

**Verbandstheoretische Analoga
gruppentheoretischer Sätze von
Baer, Ito und Redei**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von
Siyka Andreeva

Kiel
Oktober 2011

Referent: Prof. Dr. Roland Schmidt

Korreferent: Prof. Dr. Hartmut Laue.....

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.2011.....

Zum Druck genehmigt: Kiel, den 20.01.2012.....

Der Dekan

Abstract

The subject of this thesis is the translation of three well-known (finite) group-theoretical results into the theory of (finite) subgroups lattices of groups. Since the subgroups of a group build a lattice, the so called subgroup lattice, in a natural way by using intersections and joins as operations, the theory of subgroup lattices of groups is a large part of the theory of groups and therefore of algebra. The central theme of this theory is the relation between a group and the lattice of its subgroups. A comparatively new method here, which started 2008 with a paper by M. de Falco, F. de Giovanni and C. Musella, is the translation of well-known group-theoretical theorems into the theory of subgroup lattices of groups in order to gain new results on the structure of a group by examining its lattice of subgroups. Thereby the occurring group-theoretical objects are replaced by a lattice-theoretical approximation in the subgroup lattice. The first theorem of that type introduced in this thesis is based on Redei's results from 1956 on finite minimal-non-nilpotent groups. As its group-theoretical analogue our theorem contains a statement about the exact structure of these groups, where nilpotent groups are replaced by their lattice-theoretical closure. The second lattice-theoretical analogue introduced here is a translation of Ito's theorem from the year 1955, claiming that for a prime p a finite group is p -nilpotent, if each of its elements of order p and for $p = 2$ additionally each one of order 4 is central. Hence the three group theoretical objects occurring in Ito's theorem, namely an element of order p , a central element and a p -nilpotent group, are replaced by lattice-theoretical approximations. Since, in general, one cannot recognize the order of a subgroup in the subgroup lattice of a group, the main challenge here is to find a reasonable lattice-theoretical approximation for an element of order p . Finally we prove a lattice-theoretical analogue to a corollary of Baer's theorem (1957), which says that for a prime p in a finite group an element of order p generating a p -group with each of its conjugates is an element of the largest normal p -subgroup of the group. As a consequence we develop a new method for gaining a lattice-theoretical characterization of the upper Fitting series of a finite group and the resulting lattice-theoretical characterization of the Fitting-class \mathfrak{N}^k for $k \geq 2$.

Kurzfassung

In dieser Dissertation werden drei bekannte Sätze der endlichen Gruppentheorie in die Theorie der (endlichen) Untergruppenverbände übersetzt. Da die Untergruppen einer Gruppe mittels ihrer Durchschnitte und Erzeugnisse in natürlicher Weise einen Verband, den sogenannten Untergruppenverband, bilden, ist die Theorie der Untergruppenverbände ein umfangreicher Teil der Gruppentheorie und damit der Algebra, dessen zentrales Thema die Beziehung zwischen einer Gruppe und deren Untergruppenverband ist. Eine vergleichsweise neue Methode, die ihren Ursprung in einer Arbeit von M. de Falco, F. de Giovanni und C. Musella aus dem Jahr 2008 hat, ist, wohlbekannt Sätze der Gruppentheorie in die Theorie der Untergruppenverbände zu übersetzen, um neue Resultate unter anderem über die Struktur einer Gruppe aus der Struktur ihres Untergruppenverbands ableiten zu können. Im Zuge dessen werden die dabei vorkommenden gruppentheoretischen Begriffe durch verbandstheoretische ersetzt, die diese im Untergruppenverband approximieren. Bei dem ersten in dieser Dissertation vorgestellten Satz dieses Typs handelt es sich um das verbandstheoretische Analogon eines Satzes von Redei aus dem Jahr 1956, der die Struktur minimal nicht nilpotenter Gruppen exakt bestimmt und damit ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis der Nilpotenz von endlichen Gruppen ist. Genauso ist sein verbandstheoretisches Analogon, das die verbandstheoretische Hülle der Klasse der nilpotenten Gruppen als deren Approximation benutzt, eine exakte Gruppenstrukturaussage. Bei dem zweiten hier vorgestellten Analogon handelt es sich um eine verbandstheoretische Übersetzung des Satzes von Ito aus dem Jahr 1955, der besagt, dass eine endliche Gruppe, in der für eine Primzahl p jedes Element der Ordnung p und für $p = 2$ auch jedes Element der Ordnung 4 zentral ist, p -nilpotent ist. Dazu werden die drei in dem Satz verwendeten Begriffe – zentrales Element, Element der Ordnung p und p -nilpotente Gruppe für eine vorgegebene Primzahl p – in die Theorie der Untergruppenverbände übersetzt, wobei die größte Schwierigkeit hier darin besteht, die Untergruppen der Ordnung p einer endlichen Gruppe zu approximieren. Als Letztes wird ein verbandstheoretisches Analogon einer unmittelbaren Folgerung des Baerschen Satzes aus dem Jahr 1957 bewiesen, der besagt, dass für eine Primzahl p ein p -Element x einer endlichen Gruppe, welches mit jedem seiner Konjugierten eine p -Gruppe erzeugt, in dem größten p -Normalteiler der Gruppe liegt. In diesem Zusammenhang wird eine neue Methode zur verbandstheoretischen Charakterisierung der höheren Fittinggruppen einer endlichen Gruppe und damit der Gruppenklasse \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$ entwickelt.

Einleitung

In dieser Dissertation werden endliche Gruppen und deren Untergruppenverbände betrachtet. Die Gruppentheorie ist nach ihren Anfängen im 19. Jahrhundert im letzten Jahrhundert zu einem umfangreichen und wichtigen Teil der Algebra gewachsen. Da die Untergruppen einer Gruppe G mittels ihrer Durchschnitte und Erzeugnisse in natürlicher Weise einen Verband, den sogenannten Untergruppenverband $L(G)$, bilden, hat sich ein neuer und mittlerweile weitverzweigter Teil der Gruppentheorie und der Verbandstheorie entwickelt – die Theorie der Untergruppenverbände. Ihren tatsächlichen Ursprung hat diese Theorie in den Arbeiten von Baer und Ore über Gruppen und deren Untergruppenverbände aus den 30er Jahren des 20. Jahrhunderts, aber man kann schon Dedekinds Untersuchungen der Verbände von Idealen in einem Ring und die Arbeit [9] von Ada Rottländer aus dem Jahre 1928, die von der Galois-Korrespondenz motiviert war, zu den Wurzeln der Untergruppenverbandstheorie dazuzählen. Seitdem haben viele bekannte Gruppentheoretiker auf diesem Gebiet gearbeitet, besonders aber Baer, Sadovskii, Suzuki und Zacher.

Das zentrale Thema der Theorie der Untergruppenverbände ist die Beziehung zwischen einer Gruppe und deren Untergruppenverband. Im Bezug dazu gibt es viele interessante Fragestellungen, zum Beispiel die Frage (A) nach der Struktur des Untergruppenverbands einer Gruppe der Gruppenklasse \mathfrak{X} , und umgekehrt (B) nach der Struktur einer Gruppe, deren Untergruppenverband in der Verbandsklasse \mathfrak{Y} liegt. Einen Isomorphismus von $L(G)$ auf $L(\overline{G})$ für zwei Gruppen G und \overline{G} nennen wir eine Projektivität von G auf \overline{G} und da es nichtisomorphe Gruppen mit isomorphen Untergruppenverbänden, wie die elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^2 und die nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq für $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p > q$, gibt, beschäftigt sich ein wesentlicher Teil der Untergruppenverbandstheorie mit der Frage (C) nach dem verbandstheoretischen Abschluss $\overline{\mathfrak{X}}$ der Gruppenklasse \mathfrak{X} , d. h. nach der Klasse $\overline{\mathfrak{X}}$ aller Gruppen

\overline{G} , für die ein $G \in \mathfrak{X}$ mit $L(G) \simeq L(\overline{G})$ existiert. Weitere wichtige Fragestellungen sind ebenfalls (D) welche Gruppenklassen invariant unter Projektivitäten sind und (E) für welche Verbandsklassen \mathfrak{Y} genau dann $L(G) \in \mathfrak{Y}$ ist, wenn $G \in \mathfrak{X}$ für eine gegebene Gruppenklasse \mathfrak{X} ist, d. h. die Suche nach verbandstheoretischen Charakterisierungen von Gruppenklassen \mathfrak{X} .

Ein Problem ganz anderer Art behandeln M. de Falco, F. de Giovanni und C. Musella in der Arbeit [2]. Die Autoren beweisen dort ein verbandstheoretisches Analogon eines interessanten gruppentheoretischen Satzes, das sie erhalten, indem sie die in ihm vorkommenden gruppentheoretischen Begriffe durch verbandstheoretische Begriffe ersetzen, die diese im Untergruppenverband approximieren. Es handelt sich dabei um den klassischen Satz von I. Schur, dass die Kommutatorgruppe einer Gruppe mit endlicher Zentrumsfaktorgruppe endlich ist. Um ein verbandstheoretisches Analogon dafür zu erhalten, werden zentrale Untergruppen durch modular eingebettete Untergruppen im Untergruppenverband ersetzt und die Vereinigung aller modular eingebetteter Untergruppen einer Gruppe als verbandstheoretische Übersetzung des Zentrums verwendet. Das entsprechende Verfahren der Übersetzung von gruppentheoretischen Begriffen in die Theorie der Untergruppenverbände wird schon seit Längerem bei Problem (E) eingesetzt, aber das oben genannte verbandstheoretische Analogon des Satzes von Schur ist der erste veröffentlichte Satz dieses Typs. Die Arbeit [2] zeigt die Möglichkeit auf, eine ganz neue Art untergruppenverbandstheoretischer Resultate zu erhalten und hat als Inspiration für diese Dissertation gedient.

Neben den Ergebnissen aus [2] ist das in Kapitel I vorgestellte verbandstheoretische Analogon (Korollar 1.2.2) der wohlbekanntten gruppentheoretischen Tatsache, dass (endliche) Gruppen mit zyklischen Zentrumsfaktorgruppen abelsch sind, ein weiteres Resultat, welches modular eingebettete Untergruppen als verbandstheoretische Übersetzung von zentralen Untergruppen benutzt. Hauptergebnis des Kapitels ist ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Redei aus [7] aus dem Jahr 1956, der von Huppert in [5] auf S. 281 zusammengefasst wird. Dieser bestimmt die exakte Struktur einer nicht nilpotenten Gruppe, in der jede echte Untergruppe nilpotent ist, die sogenannten minimal nicht nilpotenten (bzw. bei Redei einstufig nilpotenten) Gruppen. Der Redeische Satz ist ein wichtiges Hilfsmittel zum Beweis der Nilpotenz einer Gruppe

unter Voraussetzungen, die sich auf Untergruppen vererben. Um ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Redei zu finden, wird eine Übersetzung von nilpotenten Gruppen in die Theorie der Untergruppenverbände benötigt. Wir benutzen dabei die verbandstheoretische Hülle \mathfrak{N}^* von \mathfrak{N} , die schon von Suzuki in den 50er Jahren des letzten Jahrhunderts als Lösung des Problems (C) für nilpotente Gruppen vorgestellt wurde und in 1.1.7 – 1.1.9 und 1.3.2 erläutert wird. Genau wie sein gruppentheoretisches Analogon von Redei bestimmt der Satz 2 die exakte Struktur einer endlichen Gruppe G , deren jede echte Untergruppe in \mathfrak{N}^* liegt, G selber aber nicht. Der Satz zeigt, dass neben den Gruppen mit den Redeischen Eigenschaften ein trivialer und ein interessanter neuer Typ von minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppen existiert.

Das zweite Kapitel ist der verbandstheoretischen Übersetzung des Satzes von Ito aus dem Jahr 1955, bewiesen in [6], gewidmet, der besagt, dass eine endliche Gruppe, in der für eine Primzahl p jedes Element der Ordnung p und für $p = 2$ auch jedes Element der Ordnung 4 zentral ist, p -nilpotent ist. Um ein verbandstheoretisches Analogon dieses Satzes zu finden, muss man zunächst die drei in dem Satz verwendeten Begriffe – zentrales Element, Element der Ordnung p , und p -nilpotente Gruppe für eine vorgegebene Primzahl p – in die Theorie der Untergruppenverbände übersetzen. In 2.1.1 wird der Begriff der Z -eingebetteten Untergruppen eingeführt; diese stellen ein besseres verbandstheoretisches Analogon von zentralen Untergruppen als modular eingebettete Untergruppen dar. Die größte Schwierigkeit in diesem Kapitel besteht darin, ein sinnvolles verbandstheoretisches Analogon einer Untergruppe der Ordnung p einer Gruppe zu finden, denn es ist, wie das Beispiel zur obigen Fragestellung (C) zeigt, im Allgemeinen nicht möglich, Untergruppen der Ordnung p zu einer gegebenen Primzahl p in dem Untergruppenverband einer Gruppe zu erkennen. In dem zweiten und dritten Paragraphen des zweiten Kapitels werden zwei verschiedene Möglichkeiten vorgestellt, eine Untergruppe der Ordnung p einer Gruppe G durch den Begriff des p -Atoms eines Verbands in die Theorie der Untergruppenverbände zu übersetzen, wobei beide Definitionen auf dem Grundverständnis basieren, eine Untergruppe der Ordnung p als minimale Untergruppe einer p -Sylowgruppe von G zu erkennen. Dabei werden die Suzukischen Sätze über p -Gruppen und Gruppen mit singulären Projektivitäten aus [13] und 2.4 aus [10] angewandt. Abschliessend werden passend zu den zwei verschiedenen Definitionen eines p -Atoms zwei verbandstheoretische Übersetzungen der p -

Nilpotenz vorgestellt, um zwei verbandstheoretische Analoga des Satzes von Ito zu erhalten. Als eine andere interessante Folgerung davon ergibt sich in 2.2.11 ein Beitrag zu der Frage (C) für p -nilpotente Gruppen.

In dem dritten Kapitel wird der Satz von Baer aus dem Jahr 1957 (S. 144 aus [4]) behandelt, der besagt, dass für eine Primzahl p ein p -Element x einer Gruppe G , welches mit jedem seiner Konjugierten x^g , $g \in G$, eine p -Gruppe erzeugt, in dem größten p -Normalteiler $O_p(G) = \bigcap_{S \in \text{Syl}_p(G)} S$ von G liegt. Dabei übersetzen wir die Konjugation mit Gruppenelementen natürlich durch Abbilden mit Projektivitäten. Eine direkte Übersetzung des Baerschen Satzes in die Theorie der Untergruppenverbände ist aber problematisch, da eine zyklische Gruppe G der Ordnung pq für zwei verschiedene Primzahlen p und q die minimale Untergruppe der Ordnung p als $O_p(G)$ hat und diese unter Autoprojektivitäten von G auf die zyklische Gruppe der Ordnung q , das $O_q(G)$, abgebildet werden kann. Deswegen übersetzen wir stattdessen eine unmittelbare Folgerung des Baerschen Satzes, nämlich, dass zyklische Untergruppen X von Primzahlpotenzordnung einer endlichen Gruppe G , für die $\langle X, X^g \rangle$ für alle $g \in G$ eine Primärgruppe ist, in dem größten nilpotenten Normalteiler von G , der Fittinggruppe $F(G)$, liegen. Das liefert für P -unzerlegbare Gruppen sogar eine verbandstheoretische Charakterisierung ihrer Fittinggruppe. In ihrer kürzlich erschienenen Arbeit [1] geben M. Costantini und G. Zacher für $k \geq 2$ eine verbandstheoretische Charakterisierung der k -ten Fittinggruppe einer endlichen Gruppe, die bekanntlich auch eine Charakterisierung der Formation \mathfrak{N}^k der k -stufig nilpotenten Gruppen impliziert. Die Suche nach verbandstheoretischen Charakterisierungen von dieser Formation, die nach 7.5.5 aus [10] invariant unter Projektivitäten ist, war lange ein interessantes Problem. Das verbandstheoretische Analogon des Satzes von Baer bietet eine neue elegante Möglichkeit für die Bestimmung der höheren Fittingreihe einer endlichen Gruppe in ihrem Untergruppenverband und die daraus resultierende Charakterisierung von \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$. Zusätzlich wird in Satz 14 ein kompletter verbandstheoretischer Algorithmus zur induktiven Bestimmung der k -ten Fittinggruppe für $k \geq 2$ einer endlichen Gruppe explizit angegeben.

In dieser Dissertation werden die üblichen Bezeichnungen aus [10] für bekannte gruppen- und verbandstheoretische Objekte verwendet. Zur Bequemlichkeit des Leser werden diese und einige neudefinierte Objekte in der Notationsliste zusammengefasst, wobei am Anfang von Kapitel I ei-

nige grundlegende Begriffe und Sätze zusätzlich erläutert werden.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Prof. Dr. Roland Schmidt für seine exzellente Betreuung bedanken, dass er mir die Anfertigung dieser Dissertation ermöglichte und jederzeit mit Rat und Tat zur Verfügung stand.

Notation

In der gesamten Notationsliste bezeichnet G eine endliche Gruppe, L einen endlichen Verband und $L(G)$ den Untergruppenverband von G . Des Weiteren seien p eine Primzahl, n, k natürliche Zahlen, x, y Elemente von G , u, v Elemente von L mit $v \leq u$, und H, K Untergruppen von G . Für eine Gruppe G und eine Klasse \mathcal{X} von Verbänden sagen wir, dass genau dann $G \in \mathcal{X}$ ist, wenn $L(G) \in \mathcal{X}$ ist.

Verbands- und untergruppenverbandstheoretische Notation

\leq, \cap, \cup	teilweise Ordnung, Durchschnitt und Vereinigung in L
$0_L, I_L$	Null- und Allelement von L
Atom	minimales Element von $L \setminus \{0_L\}$
Antiatom	maximales Element von $L \setminus \{I_L\}$
$\phi(L)$	Durchschnitt aller Antiatome von L
$\Omega(L)$	Vereinigung aller Atome von L
$[u/v]$	$\{w \in L \mid v \leq w \leq u\}$
$u \text{ mod } L$	u ist modular in L ; s. 1.1.3
$H \cup K$	Erzeugnis von H und K
M_n	Verband der Länge 2 mit n Atomen
\mathcal{D}	Klasse der distributiven Verbände
\mathcal{M}	Klasse der modularen Verbände
\mathcal{K}	Klasse der Ketten
\mathcal{P}	s. 1.1.6
$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^*(L)$	s. 1.1.7
$\mathcal{P}_p, \mathcal{Q}_p$	s. 1.1.8
x^L	die projektive Hülle von x in L ; s. 3.1.1
x_L	das projektive Herz von x in L ; s. 3.1.1

Gruppentheoretische Notation

$[x, y]$	$x^{-1}x^y$
$o(x)$	Ordnung von x
$H \trianglelefteq G$	H ist Normalteiler von G
$H \trianglelefteq \trianglelefteq G$	H ist ein Subnormalteiler von G
$H \text{ mod } G$	H ist modulare Untergruppe von G ; s. 1.1.3
$H \text{ per } G$	H ist permutable Untergruppe von G ; s. 1.1.3
H^G, H_G	normale Hülle und Herz von H in G
$C_G(H), N_G(H)$	Zentralisator, Normalisator von H in G
$P(G)$	die Autoprojektivitätengruppe von G
$\Omega(G)$	$\langle x \in G \mid o(x) = p \rangle$ für G p -Gruppe
$\Omega_n(G)$	$\langle x \in G \mid o(x) \leq p^n \rangle$ für G p -Gruppe
$Z(G)$	das Zentrum von G
$[U, V]$	$\langle [u, v] \mid u \in U, v \in V \rangle$ für Untergruppen $U, V \leq G$
G'	die Kommutatorgruppe $[G, G]$ von G
$\phi(G)$	die Frattiniuntergruppe von G
$F(G)$	die Fittinguntergruppe von G
$F_k(G)$	k -te Fittinguntergruppe von G ; S. 180 [10]
$O_p(G)$	größter p -Normalteiler von G
$O^p(G)$	kleinster Normalteiler mit p -Faktorgruppe von G
$Syl_p(G)$	Menge der p -Sylowgruppen von G
$Exp G$	Exponent von G
$cl(G)$	Nilpotenzklasse von G für G nilpotent
$\mathfrak{A}, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}$	Klassen der abelschen, nilpotenten, auflösbaren Gruppen
\mathfrak{N}^*	verbandstheoretischer Abschluß der nilpotenten Gruppen
\mathfrak{N}^k	Klasse der k -stufig nilpotenten Gruppen
$P(n, p)$	s. 1.1.4
Z_n	zyklische Gruppe der Ordnung n
D_n	Diedergruppe der Ordnung n
P^* -Gruppe	s. 1.1.11
P_1^* -Gruppe	s. 1.1.13
P -zerlegbar	G besitzt P -Zerlegung, s. aus [10]

Inhaltsverzeichnis

1	Verbandstheoretische Analoga grundlegender gruppentheoretischer Objekte und der Satz von Redei	17
1.1	Untergruppenverbände: erste Definitionen und fundamentale Sätze	18
1.2	Modular eingebettete Untergruppen	25
1.3	Ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Redei	27
2	Eingebettete Untergruppen, p-Atome und der Satz von Ito	33
2.1	Z -eingebettete Untergruppen	33
2.2	p -Atome	43
2.3	p -Atome zweiter Art	53
3	Der Satz von Baer und eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittingreihe einer endlichen Gruppe	79
3.1	Ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Baer	80
3.2	Verbandstheoretische Funktoren und eine Charakterisierung der zweiten Fittinggruppe einer endlichen Gruppe	86
3.3	Eine verbandstheoretische Charakterisierung der Klasse \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$	98

Kapitel 1

Verbandstheoretische Analoga grundlegender gruppentheoretischer Objekte und der Satz von Redei

In diesem Kapitel wird der Leser mit den wichtigsten in dieser Dissertation verwendeten Grundlagen der Theorie der Untergruppenverbände in 1.1 vertraut gemacht. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind alle betrachteten Gruppen und Verbände endlich. Des Weiteren werden folgende übliche Bezeichnungen eingeführt:

Definition 1.0.1 *Sei L ein Verband.*

- (a) *Es bezeichnet 0_L das Null- und I_L das Allelement von L .*
- (b) *Minimale Elemente der teilweise geordneten Menge $L \setminus \{0_L\}$ werden Atome und maximale Elemente der teilweise geordneten Menge $L \setminus \{I_L\}$ Antiatome genannt.*
- (c) *Für eine Gruppe G und eine Klasse \mathcal{X} von Verbänden sagen wir, dass genau dann $G \in \mathcal{X}$ ist, wenn $L(G) \in \mathcal{X}$ ist.*

Ist es in dem Kontext eindeutig, so kann der Index aus obiger Bezeichnung weggelassen werden und stattdessen nur 0 bzw. I geschrieben werden.

1.1 Untergruppenverbände: erste Definitionen und fundamentale Sätze

Ausgehend von dem Standpunkt dieser Dissertation kann man viele grundlegende und wohlbekannte Begriffe und Konzepte der Verbandstheorie auch als Übersetzungen bzw. Analoga von gruppentheoretischen Objekten und Resultaten ansehen. Ein erstes Beispiel dafür sind die endlichen distributiven Verbände aus Definition 1.1.1, die nach dem Lemma 1.1.2 von Ore aus dem Jahr 1938 als eine verbandstheoretische Übersetzung der endlichen zyklischen Gruppen angesehen werden können. Genauso können modulare Elemente eines Verbands aus Definition 1.1.3 als Übersetzung von Normalteilern einer Gruppe G (da diese insbesondere modular in $L(G)$ sind) und damit M -Gruppen, d. h. Gruppen mit modularem Untergruppenverband, als Übersetzung von abelschen Gruppen betrachtet werden. Tatsächlich sagt der Satz von Baer aus dem Jahre 1939 aus, dass die Klasse $P(n, p)$ aus 1.1.4 der projektive Abschluss der Klasse der elementarabelschen Gruppen ist. Die projektiven Bilder elementarabelscher Gruppen wurden 1951 von Suzuki P -Gruppen genannt und haben als Grundlage für Untersuchungen eines grossen Teils der Theorie der Untergruppenverbände gedient. Einige dazugehörige grundlegende Sätze dieser Theorie werden ebenfalls im Folgenden vorgestellt.

Dazu erinnern wir zunächst an folgende Definition:

Definition 1.1.1 *Sei L ein Verband.*

(a) *L heißt distributiv, wenn für alle $x, y, z \in L$ das distributive Gesetz gilt:*

$$(i) \ x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z),$$

$$(ii) \ x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z).$$

(b) *Genau dann ist $L \in \mathcal{D}$, wenn L distributiv ist, d. h. \mathcal{D} ist die Klasse der distributiven Verbände.*

Lemma 1.1.2 *(Ore 1938) Genau dann hat eine endliche Gruppe G einen distributiven Untergruppenverband, wenn G zyklisch ist.*

Beweis: Korollar 1.2.4 aus [10] S. 13 □

Des Weiteren werden wir modulare Untergruppen und Gruppen mit modularem Untergruppenverband betrachten und definieren dazu:

Definition 1.1.3 Sei L ein Verband und G eine Gruppe.

- (a) Es heißt L modular, wenn das modulare Gesetz in L gilt, d. h. für alle $x, y, z \in L$ gilt:
 - (i) Ist $x \leq z$, so ist $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z$.
- (b) Ein Element $m \in L$ heißt modular in L (oder kurz $m \text{ mod } L$), wenn für m zwei der Bedingungen des modularen Gesetzes gelten:
 - (ii) $x \cup (m \cap z) = (x \cup m) \cap z$ für alle $x, z \in L$ mit $x \leq z$, und
 - (iii) $m \cup (y \cap z) = (m \cup y) \cap z$ für alle $y, z \in L$ mit $m \leq z$.
- (c) Genau dann ist $L \in \mathcal{M}$, wenn L modular ist, d. h. \mathcal{M} ist die Klasse der modularen Verbände.
- (d) Die Gruppe G heißt M -Gruppe, wenn $L(G)$ modular ist.
- (e) Eine Untergruppe M von G heißt modular in G , wenn $M \text{ mod } L(G)$ ist.
- (f) Eine Untergruppe M von G heißt permutabel in G , falls $MH = HM$ für alle $H \leq G$ ist.

Es ist also ein Normalteiler N einer Gruppe G permutabel in G und damit nach dem Oreschen Satz 2.1.3 aus [10] modular in $L(G)$. Da permutabile Untergruppen nicht im Untergruppenverband erkennbar und damit kein verbandstheoretischer Begriff sind, wird für die verbandstheoretische Approximation der Normalteiler der abgeschwächte Begriff der modularen Elemente des Untergruppenverbandes verwendet. Des Weiteren haben modulare Elemente viele ähnliche Eigenschaften in einem Verband wie Normalteiler in einer Gruppe, beispielsweise gilt dafür ein Analogon des Isomorphiesatzes (S. 44 aus [10]).

Hier werden insgesamt nur zwei Ergebnisse über Gruppen mit modularem Untergruppenverband vorgestellt und zwar einerseits das schon in

der Einleitung des Kapitels erwähnte Resultat von Baer über den projektiven Abschluß der elementarabelschen Gruppen und andererseits der Satz von Iwasawa aus dem Jahr 1942, der die Struktur der Gruppen mit modularem Untergruppenverband exakt bestimmt.

Das einfache schon in der Einleitung erwähnte Beispiel zweier Gruppen mit isomorphem Untergruppenverband, nämlich die elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^2 und die nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq für Primzahlen p und q mit $q \mid p - 1$, hat als Grundlage folgender Definition und der weiteren Sätze gedient.

Definition 1.1.4 *Sei G eine endliche Gruppe.*

- (a) *Sei $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir sagen, dass die Gruppe G in der Klasse $P(n, p)$ liegt, wenn G entweder elementarabelsch der Ordnung p^n oder das semidirekte Produkt eines elementarabelschen Normalteilers P der Ordnung p^{n-1} mit einer zyklischen Gruppe der Ordnung $q \neq p$ ist, die einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf P induziert.*
- (b) *Ist $G \in P(n, p)$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $n \geq 2$, so nennen wir G kurz P -Gruppe.*

Lemma 1.1.5 *(Baer 1932)*

- (a) *Für jede Primzahl p und jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sind die Gruppen in $P(n, p)$ verbandsisomorph.*
- (b) *Für jede Primzahl p und jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ist die Klasse $P(n, p)$ invariant unter Projektivitäten.*

Beweis: Siehe Theorem 2.2.3 und Theorem 2.2.5 aus [10]. □

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, wird sich diese Dissertation unter anderem mit verbandstheoretischen Analoga von minimalen Untergruppen einer p -Gruppe beschäftigen. Erfreulicherweise sind Übersetzungen von beliebigen p -Gruppen in die Theorie der Untergruppenverbände bzw. Untersuchungen von Untergruppenverbänden von p -Gruppen schon aus den Suzukischen Ergebnissen bekannt und ermöglichen es, eine sinnvolle Approximation von Untergruppen der Ordnung p in die Theorie der

Untergruppenverbände zu finden. Da der Baersche Satz 1.1.5 schon zeigt, dass die P -Gruppen dabei gesondert eine Rolle spielen und da zwei zyklische Gruppen von Primzahlpotenzordnung zur selben Potenz verbandsisomorph sind, ist es sinnvoll, die Klasse der p -Gruppen als Vereinigung von drei Klassen von Gruppen zu betrachten – die der zyklischen, die der elementarabelschen und die der Gruppen mit Primäruntergruppenverband aus 1.1.7. Daraus ergibt sich auch die übliche Betrachtungsweise von verbandstheoretischen Analoga von p -Gruppen als Elemente einer der drei dazugehörigen Klassen von Verbänden.

Angelehnt an der Baerschen Definition der Gruppenklasse $\mathcal{P}(n, p)$ von zu den elementarabelschen verbandsisomorphen Gruppen definieren wir neben \mathcal{D} und \mathcal{M} folgende für diese Dissertation wichtige Klassen von Verbänden, die die Übersetzung von beliebigen p -Gruppen liefern:

Definition 1.1.6 *Wir definieren folgende Klassen von Verbänden:*

- (a) *Sei \mathcal{K} die Klasse der Ketten.*
- (b) *Sei \mathcal{P} definiert durch:
Genau dann ist $L \in \mathcal{P}$, wenn eine P -Gruppe G existiert mit $L \simeq L(G)$.*
- (c) *Für $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei $L \in \mathcal{P}_n(p)$ genau dann, wenn $L \simeq L(G)$ mit G elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^n .*
- (d) *Für eine Untergruppe X einer Gruppe G mit $X \in \mathcal{K}$ sagen wir kurz, dass X eine Kette von G ist.*

Es ist $\mathcal{P} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}} \mathcal{P}_n(p)$, also im Wesentlichen die Klasse der Untergruppenverbände der P -Gruppen.

Die Übersetzung von p -Gruppen in die Theorie der Untergruppenverbände wurde 1951 von Suzuki in [13] geliefert und wird im Folgenden vorgestellt. Daraus ergibt sich anschließend auch die in der Einleitung erwähnte verbandstheoretische Hülle \mathfrak{N}^* der nilpotenten Gruppen.

Definition 1.1.7 *Sei L ein endlicher Verband.*

- (a) *Es heißt L Primärverband, falls gilt:*

- (o) Es ist $L \notin \mathcal{K} \cup \mathcal{P}$.
 - (i) Es ist L nach unten semimodular.
 - (ii) Jedes Intervall in L ist direkt unzerlegbar.
 - (iii) Sind $S, T \in L$ mit $[S/0]$ Kette der Länge 2 und S ein Antiatom von $[T/0]$, so ist $[T/0]$ modular oder $[T/0] \simeq L(D_8)$, wobei D_8 die Diedergruppe der Ordnung 8 bezeichnet.
- (b) Genau dann ist $L \in \mathcal{Q}$, wenn L ein Primärverband ist.
- (c) Ein Element $x \in L$ ist genau dann in $\mathcal{Q}^*(L)$, wenn x maximal mit $[x/0] \in \mathcal{Q}$ ist.

Da in dieser Dissertation überwiegend Verbände zu einer fest gewählten Primzahl p betrachtet werden, definieren wir zusätzlich:

Definition 1.1.8 Für $p \in \mathbb{P}$ definieren wir:

- (a) Genau dann ist $L \in \mathcal{P}_p$, wenn $L \in \mathcal{P}$ ist und ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall besitzt.
- (b) Genau dann ist $L \in \mathcal{Q}_p$, wenn $L \in \mathcal{Q}$ ist und ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall besitzt.

Lemma 1.1.9 (Suzuki 1951) Sei G eine Gruppe und p eine Primzahl.

- (a) Genau dann ist $L(G)$ ein Primärverband, wenn G eine nicht zyklische und nicht elementarabelsche Primärgruppe ist.
- (b) Genau dann ist $L(G) \in \mathcal{Q}_p$, wenn G eine nicht zyklische und nicht elementarabelsche p -Gruppe ist.

Beweis: Zu (a): Folgt direkt aus Theorem 7.4.10, [10] S. 391.

Zu (b): Eine Primärgruppe, deren Untergruppenverband ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall besitzt, ist eine p -Gruppe. Nach (a) folgt somit die Behauptung. \square

Suzuki zeigte (siehe 2.2.6 aus [10]), dass nichtzyklische und nicht elementarabelsche p -Gruppen unter Projektivitäten auf p -Gruppen abgebildet werden und dass die oben definierte Klasse \mathcal{Q} genau aus diesen

besteht. Schwierigkeiten bei der Übersetzung einer Untergruppe der Ordnung p einer p -Gruppe G in die Theorie der Untergruppenverbände werden also in den beiden Situationen, wenn $G \in \mathcal{K}$ und $G \in \mathcal{P}$ ist, auftreten. Aus den obigen Resultaten fassen wir zusammen:

Bemerkung 1.1.10 *Sei G eine endliche Gruppe.*

(a) *Ist G eine Primärgruppe, so ist $L(G) \in \mathcal{K} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$.*

(b) *Ist G eine p -Gruppe für eine Primzahl p , so ist $L(G) \in \mathcal{K} \cup \mathcal{P}_p \cup \mathcal{Q}_p$.*

Angelehnt an der Suzukischen Definition der P -Gruppen wurden die P^* -Gruppen, die ebenfalls modulare Untergruppenverbände haben, eingeführt:

Definition 1.1.11 *Die endliche Gruppe G heißt P^* -Gruppe, wenn Primzahlen p und q existieren und $G = PQ$ mit einem elementarabelschen p -Normalteiler P und einer zyklischen q -Gruppe $Q = \langle x \rangle$ ist, so dass x einen Potenzautomorphismus der Ordnung q auf P bewirkt.*

Der Beweis des Hauptsatzes über endliche Gruppen mit modularem Untergruppenverband von Iwasawa aus dem Jahr 1941 ist auf S. 71 in [10] zu finden:

Lemma 1.1.12 *(Iwasawa 1941) Genau dann hat die endliche Gruppe G modularen Untergruppenverband, wenn G direktes Produkt von modularen p -Gruppen und P^* -Gruppen mit paarweise teilerfremden Ordnungen ist.*

Eine weitere für diese Dissertation interessante Klasse von Gruppen, die zum ersten Mal von Suzuki in [13] auf S. 12 erwähnt wird und insbesondere die Klasse der nichtabelschen P -Gruppen enthält, ist die folgende:

Definition 1.1.13 *Die endliche Gruppe G heißt eine P_1^* -Gruppe, wenn Primzahlen p und q existieren und $G = PQ$ mit einem abelschen p -Normalteiler P und einer zyklischen Gruppe $Q = \langle x \rangle$ der Ordnung q ist, so dass x einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf P bewirkt. Um die Primzahl p festzulegen, sagen wir kurz, dass G eine P_1^* -Gruppe zu p ist.*

Aus den Definitionen 1.1.4 und 1.1.13 folgt unmittelbar:

Bemerkung 1.1.14 *Sei G eine endliche Gruppe.*

- (a) *Ist $G \in P(n, 2)$, so ist G elementarabelsch. Es gibt also keine nicht abelsche Gruppe in \mathcal{P}_2 .*
- (b) *Ist G eine P_1^* -Gruppe zu p mit elementarabelschem p -Normalteiler, so ist G eine P -Gruppe zu p .*
- (c) *Ist G eine P_1^* -Gruppe zu p , so ist G nicht abelsch, insbesondere existiert keine P_1^* -Gruppe zu 2.*

Lemma 1.1.15 *Sei G eine P_1^* -Gruppe zu p . Dann gilt:*

- (i) *Es ist $G/\phi(G) \in \mathcal{P}_p$.*
- (ii) *Jede echte Untergruppe von G ist entweder eine Primärgruppe oder eine P_1^* -Gruppe zu p .*
- (iii) *Jedes Intervall der Länge 2 in G ist entweder eine Kette oder isomorph zu M_{p+1} .*

Beweis: Da G eine P_1^* -Gruppe zu p ist, ist $G = PQ$ nach Definition 1.1.13 mit einem abelschen p -Normalteiler P und einer zyklischen Gruppe Q der Ordnung q , die einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf P bewirkt. Wegen $\phi(P) \trianglelefteq G$ und $P/\phi(P)$ elementarabelsch folgt (i) somit direkt aus 1.1.4 und Satz 3.18 aus [5], S. 275.

Zu (ii): Sei $H < G$. Dann ist entweder $H \leq P$ und damit eine p -Gruppe oder es ist $q \mid |H|$. Dann ist also entweder H zyklisch der Ordnung q (und damit Primärgruppe) oder H enthält sowohl eine q -Sylowgruppe Q_0 von G als auch $1 \neq P_0 = P \cap H \trianglelefteq H$. Da Q einen universellen Potenzautomorphismus auf P bewirkt, ist dieser auf P_0 ebenfalls nichttrivial und damit bewirkt Q_0 auch auf P_0 einen universellen nichttrivialen Potenzautomorphismus, d. h. H ist eine P_1^* -Gruppe zu p .

Zu (iii): Wir führen Induktion nach $|G|$ durch. Sei $[H/K]$ ein Intervall der Länge 2 in G . Ist $H < G$, so ist H nach (ii) zyklische p - oder q -Gruppe,

oder abelsche (und nichtzyklische) p -Gruppe, oder eine P_1^* -Gruppe zu p . Ist H zyklisch, so ist $[H/K] \in \mathcal{K}$. Ist H abelsche und nichtzyklische p -Gruppe, so ist $K \trianglelefteq H$ und H/K abelsch von der Ordnung p^2 , also entweder zyklisch und damit $L(H/K) \in \mathcal{K}$ oder elementarabelsch und damit $L(H/K) \simeq M_{p+1}$. Ist H eine P_1^* -Gruppe zu p , so ist nach Induktionsvoraussetzung jedes Intervall in H entweder eine Kette oder isomorph zu M_{p+1} und damit insbesondere $[H/K]$. Sei also $H = G$. Da $[G/K]$ ein Intervall der Länge 2 ist, ist entweder $[G/K] \in \mathcal{K}$ oder G besitzt mehr als eine maximale Untergruppe, die K enthält. Damit ist aber $\phi(G) \leq K$ und da $G/\phi(G) \in \mathcal{P}_p$ nach (i) ist, ist somit $[G/K] \simeq M_{p+1}$ und (iii) gilt. \square

1.2 Modular eingebettete Untergruppen

Ausgehend von der bereits erwähnten Idee, Gruppen mit modularem Untergruppenverband als Übersetzung von abelschen Gruppen in die Theorie der Untergruppenverbände zu verwenden, kann man für die Übersetzung von zentralen Untergruppen deren Haupteigenschaft benutzen, nämlich deren elementweise Vertauschbarkeit mit jedem Element der Gruppe, also dass die von ihr und dem Element erzeugte Gruppe abelsch ist. Darauf basiert die folgende Definition, die das grundlegende Konzept der in der Einleitung erwähnten Arbeit [2] von de Falco, de Giovanni und Musella bildet.

Definition 1.2.1 *Sei L ein Verband.*

- (a) *Wir nennen $m \in L$ modular eingebettet in L , wenn $[m \cup x/0]$ modular ist für jedes $x \in L$ mit $[x/0] \in \mathcal{D}$.*
- (b) *Sei G eine Gruppe. Eine Untergruppe M von G heißt modular eingebettet in G , wenn M modular eingebettet in $L(G)$ ist, d. h. wenn $L(\langle M, x \rangle)$ modular ist für alle $x \in G$.*

Ein weiteres Resultat über modulare Untergruppen ist der folgende Satz, welcher für die Beweisführung im nächsten Kapitel benutzt wird und vielleicht über diese Dissertation hinaus interessant sein kann. Außerdem liefert ein Korollar des Satzes gleichzeitig das bereits in der Einleitung erwähnte verbandstheoretische Analogon zu der grundlegenden

gruppentheoretischen Tatsache, dass Gruppen mit zyklischer Zentrumsfaktorgruppe abelsch sind.

Satz 1 *Sei G eine endliche Gruppe und M eine Untergruppe von G mit $[G/M]$ distributiv. Dann ist $G = \langle M, x \rangle$ für ein $x \in G$.*

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz und $M \leq G$ maximal, so dass der Satz falsch ist. Da $[G/M]$ und damit $[G/H]$ distributiv ist, gilt somit die Behauptung für jede echte Obergruppe H von M . Da $\langle M, x \rangle \neq G$ für alle $x \in G \setminus M$ ist, ist M keine maximale Untergruppe von G und damit existiert ein $H < G$ mit $M \max H$. Dann existiert ein $x \in H \setminus M$ mit $H = \langle M, x \rangle$ und wegen der maximalen Wahl von M existiert ein $y \in G$ mit $G = \langle H, y \rangle$. Wir betrachten $L := \langle M, y \rangle$ und $K := \langle M, xy \rangle$. Da (G, M) ein Gegenbeispiel zum Satz ist, ist jede der drei Gruppen H, L, K eine echte Untergruppe von G . Es ist offenbar $H \cup L = \langle H, y \rangle = G$ und da $y = x^{-1}xy \in \langle M, x \rangle \cup \langle M, xy \rangle = H \cup K$ ist, ist $G = \langle H, y \rangle \leq H \cup K$ und damit $H \cup K = G$. Ferner ist $\langle H, y \rangle = \langle M, x, y \rangle \leq \langle M, xy, y \rangle = K \cup L$ und damit auch $K \cup L = G$. Wäre $H \cap K = M = H \cap L$, so wäre wegen der Distributivität von $[G/M]$ nun $H = H \cap G = H \cap (L \cup K) = (H \cap L) \cup (H \cap K) = M$, ein Widerspruch zu $M < H$. Es ist also mindestens eine der beiden Gruppen $H \cap L$ und $H \cap K$ eine echte Obergruppe von M . Wäre $M < H \cap L$, so wäre wegen $M \max H$ nun $H \cap L = H$ und somit $H \leq L$, also $L = H \cup L = G$, ein Widerspruch zu $L < G$. Es ist also $H \cap K = H$ und damit $H \leq K$, also ist $G = H \cup K = K < G$. Mit diesem Widerspruch gilt die Behauptung. \square

Korollar 1.2.2 *Sei $M \leq G$ mit $[G/M]$ distributiv. Ist M modular eingebettet in G , so ist $L(G)$ modular.*

Beweis: Da $[G/M]$ distributiv ist, existiert mit Satz 1 ein $x \in G$ mit $G = \langle M, x \rangle$. Da M modular eingebettet in G ist, ist $L(G)$ modular nach Definition 1.2.1. \square

Trotz einiger Anwendungen des Konzepts der modular eingebetteten Untergruppen, ist dieses für die verbandstheoretische Übersetzung des Itoschen Satzes nicht gut genug. Deswegen wird in Kapitel II das neue Konzept der Z -eingebetteten Untergruppen vorgestellt und diese werden als verbandstheoretisches Analogon der zentralen Untergruppen einer Gruppe von da an verwendet.

1.3 Ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Redei

Der Satz von Redei [7] ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, ein wichtiges Hilfsmittel. Er ermöglicht eine kürzere und elegantere Beweisführung für viele Sätze über nilpotente Gruppen, in denen sich die vorausgesetzten Eigenschaften auf Untergruppen vererben, weil er die exakte Struktur einer minimal nicht nilpotenten Gruppe bestimmt.

Sein verbandstheoretisches Analogon ist ein Satz des gleichen Typs, der die exakte Struktur von minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppen bestimmt. Wie in der Einleitung erklärt, wird dabei für die Übersetzung der nilpotenten Gruppen deren verbandstheoretischer Abschluß \mathfrak{N}^* als verbandstheoretische Approximation verwendet. Dazu definieren wir zunächst:

Definition 1.3.1 Sei G eine endliche Gruppe.

- (a) Es ist \mathfrak{N}^* die Menge aller Gruppen G , für die eine Gruppe $H \in \mathfrak{N}$ existiert mit $L(G) \simeq L(H)$.
- (b) Eine endliche Gruppe G heißt \mathfrak{N}^* -Gruppe, wenn $G \in \mathfrak{N}^*$ ist, wenn also G projektives Bild einer nilpotenten Gruppe ist.
- (c) Eine endliche Gruppe G heißt minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppe, wenn jede echte Untergruppe von G eine \mathfrak{N}^* -Gruppe ist, G selber aber nicht.

Da eine nilpotente Gruppe direktes Produkt ihrer Sylowgruppen ist, können wir nach 1.6.4 aus [10] und 1.1.6 – 1.1.9 direkt folgern:

Lemma 1.3.2 Genau dann ist G eine \mathfrak{N}^* -Gruppe, wenn G direktes Produkt von p -Gruppen und P -Gruppen mit paarweise teilerfremden Ordnungen ist.

Die Struktur der minimalen nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppen wird durch den Hauptsatz des Kapitels, wie die der minimal nicht nilpotenten Gruppen durch sein gruppentheoretisches Analogon von Redei, exakt geklärt:

Satz 2 Sei G eine minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppe. Dann ist G auflösbar und es gilt eine der folgenden Aussagen:

- (a) $|G|$ ist Produkt von höchstens drei Primzahlen (mit Vielfachheit).
- (b) G ist minimal nicht nilpotent, also $G = PQ$ mit einem p -Normalteiler P und einer zyklischen q -Gruppe Q , so dass $\phi(Q) \leq Z(G)$ ist. Für $p > 2$ ist ferner $\text{Exp } P = p$ und für $p = 2$ ist $\text{Exp } P \leq 4$.
- (c) Es ist $G = PQ$ mit einem elementarabelschen Normalteiler P der Ordnung p^q und einer zyklischen q -Gruppe Q der Ordnung q^2 , die irreduzibel auf P operiert, so dass $q|p-1$ ist und $\Omega(Q)$ einen Potenzautomorphismus der Ordnung q in P induziert.

Beweis: Sei G eine minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppe und sei $|G| = \prod_{i=1}^s p_i^{r_i}$ mit natürlichen Zahlen r_1, \dots, r_s, s und paarweise verschiedenen Primzahlen p_1, \dots, p_s . Da G eine minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppe ist, ist mit Lemma 1.3.2 jede echte Untergruppe von G direktes Produkt von p - und P -Gruppen, also überauflösbar. Mit Satz 9.6 auf S. 718 aus [5] ist G auflösbar. Sei $\{P_1, \dots, P_s\}$ ein Sylowsystem von G (im Sinne der Definition 2.1 auf S. 664 aus [5]) mit Sylowgruppen $P_i \in \text{Syl}_{p_i}(G)$ von G . Sei etwa $p_1 = \max\{p_i \mid i = 1, \dots, s\}$.

Sei zunächst $s \geq 3$. Dann ist $P_1 P_i < G$ und damit entweder $P_1 P_i = P_1 \times P_i$ oder $P_1 P_i \in \mathcal{P}$ und in diesem Falle ist P_1 die Sylowgruppe zur größeren Primzahl von $P_1 P_i$, es ist also P_1 für alle $i \in \{1, \dots, s\}$ ein Normalteiler von $P_1 P_i$. Da jede echte Untergruppe von G eine \mathfrak{N}^* -Gruppe ist, G selber aber nicht, ist G L -unzerlegbar und damit kann P_1 nicht von allen P_i zentralisiert werden, also existiert ein $i \in \{1, \dots, s\}$, etwa $i = 2$, so dass P_1 nicht von P_2 zentralisiert wird. Es ist dann $P_1 P_2 \in \mathcal{P}$ und damit $r_2 = 1$.

Angenommen, es ist $s \geq 4$. Da $\{P_1, \dots, P_s\}$ ein Sylowsystem von G ist, ist für $i \geq 3$ dann $P_1 P_2 P_i < G$, also L -zerlegbar und P_i ein direkter Faktor von $P_1 P_2 P_i$ für alle $i = 3, \dots, s$. Hiermit ist $G = P_1 P_2 \times (\prod_{i \geq 3} P_i) \in \mathfrak{N}^*$, ein Widerspruch. Es ist also $s = 3$.

Ist $r_1 > 1$, so ist für jede Untergruppe P_0 der Ordnung p_1 von P_1 nun $P_0 < P_1$. Da für $j = 2, 3$ entweder $P_1 P_j = P_1 \times P_j$ oder P_1 der elementarabelsche Normalteiler der P -Gruppe $P_1 P_j$ und damit $P_0 \trianglelefteq G$ ist, ist $P_0 P_2 P_3 < G$, also $P_0 P_2 P_3 \in \mathfrak{N}^*$. Damit zentralisiert P_3 einerseits jede minimale Untergruppe der elementarabelschen Gruppe P_1 , und somit ganz P_1 . Andererseits zentralisiert P_3 wegen $P_0 P_2 P_3 < G$ auch P_2

und somit ist P_3 ein direkter Faktor von G , ein Widerspruch zu G L -unzerlegbar. Somit ist $r_1 = 1$. Angenommen, es ist $r_3 > 1$, dann ist wegen $p_1 = \max\{p_i \mid i = 1, \dots, s\}$ nun $P_1P_3 \notin \mathcal{P}$. Dann ist $P_3 \leq C_G(P_1)$ und da P_3 kein direkter Faktor von G ist, hiermit $P_2 \not\leq C_G(P_3)$. Dann ist $P_2P_3 \in \mathcal{P}$ und wegen $r_3 > 1$ für jede minimale Untergruppe $P_0 < P_3$ somit $P_1P_2P_0 < G$. Es ist aber $P_1P_2P_0 \notin \mathfrak{N}^*$, da $P_2 \not\leq C_G(P_3)$ und $P_2 \not\leq C_G(P_1)$ ist, ein Widerspruch zu G minimal nicht- \mathfrak{N}^* -Gruppe. Es ist also $r_3 = 1$ und (da wie oben gesehen auch $r_2 = 1$ ist) somit $|\pi(G)| = 3$ und $|G| = p_1p_2p_3$, also G eine der Gruppen aus (a).

Sei also $s = 2$ und p und q die Primteiler von $|G|$ mit $p > q$. Seien ferner $P \in \text{Syl}_p(G)$ und $Q \in \text{Syl}_q(G)$, und sei N ein maximaler Normalteiler von G , d. h. wegen G auflösbar ist $|G : N| = r \in \{p, q\}$. Ist jede echte Untergruppe von G nilpotent, so ist G minimal nicht nilpotent und mit Satz 5.2 auf S. 281 aus [5] erfüllt G damit die Aussage aus (b).

Sei also M eine echte Untergruppe von G , die nicht nilpotent ist, also M eine nicht abelsche P -Gruppe (wegen $p > q$) zu p , etwa der Ordnung $p^m q$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Damit ist $q \mid p - 1$.

Ist N nilpotent, so enthält N eine Sylowgruppe von G , die charakteristisch in N und damit normal in G ist. Da die q -Sylowgruppen in M nicht normal sind, besitzt G eine normale p -Sylowgruppe und es ist $|G : N| = q$. Wäre $|Q| > q^2$, so wäre für jede maximale Untergruppe H von Q sofort $|H| > q$ und damit PH nilpotent. Somit wäre aber G doch minimal nicht nilpotent, ein Widerspruch zu $M \in \mathcal{P}$. Damit ist $|Q| \leq q^2$.

Ist $|Q| = q$, so ist $N = P$, und mit dem Satz von Maschke auf S. 122 aus [5] ist für ein $k \in \mathbb{N}$ nun $P/\phi(P) = N_1/\phi(P) \times \dots \times N_k/\phi(P)$ mit irreduziblen $GF(p)Q$ -Moduln $N_j/\phi(P)$. Mit Satz 3.10 auf S. 166 aus [5] ist $N_j/\phi(P)$ von Ordnung p für alle $j \in \{1, \dots, k\}$. Sei zunächst P elementarabelsch, d. h. es ist $P = N_1 \times \dots \times N_k$. Sei $Q = \langle x \rangle$. Würde x einen Potenzautomorphismus zur selben Potenz auf N_i für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ bewirken, so wäre, da Q nichttrivial auf P operiert, somit $G = PQ \in \mathcal{P}$, ein Widerspruch. Damit bewirkt x verschiedene Potenzautomorphismen auf mindestens zwei verschiedenen der $GF(p)Q$ -Moduln, etwa auf N_1 und N_2 . Dann ist $(N_1 \times N_2)Q \notin \mathfrak{N}^*$ und somit $G = (N_1 \times N_2)Q$, also ist $|P| = p^2$ und G eine der Gruppen aus (a).

Sei also P nicht elementarabelsch. Ist $k > 1$, so ist $N_jQ < G$ und damit eine \mathfrak{N}^* -Gruppe für alle $j \in \{1, \dots, k\}$. Da $M \in \mathcal{P}$ nichtabelsch ist,

existiert ein $j \in \{1, \dots, k\}$, etwa $j = 1$, so dass $N_1Q \in \mathcal{P}$ nichtabelsch ist. Dann bewirkt x einen nichttrivialen Potenzautomorphismus zu einer festen Potenz auf N_1 und damit insbesondere auf $\phi(P) \leq N_1$. Da aber $N_iQ \in \mathfrak{N}^*$ und $\phi(P) \leq N_i$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$ ist, ist N_i elementarabelsch und x bewirkt auf jedem N_i , $i \in \{2, \dots, k\}$ einen Potenzautomorphismus zur selben Potenz wie auf N_1 . Wäre für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ nun $N_iN_jQ \in \mathfrak{N}^*$, so wäre $(N_iN_j)Q \in \mathcal{P}$, also N_iN_j und damit P elementarabelsch. Da x auf jedem N_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, einen Potenzautomorphismus zur selben Potenz wie auf N_1 bewirkt, wäre damit $G \in \mathcal{P}$, ein Widerspruch. Es existieren also $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $N_iN_jQ \notin \mathfrak{N}^*$. Damit ist $G = (N_iN_j)Q$, also $k = 2$ und $|P : \phi(P)| = p^2$. Da $P = N_1 \cup N_2$ nicht elementarabelsch und N_i elementarabelsch für $i = 1, 2$ ist, ist P nichtabelsch. Es ist also $\phi(P) = N_1 \cap N_2 = Z(P)$ und damit $cl(P) = 2$. Nach dem Burnsidischen Basissatz ([5], S. 273) existieren dann $a \in N_1$ und $b \in N_2$ mit $P = \langle a, b \rangle$. Da x einen Potenzautomorphismus zur selben Potenz auf N_1 und N_2 bewirkt, ist $[a, b]^x = [a^x, b^x] = [a^i, b^i]$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Wegen $cl(P) = 2$ ist $P' \leq Z(P)$, also ist $[a, b]$ sowohl mit a als auch mit b vertauschbar und damit $[a, b]^i = [a, b]^x = [a, b]^{i^2}$. Dann ist $i \equiv 1 \pmod{p}$ und Q operiert doch trivial auf P , ein Widerspruch. Es ist also $k = 1$ und $P = N_1$, also wegen $|N_1 : \phi(P)| = p$ nun P zyklisch. Da Q nichttrivial auf P operiert, also $C_P(Q) \leq \phi(P)$ ist, ist $\phi(P)Q < G$ nach 2.2.6 aus [4] nicht nilpotent und damit $\phi(P)Q \in \mathcal{P}$. Da P zyklisch ist, ist $\phi(P)$ von der Ordnung p , d. h. es ist $|P| = p^2$. Hiermit ist $|G| = p^2q$ und damit G eine der Gruppen aus (a).

Sei also $|Q| = q^2$. Da $M \in \mathcal{P}$ nichtabelsch ist, ist nach geeigneter Konjugation $M \cap Q \neq 1$. Setze $Q_1 := M \cap Q$, d. h. Q_1 operiert nichttrivial auf P und wegen $PQ_1 < G$ ist $PQ_1 \in \mathcal{P}$. Da N nilpotent mit $|G : N| = q$ ist, ist $Q_2 := N \cap Q \neq 1$ mit $Q_2 = C_Q(P)$ und damit $Q = Q_1 \cup Q_2$ elementarabelsch. Dann wird jede echte Untergruppe P_0 von P von Q normalisiert, also ist $P_0Q < G$ wegen $PQ_1 \in \mathcal{P}$ nicht nilpotent und damit $P_0Q \notin \mathfrak{N}^*$, ein Widerspruch. Es ist damit $|P| = p$ und $|G| = pq^2$, also G eine der Gruppen aus (a).

Sei also N nicht nilpotent. Damit ist N als echte Untergruppe von G eine nichtabelsche P -Gruppe, d. h. $|N| = p^lq$ für eine natürliche Zahl l .

Ist $|G : N| = p$, so ist einerseits $Q \leq N$ und damit $|Q| = q$, und andererseits $P_1 := P \cap N$ vom Index p in P . Es ist ferner P_1 als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers selbst ein Normalteiler von G ,

d. h. G/P_1 ist von der Ordnung pq . Da (wegen $p > q$) die p -Sylowgruppe von G/P_1 ein Normalteiler von G/P_1 ist, ist ebenfalls ihr Urbild P ein Normalteiler von G und zwar ein nilpotenter Normalteiler vom Index q . Wie eben für nilpotentes N gezeigt, ist in diesem Fall G eine der Gruppen aus (a).

Sei also $|G : N| = q$; dann ist $P < N$ die p -Sylowuntergruppe der P -Gruppe N . Als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G ist P selbst ein Normalteiler von G . Da N nicht abelsch der Ordnung $p^l q$ ist, ist $Q_1 := N \cap Q$ von der Ordnung q und wegen $|G : N| = q$ somit $|Q| = q^2$. Ist $|P| = p$, so ist damit $|G| = pq^2$, d. h. es ist G eine der Gruppen aus (a).

Sei also $|P| > p$. Wäre Q nicht irreduzibel auf P , so würde eine nicht-triviale echte Q -invariante Untergruppe $P_1 \leq P$ existieren. Dann wäre aber $P_1 Q$ eine echte Untergruppe von G , die wegen $N = P Q_1 \in \mathcal{P}$ nicht nilpotent und damit keine \mathfrak{N}^* -Gruppe ist, ein Widerspruch. Es ist also Q irreduzibel auf P . Wäre Q elementarabelsch, so würde eine Untergruppe $Q_2 \leq Q$ mit $Q = Q_1 \times Q_2$ existieren und da Q_1 jede Untergruppe von P normalisiert, würde Q_2 irreduzibel auf P operieren. Mit Satz 3.10 auf S. 166 aus [5] wäre also doch $|P| = p$, ein Widerspruch.

Es ist also Q zyklisch, d. h. es ist $Q = \langle x \rangle$ für $x \in Q$. Da $P \trianglelefteq G$ und $P \leq N$, ist $P \langle x^q \rangle = N \in \mathcal{P}$. Da Q irreduzibel auf P operiert, ist mit Lemma 3.1 aus [11] dann $|P| = p^q$. Hiermit ist G eine der Gruppen aus (c) und die Behauptung bewiesen. \square

Die Aussage vom obigen Satz 2 ist bestmöglich, da alle Gruppen, die auftreten, entweder minimal nicht- \mathfrak{N}^* - oder selbst \mathfrak{N}^* -Gruppen sind.

Kapitel 2

Eingebettete Untergruppen, p -Atome und der Satz von Ito

Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe. Wie bereits in der Einleitung erklärt, werden in diesem Kapitel zwei verbandstheoretische Analoga des Satzes von Ito bewiesen und dafür werden die vier in der Einleitung erwähnten neuen Begriffe eingeführt und die dazugehörigen Konzepte vorgestellt.

2.1 Z-eingebettete Untergruppen

Wie in 1.2 schon gezeigt, ist die Übersetzung einer zentralen Untergruppe durch eine im Untergruppenverband modular eingebettete Untergruppe ein elegantes und ergebnisreiches Konzept. Dies ist allerdings nicht für die Übersetzung des Itoischen Satzes nützlich, da in einer endlichen Gruppe mit modularem Untergruppenverband jede minimale Untergruppe modular eingebettet ist. Wie schon bei der Übersetzung der nilpotenten Gruppen gesehen, sind nichtabelsche P -Gruppen als Ausnahme in solchen Fällen immer vorhanden, aber P^* -Gruppen haben ebenfalls modularen Untergruppenverband (siehe 1.1.11 – 1.1.12). Um diese als Ausnahme auszuschließen, wird eine genauere Übersetzung für zentrale Untergruppen benötigt, um ein vernünftiges Analogon des Itoischen Satzes zu erhalten. Hierzu stellen wir ein neues, für die in dieser Dissertation behandelten Sätze besseres, Konzept vor und definieren:

Definition 2.1.1 Sei L ein Verband.

(a) Ein Element $x \in L$ mit $[x/0] \in \mathcal{K}$ heißt Z -eingebettet in L , wenn gilt:

(1) $[x \cup y/0] \in \mathcal{M}$ für alle $y \in L$ mit $[y/0] \in \mathcal{D}$.

(2) Ist $y \in L$ mit $[y/0] \in \mathcal{K}$, so dass $[\Omega(x \cup y)/0]$ direkt zerlegbar ist, so ist $[x \cup y/0]$ direkt zerlegbar.

(b) Für eine endliche Gruppe G nennen wir eine Kette $X \leq G$ Z -eingebettet in G , wenn X Z -eingebettet in $L(G)$ ist.

Offenbar sind Z -eingebettete Untergruppen wegen Bedingung (1) insbesondere modular eingebettet, die Definition beinhaltet aber zusätzlich die starke Bedingung (2), die eine Übersetzung des Zentralisierens darstellt. Wegen dieser Bedingung besitzt eine P^* -Gruppe keine Z -eingebetteten Untergruppen, es sei denn, sie ist eine P -Gruppe. Ähnlich wie bei modular eingebetteten Untergruppen ist die Approximation einer zentralen Untergruppe durch Z -eingebettete Untergruppen sinnvoll, denn hierfür gilt ebenfalls:

Bemerkung 2.1.2 Sei G eine endliche Gruppe und $1 \neq X \leq G$ mit $X \in \mathcal{K}$.

(i) Ist $X \leq Z(G)$, so ist X Z -eingebettet in G .

(ii) Ist $X \leq G$ Z -eingebettet in G , so ist X im Allgemeinen nicht zentral in G .

(iii) Ist G eine P^* -Gruppe zu p für ein $p \in \mathbb{P}$ und X eine p -Untergruppe, die Z -eingebettet in G ist, so ist $G \in \mathcal{P}$.

Beweis: Zu (i): Da $X \leq Z(G)$ ist, ist für alle zyklischen Untergruppen Z von G nun $X \cup Z$ abelsch und damit modular. Sei $Y \leq G$ eine Kette. Ist $(|X|, |Y|) \neq 1$, so ist XY eine p -Gruppe für eine Primzahl p , also $\Omega(XY)$ mit dem Satz von Suzuki ([10], Theorem 1.6.5, S. 37) nun L -unzerlegbar. Ist $(|X|, |Y|) = 1$, so ist XY direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen mit teilerfremden Ordnungen, also ist $X \cup Y$ nach Lemma 1.6.4 auf S. 37 aus [10] auch L -zerlegbar. Damit gilt auch (2) aus (a) der Definition

2.1.1 und X ist Z -eingebettet in G .

Zu (ii): Sei G eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq mit $p, q \in \mathbb{P}$. Dann ist $Z(G) = 1$, aber jede echte Untergruppe von G ist Z -eingebettet in G .

Zu (iii): Da G P^* -Gruppe ist, ist nach 1.1.11 für zwei verschiedene Primzahlen p und q dann $G = PQ$ mit einem elementarabelschen p -Normalteiler P und einer zyklischen q -Gruppe $Q = \langle x \rangle$, so dass x einen Potenzautomorphismus der Ordnung q auf P bewirkt. Insbesondere bewirkt Q einen Automorphismus der Ordnung q auf X , d. h. X wird von $\phi(Q)$ zentralisiert. Da $X \cup Q$ unzerlegbar und X Z -eingebettet in G ist, ist nach (2) dann $|Q| = q$ und damit $G \in \mathcal{P}$. \square

Das Beispiel aus dem Beweis zu (ii) gilt viel allgemeiner, wie (I) aus dem folgenden Beispiel zeigt. Das Beispiel (II) zeigt die Wirkung der Bedingung (1) der obigen Definition.

Beispiel 2.1.3 *Sei G eine endliche Gruppe.*

(I) *Sei G eine P_1^* -Gruppe zu p , d. h. wie in 1.1.13 ist $G = PQ$ mit einer abelschen p -Gruppe P und einer zyklischen q -Gruppe $Q = \langle x \rangle$ der Ordnung q mit $p, q \in \mathbb{P}$, so dass $q|p-1$ und x einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf P bewirkt. Dann ist jede Untergruppe der Ordnung p von G Z -eingebettet in G .*

(II) *Sei G das semidirekte Produkt einer zyklischen Gruppe P der Ordnung $p \in \mathbb{P}$ mit einer zyklischen Gruppe N der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ mit $n = qr$ für Primzahlen q, r mit $q \neq r$, die treu auf P operiert. Dann ist P nicht Z -eingebettet in G .*

Beweis: Zu (I): Da Q einen nichttrivialen und teilerfremden Potenzautomorphismus auf P bewirkt, operiert Q fixpunktfrei auf P . Sei P_0 eine minimale Untergruppe von P und sei $Y \leq G$ mit $Y \in \mathcal{D}$. Da $C_P(Q) = 1$ ist, ist $Y \leq P$ oder $|Y| = q$, insbesondere ist also $Y \in \mathcal{K}$. Ist $|Y| = q$, so ist $P_0 \cup Y \in \mathcal{P}$, da Q einen Potenzautomorphismus auf P bewirkt. Dann ist insbesondere $P_0 \cup Y \in \mathcal{M}$ und $\Omega(P_0 \cup Y)$ direkt unzerlegbar und es gelten dafür sowohl (1) als auch (2) der Definition 2.1.1. Ist $Y \leq P$, so ist $P_0 \cup Y$ abelsch (also $P_0 \cup Y \in \mathcal{M}$) und $\Omega(P_0 \cup Y)$ L -unzerlegbar nach dem

Satz von Suzuki ([10], Theorem 1.6.5, S. 37). Damit gelten auch hierfür (1) und (2) der Definition 2.1.1 und jede minimale Untergruppe von P ist Z -eingebettet in G .

Zu (II): Da $C_N(P) = 1$ ist, sind $Q \in \text{Syl}_q(N)$ und $R \in \text{Syl}_r(N)$ nichttrivial auf P und damit $PQ, PR \in \mathcal{P}$, d.h. G ist L -unzerlegbar. Mit dem Iwasawaschen Satz 1.1.12 ist dann $G = P \cup N \notin \mathcal{M}$, aber $N \in \mathcal{D}$. \square

Im Folgenden werden einige für die nachfolgende Beweisführung nützliche Vererbungseigenschaften von Z -eingebetteten Untergruppen aufgelistet. Die Eigenschaft (v) zeigt insbesondere, dass, anders als bei modular eingebetteten Untergruppen, P -Gruppen und modulare p -Gruppen die einzigen Gruppen mit modularem Untergruppenverband sind, in denen jede minimale Untergruppe Z -eingebettet ist:

Lemma 2.1.4 *Sei G eine endliche Gruppe und X Z -eingebettet in G . Dann gilt:*

- (o) *Für jedes $H \leq G$ mit $X \leq H$ ist X auch Z -eingebettet in H .*
- (i) *X ist modular in G .*
- (ii) *X ist modular eingebettet in G .*
- (iii) *Jede Untergruppe von X ist Z -eingebettet in G und (mit (i) auch) modular in G .*
- (iv) *Für alle $N \trianglelefteq G$ ist XN/N modular eingebettet in G/N und damit ist auch jede Untergruppe von XN/N modular eingebettet in G/N .*
- (v) *Für alle Ketten $Y \leq G$ ist entweder $X \cup Y$ eine modulare p -Gruppe für eine Primzahl p oder zyklisch oder es ist $X \cup Y \in P(2, r)$ für eine Primzahl r .*

Beweis: Zu (o): Dieses folgt direkt aus der Definition 2.1.1.

Zu (i): Mit (1) der Definition 2.1.1 ist $X \cup Y \in \mathcal{M}$ für alle $Y \leq G$ mit $Y \in \mathcal{D}$, also insbesondere für alle Ketten $Y \leq G$. Mit Previatos Satz

5.1.13 auf S. 215 aus [10] folgt (i).

Zu (ii): Folgt sofort aus (1) der Definition 2.1.1.

Zu (v): Sei $Y \leq G$ Kette. Nach (1) der Definition 2.1.1 ist dann $X \cup Y \in \mathcal{M}$ und mit dem Satz von Iwasawa 1.1.12 direktes Produkt von modularen p -Gruppen und P^* -Gruppen mit paarweise teilerfremden Ordnungen. Sind die Gruppen X und Y beide p -Gruppen für eine Primzahl p , so ist $X \cup Y$ entweder eine modulare p -Gruppe oder eine P^* -Gruppe, in der X und Y nicht normal und damit zueinander konjugiert sind. Im zweiten Falle existiert eine Primzahl r und $Z \leq X \cup Y$, so dass $|Z| = r$ ist und X einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf Z bewirkt, $X \cup Z$ ist also L -unzerlegbar. Da X Z -eingebettet in G ist, ist damit $\Omega(X \cup Z)$ ebenfalls L -unzerlegbar und da $X \cup Y$ eine P^* -Gruppe ist, ist $|X| = p$. Damit ist auch $|Y| = p$ und $X \cup Y = X \cup Z \in P(2, r)$. Ist $(|X|, |Y|) = 1$, so ist entweder $Y \leq C_G(X)$ und damit $X \cup Y$ zyklisch oder $X \cup Y$ ist eine P^* -Gruppe. Mit der Bedingung (2) der Definition 2.1.1 ist im zweiten Falle damit $X \cup Y \in \mathcal{P}$, also sowohl X als auch Y eine minimale Untergruppe von G . Damit ist $X \cup Y \in P(2, r)$ für eine Primzahl r .

Zu (iii): Sei $X_0 \leq X$. Dann ist $(X_0 \cup Y) \leq X \cup Y \in \mathcal{M}$ für alle zyklischen Untergruppen Y von G und damit gilt (1) aus Definition 2.1.1. Sei $Y \leq G$ mit $Y \in \mathcal{K}$ und $\Omega(X_0 \cup Y)$ L -zerlegbar. Mit (v) ist dann $X_0 \cup Y$ L -zerlegbar, also gilt auch (2) aus (a) der Definition 2.1.1 und (iii) ist bewiesen.

Zu (iv): Sei $N \trianglelefteq G$ und $\bar{G} := G/N$. Mit [10] S. 201 ist $\bar{X} \text{ mod } \bar{G}$. Sei $\bar{Y} \leq \bar{G}$ mit $\bar{Y} \in \mathcal{D}$. Dann ist \bar{Y} zyklisch und damit existiert ein $y \in G$ mit $Y = \langle y, N \rangle$. Da X Z -eingebettet in G ist, ist $X \cup \langle y, N \rangle \in \mathcal{M}$, also ist $\bar{X} \cup \bar{Y} = (X \cup \langle y, N \rangle)/N = \langle X, y, N \rangle / N = \langle X, y \rangle N/N \simeq \langle X, y \rangle / (\langle X, y \rangle \cap N) \in \mathcal{M}$ und die Behauptung gilt. \square

Folgendes Lemma, welches im Beweis von Satz 3 gebraucht wird, gilt allgemeiner für modular eingebettete und nach (ii) aus 2.1.4 insbesondere für Z -eingebettete Untergruppen:

Lemma 2.1.5 *Sei M eine modular eingebettete Untergruppe der endlichen Gruppe G mit $|M| = p \in \mathbb{P}$ und $M \not\leq Z(G)$. Dann gilt eine der*

folgenden Aussagen:

- (a) Es ist $M \trianglelefteq G$ und $G/C_G(M)$ ist zyklisch von Primzahlordnung q mit $q|p-1$.
- (b) Es ist M permutabel in G mit $M \not\trianglelefteq G$. Dann ist $O^p(G) \leq C_G(M) \trianglelefteq G$ und $G/C_G(M)$ ist elementarabelsche p -Gruppe.
- (c) Es ist $M \text{ mod } G$, so dass M nicht permutabel in G ist. Dann ist $G/C_G(M)_G \in \mathcal{P}$ nichtabelsch der Ordnung $r^m p$ mit $r \in \mathbb{P}, m \in \mathbb{N}$ und $p|r-1$.

Beweis: Sei zunächst $M \trianglelefteq G$. Da $|M| = p$ ist, ist mit 2.2.5 auf S. 46 aus [4] dann $\text{Aut}M$ zyklisch der Ordnung $p-1$. Da $M \trianglelefteq G$ ist, ist $G/C_G(M)$ isomorph zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe von M und damit ebenfalls $G/C_G(M)$ zyklisch von $p-1$ teilender Ordnung. Sei $y \in C_G(M)$ ein Erzeuger dieser Faktorgruppe. Da M modular eingebettet in G ist, ist $\langle M, y \rangle \in \mathcal{M}$, also nach dem Iwasawaschen Satz 1.1.12 direktes Produkt von p - und P^* -Gruppen mit teilerfremden Ordnungen. Sei $y = y_1 \cdots y_r$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $y_i, i \in \{1, \dots, r\}$, von paarweise teilerfremden Primzahlpotenzordnungen. Dann operiert höchstens eins der y_i nichttrivial auf M , etwa y_1 , d. h. es ist $M \langle y_1 \rangle$ eine P^* -Gruppe und $M \langle y_i \rangle = M \times \langle y_i \rangle$ für alle $i \in \{2, \dots, r\}$. Es ist also $o(y_1) = q^k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{P}$ mit $q|p-1$, so dass $\phi(\langle y_1 \rangle), \langle y_i \rangle \leq C_G(M)$ für $i \in \{2, \dots, r\}$ ist. Damit ist $G/C_G(M) \simeq \langle y_1 \rangle / \phi(\langle y_1 \rangle)$ von der Ordnung q und (a) gilt.

Sei nun $M \not\trianglelefteq G$ und zunächst $M \text{ per } G$. Mit 5.2.9 auf S. 223 aus [10] ist M^G eine elementarabelsche p -Gruppe mit $M^G = M \times (M^G \cap Z(G))$ und jedes p' -Element von G zentralisiert M . Dann ist $M^G / (M^G \cap Z(G))$ von der Ordnung p und wird damit sowohl von jedem p -Element als auch von jedem p' -Element von G zentralisiert. Sei $x \in G$ mit $M = \langle x \rangle$ und sei $\rho : G \rightarrow G$ definiert durch $g^\rho = [g, x]$ für alle $g \in G$. Wegen $M^G / (M^G \cap Z(G)) \leq Z(G / (M^G \cap Z(G)))$ ist dann $[x, g] = x^{-1}x^g \in M^G \cap Z(G)$ und damit $[g, x] = [x, g]^{-1} \in M^G \cap Z(G)$. Für $g_1, g_2 \in G$ gilt also $(g_1 g_2)^\rho = [g_1 g_2, x] = [g_1, x]^{g_2} [g_2, x] = [g_1, x][g_2, x] = g_1^\rho g_2^\rho$. Damit ist ρ ein Homomorphismus mit $\text{Kern} \rho = C_G(M)$ und $\text{Bild} \rho \leq M^G \cap Z(G)$. Nach dem Homomorphiesatz ist dann $G/C_G(M) = G/\text{Kern} \rho \simeq \text{Bild} \rho \leq$

$M^G \cap Z(G)$ eine elementarabelsche p -Gruppe.

Sei abschließend M nicht permutabel in G . Da $M \bmod G$ ist, ist wegen $M_G = 1$ nach 5.1.9 aus [10] auf S. 209 nun $G = M^G \times K$, wobei M^G eine nichtabelsche P -Gruppe von zu $|K|$ teilerfremder Ordnung ist, so dass M eine nichtnormale p -Sylowgruppe von M^G ist. Dann existiert eine natürliche Zahl m und eine Primzahl r mit $p|r-1$, so dass $|M^G| = r^m p$. Da M von K zentralisiert wird, ist $C_G(M) = M \times K$ und $C_G(M)_G = K$. Dann ist $G/C_G(M)_G \simeq M^G$, also eine nichtabelsche P -Gruppe der Ordnung $r^m p$, und die Behauptung ist bewiesen. \square

Das nächste Lemma ist eins der wichtigsten Hilfsmittel für den Beweis von Satz 3, aber vielleicht von unabhängigem Interesse:

Lemma 2.1.6 *Für eine Primzahl p sei P eine endliche p -Gruppe mit $\Omega(P)$ elementarabelsch und sei α ein Automorphismus von Primzahlordnung von P , der einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf $\Omega(P)$ bewirkt. Dann ist P abelsch und α bewirkt einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf P .*

Beweis: Wir führen Induktion nach $|P|$ durch. Offenbar vererbt sich die Voraussetzung des Lemmas auf jede echte α -invariante Untergruppe H von P , denn α induziert einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf $\Omega(H) \leq \Omega(P)$; nach Induktionsvoraussetzung bewirkt α einen Potenzautomorphismus auf H . Da P endlich ist, bewirkt α nach Satz 1.5.4 aus [10] einen universellen Potenzautomorphismus auf $\Omega(P)$, d. h. es existiert ein $r \in \mathbb{N}$ mit $x^\alpha = x^r$ für alle $x \in \Omega(P)$.

Da α von Primzahlordnung ist und einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf $\Omega(P)$ bewirkt, ist $o(\alpha) = q (\neq p)$ für eine Primzahl q mit $q|p-1$. Nach dem Satz von Maschke ([5], S. 122) ist α somit vollständig reduzibel auf $P/\phi(P)$, d. h. es existieren $N_1, \dots, N_m \leq P$, $m \in \mathbb{N}$, so dass $P/\phi(P) = N_1/\phi(P) \times \dots \times N_m/\phi(P)$ mit $N_i/\phi(P)$ irreduzibler $GF(p) \langle \alpha \rangle$ -Modul für $i = 1, \dots, m$. Nach Satz 3.10 auf S. 166 aus [5] haben all diese Moduln die Dimension 1, d. h. es ist $|N_i/\phi(P)| = p$ für alle $i = 1, \dots, m$. Setze $M_i := \prod_{j \neq i} N_j$. Für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ ist dann M_i eine α -invariante maximale Untergruppe von P , d. h. nach Induktionsvoraussetzung ist M_i abelsch und α induziert einen Potenzautomorphismus auf M_i . Ist P nichtabelsch, so ist $M_l \cap M_k \leq Z(P)$ für alle $l, k \in \{1, \dots, m\}$

mit $l \neq k$, weil die M_1, \dots, M_m abelsche maximale Untergruppen von P sind. Angenommen, es ist $m > 2$. Dann ist für $x \in M_1 \cap M_2 \leq Z(P)$ schon $x \in C_P(M_3)$ und falls $x \notin M_3$ wäre, wäre wegen $M_3 \max P$ dann $P = M_3 \langle x \rangle$ doch abelsch. Damit ist $M_1 \cap M_2 \leq M_3$. Andererseits ist aber $N_3 \leq M_1 \cap M_2 \leq M_3$, ein Widerspruch zu der Wahl von M_i . Es ist also $m = 2$, d. h. es ist $|P : Z(P)| = p^2$ und $\phi(P) = M_1 \cap M_2 = Z(P)$. Somit ist die Nilpotenzklasse $cl(P) = 2$ und P wird von zwei Elementen erzeugt. Mit dem Burnsideschen Basissatz ([5], S. 273) können wir also annehmen, dass $P = \langle a, b \rangle$ mit $a \in M_1$ der Ordnung p^s und $b \in M_2$ der Ordnung p^t für $s, t \in \mathbb{N}$ ist. Da α nach Induktionsvoraussetzung jeweils einen Potenzautomorphismus auf M_1 und M_2 bewirkt, ist $a^\alpha = a^i$ und $b^\alpha = b^j$ für zwei natürliche Zahlen i und j . Da $x^\alpha = x^r$ für alle $x \in \Omega(P)$ ist, ist $(a^{p^{s-1}})^r = (a^{p^{s-1}})^\alpha = (a^{p^{s-1}})^i$ und damit $r \equiv i \pmod{p}$. Ebenso ist $r \equiv j \pmod{p}$. Wir betrachten $[a, b]$. Es ist $[a, b] \neq 1$, da P nichtabelsch ist, und wegen $cl(P) = 2$ ist $P' \leq Z(P)$, also ist $[a, b]$ sowohl mit a als auch mit b vertauschbar und damit $[a^i, b^j] = [a, b]^{ij}$. Da $\alpha \in \text{Aut}(P)$ ist, ist $[a, b]^\alpha = [a^\alpha, b^\alpha] = [a^i, b^j] = [a, b]^{ij}$. Analog zu a und b ergibt sich für $[a, b]$ auch $r \equiv ij \pmod{p}$ und damit $r \equiv r^2 \pmod{p}$. Hiermit ist $r \equiv 0 \pmod{p}$ oder $r \equiv 1 \pmod{p}$. Da $p \nmid r$, ist $r \equiv 1 \pmod{p}$. Damit wird jedes Element aus $\Omega(P)$ von α festgelassen, ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Es ist also P abelsch, etwa mit $\text{Exp } P = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Angenommen, α induziert keinen Potenzautomorphismus in P . Dann existiert ein $a \in P$ mit $\langle a \rangle$ nicht α -invariant. Es ist $\Omega_{n-1}(P)$ eine charakteristische echte Untergruppe von P , also α -invariant, und damit bewirkt α nach Induktionsvoraussetzung einen Potenzautomorphismus auf $\Omega_{n-1}(P)$. Somit ist $o(a) = p^n$ und $\phi(\langle a \rangle)$ ist α -invariant. Man betrachte $H := \langle a, a^\alpha \rangle$. Da $\phi(\langle a \rangle)$ nun α -invariant ist, ist $\langle a \rangle \cap \langle a^\alpha \rangle \max \langle a \rangle$ und damit $|\langle a, a^\alpha \rangle| = p^{n+1}$. Da $o(a) = p^n = o(a^\alpha)$ ist, existiert nach 4.2.7 auf S. 102 aus [8] ein $b \in P$ mit $o(b) = p$ und $\langle a, a^\alpha \rangle = \langle a \rangle \cup \langle b \rangle = \langle a^\alpha \rangle \cup \langle b \rangle$. Da $\langle b \rangle \leq \Omega(P)$ α -invariant ist, ist $H = \langle a^\alpha \rangle \cup \langle b \rangle = \langle a^\alpha \rangle \cup \langle b^\alpha \rangle = (\langle a \rangle \cup \langle b \rangle)^\alpha = H^\alpha$ und damit H α -invariant. Da α (wegen $\langle a \rangle$ nicht α -invariant) auf H keinen Potenzautomorphismus bewirkt, ist nach Induktionsvoraussetzung $H = P$. Somit ist P abelsch vom Typ (p^n, p) . Da nach Voraussetzung $n \geq 2$ ist (denn sonst wäre $P = \Omega(P)$ und die Behauptung trivialerweise erfüllt), besitzt P ge-

nau $p + 1$ maximale Untergruppen, davon p zyklische, die $\phi(\langle a \rangle)$ enthalten, und die α -invariante maximale Untergruppe $\Omega_{n-1}(P)$. Es operiert also $\langle \alpha \rangle$ auf der Menge Δ aller zyklischen maximalen Untergruppen von P . Da $q \neq p$ ist, besitzt α mit 3.1.7 aus [4] einen Fixpunkt auf Δ , d. h. es existiert ein $c \in P$ mit $o(c) = p^n$ und $\langle c \rangle^\alpha = \langle c \rangle$, also existiert ein $i \in \mathbb{N}$ mit $c^\alpha = c^i$. Dann ist für den Erzeuger der minimalen Untergruppe $\langle c^{p^{n-1}} \rangle$ von $\langle c \rangle$ (wegen $c^{p^{n-1}} \in \Omega(P)$) einerseits $(c^{p^{n-1}})^\alpha = (c^{p^{n-1}})^i$ und andererseits $(c^{p^{n-1}})^\alpha = (c^{p^{n-1}})^r$, also $r \equiv i \pmod{p}$. Da $o(b) = p$ ist, gilt $b^\alpha = b^r = b^i$ und wegen $P = \langle c, b \rangle$ ist für $a = b^j c^k$ mit $j, k \in \mathbb{N}$ dann $a^\alpha = (b^j c^k)^\alpha = (b^j)^\alpha (c^k)^\alpha = b^{ij} c^{ik} = (b^j c^k)^i = a^i$, also doch $\langle a \rangle^\alpha = \langle a \rangle$. Mit diesem finalen Widerspruch bewirkt α doch einen Potenzautomorphismus auf P und die Behauptung gilt. \square

In den beiden folgenden Paragraphen werden bei den zwei verschiedene Konzepten von p -Atomen, die die Möglichkeit geben, Untergruppen der Ordnung p in Untergruppenverbänden zu erkennen, immer wieder tatsächliche Untergruppen der Ordnung p betrachtet. Ein wichtiger Hauptfall des Beweises der beiden Analoga zu dem Satz von Ito wird also durch den folgenden Satz abgedeckt:

Satz 3 *Sei p eine Primzahl und G eine endliche Gruppe. Ist jede Untergruppe der Ordnung p und für $p = 2$ zusätzlich jede zyklische Untergruppe der Ordnung 4 von G Z -eingebettet in G , so ist G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p .*

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz. Damit ist $p \mid |G|$ (denn sonst wäre G p -nilpotent) und es ist jede echte Untergruppe von G entweder p -nilpotent oder ihre $O_{p'}$ -Faktorgruppe ist eine P_1^* -Gruppe zu p . Ist jede maximale Untergruppe von G (und damit jede echte Untergruppe von G) p -nilpotent, so ist G minimal nicht p -nilpotent und nach dem Satz von Ito ([5], S. 434) ist dann $G = PQ$ mit einer normalen p -Gruppe P vom Exponenten p oder höchstens 4 für $p = 2$ und einer zyklischen q -Gruppe Q , so dass jede echte Untergruppe von G nilpotent ist. Existiert eine zyklische Untergruppe $X \leq G$ mit $|X| = p$ oder $|X| = 4$, so dass $X \cup Q = G$ ist, so ist, da X Z -eingebettet in G ist, nach (1) der Definition 2.1.1 wegen Q zyklisch $L(G)$ modular. Da G nicht nilpotent ist und $|G|$ genau zwei Primteiler besitzt, ist mit Iwasawas Satz 1.1.12 dann G eine P^* -Gruppe zum größeren Primteiler p . Nach Bemerkung 2.1.2 (iii) ist dann G eine \mathcal{P} -Gruppe, ein Widerspruch. Es ist für alle zyklischen

Untergruppen $X \leq G$ mit $|X| = p$ oder $|X| = 4$ also $X \cup Q < G$ und diese werden damit nach dem Itoschen Satz (wegen $X \cup Q$ nilpotent) von Q zentralisiert. Hiermit wird aber wegen $\text{Exp } P = p$ oder $\text{Exp } P = 4$ ganz P von Q zentralisiert, also ist G doch p -nilpotent, ein Widerspruch.

Es existiert also eine maximale Untergruppe M von G , die nicht p -nilpotent ist, es ist also $M/O_{p'}(M)$ eine P_1^* -Gruppe zu p und da auf einer 2-Gruppe kein teilerfremder Potenzautomorphismus bewirkt werden kann, ist somit $p > 2$.

Sei $Z \leq G$ mit $|Z| = p$. Dann ist Z Z -eingebettet in G und nach Lemma 2.1.4 ist dann $Z \text{ mod } G$. Ist Z nicht permutabel in G , so ist wegen $Z_G = 1$ mit Lemma 5.1.9 aus [10] nun $G = Z^G \times K$, wobei Z^G eine nichtabelsche P -Gruppe und $(|K|, |Z^G|) = 1$ ist. Da $Z^G \in \mathcal{P}$ nichtabelsch ist, besitzt Z^G eine charakteristische elementarabelsche r -Sylowgruppe R für eine Primzahl r mit $p \mid r - 1$. Dann ist aber RK ein p' -Normalteiler von G und G/RK zyklisch der Ordnung p , also G doch p -nilpotent, ein Widerspruch. Es ist also $Z \text{ per } G$ für alle Untergruppen $Z \leq G$ mit $|Z| = p$.

Da $M/O_{p'}(M)$ eine P_1^* -Gruppe zu p ist, existiert eine Untergruppe $X \leq M$ mit $|X| = p$, so dass $X \not\leq Z(M)$ ist. Dann ist X Z -eingebettet und (wie eben gesehen) permutabel in G . Angenommen, es ist $X \not\trianglelefteq G$. Mit Lemma 2.1.5 ist dann $G/C_G(X)$ eine elementarabelsche p -Gruppe. Da aber $X \leq M$ und $M/O_{p'}(M)$ eine P_1^* -Gruppe zu p ist, existiert ein p' -Element $y \in M$ mit $y \notin C_G(X)$, ein Widerspruch.

Es ist also $X \trianglelefteq G$. Mit Lemma 2.1.5 ist dann $G/C_G(X)$ zyklisch der Ordnung q für eine Primzahl q mit $q \mid p - 1$. Da $C := C_G(X)$ eine zentrale Untergruppe der Ordnung p (nämlich X) enthält, ist $C/O_{p'}(C)$ keine P_1^* -Gruppe, also ist C p -nilpotent mit normalem p -Komplement $K := O_{p'}(C)$. Da $C \trianglelefteq G$ ist, ist K ein p' -Normalteiler von G . Wegen $|G : C| = q$ und da $|C : K| = p^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, ist $|G/K| = p^n q$. Wäre $K \neq O_{p'}(G)$, so wäre $|O_{p'}(G)| = |K|q$ und G hätte doch ein normales p -Komplement, ein Widerspruch. Es ist also $K = O_{p'}(G)$. Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ und setze $\overline{G} := G/O_{p'}(G)$. Dann ist $|P| = p^n$ und da $\overline{C} \simeq P$ ist, ist $\overline{P} \trianglelefteq \overline{G}$ und es existiert eine Untergruppe $Q \leq G$ mit $|\overline{Q}| = q$, die nichttrivial auf \overline{P} operiert. Da jede minimale Untergruppe von P permutabel in G ist, erzeugen je zwei Untergruppen der Ordnung p von G eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung p^2 . Damit ist $\Omega(P)$ elementarabelsch. Da

$K = O_{p'}(G)$ ist, ist also $\Omega(\overline{P}) \simeq \overline{\Omega(P)}$ elementarabelsch. Da jede Untergruppe P_0 der Ordnung p von G permutabel in G ist, ist auch jede Untergruppe \overline{P}_0 der Ordnung p von \overline{P} permutabel in \overline{G} . Da P_0 Z -eingebettet in G ist, ist mit (iv) aus Lemma 2.1.4 nun \overline{P}_0 modular eingebettet in \overline{G} , also ist wegen $|\overline{Q}| = q$ damit $\overline{P}_0 \overline{Q} \in \mathcal{M}$. Da $q|p-1$ ist, wird \overline{P}_0 von \overline{Q} normalisiert. Somit induziert \overline{Q} einen Potenzautomorphismus auf $\Omega(\overline{P})$, d. h. mit Lemma 2.1.6 ist \overline{P} abelsch und $\overline{P} \overline{Q} = G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p . Mit diesem finalen Widerspruch gilt die Behauptung. \square

Bemerkung 2.1.7 *Wegen Beispiel I aus 2.1.3 ist die Aussage des obigen Satzes bestmöglich. Da in den nächsten beiden Paragraphen Gruppen, in denen Untergruppen der Ordnung p Z -eingebettet sind, betrachtet werden, ist Satz 3 eines der zentralen Mittel für die Beweisführung dort.*

2.2 p -Atome

Wie schon in der Einleitung erklärt, wird für die Übersetzung des Ito-schen Satzes eine Approximation einer Untergruppe der Ordnung p einer endlichen Gruppe G in dem Untergruppenverband von G benötigt. Wir fahren nun in diesem und in dem nächsten Paragraphen mit dem in der Einleitung des Kapitels vorgestellten Konzept fort.

Wir betrachten zunächst eine Vereinfachung der Menge $\mathcal{S}_L(p)$ aus [3], die eine natürliche und elegante Übersetzung einer Untergruppe der Ordnung p ist:

Definition 2.2.1 *Sei L ein endlicher Verband und G eine endliche Gruppe.*

(a) *Sei $p \in \mathbb{P}$. Wir nennen ein Atom $x \in L$ ein p -Atom von L , wenn es ein $y \in L$ mit $[y/0] \in \mathcal{K}$ gibt, so dass gilt:*

$$(1) [x \cup \phi([y/0])/0] \in \mathcal{D},$$

$$(2) [x \cup y/\phi([y/0])] \simeq M_{p+1}.$$

- (b) Ein Atom $x \in L$ ist auch ein 2-Atom von L , wenn gilt:
- (3) Es existiert ein $h \in L$ mit $x < h$ und $[h/0] \simeq L(Q_8)$.
- (c) Für ein $n \in \mathbb{N}$ heißt $v \in L$ eine (p, n) -Kette, wenn $[v/0]$ eine Kette der Länge n ist und ein p -Atom von L enthält.
- (d) Eine Untergruppe X von G heißt p -Atom von G , falls X ein p -Atom von $L(G)$ ist und eine Untergruppe $V \leq G$ heißt eine (p, n) -Kette von G , wenn V eine Kette der Länge n ist und ein p -Atom von G enthält.

Man beachte, dass für $p \neq 2$ jedes p -Atom X von G die Bedingung in (a) erfüllt und für das in (a) genannte Y ist $X \cup \phi(Y)$ zyklisch und damit $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y$.

Neben einiger Vererbungseigenschaften zeigt die folgende Bemerkung, dass ein p -Atom von G für $p \neq 2$ nicht notwendigerweise die Ordnung p hat. Dieses macht den wesentlichen Unterschied zu den in dem nächsten Paragraphen vorgestellten p -Atomen zweiter Art aus.

Lemma 2.2.2 Sei G eine endliche Gruppe und $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt:

- (o) Jedes 2-Atom von G ist von der Ordnung 2 und damit ist insbesondere jede $(2, n)$ -Kette von G zyklisch der Ordnung 2^n .
- (i) Sei $H \leq G$. Ist X ein p -Atom von H , so ist X ein p -Atom von G .
- (i') Sei $H \leq G$. Ist X ein p -Atom von G mit $X \leq H$, so ist X nicht notwendigerweise ein p -Atom von H .
- (ii) Sei $H \leq G$ mit $H \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist jede minimale Untergruppe von H ein p -Atom von G .
- (iii) Sei P eine p -Sylowgruppe von G , die mehr als eine minimale Untergruppe besitzt. Dann ist jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G .
- (iv) Sei X ein p -Atom von G . Dann besitzt G ein p -Atom von der Ordnung p .

(v) Ist X ein p -Atom von G mit $|X| \neq p$, so ist $p > 2$ und es existiert ein $S \in P(2, p)$ nichtabelsch mit $X \leq S$.

(vi) Sei X eine minimale Untergruppe von $P \in \text{Syl}_2(G)$. Dann ist entweder X ein 2-Atom von G oder P ist zyklisch und G 2-nilpotent.

Beweis: Zu (o): Sei X ein 2-Atom von G . Gelten dafür (1) und (2) der obigen Definition 2.2.1, so existiert eine Kette Y , so dass $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$, und damit $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y$ ist, und $X \cup Y / \phi(Y) \in P(2, 2)$ ist. Da auf einer elementarabelschen 2-Gruppe kein nichttrivialer Potenzautomorphismus bewirkt werden kann, ist dann $X \cup Y / \phi(Y) \simeq V_4$ und damit $X \cup Y$ eine elementarabelsche 2-Gruppe, also $|X| = 2$. Gilt (3) aus 2.2.1, so existiert ein $H \leq G$ mit $X \leq H$ und $L(H) \simeq L(Q_8)$. Nach [10] S. 28 ist dann $H \simeq Q_8$, also insbesondere eine 2-Gruppe. In diesem Fall ist X die einzige minimale Untergruppe von H und zwar von der Ordnung 2. Dann ist auch jede Kette, die X enthält eine zyklische 2-Gruppe; nach (c) der Definition gilt der Rest der Behauptung.

Zu (i): Da X ein p -Atom von H ist, es existiert ein $Y \leq H$ entweder mit $Y \simeq Q_8$ und $X \leq Y$ oder $Y \in \mathcal{K}$, so dass (1) und (2) der Definition 2.2.1 erfüllt sind. Da aber $Y \leq H$ ist, ist insbesondere $Y \leq G$, d. h. X ist auch ein p -Atom von G .

Zu (i'): Sei G das semidirekte Produkt einer zyklischen Gruppe N der Ordnung 7 mit einer zyklischen Gruppe H der Ordnung 6, die treu auf N operiert, und sei S die Untergruppe der Ordnung 3 von H . Dann ist S ein 7-Atom von G , aber kein 7-Atom von H .

Zu (ii): Da $H \in P(n, p)$ ist, ist für je zwei minimale Untergruppen X, Y von H schon $X \cup Y \in P(2, p)$, denn es ist entweder $X \cup Y$ elementarabelsch der Ordnung p^2 oder es ist $X \cup Y$ nichtabelsch der Ordnung pq für eine Primzahl q mit $q \mid p-1$. Damit ist sowohl (1) der Definition 2.2.1 trivialerweise erfüllt (da die Frattinigruppe einer minimalen Untergruppe trivial ist) als auch (2), und jede minimale Untergruppe von H ist ein p -Atom von H und nach (i) auch ein p -Atom von G .

Zu (iii): Da $Z(P) \neq 1$ ist, besitzt P mindestens eine zentrale Untergruppe X von der Ordnung p . Dann ist für jede minimale Untergruppe

$Y \leq P$ mit $X \neq Y$ schon $X \cup Y$ elementarabelsch der Ordnung p^2 . Es ist also $X \cup Y \in P(2, p)$, und mit (ii) ist jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G .

Zu (iv): Da X ein p -Atom von G ist, ist entweder $|X| = 2$ nach (o), falls X ein 2-Atom von G ist, oder es ist $p > 2$ und es existiert eine Kette $Y \leq G$ mit $[X \cup Y/\phi(Y)] \simeq M_{p+1}$. Es ist dann für $\phi(Y) \neq 1$ nach 2.2.1 und Lemma 3.1 aus [3] dann $|X| = p$. Ist $\phi(Y) = 1$, so ist $X \cup Y \in P(2, p)$, d. h. es existiert eine Untergruppe $Z \leq X \cup Y$ mit $|Z| = p$, die mit (ii) auch ein p -Atom von G ist.

Zu (v): Da $|X| \neq p$ ist, ist nach (o) nun $p > 2$. Da X ein p -Atom von G ist, existiert damit nach 2.2.1 ein $Y \leq G$ mit $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$, also $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y$, und $X \cup Y/\phi(Y) \in P(2, p)$. Da $|X| \neq p$ ist, ist $X \cup Y/\phi(Y)$ nichtabelsch und $X \not\trianglelefteq X \cup Y$. Nach Lemma 3.1 aus [3] ist dann $\phi(Y) = 1$. Damit ist $X \cup Y \in P(2, p)$ und (v) gilt.

Zu (vi): Existiert eine minimale Untergruppe Y von P mit $X \neq Y$, so ist nach (iii) jede minimale Untergruppe von P , insbesondere also X , ein p -Atom von G . Ist X die einzige minimale Untergruppe von P , so ist entweder P zyklisch oder verallgemeinerte Quaternionengruppe. Im zweiten Falle enthält P eine Untergruppe $H \leq P$ mit $H \simeq Q_8$ und da X die einzige minimale Untergruppe von P ist, ist $X \leq H$. Dann ist nach (b) der Definition 2.2.1 damit X ein 2-Atom von G . Ist P zyklisch, so ist nach Satz 2.8 auf S. 420 aus [5] dann G 2-nilpotent. \square

Da nicht jede endliche Gruppe p -Atome besitzt, ist folgendes Lemma der erste Hauptpunkt im späteren Beweis des Analogons des Satzes von Ito.

Lemma 2.2.3 *Genau dann besitzt die endliche Gruppe G keine p -Atome, wenn G p -nilpotent ist und die p -Sylowgruppen von G zyklisch sind.*

Beweis: Sei zunächst G eine endliche Gruppe, die keine p -Atome besitzt. Ist $p \nmid |G|$, so ist G p -nilpotent mit trivialen und damit zyklischen p -Sylowgruppen. Sei also $p \mid |G|$ und $P \in \text{Syl}_p(G)$. Da G keine p -Atome besitzt, hat P nach (iii) aus 2.2.2 genau eine minimale Untergruppe X . Ist $p = 2$, so ist, weil G keine 2-Atome besitzt, nach (vi) aus 2.2.2 damit

P zyklisch und G 2-nilpotent. Sei also $p > 2$. Dann ist, weil X die einzige minimale Untergruppe von P ist, P zyklisch. Angenommen, G ist nicht p -nilpotent. Nach dem Satz von Burnside ([5], 2.6, S. 419) ist dann $P \leq C_G(P) < N_G(P)$. Wähle $y \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ mit $o(y) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, so dass y einen nichttrivialen Automorphismus von Primzahlordnung q auf P bewirkt. Da P zyklisch ist, etwa der Ordnung p^n , bewirkt y mit 2.2.5 aus [4] einen Automorphismus von $p-1$ teilender Ordnung auf P , d. h. es ist $q|p-1$. Damit bewirkt y einen nichttrivialen Automorphismus auf der minimalen Untergruppe X von P und es ist $X \cup \langle y \rangle / \phi(\langle y \rangle)$ nichtabelsch der Ordnung pq . Da $\phi(\langle y \rangle) \leq C_G(P)$ ist, sind die beiden Bedingungen der Definition 2.2.1 erfüllt, d. h. X ist ein p -Atom von G . Mit diesem Widerspruch ist G p -nilpotent und, wie oben gesehen, sind die p -Sylowgruppen von G zyklisch.

Sei umgekehrt G eine p -nilpotente Gruppe mit zyklischen p -Sylowgruppen. Angenommen G besitzt ein p -Atom. Mit (iv) aus Lemma 2.2.2 besitzt G ein p -Atom X der Ordnung p . Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $X \leq P$. Da P zyklisch ist, enthält P keine Untergruppe H mit $H \simeq Q_8$. Für X gilt somit (a) der Definition 2.2.1, d. h. es existiert eine Kette $Y \leq G$ mit $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$ und $[X \cup Y / \phi(Y)] \simeq M_{p+1}$. Es ist also $X \cup \phi(Y)$ zyklisch und damit $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y$. Dann ist aber $X \cup Y / \phi(Y) \in P(2, p)$ und da G und damit auch jede Untergruppe von G p -nilpotent ist, ist $X \cup Y / \phi(Y)$ elementarabelsch der Ordnung p^2 . Da die p -Sylowgruppen von G zyklisch sind, kann G aber keine solche Untergruppe $X \cup Y$ besitzen. Mit diesem Widerspruch gilt die Behauptung. \square

Der folgende Satz ist der entscheidende Bestandteil des Beweises von dem Hauptsatz dieses Paragraphen; er benutzt den Itoschen Satz.

Satz 4 *Sei G eine endliche Gruppe, in der jedes p -Atom und für $p = 2$ zusätzlich auch jede $(2, 2)$ -Kette Z -eingebettet ist. Dann ist entweder G p -nilpotent oder es ist $G = S \times T$, wobei $S \in P(n, p)$ nichtabelsch für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist.*

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz und H eine echte Untergruppe von G . Jedes p -Atom und für $p = 2$ auch jede $(2, 2)$ -Kette von H ist Z -eingebettet in G und mit (o) aus Lemma 2.1.4 auch Z -eingebettet in H , d. h. die Voraussetzung vererbt sich auf echte Untergruppen von G . Wegen der Minimalität von G ist die Behauptung

also wahr für H , d. h. es ist entweder H p -nilpotent oder es existieren Untergruppen $S_0, T_0 \leq G$ mit $S_0 \in P(m, p)$ nichtabelsch für ein $m \in \mathbb{N}$, $(|S_0|, |T_0|) = 1$ und $H = S_0 \times T_0$.

Angenommen, es existiert eine echte Untergruppe $H \leq G$, die nicht p -nilpotent ist, d. h. es ist $H = S_0 \times T_0$ wie oben. Dann ist S_0 eine nicht-abelsche P -Gruppe und damit $p > 2$. Da $S_0 \in P(m, p)$ ist, ist mit (ii) aus Lemma 2.2.2 jede minimale Untergruppe von S_0 ein p -Atom von G und damit Z -eingebettet in G . Sei X ein p -Atom von S_0 , das nicht von der Ordnung p ist. Da $S_0 \in P(m, p)$ ist, ist dann $|X| = q$ für eine Primzahl q mit $q \mid p - 1$, insbesondere ist X nicht permutabel in S_0 und damit nicht permutabel in G . Da X Z -eingebettet in G ist, ist $X \text{ mod } G$ und wegen $X_G = 1$ mit Lemma 5.1.9 aus [10] dann $G = X^G \times K$ mit $X^G \in \mathbb{P}$ nichtabelsch und $(|K|, |X^G|) = 1$. Setze $S := X^G$ und $T := K$. Da $S_0 \leq S$ ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $S \in P(n, p)$. Es ist also doch $G = S \times T$ wie in der Behauptung, ein Widerspruch.

Es ist somit jede echte Untergruppe von G p -nilpotent und damit G minimal nicht p -nilpotent. Nach dem Satz von Ito ([5], 4.5, S. 434) ist dann jede echte Untergruppe von G nilpotent und es ist $G = PQ$ mit einer normalen p -Sylowgruppe P von G vom Exponenten p oder höchstens 4 für $p = 2$ und einer zyklischen q -Gruppe $Q \in Syl_q(G)$ für $p \neq q \in \mathbb{P}$. Da G nicht p -nilpotent ist, besitzt G mit Lemma 2.2.3 somit p -Atome und mit (iv) aus Lemma 2.2.2 auch p -Atome der Ordnung p . Damit enthält P ein p -Atom von G . Nach (iii) aus Lemma 2.2.2 ist dann jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G . Ist $p = 2$, so ist also auch jede zyklische Untergruppe der Ordnung 4 eine $(2, 2)$ -Kette von G und somit ist sowohl jede Untergruppe der Ordnung 2 als auch jede zyklische Untergruppe der Ordnung 4 Z -eingebettet in G . Da keine P_1^* -Gruppe zu 2 existiert, ist dann nach Satz 3 doch G 2-nilpotent, ein Widerspruch.

Es ist also $p \neq 2$ und damit $Exp P = p$. Dann ist entweder P zyklisch von der Ordnung p oder P besitzt mehr als eine minimale Untergruppe. Sei zunächst P zyklisch. Dann ist P selbst ein p -Atom von G , also P Z -eingebettet in G . Wäre $|Q| > q$, so wäre $P\Omega(Q) < G$ und damit nilpotent. Weil P Z -eingebettet in G ist, wäre mit (2) aus 2.1.1 dann $Q \leq C_G(P)$, also G doch nilpotent, ein Widerspruch zu G minimal nicht p -nilpotent. Es ist also $|Q| = q$. Dann ist $G = PQ \in \mathcal{P}$, also mit $G := S$

und $T := 1$ ist doch $G = S \times T$ wie in der Behauptung, ein Widerspruch.

Es besitzt P also mehr als eine minimale Untergruppe und mit (iii) aus 2.2.2 ist jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G . Sei Z eine minimale Untergruppe von P . Dann ist Z Z -eingebettet in G , also $Z \cup Q \in \mathcal{M}$. Wäre $G \in \mathcal{M}$, so wäre, da $|G|$ genau zwei Primteiler besitzt, G eine P^* -Gruppe und weil Z in G Z -eingebettet ist, damit $G \in \mathcal{P}$, ein Widerspruch wie eben. Damit ist $G \notin \mathcal{M}$, also $Z \cup Q < G$. Da jede echte Untergruppe von G nilpotent ist, ist $Q \leq C_G(Z)$ und da Z beliebig gewählt war, zentralisiert Q alle minimalen Untergruppen von P und da $\text{Exp } P = p$ ist, zentralisiert Q damit ganz P . Mit diesem finalen Widerspruch gilt die Behauptung. \square

Wir fahren nun mit der Übersetzung des Begriffs p -nilpotente Gruppe fort. Da eine p -nilpotente Gruppe eine Gruppe ist, deren $O_{p'}$ -Faktorgruppe eine p -Gruppe ist, und die Definition 2.2.6 diese Eigenschaft übersetzt, wird zunächst eine Übersetzung einer p' -Untergruppe gebraucht. Unabhängig von der betrachteten Art von p -Atomen definieren wir:

Definition 2.2.4 *Eine Untergruppe U der endlichen Gruppe G heißt \bar{p} -Untergruppe von G , wenn U kein p -Atom von G enthält.*

Für die Beweisführung werden folgende Vererbungseigenschaften von \bar{p} -Untergruppen gebraucht, von denen aber die zweite nur für die in diesem Paragraphen behandelte Art von p -Atomen gilt:

Lemma 2.2.5 *Sei U eine \bar{p} -Untergruppe von G . Dann gilt:*

- (i) *Jede Untergruppe $U_1 \leq U$ ist eine \bar{p} -Untergruppe von G .*
- (ii) *Ist G nicht p -nilpotent, so ist U eine p' -Gruppe.*

Beweis: Zu (i): Sei $U_1 \leq U$. Würde U_1 ein p -Atom von G besitzen, so auch U .

Zu (ii): Ist U keine p' -Gruppe, so existiert ein $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $D := U \cap P \neq 1$. Nach (i) enthält D kein p -Atom von G . Da G nicht p -nilpotent ist, besitzt G mit Lemma 2.2.3 ein p -Atom und mit (iv) aus 2.2.2 auch ein p -Atom von der Ordnung p . Sei $X \leq P$ ein p -Atom von G mit $|X| = p$. Wäre X die einzige minimale Untergruppe von P , so wäre $X \leq D$, ein Widerspruch. Damit besitzt P mehr als eine minimale

Untergruppe und mit (iii) aus 2.2.2 ist dann jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G . Damit enthält insbesondere D ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Somit gilt (ii). \square

Eine Gruppe G ist bekanntlich p -nilpotent, wenn $G/O_{p'}(G)$ eine p -Gruppe ist. Dieses wird in folgender Definition in die Theorie der Untergruppenverbände übersetzt:

Definition 2.2.6 *Die endliche Gruppe G heißt p^* -nilpotent, wenn eine \bar{p} -Untergruppe U von G existiert mit $U \text{ mod } G$ und $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$.*

Lemma 2.2.7 *Ist G p -nilpotent, so ist G p^* -nilpotent.*

Beweis: Setze $K := O_{p'}(G)$. Dann enthält K kein p -Atom von der Ordnung p von G . Angenommen, $X \leq K$ ist ein p -Atom von G , dann ist $|X| \neq p$ und mit (v) aus 2.2.2 ist $p > 2$ und es existiert ein $S \leq G$ mit $S \in P(2, p)$ nichtabelsch, so dass $X \leq S$ ist. Dann ist $|X| = q$ für eine Primzahl q mit $q \mid p - 1$ und insbesondere $X \not\trianglelefteq S$, ein Widerspruch zu $X = K \cap S \trianglelefteq S$. Damit ist K eine \bar{p} -Untergruppe von G und da $K \trianglelefteq G$ ist, ist K insbesondere modular in G . Da G p -nilpotent und damit G/K eine p -Gruppe ist, ist nach 1.1.10 dann $G/K \in \mathcal{K} \cup \mathcal{P}_p \cup \mathcal{Q}_p$ und damit G p^* -nilpotent. \square

Beispiele von nicht p -nilpotenten, aber p^* -nilpotenten Gruppen sind die P^* -Gruppen aus 1.1.11.

Beispiel 2.2.8 *Sei $G = PQ$ mit einer normalen elementarabelschen p -Sylowgruppe P von G und einer zyklischen q -Sylowgruppe Q , die nicht-trivial auf P operiert, so dass $\phi(Q) \leq C_G(P)$ und $G/\phi(Q) \in \mathcal{P}$ ist. Dann ist G p^* -nilpotent.*

Beweis: Sei $U := \phi(Q)$. Da $U \leq Z(G)$ ist, enthält U mit (v) aus 2.2.2 keine p -Atome von G und ist damit eine \bar{p} -Untergruppe von G . Wegen $G/U \in \mathcal{P}_p$ ist damit G p^* -nilpotent. \square

Lemma 2.2.9 *Sei $G = S_1 \times \dots \times S_r$ mit Untergruppen S_i , $i \in \{1, \dots, r\}$ und $r \in \mathbb{N}$, von paarweise teilerfremder Ordnung und sei $U \leq G$. Dann ist $[G/U] \simeq [S_1/S_1 \cap U] \times \dots \times [S_r/S_r \cap U]$.*

Beweis: Da G direktes Produkt von Gruppen mit paarweise teilerfremden Ordnungen ist, ist nach 1.6.4 aus [10] dann $L(G) = L(S_1) \times \dots \times L(S_r)$ und damit lässt sich jede Untergruppe $V \in L(G)$ als r -Tupel von der Form $V = (V_1, \dots, V_r)$ mit $V_i \leq S_i$ eindeutig schreiben. Die Abbildung $\rho : [G/U] \longrightarrow [S_1/(S_1 \cap U)] \times \dots \times [S_r/(S_r \cap U)]$, die jede Obergruppe V von U auf das r -Tupel (V_1, \dots, V_r) mit $V_i = S_i \cap V$ abbildet, ist wegen $U \cap S_i \leq V \cap S_i$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ ein Verbandisomorphismus und die Behauptung gilt. \square

Das folgende Resultat bildet einerseits einen wesentlichen Teil des Beweises von dem Hauptsatz dieses Paragraphen, kann aber andererseits vielleicht von unabhängigem Interesse sein.

Lemma 2.2.10 *Sei G eine endliche Gruppe und U eine modulare p' -Untergruppe von G mit $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$. Dann ist entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G) \in \mathcal{P}_p$.*

Beweis: Sei G ein Gegenbeispiel zum Lemma, d. h. G ist weder p -nilpotent noch ist $G/O_{p'}(G) \in \mathcal{P}_p$. Dann ist $p \mid |G|$ und da $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$ ist, gilt:

(0) Jedes Intervall in $[G/U]$ ist direkt unzerlegbar.

Angenommen, es ist $U \trianglelefteq G$. Da $p \mid |G|$ ist, ist wegen U p' -Gruppe nun $p \mid |G/U|$. Da G nicht p -nilpotent ist, ist G/U keine p -Gruppe und damit $G/U \in \mathcal{P}_p$. Dann ist aber $U = O_{p'}(G)$, da eine P -Gruppe zu p keinen nichttrivialen p' -Normalteiler besitzt, und somit $G/O_{p'}(G)$ doch wie in der Behauptung, ein Widerspruch.

Es ist also $U \not\trianglelefteq G$. Ist U auch nicht permutabel in G , so ist mit 5.1.14 aus [10] dann $G/U_G = S/U_G \times T/U_G$ mit $(|S/U_G|, |T/U_G|) = 1$, so dass $S/U_G = S_1/U_G \times \dots \times S_r/U_G$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $S_1/U_G, \dots, S_r/U_G$ P -Gruppen mit paarweise teilerfremden Ordnungen, $(S_i \cap U)/U_G$ Sylowgruppe zum kleineren Primteiler von S_i/U_G für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ und $U \cap T$ per G ist. Da U nicht permutabel in G ist, ist $r \geq 1$. Nach 2.2.9 ist $[G/U] \simeq [S_1/S_1 \cap U] \times \dots \times [S_r/S_r \cap U] \times [T/T \cap U]$ und nach (0) somit $S = S_1$ und $T = U_G$. Es ist also $G/U_G \in \mathcal{P}$ mit Sylowgruppe U/U_G zum kleineren Primteiler $q \in \mathbb{P}$ und somit $G/U_G \in \mathcal{P}_p$. Da U eine p' -Gruppe ist, ist also $U_G = O_{p'}(G)$ und damit $G/O_{p'}(G) \in \mathcal{P}_p$ wie in der

Behauptung, ein Widerspruch.

Es ist also U per G . Mit 5.2.3 aus [10] ist dann U^G/U_G nilpotent, d. h. $U^G/U_G = P_1/U_G \times \dots \times P_s/U_G$ mit $P_i/U_G \in \text{Syl}_{p_i}(U^G/U_G)$ zu paarweise verschiedenen Primzahlen p_i für $i \in \{1, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{N}$. Mit 2.2.9 ist $[U^G/U] \simeq [P_1/P_1 \cap U] \times \dots \times [P_s/P_s \cap U]$ und da $P_i \trianglelefteq G$ ist, ist $U \cap P_i \neq P_i$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$. Nach (0) ist dann $s = 1$ und damit U^G/U_G eine r -Gruppe für eine Primzahl r . Da U eine p' -Gruppe ist, gilt somit:

(1) U^G/U_G ist eine r -Gruppe für $r \in \mathbb{P}$ mit $r \neq p$.

Ist G/U^G eine p -Gruppe, so ist wegen U^G p' -Gruppe nun $U^G = O_{p'}(G)$ und G p -nilpotent, ein Widerspruch. Es ist also G/U^G keine Primärgruppe und da $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$ ist, ist G/U^G mit (0) eine LM -Gruppe, in der jedes Intervall direkt unzerlegbar ist. Nach Proposition 1.5 aus [13] auf S. 12 ist dann G/U^G eine P_1^* -Gruppe. Da G nicht p -nilpotent und U^G ein p' -Normalteiler von G ist, ist p der größere Primteiler von $|G/U^G|$ und es gilt:

(2) G/U^G ist eine P_1^* -Gruppe zu p .

Sei N/U^G der abelsche p -Normalteiler von G/U^G . Mit 5.2.4 aus [10] ist $G/C_G(U^G/U_G)$ eine r -Gruppe und da $p \neq r$ ist, wird U^G/U_G von den p -Sylowgruppen von G zentralisiert. Damit ist $N/U_G = P/U_G \times U^G/U_G$ mit einer p -Sylowgruppe P/U_G von N/U_G und mit 2.2.9 folgt $[N/U] \simeq [P/P \cup U] \times [U^G/U]$, also enthält $[G/U]$ ein direkt zerlegbares Intervall. Mit diesem Widerspruch zu (0) gilt die Behauptung. \square

Die Wahl des Begriffes p^* -nilpotent ist sinnvoll, wie folgender Satz zeigt:

Satz 5 Genau dann ist die endliche Gruppe G p^* -nilpotent, wenn entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G) \in \mathcal{P}_p$ ist.

Beweis: Sei zunächst G p^* -nilpotent. Dann existiert eine modulare \bar{p} -Untergruppe U von G mit $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$. Damit ist entweder G p -nilpotent oder nach (ii) aus 2.2.5 ist U eine p' -Untergruppe von G . Im zweiten Falle ist mit Lemma 2.2.10 dann entweder G p -nilpotent oder

$G/O_{p'}(G) \in \mathcal{P}_p$.

Ist umgekehrt G p -nilpotent, so ist G p^* -nilpotent nach 2.2.7 und der Satz gilt. \square

Als unmittelbare Folgerung aus dem obigen Satz und dem Satz 4 ergibt sich der Hauptsatz des Paragraphen – ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Ito:

Satz 6 *Sei jedes p -Atom und für $p = 2$ zusätzlich jede $(2, 2)$ -Kette von G Z -eingebettet in G . Dann ist G p^* -nilpotent.*

Beweis: Da jedes p -Atom und für $p = 2$ zusätzlich jede $(2, 2)$ -Kette von G Z -eingebettet in G ist, ist nach Satz 4 entweder G p -nilpotent oder es ist $G = S \times T$, wobei $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist. Da im zweiten Falle $T = O_{p'}(G)$ ist, gilt die Behauptung direkt nach Satz 5. \square

Bemerkung 2.2.11 *Sei G eine p -nilpotente Gruppe. Dann ist jedes projektive Bild von G eine p^* -nilpotente Gruppe, d. h. die Klasse der p^* -nilpotenten Gruppen enthält den projektiven Abschluss der p -nilpotenten Gruppen.*

Beweis: Da G p -nilpotent ist, ist G nach Satz 5 damit p^* -nilpotent. Da jedes projektive Bild einer p^* -nilpotenten Gruppe p^* -nilpotent ist, gilt somit die Behauptung. \square

Die obige Bemerkung ist eine weitere Folgerung von Satz 5, die zwar keine direkte Verbindung zu dem Hauptthema dieser Dissertation hat, aber einen Beitrag zu dem in der Einleitung vorgestellten Problem (C) liefert.

2.3 p -Atome zweiter Art

Da die Definition 2.2.1 aus dem vorigen Paragraphen auch Untergruppen der Ordnung q für $q \neq p$ als p -Atome zulässt, wird hier ein neues Konzept der p -Atome zweiter Art vorgestellt und anschließend das dazugehörige verbandstheoretische Analogon des Satzes von Ito bewiesen. Die neue

Definition enthält einige neue Bedingungen, lässt aber eine wesentlich engere Auswahl an Untergruppen als p -Atome zu und liefert, im Gegensatz zu den p -Atomen erster Art, dass die hier betrachteten p -Atome immer die Ordnung p haben. Wie in der Einleitung schon erklärt, basieren beide Definitionen von p -Atomen auf dem Grundverständnis, eine Untergruppe der Ordnung p als minimale Untergruppe einer p -Sylowgruppe einer endlichen Gruppe G anzusehen. In diesem Paragraphen werden p -Sylowgruppen genauer untersucht und nach der Suzukischen Vorgabe (1.1.7 – 1.1.9) als Elemente der Vereinigung der drei Klassen $\mathcal{K}, \mathcal{P}_p, \mathcal{Q}_p$ betrachtet. Sei also $P \leq G$ mit $P \in \mathcal{K} \cup \mathcal{P}_p \cup \mathcal{Q}_p$ und X eine minimale Untergruppe von P . Um eine vernünftige verbandstheoretische Approximation einer Untergruppe der Ordnung p zu erhalten, unterscheiden wir nun, ob $P \in \mathcal{K}$ und damit zyklisch, $P \in \mathcal{P}_p$ und damit elementarabelsch oder $P \in \mathcal{Q}_p$ und damit $L(P)$ ein Primärverband ist, um in dem Untergruppenverband von G zu erkennen, wann X die Ordnung p hat. Da dieses für $P \in \mathcal{K} \cup \mathcal{P}_p$ nicht ohne Weiteres möglich ist, geben wir in den folgenden Definitionen einige Bedingungen an für die Situationen, in denen es funktioniert. Für $P \in \mathcal{Q}$ ist nach (b) aus 1.1.9 jede minimale Untergruppe, also insbesondere X , von P von der Ordnung p . Ist $P \notin \mathcal{K}$, so wird entweder die gesamte Gruppe in 2.3.7 oder nur eine Untergruppe davon, die X enthält und in $P(2, p)$ liegt, in 2.3.5 betrachtet. Um die komplette Definition eines p -Atoms zweiter Art zu formulieren, werden nun vier neue Mengen von Atomen definiert, die sich aus den eben genannten Fällen ergeben. Sei im Folgenden x immer ein Atom von L und G eine endliche Gruppe. Wir definieren:

Definition 2.3.1 *Es ist $x \in \mathcal{Q}_L(p)$, wenn ein $h \in L$ existiert mit $x \leq h$ und $[h/0] \in \mathcal{Q}_p$.*

Lemma 2.3.2 *Ist $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p)$, so ist $|X| = p$.*

Beweis: Da $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p)$ ist, existiert ein $H \leq G$ mit $H \in \mathcal{Q}_p$. Mit 1.1.9 ist dann H eine p -Gruppe und damit $|X| = p$. \square

Sind die p -Sylowgruppen von G zyklisch, so hilft:

Definition 2.3.3 *Es ist $x \in \mathcal{S}_L(p)$, wenn ein $y \in L$ mit $[y/0] \in \mathcal{K}$ und $\phi([y/0]) \neq 0$ existiert, so dass $[x \cup \phi([y/0])/0] \in \mathcal{D}$ und $[x \cup y/\phi([y/0])] \simeq M_{p+1}$ ist.*

Lemma 2.3.4 *Ist $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$, so ist $|X| = p$ und es existiert ein $Y \leq G$, welches einen Automorphismus der Ordnung q auf X bewirkt für eine Primzahl q mit $q \mid p - 1$.*

Beweis: Da $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$ ist, existiert eine Kette $Y \leq G$ mit $\phi(Y) \neq 1$ und $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$. Da $X \cup Y$ endlich ist, ist $X \cup \phi(Y)$ nach 1.1.2 zyklisch und $\phi(Y)$ wird damit sowohl von Y als auch von X normalisiert, also ist $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y =: H$. Nach Voraussetzung ist dann $H/\phi(Y) \in P(2, p)$. Da $X \not\leq \phi(Y)$ ist, ist $(|X|, |\phi(Y)|) = 1$ und damit $(|X|, |Y|) = 1$. Dann ist $H/\phi(Y)$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq für eine Primzahl q mit $q \mid p - 1$. Wegen $X \cup \phi(Y)/\phi(Y) \simeq X$ ist X entweder von der Ordnung p oder q . Wäre $|X| = q$, so wäre wegen $(|X|, |Y|) = 1$ nun Y eine p -Gruppe und damit $Y \trianglelefteq H$. Somit würde X nichttrivial auf Y und damit auch auf $\phi(Y)$ operieren, ein Widerspruch. Es ist also X von der Ordnung p und damit $X\phi(Y) \trianglelefteq H$. Da $X \text{ char } X\phi(Y) \trianglelefteq H$ ist, ist dann $X \trianglelefteq H$ und da $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$ ist, bewirkt der Erzeuger von Y somit einen Automorphismus der Ordnung q auf X und die Behauptung gilt. \square

Man beachte, dass für $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$ mit Lemma 3.1 aus [3] schon $|X| = p$ folgt. Da der Beweis des Lemmas aber die Existenz eines $Y \leq G$, welches einen Automorphismus der Ordnung q auf X bewirkt, beinhaltet, wurde zur Bequemlichkeit des Lesers der gesamte Beweis durchgeführt.

Der Spezialfall $X \leq S \in P(2, p)$ wird durch folgende Menge von Atomen abgedeckt:

Definition 2.3.5 *Es ist $x \in \mathcal{U}_L(p)$, wenn Elemente $s, h \in L$ mit $x < s \leq h$ und $[s/0] \simeq M_{p+1}$ existieren, so dass eine der folgenden Eigenschaften gilt:*

- (o) *Es ist $[s/0] \simeq M_3$.*
- (i) *Zu jedem Atom $y \leq s$ mit $x \neq y$ existiert ein $z \leq h$ mit $y < z$ und eine Primzahl $q < p$ mit $[z/0] \simeq M_{q+1}$.*
- (ii) *Zu jedem Atom $y \leq s$ mit $x \neq y$ existiert ein $q \in \mathbb{P}$ mit $q \neq p$ und $y \in \mathcal{Q}_L(q) \cup \mathcal{S}_L(q)$.*
- (iii) *Es ist x maximal mit $[x/0] \in \mathcal{K}$ in $[h/0]$ und zu jedem Atom $y \leq s$ mit $x \neq y$ existiert ein $u \leq h$, so dass $[u/0] \in \mathcal{K}$ und $y < u$ ist.*

(iv) Für jedes Atom $y \leq s$ mit $x \neq y$ ist $C_{[h/0],h}(x) < C_{[h/0],h}(y)$, wobei $C_{[h/0],h}(x)$ der in 2.4 aus [12] definierte Verbandszentralisator von x ist.

(v) Es ist x modular in $[h/0]$ und y nicht modular in $[h/0]$ für alle Atome $y \leq s$ mit $x \neq y$.

Lemma 2.3.6 Ist $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$, so ist $|X| = p$.

Beweis: Da $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$ ist, existieren Untergruppen $S, H \leq G$ mit $S \leq H$, so dass $X \leq S$ und $L(S) \simeq M_{p+1}$. Nach dem Satz von Baer, hier Lemma 1.1.5, ist damit $S \in P(2, p)$. Angenommen, es ist $|X| \neq p$. Dann ist $|X| = r$ mit $r \mid p-1$ und es existiert ein $P \leq S$ mit $|P| = p$. Damit ist $P \notin \mathcal{Q}_L(q) \cup \mathcal{S}_L(q)$ für alle $p \neq q \in \mathbb{P}$, also gilt (ii) nicht. Wegen $r \mid p-1$ ist $p \neq 2$ und (o) gilt ebenfalls nicht. Ist $Z \in P(2, q)$ mit $P < Z$, so ist $q \geq p$ und damit gilt auch (i) nicht.

Nach Voraussetzung gilt dann eine der Eigenschaften (iii) – (v). Sei $Y \leq S$ mit $|Y| = r$ und $X \neq Y$. Da $S \in P(2, p)$ ist, existiert nach dem Satz von Sylow ein $a \in S \setminus \{1\}$ mit $X = Y^a$. Angenommen es gilt (iii). Dann existiert eine Kette $U \leq H$ mit $Y < U$. Damit ist ebenfalls $U^a \in \mathcal{K}$ und $X = Y^a < U^a \leq H$, ein Widerspruch zu X maximale Kette von H .

Angenommen, (iv) gilt; dann ist $C_{L(H),H}(X) < C_{L(H),H}(Y)$. Da $a \in H$ ist, ist $H = H^a$ und somit $C_{L(H),H}(Y)^a = C_{L(H^a),H^a}(Y^a) = C_{L(H),H}(X) < C_{L(H),H}(Y)$, ein Widerspruch.

Damit gilt (v) und es ist $X \text{ mod } H$. Damit ist aber ebenfalls $Y = X^{a^{-1}} \text{ mod } H$, ein Widerspruch. Es ist also $|X| = p$. \square

Ist S eine beliebige P -Gruppe, so betrachten wir:

Definition 2.3.7 Es ist $x \in \mathcal{V}_L(p)$, wenn Elemente $s, h \in L$ existieren mit $x < s \leq h$ und $[s/0] \in \mathcal{P}_p$, so dass gilt:

(i) Es ist s die Vereinigung der minimalen Elemente der Menge $\mathfrak{M}_{s,h} := \{m \in L \mid 0 < m \leq s, m \text{ mod } [h/0]\}$.

(ii) Es existiert ein Atom $y \in [s/0]$ mit y nicht modular in $[h/0]$.

Lemma 2.3.8 Ist $X \in \mathcal{V}_{L(G)}(p)$, so ist $|X| = p$ und X ist in einer elementarabelschen P -Gruppe S der Ordnung mindestens p^2 enthalten.

Beweis: Da $X \in \mathcal{V}_{L(G)}(p)$ ist, existieren $S, H \leq G$ mit $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $X < S \leq H$, so dass die Bedingungen (i) und (ii) aus obiger Definition erfüllt sind. Angenommen, S ist nicht elementarabelsch. Nach Definition 1.1.4 ist dann $|S| = p^{n-1}q$ für eine Primzahl q mit $q \mid p - 1$. Sei M ein minimales Element von $\mathfrak{M}_{S,H}$, so dass $|M|$ keine p -Potenz ist. Dann ist $q \mid |M|$. Wegen der Minimalität von M und da M_H als Normalteiler von H modular in H ist, ist entweder $M = M_H$ oder $M_H = 1$. Nach (c) aus Lemma 2.2.2 aus [10] ist $M \not\leq S$ und damit ist $M_H = 1$. Mit Satz 5.1.7 aus [10] ist dann aber M nilpotent und da S eine P -Gruppe ist, ist somit $|M| = q$. Da M nicht permutabel in S ist, ist M auch nicht permutabel in H . Da aber $M \in \mathfrak{M}_{S,H}$ ist, ist $M \text{ mod } H$, und wegen $M_H = 1$ und $S \leq M^H$ ist mit 5.1.9 aus [10] nun $H = M^H \times K$ mit $(|M^H|, |K|) = 1$ und M^H P -Gruppe. Dann wird aber jede minimale Untergruppe von S von K zentralisiert und ist damit modular in H , ein Widerspruch zu (ii) aus 2.3.7. Es wird also S von Untergruppen von p -Potenzordnung erzeugt. Wegen $S \in P(n, p)$ ist S elementarabelsch der Ordnung mindestens p^2 und damit $|X| = p$, also gilt die Behauptung. \square

Aus den vier oben definierten Mengen ergibt sich die Definition von p -Atomen zweiter Art:

Definition 2.3.9 Sei G eine endliche Gruppe.

- (a) x heißt p -Atom von L , wenn $x \in \mathcal{Q}_L(p) \cup \mathcal{S}_L(p) \cup \mathcal{U}_L(p) \cup \mathcal{V}_L(p)$ ist.
- (b) Eine minimale Untergruppe $X \leq G$ heißt p -Atom von G , wenn X ein p -Atom von $L(G)$ ist.
- (c) Für $n \in \mathbb{N}$ heißt eine Untergruppe $U \leq G$ eine (p, n) -Kette, wenn U Kette der Länge n ist und ein p -Atom von G enthält.

Einige nützliche Vererbungseigenschaften von p -Atomen werden im folgenden Lemma aufgeführt:

Lemma 2.3.10 Sei G eine endliche Gruppe.

- (o) Ist X ein p -Atom zweiter Art von G , so auch eins erster Art.
- (i) Ist X ein p -Atom von G , so ist $|X| = p$.
- (ii) Sei $U \leq G$. Ist X ein p -Atom von U , so ist X ein p -Atom von G .

(ii') Sei $U \leq G$. Ist X ein p -Atom von G mit $X \leq U$, so ist X im Allgemeinen kein p -Atom von U .

(iii) Ist X ein p -Atom von G und X zusätzlich Z -eingebettet in G , so ist $X \notin \mathcal{S}_{L(G)}(p)$.

Beweis: Zu (o): Sei X ein p -Atom zweiter Art von G . Ist X ein 2-Atom, so ist $X \notin \mathcal{S}_{L(G)}(p)$. Ist $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{U}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{V}_{L(G)}(p)$, so existiert ein $H \leq G$ mit $X \leq H$, so dass entweder $H \simeq Q_8$ oder H elementarabelsch der Ordnung 4 ist. Es erfüllt X damit entweder (1) und (2) oder (3) aus 2.2.1, ist also in beiden Fällen auch ein 2-Atom erster Art von G . Sei also $p \neq 2$. Ist $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$, so folgt die Behauptung direkt aus der Definition 2.2.1. Ist $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{U}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{V}_{L(G)}(p)$, so existiert wegen $p \neq 2$ eine Untergruppe S von G mit $S \in P(2, p)$ und $X \leq S$, also sind (1) und (2) der Definition 2.2.1 erfüllt und X auch in diesem Fall ein p -Atom erster Art von G .

Zu (i): Da X ein p -Atom von G ist, ist nach Definition 2.3.9 dann $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{S}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{U}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{V}_{L(G)}(p)$. Aus den Lemmata 2.3.2, 2.3.4, 2.3.6, 2.3.8 folgt direkt $|X| = p$.

Zu (ii): Da X ein p -Atom von U ist, ist $X \in \mathcal{Q}_{L(U)}(p) \cup \mathcal{S}_{L(U)}(p) \cup \mathcal{U}_{L(U)}(p) \cup \mathcal{V}_{L(U)}(p)$, d. h. X liegt in einer der eben genannten Mengen.

Ist $X \in \mathcal{Q}_{L(U)}(p)$, so existiert mit 2.3.1 ein $H \leq G$ mit $H \in \mathcal{Q}_p$ und $X \leq H$; damit ist $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p)$. Ist $X \in \mathcal{S}_{L(U)}(p)$, so existiert eine Kette $Y \leq U \leq G$, so dass $X \cup Y$ die Eigenschaft in 2.3.3 erfüllt. Aber $X \cup Y$ hat wegen $U \leq G$ dieselbe Eigenschaft in G und damit ist $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$. Ist $X \in \mathcal{U}_{L(U)}(p)$, so existieren mit 2.3.5 Untergruppen $S, H \leq U \leq G$ mit $X \leq S \leq H$ und $L(S) \simeq M_{p+1}$, so dass X in H eine gewisse Eigenschaft (aus den Bedingungen (o) – (v)) besitzt. Damit hat X wegen $H \leq U \leq G$ diese Eigenschaft auch in G und es ist $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$. Ist $X \in \mathcal{V}_{L(U)}(p)$, so existiert ein $S \leq U$ mit $X \leq S$, so dass (i) und (ii) aus 2.3.7 gelten. Wegen $U \leq G$ hat S dieselben Eigenschaften in G und es ist $X \in \mathcal{V}_{L(G)}(p)$.

Somit ist X ein p -Atom von G .

Zu (ii)': Sei $p > 2$, G nichtabelsch der Ordnung p^3 vom Exponenten p und $H \leq G$ elementarabelsch der Ordnung p^2 . Sei $X \leq H$ mit $|X| = p$. Dann ist $X \in \mathcal{Q}_{L(G)}(p)$ und damit X ein p -Atom von G . Da H elementar-

abelsch der Ordnung p^2 ist, ist $X \notin \mathcal{Q}_{L(H)}(p) \cup \mathcal{S}_{L(H)}(p) \cup \mathcal{V}_{L(H)}(p)$ und X besitzt zusätzlich wegen $p > 2$ keine der Eigenschaften (o) – (iii) in H und da H elementarabelsch ist, ebenfalls (iv),(v) aus 2.3.5 nicht. Damit ist X kein p -Atom von H .

Zu (iii): Angenommen, es ist $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$. Dann existiert ein $Y \leq G$ mit $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$ und damit $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y$. Ferner ist $X \cup Y/\phi(Y) \in P(2, p)$ nichtabelsch, denn sonst wäre $X \cup Y$ eine p -Gruppe und damit $X \leq \phi(Y)$, ein Widerspruch. Es ist also $p \nmid |Y|$. Da aber X Z -eingebettet in G und $\phi(Y) \leq C_G(X)$ ist, ist damit nach (2) aus (a) der Definition 2.1.1 doch $Y \leq C_G(X)$, ein Widerspruch. Es ist also $X \notin \mathcal{S}_{L(G)}(p)$. \square

Lemma 2.3.11 *Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ abelsch und $X \leq P$ mit $X \text{ mod } G$. Ist $X < P$, so ist $X \trianglelefteq G$.*

Beweis: Da $X \text{ mod } G$ und $X < P$ ist, ist $X \notin \text{Syl}_p(G)$ und nach 5.1.9 aus [10] somit $X \text{ per } G$. Da $P \in \text{Syl}_p(G)$ und $P \leq C_G(X)$ ist, ist nach 5.2.4 aus [10] nun $X \trianglelefteq G$. \square

Lemma 2.3.12 *Sei X ein p -Atom von G und $H \leq G$, so dass $H = PQ$ mit einer elementarabelschen normalen p -Sylowgruppe P von H mit $X \leq P$ und Q zyklische q -Gruppe ist, die nichttrivial auf P operiert. Besitzt P eine minimale Untergruppe, die kein p -Atom von G ist, so ist jede Untergruppe von P normal in H . Für $|Q| = q$ ist insbesondere $H \in \mathcal{P}$.*

Beweis: Sei Y eine minimale Untergruppe von P , die kein p -Atom von G ist. Dann ist $X \neq Y$ und nach (o) aus 2.3.5 auch $p > 2$. Da P elementarabelsch ist, ist $P = N_1 \times \dots \times N_r$ mit irreduziblen $GF(p)Q$ -Moduln N_i für $i \in \{1, \dots, r\}$ und $r \in \mathbb{N}$. Sei $i \in \{1, \dots, r\}$ und $1 \neq M \leq N_i$ mit $M \text{ mod } H$. Wäre $M < N_i$, so wäre $M \trianglelefteq H$ nach Lemma 2.3.11, welches nicht der Fall ist. Es ist also N_i ein minimales Element von $\mathfrak{M}_{P,H}$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ und damit erfüllt (P, H) die Bedingung (i) aus 2.3.7. Da aber Y kein p -Atom von G ist, gilt (ii) aus 2.3.7 nicht und wegen $Y \leq H$ ist damit jede minimale Untergruppe von P modular in H . Da $X \leq H$ ist, ist $|P| > p$ und somit nach 2.3.11 jede minimale Untergruppe von P ein Normalteiler von H . Ist zusätzlich $|Q| = q$, so ist hiermit nach 1.5.4 aus [10] dann $H \in \mathcal{P}$ und die Behauptung gilt. \square

Wie schon im letzten Paragraphen ist auch hier für den weiteren Verlauf der Beweisführung essentiell, die Frage nach der Struktur von Gruppen, die keine p -Atome besitzen, zu klären. Da die p -Atome zweiter Art eine viel engere Auswahl an Untergruppen, die p -Atome sein können, bieten, ist auch die Struktur solcher Gruppen komplizierter.

Satz 7 *Sei G eine endliche Gruppe. Genau dann besitzt G keine p -Atome, wenn entweder G p -nilpotent mit zyklischen p -Sylowgruppen oder $p > 2$ und $G = S \times T$ ist, wobei $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist.*

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass, falls G keine p -Atome besitzt, entweder G p -nilpotent mit zyklischen p -Sylowgruppen oder $p > 2$ und $G = S \times T$ mit $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist. Sei G hierzu ein minimales Gegenbeispiel. Da die Aussage des Satzes für $p \nmid |G|$ trivialerweise erfüllt ist, ist $p \mid |G|$. Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$. Da G keine p -Atome besitzt, ist wegen 2.3.1 nun $P \notin \mathcal{Q}_p$. Es ist also P entweder zyklisch oder elementarabelsch und es gilt:

(1) G ist nicht p -nilpotent.

Beweis: Angenommen, G ist p -nilpotent (und damit auch jede echte Untergruppe von G). Da G ein Gegenbeispiel zum Satz ist, ist dann P elementarabelsch und nichtzyklisch, also $|P| \geq p^2$ und da G keine p -Atome besitzt wegen (o) aus 2.3.5 damit $p \neq 2$. Sei K das normale p -Komplement von G und seien M_1 und M_2 zwei verschiedene maximale Untergruppen von P . Dann ist $M_i K < G$ für $i = 1, 2$, und da sich die Voraussetzung mit (ii) aus 2.3.10 auf echte Untergruppen von G vererbt, ist wegen der Minimalität von G damit $M_i K$ entweder p -nilpotent mit zyklischer p -Sylowgruppe oder P -zerlegbar mit $M_i K = M_i \times K$ (wegen $M_i K$ p -nilpotent). Da G ein Gegenbeispiel zum Satz ist, ist $P \not\leq C_G(K)$, denn sonst wäre mit $S := P$ und $T := K$ doch $G = S \times T$ wie in der Behauptung, ein Widerspruch. Damit wird K von höchstens einer der beiden Gruppen M_1 und M_2 zentralisiert. Dann ist etwa $M_2 K$ p -nilpotent mit zyklischer p -Sylowgruppe, also $|M_2| = p$ und wegen $M_2 \text{ max } P$ damit $|P| = p^2$. Da P teilerfremd auf K operiert, existiert mit 8.2.3 aus [4] zu jedem Primteiler r von $|K|$ eine P -invariante r -Sylowgruppe R von K . Wäre $R < K$ für jede solche, so würde, da P elementarabelsch und nicht

zyklisch und damit PR nicht p -nilpotent mit zyklischer p -Sylowgruppe ist, P von allen P -invarianten Sylowgruppen von K und damit auch von ganz K zentralisiert werden, ein Widerspruch. Es existiert also ein $r \in \mathbb{P}$, so dass K eine r -Gruppe ist. Wir betrachten $K/\phi(K)$; als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G ist $\phi(K)$ selbst normal in G . Sei $L \leq K$ maximal gewählt mit $\phi(K) \leq L < K$ und L P -invariant. Da P nicht zyklisch und $PL < G$ ist, wird L von P zentralisiert und wegen $K/\phi(K)$ elementarabelsch ist damit $L \trianglelefteq G$. Operiert P trivial auch auf K/L , so operiert P mit dem Satz 8.2.2 (b) aus [4] trivial auf K , ein Widerspruch zu $P \not\leq C_G(K)$. Damit operiert P nichttrivial auf K/L und wegen der maximalen Wahl von L operiert P irreduzibel auf K/L . Nach dem Satz 8.3.3 aus [4] S. 172 ist dann $P/C_P(K/L)$ von der Ordnung p , es existiert also ein $X \leq P$ mit $|X| = p$ und $X = C_P(K/L)$. Erneut mit 8.2.2 aus [4] ist $K = C_K(X)$. Sei $Y \leq P$ mit $|Y| = p$ und $Y \neq X$. Ist $Y \text{ mod } G$, so ist wegen $Y < P$ nach Lemma 2.3.11 dann $Y \trianglelefteq G$. Da aber $P \not\leq C_G(K)$ ist, ist $C_K(Y) < K$ und da G p -nilpotent ist, wird Y von jedem p' -Element, von dem es normalisiert wird, schon zentralisiert und damit ist $N_G(Y) = C_G(Y) < G$, ein Widerspruch zu $Y \trianglelefteq G$. Somit ist X die einzige minimale Untergruppe von P , die modular in G ist. Nach (v) aus 2.3.5 ist also $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$ und damit X ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Hiermit ist G nicht p -nilpotent und (1) gilt.

Nach dem Satz von Burnside ([5], S. 419) ist, da G nicht p -nilpotent ist, dann $N_G(P) \neq C_G(P)$, d. h. es existiert ein p' -Element in G , welches nichttrivial auf P operiert. Dann existiert eine Primzahl q und ein $y \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ mit $o(y) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, so dass y einen Automorphismus der Ordnung q auf P bewirkt. Sei $Y := \langle y \rangle$.

Sei zunächst P zyklisch und X die minimale Untergruppe von P . Nach Satz 2.8 auf S. 420 aus [5] ist, da G ein Gegenbeispiel zum Satz ist, dann $p > 2$. Da y einen Automorphismus der Ordnung q auf P bewirkt, ist $X \cup \phi(Y) \in \mathcal{D}$, also ist $\phi(Y) \trianglelefteq X \cup Y$ und $X \cup Y / \phi(Y) \in P(2, p)$. Für $k \neq 1$ wäre damit $X \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$ nach Definition 2.3.3, also X ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Es ist also $k = 1$ und damit $X \cup Y \in P(2, p)$. Angenommen es ist $X < P$. Dann ist $S := X \cup Y < P \cup Y := H$ und wegen $S \in P(2, p)$ und P zyklisch ist $X \trianglelefteq H$. Angenommen, es ist $Y \text{ mod } H$. Da P zyklisch der Ordnung mindestens p^2 ist, ist dann $H = Y^H \notin \mathcal{P}$ und somit nach Lemma 5.1.9 aus [10] nun Y permutabel in H . Nach 5.2.9

aus [10] wird Y dann aber von P zentralisiert, ein Widerspruch. Wegen $Y \not\trianglelefteq H$ ist also Y und damit auch alle Konjugierten von Y in S nicht modular in H und da $X \trianglelefteq H$ ist, ist somit (v) aus 2.3.5 erfüllt, d. h. es ist $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$ und damit ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Es ist also $|P| = p$ und da G nicht 2-nilpotent ist, ist $p > 2$ falls P zyklisch ist. Da G keine p -Atome besitzt, ist für $|P| > p$ nun P elementarabelsch und nicht zyklisch, also ist wegen (o) aus 2.3.5 auch hierfür $p > 2$ und es gilt insgesamt:

(2) P ist elementarabelsch und es ist $p > 2$.

Dann ist nach dem Satz von Maschke $P = N_1 \times \dots \times N_n$, $n \in \mathbb{N}$, mit irreduziblen $GF(p)Y$ -Moduln N_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. Dabei können einige der $GF(p)Y$ -Moduln von Y zentralisiert werden. Da Y nichttrivial auf P operiert, existiert aber ein $i \in \{1, \dots, n\}$, etwa $i = 1$, so dass Y nichttrivial auf N_1 operiert. Setze $H := PY$. Dann ist nach Lemma 2.3.11 jedes N_i ein minimales Element von $\mathfrak{M}_{P,H}$ aus (i) der Definition 2.3.7, und somit wird P von den minimalen Elementen der Menge $\mathfrak{M}_{P,H}$ erzeugt. Damit erfüllen P und H Bedingung (i) aus 2.3.7. Wäre $|N_i| > p$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$, so wäre wegen N_i minimal in $\mathfrak{M}_{P,H}$ keine minimale Untergruppe von N_i modular in H , also auch die Bedingung (ii) der Definition 2.3.7 erfüllt. Hiermit ist jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Es ist also $|N_i| = p$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Wäre $\phi(Y) \neq 1$, so wäre $\phi(Y) \cup N_1$ zyklisch und $\phi(Y) \trianglelefteq N_1 \cup Y$, da y einen Automorphismus der Ordnung q auf P und somit auch auf N_1 bewirkt. Wegen der nichttrivialen Operation von y auf N_1 wäre damit $N_1 \cup Y/\phi(Y) \in P(2, p)$; dann wäre aber nach 2.3.3 doch $N_1 \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$, d. h. N_1 ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Damit ist $\phi(Y) = 1$, also $o(y) = q$, und wegen $|N_i| = p$ bewirkt y einen (möglicherweise trivialen) Potenzautomorphismus auf N_i für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Angenommen, es existiert ein $k \in \{2, \dots, n\}$, etwa $k = 2$, so dass y verschiedene Potenzautomorphismen auf N_1 und N_2 bewirkt. Sei $1 \neq M \leq N_1N_2$ mit $|M| = p$ und $N_1 \neq M \neq N_2$. Ist M modular in H , so ist nach Lemma 2.3.11 dann $M \trianglelefteq H$, ein Widerspruch zu 1.5.4 aus [10]. Es ist also M nicht modular in H und erneut (ii) aus 2.3.7 erfüllt. Hiermit ist jede minimale Untergruppe von N_1N_2 in $\mathcal{V}_{L(G)}(p)$ und damit ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Es bewirkt y also auf N_i einen Potenzautomorphismus zur selben Potenz wie auf N_1 für alle $i \in \{2, \dots, n\}$ und somit gilt:

(3) Es ist $PY \in \mathcal{P}$.

Sei $Q \in \text{Syl}_q(G)$ mit $Y \leq Q$. Da N_1 kein p -Atom von G ist, ist wegen (i) aus 2.3.5 nun Q nicht elementarabelsch und wegen (ii) aus 2.3.5 auch $Q \notin \mathcal{Q}_q$, d. h. es ist Q zyklisch. Da P elementarabelsche p -Sylowgruppe von G ist, ist jede minimale Untergruppe von P eine maximale Kette in G , insbesondere ist also N_1 eine solche. Da alle anderen Atome in $N_1 \cup Q$ zu Y konjugiert sind und N_1 kein p -Atom von G ist, muss wegen (iii) aus 2.3.5 dann $|Q| = q$ und damit $Y = Q$ sein. Dann gilt:

(4) Die q -Sylowgruppen von G haben die Ordnung q .

Angenommen, G ist nicht q -nilpotent. Mit dem Satz von Burnside ([5], S. 419) ist dann $N_G(Q) \neq C_G(Q)$, d. h. es existiert ein q' -Element in G , welches nichttrivial auf Q operiert. Dann existiert eine Primzahl r und ein $z \in N_G(Q) \setminus C_G(Q)$ mit $o(z) = r^l$, $l \in \mathbb{N}$, so dass z einen Automorphismus der Ordnung r auf Q bewirkt. Sei $Z := \langle z \rangle$. Wäre $l > 1$, so wäre $\phi(Z) \neq 1$. Da z einen Automorphismus von Primzahlordnung auf Q bewirkt, wäre hiermit $Q \cup \phi(Z) \in \mathcal{D}$ und $\phi(Z) \trianglelefteq Q \cup Z$. Dann wäre $Q \cup Z/\phi(Z) \in P(2, q)$, also nach 2.3.3 doch $Q \in \mathcal{S}_{L(G)}(q)$ und nach (ii) aus 2.3.5 damit $N_1 \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$, ein Widerspruch. Es ist also $l = 1$ und $|Z| = r$. Dann ist aber $Q \cup Z \in P(2, q)$ und mit (i) aus 2.3.5 erneut $N_1 \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$, ein Widerspruch. Es gilt also:

(5) G ist q -nilpotent mit normalem q -Komplement K .

Dann ist $P \leq K$. Da $K < G$ und G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz ist, ist entweder K p -nilpotent mit zyklischer p -Sylowgruppe oder es ist $p > 2$ und $K = S \times T$ mit $S \in P(m, p)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$.

Angenommen, K ist p -nilpotent und P zyklisch. Nach (2) ist dann $|P| = p$. Sei $N := O_{p'}(K)$. Dann ist N ein Hallscher Normalteiler von G , da $N \text{ char } K \trianglelefteq G$ und $|G : N| = pq$ ist, es ist also N ein normales Komplement zu $S := PQ$. Da S teilerfremd auf N operiert, besitzt N zu jedem Primteiler r von $|N|$ eine S -invariante r -Sylowgruppe R . Ist $SR < G$ für jedes solche R , so ist wegen der Minimalität von G nun $R \leq C_G(S)$ und damit schon $N \leq C_G(S)$. Es existiert also eine Primzahl r , so dass

N eine r -Gruppe ist. Da $\phi(N)$ als charakteristische Untergruppe von N S -invariant ist, ist $S\phi(N) < G$ und damit wird $\phi(N)$ von S zentralisiert. Es ist also $\phi(N) \leq C_N(P) =: C$ und wegen $N/\phi(N)$ abelsch damit $C \trianglelefteq N$. Wir betrachten N/C . Da $\phi(N) \leq C$ ist, ist N/C elementarabelsch und wegen $Q \leq N_G(P)$ und $P \leq C_G(C)$ ist C auch S -invariant.

Ist $C < N$, so ist $CS < G$ und S operiert mit Hilfssatz 8.12 auf S. 502 aus [5] nicht fixpunktfrei auf N/C . Wegen der Minimalität von G ist $C \leq C_G(S)$, also $C \leq C_N(Q)$. Da P trivial auf C operiert, operiert P mit 8.2.2 aus [4] fixpunktfrei auf N/C und damit existiert eine q -Sylowgruppe von S , die nicht fixpunktfrei auf N/C ist. Da die q -Sylowgruppen von S zueinander konjugiert sind, sind damit alle q -Sylowgruppen von S nicht fixpunktfrei auf N/C . Es ist aber $C = C^x < C_N(Q)^x = C_N(Q^x)$ für alle $x \in S$. Mit Lemma 2.5 aus [12] ist wegen $p, q \nmid |N|$ dann $C_{L(G),G}(P) = C < C_N(Q^x) = O^q(C_G(Q^x)) = C_{L(G),G}(Q^x)$, also mit (iv) aus 2.3.5 doch $P \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$, ein Widerspruch.

Es ist also $C = N$ und damit $G = (P \times N)Q$. Da Q nicht permutabel in S ist, ist Q auch nicht permutabel in G . Wäre $Q \text{ mod } G$, so wäre mit 5.1.9 aus [10] wegen $Q_G = 1$ und $S \leq Q^G$ mit $T := N$ doch $G = S \times T$ wie in der Behauptung, ein Widerspruch. Es ist also Q und damit auch Q^x nicht modular in G für alle $x \in G$ und da P als Normalteiler von G modular in G ist, ist P die einzige minimale Untergruppe von S , die modular in G ist. Mit (v) aus 2.3.5 ist $P \in \mathcal{U}_L(p)$ und damit P doch ein p -Atom von G . Mit diesem Widerspruch ist K nicht p -nilpotent mit zyklischer p -Sylowgruppe, also gilt:

(6) Es ist $K = S \times T$ mit $S \in P(m, p)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$.

Ist $|P| = p$, so ist S nichtabelsch und $m = 1$, d. h. es existiert eine Primzahl r mit $r|p - 1$ und $|S| = pr$. Da $S \text{ char } K \trianglelefteq G$ ist, ist $S \trianglelefteq G$ und damit $H := SQ \leq G$ von der Ordnung pqr . Da Q teilerfremd auf S operiert, existiert eine Q -invariante r -Sylowgruppe R von S . Da $P \trianglelefteq G$ mit $C_{QR}(P) = 1$ ist, ist QR isomorph zu einer Untergruppe der Automorphismengruppe von P und damit zyklisch (s. 2.2.5 aus [4]). Da P ein Hallscher Normalteiler von H ist, sind die p -Komplemente von H zu QR konjugiert, d. h. jede Untergruppe der Ordnung qr von H ist zyklisch. Mit Lemma 2.5 aus [12] ist $C_{L(H),H}(P) = O^p(C_H(P)) = 1 < R^x = O^q(C_H(Q^x)) = C_{L(H),H}(Q^x)$ für alle $x \in H$. Dann ist mit (iv) aus 2.3.5 doch $P \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$ und somit ein p -Atom von G , ein Widerspruch.

Es ist also $|P| > p$ und damit P nicht zyklisch. Ist $S = P$, so ist wegen $G \notin \mathcal{P}$ nun $T \neq 1$ (denn sonst wäre $G = SQ \in \mathcal{P}$) und damit ist $Q(N_1 \times T) < G$. Wegen $Q(N_1T)$ nicht p -nilpotent ist $Q(N_1T)$ P -zerlegbar, also wegen $T \leq C_G(N_1)$ dann $Q(N_1T) = QN_1 \times T$. Dann ist $Q \leq C_G(T)$ und mit (3) somit $G = QP \times T$ doch wie in der Behauptung, ein Widerspruch. Es ist also $P < S$ und da $P \in \text{Syl}_p(G)$ ist, ist hiermit $S \in P(m, p)$ mit $m = n + 1$. Damit existiert eine Primzahl r mit $r \mid p - 1$ und ein $R \in \text{Syl}_r(G)$, so dass $S = PR$ und $|R| = r$ ist. Da sowohl Q als auch R nichttriviale Potenzautomorphismen auf P bewirken, ist QN_1R wegen $|P| > p$ eine echte Untergruppe von G , die weder p -nilpotent noch P -zerlegbar ist. Mit diesem finalen Widerspruch gilt dieser Teil des Satzes.

Sei umgekehrt G (und damit auch jede Untergruppe von G) p -nilpotent mit zyklischer p -Sylogruppe und X ein p -Atom von G . Mit 2.3.10 ist dann $|X| = p$, es existiert also ein $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $X \leq P$. Da P zyklisch ist, ist $X \notin \mathcal{Q}_{L(G)}(p)$ und für jede echte Untergruppe H von G ist H p -nilpotent und die p -Sylogruppen von H zyklisch. Nach Lemma 2.3.4 ist $X \notin \mathcal{S}_{L(G)}(p)$ und nach Lemma 2.3.8 auch $X \notin \mathcal{V}_{L(G)}(p)$. Es ist also $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$. Dann existiert nach Definition 2.3.5 ein $S \leq G$ mit $X \leq S$ und $S \in P(2, p)$. Da P zyklisch ist, ist S eine nichtabelsche P -Gruppe und damit nicht p -nilpotent, ein Widerspruch.

Sei nun $p > 2$ und $G = S \times T$, wobei $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$, d. h. insbesondere sind alle Untergruppen der Ordnung p von G normal in G . Ist X ein p -Atom von G , so ist nach (i) aus 2.3.10 dann $|X| = p$. Da $S \in P(n, p)$ ist und X von T zentralisiert wird, ist $X \notin \mathcal{Q}_{L(G)}(p) \cup \mathcal{S}_{L(G)}(p)$ und da alle Untergruppen der Ordnung p von G normal in G sind, ist ebenfalls $X \notin \mathcal{V}_{L(G)}(p)$. Da X ein p -Atom von G ist, ist damit $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$. Dann existieren Untergruppen $S_0, H \leq G$ mit $X < S_0 \leq H$ und $S_0 \in P(2, p)$, so dass wegen $p > 2$ eine der Bedingungen (i)-(v) aus 2.3.5 erfüllt ist. Da $S_0 \in P(2, p)$ ist, ist wegen der Struktur von G nun $S_0 \leq S$ und $T \leq C_G(S_0)$. Damit können (i) und (ii) aus 2.3.5 nicht gelten. Da $(|S|, |T|) = 1$ ist, ist ebenfalls auch (iii) aus 2.3.5 nicht erfüllt. Damit gilt entweder (iv) oder (v) der Definition, also ist S_0 und damit auch S nicht abelsch. Sei Y eine minimale Untergruppe von S_0 mit $X \neq Y$. Dann ist $C_G(Y) = Y \times T$ und somit $O^p(C_H(Y)) = T \cap H = O^p(C_H(X))$, also nach Lemma 2.5 aus [12] auch (iv) aus 2.3.5

nicht erfüllt. Damit gilt (v) der Definition und es ist Y nicht modular in H . Wegen der Struktur von G ist aber Y modular in G und damit in jeder Untergruppe von G . Mit diesem finalen Widerspruch gilt auch diese Richtung der Behauptung und der Satz ist bewiesen. \square

Korollar 2.3.13 *Sei $G = S \times T$ mit $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$. Besitzt G ein p -Atom, so ist $p = 2$.*

Beweis: Wäre $p > 2$, so würde G nach Satz 7 keine p -Atome besitzen, ein Widerspruch. \square

Analog zu dem vorherigen Paragraphen fahren wir nun fort mit der Übersetzung des Satzes von Ito in die Theorie der Untergruppenverbände mittels Z -eingebetteter Untergruppen und p -Atome zweiter Art. Da diese im Gegensatz zu den p -Atomen erster Art immer die Ordnung p haben, sagt schon Beispiel (I) aus 2.1.3 aus dem vorletzten Paragraphen aus, dass die P_1^* -Gruppen zu p Beispiele für Gruppen sind, in denen jedes p -Atom Z -eingebettet ist.

Satz 8 *Sei G eine endliche Gruppe, in der jedes p -Atom und für $p = 2$ zusätzlich auch jede $(2, 2)$ -Kette Z -eingebettet ist. Dann ist entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ ist eine P_1^* -Gruppe zu p .*

Beweis: Sei G ein minimales Gegenbeispiel zum Satz. Da G dann nicht p -nilpotent ist, ist $p \mid |G|$, und nach Beispiel (I) aus 2.1.3 existiert eine zyklische Untergruppe $A \leq G$ von der Ordnung p oder 4, so dass A nicht Z -eingebettet in G ist. Besitzt G keine p -Atome, so ist nach Satz 7 wegen G nicht p -nilpotent dann $p > 2$ und $G = S \times T$ mit $S \in P(n, p)$ nichtabelsch für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$. Somit ist aber $T = O_{p'}(G)$, also $G/O_{p'}(G) \simeq S \in \mathcal{P}_p$, also insbesondere eine P_1^* -Gruppe zu p , ein Widerspruch. Damit besitzt G p -Atome und diese haben mit 2.3.10 die Ordnung p . Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $A \leq P$ und $X \leq P$ ein p -Atom von G . Sei $|A| = 4$. Da A nicht Z -eingebettet in G ist, ist A keine $(2, 2)$ -Kette von G , also enthält A nach (c) aus 2.3.9 kein p -Atom von G , insbesondere ist also $X \not\leq A$. Dann ist aber $X \cup A \leq P \in \mathcal{Q}_2$ und nach 2.3.1 damit jede minimale Untergruppe von P ein 2-Atom von G , ein Widerspruch. Es ist also $|A| = p$. Dann gilt:

- (0) P ist elementarabelsch und es ist $|P| \geq p^2$.

Beweis: Da A kein p -Atom von G ist, ist $X \neq A$ und damit P nicht zyklisch und nach 2.3.1 auch $P \notin \mathcal{Q}_p$. Es ist also P elementarabelsch und $X \cup A \leq P$ von der Ordnung p^2 . Damit ist $|P| \geq p^2$ und (0) gilt.

Da A kein p -Atom von G ist, ist wegen (o) aus 2.3.5 nun $p > 2$. Ferner gilt:

- (1) Es ist entweder $X \leq Z(G)$ oder es ist $X \trianglelefteq G$ und $G/C_G(X)$ zyklisch von $p - 1$ teilender Primzahlordnung.

Beweis: Sei $X \not\leq Z(G)$. Da X als p -Atom von G Z -eingebettet in G ist, ist mit 2.1.4 damit X modular in G . Nach (0) ist ferner $X < P$ und nach 2.3.11 somit $X \trianglelefteq G$. Nach Lemma 2.1.5 ist dann $G/C_G(X)$ zyklisch von der Ordnung r für eine Primzahl r mit $r \mid p - 1$ und (1) gilt.

Sei U eine echte Untergruppe von G . Jedes p -Atom von U ist mit (ii) aus Lemma 2.3.10 auch ein p -Atom von G und damit Z -eingebettet in G , also mit (o) aus Lemma 2.1.4 auch Z -eingebettet in U . Damit vererbt sich die Voraussetzung auf echte Untergruppen von G . Wegen der Minimalität von G ist die Behauptung somit wahr für U und da die p -Sylowgruppen von G elementarabelsch sind, ist jede P_1^* -Gruppe, die in G involviert ist, eine P -Gruppe, d. h. es gilt:

- (2) Sei $U < G$. Dann ist entweder U p -nilpotent oder $U/O_{p'}(U)$ eine P -Gruppe.

Ist jede maximale (und damit insbesondere jede echte) Untergruppe von G p -nilpotent, so ist G minimal nicht p -nilpotent und mit dem Itoschen Satz ([5], S. 434) ist $G = PQ$ mit $P \trianglelefteq G$ und einer zyklischen q -Sylowgruppe Q von G für eine Primzahl $q \neq p$, so dass jede echte Untergruppe von G nilpotent ist. Da P elementarabelsch ist, ist nach dem Satz von Maschke $P = N_1 \times \dots \times N_r$, $r \in \mathbb{N}$, mit irreduziblen $GF(p)Q$ -Moduln N_i für $i \in \{1, \dots, r\}$. Ist $r > 1$, so ist für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ nun $N_i Q < G$ und damit nilpotent. Somit werden N_1, \dots, N_r und damit ganz P von Q zentralisiert, also ist G doch nilpotent, ein Widerspruch. Es ist also $r = 1$ und Q operiert irreduzibel auf P . Mit (1) ist $X \trianglelefteq G$ und hiermit $X = P$, ein Widerspruch zu $A \neq X$.

Es existiert also eine maximale Untergruppe M von G , die nicht p -nilpotent ist, mit (2) ist also $M/O_{p'}(M)$ eine nichtabelsche P -Gruppe.

Ist $X \leq Z(G)$, so ist, weil $M/O_{p'}(M)$ eine nichtabelsche P -Gruppe zu p ist, $X \not\leq M$. Dann ist $G = M \times X$ und $M \trianglelefteq G$. Hiermit ist $O_{p'}(M)$ als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G selbst normal in G und damit ist $O_{p'}(M) \leq O_{p'}(G)$. Andererseits ist $G/M \simeq X$ von der Ordnung p , also ist $O_{p'}(G) \leq M$ und damit $O_{p'}(G) \leq O_{p'}(M)$, also $K := O_{p'}(M) = O_{p'}(G)$. Sei $P_0 \in \text{Syl}_p(M)$. Mit dem Frattiniargument ([4], 3.2.7, S. 61) ist dann $G = MN_G(P_0) = KN_G(P_0)$. Mit der Dedekindidentität ([4], 1.1.11, S. 8) ist ferner $M = K(N_G(P_0) \cap M) = KN_M(P_0)$ und mit dem Isomorphiesatz dann $N_M(P_0)/(K \cap N_M(P_0)) \simeq N_M(P_0)K/K = M/K \in \mathcal{P}$. Damit existiert eine Primzahl q mit $q \mid p-1$ und ein $y \in N_M(P_0) \leq N_G(P_0)$ mit $o(y) = q^k$ für $k \in \mathbb{P}$, so dass y einen Automorphismus der Ordnung q auf P_0 bewirkt und $y^q \in K \cap N_M(P_0) \leq C_G(P_0)$ ist. Setze $H := \langle XP_0, y \rangle$. Nach Lemma 2.3.12 ist dann H eine P_1^* -Gruppe, ein Widerspruch zu $X \leq Z(G)$.

Es ist also $X \not\leq Z(G)$ und nach (1) damit $X \trianglelefteq G$ und $G/C_G(X)$ zyklisch der Ordnung q für eine Primzahl q mit $q \mid p-1$. Setze $C := C_G(X)$. Da $C < G$ ist und eine zentrale Untergruppe der Ordnung p enthält, ist C nach (2) p -nilpotent und somit ist das normale p -Komplement $K = O_{p'}(C)$ von C ein p' -Normalteiler von G . Wäre $K \neq O_{p'}(G)$, so wäre wegen $|G : C| = q$ dann $|O_{p'}(G)| = |K|q$ und G hätte doch ein normales p -Komplement, ein Widerspruch. Es ist also $K = O_{p'}(G)$. Da $C = PK$ ist, ist mit dem Frattiniargument ([4], 3.2.7, S. 61) nun $G = CN_G(P) = KN_G(P)$. Nach dem Isomorphiesatz ist $G/C \simeq N_G(P)/(N_G(P) \cap C)$ von der Ordnung q und damit existiert ein $y \in N_G(P) \setminus (N_G(P) \cap C)$ mit $o(y) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, und $\phi(Y) = K \cap Y$ für $Y := \langle y \rangle$. Dann ist $y \in N_G(X) \setminus C_G(X)$ und weil X Z -eingebettet in G ist, ist mit (2) der Definition 2.1.1 nun $o(y) = q$. Für $H := PY$ ist nach Lemma 2.3.12 dann $G/O_{p'}(G) \simeq H \in \mathcal{P}_p$, also insbesondere eine P_1^* -Gruppe zu p . Mit diesem finalen Widerspruch gilt der Satz. \square

Wie in dem letzten Paragraphen fahren wir auch hier mit der Übersetzung von p -Nilpotenz in die Theorie der Untergruppenverbände mittels p -Atomen fort, wobei hier neben den p^* -nilpotenten Gruppen ein weiteres, für die p -Atome zweiter Art effizienteres Konzept vorgestellt wird. Da der Begriff der \bar{p} -Untergruppe unabhängig von der Art der verwendeten p -Atome ist, werden wir als Allererstes genau wie im vorherigen Kapitel definieren:

Definition 2.3.14 Eine Untergruppe U der endlichen Gruppe G heißt \bar{p} -Untergruppe von G , wenn U keine p -Atome von G enthält.

Allerdings werden bei den Vererbungseigenschaften Unterschiede in Abhängigkeit von der Art der betrachteten p -Atome festgestellt:

Lemma 2.3.15 Sei U eine \bar{p} -Untergruppe von G . Dann gilt:

- (i) Jede Untergruppe $U_1 \leq U$ ist eine \bar{p} -Untergruppe von G .
- (ii) Besitzt G p -Atome, so ist entweder U eine p' -Gruppe oder die p -Sylowgruppen von G sind elementarabelsch und nicht zyklisch.
- (iii) Jede p' -Untergruppe von G ist eine \bar{p} -Untergruppe von G .
- (iv) Es ist entweder U p -nilpotent mit zyklischen p -Sylowgruppen oder $p > 2$ und $U = S \times T$, wobei $S \in P(n, p)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist.

Beweis: Zu (i): Sei $U_1 < U$. Würde U_1 ein p -Atom von G besitzen, so auch U .

Zu (ii): Sei $p \mid |U|$. Dann hat U eine Untergruppe Y von der Ordnung p , die kein p -Atom ist. Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $Y \leq P$. Da G p -Atome besitzt, existiert eine minimale Untergruppe $X \leq P$ mit X p -Atom von G . Dann ist $X \neq Y$ und damit P nicht zyklisch. Wegen 2.3.1 ist auch $P \notin \mathcal{Q}_p$, also P elementarabelsch von der Ordnung mindestens p^2 .

Zu (iii): Sei V eine p' -Untergruppe von G . Dann ist $p \nmid |V|$ und mit (i) aus 2.3.10 enthält V keine p -Atome von G .

Zu (iv): Da U eine \bar{p} -Untergruppe von G ist, besitzt U nach (ii) aus 2.3.10 keine p -Atome und somit folgt die Behauptung direkt aus dem Satz 7. □

Wie im vorigen Paragraphen definieren wir zu den p -Atomen zweiter Art ebenfalls:

Definition 2.3.16 Eine endliche Gruppe G heißt p^* -nilpotent, wenn eine \bar{p} -Untergruppe U von G existiert mit $U \text{ mod } G$ und $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$.

Mithilfe von Lemma 2.2.10 können wir ein zu Satz 5 analoges Resultat für p^* -nilpotente Gruppen auch für p -Atome zweiter Art beweisen, natürlich unter Berücksichtigung der Tatsache, dass in diesem Paragraphen eine \bar{p} -Untergruppe nicht notwendigerweise eine p' -Gruppe ist. Dieses wird hier aber nicht gesondert vorgestellt, da schon das folgende Beispiel zeigt, dass p^* -nilpotente Gruppen im Sinne der Übersetzung des Itoischen Satzes mittels p -Atome zweiter Art keine gute Approximation von p -nilpotenten Gruppen sind. Stattdessen wird das Resultat am Ende des Paragraphen aus den nachfolgenden Lemmata und Sätzen gefolgert.

Beispiel 2.3.17 *Sei G eine P_1^* -Gruppe zu p , so dass die p -Sylowgruppe von G nicht elementarabelsch ist. Dann ist G nicht p^* -nilpotent.*

Beweis: Da G eine P_1^* -Gruppe zu p ist, ist $G = PQ$ mit einem abelschen p -Normalteiler P und einer zyklischen Gruppe Q der Ordnung q , die einen nichttrivialen Potenzautomorphismus auf P bewirkt, wobei P nach Voraussetzung nicht elementarabelsch ist. Angenommen, G ist p^* -nilpotent. Dann existiert eine \bar{p} -Untergruppe U von G mit $U \bmod G$ und $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{P}_p$. Da P nicht elementarabelsch ist, ist $P \in \mathcal{K} \cup \mathcal{Q}_p$ und nach dem Iwasawaschen Satz (hier Lemma 1.1.12) dann $G \notin \mathcal{M}$. Ist $P \in \mathcal{Q}_p$, so ist jede minimale Untergruppe von P ein p -Atom von G . Ist $P \in \mathcal{K}$, so ist $|P| > p$ und da Q einen Potenzautomorphismus auf P bewirkt, ist sowohl $X \cup Q \in P(2, p)$ für die minimale Untergruppe $X \leq P$ als auch $P \cup Q/\phi(P) \in P(2, p)$. Da G eine P_1^* -Gruppe zu p mit nicht elementarabelscher p -Sylowgruppe ist, ist Q und damit auch jedes Konjugierte von Q in $X \cup Q$ nicht modular in G . Nach (v) aus 2.3.5 ist somit $X \in \mathcal{U}_{L(G)}(p)$, d. h. X ist ein p -Atom von G . Es ist also in beiden Fällen $U \cap P = 1$ und wegen $|Q| = q$ damit $U = Q$ und doch $Q \bmod G$. Da $G \notin \mathcal{M}$ ist dies ein Widerspruch und die Behauptung gilt. \square

Da wegen Satz 8 die P_1^* -Gruppen zu p aber eine wesentliche Rolle für das verbandstheoretische Analogon des Satzes von Ito unter Verwendung von p -Atomen zweiter Art spielen, stellen wir folgendes neues Konzept vor:

Definition 2.3.18 *Ein Verband L liegt in \mathcal{LMI} , wenn L nach unten semimodular und jedes Intervall in L direkt unzerlegbar ist.*

Ist $L \in \mathcal{LMI}$, so nennen wir L kurz \mathcal{LMI} -Verband. Wir werden ferner ausschließlich \mathcal{LMI} -Verbände zu einer festen Primzahl p betrachten und definieren:

Definition 2.3.19 Genau dann ist $L \in \mathcal{LMI}_p$, wenn $L \in \mathcal{LMI}$ ist und eine der folgenden Aussagen gilt:

- (i) Es ist $|L| = 1$.
- (ii) L enthält ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall.

Die für diese Dissertation wichtigste Eigenschaft von \mathcal{LMI} -Verbänden, wird in dem folgendem Lemma bewiesen:

Lemma 2.3.20 Sei G eine endliche Gruppe. Genau dann ist $G \in \mathcal{LMI}_p$, wenn entweder $G = 1$ oder G eine nichtzyklische p -Gruppe oder eine P_1^* -Gruppe zu p ist.

Beweis: Sei zunächst $G \in \mathcal{LMI}_p$. Dann ist nach obiger Definition 2.3.19 insbesondere $G \in \mathcal{LMI}$ und nach Proposition 1.5 auf S. 12 aus [13] ist damit G entweder eine Primärgruppe oder eine P_1^* -Gruppe. Sei $G \neq 1$; dann enthält G erneut nach 2.3.19 ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall. Ist also G eine Primärgruppe, so ist G nichtzyklische p -Gruppe. Sei also G eine P_1^* -Gruppe etwa zu $r \in \mathbb{P}$. Dann ist mit 1.1.15 jedes Intervall der Länge 2 in G entweder eine Kette oder isomorph zu M_{r+1} und da G ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall enthält, ist damit $r = p$.

Ist umgekehrt $G = 1$, so ist nach 2.3.19 direkt $G \in \mathcal{LMI}_p$. Sei also $G \neq 1$. Ist G eine nichtzyklische p -Gruppe oder eine P_1^* -Gruppe zu p , so ist nach Proposition 1.5 auf S. 12 aus [13] nun $G \in \mathcal{LMI}$. Da $G \neq 1$ ist, enthält G aber ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall oberhalb von $\phi(G)$ und mit 2.3.19 ist $G \in \mathcal{LMI}_p$. Damit gilt die Behauptung. \square

Definition 2.3.21 Eine endliche Gruppe G heißt \hat{p} -nilpotent, wenn eine \bar{p} -Untergruppe U von G existiert mit $U \text{ mod } G$ und $[G/U] \in \mathcal{LMI}_p$.

Lemma 2.3.22 Sei G eine endliche Gruppe.

- (a) Besitzt G keine p -Atome, so ist G sowohl p^* - als auch \hat{p} -nilpotent.
- (b) Ist G p -nilpotent, so ist G \hat{p} -nilpotent.
- (c) Ist G p^* -nilpotent, so ist G \hat{p} -nilpotent.

Beweis: Zu (a): Da G keine p -Atome besitzt, ist mit $U := G$ nun $|G/U| = 1$. Damit ist sowohl $G/U \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$, also G \hat{p} -nilpotent, als auch $G/U \in \mathcal{K}$ und G p^* -nilpotent.

Zu (b): Sei $K := O_{p'}(G)$. Dann enthält K mit (iii) aus 2.3.15 keine p -Atome von G und ist damit eine normale, also insbesondere modulare, \bar{p} -Untergruppe von G . Ist G/K eine nicht zyklische p -Gruppe, so ist mit Lemma 2.3.20 nun $G/K \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$ und damit G \hat{p} -nilpotent.

Ist G/K zyklisch, so ist G p -nilpotent und mit Satz 7 enthält G keine p -Atome. Damit ist $U := G$ eine \bar{p} -Untergruppe von G mit $|G/U| = 1$, also $G/U \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$. Somit ist G auch hier \hat{p} -nilpotent.

Zu (c): Sei G p^* -nilpotent. Dann existiert eine modulare \bar{p} -Untergruppe U von G mit $[G/U] \in \mathcal{K} \cup \mathcal{P}_p \cup \mathcal{Q}_p$. Ist $[G/U] \in \mathcal{P}_p \cup \mathcal{Q}_p$, so besitzt $[G/U]$ ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall, also ist nach Proposition 1.5 auf S. 12 aus [13] damit $[G/U] \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$ und G ist \hat{p} -nilpotent. Sei also $[G/U] \in \mathcal{K}$. Besitzt G keine p -Atome oder ist G p -nilpotent, so ist nach (a) bzw. nach (b) nun G \hat{p} -nilpotent. Sei also G nicht p -nilpotent und X ein p -Atom von G . Dann ist $U \neq G$ und U enthält keine p -Sylowgruppe von G , also ist $p \mid |G : U|$. Wegen $U \text{ mod } G$ ist mit 5.1.3 aus [10] dann G/U_G entweder eine r -Gruppe oder G/U_G nicht abelsch der Ordnung qr für $q, r \in \mathbb{P}$ und wegen $p \mid |G : U|$ somit $r = p$. Ist G/U_G nicht abelsch der Ordnung pq , so ist $U \neq U_G$ wegen $[G/U] \in \mathcal{K}$, also $U \not\leq U_G$. Dann ist wegen $|G : U| = p$ somit $p > q$, also $G/U_G \in P(2, p)$. Da U_G \bar{p} -Untergruppe von G und $L(G/U_G) \simeq M_{p+1}$ ist, ist $G/U_G \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$ und G \hat{p} -nilpotent.

Sei also G/U_G eine p -Gruppe. Ist $G/U_G \in \mathcal{P}_p \cup \mathcal{Q}_p$, so enthält G/U_G ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall und wegen U_G \bar{p} -Untergruppe ist G \hat{p} -nilpotent. Sei nun G/U_G zyklische p -Gruppe. Dann ist $U \trianglelefteq G$ und damit $U = U_G$. Ist $|G/U| > p$, so sind die p -Sylowgruppen von G nicht elementarabelsch und nach (ii) aus 2.3.15 somit $p \nmid |U|$. Dann ist $U = O_{p'}(G)$ und G p -nilpotent mit zyklischer p -Sylowgruppe, ein Widerspruch zu $X \leq G$ und Satz 7.

Es ist also $|G/U| = p$ und wegen $X \not\leq U$ ist G das semidirekte Produkt von U mit X . Nach (iv) aus Lemma 2.3.15 ist wegen U \bar{p} -Untergruppe entweder U p -nilpotent oder $p > 2$ und $U = S \times T$, wobei $S \in P(n, p)$ nichtabelsch für ein $n \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist. Ist U p -nilpotent, so ist $O_{p'}(U) = O_{p'}(G)$ und G p -nilpotent, ein Widerspruch.

Sei also $p > 2$ und $U = S \times T$ wie oben, insbesondere also $T := O_{p'}(G)$. Dann ist $p \mid |U|$ und nach (ii) aus 2.3.15 sind die p -Sylowgruppen von G elementarabelsch der Ordnung mindestens p^2 . Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $X \leq P$. Da G nicht p -nilpotent ist, existiert nach dem Satz von Burnside ([5], S. 419) ein p' -Element in G , welches nichttrivial auf P operiert. Dann existiert eine Primzahl t und ein $y \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ mit $o(y) = t^k$ für $k \in \mathbb{N}$, so dass y einen Automorphismus der Ordnung t auf P bewirkt. Wir betrachten $P < y >$. Da $X \leq P$ und $|P| \geq p^2$ ist, bewirkt y nach Lemma 2.3.12 und 1.5.4 aus [10] einen universellen Potenzautomorphismus auf P . Weil $U \trianglelefteq G$ und $|G/U| = p$ ist, enthält U alle p' -Elemente von G und damit ist $y \in U$. Da $P_0 := P \cap S \in \text{Syl}_p(U)$ von T zentralisiert wird, ist $y \notin T$, denn sonst wäre wie oben gesehen auch $y \in C_G(X)$ und damit y doch trivial auf P . Wegen der Struktur von U ist somit $y \in S$, also $G/O_{p'}(G) = G/T \simeq P < y >$ eine Gruppe aus $P(n+1, p)$ nach Lemma 2.3.12. Damit ist auch hier G \hat{p} -nilpotent und das Lemma bewiesen. \square

Folgendes Lemma wird hauptsächlich in dem Beweis von Satz 9 benutzt, könnte allerdings vielleicht von unabhängigem Interesse für weitere Untersuchungen von Gruppen mit $\mathcal{LM}\mathcal{I}$ -Verband als Untergruppenverband sein, da es die Struktur von Gruppen mit solchen Untergruppenverbänden näher untersucht.

Lemma 2.3.23 *Sei M eine normale \bar{p} -Untergruppe von G , so dass $G/M \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$ ist. Dann ist entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p .*

Beweis: Sei G ein Gegenbeispiel zum Lemma, es ist also weder G p -nilpotent noch $G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p . Dann ist $p \mid |G|$ und da jede nichtabelsche Gruppe in $P(n, p)$ insbesondere eine P_1^* -Gruppe zu p ist, besitzt G mit Satz 7 ein p -Atom X . Da M eine \bar{p} -Untergruppe von G ist, ist damit $p \mid |G : M|$ und wegen $G/M \in \mathcal{LM}\mathcal{I}_p$ gilt nach 2.3.20 dann:

- (0) Es ist entweder G/M eine nicht zyklische p -Gruppe oder G/M ist eine P_1^* -Gruppe zu p .

Ist M eine p' -Gruppe, so ist wegen G nicht p -nilpotent G/M keine Primärgruppe und nach (0) somit G/M eine P_1^* -Gruppe zu p . Dann enthält G/M keinen p' -Normalteiler, also ist $M = O_{p'}(G)$ und $G/O_{p'}(G)$

doch wie in der Behauptung, ein Widerspruch.

Es ist also $p \mid |M|$ und mit (ii) aus Lemma 2.3.15 sind somit die p -Sylowgruppen von G elementarabelsch der Ordnung mindestens p^2 . Wegen (0) gilt damit:

- (1) Ist G/M keine p -Gruppe, so ist $G/M \in \mathcal{P}_p$ nichtabelsch.

Angenommen, M ist p -nilpotent. Da $O_{p'}(M) \text{ char } M \trianglelefteq G$ ist, ist $O_{p'}(M) \leq O_{p'}(G)$ und da G/M mit (0) keinen p' -Normalteiler besitzt, ist dann $K := O_{p'}(M) = O_{p'}(G)$. Ist G/M eine p -Gruppe, so ist G/K eine p -Gruppe und damit G p -nilpotent, ein Widerspruch.

Mit (1) ist also $G/M \in \mathcal{P}_p$ nichtabelsch. Sei N/M der maximale elementarabelsche Normalteiler von G/M . Dann ist $N \trianglelefteq G$ und mit dem Frattiniargument ist somit $G = NN_G(P)$ für eine p -Sylowgruppe P von N . Dann ist $P \in \text{Syl}_p(G)$ und $P_0 := (M \cap P) \in \text{Syl}_p(M)$. Da $G/M \in \mathcal{P}_p$ nichtabelsch ist, ist mit dem Isomorphiesatz $N_G(P)/(N \cap N_G(P)) \simeq NN_G(P)/N = G/N$ von der Ordnung q für eine Primzahl q , die $p-1$ teilt. Dann existiert ein $y \in N_G(P)$ mit $o(y) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, so dass für $Q := \langle y \rangle$ nun $\phi(Q) = Q \cap M$ und wegen $q \neq p$ somit $\phi(Q) \leq K$ ist. Wir betrachten $H := PQ$. Ist $A \leq P_0$ von der Ordnung p , so ist mit Lemma 2.3.12 nun $A \trianglelefteq H$ und Q operiert nichttrivial auf A . Da $\phi(Q) = AQ \cap K$ ist, ist $\phi(Q) \trianglelefteq AQ$ und da A von der Ordnung p ist, ist somit $AQ/\phi(Q) \in P(2, p)$. Da A (wegen $P_0 \bar{p}$ -Untergruppe) kein p -Atom von G ist, ist $A \notin \mathcal{S}_{L(H)}(p)$ und damit $k = 1$ und $|Q| = q$. Nach Lemma 2.3.12 ist hiermit $H \in \mathcal{P}_p$ und wegen $|G/K| = |P|q$ ist $HK = G$ und $G/O_{p'}(G) \simeq H$ wie in der Behauptung, ein Widerspruch.

Es ist also M nicht p -nilpotent. Nach (iv) aus 2.3.15 gilt dann:

- (2) Es ist $M = S \times T$, wobei $S \in P(m, p)$ nichtabelsch für ein $m \in \mathbb{N}$ und $(|S|, |T|) = 1$ ist; sei r der kleinere Primteiler von $|S|$.

Sei $P_0 \in \text{Syl}_p(S)$, dann ist $P_0 \text{ char } M \trianglelefteq G$ und damit $P_0 \trianglelefteq G$. Da $M \bar{p}$ -Untergruppe von G ist, ist $X \not\leq M$. Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$ mit $XP_0 \leq P$.

Ist G/M eine p -Gruppe, so ist $O_{p'}(G) = O_{p'}(M) = T$ und G/T eine $\{p, r\}$ -Gruppe. Da G nicht p -nilpotent ist, ist mit dem Satz von Burnside auf S. 419 aus [5] nun $N_G(P) \neq C_G(P)$, d. h. es existiert ein p' -Element in G , welches nichttrivial auf P operiert. Dann existiert eine Primzahl q und ein $y \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ mit $o(y) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, so dass y einen

Automorphismus der Ordnung q auf P bewirkt. Sei $Q := \langle y \rangle$ und $H := PQ$. Da mit dem Isomorphiesatz $N_G(P)T/T \simeq N_G(P)/(N_G(P) \cap T)$ ist und $N_G(P) \cap T$ als p' -Normalteiler von $N_G(P)$ von P zentralisiert wird, ist $q = r$. Da wegen der Struktur von M nun $r^2 \nmid |G|$ ist, ist damit $k = 1$. Mit Lemma 2.3.12 ist dann $H \in \mathcal{P}$ und wegen $|G/T| = |P|q$ ist $H \cup T = G$, also mit dem Isomorphiesatz $G/O_{p'}(G) \simeq H/H \cap T = H \in \mathcal{P}_p$, ein Widerspruch. Es ist also G/M keine p -Gruppe und nach (1) gilt somit:

(3) Es ist $G/M \in \mathcal{P}_p$ nichtabelsch.

Sei $p \neq q \in \mathbb{P}$ mit $q \mid |G/M|$; dann ist $q \mid p - 1$. Sei N/M der maximale elementarabelsche Normalteiler von G/M . Damit ist $N \trianglelefteq G$ und $P \in \text{Syl}_p(N)$. Dann ist mit dem Frattiniargument $G = NN_G(P)$ und mit dem Isomorphiesatz $N_G(P)/(N_G(P) \cap N) \simeq G/N$ von der Ordnung q , es existiert also ein $y \in N_G(P)$ mit $o(y) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, und $\phi(\langle y \rangle) = M \cap \langle y \rangle$. Wir betrachten $H := PY$ mit $Y := \langle y \rangle$.

Sei zunächst $q \neq r$. Da $\phi(Y) \leq M$ und $q \nmid |S|$ ist, ist somit $\phi(Y) \leq T$. Ist $\phi(Y) \neq 1$, so ist $\phi(Y) = T \cap H \trianglelefteq H$ und damit $\phi(Y) \leq C_G(P)$. Sei $A \leq P \cap S$ von der Ordnung p . Mit Lemma 2.3.12 ist dann $A \trianglelefteq H$ und Y operiert nichttrivial auf A . Dann ist aber $AY/\phi(Y) \in P(2, p)$ und wegen $\phi(Y) \leq C_G(A)$ somit $A \in \mathcal{S}_{L(G)}(p)$, also A ein p -Atom von G , ein Widerspruch. Somit ist $|Y| = q$. Nach Lemma 2.3.12 ist dann $H \in \mathcal{P}_p$ und y bewirkt damit auf P_0 einen Potenzautomorphismus zur selben Potenz wie auf N/M . Wir betrachten SY . Da Y teilerfremd auf S operiert, besitzt S eine Y -invariante r -Sylowgruppe R . Da YR treu auf P_0 und damit auch auf A operiert, ist YR damit nach 8.2.5 aus [4] zyklisch. Wir betrachten AY . Für alle $x \in A$ ist $C_{SY}(Y^x) = (YR)^x$ und mit Lemma 2.5 aus [12] dann $C_{L(SY), SY}(A) = O^p(C_{SY}(A)) = 1 < R^x = O^q(C_{SY}(Y^x)) = C_{L(SY), SY}(Y^x)$. Damit ist (iv) aus 2.3.5 erfüllt und $A \leq P_0$ nach 2.3.9 doch ein p -Atom von G , ein Widerspruch.

Es ist also $r = q$ und die q -Sylowgruppen von G sind von der Ordnung q^2 . Sei $Q \in \text{Syl}_q(G)$ und A eine minimale Untergruppe von P_0 . Da $S \trianglelefteq G$ ist, ist $Q_0 := S \cap Q \in \text{Syl}_q(S)$ und mit (2) somit $AQ_0 \in P(2, p)$. Jedes Konjugierte Q_0^x von Q_0 in AQ_0 liegt in Q^x , also in einer Kette der Länge 2, wenn Q zyklisch ist, bzw. in einer Gruppe aus $P(2, q)$, wenn Q elementarabelsch ist. Es ist daher (iii) oder (i) der Definition 2.3.5 für A erfüllt und damit A ein p -Atom von G . Mit diesem finalen Widerspruch gilt die Behauptung. \square

Folgender Satz zeigt, dass die Verbandsklasse der \hat{p} -nilpotenten Gruppen fast nur die der p -nilpotenten enthält (bis auf die Ausnahme der P_1^* -Gruppen), es ist also sinnvoll, p -nilpotente Gruppen durch \hat{p} -nilpotente Gruppen mittels p -Atomen zweiter Art in die Theorie der Untergruppenverbände zu übersetzen.

Satz 9 *Genau dann ist G \hat{p} -nilpotent, wenn entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p ist.*

Beweis: Sei zunächst G \hat{p} -nilpotent. Im Folgenden zeigen wir, dass dann entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p ist. Sei G ein minimales Gegenbeispiel hierzu. Dann ist $p \mid |G|$ und da jede Gruppe in $P(n, p)$ insbesondere eine P_1^* -Gruppe zu p ist, besitzt G mit Satz 7 ein p -Atom. Da G \hat{p} -nilpotent ist, existiert eine \bar{p} -Untergruppe U von G mit $U \text{ mod } G$ und $[G/U] \in \mathcal{LMI}_p$. Mit Lemma 2.3.23 gilt dann:

(0) Es ist $U \not\trianglelefteq G$ und jedes Intervall in $[G/U]$ ist direkt unzerlegbar.

Ist U auch nicht permutabel in G , so ist mit 5.1.14 aus [10] dann $G/U_G = S/U_G \times T/U_G$ mit $(|S/U_G|, |T/U_G|) = 1$, so dass $S/U_G = S_1/U_G \times \dots \times S_r/U_G$ mit $r \in \mathbb{N}$ und $S_1/U_G, \dots, S_r/U_G$ P -Gruppen von paarweise teilerfremden Ordnungen, $U \cap T \text{ per } G$ und $U/U_G = Q_1/U_G \times \dots \times Q_r/U_G \times (U \cap T)/U_G$ mit nichtnormalen Sylowgruppen Q_i/U_G , $i \in \{1, \dots, r\}$, ist. Da U nicht permutabel in G ist, ist nach (0) und Lemma 2.2.9 somit $S = S_1$ und $T = U_G$, es ist also G/U_G eine P -Gruppe zum größeren Primteiler $t \in \mathbb{P}$. Dann ist jedes Intervall der Länge 2 in $[G/U_G]$ isomorph zu M_{t+1} und da $[G/U] \in \mathcal{LMI}_p$ ist und damit ein zu M_{p+1} isomorphes Intervall enthält, ist $G/U_G \in \mathcal{P}_p$. Damit ist $G/U_G \in \mathcal{LMI}_p$ und für $M := U_G$ mit (i) aus Lemma 2.3.15 und Lemma 2.3.23 doch G wie in der Behauptung, ein Widerspruch.

Es ist also $U \text{ per } G$. Mit 5.2.3 aus [10] ist dann U^G/U_G nilpotent, d. h. $U^G/U_G = P_1/U_G \times \dots \times P_s/U_G$ mit nichttrivialen $P_i/U_G \in \text{Syl}_{p_i}(U^G/U_G)$ zu paarweise verschiedenen Primzahlen p_i für $i \in \{1, \dots, s\}$, $s \in \mathbb{N}$. Mit 2.2.9 ist $[G/U] \simeq [P_1/(P_1 \cap U)] \times \dots \times [P_s/(P_s \cap U)]$ und da P_i/U_G als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G/U_G selbst normal in G/U_G ist, ist $(P_i \cap U) \neq P_i$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$, also ist $s = 1$ nach (0) und es gilt:

(1) U^G/U_G ist eine r -Gruppe für eine Primzahl r .

Ist $r \neq p$, so wird, da $G/C_G(U^G/U_G)$ mit 5.2.4 aus [10] eine r -Gruppe ist, U^G/U_G von den p -Sylowgruppen von G zentralisiert. Sei $P \in \text{Syl}_p(G)$. Da G p -Atome besitzt und U eine \bar{p} -Untergruppe von G ist, ist wegen $r \neq p$ somit $P \not\leq U^G$. Dann ist $P \cup U^G/U_G = PU_G/U_G \times U^G/U_G$ und mit 2.2.9 folgt $[P \cup U^G/U] \simeq [P/(P \cap U)] \times [U^G/U]$, also enthält $[G/U]$ ein direkt zerlegbares Intervall, ein Widerspruch zu (0). Es gilt somit:

(2) U^G/U_G ist eine p -Gruppe.

Dann ist $p \mid |U|$. Da $|U : U_G|$ eine p -Potenz ist und eine nichtabelsche P -Gruppe zu p keinen Normalteiler von p -Potenzindex besitzt, ist mit Satz 7 nun U und mit (2) auch U^G p -nilpotent. Da G nicht p -nilpotent ist, ist damit G/U^G keine p -Gruppe. Dann existiert eine Primzahl q mit $q \mid |G/U^G|$ und $q \neq p$. Sei $Q \in \text{Syl}_q(G)$. Erneut mit 5.2.4 aus [10] ist $G/C_G(U^G/U_G)$ eine q -Gruppe und damit wird U^G/U_G von Q zentralisiert. Dann ist $Q \cup U^G/U_G = QU_G/U_G \times U^G/U_G$ und nach 2.2.9 folgt $[Q \cup U^G/U] \simeq [Q/(Q \cap U)] \times [U^G/U]$, also enthält $[G/U]$ ein direkt zerlegbares Intervall. Mit diesem finalen Widerspruch zu (0) gilt dieser Teil des Satzes.

Ist umgekehrt G p -nilpotent, so ist G nach (b) aus Lemma 2.3.22 dann \hat{p} -nilpotent. Ist $G/O_{p'}(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p , so gilt mit Lemma 2.3.20 die Behauptung und der Satz ist bewiesen. \square

Als Korollar des obigen Satzes erhalten wir das bereits erwähnte, zu Satz 5 ähnliche Resultat für p^* -nilpotente Gruppen:

Korollar 2.3.24 *Ist G p^* -nilpotent, so ist G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ ist eine P_1^* -Gruppe zu p .*

Beweis: Da G p^* -nilpotent ist, ist nach (c) aus Lemma 2.3.22 nun G \hat{p} -nilpotent. Nach obigem Satz 9 ist damit entweder G p -nilpotent oder $G/O_{p'}(G)$ ist eine P_1^* -Gruppe zu p und die Behauptung gilt. \square

Als Abschluss des Paragraphen stellen wir das Hauptresultat dieses Kapitels vor, nämlich das verbandstheoretische Analogon des Satzes von Ito unter Verwendung von p -Atomen zweiter Art:

Satz 10 *Sei jedes p -Atom der endlichen Gruppe G Z -eingebettet in G und für $p = 2$ sei zusätzlich jede $(2, 2)$ -Kette von G Z -eingebettet in G . Dann ist G \hat{p} -nilpotent.*

Beweis: Da jedes p -Atom der endlichen Gruppe G Z -eingebettet in G und für $p = 2$ zusätzlich jede $(2, 2)$ -Kette von G Z -eingebettet in G ist, ist nach Satz 8 entweder G p -nilpotent oder $G/O_p(G)$ eine P_1^* -Gruppe zu p . Nach Satz 9 ist dann G \hat{p} -nilpotent und die Behauptung gilt. \square

Kapitel 3

Der Satz von Baer und eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittingreihe einer endlichen Gruppe

Wie bereits in der Einleitung erklärt, ist eine direkte Übersetzung des Baerschen Satzes in die Theorie der Untergruppenverbände, indem man Konjugation durch Abbilden mit Projektivitäten ersetzt, problematisch, wie das dazu vorgestellte Beispiel einer zyklischen Gruppe G der Ordnung pq mit verschiedenen Primzahlen p, q zeigt. Dass $O_p(G)$ auf $O_q(G)$ unter Projektivitäten abgebildet werden kann, gilt viel allgemeiner in P -unzerlegbaren Gruppen im Sinne der Definition auf S. 170 aus [10]. Der Satz von Schmidt ([10], 4.3.2, S. 179) sagt aber andererseits auch aus, dass die Fittinggruppe für P -unzerlegbare Gruppen invariant unter Projektivitäten ist. Deswegen übersetzen wir in dem ersten Paragraphen des Kapitels die in der Einleitung erwähnte unmittelbare Folgerung des Baerschen Satzes, dass zyklische Untergruppen X von Primzahlpotenzordnung einer endlichen Gruppe G , für die $\langle X, X^g \rangle$ für alle $g \in G$ eine Primärgruppe ist, in dem größten nilpotenten Normalteiler von G , der Fittinggruppe $F(G)$, liegen, in die Theorie der Untergruppenverbände.

Da diese Übersetzung gleichzeitig eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittinggruppe in P -unzerlegbare Gruppen ist und der

Satz von Schmidt aus dem Jahr 1972 ([10], 4.3.3, S. 180) zeigt, dass ab der zweiten Fittinggruppe sogar eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittingreihe einer beliebigen endlichen Gruppe möglich ist, wird in dem zweiten und dritten Paragraphen des Kapitels eine neue solche angegeben. Neben dem Analogon des Baerschen Satzes benutzt diese verbandstheoretische Funktoren und liefert nicht nur eine Charakterisierung der Formation \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$ (welche sich in natürlicher Weise aus der Charakterisierung der Fittingreihe ergibt), aber auch eine verbandstheoretische Charakterisierung des k -ten nilpotenten Residuums. Die größte Schwierigkeit dabei ist, die zweite Fittinggruppe einer endlichen Gruppe G mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$ zu bestimmen, denn hier muss man eine verbandstheoretische Bedingung dafür angeben, wann die Fittingfaktorgruppe einer solchen Gruppe abelsch ist. Da man dieses im Verband nicht ohne Weiteres erkennen kann, ist 3.2.12 das entscheidende Lemma für die letzten beiden Paragraphen des Kapitels. Aus der dabei entwickelten Methode ergibt sich dann die angekündigte verbandstheoretische Charakterisierung der zweiten Fittinggruppe einer endlichen Gruppe und daraus der Klasse \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$.

3.1 Ein verbandstheoretisches Analogon des Satzes von Baer

Definition 3.1.1 Sei L ein Verband und G eine Gruppe.

(a) Für $x \in L$ heißt:

(i) $x^{AutL} := \bigcup_{\sigma \in Aut(L)} x^\sigma$ die "projektive" Hülle von x in L ; zur Abkürzung schreiben wir dafür auch x^L .

(ii) $x_{AutL} := \bigcap_{\sigma \in Aut(L)} x^\sigma$ das "projektive" Herz von x in L ; zur Abkürzung schreiben wir dafür auch x_L .

(b) Es ist $P(G)$ die Gruppe der Autoprojektivitäten von G .

Die Umkehrung des Baerschen Satzes ist trivialerweise erfüllt, was aber nicht für das hier vorgestellte Analogon gilt. Im Folgenden wird also auch die Umkehrung dessen Aussage bewiesen und da für $H \leq G$ nun $H = \bigcup_{X \leq H, X \in \mathcal{K}} X$ gilt, somit eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittinggruppe einer endlichen P -unzerlegbaren Gruppe.

Satz 11 Sei G eine endliche P -unzerlegbare Gruppe und $X \leq G$ mit $X \in \mathcal{K}$. Genau dann ist $X \leq F(G)$, wenn gilt:

(a) Für alle $\sigma, \tau \in P(G)$ ist $X \cup X^\sigma \cup X^\tau \in \mathcal{D} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$.

(b) Ist $X^{P(G)} \in \mathcal{P}$, so gilt:

Ist $H \leq G$ mit $X^{P(G)} \cap H = X$, so ist $X \text{ mod } X^{P(G)} \cup H$.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Bedingungen notwendig sind. Sei dazu G eine P -unzerlegbare Gruppe und $X \leq F(G)$ mit $X \in \mathcal{K}$. Mit dem Lemma 4.3.2 auf S. 179 aus [10] ist dann $F(G)^\varphi = F(G)$ für alle $\varphi \in P(G)$, also $X \cup X^\sigma \cup X^\tau \leq F(G)$ und somit nilpotent für alle $\sigma, \tau \in P(G)$. Da $X \in \mathcal{K}$ ist, existiert ein $q \in \mathbb{P}$, so dass X eine zyklische q -Gruppe ist und zu jedem Paar $\sigma, \tau \in P(G)$ auch ein Paar von Primzahlen $p, r \in \mathbb{P}$ mit X^σ zyklische p -Gruppe und X^τ eine zyklische r -Gruppe.

Ist $p = q = r$, so ist $X \cup X^\sigma \cup X^\tau$ eine q -Gruppe und (a) erfüllt nach 1.1.10.

Sind zwei der Primzahlen verschieden, etwa $q \neq r$, so ist $\tau|_{F(G)}$ singular bei q , also ist mit dem Satz von Suzuki ([10], 4.2.6, S. 172) die q -Sylogruppe von $F(G)$, nämlich $O_q(G)$, zyklisch oder elementarabelsch, wobei im zweiten Falle das projektive Bild eine nichtabelsche P -Gruppe ist. Da wegen Lemma 4.3.2 auf S. 179 aus [10] nun $O_q(G)^\sigma, O_q(G)^\tau \leq F(G)$ ist, sind $O_p(G) = O_q(G)^\sigma$ und $O_r(G) = O_q(G)^\tau$ nilpotent, also keine nichtabelschen P -Gruppen und damit insbesondere $O_q(G)$ zyklisch. Da sich die Sylogruppen von $F(G)$ zentralisieren, ist $X \cup X^\sigma \cup X^\tau \in \mathcal{D}$ und (a) gilt.

Sei nun $X^{P(G)} \in \mathcal{P}$ und $H \leq G$ mit $X^{P(G)} \cap H = X$. Wegen $F(G)^\varphi = F(G)$ für alle $\varphi \in P(G)$ ist dann $X^{P(G)}$ elementarabelsch und da $X = X^{P(G)} \cap H \trianglelefteq H$ ist, sind dann $X^{P(G)}, H \leq N_G(X)$ und $X \trianglelefteq X^{P(G)} \cup H$, also insbesondere $X \text{ mod } X^{P(G)} \cup H$. Hiermit ist auch (b) erfüllt und diese Richtung des Satzes bewiesen.

Sei umgekehrt G eine P -unzerlegbare Gruppe und sei $X \leq G$ mit $X \in \mathcal{K}$, also X eine zyklische q -Gruppe für eine Primzahl q , so dass X die Bedingungen in (a) und (b) erfüllt. Angenommen, es ist $X \not\leq F(G)$. Dann existiert mit 6.7.5 auf S. 144 aus [4] ein $g \in G$, so dass $X \cup X^g$

nicht nilpotent ist, also ist $X \neq X^g$, und da die Konjugation mit g eine Autoprojektivität induziert, gilt nach (a) und Lemma 1.1.9 nun:

(1) $X \cup X^g \cup X^\sigma$ ist eine nichtabelsche P -Gruppe für alle $\sigma \in P(G)$.

Wir zeigen nun, dass $X^{P(G)} \in \mathcal{P}$ ist. Da $X \cup X^g$ nicht nilpotent ist, ist $X \cup X^g \in \mathcal{P}$ nichtabelsch. Wegen $|X| = |X^g| = q$ existiert ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p > q$, so dass $X \cup X^g$ eine P -Gruppe zu p ist. Für $\sigma \in P(G)$ mit $X < X \cup X^\sigma$ ist nach (1) dann $X \cup X^g \cup X^\sigma$ eine nichtabelsche P -Gruppe, die von drei minimalen Untergruppen erzeugt wird, und damit von der Ordnung pq oder p^2q . Da für jede weitere Autoprojektivität $\tau \in P(G)$ nun $X \cup X^\sigma \cup X^\tau$ mit (a) eine nichtabelsche P -Gruppe und $|X| = q$ ist, gilt:

(2) Für alle $\sigma \in P(G)$ ist entweder $X = X^\sigma$ oder $X \cup X^\sigma$ nichtabelsch der Ordnung pq und damit X^σ entweder von der Ordnung p oder q . Im zweiten Fall ist insbesondere $X \cup X^\sigma \cup X^\tau$ eine nichtabelsche P -Gruppe der Ordnung pq oder p^2q für alle $\tau \in P(G)$.

Zu jedem $\sigma \in P(G)$ mit $X \neq X^\sigma$ sei nun P_σ der Normalteiler der Ordnung p von $X \cup X^\sigma$ und $P := \langle P_\sigma \mid \sigma \in P(G), X \neq X^\sigma \rangle$. Dann wird P von Untergruppen der Ordnung p erzeugt. Seien $\sigma, \tau \in P(G)$ mit $X^\sigma \neq X \neq X^\tau$. Mit (2) sind $X \cup X^\sigma$ und $X \cup X^\tau$ nichtabelsche Gruppen der Ordnung pq und $X \cup X^\sigma \cup X^\tau$ ist eine nichtabelsche P -Gruppe der Ordnung pq oder p^2q . Es ist also $P_\sigma \cup P_\tau$ elementarabelsch der Ordnung p für $P_\sigma = P_\tau$ oder p^2 für $P_\sigma \neq P_\tau$. Damit zentralisieren sich je zwei verschiedene Erzeuger von P und erzeugen zusammen eine Untergruppe der Ordnung p^2 , es gilt also:

(3) $P = \langle P_\sigma \mid \sigma \in P(G), X \neq X^\sigma \rangle$ ist elementarabelsch der Ordnung p^m für ein $m \in \mathbb{N}$.

Da $P, X \leq X^{P(G)}$ sind, ist $PX \leq X^{P(G)}$ und für $\sigma \in P(G)$ ist entweder $X^\sigma = X$ oder $X \cup X^\sigma = P_\sigma X \leq PX$. Da $X^{P(G)}$ von den X^σ , $\sigma \in P(G)$, erzeugt wird, ist somit $X^{P(G)} \leq PX$. Insgesamt ist also:

(4) $X^{P(G)} = PX$.

Da P_σ für alle $\sigma \in P(G)$ von X normalisiert wird, ist nach (3) und (4) dann $P \trianglelefteq X^{P(G)}$. Wegen $|X| = q$ bleibt zu zeigen, dass x für $X = \langle x \rangle$ einen universellen Potenzautomorphismus auf P bewirkt. Wir betrachten erneut $\sigma, \tau \in P(G)$ mit $X^\sigma \neq X \neq X^\tau$. Ist $P_\sigma \neq P_\tau$, so ist nach (2) dann $X^\sigma \cup X \cup X^\tau$ eine P -Gruppe der Ordnung p^2q und x bewirkt Potenzautomorphismen zur selben Potenz auf P_σ und P_τ . Somit bewirkt x Potenzautomorphismen zur selben Potenz auf je zwei Erzeugern von P und damit einen universellen Potenzautomorphismus auf P . Hiermit ist $X^{P(G)}$ eine nichtabelsche P -Gruppe der Ordnung $p^m q$.

Da $X^{P(G)} \trianglelefteq G$ ist, ist wegen $X \in \text{Syl}_q(X^{P(G)})$ mit dem Frattiniargument (3.2.7 aus [4]) dann $G = X^{P(G)} N_G(X)$. Setze $H := N_G(X)$. Da $X^{P(G)} \in \mathcal{P}$ und $|X| = q$ ist, ist $H \cap X^{P(G)} = N_{X^{P(G)}}(X) = X$ und mit (b) dann $X \text{ mod } X^{P(G)} \cup H = G$. Da X nicht permutabel in $X^{P(G)}$ ist, ist X nicht permutabel in G und wegen $X_G = 1$ mit Lemma 5.1.9 aus [10] auf S. 209 dann $G = X^G \times L$, wobei X^G eine nichtabelsche P -Gruppe ist und $L \leq G$ mit $|L|$ teilerfremd zu $|X^G|$. Damit ist G doch P -zerlegbar. Mit diesem finalen Widerspruch gilt auch dieser Teil der Behauptung und der Satz ist bewiesen. \square

Bei der verbandstheoretischen Charakterisierung der Fittinggruppe einer endlichen Gruppe kann man auf die P -Unzerlegbarkeit als Voraussetzung nicht verzichten:

Bemerkung 3.1.2 *Sei G eine endliche P -zerlegbare Gruppe und $X \leq G$ mit $X \in \mathcal{K}$, so dass X die Bedingungen (a) und (b) aus obigem Satz erfüllt. Dann ist X im Allgemeinen keine Untergruppe von $F(G)$.*

Beweis: Sei (S, T) eine P -Zerlegung von G mit $S \in P(n, p)$ nichtabelsch für $p \in \mathbb{P}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so dass $(|S|, |T|) = 1$ ist, und sei $X \leq S$ eine zyklische q -Gruppe für $q \in \pi(G) \setminus \{p\}$. Da (S, T) eine P -Zerlegung von G ist, ist $S^\varphi = S$ für jedes projektive Bild S^φ von S und damit $X^\varphi \leq S^\varphi = S$. Damit erfüllt X die Bedingungen (a) und (b) aus dem Satz und es ist $F(G) = F(S) \times F(T)$. Da aber $F(S)$ eine p -Gruppe und $q \neq p$ ist, ist $X \not\leq F(S)$ und damit $X \not\leq F(G)$. \square

Der obige Satz 11 liefert eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittinggruppe einer P -unzerlegbaren Gruppe, wobei man die Vereinigung dreier projektiver Bilder einer Kette $X \leq G$ untersucht. Da in dem

Baerschen Satz nur zwei Konjugierte eines Elements benötigt werden, ist es naheliegend, diese Situation natürlich auch in dem verbandstheoretischen Fall zu untersuchen.

Wir beweisen im Folgenden ein Satz 11 entsprechendes Resultat, indem wir nur zwei projektive Bilder einer zyklischen Untergruppe betrachten. Dieses ist ebenfalls eine verbandstheoretische Charakterisierung von $F(G)$ in P -unzerlegbaren Gruppen, benötigt allerdings neben der Übersetzung der Baerschen Eigenschaft und (b) aus Satz 11 eine weitere sehr starke Bedingung:

Satz 12 *Sei G P -unzerlegbar und $X \leq G$ mit $X \in \mathcal{K}$. Genau dann ist $X \leq F(G)$, wenn gilt:*

- (a) *Für jedes $\sigma \in P(G)$ ist $X \cup X^\sigma \in \mathcal{D} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$.*
- (b) *Existiert ein $\sigma \in P(G)$ mit $X \cup X^\sigma \notin \mathcal{D}$, so ist $X^{P(G)} \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$.*
- (c) *Ist $X^{P(G)} \in \mathcal{P}$, so gilt:
Ist $H \leq G$ mit $X^{P(G)} \cap H = X$, so ist $X \text{ mod } X^{P(G)} \cup H$.*

Beweis: Sei zunächst G eine P -unzerlegbare Gruppe und $X \leq F(G)$ mit $X \in \mathcal{K}$. Nach Satz 11 gelten (a) und (c), zu zeigen ist also (b). Sei dazu $\sigma \in P(G)$ mit $X \cup X^\sigma \notin \mathcal{D}$. Dann ist insbesondere $X \cup X^\sigma$ nicht zyklisch und wegen $X \cup X^\sigma \leq F(G)$ damit $X \cup X^\sigma$ eine p -Gruppe mit $X \neq X^\sigma$. Dann ist $X^{P(G)} \notin \mathcal{D}$, aber $X^{P(G)} \leq F(G)$. Angenommen, es existiert ein $\tau \in P(G)$, das singular bei p ist. Nach Theorem 4.2.5 aus [10] sind dann die p -Sylowgruppen von G und damit insbesondere $O_p(G)$ zyklisch, ein Widerspruch zu $X \cup X^\sigma \leq O_p(G)$ und $X \neq X^\sigma$. Damit ist jede Autoprojektivität von G regulär bei p und somit $X \cup X^\tau$ eine p -Gruppe für alle $\tau \in P(G)$. Dann ist $X^{P(G)}$ eine nichtzyklische p -Gruppe, also $X^{P(G)} \in \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$ und (b) gilt.

Sei umgekehrt G eine P -unzerlegbare Gruppe und $X \leq G$ mit $X \in \mathcal{K}$, so dass X die Bedingungen (a) – (c) erfüllt und $X \not\leq F(G)$ ist. Da $X \in \mathcal{K}$ ist, ist X eine zyklische p -Gruppe für eine Primzahl p . Wegen $X \not\leq F(G)$ existiert mit 6.7.5 auf S. 144 aus [4] ein $g \in G$, so dass $X \cup X^g$ nicht nilpotent ist. Insbesondere ist $X \cup X^g \notin \mathcal{D}$ und mit (b) dann $X^{P(G)} \in \mathcal{P}$. Hiermit ist $X^{P(G)}$ eine nichtabelsche P -Gruppe und nach (c) somit für

jede Untergruppe H von G mit $X^{P(G)} \cap H = X$ dann $X \text{ mod } X^{P(G)} \cup H$. Da $p \mid |X^{P(G)}|$ ist, ist entweder $|X^{P(G)}| = p^n q$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p > q \in \mathbb{P}$ oder $|X^{P(G)}| = r^m p$ für $m \in \mathbb{N}$ und $p < r \in \mathbb{P}$. Im ersten Falle ist X in dem elementarabelschen Normalteiler P der P -Gruppe $X^{P(G)}$ enthalten und da $P \text{ char } X^{P(G)} \text{ char } G$ ist, ist $P \trianglelefteq G$. Somit ist $P \leq O_p(G)$ und $X \leq P \leq O_p(G) \leq F(G)$, ein Widerspruch.

Sei also $|X^{P(G)}| = r^m p$ und R der elementarabelsche Normalteiler der Ordnung r^m von $X^{P(G)}$. Da X nicht permutabel in $X^{P(G)}$ ist, ist X nicht permutabel in jeder Untergruppe $U \leq G$ mit $X^{P(G)} \leq U$. Wegen $X \in \text{Syl}_q(X^{P(G)})$ und $X^{P(G)} \trianglelefteq G$ ist mit dem Frattiniargument ([4], S. 61) dann $G = X^{P(G)} N_G(X)$. Setze $H := N_G(X)$. Genau wie in dem Beweis von Satz 11 ist wegen $X = N_{X^{P(G)}}(X)$ dann $X^{P(G)} \cap H = X$ und somit $X \text{ mod } X^{P(G)} \cup H = G$. Da X nicht permutabel in G ist, ist wegen $X_G = 1$ nach Lemma 5.1.9 aus [10] auf S. 209 nun $G = X^G \times L$, wobei X^G eine nichtabelsche P -Gruppe ist und $L \leq G$ mit $|L|$ teilerfremd zu $|X^G|$. Damit ist G doch P -zerlegbar. Mit diesem finalen Widerspruch gilt auch dieser Teil der Behauptung und der Satz ist bewiesen. \square

Offenbar ist die Bedingung (b) aus dem obigen Satz sehr stark. Folgendes Beispiel zeigt allerdings, dass man auf diese nicht verzichten kann:

Beispiel 3.1.3 Sei $G = P_1 Q \times P_2 R$, wobei $P_1 Q$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq und $P_2 R$ eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pr mit $|P_1| = p = |P_2|$, $|Q| = q$ und $|R| = r$ für verschiedene Primzahlen p, q, r ist. Es ist $Q \not\leq F(G)$, aber Q erfüllt (a) und (c) aus Satz 12.

Beweis: Da $P_1 Q$ eine nichtabelsche P -Gruppe ist, in der Q nichttrivial auf P_1 operiert, ist einerseits $Q \in \mathcal{K}$ und andererseits $Q \not\leq P_1 Q$, also $Q \not\leq F(G)$. Für $\sigma \in P(G)$ ist $|Q^\sigma| \in \{p, q, r\}$. Ist $Q \cup Q^\sigma \leq P_1 Q$, so ist wegen $P_1 Q$ nichtabelsch der Ordnung pq dann $Q \cup Q^\sigma \in \mathcal{D} \cup \mathcal{P}$. Ist $Q \cup Q^\sigma \not\leq P_1 Q$, so wird Q von Q^σ zentralisiert, d. h. $Q \cup Q^\sigma$ ist entweder zyklisch der Ordnung pq oder qr , in beiden Fällen ist aber $Q \cup Q^\sigma \in \mathcal{D}$. Damit ist (a) aus dem Satz erfüllt. Wir zeigen nun, dass $Q^{P(G)} = G$ ist und somit (c) des obigen Satzes 12 trivialerweise erfüllt. Sei dazu $P = P_1 \times P_2$ (die normale p -Sylowgruppe von G) und $H := QR$, d. h. G das semidirekte Produkt von P mit H . Ferner sei α ein Automorphismus von P , der P_1 und P_2 vertauscht, und τ die Autoprojektivität von H , die Q und R vertauscht. Dann ist $C_P(Q)^\alpha = P_2^\alpha = P_1 = C_P(R) = C_P(Q^\tau)$ und (1) aus 4.1.6 aus [10] erfüllt. Da H zyklisch der Ordnung qr und P_1 und

P_2 die einzigen Untergruppen von P sind, die von Q oder R normalisiert werden, ist genau dann $Q \leq N_H(N_1)$, wenn $R = Q^\tau \leq N_H(N_1^\alpha)$ bzw. $R \leq N_H(N_1)$, wenn $Q = R^\tau \leq N_H(N_1^\alpha)$ für $N_1 \leq N$ ist. Dann ist auch (2) aus 4.1.6 erfüllt und damit existiert eine Autoprojektivität φ von G , die τ fortsetzt, also mit $Q^\varphi = R$. Somit ist sowohl P_1Q als auch P_2R in $Q^{P(G)}$ enthalten und damit $Q^{P(G)} = G$. \square

3.2 Verbandstheoretische Funktoren und eine Charakterisierung der zweiten Fittinggruppe einer endlichen Gruppe

Da in dem nächsten Paragraphen eine verbandstheoretische Charakterisierung der k -ten Fittinggruppe für $k \geq 2$ einer endlichen Gruppe im Sinne der Definition auf S. 180 aus [10] vorgestellt wird und die Charakterisierung der zweiten Fittinggruppe $F_2(G)$ einen wesentlichen Teil dieser ausmacht, wird sie in diesem Paragraphen gesondert behandelt. Der Satz 11 liefert eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittinggruppe für jede endliche P -unzerlegbaren Gruppe G , es werden dabei also die beiden Fälle unterschieden, ob $G/F(G)$ P -zerlegbar ist oder nicht. Ist $G/F(G)$ P -unzerlegbar, so erhalten wir in 3.2.5 eine verbandstheoretische Charakterisierung der zweiten Fittinggruppe im Wesentlichen direkt aus Satz 11. Besitzt aber $G/F(G)$ eine P -Zerlegung, so wird eine Methode zu Bestimmung der zweiten Fittinggruppe mittels modularer Untergruppen in Satz 13 entwickelt, wobei Gruppen mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$ eine besondere Rolle spielen. Da nach 1.1.5 Gruppen aus $P(n, p)$ verbandsisomorph sind, besteht dabei die Hauptschwierigkeit darin, eine Methode zu entwickeln, die die Möglichkeit gibt, für $G/F(G) \in \mathcal{P}$ im Untergruppenverband unterscheiden zu können, wann diese Faktorgruppe elementarabelsch und wann nichtabelsch ist und eine Lösung dazu gibt Lemma 3.2.12. Man beachte hier, dass eine verbandstheoretische direkte Zerlegung (genannt auch L -Zerlegung) im Gegensatz zu der direkten Zerlegung einer Gruppe immer eindeutig ist.

Im Folgenden wird festgelegt, was wir unter einer verbandstheoretischen Charakterisierung eines gruppentheoretischen Funktors verstehen. Wir erinnern dabei an die Definition eines gruppentheoretischen Funktors:

Definition 3.2.1 (a) Ein gruppentheoretischer Funktor \mathcal{X} ordnet jeder endlichen Gruppe G eine Untergruppe zu, so dass für jeden Gruppenisomorphismus σ von G auf G^σ dann $\mathcal{X}(G)^\sigma = \mathcal{X}(G^\sigma)$ gilt.

(b) Ein verbandstheoretischer Funktor Θ ordnet jedem endlichen Verband L ein Element $\Theta(L) \in L$ zu, so dass für jeden Verbandsisomorphismus σ von L auf L^σ dann $\Theta(L)^\sigma = \Theta(L^\sigma)$ gilt.

Die obige Bedingung liefert für $\sigma \in \text{Aut}(G)$ insbesondere $\mathcal{X}(G)^\sigma = \mathcal{X}(G^\sigma) = \mathcal{X}(G)$, d. h. $\mathcal{X}(G)$ sind charakteristische Untergruppen von G . Beispiele für gruppentheoretische Funktoren sind das Zentrum, die Kommutatorgruppe, die Fittinggruppe, die Frattinigruppe usw. Beispiele für verbandstheoretische Funktoren sind unter anderem die Vereinigung aller Atome eines endlichen Verbandes L , der Durchschnitt aller Antiatome von L , die Vereinigung aller modularen Atome usw.

Definition 3.2.2 Eine verbandstheoretische Charakterisierung eines gruppentheoretischen Funktors \mathcal{X} ist ein verbandstheoretischer Funktor Θ , so dass für alle endlichen Gruppen G gilt:

$$\Theta(L(G)) = \mathcal{X}(G).$$

In diesem und in dem nächsten Paragraphen werden verbandstheoretische Funktoren Λ_k explizit angegeben, die für $k \geq 2$ eine verbandstheoretische Charakterisierung des gruppentheoretischen Funktors F_k im Sinne der Definition 3.2.2 darstellen.

Wir beginnen mit der Fittinggruppe einer endlichen P -unzerlegbaren Gruppe. Dabei ergibt sich die Definition des entsprechenden verbandstheoretischen Funktors direkt aus Satz 11:

Definition 3.2.3 Sei L ein endlicher Verband.

(a) Für eine Kette $x \in L$ ist genau dann $x \in \mathcal{F}_1(L)$, wenn x folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) Für alle $\sigma, \tau \in \text{Aut}(L)$ ist $[x \cup x^\sigma \cup x^\tau / 0] \in \mathcal{D} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$.

(ii) Ist $[x^L / 0] \in \mathcal{P}$, so gilt:

Ist $h \in L$ mit $x^L \cap h = x$, so ist $x \text{ mod } [x^L \cup h / 0]$.

(b) Sei $\Lambda_1(L) := \bigcup_{x \in \mathcal{F}_1(L)} x$.

Offenbar ist Λ_1 verbandstheoretischer Funktor und hierfür geben wir an dieser Stelle einen kurzen und banalen Beweis an. Dieses wird für die später definierten verbandstheoretischen Funktoren weggelassen.

Bemerkung 3.2.4 *Es ist Λ_1 ein verbandstheoretischer Funktor im Sinne der Definition 3.2.1.*

Beweis: Sei φ ein Isomorphismus von dem endlichen Verband L auf dem Verband \bar{L} ; wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{F}_1(L)^\varphi = \mathcal{F}_1(\bar{L})$ ist. Sei hierfür $x \in \mathcal{F}_1(L)$, d. h. $x^\varphi \in \mathcal{F}_1(\bar{L})^\varphi$. Da φ ein Isomorphismus von L auf \bar{L} und damit φ^{-1} einer von \bar{L} auf L ist, ist für alle $\sigma, \tau \in \text{Aut } \bar{L}$ somit $\varphi\sigma\varphi^{-1}, \varphi\tau\varphi^{-1} \in \text{Aut } L$. Da $x \in \mathcal{F}_1(L)$ ist, ist dann $(x^\varphi \cup x^{\varphi\sigma} \cup x^{\varphi\tau})^{\varphi^{-1}} = x \cup x^{\varphi\sigma\varphi^{-1}} \cup x^{\varphi\tau\varphi^{-1}}$ und da φ^{-1} ein Isomorphismus ist, somit $[x^\varphi \cup x^{\varphi\sigma} \cup x^{\varphi\tau}/0] \in \mathcal{D} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{P}$. Andererseits ist für $[(x^\varphi)^{\bar{L}}/0] \in \mathcal{P}$ dann $[x^L/0] \in \mathcal{P}$ und für alle $h^\varphi \in \bar{L}$ mit $(x^\varphi)^{\bar{L}} \cap h^\varphi = x^\varphi$ wegen φ^{-1} Isomorphismus damit $(x^\varphi)^{\varphi^{-1}} = x \text{ mod } [x^L \cup h/0_L] = ([(x^\varphi)^{\bar{L}} \cup h^\varphi/0_{\bar{L}}])^{\varphi^{-1}}$, also ist $x^\varphi \text{ mod } [(x^\varphi)^{\bar{L}} \cup h^\varphi/0_{\bar{L}}]$ und hiermit $\mathcal{F}_1(L)^\varphi \subseteq \mathcal{F}_1(\bar{L})$. Analog ist $\mathcal{F}_1(\bar{L})^{\varphi^{-1}} \subseteq \mathcal{F}_1(L)$ und somit $\mathcal{F}_1(\bar{L}) = \mathcal{F}_1(\bar{L})^{\varphi^{-1}\varphi} \subseteq \mathcal{F}_1(L)^\varphi$, also gilt die Gleichheit der beiden Mengen. Damit folgt offenbar $\Lambda_1(L)^\varphi = (\bigcup_{x \in \mathcal{F}_1(L)} x)^\varphi = \bigcup_{x^\varphi \in \mathcal{F}_1(\bar{L})^\varphi} x^\varphi = \bigcup_{x^\varphi \in \mathcal{F}_1(\bar{L})} x^\varphi = \bigcup_{y \in \mathcal{F}_1(\bar{L})} y = \Lambda_1(\bar{L})$ und die Behauptung ist bewiesen. \square

Aus Satz 11 folgt sofort, dass der Funktor Λ_1 in P -unzerlegbaren Gruppen die Fittinggruppe im Sinne der Definition 3.2.2 verbandstheoretisch charakterisiert:

Lemma 3.2.5 *Sei G eine endliche Gruppe.*

(a) *Ist G P -unzerlegbar, so ist $\Lambda_1(L(G)) = F(G)$.*

(b) *Ist G P -zerlegbar mit vollständiger P -Zerlegung S_1, \dots, S_r , d. h. es ist $G = S_1 \times \dots \times S_r$ mit $S_1, \dots, S_{r-1} \in \mathcal{P}$ und S_r P -unzerlegbar von paarweise teilerfremden Ordnungen, so ist $\Lambda_1(L(G)) = \Lambda_1(L(S_1)) \times \dots \times \Lambda_1(L(S_r))$.*

Beweis: Zu (a): Da G P -unzerlegbar ist, ist nach Satz 11 für jede Kette $Y \leq G$ genau dann $Y \in \mathcal{F}_1(L(G))$, wenn $Y \leq F(G)$ ist. Mit $\bigcup_{X \in \mathcal{F}_1(L(G))} X = \bigcup_{Y \leq F(G), Y \in \mathcal{K}} Y = F(G)$ folgt die Behauptung.

Zu (b): Da S_1, \dots, S_r die vollständige P -Zerlegung von G ist, ist nach dem Suzukischen Satz ([10], Theorem 1.6.5, S. 37) dann $L(G) = L(S_1) \times \dots \times L(S_r)$ und nach Lemma 4.2.4 aus [10] auf S. 171 für alle Projektivitäten $\varphi \in P(G)$ nun $S_i^\varphi = S_i$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Sei zunächst $i \in \{1, \dots, r\}$ und $X \in \mathcal{F}_1(L(S_i))$. Da S_i $P(G)$ -invariant ist, ist $X^\varphi \leq S_i$, und φ läßt sich auf eine Autoprojektivität von S_i einschränken für alle $\varphi \in P(G)$. Wegen $X \in \mathcal{F}_1(L(S_i))$ ist also einerseits für alle $\sigma, \tau \in P(G)$ damit $X \cup X^\sigma \cup X^\tau \in \mathcal{D} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ und andererseits $X^{P(G)} \leq S^{P(G)} = S$, es ist also $X \in \mathcal{F}_1(L(G))$ und somit $\Lambda_1(L(S_i)) \leq \Lambda_1(L(G))$. Da i beliebig gewählt war, gilt dieses für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ und es ist $\Lambda_1(L(S_1)) \times \dots \times \Lambda_1(L(S_r)) \leq \Lambda_1(L(G))$.

Sei umgekehrt $X \in \mathcal{F}_1(L(G))$ und $\varphi \in P(G)$. Da X eine Kette von G und S_1, \dots, S_r die vollständige P -Zerlegung von G (und damit eindeutig) ist, existiert ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $X \leq S_i$. Sei $\psi \in P(S_i)$. Da $L(G) = L(S_1) \times \dots \times L(S_r)$ ist, können wir ψ zu einer Autoprojektivität φ von G fortsetzen, die $L(S_j)$ für $j \neq i$ elementweise festläßt und deren Einschränkung auf S_i gerade ψ ist. Dann ist $X^\varphi \leq S_i$ und da jede Autoprojektivität von S_i sich auf diese Weise auf eine Autoprojektivität von G mit Einschränkung auf S_i fortsetzen läßt und $X \in \mathcal{F}_1(L(G))$ ist, ist $X \in \mathcal{F}_1(L(S_i))$. Damit ist $\Lambda_1(L(G)) \leq \Lambda_1(L(S_1)) \times \dots \times \Lambda_1(L(S_r))$ und (b) gilt. □

Da im Folgenden immer direkte Produkte von Gruppen (bzw. Verbänden) betrachtet werden, halten wir einige grundlegende Eigenschaften der Fittinggruppe solcher fest:

Lemma 3.2.6 *Sei G eine endliche Gruppe und $k, r \in \mathbb{N}$.*

- (a) *Für $N \trianglelefteq G$ ist $F(N) = N \cap F(G)$.*
- (b) *Ist $G = S_1 \times \dots \times S_r$ mit $S_i \leq G$, so ist $F_k(G) = F_k(S_1) \times \dots \times F_k(S_r)$.*
- (c) *Ist $G/F(G) = S_1/F(G) \times \dots \times S_r/F(G)$, so ist $F_2(G)/F(G) = F_2(S_1)/F(S_1) \times \dots \times F_2(S_r)/F(S_r)$, insbesondere ist dann $F_2(G) = \bigcup_{i=1}^r F_2(S_i)$.*

Beweis: Zu (a): Es ist einerseits, da $F(N)$ charakteristische Untergruppe eines Normalteilers von G ist, $F(N)$ ein nilpotenter Normalteiler von G und damit $F(N) \leq F(G)$, d. h. $F(N) \leq N \cap F(G)$. Andererseits ist $N \cap F(G)$ ein nilpotenter Normalteiler von N und damit $N \cap F(G) \leq F(N)$, also folgt die Gleichheit.

Zu (b): Wir führen Induktion nach k durch. Mit (a) ist für $k = 1$ nun $F(S_1) \times \dots \times F(S_r) = (F(G) \cap S_1) \times \dots \times (F(G) \cap S_r) \leq F(G)$. Andererseits ist für $T := S_2 \times \dots \times S_r$ nun $G = S_1 \times T$ und wegen $S_1 \cap T = 1$ dann $F(G)T \cap S_1 \simeq (F(G)T \cap S_1) \cup T/T = F(G)T/T \simeq F(G)/F(G) \cap T$ nilpotent, also mit Satz 1.6.1 aus [10] auf S. 35 nun $F(S_1) = F(G)T \cap S_1$ und $F(G) \leq (F(G)T \cap S_1) \times T$. Genauso ist $F(T) = F(G)S_1 \cap T$ und $F(G) \leq S_1 \times (F(G)S_1 \cap T)$, also $F(G) \leq F(S_1) \times F(T)$. Es gilt also auch die andere Inklusion und deshalb ist $F(S_1) \times \dots \times F(S_r) = F(G)$. Sei also $k \in \mathbb{N}$ und die Behauptung richtig für alle $l \leq k$. Da $S_i \cap S_j = 1$ für $i \neq j$ ist, ist $F_k(G) \cap S_i = (F_k(S_1) \times \dots \times F_k(S_r)) \cap S_i = F_k(S_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Nach Definition der Fittingreihe und nach 1.6.2 (c) aus [4] und Induktionsanfang angewandt auf $F(S_1/S_1 \cap F_k(G)) \times \dots \times (S_r/S_r \cap F_k(G))$ ist $F_{k+1}(G)/F_k(G) = F(G/F_k(G)) = F(S_1 \times \dots \times S_r/F_k(G)) \simeq F(S_1/S_1 \cap F_k(G) \times \dots \times S_r/S_r \cap F_k(G)) = F(S_1/S_1 \cap F_k(G)) \times \dots \times F(S_r/S_r \cap F_k(G)) = F(S_1/F_k(S_1)) \times \dots \times F(S_r/F_k(S_r)) = F_{k+1}(S_1)/F_k(S_1) \times \dots \times F_{k+1}(S_r)/F_k(S_r) \simeq F_{k+1}(S_1) \times \dots \times F_{k+1}(S_r)/F_k(G)$. Da $F_{k+1}(G)$ das vollständige Urbild von $F_{k+1}(G)/F_k(G)$ und $F_k(G) = F_k(S_1) \times \dots \times F_k(S_r) \leq F_{k+1}(G)$ ist, gilt die Behauptung für $k + 1$ und (b) ist bewiesen.

Zu (c): Da nach (a) wegen $S_i \trianglelefteq G$ dann $F(S_i) = S_i \cap F(G) = F(G)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ ist, gilt nach (b) dann $F_2(G)/F(G) = F(G/F(G)) = F_2(S_1)/F(S_1) \times \dots \times F_2(S_r)/F(S_r)$. \square

Das folgende Lemma zeigt, dass die verbandstheoretische Charakterisierung der Fittinggruppe einer endlichen P -unzerlegbaren Gruppe ebenso für eine endliche Gruppe G mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$ funktioniert. Dieses gilt sogar allgemeiner für $G/F(G)$ L -unzerlegbar:

Lemma 3.2.7 *Sei G eine endliche Gruppe mit $G/F(G)$ L -unzerlegbar und $G/F(G) \notin \mathcal{K}$. Dann ist entweder G P -unzerlegbar oder es existieren $S_1, \dots, S_r, T \leq G$ mit T P -unzerlegbar und von zu $|S_i|$, $i \in \{1, \dots, r\}$, teilerfremder Ordnung, $S_i \in \mathcal{P}$ abelsch mit $(|S_i|, |S_j|) = 1$ für $i, j \in$*

$\{1, \dots, r\}$ mit $i \neq j$, und $G = S_1 \times \dots \times S_r \times T$. Insbesondere ist im zweiten Falle $F(G) = S_1 \times \dots \times S_r \times F(T)$.

Beweis: Sei G nicht P -unzerlegbar, d. h. es existiert eine P -Zerlegung (S_1, R) von G , so dass $S_1 \in \mathcal{P}$, $G = S_1 \times R$ und $(|S_1|, |R|) = 1$ ist. Man betrachte die vollständige P -Zerlegung von R . Sei dazu $S_2, \dots, S_r, T \leq R$, $r \in \mathbb{N}$, mit $R = S_2 \times \dots \times S_r \times T$, wobei $S_i \in \mathcal{P}$, $i \in \{2, \dots, r\}$, von paarweise teilerfremden Ordnungen und T P -unzerlegbar von zu $|S_i|$, $i \in \{2, \dots, r\}$, teilerfremder Ordnung sind. Nach Lemma 3.2.6 ist dann $F(R) = F(S_2) \times \dots \times F(S_r) \times F(T)$ und damit $F(G) = F(S_1) \times F(R) = F(S_1) \times F(S_2) \times \dots \times F(S_r) \times F(T)$. Da S_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, und T Normalteiler von paarweise teilerfremden Ordnungen sind, ist nach Lemma 2.2.9 und (a) aus Lemma 3.2.6 somit $G/F(G) = (S_1 \times \dots \times S_r \times T)/F(G) \simeq (S_1/S_1 \cap F(G)) \times (S_2/S_2 \cap F(G)) \dots \times (S_r/S_r \cap F(G)) \times T/T \cap F(G) = (S_1/F(S_1)) \times (S_2/F(S_2)) \times \dots \times (S_r/F(S_r)) \times (T/F(T))$. Da $G/F(G)$ L -unzerlegbar mit $G/F(G) \notin \mathcal{K}$ ist und für $i \in \{1, \dots, r\}$ die S_i von paarweise teilerfremden Ordnungen mit $S_i/F(S_i)$ zyklisch von höchstens Primzahlordnung sind, ist nach Lemma 1.6.4 aus [10] auf S.37 dann $G/F(G) \simeq T/F(T)$ und damit $S_i = S_i \cap F(G) = F(S_i)$ elementarabelsch. Nach Lemma 3.2.6 gilt der Rest der Behauptung. \square

Mit obigem Lemma und 3.2.5 erhalten wir eine verbandstheoretische Charakterisierung der Fittinggruppe einer endlichen Gruppe G mit L -unzerlegbarer Fittingfaktorgruppe.

Lemma 3.2.8 *Sei G eine endliche Gruppe mit $G/F(G)$ L -unzerlegbar und $G/F(G) \notin \mathcal{K}$. Dann ist $\Lambda_1(L(G)) = F(G)$.*

Beweis: Ist G P -unzerlegbar, so ist nach (a) aus Lemma 3.2.5 die Behauptung erfüllt. Sei also G P -zerlegbar und S_1, \dots, S_r, T die vollständige P -Zerlegung von G , d. h. es ist $S_1, \dots, S_r, T \leq G$ mit $S_i \in \mathcal{P}$ mit paarweise teilerfremden Ordnungen und T P -unzerlegbar von zu $|S_i|$ teilerfremder Ordnung für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, so dass $G = S_1 \times \dots \times S_r \times T$. Nach (b) aus Lemma 3.2.5 ist dann $\Lambda_1(L(G)) = \Lambda_1(L(S_1)) \times \dots \times \Lambda_1(L(S_r)) \times \Lambda_1(L(T))$ und nach (a) des selben Lemmas auch $\Lambda_1(L(T)) = F(T)$. Nach Lemma 3.2.7 ist wegen $G/F(G) \notin \mathcal{K}$ nun S_i elementarabelsch und damit $S_i \leq F(G)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, also mit (b) aus Lemma 3.2.6 dann $F(G) = S_1 \times \dots \times S_r \times F(T)$. Wegen S_i elementarabelsch ist ferner jede Kette von S_i in $\mathcal{F}_1(L(S_i))$ enthalten und somit $\Lambda_1(L(S_i)) = S_i = F(S_i)$

für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Insgesamt ist also $\Lambda_1(L(G)) = \Lambda_1(L(S_1)) \times \dots \times \Lambda_1(L(S_r)) \times \Lambda_1(L(T)) = F(S_1) \times \dots \times F(S_r) \times F(T) = F(G)$ und die Behauptung gilt. \square

Wir fahren nun mit der in der Einleitung des Kapitels genannten Unterscheidung, ob $G/F(G) \in \mathcal{P}$ abelsch ist oder nicht, fort.

Lemma 3.2.9 *Sei $G/F(G) \in P(n, p)$ für eine Primzahl p und eine natürliche Zahl $n \geq 2$. Ist $G/F(G)$ nichtabelsch, so sind alle Autoprojektivitäten von G regulär bei p . Insbesondere ist für die p -Sylowgruppe $P/F(G)$ von $G/F(G)$ ihr Urbild P die einzige $F(G)$ enthaltende maximale Untergruppe von G , die invariant unter Autoprojektivitäten von G ist.*

Beweis: Sei $\overline{G} := G/F(G)$. Da $G/F(G) \in P(n, p)$ nichtabelsch ist, ist $\overline{G} = \overline{P}\overline{Q}$ mit einem elementarabelschen Normalteiler \overline{P} der Ordnung p^{n-1} von \overline{G} und $|\overline{Q}| = q$, also $\overline{P} = F(\overline{G}) = F_2(G)/F(G)$. Es ist also $P = F_2(G)$ und damit nach Theorem 4.3.3 aus [10] invariant unter Autoprojektivitäten von G . Sei $\sigma \in P(G)$ singular bei p . Da $G/F(G) \in P(n, p)$ nichtabelsch ist, besitzt $G/F(G)$ und damit auch G kein normales p -Komplement. Nach dem Satz von Suzuki (4.2.6 aus [10]) ist damit G P -zerlegbar. Dann besitzt G eine normale p -Sylowgruppe und diese liegt damit in $F(G)$, ein Widerspruch zu $G/F(G) \in P(n, p)$. Es sind also alle Autoprojektivitäten von G regulär bei p . Sei M eine maximale Untergruppe von G , die $F(G)$ enthält und $P(G)$ -invariant ist. Dann ist $M/F(G)$ \max $G/F(G)$ und da für $q \mid |M/F(G)|$ nun $M/F(G) \not\leq G/F(G)$ nach Lemma 2.2.2 aus [10] ist, ist damit $q \nmid |M/F(G)|$, also $M = P$. \square

Angelehnt am obigen Lemma definieren wir den verbandstheoretischen Funktor Υ :

Definition 3.2.10 *Sei L ein endlicher Verband und $\Lambda_1(L)$ definiert wie in 3.2.3.*

(1) *Ist $[I_L/\Lambda_1(L)] \in \mathcal{P}$ und existiert genau ein Antiatom $s \in L$, das $\Lambda_1(L)$ enthält und invariant unter $\text{Aut}L$ ist, so sei $\Upsilon(L) = s$.*

(2) *Sonst sei $\Upsilon(L) = 0_L$.*

Offenbar ist Υ ein verbandstheoretischer Funktor im Sinne der Definition 3.2.1. Ist G eine endliche Gruppe mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$ nichtabelsch, so liefert Υ die zweite Fittinggruppe von G :

Lemma 3.2.11 *Sei G eine endliche Gruppe mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$. Ist $G/F(G)$ nichtabelsch, so ist $\Upsilon(L(G)) = F_2(G)$.*

Beweis: Da $G/F(G) \in \mathcal{P}$ ist, ist $G/F(G)$ L -unzerlegbar mit $G/F(G) \notin \mathcal{K}$, also nach Lemma 3.2.8 dann $\Lambda_1(L(G)) = F(G)$ und damit $[I_{L(G)}/\Lambda_1(L(G))] \in \mathcal{P}$. Sei $P/F(G)$ der elementarabelsche Normalteiler der nichtabelschen P -Gruppe $G/F(G)$. Mit Lemma 3.2.9 ist dann P die einzige $F(G) = \Lambda_1(L(G))$ enthaltende maximale Untergruppe von G , die invariant unter Autoprojektivitäten von G ist und nach (1) der Definition 3.2.10 dann $\Upsilon(L(G)) = P$. Wegen $G/F(G) \in \mathcal{P}$ nichtabelsch ist $P = F_2(G)$, also $F_2(G) = P = \Upsilon(L(G))$ und die Behauptung gilt. \square

Das folgende Lemma liefert den entscheidenden Schritt für unsere Methode zur Bestimmung der k -ten Fittinggruppe in dem Untergruppenverband einer endlichen Gruppe.

Lemma 3.2.12 *Sei G eine endliche Gruppe mit $\phi(G) = 1$ und $G/F(G) \in \mathcal{P}$; es existiere ein $P \in \mathcal{P}$ mit $G = PF(G)$. Genau dann ist $G/F(G)$ abelsch, wenn es für jedes $P \in \mathcal{P}$ mit $G = PF(G)$ Projektivitäten $\sigma_1, \sigma_2 \in P(G)$ gibt mit $P \neq P^{\sigma_i}$ und $P = \langle P^{\sigma_1} \cap P, P^{\sigma_2} \cap P \rangle$, so dass für jede Untergruppe $M \leq P \cap P^{\sigma_i}$ schon M modular in $P \cup P^{\sigma_i}$ ist für $i = 1, 2$.*

Beweis: Sei zunächst $G/F(G)$ abelsch und $P \leq G$ mit $G = PF(G)$ und $P \in \mathcal{P}$. Da $G/F(G) \in \mathcal{P}$ ist, ist $G/F(G)$, also auch $P/P \cap F(G) \simeq G/F(G)$, elementarabelsche und nicht zyklische p -Gruppe für ein $p \in \mathcal{P}$. Da $P \cap F(G)$ ein Normalteiler von P ist, ist mit Lemma 2.2.2 aus [10] dann P elementarabelsche p -Gruppe. Da $\phi(G) = 1$ ist, ist nach dem Satz von Gaschütz ([5], 4.5, S. 279) somit $F := F(G)$ direktes Produkt abelscher minimaler Normalteiler von G , etwa $F = N_1 \times \dots \times N_s$ mit minimalen Normalteilern N_i von G für $i \in \{1, \dots, s\}$. Da G auflösbar und F abelsch ist, ist nach 4.2 auf S. 277 aus [5] dann $F = C_G(F)$. Da $P \not\leq F$ ist, kann P somit nicht alle minimalen Normalteiler N_i zentralisieren, also ist etwa $[P, N_1] \neq 1$. Da F abelsch und N_1 minimaler Normalteiler ist, operiert P irreduzibel auf N_1 , also ist N_1 eine p' -Gruppe. Nach dem

Schurschen Lemma ([4], 8.3.3, S. 172) ist $P/C_P(N_1)$ zyklisch und da P elementarabelsch ist, ist $C_P(N_1)$ vom Index p in P , also eine maximale Untergruppe von P . Angenommen, $C_P(N_1)$ zentralisiert alle N_j , $j \in \{2, \dots, s\}$. Dann ist $C_P(N_1) \leq C_G(F) = F$, also G/F zyklisch von der Ordnung p , ein Widerspruch zu $G/F \in \mathcal{P}$. Es existiert also ein $j \in \{2, \dots, r\}$, so dass $C_P(N_1)$ nichttrivial auf N_j operiert, o.B.d.A. sei $j = 2$. Genau wie oben ist N_2 eine p' -Gruppe und es ist $|P/C_P(N_i)| = p$ für $i = 1, 2$. Sei nun $1 \neq x_i \in N_i$, $i = 1, 2$. Da P abelsch ist, ist $P \cap P^{x_i} \leq Z(P \cup P^{x_i})$, d. h. es ist jede Untergruppe von $P \cap P^{x_i}$ zentral und damit modular in $P \cup P^{x_i}$, $i = 1, 2$. Sei σ_i , $i = 1, 2$, die von x_i per Konjugation induzierte Autoprojektivität von G . Dann ist $P^{\sigma_i} = P^{x_i}$ und damit jede Untergruppe M von $P \cap P^{\sigma_i}$ modular in $P \cup P^{\sigma_i}$ für $i = 1, 2$. Ferner ist, da $C_P(N_i) \max P$ und sowohl $C_P(N_1) \neq C_P(N_2)$ als auch $C_P(N_i) \leq P \cap P^{x_i}$ ist, offenbar $P = \langle P^{\sigma_1} \cap P, P^{\sigma_2} \cap P \rangle$ und dieser Teil der Behauptung gilt.

Zum Beweis der Umkehrung wählen wir $P \leq G$ maximal mit $P \in \mathcal{P}$ und $G = PF(G)$. Angenommen, es ist P nichtabelsch. Da $P \in \mathcal{P}$ ist, existiert eine Primzahl p und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $P = AB$ mit einem elementarabelschen Normalteiler A der Ordnung p^{n-1} von P und B zyklisch der Ordnung q für $q \in \mathbb{P}$ mit $q|p-1$ ist. Setze $D_i := P \cap P^{\sigma_i}$. Da $P = \langle D_1, D_2 \rangle$ ist, ist $D_1 \neq D_2$ und mindestens eine der beiden Gruppen D_1, D_2 enthält eine Untergruppe der Ordnung q von P , o.B.d.A. sei $X \leq D_1$ mit $|X| = q$. Dann ist $X \text{ mod } P \cup P^{\sigma_1}$ und da X nicht permutabel in P ist, ist X auch nicht permutabel in $P \cup P^{\sigma_1}$. Setze $H := P \cup P^{\sigma_1}$. Nach Lemma 5.1.9 aus [10] ist wegen $X_H = 1$ dann $H = X^H \times K$ mit X^H nichtabelsche P -Gruppe von zu $|K|$ teilerfremder Ordnung. Da P^{σ_1} projektives Bild von P ist, ist $|P^{\sigma_1}| \in \{p^n, p^{n-1}r\}$ für ein $r \in \mathbb{P}$ nach 1.1.5 und wegen $q \mid |P^{\sigma_1}|$ nun $|P^{\sigma_1}| = p^{n-1}q$. Damit sind $P, P^{\sigma_1} \leq X^H$, also $H = X^H$ eine P -Gruppe. Wegen $F(G)P = G$ ist $F(G)H = G$ und da P maximal gewählt war, somit $P = H$, ein Widerspruch zu $P \neq P^{\sigma_1}$. Somit ist P , also auch $G/F(G) \simeq P/P \cap F(G)$, elementarabelsch. Hiermit gilt auch dieser Teil der Behauptung und das Lemma ist bewiesen. \square

Um die zweite Fittinggruppe einer endlichen Gruppe verbandstheoretisch charakterisieren zu können, definieren wir den Funktor Ξ folgendermaßen:

Definition 3.2.13 *Sei L ein endlicher Verband und Λ_1 der in 3.2.3 definierte verbandstheoretische Funktor.*

(I) Ist $\phi(L) = 0$ und $[I/\Lambda_1(L)] \in \mathcal{P}$, so definieren wir:

- (1) Existiert kein Element $s \in L$ mit $[s/0] \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, so dass $I = \Lambda_1(L) \cup s$ ist, so sei $\Xi(L) := \Upsilon(L)$.
- (2) Existiert ein Element $s \in L$ mit $[s/0] \in \mathcal{Q}$, so dass $I = \Lambda_1(L) \cup s$ ist, so sei $\Xi(L) := I$.
- (3) Existiert ein Element $s \in L$ mit $[s/0] \in \mathcal{P}$, so dass $I = \Lambda_1(L) \cup s$ ist, so unterscheiden wir folgende Fälle:
 - (i) Existieren für jedes solche s zwei verschiedene Automorphismen $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Aut}(L)$ mit $s \neq s^{\sigma_i}$ und $s = (s^{\sigma_1} \cap s) \cup (s^{\sigma_2} \cap s)$, so dass für jedes $m \leq s \cap s^{\sigma_i}$ dann $m \text{ mod } [s \cup s^{\sigma_i}/0]$ für $i = 1, 2$ gilt, so sei $\Xi(L) := I$.
 - (ii) Andernfalls sei $\Xi(L) := \Upsilon(L)$.

(II) Sonst sei $\Xi(L) = 0$.

Offenbar ist Ξ ein verbandstheoretischer Funktor. Dieser liefert die zweite Fittinggruppe einer endlichen Gruppe mit Fittingfaktorgruppe aus \mathcal{P} :

Lemma 3.2.14 Sei G eine endliche Gruppe mit $\phi(G) = 1$ und $G/F(G) \in \mathcal{P}$. Dann ist $\Xi(L(G)) = F_2(G)$.

Beweis: Da $G/F(G) \in \mathcal{P}$ ist, ist nach Lemma 3.2.8 nun $\Lambda_1(L(G)) = F(G)$. Existiert kein Supplement $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ zu $F(G)$ in G , so ist für alle $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ dann $P \cup F(G) < G$. Insbesondere ist also $F(G)P < G$ für alle $P \in \text{Syl}(G)$ und damit $G/F(G)$ nichtabelsch, also $F_2(G) = \Upsilon(L(G))$ nach Lemma 3.2.11. Da aber G kein Supplement $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ zu $F(G)$ besitzt, existiert kein Element $P \in L(G)$ mit $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$, so dass $G = F(G) \cup P = \Lambda_1(L(G)) \cup P$ ist. Nach Definition 3.2.13 ist dann $\Xi(L(G)) = \Upsilon(L(G)) = F_2(G)$.

Sei also $P \leq G$ mit $P \in \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ und $G = PF(G)$. Ist $P \in \mathcal{Q}$, so ist $G/F(G) \simeq P/P \cap F(G)$ eine p -Gruppe für eine Primzahl p und damit $F_2(G) = G$. Nach (2) aus der Definition 3.2.13 ist andererseits $\Xi(L(G)) = I_{L(G)} = G = F_2(G)$.

Sei also $P \in \mathcal{P}$. Ist $G/F(G)$ abelsch und damit $F_2(G) = G$, so ist mit Lemma 3.2.12 die Voraussetzung aus (3) (i) der Definition 3.2.13 erfüllt

und damit $\Xi(L(G)) = I_{L(G)} = G = F_2(G)$. Ist $G/F(G)$ nichtabelsch, so ist mit Lemma 3.2.11 dann $F_2(G) = \Upsilon(L(G))$. Andererseits sind mit Lemma 3.2.12 die Voraussetzungen aus (3) (ii) der Definition erfüllt und somit $\Xi(L(G)) = \Upsilon(L(G)) = F_2(G)$. Damit gilt die Behauptung. \square

Allgemeiner gilt für Gruppen mit nichttrivialer Frattinigruppe:

Lemma 3.2.15 *Sei G eine endliche Gruppe mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$. Dann ist $\Xi([G/\phi(G)]) = F_2(G)$.*

Beweis: Sei G eine endliche Gruppe mit $G/F(G) \in \mathcal{P}$. Sei ϕ – der natürliche Homomorphismus von G auf $G/\phi(G)$. Nach dem Satz von Gaschütz ([5], 4.5 auf S.279) ist $F(\overline{G}) = \overline{F(G)}$. Die Fittinggruppe $F_2(G)/F(G)$ von $G/F(G)$ wird wegen $\phi(G) \leq F(G)$ durch ϕ – einerseits nach Definition auf $\overline{F_2(G)/F(G)} = \overline{F_2(G)}/\overline{F(G)}$ abgebildet, andererseits nach dem Isomorphiesatz auf die Fittinggruppe von $\overline{G}/\overline{F(G)} = \overline{G}/\overline{F(G)}$, also auf $\overline{F_2(G)}/\overline{F(G)}$. Somit ist $\overline{F_2(G)} = \overline{F_2(G)}$, d. h. es ist $F_2(G)/\phi(G) = F_2(G/\phi(G))$. Wegen $\phi(G/\phi(G)) = 1$ ist mit Lemma 3.2.14 nun $\Xi(L(G/\phi(G))) = F_2(G/\phi(G))$. Sei $\tau : [G/\phi(G)] \rightarrow L(G/\phi(G))$, $U \mapsto U/\phi(G)$. Da Ξ ein verbandstheoretischer Funktor ist, ist schließlich $\Xi([G/\phi(G)]) = \Xi(L(G/\phi(G))^{\tau^{-1}}) = \Xi(L(G/\phi(G)))^{\tau^{-1}} = F_2(G/\phi(G))^{\tau^{-1}} = (F_2(G)/\phi(G))^{\tau^{-1}} = F_2(G)$. \square

Im Folgenden definieren wir den verbandstheoretischen Funktor Λ_2 :

Definition 3.2.16 *Sei L ein endlicher Verband und Λ_1 definiert wie in 3.2.3.*

- (1) *Ist L unzerlegbar mit $L \in \mathcal{P}$, so sei $\Lambda_2(L) := I$.*
- (2) *Ist L unzerlegbar mit $L \notin \mathcal{P}$, so definieren wir:*
 - (a) *Ist $[I/\Lambda_1(L)] \in \mathcal{P}$, so sei $\Lambda_2(L) := \Xi([L/\phi(L)])$.*
 - (b) *Ist $[I/\Lambda_1(L)] \notin \mathcal{P}$ und unzerlegbar, so sei $\Lambda_2(L) := \Lambda_1([I/\Lambda_1(L)])$.*
 - (c) *Ist $[I/\Lambda_1(L)]$ zerlegbar, etwa $[I/\Lambda_1(L)] = [m_1/\Lambda_1(L)] \times \dots \times [m_s/\Lambda_1(L)]$ mit $[m_i/\Lambda_1(L)]$ nichttrivial und unzerlegbar für alle $i \in \{1, \dots, s\}$, so definieren wir:*

- (c1) Ist $\Lambda_1(L) \neq \Lambda_1([m_i/0])$ für ein $i \in \{1, \dots, s\}$ mit $[m_i/\Lambda_1(L)] \notin \mathcal{K}$, so sei $\Lambda_2(L) := 0$.
- (c2) Ist $\Lambda_1(L) = \Lambda_1([m_i/0])$ oder $\Lambda_1(L) \neq \Lambda_1([m_i/0])$ mit $[m_i/\Lambda_1(L)] \in \mathcal{K}$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$, so sei $\Lambda_2(L) := \bigcup_{i=1}^s \tilde{\Lambda}_2([m_i/0])$ mit $\tilde{\Lambda}_2([m_i/0])$ definiert wie folgt:
- (i) Ist $\Lambda_1(L) = \Lambda_1([m_i/0])$ und $[m_i/\Lambda_1(L)] \in \mathcal{P}$, so sei $\tilde{\Lambda}_2([m_i/0]) := \Xi([m_i/\phi([m_i/0])])$.
 - (ii) Ist $\Lambda_1(L) = \Lambda_1([m_i/0])$ und $[m_i/\Lambda_1(L)] \notin \mathcal{P}$, so sei $\tilde{\Lambda}_2([m_i/0]) := \Lambda_1([m_i/\Lambda_1(L)])$.
 - (iii) Ist $\Lambda_1(L) \neq \Lambda_1([m_i/0])$ mit $[m_i/\Lambda_1(L)] \in \mathcal{K}$, so sei $\tilde{\Lambda}_2([m_i/0]) := m_i$.
- (3) Ist $L = L_1 \times \dots \times L_r$ mit L_i unzerlegbar für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, so sei $\Lambda_2(L) := \bigcup_{i=1}^r \Lambda_2(L_i)$ mit $\Lambda_2(L_i)$ definiert wie in (1) und (2).

Da die direkte Zerlegung in (3) eindeutig ist, ist Λ_2 wohldefiniert und weil Λ_2 im Wesentlichen durch zwei verbandstheoretische Funktoren definiert ist, ist Λ_2 ein verbandstheoretischer Funktor, der die zweite Fittinggruppe einer beliebigen endlichen Gruppe liefert:

Satz 13 Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist $\Lambda_2(L(G)) = F_2(G)$.

Beweis: Sei G eine endliche Gruppe und S_1, \dots, S_r die L -Zerlegung von G , d. h. es ist $G = S_1 \times \dots \times S_r$ mit $S_i \leq G$ von paarweise teilerfremden Ordnungen und $L(S_i)$ unzerlegbar für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Nach (b) aus Lemma 3.2.6 ist dann $F(G) = F(S_1) \times \dots \times F(S_r)$ und $F_2(G) = \bigcup_{i=1}^r F_2(S_i)$. Wir beweisen nun, dass $\Lambda_2(L(S_i)) = F_2(S_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ ist, da somit nach (3) der Definition 3.2.16 dann $\Lambda_2(L(G)) = \bigcup_{i=1}^r \Lambda_2(L(S_i)) = \bigcup_{i=1}^r F_2(S_i) = F_2(G)$ ist, und der Satz gilt.

Sei nun $i \in \{1, \dots, r\}$. Ist $S_i \in \mathcal{P}$, so ist $F_2(S_i) = S_i$. Da $L(S_i)$ unzerlegbar und S_i das Allelement von $L(S_i)$ ist, ist mit (1) der Definition 3.2.16 dann $\Lambda_2(L(S_i)) = S_i$ und damit $\Lambda_2(L(S_i)) = F_2(S_i)$.

Sei also $S_i \notin \mathcal{P}$ und zur Abkürzung $S := S_i$. Mit Lemma 3.2.5 ist dann $\Lambda_1(L(S)) = F(S)$. Ist $S/F(S) \in \mathcal{P}$, so ist mit Lemma 3.2.15 dann $F_2(S) = \Xi([S/\phi(L(S))])$ und nach (2) (a) aus Definition 3.2.16 nun $\Lambda_2(L(S)) = \Xi([S/\phi(L(S))]) = F_2(S)$.

Ist $L(S/F(S)) \notin \mathcal{P}$ und unzerlegbar, so ist mit Lemma 3.2.5 und (b) aus obiger Definition $\Lambda_2(L(S)) = \Lambda_1([S/\Lambda_1(L(S))]) = \Lambda_1([S/F(S)]) = F_2(S)$.

Ist $L(S/F(S)) \notin \mathcal{P}$ zerlegbar, etwa $S/F(S) = R_1/F(S) \times \dots \times R_s/F(S)$ mit $s \in \mathbb{N}$, so dass $R_j \leq S$ und $R_j/F(S)$ L -unzerlegbar von paarweise teilerfremden Ordnungen für alle $j \in \{1, \dots, s\}$ ist, d. h. $R_1/F(S), \dots, R_s/F(S)$ ist die vollständige L -Zerlegung von $S/F(S)$. Wegen $F(S) = F(R_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, s\}$ ist nach Lemma 3.2.6 dann $F_2(S)/F(S) = F_2(R_1)/F(R_1) \times \dots \times F_2(R_s)/F(R_s)$ und $F_2(S) = \bigcup_{j=1}^s F_2(R_j)$. Es reicht also zu zeigen, dass $\tilde{\Lambda}_2(L(R_j)) = F_2(R_j)$ für alle $j \in \{1, \dots, s\}$ ist. Sei $j \in \{1, \dots, s\}$ und $R := R_j$. Ist $R/F(R) \notin \mathcal{K}$, so ist nach Lemma 3.2.8 dann $\Lambda_1(L(R)) = F(R)$. Ist $R/F(R) \in \mathcal{P}$, so ist mit (c2) (i) aus obiger Definition nach Lemma 3.2.15 dann $\tilde{\Lambda}_2(L(R)) = \Xi([R/\phi(L(R))]) = F_2(R)$. Ist $R/F(R) \notin \mathcal{P}$, so ist, da $R/F(R) \notin \mathcal{K}$ unzerlegbar ist, mit (c2) (ii) aus obiger Definition nach Lemma 3.2.5 wegen $\Lambda_1(L(R)) = F(R)$ dann $\tilde{\Lambda}_2(L(R)) = \Lambda_1([R/\Lambda_1(L(R))]) = F_2(R)$. Ist $R/F(R) \in \mathcal{K}$, so ist einerseits $F_2(R) = R$ und andererseits nach (c2) (iii) der Definition $\tilde{\Lambda}_2(L(R)) = R$. In allen Fällen ist also $\tilde{\Lambda}_2(L(R)) = F_2(R)$. Wie oben gezeigt ist damit $\Lambda_2(L(S)) = \bigcup_{j=1}^s \tilde{\Lambda}_2(L(R_j)) = \bigcup_{j=1}^s F_2(R_j) = F_2(S)$ und die Behauptung bewiesen. \square

3.3 Eine verbandstheoretische Charakterisierung der Klasse \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$

In diesem Paragraphen wird eine verbandstheoretische Charakterisierung der höheren Fittingreihe (also ab der zweiten Fittinggruppe) einer endlichen Gruppe in Satz 14 angegeben, aus der sich eine Charakterisierung der Formation \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$ in Satz 15 ergibt. Als Anwendung davon wird im Anschluss eine verbandstheoretische Charakterisierung des k -ten nilpotenten Residuums einer endlichen Gruppe bewiesen.

Da die Fittingreihe einer endlichen Gruppe induktiv durch $F_0(G) = 1$ und $F_k(G)/F_{k-1}(G) = F(G/F_{k-1}(G))$ für $k \in \mathbb{N}$ definiert ist, wobei insbesondere $F_1(G) = F(G)$ ist, definieren wir im Folgenden induktiv verbandstheoretische Funktoren Λ_k :

Definition 3.3.1 *Seien Λ_1 und Λ_2 die in 3.2.3 und 3.2.16 definierten*

verbandstheoretischen Funktoren. Ist Λ_k gegeben für $k \geq 2$, so sei Λ_{k+1} folgendermaßen definiert:

Sei L ein Verband, etwa $L = L_1 \times \dots \times L_r \times M$ mit $r \geq 0$, so dass $L_i \in \mathcal{P}$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ und M P -unzerlegbar ist. Seien $T := \Lambda_k([I_M/\Lambda_1(M)])$ und $\Lambda_{k+1}(L) := (I_{L_1}, \dots, I_{L_r}, T)$.

Satz 14 Es ist $\Lambda_k(L(G)) = F_k(G)$ für alle endlichen Gruppen G und alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Beweis: Wir führen Induktion nach k durch. Nach Satz 13 ist $F_2(G) = \Lambda_2(L(G))$ und damit die Behauptung wahr für $k = 2$. Sei nun $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und die Behauptung richtig für k , d. h. es ist $\Lambda_k(L(H)) = F_k(H)$ für jede endliche Gruppe H .

Sei S_1, \dots, S_r, R die vollständige P -Zerlegung von G , d. h. es ist $G = S_1 \times \dots \times S_r \times R$ mit $S_1, \dots, S_r \in \mathcal{P}$ von paarweise teilerfremden Ordnungen, $R \leq G$ P -unzerlegbar und von zu $|S_i|$ teilerfremder Ordnung für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Setze $L_i := L(S_i)$ für $i \in \{1, \dots, r\}$, $M := L(R)$, $N := F(R)$ und $T := \Lambda_k([I_M/N]) = \Lambda_k([R/N])$. Da R P -unzerlegbar ist, ist nach Lemma 3.2.5 dann $N = \Lambda_1(M)$. Da $S_i \in \mathcal{P}$ ist, ist $F_2(S_i) = S_i$ und damit auch $F_k(S_i) = F_{k+1}(S_i) = S_i$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$. Sei τ der Verbandsisomorphismus von $[G/N]$ auf $L(G/N)$, der $U \in [G/N]$ auf U/N abbildet. Da verbandstheoretische Funktoren verträglich mit Verbandsisomorphismen sind, ist nach Induktionsvoraussetzung dann $F_{k+1}(R)/N = F_k(R/N) = \Lambda_k(L(R/N)) = (\Lambda_k([R/N]))^\tau = T^\tau = T/N$ und damit $F_{k+1}(R) = T$. Nach Lemma 3.2.6 ist somit $F_{k+1}(G) = S_1 \times \dots \times S_r \times T$. Mit 1.6.6 aus [10] ist $L = L_1 \times \dots \times L_r \times M$ und nach obiger Definition $\Lambda_{k+1}(L(G)) := (S_1, \dots, S_r, T) = F_{k+1}(G)$ und der Satz gilt. \square

Nach Satz 14 ist $\Lambda_k(L(G)) = F_k(G)$ für jede endliche Gruppe G und nach Definition 3.2.2 damit Λ_k eine verbandstheoretische Charakterisierung des gruppentheoretischen Funktors F_k , also der k -ten Fittinggruppe, womit das angekündigte Ziel erreicht ist.

Wir erinnern daran, dass eine verbandstheoretische Charakterisierung einer Gruppenklasse \mathfrak{F} eine Klasse \mathfrak{V} von Verbänden ist, so dass für alle Gruppen G genau dann $L(G) \in \mathfrak{V}$ ist, wenn $G \in \mathfrak{F}$ gilt. Die Suche nach verbandstheoretischen Charakterisierungen von Gruppenklassen ist

ein umfangreicher Teil der Untergruppenverbandstheorie, in dieser Dissertation als Frage (E) in der Einleitung vorgestellt. Wie bereits in der Einleitung des Kapitels erklärt, liefert Satz 14 für $k \geq 2$ die im Folgenden vorgestellte verbandstheoretische Charakterisierung der Klasse \mathfrak{N}^k der endlichen Gruppen mit Nilpotenzlänge $\leq k$ und damit einen Beitrag zur Frage (E).

Satz 15 *Sei \mathcal{S}^k die Klasse aller Verbände L mit $\Lambda_k(L) = I_L$. Dann ist \mathcal{S}^k eine verbandstheoretische Charakterisierung von \mathfrak{N}^k .*

Beweis: Sei G eine endliche Gruppe mit $L(G) \in \mathcal{S}^k$. Mit Satz 14 ist dann $G = \Lambda_k(L(G)) = F_k(G)$, also $G \in \mathfrak{N}^k$. Ist umgekehrt $G \in \mathfrak{N}^k$, so ist $\Lambda_k(L(G)) = F_k(G) = G$, also $L(G) \in \mathcal{S}^k$ und die Behauptung gilt. \square

Da \mathfrak{N}^k für $k \geq 2$ nicht nur Fittingklassen mit Radikalen F_k sind, sondern auch Formationen, erinnern wir an folgendes Konzept:

Definition 3.3.2 *Sei \mathfrak{F} eine Klasse von auflösbaren Gruppen.*

(a) *Man nennt \mathfrak{F} (bekanntlich) eine Formation, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:*

- (1) *Ist $N \trianglelefteq G \in \mathfrak{F}$, so ist auch $G/N \in \mathfrak{F}$.*
- (2) *Sind $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ mit $G/N_i \in \mathfrak{F}$ ($i = 1, 2$), so ist $G/(N_1 \cap N_2) \in \mathfrak{F}$.*

(b) *Für eine endliche Gruppe G heißt $G_{\mathfrak{F}} = \bigcap_{N \trianglelefteq G, G/N \in \mathfrak{F}} N$ das \mathfrak{F} -Residuum von G .*

Mit (2) existiert das in (b) definierte \mathfrak{F} -Residuum für jede Formation \mathfrak{F} und ist der kleinste Normalteiler von G , dessen Faktorgruppe in \mathfrak{F} liegt. Für $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$, die Klasse der nilpotenten Gruppen, ist $G_{\mathfrak{N}} = \bigcap_{p \in \mathbb{P}} O^p(G)$ das nilpotente Residuum von G . Analog ist für $k \in \mathbb{N}$ das k -te nilpotente Residuum der kleinste Normalteiler von G , dessen Faktorgruppe auflösbar der Nilpotenzlänge höchstens k ist, nämlich $N_0(G) = G$ und $N_k(G) = N_{k-1}(G)_{\mathfrak{N}}$.

Wir beweisen zunächst ein einfaches allgemeines Resultat über Formationen, das für $k \geq 2$ zusammen mit den obigen Ergebnissen dann explizit auf \mathfrak{N}^k angewandt wird.

Lemma 3.3.3 *Sei \mathfrak{X} eine Formation mit einer verbandstheoretischen Charakterisierung \mathfrak{Y} und G eine endliche auflösbare Gruppe. Ist $G_{\mathfrak{X}}$ invariant unter Projektivitäten, so ist $G_{\mathfrak{X}}$ die kleinste $P(G)$ -invariante Untergruppe N von G mit $[G/N] \in \mathfrak{Y}$.*

Beweis: Es ist $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, also insbesondere $[G/G_{\mathfrak{X}}] \in \mathfrak{Y}$. Sei $N \leq G$ mit $N^\varphi = N$ für alle Autoprojektivitäten $\varphi \in P(G)$ und $[G/N] \in \mathfrak{Y}$. Dann ist $N \trianglelefteq G$ und $G/N \in \mathfrak{X}$. Damit ist $G_{\mathfrak{X}} \leq N$ und die Behauptung folgt. \square

Im Folgenden wird als Anwendung des obigen Lemmas und des Satzes 15 eine verbandstheoretische Charakterisierung des k -ten nilpotenten Residuums einer endlichen Gruppe bewiesen. Dazu definieren wir den verbandstheoretischen Funktor Ψ_k :

Definition 3.3.4 *Für einen endlichen Verband L sei $\Psi_k(L)$ der Durchschnitt aller $\text{Aut}L$ -invarianten Elemente $u \in L$ mit $[I_L/u] \in \mathcal{S}^k$.*

Satz 16 *Sei $2 \leq k \in \mathbb{N}$. Ist G eine endliche Gruppe, so ist $\Psi_k(L(G)) = G_{\mathfrak{N}^k}$, also die kleinste $P(G)$ -invariante Untergruppe von G , deren Faktorgruppenverband in \mathcal{S}^k liegt.*

Beweis: Da \mathfrak{N}^k invariant unter Projektivitäten ist (mit Satz 15), ist nach 7.5.6 und 7.5.7 aus [10], S. 399 – 400, dann \mathfrak{N}^k also P -hyperzentral abgeschlossen im Sinne der Definition aus 7.5 auf S. 399 aus [10]. Sei G eine endliche Gruppe. Mit Theorem 7.5.8 aus [10] auf S. 400 ist dann $(G_{\mathfrak{N}^k})^\varphi = G_{\mathfrak{N}^k}^\varphi$ für alle Projektivitäten φ von G auf G^φ . Nach Satz 15 erfüllen damit \mathfrak{N}^k und \mathcal{S}^k die Voraussetzungen vom Lemma 3.3.3, also ist $G_{\mathfrak{N}^k}$ die kleinste $P(G)$ -invariante Untergruppe von G , deren Faktorgruppenverband in \mathcal{S}^k liegt.

Da $\Psi_k(L(G))$ der Durchschnitt aller $P(G)$ -invarianten Untergruppen $U \leq G$ mit $[G/U] \in \mathcal{S}^k$ ist, ist $\Psi_k(L(G))$ selbst $P(G)$ -invariant und weil $P(G)$ -invariante Untergruppen von G insbesondere Normalteiler von G sind, ist $[G/\Psi_k(L(G))] \in \mathcal{S}^k$, also $G_{\mathfrak{N}^k} \leq \Psi_k(L(G))$. Sei umgekehrt $x \in \Psi_k(L(G))$ und $N \trianglelefteq G$. Dann ist $D := \bigcap_{\varphi \in P(G)} N^\varphi$ $P(G)$ -invariant und wegen $[G/N] \in \mathcal{S}^k$ ist auch $[G/N^\varphi] \in \mathcal{S}^k$ für alle $\varphi \in P(G)$, also $[G/D] \in \mathcal{S}^k$ und somit $x \in D \leq N$. Damit ist x in jedem Normalteiler von G mit Faktorgruppenverband in \mathcal{S}^k enthalten, also ist insbesondere $x \in G_{\mathfrak{N}^k}$.

Hiermit ist auch die andere Inklusion erfüllt, also ist $\Psi_k(L(G)) = G_{\mathfrak{N}^k}$ und der Satz bewiesen. \square

Es ist also Ψ_k ein verbandstheoretischer Funktor, der das k -te nilpotente Residuum verbandstheoretisch charakterisiert.

Literaturverzeichnis

- [1] M. Costantini and G. Zacher. On the subgroup index problem in finite groups. *Israel J. Math.*, 185:293–316, 2011.
- [2] M. de Falco, F. de Giovanni, and C. Musella. The Schur property for subgroup lattices of groups. *Arch. Math.*, 91:97–105, 2008.
- [3] M. de Falco, F. de Giovanni, C. Musella, and R. Schmidt. Detecting the index of a subgroup in the subgroup lattice. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133:979–985, 2005.
- [4] H. Kurzweil und B. Stellmacher. *Theorie der endlichen Gruppen*. Springer Verlag, 1998.
- [5] B. Huppert. *Endliche Gruppen I*. Springer Verlag, 1967.
- [6] N. Ito. Über eine zur Frattinigruppe duale Abbildung. *Nagoya Math. J.*, 9:31–37, 1955.
- [7] L. Redei. Die endlichen einstufig nicht-nilpotenten Gruppen. *Math. Debrecen*, 4:303–324, 1956.
- [8] D. J. S. Robinson. *A Course in the Theory of Groups*. Springer Verlag, 1996.
- [9] A. Rottländer. Nachweis der Existenz nichtisomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen. *Math. Z.*, 28:641–653, 1928.
- [10] R. Schmidt. *Subgroup Lattices of Groups*. de Gruyter Expositions in Mathematics, 1994.
- [11] R. Schmidt. L-free groups. *Illinois J. Math.*, 47:515–528, 2003.

- [12] R. Schmidt. Lattice-theoretic characterizations of the group classes $\mathfrak{N}^{k-1}\mathfrak{A}$ and \mathfrak{N}^k for $k \geq 2$. *Arch. Math.*, 96:31–37, 2010.
- [13] M. Suzuki. *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*. Springer Verlag, 1956.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides Statt, dass die vorliegende Dissertation, abgesehen von der Beratung durch meinen wissenschaftlichen Lehrer und der Verwendung der angegebenen Hilfsmittel, nach Inhalt und Form meine eigene ist. Sie hat weder ganz noch teilweise an einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen. Die Arbeit ist unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis entstanden.

Kiel, den

