}$  vom Typ  $E_x$  in einem Punkt  $q_{\varepsilon,n}^-$  trifft. Es kann, wie in Abbildung 6-E veranschaulicht, in der Wand  $\mathcal{W}_{x,n}$  geodätisch fortgesetzt werden. Das Segment verläuft dann in  $\mathcal{W}_{x,n}$  orthogonal zu den Achsen von  $\alpha_x$  und bildet mit den Achsen von  $\gamma_x^+$  und  $\gamma_x^-$  jeweils einen Winkel von  $\frac{\pi}{4}$ . Diese Winkel bleiben unter der Quasiisometrie  $\Phi_\varepsilon$  erhalten.

Die Punkte  $q_{\delta,n}^-$  und  $\Phi_\delta(q_{0,n}^-)$  liegen auf ein und derselben Achse von  $\gamma_x^-$  in  $\mathcal{L}_{x,n}^-$  und jeder Saum über  $E_x \cap C_x^+$  ist orthogonal zu den Achsen von  $\gamma_x^-$ . Wir können also einen Saum  $\mathcal{L}_{x,n}^+$  über  $E_x \cap C_x^+$  so wählen, daß  $q_{\delta,n}^-$  im Abstand kleiner  $\sqrt{2}$  zu  $\mathcal{L}_{x,n}^+$  auf der negativen Seite bezüglich der Translationsrichtung von  $\gamma_x^-$  liegt. Da  $\check{l}_\delta > \check{l}_0$  und die Einschränkung von  $\Phi_{\check{l}_\delta}$  auf die Wand  $\mathcal{W}_{x,n} \subset X_0$  isometrisch ist, liegt dann  $\Phi_\delta(q_{0,n}^-)$  im Abstand  $n(\check{l}_\delta - \check{l}_0)$  auf der negativen Seite von  $q_{\delta,n}^-$ .

Nun konstruieren wir mit denselben Argumenten wie oben eine Folge geodätischer Segmente in  $\check{X}_0^+$  und  $\check{X}_\delta^+$  und wählen dabei Startpunkte  $x_{0,n} \in \pi^{-1}(p_0^+) \subset X_0$  und  $x_{\delta,n} = \Phi_\delta(x_{0,n}) \in X_\delta$  derart, daß  $q_{\delta,n}^+$  und  $\Phi_\delta(q_{0,n}^+)$  genau in dem oben definierten Saum  $\mathcal{L}_{x,n}^+$  liegen und auf der Achse von  $\gamma_x^+$  in  $\mathcal{L}_{x,n}^+$  die gleichen Abstände zu  $\mathcal{L}_{x,n}^\cap = \mathcal{L}_{x,n}^- \cap \mathcal{L}_{x,n}^+$  aufweisen, wie  $q_{\delta,n}^-$  und  $\Phi_\delta(q_{0,n}^-)$  entlang der Achse von  $\gamma_x^-$ .

Da die Säume  $\mathcal{L}_{x,n}^-$  und  $\mathcal{L}_{x,n}^+$  in  $\mathcal{W}_{x,n}$  senkrecht zueinander stehen, vergleiche Abbildung 6-E, sind

$$c_{0,n} = \overline{x_0 q_{0,n}^-} \cup \overline{q_{0,n}^- q_{0,n}^+} \cup \overline{q_{0,n}^+ x_{0,n}}$$

und

$$\begin{aligned} c_{\delta,n} &= \overline{\Phi_\delta(x_0) q_{\delta,n}^-} \cup \overline{q_{\delta,n}^- q_{\delta,n}^+} \cup \overline{q_{\delta,n}^+ \Phi_\delta(x_{0,n})} \\ &= \overline{x_\delta q_{\delta,n}^-} \cup \overline{q_{\delta,n}^- q_{\delta,n}^+} \cup \overline{q_{\delta,n}^+ x_{\delta,n}} \end{aligned}$$

geodätische Segmente.

## 6.4 NICHTFORTSETZBARKEIT DER QUASIISOMETRIE

Abschließend werden wir zeigen, daß die Quasiisometrie  $\Phi_\delta$  jede sublineare Abschätzung wie in [CK02, Lemma 2.5] verletzt und keine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand von  $X_0$  besitzt.

Die Wege  $\Phi_\delta \circ c_{0,n}$  und  $c_{\delta,n}$  weisen innerhalb der Wände  $\mathcal{W}_{x,n}$  einen linear in  $n$  wachsenden Abstand auf:

Nach Wahl des Saumes  $\mathcal{L}_{x,n}^\cap$  gilt

$$\begin{aligned} l(c_{\delta,n}) &= 2\sqrt{2} l(\overline{\check{c}_\delta^-(0) \check{q}_{\delta,n}^-} \times \text{id}_{\mathbb{E}}) + d_{X_\delta}(q_{\delta,n}^-, q_{\delta,n}^+) \\ &\leq 2\sqrt{2}(n\check{l}_\delta + 1) + 2 \end{aligned}$$

und mit

$$\begin{aligned}
d_{X_0}(q_{0,n}^-, q_{0,n}^+) &= d_{X_\delta}(\Phi_\delta(q_{0,n}^-), \Phi_\delta(q_{0,n}^+)) \\
&= \sqrt{2} d_{X_\delta}(\Phi_\delta(q_{0,n}^-), \mathcal{L}_{x,n}^\cap) \\
&= \sqrt{2} (d_{X_\delta}(\Phi_\delta(q_{0,n}^-), q_{\delta,n}^-) + d_{X_\delta}(q_{\delta,n}^-, \mathcal{L}_{x,n}^\cap)) \\
&\leq \sqrt{2} n(\check{l}_\delta - \check{l}_0) + 2
\end{aligned}$$

folgt für die Länge von  $c_{0,n}$

$$\begin{aligned}
l(c_{0,n}) &= 2\sqrt{2} l(\overline{\check{c}_0^-(0)\check{q}_{0,n}^-} \times \text{id}_\mathbb{E}) + d_{X_0}(q_{0,n}^-, q_{0,n}^+) \\
&\leq 2\sqrt{2}(n\check{l}_0 + 1) + \sqrt{2}n(\check{l}_\delta - \check{l}_0) + 2 \\
&= n\sqrt{2}(\check{l}_\delta + \check{l}_0) + 2(1 + \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Bezeichnet  $m_{\varepsilon,n}$  den Mittelpunkt von  $c_{\varepsilon,n}$ , so ist  $m_{\varepsilon,n}$  Mittelpunkt von  $\overline{q_{\varepsilon,n}^- q_{\varepsilon,n}^+}$ . Dann ist  $\Phi_\delta(m_{0,n})$  der Mittelpunkt von  $\overline{\Phi_\delta(q_{0,n}^-)\Phi_\delta(q_{0,n}^+)}$  und  $\text{pr}_{c_{\delta,n}}(\Phi_\delta(m_{0,n})) = m_{\delta,n}$ . Aus

$$\begin{aligned}
d_{X_\delta}(\Phi_\delta(m_{0,n}), c_{\delta,n}) &= d_{X_\delta}(\overline{\Phi_\delta(q_{0,n}^-)\Phi_\delta(q_{0,n}^+)}, m_{\delta,n}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} d_{X_\delta}(\Phi_\delta(q_{0,n}^-), q_{\delta,n}^-) \\
&= \frac{n}{\sqrt{2}}(\check{l}_\delta - \check{l}_0)
\end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned}
\frac{d_{X_\delta}(\Phi_\delta(m_{0,n}), c_{\delta,n})}{1 + \frac{1}{2}l(c_{0,n})} &\geq \frac{\frac{n}{\sqrt{2}}(\check{l}_\delta - \check{l}_0)}{1 + \frac{n}{\sqrt{2}}(\check{l}_\delta + \check{l}_0) + 1 + \sqrt{2}} \\
&\geq \frac{\check{l}_\delta - \check{l}_0}{\check{l}_\delta + \check{l}_0 + 5}.
\end{aligned}$$

Damit existiert zu der Quasiisometrie  $\Phi_\delta$  keine Funktion  $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $\lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) = 0$ , so daß für alle  $x, y \in X_0$  und  $z \in \overline{xy}$  gilt:

$$d_{X_\delta}(\Phi_\delta(z), \overline{\Phi_\delta(x)\Phi_\delta(y)}) \leq (1 + d_{X_0}(z, x)) \theta(d_{X_0}(z, x))$$

Die verallgemeinerten geometrischen Daten tragen also nicht genügend Information, um eine Verallgemeinerung von [CK02, Theorem 1.3] zu beweisen. Viel entscheidender ist jedoch die Tatsache, daß, unabhängig von den verallgemeinerten geometrischen Daten, die geodätischen Segmente des Raumes  $X_\delta$  nicht wie in [CK02, Theorem 5.1] auf Schablonen modelliert werden können.

PROPOSITION 6.4.1 Die Quasiisometrie  $\Phi_\delta$  besitzt keine stetige Fortsetzung auf den virtuellen Rand von  $X_0$ .

BEWEIS: Die Folge  $x_{\varepsilon,n}$  konvergiert gegen ein  $x_\varepsilon \in \partial_\infty X_\varepsilon$ , denn für jedes  $k$  und alle  $n \geq k$  stimmen die nach der Bogenlänge parametrisierten geodätischen Segmente  $c_{\varepsilon,k}$  und  $c_{\varepsilon,n}$  bis zum Zeitpunkt  $\sqrt{2}kl_\varepsilon$  überein. Setzen wir  $x'_{\varepsilon,k} = \overline{x_{\varepsilon,0}r_\varepsilon}(\sqrt{2}kl_\varepsilon)$ , so gilt  $x'_{\varepsilon,k} = c_{\varepsilon,n}(\sqrt{2}kl_\varepsilon)$  für  $n \geq k$ .

Wir setzen  $y_{\delta,n} = \Phi_\delta(x'_{0,n})$  und zeigen zunächst, daß dann auch die Folge  $y_{\delta,n}$  gegen einen Punkt  $\eta_\delta \in \partial_\infty X_\delta$  konvergiert: Bezüglich der Zerlegung  $\text{Min}_{X_\delta}(\gamma_x^-) \cong \check{X}_\delta^- \times \mathbb{E}$  mit  $(\check{c}_\delta^-(0), 0)$  als Ursprung gilt

$$y_{\delta,n} = \Phi_\delta(x'_{0,n}) = (\check{o}_{4k}^-, kl_0) \in (\check{\mathcal{L}}_{4k}^- \cap \check{\mathcal{L}}_{4k}^+) \times \mathbb{E}.$$

Parametrisieren wir das geodätische Segment  $\overline{x_\delta y_{\delta,n}}$  proportional zur Bogenlänge auf dem Intervall  $[0, nl_\delta]$ , so gilt für alle  $k \leq n$ :

$$\overline{x_\delta y_{\delta,n}}(kl_\delta) = (\check{c}_\delta^-|_{[0, nl_\delta]} \times (\frac{l_0}{l_\delta} \text{id}_\mathbb{E}))(kl_\delta) = (\check{o}_{4k}^-, kl_\delta) = y_{\delta,k}$$

Damit konvergiert die Folge  $y_{\delta,n}$  gegen einen Punkt  $\eta_\delta \in \partial_\infty X_\delta$ . Da  $c_{\delta,n}^-$  und  $\Phi_\delta \circ c_{0,n}^-$  in  $\mathcal{S}_{x,n}^- \cup \mathcal{W}_{x,n} \cup \mathcal{S}_{x,n}^+$  parallel verlaufen, gilt

$$d_{X_\delta}(x'_{\delta,n}, y_{\delta,n}) = d_{X_\delta}(q_{\delta,n}^-, \Phi_\delta(q_{0,n}^-)) = n(l_\delta - l_0) \geq (l_\delta - l_0) > 0$$

und es folgt

$$\xi_\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\delta,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_{\delta,n} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\delta,n} = \eta_\delta.$$

Gäbe es also eine stetige Fortsetzung von  $\Phi_\delta$  in  $\xi_0$ , so erhielten wir mit

$$\Phi_\delta(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\delta(x_{0,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{\delta,n} = \xi_\delta$$

und

$$\Phi_\delta(\xi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_\delta(x'_{0,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{\delta,n} = \eta_\delta$$

einen Widerspruch. ■





## LITERATURVERZEICHNIS

- [Bal95] W. BALLMANN, *Lectures on spaces of nonpositive curvature*, DMV Seminar, vol. 25, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [BH99] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [Bro82] K. S. BROWN, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Buy98] S. V. BUYALO, *Geodesics in Hadamard spaces*, Algebra i Analiz 10 (1998), no. 2, 93–123.
- [CK00] C. B. CROKE & B. KLEINER, *Spaces with nonpositive curvature and their ideal boundaries*, Topology 39 (2000), no. 3, 549–556.
- [CK02] ———, *The geodesic flow of a nonpositively curved graph manifold*, Geom. Funct. Anal. 12 (2002), no. 3, 479–545.
- [DD89] W. DICKS & M. J. DUNWOODY, *Groups acting on graphs*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 17, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [DS05] C. DRUȚU & M. SAPIR, *Tree-graded spaces and asymptotic cones of groups*, Topology 44 (2005), no. 5, 959–1058, With an appendix by Denis Osin and Sapir.
- [GdlH90] É. Ghys & P. de la Harpe (eds.), *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, vol. 83, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1990, Papers from the Swiss Seminar on Hyperbolic Groups held in Bern, 1988.
- [Gro93] M. GROMOV, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, pp. 1–295.

- [Gro07] ———, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, english ed., Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2007, Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.
- [Hae91] A. HAEFLIGER, *Complexes of groups and orbihedra*, Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, pp. 504–540.
- [HK05] G. C. HRUSKA & B. KLEINER, *Hadamard spaces with isolated flats*, *Geom. Topol.* **9** (2005), 1501–1538 (electronic), With an appendix by the authors and Mohamad Hindawi.
- [Hru05] G. C. HRUSKA, *Geometric invariants of spaces with isolated flats*, *Topology* **44** (2005), no. 2, 441–458.
- [Joh79] K. JOHANNSON, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 761, Springer, Berlin, 1979.
- [JS79] W. H. JACO & P. B. SHALEN, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **21** (1979), no. 220, viii+192.
- [KR88] P. H. KROPHOLLER & M. A. ROLLER, *Splittings of Poincaré duality groups. II*, *J. London Math. Soc. (2)* **38** (1988), no. 3, 410–420.
- [Kro90] P. H. KROPHOLLER, *An analogue of the torus decomposition theorem for certain Poincaré duality groups*, *Proc. London Math. Soc. (3)* **60** (1990), no. 3, 503–529.
- [LS00] B. LEEB & P. SCOTT, *A geometric characteristic splitting in all dimensions*, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000), no. 2, 201–215.
- [May99] J. P. MAY, *A concise course in algebraic topology*, *Chicago Lectures in Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [Sch70] H. SCHUBERT, *Kategorien. I, II*, *Heidelberger Taschenbücher*, Bände 65, vol. 66, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

- [Sel97] Z. SELA, *Structure and rigidity in (Gromov) hyperbolic groups and discrete groups in rank 1 Lie groups. II*, *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997), no. 3, 561–593.
- [Ser80] J.-P. SERRE, *Trees*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [SS03] P. SCOTT & G. A. SWARUP, *Regular neighbourhoods and canonical decompositions for groups*, *Astérisque* (2003), no. 289, vi+233.
- [SS07] ———, *Annulus-Torus decompositions of Poincaré duality pairs*, arXiv:math/0703890v2 (2007).
- [Sve05] P. SVETLOV, *Obstructions for generalized graphmanifolds to be nonpositively curved*, arXiv:math/0412228v2 (2005).
- [Wal68] F. WALDHAUSEN, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, *Ann. of Math. (2)* 87 (1968), 56–88.
- [Wal03] C. T. C. WALL, *The geometry of abstract groups and their splittings*, *Rev. Mat. Complut.* 16 (2003), no. 1, 5–101.



## ERKLÄRUNG

Hiermit versichere ich an Eides statt, diese Arbeit eigenständig, insbesondere unter Inanspruchnahme keiner fremden Hilfe außer der Beratung durch Prof. Dr. Jens Heber, sowie den Regeln guter wissenschaftlicher Praxis folgend erstellt und sie weder ganz noch zu Teilen je anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegt, veröffentlicht oder zur Veröffentlichung eingereicht zu haben.