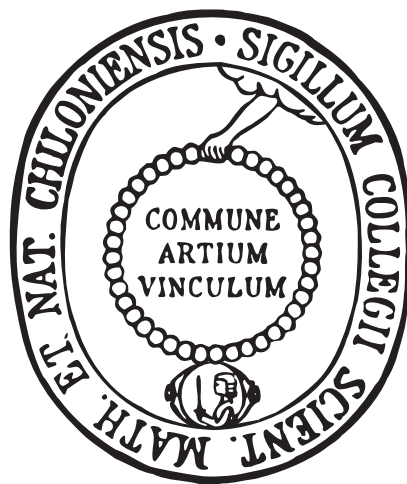


# Teilräume von $L_1$ und kombinatorische Ungleichungen in der Banachraumtheorie



Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität  
zu Kiel

vorgelegt von

Joscha Prochno

Kiel 2011



Referent: PD Dr. Carsten Schütt  
Koreferent: Prof. Dr. Hermann König  
Tag der mündlichen Prüfung: 24.06.2011  
Zum Druck genehmigt: Kiel, 24.06.2011

Der Dekan



## Danksagung

Mein Dank gilt zunächst Carsten Schütt für die interessante Wahl des Themas, die hervorragende Betreuung dieser Arbeit und die vielen wegweisenden Diskussionen.

Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. König für die hilfreichen Anmerkungen bedanken und vorallem dafür, dass er sich immer die Zeit genommen hat auf Fragen und Probleme einzugehen.

Außerdem möchte ich mich bei meinen Kollegen Sören Christensen, Stiene Riemer und Michael Saß für ihre Hilfe bei der Revision dieser Arbeit bedanken.

Ich danke meinen Eltern Gisela Eickhoff-Prochno und Karl Heinz Prochno für ihre Unterstützung in den vergangenen Jahren und dafür, dass sie immer an mich geglaubt haben.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Freundin Doris Orthaber für ihre Geduld, ihre enorme Unterstützung in den Momenten der Frustration und für ihren Glauben an mich bedanken.



## Zusammenfassung

In dieser Arbeit erweitern wir einige Techniken im Zusammenhang mit kombinatorischen Ungleichungen, die von Stanislaw Kwapien und Carsten Schütt in **[K-S 1]** eingeführt wurden. Wir nutzen diese, um endlich-dimensionale symmetrische Teilräume von  $L_1$  zu studieren. Speziell betrachten wir dazu den Ausdruck

$$(0.1) \quad \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2},$$

wobei wir zeigen, dass (0.1) äquivalent zu einem Mittel von Orlicz-Räumen ist. Die richtige Wahl der Vektoren  $c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n$  liefert die Äquivalenz von (0.1) zur Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  bzw.  $\|\cdot\|_{d^n(a,p)}$ . Unser Zugang ermöglicht es uns, die direkte Einbettung der Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$  und  $d^n(a,p)$  nach  $L_1$  anzugeben und liefert eine explizite Darstellung der Lorentz-Räume als ein Mittel von 2-konkaven Orlicz-Räumen.

Im zweiten Teil der vorliegenden Arbeit studieren wir kombinatorische Ungleichungen, die von Kwapien und Schütt in **[K-S 2]** bewiesen wurden und geben in einigen speziellen Fällen sehr einfache und explizite äquivalente Ausdrücke an, d.h. wir zeigen, dass

$$\frac{1}{C} \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p$$

für die richtige Wahl von  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gilt. Danach erweitern wir dieses Resultat auf den Fall, dass eine der Normen eine Orlicz-Norm ist, wobei wir zwei sehr verschiedene Beweistechniken verwenden.

Wir erweitern dann einige Resultate aus **[K-S 1]** auf den allgemeineren Fall von Musielak-Orlicz-Räumen. Wir zeigen, dass für alle Matrizen  $y \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\frac{1}{C} \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \leq C \|x\|_{\Sigma M_i^*}$$

gilt, wobei  $\|\cdot\|_{\Sigma M_i^*}$  die Musielak-Orlicz-Norm bezeichnet.

Im letzten Teil dieser Arbeit betrachten wir Orlicz-Lorentz-Räume  $l_{M,a}^n$  und erweitern (0.1) um ein weiteres Mittel über Permutationen, d.h. wir arbeiten mit dem Ausdruck

$$(0.2) \quad \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Wir können nicht die direkte Einbettung von  $l_{M,a}^n$  nach  $L_1$  oder die explizite Darstellung von  $l_{M,a}^n$  als Mittel von Orlicz-Räumen angeben, aber wir können zeigen, dass unser Zugang etwas liefert, was äquivalent zum Fall der Lorentz-Räume ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & C \left\{ \|x\|_{M_d,a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_k^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\} \\ & \leq \text{Ave}_{\pi,\sigma,\eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_p \left\{ \|x\|_{M_d,a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_k^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\}, \end{aligned}$$

unter einer geeigneten Bedingung an die Folge der  $a_k$ 's. Wir beenden die vorliegende Arbeit mit einer Vermutung über die Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen  $l_{M,a}^n$  nach  $L_1$ , d.h.

$$C \|x\|_{M_d,a} \leq \text{Ave}_{\pi,\sigma,\eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq C_p \|x\|_{M_d,a},$$

unter geeigneten Bedingungen an die Folge der  $a_k$ 's. Weil (0.2) äquivalent zu einem 1-Mittel von 2-konkaven Orlicz-Normen ist und der  $\mathbb{R}^n$  mit der Norm (0.2)  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist, würde dies die Einbettung und das Mittel für  $l_{M,a}^n$  direkt liefern.



## Abstract

In this thesis we extend some techniques introduced by Stanislaw Kwapien and Carsten Schütt in [K-S 1] about combinatorial inequalities. We use them to study finite-dimensional symmetric subspaces of  $L_1$ . In particular we work with the expression

$$(0.3) \quad \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2},$$

where we show that (0.3) is equivalent to an average of Orlicz spaces. For the right choice of vectors  $c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n$  we get equivalence of (0.3) to the Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  and  $\|\cdot\|_{d^n(a,p)}$  respectively. Our approach allows us to give the direct embedding of the Lorentz spaces  $l_{q,p}^n$  and  $d^n(a,p)$  into  $L_1$  and gives an explicit representation of the Lorentz spaces as averages of 2-concave Orlicz spaces.

In the next part of this thesis we study combinatorial inequalities proved by Kwapien and Schütt in [K-S 2] and give very simple and explicit equivalent expressions for some special cases, i.e. we show that

$$\frac{1}{C} \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p$$

for the right choice of  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Then we extend this result to the case where one of the norms is an Orlicz norm. We do this by using two different techniques.

Afterwards we extend some results from [K-S 1] to the more general setting of Musielak-Orlicz spaces. We show that for all matrices  $y \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\frac{1}{C} \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \leq C \|x\|_{\Sigma M_i^*},$$

where  $\|\cdot\|_{\Sigma M_i^*}$  denotes the Musielak-Orlicz norm.

In the last part we consider Orlicz-Lorentz spaces  $l_{M,a}^n$  and extend (0.3) by another average of permutations, i.e. we look at the expression

$$(0.4) \quad \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2}.$$

We are not able to give the direct embedding of  $l_{M,a}^n$  into  $L_1$  or write  $l_{M,a}^n$  as an average of Orlicz spaces but we can show that our approach gives us something quite similar to the

case of Lorentz spaces. We get

$$\begin{aligned}
& C \left\{ \|x\|_{M_{d,a}} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_k^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\} \\
& \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \\
& \leq C_p \left\{ \|x\|_{M_{d,a}} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_k^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\},
\end{aligned}$$

under some condition on the sequence  $a$ . We finish this thesis with a conjecture about the embedding of Orlicz-Lorentz spaces  $l_{M,a}^n$  into  $L_1$ , i.e.

$$C \|x\|_{M_{d,a}} \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq C_p \|x\|_{M_{d,a}},$$

under some conditions on  $a$ . Since (0.4) is equivalent to an average of 2-concave Orlicz norms and  $\mathbb{R}^n$  equipped with the norm (0.2) is  $C$ -isomorphic to a subspace of  $L_1$ , this would give the embedding and the average for  $l_{M,a}^n$ .

---

## Inhaltsverzeichnis

---

Kapitel 1.	Einleitung	6
Kapitel 2.	Präliminarien	13
2.1.	Grundlagen	14
2.2.	Grundlegende Sätze und kombinatorische Ungleichungen	22
Kapitel 3.	Der Raum $l_{q,p}^n$ als 1-Mittel von Orlicz-Räumen und seine direkte Einbettung nach $L_1$	34
Kapitel 4.	Der Raum $d^n(a, p)$ als 1-Mittel von Orlicz-Räumen und seine direkte Einbettung nach $L_1$	51
Kapitel 5.	Kombinatorische Ungleichungen in der Banachraumtheorie	58
Kapitel 6.	Kombinatorische Ungleichungen aus dem Satz von Kwapien und Schütt	71
Kapitel 7.	Eine neue Klasse verallgemeinerter $L_p$ -Räume	83
7.1.	Musielak-Orlicz-Räume und Musielak-Orlicz-Lorentz-Räume	83
7.2.	Erzeugung von Musielak-Orlicz-Räumen durch Mittel über Permutationen	86
Kapitel 8.	Eine Vermutung über die Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen nach $L_1$	93

# Kapitel 1

---

## Einleitung

---

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit kombinatorischen Ungleichungen in der Banachraumtheorie und mit Teilräumen von  $L_1$ . Die Klasse von Teilräumen von  $L_1$  ist sehr groß. Betrachtet man die Räume der Menge  $\{l_p | 1 \leq p < \infty\}$ , so sind diese nach dem Satz von Pitt paarweise nicht-isomorph, d.h. für je zwei Räume  $l_p$  und  $l_q$ ,  $p \neq q$ , ist der Banach-Mazur Abstand  $d(l_p, l_q)$  unendlich groß. Im Fall der endlich-dimensionalen Räume  $\{l_p^n | 1 \leq p < \infty\}$  gilt  $d(l_p^n, l_q^n) = n^{1/p-1/q}$  für  $1 \leq p \leq q \leq 2$  oder  $2 \leq p \leq q < \infty$ . Diese endlich-dimensionalen und unendlich-dimensionalen Räume unterscheiden sich also jeweils geometrisch. Zunächst scheint dies offensichtlich zu sein, da die Räume verschieden aussehen, allerdings gilt dies auch für  $l_2$  und  $L_2[0, 1]$ , wobei es sich hier aber um den selben Raum in unterschiedlicher Gestalt handelt. Man kann mit Hilfe  $q$ -stabiler Verteilungen relativ leicht zeigen, dass für  $1 \leq q \leq 2$  der Raum  $l_q$  nach  $L_1$  einbettet, wir also eine Vielfachheit an unterschiedlichen Teilräumen von  $L_1$  haben. Allgemeiner lässt sich zeigen, dass für  $1 \leq q \leq 2$  der Raum  $l_q$  nach  $L_p$  einbettet genau dann, wenn  $p \leq q \leq 2$  ist. Die Vielfachheit an unterschiedlichen Teilräumen von  $L_p$  in der Menge  $\{l_q | 1 \leq q < \infty\}$  ändert sich drastisch, wenn  $2 < p < \infty$  ist. In diesem Fall bettet  $l_q$  nach  $L_p$  ein genau dann, wenn  $q = 2$  oder  $q = p$  gilt. Dies zeigt einen fundamentalen Unterschied der Fälle  $1 \leq p \leq 2$  und  $2 < p < \infty$  auf. Ein weiteres Beispiel von Teilräumen bilden die Matrix Teilräume  $l_r^n(l_p^n)$  von  $L_1$ . Für  $1 \leq p < r \leq 2$  kann man zeigen, dass für einen  $n^2$ -dimensionalen Teilraum  $X$

von  $L_1$  der Banach-Mazur Abstand von  $X$  zu  $l_r^n(l_p^n)$  größer oder gleich  $\frac{1}{5\sqrt{2}} n^{1/p-1/r}$  ist. Die Räume  $l_p^n(l_r^n)$  betten hingegen wieder nach  $L_1$  ein.

Lenkt man nun sein Augenmerk auf eine etwas speziellere Klasse von Teilräumen, nämlich die mit einer symmetrischen Basis oder auf die, die isomorph zu einem anordnungs-invarianten Funktionenraum sind, so stellt man fest, dass auch diese sehr groß ist. Dies wirft die Frage nach einer genaueren Charakterisierung der Teilräume von  $L_1$  auf. Die dabei im Laufe der Jahre entstandenen Methoden und Beschreibungen sind vielfältig und liefern Charakterisierungen, deren Kern geometrischer Natur oder auch abstrakter probabilistischer Natur ist. Eine Charakterisierung geht auf E.D. Bolker zurück, wonach ein endlich-dimensionaler Banachraum  $X$  genau dann ein Teilraum von  $L_1$  ist, wenn dessen abgeschlossene Einheitskugel  $B_X$  der polare Körper eines Zonoide ist. Hierbei ist ein Zonoide im  $\mathbb{R}^n$  ein konvexer Körper, der durch endliche Summen von Liniensegmenten in der Hausdorff-Metrik approximiert werden kann. Bolker stellte in [Bol1] und später nochmal in [Bol2] die Vermutung auf, dass die einzigen Zonoide im  $\mathbb{R}^n$ , deren polare Körper wieder Zonoide sind, Ellipsoide sind. Dies würde äquivalent bedeuten, dass der Raum  $l_2^n$  der einzige  $n$ -dimensionale Banachraum ist, der isometrisch zu einem Teilraum von  $L_1$  ist. In [Schn] gab Rolf Schneider eine negative Antwort auf diese Vermutung, in dem er zeigte, dass nicht-ellipsoide zentralsymmetrische konvexe Körper im  $\mathbb{R}^n$  existieren, die wie ihre polaren Körper Zonoide sind.

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, dass wir uns in dieser Arbeit nicht für isometrische, sondern für isomorphe Einbettungen interessieren, bei denen wir einen beschränkten, von der Dimension des Raumes unabhängigen, Banach-Mazur Abstand zulassen.

Fast zur selben Zeit wie Bolker gaben die französischen Mathematiker Jean Bretagnolle und Didier Dacunha-Castelle 1967 eine auf probabilistischen Methoden beruhende Charakterisierung für symmetrische bzw anordnungs-invariante Teilräume von  $L_1$  an. Es wurde zunächst bewiesen, dass es sich bei diesen Teilräumen tatsächlich nur um Orlicz-Räume handelt. Die beiden zeigten in [BrDa2], dass jeder anordnungs-invariante Banachraum  $X$ , der isometrisch isomorph nach  $L_1$  einbettet, ein Orlicz-Raum  $L_M$  ist, dessen Orlicz-Funktion  $M$  von negativem Typ ist. Leider unterlief den Autoren ein Fehler in ihrem Beweis, wie D. Dacunha-Castelle 1974 in [Dacu] zeigte, in dem er Beispiele für symmetrische Teilräume von  $L_1$  angab, die keine Orlicz-Räume sind. Diese Beispiele sind jedoch von probabilistischer und sehr abstrakter Natur. In der gleichen Arbeit konnte er aber zeigen, dass jeder unendlich-dimensionale Teilraum von  $L_1$  mit einer symmetrischen Basis isomorph zu einem Mittel von Orlicz-Folgenräumen ist. Die Argumente in [Dacu] scheinen von rein

unendlich-dimensionaler Natur zu sein und die endlich-dimensionale Version konnte daraus nicht abgeleitet werden. Er nutzt einen Ultraprodukt-Ansatz um das Problem auf den Fall austauschbarer Zufallsvariablen zu reduzieren, welches sich nach dem Satz von Finetti wiederum auf den Fall unabhängig identisch verteilter Zufallsvariablen reduzieren lässt. 1985 gaben Stanislaw Kwapien und Carsten Schütt schließlich in **[K-S 1]** eine Charakterisierung der endlich-dimensionalen symmetrischen Teilräume von  $L_1$  an, in dem sie die Größenordnung kombinatorischer Ausdrücke für Matrizen studierten. In **[RaSch]** erweiterten Yves Raynaud und Carsten Schütt das Resultat von D. Dacunha-Castelle auf den allgemeineren Fall anordnungs-invarianter Funktionenräume. Die dort verwendeten Methoden sind von endlich-dimensionaler Natur und unterscheiden sich vollständig von denen von D. Dacunha-Castelle, da die betrachteten Zufallsvariablen diskret sind und nicht unabhängig.

Im Jahre 1989 gab C. Schütt in **[Sch2]** dann einfache Beispiele für symmetrische Teilräume von  $L_1$  an, die keine Orlicz-Räume sind und die auf natürliche Weise in der Funktionalanalysis und Interpolationstheorie auftauchen, nämlich Lorentz-Räume. Er konnte in dieser Arbeit eine Charakterisierung der Lorentz-Räume angeben, die nach  $L_p$  einbetten. Speziell zeigte er, dass die Räume  $L_{p,q}$  genau dann nach  $L_1$  einbetten, wenn  $1 \leq q \leq p < 2$  oder  $p = q = 2$  ist. In der Arbeit **[K-S 2]** von S. Kwapien und C. Schütt wird nochmal gezeigt, dass  $l_{p,q}$  für  $1 \leq p \leq 2$  und  $p < q$  nicht nach  $L_1$  einbettet.

Wir beschreiben im Folgenden die einzelnen Kapitel und Resultate dieser Arbeit.

In Kapitel zwei werden wir die grundlegenden Begriffe und Aussagen, die wir in dieser Arbeit verwenden und auf denen wir aufbauen, anführen. Zunächst verallgemeinern wir die bekannten  $l_p$  Räume und beginnen mit der Einführung von Orlicz-Räumen und der Beschreibung einiger ihrer Eigenschaften. Danach führen wir eine weitere Klasse verallgemeinerter  $l_p$  Räume ein, die Lorentz-Räume. Sowohl Orlicz-Räume, als auch Lorentz-Räume sind Banachräume, die eine symmetrische Basis besitzen. Solche Räume bilden den zentralen Punkt dieser Arbeit. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels führen wir die wichtigsten Aussagen und Sätze, die uns als Grundlage für diese Arbeit dienen, an. Es handelt sich hier in großen Teilen um Resultate aus den Arbeiten **[K-S 1]**, **[K-S 2]** und **[Sch1]**, in denen unter anderem gezeigt wurde, wie über Mittel über Permutationen Orlicz-Normen erzeugt werden und wie mit Hilfe dessen Teilräume von  $L_1$  charakterisiert werden können. Die vielleicht entscheidendsten Sätze für die vorliegende Arbeit beschreiben wir genauer. Ausgangspunkt ist Satz 2.23 aus **[Sch1]**, in dem gezeigt wird, dass zu vorgegebenem Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$  eine Orlicz-Funktion  $M_a$  existiert, die einer gewissen Bedingung genügt und für

die der Ausdruck

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2}$$

äquivalent zur Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_{M_a}$  ist. Satz 2.22 aus [Sch1] kann als eine Art Umkehrung angesehen werden. Er besagt, wie bei vorgegebener Orlicz-Funktion  $M$  der Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$  gewählt werden muss, so dass

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2}$$

äquivalent zur Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_M$  ist. Diese Sätze, zusammen mit einigen kombinatorischen Ungleichung aus [K-S 1], [K-S 2] und [Sch2], ermöglichen die Charakterisierung symmetrischer Teilräume von  $L_1$ .

Im dritten Kapitel der vorliegenden Arbeit zeigen wir in Satz 3.1, dass die Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$ , ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen und Teilräume von  $L_1$  sind, wobei wir im Gegensatz zu [Sch2] nicht den Umweg über  $L_p$  gehen, sondern in Satz 3.2 eine direkte Einbettung nach  $L_1$  angeben. Entscheidend dafür ist die Erweiterung einiger Ideen und Techniken aus [K-S 1], [K-S 2] und [Sch2]. An Stelle eines einfachen Mittels über Permutationen betrachten wir ein Doppelmittel über Permutationen, nämlich

$$\text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2}.$$

Für die Einbettung der Lorentz-Räume nach  $L_1$  kommt es nachher auf die geschickte Wahl der Vektoren  $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{R}^n$  und  $d \in \mathbb{R}^n$  an. Zunächst zeigen wir in Lemma 3.3, dass unser Doppelmittel über Permutationen  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist. In Lemma 3.4 beweisen wir dann die Äquivalenz des Doppelmittels zu einem 1-Mittel von Orlicz-Räumen. Die Schwierigkeit besteht jetzt nur noch darin, die Vektoren  $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{R}^n$  und  $d \in \mathbb{R}^n$  geschickt zu wählen und das Doppelmittel gegen die Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  abzuschätzen. Nach geeigneter Wahl folgt man der Beweisidee aus [Sch2] und erhält die Aussage von Satz 3.1. Das Neue bei der Darstellung der Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  als ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen ist die konstruktive Natur unseres Zugangs, der uns eine explizite Darstellung der Vektoren liefert, die die gemittelten Orlicz-Normen in der Darstellung von  $\|\cdot\|_{q,p}$  als 1-Mittel von Orlicz-Normen erzeugen. Insbesondere ist damit die Darstellung der Lorentz-Norm als

Mittel explizit gegeben.

In Kapitel 4 beweisen wir in Satz 4.1, dass auch die Lorentz-Räume  $d^n(a, p)$  nach  $L_1$  einbetten und ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen sind. Hiefür sind allerdings Bedingungen an den Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$  notwendig. Diese Bedingungen sind im Spezialfall der Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$  automatisch erfüllt, weshalb sie im vorherigen Kapitel nicht auftauchen. Die entscheidenden Punkte sind wieder die geschickte Wahl der Parameter  $c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n$  und die schon in Kapitel 3 bewiesenen Aussagen über das Doppelmittel. Wir nutzen erneut die Beweisidee aus [Sch2] und erhalten Satz 4.1. In Satz 4.2 geben wir analog zu Satz 3.2 die direkte Einbettung nach  $L_1$  an. Das Neue bei der Darstellung der Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{d^n(a,p)}$  als ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen ist wieder die explizite Darstellung der Orlicz-Norm erzeugenden Vektoren und damit auch die explizite Darstellung von  $d^n(a, p)$  als 1-Mittel von Orlicz-Räumen.

Im fünften Kapitel dieser Arbeit beschäftigen wir uns ausführlicher mit kombinatorischen Ungleichungen in der Banachraumtheorie. In ihrer Arbeit [K-S 2] beschäftigten sich S. Kwapien und C. Schütt unter anderem mit Ausdrücken der Form

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}|,$$

für eine reelle  $n \times n$ -Matrix  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  und Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Wir werden diesen Ausdruck für spezielle vorgegebene Vektoren  $x$  und  $y$  studieren und eine explizitere Darstellung als in [K-S 2] erreichen. Die Methode unterscheidet sich von der aus [K-S 2] und ist von einfacherer Natur. In Korollar (5.7) zeigen wir, dass für geeignete Wahl der Vektoren  $x$  und  $y$  absolute Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  existieren, so dass

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p$$

gilt. In Satz 5.8 verallgemeinern wir diese Aussage dann noch für Tensoren 3-ter Stufe, wobei sich die Aussage analog für Tensoren  $k$ -ter Stufe zeigen lässt. In Satz 5.14 wollen wir die natürliche Frage nach einer Verallgemeinerung von Korollar 5.7 beantworten. Unter gewissen Voraussetzungen an eine Orlicz-Funktion  $M$  und bei entsprechend vorgegebenen Vektoren  $x$  und  $y$  werden wir in Satz 5.14 beweisen, dass

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_M \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_M \right)_{j=1}^n \right\|_p$$



gilt. Leider lässt sich dieses Resultat mit Hilfe des hier verwendeten Zugangs nicht weiter verallgemeinern. Den Beweis dafür, dass unter Bedingungen an eine Orlicz-Funktion  $M$  und geeigneter Wahl der Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_p \right)_{j=1}^n \right\|_M \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_p \right)_{j=1}^n \right\|_M$$

gilt, können wir mit der Methode nicht führen. Im nächsten Kapitel allerdings wählen wir einen anderen Zugang, welcher einen Beweis dieser Aussage ermöglicht.

Im Kapitel 6 der vorliegenden Arbeit greifen wir die Aussage aus Korollar 5.7 wieder auf und stellen eine aufwendigere und kompliziertere Beweismethode basierend auf dem Satz von Kwapien und Schütt (Satz 5.1) vor, die es uns dann in Satz 6.6 ermöglicht, zu zeigen, dass unter geeigneten Voraussetzungen an eine Orlicz-Funktion  $M$  und entsprechend gewählte Vektoren  $x$  und  $y$  Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  existieren, so dass

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_p \right)_{j=1}^n \right\|_M \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_p \right)_{j=1}^n \right\|_M$$

gilt. Die hier verwendete Methode unterscheidet sich erheblich von der aus Kapitel 5. Einen Beweis für Satz 5.14 können wir mit diesem Zugang aber nicht führen. Es scheint so, als seien die beiden Strategien in gewissem Sinne nicht kompatibel, denn eine verallgemeinernde Aussage der Form

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_M \right)_{j=1}^n \right\|_N \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_M \right)_{j=1}^n \right\|_N$$

mit geeignet gewählten Vektoren  $x, y$  und Orlicz-Funktionen  $N$  und  $M$  können wir mit Hilfe der Resultate aus Kapitel 5 und 6 nicht beweisen.

Im siebten Kapitel verallgemeinern wir die Klasse der Orlicz- und der Lorentz-Räume. Eine bekannte Verallgemeinerung der Orlicz-Räume ist die der Musielak-Orlicz-Räume, die wir mit  $l_{\sum M_i}$  bezeichnen, und bei der in der Definition der Norm in jeder Komponente eine andere Orlicz-Funktion  $M_i$  betrachtet wird. Diese Räume teilen einige Eigenschaften mit den klassischen Orlicz-Räumen, wie wir zeigen werden. Im Anschluss definieren wir dann eine Klasse von Räumen, die sowohl Musielak-Orlicz-Räume, als auch Lorentz-Räume verallgemeinert und miteinander verschmelzen lässt, und die wir Musielak-Orlicz-Lorentz-Räume nennen.

Im zweiten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Erzeugung von Musielak-Orlicz-Räumen

und zeigen in Satz 7.8, in Anlehnung an die Strategie aus [K-S 1], dass für eine vorgegebene Matrix  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$  und geeignete Orlicz-Funktionen  $M_i$  absolute Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  existieren, so dass

$$C_1 \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \leq C_2 \|x\|_{\Sigma M_i^*},$$

gilt. Dies verallgemeinert das Resultat über die Erzeugung von Orlicz-Normen aus [K-S 1] auf die Erzeugung von Musielak-Orlicz-Normen und bildet damit einen entsprechenden Ausgangspunkt für die Einbettung dieser Räume nach  $L_1$ . Wir werden diese Idee hier nicht weiter verfolgen.

Im achten und letzten Kapitel der vorliegenden Arbeit geben wir einen Ausblick über die Möglichkeiten, die uns die Erweiterung der Techniken aus [K-S 1], [K-S 2] und [Sch2] liefert. Beim Versuch diesen Zugang auf Orlicz-Lorentz-Räume  $l_{M,a}$  anzuwenden, ergeben sich technische Probleme, die wir hier nicht überwinden können. Dennoch ist dieser Zugang vielversprechend und wir werden zeigen, wie nah man der Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen nach  $L_1$  kommt. Dafür erweitern wir zunächst den zur Einbettung der Lorentz-Räume verwendeten Ausdruck um eine weitere Permutation. Dies liefert nach geeigneter Wahl der Parameter  $c^1, \dots, c^n, d, z \in \mathbb{R}^n$  und einer geeigneten Bedingung an das Wachstum der  $a_k$ 's für

$$(1.1) \quad \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2}$$

eine Abschätzung gegen den Ausdruck

$$(1.2) \quad \|x\|_{M_d, a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_k^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d}.$$

Weil der Ausdruck (1.1) äquivalent zu einem 1-Mittel von Orlicz-Normen ist und der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm (1.1)  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist, lässt sich der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|_{M, a, 2}$ , die gegeben ist durch (1.2), nach  $L_1$  einbetten und als ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen schreiben. Den Raum  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{M, a, 2})$  bezeichnen wir als euklidischen Orlicz-Lorentz-Raum. Gelingt es durch weitere Abschätzungen den 2-Norm Anteil in (1.2) zu eliminieren, so ergibt sich die Orlicz-Lorentz-Norm und damit schließlich auch deren direkte Einbettung nach  $L_1$ . Es ist allerdings nicht klar, ob dies möglich ist.

Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit reellen Banachräumen beschäftigen, wobei wir in den meisten Fällen endlich-dimensionale Folgenräume betrachten. Zu einem Banachraum  $X$  bezeichnen wir mit  $B_X$  die Einheitskugel von  $X$ . Seien  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen von Banachräumen, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\dim(X_n) = \dim(Y_n)$ . Existieren Konstanten  $c, C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Isomorphismus  $I_n : X_n \rightarrow Y_n$  so existiert, dass für alle  $x \in X_n$  gilt

$$(2.1) \quad c \|x\|_{X_n} \leq \|I_n(x)\|_{Y_n} \leq C \|x\|_{X_n},$$

so nennen wir die beiden Folgen isomorph. Im speziellen Fall, dass wir für jedes  $n \in \mathbb{N}$  den  $\mathbb{R}^n$  mit zwei Normen  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  ausstatten, wollen dafür abkürzend  $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$  schreiben und werden solche Konstanten wie in (2.1) als absolute Konstanten bezeichnen. Absolut bedeutet dabei, dass die Konstanten nicht von der Dimension des Raumes abhängen. Wir werden diese Schreibweise auch in einigen anderen Abschätzungen nutzen, in denen die Dimension keine Rolle spielt. Falls nicht anders erwähnt, bezeichnen wir den  $i$ -ten Einheitsvektor des  $\mathbb{R}^n$  mit  $e_i$ . Die Gruppe der Permutationen auf der Menge  $\{1, \dots, n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}_n$  und deren Elemente häufig mit  $\pi, \sigma$  oder  $\eta$ . Ansonsten verwenden wir die in der Banachraumtheorie üblichen Notationen (siehe [LiT1] und [LiT2]). Des Weiteren werden wir in diesem Kapitel auf die meisten Beweise verzichten, genauso im

Abschnitt über die grundlegenden Sätze und kombinatorischen Ungleichungen, die wir in dieser Arbeit benötigen.

## 2.1. Grundlagen

Wir sind in dieser Arbeit an endlich-dimensionalen symmetrischen Banachräumen interessiert, d.h. an Räumen, die eine symmetrische Basis besitzen. Wir wollen diesen Begriff also genau definieren.

DEFINITION 2.1. Sei  $X$  ein normierter Raum und  $\{x_i\}_{i=1}^n$  eine Basis von  $X$ . Wir nennen die Basis *C-symmetrisch*, falls eine Konstante  $C > 0$  existiert, so dass für alle Vorzeichen  $\varepsilon_i = \pm 1$ , alle Skalare  $a_i \in \mathbb{R}$  und alle Permutationen  $\pi \in \mathfrak{S}_n$

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|_X \leq C \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_{\pi(i)} x_i \right\|_X$$

gilt.

Dies bedeutet also, dass die Norm eines Vektors invariant unter Permutation der Komponenten und Änderung der Vorzeichen der einzelnen Komponenten ist.

Wir betrachten zunächst die Klasse der  $l_p$ -Räume, die wir dann verallgemeinern werden.

Für  $1 \leq p < \infty$  ist

$$l_p = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p}, \quad x \in l_p,$$

ein Banachraum. Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichnen wir mit  $l_p^n$  den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm  $\|\cdot\|_p$ .

Damit erhalten wir auch gleich ein Beispiel für einen symmetrischen Banachraum, denn die Einheitsvektorbasis der  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$  mit einer Eins an der  $i$ -ten Stelle ist eine symmetrische Basis der Räume  $l_p^n$ ,  $1 \leq p < \infty$ .

Man sieht unmittelbar, dass die Norm durch die Funktion  $f : t \mapsto |t|^p$  festgelegt ist.

Schreibt man die Norm durch

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n f\left(\frac{|x_i|}{\rho}\right) \leq 1 \right\},$$

so wird dies noch deutlicher.

Kommen wir nun zu den Orlicz-Folgenräumen  $l_M$ , bei denen die Funktion  $t \mapsto |t|^p$  durch eine konvexe Funktion  $M$  ersetzt wird. Orlicz-Räume sind auch Banachräume, die eine symmetrische Basis besitzen. Beginnen wir mit dem Begriff der Orlicz-Funktion.

DEFINITION 2.2. Eine konvexe Funktion  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $M(t) = M(-t)$ ,  $M(0) = 0$  und  $M(t) > 0$  für  $t \neq 0$  heißt *Orlicz-Funktion*. Wir nennen eine Orlicz-Funktion  $M$  *p-konvex*, falls  $t \mapsto M(t^{1/p})$  konvex ist und wir nennen sie *q-konkav*, falls  $t \mapsto M(t^{1/q})$  eine konkave Funktion ist.

Damit ist eine Orlicz-Funktion auf  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  insbesondere injektiv. Ein Beispiel einer Orlicz-Funktion ist die Funktion  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto |t|^p$ , für  $1 \leq p < \infty$ . Ein komplizierteres Beispiel ist die Funktion

$$N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t^2 e^{-\frac{1}{t^2}}, & t \neq 0; \\ 0, & t=0. \end{cases}$$

Wir schränken uns später auf den Definitionsbereich  $[0, \infty)$  für Orlicz-Funktionen ein.

DEFINITION 2.3. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zu jeder Orlicz-Funktion  $M$  definieren wir den zugehörigen *Orlicz-Folgenraum*  $l_M^n$  als den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_M = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n M \left( \frac{|x_i|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Man sieht also unmittelbar, dass die Funktion  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , die bekannte  $l_p$ -Norm liefert. Außerdem sieht man sofort, dass die Einheitsvektorbasis des  $\mathbb{R}^n$  eine symmetrische Basis für  $l_M^n$  ist.

Wir wollen nun das Analogon zur Dualität in  $l_p$  betrachten. Zu  $1 \leq p \leq \infty$  definiert man den dualen oder konjugierten Index  $p^*$  über  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$  und erhält dafür  $(l_p)^* = l_{p^*}$  als Dualraum zu  $l_p$ , d.h. die duale Norm ist durch die konvexe Funktion  $t \mapsto |t|^{p^*}$  definiert. Wir wollen nun die duale Funktion einer Orlicz-Funktion  $M$  definieren, die wir dann in Anlehnung an die  $l_p$ -Räume mit  $M^*$  bezeichnen.

DEFINITION 2.4. Sei  $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  eine Orlicz-Funktion. Die Funktion

$$(2.2) \quad M^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sup_{t \in [0, \infty)} (xt - M(t))$$

nennen wir die zu  $M$  *duale Funktion* oder auch *komplementäre Funktion*.

Man bezeichnet (2.2) als Legendre-Transformation von  $M$ . Des Weiteren gilt das folgende Lemma.

LEMMA 2.5. (*Young-Ungleichung*) Sei  $M$  eine Orlicz-Funktion. Dann ist die zu  $M$  duale Funktion  $M^*$  auch eine Orlicz-Funktion und es gilt für alle  $x, y$  mit  $0 \leq x, y < \infty$

$$(2.3) \quad xy \leq M(x) + M^*(y),$$

wobei wir Gleichheit im Fall  $y = M'(x)$  oder  $x = M'^{-1}(y)$  haben. Außerdem stimmt die biduale Funktion  $M^{**}$  in allen Punkten mit  $M$  überein, d.h.  $M^{**} = M$ .

Einen Beweis findet man in [Proc] auf Seite 54.  $M'$  bezeichnet in obigem Lemma die rechtsseitige Ableitung, die jede konvexe Funktion besitzt. Wir wollen nun ein einfaches Beispiel angeben.

BEISPIEL 2.6. Sei  $1 < p < \infty$  und  $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $x \mapsto \frac{1}{p}x^p$ . Sei  $p^*$  so gewählt, dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Dann ist die duale Funktion  $M^*$  zu  $M$  gegeben durch

$$M^* : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \frac{1}{p^*}x^{p^*}.$$

Orlicz-Funktionen sind i.A. nicht homogen, was uns das Rechnen mit diesen Funktionen im Vergleich zu Potenzfunktionen deutlich erschwert. Es gilt aber das folgende hilfreiche Lemma, mit dem sich auftretende technische Schwierigkeiten handhaben lassen.

LEMMA 2.7. Es sei  $M$  eine Orlicz-Funktion und  $M^*$  deren duale. Dann gilt für alle  $x \geq 0$

$$(2.4) \quad x \leq M^{-1}(x)M^{*-1}(x) \leq 2x.$$

Ein Beweis für diese Aussage findet sich in [Kras] auf Seite 13. Wir wollen noch etwas über die Gestalt des Dualraumes  $(l_M^n)^*$  von  $l_M^n$  sagen, d.h. über die Darstellung der dualen Norm. Es gilt der folgende Satz.

SATZ 2.8. Der Dualraum  $(l_M^n)^*$  von  $l_M^n$  kann mit dem  $\mathbb{R}^n$ , ausgestattet mit der Norm

$$|||y||| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid \|x\|_M = 1 \right\}$$

identifiziert werden und es gilt für alle  $x \in (l_M^n)^*$

$$\|x\|_{M^*} \leq |||x||| \leq 2 \|x\|_{M^*}.$$

Einen Beweis findet man in [Proc] auf Seite 57. Die Norm des Dualraumes von  $l_M^n$  ist also äquivalent zur Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_{M^*}$ , die über die duale Funktion  $M^*$  definiert ist. Wir benötigen noch einen weiteren Begriff im Rahmen der Orlicz-Räume.

DEFINITION 2.9. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Gegeben sei der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit einer Norm  $\|\cdot\|$ . Wir sagen, dass die Norm  $\|\cdot\|$  ein 1-Mittel von Orlicz-Normen ist, falls

$$c \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|x\|_{M_i} \leq \|x\| \leq C \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \|x\|_{M_i}$$

gilt, wobei  $c, C > 0$  absolute Konstanten,  $M_1, M_2, \dots$  Orlicz-Funktionen sind und  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$  ist. Wir nennen dann  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen.

In [Dacu] und später nochmal für den endlich-dimensionalen Fall in [K-S 1] wurde der folgende Satz über die symmetrischen Teilräume von  $L_1$  bewiesen, wobei wir hier die Formulierung aus [K-S 1] wählen.

SATZ 2.10 (D.Dacunha-Castelle und S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 1] Lemma 2.11). *Es existiert ein Konstante  $C > 0$ , so dass jeder endlich-dimensionale symmetrische Teilraum von  $l_1$   $C$ -isomorph zu einem 1-Mittel von 2-konkaven Orlicz-Räumen ist.*

Kommen wir nun zu den Lorentz-Räumen. Lorentz-Folgenräume sind eine weitere Klasse von Banachräumen, die eine symmetrische Basis besitzen. Sie tauchen zudem auf natürliche Art und Weise in der Interpolationstheorie auf und bilden eine weitere Verallgemeinerung der  $l_p$ -Räume.

DEFINITION 2.11. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei  $1 \leq p < \infty$  und  $1 = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Wir definieren den Lorentz-Folgenraum  $d^n(a, p)$  als den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{d(a,p)} = \left( \sum_{i=1}^n a_i |x_i^*|^p \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hier steht die Folge  $(x_i^*)_{i=1}^n$  für die fallende Anordnung der Zahlen  $|x_i|$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Die Lorentz-Folgenräume sind also eine Art gewichtete  $l_p$ -Räume. Offenbar ist die Einheitsvektorbasis des  $\mathbb{R}^n$  auch eine symmetrische Basis für  $d^n(a, p)$ . Man sieht unmittelbar, dass man für die Wahl  $a = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$  die  $l_p$ -Norm erhält. Von besonderem Interesse ist die folgende Klasse von Lorentz-Folgenräumen.

DEFINITION 2.12. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir definieren den Lorentz-Folgenraum  $l_{q,p}^n$ ,  $1 \leq p \leq q < \infty$ , als den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{q,p} = \left( \sum_{i=1}^n |i^{1/q-1/p} x_i^*|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n i^{p/q-1} x_i^{*p} \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Wir erhalten also die Lorentz-Folgenräume  $l_{q,p}^n$  aus den Lorentz-Folgenräumen  $d^n(a,p)$ , indem wir  $a_i = i^{p/q-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , mit  $q \geq p$  wählen. Auch hier stellen wir fest, dass die Wahl  $p = q$  die  $l_p$ -Norm liefert. Der Vollständigkeit halber wollen wir auch im Fall der Lorentz-Räume etwas über die Struktur der dualen Norm sagen. Man nennt eine positive, nicht-wachsende Folge  $a = (a_i)_{i=1}^\infty$  ein reguläres Gewicht, falls für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$$

gilt. G.D. Allen hat in [Alle] gezeigt, dass aus der Regularität des Gewichts  $a = (a_i)_{i=1}^\infty$  folgt, dass der Raum  $(d(a,p))^*$  aus genau den Folgen  $x = (x_i)_{i=1}^\infty$  besteht, für die  $\left( \frac{x_i^*}{a_i^{1/p}} \right)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}$  ist, wobei  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$  gilt. S. Reisner konnte später in [Reis] beweisen, dass die Regularität dafür nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Es gilt der folgende Satz, der die Dualität der Räume  $l_{q,p}$  und  $l_{q^*,p^*}$  liefert. Man beachte an dieser Stelle, dass es sich im Fall  $1 \leq p \leq q < \infty$  bei  $\|\cdot\|_{p^*,q^*}$  lediglich um eine Quasi-Norm handelt.

SATZ 2.13 (S.Reisner, [Reis] Theorem 1). Sei  $1 \leq p < \infty$ . Die Regularität der Folge  $a = (a_i)_{i=1}^\infty$  ist notwendig und hinreichend dafür, dass  $(d(a,p))^*$  genau aus den Folgen  $x = (x_i)_{i=1}^\infty$  besteht, für die

$$\left( \frac{x_i^*}{a_i^{1/p}} \right)_{i=1}^\infty \in l_{p^*}.$$

Falls  $a$  regulär ist, so ist die positive, homogene Funktion

$$\| \|x\| \|_p = \left\| \left( \frac{x_i^*}{a_i^{1/p}} \right)_{i=1}^\infty \right\|_{p^*}$$

äquivalent zur Norm in  $(d(a,p))^*$ .

Die Lorentz-Normen erfüllen die folgende Abschätzung.

LEMMA 2.14. Sei  $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq q < \infty$ . Dann gilt für alle  $x \in l_{q,p_1}$

$$(2.5) \quad \|x\|_{q,p_2} \leq 2^{\frac{1}{p_1}} \|x\|_{q,p_1}.$$



Insbesondere ist  $l_{q,p_1} \subseteq l_{q,p_2}$ .

BEWEIS. Da die Folge der Gewichte positiv und monoton fallend ist, können wir für den Beweis das Verdichtungskriterium von Cauchy verwenden. Sei  $x \in l_{q,p_1}$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \|x\|_{q,p_2} &= \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^* i^{1/q-1/p_2}|^{p_2} \right)^{1/p_2} \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |x_{2^k}^* (2^k)^{1/q-1/p_2}|^{p_2} \right)^{1/p_2} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} |x_{2^k}^* (2^k)^{1/q}|^{p_2} \right)^{1/p_2} \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} |x_{2^k}^* (2^k)^{1/q}|^{p_1} \right)^{1/p_1} \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^k |x_{2^k}^* (2^k)^{1/q-1/p_1}|^{p_1} \right)^{1/p_1} = 2^{1/p_1} \left( \sum_{k=0}^{\infty} 2^{k-1} |x_{2^k}^* (2^k)^{1/q-1/p_1}|^{p_1} \right)^{1/p_1} \\ &\leq 2^{1/p_1} \|x\|_{q,p_1}. \end{aligned}$$

Damit gilt auch  $l_{q,p_1} \subseteq l_{q,p_2}$ . □

Kommen wir nun zu dem wichtigen Begriff des Banach-Mazur Abstands, welcher ein unverzichtbares Konzept zum Vergleich der Geometrie isomorpher Banachräume liefert.

DEFINITION 2.15. Seien  $X$  und  $Y$  zwei isomorphe Banachräume. Dann definieren wir den *Banach-Mazur Abstand* von  $X$  zu  $Y$  durch

$$d(X, Y) = \inf \left\{ \|T\| \|T^{-1}\| \mid T \in L(X, Y) \text{ ist ein Isomorphismus} \right\}.$$

Dies bedeutet geometrisch

$$d(X, Y) = \inf \left\{ C_1 \cdot C_2 \mid \frac{1}{C_1} B_X \subseteq T(B_Y) \subseteq C_2 B_X, T \in L(X, Y) \text{ ist ein Isomorphismus} \right\}.$$

Falls  $d(X, Y) \leq C$ , so sagen wir, dass  $X$  und  $Y$  *C-isomorph* bzw.  $X$  *C-isomorph* zu  $Y$  ist.

Offenbar ist der Banach-Mazur Abstand eine Zahl größer oder gleich Eins. Im dem Fall, dass beide Räume  $X$  und  $Y$  die Dimension  $n$  haben, sind sie isometrisch isomorph genau dann, wenn  $d(X, Y) = 1$  gilt. Sind zwei Räume  $E$  und  $F$  nicht isomorph, so setzen wir  $d(E, F) = \infty$ . Zwei unmittelbare Folgerungen aus der Definition sind

$$d(X, Z) \leq d(X, Y) \cdot d(Y, Z) \quad \text{und} \quad d(X, Y) = d(X^*, Y^*),$$

wobei  $X, Y$  und  $Z$  isomorphe Banachräume sind.

BEISPIEL 2.16. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p \leq q \leq 2$  (oder  $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ). Dann gilt  $d(l_p^n, l_q^n) = n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ .

Für einen Beweis und vertiefende Informationen verweisen wir auf das Buch [Tomc]. Wir wollen nun einige häufig verwendete Ungleichungen aus der Banachraumtheorie und die sogenannte verallgemeinerte Parallelogramm-Gleichung anführen. Wir beginnen mit der Khintchine-Ungleichung.

SATZ 2.17. *Es existieren Konstanten  $A_p$  und  $B_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , so dass für alle Folgen von Skalaren  $(a_i)_{i=1}^n$  und alle  $n \in \mathbb{N}$*

$$A_p \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \operatorname{Ave}_{\varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{für } 1 \leq p < 2$$

und

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left( \operatorname{Ave}_{\varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^p \right)^{1/p} \leq B_p \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}, \quad \text{für } 2 \leq p < \infty$$

gilt.

Einen Beweis findet man in [AIKa]. Man kann diese Ungleichung auch so interpretieren, dass die Normen  $\{\|\cdot\|_p \mid 1 \leq p < \infty\}$  äquivalent auf dem linearen Aufspann der Rademacher-Funktionen in  $L_p$  sind. In dieser Form kann man das Resultat auf beliebige Banachräume verallgemeinern. Man erhält dann die Khintchine-Ungleichung aus der allgemeineren Khintchine-Kahane-Ungleichung.

SATZ 2.18. *Für jedes  $1 \leq p < \infty$  existiert eine Konstante  $C_p > 0$ , so dass für jeden Banachraum  $X$  und für jede endliche Folge  $(x_i)_{i=1}^n$  in  $X$*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \leq \left( \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^p \right)^{1/p} \leq C_p \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|.$$

gilt.

Ein Beweis findet sich in [AIKa]. Zuletzt führen wir noch die verallgemeinerte Parallelogramm-Gleichung an. Die wohlbekannte Parallelogramm-Gleichung besagt, dass für je zwei Vektoren  $x, y$  in einem Hilbertraum  $H$

$$\mathbb{E} \|\varepsilon_1 x + \varepsilon_2 y\|^2 = \frac{\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2}{2} = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

gilt und ist ein einfaches Beispiel für die Bedeutung von Mittelungen über Vorzeichen. Sie besitzt eine elementare Verallgemeinerung.

PROPOSITION 2.19. *Sei  $H$  ein Hilbertraum. Dann gilt für jede endliche Folge  $(x_i)_{i=1}^n$  in  $H$*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_H^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2.$$

BEWEIS. Für jede Folge  $x_1, \dots, x_n$  in  $H$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|_H^2 &= \mathbb{E} \left\langle \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i, \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle \mathbb{E}(\varepsilon_i \varepsilon_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i\|_H^2. \end{aligned}$$

□

Eine weitere wichtige Ungleichung, die wir häufig verwenden werden, ist die Jensen-Ungleichung.

SATZ 2.20. *Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konvex und  $\xi : \Omega \rightarrow I$  eine integrierbare Zufallsgröße. Dann ist  $\mathbb{E}(\xi) \in I$  und es gilt*

$$\mathbb{E}(f(\xi)) \geq f(\mathbb{E}(\xi)).$$

Ein Beweis findet sich etwa in [Irle]. Zuletzt wollen wir noch den Begriff des Tensors einführen.

DEFINITION 2.21. Seien  $n, k \in \mathbb{N}$ . Mit dem  $k$ -ten Tensorprodukt

$$X = \underbrace{\mathbb{R}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}}$$

des  $\mathbb{R}^n$  bezeichnen wir den Raum aller  $n \times \dots \times n$  Arrays

$$x = (x_{i_1 \dots i_k})_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n}$$

mit reellen Koordinaten  $x_{i_1 \dots i_k}$ . Wir nennen dann  $x$  einen *Tensor  $k$ -ter Stufe des  $\mathbb{R}^n$* .

Tatsächlich macht die Koordinatenweise Addition von Arrays und die Koordinatenweise Multiplikation eines Arrays mit einer Zahl  $X$  zu einem  $n^k$ -dimensionalen Vektorraum.

Man kann den  $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$  mit dem Raum aller reellen  $n \times n$ -Matrizen identifizieren. Mit der obigen Bezeichnung nennen wir eine Zahl einen Tensor 0-ter Stufe, einen Vektor einen Tensor 1-ter Stufe und eine Matrix einen Tensor 2-ter Stufe. Für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  und eine reelle Matrix  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  der Form  $(x_i y_j)_{i,j=1}^n$  können wir jetzt kürzer  $x \otimes y$  schreiben.

## 2.2. Grundlegende Sätze und kombinatorische Ungleichungen

Wir wollen in diesem Kapitel die grundlegenden Sätze und kombinatorischen Ungleichungen für diese Arbeit anführen. Diese gehen zurück auf die Arbeiten [Sch1] und [Sch2] von C. Schütt aus den Jahren 1995 und 1989 und die Arbeit [K-S 1] von S. Kwapien und C. Schütt aus dem Jahre 1985.

SATZ 2.22 (C.Schütt, 1995 [Sch1] Theorem 2). *Sei  $M$  eine strikt konvexe, zweimal differenzierbare Orlicz-Funktion, die strikt 2-konkav ist. Seien weiter  $M^*(1) = 1$  und*

$$a_l = -\frac{n}{2} \int_{\frac{(l-1)}{2}}^{\frac{l}{2}} \left( \int_t^1 \frac{((M^{*-1})^2)''(s)}{\sqrt{(M^{*-1})^2(s) - s((M^{*-1})^2)'(s)}} ds + 1 - \sqrt{1 - ((M^{*-1})^2)'(1)} \right) dt$$

für alle  $l = 1, \dots, n$ . Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{c} \|x\|_M \leq \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|x\|_M,$$

wobei  $c$  eine Konstante ist, die nicht von  $n$  und  $M$  abhängt.

Der Satz gibt also an, wie zu einer gegebenen Orlicz-Funktion  $M$  der Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$  zu wählen ist, damit

$$\text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

die Größenordnung der Orlicz-Norm hat. Dies wird eines der entscheidenden Hilfsmittel sein. Den Beweis des Satzes findet man in [Sch1].

Andererseits ist durch eine Folge  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  auch eine Orlicz-Funktion  $N$  über ihre duale Funktion  $N^*$  eindeutig derart bestimmt, dass für die gegebene Folge

$$\frac{1}{c} \|x\|_N \leq \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|x\|_N,$$

gilt. Dies besagt der folgende Satz.

SATZ 2.23 (C.Schütt, 1995, [Sch1] Theorem 1). Sei  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und sei  $M$  eine Orlicz-Funktion mit

$$(2.6) \quad M^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right) = \left\{ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i \right)^2 + \frac{m}{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n |a_i|^2 \right) \right\}^{1/2}$$

für alle  $m = 1, \dots, n$  und so, dass  $M^{*-1}$  affin zwischen den Werten ist. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{(n-1)^2}{n^2 + (n-1)^2} \|x\|_M \leq A_{ve} \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{2\sqrt{2}}{c_n} \|x\|_M,$$

wobei  $c_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ .

Den Beweis findet man in [Sch1]. Man beachte, dass eine Orlicz-Funktion  $M$  ihre duale Orlicz-Funktion  $M^*$  eindeutig festlegt. Da  $M^*$  wieder eine Orlicz-Funktion ist, wird auch  $M^{**} = M$  eindeutig durch  $M^*$  festgelegt. Außerdem kann man sich schnell überlegen, dass tatsächlich immer eine Orlicz-Funktion existiert, die die Bedingung in Satz 2.23 erfüllt. Sei dazu  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  eine differenzierbare, monoton fallende Funktion. Man rechnet nun leicht nach, dass die zweite Ableitung der Funktion

$$g : x \mapsto \left\{ \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 + x \int_x^1 |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}$$

negativ ist, d.h.  $g$  ist eine konkave Funktion, was uns die Existenz liefert.

Man kann diesen Satz nun weiter verallgemeinern, indem man in Gleichung (2.6) keine Gleichheit fordert, sondern lediglich die Äquivalenz der Funktion  $M^{*-1}$  zum Ausdruck in (2.6) an den Stellen  $\frac{m}{n}$ ,  $m = 1, \dots, n$ . Des Weiteren kann die 2 durch ein  $r$  mit  $1 \leq r < \infty$  ersetzt werden.

SATZ 2.24 (C.Schütt, 2011, [Sch3] Beispiel 168). (i) Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < r < \infty$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Dann gibt es eine Orlicz-Funktion  $M$ , deren duale Orlicz-Funktion  $M^*$  für alle  $m = 1, \dots, n$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} r^{-\frac{1}{r}} (r^*)^{-\frac{1}{r^*}} M^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right) &\leq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i \right) + \left( \frac{m}{n} \right)^{1/r^*} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n |a_i|^r \right)^{1/r} \\ &\leq 8r^{-\frac{1}{r}} (r^*)^{-\frac{1}{r^*}} M^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right) \end{aligned}$$

und

$$M^{*-1} \left( \frac{m}{n^2} \right) \leq r^{\frac{1}{r}} (r^*)^{\frac{1}{r^*}} \frac{1}{n} \left( \frac{l}{n} \right)^{1/r^*} \left( \sum_{i=1}^m |a_i|^r \right)^{1/r} \leq 2M^{*-1} \left( \frac{m}{n^2} \right)$$

erfüllt. Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt außerdem

$$(2.7) \quad C \|x\|_M \leq Ave_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^r \right)^{1/r} \leq 2 \|x\|_M,$$

wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist.

(ii) Es sei  $1 < r < \infty$ . Dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  und alle  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und alle Orlicz-Funktionen  $N$ , deren duale Orlicz-Funktion  $N^*$  für alle  $m = 1, \dots, n$  die Ungleichungen

$$N^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right) \leq r^{1/r} (r^*)^{1/r^*} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i + \left( \frac{m}{n} \right)^{1/r^*} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n |a_i|^r \right)^{1/r} \right\} \leq 8N^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right)$$

erfüllt und die auf den Intervallen  $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ ,  $m = 0, \dots, n-1$ , affin fortgesetzt wird. Außerdem gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_r \|x\|_N \leq Ave_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^r \right)^{1/r} \leq C_r \|x\|_N,$$

wobei  $c_r, C_r > 0$  Konstanten sind, die nur von  $r$  abhängen.

Die Äquivalenz in (2.7) bleibt natürlich für jede zu  $M$  ähnliche Orlicz-Funktion, die die Ungleichungen erfüllt, erhalten, wobei wir zwei Orlicz-Funktionen  $M_1, M_2$  als ähnlich bezeichnen, wenn Konstanten  $c_1, c_2 > 0$  existieren, so dass  $M_1(c_1 t) \leq M_2(t) \leq M_1(c_2 t)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  gilt. Eine weitere Verallgemeinerung von Satz 2.23 ist gegeben durch den folgenden Satz.

**SATZ 2.25** (C.Schütt, 2011, [Sch3] Beispiel 169). Sei  $1 \leq p < r < \infty$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Dann gibt es eine Orlicz-Funktion  $M$ , deren duale  $M^*$  für alle  $m = 1, \dots, n$  die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{r^{-\frac{1}{r}} (r^*)^{-\frac{1}{r^*}}}{2} M^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right) &\leq \left( \frac{m}{n} \right)^{1/p^*} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m |a_i|^p \right)^{1/p} + \left( \frac{m}{n} \right)^{1/r^*} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n |a_i|^r \right)^{1/r} \\ &\leq 8 \frac{r^{-\frac{1}{r}} (r^*)^{-\frac{1}{r^*}}}{2^{1/p}} M^{*-1} \left( \frac{m}{n} \right) \end{aligned}$$

erfüllt und auf den Intervallen  $[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}]$ ,  $m = 0, \dots, n-1$ , affin fortgesetzt wird. Für die Funktion  $M$  und jede andere Orlicz-Funktion, die diese Ungleichungen erfüllt und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$c_{r,p} \|x\|_M \leq \left( \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^r \right)^{p/r} \right)^{1/p} \leq C_{r,p} \|x\|_M,$$

wobei  $c_{r,p}, C_{r,p} > 0$  ein Konstanten sind, die nur von  $r$  und  $p$  abhängen.

Wir betrachten nun ein Beispiel in dem wir mit Satz 2.25 zeigen, wie der Vektor  $a \in \mathbb{R}^n$  aussehen muss, damit man durch ein Mittel über Permutationen die  $p$ -Norm erhält.

BEISPIEL 2.26. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 < p < 2$ . Der Vektor  $(a_i)_{i=1}^n = \left(\frac{n}{i}\right)^{1/p}$  erzeugt die  $p$ -Norm, d.h. es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$c \|x\|_p \leq \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \leq C \|x\|_p,$$

wobei  $c, C > 0$  absolute Konstanten sind, die von  $p$  abhängen.

BEWEIS. Sei zunächst  $p^* \in \mathbb{R}$  so, dass  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Es gilt für alle  $m \leq n$

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i \right) + \left( \frac{m}{n} \right)^{1/r^*} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n |a_i|^r \right)^{1/r} \geq \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i \right),$$

wobei

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{n}{i}\right)^{1/p} = \frac{1}{n^{1/p^*}} \sum_{i=1}^m i^{-1/p} = \frac{1}{n^{1/p^*}} \left( 1 + \sum_{i=2}^m i^{-1/p} \right).$$

Die standard Integralabschätzung für Reihen liefert

$$\sum_{i=2}^m i^{-1/p} \leq \int_1^m t^{-1/p} dt = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} t^{-1/p+1} \Big|_1^m \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} m^{1/p^*}.$$

Somit ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{n}{i}\right)^{1/p} \leq \frac{2}{1 - \frac{1}{p}} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*}.$$

Weiter gilt für  $m \geq 2$

$$\sum_{i=1}^m i^{-1/p} \geq \int_1^m t^{-1/p} dt = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} t^{-1/p+1} \Big|_1^m = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} (m^{1/p^*} - 1) \geq \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \frac{m^{1/p^*}}{2}.$$

Damit ist für alle  $m \leq n$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{n}{i}\right)^{1/p} \geq \frac{1}{2(1-\frac{1}{p})} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*},$$

da die Aussage für  $m = 1$  klar ist. Wir haben also für alle  $m \leq n$

$$\frac{1}{2(1-\frac{1}{p})} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{n}{i}\right)^{1/p} \leq \frac{2}{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*}$$

und damit

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i\right) + \left(\frac{m}{n}\right)^{1/r^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n |a_i|^r\right)^{1/r} \geq \frac{1}{2(1-\frac{1}{p})} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*}.$$

Weiter gilt

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=m+1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{m}}{n^{1/p^*}} \left(\sum_{i=m+1}^n i^{-2/p}\right)^{1/2}.$$

Die Integralabschätzung liefert

$$\sum_{i=m+1}^n i^{-2/p} \leq \int_m^n t^{-2/p} dt = -\frac{1}{\frac{2}{p}-1} t^{-2/p+1} \Big|_m^n = \frac{1}{\frac{2}{p}-1} (m^{-2/p+1} - n^{-2/p+1}),$$

d.h. wir haben

$$\left(\sum_{i=m+1}^n i^{-2/p}\right)^{1/2} \leq \left(\frac{1}{\frac{2}{p}-1} m^{-2/p+1}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\frac{2}{p}-1}\right)^{1/2} m^{-1/p+1/2}.$$

Also gilt

$$\frac{\sqrt{m}}{n^{1/p^*}} \left(\sum_{i=m+1}^n i^{-2/p}\right)^{1/2} \leq \frac{\sqrt{m}}{n^{1/p^*}} \left(\frac{1}{\frac{2}{p}-1}\right)^{1/2} m^{-1/p+1/2} = \left(\frac{1}{\frac{2}{p}-1}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*}.$$

Somit folgt für alle  $m \leq n$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^m a_i\right) + \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=k+1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} &\leq \frac{2}{1-\frac{1}{p}} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*} + \left(\frac{1}{\frac{2}{p}-1}\right)^{1/2} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*} \\ &= \left(\frac{2}{1-\frac{1}{p}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{p}-1}}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{1/p^*}. \end{aligned}$$



Da für ähnliche Orlicz-Funktionen die dazugehörigen Normen äquivalent sind, folgt die Behauptung. Die Konstanten hängen hier von  $p$  ab, weil die Orlicz-Funktion  $t \mapsto t^p$  die Bedingung aus Satz 2.24 bis auf absolute Konstanten, die nur von  $p$  abhängen, erfüllt.  $\square$

Wir kommen nun zu den kombinatorischen Ungleichungen. Der nächste Satz gibt eine Abschätzung für die Größenordnung eines Matrix-Mittels über Permutationen in Termen der größten Einträge der zugrunde liegenden Matrix, d.h. wir können die Größenordnung von

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,\pi(i)}|^q \right)^{1/q}$$

in Termen der größten Einträge der Matrix angeben, wobei wir mit  $s(k)$  den Betrag des  $k$ -größten Eintrags der Matrix bezeichnen.

SATZ 2.27 (S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 1] Theorem 1.2). *Für alle  $1 \leq q \leq \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt*

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s(k) + \left( \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} s(k)^q \right)^{1/q} \right\} &\leq \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,\pi(i)}|^q \right)^{1/q} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s(k) + \left( \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} s(k)^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Einen Beweis des Satzes findet man in [K-S 1]. Der Satz lässt sich auf einfache Weise verallgemeinern. Man kann die äußere 1-Norm in  $\pi$  durch eine  $p$ -Norm in  $\pi$  ersetzen, wobei  $1 \leq p \leq q < \infty$  gelten muss.

SATZ 2.28 (C.Schütt, [Sch2] Lemma 2.2). *Für alle  $1 \leq p \leq q < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt*

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \left\{ \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |s(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} |s(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\} &\leq \left( \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,\pi(i)}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |s(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} |s(k)|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $1 \leq p \leq q < \infty$ . Dann ist  $1 \leq q/p < \infty$  und wir können Satz 2.27 mit  $q/p$  auf die Matrix  $(a_{i,j}^p)_{i,j=1}^n$  anwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s(k)^p + \left( \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} s(k)^q \right)^{p/q} \right\} &\leq \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |a_{i,\pi(i)}^p|^{q/p} \right)^{p/q} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s(k)^p + \left( \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{n^2} s(k)^q \right)^{p/q}, \end{aligned}$$

wobei die  $s(k)$ ,  $k = 1, \dots, n^2$ , die fallende Anordnung der Einträge  $|a_{i,j}|$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , sind. Ziehen wir nun die  $p$ -te Wurzel und nutzen die Tatsache, dass für zwei positive reelle Zahlen  $x$  und  $y$  gerade  $\frac{1}{2^{1-1/p}}(x^{1/p} + y^{1/p}) \leq (x + y)^{1/p} \leq x^{1/p} + y^{1/p}$  gilt, so folgt die Behauptung.  $\square$

Der Fall  $q = 2$  wird später von besonderer Bedeutung sein, wenn wir uns mit der Einbettung der Lorentz-Räume nach  $L_1$  und mit deren Darstellung als 1-Mittel von Orlicz-Räumen beschäftigen. Wir halten dies im folgenden Korollar fest.

KOROLLAR 2.29 (C.Schütt, [Sch2] Lemma 2.3). *Sei  $1 \leq p \leq 2$ . Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $k = 1, \dots, n$*

$$\begin{aligned} C \left\{ \left( \sum_{i=1}^k |x_i^*|^p \right)^{1/p} + k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} &\leq k^{\frac{1}{p}} \left( \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^k |x_i^*|^p \right)^{\frac{1}{p}} + k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

*gilt.*

BEWEIS. Sei  $k \leq n$ . Wir wenden einfach Satz 2.28 auf die Matrix mit den Einträgen

$$a_{i,j} = \begin{cases} x_i, & \text{für } 1 \leq j \leq n/k; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

an. Es folgt dann

$$\left[ \frac{n}{k} \right] \sum_{i \leq k} |x_i^*|^p \leq \sum_{k=1}^n |s(k)|^p \leq \frac{n}{k} \sum_{i \leq k} |x_i^*|^p$$

und

$$\left[ \frac{n}{k} \right] \sum_{i>2k} |x_i^*|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{n^2} |s(k)|^2 \leq \frac{n}{k} \sum_{i>k} |x_i^*|^2$$

und damit die Behauptung.  $\square$

LEMMA 2.30 (C.Schütt, [Sch2] Lemma 2.1). *Seien  $n, N \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p \leq 2$ . Sei weiter  $a_{i,j} \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, N$  mit  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N |a_{i,j}|^p = n$ . Dann ist der  $\mathbb{R}^n$  mit der Norm*

$$\|x\| = \left( \sum_{j=1}^N \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)} a_{i,j}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}$$

$\sqrt{2}$ -isomorph zu einem 1-symmetrischen Teilraum von  $l_p$ .

BEWEIS. Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow l_p^{N2^n n!}, \quad x \mapsto \frac{1}{(2^n n!)^{1/p}} \left( \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i a_{\pi(i),j} \right)_{j,\varepsilon,\pi}.$$

Aus der Khintchine-Ungleichung 2.17 folgt nun unmittelbar

$$\|\Psi(x)\|_p \leq \left( \sum_{j=1}^N \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)} a_{i,j}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq \sqrt{2} \|\Psi(x)\|_p.$$

$\square$

Der folgende Satz ist aus [Sch2] und gibt über eine gewisse Standardeinbettung an, welche der Lorentz-Räume  $d^n(a, p)$  nach  $L_p$  einbetten und liefert uns damit eine gewisse Struktur für unsere direkte Einbettung der Lorentz-Räume nach  $L_1$ , bei der wir nicht den Weg über  $L_p$  gehen.

SATZ 2.31 (C.Schütt, [Sch2] Proposition 1.2). *Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq 2$  und  $1 = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ , so dass*

$$(2.8) \quad a_1 + \left(1 - \frac{p}{2}\right) \sum_{j=1}^k a_j j^{-p/2} \leq C k^{1-p/2} a_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dann ist der  $\mathbb{R}^n$  mit der Norm

$$\|x\| = \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \left| \left( \sum_{i=1}^k |x_i^*|^p \right)^{1/p} + k^{1/p-1/2} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{1/2} \right|^p + a_n \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right\}^{1/p},$$

isomorph zu einem Teilraum  $Y$  von  $l_p$  mit  $d(Y, d^n(a, p)) \leq CD$ , wobei  $D$  eine universelle Konstante ist.

BEWEIS. Nach Lemma 2.30 und Korollar 2.29 sind die Räume  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_p$ , wobei  $C$  eine absolute Konstante ist. Wir zeigen die Äquivalenz der  $d^n(a, p)$  Norm und der Norm  $\|\cdot\|$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq \left( \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) \sum_{i=1}^k |x_i^*|^p \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n |x_i^*|^p \sum_{k=i}^n (a_k - a_{k+1}) \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n a_i |x_i^*|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung nach oben wenden wir die Dreiecksungleichung an und erhalten nach Umsummierung

$$\|x\| \leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i^*|^p a_i \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Wir wollen den zweiten Summanden weiter abschätzen. Es gilt

$$(2.9) \quad \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{1/2} \leq \left( |x_k^*|^p \sum_{i=1}^k C_i + \sum_{i=k+1}^n C_i |x_i^*|^p \right)^{1/p},$$

mit  $\sum_{i=1}^j C_i = j^{p/2}$  für  $j = 1, \dots, n$ . Wir zeigen dies. Dazu betrachten wir für festes  $k \leq n$  den Vektor  $y := (x_k^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$ . Für  $1 \leq p \leq 2$  gilt nach Lemma 2.14  $\|\cdot\|_2 \leq 2^{1/p} \|\cdot\|_{2,p}$ . Anwenden auf  $y$  liefert uns direkt die obige Aussage. Wir bemerken noch, dass

$$C_k = k^{p/2} - (k-1)^{p/2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Es folgt nun

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
\stackrel{(2.9)}{\leq} & \left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \left( |x_k^*|^p \sum_{i=1}^k C_i + \sum_{i=k+1}^n C_i |x_i^*|^p \right) \right)^{1/p} \\
\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} & \left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k |x_k^*|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \sum_{i=k+1}^n C_i |x_i^*|^p \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Weil für alle  $j = 1, \dots, n-1$ ,

$$\sum_{k=1}^j k(a_k - a_{k+1}) = -j a_{j+1} + \sum_{k=1}^j a_k \leq \sum_{k=1}^j a_k$$

gilt, können wir mit der Hardy-Littlewood-Ungleichung den ersten Summanden durch

$$\left( \sum_{k=1}^{n-1} a_k |x_k^*|^p \right)^{1/p}$$

abschätzen. Es bleibt wieder der zweite Summand abzuschätzen. Umsummieren liefert dann

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \sum_{i=k+1}^n C_i |x_i^*|^p \right)^{1/p} \\
\leq & \left( \sum_{i=1}^{n-1} |x_i^*|^p C_i \sum_{k=1}^i (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} + C_n |x_n^*|^p \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Es gilt  $C_1 = 1$  und für alle  $k = 2, \dots, n$ ,

$$C_k = k^{p/2} - (k-1)^{p/2} \leq \frac{p}{2} (k-1)^{p/2-1}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^i (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} &\leq a_1 + \sum_{k=2}^i a_k (k^{1-p/2} - (k-1)^{1-p/2}) \\
&\leq a_1 + \sum_{k=2}^i a_k \left(1 - \frac{p}{2}\right) (k-1)^{-p/2} \\
&\leq a_1 + 2\left(1 - \frac{p}{2}\right) \sum_{k=2}^i a_k k^{-p/2}.
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung (2.8) folgt nun

$$\sum_{k=1}^i (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \leq 2C i^{1-p/2} a_i.$$

Insgesamt erhalten wir, mit einer universellen Konstanten  $D$ , dass

$$\left( \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) k^{1-p/2} \sum_{i=k}^n C_i |x_i^*|^p \right)^{1/p} \leq CD \left( \sum_{i=1}^{n-1} a_i |x_i^*|^p + a_{n-1} |x_n^*|^p \right)^{1/p}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Um später bei unserer direkten Einbettung die Äquivalenz der oben definierten Norm zur Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$ , leichter zu erhalten, zeigen wir die obige Ungleichung (2.8) für den Fall  $a = (i^{p/q-1})_{i=1}^n$ , denn dafür stimmen  $d^n(a, p)$  und  $l_{q,p}^n$  überein. Man kann dann später Satz 2.31 anwenden.

PROPOSITION 2.32. *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$  und  $a_i = i^{p/q-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann gilt für alle  $k = 1, \dots, n$*

$$a_1 + \left(1 - \frac{p}{2}\right) \sum_{i=1}^k a_i i^{-p/2} \leq C k^{1-p/2} a_k.$$

BEWEIS. Sei also  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Dann gilt

$$\sum_{i=1}^k a_i i^{-p/2} = \sum_{i=1}^k i^{p/q-1} i^{-p/2} = \sum_{i=1}^k i^{p/q-p/2-1}.$$

Weil  $\frac{p}{q} - \frac{p}{2} - 1 < 0$  ist, sind die obigen Summanden monoton fallend in  $i$  und somit können wir obige Summe durch ein Integral abschätzen. Es ist

$$\sum_{i=1}^k i^{p/q-p/2-1} = 1 + \sum_{i=2}^k i^{p/q-p/2-1} \leq 1 + \int_1^k t^{p/q-p/2-1} dt = 1 + C(p, q) [t^{p/q-p/2}]_1^k,$$

wobei  $C(p, q) := \left(\frac{p}{q} - \frac{p}{2}\right)^{-1}$ . Damit haben wir nun

$$\sum_{i=1}^k i^{p/q-p/2-1} \leq 1 + C(p, q)k^{p/q-p/2} = 1 + C(p, q)k^{1-p/2}a_k.$$

Insgesamt gilt

$$1 + \left(1 - \frac{p}{2}\right) \sum_{i=1}^k a_i i^{-p/2} \leq 2 + C(p, q)k^{1-p/2}a_k.$$

Wir müssen also noch zeigen, dass eine Konstante  $C$  existiert, so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $k = 1, \dots, n$ , gilt

$$2 \leq Ck^{p/q-p/2}.$$

Da  $\frac{p}{q} - \frac{p}{2} > 0$  ist und somit  $k^{p/q-p/2} > 1$  für alle  $k = 1, \dots, n$ , ist dies kein Problem und wir können  $C = 2$  wählen.  $\square$

Damit betten also insbesondere die Räume  $l_{p,q}^n$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$ , nach  $L_p$  ein. Wir werden später eine direkte Einbettung nach  $L_1$  angeben. Für den obigen Beweis ist  $q < 2$  notwendig. Dies ist kein Problem der Beweisstrategie, denn Carsten Schütt zeigte in [Sch2], dass wir für eine Einbettung  $1 \leq p \leq q < 2$  benötigen. Dies kann man sich auch klar machen, wenn man sich den Cotyp von  $L_{qp}$  anschaut. Wir werden später nochmal darauf eingehen. Dem Fall  $q = p = 2$  schenken wir in dieser Arbeit keine weitere Aufmerksamkeit, da bekannterweise  $l_{2,2} = l_2$  isometrisch nach  $L_p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , einbettet. Dazu betrachtet man einfach eine Folge unabhängiger Gaußvariablen.

---

Der Raum  $l_{q,p}^n$  als 1-Mittel von Orlicz-Räumen und seine direkte  
Einbettung nach  $L_1$

---

In diesem Kapitel beweisen wir, dass die Lorentz-Folgenräume  $l_{q,p}^n$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$ , 1-Mittel von Orlicz-Räumen sind und geben eine direkte Einbettung nach  $L_1$  an, d.h. genauer gesagt betten wir nach  $L_1^{n!2^{2n}}$  ein, wobei wir damit den Raum  $L_1$  ausgestattet mit dem normalisierten Zählmaß bezeichnen, d.h.

$$L_1^{n!2^{2n}} = \left\{ x = (x(\pi, \sigma, \varepsilon, \delta))_{\pi, \sigma, \varepsilon, \delta} \mid \varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \delta = (\delta_1, \dots, \delta_n), \varepsilon_i, \delta_i = \pm 1, \pi, \sigma \in \mathfrak{S}_n \right\}$$

und

$$\|x\|_1 = \frac{1}{n!2^{2n}} \sum_{\pi, \sigma, \varepsilon, \delta} |x(\pi, \sigma, \varepsilon, \delta)|.$$

Auf den Fall  $p = q$  gehen wir nicht weiter ein, da  $l_q$  für  $1 \leq q \leq 2$  mit Hilfe einer Folge unabhängiger  $q$ -stabiler Zufallsvariablen nach  $L_1$  eingebettet werden kann.

In [Sch2] muss man einen Umweg gehen und die Lorentz-Räume nach  $L_p$  einbetten. Von dort kann man schließlich nach  $L_1$  einbetten. Wir erweitern hier die Technik aus [Sch2] und können damit direkt nach  $L_1$  einbetten. Der entscheidende Punkt bei unserem Zugang ist, dass wir über Doppelmittel über Permutationen die Norm aus Satz 2.31 erzeugen können und zudem unser Doppelmittel eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  ist, die äquivalent zur 1-Norm und



zusätzlich zu einem 1-Mittel von Orlicz-Normen ist. Das Neue bei der Darstellung als 1-Mittel von Orlicz-Räumen ist die konstruktive Natur des Beweises, die uns die Vektoren liefert, die die Orlicz-Normen des 1-Mittels erzeugen. Wir wollen nun die beiden Hauptsatz dieses Kapitels formulieren, deren Beweise wir am Ende führen. Wir beginnen mit unserem Satz über die Darstellung der Lorentz-Räume als ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen.

SATZ 3.1. *Es gibt eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $1 \leq p < q < 2$  die Lorentz-Normen  $\|\cdot\|_{q,p}$  äquivalent zu einem 1-Mittel von 2-konkaven Orlicz-Normen sind, d.h. es existieren 2-konkave Orlicz-Funktionen  $M_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , und Koeffizienten  $\lambda_\sigma > 0$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\frac{1}{C} \|x\|_{q,p} \leq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \|x\|_{M_\sigma} \leq C \|x\|_{q,p}$$

*gilt. Die Orlicz-Normen werden von den Vektoren*

$$y^\sigma = \left( \left( \sum_{k \leq \frac{n}{i}} |k(k^{p/q-1} - (k+1)^{p/q-1})|^{2/p} \left( \frac{n}{\sigma(k)} \right)^{2/p} \right)^{1/2} \right)_{i=1}^n, \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

*erzeugt und es gilt für alle  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\frac{1}{c} \|x\|_{M_\sigma} \leq A_{ve} \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{\pi(i)}^\sigma|^2 \right)^{1/2} \leq c \|x\|_{M_\sigma},$$

*wobei  $c > 0$  eine absolute Konstante ist.*

Wir formulieren nun unseren zweiten Hauptsatz des Kapitels über die direkte Einbettung der Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$  nach  $L_1$ . Für den Beweis des Satzes verwenden wir später Satz 3.1.

SATZ 3.2. *Sei  $1 \leq p \leq q < 2$ . Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Teilraum  $Y_n$  von  $L_1^{n!2^{2n}}$  mit  $\dim(Y_n) = n$  und  $d(Y_n, l_{q,p}^n) \leq C$  existiert. Die Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$  betten also nach  $L_1^{n!2^{2n}}$  ein.*

Wir beginnen mit einigen Lemmata, die eine Beziehung zwischen den Mittlungen über Permutationen eines gewissen Ausdrucks und dem Raum  $L_1$  und einem Mittel über Orlicz-Normen herstellen. Die Permutationen werden benötigt, um später die gewünschten Orlicz-Normen zu erzeugen.

LEMMA 3.3. *Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle Vektoren  $c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  ein Teilraum  $Y_n$  von  $L_1^{n!2^{2n}}$  mit  $\dim(Y_n) = n$  existiert, der zum  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm*

$$\|x\| = Ave_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2}, x \in \mathbb{R}^n,$$

*absolut beschränkten Banach-Mazur Abstand hat, d.h. genauer  $d(Y_n, (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)) \leq C$ . Mit anderen Worten heißt das, der Raum  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  ist  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$ .*

BEWEIS. Wir zeigen, dass die Normen äquivalent sind. Dazu betrachten wir die Vektoren

$$f_i := f_i(\pi, \sigma, \delta, \varepsilon) = \left\{ \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \delta_i \varepsilon_k \right\}_{\pi, \sigma, \varepsilon, \delta} \in \mathbb{R}^{n!2^{2n}}, i = 1, \dots, n,$$

die wir als Elemente von  $L_1^{n!2^{2n}}$  auffassen. Wir definieren

$$\Psi : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \rightarrow L_1^{n!2^{2n}}, \Psi(x) = \sum_{i=1}^n x_i f_i.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \|\Psi(x)\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n x_i \left\{ \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \delta_i \varepsilon_k \right\}_{\pi, \sigma, \varepsilon, \delta} \right\|_1 \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\pi, \sigma} \sum_{\delta, \varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \delta_i \varepsilon_k \right|. \end{aligned}$$

Mit der Khintchine-Ungleichung für die Vorzeichen  $\delta$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|_1 &\stackrel{Kh}{\sim} \frac{1}{n!^2} \frac{1}{2^n} \sum_{\pi, \sigma} \sum_{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \left| \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^n \left| \sum_{k=1}^n x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left\| \left( \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \right)_{i=1}^n \right\|_2 \\
 &= \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)})_{i=1}^n \right\|_2.
 \end{aligned}$$

Mit der Khintchine-Kahane Ungleichung 2.18 bekommen wir

$$\frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)})_{i=1}^n \right\|_2 \sim \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \left( \text{Ave}_{\varepsilon} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)})_{i=1}^n \right\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

An dieser Stelle nutzen wir die verallgemeinerte Parallelogram-Gleichung 2.19 und erhalten

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \left( \text{Ave}_{\varepsilon} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k (x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)})_{i=1}^n \right\|_2^2 \right)^{1/2} &= \frac{1}{n!^2} \sum_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n \left\| (x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)})_{i=1}^n \right\|_2^2 \right)^{1/2} \\
 &= \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k,i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\
 &= \|x\|,
 \end{aligned}$$

d.h.  $\|\Psi(x)\|_1 \sim \|x\|$  und es folgt die Behauptung.  $\square$

Wir haben also gezeigt, dass der  $\mathbb{R}^n$  mit einer Norm die durch obiges Mittel von Permutationen gegeben ist  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist. Wie die Vektoren  $c^k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und  $d \in \mathbb{R}^n$  etwa im Fall der Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$ , zu wählen sind, werden wir später angeben. Wir zeigen als nächstes, dass dieselbe Norm äquivalent zu einem 1-Mittel von Orlicz-Normen ist.

LEMMA 3.4. *Es gibt Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle Vektoren  $c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm*

$$\|x\| = \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

*$C_1$ -isomorph zu einem 1-Mittel von Orlicz-Räumen ist, d.h. es existieren 2-konkave Orlicz-Funktionen  $M_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , und Koeffizienten  $\lambda_k \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $k = 1, \dots, N$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$*

$$\frac{1}{C_2} \sum_{k=1}^N \lambda_k \|x\|_{M_k} \leq \|x\| \leq C_2 \sum_{k=1}^N \lambda_k \|x\|_{M_k}$$

*gilt.*

BEWEIS. In obigem Lemma 3.3 haben wir bereits gezeigt, dass

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} &\sim \frac{1}{n!^2} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\pi, \sigma} \sum_{\delta, \varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \delta_i \varepsilon_k \right| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i \right\|_1, \end{aligned}$$

wobei die  $f_i$ 's wie in Lemma 3.3 gewählt sind. Wie im Beweis von Lemma 3.3 erhalten wir mit der Khintchine-Ungleichung für die Vorzeichen  $\delta$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n!^2} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\pi, \sigma} \sum_{\delta, \varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \delta_i \varepsilon_k \right| &\sim \frac{1}{n!^2} \frac{1}{2^n} \sum_{\pi, \sigma, \varepsilon} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_i \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma, \varepsilon} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei nach Satz 2.23 eine 2-konkave Orlicz-Funktion  $M(c, d, \varepsilon, \sigma)$  existiert, so dass

$$\|x\|_{M(c,d,\varepsilon,\sigma)} \sim \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right)^{1/2}.$$

Damit gilt

$$\frac{1}{n!^2} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{\pi, \sigma} \sum_{\delta, \varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n x_i \sum_{k=1}^n c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \delta_i \varepsilon_k \right| \sim \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma, \varepsilon} \|x\|_{M(c,d,\varepsilon,\sigma)},$$

d.h. wir haben also ein 1-Mittel von Orlicz-Normen mit  $n!2^n$  Summanden gefunden.  $\square$

Das Mittel besteht nun noch aus vielen Summanden, nämlich  $n!2^n$  Stück. Wir können mit Hilfe der Jensen-Ungleichung und der Khintchine-Ungleichung diese Darstellung auf nur noch  $n!$  Summanden verbessern. Wir formulieren dies im folgenden Lemma.

LEMMA 3.5. *Es existieren Konstanten  $C_1, C_2 > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle Vektoren  $c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm*

$$\|x\| = \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$C_1$ -isomorph zu einem 1-Mittel von  $n!$  Orlicz-Räumen ist, d.h. es existieren 2-konkave Orlicz-Funktionen  $M_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , und Koeffizienten  $\lambda_\sigma > 0$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{C_2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \|x\|_{M_\sigma} \leq \|x\| \leq C_2 \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \|x\|_{M_\sigma}$$

gilt.

BEWEIS. Wir wollen die Darstellung des Mittels von Orlicz-Normen

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} &\sim \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma, \varepsilon} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right| \right)^{1/2} \\ &\sim \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma, \varepsilon} \|x\|_{M_{(c^k, d, \varepsilon, \sigma)}} \end{aligned}$$

verbessern in dem Sinne, dass wir mit weniger Summanden auskommen. Wir erhalten zunächst aus der Jensen-Ungleichung

$$\text{Ave}_{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right| \right)^{1/2} \leq \left( \sum_{i=1}^n \text{Ave}_{\varepsilon} \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right| \right)^{1/2}$$

Mit der verallgemeinerten Parallelogramm-Gleichung 2.19 gilt nun

$$\left( \sum_{i=1}^n \text{Ave}_{\varepsilon} \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right| \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \sum_{k=1}^n |c_i^k d_{\sigma(k)}|^2 \right) \right)^{1/2}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} &\sim \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma,\varepsilon} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right| \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{Ave}_{\pi} \text{Ave}_{\varepsilon} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right| \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \sum_{k=1}^n |c_i^k d_{\sigma(k)}|^2 \right) \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Nun existiert nach Satz 2.23 eine 2-konkave Orlicz-Funktion  $M_{(c,d,\sigma)}$ , so dass

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \sum_{k=1}^n |c_i^k d_{\sigma(k)}|^2 \right) \right)^{1/2} \sim \|x\|_{M_{(c,d,\sigma)}}$$

und schließlich

$$\text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq \tilde{C} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \|x\|_{M_{(c,d,\sigma)}},$$

wobei  $\tilde{C} > 0$  eine absolute Konstante ist. Für die andere Richtung benutzen wir die Dreiecks-Ungleichung. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \sum_{\sigma,\varepsilon} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n \left| x_{\pi(i)} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right| \right|^2 \right)^{1/2} \\
 &\geq \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \text{Ave}_{\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right) \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

Nun liefert die Khintchine-Ungleichung

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \text{Ave}_{\varepsilon} \left| \sum_{k=1}^n c_i^k d_{\sigma(k)} \varepsilon_k \right|^2 \right) \right)^{1/2} \\
 &\geq B_2 \cdot \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \sum_{k=1}^n |c_i^k d_{\sigma(k)}|^2 \right) \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

wobei  $B_2 > 0$  eine absolute Konstante ist. Wie oben folgt aus Satz 2.23 nun

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_{\pi(i)}|^2 \left( \sum_{k=1}^n |c_i^k d_{\sigma(k)}|^2 \right) \right)^{1/2} \sim \|x\|_{M_{(c,d,\sigma)}}$$

und somit

$$\text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \geq B_2 C \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \|x\|_{M_{(c,d,\sigma)}}.$$

Insgesamt haben wir nun

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_2} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \|x\|_{M_{(c,d,\sigma)}} &\leq \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_2 \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \|x\|_{M_{(c,d,\sigma)}}, \end{aligned}$$

wobei  $C_2 > 0$  eine absolute Konstante ist. □

Wir wollen noch etwas genauer angeben, wie die Orlicz-Funktionen  $M_{(c,d,\sigma)}$  aussehen. Wir definieren zunächst

$$N(t) = \begin{cases} (2 - \frac{1}{n})^{-1} n t^2 & \text{für } t \leq \frac{1}{n} \\ (2 - \frac{1}{n})^{-1} (2 \cdot t - \frac{1}{n}) & \text{für } t > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

$N$  ist offensichtlich eine 2-konkave Orlicz-Funktion. Die Zusammensetzung dieser Funktion steht im Zusammenhang mit Satz 2.27. Der euklidische Anteil aus Satz 2.27 korrespondiert mit dem quadratischen Teil der Funktion, der 1-Norm Anteil mit dem linearen Teil. Zu  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \geq 0$ , betrachten wir die Funktion  $M_z : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  definiert durch

$$M_z(t) = \frac{\sum_{i=1}^n N(tz_i)}{\sum_{i=1}^n N(z_i)}.$$

$M_z$  ist wieder eine Orlicz-Funktion und es gilt das folgende Lemma.

LEMMA 3.6 (S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 1] Lemma 2.10). *Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \geq 0$ , gilt*

$$C^{-1} \|x\|_{M_z} \leq n \left( \sum_{i=1}^n M(z_i) \right)^{-1} \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i z_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \leq C \|x\|_{M_z}.$$

Einen Beweis findet man in [K-S 1]. Wir wollen nun weiter in Richtung des Beweises des Hauptsatzes. Was wir letztendlich zeigen wollen ist, dass bei geschickter Wahl von

$c^1, \dots, c^n, d \in \mathbb{R}^n$  unsere Norm

$$\|x\| = \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

äquivalent zur Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  des Lorentz-Raumes  $l_{q,p}^n$  ist, wobei  $1 \leq p < q < 2$  ist. Dann wenden wir Lemma 3.4 an und erhalten die Aussage von Satz 3.1. Wir benötigen noch ein weiteres Lemma, wobei wir zunächst einen wichtigen Spezialfall behandeln. Dies hat den Grund, dass dem Vektor  $(i^{-1/q})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  bei den Mittlungen eine besondere und in gewissenm Maße 'extreme' Rolle zukommt und die Beweisstrategie klarer wird. Zunächst wollen wir jedoch noch festhalten, dass

$$\gamma_k^p := k^{p/q} - k(k+1)^{p/q-1} \sim k^{p/q-1}, \quad k = 1, \dots, n,$$

gilt, da

$$\gamma_k^p = k \left( k^{p/q-1} - (k+1)^{p/q-1} \right) = k \left| \frac{k^{p/q-1} - (k+1)^{p/q-1}}{k - (k+1)} \right| \sim k k^{p/q-2} = k^{p/q-1}.$$

LEMMA 3.7. Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < q \leq 2$ . Dann gilt für den Vektor  $x = (i^{-1/q})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  die Abschätzung

$$(3.1) \quad C_1 \left( \sum_{i=1}^n \left| i^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} x_i^* \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} x_{\pi(i)}^2 \right)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_2 \left( \sum_{i=1}^n \left| i^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} x_i^* \right|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst die rechte Seite von (3.1). Für den speziellen Vektor  $x = (i^{-1/q})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  erhalten wir

$$\left( \sum_{i=1}^n \left| i^{1/q-1/p} x_i^* \right|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n \left| i^{1/q-1/p} i^{-1/q} \right|^p \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \right)^{1/p} \sim \ln(n)^{1/p}$$

Zu zeigen ist also, dass die linke Seite von (3.1) dieselbe Größenordnung besitzt. Wir erhalten aus der Jensen-Ungleichung, Korollar 2.29 und Satz 2.31, dass bis auf absolute



Konstante die linke Seite kleiner oder gleich der rechten Seite ist:

$$\begin{aligned} \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} &= \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} \pi(i)^{-2/q} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \left( \text{Ave}_\pi \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Wir wenden jetzt Korollar 2.29 an und erhalten

$$\left( \text{Ave}_\pi \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \frac{1}{k} \left| \left( \sum_{i=1}^k |x_i^*|^p \right)^{1/p} + k^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Mit unserer Wahl  $\gamma_k^p := k^{p/q} - k(k+1)^{p/q-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , liefert uns Satz 2.31, dass der obige Ausdruck gerade die Größenordnung der gewünschte Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  hat. Also existiert eine absolute Konstante  $C > 0$ , so dass

$$\text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} \pi(i)^{-2/q} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq C \ln(n)^{1/p}.$$

Wir kommen zur unteren Abschätzung von (3.1). Diese Richtung liefert uns die Dreiecks-Ungleichung:

$$\text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} \pi(i)^{-2/q} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \stackrel{\Delta}{\geq} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} \pi(i)^{-2/q} \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Es genügt zu zeigen, dass für jedes  $k = 1, \dots, n$  eine Menge  $M_k$  von Permutationen existiert, welche großes Maß unabhängig von der Dimension besitzt und auf welcher

$$(3.2) \quad \left( \sum_{i \leq n/k} \pi(i)^{-2/q} \right)^{1/2} \geq k^{-1/q}$$

gilt.

Wir definieren uns die Mengen

$$M_k := \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n \mid \exists i \leq \frac{n}{k} : \pi(i) \leq k \right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Auf jeder dieser Mengen ist (3.2) erfüllt. Wir müssen noch zeigen, dass diese Mengen großes Maß besitzen - es ist tatsächlich  $\mathbb{P}(M_k) \sim 1 - e^{-1}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Dies zeigen wir durch einige kombinatorische Überlegungen. Zunächst gehen wir zum Komplement über, i.e.

$$M_k^c = \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n \mid \forall i \leq \frac{n}{k} : \pi(i) > k \right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Die Frage ist, wie viele Permutationen in  $M_k^c$  sind. Für alle  $i \leq \frac{n}{k}$  soll  $\pi(i) > k$  sein. Denken wir an Vektoren mit Einträgen aus  $\{1, \dots, n\}$ , die jeweils verschieden sind, d.h. jede Zahl taucht genau einmal auf, so haben wir für den ersten Eintrag  $(n - k)$  Möglichkeiten, für den Zweiten noch  $(n - k - 1)$  bis wir für den  $n/k$ -ten Eintrag schließlich noch  $(n - k - n/k + 1)$  Möglichkeiten haben. Was in den restlichen Komponenten steht, ist frei aufteilbar, d.h. wir haben  $(n - n/k)!$  Möglichkeiten. Insgesamt finden wir also

$$(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot (n - k - n/k + 1) \cdot (n - n/k)!$$

Permutationen in  $M_k$ . Wir betrachten das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{P}$  auf  $\mathfrak{S}_n$  mit  $\mathbb{P}(\pi) = \frac{1}{n!}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_k^c) &= \frac{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot (n - k - n/k + 1) \cdot (n - n/k)!}{n!} \\ &= \frac{(n - k) \cdot (n - k - 1) \cdot \dots \cdot (n - 2^j - n/k + 1)}{n \cdot \dots \cdot (n - n/k + 1)} \\ &\leq \left( \frac{n - k}{n} \right)^{n/k} = \left( 1 - \frac{k}{n} \right)^{n/k} \leq \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathbb{P}(M_k) = 1 - \mathbb{P}(M_k^c) \geq 1 - \frac{1}{e}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathfrak{S}_n} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} \pi(i)^{-2/q} \right)^{p/2} \right)^{1/p} d\mathbb{P}(\pi) \\
 & \geq \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \int_{\mathfrak{S}_n} \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} \pi(i)^{-2/q} \right)^{1/2} d\mathbb{P}(\pi) \right|^p \right)^{1/p} \\
 & \geq \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \int_{M_k} (k^{-2/q})^{1/2} d\mathbb{P}(\pi) \right|^p \right)^{1/p} \\
 & \geq \mathbb{P}(M_k) \left( \sum_{k=1}^n k^{p/q-1} k^{-p/q} \right)^{1/p} \geq c \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \ln(n)^{1/p},
 \end{aligned}$$

wobei  $c > 0$  aus der Abschätzung mit dem Logarithmus kommt und wir benutzt haben, dass  $\gamma_k^p \sim k^{p/q-1}$ . Damit ergibt sich also

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} \pi(i)^{-2/q} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \geq c \left( 1 - \frac{1}{e} \right) \ln(n)^{1/p}$$

und somit die Behauptung. □

Wir wollen nun den allgemeinen Fall beweisen, wobei wir am Ende auf die genaue Ausführung des kombinatorischen Arguments verzichten, da es analog zum Spezialfall ist. Im Spezialfall erkennt man aber einfacher, wie die Mengen auszusehen haben.

LEMMA 3.8. *Es existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $1 \leq p \leq q \leq 2$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  die Abschätzung*

$$(3.3) \quad \frac{1}{C} \left( \sum_{i=1}^n \left| i^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} x_i^* \right|^p \right)^{1/p} \leq \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq C \left( \sum_{i=1}^n \left| i^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} x_i^* \right|^p \right)^{1/p}$$

*gilt.*

BEWEIS. Im allgemeinen Fall erhalten wir die obere Abschätzung aus der Jensen-Ungleichung und die untere Abschätzung aus der Dreiecks-Ungleichung. Wir folgen dem Beweis des Spezialfalles und beginnen mit der Abschätzung nach oben:

$$\begin{aligned}
 & \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 & \stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 & \stackrel{\text{Kor. 2.29}}{\leq} \left( \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k^p}{k} \left| \left( \sum_{i=1}^k |x_i^*|^p \right)^{1/p} + k^{1/p-1/2} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_i^*|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\
 & = \left( \sum_{k=1}^n (k^{p/q-1} - (k+1)^{p/q-1}) \left| \left( \sum_{i=1}^k |x_{\pi(i)}^*|^p \right)^{1/p} + k^{1/p-1/2} \left( \sum_{i=k+1}^n |x_{\pi(i)}^*|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\
 & \stackrel{\text{Satz 2.31}}{\leq} C \|x\|_{d^n(a,p)} = C \|x\|_{q,p},
 \end{aligned}$$

wobei hier  $a = (a_k)_{k=1}^n := (k^{p/q-1})_{k=1}^n$  ist. Man beachte, dass wieder  $a_{n+1} = 0$  gelten soll.

Wir kommen jetzt zur Abschätzung nach unten:

Im allgemeinen Fall betrachten wir die Mengen

$$M_k := \left\{ \pi \in \mathfrak{S}_n \mid \exists i \leq \frac{n}{k} : x_{\pi(i)} \geq x_k^* \right\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Analog zum Spezialfall zeigt man, dass

$$\mathbb{P}(M_k) \geq 1 - \frac{1}{e}$$

gilt. Damit erhalten wir aus der Dreiecks-Ungleichung

$$\begin{aligned}
 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} &\stackrel{\Delta}{\geq} \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\
 &= \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \int_{\mathfrak{S}_n} \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{1/2} d\mathbb{P}(\pi) \right|^p \right)^{1/p} \\
 &\geq \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \int_{M_k} \left( \sum_{i \leq n/k} x_{\pi(i)}^2 \right)^{1/2} d\mathbb{P}(\pi) \right|^p \right)^{1/p} \\
 &\geq \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left| \int_{M_k} x_k^* d\mathbb{P}(\pi) \right|^p \right)^{1/p} \\
 &\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p x_k^{*p} \right)^{1/p} \sim \left(1 - \frac{1}{e}\right) \|x\|_{q,p},
 \end{aligned}$$

denn  $\gamma_k^p \sim k^{p/q-1}$ . Somit haben wir absolute Konstanten gefunden, so dass die Abschätzungen gelten und damit folgt die Behauptung.  $\square$

Wir erinnern daran, dass der rechte Ausdruck in (3.1) und (3.3) gerade die Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  ist und kommen nun zum Beweis des Hauptsatzes aus diesem Abschnitt der Arbeit.

BEWEIS VON SATZ 3.1. Wir wollen zuerst bemerken, dass nach Satz 2.22 und Beispiel 2.26 die Wahl  $d = \left(\binom{n}{l}\right)_{l=1}^{1/p}$  gerade

$$\begin{aligned}
 C_1 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \left| \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} &\leq \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq C_2 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \left| \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p}
 \end{aligned}$$

liefert, wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind. Zudem bemerken wir nochmal, dass der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der obigen Norm nach Lemma 3.3  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist. Wir wollen nun die Vektoren  $c^k$ ,  $k = 1, \dots, n$  spezifizieren. Wir setzen  $c^k :=$

$(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)\gamma_k$  mit  $\frac{n}{k}$  Einsen, sonst Nullen und wählen den Faktor  $\gamma_k := (k^{p/q} - k(k+1)^{p/q-1})^{1/p}$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Diese Wahl erzeugt uns später die Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$ ,  $1 \leq p \leq q < 2$ . Wir bekommen mit der speziellen Wahl der  $c^k$ ,  $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} C_1 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} &\leq \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C_2 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \gamma_k^p \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Wir wenden jetzt Lemma 3.8 an und erhalten

$$C_3 \|x\|_{q,p} \leq \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_4 \|x\|_{q,p}.$$

Mit Lemma 3.4 und mit der verbesserten Darstellung aus Lemma 3.5 folgt nun die Behauptung des Satzes, i.e. es existieren 2-konkave Orlicz-Funktionen  $M_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , und Koeffizienten  $\lambda_\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , so dass

$$\frac{1}{C} \|x\|_{q,p} \leq \sum_\sigma \lambda_\sigma \|x\|_{M_\sigma(c,d)} \leq C \|x\|_{q,p},$$

mit  $\lambda_\sigma = 1/n!$  und  $\sum_\sigma \lambda_\sigma = 1$  und absoluter Konstanten  $C > 0$ . Aus dem Beweis von Lemma 3.5 geht hervor, dass die Orlicz-Normen von den Vektoren

$$y^\sigma = \left( \left( \sum_{k \leq \frac{n}{i}} |k(k^{p/q-1} - (k+1)^{p/q-1})|^{2/p} \left( \frac{n}{\sigma(k)} \right)^{2/p} \right)^{1/2} \right)^n, \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

erzeugt werden, d.h. für alle  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{\pi(i)}^\sigma|^2 \right)^{1/2} \sim \|x\|_{M_\sigma}.$$

Dies liefert uns die explizite Darstellung der Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{q,p}$  als ein 1-Mittel von Orlicz-Normen und damit die Behauptung des Satzes. □

Wir können nun den Beweis für die direkte Einbettung von  $l_{q,p}^n$  nach  $L_1^{n!2^{2n}}$  führen.

BEWEIS VON SATZ 3.2. Die Einbettung ist gegeben durch

$$\Psi : l_{q,p}^n \hookrightarrow L_1^{n!2^{2n}}, \quad x \mapsto \left( \sum_{i,k=1}^n x_i \varepsilon_i \delta_k c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \right)_{\varepsilon, \delta, \pi, \sigma},$$

wobei wir  $c^k := (\underbrace{1, \dots, 1}_{n/k\text{-mal}}, 0, \dots, 0) \gamma_k \in \mathbb{R}^n$  mit  $\gamma_k = (k^{p/q} - k(k+1)^{p/q-1})^{1/p} \in \mathbb{R}$ ,  $k =$

$1, \dots, n$ , wählen und den Vektor  $d \in \mathbb{R}^n$  nach Satz 2.22 und Beispiel 2.26 als  $((\frac{n}{l})^{1/p})_{l=1}^n \in \mathbb{R}^n$ . Die Khintchine-Ungleichung 2.17 liefert uns dann

$$\begin{aligned} \|\Psi(x)\|_1 &= \sum_{\pi, \sigma} \sum_{\varepsilon, \delta} \left| \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{n!} \sum_{i,k=1}^n \varepsilon_i \delta_k x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \right| \\ &= \text{Ave}_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon, \delta} \left| \sum_{i,k=1}^n \varepsilon_i \delta_k x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \right| \\ &= \text{Ave}_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \text{Ave}_{\delta} \left| \sum_{k=1}^n \delta_k d_{\sigma(k)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i c_{\pi(i)}^k \right| \\ &\stackrel{Kh}{\sim} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^n \left| d_{\sigma(k)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i c_{\pi(i)}^k \right|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Jensen-Ungleichung und der verallgemeinerten Parallelogramm-Gleichung 2.19 schätzen wir diesen Ausdruck weiter nach oben ab und bekommen

$$\begin{aligned} &\text{Ave}_{\pi, \sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^n \left| d_{\sigma(k)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i c_{\pi(i)}^k \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{Jensen}{\leq} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^2 \text{Ave}_{\varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i c_{\pi(i)}^k \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{Kh}{\sim} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^2 \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{1/2} \\ &= \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\stackrel{\text{Satz 3.1}}{\sim} \|x\|_{q,p}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung nach unten benutzen wir die Dreiecks-Ungleichung und die Khintchine-Ungleichung 2.17. Es gilt

$$\begin{aligned}
 & \text{Ave}_{\pi,\sigma} \text{Ave}_{\varepsilon} \left( \sum_{k=1}^n \left| d_{\sigma(k)} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i c_{\pi(i)}^k \right|^2 \right)^{1/2} \\
 & \stackrel{\Delta}{\geq} \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{k=1}^n \left( \text{Ave}_{\varepsilon} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} \right|^2 \right) \right)^{1/2} \\
 & \stackrel{Kh}{\sim} \text{Ave}_{\pi,\sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\
 & \stackrel{\text{Satz 3.1}}{\sim} \|x\|_{q,p}.
 \end{aligned}$$

Damit haben wir also gezeigt, dass wir absolute Konstanten  $c, C > 0$  finden, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$c \|x\|_{q,p} \leq \|\Psi(x)\|_1 \leq C \|x\|_{q,p}$$

gilt. Daraus folgt die Behauptung. □

Wir wollen hier nochmal bemerken, dass  $1 \leq p < q < 2$  benötigt wird, um  $l_{q,p}^n$  nach  $L_1$  einzubetten, denn in [Cree] wurde gezeigt, dass in diesem Fall  $L_{q,p}$  Typ  $p$  und Cotyp 2 hat, aber im Fall  $q = 2$  den Cotyp  $2 + \varepsilon$  für alle  $\varepsilon > 0$ . Da Typ und Cotyp isomorph invariant sind und sich auf Teilräume vererben und da  $L_1$  Typ 1 und Cotyp 2 hat, ergibt sich der genannte Bereich für  $p$  und  $q$ .



---

### Der Raum $d^n(a, p)$ als 1-Mittel von Orlicz-Räumen und seine direkte Einbettung nach $L_1$

---

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass auch die Lorentz-Räume  $d^n(a, p)$  1-Mittel von Orlicz-Räumen sind und nach  $L_1$  einbetten, wobei dafür eine Summationsbedingung an die Folge  $a$  notwendig ist, wie in [Sch2] gezeigt wurde. Wir benötigen für die direkte Einbettung nach  $L_1$  noch eine weitere Bedingung an die Folge  $a$ , die allerdings keine große Einschränkung ist. Im Fall der Lorentz-Räume  $l_{p,q}^n$  erfüllen die Gewichte diese Bedingung aus [Sch2], weshalb wir diese im letzten Kapitel nicht explizit benötigt haben. Wir folgen beim Beweis unserem Beweis des Spezialfalles für die Lorentz-Räume  $l_{q,p}^n$  bzw. in Teilen dem Beweis aus [Sch2]. Auch hier ist es wieder entscheidend, dass wir über ein Doppelmittel von Permutationen einen Ausdruck äquivalent zur Norm in Satz 2.31 erzeugen können, wobei wir die Parameter entsprechend wählen müssen. Bei der Darstellung von  $d^n(a, p)$  als ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen ist wieder die explizite Darstellung der Orlicz-Normen von Bedeutung. Diese ist wieder ein Ergebnis unseres konstruktiven Zugangs. Es gilt also der folgende Satz.

SATZ 4.1. Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq p < 2$  und  $1 = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ , so dass für alle  $k = 1, \dots, n$

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^k a_i i^{-p/2} \leq C_1 k^{1-p/2} a_k$$

und

$$(4.2) \quad \sum_{i=k+1}^n a_i i^{-1} \leq C_2 a_k$$

gilt. Dann existieren 2-konkave Orlicz-Funktionen  $M_\sigma$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , und Koeffizienten  $\lambda_\sigma > 0$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{C} \|x\|_{d^n(a,p)} \leq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \|x\|_{M_\sigma} \leq C \|x\|_{d^n(a,p)}$$

gilt, wobei  $C > 0$  ein absolute Konstante ist, die nur  $p$  abhängt. Die Orlicz-Normen werden von den Vektoren

$$y^\sigma = \left( \left( \sum_{k \leq \frac{n}{\sigma(i)}} a_k^{2/p} \left( \frac{n}{\sigma(k)} \right)^{2/p} \right)^{1/2} \right)_{i=1}^n, \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

erzeugt und es gilt für alle  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{c} \|x\|_{M_\sigma} \leq \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{\pi(i)}^\sigma|^2 \right)^{1/2} \leq c \|x\|_{M_\sigma},$$

wobei  $c > 0$  eine absolute Konstante ist.

BEWEIS. Wir betrachten für  $x \in \mathbb{R}^n$  die Norm

$$\|x\| = \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2},$$

wobei wir für  $k = 1, \dots, n$  den Vektor  $c^k = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \cdot a_k^{1/p} \in \mathbb{R}^n$  mit  $\frac{n}{k}$  Einsen wählen und  $d = ((\frac{n}{i})^{1/p})_{i=1}^n$ . Nach Lemma 3.4 wissen wir, dass  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$   $C_2$ -isomorph zu einem 1-Mittel von Orlicz-Räumen ist. Wir müssen also noch zeigen, dass die Normen  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|_{d^n(a,p)}$  äquivalent sind, denn dann ist  $d^n(a, p)$  ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen und bettet nach  $L_1^{n!2^{2n}}$  ein, wobei wir auf die Einbettung im nächsten Satz eingehen.

Wir beginnen mit der unteren Abschätzung. Es gilt nach Beispiel 2.26

$$\begin{aligned} \frac{1}{B_1} \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} &\leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq B_1 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

wobei  $B_1 > 0$  eine absolute Konstante ist. Die spezielle Wahl der Vektoren  $c^1, \dots, c^n$  liefert uns

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B_1} \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq B_1 \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{i \leq \frac{n}{k}} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Die Dreiecks-Ungleichung liefert uns

$$\begin{aligned} &\text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\ &\geq \left( \sum_{k=1}^n a_k \left| \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Mit Korollar 2.29 folgt

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^n a_k \left| \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\ & \geq \frac{1}{B_3} \left( \sum_{k=1}^n a_k \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\ & \geq \frac{1}{B_3} \left( \sum_{k=1}^n a_k \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* \right|^p \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

wobei  $B_3 > 0$  die Konstante aus Korollar 2.29 ist. Für alle  $k = 1, \dots, n$  gilt offensichtlich  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* \geq x_k^*$ , so dass schließlich

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{B_4} \left( \sum_{k=1}^n a_k x_k^{*p} \right)^{1/p} = \frac{1}{B_4} \|x\|_{d^n(a, p)}$$

folgt, wobei  $B_4 > 0$  eine absolute Konstante ist, die sich aus  $B_3$  und der Konstanten aus Beispiel 2.26 zusammensetzt.

Kommen wir zur oberen Abschätzung. Analog zur unteren Abschätzung gilt zunächst

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \sim \text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Aus der Jensen-Ungleichung folgt

$$\text{Ave}_\pi \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}.$$

Mit Korollar 2.29 folgt nun

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k \left| \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p}.$$

Wenden wir die Dreiecks-Ungleichung an, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^n a_k \left| \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\ & \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} + \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{p/2} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Nun folgt mit Bedingung 4.2 für den ersten Summanden

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} = \left( \sum_{i=1}^n x_i^{*p} \sum_{k=i+1}^n \frac{a_k}{k} \right)^{1/p} \leq \|x\|_{d^n(a,p)}.$$

Den zweiten Summanden schätzen wir analog zu Satz 2.31 darüber ab, dass  $\|\cdot\|_2 \leq 2^{1/p} \|\cdot\|_{2,p}$  gilt. Wir wenden dies auf den Vektor  $(x_k^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*) \in \mathbb{R}^n$  an und erhalten

$$\begin{aligned} \|(x_k^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)\|_2 & \leq 2^{1/p} \|(x_k^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)\|_{2,p} \\ & = 2^{1/p} \left( x_k^{*p} \sum_{i=1}^k i^{p/2-1} + \sum_{i=k+1}^n i^{p/2-1} x_i^{*p} \right)^{1/p} \\ & \leq \tilde{B}_p \left( x_k^{*p} k^{p/2} + \sum_{i=k+1}^n i^{p/2-1} x_i^{*p} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

d.h.

$$(4.3) \quad \|(x_k^*, \dots, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)\|_2^p \leq B_p \left( x_k^{*p} k^{p/2} + \sum_{i=k+1}^n i^{p/2-1} x_i^{*p} \right).$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{p/2} \right)^{1/p} & \leq \left( \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{p/2}} \left( \sum_{i=1}^k x_i^{*2} + \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\ & \stackrel{(4.3)}{\leq} B_p^{1/p} \left( \sum_{k=1}^n a_k x_k^{*p} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{p/2}} \sum_{i=k+1}^n C_i x_i^{*p} \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

wobei  $C_i = i^{p/2-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ist und somit  $\sum_{i=1}^j C_i \sim j^{p/2}$  gilt. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k x_k^{*p} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{p/2}} \sum_{i=k+1}^n C_i x_i^{*p} \right)^{1/p} \leq \|x\|_{d^n(a,p)} + \left( \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{p/2}} \sum_{i=k+1}^n C_i x_i^{*p} \right)^{1/p}.$$

Umsummieren und Bedingung (4.1) liefert uns

$$\left( \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^{p/2}} \sum_{i=k+1}^n C_i x_i^{*p} \right)^{1/p} \leq B_5 \|x\|_{d^n(a,p)}.$$

Schließlich folgt

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq B_6 \|x\|_{d^n(a,p)},$$

wobei  $B_6 > 0$  eine absolute Konstante ist. Insgesamt haben wir also

$$\frac{1}{B} \|x\|_{d^n(a,p)} \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq B \|x\|_{d^n(a,p)},$$

wobei  $B > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $p$  abhängt. Aus dem Beweis von Lemma 3.5 geht hervor, dass die Orlicz-Normen, für die die Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{d^n(a,p)}$  äquivalent zum 1-Mittel dieser Orlicz-Normen ist, von den Vektoren

$$y^\sigma = \left( \left( \sum_{k \leq \frac{n}{i}} a_k^{2/p} \left( \frac{n}{\sigma(k)} \right)^{2/p} \right)^{1/2} \right)_{i=1}^n, \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

erzeugt werden, d.h. für alle  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{\pi(i)}^\sigma|^2 \right)^{1/2} \sim \|x\|_{M_\sigma}.$$

Insbesondere erhalten wir daraus für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{C} \|x\|_{d^n(a,p)} \leq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \lambda_\sigma \|x\|_{M_\sigma} \leq C \|x\|_{d^n(a,p)},$$

wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $p$  abhängt. Dies liefert uns die explizite Darstellung der Lorentz-Norm  $\|\cdot\|_{d^n(a,p)}$  als ein 1-Mittel von Orlicz-Normen und damit die Behauptung des Satzes.  $\square$

Wir wollen noch bemerken, dass wir nach Beispiel 2.26 im obigen Satz 4.1  $1 \leq p < 2$  benötigen. Würden wir Satz 2.22 anwenden, um die  $p$ -Norm zu erzeugen, so müssten wir unseren Satz mit  $1 < p < 2$  formulieren, da die Orlicz-Funktion strikt konvex und strikt 2-konkav sein muss. Es muss  $p < 2$  sein, da der Vektor  $d = ((n/l)^{1/p})_{l=1}^n$  sonst nicht die  $p$ -Norm erzeugt. Wie Carsten Schütt in [Sch2] zeigte, ist  $p < 2$  notwendig für eine Einbettung nach  $L_1$  und damit kein Resultat des gewählten Zugangs. Des Weiteren ist Bedingung 4.2 keine starke Forderung, da etwa alle Gewichte der Form  $a_i = i^{-\beta}$ ,  $\beta > 0$ , sie erfüllen. Die Gewichte dürfen also lediglich nicht zu langsam fallen.

Analog zu Satz 3.2 erhalten wir nun die direkte Einbettung der Lorentz-Räume  $d^n(a, p)$  nach  $L_1^{n!2^{2^n}}$ .

**SATZ 4.2.** *Sei  $1 \leq p < 2$  und  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  so, dass (4.1) und (4.2) erfüllt sind. Dann existiert eine Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  ein Teilraum  $Y_n$  von  $L_1^{n!2^{2^n}}$  mit  $\dim(Y_n) = n$  und  $d(Y_n, d^n(a, p)) \leq C$  existiert. Die Lorentz-Räume  $d^n(a, p)$  betten also nach  $L_1^{n!2^{2^n}}$  ein.*

**BEWEIS.** Nach Lemma 3.3 existiert ein Teilraum  $Y_n$  von  $L_1^{n!2^{2^n}}$  mit  $\dim(Y_n) = n$  und  $d((\mathbb{R}^n, \|\cdot\|), Y_n) \leq C_1$ , wobei  $C_1 \geq 1$  eine absolute Konstante ist. Man folgt nun einfach dem Beweis für Satz 3.2 mit der veränderten Wahl der  $c^k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , und wendet dann Satz 4.1 an.  $\square$

Wir wollen noch Bemerken, dass die Bedingung (4.2) möglicherweise durch bessere Abschätzungen weggelassen werden kann. Wie in [Sch2] gezeigt wurde ist lediglich (4.1) eine notwendige Bedingung.

---

## Kombinatorische Ungleichungen in der Banachraumtheorie

---

Wir wollen uns in diesem Abschnitt genauer mit kombinatorischen Ungleichungen in der Banachraumtheorie beschäftigen. Es handelt sich hierbei um Ausdrücke, bei denen wir mit Hilfe von Permutationen  $\pi$  der Menge  $\{1, \dots, n\}$  die Maxima von Komponenten von Tensormatrizen in Abhängigkeit von  $\pi$  mitteln.

Wir werden eine neue Darstellung einer kombinatorischen Ungleichung für  $n \times n$ -Matrizen in Termen zweier Normen beweisen. Wir bauen auf den Arbeiten **[K-S 1]** und **[K-S 2]** von Carsten Schütt und Stanislaw Kwapien auf. Es wird dort unter anderem gezeigt, dass der Ausdruck

$$\text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{\pi(i)}|$$

äquivalent zu einer Orlicz-Norm ist, die durch den Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$  erzeugt wird. Für Anwendungen dieser Ungleichungen in der Banachraumtheorie wird ebenfalls auf die obigen Arbeiten und **[Sch2]** verwiesen.

Sei  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n > 0$ . Wir assoziieren dann mit  $y \in \mathbb{R}^n$  eine konvexe Funktion  $M_y$  mit  $M_y(0) = 0$  darüber, dass deren duale Funktion über

$$M_y^* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_i \right) = \frac{k}{n}, \quad k = 1, \dots, n,$$



definiert wird, die wir zwischen den Werten linear fortsetzen. Wir werden eine analoge Aussage für den komplizierteren Ausdruck

$$(5.1) \quad \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}|, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, x, y \in \mathbb{R}^n,$$

herleiten, wobei wir in einigen Fällen eine konkretere Darstellung als in [K-S 2] angeben. Zudem ist die Methode anderer und in gewissem Maße einfacherer Natur. Wir wollen aber betonen, dass der Satz von Kwapien und Schütt die Situation dafür in vollster Allgemeinheit beschreibt. Es wird sich zeigen, dass wir bei geeigneter Wahl von  $x$  und  $y$  die Darstellung

$$\left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p$$

für (5.1) erreichen. Der allgemeinere Fall, in dem wir bei geeigneter Wahl von  $x$  und  $y$  die  $M$ -Norm von der  $N$ -Norm erwarten, kann aufgrund großer technischer Schwierigkeiten nicht gezeigt werden und es ist unklar ob eine solche Abschätzung gilt. Es ergeben sich lediglich Abschätzungen nach unten und nach oben, wobei es nicht sicher ist, ob im Allgemeinen Äquivalenz dieser Ausdrücke vorliegt. Über zwei verschiedene Beweisstrategien können wir allerdings unter gewissen Voraussetzungen zeigen, dass der Ausdruck (5.1) bei geeigneter Wahl der Vektoren  $x$  und  $y$  in der Größenordnung der  $p$ -Norm von der  $M$ -Norm, bzw. wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, der  $N$ -Norm von der  $q$ -Norm liegt. Zunächst führen wir aber den Satz von Kwapien und Schütt an.

SATZ 5.1 (S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 2] Example 1.6). *Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für jeden Tensor vierter Stufe  $a$  des  $\mathbb{R}^n$  mit nichtnegativen Einträgen gilt*

$$\frac{1}{7n^2} \max_A \sum_{(i,j,k,l) \in A} a(i,j,k,l) \leq \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} a(i,j,\pi(i),\sigma(j)) \leq \frac{4}{n^2} \max_A \sum_{(i,j,k,l) \in A} a(i,j,k,l),$$

wobei das Maximum über alle Mengen  $A \subset \{1, \dots, n\}^4$  mit  $|A| \leq n^2$  und

$$\forall i, k \leq n : \quad |A \cap \{(i, j, k, l) | j, l = 1, \dots, n\}| \leq n$$

und

$$\forall j, l \leq n : \quad |A \cap \{(i, j, k, l) | i, k = 1, \dots, n\}| \leq n$$

gebildet wird.

Man kann natürlich auf die Nichtnegativität der Einträge verzichten, falls man die Beträge der Einträge betrachtet. Es gilt der folgende und entscheidende Satz über die Erzeugung von Orlicz-Normen.

SATZ 5.2 (S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 1] Corollary 2.2). Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $y \in \mathbb{R}^n$  mit  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n > 0$ . Sei  $M$  eine Orlicz-Funktion, die für alle  $k = 1, \dots, n$

$$(5.2) \quad M^* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_i \right) = \frac{k}{n}$$

erfüllt. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{c_n}{2} \|x\|_M \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{\pi(i)}| \leq 2 \|x\|_M,$$

wobei  $c_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$ .

Man kann die Normalisierung auch so wählen, dass  $\sum_{i=1}^n y_i = 1$  ist und für die Orlicz-Funktion  $M(1) = 1$  gilt. Dann erhält man

$$\frac{c_n}{2n} \|x\|_{M_y} \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{\pi(i)}| \leq \frac{2}{n} \|x\|_{M_y}.$$

Eine zu  $M_y$  ähnliche Funktion erzeugt natürlich entsprechend eine äquivalente Norm. Wir werden im Folgenden manchmal auf die genaue Kennzeichnung der Orlicz-Funktion verzichten, d.h.  $M$  statt  $M_y$  schreiben. Wir wollen zunächst ein Lemma formulieren, welches uns zeigt, wie der Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$  zu wählen ist, damit er zu einer vorgegebenen Orlicz-Funktion  $M$  die dazugehörige  $M$ -Norm erzeugt.

LEMMA 5.3. Es gibt eine absolute Konstante  $C > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$ , für alle Orlicz-Funktionen  $M$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$C \|x\|_M \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i n \left( M^{*-1} \left( \frac{\pi(i)}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{\pi(i) - 1}{n} \right) \right) \right| \leq 2 \|x\|_M$$

gilt.

BEWEIS. Der Beweis ist eine einfache Anwendung von Satz 5.2 auf den Vektor  $y \in \mathbb{R}^n$  mit

$$y_i = n \left( M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right) \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Offensichtlich gilt dann für alle  $k = 1, \dots, n$

$$M^* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k y_i \right) = M^* \left( \sum_{i=1}^k \left( M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right) \right) \right) = \frac{k}{n}.$$

Jetzt liefert Satz 5.2 die Behauptung. □

Wir wollen den speziellen Fall betrachten, in dem der Vektor  $y$  eine  $p$ -Norm erzeugt (vgl. Beispiel 2.26).

BEISPIEL 5.4. Sei  $1 < p < \infty$ . Dann existieren absolute Konstanten  $c_p, C_p > 0$ , so dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$c_p \|x\|_p \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i \left( \frac{n}{\pi(i)} \right)^{1/p} \right| \leq C_p \|x\|_p$$

gilt, d.h. der Vektor  $\left( \left( \frac{n}{i} \right)^{1/p} \right)_{i=1}^n$  erzeugt die  $p$ -Norm.

BEWEIS. Es sei  $M : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ,  $t \mapsto t^p$ . Aus Lemma 5.3 folgt

$$C \|x\|_M \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i n \left( M^{*-1} \left( \frac{\pi(i)}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{\pi(i) - 1}{n} \right) \right) \right| \leq 2 \|x\|_M.$$

Man rechnet leicht nach, dass  $M^{*-1}(t) = p(p-1)^{\frac{1}{p}-1} t^{\frac{p-1}{p}}$  ist und damit  $(M^{*-1})'(t) = (p-1)^{\frac{1}{p}} t^{-\frac{1}{p}}$ . Wir schätzen nun weiter ab. Für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$\begin{aligned} (p-1)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{n}{i} \right)^{\frac{1}{p}} &= (M^{*-1})' \left( \frac{i}{n} \right) \leq \frac{M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right)}{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}} \\ &= n \left( M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right) \right), \end{aligned}$$

wobei die Ungleichung einfach aus der Konvexität von  $M$  folgt. Außerdem liefert die Konvexität von  $M$  für alle  $i = 2, \dots, n$

$$n \left( M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right) \right) \leq (M^{*-1})' \left( \frac{i-1}{n} \right) = (p-1)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{n}{i-1} \right)^{\frac{1}{p}}$$

und im Fall  $i = 1$  gilt

$$n \left( M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right) \right) = n M^{*-1} \left( \frac{1}{n} \right) = p(p-1)^{\frac{1}{p}-1} n^{\frac{1}{p}}.$$

Somit gilt für alle  $i = 1, \dots, n$

$$n \left( M^{*-1} \left( \frac{i}{n} \right) - M^{*-1} \left( \frac{i-1}{n} \right) \right) \leq p(p-1)^{\frac{1}{p}-1} \left( \frac{2n}{i} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Insgesamt folgt also

$$C_1 \frac{p-1}{p} \|x\|_p \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i \left( (p-1) \frac{n}{\pi(i)} \right)^{1/p} \right| \leq C_2 \|x\|_p,$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind. Somit gilt die Behauptung.  $\square$

Im Beweis erkennt man klar, warum  $p > 1$  sein muss. Wir wollen nun den ersten Satz über die konkretere Darstellung des Doppelmittels beweisen.

**SATZ 5.5.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Des Weiteren seien  $x^j = ((\frac{n}{i})^{1/q_j})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und  $y = ((\frac{n}{i})^{1/p})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $1 < p < q_1, \dots, q_n < \infty$ , gegeben. Dann folgt*

$$C_1 \left\| \left( C_{1,q_j} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( C_{2,q_j,p} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p,$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind, die nur von  $p$  abhängen, die Konstante  $C_{1,q_j}$  von  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , abhängt und  $C_{2,q_j,p}$  von  $p$  und  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

**BEWEIS.** Wir beginnen mit der leichten Abschätzung nach unten. Dafür verwenden wir die Dreiecksungleichung und Satz 5.2 in der Formulierung von Beispiel 5.4. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j y_{\sigma(j)}| &\sim \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \left| \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j| \right|^p \right)^{1/p} \\ &\triangleq \left( \sum_{j=1}^n \left| \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j| \right|^p \right)^{1/p} \\ &\geq \left( \sum_{j=1}^n \left| C_{1,q_j} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_{q_j} \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \left\| \left( C_{1,q_j} \|(a_{ij})_{i=1}^n\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur Abschätzung nach oben. Wir benutzen wieder Satz 5.2 mit Beispiel 5.4 und die Jensen-Ungleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j y_{\sigma(j)}| &\sim \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \left| \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j| \right|^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{j=1}^n \text{Ave}_{\pi} \left| \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}^j| \right|^p \right)^{1/p} \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}^p x_{\pi(i)}^{jp}| \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Es ist  $((x_i^j)^p)_{i=1}^n = ((\frac{n}{i})^{p/q_j})_{i=1}^n$ , d.h. für alle  $j = 1, \dots, n$  gilt

$$\text{Ave max}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| a_{ij}^p x_{\pi(i)}^{jp} \right| = \text{Ave max}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| a_{ij}^p \left( \frac{n}{\pi(i)} \right)^{p/q_j} \right| \leq C_{p,q_j} \left\| (a_{ij}^p)_{i=1}^n \right\|_{q_j/p}.$$

Daraus folgt

$$\text{Ave max}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| a_{ij} x_{\pi(i)}^j y_{\sigma(j)} \right| \leq C_2 \left\| \left( C_{2,p,q_j} \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt

$$C_1 \left\| \left( C_{1,q_j} \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave max}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| a_{ij} x_{\pi(i)}^j y_{\sigma(j)} \right| \leq C_2 \left\| \left( C_{2,p,q_j} \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p.$$

□

Haben die  $q_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , einen echten Abstand zu  $p$ , etwa  $1 < p + \varepsilon < q_1, \dots, q_n$  für  $\varepsilon > 0$ , so kann man durch einfache Abschätzungen die inneren Konstanten unabhängig von  $q_1, \dots, q_n$  bekommen. Man erhält dann den folgenden Satz.

**SATZ 5.6.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  und sei  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Des Weiteren seien  $x^j = ((\frac{n}{i})^{1/q_j})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ,  $j = 1, \dots, n$ , und  $y = ((\frac{n}{i})^{1/p})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ , wobei  $1 < p + \varepsilon < q_1, \dots, q_n < \infty$ , gegeben. Dann folgt*

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave max}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| a_{ij} x_{\pi(i)}^j y_{\sigma(j)} \right| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_{q_j} \right)_{j=1}^n \right\|_p,$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind, die nur von  $p$  und  $\varepsilon$  abhängen.

Gilt speziell  $q_j = q$ ,  $j = 1, \dots, n$ , so erhält man das folgende Korollar.

**KOROLLAR 5.7.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p < q < \infty$  und sei  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Des Weiteren sei  $x = ((\frac{n}{i})^{1/q})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  und  $y = ((\frac{n}{i})^{1/p})_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ . Dann folgt*

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave max}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)} \right| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p,$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind, die nur von  $p$  abhängen.

Im Beweis von Satz 5.5 fällt auf, dass wir diesen auf Tensoren höherer Stufe und entsprechend viele Mittel über Permutationen verallgemeinern können. Entsprechend erhält man als Größenordnung einen analogen Ausdruck aus entsprechend vielen Normen von Normen. Wir führen dies allerdings nur noch für den Fall eines Tensors dritter Stufe aus, da die Methode im höherdimensionalen Fall dieselbe ist.

SATZ 5.8. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $a = (a_{ijk})_{i,j,k=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n \times n}$  eine reelle  $n \times n \times n$ -Matrix. Des Weiteren seien  $x = \left( \binom{n}{i}^{1/q} \right)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ,  $y = \left( \binom{n}{i}^{1/p} \right)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ ,  $z = \left( \binom{n}{i}^{1/r} \right)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  wobei  $1 < r < p < q < \infty$ , gegeben. Dann folgt

$$\begin{aligned} C_1 \left\| \left( \left\| \left( \left\| (a_{ijk})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \right)_{k=1}^n \right\|_r &\leq \text{Ave} \max_{\pi, \sigma, \eta} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)} z_{\eta(k)}| \\ &\leq C_2 \left\| \left( \left\| \left( \left\| (a_{ijk})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \right)_{k=1}^n \right\|_r. \end{aligned}$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind, die nur von  $p, q$  und  $r$  abhängen.

BEWEIS. Die untere Abschätzung ergibt sich einfach aus der Dreiecksungleichung und Korollar 5.7. Es gilt nach Beispiel 5.4

$$\begin{aligned} \text{Ave} \max_{\pi, \sigma, \eta} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)} z_{\eta(k)}| &\geq \tilde{C} \text{Ave} \left( \sum_{k=1}^n \left| \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \right|^r \right)^{1/r} \\ &\geq \left( \sum_{k=1}^n \left| \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \right|^r \right)^{1/r} \\ &\sim C \left\| \left( \left\| \left( \left\| (a_{ijk})_{i=1}^n \right\|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \right)_{k=1}^n \right\|_r, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{C} > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $r$  abhängt und  $C > 0$  eine absolute Konstante ist, die von  $p$  und  $q$  abhängt.

Nach oben erhalten wir aus Beispiel 5.4 und der Jensen-Ungleichung wieder

$$\begin{aligned} \text{Ave} \max_{\pi, \sigma, \eta} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)} z_{\eta(k)}| &\leq D \left( \sum_{k=1}^n \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}|^r \right)^{1/r} \\ &= D \left( \sum_{k=1}^n \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ijk}^r x_{\pi(i)}^r y_{\sigma(j)}^r| \right)^{1/r} \end{aligned}$$

wobei  $D > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $r$  abhängt. Nun müssen wir einfach zunächst schauen, welche Norm von  $y^r$  erzeugt wird. Es ist  $y^r = \left( \binom{n}{i}^{r/p} \right)_{i=1}^n$ . Da  $r < p$

und somit  $p/r > 1$  ist, erzeugt  $y^r$  nach Beispiel 5.4 die  $p/r$ -Norm. Es gilt also

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ijk}^r x_{\pi(i)}^r y_{\sigma(j)}^r| \right)^{1/r} &\leq \tilde{D} \left( \sum_{k=1}^n \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ijk}^r x_{\pi(i)}^r|^{p/r} \right)^{r/p} \right)^{1/r} \\ &= \tilde{D} \left( \sum_{k=1}^n \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{j=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ijk}^p x_{\pi(i)}^p| \right)^{r/p} \right)^{1/r} \\ &\leq \tilde{D} \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ijk}^p x_{\pi(i)}^p| \right)^{r/p} \right)^{1/r}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{D} > 0$  eine absolute Konstante ist, die von  $p$  und  $r$  abhängt. Es gilt  $x^p = \left( \left( \frac{n}{i} \right)^{p/q} \right)_{i=1}^n$ . Da  $p < q$  und somit  $q/p > 1$  ist, erzeugt  $x^r$  nach Beispiel 5.4 die  $q/p$ -Norm und wir erhalten

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ijk}^p x_{\pi(i)}^p| \right)^{r/p} \right)^{1/r} &\leq K \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |a_{ijk}^p|^{q/p} \right)^{p/q} \right)^{r/p} \right)^{1/r} \\ &= K \left\| \left( \left\| \left( \| (a_{ijk})_{i=1}^n \|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \right)_{k=1}^n \right\|_r, \end{aligned}$$

wobei  $K > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $p$  und  $q$  abhängt. Insgesamt ergibt sich daraus

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \max_{1 \leq i, j, k \leq n} |a_{ijk} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)} z_{\eta(k)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| \left( \| (a_{ijk})_{i=1}^n \|_q \right)_{j=1}^n \right\|_p \right)_{k=1}^n \right\|_r,$$

wobei  $C_2 > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $p$ ,  $q$  und  $r$  abhängt.  $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass wir unter einer gewissen Bedingungen an die Orlicz-Funktion, als innere Norm auch eine Orlicz-Norm erzeugen können. Zunächst beweisen wir ein einfaches Lemma.

LEMMA 5.9. *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $M$  eine Orlicz-Funktion mit*

$$(5.3) \quad \forall k \leq n : \quad \sum_{i=1}^k \frac{1}{M^{-1}\left(\frac{i}{n}\right)} \leq C \frac{k}{M^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)}.$$

Sei  $(x_i)_{i=1}^n = (\frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})})_{i=1}^n$ . Dann gilt für alle  $a \in \mathbb{R}^n$

$$\text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |a_i x_{\pi(i)}| \sim \|a\|_M.$$

Bevor wir das Lemma beweisen, bemerken wir noch, dass für jedes  $k \leq n$

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \geq \frac{k}{M^{-1}(\frac{k}{n})}$$

gilt, denn  $M$  ist monoton.

BEWEIS. Wegen Korollar 5.2 zeigen wir einfach, dass für alle  $k \leq n$

$$M^* \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i \right) \sim \frac{k}{n}$$

gilt. Dies ist äquivalent dazu, dass

$$M^{*-1} \left( \frac{k}{n} \right) \sim \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \stackrel{(5.3)}{\sim} \frac{k}{n} \frac{1}{M^{-1}(\frac{k}{n})}.$$

Weil aber für jede Orlicz-Funktion und alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$t \leq M^{*-1}(t)M^{-1}(t) \leq 2t$$

gilt, folgt unsere Behauptung. □

Damit eine Orlicz-Funktion Bedingung (5.3) erfüllt, muss das Wachstumsverhalten der Inversen auf  $[0, 1]$  geeignet sein. Es gibt natürlich eine Klasse von Orlicz-Funktionen, die keine Potenzfunktionen sind, die aber die Bedingung (5.3) erfüllt. Wir betrachten ein Beispiel, welches wir nicht im Detail durchrechnen werden.

BEISPIEL 5.10. Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten die invertierbare Funktion  $N$ , deren Inverse  $N^{-1}$  durch

$$N^{-1}(x) = \frac{2 \ln(1+x)}{x^{1/2}}$$

definiert ist.  $N^{-1}$  ist auf  $[0, 3]$  streng monoton, konkav und es gilt

$$\forall k = 1, \dots, n : \quad \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{N^{-1}(i/n)} \leq C \frac{1}{N^{-1}(k/n)}.$$

Auf  $(3, \infty)$  setzen wir die Funktion geeignet affin fort.



Die affine Fortsetzung der Funktion ändert nichts an der durch  $N$  definierten Norm, da eine Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_M$  eindeutig auf dem Intervall  $[0, T]$  mit  $M(T) = 1$  festgelegt ist.

BEWEIS. Man rechnet leicht nach, dass die Funktion auf  $[0, 3]$  streng monoton und konkav ist. Es gilt für alle  $s$  mit  $0 \leq s \leq 3$

$$(5.4) \quad \frac{s}{4} \leq \frac{s}{s+1} \leq \ln(s+1) \leq s.$$

Sei  $k \leq n$ . Dann folgt aus Ungleichung (5.4)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\sqrt{i/n}}{\ln(1+i/n)} &\leq \frac{4}{k} \sum_{i=1}^k \frac{\sqrt{i/n}}{i/n} = 4 \frac{\sqrt{n}}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \\ &\leq C \frac{\sqrt{n}}{k} \sqrt{k} = C \frac{\sqrt{k/n}}{k/n} \\ &\leq C \frac{\sqrt{k/n}}{\ln(1+k/n)}. \end{aligned}$$

□

Wir formulieren nun eine stärkere Bedingung als die Bedingung (5.3).

LEMMA 5.11. *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $1 \leq p < \infty$ . Es sei  $M$  eine Orlicz-Funktion, die für alle  $k \leq n$  die Bedingung*

$$\sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right|^p \leq C_1 \frac{k}{|M^{-1}(\frac{k}{n})|^p}$$

*erfüllt. Dann gilt auch für alle  $k \leq n$*

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \leq C_2 \frac{k}{M^{-1}(\frac{k}{n})}.$$

BEWEIS. Es gelte für alle  $k \leq n$

$$\sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right|^p \leq C_1 \frac{k}{|M^{-1}(\frac{k}{n})|^p}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right|^p \right)^{1/p} \leq C_1^{1/p} \frac{1}{M^{-1}(\frac{k}{n})}.$$

Weil die  $L_p$ -Norm größer gleich der  $L_1$ -Norm ist, folgt

$$\begin{aligned} C_1^{1/p} \frac{1}{M^{-1}(\frac{k}{n})} &\geq \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right|^p \right)^{1/p} \\ &\geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})}. \end{aligned}$$

□

LEMMA 5.12. Sei  $1 \leq p \leq 2$  und  $M$  eine  $p$ -konvexe Orlicz-Funktion, die die Bedingung

$$(5.5) \quad \forall k \leq n : \quad \sum_{i=1}^k \left| \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right|^p \leq C \frac{k}{|M^{-1}(\frac{k}{n})|^p}$$

erfüllt. Sei weiter  $(x_i)_{i=1}^n = (\frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})})_{i=1}^n$ . Dann gilt für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$M_{x^p} \circ t^p = M(t),$$

d.h.  $\|\cdot\|_{M_{x^p} \circ t^p} = \|\cdot\|_M$ .

BEWEIS. Zunächst gilt nach Voraussetzung, dass  $M \circ \cdot^{1/p}$  konvex ist, da  $M$   $p$ -konvex ist. Nach Lemma 5.9 erzeugt der Vektor  $x = (x_i)_{i=1}^n = \left( \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right)_{i=1}^n$  die Orlicz-Funktion  $M := M_x$ . Die von  $x^p$  erzeugte Orlicz-Funktion bezeichnen wir mit  $M_{x^p}$ , wobei wir hier (5.5) verwenden, damit diese Notation überhaupt gerechtfertigt ist. Es gilt für alle  $i \leq n$

$$x_i^p = \left( \frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})} \right)^p = \frac{1}{(\cdot^p \circ M^{-1})(\frac{i}{n})} = \frac{1}{(M \circ \cdot^{1/p})^{-1}(\frac{i}{n})} = \frac{1}{N^{-1}(\frac{i}{n})},$$

mit  $N(t) = (M \circ \cdot^{1/p})(t)$ . Aus Lemma 5.9 und der Bedingung (5.5) folgt, dass der Vektor  $(1/N^{-1}(i/n))_{i=1}^n$  die Orlicz-Funktion  $N$  erzeugt und damit gilt  $M_{x^p} = N$ , d.h.  $M_{x^p}(t) = (M \circ \cdot^{1/p})(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Wendet man dies auf  $t^p$  an, so ergibt sich  $(M_{x^p} \circ \cdot^p)(t) = M_x(t)$ , d.h.  $M_{x^p} \circ t^p = M(t)$  für alle  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ . □

Eine Variante der Funktion aus Beispiel 5.10 erfüllt auch die Bedingung (5.5).

LEMMA 5.13. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$ . Des Weiteren sei  $M$  eine Orlicz-Funktion. Dann gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$(5.6) \quad \|(|x_i|^p)_{i=1}^n\|_M^{1/p} = \|(x_i)_{i=1}^n\|_{M \circ t^p}.$$

BEWEIS. Es gilt

$$\begin{aligned}
 \|(|x_i|^p)_{i=1}^n\|_M^{1/p} &= \left( \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n M \left( \frac{|x_i|^p}{\rho} \right) \leq 1 \right\} \right)^{1/p} \\
 &= \inf \left\{ \rho^{1/p} > 0 \mid \sum_{i=1}^n (M \circ .^p) \left( \frac{|x_i|}{\rho^{1/p}} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \sum_{i=1}^n (M \circ .^p) \left( \frac{|x_i|}{\lambda} \right) \leq 1 \right\} \\
 &= \| (x_i)_{i=1}^n \|_{M \circ t^p}.
 \end{aligned}$$

$M \circ t^p$  ist zudem offensichtlich wieder eine Orlicz-Funktion.  $\square$

Kommen wir nun zum nächsten Satz.

SATZ 5.14. Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < p \leq 2$  und sei  $M$  eine  $p$ -konvexe Orlicz-Funktion, die für alle  $l = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^l \frac{1}{|M^{-1}(\frac{i}{n})|^p} \leq C_1 \frac{l}{|M^{-1}(\frac{l}{n})|^p}$$

erfüllt, wobei  $C_1 > 0$  eine absolute Konstante ist. Seien  $(x_i)_{i=1}^n = (\frac{1}{M^{-1}(\frac{i}{n})})$  und  $(y_i)_{i=1}^n = ((\frac{n}{i})^{1/p})_{i=1}^n$ . Dann gilt für alle Matrizen  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$D_1 \left\| \left( \| (a_{ij})_{i=1}^n \|_M \right)_{j=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq D_2 \left\| \left( \| (a_{ij})_{i=1}^n \|_M \right)_{j=1}^n \right\|_p,$$

wobei  $D_1, D_2 > 0$  absolute Konstanten sind, die nur von  $p$  abhängen.

BEWEIS. Wir können zunächst o.E.d.A. annehmen, dass  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  positiv ist. Wir schätzen zunächst mit der Dreiecksungleichung nach unten ab. Es gilt mit Beispiel 5.4

$$\begin{aligned}
 \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| &\sim \text{Ave}_{\pi} \left\| \left( \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}| \right)_{j=1}^n \right\|_p \\
 &\geq \left\| \left( \| (a_{ij})_{i=1}^n \|_M \right)_{j=1}^n \right\|_p.
 \end{aligned}$$

Nun die obere Abschätzung. Mit  $M_{x^p}$  bezeichnen wir die vom Vektor  $x^p$  erzeugte Orlicz-Funktion. Aus der Jensen-Ungleichung und Beispiel 5.4 folgt

$$\begin{aligned}
 \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| &\sim \text{Ave}_{\pi} \left\| \left( \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)}| \right)_{j=1}^n \right\|_p \\
 &\leq \left( \sum_{j=1}^n \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |a_{ij}^p (x_{\pi(i)})^p| \right)^{1/p} \\
 &\sim \left( \sum_{j=1}^n \left\| (a_{ij}^p)_{i=1}^n \right\|_{M_{x^p}}^p \right)^{1/p} \\
 &\stackrel{(5.6)}{=} \left( \sum_{j=1}^n \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_{M_{x^p} \circ t^p}^p \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Nun folgt aus Lemma 5.12, dass  $M_{x^p} \circ t^p = M$  gilt und somit

$$\text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq \tilde{C} \left( \sum_{j=1}^n \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_M^p \right)^{1/p} = \tilde{C} \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{i=1}^n \right\|_M \right)_{j=1}^n \right\|_p.$$

□

---

## Kombinatorische Ungleichungen aus dem Satz von Kwapien und Schütt

---

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns wieder mit den kombinatorischen Ungleichungen des letzten Kapitels, wobei die Aussagen nun direkt aus Satz 5.1 herleiten wollen. Die hier vorgestellte Beweismethode ist deutlich komplizierter, aber von allgemeinerer Natur und damit vielversprechender im Hinblick auf mögliche Verallgemeinerungen von Korollar 5.7. Wir beginnen dieses Kapitel mit zwei Lemmata, in denen wir jeweils zu gegebenen Normen äquivalente Ausdrücke der zugehörigen dualen Normen bestimmen. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $1 < r < \infty$ . Wir definieren uns auf dem  $\mathbb{R}^n$  die Norm

$$\| \|x\| \|_\lambda := \max \left\{ \|x\|_\infty, \frac{1}{\lambda} \|x\|_{r^*} \right\},$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $\frac{1}{r} + \frac{1}{r^*} = 1$  ist. Als Maximum zweier Normen definiert der obige Ausdruck wieder eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Außerdem ist die Definition nur für  $\lambda > 1$  interessant, da man ansonsten lediglich die bekannte  $r^*$ -Norm erhält. Wir werden nun einen Ausdruck angeben, der äquivalent zur dualen Norm dieser Norm ist - eine Abschätzung nach oben genügt für unsere Zwecke aber. Eine Abschätzung nach unten findet man etwa in [Sch3]. Wir bezeichnen die duale Norm mit  $\| \cdot \|_{\lambda,*}$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit

und um unnötigen Schreibaufwand zu vermeiden, schreiben wir  $\sum_{i=1}^{\lambda^r}$  statt  $\sum_{i=1}^{[\lambda^r]}$ , d.h. wir verzichten auf die Gaußklammer.

LEMMA 6.1. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $1 < r < \infty$ . Sei  $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$  mit  $\lambda^{r^*} \leq n$ . Dann gilt für die zu  $|||\cdot|||_{\lambda}$  duale Norm  $|||\cdot|||_{\lambda,*}$  und für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$|||x|||_{\lambda,*} \leq \sum_{k=1}^{\lambda^{r^*}} x_k^* + \lambda \left( \sum_{k=\lambda^{r^*}+1}^n x_k^{*r} \right)^{1/r}.$$

BEWEIS. Sei  $x \in \mathbb{R}^n$ . Es gilt offenbar

$$|||x|||_{\lambda,*} = \sup_{|||y|||_{\lambda} \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sup_{|||y|||_{\lambda} \leq 1} \sum_{k=1}^n x_k^* y_k^*.$$

Wir splitten nun die Summe auf und verwenden die Hölder-Ungleichung. Wir erhalten

$$\begin{aligned} |||x|||_{\lambda,*} &\leq \sup_{|||y|||_{\lambda} \leq 1} \sum_{k=1}^{\lambda^{r^*}} x_k^* y_k^* + \sup_{|||y|||_{\lambda} \leq 1} \sum_{k=\lambda^{r^*}+1}^n x_k^* y_k^* \\ &\leq \sup_{|||y|||_{\lambda} \leq 1} \left\| (x_k^*)_{k=1}^{\lambda^{r^*}} \right\|_1 \left\| (y_k^*)_{k=1}^{\lambda^{r^*}} \right\|_{\infty} + \sup_{|||y|||_{\lambda} \leq 1} \frac{\lambda}{\lambda} \left\| (x_k^*)_{k=\lambda^{r^*}+1}^n \right\|_r \left\| (y_k^*)_{k=\lambda^{r^*}+1}^n \right\|_{r^*}. \end{aligned}$$

Weil  $|||y|||_{\lambda} \leq 1$  gilt  $\left\| (y_k^*)_{k=1}^{\lambda^{r^*}} \right\|_{\infty} \leq 1$  und  $\frac{1}{\lambda} \left\| (y_k^*)_{k=\lambda^{r^*}+1}^n \right\|_{r^*} \leq 1$ . Damit folgt

$$|||x|||_{\lambda,*} \leq \left\| (x_k^*)_{k=1}^{\lambda^{r^*}} \right\|_1 + \lambda \left\| (x_k^*)_{k=\lambda^{r^*}+1}^n \right\|_r.$$

□

BEMERKUNG 6.2. Unter größerem technischem Aufwand kann man zeigen, dass tatsächlich

$$C \left\{ \sum_{k=1}^{\lambda^{r^*}} x_k^* + \lambda \left( \sum_{k=\lambda^{r^*}+1}^n x_k^{*r} \right)^{1/r} \right\} \leq |||x|||_{\lambda,*} \leq \sum_{k=1}^{\lambda^{r^*}} x_k^* + \lambda \left( \sum_{k=\lambda^{r^*}+1}^n x_k^{*r} \right)^{1/r}$$

gilt, wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist. Da wir aber die untere Abschätzung nicht benötigen, verzichten wir auf einen Beweis.

Wir definieren nun eine weitere Norm auf dem  $\mathbb{R}^{n \times n}$  durch

$$\left\| (a_{ij})_{i,j=1}^n \right\|_{p(r)} := \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p, \quad (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

wobei  $1 \leq p \leq r < \infty$ . Auch hier rechnet man leicht nach, dass es sich um eine Norm handelt. Der  $\mathbb{R}^{n \times n}$  ausgestattet mit  $\|\cdot\|_{p(r)}$  wird mit  $l_p^n(l_r^n)$  bezeichnet und ist ein 1-komplementierter Teilraum des Banachraumes  $l_p(l_r)$ . Die zu  $\|\cdot\|_{p(r)}$  duale Norm bezeichnen wir zunächst mit  $\|\|\cdot\|\|_*$ . Kommen wir zum zweiten Lemma.

LEMMA 6.3. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $1 \leq p \leq r < \infty$ . Dann gilt für alle  $(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\|\|(b_{ij})_{i,j=1}^n\|\|_* = \left\| \left( \|(b_{ij})_{j=1}^n\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*}.$$

BEWEIS. Sei  $(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Wir beginnen mit der Abschätzung nach oben. Es gilt

$$\begin{aligned} \|\|(b_{ij})_{i,j=1}^n\|\|_* &= \sup_{\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\|_{p(r)} \leq 1} \left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} \right| \\ &\leq \sup_{\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\|_{p(r)} \leq 1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |b_{ij}|. \end{aligned}$$

Wir wenden nun für jedes  $i \leq n$  die Hölder-Ungleichung auf  $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| |b_{ij}|$  an. Damit folgt

$$\|\|(b_{ij})_{i,j=1}^n\|\|_* \leq \sup_{\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\|_{p(r)} \leq 1} \sum_{i=1}^n \|(b_{ij})_{j=1}^n\|_{r^*} \|(a_{ij})_{j=1}^n\|_r.$$

Erneute Anwendung der Hölder-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \|\|(b_{ij})_{i,j=1}^n\|\|_* &\leq \sup_{\|(a_{ij})_{i,j=1}^n\|_{p(r)} \leq 1} \left\| \left( \|(b_{ij})_{j=1}^n\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*} \left\| \left( \|(a_{ij})_{j=1}^n\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p \\ &\leq \left\| \left( \|(b_{ij})_{j=1}^n\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*}. \end{aligned}$$

Nun die untere Abschätzung. Hierfür nutzen wir den Gleichheitsfall in der Hölder-Ungleichung. Demnach gilt

$$\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^n \left\| \left( \tilde{a}_{ij} \right)_{j=1}^n \right\|_r \left\| \left( b_{ij} \right)_{j=1}^n \right\|_{r^*}$$

für die Wahl

$$|\tilde{a}_{ij}| := \frac{|b_{ij}|^{r^*/r}}{\left\| \left( b_{ij} \right)_{j=1}^n \right\|_{r^*}^{r^*/r}}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

wobei  $\left\| \left( \tilde{a}_{ij} \right)_{j=1}^n \right\|_r = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$  gilt. Aufgrund der Homogenität haben wir noch einen Freiheitsgrad in  $i$ , d.h. wir können auch  $c_i \tilde{a}_{ij}$ ,  $c_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit  $i, j = 1, \dots, n$

betrachten. Wir wenden nun ein weiteres mal den Gleichheitsfall in der Hölder-Ungleichung an. Es gilt

$$\sum_{i=1}^n \left\| (\tilde{a}_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*} = \left\| \left( \left\| (\tilde{a}_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p \left\| \left( \left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*}$$

für die Wahl

$$\frac{\left\| (\tilde{a}_{ij})_{j=1}^n \right\|_r^p}{\left\| \left( \left\| (\tilde{a}_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p^p} = \frac{\left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*}^{p^*}}{\left\| \left( \left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*}^{p^*}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dies können wir so wählen über

$$c_i := \frac{\left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*}^{p^*/p}}{\left\| \left( \left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*}^{p^*/p}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Wir wählen also  $a_{ij} := c_i \tilde{a}_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Dann gilt durch unsere Wahl

$$\left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p = 1$$

und somit folgt

$$\left\| \left\| (b_{ij})_{i,j=1}^n \right\|_* \right\| \geq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij} = \left\| \left( \left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*}.$$

□

Dieses Lemma rechtfertigt, dass wir für die Norm  $\left\| \left\| \cdot \right\|_* \right\|$  nun  $\left\| \cdot \right\|_{p^*(r^*)}$  schreiben. Wir erinnern nochmal an den Satz von Kwapien und Schütt.

**SATZ 6.4** (S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 2] Example 1.6). *Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Für jeden Tensor vierter Stufe  $a$  des  $\mathbb{R}^n$  mit nichtnegativen Einträgen gilt*

$$\frac{1}{7n^2} \max_A \sum_{(i,j,k,l) \in A} a(i,j,k,l) \leq Ave \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i,j \leq n} a(i,j, \pi(i), \sigma(j)) \leq \frac{4}{n^2} \max_A \sum_{(i,j,k,l) \in A} a(i,j,k,l),$$

wobei das Maximum über alle  $A \subset \{1, \dots, n\}^4$  mit  $|A| \leq n^2$  und

$$(6.1) \quad \forall i, k \leq n : \quad |A \cap \{(i, j, k, l) | j, l = 1, \dots, n\}| \leq n$$

und

$$(6.2) \quad \forall j, l \leq n : \quad |A \cap \{(i, j, k, l) | i, k = 1, \dots, n\}| \leq n$$

gebildet wird.



Mit Hilfe dieses Satzes wollen wir nun einen weiteren Beweis für Korollar 5.7 angeben, der sich möglicherweise auf den allgemeineren Fall erweitern lässt. Die Methode aus dem vorherigen Kapitel kann ohne weiteres kein allgemeineres Resultat liefern, wie man schnell feststellt.

SATZ 6.5. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $1 \leq p < r \leq 2$ . Definiere  $x_i := \binom{n}{i}^{1/p}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $y_j := \binom{n}{j}^{1/r}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann gilt für alle Matrizen  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$C_1 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p \leq \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p,$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  eine absolute Konstante ist.

BEWEIS. Die Abschätzung nach unten folgt aus der Dreiecksungleichung. Nach Satz 5.1 gilt

$$\text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq \frac{4}{n^2} \max_A \sum_{(i,j,k,l) \in A} |a_{ij} x_k y_l|.$$

Sei  $A_{max}$  eine Menge, für die das Maximum angenommen wird. Zunächst halten wir fest, dass

$$(6.3) \quad \sum_{(i,j,k,l) \in A_{max}} |a_{ij} x_k y_l| = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}| \sum_{(k,l) \in A_{i,j}} x_k y_l$$

gilt, wobei  $A_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , geeignete Mengen sind, welche leer sein können und  $\sum_{i,j=1}^n |A_{i,j}| \leq n^2$  erfüllen. Dies lässt sich wiederum schreiben als

$$(6.4) \quad \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}| \sum_{(k,l) \in A_{i,j}} x_k y_l = \sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}| \sum_{k=1}^n x_k \sum_{l=1}^{m_{ij}^k} y_l$$

mit geeigneten  $m_{ij}^k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $i, j, k = 1, \dots, n$ , die  $\sum_{i,j,k=1}^n m_{ij}^k \leq n^2$  und wegen (6.1) auch  $\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \leq n$  erfüllen. Wir definieren nun

$$(6.5) \quad b_{ij} := \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n x_k \sum_{l=1}^{m_{ij}^k} y_l, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Es gilt nun

$$\sum_{l=1}^{m_{ij}^k} y_l = \sum_{l=1}^{m_{ij}^k} \binom{n}{l}^{1/r} \sim n^{1/r} (m_{ij}^k)^{-1/r+1} = n^{1/r} (m_{ij}^k)^{1/r*}.$$

Damit folgt aus (6.3), (6.4) und (6.5)

$$\frac{1}{n^2} \sum_{(i,j,k,l) \in A_{max}} |a_{ij} x_k y_l| \sim \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \frac{n^{1/r} (m_{ij}^k)^{1/r^*}}{n} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left( \frac{m_{ij}^k}{n} \right)^{1/r^*}$$

und insbesondere  $b_{ij} \sim \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left( \frac{m_{ij}^k}{n} \right)^{1/r^*}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Wir fassen  $(b_{ij})_{i,j=1}^n$  als Funktional im  $\mathbb{R}^{n^2}$  auf und müssen somit nur noch zeigen, dass eine absolute Konstante  $C_1 > 0$  existiert, so dass

$$\left\| \left( \| (b_{ij})_{j=1}^n \|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*} \leq C_1$$

gilt, d.h.  $(b_{ij})_{i,j=1}^n$  ist in der dualen Norm beschränkt. Es folgt zunächst mit der Dreiecksungleichung für jedes  $i \leq n$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{1/r^*} &\sim \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left( \frac{m_{ij}^k}{n} \right)^{1/r^*} \right|^{r^*} \right)^{1/r^*} \\ &\triangleq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_{ij}^k}{n} \right)^{1/r^*}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq \tilde{C} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_{ij}^k}{n} \right)^{1/r^*}.$$

Wir definieren  $\alpha_i^k := \sum_{j=1}^n \frac{m_{ij}^k}{n}$ . Dann ist nach Bedingung (6.1) an  $A_{max}$ , und somit natürlich auch an die  $m_{ij}^k$ , offensichtlich  $\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \leq n$  und schließlich  $\alpha_i^k \leq 1$ . Also ist für jedes  $i \leq n$

$$(6.6) \quad \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} (\alpha_i^k)^{1/r^*} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \beta_i^k,$$

mit  $\beta_i^k := (\alpha_i^k)^{1/r^*}$ . Offensichtlich ist  $\|\beta_i\|_\infty = \|(\beta_i^k)_{k=1}^n\|_\infty \leq 1$  für jedes  $i \leq n$ . Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n \|\beta_i\|_{r^*}^{r^*} \right)^{1/r^*} &= \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |\beta_i^k|^{r^*} \right)^{1/r^*} = \left( \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_i^k \right)^{1/r^*} \\ &= \left( \frac{1}{n} \sum_{i,j,k=1}^n m_{ij}^k \right)^{1/r^*} \leq n^{1/r^*}, \end{aligned}$$

denn  $\sum_{i,j,k=1}^n m_{ij}^k \leq n^2$ . Für  $\lambda_i := \|\beta_i\|_{r^*}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt dann

$$(6.7) \quad \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq n^{1/r^*}$$

und  $\frac{1}{\lambda_i} \|\beta_i\|_{r^*} = 1$ . Existiert ein  $i \leq n$ , so dass für alle  $j, k \leq n$   $m_{ij}^k = 0$  gilt, dann lassen wir dieses weg, da wir ohnehin nur nach oben abschätzen. Wir definieren nun auf dem  $\mathbb{R}^n$  Normen durch

$$\|\cdot\|_{\lambda_i} := \max \left\{ \|\cdot\|_{\infty}, \frac{1}{\lambda_i} \|\cdot\|_{r^*} \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nach Definition gilt für jedes  $i \leq n$

$$\|\beta_i\|_{\lambda_i} = 1.$$

Nach Lemma (6.1) erfüllt die duale Norm  $\|\cdot\|_{\lambda_i, *}$  von  $\|\cdot\|_{\lambda_i}$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$

$$\|z\|_{\lambda_i, *} \leq \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} z_k^* + \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n z_k^{*r} \right)^{1/r},$$

d.h. für alle  $i \leq n$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \beta_i^k \leq \|\cdot\|_{\lambda_i, *} \left( \frac{x_k}{n} \right)_{k=1}^n \leq \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} + \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{x_k^*}{n} \right)^r \right)^{1/r}.$$

Ist  $\lambda_i \leq 1$ , so gilt  $\|\cdot\|_{\lambda_i, *} \sim \lambda_i \|\cdot\|_r$  und der weitere Beweis verläuft analog. Wir schätzen die beiden Summanden nun einzeln ab. Zunächst betrachten wir den ersten Summanden. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \left( \frac{n}{k} \right)^{1/p} \\ &= n^{-1/p^*} \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{1}{k^{1/p}} \\ &\sim n^{-1/p^*} (\lambda_i^{r^*})^{1/p^*} \\ &= \left( \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right)^{1/p^*}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den zweiten Summanden. Hier ist bei der Integralabschätzung der Summe zu beachten, dass  $p < r$  gilt, d.h.  $r/p > 1$  und somit  $-r/p + 1 < 0$ . Es gilt für alle

$i \leq n$

$$\begin{aligned}
 \frac{\lambda_i}{n} \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n x_k^{*r} \right)^{1/r} &= \frac{\lambda_i}{n} \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{n}{k} \right)^{r/p} \right)^{1/r} \\
 &\sim \frac{\lambda_i}{n^{1/p^*}} \left( (\lambda_i^{r^*})^{-r/p+1} \right)^{1/r} \\
 &= \frac{\lambda_i^{r^*(1/r-1/p)+1}}{n^{1/p^*}} \\
 &= \frac{\lambda_i^{r^*(1/p^*-1/r^*)+1}}{n^{1/p^*}} \\
 &= \left( \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right)^{1/p^*}.
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \beta_i^k \leq C_2 \left( \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right)^{1/p^*},$$

wobei  $C_2 > 0$  eine absolute Konstante ist. Somit gilt nach (6.9) für alle  $i \leq n$

$$(6.8) \quad \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq C_2 \left( \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right)^{1/p^*}.$$

Insgesamt ergibt sich nun mit (6.10) und (6.8)

$$\begin{aligned}
 \left\| \left( \| (b_{ij})_{j=1}^n \|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{p^*} &= \left( \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{p^*/r^*} \right)^{1/p^*} \\
 &\leq \left( \sum_{i=1}^n C_2^{p^*} \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right)^{1/p^*} \\
 &= \frac{C_2}{n^{1/p^*}} \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{r^*} \right)^{1/p^*} \leq C_2.
 \end{aligned}$$

Mit der Wahl  $C_1 := C_2$  folgt dann die Beschränktheit. Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C \left\| \left( \| (a_{ij})_{j=1}^n \|_r \right)_{i=1}^n \right\|_p$$

gilt, wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist.  $\square$

Wir wollen den Satz nun so verallgemeinern, dass wir anstelle der  $p$ -Norm eine Orlicz-Norm außen bekommen. Dazu benötigen wir allerdings weitere Voraussetzungen.

SATZ 6.6. Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 < r < 2$  und  $M$  eine Orlicz-Funktion, so dass

- (i)  $\|\cdot\|_r \leq \|\cdot\|_M$
- (ii)  $\forall l \leq n : \left(\frac{l}{n}\right)^{1/r^*} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=l+1}^n \left|\frac{1}{M^{-1}(\frac{l}{n})}\right|^r\right)^{1/r} \sim M^{*-1}\left(\frac{l}{n}\right).$

Seien  $x_i = \frac{1}{M^{-1}(i/n)}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $y_j = \left(\frac{n}{i}\right)^{1/r}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Dann gilt für alle Matrizen  $a = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \sim \left\| \left( \left\| (a_{ij})_{j=1}^n \right\|_r \right)_{i=1}^n \right\|_M.$$

BEWEIS. Nach Satz 5.1 gilt wieder

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq \frac{4}{n^2} \max_A \sum_{(i,j,k,l) \in A} |a_{ij} x_k y_l|.$$

Analog zum Beweis von Satz 6.5 und mit derselben Notation erhalten wir

$$\frac{1}{n^2} \sum_{(i,j,k,l) \in A_{max}} |a_{ij} x_k y_l| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left(\frac{m_{ij}^k}{n}\right)^{1/r^*} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| b_{ij}$$

mit  $b_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left(\frac{m_{ij}^k}{n}\right)^{1/r^*}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\sum_{i,j,k=1}^n m_{ij}^k \leq n^2$  und  $\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \leq n$ . Wir fassen  $(b_{ij})_{i,j=1}^n$  als Funktional im  $\mathbb{R}^{n^2}$  auf und müssen somit nur noch zeigen, dass eine absolute Konstante  $C > 0$  existiert, so dass

$$\left\| \left( \left\| (b_{ij})_{j=1}^n \right\|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{M^*} \leq C$$

gilt, d.h.  $(b_{ij})_{i,j=1}^n$  ist in der dualen Norm beschränkt. Es folgt zunächst mit der Dreiecksungleichung für jedes  $i \leq n$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{1/r^*} &= \left( \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left(\frac{m_{ij}^k}{n}\right)^{1/r^*} \right|^{r^*} \right)^{1/r^*} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \left( \sum_{j=1}^n \frac{m_{ij}^k}{n} \right)^{1/r^*}. \end{aligned}$$

Wir definieren  $\alpha_i^k := \sum_{j=1}^n \frac{m_{ij}^k}{n}$ . Dann ist nach den Bedingungen an die  $m_{ij}^k$  offensichtlich  $\sum_{j=1}^n m_{ij}^k \leq n$  und somit  $\alpha_i^k \leq 1$ . Also ist für jedes  $i \leq n$

$$(6.9) \quad \left( \sum_{j=1}^n |b_{ij}|^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} (\alpha_i^k)^{1/r^*} = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \beta_i^k,$$

mit  $\beta_i^k := (\alpha_i^k)^{1/r^*}$ . Offensichtlich ist  $\|\beta_i\|_\infty = \|(\beta_i^k)_{k=1}^n\|_\infty \leq 1$  für jedes  $i \leq n$ . Des Weiteren ist

$$\left( \sum_{i=1}^n \|\beta_i\|_{r^*}^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq n^{1/r^*},$$

denn  $\sum_{i,j,k=1}^n m_{ij}^k \leq n^2$ . Für  $\lambda_i := \|\beta_i\|_{r^*}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gilt dann

$$(6.10) \quad \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i^{r^*} \right)^{1/r^*} \leq n^{1/r^*}$$

und  $\frac{1}{\lambda_i} \|\beta_i\|_{r^*} = 1$ . Existiert ein  $i \leq n$ , so dass  $m_{ij}^k = 0$  für alle  $j, k \leq n$ , so lassen wir dieses wieder weg, da wir nur nach oben Abschätzen. Wir definieren auf dem  $\mathbb{R}^n$  Normen durch

$$\|\cdot\|_{\lambda_i} := \max \left\{ \|\cdot\|_\infty, \frac{1}{\lambda_i} \|\cdot\|_{r^*} \right\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nach Definition gilt für jedes  $i \leq n$

$$\|\beta_i\|_{\lambda_i} = 1.$$

Nach Lemma (6.1) erfüllt die duale Norm  $\|\cdot\|_{\lambda_i, *}$  von  $\|\cdot\|_{\lambda_i}$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$

$$\|z\|_{\lambda_i, *} \leq \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} z_k^* + \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n z_k^{*r} \right)^{1/r},$$

d.h. für alle  $i \leq n$  gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n} \beta_i^k \leq \|\cdot\|_{\lambda_i, *} \left( \frac{x_k}{n} \right)_{k=1}^n \leq \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} + \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{x_k^*}{n} \right)^r \right)^{1/r}.$$

Ist  $\lambda_i \leq 1$ , so gilt  $\|\cdot\|_{\lambda_i, *}\sim \lambda_i \|\cdot\|_r$  und der Beweis verläuft analog. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass es eine absolute Konstante  $C > 0$  gibt, so dass

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} + \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{x_k^*}{n} \right)^r \right)^{1/r} \right)^n \right\|_{M^*} \leq C$$

gilt. Es ist also hinreichend zu zeigen, dass

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} \right)^n \right\|_{M^*} + \left\| \left( \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{x_k^*}{n} \right)^r \right)^{1/r} \right)^n \right\|_{M^*} \leq C$$

für eine absolute Konstante  $C > 0$  gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n M^* \left( \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} \right) &= \sum_{i=1}^n M^* \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{1}{M^{-1}(k/n)} \right) \\ &\sim \sum_{i=1}^n M^* \left( \frac{1}{n} \frac{\lambda_i^{r^*}}{M^{-1}(\lambda_i^{r^*}/n)} \right) \\ &\sim \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \stackrel{(6.10)}{\leq} 1, \end{aligned}$$

wobei wir  $t \leq M^{-1}(t)M^{*-1}(t) \leq 2t$ ,  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , benutzt haben. Daraus folgt

$$\left\| \left( \sum_{k=1}^{\lambda_i^{r^*}} \frac{x_k^*}{n} \right)^n \right\|_{M^*} \leq C_2,$$

wobei  $C_2 > 0$  eine absolute Konstante ist. Des Weiteren folgt aus (iii)

$$\begin{aligned} \left\| \left( \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{x_k^*}{n} \right)^r \right)^{1/r} \right)^n \right\|_{M^*} &= \left\| \left( \frac{\lambda_i}{n} \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{1}{M^{-1}(k/n)} \right)^r \right)^{1/r} \right)^n \right\|_{M^*} \\ &\sim \left\| \left( M^{*-1} \left( \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right) \right)^n \right\|_{M^*} \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

denn

$$\sum_{i=1}^n M^* \left( M^{*-1} \left( \frac{\lambda_i^{r^*}}{n} \right) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{r^*} \stackrel{(6.10)}{\leq} 1.$$

Es gilt also

$$\left\| \left( \lambda_i \left( \sum_{k=\lambda_i^{r^*}+1}^n \left( \frac{x_k^*}{n} \right)^r \right)^{1/r} \right)^n \right\|_{i=1}^{M^*} \leq C_3,$$

wobei  $C_3 > 0$  eine absolute Konstante ist. Damit folgt schließlich

$$\left\| \left( \| (b_{ij})_{j=1}^n \|_{r^*} \right)_{i=1}^n \right\|_{M^*} \leq C,$$

wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist und somit ergibt sich die Behauptung. □

Es ist zu beachten, dass die Bedingung (ii) äquivalent zur Bedingung (5.5) ist. Wir wissen nicht, ob der allgemeine Fall für eine Orlicz-Norm innen und eine außen gilt. Wir wollen aber erwähnen, dass die untere Abschätzung einfach aus der Dreiecksungleichung folgt, d.h. ganz allgemein gilt für eine reelle  $n \times n$ -Matrix  $a$

$$\text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \geq C \left\| \left( \| (a_{ij})_{j=1}^n \|_N \right)_{i=1}^n \right\|_M,$$

bei geeigneter Wahl von  $x$  und  $y$ . Wir beenden dieses Kapitel mit einer Vermutung.

**VERMUTUNG 6.7.** *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $M_1, M_2$  Orlicz-Funktionen, die geeignete Bedingungen analog Satz (6.6) erfüllen. Dann gilt für alle Matrizen  $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$*

$$C_1 \left\| \left( \| (a_{ij})_{j=1}^n \|_{M_2} \right)_{i=1}^n \right\|_{M_1} \leq \text{Ave} \max_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij} x_{\pi(i)} y_{\sigma(j)}| \leq C_2 \left\| \left( \| (a_{ij})_{j=1}^n \|_{M_2} \right)_{i=1}^n \right\|_{M_1},$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind.



---

Eine neue Klasse verallgemeinerter  $L_p$ -Räume

---

**7.1. Musielak-Orlicz-Räume und Musielak-Orlicz-Lorentz-Räume**

In diesem Kapitel werden wir weitere Klassen von verallgemeinerten  $l_p^n$ - und  $l_M^n$ -Räumen sowie von Orlicz-Lorentz-Räumen einführen. Bei ersterem handelt sich um verallgemeinerte Orlicz-Räume, bei denen auf jede Komponente eine andere Orlicz-Funktion angewandt wird. Diese Räume sind bereits bekannt und werden als Musielak-Orlicz-Räume bezeichnet. Sie teilen einige Eigenschaften mit klassischen Orlicz-Räumen, wie wir in diesem Abschnitt zeigen werden. Indem wir bei der Definition der Norm die Komponenten des Vektors zusätzlich fallend anordnen, definieren wir die Musielak-Orlicz-Lorentz-Norm und somit Musielak-Orlicz-Lorentz-Räume. Diese sind wieder Räume, mit einer symmetrischen Basis.

DEFINITION 7.1. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $M_i, i = 1, \dots, n$ , Orlicz-Funktionen. Wir definieren den *Musielak-Orlicz-Raum*  $l_{\Sigma M_i}^n$  als den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{\Sigma M_i} = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n M_i \left( \frac{|x_i|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Es ist leicht zu zeigen, dass  $\|\cdot\|_{\Sigma M_i}$  tatsächlich eine Norm ist und  $l_{\Sigma M_i}^n$  damit ein Banachraum. Wir wollen als nächstes zeigen, dass die Norm des Dualraumes äquivalent zur

Musiak-Orlicz-Norm ist, in der wir die Orlicz-Funktionen  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , durch die dualen Orlicz-Funktionen  $M_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ersetzen. Zunächst erinnern wir an die Young-Ungleichung.

LEMMA 7.2. *Sei  $M$  ein Orlicz-Funktion. Dann gilt für alle  $s, t \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq s, t < \infty$*

$$st \leq M(s) + M^*(t),$$

wobei Gleichheit gilt, falls  $t = M'(s)$  oder  $s = M'^{-1}(t)$ .

Wir erhalten nun mit Hilfe der Young-Ungleichung unser Lemma, wobei wir den Beweis analog zum Fall der entsprechenden Aussage für Orlicz-Räume führen.

LEMMA 7.3. *Der Dualraum  $l_{\Sigma M_i}^{n*}$  von  $l_{\Sigma M_i}^n$  kann auf natürliche Weise mit dem  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm*

$$|||x||| = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n x_i y_i \mid \|y\|_{\Sigma M_i} \leq 1 \right\}$$

identifiziert werden und es gilt für alle  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq |||x||| \leq 2 \|x\|_{\Sigma M_i^*},$$

wobei wir

$$\|x\|_{\Sigma M_i^*} = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n M_i^* \left( \frac{|x_i|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}$$

setzen.

BEWEIS. Die Abschätzung nach oben folgt unmittelbar aus der Young-Ungleichung. Sei o.B.d.A.  $\|x\|_{\Sigma M_i^*} = 1$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} |||x||| &= \sup_{\|y\|_{\Sigma M_i} \leq 1} \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ &\leq \sup_{\|y\|_{\Sigma M_i} \leq 1} \sum_{i=1}^n M_i(y_i) + M_i^*(x_i) \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^n M_i^*(x_i) = 2 \|x\|_{\Sigma M_i^*}. \end{aligned}$$

Für die Abschätzung nach unten verwenden wir die Gleichheit in der Young-Ungleichung. Sei o.E.d.A.  $|||x||| = 1$ . Wir definieren uns

$$y_k := M_k^*(x_k), \quad k = 1, \dots, n.$$

Dann folgt aus Lemma 7.2, angewandt auf  $M^*$ , dass

$$|x_k| y_k = M_k^*(x_k) + M_k(y_k).$$

Wir zeigen jetzt, dass

$$\|y\|_{\Sigma M_i} \leq 1$$

gilt. Annahme dies gilt nicht. Dann haben wir

$$\sum_{k=1}^n M_k(y_k) > 1.$$

Weil  $M_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , konvex sind, gilt für alle  $j = 1, \dots, n$

$$M_k \left( \frac{y_j}{\sum_{i=1}^n M_i(y_i)} \right) \leq \frac{M_k(y_j)}{\sum_{i=1}^n M_i(y_i)}.$$

Speziell für  $k = j$  ergibt sich

$$\sum_{k=1}^n M_k \left( \frac{y_k}{\sum_{i=1}^n M_i(y_i)} \right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n M_k(y_k)}{\sum_{i=1}^n M_i(y_i)} = 1,$$

d.h.

$$1 = |||x||| = \sup_{\|y\|_{\Sigma M_i} \leq 1} \sum_{k=1}^n |x_k| y_k \geq \sum_{k=1}^n |x_k| \frac{y_k}{\sum_{i=1}^n M_i(y_i)}.$$

Daraus folgt nun

$$\sum_{i=1}^n M_i(y_i) \geq \sum_{k=1}^n |x_k| y_k = \sum_{k=1}^n M_k^*(x_k) + M_k(y_k).$$

Dann müsste aber  $\sum_{k=1}^n M_k^*(x_k) = 0$  gelten, was ein Widerspruch ist, denn  $|||x||| = 1$ . Es gilt also

$$\|y\|_{\Sigma M_i} \leq 1,$$

d.h. wir haben  $\sum_{i=1}^n M_i(y_i) \leq 1$ . Somit folgt

$$1 = |||x||| \geq \sum_{k=1}^n |x_k| y_k \geq \sum_{k=1}^n M_k(y_k) + \sum_{k=1}^n M_k^*(x_k).$$

Dies bedeutet  $\sum_{k=1}^n M_k^*(x_k) \leq 1$  und damit schließlich

$$\|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq 1 = |||x|||.$$

□

Wir wollen nun definieren, was wir unter einem Musielak-Orlicz-Lorentz-Raum verstehen.

DEFINITION 7.4. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $M_i, i = 1, \dots, n$ , Orlicz-Funktionen mit  $M_1 \geq \dots \geq M_n$ . Wir definieren den *Musielak-Orlicz-Lorentz-Raum*  $l_{\Sigma M_i, *}$  als den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{\Sigma M_i, *} = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n M_i \left( \frac{|x_i^*|}{\rho} \right) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Hier ist es wichtig, dass die Folge der  $M_i$  fallend ist, da der obige Ausdruck ansonsten i.A. keine Norm mehr definiert. Wir bemerken an dieser Stelle, dass wir für eine Orlicz-Funktion  $M, a_1 \geq \dots \geq a_n$  und  $M_i(t) = M(a_i t), i = 1, \dots, n, t \in \mathbb{R}_+$ , in der obigen Definition den Orlicz-Lorentz-Raum  $l_{M, a}^n$  erhalten.

## 7.2. Erzeugung von Musielak-Orlicz-Räumen durch Mittel über Permutationen

C. Schütt und S. Kwapien haben in den beiden Arbeiten [K-S 1] und [K-S 2] gezeigt, dass die Ausdrücke

$$(7.1) \quad \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{\pi(i)}|$$

und

$$(7.2) \quad \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i a_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2}$$

jeweils äquivalent zu einer Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_{M_y}$  bzw.  $\|\cdot\|_{M_a}$  sind. Wir wollen uns hier mit der Frage beschäftigen, ob eine äquivalente Aussage für die verallgemeinerten Musielak-Orlicz-Räume gilt. Wir werden zeigen, dass man mit einem ähnlichen Ausdruck zu (7.1) die Musielak-Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_{\Sigma M_i}$  erzeugen kann und beantworten die Frage damit positiv. Zunächst formulieren wir einen Satz von Stanislaw Kwapien und Carsten Schütt aus dem Jahre 1985, der uns als Ausgangspunkt dient.

SATZ 7.5 (S.Kwapien, C.Schütt, [K-S 1] Theorem 1.1). *Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Dann gilt*

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n s(k) \leq \text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |y_{i\pi(i)}| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s(k),$$

wobei die  $s(k), k = 1, \dots, n^2$ , die fallende Anordnung der  $|y_{ij}|, i, j = 1, \dots, n$ , sind.

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix. Wir betrachten den Ausdruck

$$\text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}|$$

und werden zeigen, dass absolute Konstanten  $C_1, C_2 > 0$  existieren, so dass

$$C_1 \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \leq C_2 \|x\|_{\Sigma M_i^*}$$

gilt, wobei  $\|\cdot\|_{\Sigma M_i}$  durch geeignete Orlicz-Funktionen  $M_{y^i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , die 'im klassischen Sinne' durch die Zeilenvektoren  $y^i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , der Matrix erzeugt werden, definiert ist. Wir benötigen folgendes Lemma.

LEMMA 7.6. Sei  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix mit  $y_{i1} \geq \dots \geq y_{in} > 0$  und  $\sum_{j=1}^n y_{ij} = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Seien  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , konvexe Funktionen mit

$$(7.3) \quad M_i \left( \sum_{j=1}^k y_{ij} \right) = \frac{k}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Des Weiteren seien

$$B_{\Sigma M_i} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n M_i(|x_i|) \leq 1 \right\}$$

und

$$B = \text{convexhull} \left\{ \left( \varepsilon_i \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij} \right)_{i=1}^n \mid \sum_{i=1}^n l_i = n, \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Dann gilt

$$B \subset B_{\Sigma M_i} \subset 3B.$$

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die linke Inklusion:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^n M_i \left( \left| \varepsilon_i \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij} \right| \right) = \sum_{i=1}^n M_i \left( \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{l_i}{n} = 1.$$

Damit ist  $B \subset B_{\Sigma M_i}$ .

Kommen wir zur rechten Inklusion:

Sei nun o.E.d.A.

$$\sum_{i=1}^n M_i(|x_i|) = 1,$$

d.h.  $x \in B_{\Sigma M_i}$  und  $x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ . Seien weiter  $J, I \subset \{1, \dots, n\}$  Indexmengen mit  $I \cap J = \emptyset$ , so dass

$$x = x_J + x_I, \quad x_J, x_I \in \mathbb{R}^n,$$

wobei  $J$  so gewählt wird, dass

$$M_i(x_i) > \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i \in J$$

und  $I$  so, dass

$$M_i(x_i) \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i \in I.$$

Sei  $|J| = r$  und damit  $|I| = n - r$ . Die Vektoren  $x_J$  und  $x_I$  werden auf den restlichen Komponenten mit Nullen aufgefüllt. Wir zerlegen also  $x$  so in zwei Vektoren, dass auf dem einen Teil die zugehörigen Orlicz-Funktionen  $M_i$  größer  $1/n$  sind und auf dem anderen kleiner oder gleich  $1/n$ . Es gilt nach Voraussetzung

$$M_i(y_{i1}) = \frac{1}{n} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Damit ist  $x_I \leq (y_{11}, \dots, y_{n1})$ , denn  $M_i(x_i) \leq \frac{1}{n} = M_i(y_{i1})$  für alle  $i \in I$ . Es gilt aber gerade  $(y_{11}, \dots, y_{n1}) \in B$ , was man für die Wahl  $l_i = 1, \varepsilon_i = 1$  für alle  $i = 1, \dots, n$  sofort einsieht, und somit schließlich auch  $x_I \in B$ . Wir müssen also noch zeigen, dass  $x_J \in 2B$  ist. Für jedes  $i \in J$  existiert ein  $k_i \geq 1$  mit

$$(7.4) \quad \frac{k_i}{n} \leq M_i(x_i) \leq \frac{k_i + 1}{n}.$$

Summieren wir über alle  $i \in J$  so ergibt sich aus (7.3) und (7.4)

$$\sum_{i \in J} \frac{k_i}{n} \stackrel{(7.3)}{=} \sum_{i \in J} M_i \left( \sum_{j=1}^{k_i} y_{ij} \right) \stackrel{(7.4)}{\leq} \sum_{i \in J} M_i(x_i) \leq 1.$$

Sei nun  $z_J \in \mathbb{R}^n$  der Vektor, der an den Stellen  $i \in J$  die Einträge  $\sum_{j=1}^{k_i} y_{ij}$  hat und sonst Nullen. Dann ist  $z_J \in B$ , da  $\sum_{i \in J} k_i \leq n$  gilt. Sei  $w_J \in \mathbb{R}^n$  nun der Vektor, der an den Stellen  $i \in J$  die Einträge  $\sum_{j=1}^{k_i+1} y_{ij}$  hat und sonst Nullen. Es gilt  $2z_J \geq w_J$ , denn  $y_{ij}$  ist fallend in  $j$  und somit kann  $y_{ik_i+1}$  gegen  $\sum_{j=1}^{k_i} y_{ij}$  abgeschätzt werden. Des Weiteren gilt für alle  $i \in J$

$$\sum_{j=1}^{k_i+1} y_{ij} \geq x_i,$$

weil

$$M_i(x_i) \stackrel{(7.4)}{\leq} \frac{k_i + 1}{n} = M_i \left( \sum_{j=1}^{k_i+1} y_{ij} \right) \quad \text{für alle } i \in J.$$

Also gilt  $2z_J \geq x_J$  und somit  $x_J \in 2B$ . Insgesamt folgt

$$x = x_J + x_I \in 3B.$$

□

Aus diesem Lemma folgt nun leicht, dass man die Musielak-Orlicz-Norm mit unserem Ausdruck erzeugen kann. Man muss sich lediglich überlegen, wie man die Summe der auftretenden  $s(k)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , geschickt umschreiben kann.

**SATZ 7.7.** *Es seien  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix und es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 7.6 erfüllt. Dann gilt*

$$\frac{C_1}{n} \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \leq \frac{C_2}{n} \|x\|_{\Sigma M_i^*},$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind.

**BEWEIS.** Es gilt nach Satz 7.5

$$\text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \sim \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s(k),$$

wobei die  $s(k)$ ,  $k = 1, \dots, n^2$ , die fallende Anordnung der  $|x_i y_{ij}|$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , sind. Weiterhin stellen wir fest, dass

$$\sum_{k=1}^n s(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{l_i} x_i y_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij}$$

gilt, wobei  $l_i$  geeignete natürliche Zahlen sind mit  $\sum_{i=1}^n l_i \leq n$ . Es ist weiter

$$\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij} = \left\langle x, \left( \sum_{j=1}^{l_i} y_{ij} \right)_{i=1}^n \right\rangle.$$

Nun ergibt sich aus dem Satz von Hahn-Banach und Lemma 7.6 die Behauptung. □

Wählt man eine andere Normierung, wie zu Beginn des Kapitels über kombinatorische Ungleichungen in der Banachraumtheorie erwähnt, so erhält man die folgende Version des Satzes.

SATZ 7.8. Es seien  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix mit  $y_{i1} \geq \dots \geq y_{in}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Seien  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , Orlicz-Funktionen mit

$$(7.5) \quad M_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k y_{ij} \right) = \frac{k}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$C_1 \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}| \leq C_2 \|x\|_{\Sigma M_i^*},$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind.

Sind hingegen die Orlicz-Funktionen  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gegeben, so kann man die Matrix  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$  angeben, die die entsprechende Musielak-Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_{\Sigma M_i^*}$  erzeugt.

SATZ 7.9. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , Orlicz-Funktionen. Dann gilt

$$\frac{C_1}{n} \|x\|_{\Sigma M_i^*} \leq \text{Ave} \max_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} \left| x_i \left( M_i^{-1} \left( \frac{\pi(i)}{n} \right) - M_i^{-1} \left( \frac{\pi(i) - 1}{n} \right) \right) \right| \leq \frac{C_2}{n} \|x\|_{\Sigma M_i^*},$$

wobei  $C_1, C_2 > 0$  absolute Konstanten sind.

BEWEIS. Wir betrachten eine Orlicz-Funktion  $M_i$  für ein festes  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Wir approximieren diese Funktionen dadurch, dass wir sie zwischen den Werten  $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$  linear ergänzen. Die zugehörigen Urbilder der definierenden Werte sind gegeben durch

$$M_i^{-1} \left( \frac{j}{n} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Wir wählen nun

$$y_{ij} := M_i^{-1} \left( \frac{j}{n} \right) - M_i^{-1} \left( \frac{j-1}{n} \right), \quad j = 1, \dots, n.$$

Der Vektor  $(y_{ij})_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$  erzeugt die Orlicz-Funktion  $M_i$  'im klassischen Sinne'. Die Matrix  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$  erfüllt die Voraussetzungen von Satz 7.7. Wenden wir nun Satz 7.7 an, so folgt die Behauptung.  $\square$

Ein genauer Blick auf Satz 7.7 verrät, dass ein weiteres Mittel über Permutationen eine Norm auf dem  $\mathbb{R}^n$  liefert, die äquivalent zu einem Mittel von Musielak-Orlicz-Räumen ist und der  $\mathbb{R}^n$  mit dieser Norm  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist. Wir beschreiben zunächst die genaue Form der Vektoren, die wir für die Einbettung nach  $L_1$  verwenden.



BEMERKUNG 7.10. Für  $i = 1, \dots, n$  gilt

$$f_i := \begin{pmatrix} \varepsilon_i^1 y_{i\pi_1(i)} \\ \dots \\ \varepsilon_i^{2^n} y_{i\pi_1(i)} \\ \vdots \\ \varepsilon_i^1 y_{i\pi_{n!}(i)} \\ \dots \\ \varepsilon_i^{2^n} y_{i\pi_{n!}(i)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n!2^n},$$

wobei  $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^{2^n} \in \mathbb{R}^n$  alle möglichen Vorzeichenvektoren sind und  $\pi_1, \dots, \pi_{n!}$  alle möglichen Permutationen der Menge  $\{1, \dots, n\}$  sind.

Wir erhalten nun das folgende Korollar.

KOROLLAR 7.11. *Es seien  $y = (y_{ij})_{i,j=1}^n$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix und es seien die Voraussetzungen wie in Lemma 7.6 erfüllt. Dann ist der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm*

$$\|x\| = \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{i\pi(i)}|^2 \right)^{1/2}$$

*C-isomorph zu einem Teilraum von  $L_1^{n!2^n}$  und äquivalent zu einem 1-Mittel von Musielak-Orlicz-Räumen.*

BEWEIS. Sei  $z = \left( \left( \frac{n}{i} \right)^{1/2} \right)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ , d.h.  $\sum_{i=1}^n z_i \sim n$ . Dann gilt mit der Khintchine-Ungleichung

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)} z_{\sigma(i)}| &\sim \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{i\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\sim \text{Ave}_\pi \text{Ave}_\varepsilon \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_{i\pi(i)} \right| \\ &= \sum_{\varepsilon, \pi} \left| \sum_{i=1}^n \frac{1}{n!2^n} \varepsilon_i x_i y_{i\pi(i)} \right|. \end{aligned}$$

Dies kann man als eine 1-Norm in  $\varepsilon$  und  $\pi$  auffassen. Definieren wir uns jetzt  $f_i^{\varepsilon, \pi} = (\varepsilon_i y_{i\pi(i)})_{\varepsilon, \pi} \in \mathbb{R}^{n!2^n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , so erhalten wir

$$\|x\| = \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{i\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \sim \left\| \sum_{i=1}^n x_i f_i^{\varepsilon, \pi} \right\|_1.$$

Ausserdem ist mit Satz 7.7

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)} z_{\sigma(i)}| &\sim \sum_{\sigma} \frac{1}{n!} \frac{1}{n} \left\| (x_i z_{\sigma(i)})_{i=1}^n \right\|_{\Sigma M_i^*} \\ &= \sum_{\sigma} \frac{1}{n!} \frac{1}{n} \|x\|_{\Sigma N_i^{\sigma}}, \end{aligned}$$

wobei wir  $N_i^{\sigma}(t) = M_i^*(z_{\sigma}(i)t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , setzen. Damit gilt

$$\|x\| = \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{i\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \sim \sum_{\sigma} \frac{1}{n!} \frac{1}{n} \|x\|_{\Sigma N_i^{\sigma}}.$$

□

Wir wollen an dieser Stelle noch bemerken, dass die Erzeugung der Musielak-Orlicz-Räume über den Ausdruck

$$\text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i y_{i\pi(i)}|^2 \right)^{1/2}$$

statt

$$\text{Ave}_{\pi} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i y_{i\pi(i)}|$$

einen Ausgangspunkt zur Charakterisierung von Einbettungen von Musielak-Orlicz-Räumen nach  $L_1$  liefert. Wir wollen dies hier aber nicht weiter ausführen.

---

Eine Vermutung über die Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen  
nach  $L_1$

---

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden wir auf die Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen und die Einbettung euklidischer Orlicz-Lorentz-Räume nach  $L_1$  eingehen. Wir können Teilergebnisse formulieren und werden zeigen, bis zu welchem Punkt dies möglich ist und welche Schwierigkeiten sich genau ergeben. Wir beenden danach die vorliegende Arbeit mit einer Vermutung über die Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen nach  $L_1$ .

Beginnen wir mit der Definition der Orlicz-Lorentz-Räume.

DEFINITION 8.1. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und sei  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$ . Des Weiteren sei  $M$  eine Orlicz-Funktion. Den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{M,a} = \inf \left\{ \rho > 0 \mid \sum_{i=1}^n M \left( \frac{a_i x_i^*}{\rho} \right) \leq 1 \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

bezeichnen wir als *Orlicz-Lorentz-Raum*  $l_{M,a}^n$ .

In der Literatur findet man auch die Definition der Norm, bei der die Gewichte  $a_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , nicht im Argument der Orlicz-Funktion, sondern als Faktor davor stehen. Wir arbeiten mit der obigen Definition, da bei unseren Abschätzungen die Gewichte auf natürliche Weise im Argument der Funktion auftauchen. Orlicz-Lorentz-Räume sind eine

Verallgemeinerung der klassischen Orlicz- und Lorentz-Räume. Wählt man etwa den Vektor  $a = (1)_{i=1}^n$ , so erhält man den Orlicz-Raum  $l_M^n$ . Für die Wahl  $M(t) = t^p$  erhält man den Lorentz-Raum  $d^n(a, p)$ , wobei zu beachten ist, dass die Gewichte nun auch im Argument der  $p$ -ten Potenz stehen. Durch die fallende Anordnung des Vektors  $a \in \mathbb{R}^n$  ist die Einheitsvektorbasis der  $e_i, i = 1, \dots, n$ , eine symmetrische Basis für  $l_{M,a}^n$ . Die Räume sind also symmetrische Folgenräume.

Wir erweitern den Ausdruck, den wir für die direkte Einbettung der Lorentz-Räume nach  $L_1$  benutzt haben, um eine weitere Permutation. Mit später geeignet gewählten  $c^1, \dots, c^n, d, z \in \mathbb{R}^n$  betrachten wir den Ausdruck

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

und geben Abschätzungen in Termen der größten Einträge des Vektors  $x$  in der von  $d$  erzeugten Orlicz-Norm  $\|\cdot\|_{M_d}$  an. Die weitere Permutation benötigen wir, um uns in die Position zu bringen, die gleichen Techniken zu verwenden, die wir auch bei den Lorentz-Räumen benutzt haben. Man rechnet sehr leicht nach, dass auch dieser Ausdruck äquivalent zu einem 1-Mittel von 2-konkaven Orlicz-Normen ist und der  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit dieser Norm  $C$ -isomorph zu einem Teilraum von  $L_1$  ist. Man verwendet dazu wieder die Khintchine-Ungleichung und die verallgemeinerte Parallelogramm-Gleichung. Wir wollen nun den Hauptsatz dieses Abschnittes formulieren. Wir wissen nicht, ob der dort auftauchende  $\|\cdot\|_2$ -Anteil grundsätzlich benötigt wird, um Orlicz-Lorentz-Räume nach  $L_1$  einzubetten. In der Formulierung, die wir hier wählen, ist er aber notwendig. In unserer späteren Vermutung werden wir eine weitere Bedingung an die Folge der  $a_k$ 's stellen, wobei dieser euklidische Anteil dann vermutlich nicht benötigt wird. Plausibel ist diese Vermutung durch die Arbeit [Sch2], in der Carsten Schütt zeigte, dass die später aufgeführte Bedingung notwendig ist, um Lorentz-Räume  $d^n(a, p)$  nach  $L_1$  einzubetten.

SATZ 8.2. Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < 2$ . Des Weiteren sei  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $d \in \mathbb{R}^n$  mit  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$  und seien weiter  $z = \left( \left( \frac{n}{i} \right)^{1/p} \right)_{i=1}^n$  und  $c^k = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n/k \text{ mal}}, 0, \dots, 0) \cdot a_k \in \mathbb{R}^n$ . Für alle  $k = 1, \dots, n$  gelte

$$(8.1) \quad \sum_{i=k}^n \frac{a_i}{i^{1/p}} \leq D a_k k^{1-\frac{1}{p}}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & C \left\{ \|x\|_{M_d, a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\} \\ & \leq \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \\ & \leq C_p \left\{ \|x\|_{M_d, a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\}, \end{aligned}$$

wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist und  $C_p > 0$  eine absolute Konstante ist, die nur von  $p$  abhängt.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die Abschätzung nach unten. Der Vektor  $z = \left( \left( \frac{n}{k} \right)^{1/p} \right)_{k=1}^n$  erzeugt die  $p$ -Norm. Somit gilt nach Beispiel 2.26

$$\begin{aligned} \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} & \stackrel{\text{Bsp. 2.26}}{\sim} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\ & = \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^p \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\ & \stackrel{\Delta}{\geq} \text{Ave}_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^p \left| \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Es gilt nach Korollar 2.29

$$\begin{aligned} C_0 \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right\} &\leq \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei  $C_0 > 0$  eine absolute Konstante ist. Damit folgt

$$\begin{aligned} &\text{Ave}_\sigma \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^p \left| \text{Ave}_\pi \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\ &\geq C_0 \text{Ave}_\sigma \left( \sum_{k=1}^n a_k^p |d_{\sigma(k)}|^p \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\ &\geq B_p \left\{ \text{Ave}_\sigma \left( \sum_{k=1}^n a_k^p |d_{\sigma(k)}|^p \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* \right|^p \right)^{1/p} + \text{Ave}_\sigma \left( \sum_{k=1}^n a_k^p |d_{\sigma(k)}|^p \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \right\} \\ &\sim B_p \left\{ \left\| \left( a_k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\}. \end{aligned}$$

Für alle  $k = 1, \dots, n$  gilt  $\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* \geq x_k^*$  aufgrund der fallenden Anordnung. Damit erhalten wir die gewünschte untere Abschätzung

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \geq B_p \left\{ \|x\|_{M_d, a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\},$$

wobei  $M_d$  die Orlicz-Funktion ist, die Satz 2.24 liefert.

Nun die obere Abschätzung. Zunächst erhält man nach Beispiel 2.26 wieder

$$\begin{aligned}
 \text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i, k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} &\stackrel{\text{Bsp. 2.26}}{\sim} \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 &= \text{Ave}_{\pi, \sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^p \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 &\stackrel{\text{Jensen}}{\leq} \text{Ave}_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^p \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Es gilt wieder nach Korollar 2.29

$$\begin{aligned}
 C_1 \left\{ \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right\} &\leq \left( \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i \leq n/k} |x_{\pi(i)}|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 &\leq \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2},
 \end{aligned}$$

wobei  $C_1 > 0$  eine absolute Konstante ist. Wir haben somit

$$\begin{aligned}
 &\text{Ave}_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n |d_{\sigma(k)}|^p \text{Ave}_{\pi} \left( \sum_{i=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 &\leq \text{Ave}_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n a_k^p |d_{\sigma(k)}|^p \left| \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} + \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right|^p \right)^{1/p} \\
 &\stackrel{\Delta}{\leq} \text{Ave}_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n a_k^p |d_{\sigma(k)}|^p \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{p/p} \right)^{1/p} + \text{Ave}_{\sigma} \left( \sum_{k=1}^n a_k^p |d_{\sigma(k)}|^p \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{p/2} \right)^{1/p} \\
 &\sim \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d},
 \end{aligned}$$

wobei  $M_d$  wieder die Orlicz-Funktion ist, die Satz 2.24 liefert. Wir schätzen nun den Ausdruck

$$\left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d}$$

weiter nach oben ab. Zunächst gilt

$$\left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} = \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{k=1}^n y_k a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p},$$

wobei wir o.E.d.A. annehmen können, dass  $y$  fallend angeordnet ist, d.h.  $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq 0$ . Es gilt  $\|\cdot\|_p \leq D_p \|\cdot\|_{p,1}$  und damit folgt

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{k=1}^n y_k a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} &\leq D_p \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{k=1}^n y_k \frac{a_k}{k^{1/p}} \|(x_i^*)_{i=1}^k\|_{p,1} \\ &= D_p \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{k=1}^n y_k \frac{a_k}{k^{1/p}} \sum_{i=1}^k i^{1/p-1} x_i^* \\ &= D_p \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{i=1}^n x_i^* i^{1/p-1} \sum_{k=i}^n y_k \frac{a_k}{k^{1/p}} \\ &\leq D_p \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{i=1}^n x_i^* i^{1/p-1} y_i \sum_{k=i}^n \frac{a_k}{k^{1/p}}. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir Bedingung (8.1) und erhalten

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{k=1}^n y_k a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^{*p} \right)^{1/p} &\leq CD_p \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{i=1}^n x_i^* i^{1/p-1} y_i a_i i^{1-1/p} \\ &= CD_p \sup_{y \in B_{M_d}^*} \sum_{i=1}^n x_i^* y_i a_i \\ &= CD_p \|(a_k x_k^*)_{k=1}^n\|_{M_d} = \|x\|_{M_d, a}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die obere Abschätzung

$$\text{Ave}_{\pi, \sigma, \eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq C_p \left\{ \|x\|_{M_d, a} + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_{M_d} \right\}.$$



□

Wir bezeichnen den  $\mathbb{R}^n$  ausgestattet mit der Norm

$$(8.2) \quad \|x\|_{M,a,2} = \left\| \left( a_k \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* \right)_{k=1}^n \right\|_M + \left\| \left( a_k \left( \frac{1}{k} \sum_{i=k+1}^n x_i^{*2} \right)^{1/2} \right)_{k=1}^n \right\|_M, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

als *euklidischen Orlicz-Lorentz-Raum*. Das Wort euklidisch bezieht sich dabei auf den 2-Norm Anteil in der Definition der Norm. Der obige Satz zeigt insbesondere, dass die euklidischen Orlicz-Lorentz-Räume ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen sind und isomorph nach  $L_1$  einbetten. Die Vermutung ist nun, dass es genügt die Ungleichung

$$\forall k \leq n : \sum_{j=1}^k a_j j^{-p/2} \leq C a_k k^{1-1/p}$$

zu fordern, damit wir den euklidischen Anteil gegen die gewünschte Orlicz-Lorentz-Norm abschätzen können. Wir schließen diese Arbeit mit der folgenden Vermutung ab.

VERMUTUNG 8.3. *Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < 2$ . Des Weiteren sei  $a \in \mathbb{R}^n$  mit  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  und  $d \in \mathbb{R}^n$  mit  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 0$ . Seien weiter  $z = \left( \left( \frac{n}{i} \right)^{1/p} \right)_{i=1}^n$  und  $c^k = \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n/k \text{ mal}}, 0, \dots, 0) \cdot a_k \in \mathbb{R}^n$ . Es gelte für alle  $k = 1, \dots, n$*

$$\sum_{j=1}^k a_j j^{-p/2} \leq C_1 a_k k^{1-p/2}$$

und

$$\sum_{j=k}^n a_j j^{-1/p} \leq C_2 a_k k^{1-1/p}.$$

Dann gilt

$$\frac{1}{C} \|x\|_{M_d,a} \leq Ave_{\pi,\sigma,\eta} \left( \sum_{i,k=1}^n |x_i c_{\pi(i)}^k d_{\sigma(k)} z_{\eta(k)}|^2 \right)^{1/2} \leq C \|x\|_{M_d,a},$$

wobei  $C > 0$  eine absolute Konstante ist und  $M_d$  die von  $d$  im  $p$ -Mittel erzeugte Orlicz-Funktion.

Gelingt es durch weitere Abschätzungen den 2-Norm Anteil in (8.2) zu eliminieren, in dem man diesen Teil gegen die Orlicz-Lorentz-Norm abschätzt, so erhält man die Einbettung der Orlicz-Lorentz-Räume nach  $L_1$  und ihre Darstellung als ein 1-Mittel von Orlicz-Räumen.

## Eine Vermutung über die Einbettung von Orlicz-Lorentz-Räumen nach $L_1$ 100

Möglicherweise wird der 2-Norm Anteil aber benötigt und kann nicht gegen die Orlicz-Lorentz-Norm abgeschätzt werden.

---

## Literaturverzeichnis

---

- [Alle] G. D. Allen, Duals of Lorentz Spaces, *Pacific J. Math.* 77, 287-291, 1978
- [AlKa] F. Albiac, N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, 2006
- [Barv] A. Barvinok, *A Course in Convexity*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics 54, 2002
- [Bol1] E. D. Bolker, A Class of Convex Bodies, *Trans. Amer. Math. Soc.* 145, 1969, 323-345
- [Bol2] E. D. Bolker, The Zonoid Problem, *Amer. Math. Monthly* 78, 1971, 529-531
- [BrDa] J. Bretagnolle und D. Dacunha-Castelle, Application de l'étude de certaines formes linéaires aléatoires au plongement d'espaces de Banach dans les espaces  $L_p$ , *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 2, 1969
- [BrDa2] J. Bretagnolle und D. Dacunha-Castelle, Formes linéaires aléatoires et plongements d'espaces de Banach dans des espaces  $L_1$ , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A - B*, 265, 1967, A 474 - A 477
- [Cree] J. Creekmore, Type and Cotype in Lorentz  $L_{pq}$  Spaces, *Proceedings A* 84 (2), 1981, 145-152
- [Dacu] D. Dacunha-Castelle, Variables aléatoires échangeables et espaces d'Orlicz, *Séminaire Maurey-Schwartz 1974-1975*, exposés 10 et 11, Ecole Polytechnique Paris
- [Irle] A. Irle, *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*, Teubner Verlag 2005
- [Jame] R. C. James, Some self-dual properties of normed linear spaces, *Symposium on Infinite-Dimensional Topology* (Louisiana State University, Baton Rouge, 1967), Princeton University Press, Princeton (NJ) 1972
- [John] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Elsevier B.V., Amsterdam, 2001
- [Kras] M. A. Krasnoselski, *Convex Functions And Orlicz Spaces*, 1961
- [K-S 1] C. Schütt und S. Kwapien, Some combinatorial and probabilistic inequalities and their application to Banach space theory I, Kiel und Warszawa, *Studia Mathematica*, 1985
- [K-S 2] C. Schütt und S. Kwapien, Some combinatorial and probabilistic inequalities and their application to Banach space theory II, Stillwater und Warszawa, *Studia Mathematica*, 1989

- 
- [LiT1] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 92, Springer-Verlag, Berlin (1977)
- [LiT2] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces II, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 97, Springer-Verlag, Berlin (1979)
- [MS-S] S. Montgomery-Smith und E. Semenov, Random Rearrangements and Operators, Missouri und Voronezh, American Mathematical Society, 1997
- [Proc] J. Prochno, Charakterisierung von Teilräumen von  $L_p$ , Diplomarbeit, <http://analysis.math.uni-kiel.de/prochno>, 2008
- [RaSch] Y. Raynaud, C. Schütt, Some results on symmetric subspaces of  $L_1$ , Studia. Math. 89, 1988, 27 - 35
- [Reis] S. Reisner, On the Duals of Lorentz Function and Sequence Spaces, Tel Aviv, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 31, No. 1, 1982
- [Schn] R. Schneider, Zonoids Whose Polars are Zonoids, Proceedings of the Amer. Math. Soc., Vol. 50, No. 1, 1975, pp. 365-368
- [Sch1] C. Schütt, On the embedding of 2-concave Orlicz spaces into  $L_1$ , Stillwater, Oklahoma and Kiel, Studia Mathematica 113(1), 1995
- [Sch2] C. Schütt, Lorentz Spaces Isomorphic to Subspaces of  $L_1$ , Stillwater, Oklahoma and Kiel, Transactions of the AMS 314(2), 1989
- [Sch3] C. Schütt, Vorlesungsskript zur Funktionalanalysis und Banachraumtheorie, 2011
- [Tomc] N. Tomczak-Jaegermann, Banach-Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 38, 1989

---

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name: Joscha Prochno

Geburtsdatum: 25.07.1982

Geburtsort: Leverkusen

Staatsangehörigkeit: deutsch

## Schulbildung

08.1993-06.2000 Freiherr-vom-Stein Gymnasium Leverkusen

08.2000-06.2002 Lise Meitner Gymnasium Leverkusen

06.2002 Allgemeine Hochschulreife

## Zivildienst

06.2002-03.2003 Tagespflege der AWO Leverkusen

## Studium

SS 2003 - Studium der Physik an der Heinrich-Heine-Universität in Düsseldorf

WS 2004/05

SS 2005 - Studium der Mathematik und Physik an der CAU in Kiel

WS 2007/08

13.2.2008 Abschluss der Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik

Titel der Diplomarbeit: "Charakterisierung von Teilräumen von  $L_p$ "

ab April 2008 Studium der Mathematik mit dem Ziel der Promotion an der CAU Kiel

---

## **Forschungsaufenthalte**

- 08.2009-10.2009    Technological Educational Institute of Western Macedonia in Kozani, Greece
- 09.2010-11.2010    Fields Institute for Research in Mathematical Sciences in Toronto, Canada



## **Erklärung**

Ich versichere an Eides statt, die vorliegende Arbeit bis auf die wissenschaftliche Beratung durch meinen Doktorvater selbstständig verfasst zu haben.

Die Arbeit ist unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis entstanden und ist bisher weder veröffentlicht, noch zur Veröffentlichung eingereicht worden, noch hat sie ganz oder zum Teil an anderer Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen.

Des Weiteren versichere ich, noch keinen Promotionsversuch unternommen zu haben.

Kiel, den 11. Mai 2011