

Dissertation

**Large Eddy Simulationen von
selbstgravitierenden
Akkretionsscheiben**

Björn Sperling
aus Leipzig

Kiel im Dezember 2012

zur Erlangung der Doktorwürde der Mathematisch-
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Referent: Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

Koreferent: Prof. Dr. Robert F. Wimmer-Schweingruber

Tag der mündlichen Prüfung: 28.01.2013

Zum Druck genehmigt: 28.01.2013

Der Dekan

Zusammenfassung

Seit Mitte des letzten Jahrhunderts hat sich der Gedanke etabliert, dass der gravitative Kollaps von Molekülwolken durch Erhaltung des in ihnen vorhandenen Drehimpulses zur Bildung einer scheibenartigen Struktur und damit u. a. zum Geburtsort unseres Sonnensystems führt. Dieser Entstehungsprozess ist einer ganzen Reihe von Objekten gemein und kann auf den unterschiedlichsten Größenskalen erfolgen. Das eigentliche Problem ist die Umverteilung des Drehimpulses, ohne die es keine Entwicklung zu beispielsweise einem Hauptreihenstern geben kann. Das Aufsammeln von Material durch das Zentralobjekt wird als Akkretion bezeichnet. Der Mechanismus der Akkretion spielt in der Astrophysik eine entscheidende Rolle, da die Akkretionsscheibe ebenfalls den „Motor“ der aktiven galaktischen Kerne (AGK) bildet. Durch innere Reibung wird Gravitationsenergie sehr effizient dissipiert, so dass sie zu den leuchtkräftigsten Objekten im Universum gehören. Sie spielen damit eine entscheidende Rolle in der Entstehung von Galaxien und haben somit auch einen Einfluss auf die kosmologische Entwicklung.

Der Fakt, dass wir diese Objekte beobachten können, bedeutet, dass sie sich mindestens auf Zeitskalen kleiner als das Weltalter entwickelt haben müssen, was eine durch molekulare Prozesse vermittelte innere Reibung (Viskosität) ausschließt. Die Effekte wären um viele Größenordnungen zu gering, weshalb seit langem Konsens darüber besteht, dass eine durch Turbulenz hervorgerufene Viskosität erforderlich ist.

In dieser Arbeit wird sich dieser Problematik dahingehend genähert, dass die seit einigen Jahrzehnten etablierten sehr einfachen Parametrisierungen einer turbulenten Viskosität durch eine allgemeinere Theorie, die auf die jeweils vorherrschende Strömungsgegebenheit Rücksicht nimmt, zu ersetzen. Hierbei wird die Methode der Large Eddy Simulation (LES) verwendet, die große Verbreitung in der Meteorologie und den Ingenieurwissenschaften gefunden hat und ebenfalls zunehmend bei astrophysikalischen Fragestellungen eingesetzt wird. Obwohl die darin enthaltenen Methoden ebenfalls heuristischer Natur sind, haben sie den Vorteil, dass sie einerseits durch Vergleich mit Experimenten ihre Daseinsberechtigung untermauern können und zweitens an die tatsächlich in der Simulation auftretende Turbulenz rückkoppeln.

Für die Untersuchung werden Akkretionsscheiben mit und ohne dominantes Scheibenpotential jeweils im klassischen Ansatz und mit der LES durchgeführt. Die ansonsten identischen Modelle werden eingehend analysiert. Es zeigt sich dabei, dass die auftretenden Akkretionsraten teilweise starke Ähnlichkeiten aufweisen und ebenfalls zu einem annähernd gleichen Massenwachstum des Zentralobjektes führen. Um den Nachteil von zweidimensionalen Modellen wett zu machen, werden ebenfalls rotationssymmetrische und flache Modelle untereinander verglichen. Auch hier zeigt sich tendenziell ein ähnliches Verhalten, was als Rechtfertigung für den Ansatz verstanden werden kann. Bei den flachen Modellen treten verstärkt nicht-achsensymmetrische Instabilitäten auf, die das gesamte Verhalten der Scheibe stark beeinflussen.

Abstract

Since the middle of last century, the idea has been established that the gravitational collapse of molecular clouds results in a disk-like structure due to conservation of angular momentum. This process occurs on very different length scales and is applicable to a variety of astrophysical objects from the formation of our solar system to the evolution of black holes in galaxy centers. The fundamental problem is the redistribution of angular momentum which is a necessary condition for the evolution of the central object. The collecting of material through the central object is called accretion. It is believed that accretion discs are the engines of active galactic nuclei (AGN), which play a major role for galaxy formation and therefore have an impact on cosmological evolution. Due to viscosity gravitational energy is dissipated very effectively so that they are among the most luminous objects in the universe.

The fact that we can observe these objects means that they must have evolved at least on time scales less than the age of the universe. Therefore molecular viscosity as source for energy dissipation is ruled out because the expected time scales are orders of magnitudes too large. This is the reason why there is a broad consensus that turbulence is the only way to explain the short time scales.

This thesis approaches the problem by replacing the rather simple but well established methods with a more general theory of turbulence modeling. This type of simulation is called large eddy simulation (LES) and has been used in meteorology and engineering sciences for decades. Although these methods are also based on heuristic assumptions, they are far more general and allow for comparison with laboratory experiments. In addition, they connect directly to the turbulent motion generated by the simulation.

Simulations of accretion disks with and without self-gravity are performed and compared to the classic parameterization. The otherwise identical models are analyzed in detail. The achievable accretion rates and the evolution time scales of the central objects are of the same order compared to results obtained with the classic parameterization. To compensate for the drawback of two-dimensional models, rotationally symmetric and flat models are compared with each other. Both show similar behavior, which can be regarded as an indirect justification of the approach. In the flat models non-axisymmetric instabilities occur that affect the overall behavior of the disc strongly.

„I am an old man now, and when I die and go to heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is Quantumelectrodynamics and the other is the turbulent motion of fluids. About the former I am rather optimistic“¹



Abb. 1.: Diese künstlerische Darstellung zeigt einen sehr weit entfernten Quasar (ULAS J1120+0641). Er stellt mit gerade einmal $7,7 \cdot 10^8$ a nach dem Urknall nicht nur den am weitest entfernten Quasar, sondern auch das mit Abstand hellste Objekt im frühen Universum dar. **Credit: ESO/M. Kornmesser**

¹Horace Lamb (* 1849; † 1934)

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
1. Einleitung	1
1.1. Zielsetzung	3
2. Grundlagen des physikalischen Modells einer Akkretionsscheibe	5
2.1. Grundgleichungen	6
2.1.1. Kontinuitätsgleichung	6
2.1.2. Navier-Stokes-Gleichung	6
2.1.3. Energiegleichung	7
2.1.4. Zustandsgleichung	8
2.1.5. Spannungstensor	8
2.1.6. Gravitationskraft	9
2.2. Turbulenz	11
2.2.1. Versuch einer Definition	11
2.2.2. Auftreten von Turbulenz	12
2.2.3. Turbulenz in Akkretionsscheiben?	12
2.2.4. Theorie von Kolmogorov	14
2.2.5. Zweidimensionale Turbulenz	17
2.3. Akkretionsscheiben	18
2.3.1. Parametrisierungen der Viskosität	19
2.3.2. Zeitskalen	20
2.3.3. Strahlungsdruck	21
3. Simulationsansätze in der Hydrodynamik	23
3.1. Direkte numerische Simulation	23
3.2. Large Eddy Simulation	24
3.2.1. Filterung	24
3.2.2. Schließungsbedingungen	32
3.2.3. Zweidimensionale LES: Ein gutes Modell?	38
3.3. Softwarebibliothek <code>fosite</code>	39
3.3.1. Modifikationen	41

4. Numerische Simulation von Akkretionsscheiben	49
4.1. Rotationssymmetrisches Modell	50
4.1.1. Anfangswerte	53
4.1.2. Randbedingungen	55
4.1.3. Verbleibende (globale) Parameter	63
4.1.4. Resultate	66
4.2. Tests zur Auflösungsabhängigkeit	88
4.2.1. Wirbelviskosität	89
4.2.2. Akkretionsrate	91
4.3. Flaches Modell	95
4.3.1. Geometrie und Randbedingungen	96
4.3.2. Anfangsdaten	97
4.3.3. fFSG- & fNSG-Model	99
4.3.4. Resultate	100
5. Resümee und Ausblick	113
A. Kovariante Ableitung	117
B. Jacobi-Matrizen	119
C. Ergänzungen zum rotationssymmetrischen Modell	121
D. Ergänzungen zum flachen Modell	127
Literaturverzeichnis	129
Liste der Symbole	135
Liste der Akronyme	137
Erklärung	139
Danksagung	141

Abbildungsverzeichnis

1.	Künstlerische Darstellung eines Quasars	vi
4.1.	Vergleich zwischen zylindrischer und tan-zylindrischer Geometrie	52
4.2.	Auswirkung des initialen turbulenten Drucks	56
4.3.	Problematik am Nord-/Süd-Rand durch Wirbelbildung	57
4.4.	Skizze des rotationssymmetrischen Modells	59
4.5.	Physik-Modul abhängige Auswirkung der <i>keine-Gradienten</i> Bedingung	60
4.6.	Skizze zur keine-Gradienten Randbedingung	61
4.7.	Akkretionsrate des rNSG-Modells	67
4.8.	Akkretierte Masse und Akkretionsrate des rNSG-Modells	69
4.9.	Massendichte der Akkretionsscheibe des rNSG-Modells für $z = 0$	71
4.10.	Kinematische Viskosität in der Zentralebene des rNSG-Modells.	72
4.11.	Kinematische Viskosität im rNSG-Modells mit Filterbreite Δ_{2D}	74
4.12.	Kinematische Viskosität im rNSG-Modells mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$	75
4.13.	Simulationsdaten des rNSG-Modells mit Filterbreite Δ_{2D}	76
4.14.	Simulationsdaten wie Abb. 4.13 jedoch mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$	77
4.15.	Akkretionsrate des rFSG-Modells	79
4.16.	Akkretierte Masse und Akkretionsrate des rFSG-Modells	80
4.17.	Massendichte der Akkretionsscheibe des rFSG-Modells für $z = 0$	81
4.18.	Viskose Zeitskala und Rotationsgeschwindigkeit des rNSG- und rFSG- Modells	82
4.19.	Kinematische Viskosität in der Zentralebene beider Modelle im Vergleich.	83
4.20.	Simulationsdaten des rFSG-Modells mit Filterbreite Δ_{2D}	84
4.21.	Simulationsdaten des rFSG-Modells mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$	85
4.22.	Auflösungsabhängigkeit der Wirbelviskosität im rNSG-Modell	89
4.23.	Wirbelviskosität in Abhängigkeit von der Filterbreite	91
4.24.	Auflösungsabhängigkeit der Akkretionsrate	92
4.25.	Akkretionsrate in Abhängigkeit von der Auflösung	94
4.26.	Akkretionsrate des fNSG-Modells	101
4.27.	Akkretierte Masse und Massenakkretionsrate des fNSG-Modells	102
4.28.	Entwicklung der nicht-achsensymmetrischen Instabilität des fNSG-Modells	103
4.29.	Viskosität beim Auftreten der Instabilität im fNSG-Modell	104
4.30.	Azimal gemittelte kinematische Viskosität des fNSG-Modells	105
4.31.	Flächendichte der instabilen Scheiben des fNSG-Modells	106
4.32.	Akkretionsrate und akkretierte Masse des fFSG-Modells	107
4.33.	Flächendichte der Toomre-instabilen Scheibe.	108

4.34. Kinematischen Viskosität des fFSG-Modells	109
4.35. Azimutal gemittelte kinematische Viskosität des fFSG-Modells	110
4.36. Vergleich der Viskosität aller subgrid-scale (SGS)-Verfahren	111
C.1. Exemplarisch die Temperatur im rNSG-Modell	121
C.2. Kinematische Viskosität im rFSG-Modells mit Filterbreite Δ_{2D}	123
C.3. Kinematische Viskosität im rFSG-Modells mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$	124
C.4. Kinematische Viskosität im Vergleich zu Potenzgesetz	125

Tabellenverzeichnis

4.1. Fitting-Parameter zur Auflösungsabhängigkeit der Wirbelviskosität . . .	90
4.2. Fitting-Parameter zur Auflösungsabhängigkeit der Akkretionsrate	93
4.3. Mittelwert der Akkretionsrate im fFSG-Modell	107
C.1. Simulationsparameter des rotationssymmetrischen Modells	122
C.3. Fitting-Parameter zur kinematischen Viskosität beider Modelle	126
D.1. Simulationsparameter des flachen Modells	128

1. Einleitung

Vor Jahrhunderten wurde behauptet, wir würden **auf** einer flachen Scheibe leben; vielmehr hätte mit Recht gesagt werden können, dass wir **in** einer – mehr oder weniger – flachen Scheibe leben würden. Diese scheibenartige Struktur kann im Großen für unsere Milchstraße nachgewiesen werden, wie es vielleicht bereits der interessierte Leser anhand des Bandes der Milchstraße am Firmament sich selbst vergegenwärtigen konnte. Sie stellt mit ihrer Scheibenform keine exotische Ausnahme dar, sondern vielmehr existieren neben ihr eine „kaum abzählbare“ Anzahl weiterer Spiralgalaxien im beobachtbaren Universum. Dies gilt ebenfalls in kleineren Maßstäben, wie beispielsweise unserem Sonnensystem, welches Planeten beinhaltet, die nahezu in einer Ebene, der Ekliptik, um einen gemeinsamen Massenschwerpunkt kreisen und Überreste einer einstigen Gasscheibe sind.

Da die beiden notwendigen Ingredienzien – Drehimpulserhaltung und Gravitationskraft – zumindest in ihrer elementaren Form bereits seit weit mehr als hundert Jahren bekannt sind, ist es nicht verwunderlich, dass für ein *erstes* Verständnis dieser Erscheinungen keine Erkenntnisse der „modernen Physik“ herangezogen werden müssen und die ersten Ideen einer Scheibe als Geburtsort unseres Sonnensystems aus der Mitte des letzten Jahrhunderts stammen (Weizsäcker, 1944; Lüst, 1952).

Letztlich ist es die schwächste der vier Wechselwirkungen, die auf den großen Skalen dominiert und lokale Überdichten aus der Expansion des Universums entkoppelt und zu Verklumpungen bis hin zum gravitativen Kollaps führt. Dieser Kollaps findet nicht nur auf diesen größten Skalen statt, wo er ganze Galaxienhaufen bilden kann, sondern führt sich auf immer kleiner werdenden Skalen fort, welchem nur die Drehimpulserhaltung effektiv entgegenwirken kann und die Massenkontraktion senkrecht zur Rotationsachse zu stoppen vermag, so dass eine flache Struktur entsteht. Bei dieser stellt sich ein Gleichgewicht aus Gravitationskraft und Zentrifugalkraft ein, was nicht zu einem starr rotierenden Gebilde führt, sondern zu einer differentiellen Rotation. Gäbe es keinen effizienten Mechanismus, um den Drehimpuls umzuverteilen, so wäre beispielsweise eine protostellare Scheibe bereits am Ende ihrer Entwicklung angelangt und könnte keinen Hauptreihenstern hervorbringen.

Da bei der primordialen Nukleosynthese fast ausschließlich Wasserstoff und Helium entstanden sind, machen diese beiden Gase auch den Hauptanteil der beobachtbaren Masse, nicht nur im Universum, sondern auch in den genannten Objekten aus. Dies führt zu einer fluiddynamischen Beschreibung und kann durch die Navier-Stokes-Gleichungen (NSG)

sehr erfolgreich beschrieben werden. Sollen zusätzlich Wechselwirkungen von Magnetfeldern mit dem teilweise ionisierten Gas berücksichtigt werden, so gilt es die NSG um elektromagnetische Effekte zu erweitern, was zur sog. Magnetohydrodynamik (MHD) führt, die nicht Gegenstand in dieser Arbeit ist.

Die Crux an dieser auf den ersten Blick einfach erscheinenden Sachlage ergibt sich, wenn die erforderliche Drehimpulsverteilung betrachtet wird, die eine notwendige Bedingung für die angesprochene Entwicklung der Scheibe darstellt und ohne die kein Massenfluss auf das Zentralobjekt erfolgen kann. Die benötigte innere Reibung (Viskosität) des Gases, um die Entwicklungszeitskalen einer ganzen Klasse von Objekten, auch von supermassereichen Schwarzen Löchern, erklären zu können, ist weit jenseits plausibler Werte (siehe Abschn. 2.2.3). Die Entwicklungszeitskalen durch Annahme einer rein molekularen Viskosität überschreiten teilweise sogar das Weltalter mit seinen rund 13,7 Mrd. Jahren (Jarosik et al., 2011).

Dabei scheint es evident zu sein, dass der Schlüssel in der turbulenten Bewegung der Strömung liegen muss, was bereits von Lüst (1952) angenommen wurde, da sie in der Lage ist, Umverteilungsprozesse um viele Größenordnungen zu steigern. Leider entzieht sich die Turbulenz seit mehr als 150 Jahren einer geschlossenen analytischen Beschreibung und gehört sicherlich zu den größten ungelösten Problemen der Physik. Dieser Sachverhalt liegt in dem nicht-linearen Charakter der NSG begründet, für die eine Lösungstheorie fehlt¹.

Bei der numerischen Lösung der NSG ergibt sich die Schwierigkeit, dass, um die Auswirkungen der Turbulenz auf das globale Verhalten der Strömung zu erfassen, *alle relevanten* Längenskalen der turbulenten Bewegung im Verfahren berücksichtigt werden müssen, da die besagte Nicht-Linearität eine starke Kopplung zwischen großen und sehr kleinen Skalen bedingt (siehe Abschn. 2.2). Der dabei anfallende numerische Rechenaufwand wird nach aller Voraussicht für die kommenden Jahrzehnte das Mögliche weit überschreiten, was ebenfalls für eine ganze Reihe weiterer astrophysikalischer Fragestellungen zutrifft (siehe Abschn. 3.1).

Der Konsens bezüglich der Turbulenz als maßgeblichen Auslöser des Akkretionsprozesses² (lat. *accretio* für „Zunahme“) hat in den letzten Jahrzehnten einige Methoden etablieren lassen, die durch heuristische Abschätzungen die Wirkung der Turbulenz auf die innere Reibung (eine sog. turbulente Viskosität) abzubilden versuchen (Shakura & Sunyaev, 1973; Duschl et al., 2000), was in Abschn. 2.3.1 erläutert wird.

Wie bereits angeklungen, existiert nicht nur *ein* Typus einer Akkretionsscheibe, sondern eine ganze Klasse von Akkretionsphänomenen, die dementsprechend sehr unterschiedliche Eigenschaften – nicht nur bezogen auf ihre räumliche Ausdehnung – aufweisen. Ins-

¹Bereits der Existenzbeweis (und die Regularität) der Lösungen der dreidimensionalen, inkompressiblen NSG wurde im Jahre 2000 als eines der sieben Millennium-Probleme vom Clay Mathematics Institute ausgeschrieben und mit einem Preisgeld von einer Mio. US-Dollar ausgelobt.

²Obwohl Turbulenz in Akkretionsscheiben allgemein akzeptiert ist, gibt es keine abschließende Einigung bei den auslösenden Mechanismen der Turbulenz.

besondere Akkretionsphänomene, die mit sog. supermassereichen Schwarzen Löchern³ in Verbindung stehen und nach heutiger Auffassung den *Kern* nahezu jeder Galaxie bilden (Kormendy & Richstone, 1995; Richstone et al., 1998), sind von brennendem wissenschaftlichen Interesse.

Bereits durch Salpeter (1964) und Lynden-Bell (1969) wurde argumentiert, dass solche aktiven galaktischen Kerne (AGK) durch Akkretion von Materie zu den leuchtkräftigsten Erscheinungen im Universum gehören können. Der Grund liegt bei der Effizienz, mit der die potentielle Energie der akkretierten Masse im Verhältnis zu dessen Ruhemasse in Strahlung umgewandelt wird, was bis zu 5,7% für ein nicht rotierendes Schwarzes Loch (SL) und bis zu 42% für ein rotierendes (extrem Kerr-) SL liegen kann (siehe Kato et al., 2008, Abschn. 1.1.3), und somit effizienter als die Energiefreisetzung durch Kernfusion ist. Dies, im Zusammenhang mit einer Akkretionsrate von einigen Sonnenmassen pro Jahr, führt zu einer enormen absoluten bolometrischen Helligkeit, insbesondere bei sehr massereichen Zentralobjekten, da das Eddington-Limit in Abhängigkeit von der Masse des Zentralobjektes eine theoretische Obergrenze für die Akkretionsrate vorgibt (siehe Abschn. 2.3.3).

Auch taucht im Zusammenhang mit dem Akkretionsprozess das sog. antihierarchische Wachstum von supermassereichen Schwarzen Löchern auf, welches eine Korrelation von hoher Rotverschiebung (frühes Universum) und der Anzahldichte (Röntgen-)leuchtkräftiger AGK feststellt (Hasinger et al., 2005), was bedeutet, dass sich SMSL nicht nur früh im Universum gebildet haben müssen, sondern zusätzlich die massereichsten unter ihnen schneller gewachsen sind als die massearmen. Dies lässt sich in theoretischen Modellen reproduzieren (z. B. Duschl & Strittmatter, 2011), was jedoch implizit einen effizienten Akkretionsprozess voraussetzt, der aktuell unzureichend verstanden ist.

Da Turbulenz kein spezifisches Problem der Astrophysik ist, sondern in einer Vielzahl von physikalischen Systemen auftritt, sind in anderen Wissenschaftszweigen – insbesondere in der Meteorologie und in den Ingenieurwissenschaften – allgemeine Methoden entwickelt worden, um sich dieser Problematik annähern zu können. Seit einigen Jahren ist zu beobachten, dass die Technik der Large Eddy Simulation (LES), die ursprünglich aus der Meteorologie stammt, ebenfalls in der astrophysikalischen Forschung anzutreffen ist (siehe Kapitel 3).

1.1. Zielsetzung

Es gilt zu prüfen, ob es möglich ist, die Methodik der LES auf das hier betrachtete Modell einer Akkretionsscheibe übertragen zu können. Hierbei muss klar angemerkt werden, dass die sogenannten subgrid-scale (SGS)-Verfahren, die Bestandteil der LES sind, ebenfalls auf heuristischen Methoden fußen, jedoch den Vorteil aufweisen, in Experimenten

³Zu der Klasse der supermassereichen Schwarzen Löcher sollen Exemplare gezählt werden, die mehr als $10^6 M_{\odot}$ aufweisen. Sie können typischerweise bis zu $10^{10} M_{\odot}$ erreichen.

(oder durch spezielle Verfahrenstechniken) überprüfbare Resultate erbracht zu haben; sie sind quasi kalibriert. Dabei existiert nicht eine Methode, sondern – je nach Anwendungsfall – unterschiedlich gute Approximationen, die verschiedene Grade an Prozessen berücksichtigen und ggf. dynamisch auf die Strömungssituation reagieren, was sich jeweils auch im numerischen Aufwand widerspiegelt. Da Turbulenz ein universeller Prozess ist, gibt es keinen Grund zur Annahme, dass die Parameter, die durch „irdische“ Experimente gewonnen sind, nicht auch für Akkretionsscheiben Gültigkeit besitzen sollten, was jedoch nur eine Hypothese ist und sich im Verlauf der Arbeit herausstellen muss.⁴

Diese Verfahren sollen in die hauseigene Simulationsbibliothek **fosite**, die zur numerischen Lösung von hyperbolischen Erhaltungsgesetzen auf krummlinig-orthogonalen Geometrien entwickelt wurde und als Finite-Volumen-Verfahren (FVV) sehr gute Erhaltungseigenschaften aufweist (Illenseer & Duschl, 2009), implementiert werden und sich zur quantitativen Auswertung an Vergleichssimulationen messen.

Dabei ist fraglich, ob die betrachteten Akkretionsscheiben einen ausreichend chaotischen Zustand erreichen können, der sich lange genug aufrecht erhält, um mittels des SGS-Verfahrens u. a. ausreichend Drehimpulstransport zu erzielen, um für die Entwicklung des Zentralobjektes und die Leuchtkraft der AGK verantwortlich zu sein.

Jede numerische Simulation führt implizit eine Filterung der Strömungsgrößen durch. Im Bild eines Glockenspiels würde man es seiner hohen Töne berauben, die vor dem Ohr des Zuhörers verstummen. Würde sich ein Glockenspiel genauso *nicht-linear* wie die Navier-Stokes-Gleichung (NSG) verhalten, so würde das Abschneiden der hohen Töne sich ebenfalls massiv auf die tiefen Töne auswirken, die nicht unmittelbar vom Filterungsprozess betroffen sind. Dass das Weglassen der hohen Töne den Klang der verbleibenden tiefen Töne nachhaltig verändert, ist zum Glück aus der Akustik in unserer Alltagswahrnehmung nicht geläufig. Der erst genannte Fehler ist trivial verständlich und tritt als Rundungsfehler in jeder numerischen Rechnung zu Tage. Der zweite ist eine direkte Konsequenz des in dieser Arbeit verwendeten Modells und führt zur Idee der Large Eddy Simulation (LES), welches in Kap. 3 genauer erläutert und ihre Umsetzung im Rahmen von **fosite** vorgestellt wird. Zuvor werden die Grundlagen des verwendeten astrophysikalischen Modells einer Akkretionsscheibe (Kap. 2) besprochen. Die Präsentation der astrophysikalischen Simulationsergebnisse und deren Auswertung erfolgt in Kapitel 4. Die daraus folgenden Implikationen werden in Kapitel 5 erörtert.

⁴Es sei angemerkt, dass sich diese Arbeit hauptsächlich an LES aus dem Bereich der Modellierung von Supernovae orientiert, so dass mit einer Entsprechung zu rechnen ist.

2. Grundlagen des physikalischen Modells einer Akkretionsscheibe

Wie bereits in der Einleitung angerissen wurde, liegt der Hauptteil der Masse der Akkretionsscheibe als Gaskomponente vor und sog. astronomischer Staub spielt in Bezug auf die Dynamik nur eine untergeordnete Rolle.¹ Dieses Gas ist in den inneren, heißen Bereichen der Scheibe zum Teil stark ionisiert (Plasma). Hierbei kommt eine entscheidende Einschränkung des in dieser Arbeit betrachtenden Modells zum Tragen: Es werden keine Magnetfelder – also keine durch Magnetfelder induzierten Effekte – berücksichtigt.

Bei dieser Arbeit liegt der Fokus gerade darin zu prüfen, ob es unter Umständen allein auf hydrodynamischen Mechanismen beruhende Instabilitäten gibt, die für eine ausreichende (turbulente) Viskosität (Klahr & Bodenheimer, 2003; Dubrulle et al., 2005) sorgen. Dies ist Gegenstand der Forschung und wird kontrovers diskutiert (Yavneh et al., 2001; Shalybkov & Rüdiger, 2005), was in Abschnitt 2.2.3 besprochen wird.

Die von Balbus & Hawley (1991) gefundene Magnetorotationsinstabilität (MRI) bewerkstelligt unbestreitbar innerhalb von wenigen Umläufen der Scheibe eine sehr starke Scherspannung, welche durch ein (schwaches), im differenziell rotierenden Plasma eingefrorenes Magnetfeld \mathbf{B} vermittelt wird. Dies sorgt für die nötige Drehimpulsverteilung und führt somit zur Akkretion.

Die MRI benötigt zwangsläufig einerseits ein Magnetfeld, andererseits ausreichend ionisiertes Gas. Zweiteres kann z. B. im äußeren Bereich der Scheibe bedingt durch zu geringe Gastemperaturen und gleichzeitigem Fehlen einer ionisierenden Strahlungsquelle in zu geringem Umfang vorliegen. Dies gilt für den äußeren Bereich der protoplanetaren Scheibe wie auch für den AGK (Gammie & Menou, 1998; Fromang et al., 2002). Dieses Erklärungsdefizit der MRI gepaart mit dem nicht vollständigen Verständnis von Turbulenz bzw. Instabilitäten sollte diese Untersuchungen rechtfertigen.

In Bezug auf Schwarze Löcher, die die Motoren von AGK sind, mögen die klassischen (nicht relativistischen) Gleichungen als weitere Einschränkung des folgenden Modells erscheinen, da Schwarze Löcher als Beschreibungsgrundlage die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) benötigen. Jedoch weist der innere Rand der in dieser Arbeit behandelten Akkretionsscheibe einen deutlichen Abstand zum sog. Ereignishorizont des Schwarzen Lochs auf, so dass allgemein relativistische Effekte keine signifikante Rolle spielen und eine newtonsche Näherung gerechtfertigt ist. Ebenfalls wird sich bei der Auswertung der

¹Astronomischer Staub ist beispielsweise beim Strahlungstransport essentiell.

Ergebnisse in Kapitel 4 herausstellen, dass das Modell in diesem Punkt selbst-konsistent ist und keine Überlichtgeschwindigkeiten auftreten. Dem Autor ist keine **globale** Simulation bekannt, die relativistische Effekte berücksichtigen würde. Quantitative Argumente hierzu werden in Abschn. 2.1.6 diskutiert.

Der innere Rand des Simulationsgebietes ist nicht der sog. letzte stabile Orbit, der den Übergang zum SL (Ereignishorizont) markiert. Er ist somit nicht der innere Rand der Akkretionsscheibe; vielmehr schließt sich diesem quasi eine nicht berücksichtigte innere Scheibe an (siehe Abschn. 4.1.2).

2.1. Grundgleichungen

Es soll sich nun den Grundgleichungen der Hydrodynamik zugewendet werden, die das physikalische Fundament zur Modellierung von Akkretionsscheiben bilden. Die *numerische* Behandlung dieses gekoppelten Systems aus nicht-linearen partiellen Differentialgleichungen (PDG) zweiter Ordnung wird in Kapitel 3 näher betrachtet.

Für eine Herleitung soll der Leser auf Landau & Lifschitz (1974) verwiesen werden.

2.1.1. Kontinuitätsgleichung

Die Kontinuitätsgleichung (2.1) beschreibt die Massenerhaltung und stellt durch das Fehlen von Quellen und Senken eine *wahre* Erhaltungsgleichung dar. Paarerzeugung, (relativistischer) Massenverlust durch Abstrahlung, etc. finden in diesem Modell keine Beachtung. Dabei ist die zeitliche Änderung der Massendichte ρ identisch mit dem Zu- und Abfluss eines Massenstroms $\rho\mathbf{v}$ in das infinitesimale Volumen dV an eben dieser Stelle. Die Strömungsgeschwindigkeit ist mit \mathbf{v} bezeichnet.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

Die Betrachtung als Kontinuum ist auch im Falle von Akkretionsscheiben mit extrem geringen Dichten gerechtfertigt, weil die typischen Längenskalen gegenüber der mittleren freien Weglänge der Teilchen groß ist.

2.1.2. Navier-Stokes-Gleichung

Bei dem Gleichungssystem (2.2) handelt es sich um die bekannte NSG für kompressible Fluide,² welche die Impulserhaltung beschreibt. Kompressibilität, die ebenfalls in

²Der Begriff *Fluid* soll gleichermaßen für Flüssigkeit wie auch für Gas stehen, wie es in der Literatur üblich ist.

Glg. (2.1) und (2.3) berücksichtigt wird, ist beim Auftreten von Stoßfronten – ausgelöst durch Überschallgeschwindigkeiten – ein wichtiger Effekt. Dies kann sich bei Akkretionsscheiben in verschiedenen Szenarien ereignen. Die akkurate numerische Behandlung von Stoßfronten wird im hier verwendeten numerischen Verfahren sichergestellt (Kapitel. 3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} - \rho \nabla \Phi + \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} \\ \iff \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbb{I}) &= \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} - \rho \nabla \Phi + \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hierbei sind $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ der Spannungstensor,³ $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ der *viskose* Spannungstensor, p der Gasdruck, \mathbf{f}_{ext} die Summe von externen (spezifischen) Kräften und Φ das Gravitationspotential des Gases. Diese Terme stellen Quellen und Senken der Erhaltungsgleichung dar.

2.1.3. Energiegleichung

Des Weiteren wird eine Erhaltungsgleichung für die Energie (2.3) benötigt. Diese ist für die Gesamtenergie(-dichte) $E = e_{\text{kin}} + e_{\text{in}}$ formuliert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v}) - \rho \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} + \rho Q \\ \iff \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) &= \nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}) - \rho \nabla \Phi \cdot \mathbf{v} + \rho \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} + \rho Q \end{aligned} \quad (2.3)$$

Es tritt im Vergleich zu der Navier-Stokes-Gleichung ein weiterer Verlustterm Q auf, welcher z. B. eine Kühlung (durch Abstrahlung) darstellen kann.

Wärmeleitung findet in diesem Modell keine Berücksichtigung, da zum einen die Wärmeleitfähigkeit von Gasen sehr gering ist, zum anderen diese ihre Wärme gut durch Konvektion verteilen können. Dies trifft auf Akkretionsscheiben aufgrund ihrer turbulenten Durchmischung besonders gut zu, so dass ein solcher Term geringe Relevanz besitzt.

Neben der von außen vorgegebenen spezifischen Kraft \mathbf{f}_{ext} (bzw. Beschleunigung) werden noch weitere Bedingungen benötigt, um das Gleichungssystem zu schließen.

³Der Index, über welchen kontrahiert wird, ist unerheblich, da die Tensoren symmetrisch sind.

2.1.4. Zustandsgleichung

Die Zustandsgleichung soll die des idealen Gases sein, die den Zusammenhang zwischen p und e_{in} wie folgt beschreibt:

$$p = (\gamma - 1)\rho e_{\text{in}}. \quad (2.4)$$

Der Isentropenexponent $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$ ist durch das Verhältnis der beiden spezifischen Wärmekapazitäten definiert.

2.1.5. Spannungstensor

Ebenfalls werden Materialgleichungen für den Spannungstensor $\hat{\sigma}$ benötigt. Es folgt eine Beschränkung – wie allgemein üblich – auf Newtonische Fluide, also Flüssigkeiten bzw. Gase, die

- ein proportionales Verhalten zwischen Schergeschwindigkeit und Scherspannung aufweisen $\tau \propto \frac{\partial v}{\partial x}$,
- bei ruhendem Fluid lediglich dem hydrostatischen Druck $\hat{\sigma}|_{v=0} = -p\mathbb{I}$ ausgesetzt sind,
- Isotropie aufweisen.

Dies führt zur allgemein bekannten Form des (symmetrischen) Spannungstensors, wie er ebenfalls z. B. in Landau & Lifschitz (1974) nachgeschlagen werden kann.

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot \mathbf{v} \right) + \delta_{ij} \zeta \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (2.5)$$

mit der ersten und zweiten Viskosität μ und ζ , die auch nach ihrem Verhalten als Scher- und Volumenviskosität benannt sind.

Der Zusammenhang zwischen $\hat{\tau}$ und $\hat{\sigma}$ stellt sich wie folgt da:

$$\sigma_{ij} = -p \cdot \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (2.6)$$

mit Kronecker-Delta δ_{ij} .

Beide Parameter sind im Allg. von Temperatur und Dichte abhängig. Durch verschiedene Modellierungsansätze werden sie ggf. parametrisiert und können andere Abhängigkeiten aufweisen, wie es in Abschn. 2.3.1 betrachtet wird. Die Volumenviskosität ist selbst in Experimenten relativ schwierig zu bestimmen, so dass sie in astrophysikalischen Kontext meist vernachlässigt wird.

2.1.6. Gravitationskraft

Naturgemäß sind die Gravitationskräfte bei der Beschreibung einer Akkretionsscheibe von essentieller Bedeutung, da ohne eine zentrale Kraft keine Scheibe denkbar wäre, da es gerade die Zentripetalkraft des Zentralobjektes ist, die ein Fliehkraftgleichgewicht mit dem rotierenden Gas der Scheibe herstellt. Bei sehr massereichen Scheiben treten zusätzliche Effekte durch Selbstgravitation auf.

In diesem Modell sollen Gasscheiben untersucht werden, die sich um ein bereits entstandenes Zentralobjekt M_Z bewegen. Dieses Zentralobjekt, was bei einem AGK nach heutiger Lehrmeinung ein supermassereiches Schwarzes Loch (SMSL) ist, kann als Punktquelle aufgefasst werden.

Nach dem newtonschen Gravitationsgesetz ergibt sich die Beschleunigung zu

$$\mathbf{f}_Z = -\nabla\Phi_Z \quad \text{mit} \quad \Phi_Z = -\frac{M_Z G}{|\mathbf{x}|}, \quad (2.7)$$

wenn \mathbf{x} der Ortsvektor und G die newtonsche Gravitationskonstante ist. Die Zentralmasse ist eine Funktion der Zeit $M_Z = M_Z(t)$, da das Zentralobjekt durch Massenakkretion wachsen kann.

In dieser Arbeit soll, wie auch bereits in Sperling (2009), die Selbstgravitation des Gases Berücksichtigung finden. Hierdurch können Fragmentationseffekte der Scheibe oder auch Verklumpung auftreten, wodurch u. U. Instabilitäten getrieben werden können. Mit der oft verwendeten Monopolapproximation Glg.(2.8) können diese Effekte nicht hinreichend gut abgebildet werden.

$$\mathbf{f}_{\text{Mo}}(\mathbf{x}) = -\nabla \frac{M_{\text{Mo}}(x) G}{|\mathbf{x}|} \quad (2.8)$$

mit der integrierten Gesamtmasse, die innerhalb der Sphäre $|\mathbf{x}'| \leq |\mathbf{x}| = x$ liegt

$$M_{\text{Mo}}(x) = \int_{|\mathbf{x}'| \leq x} \varrho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.9)$$

Aus diesem Grund wird die allgemeinere Formulierung gewählt und das klassische Newtonsche Gravitationsgesetz (2.10) auf die Massenverteilung der Scheibe als Ganzes angewendet

$$\mathbf{f}_{\text{Self}}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \varrho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.10)$$

Die Kombination von Glg. (2.7) und (2.10) beschreibt die gravitativen Kräfte, die auf das Fluid einwirken.

Wie es bereits zuvor erwähnt wurde, spielen geometrische Effekte der Raumzeit, wie sie in der ART berücksichtigt werden, keine Rolle. Dies lässt sich damit begründen, dass der innere Rand der in diesem Modell behandelten Scheibe um einige Größenordnungen vom Ereignishorizont des Schwarzen Loches entfernt liegt. Dabei wird Material, das über den inneren Rand des Modellraumes⁴ fließt, unmittelbar der Zentralmasse zugeschrieben, was eine Idealisierung des Modells darstellt.

Auch die geringe Massendichte ρ und die Laufzeitunterschiede stören die klassische Annahme nicht. Obwohl die räumlichen Ausdehnungen sehr groß sind, gilt dies ebenfalls für die Zeitskalen, auf denen eine signifikante Änderung der Massendichte erfolgt. Dies rechtfertigt das klassische Bild mit instantanem Informationsaustausch und in Kombination dann auch die newtonschen Gesetze.

Beide Bedingungen lassen sich quantitativ Anhand der von z. B. Weinberg (1972) aufgeführten Bedingung verifizieren

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{Slow-motion limit}) \quad (2.11)$$

$$\left(\frac{\Phi}{c^2}\right) \ll 1 \quad (\text{Weak-field limit}) \quad (2.12)$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c . Da das Potential Φ um einen additiven Term unbestimmt ist, muss es zusätzlich die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) = 0$$

erfüllen.

Um im späteren Verlauf kein Integral auswerten zu müssen, wird Glg. (2.10) in die äquivalente⁵ Form einer elliptischen PDG zweiter Ordnung (2.13) umgeformt.

Eine ausführliche Herleitung lässt sich dem Buch von Jackson (1983) entnehmen.

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

⁴Oder: Simulationsgebiet.

⁵Damit das Potential existiert, muss die Massendichte hinreichend schnell im Unendlichen abfallen.

2.2. Turbulenz

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Turbulenz beschrieben und seine wichtigsten Charakteristika benannt werden. Es handelt sich um eine wichtige Eigenschaft von Akkretionsscheiben, die es daher im Modell zwingend zu berücksichtigen gilt.

Dieses komplexe Thema kann nur in groben Zügen umrissen werden. Entsprechende Literatur wären z. B. die Lehrbücher von Lesieur (1997) und Davidson (2004).

2.2.1. Versuch einer Definition

In Lehrbüchern findet sich eine enorme Zahl von unterschiedlichen, zum Teil etwas vage erscheinenden Definitionen von Turbulenz, was u. a. damit begründet ist, dass für die Turbulenz als nicht-linearer Effekt der NSG noch kein geschlossenes theoretisches Gerüst entwickelt werden konnte.

Turbulenz zeigt sich in einer Vielzahl von alltäglichen Erscheinungen, wie z. B. aufsteigendem Rauch, dem Wasserlauf im Bach, dem Umströmen von Tragflächen und auch bei allerhand Wettererscheinungen, etc. Daher haben wir meist ein instinktives Gefühl dafür, was Turbulenz ist: *Eine chaotische/irreguläre und instationäre, meist dreidimensionale Strömung, die Verwirbelungen und Querströmungen auf sehr unterschiedlichen Größenskalen aufweist.*

Eine turbulente Strömung zeigt eine um Größenordnungen gesteigerte Diffusivität im Vergleich zur reinen molekularen Diffusion, was z. B. die Durchmischung wie auch den Wärmetransport immens steigert. Durch die Bildung von Wirbeln auf unterschiedlichen Größenskalen verstärkt sich die Dissipation ebenfalls beträchtlich, was sich wie eine erhöhte effektive (turbulente) Viskosität auswirkt.

Daran kann man schon erahnen, dass das Umschlagen einer laminaren Strömung in eine turbulente mit globalen Änderungen des gesamten Systems einhergeht. Ihre Berücksichtigung bei vielen physikalischen Fragestellungen, auch im astrophysikalischen Kontext, hat in den letzten Jahrzehnten stark zugenommen. Einerseits weil das theoretische Verständnis gestiegen ist, andererseits weil die adäquate numerische Behandlung im Rahmen von Modellen große Fortschritte verzeichnet hat (Kapitel 3). Hierbei sollte jedoch angemerkt sein, dass dies oft lediglich heuristische Modelle sind, weil eine geschlossene Theorie der Turbulenz bis dato fehlt.

Beispielhaft hierfür wäre der Kollaps von molekularen Gaswolken (Klessen et al., 2000), die mittels turbulenter Strömung eine zusätzliche Druckkomponente herausbilden (sog. turbulenter Druck), welche neben dem thermischen Druck die Gaswolke stabilisiert und somit zu einer größeren Kollapszeitskala führt.

Als weiteres Beispiel könnten Supernova Explosionen genannt werden, die ohne Berücksichtigung turbulenter Durchmischung starke Diskrepanzen zur Beobachtung in z. B. den

Elementhäufigkeiten ausweisen würden, da dem Fusionsprozess ein größerer Anteil der Materie durch die gesteigerte Durchmischung zugeführt wird (Schmidt et al., 2006).

2.2.2. Auftreten von Turbulenz

Eine, nach dem Physiker Osborne Reynolds benannte, wichtige dimensionslose Größe ist die Reynolds-Zahl Re . Sie ist als Quotient von trägen zu viskosen Kräften

$$Re = \frac{\rho L V}{\mu} \quad (2.14)$$

definiert, wobei L und V eine charakteristische Längen- und Geschwindigkeitsskala ist. Die Reynolds-Zahl ist ein Indikator für das Auftreten von Turbulenz. Es ist eine Erfahrungstatsache, dass ein Fluid mit einer Reynolds-Zahl, die einen kritischen, problemabhängigen Wert überschreitet, beim Auftreten *kleiner* Störungen vom laminaren in einen turbulenten Zustand umschlägt.

Beispiel Rohrströmung: $Re_{\text{krit}} \approx 2000$

Ohne eine solche Störung bzw. Instabilität tritt jedoch keine Turbulenz auf.

Hierbei ist ein überkritischer (engl. supercritical) und ein unterkritischer⁶ (engl. subcritical) Übergang möglich. Im ersten Fall liegt eine lineare Instabilität vor, die in Kombination mit dem nicht-linearen Verhalten der NSG eine turbulente Strömung hervorruft. Im anderen Fall ist das Fluid linear stabil und es vollführt einen direkten *laminar-turbulenten* Übergang, wenn die Reynolds-Zahl groß genug ist (Globale Instabilität) (vgl. Lesur & Longaretti, 2005).

2.2.3. Turbulenz in Akkretionsscheiben?

Die Arbeit von Weizsäcker (1944) stellt wohl die erste Veröffentlichung dar, die den Mechanismus der Akkretionsscheibe als Geburtsort unseres Sonnensystems diskutiert. Dabei taucht bereits die Idee von einer turbulenten Bewegung (Konvektionszonen) auf. Lüst (1952) geht bei seinen Überlegungen einige Jahre später bereits ganz konkret von einer turbulenten Viskosität aus, die in der damaligen Arbeit über die Mischungswegtheorie motiviert wird. Die feste Überzeugung der Autoren für Turbulenz als Ursache der Viskosität in einer Akkretionsscheibe speist sich aus Abschätzungen der Entwicklungszeitskala, die eine molekulare Viskosität unmöglich als Ursache in Betracht kommen lässt, (siehe z. B. Spitzer, 1962) und gleichzeitig kann von einer sehr hohen Reynolds-Zahl ausgegangen werden.

⁶Oft auch *globaler Übergang* genannt.

Die Reynolds-Zahl kann bei ausschließlicher Vorhandensein einer molekularen Zähigkeit in der Akkretionsscheibe mit weit mehr als $Re \gg 10^{12}$ abgeschätzt werden, wie dies beispielsweise dem Buch von Frank et al. (2002, S.69-70) zu entnehmen ist. Damit wäre sie um viele Größenordnungen oberhalb von in Experimenten gefundenen typischen kritischen Reynolds-Zahlen, die zur Turbulenz führen. Dies legt den Schluss nahe, dass Akkretionsscheiben hochgradig turbulent sein müssen.

Die Theorie sagt allerdings voraus, dass (ungeschichtete) keplersch rotierende Störmungen.⁷ für alle Reynolds-Zahlen linear stabil sind, wie dies z. B. in Lesur & Longaretti (2005) wiedergegeben wird. Der Grund hierfür ist die als stabilisierend wirkende Corioliskraft (Kato et al., 2008, S. 73)

Jedoch gab es stetig in den letzten Jahrzehnten Fortschritte auf diesem Gebiet, so dass eine ganze Klasse von Kandidaten für Instabilitäten diskutiert werden können. Die Autoren Klahr & Bodenheimer (2003) zeigen, dass eine barokline Schichtung⁸ zu einer ausreichend starken und dauerhaften Instabilität führt, um Turbulenz effizient treiben zu können. Sie können ebenfalls zeigen, dass der hierfür notwendige negative Entropiegradient zumindest bei protoplanetaren Scheiben vorliegt. Diese Simulationsergebnisse werden durch die theoretische Analyse von Klahr (2004) gestützt. Dubrulle et al. (2005) kann ähnliche Resultate auch auf barotrope Schichtungen übertragen. Aus ozeanischen Modellen ist bekannt, dass diese beiden Störungsmechanismen miteinander interagieren können. Die auftretenden Instabilitäten sind nicht-achsensymmetrisch, wie dies ebenfalls bei den Arbeiten von Johnson & Gammie (2005a,b) zutrifft. Diese Autoren sind ebenfalls der Auffassung, ausreichend starke Instabilitäten in den von ihnen untersuchten geschichteten, keplersch rotierenden Störmungen identifizieren zu können.

Eine weitere wichtige Klasse stellen die gravitativen Instabilitäten dar. Sie kommen insbesondere bei Akkretionsscheiben um einen AGK und bei jungen stellaren Objekten in Frage. Die Untersuchungen von u. a. Goldreich & Lynden-Bell (1965); Johnson & Gammie (2003) betreffen dünne, vom eigenen Gravitationspotential dominierte Akkretionsscheiben. Beim Vorhandensein einer zu geringen Gastemperatur bzw. einer geringen Kühlzeitskala verklumpen diese Scheiben. Hierzu ist zwangsläufig im Modell die Berücksichtigung der Selbstgravitation des Gases notwendig, die im äußeren Bereich der AGK-Scheiben gegenüber dem Potential des Zentralobjektes dominieren muss (Shlosman et al., 1990; Huré, 2000). Die Arbeit von Duschl & Britsch (2006) belegt, dass alle voll-selbstgravitierenden dünnen β -Scheiben instabil sind.

Für unterkritische Übergänge zur Turbulenz ist die Sachlage unklarer, da die globalen Instabilitäten von Lesur & Longaretti (2005) als unwahrscheinlicher Auslöser von Turbulenz in Akkretionsscheiben eingestuft werden, da sie zu ineffizient wären. Jedoch besagt die von Afshordi et al. (2005); Mukhopadhyay et al. (2005) durchgeführte Analyse eine ausreichend dominante globale Instabilität voraus (bypass-Mechanismus genannt).

⁷Rotationsgeschwindigkeit $v(r) \propto r^{-1/2}$.

⁸Isobaren und Isothermen schneiden sich.

Bei Experimenten mit der Taylor-Couette-Strömung treten insbesondere Effekte der Gefäßränder maßgeblich in Erscheinung, was deren Aussagekraft schmälert und erklärt, weshalb es widersprüchliche Ergebnisse gibt, wie dies in Balbus (2011) diskutiert wird. Dies erklärt die große Anzahl von Veröffentlichungen, die sich mit dieser Thematik befassen.

Unter Berücksichtigung der MHD kann eine solche starke lineare Instabilität (MRI) gefunden werden (siehe Balbus & Hawley, 1991), wie dies in der Einleitung erläutert wird. Jedoch bedarf es eines gewissen Ionisierungsgrades des Gases, der durch die Arbeiten von Gammie & Menou (1998); Fromang et al. (2002) in Scheiben mit geringer Temperatur wie protoplanetaren Scheiben, Scheiben um Weiße Zwerge (zumindest in bestimmten Stadien) und insbesondere in den äußeren Bereichen von AGK-Scheiben unwahrscheinlich macht.

Es soll nicht der Eindruck erweckt werden, dass die in diesem Abschnitt aufgeführten Arbeiten abschließend alle relevanten Veröffentlichungen zu diesem komplexen Themengebiet erfassen würden; sie stellen lediglich markante Punkte der jeweiligen Entwicklung dar.

2.2.4. Theorie von Kolmogorov

Kolmogorov geht in seiner bekannten Theorie (Kolmogorov, 1941, 1980)⁹ von der inkompressiblen NSG und Fluiden mit **sehr hohen** Reynolds-Zahlen aus. Ein Blick auf die theoretischen Überlegungen von Kolmogorov hilft beim Verständnis der fundamentalen Mechanismen von Turbulenz, und um zu verstehen, weshalb es kleinste Skalen gibt, die von essentieller Relevanz sind. Die Überlegungen wurden seitdem stetig erweitert und auch verallgemeinert, was die Betrachtung in dieser Arbeit aber nicht behindert und die Beschränkung auf diese Theorie rechtfertigt.

Kolmogorov erweitert die Idee, welche ursprünglich von Richardson (1926) stammt, mit einigen Hypothesen. Insgesamt kann sie wie folgt grob skizziert werden: Das Fluid bildet Wirbel auf großen Skalen aus, die nicht zwangsläufig isotrop sein müssen, da sie von Randbedingungen und anderen Faktoren (Geometrie) bestimmt sein können. Diese größten Wirbel der turbulenten Strömung, mit einer ebenfalls sehr großen (lokalen) Reynolds-Zahl, sind instabil und zerfallen in kleinere. Somit transferieren (*vererben*) die großen Wirbel ihre kinetische Energie auf die kleineren. Der Prozess des in kleinere Bestandteile aufsplittenden Wirbels führt sich fort, wobei hier die *erste Hypothese* von Kolmogorov einsetzt: Die Wirbel verlieren ihre Richtungsinformationen; sie werden statistisch isotrop. Die *lokale* Reynolds-Zahl, die der jeweiligen Wirbelgeneration zugeordnet werden kann, sinkt mit kleinerer Wirbelgröße ab, so dass mit sinkender Wirbelgröße viskose Effekte an Bedeutung gewinnen, bis sich eine minimale Größenskala ergibt, auf der die kinetische Energie der Wirbel durch Viskosität effizient in Wärme dissipiert werden kann.

⁹Es handelt sich dabei um das russische Original und dessen Übersetzung.

Wird weiterhin auf den großen Skalen Energie zugeführt, so stellt sich ein stationärer¹⁰ Energietransport von großen zu kleinen Skalen ein, im anderen Fall würde das Fluid Bewegungsenergie verlieren und die Turbulenz abklingen.

Nun fließt die *zweite Hypothese*¹¹ von Kolmogorov ein, die besagt, dass das Fluid auf der kleinsten Skala nur von der (kinematischen) Viskosität $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ und der (mittleren) spezifischen Energiedissipationsrate ε determiniert ist. Diese kleinste Skala, auf der die Dissipation des gesamten Systems abläuft, wird Mikroskala von Kolmogorov η_{Kol} genannt und ergibt sich zu:

$$\eta_{\text{Kol}} = \frac{\nu^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \quad (2.15)$$

Sie ist die kleinste relevante Skala einer turbulenten Strömung, die berücksichtigt werden muss, um die Turbulenz vollständig, z. B. in einer Simulation, abzubilden.

Für die Zeitskala, auf der diese Änderungen vonstattengehen, lässt sich ebenfalls ein Zusammenhang finden:

$$\tau_{\text{Kol.}} = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2} \quad (2.16)$$

Bei diesen Betrachtungen ist es zweckmäßig das (spezifische) Energiespektrum $E(k)$ zu definieren, wobei k der Betrag des Wellenvektors \mathbf{k} im Fourier-Raum ist. Man vergleiche hierzu Kapitel V im Lesieur (1997). Der Tensor der Zweipunkt-Korrelation der Geschwindigkeit, der durch die Annahme von Homogenität nicht vom Ort abhängig ist,

$$V_{ij}(\mathbf{r}, t) = \langle v_i(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \quad (2.17)$$

mit der Ensemble-Mittelung $\langle . \rangle$, wird Fourier transformiert

$$\widehat{V}_{ij}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\mathbb{R}^3} V_{ij}(\mathbf{r}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2.18)$$

Da es sich um isotrope Turbulenz handelt, reicht die Betrachtung der Wellenzahl statt des Wellenvektors. Mit der Spur von $V \equiv V_{ii}$ erhält man

¹⁰Die statistischen Größen ändern sich nicht mehr mit der Zeit.

¹¹Oder: erste Ähnlichkeitshypothese.

$$\frac{1}{2}\langle \mathbf{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{V} \, d\mathbf{k} \quad (2.19)$$

$$= \int_0^\infty 2\pi k^2 \widehat{V} \, dk \quad \text{in drei Dimensionen} \quad (2.20)$$

$$= \int_0^\infty \pi k \widehat{V} \, dk \quad \text{in zwei Dimensionen} \quad (2.21)$$

wodurch das angesprochene (spezifische) Energiespektrum hervorgeht.

$$E(k,t) = 2\pi k^2 \widehat{V} \quad \text{in drei Dimensionen} \quad (2.22)$$

$$E(k,t) = \pi k \widehat{V} \quad \text{in zwei Dimensionen} \quad (2.23)$$

Zwischen der Längenskala r und der Wellenzahl k ergibt sich der Zusammenhang

$$k = \frac{2\pi}{r}. \quad (2.24)$$

Innerhalb dieses Modells der getriebenen, isotropen und homogenen Turbulenz von Kolmogorov ergeben sich quasi drei Bereiche im Energiespektrum $E(k)$:

1. der Anfangsbereich, auf dem die Störungen in das Fluid eingekoppelt werden und sich die großen, von Randbedingungen und Geometrie beeinflussten, Wirbel bilden. (makroskopischen Skala L der Strömung; kleines k)
2. der Dissipationsbereich, der von der Größenordnung η_{Kol} ist (maximales k). Hier wird nahezu die gesamte kinetische Energie dissipiert.
3. der Inertialbereich („inertial range“), der die beiden genannten Bereiche miteinander verbindet und weder signifikant Energie dissipieren kann, noch durch das Einkoppeln von Störungen Bewegungsenergie gewinnt $\frac{2\pi}{L} \ll k \ll \frac{2\pi}{\eta_{\text{Kol}}}$. Der Energiefluss ist in diesem Bereich durch die Energiedissipationsrate ε bestimmt.

In der Theorie von Kolmogorov erstreckt sich der Inertialbereich über einen großen Bereich und wird nach der *dritten Hypothese*¹² ausschließlich durch die Längenskala r (bzw. die Wellenzahl k) und die Energiedissipationsrate ε charakterisiert. Allein aus Gründen der Dimensionsanalyse folgt das bekannte Potenzgesetz (2.25) mit dem Exponenten $-\frac{5}{3}$, was experimentelle Bestätigung gefunden hat.

$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.25)$$

C_k ist – nach den Hypothesen – eine universelle Konstante.

¹²Oder: zweite Ähnlichkeitshypothese.

2.2.5. Zweidimensionale Turbulenz

Oft kann es zweckmäßig sein, dem System innewohnende Symmetrien zu nutzen, um einen Sachverhalt einfacher darzustellen oder den numerischen Rechenaufwand zu verringern.

Dies wird ebenfalls häufig bei Akkretionsscheiben genutzt, weil der numerische Rechenaufwand nicht unerheblich ist (siehe Kap. 3) und Akkretionsscheiben bis zu einem gewissen Grade durchaus einige Symmetrien aufweisen können (siehe Abschn. 2.3).

Der durch eine Symmetrie zustande kommende Übergang von der dreidimensionalen NSG zur zweidimensionalen Form muss im Folgenden diskutiert werden, da sich maßgeblich das Lösungsverhalten verändert. Dies wirkt sich ebenfalls auf die Turbulenz aus. Dies haben Kraichnan (1967) für getriebene und Batchelor (1969) für zerfallende Turbulenz als Erstes beschrieben.¹³ In Abschnitt 3.2.3 wird auf dieses Hintergrundwissen zurückgegriffen und es als Diskussionsgrundlage genutzt.

Enstrophieerhaltung

Die Enstrophie, als Varianz der Vortizität (Wirbelstärke), stellt eine Erhaltungsgröße für die zweidimensionalen inkompressiblen NSG dar, wenn dissipative Effekte vernachlässigt werden. Sie ist in drei Dimensionen **nicht** erhalten, weshalb es zu dem unterschiedlichen Verhalten kommt.

Definition von Enstrophie:

$$D(t) = \frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle \quad (2.26)$$

Definition von Vortizität:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \boldsymbol{v} \quad (2.27)$$

Dabei meint $\langle . \rangle$ eine Ensemble-Mittelung. Diese Definition der Enstrophie kann dem Lehrbuch von Lesieur (1997) auf S. 157 entnommen werden.

Die Einschränkung auf nicht viskose Fluide ist dabei von untergeordneter Bedeutung, da bei der Betrachtung von Turbulenz meist von sehr großen Reynolds-Zahlen ausgegangen wird. Dann spielt Dissipation durch Viskosität nur in sehr kleinen Skalen eine Rolle und die folgenden Aussagen treffen auf einen weiten Bereich des Spektrums zu.

Der Theorie von Kraichnan nach tritt bei zweidimensionaler Turbulenz eine duale Kaskade auf: eine inverse Energie- und eine direkte Enstrophiekaskade. Die Enstrophie wird von großen zu kleinen Skalen transportiert, wie dies im dreidimensionalen Fall auf die

¹³Der Übersichtsartikel von Boffetta & Ecke (2012) zeigt umfassend die Probleme und den aktuellen Forschungsstand auf diesem Gebiet.

Energie zutraf, wohingegen die Energie zu den größten Skalen hinauf wandert. Dabei kommt es zu einem unterschiedlichen Skalenverhalten. Das Energiespektrum skaliert im Bereich der Enstrophiekaskade mit ungefähr k^{-3} und im Bereich der inversen Energiekaskade mit den bekannten $k^{-5/3}$.

Streng genommen kann reine 2D-Turbulenz in der Natur nicht auftreten, aber es zeigt sich, dass durch Unterdrücken des dritten Freiheitsgrades der Bewegung, bedingt z. B. durch die Geometrie (sehr dünner Schichten) oder durch Magnetfelder, diese Effekte in Erscheinung treten können (Boffetta & Ecke, 2012).

Dieses Verhalten ist diametral zum dreidimensionalen Fall, da die größten Wirbel im System stetig mit Energie gespeist werden und diese nur noch durch Reibung an Wänden oder dergleichen wieder abgeben können. Es bildet sich nicht die typische Energiekaskade von großen zu kleinen Wirbeln mit anschließender Dissipation.

Zweidimensionale Turbulenz in Akkretionsscheiben sinnvoll?

Zweidimensionale Turbulenz ist für Akkretionsscheiben zwar nicht generell auszuschließen, aber selbst bei geometrisch dünnen Scheiben nicht plausibel. Dies kann an folgender Überlegung eingesehen werden: Auf der einen Seite liegt maximal ein Verhältnis von 1:100 der Scheibenhöhe¹⁴ zu Radius vor. Auf der anderen Seite gilt für das Verhältnis von makroskopischer Skala zu Mikroskala (Lesieur, 1997, S. 183)

$$\frac{L}{\eta_{\text{Kol}}} \approx \text{Re}^{3/4}. \quad (2.28)$$

Mit der Abschätzung $\text{Re} \approx 10^{12}$ (Frank et al., 2002, S. 69-70) wird ersichtlich, dass beides um viele Größenordnungen auseinander liegt. Damit sind bereits Wirbel im sog. Inertialbereich um viele Größenordnungen kleiner als die Scheibenhöhe, so dass ihnen alle drei räumlichen Freiheitsgrade zur Verfügung stehen; sie also keine Anisotropie durch die geringe Scheibenhöhe spüren sollten.

2.3. Akkretionsscheiben

Es sollen in diesem Abschnitt einige Akkretionsscheiben betreffende Fakten erläutert werden, auf welche im späteren Verlauf zurückgegriffen werden wird.

¹⁴Skalenhöhe der Akkretionsscheibe.

2.3.1. Parametrisierungen der Viskosität

Wie zuvor angesprochen, entzieht sich Turbulenz im Modell einer unmittelbaren Beschreibung, weil eine geschlossene Theorie fehlt. Daher ist man bei einigen Modellen dazu übergegangen direkt die Effekte zu parametrisieren, die sich auf die Scheibe auswirken. Im Falle von Akkretionsscheiben ist der prägnanteste sicherlich der Drehimpulstransport, der durch viskose Effekte ermöglicht wird.

Dies kann durch Einführen einer *turbulenten Viskosität* ν_t erreicht werden, die zur molekularen Viskosität hinzuaddiert wird¹⁵ und darüber hinaus keine weitere Änderung am Gleichungssystem bedarf. Dieser Ansatz ist sehr gebräuchlich und hat u. a. eindimensionale Modelle ermöglicht, die auf eine derartige Parametrisierung angewiesen sind, da sie zwangsläufig nicht in der Lage sind turbulente Bewegungen abzubilden.

Die turbulente (kinematische) Viskosität kann aus einer turbulenten Geschwindigkeitskala v_t und einer Längenskala l_t abgeschätzt werden

$$\nu_t \propto l_t v_t. \quad (2.29)$$

α -Ansatz Das von Shakura & Sunyaev (1973) eingeführte eindimensionale α -Scheibenmodell beinhaltet neben weiteren Annahmen eine solche Beschreibung der turbulenten kinematischen Viskosität und hat sich durch gute Voraussagen als Standard-Ansatz etabliert. Die Idee ist, dass die turbulente Geschwindigkeit nicht größer als die Schallgeschwindigkeit c_s sein kann, da sie sonst innerhalb kurzer Zeit effizient durch Kompressionsarbeit in Stoßfronten in Wärme umgesetzt würde. Als Längenskala wird die maximale Skala gewählt, bei welcher noch isotrope Wirbel möglich wären: die Skalenhöhe der Scheibe h

$$\nu_t = \alpha h c_s, \quad (2.30)$$

mit dem als konstant angenommenen Parameter $\alpha < 1$, der jedoch nicht universellen Charakter besitzt. Dieses Modell vernachlässigt u. a. Selbstgravitation und verliert in diesem Fall seine Gültigkeit (Duschl et al., 2000).

β -Ansatz Ein alternativer Ansatz von Duschl et al. (2000) setzt direkt bei der Reynolds-Zahl $\text{Re} = s v_\phi \nu_t^{-1}$ an, dabei werden als charakteristische Skalen der Radius s und die lokale Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ angenommen. Es wird postuliert, dass in der Scheibe (dauerhaft) die kritische Reynolds-Zahl Re_{krit} nicht überschritten werden kann, da dies sonst zum weiteren Treiben von Turbulenz führen würde. Dies wiederum würde dem Postulat nach die turbulente Viskosität als Regelgröße steigern und zum Dämpfen der Turbulenz führen, so dass sich ein Gleichgewicht einstellen kann.

¹⁵Da $\nu_t \gg \nu$ gilt, wird häufig die molekulare Viskosität vernachlässigt.

Dabei wird auch hier vorausgesetzt, dass eine große Reynolds-Zahl automatisch zu turbulenter Strömung führt, ohne die dazu notwendigen Instabilitäten zu identifizieren. Über diese Reynolds-Zahl wird dann die turbulente kinematische Viskosität definiert

$$\text{Re}_{\text{krit}} \approx \frac{s v_\phi}{\nu_t} \quad \Rightarrow \quad \nu_t = \beta s v_\phi. \quad (2.31)$$

wobei $\beta \approx \text{Re}_{\text{krit}}^{-1}$ ist. Dieser Ansatz gilt auch im selbstgravitierenden Fall und zeigt bei geringer Scheibenmasse Übereinstimmung mit dem α -Ansatz (Duschl et al., 2000). Mit einer Abschätzung für $\text{Re}_{\text{krit}} \gtrsim 1000$, die sich aus einer Vielzahl von Experimenten motivieren lässt, wären Werte von $\beta < 10^{-3}$ plausibel. Ebenfalls ist der Ansatz konsistent mit den Überlegungen von Richard & Zahn (1999), die als Grundlage das Taylor-Couette Experimente analysiert haben und daraus auf nahezu denselben Zusammenhang gestoßen sind. Sie schätzen $\beta \approx 10^{-5}$ ab. In Kapitel 4 wird diese Parametrisierung als Vergleich zu dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren, welches im folgenden Kapitel vorgestellt wird, dienen.

Bei diesen heuristischen Ansätzen ist zu beachten, dass die Stärke der parametrisierten (turbulenten) kinematischen Viskosität letztlich **nicht** vom abgebildeten Grad der Turbulenz in der betreffenden numerischen Simulation beeinflusst wird. Soll heißen, wenn beispielsweise zwei- oder dreidimensionale Simulationen durchgeführt werden, die einen Teil der Turbulenz (bis zu einer bestimmten Skala) abzubilden im Stande sind, so kann um diesen Anteil a priori nicht die Parametrisierung gedrosselt werden. Die abgebildete turbulente Bewegung übernimmt ihrerseits jedoch bereits u. a. Drehimpulstransport, so dass es zu einer Überschätzung der Effekte kommt.

2.3.2. Zeitskalen

Die Betrachtung von Zeitskalen ist ein wichtiges Beurteilungskriterium, um einschätzen zu können, welcher physikalische Mechanismus für den jeweiligen Effekt in Frage kommen könnte. Insbesondere bei späteren Simulationen muss die viskose Zeitskala bei der Beurteilung der Akkretionsrate herangezogen werden, um ggf. andere kurzzeitige Prozesse ausschließen zu können.

Dynamische Zeitskala Sie ist die Umlaufzeit des Gases in der Scheibe um das Zentralobjekt.

$$t_{\text{dyn}} \propto \frac{s}{v_\phi} \quad (2.32)$$

mit der Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ und Radius s .

Bei numerischen Simulationen (Kap. 4) kann davon ausgegangen werden, dass nach einigen Umläufen des äußeren Randes das gesamte System relaxiert ist.

Viskose Zeitskala Sie gibt maßgeblich die Entwicklungszeitskala der Scheibe und damit auch die des Zentralobjektes an. Sie kann zu

$$t_{\text{vis}} \propto \frac{s^2}{\nu_t} \quad (2.33)$$

abgeschätzt werden (z. B. Kato et al., 2008, Glg. 2.61). Im Fall von β -Viskosität (2.31) ergibt sich ein interessanter Zusammenhang zwischen dynamischer und viskoser Zeitskala:

$$t_{\text{vis}} \propto \frac{s^2}{\beta s v_\phi} = \beta^{-1} t_{\text{dyn}} \quad (2.34)$$

Woraus ersichtlich wird, dass selbst bei vorliegen einer turbulenten Viskosität die viskose die dynamische Zeitskala um einige Größenordnungen ($10^3 - 10^5$) übertrifft. Ganz allgemein gilt in Akkretionsscheiben $t_{\text{vis}} \gg t_{\text{dyn}}$.

2.3.3. Strahlungsdruck

Als ein die Akkretion hemmender Prozess kann der Strahlungsdruck in Erscheinung treten, da er der Gravitationskraft entgegenwirkt. Obwohl der Strahlungsdruck in unserer alltäglichen Erfahrung meist keine Rolle spielt, kann er durchaus eine größere Kraft auf die ionisierten Teilchen ausüben, als es die Gravitationskraft vermag. Dies führt zu einer Begrenzung der Akkretionsrate \dot{M} und damit auch zu einer Obergrenze der Leuchtkraft. Sie wird Eddington-Leuchtkraft L_{Edd} genannt und ist für den Fall von Akkretion auf ein sphärisches Objekt (vgl. Kato et al., 2008, Abschn. 2.1.1)

$$L_{\text{Edd}}(t) = \frac{4 \pi c G M(t) m_p}{\sigma_T} \quad (2.35)$$

$$\dot{M}(t) \leq \frac{L_{\text{Edd}}(t)}{c^2 \eta} \approx 2,18 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\eta} \left(\frac{M(t)}{10^6 M_\odot} \right) M_\odot / \text{a} \quad (2.36)$$

$$\dot{M}_{\text{Edd}} \equiv \frac{L_{\text{Edd}}}{c^2 \eta}, \quad (2.37)$$

mit der Gravitationskonstante G , der Masse des Zentralobjektes M und des Protons m_p , sowie dem Thompson-Streuquerschnitt σ_T , der Lichtgeschwindigkeit c und einem Effizienzparameter $\eta \approx 0,1$. Er gibt den Bruchteil von akkretierter Masse in Strahlungsenergie $\eta L = \dot{E} = \dot{M} c^2$ an und beträgt, wie in der Einleitung beschrieben, 5,7% für ein nicht rotierendes SL bis hinauf zu 42% für ein rotierendes (extrem Kerr) SL (siehe Kato et al., 2008, Abschn. 1.1.3).

Obwohl das Modell von einer sphärische Akkretion ausgeht, was bei Akkretionsscheiben offensichtlich nicht gegeben ist, gilt diese Beziehung hinreichend gut für geometrisch dünne Scheiben (Kato et al., 2008). Unter gewissen Bedingungen ist auch eine sog. *Super Eddington-Leuchtkraft* möglich.

Es wird ersichtlich, dass die Massenakkretion eines typischen supermassereichen Schwarzen Loches ($10^6 - 10^9 M_\odot$) bis zu einige Sonnenmassen pro Jahr betragen kann und das diese Erscheinungen extrem leuchtkräftig sind.

Für spätere Vergleiche mit Simulationsergebnissen wird auf diese Beziehung zurückgegriffen, auch wenn die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Simulationen *keinen* Strahlungsdruck berücksichtigen und daher keine solche Beschränkung inhärent ist.

Zu diesem Zweck ist es sinnvoll, die maximal erreichbare Masse $M_{\text{Edd}}(t)$ zu betrachten, wenn ein Zentralobjekt stets mit $\dot{M}_{\text{Edd}}(t)$ wachsen würde.¹⁶ Durch Integration von (2.35) folgt

$$M_{\text{Edd}}(t) \approx M_0 \cdot e^{\alpha t}, \quad (2.38)$$

wobei für $\eta = 0,1$ angenommen wurde und $\alpha = 2,18 \cdot 10^{-8}/\text{a}$ ist. Die Anfangsmasse ist mit M_0 gekennzeichnet.

¹⁶Sei der Massenverlust durch Strahlung vernachlässigt.

3. Simulationsansätze in der Hydrodynamik

Im vorangegangenen Kapitel ist neben der Motivation des physikalischen Modells ebenfalls die Rolle der Turbulenz im Kontext einer Akkretionsscheibe beleuchtet worden. Die Turbulenz, als nicht-linearer Effekt, zeigt auch beim numerischen Lösen des mathematischen Problems seine Schwierigkeiten.

In diesem Kapitel sollen nun die Auswirkungen auf das numerische Lösungsverfahren und die damit verbundenen Lösungsstrategien im Detail beleuchtet werden. Nachdem die Idee einer Large Eddy Simulation (LES) geschildert wurde, soll deren konkrete Umsetzung in ein mathematisches Verfahren motiviert werden. Dabei tritt das sog. Schließungsproblem (engl. closure problem) auf, welchem lediglich mit *heuristischen* Bedingungen begegnet werden kann. Dieser Weg soll in Abschnitt 3.2.2 besprochen werden. Das Kapitel schließt mit der Beschreibung der konkreten Implementierung des Verfahrens in das Softwareprogramm `fosite`.

3.1. Direkte numerische Simulation

Im Abschnitt 2.2 wurden die Auswirkungen der Turbulenz auf das globale Verhalten der Strömung besprochen und ebenfalls festgestellt, dass es die Mikroskala von Kolmogorov η_{Kol} gibt, die in einer turbulenten Strömung unbedingt berücksichtigt werden muss, um ein korrektes Ergebnis zu erhalten.

Simulationen, unabhängig vom verwendeten numerischen Verfahren, die alle relevanten Skalen – zeitlich wie räumlich – auflösen, werden direkte numerische Simulation (DNS) genannt. Der numerische Aufwand einer DNS ist immens, da pro Raumrichtung die Anzahl der Gitterzellen mit $N \propto \text{Re}^{3/4}$ (Lesieur, 1997, S. 375) skaliert. Sind die Zeitschritte durch die CFL-Zahl¹ limitiert, skalieren diese ebenfalls mit $N_t \propto \text{Re}^{3/4}$ (Schmidt et al., 2006), was den Gesamtaufwand mit $\propto \text{Re}^3$ im Dreidimensionalen bzw. $\propto \text{Re}^{9/4}$ im Zweidimensionalen anwachsen lässt.²

¹Benannt nach Courant et al. (1928).

²Selbst ohne Zeitschrittlimitierung des Verfahrens, müsste die kleinste relevante Zeitskala der Turbulenz berücksichtigt werden müsste, was zum selben Ergebnis führt.

Dies lässt auf absehbare Zeit DNS für die meisten astrophysikalische Fragestellungen nicht realistisch erscheinen.³

3.2. Large Eddy Simulation

Nun wird die Idee hinter der sog. LES⁴ betrachtet.

Ganz Allgemein ist jedem numerischen Lösungsverfahren inhärent, dass eine räumliche (und zeitliche) Diskretisierung vorgenommen wird. Die räumliche Diskretisierung bedingt eine endliche Auflösung im Verfahren Δx . Unterhalb dieser Gitterauflösung werden keine Änderungen der Strömungsgrößen berücksichtigt, dies gilt gleichermaßen für Finite-Volumen-, Finite-Differenzen- und Finite-Elemente-Verfahren. Lediglich kann es zu unterschiedlich wirkender *effektiver Filterbreite* kommen, die durch das Gitter vermittelt wird.

Alle im Verfahren berechneten Größen stellen gefilterte Werte dar und können mathematisch als Faltung zwischen Filter $G_{\Delta x}$ (des Gitters) und Strömungsgröße aufgefasst werden.

Diese Übersicht orientiert sich stark an dem Lehrbuch von Lesieur (1997) und am Verfahren von Schmidt et al. (2006), welches die inkompressible Version von Germano et al. (1991) auf kompressible Fluide überträgt.

Insgesamt geht die Idee der LES auf den Meteorologen Smagorinsky (1963) zurück, der dieses Methode, nach dem Wissen des Autors, als erster zum Zwecke von Wetterprognosen verwendet hat.

3.2.1. Filterung

Sei q eine Strömungsgröße, dann wirkt sich eine allgemeine Filterfunktion G wie folgt aus:

$$\bar{q}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle q(\mathbf{x}, t) \rangle_G = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) q(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}', \quad (3.1)$$

wobei der Filter die Normierungsbedingung

$$1 = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (3.2)$$

erfüllen muss.

³Allein der Arbeitsspeicherbedarf kann mit $\text{Re}^{9/4} \text{ Bytes} \approx 10^{27} \text{ Bytes} = 10^{12} \text{ PB}$ als (optimistische) untere Grenze abgeschätzt werden.

⁴Da die Begrifflichkeit *Large Eddy Simulation* im deutschen Sprachgebrauch etabliert ist, soll sie hier ebenfalls verwendet werden. **Grobstruktursimulation** wäre eine denkbare Alternative.

Hierbei wäre die Filterfunktion G von Ort und Zeit abhängig. Also im vorherigen Bild zu bleiben: Das Gitter⁵ bzw. die Auflösung des Gitters würde mit \mathbf{x} und t variieren, was in komplexen Geometrien, zumindest ersteres, auch gewünscht ist.

Da dieser Filtertyp i. A. weder mit räumlichen noch zeitlichen Ableitungen kommutiert, soll der Blick auf einen statischen, homogenen (nicht zwangsläufig isotropen) Filter gerichtet sein:

$$\bar{q}(\mathbf{x}, t) \equiv \langle q(\mathbf{x}, t) \rangle_G = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') q(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (3.3)$$

Die Filteroperation (3.3) kommutiert mit räumlichen und zeitlichen Ableitungen.

Die Strömungsgrößen lassen sich zusammengesetzt aus dem gefiltertem Anteil \bar{q} und einer Fluktuation q' , die auf Skalen unterhalb des Gitters (SGS) ablaufen, darstellen.

$$q = \bar{q} + q' \quad (3.4)$$

Zu beachten ist, dass die Filterung **nicht** idempotent ist:

$$\bar{\bar{q}} \neq \bar{q} \quad (3.5)$$

somit gilt für die Fluktuation:

$$\bar{q}' = \bar{q} - \bar{\bar{q}} \neq 0 \quad (3.6)$$

Explizite versus implizite Filterung

Es soll in dieser Arbeit ausschließlich eine implizite Filterung angewendet werden, die durch das Gitter hervorgeht. Dies ist eine gangbare und häufig angewendete Vorgehensweise in der Literatur (Ghosal, 1996).

Ihr Vorteil liegt im verringerten numerischen Aufwand, welcher sich durch die eingesparte explizite Filterung und durch das optimale Ausnutzen der Gitterauflösung ergibt. Soll beim expliziten Filtern die gleiche effektive Auflösung erreicht werden, so müsste ein feineres Gitter gewählt werden, da zwangsläufig die Filterbreite größer als die Gitterweite sein sollte.

Nachteile sind, dass die Rundungsfehler des Verfahrens und die *numerische* Viskosität das SGS-Verfahren stärker beeinflussen, da sie auf derselben Skala auftreten. Diese beiden Skalen werden nicht klar separiert, wie dies bei einer expliziten Filterung mit

⁵Siehe Abschnitt 3.2.1.

$\Delta_G \gg \Delta_x$ der Fall wäre. Bei einem Verfahren zweiter Ordnung, wie es in dieser Arbeit Anwendung findet, ist eine Beeinflussung des Verfahrens durch diese Fehler zwar nicht auszuschließen, aber sie dominieren nicht das SGS-Verfahren als Ganzes, wie dies ebenfalls aus der obig zitierten Arbeit von Ghosal (1996) hervorgeht.

Darüber hinaus geht die Kontrolle über die Gestalt des Filters verloren, da sie vom Gitter vorgegeben wird. Beim FVV kann genähert von einem „top-hat“ Filter

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 1/\Delta & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \Delta/2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

ausgegangen werden (siehe Garnier et al., 2009, Kap. 6).

Inhomogene und anisotrope Filterung

In diesem Abschnitt sollen einige Bemerkungen zu anisotropen wie auch zu inhomogenen Filtern gemacht werden, wie sie häufiger stillschweigend in der Literatur vorausgesetzt werden.

Anisotroper Filter Im späteren Verlauf der Arbeit wird auf eine Filterbreite Δ Bezug genommen. Diese ist bei einem anisotropen Filter jedoch nicht eindeutig bestimmt, so dass hier ein Kompromiss gefunden werden muss. Es soll die geometrische Mittelung

$$\Delta = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \Delta_i} \quad (3.8)$$

angewendet werden⁶, wie sie ursprünglich von Deardorff (1970) eingesetzt wurde und erst später durch Scotti et al. (1993) auf fundiertere theoretische Grundlage gestellt werden konnte.

Da dreidimensionale Turbulenz klare Unterschiede zu ihrem Pendant in zwei Dimensionen aufweist (vgl. Abschn. 2.2.5), finden sich in der Literatur fast ausschließlich dreidimensionale LES wieder, weshalb viele Aussagen hierzu für den zweidimensionalen Fall adaptiert werden müssen⁷.

Eine dabei entstehende zentrale Frage betrifft die Filterbreite, die sich im Dreidimensionalen zu $\Delta = \sqrt[3]{\Delta_x \Delta_y \Delta_z}$ ergibt und ins Zweidimensionale übertragen zu $\Delta = \sqrt{\Delta_x \Delta_y}$ wird.

⁶Der Laufindex i bezeichnet die zwei bzw. drei Koordinatenrichtungen.

⁷Die Notwendigkeit einer 2D-LES für die Behandlung von Akkretionsphänomenen ergibt sich, wie bereits diskutiert, aus dem Rechenaufwand; ihre Sinnhaftigkeit wird u. a. in Abschnitt 2.2.5 motiviert.

Die Filteroperation wird, wie oben diskutiert, durch das Gitter vermittelt und ist daher a priori genau durch dieses bestimmt. Das in dieser Arbeit verwendete Verfahren nimmt jedoch nur eine (Rotations-)Symmetrie in der dritten Raumrichtung an, und löst ansonsten weiterhin die dreidimensionalen Gleichungen – eben auch mit einer Rotationsgeschwindigkeit. Daher bietet sich alternativ auch eine andere Lesart an: Es handelt sich um eine dreidimensionale Simulation mit $N_x \times N_y \times 1$ Gitterzellen. Es findet damit implizit eine Filterung in der dritten Raumdimension durch eine einzige Gitterzelle statt, die bei einer rotationssymmetrischen Geometrie eine Ausdehnung von $\Delta_z \equiv \Delta_\phi = 2\pi s$ hat, wenn s der Radius ist. Ebenfalls wäre es denkbar bei einer flachen Scheibe ($x, y \equiv s, \phi$) die Filterung in der dritten Raumrichtung (in z -Richtung) mit der Skalenhöhe der Scheibe zu identifizieren $\Delta_z \equiv h(s)$, was zwar eine starke Hypothese darstellt, aber letztlich analog zur α -Parametrisierung aufzufassen wäre.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren wird sich hauptsächlich auf den konservativeren, ersten Ansatz (3.9) stützen, aber ebenfalls auf die zweite und dritte, progressive, Methode (3.10) und (3.11) zurückgreifen. Es soll sich anhand von Simulationen herausstellen, ob dies ein gerechtfertigter Ansatz ist, der evtl. eine Gemeinsamkeit mit der β -Parametrisierung aufweist.

Die möglichen Filterbreiten ergeben sich damit zu

$$\Delta_{2D} = \sqrt{\Delta_x \Delta_y} \quad (3.9)$$

$$\Delta_{3D,rot} = \sqrt[3]{\Delta_s \Delta_z s} \quad (3.10)$$

$$\Delta_{3D,flach} = \sqrt[3]{\Delta_s \Delta_\phi h(s)}, \quad (3.11)$$

wobei in (3.9) mit x, y offen gelassen wurde, um welches konkrete Gitter es sich handelt⁸. Ebenfalls ist beim rotationssymmetrischen Filter auf den Faktor $\sqrt[3]{2\pi}$ verzichtet worden. Dies hat den praktischen Grund, dass bei Tests die Version des Filters mit dem Faktor $\sqrt[3]{2\pi}$ zu vermehrten numerischen Instabilitäten mit Simulationsabbrüchen geführt hat. Letztlich ist beim flachen Filter mit $h(s)$ auch nur eine Abschätzung der Scheibenhöhe eingeflossen, die nicht scharf definiert werden kann, sondern sich aus der Höhenskala ableiten lässt. Erstaunlicherweise führt die Verminderung um den relativ kleinen Faktor bereits zu stabilen Simulationen, deren Ergebnisse in Kap. 4 zu sehen sind.

Inhomogener Filter Wird ein inhomogener Filter eingesetzt, wie es bedingt durch implizites Filtern mittels eines **nicht** äquidistanten Gitters hervorgerufen wird, so kommutieren räumliche Ableitung und Filteroperation nicht miteinander,

⁸ x, y, z sind noch nicht näher bezeichnete Koordinaten, die sich erst durch die konkrete Wahl der betreffenden Geometrie ergeben.

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \neq \overline{\frac{\partial q}{\partial x}}. \quad (3.12)$$

was nach Pope (2000, S. 562) darstellbar ist als

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial q}{\partial x}} + \int \frac{\partial G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x} q(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'. \quad (3.13)$$

Nach Ghosal & Moin (1995) ist der dabei entstehende Fehler von der Ordnung $O(\Delta_G^2)$ und somit von der gleichen Fehlerordnung $O(\Delta_x^2)$ wie das in dieser Arbeit verwendete FVV. Somit kommutiert ein inhomogener Filter mit der räumlichen Ableitung innerhalb des Verfahrensfehlers, wenn $\Delta_G \approx \Delta_x$ gilt, was beim impliziten Filtern automatisch erfüllt ist. Diese Aussage trifft auch noch auf die obigen „progressiven“ Filter**breiten** zu, da die eigentliche Filteroperation und damit die aus ihr resultierenden, gefilterten Größen **unverändert** sind. Man beachte, dass sich nur die Interpretation des Filters, also die ihm zugeschriebene Breite, geändert hat.

Filterung der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (3.14)$$

Im kompressiblen Fall wird noch die mit der Massendichte gewichtete, gefilterte Geschwindigkeit (Favre-Filterung) benötigt, die nach Favre (1983) benannt ist. Erweiterungen, die sich auf die NSG beziehen, wurden von Vreman et al. (1997) vorgeschlagen.

$$\tilde{v} = \frac{\overline{\rho \mathbf{v}}}{\bar{\rho}} \quad (3.15)$$

Die Favre-Filterung lässt sich ganz allgemein auf alle anderen Strömungsgrößen anwenden.

Diese Methode wird bei kompressibler Turbulenz⁹ in anderen Arbeiten mit Erfolg eingesetzt (Schmidt et al., 2006; Schmidt & Federrath, 2011) und löst das Problem in Glg. (3.14) mit dem gefilterten Term $\bar{\rho} \mathbf{v}$.

Damit ergibt sich:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}}) = 0 \quad (3.16)$$

⁹Meint: Turbulenz in Fluiden, bei denen Kompressionseffekte eine Rolle spielen.

Filterung der Navier-Stokes-Gleichung

Wird nun die Filterung auf die NSG angewendet, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \overline{\varrho \mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \overline{\varrho \nabla \Phi_{\text{self}}} + \overline{\varrho \mathbf{f}_{\text{ext}}}, \quad (3.17)$$

wobei mittels der Favre-Filterung ebenfalls in

$$\frac{\partial \overline{\varrho \bar{\mathbf{v}}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\varrho \bar{\mathbf{v}} \otimes \mathbf{v}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} - \bar{\varrho} \nabla \tilde{\Phi}_{\text{self}} + \bar{\varrho} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \quad (3.18)$$

umgeformt werden kann. Der nicht-lineare Advektionsterm $\nabla \cdot \overline{\varrho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}$ ist durch die Unkenntnis der *ungefilterten* Größen $\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$ nicht berechenbar. Bei Betrachtung von

$$[\overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}}]_{ij} = \overline{v_i v_j} = \overline{\bar{v}_i \bar{v}_j} + \overline{\bar{v}_i v'_j} + \overline{\bar{v}_j v'_i} + \overline{v'_i v'_j} \neq \bar{v}_i \bar{v}_j = [\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}}]_{ij} \quad (3.19)$$

wird verständlich, dass

$$\overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} \neq \overline{\bar{\mathbf{v}}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} \implies \overline{\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}} - \overline{\bar{\mathbf{v}}} \otimes \tilde{\mathbf{v}} \equiv \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}} \neq 0 \quad (3.20)$$

gilt. Der sog. subgrid-scale Tensor $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}$ ist nur mit Null identisch, wenn das Fluid ausreichend aufgelöst wäre, weil dann $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ gelten würde.

Mit diesem Tensor lässt sich Glg. (3.17) darstellen als

$$\frac{\partial \overline{\varrho \bar{\mathbf{v}}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{\varrho \bar{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}}) = -\nabla \bar{p} + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}) - \bar{\varrho} \nabla \tilde{\Phi}_{\text{self}} + \bar{\varrho} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}. \quad (3.21)$$

Die in der Literatur als subgrid-scale Modellierung bezeichnete Methode besteht nun darin, eine *gute* (heuristische) Approximation für u. a. $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}$ zu finden. Die in dieser Arbeit verwendeten Schließungsbedingungen werden in Abschnitt 3.2.2 vorgestellt.

Filterung der Energiegleichung

In der Energiegleichung (2.3) ergeben sich durch Filterung in mehrererlei Hinsicht Änderungen.

Die erste Änderung spiegelt sich in dem Umstand wider, dass die aufgelöste kinetische Energie $\frac{1}{2}\rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ und die gefilterte kinetische Energie $\langle e_{\text{kin}} \rangle_G$ **nicht** identisch sind, wie man es naiv erwarten würde. Daraus kann eine turbulente Energie definiert (vgl. Sagaut, 2002, Kap. 3) werden:

$$e_{\text{sgs}} \equiv \frac{1}{2} (\overline{\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} - \bar{\rho} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}). \quad (3.22)$$

Dies ist aber direkt mit der Spur des subgrid-scale Tensors identisch, wie es aus Glg. (3.20) unmittelbar ersichtlich ist¹⁰:

$$e_{\text{sgs}} = -\frac{1}{2} \text{spur}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}). \quad (3.23)$$

Wird der subgrid-scale Tensor spurfrei dargestellt, wie es ebenfalls beim Spannungstensor, mit dem Übergang von $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ zu $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ realisiert wurde, so ergibt sich:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}} = \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^* + \frac{1}{3} \text{spur}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}) \mathbb{I} \quad \text{mit} \quad \text{spur}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^*) = 0 \quad (3.24)$$

Dies in Glg. (3.21) eingesetzt und umsortiert, führt zu:

$$\frac{\partial \bar{\rho \mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho \mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) = -\nabla \cdot \left(\underbrace{p - \frac{1}{3} \text{spur}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}})}_{\equiv p_{\text{sgs}}} \right) + \nabla \cdot (\bar{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^*) - \bar{\rho} \nabla \tilde{\Phi}_{\text{self}} + \bar{\rho} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}}, \quad (3.25)$$

was direkt aufzeigt, dass die Spur des Tensors wie eine Druckkraft wirkt. Sie soll, wie in der Literatur üblich, als subgrid-scale oder turbulenter Druck bezeichnet sein (Schmidt & Federrath, 2011). Aus dieser Definition ergibt sich ein modifizierter, effektiver Druck p_{eff}

$$p_{\text{eff}} = p - \frac{1}{3} \text{spur}(\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}) = p + \frac{2}{3} e_{\text{sgs}} = p + p_{\text{sgs}}. \quad (3.26)$$

Aus der Filterung der Energiegleichung (2.3) folgen – im Vergleich zur gefilterten NSG (3.18) – eine ganze Reihe zusätzlicher nicht aufgelöster (subgrid-scale) Terme. Dies liegt

¹⁰ $\text{spur}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

u. a. an dem Produkt zwischen Geschwindigkeit und der entsprechenden phys. Größe, wie sie z. B. in den Ausdrücken $\overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}}$, $\overline{\rho \Phi_{\text{self}} \cdot \mathbf{v}}$, $\overline{\rho \mathbf{f}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v}}$, $\overline{p \mathbf{v}}$, $\overline{e_{\text{in}} \mathbf{v}}$, und $\overline{e_{\text{kin}} \mathbf{v}}$ resultieren und in der Energiegleichung a priori berücksichtigt werden müssten. Diese werden ausgiebig z. B. in Schmidt et al. (2006) diskutiert, weshalb an dieser Stelle auf diese Quelle für weitere Informationen verwiesen werden soll. Einige Terme können vernachlässigt werden, weil nicht zu erwarten ist, dass auf Skalen unterhalb des Filters eine Einkopplung erfolgt, was im folgenden Abschnitt diskutiert wird.

Die daraus resultierende modifizierte Energiegleichung, wie sie sich etabliert hat und u. a. in Schmidt & Federrath (2011) erfolgreich angewendet wird, ergibt sich zu:

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\overline{E} + \overline{p} + p_{\text{sgs}}) \tilde{\mathbf{v}}) = \overline{\rho} (\tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} - \nabla \tilde{\Phi}_{\text{self}}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \nabla \cdot ((\overline{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^*) \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + \overline{\rho} \tilde{Q} - \mathcal{P} + \rho \epsilon. \quad (3.27)$$

Die im Gegensatz zu Glg. (2.8) auftretenden Terme \mathcal{P} und $\rho \epsilon$ werden in Abschnitt 3.2.2 besprochen.

Die nicht aufgelöste kinetische (subgrid-scale oder auch turbulente) Energie (3.22) spielt bei dem im nächsten Abschnitt diskutierten Modell einen entscheidenden Part. Sie wird explizit als Erhaltungsgröße ins Gleichungssystem integriert und dort als zusätzliche Variable mittels einer PDG beschrieben und im Rahmen der Simulation numerisch gelöst.

$$\frac{\partial e_{\text{sgs}}}{\partial t} + \nabla \cdot (e_{\text{sgs}} \tilde{\mathbf{v}}) = \Gamma + \mathcal{P} - \rho(\epsilon + \lambda) + \mathcal{D} \quad (3.28)$$

Sie kann aus der Differenz der gefilterten Transportgleichung der kinetischen Energie und der Transportgleichung für die gefilterte kinetische Energie¹¹ gewonnen werden, wie dies sehr anschaulich in Schmidt et al. (2006) gezeigt ist.

Sie ist als ein Reservoir zwischen aufgelöster kinetischer und innerer Energie aufzufassen, mit welchen sie über Kopplungsterme verbunden ist. Die Idee zu dieser zusätzlichen Erhaltungsgleichung stammt von mehreren Autoren gleichzeitig (siehe Sagaut, 2002, Abschn. 4.3) und findet u. a. in der Arbeit von Schmidt et al. (2006) Anwendung. Durch diesen Ansatz kann die turbulente Energie, die u. a. durch den turbulenten Druck in Erscheinung tritt, ebenfalls konvektiert und diffundiert werden, wie dies z. B. bei der inneren Energie der Fall ist, mit welcher sie gewisse Ähnlichkeiten, zumindest in Bezug auf die Druckkräfte, aufweist.

Im folgenden Abschnitt werden die Terme Γ , $\rho \lambda$ und \mathcal{D} ebenfalls definiert.

¹¹Dieser sprachlich leicht zu überlesende Unterschied wird durch (3.22) verständlich.

3.2.2. Schließungsbedingungen

Um das Gleichungssystem, bestehend aus (3.14), (3.21), (3.27) und (3.28), zu schließen, bedarf es weiterer Bedingungen, die daher als *Schließungsbedingungen* (engl. closure) bezeichnet werden können¹². Diese Schließungsbedingungen sollen die aus der Filterung hervorgegangenen Terme durch die in der Simulation vorhandenen aufgelösten Strömungsgrößen modellieren.

Die in Schmidt & Federrath (2011) und Schmidt et al. (2006) gewählten Schließungsbedingungen werden in dieser Arbeit bis auf eine Ausnahme übernommen. Sie haben sich darüber hinaus auch in weiteren Untersuchungen desselbigen Autors bewährt bzw. sind seit längerem in der Literatur bekannt. Diese Arbeiten kommen aus dem astrophysikalischen Umfeld und berücksichtigen die Kompressibilität des Gases, wie es bei Überschallströmungen wichtig ist. Dies ist in den Ingenieurwissenschaften seltener der Fall, wo hauptsächlich Verfahren für die inkompressible NSG Beachtung finden.

Hierbei soll angemerkt sein, dass (3.28) bereits eine (dynamische) Gleichung für das SGS darstellt. Der Autor Canuto schlägt beispielsweise ein ganzes Set an dynamischen Gleichungen vor (Canuto, 1994, 1997), wobei der numerische Aufwand nicht unerheblich und die Stabilität des Verfahrens nicht trivial erfüllt ist, wie dies in Schmidt et al. (2006) angemerkt wird. Sie gewährt durch die lokale Anpassung an die Strömungsverhältnisse, insbesondere bei der Wirbelviskosität (s.u.), einen großen Vorteil gegenüber rein statistischen Modellen, die beispielsweise bestimmte Eigenschaften der Strömung voraussetzen, was bei komplexen Geometrien von Vorteil ist.

Spannungstensor $\hat{\tau}$ Der viskose Spannungstensor $\hat{\tau}$ wird vernachlässigt. Dies kann argumentativ damit begründet werden, dass für ein Fluid mit hoher Reynolds-Zahl die Mikroskala von Kolmogorov $\eta_{\text{Kol}} \ll \Delta_G$ ist, so dass molekulare Viskosität keine Rolle spielt. Der subgrid-scale Tensor $\hat{\tau}_{\text{sgs}}$ übernimmt genau diese Funktion.

Gravitative Effekte Γ Ebenfalls wird Γ vernachlässigt. Es spiegelt die durch gravitative Effekte induzierte Energie auf kleinen Skalen wider. Dies wird ebenfalls für weitere externe Kräfte angenommen. Das bedeutet nicht, dass gravitative Effekte keine Turbulenz generieren könnten. Lediglich, dass ihre Effekte in der Simulation aufgelöst sind.

SGS Tensor $\hat{\tau}_{\text{sgs}}$ Im Mittelpunkt der Schließungsbedingungen steht die Approximation des subgrid-scale Tensors $\hat{\tau}_{\text{sgs}}$. Hierbei erfolgt eine Beschränkung auf einen verbreiteten und gut getesteten (einfachen) Ansatz zur Wirbelviskosität (siehe Lesieur, 1997), wie er auch schon ursprünglich in ähnlicher Form von Smagorinsky (1963) eingeführt wurde. Dieser Ansatz wird ebenfalls in Schmidt et al. (2006) verwendet, auf die weitere

¹²Die Erhaltungsgleichung (3.28) der turbulenten Energie kann bereits als Schließungsbedingung aufgefasst werden.

Modifikation (Schmidt & Federrath, 2011), wie sie durch den nicht-linearen Zusatzterm eingeführt wird, soll hier verzichtet werden.

Der SGS Tensor ist im Fall von Wirbelviskosität analog zur Definition des viskosen Spannungstensors (2.5). Es folgt

$$[\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^*]_{ij} = 2\rho\nu_{\text{sgs}}\overline{S}_{ij}^* \quad (3.29)$$

mit

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad (3.30)$$

und

$$S_{ij}^* = S_{ij} - \frac{1}{3}\nabla\mathbf{v}\delta_{ij}. \quad (3.31)$$

Um die Eigenschaft (3.23) aufrecht zu erhalten, muss

$$[\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}]_{ij} = [\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^*]_{ij} - \frac{2}{3}e_{\text{sgs}}\delta_{ij} \quad (3.32)$$

gefordert werden.

Es soll nun für spätere Zwecke diese kartesische Formulierung auf allgemeine krummlinig-orthogonale Koordinaten verallgemeinert werden. Diese sollen mit (ξ, η, ϕ) bezeichnet sein, wobei eine Symmetrie in ϕ -Richtung

$$\forall q : \frac{\partial q}{\partial \phi} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi\text{-Symmetrie} \quad (3.33)$$

angenommen wird, wenn q eine beliebige Größe ist. Da die Definition des viskosen Spannungstensors und die des subgrid-scale Tensors nahezu identisch sind, ist die Herleitung aus Sperling (2009) ganz analog. Die folgenden Größen beziehen sich stets auf *orthonormierte* Basisvektoren¹³ $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_i} \quad (\text{Ortsvektor } \mathbf{r}) \quad (3.34)$$

mit den Skalenfaktoren

¹³Das Dach $\hat{\cdot}$ soll dies verdeutlichen.

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_i} \right|. \quad (3.35)$$

Die kovariante Ableitung eines Vektors lautet

$$\begin{aligned} \nabla_{\hat{\mathbf{e}}_i} \mathbf{v} &= \nabla_{\hat{\mathbf{e}}_i} (v^k \hat{\mathbf{e}}_k) \\ &= \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^i} v^j + \Gamma_{ik}^j v^k \right) \hat{\mathbf{e}}_j, \end{aligned} \quad (3.36)$$

dabei sind $\Gamma_{ik}^j \hat{\mathbf{e}}_j = \nabla_{\hat{\mathbf{e}}_i} \hat{\mathbf{e}}_k$ die affinen Verbindungen. Mittels der sog. Kommutatorkoeffizienten

$$c_{ijk} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}_j} \quad (3.37)$$

aus Illenseer & Duschl (2009) kann direkt die affine Verbindung ausgedrückt werden und führt unmittelbar durch Einsetzen zu den Diagonalelementen von Glg. (3.30) in krummlinig-orthogonalen Koordinaten

$$\begin{aligned} S_{\xi\xi} &= \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + c_{\xi\eta\xi} v_\eta \right) \\ S_{\eta\eta} &= \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + c_{\eta\xi\eta} v_\xi \right) \\ S_{\phi\phi} &= (c_{\phi\xi\phi} v_\xi + c_{\phi\eta\phi} v_\eta) \end{aligned} \quad (3.38)$$

und den weiteren sechs symmetrischen Nicht-Diagonalelementen

$$\begin{aligned} S_{\xi\eta} = S_{\eta\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} + \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial v_\xi}{\partial \eta} - c_{\xi\eta\xi} v_\xi - c_{\eta\xi\eta} v_\eta \right) \\ S_{\xi\phi} = S_{\phi\xi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \xi} - c_{\phi\xi\phi} v_\phi \right) \\ S_{\eta\phi} = S_{\phi\eta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \eta} - c_{\phi\eta\phi} v_\phi \right). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Komponenten des spurfreien Tensors $\hat{\mathbf{S}}^*$ ergeben sich mittels Hinzunahme von (A.1) zu

$$\begin{aligned}
 S_{\xi\xi}^* &= \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + c_{\xi\eta\xi} v_\eta \right) - \frac{1}{3\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi v_\eta) \right) \\
 S_{\eta\eta}^* &= \left(\frac{1}{h_\eta} \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} + c_{\eta\xi\eta} v_\xi \right) - \frac{1}{3\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi v_\eta) \right) \\
 S_{\phi\phi}^* &= (c_{\phi\xi\phi} v_\xi + c_{\phi\eta\phi} v_\eta) - \frac{1}{3\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi v_\eta) \right)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

mit $g = h_\xi^2 h_\eta^2 h_\phi^2$. Da sich $\overline{\mathcal{S}}$ und $\widehat{\tau}_{\text{sgs}}$ nur um eine skalare Funktion unterscheiden, lässt sich die obige Form direkt auf $\widehat{\tau}_{\text{sgs}}$ mittels (3.29) übertragen, wenn die gefilterten Geschwindigkeiten $\overline{\mathbf{v}}$ Verwendung finden.

Die Tensordivergenz von $\nabla \cdot \widehat{\tau}_{\text{sgs}}$ als Quellterm der Impulsgleichung ergibt sich unter Anwendung von (A.2) und der Energiequellterm $\nabla \cdot (\widehat{\tau}_{\text{sgs}} \cdot \mathbf{v})$ durch Einsetzen der Kontraktion von $\widehat{\tau}_{\text{sgs}} \cdot \mathbf{v}$ in (A.1).

Wirbelviskosität Die nun noch fehlende Approximation der Wirbelviskosität ergibt sich, wie aus (2.29) ersichtlich, durch das Auffinden einer Längen- l_t und Geschwindigkeitsskala v_t . Diese werden mit der Filterbreite Δ und der turbulenten Geschwindigkeit auf der subgrid-Skala abgeschätzt. Die turbulente Geschwindigkeit kann aus der turbulenten Energie e_{sgs} , die eine nicht-aufgelöste kinetische Energie darstellt, wie folgt $v_t \approx \sqrt{\frac{2e_{\text{sgs}}}{\bar{\rho}}}$ abgeschätzt werden (siehe Deardorff, 1980, Glg. 9a). Es gilt

$$\nu_{\text{sgs}} = C_\nu \Delta \sqrt{\frac{2e_{\text{sgs}}}{\bar{\rho}}}. \tag{3.41}$$

Die in diesem Modell angenommene Konstante C_ν wird aus Schmidt & Federrath (2011) mit einem Wert von $C_\nu = 0.102$ übernommen¹⁴, wobei die Kalibrierung der Konstante aus hochaufgelösten Simulationen stammt, die anschließend zur Auswertung explizit gefiltert wurden. Der Vergleich zwischen den gefilterten und ungefilterten Variablen ermöglicht die Bestimmung der Konstanten. Auch im späteren Verlauf dieser Arbeit wird auf nach dieser Methode bestimmten Parametern aus anderen Arbeiten zurückgegriffen werden. Die Bestimmung solcher Konstanten ist ein nicht zu unterschätzender numerischer Aufwand, weshalb es dazu eigenständige Arbeiten gibt.

Eine wichtige Konsequenz dieser Art der Parametrisierung – im Gegensatz zu den Ansätzen aus Abschn. 2.3.1 – ist, dass sie (logischerweise) von der Auflösung abhängt, da der aufgelöste Teil der turbulenten Bewegung die zuvor parametrisierten Effekte – beispielsweise den Drehimpulstransport – auf natürliche Weise übernehmen soll. Die

¹⁴Die Konstante wurde nicht aus Deardorff (1980) entnommen, da die neueren Methoden belastbarere Ergebnisse liefern.

Wirbelviskosität nimmt überproportional mit der Verbesserung der Auflösung ab, da mit kleinerer Filterbreite mehr kinetische Energie aufgelöst wird und somit weniger nicht-aufgelöste (\Leftrightarrow subgrid-scale) Energie verbleibt. Wird davon ausgegangen, dass die kinetische Energie einem Potenzgesetz $e_{\text{kin}}(k) \propto k^\alpha$ folgt, wie es beispielsweise die Theorie von Kolmogorov voraussagt (Abschn. 2.2.4), so folgt¹⁵:

$$e_{\text{sgs}} \propto \int_{k_c}^{\infty} k^\alpha dk \quad \text{mit} \quad k_c = \frac{\pi}{\Delta} \quad (3.42)$$

$$\Leftrightarrow e_{\text{sgs}} \propto k_c^{\alpha+1} \quad (3.43)$$

$$\Leftrightarrow e_{\text{sgs}} \propto \Delta^{-\alpha-1} \quad (3.44)$$

$$\Leftrightarrow \nu_t \propto \Delta \sqrt{\Delta^{-\alpha-1}} = \Delta^{\frac{-\alpha+1}{2}}. \quad (3.45)$$

Aus dieser Abschätzung kann geschlossen werden, dass im Zweidimensionalen durch ein schnell fallendes Energiespektrum ($\alpha \approx -3$) die turbulente kinematische Viskosität sogar quadratisch von der Filterbreite $\nu_t \propto \Delta^2$ abhängt. Im Dreidimensionalen könnte, bei Vernachlässigung von kompressiblen Effekten ($\alpha \approx -5/3$), eine Skalierung von $\nu_t \propto \Delta^{4/3}$ abgeschätzt werden.

Produktionsterm \mathcal{P} Der Fluss an kinetischer Energie von der aufgelösten zur nicht aufgelösten (subgrid) Skala wird über \mathcal{P} , den sog. *Produktionsterm*, beschrieben. Er wird in der (bereits zitierten) Literatur übereinstimmend mit

$$\mathcal{P} = [\hat{\tau}_{\text{sgs}}]_{ij} \bar{S}_{ij} \quad (3.46)$$

approximiert (Einsteinsche Summenkonvention beachten).

Diffusionsterm \mathcal{D} Mittels \mathcal{D} wird in der Transportgleichung (3.28) der turbulenten (subgrid-scale) Energie e_{sgs} ein Diffusionsterm realisiert. Dieser soll nach Sagaut (2002) mit

$$\mathcal{D} = \nabla \cdot \left[\kappa_{\text{sgs}} \nabla \frac{e_{\text{sgs}}}{\bar{\rho}} \right] \quad \text{dabei ist} \quad \kappa_{\text{sgs}} = C_{\mathcal{D}} \Delta (\bar{\rho} e_{\text{sgs}})^{1/2} \quad (3.47)$$

approximiert werden. Der Parameter wird mit $C_{\mathcal{D}} = 0,65$ aus Schmidt et al. (2006) übernommen. Die obige Formulierung muss ebenfalls in krummlinig-orthogonalen Koordinaten übersetzt werden, dabei gilt für den Gradienten

$$\mathbf{e}_i \cdot \nabla \Phi = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (3.48)$$

¹⁵Sei $\alpha < -1$.

mit dem orthonormierten Basisvektor $\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij})$ zusammen mit (A.1) folgt

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(h_\eta h_\phi \kappa_{\text{sgs}} \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{e_{\text{sgs}}}{\bar{\rho}} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(h_\xi h_\phi \kappa_{\text{sgs}} \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{e_{\text{sgs}}}{\bar{\rho}} \right) \right). \quad (3.49)$$

Dissipation $\rho\epsilon$ Auch bei der Schließungsbedingung für $\rho\epsilon$ wird Schmidt et al. (2006) gefolgt. Aus der Annahme, dass die Dissipationsrate von e_{sgs} in Wärme proportional zum Quotienten eben dieser und der Zeitskala $\Delta \sqrt{\frac{\rho}{e_{\text{sgs}}}}$ sein soll, folgt:

$$\rho\epsilon = C_\epsilon \sqrt{\frac{e_{\text{sgs}}^3}{\rho \Delta^2}}. \quad (3.50)$$

Druckmoden $\rho\lambda$ Die Bedingung für $\rho\lambda$, welche mit dem Druckterm $\nabla \cdot \bar{\rho}\mathbf{v}$ korrespondiert, ist nach Schmidt & Federrath (2011) im Fall von kompressibler Turbulenz problematisch, weshalb dem Vorschlag von Woodward et al. (2006) gefolgt, und dieser Term ebenfalls vernachlässigt wird.

Damit ergibt sich das System von Erhaltungsgleichungen zusammenfassend geschrieben als

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\mathbf{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \nabla \cdot ((\bar{E} + \bar{p}_{\text{eff}})\tilde{\mathbf{v}}) &= \nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^* \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + -\bar{\rho}(\nabla \tilde{\Phi}_{\text{self}}) \cdot \tilde{\mathbf{v}} + \bar{\rho} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} - \mathcal{P} + \rho\epsilon \\ \frac{\partial \bar{\rho}\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho}\mathbf{v} \otimes \tilde{\mathbf{v}}) + \bar{p}_{\text{eff}} \mathbb{I} &= \nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}^* - \bar{\rho} \nabla \tilde{\Phi}_{\text{self}} + \bar{\rho} \tilde{\mathbf{f}}_{\text{ext}} \\ \frac{\partial e_{\text{sgs}}}{\partial t} + \nabla \cdot (e_{\text{sgs}}\tilde{\mathbf{v}}) &= \mathcal{D} + \mathcal{P} - \rho\epsilon, \end{aligned} \quad (3.51)$$

welches zusammen mit der Poisson-Glg. (2.13) und den Schließungsbed. (3.46, 3.47, 3.50) sowie (3.29) in Kombination mit der turbulenten Viskosität (3.41), gelöst werden muss. Die hierzu notwendigen Modifikationen, die sich am numerischen Verfahren ergeben, werden in Abschnitt 3.3.1 besprochen.

3.2.3. Zweidimensionale LES: Ein gutes Modell?

In Abschnitt 2.2.5 wurden zusammenfassend die Merkmale und Erhaltungseigenschaften der zweidimensionalen NSG und die daraus folgenden Implikationen für *zweidimensionale* Turbulenz erläutert.

Daher sollte sich die Frage stellen, inwiefern eine zweidimensionale LES überhaupt ein adäquater Ansatz zur Beschreibung von Akkretionsscheiben sein kann, wenn dies nicht im Fall von zweidimensionaler Turbulenz zutrifft? (siehe Abschn. 2.2.5)

Es erscheint nachvollziehbar, dass eine zweidimensionale Simulation, egal ob LES oder DNS, nicht in der Lage ist, ein volles dreidimensionales Wirbelspektrum abzubilden.

Der entscheidende Unterschied zwischen LES und DNS liegt nun aber darin begründet, dass bei der DNS das **gesamte** Wirbelspektrum bis zur Mikroskala von Kolmogorov zweidimensional ist. Hier schlagen alle Effekte wie z. B. inverse Energiekaskade und *abwärtsgerichtete* Enstrophiekaskade zu Buche. Bei der LES ist hingegen nur der erste Teil des Spektrums überhaupt repräsentiert. Kleinere Skalen werden durch das SGS-Verfahren beschrieben, was auf heuristischen Annahmen einer *dreidimensionalen* Welt fußt. Ungeachtet ob zwei unterschiedliche Kaskaden (Enstrophie- und Energiekaskade) nebeneinander koexistieren, entzieht das SGS-Verfahren dem System kinetische Energie. Es realisiert damit immer die Eigenschaften des dreidimensionalen Modells und ahmt keine Enstrophiekaskade oder andere zweidimensionalen Turbulenzeffekte nach.

Dies deckt sich mit den Erfolgen der zweidimensionalen Verfahren, wie sie in der Meteorologie zum Ende des letzten Jahrhunderts oder auch bei der Berechnung von Turbulenz in Sternen unter Beweis gestellt wurden. Im Buch von Lesieur (1997, Kap. VIII) wird auf diese Argumentation gut nachvollziehbar eingegangen.

Dennoch soll nicht der Eindruck erweckt werden, dass dies völlig unproblematisch sei. Denn eine dreidimensionale LES hätte in aller Regel ein anderes Wirbelspektrum im aufgelösten Bereich vorzuweisen, was u. a. auch Rückkopplungen auf das SGS-Verfahren nach sich ziehen würde. Dieser Umstand sollte sich bei rotationssymmetrischen Scheiben (*s-z*-Ebene) stärker auswirken als bei flachen Scheiben ohne Rotationssymmetrie (*s-φ*-Ebene). Dies ist anzunehmen, da bei einer geometrisch flachen Scheibe die Filterbreite Δ_i in der *s-φ*-Ebene zumindest in der gleichen Größenordnung wie die Scheibenhöhe *h* liegt: $s/h \approx 100$ (Kato et al., 2008, S. 98) und $\Delta_\phi \approx 2\pi s/N_\phi$, wenn $10^2 \lesssim N_i \lesssim 10^3$ für die Anzahl von Gitterzellen in die *i*-te Koordinatenrichtung gilt. In einer solchen flachen Scheibe passt die *Abschneidelänge* des Filters auf natürliche Weise mit der Scheibenhöhe im Groben zusammen.

Dies ist bei den rotationssymmetrischen Scheiben, deren *s-z*-Ebene in der Simulation betrachtet wird, naturgemäß nicht verwirklicht $\Delta_s \approx s/N \ll 2\pi s$.

Auch muss kritisch gesehen werden, dass das SGS-Verfahren durch die partiellen Ableitungen der Rotationsgeschwindigkeit dominiert wird, was auch noch im laminaren Fall zu einem Beitrag führen würde. Damit ist gemeint, dass selbst beim Unterschreiten

der kritischen Reynolds-Zahl, also beim Auftreten einer stabilen Couette-Strömung, eine turbulente Viskosität generiert werden würde. Dies bedingt der zu größeren Radien stattfindende Geschwindigkeitsabfall $v_\phi \propto s^{-1/2}$.

3.3. Softwarebibliothek *fosite*

Als Ausgangspunkt für diese Arbeit dient das Programm *fosite*. Es ist ein FVV zum Lösen einer sehr allgemeinen Klasse von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen und basiert auf dem ursprünglich von Kurganov & Tadmor (2000, 2002) entwickelten Verfahren, welches im Rahmen der Dissertation von Illenseer (2006) auf krummlinige, orthogonale Koordinatensysteme adaptiert wurde. Dieses Verfahren wurde hochperformant als FORTRAN 95 Programm implementiert, wobei vorerst nur das physikalische Modell der nicht-viskosen Euler-Gleichungen¹⁶ beschrieben wurde.

Die Funktionsfähigkeit und Genauigkeit dieses Verfahrens zweiter Ordnung¹⁷ wurden anhand vieler Standardtest in Illenseer & Duschl (2009) unter Beweis gestellt.

Es wurde u. a. im Rahmen der Diplomarbeit von Sperling (2009) um die Funktionalität der Selbstgravitation (Abschn. 2.1.6) mittels eines schnellen Mehrgitterverfahrens (engl. Multigrid) und der viskosen Dissipation erweitert und deren Funktionsfähigkeit aufgezeigt.

Die Vorteile von *fosite* für diese Arbeit sind:

- geringe numerische Viskosität, da es ein Verfahren zweiter Ordnung ist
- auf das Problem angepasste Koordinatensysteme möglich (z. B. sphärische, oblat-sphärische oder tan-zylindrische Koordinaten, etc.)
- modularer Aufbau ermöglicht jeweilige Simulation nach Baukastenprinzip zusammenzustellen; es stehen verschiedene Physikmodule, Zeitintegratoren, Quellterme, etc. zu Verfügung
- objektorientierte Standards (Decyk & Gardner, 2008), welche die Erweiterbarkeit um weitere Module mit relativ wenig Programmieraufwand möglich macht
- durch Vektorisierung (NEC-SX8/9 Vektorrechnerarchitektur) und Parallelisierung mittels *message passing interface* (MPI) hochperformant, sowie gute Skalierung und Lauffähigkeit auf heterogenen Rechenclustern
- sehr gute Erhaltungseigenschaften der konservativen Variablen (vom phys. Modell abhängig, meist: Dichte, Impuls, Energie)

¹⁶Euler-Gleichungen sind die Gleichungen (2.1, 2.2, 2.3) ohne viskosen Spannungstensor $\hat{\tau}$.

¹⁷Damit ist die räumliche Ordnung gemeint; zeitlich liegt ein explizites Runge-Kutta-Verfahren dritter Ordnung mit adaptiver Schrittweitenregelung vor bzw. eingebettete Runge-Kutta-Methoden bis 5. Ordnung.

- scharf wiedergegebene Stoßfronten
- eigene und in der Arbeitsgruppe vorhandene Expertise

Diese Gründe gaben den Ausschlag das Verfahren zu verwenden und stetig weiterzuentwickeln, obwohl es eine große Anzahl von Konkurrenzprogrammen, wie z. B. **FLASH**, **ENZO**, etc. gibt, die Fähigkeiten besitzen, die **fosite** gegenwärtig nicht beherrscht (wie z. B. adaptive Gitterverfeinerung).

An dieser Stelle soll (nochmals) auf eine besondere Eigenschaft von **fosite** hingewiesen sein: Es handelt sich hierbei um ein zweidimensionales Verfahren. Es wird eine Symmetrie in der dritten Koordinatenrichtung, wie in Glg. (3.33) formuliert, angenommen, was je nach verwendeter Geometrie meist eine Rotationssymmetrie ist. Die Geschwindigkeiten bzw. der spezifische Impuls/Drehimpuls der dritten Koordinate werden jedoch in der Simulation vollständig berücksichtigt. Es können auch komplette Simulationen in 2D durchgeführt¹⁸ werden, was bei dünnen Scheiben sinnvoll ist.

Diese Eigenschaft kann je nach Perspektive als Feature oder auch als Nachteil aufgefasst werden. Das einem physikalischen Modell zugrunde liegende Symmetrien genutzt werden, um das Problem zu vereinfachen, ist in der Physik eine gangbare Methode und hat sich bei Akkretionsscheiben über lange Zeit bewährt, was bis zu eindimensionalen Modellen (Shakura & Sunyaev, 1973; Pringle, 1981) geführt hat. Der enorme Rechenaufwand wird eine antreibende Kraft für die Formulierung dieser Modelle gewesen sein. Dies liegt zum größten Teil an den langen Zeitskalen, über die das System betrachtet werden muss, und die teilweise großen Geschwindigkeiten, die den Zeitschritt stark limitieren. Daher ist ein Verfahren mit problemspezifisch anpassbaren Geometrien eine sehr gute Lösung, um Rechenzeit einzusparen.

Insbesondere beim Auftreten von Turbulenz in der Simulation, und nicht nur als parametrisierte Größe, müssen solche Symmetrien kritisch hinterfragt werden, wie es in Abschnitt 2.2.5 aufgezeigt wurde.

Auch wenn es im Fall von LES keinen prinzipiellen Ausschlussgrund solcher Symmetrien zu geben scheint (siehe Abschn. 3.2.3), führt dies zu Einschränkungen der Aussagekraft des Simulationsergebnisses. Denn durch die Symmetrie wird die numerischen Lösung u. U. einer gewissen Klasse von Instabilitäten beraubt, die sonst ggf. zu einer stärkeren Turbulenz geführt hätten. Es ist leicht einsichtig, dass z. B. eine nicht-achsensymmetrische Störung keine Berücksichtigung finden kann und somit auch keine Instabilität hervorruft. Obwohl diese Art von Störung zu interessanten Effekten führen kann, wie es durch Speith & Kley (2003) gezeigt wird.

¹⁸Es werden die zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichungen gelöst.

3.3.1. Modifikationen

Um das SGS-Verfahren in die bestehende Programmhierarchie zu integrieren, waren im Wesentlichen nur diese Erweiterungen bzw. Änderungen nötig:

- zwei neue Physik-Module `physics_euler3Drotsymsgs` für rotationssymmetrische Simulationen mit aufgelöster Scheibenhöhe und `physics_euler2Dsgs` für flache Scheiben, da bedingt durch die turbulente Energie e_{sgs} eine weitere Erhaltungsgleichung gelöst werden muss. In dieses Modul sind keine Annahmen der Schließungsbedingungen (Abschn. 3.2.2) eingegangen.
- ein neues Quellterm-Modul `sources_sgs`, welches die Schließungsbedingungen realisiert, die als *Quellterme* auf die Erhaltungsgleichungen einwirken. Durch diese Kapselung können die Schließungsbedingungen relativ einfach ersetzt/ausgetauscht werden.
- Änderungen an der *Farfield*-Randbedingung, weil sich die sog. Riemann Invarianten des Systems geändert haben.

Die Änderungen im Detail:

Physik-Modul

Es soll im Folgenden die notwendigen Modifikationen für das `physics_euler3Drotsymsgs` gezeigt werden. Im Anschluss wird auf die noch marginalen Änderungen eingegangen, die nötig sind, um das zweite Physikmodul `physics_euler2Dsgs` zu erhalten.

Wie in Illenseer & Duschl (2009) dargestellt, kann ein System von Erhaltungsgleichungen im Zusammenhang mit krummlinig-orthogonalen Koordinaten als

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathcal{D}_\eta \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad (3.52)$$

sehr kompakt ausgedrückt werden, wenn die krummlinigen Ableitungsoperatoren zu

$$\mathcal{D}_\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} h_\eta h_\phi, \quad \mathcal{D}_\eta \equiv \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} h_\xi h_\phi \quad (3.53)$$

definiert werden. In dieser Vektorgleichung werden die Erhaltungsgrößen zum Vektor \mathbf{u} und die Flüsse zu $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ für die ξ -Richtung sowie $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ für die η -Richtung zusammengefasst¹⁹. $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ fasst zum einen die externen Quellterme aller Erhaltungsgleichungen zusammen, zum anderen auch die sog. geometrischen Quellterme, welche sich aus den

¹⁹Bedingt durch die ϕ -Symmetrie existiert auch für `physics_euler3Drotsymsgs` kein Flussvektor in ϕ -Richtung.

krummlinigen Koordinatenbasen ergeben. Diese Scheinkräfte treten für alle vektoriellen Gleichungen unter Transformation auf, wie es direkt aus Glg. (A.2) ersichtlich ist.

Um das in dieser Arbeit verwendete System von Erhaltungsgleichungen (3.51) in der Form (3.52) auszudrücken zu können, ergibt sich der Spaltenvektor von Erhaltungsgrößen (konservativer Variablen) zu

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \varrho \\ \varrho v_\xi \\ \varrho v_\eta \\ \varrho v_\phi \\ e_{\text{sgs}} \\ \left[\frac{p}{\gamma-1} + e_{\text{kin}} \right] \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

und die Flussvektoren in ξ - und η -Richtung zu

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varrho v_\xi \\ \varrho v_\xi^2 + p + p_{\text{sgs}} \\ \varrho v_\eta v_\xi \\ \varrho v_\phi v_\xi \\ e_{\text{sgs}} v_\xi \\ \left[\frac{\gamma p}{\gamma-1} + p_{\text{sgs}} + e_{\text{kin}} \right] v_\xi \end{bmatrix} \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \varrho v_\eta \\ \varrho v_\xi v_\eta \\ \varrho v_\eta^2 + p + p_{\text{sgs}} \\ \varrho v_\phi v_\eta \\ e_{\text{sgs}} v_\eta \\ \left[\frac{\gamma p}{\gamma-1} + p_{\text{sgs}} + e_{\text{kin}} \right] v_\eta \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

wobei zur einfacheren Übersicht alle Größen ohne $\bar{\cdot}$ dargestellt wurden. Dabei werden alle Terme höherer Ordnung, diffusive Terme, wie Viskosität und die Schließungsbedingungen des SGS-Verfahrens, sowie externer Kräfte getrennt als Quellterme $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ behandelt, wie dies in der Literatur üblich ist. Die Diffusionsterme sind numerisch unproblematisch und erzeugen daher keine numerischen Instabilitäten, was dieses Vorgehen rechtfertigt.

Für das Verfahren nach Kurganov & Tadmor (KTV), dem `fosite` zugrunde liegt, wird eine pseudo-lineare Form der Gleichung (3.52) benötigt. Dazu werden die Ableitungen der Flussvektoren umgeschrieben in Ableitungen nach den konservativen Variablen (Jacobi-Matrix) und \mathbf{u} in Ableitungen nach den Koordinaten (Kettenregel). Die dabei entstehenden Jacobi-Matrizen können diagonalisiert werden. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind für das KTV essentiell, da bei dem Verfahrensschritt die größte und kleinste Ausbreitungsgeschwindigkeit (Eigenwert) benötigt wird. Ebenfalls ist die Kenntnis der zu den Eigenwerten gehörenden *charakteristischen Variablen* für spezielle Randbedingungen notwendig, wie es auf die Farfield-Randbedingungen zutrifft.

Es sei hier noch zur Vollständigkeit halber angemerkt, dass für die Umformung von Glg. (3.52) in

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{D}_\xi \mathbf{u} + \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{D}_\eta \mathbf{u} = \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad (3.56)$$

notwendig *Homogenität* der Flüsse vorliegen müssen, da aus ihnen folgt

$$\mathbf{F}(a\mathbf{u}) = a\mathbf{F}(\mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{u}. \quad (3.57)$$

Für Details sei auf Illenseer & Duschl (2009) verwiesen. Diese Eigenschaft ist direkt erfüllt und lässt sich unmittelbar nachprüfen, wenn p und p_{sgs} als Funktionen der konservativen Variablen ausgedrückt werden, was hier nicht gezeigt wird.

Die berechneten Jacobi-Matrizen sind im Anhang (B.1) und (B.2) aufgeführt.

Darin tritt die modifizierte Schallgeschwindigkeit \tilde{c}_s

$$\tilde{c}_s = \sqrt{\gamma \frac{p + p_{\text{sgs}}}{\rho}} \quad (3.58)$$

auf. Dies ist eine physikalisch interessante Konsequenz, weil hierdurch die Auswirkung des SGS-Verfahrens nicht nur einen turbulenten Druck erzeugt, sondern auch direkt die Schallgeschwindigkeit beeinflusst. Sozusagen setzt sich die Schallgeschwindigkeit nicht mehr allein aus der Brownschen Bewegung der Gaspartikel zusammen, sondern wird um die nicht aufgelöste turbulente Bewegung $v_{\text{sgs}}^2 = 2 e_{\text{sgs}} \varrho^{-1} = 3 p_{\text{sgs}} \varrho^{-1}$ erweitert, die ebenfalls eine chaotische Bewegung auf lediglich makroskopischen Skalen darstellt. Es werden somit gewissermaßen die nicht aufgelösten makroskopischen Skalen den mikroskopischen hinzugezählt. Sie treten – wie die thermodynamischen Größen – als statistische Größen in Erscheinung.

$$\tilde{c}_s^2 = c_s^2 + \frac{\gamma}{3} v_{\text{sgs}}^2 \quad (3.59)$$

mit $c_s = \sqrt{\gamma p \varrho^{-1}}$. Die Eigenwerte der Jacobi-Matrizen lauten

$$\lambda_{1,2}^F = v_\xi \pm \tilde{c}_s, \quad \lambda_{3,4,5,6}^F = v_\xi, \quad (3.60)$$

$$\lambda_{1,2}^G = v_\eta \pm \tilde{c}_s, \quad \lambda_{3,4,5,6}^G = v_\eta, \quad (3.61)$$

so dass festzustellen ist, dass die Eigenwerte sich nicht vom ursprünglichen Verfahren unterscheiden, wenn von der modifizierten Schallgeschwindigkeit abgesehen wird²⁰.

Dies hat somit Auswirkungen auf die im Verfahren benötigte minimale und maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit und muss dort berücksichtigt werden. Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass die Hauptstruktur vom `physics_euler3Drotsym` übernommen werden kann, wenn zusätzlich u. a.

²⁰Ein Eigenwert ist nun vierfach anstatt dreifach entartet.

- die konservativen Variablen \mathbf{u} wie in (3.54) und die Flüsse \mathbf{F}, \mathbf{G} wie in (3.55) beschrieben implementiert werden.
- \mathbf{S}_{geo} lediglich um eine 0 erweitert wird, da skalare Erhaltungsgrößen, wie e_{sgs} , keine geometrischen Quellterme besitzen, dies folgt direkt aus (A.1).
- \mathbf{S}_{ext} um die Anteile der Schließungsbedingungen erweitert wird, was ein eigenständiges Modul übernimmt (s.u.).
- in den entsprechenden Stellen der Druck p durch den effektiven Druck $p + p_{\text{sgs}}$ substituiert wird.

Unterschiede zum Modul `physics_euler2Dsgs`

Bei diesem „echten“ zweidimensionalen Modul entfällt die ϕ -Komponente²¹, so dass sich die zweidimensionale Version von (3.54) und (3.55) lediglich durch Streichung der vierten Zeile ergibt, die anderen Gleichungen durch setzen von $v_\phi \equiv 0$ und $h_\phi \equiv 1$.

Die daraus resultierenden Jacobi-Matrixen ergeben sich zu (B.3) und (B.4).

Da die entfallende Größe mit dem Eigenwert $\lambda^F = v_\xi$ bzw. $\lambda^G = v_\eta$ korrespondiert, bleiben (3.60) und (3.61) von der Struktur erhalten bis auf den Umstand, dass sich die vierfache Entartung auf drei verringert.

Es existiert bereits ein zweidimensionales Physikmodul `physics_euler2D`, welches als Vorlage und zum Vergleich genutzt werden konnte.

Quellterm-Modul

Der sog. Quellterm $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t)$ setzt sich aus \mathcal{D} , $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}}$, \mathcal{P} und $\varrho\epsilon$ in krummliniger Gestalt zusammen²² (siehe Abschn. 3.2.2). Die darin vorkommenden Ableitungen werden durch zentrale finite Differenzen approximiert, wie sie beispielsweise direkt aus der Taylor-Entwicklung folgt.

Anschließend wird der Zellmittelwert durch

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{u}, t) \rangle_D = \frac{1}{\Delta V} \int_{\xi_-}^{\xi_+} \int_{\eta_-}^{\eta_+} S(\mathbf{u}, \xi, \eta, t) \sqrt{g} d\xi d\eta \quad (3.62)$$

gebildet (Illenseer & Duschl, 2009), wobei ΔV das Volumen der ij -ten Zelle D ist, welche sich über $[\xi_-, \xi_+] \times [\eta_-, \eta_+]$ erstreckt. Dies ist charakteristisch für ein FVV, da mit auf Zellvolumen gemittelten Größen gerechnet wird.

²¹In der oben gewählten Notation liegt somit nur noch ξ und η vor, auch wenn η im Falle von polaren Koordinaten ein Winkel ist, der dann meist in der Literatur mit ϕ bezeichnet wird.

²²Es existieren weitere Quelltermen, die bereits implementiert sind.

Diese Integrale bedürfen einer Auswertung, welche nach der Mittelpunktsregel erfolgen soll:

$$\int_a^b f(x)dx \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a). \quad (3.63)$$

Die Mittelpunktsregel wurde gewählt, weil sie bei den bereits im Programm bestehenden Integrationen zum Zuge kommt, so dass es zweckmäßig ist, davon nicht abzuweichen, um Inkonsistenzen zu vermeiden. Die Fehlerordnung der zentralen finiten Differenz ist $\mathcal{O}(\Delta_x^2)$ und für die Mittelpunktsregel $\mathcal{O}(\Delta_x^3)$. Die exakte Gestalt der Terme soll hier nicht wiedergegeben werden, da sie direkt durch Anwendung der obigen Regeln auf die hergeleiteten Terme aus Abschnitt 3.2.2 hervorgehen.

Um numerische Stabilität zu gewährleisten, bedarf es einer Zeitschrittweitenregulierung. Dies ist für den Advektionsterm besonders kritisch und dort bereits durch die berühmte Courant-Friedrich-Lewy-Bedingung (CFL) sichergestellt, die für explizite Euler-Verfahren gilt, wofür u. a. die im Physikmodul berechneten Eigenwerte benötigt werden.

Allerdings geben auch Diffusionsterme eine maximale Zeitschrittweite vor, die zum Zwecke der numerischen Stabilität nicht gebrochen werden darf. Damit wird indirekt vorausgesetzt, dass die Stabilität der Lösung durch zwei voneinander unabhängigen Kriterien geprüft werden kann, was eine praktikable und bewährte Annahme darstellt. Es soll die Stabilitätsbedingung für *lineare* Diffusionsgleichungen als Abschätzung gewählt werden, wie sie z. B. in White (2006, siehe Bed. 3-251) für solche Zwecke vorgeschlagen wird. Sie lässt sich direkt auf die diffusen Terme $\nabla \cdot \hat{\tau}_{\text{sgs}}^*$ und \mathcal{D} übertragen.

$$\Delta t < \frac{1}{2} \frac{\Delta_\xi^2 \cdot \Delta_\eta^2}{\Delta_\xi^2 + \Delta_\eta^2} D^{-1} \quad (3.64)$$

Δ_ξ und Δ_η sind die jeweiligen Ausdehnungen der Zelle entlang der ξ - bzw. η -Koordinate. Der Diffusionsparameter D ist entsprechend zu wählen²³. Für den Term $\nabla \cdot \hat{\tau}_{\text{sgs}}^*$ entspricht er der Wirbelviskosität $D \equiv \nu_{\text{sgs}}$ und für den Diffusionsterm (3.47) $D \equiv \kappa_{\text{sgs}} \bar{\rho}^{-1}$. Dieses Stabilitätsargument stellt eine starke Vereinfachung dar, weil D keine Konstante ist, weshalb es sich *nicht* um eine lineare Diffusionsgleichung handelt.

Als globaler Zeitschritt wird das Minimum (über alle Gitterzellen) beider Stabilitätskriterien gewählt, wobei sich herausstellt, dass in der Praxis die CFL-Bedingung meist das härtere Kriterium darstellt. Die anderen Terme sind numerisch unproblematisch, weshalb darauf verzichtet werden kann.

²³Eine Dimensionsanalyse kann die Festlegung stützen.

Farfield-Bedingung

Die Vorgabe von Randbedingungen ist beim Lösen von PDG zwingend erforderlich und bestimmt maßgeblich die gewonnene Lösung. Daher sind gut gestellte Randbedingungen essentiell für das Verfahren. Hierzu haben sich besonders die Farfield-Bedingungen (siehe Hirsch, 1988, Abschn. 19.2.3) bewährt, so dass diese auf das Verfahren angepasst werden sollen²⁴. Es wird hier nur die Idee und das Ergebnis präsentiert; für die Herleitung wird auf benannte Literatur verwiesen.

Die Idee hinter den Farfield-Bedingungen ist, die durch die Diagonalisierung

$$\mathbf{L}_F^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{L}_F^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{L}_F^{-1} \mathbf{L}_F \mathcal{D}_\xi \mathbf{u} + \dots = \mathbf{L}_F^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad (3.65)$$

$$\mathbf{L}_G^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \dots + \mathbf{L}_G^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{L}_G^{-1} \mathbf{L}_G \mathcal{D}_\eta \mathbf{u} = \mathbf{L}_G^{-1} \mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad (3.66)$$

entstehenden charakteristischen (Pseudo-)Variablen

$$\delta \mathbf{w}^F = \mathbf{L}_F^{-1} \delta \mathbf{u} \quad (3.67)$$

$$\delta \mathbf{w}^G = \mathbf{L}_G^{-1} \delta \mathbf{u} \quad (3.68)$$

als integrierte Größen (Riemann-Invariante) darzustellen. Das System kann nicht simultan diagonalisiert werden $\mathbf{L}_G \neq \mathbf{L}_F$, so dass zwei Sätze von charakteristischen (Pseudo-) Variablen auftauchen. Die Riemann-Invarianten sind entlang der Charakteristiken konstant, wenn Quellterme vernachlässigt werden. Dies wird bei den Randbedingungen vorausgesetzt, so dass jede Riemann-Invariante je nach Störungszustand – anhand der Ausbreitungsgeschwindigkeit λ_i – durch Daten aus dem Inneren des Rechengebietes beim Ausfluss oder durch vorgegebene Daten am Rand beim Einfluss berechnet werden kann. Aus diesen Erhaltungsgrößen werden anschließend die konservativen Variablen \mathbf{u} bestimmt.

Die charakteristischen Variablen ergeben sich zu

²⁴Andere in `fosite` eingesetzte Randbedingungen sind meist von der verwendeten Physik unabhängig, so dass sie keiner Anpassung bedürfen.

$$\delta w_1^F = -\delta v_\xi + \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s \varrho} \quad \delta w_1^G = -\delta v_\eta + \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s \varrho} \quad (3.69)$$

$$\delta w_2^F = +\delta v_\xi + \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s \varrho} \quad \delta w_2^G = +\delta v_\eta + \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s \varrho} \quad (3.70)$$

$$\delta w_3^F = +\delta \varrho - \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s^2} \quad \delta w_3^G = +\delta \varrho - \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s^2} \quad (3.71)$$

$$\delta w_4^F = \varrho \delta v_\eta \quad \delta w_4^G = \varrho \delta v_\xi \quad (3.72)$$

$$\delta w_5^F = \varrho \delta v_\phi \quad \delta w_5^G = \varrho \delta v_\phi \quad (3.73)$$

$$\delta w_6^F = \frac{\delta p_{\text{sgs}}}{p_{\text{sgs}}} - \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s^2 \varrho} \quad \delta w_6^G = \frac{\delta p_{\text{sgs}}}{p_{\text{sgs}}} - \frac{\delta p + \delta p_{\text{sgs}}}{\tilde{c}_s^2 \varrho}. \quad (3.74)$$

Daraus können die Riemann-Invarianten zu

$$R_s = \ln \frac{\rho^\gamma}{q + p} \quad (3.75)$$

$$R_q = \ln \frac{q^\gamma}{q + p}, \quad (3.76)$$

$$(3.77)$$

und

$$R_\pm^F = v_\xi \pm \frac{2\tilde{c}_s}{\gamma - 1} \quad R_\pm^G = v_\eta \pm \frac{2\tilde{c}_s}{\gamma - 1}. \quad (3.78)$$

bestimmt werden. Dies gilt ebenfalls für die jeweiligen tangentialen Geschwindigkeiten, die im dreidimensionalen Fall zwei, im zweidimensionalen Fall eine weitere Riemann-Invariante bilden.

Diese Ergebnisse für R_s und R_\pm sind analog zu den in der Literatur bekannten Riemann-Invarianten, wenn der Druck p durch den effektiven Druck $p + p_{\text{sgs}}$ substituiert wird. R_q ist dabei neu und zeigt eine ähnliche Form wie die zur Entropieerhaltung korrespondierende Invariante R_s . R_\pm können nur unter zu Hilfenahme von R_s gewonnen werden, was eine weitere Annahme darstellt (Isentropie am Rand) (Hirsch, 1988, Abschn. 16.4).

Da die Ränder parallel der Koordinatenlinien verlaufen, ist jeweils nur ein Flussvektor am jeweiligen Rand ausschlaggebend, was den zu verwendenden Satz an Riemann-Invarianten vorgibt.

Der Unterschied zum zweidimensionalen Fall ist marginal: es entfällt die charakteristische Variable $\delta w_5 = \varrho \delta v_\phi$ (3.73) und damit die entsprechende Riemann-Invariante, was die tangentiale Geschwindigkeit v_ϕ ist.

4. Numerische Simulation von Akkretionsscheiben

Es soll sich nun der eigentlichen Zielsetzung dieser Arbeit angenähert werden und damit möglichst die Fragestellung beantwortet werden, ob das im vorangegangenen Kapitel motivierte und ins Softwarepaket `fosite` implementierte subgrid-scale-Verfahren eine adäquate Beschreibung des zentralen Mechanismus – des Akkretionsprozesses – ermöglicht. Denn so mannigfaltig die unterschiedlichen Klassen von Akkretionsphänomenen und die damit einhergehenden Fragestellungen auch sein mögen, so dreht es sich letztlich doch um das „Wie und Warum“ der Akkretion.

Daher sollen in dieser Arbeit alle anderen wissenschaftlich durchaus brennend interessanten Fragestellungen, wie z. B. das *Vereinheitlichte Modell* von AGK oder auch die Planetenentstehung in protostellaren Scheiben, beiseite gelassen werden und lediglich der die Akkretion auslösende Prozess untersucht werden.

Da im Speziellen bei den AGK bedingt durch ihre enorme Leuchtkraft die Frage nach dem Zustandekommen eines so gewaltigen Massenflusses naturgemäß am drängendsten erscheint, sollen sie in dieser Arbeit im Fokus stehen. Bei diesen Objekten schließt sich ebenfalls die Frage nach dem Wachstum des in ihnen existenten supermassereichen Schwarzen Loches an, da bereits zu sehr frühen Zeiten im Universum (bei hoher Rotverschiebung) Exemplare von $10^8 M_{\odot}$ (Hasinger et al., 2005) vorhanden waren, was eine sehr schnelle Entwicklung voraussetzt, die es zu erklären gilt.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell hat gegenüber den – sehr erfolgreichen – eindimensionalen Akkretionsscheibenmodellen von z. B. Shakura & Sunyaev (1973); Pringle (1981); Duschl et al. (2000) den Vorteil, dass die Hydrodynamik komplett berücksichtigt und u. a. auch die Selbstgravitation nicht vernachlässigt wird. Dies eröffnet die Möglichkeit, die turbulente Viskosität nicht mehr rein ad hoc über eine einfache Parametrisierung (Abschn. 2.3.1) vorgeben zu müssen, sondern durch eine selbstkonsistente Modellierung zu ersetzen. Damit entfällt eine auf Akkretionsscheiben zugeschnittene (mehr oder weniger feste) Vorgabe des funktionellen Verlaufs und auch des betragsmäßigen Umfangs der Viskosität. Vielmehr ist das Konzept der Large Eddy Simulationen mit den darin gewählten Schließungsbedingungen inklusive deren Parameter von recht allgemeiner Natur und könnte genauso bei anderen physikalischen Phänomenen eingesetzt werden.

Die zwei im Folgenden vorgestellten Simulationsansätze beschränken sich allerdings auf

(quasi)¹ zwei Dimensionen, was durchaus als Fortschritt zu werten ist, da oft eindimensionale Modelle anzutreffen sind. Diese Einschränkung ist dem numerischen Rechenaufwand geschuldet, der sich maßgeblich aus der Vielzahl der nötigen Zeitschritte und nicht unbedingt aus dem einzelnen Rechenaufwand pro Verfahrensschritt² Δt zur gesamten Simulationszeit t_{Sim} , die zumindest größer als die dynamische Zeitskala sein muss. Bei Aussagen zur Akkretionsrate oder der dauerhaften Entwicklung der Scheibe als Ganzes sollte die Simulationszeit in der Größenordnung der viskosen Zeitskala t_{vis} liegen $\Delta t \leq \Delta t_{\text{CFL}} \ll t_{\text{Sim}} \approx t_{\text{vis}}$.

4.1. Rotationssymmetrisches Modell

Die Simulationen des ersten Modells werden in zwei unterschiedlichen Physikmodulen mit Rotationssymmetrie durchgeführt. Einerseits mittels des neu entwickelten `physics_euler3Drotsymsgs` in Verbindung mit dem Quellterm-Modul `sources_sgs`, um die zuvor motivierten und diskutierten Large Eddy Simulationen durchführen zu können. Andererseits Simulationsläufe mit dem „älteren“ Physikmodul `physics_euler3Drotsym` zusammen mit dem in Sperling (2009) entwickelten Quellterm-Modul `sources_viscosity`, um der Beliebigkeit entgegenzutreten zu können und quantitative Vergleiche zu ermöglichen. Bei der Viskosität kann auf unterschiedliche Parametrisierungen zurückgegriffen werden, wobei in dieser Arbeit ausschließlich die β -Beschreibung nach Duschl et al. eingesetzt wird, da sie – entgegen der Beschreibung von Shakura & Sunyaev (1973) – auch im voll-selbstgravitierenden Fall Gültigkeit besitzt (Duschl et al., 2000).

Weitere Quellterme sind das `sources_pointmass` Modul, welches die Newtonsche Gravitationskraft (2.7) einer Punktquelle im Ursprung realisiert, und das Modul für Selbstgravitation `poisson_multigrid` inklusive der zusätzlich benötigten Multipolentwicklung `multipole_cylindrical`, um das Poisson-Problem (2.13) vollständig lösen zu können (siehe Sperling, 2009, Kap. 3).

Es wird eine zylinderartige Geometrie verwendet

$$(z, s) \equiv (\xi, \eta) = (z_0 \tan(\zeta), x) \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \zeta < \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad x > 0 \quad (4.1)$$

$$(h_z, h_s, h_\phi) \equiv (h_\xi, h_\eta, h_\phi) = \left(\frac{z_0}{\cos^2(\zeta)}, 1, s \right), \quad (4.2)$$

¹Bei der rotationssymmetrischen Scheibe entfällt zwar auch die dritte Koordinate ϕ , aber die Rotationsgeschwindigkeit wird voll berücksichtigt (2D+1).

²Beim expliziten Euler-Verfahren darf Δt nicht größer als durch die CFL-Bedingung (Courant et al., 1928) vorgegeben gewählt werden, um numerische Stabilität zu gewährleisten. Implizite Verfahren sind durch die stark instationäre Lösung und auch durch ihre Komplexität bei diesem Gleichungssystem nicht praktikabel.

wobei z_0 eine Konstante zur Skalierung ist und die h_i die Skalenfaktoren sind. Diese Geometrie ermöglicht es, einen Bereich um $z \approx 0$ mit nahezu konstanter³ Gitterweite Δz vorgeben zu können. Für große $|z|$ ist eine Streckung der Zellen möglich (siehe auch Abb. 4.4), wodurch $z_{\max} = -z_{\min} \gg s_{\max}$ zu erreichen ist, was die Ränder des Rechengebietes weit von der Scheibe entfernt. In allen Simulationen wird die Auflösung in beiden Raumrichtungen und z_0 so gewählt, dass $\Delta z \approx \Delta s$ für $z \approx 0$ gilt, wodurch im wichtigen zentralen Bereich der Scheibe eine isotrope Filterung stattfindet, wenn als Filter das zweidimensionale Gitter verwendet wird. Bei Verwendung des anisotropen Filters (3.10), welche in Abschnitt 3.2.1 diskutiert wird, entsteht zwangsläufig eine anisotropen Filterung.

Der Bereich mit isotropem Filter und nahezu konstanter Gitterweite ($\Delta z \approx \text{const.}$) soll für $|z| < s_{\max}/2$ gelten, was ungefähr der radialen Ausdehnung der Scheibe entspricht. Mit anderen Worten: Durch diese Forderung liegt im Rechengebiet ein nahezu quadratischer Bereich mit nahezu quadratischen Zellen ($\Leftrightarrow \Delta_{2D}$ ist isotrop) vor, die eine geringe Variation in ihrer Ausdehnung aufweisen. Diese Vorgaben lassen sich mit Hinzunahme einer Abschätzung für den linearen Bereich von $\tan(\zeta)$: $|\zeta| < 0,7 \Rightarrow \tan(\zeta) \approx \zeta$ und der Wahl der Parameter zu: $z_0 = s_{\max}/1,4$, $\zeta_{\min} = -1,4$, $\zeta_{\max} = 1,4$ und der doppelten Zahl von Gitterzellen in z -Richtung gegenüber der radialen Richtung

$$N_z = 2 N_s, \quad (4.3)$$

realisieren.⁴ Damit ergibt sich ein Verhältnis von $z_{\max}/s_{\max} \approx 4,1$, was störende Einflüsse der Randbedingungen auf die Scheibe stark minimiert. Das Problem durch vereinzelt über den Rand laufende Wirbel, was zu Beeinträchtigungen geführt hat, konnte damit vermieden werden (siehe hierzu Abschn. 4.1.2). Letztlich kann das betreffende Material bis zum Erreichen des Randes auf Überschall beschleunigt werden, so dass eine Überschallausflussbedingung vorliegt. Dies ist numerisch einer Unterschallausflussbedingung vorzuziehen, die sich meist bei einem naheliegenden Rand nicht einstellen würde.

Eine wichtige Anmerkung: Da das enorme Verhältnis von vertikaler zu radialer Ausdehnung des Rechengebiets (ca. 9,2 zu 1) nur zum Zwecke der besseren numerischen Stabilität gewählt wurde, wird im Folgenden meist nur der zentrale Bereich (4:3) in den Diagrammen dargestellt, der irrelevante „obere“ und „untere“ Teil somit abgeschnitten. Vergleichsrechnungen mit einem auf diesen Bereich beschränkten zylindrischen Gitter haben bis auf die angesprochenen Stabilitätsprobleme keine weiteren nennenswerten Unterschiede aufgedeckt (siehe hierzu exemplarisch Abb. 4.1). Dies zeigt, dass die Geometrie des Gitters, wie es auch zu erwarten war, keine nachteiligen Effekte hervorruft.⁵

Wie bereits in Abschnitt 2.3.3 angemerkt wurde, ist in diesem Modell kein Strahlungsdruck berücksichtigt, so dass a priori die Akkretionsrate von dieser Seite her keiner

³Da $\tan(x) \approx x$ für $x \ll 1$.

⁴Die Wahl der Parameter ist nicht eindeutig, da z. B. auch eine stärkere Streckung der äußersten Zellen möglich gewesen wäre, sie stellt aber einen guten Kompromiss dar.

⁵Die Auswahlmöglichkeit unterschiedlicher Geometrien ist integraler Bestandteil von *fosite*, so dass dies insgesamt gut getestet ist.

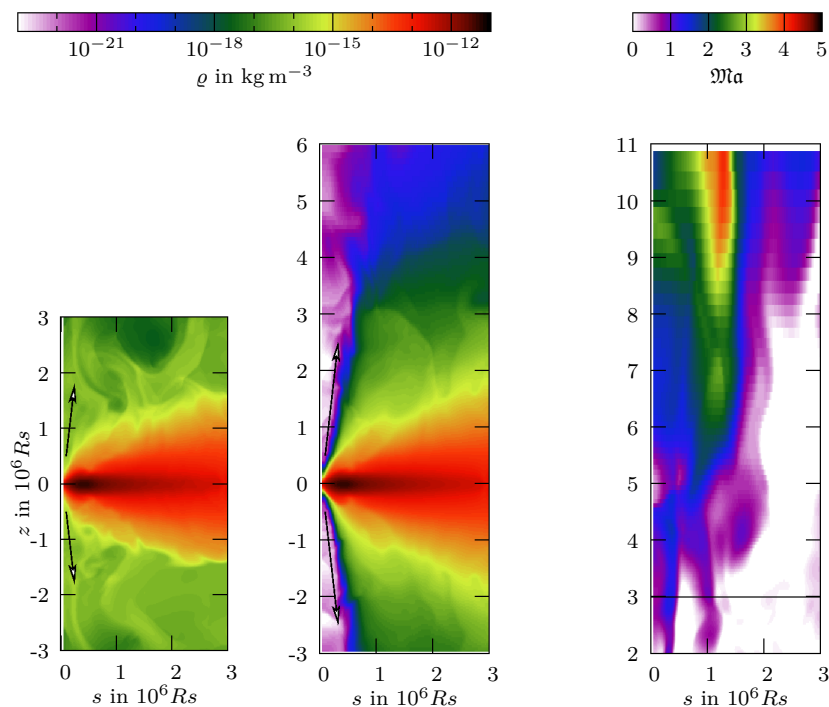


Abb. 4.1.: Exemplarisch sind zwei Simulationen für den Vergleich zwischen der zylindrischen (*links*) und einem *Ausschnitt* aus der tan-zylindrischen Geometrie (*mitte*) für die Massendichte gezeigt ($t = 2,6 \cdot 10^4$ a; Simulationsdaten siehe Abschn. 4.1.3, sog. rNSG-Modell mit SGS Δ_{2D}). Die Mach-Zahl ist für den obersten Ausschnitt der tan-zylindrischer Geometrie *rechts* dargestellt ($t = 2,5 \cdot 10^5$ a). Es zeigt sich, dass die Massendichte im tan-zylin. Fall ungehindert strömen kann, so dass es in Achsennähe zu geringen Dichten kommt. Anhand der Machzahl ist zu sehen, dass für großes z Überschall vorliegt, was ein weiterer Vorteil der Geometrie für die Randbedingung ist (Überschallausflussbedingung).

Beschränkung unterliegt. Dies ist damit zu begründen, dass im Fokus dieser Arbeit die turbulente Viskosität steht und die Fragestellung, ob sie überhaupt potent genug ist, um eine ausreichend hohe Akkretionsrate zu bewerkstelligen. Falls diese Frage tatsächlich bejaht werden kann, so wäre im nächsten Schritt eine effiziente numerische Behandlung des Strahlungstransportes und somit auch eine selbstkonsistente Behandlung der Kühlung wünschenswert, wie dies zurzeit im Rahmen der Dissertation von I. V. Hinz in `fosite` implementiert wird. Dies hat zur Konsequenz, dass die erzielten Temperaturen in der Scheibe eher mit den Scheibenlösungen von advektionsdominierten Akkretionsflüssen (ADAF) (siehe Kato et al., 2008, Kap. 9) verglichen werden können, in welchen die Energie advektiert wird und somit vom Zentralobjekt akkretiert werden kann.

4.1.1. Anfangswerte

Die Anfangswerte werden mittels der primitiven Variablen $\mathbf{p} = (\varrho, v_\xi, v_\eta, v_\phi, p, p_{\text{sgs}})$ bzw. $\mathbf{p} = (\varrho, v_\xi, v_\eta, v_\phi, p)$ vorgegeben, wobei es am Ende der Initialisierungsroutine zur Konversion in konservative Variablen \mathbf{u} (3.54) kommt.

Bedingt durch die Selbstgravitation ist es nicht mehr trivial, eine analytische und gleichzeitig physikalisch sinnvolle Anfangsbedingung zu finden, die ein Kräftegleichgewicht realisiert. Es hat sich herausgestellt, dass mit dem folgenden Algorithmus sinnvolle Anfangsbedingungen erzeugt werden können, die dann ebenfalls zu sinnvollen und fast identischen Vorgaben im nicht-selbstgravitierenden Fall führen:⁶

1. Es wird die Massendichte der Scheibe vorgegeben, die in radialer Richtung einem Potenzgesetz folgt und senkrecht zur Scheibenebene exponentiell mit einer Skalenhöhe $h = h(s)$ abfällt. Die Skalenhöhe ist eine Funktion des Radius, um z. B. ein Aufweiten der Scheibe realisieren zu können. Es ist bis jetzt nicht gelungen, in Beobachtungen von AGK die genaue Struktur der Akkretionsscheiben in Erfahrung zu bringen. Dieser Ansatz – samt Parameter – lehnt sich dem theoretischen Modell der α -Scheiben an⁷ (vgl. Frank et al., 2002, S. 93):

$$\varrho = \varrho_0 s^a \exp\left(-\frac{|z|}{h(s)}\right) + \varrho_\infty, \quad (4.4)$$

wobei $h(s) = s/H$ mit einem Verhältnis von 1:10 ($H = 10$) gewählt wird und $\varrho_\infty = 10^{-22} \text{ kg m}^{-3}$ eine Untergrunddichte darstellt, die nicht nur aus numerischen Gesichtspunkten sinnvoll ist. Der Exponent wird der genannten Literatur mit $a = -15/8$ entnommen, was einen nahezu reziproken Abfall mit der radialen Koordinate⁸ der Flächendichte

$$\Sigma(s) = \int \varrho(s, z) dz \quad (4.5)$$

bewirkt.

2. ϱ_0 skaliert die Scheibenmasse M_{disk} . Durch numerische Integration wird ϱ_0 so bestimmt, dass die jeweilige Vorgabe an die Masse der Scheibe in der Simulation erfüllt ist

$$\varrho_0^{-1} = \frac{1}{M_{\text{disk}}} \int \frac{\varrho}{\varrho_0} dV. \quad (4.6)$$

3. Die aus der Massenverteilung der Scheibe und der zentralen Punktmasse resultierende Gravitationsbeschleunigung $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{self}} + \mathbf{f}_Z$ wird numerisch bestimmt.

⁶Zwangsläufig bedarf es eines kleineren Druckgradienten in vertikaler Richtung, um beim nicht-selbstgravitierenden Fall ebenfalls eine Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen.

⁷Oft wird in der Literatur eine Gaußsche Dichteverteilung $\propto \exp\left(-\frac{z^2}{2h(s)^2}\right)$ angenommen, was bei isothermen Scheiben eine natürliche Lösung darstellt.

⁸Genauer: $\Sigma(s) \propto s^{-7/8} \approx s^{-1}$.

4. Es soll ein Druckgradient in z -Richtung hervorgerufen werden, der hydrodynamisches Gleichgewicht in eben dieser Richtung erzeugt:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial z} = \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (4.7)$$

Das anfallende Integral

$$p(z) = \int_{z_{\min}}^z \varrho(z') \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z \, dz' \quad (4.8)$$

wird zum Zwecke der numerischen Genauigkeit nur bis zur Zentralebene $z = 0$ ausgewertet und wegen der vorliegenden Symmetrie bei der Wahl der Anfangsdaten für den Bereich $z > 0$ gesetzt: $p(z) = p(-z)$. Der Druck am Rand wird mit $p(z_{\max}) = p(z_{\min}) = p_{\infty}$ vorgegeben.

5. Der Druck ist damit eindeutig bestimmt, wobei daraus i. A. ein Druckgradient in radialer Richtung $\frac{\partial p}{\partial s} \neq 0$ resultiert.
6. Die Rotationsgeschwindigkeit v_{ϕ} wird so gewählt, dass ein Gleichgewicht aus Fliehkraft, Druckgradient in radialer Richtung und der radialen Gravitationsbeschleunigung vorherrscht

$$v_{\phi} = \sqrt{\max \left(0, s \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} - \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_s \right) \right)}. \quad (4.9)$$

Ein möglicherweise negativer Radikand wird durch das Maximum ausgeschlossen, wobei ein solches Ungleichgewicht durch geeignete Wahl der Massenverteilung möglichst zu vermeiden ist, da dies zwangsläufig nicht durch die Fliehkraft stabilisiert werden kann und somit zu Beginn der Simulation zu Ausgleichsbewegungen führt.

7. Die beiden verbleibenden Geschwindigkeiten werden zu Null gesetzt $v_s = v_z = 0$.
8. Im Fall der SGS-Simulation darf der turbulente Druck p_{sgs} nicht identisch Null gesetzt werden, da der Produktionsterm (3.46) zu Null werden würde⁹, $p_{\text{sgs}} = 0 \Rightarrow \nu_{\text{sgs}} = 0 \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{sgs}} = \hat{\mathbf{0}} \Rightarrow \mathcal{P} = 0$, so dass **prinzipiell** kein turbulenter Druck generiert werden könnte.

Auf der anderen Seite ist es schwierig a priori eine Abschätzung für turbulente Energiedichte bzw. turbulenten Druck zu tätigen. Daher soll sicher gestellt sein, dass die Entwicklung der Scheibe unabhängig vom initialen Wert dieser Größen ist. Es stellt sich heraus, dass die Wahl des turbulenten Drucks durch $p_{\text{sgs}} \ll p$ unkritisch ist, da durch die nicht-lineare Produktion (3.46) bereits nach sehr kurzen Zeiten ein vom Anfangszustand nahezu unabhängiger Wert erreicht wird; der Anfangszustand wird quasi vergessen.

⁹Diffusionsterm und Dissipationsterm wären ebenfalls identisch Null.

Siehe hierzu den Vergleich in Abb. 4.2, der drei rotationssymmetrische Simulationen darstellt, welche sich lediglich durch den Anfangswert $\eta_0 = p_{\text{sgs}}/p$ unterscheiden. Die Scheibenmasse beträgt $M_{\text{disk}} = 10^7 M_{\odot}$ und die Zentralmasse $M_Z = 10^6 M_{\odot}$. Alle anderen Parameter sind wie in diesem Abschnitt diskutiert. Die drei gezeigten Zeitpunkte sind extrem kurz¹⁰ nach Simulationsbeginn gewählt worden und zeigen bereits starke Übereinstimmung, obwohl die Anfangswerte sehr unterschiedlich sind. Nur weit außerhalb der Scheibenebene treten signifikante Abweichungen zum Vorschein, wobei dort u. a. die Massendichte so gering ist, dass diese Bereiche für die Dynamik keine Rolle spielen. Mit dem Auftreten sog. Scheibenwinde,¹¹ werden innerhalb weniger dynamischer Zeitskalen die noch letzten verbleibenden Differenzen ausgeglichen.

Als Konsequenz kann der turbulente Druck für alle folgenden Simulationsläufe zu $\eta_0 = 10^{-12}$ gewählt werden. Dies schließt neben etwaigen Effekten des Druckgradienten $\nabla p_{\text{sgs}} \ll \nabla p$ auch Auswirkungen einer möglicherweise zu großen anfänglichen Wirbelviskosität aus, denn die Wirbelviskosität (3.41) ist an den turbulenten Druck gekoppelt und somit ebenfalls sprunghaft angestiegen. Stellt sich im späteren Verlauf dieser Arbeit heraus, dass die Wirbelviskosität während der Simulation nicht zu groß ist, dann ist sie es zum Startzeitpunkt jedenfalls auch nicht.

4.1.2. Randbedingungen

Randwerte müssen für diese Art von mathematischem Problem notwendigerweise durch physikalisch sinnvolle Bedingungen vorgegeben werden. Technisch wird dieses Ziel durch sog. *Geisterzellen* erreicht, die sich an das Rechengebiet anschließen, ohne aber durch die eigentlichen Verfahrensschritte, wie z. B. Flussberechnung, determiniert zu werden. Die physikalischen Variablen werden in den *Geisterzellen* direkt *gesetzt*, was durch eine geeignete Bedingung vorgegeben wird. Auf diese Weise besitzen die jeweils an den Rand angrenzenden Zellen, die noch **im** Rechengebiet liegen, ebenfalls vier Nachbarzellen, so dass sie im Verfahren nicht gesondert behandelt werden müssen. Um dies auch für die Flussberechnung über den Rand zu gewährleisten, werden in `fosite` zwei „Reihen“ von Geisterzellen verwendet für die jeweils sinnvolle Bedingungen gestellt werden müssen.

Die Vorgaben beeinflussen die Simulation maßgeblich, weshalb physikalisch sinnvolle Bedingungen gewählt werden müssen. Hierbei spielt das Modul `boundary_farfield` eine zentrale Rolle, was die in Abschnitt 3.3.1 vorgestellte Methode realisiert. Die hierzu nötigen Riemann-Invarianten in den Geisterzellen, die mit den ins Rechengebiet einlaufenden charakteristischen Variablen korrespondieren, werden durch fest vorgegebene primitive

¹⁰In Bezug auf die dynamische Zeitskala (2.32)

¹¹Dünnes, heißes Gas, welches von der Scheibenoberfläche mit zum Teil großer Geschwindigkeit wegströmt.

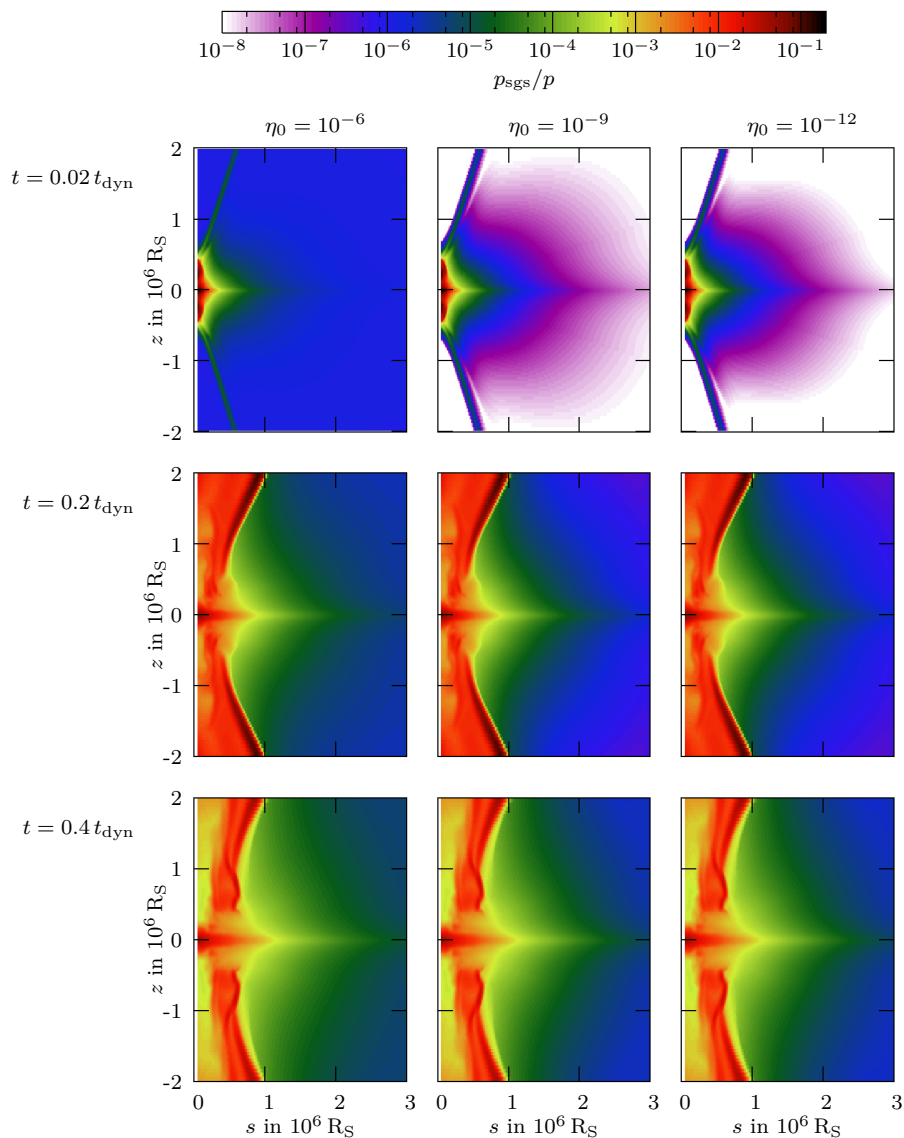


Abb. 4.2.: s - z Schnitt der Akkretionsscheibe. Die Entwicklung des turbulenten Drucks p_{sgs} ist nahezu unabhängig vom initial gewählten Wert. Die Spalten zeigen die drei Simulationen: $\eta_0 = p_{\text{sgs}}(t=0)/p(t=0) \in \{10^{-6}, 10^{-9}, 10^{-12}\}$. Die Zeilen markieren $t \in \{0.02, 0.2, 0.4\} t_{\text{dyn}}$ (dyn. Zeitskalen des Außenrandes). Bereits bei $0.02 t_{\text{dyn}}$ haben sich die 2. & 3. Simulation angeglichen, bei $t = 0.4 t_{\text{dyn}}$ faktisch alle drei (siehe Abschn. 4.1.1).

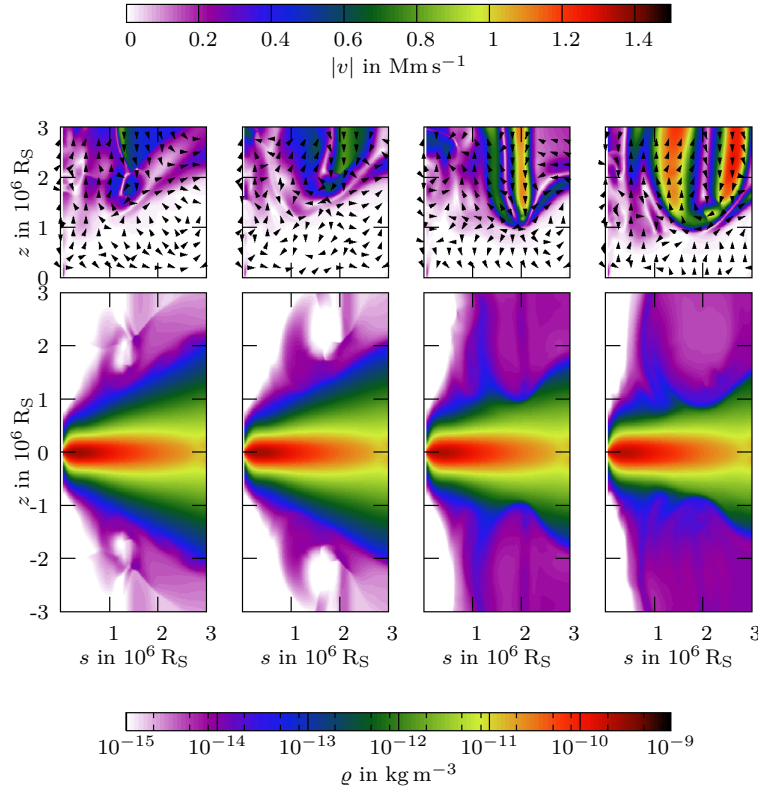


Abb. 4.3.: Dargestellt ist beispielhaft eine Simulation ($t = \{8, 9, 12, 14\} 10^3 a$) mit Wirbelbildung am Rand (hier: simultan an Nord- & Süd-Rand). Die Auswirkung auf die Massendichte ist anfangs marginal und zeigt lediglich eine stärkere Durchmischung ober- und unterhalb der Scheibe. Die Geschwindigkeit hingegen steigt stark an und der Wirbel kann die dichteren Regionen der Scheibe erreichen. Zu einem späteren Zeitpunkt wird in selbiger Simulation ein solcher Wirbel die Struktur der Scheibe zerstören.

Variablen berechnet. Es hat sich bewährt, die ungestörte Anfangsbedingung der primitiven Variablen hierfür zu wählen¹². Stellt sich ein Überschallausfluss über den Rand hinweg ein, so wird zur Vereinfachung auf die Farfield-Berechnung verzichtet und die Daten direkt extrapoliert, da es bei Überschall keinen Informationsaustausch entgegen der Strömungsrichtung gibt.¹³

Diese Randbedingung findet bei den parallel zur s -Koordinate verlaufenden Rändern $z \in \{z_{\min}, z_{\max}\}$ Anwendung, die durch die gewählte tan-zylindrische Geometrie *weit* von der Scheibenebene ($z_{\max} \gg s_{\max} \gg h(s)$) entfernt sind. Sie sollen im Folgenden – zur Anschaulichkeit – als Nord- bzw. Süd-Rand bezeichnet werden. Auch für den äußeren Rand der Scheibe bei $s = s_{\max}$ wird die Farfield-Bedingung eingesetzt.

¹²Die auslaufenden Riemann-Invarianten ergeben sich durch die im Rechengebiet an die am Rand angrenzenden Daten (vgl. Hirsch, 1988).

¹³Bei Überschall gibt es keine Riemann-Invariante mehr, die sich entgegen der Strömung ausbreitet.

Es soll kurz erläutert werden, weshalb weit entfernte Nord-Süd-Ränder für die numerische Stabilität wichtig sind. In Abschnitt 4.1.4 stellt sich heraus, dass in den gezeigten Simulationen teilweise starke Wirbel in der Nähe des inneren Randes generiert werden und dann schräg zu großen $|z|$ und s wandern. Durchläuft solch ein Wirbel den Nord- bzw. Süd-Rand, so erzeugt er dort – bedingt durch seine Rotation – unmittelbar nebeneinander einen Ein- & Ausfluss (Scherströmung). Dies ist in Abb. 4.3 exemplarisch anhand von vier Zeitschritten dargestellt, wobei der Betrag der Geschwindigkeit (für $z > 0$) und die Massendichte gezeigt werden (Simulation mit $M_Z = 10^6 M_\odot$, $M_{\text{disk}} = 10^7 M_\odot$, $\beta = 10^{-3}$, selbst-grav., zylindrische Geometrie \Rightarrow nahe Ränder $z_{\text{max}} = s_{\text{max}}$).

Da in vertikaler Richtung die Scheibe lediglich durch Druckkräfte stabilisiert ist, klingt dieser Zustand oft nicht ab und kann sich ggf. sogar verstärken. Die Ein- & Ausflussgeschwindigkeit wächst an und der Wirbel dehnt sich unter Umständen weiter aus, bis er Kontakt zu dichteren Regionen der Scheibe erhält, was möglicherweise bis zur Zerstörung der Scheibenstruktur führen kann. Dies liegt darin begründet, dass die Farfield-Bedingung keinen Masseneinfluss verbietet, ihn lediglich auf eine sehr dünne Massendichte beschränkt, welche jedoch teilweise sehr hohe Einflussgeschwindigkeiten aufweisen kann.

Wird nun der Nord- & Süd-Rand ausreichend weit von der Scheibe entfernt verlegt, so verlassen die Wirbel das Rechengebiet über den äußeren Rand (bei $s = s_{\text{max}}$). Dort wird der oben beschriebene Prozess zwar auch ausgelöst, aber in geringerem Umfang, weil in radialer Richtung nicht allein eine Stabilisierung durch die Druckkraft (hydrostatisches Gleichgewicht) vorliegt, sondern hauptsächlich durch die Zentrifugalbeschleunigung. Dieses Gleichgewicht scheint ausreichend stabil zu sein, um den beschriebenen Prozess effektiv am Außenrand zu hemmen. Auch zeigt sich, dass sich zu späteren Zeiten meist ein relativ stationäres Strömungsbild einstellt, bei welchem das Material vor Erreichen des Randes auf Überschall beschleunigt wird. Die damit vorliegende Überschallausflussbedingung ist numerisch einer Unterschallausflussbedingung vorzuziehen (siehe Abb. 4.1). Die Randbedingung reagiert automatisch auf die Strömungssituation (siehe Abschn. 3.3.1).

Der innere Rand

Das eigentliche Problem stellt der innere Rand der Scheibe dar, der die Akkretionsrate stark beeinflussen kann, indem er z. B. Material *ansaugt*. Insgesamt hat es sich als günstig erwiesen, diesen Rand in Abschnitte aufzuteilen und diesen unterschiedliche Randbedingungen zuzuweisen (siehe Abb. 4.4). Dabei wird um die Scheibenebene $|z| < L$ ein Bereich definiert, der als eigentlicher innerer Rand aufzufassen ist, weil ebenda Ausflussrandbedingungen definiert werden, die weiter unten erklärt werden. Der Parameter L wird größer als s_{min} gewählt, womit dieser erheblich größer als die Skalenhöhe $h(s_{\text{min}})$ der Scheibe ausfällt (für Zahlenwert siehe Tab. C.1). Jenseits dessen ($|z| > L$) liegt am inneren Rand der Simulation lediglich ein sehr dünnes, heißes Gas

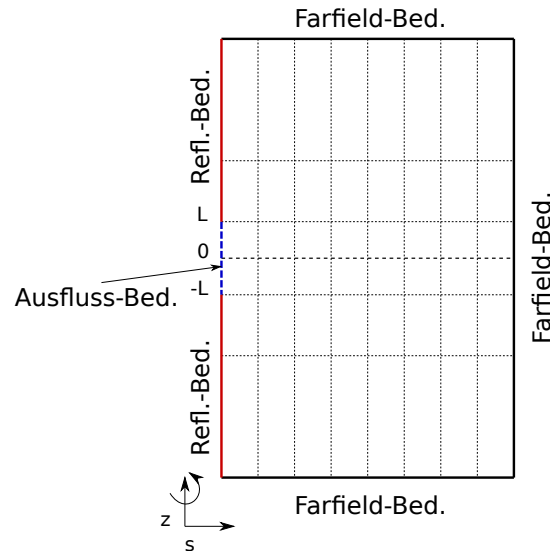


Abb. 4.4.: Nicht maßstabgetreue Skizze des Simulationsgebietes zur Verdeutlichung der gestellten Randwertbedingungen und der Beschaffenheit des tan-zylindrischen Gitters (siehe Text).

vor, was vornehmlich zu großen $|z|$ (und s) strömt (eine Art Scheibenwind). Aus physikalischer Sicht ist es nicht gewollt, dass über diesen Randbereich Material ein- oder ausfließen kann, da jenseits des Randes weder ein Reservoir noch eine Quelle oder Senke zu erwarten wäre. Ebenfalls muss die Bedingung numerisch unkritisch sein, um die Stabilität nicht zu gefährden, was sich z. B. durch Wirbel am Rand ergeben könnte. Es zeigt sich, dass reflektierende Randbedingungen zu stabilen Lösungen führen, die das Lösungsverhalten nicht nachteilig beeinflussen (im Vergleich zu z. B. Randbedingungen mit *verschwindenden Gradienten*).

Im Bereich $|z| < L$ soll die oben angesprochene Ausflussrandbedingung vorliegen, die über eine Vielzahl von Möglichkeiten realisiert werden kann. Diese sind zum Teil nicht unproblematisch, was nach einer großen Anzahl von Fehlschlägen bestätigt werden kann. Denn a priori ist es völlig unklar, wie sich die stark instationäre Lösung der PDG am Innenrand fortsetzt, so dass keine Angaben über beispielsweise die primitiven Variablen getätigt werden können.

Eine weitere Schwierigkeit liegt meist darin begründet, dass ein inkorrektes netto Drehmoment vom Rand auf die Scheibe übertragen wird, was bei großer Viskosität nicht unerheblich ist. Da in diesem Modell die Scheibe am Innenrand als fortgesetzt gedacht sein soll, ist es aus physikalischer Sicht nicht korrekt, wenn beispielsweise das Drehmoment am inneren Rand verschwindet. Wäre dies der Fall, dann würde auf das Material direkt am Innenrand lediglich die durch Reibung vermittelte Kraft des weiter außerhalb liegenden Materials $\mathbf{f}_{\text{vis}}(s_{\text{min}} + ds)$ wirken. Fällt die Rotationsgeschwindigkeit mit größer werdendem Radius ab, was in der Nähe des inneren Randes eine realistische Annahme darstellt, so ist die viskose Kraft von außen bremsend und würde zu unrealistisch hohen

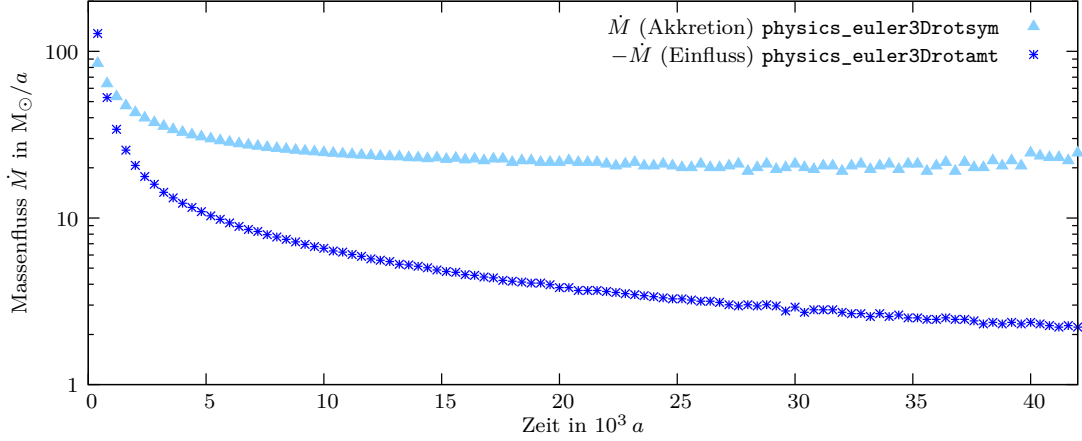


Abb. 4.5.: Dieses Beispiel soll die Problematik mit den gestellten Bedingungen am Innenrand illustrieren. Durch die Randbedingung bezügl. v_ϕ kommt es zu einer unrealistisch hohen Akkretionsrate; durch die Bedingung an l hingegen zu einem **negativen** Massenstrom – die Scheibe gewinnt an Masse. Die viskose Zeitskala wird lediglich am Innenrand erreicht: $t_{\text{vis}}(s_{\text{min}}) \approx 5 \cdot 10^3 \text{ a}$ ($M_Z = 10^6 M_\odot$, $M_{\text{disk}} = 10^7 M_\odot$, $\beta = 10^{-3}$, $s_{\text{min}} = 5 \cdot 10^4 R_S$, selbst-grav., keine-Gradienten Bed.)

Akkretionsraten führen, da der beschleunigende Gegenpart – die viskose Kraft von innen $\mathbf{f}_{\text{vis}}(s_{\text{min}} - ds)$ – vernachlässigt wird. Dies disqualifiziert ebenfalls die *keine-Gradienten* Bedingung, die ansonsten die geforderte Kontinuität der Strömungsgrößen – also die gedachte Fortführung der Scheibe – gewährleistet, weil sie die Rotationsgeschwindigkeit am Innenrand unterschätzt.

Dieser Sachverhalt bestätigt sich bei Tests und führt zu erheblich zu großen Akkretionsraten. Eine Umstellung auf das alternative Physikmodul `physics_euler3Drotamt` führt anfänglich hingegen – bei sonst identischen Bedingungen – zu *negativen* Akkretionsraten, wobei das Einströmen in die Scheibe ungefähr eine Größenordnung geringer ausfällt als der Massenausfluss im zuvor genannten Physikmodul. In Abb. 4.5 wird der Umstand der ungünstig gestellten Randbedingungen verdeutlicht, wobei im logarithmisch skalierten Diagramm das Vorzeichen des negativen Massenstroms getauscht wurde, um es darstellen zu können. Es soll nur der direkte Vergleich der – bis auf das Physikmodul – ansonsten identischen Simulationen von Bedeutung sein, weshalb auf weitere Simulationsdetails verzichtet wird.¹⁴

Erklären lässt sich dieser Umstand, wenn die primitiven Variablen beider Physik-Module verglichen werden. Der einzige Unterschied bezüglich der primitiven Variablen ist, dass beim `physics_euler3Drotamt` die Variable v_ϕ durch den spezifische Drehimpuls $l = s v_\phi$ ersetzt ist, was bessere Erhaltung des Drehimpulses gewährleisten soll (auf Kosten der

¹⁴Die zentralen Parameter, wie auch die Anfangsdaten, sind mit dem im Abschnitt 4.1.4 untersuchten Modell identisch (siehe alternativ Tab. C.1).

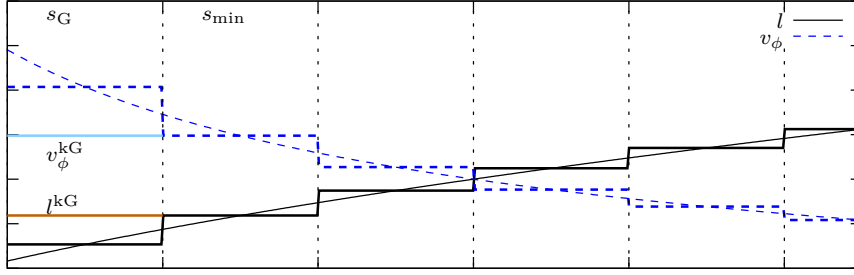


Abb. 4.6.: In der Skizze ist der spez. Drehimpuls l und die Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ über den Radius unter Annahme von Keplerscher Rotation aufgetragen (hier: l und v_ϕ dimensionslose Größen; senkrechte Striche markieren Gitterzellen). Die – durch das Verfahren bedingten – stückweise konstanten Daten werden in der Geisterzelle des Randes s_G durch die *keine-Gradienten* Bed. jeweils über- bzw. unterschätzt (siehe Text).

Gesamtenergie). Durch die keine-Gradienten (kG) Bedingung wird im ersten Fall v_ϕ in den Geisterzellen am Ort s_G vorgegeben:

$$v_\phi^{\text{kG}}(s_G) = v_\phi(s_{\min}) \quad \text{mit } s_G < s_{\min} \quad (4.10)$$

Wird nun davon ausgegangen, dass die azimutale Geschwindigkeit wie die Keplersche Geschwindigkeit skaliert $v_\phi \propto s^{-1/2}$, was am Innenrand sicherlich eine gute Abschätzung ist, so wird sie mit der kG-Bedingung in den Geisterzellen unterschätzt

$$v_\phi \propto s^{-1/2} \Rightarrow \sqrt{s_G} v_\phi(s_G) = \sqrt{s_{\min}} v_\phi(s_{\min}) \Rightarrow \frac{v_\phi^{\text{kG}}(s_G)}{v_\phi(s_G)} = \sqrt{\frac{s_G}{s_{\min}}} < 1, \quad (4.11)$$

was skizzenhaft in Abb. 4.6 dargestellt ist.

Da die durch Reibung wirkende Kraft (bis auf geometrische Terme) proportional zum Gradienten der Geschwindigkeit ist (siehe Abschn. 2.1.5), tritt ein kleineres Drehmoment auf, als dies bei einer Keplersch rotierenden Geisterzellen der Fall wäre.

Im zweiten Modul wird der spezifische Drehimpuls l in den Geisterzellen vorgegeben

$$l^{\text{kG}}(s_G) = l(s_{\min}) \quad (4.12)$$

und damit überschätzt

$$l = s v_\phi \propto s^{1/2} \Rightarrow \frac{l(s_G)}{\sqrt{s_G}} = \frac{l(s_{\min})}{\sqrt{s_{\min}}} \Rightarrow \frac{l^{\text{kG}}(s_G)}{l(s_G)} = \sqrt{\frac{s_{\min}}{s_G}} > 1, \quad (4.13)$$

somit auch indirekt die Rotationsgeschwindigkeit

$$v_{\phi}^{\text{kG}}(s_{\text{G}}) = \frac{l^{\text{kG}}(s_{\text{G}})}{s_{\text{G}}} > \frac{l(s_{\text{G}})}{s_{\text{G}}} = v_{\phi}(s_{\text{G}}), \quad (4.14)$$

die bei der Berechnung der Reibung und damit für die wirkende Kraft die zentrale Rolle spielt. Daher wirkt durch die keine-Gradienten Bedingung mehr Drehmoment auf den inneren Rand, als es bei der realistischeren Annahme der Rotationsgeschwindigkeit ($v_{\phi} \propto s^{-1/2}$) in den Geisterzellen der Fall wäre. Dies erklärt aus Sicht des Autors die Beobachtungen und erfordert zwangsläufig bessere Randbedingungen.

Aus diesem Grund wird in allen Simulationen als Randbedingung die Extrapolation der Rotationsgeschwindigkeit

$$v_{\phi}(s_{\text{G}}) = \sqrt{\frac{s_{\text{min}}}{s_{\text{G}}}} v_{\phi}(s_{\text{min}}) \quad (4.15)$$

verwendet. Dabei kann kurzzeitiges Einströmen von Material nicht gänzlich ausgeschlossen werden, was bei einer Extrapolationsbedingung problematisch sein kann. Zusätzlich wäre es ggf. nötig, beim Einfluss Variablen direkt vorgeben zu müssen, was physikalisch nicht begründbar ist, da die Daten am Innenrand a priori unbekannt sind. Auch wird Material, welches über den Rand fließt, direkt dem Zentralobjekt als Massenzuwachs zugeschrieben, was in letzter Konsequenz beim Einströmen in die Scheibe diesem abgezogen werden müsste.

Um diese Problematik zu vermeiden, wird eine reine Ausflussbedingung dadurch definiert, dass die Geschwindigkeit v_s auf dem Rand so gesetzt wird, dass kein Fluss in das Rechengebiet auftreten kann. Beim Ausfluss aus der Scheibe hingegen wird die Geschwindigkeit in die Geisterzellen kopiert (Keine-Gradienten Bedingung), wie dies z. B. auch in Ohsuga & Mineshige (2011, Sec. 3.5) – wenn auch aus anderen Gründen – Verwendung findet.

Dabei tritt ein sehr diffiziles Problem auf: Um tatsächlich keinen Masseneinstrom in das Rechengebiet zu haben, muss der numerische Fluss des Finite Volumen Verfahrens am Rand identisch Null sein (bzw. maximal Null, da ein Ausfluss erlaubt ist). Der numerische Fluss wird direkt an den Zellgrenzen berechnet, weshalb bei diesem Verfahren generell die jeweiligen Zellmittelwerte auf Werte an den Zellgrenzen extrapoliert werden. Die durch Extrapolation gewonnenen Daten an den Zellgrenzen sind i. A. unstetig (links- und rechtsseitiger¹⁵ Wert voneinander verschieden). Der Netto-Fluss zwischen zwei Zellen ist nun die Bilanz aus linksseitigem und rechtsseitigem Fluss, welcher aus den extrapolierten Daten bestimmt wird. Durch setzen von $v_s(s_{\text{G}}) = 0$ wäre nicht sichergestellt, dass kein Fluss über den Rand auftritt. Der Netto-Fluss ist identisch Null,

¹⁵Die Begrifflichkeit linksseitig und rechtsseitig soll durch die Anschauung getragen sein und bezeichnet beispielsweise den Wert der Geisterzelle zum Rechengebiet am Innenrand als linksseitig und den vom Rechengebiet zur Geisterzelle als rechtsseitig.

wenn linksseitiger **und** rechtsseitiger Fluss verschwinden oder sich beide exakt gegeneinander aufheben. Da der rechtsseitige Fluss nicht beeinflusst werden kann, muss der linksseitige Fluss vom Betrage gleich sein, aber umgekehrtes Vorzeichen besitzen. Das hat zur Konsequenz, dass beim Auftreten einer positiven radialen Geschwindigkeit am Innenrand (also potentiell Einfluss) die Geschwindigkeiten in den Geisterzellen so gesetzt werden, dass die genannte Bedingung erfüllt ist. Dies wird, wie allgemein in der Literatur üblich, durch sog. reflektierende Bedingungen erreicht

$$v_s(s_G) = -v_s(s_{\min}) \quad (4.16)$$

$$v_s(s_{G-1}) = -v_s(s_{\min+1}), \quad (4.17)$$

wobei die Geisterzellen durch negativ gespiegelte Geschwindigkeiten der Randzellen befüllt werden müssen. Damit ergeben sich sozusagen hybride Randbedingungen, die zwischen den bereits vorhandenen reflektierenden und denen mit verschwindendem Gradienten je nach Situation wechseln.

Die beschriebene Problematik tritt ebenfalls bei den sog. *absorbierenden Randbedingungen*¹⁶ auf, bei welchen die auslaufenden charakteristischen Variablen (3.73) am Rand konstant vorgegeben und die einlaufenden zu Null gesetzt werden, was für die Rotationsgeschwindigkeit mit der ersten KG-Bedingung äquivalent ist. Bei der Herleitung der charakteristischen Variablen kann durch Umformulierung ebenfalls der spezifische Drehimpuls anstelle der Rotationsgeschwindigkeit als charakteristische Variable erhalten werden, was letztlich an der Freiheit liegt, die dadurch entsteht, dass als Näherung alle Quellterme vernachlässigt werden. Dies kommt der zweiten KG-Bedingung gleich und ist somit ebenfalls keine Verbesserung.

Da über das Verhalten der anderen Größen am Rand weniger Informationen vorliegen, werden diese weiterhin über die keine-Gradienten Bedingung in den Geisterzellen bestimmt, was in gewisser Hinsicht ein konservativer Ansatz im Vergleich zu einer Extrapolation darstellt. Der damit entstehende Fehler im Drehmoment durch die konstant fortgeführte Massendichte ist von erheblich geringerer Größenordnung und hat bei Tests keine Auswirkung erkennen lassen. Durch diese Vorgabe wird auch vermieden, dass sich das Verhältnis von Druck und Dichte in den Geisterzellen ändert, was ansonsten einem Temperatursprung gleich kommen würde.

4.1.3. Verbleibende (globale) Parameter

Zur Überprüfung der Hypothese, ob die selbstkonsistente Beschreibung der turbulenten Viskosität mittels einer LES im Kontext von Akkretionsscheiben, zu sinnvollen Resultaten führt, soll anhand von Vergleichssimulationen mit der bewährten β -Parametrisierung

¹⁶In der Literatur auch als *nicht-reflektierende* Randbedingung bezeichnet.

geprüft werden. Hierzu wird jeweils eine Klasse von völlig identischen Simulationsläufen durchgeführt, die sich lediglich – wie eingangs beschrieben – im Physikmodul und dem entsprechenden Quellterm-Modul unterscheiden. Dabei ergibt sich bei den klassischen Simulationen – innerhalb gewisser Grenzen – die freie Wahl des β -Parameters (Abschn. 2.3.1) und wird aus den Überlegungen des genannten Abschnitts mit $10^{-6} \leq \beta \leq 10^{-3}$ eingegrenzt.

In zurückliegenden Untersuchungen ist oft $\beta \approx 10^{-3}$ gewählt worden (z. B. Duschl & Strittmatter, 2011), was im Vergleich zu Richard & Zahn (1999) mit $\beta \approx 10^{-5}$ enorm erscheint. Es gilt zu klären, ob das hier zum Einsatz kommende SGS-Verfahren mit diesem Wertebereich kompatibel ist und ggf. eine Präferenz vorweist.

Wie in Abschnitt 3.2.2 festgestellt, wird an den Parametern des SGS-Verfahrens **keine** Anpassung vorgenommen, da sich diese Parameter in unterschiedlichen – von Akkretionsscheiben unabhängigen – Untersuchungen ergeben haben und es ansonsten die Aussagekraft dieser Arbeit verringern würde. Allerdings sollen, wie in Abschnitt 3.2.1 angesprochen, die beiden unterschiedlichen Filterbreiten (3.9) und (3.10) eingesetzt werden. Es muss sich herausstellen, ob die zweite Definition der Filterbreite, mit dem stark anisotropen und inhomogenen Filter zu sinnvollen Resultaten führt.

Um den Einfluss von Selbstgravitation, durch beispielsweise gravitative Instabilitäten, auf die Simulation prüfen zu können, wird ein Szenario mit dominierendem Scheibenpotential und eines ohne untersucht, die sich lediglich in der Scheibenmasse unterscheiden:

rFSG-Modell: Scheibenmasse $M_{\text{disk}} = 10 \cdot M_Z$, sowie numerischer Berücksichtigung des Scheibenpotentials durch das Modul `poisson_multigrid`

rNSG-Modell: Scheibenmasse $M_{\text{disk}} = 0,1 \cdot M_Z$ (ohne Selbstgravitation)

Die Zentralmasse wird zu $M_Z = 10^6 M_\odot$ gewählt, was in der Kategorie von supermassereichen Schwarzen Löcher eher zum unteren Ende der Skala gehört.¹⁷ Es kann als ein im Wachstum befindliches Schwarzes Loch aufgefasst werden.

Die verbleibende Wahl der räumlichen Ausdehnung und damit die Festlegung der Massendichte ρ der Akkretionsscheibe um ein AGK beinhaltet die größte Freiheit und damit in gewisser Weise auch Willkür, da sie durch Beobachtungen nur unzureichend eingeschränkt wird. Dies liegt daran, dass nur der innere, heiße Bereich der Scheibe signifikante Beiträge zum Spektrum des AGK liefert; das kalte, außen liegende Massenreservoir hingegen entzieht sich oft der Beobachtung. Der äußere Rand wird mit $s_{\text{max}} = 3 \cdot 10^6 R_S$ ($\approx 2,871 \cdot 10^{-5}$ pc) möglichst so gewählt, dass die – damit vorgegebene – Massendichte der Scheibe ein brauchbares Modell widerspiegelt. Dabei soll das

¹⁷Die Galaxis beherbergt nach heutigem Stand ein SMSL von $(4,31 \pm 0,42) \cdot 10^6 M_\odot$ (Gillessen et al., 2009) und gehört damit **nicht** zu den massereichsten Vertretern. Es treten Massen bis zu einigen $10^9 M_\odot$ auf; die nächste (große) Galaxie M31 (Andromedagalaxie) mit $M_Z = (1,1 - 2,3) \cdot 10^8 M_\odot$ (Bender et al., 2005) oder M87 mit $M_Z = (6,4 \pm 0,5) \cdot 10^9 M_\odot$ (Gebhardt & Thomas, 2009) seien genannt.

resultierende Verhältnis von viskoser Zeitskala (2.33) zu erzielbarer Simulationszeit, die sich aus den zur Verfügung stehenden Rechnerressourcen ergibt, nicht zu klein ausfallen. Als äußerer Radius wären ansonsten prinzipiell auch bis zu einigen pc denkbar, so dass als Konsequenz die Massendichte im rFSG-Modell moderater ausfallen könnte. Würde die Zentralmasse M_Z im gleichen Verhältnis wie die Scheibenmasse M_{disk} gesenkt werden, könnte bei weiterhin identischem Radius ebenfalls eine geringere Massendichte ϱ erzielt werden. Dies würde allerdings u. a. eine Änderung der viskosen Zeitskala t_{vis} nach sich ziehen, da diese bei β -Parametrisierung von der Rotationsgeschwindigkeit $v_\phi(M(s))$ abhängt. Eine Aussage zur LES diesbezüglich kann nicht so einfach getroffen werden. Ebenfalls wäre keine Verbesserung des Verhältnisses von $\dot{M}_{\text{Edd}}/\dot{M}$ zu erwarten.

Summa summarum kann somit festgestellt werden, dass die Wahl des äußeren Radius in Verbindung mit der gewählten Zentral- und Scheibenmassen einen annehmbaren Kompromiss darstellt.

Bei der Wahl des inneren Randes sollten zwei Dinge Berücksichtigung finden: Zum einen muss die radiale Auflösung N_s zusammen mit s_{min} so gewählt werden, dass den Geisterzellen möglichst eine positive radiale Koordinate $s_G > 0$ als Schwerpunkt zuzuordnen ist, um keine Probleme bei der Multipol-Entwicklung für die Eigengravitation zu verursachen: ($\Rightarrow s_{\text{min}} \gtrsim 2 s_{\text{max}}/N_s$). Zum Anderen treten am Innenrand erfahrungsgemäß die größten Geschwindigkeiten auf, so dass die Zeitschrittlimitierung den numerischen Aufwand in die Höhe treibt.

Die Auflösung selbst kann trivialerweise nicht beliebig gewählt werden, da bei einem zweidimensionalen, expliziten Euler-Verfahren, welches durch die CFL-Bedingung limitiert ist, der numerische Aufwand mit der dritten Potenz steigt,¹⁸ was enge Grenzen setzt. Aus den genannten Gründen wird der innere Rand zu $s_{\text{min}} = 5 \cdot 10^4 R_S$ in Verbindung mit einer Auflösung von $N_z \times N_s = 447 \times 223$ gewählt. Dabei wurde (4.3) berücksichtigt, um nahezu quadratische Zellen für $z \approx 0$ zu erhalten. Ebenfalls sind die Vorgaben¹⁹ des Mehrgitterverfahrens (engl. multigrid), welchem der Poisson-Löser zu Grunde liegt, eingeflossen. Diese Auflösung ermöglicht für das Mehrgitterverfahren ein größtes Gitter²⁰ von $N_0 \times N_0 = 6 \times 6$ bei dennoch relativ guter Ausnutzung der sog. Vektorlänge (256) des Vektorrechners NEC SX-9, auf welchem die Simulationen – bedingt durch den verbleibenden enormen Rechenaufwand – durchgeführt werden.

Bei der Wahl alternativer Auflösungen muss ebenfalls noch Freiraum bestehen, da die Auflösungsabhängigkeit des Verfahrens geprüft werden muss. Das bedeutet, dass, falls im

¹⁸Eine quadratische Abhängigkeit ergibt sich direkt aus der ebenfalls quadratisch steigenden Zellenzahl. Hinzu kommt durch die (linear) geschrumpfte Gitterweite ein proportional kleinerer maximaler Zeitschritt (Courant et al., 1928).

¹⁹Das Mehrgitterverfahren benutzt als Konvergenzbeschleunigung für das Poisson-Problem jeweils Lösungen auf größeren Gittern $N_{\text{fein}} = 2 N_{\text{grob}} + 1$, weshalb geeignete Auflösungen gewählt werden müssen, die einen möglichst weiten Abstieg und damit größtes Gitter ermöglichen (Sperling, 2009, Kap. 3).

²⁰Es gilt: $N_i = 2 N_{i-1} + 1 \Rightarrow N_i = 2^i (N_0 + 1) - 1$, wobei $447 = 2^m (N_0 + 1) - 1$ und $223 = 2^n (N_0 + 1) - 1$ mit $m = 6$ und $n = 5$ darstellbar sind.

ersten Schritt sinnvolle Ergebnisse im Vergleich zur β -Parametrisierung zu erreichen sind, ggf. kürzere Simulationsläufe – bei sonst unveränderten Bedingungen – mit unterschiedlichen Auflösungen erfolgen müssen, um die Simulation auf ihre Auflösungsabhängigkeit überprüfen zu können.

Bemerkung zur inneren Scheibe

Es sollte auch abgeschätzt werden, welche Masse in dem vernachlässigten inneren Bereich $s < s_{\min}$ maximal zu erwarten ist, da diese „innere Scheibe“ nur implizit durch die Zentralmasse repräsentiert wird.

Der kleinste mögliche innere Rand einer Akkretionsscheibe um ein (nicht-rotierendes) SL kann mit dem letzten stabilen Orbit $s_i = 3 R_S$ identifiziert werden (vgl. Frank et al., 2002, Kap. 7.7). Wird zusätzlich davon ausgegangen, dass die Massendichte sich weiterhin, wie in der Anfangsbedingung (4.4) vorgegeben, verhält, so ist die eingeschlossene Scheibenmasse

$$M_{\text{disk}}(s) = 2\pi \int_{3R_S}^s \Sigma(s') s' ds' \approx 2\pi \int_0^s \Sigma_0 ds' \propto s \quad (4.18)$$

nahezu proportional zum Radius, falls $s \gg 3 R_S$ gilt. Damit kann die Masse der inneren Scheibe mit maximal

$$M_{\text{disk}}(s_{\min}) \approx \frac{s_{\min}}{s_{\max}} M_{\text{disk}} \leq \frac{1}{60} M_{\text{disk}} \quad (4.19)$$

abgeschätzt werden, womit die obige Annahme gerechtfertigt erscheint. Es wäre auch die Lesart möglich, dass in den Simulationen Schwarze Löcher von $M_{\text{SL}} \gtrsim 9,98 \cdot 10^5 M_{\odot}$ (rNSG) und $M_{\text{SL}} \gtrsim 8,33 \cdot 10^5 M_{\odot}$ (rFSG) eingesetzt werden, die zusammen mit der Masse der inneren Scheibe durch die Zentralmasse $M_Z = M_{\text{SL}} + M_{\text{disk}}(s_{\min}) = 10^6 M_{\odot}$ repräsentiert werden.

4.1.4. Resultate

Für eine erste Einschätzung der Ergebnisse kann die Akkretionsrate²¹ \dot{M} auf das Zentralobjekt herangezogen werden, die als wohl wichtigste globale Größe indirekt Aussagen über den Drehimpulstransport in der Scheibe tätigt und darüber hinaus essentiell für Entwicklung des Zentralobjektes und dessen Leuchtkraft ist. Dabei ist wichtig zu beachten, dass die Akkretionsrate in diesem rudimentären Modell beispielsweise nicht durch den Strahlungsdruck gehemmt (Abschn. 2.3.3) wird und daher zu groß ausfallen kann.

²¹Die Akkretionsrate \dot{M} wird positiv gezählt, wenn das Zentralobjekt an Masse gewinnt – die Scheibe somit an Masse verliert. Diese Notation wird auch für alle anderen Ränder beibehalten, wobei in diesem Fall die Masse bei positiven \dot{M} dem System verloren geht.

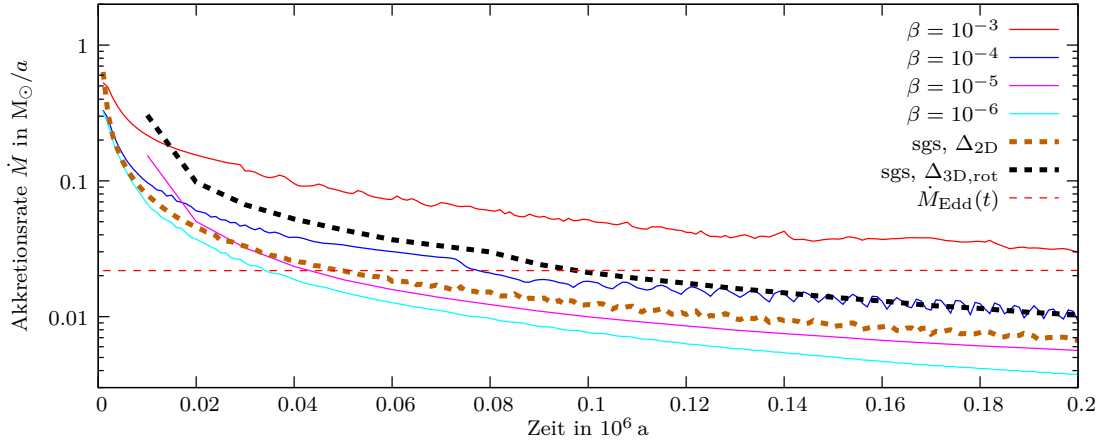


Abb. 4.7.: Gezeigt sind die Akkretionsraten für das rNSG-Modell und als Vergleich die Eddington-Akkretionsrate $\dot{M}_{\text{Edd}}(t)$, die innerhalb der kurzen betrachteten Zeitspanne nahezu konstant bleibt. In diesem Resultat ist klar ersichtlich, dass sich die Akkretionsrate der LES gut zwischen die Resultate der β -Parametrisierung einreicht. Die viskose Zeitskala $t_{\text{vis}}(s_{\text{max}})$ ist in diesem zeitlichen Ausschnitt noch nicht erreicht, weshalb Phänomene einer sich leerenden Akkretionsscheibe noch keine Rollen spielen. Anfangs liegt \dot{M} teilweise weit oberhalb von \dot{M}_{Edd} .

Dies ist jedoch auch ein großer Vorteil, da sich die Effekte des Verfahrens unmittelbar auf die Akkretionsrate auswirken können und daher einfacher zu bewerten sind.

Es kann davon ausgegangen werden, dass die Akkretionsrate sich in gewissen Grenzen proportional zur Massendichte der Scheibe verhält. Daher ist in den beiden zum Einsatz kommenden Modellen (rNSG & rFSG) mit stark unterschiedlichen Akkretionsraten zu rechnen. Diese Einschränkung gilt jedoch für β -Parametrisierung und SGS-Verfahren gleichermaßen, so dass die erzielten Werte untereinander verglichen werden können und es erlauben zu prüfen, ob die LES überhaupt in der Lage ist, eine nennenswerte Akkretionsrate zu generieren.

Akkretion im rNSG-Modell

Die Akkretionsraten für das rNSG-Modell sind zusammen mit der Eddington-Rate \dot{M}_{Edd} in Abbildung 4.7 dargestellt und zeigen tatsächlich im Fall des SGS-Modells einen beachtlichen Wert, der beim konservativen zweidimensionalen Filter (3.9) zwischen den Vergleichssimulationen $\beta = 10^{-4}$ und $\beta = 10^{-5}$ einzuordnen ist. Dieses erste Ergebnis liegt damit unterhalb der abgeschätzten Obergrenze von $\beta = 10^{-3}$ und nähert sich eher dem von Richard & Zahn (1999) propagierten Wert an. Die Akkretionsrate des dreidimensionalen Filters (3.10) ist zu Beginn um etwa eine „Stufe“ größer (zwischen $\beta = [10^{-4}, 10^{-3}]$) und weist für größere Zeiten einen überproportionalen Abfall gegenüber den Vergleichssimulationen auf. Dies könnte ein erstes Indiz sein, dass es der be-

treffenden Simulation nicht gelingt, ausreichend Material von größeren Radien effizient zum Innenrand zu transportieren.

Die dynamische Zeitskala kann am Innenrand mit $t_{\text{dyn}}(s_{\text{min}}) \approx 5 \text{ a}$ und am Außenrand mit $t_{\text{dyn}}(s_{\text{max}}) \approx 3 \cdot 10^3 \text{ a}$ abgeschätzt werden, so dass selbst am Außenrand genügend Umläufe stattgefunden haben, um das System als „dynamisch relaxiert“ bezeichnen zu können, weshalb auch die turbulenten Größen genügend Zeit hatten sich einzustellen.

Aus der dynamischen Zeitskala in Verbindung mit (2.34) lässt sich sofort schließen, dass die viskose Zeitskala $t_{\text{vis}}(s_{\text{max}})$ in keiner der Simulationen mit β -Parametrisierung innerhalb der gezeigten $2 \cdot 10^5 \text{ a}$ erreicht ist. Eine Aussage für das SGS-Verfahren lässt sich an dieser Stelle ohne Kenntnis der kinematischen Viskosität noch nicht sicher treffen, wobei hiervon, anhand der Akkretionsraten, bereits ebenfalls ausgegangen werden kann. Als viskose Zeitskala für die vier β -Parametrisierungen ergeben sich am Innenrand die Werte $t_{\text{vis}}(s_{\text{min}}) \approx \{5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^5, 5 \cdot 10^6\} \text{ a}$; am Außenrand dementsprechend $t_{\text{vis}}(s_{\text{max}}) \approx \{3 \cdot 10^6, 3 \cdot 10^7, 3 \cdot 10^8, 3 \cdot 10^9\} \text{ a}$.

Da die betrachtete Zeitspanne in Bezug auf die viskose Einwicklungszeitskala relativ kurz gewählt ist, aber im Verhältnis zur dynamischen Zeitskala groß, zeigt sich ein relativ ungestörtes System, was noch keinen Effekten unterworfen ist, die beim Erreichen der viskosen Zeitskala auftreten würden; die Scheibenmasse ist dann fast gänzlich vom Zentralobjekt aufgesammelt und der Akkretionsprozess kommt zum Erliegen, wenn kein neues Material vom Außenrand nachströmen kann. Dies zeigt sich in einem relativ schnellen Zusammenbruch der Akkretionsrate, wie dies in Abb. 4.8 aufgezeigt ist. Dabei ist neben der Akkretionsrate auch der integrierte Massenfluss²² über den Innen- und Außenrand

$$\mathcal{M}(s_i, t) \equiv \int_0^t \dot{M}(s_i, t') dt' \quad (4.20)$$

doppelt logarithmisch über eine erheblich größere Zeitspanne, im Vergleich zur vorherigen Abbildung, aufgetragen.

Es sei festgehalten, dass das in Abb. 4.7 und 4.8 dargestellte Modell eindeutig eine von der Viskosität abhängige Akkretionsrate zeigt und sich die LES mit beiden Filterbreiten gut mit diesem ersten Ergebnis in die klassischen Simulationen eingliedert. Eine durch ungünstig gestellte Randbedingung ausgelöste Akkretion kann im Falle der LES nahezu ausgeschlossen werden. Sollte solch ein Prozess vorliegen, wäre es plausibel anzunehmen, dass er für alle Simulationen mit ihren identischen Bedingungen gleichermaßen gelten müsste, so dass der maximal mögliche Effekt nicht mehr als der kleinsten gezeigten Akkretionsrate entsprechen dürfte.²³

²²Es sollte bei $\mathcal{M}(s_{\text{max}})$ am Außenrand nicht von akkretierter Masse gesprochen werden, da diese Masse bei positiver Zählweise der Scheibe verloren geht und von **keinem** anderen Objekt *aufgesammelt* (akkretiert) wird.

²³Ein Vergleichslauf völlig ohne dissipative Prozesse, um beispielsweise die Auswirkung der numerischen Viskosität beurteilen zu können, erweist sich hinsichtlich der Stabilität als problematisch.

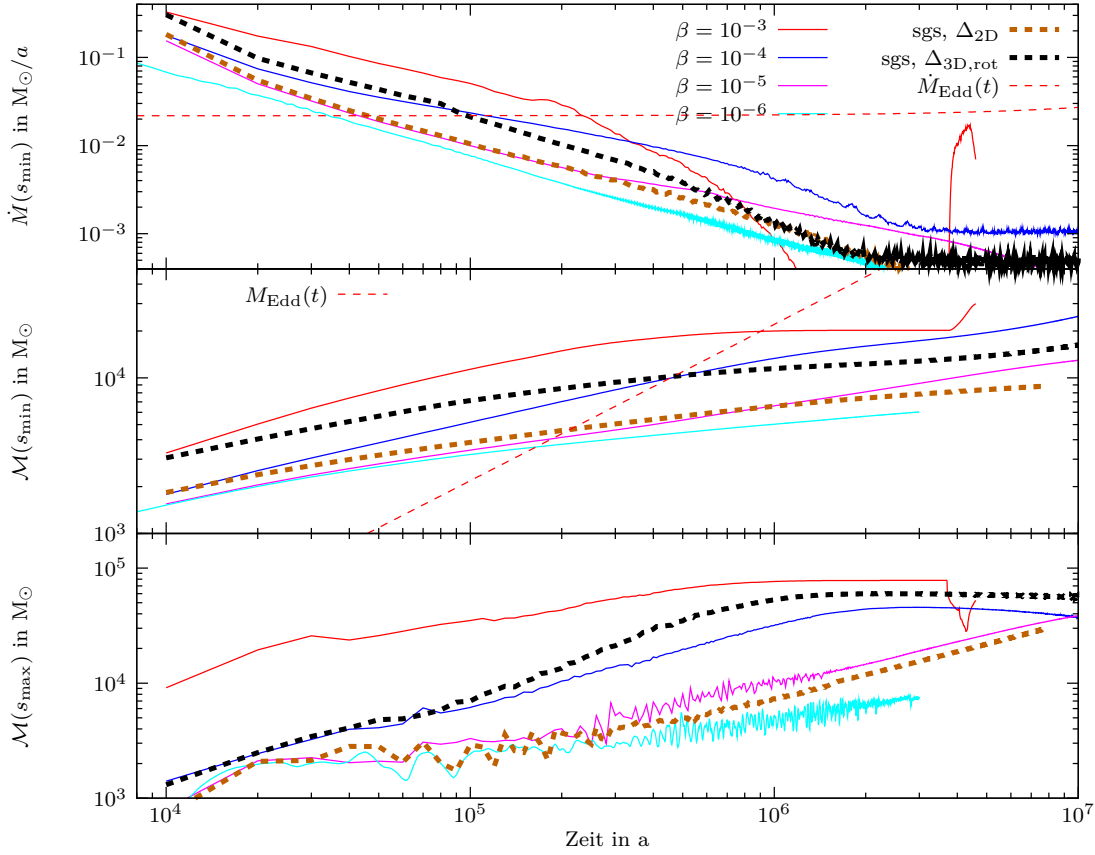


Abb. 4.8.: Die Massenakkretionsrate \dot{M} ist zusammen mit dem integrierten Massenfluss \mathcal{M} am Innen- und Außenrand über eine große Zeitspanne aufgetragen – am Innenrand entspricht dies der akkretierten Masse. Dabei ist nicht nur deutlich der Effekt einer sich leerenden Scheibe ($\beta = 10^{-3}$) erkennbar, sondern auch die exotischeren Verläufe zu großen Zeiten, die mit einem erneuten Masseneinfluss am Außenrand in Verbindung stehen.

Die Simulation mit $\beta = 10^{-3}$ weist bei rund $10^6 a$ nahezu keine Akkretion mehr auf, was daran liegt, dass fast die gesamte Scheibenmasse abgeflossen ist. Dies kann zusätzlich anhand der Massendichte in Abb. 4.9 nachvollzogen werden. Die Abschätzung der viskosen Zeitskala von $t_{\text{vis}}(s_{\max}) \approx 3 \cdot 10^6 a$ erweist sich somit als durchaus brauchbar, wenn auch etwas groß, und erklärt ebenfalls, weshalb dieser Effekt bei den anderen Simulationen noch nicht in Erscheinung tritt (siehe weiter oben die viskosen Zeitskalen). Allenfalls bei der Simulation mit $\beta = 10^{-4}$ können erste Anzeichen erahnt werden.

Allerdings können damit nicht alle Effekte erklärt werden, da eine neue Episode sehr starker Akkretion bei ungefähr $4 \cdot 10^6 a$ in der Simulation mit $\beta = 10^{-3}$ auftritt, die mit einem massiven Masseneinfluss am Außenrand korrespondiert, wie es sich ebenfalls im Diagramm anhand des integrierten Massenflusses $\mathcal{M}(s_{\max})$ zeigt. Diese Effekte – des Masseneinflusses am Außenrand – scheinen ebenfalls mit dem Übergang der Akkretionsrate bei der Simulation mit $\beta = 10^{-4}$ und der LES mit $\Delta_{3D,rot}$ gegen eine nahezu

konstante Rate im Zusammenhang zustehen.

Diese zuerst genannte Simulation ($\beta = 10^{-3}$) weist eine akkretierte Masse von insgesamt rund $2 \cdot 10^4 M_{\odot}$ auf, was lediglich 20% der ursprünglichen Scheibenmasse entspricht. Erklären lässt sich dieser Umstand, wenn der äußere Rand betrachtet wird, über welchen eine Masse von $7,5 \cdot 10^4 M_{\odot}$ innerhalb der Simulationszeit fließt. Damit verliert die Scheibe über den Außenrand erheblich mehr Masse (75%) als über den Innenrand. Um Masse akkretieren zu können muss eine Umverteilung des Drehimpuls zu größeren Radien hin stattfinden. Diese ist zwangsläufig mit einer nach außen gerichteten Massenbewegung gekoppelt, die sich, mit Voranschreiten der Zeit, für immer größere Radien in einen (Netto-) Masseneinstrom umwandelt. Dies ist für den (künstlichen) Außenrand problematisch, da das Material der Simulation erst einmal verloren gegangen ist. Ein Masseneinstrom über die Farfield-Bedingung ist prinzipiell möglich (Abschn. 3.3.1), sollte jedoch kritisch betrachtet werden, da das einströmende Material durch die Riemann-Invarianten der Geisterzellen maßgeblich vorgegeben ist. Diese Daten stammen aus der Anfangsbedingung und müssen insbesondere für den Drehimpuls, der sich in der Scheibe massiv geändert haben kann, nicht mehr zutreffend sein. Welche Daten sinnvoll sind, ist a priori nicht zu beantworten, da dies implizit Wissen über die Beschaffenheit der Lösung außerhalb des Rechengebietes voraussetzt.

Es ist daher zweckmäßig, das Eintreten eines länger andauernden Masseneinstroms am Außenrand als das natürliche Ende der Simulation zu betrachten. Diesem Sachverhalt könnte entgegengewirkt werden, wenn der äußere Rand des Rechengebietes um Größenordnungen weiter nach außen verlegt und gleichzeitig ein „natürlicher“ Rand der Scheibe definiert werden würde; die Massendichte könnte ab diesem Radius beispielsweise exponentiell abfallen, was einen relativ scharfen Rand realisieren würde. Damit wäre es der Scheibe möglich, zu größeren Radien zu expandieren, ohne direkt Masse an den künstlichen Rand des Rechengebietes zu verlieren. Obwohl dies einen weiteren numerischen Aufwand bedeuten würde, wäre dies mit einem geeigneten logarithmischen Gitter durchaus möglich.

Aus diesen genannten Gründen sollte der plötzliche Anstieg der Akkretionsrate der Simulation mit $\beta = 10^{-3}$ als künstliches Artefakt des Außenrandes betrachtet werden, bei welchem Material mit vermutlich zu geringem Drehimpuls in die Scheibe einfließt. Dieser Effekt macht sich ebenfalls durch die konstante Akkretionsrate der Simulation mit $\beta = 10^{-4}$, wie auch im SGS-Verfahren mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$, bemerkbar. Dass es sich tatsächlich um einen Masseneinfluss am Außenrand handelt, ist am abnehmenden integrierten Massenfluss $\mathcal{M}(s_{max})$ überprüfbar.

Massendichte im rNSG-Modell

Die bereits angesprochene Massendichte (Abb. 4.9) in der Zentralebene (Schnitt bei $z = 0$) zeigt einerseits ein ähnliches Verhalten aller β -Parametrisierungen untereinander, wobei zum Zeitpunkt $t = 1,5 \cdot 10^6 a$ bei der Simulation mit $\beta = 10^{-3}$ in der Tat

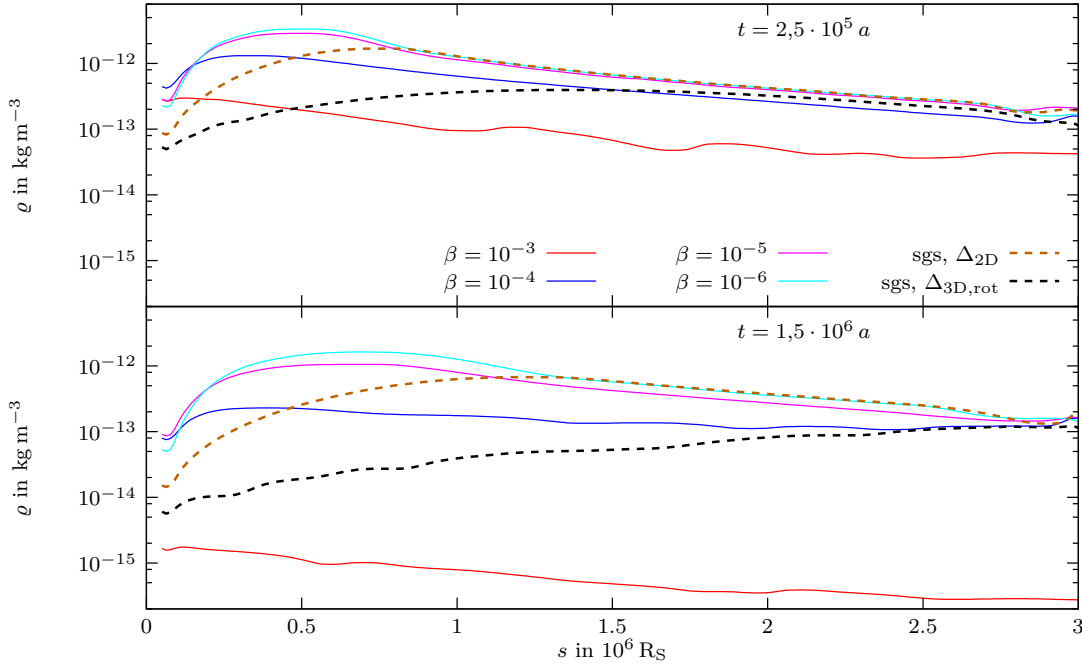


Abb. 4.9.: Zu zwei Zeiten ist die Massendichte der rNSG-Scheibe als Schnitt durch die Zentralebene ($z = 0$) gezeigt, die bei allen β -Parametrisierungen nahezu parallel nach unten verschoben erscheinen, so dass ihr Verlauf in erster Näherung erhalten bleibt. Die Massendichte in den SGS-Modellen hingegen ändert signifikant ihren Verlauf; es wird demnach zu wenig Masse von größeren Radien nachgeliefert bzw. zu viel Masse von kleinen Radien akkretiert.

kaum noch Masse in der Scheibe vorhanden ist, was die obige Aussage des abklingenden Akkretionsprozesses bestätigt. Auf der anderen Seite manifestiert sich durch das SGS-Verfahren ein gänzlich anderer Verlauf der Massendichte in Abhängigkeit der radialen Koordinate. Die Massendichte fällt am Innenrand für kleine Zeiten im direkten Vergleich überproportional schnell ab. Für große Radien hingegen ist der Abfall der Massendichte in Hinblick auf die Vergleichssimulationen sehr viel schwächer. Es wird demnach zu wenig Material von größeren Radien nachgeliefert. Die LES mit dem zweidimensionalen Filter (3.9) zeigt eine größere Massendichte bei Radien oberhalb von ca. $1,2 \cdot 10^6 R_S$ im Vergleich zur Simulation mit $\beta = 10^{-5}$, was bedeutet, dass das SGS-Verfahren bereits ab diesem Radius ineffizienter in der Akkretion ist, als die genannte Vergleichssimulation; sie weist somit eine größere viskose Zeitskala für Radien jenseits dessen auf.

Ähnliches gilt – wenn auch in anderem Umfang – für das SGS-Verfahren mit dem dreidimensionalen Filter (3.10). Insgesamt stellt sich bei der LES eine gänzlich andere Massenverteilung in der Scheibe ein; die Massendichte steigt mit dem Radius. Dies wäre eine erste wesentliche Voraussage des Modells, an welchem evtl. eine Falsifikation stattfinden könnte, da bei einer Standard α -Scheibe beispielsweise von einer fallenden Massendichte ausgegangen wird (Shakura & Sunyaev, 1973). Dies müsste anhand von

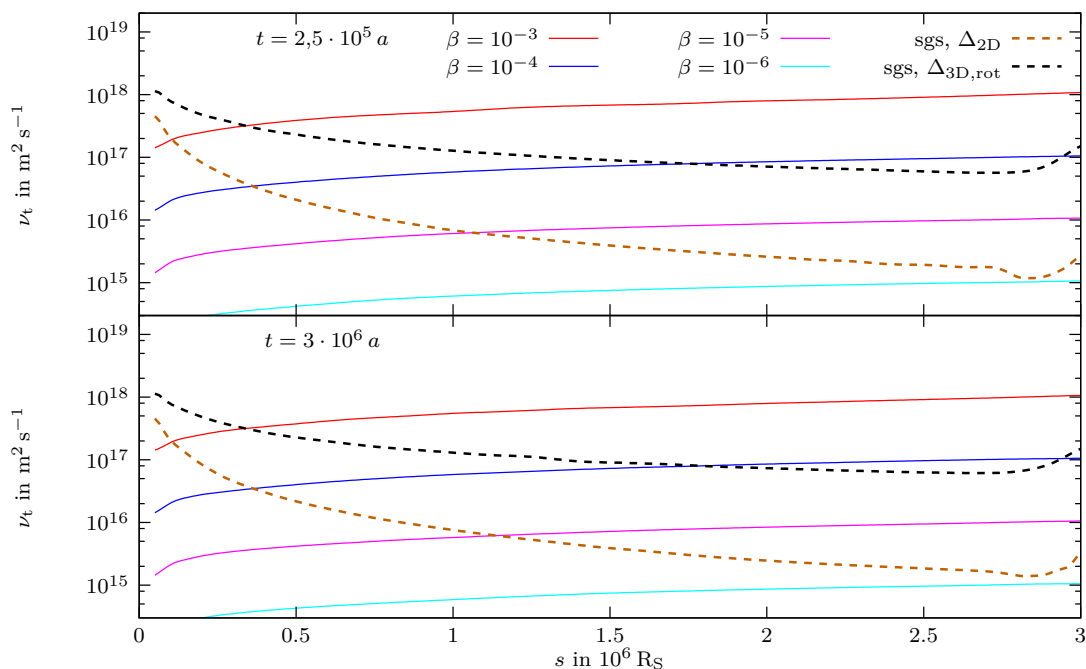


Abb. 4.10.: Die kinematische Viskosität für $z = 0$ des rNSG-Modells mit Filterbreite Δ_{2D} zeigt starke Unterschiede in der funktionellen Abhängigkeit zwischen LES und β -Parametrisierung. Das zweite SGS-Verfahren kann eine größere Übereinstimmung erzielen, wenn auch weiterhin ein Abfall mit dem Radius zu verzeichnen ist. Insgesamt liegen beide SGS-Verfahren mit der Magnitude – abgesehen von kleinen Radien – in dem durch die Vergleichssimulationen vorgegebenen Wertebereich.

Beobachtungstatsachen geprüft werden. Um diesen Verlauf besser verstehen zu können ist es zweckmäßig, sich direkt der turbulenten, kinematischen Viskosität zuzuwenden, die den Akkretionsprozess maßgeblich dominiert.

Kinematische Viskosität im rNSG-Modell

Die kinematische Viskosität ist im Fall von Akkretionsscheiben eine wichtige Kenngröße, da sie maßgeblich die Entwicklung der Scheibe beeinflusst.²⁴ Obwohl die Wirbelviskosität im SGS-Verfahren überproportional von der Auflösung abhängt (siehe Abschn. 3.2.2), muss sie bei der hier gewählten Auflösung in erster Näherung eine ähnliche Größenordnung wie die Vergleichssimulationen aufweisen, um die Resultate in den Akkretionsraten erklären zu können.

²⁴Es sei angemerkt, dass die *dynamische* Viskosität als Vergleichsgröße ungeeignet ist, da nicht davon ausgegangen werden kann, dass die Simulationen jeweils die gleiche Dichteverteilung aufweisen. Sie gibt (lediglich) die Kräftebilanz an, nicht die Entwicklungszeitskala.

Zu einem ersten Überblick soll Abb. 4.10 verhelfen, welche die kinematische Viskosität als Schnitt für $z = 0$ aller Simulationen im rNSG-Modell zeigt. Obwohl die Viskosität ν_t in beiden Modellen im richtigen Größenbereich liegt,²⁵ fällt sicherlich am deutlichsten auf, dass sie einen nahezu inversen Verlauf zueinander zeigen. Dies trifft für die LES mit der Filterbreite Δ_{2D} besonders zu, die am Innenrand alle Vergleichssimulationen übertrifft, am Außenrand jedoch auf das Niveau der Simulation mit dem geringsten β -Parameter abfällt.

Die durch die β -Parametrisierung verursachte Zähigkeit ist für alle $v_\phi \propto s^\alpha$ mit $\alpha > -1$ eine monoton wachsende Funktion,²⁶ was somit praktisch in jeder Akkretionsscheibe erfüllt ist, da bei Keplerscher Rotation $\alpha = -1/2$ gilt und beim Mitwirken von Selbstgravitation die Rotationsgeschwindigkeit schwächer abfällt oder ggf. mit dem Radius sogar zunehmen kann. Dieses Verhalten zeigt sich bei dem SGS-Verfahren in Abb. 4.9 nicht, was bedeutet, dass es dem Verfahren im Vergleich nicht gelingt, genügend Wirbelviskosität mit größer werdendem Radius zu generieren. Aus der zuvor betrachteten Massendichte lässt sich ebenfalls schlussfolgern, dass dieses Defizit nicht durch Transportmechanismen großer Wirbel kompensiert werden kann, was ebenfalls an dem Betrag der ϕ -Komponente der Vortizität $|\omega_\phi|$ aus Abb. 4.13, der bei großen Radien ein Minimum aufweist, abzulesen ist.

Bei einer Akkretionsscheibe kann in erster Näherung meist von einer geringen zeitlichen Variation der Rotationsgeschwindigkeit auf dynamischen Zeitskalen ausgegangen werden. Da bei β -Parametrisierung die kinematische Viskosität ν_t lediglich v_ϕ als von der Zeit abhängige Variable beinhaltet, ist ebenfalls mit einer geringen Variation dieser Größe zu rechnen, was sich in der gezeigten Abbildung 4.10 so auch bestätigt.

Dieses Resultat kann a priori nicht zwingend auf die Wirbelviskosität der LES übertragen werden, da eine nicht-lineare Kopplung der einzelnen Größen untereinander besteht (siehe Abschn. 3.2.2). Dessen ungeachtet zeigt sich in Abb. 4.10 ebenfalls eine starke zeitliche Konstanz. Dieses Bild bleibt grundsätzlich erhalten, wenn die kinematische Viskosität als zweidimensionaler Farbplot in Abb. 4.11 für die konservative und in Abb. 4.12 für die progressive Filterbreite aufgetragen wird, wobei leichte Variationen in Bereichen mit geringer Massendichte (vgl. hierzu Abb. 4.13) auftreten. Dies deckt sich mit den Voruntersuchungen zur Entwicklung des turbulenten Drucks (Abb. 4.2), welcher nach kurzer Zeit einen Sättigungswert erreicht und maßgeblich für die Amplitude der Wirbelviskosität verantwortlich ist ($\nu_t \propto \sqrt{e_{\text{sgs}}} \propto \sqrt{p_{\text{sgs}}}$). Dieses stationäre Verhalten der kinematischen Viskosität zeigt sich dauerhaft in den durchgeführten Simulationen und deutet nicht auf eine durch wechselnde Instabilitäten dominierte Wirbelviskosität hin.

In den Abbildungen 4.13 und 4.14 sind wichtige Simulationsgrößen zum Zeitpunkt $t = 3 \cdot 10^6 a$ aufgetragen, die einige Rückschlüsse auf die Gegebenheiten in der LES

²⁵Der eingangs motivierte Parameterbereich von β führt zu kinematischen Viskositäten, die denen des Turbulenzmodells relativ gut entsprechen.

²⁶Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Definition (2.31).

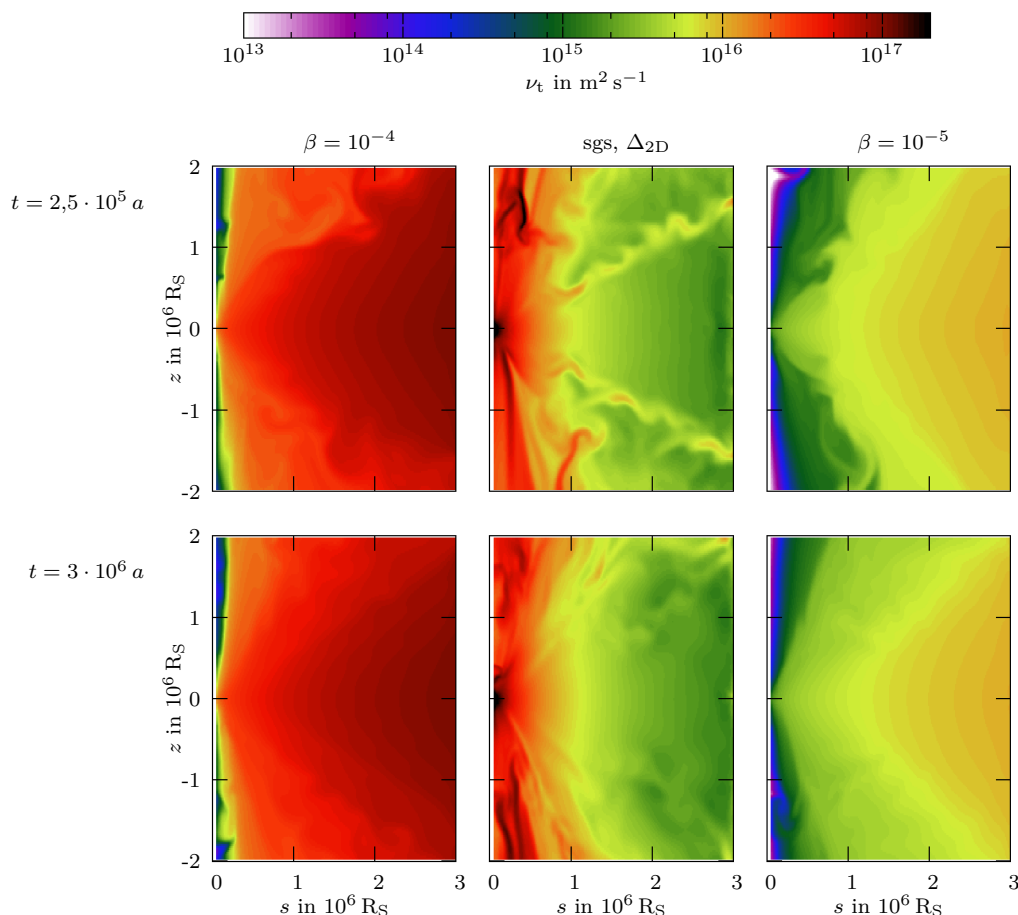


Abb. 4.11.: Zu zwei Zeiten ist die kinematische Viskosität des rNSG-Modells aufgetragen. Hierzu wurden lediglich eine β -Parametrisierungen mit größerer und eine mit geringerer Magnitude ausgewählt. Es zeigt sich – bis auf geringe Variationen in dünnen Bereichen der Scheibe – ein ausgesprochen statisches Bild. Die funktionelle Abhängigkeit im SGS-Verfahren ist zur β -Scheibe stark unterschiedlich. Dies gilt auch für die vertikale Abhängigkeit und könnte Auswirkungen für Untersuchungen von z. B. Scheibenwinden haben.

zulassen. Zum einen korrespondiert der Produktionsterms \mathcal{P} mit der Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ und zeigt auf der anderen Seite praktisch keinen Zusammenhang mit der ϕ -Komponente der Vortizität. Dies legt den Schluss nahe, dass die turbulente Energie faktisch nur durch die Scherung der Rotationsgeschwindigkeit generiert wird und dass Wirbel in der s - z -Ebene scheinbar eine vernachlässigbare Rolle bei ihrer Erzeugung spielen. Am deutlichsten wird dieser Umstand bei der Simulation mit Filterbreite Δ_{2D} , wenn die Bilanz aller Quellterme ($\mathcal{P} + \mathcal{D} - \rho\epsilon$), die auf die Erhaltungsgleichung (3.28) von e_{sgs} einwirken, betrachtet werden. Durch das Zusammenspiel der einzelnen Größen wird turbulente Energie letztlich nur bei großer Rotationsgeschwindigkeit²⁷ – geringer Abstand

²⁷Damit auch der Gradient von v_ϕ in radialer Richtung, falls Keplersche Rotation vorliegt: $|\frac{\partial v_\phi}{\partial s}| \propto \frac{v_\phi}{s}$,

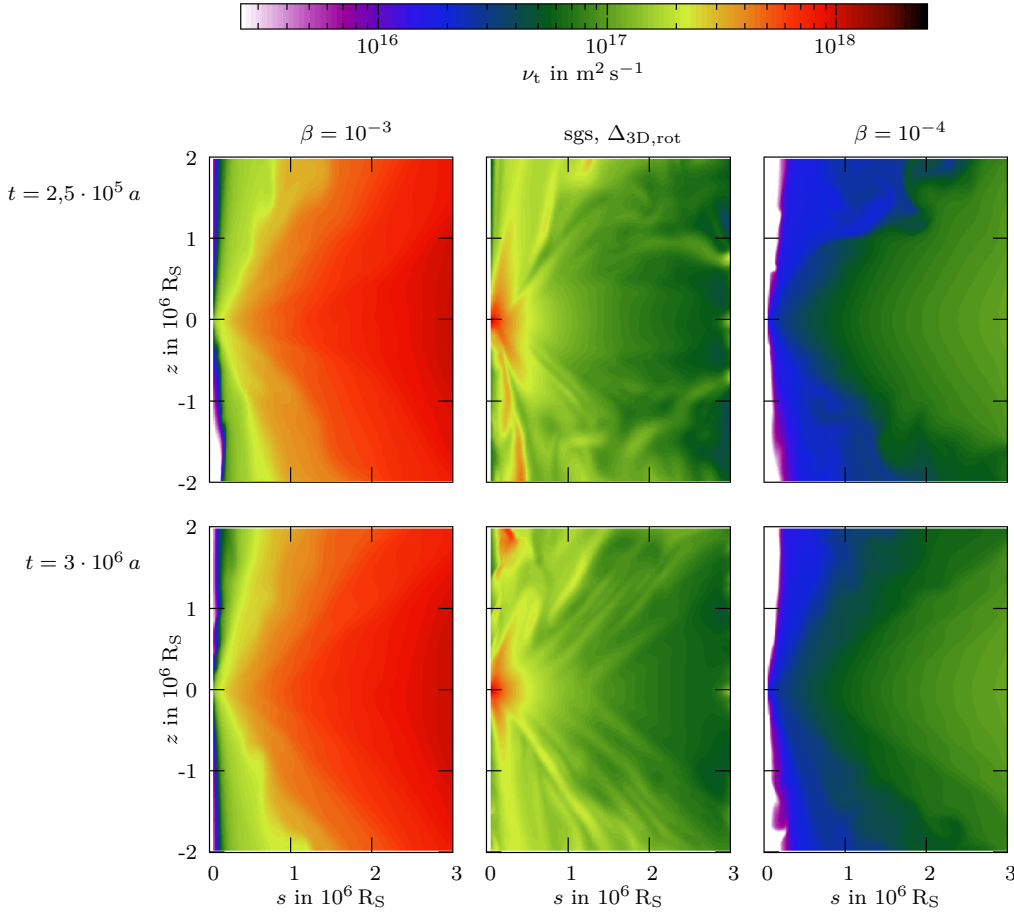


Abb. 4.12.: Das Pendant (SGS-Verfahren mit $\Delta_{3D,rot}$) zu Abb. 4.11 zeigt ein identisches Verhalten in Bezug auf die Variabilität. Insgesamt ist die Magnitude im Vergleich zum Modell mit Filterbreite Δ_{2D} größer und fällt weit weniger stark mit dem Radius ab.

zum Zentrum – erzeugt, was den Verlauf der kinematischen Viskosität zu erklären vermag. Bei dem progressiveren Filter ($\Delta_{3D,rot}$) trifft diese Aussage in abgeschwächter Form auch zu. Damit ist festzustellen, dass Instabilitäten in der s - z -Ebene nur eine untergeordnete Rolle bei der Erzeugung von turbulenter Viskosität zu spielen scheinen. In diesem Kontext muss die Begrifflichkeit der Large Eddy Simulation kritisch hinterfragt werden, da somit die größten aufgelösten – und für das SGS-Verfahren relevanten – „Wirbel“ die Keplerrotation der Scheibe ist. Gerade hier setzt in der Literatur der Diskurs ein, ob diese Strömung überhaupt ausreichend instabil ist, um die Phänomene von Turbulenz erklären (Abschn. 2.2.3) zu können. Das SGS-Verfahren geht hiervon implizit aus und berechnet – über heuristische Annahmen – die turbulenten Größen. Jedoch haben sich solche Verfahren in der Vergangenheit bewährt und generell ihre Funktionsweise in Vergleich zu Experimenten und direkten numerischen Simulationen unter Beweis gestellt;

welcher über $\hat{\tau}_{sgs}$ auf den Produktionsterm \mathcal{P} rückkoppelt.

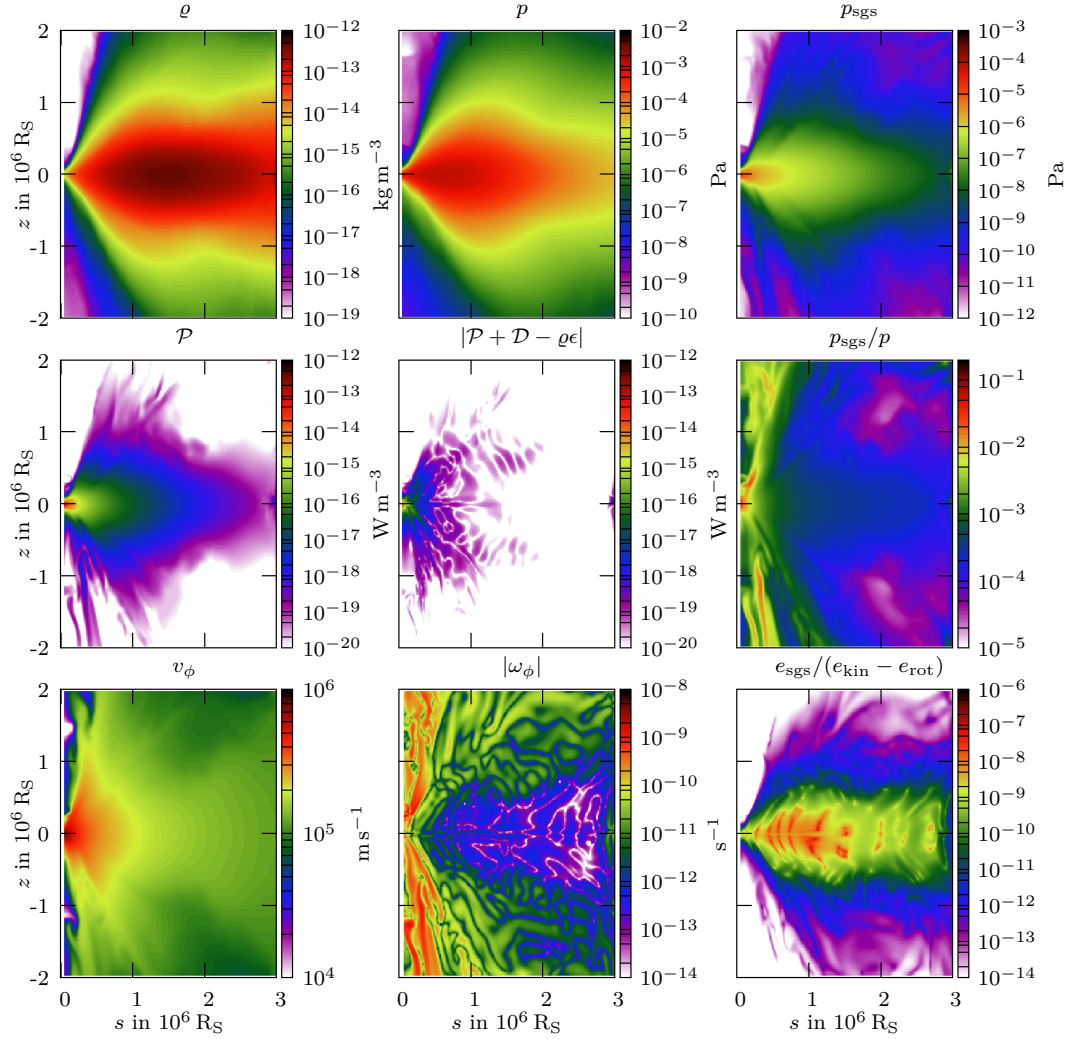


Abb. 4.13.: Zum Zeitpunkt $t = 3 \cdot 10^6 a$ sind aus dem rNSG-Modell mit Filterbreite Δ_{2D} einige relevante Simulationsergebnisse aufgeführt: Dichte ρ , Druck p , turbulenter Druck p_{sgs} , Produktionsterm \mathcal{P} , Betrag aller auf e_{sgs} einwirkenden Quellterme – siehe (3.28), Quotient aus turbulenten Druck zu Druck, Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ , Betrag der ϕ -Komponente der Vortizität $|\omega_\phi|$ und Quotient aus turbulenter zu kinetischer Energiedichte der s - z -Ebene ($= e_{\text{kin}} - e_{\text{rot}}$ mit $e_{\text{rot}} \equiv 1/2 \rho v_\phi^2$).

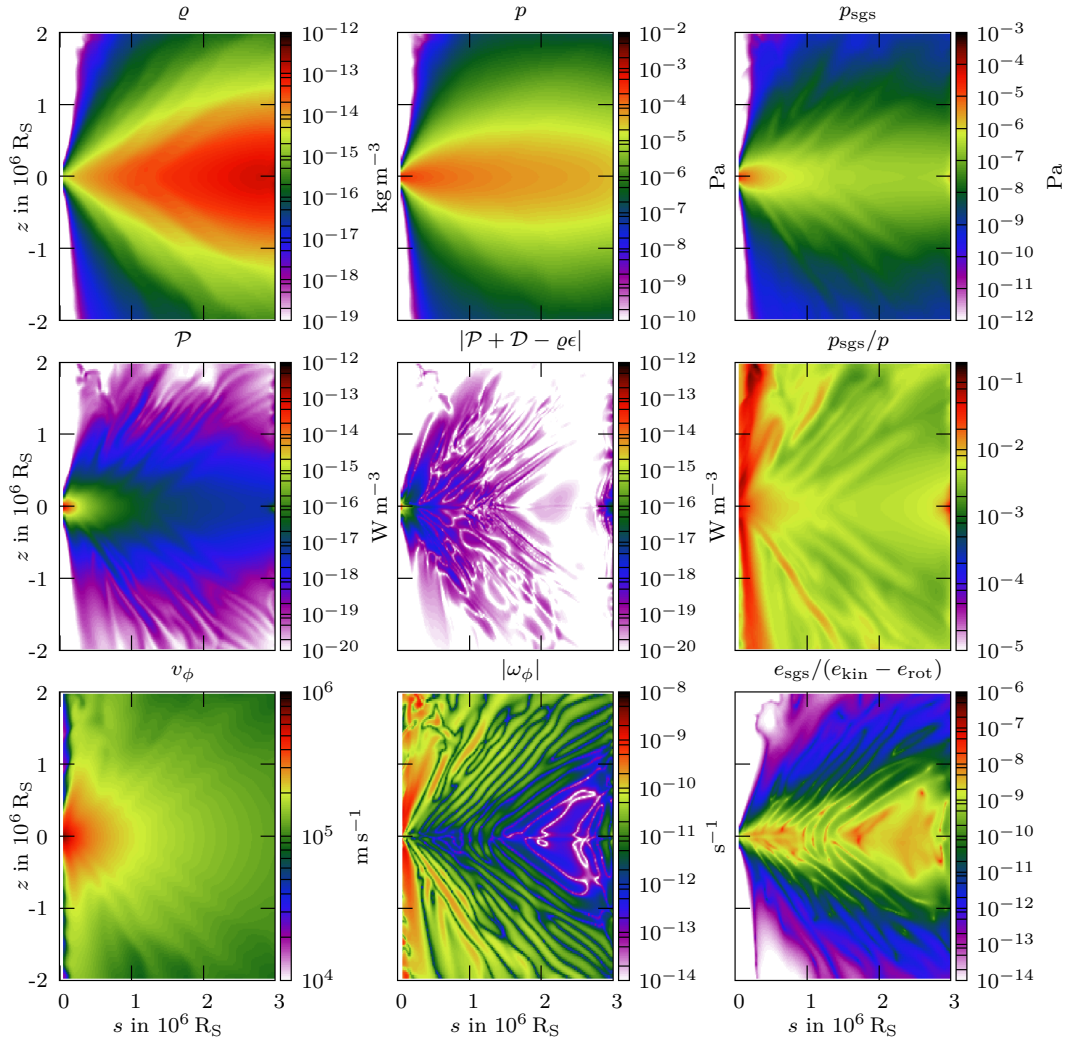


Abb. 4.14.: Simulationsdaten wie in Abb. 4.13, jedoch mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$. Es zeigen sich Unterschiede u. a. im Produktionsterm \mathcal{P} und damit verbunden auch in sekundären Größen, wie z. B. dem turbulenten Druck. Das Verhältnis der Drücke zueinander hat sich stark verschoben, so dass der SGS-Druck bereits über weite Bereiche der Scheibe signifikant an der Struktur mitwirkt. Die Skalierung wurde zur besseren Vergleichbarkeit wie in Abb. 4.13 gewählt.

ob dies im Fall von Akkretionsscheiben gerechtfertigt ist, kann nicht klar beantwortet werden.

Im Vergleich der beiden Simulationen untereinander fällt, wie bereits zuvor festgestellt, die zum Zentrum hin stark reduzierte Massendichte beim dreidimensionalen Filter auf, aber auch das Verhältnis $\frac{p_{\text{sgs}}}{p}$, welches mit einem Wert von teilweise um die 10% in einzelnen Bereichen für einen nennenswerten turbulenten Druck spricht. Dieser kann somit signifikant die Struktur der Scheibe beeinflussen und beispielsweise gegen die z -Komponente der Schwerebeschleunigung entgegenwirken, was beispielsweise bedeutet, dass die Scheibe auch mit einer geringeren Temperatur noch hydrostatisches Gleichgewicht erreichen könnte. Dies könnte insbesondere bei Kühleffekten interessante sein, da der turbulente Druck eine zusätzlich stabilisierende Kraft darstellt, die einem Kollaps entgegenwirken würde. Dies ist in der Literatur beispielsweise beim Kollaps von Molekülwolken bekannt, die bei Turbulenz mittels des damit existenten turbulenten Druck eine längere signifikant längere Kollapszeitskala aufweisen. Um dies jedoch genauer untersuchen zu können, wäre eine realistische Kühlung notwendig, wie es eingangs bereits erläutert wurde. Zur Vollständigkeit sind dennoch die (nicht aussagekräftigen) Temperaturen der Akkretionsscheibe in Abb. C.1 dargestellt.

Ebenfalls fällt bei dem SGS-Verfahren mit Filterbreite $\Delta_{3\text{D,rot}}$ die filamentartige Struktur (Öffnungswinkel ca. 45° zur Scheibenebene) in der Vortizität auf, die insgesamt zusätzlich auch größer geworden ist und daher für einen größeren Anteil von Wirbeln in der s - z -Ebene spricht.

Für eine Large Eddy Simulation gilt als grober Anhaltspunkt, dass ungefähr 80% der kinetischen Energie der Wirbel aufgelöst sein müssen, um verlässliche Ergebnisse zu erhalten (siehe Pope, 2000, S.560). Dies kann am Energiespektrum abgeschätzt werden oder direkt durch die approximierete turbulente Energiedichte e_{sgs}

$$80\% < \frac{\overline{e_{\text{kin}}}}{e_{\text{kin}}} \approx \frac{\overline{e_{\text{kin}}}}{\overline{e_{\text{kin}}} + e_{\text{sgs}}} \Rightarrow 25\% > \frac{e_{\text{sgs}}}{e_{\text{kin}}}. \quad (4.21)$$

Da sich prinzipiell nur in der s - z -Ebene eine turbulente Bewegung (Wirbel) ausbilden kann und die kinetische Energiedichte von v_ϕ dominiert wird, soll hier als Test ein strengeres Kriterium

$$25\% > \frac{e_{\text{sgs}}}{e_{\text{kin}} - e_{\text{rot}}} \quad (4.22)$$

herangezogen werden, was nur die kinetische Energiedichte in eben dieser Ebene $e_{\text{kin}} - e_{\text{rot}} = 1/2 \rho (v_s^2 + v_z^2)$ berücksichtigt (Rotationsenergie $e_{\text{rot}} = 1/2 \rho v_\phi^2$). Die Abbildungen 4.13, 4.14 und 4.20 zeigen, dass dieser Wert klar unterschritten wird, was somit auch an dieser Stelle bereits das rFSG-Modell rechtfertigt.

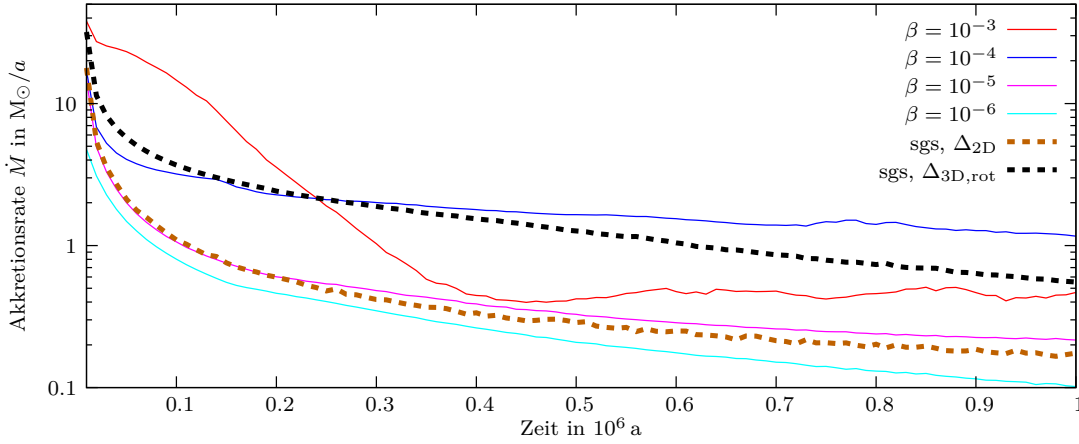


Abb. 4.15.: Gezeigt sind die Akkretionsraten des rFSG-Modells, welche die Eddington-Akkretionsrate (hier: $\dot{M}_{\text{Edd}} \approx 0,02 M_{\odot} \text{ a}^{-1}$) um ein Vielfaches überschreiten. Hier würde ein konsistentes Modell mit Berücksichtigung des Strahlungsdrucks eine erheblich geringere Akkretionsrate aufweisen. Die SGS-Verfahren führen zu Akkretionsraten, die sich ebenfalls gut in die klassischen Modelle einreihen, wenn auch das Modell mit Filterbreite $\Delta_{2\text{D}}$ relativ gegenüber dem rNSG-Modell abfällt. Die Simulation mit $\beta = 10^{-3}$ zeigt Effekte einer sich leerenden Scheibe.

Vergleich zum rFSG-Modell

Die in Abb. 4.15 dargestellten Akkretionsraten überschreiten, wie bereits vermutet, den rNSG-Fall um einige Magnituden, was durch die erhöhte Massendichte (Faktor 100) bedingt ist. Da die Eddington-Akkretionsrate (2.38) nur von der Masse des Zentralobjektes abhängt, ist sie in beiden Modellen identisch und somit weit unterhalb der im Diagramm gezeigten minimalen Akkretionsrate. Dieses Modell stellt somit kein real zu erwartendes Szenario einer AGK-Scheibe in Bezug auf die Akkretionsraten dar, was jedoch die Untersuchung der Turbulenz und der damit einhergehenden turbulenten Viskosität nicht weiter stört.

Abgesehen von dem bereits beschriebenen Umstand der erhöhten Akkretionsraten ergeben sich ähnliche Verhältnisse, wie dies beim rNSG-Modell beobachtet werden kann. Einerseits zeigt die Parametrisierung mit $\beta = 10^{-3}$ den Effekt einer sich leerenden Scheibe (Abb. 4.17), wie dies bereits im vorherigen Modell beobachtet wurde (vgl. Abb. 4.9), wenn auch zu einem etwas früheren Zeitpunkt. Dieser Prozess ist nun ebenfalls für $\beta = 10^{-4}$ und das SGS-Verfahren mit $\Delta_{3\text{D,rot}}$ festzustellen. Dieser Umstand liegt an der kürzeren viskosen Zeitskala ($\approx 1/3$), welche durch eine erhöhte kinematische Viskosität bedingt ist. Die Viskosität ist beim rFSG-Modell größer, weil bei der β -Parametrisierung die Viskosität und Rotationsgeschwindigkeit gekoppelt sind und diese wiederum durch die Berücksichtigung der Scheibenmasse vergrößert ist. Der Vergleich zwischen rNSG- und rFSG-Modell in Bezug auf die Rotationsgeschwindigkeit, wie auch der viskosen Zeit-

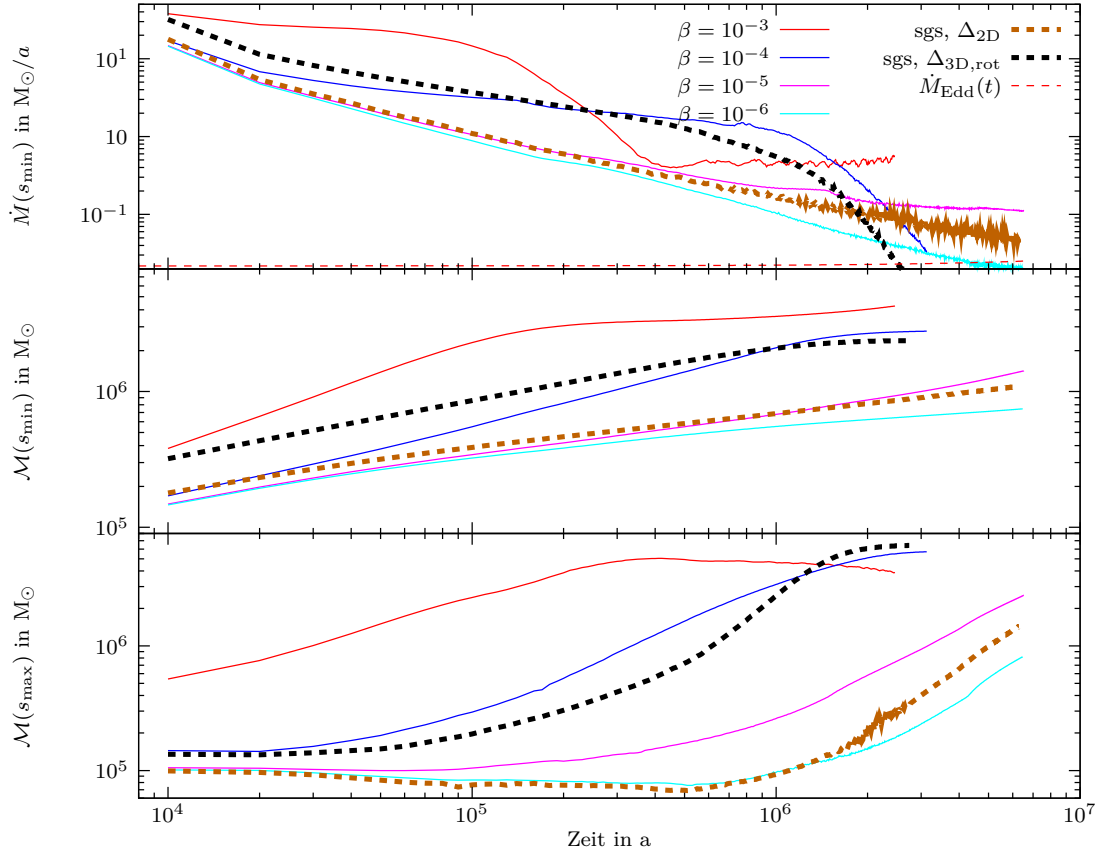


Abb. 4.16.: Die Massenakkretionsrate \dot{M} ist zusammen mit dem integrierten Massenfluss am Innen- und Außenrand aufgetragen, was am Innenrand der akkretierten Masse entspricht. Es ist sehr schön der zeitliche Versatz um den Faktor 10 zwischen dem Einbruch der Akkretionsrate in den Simulationen mit $\beta = 10^{-3}$ und $\beta = 10^{-4}$ zu sehen, was aus einer fast masselosen Akkretionsscheibe resultiert. Die Simulation mit $\beta = 10^{-3}$ sollte mit $t = 4 \cdot 10^5 a$ als beendet betrachtet werden, da der weitere Anstieg in der Akkretionsrate durch die äußeren Randbedingungen bedingt ist. Die LES mit $\Delta_{3D,rot}$ zeigt große Übereinstimmung mit der Simulation mit $\beta = 10^{-4}$.

skalen²⁸, ist in Abb. 4.18 dargestellt. Es zeigt sich im rFSG-Modell bei ca. $5 \cdot 10^5 R_S$ ein Übergang von Keplerscher Rotation zu einer – durch die Selbstgravitation bedingte – leicht ansteigenden Rotationsgeschwindigkeit. Dieser Punkt verschiebt sich mit der Zeit zu größeren Radien, da das Zentralobjekt durch Akkretion an Masse gewinnt die Scheibe an Masse verliert und somit das Schwarze Loch über größere Distanzen dominieren kann.

²⁸Es ist zu beachten, dass die viskose Zeitskala (2.33) in Abb. 4.18 lediglich auf Grundlage der (turbulenten) kinematischen Viskosität berechnet werden kann, was andere Effekte unbeachtet lässt, die sich in einer turbulenten Strömung ergeben können.

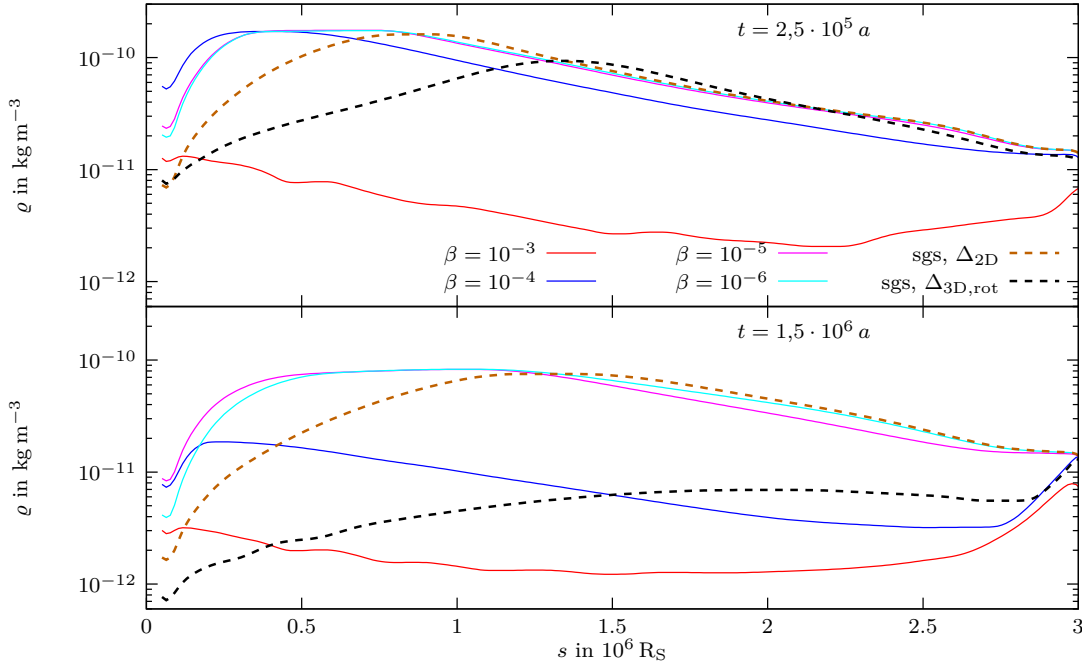


Abb. 4.17.: Zu zwei Zeiten ist die Massendichte in der Zentralebene ($z = 0$) gezeigt, die ein sehr ähnliches Bild wie beim rNSG-Modell (Abb. 4.9) aufzeigt. Der äußere Rand beeinflusst die Massendichte für große Radien ($s > 2,5 \cdot 10^6 R_S$) deutlich. Dem SGS-Verfahren mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$ gelingt es auch für große Radien eine nennenswerte Scheibenentwicklung auszulösen.

Hingegen weist das SGS-Verfahren mit Filterbreite Δ_{2D} einen Bereich auf, der eine geringere kinematischen Viskosität besitzt, wie es sich sehr deutlich in Abb. 4.19 offenbart. Die Zone, in welcher die Zähigkeit des rFSG- gegenüber dem des rNSG-Modells verringert ist, wandert mit der Zeit nach außen und korrespondiert mit dem zuvor beschriebenen Übergang von Keplerscher Rotation zu einer durch Selbstgravitation beeinflussten Rotationskurve. Dies lässt sich verstehen, wenn der Produktionsterm betrachtet wird, welcher maßgeblich für die Umwandlung von kinetischer Energie in turbulente Energie verantwortlich ist und somit auch für die Stärke der Zähigkeit (Wirbelviskosität). Der Produktionsterm hängt, über den subgrid-scale Tensor $\hat{\tau}_{sgs}$, vom Gradienten des Geschwindigkeitsfeldes ab. Dieser weist durch den Vorzeichenwechsel (von fallendem zu leicht steigendem v_ϕ) zwangsläufig ein Minimum im besagten Übergangsbereich auf. Dies zeigt deutlich, dass die Wirbelviskosität signifikant durch den Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit dominiert ist und nicht durch Wirbel in der s - z -Ebene, da es ansonsten keinen Grund gäbe, dass dieser Zusammenhang bestehen müsste.

Die LES mit dem progressiven Filter kann bis auf einen kleinen Bereich eine deutliche Abnahme der viskosen Zeitskala verbuchen. Dies macht sich deutlich in der Massendichte (Abb. 4.17) bemerkbar. Erstmals gelingt es einer LES auch von großen Radien im größeren Umfang Material zu kleineren Radien zu transportieren, was den Zusammen-

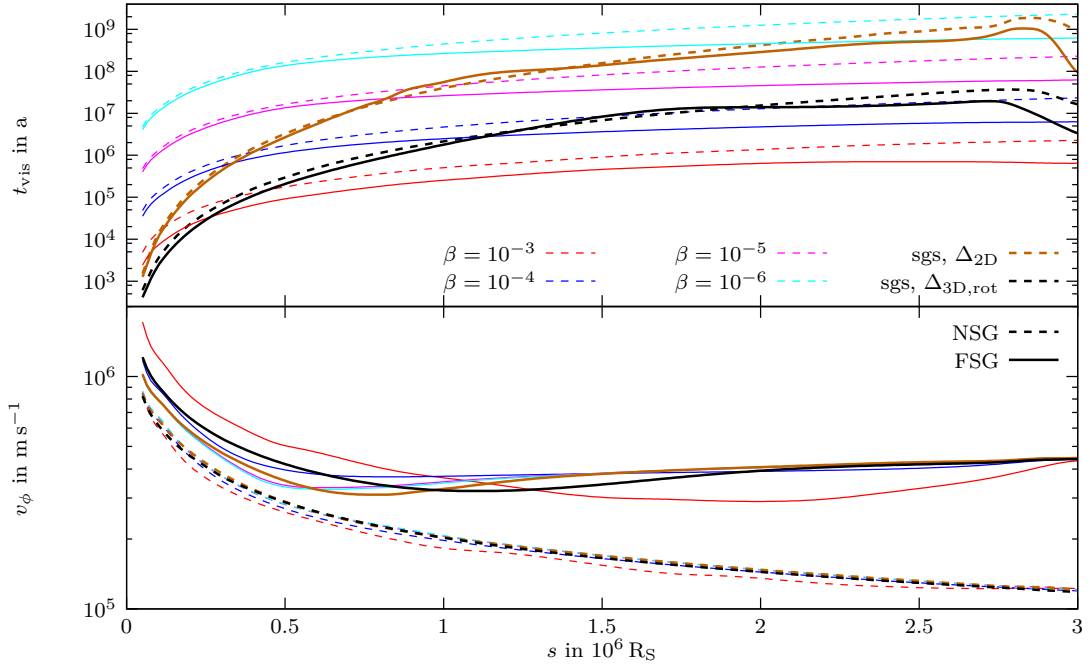


Abb. 4.18.: Gezeigt ist die viskose Zeitskala t_{vis} und die Rotationsgeschwindigkeit v_ϕ zum Zeitpunkt $t = 2,5 \cdot 10^5 a$. Dabei repräsentieren gestrichelte Linien das rNSG-Modell und durchgezogene Linien das rFSG-Modell. Es fällt die leicht gesenkte viskose Zeitskala in der β -Parametrisierung auf (bedingt durch erhöhtes v_ϕ). Beim SGS-Verfahren gibt es eine Zone, in der gegenteiliges Verhalten vorherrscht.

bruch der Akkretionsrate erklärt, da die Scheibe zu diesem Zeitpunkt bereits leer ist (siehe auch Abb. 4.16).

Es kann festgestellt werden, dass sich durch die Selbstgravitation nicht mehr Turbulenz bildet, wie dies letztlich auch rein qualitativ in Abb. 4.20 und 4.21 beispielsweise an der Vortizität zu sehen ist. Dieses Bild erhärtet sich, da in den Simulationsdaten keine Anzeichen von gravitativen Instabilitäten aufzufinden sind.

Damit lässt sich verstehen, dass die LES mit Δ_{2D} relativ zu der Parametrisierung nach Duschl et al. (2000) abfällt, da sie durch die erhöhte Rotationsgeschwindigkeit mehr turbulente Viskosität aufzuweisen hat. Es gelingt der LES offensichtlich nicht dies im gleichen Maße mittels turbulenter Bewegung zu kompensieren. Umso erstaunlich ist das Verhalten der LES mit $\Delta_{3D,rot}$, der dies dennoch gelingt.

Obwohl der turbulente Druck im rFSG-Modell im Vergleich zum rNSG in absoluten Zahlen bei der zweidimensionalen Filterbreite steigt, wird sein Anteil am Gesamtdruck geringer (Abb. 4.20). Dadurch spielt der turbulente Druck teilweise keine relevante Rolle mehr; das hydrostatische Gleichgewicht in vertikaler Richtung wird demnach fast ausschließlich über den thermodynamischen Druck p realisiert. Auch hier weist das Modell

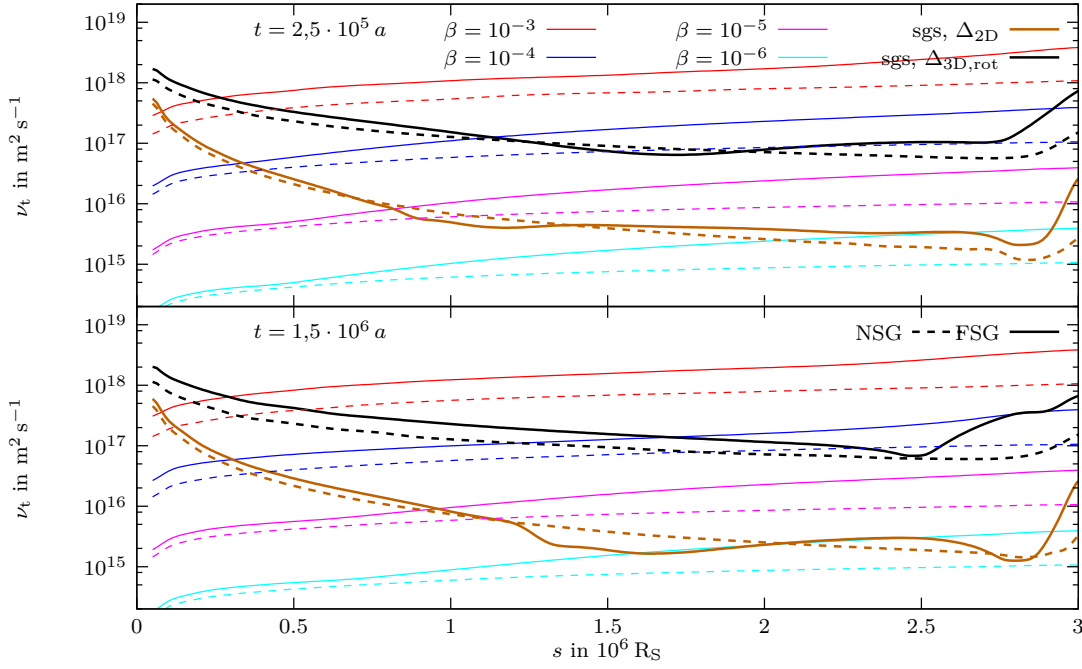


Abb. 4.19.: Die kinematische Viskosität für $z = 0$ ist zum Vergleich für beide Modelle aufgetragen. Es zeigt sich die durchgehende Zunahme der kinematischen Viskosität der Simulationen mit β -Parametrisierung. Dies trifft auf das SGS-Verfahren mit Filterbreite Δ_{2D} nicht in allen Bereichen zu (siehe auch Abb. 4.18). Dem Pendant mit $\Delta_{3D,rot}$ gelingt es hingegen im rFSG-Fall zu späteren Zeiten insgesamt mehr Wirbelviskosität zu generieren.

mit dreidimensionalen Filter ein diametrales Verhalten auf (Abb. 4.21).

Mittels einer realistischen Behandlung der Kühlung könnten möglicherweise gravitative Instabilitäten zu Tage gefördert werden und damit einen größeren Anteil an Turbulenz generieren. Dazu müsste das im Rahmen einer anderen Arbeit in der Implementierung befindliche Verfahren zur approximativen Behandlung des Strahlungstransportes mittels flux-limited diffusion (FLD) (vgl. Swesty & Myra, 2009; Levermore & Pomraning, 1981) helfen. Es müsste sich jedoch herausstellen, ob es ohne weiteres möglich ist, die teilweise extrem verringerten Zeitschritte, die sich bei Kühlung im Allgemeinen ergeben, im Rahmen der Simulation zu bewältigen sind.

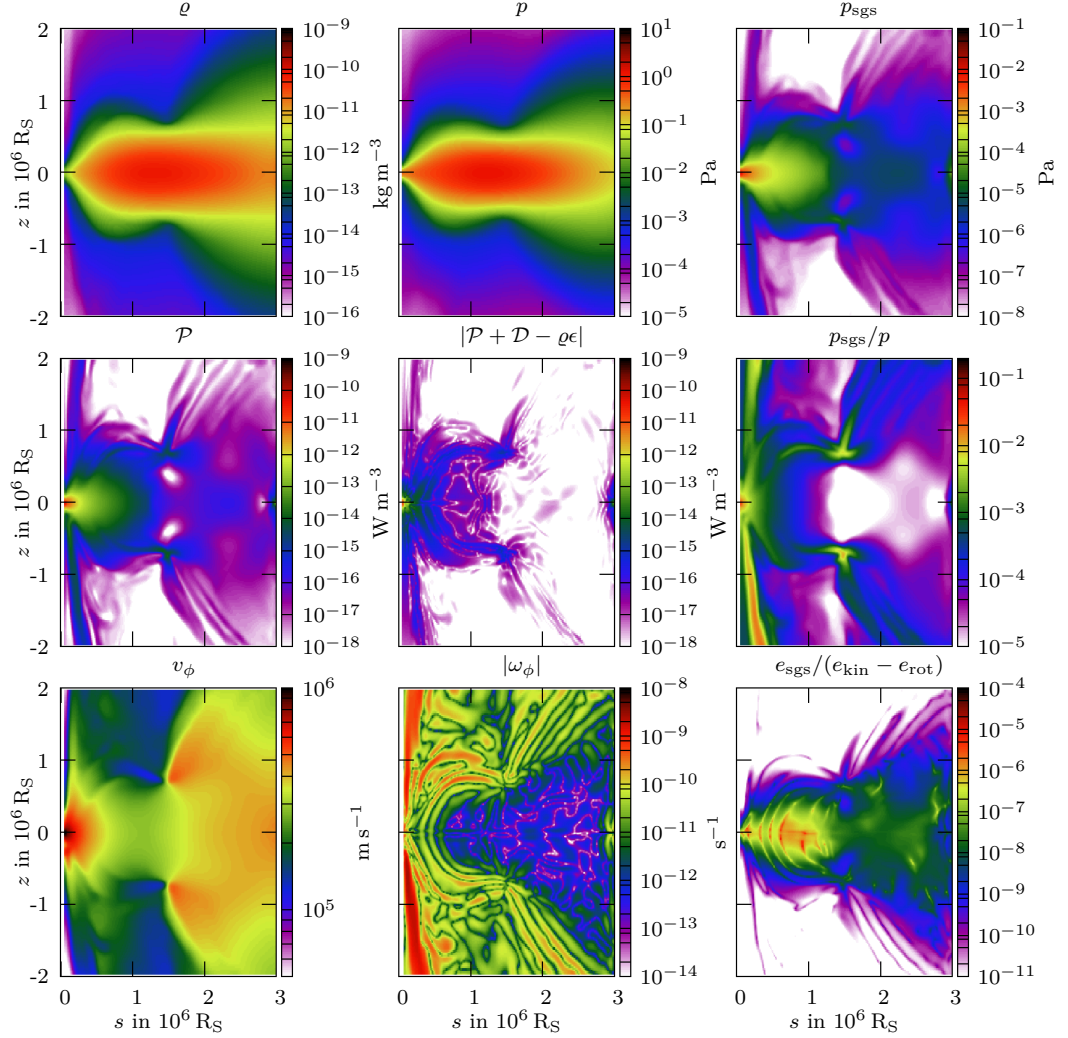


Abb. 4.20.: Zum Zeitpunkt $t = 1,5 \cdot 10^6 a$ sind aus dem rFSG-Modell mit Filterbreite Δ_{2D} die relevanten Simulationsresultate dargestellt, wie dies bereits in Abb. 4.13 und 4.14 geschehen ist. Die Skalierung ist mit diesen Abbildungen **nicht** identisch. Am markantesten ist sicherlich das Verhältnis von turbulentem Druck p_{sgs} zu Druck p , welches im Vergleich zu dem rNSG-Modell stark abgefallen ist.

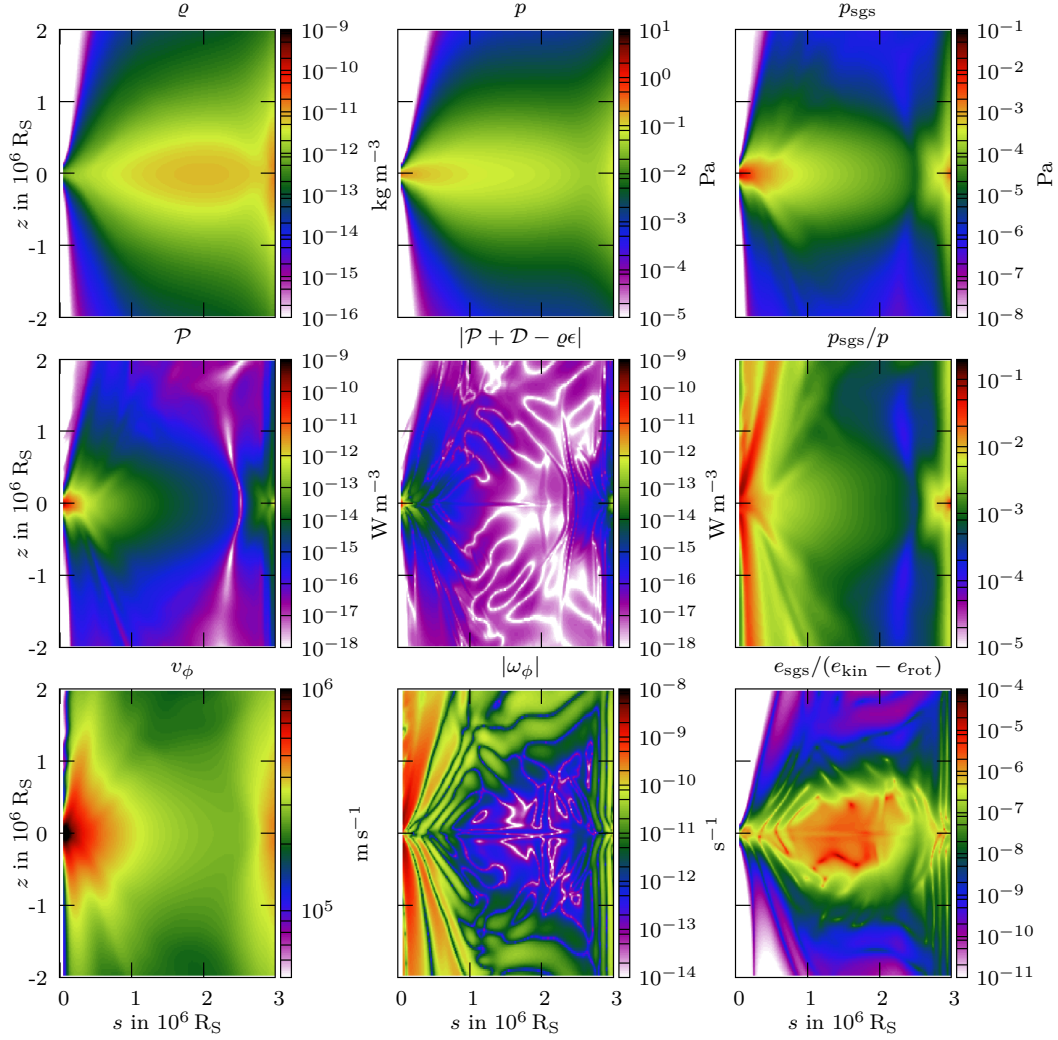


Abb. 4.21.: Zum Zeitpunkt $t = 1,5 \cdot 10^6 a$ sind aus dem rFSG-Modell mit Filterbreite $\Delta_{3D,rot}$, wie bereits zuvor wichtige Simulationsgrößen dargestellt. Die Skalierung ist zum besseren Vergleich mit Abb. 4.20 identisch. Der Filter bewirkt eine starke Zunahme der SGS-Größen, was sich auch in den Verhältnissen von p_{sgs} zu p und e_{sgs} zu $e_{kin} - e_{rot}$ niederschlägt.

Vergleich beider Modelle mit Potenzgesetzen

Das zu erwartende Potenzgesetz $\nu_t \propto s^{\frac{1}{2}}$, welches sich durch Keplerrotation bei β -Parametrisierung ergibt, kann in allen betreffenden Simulationen des rNSG-Modells mit einer sehr guten Übereinstimmung beobachtet werden (siehe Abb. C.4 und Tab. C.3). Im Mittel ergibt sich ein Wert der vier Simulationen von $\alpha_{\text{Kep}} = 0,500 \pm 0,002_{\text{stat}}$ ²⁹ des Exponenten.

Wird von Effekten des Außenrandes abgesehen, so zeigen beide SGS-Verfahren ebenfalls ein Verhalten, welches als Potenzgesetz $\nu_t \propto s^{\alpha_{\text{Kep}}}$ interpretiert werden kann. Durch $\Delta_{2\text{D}} \propto \text{const}$ und $\Delta_{3\text{D,rot}} \propto s^{\frac{1}{3}}$, was aus dem mit der s -Koordinate äquidistanten Gitter und der Definition der Filterbreite (3.9) bzw. (3.10) folgt, kann geschlossen werden, dass der Exponent α_{Kep} zwischen den beiden Modellen überproportional angewachsen ist $\alpha_{\text{Kep}} = -1,477 \Rightarrow -1,477 + \frac{1}{3} < -0,77$ (siehe Abb. C.4 und Tab. C.3). Aus Glg. (3.41) ergibt sich, dass sich dieser Aspekt zwangsläufig im Verhalten der turbulente Energie widerspiegeln muss, dies bestätigt sich ebenfalls durch Abb. 4.13 und 4.14 anhand des turbulenten Drucks ($p_{\text{sgs}} \propto e_{\text{sgs}}$). Damit ist die Wirbelviskosität überproportional gegenüber der Änderung in der Filterbreite gewachsen.

Beim rFSG-Modell ist der Sachverhalt dahingehend komplexer, dass bei der β -Parametrisierung mit einem näherungsweise gebrochenem Potenzgesetz gerechnet werden kann, wenn die Massenverteilung im von Selbstgravitation dominierten Bereich der Scheibe ebenfalls einem Potenzgesetz gehorcht. Für kleine Radien sollte nahezu Keplerrotation vorherrschen, was auch zu beobachten ist (Abb. 4.18), weshalb mit dem annähernd gleichen Exponenten zu rechnen ist. Dies ist auch nahezu erfüllt, wobei sich ein systematisch kleinerer Wert in den vier Simulationen einstellt (im Mittel: $\alpha_{\text{Kep}} = 0,456 \pm 0,003_{\text{stat}}$). Für größere Radien kann ebenfalls relativ gut mit einem Potenzgesetz genähert werden (im Mittel: $\alpha_{\text{Self}} = 1,149 \pm 0,002_{\text{stat}}$). Dies lässt sich näherungsweise aus der Monopolnäherung in Verbindung mit der initiale Massenverteilung $\Sigma \propto s^{-7/8} \Rightarrow M_{\text{disk}}(s) \propto s^{9/8}$ abschätzen, die bei den β -Scheiben näherungsweise erhalten geblieben ist

$$v_\phi(s) \approx \sqrt{\frac{G(M_Z + M_{\text{disk}}(s))}{s}} \underset{s \gg GM_Z}{\propto} \sqrt{s^{1/8}} \underset{\beta\text{-Param.}}{\Rightarrow} \nu_t \propto s^{17/16}. \quad (4.23)$$

Die Abweichung zum geschätzten Exponenten $\alpha_{\text{Self}} = 17/16 = 1,0625 < 1,149$ kann durch die veränderte Massendichte ρ zur anfänglichen, die auch die Höhenskala $h(s)$ betrifft, wie auch durch die für diese Abschätzung benutzte Monopolnäherung erklärt werden. Dennoch kann mit dieser rudimentären Abschätzung der Verlauf der Viskosität im β -Modell nachvollziehen werden.

²⁹Es ist zu beachten, dass es sich dabei nur um den statistischen Fehler aus dem LMS-Fit handelt, was zwar generell Rundungsfehler des Verfahrens, aber keine systematischen, wie z. B. Verfahrensfehler durch Randbedingungen, abdeckt. Diese lassen sich letztlich nicht genau quantifizieren.

Für das SGS-Verfahrens ist es schwieriger, einen direkten Übergang zwischen zwei Potenzgesetzen deuten zu können, da es in der Zone dazwischen zu einem deutlichen Einbruch kommt. Werden die beiden verbleibenden Teile dennoch mit einem Potenzansatz gefittet, so ergibt sich bei Filterbreite Δ_{2D} mit $(\alpha_{Kep} = -1,42 \pm 0,02_{stat}, \alpha_{Self} = -0,71 \pm 0,03_{stat})$ ein Exponent, der im Bereich mit Keplerrotation mit dem rNSG-Fall nahezu identisch ist, wenn auch etwas kleiner, wie dies ebenfalls bei den β -Scheiben beobachtet wird. Der dreidimensionale Filter $\Delta_{3D,rot}$ verhält sich in der nicht-selbstgravitierenden Zone wie im rNSG-Fall und weist innerhalb des Fehlers den gleichen Wert auf: $\alpha_{Kep} = -0,773 \pm 0,009_{stat}, \alpha_{Self} = 1,46 \pm 0,05_{stat}$. Im selbstgravitierenden Bereich hingegen tritt erstmalig ein gänzlich anderes Verhalten auf. Der Exponent ist nicht nur positiv, sondern signifikant größer als die klassischen Parametrisierungen. Es gelingt dieser Simulation somit auch bei größeren Radien beträchtliche Akkretion auszulösen und unterliegt möglicherweise nicht dem limitierenden Aspekt einer stark mit dem Radius abfallenden Wirbelviskosität. Dies erklärt auch die starke Umverteilung der Masse in der Scheibe im Vergleich zum zweidimensionalen Filter, wie es im letzten Abschnitt festgestellt wurde.

Die Frage ist nun, ob aus dem Charakter eines Potenzgesetzes etwas geschlossen werden kann. Falls die Wirbelviskosität tatsächlich durch den Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit dominiert wird,³⁰ dann gilt im Bereich mit Keplerrotation, also in der nicht selbstgravitierenden Zone:

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial s} \propto \frac{\partial s^{-\frac{1}{2}}}{\partial s} \propto s^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.24)$$

was eine sehr gute Näherung zu den gefundenen Werten $\alpha_{Kep} = -3/2 \approx -1,477$ bzw. $\approx -1,42$ darstellt.

In der selbstgravitierenden Zone des rFSG-Modells kann beim SGS-Verfahren mit Δ_{2D} die Rotationsgeschwindigkeit $v_\phi \propto s^{0,215 \pm 0,001}$ gefittet werden, was die Abschätzung

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial s} \propto \frac{\partial s^{0,215}}{\partial s} \propto s^{-0,785} \quad (4.25)$$

liefert und innerhalb des Fehlers mit dem gefundenen Wert identisch ist. Damit zeigt sich, dass der Wert der Wirbelviskosität maßgeblich von der radialen Komponente des Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit bestimmt wird. In dem Übergangsbereich mit $\frac{\partial v_\phi}{\partial s} = 0$ spielen zwangsläufig erstmalig andere Prozesse eine Rolle, was durch die Erhaltungsgleichung der turbulenten Energie (3.28) gewährleistet werden kann, die Effekte wie Konvektion und Diffusion (\mathcal{D}) berücksichtigt.

³⁰Insgesamt ist das Verhalten nicht linear und es können ohne weiteres keine Aussagen getroffen werden. Jedoch ist der Produktionsterm (3.46) u. a. vom Quadrat der Ableitungen der Geschwindigkeiten abhängig und durch $\nu_t \propto \sqrt{e_{sgs}}$ lässt sich ein Zusammenhang konstruieren.

Der dreidimensionale Filter führt zu einem Rotationsgesetz $v_\phi \propto s^{0,437 \pm 0,005}$, was beim zutreffen der Hypothese zu einer Wirbelviskosität

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial s} \propto \frac{\partial s^{0,437}}{\partial s} \propto s^{-0,563} \Rightarrow \nu_t \propto s^{-0,563 + \frac{1}{3}} = s^{-0,297} \quad (4.26)$$

führen sollte. Vergleichen mit dem tatsächlich vorliegenden Wert ($\alpha_{\text{Self}} = 1,46 \pm 0,05_{\text{stat}}$) kann beim dreidimensionalen Filter, wie auch in der nicht-selbstgravitierenden Zone, keine (einfache) Kopplung zwischen Wirbelviskosität und dem Gradienten der Rotationsgeschwindigkeit mehr nachgewiesen werden.

Damit ergibt sich für das SGS-Verfahren eine Abhängigkeit von (dem Gradienten) der Rotationsgeschwindigkeit, wie dies eben auch bei der einfachen Parametrisierung durch den β -Ansatz der Fall war. Ohne eine volle dreidimensionale Simulation lässt sich a priori nicht entscheiden, welcher Methode der Vorzug zu geben wäre. Ein interessanter Aspekt könnte die weitere Untersuchung von heißem, dünnem Gas sein, welches von der Scheibe wegströmt, da dort durch Turbulenzen eine stark unterschiedliche Viskosität im Vergleich zum β -Ansatz generiert wird und dieses ggf. das Strömungsverhalten nachhaltig beeinflussen könnte.

Die Zeitskalen der beiden Modelle liefern Werte unterhalb von etwa 10^9 a bzw. 10^7 a, so dass es für das Verfahren mit Filterbreite Δ_{2D} problematisch sein kann, die vermuteten Entwicklungszeitskalen von SMSL zu erklären. Der progressive Filter liegt hierbei durchaus in einem realistischen Rahmen, wobei berücksichtigt werden muss, dass die viskose Zeitskala im Gegensatz zum β -Ansatz überproportional steigt, so dass der maximale Radius, von welchem innerhalb einer viskosen Zeitskala akkretiert werden kann, relativ gering ist.

4.2. Tests zur Auflösungsabhängigkeit

Jeder LES ist ganz allgemein inhärent, dass durch Steigerung der Auflösung die SGS-Variablen (z. B. p_{sgs}), die den nicht-aufgelösten Teil der Simulation repräsentieren, vom Wert abfallen müssen. Im Idealfall, bei vollständiger Erfassung der kleinsten turbulenten Skalen, was einer DNS entspricht, dürfte das SGS-Verfahren keine Effekte mehr auf die Simulation haben, da bereits alle Aspekte der Turbulenz auf natürliche Weise in der Simulation erfasst wären. Dies ist zwangsläufig in der Praxis eine in dieser Form nicht erreichbare Idealisierung. Dennoch ist festzuhalten, dass einerseits das Skalenverhalten in den SGS-Variablen feststellbar sein sollte und zweitens das globale Verhalten bei einer korrekt arbeitenden LES nur mäßig (im Idealfall überhaupt nicht) von der Auflösung abhängen sollte.

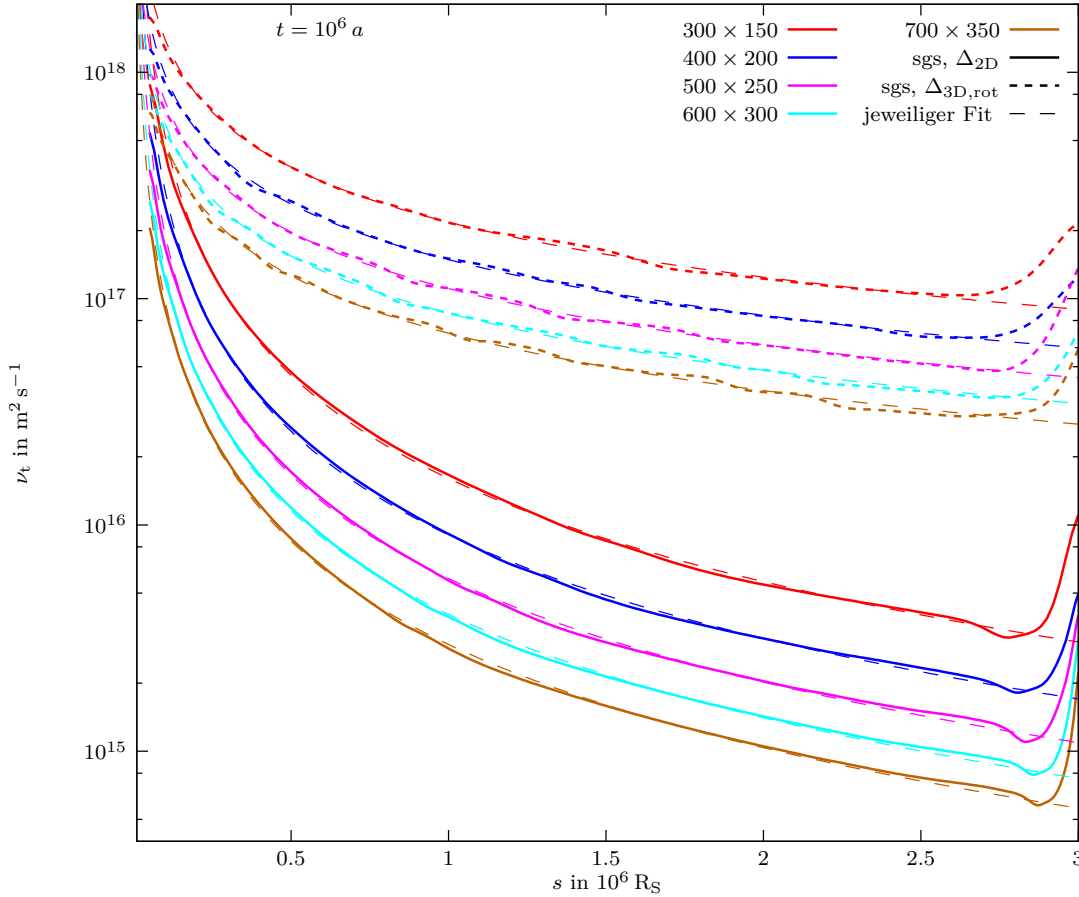


Abb. 4.22.: Es ist die Auflösungsabhängigkeit der Wirbelviskosität anhand des rotationssymmetrischen rNSG-Modells ($t = 10^6 a$) zusammen mit den jeweiligen Fit-Funktion (gefittet im Intervall $[0.1, 2.5] 10^6 R_S$) illustriert. Es zeigt sich eine, wie erwartet, starke Abhängigkeit von der Auflösung, die auch vom Exponenten des Energiespektrums abhängt (3.45). Die Parameter der Fit-Funktionen sind in Tab. 4.1 zur quantitativen Auswertung aufgeführt.

4.2.1. Wirbelviskosität

Dies soll für die Wirbelviskosität geprüft werden, wie es in Abschn. 3.2.2 diskutiert wurde. Aus Gründen des Rechenaufwandes, der bei der Selbstgravitation beachtlich ist, wird nur das rNSG-Modell dieser Analyse unterzogen. Beide Modelle zeigen generell ein sehr ähnliches Verhalten in Bezug auf Instabilitäten (bzw. durch das *Fehlen* von Instabilitäten), so dass die Hypothese gerechtfertigt erscheinen mag, ebenfalls das gleiche Skalenverhalten anzunehmen.

In Abb. 4.22 ist dies für die Wirbelviskosität zum Zeitpunkt $t = 10^6 a$ für fünf Auflösungsstufen und beide Filterbreiten gezeigt. Insbesondere aus den Fit-Funktionen ($\nu_{\text{sgs}} \propto a s^{\alpha_{\text{Kep}}}$) folgt, dass die Wirbelviskosität auch bei unterschiedlichen Auflösungen sehr ge-

Tab. 4.1.: Es sind die Koeffizienten aus der Anpassung mittels der *Least-Mean-Squares*-Methode für das Potenzgesetz $\nu_t = C a (s/s_0)^{\alpha_{\text{Kep}}}$ aufgeführt (die Konstanten $C = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ und $s_0 = 10^6 \text{ R}_S$ zwecks Wahrung der Dimension). Es zeigt sich die gleiche Abhängigkeit wie in Abschn. 4.1.4.

Modell	Exponent α_{Kep}	$\ln a$
sgs mit $\Delta_{2\text{D}}$		
300×150	$-1,514 \pm 0,005$	$37,314 \pm 0,004$
400×200	$-1,520 \pm 0,004$	$36,740 \pm 0,003$
500×250	$-1,520 \pm 0,003$	$36,296 \pm 0,002$
600×300	$-1,519 \pm 0,003$	$35,932 \pm 0,002$
700×350	$-1,516 \pm 0,003$	$35,625 \pm 0,002$
sgs mit $\Delta_{3\text{D,rot}}$		
300×150	$-0,807 \pm 0,003$	$39,922 \pm 0,003$
400×200	$-0,817 \pm 0,003$	$39,540 \pm 0,002$
500×250	$-0,826 \pm 0,002$	$39,248 \pm 0,002$
600×300	$-0,837 \pm 0,003$	$38,996 \pm 0,002$
700×350	$-0,842 \pm 0,003$	$38,793 \pm 0,002$

nau dem bereits in Abschn. 4.1.4 gefundenen Potenzgesetz und gleichem Exponenten gehorcht (siehe Tab. 4.1). Aus dem Koeffizienten a kann geprüft werden, ob der erwartete Zusammenhang zwischen Filterbreite und Wirbelviskosität besteht. Hierzu ist in Abb. 4.23 die Filterbreite (genauer: $\tilde{\Delta}_{2\text{D}} = (N_s \cdot N_z)^{-1/2}$ bzw. $\tilde{\Delta}_{3\text{D}} = (N_s \cdot N_z)^{-1/3}$) gegen $\ln a$, welcher direkt ein Maß für die Wirbelviskosität ist, aufgetragen.

Es zeigt sich im doppelt logarithmischen Diagramm ein überraschend genaues Potenzgesetz. Aus dem *Least-Mean-Squares* ergibt sich

$$\nu_{\text{sgs}} \propto \Delta_{2\text{D}}^{1,9932 \pm 0,0006} \quad (4.27)$$

$$\nu_{\text{sgs}} \propto \Delta_{3\text{D,rot}}^{2,001 \pm 0,008}, \quad (4.28)$$

wobei sich auch hier die Fehlerangaben auf rein statistische Daten des Fit-Prozesses stützen, was als erheblich zu gering eingestuft werden sollte.

Damit wäre gezeigt, dass die Wirbelviskosität über ein Potenzgesetz mit der Filterbreite gekoppelt ist und zusätzlich über Glg. (3.45) auf das Potenzgesetz der aufgelösten kinetischen Energie $\overline{e_{\text{kin}}}(k) \propto k^{-3}$ geschlossen werden kann. Dies entspricht somit dem erwarteten Skalenverhalten einer zweidimensionalen Turbulenz, deren Voraussetzungen im aufgelösten Bereich durch die zweidimensionalen Modelle zwangsläufig erfüllt sind. Hier liegt auch ein entscheidender Nachteil: Je mehr „aufgelöst“ wird, desto mehr sollten Charakteristika einer zweidimensionalen Turbulenz in den Simulationen zum Vorschein kommen, die letztlich nicht gewünscht sind (siehe Abschn. 2.2.5), da erst das SGS-Verfahren in der Lage ist den dreidimensionalen Charakter der Turbulenz abzubilden.

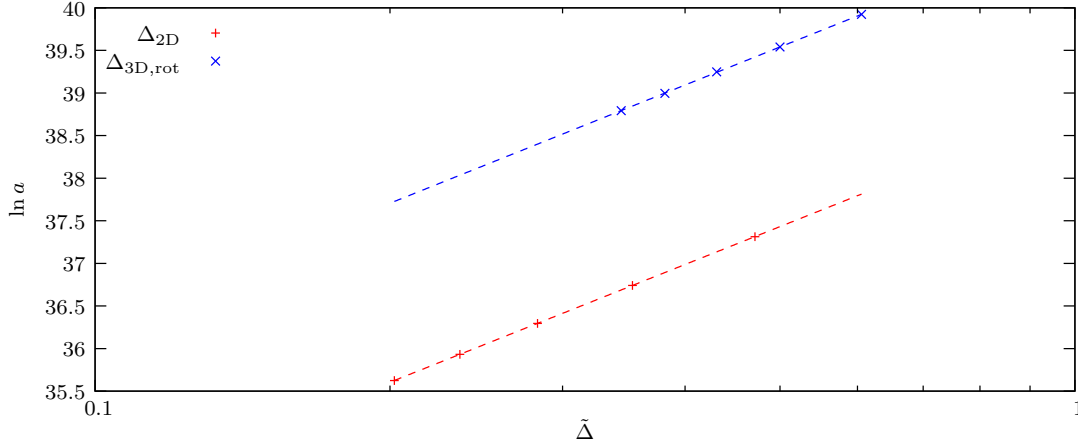


Abb. 4.23.: Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Wirbelviskosität von der Filterbreite ist der Logarithmus des Koeffizienten a aus dem Fit von $\nu_{\text{sgs}} = C a (s/s_0)^{\alpha_{\text{Kep}}}$ ($C \equiv 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$; $s_0 \equiv 10^6 R_S$) gegen $\tilde{\Delta}_{2D} = (N_s \cdot N_z)^{-1/2}$ bzw. $\tilde{\Delta}_{3D} = (N_s \cdot N_z)^{-1/3}$ aufgetragen. Die Übereinstimmung ist überraschend genau (siehe Text).

4.2.2. Akkretionsrate

Als globale Größe sollte die Akkretionsrate hingegen nicht von der Auflösung abhängen. Die nachlassende turbulente Viskosität muss durch vermehrte Wirbelbildung kompensiert werden, was nur funktioniert, wenn in der Simulation durch Instabilitäten ausreichend viel Turbulenz getrieben wird. Da numerische Simulationen grundsätzlich durch beispielsweise numerische Viskosität³¹ und andere auflösungsabhängige Faktoren beeinflusst werden können, wird zum Vergleich ebenfalls mit den gleichen Auflösungsstufen eine Simulation mit $\beta = 10^{-4}$ herangezogen. Diese Daten sind in Abb. 4.24 dargestellt und zeigen eine klare Variation, die jedoch qualitativ durchaus bei allen drei Modellen von der gleichen Größenordnung ist. Es fällt ebenfalls auf, dass die größte Auflösung nicht zur größten Akkretionsrate führt.

Eine quantitative Auswertung anhand des jeweils am besten passenden Potenzgesetzes $\dot{M} \propto a t^\alpha$ erweist sich im Vergleich zur Wirbelviskosität als schwieriger, da die Akkretionsraten durch den genannten Ansatz schlechter genähert werden können, wie dies an der Variation des Exponenten α innerhalb einer Simulation in Tab. 4.2 ersichtlich wird. Somit ist die Auswertung von dem Zeitintervall abhängig über welches die Anpassung des Potenzgesetzes (fitting) erfolgt, wie dies allerdings auch bei einem direkten Vergleich der Werte der Fall wäre. Als Abschätzung soll dies genügen und ist in Abb. 4.25 gezeigt. Es ist $\ln a$, als Maß für die Akkretionsrate, logarithmisch über $\tilde{\Delta} = (N_s \times N_z)^{-1/2}$

³¹Numerische Viskosität wird bei allen Verfahren zweiter Ordnung mit approximativem Riemann-Löser zur numerischen Stabilität zwingend benötigt.

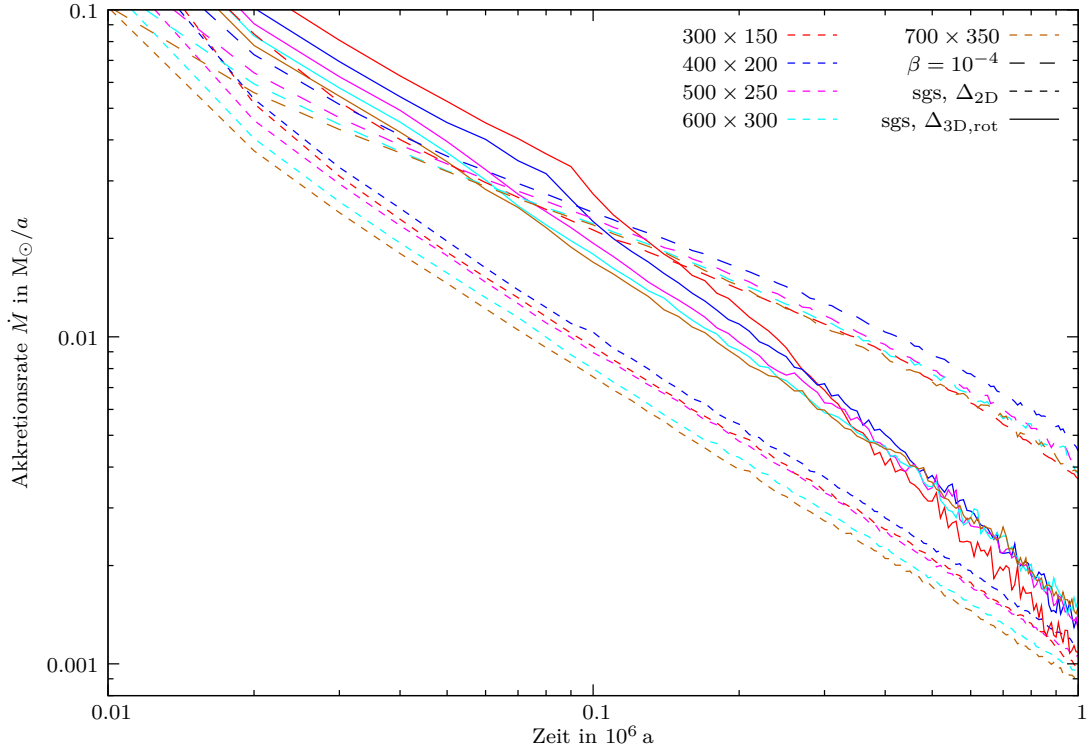


Abb. 4.24.: Zur Prüfung der Auflösungsabhängigkeit der Akkretionsrate sind drei Simulationen des rotationssymmetrischen rNSG-Modells, $\beta = 10^{-4}$ (lang gestrichelt), SGS-Verfahren mit Δ_{2D} (kurz gestrichelt) bzw. $\Delta_{3D,rot}$ (durchgezogen) in fünf Auflösungsstufen doppelt logarithmisch dargestellt. Es zeigt sich eine signifikante Abhängigkeit von der Auflösung, wobei qualitativ kein Unterschied zwischen β -Parametrisierung und LES festzustellen ist.

aufgetragen, was als Maß für die Auflösung dienen kann.³² Die Filterbreiten sollen unberücksichtigt bleiben, da explizit die Abhängigkeit von der Auflösung (Gitterweite) untersucht wird. Im Diagramm ist ersichtlich, dass die größte Auflösung (größtes $\tilde{\Delta}$) aus den Daten stark hervortritt und es sich um einen systematischen Fehler zu handeln scheint. Möglicherweise ist die dort gewählte Auflösung bereits so gering, dass die Extrapolation der Rotationsgeschwindigkeit in den Geisterzellen zu numerischen Problemen führt (siehe Abschn. 4.1.2), da bei einer so geringen radialen Auflösung von $N_s = 150$ (in Verbindung mit Innen- und Außenradius) deren Schwerpunkte nahezu bei $s = 0$ liegen. Aus diesem Grund wurde dieser Wert nicht berücksichtigt und die verbleibenden vier Messwerten ergeben mittels *Least-Mean-Squares*-Verfahrens eine Abhängigkeit von

³²Die Gitterweite ist im für die Akkretionsrate wichtigen Bereich $|z| < z_0$ linear von der gewählten Anzahl der Gitterzellen beider Raumrichtungen abhängig (siehe Abschn. 4.1)

Tab. 4.2.: Es sind die Koeffizienten aus der Anpassung mittels der *Least-Mean-Squares*-Methode für das Potenzgesetz $\dot{M} = C a (t/t_0)^\alpha$ aufgeführt (die Konstanten $C \equiv 1 M_\odot \text{ a}^{-1}$ und $s_0 \equiv 10^6 \text{ a}$ sind zur Wahrung der Dimension). Bei den Akkretionsraten ergeben sich bereits größere Schwankungen innerhalb einer Gruppe, als dies bei der Wirbelviskosität in Erscheinung trat. Um Resultate für $\Delta_{3\text{D,rot}}$ zu erhalten ist die Anpassung nur im Intervall $[1, 2] 10^5 \text{ a}$ erfolgt.

Modell	Exponent α	$\ln a$
sgs mit $\Delta_{2\text{D}}$		
300×150	$-0,969 \pm 0,006$	$-6,858 \pm 0,006$
400×200	$-0,955 \pm 0,003$	$-6,762 \pm 0,003$
500×250	$-0,942 \pm 0,002$	$-6,847 \pm 0,002$
600×300	$-0,929 \pm 0,002$	$-6,957 \pm 0,002$
700×350	$-0,926 \pm 0,002$	$-7,014 \pm 0,002$
sgs mit $\Delta_{3\text{D,rot}}$		
300×150	$-1,08 \pm 0,02$	$-6,14 \pm 0,04$
400×200	$-1,02 \pm 0,01$	$-6,17 \pm 0,04$
500×250	$-0,99 \pm 0,02$	$-6,23 \pm 0,03$
600×300	$-0,98 \pm 0,02$	$-6,28 \pm 0,04$
700×350	$-0,98 \pm 0,02$	$-6,32 \pm 0,03$
$\beta = 10^{-4}$		
300×150	$-0,791 \pm 0,01$	$-5,510 \pm 0,009$
400×200	$-0,728 \pm 0,008$	$-5,276 \pm 0,008$
500×250	$-0,764 \pm 0,008$	$-5,406 \pm 0,007$
600×300	$-0,756 \pm 0,008$	$-5,429 \pm 0,008$
700×350	$-0,771 \pm 0,008$	$-5,481 \pm 0,007$

$$\dot{M}_\beta \propto \tilde{\Delta}^{0,35 \pm 0,07} \quad (4.29)$$

$$\dot{M}_{\Delta_{2\text{D}}} \propto \tilde{\Delta}^{0,46 \pm 0,04} \quad (4.30)$$

$$\dot{M}_{\Delta_{3\text{D,rot}}} \propto \tilde{\Delta}^{0,26 \pm 0,01}. \quad (4.31)$$

Die Akkretionsrate weist somit eine signifikante Abhängigkeit von der Auflösung auf, die mittels eines Potenzgesetzes beschrieben werden kann. Dieses Verhalten überrascht, da es in dieser Weise maximal für das SGS-Verfahren erwartet wurde. Der Unterschied zwischen der klassischen Parametrisierung und der LES, also dem Anteil, der letztlich als alleiniger Verfahrensfehler des SGS-Verfahren verstanden werden kann, ist einerseits sehr gering und liegt durchaus noch innerhalb des statistischen Fehlers. Der Exponent, also die Abhängigkeit von der Auflösung, ist beim SGS-Verfahren mit Filterbreite $\Delta_{3\text{D,rot}}$ am geringsten. Dies untermauert, dass die LES praktisch zu keiner zusätzlichen Auflösungsabhängigkeit im Vergleich zur klassischen Parametrisierung führt.

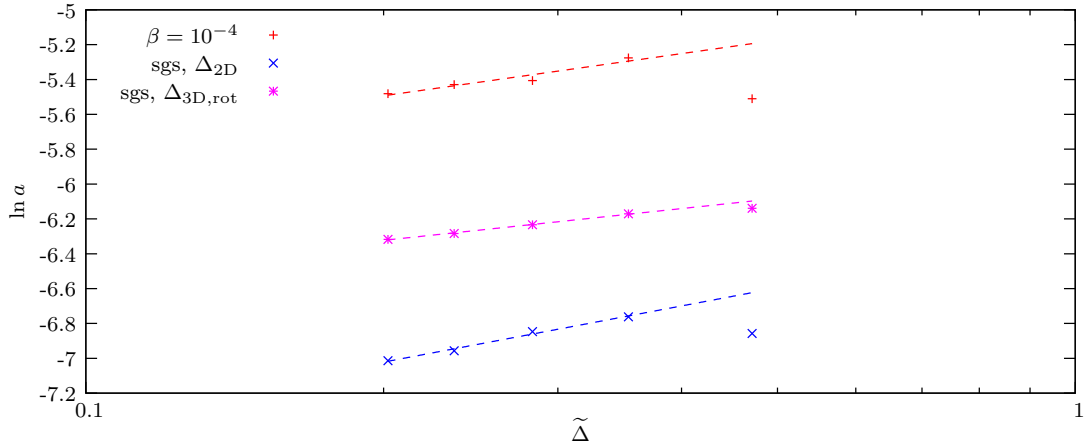


Abb. 4.25.: Zur Untersuchung der Abhängigkeit der Akkretionsrate von der Auflösung ist der Logarithmus des Koeffizienten a aus dem Fit von $\dot{M} = C a (t/t_0)^\alpha$ ($C \equiv 1 M_\odot \text{ a}^{-1}$; $s_0 \equiv 10^6 \text{ a}$) gegen $\tilde{\Delta} = (N_s \cdot N_z)^{-1/2}$ aufgetragen. Es zeigt sich auch hier ein Potenzgesetz, wobei die Exponenten (siehe (4.29) ff.) im Vergleich zur kinematischen Viskosität erheblich geringer ausfallen. Der Messwert zur größten Auflösung wurde nicht berücksichtigt (systematischer Messfehler; siehe Text).

Eine Änderung der Auflösung um den Faktor 2 würde immerhin einen Fehler in der akkretierten Masse von ca. 19%, 27% bzw. 38% erwarten lassen, was ein nicht zu vernachlässigende Unsicherheit darstellt. Die Ursache für den Fehler ist dem Autor nicht bekannt, da insbesondere die Akkretionsrate am Innenrand eine ausgesprochen sensitive Größe ist, weshalb sie für diesen Test herangezogen wurde.

Mögliche Quellen, die in Frage kommen wären:

Numerische Viskosität: Sie ist im Verfahren schwierig zu beziffern, besitzt aber eine Auflösungsabhängigkeit. Diese sollte jedoch nicht von dieser Größenordnung sein und ist an einige Simulationsparameter gekoppelt (Limiter-Funktionen, Rekonstruktion, etc.)

Systematischer Verfahrensfehler: Unwahrscheinlich, da `fosite` insbesondere mit der β -Parametrisierung anhand einer Vielzahl von Testproblemen erprobt ist.

Innenrand: Insbesondere der innere Rand kann eine maßgebliche Abhängigkeit von der Auflösung aufweisen, da durch die Variation der Auflösung der Ort der Geisterzellen beeinflusst wird. Dies hat Rückwirkung auf die gestellte Randbedingung (nicht nur der Rotationsgeschwindigkeit) und könnte somit ebenfalls den Ausfluss beeinflussen. Mit anderen Worten: Die Simulationen unterscheiden sich durch die unterschiedlichen Auflösungen bezüglich der gestellten Randbedingung.

Abschließend ist es nicht möglich die Frage endgültig zu beantworten, da eine Vielzahl an Quellen bzw. Mechanismen denkbar sind. Jedoch kann resümiert werden, dass das

SGS-Verfahren zu keiner zusätzlichen Auflösungsabhängigkeit neigt, was als positives Ergebnis zu werten ist.

4.3. Flaches Modell

Das vorherige Modell zeigt auf, dass die Rotationsgeschwindigkeit den entscheidenden Part bei der Generierung der Wirbelviskosität spielt und insbesondere der Filter $\Delta_{3D,rot}$ zu interessanten Resultaten führt, der die dritte, nicht-aufgelöste Raumrichtung implizit involviert. Darum liegt es nahe, durch einen zweiten Modellansatz einer flachen Scheibe mit Berücksichtigung der azimuthalen Koordinate diese maßgebliche Raumrichtung eingehend zu untersuchen. Um weiterhin zweidimensionale Simulationen bewerkstelligen zu können, wird daher das Modell einer geometrisch dünnen Scheibe mit hydrostatischem Gleichgewicht in z -Richtung verwendet, wie es in der Literatur allgemein üblich ist³³ (beispielsweise Kato et al., 2008, Kap. 7). Die Geschwindigkeitskomponente v_z verschwindet und v_s und v_ϕ besitzen keine Abhängigkeit mehr von der vertikalen Richtung (gleiches wird für die kinematische Viskosität gefordert).

Für diese sog. Ein-Zonen Näherung werden in z -Richtung integrierte Größen eingeführt, die im Fall der Massendichte zur Flächendichte

$$\Sigma(t, s, \phi) = \int \varrho(t, s, z, \phi) dz, \quad (4.32)$$

zum vertikal integrierten Druck

$$P(t, s, \phi) = \int p(t, s, z, \phi) dz \quad (4.33)$$

und zum vertikal integrierten turbulenten Druck

$$P_{sgs}(t, s, \phi) = \int p_{sgs}(t, s, z, \phi) dz \quad (4.34)$$

führen. Völlig analog gilt dies auch für die Energiedichten und führt automatisch bei den Quelltermen der turbulenten Energie, vertreten durch den Produktionsterm \mathcal{P} , Diffusionsterm \mathcal{D} und Dissipationsterm $\varrho\epsilon$ (besser: $\Sigma\epsilon$), ebenfalls zu integrierten Größen, wenn die beschriebene Ersetzung erfolgt. Mit dieser Ersetzungsregel wird die Gestalt der NSG erhalten und das in Abschn. 3.3.1 vorgestellte Physikmodul `physics_euler2Dsgs` (bzw. `physics_euler2D` für Vergleichsrechnungen) kann direkt zur Beschreibung dieses Modells verwendet werden.

³³Oft wird zusätzlich Rotationssymmetrie, wie im Modell aus Abschn. 4.1 angenommen, so dass es sich insgesamt um eindimensionale Modelle handelt. Auf diese weitere Annahme wird hier verzichtet.

Hierbei kann sich zeigen inwieweit nicht-achsensymmetrische Störungen auftreten und welche Auswirkung sie auf die Simulation haben. Die gewonnenen Ergebnisse können anschließend auf Konsistenz mit dem rotationssymmetrischen Modell geprüft werden.

Um dies zu ermöglichen, sollen die folgenden Simulationen – soweit möglich – mit dem vorherigen Modell bezüglich der Rahmenbedingungen identisch sein, was Anforderungen an die Rand- und Anfangswerte stellt.

4.3.1. Geometrie und Randbedingungen

Die Berechnungen werden auf einem polaren Gitter

$$(s, \phi) \equiv (\xi, \eta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \text{atan2}(y, x) + 2\pi \right) \quad (4.35)$$

$$(h_s, h_\phi) \equiv (h_\xi, h_\eta) = (1, s) \quad (4.36)$$

durchgeführt, wobei atan2 durch (D.1) definiert ist und h_s, h_ϕ die Skalenfaktoren (siehe rotationssymmetrisches Modell) der radialen und azimuthalen Koordinaten sind. Die Winkelkoordinate wird mit $\phi_{\min} = 0, \phi_{\max} = 2\pi$ so gewählt, dass eine komplette Kreisscheibe entsteht und die betreffenden Ränder aneinander stoßen. Es können hierdurch periodische Randbedingungen gewählt werden.³⁴ Dies ist wohldefiniert und numerisch völlig unproblematisch.

Die Randbedingungen des inneren Randes bei s_{\min} können wie im vorherigen Modell gewählt werden, da sich keine Unterschiede ergeben, wenn davon abgesehen wird, dass eine Variable weniger existiert (3. Geschwindigkeitskomponente). Dies hat sich in Tests als sinnvolle Bedingung erwiesen (siehe auch Abschn. 4.1.2).

Für den Außenrand können zwar ebenfalls die (zweidimensionalen) Farfield-Bedingungen (Abschn. 3.3.1) gewählt werden, es stellt sich jedoch bei Tests heraus, dass diese Bedingung problematischer ist als im rotationssymmetrischen Fall. In den folgenden Abschnitten wird sich zeigen, dass durch Selbstgravitation größere Massenverdichtungen entstehen. Diese können am Außenrand zu einem massiven Masseneinfluss führen. Ebenfalls kommt es durch das SGS-Verfahren unmittelbar am Außenrand zu einer erhöhten kinematischen Viskosität, die durch die Rotationsgeschwindigkeit in den Geisterzellen bedingt ist. Um diese Probleme zu vermeiden, wird der Rand – wie im vorherigen Kapitel bereits diskutiert – weiter nach außen verlegt und zuvor die Massendichte Σ in den Anfangsbedingungen exponentiell auf einen Hintergrundwert Σ_∞ abgesenkt. Die Farfield-Bedingungen führen mit dieser Vorgehensweise zu erheblich besseren Resultaten, was nicht verblüfft, da sie eine ungestörte Lösung beschreiben und somit weniger im Konflikt mit den tatsächlichen Verhältnissen am Rand stehen. Durch die zusätzlich anfallenden Gitterzellen entsteht jedoch ein gesteigerter Rechenaufwand.

³⁴Wie allgemein üblich werden die Daten des an den Rand angrenzenden Zellen in die Geisterzellen des anderen Randes kopiert und umgekehrt.

Da die Rotationsgeschwindigkeit betragsmäßig meist erheblich größer ist als die radiale Geschwindigkeitskomponente, ist sie der limitierende Faktor bei der maximal zulässigen Zeitschrittweite durch die CFL-Bedingung.³⁵ Daher ist bei diesem Modell der Innenradius mit $s_{\min} = 25 \cdot 10^4 R_S$ fünfmal so groß gewählt worden, als es im rotationssymmetrischen Modell der Fall ist, was zu einem Ersparnis des Rechenaufwandes um rund eine Größenordnung führt.³⁶

4.3.2. Anfangsdaten

Die initiale Massenverteilung wird bis zum Radius s_{\max} konsistent zu (4.4) gewählt, so dass für die Flächendichte die bereits bekannte Abhängigkeit besteht

$$\Sigma(s) = \Sigma_{\infty} + \begin{cases} \Sigma_0 s^{-7/8} & s \leq s_{\max} \\ \Sigma_0 s^{-7/8} e^{-0.5 \left(\frac{s-s_{\max}}{s_{\min}} \right)^2} & s > s_{\max}, \end{cases} \quad (4.37)$$

wobei der *natürliche* Rand der Scheibe bei s_{\max} durch einen exponentiellen Abfall in der Massendichte realisiert wird. Die Halbwertsbreite des Abfalls ist relativ beliebig, jedoch sollte die Flächendichte weit vor dem Rand des Rechengebietes auf Σ_{∞} abgefallen sein, um die oben geschilderten Effekte zu vermeiden. Dieser Radius wird identisch mit dem rotationssymmetrischen Modell gewählt ($s_{\max} = 3 \cdot 10^6 R_S$) und der Rand des Rechengebietes zu $s_{\text{RG}} = 2 \cdot s_{\max}$ gesetzt. Dies stellt sicher, dass die Flächendichte auf die konstante Hintergrundflächendichte $\Sigma_{\infty} = 10^{-10} \text{ kg m}^{-2}$ abfällt. Diese ist so gering gewählt, dass numerisch geringe Auswirkungen zu erwarten sind. Σ_0 wird – wie auch zuvor ϱ_0 – durch numerische Integration

$$\Sigma_0^{-1} = \frac{1}{M_{\text{disk}}} \int \Sigma(s) \Sigma_0^{-1} dA \quad (4.38)$$

bestimmt, wobei die gewünschte Scheibenmasse M_{disk} als Parameter in das Modell eingeht. Um Instabilitäten durch kleine Störungen zu ermöglichen, wird die Flächendichte mit einem weißen Rauschen $\pm 10\%$ überlagert. Es wird sich zeigen, dass diese Störung keine Auswirkung hat.

Da in diesem Modell die z -Struktur der Akkretionsscheibe nicht explizit berücksichtigt wird, kann ein sehr geringer Druck (Temperatur) gewählt werden, was implizit einer sehr dünnen Scheibe entspricht. Über die Bedingung einer konstanten Temperatur soll der Druck

³⁵Bei Akkretionsscheiben kann von einer Überschallrotation ($\mathfrak{Ma} \gg 1$) ausgegangen werden, so dass bei *dieser* Abschätzung die Schallgeschwindigkeit im CFL-Zeitschritt vernachlässigt werden kann.

³⁶Da in der Nähe des inneren Randes $v_{\phi} \propto s^{-1/2}$ erwartet werden kann und zusätzlich die räumliche Ausdehnung der Zellen $\Delta_{\phi} = s \Delta\phi$ abnimmt $\Rightarrow \Delta t < C_{\text{CFL}} \frac{\Delta_{\phi}}{v_{\phi}} \propto s^{3/2}$.

$$P = \eta T \Sigma \frac{R_G}{\mu_m} \quad (4.39)$$

vorgegeben werden.³⁷ Die Temperatur wird zu $T = 40$ K gewählt, was eine sehr kalte, aber durchaus realistische, Scheibe eines AGK darstellt, die im selbstgravitierenden Fall Toomre-instabil ist (Toomre, 1964). R_G ist die allgemeine Gaskonstante und $\mu_m = 0,602 \text{ g mol}^{-1}$ das mittlere Molekulargewicht, welches für eine solare Häufigkeit gilt (Kippenhahn & Weigert, 1990, S. 102). Diese Bedingung an den Druck und damit auch an die Temperatur stellt einen markanten Unterschied zwischen diesem flachen und dem rotationssymmetrischen Modell aus Abschn. 4.1 dar. Wobei die Temperatur bei Abwesenheit von – durch sie bedingte – Instabilitäten meist keinen nennenswerten Einfluss auf die Dynamik der Akkretionsscheibe hat, weshalb in der Literatur vereinfachend oft ganz ohne Berücksichtigung der Energiegleichung gerechnet wird.

Das ursprünglich für aus Sternen bestehenden Scheiben abgeleitete Kriterium für Stabilität kann auch auf dünne, inviskose Gasscheiben übertragen werden (Goldreich & Lynden-Bell, 1965)

$$Q \equiv \frac{c_s^2 \Omega}{\pi G \Sigma} > 1 \quad \text{für Gas,} \quad (4.40)$$

wobei Q der bekannte Toomre-Parameter ist. Die Selbstgravitation wirkt als destabilisierend, die Gastemperatur und Scherkräfte als stabilisierend. Bei der genannten Temperatur ist das Kriterium stark verletzt, so dass die Scheibe im *selbstgravitierenden* Fall instabil ist und in nicht-achsensymmetrischen Störungen münden muss.³⁸ Dies ist – im Gegensatz zum rotationssymmetrischen Modell – eine direkte Möglichkeit, starke Turbulenz zu generieren und deren Einfluss auf das Verfahren zu prüfen. Die Arbeiten von Britsch (2006); Duschl & Britsch (2006) haben sich intensiv mit der Rolle dieser Instabilität in Bezug auf β -Scheiben befasst. Insgesamt wird sich durch die viskose Heizung und die fehlende Kühlung eine erheblich größere Temperatur einstellen, die nicht repräsentativ ist und dem Fragmentationsprozess entgegenwirkt. Kommt es dennoch zur Fragmentation, so kann geschlussfolgert werden, dass dies ebenfalls (im größeren Umfang) mit Kühlung der Fall wäre, so dass auch hier eine konservative Abschätzung für die Effekte des SGS-Verfahrens gefunden werden kann.

Der initiale turbulente Druck wird wie im vorherigen Modell gewählt: $P_{\text{sgs}} = \eta_0 P$ mit ebenfalls $\eta_0 = 10^{-12}$.

³⁷Die Konstante η tritt durch die Formulierung mit den integrierten Größen Σ und P auf und ist von der Schichtung der Scheibe abhängig, jedoch für alle realistischen Szenarien sehr nahe eins (Kato et al., 2008, Glg. 7.44). Es wird $\eta = 1$ gesetzt.

³⁸Dies könnte, bedingt durch die Symmetrie, beim vorherigen Modell (Abschn. 4.1) nicht erreicht werden. Ebenfalls wäre eine zu dünne Scheibe in der rotationssymmetrischen Simulation numerisch schwierig zu behandeln.

Aus den numerisch bestimmten gravitativen Kräften in radialer Richtung $\mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_s$ wird über das Fliehkraftgleichgewicht die Rotationsgeschwindigkeit festgelegt

$$v_\phi = \sqrt{\max(0, -s \mathbf{f} \cdot \hat{\mathbf{e}}_s)}, \quad (4.41)$$

womit Druckterme vernachlässigt wurden, was durch die geringe Temperatur gerechtfertigt ist und sich als brauchbare Anfangsbedingung erweist. Die verbleibende radiale Geschwindigkeit wird zu Null gesetzt $v_s = 0$.

4.3.3. fFSG- & fNSG-Modell

Es wird, wie auch bei den rotationssymmetrischen Modellen, eine selbstgravitierende (fFSG) und eine nicht-selbstgravitierende (fNSG) Akkretionsscheibe für die Analyse herangezogen. Sie haben die gleichen Parameter wie die aus Abschn. 4.1:

fFSG-Modell: Scheibenmasse $M_{\text{disk}} = 10^7 M_\odot$, sowie numerischer Berücksichtigung des Scheibenpotentials durch das Modul `poisson_spectral`, welches im Rahmen der Masterarbeit von Jung (2012) entwickelt wurde und für flache Geometrien ausgelegt ist. Es hat im Rahmen der genannten Arbeit zahlreiche Tests durchlaufen, die die Funktionsfähigkeit unter Beweis gestellt haben.

fNSG-Modell: Scheibenmasse $M_{\text{disk}} = 10^5 M_\odot$ (ohne Selbstgravitation)

Die Zentralmasse ist in beiden Modellen identisch und entspricht den vorherigen Simulationen ($M_Z = 10^6 M_\odot$). Wird die gleiche Betrachtung wie im vorherigen Modell bezüglich der (inneren) Scheibenmasse im Bereich bis s_{min} durchgeführt (4.18), so ist diese zwangsläufig fünfmal so massereich wie zuvor

$$M_{\text{disk}}(s_{\text{min}}) \approx \frac{s_{\text{min}}}{s_{\text{max}}} M_{\text{disk}} \leq \frac{1}{12} M_{\text{disk}}, \quad (4.42)$$

was zu folgender (hypothetischen) Masse des jeweiligen schwarzen Loches führt:

$$M_{\text{SL}} \gtrsim 9,92 \cdot 10^5 M_\odot \quad (\text{fNSG}) \quad (4.43)$$

$$M_{\text{SL}} \gtrsim 1,67 \cdot 10^5 M_\odot \quad (\text{fFSG}) \quad (4.44)$$

Damit muss im Fall der selbstgravitierenden Scheibe der größere Anteil der „Zentral“-Masse M_Z , einer inneren Scheibe zugerechnet werden und nicht dem eigentlichen Kern. Somit wird das Scheibenpotential dieser inneren Scheibe indirekt mit der Monopolnäherung repräsentiert, was in der Literatur eine oft durchgeführte und brauchbare Näherung für die *gesamte* Scheibe darstellt.

Die Gitterauflösung wird (beim fNSG-Modell) zu $N_s \times N_\phi = 250 \times 256$ gewählt, was einerseits die angesprochene Vektorlänge (256) der NEC SX9 gut ausfüllt,³⁹ auf der anderen Seite auch einen vertretbaren Aufwand, aber auch eine akzeptable Feinheit der Lösung, gewährleistet.⁴⁰

Bei den SGS-Verfahren kommt der zweidimensionale Filter Δ_{2D} und der dreidimensionale, in der sog. flachen Variante $\Delta_{3D, \text{flach}}$, zum Einsatz (siehe Abschn.3.2.1). Für die flache Version wird noch die Scheibenhöhe benötigt. Diese wird zu $h(s) = s/10$ für die jeweils gesamte Dauer aller Simulationen angenommen.

Alle Simulationsparameter sind in Tab. D.1 zusammengefasst.

4.3.4. Resultate

Es soll bei dem nicht-selbstgravierenden Modell (fNSG) begonnen werden, welches mit Ähnlichkeiten wie auch einer Vielzahl an Unterschieden zum rotationssymmetrischen Modell aufwarten kann. Bei diesem Modell war es trotz des gesteigerten Rechenaufwandes möglich, in gleiche Zeitbereiche vorzudringen. Es wird jedoch auf zwei der vier Vergleichssimulationen, die mit geringstem β -Parameter, verzichtet.

Anschließend werden wir uns dem durch das Scheibenpotential dominierten Modell zuwenden (fFSG), welches Toomre-instabil ist. Der Rechenaufwand in diesem Modell steigert sich durch den Poisson-Löser noch einmal beachtlich, so dass bereits aus dieser Perspektive heraus lange Zeitskalen schwierig zu erreichen sind. Bedingt durch die auftretenden Instabilitäten (hierzu später mehr) und der damit einhergehenden Druckerhöhung wird dieser Sachverhalt weiter verschärft. Der betreffende Abschnitt wird nur eine dynamische Entwicklung der Scheibe, insbesondere der Instabilität, aufzeigen können; eine viskose Zeitskala lässt sich nicht realisieren.

fNSG-Modell

Die in Abb. 4.26 gezeigte (Massen-)Akkretionsrate \dot{M} ist **anfänglich** mit dem rotationssymmetrischen Pendant (Abb. 4.7) durchaus ähnlich, obgleich sich zur ebenfalls eingetragenen Akkretionsrate des rotationssymmetrischen Modells in Bezug auf die Magnitude ein systematisch niedrigerer Wert ergibt. Dies relativiert sich, wenn beachtet

³⁹Die Anzahl der Zellen im Rechengebiet + die Geisterzellen an beiden Rändern, sollte für optimale Geschwindigkeit einem ganzzahligen Vielfachen der Vektorlänge entsprechen (oder knapp darunter) liegen.

⁴⁰Der Poisson-Löser (`poisson_spectral` Modul) ist bis dato nicht auf dem Vektorrechner lauffähig, weshalb auf eine herkömmliche Architektur gewechselt werden muss, die dementsprechend keine Anforderung an die Vektorlänge stellt. Um die schnelle Fourier-Transformation, dem das Verfahren zu Grunde liegt, optimal nutzen zu können, wird die minimal abweichende Auflösung $N_s \times N_\phi = 256 \times 256$ für das fNSG-Modell verwendet.

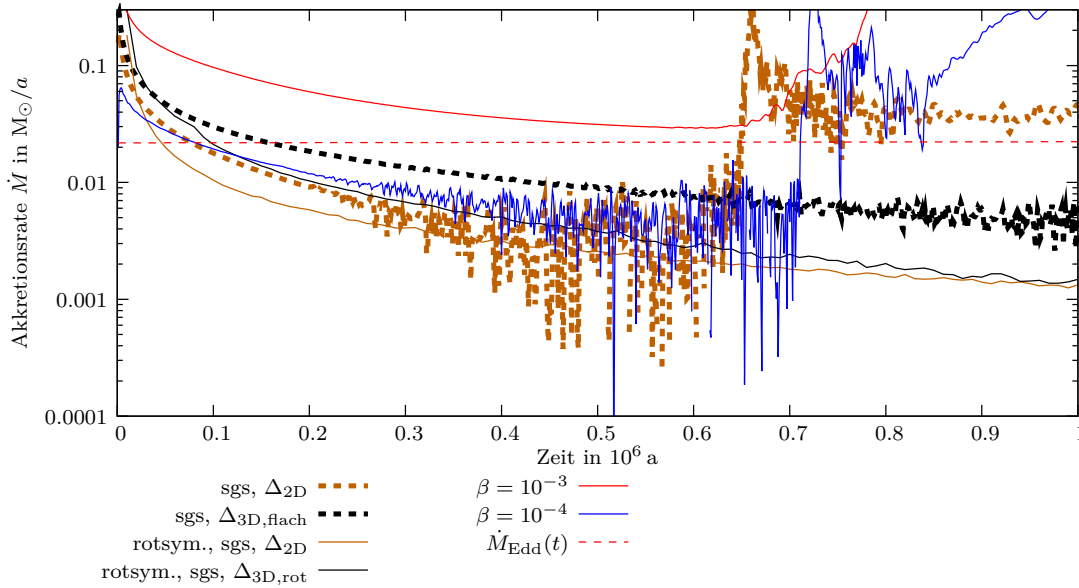


Abb. 4.26.: Die (Massen-)Akkretionsrate \dot{M} des nicht-selbstgravitierenden, flachen Modells ist über die Zeit aufgetragen. Es zeigt zu Beginn Ähnlichkeiten zum rotationssymmetrischen Pendant (Abb. 4.7). Nicht nur die absolute Magnitude, sondern auch die relative Lage der Akkretionsraten in Bezug auf die Vergleichsimulationen unterstreicht dieses Bild. Zu späteren Zeiten zeigen sich massive Störungen, die sich als nicht-achsensymmetrische Instabilitäten herausstellen.

wird, dass es sich um zwei Modelle mit unterschiedlichen Annahmen bezügl. der Symmetrie, unterschiedlicher Geometrie und einem abweichenden Druckgradienten handelt. In Anbetracht dieser Differenzen kann durchaus von einer Entsprechung – bezügl. der Akkretionsraten – der beiden Modelle gesprochen werden. Die weiteren Merkmale müssen im Folgenden untersucht werden.

Allerdings zeigt sich deutlich eine in der Amplitude ansteigende Variation der Akkretionsrate, die zu allererst auf ein numerisches Problem hinzudeuten scheint. Auffällig ist, dass die Störung bei den geringsten kinematischen Viskositäten zuerst beginnt (SGS mit Δ_{2D} und $\beta = 10^{-4}$) und sehr massiv ausfällt. Die Störung tritt beim SGS-Verfahren mit $\Delta_{3D,flach}$ zeitlich später und schwächer in Erscheinung und lässt sich bei $\beta = 10^{-3}$ in der Akkretionsrate kaum feststellen, obwohl die Betrachtung der Dichte ebenfalls diese Instabilität aufweist. Dieser Sachverhalt kann sicherlich damit erklärt werden, dass Instabilitäten – egal ob physikalischer oder numerischer Natur – durch dissipative Mechanismen i. A. gedämpft werden. Ein Blick auf die Abb. 4.28 zeigt jedoch deutlich eine nicht-achsensymmetrische Instabilität, die in der genannten Abbildung anhand des SGS-Verfahrens aufgezeigt wird, sich nach demselben Schema jedoch ebenfalls in der Scheibe mit $\beta = 10^{-4}$ entwickelt. Ab ca. $t = 3 \cdot 10^5$ a macht sich eine leichte Exzentrizität (Unwucht) bemerkbar, was mit der ersten Variation der Akkretionsraten koinzidiert. Dieser Zustand bleibt jedoch noch relativ lange (bis ca. $6,5 \cdot 10^5$ a) quasi stabil, bis sich, wie in

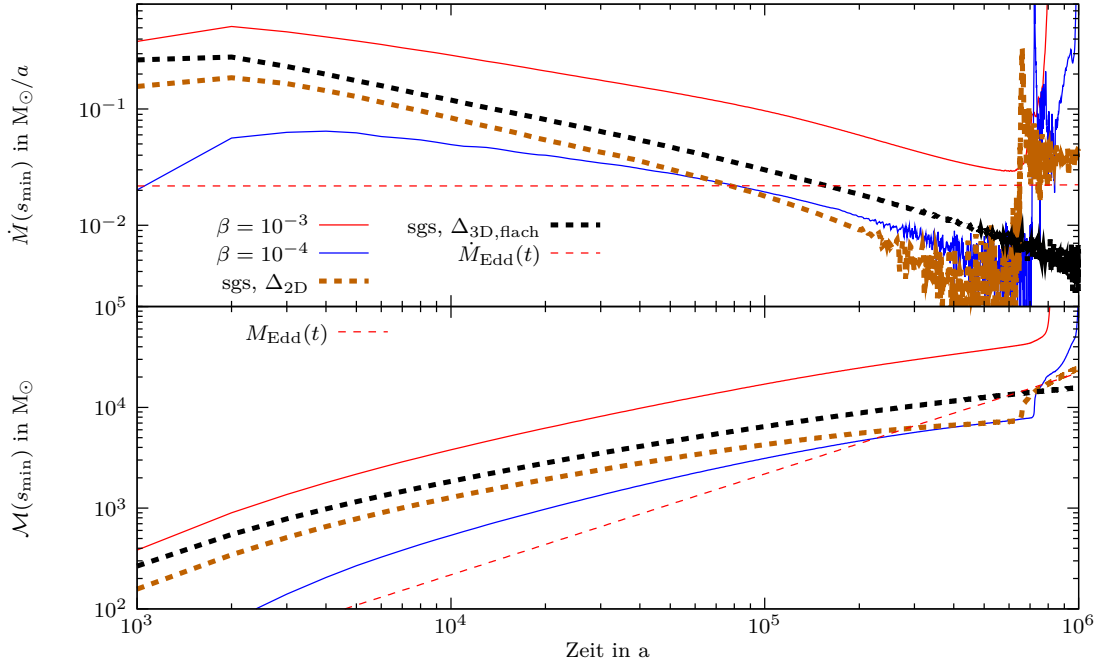


Abb. 4.27.: Im doppelt logarithmischen Diagramm sind die Massenakkretionsrate und die akkretierte Masse eingetragen. In der akkretierten Masse ist der große Anstieg markant, der mit dem Übergang in einen chaotischen Zustand zusammenfällt. Es kommt zu einer großskaligen Umverteilung des Drehimpulses, so dass Masse direkt durch große Wirbel in den inneren Bereich transportiert wird (vgl. Abb. 4.28).

der genannten Abb. sehr gut ersichtlich, die gesamte Scheibe stark durchmischt, so dass hier in der Tat von einer Large Eddy Simulation gesprochen werden kann. Man beachte, dass bis zum Umschlagen in den turbulenten Zustand der äußere Rand der Scheibe noch nicht den des Rechengebietes ($2 \cdot s_{\text{max}}$) erreicht hat; dort also noch nahezu Σ_{∞} vorliegt (im Plot weiß dargestellt).

Dies geschieht, wie bereits angesprochen, ebenfalls bei der $\beta = 10^{-4}$ und, wenn auch zu einem späteren Zeitpunkt, bei der Scheibe mit $\beta = 10^{-3}$. Dies fällt bei der zuletzt genannten Simulation, bedingt durch die schnellere Entwicklungszeitskala, wie auch durch das spätere Auftreten der Instabilität, mit einem massiven Masseneinfluss über den Außenrand zusammen, so dass es Unterschiede zu den zuvor genannten Simulationen gibt. Es kann daher daraus geschlossen werden, dass es keine Eigenheit der LES ist, sondern eine universell auftretende Instabilität, die (möglicherweise) von den viskosen Kräften gedämpft wird. Dies hat ebenfalls signifikante Auswirkungen auf die kinematische Viskosität des SGS-Verfahrens mit der moderaten Filterbreite (Δ_{2D}), wie es in Abb. 4.29 ersichtlich ist. Jedoch ist dieser Anstieg nur temporär und fällt nach Abschluss des Übergangs der Strömung in den chaotischen Zustand rasch wieder auf den ursprünglichen Wert ab, so dass die Rotationsgeschwindigkeit (bzw. deren Gradient) die

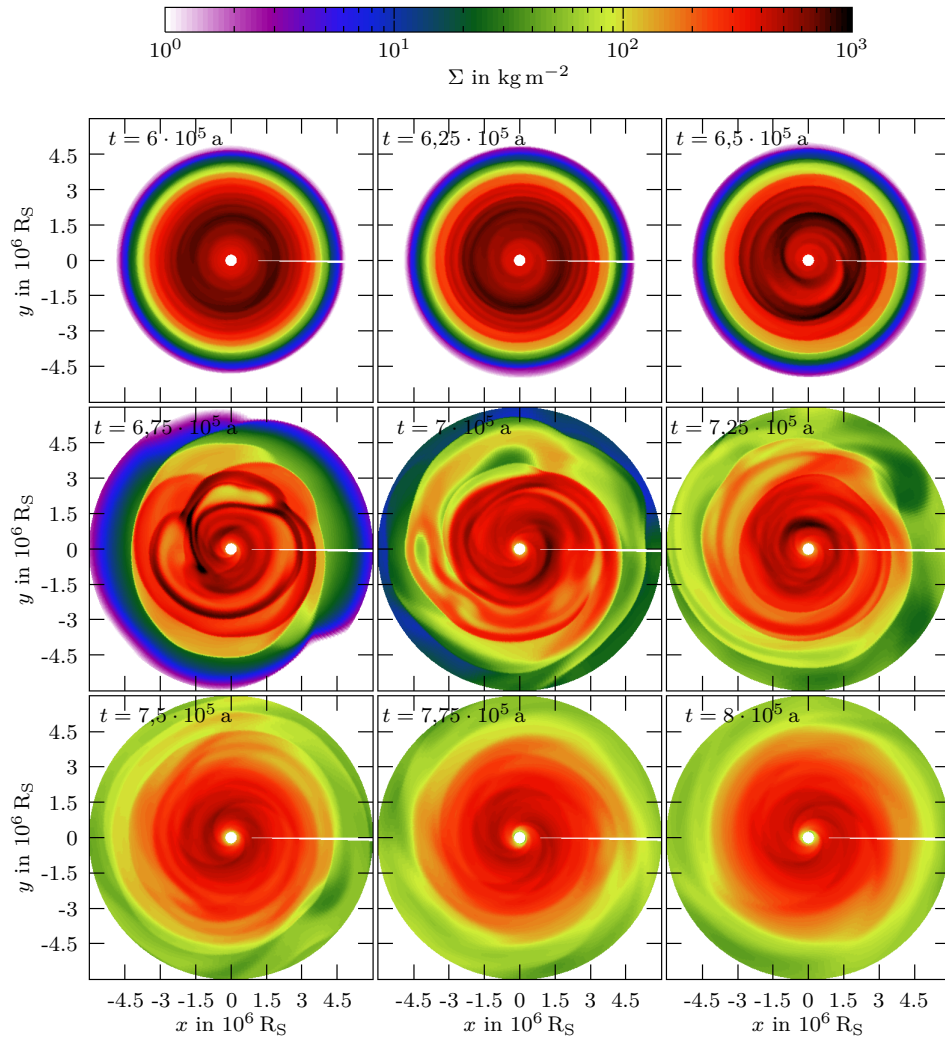


Abb. 4.28.: Es ist die Flächendichte Σ der nicht-selbstgravitierenden Scheibe (fNSG) mit $\beta = 10^{-4}$ in einer zeitlich äquidistanten Abfolge von $6 \cdot 10^5 \text{ a}$ bis $8 \cdot 10^5 \text{ a}$ dargestellt. Es zeigt sich eine anfangs relativ geringe Asymmetrie, die sich in relativ kurzer Zeit in eine turbulente Bewegung verwandelt und maßgeblich das globale Verhalten der Scheibe ändert. Zuvor ist die Untergrunddichte Σ_∞ jenseits des natürlichen Randes ($s > s_{\text{max}}$) relativ ungestört.

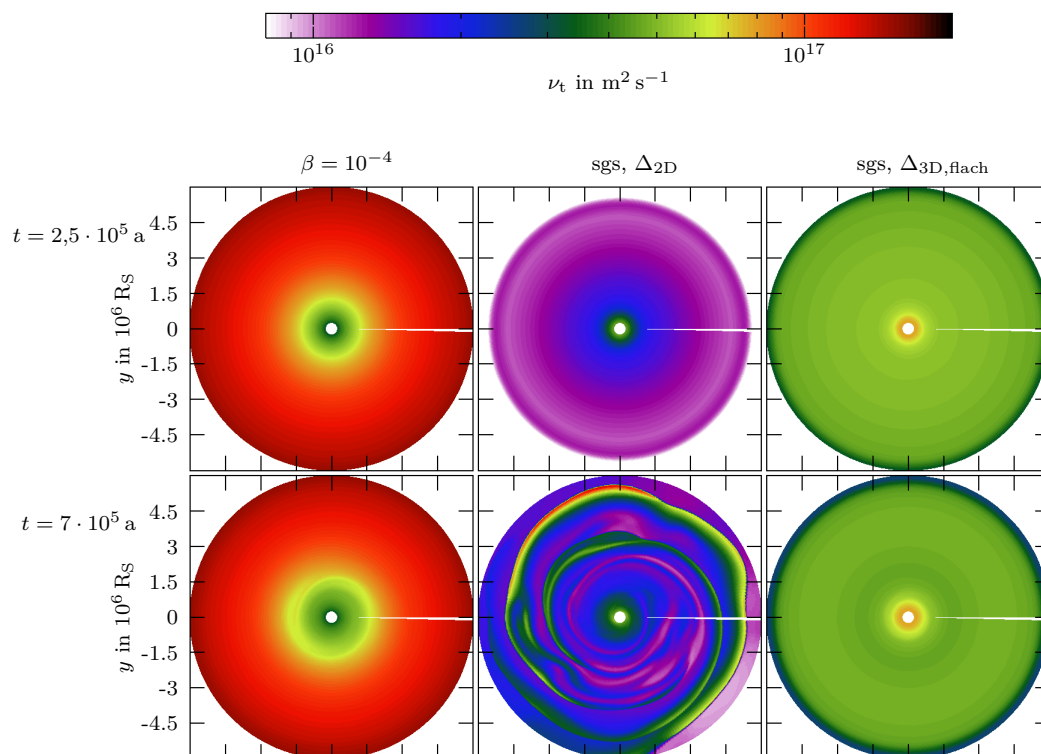


Abb. 4.29.: Die turbulente Viskosität dreier Simulationen (Spalten von links nach rechts: $\beta = 10^{-4}$, SGS mit Δ_{2D} und $\Delta_{3D,flach}$) ist zu zwei Zeitpunkten (Zeilen: $t = 2,5 \cdot 10^5$ a und $t = 7 \cdot 10^5$ a) dargestellt. Es ist zeitlich vor und während des Auftretens der Instabilität bei der LES mit Δ_{2D} . Es tritt in der genannten Simulation eine eindeutig gesteigerte Wirbelviskosität zu Tage, die nun ebenfalls keine Achsensymmetrie mehr aufweist (für Vergleich der Magnituden: siehe Abb. 4.30).

Magnitude der Wirbelviskosität maßgeblich determiniert. Die Auswirkungen auf die β -Parametrisierung sind marginal, da es nur zu einer kleinen Störung der Rotationsgeschwindigkeit kommt und andere Effekte bei diesem Modell nicht auf die kinematische Viskosität zurückkoppeln können (Abb. 4.30).

Bei dem SGS-Verfahren mit der dreidimensionalen Filterbreite $\Delta_{3D,flach}$ ist dieses Verhalten nur sehr schwach ausgeprägt und tritt zu einem späten Zeitpunkt auf. Es scheint, als ob die Instabilität effizient gedämpft werden würde. Es zeigt sich dementsprechend auch kein signifikanter Anstieg in der kinematischen Viskosität, da die Zunahme der Wirbeldichte marginal ist.

Diese Instabilität kann die stochastischen Änderungen in den Akkretionsraten der genannten Abbildungen (4.26 und 4.27) erklären, jedoch ist sie nicht die Folge einer gesteigerten kinematischen Viskosität. Weder die Variabilität wäre damit erklärbar, noch der überproportionale Anstieg der Akkretionsrate, der auch für die β -Parametrisierung gilt, welche keine nennenswerte Änderung in der Zähigkeit zu verbuchen hat. Vielmehr

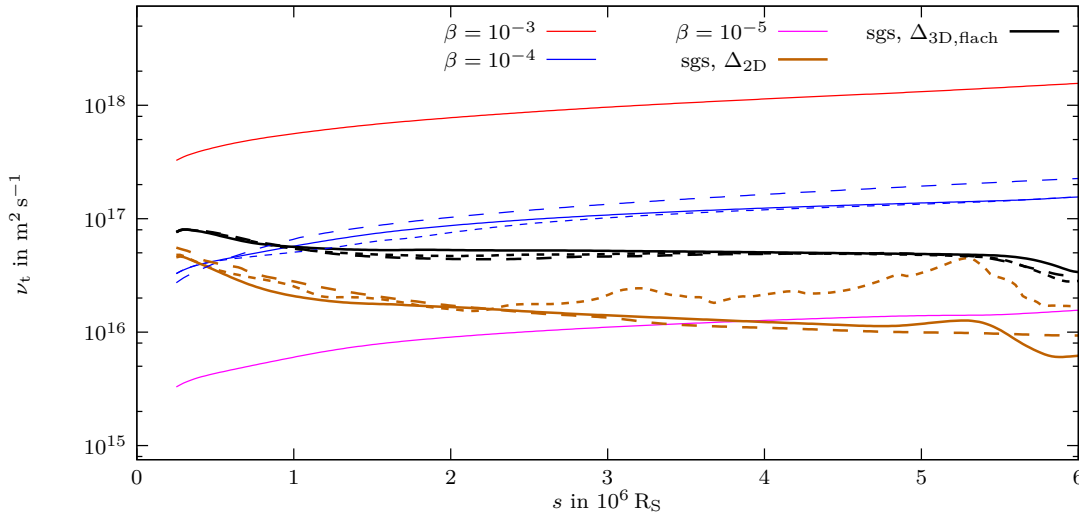


Abb. 4.30.: Es ist die azimuthal gemittelte Viskosität des fNSG-Modells für $t = 2,5 \cdot 10^5$ a (durchgezogene Linie) dargestellt. Zum Vergleich sind zusätzlich für $\beta = 10^{-4}$ und die LES für die Zeitpunkte $t = 7 \cdot 10^5$ a (kurz gestrichelt), wie auch 10^6 a (lang gestrichelt) eingetragen. Es zeigt sich, dass die Viskosität bei der moderaten Filterbreite Δ_{2D} während des Umschlagens in den chaotischen Zustand signifikant ansteigt und teilweise sogar die LES mit $\Delta_{3D,flach}$ erreicht. Zu späteren Zeiten ist die Zähigkeit bereits wieder auf ihren Ursprungswert abgesunken – die turbulente Bewegung ist abgeklungen.

wird durch die großen Wirbel direkt Material, sozusagen stochastisch, in die Zentralregion und damit über den inneren Rand „geschoben“, was die enorme Variabilität der Akkretionsrate erklärt und eine Eigenschaft von Turbulenz ist. Fraglich ist dabei, ob die großskaligen und energiereichen Wirbel als Konsequenz des zweidimensionalen Charakters der Simulation überrepräsentiert sind, denn wie in Abschn. 2.2.5 erläutert wurde, tritt bei zweidimensionaler Turbulenz eine inverse Energiekaskade auf, die kinetische Energie zu größeren Skalen transferiert. Somit ist es denkbar, dass bei Berücksichtigung aller drei Raumdimensionen die kinetische Energie der großen Wirbel möglicherweise effizienter in kleine Skalen fließen würde und damit die SGS-Größen mehr an Bedeutung gewinnen könnten.

Wichtig anzumerken ist hierbei, dass das Auftreten der Instabilität lange Zeit nach Simulationsstart (erste Anzeichen bei $t > 100 \cdot t_{\text{dyn}}(s_{\text{max}})$; Umschlagen bei ca. $t > 210 \cdot t_{\text{dyn}}(s_{\text{max}})$) auftritt. Es handelt sich demnach nicht um eine „schlecht“ gestellte Anfangsbedingung, insbesondere weil sich zeigt, dass das initiale 10%ige (weiße) Rauschen in der Dichteverteilung direkt verschmiert wird und keine Instabilität auslöst.

Durch u. a. die leicht spiralartige Struktur weist die Störung starke Ähnlichkeit zu der gefunden Instabilität von Speith & Kley (2003) auf, so dass es sich in diesem Fall tatsächlich um eine physikalische Instabilität und kein numerisches Artefakt handeln könnte. Eine eingehende Analyse erweist sich über diese rein phänomenologische Betrachtung

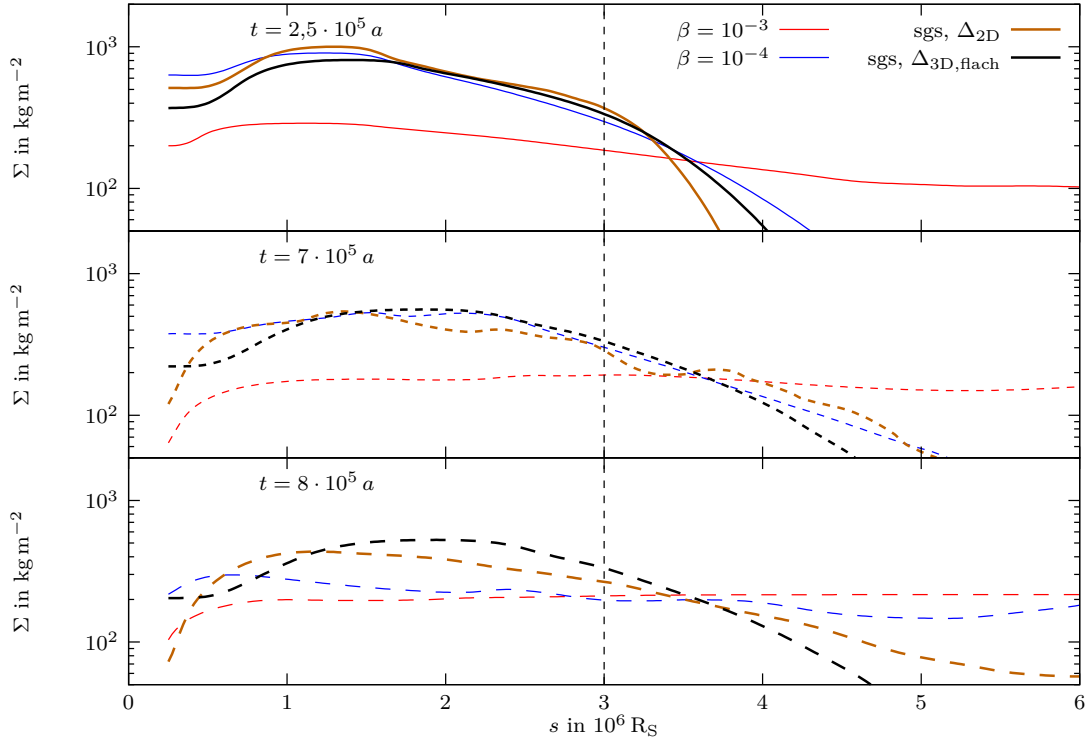


Abb. 4.31.: Zu drei Zeiten ($t = \{25, 70, 80\} \cdot 10^4 a$) ist die Flächendichte Σ des fNSG-Modells über den Radius aufgetragen. Durch die Instabilität werden nicht nur die Akkretionsraten stark erhöht, sondern es tritt ebenfalls eine teilweise relativ starke Umverteilung von Masse zu größeren Radien auf. Insgesamt zeigt sich ein relativ geringer Abfall der Flächendichte mit dem Radius.

hinweg als überaus problematisch, da das von Speith & Kley verwendete Modell auf einige Vereinfachungen fußt, die in dieser Arbeit nicht vorliegen. Die dort betrachtete Scheibe ist ein *druckloser* Ring mit einer *konstanten* kinematischen Viskosität. Daher kann die von Speith & Kley hergeleitete Dispersionsrelation, die die Störung charakterisiert, hier nicht verwendet werden, da diese proportional zur (konstanten) kinematischen Viskosität ist. Das Auftreten der Instabilität geschieht in der genannten Studie ungefähr zwischen $0,1 t_{\text{vis}}$ und $0,27 t_{\text{vis}}$, was nicht im Widerspruch mit diesen Resultaten steht, da es insbesondere so erscheint, dass die Instabilität nicht direkt bei s_{min} ausgelöst wird.

Die Flächendichte wird bei dem Umwälzungsprozess teils massiv gestört, wie es in Abb. 4.31 deutlich wird. Es tritt eine starke Abflachung – insbesondere zu größeren Radien hin – auf, so dass nicht nur ein erheblicher Anteil akkretiert, sondern ebenfalls zu großen Radien transportiert wird. Treten nennenswerte Dichten am Außenrand des Rechengebietes auf, so muss beachtet werden, dass es zu einem starken Masseneinfluss in die Scheibe kommen kann, was durch die Farfield-Bedingungen möglich ist. Dies verfälscht dann die Resultate und sollte als natürliches Ende der Simulation betrachtet werden (siehe Abschn. 4.1.4).

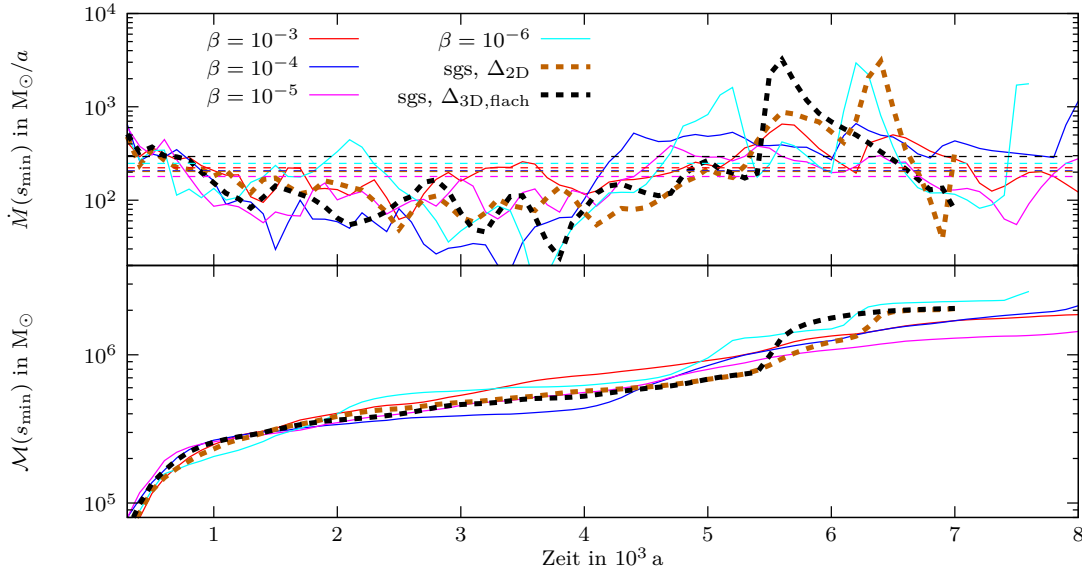


Abb. 4.32.: Die (Massen-)Akkretionsrate \dot{M} und die akkretierte Masse des selbstgravitierenden, flachen Modells (fFSG) sind über die Zeit aufgetragen. Die Akkretionsraten sind massiv erhöht und lassen sich nicht mehr mit dem rotationssymmetrischen Modell in Einklang bringen, was an dem stark chaotischen Verhalten der gesamten Scheibe durch die Toomre-Instabilität liegt. Die Akkretionsrate ist als ein stochastischer Prozess der gravitativen Wechselwirkungen von Massenansammlungen zu verstehen, die in das Zentrum gestreut werden.

fFSG-Modell

Tab. 4.3.: Gezeigt sind die Mittelwerte der Akkretionsrate $\langle \dot{M} \rangle$ im fFSG-Modell, welche **nicht** auf eine Korrelation zwischen Viskosität und Akkretionsrate hindeuten. Die Werte unterliegen relativ großen Schwankungen.

Modell	Mittelwert $\langle \dot{M} \rangle (\pm \sigma)$
fFSG, $\beta = 10^{-3}$	$(+222 \pm 17) M_{\odot}/a$
fFSG, $\beta = 10^{-4}$	$(+207 \pm 24) M_{\odot}/a$
fFSG, $\beta = 10^{-5}$	$(+179 \pm 16) M_{\odot}/a$
fFSG, $\beta = 10^{-6}$	$(+248 \pm 37) M_{\odot}/a$
fFSG, sgs Δ_{2D}	$(+202 \pm 26) M_{\odot}/a$
fFSG, sgs $\Delta_{3D,rot}$	$(+293 \pm 71) M_{\odot}/a$

Dieses Scheibenmodell ist insofern von der Arbeit u. a. von Britsch (2006) inspiriert, dass – wie eingangs beschrieben – der Druck (Temperatur) so gering gewählt wird, dass die Scheibe als Ganzes bereits zu Simulationsbeginn Toomre-Instabil ist. Damit muss sich zwangsläufig unmittelbar ein starker Fragmentationsprozess ereignen. Dieses Szenario ist in zweierlei Hinsicht problematisch: Zum Einen gibt es keine Kühlung, so

dass die Verklumpung durch den einhergehenden lokalen Druckanstieg in den einzelnen Regionen gestoppt wird, was bei einer effizienten Kühlung ggf. nicht eintreten würde. Zum Zweiten muss hinterfragt werden, wie sinnvoll eine Anfangsbedingung ist, die direkt instabil ist und nicht erst durch einen Entwicklungsprozess zur Instabilität führt, wie es beispielsweise auf natürlichem Wege beim fNSG-Modell eingetreten ist.

Demgegenüber steht das Interesse, Auftreten von Turbulenz im Kontext von LES innerhalb dieser Arbeit und die damit einhergehende Rückkopplung auf die Viskosität zu untersuchen. Auch sei festgestellt, dass mit einer effizienten Kühlung mit einer Verstärkung des Prozesses gerechnet werden müsste, da die Fragmentation im geringeren Ausmaße stabilisierende Druckkräfte erfahren würde, so dass diese quasi eine untere Abschätzung der Auswirkung der Toomre-Instabilität auf das SGS-Verfahren darstellt.

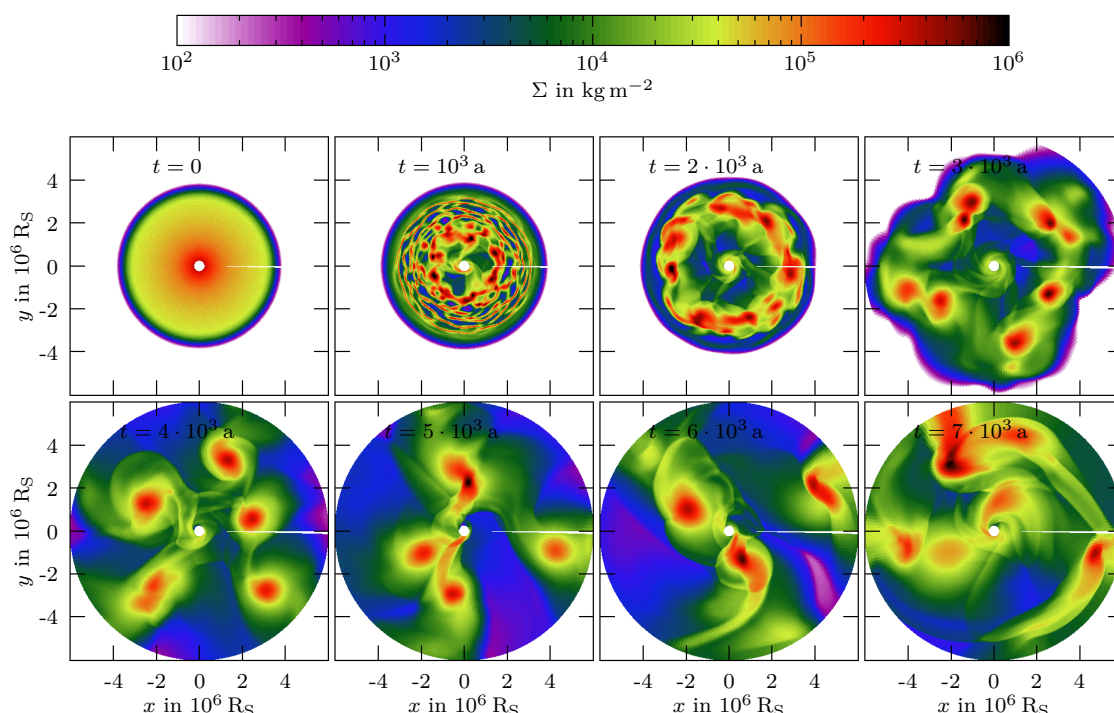


Abb. 4.33.: Die Flächendichte Σ der Toomre-instabilen Scheibe (fFSG) ist in einer zeitlich äquidistanten Abfolge von 0 bis $7 \cdot 10^3$ a dargestellt. Die Toomre-Instabilität bildet sich unmittelbar nach Simulationsbeginn aus und führt zu starken Massenkonzentrationen, die gravitativ untereinander wechselwirken (exemplarisch $\beta = 10^{-4}$; alle anderen sind nahezu identisch).

Ein erster Blick auf die Akkretionsraten in Abb. 4.32 zeigt drastisch gesteigerte Werte, die mit dem rotationssymmetrischen Pendant nicht in Einklang zu bringen sind, was durch die Dynamik, die in Abb. 4.33 anhand der Oberflächendichte aufgezeigt wird, nachvollziehbar erscheint. Es bilden sich starke lokale Überdichten aus, die untereinander gravitativ wechselwirken und damit die gesamte Akkretionsscheibe massiv stören. Dies stellt einen deutlichen Unterschied zu den bisherigen Modellen dar. Die Akkre-

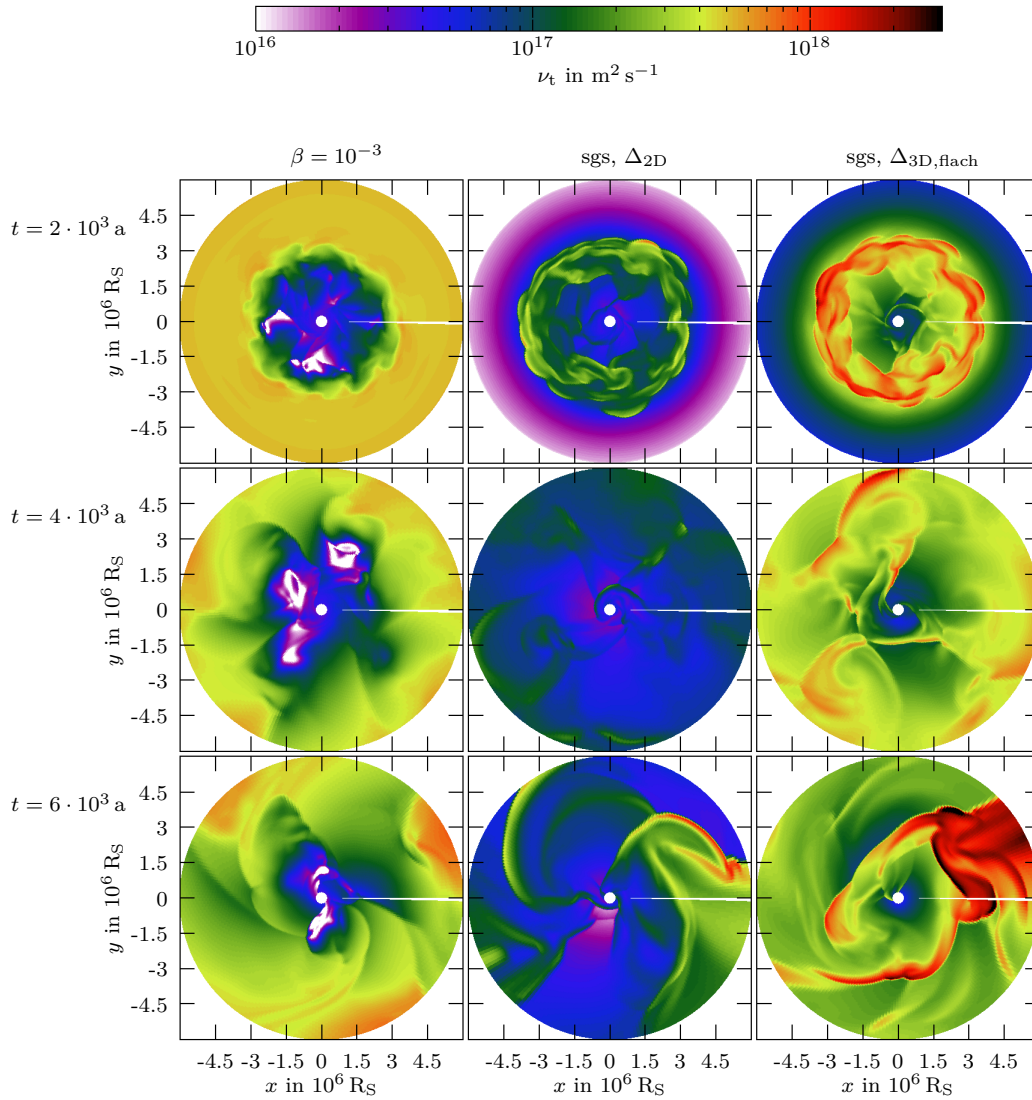


Abb. 4.34.: Für drei Simulationstypen (Spalten: $\beta = 10^{-3}$, sgs mit Δ_{2D} bzw. $\Delta_{3D,flach}$) ist die kinematische Viskosität als Farbkarte zu drei Zeiten ($\{2, 4, 6\} \cdot 10^3$ a) aufgetragen. Es zeigt sich, dass selbst die β -Parametrisierung massiv in der Viskosität gestört ist. Die SGS-Verfahren neigen zu teilweise stark erhöhten Zähigkeiten, was sich insbesondere in der ersten der drei Zeiten durch die ringförmige Region zeigt.

tionsraten zeigen keine signifikante Abhängigkeit von der turbulenten Viskosität, was durch die in Tab. 4.3 eingetragenen Mittelwerte der Akkretionsraten $\langle \dot{M} \rangle$ im Intervall 0 bis $6 \cdot 10^3$ a belegt werden soll. Durch die beschriebene gravitative Wechselwirkung der Massendichten untereinander kommt es teilweise zu starken Streuprozessen. Dabei wird stochastisch Material über den inneren Rand bewegt. Dies mündet in der beobachteten chaotischen Variabilität der Akkretionsrate und wird offensichtlich allein durch diesen Prozess dominiert, so dass es letztlich keiner (zusätzlichen) turbulenten Viskosität, weder

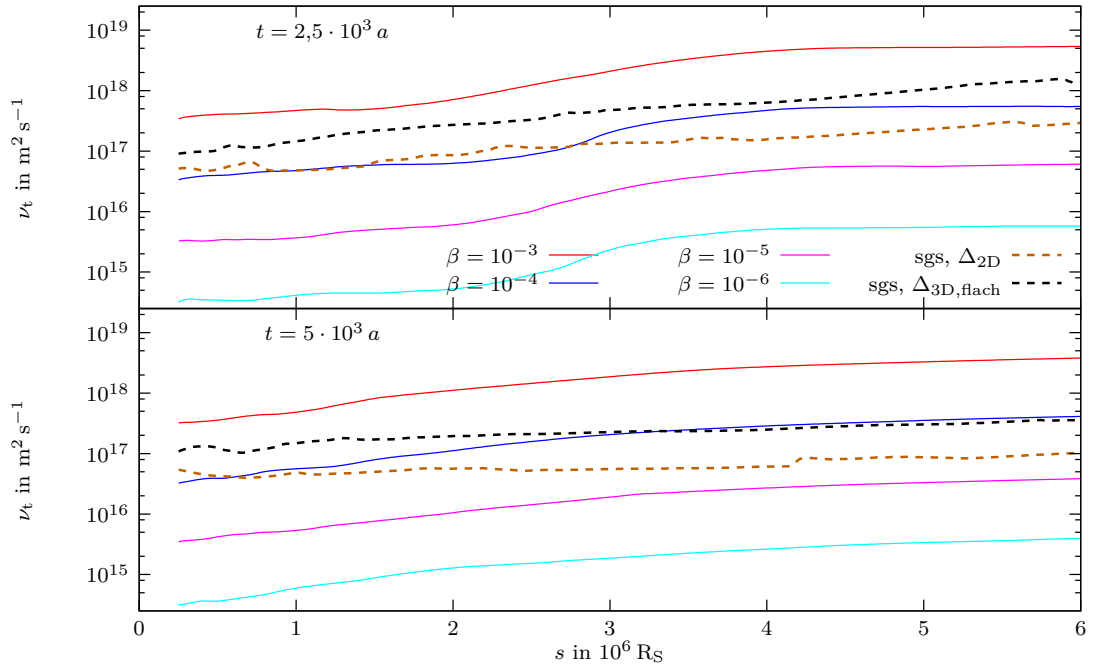


Abb. 4.35.: Die azimuthal gemittelte kinematische Viskosität ist über den Radius aufgetragen und zeigt für die SGS-Verfahren im Vergleich eine gesteigerte Magnitude und erstmals einen mit dem Radius ansteigenden Verlauf.

in Form der β -Parametrisierung noch durch das SGS-Verfahren, bedarf.

Damit ist die Entwicklung der Akkretionsscheibe bereits nach weniger als 10^4 a abgeschlossen, was die viskose Zeitskala $t_{\text{vis}}(s_{\text{max}})$ um mehrere, je nach Parametrisierung zwei bis fünf, Größenordnungen unterschreitet.

Die eigentlich interessante Größe, die kinematische Viskosität, ist als zweidimensionale Farbkarte in Abb. 4.34 dargestellt und zeigt ebenfalls einen stark chaotischen Charakter. Durch das geänderte Gravitationspotential, bedingt durch die Überdichten, stellt sich ebenfalls eine veränderte Rotationsgeschwindigkeit ein, was zwangsläufig die kinematische Viskosität – eben auch in den Simulationen mit β -Parametrisierung – ändert; diese waren bis dato meist relativ ungestört. In den azimuthal gemittelten Daten (Abb. 4.35) sind die Änderungen jedoch relativ moderat. Hier zeigt sich im SGS-Verfahren erstmals ein klarer Anstieg der kinematischen Viskosität mit dem Radius, wie es auch bei den β -Scheiben stets der Fall ist. Auch die Magnitude hat sich erheblich nach oben korrigiert und liegt nun im Bereich der Vergleichssimulationen mit $\beta = 10^{-4}$ und $\beta = 10^{-3}$, was insgesamt als beachtlich zu werten ist. Es kann also festgestellt werden, dass es der Simulation „gelingen“ ist, eine zur β -Parametrisierung vergleichbare kinematische Viskosität, nicht nur von der Größenordnung, sondern ebenfalls im radialen Verlauf zu generieren. Ihr Effekt auf die Akkretionsraten wird jedoch durch die gravitativen Wechselwirkungen vollständig überdeckt.

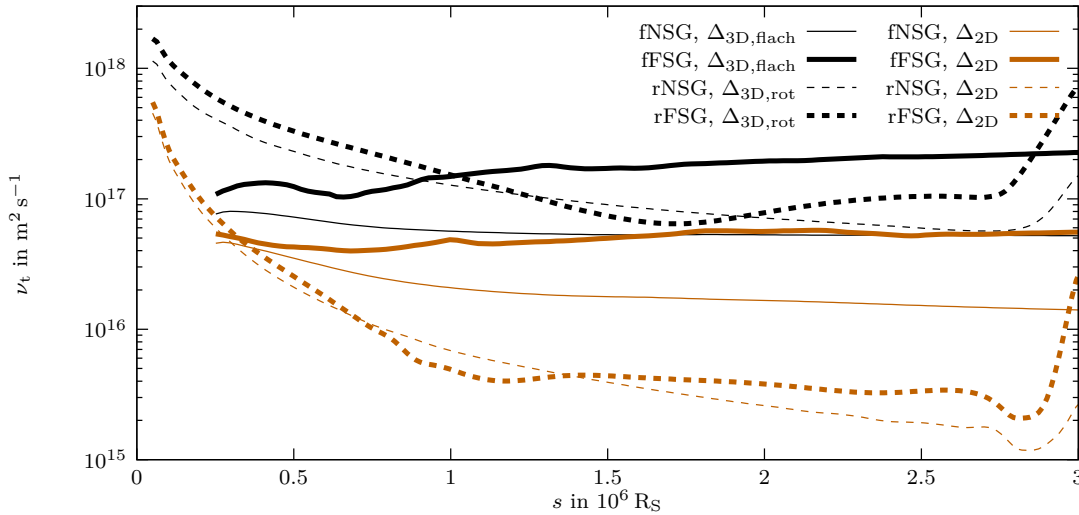


Abb. 4.36.: Zum Vergleich ist die turbulente Viskosität des SGS-Verfahrens über den Radius aufgetragen. Durchgezogene Linien sind über die azimutale Koordinate gemittelte Werte des flachen Modells, gestrichelte der Zentralebene des rotationssymmetrischen Modells. Die Farbe dient zur Differenzierung der Filterbreite (braun: Δ_{2D} ; schwarz: $\Delta_{3D,rot}$ bzw. $\Delta_{3D,flach}$). Die Strichstärke symbolisiert massearmes bzw. massereiches Modell (NSG/FSG). Bis auf das fFSG-Modell ($t = 5 \cdot 10^3$ a) stammen alle Daten von $t = 2,5 \cdot 10^5$ a.

In Abb. 4.36 sind zusammenfassend die Viskositäten aller Modelle eingetragen. Es offenbart sich, dass die dreidimensionalen Filter sehr viel dichter beisammenliegen als dies für ihre zweidimensionalen Versionen gilt. Ebenfalls ist auffällig, dass in der extrem turbulenten Strömung des fFSG-Modells auch mit Filterbreite Δ_{2D} , eine zu den anderen Simulationen enorme Wirbelviskosität generiert wird.

Letztlich haben die flachen Modelle eher das Bild einer Large Eddy Simulation vermittelt.

5. Resümee und Ausblick

An dieser Stelle muss nun der Frage nachgegangen werden, ob die Zielsetzung erreicht wurde; ob es also tatsächlich und nachweislich möglich ist die Problematik, die sich bezüglich der Turbulenz in Akkretionsscheiben ergibt, mittels des in dieser Arbeit verwendeten Ansatzes lösen zu können. Das bedeutet auch, dass sie sich ausschließlich auf hydrodynamische Instabilitäten reduzieren lassen muss. In dieser sehr allgemeinen Formulierung kann die Frage leider nicht beantwortet werden, da letztlich im Kontext von AGK auf der einen Seite die Beobachtungstatsachen nicht ausreichend einschränkend sind, um anhand der gefundenen Lösung das Verfahren falsifizieren zu können, wie es sich beispielsweise mit der zu kleineren Radien abfallenden Massendichte verhält. Auf der anderen Seiten ist das Modell durch den beispielsweise fehlenden Strahlungsdruck bezüglich der Akkretionsraten unzureichend, was ebenfalls Möglichkeiten der Falsifikation nimmt. Hier läge auch viel Spielraum für zukünftige Erweiterungen des Modells, um diesen offen bleibenden Fragestellungen nachgehen zu können. Festzustellen ist jedoch, dass auch die etablierten Methoden (α - & β -Parametrisierung, siehe Abschn. 2.3.1) an den mangelnden Beobachtungsergebnissen leiden.

Nach dieser sehr nüchternen Betrachtung gilt es auch positivere Aspekte, die eine LES als durchaus guten Kandidaten erscheinen lassen, hervorzuheben. Zum einen kann das Verfahren zeigen, dass die beiden sehr unterschiedlichen Modelle¹ zu vergleichbaren Resultaten führen und beide zu der klassischen β -Beschreibung in Bezug auf die Akkretionsraten passen. Somit ist das Verfahren prinzipiell in der Lage in einer ausreichend kompakten Scheibe Akkretionsraten zu generieren, die zumindestens nicht zu klein sind, um Leuchtkräfte und Entwicklungszeitskalen von AGK erklären zu können. Es liegt teilweise die diametrale Situation vor, dass der Strahlungsdruck (Eddington-Limit) berücksichtigt werden müsste, um die Akkretionsrate auf geringere Werte zu drosseln.

Allerdings fällt die Wirbelviskosität in den überwiegenden rotationssymmetrischen Modellen mit der radialen Koordinate – im Gegensatz zur β -Parametrisierung – ab, was die viskose Zeitskala im Vergleich zu dem klassischen Ansatz überproportional steigert und relativ schnell zu Radien führt, jenseits dessen innerhalb einer vorgegebenen Zeit (beispielsweise des Weltalters) das Material nicht mehr zur Akkretion beitragen kann. Damit müsste im Falle der Gültigkeit des SGS-Verfahrens das zu akkretierende Material innerhalb geringerer Radien vorliegen, als es bei der β -Parametrisierung nötig wäre. Die LES hat diesbezüglich jedoch noch einen „Trumpf im Ärmel“: Es könnte sich durch weitere Instabilitäten vermehrt Turbulenz ausbilden, auf welche das SGS-Verfahren direkt

¹Das flache Scheibenmodell und das vertikal aufgelöste Modell mit einer Rotationssymmetrie.

durch vermehrte Generierung von Wirbelviskosität reagieren würde. Dies würde dann seinerseits eine Verringerung der viskosen Zeitskala nach sich ziehen. Als Instabilitäten für große Radien bieten sich in erster Linie durch Selbstgravitation induzierte Störungen an, wie sie bei der flachen, Toomre-Instabilen Scheibe im Rahmen dieser Arbeit aufgetreten sind.

Das seit langem in der Literatur kontrovers diskutierte Auftreten von Turbulenz in Akkretionsscheiben (Abschn. 2.2.3) ist auch im Rahmen dieser Arbeit durchaus kritisch zu betrachten. Die Störungen, die im rotationssymmetrischen Modell auftreten, sind marginal und spielen sich hauptsächlich in der Nähe des inneren Randes ab. Auch die Selbstgravitation der Scheibe kann im rotationssymmetrischen Modell, bedingt durch die hohen Temperaturen, keine nennenswerten Instabilitäten auslösen, so dass für weitere Untersuchungen zwangsläufig Kühlung als destabilisierender Mechanismus nötig wäre. Dies hat zur Konsequenz, dass das SGS-Verfahren beim rotationssymmetrischen Modell von der Rotationsgeschwindigkeit dominiert wird, was im klassischen Bild einer LES unbefriedigend ist. Dabei soll es, wie der Name bereits suggeriert, zu einer in der Simulation erfassten Wirbelbildung kommen, welche anschließend für die nicht aufgelösten Größenskalen modellierte Effekte aufweist.

In den flachen Modellen stellt sich dieser Sachverhalt etwas anders dar. Auch ohne Selbstgravitation kommt es zu einer dominanten, nicht-achsensymmetrischen Instabilität, die das globale Verhalten der Scheibe stark beeinflusst und möglicherweise einer „echten“ physikalischen Störung zuzurechnen ist. Es zeigt sich eine Auswirkung auf die Wirbelviskosität, die in einzelnen Phasen um ungefähr eine Magnitude ansteigt. Dies gilt jedoch nur für das direkte Umschlagen des (mehr oder weniger) laminaren Zustands in den turbulenten. Dies ist ein in der Literatur oft beschriebener Aspekt, dass die gefundenen Instabilitäten vom Umfang zu gering sind.

Im flachen Modell ist es außerdem möglich bereits zu Beginn eine Toomre-Instabile Scheibe aufzusetzen, die direkt zu Fragmentation führt. Diese Instabilität stellt sich als derart enorm heraus, dass sie den gesamten Entwicklungsprozess der Scheibe, unabhängig von der verwendeten Viskosität, beherrscht (vgl. auch Britsch, 2006). Insbesondere tritt hierbei die Frage auf, ob bei einer dreidimensionalen Simulation möglicherweise das globale Verhalten der Simulation ein anderes wäre, da die großen dominanten Wirbel mehr kinetische Energie durch Zerfall in kleinere verlieren würden. In diesem Fall würde das SGS-Verfahren höchstwahrscheinlich auch wieder mehr an Einfluss gewinnen.

In der zuletzt genannten Instabilität liegt möglicherweise das größte Potential, so dass es sich lohnt zukünftig weitere Untersuchungen daran anzuschließen. Es wäre möglich mit einer Toomre-stabilen Scheibe in Verbindung mit einer realistischen Kühlung zu beginnen, die im Laufe der Simulation durch fallende Gastemperatur das Toomre-Kriterium für große Radien verletzt. Dies tritt bei großen Radien am frühesten ein, da dort die viskose Heizung am geringsten ist und auch vom Zentralobjekt weniger effizient geheizt werden kann. Es wäre spannend zu untersuchen, inwiefern sich die turbulente Bewegung bei großen Radien auf das Verhalten der Strömung im verbleibenden stabilen Bereich auswirkt. Auch wird das Feedback des SGS-Verfahrens auf das Abkühlen der Scheibe

von großem Interesse sein, da durch die Gravitationsinstabilität mehr Turbulenz generiert werden sollte, was zu mehr Wirbelviskosität führt, was so auch bereits in diesen Simulationen beobachtet wurde. Der damit verbundene Anstieg der viskosen Heizung könnte den Prozess stoppen. Demgegenüber steht die β -Viskosität, die eine nahezu konstante kinematische Viskosität aufzuweisen hätte und letztlich nicht auf den Prozess reagiert. Die α -Parametrisierung eignet sich für diesen Fall nicht, was u. a. daran liegt, dass durch den Temperaturabfall eine Verringerung der Schallgeschwindigkeit einhergeht, die direkt in die Parametrisierung eingeht und die Viskosität absenkt. Die Effekte würden sich somit gegenseitig verstärken, was nicht gewollt ist. Für diese Untersuchungen müsste eine logarithmische Geometrie verwendet werden, für welche das SGS-Verfahren auf Funktionsfähigkeit zu prüfen ist.

Um letztlich endgültig die Güte der Symmetrieanahmen für das Turbulenzmodell bewerten zu können, wären dreidimensionale Simulationen notwendig. Die hierfür erforderlichen Erweiterungen in die Softwarebibliothek `fosite` wären überschaubar, stellen jedoch immense Herausforderungen an den numerischen Rechenaufwand.

Auch ist zu erwarten, dass sich das SGS-Verfahren besser für die Beschreibung der Dynamik des dünnen, von der Scheibenebene ausströmenden Materials (Scheibenwind) eignet, als es von den klassischen Parametrisierungen zu erwarten ist. Dies liegt an der vermehrt auftretenden Wirbelbildung in der achsennahen Region, für die eine LES sensitiv ist. Es ist nicht plausibel, weshalb für Scheiben mit hoher vertikaler Ausdehnung die gleiche Abhängigkeit für die Viskosität in vertikaler und radialer Richtung vorliegen sollte, wie es durch den β -Ansatz vermittelt wird. Hier stellen LES den eindeutig realistischeren Fall dar.

A. Kovariante Ableitung

Zur Vollständigkeit soll hier die Divergenz eines Vektorfeldes in krummlinigen orthogonalen Koordinaten (ξ, η, ϕ) unter Annahme einer ϕ -Symmetrie aufgeführt werden. Sie sind aus Illenseer & Duschl (2009) entnommen und werden an einigen Stellen der vorliegenden Arbeit verwendet.

Sei \mathbf{v} ein Vektorfeld:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi v_\eta) \right). \quad (\text{A.1})$$

Dabei treten die sog. Skalenfaktoren $h_{x_i} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} \right|$ mit dem Ortsvektor \mathbf{r} auf. Ebenso ist dies für die „Tensordivergenz“ (kovariante Ableitung eines Tensorfeldes $\hat{\mathbf{T}}$ mit anschließender Kontraktion) möglich (Illenseer & Duschl, 2009).

Sei $\hat{\mathbf{T}}$ ein Tensorfeld zweiter Stufe:

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}]_\xi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi T_{\xi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi T_{\xi\eta}) \right. \\ &\quad \left. - c_{\eta\xi\eta} T_{\eta\eta} - c_{\phi\xi\phi} T_{\phi\phi} + c_{\xi\eta\xi} T_{\eta\xi} \right) \\ [\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}]_\eta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi T_{\eta\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi T_{\eta\eta}) \right. \\ &\quad \left. - c_{\xi\eta\xi} T_{\xi\xi} - c_{\phi\eta\phi} T_{\phi\phi} + c_{\eta\xi\eta} T_{\xi\eta} \right) \\ [\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}]_\phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi T_{\phi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\phi T_{\phi\eta}) \right. \\ &\quad \left. + c_{\phi\xi\phi} T_{\xi\phi} + c_{\phi\eta\phi} T_{\eta\phi} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Es werden, zur verkürzten Darstellung, die sog. Kommutatorkoeffizienten, wie in obig zitierter Arbeit, verwendet:

$$c_{xyx} = \frac{1}{h_x h_y} \frac{\partial h_x}{\partial y}, \quad (\text{A.3})$$

wobei x und y durch die jeweilige Koordinate zu ersetzen sind.

B. Jacobi-Matrizen

Die in Abschnitt 3.3.1 benötigten Jacobi-Matrizen der konservativen Flüsse G und F ergeben sich im Fall von `physics_euler3Drotsymsgs` zu

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\phi^2) - v_\xi^2 & (3-\gamma)v_\xi & (1-\gamma)v_\eta & (1-\gamma)v_\phi & \frac{2}{3} & \gamma-1 \\ -v_\eta v_\xi & v_\eta & v_\xi & 0 & 0 & 0 \\ -v_\phi v_\xi & v_\phi & 0 & v_\xi & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho}v_\xi & \frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho} & 0 & 0 & v_\xi & 0 \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\phi^2) - K\right)v_\xi & K + \frac{1}{2}(v_\eta^2 + v_\phi^2 + (3-2\gamma)v_\xi^2) & (1-\gamma)v_\eta v_\xi & (1-\gamma)v_\phi v_\xi & \frac{2}{3}v_\xi & \gamma v_\xi \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

und

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_\xi v_\eta & v_\eta & v_\xi & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\phi^2) - v_\eta^2 & (1-\gamma)v_\xi & (3-\gamma)v_\eta & (1-\gamma)v_\phi & \frac{2}{3} & \gamma-1 \\ -v_\phi v_\eta & 0 & v_\phi & v_\eta & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho}v_\eta & 0 & \frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho} & 0 & v_\eta & 0 \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2 + v_\phi^2) - K\right)v_\eta & (1-\gamma)v_\xi v_\eta & K + \frac{1}{2}(v_\xi^2 + v_\phi^2 + (3-2\gamma)v_\eta^2) & (1-\gamma)v_\phi v_\eta & \frac{2}{3}v_\eta & \gamma v_\eta \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{mit } K = \frac{1}{(\gamma-1)}(\tilde{c}_s^2 - \frac{p_{\text{sgs}}}{\rho}) = \frac{c_s^2}{(\gamma-1)} + \frac{p_{\text{sgs}}}{\rho}.$$

In zwei Dimensionen, wie sie für das `physics_euler2Dsgs` Modul benötigt werden, berechnen sich die Jacobi-Matrizen der konservativen Flüsse G und F zu

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2) - v_\xi^2 & (3-\gamma)v_\xi & (1-\gamma)v_\eta & \frac{2}{3} & \gamma-1 \\ -v_\eta v_\xi & v_\eta & v_\xi & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho}v_\xi & \frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho} & 0 & v_\xi & 0 \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2) - K\right)v_\xi & K + \frac{1}{2}(v_\eta^2 + (3-2\gamma)v_\xi^2) & (1-\gamma)v_\eta v_\xi & \frac{2}{3}v_\xi & \gamma v_\xi \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

und

$$\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v_\xi v_\eta & v_\eta & v_\xi & 0 & 0 \\ \frac{(\gamma-1)}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2) - v_\eta^2 & (1-\gamma)v_\xi & (3-\gamma)v_\eta & \frac{2}{3} & \gamma-1 \\ -\frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho}v_\eta & 0 & \frac{3}{2}\frac{p_{\text{sgs}}}{\rho} & v_\eta & 0 \\ \left(\frac{\gamma-2}{2}(v_\xi^2 + v_\eta^2) - K\right)v_\eta & (1-\gamma)v_\xi v_\eta & K + \frac{1}{2}(v_\xi^2 + (3-2\gamma)v_\eta^2) & \frac{2}{3}v_\eta & \gamma v_\eta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

C. Ergänzungen zum rotationssymmetrischen Modell

Es wird ergänzend die Temperaturverteilung (Abb. C.1) gezeigt und alle relevanten technischen Simulationsparameter (Tab. C.1) aufgeführt. Für weitere Informationen sei auf Abschnitt 4.1 verwiesen. Für das rFSG-Modell sind ebenfalls die Farbkarten der turbulenten Viskosität für zwei Zeiten in Abb. C.2 und C.3 dargestellt. Die Ergebnisse aus dem Vergleich mit Potenzgesetzen ist in Abb. C.4 und in Tab. C.3 zusammengefasst.

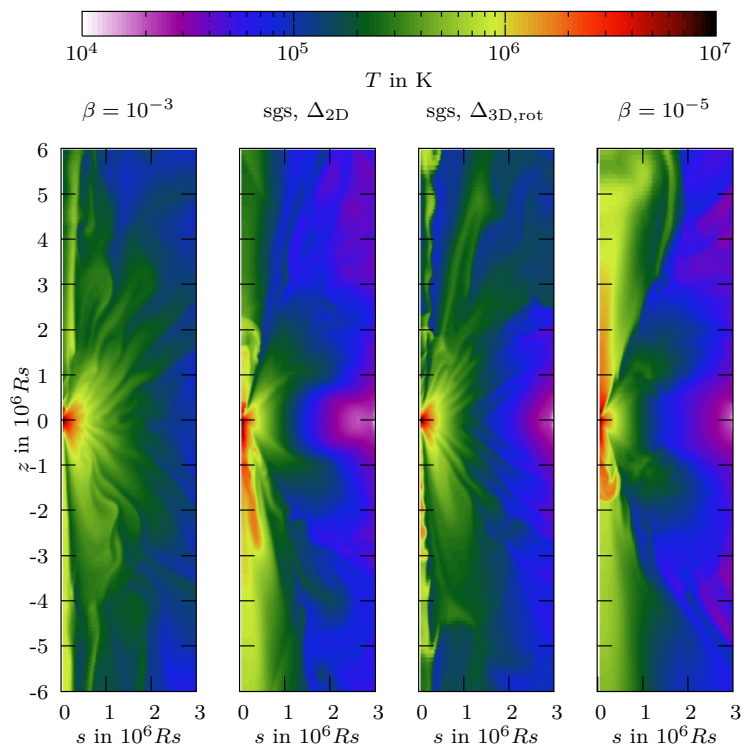


Abb. C.1.: Die hier gezeigten Temperaturen (zu $t = 3 \cdot 10^6 a$) des rNSG-Modells der Simulationen mit $\beta = 10^{-3}$, dem SGS-Verfahren mit Filterbreite Δ_{2D} und $\Delta_{3D,rot}$, sowie der Simulation mit $\beta = 10^{-5}$ zeigen – unrealistisch – hohe Werte, da in dieser Arbeit keine Kühlfunktion zum Einsatz kommt. Sie sind lediglich der Vollständigkeit halber dargestellt.

Tab. C.1.: Alle (möglicherweise) relevanten Simulationsparameter des rotationssymmetrischen Modells (Abschn. 4.1), um die Reproduzierbarkeit zu gewährleisten.

Compiler:	sxf90 von NEC reversion 451 Vektoroptimierung (Cvopt); doppelte Genauigkeit; Inline-Ersetzung
Fosite Version:	v0.5.0-395-gad509af
Module (β):	euler3D_rotsym und sources_viscosity
Viskositätsmodell:	BETA mit den entsprechenden β je nach Simulation
Module (SGS):	euler3D_rotsymsgs und sources_sgs
Filterbreite:	Δ_{2D} und $\Delta_{3D,rot}$
Quellterme:	sources_pointmass und poisson_multigrid
Multigrid:	BLOCK_GAUSS_SEIDEL mit $\max(\text{error}) = 10^{-5}$
Multipolentwicklung:	CYLINMULTEXPAN
Integration:	nach Mittelpunktsregel
Rekonstruktion:	linear; primitive Variablen
Limiter:	Monocent mit $\vartheta = 1,4$
Zeitintegration:	MODIFIED_EULER; order = 3
Zeitschrittkontrolle:	$C_{\text{eff}} = 0,4$; $C_{\text{vis}} = 0,6$; $\text{dpmax} = 10^3$
Randbedingungen:	hybride Ausflussbed. + Farfield-Bed. (siehe Abb. 4.4)
Anfangsdaten:	(siehe auch Abschn. 4.1)
Dichte:	$\varrho = \varrho_0 s^a \exp\left(-\frac{ z }{h(s)}\right) + \varrho_\infty$ $\varrho_\infty = 10^{-22} \text{ kg m}^{-3}$; $h(s) = s/H$; $H \equiv 10$; $a = -15/8$
Zentralmasse:	$M_Z = 10^6 M_\odot$
Scheibenmasse:	$M_{\text{disk}} = 0,1 \cdot M_Z$ (rNSG); $M_{\text{disk}} = 10 \cdot M_Z$ (rFSG)
Druck:	p durch hydrostatisches Gleichgewicht $p_\infty = 1,4 \cdot 10^{-16} \text{ Pa}$
turbulenter Druck:	$p_{\text{sgs}} = \eta_0 p$; mit $\eta_0 = 10^{-12}$
Geschwindigkeiten:	$v_s = v_z = 0$; v_ϕ durch Fliehkraftgleichgewicht
Isentropenexponent:	$\gamma = 1,4$
mittlere Molaremasse:	$\mu_m = 6,02 \cdot 10^{-4} \text{ kg mol}^{-1}$
Geometrie:	TANCYLINDRICAL
Rechengebiet:	$s \in [5, 300] \cdot 10^4 R_S$ $z = z_0 \tanh(\zeta)$; $z_0 = 2,14 \cdot 10^6 R_S$; $\zeta \in [-1,4, +1,4]$
Ausfluss:	$z \in [-L, L]$; $L = 3 \cdot 10^5 R_S$
Auflösung:	447×223 (bzw. siehe explizite Angabe)

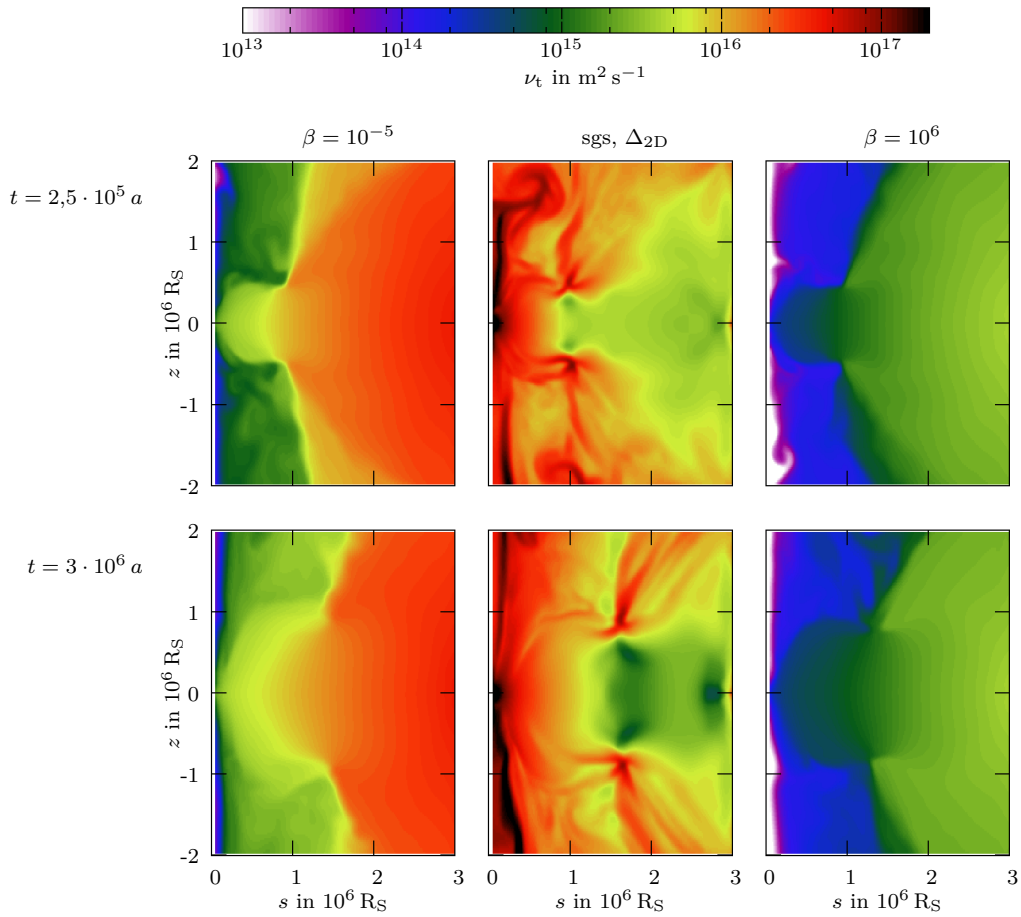


Abb. C.2.: Zu den Zeiten $t = 2,5 \cdot 10^5 a$ und $t = 3 \cdot 10^6 a$ ist die kinematische Viskosität des rFSG-Modells mit Filterbreite $\Delta_{2\text{D}}$ aufgetragen. Es zeigt sich vom Verlauf und Variabilität ein vergleichbares Ergebnis wie es beim rNSG-Modell mit derselben Filterbreite (vgl. 4.11) anzutreffen ist.

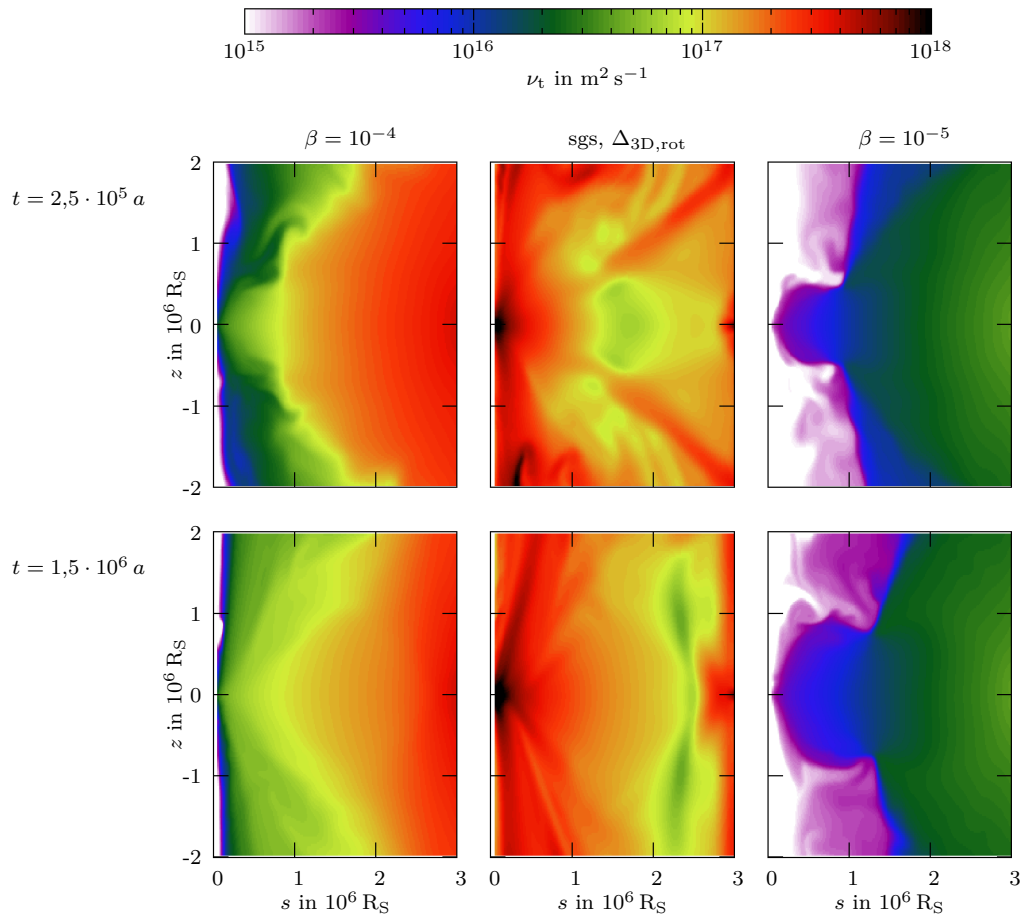


Abb. C.3.: Zu den Zeiten $t = 2,5 \cdot 10^5 a$ und $t = 1,5 \cdot 10^6 a$ ist die kinematische Viskosität des rFSG-Modells mit Filterbreite $\Delta_{3\text{D},\text{rot}}$ aufgetragen. Auch hier zeigt sich das gewohnte, relativ stationäre Bild einer starken Viskosität.

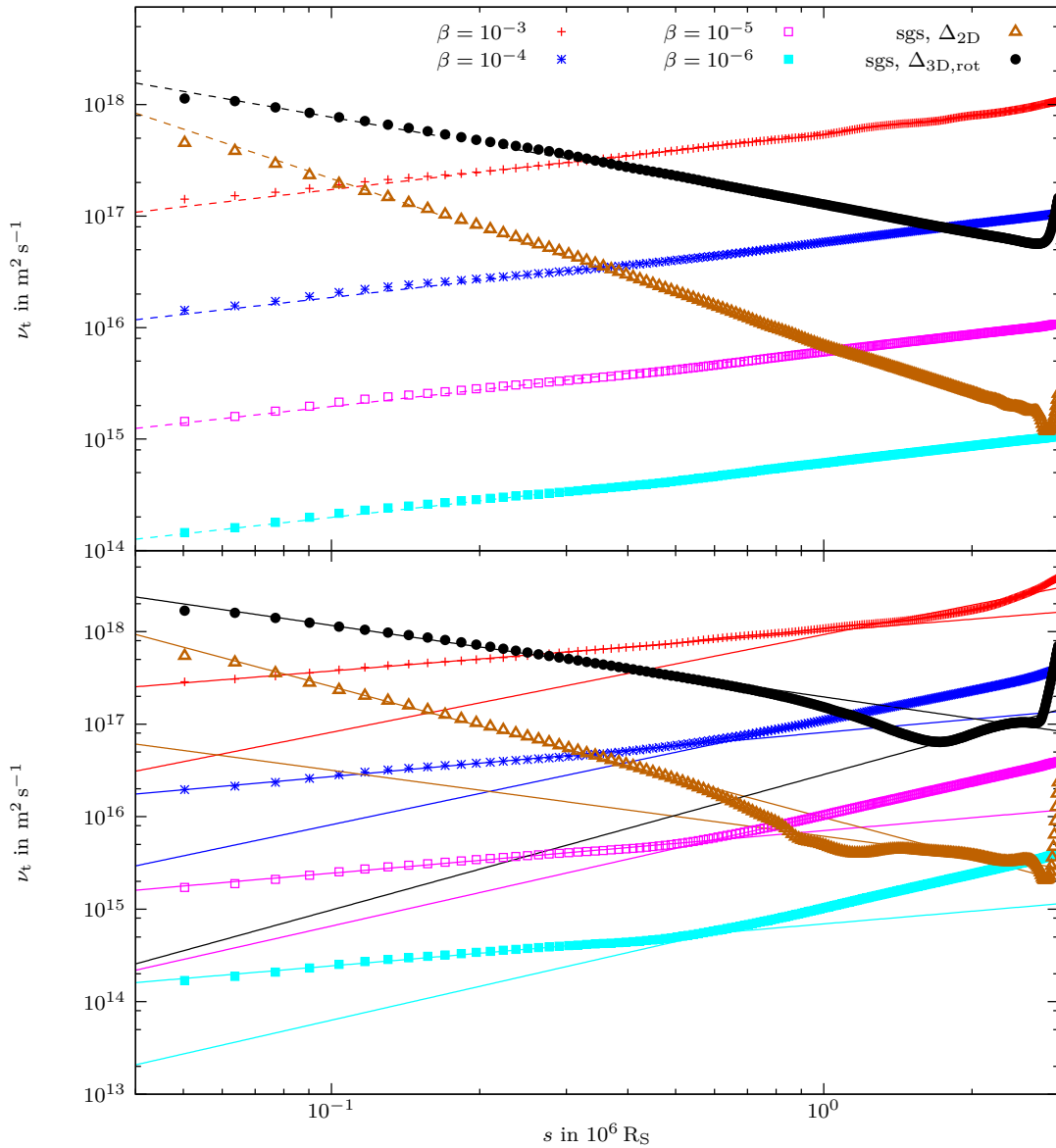


Abb. C.4.: Doppelt-logarithmische Darstellung der kinematischen Viskosität für $z = 0$ zum Zeitpunkt $t = 2,5 \cdot 10^5 a$ mit angefügten Potenzgesetzen. Die Werte sind in Tab. C.3 aufgeführt. Im oberen Plot ist das rNSG- und im unteren das rFSG-Modell dargestellt. Für $\beta = 10^{-3}$ kann im selbstgravitierenden Bereich kein guter Fit mehr erwartet werden, was sich in Abb. 4.18 aus der Rotationsgeschwindigkeit ergibt. Ansonsten ergibt sich eine gute Übereinstimmung.

Tab. C.3.: Durch Fit (Least mean square) ermittelte Exponenten der kinematischen Viskosität mit statistischem Fehler (eine Standardabweichung). Die Verfahrensfehler sind schwierig zu quantifizieren, liegen aber – insbesondere durch Randeffekte – über dem statistischen Fehler. Beim rFSG-Modell ergeben sich für das gebrochene Potenzgesetz zwei Exponenten (siehe Abschn. 4.1.4).

Modell	α_{Kep}	α_{Self}
rNSG, $\beta = 10^{-3}$	$+0,512 \pm 0,003$	
rNSG, $\beta = 10^{-4}$	$+0,503 \pm 0,002$	
rNSG, $\beta = 10^{-5}$	$+0,495 \pm 0,002$	
rNSG, $\beta = 10^{-6}$	$+0,491 \pm 0,002$	
rNSG, sgs $\Delta_{2\text{D}}$	$-1,477 \pm 0,008$	
rNSG, sgs $\Delta_{3\text{D,rot}}$	$-0,77 \pm 0,02$	
rFSG, $\beta = 10^{-3}$	$+0,430 \pm 0,004$	$+1,06 \pm 0,03$
rFSG, $\beta = 10^{-4}$	$+0,476 \pm 0,007$	$+1,120 \pm 0,005$
rFSG, $\beta = 10^{-5}$	$+0,461 \pm 0,006$	$+1,201 \pm 0,001$
rFSG, $\beta = 10^{-6}$	$+0,454 \pm 0,007$	$+1,214 \pm 0,001$
rFSG, sgs $\Delta_{2\text{D}}$	$-1,42 \pm 0,02$	$-0,71 \pm 0,03$
rFSG, sgs $\Delta_{3\text{D,rot}}$	$-0,773 \pm 0,009$	$1,46 \pm 0,05$

D. Ergänzungen zum flachen Modell

Es ist als Ergänzung die Definition von atan2

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & y < 0, x < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & y > 0, x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & y < 0, x = 0. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

aufgeführt.

Die Simulationsparameter sind in Tab. D.1 zusammengefasst. Für detaillierte Informationen sei auf Abschn. 4.3 verwiesen.

Tab. D.1.: Simulationsparameter des flachen Modells (Abschn. 4.3), die ggf. auf die Ergebnisse direkt oder indirekt Auswirkungen haben könnten.

Compiler:	sxf90 von NEC reversion 451 bzw. gfortran 4.7.1 Vektor- bzw. mittlere Optimierung (Cvopt bzw. 02); doppelte Genauigkeit; Inline-Ersetzung
Fosite Version:	v0.5.0-395-gad509af
Module (β):	euler2D und sources_viscosity
Viskositätsmodell:	BETA mit den entsprechenden β je nach Simulation
Module (SGS):	euler2D_sgs und sources_sgs
Filterbreite:	Δ_{2D} und $\Delta_{3D,flach}$ mit $h(s) = s/10$
Quellterme:	sources_pointmass und poisson_spectral
Greenfunktion:	green = 1
Integration:	nach Mittelpunktsregel
Rekonstruktion:	linear; primitive Variablen
Limiter:	minmod mit $\vartheta = 1,2$
Zeitintegration:	MODIFIED_EULER; order = 3
Zeitschrittkontrolle:	$C_{cfl} = 0,3$; $C_{vis} = 0,3$; dpmax = 10
Randbedingungen:	Ausflussbed. + Farfield-Bed. (+ periodisch)
Anfangsdaten:	<i>(siehe auch Abschn. 4.3)</i>
Flächendichte:	$\Sigma(s) = \Sigma_{\infty} + \begin{cases} \Sigma_0 s^a & s \leq s_{\max} \\ \Sigma_0 s^a e^{-0.5\left(\frac{s-s_{\max}}{s_{\min}}\right)^2} & s > s_{\max} \end{cases}$
Zentralmasse:	$s_{\max} = 3 \cdot 10^6 R_S$; $s_{\min} = 2,5 \cdot 10^5 R_S$; $a = -7/8$ $M_Z = 10^6 M_{\odot}$
Scheibenmasse:	$M_{\text{disk}} = 0,1 \cdot M_Z$ (fNSG); $M_{\text{disk}} = 10 \cdot M_Z$ (fFSG)
Druck:	$P = T \Sigma \frac{R_G}{\mu_m}$; $T = 40$ K $\Sigma_{\infty} = 10^{-10} \text{ kg m}^{-2}$
turbulenter Druck:	$P_{\text{sgs}} = \eta_0 P$; mit $\eta_0 = 10^{-12}$
Geschwindigkeiten:	$v_s = 0$; v_{ϕ} durch Fliehkraftgleichgewicht
Isentropenexponent:	$\gamma = 1,4$
mittlere Molaremasse:	$\mu_m = 6,02 \cdot 10^{-4} \text{ kg mol}^{-1}$
Geometrie:	POLAR
Rechengebiet:	$s \in [25, 600] \cdot 10^4 R_S$ $\phi \in [0, 2\pi]$
Auflösung:	250×256 (fNSG) 256×256 (fFSG)

Literaturverzeichnis

- Afshordi, N., Mukhopadhyay, B., & Narayan, R. (2005). Bypass to Turbulence in Hydrodynamic Accretion: Lagrangian Analysis of Energy Growth. *ApJ*, 629, 373–382.
- Balbus, S. A. (2011). Fluid dynamics: A turbulent matter. *Nature*, 470(7335), 475–476. 10.1038/470475a.
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. i - linear analysis. ii - nonlinear evolution. *ApJ*, 376, 214–233.
- Batchelor, G. K. (1969). Computation of the Energy Spectrum in Homogeneous Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 12, 233.
- Bender, R., Kormendy, J., Bower, G., Green, R., Thomas, J., Danks, A. C., Gull, T., Hutchings, J. B., Joseph, C. L., Kaiser, M. E., Lauer, T. R., Nelson, C. H., Richstone, D., Weistrop, D., & Woodgate, B. (2005). Hst stis spectroscopy of the triple nucleus of m31: Two nested disks in keplerian rotation around a supermassive black hole. *The Astrophysical Journal*, 631(1), 280.
- Boffetta, G. & Ecke, R. E. (2012). Two-dimensional turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 44(1), 427–451.
- Britsch, M. (2006). *Gravitational instability and fragmentation of self-gravitating accretion disks*. Dissertation, Ruperta-Carola Universität zu Heidelberg.
- Canuto, V. (1994). Large eddy simulation of turbulence: A subgrid scale model including shear, vorticity, rotation, and buoyancy. *The Astrophysical Journal*, 428, 729–752.
- Canuto, V. M. (1997). Compressible turbulence. *ApJ*, 482(2), 827.
- Courant, R., Friedrichs, K., & Lewy, H. (1928). Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100, 32–74.
- Davidson, P. A. (2004). *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, USA.
- Deardorff, J. W. (1970). A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2), 453–480.
- Deardorff, J. W. (1980). Stratocumulus-capped mixed layers derived from a three-dimensional model. *Boundary-Layer Meteorology*, 18, 495–527. 10.1007/BF00119502.

- Decyk, V. K. & Gardner, H. J. (2008). Object-oriented design patterns in fortran 90/95: mazev1, mazev2 and mazev3. *Comput. Phys. Comm.*, 178(8), 611.
- Dubrulle, B., Marié, L., Normand, C., Richard, D., Hersant, F., & Zahn, J. (2005). An hydrodynamic shear instability in stratified disks. *A&A*, 429, 1–13.
- Duschl, W. J. & Britsch, M. (2006). A gravitational instability-driven viscosity in self-gravitating accretion disks. *ApJL*, 653, L89–L92.
- Duschl, W. J. & Strittmatter, P. A. (2011). The cosmogony of supermassive black holes. *MNRAS*, 413, 1495–1504.
- Duschl, W. J., Strittmatter, P. A., & Biermann, P. L. (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *A&A*, 357(3), 1123–1132.
- Favre, A. (1983). Turbulence: Space-time statistical properties and behavior in supersonic flows. *Physics of Fluids*, 26(10), 2851–2863.
- Frank, J., King, A., & Raine, D. J. (2002). *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge University Press, 3. edition.
- Fromang, S., Terquem, C., & Balbus, S. A. (2002). The ionization fraction in α models of protoplanetary discs. *MNRAS*, 329, 18–28.
- Gammie, C. F. & Menou, K. (1998). On the origin of episodic accretion in dwarf novae. *ApJ*, 492(1), L75–L78.
- Garnier, E., Adams, N., & Sagaut, P. (2009). *Large eddy simulation for compressible flows*. Scientific computation. Springer.
- Gebhardt, K. & Thomas, J. (2009). The black hole mass, stellar mass-to-light ratio, and dark halo in m87. *The Astrophysical Journal*, 700(2), 1690.
- Germano, M., Piomelli, U., Moin, P., & Cabot, W. H. (1991). A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids*, 3, 1760–1765.
- Ghosal, S. (1996). An analysis of numerical errors in large-eddy simulations of turbulence. *Journal of Computational Physics*, 125(1), 187–206.
- Ghosal, S. & Moin, P. (1995). The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *Journal of Computational Physics*, 118, 24–37.
- Gillessen, S., Eisenhauer, F., Trippe, S., Alexander, T., Genzel, R., Martins, F., , & Ott, T. (2009). Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center. *The Astrophysical Journal*, 692(2), 1075–1109.
- Goldreich, P. & Lynden-Bell, D. (1965). Ii. spiral arms as sheared gravitational instabilities. *MNRAS*, 130, 125–+.

- Hasinger, G., Miyaji, T., & Schmidt, M. (2005). Luminosity-dependent evolution of soft x-ray selected agn. new chandra and xmm-newton surveys. *A&A*, 441, 417–434.
- Hirsch, C. (1988). *Numerical computation of internal and external flows*, volume 2 of *Wiley series in numerical methods in engineering*. Wiley.
- Hur e, J.-M. (2000). On the transition to self-gravity in low mass agn and yso accretion discs. *A&A*, 358, 378–394.
- Illenseer, T. F. (2006). *Hochaufloesende Verfahren zur numerischen Berechnung von strahlungsgetriebenen Scheibenwinden*. Dissertation, Universit at Heidelberg.
- Illenseer, T. F. & Duschl, W. J. (2009). Two-dimensional central-upwind schemes for curvilinear grids and application to gas dynamics with angular momentum. *Comput. Phys. Comm.*, 180, 2283–2302.
- Jackson, J. D. (1983). *Klassische Elektrodynamik*. John Wiley, Sons, Inc., 2. edition.
- Jarosik, N., Bennett, C. L., Dunkley, J., Gold, B., Greason, M. R., Halpern, M., Hill, R. S., Hinshaw, G., Kogut, A., Komatsu, E., Larson, D., Limon, M., Meyer, S. S., Nolta, M. R., Odegard, N., Page, L., Smith, K. M., Spergel, D. N., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., & Wright, E. L. (2011). Seven-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Sky maps, systematic errors, and basic results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 192(2), 14.
- Johnson, B. M. & Gammie, C. F. (2003). Nonlinear outcome of gravitational instability in disks with realistic cooling. *ApJ*, 597, 131–141.
- Johnson, B. M. & Gammie, C. F. (2005a). Linear Theory of Thin, Radially Stratified Disks. *ApJ*, 626, 978–990.
- Johnson, B. M. & Gammie, C. F. (2005b). Vortices in Thin, Compressible, Unmagnetized Disks. *ApJ*, 635, 149–156.
- Jung, M. (2012). *Zeitliche Entwicklung einer Akkretionsscheibe mit einem st orenden gravitierenden Objekt*. Masterarbeit, Christian-Albrechts-Universit at zu Kiel.
- Kato, S., Fukue, J., & Mineshige, S. (2008). *Black-Hole Accretion Disks*. Kyoto University Press.
- Kippenhahn, R. & Weigert, A. (1990). *Stellar structure and evolution*. Springer-Verlag.
- Klahr, H. (2004). The Global Baroclinic Instability in Accretion Disks. II. Local Linear Analysis. *ApJ*, 606, 1070–1082.
- Klahr, H. H. & Bodenheimer, P. (2003). Turbulence in accretion disks: Vorticity generation and angular momentum transport via the global baroclinic instability. *ApJ*, 582(2), 869–892.

- Klessen, R. S., Heitsch, F., & Mac Low, M. (2000). Gravitational collapse in turbulent molecular clouds. i. gasdynamical turbulence. *The Astrophysical Journal*, 535(2), 887.
- Kolmogorov, A. N. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, (30), 299–303. (Russian).
- Kolmogorov, A. N. (1980). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*(434), 9–13. (translated into English).
- Kormendy, J. & Richstone, D. (1995). Inward Bound—The Search For Supermassive Black Holes In Galactic Nuclei. *ARA&A*, 33, 581–+.
- Kraichnan, R. H. (1967). Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 10, 1417–1423.
- Kurganov, A. & Tadmor, E. (2000). New high-resolution central schemes for nonlinear conservation laws and convection-diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, 160(1), 241–282.
- Kurganov, A. & Tadmor, E. (2002). Solution of two-dimensional riemann problems for gas dynamics without riemann problem solvers. *Numer. Meth. Part. Differ. Equat.*, 18(5), 584–608.
- Landau, L. D. & Lifschitz, E. M. (1974). *Hydrodynamik*. Number 6. Akademie-Verlag, 3. edition.
- Lesieur, M. (1997). *Turbulence in fluids*. Fluid mechanics and its applications ; v. 40. Kluwer Academic Publishers, 3rd rev. and enl. ed. edition.
- Lesur, G. & Longaretti, P.-Y. (2005). On the relevance of subcritical hydrodynamic turbulence to accretion disk transport. *A&A*, 444(1), 25–44.
- Levermore, C. D. & Pomraning, G. C. (1981). A flux-limited diffusion theory. *ApJ*, 248, 321–334.
- Lüst, R. (1952). Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse. 1. Lösungen der hydrodynamischen Gleichung mit turbulenter Reibung. *Z. Naturforsch.*, 7(1), 87–98.
- Lynden-Bell, D. (1969). Galactic nuclei as collapsed old quasars. *Nature*, 223, 690–694.
- Mukhopadhyay, B., Afshordi, N., & Narayan, R. (2005). Bypass to Turbulence in Hydrodynamic Accretion Disks: An Eigenvalue Approach. *ApJ*, 629, 383–396.
- Ohsuga, K. & Mineshige, S. (2011). Global structure of three distinct accretion flows and outflows around black holes from two-dimensional radiation-magnetohydrodynamic simulations. *The Astrophysical Journal*, 736(1), 2.

- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19, 137–162. Provided by the SAO/NASA Astrophysics Data System.
- Richard, D. & Zahn, J.-P. (1999). Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment. *A&A*, 347, 734–738.
- Richardson, L. F. (1926). Atmospheric Diffusion Shown on a Distance-Neighbour Graph. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 110, 709–737.
- Richstone, D., Ajhar, E. A., Bender, R., Bower, G., Dressler, A., Faber, S. M., Filippenko, A. V., Gebhardt, K., Green, R., Ho, L. C., Kormendy, J., Lauer, T. R., Magorrian, J., & Tremaine, S. (1998). Supermassive black holes and the evolution of galaxies. *Nature*, 395, A14.
- Sagaut, P. (2002). *Large eddy simulation for incompressible flows*. Scientific computation. Springer, 2nd ed. edition.
- Salpeter, E. E. (1964). Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects. *ApJ*, 140, 796–800.
- Schmidt, W. & Federrath, C. (2011). A fluid-dynamical subgrid scale model for highly compressible astrophysical turbulence. *A&A*, 528, A106.
- Schmidt, W., Niemeyer, J. C., & Hillebrandt, W. (2006). A localised subgrid scale model for fluid dynamical simulations in astrophysics. *A&A*, 450(1), 265.
- Scotti, A., Meneveau, C., & Lilly, D. K. (1993). Generalized Smagorinsky model for anisotropic grids. *Physics of Fluids*, 5, 2306–2308.
- Shakura, N. I. & Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary-systems-observational appearance. *A&A*, 24(3), 337–355.
- Shalybkov, D. & Rüdiger, G. (2005). Stability of density-stratified viscous taylor-couette flows. *A&A*, 438(2), 411–417.
- Shlosman, I., Begelman, M. C., & Frank, J. (1990). The fuelling of active galactic nuclei. *Nature*, 345(6277), 679–686.
- Smagorinsky, J. (1963). General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review*, 91(3).
- Speith, R. & Kley, W. (2003). Stability of the viscously spreading ring. *A&A*, 399(2), 395–407.
- Sperling, B. (2009). *Zweidimensionale Modellierung selbstgravitierender Akkretions-scheiben*. Diplomarbeit, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.

- Spitzer, L. (1962). *Physics of Fully Ionized Gases*. Interscience Publishers.
- Swesty, F. D. & Myra, E. S. (2009). A numerical algorithm for modeling multigroup neutrino-radiation hydrodynamics in two spatial dimensions. *ApJS*, 181, 1–52.
- Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139, 1217–1238.
- Vreman, B., Geurts, B., & Kuerten, H. (1997). Large-eddy simulation of the turbulent mixing layer. *J. Fluid Mech.*, 339, 357–390.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and cosmology: Principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, Inc.
- Weizsäcker, C. F. V. (1944). Über die Entstehung des Planetensystems. *Z. Astrophysik*, 22, 319.
- White, F. M. (2006). *Viscous fluid flow*. McGraw-Hill, 3. edition edition.
- Woodward, P. R., Porter, D. H., Anderson, S., & Fuchs, T. (2006). Towards an Improved Numerical Treatment of Compressible Turbulence in Astrophysical Flows. In G. P. Zank & N. V. Pogorelov (Ed.), *Numerical Modeling of Space Plasma Flows*, volume 359 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series* (pp. 97–+).
- Yavneh, I., McWilliams, J., & Molemaker, M. (2001). Non-axisymmetric instability of centrifugally stable stratified taylor-couette flow. *J. Fluid Mech.*, 448, 1–21.

Liste der Symbole

Symbol	Bedeutung
(ξ, η, ϕ)	allg. orthogonale krummlinige Koordinaten
(s, ϕ, z)	zylindrische Koordinaten
α	Viskositätsparameter nach Shakura & Sunyaev (1973)
β	Viskositätsparameter nach Duschl et al. (2000)
c	Lichtgeschwindigkeit im Vakuum mit $2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
c_s	Schallgeschwindigkeit
\tilde{c}_s	modifizierte Schallgeschwindigkeit
C_{CFL}	Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl
C_{vis}	Parameter zur Zeitschrittweite durch Viskosität
c_P	spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck
c_V	spez. Wärmekapazität bei konstantem Volumen
c_{ijk}	Kommutatorkoeffizient
\mathcal{D}	Diffusionsterm
E	Gesamtenergiedichte
e_{kin}	kinetische Energiedichte
e_{in}	innere Energiedichte
ε	Energiedissipationsrate
\mathbf{f}	Beschleunigungsvektor
\mathbf{f}_{ext}	Beschleunigungsvektor durch externe Quellen
g	Determinante der Metrik
G	Gravitationskonstante mit $6,67428(67) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
γ	Isentropenexponent
h_i	Skalenfaktor der i -ten Koordinate
η_{Kol}	Mikroskala von Kolmogorov
k_B	Boltzmann-Konstante mit $1,3806504(24) \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
\mathfrak{Ma}	Mach-Zahl
M	Masse
M_{disk}	Masse der Akkretionsscheibe
M_Z	Masse des Zentralobjektes
M_{\odot}	Sonnenmasse ($\approx 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$)
μ	dynamische Scherviskosität
ν	kinematische Scherviskosität
p	Druck
p_{sgs}	turbulenter Druck

P	vertikal integrierter Druck
P_{sgs}	vertikal integrierter, turbulenter Druck
ρ	Massendichte
$\rho\epsilon$	Dissipationsterm
Φ	Gravitationspotential
\mathcal{P}	Produktionsterm
Re	Reynolds-Zahl
Re_{krit}	kritische Reynolds-Zahl
R_{S}	Schwarzschild-Radius $R_{\text{S}} = 2 G M_{\text{Z}} c^{-2}$
s_{min}	minimaler Scheibenradius
s_{max}	maximaler Scheibenradius
Σ	Flächendichte
$\hat{\sigma}$	Spannungstensor
$\hat{\tau}$	viskoser Spannungstensor
T	Temperatur
t	Zeit
t_{dyn}	dynamische Zeitskala
t_{vis}	viskose Zeitskala
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
v_i	Geschwindigkeitskomponente der i -ten Koordinate
v_{K}	Keplersche Rotationsgeschwindigkeit
Ω	Winkelgeschwindigkeit
Ω_{K}	Keplersche Winkelgeschwindigkeit
ζ	Volumenviskosität

Liste der Akronyme

ART	Allgemeine Relativitätstheorie
AGK	aktiven galaktischen Kern
CFL	Courant-Friedrich-Lewy (Courant et al., 1928)
DNS	direkte numerische Simulation
FLD	flux-limited diffusion
FVV	Finite-Volumen-Verfahren
KTV	Verfahren nach Kurganov & Tadmor
LES	Large Eddy Simulation
MHD	Magnetohydrodynamik
MPI	message passing interface
MRI	Magnetorotationsinstabilität
NSG	Navier-Stokes-Gleichung
PDG	partiellen Differentialgleichung
SGS	subgrid-scale
SL	Schwarzes Loch
SMSL	supermassereiches Schwarzes Loch

Erklärung

Ich erkläre hiermit,

1. dass diese Abhandlung - abgesehen von der Beratung durch meinen Betreuer - nach Inhalt und Form meine eigene Arbeit ist,
2. diese Arbeit weder ganz noch zum Teil an einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat, nicht veröffentlicht worden ist und nicht zur Veröffentlichung eingereicht wurde;
3. dass diese Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden ist;

Kiel, den

.....

Björn Sperling

Danksagung

Freiräume sind beim wissenschaftlichen Arbeiten von außerordentlicher Wichtigkeit, aber auch die Mentalität, dass man jedes Problem meistern kann. Beides konnte mir mein Betreuer Herr Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl vermitteln. Dafür und sein stets offenes Ohr in Verbindung mit seinem fachkundigen Ratschlag, lassen mich Ihm herzlichst danken.

Dr. Tobias Illenseer bin ich für all seine Mühen, Ideen, Anregungen und auch kritischen Fragen – sowie der tollen Zusammenarbeit – außerordentlich dankbar. Mit ihm konnte ich stets meine Probleme und Ideen diskutieren.

Auch ein dankendes Wort an die Arbeitsgruppe sei gesagt, die durch ein unglaublich freundliches und hilfsbereites Arbeitsklima den Alltag so nett und beflügelnd gestaltet hat. Hierbei sei auch Frau Kuhr und Herrn Boll gedankt, die mich von so manch einem bürokratischen Problem und technischen Hindernis befreit haben. Ich stelle mir die Frage, ob Astrophysik ohne wöchentliche „Keksrunde“ überhaupt möglich ist!?

Besonders hervorheben möchte ich Nadine Hullmann, meine Bürogenossin Ileana Hinz und Tobias Illenseer, welche mich durch ihr scharfsinniges Korrekturlesen sehr unterstützt haben. Danke!

Ein herzlicher Dank geht auch an die Familie. Damit meine ich nicht ausschließlich meine lieben Eltern und meine Schwester, sondern alle neu (und alt) dazugewonnen Familienteile! Ihr alle habt uns insbesondere in der stressigen Zeit nach der Geburt unglaublich unterstützt.

In der Diplomarbeit galt mein Dank meiner Freundin Resa. Nun kann ich meiner geliebten Frau danken! Es ist schön, dass ich mir stets Deiner Unterstützung sicher sein kann. Du bist das Glück meines Lebens. Ich liebe Dich. Und natürlich auch Euch, Frederik und Jonathan. Wenn Ihr groß seid, werdet Ihr über diese Zeilen schmunzeln.