

# **Optimale Ausbeutung endlicher Methanhydrat-Vorkommen und ihre Rückwirkungen auf das Klima**

Inaugural-Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors  
der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften  
der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

vorgelegt von  
Diplom-Volkswirtin Lena-Katharina Döpke  
aus Oldenburg

Hamburg, 2013

Gedruckt mit Genehmigung der  
Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät  
der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

Dekan: Prof. Dr. Horst Raff  
Erstberichterstatter: Prof. Dr. Till Requate  
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Martin Quaas

Tag der Abgabe der Arbeit: 14. Mai 2013  
Tag der mündlichen Prüfung: 01. Juli 2013

AUSDAUER WIRD FRÜHER ODER SPÄTER BELOHNT  
– MEISTENS ABER SPÄTER.      (*Wilhelm Busch*)

## **Bedankt.**

Für seine Ausdauer in der Betreuung dieser Arbeit gilt mein herzlicher Dank an erster Stelle meinem Doktorvater, Prof. Dr. Till Requate. Ohne seine Unterstützung und sein Entgegenkommen wäre diese Arbeit wohl niemals fertig geworden. Ich danke auch den Kollegen am Lehrstuhl, insbesondere Johanna Reichenbach und Mathis Klepper, für ausdauernden fachlichen und moralischen Beistand während der gemeinsamen Zeit, sowie den Mädels vom 4. Stock für ausdauernde Mittags- und Kaffeepausen. Prof. Dr. Martin Quaas danke ich für die Übernahme der Zweitbetreuung und, wie auch Wilfried Rickels, für gemeinsame Gespräche, die dem Fortkommen der Arbeit stets sehr zweckdienlich waren. Prof. Dr. Detlef Müller bin ich für die entscheidenden Argumente in der Beweisführung zu Kapitel 3 zu Dank verpflichtet. Meiner Familie, meinen Freunden, Basti, danke ich für die ausdauernde Geduld und den Rückhalt. Die Belohnung folgt – wie meistens – später.

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis . . . . .	iv
Tabellenverzeichnis . . . . .	v
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Eigenschaften der Ressource Methanhydrat</b>	<b>6</b>
2.1 Naturwissenschaftlicher Hintergrund . . . . .	6
2.1.1 Struktur und Stabilität von Gashydraten . . . . .	6
2.1.2 Wirkung auf Hangstabilität und Klimawirksamkeit . . . . .	8
2.2 Methanhydrat als Rohstoffquelle . . . . .	12
2.2.1 Energiepotential der Gashydrate . . . . .	12
2.2.2 Wirtschaftlichkeit der Nutzung von Gashydraten . . . . .	14
<b>3 Optimale Gashydrat-Nutzung bei schädlichen Effekten aggregierter Treibhausgasemissionen</b>	<b>16</b>
3.1 Einführung . . . . .	16
3.2 Modell der Gashydrat-Nutzung mit externen Schäden . . . . .	19
3.2.1 Vereinfachende Annahmen und Notation . . . . .	19
3.2.2 Optimierungsproblem und Bedingungen erster Ordnung . . . . .	21
3.3 Klassifizierung der Optimalen Zeitpfade . . . . .	26
3.4 Spezialfall Linear-Quadratischer Funktionen . . . . .	29
3.4.1 Weitere Charakterisierung des optimalen Abbaus . . . . .	30
3.4.2 Analytische Bestimmung der optimalen Lösung . . . . .	31
3.4.3 Numerische Simulationen - Komparative Dynamik . . . . .	33
3.5 Dezentrale Politikinstrumente . . . . .	40
3.6 Abschließende Bemerkungen . . . . .	43

<b>4</b>	<b>Optimale Gashydrat-Nutzung bei Begrenzung der aggregierten Treibhausgasemissionen</b>	<b>45</b>
4.1	Einführung . . . . .	45
4.2	Modell mit exogener Begrenzung der aggregierten Treibhausgasemissionen . . . . .	47
4.2.1	Vereinfachende Annahmen und Notation . . . . .	47
4.2.2	Optimierungsproblem und Bedingungen erster Ordnung . . . . .	52
4.3	Optimale Zeitpfade der Gashydrat-Nutzung . . . . .	56
4.3.1	Charakteristika der Optimalen Lösung . . . . .	56
4.3.2	Komparative Dynamik . . . . .	61
4.4	Abschließende Bemerkungen . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Gashydrate im optimalen Energiemix</b>	<b>71</b>
5.1	Einführung . . . . .	71
5.2	Modell zum optimalen Energiemix . . . . .	73
5.2.1	Vereinfachende Annahmen und Notation . . . . .	74
5.2.2	Optimierungsproblem und Bedingungen erster Ordnung . . . . .	77
5.3	Optimale Abfolge der Ressourcennutzung . . . . .	79
5.3.1	Vorbereitende Ergebnisse zum optimalen Abbau . . . . .	80
5.3.2	Die Hotelling-Lösung . . . . .	83
5.3.3	Optimale Pfade verschiedener Anfangsbedingungen . . . . .	91
5.4	Abschließende Bemerkungen . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Schluss</b>	<b>100</b>
	<b>Anhang</b>	<b>105</b>
A	Anhang zu Kapitel 3 . . . . .	105
A.1	Herleitung der Formel (3.11) . . . . .	105
A.2	Beweis der Proposition 3.1 . . . . .	105
A.3	Beweis der Proposition 3.2 . . . . .	109
A.4	Sattelpfadstabilität der Optimalen Lösung . . . . .	109
A.5	Allgemeine Form der Expliziten Lösung . . . . .	112

B	Anhang zu Kapitel 4 . . . . .	114
	B.1 Proposition zum Abbaustopp . . . . .	114
	B.2 Optimale Zeitpfade aller Größen . . . . .	115
	B.3 Simulationsergebnisse zu Abschnitt 4.3.2 . . . . .	116
C	Anhang zu Kapitel 5 . . . . .	117
	C.1 Beweis der Proposition 5.1 . . . . .	117
	C.2 Beweis der Proposition 5.2 . . . . .	118
	C.3 Eine dezentrale Lösung . . . . .	119
	Literaturverzeichnis . . . . .	122
	Eidesstattliche Erklärung . . . . .	127

## Abbildungsverzeichnis

2.1	Stabilität von Methanhydraten im Druck-Temperatur-Feld . . . . .	7
3.1	Optimale Zeitpfade (Typ a) bei Variation von $\beta$ . . . . .	34
3.2	Optimale Zeitpfade (Typ b) bei Variation von $\zeta$ . . . . .	37
3.3	Optimale Zeitpfade (Typ c) bei Variation von $d$ . . . . .	39
4.1	Trajektorien der Laisser-Faire-Lösung . . . . .	50
4.2	Der Grenzpfad zur Lösbarkeit des Problems . . . . .	60
4.3	Optimale Zeitpfade und komparative Dynamik . . . . .	64
5.1	Preise und Treibhausgasbestand der Hotelling-Lösung . . . . .	85
5.2	Hotelling-Regionen im $X_1$ - $X_2$ -Raum . . . . .	87
5.3	Zeitpfade der Region I: Hydrat reichlich, Kohle knapp. . . . .	93
5.4	Zeitpfade der Region II: Hydrat knapp, Kohle reichlich. . . . .	95
5.5	Zeitpfade der Region III: Hydrat und Kohle reichlich. . . . .	96
B.1	Exemplarische Zeitpfade aller Größen aus Kapitel 4 . . . . .	115

## **Tabellenverzeichnis**

2.1 Kennziffern zur Schädlichkeit von CO <sub>2</sub> und CH <sub>4</sub> . . . . .	10
B.1 Simulationsergebnisse zu Abbildung 4.3 . . . . .	116



# 1 Einleitung

Der Umgang mit dem anthropogenen Klimawandel und seinen Auswirkungen ist wohl eine der größten gesellschaftlichen Herausforderungen unserer Zeit. Wie im vierten Sachstandsbericht des Weltklimarats (IPCC, *engl.*: Intergovernmental Panel on Climate Change) ausgeführt wird, gibt der Anstieg der globalen Durchschnittstemperatur aus verschiedenen Gründen Anlass zur Sorge und sollte daher möglichst eingedämmt werden. Das Eintreten der Folgen einer globalen Erwärmung – wie der Anstieg der Meeresspiegel durch Abschmelzen von Polkappen und Gletschern, die Bedrohung für Ökosysteme und damit für die Artenvielfalt, das erhöhte Risiko extremer Wetterphänomene wie Hitzewellen, Dürren sowie Überflutungen, die zumeist ohnehin wirtschaftlich schwächere Nationen treffen und so zu einer Erhöhung der globalen Ungleichgewichte beitragen, um nur einige zu nennen – ist laut IPCC (2007b) umso wahrscheinlicher, je stärker die Konzentration von Kohlenstoffdioxid (CO<sub>2</sub>) in der Atmosphäre über das vorindustrielle Niveau ansteigt. Weiterhin werde dieser Anstieg der globalen CO<sub>2</sub>-Konzentration in erster Linie durch die Nutzung fossiler Brennstoffe verursacht, während Änderungen in der Landnutzung zwar ebenfalls einen erheblichen Beitrag leisteten, der jedoch deutlich geringer ausfalle.

Mittlerweile haben sich diese Erkenntnisse – mehr oder weniger – weltweit durchgesetzt. Der Weltklimagipfel 2010 in Cancún, Mexico, wurde als Erfolg für den Klimaschutz gefeiert, weil es gelang, in Form eines internationalen Abkommens die Erwärmung des Klimasystems als wissenschaftlich basiert und ihr Auftreten als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen. Weiterhin wurden die Ergebnisse des IPCC anerkannt und erstmalig das sogenannte Zwei-Grad(2°C)-Ziel festgeschrieben, demzufolge die globale Durchschnittstemperatur lediglich um 2°C vom vorindustriellen Niveau abweichen sollte, um die Wahrscheinlichkeit schwerer Störungen des Klimasystems gering zu halten (siehe UNFCCC, 2011, S. 3). Damit einher geht ein Bewusstsein für die Notwendigkeit eines Paradigmenwechsels hin zu einer kohlenstoffarmen Gesellschaft und dringend benötigter drastischer Einschnitte bei den globalen CO<sub>2</sub>-Emissionen. Denn um dieses 2°C-Ziel mit einer Wahrscheinlichkeit von 67 Prozent (%) einzuhalten, dürften weltweit bis zur Mit-

te dieses Jahrhunderts nur noch 750 Milliarden Tonnen (Mrd. t) CO<sub>2</sub> ausgestoßen werden – ein Wert, der selbst bei Einfrierung der aktuell jährlich emittierten Mengen bereits nach 25 Jahren erreicht wäre – und der steigende Trend bei den globalen CO<sub>2</sub>-Emissionen müsste spätestens bis zum Ende dieses Jahrzehnts umgekehrt werden (vgl. z.B. WBGU, 2009, S. 15). Demgegenüber steht der, abgesehen von einem leichten Rückgang während der Finanzkrise 2009, ungebremste Anstieg der weltweiten CO<sub>2</sub>-Emissionen aufgrund des mit der Weltwirtschaft wachsenden globalen Energiebedarfs. Die Internationale Energieagentur (IEA, *engl.*: International Energy Agency) stellt in ihrem jährlichen Bericht, IEA (2012), dar, dass unter Berücksichtigung aktueller Entwicklungen im Energiesektor und der gegenwärtigen Ankündigungen der Politik die CO<sub>2</sub>-Emissionen und die Energienachfrage bis 2035 weiter ansteigen werden, da die Reduktion, die in den OECD-Ländern erwirkt wird, durch die Entwicklungen in Schwellenländern, insbesondere China, Indien und dem Nahen Osten, mehr als ausgeglichen werden.

Vor diesem Hintergrund eines weltweit steigenden Energiebedarfs und der Notwendigkeit von CO<sub>2</sub>-Einsparungen könnte laut IEA (2011) insbesondere dem Erdgas aufgrund seiner im Vergleich zu anderen fossilen Energieträgern geringen CO<sub>2</sub>-Intensität und seiner weiten geographischen Streuung ein „goldenes Zeitalter“ bevorstehen. Diese Einschätzung basiert auch auf den Beobachtungen und Erwartungen hinsichtlich der Nutzung unkonventioneller Gasvorkommen wie dem sogenannten Schiefergas, das zuvor als unerreichbar galt, den Vereinigten Staaten von Amerika (USA, *engl.*: United States of America) aber aufgrund von Neuerungen in den Verfahren zur Förderung, dem Fracking, seit 2007 einen wahren Gasboom beschert. Die resultierenden US-Gaspreise befanden sich in 2012 auf ihrem Zehnjahrestief, liegen deutlich unter den Gaspreisen in Europa und Asien und könnten es den USA erlauben, sich dauerhaft mit billiger Energie zu versorgen, einhergehend mit einer Senkung der Importabhängigkeit des Landes. Laut IEA (2011) könnte dies sogar dazu führen, dass die USA zum Gasexporteur wird, und bewirkt eine Steigerung der Wettbewerbsfähigkeit der US-Industrie.

Bei dem Energieträger Methan- oder Gashydrat, der Gegenstand der ökonomischen Analyse dieser Arbeit ist, handelt es sich ebenfalls um eine solche unkonventionelle Erdgasquelle, die bisher jedoch noch nicht ausgebeutet wird. Gashydrate sind feste, kristalline Verbindungen von Gas-, zum Beispiel Methan (CH<sub>4</sub>), und Wassermolekülen, die unter bestimmten Bedingungen niedriger Tem-

peraturen und hohen Drucks entstehen und auch nur unter diesen Bedingungen, welche vorrangig an den Kontinentelhängen der Ozeane und in den Permafrostregionen der Arktis gegeben sind, stabil sind. So haben insbesondere Nationen, die nach Artikel 77(1) des Seerechtsübereinkommens der Vereinten Nationen (UNCLOS, *engl.*: United Nations Convention on the Law of the Sea) Zugang zu den an den Kontinentelhängen befindlichen Bodenschätzen haben, ein Interesse, durch Nutzung der Gashydrate wirtschaftlich zu profitieren. Dieses Interesse wird noch verstärkt durch die gewaltigen derartig eingelagerten Mengen  $\text{CH}_4$ , die auf bis zu 10.000 Gigatonnen (Gt) Kohlenstoff geschätzt werden (Kvenvolden, 1988). Mittlerweile existieren auf der ganzen Welt Programme zur Erforschung von Methanhydraten, die darauf abzielen, rentable Verfahren zur Gewinnung des in den Hydraten gelagerten  $\text{CH}_4$  unter Vermeidung von Leckagen zu entwickeln. Die größten Programme zur Erforschung der Methanhydrate haben in der Tat Japan, Südkorea, Indien, China und die USA (zitiert nach Krey et al., 2009, S. 4). So hat das japanische Wirtschaftsministerium (METI, *engl.*: Ministry of Economy, Trade and Industry) jüngst bekannt gegeben, dass Japan mit den weltweit ersten Tests einer systematischen Gewinnung der wertvollen Energieressource beginnt (METI, 2013).

Laut Bohrmann und Suess (2004), die als deutsche Pioniere auf dem Gebiet der Methanhydratforschung bezeichnet werden, sind die wichtigen Fragestellungen im Zusammenhang mit Gashydraten, neben ihrer möglichen Nutzung als Energieressource, auch die Folgewirkung der Methanhydrate auf das Klima, ihre Einbindung in den Kohlenstoffkreislauf, die Zementierung der Kontinentelhänge durch Gashydrate und ihre Stabilität sowie ihre Bedeutung bei einer ganzen Reihe von geologisch-biologisch-geochemischen Prozessen, vor allem im marinen Bereich. Diese Fragestellungen werden im Laufe dieser Arbeit, die drei theoretische Modelle zur Untersuchung von Gashydrat als endliche Ressource und damit Energiequelle vorstellt, berücksichtigt. Zur Vorbereitung ist daher das Kapitel 2 vorangestellt, das zunächst die naturwissenschaftlichen Eigenschaften von Methanhydrat mit Relevanz für die analysierten Modelle ausführlicher erklärt und anschließend auf das Potential der Methanhydrate als Energiequelle der Zukunft eingeht.

Aus der ökonomischen Perspektive betrachtet, könnte sich auch die Erschließung des in der unkonventionellen Quelle Methanhydrat gespeicherten Erdgases

positiv auf die Weltwirtschaft auswirken. Denn zum einen würde die Knappheit fossiler Ressourcen, insbesondere des Erdgases, verringert, zum anderen könnte diese vergleichsweise kohlenstoffarme Energiequelle den Übergang zu einer CO<sub>2</sub>-freien Energieerzeugung begleiten. Von niedrigeren Erdgaspreisen würden zudem nicht nur Länder mit direktem Zugriff auf diese Bodenschätze profitieren, sondern auch die Importeure von Erdgas. Allerdings bleibt zu berücksichtigen, dass die Energiegewinnung aus dem Gas, das in den Hydraten gespeichert ist, von zweierlei negativen Externalitäten begleitet wird. Erstens erzeugt ihre Nutzung ebenfalls Treibhausgasemissionen in Form von CO<sub>2</sub> durch die Verbrennung sowie in Form von CH<sub>4</sub> durch Leckagen im Abbauprozess. Zweitens reduziert ein Abbau der Hydratvorkommen auch deren zementierende Wirkung an den Kontinentalthängen, auf die im Kapitel 2 noch eingegangen wird. Eine Destabilisierung der Kontinentalthänge birgt die Gefahr mariner Hangrutschungen, mit möglicherweise katastrophalen Auswirkungen, insbesondere in Küstenregionen. Die Kapitel 3 und 4 behandeln jeweils theoretische Modelle zur optimalen Ressourcennutzung, die diesen beiden genannten Externalitäten Rechnung tragen, wobei sie sich in der Art und Weise unterscheiden, in der sie die Klimaexternalität berücksichtigen.

Kapitel 3 beinhaltet eine deutschsprachige Fassung des in Kooperation mit Prof. Dr. Till Requate entstandenen Artikels *The Economics of Exploiting Gas Hydrates*, der gegenwärtig zur Veröffentlichung eingereicht ist. Die Berechnungen und Ausführungen dieses Artikels stammen hauptsächlich von der Verfasserin dieser Arbeit, während sie ihrem Co-Autor insbesondere für die Idee zur Modellierung, die Strukturierung des Artikels, die Verbesserung von Formulierungen, insbesondere in der englischsprachigen Version, und stetige richtungweisende Denkanstöße dankbar ist. Das vorgestellte Modell erweitert ein typisches ressourcenökonomisches Modell zur optimalen Nutzung nicht-erneuerbarer fossiler Brennstoffe, welches die Schäden infolge erhöhter Treibhausgasbestände berücksichtigt, um die Fragilität der betrachteten Ressource Gashydrat sowie um die beiden soeben besprochenen Externalitäten. Dabei beziehen wir uns wesentlich auf das von Tahvonen (1997) vorgestellte Modell als Ausgangsposition. In diesem Modell emittiert die Nutzung eines herkömmlichen fossilen Brennstoffs CO<sub>2</sub>, dessen Bestand gesellschaftliche Schäden erzeugt, die durch eine konvexe Schadensfunktion abgebildet wird. Im Zuge der Einleitung zu Kapitel 3 wird diese Quelle neben weiterer relevanter Literatur ausführlicher dargestellt. Entsprechend wird

auch in der Einführung zu den Kapiteln 4 und 5 jeweils ein Überblick über die dort relevante Literatur gegeben.

In Abgrenzung zu Kapitel 3 stellt Kapitel 4 ein Modell vor, das die Wirkung der Klimaexternalität nicht durch eine im Treibhausgasbestand konvexe Schadensfunktion abbildet, sondern deren Ausmaß begrenzt, indem eine maximal zulässige Konzentration der atmosphärischen Treibhausgase exogen vorgegeben wird. Von dieser Veränderung abgesehen werden auch in diesem theoretischen Modell die optimalen dynamische Abbaupfade eines einzelnen, endlichen Ressourcenbestands mit den Eigenschaften von Gashydrat untersucht, um die Unterschiede zu einer herkömmlichen fossilen Ressource zu verdeutlichen. Ein besonderes Augenmerk liegt dabei auf der isoliert betrachteten Wirkung der einzelnen abgebildeten Eigenschaften des Gashydrats und der durch die Obergrenze auferlegten Restriktion. Weiterhin dient das Modell in diesem Kapitel auch der Vorbereitung des nachfolgenden Kapitels 5, in dem ebenfalls mit einer Begrenzung des maximal zulässigen Niveaus der atmosphärischen Treibhausgasemissionen gearbeitet wird.

Kapitel 5 weicht von der alleinigen Betrachtung nur eines endlichen Ressourcenbestands Gashydrat ab und stellt stattdessen auf eine mögliche Rolle der Gashydrate im optimalen Energiemix ab. Das dort entwickelte Modell ist angelehnt an jenes von Chakravorty et al. (2008), in dem unter Vernachlässigung von Kostenfragen drei Energiequellen zur Nutzung verfügbar sind, deren optimale Reihenfolge der Ausbeutung und deren Abbaupfade bestimmt werden. Dabei handelt es sich um zwei fossile Brennstoffe, die anhand ihrer  $\text{CO}_2$ -Intensität unterschieden werden, und eine emissionsfreie alternative Energieform. Dieses Modell wird nun derart modifiziert, dass die weniger  $\text{CO}_2$ -intensive fossile Ressource nun den Bestand der Gashydrate darstellt und entsprechende Eigenschaften besitzt, während die zweite endliche Ressource einen herkömmlichen fossilen Brennstoff darstellt. Im Gegensatz zu den beiden anderen Modellen wird allerdings auf die Berücksichtigung der zweiten Externalität der erhöhten geologischen Risiken verzichtet, um das Modell möglichst einfach zu halten. Die Ausführungen zu den beiden Modellen der Kapitel 4 und 5 sind vollständig in Eigenregie Verfasserin dieser Arbeit entstanden, so dass es nicht notwendig ist, an dieser Stelle den Beitrag etwaiger Co-Autoren beziehungsweise der Verfasserin zu benennen. Das abschließende Kapitel 6 enthält ein umfassendes Fazit zu der gesamten Arbeit.

## 2 Eigenschaften der Ressource Methanhydrat

### 2.1 Naturwissenschaftlicher Hintergrund

Nachdem das einleitende Kapitel 1 bereits anklingen ließ, dass die in den nachfolgenden Kapiteln 3 bis 5 behandelten ressourcenökonomischen Modelle jeweils die Eigenschaften der besonderen Ressource Gashydrat aufnehmen werden, führt dieses Kapitel diese Eigenschaften nun zunächst ein. Dementsprechend widmet sich der Abschnitt 2.1 nun der Darstellung der naturwissenschaftlichen Hintergründe, sofern sie zur Motivation und zum Verständnis des Folgenden notwendig sind. Dazu werden in aller Kürze die Struktur und die Stabilitätseigenschaften des Gashydrats vorgestellt und darauf aufbauend wird auf die gegebenenfalls gesellschaftlich relevanten Attribute der Gashydrate, die klimatischen und geologischen Risiken durch ihre Zersetzung, eingegangen.

#### 2.1.1 Struktur und Stabilität von Gashydraten

Gashydrate sind natürlich auftretende, feste Verbindungen aus Gasmolekülen und Wasser, wobei die Wassermoleküle, sogenannte Strukturmoleküle, eine Käfigstruktur aus Wasserstoffbrückenbindungen aufbauen, in denen Gasmoleküle als sogenannte Gastmoleküle eingeschlossen sind. Daher werden sie auch als Einschlussverbindungen oder Clathrate (*lat.*: clatratus = Käfig) bezeichnet. Je nach Struktur der Käfigverbindungen können Gasmoleküle unterschiedlicher Größe in Gashydraten enthalten sein. Die am häufigsten auftretende Struktur, Struktur I, kristallisiert im kubischen Kristallsystem und kann als Packung von zwei kleinen und sechs großen Polyederkäfigen verstanden werden, in die Gasmoleküle in der Größe von 2,8 bis 4,3 Ångström (Å)<sup>1</sup>, wie zum Beispiel CH<sub>4</sub>, CO<sub>2</sub>, Xenon (Xe) oder Schwefelwasserstoff (H<sub>2</sub>S), eingelagert werden können. Auf der Erde tritt die Struktur I vorrangig in Form von Methanhydraten auf, bei denen das Gastmolekül gerade CH<sub>4</sub> ist.<sup>2</sup> (vgl. Bohrmann und Suess, 2004, S. 134 f.)

---

<sup>1</sup>Ein Å entspricht  $10^{-10}\text{m} = 10^{-7}\text{mm} = 10^{-4}\mu\text{m}$  und ist die typische Größenordnung zur Angabe von Abständen von Atomen in Kristallstrukturen.

<sup>2</sup>Aufgrund dieses häufigen Vorkommens wird in dieser Arbeit diese spezielle Form von Gashydraten untersucht und die Begriffe Gas- und Methanhydrat werden synonym verwendet.

Das Vorkommen dieses natürlichen Gashydrats setzt neben ausreichender Verfügbarkeit des (Faul-) Gases  $\text{CH}_4$  auch die für die Stabilität des Hydrats notwendigen Temperatur-Druck-Verhältnisse voraus, die sich durch relativ niedrige Temperaturen und hohe Drücke auszeichnen (vgl. Bohrmann und Suess, 2004, S. 136). Diese physikalischen Stabilitätsbedingungen für natürliche Methanhydrate sind prinzipiell in den Sedimenten der Ozeanböden – hier entstehen Methanhydrate aufgrund des erhöhten Methanvorkommens durch hohe Planktonproduktion der Ozeane und durch hohe Sedimentationsraten insbesondere an den Kontinentalrändern – sowie in den Permafrostböden der polaren Regionen erfüllt.

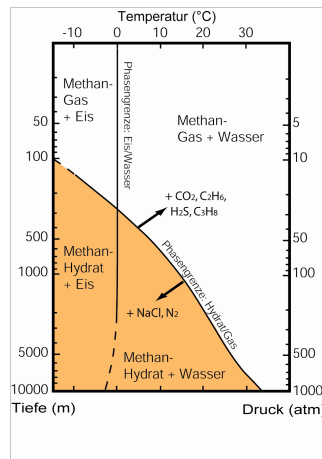


Abbildung 2.1: Stabilität von Methanhydraten im Druck-Temperatur-Feld.  
Quelle: Bohrmann und Suess (2004, S. 136)

Abbildung 2.1 zeigt die Hydrat-Gas-Phasengrenze in einem Druck-Temperatur-Feld, wobei auf der Abszisse die Temperatur, auf der Ordinate die Tiefe in Meter Wassertiefe beziehungsweise der Druck in physikalischer Atmosphäre (atm) abgetragen ist. Die dunkel hinterlegte Fläche stellt hier die Stabilitätszone von Methanhydrat dar. Die Graphik verdeutlicht, dass das Vorkommen von stabilem Methanhydrat erst ab einer Tiefe von etwa 100 m überhaupt möglich ist. Allerdings kann die Anwesenheit von  $\text{H}_2\text{S}$ ,  $\text{CO}_2$  und höheren Kohlenwasserstoffen die Hydrat-Gas-Grenze hin zu höheren Temperaturen und niedrigeren Drücken verschieben, während die Anwesenheit von Stickstoff ( $\text{N}_2$ ) und im Wasser gelösten Salzen sich gegenteilig auswirkt. Aufgrund der geothermischen Tiefenstufe, nach der sich das Ozeanwasser pro 100 m um  $3^\circ\text{C}$  erwärmt, hat die Stabilitätszone

auch eine untere Grenze, unterhalb derer Gashydrat nicht existieren kann und stattdessen freies Gas und Wasser auftreten. Diese untere Grenze ist in diesem Diagramm jedoch nicht markiert. Allerdings geht aus dem Diagramm deutlich hervor, dass an der Erdoberfläche keine Bedingungen existieren, die ein stabiles Auftreten von Methanhydraten ermöglichen würden.

### **2.1.2 Wirkung auf Hangstabilität und Klimawirksamkeit**

Aufgrund des in Abschnitt 2.1.1 beschriebenen recht eingeschränkten Stabilitätsbereichs besteht die Möglichkeit, dass es zu einem Zerfall der Hydratstruktur aufgrund veränderter Umweltbedingungen und infolgedessen zur Freisetzung des darin gespeicherten  $\text{CH}_4$  kommt. In diesem Zusammenhang werden klimatische Auswirkungen des  $\text{CH}_4$  sowie Folgen für die submarine Hangstabilität diskutiert (vgl. z.B. Bohrmann und Suess, 2004; Kvenvolden, 2000; Krey et al., 2009). Wie Abbildung 2.1 ebenfalls verdeutlicht, könnten bereits wenige Grad Erwärmung der Ozeane große Auswirkungen auf die Stabilität der Gashydrate haben, so dass im Zuge der globalen Erwärmung die Freisetzung signifikanter Mengen Methan durch Destabilisierung der Hydrate bewirkt werden könnte (vgl. Krey et al., 2009, S. 4). Dies ist aus zweierlei Gründen problematisch, die im Folgenden diskutiert werden.

Zunächst wirken die Hydrate im Porenraum submariner Sedimente wie eine Art Zement und sorgen so für eine hohe Festigkeit und Stabilität der Meeresedimente (vgl. Bohrmann und Suess, 2004, S. 145). Ihre Zersetzung hätte eine Verringerung der Bodenfestigkeit zur Folge und kann ursächlich für submarine Hangrutschungen und Massenbewegungen von Sedimentpaketen sein, die kurzfristig enorme Mengen mechanischer Energien freisetzen können (vgl. Max, 2003, Kap. 12). So sind Fälle meterhoher Flutwellen belegt, die infolge von Hydratzerfall auftraten. Die sogenannte „Storregata-Rutschung“ vor Südnorwegen beispielsweise verursachte Wellen von 10-12 m Höhe in den dortigen Fjorden und von sogar 20 m Höhe auf den Shetland-Inseln. Entständen derartige Tsunamis heutzutage, könnten diese in dicht besiedelten Küstenregionen erheblichen Schaden anrichten (vgl. Bohrmann und Suess, 2004, S. 147). Selbst wenn die Folgen der Destabilisierung nicht in dieser drastischen Form auftreten, so hätte sie doch Auswirkungen auf die bereits vorhandenen beziehungsweise noch zu entwickelnden Förderstrukturen zur Energiegewinnung nahe den Kontinentalrändern. Von



dieser Art geologischer Risiken geht vermeintlich das größte Gefährdungspotential mit unmittelbaren Auswirkungen für die Gesellschaft aus, insbesondere vor dem Hintergrund der Tendenz, tiefer liegende Rohstofflagerstätten nahe der Kontinentalhänge zu nutzen (vgl. Kvenvolden, 2000, S. 21).

Der zweite problematische Aspekt einer Freisetzung großer Mengen  $\text{CH}_4$  im Zuge einer Destabilisierung der Hydrate ist dessen Klimawirksamkeit.  $\text{CH}_4$  zählt wie  $\text{CO}_2$  zu den langlebigen Treibhausgasen (LLGHG, *engl.*: long-lived greenhouse gases), die als wichtigste Antriebsfaktoren des anthropogenen Klimawandels ausgemacht sind, und weist gegenüber  $\text{CO}_2$  eine höhere Klimawirksamkeit auf, falls es als  $\text{CH}_4$  in die Atmosphäre gelangt. Der Unterschied in der Schädlichkeit beider LLGHG ist auf ihre verschiedenen Konzentrationen in der Atmosphäre zurückzuführen.  $\text{CO}_2$  ist pro Molekül weniger schädlich, weil es in der Atmosphäre bereits sehr hoch konzentriert vorliegt und somit die meisten der von der Erde zurückgestrahlten Langwellen, die von  $\text{CO}_2$  absorbiert werden können, bereits absorbiert werden. Eine Erhöhung der  $\text{CO}_2$ -Konzentration erweitert die Absorptionsbande zwar ein wenig, jedoch können sie nicht mehr wesentlich intensiver werden. Demgegenüber liegt  $\text{CH}_4$  in der Atmosphäre weniger konzentriert vor, auch weil seine Lebensdauer von 12 Jahren, bevor es zu  $\text{CO}_2$  oxidiert, relativ kurz ist. Daher sind dessen Absorptionsbande weniger gesättigt, so dass ein einzelnes Molekül  $\text{CH}_4$  einen größeren Einfluss auf die Strahlungsbilanz der Erde hat als ein einzelnes Molekül  $\text{CO}_2$  (vgl. Archer, 2007, S. 523).

Ein einfaches, rein physisches Maß zur Bezifferung dieses Unterschieds in der Schädlichkeit zweier LLGHG ist das Treibhausgaspotential (GWP, *engl.*: global warming potential), das auch als  $\text{CO}_2$ -Äquivalent bezeichnet wird. Das GWP ist ein Index, der auf dem über die Zeit integrierten durchschnittlichen Strahlungsantrieb (RF, *engl.*: radiative forcing) basiert, der wiederum den Einfluss auf die Energiebilanz der Atmosphäre durch sich ändernde Faktoren relativ zum vorindustriellen Zustand misst. Somit ist das RF von  $\text{CO}_2$  deutlich größer als das von  $\text{CH}_4$ , weil die Abweichung von der vorindustriellen Konzentration des Gases größer ist. Die Strahlungseffizienz (RE, *engl.*: radiative efficiency) hingegen bezieht die Konzentration in der Atmosphäre mit ein und bestimmt so die Schädlichkeit pro ausgestoßenem Molekül. Das GWP von Methan ist definiert als das Verhältnis des absoluten, das heißt über die Zeit integrierten, RF von  $\text{CH}_4$  im

Verhältnis zum absoluten RF des Basisgases CO<sub>2</sub> :

$$GWP_{CH_4} = \frac{\int_0^{TH} RF_{CH_4}(t)dt}{\int_0^{TH} RF_{CO_2}(t)dt} = \frac{\int_0^{TH} RE_{CH_4}C_{CH_4}(t)dt}{\int_0^{TH} RE_{CO_2}C_{CO_2}(t)dt}$$

$C_i(t)$  steht dabei für die zeitabhängige Häufigkeit des Gases  $i$  in der Atmosphäre. Da über die Zeit, jeweils bis zum selben Planungshorizont  $TH$  integriert wird, werden so im GWP auch Unterschiede in der Abbaugeschwindigkeit und in der Persistenz der Gase in der Atmosphäre berücksichtigt. So ergeben sich je nach gewähltem Zeithorizont abweichende Werte für das GWP. Tabelle 2.1 stellt für

	Lebensdauer [Jahre]	Radiative	Radiative	Global Warming Potential (GWP)		
		Forcing [Wm <sup>-2</sup> ]	Efficiency [Wm <sup>-2</sup> ppb <sup>-1</sup> ]	für feste Zeithorizonte		
				20 Jahre	100 Jahre	500 Jahre
Kohlendioxid CO <sub>2</sub>	$a_0 + \sum_{i=1}^3 a_i e^{-t/\tau_i}$ <sup>3</sup>	1,66	0,14x10 <sup>-4</sup>	1	1	1
Methan CH <sub>4</sub>	12	0,48	3,7x10 <sup>-4</sup>	72	25	7,6

Tabelle 2.1: Kennziffern zur Schädlichkeit von CO<sub>2</sub> und CH<sub>4</sub>  
Quelle: Eigene Darstellung nach IPCC (2007b, S. 141, 212f.)

die beiden zu vergleichenden Gase, CO<sub>2</sub> und CH<sub>4</sub>, die entscheidenden Kennziffern zur Einordnung ihrer Schädlichkeit gegenüber: die Lebensdauer, den Strahlungsantrieb, die Strahlungseffizienz und das Treibhausgaspotential für verschiedene Zeithorizonte.<sup>4</sup> Während das GWP des Referenzgases CO<sub>2</sub> definitionsgemäß 1 ist, sinkt aufgrund der relativ kurzen Lebensdauer das Gewicht der höheren Schädlichkeit und damit das GWP von CH<sub>4</sub>, je länger der Zeithorizont gewählt wird, bleibt aber dennoch um ein Vielfaches größer als die des Referenzgases (vgl. IPCC, 2007b, Kap. 2). Dies verdeutlichen die in der Tabelle angegebenen Werte des GWP<sub>CH<sub>4</sub></sub> von 72 bei einem Zeithorizont von 20 Jahren gegenüber 7,6 bei einem Zeithorizont von 500 Jahren.

Zusammenfassend lässt sich hinsichtlich der Klimawirksamkeit der beiden für

<sup>3</sup>Anstelle der Lebensdauer ist für das CO<sub>2</sub> die Funktion angegeben, die das Abklingen der durch Emissionen erhöhten CO<sub>2</sub>-Konzentration in der Atmosphäre beschreibt. Dabei ist  $a_0 = 0,217, a_1 = 0,259, a_2 = 0,338, a_3 = 0,186, \tau_1 = 172,9 \text{ Jahre}, \tau_2 = 18,51 \text{ Jahre}, \tau_3 = 1,186 \text{ Jahre}$ .

<sup>4</sup>Bei der Berechnung des GWP von CH<sub>4</sub> sind hier auch indirekte Effekte, die durch eine Erhöhung der Werte von Ozon und stratosphärischem Wasserdampf im Zuge des Verfalls von CH<sub>4</sub> zu CO<sub>2</sub> als Zwischen- und Beiprodukte entstehen, eingerechnet. Auf den Ablauf dieser chemischen Prozesse wird jedoch nicht weiter eingegangen.

diese Arbeit relevanten Treibhausgase festhalten, dass eine in die Atmosphäre gelangte Einheit  $\text{CH}_4$  größere klimatische Auswirkungen hat als eine Einheit  $\text{CO}_2$  und dass das GWP das gebräuchliche Maß ist, um diese Unterschiede abzubilden.<sup>5</sup>

Die in diesem Abschnitt angesprochene mögliche atmosphärische Freisetzung von  $\text{CH}_4$  aus den Beständen der Gashydrate würde zumeist im Zuge „katastrophaler Ereignisse“ (Archer, 2007, S. 523) stattfinden. Die Abgabe erfolgt dann aufgrund signifikant veränderter Umgebungsparameter durch submarine Erdbeben oder plötzliche Austritte von Gasen, die am Meeresboden sogenannte Pockmarks hinterlassen, schnell im Vergleich zur Lebensdauer des Gases in der Atmosphäre. Dort oxidiert das Gas unter Einfluss von Sonnenlicht zunächst zu  $\text{CH}_3$  und Wasser ( $\text{CH}_4 + \text{OH} \rightarrow \text{CH}_3 + \text{H}_2\text{O}$ ), wobei  $\text{CH}_3$  darauffolgend schnell mit Wasserdampf und anderen Gasen reagiert und  $\text{CO}_2$  bildet. Allerdings ist aufgrund der extrem langsamen Reaktionszeiten der Temperaturen in der Tiefsee auf die Temperaturen an der Oberfläche ( $\sim 100$ - $1000$  Jahre) die wahrscheinlichere Form der Freisetzung des  $\text{CH}_4$  eine „chronische Freisetzung“ (Archer, 2007, S. 523). Diese führt bereits im Ozean zur Oxidation zu  $\text{CO}_2$ , so dass das  $\text{CH}_4$  die Atmosphäre nicht in seiner ursprünglichen Gestalt erreicht und so die größere Klimawirksamkeit scheinbar keine entscheidende Rolle spielt. Da der Ozean und die Atmosphäre aber in einem ständigen  $\text{CO}_2$ -Austausch stehen, ist es für das Gleichgewicht letztlich unerheblich, ob die  $\text{CO}_2$ -Quelle im Ozean oder in der Atmosphäre liegt. Ein höherer  $\text{CO}_2$ -Bestand im Ozean führt dazu, dass dieser langfristig weniger  $\text{CO}_2$  aus der Atmosphäre aufnehmen kann. Daher folgert Archer (2007, S. 523), im Falle der chronischen Freisetzung seien die Auswirkungen aufgrund des akkumulierenden  $\text{CO}_2$  größer als die einer kurzfristig höheren  $\text{CH}_4$ -Konzentration.

Von dieser Einschränkung, die bezüglich der Freisetzung des  $\text{CH}_4$  in die Atmosphäre gemacht werden muss, können jedoch die arktischen Hydrate ausgenommen werden. Diese haben aufgrund ihrer vergleichsweise oberflächennahen Lage einen Sonderstatus bezüglich ihrer Reaktion auf die globale Erwärmung inne, da sich Temperaturen hier schneller übertragen. So kann es in diesem Fall

---

<sup>5</sup>Aus diesem Grund wird sich diese Arbeit auf dieses GWP beziehen, auch wenn es durchaus umstritten ist. So argumentieren beispielsweise Moslener und Requate (2009), dass bei dynamischen Problemen mit mehreren Schadstoffen das einheitliche Maß des GWP aufgrund der unterschiedlichen Abbauraten der verschiedenen Treibhausgase nicht geeignet ist und Optimierungspotential a priori ignoriert.

auch kurzfristig zur atmosphärischen Freisetzung größerer Mengen Methans aufgrund der sich ändernden Umweltbedingungen kommen. Im arktischen Ozean ist diese Freisetzung von  $\text{CH}_4$ , das die Atmosphäre auch erreicht, gegenwärtig beobachtbar (vgl. Archer, 2007, S. 532, Tab. 1). Auf diese Beobachtungen aufbauend, weisen Krey et al. (2009, S. 5) auf die daraus folgende Möglichkeit hin, durch die umsichtige Nutzung dieser Methanhydrate, die wegen ihrer oberflächennahen Lage besonders anfällig für eine Loslösung sind und darüber hinaus vergleichsweise leicht zugänglich sind, den weiteren Klimawandel abzuschwächen.

## 2.2 Methanhydrat als Rohstoffquelle

Neben einer derartigen „präventiven Erschließung“ (Krey et al., 2009, S. 5) aus Gründen des Klimaschutzes, wie sie zum Abschluss des Abschnitts 2.1.2 vorgestellt wurde, sprechen weitere Gründe für eine Nutzung des in den Methanhydraten eingelagerten Gases zur Energiegewinnung, die nachfolgende ausgeführt werden. Ein gewichtiges Argument für die Betrachtung von Methanhydraten als Rohstoffquelle liegt in ihrem sehr großen Energiepotential, dessen Bedeutung der Abschnitt 2.2.1 darstellt und einordnet, bevor im Abschnitt 2.2.2 eine Einschätzung zur wirtschaftlichen Machbarkeit der Gasgewinnung aus Hydraten vorgestellt wird.

### 2.2.1 Energiepotential der Gashydrate

Hinsichtlich einer Nutzung als Rohstoffquelle sind es vor allem die enormen Mengen eingelagerten Gases und die weite geographische Streuung, welche die Methanhydrate attraktiv machen (vgl. Kvenvolden, 2000, S. 18). Die Schätzungen des in Hydraten gebundenen  $\text{CH}_4$  variieren zwar sehr stark, aber der von Kvenvolden (1988) ermittelte Wert von geschätzten derart gespeicherten 10.000 Gt Kohlenstoff gilt seither als allgemeiner Konsens. Schon bei Rechnung mit dieser aus Sicht des Autors recht konservativ geschätzten Menge, wäre die in Methanhydraten gespeicherte Menge Kohlenstoff mehr als doppelt so groß wie die in allen bekannten Vorkommen konventioneller fossiler Energieträger (Kohle, Öl, Erdgas) gespeicherte Menge (vgl. Kvenvolden, 1993, S. 180). Eine neuere Schätzung des hydratgebundenen Kohlenstoffs von Milkov (2004), die auf der Grundlage des aktuellen Wissensstands bezüglich mariner Gashydrate entstanden ist, korrigiert

diesen Konsenswert allerdings deutlich nach unten, auf  $\sim 500 - 2500$  Gt Methan. Hingegen besteht unter den Experten weitgehend Einigkeit darüber, dass – wenn überhaupt – lediglich ein geringer Anteil dieser möglichen 10.000 Gt tatsächlich technisch und ökonomisch sinnvoll nutzbar sind (vgl. z.B. Archer, 2007, S. 532; Kvenvolden, 2000, S. 18; Walsh et al., 2009, S. 815). Denn für einen solchen Abbau kommen grundsätzlich nur die terrestrischen Hydrate der Permafrostregionen sowie die marinen Hydrate der flacheren Ozeane in Frage. Da jedoch ein Tausendstel des so geschätzten Methanhydratbestands bereits ausreichen würde, um genug  $\text{CH}_4$  zur Deckung des gegenwärtigen jährlichen Weltenergiebedarfs zu liefern (vgl. Krey et al., 2009, S. 3), scheint allein die vorhandene Menge dennoch ein gewichtiges Argument zu sein, um Methanhydrat als mögliche zukünftige Energiequelle zu untersuchen. So wird prognostiziert, dass in den nächsten Jahrzehnten etwa 10% des globalen Methanbedarfs aus Methanhydraten gedeckt werden könnten und dass diese so durchaus eine signifikante Rolle im zukünftigen Energiemix spielen könnten (Archer, 2007, S. 532).

Darüber hinaus sprechen die physikalischen Eigenschaften des aus den Hydraten zu gewinnenden Gases,  $\text{CH}_4$ , ebenfalls für eine genauere Untersuchung. Während Erdgas aus herkömmlichen Lagerstätten bis zu 20% weitere Alkane und inerte Gase enthält, besteht das aus Methanhydraten gewonnene Gas aus nahezu reinem  $\text{CH}_4$ . Methan ist der am wenigsten kohlenstoffintensive Kohlenwasserstoff, die chemisch am stärksten reduzierte Form von Kohlenstoff. Demnach setzt die Verbrennung von reinem  $\text{CH}_4$  bei gleichem Energieertrag weniger  $\text{CO}_2$  frei als andere fossile Energieträger beziehungsweise der Energieertrag pro ausgestoßener Einheit  $\text{CO}_2$  ist maximal.<sup>6</sup> Insbesondere vor dem Hintergrund des seit der UN-Klimakonferenz 2010 in Cancún international offiziell anerkannten 2°C-Ziels und den zu dessen Einhaltung notwendigen Reduktionen der  $\text{CO}_2$ -Emissionen (vgl. IPCC, 2007a, Kap. 3) wird – wie einleitend bereits erwähnt wurde – in den großen Mengen  $\text{CH}_4$  aus Hydraten eine Möglichkeit gesehen, die Lücke zwischen Klimaschutzziel und Energienachfrage übergangsweise durch diese vergleichsweise kohlenstoffarme Energieform zu schließen (vgl. Krey et al., 2009, S. 3).

Zuletzt sei noch aufgeführt, dass der Vergleich mit weiteren unkonventionellen

---

<sup>6</sup>Jedes Wasserstoffatom liefert etwa 30% der Energie, die in einem Kohlenstoffatom enthalten ist. So erzeugt  $\text{CH}_4$  2,2 mal so viel Energie wie reiner Kohlenstoff (C), während dieselbe Menge  $\text{CO}_2$  produziert wird. Ferner erzeugt 1 t  $\text{CH}_4$  1,8 mal so viel Energie wie 1 t Kohle, während sogar weniger, 2,75 t statt 3,7 t,  $\text{CO}_2$  produziert wird (vgl. Sinn, 2008, S. 363).

Gasvorkommen ebenfalls für eine Untersuchung der Gashydrate als Energiequelle spricht, da ihre Energiedichte, die das Volumen von  $\text{CH}_4$  pro Volumeneinheit der Ausgangssubstanz misst, um das zehnfache höher ist als bei anderen unkonventionellen Gasquellen und um das zwei- bis fünffache höher als bei herkömmlichem Erdgas (vgl. Kvenvolden, 1993, S. 180). Neben diesen verheißungsvollen Aussichten bezüglich des Energiepotentials dieser vergleichsweise kohlenstoffarmen, in reichlichen Mengen vorhandene Energiequelle, muss jedoch berücksichtigt werden, dass auch eine verstärkte Nutzung von  $\text{CH}_4$  aus Hydraten und der damit verbundene Ausstoß von  $\text{CO}_2$  Auswirkungen auf das Klima hat. So sei es unabdingbar, neben einer unbedingten Vermeidung von  $\text{CH}_4$ -Leckagen beim Abbau auch nach Lösungen für die anthropogenen  $\text{CO}_2$ -Emissionen, beispielsweise durch Technologien der  $\text{CO}_2$ -Abscheidung und Speicherung (CCS, *engl.*: Carbon Capture and Storage), zu suchen (vgl. Bohrmann und Suess, 2004, S. 144).

### 2.2.2 Wirtschaftlichkeit der Nutzung von Gashydraten

Bisher haben lediglich die Autoren Walsh et al. (2009) versucht, einem entsprechenden Fachpublikum das Potential der Energiereserve Methanhydrat durch Publikation in einer ökonomischen Fachzeitschrift zugänglich zu machen, so dass ihre Ergebnisse an dieser Stelle kurz präsentiert werden. Walsh et al. (2009) argumentieren, es handele sich bei einer wirtschaftlich lohnenden Produktion von Gas aus Gashydraten nicht um eine reine Utopie, sondern durchaus um ein realistisches Szenario, insbesondere vor dem Hintergrund steigender Gaspreise und des „atemberaubenden“ (S. 822) Energiepotentials der Hydrate. Sie belegen diese Aussagen anhand von Berechnungen des Break-Even-Gaspreises, der für einen internen Zinsfuß (IRR, *engl.*: internal rate of return) von 15% benötigt würde. Bei den Berechnungen handelt es sich im Wesentlichen um Simulationen mithilfe von eigens an die Eigenschaften von Gashydraten angepassten geographischen Simulationsprogrammen, die auf der Grundlage von Daten kalibriert wurden, die bei Testbohrungen zur technische Machbarkeit gewonnen wurden. Diese Tests zur Gewinnung von Gas aus Hydraten haben laut Walsh et al. (2009) bisher gezeigt, dass das einfache Herabsetzen des Druckes eine effektive Methode sei und dass es beim Abbau von Hydraten immer erst mit einer gewissen Verzögerung zur größtmöglichen Produktionsmenge komme.

Bezüglich der Wirtschaftlichkeit des Abbaus von terrestrischen Hydraten prä-

sentieren die Autoren die Ergebnisse einer Studie auf der Grundlage von CMG-STARS, eines kommerziellen Simulators für Ölvorkommen, der an die Eigenschaften von Hydraten angepasst wurde. In dieser Studie werden zwei verschiedene Klassen von Hydratvorkommen untersucht. Für Hydrate der Klasse 1, die oberhalb einer Zone freien Gases angesiedelt sind, würde zum Erreichen eines IRR von 15% ein Gaspreis in Höhe von etwa 7,65 US-Dollar pro tausend Kubikfuß (\$US/Mscf) benötigt, während für Hydrate der Klasse 2, die keine Zone freien Gases unterhalb der eigentlichen Hydratschicht enthält, ein Preis von etwa 12,25 \$US/Mscf erreicht werden müsste. Um die Wirtschaftlichkeit der Gewinnung von Gas aus marinen Gashydraten zu beurteilen, vergleichen Walsh et al. (2009) die Gasproduktion aus Hydraten mit der Nutzung eines Vorkommens konventionellen Gases gleicher Größe, um die Unsicherheiten, die für beide Arten von Gasvorkommen gelten und durch die Lage bedingt sind, nicht zu beziffern. Das Ergebnis der Simulation zeigt, dass aus Hydraten gewonnenes Gas zwar teurer ist als das konventionell gewonnene Gas, dass sich der Kostenunterschied allerdings lediglich auf etwa 3,50-4,00 \$US/Mscf beläuft und nicht auf ein Vielfaches.

Schließlich stellen die Autoren fest, der Bereich der Gaspreise, der eine Produktion aus Gashydraten rentabel mache, liege nicht viel höher als unter gegenwärtigen Marktbedingungen in Nordamerika. Sie schränken jedoch ein, dass der Umgang mit Gashydraten mit allerlei Unsicherheiten behaftet sei und dass natürlich zunächst konventionelle Gasfelder attraktiver seien, dass aber bei einer entsprechenden Entwicklung des Gaspreises durchaus Gas aus Hydraten gewonnen werden könne. Dabei würden Hydrate der Klasse 1 aufgrund des enthaltenen freien Gases bereits früher attraktiv, während bei den Offshore-Vorkommen die Versorgungssicherheit das vorrangige Motiv zur Rechtfertigung einer Nutzung sei. Zur Einordnung dieser Schlussfolgerungen ist natürlich festzustellen, dass die US-Gaspreise zum Zeitpunkt des Entstehens der Studien mit 10,79 \$US/Mscf (ab Bohrloch im Juli 2008) aufgrund des dortigen neuerlichen Gas-Booms deutlich über dem aktuellen Preis (3,35 \$US/Mscf im Dezember 2012) lagen (vgl. EIA, 2013). Nichtsdestotrotz verdeutlichen die Ergebnisse, dass die rentable Gewinnung von Gas aus den Hydraten nicht völlig utopisch und somit eine theoretische Analyse aus ökonomischer Perspektive sinnvoll ist.

## 3 Optimale Gashydrat-Nutzung bei schädlichen Effekten aggregierter Treibhausgasemissionen

### 3.1 Einführung

Dieses Kapitel präsentiert nun das erste von drei ressourcenökonomischen Modellen, in denen die Eigenschaften von Gashydrat abgebildet werden und ihre Auswirkungen auf die optimalen Abbaustrategien analysiert werden. Dazu ist es zunächst notwendig, die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Eigenschaften der Hydrate möglichst reduziert und einfach abzubilden. Das Modell dieses Kapitels berücksichtigt die beiden naturwissenschaftlich erklärten Eigenschaften, die ökonomisch als negative Externalitäten des Abbaus oder der Nutzung der Gashydrate zu interpretieren sind, ebenso wie die stetige Loslösung der Hydrate aus der Verbundstruktur, die  $\text{CH}_4$ -Emissionen freisetzt. So wird ein endliches Vorkommen arktischer Methanhydrate im Modell als einzige erschöpfbare Ressource betrachtet, deren Bestand nicht nur durch die Förderung sondern auch durch seine selbstständige Auflösung reduziert wird. Weiterhin generiert die Nutzung der Ressource Gashydrat zweierlei volkswirtschaftliche Schäden, sowohl durch die Akkumulation von Treibhausgasen –  $\text{CO}_2$ -Ausstoß durch die Verbrennung sowie  $\text{CH}_4$ -Leckagen im Zuge des Abbauprozesses – als auch durch die Erhöhung des Risikos eines marinen Erdbebens aufgrund einer Destabilisierung der Kontinentalhänge, welche die Entfernung des „Zements“ bewirkt. Um das Modell möglichst einfach zu gestalten, werden mögliche Substitute der Methanhydrate nicht direkt modelliert, sondern lediglich durch die Annahme eines endlichen Prohibitivpreises der Energie auf der Nachfrageseite angedeutet.

Das in diesem Kapitel vorgestellte Modell stützt sich auf eine Klasse theoretischer Literatur, welche die Ausbeutung nicht-erneuerbarer fossiler Ressourcen mit den durch die Emission von Treibhausgasen hervorgerufenen Externalitäten verknüpft. Zu dieser Klasse gehören zum Beispiel Ulph und Ulph (1994), Tahvonen (1997), Hoel und Kverndokk (1996) und Farzin und Tahvonen (1996), von denen im Laufe dieser Arbeit besonders auf Tahvonen (1997) Bezug genommen wird. Mit Ausnahme von Farzin und Tahvonen (1996) haben all diese Studien die



Annahme gemeinsam, die Atmosphäre könne sich nach Einstellung der Emissionen vollständig rehabilitieren und den vorindustriellen Zustand wieder erreichen. Es ist üblich, dies mithilfe einer linearen Regenerationsrate des Treibhausgasbestands zu modellieren. Aufgrund dieser Modellierung der Wirkungsweise von sogenannten Kohlenstoffsinken, die auch in den Modellen dieser Arbeit verwandt wird, beeinflusst der externe Schaden durch den Treibhausgasbestand die insgesamt abgebaute Menge des Ressourcenbestands nicht, sondern wirkt sich lediglich auf den Zeitpunkt des Konsums aus, der tendenziell etwas später eintritt. Der Ressourcenbestand wird angesichts hinreichend hoher Abbaukosten mithilfe von sehr kleinen jedoch stets noch positiven Abbauraten asymptotisch gegen dieselbe Menge reduziert, wie es ohne die Berücksichtigung der Klimaexternalität der Fall wäre. Im Ergebnis stellt diese Literatur hinsichtlich der Ausgestaltung einer optimalen Emissionssteuer fest, dass diese möglicherweise nicht-monoton verläuft, ansteigend in einer ersten Phase, gefolgt von einem Rückgang in der abschließenden Phase. Das Eintreten dieses Ergebnisses setzt allerdings voraus, dass der anfängliche Treibhausgasbestand in der Atmosphäre relativ gering ist. Anderenfalls verlief die optimale Emissionssteuer monoton sinkend über die Zeit.

Darüber hinaus baut dieses Kapitel auch auf eine Reihe von Studien im Spannungsfeld der Endlichkeit der Ressourcen und der Klimaexternalität auf, deren Fokus auf der Erklärung der Schattenwerte der Ressource wie auch des Treibhausgasbestands in der Atmosphäre liegt. Farzin (1992, 1996) und Krautkraemer (1998) liefern beispielsweise die Grundlage für die Interpretation der Schattenpreise des Ressourcenabbaus und der Treibhausgasemissionen in Abschnitt 3.2.2, die für das Modell der Gashydrate noch erweitert werden muss. Weiterhin bezieht sich das hier präsentierte Modell auch auf die Studien von Krautkraemer (1985) und Beltratti et al. (1994), die dem Ressourcenbestand allein durch sein Vorhandensein einen Wert zusprechen. Denn der erwartete Schaden aufgrund geologischer Risiken ist abhängig von dem verbliebenen Ressourcenbestand und so wird indirekt einem positiven Ressourcenbestand ebenfalls ein Wert zugeschrieben.

Im Laufe dieses Kapitels werden nun die gesellschaftlich optimalen Abbaupfade für einen gegebenen Ressourcenbestand von Methanhydraten charakterisiert. Es zeigt sich, dass es aufgrund der permanenten natürlichen Auflösung der Gashydrate unmöglich ist, einen positiven Ressourcenbestand zu erhalten, der im Fall hinreichend großer bestandsabhängiger Abbaukosten aus ökonomischer Sicht er-

strebenswert wäre. Stattdessen wird der Ressourcenbestand früher oder später zwangsläufig vollständig verschwinden. Diese Tatsache führt zu den wesentlichen Ergebnissen des vorliegenden Kapitels. Ist der Prohibitivpreis im Vergleich zu den marginalen gesellschaftlichen Gesamtkosten gering, wird im sozialen Optimum ein gewisser Anteil der Ressourcen in situ belassen und der Abbau wird nicht nur gegen null gehen, sondern ab einem bestimmten Zeitpunkt tatsächlich gleich null sein. Dies ist vernünftig, da ein höherer Bestand der Methanhydrate das Risiko einer Naturkatastrophe verringert. Übersteigt hingegen der Prohibitivpreis diese marginalen gesellschaftlichen Gesamtkosten, so enthält der Schattenpreis der Ressource die wohlbekannte Hotelling-Komponente und das Vorkommen wird in endlicher Zeit vollständig genutzt. Lediglich der Fall der Gleichheit dieser beiden Größen reproduziert für bestimmte Fälle das Standardergebnis der theoretischen Modelle zur Betrachtung externer Effekte des Treibhausgasbestands, in dem die Ressource in unendlicher Zeit auf null reduziert wird und die Abbaumengen – wenn auch sehr klein – stets positiv bleiben. Ein Blick auf die optimalen Politikmaßnahmen zur Dezentralisierung der sogenannten erstbest-optimalen Ergebnisse zeigt, dass aufgrund der zweiten negativen Externalität, die vom noch verbliebenen Ressourcenbestand abhängig ist, zwei verschiedene Instrumente möglich sind. Entweder wird ein Mix aus Instrumenten angewandt, der eine Pigou-Steuer auf CO<sub>2</sub>-Emissionen und eine Subvention auf den noch vorhandenen Ressourcenbestand beinhaltet, oder eine Steuer als alleiniges Instrument wird erhoben, die derart ausgestaltet ist, dass sie beide externen Effekte internalisiert. Die Analyse des Modells zeigt darüber hinaus, dass der gesellschaftliche Schaden durch die globale Erwärmung für die qualitativen Charakteristika der optimalen Abbaupfade nicht wesentlich ist. Ein höherer Schaden durch die Akkumulation der Treibhausgase in der Atmosphäre verlangsamt zwar die Förderung und verzögert den Zeitpunkt, an dem das Vorkommen erschöpft ist, aber letztlich spielt der erwartete Schaden aufgrund der erhöhten Risiken einer Naturkatastrophe die für das Ergebnis entscheidende Rolle.

Die an dieser Stelle angerissenen Ergebnisse werden im Laufe des Kapitels entwickelt, nachdem im Abschnitt 3.2 die zu treffenden Annahmen und die Notation festgelegt sowie Optimalitätsbedingungen hergeleitet und interpretiert werden. Das wesentliche Ergebnis in Abschnitt 3.3 charakterisiert dann die optimale Lösung zunächst in allgemeiner Form, bevor im Abschnitt 3.4 die Analyse der op-

timalen Lösung anhand der Spezifizierung funktionaler Formen fortgeführt wird und einige Beispiele möglicher Zeitpfade präsentiert werden. Der Abschnitt 3.5 untersucht schließlich noch die Möglichkeiten der Dezentralisierung der gesellschaftlich optimalen Lösung, bevor Abschnitt 3.6 das Kapitel abschließt.

## 3.2 Modell der Gashydrat-Nutzung mit externen Schäden

Um im weiteren Verlauf dieses Kapitels die optimalen Abbaupfade eines endlichen Bestands von Gashydraten analysieren zu können, werden in diesem Abschnitt zunächst einige Annahmen hinsichtlich der Abbildung der beschriebenen Eigenschaften getroffen und die für dieses Kapitel gültige Notationen festgelegt. Daraufhin entwickelt Abschnitt 3.2.2 das Optimierungsproblem und die Optimalitätsbedingungen werden aufgestellt sowie interpretiert.

### 3.2.1 Vereinfachende Annahmen und Notation

Das in diesem Kapitel behandelte Modell repräsentiert eine Wirtschaft, die ihren Bruttonutzen aus dem Konsum einer nicht-erneuerbaren Ressource zieht, die im Folgenden als Methanhydrat oder Gashydrat bezeichnet wird und somit dessen Eigenschaften widerspiegelt. Dabei handelt es sich um ein Partialmodell, das lediglich eine einzelne Ressource betrachtet, so dass weitere substitutive fossile Brennstoffe nicht explizit modelliert und daher zunächst vernachlässigt werden.

Der Ressourcenbestand des Gashydrats zum Zeitpunkt  $t$  wird mit  $x_t$  bezeichnet, die Abbaumenge zum Zeitpunkt  $t$  mit  $q_t$ . Des Weiteren wird die atmosphärische Freisetzung von  $\text{CH}_4$  aufgrund der Loslösung von Gas aus der festen Verbundstruktur der Hydrate – sei es durch plötzlich auftretende Blow-Outs oder durch ein chronisches Lösen – als natürliche Abbaurate modelliert, die mit  $\beta$  bezeichnet wird. So geht zu jedem Zeitpunkt  $t$  ein bestimmter Anteil der Ressource, nämlich  $\beta x_t$ , auf natürliche Weise ungenutzt verloren und das gebundene  $\text{CH}_4$ -Gas wird freigesetzt und diffundiert in die Atmosphäre. Die Bestandsänderung des Methanhydrats in situ  $x_t$  über die Zeit ist somit durch die folgende Gleichung beschrieben

$$\dot{x}_t = -q_t - \beta x_t, \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

wobei von einem anfänglicher Ressourcenbestand des Gashydrats von  $x_0$  ausgegangen wird.

Weiterhin geht der Abbau des Gashydrats aufgrund dessen Fragilität stets mit dem Verlust eines bestimmten Anteils des Gases einher, da bisher keine Technologie existiert, die das Auffangen des gesamten gelösten Gases garantieren kann. Den Anteil des gewonnenen Gases, der tatsächlich konsumiert wird, bezeichnet  $\zeta q_t$ , wohingegen der Anteil  $(1 - \zeta)q_t$  einer jeden abgebauten Einheit des Gashydrats unwiederbringlich verloren geht und ebenfalls in Form von  $\text{CH}_4$  in die Atmosphäre diffundiert. Der Konsum des  $\text{CH}_4$  zwecks Energiegewinnung bewirkt durch die Verbrennung eine Umwandlung von  $\text{CH}_4$  zu  $\text{CO}_2$ , dessen Ausstoß in der Atmosphäre ebenfalls den Treibhausgasbestand erhöht. Dieser Bestand der Treibhausgase in der Atmosphäre wird im Folgenden mit  $z_t$  bezeichnet. Er wird gemessen in  $\text{CH}_4$ -äquivalenten Einheiten, so dass durch den Umrechnungsfaktor  $\kappa$  ( $0 < \kappa < 1$ ) von  $\text{CO}_2$ -Einheiten zu  $\text{CH}_4$ -Einheiten das geringere GWP des  $\text{CO}_2$  abgebildet wird. Außerdem wird eine natürliche Regeneration der Atmosphäre angenommen, die einen Abbau der Treibhausgase zu einer konstanten Rate  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) bewirkt. Ist  $z_0$  der anfänglich gegebene Treibhausgasbestand, so wird die Bestandsänderung der atmosphärischen Treibhausgase  $z_t$  zu jedem Zeitpunkt beschrieben durch die Gleichung

$$\dot{z}_t = \zeta \kappa q_t + (1 - \zeta)q_t + \beta x_t - \alpha z_t = K q_t + \beta x_t - \alpha z_t, \quad z(0) = z_0, \quad (3.2)$$

wobei  $K = \zeta \kappa + (1 - \zeta)$  eine Konstante ist.

Der Bruttonutzen, der durch den Konsum des Anteils  $\zeta q_t$  der Gases beziehungsweise der daraus gewonnenen Energie entsteht, ist  $U(\zeta q_t)$ , wobei die Nutzenfunktion mit  $U' > 0$ ,  $U'' < 0$ ,  $U(0) = 0$  die üblichen Eigenschaften besitzt. Weiterhin ist der Grenznutzen nach oben begrenzt, das heißt  $U'(0) = \bar{p} < \infty$ , so dass die Inada-Bedingungen an dieser Stelle keine Gültigkeit besitzen. Die Annahme eines endlichen Grenznutzens der ersten abgebauten Einheit der Ressource ist insofern plausibel, als dass sie in dem betrachteten Partialmodell eine endliche Zahlungsbereitschaft für die erste Einheit der Ressource widerspiegelt, da von alternativen Energieformen zu einem bestimmten Preis  $\bar{p}$  ausgegangen werden kann. Diesem Bruttonutzen stehen die zwei Externalitäten gegenüber, die der Abbau und die Nutzung der nicht-erneuerbaren Ressource Gashydrat erzeugen. Einerseits erhöhen die Emissionen den Bestand der atmosphärischen Treibhausgase und verursachen so mit der globalen Erwärmung einhergehende gesellschaftliche Schäden, welche im Folgenden durch die Schadensfunktion  $D(z_t)$  abgebildet

werden. In Bezug auf diese Schadensfunktion gelten mit  $D' > 0$ ,  $D'' \geq 0$  und  $D'(0) = 0$  ebenfalls die üblichen Annahmen. Andererseits destabilisiert der Abbau der Gashydrate die Kontinentalhänge und erhöht die Gefahr eines (maritimen) Erdbebens aufgrund von Hangrutschungen, das möglicherweise sogar Tsunamis hervorrufen kann. Der erwartete Schaden durch derartige geologische Risiken wird mit  $G(x_t)$  bezeichnet und ist negativ abhängig vom Bestand der Gashydrate in situ, so dass die Annahme von  $G' < 0$ ,  $G'' > 0$  und  $G(x_0) = 0$  für diese Schadensfunktion plausibel ist. Der Bruttonutzen aus dem Abbau und der Verbrennung des aus den Hydraten gewonnenen Gases muss also nicht nur um die bestandsabhängigen Abbaukosten  $C(q_t, x_t) = q_t c(x_t)$  mit  $c'(x_t) < 0$  und  $c''(x_t) \geq 0$  reduziert werden, sondern auch um die beiden soeben beschriebenen gesellschaftlichen Schäden  $D(z_t)$  und  $G(x_t)$ , um den gesellschaftlichen Nettonutzen oder auch die Wohlfahrt zu erhalten, die durch  $[U(\zeta q_t) - C(q_t, x_t) - G(x_t) - D(z_t)]$  beschrieben ist. Mit einer konstanten Diskontrate  $\rho$  besteht die Aufgabe des sozialen Planers, die im folgenden Abschnitt in Form eines Optimierungsproblems präsentiert wird, nun darin, die Abbaurrate  $q_t \geq 0$  optimal zu wählen, so dass die intertemporale Wohlfahrt maximiert wird.

### 3.2.2 Optimierungsproblem und Bedingungen erster Ordnung

Nachdem die Annahmen und die Modellierung im vorigen Abschnitt 3.2.1 vollständig beschrieben wurden, kann das Optimierungsproblem des sozialen Planers nun wie folgt ausgedrückt werden.

$$\max_{\{q_t\}_{t \geq 0}} W = \int_0^{\infty} [U(\zeta q_t) - C(q_t, x_t) - G(x_t) - D(z_t)] \cdot e^{-\rho t} dt$$

unter den Nebenbedingungen (3.1), (3.2),  $x(t) \geq 0$ ,  $z_t \geq 0$  und  $q(t) \geq 0$ .

Zur Herleitung der Optimalitätsbedingungen dieses Problems ist es zunächst zweckdienlich, die Bewegungsgleichung des Treibhausgasbestands (3.2) in Einheiten der durch die Nutzung einer Einheit der Ressource durchschnittlich ausgestoßenen Treibhausgase zu formulieren. Dies ermöglicht ein Umskalieren der Gleichung (3.2), so dass der Treibhausgasbestand nun als  $y_t = z_t/K$  definiert ist. Gilt weiterhin  $\gamma = \beta/K$ , wobei  $\beta < K$  gilt, so kann die Änderung des atmo-

sphärischen Treibhausgasbestands durch die Gleichung

$$\dot{y}_t = q_t + \gamma x_t - \alpha y_t \quad (3.3)$$

dargestellt werden, wobei  $0 < \gamma < 1$ . Da  $K$  lediglich eine Zusammenfassung konstanter Parameter darstellt, wird die Dynamik durch diese Skalierung nicht beeinflusst und es ist vollkommen unproblematisch, im Folgenden mit  $y_t$  anstelle von  $z_t$  zu arbeiten. Demzufolge kann für das bisher beschriebene Problem die folgende Hamiltonfunktion in laufenden Werten aufgestellt werden

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^c(x_t, y_t, q_t, \lambda_t, \mu_t) = & U(\zeta q_t) - q_t c(x_t) - D(y_t) - G(x_t) \\ & + \lambda_t(-q_t - \beta x_t) + \mu_t(q_t + \gamma x_t - \alpha y_t), \end{aligned}$$

wobei  $\lambda_t$  die Ko-Zustandsvariable des Ressourcenbestands in situ bezeichnet, welche die dynamische Restriktion bezüglich der Entwicklung des Ressourcenbestands berücksichtigt. Sie kann als Schattenwert einer Einheit der Ressource in situ, als der Schattenpreis für den Abbau einer zusätzlichen Einheit der Ressource oder auch als Knappheit der Ressource interpretiert werden. Demgegenüber bezeichnet  $\mu_t$  die Ko-Zustandsvariable des atmosphärischen Treibhausgasbestands und ist der dynamischen Entwicklung des Bestands der Treibhausgase zugeordnet. Äquivalent kann sie als Schattenwert einer ausgestoßenen Einheit Treibhausgas oder als „Knappheitsrente der Umwelt“ (*engl.*: „environmental scarcity rent“, Farzin, 1996) verstanden werden. Da es sich bei einem erhöhten atmosphärischen Treibhausgasbestand um ein öffentliches Übel handelt, muss sein Schattenwert  $\mu_t$  stets nicht-positiv sein.<sup>7</sup> Im Gegensatz dazu hat die Ressource in situ durchaus einen Wert, so dass ihr Schattenwert  $\lambda_t$  positiv ist, solange es sich lohnt, Einheiten im Boden für den späteren Konsum zurückzuhalten, allerdings kann auch dieser Schattenwert negativ werden.

Unter Anwendung des Pontrjagin’schen Maximumprinzips lassen sich für die optimale (innere) Lösung mit  $q_t \geq 0$  eine statische (3.4) und zwei dynamischen (3.5) und (3.6) Bedingungen erster Ordnung herleiten, die wie auch die Transversalitätsbedingungen (3.7) und (3.8) neben den beiden Zustandsgleichungen (3.1)

---

<sup>7</sup>Formal folgt dies aus der Kombination der nachfolgend dargestellten Optimalitätsbedingungen von (3.6) und der Transversalitätsbedingung (3.8). Wäre  $\mu_t$  positiv, so würde es exponentiell mit einer Rate steigen, welche die Diskontrate übersteigt, so dass die Transversalitätsbedingung verletzt würde.

und (3.3) zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein müssen.

$$\frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial q} = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta U'(\zeta q_t) - c(x_t) - \lambda_t + \mu_t \leq 0, \quad (= 0 \text{ wenn } q_t > 0) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial x} = -\dot{\lambda} + \rho\lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_t = (\beta + \rho)\lambda_t + q_t c'(x_t) - \gamma\mu_t + G'(x_t) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}^c}{\partial y} = -\dot{\mu} + \rho\mu \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu}_t = (\alpha + \rho)\mu_t + D'(y_t) \quad (3.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \quad (3.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\rho t} = 0 \quad (3.8)$$

Die Bedingung (3.4) fordert zunächst die Gleichheit von Grenznutzen des Ressourcenkonsums,  $\zeta U'(\zeta q_t)$ , und den durch den Abbau entstehenden gesellschaftlichen Grenzkosten, die sich aus den bestandsabhängigen Kosten für den Abbau einer Einheit  $c(x_t)$  und zwei weiteren Komponenten zusammensetzen, welche die externen Kosten durch Abbau ( $\lambda_t$ ) und Emissionen ( $-\mu_t$ ) repräsentieren.

Die Gleichung (3.6) fordert die intertemporale Effizienz der Akkumulation der Treibhausgase in der Atmosphäre, indem sie – wie üblich – zu jedem Zeitpunkt Grenzkosten und Grenznutzen gleichsetzt, die durch das Verzögern des Abbaus einer Einheit beziehungsweise der damit verbundenen Emission von Treibhausgasen entsteht. In Kombination mit der Transversalitätsbedingung (3.8), kann die Differentialgleichung (3.6) folgendermaßen gelöst werden:

$$\mu(t) = - \int_t^{\infty} e^{-(\alpha+\rho)(\tau-t)} D'(y(\tau)) d\tau \quad (3.9)$$

Diese Darstellungsweise verdeutlicht, dass der Schattenpreis des aggregierten Treibhausgasbestands in der Atmosphäre genau in den zusätzlichen gesellschaftlichen Kosten besteht, die der Ausstoß einer weiteren Einheit Treibhausgase verursacht. An dieser Stelle sind diese marginalen externen Kosten gegeben durch den auf den Zeitpunkt  $t$  abdiskontierten Grenzschaten, den der Ausstoß zum Zeitpunkt  $t$  verursacht sowie in alle folgenden Perioden überträgt.

Nachdem Gleichung (3.9) genau die Gestalt annimmt, wie sie aus der Literatur bekannt ist (vgl. z.B. Tahvonen, 1997), bleibt der Schattenpreis der Ressource in situ  $\lambda_t$  als die interessantere Variable, da sie einige der Besonderheiten unseres Modells widerspiegelt. Auch die Gleichung (3.5) fordert intertemporale Effizi-

enz, in diesem Fall des Ressourcenabbaus. Die Lösung dieser Differentialgleichung zeigt uns die Opportunitätskosten unserer erschöpfbaren Ressource Gashydrat als Summe dreier konzeptionell verschiedener Einflüsse:

$$\lambda(t) = \phi e^{(\beta+\rho)t} - \int_t^\infty e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} [q_\tau c'(x_\tau) + G'(x_\tau)] d\tau + \gamma \int_t^\infty e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} \mu_\tau d\tau \quad (3.10)$$

Dabei ist  $\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t e^{-(\beta+\rho)t}$  der Gegenwartswert der Nutzungskosten, die durch die endliche Verfügbarkeit der Gashydrate hervorgerufen werden. Dieser ist immer dann null, wenn der Ressourcenbestand aufgrund der bestandsabhängigen Abbaukosten und des Schadens durch geologische Risiken nicht vollständig genutzt wird (vgl. Krautkraemer, 1985, 1998). Somit ist die erste Komponente in (3.10), also  $\phi e^{(\beta+\rho)t}$ , die hinlänglich als Hotelling-Rente oder auch physische Knappheitsrente interpretiert wird, nicht existent, wenn der Abbau der Ressource gestoppt wird, obwohl noch ein Restbestand vorhanden ist. Ist diese Komponente physischer Knappheit hingegen positiv, wird sie exponentiell mit der spezifischen Diskontrate des Gashydrats,  $(\beta + \rho)$ , wachsen, da auch der natürliche Abbau zur Reduktion des Bestands beiträgt.

Die zweite Komponente dieses Schattenwerts resultiert direkt aus der Bestandsabhängigkeit der Abbaukosten und des geologischen Schadens, den sogenannten Bestandseffekten. Da die Reduktion des Ressourcenbestands um eine Einheit sowohl die marginalen Abbaukosten als auch den marginalen Schaden durch geologische Risiken erhöht, bewirkt deren Abbau zum Zeitpunkt  $t$  zukünftige Kosten. Diese zukünftigen Kosten schaffen einen Wert des Nicht-Konsumierens der Gashydrate in situ, welcher mit einem positiven Schattenwert einhergeht (vgl. Sweeney, 1993). Während der Einfluss der marginalen Abbaukosten mit Rückgang des Abbaus ebenfalls verschwindet, da der Ausdruck  $q_\tau c'(x_\tau)$  verschwindet, wenn  $q_\tau$  gegen null geht, hängt der Anstieg in dem Grenzscha- den  $G'(x_\tau)$  nicht von der Abbaurate ab. Die Erhöhung des Risikos einer Hangrutschung ist irreversibel und so bleibt dieser letzte positive und streng monoton ansteigende Teil des zweiten Terms von (3.10) bestehen.

Der dritte Term in (3.10) stellt ein Alleinstellungsmerkmal des hier vorgestellten Modells zur Nutzung von Gashydraten dar. Da  $\mu_t$  negativ ist, gilt dies auch für die gesamte dritte Komponente, die damit dem Wert des Nicht-Konsumierens



entgegen wirkt und ihn teilweise aufhebt. Sie kann als marginale Kosten des Zurückhaltens einer Einheit der Hydrate interpretiert werden. Diese Kosten des Nicht-Konsumierens resultieren aus dem natürlichen Abbau des Gashydrats, der nicht nur die Reduktion des Bestandes beschleunigt, sondern auch in jeder Periode mit  $\gamma x_t$  zum Bestand der Treibhausgase in der Atmosphäre beiträgt. Dies wiederum erhöht die Schattenkosten der Emissionen und damit auch die zukünftigen Kosten der Ressourcennutzung. Somit erhöht eine im Boden zurückgehaltene Einheit der Ressource die Schattenkosten des Treibhausgasbestands. Diese Tatsache verringert wiederum den Schattenwert der Ressource in situ.

Einsetzen von (3.9) in (3.10) und die Anwendung des Theorems von Fubini, um das doppelte Integral zu eliminieren, ermöglichen die Darstellung der Opportunitätskosten (3.10) in Abhängigkeit der beiden Externalitäten.<sup>8</sup>

$$\lambda(t) = \phi e^{(\beta+\rho)t} \tag{3.11}$$

$$- \int_t^\infty e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} \left[ q_\tau c'(x_\tau) + G'(x_\tau) + D'(y_\tau) \frac{\gamma (1 - e^{-(\alpha-\beta)(\tau-t)})}{\alpha - \beta} \right] d\tau$$

Aus dieser Formulierung des Schattenpreises der Ressource (3.11) lässt sich direkt ablesen, dass in Bezug auf den Schattenpreis der Ressource die beiden Externalitäten in gegensätzliche Richtungen wirken. Während die beiden vom Ressourcenbestand abhängigen Effekte den Schattenwert in die Höhe treiben ( $-G' > 0, -c' > 0$ ), wirkt der vom Treibhausgasbestand abhängige Schaden reduzierend ( $-D' < 0$ ). In dieser Hinsicht verhindert der Abbau einer weiteren Einheit Gashydrats den natürlichen Abbau, der direkt die Atmosphäre schädigen würde.

Zuletzt müssen die optimal gewählten Pfade auch die Transversalitätsbedingungen (3.7) und (3.8) erfüllen. Aufgrund des zugrunde gelegten unendlichen Zeithorizonts, sind diese Grenztransversalitätsbedingungen streng genommen keine notwendigen Optimalitätsbedingungen (vgl. Feichtinger und Hartl, 1986, Satz 2.3, S. 39). Sind sie jedoch bei Konkavität der maximierten Hamiltonfunktion  $H^0(x_t, y_t, \lambda_t, \mu_t)$  erfüllt, so ist dies hinreichend für die Optimalität einer Lösung  $q_t^*$ , welche die notwendigen Bedingungen erfüllt (vgl. Feichtinger und Hartl, 1986, Satz 2.4, S. 42). Die maximierte Hamiltonfunktion  $H^0$  erhalten wir durch Auflösen

---

<sup>8</sup>Die Herleitung anhand von Fubinis Theorem findet sich im Anhang A.1.

von (3.4) nach  $q^*(x_t, \lambda_t, \mu_t)$  mit  $\frac{\partial q_t^*}{\partial x_t} = \frac{c'(x_t)}{\zeta^2 U''(\zeta q_t)}$  und anschließendem Einsetzen in die Hamiltonfunktion. Ihre Konkavität in  $x$  und  $y$  ist garantiert, falls die Hessematrix negativ semi-definit ist. Im vorliegenden Fall ist die Konkavität von  $H^0$  aufgrund der bestandsabhängigen Abbaukosten in der Zielfunktion nicht grundsätzlich gegeben, sondern nur wenn

$$-\frac{c'(x_t)^2}{\zeta^2 U''(\zeta q_t)} \leq q_t c''(x_t) + G''(x_t)$$

angenommen wird. Ist diese implizite Bedingung an die Grenzkosten  $c(x_t)$  erfüllt, so ist eine Lösung optimal, wenn die Bedingungen (3.4) bis (3.8) erfüllt sind (vgl. „Arrow sufficiency theorem for infinite horizon problems“, Seierstad und Sydsæter, 1987, Theorem 14, S. 236). Ist die Konkavität von  $H^0$  hingegen nicht gegeben, so können laut Seierstad und Sydsæter (1987, Theorem 16, S. 244) die Grenztransversalitätsbedingungen dennoch als notwendige Optimalitätsbedingungen aufgeführt werden, wenn „gewisse Wachstumsbeschränkungen“ (Feichtinger und Hartl, 1986, S. 187) erfüllt sind, die den Einfluss der Zustandsvariablen auf die Zielfunktion beschränken. Farzin und Tahvonen (1996, S. 519) zeigen, dass diese „gewissen Wachstumsbeschränkungen“ zutreffen, wenn  $c'(0)$ ,  $D(y_0 + x_0)$ ,  $D'(y_0 + x_0)$ ,  $G(0)$  und  $G'(0)$  endlich sind. Somit ist die global optimale Lösung eindeutig bestimmt, wenn ein eindeutiger Kandidat existiert, der den Bedingungen (3.1), (3.3) sowie (3.4) bis (3.8) genügt.

### 3.3 Klassifizierung der Optimalen Zeitpfade

Auf der Grundlage der im vorigen Abschnitt hergeleitet und diskutierten Optimalitätsbedingungen kann nun die optimale Lösung des Problems für die verschiedenen auftretenden Fälle charakterisiert werden. Diese Klassifizierung geschieht im Wesentlichen durch die Proposition 3.1, die eine Einteilung der möglichen Fälle vornimmt.

Nach Bedingung (3.4) können entlang des optimalen Abbaupfads zwei verschiedene aus Umschaltbedingung und Kontrollvariable bestehende Systeme auftreten:

$$\text{System 1: } q_t > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \zeta U'(\zeta q_t) - c(x_t) - \lambda_t + \mu_t = 0 \quad (3.12)$$

$$\text{System 2: } q_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \zeta U'(\zeta q_t) - c(x_t) - \lambda_t + \mu_t < 0 \quad (3.13)$$

Ist die Abbaurate  $q_t$  positiv, so muss die Umschaltbedingung (3.4) mit Gleichheit erfüllt sein, wohingegen nicht abgebaut wird ( $q_t = 0$ ), falls die Differenz aus maximaler Zahlungsbereitschaft und gesellschaftlichen Grenzkosten negativ ist.

Eine Besonderheit des Modells zum Abbau von Gashydrat ist weiterhin die „Eigendynamik“ des dynamischen Systems. Wenn ab einem Zeitpunkt  $T$  ein Teil der Ressource in situ belassen wird, das heißt  $x_T > 0$ , so wird der Bestand sich aufgrund des natürlichen Abbaus weiter verringern und dabei der Bestand der Treibhausgase erhöhen. Für  $t \geq T$  entwickeln die Bestände sich daher nach den Regeln

$$x_t = x_T e^{-\beta(t-T)} \quad \text{für alle } t \geq T \quad (3.14)$$

$$y_t = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} x_T [e^{-\beta(t-T)} - e^{-\alpha(t-T)}] + y_T e^{-\alpha(t-T)} \quad \text{für alle } t \geq T \quad (3.15)$$

Aufgrund dieser Eigendynamik können die üblichen Methoden der Analyse des Abbaus nicht-erneuerbarer Ressourcen nicht unbedingt direkt angewendet werden, da nicht alle Reaktionen des Systems eine Folge ökonomischer Aktivität sind und somit nicht vollständig kontrolliert werden können. Beispielsweise existiert kein positiver Ressourcenbestand im Steady-State, da dieser Bestand entweder durch den Abbau oder durch den natürlichen Abbau unausweichlich gegen null konvergiert, das heißt  $x_t \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

Davon abgesehen ist es unausweichlich, dass der Abbau in endlicher oder unendlicher Zeit eingestellt wird, so dass  $q_t \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  gilt. Gleichung (3.3) liefert dann  $y_t \rightarrow 0$  und aus (3.6) und (3.8) folgt  $\mu_t \rightarrow 0$ . Somit gilt im Steady-State für alle Variablen  $q_\infty = x_\infty = y_\infty = \mu_\infty = 0$ , nur nicht für den Schattenwert der Ressource, der für  $t \rightarrow \infty$  gegen einen positiven Wert  $\lambda_\infty = -\frac{G'(0)}{\beta + \rho}$  konvergiert. Dieser Wert ist entscheidend für die Charakterisierung der verschiedenen optimalen Abbaupfade, die durch die nun folgende Proposition zusammengefasst werden.

**Proposition 3.1** *Die folgenden drei Fälle charakterisieren die optimale Lösung des Problems zum Abbau von Gashydraten:*

**Fall i:** *Wenn*

$$\zeta \bar{p} > -\frac{G'(0)}{\beta + \rho} + c(0), \quad (3.16)$$

*gilt, so existiert ein endlicher Zeitpunkt  $T < \infty$ , so dass  $q_t = x_t = 0$  und  $y_t = y_T e^{-\alpha(t-T)}$  für alle  $t \geq T$  (**Lösung vom Typ a**).*

**Fall ii:** Wenn

$$\zeta\bar{p} < -\frac{G'(0)}{\beta + \rho} + c(0), \quad (3.17)$$

gilt, so existiert ein endlicher Zeitpunkt  $T < \infty$ , so dass  $q_t = 0$  für alle  $t \geq T$  und  $x_T > 0$ , wobei  $x_t$  und  $y_t$  sich für  $t \geq T$  nach (3.14) beziehungsweise (3.15) entwickeln (**Lösung vom Typ b**).

**Fall iii:** Wenn

$$\zeta\bar{p} = -\frac{G'(0)}{\beta + \rho} + c(0), \quad (3.18)$$

gilt, so können zwei Möglichkeiten auftreten. Entweder ist die Lösung ebenfalls vom Typ b) oder  $q_t > 0$  für alle  $t \geq 0$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_t = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = 0$  (**Lösung vom Typ c**).

**Beweis** Der Beweis zu dieser Proposition findet sich in Anhang A.2.

Der Fall i) steht im Einklang mit den in der Literatur üblichen Ergebnissen. Ist die maximale Zahlungsbereitschaft für die letzte Einheit der Ressource größer als die (gesellschaftlichen) Grenzkosten ihres Abbaus, so existiert eine positive Hotelling-Rente. Demnach ist  $\phi$  in (3.11) positiv und diese Komponente der Knappheitsrente  $\phi e^{(\beta+\rho)t}$  in (3.11) steigt exponentiell an. Daher müssen die Opportunitätskosten die maximale Zahlungsbereitschaft zwingend schneiden und der Ressourcenbestand wird in endlicher Zeit erschöpft.

Im Fall ii) ist die marginale Zahlungsbereitschaft für eine Einheit Gashydrat hinreichend klein beziehungsweise die gesellschaftlichen Grenzkosten der Nutzung sind hinreichend hoch, so dass die reine Knappheitsrente der Ressource null ist ( $\phi = 0$ ). Daher lohnt sich der Abbau nur bis zu einem bestimmten Bestand  $x_T > 0$  und endet damit in endlicher Zeit  $T < \infty$  mit einem positiven Restbestand im Boden zum Zeitpunkt  $T$ . Allerdings ist der Ressourcenbestand im Steady-State  $x_\infty$  aufgrund des natürlichen Abbaus gleich null, obwohl zum Zeitpunkt  $T$  ein Teil der Ressource im Boden belassen wird. Während in ähnlichen Modellen zum Abbau erschöpfbarer Ressourcen unter Berücksichtigung von Schäden durch akkumulierende Treibhausgasemissionen der Ressourcenbestand asymptotisch gegen ein positives Niveau reduziert wird (z.B. Tahvonen, 1997), wird dieser kritische Wert in Fall ii) unseres Modells in endlicher Zeit erreicht, der Abbau eingestellt und der Bestand wird seiner selbstständigen Dynamik überlassen.

Fall iii) ist der sogenannte Knife-Edge-Fall, in dem die gesellschaftlichen Grenzkosten im Steady-State genau dem Prohibitivpreis entsprechen. Zu erwarten wäre,

dass dieser Wert nur asymptotisch in unendlicher Zeit erreicht würde, wobei die Abbauraten ebenfalls in unendlicher Zeit verschwindend klein würden (Lösung vom Typ c). Dies kann in der Tat zu treffen, muss aber aufgrund des natürlichen Abbaus der Ressource nicht unbedingt der Fall sein. Neben der asymptotischen Lösung kann es auch optimal sein, den Abbau in endlicher Zeit abubrechen und einen kleinen Teil der Ressource nicht abzubauen (Lösung vom Typ b). Leider ist es auf diesem allgemeinen Niveau der Analyse unmöglich, für den Fall iii) die Bedingungen genauer zu spezifizieren, die eine Unterscheidung ermöglichen würden. Unter der Annahme linear-quadratischer funktionaler Formen, wie sie im folgenden Abschnitt 3.4 getroffen wird, ist es hingegen möglich, eine solche Bedingung herzuleiten.

### 3.4 Spezialfall Linear-Quadratischer Funktionen

Um das dynamische System über die Proposition 3.1 hinausgehend analysieren zu können, werden für die Darstellungen dieses Abschnitts funktionale Formen angenommen. Die Betrachtung dieses Spezialfalls ermöglicht im Abschnitt 3.4.1 eine weitere Charakterisierung der optimalen Lösung, indem für den Fall iii) die Grenze zwischen dem Auftreten der Lösung vom Typ b) oder c) spezifiziert wird. Daraufhin zeigt Abschnitt 3.4.2 den Lösungsweg zur Bestimmung der optimalen Zeitpfade auf, bevor diese im Abschnitt 3.4.3 mit einem Fokus auf die besonderen Elemente unseres Modells für alle Typen von Lösungen vorgestellt werden.

Die Nutzenfunktion wird als quadratische Funktion der Abbaurate angenommen. Sie lautet

$$U(q_t) = (\bar{p} - \frac{b}{2}q_t)q_t, \quad (3.19)$$

so dass die Nachfrage linear ist. Die Stückkosten des Abbaus werden als linear im Ressourcenbestand angenommen:

$$c(x_t) = c_1 - c_2x_t \quad (3.20)$$

Die Funktionen der gesellschaftlichen Schäden sind quadratisch, mit

$$G(x_t) = \frac{f}{2}(x_0 - x_t)^2 \quad (3.21)$$

für den erwarteten volkswirtschaftlichen Schaden, der durch geologische Risiken

hervorgerufen wird, und

$$D(y_t) = \frac{d}{2}y_t^2 \quad (3.22)$$

für den durch einen erhöhten Treibhausgasbestand hervorgerufenen Schaden.<sup>9</sup>

### 3.4.1 Weitere Charakterisierung des optimalen Abbaus

Die soeben eingeführten Spezifizierungen ermöglichen für den Fall iii) der Proposition 3.1 eine Formulierung von Bedingungen für das Eintreten der Lösung vom Typ b) oder c). In der Argumentation spielt die Ableitung der gesellschaftlichen Kostenfunktion nach der Zeit zum Zeitpunkt des Umschaltens von System 1 zu System 2, die durch  $\dot{\lambda}_T - \dot{\mu}_T + c'(x_T)\dot{x}_T$  gegeben ist, eine besondere Rolle. Wäre diese Ableitung negativ, so könnte ein solches Umschalten nicht erfolgen, da die gesellschaftlichen Kosten sofort nach dem Abbaustopp wieder unter den Prohibitivpreis  $\zeta\bar{p}$  fallen würden. Dies wiederum würde bedeuten, dass der Abbau erneut lohnenswert würde. Demnach kann die Lösung nicht vom Typ b) sondern muss vom Typ c) sein, falls ein Umschalten zum System 2 mit  $\dot{\lambda}_T - \dot{\mu}_T + c'(x_T)\dot{x}_T < 0$  einhergeht. Ist hingegen  $\dot{\lambda}_T - \dot{\mu}_T + c'(x_T)\dot{x}_T > 0$ , muss die Lösung vom Typ b) sein. Nach diesen Vorüberlegungen können wir nun die Grenze zwischen den beiden Lösungstypen des Falls iii) in Proposition 3.1 genauer spezifizieren.

**Proposition 3.2** *Es gelte (3.18), das heißt  $\zeta\bar{p} = -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$ , und die einbezogenen Funktionen seien durch (3.19) bis (3.22) gegeben. Dann ist die optimale Lösung*

i) vom Typ c), falls

$$\rho + \beta \leq \gamma - \beta \quad (3.23)$$

oder falls

$$\rho + \beta > \gamma - \beta \quad \text{und} \quad \frac{\gamma}{(\alpha - \beta)} \frac{D''}{(\alpha + \beta + \rho)} \leq \frac{G'' - c'(2\beta + \rho)}{2\beta + \rho - \gamma} \quad (3.24)$$

ii) vom Typ b), anderenfalls.

**Beweis** Der Beweis zu dieser Proposition findet sich im Anhang A.3.

---

<sup>9</sup>Um die Bedingungen besser interpretieren zu können, werden im Folgenden weiterhin  $D'', G''$  und  $-c'$  anstelle der Parameter  $d, f$  und  $c_2$  verwandt.

Die Proposition stellt klar, dass ein asymptotischer Abbaupfad, der sich für  $t \rightarrow \infty$  dem Wert null annähert, optimal sein wird, wenn entweder die spezifische Diskontrate des Gashydrats  $(\beta + \rho)$  hinreichend klein ist, oder wenn die Steigung des Grenzschadens des Treibhausgasbestands relativ klein ist im Vergleich zur Steigung der gesellschaftlichen Grenzkosten des Abbaus. Trifft dies nicht zu, wird der Abbau in endlicher Zeit gestoppt und ein Teil der Ressource in situ belassen.

Für die angenommenen funktionalen Formen klassifiziert Proposition 3.1 in Kombination mit Proposition 3.2 alle qualitativen Formen der Lösung, die auftreten können, vorausgesetzt es ist im Zeitpunkt  $t = 0$  überhaupt optimal, mit dem Abbau zu beginnen. Denn mit einem anfänglich hinreichend großen Treibhausgasbestand  $y_0$  kann es optimal sein, im Zeitpunkt  $t = 0$  nicht abzubauen und zunächst abzuwarten, bis sich der Treibhausgasbestand ausreichend abgebaut hat. Im Anschluss können die Pfade dann wie zuvor charakterisiert werden. Im nächsten Abschnitt folgt nun die kurze Darstellung der Randbedingungen, die benötigt werden, um für die optimalen Pfade der Lösungen vom Typ a), b) und c) bestimmen zu können.

### 3.4.2 Analytische Bestimmung der optimalen Lösung

Unter Verwendung unserer Annahmen bezüglich der funktionalen Formen (3.19) bis (3.22) kann das dynamische System unseres Problems als ein 4x4-System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben werden und eine explizite Bestimmung der Zeitpfade ist möglich. Anhang A.4 zeigt, dass alle drei Typen der Lösung die Eigenschaften eines Sattelpfads in ihrer letzten Phase entwickeln, während Anhang A.5 die allgemeine Form der Lösung in Abhängigkeit von den Randbedingungen formuliert.

Bei Lösungen des Typs c), die sich durch ein positives  $q_t^*$  für alle  $t$  auszeichnet, hat die sattelpfadstabile Lösung über den gesamten Planungshorizont Gültigkeit. Zum Bestimmen der inneren Lösung des Systems genügen die Anfangsbedingungen bezüglich der Bestände,  $x(0) = x_0$  und  $y(0) = y_0$ , mit deren Hilfe die zwei zu den negativen Eigenwerten des linearen Gleichungssystems gehörenden Konstanten berechnet werden.<sup>10</sup>

In Bezug auf Lösungen vom Typ a) oder b) kann hingegen die Phase des Systems 1, des positiven Abbaus ( $q_t > 0$  für  $t < T$ ), als ein Übergang betrachtet

---

<sup>10</sup>Eine detaillierte Beschreibung der Berechnung findet sich in Anhang A.5.

werden, der zu den korrekten Startwerten des Sattelpfads in der letzten Phase (System 2) hinführt. Um diesen Übergangspfad zu bestimmen, werden alle vier Eigenwerte des linearen Gleichungssystems benötigt. Weiterhin bedarf es fünf Bedingungen, um das Gleichungssystem nach den vier in der allgemeinen Lösung enthaltenen Konstanten  $A_i$  und den Zeitpunkt des Umschaltens  $T$  zu lösen. Neben den beiden Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $y(0) = y_0$  muss die Stetigkeit der Umschaltbedingung (3.4) sowie der Ko-Zustandsvariablen  $\mu_t$  des Treibhausgasbestands, die durch (3.9) gegeben ist, im Zeitpunkt  $T$  erfüllt sein. Die Linearität der Grenzschäden in den Bestände, die aufgrund der gewählten Spezifikation der Funktionen gegeben ist, ermöglicht durch Einsetzen von (3.14) und (3.15) in (3.9) die Darstellung des Schattenpreises  $\mu_t$  zum Zeitpunkt  $T$  als

$$\mu_T = -\frac{d(\gamma x_T + (\alpha + \beta + \rho)y_T)}{(2\alpha + \rho)(\alpha + \beta + \rho)}. \quad (3.25)$$

Die fünfte Bedingung, die für die Lösung des Systems benötigt wird, ist für die beiden Typen von Lösungen unterschiedlich. Für Typ a) ist sie einfach durch  $x(T) = 0$  gegeben, während für Typ b) auch die Stetigkeit der Ko-Zustandsvariable des Ressourcenbestands garantiert sein muss. Da die Komponente der reinen Knappheitsrente im Typ b) verschwindet, das heißt  $\phi = 0$  ist, kann dieser Wert nun durch Einsetzen von (3.14) und (3.15) in (3.11) gewonnen werden:<sup>11</sup>

$$\lambda_T = \frac{fx_0}{\beta + \rho} - \frac{fx_T}{2\beta + \rho} - d\gamma \frac{2\gamma x_T + (2\beta + \rho)y_T}{(2\alpha + \rho)(\alpha + \beta + \rho)(2\beta + \rho)} \quad (3.26)$$

Damit liegen nun alle Voraussetzungen zur vollständigen Berechnung der optimalen Zeitpfade aller drei Typen der Lösung vor. Allerdings können sie lediglich numerisch bestimmt werden, da auch die vier Konstanten in der optimalen Lösung vom Zeitpunkt  $T$  abhängig sind und dieser in einer Summe aus vier Exponentialfunktionen jeweils im Exponenten auftritt. Aus diesem Grund kommen wir im nächsten Abschnitt zu der numerische Bestimmung der optimalen Zeitpfade.

---

<sup>11</sup>Eine alternative Formulierung als Problem mit endlichem, aber unbekanntem Endzeitpunkt  $T$  und dem Restwert  $S(T)$  würde zu denselben Bedingungen führen. Der Restwert wäre hier der Schaden, der trotz Einstellung des Abbaus ab dem Zeitpunkt  $T$  anfiel. Dieser Schaden wäre gegeben durch  $S(x_T, y_T) = \int_T^\infty e^{-\rho(\tau-T)}(G(x_\tau) + D(y_\tau))d\tau = -\frac{f}{2} \left[ \frac{x_T^2}{2\beta+\rho} - \frac{2x_T x_0}{\beta+\rho} + \frac{x_0^2}{\rho} \right] - \frac{d}{2} \left[ \frac{2\gamma^2 x_T^2}{(2\alpha+\rho)(\alpha+\beta+\rho)(2\beta+\rho)} + \frac{2\gamma x_T y_T}{2(2\alpha+\rho)(\alpha+\beta+\rho)} + \frac{y_T^2}{(2\alpha+\rho)} \right]$ . Und die Schattenwerte zum Zeitpunkt  $T$  müssten dann den Ableitungen  $S_{x_T}$  beziehungsweise  $S_{y_T}$  entsprechen.



### 3.4.3 Numerische Simulationen - Komparative Dynamik

Aufbauend auf den Überlegungen des vorangegangenen Abschnitts 3.4.2 zur Bestimmung der expliziten Lösung optimaler Zeitpfade präsentiert dieser Abschnitt nun kurz einige numerische Simulationen. Im Fokus der hier vorgestellten komparativen Dynamik stehen dabei die Besonderheiten des Modells beziehungsweise der Ressource Gashydrat. Insbesondere werden die Wirkungsweisen des selbstständigen natürlichen Abbaus der Ressource  $\beta$ , der im Zuge des Abbauprozesses auftretenden Verlustrate  $(1 - \zeta)$  beziehungsweise Auffangrate  $\zeta$  sowie des bestandsabhängigen irreversible Schadens durch geologische Risiken  $G(x_t)$ , repräsentiert durch seinen Schadensparameter  $f$ , untersucht.

Zunächst variieren wir mit der natürlichen Abbaurate  $\beta$  denjenigen Parameter, der – wie wir gesehen haben – überhaupt die Existenz einer Lösung vom Typ b) mit einem positiven Restbestand der Ressource  $x_T$ , bei dessen Erreichen der Abbau gestoppt wird, bewirkt. Unabhängig davon ist ceteris paribus grundsätzlich eine schnellere Reduktion des Ressourcenbestands zu beobachten, je größer die Rate des natürlichen Abbaus  $\beta$  ist. Diese Tatsache ist nicht ausschließlich auf den natürlichen Abbau des Gashydrats zurückzuführen, sondern auch auf erhöhte Abbauraten in den ersten Perioden. Die intuitive Erklärung ist wie folgt: Um dem Verlust der Gashydrate durch den selbstständigen Abbau, der schädliche  $\text{CH}_4$ -Emissionen induziert, zuvorzukommen, ist es optimal, den sich auflösenden Bestand der Ressource schnell durch Abbau und Konsum zu reduzieren, auch wenn dies weitere  $\text{CO}_2$ -Emissionen verursacht.

Abbildung 3.1 illustriert diesen Effekt einer Variation des selbstständigen Abbaus auf die Dynamik des System für die Lösung vom Typ a), das heißt die Ressource wird in endlicher Zeit vollständig erschöpft, da die Parameter die Bedingung  $\zeta \bar{p} > \frac{f x_0}{\beta + \rho} + c_1$  erfüllen. Für eine relativ große Rate des selbstständigen Abbaus ( $\beta = 0,02$ ) beschreiben die durchgehenden Linien in den Diagrammen jeweils die optimalen Zeitpfade des Ressourcenbestands (a1), des Treibhausgasbestands (a2), der Knappheiten der Ressource (a3) sowie der Umwelt (a4) und der Abbaumengen (a5). Die gestrichelten Linien entsprechen jeweils den Zeitpfaden, die sich bei einer deutlich geringeren Rate des selbstständigen Abbaus ( $\beta = 0,002$ ) ergeben. Wie auch in den nachfolgenden Abbildungen 3.2 und 3.3 beschreiben dabei jeweils die kräftig eingezeichneten Linien die Pfade während der Phase des positiven Abbaus (System 1), wohingegen die dünn eingezeichneten

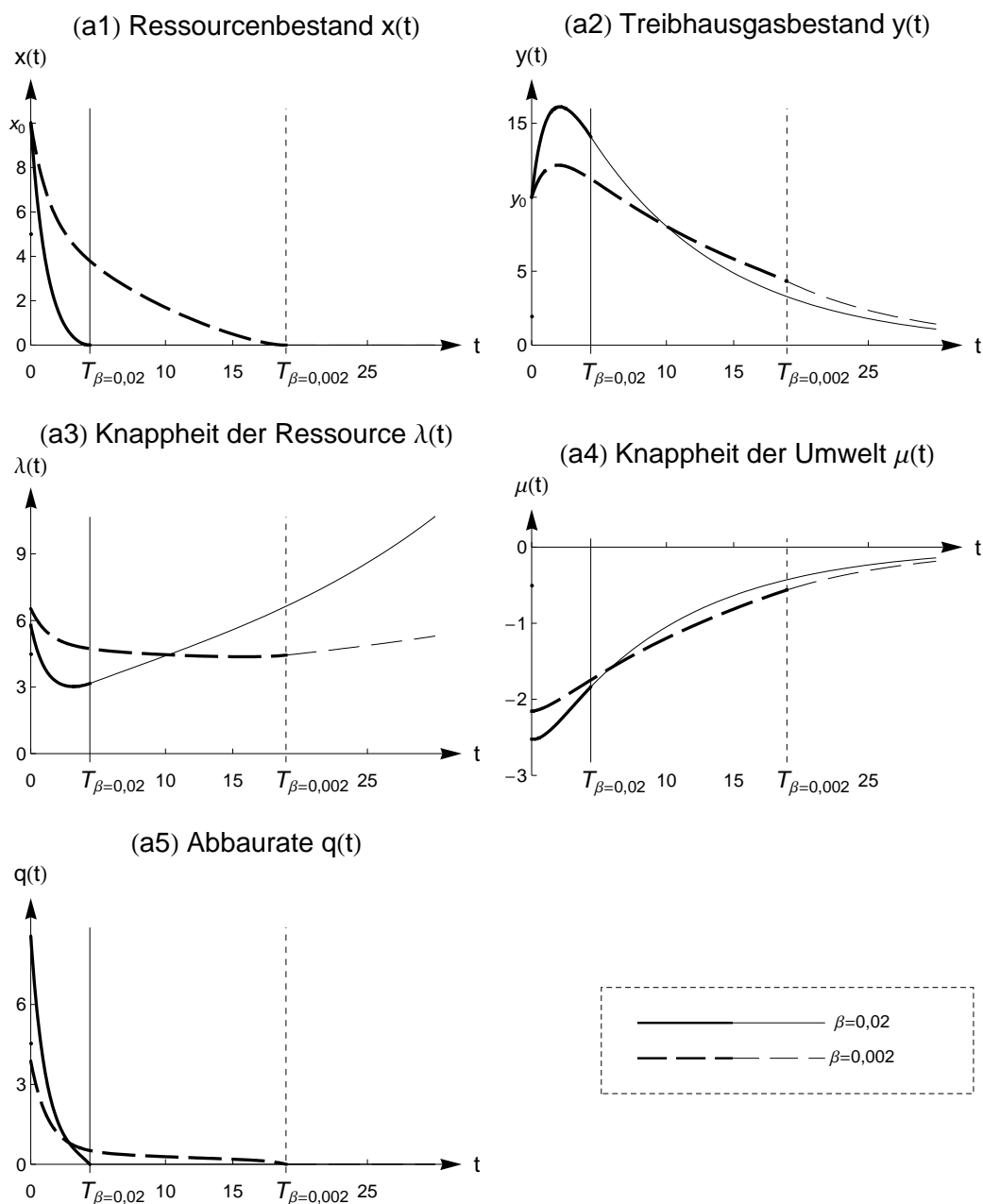


Abbildung 3.1: Optimale Zeitpfade (Typ a) bei Variation der natürlichen Abbaurrate des Gashydrats  $\beta$ .

Linien die Phase der Eigendynamik des Systems 2 im Anschluss an den Abbaustopp markieren. Offensichtlich geht die schnellere Erschöpfung des Gashydratbestands im Falle eines hohen natürlichen Abbaus  $\beta$  (siehe Diagramm (a1)) mit einem erhöhten Treibhausgasbestand (a2) und somit auch einer erhöhten Knappheit der Umwelt  $|\mu_t|$  (a4) einher, während die geringere Knappheit der Ressource  $\lambda_t$  (a3) die höheren Abbaumengen  $q_t$  (a5) erklärt. Aufgrund der schädigenden Auswirkungen des natürlichen Abbaus auf das Klima sind die Gashydrate in der Erde umso weniger wertvoll je größer die Abbauraten  $\beta$ . Dies reduziert die gesellschaftlichen Abbaukosten und führt so zu anfänglich höheren Abbauraten. Aus dem Verlauf der Knappheit der Ressource in der Phase des Systems 2 (nach dem Zeitpunkt  $T$ ), die im Fall des größeren natürlichen Abbaus deutlich schneller ansteigt, lässt sich außerdem schließen, dass die Komponente der rein physischen Knappheitsrente  $\phi$  in diesem Fall größer ist und so schnelleren exponentiellen Anstieg bewirkt.

Um die Wirkung des (zusätzlichen) irreversiblen Schadens  $G(x_t)$  zu untersuchen, böte sich eine Variation des Schadensparameters  $f$  an. Grundsätzlich kann festgestellt werden, dass eine Erhöhung des irreversiblen Schadens aufgrund geologischer Risiken höhere gesellschaftliche Grenzkosten mit sich bringt und dass es daher zu einem tendenziell geringeren Abbau kommt, um das Auftreten dieses Schadens möglichst aufzuschieben. In Bezug auf den Zeitpunkt des Umschaltens  $T$  (von System 1 auf System 2) hat dies für Lösungen der Typen a) und b) unterschiedliche Auswirkungen.<sup>12</sup> Für Lösungen vom Typ a) bedeutet eine höherer Schadensparameter  $f$  einen langsameren Ressourcenabbau, so dass die vollständige Erschöpfung der Ressource später erreicht wird (höherer Wert von  $T$ ). Für Lösungen vom Typ b) führt hingegen ein höheres  $f$  zu einem größeren zu konservierenden Ressourcenbestand  $x_T$ , so dass nur ein kleinerer Teil der Ressource abgebaut wird und daher auch der Umschaltzeitpunkt  $T$  früher erreicht wird (kleiner Wert von  $T$ ).

Ein ähnlicher Effekt ist auch für Variationen der Auffangrate  $\zeta$  festzustellen. Je kleiner der Anteil der abgebauten Menge ist, der tatsächlich zur Energiegewinnung genutzt werden kann, desto kleiner ist der (maximale) Grenznutzen und somit auch die akzeptablen gesellschaftlichen Grenzkosten. Dies führt zu geringe-

---

<sup>12</sup>Der Grund hierfür liegt in den unterschiedlichen Definitionen des Zeitpunkts  $T$ : Für Lösungen des Typs a) ist  $T$  bestimmt durch  $T = \min\{T' | x_{T'} = 0\}$ , während in b) der Zeitpunkt  $T$  bestimmt ist durch das Erreichen des Prohibitivpreises durch die marginalen Abbaukosten.

ren optimalen Abbauraten und zu einem höheren restlichen Ressourcenbestand  $x_T$  zum Zeitpunkt  $T$ , wenn der Abbau gestoppt wird. Demnach wirkt eine vergleichsweise geringe Auffangrate  $\zeta$  beziehungsweise eine hohe Verlustrate  $(1 - \zeta)$  wie eine vergleichsweise größerer Schaden durch geologische Risiken  $G(x_t)$ . In Lösungen vom Typ b) lässt es außerdem die Dauer des positiven Abbaus sinken, während der Zeitraum bis zur Erschöpfung des Bestands in Lösungen vom Typ a) ausgeweitet wird.

Abbildung 3.2 zeigt diese Auswirkungen verschiedener Auffangraten für Lösungen vom Typ b), das heißt die Parameter erfüllen  $\zeta \bar{p} < \frac{fx_0}{\beta + \rho} + c_1$  und der Abbau  $q_t$  wird bei noch vorhandenem Restbestand in endlicher Zeit eingestellt. Nun beschreiben die durchgezogenen Linien den Fall vollständiger Effektivität, das heißt keinerlei Verlust im Zuge des Abbauprozesses ( $\zeta = 1$ ), während die gestrichelten Linien eine Verlustrate von 0,3 ( $\zeta = 0,7$ ) repräsentieren. Es zeigt sich, dass die Phase des Systems 1 bei Vorliegen einer Verlustrate deutlich kürzer ist als bei  $\zeta = 1$ , da auch nur ein geringerer Anteil der Ressource konsumiert wird (b1). Außerdem verdeutlicht die Abbildung, dass aufgrund des geringeren Grenznutzens lediglich geringere Werte der marginalen externen Kosten  $\lambda_t$  und  $|\mu_t|$  (b3,b4) möglich sind. Dementsprechend wird der Bestand der Gashydrate im Fall einer hohen Verlustrate langsamer reduziert und der zurückgelassene Bestand in situ  $x_T$  wird früher erreicht. Darüber hinaus steigt der Treibhausgasbestand  $y_t$  nicht so stark an (b2). Allerdings muss an dieser Stelle die Definition des Treibhausgasbestands  $y_t$ , der in durchschnittlichen Emissionen pro abgebauter Einheit gemessen wird, als  $z_t/K$  berücksichtigt werden, da die variierte Größe  $\zeta$  hier im Nenner eingeht. Um die tatsächlichen Treibhausgasbestände für beide  $\zeta$  vergleichbar zu machen, ist es zweckdienlich diese wieder gemessen in CH<sub>4</sub>-Äquivalenten darzustellen, das heißt  $z_t = Ky_t = (1 - \zeta(1 - \kappa))y_t$ . Aus diesem Grund enthält die Abbildung 3.2 ein Schaubild (b6) für den Zeitpfad des Treibhausgasbestands  $z(t)$ , das veranschaulicht, dass der Treibhausgasbestand in der Atmosphäre bei höheren Verlustraten trotz der kleineren Abbaurate stärker ansteigen kann, weil im Zuge des Abbaus auch CH<sub>4</sub> freigesetzt wird. Außerdem zeigt das Diagramm der Knappheit der Ressource (b3), dass dieses  $\lambda_t$  weder gegen null konvergiert noch ins Unendliche steigt sondern gegen einen positiven endlichen Wert  $\frac{fx_0}{(\beta + \rho)}$  konvergiert. Dieser ist zwar für beide Werte von  $\zeta$  derselbe, aber aufgrund der geringeren Zahlungsbereitschaft im Fall geringerer Abbaueffektivität wird der Abbau dort

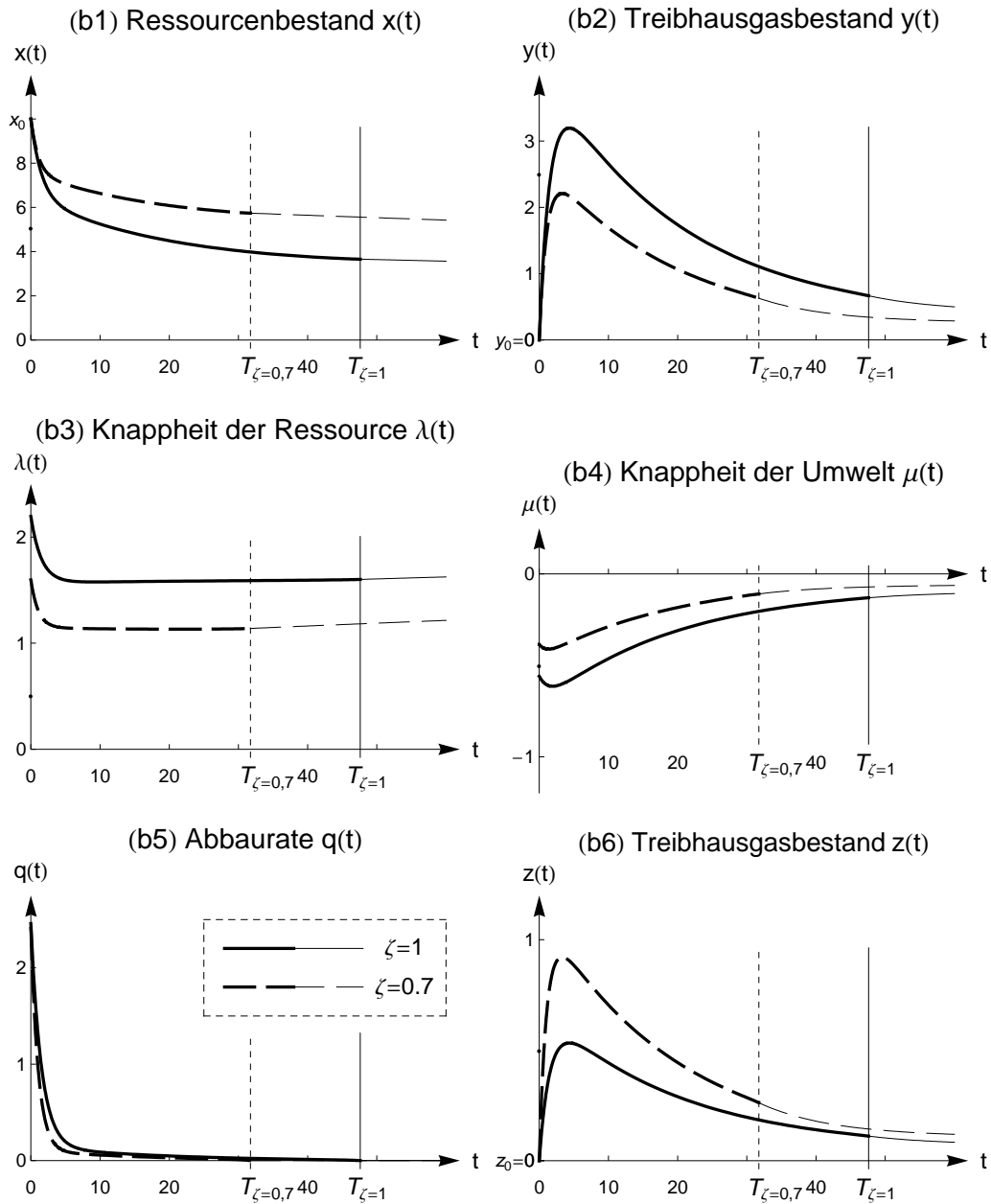


Abbildung 3.2: Optimale Zeitpfade (Typ b) bei Variation der Auffangraten  $\zeta$ .

früher abgebrochen.

Um ein vollständiges Bild der auftretenden Lösungen zu zeichnen, wird nun auch die letzte Möglichkeit der Lösung vom Typ c) illustriert. Für diese Knife-Edge-Lösung, die ohnehin lediglich für einen sehr eingeschränkten Bereich von Parametern auftreten kann, welche die Bedingungen (3.18), (3.23) und (3.24) erfüllen, ist eine Variation der Parameter  $\beta$ ,  $\zeta$  oder  $f$  wenig sinnvoll, da dies sofort zu einer Verletzung der Bedingung (3.18) führen würde. Die Variation des Parameters  $d$  in der Funktion des gesellschaftlichen Schadens durch globale Erwärmung  $D(y_t)$  ermöglicht jedoch einige weitere Einsichten in die Dynamik des Systems. In Abbildung 3.3 repräsentieren die durchgezogenen Linien jeweils einen großen Schadensparameter ( $d = 0,2$ ) und die gestrichelten Linien einen vergleichsweise kleinen ( $d = 0,03$ ). Da in Lösungen vom Typ c) die optimale Lösung über den gesamten Planungshorizont in System 1 bleibt, sind die Pfade durchgängig kräftig eingezeichnet. Im Wesentlichen reproduziert ein Anstieg in der Schädlichkeit des Treibhausgasbestands die aus der Literatur bekannten Ergebnisse. Die Schaubilder der Zeitpfade des Ressourcenbestands  $x_t$  (c1) und der Abbauraten  $q_t$  (c5) zeigen, dass bei einer größeren Schädlichkeit der Konsum der Ressource und so auch die damit einhergehenden Emissionen von Treibhausgasen tendenziell in spätere Perioden verschoben wird. Dementsprechend steigt der Bestand der Treibhausgase  $y_t$  (c2) bei Betrachtung des geringeren Schadensparameters zunächst schneller, hat einen höheren Spitzenwert und fällt anschließend aufgrund der dann geringeren Abbauraten auch schneller wieder.

Bemerkenswert ist an dieser Stelle vor allem der Verlauf der Knappheit der Ressource (c3), die für große Schadensparameter in der frühen Phase des Ressourcenabbaus deutlich negative Werte annimmt. Dieser negative Schattenwert des Gashydrats in situ, die Schattenkosten, die durch den natürlichen Abbau und die daraus resultierenden Emissionen hervorgerufen werden, würden isoliert betrachtet für eine schnelle Reduktion des Ressourcenbestands sprechen. Da sich bei einem großen Schadensparameter  $d$  die CO<sub>2</sub>-Emissionen jedoch ebenfalls schädlicher auswirken – widergespiegelt durch einen betragsmäßig hohen Schattenwert des atmosphärischen Treibhausgasbestands  $\mu_t$  (c4) – und das Vorzeichen von  $\lambda_t$  erst aus diesem betragsmäßig großen  $\mu_t$  resultiert, wird diese Tendenz vollständig ausgeglichen und der Abbau der Ressource für hohe Schadensparameter tatsächlich gebremst.

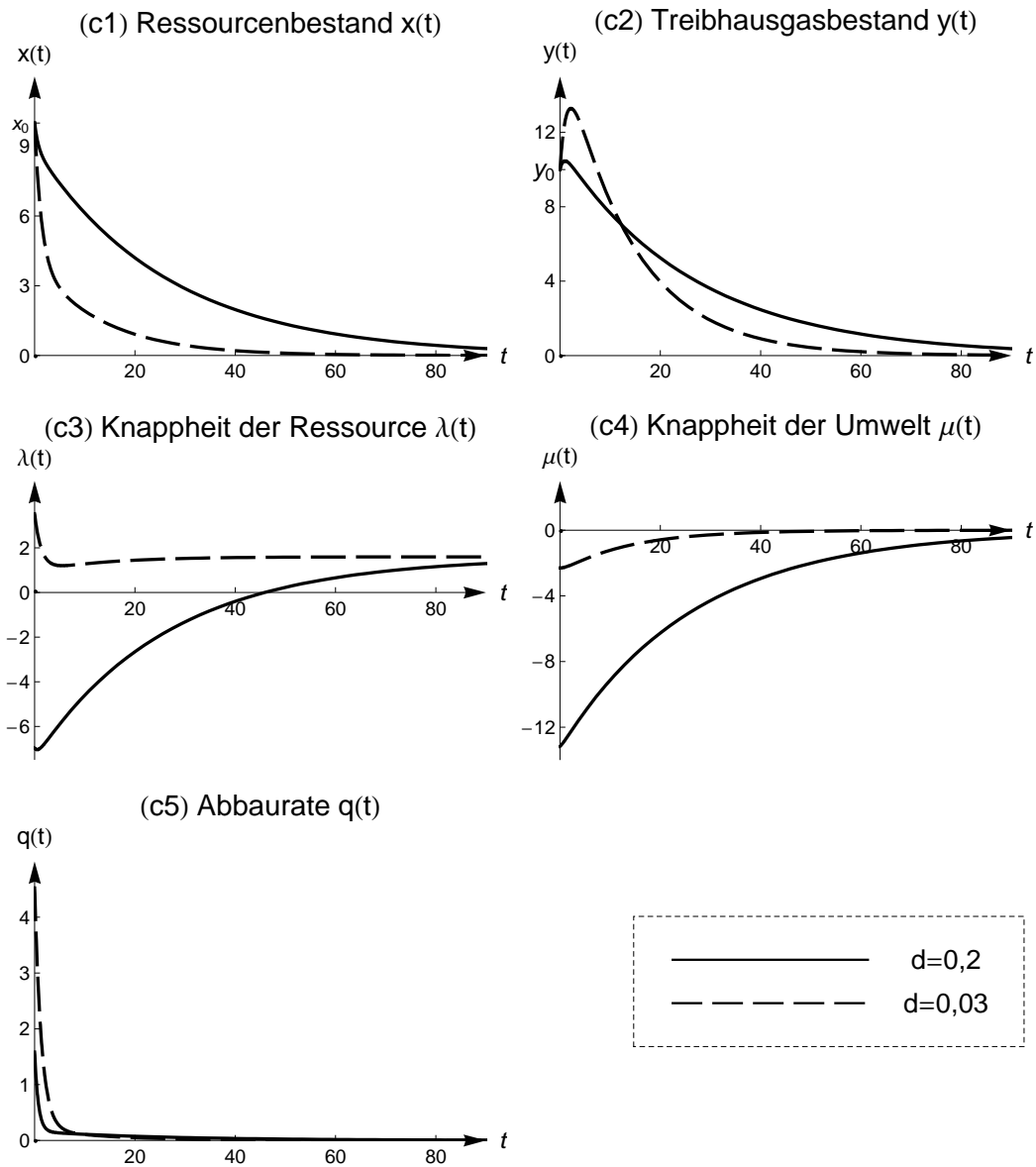


Abbildung 3.3: Optimale Zeitpfade (Typ c) bei Variation des Schadensparameters  $d$ .

### 3.5 Dezentrale Politikinstrumente

Bis zu dieser Stelle der Arbeit wurde es bewusst vermieden, mögliche Politikmaßnahmen zur Implementierung der sozial optimalen Abbaupfade zu erwähnen. Insbesondere wurde darauf verzichtet, die in der Literatur übliche Umkehrung des Vorzeichens der zur Verschmutzung gehörenden Ko-Zustandsvariable vorzunehmen. Dieses Vorgehen würde die direkte Interpretation der Ko-Zustandsvariable, des Negativen der Knappheit der Umwelt, als Emissionssteuer ermöglichen. Da in dem hier beschriebenen Modell jedoch eine zweite Externalität vorliegt, deren einfache Berücksichtigung durch Umkehrung eines Vorzeichens nicht möglich ist, reicht eine derart ausgestaltete Emissionssteuer nicht aus, um beide externen Effekte zu internalisieren.

Im Zuge der Implementierung der im vorigen Abschnitt diskutierten sozial optimalen Abbaupfade ist die Wahl der korrekten Politikmaßnahmen entscheidend, um die Anreize so zu setzen, dass die Firmen dem Kalkül der Gewinnmaximierung folgend den optimalen Pfad verfolgen. Da im vorliegenden Fall zwei Externalitäten zu berücksichtigen sind, scheinen sich auch zwei Politikinstrumente anzubieten, um den sozial optimalen Abbau-/Emissionspfad zu dezentralisieren. Der Einfachheit halber sei perfekter Wettbewerb zwischen den Gashydrat abbauenden Firmen angenommen, das heißt die Firmen agieren als Preisnehmer und es existiert keine zusätzliches Marktversagen durch unvollkommenen Wettbewerb. Unter der Annahme dieser Marktstruktur existieren zwei alternative Wege, den sozial optimalen Abbaupfad zu dezentralisieren. Zum einen hat der Regulator die Möglichkeit, die Erhebung einer Steuer auf die Emissionen mit der Zahlung einer Subvention für den noch vorhandenen Bestand an den Besitzer zu kombinieren, damit dieser einen Teil der Hydrate in situ belässt. Eine solche Regelung ist allerdings schwer denkbar und teuer, weil sie selbst nach dem Abbaustopp noch einen unendlichen Zahlungsstrom von Subventionen mit sich bringen kann. Zum anderen existiert ein weniger teurer Weg der Regulierung, indem eine alleinige Steuer auf die Förderung der Ressource erhoben wird, die beiden Externalitäten simultan Rechnung trägt.

Um einen Eindruck zu vermitteln, wie diese Politikmaßnahmen wirken, wird zunächst die zuerst beschriebene Alternative betrachtet. Es seien  $p_t$  der Marktpreis des aus dem Abbau der Hydrate gewonnenen Gases,  $\tau_t$  der Steuersatz, der



auf die mit dem Abbau einer Einheit Gashydrat einhergehenden Emissionen erhoben wird, und  $\sigma_t$  die Subvention, die auf den noch vorhandenen Ressourcenbestand in situ zum Zeitpunkt  $t$  gezahlt wird, wobei die fördernde Firma auch Eigentümer des vorhandenen Bestands sei. Dann ist der Momentanwert des Gewinns einer repräsentativen Firma gegeben durch

$$\pi_t(q_t) = [p_t - c(x_t) - \tau_t]q_t + \sigma_t x_t$$

und das intertemporale Maximierungsproblem dieser Firma kann als

$$\max_{\{q_t\}_{t \geq 0}} \Pi = \int_0^{\infty} [(p_t - c(x_t) - \tau_t)q_t + \sigma_t x_t] \cdot e^{-\rho t} dt$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (3.1) formuliert werden. Die dazugehörige Hamiltonfunktion in laufenden Werten ist dann gegeben als

$$H^c = [p_t - c(x_t) - \tau_t]q_t + \sigma_t x_t + \omega_t[-q_t - \beta x_t],$$

wobei  $\omega_t$  hier den privaten Schattenwert der Ressource bezeichnet. Die Bedingungen erster Ordnung für das den Gewinn maximierende Unternehmen lauten nun

$$\frac{\partial H^c}{\partial q_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t = c(x_t) + \tau_t + \omega_t, \quad (3.27)$$

$$-\frac{\partial H^c}{\partial x_t} = \dot{\omega} - \rho\omega \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega} = (\beta + \rho)\omega_t + q_t c'(x_t) - \sigma_t. \quad (3.28)$$

Ein Vergleich dieser Bedingungen erster Ordnung mit denen des sozialen Planers, (3.4) und (3.5), unter Verwendung des Verhaltens der Konsumenten, das durch  $p_t = \zeta U'(\zeta q_t)$  beschrieben ist, verdeutlicht, dass die sozial optimale Allokation erreicht werden kann, indem die Steuer und die Subvention in folgender Höhe angesetzt werden:

$$\tau_t = -\mu_t \quad (3.29)$$

$$\sigma_t = \gamma \mu_t - G'(x_t) \quad (3.30)$$

Dabei ist die letzte Bedingung erster Ordnung des sozialen Planers (3.6) durch

die entsprechende Wahl von (3.29) automatisch erfüllt.

Nun folgt die Betrachtung der zweiten vorgeschlagene Form der Regulierung, in der die wiederum mit  $\tau_t$  benannte Steuer diesmal beide Externalitäten berücksichtigt und die Subvention  $\sigma_t = 0$  gesetzt wird. Wir definieren  $\tau_t = \tau_t^y + \tau_t^x$ , um zwischen den beiden Externalitäten verursacht durch Verschmutzungsschaden ( $\tau_t^y$ ) beziehungsweise durch die Reduktion des Ressourcenbestands in situ ( $\tau_t^x$ ) zu unterscheiden. Aufgrund dieser Definition wird (3.27) abgewandelt zu  $p_t = c(x_t) + \tau_t^y + \tau_t^x + \omega_t$ , wobei  $\omega_t$  nun als der Anteil der Knappheit der Ressource interpretiert wird, der von dem den Gewinn maximierenden Unternehmen aus eigenem Interesse berücksichtigt wird. Wie zuvor ist die optimale Emissionssteuer gegeben durch

$$\tau_t^y = -\mu_t. \quad (3.31)$$

Durch den Vergleich der modifizierten Gleichung (3.27) mit (3.4) ergibt sich nun  $\lambda_t = \tau_t^x + \omega_t \Leftrightarrow \omega_t = \lambda_t - \tau_t^x$ . Einsetzen in die Bedingung erster Ordnung des Unternehmens (3.28), Gleichsetzen von  $\sigma_t = 0$  und Auflösen nach  $\dot{\lambda}_t$  führt zu

$$\dot{\lambda}_t = (\beta + \rho)\lambda_t + c'(x_t)q_t + \dot{\tau}_t^x - (\beta + \rho)\tau_t^x.$$

Der Vergleich mit der Bedingung erster Ordnung des sozialen Planers (3.5) führt nun zu der folgenden Differentialgleichung

$$\dot{\tau}_t^x = (\beta + \rho)\tau_t^x - \gamma\mu_t + G'(x_t).$$

Die Kombination dieses Ergebnisses mit der optimalen Steuer auf die Emissionen, die durch (3.31) und (3.6) gegeben ist, zeigt, dass der gesamte Steuersatz die folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\dot{\tau}_t = (\beta + \rho)\tau_t - (\alpha - \beta + \gamma)\mu_t + G'(x_t) - D'(y_t) \quad (3.32)$$

Schließlich liefert das Lösen dieser Differentialgleichung unter Verwendung des Wissens, dass die Steuer im Zeitpunkt  $T$  prohibitiv groß werden muss,

$$\tau_t = \zeta \bar{p} e^{(\beta+\rho)(t-T)} - \int_t^T e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} (-(\alpha - \beta + \gamma)\mu_\tau + G'(x_\tau) - D'(y_\tau)) d\tau \quad (3.33)$$

als den optimalen Steuersatz, der die sozial optimale Allokation durchsetzt und

beide Externalitäten internalisiert. Nach einigen Umstellungen und Rechenschritten kann (3.33) umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} \tau_t = \phi_1 e^{(\beta+\rho)t} - \int_t^\infty e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} \left[ G'(x_\tau) + \frac{\gamma}{\alpha-\beta} D'(y_\tau) (1 - e^{-(\alpha-\beta)(\tau-t)}) \right] d\tau \\ + \int_t^\infty e^{-(\alpha+\rho)(\tau-t)} D'(y_\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Diese Zerlegung ermöglicht es, die verschiedenen Einflüsse der beiden Externalitäten direkt abzulesen, die im Abschnitt 3.2.2 bereits in den Schattenwerten des sozialen Planers, (3.9) und (3.11), aufgetreten sind. Somit trägt die optimale Steuer auf den Abbau und Emission genau diesen beiden Externalitäten Rechnung.

### 3.6 Abschließende Bemerkungen

Das mit den Darstellungen in diesem Kapitel verfolgte Ziel war es, die wirtschaftlichen Gegebenheiten der Nutzung von Gashydrat als einen möglichen fossilen Energieträger zu untersuchen. Das zu diesem Zweck aufgestellte einfache Modell bildet dazu die wesentlichen Charakteristika des Gashydrats ab, die es von herkömmlichen fossilen Brennstoffen unterscheidet: Zum einen den natürlichen Abbau der Ressource zu einer bestimmten Rate, zum anderen die geologische Risiken, die aus der Erschließung der Vorkommen im Meeresboden resultieren. Sowohl durch den natürlichen Abbau als auch durch den wirtschaftlichen Abbau kann das Auftreten zweier Externalitäten hervorgerufen werden, da sie zum einen zu der Akkumulation von Treibhausgasen in der Atmosphäre beitragen und zum anderen das Risiko submariner Hangrutschungen erhöhen, die gegebenenfalls zu Tsunamis mit erheblichen gesellschaftlichen Schäden führen können. Wie die Ausführungen in diesem Kapitel gezeigt haben, können in Abhängigkeit von dem Verhältnis des Prohibitivpreises zu dem durch die geologischen Risiken verursachten Grenzscha-den drei verschiedene Typen von Lösungen auftreten. Ist der Prohibitivpreis hinreichend klein (oder die Gefahr einer Naturkatastrophe durch eine marines Erdbeben hinreichend hoch), so ist es optimal den Abbau der Gashydrate in endlicher Zeit abzuberechnen. Trotz der langfristig vollständigen Auflösung aufgrund des natürlichen Abbaus, bleiben die Überreste des Hydratvorkommens unberührt. Ist hingegen der Prohibitivpreis hinreichend hoch, wird das Vorkommen in endlicher Zeit vollkommen erschöpft. Im sogenannten Knife-Edge-Fall

kann der Konsum des Gashydrats über den gesamten Zeithorizont gestreckt werden, so dass das Vorkommen in unendlicher Zeit vollständig genutzt wird. Diese Ergebnisse verdeutlichen, dass die Einschätzung des Risikos, das von der Reduktion der Hangstabilität ausgeht, entscheidend für die Klassifizierung der optimalen Lösungstypen ist. Schließlich zeigen die Ausführungen in Abschnitt 3.5, dass eine Dezentralisierung der erstbest-optimalen Allokation bei Vorliegen ausreichender Informationen bezüglich der Kosten und Nutzen, wie auch der externen Schäden, durchaus möglich ist, indem eine klassische Pigou-Steuer auf die Emissionen erhoben und eine Subvention auf den noch vorhandenen Ressourcenbestand gezahlt wird. Im Zuge einer praktikableren Alternative ist es ebenfalls möglich, eine einzelne Steuer zu erheben, die beide aus dem Treibhausgasbestand und aus der Reduktion des Ressourcenbestands resultierenden Externalitäten internalisiert.

## 4 Optimale Gashydrat-Nutzung bei Begrenzung der aggregierten Treibhausgasemissionen

### 4.1 Einführung

Das vorangegangene Kapitel 3 behandelte ausführlich die Auswirkungen des Einbeziehens der Eigenschaften von Gashydrat in ein theoretisches Modell zur Nutzung einer nicht-erneuerbaren Ressource bei externen Effekten durch die Akkumulation schädlicher Treibhausgase in der Atmosphäre. Die Berücksichtigung der durch die aggregierten Emissionen von Treibhausgasen hervorgerufenen Externalitäten erfolgte dabei durch die Ergänzung der Wohlfahrtsfunktion um eine typische im Treibhausgasbestand konvexe Schadensfunktion, die durch eine entsprechend gewählte Steuer internalisiert wurde. In diesem Kapitel soll nun ein alternativer Weg, mit den akkumulierenden Emissionen von Treibhausgasen umzugehen, diskutiert werden, der den Ansatz verfolgt, ein maximal erlaubtes Niveau des Treibhausgasbestands festzulegen, das nicht überschritten werden darf. Ein Argument für die Berücksichtigung einer solchen Obergrenze anstelle einer konvexen Schadensfunktion ist die politische Durchsetzbarkeit eines solch anschaulichen Modells, beziehungsweise auch die politische Praxis internationaler Klimaschutzabkommen. So kann auch die Vereinbarung über eine Begrenzung der globalen Erwärmung auf  $2^{\circ}\text{C}$  letztlich als eine Beschränkung der kumulierten Treibhausgasemissionen interpretiert werden. Ein weiteres Argument für die Modellierung einer Obergrenze liefert ihre Interpretation als Abbild einer Schadensfunktion, die bei geringen Treibhausgaskonzentrationen zu vernachlässigende gesellschaftliche Schäden beschreibt, die jedoch dramatisch ansteigen, sobald eine bestimmte Grenze durch die aggregierten Emissionen überschritten wird.

In der theoretischen Literatur zu Modellen nicht-erneuerbarer endlicher Ressourcenbestände und Treibhausgasexternalitäten zeichnet sich jüngst die Tendenz ab, die zweite Methode eines maximal erlaubten Niveaus der kumulierten Emissionen anzuwenden. So haben Chakravorty et al. (2006) die Auswirkung einer Begrenzung des atmosphärischen Treibhausgasbestands in einem Standardmodell nach Hotelling (1931) grundlegend analysiert. Insbesondere wurde dabei auf die

Dynamik des Übergangs von der CO<sub>2</sub>-intensiven fossilen Ressource zu einer emissionsfreien Energiequelle abgestellt. Durch die Einführung eines maximal möglichen Niveaus des atmosphärischen Treibhausgasbestands beginnt die Nutzung der sauberen, jedoch kostenintensiven Technologie bereits, obwohl die günstigere endliche Ressource, deren Nutzung CO<sub>2</sub>-Emissionen mit sich bringt, noch nicht erschöpft ist. In einem ähnlichen Rahmen untersuchen Lafforgue et al. (2008) optimale Abbaupfade einer verschmutzenden Energieform unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass das emittierte CO<sub>2</sub> durch Sequestrierung in unterschiedliche Lagerstätten zu verschiedenen Kosten eingebracht werden kann. Erst wenn das maximale Niveau des Treibhausgasbestands erreicht ist, werden unter diesen Bedingungen die Lagerstätten schrittweise in aufsteigender Reihenfolge ihrer Kosten der Sequestrierung gefüllt. Chakravorty et al. (2008) untersuchen ebenfalls ein Modell, in dem ein maximal erlaubtes Niveau der Verschmutzung vorgegeben ist. Allerdings berücksichtigen sie zwei Ressourcenbestände, die anhand ihrer Emissionskoeffizienten differenziert werden können, während die Kostenfrage völlig außer Acht gelassen wird. Sie stellen dar, dass das Herfindahl-Prinzip (Herfindahl, 1967), nach dem der kostengünstigste Bestand zuerst erschöpft würde, nicht auf Probleme mit Heterogenität in der CO<sub>2</sub>-Intensität der Ressourcennutzung übertragen werden kann. Denn hauptsächlich entscheiden die Anfangsbestände der beiden Ressourcen über die optimale Folge der Nutzung, weniger die Unterschiede in den Emissionsraten.

Die bis hier genannten Autoren nehmen neben einer emissionsfreien Alternativenergie, die zu relativ hohen Kosten unbegrenzt verfügbar ist, allesamt konstante Grenzkosten des Abbaus an. Diese Annahme wird in diesem Kapitel durch die Annahme bestandsabhängiger Abbaukosten, wie zum Beispiel in Rickels (2011), ersetzt. Wie auch im vorigen Kapitel 3 beziehen wir darüber hinaus den ebenfalls bestandsabhängigen gesellschaftlichen Schaden durch geologische Risiken sowie den selbstständigen, natürlichen Abbau des Gashydrats in die Betrachtung ein und bestimmen optimale Abbaustrategien von Gashydrat nun unter der Berücksichtigung einer Obergrenze auf die aggregierten Emissionen. Dazu entwickeln wir im Abschnitt 4.2 zunächst das Modell und leiten unter Berücksichtigung einiger vereinfachender Annahmen die Optimalitätsbedingungen her, bevor wir im Abschnitt 4.3 die optimalen Zeitpfade der Gashydrat-Nutzung diskutieren und die isolierten Einflüsse der verschiedenen Modellkomponenten im

Zuge einer komparativen Dynamik analysieren. Ein besonderes Augenmerk der Untersuchung liegt in diesem Kapitel auf der Beantwortung der Fragestellung, ob die Nutzung des aus den Hydraten gewonnenen Gases sogar hilfreich sein kann, die durch die Auflösung entstehenden klimatischen Auswirkungen zu verringern und so die Einhaltung einer politisch vorgegebenen Obergrenze auf den Bestand der kumulierten Treibhausgasemissionen zu erreichen. Wäre dies der Fall, würde dies den Vorschlag eines „vorsorglichen Abbaus“ (*engl.*: „preventive exploitation“, Krey et al., 2009, S. 5) der Hydrate unterstützen.

## 4.2 Modell mit exogener Begrenzung der aggregierten Treibhausgasemissionen

Um die optimalen Abbaustrategien einer endlichen Ressource Gashydrat untersuchen zu können, falls die Regulierung in Form einer Begrenzung des maximal erlaubten Treibhausgasbestands erfolgt, stellt dieser Abschnitt zunächst das Modell vor, legt die Notation fest und trifft für die Analyse notwendige vereinfachende Annahmen. Dabei treten zu Beginn der Einführung des Modells teilweise Wiederholungen und Überschneidungen mit den Beschreibungen im vorigen Kapitel auf, die jedoch in Kauf genommen werden, um an dieser Stelle ein übersichtliches und vollständiges Modell zu präsentieren. Insbesondere wird der Definitionsbereich für eine sinnvolle Beantwortung der Fragestellung nach einem „vorsorglichen Abbau“ bestimmt. Darauf aufbauend werden die Optimalitätsbedingungen formal hergeleitet und kurz interpretiert, bevor im darauffolgenden Abschnitt die Analyse der optimalen Abbaustrategien erfolgt.

### 4.2.1 Vereinfachende Annahmen und Notation

Wie schon im vorangegangenen Kapitel 3 gewinnt die betrachtete Wirtschaft ihren Bruttonutzen allein durch den Konsum der nicht-erneuerbaren Ressource Gas- beziehungsweise Methanhydrat. Aufgrund des eingeschränkten Stabilitätsbereichs des Methanhydrats und der damit einhergehenden Verlustrate im Zuge des Abbaus, steht nur der Anteil  $\zeta$  der abgebauten Menge  $q_t$  tatsächlich zur Energiegewinnung zur Verfügung. Denn bisher ist es nicht gelungen, Technologien zu entwickeln, die in der Lage sind, das im Abbauprozess aus der Käfigstruktur des Hydrats gelöste Gas vollständig aufzufangen. Der aus dem Konsum dieser Menge

gezogene Nutzen  $U(\zeta q_t)$  hat die folgenden Eigenschaften:

**Annahme 4.1** Die Nutzenfunktion  $U(q_t)$  ist eine streng monoton ansteigende und streng konkave Funktion ( $U' > 0, U'' < 0, U(0) = 0$ ) mit einem von oben beschränkten Grenznutzen von  $U'(0) = \bar{p} < \infty$ .

Da es sich um ein Partialmodell mit nur einer einzigen verfügbaren Energieform handelt, wird eine endliche Zahlungsbereitschaft für die erste Einheit dieser Energie angenommen. Die maximale Zahlungsbereitschaft für eine Einheit Energie, der Prohibitivpreis  $\bar{p}$ , kann als Preis der Nutzung anderer Energieformen aufgefasst werden, auch wenn Substitute in diesem Modell nicht explizit berücksichtigt werden.

Der anfängliche Ressourcenbestand des Gashydrats  $x_0$  wird als ein Vorkommen von bekannter Größe angenommen, das sich in flacheren Regionen des Nordpolarmeeres befindet, so dass zum einen ein Abbau technisch möglich ist und zum anderen der Bestand von selbstständigem Abbau betroffen ist. Die folgende Gleichung beschreibt die Bestandsänderung des Gashydrats in situ  $x_t$  über die Zeit:

$$\dot{x}_t = -q_t - \beta x_t, \quad x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

Dieser wird nicht nur durch den Abbau zur Energiegewinnung durch die Gesellschaft,  $q_t$ , sondern auch durch den natürlichen Abbau reduziert. In jeder Periode löst sich ein Anteil  $\beta x_t$  aus der Verbundstruktur der Hydrate, und der zuvor gebundene Kohlenstoff entweicht in Form von  $\text{CH}_4$  in die Atmosphäre. Dabei wird die natürliche Abbau- oder Verlustrate des Gashydrats  $\beta (> 0)$  als konstant angenommen und repräsentiert die durchschnittliche Verlustrate pro Periode.

Das Verbrennen des aus den Hydraten gewonnenen Gases führt zum Ausstoß von  $\text{CO}_2$ -Emissionen, während außerdem im Zuge des Abbaus wie auch durch den selbstständigen Abbau des Gashydratbestands  $\text{CH}_4$ -Emissionen freigesetzt werden. In Bezug auf ihren Wirkungsgrad hinsichtlich der globalen Erwärmung können diese beiden Gase anhand ihres GWP unterschieden werden. Bezeichnet  $y_t$  (im Gegensatz zu Kapitel 3) den in  $\text{CH}_4$ -Äquivalenten gemessenen atmosphärischen Treibhausgasbestand zum Zeitpunkt  $t$ , so kann die Vergleichbarkeit gewährleistet werden, indem zunächst  $y_t$  derart normalisiert wird, dass der Emis-



sionskoeffizient einer Einheit  $\text{CH}_4$  genau 1 ist.<sup>13</sup> Der geringere Wirkungsgrad einer Einheit von  $\text{CO}_2$ -Emissionen wird dann durch die Multiplikation mit einem Umrechnungsfaktor  $\kappa$ ,  $0 < \kappa < 1$  abgebildet. Somit kann die Änderung des atmosphärischen Treibhausgasbestands über die Zeit durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\dot{y}_t = \kappa\zeta q_t + (1 - \zeta)q_t + \beta x_t - \alpha y_t \quad (4.2)$$

Wie bereits erwähnt wurde, stammen die  $\text{CH}_4$ -Emissionen zum einen aus der Freisetzung des natürlichen Abbaus des Gashydrats,  $\beta x_t$ , und zum anderen aus der Leckage im Zuge des Abbauprozesses,  $(1 - \zeta)q_t$ . Der aufgefangene und konsumierte Anteil der abgebauten Ressource verursacht  $\text{CO}_2$ -Emissionen,  $\kappa\zeta q_t$  (in  $\text{CH}_4$ -Äquivalenten). Die Regenerationsrate  $\alpha$  ( $> 0$ ) repräsentiert die ständige natürlichen Regeneration der Atmosphäre, typischerweise durch die Kohlenstoffaufnahme durch sogenannte Kohlenstoffsenken. Aus Gründen der Vereinfachung sei diese proportionale Rate als konstant und als einheitlich für die verschiedenen Treibhausgase angenommen, auch wenn  $\text{CO}_2$  und  $\text{CH}_4$  verschiedene Abbauraten besitzen. Dieser Tatsache wird jedoch durch die Annahme verschiedener Emissionskoeffizienten Rechnung getragen.

Als Ergebnis politischer Abkommen wird weiterhin eine Regulierung eingeführt, die den Treibhausgasbestand in der Atmosphäre auf ein nicht zu überschreitendes maximales Niveau beschränkt. Dieses ist durch den exogen gegebenen Höchstwert des Bestands der Treibhausgase  $\bar{y}$  beschrieben. Unter der Annahme, dass der Anfangsbestand der atmosphärischen Treibhausgase unter diesem Höchstwert liegt ( $y_0 < \bar{y}$ ), kann die Beschränkung durch die Obergrenze für alle Zeitpunkte  $t \geq 0$  formuliert werden als

$$\bar{y} - y_t \geq 0, \quad y(0) = y_0 < \bar{y}. \quad (4.3)$$

Aufgrund des natürlichen Abbaus der Ressource und der damit einhergehenden Emissionen entwickelt das dynamische System bestehend aus (4.1) und (4.2) eine Eigendynamik, selbst wenn es nicht zur gesellschaftlichen Nutzung dieser Ressource kommt. Würde das Gashydrat überhaupt nicht abgebaut ( $q_t = 0$  für

---

<sup>13</sup>In Kapitel 3 beschrieb  $z_t$  den in  $\text{CH}_4$ -Äquivalenten gemessenen Treibhausgasbestand, der in diesem Kapitel nun  $y_t$  heißt, während  $y_t$  im vorigen Kapitel die aus Vereinfachungsgründen umskalierte Größe darstellt.

alle  $t > 0$ ), so hinge die Entwicklung des Treibhausgasbestands in der Atmosphäre lediglich von den Anfangsbeständen des Gashydrats und der Treibhausgase in der Atmosphäre sowie von den Raten des natürlichen Abbaus der Ressource sowie der Regeneration der Atmosphäre ab. Die beiden Bestände entwickelten sich dann gemäß folgender Eigendynamik des Systems:

$$x_t = x_0 e^{-\beta t} \quad \text{für alle } t > 0 \quad (4.4)$$

$$y_t = \left( y_0 - x_0 \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) e^{-\alpha t} + x_0 \frac{\beta}{\alpha - \beta} e^{-\beta t} \quad \text{für alle } t > 0 \quad (4.5)$$

Um vor dem Hintergrund dieser Eigendynamik den zulässigen Definitionsbereich der Kombinationen von Anfangsbeständen zu finden, wird zunächst die Abhängigkeit von der Zeit  $t$  aus (4.4) und (4.5) eliminiert. Durch Lösen der Gleichung (4.4) nach  $e^{-\beta t}$  ergibt sich  $e^{-\beta t} = x_t/x_0$  und damit  $e^{-\alpha t} = (x_t/x_0)^{\alpha/\beta}$ . Einsetzen dieser Werte in (4.5) führt zu einer Familie von Trajektorien im  $(x, y)$ -Raum, die beschrieben ist durch

$$y(x; x_0, y_0) = \left( \frac{x}{x_0} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left( y_0 - x_0 \frac{\beta}{\alpha - \beta} \right) + \frac{\beta}{\alpha - \beta} x. \quad (4.6)$$

Wie sich aus der Darstellung der Trajektorien in Abbildung 4.1 ablesen lässt und sowohl über (4.6) als auch über (4.2) herleitbar ist, zeigt sich  $y_t$  als Funktion von  $x_t$  als eine zunächst ansteigende und danach fallende Funktion mit einem eindeutigen Maximum  $y_m$  in  $x_m = \frac{\alpha}{\beta} y_m$ . Dementsprechend kennzeichnet die linear

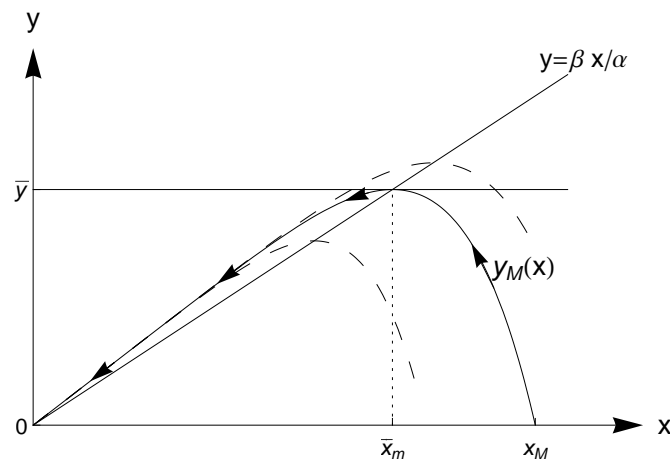


Abbildung 4.1: Trajektorien der Laisser-Faire-Lösung ( $\alpha = 0.1, \beta = 0.015, \bar{y} = 5$ )

ansteigende Gerade  $y = \frac{\beta}{\alpha}x$  in Abbildung 4.1 die Verbindung der Maxima aller Trajektorien der Familie. Des Weiteren existiert innerhalb dieser Familie genau ein Pfad  $y_M(x)$ , dessen Maximum  $\bar{y}_m$  genau im maximal zulässigen Niveau des Treibhausgasbestands liegt ( $\bar{y}_m = \bar{y}, \bar{x}_m = \frac{\alpha}{\beta}\bar{y}$ ). Dieser Pfad wird beschrieben durch die Funktion

$$y_M(x; \bar{x}_m, \bar{y}) = \frac{\beta}{\alpha - \beta} \left( x - \bar{y} \left( \frac{x}{\bar{x}_m} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right) \text{ mit } \bar{x}_m = \frac{\alpha}{\beta}\bar{y}, \quad (4.7)$$

die sich durch das Einsetzen des Punktes  $(x_m = \frac{\alpha}{\beta}\bar{y}, y_m = \bar{y})$  als Startbedingungen  $(x_0, y_0)$  in (4.6) bestimmen lässt. Über diese Trajektorie kann nun auch die Menge Gashydrat  $x_M$  bestimmt werden, die beim kleinstmöglichen anfänglichen Treibhausgasbestand von  $y_0 = 0$  genau dazu führt, dass das die Obergrenze der kumulierten Treibhausgasemissionen in der Laisser-Faire-Lösung ( $q_t = 0$  für alle  $t \geq 0$ ) genau im Maximum erreicht wird. Durch Auflösen der durch (4.7) gegebenen Gleichung  $y_M(x_M; \bar{x}_m, \bar{y}) = 0$  nach  $x_M$  ergibt sich  $x_M = \bar{y} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}$  als dieser maximale Bestand der Ressource.<sup>14</sup> Jede größere Anfangsmenge des Gashydrats,  $x_0 > x_M$ , würde ohne Emissionen aus dem Abbau und der Verbrennung des Gashydrats dazu führen, dass die Obergrenze auf den Treibhausgasbestand keinesfalls gehalten werden kann. Für  $y_0 = 0$  und  $x_0 < x_M$  würde das maximale Niveau hingegen ohne eine Nutzung der Hydrate niemals erreicht.

Wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits dargestellt, soll an dieser Stelle besonders die von Krey et al. (2009) aufgeworfene Frage nach einem möglichen „vorsorglichen Abbau“ der Hydrate nachgegangen werden. Diesen Vorschlag interpretieren wir an dieser Stelle derart, dass der Abbau und die Nutzung des Gases durch den Ausstoß des im Vergleich zu CH<sub>4</sub> weniger schädlichen Treibhausgases CO<sub>2</sub> dazu beitragen sollen, die Obergrenze des Treibhausgasbestands einzuhalten, die anderenfalls verletzt würde. Dies setzt voraus, dass die Anfangsbestände hinreichend groß sind, um die Beschränkung durch die Obergrenze (4.3) in der Laisser-Faire-Situation zu verletzen. Daher konzentrieren wir uns im Folgenden auf diesen Fall hinreichend großer Anfangsbestände.

**Annahme 4.2** *Der anfängliche Ressourcenbestand  $x_0$  beziehungsweise der anfängliche Treibhausgasbestand  $y_0$  ist mit  $y_0 > y_M(x_0; \bar{x}_m, \bar{y})$  nach (4.7) hinreichend*

---

<sup>14</sup>  $\frac{\beta}{\alpha - \beta} \left( x_M - \bar{y} \left( \frac{x_M}{\bar{x}_m} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x_M}{\bar{y}} = \left( \frac{x_M}{\bar{y}} \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left( \frac{x_M}{\bar{y}} \right)^{-\frac{\alpha-\beta}{\beta}} = \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$

groß, so dass es in Laisser-Faire-Situation mit  $q_t = 0$  für alle  $t \geq 0$  zu einer Verletzung der Restriktion durch die Obergrenze (4.3) kommt.

Diese Annahme 4.2 stellt sicher, dass das maximale Niveau der atmosphärischen Konzentration der Treibhausgase allein aufgrund der natürlichen Emissionen bereits überschritten wird, so dass ein „vorsorglicher Abbau“ tatsächlich sinnvoll sein könnte und hiernach genauer untersucht wird. Darüber hinaus ist der Bereich zulässiger Anfangsbedingungen auch von oben durch einen eindeutigen Pfad beschränkt, welcher in Abschnitt 4.3.1 diskutiert und bestimmt wird.

Zuletzt gilt es noch die Zielfunktion der betrachteten Volkswirtschaft vorzustellen, die im Nettonutzen einer möglichen Nutzung  $B(q, x) = U(\zeta q_t) - c(x_t)q_t - G(x_t)$  besteht. Er setzt sich aus dem bereits definierten Bruttonutzen  $U(\zeta q_t)$  abzüglich der bestandsabhängigen Abbaukosten  $c(x_t)q_t$  sowie des Schadens  $G(x_t)$  zusammen. Dieser Schaden  $G(x_t)$  berücksichtigt die geologischen Risiken, die mit einer Reduktion des Bestandes der Gashydrate in Form eines erhöhten Risikos von gesellschaftlichen Schäden, insbesondere durch mögliche Rutschungen an den Kontinentelhängen, einhergehen.

**Annahme 4.3** Die bestandsabhängigen Abbaukosten  $C(q_t, x_t) = q_t c(x_t)$  verlaufen linear in der Abbaumenge  $q_t$ , wobei die Grenzkosten abnehmend und konvex bezüglich des noch vorhandenen Ressourcenbestands sind, ( $c'(x_t) < 0, c''(x_t) \geq 0$ ). Der bestandsabhängige geologische Schaden  $G(x_t)$  ist ebenfalls abnehmend und konvex bezüglich des Ressourcenbestands, ( $G'(x_t) < 0, G''(x_t) \geq 0, G(x_0) = 0$ ).

Mit einer konstanten Diskontrate  $\rho$  besteht die Aufgabe des wohlwollenden sozialen Planers nun darin, durch die optimale Wahl der Trajektorie des Ressourcenabbaus beziehungsweise -konsums die Summe des abdiskontierten ständigen Nettonutzens über die Zeit zu maximieren.

#### 4.2.2 Optimierungsproblem und Bedingungen erster Ordnung

Das Optimierungsproblem des sozialen Planers lässt sich unter Berücksichtigung der im Abschnitt 4.2.1 getroffenen Annahmen und Modellierungen nun wie folgt formulieren:

$$\max_{q_t \geq 0} \int_0^{\infty} [U(\zeta q_t) - q_t c(x_t) - G(x_t)] \cdot e^{-\rho t} dt$$

unter den Nebenbedingungen (4.1) bis (4.3) sowie unter Berücksichtigung der Nicht-Negativitätsbedingungen bezüglich des Ressourcenbestands und der Abbaurates,  $x_t \geq 0$  und  $q_t \geq 0$ . Bezeichnet  $\lambda_t$  die Ko-Zustandsvariable des Ressourcenbestands in situ, die als sein Schattenwert interpretiert werden kann, und  $\mu_t$  die Ko-Zustandsvariable beziehungsweise den Schattenwert des atmosphärischen Treibhausgasbestands, so lautet die Hamiltonfunktion in laufenden Werten (current-value Hamiltonian)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^c(x_t, y_t, q_t, \lambda_t, \mu_t) \\ = U(\zeta q_t) - q_t c(x_t) - G(x_t) + \lambda_t(-q_t - \beta x_t) + \mu_t(K q_t + \beta x_t - \alpha y_t). \end{aligned}$$

Dabei fasst der Parameter  $K = 1 - \zeta(1 - \kappa)$  die aus (4.2) stammenden Parameter als einen Faktor vor der Abbaurates zusammen. Bezeichnen weiterhin  $\omega_t, \varphi_t$  und  $\chi_t$  die Kuhn-Tucker-Multiplikatoren, die den Nicht-Negativitätsbedingungen beziehungsweise der Beschränkung der Treibhausgasbestands (4.3) zugeordnet sind, stellt sich die zugehörige Lagrangefunktion in laufenden Werten als

$$\mathcal{L}^c(x_t, y_t, q_t, \lambda_t, \mu_t, \chi_t, \omega_t, \varphi_t) = \mathcal{H}^c(x_t, y_t, q_t, \lambda_t, \mu_t) + \chi_t(\bar{y} - y_t) + \omega_t x_t + \varphi_t q_t$$

dar. Aus dieser Lagrangefunktion lassen sich die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen nach den Regeln des Pontrjagin'schen Maximumprinzips herleiten. Neben den zwei Bewegungsgleichungen der Bestände, (4.1) und (4.2), muss die optimale Lösung des Problems die folgenden statischen und dynamischen Bedingungen erster Ordnung erfüllen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial q_t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \zeta U'(\zeta q_t) - c(x_t) - \lambda_t + K \mu_t + \varphi_t = 0 \quad (4.8)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial x_t} = \dot{\lambda} - \rho \lambda \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_t = (\beta + \rho) \lambda_t + q_t c'(x_t) + G'(x_t) - \beta \mu_t - \omega_t \quad (4.9)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial y_t} = \dot{\mu} - \rho \mu \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu}_t = (\alpha + \rho) \mu_t + \chi_t \quad (4.10)$$

Weiterhin gelten die üblichen komplementären Schlupfbedingungen bezüglich der Kuhn-Tucker-Multiplikatoren

$$q_t \geq 0, \quad \varphi_t \geq 0, \quad q_t \cdot \varphi_t = 0 \quad (4.11)$$

$$x_t \geq 0, \quad \omega_t \geq 0, \quad x_t \cdot \omega_t = 0 \quad (4.12)$$

$$[\bar{y} - y_t] \geq 0, \quad \chi_t \geq 0, \quad [\bar{y} - y_t] \cdot \chi_t = 0 \quad (4.13)$$

sowie die Transversalitätsbedingungen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t \lambda_t e^{-\rho t} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\rho t} = 0. \quad (4.14)$$

Da es sich bei dem Bestand der Treibhausgase  $y_t$  um ein öffentliches Übel handelt, dessen Anstieg daher durch eine Obergrenze beschränkt wird, kann der Schattenwert dieses Bestandes  $\mu_t$  nicht positiv sein, sondern muss negativ oder null sein. Nach Bedingung (4.13) gilt  $\chi_t = 0$  immer dann, wenn der akkumulierte Treibhausgasbestand kleiner als das nach (4.3) maximal erlaubte Niveau ist. Da laut (4.3) außerdem  $y_0 < \bar{y}$  ist, gilt daher für die anfängliche Phase mit  $t \in (0, t_c)$ , in der die kumulierten Treibhausgase in der Atmosphäre kleiner sind als das maximal zulässige Niveau, dass  $\mu(t) = \mu_0 e^{(\alpha+\rho)t}$  für  $t \in (0, t_c)$ . Der negative Schattenwert des Treibhausgasbestands  $\mu_t$  sinkt also exponentiell beziehungsweise steigt betragsmäßig exponentiell an, bis im Zeitpunkt  $t_c$  die Obergrenze des atmosphärischen Treibhausgasbestands erreicht wird.<sup>15</sup> In der darauf folgenden Phase  $t \in [t_c, t_v)$ , in der die Obergrenze als bindende Restriktion mit Gleichheit gilt, ist nach (4.13) der Kuhn-Tucker-Multiplikator  $\chi_t > 0$ . Dies führt dazu, dass der Schattenwert  $\mu_t$  ansteigt beziehungsweise sein Betrag sinkt, bevor er genau in dem Moment  $t_v$  verschwindet, in dem der Treibhausgasbestand wieder unter das maximale Niveau fällt. Interpretieren wird den Betrag des Schattenwerts des Treibhausgasbestands  $-\mu_t$  als die Knappheit der Atmosphäre, so verschwindet diese genau in dem Moment, in dem die Obergrenze nicht mehr bindet und spielt danach keine Rolle mehr. Es gilt  $\mu_t = 0$  für alle  $t \geq t_v$ . Wird das maximale

---

<sup>15</sup>Formal setzt dies voraus, dass der Startwert  $\mu(0) = \mu_0$  negativ ist. Dies lässt sich anhand der Gleichungen (4.10), (4.13) und (4.14,b) zeigen: Das Lösen der Differentialgleichung (4.10) nach  $\mu(t)$  ergäbe mit einem positiven  $\mu_0$  eine positive Exponentialfunktion, die (aufgrund von  $\chi_t \geq 0$  laut (4.13) mindestens) mit der Rate  $(\alpha + \rho)$  wächst und damit für  $t \rightarrow \infty$  gegen  $\infty$  strebt. Dies stünde im Widerspruch zur in (4.14,b) gegebenen Transversalitätsbedingung dieses Schattenwerts  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t e^{-\rho t} = 0$ .

Niveau der kumulierten Treibhausgasbestände hingegen während des gesamten Planungszeitraums nicht erreicht ( $y_t < \bar{y}$  für alle  $t$ ), so ist die Beschränkung durch (4.3) niemals zu berücksichtigen, das Gut der Umweltqualität oder auch die Aufnahmefähigkeit der Atmosphäre niemals knapp und es gilt  $\mu_t = 0$  für alle  $t \geq 0$ .

Die Betrachtung der dynamischen Optimalitätsbedingung bezüglich des Schattenwerts der Ressource in situ (4.9) zeigt wie bereits in Kapitel 3, dass diese Gleichung neben der Komponente, welche die Wirkung der Reduktion des Gashydrats auf die bestandsabhängigen Abbaukosten berücksichtigt, zwei weitere Komponenten des Modells, nämlich den Grenzschaten  $G'(x_t)$  und den Schattenwert  $\mu_t$ , beinhaltet. Aufgrund dieser Komponenten ist es auch hier ausgeschlossen, dass die Knappheitsrente wie in einem einfachen Modell nach Hotelling (1931) (ohne bestandsabhängige Effekte und mit konstanten Grenzkosten) exponentiell ansteigt. Auch das Ergebnis einer sinkenden Knappheit der Ressource  $\lambda_t$ , die genau in dem Zeitpunkt verschwindet, in dem der Abbau eingestellt wird, wie es in einem Modell auftreten würde, das allein bestandsabhängige Abbaukosten berücksichtigt, kann hier nicht reproduziert werden. Der zusätzliche Bestandseffekt des geologischen Schadens, repräsentiert durch den Grenzschaten  $G'(x_t)$  in (4.9), ist ursächlich für eine positive, monoton ansteigende Komponente in der Knappheit der Ressource  $\lambda_t$ , die einen positiven Wert durch Nicht-Konsumieren des Ressourcenbestands in situ bewirkt. Diesem positiven Wert stehen Kosten des Nicht-Konsumierens entgegen, die aus dem natürlichen Abbau der Ressource beziehungsweise den daraus resultierenden Emissionen folgen. Eine zurückgehaltene Einheit der Ressource setzt dennoch ihren Anteil  $\beta$  in die Atmosphäre frei, daher wird die Auswirkung auf den Schattenwert des Treibhausgasbestands hier mit eingerechnet. Dies reduziert wiederum den Schattenwert der Ressource in situ, das heißt es entstehen gesellschaftlich Kosten des Nicht-Konsums der Ressource in situ.<sup>16</sup>

Das Bestimmen des Steady-States unseres Systems zeigt, dass die Knappheit des Ressourcenbestands in situ  $\lambda_t$ , die auch als Opportunitätskosten des Abbaus interpretiert wird, gegen einen positiven Wert  $-\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} > 0$  konvergiert. Analog zur Proposition 3.1 in Kapitel 3 wird die Ressource immer dann vollständig auf-

---

<sup>16</sup>Da die Interpretation des Schattenwerts der Ressource im Kapitel 3 sehr ausführlich gestaltet wurde und der hier notwendigen Interpretation weitestgehend entspricht, wurden die Erklärungen zu diesem Aspekt an dieser Stelle vergleichsweise kurz gehalten.

gezehrt, wenn die Zahlungsbereitschaft die Summe aus diesen Opportunitätskosten und den Abbaukosten der letzten Einheit der Ressource übersteigt ( $\zeta\bar{p} \geq -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$ ), wobei es im Fall der Gleichheit zur asymptotischen Lösung käme. Im Folgenden beschränken wir uns jedoch auf den Fall, in dem die gesellschaftlichen Kosten die Zahlungsbereitschaft ab einem bestimmten Zeitpunkt übertreffen.

**Annahme 4.4** *Die maximale Zahlungsbereitschaft ist kleiner als die gesellschaftlichen Grenzkosten des Abbaus der letzten Einheit:  $\zeta\bar{p} < -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$ .*

Wie der Anhang B.1 zeigt, wird bei Gültigkeit der Annahme 4.4 lediglich bis zu einem endlichen Zeitpunkt  $T$  von dem Bestand extrahiert, in dem die Gleichung (4.8) mit Gleichheit erfüllt ist und der übrige Ressourcenbestand  $x_T$  erreicht ist.<sup>17</sup> Die Menge  $x_T$  bleibt jedoch nicht erhalten, denn sie ist weiterhin von ihrem natürlichen Abbau betroffen, so dass sie im Laufe der Zeit verschwindet.

### 4.3 Optimale Zeitpfade der Gashydrat-Nutzung

Auf der Grundlage der im vorigen Abschnitt 4.2 entwickelten notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen widmet sich dieser Abschnitt nun der Analyse der optimalen Lösung. Dazu werden zunächst in Abschnitt 4.3.1 einige besondere Charakteristika der optimalen Lösung hergeleitet, indem die Umschaltbedingung, die Abbauraten bei bindender Restriktion (4.3) und eine weitere Einschränkung des Definitionsbereichs betrachtet werden. Abschnitt 4.3.2 untersucht dann im Zuge einer komparativen Dynamik die speziellen Auswirkungen einzelner Modellkomponenten auf die Zeitpfade der wichtigen Größen des Systems und betont dabei jeweils auch die Rolle der Regulierung durch die Beschränkung des maximalen Treibhausgasbestands, indem die Zeitpfade der Situationen mit und ohne Regulierung verglichen werden.

#### 4.3.1 Charakteristika der Optimalen Lösung

Es sei zunächst die Situation ohne jegliche klimapolitische Regulierung als Referenz betrachtet, das heißt die Begrenzung durch die Obergrenze auf den Treib-

---

<sup>17</sup>Die entsprechende Proposition B.1 findet sich im Anhang B.1, da sie weitestgehend das Ergebnis der Proposition 3.1 reproduziert und der dazugehörige Beweis analog erfolgt.



hausgasbestand (4.3) wird nicht berücksichtigt, so dass die Emissionen der verschiedenen Treibhausgase irrelevant für die Optimierung sind und  $\mu_t = 0$  für alle  $t \geq 0$  gilt. Übrig bliebe ein einfaches ressourcenökonomisches Problem endlicher Bestände mit bestandsabhängigen Abbaukosten, ergänzt um einen ebenfalls bestandsabhängigen Schaden  $G(x_t)$ . Das ökonomische Prinzip, nach dem von der Ressource extrahiert wird, solange die gesellschaftlichen Grenzkosten des Abbaus einer Einheit kleiner sind als die maximale Zahlungsbereitschaft für die daraus gewonnene Energie, kann auch hier übertragen werden. Diese gesellschaftlichen Grenzkosten zum Zeitpunkt  $t$  setzen sich laut (4.8) mit  $\mu_t = 0$  aus den Abbaukosten pro Einheit  $c(x_t)$  und den Opportunitätskosten  $\lambda_t$  zusammen, die insbesondere die steigende Wirkung des Abbaus einer Einheit auf die Grenzkosten und den zusätzlichen geologischen Schaden berücksichtigen. Im Zeitpunkt  $T$  des Umschaltens von positivem Abbau ( $q_t > 0$ ) zur Laisser-Faire-Situation ( $q_t = 0$ ) müssen die gesellschaftlichen Grenzkosten genau der maximalen Zahlungsbereitschaft  $\zeta\bar{p}$  entsprechen. Somit wäre die Bedingung für ein Umschalten zur letzten Phase, in der die bindenden Nebenbedingungen immer dieselben bleiben, gegeben durch:

$$c(x_T) + \lambda_T = \zeta\bar{p} \quad (4.15)$$

Im Umschaltzeitpunkt  $T$  wird der Abbau für immer gestoppt, die Abbaurate wird null ( $q_t = 0$  für alle  $t \geq T$ ), der Kuhn-Tucker-Multiplikator springt von  $\varphi_t = 0$  für  $t \leq T$  auf  $\varphi_t > 0$  für alle  $t > T$  und bleibt in der gesamten nun beginnenden letzten Phase positiv, während  $\omega_t = 0$  für alle  $t > T$ . Die Opportunitätskosten im Umschaltzeitpunkt  $\lambda_T$  können über den Restwert  $S(x_T, T) = -\int_T^\infty G'(x_\tau)e^{-\rho(\tau-T)}d\tau$  – ein irreversibler Schaden, der trotz Einstellung des Abbaus besteht – bestimmt werden. Dieser Restwert liefert den Schattenwert der Ressource in situ zum Zeitpunkt  $T$  als  $\lambda_T = \frac{\partial S(x_T, T)}{\partial x_T}$ .<sup>18</sup> Durch Einsetzen dieses Werts in die Umschaltbedingung (4.15) lässt sich der Ressourcenbestand  $x_T$ , bei dessen Erreichen der Abbau eingestellt wird und der anschließend allein

---

<sup>18</sup>Diese Bedingung stammt ursprünglich aus der Formulierung als Optimierungsproblem mit einem unbekanntem, aber endlichem Endzeitpunkt  $T$  und einem Restwert  $S(T)$ , wie z.B. in Feichtinger und Hartl (1986, Abschnitt 2.7, S. 44 ff.) dargestellt. Danach muss die Ko-Zustandsvariable des Bestands zum Endzeitpunkt  $T$  genau der Ableitung des Restwerts nach dem Bestand entsprechen. Diese Bedingung lässt sich so auf unser Problem übertragen, ließe sich aber auch über das Lösen der Differentialgleichung (4.9) für  $\lambda_T$  herleiten.

durch den selbstständigen Abbau weiter reduziert wird, eindeutig bestimmen.

Es sei nun die klimapolitische Regulierung wieder in die Überlegungen einbezogen, die den kumulierten Ausstoß von Treibhausgasen auf das maximale Niveau  $\bar{y}$  begrenzt. Sind die Anfangsbestände hinreichend groß gewählt und die Parameter derart, dass ohne die Regulierung die Obergrenze des Treibhausgasbestands überschritten würde, so wird auch bei Berücksichtigung der Regulierung dieses maximale Niveau erreicht und es existiert eine Phase des beschränkten Abbaus. Die dazugehörige Abbaumenge, die den Treibhausgasbestand konstant auf dem maximal erlaubten Niveau  $\bar{y}$  hält, ergibt sich durch Auflösen der Gleichung (4.2) für den Fall  $\dot{y} = 0$  nach  $q_t$ .

$$q_t^c = \frac{\alpha\bar{y} - \beta x_t}{K} \quad (4.16)$$

Die Abbaurate  $q_t^c$  ist während dieser Phase des beschränkten Abbaus ( $t \in (t_c, t_v)$ ) durch die exogen vorgegebene Obergrenze  $\bar{y}$  und durch den (noch) vorhandenen Ressourcenbestand  $x_t$  bestimmt. Da der Bestand der Gashydrate eine über die Zeit abnehmende Menge von CH<sub>4</sub>-Emissionen freisetzt, die damit einen sinkenden Anteil der Kapazität in Anspruch nehmen, bleibt ein wachsender Raum für den Ausstoß von CO<sub>2</sub> und CH<sub>4</sub> aufgrund der Nutzung der Hydrate. Daher ist eine Abbaurate  $q_t^c$  zu beobachten, die nicht konstant – wie in dieser Art von Modellen normalerweise üblich (vgl. z.B. Chakravorty et al., 2006; Lafforgue et al., 2008) – sondern über die Zeit ansteigend verläuft.

Des Weiteren lässt sich feststellen, dass die Umschaltbedingung (4.15) dieselbe bleibt wie im Referenzfall des unregulierten Abbaus. Denn die zusätzliche enthaltene Größe in Bedingung (4.8), der Schattenwert des Treibhausgasbestands  $\mu_t$ , verschwindet, sobald die Restriktion durch die Obergrenze des Treibhausgasbestands nicht mehr bindend wirkt. Und es lässt sich zeigen, dass das maximale Niveau  $\bar{y}$  in der optimalen Lösung verlassen wird, bevor der Abbau gestoppt wird.

**Proposition 4.1** *Wird der Treibhausgasbestand  $y_t$  für ein positives Zeitintervall  $t \in (t_c, t_v)$ ,  $t_c < t_v$ , auf seinem maximal erlaubten Niveau  $\bar{y}$  gehalten, so gilt für dieses Zeitintervall, dass die Abbauraten über die Zeit monoton ansteigen und dass es nicht optimal sein kann, den Abbau zu stoppen.*

**Beweis** Aus  $q_t = q_t^c$  für alle  $t \in (t_c, t_v)$  folgt durch Differenzieren von (4.16) nach der Zeit direkt, dass  $\dot{q}_t^c = \frac{-\beta\dot{x}_t}{K} = \frac{\beta(\beta x_t + q_t)}{K} > 0$  für alle  $t \in (t_c, t_v)$ , das heißt

die Abbaurate steigt über die Zeit. Weiterhin sind nach Feichtinger und Hartl (1986, Satz 6.2, S. 167) Sprünge in der Kontrollvariablen ausgeschlossen, falls die Regularitätsbedingung, für welche die Negativ-Definitheit der Hesse-Matrix des Systems hinreichend ist, erfüllt ist. Mit  $H_{qq} = \zeta^2 U''(\zeta q_t) < 0$  ist diese Bedingung erfüllt und die Kontrollvariable  $q_t$  verläuft somit stetig. Da im Zeitpunkt  $T$  der Abbau gestoppt wird, fällt die Abbaurate unmittelbar davor von einem positiven Wert auf 0, das heißt  $q_{T-\varepsilon} > 0$  und  $\dot{q}_{T-\varepsilon} < 0$  mit  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Für jeden Zeitpunkt  $T$  innerhalb des Intervalls  $(t_c, t_v)$  wäre dies einen Widerspruch zu  $\dot{q}_t^c > 0$ . ■

Nach Proposition 4.1 wird in der optimalen Lösung des Problems der Abbau nicht gestoppt, solange sich der Treibhausgasbestand auf dem maximalen Niveau hält. Es existiert demnach eine Phase von positiver Länge,  $t \in (t_v, T)$ , in der die Emissionen so gering sind, dass die natürliche Regeneration der Atmosphäre überwiegt und der Treibhausgasbestand sich abbaut. Die Beschränkung durch die Obergrenze ist nicht mehr relevant, so dass  $\mu_t = 0$  ist. Die Dynamik in dieser Phase wird lediglich durch die Knappheit der Ressource und die Abbaukosten bestimmt, entspricht also der zu Beginn dieses Abschnitts betrachteten Situation ohne Regulierung. Die Abbaumenge sinkt in diesem Zeitraum von  $q_{t_v} = q_{t_v}^c > 0$  auf  $q_T = 0$ , bevor es in  $T$  zum Umschalten in die letzte Phase kommt, die durch Laisser-Faire bestimmt wird.

Bevor wir im folgenden Abschnitt die optimalen Zeitpfade der entscheidenden Größen und dabei insbesondere die Wirkung der beiden außergewöhnlichen Komponenten des Modells genauer betrachten, bedarf es an dieser Stelle einer wichtigen Einschränkung bezüglich des zulässigen Bereichs der Anfangsbestände. Es bezeichne  $\tilde{q}_t$  den optimalen Abbaupfad, der mit den Zeitpfaden der Zustandsvariablen  $\tilde{x}_t$  und  $\tilde{y}_t$  einhergeht, und durch die folgenden Eigenschaften zum Zeitpunkt des Erreichens des maximal erlaubten Treibhausgasbestands  $\tilde{t}_c$  definiert ist:

$$\tilde{q}_{\tilde{t}_c} = 0, \quad \tilde{y}_{\tilde{t}_c} = \bar{y}, \quad \tilde{x}_{\tilde{t}_c} = \frac{\alpha}{\beta} \bar{y} \quad (4.17)$$

Die Lösung mit diesen Eigenschaften definiert im x-y-Raum die Trajektorie  $\tilde{y}(\tilde{x})$  und ist in Abbildung 4.2 als der etwas dickere Pfad neben dem bereits aus der Abbildung 4.1 bekannten Laisser-Faire-Pfad  $y_M(x)$  eingezeichnet. Diese Trajektorie  $\tilde{y}(\tilde{x})$  stellt insofern einen Grenzpfad dar, als dass alle Kombinationen von An-

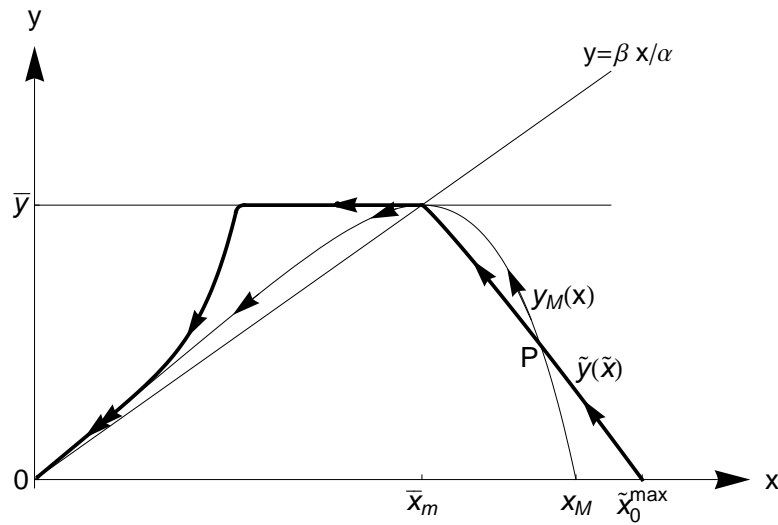


Abbildung 4.2: Der Grenzpfad zur Lösbarkeit des Problems

fangsbeständen  $(x_0, y_0)$ , die im x-y-Diagramm rechts bzw. oberhalb dieses Pfads liegen, unweigerlich dazu führen, dass die Bedingung (4.3) nicht eingehalten werden kann. Denn jede Trajektorie, die in dem Bereich oberhalb bzw. rechts von  $\tilde{y}(\tilde{x})$  ihren Ausgangspunkt hat, wird die Obergrenze  $\bar{y}$  mit einem Ressourcenbestand  $x(t_c) > x_m = \frac{\alpha}{\beta} \bar{y}$  erreichen. Aufgrund des natürlich abgebauten Anteils des Gashydrats, der in diesem Fall  $\beta x_m$  übersteigt und so mehr Emissionen freisetzt als durch Regeneration aus der Atmosphäre verschwindet, ist es unmöglich, die Restriktion (4.3) einzuhalten ohne eine der anderen Optimalitätsbedingungen zu verletzen.

**Proposition 4.2** *Ist der anfängliche Ressourcenbestand  $x_0$  beziehungsweise der anfängliche Treibhausgasbestand  $y_0$  mit  $y_0 > \tilde{y}(x_0)$  hinreichend groß, so ist das Optimierungsproblem des sozialen Planers aufgrund des natürlichen Abbaus der Ressource nicht lösbar, weil die durch 4.3 gegebene Bedingung  $y_t \leq \bar{y}$  nicht eingehalten werden kann.*

**Beweis** Wie oben bereits argumentiert wurde, erreicht jede Trajektorie, die bei einem anfänglichen Treibhausgasbestand  $y_0 > \tilde{y}(x_0)$  startet, das maximal zulässige Niveau des Treibhausgasbestands mit einem restlichen Bestand des Gashydrats in situ von  $x_{t_c} > x_m = \frac{\alpha}{\beta} \bar{y}$ . In diesem Fall ist es unmöglich die Treibhausgase konstant auf dem Niveau  $\bar{y}$  zu halten, da laut (4.2) dann gilt  $\dot{y}_{t_c} = q_{t_c} + \beta x_{t_c} - \alpha y_{t_c} > q_{t_c} + \beta x_m - \alpha \bar{y} = q_{t_c} + \beta \frac{\alpha}{\beta} \bar{y} - \alpha \bar{y} = q_{t_c}$ . Selbst mit

der kleinstmöglichen Abbaurrate,  $q_{t_c} = 0$ , wäre  $\dot{y}_{t_c} > 0$ , der Treibhausgasbestand würde weiter ansteigen und die Obergrenze übersteigen. Die Bedingung (4.3) würde verletzt. Das Problem des sozialen Planers ist daher nicht lösbar für Anfangsbestände von  $y_0 > \tilde{y}(x_0)$ . ■

Im Hinblick auf die anfänglich aufgeworfene Fragestellung nach dem „vorsorglichen Abbau“ des Gashydrats wird damit deutlich, dass diese These nur für einen eingeschränkten Bereich von Anfangsbeständen unterstützt werden kann. Das durch die Punkte  $x_M, P$  und  $\tilde{x}_0^{max}$  begrenzte „Dreieck“ in Abbildung 4.2 beschreibt diesen Bereich, wobei  $P$  der Schnittpunkt der beiden Trajektorien  $\tilde{y}(\tilde{x})$  und  $y_M(x)$  ist. Für alle Kombinationen von Anfangsbeständen, die außerhalb dieses Dreiecks liegen, existiert entweder keine optimale Lösung oder das maximal erlaubte Niveau des Treibhausgasbestands  $\bar{y}$  würde auch in der Laissez-Faire-Situation nicht erreicht. Demnach kann der Gedanke, die Spitze des atmosphärischen Treibhausgasbestands zu verhindern, nicht das alleinige Argument für einen Abbau des Gashydrats sein.

Neben den Abbauraten  $\alpha$  und  $\beta$ , die den Verlauf der Trajektorie  $y_M(x)$  bestimmen, sowie der Höhe der auferlegten Obergrenze  $\bar{y}$  beeinflussen die Nachfrageparameter der Nutzenfunktion wie auch die Abbaueffektivität  $\zeta$  maßgeblich das Ausmaß dieser Region, in der „vorsorglicher Abbau“ die Einhaltung der Obergrenze ermöglicht. Ein Blick auf die Steigung der Trajektorie  $\tilde{y}(\tilde{x})$  bis zum Erreichen der Obergrenze, die durch  $\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{\dot{y}_t}{\dot{x}_t} = \frac{Kq_t + \beta x_t - \alpha y_t}{-q_t - \beta x_t} = -\frac{(1-\zeta(1-\kappa)q_t + \beta x_t - \alpha y_t)}{q_t + \beta x_t} < 0$  gegeben ist, zeigt, dass diese ceteris paribus umso größer ist, je größer die Abbaueffektivität  $\zeta$  ist, denn  $\frac{\partial(\partial y_t / \partial x_t)}{\partial \zeta} = (1 - \kappa)q_t > 0$ . Da  $\frac{\partial y_t}{\partial x_t}$  negativ ist, bedeutet ein größere Steigung hier einen flacheren Verlauf der Trajektorie  $\tilde{y}(\tilde{x})$ . Je größer also die Abbaueffektivität  $\zeta$  und damit die emissionsreduzierende Wirkung des Abbaus der Ressource, desto flacher die Steigung der Trajektorien und damit desto größer das Dreieck in Abbildung 4.2. Demnach kann eine Weiterentwicklung der Abbautechnologie, die eine Erhöhung von  $\zeta$  bedeutet, durchaus die Region des „vorsorglichen Abbaus“ ausweiten.

### 4.3.2 Komparative Dynamik

Nachdem der vorangegangene Abschnitt die Einschränkungen und grundsätzlichen Ergebnisse herausgearbeitet hat, widmet sich dieser Abschnitt nun der Entwicklung der wichtigen Größen des Systems in der optimalen Lösung. Abbildung

4.3, die sich über die zwei Seiten 64 und 65 erstreckt, dient der Darstellung der optimalen Zeitpfade wie auch dem Herausarbeiten der qualitativen Auswirkungen der zwei ungewöhnlichen Komponenten des Modells, des geologischen Schadens  $G(x_t)$  und des natürlichen Abbaus des Gashydrats  $\beta$ . Dies geschieht, indem in der ersten Zeile (Zeile a) zunächst die optimalen Zeitpfade für den Lehrbuch-Fall optimalen Abbaus einer endlichen Ressource bei bestandsabhängigen Abbaukosten als Referenzfall dargestellt sind, wobei naturgemäß die beiden soeben benannten Komponenten hier noch nicht berücksichtigt sind ( $\beta = 0$  und  $G(x_t) = 0$ ). In der zweiten Zeile (b) wird dieses Grundmodell unter Vernachlässigung des natürlichen Abbaus ( $\beta = 0$ ) ergänzt um den geologischen Schaden  $G(x_t)$ , wohingegen in der dritten Zeile (c) ausschließlich der natürliche Abbau berücksichtigt wird ( $\beta > 0, G(x_t) = 0$ ). Schließlich stellt die vierte Zeile (d) die Zeitpfade der Lösung des vollständigen Optimierungsproblems zur Nutzung von Gashydraten dar ( $\beta > 0, G(x_t) > 0$ ). Um weiterhin die Wirkung der Regulierung durch eine Beschränkung der zulässigen kumulierten Treibhausgasemissionen zu verdeutlichen, enthält jedes einzelne Diagramm einen Zeitpfad, welcher der optimalen Lösung im unregulierten Fall entspricht und durch die gestrichelten Linien gekennzeichnet ist, und einen Pfad, der die optimale Lösung unter Berücksichtigung der Regulierung durch die Obergrenze  $\bar{y}$  beschreibt und durch die durchgezogene Linie repräsentiert wird. Dabei beschreibt jeweils der dicker gezeichnete Teil des Pfades eine Phase positiven Abbaus ( $q_t > 0$ ), während die dünn gezeichnete Linie für die Laissez-Faire-Lösung ( $q_t = 0$ ) steht, die im unregulierten Fall zum Zeitpunkt  $T'$  und im regulierten Fall zum Zeitpunkt  $T$  beginnt. Die ebenfalls eingezeichneten Zeitpunkte  $t_c$  und  $t_v$  markieren jeweils für den regulierten Fall die Zeitpunkte, da die aggregierten Treibhausgasemissionen die Obergrenze erreichen beziehungsweise wieder verlassen. Jede Zeile der Abbildung 4.3 enthält über die zwei Seiten betrachtet von links nach rechts jeweils vier Diagramme, je eines für die Entwicklung des Ressourcenbestands  $x_t$ , des atmosphärischen Treibhausgasbestands  $y_t$ , der Abbauraten  $q_t$  und der Knappheit der Ressource  $\lambda_t$  über die Zeit. Der zuletzt genannte Schattenwert ist an dieser Stelle von besonderem Interesse, da sein qualitativer Verlauf sich durch die Hinzunahme der verschiedenen Komponenten deutlich vom Grundmodell unterscheidet. Demgegenüber ist der andere Schattenwert,  $\mu_t$  an dieser Stelle zu vernachlässigen, da er für den unregulierten Fall nicht existiert und im regulierten Fall stets denselben (bereits auf Seite 54

beschriebenen) Verlauf besitzt: Der Betrag des Schattenwerts  $\mu_t$  steigt bis zum Zeitpunkt  $t_c$ , in dem das maximale Niveau erreicht wird, mit der Rate  $(\alpha + \rho)$  exponentiell an und sinkt dann aufgrund des positiven  $\chi_t$  in Gleichung (4.10) bis zum Zeitpunkt  $t_v$  monoton auf 0 herab.<sup>19</sup>

Wie aus Modellen zum optimalen Abbau unter Berücksichtigung von bestandsabhängigen Abbaukosten hinlänglich bekannt und in Diagramm (a1) für das Grundmodell dargestellt ist, wird in diesem Referenzfall der Ressourcenbestand  $x_t$  in unendlicher Zeit asymptotisch gegen einen positiven Wert  $x_\infty^B$  reduziert.<sup>20</sup> Die Parameter sind dabei derart gewählt, dass der Treibhausgasbestand  $y_t$  die Obergrenze  $\bar{y}$  im Fall ohne Regulierung überschreitet, so dass bei Berücksichtigung der Regulierung die Obergrenze (4.3) zur bindenden Restriktion wird (Diagramm (a2)). Da die Beschränkung durch die Obergrenze jedoch ein temporäres Phänomen ist und sie nur bis zum Zeitpunkt  $t_v$  das System beeinflusst, sind die Steady-State-Werte für beide Fälle jeweils dieselben. Aus dem Diagramm (a2) ist weiterhin abzulesen, dass bei Berücksichtigung der Regulierung, diese sich bereits in der ersten Phase auswirkt, so dass es zu einem vergleichsweise langsamen Anstieg des Treibhausgasbestands kommt und das Level  $\bar{y}$  später erreicht wird. Wie das Diagramm (a3) zeigt, bewirken dies die moderaten Abbauraten in der ersten Phase, bevor in der zweiten Phase des beschränkten Abbaus,  $t \in (t_c, t_v)$ , die Abbauraten konstant auf dem Niveau gehalten wird, das genau so viel CO<sub>2</sub> emittiert wie durch die natürliche Regeneration aus der Atmosphäre entfernt wird. In der ersten Phase wird demnach bereits antizipiert, dass es zu einer Beschränkung des Abbaus kommen wird und daher wird der Konsum der Ressource hier schon leicht zurückgehalten. Die Knappheit der Ressource  $\lambda_t$ , die im Diagramm (a4) dargestellt ist, spiegelt in diesem Grundmodell für beide Fälle weniger die physische Knappheit sondern vielmehr die ökonomische Knappheit wider. Die mit der Reduktion des Ressourcenbestands ansteigenden Grenzkosten des Abbaus lassen den marginalen Nettonutzen des Abbaus und damit den Wert der Ressource in situ abnehmen und schließlich gegen null konvergieren. Die Berücksichtigung der

---

<sup>19</sup>Ergänzend zu den Darstellungen in Abbildung 4.3 findet sich in Anhang B.2 noch eine Abbildung, die exemplarische Zeitpfade aller Größen des Systems zeigt, inklusive des Schattenwerts  $\mu_t$  und der gesellschaftlichen Grenzkosten.

<sup>20</sup>Unter der Annahme einer im Ressourcenbestand linear abnehmenden Stückkostenfunktion, die in der Kostenfunktion  $C(x_t, q_t) = q_t(c_1 - c_2 x_t)$  enthalten ist, wäre dieser Bestand genau  $x_\infty^B = \frac{c_1 - \zeta \bar{p}}{c_2}$ . Der hochgestellte Index  $B$  wurde für dieses Grundmodell aufgrund der englischen Bezeichnung (Benchmark) gewählt.

4 Optimale Gashydrat-Nutzung bei Begrenzung der aggregierten Treibhausgasemissionen

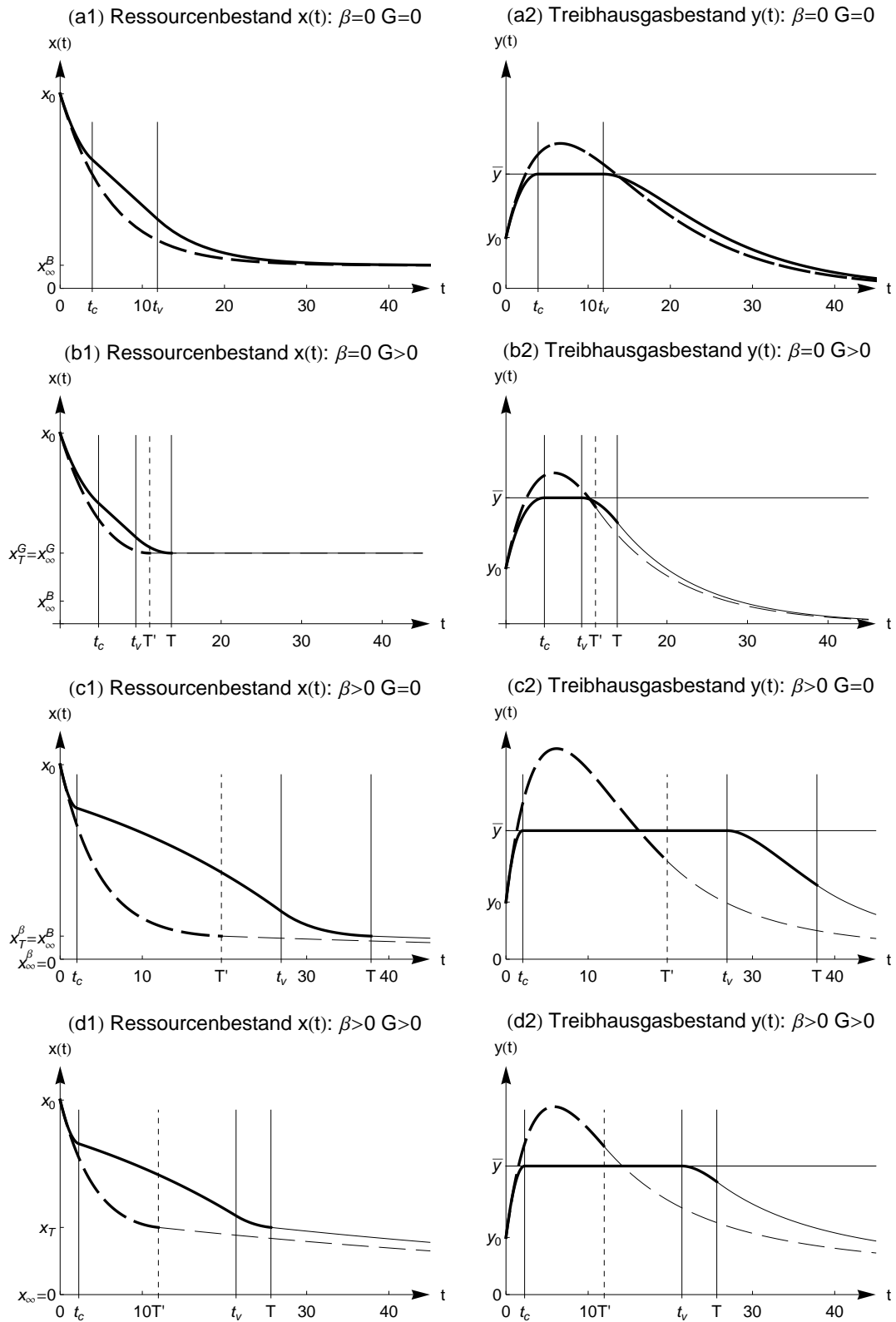


Abbildung 4.3: Optimale Zeitpfade und comparative Dynamik bezüglich  $\beta$  und  $G(x_t)$



4 Optimale Gashydrat-Nutzung bei Begrenzung der aggregierten  
Treibhausgasemissionen

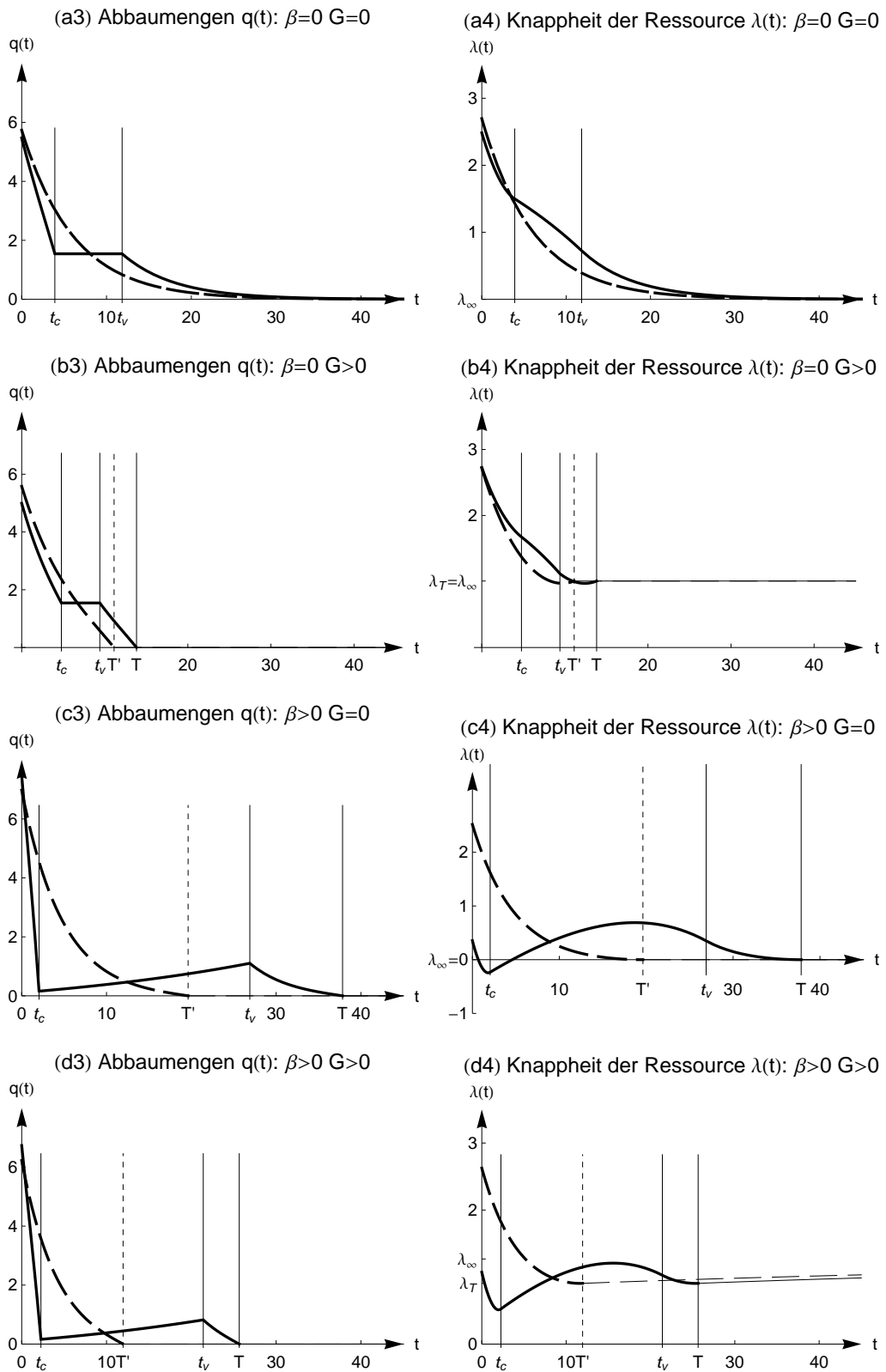


Abbildung 4.3(Forts.): Optimale Zeitpfade und komparative Dynamik bzgl.  $\beta$  u.  $G(x_t)$

Regulierung hat hier lediglich die unwesentliche Auswirkungen, dass die Knappheit durch die langsamere Ressourcenreduktion ebenfalls etwas langsamer sinkt.

Die Auswirkung des Einbeziehens des zusätzlichen Bestandseffekts in Form des geologischen Schadens  $G(x_t)$  wird in der zweiten Zeile der Abbildung 4.3 illustriert. Wie das Diagramm (b1) zeigt, führt er dazu, dass im Vergleich zum Grundmodell ein kleinerer Anteil der Ressource konsumiert wird. Der Ressourcenbestand wird lediglich bis zu einem bestimmten, zu konservierenden Bestand  $x_T^G = x_\infty^G > x_\infty^B$  reduziert, der im Zeitpunkt  $T$  beziehungsweise  $T'$  exakt erreicht wird und größer ist als im Grundmodell. Dass dieser Wert nicht asymptotisch sondern exakt erreicht wird ( $q_t = 0$  und  $x_t = x_\infty^G$  für alle  $t \geq T$ ), liegt in der Gestalt des geologischen Schadens begründet, der zwar bestandsabhängig jedoch nicht von den sinkenden Abbauraten abhängig ist. Dies verursacht eine monoton ansteigende Komponente in der Knappheit der Ressource, die dem sinkenden Effekt der Kostenkomponente des Grundmodells entgegensteht. Diese Komponente steigt bis auf den Wert  $-\frac{G'(x_T)}{(\beta+\rho)}$  an, so dass im Zeitpunkt  $T$  die Umschaltbedingung (4.15) erfüllt ist und ab diesem Zeitpunkt  $T$  des Einstellens des Abbaus diese Komponente allein die Opportunitätskosten einer Einheit der Ressource in situ bestimmt. Je größer der Schadensparameter in  $G(x_t)$  angenommen wird, desto größer der Anteil der Ressource, der konserviert wird. Ähnlich wie im Diagramm (a4) zeigt auch das Diagramm (b4) für die Knappheit der Ressource  $\lambda_t$ , dass die Einführung der bindenden Obergrenze im Vergleich zur unregulierten Lösung keine entscheidenden Auswirkungen hat. Da weiterhin insgesamt ein kleinerer Anteil der Ressource konsumiert wird, ist in (b2) der Spitzenwert des Treibhausgasbestands bei Vernachlässigung der Regulierung in etwas geringer als in (a2). Im Vergleich zum Grundmodell wird der Konsum der Ressource und damit auch das Auftreten des geologischen Schadens tendenziell leicht nach hinten verschoben.<sup>21</sup> Die Phase, in welcher der Treibhausgasbestand auf dem maximalen Niveau der Abbau beschränkt und konstant (b3) gehalten wird, fällt deutlich kürzer aus als in (a3), da diese auch widerspiegelt, wie stark das maximalen Niveau im nicht begrenzten Fall überschritten würde. Darüber hinaus zeigt, das Diagramm (b3) im Gegensatz zu (a3), dass hier die Abbauraten tatsächlich gleich null werden (und nicht asymptotisch gegen null gehen).

---

<sup>21</sup>Diese Aussage kann zwar aus der Abbildung nicht direkt abgelesen werden, wurde aber aus den Berechnungen deutlich. Für eine Zusammenfassung der im Zuge der Erstellung der Graphik angefallene Werte, siehe Tabelle B.1 in Anhang B.3.

Die dritte Zeile der Abbildung 4.3 widmet sich der Auswirkung, die das Einbeziehen des selbstständigen Abbaus der Ressource  $\beta$  im Vergleich zum Grundmodell hat. Der geologische Schaden wird also zunächst erneut vernachlässigt. Im Gegensatz zu Zeile (a) existiert auch hier ein Zeitpunkt  $T$ , zu dem der Abbau eingestellt wird ( $q_t = 0$  für alle  $t \geq T$ ). Allerdings ist es unmöglich den dann noch bestehenden Ressourcenbestand  $x_T^\beta$  zu erhalten, da sich dieser nun weiter abbaut ( $x_t = x_T^\beta e^{-\beta(t-T)}$  für alle  $t \geq T$ ) und in unendlicher Zeit gegen 0 konvergiert. Da aufgrund des selbstständigen Abbaus der Ressourcenbestand unweigerlich immer weiter fällt, ist es auch unmöglich  $x_T^\beta$  nur asymptotisch zu erreichen.  $x_T^\beta$  erfüllt im Zeitpunkt  $T$  exakt die Umschaltbedingung (4.15). Wie Abbildung (c1) weiterhin zeigt, entspricht der Ressourcenbestand  $x_T^\beta$  in diesem Zeitpunkt genau dem Bestand  $x_\infty^B$ , gegen den  $x_t$  im Grundmodell asymptotisch reduziert wird. Diagramm (c2) verdeutlicht für den unregulierten Fall einen im Vergleich zum Grundmodell erkennbar höheren Spitzenwert des Treibhausgasbestands in der Atmosphäre und daher im regulierten Fall auch eine deutlich längere Verweildauer an der Obergrenze. Auch werden die aggregierten Emissionen deutlich schneller auf das Niveau  $\bar{y}$  erhöht. Dieser rasante Anstieg kann zum einen durch die zusätzlichen Emissionen aufgrund des natürlichen Abbaus der Ressource erklärt werden. Zum anderen zeigt Diagramm (c3) jedoch, dass auch die Abbauraten im Vergleich zum Grundmodell höher liegen. Im unregulierten Fall bewirkt der selbstständige Abbau lediglich, dass anfänglich die Abbauraten etwas höher sind und dass zum Zeitpunkt  $T'$  der Abbau eingestellt wird. Im regulierten Fall beginnt der Abbau hingegen ebenfalls auf einem höheren Niveau, sinkt dann aber sehr schnell ab, damit die Obergrenze des Treibhausgasbestands nicht verletzt wird. In der Phase des beschränkten Abbaus ist dann die monoton ansteigende Abbaurate (vgl. Proposition 4.1), welche die immer größere werdende Kapazität ausnutzt, zu beobachten. Diagramm (c4) zeigt klar, dass die Einführung des natürlichen Abbaus  $\beta$  deutliche Auswirkungen auf den qualitativen Verlauf der Knappheit der Ressource in situ  $\lambda_t$  hat. Dabei ist im unregulierten Fall lediglich im Vergleich zum Grundmodell ein durch den natürlichen Abbau stets etwas geringerer Wert festzustellen, der im Zeitpunkt  $T'$  zu null wird. Wird die Regulierung hingegen berücksichtigt, bekommt der Bestand der Treibhausgase ebenfalls einen Schattenwert, der den Schattenwert der Ressource in situ dann mindert. Dieser kann sogar negativ werden, wenn die Kosten des Nicht-Konsumierens den Wert des Zurück-

haltens dominieren. Der natürliche Abbau der Ressource erhöht die atmosphärischen Treibhausgase und induziert eine schnelle Reduktion des Bestands, jedoch wird dieser Drang zur Reduzierung des Bestands durch den schnelleren Anstieg der marginalen Abbauskosten ausgeglichen. Auch in diesem Fall verschwindet der Schattenwert ab dem Zeitpunkt  $T$ . Die anfänglich kleinen Opportunitätskosten des Abbaus sind jedoch ursächlich für die vergleichsweise hohen Abbauraten.

Schließlich stellt die vierte Zeile der Abbildung 4.3 die optimalen Zeitpfade zum vollständigen in Abschnitt 4.2 vorgestellten Modell zur Nutzung von Gashydratvorkommen vor, so dass nun sowohl der geologische Schaden  $G(x_t)$  als auch der natürliche Abbau der Ressource  $\beta$  eingehen. Die Zeitpfade spiegeln nun Elemente beider isoliert betrachteter Komponenten wider. Im Diagramm (d1) lässt sich erkennen, dass der Ressourcenbestand bis zu einer bestimmten Menge  $x_T$  reduziert wird, der genau dem  $x_T^G$  aus der alleinigen Betrachtung der Wirkung von  $G(x_t)$  (Zeile b) entspricht, und dass der Ressourcenbestand wie in Zeile c nach dem Abbaustopp aufgrund des natürlichen Abbaus weiter bis auf  $x_\infty = 0$  sinkt. Auch der Verlauf des Treibhausgasbestands  $y_t$  in Diagramm (d2) ist ein Hybrid aus beiden zuvor betrachteten Elementen. Der Spitzenwert des Treibhausgasbestands in der unregulierten Lösung liegt zwischen den beiden Werten in (b2) und (c2) und dementsprechend ist die Verweildauer an der Obergrenze ebenfalls länger als bei alleiniger Berücksichtigung von  $G(x_t)$  und kürzer als bei alleiniger Berücksichtigung von  $\beta$ . Auch wird die Obergrenze später erreicht als in (c2), jedoch früher als in (b2). Bezüglich der Abbauraten ist in Diagramm (d3) zu beobachten, dass diese durch  $G(x_t)$  wieder etwas niedriger ansetzen als in (c3), dass aber auch hier die Abbauraten monoton ansteigen, solange die Obergrenze der Treibhausgase bindet. Die Knappheit der Ressource  $\lambda_t$  in Diagramm (d4) repräsentiert ebenfalls die bereits aus (b4) und (c4) bekannten Verläufe. Aufgrund der monoton ansteigenden Komponente, die aufgrund von  $G'(x_t)$  in  $\lambda_t$  enthalten ist, haben wir im Vergleich zu (c4) einen deutlich höheren Wert der Ressource in situ. Interessanterweise steigt diese Komponente aufgrund der durch den natürlichen Abbau fortschreitenden Reduktion des Bestands von  $x_t$  auch nach dem Zeitpunkt  $T$  weiter an und konvergiert gegen den positiven Wert  $\lambda_\infty = -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} > \lambda_T$ . Dieser fortschreitende Anstieg ist auch ursächlich dafür, dass die sozialen Grenzkosten  $\lambda_t + c(x_t)$  ab dem Zeitpunkt  $T$ , in dem (4.15) erfüllt ist, stets größer sind als der Grenznutzen und somit Abbau nicht wieder lohnt.

#### 4.4 Abschließende Bemerkungen

In diesem Kapitel haben wir ein relativ einfaches ökonomisches Modell zum Abbau eines nicht-erneuerbaren Ressourcenbestands unter Berücksichtigung einer exogen gegebenen Obergrenze auf die aggregierten Emissionen von Treibhausgasen analysiert. Die Besonderheit des Ansatzes liegt dabei in der Betrachtung nicht eines herkömmlichen fossilen Brennstoffes sondern eines endlichen Bestands von Gashydrat als alleinige Ressource. Dazu wurden die wichtigsten Eigenschaften der Gashydrate berücksichtigt, indem ein bestandsabhängiger durch geologische Risiken erzeugter volkswirtschaftlicher Schaden und die selbstständige Auflösung des Bestands der Gashydrate, die  $\text{CH}_4$  mit einer vergleichsweise hohen Schädlichkeit in Bezug auf den atmosphärischen Treibhausgasbestand freisetzt, modelliert wurden. Insbesondere dieser selbstständige Abbau und die damit einhergehenden  $\text{CH}_4$ -Emissionen erlegen dem System zusätzliche Beschränkungen auf. So gibt es einen großen Bereich von Anfangsbeständen, für welche die Obergrenze des Treibhausgasbestands nicht eingehalten werden kann.

Aufgrund des von einer Gruppe von Geowissenschaftlern postulierten, naheliegenden Vorschlags eines „vorsorglichen Abbaus“ (Krey et al., 2009), nach dem unkontrollierte Emissionen von  $\text{CH}_4$  aus den Beständen der Gashydrate teilweise durch  $\text{CO}_2$ -Emissionen nach Nutzung und Verbrennung ersetzt werden, untersuchen wir, ob der Abbau des Gases aus diesen Beständen tatsächlich helfen könnte, eine exogen gegebene Beschränkung der aggregierten Treibhausgasemissionen einzuhalten. Dies trifft jedoch lediglich für einen begrenzten Bereich von Anfangsbeständen und Parametern zu, jedenfalls wenn als Referenz die Laissez-Faire-Situation genommen wird, in der die Gashydrate trotz ihres selbstständigen Abbaus nicht genutzt werden. Darüber hinaus wurde gezeigt, dass der Schaden durch geologische Risiken, der zwar bestandsabhängig jedoch unabhängig von den Abbaukosten ist, der Schlüsselfaktor ist, der darüber entscheidet, ob der gesamte Bestand genutzt wird oder ob er teilweise unberührt bleibt. Dies bedeutet, dass die Größe des anfänglich vorhandenen Ressourcenbestands auch in diesem Modell entscheidend ist.

Auch wenn die getroffenen Annahmen teilweise als sehr restriktiv kritisiert werden können, werden durch diese Vereinfachungen doch einige Einblicke ermöglicht, die teilweise die Grundlage für das Modell im folgenden Kapitel legen.

So beobachten wir eine außergewöhnliche ansteigende Abbaurate, solange die Obergrenze des Treibhausgasbestands eine bindende Restriktion ist, und stellen fest, dass eine verbesserte Abbautechnologie die recht eingeschränkte Menge der Anfangsbestände erhöht, die einen „vorsorglichen Abbau“ ermöglichen. Auch ist es erst durch diese Vereinfachungen möglich, eindeutige Effekte der einzelnen Modellkomponenten bezüglich der komparativen Dynamik festzumachen. Allerdings wirft das Ergebnis bezüglich der Nicht-Lösbarkeit des Problems natürlich die Frage auf, ob die Begrenzung der aggregierten Treibhausgasemissionen in Bezug auf Gashydrat-Vorkommen das geeignete politische Instrument darstellen. Außerdem wäre eine stochastische Formulierung der selbstständigen Abbaurate und der geologischen Risiken eventuell lohnenswert, dies würde das Problem jedoch extrem verkomplizieren. Daher wird dieser Gedanke im folgenden Kapitel nicht weiter verfolgt, sondern für zukünftige Forschungsarbeit gelassen. Stattdessen wird im nächsten Kapitel eine zweite Ressource und eine emissionsfreie Energieform einbezogen und die optimale Abbaureihenfolge bestimmt.

## 5 Gashydrate im optimalen Energiemix

### 5.1 Einführung

In den zwei vorangegangenen Kapiteln wurde jeweils die Wirkung der Eigenschaften von Gashydraten auf die optimalen Pfade bei alleiniger Nutzung dieser einen Ressource untersucht, wobei der Klimaexternalität einmal mithilfe einer konvexen Schadensfunktion und einmal durch eine Obergrenze auf den atmosphärischen Treibhausgasbestand Rechnung getragen wurde. In diesem Kapitel wird der Fokus hingegen auf der möglichen Rolle der Gashydrate im Energiemix der Zukunft liegen. Dazu ist es sinnvoll, die endliche Ressource Gashydrat nicht exklusiv zu betrachten, so dass neben der üblichen emissionsfreien alternativen Energieform noch ein weiterer endlicher Ressourcenbestand eingeführt wird, dessen Nutzung ebenfalls Emissionen freisetzt. Dieses Vorgehen soll – wiederum vor dem Hintergrund eines politisch induzierten maximalen Niveaus der Treibhausgase – helfen, die Frage nach dem optimalen Abbau zu beantworten, falls das sich selbstständig abbauende Gashydrat neben traditionellen fossilen Brennstoffen, sei es Kohle oder auch Öl, für die Energiegewinnung zur Verfügung steht.

In der Literatur sind Modelle zur Nutzung mehrerer Ressourcenbestände verschiedener Beschaffenheit keine Seltenheit. Zumeist werden jedoch die Ressourcenbestände in ihren Abbaukosten unterschieden. So hat Herfindahl (1967) zunächst das klassische Hotelling (1931)-Modell zur optimalen Nutzung endlicher Ressourcen erweitert, indem er mehrere Ressourcen, die zu unterschiedlichen Stückkosten abgebaut werden können, eingeführt hat. Sein Ergebnis, die verschiedenen Ressourcenbestände seien in aufsteigender Reihenfolge ihrer Abbaukosten zu erschöpfen, ist Grundlage für einen ganzen Strang ökonomischer Literatur, die in verschiedenen Zusammenhängen jeweils untersucht, ob dieses „Least-Cost-First“-Prinzip seine Gültigkeit behält. So untersuchen beispielsweise Kemp und Long (1980) oder auch Chakravorty und Krulce (1994) den Abbau mehrerer nicht-erneuerbarer Ressourcen bei Heterogenität der Kosten. Wie auch Amigues et al. (1998) und Holland (2003), die zusätzlich Kapazitätsgrenzen bezüglich der Abbaumengen annehmen, zeigen sie, dass es zu simultaner Nutzung

beider Ressourcen kommen kann und somit das „Least-Cost-First“-Prinzip hier nur bedingt gilt.

Chakravorty et al. (2008) abstrahieren vollständig von der Kostenfrage, übertragen den Gedanken jedoch auf unterschiedlich stark verschmutzende Ressourcenbestände, indem sie anstelle der Kosten den CO<sub>2</sub>-Ausstoß pro genutzter Einheit der Ressourcen variieren und untersuchen, ob ein „Least-Emissions-First“-Prinzip gilt. Vor dem Hintergrund einer exogenen Beschränkung der akkumulierten Treibhausgasemissionen und in der Nutzung perfekt substituierbarer Ressourcen zeigen sie, dass dieses Prinzip nicht grundsätzlich gilt und dass es neben Phasen simultaner Ressourcennutzung durchaus zu der paradox anmutenden Abbaureihenfolge kommen kann, in der zunächst die vergleichsweise schmutzige Ressource genutzt wird, dann die saubere und schließlich wieder die schmutzige. Demnach entscheiden weniger die Unterschiede in den Emissionskoeffizienten, und damit in den sozialen Kosten, sondern vielmehr die anfangs vorhandenen Mengen der verschiedenen Ressourcen über die optimalen Abbaureihenfolgen. Smulders und van der Werf (2008) verfolgen einen ähnlichen Ansatz und erweitern das klassische Hotelling-Modell um eine zweite Ressource, nehmen jedoch die beiden Ressourcen als imperfekte Substitute in der Nutzung an. Im Ergebnis bestätigen auch sie, dass es unter der Annahme einer klimapolitisch motivierten Obergrenze auf die atmosphärische Treibhausgaskonzentration zu einer stärkeren Nutzung der schmutzigeren Ressource, die weniger produktiv pro ausgestoßener Einheit CO<sub>2</sub> ist, kommen kann, bevor die Obergrenze erreicht wird. Die große Mehrheit der theoretischen Papiere auf dem Gebiet der klimarelevanten Nutzung fossiler Brennstoffe beschränken sich hingegen auf die Untersuchung des Übergangs von nur einer nicht-erneuerbaren Ressource auf eine emissionsfreie „Backstop“-Technologie.<sup>22</sup>

Bei dem in diesem Kapitel vorgestellten Modell zur optimalen Nutzung verschiedener Ressourcenbestände handelt es sich nun ebenfalls um eine Erweiterung des klassischen Hotelling-Modells unter Berücksichtigung einer unendlich zur Verfügung stehenden „Backstop“-Technologie und einem exogen gegebenen maximal erreichbaren atmosphärischen Treibhausgasbestand. Die Erweiterung äußert sich in einem zusätzlichen Ressourcenbestand, der hier die Eigenschaften von Gashydrat besitzt. Um die Vergleichbarkeit mit Chakravorty et al. (2008) zu

---

<sup>22</sup>Eine Übersicht über die theoretische Literatur auf diesem Gebiet wurde bereits im einleitenden Abschnitt 3.1 des Kapitels 3 gegeben.



gewährleisten, wird ebenfalls perfekte Substituierbarkeit der verschiedenen Ressourcenbestände angenommen. Weiterhin wird an dieser Stelle ebenfalls von jeglichen bestandsabhängigen Effekten abstrahiert, das heißt im vorliegenden Fall, dass nicht nur die Abbaukosten, sondern auch der externe Tsunami-Schaden nicht berücksichtigt werden, so dass sich die optimale Lösung im Rahmen eines typischen Hotelling-Modells bewegt. Zuletzt wird auch auf die in den vorherigen Kapiteln noch explizit modellierten Verluste im Zuge des Abbaus von Hydrat verzichtet und davon ausgegangen, dass hundert Prozent der abgebauten Hydrate auch tatsächlich genutzt werden können. Somit liegt allein die Wirkung des selbstständigen Abbaus des Hydrats auf die optimale Lösung im Fokus des hier vorgestellten Modells. Wie die Analyse zeigt, wird das Gashydrat als die vergleichsweise sauberere der beiden endlichen Ressourcen, die außerdem von selbstständigem Abbau betroffen ist, stets zuerst abgebaut. Auch kommt es wegen des natürlichen Abbaus des Gashydrats weder zu simultaner Nutzung zweier Energieformen noch zu einer anfänglichen Nutzung der schmutzigeren Ressource.

Im Folgenden entwickelt der Abschnitt 5.2 zunächst das Modell zur Nutzung mehrerer Ressourcen und leitet die Optimalitätsbedingungen her. Der darauf folgende Abschnitt 5.3 stellt nach einigen Vorüberlegungen in Form der Ergebnisse zur optimalen Abbaureihenfolge die Hotelling-Lösung vor und bespricht dann die optimalen Zeitpfade für unterschiedliche Ausgangssituationen bezüglich der Anfangsbestände der Ressourcen, bevor der nachfolgende Abschnitt das Kapitel mit einem Fazit abschließt.

## 5.2 Modell zum optimalen Energiemix

Um die mögliche Rolle von Gashydraten im optimalen Energiemix beziehungsweise die optimale Abbaureihenfolge bei Berücksichtigung weiterer Energiequellen analysieren zu können, müssen zunächst eine Reihe vereinfachender Annahmen getroffen und eine Notation festgelegt werden. Auf dieser Grundlage können dann die Optimalitätsbedingungen hergeleitet werden, bevor im nächsten Abschnitt die Analyse und die Darstellung der Ergebnisse folgt.

### 5.2.1 Vereinfachende Annahmen und Notation

Die in diesem Kapitel modellierte Wirtschaft generiert ihren Nutzen  $U$  zu jedem Zeitpunkt aus dem Konsum einer bestimmten Menge Energie  $q(t)$ , die durch Abbau verschiedener Energiequellen gewonnen wird.

**Annahme 5.1** *Die Nutzenfunktion  $U(q(t))$  ist eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in  $q(t)$ , die streng monoton ansteigend und konkav verläuft ( $U'(q) > 0, U''(q) \leq 0, U(0) = 0$ ) mit einem Grenznutzen der ersten konsumierten Einheit von  $\lim_{q(t) \rightarrow 0} U(q(t)) \leq \infty$ .*

Da die Zahlungsbereitschaft für eine Einheit Energie durch den Grenznutzen bestimmt ist, definieren wir außerdem den Preis als  $p(t) = p(q(t)) \equiv U'(q(t))$ .

Die berücksichtigten Energiequellen in diesem Modell sind neben einer kostenintensiven erneuerbaren Energieform, beispielsweise Solarenergie, zwei nicht-erneuerbare Ressourcen, Gashydrat sowie ein herkömmlicher fossiler Brennstoff, der im Folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch als Kohle bezeichnet wird. Die zum Konsum des aus ihr gewonnenen Gases abgebaute Menge Gashydrat  $q_1(t)$  trägt neben dem selbstständigen, natürlichen Abbau, der durch die konstante Abbaurate  $\beta$  gekennzeichnet ist, zur Reduktion des vorhandenen Bestandes des Gashydrats  $x_1(t)$  bei. Mit einem anfänglichen Bestand an Gashydrat  $X_1^0$  beschreibt somit folgende Gleichung die Bestandsänderung des Gashydrats in situ:

$$\dot{x}_1(t) = -q_1(t) - \beta x_1(t), \quad x_1(0) = X_1^0 \quad (5.1)$$

Der Bestand der zweiten nicht-erneuerbaren Ressource  $x_2(t)$  hingegen wird ausschließlich durch Abbau der zum Konsum bestimmten Menge  $q_2(t)$  reduziert, so dass sich bei einem anfänglichen Bestand an Kohle  $X_2^0$

$$\dot{x}_2(t) = -q_2(t), \quad x_2(0) = X_2^0 \quad (5.2)$$

ergibt. Bei der dritten zur Verfügung stehenden Energiequelle handelt es sich um eine emissionsfreie erneuerbare Energie, die – wie in dieser Art der modifizierten Hotelling-Modelle üblich – zu konstanten Einheitskosten von  $c_s > 0$  erzeugt werden kann und in unbegrenzter Menge zur Verfügung steht. Mit  $s(t)$  als hergestellte und konsumierte Menge der Solarenergie ist daher die gesamte Menge konsumierter Energie zu jedem Zeitpunkt  $q(t) = q_1(t) + q_2(t) + s(t)$ . Des Weiteren ist

hiernach festgelegt, dass ab dem Zeitpunkt, in dem die beiden nicht-erneuerbaren Ressourcen aufgezehrt sind, der Energiepreis der erneuerbaren Energie konstant gleich den Grenzkosten ihrer Herstellung  $c_s$  ist und dass die in diesem Zeitraum konsumierte Menge Energie  $\bar{s}$  durch die Gleichung  $U'(\bar{s}) = c_s$  bestimmt ist.

Der Konsum der beiden fossilen Brennstoffe wie auch die aus den Hydraten entwichene Menge Gas erhöhen jeweils den Treibhausgasbestand in der Atmosphäre, mit  $y(t)$  bezeichnet und in CO<sub>2</sub>-Einheiten gemessen.<sup>23</sup> Daher bedarf es einer Umrechnung der natürlichen Emissionen von CH<sub>4</sub> aus dem Bestand der Methanhydrate in Einheiten CO<sub>2</sub> durch Multiplikation mit der Inversen des in den vorigen Kapiteln verwandten Umrechnungsfaktors  $\kappa$ , also  $1/\kappa$ , so dass deren Beitrag zum Bestand der Treibhausgase nun mit  $\gamma x_1 = \frac{\beta}{\kappa} x_1$  notiert wird. Unter der Annahme einer natürlichen Regenerationsfähigkeit der Atmosphäre zu einer konstanten Rate  $\alpha > 0$  beschreibt die folgende Gleichung die Änderung des Bestands an Treibhausgasen in der Atmosphäre:

$$\dot{y}(t) = \theta_1 q_1(t) + \theta_2 q_2(t) + \gamma x_1(t) - \alpha y(t) \quad (5.3)$$

Die Emissionskoeffizienten  $\theta_1$  und  $\theta_2$  geben jeweils den CO<sub>2</sub>-Ausstoß an, der durch die Verbrennung der Ressourcen zur Energiegewinnung pro Einheit anfällt. Wie bereits dargestellt, ist bei dem aus Gashydraten hauptsächlich extrahierten Gas CH<sub>4</sub> die gewonnene Energie pro ausgestoßener Einheit CO<sub>2</sub> maximal, so dass sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit feststellen lässt, dass der Emissionskoeffizient des Folgeprodukts der Gashydrate kleiner ist als der Emissionskoeffizient der Kohle, das heißt  $\theta_1 < \theta_2$ .

Es sei angenommen, dass eine Obergrenze  $\bar{y}$  bezüglich der Treibhausgase in der Atmosphäre nicht überschritten werden darf. Formal bedeutet dies:

$$\bar{y} - y(t) \geq 0, \quad y(0) = y_0 < \bar{y} \quad (5.4)$$

Diese Obergrenze mag eine politische Vorgabe oder das Ergebnis international ausgehandelter Abkommen sein oder Schadensfunktionen abbilden, bei denen ein Schaden katastrophalen Ausmaßes bei Erreichen einer bestimmten Grenze auftritt. Weiterhin ist es sinnvoll anzunehmen, dass der anfängliche Treibhaus-

---

<sup>23</sup>An dieser Stelle unterscheidet sich die Darstellung von der in den vorigen zwei Kapiteln, in denen der Treibhausgasbestand  $z_t$  (Kapitel 3) beziehungsweise  $y_t$  (Kapitel 4) jeweils in CH<sub>4</sub>-Einheiten gemessen wurde.

gasbestand  $y_0$  unterhalb dieses maximal erlaubten Niveaus liegt.

Durch die Festlegung dieser Obergrenze für die kumulierten Emissionen sind die maximal erlaubten Emissionen beziehungsweise Abbauraten, solange die Obergrenze bindet, festgeschrieben. Ist  $y(t) = \bar{y}$ , so dürfen die Emissionen nur so groß sein, dass die Regenerationsfähigkeit der Atmosphäre genau ausgeglichen und somit der Treibhausgasbestand konstant gehalten wird ( $\dot{y} = 0$ ). Bei alleiniger Nutzung je einer der beiden Ressourcen liefern (5.3) und (5.4) sodann:

$$q_1^c(t) = \frac{\alpha\bar{y} - \gamma x_1(t)}{\theta_1} \quad \text{und} \quad q_2^c(t) = \frac{\alpha\bar{y} - \gamma x_1(t)}{\theta_2} \quad (5.5)$$

Beide Abbauraten an der Obergrenze (*engl.*: ceiling),  $q_1^c(t)$  und  $q_2^c(t)$ , sind festgelegt durch die Obergrenze  $\bar{y}$ , die Regenerationsrate der Atmosphäre  $\alpha$ , den jeweiligen Emissionskoeffizienten  $\theta_i$  sowie durch die aus den Gashydraten stammenden natürlichen CO<sub>2</sub>-Emissionsäquivalente  $\gamma x_1$ . Aufgrund des Rückgangs des Bestands an Gashydraten sind die Abbauraten ansteigend, solange der Treibhausgasbestand auf dem maximalen Niveau ist, beziehungsweise konstant im Falle von  $q_2^c(t)$ , wenn keine Gashydrate mehr vorhanden sind ( $x_1(t) = 0$ ). Dementsprechend ist der Energiepreis in diesen Phasen, der durch  $p_1^c(t) = U'(q_1^c(t))$  beziehungsweise  $p_2^c(t) = U'(q_2^c(t))$  gegeben ist, sinkend oder konstant. Letzteres tritt wiederum ein, wenn der Bestand an Gashydraten erschöpft ist ( $x_1(t) = 0$ ), so dass in diesem Fall der Energiepreis mit  $\bar{p}_2 = p_2^c(t)|_{\{x_1=0, y=\bar{y}\}}$  benannt werden kann.

Zuletzt wird noch eine recht restriktive Annahme bezüglich der Abbaukosten getroffen. Um eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit Chakravorty et al. (2008) zu gewährleisten, wird in diesem Modell von der Abbildung jeglicher bestandsabhängiger Effekte abgesehen.

**Annahme 5.2** *Die Abbaukosten der beiden endlichen Ressourcen sind null. Die gesamten Abbaukosten sind damit  $C(q_1(t), q_2(t), s(t)) = c_s s(t)$ , die Grenzkosten  $c_s$  sind konstant.*

Damit ist der Nettonutzen aus dem Konsum der verschiedenen Energieformen durch  $B(q_1(t), q_2(t), s(t)) = U(q_1(t) + q_2(t) + s(t)) - c_s s(t)$  gegeben. Mit einer konstanten Diskontrate  $\rho > 0$  gilt es nun, die optimalen Abbau- und Preispfade zu finden, um die abdiskontierte Summe des Nettonutzens über die Zeit zu maximieren.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels auf die explizite Darstellung der Abhängigkeiten von der Zeit  $t$  verzichtet wird, sofern dies nicht zu Unklarheiten führt. Anstelle einer Variablen  $v_i(t)$  wird somit lediglich  $v_i$  geschrieben, wobei natürlich die Abhängigkeit von der Zeit weiterhin Gültigkeit besitzt.

### 5.2.2 Optimierungsproblem und Bedingungen erster Ordnung

Das Optimierungsproblem des sozialen Planers kann nun zusammenfassend wie folgt formuliert werden:

$$\max_{q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, s \geq 0} \int_0^{\infty} [U(q_1 + q_2 + s) - c_s s] \cdot e^{-\rho t} dt$$

unter den Nebenbedingungen (5.1) bis (5.4) und unter Berücksichtigung der Nicht-Negativitätsbedingungen bezüglich der Ressourcenbestände,  $x_1(t) \geq 0$ ,  $x_2(t) \geq 0$ , und der Abbauraten,  $q_1(t) \geq 0$ ,  $q_2(t) \geq 0$ .

Bezeichnen  $\lambda_1(t)$  und  $\lambda_2(t)$  jeweils die Ko-Zustandsvariablen, die auch als Schattenwerte des Bestandes der Gashydrate beziehungsweise der herkömmlichen Ressource in situ interpretiert werden können, und  $\mu(t)$  die Ko-Zustandsvariable beziehungsweise den Schattenwert des Treibhausgasbestands in der Atmosphäre, so kann die Hamiltonfunktion in laufenden Werten (current-value-Hamiltonian) als

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^c(x_1, x_2, y, q_1, q_2, s, \lambda_1, \lambda_2, \mu) = \\ U(q_1 + q_2 + s) - c_s s + \lambda_1(-q_1 - \beta x_1) + \lambda_2(-q_2) + \mu(\theta_1 q_1 + \theta_2 q_2 + \gamma x_1 - \alpha y) \end{aligned}$$

formuliert werden. Bezeichnen weiterhin  $\chi(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \vartheta_1(t), \vartheta_2(t)$  jeweils die Kuhn-Tucker-Multiplikatoren der Nicht-Negativitätsbedingungen, lautet die Lagrangefunktion in laufenden Werten

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^c(x_1, x_2, y, q_1, q_2, s, \lambda_1, \lambda_2, \mu, \chi, \omega_1, \omega_2, \vartheta_1, \vartheta_2) = \\ \mathcal{H}^c(x_1, x_2, y, q_1, q_2, s, \lambda_1, \lambda_2, \mu) + \chi_t(\bar{y} - y_t) + \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \vartheta_1 q_1 + \vartheta_2 q_2. \end{aligned}$$

Aus dieser können nach den Regeln der dynamischen Optimierung nun die nachfolgend dargestellten Optimalitätsbedingungen abgeleitet werden.

Zu jedem Zeitpunkt müssen die (statischen) Bedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial q_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(q_1 + q_2 + s) = \lambda_1 - \theta_1 \mu - \vartheta_1 \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial q_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(q_1 + q_2 + s) = \lambda_2 - \theta_2 \mu - \vartheta_2 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad U'(q_1 + q_2 + s) = c_s \quad (5.8)$$

erfüllt sein. Weiterhin lauten die dynamischen Optimalitätsbedingungen bezüglich der Dynamik der Ko-Zustandsvariablen

$$-\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial x_1} = \dot{\lambda}_1 - \rho \lambda_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_1 = (\beta + \rho) \lambda_1 - \gamma \mu_t - \omega_1 \quad (5.9)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial x_2} = \dot{\lambda}_2 - \rho \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda}_2 = \rho \lambda_2 - \omega_2 \quad (5.10)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{L}^c}{\partial y} = \dot{\mu} - \rho \mu \quad \Rightarrow \quad \dot{\mu} = (\alpha + \rho) \mu + \chi \quad (5.11)$$

und es gelten neben den komplementären Schlupfbedingungen bezüglich der Kuhn-Tucker-Multiplikatoren

$$q_1 \geq 0, \quad \vartheta_1 \geq 0, \quad q_1 \cdot \vartheta_1 = 0 \quad (5.12)$$

$$q_2 \geq 0, \quad \vartheta_2 \geq 0, \quad q_2 \cdot \vartheta_2 = 0 \quad (5.13)$$

$$x_1 \geq 0, \quad \omega_1 \geq 0, \quad x_1 \cdot \omega_1 = 0 \quad (5.14)$$

$$x_2 \geq 0, \quad \omega_2 \geq 0, \quad x_2 \cdot \omega_2 = 0 \quad (5.15)$$

$$[\bar{y} - y] \geq 0, \quad \chi \geq 0, \quad [\bar{y} - y] \cdot \chi = 0 \quad (5.16)$$

auch die üblichen Transversalitätsbedingungen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \lambda_1(t) e^{-\rho t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_2(t) \lambda_2(t) e^{-\rho t} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mu(t) e^{-\rho t} = 0. \quad (5.17)$$

Wie schon im vorigen Kapitel ausgeführt, lässt sich aus diesen Bedingungen direkt der qualitative Verlauf des nicht-positiven Schattenwerts der Atmosphäre ( $\mu(t) \leq 0$ ) ablesen. Solange  $y(t) < \bar{y}$  und das maximale Niveau noch nicht erreicht wurde, sinkt gemäß (5.11) und (5.16) der Schattenwert der Atmosphäre exponentiell, da  $\mu(t) = \mu_0 e^{(\alpha + \rho)t} < 0$ . Ist hingegen die Obergrenze erreicht und wird der Treibhausgasbestand auf diesem maximalen Niveau gehalten ( $y(t) = \bar{y}, \chi(t) > 0$ ),

so steigt  $\mu(t)$  wieder an, bis der negative Schattenwert genau in dem Moment verschwindet, in dem der Treibhausgasbestand wieder unter das maximale Niveau fällt, das hiernach auch nicht erneut erreicht wird.<sup>24</sup>

In Bezug auf den Schattenwert  $\lambda_2(t)$  der Kohle lässt sich durch die Lösung von (5.10) und (5.14) der aus dem Standard-Hotelling-Modell wohlbekannt mit der Diskontrate exponentiell ansteigende Verlauf  $\lambda_2(t) = \lambda_2^0 e^{\rho t}$  für alle  $x_2 > 0$  erkennen. Der Schattenwert des Gashydrats  $\lambda_1(t)$  hingegen verläuft lediglich im Zeitraum nach dem endgültigen Verlassen des maximalen Niveaus – oder falls dieses niemals erreicht wird – exponentiell ansteigend: Falls  $\mu_t = 0$  und  $x_1 > 0$ , so ist wegen (5.14) auch der Kuhn-Tucker-Multiplikator  $\omega_1 = 0$  und aufgrund von (5.9) gilt so der exponentielle Anstieg von  $\lambda_1(t) = \lambda_1^0 e^{(\beta+\rho)t}$ . Dieser erfolgt jedoch nicht mit der Diskontrate  $\rho$ , sondern mit der Summe aus Diskontrate und der Rate des selbständigen Abbaus, der spezifischen Diskontrate des Gashydrats  $(\beta + \rho)$ . Solange hingegen  $\mu(t) \neq 0$  gilt, ist die Obergrenze des atmosphärischen Treibhausgasbestands entweder noch nicht erreicht – in diesem Fall lässt sich  $\lambda_1(t)$  aus (5.9), (5.11), (5.14) und (5.16) als

$$\lambda_1(t) = \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \mu_0 (e^{(\beta+\rho)t} - e^{(\alpha+\rho)t}) + \lambda_1^0 e^{(\beta+\rho)t} \quad (5.18)$$

bestimmen – oder der Treibhausgasbestand befindet sich an der Obergrenze und wird dort gehalten. In letzterem Fall würde die gesamte Dynamik des Systems durch die zur Einhaltung der Obergrenzen maximal möglichen Abbauraten,  $q_1^c$  beziehungsweise  $q_2^c$ , bestimmt.

### 5.3 Optimale Abfolge der Ressourcennutzung

Mithilfe der im vorherigen Abschnitt bestimmten notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen werden nun die optimalen Lösungen unter verschiedenen Anfangsbedingungen vorgestellt. Dazu wird zunächst in Abschnitt 5.3.1 gezeigt, dass es nicht zur parallelen Nutzung verschiedener Ressourcen kommen kann und dass die Reihenfolge der Nutzung eindeutig festgelegt ist. Vor diesem Hintergrund wird in Abschnitt 5.3.2 die Hotelling-Lösung vorgestellt, die auftritt, wenn die Anfangsbestände der verschmutzenden Ressourcen zu gering sind,

---

<sup>24</sup>Dies lässt sich formal mithilfe der Transversalitätsbedingung (5.17,c) zeigen. (Siehe Ausführungen in Kapitel 4, S. 54, Fußnote 15.)

als dass die Regulierung durch die Obergrenze auf den Treibhausgasbestand je greifen würde. In Abschnitt 5.3.3 werden schließlich die optimalen Lösungen aufgeführt, in denen die Obergrenze zeitweise zur bindenden Restriktion wird, und kurz auf eine mögliche Dezentralisierung eingegangen.

### 5.3.1 Vorbereitende Ergebnisse zum optimalen Abbau

Um die Nutzung der Bestände von Gashydrat und Kohle sowie von Solarenergie zu optimieren, bedarf es im Zuge der Festlegung der optimalen Reihenfolge zunächst einiger Überlegungen bezüglich der Frage, ob die verschiedenen Ressourcen in der optimalen Lösung gleichzeitig genutzt werden sollten. Im Modell von Chakravorty et al. (2008) zur optimalen Nutzung von zwei verschmutzenden Ressourcen, die sich lediglich anhand ihrer Emissionskoeffizienten unterscheiden, existieren Phasen, in denen die beiden Ressourcen simultan genutzt werden. Eine solche Phase simultaner Nutzung ist gekennzeichnet durch den Treibhausgasbestand, der auf dem maximalen Niveau gehalten wird, und den Übergang in der Nutzung von der CO<sub>2</sub>-armen zur vergleichsweise CO<sub>2</sub>-intensiven Ressource, während der gemeinsame Preis in dieser Phase mit der Diskontrate steigt. Ein solches Ergebnis der simultanen Nutzung zweier Ressourcen kann im hier betrachteten Modell hingegen nicht auftreten, da sich das Gashydrat nicht nur durch den geringeren Emissionskoeffizienten von der Kohle unterscheiden lässt, sondern darüber hinaus von seinem natürlichen Abbau betroffen ist. Die damit verbundene höhere spezifische Diskontrate des Gashydrats, die einen schnelleren Preisanstieg bewirkt, ist ursächlich für die folgende Proposition:

**Proposition 5.1** *Es ist nicht optimal, die beiden Ressourcen, Gashydrat und Kohle, simultan zu nutzen.*

**Beweis** Der Beweis zu dieser Proposition findet sich im Anhang C.1.

Da die regenerative Energie annahmegemäß zu positiven und damit vergleichsweise hohen Kosten  $c_s$  zur Verfügung steht, ist deren Nutzung auf eine Phase am Ende des Planungshorizonts, wenn die nicht-erneuerbaren Ressourcen nicht mehr zur Verfügung stehen, beschränkt. Es kommt auch hier nicht zu paralleler Nutzung mit einer der beiden nicht-erneuerbaren Ressourcen, da  $\bar{p}_2 < c_s$  und anderenfalls der Preis der Ressource nicht konstant ist. Aufbauend auf der



Proposition 5.1 bleibt die Frage, in welcher Reihenfolge die drei zur Verfügung stehenden Energiequellen genutzt werden.

**Proposition 5.2** *Ist der Beitrag der Emissionen aus dem selbstständigen Abbau des Gashydrats hinreichend groß, das heißt ist  $\gamma > (\theta_2 - \theta_1)(\alpha - \beta)$ , so ist die Reihenfolge des Abbaus eindeutig festgelegt, indem immer zunächst das Gashydrat vollständig genutzt wird, bevor daraufhin die Kohle vollständig erschöpft wird, und schließlich auf die Nutzung der erneuerbaren Energie umgestellt wird.*

**Beweis** Der Beweis zu dieser Proposition findet sich im Anhang C.2.

Dieses Ergebnis entspricht der folgenden Intuition. Stehen zwei Ressourcen zu denselben Abbaukosten (von null) zur Verfügung, von denen die eine Gefahr läuft verloren zu gehen, ohne Nutzen zu stiften, und im Zuge dessen außerdem den Bestand der Treibhausgase in der Atmosphäre zu erhöhen, so ist dieser Ressourcenbestand zuerst zu reduzieren, um den Verlust und die Emissionen durch den natürlichen Abbau möglichst gering zu halten. Dass diese Reihenfolge des Abbaus außerdem den Bestand der akkumulierten Emissionen minimiert, belegt die folgende kurze Rechnung. Ein Vergleich zweier Situation, in denen ausgehend von einem anfänglichen Treibhausgasbestand  $y_0$  zu den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) jeweils eine Einheit der beiden Ressourcen abgebaut und genutzt wird, zeigt, dass der Bestand an Treibhausgasen unabhängig von den vorhandenen Ressourcenbeständen geringer ausfällt, wenn im Zeitpunkt  $t_1$  eine Einheit des Gashydrats ( $q_1(t_1) = 1$ ) und im Zeitpunkt  $t_2$  eine Einheit der Kohle ( $q_2(t_2) = 1, q_i(t) = 0$  für alle  $t \neq t_i, i = 1, 2$ ) abgebaut und verbrannt werden. Diese Abbaureihenfolge verursacht im Vergleich zur Laisser-Faire-Lösung zusätzliche Emissionen. Im Zeitpunkt  $t_1$  werden  $\theta_1$  Einheiten  $\text{CO}_2$  emittiert, im Zeitpunkt  $t_2$  weitere  $\theta_2$  Einheiten. Außerdem wird die Menge der Gashydrate im Zeitpunkt  $t_1$  um eine Einheit reduziert, so dass nachfolgend die natürlichen Emissionen aus den Gashydraten ebenfalls um  $\gamma$   $\text{CO}_2$ -Äquivalente geringer ausfallen. Unter Berücksichtigung der durch die Regeneration der Atmosphäre geprägten Dynamik des Treibhausgasbestands, wären die zusätzlichen Emissionen aufgrund dieser Abbaureihenfolge zum Zeitpunkt  $t > t_2$  nun also  $e^{-\alpha(t-t_2)}(\theta_1 e^{-\alpha(t_2-t_1)} + \theta_2) - \frac{\gamma}{\alpha-\beta}(e^{-\beta(t-t_1)} - e^{-\alpha(t-t_1)})$ . Bei der umgekehrten Abbaureihenfolge ( $q_2(t_1) = 1, q_1(t_2) = 1, q_i(t) = 0$  für alle  $t \neq t_j, j = 1, 2, i \neq j$ ), die zum Zeitpunkt  $t_1$  Emissionen in Höhe von  $\theta_2$  und zum

Zeitpunkt den Ausstoß von  $\theta_1$  CO<sub>2</sub>-Einheiten sowie die Reduktion der natürlichen Emissionen um  $\gamma$  CO<sub>2</sub>-Äquivalente mit sich bringt, wären die zusätzlichen Emissionen gegeben durch  $e^{-\alpha(t-t_2)}(\theta_1 + \theta_2 e^{-\alpha(t_2-t_1)}) - \frac{\gamma}{\alpha-\beta}(e^{-\beta(t-t_2)} - e^{-\alpha(t-t_2)})$ . Subtrahieren des letzteren vom ersteren Ergebnis ergibt als Differenz  $-(e^{(t-t_1)} - e^{(t-t_2)})[(\theta_1 - \theta_2)e^{-\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha-\beta}(e^{-\beta} - e^{-\alpha})] < 0$ , so dass die Treibhausgase in der Atmosphäre für  $t > t_2$  bei der zuerst genannten Abbaureihenfolge geringer ausfallen.

Ist die Bedingung aus Proposition 5.2 hingegen nicht erfüllt ( $\frac{\gamma}{\alpha-\beta} < \theta_2 - \theta_1$ ), die Rate des natürlichen Abbaus  $\beta$  und damit auch ihr Beitrag  $\gamma$  zum Treibhausgasbestand also sehr klein, so spielt der Unterschied in den Emissionskoeffizienten wiederum die entscheidende Rolle und es kann auch zu einem Umschalten von der CO<sub>2</sub>-intensiven zu der CO<sub>2</sub>-armen Ressource kommen. Im Extremfall der kleinstmöglichen natürlichen Abbaurate von  $\beta = \gamma = 0$  erhielten wir exakt das Modell von Chakravorty et al. (2008) und reproduzierten dementsprechend auch dessen Ergebnis: Wenn der Treibhausgasbestand anfänglich unterhalb der Obergrenze liegt, wird bei Knappheit der CO<sub>2</sub>-ärmeren Ressource zunächst ein Teil der CO<sub>2</sub>-intensiven Ressource genutzt (vgl. Chakravorty et al., 2008, Proposition 1 (b), S. 1142), um nach einem raschen Aufbau des Treibhausgasbestands von der größeren natürlichen Regeneration zu profitieren. In diesem Fall käme es durchaus zu einem Umschalten von der Ressource mit dem höheren Emissionskoeffizienten zu der mit dem niedrigeren. Dieses Ergebnis kann auf den Fall von in Relation zum Unterschied in den Emissionskoeffizienten sehr kleine natürliche Abbauraten übertragen werden, wo es also zu einem Umschalten von Kohle auf Gashydrat kommen kann. Erst wenn der Einfluss hinreichend groß ist, kommt zu der oben beschriebenen Reihenfolge, nach der zuerst das Gashydrat und dann die Kohle abgebaut wird.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts zeigen, dass die Einführung des selbstständigen Abbaus einer Ressource in ein Modell zur Nutzung zweier unterschiedlich CO<sub>2</sub>-intensiver Ressourcen die Qualität der optimalen Lösung grundlegend ändert. In den folgenden Abschnitten wird gezeigt, welche Auswirkungen diese eindeutige Reihenfolge der Nutzung auf die Hotelling-Lösung hat und welcher Form die optimalen Pfade sind, falls die Obergrenze des Treibhausgasbestands zeitweise zur bindenden Restriktion wird.

### 5.3.2 Die Hotelling-Lösung

Von der Hotelling-Lösung wird im Folgenden immer dann gesprochen, wenn die Lösung die Eigenschaften des klassischen Ressourcen-Abbau-Modells von Hotelling (1931) besitzt: Der Preis der Ressource, der aufgrund der nicht vorhandenen Abbaukosten allein durch die Knappheitsrente bestimmt wird, steigt exponentiell mit der Diskontrate an, bis er schließlich genau in dem Zeitpunkt den Preis der alternativen Energiequelle erreicht, in dem der Bestand der Ressource aufgezehrt ist. Ein derartiger Preisanstieg geht einher mit einem Rückgang des Angebots, entsprechend sinken die Abbaumengen über die Zeit. Die Regulierung bezüglich der maximal erlaubten akkumulierten Emissionen wird niemals zur aktiven Nebenbedingung, das heißt die Obergrenze wird nicht überschritten und  $\mu(t) = 0$ . Wann immer der Schattenpreis der atmosphärischen Treibhausgase nicht mehr relevant für die Lösung ist, nachdem er vorher negativ gewesen ist, sprechen wir von einer Hotelling-Phase, da alle Eigenschaften der Hotelling-Lösung erfüllt sind. Nicht vollständig im Einklang mit dieser Definition wird darüber hinaus auch im Fall von Gashydraten von einer Hotelling-Lösung oder einer Hotelling-Phase gesprochen, falls hier die Regulierung nicht (mehr) bindet, obwohl in diesem Fall der Preis nicht mit der Diskontrate  $\rho$  sondern mit der spezifischen Diskontrate des Gashydrats,  $(\beta + \rho)$ , ansteigt.

Derartige Hotelling-Phasen treten immer dann auf, wenn entweder die Abbauraten bereits so klein sind, dass der Treibhausgasbestand sinkt, nachdem er auf dem maximalen Niveau gewesen ist, oder wenn die insgesamt zur Verfügung stehenden Mengen so gering sind, dass trotz optimalen Abbaus nach der Hotelling-Regel, die Obergrenze des Treibhausgasbestands niemals überschritten wird. So können die Hotelling-Mengen  $x_1^H$  und  $x_2^H$  als die maximalen Bestände bestimmt werden, die bei alleiniger Nutzung nur einer Ressource nach der Hotelling-Regel abgebaut werden können, ohne dass das Höchstmaß der akkumulierten Emissionen  $\bar{y}$  überschritten würde, jedoch in einem Punkt berührt wird. Diese maximalen Bestände sind negativ abhängig von dem anfänglichen Bestand an Treibhausgasen, jedoch positiv abhängig von ihrem maximal erlaubten Niveau. Eine größere Hotelling-Menge  $x_i^H$  geht dabei jeweils mit einer geringeren anfänglichen Knappheitsrente  $\lambda_i^0$  einher.

Nehmen wir zunächst an, es stünde jeweils nur ein Ressourcenbestand zur Verfügung und der Bestand der Treibhausgase wäre anfänglich bereits auf dem

maximalen Niveau ( $y_0 = \bar{y}$ ), so würden die Hotelling-Mengen  $\bar{x}_i^H = x_i^H|_{y_0=\bar{y}}$  genau in der Zeit abgebaut, in welcher der Energiepreis von  $p_i^c$  auf  $c_s$  ansteigt, so dass  $\lambda_i^0 = p_i^c$  ist. Bei einem anfänglichen Bestand  $X_i^0$ , der größer ist als die Hotelling-Menge  $\bar{x}_i^H$ , geht hingegen eine Phase des durch die Obergrenze beschränkten Abbaus voraus, die genau dann endet, wenn der Bestand auf  $\bar{x}_i^H$  reduziert ist. In diesem Fall ist die anfängliche Knappheitsrente kleiner als  $p_i^c$  und die Differenz zwischen dem Preis  $p_i^c$  und der Knappheitsrente  $\lambda_i$  berücksichtigt die Knappheit der Atmosphäre,  $-\mu\theta_i$ . Ist hingegen der Treibhausgasbestand anfänglich kleiner als sein maximal erlaubtes Niveau ( $y_0 < \bar{y}$ ), so kann eine strikt größere Menge  $x_i^H|_{y_0 < \bar{y}} > \bar{x}_i^H$  nach der Hotelling-Regel abgebaut und genutzt werden. Denn die Hotelling-Mengen beinhaltet nun zusätzliche Anfangsbestände, die genutzt werden, um die akkumulierten Emissionen zunächst bis auf  $\bar{y}$  zu erhöhen.

Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang die Auswirkung des selbstständigen Abbaus auf die Hotelling-Mengen: Im Fall der Hotelling-Menge des Gashydrats  $x_1^H$  ist klar, dass diese aufgrund des selbstständigen Abbaus kleiner ist, je größer die Rate des selbstständigen Abbaus  $\beta$  beziehungsweise der natürlichen Emissionen  $\gamma$ . Da zu jedem Zeitpunkt Emissionen aus dem Bestand der Hydrate entweichen und damit den Bestand der Treibhausgase erhöhen, bleibt weniger Kapazität für die Aufnahme der Emissionen aus der Nutzung der Ressource und daher wird die Hotelling-Menge streng kleiner sein. Bei alleiniger Nutzung der Kohle  $x_2$  ist entscheidend, ob sich auflösende Gashydrate existieren, wenngleich ohne Abbau, deren Emissionen zu berücksichtigen sind. Auch hier verringert die Existenz der natürlichen Emissionen aus den Gashydraten die Hotelling-Menge der Kohle  $x_2^H$ .

Werden jedoch die beiden Ressourcen nicht isoliert betrachtet, sondern sollen beide zur Energiegewinnung herangezogen werden, so werden diese nach den Propositionen 5.1 und 5.2 nacheinander abgebaut: Zunächst das Gashydrat, dann die Kohle. Die anfänglich vorhandenen Mengen  $X_1^0$  und  $X_2^0$  entscheiden dabei über Zeitpunkt des Umschaltens  $t_s$  und den (Schatten-) Preis zu diesem Zeitpunkt  $\lambda^s$ . Abbildung 5.1 zeigt vorrangig für den Fall  $y_0 < \bar{y}$  die Entwicklung des Energiepreises und des atmosphärischen Treibhausgasbestands gerade der Hotelling-Lösung, in welcher der Treibhausgasbestand das maximale Niveau sowohl in der Hydrat-Phase als auch in der Kohle-Phase jeweils exakt im Maximum erreicht. Allerdings ist auch der Fall  $y_0 = \bar{y}$  in den Abbildungen enthalten und durch die

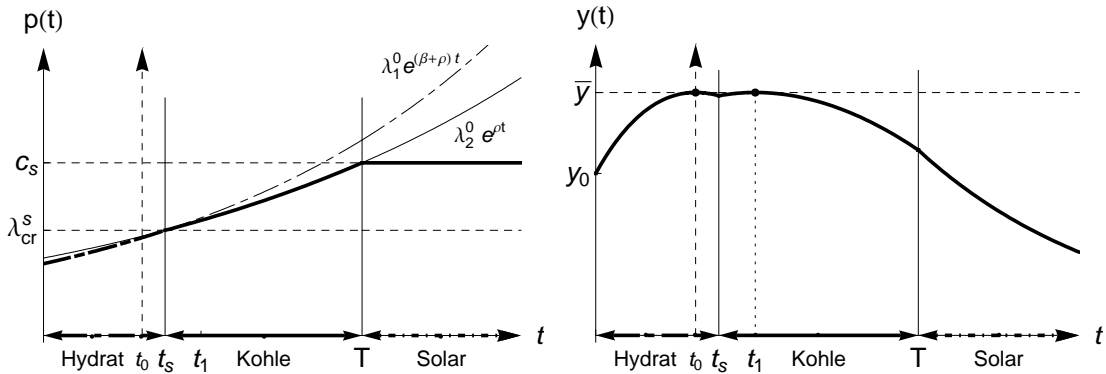


Abbildung 5.1: Preise und Treibhausgasbestand der Hotelling-Lösung

zusätzliche gestrichelte Ordinate zum Zeitpunkt  $t_0$ , in dem die atmosphärischen Treibhausgase in der Hydrat-Phase ihr Maximum haben, angedeutet. Bei Auffassung dieses Zeitpunkts als Startzeitpunkt ( $t_0 = 0$ ) wäre der anfängliche Treibhausgasbestand  $y_0 = \bar{y}$ . Ab diesem Zeitpunkt  $t_0$  ist die Dynamik für beide Fälle von  $y_0 \leq \bar{y}$  (bei entsprechender Anpassung des Anfangsbestands des Gashydrats) dieselbe, wie auch für Fälle, in denen eine Phase des eingeschränkten Abbaus vor dem Zeitpunkt  $t_0$  liegt. Im linken Diagramm der Abbildung 5.1 beschreibt die gestrichelte exponentiell ansteigende Kurve den Schattenpreis des Gashydrats in situ, während der durchgezogene Pfad den Schattenpreis der Kohle darstellt. Der kräftig gezeichnete Pfad markiert dabei jeweils den Energiepreis, der in der Hydrat-Phase dem Schattenpreis des Gashydrats, in der Kohle-Phase dem Schattenpreis der Kohle und in der Solar-Phase den Grenzkosten der Herstellung der Solarenergie entspricht.

Bei einem anfänglichen Treibhausgasbestand  $y_0 < \bar{y}$  wird dieser zunächst erhöht, bis im Zeitpunkt  $t_0$  das maximale Niveau für einen infinitesimalen Moment erreicht wird. Da zunächst die  $\text{CO}_2$ -arme Ressource genutzt wird und es im Augenblick des Umschaltens auf die  $\text{CO}_2$ -intensive Kohle,  $t_s$ , zu einem Sprung in den Emissionen pro genutzter Einheit Energie und aufgrund der Stetigkeit der Preise auch zu einem Anstieg der Gesamtemissionen kommt, muss der Treibhausgasbestand vor dem Umschalten zunächst fallen, bevor er zu Beginn der Kohle-Phase wieder ansteigt. Währenddessen entwickelt sich der Preis für Energie gemäß der Hotelling-Regel. In der ersten Phase steigt er ausgehend von  $\lambda_1^0$  exponentiell mit der Rate  $(\beta + \rho)$  bis er das kritische  $\lambda_{cr}^s$  zum Zeitpunkt  $t_s$  erreicht.

Anschließend steigt er mit der Rate  $\rho$  weiter, bis im Zeitpunkt  $T$  die beiden endlichen Ressourcen vollständig aufgezehrt sind und nun auf Solarenergie umgestellt wird.

Der Schattenpreis  $\lambda_{cr}^s$  ist insofern der kritische Preis, als dass er für den Fall  $y_0 = \bar{y}$  der kleinstmögliche Umschaltpreis ist, mit dem eine Hotelling-Lösung realisiert wird. Jeder kleinere Preis  $\lambda^s$  würde unweigerlich dazu führen, dass die Obergrenze der atmosphärischen Treibhausgase überschritten würde. Ein kleinerer Preis brächte mit sich, dass die Kohle-Phase länger andauern müsste, also größere Mengen abgebaut und mehr Emissionen erzeugt würden. Es würde auch bedeuten, dass der Preis in der ersten Phase geringer wäre. Die entsprechenden höheren Abbauraten und größeren Emissionen würden dazu führen, dass der Treibhausgasbestand nicht stark genug fallen könnte, um eine Einhaltung der Obergrenze zu garantieren. Ein  $\lambda^s > \lambda_{cr}^s$  wäre hingegen möglich und würde mit einer kleineren abzubauenen Menge Kohle einhergehen.

Die in Abbildung 5.1 dargestellt Zeitpfade für  $y_0 = \bar{y}$  und  $y_0 < \bar{y}$  entstehen jeweils bei genau einer Kombination von Mengen der beiden endlichen Ressourcen,  $\bar{X}_1^0$  und  $\bar{X}_2^0$ , die zu Beginn des Betrachtungszeitraums zur Verfügung stehen. Offensichtlich ist die Menge  $\bar{X}_2^0$ , die in der Kohle-Phase der Hotelling-Lösung abgebaut werden kann, aufgrund der eindeutig festgelegten Abbaureihenfolge unabhängig vom anfänglichen Treibhausgasbestand. Lediglich die Hotelling-Menge des Gashydrats  $\bar{X}_1^0$  variiert. Sie ist im Fall  $y_0 < \bar{y}$  – wie bereits erwähnt – größer. Diese Zusammenhänge lassen sich auch aus Abbildung 5.2 ablesen, denn sie stellt in einem Zwei-Mengen-Diagramm der anfänglichen Ressourcenbestände  $X_1^0$  und  $X_2^0$  dar, zu welcher Art der Lösung es bei verschiedenen Kombinationen von Anfangsbeständen der beiden endlichen Ressourcen kommt. Sie zeigt zunächst die Hotelling-Regionen  $\bar{H}$  und  $H$ , die jeweils für  $y_0 = \bar{y}$  beziehungsweise für  $y_0 < \bar{y}$  gelten. Diese Hotelling-Regionen umfassen jeweils all jene Kombinationen von Anfangsbeständen  $(X_1^0, X_2^0)|_{y_0}$ , die zu einer Hotelling-Lösung führen, und lassen Rückschlüsse für Punkte außerhalb dieser Regionen zu.

Bevor die beiden Hotelling-Regionen sowie die sie begrenzenden Kurven im Detail erläutert werden, sei zur Orientierung kurz der Zusammenhang mit den Zeitpfaden der Abbildung 5.1 vorangestellt. Jene Zeitpfade setzen eine Kombination von Anfangsbeständen voraus, die für den Fall  $y_0 < \bar{y}$  genau im Punkt D liegt, nämlich  $(\bar{X}_{1,D}^0, \bar{X}_2^0)$ . Ausgehend vom Punkt D im Zeitpunkt  $t = 0$  bewirkt

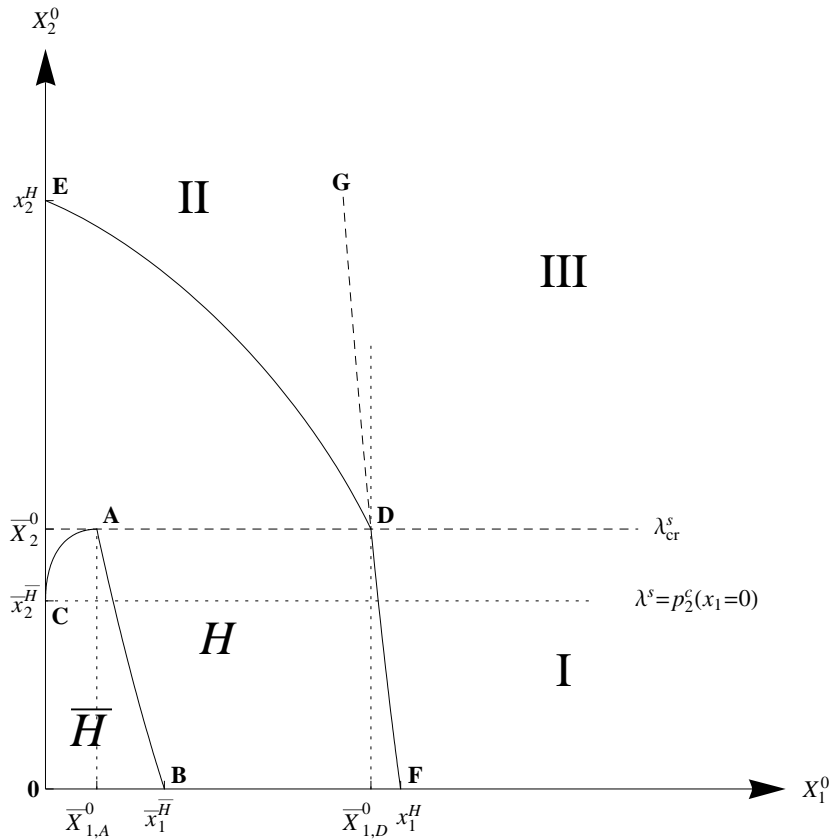


Abbildung 5.2: Hotelling-Regionen  $\bar{H}$  (für  $y_0 = \bar{y}$ ) und  $H$  (für  $y_0 < \bar{y}$ ) im  $X_1$ - $X_2$ -Raum

der Abbau des Gashydrats eine waagerechte Bewegung nach links im  $X_1$ - $X_2$ -Diagramm. Bei konstantem gehaltenem Kohlebestand wird im Zeitpunkt  $t_0$ , in dem  $y_t = \bar{y}$ , der Punkt A ( $\bar{X}_{1,A}^0, \bar{X}_2^0$ ) erreicht. (Dies wäre somit auch der Startpunkt für die Hotelling-Lösung für den Fall  $y_0 = \bar{y}$ .) Zum Zeitpunkt  $t_s$  ist schließlich das Gashydrat vollständig aufgezehrt und es kommt zum Umschalten auf die Nutzung der Kohle (Punkt  $(0, \bar{X}_2^0)$  im  $X_1$ - $X_2$ -Diagramm). Der Pfad verläuft nun senkrecht fallend, entlang der Ordinate des  $X_1$ - $X_2$ -Diagramms. Im Zeitpunkt  $t_1$ , in dem der Treibhausgasbestand erneut das maximale Niveau berührt, wird der Punkt C,  $(0, \bar{x}_2^{\bar{H}})$ , erreicht, der genau der zu Beginn dieses Abschnitts definierten Hotelling-Menge  $\bar{x}_2^{\bar{H}}$  bei ausschließlicher Nutzung von Kohle und Abwesenheit des Gashydrats sowie anfänglich maximalem Treibhausgasbestand entspricht. Zuletzt erreicht der Pfad im Zeitpunkt  $T$  den Ursprung  $(0, 0)$ , wenn beide Bestände vollständig genutzt wurden.

Zur weiteren Erläuterung der Abbildung wird nun die Hotelling-Region  $\bar{H}$

für den Fall eines anfänglich bereits maximalen Treibhausgasbestands ( $y_0 = \bar{y}$ ) betrachtet. Sie ist durch die Punkte  $0CAB$  begrenzt und umfasst alle Kombinationen anfänglicher Ressourcenbestände  $(X_1^0, X_2^0)$ , die einen Abbau in der bekannten Reihenfolge nach der Hotelling-Regel ermöglichen. Wie bereits erläutert wurde, könnte bei alleiniger Nutzung der Kohle und Vernachlässigung des Gashydrats genau die Hotelling-Menge  $\bar{x}_2^H$  (Punkt C) in dieser Art genutzt werden. Ist im Gegensatz zu diesem Punkt C nun ein geringer Bestand von Gashydrat vorhanden, der vorab abgebaut wird, so führt diese Hydrat-Phase aufgrund der geringeren  $\text{CO}_2$ -Emissionen zunächst zu einem Rückgang des Treibhausgasbestands, so dass die Ausgangssituation für die anschließende Kohle-Phase nicht mehr  $y_0 = \bar{y}$  sondern nun  $y_{t_s} < \bar{y}$  lautet. Somit kann ein geringfügig größerer Bestand der Kohle konsumiert werden, um das maximale Niveau der Treibhausgase während der Kohle-Phase im Maximum zu erreichen. Aus diesem Grund verläuft die Begrenzung der Hotelling-Region für geringe Bestände Gashydrat als vom Punkt C zum Punkt A hin ansteigende Kurve. Je mehr Gashydrat vorhanden ist, desto stärker kann der Bestand an Treibhausgasen von  $\bar{y}$  kommend in der ersten Phase abfallen und desto größer der Bestand der  $\text{CO}_2$ -intensiven Kohle, der in der zweiten Phase genutzt werden kann. Kombinationen von Anfangsbeständen  $(X_1^0, X_2^0)$ , die oberhalb beziehungsweise links dieser Kurve  $\overline{CA}$  liegen, würden ohne Berücksichtigung der Restriktion durch die Obergrenze zu einem Überschreiten des maximalen Niveaus  $\bar{y}$  während der zweiten, der Kohle-Phase führen. Dieser positive Zusammenhang ist jedoch nach oben hin begrenzt. Im Punkt A ist die maximale Kombination von Anfangsbeständen  $(X_1^0, X_2^0)$  erreicht, die nach der Hotelling-Regel abgebaut werden können. Diese Kombination geht mit dem bereits erwähnten kritischen Umschaltpreis  $\lambda_{cr}^s$  einher und beinhaltet den maximalen Kohlebestand  $\bar{X}_2^0$ , der nach der Hotelling-Regel abgebaut werden kann, wenn die Treibhausgase zuvor auf dem maximalen Niveau gewesen sind. Ist die anfängliche Menge Gashydrat größer als im Punkt A, also  $X_1^0 > \bar{X}_{1,A}^0$ , so würde bei konstant gehaltenem Bestand an Kohle auch der Umschaltpreis gleich bleiben, so dass die anfängliche Knappheitsrente  $\lambda_1^0$  kleiner wäre. Dies würde zu größeren anfänglichen Abbauraten und damit auch Emissionen führen, so dass es unmöglich würde, nach der Hotelling-Regel abzubauen und gleichzeitig das maximale Niveau der atmosphärischen Treibhausgase nicht zu überschreiten. Die Kurve  $\overline{AB}$  im Diagramm spiegelt diesen Zusammenhang wider. Sie verläuft vom



Punkt A zum Punkt B hin abfallend und markiert die hinsichtlich einer Verletzung der Obergrenze während der Hydrat-Phase kritischen Kombinationen. Um ein Überschreiten des maximalen Niveaus während der Hydrat-Phase zu vermeiden, müssen bei einem steigenden Gashydratbestand  $X_1^0$  die anfänglichen Emissionsraten dennoch hinreichend klein sein, bewirkt durch kleine Abbauraten beziehungsweise einen großen Schattenpreis, so dass der Umschaltpreis  $\lambda^s$  ebenfalls den kritischen Wert  $\lambda_{cr}^s$  übertrifft. So bleibt anschließend weniger Zeit für die Nutzung der Kohle nach der Hotelling-Regel, so dass der anfänglich vorhandene Bestand an Kohle  $X_2^0$ , der einen in Verbindung mit einem steigenden Bestand an Gashydrat nach der Hotelling-Regel abgebaut werden kann, zurückgeht. Pro zusätzlicher Einheit Gashydrat muss dabei aufgrund des natürlichen Abbaus des Gashydrats mehr als eine Einheit Kohle eingespart werden. Aus diesem Grund ist die Steigung der Kurve  $AB$  kleiner als  $-1$ . Im Punkt B ist wiederum die Hotelling-Menge des Gashydrats  $\bar{x}_1^{\bar{H}}$  zu erkennen, die bei alleiniger Nutzung des Gashydrats zutrifft.

Es seien nun auch anfängliche Treibhausgasbestände  $y_0 < \bar{y}$  in die Überlegungen einbezogen. Wie bereits erwähnt wurde, muss die dazugehörige Hotelling-Region  $H$ , begrenzt durch die Punkte  $0EDF$ , strikt größer sein als im soeben betrachteten Fall von  $y_0 = \bar{y}$ , da zusätzliche Emissionen akkumuliert werden können, bevor die Obergrenze erreicht wird. Wie bereits im Zusammenhang mit Abbildung 5.1 diskutiert wurde, ist der Kohlebestand  $\bar{X}_2^0$  der Hotelling-Lösung, der maximal abgebaut werden kann, nachdem in der Hydrat-Phase das maximale Niveau erreicht wurde, in beiden Fällen derselbe, unabhängig davon, ob der anfängliche Treibhausgasbestand bereits an der Obergrenze ist ( $y_0 = \bar{y}$ , Punkt A) oder ob diese im Laufe der ersten Phase berührt wird ( $y_0 < \bar{y}$ , Punkt D). Dementsprechend ist der kritische Preis des Umschaltens  $\lambda_{cr}^s$  ebenfalls für beide Möglichkeiten des anfänglichen Treibhausgasbestands derselbe. Wie bereits ausgeführt wurde, markiert Punkt D in Abbildung 5.2 den in Abbildung 5.1 dargestellten, bereits beschriebenen Fall mit  $y_0 < \bar{y}$ . (Dies würde dem Startzeitpunkt  $t = 0$  entsprechen.) Auch hat Abbildung 5.1 gezeigt, dass die Zeitpfade für beide Fälle ab dem Zeitpunkt  $t_0$ , da das maximale Niveau der Treibhausgase in der ersten Phasen verlassen wird, dieselben sind. Daher ist auch die maximale Menge, die in der Kohle-Phase nach der Hotelling-Regel abgebaut werden kann, nachdem in der ersten Phase das maximale Niveau der Treibhausgase  $\bar{y}$  erreicht wurde, die-

selbe wie im Fall eines anfänglichen Treibhausgasbestands auf dem maximalen Niveau. Unterschiede bestehen hier lediglich in der während der ersten Phase zu konsumierenden Menge an Gashydrat.

Die Kurve  $\overline{ED}$  stellt (wie die Kurve  $\overline{CA}$  im Fall  $y_0 = \bar{y}$ ) nun für den Fall  $y_0 < \bar{y}$  all jene Anfangsbestände dar, die bei einem Abbau nach der Hotelling-Regel dazu führen, dass der maximal zulässige Treibhausgasbestand während der zweiten, der Kohle-Phase berührt wird. Auffällig ist zunächst der im Gegensatz zur Kurve  $\overline{CA}$  in  $X_1^0$  fallende Verlauf der Kurve  $\overline{ED}$ , der in dem anfänglich kleinen Treibhausgasbestand  $y_0 < \bar{y}$  begründet liegt. Ist ausgehend vom Punkt E, in dem die bereits besprochene Hotelling-Menge  $x_2^H|_{y_0 < \bar{y}}$  der Kohle vorliegt, ein geringfügig größerer Bestand an Gashydrat vorhanden, so erhöht die vorgelagerte Nutzung dieses Bestands den Treibhausgasbestand gegenüber  $y_0$ , so dass zu Beginn der Kohle-Phase sowohl  $y_{t_s} > y_0$  als auch  $\lambda^s > \lambda_2^0$  gelten. Daher kann in der nachgelagerten Kohle-Phase nur ein kleinerer Bestand der Kohle abgebaut werden, um die Obergrenze der Treibhausgase nicht zu überschreiten. Das maximale Niveau der Treibhausgase  $\bar{y}$  wird jedoch während der Hydrat-Phase nicht erreicht, die daher als unkritisch bezeichnet werden kann. Erst im Punkt D ist der Hydrat-Bestand hinreichend groß, so dass die Obergrenze der Treibhausgase in der ersten Phase (wie auch in der zweiten Phase) berührt wird.<sup>25</sup> In Punkt D wird also der Bestand an Gashydrat zur kritischen Größe, welche die Hotelling-Region begrenzt.

Die Kurve  $\overline{DF}$ , das Analogon der Kurve  $\overline{AB}$  des Falls  $y_0 = \bar{y}$ , markiert für den Fall  $y_0 < \bar{y}$  wiederum all jene Kombinationen von Anfangsbeständen, die zu einer Berührung der Obergrenze der Treibhausgase während der ersten, der Hydrat-Phase führen, wohingegen die Kohle-Phase nun unkritisch ist. Auch hier gilt ein negativer Zusammenhang, denn liegt ausgehend vom Punkt D eine größere Menge Gashydrat vor, so können dennoch die anfänglichen Abbauraten nicht erhöht werden, da dies zu einem Überschreiten des maximal zulässigen Niveaus der Treibhausgase führen würde. Somit führt der größere Anfangsbestand Gashydrat  $X_1^0$  zu einer längeren Nutzungsdauer des Gashydrats, so dass der Umschaltpreis ansteigt ( $\lambda^s > \lambda_{cr}^s$ ) und somit weniger Zeit bleibt, den Kohlebestand

---

<sup>25</sup>Läge der anfängliche Treibhausgasbestand  $y_0$  nur knapp unter dessen maximalen Niveau  $\bar{y}$ , so verlief die Kurve  $\overline{ED}$  umgekehrt u-förmig. Für kleine Bestände Gashydrat würde dann aufgrund kleiner Abbauraten in der ersten Phase gelten, dass der Treibhausgasbestand ebenfalls sinkt und somit bei weniger vorhandenem  $X_1^0$  wiederum auch weniger Kohle  $X_2^0$  abgebaut werden kann.

nach der Hotelling-Regel abzubauen, der somit zurückgeht. (Gemeint ist der Zeitraum, in dem der Schattenpreis der Kohle von  $\lambda^s$  auf  $c_s$  ansteigt.) Im Übrigen verläuft die Kurve  $\overline{DF}$  etwas steiler als die zuvor besprochene Kurve  $\overline{AB}$ , denn eine Erhöhung des bereits größeren Bestands an Gashydrat  $X_1^0$  um eine Einheit lässt aufgrund der größeren natürlichen Emissionen den möglichen Verbrauch von Kohle  $x_2$  stärker zurückgehen also im Fall  $y_0 = \bar{y}$ .

Aufbauend auf den ausführlichen Erklärungen dieses Abschnitts 5.3.2 zu den Hotelling-Regionen und ihrer Darstellung im Zwei-Mengen-Diagramm (Abbildung 5.2) können im folgenden Abschnitt 5.3.3 nun die optimalen Lösungen für Anfangsbestände außerhalb dieser Hotelling-Regionen vorgestellt werden.

### 5.3.3 Optimale Pfade verschiedener Anfangsbedingungen

Anhand der Darstellung der Hotelling-Regionen in Abbildung 5.2 lässt sich nun auch eine Bereichseinteilung für Anfangsbestände vornehmen, die außerhalb der beschriebenen Hotelling-Regionen liegen. Diese Einteilung soll im Folgenden für den Fall eines anfänglichen Treibhausgasbestands unterhalb des maximalen Niveaus geschehen, bevor anschließend die optimalen Pfade für Anfangsbestände in diesen Regionen analysiert werden.

Die Kurve  $\overline{DF}$  wie auch ihre Verlängerung  $\overline{DG}$  in Abbildung 5.2 stellt dabei eine Trennungslinie dar. Rechts der Kurve ist Hydrat „reichlich“ oder „im Überfluss“ vorhanden, das heißt ohne die Berücksichtigung der Regulierung durch die Obergrenze würde diese im Falle eines Abbaus nach der Hotelling-Regel während der Hydrat-Phase überschritten. Somit kommt es im Laufe der Hydrat-Phase zu einem Zeitraum, in dem die Restriktion bezüglich der maximal erlaubten akkumulierten Emissionen (5.4) zur bindenden Nebenbedingung wird. Dabei ist zu unterscheiden zwischen Kombinationen von Anfangsbeständen in Region I und in Region III. In Region I, die begrenzt ist durch den kritischen Kohlebestand  $\bar{X}_2^0$ , ist Kohle knapp, so dass sie vollständig nach der Hotelling-Regel abgebaut werden kann, die Obergrenze der atmosphärischen Treibhausgase also ausschließlich in der Hydrat-Phase erreicht wird. Steht für die zweite Phase mehr als die kritische Menge  $\bar{X}_2^0$  zur Verfügung, so ist auch die Kohle reichlich vorhanden, so dass auch während des Kohleabbaus die Nebenbedingung bezüglich des maximalen Treibhausgasbestands (5.4) über einen positiven Zeitraum bindet (Region

III).<sup>26</sup> Links der Trennungslinie  $\overline{GF}$  kann Hydrat als knapp bezeichnet werden, das heißt, es kann nach der Hotelling-Regel abgebaut werden, ohne dass in der Hydrat-Phase das maximale Niveau erreicht würde. Weiterhin ist oberhalb der Kurve  $\overline{ED}$ , in der Region II, Kohle reichlich vorhanden, so dass ohne Regulierung das maximal erwünschte Niveau während der Kohle-Phase überschritten würde. Somit beinhaltet Region II alle Kombinationen von Anfangsbeständen, die dazu führen, dass während der Kohle-Phase ein Zeitraum existiert, in dem der Treibhausgasbestand auf dem maximalen Niveau gehalten wird, während dies in der Hydrat-Phase nicht vorkommt.

Aufbauend auf diesen Überlegungen zur Bereichseinteilung sollen nun für Anfangsbestände der beiden Ressourcen in diesen drei Regionen jeweils die optimalen Zeitpfade der Preise, des Treibhausgasbestands (ausgehend von  $y_0 < \bar{y}$ ) sowie der Abbauraten vorgestellt werden. Das Hauptaugenmerk liegt dabei jeweils auf dem oberen Diagramm der folgenden drei Abbildungen 5.3 bis 5.5, welches den Verlauf der Preise über die Zeit darstellt. Der resultierende (Schatten-) Preis für Energie  $p_i(t)$  ist dabei jeweils kräftig markiert. Die Schattenwerte des Gashydrats in situ  $\lambda_1(t)$  und der Kohle in situ  $\lambda_2(t)$ , die zeitweise allein den Preis bestimmen, sind jeweils explizit eingezeichnet. Der Schattenwert der Treibhausgase in der Atmosphäre kann hingegen indirekt als die Differenz zwischen dem Preis für Energie  $p_i(t)$  und dem Schattenwert der Ressource  $\lambda_i(t)$  abgelesen werden, die jeweils  $-\theta_i\mu(t)$  beträgt. Ergänzend sind durch die unteren zwei Diagramme jeweils die Zeitpfade des atmosphärischen Treibhausgasbestands und der Abbauraten dargestellt. Die Verläufe der Ressourcenbestände sind hingegen nicht extra abgebildet, da sich ihre Darstellung in allen drei Fällen gleichen würde und zunächst das Hydrat im Zeitraum  $t \in [0, t_s)$  und dann die Kohle in  $t \in [t_s, T)$  vollständig genutzt würde.

Abbildung 5.3 zeigt die optimalen Zeitpfade bei einer Kombination der Anfangsbestände  $(X_1^0, X_2^0)$ , die in der Region I der Abbildung 5.2, in der Hydrat reichlich, Kohle jedoch knapp vorhanden ist. Der Treibhausgasbestand erreicht hier das maximale Niveau während der Hydrat-Phase und wird über einen positiven Zeitraum  $t \in (t_c, t_H)$  konstant an der Obergrenze gehalten. Ab dem Zeitpunkt

---

<sup>26</sup>Beide Regionen (I und III) sind außerdem hinsichtlich des Bestandes des Gashydrats nach oben durch eine maximale Menge begrenzt. Wie im vorherigen Kapitel diskutiert, werden die natürlichen Emissionen bei einem Überschreiten dieser Menge zu groß als dass die Obergrenze gehalten werden könnte (vgl. Ausführungen im Abschnitt 4.2.1).

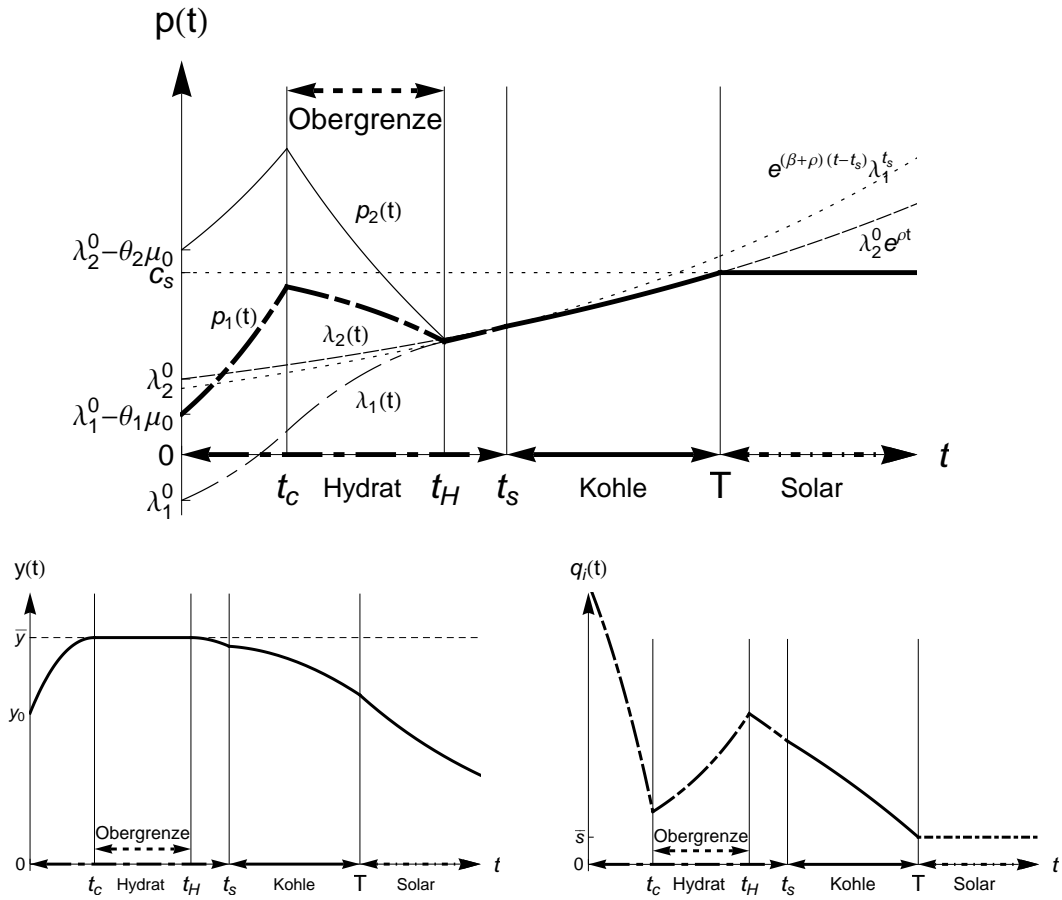


Abbildung 5.3: Zeitpfade bei Start in Region I: Hydrat reichlich, Kohle knapp.

$t_H$  entspricht die optimale Lösung dann der Hotelling-Lösung, in der es bei stets sinkender atmosphärischer Konzentration der Treibhausgase zum Zeitpunkt  $t_s$  zum Umschalten von Hydrat auf Kohle kommt. Der Schattenwert der Emissionen  $\mu(t)$  weist den typischen, in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Verlauf auf. Er ist dann  $\mu(t) = 0$  für alle  $t \geq t_H$ , nachdem er zunächst bis  $t_c$  exponentiell gesunken, also betragsmäßig exponentiell gestiegen, und dann bis  $t_H$  wieder angestiegen, betragsmäßig gesunken, ist.

Betrachten wir nun die Darstellung der Preise im oberen Diagramm der Abbildung 5.3, beginnend mit der letzten Phase: In dieser abschließenden Solar-Phase ab dem Zeitpunkt  $T$  ist – wie üblich – bei konstanter Nutzung dieser alternativen Energieform der Preis konstant gleich den Grenzkosten der Bereitstellung dieser Energie,  $c_s$ . In der davor liegenden Kohle-Phase, die vollständig in der Hotelling-Phase liegt, ist das maximale Niveau der atmosphärischen Treibhausgase bereits

verlassen und wird auch nicht mehr erreicht. Der Preis ist hier ausschließlich durch den Schattenwert der Kohle in situ  $\lambda_2(t)$  bestimmt und steigt exponentiell mit der Rate  $\rho$  an. Auch der letzte Teil der Hydrat-Phase, ab dem Zeitpunkt  $t_H$ , in dem das maximale Niveau verlassen wurde, ist bereits Teil der Hotelling-Phase, der Schattenwert der Emissionen ist hier  $\mu(t) = 0$ . Der Preis steigt also ab dem Zeitpunkt  $t_H$  exponentiell an, zunächst noch mit der spezifischen Diskontrate des Hydrats ( $\beta + \rho$ ), dann weiter mit der Diskontrate  $\rho$ .

Vor dem Verlassen des maximalen Niveaus ist jedoch der Schattenwert der Emissionen als mit dem Emissionskoeffizienten gewichteter Aufschlag auf die Knappheitsrenten der Ressourcen  $\lambda_i(t)$  in den Preis  $p_i(t)$  mit einzubeziehen. Dieser verschwindet erst, wenn die Knappheit der Atmosphäre keine Rolle mehr spielt ( $\mu(t) = 0$ ). So lässt sich aus der Abbildung erkennen, dass ein möglicher Kohlepreis  $p_2(t) = \lambda_2(t) - \theta_2\mu(t)$  während der Hydrat-Phase durchweg größer wäre als der Hydratpreis  $p_1(t)$  und dass somit kein Anreiz besteht in diesem Zeitraum bereits die Kohle zu nutzen. Auch verläuft der Schattenwert des Hydrats in situ  $\lambda_1(t)$  nicht exponentiell ansteigend solange  $\mu(t) \neq 0$ , sondern sein Verlauf ist für  $t \in (0, t_c]$  durch die Gleichung (5.18) beschrieben beziehungsweise für  $t \in (t_c, t_H)$  durch den beschränkten Abbau festgelegt. Es zeigt sich auch hier, dass der Schattenwert des Hydrats aufgrund der Wirkung des natürlichen Abbaus des Hydrats auf den Treibhausgasbestand anfänglich sogar negativ ist und dass er erst ab dem Zeitpunkt  $t_H$  den typischen exponentiellen Verlauf annimmt. Zuletzt stellen wir fest, dass auch in diesem Modell mit zwei zur Verfügung stehenden endlichen Ressourcen während des Zeitraums des maximalen Treibhausgasbestands wie schon im vorigen Kapitel 4 die Abbauraten monoton ansteigen, während der Energiepreis aufgrund der betragsmäßig zurückgehenden Knappheit der Atmosphäre sinkt und der Treibhausgasbestand konstant gehalten wird.

Abbildung 5.4 zeigt die optimalen Zeitpfade der Preise, des Treibhausgasbestands und des Abbaus für Anfangsbestände in Region II der Abbildung 5.2, also den Fall reichlich verfügbarer Kohle und einer knappen Menge Hydrats, die dennoch zuerst abgebaut wird. Da jedoch in der darauf folgenden Kohle-Phase die Beschränkung durch die Obergrenze noch bindet, wird in dieser anfänglichen Hydrat-Phase nicht nach der Hotelling-Regel abgebaut, sondern im Preis  $p_1(t) = \lambda_1(t) - \theta_1\mu(t)$  ist auch die ansteigende Knappheit der Atmosphäre berücksichtigt. Dabei würde auch hier der Schattenwert des Hydrats  $\lambda_1(t)$  erst ab dem

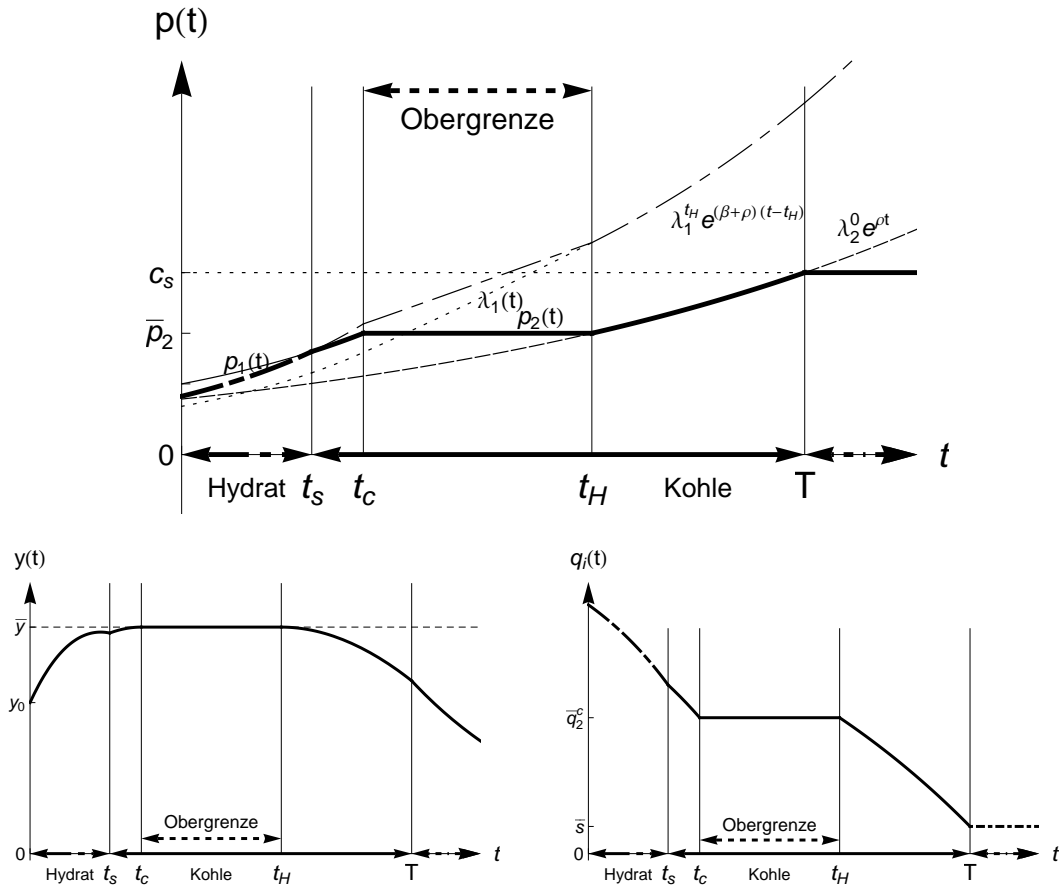


Abbildung 5.4: Zeitpfade bei Start in Region II: Hydrat knapp, Kohle reichlich.

Zeitpunkt  $t_H$ , zu dem das Hydrat jedoch bereits vollständig erschöpft ist, exponentiell mit der Rate  $(\beta + \rho)$  ansteigen.

Nach dem Umschalten auf die Nutzung der Kohle, das bereits bei einem Treibhausgasbestand unterhalb der Obergrenze  $y_{t_s} < \bar{y}$  erfolgt, wird dieser weiter erhöht, bis im Zeitpunkt  $t_c$  die Obergrenze erreicht ist. Da das Hydrat zu diesem Zeitpunkt bereits nicht mehr vorhanden ist und somit keine natürlichen Emissionen mehr abgibt, verlaufen sowohl der Preis für Energie  $p_2(t)$  als auch die Abbaumenge in der Phase der bindenden Obergrenze ( $t \in (t_c, t_H)$ ) konstant, bevor im Zeitpunkt  $t_H$  der Treibhausgasbestand wieder unter das maximale Niveau fällt und die abschließende Hotelling-Phase für  $t \in (t_H, T)$  beginnt. Auch hier wird wiederum aus der oberen Graphik deutlich, dass bis zum Zeitpunkt  $t_s$  der Preis der Nutzung des Hydrats kleiner ist als jener der Kohle, dass bis zum Zeitpunkt  $t_H$  die resultierenden Schattenpreise beider Ressourcen  $p_i(t)$  über ihrem

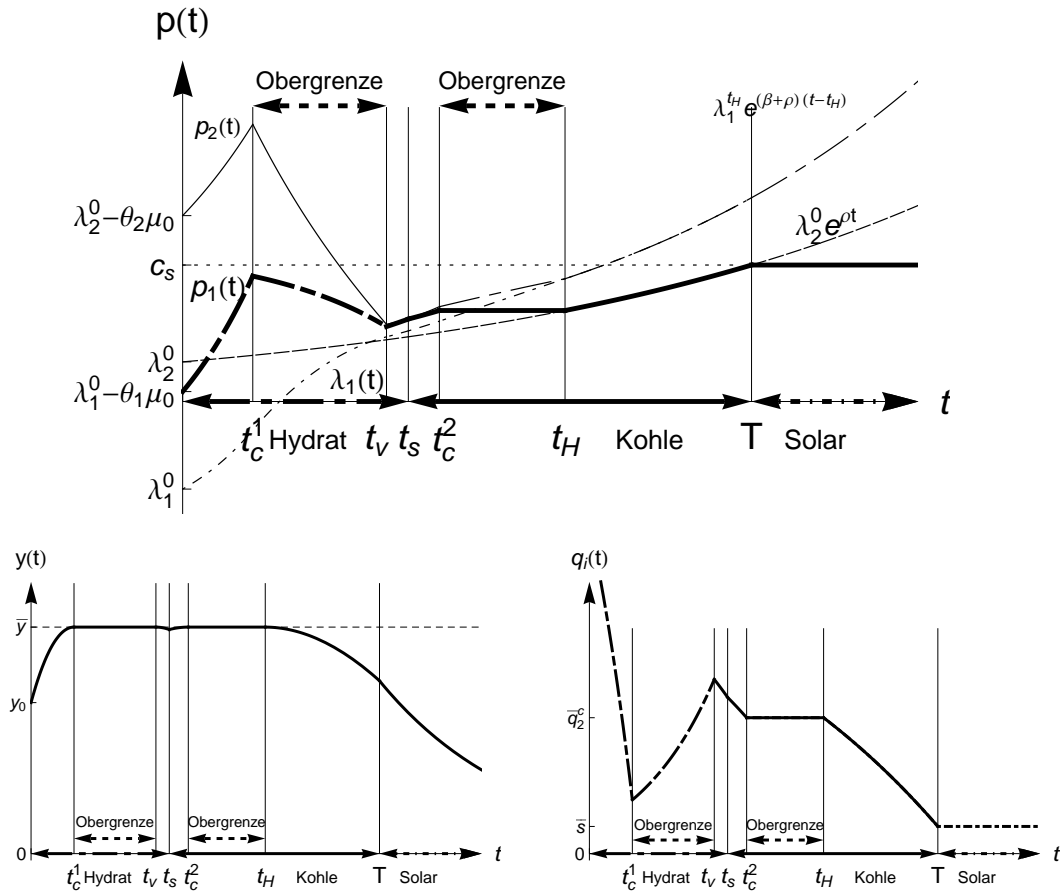


Abbildung 5.5: Zeitpfade bei Start in Region III: Hydrat und Kohle reichlich.

Schattenwert  $\lambda_i(t)$  liegen und dass der Schattenwert des Hydrats  $\lambda_1(t)$  keinen exponentiellen Anstieg aufweist.

Um das Bild zu komplettieren zeigt Abbildung 5.5 optimale Zeitpfade für eine Kombination von Anfangsbeständen, die in Region III liegt, so dass sowohl das Gashydrat als auch die Kohle reichlich vorhanden sind. Die Obergrenze des Treibhausgasbestands (5.4) wird sowohl in der Kohle- als auch in der Hydrat-Phase zur bindenden Nebenbedingung. Zwischen diesen beiden Phasen liegt allerdings ein Phase, in der das maximale Niveau der atmosphärischen Treibhausgase verlassen wird und die Atmosphäre sich leicht erholt ( $t \in (t_v, t_s)$ ), bevor es zum Umschalten auf die Nutzung der Kohle kommt, welche den Treibhausgasbestand wieder ansteigen lässt.

Interessant ist auch der nicht-monotone Verlauf des Schattenpreises der Emissionen, der aus dem oberen Schaubild indirekt erkennbar ist. Das negative  $\mu(t)$



sinkt zunächst exponentiell (beziehungsweise steigt betragsmäßig exponentiell an), steigt daraufhin an, solange der Abbau beschränkt ist, sinkt zwischen den Zeitpunkten  $t_v$ , in dem das maximale Niveau erstmalig verlassen wird, und  $t_c^2$ , in dem die Obergrenze zum zweiten Mal erreicht wird, um dann in der zweiten Phase der bindenden Obergrenze anzusteigen, bis es im Zeitpunkt  $t_H$  verschwindet ( $\mu(t_H) = 0$ ). Die Abbauraten dieser optimalen Lösung spiegeln die beiden bekannten Elemente der zwei zuvor vorgestellten Lösungen wieder. Zunächst wird mit anfänglich sehr hohen, dann schnell abnehmenden Abbauraten der Treibhausgasbestand rasch bis auf das maximale Niveau erhöht. Es folgt ein Anstieg der Abbauraten in der ersten Phase beschränkten Abbaus,  $t \in (t_c^1, t_v)$ , während in der zweiten dieser Phasen,  $t \in (t_c^2, t_H)$ , die Abbauraten konstant gehalten werden. In der anschließenden Hotelling-Phase  $t \in (t_H, T)$  wird der übrige Bestand der Kohle vollständig genutzt und der Energiepreis ist durch die Knappheitsrente der Kohle bestimmt, die exponentiell ansteigt, bis im Zeitpunkt  $T$  der Preis der Solarenergie  $c_s$  erreicht wird. In der letzten Phasen  $t > T$  wird die Menge  $\bar{s} = U'^{-1}(c_s)$  der Solarenergie konsumiert.

Hinsichtlich der Durchsetzbarkeit der bis zu diesem Punkt beschriebenen gesellschaftlich optimalen Lösung in einer dezentralisierten Ökonomie lässt sich feststellen, dass für Firmen, die das Ziel der Gewinnmaximierung verfolgen, zunächst kein Anreiz besteht, die gewünschte Obergrenze der aggregierten Treibhausgasemissionen einzuhalten. Insbesondere bei mehreren Akteuren auf dem Energiemarkt wäre es nicht rational die Obergrenze einzuhalten, sondern die Hotelling-Lösung würde realisiert. Um die gesellschaftlich optimale Allokation durchzusetzen, bedarf es daher einer Steuer, die dazu führt, dass die Firmen die Obergrenze aus ihrem eigenen Interesse einhalten. Da es im Gegensatz zu dem Modell, das in Kapitel 3 vorgestellt wurde, in dem vorliegenden Modell keine zweite Externalität (in Form von Schäden aufgrund geologischer Risiken) zu berücksichtigen gilt, liegt die Vermutung nahe, dass dies durch die übliche Steuer auf den CO<sub>2</sub>-Ausstoß in Höhe des Negativen des optimalen Schattenwerts der atmosphärischen Treibhausgase zu erreichen ist. Diese Steuer müsste allerdings nicht nur auf die CO<sub>2</sub>-Emissionen sondern auch auf das CO<sub>2</sub>-Äquivalent der natürlichen CH<sub>4</sub>-Emissionen aus dem Gashydratbestand erhoben werden und wäre in diesem Fall vom privaten Besitzer des Bestands der Gashydrate zu entrichten. Dass eine derartig ausgestaltete Steuer zur Realisierung der gesellschaftlich optimalen

Abbaupfade in der dezentralen Lösung führt, wird der Vollständigkeit halber in Anhang C.3 kurz gezeigt.

## 5.4 Abschließende Bemerkungen

Die Analyse in diesem Kapitel zeigt, dass bereits die Berücksichtigung nur einer Eigenschaft des Gashydrats in einem erweiterten Hotelling-Modell mit zwei heterogen verschmutzenden Ressourcen die optimale Lösung des Problems im Vergleich zum Modell ohne diese Eigenschaft qualitativ verändert. Durch die Berücksichtigung des selbstständigen Abbaus des Gashydrats erhält dieses eine spezifische Diskontrate, die größer als die der Kohle ist und dazu führt, dass optimalerweise der Bestand des Gashydrats zuerst vollständig genutzt wird, und die simultane Nutzung beider Ressourcen ausschließt. Die Unterschiede in den Emissionskoeffizienten spielen an dieser Stelle hingegen eine untergeordnete Rolle. Für die praktische Energiepolitik würde dies bedeuten, dass Gashydrat – so eine sichere Technologie zu seinem Abbau existiert und der Beschluss zur Nutzung dieser unkonventionellen Energiequelle feststeht – zuerst genutzt werden sollte, da es anderenfalls Gefahr läuft, ungenutzt verloren zu gehen.

Damit das Modell analytisch handhabbar bleibt, wurde mit Chakravorty et al. (2008) ein Modell als Basis gewählt, das als Hotelling-Modell ohne Berücksichtigung jeglicher Kosten oder sonstiger bestandsabhängiger Effekte ein denkbar einfaches ist und kritisiert werden kann, obschon diese Art der Modellierung weiterhin durchaus üblich ist. Die damit einhergehenden Abstriche hinsichtlich der Modellierung des Energiemarktes, wie die homogenen Kosten von null, die vollkommen unelastische Form der umweltpolitischen Regulierung oder auch die Annahme einer konstanten Nachfrage, wurden bewusst in Kauf genommen, um erste Einsichten bezüglich der Wirkung des selbstständigen Abbaus zu bekommen. Leider führt bereits die Hinzunahme von konstanten Grenzkosten unter der Annahme, dass die Abbaukosten von Gashydrat höher sind als die der Kohle, dazu, dass das anschauliche Ergebnis einer festen Abbaureihenfolge nicht gehalten werden kann. Das Modell würde sich durch diese einfache Hinzunahme derart verkomplizieren, dass die optimale Lösung durch das Zusammenspiel verschiedener Parameter, vor allem der Differenz in den Abbaukosten der beiden Ressourcen, den Emissionskoeffizienten sowie den Anfangsbeständen, bestimmt ist. Schon ein

solches noch recht einfach erscheinendes Modell wäre für eine analytische Lösung nicht trivial.

Auch hinsichtlich des Gashydrats wurde mit dem selbstständigen Abbau  $\beta$  nur diejenige Eigenschaft modelliert, die für eine rasche Nutzung des Bestands spricht. Die Hinzunahme des bestandsabhängigen Schadens, der tendenziell gegen eine Nutzung spricht, würde hier das Modell komplett verändern, da wir die „Hotelling-Welt“ verlassen würden und nicht mehr automatisch beide Bestände vollständig genutzt würden. Die durchaus interessante Frage nach der Balance zwischen Schaden und Nutzen dieser beiden Eigenschaften im Kontext mehrerer zur Verfügung stehender Ressourcen muss daher an dieser Stelle leider unbeantwortet bleiben. Nichtsdestotrotz hat das betrachtete Modell durchaus seine Berechtigung, denn es soll – trotz seines Potentials für Verfeinerungen der Modellierung – als ein erster Beitrag zum Verständnis der Rolle von Gashydraten in einem Abbau-Modell verschiedener Ressourcen verstanden werden.

## 6 Schluss

In dieser Arbeit wurden die ökonomischen Implikationen der unkonventionellen Energiequelle Gas- oder Methanhydrat aus verschiedenen Blickwinkeln untersucht. Mithilfe des Kapitels 2 wurde zunächst in die Problematik der Ausbeutung von Methanhydraten eingeführt, deren Besonderheit dargestellt und erörtert, warum eine ökonomische Analyse über die Standardanalyse erschöpfbarer Ressourcen hinausgeht und daher vielversprechend ist. Es folgten drei theoretische Modelle, die auf dem Gebiet der Ressourcenökonomik im Spannungsfeld zwischen der Endlichkeit fossiler Brennstoffe und der negativen Externalitäten ihrer Nutzung anzusiedeln sind. Dazu wurden zunächst die wesentlichen Charakteristika der Gashydrate, die sie von herkömmlichen fossilen Energieträgern abgrenzen, modelliert, um einen Einblick in etwaige Abweichungen der optimalen Abbaustrategien von den bekannten Strategien traditioneller Energien zu bekommen. Diese Charakteristika bestehen zum einen in einem natürlichen Abbau des Gashydrats, der zu einer Freisetzung von  $\text{CH}_4$  in die Atmosphäre führt, zum anderen in einem durch erhöhte geologische Risiken erwarteten gesellschaftlichen Schaden, der die Reduktion des Ressourcenbestands begleitet. Auch hinsichtlich der erzeugten Klimaexternalität weist das Methanhydrat Besonderheiten auf, da aufgrund der natürlichen Zersetzung auch im Falle einer Nicht-Nutzung des Gashydrats sowie durch Leckagen im Abbauprozess Emissionen entstehen, die als  $\text{CH}_4$  mit einem im Vergleich zu  $\text{CO}_2$  größeren GWP die atmosphärische Treibhausgaskonzentration erhöhen.

Das Modell des Kapitels 3 bildet diese Charakteristika im Rahmen eines theoretischen ressourcenökonomischen Modells ab, das die Klimaexternalität als einen im Bestand der atmosphärischen Treibhausgase ansteigenden gesellschaftlichen Schaden behandelt, und untersucht zunächst die gesellschaftlich optimalen Abbaupfade. Es hat sich gezeigt, dass neben den Grenzkosten des Abbaus und der maximalen Zahlungsbereitschaft insbesondere die Gestalt des erwarteten gesellschaftlichen Schadens aufgrund geologischer Risiken, welcher die marginalen gesellschaftlichen Kosten erhöht, den grundsätzlichen Typ der Lösung determiniert. Je nach deren Verhältnis zueinander wird das Gashydrat optimalerweise

vollständig erschöpft oder lediglich bis zu einem bestimmten Bestand reduziert, der anschließend dem natürlichen Verfall überlassen wird. Der gesellschaftliche Schaden des Treibhausgasbestands hat hingegen – wie üblich – lediglich einen Einfluss auf den zeitlichen Ablauf des Abbaus, der tendenziell später stattfindet, da sich der Treibhausgasbestand und damit der gesellschaftliche Schaden nach einem Rückgang der Emissionen ebenfalls wieder zurückbildet. Allerdings ist es mithilfe dieses Modells aufgrund der puffernden Wirkung dieses externen Schadens schwierig, eindeutige Effekte der einzelnen Charakteristika herauszuarbeiten. Dies äußert sich beispielsweise auch im Fall iii) der Proposition 3.1, in dem es unmöglich ist allgemein gültige Aussage hinsichtlich der Grenze zwischen den möglichen Lösungstypen zu treffen. Als interessant hat sich nichtsdestotrotz insbesondere der Schattenwert des Gashydrats *in situ* erwiesen, der mehrere Komponenten enthält, welche die externen Effekte durch Reduktion und natürliche Auflösung des Bestands widerspiegeln. Diese Komponenten müssten durch optimale Politikmaßnahmen zu Internalisierung der externen Effekte neben der üblichen auf CO<sub>2</sub>-Emissionen erhobenen Pigou-Steuer ebenfalls berücksichtigt werden.

Einige dieser Resultate aus Kapitel 3 lassen sich auch anhand des Modells in Kapitel 4 reproduzieren, welches die negativen Auswirkungen der Klimaexternalität durch die Beschränkung des zulässigen Treibhausgasbestands anstelle einer konvexen Schadensfunktion berücksichtigt und den Vorteil hat, dass die Effekte der gashydratspezifischen Modellkomponenten in der komparativen Dynamik eindeutig identifiziert werden können. Auch wenn die schädlichen Effekte des atmosphärischen Treibhausgasbestands durch diese Modellierung nicht explizit beziffert werden, so wird durch die Antizipation der zu erwartenden Begrenzung der Emissionen, die mit dem Konsum einhergehen, den atmosphärischen Treibhausgasen eine in deren Bestand betragsmäßig wachsender Schattenpreis zuteil, der auch in diesem Modell eine moderate Nutzung des Gashydrats bewirkt. Die Frage, ob der gesamte Ressourcenbestand erschöpft wird, entscheidet dieselbe Bedingung wie in Kapitel 3, so dass auch dies für ein besonderes Augenmerk auf die genaue Ausgestaltung der Funktion spricht, welche die erwarteten Schäden aufgrund der geologischen Risiken beziffert. Dazu wären genaue Kenntnisse der Wahrscheinlichkeit des Eintritts einer möglichen Katastrophe sowie der damit verbundenen gesellschaftlichen Kosten hilfreich. Diese liegen jedoch nicht vor,

so dass auch die Vereinfachung mithilfe einer deterministischen angenommenen Funktion eines erwarteten Schadens vertretbar ist. Ebenso wäre eine genaue Kalibrierung der als konstant angenommenen natürlichen Abbaurate grundsätzlich wünschenswert, jedoch sind die dazu benötigten Daten schwierig bis überhaupt nicht zu erheben. Allerdings haben Biastoch et al. (2011) in einer aktuellen Studie geschätzt, dass in den nächsten 100 Jahren 12% der Gashydrate aufgrund der globalen Erwärmung verloren gehen. Dies entspräche bei Annahme einer konstanten Abbaurate einem Wert von  $\beta = 0.000555$  – eine Größenordnung, die in den Abbildungen zu den Modellen kaum zu erkennen wäre, weshalb der Anschaulichkeit halber mit größeren Werten gearbeitet wurde.

Das Modell des Kapitels 5 unterschied sich schließlich deutlich von den zuvor untersuchten Modellen. Denn das Gashydrat ist nicht mehr die alleinige Ressource sondern eine von mehreren zur Verfügung stehenden Energiequellen, die sich anhand der CO<sub>2</sub>-Intensität ihrer Emissionen unterscheiden. Die mit der Hinzunahme weiterer Energieträger einhergehende Erhöhung der Komplexität des Modells wurde mit Abstrichen hinsichtlich der Bestandseffekte bezahlt, indem lediglich eines der erwähnten Charakteristika abgebildet wurde. Von der zweiten Externalität der geologischen Risiken wie auch von Darstellung jeglicher Abbaukosten wurde in diesem Modell vollständig abgesehen, auch um eine Betrachtung innerhalb einer „Hotelling-Welt“ zu ermöglichen. Dies führt zunächst zu dem sehr anschaulichen Ergebnis, dass stets das Gashydrat, welches Gefahr läuft, durch den natürlichen Abbau verloren zu gehen, zuerst zu erschöpfen ist, bevor die CO<sub>2</sub>-intensivere zweite fossile Ressource genutzt wird, und die bereits in Kapitel 4 beobachteten wachsenden Extraktionsraten in Phasen des begrenzten Abbaus treten erneut auf, da auch in diesem Modell mit einer Begrenzung der maximalen aggregierten Emissionen gearbeitet wurde. Darüber hinaus zeigte sich, wie deutlich sich bereits die Hinzunahme nur einer Eigenschaft des Gashydrats auf die optimalen Abbaustrategien auswirkt, auch weil zum Beispiel die simultane Nutzung beider Ressourcen in diesem Modell nicht auftritt. Dies lässt erahnen, dass eine realistischere Abbildung aller Charakteristika sowie bestandsabhängiger Abbaukosten zwar wünschenswert und vermutlich auch möglich, jedoch nicht mehr analytisch lösbar ist, und dass es schwierig sein dürfte eindeutige Effekte zu identifizieren. Dazu müssten Modellrahmen und Methodik vermutlich vollständig abweichend von der in dieser Arbeit genutzten Art und Weise gewählt werden.

Letztlich wird in der Realität entscheidend sein, ob es gelingt, die Extraktion von Methanhydraten technisch zu wettbewerbsfähigen Kosten zu realisieren und wie die Einschätzung der Entscheidungsträger bezüglich der externen Effekte ausfällt. Eine verheißungsvolle Aussicht stellt in diesem Zusammenhang eine Abbaumethode dar, die noch weit von einer technologischen Umsetzung entfernt ist. Sie folgt der Idee, das  $\text{CH}_4$  aus den Hydraten zu entfernen, indem das Gastmolekül in der Kristallstruktur ausgetauscht und durch ein  $\text{CO}_2$ -Molekül ersetzt wird. Diese spezielle Form des CCS würde zu einer  $\text{CO}_2$ -neutralen Ausbeutung der Hydrate führen, da jedes  $\text{CH}_4$ -Molekül durch ein  $\text{CO}_2$ -Molekül ersetzt würde, und hätte sogleich eine stabilisierende Wirkung auf die Kontinentalhänge, da  $\text{CO}_2$ -Hydrate grundsätzlich stabiler sind als  $\text{CH}_4$ -Hydrate. Dies würde bedeuten, dass einer Nutzung der Hydrate im Idealfall sogar positive Externalitäten zugeschrieben werden könnten. Die Abbildung dieser Zusammenhänge in einem ökonomischen Modell scheint lohnenswert und reizvoll, muss an dieser Stelle eine Aussicht auf mögliche zukünftige Forschungsprojekte bleiben.

# Anhang



## A Anhang zu Kapitel 3

### A.1 Herleitung der Formel (3.11)

Nach der Substitution von  $\mu$  durch Verwendung der Gleichung (3.9) wird der dritte Term im Schattenwert der Ressource (3.10) zu

$$\gamma \int_t^\infty e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} \mu(\tau) d\tau = -\gamma \int_{\tau=t}^\infty \int_{z=\tau}^\infty e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)} D'(y_z) e^{-(\alpha+\rho)(z-\tau)} dz d\tau.$$

Durch die Anwendung des Theorems von Fubini, das ein Vertauschen der Intervallgrenzen ermöglicht, und durch das Umstellen der Reihenfolge des Integrierens, kann das doppelte Integral aus diesem Term entfernt werden, so dass er zu

$$-\int_{z=t}^\infty \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)} D'(y_z) (e^{-(\beta+\rho)(z-t)} - e^{-(\alpha+\rho)(z-t)}) dz$$

wird. Dies entspricht dem letzten Ausdruck in den Klammern von (3.11).

### A.2 Beweis der Proposition 3.1

#### Fall i)

Im Fall i) muss gezeigt werden, dass  $q_t = 0$  und  $x_t = 0$  für alle  $t \geq T$  gilt, wenn  $\zeta \bar{p} > -\frac{G'(0)}{\beta+\rho} + c(0)$ .

In diesem ersten Teil des Beweises, soll gezeigt werden, dass unter der Voraussetzung  $\zeta \bar{p} \neq -\frac{G'(0)}{\beta+\rho} + c(0)$  ein Zeitpunkt  $T$  existiert, so dass  $q_t = 0$  für alle  $t \geq T$ . Um dies zu zeigen, nehmen wir zunächst das Gegenteil an, das heißt  $q_t > 0$  für alle  $t$ . Solange  $q_t > 0$  ist, muss die Umschaltbedingung (3.4) mit Gleichheit erfüllt sein. Auflösen von (3.4) nach  $\lambda_t$  zeigt unter Verwendung von  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_t = 0$  und  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$  sowie  $U'(0) = \bar{p}$ , dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = \zeta \bar{p} - c(0)$ . Demgegenüber folgt aus der Lösung der Differentialgleichung für den Schattenpreis der Ressource (3.10) und unter Berücksichtigung der Transversalitätsbedingung (3.7), dass der Grenzwert des Schattenpreises der Ressource  $\lambda_t$  für  $t \rightarrow \infty$  zwei mögliche Werte annehmen kann. Entweder  $\phi \neq 0$ , dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = \infty$ , oder  $\phi = 0$ , dann ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = -\frac{G'(0)}{\beta+\rho}$ . Somit führt die Annahme  $q_t > 0$  für alle  $t$  zu einem Widerspruch.

Im zweiten Teil des Beweises wird nun gezeigt, dass unter der Vorausset-

zung  $\zeta\bar{p} > -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$  die vorhandene Ressource bis zum Zeitpunkt  $T$  auf null reduziert wird ( $x_T = 0$ ). Dazu wird im Folgenden  $x_T > 0$  angenommen und zu einem Widerspruch geführt. Da  $q_t = 0$  für  $t > T$  gilt, entwickelt sich der Ressourcenbestand für  $t > T$  gemäß  $x_t = x_T e^{-\beta(t-T)}$ . Aus der Transversalitätsbedingung (3.7) und der Differentialgleichung (3.10) kann geschlossen werden, dass  $\phi = 0$  in (3.10) gelten muss. Andernfalls wäre der erste Term in dem Produkt  $\lambda_t x_t e^{-\rho t}$  genau  $\phi x_T e^{\beta T}$  und damit wäre die Transversalitätsbedingung (3.7) verletzt. Somit ist der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = -\frac{G'(0)}{\beta+\rho}$  eindeutig bestimmt. Außerdem muss aufgrund von  $q_t = 0$  die Umschaltbedingung (3.4) für alle  $t > T$  mit „ $\leq$ “ erfüllt sein. Diese beiden Fakten führen zu dem folgenden Widerspruch:  $\zeta\bar{p} \leq \lambda_t - \mu_t + c(x_t) \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \zeta\bar{p} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (\lambda_t - \mu_t + c(x_t)) = -\frac{G'(0)}{\beta+\rho} + c(0) < \zeta\bar{p}$ , falls  $x_T > 0$ . Demnach muss  $x_t = 0$  für alle  $t \geq T$  gelten. ■

### Fall ii)

Für den Fall ii) muss gezeigt werden, dass  $q_t = 0$  für alle  $t \geq T$  und  $x_T > 0$  gilt, wenn  $\zeta\bar{p} < -\frac{G'(0)}{\beta+\rho} + c(0)$ .

Wie wir im Beweis zu Fall i) bereits gesehen haben, gilt  $q_t = 0$  für alle  $t \geq T$ , wenn  $\zeta\bar{p} \neq -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$ . In einem zweiten Schritt wird nun gezeigt, dass im Fall von  $\zeta\bar{p} < -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$  und  $q_t = 0$  für alle  $t > T$ , der Ressourcenbestand immer positiv sein muss, das heißt  $x_t > 0$  und insbesondere  $x_T > 0$ . Dies wird gezeigt, indem wir zunächst  $x_T = 0$  annehmen und dies zu einem Widerspruch führen. Mit  $q_t = 0$  muss für  $t > T$  die Umschaltbedingung (3.4) mit „ $\leq$ “ erfüllt sein und die Zustandsvariablen sind  $x_t = 0$  und  $y_t = y_T e^{-\alpha(t-T)}$ . Aus Gründen der Stetigkeit muss (3.4) im Zeitpunkt  $T$  mit Gleichheit erfüllt sein, so dass  $\zeta\bar{p} = c(x_T) + \lambda_T - \mu_T$ . Berücksichtigung der Zustände und Einsetzen von (3.9) und (3.11) führen zum folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} \zeta\bar{p} = & c(0) + \phi e^{(\beta+\rho)T} - \frac{G'(0)}{\beta + \rho} \\ & + \int_T^\infty D'(y_\tau) \left[ e^{-(\alpha+\rho)(\tau-T)} \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \right) - e^{-(\beta+\rho)(\tau-T)} \frac{\gamma}{\alpha - \beta} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Wenn wir zeigen können, dass der vierte Term auf der rechten Seite der Gleichung positiv ist, wäre die rechte Seite größer als  $-\frac{G'(0)}{\beta+\rho} + c(0) > \zeta\bar{p}$ , ein Widerspruch.

Um zu zeigen, dass der vierte Term in der Tat positiv ist, lösen wir das Integral  $\int_T^\infty D'(y_\tau) \left[ e^{-(\alpha+\rho)(\tau-T)} \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha-\beta} \right) - e^{-(\beta+\rho)(\tau-T)} \frac{\gamma}{\alpha-\beta} \right] d\tau$  zunächst unter der Annahme eines linearen Grenzschadens ( $D'(y_t) = d y_t$ ). Aufgrund von  $q_T = 0$  und  $x_T = 0$  baut sich der Treibhausgasbestand nach  $y_t = y_T e^{-\alpha(t-T)}$  ab. Daher kann das Integral gelöst werden und es ergibt sich  $\frac{d y_T}{(\alpha-\beta)} \left( \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2\alpha+\rho} - \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\rho} \right)$ . Dieser Wert ist unter den plausiblen Annahmen bezüglich der Parameter,  $(\alpha - \beta) > 0$  und  $(\alpha + \beta + \rho - \gamma) > 0$ , positiv.

Um dieses Ergebnis für alle Schadensfunktionen mit den Eigenschaften  $D' \geq 0, D'' \geq 0, D'(0) = 0$  zu verallgemeinern, zeigen wir, dass neben der soeben für den linearen Grenzschaden festgestellten Positivität des Integrals

$$\int_0^\infty \underbrace{D'(y_T e^{-\alpha t})}_{f(e^{-\alpha t})} \underbrace{\left[ e^{-(\alpha+\rho)t} \left( 1 + \frac{\gamma}{\alpha-\beta} \right) - e^{-(\beta+\rho)t} \frac{\gamma}{\alpha-\beta} \right]}_{h(t)} dt \geq 0 \quad (\text{A.1})$$

auch ganz allgemein  $J = \int_0^\infty f(e^{-\alpha t}) h(t) dt \geq 0$  für jede konvexe Funktion  $f(\cdot)$  mit  $f(0) = 0$  gilt. Für die Funktion  $h(t)$  in (A.1) ist zu beachten, dass ein Zeitpunkt  $t^*$  existiert, wobei  $h(t) > 0$  für alle  $t \in [0, t^*]$ ,  $h(t) < 0$  für alle  $t \in [t^*, \infty)$  und  $h(t^*) = 0$ .

Definieren wir nun die Variable  $s = e^{-\alpha t}$  mit  $0 \leq s \leq 1$  sowie  $s^* = e^{-\alpha t^*}$ , so dass im Folgenden zwei Fälle auftreten können:

Fall 1)  $f(s^*) > 0$ : Normieren der Funktion  $f(\cdot)$  durch Multiplikation mit einem konstanten Faktor  $\frac{s^*}{f(s^*)}$ , so dass der Schnittpunkt zwischen  $s$  und  $f(s)$  genau im Punkt  $s^*$  liegt, ermöglicht ohne Beschränkung der Allgemeinheit (da diese Transformation die Konvexitätseigenschaften der Funktion nicht beeinträchtigt), die Annahme von  $f(s^*) = s^*$ . Wenn nun

$$f(s) \leq s \quad \forall 0 \leq s \leq s^* \quad (\text{A.2})$$

und

$$f(s) \geq s \quad \forall s^* \leq s \leq 1 \quad (\text{A.3})$$

zutreffen, folgt auch die zu zeigende Positivität von  $J$ . Denn es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(e^{-\alpha t})h(t)dt &= \int_0^{t^*} f(e^{-\alpha t})h(t)dt + \int_{t^*}^\infty f(e^{-\alpha t})h(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} f(e^{-\alpha t})|h(t)|dt - \int_{t^*}^\infty f(e^{-\alpha t})|h(t)|dt \\ &\geq \int_0^{t^*} e^{-\alpha t}|h(t)|dt - \int_{t^*}^\infty e^{-\alpha t}|h(t)|dt \geq 0 \end{aligned}$$

(wie bereits für den linearen Fall gezeigt). Die Bedingung (A.2) folgt direkt aus der Definition von Konvexität, und (A.3) kann wie folgt leicht bewiesen werden: Es existiere ein  $s_1 > s^*$  mit  $f(s_1) < s_1$ . Dann wäre  $s^* = (1-\theta) \cdot 0 + \theta \cdot s_1$  mit  $\theta = \frac{s^*}{s_1} \in ]0, 1[$ . Dies impliziert  $f(s^*) \leq (1-\theta)f(0) + \theta f(s_1) < \theta \cdot s_1 = s^*$ . Ein Widerspruch zu  $f(s^*) = s^*$ .

Fall 2)  $f(s^*) = 0$ : Dieser Fall ist trivial. Wegen  $f(\cdot) \geq 0$  gilt  $f(s) = 0$  für alle  $0 \leq s \leq s^*$  und  $f(s) \geq 0$  für alle  $s \geq s^*$ . Somit würde lediglich der positive Teil des Integrals gewichtet, für den  $s \geq s^*$ ,  $t \leq t^*$  gilt.

Somit ist gezeigt, dass das Integral A.1 für alle angenommenen Schadensfunktionen  $D(y_t)$  positiv ist. Die Annahme  $x_T = 0$  führt also zu einem Widerspruch und so ist die Aussage von Fall ii) der Proposition 3.1 bewiesen.<sup>27</sup> ■

### Fall iii)

Um zu zeigen, dass die Lösung vom Typ a) nicht auftreten kann, müssen wir  $x_T = 0$  für  $\zeta\bar{p} = -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$  ausschließen. Angenommen es gelte  $x_T = 0$  und damit  $x_t = 0$  and  $q_t = 0$  für alle  $t > T$ . Unter dieser Annahme kann das Argument aus dem Beweis zu Fall ii) auf diesen Fall übertragen werden und es kommt zu einem Widerspruch, da nur positive Terme zu dem Ausdruck  $-\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)}$  addiert werden, und somit  $\zeta\bar{p} = c(x_T) + \lambda_T - \mu_T > -\frac{G'(0)}{\beta+\rho} + c'(0) = \zeta\bar{p}$  gilt, ein Widerspruch. Daher ist  $x_T > 0$  und es kann nicht optimal sein die Ressource in endlicher Zeit vollständig abzubauen. ■

<sup>27</sup>Die Verfasserin dieser Arbeit dankt an dieser Stelle ausdrücklich und sehr herzlich Herrn Prof. Dr. Detlef Müller vom Mathematischen Seminar der CAU Kiel für die entscheidenden Argumente in dieser Beweisführung.

### A.3 Beweis der Proposition 3.2

Nehmen wir zunächst an, die Lösung sei vom Typ b), das hieße System 2 ( $q_t = 0$ ) wäre für alle  $t > T$  optimal. Da sich die Bestände der Ressource und der Treibhausgase dann nach (3.14) und (3.15) entwickeln, können die Werte der Ko-Zustandsvariablen und deren Ableitung nach der Zeit zum Zeitpunkt  $T$  bestimmt werden. Die Umschaltbedingung  $\zeta\bar{p} = c(x_T) + \lambda_T - \mu_T$  in Kombination mit der Bedingung (3.18) für den Fall iii) und die Werte von (3.25) und (3.26) führen zum Treibhausgasbestand  $y_T$  als lineare Funktion des Ressourcenbestands  $x_T$ . Einsetzen von diesem  $y_T$  in die erste Ableitung der Funktion der gesellschaftlichen Kosten mit

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_T &= \frac{d(y_T\alpha(\alpha + \beta + \rho) - x_T\gamma(\alpha + \rho))}{(2\alpha + \rho)(\alpha + \beta + \rho)} \\ \dot{\lambda}_T &= \frac{fx_T\beta(2\alpha + \rho)(\alpha + \beta + \rho) + d\gamma(y_T\alpha(2\beta + \rho) - x_T\gamma\rho)}{(2\alpha + \rho)(\alpha + \beta + \rho)(2\beta + \rho)}\end{aligned}$$

macht deutlich, dass  $\dot{\lambda}_T - \dot{\mu}_T + c'(x_T)\dot{x}_T$  gleich

$$\frac{d\gamma(\beta + \rho - (\gamma - \beta)) - (f + c_2(2\beta + \rho))(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \rho)}{(\alpha + \beta + \rho)(2\beta + \rho)} \cdot x_T \quad (\text{A.4})$$

ist. Dieser Term ist genau dann negativ, wenn die Bedingungen (3.23) und (3.24) der Proposition 3.2 zutreffen. Wie im Abschnitt 3.4.1 argumentiert wurde, ist diese Negativität des Terms (A.4) ausreichend, um die Nicht-Optimalität eines Abbaustopps nachzuweisen, und die Lösung muss daher vom Typ c) sein. Falls (A.4) hingegen positiv ist, muss die Lösung vom Typ b) sein. ■

### A.4 Sattelpfadstabilität der Optimalen Lösung

Laut einem Theorem nach Dockner (1985) besitzt die Lösung eines dynamischen 4x4-Systems Sattelpfadeigenschaften, wenn die Jacobi-Matrix des dynamischen Systems der modifizierten Hamiltonfunktion (MHDS, *engl.*: Modified Hamiltonian Dynamic System) die folgenden Bedingungen erfüllt:  $\Delta > 0$ ,  $\Omega < 0$  und  $\Omega^2 > 4\Delta$ , wobei  $\Delta$  die Determinante der Jacobi-Matrix des MHDS ist und  $\Omega$  als

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial \lambda}{\partial x} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \lambda} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \mu} & \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial \mu} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} & \frac{\partial \lambda}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial \mu} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

definiert ist. Das MHDS ergibt sich durch Auflösen der Gleichung (3.4) nach  $q_t^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) = U^{t-1} \left( \frac{\lambda_t - \mu_t + c(x_t)}{\zeta} \right) / \zeta$  mit  $\frac{\partial q_t^*}{\partial x_t} = \frac{c'(x_t)}{\zeta^2 U''(\zeta q_t)}$ ,  $\frac{\partial q_t^*}{\partial \lambda_t} = \frac{1}{\zeta^2 U''(\zeta q_t)}$  und  $\frac{\partial q_t^*}{\partial \mu_t} = -\frac{1}{\zeta^2 U''(\zeta q_t)}$  und Einsetzen des Ergebnisses beziehungsweise  $q_t^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) = 0$  in das dynamische System, bestehend aus (3.5), (3.6), (3.1) und (3.3). Das MHDS des vorliegenden Modells lautet dementsprechend:

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_t &= (\beta + \rho)\lambda_t - \gamma\mu_t + c'(x_t)q^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) + G'(x_t) \\ \dot{\mu}_t &= (\alpha + \rho)\mu_t + D'(y_t) \\ \dot{x}_t &= -q^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) - \beta x_t \\ \dot{y}_t &= q^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) + \gamma x_t - \alpha y_t\end{aligned}$$

Damit sind die vier Eigenwerte des MHDS gegeben durch

$$\nu_i = \frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2 - \frac{\Omega}{2} \pm \frac{\sqrt{\Omega^2 - 4\Delta}}{2}},$$

von denen im Fall von Sattelpfadstabilität aber jeweils nur die zwei negativen Eigenwerte verwandt werden.

### Lösung vom Typ a)

Ist die Lösung vom Typ a), so ist während der letzten Phase das System 2 optimal und der Ressourcenbestand wird auf null reduziert, so dass das dynamische System nur noch aus einem 2x2-System in  $y_t$  und  $\mu_t$  besteht. Die dazugehörige Jacobi-Matrix ist dann

$$\mathbf{J}_a = \begin{pmatrix} \alpha + \rho & D''(y) \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix},$$

deren Eigenwerte  $\nu_1 = -\alpha$  und  $\nu_2 = (\alpha + \rho)$  sind, von denen einer negativ und einer positiv ist. Dies führt zu Sattelpfadstabilität in der letzten Phase der Lösung des Systems.

**Lösung vom Typ b)**

Eine Lösung vom Typ b) geht mit einem 4x4-System und  $q_t^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) = 0$  für alle  $t > T$  in der letzten Phase einher. Die dazugehörige Jacobi-Matrix ist

$$\mathbf{J}_b = \begin{pmatrix} \beta + \rho & -\gamma & G''(x) & 0 \\ 0 & \alpha + \rho & 0 & D''(y) \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Aus dieser Matrix (bewertet im Steady-State) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta &= \alpha\beta(\alpha + \rho)(\beta + \rho) &> 0 \\ \Omega &= -\alpha(\alpha + \rho) - \beta(\beta + \rho) &< 0 \\ \Omega^2 - 4\Delta &= (\alpha(\alpha + \rho) - \beta(\beta + \rho))^2 &> 0 \end{aligned}$$

Demnach ist die Sattelpfadstabilität nachgewiesen. (Die zwei negativen Eigenwerte dieses Systems sind  $\nu_1 = -\alpha$  und  $\nu_2 = -\beta$ , die genau den Eigenwerten des 2x2-Systems der zwei Zustandsgleichungen (3.1) und (3.3) entsprechen.)

**Lösung vom Typ c)**

Für die Lösung vom Typ c), die ein positives  $q_t^*(x_t, \lambda_t, \mu_t) > 0$  für alle  $t$  impliziert, ist die zum MHDS gehörige Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_c = \begin{pmatrix} \beta + \rho + \frac{c'(x)}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & -\gamma - \frac{c'(x)}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & G''(x) + \frac{c'(x)^2}{\zeta^2 U''(\zeta q)} + q^* c'(x) & 0 \\ 0 & \alpha + \rho & 0 & D''(y) \\ -\frac{1}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & \frac{1}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & -\beta - \frac{c'(x)}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & 0 \\ \frac{1}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & -\frac{1}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & \gamma + \frac{c'(x)}{\zeta^2 U''(\zeta q)} & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Die Determinante dieser Matrix, bewertet im Steady-State ( $q^* \rightarrow 0$ ) ist

$$\Delta = \beta(\beta + \rho)\alpha(\alpha + \rho) + \frac{1}{\zeta^2 U''} \underbrace{[(\gamma - \beta)(\rho + \beta - \gamma)D'' - \alpha(\alpha + \rho)(G'' - c'(2\beta + \rho))]}_B.$$

Diese Determinante  $\Delta$  ist positiv, wenn  $B \leq 0$ . Dies trifft zu, falls entweder  $\rho \leq (\gamma - \beta)$  oder falls  $\rho > (\gamma - \beta)$  und

$$D'' \leq \frac{\alpha(\alpha + \rho)}{(\gamma - \beta)(\rho + \beta - \gamma)} (G''' - c'(2\beta + \rho)).$$

Diese Bedingungen treffen auf alle Parameter zu, welche die Bedingungen (3.23) und (3.24) der Proposition 3.2 (Lösung vom Typ c) erfüllen, das heißt  $D'' \leq \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \rho)}{\gamma(\rho + 2\beta - \gamma)} (G''' - c'(2\beta + \rho))$ , da  $\alpha(\alpha + \rho) > (\alpha - \beta)(\alpha + \beta + \rho)$  und  $(\gamma - \beta)(\rho + \beta - \gamma) < \gamma(\rho + 2\beta - \gamma)$ .

Darüber hinaus ist  $\Omega = -\alpha(\alpha + \rho) - \beta(\beta + \rho) - \frac{c'(2\beta + \rho)}{\zeta^2 U''} + \frac{D'' + G''}{\zeta^2 U''}$ .  $\Omega$  ist eindeutig negativ, da  $U'' < 0$ ,  $c' < 0$  ist, während  $D'' > 0$ ,  $G'' > 0$  ist. Zuletzt kann  $\Omega^2 - 4\Delta$  zu dem Ausdruck  $\left( \frac{(D'' + (G'' - c'^2 U''))}{\zeta^2 U''} \right)^2 - \frac{4D''(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \rho - \gamma)}{\zeta^2 U''}$  umgeformt werden, der aufgrund von  $\alpha > \gamma > \beta$  und  $U'' < 0$  positiv ist. Somit ist auch die Entwicklung der Lösung vom Typ c) in den Steady-State sattelpfadstabil.

## A.5 Allgemeine Form der Expliziten Lösung

Nachdem die Eigenvektoren des System derart normalisiert wurde, dass ihr letztes Element jeweils gerade 1 ist, kann die allgemeine Lösung für dieses letzte Element als  $y(t) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\nu_i t} + \bar{y}$  geschrieben werden, wobei die  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , für die vier Konstanten stehen, die mithilfe der Randbedingungen bestimmt werden müssen. Unter Verwendung dieser Formulierung und von (3.1) und (3.3) ergibt sich

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 \frac{\nu_i + \alpha}{\gamma - \beta - \nu_i} A_i e^{\nu_i t} + \bar{x}, \quad y(t) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\nu_i t} + \bar{y}.$$

Weiterhin sind die Zeitpfade der Schattenwerte gegeben durch

$$\mu(t) = \sum_{i=1}^4 \frac{d}{\nu_i - \alpha - \rho} A_i e^{\nu_i t} + \bar{\mu},$$

$$\lambda(t) = \sum_{i=1}^4 \left( -\frac{d\gamma}{(\nu_i - \alpha - \rho)(\nu_i - \beta - \rho)} - \frac{(f + c_2(\nu_i + \beta))(\nu_i + \alpha)}{(\nu_i + \beta - \gamma)(\nu_i - \beta - \rho)} \right) A_i e^{\nu_i t} + \bar{\lambda}.$$

Die Randbedingungen zur Bestimmung der Konstanten  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  und des Zeitpunkts  $T$  variieren für die drei Typen der Lösung (siehe Abschnitt 3.4.2). Für die Lösung vom Typ c) werden aufgrund der Sattelpfadeigenschaft über



den gesamten Planungshorizont lediglich die beiden negativen Eigenwerte ( $\nu_1 < \nu_2 < 0$ ) zur Bestimmung der optimalen Lösung benötigt. Die Werte der beiden dazugehörigen Konstanten ergeben sich dann als

$$A_1 = \frac{(\nu_2 + \alpha)(\beta - \gamma + \nu_1)}{(\nu_1 - \nu_2)(\alpha - \beta + \gamma)}y_0 + \frac{(\nu_1 + \beta - \gamma)(\nu_2 + \beta - \gamma)}{(\nu_1 - \nu_2)(\alpha - \beta + \gamma)}x_0,$$
$$A_2 = -\frac{(\nu_1 + \alpha)(\beta - \gamma + \nu_2)}{(\nu_1 - \nu_2)(\alpha - \beta + \gamma)}y_0 - \frac{(\nu_1 + \beta - \gamma)(\nu_2 + \beta - \gamma)}{(\nu_1 - \nu_2)(\alpha - \beta + \gamma)}x_0.$$

## B Anhang zu Kapitel 4

### B.1 Proposition zum Abbaustopp

**Proposition B.1** *Wenn die Annahme 4.4 erfüllt ist, also  $\zeta\bar{p} < c(0) - \frac{G'(0)}{\beta+\rho}$  gilt, dann existiert ein endlicher Zeitpunkt  $T$  mit  $q_t = 0$  und  $x_t = x_T e^{-\beta(t-T)}$  für alle  $t > T$ , da  $x_T > 0$  und  $\lambda_T = -\int_T^\infty G'(x_\tau) e^{-(\beta+\rho)(\tau-t)}$ .*

**Beweis** Zunächst wird gezeigt, dass im Fall  $\zeta\bar{p} \neq -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$  ein Zeitpunkt  $T$  existiert mit  $q_t = 0$  für alle  $t > T$ . Es sei zunächst angenommen, das Gegenteil würde zutreffen, das heißt  $q_t > 0$  für alle  $t$  und damit  $\varphi_t = 0$  für alle  $t$ . Dann folgt aus (4.8) und aus Überlegungen zum Steady-State  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = \zeta\bar{p} - c(0)$ . Aus (4.11) und (4.12) folgt, dass  $\varphi_t = 0$  nur in Kombination mit  $\omega_t = 0$  vorkommen kann. Mit  $\omega_t = 0$  folgt aus (4.9), dass  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t = -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)}$  und somit  $-\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} = \zeta\bar{p} - c(0)$ , ein Widerspruch zu der anfangs genannten Voraussetzung. Also führt die Annahme, dass  $q_t > 0$  für alle  $t$  gilt, zu einem Widerspruch und es muss ein Zeitpunkt  $T$  existieren mit  $q_t = 0$  und  $\varphi_t > 0$  für alle  $t > T$ .

Nun wird gezeigt, dass wenn  $\zeta\bar{p} < -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + c(0)$  im Zeitpunkt  $T$  mit  $q_t = 0$  für  $t > T$  der Ressourcenbestand noch nicht vollständig erschöpft ist, das heißt  $x_t = x_T e^{-\beta(t-T)} > 0$  und  $\omega_t = 0$  für alle  $t > T$ . Nehmen wir das Gegenteil an.  $x_T = 0$ , so dass  $x_t = 0$  und  $\omega_t > 0$  für  $t > T$ . Aus Gründen der Stetigkeit muss zum Zeitpunkt des Umschaltens  $T$  gelten, dass  $\varphi_T = 0$  und  $\omega_T = 0$ . Durch Lösen der Differentialgleichung (4.9) für  $\lambda_t$  und Einsetzen der Werte zum Zeitpunkt  $T$  erhalten wir  $\lambda(T) = \phi e^{(\beta+\rho)T} - \frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} + \int_T^\infty \omega_\tau e^{-(\beta+\rho)(\tau-T)} d\tau > -\frac{G'(0)}{(\beta+\rho)}$ . Ebenfalls aufgrund von Überlegungen zur Stetigkeit wird Gleichung (4.8) zum Zeitpunkt  $T$  zu  $\zeta\bar{p} = c(0) + \lambda_T$ . Einmal mehr kommt es zum Widerspruch:  $\zeta\bar{p} = c(0) + \lambda_T > c(0) - \frac{G'(0)}{(\beta+\rho)} > \zeta\bar{p}$ . Ein positiver Ressourcenbestand zum Zeitpunkt  $T$  ist also optimal. ■

## B.2 Optimale Zeitpfade aller Größen

Abbildung B.1 zeigt exemplarisch einen typischen Verlauf der optimalen Zeitpfade des Ressourcenbestands (a), der Knappheit der Ressource (b), des Treibhausgasbestands (c) und seines Schattenwerts (d), der Abbaurates (e) sowie der gesamten gesellschaftlichen Kosten (f), jeweils unter der Annahme linear-quadratischer funktionaler Formen. Die verwandten funktionalen Formen sind  $U(\zeta q) = (\bar{p} - \frac{b}{2}\zeta q)\zeta q$ ,  $c(x) = c_1 - c_2x$  und  $G(x) = \frac{f}{2}(x_0 - x)^2$ .

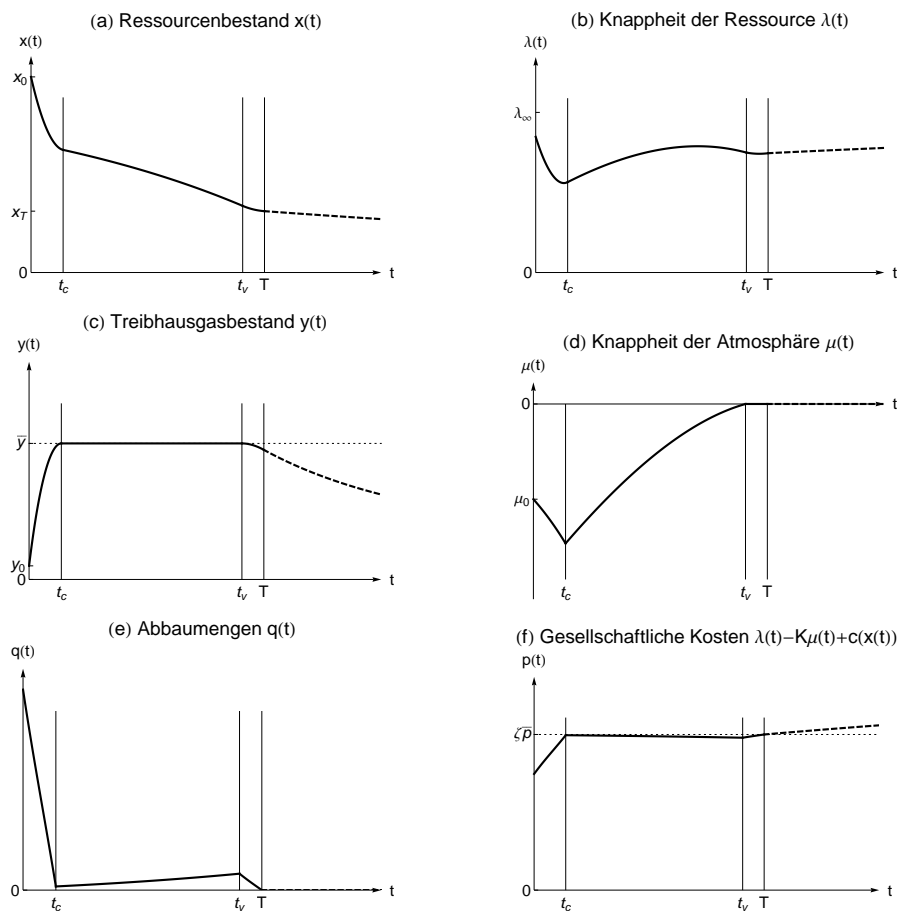


Abbildung B.1: Exemplarische Zeitpfade aller Größen unter Vorgabe der Obergrenze  $\rho = 0.05$ ,  $\bar{p} = 9$ ,  $b = 0.2$ ,  $x_0 = 47$ ,  $y_0 = 1$ ,  $f = 0.008$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\beta = 0.015$ ,  $\zeta = 0.9$ ,  $\kappa = 1/6$ ,  $c_1 = 6$ ,  $c_2 = 0.15$ ,  $\bar{y} = 5$

### B.3 Simulationsergebnisse zu Abschnitt 4.3.2

In Tabelle B.1 sind zur Unterstützung der Aussagen, Erklärungen und Interpretationen zur komparativen Dynamik im Abschnitt 4.3.2 noch einmal die Werte der wesentlichen Größen angegeben, die sich im Zuge der Simulationen ergeben haben. Insbesondere die Aussagen bezüglich der verschiedenen Zeitpunkte können so noch einmal unterstützt werden. Außerdem beinhaltet die Tabelle im Interesse einer Nachvollziehbarkeit auch die verwendeten Funktionen und Parameterwerte.

	$\beta = 0$		$\beta > 0$ ( $\beta = 0,013$ )	
$G = 0$	Grundmodell		isolierte Wirkung $\beta$	
	unreguliert	reguliert	unreguliert	reguliert
	$t'_c = 2,3927$	$t_c = 3,90685$	$t'_c = 1,31161$	$t_c = 2,04347$
	$t'_v = 13,3774$	$t_v = 11,8402$	$t'_v = 16,1608$	$t_v = 26,8986$
	$T' = \text{n.ex.}$	$T = \text{n.ex.}$	$T' = 19,6231$	$T = 37,8343$
$x_T = \text{n.ex.}$	$\lambda_T = \text{n.ex.}$	$x_T = 4,75$	$\lambda_T = 0$	
$x_\infty = 4,75$	$\lambda_\infty = 0$	$x_\infty = 0$	$\lambda_\infty = 0$	
$G > 0$ ( $f=0,002$ )	isolierte Wirkung $G(x_t)$		vollständiges Modell	
	unreguliert	reguliert	unreguliert	reguliert
	$t'_c = 2,56342$	$t_c = 4,77356$	$t'_c = 1,52304$	$t_c = 2,26761$
	$t'_v = 10,2846$	$t_v = 9,40214$	$t'_v = 14,1799$	$t_v = 21,4089$
	$T' = 11,1204$	$T = 13,822$	$T' = 11,9545$	$T = 25,6525$
$x_T = 14,8214$	$\lambda_T = 1,00714$	$x_T = 13,8133$	$\lambda_T = 0,906333$	
$x_\infty = 14,8214$	$\lambda_\infty = 1,00714$	$x_\infty = 0$	$\lambda_\infty = 1,26984$	
n.ex. = nicht existent	Funktionale Formen:	Parameterwerte:		
$t'_c = \text{Zeitpunkt 1. Übertreten}$	$U(\zeta q) = (\bar{p} - \frac{b}{2}\zeta q)\zeta q$	$x_0 = 40$	$y_0 = 2$	$\bar{y} = 4,5$ $\alpha = 0,1$
$t'_v = \text{Zeitpunkt 2. Übertreten}$	$c(x) = c_1 - c_2 x$	$\bar{p} = 6,5$	$b = 0,2$	$\zeta = 0,85$ $\kappa = 1/6$
	$G(x) = \frac{f}{2}(x_0 - x)^2$	$c_1 = 6$	$c_2 = 0,1$	

Tabelle B.1: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse zu Abbildung 4.3

## C Anhang zu Kapitel 5

### C.1 Beweis der Proposition 5.1

Die Proposition 5.1 besagt, dass es nicht optimal ist, die beiden fossilen Ressourcen simultan zu nutzen. Der Beweis erfolgt indirekt, indem die Behauptung, es existierten Zeiträume, in denen die simultane Nutzung von Gashydrat und Kohle optimal sei, zu einem Widerspruch geführt wird. Werden beide verschmutzenden Ressourcen simultan genutzt, so sind beide Abbauraten positiv und es gilt:

$$\begin{aligned} q_1 > 0 &\stackrel{(5.12)}{\Rightarrow} \vartheta_1 = 0 &\stackrel{(5.6)}{\Rightarrow} U'(q_1 + q_2 + s) = \lambda_1 - \theta_1\mu \\ q_2 > 0 &\stackrel{(5.13)}{\Rightarrow} \vartheta_2 = 0 &\stackrel{(5.7)}{\Rightarrow} U'(q_1 + q_2 + s) = \lambda_2 - \theta_2\mu \end{aligned}$$

Somit muss bei simultaner Nutzung die Gleichung

$$\lambda_1(t) - \theta_1\mu(t) \stackrel{!}{=} \lambda_2(t) - \theta_2\mu(t) \quad (\text{C.1})$$

erfüllt sein.

*Fall 1:* Ist  $\mu(t) = 0$ , so folgt aus (C.1) für den Zeitraum der simultanen Nutzung  $\lambda_1(t) \stackrel{!}{=} \lambda_2(t)$ . Dies ist für einen positiven Zeitraum nicht möglich da bei  $\mu(t) = 0$  nach (5.9) und (5.10) der Schattenpreis des Gashydrats  $\lambda_1(t) = \lambda_1^0 \cdot e^{(\beta+\rho)t}$  schneller wächst als der Schattenpreis der Kohle  $\lambda_2(t) = \lambda_2^0 \cdot e^{\rho t}$ .

*Fall 2:* Ist  $\mu(t) \neq 0$ , so folgt aus (C.1) für den Zeitraum der simultanen Nutzung  $\mu = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(\theta_1 - \theta_2)}$ . Da sowohl  $\mu$  als auch  $(\theta_1 - \theta_2)$  negativ sind, muss die Differenz  $\lambda_1 - \lambda_2$  positiv sein, also  $\lambda_1 > \lambda_2$ . Aus einem Vergleich von (5.9) und (5.10) lässt sich erkennen, dass  $\lambda_1(t)$  auch in diesem Fall schneller als  $\lambda_2(t)$  wächst. Somit steigt auch die Differenz an. Dies bedeutet, dass der Schattenpreis  $\mu(t)$  über die Zeit sinkt ( $\dot{\mu} < 0$ ). Falls eine simultane Nutzung möglich ist, dann also nur, bevor die Obergrenze der atmosphärischen Treibhausgase erreicht wird, oder falls  $\chi$ , der Kuhn-Tucker-Multiplikator bezüglich (5.4), noch sehr klein ist: Der Schattenpreis  $\mu(t)$  sinkt nach (5.3), wenn  $(\alpha + \rho)\mu + \chi < 0$  gilt und so beschreibt die Bedingung  $0 \leq \chi < -(\alpha + \rho)\mu$  die Grenze des zwei Unterfälle des Falls 2.

*Fall 2a:* Ist  $\chi > -(\alpha + \rho)\mu$ , so ist nach Gleichung (5.3)  $\dot{\mu} > 0$  und es kommt zu einem Widerspruch für die simultane Nutzung bei  $\mu(t) \neq 0$ .

*Fall 2b:* Ist  $\chi < -(\alpha + \rho)\mu$  und gilt nach (C.1) weiterhin  $\lambda_1 - \lambda_2 = (\theta_1 - \theta_2)\mu$ ,

so lässt sich der Widerspruch durch Differenzieren nach der Zeit, Einsetzen von (5.9) bis (5.11) und einige Umformungen zeigen:

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_1 - \dot{\lambda}_2 &= (\theta_1 - \theta_2)\dot{\mu} \\
 \Leftrightarrow (\beta + \rho)\lambda_1 - \gamma\mu - \rho\lambda_2 &= (\theta_1 - \theta_2)[(\alpha + \rho)\mu + \chi] \\
 \Leftrightarrow (\beta + \rho)(\lambda_1 - \lambda_2) + \beta\lambda_2 &= ((\theta_1 - \theta_2)(\alpha + \rho) + \gamma)\mu + (\theta_1 - \theta_2)\chi \\
 \Leftrightarrow (\beta + \rho)(\theta_1 - \theta_2)\mu + \beta\lambda_2 &= ((\theta_1 - \theta_2)(\alpha + \rho) + \gamma)\mu + (\theta_1 - \theta_2)\chi \\
 \Leftrightarrow \beta\lambda_2 &= ((\theta_1 - \theta_2)(\alpha - \beta) + \gamma)\mu + \underbrace{(\theta_1 - \theta_2)\chi}_{< -(\alpha + \rho)\mu}
 \end{aligned}$$

Da der Inhalt der eckigen Klammern in der nachfolgenden Ungleichung positiv und konstant ist,  $\mu(t)$  hingegen negativ ist, kommt es zu folgendem Widerspruch:

$$0 < \beta\lambda_2 < [(-(\theta_1 - \theta_2)(\beta + \rho) + \gamma)]\mu < 0$$

Damit kommt es unter der Annahme einer simultanen Nutzung von Gashydraten und der herkömmlichen Ressource in allen Fällen zu Widersprüchen. ■

## C.2 Beweis der Proposition 5.2

Die Proposition 5.2 besagt, dass die vorhandenen Ressourcen in der Reihenfolge Gashydrat, Kohle, Solar erschöpft beziehungsweise genutzt werden, falls  $\gamma > (\theta_2 - \theta_1)(\alpha - \beta)$  erfüllt ist. Wir beobachten zunächst, dass im Zeitpunkt des Umschaltens von einer Ressource zur anderen,  $t_s$ , zur Vermeidung möglicher Arbitrage-Gewinne die Stetigkeit des Preises durch die optimale Lösung garantiert sein muss,  $p_1(t_s) \stackrel{!}{=} p_2(t_s)$ .

Damit kann es während einer Phase der aktiven Regulierung ( $y(t) = \bar{y}, \chi_t \geq 0$ ) nicht zu einem Umschalten kommen, da aus (5.5) unter Berücksichtigung von  $\theta_1 < \theta_2$  folgt, dass  $p_1^c(t) = U' \left( \frac{\alpha\bar{y} - \gamma x_1(t)}{\theta_1} \right) \neq p_2^c(t) = U' \left( \frac{\alpha\bar{y} - \gamma x_1(t)}{\theta_2} \right)$ .

Betrachten wir nun die Steigungen der beiden Preispfade zum Zeitpunkt  $t_s$ , zeigt sich dass die Steigung von  $p_1(t_s)$  größer ist als die von  $p_2(t_s)$ . Um dies zu zeigen, unterscheiden wir wiederum zwei Fälle:

*Fall 1:* Ist  $\mu(t_s) = 0$ , so reduziert sich die Forderung  $p_1(t_s) = p_2(t_s)$  zu  $\lambda_1(t_s) = \lambda_2(t_s)$ , so dass  $\dot{p}_1(t_s) = (\beta + \rho)\lambda_1(t_s) > \rho\lambda_2(t_s) = \dot{p}_2(t_s)$  sofort ersichtlich wird.

*Fall 2:* Ist  $\mu(t_s) < 0$ , so wird (5.11) wegen  $\chi(t_s) = 0$  zu  $\dot{\mu}(t_s) = (\alpha + \rho)\mu(t_s)$  und die Forderung  $p_1(t_s) = p_2(t_s)$  ist aufgrund von (5.6) und (5.7) äquivalent zu  $\lambda_1(t_s) - \theta_1\mu(t_s) = \lambda_2(t_s) - \theta_2\mu(t_s)$ . Umformen ergibt  $\lambda_1(t_s) = \lambda_2(t_s) - (\theta_2 - \theta_1)\mu(t_s)$ . Setzen wir dies in die Steigung der Preispfade ein, so wird schließlich deutlich, dass

$$\begin{aligned}\dot{p}_1(t_s) &= \dot{\lambda}_1(t_s) - \theta_1\dot{\mu}(t_s) \\ &= (\beta + \rho)\lambda_1(t_s) - \gamma\mu(t_s) - \theta_1(\alpha + \rho)\mu(t_s) \\ &= (\beta + \rho)\lambda_1(t_s) - \mu(t_s)[\gamma + \theta_1(\alpha + \rho)] \\ &= (\beta + \rho)\lambda_2(t_s) - \mu(t_s)[(\theta_2 - \theta_1)(\beta + \rho) + \gamma + \theta_1(\alpha + \rho)]\end{aligned}$$

sowie

$$\dot{p}_2(t_s) = \dot{\lambda}_2(t_s) - \theta_2\dot{\mu}(t_s) = \rho\lambda_2(t_s) - \mu(t_s)\theta_2(\alpha + \rho).$$

Die Differenz ist  $\dot{p}_1(t_s) - \dot{p}_2(t_s) = \beta\lambda_2(t_s) - \mu(t_s)[(\gamma - (\theta_2 - \theta_1)(\alpha - \beta))]$   $> 0$ , wenn  $\gamma > (\theta_2 - \theta_1)(\alpha - \beta)$  gilt.

Da die Steigung von  $p_1(t_s)$  größer ist als die von  $p_2(t_s)$ , gilt  $p_1(t_s - \epsilon) < p_2(t_s - \epsilon)$  und  $p_1(t_s + \epsilon) > p_2(t_s + \epsilon)$ . Somit erfolgt das Umschalten von Gashydrat  $x_1$  zu Kohle  $x_2$ . ■

### C.3 Eine dezentrale Lösung

Um einen kurzen Eindruck von der möglichen Ausgestaltung einer dezentralen Lösung zu vermitteln, wird an dieser Stelle das Optimierungsproblem einer repräsentativen Firma im Energiesektor betrachtet, die sowohl einen Bestand Gashydrat als auch einen Bestand Kohle besitzt und diese jeweils auch fördert. Unter der Annahme eines vollkommenen Wettbewerbs auf dem Energiemarkt seien  $p_t$  der Marktpreis für Energie und  $\tau_t$  der Steuersatz, der auf den Ausstoß einer Einheit  $\text{CO}_2$  erhoben wird. Der Eigentümer des Gashydrats hat diesen Steuersatz ebenfalls auf das  $\text{CO}_2$ -Äquivalent der natürlichen  $\text{CH}_4$ -Emissionen aus dem Bestand der Gashydrate zu entrichten. Somit ergibt sich als Momentanwert des Gewinns dieser repräsentativen Firma

$$\pi_t(q_1, q_2, s) = p_t(q_1 + q_2 + s) - \tau_t(q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + \gamma x_1) - c_s s$$

und das intertemporale Maximierungsproblem dieser Firma kann als

$$\max_{\{q_1, q_2, s\}_{t \geq 0}} \Pi = \int_0^{\infty} [p_t(q_1 + q_2 + s) - \tau_t(q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + \gamma x_1) - c_s s] \cdot e^{-\rho t} dt$$

unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (5.1) und (5.2) formuliert werden. Die dazugehörige Hamiltonfunktion in laufenden Werten ist dann gegeben als

$$H^c = p_t(q_1 + q_2 + s) - \tau_t(q_1\theta_1 + q_2\theta_2 + \gamma x_1) - c_s s + \psi_1(-q_1 - \beta x_1) + \psi_2(-q_2),$$

wobei  $\psi_1$  und  $\psi_2$  jeweils den privaten Schattenwert der Besitzer für die Ressource Gashydrat beziehungsweise Kohle bezeichnen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird an dieser Stelle darauf verzichtet, die mit den Nicht-Negativitätsbedingungen der Bestände und Abbaumengen verbundenen Kuhn-Tucker-Multiplikatoren einzuführen und die Lagrangefunktion aufzustellen. Stattdessen werden die Bedingungen erster Ordnung für die den Gewinn maximierende Firma direkt aus der Hamiltonfunktion in laufenden Werten abgeleitet.

$$\frac{\partial H^c}{\partial q_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t = \psi_1 + \theta_1 \tau_t \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial H^c}{\partial q_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t = \psi_2 + \theta_2 \tau_t \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial H^c}{\partial s} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_t = c_s \quad (\text{C.4})$$

$$-\frac{\partial H^c}{\partial x_1} = \dot{\psi}_1 - \rho \psi_1 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}_1 = (\beta + \rho)\psi_1 + \gamma \tau_t \quad (\text{C.5})$$

$$-\frac{\partial H^c}{\partial x_2} = \dot{\psi}_2 - \rho \psi_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}_2 = \rho \psi_2 \quad (\text{C.6})$$

Der Vergleich der Bedingungen erster Ordnungen (C.2) bis (C.6) mit den in Abschnitt 5.2.2 ausgeführten notwendigen Bedingungen des sozialen Planers, (5.6) bis (5.10), zeigt, dass die gesellschaftlich optimale Allokation erreicht werden kann. Unter Verwendung des Verhaltens der Konsumenten, das durch  $p_t = U'(q_1 + q_2 + s)$  beschrieben ist, und unter Vernachlässigung der Kuhn-Tucker-Multiplikatoren in (5.6) bis (5.10), können die Systeme von Bedingungen erster Ordnung zu Deckung gebracht werden, indem die Steuer als

$$\tau_t = -\mu_t \quad (\text{C.7})$$



gemäß (5.16) gewählt wird. Diese Wahl des Steuersatzes  $\tau_t$  als Negatives des gesellschaftlich optimalen Schattenwerts der Treibhausgasbestands in der Atmosphäre sorgt dafür, dass es im Interesse des den Gewinn maximierenden Unternehmens ist, die gesellschaftlich optimalen Pfade zu verfolgen. Denn auch die privaten Schattenwerte der beiden Ressourcen entsprechen verhalten sich nun exakt wie die gesellschaftlichen Schattenwerte, das heißt  $\psi_1 = \lambda_1$  und  $\psi_2 = \lambda_2$ .

## Literaturverzeichnis

- Amigues, J.-P., P. Favard, G. Gaudet und M. Moreaux (1998): On the Optimal Order of Natural Resource Use When the Capacity of the Inexhaustible Substitute Is Limited. *Journal of Economic Theory*, 80(1), 153–170.
- Archer, D. (2007): Methane Hydrate Stability and Anthropogenic Climate Change. *Biogeosciences*, 4, 521–544.
- Beltratti, A., G. Chichilnisky und G. Heal (1994): The Environment and the Long Run: A Comparison of Different Criteria. *Ricerche Economiche*, 48(4), 319 – 340.
- Biastoch, A., T. Treude, L. H. Rüpke, U. Riebesell, C. Roth, E. B. Burwicz, W. Park, M. Latif, C. W. Böning, G. Madec und K. Wallmann (2011): Rising Arctic Ocean Temperatures Cause Gas Hydrate Destabilization and Ocean Acidification. *Geophysical Research Letters*, 38(8), L08602.
- Bohrmann, G. und E. Suess (2004): Gashydrate der Meeresböden: ein dynamischer Methanspeicher im Ozean. In: *Perspektiven für die Energie der Zukunft : 13 Vorträge der Münchner Tagung (2004)*, Keilhacker, M. (Hrsg.). DPG, Bad Honnef, 133–152. 68. Physikertagung München 2004 der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft.
- Chakravorty, U. und D. L. Krulce (1994): Heterogeneous Demand and Order of Resource Extraction. *Econometrica*, 62(6), 1445–1452.
- Chakravorty, U., B. Magné und M. Moreaux (2006): A Hotelling Model with a Ceiling on the Stock of Pollution. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 30(12), 2875 – 2904.
- Chakravorty, U., M. Moreaux und M. Tidball (2008): Ordering the Extraction of Polluting Nonrenewable Resources. *The American Economic Review*, 98(3), 1128–1144.

- Dockner, E. (1985): Local Stability Analysis in Optimal Control Problems with Two State Variables. In: *Optimal Control Theory and Economic Analysis, vol. 2*. Gustav Feichtinger (Amsterdam: North Holland).
- EIA (2013): U.S. Energy Information Administration, U.S. Natural Gas Wellhead Price. [www.eia.gov/dnav/ng/hist/n9190us3m.htm](http://www.eia.gov/dnav/ng/hist/n9190us3m.htm) (abgerufen am: 30.04.2013).
- Farzin, Y. H. (1992): The Time Path of Scarcity Rent in the Theory of Exhaustible Resources. *Economic Journal*, 102, 813–830.
- Farzin, Y. H. (1996): Optimal Pricing of Environmental and Natural Resource Use with Stock Externalities. *Journal of Public Economics*, 62, 31–57.
- Farzin, Y. H. und O. Tahvonen (1996): Global Carbon Cycle and the Optimal Time Path of a Carbon Tax. *Oxford Economic Papers*, 48, 515–536.
- Feichtinger, G. und R. F. Hartl (1986): *Optimale Kontrolle ökonomischer Prozesse. Anwendungen des Maximumprinzips in den Wirtschaftswissenschaften*. de Gruyter, Berlin.
- Herfindahl, O. C. (1967): Depletion and Economic Theory. In: *Extractive Resources and Taxation*, Gaffney, M. (Hrsg.). Madison, WI: University of Wisconsin Press, 63-90.
- Hoel, M. und S. Kverndokk (1996): Depletion of Fossil Fuels and the Impacts of Global Warming. *Resource and Energy Economics*, 18, 115–136.
- Holland, S. P. (2003): Set-up Costs and the Existence of Competitive Equilibrium when Extraction Capacity Is Limited. *Journal of Environmental Economics and Management*, 46(3), 539–556.
- Hotelling, H. (1931): The Economics of Exhaustible Resources. *Journal of Political Economy*, 39, 137–175.
- IEA (2011): *World Energy Outlook 2011: Are We Entering a Golden Age of Methane? Special Report*. OECD/International Energy Agency, Paris, France.
- IEA (2012): *World Energy Outlook 2012*. OECD/International Energy Agency, Paris, France.

- IPCC (2007a): *Climate Change 2007: Mitigation of Climate Change. Contribution of Working Group III to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- IPCC (2007b): *Climate Change 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA.
- Kemp, M. C. und N. V. Long (1980): On Two Folk Theorems Concerning the Extraction of Exhaustible Resources. *Econometrica*, 48(3), 663–673.
- Krautkraemer, J. A. (1985): Optimal Growth, Resource Amenities and the Preservation of Natural Environments. *The Review of Economic Studies*, 52, 153–170.
- Krautkraemer, J. A. (1998): Nonrenewable Resource Scarcity. *Journal of Economic Literature*, 36(4), 2065–2107.
- Krey, V., J. G. Canadell, N. Nakicenovic, Y. Abe, H. Andrulleit, D. Archer, A. Grubler, N. T. Hamilton, A. Johnson, V. Kostov et al. (2009): Gas Hydrates: Entrance to a Methane Age or Climate Threat? *Environmental Research Letters*, 4, 034007.
- Kvenvolden, K. (1993): Gas Hydrates - Geological Perspective and Global Change. *Reviews of Geophysics*, 31(2), 173–187.
- Kvenvolden, K. A. (1988): Methane Hydrate – A Major Reservoir of Carbon in the Shallow Geosphere? *Chemical Geology*, 71(1-3), 41 – 51.
- Kvenvolden, K. A. (2000): Gas Hydrate and Humans. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 912(1), 17–22.
- Lafforgue, G., B. Magné und M. Moreaux (2008): Energy Substitutions, Climate Change and Carbon Sinks. *Ecological Economics*, 67(4), 589 – 597.
- Max, M. (2003): *Natural Gas Hydrate in Oceanic and Permafrost Environments*. Springer Netherlands.

- METI (2013): Ministry of Economy, Trade and Industry, Natural gas production from methane hydrate layers confirmed. [www.meti.go.jp/english/press/2013/0312\\_02.html](http://www.meti.go.jp/english/press/2013/0312_02.html) (abgerufen am: 04.04.2013).
- Milkov, A. V. (2004): Global Estimates of Hydrate-bound Gas in Marine Sediments: How much is really out there? *Earth-Science Reviews*, 66, 183–197.
- Moslener, U. und T. Requate (2009): The Dynamics of Optimal Abatement Strategies for Multiple Pollutants – An Illustration in the Greenhouse. *Ecological Economics*, 68, 1521–1534.
- Rickels, W. (2011): The Role of Sequestration Costs with a Ceiling on Atmospheric Carbon Concentration. Kiel Working Papers 1702, Kiel.
- Seierstad, A. und K. Sydsaeter (1987): *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Amsterdam: North-Holland.
- Sinn, H.-W. (2008): Public Policies against Global Warming: A Supply Side Approach. *International Tax and Public Finance*, 15(4), 360–394.
- Smulders, S. und E. van der Werf (2008): Climate Policy and the Optimal Extraction of High- and Low-carbon Fossil Fuels. *Canadian Journal of Economics/Revue canadienne d'Economie*, 41(4), 1421–1444.
- Sweeney, J. L. (1993): Economic Theory of Depletable Resources: An Introduction. In: *Handbook of Natural Resource and Energy Economics*, Kneese, A. V. und Sweeney, J. L. (Hrsg.), Bd. 3. Elsevier, 758–854.
- Tahvonen, O. (1997): Fossil Fuels, Stock Externalities, and Backstop Technology. *The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d'Economie*, 30(4a), 855–874.
- Ulph, A. und D. Ulph (1994): The Optimal Time Path of a Carbon Tax. *Oxford Economic Papers*, 46, 857–868.
- UNFCCC (2011): *Report of the Conference of the Parties on its sixteenth session, held in Cancun from 29 November to 10 December 2010. Part Two: Action Taken by the Conference of the Parties at its sixteenth session*. FCCC/CP/2010/7/Add.1, UNFCCC.

Walsh, M. R., S. H. Hancock, S. J. Wilson, S. L. Patil, G. J. Moridis, R. Boswell, T. S. Collett, C. A. Koh und E. D. Sloan (2009): Preliminary Report on the Commercial Viability of Gas Production from Natural Gas Hydrates. *Energy Economics*, 31, 815–823.

WBGU (2009): *Kassensturz für den Weltklimavertrag - Der Budgetansatz*. Sondergutachten. Wissenschaftlicher Beirat der Bundesregierung Globale Umweltveränderung, Berlin.

## **Eidesstattliche Erklärung**

Ich erkläre hiermit an Eides statt, dass ich meine Doktorarbeit „Optimale Ausbeutung endlicher Methanhydrat-Vorkommen und ihre Rückwirkungen auf das Klima“ selbständig und ohne fremde Hilfe angefertigt habe und dass ich alle von anderen Autoren wörtlich übernommenen Stellen, wie auch die sich an die Gedanken anderer Autoren eng anlehrenden Ausführungen meiner Arbeit, besonders gekennzeichnet und die Quellen nach den mir angegebenen Richtlinien zitiert habe.

Hamburg, 10. Juli 2013

(Lena-Katharina Döpke)

# Lebenslauf

## Lena-Katharina Döpke

Persönliche Daten: geboren am 06. Juli 1981 in Oldenburg, ledig, deutsch.

## Berufliche Tätigkeiten

- 09.2006 – 12.2012 Wissenschaftliche Mitarbeiterin des Instituts für Volkswirtschaftslehre der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. **Davon:**
- 09.2006 – 08.2012 Mitarbeiterin des Lehrstuhls für Innovations-, Wettbewerbs- und Neue Institutionenökonomik.
- 10.2009 – 12.2012 Studienkoordinatorin des Instituts für Volkswirtschaftslehre.

## Akademische Ausbildung

- 10.2006 – 07.2013 Promotionsstudium im Doktorandenprogramm Quantitative Economics der Wirtschafts- und Sozialwissenschaftlichen Fakultät der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- 30.05.2006 Diplom-Volkswirtin, Note: 1,67.
- 10.2002 – 05.2006 Studium der Volkswirtschaftslehre an der Georg-August-Universität Göttingen.
- 10.2000 – 09.2002 Studium des Wirtschaftsingenieurwesens (Fachrichtung Bau) an der TU Braunschweig (09.2002: Vordiplom).
- 27.06.2000 Abitur am Gymnasium Westerstede, Europaschule, Note: 1,8.

## Lehrtätigkeiten

- 10.2006 – 02.2010 Übung zur Einführung in die Volkswirtschaftslehre.
- 04.2007 – 07.2008 Übung zur Grundzüge der mikroökonomischen Theorie.
- 10.2006 – 06.2012 Mitarbeit in Seminaren zu Themen der Energie- und Wettbewerbspolitik, Ressourcenökonomik, Umweltökonomik und -politik, Innovations- und Wettbewerbsökonomik.

Hamburg, 10. Juli 2013