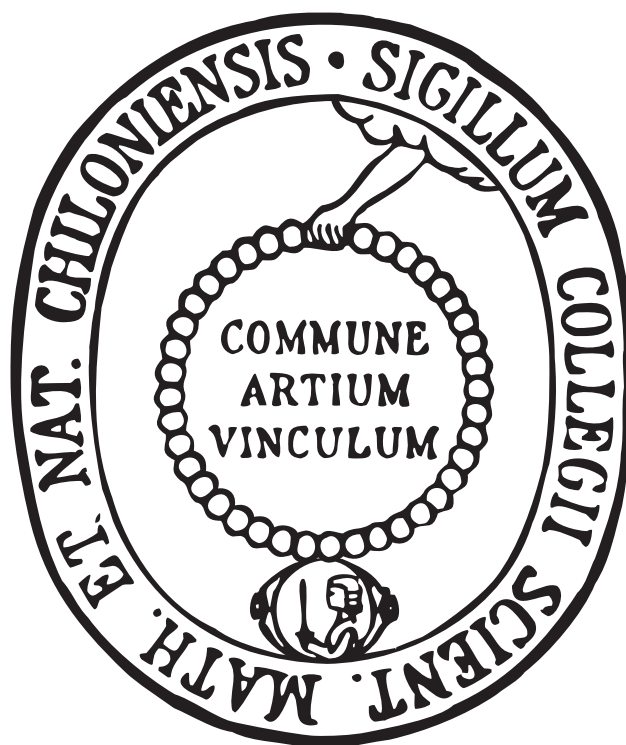


Lösungen Inhomogener Stochastischer Fixpunktgleichungen



Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel
vorgelegt von

Jan Spitzmann

Kiel 5.Mai 2010

Referent: Prof. Dr. Uwe Rösler

Korreferent: Prof. Dr. Gerold Alsmeyer

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 2010

Zum Druck genehmigt: Kiel, 8. Juli 2010

Der Dekan, Prof. Dr. Lutz Kipp

Zusammenfassung

Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung der Lösungen von inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichungen. Die Fixpunktgleichungen sind Verteilungsgleichungen, die unter anderem bei der Analyse von zufälligen Divide-and-Conquer-Algorithmen eine wichtige Rolle spielen. Unter einer Lösung von stochastischen Fixpunktgleichungen versteht man ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das ein Fixpunkt unter der zur Fixpunktgleichung assoziierten Abbildung ist.

Für mehrere Arten von stochastischen inhomogenen Fixpunktgleichungen, nämlich des Summen-, Infimum- und Supremumtyps wird eine Darstellungen von analytischen Transformaten (z.B. der Laplace-Transformaten oder der Überlebensfunktion) der Lösungen angegeben, die auf der positiven Halbachse konzentriert sind. Mithilfe dieser Darstellung können dann Lösungsmengen charakterisiert werden.

Für Lösungen inhomogener Fixpunktgleichungen des Summentyps, deren Träger die gesamten reellen Zahlen sind, wird eine Darstellung der Fourier-Transformaten angegeben und in einigen Spezialfällen werden die Lösungen charakterisiert.

Abstract

In this thesis we investigate the solutions of inhomogeneous stochastic fixed point equations. The fixed point equations are distributional equations which are of certain interest in the field of the analyse of random divide-and-conquer algorithms. A solution of a stochastic fixed point equation is a probability measure that is a fixed point of an associated transformation of measures.

For several kinds of inhomogeneous stochastic fixed point equations, i.e. equations of additive, supremum and infimum type, we found a representation of analytical transformations (i.e. laplace transformation or the survival function) of solutions which are supported on the positive half-line. In this present thesis the fourier-transformation of solutions of the inhomogeneous stochastic fixed point equations of additive type are explicitly given and for some special cases the solutions are also characterized.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1. Der gewichtete Verzweigungsprozess	15
1.1. Der Ulam-Harris-Baum	15
1.2. Der gewichtete Verzweigungsprozess	16
1.3. Assoziierte Random Walks	21
1.4. Reguläre Kantengewichtsfolgen	25
1.5. Stopplinien	26
1.5.1. Stopplinien via genealogischer Stoppzeiten	32
1.5.2. Erstaustritts-Stopplinien	34
1.5.3. Stopplinien startend ab einem Knoten	36
1.6. Gewichtete Verzweigungsprozess mit Knotengewichten	37
2. Erneuerungstheorie für den gewichteten Verzweigungsprozess	43
2.1. Grundlagen	43
2.2. Anwendung: Exzess-Maß beim gewichteten Verzweigungsprozess	47
3. Lösungsfunktionen	57
3.1. Grundlagen	57
3.2. Regularitätssatz	63
3.3. Darstellungssatz für Lösungsfunktionen	67
3.3.1. Grundlagen	67
3.3.2. Beweis des Darstellungssatzes	86
4. Anwendung: Stochastische Fixpunktgleichungen	91
4.1. Grundlagen	91
4.2. Stochastische Fixpunktgleichungen des Summentyps	93
4.3. Stochastische Fixpunktgleichungen des Supremumtyps bzw. Infimumtyps	98
5. Stochastische Fixpunkte auf \mathbb{R}	104
5.1. Grundlagen	104
5.2. Homogene und Inhomogene Lösungen von SFGen	106
5.3. Darstellungssätze für α -elementare Lösungen	107
5.4. Die ICFE-Theorie	109
5.5. Äquivalenzsatz	111
5.6. Repräsentationssatz	117
5.7. Regularitätssatz	122
5.8. Darstellungssatz	125
A. Anhang	134
A.1. Landau-Symbole	134
A.2. Integration komplexer Zufallsgrößen	134
A.3. Der komplexe Logarithmus	135
A.4. Zufällige Mengen	135
Literaturverzeichnis	137

Einleitung

Untersuchter Gegenstand der Arbeit

Die stochastischen Fixpunktgleichungen sind ein intensiv erforschtes Gebiet der letzten Jahrzehnte. Für einen Überblick den Themenkomplex „stochastische Fixpunktgleichungen“ sei auf den Übersichtsartikel von Aldous und Bandyopadhyay [1] hingewiesen. In dieser Arbeit wird ein breites Spektrum von Arten stochastischer Fixpunktgleichungen vorgestellt und viele Referenzen auf verschiedene einzelne Artikel dieses Gebietes gegeben.

Für die in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich behandelten stochastischen Fixpunktgleichung des Summentyps sei auf die Arbeiten von Rösler [39], [40], Rüschemdorf [42], Rachev und Rüschemdorf [36] verwiesen. Dabei steht in diesen Arbeiten u.a. die Anwendung der stochastischen Fixpunktgleichungen bei der Analyse von zufälligen Algorithmen im Vordergrund. In der Arbeit von Liu [32] findet man viele Referenzen auf Artikel, in denen stochastischen Fixpunktgleichung des Summentyps bei der Analyse von Verzweigungsprozessen, Infinite Particle Systems und Hausdorff-Dimensionen von zufälligen Mengen auftreten.

Unter einer stochastischen Fixpunktgleichung versteht man eine Verteilungsgleichung und unter eine Lösung dieser ein Wahrscheinlichkeitsmaß, das ein Fixpunkt unter der zur Verteilungsgleichung assoziierten Transformation von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist.

Wenn man einen Teilraum der Wahrscheinlichkeitsmaße mit einer geeigneten Metrik versieht, so kann man den Banachschen Fixpunktsatz anwenden, und erhält gegebenenfalls die Existenz und Eindeutigkeit des Fixpunktes. Dabei werden aber meist Nebenbedingungen an die betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaße gestellt, um tatsächlich die Existenz und Eindeutigkeit zu garantieren. Für diesen Zugang sei auf die Arbeit von von Rösler in [39] verwiesen. In diesem Artikel benutzt Rösler die Wasserstein-Metrik, die auf den Wahrscheinlichkeitsmaßen mit endlichem zweitem Moment definiert ist.

Wenn man nun eine größere Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen betrachtet, so kann es passieren, dass es mehrere Lösungen gibt. Daher ist man einer möglichen Beschreibung aller Lösungen interessiert, zum Teil auch da der Banachsche Fixpunktsatz die Existenz garantiert, aber keinerlei Aussagen über die konkrete Gestalt der Lösung liefert.

Bei der Charakterisierung der Lösungsmenge lag das Hauptaugenmerk vor allem auf der stochastischen Fixpunktgleichung des Summentyps

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i,$$

wobei Y, Y_1, Y_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen ist und $T_i, i \in \mathbb{N}$ Zufallsgrößen sind so, dass $((T_i)_{i \in \mathbb{N}}, N), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind. Diese Verteilungsgleichung wird in der vorliegenden Arbeit „homogene stochastische Fixpunktgleichung des Summentyps“ genannt. In der Literatur wird die zu dieser Verteilungsgleichung assoziierte Transformation auch als *Smoothing Transformation* bezeichnet.

In der Analyse von zufälligen Algorithmen, vgl. Neininger und Rüschemdorf [34], treten u.a. inhomogene stochastische Fixpunktgleichungen des Summentyps auf, d.h. man betrachtet stochastische Fixpunktgleichungen

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C,$$

wobei Y, Y_1, Y_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen derart ist, dass $((T_i)_{i \in \mathbb{N}}, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind.

Der Fall, dass die $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge deterministischer reeller Zahlen ist und C konstant ist, wurde ausführlich in der Arbeit [7] behandelt und es wurde eine komplette Beschreibung der Lösungsmenge erzielt.

In einer Reihe von Arbeiten wurde untersucht, inwiefern man die Lösungen charakterisieren bzw. ob man eine Beschreibung von analytischen Transformaten von Lösungen für nicht-deterministische $T_i, i \in \mathbb{N}$ erreichen kann.

Unterschieden wird hier, ob eine Beschreibung positive Lösungen oder nicht notwendigerweise positiver Lösungen stattfand. Dabei heißt eine Lösung positiv, falls sie auf der positiven Halbachse konzentriert ist.

Für eine Folge $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei $N := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_i > 0\}}$ die zufällige Anzahl der $T_i, i \in \mathbb{N}$ die ungleich Null sind.

In der Arbeit von Durrett und Liggett [20] werden Laplace-Transformierte positiver Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen des Summentyps unter der Voraussetzung charakterisiert, dass $T_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Ferner wird vorausgesetzt, dass die Anzahl N der echt positiven Gewichte $T_i, i \in \mathbb{N}$, eine konstante natürliche Zahl ist. Das heißt in der obigen betrachteten Form der Fixpunktgleichung kann man in diesem Fall oBdA annehmen, dass T_1, \dots, T_N nicht identisch gleich 0 sind und $T_k = 0$ für alle $k > N$ gilt. Es gelingt diesen beiden Autoren die Laplace-Transformierten aller Lösungen der betrachteten homogenen Fixpunktgleichung zu charakterisieren. Dabei setzen sie voraus, dass gilt

- $P(\forall i \leq N : T_i \in \{0, 1\}) < 1$,
- es gibt ein $\alpha \in]0; 1]$ mit $E\left(\sum_{i=1}^N T_i^\alpha\right) = 1$ und $E\left(\sum_{i=1}^N T_i^\alpha \log T_i^\alpha\right) \leq 0$.

Als nächstes sei die Arbeit [32] von Liu erwähnt.

In dieser Arbeit wird eine Verallgemeinerung der von Durrett und Liggett analysierten homogenen stochastischen Fixpunktgleichung betrachtet. Dazu lässt Liu zu, dass N eine Zufallsgröße mit $P(N \in \{0, 1\}) < 1$ ist.

Liu beschreibt die Laplace-Transformierten aller Lösungen unter den folgenden Annahmen

- $P(\forall i \leq N : T_i \in \{0, 1\}) < 1$,
- es gibt ein $\alpha \in [0; 1[$ mit $E\left(\sum_{i=1}^N T_i^\alpha\right) = 1$ und $E\left(\sum_{i=1}^N T_i^\alpha \log T_i^\alpha\right) \leq 0$,
- es gibt ein $\delta > 0$ mit $E(N^{1+\delta}) < \infty$ und $E\left(\left(\sum_{i=1}^N T_i\right)^{1+\delta}\right) < \infty$.

In der Arbeit [26] von Iksanov wird das Ergebnis von Liu derart verallgemeinert, dass $P(N = \infty) > 0$ zugelassen wird.

Iksanov gibt eine Charakterisierung für die Existenz sogenannter α -elementare Lösungen^I an. Ferner zeigt er, falls es α -elementare Lösung gibt, so sind dies bereits alle Lösungen und diese sind eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Konstanten.

Das beste Resultat zur Beschreibung der Laplace-Transformierten von Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen des Summentyps wurde von Alsmeyer, Biggins und Meiners in der Arbeit [4] vorgestellt. In der besagten Arbeit werden die Laplace-Transformierten aller Lösungen unter den folgenden Voraussetzungen charakterisiert

^IEine ähnliche Definition für α -elementare Lösungen findet man im dritten Kapitel, Abschnitt 3.1

- $T_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$,
- $P(\forall i \in \mathbb{N} : T_i \in \{0, 1\}) < 1$,
- $E(N) > 1$,
- es existiert ein $\alpha > 0$ mit

(i) $1 = E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\alpha\right) < E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\beta\right)$ f.a. $\beta \in [0; \alpha[$,

(ii) ferner gilt

$$\text{es gibt ein } \theta \in [0; \alpha[\text{ mit } E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\theta\right) < \infty,$$

oder

$$\text{es gilt } E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\alpha \log T_i\right) \in]-\infty; 0[\text{ und } E\left(\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\alpha\right) \log^+\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\alpha\right)\right) < \infty.$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, in der Arbeit von Alsmeyer, Biggins und Meiners ein neuer Zugang gewählt wurde, um die Menge der Lösungen von stochastischen Fixpunktgleichungen via analytischer Transformierter zu charakterisieren.

Die Idee dabei ist es, dass man Funktionen analysiert, die einer abstrakten Funktionalgleichung gehorchen und diese je nachdem entweder als Laplace-Transformierte oder als Überlebensfunktion interpretiert.

Man kann so zugleich stochastische Fixpunktgleichungen des Summentyps und des später vorgestellten Infimumtyps behandeln.

Außerdem sei angemerkt, dass die in der Arbeit von Alsmeyer, Biggins und Meiners benutzten Voraussetzungen schwächer sind, als die in der vorliegenden Arbeit benötigten Voraussetzungen um eine Charakterisierung der Laplace-Transformierten von Lösungen inhomogenen stochastischer Fixpunktgleichungen zu erhalten. In der vorliegenden Arbeit wird u.a. $T_i \in [0; 1]$ f.s. für alle $i \in \mathbb{N}$ und $N \geq 1$ f.s. vorausgesetzt, dies wird in der obigen Arbeit nicht benötigt. Es ist also wahrscheinlich, dass die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit dahingehend verbessert werden könnten.

Der allgemeinere Fall, wenn die Lösung auch negative Werte annehmen kann, wird in einer Reihe von Arbeiten behandelt.

In der Arbeit [16] von Rösler und Caliebe wird eine Beschreibung der Menge der Lösung mit endlicher Varianz erreicht. Falls $P(\sum_{i=1}^{\infty} T_i = 1) < 1$ gilt, so werden in der Arbeit [16] dazu die folgenden Bedingungen benötigt

- $P(N \leq 1) < 1$,

- es gilt einer der beiden Fälle

(i) $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^2\right) < \infty$ und $E\left|\sum_{i=1}^{\infty} T_i^2 \log T_i^2\right| < \infty$,

(ii) $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^2\right) < \infty$ und $(\sum_{i=1}^n T_i)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert in L_2 .

Falls $P(\sum_{i=1}^{\infty} T_i = 1) = 1$ gilt, so werden die folgenden Bedingungen benötigt

- $P(N \leq 1) < 1$,

- $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^2\right) < \infty$ und $E\left|\sum_{i=1}^{\infty} T_i^2 \log T_i^2\right| < \infty$.

In der Arbeit [17] von Caliebe und Rösler werden die Resultate aus [16] ergänzt. Dort wird die Menge der Lösungen mit endlichem Erwartungswert beschrieben unter den Voraussetzungen

- $T_i \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$,
- $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i\right) = 1$,
- $E\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i \log T_i\right) < 0$ und $E\left(\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i\right) \log^+\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i\right)\right) < \infty$.

Ferner zeigt Caliebe in ihrer Arbeit [14] unter sehr milden Voraussetzungen, dass jede Lösung eine Mischung unbegrenzt teilbarer Verteilungen ist, vgl. Theorem 1 in [14]. Sie kann dieses Ergebnis dann dazu benutzen symmetrische Lösungen zu charakterisieren.

In einer Serie von Arbeiten von Shimizu und Davis, an dessen Ende die Arbeit [19] steht, werden Darstellungen für Fourier-Transformierte angegeben, die gewissen Funktionalgleichungen gehorchen. Die zu diesen Fourier-Transformierten gehörigen Verteilungen lassen sich dann als Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen interpretieren.

Für einen Überblick dieser Resultate sei auf vierte Kapitel des Buches [37] von Ramachandran und Lau verwiesen. Speziell sei an dieser Stelle das Theorem 4.3.6 hervorgehoben, in dem die Menge der Lösungen unter den folgenden Voraussetzungen angegeben wird,

- N ist eine endliche Konstante,
- es gibt ein $\alpha \in]0; 2]$ mit $\sum_{i=1}^N T_i^\alpha \stackrel{f.s.}{=} 1$,
- $P(\exists j, k \leq N : \log |T_j| / \log |T_k| \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) > 0$,
- es gilt
 - (i) $\sum_{i=1}^N E(|T_i|^\alpha \log |T_i|) < \infty$, falls $0 < \alpha < 1$,
 - (ii) $\sum_{i=1}^N E\left((|T_i| \log |T_i|)^{1+\delta}\right) < \infty$ für ein $\delta > 0$, falls $\alpha = 1$,
 - (iii) $\sum_{i=1}^N E(|T_i|) < \infty$ und $\sum_{i=1}^N E(T_i) \neq 1$, falls $1 < \alpha \leq 2$.

In der Arbeit [23] von Fill und Janson wird eine ganz spezielle inhomogene Fixpunktgleichung des Summentyps betrachtet, nämlich eine Fixpunktgleichung, die sich bei der Analyse des Quicksort-Algorithmus ergibt

$$Y \stackrel{d}{=} UY_1 + (1 - U)Y_2 + f(U),$$

wobei Y, Y_1, Y_2 stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen sind, U eine Zufallsgröße ist mit einer Rechteckverteilung auf $[0; 1]$ so, dass U, Y_1, Y_2 stochastisch unabhängig sind. Außerdem ist $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x \log x + 2(1 - x) \log(1 - x) + 1$.

In der Arbeit [23] wird gezeigt, dass die Lösungen dieser Fixpunktgleichung genau die Faltungen einer Cauchy-Verteilung mit einer speziellen Lösungen mit endlichem Erwartungswert sind.

Neben den bisher vorgestellten stochastischen Fixpunktgleichungen des Summentyps werden in der vorliegenden Arbeit außerdem stochastischen Fixpunktgleichung des Infimumtyps behandelt. Als eine homogenen stochastischen Fixpunktgleichungen des Infimumtyps wird in der vorliegenden Arbeit die folgende Verteilungsgleichung bezeichnet

$$Y \stackrel{d}{=} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i},$$

wobei Y, Y_1, Y_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen und $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine davon unabhängige Folge von Zufallsgrößen ist.

Ferner wird die folgende Verteilungsgleichung als inhomogene stochastische Fixpunktgleichung des Infimumtyps bezeichnet

$$Y \stackrel{d}{=} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \wedge \frac{1}{C},$$

wobei Y, Y_1, Y_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen ist so, dass $((T_i)_{i \in \mathbb{N}}, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind.

Es gelang in dem Artikel [8] von Alsmeyer und Rösler im Fall von deterministischen $T_i, i \in \mathbb{N}$ eine komplette Beschreibung der Lösungsmenge der homogenen stochastischen Fixpunktgleichungen des Infimumtyps.

In der Arbeit [6] von Alsmeyer und Meiners werden ebenfalls homogene stochastische Fixpunktgleichungen des Infimumtyps behandelt, wobei der Fall mit nicht-deterministischen $T_i, i \in \mathbb{N}$ studiert wird.

In dem besagten Artikel werden vor allem positive Lösungen betrachtet, diese Einschränkung wird dabei durch die in dem Artikel [6] gewonnenen Erkenntnisse gerechtfertigt, dass unter der Gültigkeit von $0 < P(N > 1) \leq P(N \geq 1) = 1$ die Lösungen entweder auf der positiven oder negativen Halbachse konzentriert sind.

Ferner wird von Alsmeyer und Meiners gezeigt, dass unter den Voraussetzungen $\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i \geq 1$ f.s. und $P(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i > 1) > 0$ keine positive Lösung existiert.

Ebenfalls wird von Alsmeyer und Meiners unter der Voraussetzung $0 < P(N > 1) \leq P(N \geq 1) = 1$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen gezeigt

- (i) $\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i \stackrel{f.s.}{=} 1$,
- (ii) es gibt ein $\gamma \in]0; 1]$ so, dass die Menge der positiven Lösungen genau die Verteilungen von Zufallsgrößen Y sind, für die gilt $\gamma c \leq Y \leq c$ für ein $c > 0$,
- (iii) das Dirac-Maß δ_c ist eine Lösung für ein $c > 0$,
- (iv) das Dirac-Maß δ_c ist eine Lösung für alle $c > 0$.

In der Arbeit [6] wird außerdem eine Klassifikation der positiven Lösungen vorgenommen, dabei werden α -elementare, α -reguläre und α -beschränkte Lösungen definiert.

In dem Theorem 4.3 in [6] wird eine Charakterisierung unter den schwachen Voraussetzungen $0 < P(N > 1) \leq P(N \geq 1) = 1$ und $P(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i < 1) > 0$ für die Existenz von α -regulären bzw. α -elementaren Lösung angegeben.

Dies ist insofern von Interesse, da sich diese spezielle Klasse von Lösungen sehr schön beschreiben lassen, wie dies in dem Theorem 4.5 in der selben Arbeit bewiesen wird. Konkret wird in dem besagtem Theorem 4.5 unter der Voraussetzung $0 < P(N > 1) \leq P(N \geq 1) = 1$ und der Existenz eines $\alpha > 0$ mit $E\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^\alpha\right) = 1$ und $E(W^{(\alpha)}) = 1^{\text{II}}$ gezeigt, dass die Menge der α -beschränkten, α -regulären und α -elementaren Lösungen zusammen fallen und gleich der Menge bestimmter Mischungen von Weibull-Verteilungen ist.

Wie bereits angesprochen wird in der Arbeit [4] von Alsmeyer, Biggins und Meiners eine Beschreibung der Überlebensfunktion von positiven Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Infimumtyps unter denselben Voraussetzungen wie für die Beschreibung der Laplace-Transformierten von positiven Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Summentyps erreicht. Diese verallgemeinert das Theorem 4.5 aus der Arbeit [6] von Alsmeyer und Meiners.

Diese Voraussetzungen sind auch schwächer, als die in der vorliegenden Arbeit benötigten Bedingungen um Aussagen über die Lösungen der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichungen des Infimumtyps zu erhalten.

^{II}Für eine Definition von $W^{(\alpha)}$ siehe den Abschnitt 1.2 im zweiten Kapitel

In der Arbeit [27] von Iksanov werden ebenfalls positive Lösungen von stochastischen Fixpunktgleichungen des Infimumtyps behandelt. Seine Ergebnisse in den zitierten Artikel basieren auf der Beobachtung, dass sich die Überlebensfunktion von Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen ähnlich analysieren lassen, wie Laplace-Transformierte von Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen des Summentyps. Iksanov erhält somit vergleichbare Resultate wie in seinem Artikel [26].

Wie bereits angemerkt, wird diese Beobachtung in dem Artikel von Alsmeyer, Biggins und Meiners verallgemeinert und ausgebaut.

Eine weitere Art der stochastischen Fixpunktgleichung, die in der vorliegenden Arbeit behandelt wird, ist die stochastische Fixpunktgleichung des Supremumtyps. Die folgende Verteilungsgleichung wird in der vorliegenden Arbeit als homogene stochastische Fixpunktgleichung des Supremumtyps bezeichnet

$$Y \stackrel{d}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i Y_i,$$

wobei Y, Y_1, Y_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen und $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine davon unabhängige Folge von Zufallsgrößen ist.

Außerdem sei die folgende Verteilungsgleichung als inhomogene stochastische Fixpunktgleichung des Supremumtyps benannt

$$Y \stackrel{d}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i Y_i \vee C,$$

wobei Y, Y_1, Y_2, \dots eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen ist so, dass $((T_i)_{i \in \mathbb{N}}, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind.

In dem Artikel [28] von Jagers und Rösler werden homogene stochastische Fixpunktgleichungen des Supremumtyps behandelt und es werden generelle Aussagen über die möglichen Lösungen gesammelt. Für eine Anwendung im Kontext der Analyse von zufälligen Algorithmen sei auf den Artikel [42] von Rüschendorf verwiesen. Ferner werden, neben vielen anderen Arten von stochastischen Fixpunktgleichungen, stochastische Fixpunktgleichungen des Supremumtyps in dem Artikel [1] von Aldous und Bandyopadhyay untersucht.

Wie man leicht einsieht kann man die stochastische Fixpunktgleichung des Infimumtyps durch Übergang zum Kehrwert in eine stochastische Fixpunktgleichung des Supremumtyps transformieren.

Es reicht daher eine Beschreibung der Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Infimumtyps anzugeben.

Diese Einsicht wird auch in dem Artikel [8] von Alsmeyer und Rösler angewandt und die beiden Autoren erhalten eine komplette Beschreibung der Lösungsmenge der homogenen stochastischen Fixpunktgleichungen des Supremumtyps unter der Voraussetzung, dass die Folge $T_i, i \in \mathbb{N}$ reelle Konstanten sind.

Ferner können daher Resultate über Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen des Infimumtyps aus dem Artikel von Alsmeyer, Biggins und Meiners auf Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen des Supremumtyps übertragen werden. Man erhält eine Beschreibung der Lösungen homogener stochastischer Fixpunktgleichungen des Supremumtyps unter den selben Voraussetzungen wie oben angegeben.

In seinem Artikel [12] untersucht Biggins inhomogene stochastische Fixpunktgleichungen des Supremumtyps. Unter recht technischen Voraussetzungen erhält er eine Beschreibung der Verteilungsfunktion von Lösungen der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung des Supremumtyps, der Leser sei auf das Theorem 13 in [12] verwiesen.

In der vorliegenden Arbeit werden vor allem inhomogene stochastische Fixpunktgleichungen des Summen-, des Infimum-, und Supremumtyps behandelt. Schwerpunkt wird dabei auf eine mögliche

Beschreibung der Lösungsmenge gelegt, oder zumindestens eine möglichst konkrete Angabe der Laplace- oder Fourier-Transformierten, bzw. Überlebensfunktion oder Verteilungsfunktion.

Auf eine genaue Beschreibung der dazu notwendigen Voraussetzungen sei auf die entsprechenden Sätze hingewiesen.

Als ein Ergebnis der vorliegenden Arbeit erhält man, dass sich die inhomogenen Lösungen aus einer speziellen inhomogenen Lösung und einer homogenen Lösung zusammensetzen. Dies ist insofern nicht überraschend, da Rüschemeyer in [42] zeigt, dass es eine Eins-zu-Eins Beziehung zwischen den Lösungen der homogenen und inhomogenen Lösungen gibt.

Durch eine Angabe der Lösungen wird dies Resultat aber präzisiert.

Inhalt und Aufbau der Arbeit

Das erste Kapitel stellt grundlegende Resultate über den gewichteten Verzweigungsprozess und zugehörigen Themengebiete zusammen. Es dient dazu in der vorliegenden Arbeit eine einheitliche Notation für die in der Literatur zum Teil stark unterschiedlichen Schreibweisen bereitzustellen und um eine in sich geschlossene Arbeit präsentieren zu können. Breitem Raum wird dabei einem wichtigen Hilfsmittel für die spätere Analyse eingeräumt, den Stoppllinien. Der Sinn dahinter ist, bekannte Resultate über Stoppllinien von Biggins und Kyprianou an die Notation der vorliegenden Arbeit anzupassen und präzise Formulierungen und formale Definitionen anzugeben. Da in der vorliegenden Arbeit inhomogene stochastische Fixpunktgleichungen untersucht werden, muss auf eine Erweiterung des gewichteten Verzweigungsprozesses eingegangen werden, nämlich den gewichteten Verzweigungsprozess mit Knotengewichten. Es wird dabei eine spezielle Zufallsgröße R_∞ konstruiert, die u.A. eine Lösung der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung ist.

Im zweiten Kapitel werden bekannte Sätze von Nerman und Gatzouras vorgestellt und benutzt um Konvergenzaussagen für sogenannte Exzess-Maße zu erhalten. Dabei stellen die Resultate von Nerman und Gatzouras eine Art Erneuerungstheorie für den gewichteten Verzweigungsprozess dar. Dabei tritt das in der Erneuerungstheorie bekannte Phänomen auf, dass man zwischen nicht-arithmetischen und arithmetischen Verteilungen unterscheiden muss. Diese Unterscheidung zieht sich dann durch die gesamte Arbeit hindurch fort.

Im dritten Kapitel wird eine abstrakte Klasse von reellen Funktionen betrachtet, die sogenannten Lösungsfunktionen. Dabei sind die betrachtete Lösungsfunktionen nur Mittel zum Zweck um eine einheitliche Untersuchung von Lösungen von Fixpunktgleichungen auf \mathbb{R}^+ , welche im vierten Kapitel stattfindet, zu ermöglichen. Die Lösungsfunktionen werden durch eine Funktionalgleichung definiert und es stellt sich daher die Frage, ob man eine explizite Darstellung für diese Funktionen finden kann. Dies wird, unter gewissen Voraussetzungen, in der vorliegenden Arbeit mit dem Darstellungssatz für Lösungsfunktionen erreicht. Dieser Satz wird mittels einer speziellen Konstruktion von Stoppllinien bewiesen, deren Definition und Analyse einen Großteil des Kapitels ausmacht.

Die gewonnenen Erkenntnisse über Lösungsfunktionen werden im vierten Kapitel angewandt, um eine Charakterisierung von Lösungsmengen von stochastischen Fixpunktgleichungen auf \mathbb{R}^+ zu erhalten. Dabei werden stochastische Fixpunktgleichungen des Summentyps, des Infimumtyps und des Supremumtyps untersucht. Es stellt sich heraus, dass alle Lösungen der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung sich aus der Kenntnis einer speziellen Lösung und der Menge homogenen stochastischen Fixpunkte bestimmen lassen. Dies zeigt eine Parallele zwischen Lösungen von inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichungen und z.B. der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass in dieser Arbeit nicht die Lösungsmenge der homogenen stochastischen Fixpunktgleichung bestimmt wird um dann auf die inhomogenen Lösungen zu schließen. Stattdessen wird die Lösungsmenge der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung direkt bestimmt.

Das fünfte Kapitel enthält eine Analyse der stochastischen Fixpunktgleichung des Summentyps auf \mathbb{R} . Im Gegensatz zu den stochastischen Fixpunktgleichungen auf \mathbb{R}^+ muss man die Fourier-Transformierte anstelle der Laplace-Transformierten benutzen, um die Lösungen zu untersuchen. Hauptresultat dieses Kapitels ist eine Darstellung der Fourier-Transformierten der Lösungen. Der

Beweis für diesen Darstellungssatz gliedert sich in vier Schritte. Zunächst stellt man fest, dass es nicht schwer ist, eine explizite Form für sogenannte α -elementare Lösungen anzugeben. Danach werden als Erstes nur die homogenen Lösungen betrachtet. Für diese wird gezeigt, dass α -reguläre Lösungen auch α -elementar sind. Dabei wird die Theorie über integrierte Cauchy-Funktionalgleichungen (engl. **I**ntegrated **C**auchy **F**unctional **E**quations) angewandt. Abschließend wird eine von Caliebe entwickelte Methode, die die Theorie der infinitesimalen unabhängigen Dreiecks-Schemata benutzt, via Stoppllinien erweitert und benutzt, um zu zeigen, dass im Prinzip alle homogene Lösungen ein gewisses Tail-Verhalten besitzen. Dieses Verhalten ermöglicht es, mit einem Satz von Kawata auf die α -Regularität der homogenen Lösungen zu schließen. Mittels eines Coupling-Argumentes wird dann gezeigt, wie man die bereits bekannten Resultate über homogenen Lösungen auf die inhomogenen Lösungen übertragen kann. Anhand der Darstellung der Fourier-Transformierten kann man nun in Spezialfällen die Lösungsmenge charakterisieren.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Uwe Rösler herzlich für die engagierte Betreuung dieser Dissertation, er stand mir mit vielen Anregungen und Diskussionen immer hilfreich zur Seite.

Bei meiner Familie bedanke ich mich für die unbezahlbare Unterstützung während meiner Promotionszeit.

Ferner danke ich Herrn Julian Peter Lemburg für die Zeit im gemeinsamen Büro und das geduldige Korrekturlesen dieser Arbeit.

Diese Arbeit widme ich dem Andenken an Frau Erika Karstis. Ihr bin ich für die Unterstützung meines Mathematikstudiums zu Dank verpflichtet.

Notationen und Konventionen

In diesem Abschnitt wollen wir einen Überblick über die in dieser Arbeit benutzten Notationen und Konventionen geben.

Die Abkürzung oBdA steht für „ohne Beschränkung der Allgemeinheit“, f.s. steht für „fast sicher“.

Wir übernehmen die Standardnotation $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} für die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen Zahlen und komplexen Zahlen. Wir setzen $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $\overline{\mathbb{Z}} := \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

Für alle $a \leq b \in \overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Intervalle $]a; b[:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x < b\}$, $[a; b[:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x < b\}$, $]a; b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a < x \leq b\}$ und $[a; b] := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid a \leq x \leq b\}$.

Wir übernehmen die Rechenregeln für $\overline{\mathbb{R}}$ und die Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$, wie sie im Paragraph 4, Kapitel III in [21] beschrieben werden.

Wir bezeichnen für jede Teilmenge $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ mit \mathfrak{B}_M die Spur- σ -Algebra auf M von der Borelschen σ -Algebra $\mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ von $\overline{\mathbb{R}}$, vgl. Paragraph 4, Kapitel III in [21].

Weiterhin sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$.

Ist $(E_i, \mathfrak{E}_i)_{i \in I}$ eine Familie messbarer Räume, so schreiben wir $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{E}_i$ für die Produkt- σ -Algebra. Gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ $(E_i, \mathfrak{E}_i) = (E, \mathfrak{E})$ für ein messbaren Raum (E, \mathfrak{E}) , so schreiben wir $\mathfrak{E}^{\otimes I}$ für die Produkt- σ -Algebra $\bigotimes_{i \in I} \mathfrak{E}_i$.

Ist (E, \mathfrak{E}) ein messbarer Raum und I eine Indexmenge, so verstehen wir, außer wenn es ausdrücklich anders gesagt wird, den Raum E^I mit der Produkt- σ -Algebra $\mathfrak{E}^{\otimes I}$.

Sind (E_1, \mathfrak{E}_1) und (E_2, \mathfrak{E}_2) zwei messbare Räume und $X : E_1 \rightarrow E_2$ eine Abbildung, so sagen wir X ist messbar, wenn X \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 -messbar ist.

Wir legen dieser Arbeit einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ zugrunde, der so reichhaltig sein soll, dass alle in dieser Arbeit vorkommenden Zufallsgrößen auf ihm definiert sind.

Unter Zufallsgrößen verstehen wir Abbildungen X mit Definitionsbereich Ω und Werten in einem messbaren Raum (E, \mathfrak{E}) so, dass X \mathfrak{A} - \mathfrak{E} -messbar ist.

Für eine Unter- σ -Algebra $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ sagen wir X ist \mathfrak{B} -messbar, falls X \mathfrak{B} - \mathfrak{E} -messbar ist.

Wie üblich schreiben wir $E(X)$ für den Erwartungswert der Zufallsgröße X .

Für eine Zufallsgröße X bezeichnen wir mit P^X die Verteilung von X und wir setzen $\mathfrak{L}(X) := P^X$.

Ist Y eine Zufallsgröße, so schreiben $X \stackrel{d}{=} Y$ für $\mathfrak{L}(X) = \mathfrak{L}(Y)$.

$F_X : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [0; 1]; t \mapsto P(X \leq t)$ sei die Verteilungsfunktion, $\overline{F}_X : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [0; 1]; t \mapsto P(X \geq t)$ sei die Überlebensfunktion, $\varphi_X : [0; \infty[\rightarrow [0; 1]; t \mapsto E(e^{-tX})$ sei die Laplace-Transformierte und $\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow E(e^{itX})$ sei die Fourier-Transformierte von X .

Mit \xrightarrow{w} , \xrightarrow{P} , $\xrightarrow{f.s.}$ und $\xrightarrow{L_1}$ bezeichnen wir die schwache, die stochastische, die fast sichere und die L_1 -Konvergenz.

Kapitel 1.

Der gewichtete Verzweigungsprozess

1.1. Der Ulam-Harris-Baum

Sei $\mathbb{V} := \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{N}^n$ der unendliche Ulam-Harris-Baum, wobei $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$.

Die Elemente aus \mathbb{V} bezeichnen wir als Knoten und \emptyset wird als Wurzel bezeichnet. Wir definieren den Rand von \mathbb{V} als $\partial\mathbb{V} := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Dann setze wir $\mathbb{V}_n := \mathbb{N}^n$ und bezeichnen diese Menge als die Menge der Knoten der n -ten Generation.

Weiterhin sei die Generation $|v|$ eines Knotens $v \in \mathbb{V}$ definiert als das $n \in \mathbb{N}_0$ mit $v \in \mathbb{V}_n$. Für alle $x \in \partial\mathbb{V}$, setze $|x| := \infty$.

Ist $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{V}_n$, so schreiben wir auch kürzer $v_1 \dots v_n$, d.h. wir unterdrücken bei den Knoten die übliche Tupelnotation.

Seien $u, v \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}$. Setze $uv := u_1 \dots u_{|u|} v_1 \dots v_{|v|}$, sowie $\emptyset v := v$ und $v \emptyset := v$.

Ist $v \in \mathbb{V}$ so bezeichnen wir mit $\mathbb{V}(v) = \{vw \mid w \in \mathbb{V}\}$ den Baum startend ab v .

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{V}_{\leq n} := \{v \in \mathbb{V} \mid |v| \leq n\}$ die Menge der Knoten bis einschließlich der n -ten Generation und $\mathbb{V}_{< n} := \{v \in \mathbb{V} \mid |v| < n\}$ die Menge der Knoten bis zur n -ten Generation.

Manchmal ist es notwendig, die Anzahl der „Äste“ zu beschränken.

Sei $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Einschränkungen des Ulam-Harris-Baumes mit nur m Verzweigungen als $\mathbb{V}|m := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{1, \dots, m\}^n$, analog definieren wir $\mathbb{V}_n|m, \mathbb{V}_{< n}|m$, etc.

Ist $v \in \mathbb{V} \cup \partial\mathbb{V}$ so definieren wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Einschränkung von v als

$$v|k := \begin{cases} \emptyset, & k \leq 0 \\ v_1 \dots v_k, & k < |v| \\ v, & k \geq |v| \end{cases}$$

Wir bezeichnen die Abbildung

$$\mathcal{V} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}; v \mapsto v(|v| - 1)$$

als die Vorgänger-Abbildung. Sie bildet einen Knoten auf seinen direkten Vorfahren ab.

Wir definieren nun einige nützliche Relationen auf \mathbb{V} .

Definition 1.1.1. Relationen auf \mathbb{V} .

Die Relation \leq auf \mathbb{V} sei für alle $v, w \in \mathbb{V}$ gegeben durch

$$v \leq w \Leftrightarrow \exists u \in \mathbb{V} : vu = w,$$

wir sagen dann auch, dass v ein Vorfahre von w ist, bzw. w ein Nachfahre von v ist.

Weiterhin sei $<$ auf \mathbb{V} gegeben für alle $v, w \in \mathbb{V}$ durch

$$v < w \Leftrightarrow v \leq w \wedge v \neq w.$$

Wir erweitern diese Definitionen auf Teilmengen von \mathbb{V} . Für alle $L \subseteq \mathbb{V}$ und $v \in \mathbb{V}$ definieren wir

$$\begin{aligned} v \leq L &\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{V} : vw \in L, \\ v < L &\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\} : vw \in L \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} L \leq v &\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{V} : w \in L \text{ und } w \leq v, \\ L < v &\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{V} : w \in L \text{ und } w < v. \end{aligned}$$

Für alle $L, M \subseteq \mathbb{V}$ sei

$$L \leq M \Leftrightarrow \forall u \in L \exists v \in M : u \leq v.$$

Die Relation \perp auf \mathbb{V} sei für alle $v, w \in \mathbb{V}$ definiert durch

$$v \perp w \Leftrightarrow v \not\leq w \text{ und } w \not\leq v.$$

Anschaulich bedeutet $v \perp w$, dass von den beiden Knoten v, w keiner Vorfahre des jeweils anderen ist.

Lemma 1.1.2. Sei $L \subseteq \mathbb{V}$ und $v \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}$. Dann gilt $L < v$ genau dann, wenn $L \leq \mathcal{V}(v)$ gilt.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus folgender Äquivalenzumformung

$$\begin{aligned} L < v &\iff \exists w \in \mathbb{V} : w \in L \text{ und } w < v \\ &\iff \exists w \in \mathbb{V} : w \in L \text{ und } w \leq \mathcal{V}(v) \\ &\iff L \leq \mathcal{V}(v). \end{aligned}$$

□

1.2. Der gewichtete Verzweigungsprozess

Definition 1.2.1. Kantengewichtsfolge.

Eine Folge $T := (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Zufallsgrößen mit $0 \leq T_i \leq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$ nennen wir Kantengewichtsfolge.

Definition 1.2.2. Knotenpfadgewichte.

Sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Kantengewichtsfolge.

Seien $(T(v))_{v \in \mathbb{V}}$ unabhängig identisch verteilte Zufallsgrößen mit $T(v) \stackrel{d}{=} T$ für alle $v \in \mathbb{V}$.

Für alle $v \in \mathbb{V}$ nennen wir $T(v)$ die Kantengewichtsfolge von v .

Wir definieren eine Familie $L := (L_v)_{v \in \mathbb{V}}$ von Zufallsgrößen rekursiv durch

$$L_\emptyset := 1, L_{vk} := L_v \cdot T_k(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{V}, k \in \mathbb{N}.$$

Für alle $v \in \mathbb{V}$ bezeichnen wir L_v als das Knotenpfadgewicht von v .

Analog definieren wir für alle $v \in \mathbb{V}$ die Familie der Knotenpfadgewichte $L(v) := (L_w(v))_{w \in \mathbb{V}}$ ab dem Knoten v rekursiv durch

$$L_\emptyset(v) := 1, L_{wk}(v) := L_w(v) \cdot T_k(vw) \text{ für alle } w \in \mathbb{V}, k \in \mathbb{N}.$$

Für alle $x \in \partial\mathbb{V}$ und alle $v \in \mathbb{V}$ definieren wir das Knotenpfadgewicht von x bzw. das Knotenpfadgewicht von x ab v durch

$$L_x := \limsup_{n \rightarrow \infty} L_{x|n} \text{ bzw. } L_x(v) := \limsup_{n \rightarrow \infty} L_{x|n}(v).$$

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ das maximale Knotenpfadgewicht in der n -ten Generation als

$$L_n^* := \sup_{v \in \mathbb{V}_n} L_v.$$

Manchmal reicht es nicht aus, nur Kantengewichtsfolgen für einzelne Knoten zu betrachten, vielmehr müssen wir gewisse Familien von Kantengewichtsfolgen betrachten. Wir definieren daher für alle $v, w \in \mathbb{V}$

$$T_{v,w} := (T(vu))_{u \leq w} \text{ und } T_{v,\infty} := (T(vu))_{u \in \mathbb{V}}.$$

Konvention 1.2.3. Kanonische Wahl.

In dieser Arbeit vereinbaren wir folgende Konvention. Ist eine Kantengewichtsfolge T gegeben, so unterstellen wir implizit, dass die Familie $(T(v))_{v \in \mathbb{V}}$ wie in obiger Definition gewählt wurde und alle davon abgeleiteten Zufallsgrößen definiert seien.

Im restlichen Teil dieses Abschnittes sei T stets eine Kantengewichtsfolge.

Definition 1.2.4. σ -Algebra der n -ten Generation, bis zur n -ten Generation.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathfrak{A}_n := \sigma(T(v), |v| < n) = \sigma(L_v, |v| \leq n)$$

die σ -Algebra bis zur n -ten Generation.

Für alle $u \in \mathbb{V}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathfrak{A}_n(u) := \sigma(T(uv), |v| < n) = \sigma(L_v(u), |v| \leq n),$$

die σ -Algebra bis zur n -ten Generation startend ab u .

Definition 1.2.5. σ -Algebra ab v , σ -Algebra von v , pfadweise Filtration.

Sei $v \in \mathbb{V}$. Dann definieren wir

$$\mathfrak{A}(v) := \sigma(T(u); u \in \mathbb{V} \text{ mit } u \geq v),$$

die σ -Algebra startend ab v .

Außerdem definieren wir

$$\mathfrak{A}_v := \sigma(T_{v_k}(v|(k-1)); k \leq |v|) = \sigma(L_{v|k}; k \leq |v|),$$

die σ -Algebra des Knotens v .

Weiterhin definieren wir für alle $u \in \mathbb{V}$

$$\mathfrak{A}_v(u) := \sigma(T_{v_k}(u(v|(k-1))); k \leq |v|)$$

und bezeichnen $\mathfrak{A}_v(u)$ als die σ -Algebra des Knotens v ab dem Knoten u .

Die Familie $(\mathfrak{A}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ bezeichnen wir als pfadweise Filtration.

Bemerkung 1.2.6. Es gilt $\mathfrak{A}(\emptyset) = \sigma(T(v); v \in \mathbb{V}) = \sigma\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{A}_n\right)$.

Definition 1.2.7. Genealogische Filtrationen.

Wir nennen eine Familie $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ von Unter- σ -Algebren eine genealogische Filtration, falls gilt

- (i) $\mathfrak{A}_v \subseteq \mathfrak{G}_v \subseteq \mathfrak{A}_{|v|}$ für alle $v \in \mathbb{V}$,
- (ii) für alle $v, w \in \mathbb{V}$ mit $v \leq w$ gilt $\mathfrak{G}_v \subseteq \mathfrak{G}_w$.

Definition 1.2.8. Anzahl der positiven Gewichte.

Wir setzen

$$N_T := \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_i > 0\}}.$$

Die Zufallsgröße N_T gibt die Anzahl der positiven Kantengewichte der Kantengewichtsfolge T an. Künftig schreiben wir auch N statt N_T , falls eindeutig geklärt ist, welche Kantengewichtsfolge wir meinen.

Definition 1.2.9. Endliche Kantengewichtsfolge.

Gibt es eine deterministische Konstante $K \in \mathbb{N}$ mit $T_k \equiv 0$ für alle $k > K$, so nennen wir die Kantengewichtsfolge endlich.

Wir definieren für eine endliche Kantengewichtsfolge $K_T := \max\{k \in \mathbb{N} \mid T_k \neq 0\}$.

Definition 1.2.10. Charakteristische Gewichtsfunktion.

Wir definiere die charakteristische Gewichtsfunktion als

$$m_T : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty], \alpha \mapsto \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha\right).$$

Auch hier schreiben wir m statt m_T , falls klar ist, welche Kantengewichtsfolge wir betrachten.

Weiterhin definieren wir $D(m_T) := \{x \in [0; \infty[\mid m(x) < \infty\}$.

Wir schreiben m und D statt m_T und $D(m_T)$, wenn klar ist, welche Kantengewichtsfolge betrachtet wird.

Das folgende Lemma beschreibt das Aussehen von m genauer, es kann in dem Vorlesungskript [41] über gewichtete Verzweigungsprozesse nachgelesen werden.

Lemma 1.2.11. *Es gilt*

- (i) m ist logkonvex.
- (ii) D ist ein Intervall, welches aber leer sein kann.

Ist D nicht leer oder einelementig und m nicht konstant, so gelten die folgenden Aussagen:

- m ist strikt logkonvex und unterhalbstetig,
- die eingeschränkte Funktion $m|_D$ ist im Inneren von D unendlich oft differenzierbar und für die Ableitungsfunktion gibt es eine stetige Fortsetzung in die Randpunkte von D .

Definition 1.2.12. Charakteristischer Exponent.

Wir sagen, dass die Kantengewichtsfolge T einen charakteristischen Exponenten besitzt, falls das Minimum

$$\alpha_T := \min\{\alpha \in]0; \infty[\mid m_T(\alpha) = 1\}$$

existiert.

Das kanonische Martingal

In diesem Teilabschnitt sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$.

Definition 1.2.13. Normierte Kantengewichtsfolgen.

Wir definieren für alle $i \in \mathbb{N}$

$$T_i^{(\alpha)} := \frac{T_i^\alpha}{m_T(\alpha)}; \quad T^{(\alpha)} := (T_i^{(\alpha)})_{i \in \mathbb{N}},$$

und für alle $u \in \mathbb{V}$

$$T_i^{(\alpha)}(u) := \frac{T_i^\alpha(u)}{m_T(\alpha)}; \quad T^{(\alpha)}(u) := (T_i^{(\alpha)}(u))_{i \in \mathbb{N}}.$$

Dann sei

$$L_v^{(\alpha)} := \frac{L_v^\alpha}{m(\alpha)^{|v|}} \text{ für alle } v \in \mathbb{V}.$$

Dies sind neue, normierte Knotenpfadgewichte.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$W_n^{(\alpha)} := \sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)}.$$

Weiterhin definieren wir für alle $u \in \mathbb{V}$

$$L_v^{(\alpha)}(u) := \frac{L_v^\alpha(u)}{m(\alpha)^{|v|}} \text{ für alle } v \in \mathbb{V},$$

sowie für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{V}$

$$W_n^{(\alpha)}(u) := \sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)}(u).$$

Bemerkung 1.2.14. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $u \in \mathbb{V}$ sind die Zufallsgröße $W_n^{(\alpha)}$ bzw. $W_n^{(\alpha)}(u)$ wohldefiniert, da nur über positive Zufallsgrößen summiert wird, eventuell wird der Wert ∞ angenommen.

Da die Familie $(T(v))_{v \in \mathbb{V}}$ der Knotenkantengewichtsfolgen identisch verteilt sind, gilt $T^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} T^{(\alpha)}(v)$ für alle $v \in \mathbb{V}$. Dies bedeutet aber auch $L_v^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} L_v^{(\alpha)}(u)$ und $W_n^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} W_n^{(\alpha)}(u)$ für alle $u \in \mathbb{V}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.2.15. Falls T einen charakteristischen Exponenten besitzt, so gilt $m(\alpha_T) = 1$, daraus folgt $L_v^{(\alpha_T)} = L_v^{\alpha_T}$.

Wir werden dies im späteren Verlauf benutzen, ohne auf diesen Zusammenhang explizit hinzuweisen.

Lemma 1.2.16. *Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$(i) \quad \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^\alpha \right) = m(\alpha)^n,$$

$$(ii) \quad \mathbb{E} \left(W_n^{(\alpha)} \right) = 1,$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}$ und $u \in \mathbb{V}$

$$(iii) \quad \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^\alpha(u) \right) = m(\alpha)^n,$$

$$(iv) \quad \mathbb{E} \left(W_n^{(\alpha)}(u) \right) = 1.$$

Beweis. Die Behauptung (i) folgt mit Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung (ii) ergibt sich aus der Gleichung

$$\mathbb{E} \left(W_n^{(\alpha)} \right) = \frac{\mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^\alpha \right)}{m(\alpha)^n} = 1,$$

die für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Behauptungen (iii) und (iv) ergeben sich analog. \square

Theorem 1.2.17. *Biggins (1977).*

Die Folge $(W_n^{(\alpha)}, \mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein positives Martingal.

Da $(W_n^{(\alpha)}, \mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein positives Martingal ist, konvergiert die Folge $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ nach dem Martingalkonvergenzsatz f.s. gegen eine Zufallsgröße $W^{(\alpha)}$ mit $\mathbb{E} (W^{(\alpha)}) \leq 1$.

Analog erhält man auch für alle $u \in \mathbb{V}$ die f.s. Konvergenz von $W_n^{(\alpha)}(u)$ gegen eine Zufallsgröße $W^{(\alpha)}(u)$ mit $\mathbb{E} (W^{(\alpha)}(u)) \leq 1$.

Wegen Bemerkung 1.2.14 gilt $W^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} W^{(\alpha)}(u)$ für alle $u \in \mathbb{V}$.

Ein wichtige Beobachtung stellt das folgende Lemma dar. Es stellt eine Art Rekursionsgleichung für den Grenzwert $W^{(\alpha)}(\emptyset)$ auf und wird später für die Analyse von stochastischen Fixpunktgleichungen benötigt.

Lemma 1.2.18. *Es gilt*

$$(i) \quad W_n^{(\alpha)}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) W_{n-1}^{(\alpha)}(i) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) \quad W^{(\alpha)}(\emptyset) \stackrel{f.s.}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) W^{(\alpha)}(i).$$

Beweis. Siehe Einleitung in [11]. \square

Definition und Bemerkung 1.2.19. Überlebenswahrscheinlichkeit.

Die Überlebenswahrscheinlichkeit $q_T(\alpha)$ der Kantengewichtsfolge T sei gegeben durch

$$q_T(\alpha) := \lim_{n \rightarrow \infty} P(W_n^{(\alpha)} = 0).$$

Dieser Limes existiert, da $(P(W_n^{(\alpha)} = 0))_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge ist.

Das folgende Lemma ist wieder aus dem Skriptum [41] entnommen.

Lemma 1.2.20. *Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$. Dann ist q_T ein Fixpunkt der Erzeugendenfunktion $g_{N_T} : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[; s \mapsto \mathbb{E} (s^{N_T})$.*

Theorem 1.2.21. *Lyons(1997), Biggins (1977).*

Sei T eine Kantengewichtsfolge mit den Eigenschaften

$$(i) \quad \text{es gibt ein } \alpha \in]0; \infty[\text{ mit } 0 < m_T(\alpha) < \infty,$$

$$(ii) \quad \mathbb{E} (N) > 1.$$

Dann sind äquivalent

$$(a) \quad (W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist gleichgradig integrierbar,}$$

$$(b) \quad W_n^{(\alpha)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)},$$

$$(c) \quad \mathbb{E} (W^{(\alpha)}) = 1,$$

$$(d) \quad q_T(\alpha) = P(W^{(\alpha)} = 0) < 1,$$

$$(e) \quad -\infty < E \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)} \right) < 0 \text{ und } E \left(W_1^{(\alpha)} \log^+ W_1^{(\alpha)} \right) < \infty.$$

Dieses Theorem geht auf Biggins [11] und Lyons [33] zurück.

Für eine Charakterisierung der gleichgradigen Integrierbarkeit von $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ verweisen wir auf das Theorem 1.3 in [5].

Bemerkung 1.2.22. Gilt $E(N) > 1$ und $N \geq 1$ f.s., so ist die erzeugende Funktion $g := g_N$ strikt konvex mit $g(0) = 0$. Da q_T ein Fixpunkt von g ist, gilt in diesem Falle $q_T \in \{0, 1\}$. Falls man daher im obigen Theorem die Eigenschaft (ii) durch die stärkere Eigenschaft

$$(ii)' \quad E(N) > 1 \text{ und } N \geq 1 \text{ f.s.}$$

ersetzt, so kann man die Aussage (d) durch die Aussage (d)' $W^{(\alpha)} > 0$ f.s. ersetzen.

Mit ähnlichen Argumente wie im Beweis zu Theorem 3 in [12] kann man das folgende Lemma zeigen. Die Folgerung, dass $L_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0$, wird sich als essentiell für unsere Betrachtungen erweisen.

Lemma 1.2.23. Sei T eine Kantengewichtsfolge mit den Eigenschaften

$$(i) \quad T \text{ besitzt einen charakteristischen Exponenten } \alpha := \alpha_T \in]0; \infty[,$$

$$(ii) \quad E(N) > 1.$$

Dann gilt

$$L_n^* = \sup_{v \in \mathbb{V}_n} L_v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0.$$

1.3. Assoziierte Random Walks

In diesem Abschnitt sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$.

Definition 1.3.1. Wir definieren für alle $i \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{V}$

$$X_i := -\log T_i, \quad X_i(v) := -\log T_i(v) \text{ und } S_v := -\log L_v.$$

Definition 1.3.2. Zufällige Gewichtsmaße.

Wir definieren¹ die folgenden Kerne

$$\mu^{(\alpha)} : \Omega \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0; \infty]; (\omega, A) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\omega) \delta_{T_i(\omega)}(A),$$

und

$$\nu^{(\alpha)} : \Omega \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0; \infty]; (\omega, A) \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\omega) \delta_{X_i(\omega)}(A).$$

Weiterhin betrachten wir die zugehörigen Intensitätsmaße

$$\bar{\mu}^{(\alpha)} : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0; \infty]; A \mapsto \int \mu^{(\alpha)}(\omega, A) dP(\omega),$$

und

$$\bar{\nu}^{(\alpha)} : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow [0; \infty]; A \mapsto \int \nu^{(\alpha)}(\omega, A) dP(\omega).$$

¹Wir bezeichnen für jedes $x \in \mathbb{R}$ das Dirac-Maß in x mit δ_x .

Bemerkung 1.3.3. Wie in der Stochastik üblich unterdrücken wir die Abhängigkeit von $\omega \in \Omega$, d.h. wir schreiben kurz $\nu^{(\alpha)}(A)$ (mit $A \in \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$) für die Zufallsgröße $\omega \mapsto \nu^{(\alpha)}(\omega, A)$.

Ferner werden wir diese Kerne mit zufälligen Maßen identifizieren, d.h. wir fassen $\mu^{(\alpha)}$ als eine Zufallsgröße mit Werten in dem Raum der Maße über $(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ auf.

In diesem Zusammenhang sei auf Kapitel 12 in [29] und Kapitel 24 in [31] für eine Einführung in zufällige Maße und der Identifikation von Kernen mit zufälligen Maßen hingewiesen.

Anhand der Definition können wir folgern, dass $\mu^{(\alpha)}(\{0\}) = 0$ und $\nu^{(\alpha)}(\{\infty\}) = 0$ gilt.

Bemerkung 1.3.4. Für jedes $\omega \in \Omega$ ist das Maß $\nu^{(\alpha)}(\omega, \cdot)$ das Bildmaß von $\mu^{(\alpha)}(\omega, \cdot)$ unter der Abbildung $-\log$. Folglich ist $\overline{\nu}^{(\alpha)}$ das Bildmaß von $\overline{\mu}^{(\alpha)}$ unter der Abbildung $-\log$.

Für die späteren Betrachtungen ist es praktisch Zufallsgrößen mit den Verteilungen $\overline{\mu}^{(\alpha)}$ und $\overline{\nu}^{(\alpha)}$ zur Verfügung zu haben.

Sei daher $\mathbf{T}^{(\alpha)}$ eine Zufallsgröße mit Verteilung $\overline{\mu}^{(\alpha)}$ und sei $\mathbf{X}^{(\alpha)} := -\log \mathbf{T}^{(\alpha)}$.

Wegen obiger Bemerkung hat $\mathbf{X}^{(\alpha)}$ die Verteilung $\overline{\nu}^{(\alpha)}$.

Definition 1.3.5. Assoziierte Random Walks.

Sei $(\mathbf{T}_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine stochastisch unabhängige Folge von Zufallsgrößen mit $\mathbf{T}_n^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} \mathbf{T}^{(\alpha)}$. Zusätzlich gelte, dass diese Folge stochastisch unabhängig von $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und $(T(v))_{v \in \mathbb{V}}$ ist.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathbf{L}_n^{(\alpha)} := \prod_{k=1}^n \mathbf{T}_k^{(\alpha)}$$

und bezeichnen $\mathbf{L}^{(\alpha)} := (\mathbf{L}_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ als den assoziierten multiplikativen Random Walk.

Analog definieren wir den assoziierten additiven Random Walk, indem wir zum negierten Logarithmus übergehen.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathbf{X}_n^{(\alpha)} := -\log \mathbf{T}_n^{(\alpha)}$$

und

$$\mathbf{S}_n^{(\alpha)} := -\log \mathbf{L}_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k^{(\alpha)}.$$

Wir bezeichnen $\mathbf{S}^{(\alpha)} := (\mathbf{S}_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ als den assoziierten additiven Random Walk.

Lemma 1.3.6. Für jede messbare Funktion $f : [0; \infty] \rightarrow [0; \infty]$ gilt

$$\mathbb{E} \left(f(\mathbf{T}^{(\alpha)}) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)} f(T_i) \right)$$

und

$$\mathbb{E} \left(f(\mathbf{X}^{(\alpha)}) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)} f(-\log T_i) \right) = \frac{1}{m(\alpha)} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha X_i} f(X_i) \right).$$

Insbesondere gilt für die Erwartungswerte

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{T}^{(\alpha)} \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)} \cdot T_i \right)$$

und

$$\mathbb{E} \left(\mathbf{X}^{(\alpha)} \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)} (-\log T_i) \right) = \frac{1}{m(\alpha)} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha X_i} \cdot X_i \right).$$

Korollar 1.3.7. *Unter der zusätzlichen Annahme $m(\alpha) = 1$ sind die folgenden Aussagen äquivalent*

- (i) $0 < \mathbf{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$,
- (ii) $-\infty < \mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)}\right) < 0$.

Man beachte, dass der zweite Erwartungswert in dem Theorem von Biggins bzw. Lyons (hier Theorem 1.2.17) auftrat.

Beweis. Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt

$$\mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)}\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha \log T_i^\alpha\right) = -\alpha \mathbf{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)}),$$

woraus sich die Behauptung ergibt. □

Lemma 1.3.8. *Rechenregel für den assoziierten multiplikativen Random Walk.*

Sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $f : [0; \infty]^n \mapsto [0; \infty]$

$$\mathbf{E}\left(f(\mathbf{L}_1^{(\alpha)}, \dots, \mathbf{L}_n^{(\alpha)})\right) = \mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} f(L_{v|1}, \dots, L_{v|n})\right). \quad (1.3.1)$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Der Induktionsanfang ergibt sich aus dem Lemma 1.3.6 unter Beachtung der Gleichheit

$$\mathbf{L}_1^{(\alpha)} \stackrel{d}{=} \mathbf{T}^{(\alpha)}.$$

Für den Induktionsschritt sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte für jede messbare Funktion $f : [0; \infty]^n \mapsto [0; \infty]$ die Gleichung (1.3.1) (I.V.).

Sei nun $f : [0; \infty]^{n+1} \rightarrow [0; \infty]$ eine messbare Funktion.

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_{n+1}} L_v^{(\alpha)} f(L_{v|1}, \dots, L_{v|n+1})\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^{(\alpha)}(v) f(L_{v|1}, \dots, L_{v|n}, L_{v|n} \cdot T_i(v))\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} \mathbf{E}\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i^{(\alpha)}(v) f(L_{v|1}, \dots, L_{v|n}, L_{v|n} \cdot T_i(v)) \middle| \mathfrak{A}_n\right)\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} \sum_{i=1}^{\infty} \int \frac{t^\alpha}{m(\alpha)} \cdot f(L_{v|1}, \dots, L_{v|n}, L_{v|n} \cdot t) dP^{T_i}(t)\right) \\ &\stackrel{\text{(I.V.)}}{=} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \int \frac{t^\alpha}{m(\alpha)} \cdot f(\mathbf{L}_1^{(\alpha)}, \dots, \mathbf{L}_n^{(\alpha)}, \mathbf{L}_n^{(\alpha)} \cdot t) dP^{T_i}(t)\right) \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)} f(\mathbf{L}_1^{(\alpha)}, \dots, \mathbf{L}_n^{(\alpha)}, \mathbf{L}_n^{(\alpha)} \cdot T_i^{(\alpha)})\right) \\ &= \mathbf{E}\left(f(\mathbf{L}_1^{(\alpha)}, \dots, \mathbf{L}_{n+1}^{(\alpha)})\right) \end{aligned}$$

□

Ohne Mühe kann man folgendes Korollar aus dem Lemma 1.3.8 ziehen.

Korollar 1.3.9. *Rechenregel für den assoziierten additiven Random Walk.*
 Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle messbaren Funktionen $f : [0; \infty]^n \mapsto [0; \infty]$

$$\mathbb{E} \left(f(\mathbf{S}_1^{(\alpha)}, \dots, \mathbf{S}_n^{(\alpha)}) \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^{(\alpha)} f(S_{v|1}, \dots, S_{v|k}) \right).$$

Einteilung in arithmetisch und nicht-arithmetisch

Ziel dieses Teilabschnittes ist es, eine Klassifikation von Kantengewichtsfolgen in arithmetische und nicht-arithmetische vorzunehmen. Da wir später Erneuerungstheorie benutzen, ist diese Unterteilung notwendig.

Definition 1.3.10. Arithmetische/Nicht-arithmetische Maße.
 Für jedes Maß μ auf $(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ setzen wir

$$d(\mu) := \sup \{ d \in]0; \infty[\mid \mu(\overline{\mathbb{R}} \setminus d\overline{\mathbb{Z}}) = 0 \},$$

wobei wir $\sup \emptyset := 0$ setzen.

Falls $d(\mu) > 0$ ist, so nennen wir μ arithmetisch mit Spanne $d(\mu)$.

Falls $d(\mu) = 0$ ist, so nennen wir μ nicht-arithmetisch.

definiert durch

Definition 1.3.11. Arithmetische/Nicht-arithmetische Kantengewichtsfolge.
 Falls das Maß ξ , definiert durch

$$\xi(A) := \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_i \in A\}} \right) \text{ für alle } A \in \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}},$$

arithmetisch mit Spanne d ist, so nennen wir T arithmetisch mit Spanne d .

Falls ξ nicht-arithmetisch ist, so nennen wir T nicht-arithmetisch.

Lemma 1.3.12. *Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $d \in]0; \infty[$.*

Dann sind äquivalent

- (i) T ist arithmetisch mit Spanne d ,
- (ii) $\overline{\nu}^{(\alpha)}$ ist arithmetisch mit Spanne d .

Beweis. Die behauptete Äquivalenz ergibt sich aus

$$\{ \lambda > 0 \mid \xi(\overline{\mathbb{R}} \setminus \lambda\overline{\mathbb{Z}}) = 0 \} = \{ \lambda > 0 \mid \overline{\nu}^{(\alpha)}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \lambda\overline{\mathbb{Z}}) = 0 \},$$

wobei ξ wie in der Definition 1.3.11 gegeben ist. □

Lemma 1.3.13. *Ist T arithmetisch mit Spanne d , so gilt $d(\mathfrak{L}(X_i)) \geq d$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Sei ξ wie in der Definition 1.3.11. Es gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$P(X_i \notin d\overline{\mathbb{Z}}) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_i \notin d\overline{\mathbb{Z}}\}} \right) = \xi(\overline{\mathbb{R}} \setminus d\overline{\mathbb{Z}}) = 0.$$

Die Behauptung ergibt sich hieraus. □

Korollar 1.3.14. *Es sei T arithmetisch mit Spanne d . Setze $\theta := e^{-d}$. Dann gilt*

- (i) $T_i \in \theta^{\overline{\mathbb{Z}}}$ f.s. für alle $i \in \mathbb{N}$,
- (ii) $(W^{(\alpha)})^{1/\alpha} \in \theta^{\overline{\mathbb{Z}}}$ f.s. .

1.4. Reguläre Kantengewichtsfolgen

Ziel dieses Abschnittes ist es spezielle Klassen von Kantengewichtsfolgen zu definieren, die gerade so maßgeschneidert sind, um die Voraussetzungen der Erneuerungssätze beim gewichteten Verzweigungsprozess von Nerman und Gatzouras zu erfüllen.

Definition 1.4.1. Eine Kantengewichtsfolge T nennen wir L_1 -regulär, falls gilt

- (i) $E(N) > 1$, $N \geq 1$ f.s.,
- (ii) T besitzt einen charakteristischen Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$,
- (iii) $-\infty < E\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)}\right) < 0$,
- (iv) $E\left(W_1^{(\alpha)} \log^+ W_1^{(\alpha)}\right) < \infty$.

Ferner nennen wir eine Kantengewichtsfolge T f.s.-regulär, falls gilt

- (i) $E(N) > 1$,
- (ii) T besitzt einen charakteristischen Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$,
- (iii) $-\infty < E\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)}\right) < 0$,
- (iv) es gibt eine monoton fallende, beschränkte und integrierbare Funktion $g :]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ mit

$$E\left(\sup_{t \in]0; \infty[} \frac{\nu^{(\alpha)}(]t; \infty[)}{g(t)}\right) < \infty. \quad (1.4.1)$$

Die Existenz eines charakteristischen Exponentens und die Forderung $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$ sind notwendig um im Kapitel 2 die tiefliegenden Sätze von Nerman und Gatzouras anwenden zu können. Man beachte, dass sich aus den Eigenschaften (ii) und (iii) mithilfe des Korollar 1.3.7 die Aussage $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$ ableiten lässt.

Man beachte, dass für L_1 -regulären Kantengewichtsfolgen $E(W^{(\alpha)}) = 1$ gilt, siehe auch Bemerkung 1.2.22.

Lemma 1.4.2. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischen Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.

Dann gilt $P(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i < 1) \neq 0$.

Korollar 1.4.3. Für T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge gilt $P(\forall i \in \mathbb{N} : T_i \in \{0, 1\}) < 1$.

Beweis des Lemma. Wir zeigen die Behauptung per Widerspruch. Wir nehmen daher an, dass $P(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i < 1) = 0$ gilt. Da $T_i \leq 1$ f.s. für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt, folgt $\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i \stackrel{f.s.}{=} 1$.

Daraus folgt $\inf_{i \in \mathbb{N}} X_i \stackrel{f.s.}{=} 0$.

Für alle $\varepsilon > 0$ definieren wir $\tau_\varepsilon := \inf\{i \in \mathbb{N} \mid X_i < \varepsilon\}$. Wegen $P(\exists i \in \mathbb{N} : X_i < \varepsilon) = 1$ folgt $\tau_\varepsilon < \infty$ für alle $\varepsilon > 0$. Es folgt f.a. $\varepsilon > 0$

$$\bar{\nu}^{(\alpha)}(]0; \varepsilon]) = \frac{1}{m(\alpha)} E\left(\sum_{i=1}^{\tau_\varepsilon} e^{-\alpha X_i} \mathbb{1}_{\{X_i \in]0; \varepsilon])}\right) \geq \frac{1}{m(\alpha)} E(e^{-\alpha X_{\tau_\varepsilon}}) \geq \frac{1}{m(\alpha)} e^{-\alpha \varepsilon}.$$

Lässt man nun ε gegen Null laufen, so folgt $\bar{\nu}^{(\alpha)}(\{0\}) \geq 1/m(\alpha) = 1$. Dies steht aber im Widerspruch zu $E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) > 0$. \square

Des Weiteren benötigen wir im späteren Verlauf immer wieder, dass $(L_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ fast sicher gegen Null konvergiert. Für reguläre Kantengewichtsfolgen ergibt sich dies aus dem Lemma 1.2.23.

Abschließend merken wir noch an, dass aus der unter der Voraussetzung $E(N) < \infty$ die Eigenschaft 1.4.1 einer f.s.-regulären Kantengewichtsfolge folgt. Denn in diesem Fall kann man $t \mapsto e^{-\alpha t}$ für die Funktion g wählen. Siehe dazu auch die Bemerkung nach „Condition 5.1“ in [35].

1.5. Stopplinien

Definition 1.5.1. Linien.

Eine *nicht-leere* Menge $L \subset \mathbb{V}$ heißt Linie, falls für alle $v, w \in L$ mit $v \neq w$ gilt $v \perp w$.

Eine Linie heißt geschlossen, falls für alle $u \in \mathbb{V} \setminus \{L\}$ entweder $u < L$ oder $L < u$ gilt.

Weiterhin heißt eine Linie beschränkt, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $L \subset \mathbb{V}_{\leq n}$.

Das folgende Lemma charakterisiert diejenigen Knoten, die sich in einer Linie befinden, indem man die genealogische Ordnung ins Spiel bringt.

Lemma 1.5.2. Sei L eine Linie. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}$

$$v \in L \iff L \not\prec v \text{ und } L \leq v.$$

Beweis. „ \Rightarrow “: Es gelte $v \in L$.

Dann gilt $L \leq v$ nach Definition. Wir nehmen an, dass $L < v$ gilt. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{V}$ mit $w < v$ und $w \in L$. D.h. $v, w \in L$ und $v \perp w$. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass L eine Linie ist.

„ \Leftarrow “: Es gelte $L \not\prec v$ und $L \leq v$.

Dann gilt für alle $w \in \mathbb{V}$ mit $w < v$, dass $w \notin L$ und es gibt ein $u \in \mathbb{V}$ mit $u \leq v$ und $u \in L$. Daraus folgt $v \in L$. \square

Lemma 1.5.3. Sei L eine geschlossene Linie und $v \in \mathbb{V}$. Dann gilt $L \not\prec v \iff v \leq L$.

Bemerkung 1.5.4. Die Forderung, dass L geschlossen sein soll, ist notwendig. Das folgende Gegenbeispiel verdeutlicht dies: $L := \{11, 12, 21\}$ und $v := 22$.

Dann gilt $L \not\prec v$, aber $v \not\leq L$.

Beweis von 1.5.3. Falls $v = \emptyset$ gilt, so ist die Äquivalenz offensichtlich wahr. Sei daher $v \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}$.

„ \Rightarrow “: Es gelte $L \not\prec v$.

Dann gilt für alle $w \in \mathbb{V}$ mit $w < v$, dass $w \notin L$. Da L geschlossen ist, folgt, dass ein $u \in \mathbb{V}$ existiert mit $\mathcal{V}(v) < u$ und $u \in L$. Dies bedeutet aber $v \leq L$.

„ \Leftarrow “: Es gelte $v \leq L$.

Dann gibt es ein $w \in \mathbb{V}$ mit $v \leq w$ und $w \in L$. Da L eine Linie ist, folgt $L \not\prec v$. \square

Lemma 1.5.5. Sei L eine Linie. Dann gilt $\emptyset \in L \iff \emptyset \not\prec L$.

Beweis. Es gelte $\emptyset \in L$. Annahme es gibt ein $v \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}$ mit $v \in L$. Dann gilt $\emptyset \not\prec v$ und dies steht im Widerspruch zur Linien-Eigenschaft.

Es gelte $\emptyset \notin L$. Da L nicht-leer ist, existiert ein $v \in L$ mit $v \neq \emptyset$. Daher gilt $\emptyset < L$. \square

Definition 1.5.6. Infimum von Linien.

Sind L und M Linien, so definieren wir das Infimum dieser Linien durch

$$L \wedge M := \{v \in \mathbb{V} \mid ((v \in L) \wedge (M \not\prec v)) \vee ((v \in M) \wedge (L \not\prec v))\}$$

Bemerkung 1.5.7. Anschaulich ist ein Knoten v in $L \wedge M$, falls dieser in einer der beiden Linien enthalten ist, aber gleichzeitig keinen Vorfahren in der anderen Linie besitzt.

Weiterhin ist die Definition symmetrisch, d.h. es gilt $L \wedge M = M \wedge L$.

Lemma 1.5.8. *Das Infimum zweier Linien ist wieder eine Linie (Wohldefiniertheit).*

Beweis. Seien L und M Linien. Die Wohldefiniertheit zeigen wir per Widerspruch.

Seien $v, vw \in L \wedge M$ mit $w \neq \emptyset$. Aufgrund der Symmetrie des Infimums können wir oBdA annehmen, dass $v \in M$ und $L \not\prec v$ gilt.

Da $vw \in L \wedge M$ ist, gilt ($vw \in L$ und $M \not\prec vw$) oder ($vw \in M$ und $L \not\prec vw$).

Die zweite Möglichkeit kann nicht auftreten, da M bereits eine Linie ist und wir dann $v \in M$ und $vw \in M$ hätten. Nun gilt aber $v \in M$ und $v < vw$, also $M < vw$. Dies widerspricht aber $M \not\prec vw$. \square

Lemma 1.5.9. *Seien L, M Linien.*

Ist M geschlossen, so ist auch $L \wedge M$ geschlossen.

Ist M geschlossen und beschränkt, so ist auch $L \wedge M$ geschlossen und beschränkt.

Beweis. Sei M geschlossen. Zu zeigen ist nun, dass $L \wedge M$ geschlossen ist, d.h. wir müssen nachweisen, dass für alle $v \notin L \wedge M$ entweder $v < L \wedge M$ oder $L \wedge M < v$ gilt.

Sei $v \notin L \wedge M$. Dann gilt

$$((v \notin L) \vee (M < v)) \wedge ((v \notin M) \vee (L < v)).$$

1. Fall $M < v$ und ($v \notin M$ oder $L < v$).

Dann existiert ein $u \in M$ mit $u < v$.

1.1 Fall $L \not\prec v$. Dann gilt auch $L \not\prec u$. Daraus folgt $u \in L \wedge M$ und somit $L \wedge M < v$.

1.2 Fall $L < v$.

Gilt $u \leq L$, so folgt $L \not\prec u$, d.h. $u \in L \wedge M$ und somit $L \wedge M < v$.

Gilt $L \leq u$, so gibt es ein $u' \in L$ mit $u' \leq u < v$ und $M \not\prec u'$. Also $u' \in L \wedge M$ und somit $L \wedge M < v$.

2. Fall $v \notin L$ und ($v \notin M$ oder $L < v$).

2.1 Fall $v \notin L$ und $v \notin M$.

Da M geschlossen ist, gilt $v < M$ oder $M < v$.

Der Fall $M < v$ kann wie der erste Fall behandelt werden, also nehmen wir oBdA an, dass $v < M$ gilt. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{V}$ mit $vw \in M$.

2.1.1 Fall $L \not\prec vw$. Es folgt nach Definition $vw \in L \wedge M$, also $v < L \wedge M$.

2.1.2 Fall $L < vw$. Dann gibt es ein $u \in L$ mit $u < vw$. Es gilt auch $M \not\prec u$, da M eine Linie ist. Also $u \in L \wedge M$ und daraus folgt $v < L \wedge M$.

2.2 Fall $v \notin L$ und $L < v$.

Dann gibt es ein $u \in L$ mit $u < v$. Wieder können wir im Hinblick auf den ersten Fall oBdA annehmen, dass $M \not\prec v$ gilt. Wegen $u < v$ folgt auch $M \not\prec u$. Daher gilt $u \in L \wedge M$ und somit $L \wedge M < v$.

In allen Fällen gilt $L \wedge M < v$ oder $v < L \wedge M$. Dies bedeutet aber, dass $L \wedge M$ geschlossen ist.

Für den Nachweis des Zusatzes sei zusätzlich angenommen, dass M beschränkt ist.

Dies bedeutet, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $M \subset \mathbb{V}_{\leq n}$.

Wir zeigen, dass auch $L \wedge M \subset \mathbb{V}_{\leq n}$ gilt.

Ist $v \in L \wedge M$, so gilt entweder $v \in M$ oder $v \in L$ und $M \not\prec v$. Im ersten Fall gilt $v \in \mathbb{V}_{\leq n}$. Im zweiten Fall folgt aus der Abgeschlossenheit von M , dass $v < M$ gilt. Es folgt auch in diesem Fall $v \in \mathbb{V}_{\leq n}$. \square

Definition 1.5.10. Stopplinie, pfadweise Stopplinie.

Sei $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ eine genealogische Filtration. Eine zufällige Menge^{II} \mathcal{L} heißt Stopplinie bzgl. $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$, falls gilt

- (i) für jedes $\omega \in \Omega$ ist $\mathcal{L}(\omega)$ eine Linie,

^{II}Siehe auch das Kapitel „Zufällige Mengen“ im Anhang.

(ii) für alle $v \in \mathbb{V}$ ist $\{v \in \mathcal{L}\} := \{\omega \in \Omega : v \in \mathcal{L}(\omega)\} \in \mathfrak{G}_v$.

Ist die betrachtete genealogische Filtration die pfadweise Filtration $(\mathfrak{A}_v)_{v \in \mathbb{V}}$, so bezeichnen wir \mathcal{L} als eine pfadweise Stopplinie.

Beispiel 1.5.11. Ein einfaches Beispiel für eine Stopplinie ist die Menge \mathbb{V}_n aller Knoten der n -ten Generation für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.5.12. Seien \mathcal{L} und \mathcal{M} Stoppllinien bzgl. einer genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$. Dann ist auch $\mathcal{L} \wedge \mathcal{M}$ eine Stopplinie bzgl. der genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$.

Beweis. Wegen Lemma 1.5.8 müssen wir nur noch die Messbarkeitsbedingung zeigen. Dazu sei $v \in \mathbb{V}$. Dann gilt

$$\{v \in \mathcal{L} \wedge \mathcal{M}\} = \left(\{v \in \mathcal{M}\} \cap \bigcap_{u < v} \{u \notin \mathcal{L}\} \right) \cup \left(\{v \in \mathcal{L}\} \cap \bigcap_{u < v} \{u \notin \mathcal{M}\} \right) \in \mathfrak{G}_v.$$

□

Definition und Bemerkung 1.5.13. Ist \mathcal{L} eine Stopplinie und $n \in \mathbb{N}_0$, so schreiben wir kürzer $\mathcal{L} \wedge n$ statt $\mathcal{L} \wedge \mathbb{V}_n$. Man beachte, dass im Allgemeinen $\mathcal{L} \wedge n \neq \mathcal{L} \cap \mathbb{V}_n$ gilt.

Korollar 1.5.14. Seien \mathcal{M} und \mathcal{L} zwei Stoppllinien. Ist \mathcal{M} f.s. geschlossen (und f.s. beschränkt), so ist die Stopplinie $\mathcal{M} \wedge \mathcal{L}$ ebenfalls f.s. geschlossen (und f.s. beschränkt).

Beweis. Dies ist eine Folgerung aus dem Lemma 1.5.9. □

Definition 1.5.15. Sei \mathcal{L} eine Stopplinie bzgl. der genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$. Wir definieren die σ -Algebra der \mathcal{L} -Vergangenheit durch

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{L}} := \sigma(\{C \cap \{\mathcal{L} \not\leq v\} \mid v \in \mathbb{V}, C \in \mathfrak{G}_v\}).$$

Bemerkung 1.5.16. Die Menge $\{\mathcal{L} \not\leq v\}$ ist in \mathfrak{A} enthalten, da $\{\mathcal{L} \not\leq v\} = \bigcap_{\substack{w \in \mathbb{V} \\ w < v}} \{w \notin \mathcal{L}\}$ gilt und die letzte Menge nach Lemma A.4.1 in \mathfrak{A} enthalten ist.

Bemerkung 1.5.17. Falls \mathcal{L} eine f.s. geschlossene Stopplinie bzgl. $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ ist, so gilt wegen Lemma 1.5.3

$$\mathfrak{A}_{\mathcal{L}} = \sigma(\{C \cap \{v \leq \mathcal{L}\} \mid v \in \mathbb{V}, C \in \mathfrak{G}_v\}).$$

Lemma 1.5.18. Sei \mathcal{L} eine Stopplinie bzgl. $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$. Sei $v \in \mathbb{V}$, $C \in \mathfrak{G}_v$ und $D \in \sigma(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathfrak{G}_{vk})$.

Dann gilt $\{\mathcal{L} \leq v\}, \{\mathcal{L} \not\leq v\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

Weiterhin gilt $\{\mathcal{L} \not\leq v\} \cap C, \{v \in \mathcal{L}\} \cap C, \{v \leq \mathcal{L}\} \cap C \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

Außerdem gilt $\{v < \mathcal{L}\} \cap D \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

Beweis. Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ $\{\mathcal{L} \not\leq v\} = \{\mathcal{L} \not\leq vk\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$. Wegen Komplementabgeschlossenheit von $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ gilt auch $\{\mathcal{L} \leq v\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

Die Menge $\{\mathcal{L} \not\leq v\} \cap C$ ist per Definition in $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

Weiterhin gilt (siehe Lemma 1.5.2)

$$\{v \in \mathcal{L}\} \cap C = \{\mathcal{L} \leq v\} \cap C \cap \{\mathcal{L} \not\leq v\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$$

und

$$\{v \leq \mathcal{L}\} \cap C = \bigcup_{w \in \mathbb{V}} \{vw \in \mathcal{L}\} \cap C \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}.$$

Es gilt $\{v < \mathcal{L}\} = \bigcup_{w \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}} \{vw \in \mathcal{L}\} \cap D \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$. □

Lemma 1.5.19. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{V}_n$, \mathcal{L} eine Stopplinie und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung.

Dann sind die Abbildungen $\mathbb{1}_{\{v < \mathcal{L}\}} f(T_{\emptyset, v})$, $\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} f(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)})$ und $\mathbb{1}_{\{\mathcal{L} \not\prec v\}} f(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)})$ messbar bzgl. $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$.

Beweis. Dies ergibt sich mittels eines Funktionserweiterungsschlusses aus Lemma 1.5.18. \square

Seien (E_1, \mathfrak{E}_1) und (E_2, \mathfrak{E}_2) messbare Räume. Seien $X : \Omega \rightarrow E_1$ und $Y : \Omega \rightarrow E_2$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen und \mathfrak{G} eine Unter- σ -Algebra von \mathfrak{A} so, dass $\sigma(Y) \subseteq \mathfrak{G}$ gilt.

Sei $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung und es sei die Abbildung

$$q : E_2 \rightarrow \mathbb{R}; y \mapsto E(f(X, y))$$

gegeben.

Dann gilt die folgende wohlbekannte Identität für den bedingten Erwartungswert

$$E(f(X, Y) | \mathfrak{G}) = q(Y).$$

Das folgende Lemma ist eine Spezialisierung des eben geschilderten Sachverhaltes auf die Situation der σ -Algebra der \mathcal{L} -Vergangenheit.

Lemma 1.5.20. Sei \mathcal{L} eine pfadweise Stopplinie.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^n \times (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung, sowie $v \in \mathbb{V}_n$.

Außerdem sei die Abbildung

$$q : (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^n \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto E(f(x, T_{v, \infty}))$$

gegeben.

Dann gilt

$$E(f(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}, T_{v, \infty}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} | \mathfrak{A}_{\mathcal{L}}) = q(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}}.$$

Beweis. Da $q(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}}$ messbar bzgl. $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ ist, reicht es aus zu zeigen, dass

$$\int_A f(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}, T_{v, \infty}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} dP = \int_A q(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} dP$$

für alle $A \in \{C \cap \{\mathcal{L} \not\prec v\} \mid v \in \mathbb{V}, C \in \mathfrak{A}_v\}$ gilt.

Sei daher $w \in \mathbb{V}$ und $C \in \mathfrak{A}_w$, wir setzen dann $A := C \cap \{\mathcal{L} \not\prec w\}$.

1. Fall $w \geq v$.

Dann gilt $\{\mathcal{L} \not\prec w\} \cap \{v \in \mathcal{L}\} = \emptyset$ und die Behauptung folgt, da dann beide Integrale gleich Null sind.

2. Fall $w < v$ oder $w \perp v$.

Man beachte, dass in diesen Fällen die Zufallsgrößen $T_{v, \infty}$ stochastisch unabhängig von den σ -Algebren \mathfrak{A}_v , \mathfrak{A}_w und $\sigma(T_{\emptyset, \infty})$ ist.

Außerdem ist $\{v \in \mathcal{L}\} \in \mathfrak{A}_v$ nach Definition von \mathcal{L} und $C \cap \{\mathcal{L} \not\prec w\} \in \mathfrak{A}_w$.

Mithilfe des Satzes von Fubini können wir daher schließen

$$\begin{aligned} \int_A f(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}, T_{v, \infty}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} dP &= \int f(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}, T_{v, \infty}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} \mathbb{1}_{C \cap \{\mathcal{L} \not\prec w\}} dP \\ &= \int q(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} \mathbb{1}_{C \cap \{\mathcal{L} \not\prec w\}} dP \\ &= \int_A q(T_{\emptyset, \mathcal{V}(v)}) \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} dP. \end{aligned}$$

\square

Lemma 1.5.21. Seien \mathcal{L} und \mathcal{M} zwei Stoppllinien bzgl. einer genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ mit $\mathcal{L} \leq \mathcal{M}$. Dann gilt $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$

Beweis. Es reicht zu zeigen $C \cap \{\mathcal{L} \not\prec v\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$ für alle $v \in \mathbb{V}$ und $C \in \mathfrak{G}_v$.

Seien $v \in \mathbb{V}$ und $C \in \mathfrak{G}_v$.

Da $\mathcal{L} \leq \mathcal{M}$ gilt $\{\mathcal{L} \not\prec v\} \subseteq \{\mathcal{M} \not\prec v\}$.

Dann gilt $C \cap \{\mathcal{L} \not\prec v\} = C \cap \{\mathcal{L} \not\prec v\} \cap \{\mathcal{M} \not\prec v\} = \bigcap_{\substack{w \in \mathbb{V} \\ w < v}} \{w \notin \mathcal{L}\} \cap C \cap \{\mathcal{M} \not\prec v\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{M}}$. \square

Das kanonische Martingal bzgl. Stoppllinienfolgen

Wir haben im Abschnitt 1.2 das kanonische Martingal $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ kennen gelernt. Dabei wurden alle Knotenpfadgewichte der n -ten Generation aufsummiert. In diesem Teilabschnitt verallgemeinern wir dies, indem wir nicht über eine deterministische Menge von Knoten summieren, sondern wir erlauben eine Summation über eine Stoppllinie. Es stellt sich heraus, dass diese Zufallsgrößen eine gewisse Martingalstruktur besitzen, und wir können daher Konvergenz erwarten.

Diese Fragestellung ist nicht neu und wurde u.a. bereits von Biggins und Kyprianou in [13] bearbeitet. Man beachte, dass dort sogenannte Multi-Typ Branching Random Walks analysiert werden. Diese Resultate lassen sich auch in unserer Situation anwenden.

Definition 1.5.22. Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$. Sei \mathcal{L} eine Stoppllinie. Dann definieren wir

$$W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} := \sum_{v \in \mathcal{L}} L_v^{(\alpha)} = \sum_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} L_v^{(\alpha)}.$$

Als direkte Konsequenz aus der Definition können wir das folgende, wenig überraschende, Lemma über die Messbarkeit von $W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)}$ folgern.

Lemma 1.5.23. Sei $n \in \mathbb{N}$ und \mathcal{L} eine Stoppllinie. Dann sind $W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)}$ und $W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}$ $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ -messbar.

Beweis. Für alle $v \in \mathbb{V}$ ist $\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} L_v^{(\alpha)}$ $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ -messbar. Daher ist $W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} = \sum_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} L_v^{(\alpha)}$ als Reihe von $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ -messbaren Zufallsgrößen auch $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ -messbar.

Es gilt $W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} = \sum_{v \in \mathbb{V}_{<n}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} L_v^{(\alpha)} + \sum_{v \in \mathbb{V}_n} \mathbb{1}_{\{\mathcal{L} \not\prec v\}} L_v^{(\alpha)}$, und daher ist diese Zufallsgröße ebenfalls $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}}$ -messbar. \square

Als Schlüsselbeobachtung kann man das folgende Lemma bezeichnen. Es ermöglicht uns bereits bekannte Resultate für $W_n^{(\alpha)}$, $n \in \mathbb{N}$ auf die Zufallsgröße $W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)}$ zu übertragen.

Das Lemma stammt von Biggins und Kyprianou und ist in [13] das Lemma 14.2.

Lemma 1.5.24. Biggins und Kyprianou (2004).

Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und \mathcal{L} eine f.s. geschlossene Stoppllinie. Dann gilt

$$\mathbb{E} \left(W_n^{(\alpha)} \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) = W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}.$$

Mit diesem Lemma an der Hand wollen wir hinreichende Bedingungen an eine Stoppllinie \mathcal{L} angeben so, dass $\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) = 1$ gilt. Diese Anforderung an die Stoppllinie taucht in fast allen Sätzen von Biggins und Kyprianou in [13] als Voraussetzung auf.

Lemma 1.5.25. Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und sei \mathcal{L} Stoppllinie.

(i) Ist \mathcal{L} f.s. geschlossen, so gilt $\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) \leq 1$.

(ii) Ist \mathcal{L} f.s. geschlossen, f.s. beschränkt und ist $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so gilt $\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) = 1$.

Beweis. Sei \mathcal{L} f.s. geschlossen.

Es gilt

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} &= \sum_{v \in \mathcal{L} \wedge n} L_v^{(\alpha)} = \sum_{v \in \mathcal{L}; v \in \mathbb{V}_{\leq n}} L_v^{(\alpha)} + \sum_{v \in \mathbb{V}_n, \mathcal{L} \not\ni v} L_v^{(\alpha)} \\ &\geq \sum_{v \in \mathcal{L}; v \in \mathbb{V}_{\leq n}} L_v^{(\alpha)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \sum_{v \in \mathcal{L}} L_v^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

Der erste Teil folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) \leq \mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \right) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(W_n^{(\alpha)} \right) = 1.$$

Es gelte nun, dass \mathcal{L} f.s. geschlossen und f.s. beschränkt ist. Außerdem sei $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.

Dann gilt

$$W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)}. \quad (1.5.1)$$

Weiterhin gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) - \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| \leq \varepsilon\}} \right) \\ &\geq \mathbb{E} \left((W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} - \varepsilon) \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| \leq \varepsilon\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \right) - \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) - \varepsilon \cdot P \left(|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| \leq \varepsilon \right) \\ &= 1 - \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) - \varepsilon \cdot P \left(|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| \leq \varepsilon \right). \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (1.5.1) gilt $P \left(|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Da $W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)}$ integrierbar ist, gilt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Da $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)} \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(W_n^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{|W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} - W_{\mathcal{L} \wedge n}^{(\alpha)}| > \varepsilon\}} \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

Also gilt für alle $\varepsilon > 0$ $\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) \geq 1 - \varepsilon$, d.h. $\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}}^{(\alpha)} \right) \geq 1$. □

Das folgende Theorem ist, in leicht abgewandelten Form, das Theorem 14.5 in [13].

Theorem 1.5.26. *Biggins und Kyprianou (2004).*

Sei $(\mathcal{L}^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stopplinien bzgl. einer gemeinsamen genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(i) \quad \mathbb{E}(\mathcal{L}^{(n)}) = 1,$$

$$(ii) \quad \mathcal{L}^{(n)} \leq \mathcal{L}^{(n+1)}.$$

Dann ist $(W_{\mathcal{L}^{(n)}}^{(\alpha)}, \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ ein positives Martingal, welches f.s. und in L_1 gegen $\mathbb{E}(W^{(\alpha)} | \mathfrak{A}^*)$ konvergiert. Hierbei ist $\mathfrak{A}^* := \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{(n)}})$

Bemerkung 1.5.27. Ersetzt man im obigen Theorem die Voraussetzung (i) durch die beiden Aussagen

- $(W_n^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist gleichgradig integrierbar,
- $\mathcal{L}^{(n)}$ ist f.s. geschlossen und f.s. beschränkt,

so gilt nach Lemma 1.5.25 ebenfalls die Schlußfolgerung des Theorems.

1.5.1. Stopplinien via genealogischer Stoppzeiten

In diesem Unterabschnitt zeigen wir, wie man sich mithilfe sogenannter genealogischer Stoppzeiten auf bequeme Art und Weise Stopplinien definieren kann. Die Idee dahinter ist, dass man sich für jeden Randknoten $x \in \partial\mathbb{V}$ eine Stoppzeit τ_x definiert und dann die Menge $\{x | \tau_x \mid x \in \partial\mathbb{V}\}$ als Stopplinie interpretiert. Dabei ist natürlich sicherzustellen, dass diese Menge tatsächlich eine Stopplinie ist, d.h. die Familie $(\tau_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ hat in einem noch zu präzisierenden Sinne „verträglich“ zu sein.

Definition 1.5.28. Genealogische Stoppzeiten.

Sei $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ eine genealogische Filtration. Sei $x \in \partial\mathbb{V}$. Dann nennen wir eine Stoppzeit τ_x bzgl. der Filtration $(\mathfrak{G}_{x|n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine genealogische Stoppzeit.

Falls wir die pfadweise Filtration $(\mathfrak{A}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ betrachten, so bezeichnen wir τ_x auch als pfadweise Stoppzeit.

Definition 1.5.29. Verträgliche Familie genealogischer Stoppzeiten.

Eine Familie $(\tau_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ genealogischer Stoppzeiten heißt verträglich, falls für alle $u \in \mathbb{V}$ und alle $y, z \in \partial\mathbb{V}$

$$\tau_{uy} = |u| \implies \tau_{uz} = |u|$$

gilt.

Lemma 1.5.30. Sei $(\tau_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ eine verträgliche Familie genealogischer Stoppzeiten zu einer genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$. Dann ist die zufällige Menge

$$\mathcal{L}_\tau := \{x | \tau_x ; x \in \partial\mathbb{V}\} \cap \mathbb{V}$$

eine Stopplinie bzgl. der genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Linien-Eigenschaft.

Wir zeigen dies per Widerspruch, d.h. wir nehmen an, es gibt Knoten $v, w \in \mathbb{V}$ mit $w \neq \emptyset$ und $v, vw \in \mathcal{L}$.

Dann gibt es ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $(vwx) | \tau_{vwx} = vw$, sowie ein $y \in \partial\mathbb{V}$ mit $(vy) | \tau_{vy} = v$.

Daraus folgt $\tau_{vwx} = |vw|$ und $\tau_{vy} = |v|$. Wegen der Verträglichkeit dann $\tau_{vwx} = |v|$. Somit gilt $v = vw$, was im Widerspruch zu $w \neq \emptyset$ steht.

Kommen wir nun zur Messbarkeitseigenschaft.

Sei $v \in \mathbb{V}$. Zu zeigen ist $\{v \in \mathcal{L}\} \in \mathfrak{G}_v$.

Es gilt

$$\{v \in \mathcal{L}\} = \{\exists x \in \partial\mathbb{V} \mid \tau_{vx} = |v|\} = \{\tau_{vx_0} = |v|\}$$

für ein $x_0 \in \partial\mathbb{V}$ wegen der Verträglichkeit der genealogischen Stoppzeiten. Die letzte Menge ist nach Definition der genealogischen Stoppzeiten ein Element von \mathfrak{G}_v . \square

Das folgendem Lemma gibt uns eine hinreichende Bedingung an, dass \mathcal{L}_τ f.s. beschränkt und f.s. geschlossen ist. Diese beiden Eigenschaften einer Linie sind unter Umständen umständlich nachweisbar.

Lemma 1.5.31. *Es gebe eine Menge $K \in \mathfrak{A}$ mit $P(K) = 1$ und für alle $\omega \in K$ existiere ein $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$ mit $\tau_x(\omega) < N$ für alle $x \in \partial\mathbb{V}$.*

Dann ist \mathcal{L}_τ f.s. beschränkt und f.s. geschlossen.

Beweis. Sei $\omega \in K$ und $N = N(\omega) \in \mathbb{N}$ mit $\tau_x(\omega) < N$ für alle $x \in \partial\mathbb{V}$.

Sei $v \in \mathcal{L}_\tau(\omega)$. Dann gibt es ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $v = x|\tau_x(\omega)$. Es folgt $v \in \mathbb{V}_{\leq N}$ und somit die Beschränktheit von $\mathcal{L}_\tau(\omega)$.

Sei $u \in \mathbb{V}$ mit $u \notin \mathcal{L}_\tau(\omega)$.

Dann gilt $u \neq uy|\tau_{uy}(\omega)$ für alle $y \in \partial\mathbb{V}$.

1.Fall: Es gibt ein $y \in \partial\mathbb{V}$ mit $\tau_{uy}(\omega) < |u|$.

Dann gilt $uy|\tau_{uy}(\omega) < u$, also $\mathcal{L}_\tau(\omega) < u$.

2.Fall: Für alle $y \in \partial\mathbb{V}$ gilt $\tau_{uy}(\omega) > |u|$.

Sei $y \in \partial\mathbb{V}$. Da $\tau_{uy}(\omega) < \infty$ gilt $u < uy|\tau_{uy}(\omega) \in \mathcal{L}_\tau(\omega)$. Damit ist $\mathcal{L}(\omega)$ eine geschlossene Linie. \square

Lemma 1.5.32. *Seien $(\tau_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ und $(\sigma_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ verträgliche Familien genealogischer Stoppzeiten bzgl. der genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$. Dann ist $(\tau_x \wedge \sigma_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ ebenfalls eine verträgliche Familie genealogischer Stoppzeiten bzgl. der genealogischen Filtration $(\mathfrak{G}_v)_{v \in \mathbb{V}}$ und es gilt*

$$\mathcal{L}_{\tau \wedge \sigma} = \mathcal{L}_\tau \wedge \mathcal{L}_\sigma. \quad (1.5.2)$$

Beweis. Sei $x \in \partial\mathbb{V}$. Da τ_x und σ_x Stoppzeiten bzgl. der Filtration $(\mathfrak{G}_{x|n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind, ist auch $\tau_x \wedge \sigma_x$ eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathfrak{G}_{x|n})_{n \in \mathbb{N}_0}$.

Wir zeigen nun die Verträglichkeitseigenschaft.

Sei $u \in \mathbb{V}$ und seien $y, z \in \partial\mathbb{V}$. Es gelte $\tau_{uy} \wedge \sigma_{uy} = |u|$.

Dann folgt $(\tau_{uy} = |u|$ und $\sigma_{uy} \geq |u|)$ oder $(\tau_{uy} \geq |u|$ und $\sigma_{uy} = |u|)$.

Wegen der Verträglichkeit von $(\tau_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ und $(\sigma_x)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ folgt dann $(\tau_{uz} = |u|$ und $\sigma_{uz} \geq |u|)$ oder $\tau_{uz} \geq |u|$ und $\sigma_{uz} = |u|$.

Es folgt daraus $\tau_{uz} \wedge \sigma_{uz} = |u|$ und somit die gewünschte Verträglichkeit.

Für die Gleichung (1.5.2) zeigen wir beide Inklusionen.

„ \subseteq “: Sei $v \in \mathcal{L}_{\tau \wedge \sigma}$. Dann gibt es ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $v = x|\tau_x \wedge \sigma_x$.

Aufgrund von Symmetrie betrachten wir o.B.d.A. nur den Fall $\tau_x \leq \sigma_x$.

Dann gilt $v = x|\tau_x \wedge \sigma_x = x|\tau_x$, also $v \in \mathcal{L}_\tau$. Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{L}_\sigma \not\prec v$ ist. Dies zeigen wir per Widerspruch und nehmen dazu an, dass es ein $u \in \mathcal{L}_\sigma$ gibt mit $u < v$.

Daraus folgt $uz|\sigma_{uz} = u$ für alle $z \in \partial\mathbb{V}$, insbesondere gibt es ein $y \in \partial\mathbb{V}$ mit $uy = x$ und $uy|\sigma_{uy} = u < v = x|\tau_x \leq x|\sigma_x = u$. Dies ist ein Widerspruch und wir haben daher gezeigt, dass $\mathcal{L}_\sigma \not\prec v$ gilt. Es folgt somit $v \in \mathcal{L}_\tau \wedge \mathcal{L}_\sigma$.

„ \supseteq “: Sei $v \in \mathcal{L}_\tau \wedge \mathcal{L}_\sigma$.

OBdA sei $v \in \mathcal{L}_\tau$ und $\mathcal{L}_\sigma \not\prec v$.

Dann existiert ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $v = x|\tau_x$ und für alle $u \in \mathbb{V}$ mit $u < v$ gilt $u \notin \mathcal{L}_\sigma$. Daraus folgt insbesondere $\sigma_x \geq \tau_x$. Damit gilt $v = x|\tau_x \wedge \sigma_x \in \mathcal{L}_{\tau \wedge \sigma}$. \square

1.5.2. Erstaustritts-Stoppllinien

In diesem Unterabschnitt stellen wir eine spezielle Klasse von Stoppllinien vor, die Erstaustritts-Stoppllinien. Die grundlegende Idee ist dieselbe, wie für die wohlbekannteren Erstaustritts-Stoppszeiten (engl. first passage time). Bei der Erstaustritts-Stoppszeit wartet man solange, bis der betrachtete Prozess ein gewisses Niveau zum ersten Mal erreicht. Wendet man diesen Gedanken auf den gewichteten Verzweigungsprozess, so bedeutet dies, dass man diejenigen Knoten betrachtet, deren Knotenpfadgewichte zum ersten Mal unter eine gewisse Schranke sinken.

Definition 1.5.33. Für alle $a \in]0; 1[$ und für jedes $x \in \partial\mathbb{V}$ definieren wir

$$\tau_x^a := \inf \{n \in \mathbb{N}_0 \mid L_{x|n} < a\}$$

Lemma 1.5.34. Sei $a \in]0; 1[$. Dann ist die Familie $(\tau_x^a)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ eine verträgliche Familie pfadweiser Stoppszeiten.

Beweis. Sei $x \in \partial\mathbb{V}$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_x = n\} = \{L_{x|0} \geq a, \dots, L_{x|n-1} \geq a, L_{x|n} < a\} \in \mathfrak{A}_{x|n}.$$

Also ist τ_x eine pfadweise Stoppszeit.

Als nächstes zeigen wir die Verträglichkeitseigenschaft.

Sei $u \in \mathbb{V}$ und $x, y \in \partial\mathbb{V}$ mit $\tau_{ux}^a = |u|$.

Dann gilt $L_{ux|k} \geq a$ für alle $k < |u|$ und $L_{ux||u|} < a$. Es folgt $L_{uy|k} \geq a$ für alle $k < |u|$ und $L_{uy||u|} < a$. Dies bedeutet aber $\tau_{uy}^a = |u|$. \square

Definition 1.5.35. Für jedes $a \in]0; 1[$ sei $\mathcal{L}^a := \mathcal{L}_{\tau^a}$ die durch die Familie $(\tau_x^a)_{x \in \mathbb{V}}$ verträglicher pfadweiser Stoppszeiten gegebene Stoppllinie.

Wir stellen nun einige Eigenschaften der Familie $(\mathcal{L}^a)_{a \in]0; 1[}$ vor.

Lemma 1.5.36. Fast sichere Geschlossenheit und Beschränktheit von \mathcal{L}^a .

Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge. Dann gilt:

(i) Für alle $a \in]0; 1[$ ist die Stoppllinie \mathcal{L}^a f.s. geschlossen und f.s. beschränkt.

(ii) Sind $a, c \in]0; 1[$ mit $a < c$, so gilt $\mathcal{L}^c \leq \mathcal{L}^a$.

Beweis. Wir bemerken zunächst an, dass $L_n^* = \sup_{v \in \mathbb{V}_n} L_v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0$ gilt, da T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge ist.

Zu (i):

Sei $\omega \in \left\{ \omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^*(\omega) = 0 \right\}$.

Wir können dann ein $n \in \mathbb{N}$ wählen, so dass $L_n^*(\omega) < a$ gilt. Ist nun $v \in \mathcal{L}^a(\omega)$, so gilt nach Definition $L_{\mathcal{V}(v)}(\omega) \geq a$ und $L_v(\omega) < a$. Nehmen wir nun an, dass $|v| > n$, so gilt $|\mathcal{V}(v)| \geq n$ und $L_{\mathcal{V}(v)}(\omega) \geq a$. Dies steht aber im Widerspruch zu $L_{\mathcal{V}(v)}(\omega) \leq L_n^*(\omega) < a$. Damit ist die Linie $\mathcal{L}^a(\omega)$ beschränkt. Weiterhin folgt aus $L_n^*(\omega) < a$, dass jedes $v \in \mathbb{V}_n$ einen Vorfahren in der Linie $\mathcal{L}^a(\omega)$ besitzt. Dies impliziert, dass diese Linie geschlossen ist.

Zu (ii):

Sei $v \in \mathcal{L}^c$. Dann gilt $L_v < c$ und $L_{\mathcal{V}(v)} \geq c > a$.

1. Fall $L_v \geq a$.

Da $L_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0$ gilt, existiert ein $w \in \mathbb{V}$ mit $L_{vw} < a$. Daraus ergibt sich, dass es ein Knoten $u \in \mathbb{V}$ gibt mit $vu \in \mathcal{L}^a$.

2. Fall $L_v < a$. Dann ist $v \in \mathcal{L}^a$.

In beiden Fällen gibt es $u \in \mathbb{V}$ mit $vu \in \mathcal{L}^a$, und somit gilt $\mathcal{L}^c \leq \mathcal{L}^a$. \square

Wir stellen nun eine Verbindung zwischen den Erstaustritts-Stoppllinien und den assoziierten Random Walks her. Diese wird auch im zweiten Kapitel im Zusammenhang mit der Erneuerungstheorie wieder auftreten.

Im Folgenden sei T stets eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$.

Für jedes $a \in]0; 1[$ definieren wir die Erstaustrittszeit

$$\rho_a^{(\alpha)} := \inf \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \mid \mathbf{L}_n^{(\alpha)} < a \right\}$$

bzgl. dem assoziierten multiplikativen Random Walk und für jedes $b \in]0; \infty[$ die Erstaustrittszeit

$$\sigma_b^{(\alpha)} := \inf \left\{ n \in \mathbb{N}_0 \mid \mathbf{S}_n^{(\alpha)} > b \right\}$$

bzgl. dem assoziierten additiven Random Walk.

Wegen der Gleichheit $\mathbf{S}_n^{(\alpha)} = -\log \mathbf{L}_n^{(\alpha)}$ gilt $\rho_a^{(\alpha)} = \sigma_{-\log a}^{(\alpha)}$.

Das folgende (technische) Lemma benötigen wir, um die darauffolgenden Lemmata zu beweisen.

Lemma 1.5.37. *Sei $a \in]0; 1[$ und $b := -\log a$, außerdem sei $f : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ eine messbare Funktion.*

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \left(f(\mathbf{L}_n^{(a)}) \mathbb{1}_{\{\rho_a^{(\alpha)} = n\}} \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^a \cap \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} f(L_v) \right)$$

und

$$\mathbb{E} \left(f(\mathbf{S}_n^{(a)}) \mathbb{1}_{\{\sigma_b^{(\alpha)} = n\}} \right) = \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^a \cap \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} f(S_v) \right).$$

Beweis. Wir zeigen nur die erste Gleichung, die zweite ergibt sich analog. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(f(\mathbf{L}_n^{(\alpha)}) \mathbb{1}_{\{\rho_a^{(\alpha)} = n\}} \right) &= \mathbb{E} \left(f(\mathbf{L}_n^{(\alpha)}) \mathbb{1}_{\{\mathbf{L}_1^{(\alpha)} \geq a, \dots, \mathbf{L}_{k-1}^{(\alpha)} \geq a, \mathbf{L}_k^{(\alpha)} < a\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} f(L_v) \mathbb{1}_{\{L_{v|1} \geq a, \dots, L_{v|n-1} \geq a, L_{v|n} < a\}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n \cap \mathcal{L}_{\tau^a}} L_v^{(\alpha)} f(L_v) \right). \end{aligned}$$

□

Eine Verallgemeinerung des folgenden Lemma auf beliebige pfadweise Stoppllinien findet man in [13], Lemma 6.1 bzw. Lemma 14.1.

Wir benötigen in dieser Arbeit aber nicht die Verallgemeinerung und konzentieren uns daher auf Erstaustritts-Stoppllinien.

Lemma 1.5.38. *Sei $a \in]0; 1[$ und $b := -\log a$.*

Dann sind äquivalent

- (i) $\sigma_b^{(\alpha)} < \infty$ fast sicher,
- (ii) $\rho_a^{(\alpha)} < \infty$ fast sicher,
- (iii) $\mathbb{E} \left(W_{\mathcal{L}^a}^{(\alpha)} \right) = 1$.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ergibt sich aus $\sigma_b^{(\alpha)} = \rho_a^{(\alpha)}$.
Die verbleibende Äquivalenz ergibt sich aus

$$\begin{aligned} P(\rho_a^{(\alpha)} < \infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\rho_a^{(\alpha)} \leq n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\sum_{\substack{v \in \mathcal{L}^a \\ v \in \mathbb{V}_{\leq n}}} L_v^{(\alpha)} \right) = E \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^a} L_v^{(\alpha)} \right) = E \left(W_{\mathcal{L}^a}^{(\alpha)} \right). \end{aligned}$$

Dabei haben wir Lemma 1.5.37 benutzt. \square

Lemma 1.5.39. *Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.*

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0; 1[^\mathbb{N}$ eine monoton fallende Folge mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = 0$.

Dann gilt

$$W_{\mathcal{L}^{a_n}}^{(\alpha)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s., L_1} W^{(\alpha)}.$$

Beweis. Da T L_1 -regulär ist, gilt $E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) \in]0; \infty[$. Daraus folgt $\sigma_{-\log a_n}^{(\alpha)} < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daraus ergibt sich nach Lemma 1.5.38, dass $E(W_{\mathcal{L}^{a_n}}^{(\alpha)}) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nach Korollar 1.5.26 reicht es aus, $\mathfrak{A}(\emptyset) \subseteq \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}})$ zu zeigen.

Wegen Bemerkung 1.2.6 reicht es dazu aus, $\mathfrak{A}_m \subseteq \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}})$ für alle $m \in \mathbb{N}$ zu zeigen.

D.h. wir müssen für jedes $v \in \mathbb{V}_{\leq m}$ zeigen, dass L_v messbar bzgl. $\sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}})$ ist.

Sei $v \in \mathbb{V}_{\leq m}$.

Wir zeigen $\{L_v \geq t\} \in \sigma(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}})$ für alle $t \in \mathbb{R}$, woraus sich die gewünschte Messbarkeit ergibt.

Dabei können wir wegen $L_v \in [0; 1]$ oBdA annehmen, dass $t \in]0; 1[$ liegt.

Sei daher $t \in]0; 1[$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m \leq t$.

Es folgt

$$\{L_v \geq t\} = \{L_v \geq t\} \cap \{L_v \geq a_m\} = \{L_v \geq t\} \cap \{\mathcal{L}^{a_m} \not\prec v\} \in \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_m}}.$$

\square

1.5.3. Stoppllinien startend ab einem Knoten

Ziel dieses Unterabschnittes ist es Stoppllinien startend ab einem Knoten $u \in \mathbb{V}$ mit $u \neq \emptyset$ formal zu definieren. Inhaltlich unterscheiden sich diese Stoppllinien nicht von den gewöhnlichen Stoppllinien, außer dass man mit den Betrachtungen nicht in der Wurzel startet, sondern in einem beliebigen Knoten $u \in \mathbb{V}$. Die folgenden Definition stimmen mit der der gewöhnlichen Linie überein, falls man $u = \emptyset$ wählt.

Wir wollen auch weitgehend auf Beweise verzichten, da man durch geringe Anpassungen die Beweise aus den vorherigen Abschnitten über Stoppllinien übernehmen kann.

Im Folgenden sei $u \in \mathbb{V}$ stets ein Knoten.

Definition 1.5.40. Eine Menge $L \subseteq \mathbb{V}(u)$ heißt „Linie startend ab u “, falls für alle $v, w \in L$ mit $v \neq w$ gilt $v \perp w$.

Sie heißt geschlossen, falls für alle $v \in \mathbb{V}(u)$ mit $v \notin L$ gilt $v < L$ oder $L < v$.

Sie heißt beschränkt, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $L \subset \mathbb{V}_{\leq n}$.

Definition 1.5.41. Eine Familie $(\mathfrak{G}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$ von Unter- σ -Algebren nennen wir eine genealogische Filtration startend ab u , falls für alle $v, w \in \mathbb{V}$ mit $v \leq w$ gilt $\mathfrak{G}_v(u) \subseteq \mathfrak{G}_w(u)$ und $\mathfrak{G}_v(u) \subseteq \mathfrak{A}_{|v|}(u)$.

Definition 1.5.42. Sei $(\mathfrak{G}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$ eine genealogische Filtration startend ab u . Eine zufällige Menge $\mathcal{L}(u)$ heißt Stopplinie startend ab u bzgl. $(\mathfrak{G}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$, falls gilt

- (i) für jedes $\omega \in \Omega$ ist $(\mathcal{L}(u))(\omega)$ eine Linie startend ab u ,
- (ii) für alle $v \in \mathbb{V}$ ist $\{uv \in \mathcal{L}(u)\} \in \mathfrak{G}_v(u)$.

Definition 1.5.43. Sei $(\mathfrak{G}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$ eine genealogische Filtration startend ab u und sei $x \in \partial\mathbb{V}$. Dann nennen wir eine Stoppzeit $\tau_x(u)$ bzgl. der Filtration $(\mathfrak{G}_{x|n}(u))_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine genealogische Stoppzeit startend ab u . Eine Familie $(\tau_x(u))_{x \in \partial\mathbb{V}}$ genealogischer Stoppzeit startend ab u heißt verträglich, falls für alle $v \in \mathbb{V}$ und alle $y, z \in \partial\mathbb{V}$ gilt

$$\tau_{vy}(u) = |v| \Rightarrow \tau_{vz}(u) = |v|.$$

Falls wir die pfadweise Filtration $(\mathfrak{A}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$ betrachten, so bezeichnen wir τ_x als pfadweise Stoppzeit startend ab u .

Lemma 1.5.44. Sei $(\tau_x(u))_{x \in \partial\mathbb{V}}$ ein Familie verträglicher genealogischer Stoppzeiten startend ab u bzgl. $(\mathfrak{G}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$. Dann ist die Menge

$$\mathcal{L}_\tau(u) := \mathcal{L}_{\tau(u)}(u) := \{u(x|\tau_x(u)) ; x \in \partial\mathbb{V}\} \cap \mathbb{V}$$

eine Stopplinie startend ab u bzgl. $(\mathfrak{G}_v(u))_{v \in \mathbb{V}}$.

An dieser Stelle stellen wir die Erstaustritts-Stopplinie startend ab u vor, welche Gegenstücke zur den gewöhnlichen Erstaustritts-Stoppllinien sind.

Die Erstaustritts-Stopplinie $\mathcal{L}^{(a)}(u)$ startend ab u zum Niveau $a \in]0; 1[$ ist gegeben durch die folgende verträgliche Familie pfadweiser Stoppzeiten

$$\tau_x^a(u) := \inf \{n \in \mathbb{N}_0 \mid L_{x|n}(u) < a\}$$

für $x \in \partial\mathbb{V}$.

Wie in Lemma 1.5.34 kann man zeigen, dass $(\tau_x^a(u))_{x \in \partial\mathbb{V}}$ tatsächlich verträglich ist.

Das Lemma 1.5.36 kann man Eins-zu-Eins übertragen.

Lemma 1.5.45. Fast sichere Abgeschlossenheit und Beschränktheit von $\mathcal{L}^a(u)$. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge. Dann gilt

- (i) für alle $a \in]0; 1[$ die Stopplinie $\mathcal{L}^a(u)$ f.s. geschlossen und f.s. beschränkt,
- (ii) sind $a, c \in]0; 1[$ mit $a < c$, so gilt $\mathcal{L}^c(u) \leq \mathcal{L}^a(u)$.

1.6. Gewichtete Verzweigungsprozess mit Knotengewichten

In diesem Abschnitt erweitern wir den gewichteten Verzweigungsprozess um zusätzliche Knotengewichte. Diese Erweiterung findet ihre Rechtfertigung im drittem Kapitel bzw. im viertem Kapitel bei den sogenannten inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichungen.

Insbesondere werden wir spezielle Zufallsgrößen R_∞ und M_∞ kennenlernen, die u.a. von Aldous und Bandyopadhyay in [1] studiert wurden. Im Rahmen der zitierten Arbeit werden R_∞ und M_∞ als endogen (engl. endogenous) bezeichnet. Dieser Zusammenhang ist in der vorliegenden Arbeit nicht weiter von Interesse. Für uns ist eher das Korollar 1.6.9 bzw. das Lemma 1.6.14 wichtig, welche besagt, dass R_∞ (bzw. M_∞) simultan mit $W^{(\alpha)}$ einer Verteilungsgleichung gehorcht.

Außerdem ist das Lemma 1.6.10 bzw. das Lemma 1.6.13 von Interesse, da es Aussagen trifft, wann wir $R_\infty < \infty$ erwarten dürfen.

Wieder sei im Folgendem T eine Kantengewichtsfolge.

Definition 1.6.1. Tollterm.

Sei C eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{R} .

Falls $C \geq 0$ und $E(C) < \infty$ gilt, so nennen wir C einen positiven Tollterm. Gilt $E(C) = 0$ und $E(C^2) < \infty$, so bezeichnen wir C als einen zentrierten Tollterm. Eine Zufallsgröße heißt schlicht Tollterm, falls sie entweder ein positiver oder ein zentrierter Tollterm ist.

Definition 1.6.2. Knotengewichte.

Sei $(C_v)_{v \in \mathbb{V}}$ eine Familie von Zufallsgrößen derart, dass $(T(v), C_v)_{v \in \mathbb{V}}$ eine Familie stochastisch unabhängiger und identisch verteilter Zufallsgrößen mit $(T(v), C_v) \stackrel{d}{=} (T, C)$ ist. Für jeden Knoten $v \in \mathbb{V}$ nennen wir C_v das Knotengewicht von v . Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $u \in \mathbb{V}$

$$\mathfrak{C}_n(u) := \sigma(C_{uv}; v \in \mathbb{V}_n).$$

Konvention 1.6.3. Kanonische Wahl.

Wir benutzen wieder die Konvention, dass wir zu einer Zufallsgröße C immer eine Familie $(C_v)_{v \in \mathbb{V}}$ mit obigen Eigenschaften gewählt haben und alle davon abgeleiteten Zufallsgrößen definiert seien.

Bemerkung 1.6.4. Man beachte, dass für alle $v \in \mathbb{V}$ die Zufallsgrößen L_v und C_v stochastisch unabhängig sind. Dies gilt, da L_v messbar bzgl. \mathfrak{A}_v ist und $(T(v), C_v)$ und \mathfrak{A}_v stochastisch unabhängig sind.

Für die weitere Betrachtung müssen wir zwei Fälle unterscheiden, je nachdem ob C positiv ist oder auch negative Werte annehmen kann.

Positive Knotengewichte

In diesem Teilabschnitt sei C ein positiver Tollterm.

Definition 1.6.5. Gesamtgewicht.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $u \in \mathbb{V}$ definieren wir

$$R_n(u) := \sum_{v \in \mathbb{V}_{<n}} L_v(u) \cdot C_{uv}$$

und setzen $R_n := R_n(\emptyset)$.

Bemerkung 1.6.6. Man beachte, dass für alle $v \in \mathbb{V}$ und alle $u \in \mathbb{V}$ die Zufallsgrößen $L_v(u)$ und C_v positiv sind. Daher ist $R_n(u)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{V}$ eine wohldefinierte Zufallsgröße.

Definition 1.6.7. Maximalgewicht.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $u \in \mathbb{V}$ definieren wir

$$M_n(u) := \sup_{v \in \mathbb{V}_{<n}} L_v(u) \cdot C_{uv}$$

und setzen $M_n := M_n(\emptyset)$.

Für jedes $u \in \mathbb{V}$ sind die Folgen $(R_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(M_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise monoton steigend. Daraus folgt

$$R_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} R_\infty(u) \quad \text{und} \quad M_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} M_\infty(u).$$

Außerdem gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(\emptyset) &= \sum_{v \in \mathbb{V}_{<n+1}} L_v C_v \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{v \in \mathbb{V}_{<n}} T_i(\emptyset) L_v(k) + C_\emptyset \\
&= \sum_{i \in \mathbb{N}} T_i(\emptyset) R_n(i) + C_\emptyset.
\end{aligned}$$

Ebenso kann man zeigen, dass

$$M_{n+1}(\emptyset) = \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i(\emptyset) M_n(\emptyset) \vee C_\emptyset$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Lässt man nun n gegen unendlich laufen, so erhält man das folgende Lemma.

Lemma 1.6.8. *Es gilt*

$$R_\infty \stackrel{f.s.}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) R_\infty(i) + C_\emptyset,$$

wobei $(T(\emptyset), C_\emptyset), R_\infty(1), R_\infty(2), \dots$ definitionsgemäß stochastisch unabhängig sind.
Ebenso gilt

$$M_\infty \stackrel{f.s.}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i(\emptyset) M_\infty(i) \vee C_\emptyset,$$

wobei $(T_\emptyset, C_\emptyset), M_\infty(1), M_\infty(2), \dots$ stochastisch unabhängig sind.

Zusammen mit Lemma 1.2.18 erhält man das folgende Korollar. Es besagt, dass der Grenzwert $W^{(\alpha)}$ des kanonischen Martingals und R_∞ bzw. M_∞ simultan einer Verteilungsgleichung gehorchen.

Korollar 1.6.9. *Sei $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$. Dann gilt*

$$(W^{(\alpha)}, R_\infty) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\emptyset) W^{(\alpha)}(i), \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) R_\infty(i) + C_\emptyset \right),$$

und

$$(W^{(\alpha)}, M_\infty) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\emptyset) W^{(\alpha)}(i), \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i(\emptyset) M_\infty(i) \vee C_\emptyset \right),$$

Das folgende Lemma besagt, dass unter einer Momentenannahme an T , $E(R_\infty)$ und $E(M_\infty)$ endlich sind. Ferner erhalten wir auch eine L_1 -Konvergenz der Folgen $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemma 1.6.10. *Es gelte $m(1) < 1$.*

Dann gilt

$$E(R_\infty) = \frac{E(C)}{1 - m(1)} < \infty, \quad R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} R_\infty.$$

Ebenso gilt

$$E(M_\infty) < \infty, \quad M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} M_\infty.$$

Beweis. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$E(R_n) = \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v \cdot C_v \right) = E(C) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} E \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v \right) = E(C) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} m(1)^k.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ergibt sich

$$E(R_\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(R_n) = \frac{E(C)}{1 - m(1)} < \infty.$$

Daher gilt $R_\infty < \infty$ fast sicher.

Wegen Monotonie gilt $E(|R_\infty - R_n|) = E(R_\infty - R_n) = E(R_\infty) - E(R_n)$ und somit gilt die L_1 -Konvergenz.

Wegen $M_\infty \leq R_\infty$ ist $M_\infty < \infty$ fast sicher.

Um die L_1 -Konvergenz von $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu zeigen, stellen wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ fest

$$\begin{aligned} M_\infty - M_n &= \sup_{v \in \mathbb{V}} L_v C_v - \sup_{v \in \mathbb{V}_{<n}} L_v C_v \leq \sup_{v \in \mathbb{V}_{\geq n}} L_v C_v \\ &\leq \sum_{v \in \mathbb{V}_{\geq n}} L_v C_v = R_\infty - R_n. \end{aligned}$$

Und somit gilt

$$E|M_\infty - M_n| \leq E|R_\infty - R_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Zentrierte Knotengewichte

In diesem Teilabschnitt sei T eine endliche Kantengewichtsfolge und C sei ein zentrierter Tollterm.

Definition 1.6.11. Gesamtgewichte.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $u \in \mathbb{V}$ definieren wir

$$R_n(u) := \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v(u) \cdot C_{uv}$$

und setzen $R_n := R_n(\emptyset)$.

Bemerkung 1.6.12. Da die Kantengewichtsfolge T endlich ist, besitzen für jedes $n \in \mathbb{N}$ höchstens K_T^n verschiedene Knoten v aus \mathbb{V}_n ein Knotenpfadgewicht $L_v \neq 0$.

Daher sind die Zufallsgrößen $R_n(u)$ für jedes $u \in \mathbb{V}$ als endliche Summe von Zufallsgrößen wohldefiniert.

Lemma 1.6.13. Sei $u \in \mathbb{V}$. Es gelte $m(2) < 1$.

Dann gibt es eine Zufallsgröße $R_\infty(u)$ mit

$$(i) \quad E(R_\infty^2(u)) < \infty,$$

$$(ii) \quad R_n(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_2} R_\infty(u).$$

Beweis. Wir können uns oBdA auf $u = \emptyset$ beschränken.

Wir weisen nach, dass die Folge $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im L_2 -Raum ist.

Es gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n < m$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} |R_m - R_n|^2 &= \mathbb{E} \left| \sum_{k=n}^{m-1} \sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v C_v \right|^2 \\
&= \sum_{k=n}^{m-1} \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^2 C_v^2 \right) \\
&= \mathbb{E} (C^2) \sum_{k=n}^{m-1} \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_k} L_v^2 \right) \\
&= \mathbb{E} (C^2) \sum_{k=n}^{m-1} m(2)^k.
\end{aligned}$$

Da $m(2) < 1$ und $\mathbb{E} (C^2) < \infty$ ist, gilt

$$\mathbb{E} (C^2) \sum_{k=n}^{m-1} m(2)^k \xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} 0.$$

Da L_2 ein Banachraum ist, folgt die Behauptung. \square

Weiterhin benötigen wir noch ein Gegenstück zum Korollar 1.6.9. Dies ist Inhalt des folgenden Lemmas

Lemma 1.6.14. *Sei $\alpha \in]0; 2[$ so, dass $0 < m_T(\alpha) < \infty$ gilt.*

Außerdem gelte $m_T(2) < 1$ und $W_n^{(\alpha)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)}$.

Dann gilt

$$(W^{(\alpha)}, R_\infty) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\emptyset) W^{(\alpha)}(i), \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) R_\infty(i) + C_\emptyset \right).$$

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt die Gleichung

$$R_{n+1} = \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) R_n(i) + C_\emptyset,$$

da T endlich ist.

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\widetilde{W}_n := \sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\emptyset) W_n^{(\alpha)}(i)$$

und

$$\widetilde{R}_n := \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) R_n(i) + C_\emptyset.$$

Weiterhin definieren wir

$$\widetilde{W}_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\emptyset) W^{(\alpha)}(i)$$

und

$$\widetilde{R}_\infty := \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset) R_\infty(i) + C_\emptyset.$$

Sei $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Wir zeigen gleich

$$x \cdot \widetilde{W}_n + y \cdot \widetilde{R}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} x \cdot \widetilde{W}_\infty + y \cdot \widetilde{R}_\infty.$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} x \cdot \widetilde{W}_n + y \cdot \widetilde{R}_n &\stackrel{d}{=} x \cdot W_{n+1}^{(\alpha)}(\phi) + y \cdot R_{n+1} \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} x \cdot W^{(\alpha)}(\phi) + y \cdot R_\infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt mit dem Cramér-Wold-Device (siehe Satz 15.55 in [31] oder Satz 45.5 in [3])

$$(W^{(\alpha)}(\phi), R_\infty) \stackrel{d}{=} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\phi) W^{(\alpha)}(i), \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\phi) R_\infty(i) + C_\phi \right).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left| x \cdot \widetilde{W}_n + y \cdot \widetilde{R}_n - (x \cdot \widetilde{W}_\infty + y \cdot \widetilde{R}_\infty) \right| \\ &\leq |x| \mathbb{E} \left| \widetilde{W}_n - \widetilde{W}_\infty \right| + |y| \mathbb{E} \left| \widetilde{R}_n - \widetilde{R}_\infty \right| \\ &\leq |x| \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\phi) (W_n^{(\alpha)}(i) - W^{(\alpha)}(i)) \right| + |y| \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\phi) (R_n(i) - R_\infty(i)) \right| \\ &\leq |x| K_T \cdot \mathbb{E} \left| W_n^{(\alpha)} - W^{(\alpha)} \right| + |y| K_T \cdot \mathbb{E} |R_n - R_\infty| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

Kapitel 2.

Erneuerungstheorie für den gewichteten Verzweigungsprozess

Dieses Kapitel stellt die von uns in der vorliegenden Arbeit benötigte Erneuerungstheorie für den gewichteten Verzweigungsprozess vor. Wir beziehen uns vor allem auf die Arbeiten [35] bzw. [24] von Nerman bzw. Gatzouras, die wir im ersten Abschnitt vorstellen und im zweiten Abschnitt anwenden werden.

2.1. Grundlagen

In diesem Abschnitt stellen wir eine Beziehung zwischen der Erneuerungstheorie für den assoziierten Random Walk und dem gewichteten Verzweigungsprozess her.

Definition 2.1.1. Sei T eine Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$.

Wir definieren das Erneuerungsmaß $\mathbf{U}^{(\alpha)}$ durch

$$\mathbf{U}^{(\alpha)} := \sum_{n=0}^{\infty} P^{\mathbf{S}_n^{(\alpha)}}.$$

Im folgendem Lemma rechnen wir die Faltung bzgl. dem eben definierten Erneuerungsmaß und einer positiven Funktion aus. Die dabei auftretenden Terme werden wir später noch genauer analysieren.

Lemma 2.1.2. Sei T eine Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$.

Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow [0; \infty[$ eine direkt Riemann-integrierbare Funktion^I mit $g(x) = 0$ für alle $x \in]-\infty; 0[$. Dann gilt

$$g * \mathbf{U}^{(\alpha)}(t) = e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(t-S_v)} g(t-S_v) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

^ISiehe Definition 2.5.1 in [2].

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
g * \mathbf{U}^{(\alpha)}(t) &= \sum_{n \geq 0} \int g(t-x) dP^{\mathbf{S}_n^{(\alpha)}} \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left(g(t - \mathbf{S}_n^{(\alpha)}) \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} L_v^{(\alpha)} g(t - S_v) \right) \\
&= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} e^{-\alpha S_v} g(t - S_v) \right) \\
&= e^{-\alpha t} \cdot \sum_{n \geq 0} \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_n} e^{\alpha(t-S_v)} g(t - S_v) \right) \\
&= e^{-\alpha t} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(t-S_v)} g(t - S_v) \right).
\end{aligned}$$

□

Korollar 2.1.3. *Es gelten die Voraussetzungen des Lemma 2.1.2.*

(i) *Ist T nicht-arithmetisch, so gilt*

$$\mathbb{E} \left(e^{-\alpha t} \cdot \sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(t-S_v)} g(t - S_v) \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^\infty g(x) dx.$$

(ii) *Ist T arithmetisch mit Spanne d , so gilt*

$$\mathbb{E} \left(e^{-\alpha(nd+s)} \cdot \sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(nd+s-S_v)} g(nd+s-S_v) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{d}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} g(nd+s),$$

für alle $s \in [0; d[$.

Beweis. Dies folgt aus dem 2. Erneuerungstheorem, siehe Theorem 2.5.3 in [2].

□

Eine interessante Fragestellung, die sich an dieser Stelle ergibt, ist, ob man nicht noch stärkere Aussagen treffen kann. Zum Beispiel kann man sich fragen, ob nicht bereits die Zufallsgröße

$$e^{-\alpha t} \cdot \sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(t-S_v)} g(t - S_v)$$

konvergiert. Falls ja, in welchen Sinne (L_1 , f.s., etc.)? Wie sieht dann der Grenzwert aus? Diese Fragen wurden in großer Allgemeinheit von Nerman und Gatzouras beantwortet. Deren Resultate werden wir im Folgenden kurz darstellen und an unsere Notation anpassen.

Definition 2.1.4. Separabler Prozess.

Sei $\emptyset \neq R \subseteq \mathbb{R}$.

Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in R}$ mit Werten in \mathbb{R} heißt separabel, falls eine dichte, abzählbare Teilmenge $Q \subset R$ existiert mit

$$\{\forall t \in Q \cap I : X_t \in A\} = \{\forall t \in R \cap I : X_t \in A\}$$

für alle abgeschlossenen Mengen A und alle offenen, nicht-leeren Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lemma 2.1.5. Sei $R \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall. Jeder stochastische Prozess $(X_t)_{t \in R}$ mit rechtsseitig stetigen Pfaden ist separabel.

Beweis. Siehe §3, Bemerkung 4) in [9]. □

Wir können dies noch weiter verfeinern.

Lemma 2.1.6. Sei $R \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall. Sei $(X_t)_{t \in R}$ ein stochastischer Prozess, bei dem jeder Pfad in jedem Punkt rechtsseitig oder linksseitig stetig ist. Dann ist $(X_t)_{t \in R}$ separabel.

Beweis. Sei $I \subseteq R$ ein offenes, nicht-leeres Intervall und A eine abgeschlossene Menge.

Es reicht zu zeigen, dass $\{\forall t \in \mathbb{Q} \cap I : X_t \in A\} \subseteq \{\forall t \in R \cap I : X_t \in A\}$.

Sei $\omega \in \{\forall t \in \mathbb{Q} \cap I : X_t \in A\}$.

Für alle $t \in \mathbb{Q} \cap I$ gilt $X_t(\omega) \in A$, d.h. es ist noch $X_t(\omega) \in A$ für alle $t \in I \setminus \mathbb{Q}$ zu zeigen.

Sei $t \in I \setminus \mathbb{Q}$ und es gelte oBdA, dass $(X_s(\omega))_{s \in R}$ rechtsseitig stetig in t ist.

Sei $(s_n^+)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Q} \cap I)^{\mathbb{N}}$ mit $s_n^+ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} t$ und $s_n^+ > t$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $X_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{s_n^+}(\omega) \in A$, da A abgeschlossen ist. □

Definition 2.1.7. Charakteristik.

Sei T eine Kantengewichtsfolge.

Sei $\phi : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow [0; \infty[$ eine Abbildung so, dass es eine Abbildung $\chi : \mathbb{R} \times ([0; \infty]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{V}} \rightarrow [0; \infty[$ gibt mit

$$\phi(t, \omega) = \chi(t, (X(v)(\omega))_{v \in \mathbb{V}})$$

für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}$.

Falls gilt

- (i) ϕ ist $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{A}(\phi)$ messbar,
- (ii) $\phi(t, \omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in \mathbb{R}_{<0}$,
- (iii) $(\phi(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$ ist separabel,

so nennen wir ϕ eine Charakteristik (zur Kantengewichtsfolge T).

Bemerkung 2.1.8. (i) Die Forderung der Separabilität einer Charakteristik ϕ wird aus technischen Gründen gefordert, vor allem um die Messbarkeit der Abbildung $t \mapsto \sup_{s \leq t} \phi(s)$ zu gewährleisten.

- (ii) Die Abhängigkeit einer Charakteristik ϕ von einer Kantengewichtsfolge T ergibt sich aus $\mathfrak{A}(\phi) = \sigma(T(v); v \in \mathbb{V})$ und ϕ ist $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{A}(\phi)$ messbar.

Definition 2.1.9. Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$. Für alle Charakteristiken ϕ zur Kantengewichtsfolge T definieren wir,

- (i) falls T nicht-arithmetisch ist

$$m_{\phi}^{(\alpha)} := \frac{1}{E(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^{\infty} e^{-\alpha s} E(\phi(s)) ds,$$

- (ii) falls T arithmetisch mit Spanne d ist

$$m_{\phi}^{(\alpha)}(s) := \frac{d}{E(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha(kd+s)} E(\phi(kd+s)),$$

für alle $s \in [0; d[$.

Definition 2.1.10. Sei $\alpha \in]0; \infty[$.

Sei ϕ eine Charakteristik zur Kantengewichtsfunktion T .

Wir nennen ϕ α -ordentlich,

- (i) falls T nicht-arithmetisch ist und es gilt
 - a) $t \mapsto \mathbb{E}(\phi(t))$ ist Lebesgue-fast überall stetig,
 - b) $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} (e^{-\alpha t} \mathbb{E}(\phi(t))) < \infty$,
 - c) $\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \phi(s) \right) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
- (ii) falls T arithmetisch mit Spanne d ist und es gilt
 - a) $\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{kd \leq t \leq kd+d} (e^{-\alpha t} \mathbb{E}(\phi(t))) < \infty$,
 - b) $\mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \phi(s) \right) < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Definition 2.1.11. Sei ϕ eine Charakteristik so, dass eine Abbildung $\chi : \mathbb{R} \times ([0; \infty]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{V}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ existiert mit

$$\phi(t, \omega) = \chi(t, (X(v)(\omega))_{v \in \mathbb{V}})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$.

Wir definieren dann für alle $u \in \mathbb{V}$ und alle $\omega \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$

$$\phi_u(t, \omega) := \chi(t, (X(uv)(\omega))_{v \in \mathbb{V}}).$$

Theorem 2.1.12. *O.Nerman (1981).*

Sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine nicht-arithmetische Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$.

Sei ϕ eine α -ordentliche Charakteristik zur Kantengewichtsfolge T .

Dann gilt

$$e^{-\alpha t} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v(t - S_v) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} W^{(\alpha)} \cdot m_{\phi}^{(\alpha)}.$$

Erfüllt T zusätzlich die Voraussetzungen

- (i) $0 < \mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$,
- (ii) $\mathbb{E} \left(W_1^{(\alpha)} \log^+ W_1^{(\alpha)} \right) < \infty$,

so gilt

$$e^{-\alpha t} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v(t - S_v) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)} \cdot m_{\phi}^{(\alpha)}.$$

Gibt es monoton fallende, beschränkte und integrierbare Funktionen $g, h : [0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ mit den Eigenschaften

- (a) $\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0; \infty[} \frac{\nu^{(\alpha)}(]t; \infty[)}{g(t)} \right) < \infty$
- (b) $\mathbb{E} \left(\sup_{t \in [0; \infty[} \frac{e^{-\alpha t} \phi(t)}{h(t)} \right) < \infty$

und hat $(\phi(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$ Pfade in \mathbf{D}^I , so gilt

$$e^{-\alpha t} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v(t - S_v) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{f.s.} W^{(\alpha)} \cdot m_{\phi}^{(\alpha)}.$$

^H \mathbf{D} ist der Raum der reellen rechtsseitig stetigen Funktionen, deren linksseitiger Grenzwert in jedem Punkt existiert.

Beweis. Dies ist eine Zusammenfassung von Theorem 3.1, Korollar 3.3 und Theorem 5.4 in [35]. \square

Theorem 2.1.13. *D. Gatzouras (2000).*

Sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine arithmetische Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$ und Spanne d .

Sei ϕ eine α -ordentliche Charakteristik zur Kantengewichtsfolge T .

Dann gilt für alle $s \in [0; d[$

$$e^{-\alpha(nd+s)} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v(s + nd - S_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} W^{(\alpha)} \cdot m_\phi^{(\alpha)}(s).$$

Erfüllt T zusätzlich die Voraussetzungen

(i) $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty,$

(ii) $E(W_1^{(\alpha)} \log^+ W_1^{(\alpha)}) < \infty,$

so gilt für alle $s \in [0; d[$

$$e^{-\alpha(nd+s)} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v(s + nd - S_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)} \cdot m_\phi^{(\alpha)}(s).$$

Gibt es monoton fallende, beschränkte und integrierbare Funktionen $g, h : [0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ mit den Eigenschaften

a) $E\left(\sup_{t \in [0; \infty[} \frac{\nu^{(\alpha)}(]t; \infty[)}{g(t)}\right) < \infty,$

b) $E\left(\sup_{t \in [0; \infty[} \frac{e^{-\alpha t} \phi(t)}{h(t)}\right) < \infty,$

so gilt für alle $s \in [0; d[$

$$e^{-\alpha(nd+s)} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v(s + nd - S_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} W^{(\alpha)} \cdot m_\phi^{(\alpha)}(s).$$

Beweis. Dies ist eine Zusammenfassung Theorem 3.2, Theorem 5.1 und Korollar 5.1 in [24]. Die f.s. Endlichkeit von N_T , wie sie die in der Arbeit [24] gefordert wird, ist überflüssig, da Gatzouras seine Resultate auf die entsprechenden Resultate von Nerman ([35]) zurückführt und dort keinerlei Forderungen an N_T gestellt werden. \square

2.2. Anwendung: Exzess-Maß beim gewichteten Verzweigungsprozess

Wir wollen nun die von Nerman und Gatzouras gewonnenen Einsichten anwenden, um für ganz spezielle Charakteristiken Grenzwertaussagen zu treffen.

Definition 2.2.1. Zufälliges Exzess-Maß.

Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$. Für jedes $a \in]0; 1]$ definieren wir das zufällige Maß

$$\mu_a^{(\alpha)} : \Omega \times \mathfrak{B}_{[0;1]} \rightarrow [0; \infty]; (\omega, A) \mapsto \sum_{v \in \mathcal{L}^a(\omega)} L_v^\alpha(w) \delta_{\frac{L_v(w)}{a}}(A),$$

und nennen es das zufällige Exzess-Maß zum Niveau a .

Definition 2.2.2. Asymptotisches Exzess-Maß.

Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$.

- (i) Falls T nicht-arithmetisch ist,
so definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu^{(\alpha)}$ auf $([0; 1], \mathfrak{B}_{[0;1]})$ durch

$$\mu^{(\alpha)}([0; t]) := \frac{1}{E(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_{-\log t}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > s) ds \text{ für alle } t \in [0; 1].$$

- (ii) Falls T arithmetisch mit Spanne d ist,
so definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu^{(\alpha)}$ auf $([0; 1], \mathfrak{B}_{[0;1]})$ durch

$$\mu^{(\alpha)} := \frac{d}{E(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \sum_{m=1}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq md) \delta_{e^{-md}}$$

In beiden Fällen nennen wir $\mu^{(\alpha)}$ das asymptotische Exzess-Maß.

Bemerkung 2.2.3. Es gilt $\mu^{(\alpha)}(\{0\}) = \mu^{(\alpha)}(\{1\}) = 0$, sowie $\mu_a^{(\alpha)}(\{0\}) = \mu_a^{(\alpha)}(\{1\}) = 0$ für alle $a \in]0; 1[$.

Lemma 2.2.4. Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$.

Sei $I \subseteq]0; 1[$ ein Intervall und sei $J := -\log I = \{-\log t \mid t \in I\}$.

- (i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so gilt

$$\mu^{(\alpha)}(I) = \frac{1}{E(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \in J + s) ds.$$

- (ii) Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, so gilt

$$\mu^{(\alpha)}(I) = \frac{d}{E(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \in J + md).$$

Beweis. Wir nehmen oBdA an, dass $I = [a; b]$ gilt. Dann ist $J = [-\log b, -\log a]$.

1.Fall: T sei nicht-arithmetisch.

Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \in J + s) ds \\ &= \int_0^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq -\log b + s) ds - \int_0^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > -\log a + s) ds \\ &= \int_{-\log b}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > s) ds - \int_{-\log a}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > s) ds \\ &= \int_{-\log b}^{-\log a} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > s) ds, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung ergibt.

2.Fall: T sei arithmetisch mit Spanne d . OBdA gelte $d = 1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \in J + m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq m - \log b) - \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > m - \log a) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq m + \lceil -\log b \rceil) - \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > m + \lfloor -\log a \rfloor) \\
&= \sum_{m=\lceil -\log b \rceil}^{\lfloor -\log a \rfloor} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq m) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq m) \delta_{e^{-m}}([a, b]).
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.5. *Positivität nahe Eins.*

Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$.

(i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so gilt $\mu^{(\alpha)}([t; 1]) > 0$ für alle $t \in]0; 1[$.

(ii) Falls T arithmetisch ist mit Spanne d , so gilt $\mu^{(\alpha)}([t; 1]) > 0$ für alle $t \in [0; e^{-d}[$.

Beweis. 1. Fall: T sei nicht-arithmetisch.

Annahme es gibt ein $t \in]0; 1[$ mit $\mu^{(\alpha)}([t; 1]) = 0$. Dann gilt

$$\int_0^{-\log t} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > s) ds = 0.$$

Insbesondere folgt daraus $P(\mathbf{X}^{(\alpha)} > 0) = 0$. Da $\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq 0$ ist, folgt damit $\mathbf{X}^{(\alpha)} = 0$ fast sicher. Dies steht aber im Widerspruch zu $E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) > 0$.

2. Fall: T sei arithmetisch mit Spanne d .

Annahme es gibt ein $t < e^{-d}$ mit $\mu^{(\alpha)}([t; 1]) = 0$. Dann folgt $P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq d) = 0$, was zusammen mit $P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \in d\mathbb{Z}) = 1$ impliziert, dass $\mathbf{X}^{(\alpha)} = 0$ f.s. Dies steht aber im Widerspruch zu $E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) > 0$. □

Im späteren Verlauf benötigen wir noch weitere zufällige Maße, die eine gewichtete Version des Exzess-Maßes darstellen.

Definition und Bemerkung 2.2.6. Gewichtetes zufälliges Exzess-Maß.

Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < E(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$.

Für alle $a \in]0; 1[$ definieren wir

$$\tilde{\mu}_a^{(\alpha)} : \Omega \times \mathfrak{B}_{[0;1]} \rightarrow [0; \infty]; (\omega, A) \mapsto \sum_{v \in \mathcal{L}^a(\omega)} L_v^\alpha(\omega) W^{(\alpha)}(v)(\omega) \delta_{\frac{L_v(\omega)}{a}}(A).$$

Der Unterschied zum normalen Exzess-Maß liegt in dem zusätzlichen Gewicht $W^{(\alpha)}(v)$ für alle Knoten $v \in \mathbb{V}$.

Das folgende Lemma zeigt sehr schön, wie das zufällige Exzess-Maß, das asymptotische Exzess-Maß und der gewöhnliche Exzess des assoziierten additiven Random Walk zusammenhängen.

Lemma 2.2.7. Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$ und $0 < \mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty$.

Sei $t \in [0; 1]$. Für alle $a \in]0; 1[$ gilt

$$\mathbb{E}\left(\mu_a^{(\alpha)}([0; t])\right) = P(\mathbf{S}_{\sigma_b^{(\alpha)}}^{(\alpha)} - b > -\log t),$$

wobei $b := b(a) := -\log a$ gesetzt sei.

(i) Falls T nicht-arithmetisch ist, gilt

$$\mathbb{E}\left(\mu_a^{(\alpha)}([0; t])\right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \mu^{(\alpha)}([0; t]).$$

(ii) Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, gilt

$$\mathbb{E}\left(\mu_{e^{-dn}}^{(\alpha)}([0; t])\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu^{(\alpha)}([0; t]).$$

Beweis. Setze $r := r(t) := -\log t$. Es gilt mit Lemma 1.5.37

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\mu_a^{(\alpha)}([0; t])\right) &= \mathbb{E}\left(\mu_a^{(\alpha)}([0; t])\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathcal{L}^a} L_v^{(\alpha)} \mathbb{1}_{\{L_v/a < t\}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{v \in \mathcal{L}^a} L_v^{(\alpha)} \mathbb{1}_{]b+r; \infty[}(S_v)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{]b+r; \infty[}(\mathbf{S}_{\sigma_b^{(\alpha)}}^{(\alpha)})\right) \\ &= P(\mathbf{S}_{\sigma_b^{(\alpha)}}^{(\alpha)} - b > r). \end{aligned}$$

Der zweite Teil ergibt sich dann aus der Anwendung des 2. Erneuerungstheorems, siehe Paragraph 4 in [2]. \square

Definition 2.2.8. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$. Sei $I \subset]0; \infty[$ ein Intervall.

Die Abbildungen $\phi^{(I)}$ und $\tilde{\phi}^{(I)}$ von $\mathbb{R} \times \Omega$ nach $[0; \infty[$ seien definiert durch

$$\phi^{(I)}(t, \omega) := e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha X_k(\omega)} \mathbb{1}_{t+I}(X_k(\omega)) \mathbb{1}_{[0; \infty[}(t)$$

und

$$\tilde{\phi}^{(I)}(t, \omega) := e^{\alpha t} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha X_k(\omega)} W^{(\alpha)}(k)(\omega) \mathbb{1}_{t+I}(X_k(\omega)) \mathbb{1}_{[0; \infty[}(t).$$

Lemma 2.2.9. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$. Für jedes Intervall $I \subseteq]0; \infty[$ sind $\phi^{(I)}$ und $\tilde{\phi}^{(I)}$ α -ordentliche Charakteristiken zur Kantengewichtsfolge T .

Beweis. Wir definieren die Abbildungen $\chi : \mathbb{R} \times ([0; 1]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{V}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ durch

$$\chi(t, ((x_i(v))_{i \in \mathbb{N}})_{v \in \mathbb{V}}) := e^{\alpha t} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha x_i(\omega)} \mathbb{1}_{t+I}(x_i(\omega)) \mathbb{1}_{[0; \infty[}(t),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$. Dann gilt

$$\phi(t, \omega) = \chi(t, (X(v)(\omega))_{v \in \mathbb{V}})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$.

Wir führen nun den Nachweis, dass ϕ die Eigenschaften (i) – (iii) einer Charakteristik besitzt. Die Abbildung ϕ ist produktmessbar, als Produkt und Summe von produktmessbaren Abbildungen, d.h. ϕ erfüllt (i). Nach Definition gilt $\phi(t, \omega) = 0$, falls $t < 0$ ist, d.h. Eigenschaft (ii) ist erfüllt. Die Pfade des stochastischen Prozesses $(\phi(t))_{t \in \mathbb{R}} := (\phi(t, \cdot))_{t \in \mathbb{R}}$ sind in jedem Punkt entweder linksseitig oder rechtsseitig stetig, daher ist dieser stochastische Prozess nach Lemma 2.1.6 separabel.

Damit ist ϕ eine Charakteristik.

Wir zeigen nun, dass ϕ eine α -ordentliche Charakteristik ist.

Dazu zeigen wir als erstes, dass $t \mapsto \mathbb{E}(\phi(\cdot, t))$ stetig ist.

Wir nehmen an dieser Stelle oBdA an, dass $I = [a; b]$ mit $0 < a < b < \infty$ gilt. Die anderen Arten von Intervallen (offen, linksseitig halboffen, nicht-beschränkt, etc.) lassen sich analog analysieren.

Sei $t \in [0; \infty[$. Dann gilt für alle $h \in]0; b - a[$

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(\phi(t)) - \mathbb{E}(\phi(t+h))| \\ &= \left| e^{\alpha t} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{t+a \leq X_i(\emptyset) \leq t+b\}} \right) - e^{\alpha(t+h)} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{t+a+h \leq X_i(\emptyset) \leq t+b+h\}} \right) \right| \\ &\leq \left| e^{\alpha t} - e^{\alpha(t+h)} \right| \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{t+a \leq X_i(\emptyset) \leq t+b\}} \right) \\ &\quad + e^{\alpha(t+h)} \cdot \left\{ \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{t+a \leq X_i(\emptyset) < t+a+h\}} \right) + \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{t+b < X_i(\emptyset) \leq t+b+h\}} \right) \right\} \\ &\leq \left| e^{\alpha t} - e^{\alpha(t+h)} \right| + e^{\alpha(t+h)} \cdot \{ \bar{\nu}^{(\alpha)}([t+a; t+a+h]) + \bar{\nu}^{(\alpha)}([t+b; t+b+h]) \}. \end{aligned}$$

Analog kann man zeigen

$$\begin{aligned} & |\mathbb{E}(\phi(t)) - \mathbb{E}(\phi(t-h))| \\ &\leq \left| e^{\alpha t} - e^{\alpha(t-h)} \right| + e^{\alpha(t-h)} \cdot \{ \bar{\nu}^{(\alpha)}([t-a-h; t-a]) + \bar{\nu}^{(\alpha)}([t+b-h; t+b]) \}. \end{aligned}$$

Es folgt $\lim_{h \rightarrow 0} |\mathbb{E}(\phi(t)) - \mathbb{E}(\phi(t+h))| = 0$ und damit die Stetigkeit.

Dass ϕ die Eigenschaft (ii) einer α -ordentlichen Charakteristik besitzt, folgt aus der folgenden Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} e^{-\alpha t} \mathbb{E}(\phi(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{X_i(\emptyset) \in t+I\}} \right) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) \mathbb{1}_{\{X_i(\emptyset) \geq k\}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq k) \leq 1 + \mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)}) < \infty. \end{aligned}$$

Man beachte für das vorletzte Ungleichheitszeichen Satz 3.4 in [10].

Für alle $t \in [0; \infty[$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} \phi(s) \right) &= \mathbb{E} \left(\sup_{s \leq t} e^{\alpha s} \sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\phi) \mathbb{1}_{\{X_i(\phi) \in t+I\}} \right) \\ &\leq e^{\alpha t} \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\phi) \right) \\ &= e^{\alpha t} \cdot m_T(\alpha) < \infty. \end{aligned}$$

Daher erfüllt ϕ die Eigenschaft (iii) und ist damit als α -ordentliche Charakteristik erkannt.

Kommen wir nun zu $\tilde{\phi}$.

Der Beweis ähnelt der vorherigen Beweisführung, es gelten die gleichen Argumente. Man braucht im Prinzip nur zu beachten, dass $T(\phi)$ und $(W^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen sind und $\mathbb{E}(W^{(\alpha)}) \leq 1$ gilt.

Damit gilt

$$\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\phi) W^{(\alpha)}(i) f(X_i(\phi)) \right) \leq \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^{(\alpha)}(\phi) f(X_i(\phi)) \right), \quad (2.2.1)$$

für jede messbare Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Zunächst definieren wir uns die Abbildungen $\tilde{\chi} : \mathbb{R} \times ([0; \infty]^{\mathbb{N}})^{\mathbb{V}} \rightarrow [0; \infty]$ durch

$$\tilde{\chi}(t, ((x_i(v))_{i \in \mathbb{N}})_{v \in \mathbb{V}}) := e^{\alpha t} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha x_i(\phi)} \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in \mathbb{V}_n} \prod_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha x_{v_{k+1}}(iv|k)} \right) \mathbb{1}_{t+I}(x_i(\phi)) \mathbb{1}_{[0; \infty[}(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$.

Es gilt dann

$$\tilde{\psi}(t, \omega) = \tilde{\chi}(t, (X(v)(\omega))_{v \in \mathbb{V}})$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und $\omega \in \Omega$.

Aus den selben Gründen, wie bei der Abbildung ϕ , besitzt auch $\tilde{\phi}$ die Eigenschaften (i) – (iii). Wir zeigen nun, dass $\tilde{\psi}$ eine α -ordentliche Charakteristik ist.

Zunächst zeigen wir die Stetigkeit von $t \mapsto \mathbb{E}(\tilde{\psi}(t))$.

Wir nehmen wieder oBdA an, dass $I = [a; b]$ mit $0 < a < b < \infty$ gilt.

Sei $t \in [0; \infty[$. Dann gilt für alle $h \in]0; b - a[$

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t) \right) - \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t+h) \right) \right| \\
&= \left| e^{\alpha t} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{t+a \leq X_i(\varnothing) \leq t+b\}} \right) \right. \\
&\quad \left. - e^{\alpha(t+h)} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{t+a+h \leq X_i(\varnothing) \leq t+b+h\}} \right) \right| \\
&\leq \left| e^{\alpha t} - e^{\alpha(t+h)} \right| \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{t+a \leq X_i(\varnothing) \leq t+b\}} \right) \\
&\quad + e^{\alpha(t+h)} \cdot \left\{ \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{t+a \leq X_i(\varnothing) < t+a+h\}} \right) \right. \\
&\quad \quad \left. + \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{t+b < X_i(\varnothing) \leq t+b+h\}} \right) \right\} =: I.
\end{aligned}$$

Wegen der am Anfang erwähnten Ungleichung (2.2.1) gilt

$$I \leq \left| e^{\alpha t} - e^{\alpha(t+h)} \right| + e^{\alpha(t+h)} \cdot \{ \bar{\mathbf{V}}^{(\alpha)}([t+a; t+a+h]) + \bar{\mathbf{V}}^{(\alpha)}(]t+b; t+b+h]) \}.$$

Analog kann man zeigen

$$\left| \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t) \right) - \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t-h) \right) \right| \leq \left| e^{\alpha t} - e^{\alpha(t+h)} \right| + e^{\alpha(t+h)} \cdot \{ \bar{\mathbf{V}}^{(\alpha)}([t+a-h; t+a]) + \bar{\mathbf{V}}^{(\alpha)}(]t+b-h; t+b]) \}.$$

Es folgt $\lim_{h \rightarrow 0} \left| \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t) \right) - \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t+h) \right) \right| = 0$ und damit die Stetigkeit.

Abschließend zeigen wir, dass $\tilde{\phi}$ die Eigenschaften (ii) und (iii) einer α -ordentlichen Charakteristik besitzt.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} e^{-\alpha t} \mathbf{E} \left(\tilde{\phi}(t) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sup_{k \leq t \leq k+1} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{X_i(\varnothing) \in t+I\}} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) \mathbb{1}_{\{X_i(\varnothing) \geq k\}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \geq k) \leq 1 + \mathbf{E} \left(\mathbf{X}^{(\alpha)} \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} \left(\sup_{s \leq t} \tilde{\phi}(s) \right) &= \mathbf{E} \left(\sup_{s \leq t} e^{\alpha s} \sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) W^{(\alpha)}(i) \mathbb{1}_{\{X_i(\varnothing) \in t+I\}} \right) \\
&\leq e^{\alpha t} \mathbf{E} \left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\varnothing) \right) \\
&= e^{\alpha t} m_T(\alpha) < \infty.
\end{aligned}$$

□

Satz 2.2.10. *Konvergenz der Exzess-Maße.*

Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfunktion mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.
Sei $I \subseteq]0; 1]$ ein Intervall.

(i) Ist T nicht-arithmetisch, so gilt

$$\begin{aligned}\mu_a^{(\alpha)}(I) &\xrightarrow[a \rightarrow 0]{L_1} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I) \\ \text{und} \\ \tilde{\mu}_a^{(\alpha)}(I) &\xrightarrow[a \rightarrow 0]{L_1} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I).\end{aligned}$$

(ii) Ist T arithmetisch mit Spanne d , so gilt

$$\begin{aligned}\mu_{e^{-nd}}^{(\alpha)}(I) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I) \\ \text{und} \\ \tilde{\mu}_{e^{-nd}}^{(\alpha)}(I) &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I).\end{aligned}$$

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass T nicht-arithmetisch ist. Der arithmetische Fall lässt sich analog zeigen.

Sei $a \in]0; 1[$. Setze $b := b(a) := -\log a$.

Wegen Bemerkung 2.2.3 können wir oBdA annehmen, dass $I \subseteq]0; 1[$ gilt. Setze $J := -\log(I) = \{-\log(t) \mid t \in I\}$. Dann ist $J \subseteq]0; \infty[$ ein Intervall.

Der Beweis basiert auf der Anwendung von Theorem 2.1.12 auf die ordentlichen Charakteristiken $\phi^{(J)}$ und $\tilde{\phi}^{(J)}$ und der Bestimmung von $m_{\phi^{(J)}}^{(a)}$ und $m_{\tilde{\phi}^{(J)}}^{(a)}$.

Es gilt

$$\begin{aligned}\mu_a^{(\alpha)}(I) &= \sum_{v \in \mathcal{L}^a} L_v^\alpha \mathbb{1}_{\{L_v \in a \cdot I\}} \\ &= \sum_{v \in \mathbb{V}} \sum_{k=1}^{\infty} L_{vk}^\alpha \mathbb{1}_{\{L_v \geq a\}} \mathbb{1}_{\{L_{vk} < a\}} \mathbb{1}_{\{L_{vk} \in a \cdot I\}} \\ &= \sum_{v \in \mathbb{V}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha S_v} e^{-\alpha X_k(v)} \mathbb{1}_{\{S_v \leq b\}} \mathbb{1}_{\{S_v + X_k(v) > b\}} \mathbb{1}_{\{S_v + X_k(v) \in J + b\}} \\ &= e^{-\alpha b} \sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(b - S_v)} \mathbb{1}_{\{b - S_v \geq 0\}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha X_k(v)} \mathbb{1}_{\{X_k(v) \in J + b - S_v\}} \\ &= e^{-\alpha b} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v^{(J)}(b - S_v).\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}m_{\phi^{(J)}}^{(\alpha)} &= \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^\infty e^{-\alpha s} \mathbb{E}(\phi^{(J)}(s)) ds \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^\infty \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha X_k} \mathbb{1}_{\{X_k \in J + s\}}\right) ds \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^\infty P(\mathbf{X}^{(\alpha)} \in J + s) ds = \mu^{(\alpha)}(I).\end{aligned}$$

Daher gilt mit dem Theorem 2.1.12

$$\mu_a^{(\alpha)}(I) = e^{-\alpha b(a)} \sum_{v \in \mathbb{V}} \phi_v^{(J)}(b(a) - S_v) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{L_1} W^{(\alpha)} m_\infty^{\phi^{(J)}} = W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I).$$

Kommen wir nun zur zweiten Konvergenzaussage.

Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mu}_a^{(\alpha)} \right) (I) &= \sum_{v \in \mathcal{L}^a} L_v^\alpha W^{(\alpha)}(v) \mathbb{1}_{\{L_v \in a \cdot I\}} \\ &= \sum_{v \in \mathbb{V}} \sum_{k=1}^{\infty} L_{vk}^\alpha W^{(\alpha)}(vk) \mathbb{1}_{\{L_v \geq a\}} \mathbb{1}_{\{L_{vk} < a\}} \mathbb{1}_{\{L_{vk} \in a \cdot I\}} \\ &= \sum_{v \in \mathbb{V}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha S_v} e^{-\alpha X_k(v)} W^{(\alpha)}(vk) \mathbb{1}_{\{S_v \leq b\}} \mathbb{1}_{\{S_v + X_k(v) > b\}} \mathbb{1}_{\{S_v + X_k(v) \in J + b\}} \\ &= e^{-\alpha b} \sum_{v \in \mathbb{V}} e^{\alpha(b - S_v)} \mathbb{1}_{\{b - S_v \geq 0\}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha X_k(v)} W^{(\alpha)}(vk) \mathbb{1}_{\{X_k(v) \in J + b - S_v\}} \\ &= e^{-\alpha b} \sum_{v \in \mathbb{V}} \tilde{\phi}_v^{(J)}(b - S_v). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt, da für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $W^{(\alpha)}(k)$ und $X_k(\emptyset)$ unabhängig sind,

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\phi}^{(J)}}^{(\alpha)} &= \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^\infty e^{-\alpha s} \mathbb{E} \left(\tilde{\phi}^{(J)}(s) \right) ds \\ &= \frac{1}{\mathbb{E}(\mathbf{X}^{(\alpha)})} \int_0^\infty \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha X_k(\emptyset)} W^{(\alpha)}(k) \mathbb{1}_{\{X_k(\emptyset) \in J + s\}} \right) ds \\ &= \mu^{(\alpha)}(I). \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\mathbb{E}(W^{(\alpha)}) = 1$ gilt.

Wir erhalten mithilfe des Theorem 2.1.12

$$\tilde{\mu}_a^{(\alpha)}(I) = e^{-\alpha b(a)} \sum_{v \in \mathbb{V}} \tilde{\phi}_v^{(J)}(b(a) - S_v) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{L_1} W^{(\alpha)} m_\infty^{\tilde{\phi}} = W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I).$$

□

Korollar 2.2.11. *Sei T eine f.s.-reguläre Kantengewichtsfolge.*

(i) *Falls T nicht-arithmetisch ist, so gilt für alle $t \in [0; 1]$*

$$\mu_a^{(\alpha)}([0; t]) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{f.s.} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([0; t]) \quad \text{bzw.} \quad \mu_a^{(\alpha)}([t; 1]) \xrightarrow[a \rightarrow 0]{f.s.} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([t; 1]).$$

(ii) *Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, so gilt für alle $t \in]0; 1]$*

$$\mu_{e^{-nd}}^{(\alpha)}([0; t]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([0; t]) \quad \text{bzw.} \quad \mu_{e^{-nd}}^{(\alpha)}([t; 1]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([t; 1]).$$

Beweis. Wir zeigen die Konvergenz für das Intervall $[0; t]$. Für den Beweis der Konvergenz für das Intervall $[t; 1]$ können dieselben Argumente benutzt werden.

Setze $J :=] - \log t, \infty[$.

Man sieht leicht ein, dass der stochastische Prozess $(\phi^{(J)}(s, \cdot))_{s \in \mathbb{R}}$ Pfade in \mathbf{D} besitzt.

Außerdem gilt

$$e^{-\alpha s} \phi^{(J)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha \mathbb{1}_{\{X_i > s - \log t\}} = \nu^{(\alpha)}(]s - \log t; \infty[)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daher kann man im Theorem 2.1.12 bzw. Theorem 2.1.13 die Funktionen g und h gleich wählen. \square

Setzt man in der gleichen Situation wie im Satz 2.2.10 $I = [0; 1]$, so erhält man das folgende Korollar. Wir erinnern in diesem Zusammenhang auch an das Lemma 1.5.39, welches ein ähnliches Resultat liefert.

Korollar 2.2.12. *Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischen Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.*

Dann gilt

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{L_1} W^{(\alpha)}.$$

Sei T eine f.s.-reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischen Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.

Dann gilt

$$W_{\mathcal{L}^\alpha}^{(\alpha)} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 0]{f.s.} W^{(\alpha)}.$$

Exzess-Maß bezüglich eines Teilbaumes

Für spätere Betrachtungen müssen wir die Exzess-Maße auch startend ab einem beliebigen Knoten $v \in \mathbb{V}$ betrachten.

Definition 2.2.13. Sei T eine Kantengewichtsfolge und $\alpha \in]0; \infty[$ mit $0 < m_T(\alpha) < \infty$. Sei $v \in \mathbb{V}$ und $a \in]0; 1]$.

Wir definieren

$$\mu_a^{(\alpha)}(v) : \Omega \times \mathfrak{B}_{[0;1]} \rightarrow [0; \infty]; (\omega, A) \mapsto \sum_{w \in \mathcal{L}^a(v)(\omega)} L_w^\alpha(v)(\omega) \delta_{\frac{L_w(v)(\omega)}{a}}(A)$$

und

$$\tilde{\mu}_a^{(\alpha)}(v) : \Omega \times \mathfrak{B}_{[0;1]} \rightarrow [0; \infty]; (\omega, A) \mapsto \sum_{w \in \mathcal{L}^a(v)(\omega)} L_w^\alpha(v)(\omega) W^{(\alpha)}(vw)(\omega) \delta_{\frac{L_w(v)(\omega)}{a}}(A).$$

Bemerkung 2.2.14. Das Exzess-Maß startend ab v und das gewöhnliche Exzess-Maß haben die „gleiche Verteilung“, dies soll bedeuten

$$\mu_a^{(\alpha)}(v)(A) \stackrel{d}{=} \mu_a^{(\alpha)}(A) \text{ für alle } A \in \mathfrak{B}_{[0;1]}.$$

Daher gelten die gesamten bisher erzielten L_1 -Konvergenzaussagen über $(\mu_a^{(\alpha)})_{a \in]0;1[}$ auch für das Exzess-Maß startend ab v .

Kapitel 3.

Lösungsfunktionen

3.1. Grundlagen

Im Folgenden sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm.

Definition 3.1.1. Seien g, f Funktionen von $[0; \infty[$ nach $[0; 1]$ mit den Eigenschaften

- (i) g, f sind monoton fallend,
- (ii) g, f sind linksseitig stetig,
- (iii) g, f sind rechtsseitig stetig in 0,
- (iv) $g(0) = f(0) = 1$,
- (v) für alle $t \in [0; \infty[$ gilt

$$g(t) = \mathbb{E} \left(f(tC) \cdot \prod_{i \in \mathbb{N}} g(tT_i) \right). \quad (3.1.1)$$

Falls das Paar (g, f) die obigen Eigenschaften besitzt, so bezeichnen wir g als Lösungsfunktion mit Restglied f .

Lösungsfunktionen g mit dem Restglied $f \equiv 1$ bezeichnen wir als homogene Lösungsfunktionen. Anderenfalls bezeichnen wir die Lösungsfunktion als inhomogen.

Wir definieren

$$\mathbb{F}(T, C) := \{g : [0; \infty[\rightarrow [0; 1] \mid \exists f : [0; \infty[\rightarrow [0; 1] : g \text{ ist Lösungsfunktion mit Restglied } f\}.$$

Bemerkung 3.1.2. Homogene Lösungsfunktionen.

- (i) Für eine homogene Lösungsfunktion $g \in \mathbb{F}(T, C)$ gilt

$$g(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{i \in \mathbb{N}} g(tT_i) \right) \text{ für alle } t \in [0; \infty[,$$

d.h. g besitzt keinerlei Abhängigkeit von C .

- (ii) Wählt man $C = 0$, so ist jede Lösungsfunktion $g \in \mathbb{F}(T, C) = \mathbb{F}(T, 0)$ homogen. Ebenso liegt jede homogene Lösungsfunktion in $\mathbb{F}(T, 0)$. Wir sagen daher, dass $\mathbb{F}(T, 0)$ die Menge der homogenen Lösungsfunktionen bzgl. der Kantengewichtsfolge T ist.

Lemma 3.1.3. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$ und $u \in \mathbb{V}$. Dann gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$g(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v(u)C_{uv}) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v(u)) \right). \quad (3.1.2)$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Der Induktionsanfang ergibt sich direkt aus der Definition.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte für alle $t \in [0; \infty[$ die Gleichung (3.1.2) (I.V.).

Sei $t \in [0; \infty[$. Setze $\mathfrak{G}_n := \sigma(L_v(u), v \in \mathbb{V}_{\leq n}; C_{uv}, v \in \mathbb{V}_{< n})$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< n+1}} f(tL_v(u)C_{uv}) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_{n+1}} g(tL_v(u)) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< n}} f(tL_v(u)C_{uv}) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} \left(f(tL_v(u)C_{uv}) \prod_{k \in \mathbb{N}} g(tL_{vk}(u)) \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< n}} f(tL_v(u)C_{uv}) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} \left(f(tL_v(u)C_{uv}) \prod_{k \in \mathbb{N}} g(tL_v(u)T_k(uv)) \right) \middle| \mathfrak{G}_n \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< n}} f(tL_v(u)C_{uv}) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} \mathbb{E} \left(\left(f(tL_v(u)C_{uv}) \prod_{k \in \mathbb{N}} g(tL_v(u)T_k(uv)) \right) \middle| \mathfrak{G}_n \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< n}} f(tL_v(u)C_{uv}) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v(u)) \right) \\
&\stackrel{(I.V.)}{=} g(t).
\end{aligned}$$

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, da g der Funktionalgleichung 3.1.1 gehorcht. \square

Das Lemma 3.1.3 wollen wir nun verallgemeinern, indem wir die „deterministische Stopplinie“ \mathbb{W}_n durch eine geeignete Stopplinie ersetzen. Als geeignet stellen sich die f.s. geschlossenen und f.s. beschränkten Stopplinien heraus.

Diese Verallgemeinerung benötigt aber eine gewisse Vorbereitung, die sich hier nun direkt anschließt.

Definition 3.1.4. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$. Dann definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $v \in \mathbb{V}$ und $t \in [0; \infty[$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^{(v)}(t) &:= \prod_{w \in \mathbb{V}_n} g(tL_w(v)), \\
\mathcal{F}_n^{(v)}(t) &:= \prod_{w \in \mathbb{V}_{< n}} f(tL_w(v) \cdot C_{vw}).
\end{aligned}$$

Lemma 3.1.5. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$.

Sei \mathcal{L} eine Stopplinie und $v \in \mathbb{V}$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für alle $t \in [0; \infty[$

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \cdot \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) = \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} g(tL_v).$$

Beweis. Wir definieren die Abbildung

$$q : [0; \infty[\rightarrow [0; 1]; l \mapsto \mathbb{E} \left(\prod_{w \in \mathbb{V}_{< n}} f(tlL_w(v)C_{vw}) \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tlL_w(v)) \right)$$

Dann gilt nach Lemma 1.5.20

$$\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \cdot \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) = \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} q(tL_v).$$

Nach Lemma 3.1.3 gilt $q(l) = g(tl)$ für alle $l \in [0; \infty[$ und zusammen mit der vorherigen Gleichung ist dann das Lemma bewiesen. \square

Lemma 3.1.6. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [0; \infty[$

$$\mathbb{E} \left(\prod_{\mathbb{V}_{<n}} \mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) = \prod_{\mathbb{V}_{<n}} \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{v \in \mathcal{L}\}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right).$$

Beweis. Für alle $t \in [0; \infty[$, $k \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{V}$ gilt

- $\mathcal{F}_k^{(v)}(t)$ ist $\sigma(\mathfrak{A}_k(v) \cup \mathfrak{C}_{k-1}(v))$ -messbar,
- $\mathcal{G}_k^{(v)}(t)$ ist $\sigma(\mathfrak{A}_k(v))$ -messbar.

Dabei ist $C_k(v) := \sigma(C_{vu}; u \in \mathbb{V}_k)$, siehe auch Definition 1.6.2.

Sei $M \subseteq \mathbb{V}$ eine Menge von Knoten mit für alle $v \neq w \in M$ gilt $v \perp w$. Dann ist die Familie von σ -Algebren $(\sigma(\mathfrak{A}_k \cup \mathfrak{C}_{k-1}(v)))_{v \in M}$ stochastisch unabhängig und damit ist auch die Familie $(\mathcal{F}_k^{(v)}(t) \cdot \mathcal{G}_k^{(v)}(t))_{v \in M}$ stochastisch unabhängig.

Die Behauptung ergibt sich aus einer erneuten Anwendung von Lemma 1.5.20 unter der Beobachtung, dass für zwei Knoten v, w aus einer Linie $v \perp w$ gilt. \square

Lemma 3.1.7. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$, sowie \mathcal{L} eine f.s. geschlossene Stopplinie.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in]0; \infty[$

$$\mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) = \prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L} \wedge n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} g(tL_v).$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0; \infty[$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) &= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v \not< \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \\ &= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} \prod_{\substack{w \in \mathbb{V}_{<n-|v|} \\ w < \mathcal{L}}} f(tL_v L_w(v) C_{vw}) \\ &= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v). \end{aligned}$$

Es gilt auch

$$\begin{aligned} \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v) &= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v < \mathcal{L}}} g(tL_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v \not< \mathcal{L}}} g(tL_v) \\ &= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v < \mathcal{L}}} g(tL_v) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_{<n} \\ u < \mathcal{L}}} \prod_{w \in \mathbb{V}_{n-|u|}} g(tL_u L_w(u)) \\ &= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v < \mathcal{L}}} g(tL_v) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_{<n} \\ u < \mathcal{L}}} \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_u) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_n \\ u < \mathcal{L}}} g(tL_u). \end{aligned}$$

Somit können wir also schließen

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v < \mathcal{L}}} g(tL_v) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_{<n} \\ u \in \mathcal{L}}} \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_u) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_n \\ u \in \mathcal{L}}} g(tL_u) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \\
&= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v < \mathcal{L}}} g(tL_v) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_n \\ u \in \mathcal{L}}} g(tL_u) \cdot \mathbb{E} \left(\prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v \in \mathcal{L}}} \mathcal{F}_{n-|v|}^{(v)}(tL_v) \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_{<n} \\ u \in \mathcal{L}}} \mathcal{G}_{n-|v|}^{(v)}(tL_u) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \\
&= \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_{<n} \\ v < \mathcal{L}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{\substack{v \in \mathbb{V}_n \\ v < \mathcal{L}}} g(tL_v) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_n \\ u \in \mathcal{L}}} g(tL_u) \cdot \prod_{\substack{u \in \mathbb{V}_{<n} \\ u \in \mathcal{L}}} g(tL_u) \\
&= \prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L} \wedge n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} g(tL_v).
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.1.8. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$ und \mathcal{L} eine f.s. geschlossene und f.s. beschränkte Stopplinie. Dann gilt für alle $t \in]0; \infty[$

$$g(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{v < \mathcal{L}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L}} g(tL_v) \right). \quad (3.1.3)$$

Beweis. Sei $t \in]0; \infty[$. Da \mathcal{L} f.s. geschlossen ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} g(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L} \wedge n}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} g(tL_v) \right).
\end{aligned}$$

Da \mathcal{L} f.s. beschränkt ist, gilt sowohl

$$\prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} g(tL_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \prod_{v \in \mathcal{L}} g(tL_v),$$

als auch

$$\prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} f(tL_v C_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \prod_{v \in \mathcal{L}} f(tL_v C_v).$$

Deshalb folgt die Behauptung aus dem Satz von der dominierten Konvergenz. Dabei sei daran erinnert, dass $g(t) \leq 1$ und $f(t) \leq 1$ laut Definition für alle $t \in [0; \infty[$ gilt. □

Bemerkung 3.1.9. Sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge und $a \in]0; 1[$. Dann ist \mathcal{L}^a f.s. geschlossen und f.s. beschränkt. Also haben wir in diesem Fall die Darstellung (3.1.3) für die Stopplinie \mathcal{L}^a .

Bemerkung und Definition 3.1.10. Für jede Lösungsfunktion $g \in \mathbb{F}(T, C)$ sei

$$\text{supp}(g) := \overline{\{t \geq 0 \mid g(t) > 0\}}$$

der Träger von g .

Da g monoton fallend ist, ist $\text{supp}(g)$ ein abgeschlossenes Intervall.

Da g rechtsseitig stetig in 0 ist und $g(0) = 1$ gilt, ist $\text{supp}(g)$ nicht einelementig.

Wir definieren also $t_0(g) := \max(\text{supp}(g))$. Dann gilt

$$g(t) > 0 \text{ für alle } t < t_0(g) \text{ und } g(t) = 0 \text{ für alle } t \geq t_0(g).$$

Insbesondere ist auf dem Intervall $[0; t_0(g)[$ die Funktion $t \mapsto \log g(t)$ endlich.

Korollar 3.1.11. Lösungsfunktionen und das Exzess-Maß.

Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge.

Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$. Dann gilt

$$g(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \int_{[0;1]} \frac{-\log g(tax)}{(tax)^\alpha} \mu_a^{(\alpha)}(dx)) \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$ und $a \in]0; 1[$ mit $t \cdot a < t_0(g)$.

Beweis. Für alle $t \in]0; \infty[$ gilt

$$g(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L}^a} g(tL_v) \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L}^a} \mathbb{1}_{\{L_v < a\}} g(tL_v) \right).$$

Ist $t \cdot a < t_0(g)$, so gilt $g(t \cdot a) > 0$ und wir können daher folgern, dass auf der Menge $\{L_v < a\}$ die Ungleichung $g(tL_v) > 0$ gilt.

D.h. es gilt für alle $t \in]0; \infty[$ mit $t \cdot a < t_0(g)$

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{L}^a} g(tL_v) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \exp\left(\sum_{v \in \mathcal{L}^a} \log g(tL_v)\right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \exp\left(-t^\alpha \sum_{v \in \mathcal{L}^a} \frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha\right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{\mathcal{L}^a}} f(tL_v C_v) \cdot \exp\left(-t^\alpha \cdot \int_{[0;1]} \frac{-\log g(tax)}{(tax)^\alpha} \mu_a^{(\alpha)}(dx)\right) \right). \end{aligned}$$

□

Definition 3.1.12. α -reguläre Lösungsfunktionen.

Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$ und $\alpha > 0$.

(i) Es sei T nicht-arithmetisch.

Die Lösungsfunktion g nennen wir α -regulär, falls

$$-\log g(x) = \mathcal{O}(x^\alpha) \text{ für } x \rightarrow 0; x \in]0; t_0(g)[$$

gilt.

(ii) Es sei T arithmetisch mit Spanne d . Setze $\theta := e^{-d}$.

Dann heißt die Lösungsfunktion g α -regulär, falls für alle $t \in]0; \infty[$

$$-\log g(t\theta^n) = \mathcal{O}(t^\alpha \theta^{\alpha n}) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

gilt.

Das inhomogene Restglied

Ist $f : [0; \infty[\rightarrow [0; 1]$ eine monoton fallende und linksseitig stetige Funktion mit $f(0) = 1$, so ist die Folge $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $t \in [0; \infty[$ monoton fallend. Daher existiert der f.s. Grenzwert dieser Folge.

Definition 3.1.13. Sei $f : [0; \infty[\rightarrow [0; 1]$ eine monoton fallende und linksseitig stetige Funktion mit $f(0) = 1$.

Dann definieren wir für alle $t \in [0; \infty[$

$$Z(t) := Z^{T,C}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v).$$

Lemma 3.1.14. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0; 1[^{\mathbb{N}}$ mit $a_n \searrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Ferner sei $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von f.s. beschränkten Stoppllinien mit

$$\mathcal{L}^{a_n} \leq \mathcal{M}_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$\prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{M}_n}} f(tL_v C_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} Z^{T,C}(t).$$

Beweis. Sei $t \in [0; \infty[$. Wir setzen $G_\infty := Z^{T,C}(t)$.

Da $\mathcal{L}^{a_n} \leq \mathcal{M}_n$ und \mathcal{M}_n fast sicher beschränkt ist, gilt

$$\prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L}^{a_n}}} f(tL_v C_v) \geq \prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{M}_n}} f(tL_v C_v) \geq G_\infty$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Daher reicht es aus

$$\prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L}^{a_n}}} f(tL_v C_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} G_\infty$$

zu zeigen.

Dazu stellen wir zunächst fest, dass die Folge $\left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L}^{a_n}}} f(tL_v C_v) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist und somit der f.s. Grenzwert \overline{G}_∞ existiert.

Sei $\omega \in \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^*(\omega) = 0\}$.

Mittels des Satzes von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \mathbb{V}_{<\mathcal{L}^{a_n}(\omega)}} \log f(tL_v(\omega) C_v(\omega)) &= \sum_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\mathbb{V}_{<\mathcal{L}^{a_n}(\omega)}}(v) \log f(tL_v(\omega) C_v(\omega)) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sum_{v \in \mathbb{V}} \log f(tL_v(\omega) C_v(\omega)) \\ &= \log G_\infty(\omega). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \overline{G}_\infty &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{v \in \mathcal{L}^{a_n}} \log f(tL_v C_v) \right) \\ &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in \mathcal{L}^{a_n}} \log f(tL_v C_v) \right) = \exp(\log G_\infty) = G_\infty \text{ f.s. } . \end{aligned}$$

□

3.2. Regularitätssatz

In diesem Abschnitt sei $T = (T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm.

Es gilt daher wie in der Definition beschrieben

- (i) $0 \leq T_i \leq 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$,
- (ii) T besitzt einen charakteristischen Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$,
- (iii) $E(N) > 1$,
- (iv) $-\infty < E\left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)}\right) < 0$,
- (v) $E\left(W_1^{(\alpha)} \log^+ W_1^{(\alpha)}\right) < \infty$.

Satz 3.2.1. *Regularitätssatz.*

Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$.

(i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so gilt

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} < \infty.$$

(ii) Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, so gilt mit $\theta := e^{-d}$

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta^n \in]0; t_0(g)/t[}} \frac{-\log g(t \cdot \theta^n)}{(t \cdot \theta^n)^\alpha} < \infty,$$

für jedes $t \in]0; \infty[$.

Kurz gefasst, g ist α -regulär.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Behauptung für den Fall, dass T nicht-arithmetisch ist und dies per Widerspruchsbeweis.

Es gelte also

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} = \infty. \quad (3.2.1)$$

Sei $\delta \in]0; 1[$. Weiterhin sei $t \in]0; t_0(g)[$ mit $g(t) > q_T(\alpha) = P(W^{(\alpha)} = 0)$. Ein solches t existiert, da g rechtsseitig stetig in Null ist und $g(0) = 1$ gilt.

Wegen der Annahme (3.2.1) können wir eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wählen mit den Eigenschaften

- $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,
- $\frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t \delta)^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ und
- $0 < t \cdot a_n < t_0(g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\xi_n := (t\delta)^\alpha \frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t \delta)^\alpha}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ eine Stetigkeitsstelle der Verteilungsfunktion $F_{W^{(\alpha)}\mu^{(\alpha)}([\delta;1])}$.

Wir untersuchen die Abbildung $x \mapsto \frac{-\log g(a_n t x)}{(a_n t x)^\alpha}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ genauer.

Da die Abbildung $-\log g$ monoton steigend und positiv ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [\delta; 1]$

$$\begin{aligned} \frac{-\log g(a_n t x)}{(a_n t x)^\alpha} &\geq \frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t \delta)^\alpha} \\ &\geq \frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t)^\alpha} = \delta^\alpha \frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t \delta)^\alpha}. \end{aligned}$$

Wir können dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgern

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< \mathcal{L}^{a_n}}} f(tL_v C_v) \cdot \exp(-t^\alpha \int_{[0;1]} \frac{-\log g(a_n x t)}{(a_n x t)^\alpha} \mu_{a_n}^{(\alpha)}(dx)) \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\exp(-t^\alpha \int_{[0;1]} \frac{-\log g(a_n x t)}{(a_n x t)^\alpha} \mu_{a_n}^{(\alpha)}(dx)) \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\exp(-t^\alpha \int_{[\delta;1]} \frac{-\log g(a_n x t)}{(a_n x t)^\alpha} \mu_{a_n}^{(\alpha)}(dx)) \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\exp(-(t\delta)^\alpha \int_{[\delta;1]} \frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t \delta)^\alpha} \mu_{a_n}^{(\alpha)}(dx)) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp(-(t\delta)^\alpha \frac{-\log g(a_n t \delta)}{(a_n t \delta)^\alpha} \mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1])) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp(-\xi_n \mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1])) \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\exp(-\xi_n \mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1])) \mathbb{1}_{\{\mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1]) > \varepsilon\}} \right) + P(\mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1]) \leq \varepsilon) \\ &\leq e^{-\xi_n \varepsilon} + P(\mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1]) \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz

$$\mu_{a_n}^{(\alpha)}([\delta; 1]) \xrightarrow{a \rightarrow 0} W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([\delta; 1])$$

können wir mit Satz 36.5 in [3]

$$g(t) \leq P(W^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}([\delta; 1]) \leq \varepsilon)$$

folgern.

Es folgt

$$g(t) \leq P(W^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}([\delta; 1]) \leq \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} P(W^{(\alpha)} = 0) < g(t),$$

da $\mu^{(\alpha)}([\delta; 1]) > 0$ gilt.

Dies liefert den gewünschten Widerspruch.

Kommen wir nun zum arithmetischen Fall, den wir nur kurz skizzieren werden.

Wir nehmen an, dass

$$\limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta^n \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(x\theta^n)}{(x\theta^n)^\alpha} = \infty. \quad (3.2.2)$$

Sei $r \in \mathbb{N}$ so, dass $\mu^{(\alpha)}([\theta^r; 1]) > 0$ gilt.

Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $g(\theta^m) > q_T(\alpha)$. Ein solches $m \in \mathbb{N}$ existiert, da $\theta < 1$, g rechtsseitig stetig und $g(0) = 1$ ist.

Wegen der Annahme (3.2.2) können wir eine Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit den Eigenschaften

- $\frac{-\log g(t\theta^{n_k+r})}{t^\alpha \cdot \theta^{\alpha(n_k+r)}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ und
- $t \cdot \theta^{n_k+r} < t_0(g)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir setzen

$$\xi_k := t^\alpha \cdot \theta^{\alpha(m+r)} \cdot \frac{-\log g(t \cdot \theta^{n_k+r})}{t^\alpha \cdot \theta^{\alpha(n_k+r)}}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wie im arithmetischen Fall gilt dann, für jede Stetigkeitsstelle $\varepsilon > 0$ von $F_{W^{(\alpha)}\mu^{(\alpha)}}([\theta^r; 1])$

$$\begin{aligned} g(t \cdot \theta^m) &\leq \mathbb{E} \left(\exp(-t^\alpha \cdot \theta^{\alpha(m+r)}) \cdot \frac{-\log g(t \cdot \theta^{n_k+r})}{t^\alpha \cdot \theta^{\alpha(n_k+r)}} \mu_{\theta^{n_k}}([\theta^r; 1]) \right) \\ &\leq e^{-\xi_k \varepsilon} + P(\mu_{\theta^{n_k}}[\theta^r; 1] \leq \varepsilon). \end{aligned}$$

Daraus lässt sich, wie im arithmetischen Fall, ein Widerspruch zeigen. □

Korollar 3.2.2. *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 3.2.1.*

- (i) *Es gelte, dass T nicht-arithmetisch ist.
Für jedes $\gamma \in]0; \infty[$ mit $\gamma < t_o(g)$ gilt*

$$\sup_{x \in]0; \gamma]} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} < \infty.$$

- (ii) *Es gelte, dass T arithmetisch mit Spanne d ist.
Für alle $t \in]0; \infty[$ und für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $t \cdot \theta^m < t_0(g)$ gilt*

$$\sup_{n \geq m} \frac{-\log g(t\theta^n)}{(t\theta^n)^\alpha} < \infty.$$

Beweis. Wir schränken uns auf den nicht-arithmetischen Fall ein, der arithmetische Fall kann mit ähnlichen Argumenten gezeigt werden.

Auch diesmal führen wir einen Widerspruchsbeweis.

Dazu nehmen wir an, dass für ein $\gamma < t_o(g)$ obiger Ausdruck nicht endlich ist, d.h.

$$\sup_{x \in]0; \gamma]} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} = \infty.$$

Wir können daher eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $]0; \gamma]$ wählen mit

$$\frac{-\log g(a_n)}{a_n^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a_\infty$.

Wir zeigen nun, dass $a_\infty = 0$ gilt, wobei wir vorerst annehmen, dass dies nicht der Fall ist.

Dann gilt sowohl

$$\frac{-\log g(a_\infty)}{a_\infty^\alpha} < \infty$$

als auch für den linksseitigen Grenzwert

$$\frac{-\log g(a_\infty -)}{(a_\infty -)^\alpha} < \infty.$$

Wir können dann eine Teil-Teilfolge $(a_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ finden mit

$$a_{n_{k_l}} \leq a_\infty \text{ für alle } l \in \mathbb{N} \text{ oder } a_{n_{k_l}} \geq a_\infty \text{ für alle } l \in \mathbb{N}$$

OBdA nehmen wir an, dass der erste Fall eintritt.

Es folgt

$$\infty > \frac{-\log g(a_\infty)}{a_\infty^\alpha} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{-\log g(a_{n_{k_l}})}{a_{n_{k_l}}^\alpha} = \infty.$$

Dies liefert den gewünschten Widerspruch und damit gilt $a_\infty = 0$.

Daher haben wir eine gegen Null konvergente Folge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gefunden, mit $\frac{-\log g(a_{n_k})}{a_{n_k}^\alpha} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$.

Nun können wir durch ein ähnliches Argument wie im Beweis des Satzes 3.2.1 zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. □

Definition 3.2.3. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$.

Wir definieren die Abbildung

$$c^* : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[; t \mapsto \begin{cases} \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta^n \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(t\theta^n)}{(t\theta^n)^\alpha} & , t > 0 \\ c^*(1) & , t = 0 \end{cases}.$$

Lemma 3.2.4. Die Abbildung c^* ist eine positive, multiplikativ θ -periodisch Funktion. Die Abbildung $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$ ist monoton wachsend.

Beweis. Da die Abbildung $-\log g$ positiv ist, gilt dies auch für c^* .

Für alle $t \in]0; \infty[$ gilt

$$c^*(t\theta) = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta^n \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(t\theta\theta^n)}{(t\theta\theta^n)^\alpha} = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta^n \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(t\theta^{n+1})}{(t\theta^{n+1})^\alpha} = c^*(t).$$

Also ist c^* multiplikativ θ -periodisch.

Da für alle $t \in]0; \infty[$

$$t^\alpha c^*(t) = \limsup_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta^n \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}}$$

gilt und die Abbildung $-\log g$ monoton wachsend ist, ist auch $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$ monoton wachsend. □

3.3. Darstellungssatz für Lösungsfunktionen

In diesem Abschnitt sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischen Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$ und C ein positiver Tollterm. Es gilt daher wie in der Definition beschrieben

- (i) für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq T_i \leq 1$,
- (ii) T besitzt einen charakteristischen Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$,
- (iii) $E(N) > 1$, $N \geq 1$ f.s.,
- (iv) $-\infty < E \left(\sum_{v \in \mathbb{V}_1} L_v^{(\alpha)} \log L_v^{(\alpha)} \right) < 0$,
- (v) $E \left(W_1^{(\alpha)} \log^+ W_1^{(\alpha)} \right) < \infty$.

3.3.1. Grundlagen

In diesem Unterabschnitt konstruieren wir eine spezielle Stopplinien-Folge auf der der Beweis des Darstellungssatz beruht. Diese Konstruktion und deren Analyse ist leider sehr technisch, weswegen wir gleich nach der Definition ein paar Erklärungen geben.

Sei \mathcal{F}_0 die Menge aller Folgen $(a_k)_{k \in \overline{\mathbb{N}}}$ mit den Eigenschaften

- (i) $a_k \in]0; 1[$ für alle $k \in \mathbb{N}$,
- (ii) $a_\infty = 0$,
- (iii) $(a_k)_{k \in \overline{\mathbb{N}}}$ ist streng monoton fallend,
- (iv) $\inf_{k \in \mathbb{N}} a_k = 0$.

Definition 3.3.1. Für jedes $x \in \partial\mathbb{W}$ und alle $a, c \in \mathcal{F}_0$ definiere rekursiv die folgenden Stoppzeiten

$$\begin{aligned} \tau_x^{0,c,a} &:= 0, \\ \varrho_x^{0,c,a} &:= 0, \\ \varrho_x^{1,c,a} &:= \inf \{k \in \mathbb{N} \mid c_k < a_1\}, \\ \tau_x^{1,c,a} &:= \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid L_{x|k} < c_{\varrho_x^{1,c,a}} \right\}. \end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\varrho_x^{n+1,c,a} := \begin{cases} \inf \{k > \varrho_x^{n,c,a} \mid c_k < a_{n+1} \cdot L_{x|\tau_x^{n,c,a}}\} & , L_{x|\tau_x^{n,c,a}} > 0 \\ \varrho_x^{n,c,a} & , L_{x|\tau_x^{n,c,a}} = 0 \end{cases},$$

und

$$\tau_x^{n+1,c,a} := \inf \left\{ k \geq \tau_x^{n,c,a} \mid L_{x|k} < c_{\varrho_x^{n+1,c,a}} \right\}.$$

Wie üblich benutzen wir dabei die Konvention $\inf \emptyset = \infty$.

Notation 3.3.2. Im Folgendem unterdrücken wir aus Gründen der Übersichtlichkeit die Abhängigkeit von den Folgen $a, c \in \mathcal{F}_0$ in den Beweisen.

Anhand der Abbildung 3.1 wollen wir diese Stoppzeiten, für eine festes $x \in \partial\mathbb{W}$, näher erläutern und stellen die formalen Beweise für einen Moment zurück.

Zunächst fällt auf, dass eine Abhängigkeit von zwei Folgen a und c besteht. Mit der Folge a können wir die Quotienten $\frac{c_{\varrho_x^{n+1}}}{L_{x|\tau_x^n}}$ ($n \in \mathbb{N}$) in dem Sinne kontrollieren, dass diese jeweils durch a_{n+1} beschränkt sind.

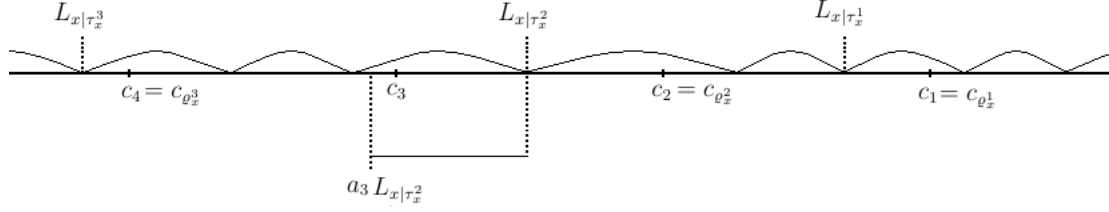


Abbildung 3.1.: Beispiel für eine Realisierung der Leiterhöhen $L_x|_{\tau_x^n}$; $n \in \mathbb{N}$

Die Folge c gibt verschiedene Niveaus vor, die wir mit dem multiplikativen Random Walk $(L_x|_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unterschreiten wollen, dabei findet eine gewisse Auswahl der Folgenglieder c_k ; $k \in \mathbb{N}$ statt. Die Stopzeit τ_x^n ist die Erstaustrittszeit für das zufällige Niveau $c_{\rho_x^n}$. $L_x|_{\tau_x^n}$ ist so etwas wie die n -te Leiterhöhe. Die Stopzeit ρ_x^{n+1} garantiert uns, dass $c_{\rho_x^{n+1}}$ weit genug weg von $L_x|_{\tau_x^n}$ liegt, d.h. der Quotient $\frac{c_{\rho_x^{n+1}}}{L_x|_{\tau_x^n}}$ ist echt kleiner als a_{n+1} . In der Skizze 3.1 sieht man, dass eine Auswahl getroffen wird. Das Niveau c_3 liegt zu dicht an $L_x|_{\tau_x^2}$, so dass wir es ignorieren und mittels ρ_x^3 ein kleineres Niveau (hier c_4) auswählen.

Wenn $L_x|_{\tau_x^n} = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, so gilt $\rho_x^{n+1} = \rho_x^n$, was zur Folge hat, dass in diesem Fall $\tau_x^n = \tau_x^{n+1}$ ist. Diese Eigenschaft ist wichtig, da sie uns garantiert, dass später die bzgl. der Familie τ_x^n ; $n \in \mathbb{N}$ definierten Stoppllinien keine „Löcher“ enthalten, was bedeuten soll, dass diese Stoppllinien f.s. geschlossen sind. Leider ergeben sich dadurch unangenehme Fallunterscheidungen, die sich bei dieser Konstruktion aber nicht vermeiden lassen.

Bemerkung 3.3.3. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $x \in \partial\mathbb{W}$.

Als direkte Folgerungen aus den Definitionen halten wir folgende Aussagen fest.

- (i) Die Folge $(\tau_x^{n,c,a})_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton steigend.
- (ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $\tau_x^{n,c,a} < \infty$ die Ungleichung $L_x|_{\tau_x^{n,c,a}} < c_{\rho_x^{n,c,a}}$.

Bemerkung 3.3.4. Seien $x \in \partial\mathbb{W}$ und $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Dann gilt

$$\rho_y^{1,c,a} = \rho_x^{1,c,a} \text{ für alle } y \in \partial\mathbb{W}.$$

Das heißt, die Konstante $\rho_x^{1,c,a} := \rho_x^{1,c,a}$ ist unabhängig vom gewählten Randknoten x . Da $\inf_{k \in \mathbb{N}} c_k = 0$ und $a_1 > 0$ ist, gilt $\rho_x^{1,c,a} < \infty$.

Lemma 3.3.5. Für alle $a, c \in \mathcal{F}_0$, $x \in \partial\mathbb{W}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\rho_x^{n,c,a} < \infty$.

Beweis. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$, $x \in \partial\mathbb{W}$.

Wir zeigen die Behauptung per Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Der Induktionsanfang ergibt sich aus Bemerkung 3.3.4.

Induktionschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\rho_x^n < \infty$ (I.V.).

1. Fall: $L_x|_{\tau_x^n} = 0$. Dann ist $\rho_x^{n+1} = \rho_x^n < \infty$.

2. Fall: $L_x|_{\tau_x^n} > 0$.

Da $c = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist, gilt $\inf_{k > \rho_x^n} c_k = \inf_{k \in \mathbb{N}} c_k = 0$. Dabei wurde ausgenutzt, dass $\rho_x^n < \infty$ nach (I.V.) gilt. Wegen $a_{n+1} \cdot L_x|_{\tau_x^n} > 0$ folgt dann $\rho_x^{n+1} < \infty$. \square

Lemma 3.3.6. Seien $x \in \partial\mathbb{W}$ und $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau_x^{n,c,a} < \infty$ gilt

$$\rho_x^{m,c,a} = \begin{cases} \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid c_k < a_m \cdot L_x|_{\tau_x^{m-1,c,a}} \right\} & , L_x|_{\tau_x^{m-1,c,a}} > 0 \\ \rho_x^{m-1,c,a} & , L_x|_{\tau_x^{m-1,c,a}} = 0 \end{cases} \quad (3.3.1)$$

für alle $m \in \{1, \dots, n+1\}$.

Man beachte, dass das Infimum im Gegensatz zur Definition über die gesamten natürlichen Zahlen gebildet wird.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau_x^n < \infty$. Dann gilt wegen Monotonie $\tau_x^m < \infty$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

Wir zeigen die Folgerung per Induktion nach $m \in \{1, \dots, n\}$.

Induktionsanfang: Nach Definition von ϱ_x^1 gilt (3.3.1) im Falle $m = 1$.

Induktionsschluss: Sei $m \in \{1, \dots, n\}$. Es gelte (3.3.1) für dieses m (I.V.).

1. Fall: $L_{x|\tau_x^m} = 0$.

Dann gilt $\varrho_x^{m+1} = \varrho_x^m$ nach Definition, woraus sich der Induktionsschluss automatisch ergibt.

2. Fall: $L_{x|\tau_x^m} > 0$.

Um die Gleichheit

$$\inf \{k > \varrho_x^m \mid c_k < a_{m+1} \cdot L_{x|\tau_x^m}\} = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid c_k < a_{m+1} \cdot L_{x|\tau_x^m}\}$$

zu zeigen, reicht es aus

$$c_l \geq a_{m+1} \cdot L_{x|\tau_x^m}$$

für alle $l \in \{1, \dots, \varrho_x^m\}$ zu zeigen.

Da $\varrho_x^m < \infty$, gilt

$$c_{\varrho_x^m} < a_m \cdot L_{x|\tau_x^{m-1}}$$

und

$$c_l \geq a_m \cdot L_{x|\tau_x^{m-1}} \text{ für alle } l < \varrho_x^m.$$

Damit gilt $c_l \geq a_m \cdot L_{x|\tau_x^{m-1}} > a_{m+1} \cdot L_{x|\tau_x^m}$ für alle $l < \varrho_x^m$.

Da $\tau_x^m < \infty$ ist, gilt $L_{x|\tau_x^m} < c_{\varrho_x^m}$ und somit $a_{m+1} \cdot L_{x|\tau_x^m} < L_{x|\tau_x^m} < c_{\varrho_x^m}$. □

Lemma 3.3.7. *Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \partial W$.*

Dann gelten folgende Beziehungen zwischen den Aussagen

(i) $L_{x|\tau_x^{n,c,a}} = 0$,

(ii) $\varrho_x^{n,c,a} = \varrho_x^{n+1,c,a}$,

(iii) $\tau_x^{n+1,c,a} = \tau_x^{n,c,a}$,

(i) \iff (ii) \implies (iii).

Falls zusätzlich $\tau_x^n < \infty$ gilt, so sind (i), (ii) und (iii) äquivalent.

Beweis. (i) \iff (ii) ergibt sich aus der Definition unter Beachtung von $\varrho_x^{n+1} < \infty$.

Wir zeigen (i) \implies (iii) Es gelte $L_{x|\tau_x^n} = 0$.

Dann gilt $\varrho_x^{n+1} = \varrho_x^n$. Es folgt $\tau_x^{n+1} = \inf \{k \geq \tau_x^n \mid L_{x|k} < c_{\varrho_x^n}\}$.

1. Fall: $\tau_x^n < \infty$.

Dann gilt $0 = L_{x|\tau_x^n} < c_{\varrho_x^n}$. Daraus folgt $\tau_x^{n+1} = \tau_x^n$.

2. Fall: $\tau_x^n = \infty$.

Dann gilt $\tau_x^{n+1} \geq \tau_x^n = \infty$, also $\tau_x^{n+1} = \tau_x^n = \infty$.

Wir zeigen, $\tau_x^n < \infty$ und $\tau_x^{n+1} = \tau_x^n$ impliziert (i), per Widerspruchsbeweis.

Es gelte $\tau_x^n < \infty$ und $\tau_x^{n+1} = \tau_x^n$ und wir nehmen an, dass $L_{x|\tau_x^n} > 0$ gilt.

Dann gilt $\varrho_x^{n+1} = \inf \{k > \varrho_x^n \mid c_k < a_{n+1} \cdot L_{x|\tau_x^n}\}$.

Es folgt

$$L_{x|\tau_x^{n+1}} < c_{\varrho_x^{n+1}} < a_{n+1} \cdot L_{x|\tau_x^n} < L_{x|\tau_x^n}.$$

Damit folgt $\tau_x^{n+1} > \tau_x^n$ und dies liefert den gewünschten Widerspruch. □

Korollar 3.3.8. Falls $\varrho_x^{n,c,a} = \varrho_x^{n+1,c,a}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt $\varrho_x^n = \varrho_x^{n+1}$ und $\tau_x^n = \tau_x^{n+1}$ für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq n}$.

Mit dem folgendem Lemma wollen wir diesen Teilabschnitt abschließen. Es dient später dazu die f.s. Geschlossenheit und f.s. Beschränktheit der im Anschluss behandelten sukzessiven Erstaustritts-Stoppllinien zu zeigen.

Lemma 3.3.9. Es gibt eine Menge $K \in \mathfrak{A}(\varnothing)$ mit $P(K) = 1$ so, dass für alle $\omega \in K$ und alle $a, c \in \mathcal{F}_0$, $x \in \partial\mathbb{V}$ und $n \in \mathbb{N}$ $\tau_x^{n,c,a}(\omega) < \infty$ gilt.

Beweis. Da die Kantengewichtsfolge T nach Voraussetzung L_1 -regulär ist, gilt $L_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0$.

Wir setzen $K := \{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} L_n^*(\omega) = 0\}$. Sei $\omega \in K$, $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $x \in \partial\mathbb{V}$.

Wir zeigen per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $\tau_x^n(\omega) < \infty$ gilt.

Induktionsanfang: ϱ_x^1 ist nach Bemerkung 3.3.4 deterministisch und endlich.

Wir können daher ein $N \in \mathbb{N}$ wählen mit $L_N^*(\omega) < c_{\varrho_x^1}$. Es folgt dann $\tau_x^1(\omega) \leq N$.

Induktionsschluss: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gelte $\tau_x^n(\omega) < \infty$. (I.V.)

1. Fall: $L_{x|\tau_x^n(\omega)}(\omega) = 0$.

Dann folgt $\varrho_x^{n+1}(\omega) = \varrho_x^n(\omega)$ und $\tau_x^{n+1}(\omega) = \tau_x^n(\omega)$. Mit (I.V.) folgt in diesem Fall die Behauptung.

2. Fall: $L_{x|\tau_x^n(\omega)}(\omega) > 0$.

Da $\varrho_x^{n+1}(\omega) < \infty$, können wir ein $N' \in \mathbb{N}$ finden mit $\tau_x^n(\omega) \leq N'$ und $L_{N'}^*(\omega) < c_{\varrho_x^{n+1}(\omega)}$.

Es folgt $\tau_x^{n+1}(\omega) \leq N'$. □

Sukzessive Erstaustritts-Stoppllinien $(\mathcal{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$

In diesem Teilabschnitt zeigen wir, dass die Familie $(\tau_x^n)_{x \in \partial\mathbb{V}}$ tatsächlich eine verträgliche Familie pfadweiser Stoppzeiten ist und wir definieren die sukzessiven Erstaustritts-Stoppllinien.

Lemma 3.3.10. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \partial\mathbb{V}$ die Zufallsgröße $\tau_x^{n,c,a}$ eine pfadweise Stoppzeit.

Beweis. Sei $x \in \partial\mathbb{V}$.

Wir zeigen per Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass τ_x^n eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathfrak{A}_{\varnothing,x|m})_{m \in \mathbb{N}}$ ist.

Induktionsanfang: Sei $m \in \mathbb{N}$.

Zunächst gilt, dass ϱ_x^1 deterministisch und endlich ist, also messbar bzgl. $\mathfrak{A}_{\varnothing,x|m}$ ist.

Es gilt

$$\{\tau_x^1 = m\} = \{L_{x|k} \geq c_{\varrho_x^1} \text{ f.a. } k < m, L_{x|m} < c_{\varrho_x^1}\} \in \mathfrak{A}_{\varnothing,x|m},$$

so dass τ_x^1 als Stoppzeit erkannt ist.

Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte τ_x^n ist eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathfrak{A}_{\varnothing,x|m})_{m \in \mathbb{N}}$ (I.V.).

Dann gilt

$$\{\tau_x^{n+1} = m\} = \underbrace{\{\tau_x^n = \tau_x^{n+1} = m\}}_{=: M_1} \cup \underbrace{\bigcup_{t \in \{1, \dots, m-1\}} \{\tau_x^n = t, \tau_x^{n+1} = m\}}_{=: M_2}.$$

Wir untersuchen die Mengen M_1 und M_2 getrennt.

Es gilt mit Lemma 3.3.7 und (I.V.)

$$M_1 = \{L_{x|\tau_x^n} = 0, \tau_x^n = m\} = \{L_{x|m} = 0, \tau_x^n = m\} \in \mathfrak{A}_{\varnothing,x|m}.$$

An dieser Stelle geht nun ein

- Wenn $\tau_x^{n+1} < \infty$ und $\tau_x^n < \tau_x^{n+1}$, so gilt $\varrho_x^{n+1} = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid c_k < a_{n+1} L_{x|\tau_x^n}\}$.
- Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $\varrho_x^n < \infty$.

Unter Beachtung dieser zwei Aussagen, können wir nun zeigen, dass $M_2 \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|m}$ gilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
M_2 &= \bigcup_{t < m} \{\tau_x^n = t, \tau_x^{n+1} = m, \varrho_x^{n+1} < \infty\} \\
&= \bigcup_{t < m} \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \{\tau_x^n = t, \tau_x^{n+1} = m, \varrho_x^{n+1} = r\} \\
&= \bigcup_{t < m} \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \{\tau_x^n = t, L_{x|k} \geq c_r \text{ f.a. } k \in \{t, \dots, m-1\}, L_{x|m} < c_r, \varrho_x^{n+1} = r\} \\
&= \bigcup_{t < m} \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \{\tau_x^n = t, L_{x|k} \geq c_r \text{ f.a. } k \in \{t, \dots, m-1\}, L_{x|m} < c_r, \\
&\quad c_l \geq L_{x|t} \cdot a_{n+1} \text{ f.a. } l \in \{1, \dots, r-1\}, c_r < L_{x|t} \cdot a_{n+1}\}.
\end{aligned}$$

Die Menge ist daher nach (I.V.) in $\mathfrak{A}_{\emptyset, x|m}$ enthalten und somit τ_x^{n+1} eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathfrak{A}_{\emptyset, x|m})_{m \in \mathbb{N}}$. \square

Lemma 3.3.11. Sei $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Sei $u \in \mathbb{V}$ und $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $\tau_{ux}^n = |u|$.

Dann gilt für alle $m \leq n$ und alle $y \in \partial\mathbb{V}$

$$\tau_{uy}^m = \tau_{ux}^m \text{ und } \varrho_{ux}^m = \varrho_{uy}^m.$$

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass $\tau_{ux}^m \leq \tau_{ux}^n = |u|$ für alle $m \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

Wir zeigen die Behauptung per Induktion über $m \in \{1, \dots, n\}$.

Induktionsanfang:

Aus der Definition folgt $\varrho_{ux}^1 = \varrho_{uy}^1$.

Da $\tau_{ux}^1 \leq |u|$, können wir schließen

$$\begin{aligned}
\tau_{ux}^1 &= \inf \{k \in \mathbb{N} \mid L_{ux|k} < c_{\varrho_{ux}^1}\} \\
&= \inf \{k \leq |u| \mid L_{u|k} < c_{\varrho_{ux}^1}\} \\
&= \inf \{k \in \mathbb{N} \mid L_{uy|k} < c_{\varrho_{uy}^1}\} = \tau_{uy}^1.
\end{aligned}$$

Induktionsschluss:

Sei $m \in \{1, \dots, n\}$ und es gelte $\tau_{uy}^l = \tau_{ux}^l$ und $\varrho_{ux}^l = \varrho_{uy}^l$ für alle $l \in \{1, \dots, m\}$ (I.V.).

Da $\tau_{uy}^m \leq |u|$, gilt

$$L_{ux|k} = L_{uy|k} \text{ für alle } k \leq \tau_{uy}^m. \quad (3.3.2)$$

1. Fall: $\varrho_{ux}^{m+1} > \varrho_{ux}^m$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\varrho_{ux}^{m+1} &= \inf \{k > \varrho_{ux}^m \mid c_k < a_{m+1} \cdot L_{ux|\tau_{ux}^m}\} \\
&\stackrel{(I.V.)}{=} \inf \{k > \varrho_{uy}^m \mid c_k < a_{m+1} \cdot L_{ux|\tau_{uy}^m}\} \\
&\stackrel{3.3.2}{=} \inf \{k > \varrho_{uy}^m \mid c_k < a_{m+1} \cdot L_{uy|\tau_{uy}^m}\} = \varrho_{uy}^{m+1}.
\end{aligned}$$

2. Fall: $\varrho_{ux}^{m+1} = \varrho_{ux}^m$.

Dann gilt $0 = L_{x|\tau_{ux}^m} \stackrel{(I.V.)}{=} L_{x|\tau_{uy}^m}$, also auch $\varrho_{ux}^{m+1} = \varrho_{uy}^m$ nach Lemma 3.3.7.

Es folgt $\varrho_{ux}^{m+1} = \varrho_{ux}^m \stackrel{(I.V.)}{=} \varrho_{ux}^m = \varrho_{uy}^{m+1}$.

Abschließend folgern wir

$$\begin{aligned}
\tau_{ux}^{m+1} &= \inf \left\{ k \geq \tau_{ux}^m \mid L_{ux}|k| < c_{\varrho_{ux}^{m+1}} \right\} \\
&\stackrel{(I.V.)}{=} \inf \left\{ k \geq \tau_{uy}^m \mid L_{ux}|k| < c_{\varrho_{ux}^{m+1}} \right\} \\
&= \inf \left\{ k \geq \tau_{uy}^m \mid L_{ux}|k| < c_{\varrho_{uy}^{m+1}} \right\} \\
&\stackrel{(3.3.2)}{=} \inf \left\{ k \geq \tau_{uy}^m \mid L_{uy}|k| < c_{\varrho_{uy}^{m+1}} \right\} \\
&= \tau_{uy}^{m+1}.
\end{aligned}$$

□

Korollar 3.3.12. Sei $a, c \in \mathcal{F}_0$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Familie $(\tau_x^{n,c,a})_{x \in \partial\mathbb{V}}$ eine verträgliche Familie pfadweiser Stoppzeiten.

Beweis. Nach Hilflemma 3.3.11 folgt, dass für alle $u \in \mathbb{V}$ und alle $x, y \in \partial\mathbb{V}$ gilt, dass aus $\tau_{ux}^n = |u|$ die Gleichung $\tau_{uy}^n = |u|$ gilt.

□

Definition 3.3.13. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\mathcal{M}_n^{c,a}$ die zu der verträglichen Familie pfadweiser Stoppzeiten $(\tau_x^{n,c,a})_{x \in \partial\mathbb{V}}$ gehörigen Stopplinie.

Wir bezeichnen diese Stopplinien als sukzessive Erstaustritts-Stopplinien.

Korollar 3.3.14. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Stopplinie $\mathcal{M}_n^{c,a}$ f.s. beschränkt und f.s. geschlossen.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 1.5.31 und Lemma 3.3.9.

□

Lemma 3.3.15. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V} < \mathcal{M}_n^{c,a}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{M}_n^{c,a}} g(tL_v) \right) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis. Die Gleichung folgt aus dem Korollar 3.1.8, da nach Korollar 3.3.14 die Stopplinie \mathcal{M}_n fast sicher beschränkt und fast sicher geschlossen ist.

□

Analyse der Stopplinie $\mathcal{M}_n^{c,a}$

Wir analysieren in diesem Teilabschnitt die Stopplinie $\mathcal{M}_n^{c,a}$ und erhalten eine rekursive Beschreibung dieser Stopplinie.

Definition 3.3.16. Sei $c \in \mathcal{F}_0$.

Für alle $v \in \mathbb{V}$ und $t \in]0; 1[$ definiere

$$\begin{aligned}
I_v^{t,c} &:= \inf \{ k \in \mathbb{N} \mid c_k < t \cdot L_v \} \\
Q_v^{t,c} &:= \begin{cases} \frac{c_{I_v^{t,c}}}{L_v}, & L_v > 0 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}
\end{aligned}$$

wobei wir die Konvention $\inf \emptyset = \infty$ benutzen.

$I_v^{t,c}$ gibt denjenigen Index k^* an, ab dem die monoton fallende Folge $c = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ zum ersten Mal unter das Niveau $t \cdot L_v$ sinkt.

Falls $L_v > 0$ ist, so gilt $I_v^{t,c} < \infty$ und damit sowohl $c_{I_v^{t,c}} < t \cdot L_v$, als auch $Q_v^{t,c} \in]0; t]$. In diesem Fall gibt $Q_v^{t,c}$ den Unterschied zwischen c_{k^*} und $t \cdot L_v$ an.

Falls $L_v = 0$ ist, so gilt $I_v^{t,c} = \infty$ und $Q_v^{t,c}$ wird auf den willkürlichen Wert 0 gesetzt.

Definition 3.3.17. Sei $t \in]0; 1[$, $v \in \mathbb{V}$ und $c \in \mathcal{F}_0$.

Sei \mathcal{I} die Menge aller Intervalle $I \subseteq]0; 1[$. Wir definieren für alle $I \in \mathcal{I}$

$$\mathcal{T}_v^{t,c}(I) := \{u \in \mathbb{V} \mid (L_v > 0 \wedge u \neq \emptyset \wedge L_{v\mathcal{V}(u)} \geq c_{I_v}^{t,c} \wedge L_{vu} \in c_{I_v}^{t,c} \cdot I) \\ \text{oder} \\ (L_v = 0 \wedge u = \emptyset)\}.$$

Bemerkung 3.3.18. Nach Definition gilt $\mathcal{T}_v^{t,c} = \{\emptyset\}$ genau dann, wenn $L_v = 0$ ist. Falls daher $\mathcal{T}_v^{t,c} = \{\emptyset\}$ für ein $v \in \mathbb{V}$, so gilt $\mathcal{T}_w^{t,c} = \{\emptyset\}$ für alle $w \in \mathbb{V}$ mit $v \leq w$.

Weiterhin gilt für jedes $I \in \mathcal{I}$

$$\{w \in \mathcal{T}_v^{t,c}(I), L_v > 0\} = \{L_{vw} \in c_{I_v}^{t,c} \cdot I, L_{v\mathcal{V}(w)} \geq c_{I_v}^{t,c}, L_v > 0\} \\ = \{L_w(v) < Q_v^{t,c} \cdot I, L_{\mathcal{V}(w)}(v) \geq Q_v^{t,c}, L_v > 0\}.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\mathbb{1}_{\{L_v > 0\}} \left(\mu_{Q_v^{t,c}}^{(\alpha)}(v) \right) (I) = \sum_{w \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{L_w(v) \in Q_v^{t,c} \cdot I, L_{\mathcal{V}(w)}(v) \geq Q_v^{t,c}\}} L_w^\alpha(v) \\ = \mathbb{1}_{\{L_v > 0\}} \sum_{w \in \mathcal{T}_v^{t,c}(I)} L_w^\alpha(v)$$

und ebenso

$$\mathbb{1}_{\{L_v > 0\}} \left(\tilde{\mu}_{Q_v^{t,c}}^{(\alpha)}(v) \right) (I) = \mathbb{1}_{\{L_v > 0\}} \sum_{w \in \mathcal{T}_v^{t,c}(I)} L_w^\alpha W^{(\alpha)}(v).$$

Wir setzen $\mathcal{A}_v^{t,c} := \mathcal{T}_v^{t,c}([0; 1])$.

Dann ist $\mathcal{A}_v^{t,c}$ „im Prinzip“ die Erstaustrittszeit-Stopplinie startend ab v zum zufälligen Niveau $Q_v^{t,c}$. Das Problem an dieser Stelle besteht im Umstand, dass $L_v = 0$ sein kann und damit $\mathcal{A}_v^{t,c} = \{\emptyset\}$ gilt. Nun gilt für die Erstaustritts-Stopplinie startend ab v $\mathcal{L}^a(v) \neq \{\emptyset\}$ für alle $a \in]0; 1[$.

Wir können aber folgende Mengengleichheit für alle $v \in \mathbb{V}$, $u \in \mathbb{V} \setminus \{\emptyset\}$ und alle $t \in]0; 1[$, $c \in \mathcal{F}_0$ festhalten

$$\{u \in \mathcal{A}_v^{t,c}, L_{vu} < \gamma \cdot c_{I_v}^{t,c}, L_v > 0\} = \{u \in \mathcal{T}_v^{t,c}([0; \gamma]), L_v > 0\}.$$

Lemma 3.3.19. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M}_n^{c,a} = \left\{ v^{(1)} \dots v^{(n)} \in \mathbb{V} \mid \forall k \leq n : v^{(k)} \in \mathcal{A}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k, c} \right\}$$

Beweis. „ \subseteq “:

Sei $v \in \mathcal{M}_n$. Dann gibt es ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $v = x|_{\tau_x^n} \in \mathbb{V}$.

Insbesondere folgt daraus $\tau_x^n < \infty$ und somit $\tau_x^m < \infty$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

Setze $v^{(1)} := x|_{\tau_x^1}$ und

$$v^{(i+1)} := \begin{cases} (x_{\tau_x^{i+1}}, \dots, x_{\tau_x^{i+1}}) & , \tau_x^i < \tau_x^{i+1} \\ \emptyset & , \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

Der Übersichts wegen setzen wir $u^{(m)} := v^{(1)} \dots v^{(m)} = v|_{\tau_x^m}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ und $u^{(0)} := \emptyset$.

An dieser Stelle müsste eine Fallunterscheidung kommen, ob es ein $m \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt mit $\varrho_x^m = \varrho_x^{m+1}$ oder ob es kein solches m gibt.

Da der zweite Fall einfacher und in gleicher Weise wie der erste Fall zu beweisen ist, nehmen wir

an dieser Stelle oBdA an, dass es ein $m^* \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt mit $\varrho_x^{m^*-1} < \varrho_x^{m^*} = \varrho_x^{m^*+1}$.

Dann gilt $\varrho_x^{m^*} = \varrho_x^m$ und $\tau_x^{m^*} = \tau_x^m$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n-1\}$.

Außerdem folgt $L_{u^{(m)}} = 0$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n-1\}$. Daraus ergibt sich $\mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} = \{\emptyset\}$ und somit $v^{(m)} = \emptyset \in \mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}}$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n-1\}$.

Sei nun $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$.

Da $\varrho_x^{m-1} < \varrho_x^m$ und $\tau_x^{m-1} < \infty$ folgt $\varrho_x^m = \inf \left\{ k > \varrho_x^{m-1} \mid c_k < a_m L_{x|\tau_x^{m-1}} \right\}$ und $L_{u^{(m-1)}} > 0$.

Daher gilt

$$\begin{aligned} \varrho_x^m &= \inf \left\{ k > \varrho_x^{m-1} \mid c_k < a_m L_{u^{(m-1)}} \right\} \\ &= \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid c_k < a_m L_{u^{(m-1)}} \right\} \\ &= I_{u^{(m-1)}}^{a_m}. \end{aligned}$$

Aus $\tau_x^m = |u^{(m)}|$ folgt dann $L_{u^{(m-1)}v^{(m)}} < c_{\varrho_x^m} = c_{I_{u^{(m-1)}}^{a_m}}$ und $L_{u^{(m-1)}v^{(m)}} \geq c_{\varrho_x^m} = c_{I_{u^{(m-1)}}^{a_m}}$.

Damit ergibt sich $v^{(m)} \in \mathcal{A}_{u^{(m-1)}}^{a_m}$.

„ \supseteq “:

Seien $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{V}$ mit $v^{(m)} \in \mathcal{A}_{v^{(1)} \dots v^{(m-1)}}^{a_m}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

Sei $x \in \partial \mathbb{V}$ und wir setzen $v := v^{(1)} \dots v^{(n)}$ und $u^{(m)} := v^{(1)} \dots v^{(m)}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ und $u^{(0)} := \emptyset$.

Dann ist zu zeigen $v = vx|_{\tau_{vx}^n}$.

Wir nehmen oBdA an, dass es ein $m^* \in \{2, \dots, n\}$ gibt mit $\mathcal{A}_{u^{(m^*-1)}}^{a_{m^*}} = \{\emptyset\}$ und $\mathcal{A}_{u^{(m^*-2)}}^{a_{m^*-1}} \neq \{\emptyset\}$.

Dies bedeutet $\mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} \neq \{\emptyset\}$ für alle $m \in \{1, \dots, m^*-2\}$ und $\mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} = \{\emptyset\}$ für alle $m \in \{m^*-1, \dots, n\}$. Daraus folgt $L_{u^{(m)}} > 0$ für alle $m \in \{1, \dots, m^*-2\}$ und $L_{u^{(m)}} = 0$ für alle $m \in \{m^*-1, \dots, n\}$.

Wir zeigen per Induktion über $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$, dass $\tau_{vx}^m = |u^{(m)}|$ und $\varrho_{vx}^m = I_{u^{(m-1)}}^{a_m}$ gilt.

Induktionsanfang:

Es gilt $I_{\emptyset}^{a_1} = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid c_k < a_1 L_{\emptyset}\} = \varrho_{vx}^1$.

Da $v^{(1)} \in \mathcal{A}_{\emptyset}^{a_1} \neq \{\emptyset\}$ gilt $L_{v^{(1)}} \geq c_{I_{\emptyset}^{a_1}} = c_{\varrho_{vx}^1}$ und $L_{v^{(1)}} < c_{I_{\emptyset}^{a_1}} = c_{\varrho_{vx}^1}$.

Daraus ergibt sich $\tau_{vx}^1 = \inf \{k \in \mathbb{N} \mid L_{vx|k} < c_{\varrho_{vx}^1}\} = |v^{(1)}|$. Wegen $u^{(1)} = v^{(1)}$ folgt der Induktionsanfang.

Induktionsschritt:

Sei $m \in \{1, \dots, m^*-2\}$ und es gelte $\tau_{vx}^l = |u^{(l)}|$ und $\varrho_{vx}^l = I_{u^{(l-1)}}^{a_l}$ für alle $l \in \{1, \dots, m\}$ (I.V.).

Da $m < m^*-1$ gilt, folgt $0 < L_{u^{(m)}} = L_{vx|\tau_x^m}$.

Daher gilt

$$\begin{aligned} \varrho_{vx}^{m+1} &= \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid c_k \leq a_{m+1} L_{vx|\tau_x^m} \right\} \\ &= \inf \left\{ k \in \mathbb{N} \mid c_k \leq a_{m+1} L_{u^{(m)}} \right\} = I_{u^{(m)}}^{a_{m+1}}. \end{aligned}$$

Da $v^{(m+1)} \in \mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} \neq \{\emptyset\}$, gilt $L_{u^{(m)}v^{(m+1)}} \geq c_{I_{u^{(m)}}^{a_{m+1}}} = c_{\varrho_{vx}^{m+1}}$ und $L_{u^{(m)}v^{(m+1)}} < c_{I_{u^{(m)}}^{a_{m+1}}} = c_{\varrho_{vx}^{m+1}}$.

Daraus folgt $\tau_{vx}^{m+1} = |u^{(m+1)}|$.

Dies schließt den Induktionsbeweis ab.

Da $L_{u^{(m)}} = 0$ für alle $m \in \{m^* - 1, \dots, n\}$, folgt $\tau_{vx}^m = \tau_{vx}^{m^*-1} = |u^{(m^*-1)}|$ für alle $m \in \{m^* - 1, \dots, n\}$.

Weiterhin gilt $v^{(m)} = \emptyset$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n\}$. Daraus ergibt sich $vx|\tau_{vx}^n = u^{(m^*-1)} = v^{(1)} \dots v^{(n)} = v$.

□

Das folgende Korollar ergibt sich nun unmittelbar aus vorherigen Lemma und zeigt die rekursive Struktur der Menge $\mathcal{M}_n^{c,a}$ auf.

Korollar 3.3.20. *Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.*

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathcal{M}_{n+1}^{c,a} = \{vw \in \mathbb{W} \mid v \in \mathcal{M}_n^{c,a}, w \in \mathcal{A}_v^{a_{n+1},c}\}.$$

Intervall-Stopplinie $\mathcal{J}^{c,a,\gamma}$

In diesem Teilabschnitt kommen wir zur Definition der sogenannten Intervall-Stopplinie. Diese Stopplinie hängt außer von den Folgen $a, c \in \mathcal{F}_0$ auch noch von einem zusätzlichen Parameter $\gamma \in]0; 1[$ ab.

Wir betrachten diese Stopplinien, wegen folgender Eigenschaft.

Ist $v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma}$, so gibt es ein $k(=k_v) \in \mathbb{N}$ mit

$$\gamma \cdot c_k \leq L_v < c_k.$$

Für Knoten aus der Stopplinie \mathcal{J} kann man daher deren Knotenpfadgewicht L_v nach unten beschränkt, eine nützliche Eigenschaft, wie sich später herausstellt. Leider können wir nicht mehr garantieren, dass diese Stopplinie f.s. beschränkt und f.s. geschlossen ist. Wir müssen daher immer das Infimum zwischen der Intervall-Stopplinie und einer Stopplinie $\mathcal{M}_n^{c,a}$ bilden. Von der letzteren Stopplinie wissen wir bereits, dass diese f.s. beschränkt und f.s. geschlossen ist.

Definition 3.3.21. Intervall-Stoppzeiten.

Sei $\gamma \in]0; 1[$ und seien $a, c \in \mathcal{F}_0$. Definiere für jedes $x \in \partial\mathbb{W}$

$$\sigma_x^{c,a,\gamma} := \inf \{ \tau_x^{m,c,a} \mid L_{x|\tau_x^{m,c,a}} \in c_{\varrho_x^{m,c,a}} \cdot [\gamma; 1] \}.$$

Wir nennen diese Zufallsgröße auch Intervall-Stoppzeit.

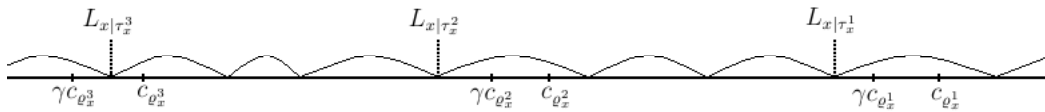


Abbildung 3.2.: Beispiel für die Situation $\sigma_x = \tau_x^3$

Mit der Abbildung 3.2 wollen wir diese Definition erläutern. Bei der Stoppzeit σ_x warten wir solange, bis wir zum ersten Mal mit der Zufallsgröße $L_{x|\tau_x^n}; n \in \mathbb{N}$ in das Intervall $[\gamma c_{\varrho_x^n}; c_{\varrho_x^n}]$ landen. Dass $L_{x|\tau_x^n}$ echt kleiner $c_{\varrho_x^n}$ ist, ist wegen der Definition von τ_x^n gegeben.

Lemma 3.3.22. *Wohldefiniertheit der Intervall-Stoppzeiten.*

Sei $\gamma \in]0; 1[$ und seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Dann gilt

- (i) für jedes $x \in \partial\mathbb{W}$ ist $\sigma_x^{c,a,\gamma}$ eine pfadweise Stoppzeit,

(ii) die Familie $(\sigma_x^{c,a,\gamma})_{x \in \partial \mathbb{V}}$ ist verträglich.

Für den Beweis dieses Lemmas benötigen wir folgendes Hilfslemma, welches wir zunächst beweisen.

Lemma 3.3.23. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $x \in \partial \mathbb{V}$.

Dann gilt für alle $m, n, r \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\{\tau_x^{m,c,a} = n, \varrho_x^{k,c,a} = r\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst per Induktion über $k \in \mathbb{N}$, dass für alle $r \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = r\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n} \quad (3.3.3)$$

gilt.

Induktionsanfang:

Es gilt für alle $r, n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_x^1 \leq n, \varrho_x^1 = r\} = \bigcup_{m=1}^n \{\tau_x^1 = m, L_{x|m} < c_{\varrho^1}, L_{x|l} \geq c_{\varrho^1} \text{ f.a. } l \in \{1, \dots, m-1\}, \varrho^1 = r\}.$$

Hierbei ist ϱ^1 die in 3.3.4 definierte Konstante.

Induktionschluss:

Sei $k \in \mathbb{N}$ und es gelte (3.3.3) für alle $r, n \in \mathbb{N}$ (I.V.).

Seien $r, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\{\tau_x^{k+1} \leq n, \varrho_x^{k+1} = r\} = \{\tau_x^{k+1} \leq n, \varrho_x^{k+1} = r = \varrho_x^k\} \cup \{\tau_x^{k+1} \leq n, \varrho_x^{k+1} = r > \varrho_x^k\} =: M_1 \cup M_2.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} M_1 &= \{\tau_x^{k+1} \leq n, \varrho_x^{k+1} = r = \varrho_x^k\} \\ &= \{\tau_x^{k+1} \leq n, \varrho_x^k = r, L_{x|\tau_x^k} = 0\} \\ &= \{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = r, L_{x|\tau_x^k} = 0\} \\ &= \{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = r\} \cap \{\tau_x^k \leq n, L_{x|\tau_x^k} = 0\} \\ &= \{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = r\} \cap \bigcup_{m=1}^n \{\tau_x^k = m, L_{x|m} = 0\} \in \mathfrak{A}_{x|n}, \end{aligned}$$

da $\{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = r\} \in \mathfrak{A}_{x|n}$ nach (I.V.) gilt.

Für die zweite Menge gilt

$$\begin{aligned} M_2 &= \{\tau_x^{k+1} \leq n, \varrho_x^{k+1} = r > \varrho_x^k, \tau_x^k \leq n\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{r-1} \{\tau_x^{k+1} = n, \varrho_x^k = m, \varrho_x^{k+1} = r, \tau_x^k \leq n\} \\ &= \bigcup_{m=1}^{r-1} \{\tau_x^{k+1} = n\} \cap \{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = m\} \\ &\quad \cap \{\tau_x^k \leq n, c_l \geq a_{k+1} \cdot L_{x|\tau_x^k} \text{ f.a. } l \in \{m, \dots, r-1\}, c_r < a_{k+1} \cdot L_{x|\tau_x^k}\}. \end{aligned}$$

Da τ_x^{k+1} eine Stoppzeit ist, gilt $\{\tau_x^{k+1} = n\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$. Nach (I.V.) ist $\{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = m\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$ für alle $m \in \{1, \dots, r-1\}$.

Da auch $\{\tau_x^k \leq n, c_l \geq a_{k+1} \cdot L_{x|\tau_x^k} \text{ f.a. } l \in \{m, \dots, r-1\}, c_r < a_{k+1} \cdot L_{x|\tau_x^k}\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$ folgt $M_2 \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$.

Damit ist der Induktionsbeweis abgeschlossen.

Als Folgerung erhält man für alle $k, n, r \in \mathbb{N}$

$$\{\tau_x^k = n, \varrho_x^k = r\} = \{\tau_x^k \leq n, \varrho_x^k = r\} \cap \{\tau_x^k = n\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}.$$

Kommen wir nun zur eigentlichen Behauptung.

Es gilt

$$\{\tau_x^m = n, \varrho_x^k = r\} = \{\tau_x^m = n, \varrho_x^k = r, L_{x|\tau_x^{k-1}} = 0\} \cup \{\tau_x^m = n, \varrho_x^k = r, L_{x|\tau_x^{k-1}} > 0\} =: K_1 \cup K_2.$$

Wir haben

$$K_1 = \{\tau_x^{k-1} = n, \varrho_x^{k-1} = r, L_{x|\tau_x^{k-1}} = 0\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$$

und

$$\begin{aligned} K_2 &= \{\tau_x^m = n, \varrho_x^k = r, L_{x|\tau_x^{k-1}} > 0\} \\ &= \{\tau_x^m = n, L_{x|\tau_x^{k-1}} > 0, \\ &\quad L_{x|\tau_x^{k-1}} \leq c_l \text{ f.a. } l \in \{1, \dots, r-1\}, L_{x|\tau_x^{k-1}} > c_r\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}, \end{aligned}$$

so dass $K_1 \cup K_2 \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$, woraus sich die Behauptung ergibt. \square

Beweis von 3.3.22. Um die Behauptung (i) zu zeigen, müssen wir nachweisen, dass für jedes $x \in \partial\mathbb{V}$ die Abbildung σ_x eine Stoppzeit bzgl. der Filtration $(\mathfrak{A}_{\emptyset, x|n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt

$$\{\sigma_x = n\} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{\tau_x^m = n, \gamma \cdot c_{\varrho_x^m} \leq L_{x|n} \leq c_{\varrho_x^m}, 0 \leq L_{x|\tau_x^k} < \gamma \cdot c_{\varrho_x^k}, \text{ f.a. } k \in \{1, \dots, m-1\}\}.$$

Nun gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\{\tau_x^m = n, \gamma \cdot c_{\varrho_x^m} \leq L_{x|n} \leq c_{\varrho_x^m}, 0 \leq L_{x|\tau_x^k} < \gamma \cdot c_{\varrho_x^k}, \text{ f.a. } k \in \{1, \dots, m-1\}\} \\ &= \bigcup_{\substack{r \in \mathbb{N}^m \\ r_1 < \dots < r_m}} \left\{ \begin{array}{l} \tau_x^m = n, \\ \varrho_x^k = r_k \text{ f.a. } k \in \{1, \dots, m\}, \\ \gamma \cdot c_{r_m} \leq L_{x|n} \leq c_{r_m}, 0 \leq L_{x|\tau_x^k} < \gamma \cdot c_{r_k}, \text{ f.a. } k \in \{1, \dots, m-1\} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Nach obigem Hilfslemma ist aber die letzte Menge in $\mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$, woraus sich $\{\sigma_x = n\} \in \mathfrak{A}_{\emptyset, x|n}$ ergibt.

Für den Nachweis von (ii) müssen wir zeigen, dass für alle $u \in \mathbb{V}$ und alle $x, y \in \partial\mathbb{V}$ gilt

$$\sigma_{ux} = |u| \implies \sigma_{uy} = |u|.$$

Falls $\sigma_{ux} = |u|$ gilt, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sigma_{ux} = \tau_{ux}^m$ und

$$\begin{aligned} &\gamma \cdot c_{\varrho_{ux}^m} \leq L_{ux|\tau_{ux}^m} \leq c_{\varrho_{ux}^m} \text{ und} \\ &0 \leq L_{ux|\tau_{ux}^l} < \gamma \cdot c_{\varrho_{ux}^l} \text{ für alle } l \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Mit dem Hilflemma 3.3.11 folgt

$$\begin{aligned} &\gamma \cdot c_{\varrho_{uy}^m} \leq L_{ux|\tau_{uy}^m} \leq c_{\varrho_{uy}^m} \text{ und} \\ &0 \leq L_{ux|\tau_{uy}^l} < \gamma \cdot c_{\varrho_{uy}^l} \text{ für alle } l \in \{1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

und damit $\sigma_{uy} = |u|$. \square

Definition 3.3.24. Intervall-Stoppllinien.

Sei $\gamma \in]0; 1[$ und seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Wir definieren $\mathcal{J}^{c,a,\gamma}$ als die Stoppllinie bzgl. $(\sigma_x^{c,a,\gamma})_{x \in \partial \mathbb{V}}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a}$ die Stoppllinie bzgl. der Familie $(\sigma_x^{c,a,\gamma} \wedge \tau_x^{n,c,a})_{x \in \partial \mathbb{V}}$.

Wir bezeichnen diese Stoppllinien als Intervall-Stoppllinien.

Im Folgenden unterdrücken wir die Abhängigkeit von c, a und γ .

Lemma 3.3.25. Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$ und $\gamma \in]0; 1[$, $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{< \mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a}}} f(tL_v C_v) \cdot \prod_{v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a}} g(tL_v) \right) = g(t) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Beweis. Nach 3.1.8 reicht es aus zu zeigen, dass $\mathcal{M}_n \wedge \mathcal{J}$ fast sicher abgeschlossen und fast sicher beschränkt sind. Dies ergibt sich aber aus Korollar 3.3.14 in Verbindung mit dem Korollar 1.5.14. \square

Konvergenz von $(W_{\mathcal{M}_n \wedge \mathcal{J}}^{(\alpha)})_{n \in \mathbb{N}}$

Wir wollen in diesem Unterabschnitt das Verhalten der Zufallsgrößen

$$\sum_{\substack{v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a}; \\ v \notin \mathcal{J}^{c,a,\gamma}}} L_v^\alpha \text{ und } \sum_{\substack{v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a}; \\ v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma}}} L_v^\alpha$$

für $n \rightarrow \infty$ untersuchen.

Definition 3.3.26. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n^{c,a,\gamma,0} &:= \{v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a} \mid v \notin \mathcal{J}^{c,a,\gamma}\}, \\ \mathcal{C}_n^{c,a,\gamma,1} &:= \{v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,a} \mid v \in \mathcal{J}^{c,a,\gamma}\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{c,a,\gamma,0} &:= \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,a,\gamma,0}} L_v^\alpha, \\ \Gamma_n^{c,a,\gamma,1} &:= \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,a,\gamma,1}} L_v^\alpha. \end{aligned}$$

Die folgende Definition und das anschließende Lemma benötigen wir um die Größen $\Gamma_n^{c,a,\gamma,0}$ und $\Gamma_n^{c,a,\gamma,1}$ geeignet „zerlegen“ zu können und einer rekursiven Analyse zugänglich zu machen.

Definition 3.3.27. Für alle $a, c \in \mathcal{F}_0, \gamma \in]0; 1[$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$U_n^{\gamma,c,a} := \left\{ (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in \mathbb{V} \mid \forall k \leq n : v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k,c} ([0; \gamma]) \right\},$$

$$+U_n^{\gamma,c,a} := \left\{ (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in U_n^{\gamma,c,a} \mid L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}} > 0 \right\}.$$

Ferner definieren wir

$$G_n^{\gamma,c,a} := \left\{ (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in \mathbb{V} \mid \forall k < n : v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k,c} ([0; \gamma]) \text{ und } v^{(n)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(n-1)}}^{a_n,c} ([\gamma; 1]) \right\}$$

und

$$+G_n^{\gamma,c,a} := \left\{ (v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in G_n^{\gamma,c,a} \mid L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}} > 0 \right\}.$$

Lemma 3.3.28. Sei $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Dann gilt

$$\mathcal{C}_n^{c,a,\gamma,0} = \left\{ v^{(1)} \dots v^{(n)} \in \mathbb{V} \mid \forall k \in \{1, \dots, n\} : v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k, c}([0; \gamma]) \right\}.$$

Beweis. „ \subseteq “:

Sei $v \in \mathcal{C}_n^0$. Dann gilt $v \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{M}_n$ und $v \notin \mathcal{J}$.

Dann gibt es ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $v = vx|_{\tau_{vx}^n}$.

Weiterhin gibt es $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{V}$ mit $v^{(k)} \in \mathcal{A}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}$ und $u^{(k)} := v^{(1)} \dots v^{(k)} = vx|_{\tau_{vx}^k}$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Wir zeigen nun, dass $v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

Da $v \notin \mathcal{J}$ und $\mathcal{J} \not\prec v$, gilt $\sigma_{vx} > |v|$.

Daraus folgt $L_{u^{(m)}} = L_{vx|_{\tau_{vx}^m}} < \gamma c_{\rho_{vx}^m}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

Wir nehmen oBdA an, dass es ein $m^* \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt mit $\rho_{vx}^{m^*-1} < \rho_{vx}^{m^*} = \rho_{vx}^{m^*+1}$.

Dann gilt $\rho_{vx}^{m^*} = \rho_{vx}^m$, $\tau_{vx}^{m^*} = \tau_{vx}^m$ und $L_{u^{(m)}} = 0$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n\}$.

Außerdem gilt $L_{u^{(m)}} > 0$ für alle $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$.

Dies bedeutet $\mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} \neq \{\emptyset\}$ für alle $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$ und $\mathcal{A}_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} = \{\emptyset\}$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n-1\}$.

Wegen Lemma 3.3.6 folgt $\rho_{vx}^k = I_{u^{(k-1)}}^{a_k}$ für alle $k \in \{1, \dots, m^*-1\}$.

Sei $k \in \{1, \dots, n\}$.

1. Fall: $k < m^*$.

Dann gilt $v^{(k)} \in \mathcal{A}_{u^{(k-1)}}^{a_k}$, $0 < L_{u^{(k-1)}} < \gamma \cdot c_{\rho_{vx}^{k-1}} = \gamma \cdot c_{I_{u^{(k-1)}}^{a_k}}$ und daher $v^{(k)} \in \mathcal{T}_{u^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])$.

2. Fall: $k \geq m^*$.

Dann gilt, wegen $L_{u^{(k)}} = 0$, dass $v^{(k)} = \emptyset \in \{\emptyset\} = \mathcal{T}_{u^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])$.

„ \supseteq “:

Seien $v^{(1)}, \dots, v^{(n)} \in \mathbb{V}$ mit $v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Wir definieren $v := v^{(1)} \dots v^{(n)}$ und wählen ein $x \in \partial\mathbb{V}$.

Es ist dann zu zeigen $v \in \mathcal{M}_n$, $v \notin \mathcal{J}$ und $\mathcal{J} \not\prec v$.

Wir setzen $u^{(0)} := \emptyset$ und $u^{(m)} := v^{(1)} \dots v^{(m)}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$.

Wir nehmen oBdA an, dass es ein $m^* \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt mit $\mathcal{T}_{u^{(m^*)}}^{a_{m^*+1}} = \{\emptyset\}$.

Dann gilt $L_{u^{(m)}} > 0$ für alle $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$ und $L_{u^{(m)}} = 0$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n\}$.

Daraus folgt für alle $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$

$$L_{\mathcal{V}(u^{(m)})} \geq c_{I_{u^{(m-1)}}^{a_m}} \quad \text{und} \quad L_{u^{(m)}} < \gamma \cdot c_{I_{u^{(m-1)}}^{a_m}}.$$

Per Induktion über $m \in \{1, \dots, m^*-1\}$ ergibt sich daraus $u^{(m)} = (vx)|_{\tau_{vx}^m}$ und $I_{u^{(m)}}^{a_{m+1}} = \rho_{vx}^m$.

Da $L_{u^{(m)}} = 0$ für alle $m \in \{m^*, \dots, n\}$ gilt, folgt $\tau_{vx}^m = \tau_{vx}^{m^*}$.

Wir erhalten $v = (vx)|_{\tau_{vx}^n}$, d.h. $v \in \mathcal{M}_n$. Da $L_v = 0$ gilt, folgt $v \notin \mathcal{J}$.

Weiterhin gilt $L_{vx|_{\tau_{vx}^m}} < \gamma \cdot c_{\rho_{vx}^m}$ für alle $m \in \{1, \dots, n\}$. Daraus ergibt sich $\mathcal{J} \not\prec v$. □

Lemma 3.3.29. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Dann gilt

$$\mathcal{C}_n^{c,a,\gamma,1} = \bigcup_{m=1}^n \left\{ v^{(1)} \dots v^{(m)} \in \mathbb{V} \mid v^{(m)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(m-1)}}^{a_m}([\gamma; 1]), \right. \\ \left. \forall k \in \{1, \dots, m-1\} : v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma]) \right\}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \{v \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{M}_n \mid v \in \mathcal{J}\} &= \{v \in \mathbb{V} \mid \exists m \leq n : v \in \mathcal{M}_m \cap \mathcal{J}\} \\ &= \bigcup_{m=1}^n \{v \in \mathbb{V} \mid v \in \mathcal{M}_m \cap \mathcal{J}\}. \end{aligned}$$

Damit reicht es aus

$$\begin{aligned} \{v \in \mathbb{V} \mid v \in \mathcal{M}_m \cap \mathcal{J}\} &= \\ \{v^{(1)} \dots v^{(m)} \in \mathbb{V} \mid v^{(m)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(m-1)}}^{a_m}([\gamma; 1]), \forall k \in \{1, \dots, m-1\} : v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])\} \end{aligned}$$

für alle $m \in \{1, \dots, n\}$ zu zeigen.

„ \subseteq “:

Sei $v \in \mathcal{M}_m \cap \mathcal{J}$. Dann gibt es ein $x \in \partial\mathbb{V}$ mit $v = vx|_{\tau_{vx}^m}$.

Weiterhin gibt es $v^{(1)}, \dots, v^{(m)} \in \mathbb{V}$ mit $v^{(k)} \in \mathcal{A}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}$ und $u^{(k)} := v^{(1)} \dots v^{(k)} = vx|_{\tau_{vx}^k}$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$.

Wir zeigen nun, dass $v^{(k)} \in \mathcal{T}_{u^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$ und $v^{(m)} \in \mathcal{T}_{u^{(m-1)}}^{a_m}([\gamma; 1])$ gilt. Da $v \in \mathcal{J}$ ist, gilt $0 < \gamma \cdot c_{\varrho_{vx}^m} \leq L_{u^{(m)}} \leq c_{\varrho_{vx}^m}$ und $L_{u^{(m)}} < \gamma \cdot c_{\varrho_{vx}^k}$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$. Da $L_{u^{(m)}} > 0$ ist, gilt insbesondere $L_{u^{(k)}} > 0$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$.

Mit Hilfe von Lemma 3.3.6 können wir $I_{u^{(k-1)}}^{a_k} = \varrho_{vx}^k$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ folgern.

Daraus ergibt sich $v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}([\gamma; 1])$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$ und $v^{(m)} \in \mathcal{T}_{u^{(m-1)}}^{a_m}([\gamma; 1])$.

„ \supseteq “:

Seien $v^{(1)}, \dots, v^{(m)} \in \mathbb{V}$ mit $v^{(k)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{a_k}([0; \gamma])$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$ und $v^{(m)} \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(m-1)}}^{a_m}([\gamma; 1])$.

Wir definieren $v := v^{(1)} \dots v^{(m)}$ und wählen ein $x \in \partial\mathbb{V}$.

Es ist dann zu zeigen $v \in \mathcal{M}_m \cap \mathcal{J}$ gilt.

Wir setzen $u^{(0)} := \emptyset$ und $u^{(k)} := v^{(1)} \dots v^{(k)}$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Da $v^{(m)} \in \mathcal{T}_{u^{(m-1)}}^{a_m}([\gamma; 1])$, gilt $L_{u^{(m-1)}} > 0$ und somit $L_{u^{(k)}} > 0$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Daraus folgt für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$ $L_{\mathcal{V}(u^{(k)})} \geq c_{I_{u^{(k-1)}}^{a_k}}$ und $L_{u^{(k)}} < \gamma \cdot c_{I_{u^{(k-1)}}^{a_k}}$. Per Induktion und unter der Zuhilfenahme von Lemma 3.3.6 folgt daraus, dass $u^{(k)} = vx|_{\tau_{vx}^k}$ und $I_{u^{(k)}}^{a_{k+1}} = \varrho_{vx}^k$ für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt.

Damit gilt $L_{vx|_{\tau_{vx}^k}} < \gamma \cdot c_{\varrho_{vx}^k}$ für alle $k \in \{1, \dots, m-1\}$ und $\gamma \cdot c_{\varrho_{vx}^k} \leq L_{vx|_{\tau_{vx}^k}} \leq \gamma c_{\varrho_{vx}^k}$.

Dies bedeutet, dass $v \in \mathcal{M}_m \cap \mathcal{J}$.

□

Korollar 3.3.30. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $c, a \in \mathcal{F}_0$ und alle $\gamma \in]0; 1[$ gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{c,a,\gamma,0} &= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in U_n^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha = \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in \neq U_n^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha \\ \Gamma_n^{c,a,\gamma,1} &= \sum_{m=1}^n \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in G_n^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha = \sum_{m=1}^n \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in \neq G_n^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha \end{aligned}$$

Im dem sich nun anschließenden Teil analysieren wir die einzelnen Summanden. Dazu führen wir einige von uns benötigte Notationen ein. Folgende Abkürzungen für die Differenz zwischen dem Exzess-Maßes und dem asymptotischen Exzess-Maß sollen uns das Leben erleichtern.

Definition 3.3.31. Differenz-Maße.

Für alle $a \in]0; 1[$ setzen wir

$$\xi_a^{(\alpha)} : \Omega \times \mathfrak{B}_{]0;1]} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; (\omega, A) \mapsto \mu_a^{(\alpha)}(\omega, A) - W^{(\alpha)}(\omega) \cdot \mu^{(\alpha)}(A)$$

und

$$\tilde{\xi}_a^{(\alpha)} : \Omega \times \mathfrak{B}_{]0;1]} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; (\omega, A) \mapsto \tilde{\mu}_a^{(\alpha)}(\omega, A) - W^{(\alpha)}(\omega) \cdot \mu^{(\alpha)}(A).$$

Weiterhin für alle $v \in \mathbb{V}$ die entsprechenden Differenzen „startend ab v “.

$$\xi_a^{(\alpha)}(v) : \Omega \times \mathfrak{B}_{]0;1]} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; (\omega, A) \mapsto \left(\mu_a^{(\alpha)}(v) \right) (\omega, A) - (W^{(\alpha)}(v))(\omega) \cdot \mu^{(\alpha)}(A)$$

und

$$\tilde{\xi}_a^{(\alpha)}(v) : \Omega \times \mathfrak{B}_{]0;1]} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}; (\omega, A) \mapsto (\tilde{\mu}_a^{(\alpha)}(v))(\omega) - (W^{(\alpha)}(v))(\omega) \cdot \mu^{(\alpha)}(A).$$

Definition 3.3.32. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$.

Wir definieren für alle $A \in \mathfrak{B}_{]0;1]}$

$$\Delta_0^{c,a}(A) := \xi_{c^1}^{(\alpha)}(A), \tilde{\Delta}_0^{c,a}(A) := \tilde{\xi}_{c^1}^{(\alpha)}(A),$$

wobei $c^1 := c_{\varrho^1}$ und ϱ^1 die in Bemerkung 3.3.4 definierte Konstante ist.

Weiterhin definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \Delta_n^{c,a,\gamma}(A) &:= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in {}_+U_n^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha \left(\xi_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^{a_{n+1},c}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(n)}) \right) (A), \\ \tilde{\Delta}_n^{c,a,\gamma}(A) &:= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in {}_+U_n^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha \left(\tilde{\xi}_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^{a_{n+1},c}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(n)}) \right) (A). \end{aligned}$$

Bemerkung 3.3.33. Die soeben definierten Größen sind wohldefiniert, da $L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha > 0$ für $(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in {}_+U_n^{c,a,\gamma}$ gilt und somit $0 < Q_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^{a_{n+1},c} < 1$ gilt.

Lemma 3.3.34. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in U_k^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k)}) = \\ W^{(\alpha)} \cdot \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^k + \sum_{m=0}^{k-1} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-1-m} \tilde{\Delta}_m^{c,a,\gamma}([0; \gamma]) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in U_k^{c,a,\gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha &= W^{(\alpha)} \cdot \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^k + \\ &\sum_{m=0}^{k-2} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-1-m} \tilde{\Delta}_m^{c,a,\gamma}([0; \gamma]) + \\ &\Delta_{k-1}^{(c,a,\gamma)}([0; \gamma]). \end{aligned}$$

Beweis. Wir definiere für alle $k \in \mathbb{N}$

$$D_k := \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in U_k} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k)}).$$

Für $k = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
D_1 &= \sum_{v \in U_1} L_v^\alpha W^{(\alpha)}(v) \\
&= \sum_{v \in \mathcal{T}_\sigma^{\alpha_1}([0; \gamma])} L_v^\alpha W^{(\alpha)}(v) \\
&= \sum_{v \in \mathcal{L}^{c^1}} L_v^\alpha W^{(\alpha)}(v) \mathbb{1}_{\{L_v \in c^1 \cdot [0; \gamma]\}} \\
&= \tilde{\mu}_{c^1}^{(\alpha)}([0; \gamma]) \\
&= W^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) - \tilde{\xi}_{c^1}^{(\alpha)}([0; \gamma]) \\
&= W^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) - \tilde{\Delta}_0([0; \gamma]).
\end{aligned}$$

Für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned}
D_k &= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in {}_+U_k} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k)}) \\
&= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in {}_+U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot \sum_{w \in \mathcal{T}_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{\alpha_k}([0; \gamma])} L_w^\alpha(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)} w) \\
&= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in {}_+U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot (\tilde{\mu}_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{\alpha_k}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}))([0; \gamma]) \\
&= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in {}_+U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \cdot \mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \\
&+ \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in {}_+U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot \left((\tilde{\mu}_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{\alpha_k}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}))([0; \gamma]) - W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right) \\
&= \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in {}_+U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \cdot \mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \\
&+ \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in {}_+U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot (\tilde{\xi}_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^{\alpha_k}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}))([0; \gamma]) \\
&= \mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \cdot D_{k-1} + \tilde{\Delta}_{k-1}([0; \gamma]).
\end{aligned}$$

Daraus folgt die erste Behauptung induktiv.

Die zweite Gleichung ergibt sich daraus mit einer ähnlichen Betrachtung, wir verzichten daher auf die Details. \square

Korollar 3.3.35. Seien $a, \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in G_k^{c, a, \gamma}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha &= \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot W^{(\alpha)} \cdot \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-1} \\
&+ \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{m=0}^{k-2} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-2-m} \cdot \tilde{\Delta}_m^{c, a, \gamma}([0; \gamma]) \\
&+ \Delta_{k-1}^{c, a, \gamma}([\gamma; 1]).
\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in G_k} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha \\
= & \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in +U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot (\mu_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}))([\gamma; 1]) \\
= & \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in +U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \cdot \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \\
& + \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in +U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot \left((\mu_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}))([\gamma; 1]) - W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \cdot \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \right) \\
= & \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in +U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) \cdot \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \\
& + \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in +U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot (\xi_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}}^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}))([\gamma; 1]) \\
= & \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k-1)}) \in +U_{k-1}} L_{v^{(1)} \dots v^{(k-1)}}^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(v^{(1)} \dots v^{(k-1)}) + \Delta_{k-1}([\gamma; 1])
\end{aligned}$$

Mit dem vorherigen Lemma folgt die Behauptung. \square

Korollar 3.3.36. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma_n^{c, a, \gamma, 0} = W^{(\alpha)} \cdot (\mu^{(\alpha)}[0; \gamma])^n + \sum_{m=0}^{n-2} (\mu^{(\alpha)}[0; \gamma])^{n-1-m} \cdot \tilde{\Delta}_m^{c, a, \gamma}([0; \gamma]) + \Delta_{n-1}^{c, a, \gamma}([0; \gamma]).$$

Beweis. Es gilt

$$\Gamma_n^{\gamma, 0} = \sum_{\substack{v \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{M}_n \\ v \notin \mathcal{J}}} L_v^\alpha = \sum_{(v^1, \dots, v^n) \in U_n} L_{v^1 \dots v^n}^\alpha.$$

Wir können nun Lemma 3.3.34 anwenden und die Behauptung folgt. \square

Korollar 3.3.37. Seien $a, c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Es gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\Gamma_n^{c, a, \gamma, 1} &= W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=1}^n (\mu^{(\alpha)}([0; \gamma])^{k-1}) \\
&+ \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{k-2} (\mu^{(\alpha)}([0; \gamma])^{k-2-m}) \cdot \tilde{\Delta}_m^{c, a, \gamma}([0; \gamma]) \\
&+ \sum_{k=1}^n \Delta_{k-1}^{c, a, \gamma}([\gamma; 1]).
\end{aligned}$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{v \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{M}_n \\ v \in \mathcal{J}}} L_v^\alpha &= \sum_{k=1}^n \sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(k)}) \in G_k} L_{v^{(1)} \dots v^{(k)}}^\alpha \\
&= \sum_{k=1}^n \left\{ \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot W^{(\alpha)} \cdot \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-1} + \right. \\
&\quad \left. \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{m=0}^{k-2} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-2-m} \cdot \tilde{\Delta}_m([0; g]) \right. \\
&\quad \left. + \Delta_{k-1}([\gamma; 1]) \right\} \\
&= W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=1}^n \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-1} \\
&\quad + \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=1}^n \sum_{m=0}^{k-2} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-2-m} \cdot \tilde{\Delta}_m([0; \gamma]) \\
&\quad + \sum_{k=1}^n \Delta_{k-1}([\gamma; 1]).
\end{aligned}$$

Aus der Gleichung

$$\Gamma_n^1 = \sum_{\substack{v \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{M}_n \\ v \in \mathcal{J}}} L_v^\alpha$$

ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 3.3.38. *Sei $m \in \mathbb{N}$.*

Seien $I_1, \dots, I_m \subseteq [0; 1]$ Intervalle.

(i) *Sei T nicht-arithmetisch. Dann gibt es für alle $\varepsilon \in]0; \infty[$ ein $r \in]0; 1[$ so, dass für alle $v \in \mathbb{V}$ und alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt $\mathbb{E} \left| (\xi_r^{(\alpha)}(v))(I_k) \right| < \varepsilon$ und $\mathbb{E} \left| (\tilde{\xi}_r^{(\alpha)}(v))(I_k) \right| < \varepsilon$.*

(ii) *Sei T arithmetisch mit Spanne d . Dann gibt es für alle $\varepsilon \in]0; \infty[$ ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und für alle $v \in \mathbb{V}$ sowie alle $k \in \{1, \dots, m\}$ gilt $\mathbb{E} \left| (\xi_{e^{-nd}}^{(\alpha)}(v))(I_k) \right| < \varepsilon$ und $\mathbb{E} \left| (\tilde{\xi}_{n^{-ns}}^{(\alpha)}(v))(I_k) \right| < \varepsilon$.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den nicht-arithmetischen Fall.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Satz 2.2.10 für alle $k \in \{1, \dots, m\}$ ein $r_m \in]0; 1[$ und ein $\tilde{r}_m \in]0; 1[$ so, dass für alle $s \in]0; 1[$ mit $s \leq r_m \wedge \tilde{r}_m$ ¹

$$\mathbb{E} \left| \xi_s^{(\alpha)}(I_k) \right| = \mathbb{E} \left| \mu_s^{(\alpha)}(I_k) - W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I_k) \right| < \varepsilon$$

und

$$\mathbb{E} \left| \tilde{\xi}_s^{(\alpha)}(I_k) \right| = \mathbb{E} \left| \tilde{\mu}_s^{(\alpha)}(I_k) - W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}(I_k) \right| < \varepsilon$$

gilt.

Setze $r := \min \{r_k, \tilde{r}_k \mid k \in \{1, \dots, m\}\}$. Dann gilt für alle $v \in \mathbb{V}$ und alle $k \in \{1, \dots, m\}$

$$\mathbb{E} \left| (\xi_r^{(\alpha)}(v))(I_k) \right| = \mathbb{E} \left| \xi_r^{(\alpha)}(I_k) \right| < \varepsilon$$

¹Für zwei reelle Zahlen x, y sei $x \wedge y := \min(x, y)$

und

$$\mathbb{E} \left| (\tilde{\xi}_r^{(\alpha)}(v))(I_k) \right| = \mathbb{E} \left| \tilde{\xi}_r^{(\alpha)}(I_k) \right| < \varepsilon.$$

□

Lemma 3.3.39. Für jedes $\varepsilon > 0$ und $\gamma \in]0; 1[$ und $c \in \mathcal{F}_0$ gibt es eine Folge $a \in \mathcal{F}_0$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} (|\Delta_n^{c,a,\gamma}([0; \gamma])|), \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} (|\Delta_n^{c,a,\gamma}([\gamma; 1])|) < \varepsilon$$

sowie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\Delta}_n^{c,a,\gamma}([0; \gamma]) \right| \right), \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \left(\left| \tilde{\Delta}_n^{c,a,\gamma}([\gamma; 1]) \right| \right) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei zunächst T nicht-arithmetisch.

Sei $\varepsilon > 0, \gamma \in]0; 1[$ und $c \in \mathcal{F}_0$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle ein $a_n \in]0; 1[$ so, dass für alle $r \in]0; a_n[$ und alle $v \in \mathbb{V}$ gilt

$$\mathbb{E} \left(\left| (\xi_r^{(\alpha)}(v))([0; \gamma]) \right| \right), \mathbb{E} \left(\left| (\xi_r^{(\alpha)}(v))([\gamma; 1]) \right| \right) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

und

$$\mathbb{E} \left(\left| (\tilde{\xi}_r^{(\alpha)}(v))([0; \gamma]) \right| \right), \mathbb{E} \left(\left| (\tilde{\xi}_r^{(\alpha)}(v))([\gamma; 1]) \right| \right) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Dies ist nach Lemma 3.3.38 möglich.

Es folgt mit Satz 1.5.20

$$\begin{aligned} \mathbb{E} (|\Delta_n([0; \gamma])|) &\leq \mathbb{E} \left(\sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in {}_+U_n} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha \left| (\xi_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^{(\alpha)}}(v^{(1)} \dots v^{(n)}))([0; \gamma]) \right| \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{(v^{(1)}, \dots, v^{(n)}) \in {}_+U_n} L_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^\alpha \underbrace{\mathbb{E} \left(\left| (\xi_{Q_{v^{(1)} \dots v^{(n)}}^{(\alpha)}}(v^{(1)} \dots v^{(n)}))([0; \gamma]) \right| \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{M}_n} \right)}_{\leq \varepsilon/2^n} \right) \\ &\leq \mathbb{E} \left(\sum_{v \in \mathcal{J} \wedge \mathcal{M}_n} L_v^\alpha \right) \cdot \varepsilon/2^n = \varepsilon/2^n. \end{aligned}$$

Die anderen Terme können analog abgeschätzt werden, wir verzichten auf die Details.

Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, so ist im Obigem die Folge $a \in \mathcal{F}_0$ so zu wählen, dass $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{e^{-nd} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt. □

Bemerkung und Definition 3.3.40. Seien $c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle eine Folge $\hat{a} := \hat{a}^{c,n} = (\hat{a}_k^{c,n})_{k \in \mathbb{N}}$ so, dass sowohl

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} |\Delta_m^{c,\hat{a}}([0; \gamma])|, \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} |\Delta_m^{c,\hat{a}}([\gamma; 1])| < 1/n$$

als auch

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left| \tilde{\Delta}_m^{c,\hat{a}}([0; \gamma]) \right|, \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left| \tilde{\Delta}_m^{c,\hat{a}}([\gamma; 1]) \right| < 1/n$$

gilt.

Wir setzen dann

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n^{c,\gamma,0} &:= \mathcal{C}_n^{c,\hat{a},\gamma,0} = \{v \in (\mathcal{J}^{c,\hat{a},\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,\hat{a}}) \mid v \notin \mathcal{J}^{c,\hat{a},\gamma}\}, \\ \mathcal{C}_n^{(c,\gamma,1)} &:= \mathcal{C}_n^{(c,\hat{a},\gamma,1)} = \{v \in (\mathcal{J}^{c,\hat{a},\gamma} \wedge \mathcal{M}_n^{c,\hat{a}}) \mid v \in \mathcal{J}^{c,\hat{a},\gamma}\}, \end{aligned}$$

$$\Gamma_n^{c,\gamma,0} := \Gamma_n^{c,\hat{\alpha},\gamma,0} = \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,\gamma,0}} L_v^\alpha,$$

$$\Gamma_n^{c,\gamma,1} := \Gamma_n^{c,\hat{\alpha},\gamma,1} = \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,\gamma,1}} L_v^\alpha.$$

Lemma 3.3.41. Für alle $c \in \mathcal{F}_0$ und $\gamma \in]0; 1[$ gilt

$$\Gamma_n^{c,\gamma,0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} 0$$

und

$$\Gamma_n^{c,\gamma,1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \Gamma_n^{c,\gamma,0} \right| &\leq \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^n + \sum_{m=0}^{n-2} \mathbb{E} \left| \tilde{\Delta}_m([0; \gamma]) \right| + \mathbb{E} \left| \Delta_{n-1}([0; \gamma]) \right| \\ &\leq \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left(W^{(\alpha)} - \Gamma_n^{c,\gamma,1} \right) \right| &\leq \mathbb{E} \left| W^{(\alpha)} - W^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^k \right| \\ &\quad + \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=2}^n \sum_{m=0}^{k-2} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^{k-2-m} \cdot \mathbb{E} \left| \tilde{\Delta}_m([0; \gamma]) \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left| \Delta_{k-1}([\gamma; 1]) \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left| W^{(\alpha)} - W^{(\alpha)} \cdot \left(1 - \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^k \right) \right| \\ &\quad + \mu^{(\alpha)}([\gamma; 1]) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\mu^{(\alpha)}([0; \gamma]) \right)^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E} \left| \tilde{\Delta}_m([0; \gamma]) \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left| \Delta_{k-1}([\gamma; 1]) \right| \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

□

3.3.2. Beweis des Darstellungssatzes

Nicht-arithmetischer Fall

In diesem Teilabschnitt setzen wir voraus, dass T nicht-arithmetisch ist.

Für jedes $t \in [0; \infty[$ sei $Z(t) := Z^{T,C}(t)$ der fast sicher Grenzwert von $\left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dieser Grenzwert existiert aus Monotoniegründen.

Satz 3.3.42. Darstellungssatz.

Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$. Dann gibt es eine Konstante $c^* \in]0; \infty[$ so, dass für alle $t \in [0; \infty[$

$$g(t) = \mathbb{E} \left(Z^{T,C}(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot c^* \cdot W^{(\alpha)}) \right)$$

gilt.

Beweis. Nach dem Regularitätssatz 3.2.1, gilt

$$c^* := \limsup_{\substack{x \searrow 0 \\ x \in]0; t_0(g)[}} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} \in [0; \infty[.$$

Seien $\delta > 0$, $\varepsilon \in]0; 1[$, $\gamma \in]0; 1[$ sowie $t \in]0; \infty[$.

Wir definieren $t_0^\varepsilon := \min(\varepsilon \cdot t_0(g), 1)$.

Zunächst zeigen wir folgende untere Abschätzung

$$g(t) \geq \mathbf{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* - \delta}{\gamma^\alpha} \cdot W^{(\alpha)}) \right).$$

Da $c^* = \limsup_{x \rightarrow 0} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} < \infty$ ist, können wir eine Folge $c = (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_0$ wählen mit

$$\begin{aligned} t \cdot c_k &< t_0^\varepsilon, \\ c^* - \delta &\leq \frac{-\log g(tc_k)}{(tc_k)^\alpha} \leq c^* + \delta \text{ für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$.

Ist nun $v \in \mathcal{C}_n^{c,1}$, so gibt es ein $k (= k_v) \in \mathbb{N}$ mit

$$\gamma \cdot c_k \leq L_v \leq c_k.$$

Für solche Knoten können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} &\leq \frac{-\log g(tc_k)}{(tL_v)^\alpha} \\ &\leq \frac{-\log g(tc_k)}{(tc_k \gamma)^\alpha} \\ &\leq \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha}. \end{aligned}$$

Damit können wir die Lösungsfunktion abschätzen

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbf{E} \left(\prod_{v \in \mathcal{C}_n^{c,0} \dot{\cup} \mathcal{C}_n^{c,1}} f(tL_v C_v) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,0} \dot{\cup} \mathcal{C}_n^{c,1}} \frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha) \right) \\ &\geq \mathbf{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,0} \dot{\cup} \mathcal{C}_n^{c,1}} \frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha) \right) \\ &\geq \mathbf{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,1}} L_v^\alpha) \times \exp(-t^\alpha \cdot \sup_{x < t_0^\varepsilon} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c,0}} L_v^\alpha) \right) \\ &= \mathbf{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} \cdot \Gamma_n^{c,1}) \times \exp(-t^\alpha \cdot \sup_{x < t_0^\varepsilon} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} \Gamma_n^{c,0}) \right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} \cdot \Gamma_n^{c,1}) \times \exp(-t^\alpha \cdot \sup_{x < t_0^\varepsilon} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} \Gamma_n^{c,0}) \right) \right. \\
& \left. - \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} W^{(\alpha)}) \right) \right| \\
& \leq \\
& \mathbb{E} \left| \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} \cdot \Gamma_n^{c,1}) - \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} W^{(\alpha)}) \right| \\
& + \mathbb{E} \left| \exp(-t^\alpha \cdot \sup_{x < t_0^\varepsilon} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} \Gamma_n^{c,0}) - 1 \right| \\
& \leq \\
& t^\alpha \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} \mathbb{E} \left| \Gamma_n^{c,1} - W^{(\alpha)} \right| + t^\alpha \sup_{x < t_0^\varepsilon} \frac{-\log g(x)}{x^\alpha} \mathbb{E} \left| \Gamma_n^{c,0} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$g(t) \geq \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \frac{c^* + \delta}{\gamma^\alpha} W^{(\alpha)}) \right).$$

Kommen wir nun zur oberen Abschätzung

$$g(t) \leq \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \cdot W^{(\alpha)}) \right).$$

Wir definieren die Folge $c' = (c'_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_0$ durch $c'_k := \frac{c^*}{\gamma}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
t \cdot c'_k &< t_0^\varepsilon, \\
c^* - \delta &\leq \frac{-\log g(t\gamma c'_k)}{(t\gamma c'_k)^\alpha} \leq c^* + \delta \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Ist nun $v \in \mathcal{C}_n^{c',1}$, so gibt es ein $k (= k_v) \in \mathbb{N}$ mit

$$\gamma \cdot c'_k \leq L_v \leq c'_k.$$

Wir schätzen für solche Knoten wie folgt ab

$$\begin{aligned}
\frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} &\geq \frac{-\log g(t\gamma c'_k)}{(tL_v)^\alpha} \\
&\geq \frac{-\log g(t\gamma c'_k)}{(tc'_k)^\alpha} \\
&= \gamma^\alpha \cdot \frac{-\log g(t\gamma c'_k)}{(t\gamma c'_k)^\alpha} \\
&\geq \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta).
\end{aligned}$$

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$Z_n(t) := \prod_{v \in \mathcal{C}_n^{(c',0)} \dot{\cup} \mathcal{C}_n^{(c',1)}} f(tL_v C_v)$$

und erhalten mit Lemma 3.1.14, dass $Z_n(t)$ monoton fallend ist und gegen $Z(t)$ f.s. konvergiert. Ferner ist die Folge $(Z_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, da $|Z_n(t)| \leq 1$. Man siehe dazu auch das Korollar 50.3 in [3].

Es gilt

$$\begin{aligned}
g(t) &= \mathbb{E} \left(Z_n(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c',0} \dot{\cup} \mathcal{C}_n^{c',1}} \frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha) \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(Z_n(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c',1}} \frac{-\log g(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha) \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(Z_n(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \sum_{v \in \mathcal{C}_n^{c',1}} L_v^\alpha) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(Z_n(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \cdot \Gamma_n^{c',1}) \right).
\end{aligned}$$

Des Weiteren können wir folgern

$$\begin{aligned}
&\left| \mathbb{E} \left(Z_n(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \cdot \Gamma_n^{c',1}) \right) - \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \cdot W^{(\alpha)}) \right) \right| \\
&\leq \\
&\mathbb{E} |Z_n(t) - Z(t)| + t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \mathbb{E} \left| \Gamma_n^{c',1} - W^{(\alpha)} \right| \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz $\mathbb{E} |Z_n(t) - Z(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ lässt sich aus Satz 50.5 in [3] ableiten.

Das heißt also

$$g(t) \leq \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot \gamma^\alpha \cdot (c^* - \delta) \cdot W^{(\alpha)}) \right).$$

Lässt man nun δ gegen 0 und γ gegen 1 gehen, so folgt

$$g(t) = \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha c^* W^{(\alpha)}) \right)$$

für alle $t \in]0; \infty[$.

□

Arithmetischer Fall

In diesen Teilabschnitt setzen wir voraus, dass T arithmetisch mit Spanne d ist. Wir setzen $\theta := e^{-d}$.

Für jedes $t \in [0; \infty[$ sei $Z(t) := Z^{T,C}(t)$ der fast sicher Grenzwert von $\left(\prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dieser existiert aus Monotoniegründen.

Satz 3.3.43. *Darstellungssatz.*

Sei $g \in \mathbb{F}(T, C)$.

Dann gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$g(t) = \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot c^*(t) \cdot W^{(\alpha)}) \right),$$

wobei c^* die Abbildung aus Definition 3.2.3 ist.

Gilt außerdem noch

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathbb{E} \left(\frac{1 - Z(t)}{t^\alpha} \right) = 0, \quad (3.3.4)$$

so ist die Funktion c^* beschränkt und linksseitig stetig auf $]0; \infty[$. Sie ist entweder konstant Null oder überall echt größer Null.

Beweis. Die Gleichung

$$g(t) = \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot \exp(-t^\alpha \cdot c^*(t) \cdot W^{(\alpha)}) \right) \text{ für alle } t \in]0; \infty[\quad (3.3.5)$$

können wir mit den gleichen Methoden wie im nicht-arithmetischen Fall nachweisen.

Wir zeigen nun, dass c^* die behaupteten Eigenschaften besitzt.

Zunächst zeigen wir, dass $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$ linksseitig stetig auf $]0; \infty[$ ist.

Für jedes $t \in]0; \infty[$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1 - g(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}} - t^\alpha \cdot c^*(t) \right| \\ & \leq \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - Z(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}} \right) + \mathbb{E} \left((Z(t\theta^n) - 1) \frac{1 - \exp(-t^\alpha \cdot \theta^{\alpha n} c^*(t) W^{(\alpha)})}{\theta^{\alpha n}} \right) \right| + \\ & \quad \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - \exp(t^\alpha \cdot \theta^n c^*(t) W^{(\alpha)})}{\theta^{\alpha n}} - t c^*(t) \right) \right| \\ & \leq \mathbb{E} \left(\frac{1 - Z(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}} \right) + 2 \cdot \mathbb{E}(1 - Z(t\theta^n)) + \\ & \quad \left| \frac{1 - \varphi_{W^{(\alpha)}}(t^\alpha c^*(t) \theta^{\alpha n})}{\theta^{\alpha n}} - t^\alpha c^*(t) \right| \\ & \leq 3 \cdot \mathbb{E} \left(\frac{1 - Z(t\theta^n)}{t^\alpha \theta^{\alpha n}} \right) t^\alpha + \mathbb{E} \left(\frac{e^{-\theta^{\alpha n} t^\alpha c^*(t) W^{(\alpha)}} + \theta^{\alpha n} t^\alpha c^*(t) W^{(\alpha)} - 1}{\theta^{\alpha n}} \right). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für alle $a < b \in]0; \infty[$

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in]a; b[} \left| \frac{1 - g(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}} - t^\alpha \cdot c^*(t) \right| \leq \\ & 3 \cdot b^\alpha \sup_{t \in]a; b[} \mathbb{E} \left(\frac{1 - Z(t\theta^n)}{t^\alpha \theta^{\alpha n}} \right) + \mathbb{E} \left(\frac{e^{-\theta^{\alpha n} b^\alpha c^*(b) W^{(\alpha)}} + \theta^{\alpha n} b^\alpha c^*(b) W^{(\alpha)} - 1}{\theta^{\alpha n}} \right). \end{aligned}$$

Wegen der Konvergenz 3.3.4 konvergiert der erste Term gegen Null, die Konvergenz des zweiten Terms gegen Null ist evident.

Damit konvergiert die Funktionenfolge $t \mapsto \frac{1 - g(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}}$; $n \in \mathbb{N}$ lokal gleichmäßig gegen die Abbildung $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$.

Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $t \mapsto \frac{1 - g(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}}$ linksseitig stetig ist, folgt damit die linksseitige Stetigkeit von $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$ auf $]0; \infty[$.

Da die Abbildung $t \mapsto t^\alpha$ stetig auf $]0; \infty[$ ist, ist c^* als Hintereinanderausführung linksseitig stetiger Abbildungen auf $]0; \infty[$ linksseitig stetig.

Für jedes $t \in [\theta; 1]$ gilt wegen der Monotonie von $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$

$$c^*(t) = \frac{t^\alpha c^*(t)}{t^\alpha} \leq \frac{c^*(1)}{t^\alpha} \leq \frac{c^*(1)}{\theta^\alpha} < \infty.$$

Damit ist die Funktion c^* auf dem Intervall $[\theta; 1]$ beschränkt. Aus der multiplikativen θ -Periodizität folgt damit, dass c^* auf $]0; \infty[$ beschränkt ist.

Nach Lemma 3.2.4 ist c^* positiv und die Abbildung $t \mapsto t^\alpha c^*(t)$ monoton wachsend.

Falls es ein $t_0 > 0$ gibt mit $c^*(t_0) = 0$, so gilt $t^\alpha c^*(t) = 0$ für alle $t \in [0; t_0]$, also gilt auch $c^*(t) = 0$ für alle $t \in [0; t_0]$.

Aus der multiplikativen θ -Periodizität von c^* folgt, dass dann $c^*(t) = 0$ für alle $t \in [0; \infty[$ gilt. \square

Kapitel 4.

Anwendung: Stochastische Fixpunktgleichungen

In diesem Kapitel benutzen wir die aus dem vorherigen Kapitel gewonnenen Resultate um Lösungen von stochastischen Fixpunktgleichungen zu analysieren.

4.1. Grundlagen

In diesem eher informellen Abschnitt sagen wir, was wir unter einer stochastischen Fixpunktgleichung verstehen und verschieben eine präzise formale Definition in die nächsten Abschnitte.

In diesem Abschnitt sei T stets eine Kantengewichtsfolge und C eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{R} .

Stochastische Fixpunktgleichungen des Summen-Typs

Wir bezeichnen die folgende Verteilungsgleichung als eine stochastische Fixpunktgleichung des Summen-Typs

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C. \quad (4.1.1)$$

Hierbei seien Y, Y_1, Y_2, \dots identisch verteilte Zufallsgrößen so, dass $(T, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen sind.

In diesem Zusammenhang nennen wir die Zufallsgröße C auch den (inhomogenen) Restterm der stochastischen Fixpunktgleichung, sowie T die zugehörige Kantengewichtsfolge.

Untersucht werden soll welche Verteilungen für Y in Frage kommen, natürlich unter gewissen Voraussetzungen an die Kantengewichtsfolge T und den inhomogenen Restterm C .

Es besteht eine enge Beziehung zwischen den stochastischen Fixpunktgleichungen

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i \quad (4.1.2)$$

und

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C. \quad (4.1.3)$$

Wir vereinbaren die folgende Sprechweise, welche sich an eine ähnliche Konvention aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme anlehnt.

Die stochastische Fixpunktgleichung (4.1.2), d.h. wenn der Restterm $C = 0$ ist, nennen wir homogene stochastische Fixpunktgleichung. Falls der Restterm $C \neq 0$ ist, so reden wir von einer inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung.

Weiterhin nennen wir die stochastische Fixpunktgleichung (4.1.2) die zur inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung (4.1.3) gehörige homogene stochastische Fixpunktgleichung.

Nach dieser informellen Definition treten Fragen nach der Wohldefiniiertheit auf, u.a. ist in dieser allgemeinen Situation nicht geklärt, ob die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} T_i \cdot Y_i$ überhaupt als Limes endlicher Summen existiert.

Dieser Fragestellung stellen wir uns im Abschnitt 4.2.

Stochastische Fixpunktgleichungen des Infimums-/Supremums-Typs

Wir nennen die folgende Verteilungsgleichung eine stochastische Fixpunktgleichung des Supremums-Typs¹

$$Y \stackrel{d}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i Y_i \vee C, \quad (4.1.4)$$

Hierbei seien Y, Y_1, Y_2, \dots identisch verteilter Zufallsgrößen so, dass $(T, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen sind.

Analog bezeichnen wir die Verteilungsgleichung

$$Y \stackrel{d}{=} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \wedge \frac{1}{C} \quad (4.1.5)$$

als eine stochastische Fixpunktgleichung des Infimumtyps. Hierbei seien Y, Y_1, Y_2, \dots gleichverteilte Zufallsgrößen so, dass $(T, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängige Zufallsgrößen sind.

Auch in dieser Situation nennen wir C den (inhomogenen) Restterm der stochastischen Fixpunktgleichung und T die zugehörige Kantengewichtsfolge.

Wir übernehmen die Namenskonvention aus dem vorherigen Teilabschnitt und nennen die stochastischen Fixpunktgleichungen

$$Y \stackrel{d}{=} \sup_{i \in \mathbb{N}} T_i Y_i, \quad (4.1.6)$$

bzw.

$$Y \stackrel{d}{=} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \quad (4.1.7)$$

homogene stochastische Fixpunktgleichungen, ansonsten (d.h. falls $C \neq 0$) reden wir von inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichungen.

Außerdem nennen wir die stochastische Fixpunktgleichung (4.1.6) (bzw. (4.1.7)) die zu der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung (4.1.4) (bzw. (4.1.5)) gehörige homogene stochastische Fixpunktgleichung.

Wir schließen diesen Abschnitt mit folgenden Notationen für verschiedenen Mengen von Wahrscheinlichkeitsmaßen ab, die wir für das restliche Kapitel benötigen. Es sei

$$\overline{\mathcal{W}} := \{ \mu \mid \mu \text{ ist Wahrscheinlichkeitsmaß auf } (\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B}_{\overline{\mathbb{R}}}) \}$$

die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\overline{\mathbb{R}}$ versehen mit der Borelschen σ -Algebra.

Für die weitere Betrachtung definieren wir Teilmengen dieser Menge. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &:= \{ \mu \in \overline{\mathcal{W}} \mid \mu(] - \infty; \infty[) = 1 \}, \\ \overline{\mathcal{W}}^+ &:= \{ \mu \in \overline{\mathcal{W}} \mid \mu(]0; \infty]) = 1 \}, \\ \overline{\mathcal{W}}_0^+ &:= \{ \mu \in \overline{\mathcal{W}} \mid \mu([0; \infty]) = 1 \}, \\ \mathcal{W}_0^+ &:= \{ \mu \in \overline{\mathcal{W}} \mid \mu([0; \infty[) = 1 \}. \end{aligned}$$

¹Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ sei $x \vee y := \max(x, y)$ und $x \wedge y = \min(x, y)$

4.2. Stochastische Fixpunktgleichungen des Summentyps

Definition 4.2.1. Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm. Wir definieren

$$S_{\Sigma, T, C}^+ : \overline{\mathcal{W}}_0^+ \rightarrow \overline{\mathcal{W}}_0^+ ; \mu \mapsto \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C\right),$$

wobei $(T, C), Y_1, Y_2, \dots$ stochastisch unabhängig sind mit $\mathcal{L}(Y_i) = \mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Man beachte, dass diese Abbildung wohldefiniert ist, da wir nur Wahrscheinlichkeitsmaße $\overline{\mathcal{W}}_0^+$ betrachten und daher die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i$ als Supremum der Folge $(\sum_{i=1}^n T_i Y_i)_{n \in \mathbb{N}}$ stets existiert, eventuell aber den Wert ∞ annehmen kann.

Eine positive Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung des Summentyps ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{W}_0^+$ mit der Eigenschaft $S_{\Sigma, T, C}^+(\mu) = \mu$. Wir nennen ein solches Maß auch schlicht positive Lösung, ebenfalls benutzen wir die Bezeichnung positiver stochastischer Fixpunkt für μ .

Wir sprechen im Folgenden nur noch von Lösungen oder stochastischen Fixpunkten, meinen aber natürlich in diesem Abschnitt positive Lösungen. Eine Verallgemeinerung werden wir im nächsten Kapitel kennenlernen.

Wir definieren die Menge der stochastischen Fixpunkte als

$$\mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C) := \left\{ \mu \in \mathcal{W}_0^+ \mid S_{\Sigma, T, C}^+(\mu) = \mu \right\}.$$

Man beachte, dass stochastische Fixpunkte definitionsgemäß Wahrscheinlichkeitsmaße aus \mathcal{W}_0^+ sind, d.h. es gilt $\mu(\{\infty\}) = 0$ für alle $\mu \in \mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C)$.

Falls $C \neq 0$ ist, so bezeichnen wir die Lösungen aus $\mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C)$ als inhomogene Lösungen oder als inhomogene stochastische Fixpunkte. Ansonsten, d.h. falls $C = 0$ gilt, nennen wir die Maße aus $\mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C)$ homogene Lösungen bzw. homogene stochastische Fixpunkte.

Bemerkung 4.2.2. Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm. Dann ist die Zufallsgröße R_{∞} , die im Lemma 1.6.8 definiert wurde, eine Lösung der inhomogenen stochastischen Fixpunktgleichung $Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C$.

Laplace-Transformierte stochastischer Fixpunkte

Lemma 4.2.3. Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm und $\mu \in \mathcal{W}$. Dann sind äquivalent

- (i) $\mu \in \mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C)$,
- (ii) $\varphi_{\mu}(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tC} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \varphi_{\mu}(t \cdot T_i) \right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Dabei bezeichnen wir mit φ_{μ} die Laplace-Transformierte von μ .

Beweis. Sei Y eine Zufallsgröße mit $\mathcal{L}(Y) = \mu$.

Für alle $t \in [0; \infty[$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(e^{-t \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C} \right) &= \mathbb{E} \left(e^{-t \cdot C} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} e^{-t \cdot T_i Y_i} \right) \\
&= \int e^{-t \cdot c} \cdot \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^{\infty} e^{-t \cdot t_i Y_i} \right) dP^{(T,C)}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\
&= \int e^{-t \cdot c} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \varphi_Y(t \cdot t_i) dP^{(T,C)}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\
&= \mathbb{E} \left(e^{-t \cdot C} \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \varphi_Y(t \cdot T_i) \right).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun mithilfe des Eindeutigkeitsatzes für Laplace-Transformierte, siehe Satz 40.5 in [3]. \square

Das folgende Lemma verbindet die Lösungen stochastischer Fixpunktgleichungen mit den bisher betrachteten Lösungsfunktionen.

Korollar 4.2.4. *Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm. Sei Y eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Y) \in \mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C)$, dann ist die Laplace-Transformierte φ_Y eine Lösungsfunktion mit dem inhomogenen Restglied $f : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto e^{-t}$.*

Beweis. Die Laplace-Transformierte ist monoton fallend und stetig, d.h. insbesondere linksseitig stetig und rechtsseitig stetig in 0. Weiterhin ist die Abbildung $t \mapsto f(t) = e^{-t}$ monoton fallend und linksseitig stetig. Damit ist φ_Y nach Lemma 4.2.3 eine Lösungsfunktion im Sinne der Definition 3.1.1. \square

Bemerkung 4.2.5. Betrachten wir eine homogene stochastische Fixpunktgleichung, d.h. $C = 0$, so ist die Laplace-Transformierte jedes homogenen stochastischen Fixpunkts eine homogene Lösungsfunktion.

Lemma 4.2.6. *Sei T eine Kantengewichtsfolge mit $m(1) < 1$ und C ein positiver Tollterm. Dann gilt für alle $t \in [0; \infty[$*

$$Z^{T,C}(t) = e^{-tR_{\infty}},$$

wobei $Z^{T,C}(t)$ die in 3.1.13 definierte Zufallsgröße ist.

Beweis. Es gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$\begin{aligned}
Z(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} e^{-tL_v C_v} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-tR_n} = e^{-tR_{\infty}}.
\end{aligned}$$

\square

Darstellungssätze und Charakterisierungen

Satz 4.2.7. Darstellungssatz.

Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit einem charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; 1[$ und $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm. Sei $\mu \in \mathbb{F}_{\Sigma}^+(T, C)$.

(i) Sei T nicht-arithmetisch.

Dann gibt es eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$\varphi_\mu(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}} \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

(ii) Sei T arithmetisch mit Spanne d . Setze $\theta := e^{-d}$.

Dann gilt

$$\varphi_\mu(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}} \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$. Dabei ist c^* die in 3.2.3 definierte Funktion.

Beweis von 4.2.7. Sei $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma^+(T, C)$.

Nach Korollar 4.2.4 ist die Laplace-Transformierte φ_μ eine Lösungsfunktion.

Ist T nicht-arithmetisch, so gibt es nach dem Darstellungssatz für Lösungsfunktionen 3.3.42 im nicht-arithmetischen Fall eine Konstante $c \geq 0$ so, dass

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(t) &= \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}} \right) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0; \infty[$ gilt.

Ist T hingegen arithmetisch, so gilt nach dem Darstellungssatz für Lösungsfunktionen 3.3.43 im arithmetischen Fall

$$\varphi_\mu(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}} \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$. □

Charakterisierung der Lösungsmenge im nicht-arithmetischen Fall

Satz 4.2.8. *Charakterisierung der Lösungsmenge, inhomogener Fall.*

Sei T eine nicht-arithmetische, L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit einem charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; 1[$ und $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm.

Es gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma^+(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{1/\alpha} + R_\infty) \mid c \geq 0 \right\}.$$

Dabei bezeichne $Y_c^{(\alpha)}$ eine Zufallsgröße mit Laplace-Transformierten $t \mapsto e^{-c \cdot t^\alpha}$ und $Y_c^{(\alpha)}, (W^{(\alpha)}, R_\infty)$ sind stochastisch unabhängige Zufallsgrößen.

Bemerkung 4.2.9. Nach Abschnitt 4 im Kapitel XIII in [22] sind die Abbildungen $\varphi_c : [0; \infty[\rightarrow [0; 1]; t \mapsto e^{-ct^\alpha}$ f.a. $c \in [0; \infty[$ Laplace-Transformierte.

Beweis. „ \subseteq “: Sei $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma^+(T, C)$ und Y eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Y) = \mu$.

Nach Satz 4.2.7 gilt

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-c^*t^\alpha W^{(\alpha)}} \right) \tag{4.2.1}$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

Es folgt, dass $\mathfrak{L}(Y) = \mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{1/\alpha} + R_\infty)$ ist.

„ \supseteq “: Sei $c \geq 0$.

Setze $Y := Y_c^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{1/\alpha} + R_\infty$.

Es gilt $\mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)}), \mathfrak{L}(W^{(\alpha)}) \in \mathcal{W}_0^+$ und nach Lemma 1.6.10 gilt $R_\infty < \infty$, also gilt auch $\mathfrak{L}(Y) \in \mathcal{W}_0^+$.

Sei $(Y_c^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $Y_c^{(\alpha)}(i) \stackrel{d}{=} Y_c^{(\alpha)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ so, dass $(Y_c^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ von allen bisher betrachteten Zufallsgrößen stochastisch unabhängig ist.

Wir setzen

$$Y_i := Y_c^{(\alpha)}(i)(W^{(\alpha)}(i))^{1/\alpha} + R_\infty(i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$, so dass $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen ist mit $Y \stackrel{d}{=} Y_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Es gilt wegen Korollar 1.6.9 für alle $t \in [0; \infty[$

$$\begin{aligned} \varphi_{\sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset)Y_i + C(\emptyset)}(t) &= \mathbb{E} \left(e^{-t(\sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset)(Y_c^{(\alpha)}(i)(W^{(\alpha)}(i))^{1/\alpha} + R_\infty(i)))} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-ct^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset)W^{(\alpha)}(i)} \cdot e^{-t(\sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset)R_\infty(i) + C_\emptyset)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-ct^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset)W^{(\alpha)}(i)} \cdot e^{-t(\sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset)R_\infty(i) + C_\emptyset)} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}(\emptyset)} \cdot e^{-tR_\infty(\emptyset)} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt $Y \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i(\emptyset)Y_i + C_\emptyset \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{\infty} T_i Y_i + C$, also $\mathfrak{L}(Y) \in \mathbb{F}_\Sigma^+(T, C)$. \square

Bemerkung 4.2.10. Man beachte, dass eine inhomogene Lösung $\mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)} \cdot (cW^{(\alpha)})^{1/\alpha} + R_\infty)$ keine Faltung zweier Maße ist.

Im Spezialfall $\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha \stackrel{f.s.}{=} 1$ ist diese einfache Struktur der inhomogenen Lösungsmenge gegeben. Dies ist die Aussage des folgenden Korollars.

Korollar 4.2.11. Sei T eine nicht-arithmetische, L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit einem charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; 1[$ und $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm. Zusätzlich gelte

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha \stackrel{f.s.}{=} 1.$$

Dann gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma^+(T, C) = \{ \mathfrak{L}(R_\infty) * \mu \mid \mu \in \mathbb{F}_\Sigma^+(T, 0) \}.$$

Beweis. Da $\sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha \stackrel{f.s.}{=} 1$ gilt, ist $W^{(\alpha)} \stackrel{f.s.}{=} 1$. Ist nun φ die Laplace-Transformierte einer Lösung aus $\mathbb{F}_\Sigma^+(T, C)$, so gibt es eine Konstante c so, dass für alle $t \in [0; \infty[$ gilt

$$\varphi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}} \right) = e^{-ct^\alpha} \cdot \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \right).$$

Hierbei ist $t \mapsto e^{-ct^\alpha}$ die Laplace-Transformierte einer Lösung der zugehörigen homogenen Fixpunktgleichung. \square

Der folgende Satz ergibt sich aus dem Charakterisierungssatz für inhomogene Lösungen. Man beachte dabei, dass die Voraussetzung $m(1) < 1$ nur benötigt wurde, um $\mathbb{E}(R_\infty) < \infty$ zu folgern. Da im homogenen Fall $R_\infty = 0$ gilt, ist diese Voraussetzung an dieser Stelle überflüssig.

Satz 4.2.12. Charakterisierung, homogener Fall.

Sei T eine nicht-arithmetische L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; 1[$.

Dann gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma^+(T, 0) = \left\{ \mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{1/\alpha}) \mid c \geq 0 \right\}.$$

Dabei bezeichne $Y_c^{(\alpha)}$ eine Zufallsgröße mit Laplace-Transformierten $t \mapsto e^{-c \cdot t^\alpha}$ und $Y_c^{(\alpha)}, W^{(\alpha)}$ sind stochastisch unabhängige Zufallsgrößen.

Anmerkungen zum arithmetischen Fall

Im Zusammenhang mit arithmetischen Kantengewichtsfolgen gibt es mehrere Probleme bei der Charakterisierung der Lösungsmenge, wie man sie im Satz 4.2.8 vorfindet. In diesem Teilabschnitt beschreiben wir die auftretenden Problematik und skizzieren einen Lösungsansatz.

Für den restlichen Teil dieses Teilabschnittes sei T eine L_1 -reguläre, arithmetische Kantengewichtsfolge mit Spanne d , $m(1) < 1$ und charakteristischen Exponenten $\alpha \in]0; 1[$, sowie C ein positiver Tollterm.

Sei $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma^+(T, C)$ und Y eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Y) = \mu$.
Nach dem Darstellungssatz 4.2.7 gilt

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E} \left(e^{-tR_\infty} \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}} \right) \quad (4.2.2)$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

Das Ziel ist es nun die Abbildung $t \mapsto e^{-c^*(t)t^\alpha}$ als Laplace-Transformierte einer Verteilung aus \mathcal{W}_0^+ zu erkennen.

Dazu würde es nach dem Kriterium 2 im Abschnitt XIII.4 in [22] ausreichen, dass die Abbildung $h : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto t^\alpha c^*(t)$ eine vollständig monotone Ableitung besitzt.

Wir schlagen nun den folgenden Ansatz vor, um dies nachzuweisen.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\psi_n :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \frac{1 - \varphi_Y(t\theta^n)}{\theta^{\alpha n}}.$$

Wie im Beweis des Darstellungssatzes 3.3.43 gesehen, konvergiert die Funktionenfolge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen h .

Weiterhin ist ψ_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ differenzierbar auf $]0; \infty[$ mit

$$\psi'_n(t) = -\varphi_Y(t\theta^n)\theta^{(1-\alpha)n} = \mathbb{E} \left(Y^\alpha e^{-t\theta^n Y} (\theta^n Y)^{1-\alpha} \right)$$

für alle $t \in]0; \infty[$.

An dieser Stelle treten nun Probleme auf, denn es müssten die folgenden Aussagen gezeigt werden.

- (i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist ψ'_n die Laplace-Transformierte eines Maßes Q_n auf $[0; \infty[$ so, dass die Folge $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig beschränkt ist.
- (ii) Die Funktionsfolge $(\psi'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig.

Hätte man diese beiden Aussagen, so könnte man zunächst folgern, dass h differenzierbar ist mit $h'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi'_n(t)$ für alle $t > 0$. Mit dem Stetigkeitssatz für Laplace-Transformierte (vgl. Satz 45.7 in [3]) würde dann folgen, dass h' vollständig monoton ist.

In der Arbeit von Durrett und Liggett [20] wird dies Problem im Beweis des Theorems (2.18) nicht thematisiert. Da Liu in seiner Arbeit [32] diesen Beweis zitiert, überträgt sich diese Ungenauigkeit in der Argumentation auf seinen Beweis.

Im homogenen Fall, d.h. $\mathfrak{L}(Y) \in \mathbb{F}_\Sigma^+(T, 0)$ lässt sich zumindestens festhalten, dass h unendlich oft differenzierbar ist, da $h(t) = \varphi_{W^{(\alpha)}}^{-1} \circ \varphi_Y(t)$ für alle $t \in]0; \infty[$ gilt und $\varphi_{W^{(\alpha)}}$ eine C^∞ -Diffeomorphismus ist.

4.3. Stochastische Fixpunktgleichungen des Supremumtyps bzw. Infimumtyps

Definition 4.3.1. Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm. Wir definieren die Abbildung

$$S_{\text{sup},T,C} : \overline{\mathcal{W}} \rightarrow \overline{\mathcal{W}}; \mu \mapsto \mathfrak{L}\left(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i \cdot Y_i \vee C\right),$$

wobei T, Y_1, Y_2, \dots stochastisch unabhängig sind mit $\mathfrak{L}(Y_i) = \mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Analog definieren wir dies für das Infimum

$$S_{\text{inf},T,C} : \overline{\mathcal{W}} \rightarrow \overline{\mathcal{W}}; \mu \mapsto \mathfrak{L}\left(\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \wedge \frac{1}{C}\right)$$

wobei T, Y_1, Y_2, \dots stochastisch unabhängig sind mit $\mathfrak{L}(Y_i) = \mu$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Eine Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung (4.1.4) ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \overline{\mathcal{W}}$ mit der Eigenschaft $S_{\text{sup},T,C}(\mu) = \mu$. Analog ist $\mu \in \overline{\mathcal{W}}$ eine Lösung von (4.1.5), falls $S_{\text{inf},T,C}(\mu) = \mu$.

Wir benutzen wieder die Ausdrücke „stochastischer Fixpunkt“ und „Lösung einer stochastischen Fixpunktgleichung“ synonym.

Wir definieren die Menge der Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Infimumtyps als

$$\overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}(T, C) := \{\mu \in \overline{\mathcal{W}} \mid S_{\text{inf},T,C}(\mu) = \mu\}.$$

Die Mengen der echt positiven Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Infimumtyps sei definiert als

$$\overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C) := \{\mu \in \overline{\mathcal{W}}^+ \mid S_{\text{inf},T,C}(\mu) = \mu\},$$

außerdem definieren wir die Menge der positiven Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Supremumtyps als

$$\mathbb{F}_{\text{sup}}^+(T, C) := \{\mu \in \mathcal{W}_0^+ \mid S_{\text{sup},T,C}(\mu) = \mu\}.$$

Überlebensfunktionen von Lösungen

Lemma 4.3.2. Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm und $\mu \in \overline{\mathcal{W}}$. Dann sind äquivalent

(i) $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}(T, C)$,

(ii) $\overline{F}_\mu(t) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tC) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \overline{F}_\mu(tT_i) \right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Dabei bezeichnen wir mit \overline{F}_μ die Überlebensfunktion von μ .

Beweis. Sei Y eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Y) \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}(T, C)$.

Dann gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$\begin{aligned} \overline{F}_Y(t) &= P \left(\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \wedge \frac{1}{C} \geq t \right) = P \left(\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \geq t, tC \leq 1 \right) \\ &= \int \mathbb{1}_{[0;1]}(tc) \cdot P \left(\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{t_i} \geq t \right) dP^{T,C}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\ &= \int \mathbb{1}_{[0;1]}(tc) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \overline{F}_Y(t \cdot t_i) dP^{T,C}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tC) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} \overline{F}_Y(tT_i) \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich hieraus. □

Korollar 4.3.3. Sei T eine Kantengewichtsfolge und C ein positiver Tollterm.

Außerdem gelte $N := N_T \geq 1$ f.s. .

Ist Y eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Y) \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C)$, dann ist die Überlebensfunktion \overline{F}_Y eine Lösungsfunktion mit dem inhomogenen Restglied $f : [0; \infty[\rightarrow [0; 1]; x \mapsto \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$.

Beweis. Die Überlebensfunktion \overline{F}_Y ist monoton fallend und linksseitig stetig.

Da $\mathfrak{L}(Y) \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C)$, gilt $\overline{F}_Y(0) = P(Y \geq 0) = 1$ und der rechtsseitige Grenzwert in 0 ist $\overline{F}_Y(0+) = P(Y > 0) = 1$, d.h. \overline{F}_Y ist in 0 rechtsseitig stetig.

Weiterhin ist die Abbildung f monoton fallend und linksseitig stetig. Zusammen mit Lemma 4.3.2 ist \overline{F}_Y damit eine Lösungsfunktion im Sinne der Definition 3.1.1. □

Bemerkung 4.3.4. Betrachten wir eine homogene stochastische Fixpunktgleichung, d.h. $C = 0$, so ist die Überlebensfunktion \overline{F}_μ mit $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, 0)$ eine homogene Lösungsfunktion.

Lemma 4.3.5. Sei T eine Kantengewichtsfolge mit $m(1) < 1$ und sei C ein positiver Tollterm.

Dann gilt für alle $t \in [0; \infty[$

$$Z^{T,C}(t) = \mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty),$$

wobei $Z(t) := Z^{T,C}(t)$ die in 3.1.13 definierte Zufallsgröße ist. Insbesondere ist die Abbildung $t \mapsto E(Z(t))$ linksseitig stetig.

Beweis. Für alle $t \in [0; \infty[$ gilt

$$\begin{aligned} Z(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} f(tL_v C_v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v \in \mathbb{V}_{<n}} \mathbb{1}_{[0;1]}(tL_v C_v) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{[0;1]}(tM_n) \\ &= \mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty). \end{aligned}$$

□

Darstellungssätze und Charakterisierungen

Satz 4.3.6. Darstellungssatz, inhomogener Fall.

Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$ und $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm. Sei $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C)$.

(i) Sei T nicht-arithmetisch.

Dann gibt es eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$\overline{F}_\mu(t) = E \left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty) e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}} \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

(ii) Sei T arithmetisch mit Spanne d . Setze $\theta := e^{-d}$.

Dann gilt

$$\overline{F}_\mu(t) = E \left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty) e^{-c^*(t) t^\alpha W^{(\alpha)}} \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$. Dabei ist c^* die in 3.2.3 definierte Funktion.

Beweis. Da $m(1) < 1$ ist, gilt $E(M_\infty) < \infty$ nach Lemma 1.6.10.

Es folgt mithilfe der Markov-Ungleichung

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1-Z(t)}{t^\alpha}\right) &= E\left(\frac{\mathbb{1}_{[1/t; \infty[}(M_\infty)}{t^\alpha}\right) \\ &= t^{-\alpha} P(M_\infty \geq 1/t) \\ &\leq t^{1-\alpha} E(M_\infty) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Sei $\mu \in \mathbb{F}_{\text{inf}}^+(T, C)$.

Nach Korollar 4.3.3 ist die Überlebensfunktion \bar{F}_μ eine Lösungsfunktion.

Ist T nicht-arithmetisch, so gibt es nach dem Darstellungssatz für Lösungsfunktionen 3.3.42 eine Konstante $c \geq 0$ so, dass

$$\begin{aligned} \bar{F}_\mu(t) &= E\left(Z(t) \cdot e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}}\right) \\ &= E\left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty) \cdot e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}}\right) \end{aligned}$$

für alle $t \in [0; \infty[$ gilt.

Ist T hingegen arithmetisch, so gilt nach dem Darstellungssatz für Lösungsfunktionen 3.3.43

$$\bar{F}_\mu(t) = E\left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty) \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}}\right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

□

Mithilfe des Darstellungssatzes können wir nun die Lösungsmenge charakterisieren. Für den arithmetischen Fall benötigen wir noch die folgende Definition

Definition 4.3.7. Für jedes $\alpha \in]0; \infty[$ und jedes $\theta \in]0; 1[$ sei $\ddot{\mathfrak{U}}(\theta, \alpha)$ die Menge der multiplikativ θ -periodischen Funktionen $h :]0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ so, dass $t \mapsto h(t)t^\alpha$ monoton steigend und linksseitig stetig ist und $\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha h(t) = \infty$ gilt.

Korollar 4.3.8. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$, $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm.

(i) Sei T nicht-arithmetisch. Dann gilt

$$\bar{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)})^{1/\alpha} \wedge 1/M_\infty) \mid c \geq 0 \right\}.$$

Für alle $c \geq 0$ ist hierbei $Y_c^{(\alpha)}$ eine Zufallsgröße mit Überlebensfunktion $t \mapsto e^{-ct^\alpha}$ so, dass $Y_c^{(\alpha)}, (W^{(\alpha)}, M_\infty)$ stochastisch unabhängig sind.

(ii) Sei T arithmetisch mit Spanne d . Dann gilt mit $\theta := e^{-d}$

$$\bar{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(Y_h^{(\alpha)} (W^{(\alpha)})^{1/\alpha} \wedge 1/M_\infty) \mid h \in \ddot{\mathfrak{U}}(\theta, \alpha) \right\}.$$

Für alle $h \in \ddot{\mathfrak{U}}(\theta, \alpha)$ ist hierbei $Y_h^{(\alpha)}$ eine Zufallsgröße mit Überlebensfunktion $t \mapsto e^{-h(t)t^\alpha}$ so, dass $Y_h^{(\alpha)}, (W^{(\alpha)}, M_\infty)$ stochastisch unabhängig sind.

Beweis. Wir beschränken uns auf den arithmetische Fall. Der nicht-arithmetische Fall lässt sich ähnlich zeigen, ist aber einfacher zu beweisen.

Sei T arithmetisch mit Spanne d und setze $\theta := e^{-d}$.

„ \subseteq “: Sei $\mu \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C)$.

Nach Korollar 4.3.3 ist die Überlebensfunktion \overline{F}_μ eine Lösungsfunktion.

Nach dem Darstellungssatz für Lösungsfunktionen 3.3.43 gilt daher

$$\begin{aligned}\overline{F}_\mu(t) &= \mathbb{E} \left(Z(t) \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty) \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}} \right).\end{aligned}$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

Außerdem folgt aus dem Darstellungssatz, dass die Funktion

$$h : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[; t \mapsto c^*(t)t^\alpha$$

tatsächlich in $\ddot{\mathcal{U}}(\theta, \alpha)$ liegt.

Daher ist die Abbildung $t \mapsto e^{-t^\alpha c^*(t)}$ eine Überlebensfunktion eines Maßes aus $\overline{\mathcal{W}}^+$. Da für alle $t \in [0; \infty[$ gilt

$$\begin{aligned}\overline{F}_\mu(t) &= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{[0;1]}(tM_\infty) \cdot e^{-c^*(t)t^\alpha W^{(\alpha)}} \right) \\ &= P(Y_h^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{1/\alpha} \wedge (1/M_\infty) \geq t),\end{aligned}$$

folgt $\mu = \mathfrak{L}(Y_c^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{1/\alpha} \wedge 1/M_\infty)$.

„ \supseteq “: Sei $h \in \ddot{\mathcal{U}}(\theta, \alpha)$.

Setze $Y := Y_h^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)})^{1/\alpha} \wedge (1/M_\infty)$.

Es gilt $\mathfrak{L}(Y_h^{(\alpha)})$, $\mathfrak{L}(W^{(\alpha)}) \in \overline{\mathcal{W}}^+$ und $\mathfrak{L}(1/M_\infty) \in \overline{\mathcal{W}}^+$ und daher ist $\mathfrak{L}(Y) \in \overline{\mathcal{W}}^+$.

Sei $(Y_h^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $Y_h^{(\alpha)}(i) \stackrel{d}{=} Y_h^{(\alpha)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ so, dass $(Y_h^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ von allen bisher betrachteten Zufallsgrößen stochastisch unabhängig ist.

Wir setzen

$$Y_i := Y_h^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)}(i))^{1/\alpha} \wedge \frac{1}{M_\infty(i)}$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $Y \stackrel{d}{=} Y_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Es gilt für alle $t \in [0; \infty[$ wegen Korollar 1.6.9

$$\begin{aligned}
& P\left(\inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i(\emptyset)} \wedge \frac{1}{C_\emptyset} \geq t\right) \\
&= \int \prod_{i=1}^{\infty} P(Y_i \geq t \cdot t_i) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(c) dP^{(T(\emptyset), C)}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\
&= \int \prod_{i=1}^{\infty} \exp(-c^*(t \cdot t_i) t^\alpha \cdot t_i^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(i)) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(t_i \cdot M_\infty(i)) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(c) dP^{(T(\emptyset), C)}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\
&= \int \prod_{i=1}^{\infty} \exp(-c^*(t) t^\alpha \cdot t_i^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(i)) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(t_i \cdot M_\infty(i)) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(c) dP^{(T(\emptyset), C)}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\
&= \int \exp(-c^*(t) t^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} t_i^\alpha W^{(\alpha)}(i)) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(\sup_{i \in \mathbb{N}} t_i \cdot M_\infty(i) \vee c) dP^{(T(\emptyset), C)}((t_i)_{i \in \mathbb{N}}, c) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp(-c^*(t) t^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} T_i^\alpha(\emptyset) W^{(\alpha)}(i)) \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i(\emptyset) M_\infty(i) \vee C_\emptyset) \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\exp(-c^*(t) t^\alpha W^{(\alpha)}(\emptyset)) \cdot \mathbb{1}_{[0; \frac{1}{t}]}(M_\infty(\emptyset)) \right)
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$Y \stackrel{d}{=} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i(\emptyset)} \wedge \frac{1}{C_\emptyset},$$

also $\mathfrak{L}(Y) \in \mathbb{F}_{\text{inf}}^+(T, C)$. □

Darstellungssatz für stochastische Fixpunktgleichung des Supremumtyps

Mittels eines einfachen Tricks können wir die Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Supremumtyps auf die vorher analysierten Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung des Infimumtyps zurückführen.

Definition 4.3.9. Für jedes $\alpha \in]0; \infty[$ und jedes $\theta \in]0; 1[$ sei $\mathfrak{V}(\theta, \alpha)$ die Menge der multiplikativ θ -periodischen Funktionen $h : [0; \infty[\rightarrow]0; \infty[$ so, dass $x \mapsto e^{h(x)x^{-\alpha}}$ eine Verteilungsfunktion einer Verteilung auf $[0; \infty[$ ist.

Satz 4.3.10. Sei T eine L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; 1[$ und $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm.

(i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so gilt

$$\mathbb{F}_{\text{sup}}^+(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(H_c^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)})^{-1/\alpha} \vee M_\infty) \mid c \geq 0 \right\}.$$

Dabei ist für alle $c \geq 0$ $H_c^{(\alpha)}$ eine von $(W^{(\alpha)}, M_\infty)$ unabhängige Zufallsgröße mit einer Verteilungsfunktion $x \mapsto e^{-cx^{-\alpha}}$ und Werten in $[0; \infty[$.

(ii) Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, so gilt mit $\theta := e^{-d}$

$$\mathbb{F}_{\text{sup}}^+(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(H_h^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)})^{-1/\alpha} \vee M_\infty) \mid h \in \mathfrak{V}(\theta, \alpha) \right\}.$$

Dabei ist für alle $h \in \mathfrak{V}(\theta, \alpha)$ $H_h^{(\alpha)}$ eine von $(W^{(\alpha)}, M_\infty)$ unabhängige Zufallsgröße mit einer Verteilungsfunktion $x \mapsto e^{-h(x)x^{-\alpha}}$ und Werten in $[0; \infty[$.

Beweis. Wir beschränken uns auf den nicht-arithmetischen Fall. Der arithmetische Fall lässt sich analog herleiten.

„ \subseteq “: Sei Z eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Z) \in \mathbb{F}_{\text{sup}}^+(T, C)$.

Zunächst zeigen wir, dass $\mathfrak{L}(1/Z) \in \mathbb{F}_{\text{inf}}^+(T, C)$ gilt. Die Überlebensfunktion der Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathbb{F}_{\text{inf}}^+(T, C)$ kennen wir bereits, so dass wir die Verteilung von Z bestimmen können.

Sei $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $Z_i \stackrel{d}{=} Z$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sei stochastisch unabhängig von allen bereits definierten Zufallsgrößen.

Wir setzen $Y := 1/Z$ und $Y_i := 1/Z_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Da $Z < \infty$ gilt, ist $\mathfrak{L}(Y) \in \overline{\mathcal{W}}^+$ und $\mathfrak{L}(Y_i) \in \overline{\mathcal{W}}^+$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Weiterhin können wir folgern

$$Y = \frac{1}{Z} \stackrel{d}{=} \frac{1}{\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i Z_i \vee C} = \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{T_i Z_i} \wedge \frac{1}{C} = \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{Y_i}{T_i} \wedge \frac{1}{C}.$$

Daher gilt $\mathfrak{L}(1/Z) = \mathfrak{L}(Y) \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{inf}}^+(T, C)$.

Nach dem Darstellungssatz gibt es eine Konstante $c \geq 0$ mit

$$P(1/Z \geq t) = P(Y \geq t) = \mathbb{E} \left(e^{-ct^\alpha W^{(\alpha)}} \mathbb{1}_{[0; 1/t]}(M_\infty) \right)$$

für alle $t \in [0; \infty[$.

Daraus folgt (mithilfe der Variablentransformation $x = 1/t$)

$$P(Z \leq x) = \mathbb{E} \left(e^{-cx^{-\alpha} W^{(\alpha)}} \mathbb{1}_{[0; x]}(M_\infty) \right) = P(H_c^{(\alpha)}(W^{(\alpha)})^{-1/\alpha} \vee M_\infty \leq x)$$

für alle $x \in]0; \infty[$.

„ \supseteq “:

Sei $c \geq 0$.

Setze $Z := H_c^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)})^{-1/\alpha} \vee M_\infty$.

Sei $(H_c^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $H_c^{(\alpha)}(i) \stackrel{d}{=} H_c^{(\alpha)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ so, dass $(H_c^{(\alpha)}(i))_{i \in \mathbb{N}}$ von allen bisher betrachteten Zufallsgrößen stochastisch unabhängig ist.

Wir setzen

$$Z_i := H_c^{(\alpha)} \cdot (W^{(\alpha)}(i))^{-1/\alpha} \vee M_\infty(i)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $Y \stackrel{d}{=} Z_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Mit Korollar 1.6.9 können wir folgern, dass

$$P(\sup_{i \in \mathbb{N}} T_i(\emptyset) Z_i \vee C_\emptyset \leq t) = P(Z \leq t)$$

für alle $t \in [0; \infty[$ gilt, und somit $\mathfrak{L}(Z) \in \overline{\mathbb{F}}_{\text{sup}}^+(T, C)$ gilt. □

Kapitel 5.

Stochastische Fixpunkte auf \mathbb{R}

In diesem Kapitel untersuchen wir die Lösungen von stochastischen Fixpunktgleichungen, deren Träger nicht auf \mathbb{R}^+ beschränkt ist. Dabei müssen wir von der Laplace-Transformierten zur Fourier-Transformierten von Lösungen übergehen, welche aber schwerer zu analysieren ist.

5.1. Grundlagen

In diesem Abschnitt sei $T = (T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ stets eine endliche Kantengewichtsfolge und C eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{R} .

Definition 5.1.1. Wir definieren die Abbildung

$$S_{\Sigma, T, C} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}; \mu \rightarrow \mathfrak{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k Y_k + C\right),$$

wobei T, Y_1, Y_2, \dots stochastisch unabhängig sind mit $\mathfrak{L}(Y_k) = \mu$ für alle $k \in \mathbb{N}$

Bemerkung 5.1.2. Da wir nur endliche Kantengewichtsfunktionen betrachten, ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} T_k Y_k$ tatsächlich nur eine endliche Summe. Daher ist die Abbildung $S_{\Sigma, T, C}$ wohldefiniert.

Der Unterschied zwischen $S_{\Sigma, T, C}$ und $S_{\Sigma, T, C}^+$ liegt darin, dass die erste Abbildung einen größeren Definitionsbereich besitzt. Wir betrachten hier Wahrscheinlichkeitsmaße aus \mathcal{W} , anstelle von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus \mathcal{W}^+ .

Definition 5.1.3. Als Lösung der stochastischen Fixpunktgleichung

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{\infty} T_k Y_k + C \tag{5.1.1}$$

bezeichnen wir jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{W}$ mit $S_{\Sigma, T, C}(\mu) = \mu$. Wir definieren die Menge der Lösungen als

$$\mathbb{F}_{\Sigma}(T, C) := \{\mu \in \mathcal{W} \mid S_{\Sigma, T, C}(\mu) = \mu\}. \tag{5.1.2}$$

Fourier-Transformierte von Lösungen von SFGen

Ist Y eine reelle Zufallsgröße, so bezeichnen wir mit $\phi_Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto \mathbb{E}(e^{itY})$ die Fourier-Transformierte der Zufallsgröße Y .

Ist $\mu \in \mathcal{W}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so sei $\phi_{\mu} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}; t \mapsto \int e^{itx} \mu(dx)$ die Fourier-Transformierte von μ .

Wir sagen, $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Fourier-Transformation, falls es ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mu \in \mathcal{W}$ gibt mit $\phi = \phi_{\mu}$. Wir nennen dann μ das zu ϕ gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß. Ebenso nennen

wir die Verteilungsfunktion F_μ , die zu μ gehört, die zu ϕ gehörige Verteilungsfunktion.

Für eine Fourier-Transformierte ϕ betrachten wir das kleinste Intervall $I(\phi)$ um 0, mit $|1 - \phi(t)| \leq 1/2$ für alle $t \in I(\phi)$. Dieses existiert, da $\phi(0) = 1$ und ϕ stetig ist.

Damit ist auf dem Intervall $I(\phi)$ die Funktion $\log \phi$ wohldefiniert. Ebenso gilt auf diesem Intervall $|\phi| > 0$.

Ferner definieren wir $t_0(\phi) := \min(\max I(\phi), -\min I(\phi))$.

Definition 5.1.4. Wir definieren die Menge der Fourier-Transformierten von Lösungen der stochastischen Fixpunktgleichung 5.1.1 als

$$\widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, C) := \{\phi_\mu \mid \mu \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)\}.$$

Definition 5.1.5. α -elementare/ α -beschränkte Fourier-Transformierte.

Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, C)$ und $\alpha \in]0; \infty[$.

Dann heißt ϕ α -beschränkt, falls

$$1 - \phi(t) = \mathcal{O}(|t|^\alpha) \text{ für } t \rightarrow 0; t \in]0; \infty[$$

gilt.

(i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so heißt ϕ α -elementar, falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; \infty[}} \frac{1 - \phi(t)}{t^\alpha} = z.$$

(ii) Falls T arithmetisch mit Spanne d ist, so heißt ϕ α -elementar, falls es für alle $t \in]0; \infty[$ ein $z(t) \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \phi(t\theta^n)}{t^\alpha \theta^{\alpha n}} = z(t).$$

dabei ist $\theta := e^{-d}$.

Wir bezeichnen eine Lösung $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)$ als α -elementar bzw. α -regulär, falls ϕ_μ α -elementar bzw. α -regulär ist.

Bemerkung 5.1.6. In diesem Kapitel bezeichnen wir mit „log“ den sogenannten Hauptzweig des komplexen Logarithmus. In diesem Zusammenhang beachte man bitte das Kapitel über den komplexen Logarithmus aus dem Anhang.

Lemma 5.1.7. Sei ϕ eine Fourier-Transformierte.

Dann gibt es eine Funktion $\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$(i) \quad |\theta(z)| \leq |z| \text{ für alle } z \in \mathbb{C},$$

$$(ii) \quad -\log \phi(t) = 1 - \phi(t) + (1 - \phi(t)) \cdot \theta((1 - \phi(t))) \text{ für alle } t \in]0; t_0(\phi)[.$$

Beweis. Das Lemma ergibt sich aus der Taylor-Reihen Darstellung der Logarithmusfunktion, siehe dazu das Kapitel „Der komplexe Logarithmus“ im Anhang. \square

Korollar 5.1.8. Sei ϕ eine Fourier-Transformierte.

Sei $g :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann sind äquivalent

$$(i) \quad 1 - \phi(t) = \mathcal{O}(g(t)) \text{ für } t \rightarrow 0; t \in]0; \infty[,$$

$$(ii) \quad -\log \phi(t) = \mathcal{O}(g(t)) \text{ für } t \rightarrow 0; t \in]0; t_0(\phi)[.$$

Lemma 5.1.9. Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_{\Sigma}(T, C)$.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{itR_n} \prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \right) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Dies folgt mit Induktion direkt aus der Definition. \square

Bemerkung 5.1.10. Das Produkt $\prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v)$ wird über abzählbar viele Knoten gebildet, ist aber aufgrund der Endlichkeit der Kantengewichtsfolge tatsächlich ein endliches Produkt, d.h. es ist wohldefiniert.

Bemerkung 5.1.11. Sei \mathcal{L} eine f.s. beschränkte Stopplinie. Da T eine endliche Kantengewichtsfolge ist, ist die zufällige Menge $\{v \in \mathbb{V} \mid v \in \mathcal{L}, L_v \neq 0\}$ f.s. endlich.

Lemma 5.1.12. Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_{\Sigma}(T, 0)$.

Sei \mathcal{L} eine f.s. geschlossene Stopplinie. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) = \prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} \phi(tL_v) \text{ f.s.}$$

Beweis. Der Beweis kann mit den gleichen Mitteln wie der Beweis zu 3.1.7 geführt werden. \square

Lemma 5.1.13. Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_{\Sigma}(T, 0)$.

Sei \mathcal{L} eine f.s. geschlossene und f.s. beschränkte Stopplinie. Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathcal{L}} \phi(tL_v) \right)$$

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$. Da \mathcal{L} f.s. geschlossen ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}} \right) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} \phi(tL_v) \right) \end{aligned}$$

Da \mathcal{L} f.s. beschränkt und T endlich ist, enthält \mathcal{L} f.s. nur endlich viele Knoten, deren Knotengewicht $L_v \neq 0$ ist. Es folgt daher

$$\prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} \phi(tL_v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \prod_{v \in \mathcal{L}} \phi(tL_v).$$

Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von der dominierten Konvergenz für komplexe Zufallsgrößen, siehe Satz A.2.1 im Anhang. Man beachte dabei, dass $|\prod_{v \in \mathcal{L} \wedge n} \phi(tL_v)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und damit diese Zufallsgrößen integrierbar sind. \square

5.2. Homogene und Inhomogene Lösungen von SFGen

An dieser Stelle wollen wir ein Ergebnis über einen Zusammenhang der Menge der Lösungen $\mathbb{F}_{\Sigma}(T, C)$ und der Menge der zugehörigen homogenen Lösungen $\mathbb{F}_{\Sigma}(T, 0)$ vorstellen. Dies ermöglicht uns später bekannte Resultate über homogene Lösungen auf inhomogene Lösungen zu übertragen.

Zunächst möchten wir die minimale L_s -Metrik vorstellen. Diese ist auch bekannt unter den Namen Mallows Metrik oder auch Wasserstein Metrik.

Definition 5.2.1. Minimale L_s -Metrik.

Für jedes $s > 0$ definieren wir

$$l_s : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \rightarrow [0; \infty]; (\mu, \nu) \mapsto \inf \left\{ (E|X - Y|^s)^{\frac{1}{s} \wedge 1} \mid \mathfrak{L}(X) = \mu, \mathfrak{L}(Y) = \nu \right\},$$

sowie für jedes $\mu \in \mathcal{W}$

$$\mathcal{M}_s(\mu) := \{ \nu \in \mathcal{W} \mid l_s(\mu, \nu) < \infty \},$$

Wir beschränken uns an dieser Stelle auf eine Wiederholung der Definition und verweisen für weitere Eigenschaften und weiterführende Resultate auf die Arbeiten von Rösler [39], Rüschendorf [42] und die in diesen Artikeln zitierte Literatur.

Das folgende Theorem stammt von Rüschendorf (Theorem 3.1 in [42]), es stellt einen Eins-zu-Eins Beziehung zwischen homogenen und inhomogenen stochastischen Fixpunkten her. Man beachte, dass dieses Theorem in unserer Situation anwendbar ist, da wir uns auf endliche Kantengewichtsfolge einschränken.

Um das Ergebnis von Rüschendorf angeben zu können, benötigen wir die folgende Definition (vgl. Gleichung (2.25) vor Theorem 2.8 in [42]).

Für alle $s \in]0; 2]$ und alle μ_0 definiere

$$\mathcal{M}_s^0(\mu_0) := \{ \mu \in \mathcal{W} \mid \exists \text{ Zufallsgrößen } X, Y : \mathfrak{L}(X) = \mu, \mathfrak{L}(Y) = \mu_0 \text{ und } E(X - Y) = 0, E|X - Y|^s < \infty \}$$

Theorem 5.2.2. (Rüschendorf, 2006)

Sei $s \in]0; 2]$ und $T_k \in \mathbf{L}_s$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbf{L}_s$ und es gelte $m(s) < 1$. Falls $s \in]1; 2]$, so gelte zusätzlich $E(C) = 0$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

- Für jedes $\mu_0 \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ existiert genau eine Lösung $\mu^* \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)$ mit

$$\mu^* \in \begin{cases} \mathcal{M}_s(\mu_0) & , \text{ falls } 0 < s \leq 1 \\ \mathcal{M}_s^0(\mu_0) & , \text{ falls } 1 < s \leq 2. \end{cases}$$

- Für jedes $\mu^* \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)$ existiert genau eine Lösung $\mu_0 \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ mit

$$\mu_0 \in \begin{cases} \mathcal{M}_s(\mu^*) & , \text{ falls } 0 < s \leq 1 \\ \mathcal{M}_s^0(\mu^*) & , \text{ falls } 1 < s \leq 2. \end{cases}$$

Für uns werden später nur die Fälle $s = 1$ oder $s = 2$ von Interesse sein, d.h. insbesondere die beiden nun folgenden Korollare aus dem Theorem 5.2.2.

Korollar 5.2.3. Sei $T = (T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine endliche Kantengewichtsfolge mit $m_T(1) < 1$ und sei C ein positiver Tollterm.

Für jedes $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)$ existieren dann Zufallsgrößen Y und Y_0 mit $\mathfrak{L}(Y) = \mu$ und $\mathfrak{L}(Y_0) \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ mit $E|Y - Y_0| < \infty$. Die Verteilung von Y_0 ist eindeutig bestimmt.

Korollar 5.2.4. Sei $T = (T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine endliche Kantengewichtsfolge mit $m_T(2) < 1$ und sei C ein zentrierter Tollterm.

Für jedes $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)$ existieren dann Zufallsgrößen Y und Y_0 mit $\mathfrak{L}(Y) = \mu$ und $\mathfrak{L}(Y_0) \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ mit $E(Y - Y_0) = 0$ und $E|Y - Y_0|^2 < \infty$. Die Verteilung von Y_0 ist eindeutig bestimmt.

5.3. Darstellungssätze für α -elementare Lösungen

Satz 5.3.1. Sei T eine endliche und L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$. Sei $\phi \in \hat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, 0)$.

(i) Sei T nicht-arithmetisch. Ist ϕ α -elementar mit

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; \infty[}} \frac{1 - \phi(t)}{t^\alpha} = c + i \cdot d,$$

so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp \left(-|t|^\alpha W^{(\alpha)}(c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d) \right) \right).$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ die Vorzeichen-Funktion auf \mathbb{R} .

(ii) Sei T arithmetisch mit Spanne r und sei $\theta := e^{-r}$. Ist ϕ α -elementar mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \phi(t\theta^n)}{t^\alpha \theta^{\alpha n}} = c(t) + i \cdot d(t)$$

für alle $t \in]0; \infty[$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp \left(-|t|^\alpha W^{(\alpha)}(c(|t|) + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d(|t|)) \right) \right).$$

Beweis. Wir zeigen nur den arithmetischen Fall, der nicht-arithmetische Fall lässt sich ähnlich zeigen, ist aber einfacher zu behandeln.

Zunächst halten wir fest, dass $L_n^* = \sup_{v \in \mathbb{V}_n} L_v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0$ gilt, da T L_1 -regulär ist.

Es gilt $\phi(-t) = \bar{\phi}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei der Querstrich die komplexe Konjugation bedeutet.

Daraus ergibt sich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \phi(t\theta^n)}{|t|^\alpha \theta^{\alpha n}} = c(|t|) + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d(|t|)$$

für alle $t \in]-\infty; 0[$.

Sei $t \in \mathbb{R}$.

1. Fall: $t > 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left(-t^\alpha \sum_{v \in \mathbb{V}_n} \frac{-\log \phi(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha \right) \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left(\exp \left(-t^\alpha W^{(\alpha)}(c(t) + id(t)) \right) \right). \end{aligned}$$

2. Fall: $t < 0$.

Es gilt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathbb{E} \left(\prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\exp \left(-|t|^\alpha \sum_{v \in \mathbb{V}_n} \frac{-\log \phi(tL_v)}{(|t|L_v)^\alpha} L_v^\alpha \right) \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left(\exp \left(-|t|^\alpha W^{(\alpha)}(c(|t|) + i \operatorname{sgn}(t)d(|t|)) \right) \right). \end{aligned}$$

□

Satz 5.3.2. Sei T eine endliche, L_1 -reguläre und nicht-arithmetische Kantengewichtsfolge mit $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$ und C sei ein Tollterm.

Es gelte entweder

$$m(1) < 1, \alpha \in]0; 1[\text{ und } C \text{ ist ein positiver Tollterm,}$$

oder

$$m(2) < 1, \alpha \in]0; 2[\text{ und } C \text{ ist ein zentrierter Tollterm.}$$

Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, C)$.

(i) Sei T nicht-arithmetisch. Ist dann ϕ α -elementar mit

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; \infty[}} \frac{1 - \phi(t)}{t^\alpha} = c + i \cdot d,$$

so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-|t|^\alpha W^{(\alpha)}(c+i \cdot \text{sgn}(t)d)} \cdot e^{itR_\infty} \right).$$

(ii) Sei T arithmetisch mit Spanne r und sei $\theta := e^{-r}$. Ist dann ϕ α -elementar mit

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; \infty[}} \frac{1 - \phi(t)}{t^\alpha} = c(t) + i \cdot d(t),$$

so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-|t|^\alpha W^{(\alpha)}(c(|t|)+i \cdot \text{sgn}(t)d(|t|))} \cdot e^{itR_\infty} \right).$$

Beweis. Wir behandeln nur den arithmetischen Fall, der nicht-arithmetisch Fall lässt sich analog behandeln.

Da T L_1 -regulär ist, gilt $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} R_\infty$, $W_n^{(\alpha)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_1} W^{(\alpha)}$ und $L_n^* \xrightarrow[n \rightarrow 0]{f.s.} 0$.

Sei $t \in \mathbb{R}$. Mit einem Argument, wie im vorherigen Satz, kann man oBdA annehmen, dass $t > 0$ gilt.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \mathbb{E} \left(e^{itR_n} \cdot \prod_{v \in \mathbb{V}_n} \phi(tL_v) \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{itR_n} \cdot \exp \left(-t^\alpha \sum_{v \in \mathbb{V}_n} \frac{-\log \phi(tL_v)}{(tL_v)^\alpha} L_v^\alpha \right) \right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E} \left(e^{itR_\infty} \cdot \exp \left(-t^\alpha W^{(\alpha)}(c(t) + id(t)) \right) \right). \end{aligned}$$

□

5.4. Die ICFE-Theorie

In diesem Unterabschnitt fassen wir die für uns wichtigsten Resultate der ICFE-Theorie zusammen. Die Abkürzung „ICFE“ steht für „Integrated Cauchy Functional Equations“. Dabei orientieren wir uns an dem Buch „Functional Equations in Probability Theorie“ von Ramachandran und Lau (siehe [37]). Speziell interessiert uns vor allem das vierte Kapitel aus diesem Buch.

Definition 5.4.1. Sei $\sigma \in \mathcal{W}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, $\varepsilon \in]0; \infty[$ und $S : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $|S(x)| \leq Ce^{-\varepsilon x}$ für alle $x \in [0; \infty[$.

Eine Funktion $f : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung der ICFE mit Fehlerterm S , falls für alle $x \in [0; \infty[$

$$f(x) = \int_0^\infty f(x+y)d\sigma(y) + S(x)$$

gilt.

Wir sagen dann, dass f eine Lösung der $\varepsilon - ICFE(\sigma, S)$ ist.

Theorem 5.4.2. *Ramachandran, Lau (1991).*

Sei $\sigma \in \mathcal{W}$ und $\sigma \neq \delta_0$. Weiterhin sei f eine beschränkte Lösung der $\varepsilon - ICFE(\sigma, S)$.

Dann gibt es Funktionen $A : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und $p : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f = A + p$ und es gibt eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$|A(x)| \leq Ce^{-\varepsilon x} \text{ für alle } x \geq 0 \text{ gilt.}$$

Falls σ nicht-arithmetisch ist, so ist p konstant.

Falls σ arithmetisch mit Spanne d ist, so ist p d -periodisch.

Falls $f \geq 0$ ist, so gilt $p \geq 0$.

Korollar 5.4.3. *Ramachandran, Lau (1991).*

Die Behauptungen aus Theorem 5.4.2 gelten auch unter der Annahme, dass die Abbildung $x \mapsto f(x+y) - f(x)$ (anstelle der Annahme f ist beschränkt) für jedes festes $y \in [0; \infty[$ beschränkt ist.

Wir benötigen später in den Anwendungen eine leicht andere Darstellung, nämlich eine Verschiebung des Startpunktes der Funktionalgleichung. Wir erläutern kurz, wie man eine solche Situation auf das ursprüngliche Problem zurückführen kann.

Seien $\sigma \in \mathcal{W}$, $\varepsilon \in]0; \infty[$ und $x_0 \in [0; \infty[$.

Außerdem sei $S : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|S(x)| \leq Ce^{-\varepsilon x}$ für alle $x \in [x_0; \infty[$.

Gegeben sei eine Funktion $f : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$f(x) = \int_0^\infty f(x+y)d\sigma(y) + S(x) \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Wir nennen f eine Lösung der verschobenen $\varepsilon - ICFE(\sigma, S)$.

Definieren wir nun neue Funktionen $\tilde{S} : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto S(x+x_0)$ und $\tilde{f} : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto f(x+x_0)$, so ist \tilde{f} eine Lösung der $\varepsilon - ICFE(\sigma, \tilde{S})$ und wir können dann das Originaltheorem bzw. das Korollar hieraus anwenden.

Wir erhalten dann, dass es Funktionen $\tilde{A} : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{p} : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\tilde{f} = \tilde{A} + \tilde{p}$ und

$$|\tilde{A}(x)| \leq Ce^{-\varepsilon x} \text{ für alle } x \geq 0.$$

Falls σ nicht-arithmetisch ist, so ist \tilde{p} konstant.

Falls σ arithmetisch mit Spanne d ist, so ist \tilde{p} d -periodisch.

Falls $\tilde{f} \geq 0$ ist, so gilt $\tilde{p} \geq 0$.

Definieren wir die Abbildungen $A : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tilde{A}(x-x_0)$ und $p : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \tilde{p}(x-x_0)$, so folgt

$$f(x) = A(x) + p(x) \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Weiterhin gibt es eine Konstante $C > 0$ so, dass

$$|A(x)| = |\tilde{A}(x-x_0)| \leq Ce^{-\varepsilon x_0} \cdot e^{-\varepsilon x}$$

für alle $x \geq x_0$ gilt.

Falls σ nicht-arithmetisch ist, so ist p konstant.

Falls σ arithmetisch mit Spanne d ist, so ist p d -periodisch.

Falls $f \geq 0$ ist, so gilt $p \geq 0$.

5.5. Äquivalenzsatz

Mithilfe der ICFE-Theorie können wir einen Äquivalenzsatz zeigen, der aussagt, dass für L_1 -reguläre und endliche Kantengewichtsfolgen jede reguläre homogene Lösung bereits elementar ist. Dies erweist sich als nützlich, da sich die Regularität einer (homogenen) Lösung einfacher herleiten lässt.

Sei T eine L_1 -reguläre und endliche Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.

Satz 5.5.1. Äquivalenzsatz.

Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, 0)$. Dann sind äquivalent

(i) ϕ ist α -elementar,

(ii) ϕ ist α -beschränkt.

Beweis. Nur die Folgerung (ii) \Rightarrow (i) ist zu zeigen, denn die Aussage (i) \Rightarrow (ii) ist evident.

Im Folgendem seien $B_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $A_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ beschränkte Funktionen, deren Werte sich aus den jeweils verwendeten Umformungen ergeben.

1. Fall: T ist nicht-arithmetisch.

Wir setzen $x_0 := -\log t_0(\phi)$ und definieren folgende Funktionen

$$g : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Re}(-e^{\alpha x} \log \phi(e^{-x})) = -e^{\alpha x} \log(|\phi(e^{-x})|)$$

und

$$h : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Im}(-e^{\alpha x} \log \phi(e^{-x})) = -e^{\alpha x} \arg \phi(e^{-x}).$$

Für alle $x \in [x_0; \infty[$ gilt dann

$$\begin{aligned} \phi(e^{-x}) &= \mathbb{E} \left(\prod_{k \in \mathbb{N}} \phi(e^{-x} T_k) \right) \\ &= \int \exp \left(-e^{-\alpha x} \int_0^1 \frac{-\log \phi(e^{-x} u)}{e^{-\alpha x} u^\alpha} \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\omega, du) \right) dP(\omega) \\ &= \int \exp \left(-e^{-\alpha x} \int_0^1 \frac{-\log \phi(e^{-x} e^{\log(u)})}{e^{-\alpha x} e^{\alpha \log(u)}} \boldsymbol{\mu}^{(\alpha)}(\omega, du) \right) dP(\omega) \\ &= \int \exp \left(-e^{-\alpha x} \int_0^\infty \frac{-\log \phi(e^{-x} e^{-y})}{e^{-\alpha(x+y)}} (\boldsymbol{\mu}^{(\alpha)})^{-\log}(\omega, dy) \right) dP(\omega) \\ &= \int \exp \left(-e^{-\alpha x} \int_0^\infty \frac{-\log \phi(e^{-(x+y)})}{e^{-\alpha(x+y)}} \boldsymbol{\nu}^{(\alpha)}(\omega, dy) \right) dP(\omega) \\ &= \int \exp \left(-e^{-\alpha x} \int_0^\infty g(x+y) + i \cdot h(x+y) \boldsymbol{\nu}^{(\alpha)}(\omega, dy) \right) dP(\omega), \end{aligned}$$

so dass für alle $x \in [x_0; \infty[$ gilt

$$\begin{aligned} &\exp\{-e^{-\alpha x} g(x) + i(-e^{-\alpha x} h(x))\} \\ &= \int \exp \left\{ -e^{-\alpha x} \left(\int_0^\infty g(x+y) \boldsymbol{\nu}^{(\alpha)}(\omega, dy) + i \cdot \int_0^\infty h(x+y) \boldsymbol{\nu}^{(\alpha)}(\omega, dy) \right) \right\} dP(\omega). \quad (5.5.1) \end{aligned}$$

Da ϕ α -beschränkt ist, sind auch g und h beschränkt, etwa durch die Konstante $B \in]0; \infty[$.

Da T eine endliche Kantengewichtsfolge ist, gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $\omega \in \Omega$ gilt $\nu^{(\alpha)}(\omega, [0; \infty]) < K$.

Daraus folgt für alle $x \in [x_0; \infty[$ und alle $\omega \in \Omega$

$$\int_0^\infty |g(x+y)| \nu^{(\alpha)}(\omega, dy) \leq B \cdot \nu^{(\alpha)}(\omega, [0; \infty]) \leq B \cdot K.$$

Ebenso gilt

$$\int_0^\infty |h(x+y)| \nu^{(\alpha)}(\omega, dy) \leq B \cdot \nu^{(\alpha)}(\omega, [0; \infty]) \leq B \cdot K$$

für alle $x \in [x_0; \infty[$ und alle $\omega \in \Omega$.

An dieser Stelle geben wir einen kurzen Überblick über Gleichungen, die wir im Folgendem immer wieder benutzt werden.

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x), \\ \cos(-x) &= \cos(x). \end{aligned}$$

Für jedes $\delta \in]0; 1[$ existieren $B_0, B_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x + B_0(x) |x|^{1+\delta}, \\ \cos(x) &= 1 - x^2 + B_1(x) |x|^{2+2\delta}. \end{aligned}$$

Wir unterdrücken die Abhängigkeit der Funktionen B_0, B_1 von δ .

Ferner gibt es für jede beschränkte Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion $B_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass

$$e^{-f(x)} = 1 - f(x) + f^2(x) B_2(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dabei hängt die beschränkte Funktion B_2 von f ab, wir unterdrücken aber diese Abhängigkeit.

Sei $x \in [x_0; \infty[$.

Dann gilt für den Imaginärteil der linken Seite von (5.5.1)

$$\begin{aligned} & \text{Im}(\exp(-e^{-\alpha x} g(x) + i \cdot (-e^{-\alpha x} h(x)))) \\ &= \exp(-e^{-\alpha x} g(x)) \cdot \sin(-e^{-\alpha x} h(x)) \\ &= -\exp(-e^{-\alpha x} g(x)) \cdot \sin(e^{-\alpha x} h(x)) \\ &= -\exp(-e^{-\alpha x} g(x)) \cdot (e^{-\alpha x} h(x) + B_0(e^{-\alpha x} h(x)) |e^{-\alpha x} h(x)|^{1+\delta}) \\ &= -(1 + B_3(x) e^{-\alpha x}) \cdot (e^{-\alpha x} h(x) + B_0(e^{-\alpha x} h(x)) |e^{-\alpha x} h(x)|^{1+\delta}) \\ &= -e^{-\alpha x} h(x) + B_4(x) e^{-\alpha(1+\delta)x}. \end{aligned}$$

Für den Imaginärteil der rechten Seite von (5.5.1) folgern wir daher

$$\begin{aligned} & \text{Im}\left(\int \exp\left\{-e^{-\alpha x} \left(\int_0^\infty g(x+y) \nu^{(\alpha)}(\omega, dy) + i \int_0^\infty h(x+y) \nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right)\right\} dP(\omega)\right) \\ &= -\int \exp\left(-e^{-\alpha x} \int_0^\infty g(x+y) \nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right) \cdot \sin\left(e^{-\alpha x} \int_0^\infty h(x+y) \nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right) dP(\omega) \\ &= -\int (1 + e^{-\alpha x} A_0(\omega, x)) \cdot \left(e^{-\alpha x} \int_0^\infty h(x+y) \nu^{(\alpha)}(\omega, dy) + e^{-\alpha(1+\delta)x} A_1(\omega, x)\right) dP(\omega) \\ &= -e^{-\alpha x} \int \int_0^\infty h(x+y) \nu^{(\alpha)}(\omega, dy) dP(\omega) + B_5(x) e^{-\alpha(1+\delta)x} \\ &= -e^{-\alpha x} \int h(x+y) \bar{\nu}^{(\alpha)}(dy) + B_6(x) e^{-\alpha(1+\delta)x}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$h(x) = \int h(x+y)\overline{\nu}^{(\alpha)}(dy) + B_7(x)e^{-\alpha\delta x} \text{ für alle } x \geq x_0,$$

d.h. h ist eine Lösung der verschobenen $\alpha\delta - ICFE(\overline{\nu}^{(\alpha)}, \tilde{B}_1)$. Hierbei ist $\tilde{B}_1 : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto B_7(x)e^{-\alpha\delta x}$.

Daher gibt es eine beschränkte Funktion $\eta : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = d + \eta(x) \cdot e^{-\alpha\delta x} \text{ für alle } x \geq x_0. \quad (5.5.2)$$

Wir zeigen nun, dass g eine Lösung einer ICFE mit Fehlerterm ist, dazu betrachten wir die Realteile auf beiden Seiten der Gleichung (5.5.1).

Es gilt für den Realteil der rechten Seite

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\exp(-e^{-\alpha x}g(x) + i \cdot (-e^{-\alpha x}h(x)))) \\ &= \exp(-e^{-\alpha x}g(x)) \cdot \cos(-e^{-\alpha x}h(x)) \\ &= \exp(-e^{-\alpha x}g(x)) \cdot (1 - e^{-2\alpha x}h^2(x) + B_1(e^{-\alpha x}h(x)) |e^{-\alpha x}h(x)|^{2+2\delta}) \\ &= (1 - e^{-\alpha x}g(x) + e^{-2\alpha x}B_8(x)) \cdot (1 + e^{-2\alpha x}B_9(x)) \\ &= 1 - e^{-\alpha x}g(x) + e^{-2\alpha x}B_{10}(x). \end{aligned}$$

Es gilt für den Realteil der rechten Seite von (5.5.1)

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left(\int \exp\left\{-e^{-\alpha x}\left(\int_0^\infty g(x+y)\nu^{(\alpha)}(\omega, dy) + i \int_0^\infty h(x+y)\nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right)\right\} dP(\omega)\right) \\ &= \int \exp\left(-e^{-\alpha x} \int_0^\infty g(x+y)\nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right) \cdot \cos\left(-e^{-\alpha x} \int_0^\infty h(x+y)\nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right) dP(\omega) \\ &= \int \left(1 - e^{-\alpha x} \int_0^\infty g(x+y)\nu^{(\alpha)}(\omega, dy) + e^{-2\alpha x}A_3(\omega, x)\right) \cdot (1 + e^{-2\alpha x}A_4(\omega, x)) dP(\omega) \\ &= 1 - e^{-\alpha x} \int g(x+y)\overline{\nu}^{(\alpha)}(dy) + e^{-2\alpha x}B_{11}(x). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$g(x) = \int g(x+y)\overline{\nu}^{(\alpha)}(dy) + B_{12}(x)e^{-\alpha x} \text{ für alle } x \geq x_0,$$

d.h. g ist eine Lösung der $\alpha - ICFE(\overline{\nu}^{(\alpha)}, \tilde{B}_2)$. Hierbei ist $\tilde{B}_2 : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto B_{12}(x)e^{-\alpha x}$. Daher gibt es dann eine beschränkte Funktion $\xi : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = c + \xi(x) \cdot e^{-\alpha x} \text{ für alle } x \geq x_0. \quad (5.5.3)$$

Da $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [x_0; \infty[$ gilt, folgt $c \geq 0$.

Insgesamt erhalten wir

$$-e^{\alpha x} \log \phi(e^{-x}) = g(x) + i \cdot h(x) = c + i \cdot d + e^{-\alpha x} \xi(x) + i \cdot e^{-\alpha\delta x} \eta(x) \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Wenn wir eine Variablen-Transformation $x = -\log t$ vornehmen, so folgt

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; t_0(\phi)[}} \frac{-\log \phi(t)}{t^\alpha} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; t_0(\phi)[}} g(-\log t) + ih(-\log t) = c + i \cdot d.$$

2. Fall: T ist arithmetisch mit Spanne d .

Nach Lemma 1.3.12 ist dann $\mathcal{V}^{(\alpha)}$ arithmetisch mit Spanne d .

Mit den gleichen Argumenten wie im nicht-arithmetischen Fall lässt sich zeigen, dass die Funktion

$$h : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Im}(-e^{\alpha x} \log \phi(e^{-x}))$$

eine Lösung der verschobenen $\alpha\delta - ICFE(\mathcal{V}^{(\alpha)}, \tilde{B}_1)$ ist. Daher gibt es eine beschränkte Funktion $\eta : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und eine additiv d -periodische Funktion $q : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = q(x) + \eta(x) \cdot e^{-\alpha\delta x} \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Analog kann man schließen, dass die Abbildung

$$g : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Re}(-e^{\alpha x} \log \phi(e^{-x}))$$

eine Lösung der verschobenen $\alpha - ICFE(\mathcal{V}^{(\alpha)}, \tilde{B}_2)$ ist. Daher gibt es eine beschränkte Funktion $\xi : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und eine additiv d -periodische Funktion $p : [x_0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ mit

$$g(x) = p(x) + \xi(x) \cdot e^{-\alpha x} \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Wir können wegen der Periodizität von p und q annehmen, dass diese Funktionen auf dem gesamten Intervall $[0; \infty[$ definiert sind.

Es gilt für jedes $t \in]0; \infty[$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log \phi(t\theta^n)}{t^\alpha \theta^{\alpha n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} g(-\log t + n \cdot d) + i \cdot h(-\log t + n \cdot d) = p(-\log t) + i \cdot q(-\log t) =: c(t) + i \cdot d(t).$$

□

Für den Fall, falls der charakteristische Exponent von T gleich Eins ist, benötigen wir den folgenden Satz.

Satz 5.5.2. *Die Kantengewichtsfolge T besitze den charakteristischen Exponenten $\alpha_T = 1$. Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, 0)$ und es gelte*

$$(i) \quad -\log \phi(t) = \mathcal{O}(t(1 - \log t)) \text{ für } t \rightarrow 0; t \in]0; t_0(\phi)[,$$

$$(ii) \quad \text{für alle } \gamma \in]0; 1[\text{ gilt } \sup_{t \in]0; t_0(\phi)[} \left| \frac{-\log \phi(t)}{t} - \frac{-\log \phi(t\gamma)}{t\gamma} \right| < \infty.$$

Dann ist ϕ 1-elementar.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall, dass T nicht-arithmetisch ist, der arithmetische Fall lässt sich wie im letzten Abschnitt des vorherigen Beweises nachweisen.

Im Folgendem seien $D_n \in]0; \infty[$, $B_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $A_n : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ Konstanten bzw. beschränkte Funktionen, deren Werte sich aus den jeweils verwendeten Umformungen ergeben.

Wir setzen $x_0 := -\log t_0(\phi)$ und definieren

$$g : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Re}(-e^x \log \phi(e^{-x})) = -e^x \log(|\phi(e^{-x})|)$$

und

$$h : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \operatorname{Im}(-e^x \log \phi(e^{-x})) = -e^x \arg \phi(e^{-x}).$$

Dann gilt für alle $x \in [x_0; \infty[$

$$\exp\{-e^{-x}g(x) + i(-e^{-x}h(x))\} \tag{5.5.4}$$

$$= \int \exp\left\{-e^{-x}\left(\int_0^\infty g(x+y)\mathcal{V}^{(1)}(\omega, dy) + i\int_0^\infty h(x+y)\mathcal{V}^{(1)}(\omega, dy)\right)\right\} dP(\omega). \tag{5.5.5}$$

Wegen der Voraussetzung (i) gilt

$$g(x) = \mathcal{O}(1+x) \text{ für } x \rightarrow \infty; x \in [x_0; \infty[$$

und

$$h(x) = \mathcal{O}(1+x) \text{ für } x \rightarrow \infty; x \in [x_0; \infty[.$$

Da T eine endliche Kantengewichtsfolge ist, gibt es eine Konstante $K \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $\omega \in \Omega$ gilt $\nu^{(\alpha)}(\omega, [0; \infty]) < K$.

Die Abbildung $r : [0; 1] \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto -x \log(x)$ (mit $r(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} r(x)$) ist durch 1 beschränkt.

Damit gilt für alle $\omega \in \Omega$

$$\int_0^\infty y \nu^{(1)}(\omega, dy) = \sum_{k=1}^\infty -T_k(\omega) \log T_k(\omega) \leq K.$$

Für alle $x \in [x_0; \infty[$, $\omega \in \Omega$ gilt somit

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |g(x+y)| \nu^{(1)}(\omega, dy) &\leq \int_0^\infty D_1 \cdot (1+x+y) \nu^{(1)}(\omega, dy) \\ &\leq \left(D_1 \cdot (1+x)K + D_1 \cdot \int_0^\infty y \nu^{(1)}(\omega, dy) \right) \\ &\leq (D_1 \cdot (1+x)K + D_1 \cdot K) = D_2 \cdot x. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich für alle $x \in [x_0; \infty[$, $\omega \in \Omega$

$$\int_0^\infty |h(x+y)| \nu^{(1)}(\omega, dy) \leq D_3 \cdot x.$$

Aus der Voraussetzung (ii) folgt mit $y := -\log \gamma$

$$\sup_{x \in [x_0; \infty[} |g(x) - g(x+y) + i \cdot (h(x) - h(x+y))| < \infty.$$

Damit sind die Abbildungen $x \mapsto g(x+y) - g(x)$ und $x \mapsto h(x+y) - h(x)$ für alle $y \in [x_0; \infty[$ beschränkt.

Wir zeigen zunächst, dass h eine Lösung einer ICFE mit Fehlerterm ist. Im Folgendem sei $\delta \in]\frac{1}{2}, 1[$ eine fest gewählte Konstante.

Wir benutzen im Verlauf des restlichen Beweises, ohne gesondert darauf hinzuweisen, an verschiedenen Stellen, dass die Abbildung $x \mapsto e^{-\beta x} |x|^\gamma$ für festes $\beta, \gamma \in]0; \infty[$ beschränkt ist.

Sei $x \in [x_0; \infty[$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} &\text{Im}(\exp(-e^{-x}g(x) + i(-e^{-x}h(x)))) \\ &= \exp(-e^{-x}g(x)) \cdot \sin(-e^{-x}h(x)) \\ &= -\exp(-e^{-x}g(x)) \cdot \sin(e^{-x}h(x)) \\ &= -\exp(-e^{-\frac{\delta}{2}x} \cdot e^{-(1-\frac{\delta}{2})x}g(x)) \cdot (e^{-x}h(x) + B_0(e^{-x}h(x)) |e^{-x}h(x)|^{1+\delta}) \\ &= -(1 + e^{-\frac{\delta}{2}x}B_3(x)) \cdot (e^{-x}h(x) + e^{-(1+\frac{\delta}{2})x}e^{-\frac{\delta}{2}x}|h(x)|^{1+\delta}B_4(x)) \\ &= -(1 + e^{-\frac{\delta}{2}x}B_3(x)) \cdot (e^{-x}h(x) + e^{-(1+\frac{\delta}{2})x}B_5(x)) \\ &= -e^{-x}h(x) - e^{-(1+\frac{\delta}{2})x}h(x)B_3(x) - e^{-(1+\frac{\delta}{2})x}B_5(x) - e^{-\frac{\delta}{2}x}e^{-(1+\frac{\delta}{2})x}B_3(x)B_5(x) \\ &= -e^{-x}h(x) - e^{-(1+\frac{\delta}{4})x} \left(e^{-\frac{\delta}{4}x}h(x)B_3(x) + e^{-\frac{\delta}{4}x}B_5(x) - e^{-\frac{\delta}{2}x}e^{-\frac{\delta}{4}x}B_3(x)B_5(x) \right) \\ &= -e^{-x}h(x) - e^{-(1+\frac{\delta}{4})x}B_6(x). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Im}\left(\int \exp\left\{-e^{-x}\left(\int_0^\infty g(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy) + i\int_0^\infty h(x+y)\nu(\omega, dy)\right)\right\}dP(\omega)\right) \\
&= -\int \exp\left(-e^{-x}\int_0^\infty g(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy)\right) \cdot \sin\left(e^{-x}\int_0^\infty h(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy)\right)dP(\omega) \\
&= -\int (1+e^{-\delta x}A_0(\omega, x)) \cdot \left(e^{-x}\int_0^\infty h(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy) + e^{-(1+\frac{\delta}{2})x}A_1(\omega, x)\right)dP(\omega) \\
&= -e^{-x}\int\int_0^\infty h(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy)dP(\omega) + B_7(x)e^{-(1+\frac{\delta}{4})x} \\
&= -e^{-x}\int h(x+y)\bar{\nu}^{(1)}(dy) + B_7(x)e^{-(1+\frac{\delta}{4})x}.
\end{aligned}$$

Also gilt wegen der Gleichung (5.5.4)

$$h(x) = \int h(x+y)\bar{\nu}^{(1)}(dy) + B_8(x)e^{-\frac{\delta}{4}x} \text{ für alle } x \geq x_0,$$

d.h. h ist eine Lösung der verschobenen $\delta/2 - ICFE(\nu^{(1)}, \tilde{B}_1)$, wobei $\tilde{B}_1 : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto B_8(x)e^{-\frac{\delta}{4}x}$.

Daher gibt es eine beschränkte Funktion $\eta : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $d \in \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = d + \eta(x) \cdot e^{-\frac{\delta}{2}x} \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Insbesondere folgt damit, dass h beschränkt ist.

Wir zeigen nun, dass auch g eine Lösung einer ICFE mit Fehlerterm ist.

Sei $x \in [x_0; \infty[$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(\exp(-e^{-x}g(x) + i \cdot (-e^{-x}h(x)))) &= \exp(-e^{-x}g(x)) \cdot \cos(-e^{-x}h(x)) \\
&= (1 - e^{-x}g(x) + B_9(x)e^{-2\delta x})(1 + e^{-2x}B_{10}(x)) \\
&= 1 - e^{-x}g(x) + e^{-2\delta x}B_{11}(x).
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (5.5.4) gilt

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Re}\left(\int \exp\left\{-e^{-x}\left(\int_0^\infty g(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy) + i\int_0^\infty h(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy)\right)\right\}dP(\omega)\right) \\
&= \int \exp\left(-e^{-x}\int_0^\infty g(x+y)\nu^{(\alpha)}(\omega, dy)\right) \cdot \cos\left(e^{-x}\int_0^\infty h(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy)\right)dP(\omega) \\
&= \int \left(1 - e^{-x}\int_0^\infty g(x+y)\nu^{(1)}(\omega, dy) + e^{-2\delta x}A_3(\omega, x)\right) \cdot (1 + e^{-2x}A_4(\omega, x))dP(\omega) \\
&= 1 - e^{-x}\int g(x+y)\bar{\nu}^{(1)}(dy) + e^{-2\delta x}B_{12}(x).
\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir (wegen der Gleichung (5.5.4))

$$g(x) = \int g(x+y)\bar{\nu}^{(1)}(dy) + B_{13}(x)e^{-(2\delta-1)x} \text{ für alle } x \geq x_0,$$

d.h. g ist eine Lösung der verschobenen $(2\delta - 1) - ICFE(\bar{\nu}^{(1)}, \tilde{B}_2)$, wobei $\tilde{B}_2 : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto B_{13}(x)e^{-(2\delta-1)x}$. Man beachte, dass wegen $\delta \in]\frac{1}{2}; 1[$ die Ungleichung $2\delta - 1 > 0$ gilt.

Daher gibt es eine beschränkte Funktion $\xi : [x_0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = c + \xi(x) \cdot e^{-(2\delta-1)x} \text{ für alle } x \geq x_0.$$

Wegen $g \geq 0$, folgt $c \geq 0$.

Insgesamt gilt, nach einer Variablentransformation $x = -\log t$,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; t_0(\phi)[}} \frac{-\log \phi(t)}{t} = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \in]0; t_0(\phi)[}} g(-\log t) + ih(-\log t) = c + i \cdot d.$$

□

5.6. Repräsentationssatz

In diesem Abschnitt wollen wir einen Zusammenhang zwischen Lösungen stochastischer Fixpunktgleichungen und unbegrenzt teilbaren Verteilungen wie in der Arbeit [15] von Caliebe aufzeigen. Das Neue an unserem Resultat ist, dass wir Stoppllinien anstelle von Generationslinien \mathbb{V}_n mit $n \in \mathbb{N}$ benutzen.

In diesem Abschnitt benutzen wir Resultate aus dem Buch „Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen“ von B.W.Gnedenko und A.N.Kolmogorov (siehe [25]).

In diesem Buch werden sogenannte Stieltjessche Integrale benutzt, d.h. Integrale der Form

$$\int_a^b f(x) d\Phi(x),$$

wobei $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine nichtabnehmende, linksseitig stetige Funktion ist.

Für eine Erläuterung dieses Integralbegriffes verweisen wir auf das erste Kapitel in der Einführung des Buches [25].

Unbegrenzt teilbare Verteilungen

Der folgende Satz ergibt sich aus Satz 1 im Paragraph 18 in [25] und den Erläuterungen auf Seite 82.

Satz 5.6.1. *Sei X eine Zufallsgröße mit einer unbegrenzt teilbaren Verteilung.*

Dann gibt es Funktionen $M : [-\infty; 0[\rightarrow [0; \infty]$ und $N :]0; \infty] \rightarrow [-\infty, 0]$ mit den Eigenschaften

(i) $M(-\infty) = 0, N(\infty) = 0,$

(ii) M und N sind nichtabnehmend und linksseitig stetig,

(iii) für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\int_{-\varepsilon}^0 u^2 dM(u) + \int_0^\varepsilon u^2 dN(u) < \infty$

und Konstanten $\gamma \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in [0; \infty[$ so, dass

$$\log \phi_X(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2}{2} t^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dM(u) + \int_0^\infty \left(e^{iut} - 1 - \frac{iut}{1+u^2} \right) dN(u)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Darstellung unbegrenzt teilbarer Verteilungen nennt man auch Lévy'sche Formel zu den Parametern (γ, σ^2, M, N) .

Definition 5.6.2. Sei $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit $k_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Dann nennen wir eine Familie $((X_{n,m})_{m \leq k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von Zufallsgrößen ein Dreiecksschema.

Ein solches Dreiecksschema soll unabhängig genannt werden, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsgrößen $X_{n,1}, \dots, X_{n,k_n}$ stochastisch unabhängig sind.

Darüber hinaus soll das Dreiecksschema infinitesimal heißen, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sup_{1 \leq m \leq k_n} P(\{|X_{n,m}| > \varepsilon\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Satz 5.6.3. Satz 1 in §25 in Gnedenko und Kolmogorov.

Sei $(X_{n,m})_{m \leq k_n}$ ein unabhängiges und infinitesimales Dreiecksschema und sei für alle $n \in \mathbb{N}$ und $m \leq k_n$ $F_{n,m}$ die zu $X_{n,m}$ gehörige Verteilungsfunktion.

Damit bei geeigneter Wahl der Konstanten $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Verteilung von

$$S_n := \sum_{m=1}^{k_n} X_{n,m} - A_n$$

gegen eine Grenzverteilung S_∞ konvergiert, ist notwendig und hinreichend, dass nichtabnehmende Funktionen

$$M : [-\infty, 0[\rightarrow [0; \infty] \text{ und } N :]0; \infty] \rightarrow [-\infty, 0]$$

existieren mit $M(-\infty) = 0 = N(\infty)$ und eine Konstante $\sigma^2 \geq 0$ mit

(i) für alle $u \in [-\infty, 0[$, die ein Stetigkeitspunkt von M sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{k_n} F_{n,m}(u) = M(u)$$

(ii) für alle $u \in]0, \infty]$, die ein Stetigkeitspunkt von N sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{k_n} (F_{n,m}(u) - 1) = N(u)$$

(iii)

$$\sigma^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{k_n} \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 dF_{n,m}(x) - \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x dF_{n,m}(x) \right)^2 \right\}.$$

Die Konstanten A_n , $n \in \mathbb{N}$ können nach der Formel

$$A_n = \sum_{m=1}^{k_n} \int_{-\tau}^{\tau} x dF_{n,m}(x) - \gamma(\tau)$$

gewählt werden. Hierbei ist $\gamma(\tau)$ eine beliebige Konstante und $-\tau$ bzw. $+\tau$ sind Stetigkeitspunkte der Funktionen M bzw. N .

Definiert man dann

$$\gamma := \gamma(\tau) - \int_{-\tau}^0 \frac{u^3}{1+u^2} dM(u) - \int_0^{\tau} \frac{u^3}{1+u^2} dN(u) + \int_{-\infty}^{-\tau} \frac{u}{1+u^2} dM(u) + \int_{\tau}^{\infty} \frac{u}{1+u^2} dN(u),$$

so erfüllt ϕ_{S_∞} die Lévy'sche Formel mit den Parametern (γ, σ^2, M, N) .

Formulierung und Beweis des Repräsentationssatzes

Wie anfangs erwähnt, erweitern wir nun die Konstruktion, wie sie im Abschnitt 4 in der Arbeit [14] von Caliebe vorgestellt wurde.

Im Folgenden sei $T = (T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ stets eine endliche, L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$. Außerdem sei Y eine Zufallsgröße mit $\mathfrak{L}(Y) \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ und $(Y_v)_{v \in \mathbb{V}}$ eine Familie stochastisch unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $Y_v \stackrel{d}{=} Y$ für alle $v \in \mathbb{V}$. Zusätzlich seien $L = (L_v)_{v \in \mathbb{V}}$ und $(Y_v)_{v \in \mathbb{V}}$ stochastisch unabhängig.

Als Konsequenz erhalten wir aus dem Lemma 5.1.13 das folgende Resultat.
Für jede f.s. geschlossene und f.s. beschränkte Stopplinie \mathcal{L} gilt

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{v \in \mathcal{L}} L_v Y_v. \quad (5.6.1)$$

Sei $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_0$ ¹.

Für alle $v \in \mathbb{V}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$K_v^{(n)} := \mathbb{1}_{\{0 < L_v < a_n, L_{\mathcal{V}(v)} \geq a_n\}} L_v$$

und

$$\mathbb{K}^{(n)} := (K_v^{(n)})_{v \in \mathbb{V}}.$$

Außerdem setze wir $\mathfrak{K}^{(n)} := \{\mathbb{K}^{(n)}(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ und $\mathcal{L} := \{L(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$.

Man beachte, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsgröße $\mathbb{K}^{(n)}$ $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}}$ -messbar ist.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$Z_n(l) := \sum_{v \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{0 < l_v < a_n, l_{\mathcal{V}(v)} \geq a_n\}} l_v Y_v \text{ für alle } l \in \mathcal{L}$$

und

$$\tilde{Z}_n(k) := \sum_{v \in \mathbb{V}} k_v Y_v \text{ für alle } k \in \mathfrak{K}^{(n)}.$$

Es gilt dann

$$Z_n(L) = \tilde{Z}_n(\mathbb{K}^{(n)}).$$

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $l \in \mathcal{L}$

$$M_n(l) := \{v \in \mathbb{V} \mid 0 < l_v < a_n, l_{\mathcal{V}(v)} \geq a_n\}.$$

Dann ist $M_n(l)$ für alle $l \in \mathcal{L}$ eine beschränkte Linie und es gilt

$$Z_n(l) = \sum_{v \in M_n(l)} l_v Y_v.$$

Das folgende Lemma ist ein Analogon zum Lemma 4, Abschnitt 4 in [14].

Lemma 5.6.4. *Die Familie $((l_v Y_v)_{v \in M_n(l)})_{n \in \mathbb{N}}$ ist für P^L fast alle $l := (l_v)_{v \in \mathbb{V}} \in \mathcal{L}$ ein unabhängiges und infinitesimales Dreiecksschema.*

Beweis. Da die zugrundeliegende Kantengewichtsfolge endlich ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ \mathcal{L}^{a_n} f.s. beschränkt ist, gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass \mathcal{L}^{a_n} f.s. nur endlich viele Knoten v mit $L_v \neq 0$ enthält.

Daher gilt für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$, dass $M_n(l)$ nur endlich viele Knoten enthält.

Da die Stopplinienfolge $(\mathcal{L}^{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton ist, ist $(l_v Y_v)_{v \in M_n(l)}$ für P^L fast alle $l \in [0; 1]^{\mathbb{V}}$ ein Dreiecksschema.

Die Unabhängigkeit des Dreiecksschemas folgt, da die Familie $(Y_v)_{v \in \mathbb{V}}$ stochastisch unabhängig ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $M_n(l)$ für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$ eine Linie ist.

¹Für eine Definition von \mathcal{F}_0 siehe das Kapitel „Darstellungssatz“

Weiterhin gilt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $l = (l_v)_{v \in \mathbb{V}} \in \mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \sup_{v \in \mathbb{M}_n(l)} P(|l_v Y_v| \geq \varepsilon) &= \sup_{v \in \mathbb{M}_n(l)} P(|Y_v| \geq \frac{\varepsilon}{l_v}) \\ &= \sup_{v \in \mathbb{M}_n(l)} P(|Y| \geq \frac{\varepsilon}{l_v}) \\ &\leq P(|Y| \geq \frac{\varepsilon}{\sup_{v \in \mathbb{M}_n(l)} l_v}). \end{aligned}$$

Da $\sup_{v \in \mathcal{L}^{a_n}} L_v \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} 0$, folgt $\sup_{v \in \mathbb{M}_n(l)} P(|l_v Y_v| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$. \square

Für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$\mathcal{F}_n(t) := \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{]-\infty; t]} \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^{a_n}} L_v Y_v \right) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}} \right).$$

Außerdem definieren wir für alle $l \in \mathcal{L}$ und alle $k \in \mathfrak{K}^{(n)}$

$$G_t^{(n)}(l) := F_{Z_n(l)}(t) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{]-\infty; t]}(Z_n(l)) \right)$$

und

$$\tilde{G}_t^{(n)}(k) := F_{\tilde{Z}_n(k)}(t) = \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{]-\infty; t]}(\tilde{Z}_n(k)) \right).$$

Es gilt dann für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n(t) = \tilde{G}_t^{(n)}(\mathbb{K}^{(n)}) = G_t^{(n)}(L),$$

d.h. für alle $\omega \in \Omega$ und $l := L(\omega) \in \mathcal{L}$ gilt

$$\mathcal{F}_n(t)(\omega) = G_t^{(n)}(l) = F_{Z_n(l)}(t).$$

Das sich anschließende Lemma ergibt sich mit ähnlichen Argumenten, wie das Lemma 5, Abschnitt 4 in [14].

Lemma 5.6.5. *Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $(\mathcal{F}_n(t), \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal.*

Beweis. Sei $t \in \mathbb{R}$.

Die $\mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}}$ -Messbarkeit von $\mathcal{F}_n(t)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Definition.

Aufgrund der Fixpunktgleichung, bzw. der Gleichung 5.6.1 ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(\mathcal{F}_{n+1}(t) | \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}}) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{]-\infty; t]} \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^{a_{n+1}}} L_v Y_v \right) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{]-\infty; t]} \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^{a_n}; L_v \neq 0} L_v \mathbb{1}_{\{L_v < a_{n+1}\}} Y_v \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L_v \mathbb{1}_{\{L_v \geq a_{n+1}\}} \sum_{w \in \mathbb{V}} \mathbb{1}_{\{L_w(v) < \frac{a_{n+1}}{L_v}, L_{\mathcal{V}(w)}(v) \geq \frac{a_{n+1}}{L_v}\}} L_w(v) Y_{vw} \right) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{]-\infty; t]} \left(\sum_{v \in \mathcal{L}^{a_n}; L_v \neq 0} L_v Y_v \right) \middle| \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}} \right) \\ &= \mathcal{F}_n(t). \end{aligned}$$

\square

Da das Martingal $(\mathcal{F}_n(t), \mathfrak{A}_{\mathcal{L}^{a_n}})_{n \in \mathbb{N}}$ positiv und beschränkt ist, gibt es nach dem Martingalkonvergenzsatz eine Zufallsgröße $\mathcal{F}_\infty(t)$ mit

$$\mathcal{F}_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s., L_1} \mathcal{F}_\infty(t)$$

und $0 \leq E(\mathcal{F}_\infty(t)) \leq E(\mathcal{F}_1(t)) \leq 1$.

Daher gibt es u.a. für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$ den Grenzwert

$$G_t^\infty(l) := \lim_{n \rightarrow \infty} G_t^{(n)}(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n(l)}(t).$$

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Abschnittes, dieser entspricht dem Lemma 6, Abschnitt 5 in [14].

Satz 5.6.6. Repräsentationssatz.

Für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$ existiert eine Zufallsgröße $Z(l)$, die eine unbegrenzt teilbare Verteilung besitzt, mit

$$Z_n(l) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} Z(l).$$

Für die Parameter $(\gamma(l), \sigma^2(l), M(l), N(l))$ der Lévy-Repräsentation von $Z(l)$ gelten die folgenden Aussagen.

Für jedes $u \in [-\infty; 0]$, das eine Stetigkeitsstelle von $M(l)$ ist, gilt

$$M(l)(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} F_Y\left(\frac{u}{l_v}\right).$$

Für jedes $u \in]0; \infty]$, das eine Stetigkeitsstelle von $N(l)$ ist, gilt

$$N(l)(u) = - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(1 - F_Y\left(\frac{u}{l_v}\right)\right).$$

Es gilt

$$\sigma^2(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(l^2(v) \int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u^2 dF_Y(u) - l_v^2 \left(\int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u dF_Y(u) \right)^2 \right).$$

Weiterhin gilt für alle $\tau \in]0; \infty]$ mit $-\tau$ ist Stetigkeitspunkt von $M(l)$ und $+\tau$ ist Stetigkeitspunkt von $N(l)$

$$\gamma(\tau)(l) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} l_v \int_{-\tau/l_v}^{\tau/l_v} u dF_Y(u).$$

Die Konstante $\gamma(l)$ berechnet sich dann zu

$$\gamma(l) = \gamma(\tau)(l) - \int_{-\tau}^0 \frac{u^3}{1+u^2} dM(l)(u) - \int_0^\tau \frac{u^3}{1+u^2} dN(l)(u) + \int_{-\infty}^{-\tau} \frac{u}{1+u^2} dM(l)(u) + \int_\tau^\infty \frac{u}{1+u^2} dN(l)(u).$$

Beweis. Wir können eine abzählbare, dichte Teilmenge D von \mathbb{R} und eine Teilmenge Q von \mathcal{L} finden mit $P^L(Q) = 1$ so, dass für alle $t \in D$ und $l \in Q$ gilt

$$F_n(l)(t) := G_t^{(n)}(l) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} G_t^\infty(l).$$

Sei $l \in Q$.

Wir definieren dann

$$F(l) : \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]; t \mapsto \sup_{s \in D; s \leq t} G_s^\infty(l),$$

und erhalten für alle Stetigkeitspunkt $t \in \mathbb{R}$ von $F(l)$

$$F_n(l)(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F(l)(t).$$

Sei \mathcal{C} die Menge der Stetigkeitsstellen von $F(l)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\lim_{t \rightarrow \infty} F(L)(t) \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E} (F(L)(t)) && \text{wg. monotoner Konvergenz} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty; t \in \mathcal{C}} \mathbb{E} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} G_t^{(n)}(L) \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty; t \in \mathcal{C}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(G_t^{(n)}(L) \right) && \text{wg. } L_1\text{-Konvergenz} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty; t \in \mathcal{C}} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(G_t^{(1)}(L) \right) && \text{wg. Martingal-Eigenschaft} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty; t \in \mathcal{C}} \mathbb{E} \left(G_t^{(1)}(L) \right) = 1. \end{aligned}$$

Also gilt für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(l)(t) = 1.$$

Mit ähnlich Argumenten kann man zeigen

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(l)(t) = 0$$

für P^L fast alle $l \in \mathcal{L}$.

Sei nun $Z(l)$ eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion $F(l)$.

Mit Satz 1 in §9 in [25] folgt dann die schwache Konvergenz von $Z_n(l) = \sum_{v \in M_n(l)} l_v Y_v$ gegen $Z(l)$.

Da $((l_v Y_v)_{v \in M_n(l)})_{n \in \mathbb{N}}$ ein unabhängiges und infinitesimales Dreiecksschema ist und $Z_n(l)$ schwach gegen $Z(l)$ konvergiert, können wir Satz 1 in §25 von Gnedenko Kolmogorov anwenden und erhalten die Behauptung. \square

Abschließend betrachten wir eine „deterministische“ Version des Exzess-Maß

Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $l \in \mathcal{L}$ das Maß

$$\bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)} := \sum_{v \in M_n(l)} l_v^\alpha \delta_{l_v/a}.$$

Nach Korollar 2.2.11 gilt

$$\bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}([0; t]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([0; t]) \text{ bzw. } \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}([t; 1]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([t; 1]),$$

wobei $w^{(\alpha)} := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in \mathbb{V}_n} l_v^\alpha$

5.7. Regularitätssatz

Der Regularitätssatz ist der letzte von uns benötigte Baustein, um eine Darstellung der Fourier-Transformation von Lösungen stochastischer Fixpunktgleichungen zu erhalten.

Satz 5.7.1. Regularitätssatz.

Sei T eine endliche, L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$. Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, 0)$ und F die zugehörige Verteilungsfunktion.

Dann gilt $1 - F(x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha})$ und $F(-x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha})$ für $x \rightarrow \infty$.

Beweis. 1. Fall: T nicht-arithmetisch.

Sei Y eine Zufallsgröße mit Fourier-Transformierten ϕ und Verteilungsfunktion F .

Wir zeigen die Behauptung per Widerspruch. Dazu nehmen wir an

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))x^\alpha = \infty \text{ oder } \limsup_{x \rightarrow \infty} F(-x)x^\alpha = \infty.$$

1.1. Fall: $\limsup_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))x^\alpha = \infty$.

Dann gibt es eine monoton steigende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0; \infty[^{\mathbb{N}}$ mit

- $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$,
- $(1 - F(b_n))b_n^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

Setze $a_n := \frac{1}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}_0$.

Wir finden nach dem Repräsentationssatz eine Menge $Q \subseteq \mathcal{L}$ mit $P^L(Q) = 1$ so, dass für alle $l \in Q$ die Resultate aus dem Repräsentationssatz gelten.

Sei $l \in Q$ fest gewählt.

Annahme: $N(l)$ besitzt in $]0; 1[$ einen Stetigkeitspunkt u .

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [u; 1]$

$$\left(1 - F\left(\frac{u}{a_n x}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n x}\right)^\alpha \geq \left(1 - F\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n}\right)^\alpha$$

Es gilt daher für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} - \sum_{v \in M_n(l)} \left(1 - F\left(\frac{u}{l_v}\right)\right) \left(\frac{u}{l_v}\right)^\alpha \left(\frac{l_v}{u}\right)^\alpha &= -\frac{1}{u^\alpha} \int_{]0; 1[} \left(1 - F\left(\frac{u}{a_n x}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n x}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}(dx) \\ &\leq -\frac{1}{u^\alpha} \int_{[u; 1[} \left(1 - F\left(\frac{u}{a_n x}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n x}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}(dx) \\ &\leq -\frac{1}{u^\alpha} \int_{[u; 1[} \left(1 - F\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}(dx) \\ &= -\left(1 - F\left(\frac{1}{a_n}\right)\right) \left(\frac{1}{a_n}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}([u; 1]). \end{aligned}$$

Da $\bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}([u; 1]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w^{(\alpha)} \cdot \mu^{(\alpha)}([u; 1]) > 0$, gilt

$$N(l)(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} - \sum_{v \in M_n(l)} \left(1 - F\left(\frac{u}{l_v}\right)\right) \left(\frac{u}{l_v}\right)^\alpha \left(\frac{l_v}{u}\right)^\alpha = -\infty.$$

Da $N(l)$ monoton steigend ist, folgt $N(l)(x) = -\infty$ für alle $x \in]0; u]$.

Dies ist aber wegen Eigenschaft (iii) aus Satz 5.6.1 nicht möglich.

Daher besitzt $N(l)$ keinerlei Stetigkeitspunkte in $]0; 1[$.

Falls $N(l)$ beschränkt ist auf dem Intervall $]0; 1[$, so folgt aus der Monotonie von $N(l)$, dass $N(l)$ nur abzählbar viele Sprungstellen besitzt. Damit muss $N(l)$ unbeschränkt sein, was aber aufgrund von Eigenschaft (iii) aus Satz 5.6.1 nicht möglich ist.

1.2. Fall: $\limsup_{x \rightarrow \infty} F(-x)x^\alpha = \infty$.

Dann gibt es eine monoton steigende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0; \infty[^{\mathbb{N}}$ mit

- $b_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$,
- $(F(-b_n))b_n^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$.

Setze $a_n := \frac{1}{b_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge $(\mathcal{L}^{a_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine monoton aufsteigend Folge von f.s. beschränkten und f.s. geschlossenen Stoppllinien.

Wir finden nach dem Repräsentationssatz eine Menge $Q \subseteq \mathcal{L}$ mit $P^L(Q) = 1$ so, dass für alle $l \in Q$ die Resultate aus dem Repräsentationssatz gelten.

Sei $l \in Q$ fest gewählt.

Annahme es gibt ein $u \in]0; 1[$ mit $-u$ ist Stetigkeitspunkt von $M(l)$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [u; 1]$

$$\left(F\left(\frac{-u}{a_n x}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n x}\right)^\alpha \geq \left(F\left(-\frac{1}{a_n}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n}\right)^\alpha.$$

Es gilt daher für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{v \in M_n(l)} \left(F\left(-\frac{u}{l_v}\right)\right) \left(\frac{u}{l_v}\right)^\alpha \left(\frac{l_v}{u}\right)^\alpha &= \frac{1}{u^\alpha} \int_{[0;1[} \left(F\left(-\frac{u}{a_n x}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n x}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}(dx) \\ &\geq \frac{1}{u^\alpha} \int_{[u;1[} \left(F\left(-\frac{u}{a_n x}\right)\right) \left(\frac{u}{a_n x}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}(dx) \\ &\geq \int_{[u;1[} \left(F\left(-\frac{1}{a_n}\right)\right) \left(\frac{1}{a_n}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}(dx) \\ &= \left(F\left(-\frac{1}{a_n}\right)\right) \left(\frac{1}{a_n}\right)^\alpha \bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}([u; 1]). \end{aligned}$$

Da $\bar{\mu}_{a_n}^{(\alpha)}([u; 1]) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} w^{(\alpha)} \mu^{(\alpha)}([u; 1]) > 0$, gilt

$$M(l)(-u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(F\left(-\frac{u}{l_v}\right)\right) \left(\frac{u}{l_v}\right)^\alpha \left(\frac{l_v}{u}\right)^\alpha = \infty.$$

Da $M(l)$ monoton steigend ist, folgt $M(l)(-x) = \infty$ für alle $x \in]0; u]$.

Mit denselben Argumenten wie am Schluss des Falles 1.1. kann nun gezeigt werden, dass dies zu einem Widerspruch führt.

2.Fall T arithmetisch mit Spanne d .

Setze $\theta := e^{-d}$.

Wie im nicht-arithmetischen Fall zeigt man, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - F(y\theta^{-n})) \cdot y^\alpha \theta^{-\alpha n} < \infty \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} F(-y\theta^{-n}) \cdot y^\alpha \theta^{-\alpha n} < \infty$$

für alle $y \in]0; \infty[$ gilt.

Wir zeigen nun, dass $\limsup_{x \rightarrow \infty} (1 - F(x))x^\alpha < \infty$ und $\limsup_{x \rightarrow \infty} F(-x)x^\alpha < \infty$ gilt.

Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$

$$\sup_{k \geq n} ((1 - F(\theta^{-k}))\theta^{-\alpha k}) \leq 2 \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} ((1 - F(\theta^{-k}))\theta^{-\alpha k}) < \infty$$

gilt.

Sei $x \geq \theta^{-(N-1)}$.

Sei $y \in [\theta; 1]$ und $n \geq N$ mit $y = \theta^n x$.

Es folgt

$$\begin{aligned} (1 - F(x))x^\alpha &= (1 - F(y\theta^{-n}))y^\alpha \theta^{-\alpha n} \\ &\leq \sup_{k \geq n} (1 - F(y\theta^{-k}))y^\alpha \theta^{-\alpha k} \\ &\leq \frac{y^\alpha}{\theta^\alpha} \sup_{k \geq n} (1 - F(\theta^{-k+1}))\theta^{-\alpha(k-1)} \\ &\leq \frac{y^\alpha}{\theta^\alpha} 2 \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - F(\theta^{-k}))\theta^{-\alpha(k-1)} < \infty. \end{aligned}$$

Mit ähnlichen Abschätzungen erhält man

$$F(-x)x^\alpha \leq \frac{y^\alpha}{\theta^\alpha} 2 \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} (1 - F(\theta^{-k}))\theta^{-\alpha(k-1)} < \infty.$$

□

5.8. Darstellungssatz

Dieser Abschnitt charakterisiert die Fourier-Transformierte von Wahrscheinlichkeitsmaßen aus $\widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, 0)$ bzw. $\widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, C)$ unter gewissen Annahmen an die Kantengewichtsfolge T und die Zufallsgröße C .

Satz 5.8.1. *Darstellungssatz, homogener Fall.*

Sei T eine endliche, L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$.

Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, 0)$.

Sei T nicht-arithmetisch.

- Ist $\alpha > 2$, so gilt $\phi(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- Ist $\alpha = 2$, so gibt es eine Konstante $c \in [0; \infty[$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp \left(-\frac{c}{2} t^2 \cdot W^{(2)} \right) \right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Falls $0 < \alpha < 2$ und T nicht-arithmetisch ist, so gibt es Konstanten $c \in [0; \infty[$, $d \in \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp(-|t|^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d)) \right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Falls $0 < \alpha < 2$ und T arithmetisch mit Spanne r ist, so gibt es multiplikativ θ -periodische Funktionen $c : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ und $d : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp(-|t|^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(c(|t|) + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d(|t|))) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Hierbei ist $\theta := e^{-r}$.

Beweis. Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_{\Sigma}(T, 0)$, F die zugehörige Verteilungsfunktion und Y eine Zufallsgröße mit Verteilungsfunktion F .

Seien $Y_k; k \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen mit $Y_k \stackrel{d}{=} Y$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig.

Nach dem Regularitätssatz gilt dann $1 - F(x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha})$ und $F(-x) = \mathcal{O}(x^{-\alpha})$ für $x \rightarrow \infty$.

Nach Theorem 11.3.1 in [30] besitzt dann Y für alle $r \in [0; \alpha[$ das absolute r -Moment, d.h. $E|Y|^r < \infty$.

Mit Theorem 1 in Kapitel 8.4 in [18] bzw. Satz 41.3 in [3] folgt daraus

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} \frac{(it)^k E(Y^k)}{k!} + \mathcal{O}(|t|^{\beta}) \text{ für } t \rightarrow 0,$$

für alle $\beta \in [[\alpha], \alpha[$.

1. Fall: $\alpha > 2$.

Da α der charakteristische Exponent ist, gilt $m(\alpha) = 1$ und $m(\beta) \neq 1$ für alle $\beta < \alpha$. Daraus folgt insbesondere $m(1) \neq 1$ und $m(2) \neq 1$.

Da Y die stochastische Fixpunktgleichung erfüllt, gilt $E(Y) = E(\sum_{k=1}^{\infty} T_k Y_k) = m(1) \cdot E(Y)$. Da $m(1) \neq 1$, folgt damit $E(Y) = 0$. Mit derselben Schlussweise folgt $E(Y^2) = 0$. Damit ist Y konstant gleich Null, d.h. $\phi(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. Fall: $\alpha = 2$.

Wie im vorangegangenen Fall können wir schließen, dass $E(Y) = 0$ gilt.

Wir zeigen per Widerspruch, dass $\text{Var } Y = E(Y^2) < \infty$ gilt.

Sei a eine Folge aus \mathcal{F}_0 . Falls T arithmetisch ist, so wähle a mit $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \{\theta^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Wir finden nach dem Repräsentationssatz eine Menge $Q \subseteq \mathcal{L}$ mit $P^L(Q) = 1$ so, dass für alle $l \in Q$ die Resultate aus dem Repräsentationssatz gelten.

Sei $l = (l_v)_{v \in \mathbb{V}} \in Q$ fest gewählt.

Dann gilt für den Parameter $\sigma^2(l)$ der Lévy-Darstellung von $Z(l)$

$$\sigma^2(l) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(l_v^2 \int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u^2 dF(u) - l_v^2 \left(\int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u dF(u) \right)^2 \right) < \infty.$$

Wir zeigen, dass $\sigma^2(l) = \infty$ gilt, was zum gewünschten Widerspruch führt.

Sei $\varepsilon > 0$.

Setze $C_1 := \sup_{r \geq 0} \int_{-r}^r u dF(u)$. Da $E(Y) = 0$ gilt, folgt $C_1 < \infty$.

Damit gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(l_v^2 \int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u^2 dF(u) - l_v^2 \left(\int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u dF(u) \right)^2 \right) \\
& \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(l_v^2 \int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u^2 dF(u) - l_v^2 C_1^2 \right) \\
& \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(l_v^2 \int_{-\varepsilon/a_m}^{\varepsilon/a_m} u^2 dF(u) - l_v^2 C_1^2 \right) \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in \mathbb{V}_n} l_v^2 \cdot \left(\int_{-\varepsilon/a_m}^{\varepsilon/a_m} u^2 dF(u) - C_1^2 \right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt mit $m \rightarrow \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{v \in M_n(l)} \left(l_v^2 \int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u^2 dF(u) - l_v^2 \left(\int_{-\varepsilon/l_v}^{\varepsilon/l_v} u dF(u) \right)^2 \right) = \infty.$$

Damit gilt $\sigma^2(l) = \infty$, d.h. wir haben einen Widerspruch. Also besitzt Y ein endliches zweites Moment.

Mit Theorem 4 in [16] folgt, dass es eine Konstante $c \geq 0$ gibt mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp\left(-\frac{c}{2} t^2 W^{(2)}\right) \right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

3. Fall: $0 < \alpha < 1$ oder $1 < \alpha < 2$.

Nach Theorem 11.3.3 in [30] folgt

$$1 - \phi(t) = \mathcal{O}(|t|^\alpha) \text{ für } t \rightarrow 0,$$

d.h. ϕ ist α -regulär. Nach Satz 5.5.1 ist ϕ dann α -elementar. Die Behauptung folgt dann aus dem Darstellungssatz für α -elementare Lösungen.

4. Fall: $\alpha = 1$.

Wir zeigen zunächst

$$\text{(i) } 1 - \phi(t) = \mathcal{O}(t(1 - \log t)) \text{ für } t \rightarrow 0,$$

$$\text{(ii) für alle } \gamma \in]0; 1[\text{ gilt } \sup_{t \in]0; \infty[} \left| \frac{1 - \phi(t)}{t} - \frac{1 - \phi(t\gamma)}{t\gamma} \right| < \infty.$$

Im Folgenden seien D_1, D_2, D_3, \dots positive Konstanten, deren Wert sich aus den verwendeten Ungleichungen ergeben.

Für alle $t \in]0; 1[$ gilt

$$\begin{aligned}
|1 - \phi(t)| &\leq \int |1 - e^{itx}| dF(x) \\
&\leq t \cdot \int_{-1/t}^{1/t} |x| dF(x) + 2 \cdot \int_{1/t}^{\infty} dF(x) + 2 \cdot \int_{-\infty}^{-1/t} dF(x) \\
&= t \cdot \int_0^{1/t} (1 - F(x)) dx + t \cdot \int_0^{1/t} F(-x) dx + 2 \cdot \int_{1/t}^{\infty} dF(x) + 2 \cdot \int_{-\infty}^{-1/t} dF(x) \\
&\leq t \cdot (1 + \int_1^{1/t} (1 - F(x)) dx) + t \cdot (1 + \int_1^{1/t} F(-x) dx) + 2 \cdot \int_{1/t}^{\infty} dF(x) + 2 \cdot \int_{-\infty}^{-1/t} dF(x) \\
&\leq t \cdot (1 + D_1 \log(1/t)) + t \cdot (1 + D_2 \log(1/t)) + t(D_3 + D_4) \\
&\leq D_5 \cdot t \cdot (1 - \log t).
\end{aligned}$$

Es folgt die Behauptung (i).

Kommen wir zur Behauptung (ii). Seien $t \in]0; \infty[$ und $\gamma \in]0; 1[$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1 - \phi(t)}{t} - \frac{1 - \phi(t\gamma)}{t\gamma} \right| &\leq \int_{-1/t\gamma}^{1/t\gamma} \left| \frac{1 - e^{ixt}}{t} - \frac{1 - e^{ixt\gamma}}{t\gamma} \right| dF(x) \\
&\quad + \int_{1/t\gamma}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{ixt}}{t} - \frac{1 - e^{ixt\gamma}}{t\gamma} \right| dF(x) \\
&\quad + \int_{-\infty}^{-1/t\gamma} \left| \frac{1 - e^{ixt}}{t} - \frac{1 - e^{ixt\gamma}}{t\gamma} \right| dF(x) \\
&=: I(t) + II(t) + III(t).
\end{aligned}$$

Es gilt, wegen Lemma 1 in [18] oder Formel (41.5) in [3],

$$\begin{aligned}
I(t) &= \int_{-1/t\gamma}^{1/t\gamma} \left| \frac{1 + ixt - e^{ixt}}{t} - \frac{1 + ixt\gamma - e^{ixt\gamma}}{t\gamma} \right| dF(x) \\
&\leq \int_{-1/t\gamma}^{1/t\gamma} x^2 dF(x) \\
&= 2 \cdot t \cdot \left(\int_0^{1/t\gamma} x(1 - F(x)) dx + \int_0^{1/t\gamma} xF(-x) dx \right) \\
&\leq D_5 \cdot (1/\gamma).
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
II(t) &= \int_{1/t\gamma}^{\infty} \left| \frac{1 - e^{ixt}}{t} - \frac{1 - e^{ixt\gamma}}{t\gamma} \right| dF(x) \\
&\leq \int_{1/t\gamma}^{\infty} \gamma \cdot \frac{|1 - e^{ixt}|}{t\gamma} dF(x) + \int_{1/t\gamma}^{\infty} \frac{|1 - e^{ixt\gamma}|}{t\gamma} dF(x) \\
&\leq \gamma \cdot \int_{1/t\gamma}^{\infty} \frac{2}{t\gamma} dF(x) + \int_{1/t\gamma}^{\infty} \frac{2}{t\gamma} dF(x) \\
&= \gamma \cdot \frac{2}{t\gamma} (1 - F(1/t\gamma)) + \frac{2}{t\gamma} (1 - F(1/t\gamma)) \\
&\stackrel{\gamma < 1}{\leq} \frac{4}{t\gamma} (1 - F(1/t\gamma))
\end{aligned}$$

Der letzte Term ist durch eine Konstante, etwa D_6 , beschränkt da $1 - F(x) = \mathcal{O}(x^{-1})$ für $x \rightarrow \infty$.

Mit ähnlichen Argumenten können wir zeigen, dass

$$\begin{aligned}
III(t) &= \int_{-\infty}^{-1/t\gamma} \left| \frac{1 - e^{ixt}}{t} - \frac{1 - e^{ixt\gamma}}{t\gamma} \right| dF(x) \\
&\leq \int_{-\infty}^{-1/t\gamma} \gamma \cdot \frac{|1 - e^{ixt}|}{t\gamma} dF(x) + \int_{-\infty}^{-1/t\gamma} \frac{|1 - e^{ixt\gamma}|}{t\gamma} dF(x) \\
&\leq \gamma \cdot \int_{-\infty}^{-1/t\gamma} \frac{2}{t\gamma} dF(x) + \int_{-\infty}^{-1/t\gamma} \frac{2}{t\gamma} dF(x) \\
&= \gamma \cdot \frac{2}{t\gamma} F(-1/t\gamma) + \frac{2}{t\gamma} F(-1/t\gamma) \\
&\stackrel{\gamma < 1}{\leq} \frac{4}{t\gamma} F(-1/t\gamma) \leq D_7
\end{aligned}$$

gilt.

Wegen Lemma 5.1.7 gilt damit

- (i) $-\log \phi(t) = \mathcal{O}(t(1 - \log t))$ für $t \rightarrow 0$,
- (ii) für alle $\gamma \in]0; 1[$ gilt $\sup_{t \in]0; \infty[} \left| \frac{-\log \phi(t)}{t} - \frac{-\log \phi(t\gamma)}{t\gamma} \right| < \infty$.

Mit Satz 5.5.2 folgt, dass ϕ 1-elementar ist. Die Behauptung in diesem Fall folgt aus dem Darstellungssatz für 1-elementare Lösungen. \square

Satz 5.8.2. *Darstellungssatz I, inhomogener Fall.*

Sei T eine endliche und L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; 1[$ und $m(1) < 1$. Sei C ein positiver Tollterm.

Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_{\Sigma}(T, C)$.

- (i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so gibt es ein $c \in [0; \infty[$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-|t|^{\alpha} W^{(\alpha)} \cdot (c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d)} \cdot e^{itR_{\infty}} \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

- (ii) Falls T arithmetisch mit Spanne r ist, so gibt es multiplikativ θ -periodische Funktionen $c : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ und $d : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp(-|t|^{\alpha} \cdot W^{(\alpha)}(c(|t|) + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d(|t|))) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\theta := e^{-r}$.

Beweis. Wir zeigen nur den nicht-arithmetischen Fall. Der arithmetische Fall lässt sich analog zeigen.

Sei μ die zu ϕ gehörige Verteilung.

Dann gibt es nach Korollar 5.2.3 Zufallsgrößen Y und Y_0 mit $\mathfrak{L}(Y) = \mu$, $Y_0 \in \mathbb{F}_{\Sigma}(T, 0)$ und $\mathbb{E}|Y - Y_0| < \infty$.

Da $\mathfrak{L}(Y_0) \in \mathbb{F}(T, 0)$ ist, gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $1 - \phi_{Y_0}(t) \sim z \cdot t^{\alpha}$ für $t \rightarrow 0; t \in]0; \infty[$.

Es gilt daher für alle $t \in]0; \infty[$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1 - \phi(t)}{t^\alpha} - z \right| &= \left| \frac{1 - \mathbb{E}(e^{itY})}{t^\alpha} - z \right| \\
&= \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z + \mathbb{E} \left(\frac{e^{itY_0}(1 - e^{it(Y-Y_0)})}{t^\alpha} \right) \right| \\
&\leq \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z \right| + \mathbb{E} \left(\left| \frac{1 - e^{it(Y-Y_0)}}{t^\alpha} \right| \right)
\end{aligned}$$

Da $\mathfrak{L}(Y_0)$ α -elementar ist, gilt

$$\left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Außerdem gilt, da $\alpha < 1$ ist,

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{1 - e^{it(Y-Y_0)}}{t^\alpha} \right| \right) \leq t^{1-\alpha} \mathbb{E}(|Y - Y_0|) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Damit ist ϕ α -elementar und die Behauptung folgt aus Satz 5.3.2. □

Satz 5.8.3. *Darstellungssatz II, inhomogener Fall.*

Sei T eine endliche und L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; 2[$ und $m(2) < 1$.

Sei C ein zentrierter Tollterm.

Sei $\phi \in \widehat{\mathbb{F}}_\Sigma(T, C)$.

(i) Falls T nicht-arithmetisch ist, so gibt es ein $c \in [0; \infty[$ und ein $d \in \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(e^{-|t|^\alpha W^{(\alpha)} \cdot (c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d)} \cdot e^{itR_\infty} \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Falls T arithmetisch mit Spanne r ist, so gibt es multiplikativ θ -periodische Funktionen $c : [0; \infty[\rightarrow [0; \infty[$ und $d : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(t) = \mathbb{E} \left(\exp(-|t|^\alpha \cdot W^{(\alpha)}(c(|t|) + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d(|t|))) \right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Dabei ist $\theta := e^{-r}$.

Beweis. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den nicht-arithmetischen Fall ein. Der Beweis lehnt sich an den Beweis des vorherigen Satzes an. Wieder zeigen wir, dass ϕ α -elementar ist, woraus sich die Behauptung mittels Satz 5.3.2 ergibt.

1. Fall: $\alpha \in]0; 1[$.

In diesem Fall kann man wie im Beweis zu 5.8.2 folgern, dass ϕ α -elementar ist.

2. Fall: $\alpha \in [1; 2[$.

Sei μ die zu ϕ gehörige Verteilung.

Dann gibt es nach Korollar 5.2.4 Zufallsgrößen Y und Y_0 mit $\mathfrak{L}(Y) = \mu$, $Y_0 \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ und $\mathbb{E}((Y - Y_0)^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y - Y_0) = 0$.

Da $\mathfrak{L}(Y_0) \in \mathbb{F}(T, 0)$ ist, gibt es $z \in \mathbb{C}$ mit $1 - \phi_{Y_0}(t) \sim z \cdot t^\alpha$ für $t \rightarrow 0; t \in]0; \infty[$.

Es gilt für alle $t \in]0; \infty[$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1 - \phi(t)}{t^\alpha} - z \right| &\leq \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z \right| + \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{it(Y-Y_0)}}{t^\alpha} \right) \right| + \\
&\quad \left| \mathbb{E} \left(e^{itY_0} \cdot \frac{1 - e^{it(Y-Y_0)}}{t^\alpha} \right) - \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{it(Y-Y_0)}}{t^\alpha} \right) \right| \\
&= \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z \right| + \left| \frac{1 - \phi_{Y-Y_0}(t)}{t^\alpha} \right| + \\
&\quad \left| \mathbb{E} \left(\frac{(1 - e^{it(Y-Y_0)})(e^{itY_0} - 1)}{t^\alpha} \right) \right| \\
&\leq \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z \right| + \left| \frac{1 - \phi_{Y-Y_0}(t)}{t^\alpha} \right| + \\
&\quad \mathbb{E} \left(\frac{|1 - e^{it(Y-Y_0)}| \cdot |1 - e^{itY_0}|}{t^\alpha} \right) \\
&=: I(t) + II(t) + III(t).
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}(Y_0)$ α -elementar ist, gilt

$$I(t) = \left| \mathbb{E} \left(\frac{1 - e^{itY_0}}{t^\alpha} \right) - z \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Da $\mathbb{E}(Y - Y_0) = 0$ und $\mathbb{E}((Y - Y_0)^2) < \infty$ gilt $\phi_{Y-Y_0}(t) = 1 + \mathcal{O}(|t|^2)$ für $t \rightarrow 0$. Daraus folgt, da $\alpha < 2$

$$II(t) = \left| \frac{1 - \phi_{Y-Y_0}(t)}{t^\alpha} \right| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Wir setzen $q := \alpha - \frac{2-\alpha}{4} = \frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{2} \in]0; \alpha[$ und $p := \alpha + \frac{2-\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} + 1 \in]0; 2[$.
Dann gilt $\frac{p}{2}, \frac{q}{2} \in]0; 1[$ und

$$\frac{q}{2} + \frac{p}{2} = \frac{7}{8}\alpha + \frac{1}{4} > \alpha.$$

Es gilt für alle $t \in]0; \infty[$ und alle $\delta \in [0; 1]$

$$|e^{it} - 1| = 2|\sin t/2| \leq 2^{1-\delta} |t|^\delta.$$

Daraus und aus der Hölderungleichung folgt

$$\begin{aligned}
III(t) &= \mathbb{E} \left(\frac{|1 - e^{it(Y-Y_0)}| \cdot |1 - e^{itY_0}|}{t^\alpha} \right) \\
&\leq \mathbb{E} \left(\frac{2^{1-p/2} |t(Y-Y_0)|^{p/2} \cdot 2^{1-q/2} |tY_0|^{q/2}}{t^\alpha} \right) \\
&= 2^{2-p/2-q/2} |t|^{p/2+q/2-\alpha} \mathbb{E} \left(|Y-Y_0|^{p/2} |Y_0|^{q/2} \right) \\
&\leq 2^{2-p/2-q/2} |t|^{p/2+q/2-\alpha} (\mathbb{E}|Y-Y_0|^p)^{1/2} (\mathbb{E}|Y_0|^q)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Da $p < 2$ und $q < \alpha$ gilt $\mathbb{E}|Y - Y_0|^p < \infty$ und $\mathbb{E}|Y_0|^q < \infty$.

Es folgt $III(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Damit ist der Beweis erbracht, dass ϕ α -elementar ist. □

Charakterisierung der Lösungsmengen in Spezialfällen

In einigen Spezialfällen können wir die Lösungsmenge bestimmen und erweitern somit bekannte Resultate. Die Beweise ergeben sich zum einen aus der Darstellung der Fourier-Transformierten und zum anderen aus der Tatsache, dass R_∞ und $W^{(\alpha)}$ simultan stochastischen Fixpunktgleichungen gehorchen, man siehe Lemma 1.6.14 und Korollar 1.6.9.

Der erste Satz verallgemeinert u.a. das Theorem 4 in [16], indem wir bei (ii) nicht die Endlichkeit der Varianz fordern, sondern folgern können.

Satz 5.8.4. *Charakterisierung der Lösungsmenge, homogener Fall.*

Sei T eine endliche und L_1 -reguläre Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten $\alpha := \alpha_T \in]0; \infty[$.

(i) Falls $\alpha > 2$, so gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma(T, 0) = \{\delta_0\}.$$

(ii) Falls $\alpha = 2$, so gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma(T, 0) = \left\{ N_{0,c} \cdot (W^{(2)})^{1/2} \mid c \geq 0 \right\},$$

wobei $N_{0,c}$ eine Zufallsgröße ist, die eine Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz c besitzt, die unabhängig von $W^{(2)}$ ist.

Der nun folgende Satz erweitert das bekannte Resultat von Fill und Janson in [23] über die stochastische Fixpunktgleichung

$$Y \stackrel{d}{=} U \cdot Y_1 + (1 - U) \cdot Y_2 + f(U),$$

wobei Y, Y_1, Y_2 stochastisch unabhängige und identisch verteilte Zufallsgrößen sind, U eine Zufallsgröße ist mit einer Rechteckverteilung auf $[0; 1]$ so, dass U, Y_1, Y_2 stochastisch unabhängig sind. Außerdem ist $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto 2x \log x + 2(1-x) \log(1-x) + 1$. Man beachte, dass $E(f(U)) = 0$ und $E(f^2(U)) < \infty$ gilt.

Satz 5.8.5. *Charakterisierung der Lösungsmenge, inhomogener Fall, $\alpha = 1$.*

Sei T eine endliche, L_1 -reguläre und nicht-arithmetische Kantengewichtsfolge mit charakteristischem Exponenten 1 und $m(2) < 1$. Sei C ein zentrierter Tollterm.

Dann gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(Y_{c,d} \cdot W^{(1)} + R_\infty) \mid c \in [0; \infty[, d \in \mathbb{R} \right\},$$

wobei $Y_{c,d}$ eine Zufallsgröße mit Fourier-Transformierter $t \mapsto \exp(-|t|c + itd)$ ist so, dass $Y_{c,d}$ und $(W^{(1)}, R_\infty)$ stochastisch unabhängig sind.

Dies bedeutet $Y_{c,d}$ ist eine Cauchy verteilte Zufallsgröße zu den Parametern $c \geq 0$ und $d \in \mathbb{R}$.

Satz 5.8.6. *Charakterisierung der Lösungsmenge, inhomogener Fall, $\alpha \neq 1$.*

Sei T eine endliche, L_1 -reguläre und nicht-arithmetische Kantengewichtsfolge mit charakteristischen Exponenten $\alpha \in]0; \infty[$.

Es gelte $\sum_{k \in \mathbb{N}} T_k^\alpha \stackrel{f.s.}{=} 1$.

Ferner gelte entweder

$$m(1) < 1 \text{ und } \alpha \in]0; 1[\text{ und } C \text{ ist ein positiver Tollterm,}$$

oder

$$m(2) < 1 \text{ und } \alpha \in]0; 1[\cup]1; 2[\text{ und } C \text{ ist ein zentrierter Tollterm.}$$

Dann gilt

$$\mathbb{F}_\Sigma(T, C) = \left\{ \mathfrak{L}(Y_{c,b} + R_\infty) \mid c \in [0; \infty[, b \in [-1; 1] \right\},$$

wobei $Y_{c,b}$ eine Zufallsgröße mit Fourier-Transformierter $t \mapsto \exp(-c|t|^\alpha (1 + i \cdot \text{sgn}(t)b \tan(\pi\alpha/2)))$ ist so, dass $Y_{c,b}$ und R_∞ stochastisch unabhängig sind.

Dies bedeutet $Y_{c,b}$ ist eine strikt α -stabile Verteilung zu den Parametern c und b .

Beweis. Nur noch die Inklusion „ \subseteq “ bedarf einer Begründung.
Ist $\mu \in \mathbb{F}_\Sigma(T, C)$, so gibt es nach Korollar 5.2.2 genau ein $\mu_0 \in \mathbb{F}_\Sigma(T, 0)$ mit

$$\mu \in \begin{cases} \mathcal{M}_1(\mu_0) & , \text{ falls } m(1) < 1 \\ \mathcal{M}_2^0(\mu_0) & , \text{ falls } m(2) < 1. \end{cases}$$

Nach dem Darstellungssatz 5.8.1 gibt es dann Konstanten $c \geq 0$ und $d \in \mathbb{R}$ mit

$$\phi_{\mu_0}(t) = \mathbb{E} \left(\exp(-|t|^\alpha W^{(\alpha)}(c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d)) \right) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Da $\sum_{k \in \mathbb{N}} T_k^\alpha \stackrel{f.s.}{=} 1$, gilt $W^{(\alpha)} \stackrel{f.s.}{=} 1$.

Daraus folgt

$$\phi_{\mu_0}(t) = \exp(-|t|^\alpha (c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}. \quad (5.8.1)$$

Es gilt für alle $a > 0$

$$\phi_{\mu_0}(t)^a = \phi_{\mu_0}(ta^{1/\alpha}) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

D.h. μ_0 ist strikt α -stabil.

Daher gibt es Konstanten $c' \geq 0$ und $b \in [-1; 1]$ mit

$$\phi_{\mu_0}(t) = \exp(-c' |t|^\alpha (1 + i \cdot \operatorname{sgn}(t)b \tan(\pi\alpha/2))) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Also können wir folgern

$$\begin{aligned} c &= c' \\ d &= c' b \tan(\pi\alpha/2). \end{aligned}$$

Wie im Beweis des Satzes 5.8.2 bzw. 5.8.3 gesehen, ist dann ϕ_μ α -elementar mit dem Grenzwert $c + id$.

Ebenfalls mit den eben zitierten Sätzen erhält man

$$\begin{aligned} \phi_\mu(t) &= \mathbb{E}(\exp(itR_\infty) \exp(-|t|^\alpha (c + i \cdot \operatorname{sgn}(t)d))) \\ &= \mathbb{E}(\exp(itR_\infty) \exp(-|t|^\alpha c(1 + i \cdot \operatorname{sgn}(t)b \tan(\pi\alpha/2)))) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Daraus folgt $\mu = \mathcal{L}(Y_{c,b} + R_\infty)$. □

Anhang A.

Anhang

A.1. Landau-Symbole

Die Landau-Symbole sind praktische Abkürzungen für Grenzwertbetrachtungen, die wir an dieser Stelle für unsere Betrachtungen präzisieren.

Seien $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$.

Sei $x_0 \in [-\infty; \infty]$ und $U \subseteq [-\infty; \infty]$ eine Umgebung von x_0 . Außerdem sei $V \subseteq U$ eine Umgebung von x_0 so, dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in V$.

Dann definieren wir

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U \Leftrightarrow \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty.$$

$$f(x) = c \cdot o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Außerdem definieren wir

$$f(x) \sim c \cdot g(x) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V}} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Wir definieren die Summation eines „ \mathcal{O} -Term“ als

$$f(x) = h(x) + \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U \Leftrightarrow f(x) - h(x) = \mathcal{O}(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U.$$

Analog definieren wir

$$f(x) = h(x) + o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U \Leftrightarrow f(x) - h(x) = o(g(x)) \text{ für } x \rightarrow x_0; x \in U.$$

A.2. Integration komplexer Zufallsgrößen

Für eine Einführung in die Integration komplexer Zufallsgrößen, d.h. messbarer Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, verweisen wir auf das Kapitel V, Paragraph § 21 in [10].

An dieser Stelle wollen wir ein Analogon zum Satz über die dominierte Konvergenz für komplexe Zufallsgrößen vorstellen, den wir sonst nirgends in der Literatur gefunden haben.

Satz A.2.1. Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Zufallsgrößen mit Werten in \mathbb{C} und X eine Zufallsgröße mit Werten in \mathbb{C} . Weiterhin sei Y eine reelle Zufallsgröße, die integrierbar ist. Es gelte

$$(i) X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} X,$$

$$(ii) |\operatorname{Re}(X_n)| \leq Y \text{ und } |\operatorname{Im}(X_n)| \leq Y \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist X integrierbar und $E(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(X)$.

Beweis. Aus $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} X$ folgt $\operatorname{Re}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \operatorname{Re}(X)$ und $\operatorname{Im}(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f.s.} \operatorname{Im}(X)$. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz sind $|\operatorname{Im}(X)|$ und $|\operatorname{Re}(X)|$ integrierbar und es gilt $E(\operatorname{Re}(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(\operatorname{Re}(X))$ und $E(\operatorname{Im}(X_n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(\operatorname{Im}(X))$. Daraus ergibt sich die Integrierbarkeit von X und die Konvergenz $E(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E(X)$. \square

A.3. Der komplexe Logarithmus

In diesem Abschnitt stellen wir die von uns benötigten Resultate über die „komplexe Logarithmusfunktion“ zusammen. Wir orientieren uns dabei an dem Kapitel 5.4 in [38].

Wir definieren die „geschlitze“ komplexe Zahlenebene als $\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq 0, \operatorname{Im}(z) = 0\}$. Weiterhin sei für alle $z \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ der offene Ball um z mit Radius r definiert als $B(z, r) := \{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < r\}$.

Im folgendem sei $\log : \mathbb{C}^- \rightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus, d.h. es gilt für alle $z = |z| e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^-$

$$\log z = \log_{\mathbb{R}} |z| + i\varphi.$$

Dabei ist $\log_{\mathbb{R}}$ die Logarithmusfunktion auf $[0; \infty[$.

Es gelten dann folgende Rechenregeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z), \operatorname{Re}(w) > 0$:

$$\begin{aligned} \exp(\log z) &= z, \\ \log(zw) &= \log w + \log z. \end{aligned}$$

Für den Hauptzweig der Logarithmusfunktion gilt die Reihendarstellung für alle $z \in B(0, 1)$

$$\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$$

Also gilt für alle $z \in B(0, 1/2)$

$$|\log(1 + z) - z| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} = \frac{|z|^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n} \leq \frac{|z|^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = |z|^2.$$

Also gibt es eine Funktion $\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $|\theta(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \overline{B}(0, 1/2)$ so, dass für alle $w \in \mathbb{B}(0, 1)$ gilt

$$\log w = 1 - w + (1 - w) \cdot \theta(1 - w).$$

A.4. Zufällige Mengen

In diesem Abschnitt definieren wir, was wir unter dem Begriff „zufällige Menge“ verstehen. Dazu wird eine geeignete σ -Algebra auf der Potenzmenge von \mathbb{V} definiert.

Wir identifizieren $\operatorname{Pot}(\mathbb{V})$ mit dem Raum der Abbildungen $\{0, 1\}^{\mathbb{V}}$ via der Bijektion

$$\iota : \operatorname{Pot}(\mathbb{V}) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{V}}; M \mapsto (\mathbb{1}_M(v))_{v \in \mathbb{V}}$$

Für alle $u \in \mathbb{V}$ sei die u -te Projektionsabbildung gegeben durch

$$p_u : \{0, 1\}^{\mathbb{V}} \rightarrow \{0, 1\}; (x_v)_{v \in \mathbb{V}} \mapsto x_u.$$

Wir staten den Raum $\{0, 1\}^{\mathbb{V}}$ mit der Produkt- σ -Algebra aus

$$\mathfrak{M} := \sigma(p_v; v \in \mathbb{V})$$

und setzen

$$\mathfrak{P} := \{\iota^{-1}(A) \mid A \in \mathfrak{M}\}.$$

Dann ist \mathfrak{P} eine σ -Algebra.

Wir bezeichnen jede \mathfrak{A} - \mathfrak{P} -messbare Abbildung $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{V})$ als eine zufällige Menge.

Die σ -Algebra \mathfrak{P} ist abzählbar erzeugt, da $\mathfrak{P} = \sigma(\iota^{-1}(p_v^{-1}(A)); A \subseteq \text{Pot}(\{0, 1\}), v \in \mathbb{V})$ gilt.

Lemma A.4.1. *Sei $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \text{Pot}(\mathbb{V})$. Dann sind äquivalent*

(i) \mathcal{X} ist zufällige Menge,

(ii) für alle $v \in \mathbb{V}$ gilt $\{v \in \mathcal{X}\} := \{\omega \in \Omega \mid v \in \mathcal{X}(\omega)\} \in \mathfrak{A}$.

Beweis. „(i) \Rightarrow (ii)“:

Sei $v \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\{v \in \mathcal{X}\} = \{\omega \in \Omega \mid \mathcal{X}(\omega) \in \iota^{-1}(p_v^{-1}(\{1\}))\} \in \mathfrak{A}.$$

„(ii) \Rightarrow (i)“:

Es reicht $\{\mathcal{X} \in \iota^{-1}(p_v^{-1}(\{k\}))\} \in \mathfrak{A}$ für alle $k \in \{0, 1\}$ und $v \in \mathbb{V}$ zu zeigen. Wegen (ii) gilt $\{\mathcal{X} \in \iota^{-1}(p_v^{-1}(\{1\}))\} = \{v \in \mathcal{X}\} \in \mathfrak{A}$ und daher auch $\{\mathcal{X} \in \iota^{-1}(p_v^{-1}(\{0\}))\} = \{v \notin \mathcal{X}\} \in \mathfrak{A}$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] D.J. Aldous and A. Bandyopadhyay. A survey of max-type recursive distributional equations. *Annals of Applied Probability*, 15(2):1047–1110, 2005.
- [2] G. Alsmeyer. *Erneuerungstheorie*. Teubner Skripten zur Mathematischen Stochastik, 1991.
- [3] G. Alsmeyer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Universität Münster (Skripten zur Mathematischen Statistik Nr.30), 2003.
- [4] G. Alsmeyer, J.D. Biggins, and M. Meiners. The functional equation of the smoothing transform. *Technischer Report, Angewandte Mathematik, FB 10, Univ. Münster*, 2010.
- [5] G. Alsmeyer and M.A. Iksanov. A log-type moment result for perpetuities and its application to martingals in supercritical branching random walks. *Electronic Journal of Probability*, 14:289–313, 2009.
- [6] G. Alsmeyer and M. Meiners. On a min-type stochastic fixed-point equation related to the smoothing transformation. *Theory of Stochastic Processes*, 15:to appear, 2009.
- [7] G. Alsmeyer and U. Rösler. A stochastic fixed point equation related to weighted branching with deterministic weights. *Electronic Journal of Probability*, 11:27–56, 2006.
- [8] G. Alsmeyer and U. Rösler. A stochastic fixed point equation related to weighted minima and maxima. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, 44(1):89–103, 2008.
- [9] H. Bauer. *Markoffsche Prozesse*. Universität Hamburg, 1963.
- [10] H. Bauer. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Walter de Gruyter, 2002.
- [11] J.D. Biggins. Martingale convergence in the branching random walk. *Journal of Applied Probability*, 14(1):25–37, 1977.
- [12] J.D. Biggins. Lindley-type equations in the branching random walk. *Stochastic Processes and their Applications*, 75:105–133, 1998.
- [13] J.D. Biggins and A.E. Kyprianou. Measure change in multitype branching. *Advances in Applied Probability*, 2:544–581, 2004.
- [14] A. Caliebe. Symmetric fixed points of a smoothing transformation. *Advances in Applied Probability*, 35(2):377–394, 2003.
- [15] A. Caliebe. Representation of fixed points of a smoothing transformation. In M. Drmota, P. Flajolet, D. Gardy, and B. Gittenberger, editors, *Mathematics and Computer Science III*, Trends in Mathematics, pages 311–324. Birkhäuser Verlag Basel, 2004.
- [16] A. Caliebe and U. Rösler. Fixed points with finite variance of a smoothing transformation. *Stochastic processes and their applications*, 107(1):105–129, 2003.
- [17] A. Caliebe and U. Rösler. Fixed points of the smoothing transformation with finite expectation: closing a gap. 2004.
- [18] Y.S. Chow and H. Teicher. *Probability Theory. Independence, Interchangeability, Martingals*. Springer Verlag, third edition, 2003.

- [19] L. Davis and R. Shimizu. General characterization theorems for the weibull and the stable distributions. *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 43:282–310, 1981.
- [20] R. Durrett and T.M. Liggett. Fixed points of the smoothing transformation. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandete Gebiete*, 64:275–301, 1983.
- [21] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2004.
- [22] W. Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, volume II. John Wiley & Sons, second edition, 1971.
- [23] J.A. Fill and S. Janson. A characterization of the set of fixed points of the quicksort transformation. *Electronic Journal of Probability*, 5(9):77–84, 2000.
- [24] D. Gatzouras. On the lattice case of an almost-sure renewal theorem for branching random walks. *Advances in Applied Probability*, 32:720–737, 2000.
- [25] B.W. Gnedenko and A.N. Kolmogorov. *Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen*. Akademie-Verlag Berlin, 1959.
- [26] M.A. Iksanov. Elementary fixed points of the brw smoothing transforms with infinite number of summands. *Stochastic Processes and their Applications*, 114:27–50, 2004.
- [27] M.A. Iksanov. Elementary fixed points of min-transformation. *Preprint*, 2008.
- [28] P. Jagers and U. Rösler. Stochastic fixed points for the maximum. In M. Drmota, P. Flajolet, D. Gardy, and B. Gittenberger, editors, *Mathematics and Computer Science III*, Trends in Mathematics, pages 325–338. Birkhäuser Verlag Basel, 2004.
- [29] O. Kallenberg. *Foundations of Modern Probability*. Springer Verlag, second edition, 2002.
- [30] T. Kawata. *Fourier Analysis in Probability Theory*. Academic Press, 1972.
- [31] A. Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Springer-Verlag, 2006.
- [32] Q. Liu. Fixed points of a generalized smoothing transformation and applications to the branching random walk. *Advances in Applied Probability*, 30(1):85–112, 1998.
- [33] R. Lyons. A simple path to biggins’ martingale convergence for branching random walk. In P. Jagers K.B. Athreya, editor, *Classical and Modern Branching Processes*, volume 84 of *IMA Volumes in Mathematics and its Applications*, pages 217–221. Springer, 1997.
- [34] R. Neininger and L. Rüschenhoff. Analysis of algorithms by the contraction method: additive and max-recursive sequences. In *Interacting Stochastic Systems*, pages 435–450. Springer, 2005.
- [35] O. Nerman. On the convergence of supercritical general (c-m-j) branching processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete*, 57:365–395, 1981.
- [36] S.T. Rachev and L. Rüschenhoff. Probability metrics and recursive algorithms. *Advances in Applied Probability*, 27(3):770–799, 1995.
- [37] B. Ramachandran and K.S. Lau. *Functional Equations in Probability Theory*. Academic Press, 1991.
- [38] R. Remmert and G. Schumacher. *Funktionentheorie 1*. Springer Verlag, 2002.
- [39] U. Rösler. A fixed point theorem for distributions. *Stochastic Processes and their applications*, 42:195–214, 1992.
- [40] U. Rösler. On the analysis of stochastic divide and conquer algorithms. *Algorithmica*, 29:238–261, 2001.

- [41] U. Rösler. *Der gewichtete Verzweigungsprozess*. Vorlesungsskript, 2007.
- [42] L. Rüschendorf. On stochastic recursive equations of sum- and max-type. *Journal of applied probability*, 43(3):687–703, 2006.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name: Jan Spitzmann

Geburtsdatum: 22. Mai 1979

Geburtsort: Berlin

Schulbildung

08.1990-06.1999: Max-Planck-Schule Kiel

26.06.1999: Allgemeine Hochschulreife

Zivildienst

07.1999-07.2000: Altenheim Wilhelm-Lorenz-Haus, Schulensee.

Studium

10.2000-04.2006: Studium der Mathematik an der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel,
Nebenfach Informatik

18.04.2006: Diplom in Mathematik

seit Mai 2006: Studium der Mathematik an der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
mit dem Ziel der Promotion

Eidesstattliche Erklärung:

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von der Beratung durch meinen akademischen Lehrer, in Inhalt und Form selbst angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Diese Arbeit ist bisher weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht worden und hat weder ganz noch zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Des weiteren versichere ich, dass die Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden ist.

Kiel, den 5. Mai 2010