

Newtonverfahren für eine Klasse ganzer Funktionen



Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Christian-Albrechts-Universität
zu Kiel

vorgelegt von

Daniel Sommerfeld

Kiel

Dezember 2015

Referent:	Prof. Dr. W. Bergweiler
Korreferent:	Priv.-Doz. Dr. M. Nieß
Tag der mündlichen Prüfung:	05. Februar 2016
zum Druck genehmigt:	05. Februar 2016

gez. Prof. Dr. W. J. Duschl, Dekan

Zusammenfassung

Das Newtonverfahren ist eine der ältesten und einfachsten iterativen Methoden, um die Nullstellen von Funktionen approximativ zu bestimmen. Es ist von Interesse, eine möglichst kleine Menge von Startwerten anzugeben, mit denen man alle Nullstellen der betrachteten Funktion findet. Für das Newtonverfahren komplexer Polynome vom Grad d geben Hubbard, Schleicher und Sutherland im Jahr 2001 eine Menge von Startwerten der Kardinalität $\mathcal{O}(d(\ln(d))^2)$ an.

In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir eine Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ von Startwerten, um die Nullstellen ganzer, transzendenter Funktionen der Gestalt $f(z) = p(z)e^z - 1$, wobei p ein geeignet normiertes Polynom vom Grad d ist, durch das Newtonverfahren approximativ zu bestimmen. Die Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ ist nur vom Grad des Polynoms p und den Beträgen der Koeffizienten des Polynoms abhängig. Darüber hinaus ist $\mathcal{S}_{d,R}$ so gestaltet, dass für ein $\mathcal{R} > 0$ alle Nullstellen in $D(0, \mathcal{R})$ von f mit nur endlich vielen Startwerten gefunden werden. In $D(0, \mathcal{R})^c$ benötigen wir für jede Nullstelle genau einen Startwert.

Die Konstruktion gliedert sich in drei Abschnitte. Im ersten werden wir die Nullstellen einer Funktion f der obigen Gestalt in $D(0, \mathcal{R})^c$ für ein $\mathcal{R} > 0$ approximieren. Wir zeigen, dass die Approximationspunkte im sogenannten unmittelbaren Einzugsgebiet der Nullstelle liegen, also in dem Gebiet, dessen Punkte unter dem Newtonverfahren gegen diese Nullstelle konvergieren und welches diese auch enthält. Im zweiten Teil werden wir zeigen, dass die unmittelbaren Einzugsgebiete der betragslich kleinen Nullstellen in einem horizontalen Streifen liegen und im Realteil nach $+\infty$ unbeschränkt sind. Im dritten Abschnitt zeigen wir, dass diese unmittelbaren Einzugsgebiete eine gewisse Mindestbreite aufweisen. Diese Tatsache benutzen wir dazu, die Startwerte äquidistant so auf einem Geradenstück zu platzieren, dass pro unmittelbarem Einzugsgebiet mindestens ein Startwert in diesem liegt.

Abstract

Newton's method is one of the oldest and simplest iterative methods to approximate zeros of differentiable functions. It is of interest to give a small set of starting points that yields all zeros of the considered functions. For complex polynomials of degree d Hubbard, Schleicher und Sutherland constructed in 2001 such a set of starting points. The cardinality of this set is $\mathcal{O}(d(\ln(d))^2)$.

In this thesis we construct a set $\mathcal{S}_{d,R}$ of starting points for the Newton's method to approximate the zeros of functions of the form $f(z) = p(z)e^z - 1$, where p is a suitably normalised polynomial of degree d . This set $\mathcal{S}_{d,R}$ only depends on the degree of the polynomial p and an upper bound of the zeros of p . Moreover, $\mathcal{S}_{d,R}$ is such that for all zeros in $D(0, \mathcal{R})^C$ we need exactly one starting point, while for all zeros in $D(0, \mathcal{R})$ we need only finitely many starting points.

The construction is done in three parts. First we approximate zeros of a function f of the above form in $D(0, \mathcal{R})^C$ for some $\mathcal{R} > 0$ depending only on d and R . We show that these approximation points are in the immediate basin of a zero. The immediate basin of a fixed point is the maximal domain, which contains the fixed point and where the iterates converge to it. In the second part we show that immediate basins of zeros of small modulus are contained in a horizontal strip and that they are unbounded to the right. The third part is to show that these immediate basins have a certain width. We use this to construct equidistant starting points on a vertical line in the right half plane in such a way that for each zero of small modulus there is at least one point, which is contained in the immediate basin.

Danksagung

Zunächst und an erster Stelle möchte ich meinem Betreuer Walter Bergweiler für die Möglichkeit danken, zu promovieren. Für die vielen richtungsweisenden Gespräche und hilfreichen Tipps bedanke ich mich, ebenso für die Möglichkeit in Edinburgh, Barcelona und London an Tagungen teilzunehmen.

Dem Mathematischen Seminar danke ich für die Mitarbeiterstelle, all meinen Kollegen am Institut danke ich für die gute Stimmung.

Meinen Mitstreitern Simon Albrecht, Markus Baumgartner und Sebastian Vogel möchte ich sagen, dass ich die gemeinsame Zeit sehr genossen habe. Die vielen Diskussionen, die zahlreichen Anregungen haben meine Doktorandenzeit fruchtbar und erfolgreich gedeihen lassen. Für das Korrekturlesen geht ein besonderer Dank an Simon Albrecht und Patrick Comdühr.

Meiner gesamten Familie möchte ich für die Unterstützung und das stete Vertrauen in mich danken.

Abschließend möchte ich meiner Frau, Ann-Christin Sommerfeld, für die motivierenden Worte, den Stubs zur rechten Zeit und das abschließende Korrekturlesen danken. Entschuldige die nächtlichen Störungen, wann immer ich eine Idee niederschreiben musste. Danke für deine Liebe!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Bilder	5
3	Grundlagen	11
3.1	Notationen	11
3.2	Funktionentheoretische Grundlagen	11
3.3	Eigentliche Funktionen	15
3.4	Hyperbolische Metrik	17
3.5	Komplexe Dynamik	21
3.6	Spezifische Konstruktionen	24
4	Newtonverfahren	29
4.1	Fragestellung, Normierung und Notation	29
4.2	Darstellung und asymptotische Gestalten	35
4.3	Konjugierte der Newtonfunktion im Einheitskreis	41
5	Startpunkte in $D(0, \mathcal{R})^c$	45
5.1	Motivation	45
5.2	Abstand des Fixpunktes zum Rand des unmittelbaren Einzugsgebietes	46
5.3	Beweis von Satz 5.1.1	48
6	Existenz einer invarianten und unbeschränkten Kurve	53
6.1	Motivation	53
6.2	Vorbereitung	54
6.3	Kurve von einer Nullstelle nach $+\infty$	56
6.4	Kurve von beschränktem Imaginärteil	59
6.5	Kurve von einer Nullstelle nach $-\infty$	64
7	Startpunkte in $D(0, \mathcal{R})$	67
7.1	Motivation	67
7.2	Mindestbreite eines Zugangs nach ∞	67

Inhaltsverzeichnis

7.3	Konstruktion der Startwerte in $D(0, \mathcal{R})$	73
8	Beweis, Fazit und Ausblick	75
8.1	Beweis des Hauptsatzes	75
8.2	Diskussion einer alternativen Beweisidee	76
8.3	Ausblick	77
	Abkürzungsverzeichnis	79
	Literaturverzeichnis	81

1 Einleitung

Das Newtonverfahren ist eines der ältesten und einfachsten Verfahren, um die Lösungen von Gleichungen zu bestimmen. Umso erstaunlicher ist es, dass sich nach fast 400 Jahren aktuelle Forschung diesem Verfahren widmet. Aufgrund der Bedeutung ist ein erbitterter Streit darüber geführt worden, wer letztlich der Urheber dieser Methode ist. Es scheint unstrittig, dass sich Newton von einer Arbeit von Vieta inspirieren ließ, siehe [Deu12]. Weitere Mathematiker wie Raphson und Simpson werden als Entdecker diese Methode genannt. Es herrscht inzwischen auch Einigkeit darüber, dass es auf Simpson zurückgeht, dieses Verfahren als iterative Methode zu betrachten. Als einen Meilenstein bezeichneten Alexander, Iavernaro und Rosa [AIR12] die Aussage von Schröder, dass für das Studium dieser und anderer Algorithmen zur Auflösung von Gleichungen [Sch70] das Verständnis von Iterationen sehr hilfreich sei. Alexander, Iavernaro und Rosa gehen dabei so weit, das Newtonverfahren als Inspirationsquelle der komplexen Dynamik zu bezeichnen. Die heute übliche Notation geht auf Fourier zurück. Für eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ihre Newtonfunktion gegeben durch die meromorphe Funktion

$$\mathcal{N}_f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Die Iteration der Funktion \mathcal{N}_f wird als Newtonverfahren bezeichnet.

Unmittelbar aus dieser Definition ergibt sich die Frage, welche Startwerte für das Newtonverfahren geeignet sind. Denn nicht jeder Startwert konvergiert zu einer gewünschten Nullstelle. Es gibt beispielsweise Werte, die unter Iteration 2-periodisch sind. So gilt zum Beispiel für die Newtonfunktion von $f(z) = z^3 - z$, dass $\mathcal{N}_f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $\mathcal{N}_f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Es ist klar, dass zum Auffinden aller Nullstellen einer Funktion mindestens so viele Startwerte benötigt werden, wie sie Nullstellen hat. Um den Rechenaufwand möglichst gering zu halten, ist es von Interesse, eine möglichst kleine Menge von Startwerten anzugeben. Diese Menge soll dennoch gewährleisten, dass alle Nullstellen der untersuchten Funktion gefunden werden. Die bestmögliche Wahl für eine solche Menge ist die der Nullstellen,

1 Einleitung

welche aber aus offensichtlichen Gründen ausscheidet. Jedoch genügen Startwerte, die genügend nah an einer Nullstelle liegen. Diesen Umstand werden wir später nutzen.

Es ist sinnvoll, diese Fragestellung auf Funktionenklassen einzuschränken. Hubbard, Schleicher und Sutherland betrachteten im Jahr 2001 [HSS01] komplexe Polynome vom Grad d . Diese lassen sich so normieren, dass deren Nullstellen nur in der Einheitskreisscheibe liegen. Sie gaben eine Menge von Startwerten für das Newtonverfahren an, um alle Nullstellen von allen normierten Polynomen mit vorgegebenem Grad d zu finden. Die Kardinalität dieser Menge ist $1,11d(\ln(d))^2$.

Die Hauptaussage des Artikels von Hubbard, Schleicher und Sutherland, dass es eine universelle Menge von Startwerten gibt, wurde dabei bisher noch nicht auf ganze, transzendente Funktionen übertragen. Die hier vorliegende Arbeit ist ein Teilergebnis in diese Richtung. Ähnlich wie die genannten Autoren geben wir eine Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ von Startwerten an, um von Funktionen der Gestalt

$$f(z) = p(z)e^{az+b} - c,$$

wobei p ein komplexes Polynom und $a, b, c \in \mathbb{C}$ sind, alle Nullstellen von f zu finden. Wie wir in Kapitel 4 zeigen werden, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a = 1$, $b = 0$ und $c = 1$ und der führende Koeffizient des Polynoms p gleich 1 ist. Die Gestalt der Funktion f ist somit die folgende:

$$f(z) = p(z)e^z - 1. \tag{1.1}$$

Für die Konstruktion ist es günstig, die Koeffizientensumme zu kontrollieren. Wir betrachten im Hauptresultat dieser Arbeit die Funktionenklasse:

$$\mathcal{F}_{d,R} := \left\{ f \mid f(z) = p(z)e^z - 1, p(z) = z^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k, \max \left\{ 1, \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \right\} < R \right\},$$

wobei $d \in \mathbb{N}$, $R > 1$ sind. Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes.

HAUPTSATZ

Seien $d \in \mathbb{N}$ und $R > 0$. Dann existiert $\mathcal{R} > 0$ und eine Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ derart, dass für alle $f \in \mathcal{F}_{d,R}$ und für jede Nullstelle w von f ein Punkt $z \in \mathcal{S}_{d,R}$ existiert, sodass die Folge $(\mathcal{N}_f^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen w konvergiert. Dabei sind für jede Nullstelle nur endlich viele Punkte in $\mathcal{S}_{d,R}$ nötig, um diese zu finden. Für Nullstellen mit einem Betrag größer als \mathcal{R} genügt jeweils genau ein Punkt aus $\mathcal{S}_{d,R}$.

Da diese Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ nur vom Grad d des Polynoms p und von der Summe der Koeffizienten abhängt, finden wir mit dieser Menge alle Nullstellen von all den Funktionen, die der Klasse $\mathcal{F}_{d,R}$ angehören. Die Endlichkeit der Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ ist aus dem einfachen Grund nicht mehr aufrecht zuhalten, als dass eine Funktion f der Gestalt (1.1) unendlich viele Nullstellen hat. Jedoch gelingt es in dieser Arbeit, ab einer gewissen Schranke an den Absolutbetrag der Nullstellen jede Nullstelle zu approximieren und somit genau einen Startwert für eine solche Nullstelle anzugeben. Dieses Approximationsargument ist eine modifizierte Idee von Jankowski, vergleiche [Jan96], und wir widmen uns diesem in Kapitel 5.

In Kapitel 6 zeigen wir, dass die unmittelbaren Einzugsgebiete der Nullstellen mit genügend großem Absolutbetrag eine invariante Kurve enthalten, sodass es für alle $x \in \mathbb{R}$ einen Punkt z der Spur der Kurve gibt mit $\operatorname{Re}(z) = x$. Damit befinden sich die unmittelbaren Einzugsgebiete der Nullstellen kleinem Betrages in einem horizontalen Streifen endlicher Höhe.

Weiter zeigen wir in Kapitel 7, dass unter den Zugängen nach ∞ in den unmittelbaren Einzugsgebieten der Nullstellen kleinen Betrages einer ist, welcher eine gewisse Mindestbreite hat. Diese unmittelbaren Einzugsgebiete sind darüber hinaus im Realteil nach $+\infty$ unbeschränkt. Für die betraglich kleinen Nullstellen geben wir somit die Startwerte für das Newtonverfahren auf einem Geradenstück endlicher Länge an, welches genügend weit in der rechten Halbebene und parallel zu der imaginären Achse liegt. Wir platzieren die Startwerte dann so äquidistant auf diesem Geradenstück, dass der Abstand kleiner ist als die minimale Breite jenes Zugangs nach ∞ . Diese dazu verwendete Konstruktionsmethode ist eine adaptierte Version der in [HSS01] verwendeten.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Kapitel 2 illustrieren wir durch mehrere Bilder das Newtonverfahren für Polynome und die in dieser Arbeit betrachteten ganzen, transzendenten Funktionen der Gestalt (1.1). Kapitel 3 gibt einen Überblick über die benötigten Grundlagen. In Kapitel 4 führen wir das Newtonverfahren ein und führen erste Aussagen über die Konjugierten in der Einheitskreisscheibe an. In Kapitel 5 bis 7 führen wir die einzelnen Schritte des Beweises aus. Abschließend geben wir in Kapitel 8 einen zusammenfassenden Beweis des Hauptsatzes an und diskutieren die Ergebnisse.

2 Bilder

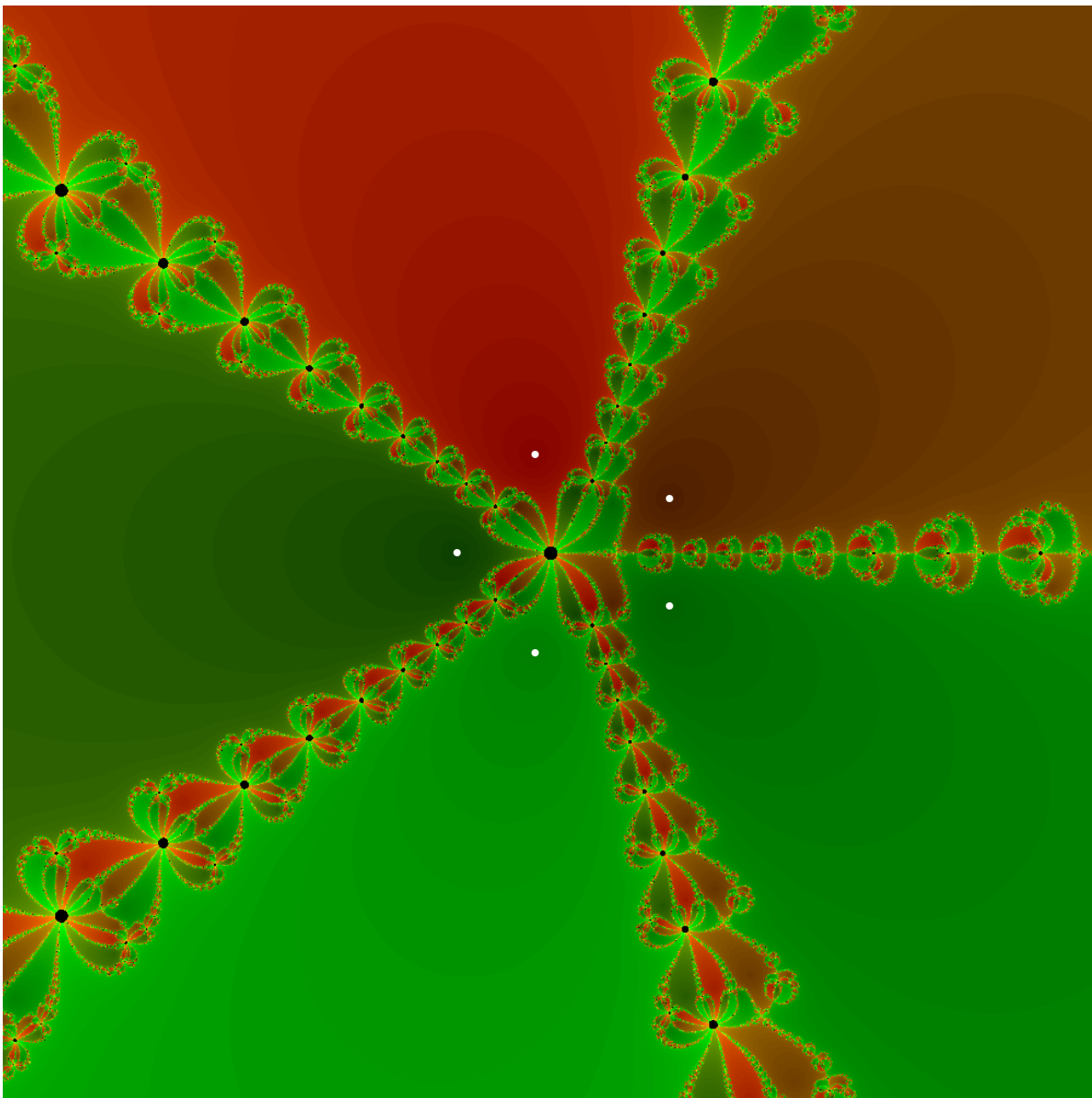


Abbildung 2.1: Dieses Bild ist eine Visualisierung des Newtonverfahrens des Polynoms $f(z) = z^5 - z^4 + 1$. Die unterschiedlich farbigen Bereiche sind die Einzugsgebiete der einzelnen Nullstellen der Funktion f . Die Sättigung der Farben gibt einen Hinweis, wieviele Iterationen notwendig sind, um unter Iteration in eine kleine Umgebung der Nullstelle zu gelangen. Die weißen Punkte deuten die Position der Nullstellen an.

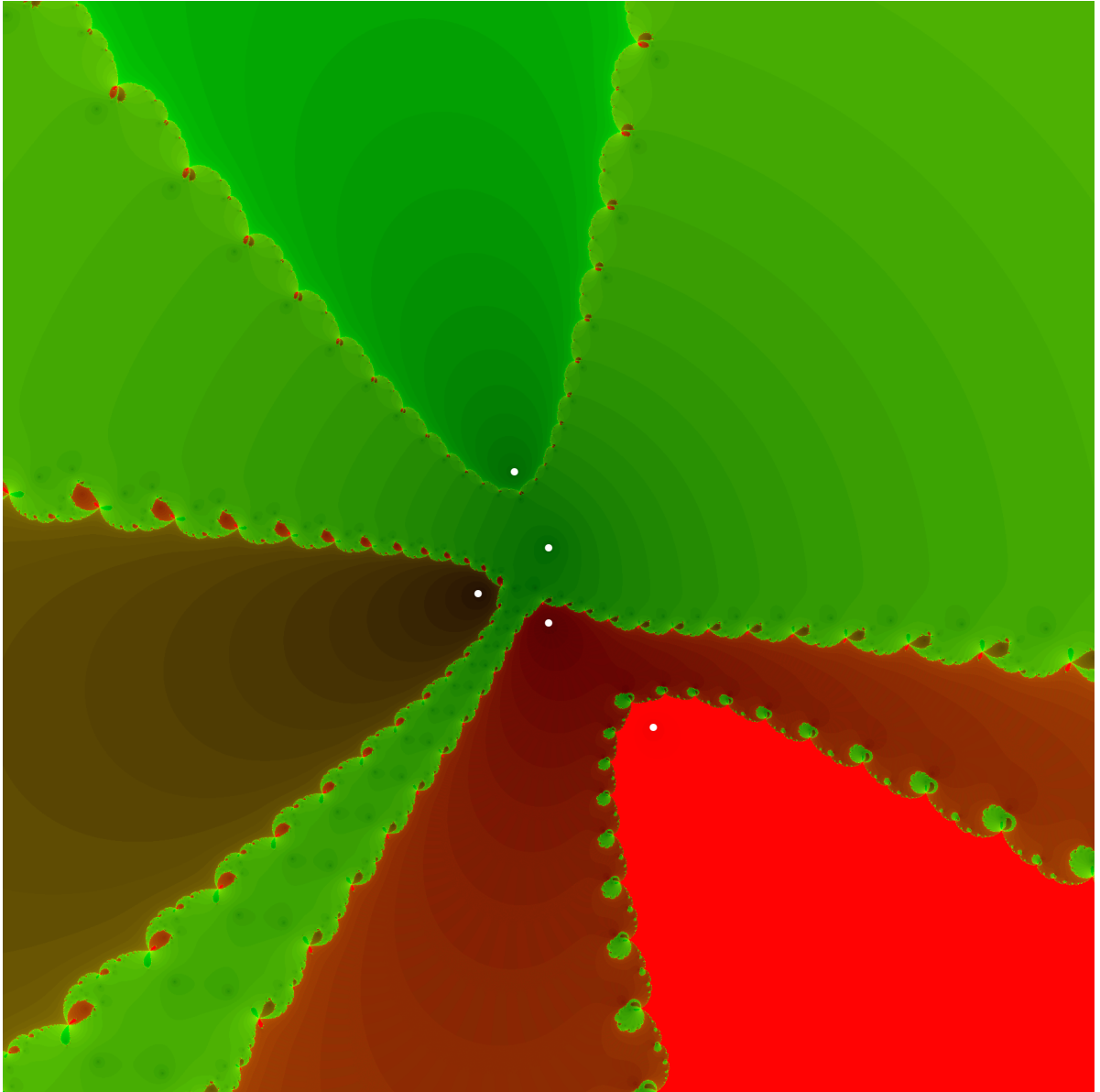


Abbildung 2.2: Dieses Bild ist eine Visualisierung des Newtonverfahrens des Polynoms $f(z) = z^2(z+i)(z-(1+i))(z-(1-2i))(z-(-\frac{1}{2}+i))$. Hier ist Null eine doppelte Nullstelle und hat drei Zugänge nach ∞ . Hubbard, Schleicher und Sutherland gaben in ihrem Artikel [HSS01] eine Menge von Startwerten S_d der Mächtigkeit $1,1d \log^2(d)$ an, mit der Sie alle Nullstellen eines jeden Polynoms vom Grad d finden können, dessen Nullstellen alle in der komplexen Einheitskreisscheibe sind. In Kapitel 9 geben die Autoren folgende Werte für die Konstruktion dieser Menge an. Auf $s = \lceil 0.2663 \log(d) \rceil$ Kreisen mit den Radien $r_\nu = (1 + \sqrt{2}) \left(\frac{d-1}{d}\right)^{\frac{2\nu-1}{4s}}$, wobei $\nu \in \{1, \dots, s\}$, verteilen sich äquidistant pro Kreis $\lceil 8.32547d \log(d) \rceil$ Startwerte. In diesem Beispiel hier erhalten wir somit 90 Startwerte auf einem Kreis. Eine ähnliche Menge von Startwerten für die Funktionen $f(z) = p(z)e^z - 1$ zu konstruieren, ist die Aufgabe der hier vorliegenden Arbeit.

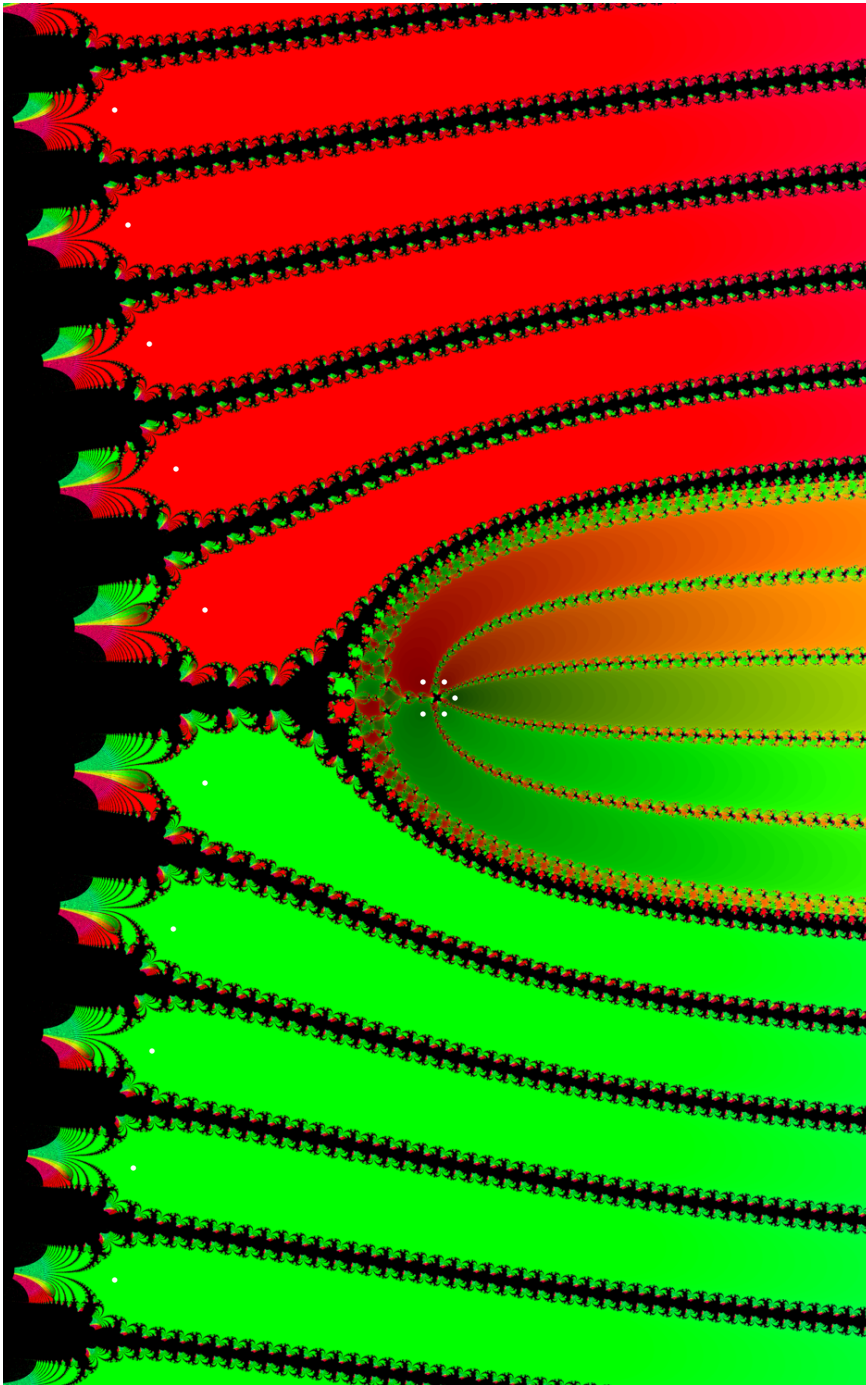


Abbildung 2.3: Dieses Bild ist eine Visualisierung des Newtonverfahrens der Funktion $f(z) = z^5 e^z - 1$. Dieses Bild hat die typische Gestalt für die in dieser Arbeit betrachteten Funktionen vom Typ $f(z) = p(z)e^z - 1$, wobei p ein komplexes Polynom mit führendem Koeffizienten eins ist. Jede Nullstelle hat nur einen Zugang nach unendlich. Dieser ist im Realteil nach $+\infty$ unbeschränkt. Es ist auch gut im Zentrum des Bildes zu erkennen, dass dieser Bereich unter dem Einfluss des Polynom p steht. Der obere und der untere Teil des Bildes gleichen sich. Hier schwächt sich dieser Einfluss ab.

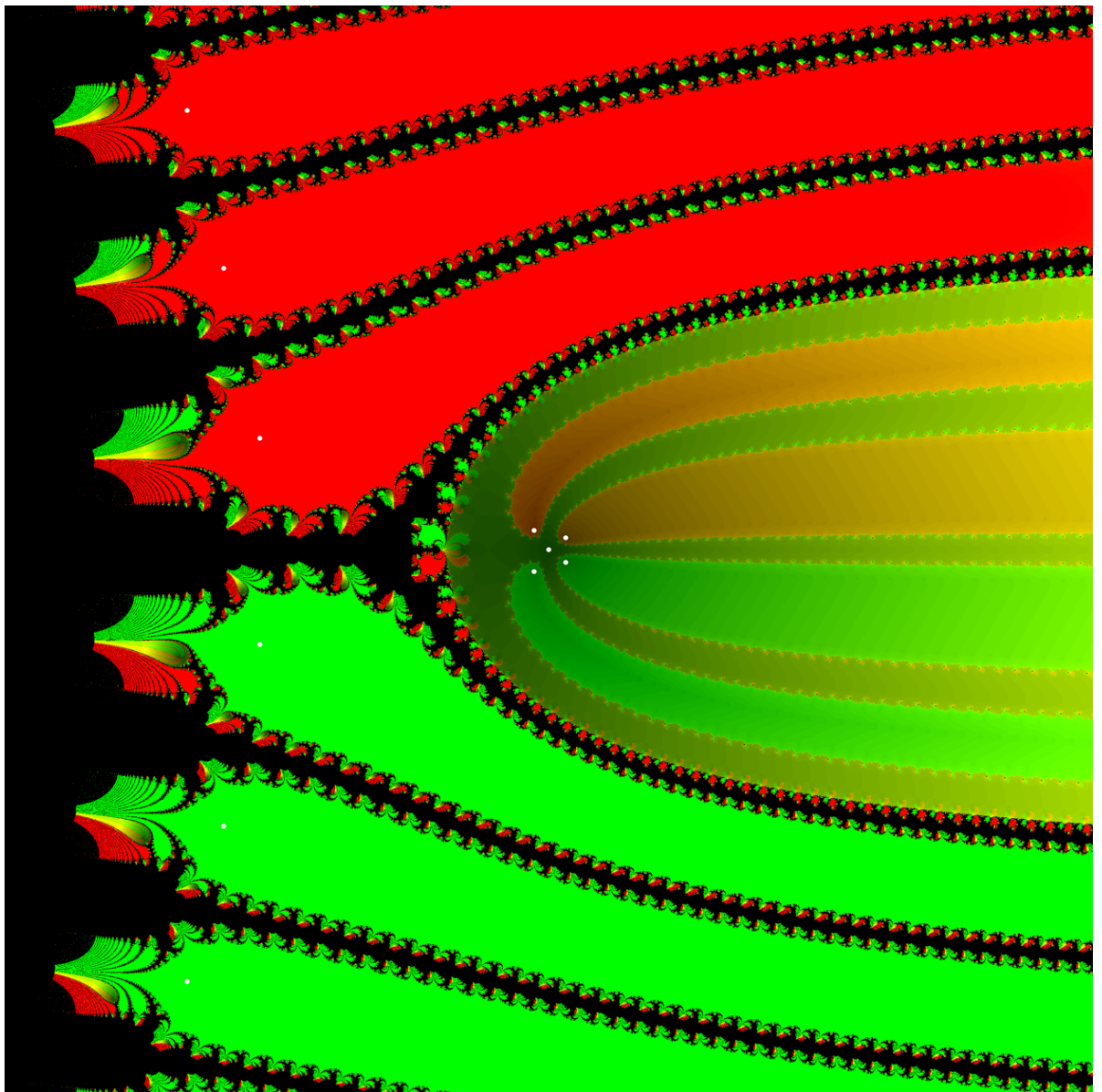


Abbildung 2.4: Dieses Bild ist eine Visualisierung des Newtonverfahrens der Funktion $f(z) = \left(1 - \frac{z^2}{2} + z^5\right) e^z - 1$. Dieses Bild weist große Ähnlichkeit zu Abbildung 2.3 auf. Im zentralen Bereich ist jedoch ein großer Unterschied zu erkennen. Im Gegensatz zu der vorigen Abbildung 2.3 hat ein Fixpunkt fünf Zugänge nach unendlich. Das liegt daran, dass im unmittelbaren Einzugsgebiet der 0 insgesamt vier kritische Punkte liegen, von denen 0 einer ist, vergleiche dazu Kapitel 7.

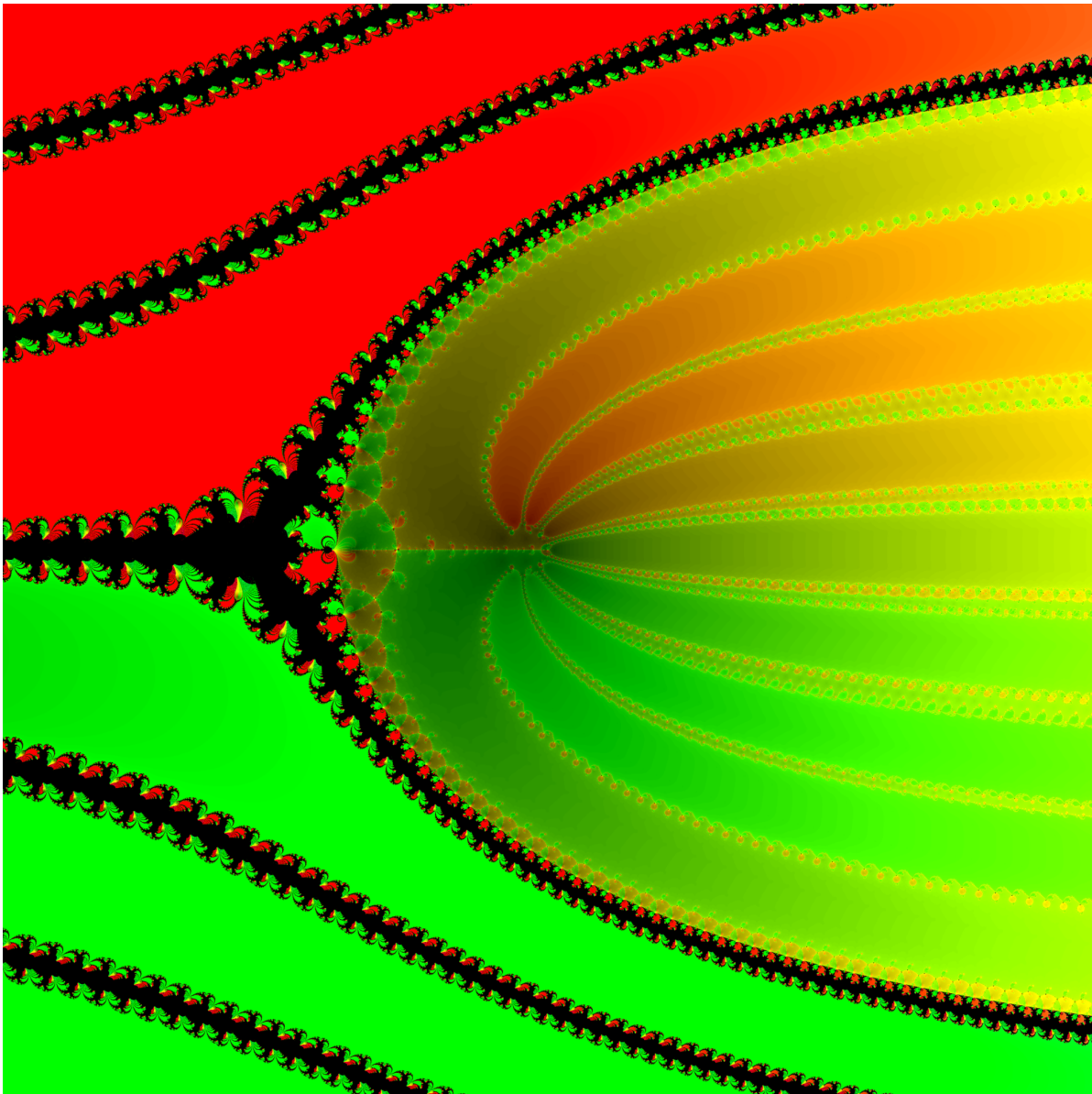


Abbildung 2.5: Dieses Bild ist eine Visualisierung des Newtonverfahrens der Funktion $f(z) = (z^9 + z^7 - z^6 + z^2 - z - 9)e^z - 1$. In diesem Beispiel haben wir zwei unmittelbare Einzugsgebiete, welche mehrere Zugänge nach unendlich haben. Es ist zu erkennen, dass diese Zugänge jeweils eine unterschiedliche Breite haben. Da das Polynom keine mehrfachen Nullstellen besitzt, müssen weitere kritische Punkte in den Einzugsgebieten sein, vergleiche dazu Kapitel 7. Hier ohne die Lage der Nullstellen.

3 Grundlagen

3.1 Notationen

Wir bezeichnen für $r \in \mathbb{R}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$D(z_0, r) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r \}$$

den Kreis mit Radius r um z_0 und mit $D(z_0, r)^c$ dessen Komplement. Des Weiteren bezeichne

$\mathbb{D} := D(0, 1)$ die Einheitskreisscheibe,

$\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{ \infty \}$ die Riemannsche Zahlenkugel und

$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$.

Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei ∂G der Rand von G in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Wir verwenden außerdem die Bezeichnung \mathbb{H}_w^l (beziehungsweise \mathbb{H}_w^r) für die linke (rechte) Halbebene $\{ z \mid \operatorname{Re}(z) < \operatorname{Re}(w) \}$. Es sei noch darauf hingewiesen, dass das Symbol \blacksquare das Ende eines Beweises anzeigt.

3.2 Funktionentheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir Grundlegendes aus der Funktionentheorie auflisten. Die Begriffe und Sätze haben große Auswirkungen auf die Beweise. So wird zum Beispiel mit dem Riemannschen Abbildungssatz eine Fragestellung in den Einheitskreis verschoben und dort geklärt.

Riemann führte 1851 den grundlegenden Begriff des einfachen Zusammenhangs ein, vergleiche [Rem95b, S. 149] beziehungsweise im Original in seiner Inauguraldissertation [Rie90, S. 49]. Dieser Begriff ist so wichtig, dass er in vielen bedeutenden Sätzen als Voraussetzung genannt wird. Es gibt aus diesem Grund eine beachtliche Anzahl an Charakterisierungen, vergleiche [FB00, S. 248ff]. Wir werden jene verwenden, die grob gesprochen aussagt, dass einfach zusammenhängende Mengen keine Löcher enthalten.

Definition 3.2.1 (Einfach zusammenhängend)

Eine Teilmenge der komplexen Zahlen $G \subset \mathbb{C}$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls jede geschlossene Kurve in G nullhomotop ist. Das heißt, dass für jede geschlossene Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow G$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ ein Punkt $c \in G$ und eine stetige Funktion $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow G$ mit $H(0, t) = \gamma(t)$ und $H(1, t) = c$ existieren.

Definition 3.2.2 (Zusammenhangskomponente und Zusammenhangszahl)

Sei $G \subset \mathbb{C}$. Eine bezüglich Inklusion maximale zusammenhängende Teilmenge von G heißt *Zusammenhangskomponente*. Die *Zusammenhangszahl* ist die Zahl der Zusammenhangskomponenten des Komplements $\widehat{\mathbb{C}} \setminus G$, wobei ∞ zugelassen sei.

Zunächst zitieren wir den Riemanschen Abbildungssatz, siehe [Rem95b, Kapitel 8.2].

Satz 3.2.3 (Riemanscher Abbildungssatz)

Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ mit $G \neq \mathbb{C}$ ist biholomorph auf die Einheitskreisscheibe \mathbb{D} abbildbar.

Dieser Satz hat enorme Auswirkungen auf viele Beweise, insbesondere in dieser Arbeit, da unmittelbare Einzugsgebiete der Newtonfunktion einfach zusammenhängend sind und mit Hilfe dieses Satzes zu einem Blaschke-Produkt konjugiert werden können, vergleiche Satz 4.1.8 und 4.3.1.

Der Satz von Rouché, ermittelt die Nullstellen mit Hilfe eines Vergleichs mit einer weiteren Funktion. Es sei auf das Buch von Remmert [Rem95a, Kapitel 13.2] verwiesen. Wir wenden dies in Kapitel 5 an, um die Lage der Nullstellen der in der Einleitung genannten Funktionen zu bestimmen.

Satz 3.2.4 (Satz von Rouché)

Es seien f und g in einem Gebiet G holomorphe Funktionen. Seien $z \in G$ und $r \in \mathbb{R}$ derart, dass $\overline{D(z, r)} \subset G$. Es gelte $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ für alle $z \in \partial D(z, r)$. Dann haben f und g gleich viele Nullstellen in $D(z, r)$.

Der folgende Satz ist eines der entscheidenden Werkzeuge, um die Berechenbarkeit der Startwerte aus $\mathcal{S}_{d,R}$ zu gewährleisten, vergleiche dazu Milnor [Mil06].

Satz 3.2.5 (Holomorphe Fixpunkt-Formel)

Sei f eine rationale Funktion vom Grad d mit den Fixpunkten $\zeta_1, \dots, \zeta_{d+1}$. Des Weiteren gelte $f'(\zeta_j) \neq 1$ für alle $j \in \{1, \dots, d+1\}$. Dann gilt:

$$\sum_{j=1}^{d+1} \frac{1}{f'(\zeta_j) - 1} = -1.$$

Für das Maximum- beziehungsweise das Minimumprinzip verweisen wir auf [Rem95a, Kapitel 8.2].

Satz 3.2.6 (Maximumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph. Dann gilt für alle $z \in \overline{G}$:

$$|f(z)| \leq \max_{z \in \partial G} |f(z)|.$$

Satz 3.2.7 (Minimumprinzip)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $z_0 \in G$. Es gebe eine Umgebung U von z_0 , sodass $|f(z_0)| \leq |f(z)|$ für alle $z \in U$ gelte. Dann ist $f(z_0) = 0$ oder $f(z) = f(z_0)$ für alle $z \in G$.

Wir werden auch den Spezialfall für beschränkte Gebiete verwenden.

Korollar 3.2.8 (Minimumprinzip für beschränkte Gebiete)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $f|_G$ holomorph. Dann hat f Nullstellen in G oder $|f|$ nimmt das Minimum auf dem Rand ∂G an:

$$|f(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial G} |f(\zeta)|,$$

für alle $z \in G$.

Wir können diese Aussagen nutzen, um den folgenden Satz zu beweisen.

Satz 3.2.9

Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig, auf \mathbb{D} holomorph und es gelte $|f(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Dann ist f ein Blaschke-Produkt.

3 Grundlagen

Beweis Sei B ein Blaschke-Produkt mit den gleichen Nullstellen wie f . Setze $h := \frac{f}{B}$. Dann hat h keine Nullstellen in \mathbb{D} . Da sowohl $|f(z)| = 1$ als auch $|B(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$ gilt, folgt $|h(z)| = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Nach dem Minimumprinzip für beschränkte Gebiete, vergleiche Korollar 3.2.8, gilt dann für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$|h(z)| \geq \min_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} |h(\zeta)| = 1.$$

Nach dem Maximumprinzip, vergleiche Satz 3.2.6, gilt für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$|h(z)| \leq \max_{\zeta \in \partial\mathbb{D}} |h(\zeta)| = 1.$$

Nach Minimumprinzip, vergleiche Satz 3.2.7, folgt $h \equiv 1$ und damit $f = B$. ☹

Der folgende Satz wurde von Koebe im Jahr 1907 formuliert und teilweise bewiesen. Bieberbach vollständigte den Beweis, vergleiche Milnor [Mil06, Theorem A.7].

Satz 3.2.10 (Koebe-Bieberbach 1/4-Satz)

Sei $a \in \mathbb{C}$, $r \geq 0$ und $f : D(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Dann gilt:

$$D\left(f(a), \frac{r|f'(a)|}{4}\right) \subset f(D(a, r)).$$

Der nachstehende Satz gibt eine obere Schranke für den Betrag von Nullstellen eines Polynoms an, die sich nur aus Koeffizienten des Polynoms berechnet. Diese Schranke werden wir später dazu verwenden, den Betrag der kritischen Punkte der Newtonfunktion nach oben abzuschätzen.

Satz 3.2.11 (Maximaler Betrag einer Nullstelle eines Polynoms)

Sei $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$ ein komplexes Polynom. Dann ist

$$R_p := \max \left\{ 1, \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| \right\}.$$

eine obere Schranke für den Radius des Kreises, der alle Nullstellen von p enthält.

Beweis Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p . Für $|z| < 1$ ist die Aussage klar.

Sei $|z| \geq 1$. Dann ist $-z^n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$. Aus der Dreiecksungleichung und $|z|^{k-n-1} \leq 1$ für

alle $0 \leq k \leq n-1$ folgt:

$$|z| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k| |z|^{k-(n-1)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} |b_k|.$$



Eine Verallgemeinerung dieses Satzes 3.2.11 ist der Satz von Gerschgorin. Letzterer macht eine Aussage über die Lage der Eigenwerte einer quadratischen Matrix in der komplexen Zahlenebene, vergleiche zum Beispiel [Bel65]. Via Begleitmatrizen für Polynome ist der hier angegebene Satz 3.2.11 ableitbar.

3.3 Eigentliche Funktionen

Es ist bekannt, dass eigentliche Funktionen im Einheitskreis \mathbb{D} nach \mathbb{D} eine spezielle Gestalt haben. Sie werden als Blaschke-Produkte bezeichnet. Wir werden in Kapitel 7 zeigen, dass die in dieser Arbeit betrachteten Newtonfunktionen ganzer Funktionen eingeschränkt auf ein unmittelbares Einzugsbiet eigentliche Abbildungen und somit mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes, siehe Satz 3.2.3, zu Blaschke-Produkten konjugiert sind. Damit können wir gewonnene Erkenntnisse über (spezielle) Blaschke-Produkte auf die Newtonfunktionen übertragen. Wir beziehen uns auf das Buch von Steinmetz [Ste93a].

Definition 3.3.1 (Eigentliche Abbildungen)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow H$ eine holomorphe Funktion. f heißt *eigentlich*, falls Urbilder kompakter Teilmengen von H kompakt sind.

Definition 3.3.2 (Abstand zum Rand)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ eine Menge und $z \in \mathbb{C}$. Dann ist der *Abstand* $\text{dist}(z, \partial U)$ von z zum Rand von U und definiert durch

$$\begin{aligned} \text{dist}(z, \partial U) &:= \inf \{ \text{dist}(z, w) \mid w \in \partial U \}, \\ \text{dist}_\chi(z, \partial U) &:= \inf \{ \chi(z, w) \mid w \in \partial U \}, \end{aligned}$$

wobei $\text{dist}(z, w)$ der euklidische und $\chi(z, w)$ der chordale Abstand von z zu w ist.

Definition 3.3.3 (Randfolge)

Eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U bezeichnen wir als *Randfolge*, falls $(\text{dist}(u_n, \partial U))_{n \in \mathbb{N}}$ beziehungsweise $(\text{dist}_\chi(u_n, \partial U))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Satz 3.3.4 (Charakterisierung von eigentlichen Funktionen)

Sei $f : U \rightarrow V$ eine holomorphe Abbildung. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Funktion f ist eine eigentliche Abbildung.
- (ii) Es existiert ein $k \in \mathbb{N}$, sodass es für alle $v \in V$ exakt k Urbilder in U gibt, gezählt gemäß Vielfachheit.
- (iii) Ist $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Randfolge in U , dann ist $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Randfolge in V .

Ist $U = V$ einfach zusammenhängend, so ist zusätzlich äquivalent:

- (iv) Es existiert ein endliches Blaschke-Produkt $B : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, welches zu f durch eine biholomorphe Abbildung $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$ konjugiert ist.

Bemerkung 3.3.5

1. Die Implikation von (ii) nach (iii) ist für $k = 1$ von besonderem Interesse.
2. Die Implikation (iii) nach (iv) geht auf Fatou zurück und die Implikation von (ii) nach (iv) ist Fatou und Radó anzurechnen. Vergleiche dazu [Fat19] und [Rad22] (Quelle [NT13]).
3. Die Zahl k aus (ii) heißt (topologischer) Abbildungsgrad von f .
4. Insbesondere folgt aus (ii) auch, dass eigentliche Funktionen surjektiv sind.
5. Für eine holomorphe Funktion f ist eine bekannte Folgerung aus dem Argumentprinzip, dass für eine w -Stelle z mit endlicher Vielfachheit k eine Umgebung U von z derart existiert, dass $f|_U : U \rightarrow f(U)$ eigentlich ist. Wir werden später den obigen Satz 3.3.4 verwenden, um zu zeigen, dass diese lokale Eigenschaft für das ganze unmittelbare Einzugsgebiet gilt.

Zur Bestimmung des Abbildungsgrades einer eigentlichen Funktion ist die Riemann-Hurwitz-Formel sehr hilfreich. Es sei auf den Artikel von Steinmetz [Ste93b] für weitere Informationen und den Beweis verwiesen.

Satz 3.3.6 (Riemann-Hurwitz-Formel)

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ Gebiete mit endlicher Zusammenhangszahl m beziehungsweise n . Weiter sei $f : U \rightarrow V$ eine eigentliche Abbildung vom Abbildungsgrad k mit r kritischen Punkten, gezählt gemäß Vielfachheit. Dann gilt:

$$m - 2 = k(n - 2) + r.$$

3.4 Hyperbolische Metrik

In gewissem Sinne ist die hyperbolische Metrik die natürliche Metrik auf der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} . Wie wir später sehen werden, sind die konformen Automorphismen von \mathbb{D} Isometrien der hyperbolischen Metrik. Weil eine explizite Darstellung der hyperbolischen Metrik im Poincaré-Kreisschreiben-Modell existiert, können wir mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes 3.2.3 und des Lemmas von Schwarz-Pick 3.4.8 diese auf ein unmittelbares Einzugsgebiet eines Fixpunktes der von uns betrachteten Newtonfunktion übertragen. Wir werden die Symbole der hyperbolischen Dichte, Länge und Metrik in \mathbb{D} ohne Index verwenden, während diese in einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit dessen Namen indiziert werden.

Für weitere Informationen über die hyperbolische Metrik, deren Anwendungen und Beweise dieses Abschnittes verweisen wir auf den einführenden und umfassenden Artikel von Beardon und Minda [BM07].

Definition 3.4.1 (Hyperbolische Dichte in \mathbb{D})

Wir definieren die *hyperbolische Dichte* $\rho : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ durch

$$\rho(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}.$$

Mit Hilfe dieser erhalten wir die

Definition 3.4.2 (Hyperbolische Länge und Metrik in \mathbb{D})

Die *hyperbolische Länge* einer glatten Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ ist definiert durch

$$\ell(\gamma) := \int_{\gamma} \rho(z) |dz|.$$

Für $z, w \in \mathbb{D}$ ist die *hyperbolische Metrik* $\rho : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definiert durch

$$\rho(z, w) := \inf_{\gamma} \ell(\gamma),$$

wobei das Infimum über alle glatten z und w verbindende Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ gebildet wird. Wir werden den Ausdruck $\rho(z, w)$ den hyperbolischen Abstand von z und w nennen.

Die Isometrien der hyperbolischen Metrik beziehungsweise die des hyperbolischen Abstandes sind die Möbiustransformationen.

Satz 3.4.3 (Isometrien der hyperbolischen Länge und des hyperbolischen Abstandes in \mathbb{D})

Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Funktion f ist biholomorph.
- (ii) Die Funktion f ist eine Einschränkung einer Möbiustransformation auf \mathbb{D} .
- (iii) Die Funktion f ist eine Isometrie der hyperbolischen Länge. Das heißt, für alle $z \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\rho(z) = \rho(f(z)) |f'(z)|.$$

- (iv) Die Funktion f ist eine Isometrie des Abstandes $\rho(\cdot, \cdot)$. Das heißt, für alle $z, w \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\rho(z, w) = \rho(f(z), f(w)).$$

Bemerkung 3.4.4

Die Einschränkung einer Möbiustransformation f auf \mathbb{D} hat die Form

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

mit einem $a \in \mathbb{D}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$.

Satz 3.4.5 (Lemma von Schwarz)

Sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ eine holomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$. Dann gilt für alle $z \in \mathbb{D}$:

$$|f(z)| \leq |z| \quad \text{und} \quad |f'(0)| \leq 1.$$

Existiert ein $w \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ mit $f(w) = w$ oder gilt $f'(0) = 1$, so hat f die Gestalt $f(z) = ze^{i\lambda}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es gibt mehrere explizite Darstellungen des hyperbolischen Abstandes im Poincaré-Kreisscheiben-Modell. Wir werden mit der folgenden Gestalt arbeiten.

Satz 3.4.6 (Explizite Darstellung des hyperbolischen Abstandes in \mathbb{D})

Seien $z, w \in \mathbb{D}$. Der hyperbolische Abstand von z und w ist durch

$$\rho(z, w) = \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right)$$

gegeben.

Wie schon angekündigt, werden wir dieses Konzept nun mit Hilfe einer biholomorphen Funktion auf einfach zusammenhängende Gebiete übertragen.

Definition 3.4.7 (Hyperbolische Dichte, Länge und Metrik in einfach zusammenhängenden Gebieten)

Sei U ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit $U \neq \mathbb{C}$ und sei $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ eine biholomorphe Abbildung. Wir definieren die *hyperbolische Dichte* $\rho_U : U \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ von U durch

$$z \mapsto \rho(f(z)) |f'(z)|.$$

Analog zu den Definitionen in der Einheitskreisscheibe ist die *Länge einer glatten Kurve* $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ durch

$$\ell_U(\gamma) := \int_{\gamma} \rho_U(z) |dz|$$

definiert und der *hyperbolische Abstand* von $z, w \in U$ durch

$$\rho_U(z, w) := \inf_{\gamma} \ell_U(\gamma),$$

wobei das Infimum über alle glatten, z und w verbindende Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow U$ gebildet wird.

Die Unabhängigkeit der Ausdrücke von der Wahl der biholomorphen Abbildung ist wie folgt einzusehen. Wird eine biholomorphe Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{D}$ fixiert, so haben alle weiteren biholomorphen Abbildungen $g : U \rightarrow \mathbb{D}$ eine Darstellung der Form $g = h \circ f$, wobei h ein Automorphismus von \mathbb{D} ist. Sei also $g = h \circ f : U \rightarrow \mathbb{D}$ eine weitere biholomorphe Abbildung. Seien $z \in U$ und $w = f(z)$. Mit Hilfe der Kettenregel und

3 Grundlagen

Satz 3.4.3 erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho(g(z)) |g'(z)| &= \rho(h(f(z))) |h'(f(z))| \\ &= \rho(h(w)) |h'(w)| \\ &= \rho(w).\end{aligned}$$

Der nun folgende Satz ist insofern entscheidend, als dass die Ergebnisse, die zum Beispiel mit Hilfe der expliziten Darstellung aus Satz 3.4.6 gewonnen werden, auf einfach zusammenhängende Gebiete übertragen werden können.

Satz 3.4.8 (Lemma von Schwarz-Pick)

Sei $U \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $f : \mathbb{D} \rightarrow U$ eine holomorphe Abbildung. Dann gilt entweder

(a) f ist eine hyperbolische Kontraktion, das heißt, für alle $z, w \in \mathbb{D}$ mit $z \neq w$ gilt:

$$\rho_U(f(z), f(w)) < \rho(z, w) \quad \text{und} \quad \rho_U(f(z)) |f'(z)| < \rho(z),$$

oder

(b) f ist eine hyperbolische Isometrie, das heißt, für alle $z, w \in \mathbb{D}$ gilt:

$$\rho_U(f(z), f(w)) = \rho(z, w) \quad \text{und} \quad \rho_U(f(z)) |f'(z)| = \rho_U(z).$$

Insbesondere ist f genau dann eine hyperbolische Isometrie, falls f eine biholomorphe Abbildung ist.

Eine weitere Abschätzung wird sehr häufig in den Beweisen verwendet. Sie verbindet den euklidischen Abstand zum Rand mit der hyperbolischen Dichte. Sie wird mitunter auch „Standardabschätzung“ genannt.

Lemma 3.4.9

Sei $U \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $z \in U$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2 \operatorname{dist}(z, \partial U)} \leq \rho_U(z) \leq \frac{2}{\operatorname{dist}(z, \partial U)}.$$

Der Faktor 4 zwischen linker und rechter Seite folgt aus der Anwendung des Koebe-Bieberbach 1/4-Satzes, vergleiche Satz 3.2.10.

3.5 Komplexe Dynamik

In diesem Abschnitt werden wir die Begriffe und Sätze zusammenfassen, die im Rahmen der Arbeit benötigt werden. Eine ausführliche Übersicht gibt Bergweiler in [Ber93a]. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Wir bezeichnen mit f^n die n -te Iterierte von f und diese ist rekursiv durch $f^1 := f$ und $f^n := f \circ f^{n-1}$ definiert. Sollte einer der iterierten Punkte auf ∞ abgebildet werden, so muss zwischen ganz transzendenten und rationalen meromorphen Funktionen unterschieden werden. Eine rationale Funktion f lässt sich f sinnvoll und meromorph nach ∞ fortsetzen und man fährt fort wie oben. Jedoch existiert für ganz transzendenten f nach dem Satze von Casorati-Weierstraß keine sinnvolle Fortsetzung. Wir lassen die Iteration an dieser Stelle stoppen. Von Interesse ist das Verhalten der Folge $(f^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$. Für diese Arbeit sind Fixpunkte von f von einer übergeordneten Rolle. Diese lassen sich wie folgt klassifizieren.

Definition 3.5.1 (Periodische Punkte, Fixpunkte und deren Klassifikation)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Ein Punkt $w \in \mathbb{C}$ heißt *periodischer Punkt*, falls ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $f^m(w) = w$. Die *Periode* n von w , ist das kleinste m mit dieser Eigenschaft. Ist $n = 1$, so bezeichnet man w auch als Fixpunkt von f .

Der *Multiplikator* λ von w wird definiert durch

$$\lambda := \begin{cases} (f^n)'(w) & , \text{ falls } w \neq \infty \\ \left. \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{f^n\left(\frac{1}{z}\right)} \right) \right|_{z=0} & , \text{ falls } w = \infty. \end{cases}$$

Die Charakterisierung eines Fixpunktes wird anhand des Multiplikators durchgeführt.

$$\text{Gilt } \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ 0 \leq |\lambda| < 1 \\ |\lambda| = 1 \\ |\lambda| > 1 \end{array} \right\}, \text{ so heißt der Fixpunkt } \left\{ \begin{array}{l} \text{superattraktiv} \\ \text{attraktiv} \\ \text{indifferent} \\ \text{repulsiv} \end{array} \right\}.$$

Die suggestive Namensgebung in dieser Definition erschließt sich beim Betrachten der Folge $(f^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ für ein z aus einer Umgebung eines Fixpunktes ζ . Falls ζ ein (super-) attraktiver Fixpunkt von f ist, so gilt etwa $f^n(z) \rightarrow \zeta$ für $n \rightarrow \infty$. Wir werden zeigen, dass die hier betrachteten Newtonfunktionen ausschließlich attraktive Fixpunkte haben. Die Aufgabe im Beweis des Hauptsatzes wird sein, Punkte im so genannten unmittelbaren Einzugsgebiet zu finden.

Definition 3.5.2 (Einzugsgebiet)

Sei w ein attraktiver Fixpunkt einer meromorphen Funktion f . Die Teilmenge $A(w)$ von $\widehat{\mathbb{C}}$, deren Elemente unter Iteration gegen den Fixpunkt w konvergieren, heißt *Einzugsgebiet* von w . Die Zusammenhangskomponente von $A(w)$, die den Fixpunkt w enthält, heißt *unmittelbares Einzugsgebiet* und wird mit $U(w)$ bezeichnet.

Wir zitieren noch zwei Sätze aus der lokalen Fixpunkttheorie. Im ersten Satz geben wir lokale Koordinaten für einen Fixpunkt an, der entweder attraktiv und nicht superattraktiv oder repulsiv ist. Der zweite Satz behandelt den Fall, dass der Fixpunkt superattraktiv ist. Schröder hat diese Funktionalgleichung in den Jahren 1870 und 1871 erstmals betrachtet.

Satz 3.5.3 (Schröder-Funktionalgleichung)

Sei $w \in \mathbb{C}$ ein weder indifferenter noch superattraktiver Fixpunkt einer holomorphen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Sei weiter $\lambda := f'(w)$. Dann existiert eine Umgebung V von 0 und eine holomorphe Funktion $S : V \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $S(0) = w$, $S'(0) = 1$ und für alle $z \in V$ mit $\lambda z \in V$

$$f(S(z)) = S(\lambda z) \quad (3.1)$$

gilt. Die Funktion S ist in dem Sinne eindeutig, als dass zu gegebenem Gebiet V höchstens eine solche Funktion existiert.

Ein ähnliches Resultat gilt auch für superattraktive Fixpunkte.

Satz 3.5.4 (Böttcher-Funktionalgleichung)

Sei $w \in \mathbb{C}$ ein superattraktiver Fixpunkt einer holomorphen Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Sei weiter $m \in \mathbb{N}$ minimal mit $f^{(m)}(w) \neq 0$. Dann gilt:

$$f(z) = w + a_m(z - w)^m + \mathcal{O}((z - w)^{m+1}), \quad \text{für } z \rightarrow w,$$

wobei $a_m \neq 0$. Sei $b_1 \in \mathbb{C}$ mit $b_1^{m-1} = a_m$. Dann existiert eine Umgebung $V \subset f(U)$ von w und eine holomorphe Funktion $\Phi : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Phi(w) = 0$ und $\Phi'(\zeta) = b_1$, also

$$\Phi(z) = b_1(z - w) + \mathcal{O}((z - w)^2), \quad \text{für } z \rightarrow w,$$

sodass für alle $z \in V$

$$\Phi(f(z)) = \Phi(z)^m$$

gilt. Zu einem gegebenen Gebiet V existiert höchstens eine solche Funktion Φ .

Ein weiteres Konzept, die sogenannten Zugänge nach ∞ im unmittelbaren Einzugsgebiet, vergleiche [BFJK14a, Kapitel 2], ist für die vorliegende Arbeit wichtig. In diesem Abschnitt führen wir die Zugänge ein und betrachten diese genauer in Kapitel 4.3.

Definition 3.5.5 (Erreichbarer Randpunkt)

Sei $U \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Ein Punkt $v \in \partial U$ heißt *erreichbar* von U , falls es eine Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\gamma([0, 1)) \subset U$ und $\gamma(1) = v$ gibt. Wir sagen auch, dass γ *in v landet*.

Definition 3.5.6 (Zugänge)

Sei $U \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : U \rightarrow U$ holomorph. Fixieren wir die Punkte $z_0 \in U$ und $v \in \partial U$, so nennen wir eine Homotopieklasse \mathcal{A} mit festen Endpunkten aus Kurven $\gamma : [0, 1] \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\gamma([0, 1)) \subset U$, $\gamma(0) = z_0$ und $\gamma(1) = v$ einen *Zugang nach v von U* .

Ein Zugang \mathcal{A} heißt *invariant*, falls ein $\gamma \in \mathcal{A}$ existiert mit $f(\gamma) \cup \eta \in \mathcal{A}$, wobei η eine z_0 und $f(z_0)$ verbindende Kurve in U ist. Existiert diese Eigenschaft für alle $\gamma \in \mathcal{A}$, so nennen wir diesen Zugang *stark invariant*.

Ein allgemeines Prinzip in der komplexen Dynamik besagt, dass das Verhalten der kritischen Punkte großen Einfluss auf die Dynamik hat. Vergleiche dazu etwa Kapitel 4.3. In Kapitel 4.1 charakterisieren wir die kritischen Punkte der in dieser Arbeit betrachteten Newtonfunktionen und stellen fest, dass es keine endlichen asymptotischen Werte gibt, siehe Lemma 4.1.11. Zunächst geben wir die Definition der Singularitäten der Umkehrfunktion beziehungsweise die der kritischen Punkte an.

Definition 3.5.7 (Kritische Punkte und asymptotischer Wert)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Ein Punkt $z \in \mathbb{C}$ heißt *kritischer Punkt* von f , falls f in w nicht lokal injektiv ist. Der Wert $f(z) = w$ heißt *kritischer Wert*. Ein Punkt $v \in \mathbb{C}$ heißt *asymptotischer Wert* von f , falls es eine Kurve $\gamma : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = \infty$ und $\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = v$ gibt.

Es ist bekannt, dass die Menge der kritischen Werte und der asymptotischen Werte die der *Singularitäten der Umkehrfunktion* ist und wir bezeichnen sie mit $\text{sing}(f^{-1})$. Sie wird auch Menge der singulären Werte von f^{-1} genannt.

Ein bekannter Satz der komplexen Dynamik stellt einen Zusammenhang zwischen kritischen Punkten beziehungsweise kritischen Werten und den unmittelbaren Einzugsgebieten her, siehe [Ber93a, Theorem 7].

Satz 3.5.8

Sei f eine meromorphe Funktion und w ein attraktiver Fixpunkt von f . Dann enthält das unmittelbare Einzugsgebiet $U(w)$ von w einen Punkt aus $\text{sing}(f^{-1})$.

3.6 Spezifische Konstruktionen

In diesem Abschnitt führen wir ein Hilfsmittel für die späteren Rechnungen ein. Dieses wurde von Jankowski in seiner Doktorarbeit [Jan96, Abschnitt 3.3.4] entwickelt und untersucht, sodass wir hier die benötigten Ergebnisse lediglich zitieren werden.

Die Nullstellen w von $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z \mapsto z^d e^z - 1$ erfüllen die folgende Gleichung:

$$w^d e^w = 1.$$

Die Idee der Konstruktion der Kurven Γ_K ist, dass die rechte Seite durch $K > 0$ ersetzt wird. Wir betrachten die stetige Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{\exp\left(-\frac{2x}{d}\right)}{K^{\frac{2}{d}}} - x^2.$$

Da $h(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und $h(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass ein $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ existiert mit $h(\tilde{x}) = 0$. Definiere $x_0 := \min\{h(x) \geq 0\}$. Nun die formale Definition dieser Kurven.

Definition 3.6.1 (Kurve Γ_K)

Seien $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $d > 0$ und $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$y^2 = \frac{\exp\left(-\frac{2x}{d}\right)}{K^{\frac{2}{d}}} - x^2. \quad (3.2)$$

Nach der Bemerkung vor dieser Definition existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $y(x_0)^2 = 0$ und $y(x)^2 > 0$ für $x < x_0$. Es bezeichne $y^+(x)$ die positive Wurzel der rechten Seite der Gleichung (3.2) (in Abhängigkeit von x) und $y^-(x)$ die negative. Definiere

$$\gamma^\pm : (-\infty, x_0] \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto x + iy^\pm(x)$$

Setze die Kurve

$$\Gamma_K : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \begin{cases} \gamma^+(x_0 + x) & , \text{ falls } x \leq 0 \\ \gamma^-(x_0 - x) & , \text{ falls } x \geq 0. \end{cases}$$

Mit $\mathbb{H}_{\Gamma_K}^r$ und $\mathbb{H}_{\Gamma_K}^l$ bezeichnen wir die Mengen der komplexen Zahlen rechts respektive links von Γ_K .

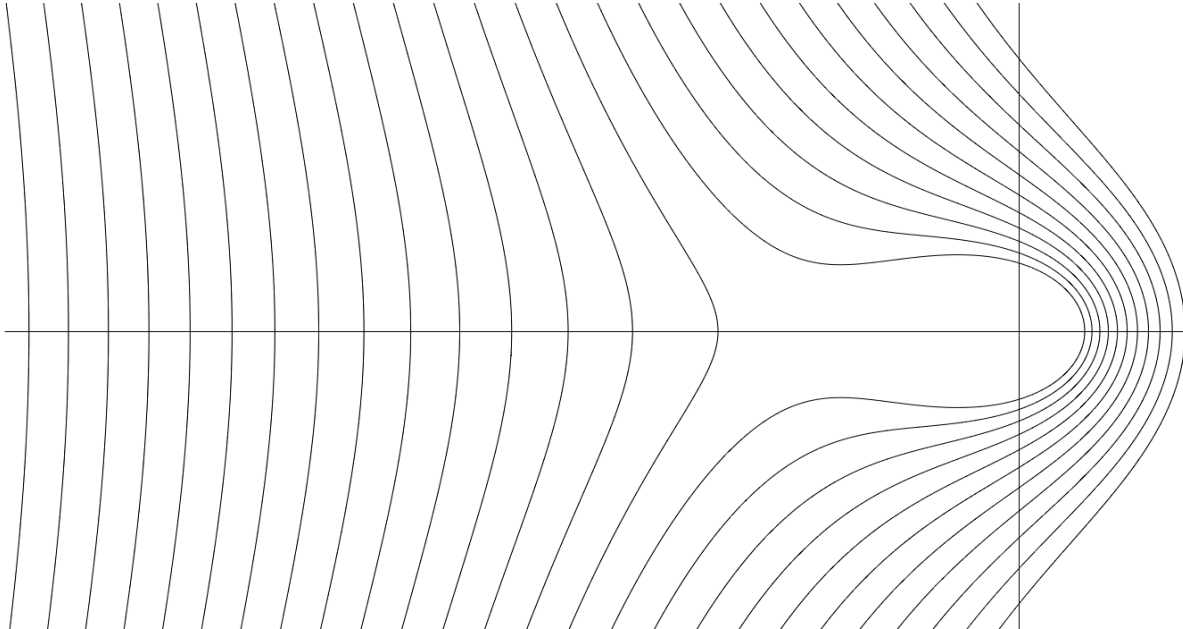


Abbildung 3.1: Visualisierung der Kurven Γ_K für $d = 5$

Für spätere Rechnungen machen wir die folgenden zwei weitere Bemerkungen.

Bemerkung 3.6.2

Die Gleichung (3.2) ist äquivalent zu:

$$x = -\frac{d}{2} \ln(x^2 + y^2) - \ln(K).$$

Bemerkung 3.6.3

Die Spur der Kurve Γ_K für ein $K \in \mathbb{R}_{>0}$ ist eine Teilmenge der Punktmenge, die durch folgende Gleichung definiert wird

$$\left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| = K.$$

Diese Bemerkung rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 3.6.4

Seien $z \in \mathbb{C}$ und $d \in \mathbb{N}$. Setze dann

$$K(z) := \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right|.$$

Es folgt, dass für $K_1 \neq K_2$ die Spuren der Kurven Γ_{K_1} und Γ_{K_2} disjunkt sind. Die beiden nächsten zitierten Lemmata machen Aussagen über die Lage der Bilder der Kurven zueinander, vergleiche [Jan96, Abschnitt 3.3.4]

Lemma 3.6.5

Sei $K_1 < K_2$. Dann liegt das Bild der Kurve Γ_{K_1} links von dem Bild der Kurve Γ_{K_2} .

Lemma 3.6.6

Sei $K_1 < K_2$. Sei $z \in \mathbb{C}$ zwischen Γ_{K_1} und Γ_{K_2} mit $|z|$ hinreichend groß. Dann gilt:

$$K_1 < \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| < K_2.$$

Das nächste Lemma beschreibt die Steigung der Kurve Γ_K .

Lemma 3.6.7

Sei $K, c > 0$. Sei $y^\pm : (-\infty, x_0) \rightarrow \mathbb{C}$ aus der Definition von Γ_K , vergleiche Definition 3.6.1. Dann gilt für $x < (-\infty, \min \{ x_0, -\frac{d}{2} (1 + \sqrt{1 + c^2}) \})$:

$$\left| (y^\pm)'(x) \right| > c.$$

Beweis Wir führen den Beweis für y^+ . Das heißt, wir verwenden den positiven Zweig der Wurzel von (3.2). Sei $x \in (-\infty, \min \{ x_0, -\frac{d}{2} (1 + \sqrt{1 + c^2}) \})$. Wir differenzieren y^+ und stellen fest, dass y^+ eine fallende, positive Kurve ist. Es gilt $y'(x) < -c$ genau dann, wenn

$$\frac{1}{y^+(x)} \left(\frac{-e^{-\frac{2x}{d}}}{dK^{\frac{2}{d}}} - x^2 + x^2 - x \right) < -c$$

ist. Wir multiplizieren mit $y^+(x)$, verwenden (3.2) und erhalten

$$(y^+(x))^2 - cdy^+(x) - x^2 + dx > 0.$$

Mit Hilfe der binomischen Formel erhalten wir

$$\left(y^+(x) + \frac{cd}{2}\right)^2 - \left(\frac{cd}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4} \geq \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4} (c^2 + 1).$$

Wegen $x < -\frac{d}{2} (1 + \sqrt{1 + c^2})$ ist die rechte Seite größer Null, was zu zeigen war. ☹

4 Newtonverfahren

4.1 Fragestellung, Normierung und Notation

Das Newtonverfahren ist eine klassische und sehr einfache Fixpunktiterationsmethode, um Nullstellen von differenzierbaren Funktionen näherungsweise zu bestimmen. Die Schlichtheit macht sie auch für Computeranwendungen interessant. Selbst wenn die Auflösung einer Gleichung möglich ist, etwa durch Radikale, wird oft das Newtonverfahren bevorzugt, da hier der Rechenaufwand geringer ist.

Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, ist unklar, wer der Urheber dieser Methode ist. Deshalb sind auch andere Namen, wie zum Beispiel Newton-Raphson-Verfahren oder Newton-Fourier-Verfahren in der Literatur zu finden. Wir werden im Folgenden bei der weit verbreiteten Bezeichnung Newtonverfahren beziehungsweise Newtonfunktion bleiben. Die heute übliche Formulierung geht auf Fourier zurück.

Definition 4.1.1 (Newtonverfahren, Newtonfunktion)

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Dann heißt die meromorphe Funktion

$$\mathcal{N}_f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

die *Newtonfunktion von f* . Die Iteration der Newtonfunktion wird dann das *Newtonverfahren* genannt.

Startwerte, die nahe einer einfachen Nullstellen liegen, konvergieren in diesem Verfahren sehr schnell gegen diese Nullstellen.

Die Frage ist, ob das Verfahren für beliebige Startwerte konvergiert. Die Antwort auf diese Frage ist im Allgemeinen negativ. Gibt es dennoch eine Menge von Startwerten, die sicher gegen Nullstellen von f konvergieren? Ungeachtet des Falles, in dem f überhaupt keine Nullstellen besitzt, ist die Antwort auf diese Frage „Ja“. Die Menge aller Nullstellen von f wäre als Menge von Startwerten eine hervorragende Wahl, würde diese Lösung nicht wieder auf das eigentliche Problem zurückführen. Nichtsdestoweniger existiert jeweils eine offene Umgebung des Fixpunktes, die den Fixpunkt selbst enthält und deren

Elemente unter der Iteration von \mathcal{N}_f gegen diese konvergiert, sogenannte Einzugsgebiete, vergleiche 3.5.2. Die präzisere und schärfere Fragestellung ist also:

Fragestellung 4.1.2

Gibt es eine „möglichst kleine“ Menge von Startwerten, sodass wir alle Nullstellen von f approximativ finden und deren Elemente sich ohne Kenntnis der Nullstellen aus den Parametern der Funktion „einfach“ berechnen lassen?

Es ist sinnvoll, diese Fragestellung noch auf Klassen von Funktionen einzuschränken. Für Polynome gaben Hubbard, Schleicher und Sutherland im Jahr 2001, vergleiche [HSS01], eine in der Einleitung beschriebene Antwort auf diese Frage. Auch probabilistische Ansätze sind erfolgreich. Kriete beweist in [Kri94, Theorem 1.5] für Polynome $p(z) = z^d + \sum_{k=0}^{d-2} a_k z^k$ mit $|a_k| \leq 1$ und $d \geq 3$, dass zu vorgegebener Wahrscheinlichkeit q eine Menge von Startwerten so konstruiert werden kann, dass alle Nullstellen mit Wahrscheinlichkeit q gefunden werden. Auch Bollobás, Lackmann und Schleicher untersuchten für komplexe Polynome, deren Nullstellen sämtlich in der Einheitskreisscheibe liegen und dessen Grad größer gleich drei ist, einen probabilistischen Ansatz, vergleiche [BLS13, Theorem 1]. Ihre Konstruktion liefert eine Wahrscheinlichkeit alle Nullstellen zu treffen, die größer als $1 - \frac{1}{d}$ ist, wobei d der Grad der untersuchten Polynome ist.

Wir geben in dem Hauptsatz dieser Arbeit jedoch eine abzählbare Menge von Startwerten an, sodass für Funktionen der Gestalt $f(z) = p(z)e^{az+b} - c$, wobei p ein komplexes Polynom und $a, b, c \in \mathbb{C}$ ist, alle Nullstellen sicher gefunden werden. Diese ist so gestaltet, dass für ein $\mathcal{R} > 0$ alle Nullstellen in $D(0, \mathcal{R})$ von f mit nur endlich vielen Startwerten gefunden werden. In $D(0, \mathcal{R})^C$ benötigen wir für jede Nullstelle genau einen Startwert. Dass heißt, die Anzahl der benötigten Startwerte ist $n(\mathcal{R}) + \mathcal{O}(1)$ für $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, wobei $n(\mathcal{R})$ die Anzahl der Nullstellen von f in $D(0, \mathcal{R})$. Die folgende Proposition, beziehungsweise das anschließende Korollar, sagt aus, dass wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein normiertes Polynom mit $a_d = 1$ sowie $a = c = 1$ und $b = 0$ voraussetzen dürfen.

Proposition 4.1.3

Seien f und g ganze Funktionen mit $f(z) = \alpha g(\beta z + \gamma)$ und $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Dann sind die Newtonfunktionen \mathcal{N}_f und \mathcal{N}_g von f respektive g konjugiert durch die Möbiustransformation $z \mapsto \beta z + \gamma$.

Beweis Nach Voraussetzung ist $f(z) = \alpha g(\beta z + \gamma)$. Dann folgt für die Ableitungen

$f'(z) = \alpha\beta g'(\beta z + \gamma)$. Einsetzen in die Newtonfunktion und eine kurze Rechnung ergeben dann:

$$\beta \mathcal{N}_f(z) + \gamma = (\beta z + \gamma) - \frac{g(\beta z + \gamma)}{g'(\beta z + \gamma)} = \mathcal{N}_g(\beta z + \gamma).$$

Das heißt, \mathcal{N}_f ist konjugiert zu \mathcal{N}_g durch $z \mapsto \beta z + \gamma$. ☹

Korollar 4.1.4

Sei $f(z) = p(z)e^{az+b} - c$. Dann existiert ein normiertes Polynom \tilde{p} so, dass \mathcal{N}_f konjugiert zu \mathcal{N}_g mit $g(z) = \tilde{p}(z)e^z - 1$ ist.

Die Fälle $a = 0$ und $c = 0$ schließen wir aus, weil dann entweder f ein Polynom ist oder die Nullstellen von f die Nullstellen eines Polynom sind. Diese Fälle sind mit dem Ergebnis von Hubbard, Schleicher und Sutherland [HSS01] abgedeckt.

Beweis Wende Prop. 4.1.3 mit $\alpha = \frac{1}{c}, \beta = \frac{1}{a}$ und $\gamma = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{ca^d}{a_d e^b} \right|$, wobei a_d der führende Koeffizient des Polynoms p ist, an. ☹

Bevor wir den Hauptsatz formulieren, definieren wir für $R > 0$ und $d > 0$ die folgende Menge

$$\mathcal{F}_{d,R} := \left\{ f \mid f(z) = p(z)e^z - 1, p(z) = z^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k, R_p < R \right\},$$

wobei $R_p := \max \left\{ 1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right\}$ für ein komplexes Polynom $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$ ist. Vergleiche auch Satz 3.2.11. Weiter seien $k_0 \in \mathbb{N}, \mathcal{R}, H, M \in \mathbb{R}$. Diese Konstanten werden im Laufe der Arbeit konkretisiert. Setze

$$S_1 := \left\{ z_k \mid \forall k \in \mathbb{Z}, |k| > k_0 : \operatorname{Im}(z_k) := \operatorname{sgn}(-k) \frac{d\pi}{2} + 2\pi k \wedge \operatorname{Re}(z_k) := -d \ln(|y_k|) \right\}$$

und

$$S_2 := \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \mathcal{R} + 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = (1 - \varepsilon)kH, k \in (-M, M) \}.$$

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis des folgenden Satzes.

HAUPTSATZ

Seien $d \in \mathbb{N}$ und $R > 0$. Dann existieren $k_0 \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{R}, H, M \in \mathbb{R}$ derart, dass die Menge $\mathcal{S}_{d,R} := S_1 \cup S_2$ für alle $f \in \mathcal{F}_{d,R}$ und für jede Nullstelle w von f einen Punkt $z \in \mathcal{S}_{d,R}$ enthält, sodass die Folge $(\mathcal{N}_f^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen w konvergiert.

Dabei sind für jede Nullstelle nur endlich viele Punkte in $\mathcal{S}_{d,R}$ nötig, um diese zu finden. Für Nullstellen mit einem Betrag größer als \mathcal{R} genügt jeweils genau ein Punkt aus $\mathcal{S}_{d,R}$.

Bemerkung 4.1.5

Wir werden zeigen, dass wir alle Nullstellen w mit $|w| > \mathcal{R}$ mit Hilfe der Startwerte aus S_1 und die Nullstellen mit $|w| < \mathcal{R}$ mit Hilfe der Startwerte aus S_2 finden. Darüber hinaus werden wir einsehen, dass die Folge $(\mathcal{N}_f^n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ für jeden Startwert $z \in S_1$ gegen eine Nullstelle von f konvergiert. Weiter werden wir zeigen, dass wir k_0, \mathcal{R}, H, M in Abhängigkeit von d und R angeben können.

Wir legen uns auf die folgende Notation fest.

Von nun an sei $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto p(z) := z^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k z^k$ ein komplexes Polynom vom Grad $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto p(z)e^z - 1. \quad (4.1)$$

Es bezeichne

$$\mathcal{N}_f : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

die Newtonfunktion zur Funktion f .

Es ist an der Definition der Newtonfunktion zu erkennen, dass eine einfache Nullstelle von f ein Fixpunkt von \mathcal{N}_f ist. Dies gilt auch für mehrfache Nullstellen. Denn ist $\zeta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle der Vielfachheit $\ell \in \mathbb{N}$ von f , so gibt es ein $r > 0$ und eine auf $D(\zeta, r)$ holomorphe Funktion g mit $g(\zeta) \neq 0$ und $f(z) = (z - \zeta)^\ell g(z)$ für alle $z \in D(\zeta, r)$. Es

folgt für $\ell \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}'_f(\zeta) &= \left. \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} \right|_{z=\zeta} \\
 &= \left. \frac{(z-\zeta)^\ell g(z) (\ell(\ell-1)(z-\zeta)^{\ell-2}g(z) + \ell(z-\zeta)^{\ell-1}(g(z)+g'(z)) + \ell(z-\zeta)^\ell g''(z))}{(\ell(z-\zeta)^{\ell-1}g(z) + (z-\zeta)^\ell g'(z))^2} \right|_{z=\zeta} \\
 &= \left. \frac{g(z)(z-\zeta)^{2(\ell-1)} (\ell(\ell-1)g(z) + 2\ell(z-\zeta)(g(z)+g'(z)) + (z-\zeta)^2 g''(z))}{((z-\zeta)^{\ell-1} (\ell g(z) + (z-\zeta)g'(z)))^2} \right|_{z=\zeta} \\
 &= \frac{g^2(\zeta)\ell(\ell-1)}{(g(\zeta)\ell)^2} \\
 &= \frac{\ell-1}{\ell} < 1. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

Für $\ell = 1$ gilt: $\mathcal{N}'_f(\zeta) = 0$.

Bemerkung 4.1.6

Wir haben gezeigt, dass die Nullstellen von f attraktive Fixpunkte von \mathcal{N}_f sind.

Damit sind Nullstellen von f dasselbe wie Fixpunkte von \mathcal{N}_f . Dass umgekehrt jede Funktion, bei der alle Multiplikatoren diese Form haben, von einem Newtonverfahren herrührt, ergibt sich mit

$$f = c \cdot \exp\left(\int \frac{d\zeta}{\zeta - \mathcal{N}(\zeta)}\right), \tag{4.3}$$

wobei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir erhalten einen Satz, welcher von Rückert und Schleicher in dem Artikel [RS07] angegeben ist.

Satz 4.1.7 (Charakterisierung einer meromorphen Funktion als Newtonfunktion)

Sei $\mathcal{N} : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine meromorphe Funktion. Genau dann ist \mathcal{N} Newtonfunktion einer ganzen Funktion f , falls es für jeden Fixpunkt ζ von \mathcal{N} eine natürliche Zahl ℓ mit $\mathcal{N}'(\zeta) = \frac{\ell-1}{\ell}$ gibt.

Ist dies der Fall, so existiert eine Konstante $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, sodass f die Gestalt (4.3) hat.

Einige hilfreiche Resultate, welche den Beweis des Hauptresultats ermöglichen, sind schon erzielt worden und sollen in diesem Abschnitt präsentiert werden.

Mayer und Schleicher untersuchten die unmittelbaren Einzugsgebiete dieser Fixpunkte, vergleiche [MS06, Theorem 2.8].

Satz 4.1.8

Sei \mathcal{N}_f die Newtonfunktion einer ganzen Funktion f und U das unmittelbare Einzugsgebiet des attraktiven Fixpunktes w . Dann ist U einfach zusammenhängend und unbeschränkt.

Weiter enthält U eine Kurve nach ∞ .

Bemerkung 4.1.9

Im Sinne von Definition 3.5.6 bedeutet dies, dass jedes unmittelbare Einzugsgebiet U eines Fixpunktes von \mathcal{N}_f für eine ganze Funktion f einen Zugang nach ∞ besitzt.

Dieser Satz setzt das mit den Artikeln [Prz89] und [Shi09] begonnene Programm, das für die Newtonfunktion einer ganzen Funktion f jede Fatoukomponente einfach zusammenhängend ist, fort. Weitere Autoren vervollständigten dieses Programm, siehe dazu [BT96, FJT08, FJT11, BFJK14b]. Siehe auch [BFJK15] für einen einheitlichen Zugang.

Wie schon in Kapitel 3.5, zum Beispiel Satz 3.5.8, angedeutet, determinieren kritische Punkte die Dynamik, vergleiche zum Beispiel [Ber93a, Abschnitt 4.3] und im Speziellen für die hier behandelten Newtonfunktionen Abschnitt 7.1. Wir machen zwei Bemerkungen zu den Singularitäten der Umkehrabbildung von \mathcal{N}_f . Die kritischen Punkte der Newtonfunktion sind nach Definition 3.5.7 die Nullstellen der ersten Ableitung

$$\mathcal{N}'_f = \frac{f f''}{f'^2}.$$

Die Nullstellen von f'' , die keine Nullstellen von f oder f' sind, nennen wir *freie* kritische Punkte von \mathcal{N}_f . Wenn es etwa einen anziehenden periodischen Zykel höherer Ordnung gibt, so muss der einen kritischen Punkt oder einen asymptotischen Wert anziehen. Die Nullstellen von f sind aber Fixpunkte, die von f' Pole. Dieser kritische Punkt muss also eine Nullstelle von f'' sein, die keine Nullstelle von f oder f' ist.

Im Fokus dieser Arbeit liegen die ganzen Funktionen f der Gestalt $f(z) = p(z)e^{az+b} - c$, wobei p ein Polynom vom Grad d ist. Dann sind die Nullstellen von f' und f'' gerade die Nullstellen von den Polynomen $p + p'$ respektive $p + 2p' + p''$. Es existieren somit nur endlich viele freie kritische Punkte. Wir erhalten das folgende Lemma.

Lemma 4.1.10

Es gibt maximal d freie kritische Punkte von \mathcal{N}_f und diese liegen in einem Kreis um 0 mit dem Radius

$$R_1 := \max \{ 1, R_{p+2p'+p''} \}.$$

Beweis Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{N}'_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2},$$

mit

$$f'(z) = (p(z) + p'(z))e^z \quad \text{und} \quad f''(z) = (p(z) + 2p'(z) + p''(z))e^z.$$

Die Nullstellen von f'' sind also die Nullstellen von dem Polynom $p + 2p' + p''$, also maximal $\text{grad}(p + 2p' + p'') = d$. Durch die Anwendung des Satzes 3.2.11 auf diese Polynome folgt die Behauptung. \blacktriangleright

Das nächste Lemma sagt aus, dass die Menge der singulären Werte nur aus kritischen Werten besteht.

Lemma 4.1.11

\mathcal{N}_f hat keine endlichen asymptotischen Werte.

Bergweiler merkt dies in [Ber93b] an, Jankowski greift das in [Jan96, S. 28] wieder auf und beweist es.

4.2 Darstellung und asymptotische Gestalten

Durch elementare Umformungen lassen sich zwei für spätere Rechnungen nützliche Darstellungen von \mathcal{N}_f erzeugen. Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} p(z) + p'(z) &= \sum_{k=0}^d a_k z^k + \sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1} z^k \\ &= z^d + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1}) z^k. \end{aligned}$$

Damit folgt für alle $z \in \mathbb{C}^* \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) + p'(z) = 0\}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_f(z) &= z - \frac{p(z)e^z - 1}{(p(z) + p'(z))e^z} \\
 &= z - \frac{p(z)}{(p(z) + p'(z))} + \frac{e^{-z}}{z^d \left(1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}\right)} \\
 &= z - 1 + \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} + \frac{e^{-z}}{z^d} \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}} \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

$$= z - 1 + \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} + \frac{e^{-z}}{z^d} - \frac{e^{-z}}{z^d} \left(\frac{\sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}} \right). \tag{4.5}$$

Wir betrachten nun die asymptotische Gestalt der Newtonfunktion in der rechten Halbebene. Die folgende Proposition werden wir für den Beweis der Existenz eines invarianten Zugangs nach ∞ verwenden und für die Konstruktion der Approximationspunkte für betragsmäßig große Nullstellen.

Proposition 4.2.1 (Asymptotische Gestalt von \mathcal{N}_f in der rechten Halbebene)

Für alle $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ existiert ein $\mathcal{R} > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > \mathcal{R}$ und $\operatorname{Re}(z) > 0$ gilt:

$$|\mathcal{N}_f(z) - (z - 1)| < \varepsilon$$

Diese Aussage ist durch die Darstellung (4.4) der Newtonfunktion evident. Da wir jedoch an der Schranke \mathcal{R} interessiert sind, werden wir den Beweis führen. Vor dem Beweis führen wir noch zwei Überlegungen an.

Lemma 4.2.2

Seien $A \geq 0$ und $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

(a) Für $A \in [0, \varepsilon) \cup (2 - \varepsilon, \infty)$ gilt $|1 - A| \geq 1 - \varepsilon$ und

(b) für $A \in [\varepsilon, 2 - \varepsilon]$ gilt $|1 - A| \leq 1 - \varepsilon$.

Korollar 4.2.3

Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und $|z| > \frac{R_{p+p'}}{\varepsilon}$. Dann folgt:

$$\left| \frac{p(z) + p'(z)}{z^d} \right| = \left| 1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d} \right| > 1 - \varepsilon$$

Beweis Seien $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und $k \in \{0, \dots, d-1\}$. Weil $R_{p+p'} \geq 1$ ist, erhalten wir $|z| > 1$. Durch Anwendung der Dreiecksungleichung und $|z|^{k-d} \leq |z|^{-1} < 1$ folgt:

$$\left| \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d} \right| \leq \frac{R_{p+p'}}{|z|}.$$

Es folgt mit der inversen Dreiecksungleichung:

$$\left| 1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d} \right| > 1 - \frac{R_{p+p'}}{|z|} > 1 - \varepsilon.$$



Beweis von Proposition 4.2.1

Sei $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ und $|z| > \max \left\{ R_1, \frac{3(2d-1)}{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \frac{2dR_p}{\varepsilon}, \frac{3R_{p+p'}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right\}$ und $\operatorname{Re}(z) > 0$. Zum Beweis der Behauptung kürzen wir im dritten Summanden in (4.5) mit z^{d-1} und wenden die Dreiecksungleichung an:

$$\begin{aligned} \left| \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} \right| &= \left| \frac{z^{d-1} \left(\sum_{k=0}^{d-1} (k+1)a_{k+1}z^{k-(d-1)} \right)}{z^d + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^k} \right| \\ &\leq \frac{1}{|z|} \left| \frac{\sum_{k=0}^{d-1} (k+1) |a_{k+1}| |z|^{k-(d-1)}}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}} \right| \end{aligned} \tag{4.6}$$

4 Newtonverfahren

Weiter schätzen wir den Zähler mit Hilfe von $|z|^{k-d} \leq |z|^{-1} < \frac{1}{R_p}$ ab:

$$\begin{aligned}
 d + \sum_{k=0}^{d-2} (k+1) |a_{k+1}| |z|^{k-(d-1)} &\leq d + |z|^{-1} (d-1) \sum_{k=0}^{d-2} |a_{k+1}| \\
 &\leq d + |z|^{-1} (d-1) R_p \\
 &\leq d + (d-1) \frac{R_p}{R_p} \\
 &= 2d - 1
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mit Korollar 4.2.3 schätzen wir den Nenner ab und es folgt mit (4.6) und (4.7) insgesamt:

$$\left| \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} \right| \leq \frac{1}{|z|} \frac{2d-1}{1-\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.8}$$

Wir betrachten den letzten Summanden in (4.5). Wir verwenden $|z|^{k-d} \leq |z|^{-1} < 1$ in der Abschätzung des Zählers und Korollar 4.2.3 und erhalten:

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1}) z^{k-d}}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1}) z^{k-d}} \right| \leq \frac{\frac{1}{|z|} R_{p+p'}}{1-\varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.9}$$

Wegen $\operatorname{Re}(z) > 0$ ist $\left| \frac{e^z}{z^d} \right| < 1$ und mit Dreiecksungleichung folgt die Behauptung. 🐼

Wir setzen

$$R_2 := \max \left\{ R_1, \frac{3(2d-1)}{\varepsilon(1-\varepsilon)}, \frac{2dR_p}{\varepsilon}, \frac{3R_{p+p'}}{\varepsilon(1-\varepsilon)} \right\}. \tag{4.10}$$

Wir nutzen (4.4), um die Newtonfunktion nahe einer betragslich großen Nullstelle w auf eine approximative Weise zu beschreiben. Das hat den Vorteil, dass wir explizit rechnen können, wenn wir den Fehler kontrollieren wollen. Wir formulieren dies in der nächsten

Proposition 4.2.4 (Gestalt von \mathcal{N}_f nahe eines Fixpunktes)

Sei $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Für eine Nullstelle w von f mit $|w|, |w+t| > 2R_2$ ist

$$|\mathcal{N}_f(w+t) - (w+t-1+e^{-t})| \leq \frac{2(d+R_1)}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|}.$$

Für den Beweis benötigen wir die folgende Abschätzung:

Lemma 4.2.5

Seien $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $m \in \{0, \dots, d\}$ und $|w|, |w+t| > 2R_2$. Dann gilt:

$$\sum_{l=1}^m \binom{m}{l} \frac{t^l}{|w+t|^l} \leq \frac{4m}{|w+t|} \left(e^{\frac{t}{4}} - 1 \right) < \frac{1}{2} (\sqrt[8]{e} - 1).$$

Es sei daran erinnert, dass wir $\sum_{k=1}^0 a_k := 0$ als leere Summe auffassen.

Beweis Es gilt $R_2 \geq \frac{2dR_p}{\varepsilon} > 4d$ und wir erhalten aus $t \in (0, \frac{1}{2})$ die zweite Ungleichung.

Seien $k, m \in \{1, \dots, d\}$ mit $k \leq m$. Dann ist

$$\frac{m-k}{|w+t|} < \frac{d}{4d} = \frac{1}{4}.$$

Wir verwenden die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^m \binom{m}{\ell} \frac{t^\ell}{|w+t|^\ell} &= \frac{m}{|w+t|} \sum_{\ell=1}^m \frac{t^\ell}{\ell!} \prod_{k=1}^{\ell-1} \frac{m-k}{|w+t|} \\ &\leq \frac{m}{|w+t|} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{t^\ell}{\ell!} \left(\frac{1}{4} \right)^{\ell-1} \\ &\leq \frac{4m}{|w+t|} \left(e^{\frac{t}{4}} - 1 \right). \end{aligned}$$



Beweis von Proposition 4.2.4

Wir setzen voraus, dass $|w|, |w+t| > 2R_2$ ist. Setze $q(z) := \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}$.

Aus (4.4) folgt:

$$|\mathcal{N}_f(w+t) - (w+t-1+e^{-t})| \leq \left| \frac{p'(w+t)}{p(w+t)+p'(w+t)} \right| + e^{-t} \left| \frac{e^{-w}}{(w+t)^d} \frac{1}{1+q(w+t)} - 1 \right|$$

Den ersten Summanden können wir wie in (4.6) gegen $\frac{1}{|w+t|} \frac{2d-1}{1-\varepsilon}$ abschätzen. Da w eine Nullstelle von f ist, gilt:

$$e^{-w} = p(w) = \sum_{k=0}^d a_k w^k.$$

4 Newtonverfahren

Für den zweiten Summanden verwenden wir dies, die Dreieckungleichung und den binomischen Lehrsatz und erhalten:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{1+q(w+t)} \frac{p(w)}{(w+t)^d} - 1 \right| &= \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \sum_{k=0}^d a_k \frac{w^k}{(w+t)^d} - 1 \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \left(\frac{w}{w+t} \right)^d - 1 \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \frac{1}{|w+t|} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \left| \frac{w}{w+t} \right|^k \\
&\leq \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \left| \left(1 - \frac{t}{w+t} \right)^d - 1 - q(w+t) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \frac{1}{|w+t|} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \left| 1 - \frac{t}{w+t} \right|^k \\
&\leq \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \left| \sum_{l=1}^d \binom{d}{l} \frac{t^l}{|w+t|^l} \right| + \left| \frac{q(w+t)}{1+q(w+t)} \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \frac{1}{|w+t|} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \left(1 + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{t^l}{|w+t|^l} \right).
\end{aligned}$$

Es sei daran erinnert, dass $\sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \leq R_1$. Mit $R_1 > R_{p+p'}$ gilt nach (4.9):

$$\left| \frac{q(w+t)}{1+q(w+t)} \right| \leq \frac{1}{|w+t|} \frac{R_1}{1-\varepsilon}.$$

Weiter gilt: $\left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \leq \frac{1}{1-\varepsilon}$. Zusammen mit Lemma 4.2.5 ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \frac{p(w)}{(w+t)^d} - 1 \right| &\leq \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \sum_{l=1}^d \binom{d}{l} \frac{t^l}{|w+t|^l} + \left| \frac{q(w+t)}{1+q(w+t)} \right| \\
 &\quad + \left| \frac{1}{1+q(w+t)} \right| \frac{1}{|w+t|} \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \left(1 + \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{t^l}{|w+t|^l} \right) \\
 &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{4d(\sqrt[d]{e}-1)}{|w+t|} + \frac{R_1}{(1-\varepsilon)|w+t|} \\
 &\quad + \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} \left(\sum_{k=0}^{d-1} |a_k| + \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \frac{t^l}{|w+t|^l} \right). \\
 &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} (4d(\sqrt[d]{e}-1) + R_1) \\
 &\quad + \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} \left(R_1 + \sum_{k=0}^{d-1} |a_k| \frac{4(d-1)(\sqrt[d]{e}-1)}{|w+t|} \right). \\
 &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} \left(4d(\sqrt[d]{e}-1) + 2R_1 + R_1 \frac{4(d-1)(\sqrt[d]{e}-1)}{|w+t|} \right) \\
 &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} (4d(\sqrt[d]{e}-1) + 2R_1 + 4(d-1)(\sqrt[d]{e}-1)) \\
 &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} \left(\frac{11d}{10} + 2R_1 \right) \\
 &\leq \frac{\frac{11d}{10} + 2R_1}{(1-\varepsilon)} \frac{1}{|w+t|} \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

☞

4.3 Konjugierte der Newtonfunktion im Einheitskreis

Sei für diesen Abschnitt von nun an U das unmittelbare Einzugsgebiet eines attraktiven Fixpunktes w von \mathcal{N}_f mit f wie in (4.1). Deimling hat in [Dei11, Satz 2.2.1] gezeigt, dass die Einschränkung der Newtonfunktion auf das unmittelbare Einzugsgebiet eines Fixpunktes konjugiert zu einem Blaschke-Produkt ist. Wir formulieren dies in dem folgenden Satz.

Satz 4.3.1

Es enthalte U keine asymptotischen Werte von \mathcal{N}_f und höchstens endlich viele kritische Punkte von \mathcal{N}_f . Dann ist $\mathcal{N}_f|_U : U \rightarrow U$ konjugiert zu einem Blaschke-Produkt.

Lemma 4.1.11 besagt, dass \mathcal{N}_f keine asymptotischen Werte hat. Weil es nur endlich viele freie kritischen Werte gibt, vergleiche Lemma 4.1.10, dürfen wir dieses Lemma in der vorliegenden Situation anwenden. Deimling verwendet im Beweis die Äquivalenz von (i) und (iii) in Satz 3.3.4 und nimmt an, dass es eine Randfolge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U gibt, dessen Bildfolge $(\mathcal{N}_f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ keine Randfolge in U ist. Dies führt sie zum Widerspruch zu dem Satz 4.1.11, der besagt, dass \mathcal{N}_f keine asymptotischen Werte hat.

Nach der Charakterisierung von eigentlichen Funktionen, vergleiche Satz 3.3.4, ist die Aussage von Satz 4.3.1 äquivalent dazu, dass $\mathcal{N}_f|_U$ einen endlichen Abbildungsgrad $g = \text{grad}(\mathcal{N}_f|_U)$ hat. Mit Hilfe der Riemann-Hurwitzformel, Satz 3.3.6, ist der Grad bestimmbar. Sei m_U die Anzahl der kritischen Punkte von \mathcal{N}_f in U . Weil U einfach zusammenhängend ist, siehe Satz 4.1.8, gilt nach besagter Formel:

$$g = m_U + 1.$$

Bemerkung 4.3.2

Bis auf endlich viele Fälle ist der einzige kritische Punkt im unmittelbaren Einzugsgebiet der Fixpunkt selbst. Denn es gibt nach Lemma 4.1.10 nur endlich viele freie kritische Punkte und jedes unmittelbare Einzugsgebiet enthält nach Satz 3.5.8 mindestens einen kritischen Punkt. In den Fällen, in denen der Fixpunkt der einzige kritische Punkt im unmittelbaren Einzugsgebiet ist, ist der Abbildungsgrad g gleich 2. Wie im Folgenden gezeigt wird, ist dann das zu $\mathcal{N}_f|_U$ konjugierte Blaschke-Produkt $B(z) = z^2$.

Weiter folgt aus der Tatsache, dass U nach Satz 4.1.8 einfach zusammenhängend ist, und aus dem Riemannschen Abbildungssatz, siehe Satz 3.2.3, die Existenz einer biholomorphen Abbildung $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow U$ mit $\Phi(0) = w$. Wir setzen $B := \Phi^{-1} \circ \mathcal{N}_f|_U \circ \Phi$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir von $B(1) = 1$ ausgehen, da wir anderenfalls Φ mit einer Möbiustransformation komponieren. Im nachfolgenden Text dieser Arbeit bezeichne Φ diese Abbildung. Da \mathcal{N}_f eine eigentliche Funktion ist, ist auch B eigentlich. Nach Lemma 3.3.4 ist B ein Blaschke-Produkt vom endlichen Grad g . Wir bemerken noch über den Randfixpunkt 1 der inneren Funktion B von $\mathcal{N}_f|_U$ folgendes.

Lemma 4.3.3

$B'(1)$ ist reell und größer 1.

Mit anderen Worten ist die Aussage des Lemmas, dass 1 ein abstoßender Fixpunkt von B ist.

Beweis Da B ein Blaschke-Produkt mit $B(1) = 1$ und $B(0) = 0$ ist, hat B die Gestalt

$$B(z) = e^{i\theta} z^\ell \prod_{m=1}^{g-\ell} \frac{z - a_m}{1 - \overline{a_m}z},$$

mit $a_m \in \mathbb{D}$ für alle $m \in \{1, \dots, g - \ell\}$ und $\theta \in [0, 2\pi)$. Wir berechnen die logarithmische Ableitung:

$$\frac{B'(z)}{B(z)} = \frac{\ell}{z} + \sum_{m=1}^{g-\ell} \frac{1 - |a_m|^2}{(z - a_m)(1 - \overline{a_m}z)}.$$

Da $B(1) = 1$, folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} B'(1) &= \ell + \sum_{m=1}^{g-\ell} \frac{1 - |a_m|^2}{(1 - a_m)(1 - \overline{a_m})} \\ &= \ell + \sum_{m=1}^{g-\ell} \frac{1 - |a_m|^2}{|1 - a_m|^2} \end{aligned} \tag{4.12}$$

und damit die erste Behauptung.

Weil $B(0) = 0$ ist, gilt $\ell \geq 1$. Weil die Summe in (4.12) größer gleich Null ist, folgt die zweite Behauptung. ☹

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir den Korrespondenzsatz zwischen Zugängen nach ∞ und Punkten des Einheitskreises zitieren, vergleiche [BFJK14a, Correspondence Theorem]. Wir werden im Laufe dieser Arbeit zeigen, dass jedes unmittelbare Einzugsgebiet einen Zugang nach ∞ besitzt, der eine gewisse Dicke nicht unterschreitet.

Satz 4.3.4 (Korrespondenz-Theorem)

- (i) Sei \mathcal{A} ein Zugang nach ∞ in U . Dann existiert ein Punkt η in $\partial\mathbb{D}$, so dass der radiale Grenzwert von Φ in η gleich ∞ , das heißt $\lim_{t \nearrow 1} \Phi(t\eta) = \infty$, ist. Weiter gilt für jedes $\gamma \in \mathcal{A}$, dass $\Phi^{-1}(\gamma)$ in η landet.
- (ii) Falls der radiale Grenzwert von Φ in einem Punkt $\eta \in \partial\mathbb{D}$ gleich ∞ ist, so existiert ein Zugang \mathcal{A} nach ∞ von U , der alle Bilder von Kurven γ in \mathbb{D} enthält, die in η landen und deren Bilder ebenfalls in einem Punkt aus $\hat{\mathbb{C}}$ landen. Dieser Landepunkt ist dann ebenfalls ∞ .

4 Newtonverfahren

Wir haben mit Lemma 4.3.3 gezeigt, dass der korrespondierende Punkt eines Zugangs nach ∞ ein repulsiver Fixpunkt von B ist.

Auch über die Anzahl der invarianten Zugänge nach ∞ innerhalb eines unmittelbaren Zugangs nach ∞ wird in [BFJK14a, Corollary C] eine Aussage gemacht.

Satz 4.3.5 (Anzahl der invarianten Zugänge innerhalb U)

Sei f eine ganze Funktion. Weiter sei g der Abbildungsgrad von $\mathcal{N}_f|_U$. Dann existieren genau D invariante Zugänge nach ∞ mit $1 \leq D$ und $g - 1 \leq D \leq g + 1$.

Bemerkung 4.3.6

Für ganze Funktionen f der Gestalt (4.1) ist die Anzahl der invarianten Zugänge nach ∞ in U gleich $g - 1$.

5 Startpunkte in $D(0, \mathcal{R})^C$

5.1 Motivation

In diesem Kapitel geben wir Approximationspunkte für die Nullstellen der Funktion $f(z) = p(z)e^z - 1$ außerhalb eines Kreises um den Ursprung an.

Der Leitgedanke bei diesem Konzept ist, dass $p(z) \approx z^d$ für betragsmäßig großes $z \in \mathbb{C}$ und $d = \text{grad}(p)$ ist. Durch diese Näherung ergibt sich für eine Wurzel $w = u + iv \in \mathbb{C}$ der Gleichung $e^z = z^{-d}$ durch Anwenden des Logarithmus der Real- respektive Imaginärteil

$$u = -d \ln |w| \quad \text{und} \quad v = -d \arg(w) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Es wird deutlich, dass, falls k groß genug ist, der Imaginärteil der dominante Part des Betrages von w ist und darum das Argument der Lösung w für w gegen ∞ gegen $\pm \frac{\pi}{2}$ strebt. Dies liefert die Idee für die Wahl des Imaginärteils der Approximationspunkte. Ebenso wird ersichtlich, dass der Fehler durch das Weglassen des Realteils auf der rechten Seite in der ersten Gleichung von (5.1) kleiner wird, je weiter der Ursprung entfernt ist. Der Unterschied zu der Untersuchung von Jankowski in [Jan96] ist, dass Jankowski den Realteil nicht unterdrückt. Dadurch verliert er die Berechenbarkeit des Approximationspunktes. Für uns ist das aber der wesentliche Aspekt. Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{ \pm \frac{d}{4} \}$ definieren wir den Approximationspunkt $z_k := x_k + iy_k$ der Nullstelle durch:

$$y_k := \text{sgn}(-k) \frac{d\pi}{2} + 2\pi k \quad \text{und} \quad x_k := -d \ln(|y_k|).$$

Die Approximationspunkte außerhalb eines noch zu definierenden Kreises um den Ursprung fassen wir in der folgenden Menge zusammen. Für $k_0 \in \mathbb{N}$ sei

$$S_1 := \left\{ z_k \mid \text{Im } z_k := \text{sgn}(-k) \frac{d\pi}{2} + 2\pi k \wedge \text{Re } z_k := -d \ln(|y_k|), |k| > k_0 \right\}. \quad (5.2)$$

Dabei k_0 wird so gewählt, dass benötigte Abschätzungen funktionieren. Der Wert wird im Beweis des Hauptsatzes, siehe Abschnitt 8.1, angegeben. Wir formulieren obige Aussage in dem folgenden Satz.

Satz 5.1.1

Es existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $|k| > k_0$ der Kreis $D(z_k, 0,0115)$ genau eine Nullstelle w von f enthält und z_k im unmittelbaren Einzugsgebiet von w liegt, wobei $z_k \in S_1$ ist.

5.2 Abstand des Fixpunktes zum Rand des unmittelbaren Einzugsgebietes

Der nächste Satz macht eine Aussage über den Abstand eines Fixpunktes der Newtonfunktion zum Rand seines unmittelbaren Einzugsgebietes.

Satz 5.2.1

Sei w ein superattraktiver Fixpunkt von \mathcal{N}_f mit $|w| > R_2$, sodass in dessen unmittelbarem Einzugsgebiet $U(w)$ kein weiterer kritischer Punkt von \mathcal{N}_f liegt. Für alle $r \in (0, \frac{1}{2})$ mit $|w| > \frac{R_2(2r+1)}{1-2r}$ gilt:

$$D(w, r) \subset U(w).$$

Beweis von Satz 5.2.1 Sei w ein superattraktiver Fixpunkt der Newtonfunktion \mathcal{N}_f mit $|w| > R_2$ und U das unmittelbare Einzugsgebiet von w . Dann gilt $\mathcal{N}'_f(w) = 0$. Alle Polstellen von \mathcal{N}_f liegen nach dem Satz 3.2.11 wegen $f'(z) = (p(z) + p'(z))e^z$ in dem Kreis $D(0, R_{p+p'})$. Weil $R_2 > R_{p+p'}$ ist, gilt $f'(w) \neq 0$. Ebenso erhalten wir aus $R_2 > R_{p+2p'+p''}$, dass $f''(w) \neq 0$ ist.

Nach dem Riemannsches Abbildungssatz, Satz 3.2.3, existiert eine biholomorphe Abbildung $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow U$ mit $\Phi(0) = w$ und $\Phi'(0) > 0$. Weil U nach Voraussetzung keinen weiteren kritischen Punkt und nach Lemma 4.1.11 keinen asymptotischen Wert enthält, ist die Komposition $B := \Phi^{-1} \circ \mathcal{N}_f|_U \circ \Phi$ nach Satz 4.3.1 ein Blaschke-Produkt. Nach Bemerkung 4.3.2 dürfen wir von $B(z) = z^2$ ausgehen. Es gilt dann:

$$\Phi(z^2) = \mathcal{N}_f(\Phi(z)).$$

Zweimaliges Differenzieren von linker sowie rechter Seite ergibt:

$$\Phi''(z^2)(2z)^2 + 2\Phi'(z^2) = \mathcal{N}''_f(\Phi(z))(\Phi'(z))^2 + \mathcal{N}'_f(\Phi(z))\Phi''(z).$$

5.2 Abstand des Fixpunktes zum Rand des unmittelbaren Einzugsgebietes

Weil $\mathcal{N}'_f(\Phi(0)) = \mathcal{N}'_f(w) = 0$ und $\Phi'(0) > 0$ ist, folgt für $z = 0$:

$$\Phi'(0) = \frac{2}{\mathcal{N}''_f(w)}.$$

Dann ist nach dem Satz von Koebe, Satz 3.2.10, ein Kreis um w mit Radius

$$\left| \frac{1}{2\mathcal{N}''_f(w)} \right|$$

in U enthalten.

Man kann noch etwas mehr aussagen. Es gilt:

$$\mathcal{N}''_f(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)} + \frac{f(z)f'''(z)}{f'^2(z)} - 2\frac{f(z)f''^2(z)}{f'^3(z)}.$$

Da $f(w) = 0$ und $f'(w) \neq 0$ ist, folgt:

$$\mathcal{N}''_f(w) = \frac{f''(w)}{f'(w)}.$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und analog zum Beweis von Korollar 4.2.3 folgt:

$$\begin{aligned} |\mathcal{N}''_f(w)| &= \frac{|p(w) + 2p'(w) + p''(w)|}{|p(w) + p'(w)|} \\ &\leq \frac{1 + \frac{R_2}{|w|}}{1 - \frac{R_2}{|w|}}. \end{aligned}$$

Es folgt $D(w, r) \subset U$, falls r die Ungleichung

$$r < \frac{1 - \frac{R_2}{|w|}}{2 \left(1 + \frac{R_2}{|w|}\right)}$$

erfüllt. Diese Ungleichung impliziert die Behauptung. ☹

Bemerkung 5.2.2

Für die spätere Anwendung sind zwei Radien von besonderem Interesse. Für $|w| \geq 1,1R_2$ gilt $D(w, 0,0115) \subset U(w)$ sowie $D(w, 0,45) \subset U(w)$ für $|w| \geq 19R_2$.

5.3 Beweis von Satz 5.1.1

Beweis von Satz 5.1.1 Wir verwenden eine Folgerung aus dem Minimumprinzip, siehe 3.2.8. Seien dazu $v \in \mathbb{C}$ mit $|v| < 0,0115$ und $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{15(1+|e^v|)} \min_{|u|=|v|} |e^u - 1|\right)$. Weiter sei

$$k_{0_1} := \left[\max \left\{ \frac{R_p^2 \left(\left(1 + \frac{1}{R_p}\right)^d - 1 \right)^2}{2\pi\varepsilon^2}, \frac{R_p}{\varepsilon(1-\varepsilon)\pi}, \frac{(1+|v|)^d - 1}{2\pi\varepsilon}, \frac{1,1R_2}{2\pi} \right\} + \frac{d}{4} \right] \quad (5.3)$$

und $k > k_{0_1}$. Beachte, dass durch diese Wahl $\sqrt{|y_k|} > R_p > 1$ ist. Wir setzen $z_k + v$ in die Funktion $f(z) = p(z)e^z - 1$ ein und erhalten die Gleichung:

$$f(z_k + v) = \frac{p(z_k + v)}{(iy_k)^d} e^v - 1,$$

wobei wir $e^{z_k} = e^{-\ln(y_k) - 2i\pi k + i \operatorname{sgn}(-k) \frac{d\pi}{2}} = (iy_k)^{-d}$ verwenden. Wir zeigen, dass der Bruch $\frac{p(z_k + v)}{(iy_k)^d}$ für $|z_k| \rightarrow \infty$ gegen 1 strebt, gleichmäßig in v , und folgern daraus, dass $f(z_k)$ gegen Null streben muss. Wir erweitern den Bruch um $p(z_k)$ und z_k^d und erhalten das Produkt:

$$\begin{aligned} \frac{p(z_k + v)}{(iy_k)^d} &= \frac{p(z_k + v)}{p(z_k)} \frac{p(z_k)}{z_k^d} \frac{z_k^d}{(iy_k)^d} \\ &= \frac{(z_k + v)^d}{(z_k)^d} \left(\frac{1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell (z_k + v)^{\ell-d}}{1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d}} \right) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d} \right) \left(1 - i \frac{x_k}{y_k} \right)^d \\ &= \left(1 + \frac{v}{z_k} \right)^d \left(1 + \frac{\sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell ((z_k + v)^{\ell-d} - z_k^{\ell-d})}{1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d}} \right) \left(1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d} \right) \left(1 - i \frac{x_k}{y_k} \right)^d. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Durch diese Gleichungskette sehen wir ein, dass $\frac{p(z_k + v)}{(iy_k)^d}$ die Gestalt $1 + \varphi(v)$ annimmt, mit geeigneter Funktion φ . Wir erhalten damit:

$$f(z_k + v) = (1 + \varphi(v)) e^v - 1.$$

Wir können folgern:

$$f(z_k) = \varphi(0). \quad (5.5)$$

Wir zeigen, dass $\varphi(v)$ für $|z_k| \rightarrow \infty$ gegen Null strebt, gleichmäßig in v . Dazu schätzen wir die einzelnen Faktoren ab.

Weil $|z_k| > 1$ und $|v| < 1$ sind, folgt für den ersten Faktor:

$$\begin{aligned} \left| 1 + \frac{v}{z_k} \right|^d &= \left| 1 + \sum_{\ell=1}^d \binom{d}{\ell} \left(\frac{v}{z_k} \right)^\ell \right|^d \\ &\leq 1 + \frac{(1 + |v|)^d - 1}{|z_k|} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wegen $\left| \frac{x_k}{y_k} \right| = \frac{\ln|y_k|}{|y_k|} \leq \frac{1}{\sqrt{|y_k|}} < 1$, folgt analog für den vierten Faktor:

$$\begin{aligned} \left| 1 - i \frac{x_k}{y_k} \right|^d &\leq 1 + \sum_{\ell=1}^d \binom{d}{\ell} \left| -i \frac{x_k}{y_k} \right|^\ell \\ &\leq 1 + \frac{R_p}{\sqrt{|y_k|}} \sum_{\ell=1}^d \binom{d}{\ell} \frac{1}{R_p^\ell} \\ &\leq 1 + \frac{R_p \left(\left(1 + \frac{1}{R_p} \right)^d - 1 \right)}{\sqrt{|y_k|}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Für die Abschätzung der verbleibenden zwei Faktoren erinnern wir an den Satz 3.2.11 beziehungsweise an die Definition von $R_q := \max \left\{ 1, \sum_{\ell=1}^{d_q-1} b_\ell \right\}$, wobei $q(z) = \sum_{\ell=1}^{d_q} b_\ell z^\ell$ ein komplexes Polynom vom Grad d_q sei. Für den dritten Faktor folgt unmittelbar aus $|z_k| > 1$ und der Definition von R_p :

$$\left| 1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d} \right| \leq 1 + \frac{R_p}{|z_k|}. \quad (5.8)$$

5 Startpunkte in $D(0, \mathcal{R})^C$

Weil $|z_k| > \frac{R_p}{\varepsilon}$ ist, folgt aus der inversen Dreiecksungleichung:

$$\left| 1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d} \right| \geq 1 - \frac{R_p}{|z_k|} \geq 1 - \varepsilon.$$

Da $|x_k| > 1$ ist, gilt $\frac{1}{|z+w|} < \frac{1}{|y_k|}$. Wir erhalten somit für den zweiten Faktor:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell (z_k + v)^{\ell-d}}{1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d}} \right| &\leq 1 + \left| \frac{\sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell (z_k + v)^{\ell-d} - \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d}}{1 + \sum_{\ell=1}^{d-1} a_\ell z_k^{\ell-d}} \right| \\ &\leq 1 + \frac{\frac{R_p}{|y_k|} + \frac{R_p}{|z_k|}}{1 - \varepsilon} \\ &\leq 1 + \frac{1}{|y_k|} \frac{2R_p}{1 - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nach Wahl von k sind die einzelnen Faktoren von (5.4) wegen der Abschätzungen (5.6), (5.7), (5.8) und (5.9) kleiner als $1 + \varepsilon$. Aus der Beziehung (5.5) folgt

$$\begin{aligned} |\varphi(v)| &\leq (1 + \varepsilon)^4 - 1 \\ &\leq 15\varepsilon. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Insbesondere haben wir

$$\begin{aligned} |\varphi(0)| &\leq (1 + \varepsilon)^3 - 1 \\ &\leq 8\varepsilon. \end{aligned}$$

gezeigt. Es gilt wegen (5.10) und nach Wahl von ε :

$$\begin{aligned} |f(z_k + v)| &= |(1 + \varphi(v)) e^v - 1| \\ &\geq |e^v - 1| - |\varphi(v) e^v| \\ &\geq \min_{|u|=\delta} |e^u - 1| - |\varphi(v) e^v| \\ &\geq \min_{|u|=\delta} |e^u - 1| - 15\varepsilon |e^v| \\ &> 15\varepsilon. \end{aligned}$$

Nach Minimumprinzip für beschränkte Gebiete, Korollar 3.2.8, existiert somit eine Nullstelle von f in $D(z_k, |v|) \subset D(z_k, 0,0115)$. Der Index k ist so gewählt, dass $|z_k| > 1,1R_1$ ist. Somit gilt nach Satz 5.2.1 beziehungsweise der anschließenden Bemerkung:

$$D(z_k, |v|) \subset U,$$

was den Beweis abschließt. ☹️

6 Existenz einer invarianten und unbeschränkten Kurve

6.1 Motivation

In diesem Kapitel wird die Lage der unmittelbaren Einzugsgebiete beschrieben. Der Hauptsatz dieses Abschnittes sagt aus, dass das unmittelbare Einzugsgebiet eines betragslich großen und superattraktiven Fixpunktes der Newtonfunktion \mathcal{N}_f von der Funktion $f(z) = p(z)e^z - 1$ in einem horizontalen Streifen liegt. Wir werden weiter zeigen, dass in diesem unmittelbaren Einzugsgebiet so eine Kurve liegt, dass für alle z aus der Spur dieser Kurve die Differenz der Imaginärteile des Fixpunktes w und z kleiner als eine Konstante ist. Dies impliziert, dass alle unmittelbaren Einzugsgebiete von betragslich großen superattraktiven Fixpunkten in einem horizontalen Streifen liegen.

Rückert und Schleicher haben gezeigt, dass die unmittelbaren Einzugsgebiete attraktiver Fixpunkte von Newtonfunktionen ganzer Funktionen eine unbeschränkte Kurve enthalten, vergleiche [RS07, Theorem 2.2]. Jankowski betrachtet in seiner Dissertation [Jan96] das Newtonverfahren von Funktionen der Gestalt $f(z) = R(z)e^z - 1$, wobei R eine rationale Funktion ist. Er hat unter anderem gezeigt, dass in dem unmittelbaren Einzugsgebiet von einem betragslich großen und superattraktiven Fixpunkt eine invariante Kurve existiert, die „im Realteil“ nach $+\infty$ strebt. Dies gilt insbesondere für betragslich große und superattraktive Fixpunkte der Newtonfunktion von $f(z) = p(z)e^z - 1$. Wir zeigen hier, dass diese Kurve ein Urbild „links“ von diesem Fixpunkt hat und das Urbild in diesem landet. Somit haben wir eine invariante Kurve im unmittelbaren Einzugsgebiet gefunden, die sich „im Realteil“ von $-\infty$ nach $+\infty$ erstreckt. Wir formulieren nun die Aussage präzise in dem folgenden Satz.

Satz 6.1.1

Es existiert ein $\mathcal{R} > 0$ derart, dass für alle Nullstellen w von f mit $|w| > \mathcal{R}$ eine invariante Kurve γ in $U(w)$ existiert, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ ein $z \in \text{Spur}(\gamma)$ existiert mit $\text{Re}(z) = x$. Darüber hinaus existiert ein von w unabhängiges $C > 0$, sodass für alle $z \in \text{Spur}(\gamma)$ gilt:

$$|\text{Im}(w - z)| < C.$$

Wir zeigen dies in drei Schritten. Ist w eine Nullstelle, wie oben gefordert, so zeichnen wir in Abschnitt 6.3 zunächst die Konstruktion von Jankowski in [Jan96, Abschnitt 3.3.5] nach und zeigen damit, dass es eine Kurve $\gamma : [0, \infty) \rightarrow U(w)$ „rechts von w “ mit $\gamma(0) = w$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{Re}(\gamma(t)) = +\infty$ gibt. Im zweiten Schritt konstruieren wir dann ein Urbild dieser Kurve „links von w “, siehe Abschnitt 6.5. Den Zusatz beweisen wir in Abschnitt 6.4.

Bevor wir uns der Vorbereitung widmen, diskutieren wir noch den Einsatz von Satz 5.2.1. Dieser besagt, dass das unmittelbare Einzugsgebiet eines superattraktiven Fixpunktes mit einem Betrag größer als eine gewisse Schranke, welches keine freien kritischen Punkte enthält, einen gewissen Kreis um diesen enthält. Wir diskutieren, warum der Satz 5.2.1 außerhalb eines Kreises um die 0 für jeden Fixpunkt anwendbar ist. Denn a priori ist nicht klar, warum die Voraussetzungen ab einer gewissen Schranke für alle Fixpunkte erfüllt sein sollte. Zunächst folgt aus Satz 3.2.11, dass die Nullstellen von f' oder f'' in $D(0, R_2)$ liegen. Deshalb sind die Fixpunkte mit einem Betrag größer als R_2 , siehe (4.10), superattraktiv. Haben wir gezeigt, dass das unmittelbare Einzugsgebiet eines Fixpunktes w eine im Imaginärteil beschränkte Kurve enthält, die sich im Realteil von $-\infty$ nach $+\infty$ erstreckt, so können die unmittelbaren Einzugsgebiete der Fixpunkte, die im Betrag größer sind als w , keinen freien kritischen Punkt enthalten. Der Grund ist der, dass dieses Gebiet anderenfalls diese Kurve schneiden müsste, was jedoch nicht sein kann, da die Einzugsgebiete unterschiedlicher Fixpunkte disjunkt sind.

6.2 Vorbereitung

Nach dem vorigen Kapitel wissen wir, dass die Abbildungsvorschrift der Newtonfunktion von f in der folgenden Gestalt geschrieben werden kann:

$$\mathcal{N}_f(z) = z - 1 + \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} + \frac{e^{-z}}{z^d} \frac{1}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}}.$$

Weiter benötigen wir, dass die Newtonfunktion in gewissen Bereichen lokal injektiv ist. Im nachfolgenden Lemma geben wir Bereiche an, in denen die Newtonfunktion sicher lokal injektiv ist. Wir werden dieses Lemma später dazu verwenden, die Existenz des Urbildes der invarianten Kurve zu beweisen.

Lemma 6.2.1

Es existiert ein $\mathcal{R} > 0$, sodass die Newtonfunktion eingeschränkt auf

$(\mathbb{H}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}^l \cup \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\varepsilon}}^r) \cap D(0, \mathcal{R})^C$ lokal injektiv ist.

Beweis Wir müssen zeigen, dass \mathcal{N}'_f keine Nullstellen in $(\mathbb{H}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}^l \cup \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\varepsilon}}^r) \cap D(0, \mathcal{R})^C$ hat. Weil die Funktion f'' in $D(0, \mathcal{R})^C$ keine Nullstellen hat, genügt es wegen

$$\mathcal{N}'_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2}$$

zu zeigen, dass auch f in diesem Bereich keine Nullstellen hat. Wir zeigen die äquivalente Aussage, dass alle Nullstellen von f , die betragsmäßig größer als $\varepsilon^{-1}R_p$ sind, in dem Streifen $\mathbb{H}_{\Gamma_{1+\varepsilon}}^r \cap \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\varepsilon}}^l$ liegen. Für eine solche Nullstelle z von f gilt:

$$1 = p(z)e^z = \frac{p(z)}{z^d} e^z z^d.$$

Wegen $\left| \frac{p(z)}{z^d} \right| = \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right|$, siehe Definition 3.6.4, folgt:

$$\left| \frac{p(z)}{z^d} \right| = K(z).$$

Wir erhalten mit $a_d = 1$:

$$\begin{aligned} |K(z) - 1| &= \left| \left| \frac{p(z)}{z^d} \right| - 1 \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^d a_k z^{k-d} - 1 \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{d-1} |a_k| |z|^{k-d} \\ &= |z|^{-1} \sum_{k=1}^{d-1} |a_k| \\ &\leq \frac{R_p}{|z|} \\ &\leq \frac{R_p}{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

Und damit gilt für eine Nullstelle z von f :

$$1 - \frac{R_p}{\mathcal{R}} \leq K(z) \leq 1 + \frac{R_p}{\mathcal{R}}.$$

Weil $\mathcal{R} > \frac{R_p}{\varepsilon}$ ist, folgt die Behauptung. \blacksquare

6.3 Kurve von einer Nullstelle nach $+\infty$

In diesem Abschnitt zeichnen wir die Konstruktion einer Kurve $\gamma : [0, 1) \rightarrow U(w)$ mit $\gamma(0) = w$ und $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = +\infty$ von Jankowski nach, vergleiche [Jan96, Abschnitt 3.3.5].

Seien $\varepsilon \in \left(0, \frac{3}{20\sqrt{13}}\right)$, $R_3 := \frac{110d+2R_1}{(1-\varepsilon)}$, $\delta := 1 - e^{-0,1}(1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{0,112\varepsilon}{2}\right)^{-1}$ und

$$k_{0_2} := \left\lceil \frac{\left(\sqrt{\sqrt{2}R_2} + \frac{1}{2}\right)^2}{2\pi} + \frac{d}{4} \right\rceil. \quad (6.1)$$

Sei $w \in \mathbb{C}$ ein superattraktiver Fixpunkt von \mathcal{N}_f derart, dass für alle $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ die Beträge $|w|, |w + t| > R_4 := \max\{R_3, 19R_1, 2R_2, |z_{k_{0_2}}|\}$ sind und das unmittelbare Einzugsgebiet $U(w)$ keinen freien kritischen Punkt enthält. Es sei daran erinnert, dass \mathcal{N}_f keine asymptotischen Werte besitzt, vergleiche Lemma 4.1.11. Die Bedingung $|w| > |z_{k_{0_2}}|$ benötigen wir für den nächsten Abschnitt.

Solch ein Fixpunkt existiert. Denn es gibt maximal $\text{grad}(p'' + 2p' + p) = d$ freie kritische Punkte von \mathcal{N}_f , vergleiche Lemma 4.1.10. Unter den $d + 1$ betraglich nächstgrößeren Fixpunkten muss es also einen geben, dessen unmittelbares Einzugsgebiet keinen freien kritischen Punkt enthält, da $U(u) \cap U(v) = \emptyset$ für verschiedene Fixpunkte u und v .

Nach Proposition 4.2.4, genauer (4.11), ist

$$\mathcal{N}_f(w + 0,4835) = w + 0,10012 \dots + \mathcal{O}\left(\frac{1}{w+t}\right). \quad (6.2)$$

Der Radius R_4 beziehungsweise R_3 ist gerade so gewählt, dass der Fehlerterm betraglich kleiner als 10^{-2} ist. Nach der Wahl von R_4 folgt aus Satz 5.2.1:

$$\mathcal{N}_f(w + 0,4385) \in D(w, 0,112) \subset U(w).$$

Es folgt: $|\mathcal{N}_f(w + 0,4385)| \geq |w| - 0,112$. Wir zeigen, dass $\mathcal{N}_f(w + 0,4385)$ rechts von Γ_1

ist. Nach Bemerkung 3.6.3 genügt es, das Folgende zu zeigen:

$$\left| \frac{\exp(-\mathcal{N}_f(w + 0,4385))}{(\mathcal{N}_f(w + 0,4385))^d} \right| < 1.$$

Wegen (6.2) und der Wahl von R_3 gilt sogar:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{N}_f(w + 0,4385)) \geq \operatorname{Re}(w) + 0,1.$$

Aus dieser Abschätzung und einer Erweiterung um w^d ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp(-\mathcal{N}_f(w + 0,4385))}{(\mathcal{N}_f(w + 0,4385))^d} \right| &\leq \left| \frac{\exp(-w - 0,1)}{(|w| - 0,122)^d} \right| \\ &\leq e^{-0,1} \left| \frac{\exp(-w)}{w^d} \right| \left(\frac{|w|}{|w| - 0,112} \right)^d. \end{aligned}$$

Die Funktion $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $d \mapsto \left(1 - \frac{0,112\varepsilon}{2d}\right)^{-d}$ ist monoton fallend. Aus dieser Monotonie und den beiden Ungleichungen $\left| \frac{\exp(-w)}{w^d} \right| \leq (1 + \varepsilon)$ und $|w| > \frac{R_1}{\varepsilon} \geq \frac{2d}{\varepsilon}$ folgt:

$$\left| \frac{\exp(-\mathcal{N}_f(w + 0,4385))}{(\mathcal{N}_f(w + 0,4385))^d} \right| \leq e^{-0,1}(1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{0,112\varepsilon}{2}\right)^{-1} < 1, \quad (6.3)$$

weil $\varepsilon < \frac{3}{20\sqrt{13}}$. Es folgt $\mathcal{N}_f(w + 0,4385) \in \mathbb{H}_{\Gamma_1}^r$.

Wegen $\delta = 1 - e^{-0,1}(1 + \varepsilon) \left(1 - \frac{0,112\varepsilon}{2}\right)^{-1}$ folgt dann aus (6.3) und Lemma 3.6.5, dass $\mathcal{N}_f(w + 0,4385) \in \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^r$. Es existiert eine Kurve $\tilde{\gamma}_0 : [0,1] \rightarrow U(w)$ mit

$$\tilde{\gamma}_0(0) = \mathcal{N}_f(w + 0,4385) =: s_0 \quad \text{und} \quad \tilde{\gamma}_0(1) = w + 0,4385 =: s_1.$$

Diese ist realisierbar als Vereinigung der beiden Strecken $[\mathcal{N}_f(w + 0,4385), w + 0,10012]$ und $[w + 0,10012, w + 0,4385]$. Es gilt $\operatorname{Spur}(\tilde{\gamma}_0) \subset \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^r$.

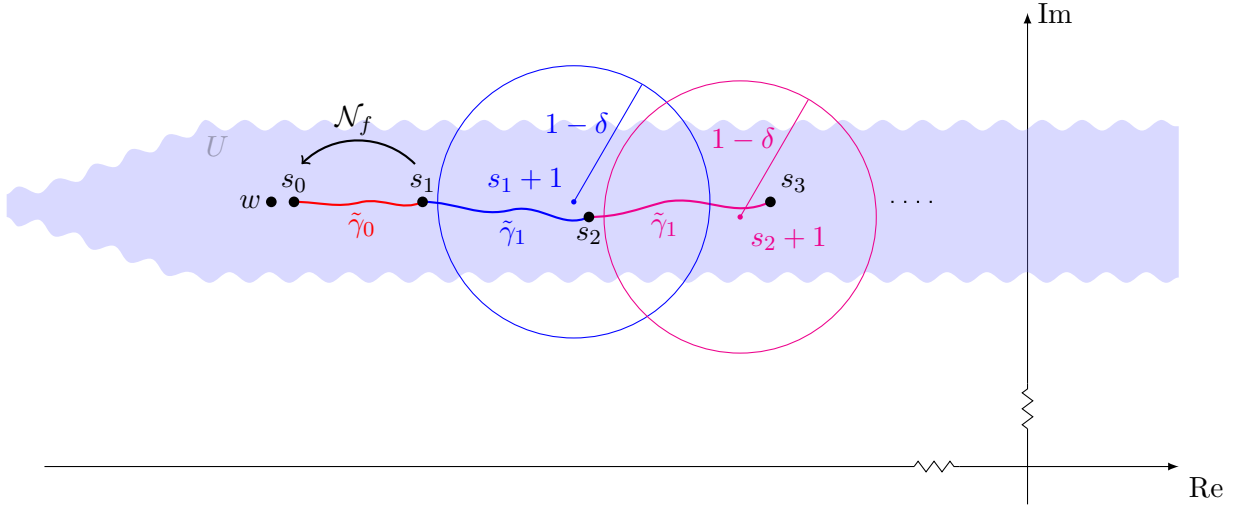


Abbildung 6.1: Visualisierung der Anwendung des Satzes von Rouché

Wir möchten nun diese Kurve durch ihr Urbild „nach rechts“ fortsetzen. Dazu verwenden wir den Satz von Rouché. Sei $z \in D(0, \mathcal{R})^C \cap \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^r$. Dann gilt $\left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| \leq 1 - \delta$. Es folgt aus der Darstellung (4.5) und den Abschätzungen (4.8) und (4.9) für $z \in \partial D(s_1 + 1, 1 - \frac{\delta}{2})$:

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{N}_f(z) - s_1 - (z - (s_1 + 1))| &= |\mathcal{N}_f(z) - (z - 1)| \\
 &\leq \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| \left| \frac{\sum_{n=0}^{d-1} (a_n + (n+1)a_{n+1})z^{n-d}}{1 + \sum_{n=0}^{d-1} (a_n + (n+1)a_{n+1})z^{n-d}} \right| \\
 &\quad + \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| + \left| \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} \right| \\
 &\leq (1 - \delta) \frac{\varepsilon}{3} + 1 - \delta + \frac{\varepsilon}{3} \\
 &< 1 - \frac{\delta}{2} \\
 &= |z - (s_1 + 1)|. \tag{6.4}
 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt für $\varepsilon < \frac{3}{20\sqrt{13}}$, was eine Rechnung mit der Definition von δ zeigt. Es existiert nun nach dem Satz von Rouché, vergleiche Satz 3.2.4, ein Punkt $s_2 \in \mathbb{D}(s_1 + 1, 1 - \frac{\delta}{2})$ mit $\mathcal{N}_f(s_2) = s_1$. Nach Lemma 6.2.1 ist \mathcal{N}_f in einer Umgebung von s_1 eindeutig umkehrbar. Wir fixieren diesen Zweig der Umkehrabbildung und finden mit diesem ein Urbild der Kurve $\tilde{\gamma}_0$. Wir bezeichnen dieses Urbild mit $\tilde{\gamma}_1$ und es gilt: $\mathcal{N}_f(\text{Spur}(\tilde{\gamma}_1)) = \text{Spur}(\tilde{\gamma}_0)$. Wäre s_1 nicht der Endpunkt von $\tilde{\gamma}_1$, so erhielten wir wegen

(6.4) einen Widerspruch zum Satz von Rouchè, Satz 3.2.4. Es sei noch angemerkt, dass die Konstruktion für alle Punkte aus Spur($\tilde{\gamma}_0$) möglich ist.

Dieses Verfahren setzen wir rekursiv fort und erhalten für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{N}_f(s_{k+1}) = s_k \quad \text{und} \quad \mathcal{N}_f(\text{Spur}(\tilde{\gamma}_{k+1})) = \text{Spur}(\tilde{\gamma}_k).$$

Durch Vorwärtsiteration von $\tilde{\gamma}_0$ unter \mathcal{N}_f finden wir eine Folge $(\tilde{\gamma}_{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ von Kurven mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\gamma}_{-n}(0) = w$. Wir vereinigen beide Konstruktionen zu einer Kurve $\gamma := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{\gamma}_n$, die von der Nullstelle w aus im Realteil nach $+\infty$ strebt. Nach Konstruktion ist diese Kurve vollständig im unmittelbaren Einzugsgebiet von w enthalten.

6.4 Kurve von beschränktem Imaginärteil

Wir möchten zeigen, dass γ in einem horizontalen Streifen von endlicher Höhe enthalten ist. Dazu zeigen wir die stärkere Behauptung, dass die Reihe über die Differenzen der Imaginärteile der „Stützstellen“ s_j , wie in der Konstruktion angegeben, endlich ist. Zunächst zeigen wir dies für die angegebenen Stützstellen. Da diese Methode für beliebige Spurpunkte der Kurve von s_0 nach s_1 funktioniert, erhalten wir eine gleichmäßige obere Schranke an die Differenzen und somit die gewünschte stärkere Behauptung. Wir bedienen uns der Idee von Jankowski in [Jan96, Abschnitt 3.3.5]. Wir führen dessen Überlegungen aber weiter aus, da wir an expliziten Schranken beziehungsweise Werten interessiert sind. Sei dazu $s_0 \in \text{Spur}(\tilde{\gamma}_0)$ und $s_j =: r_j + it_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$ wie in Abschnitt 6.3 konstruiert.

Satz 6.4.1

Es gilt:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\text{Im}(s_j) - \text{Im}(s_{j-1})| < \infty.$$

Beweis von Satz 6.4.1 Wir unterteilen die Summe in eine bestimmte Partialsumme und die entsprechende Restsumme. In der Abschätzung der Partialsumme werden wir Abschätzungen aus der Konstruktion der Kurve γ nutzen. Für die Restsumme werden bessere Abschätzungen verwendet. Der erste Teil des Beweises leitet die letzteren

Abschätzungen her. Sei $k > k_{0_2} > \frac{\left(\sqrt{\sqrt{2}R_2 + \frac{1}{2}}\right)^2}{2\pi} - \frac{d}{4}$.

Für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $r_j \geq 0$ und $t_j > \left(\frac{2}{3}\varepsilon(1 - \varepsilon)\right)^{-\frac{1}{d}}$ ist nach Definition von $K(s_j)$, siehe

6 Existenz einer invarianten und unbeschränkten Kurve

Definition 3.6.4,

$$K(s_j) < \frac{2}{3}\varepsilon(1 - \varepsilon).$$

Es folgt aus der Darstellung (4.4):

$$|\mathcal{N}_f(s_j) - (s_j - 1)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{K(s_j)}{1 - \varepsilon} < \varepsilon$$

und damit

$$r_{j-1} = \operatorname{Re}(\mathcal{N}_f(s_j)) \geq r_j - (1 + \varepsilon). \quad (6.5)$$

Nach Konstruktion gilt für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$r_0 + \frac{\delta}{2}j \leq r_j \leq r_0 + 1 + \left(1 + \frac{\delta}{2}\right)j. \quad (6.6)$$

Sei $n \geq \left\lceil \frac{-2(r_0-1)}{\delta} \right\rceil =: N$. Wir weisen darauf hin, dass r_0 negativ ist. Dann folgt aus (6.6):

$$r_n \geq 1 > 0. \quad (6.7)$$

Aus (6.5) und (6.7) folgt somit für alle $\ell \in \mathbb{N}$:

$$r_{N+\ell} \geq r_N + \ell(1 - \varepsilon) \geq \ell(1 - \varepsilon). \quad (6.8)$$

Den dritten Summanden aus der Darstellung der Newtonfunktion (4.4) können wir analog zu (4.6) und (4.7) im Beweis von Proposition 4.2.1 abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{p'(s_j)}{p'(s_j) + p(s_j)} \right) \right| &\leq \left| \frac{p'(s_j)}{p'(s_j) + p(s_j)} \right| \\ &\leq \frac{\frac{d|t_j|}{|s_j|^2} + \frac{R_1(d-1)}{|s_j|^2}}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Aus der Beziehung $\mathcal{N}_f(s_j) = s_{j-1}$ folgt damit die Abschätzung der Summanden der

betrachteten Reihe:

$$|\operatorname{Im}(s_j) - \operatorname{Im}(s_{j-1})| = |\operatorname{Im}(s_j) - \operatorname{Im}(\mathcal{N}_f(s_j))| \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} &= |\operatorname{Im}(s_j - \mathcal{N}_f(s_j))| \\ &\leq \frac{1}{1-\varepsilon} \left(\frac{d|t_j|}{|s_j|^2} + \frac{R_1(d-1)}{|s_j|^2} + \frac{e^{-r_j}}{|s_j|^d} \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Nach Wahl von k_{0_2} gilt $|s_j| > R_2 > R_1$ und es folgt für $j < N$ die Ungleichung:

$$\frac{R_1}{|s_j|^2} \leq \frac{R_1}{R_1^2} \leq \frac{1}{R_1};$$

für $j \geq N$ folgt aus (6.8):

$$\frac{R_1}{|s_j|^2} \leq \frac{R_1}{|r_j|^2} \leq \frac{R_1}{(j-N)^2(1-\varepsilon)^2}. \quad (6.11)$$

Somit erhalten wir eine verallgemeinerte harmonische Reihe und rechnen aus:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{R_1(d-1)}{|s_j|^2} &\leq \frac{N(d-1)}{R_1} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{R_1(d-1)}{(j-N)^2(1-\varepsilon)^2} \\ &\leq \frac{N(d-1)}{R_1} + \frac{R_1(d-1)}{(1-\varepsilon)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{N(d-1)}{R_1} + \frac{R_1(d-1)\pi^2}{6(1-\varepsilon)^2} =: C_1. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Wir verwenden $s_j \in D(0, R_1)^C \cap \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^r$ ist. Es folgt mit der geometrischen Reihe und aus (6.8):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-r_j}}{|s_j|^d} &\leq \sum_{j=1}^N \left| \frac{e^{-s_j}}{s_j^d} \right| + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{e^{-r_j}}{|r_j|^d} \\ &\leq \sum_{j=1}^N (1-\delta) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{e^{-r_j}}{|r_j|} \\ &\leq N(1-\delta) + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{e^{-(j-N)(1-\varepsilon)}}{(j-N)(1-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

In der Summe verschieben wir den Index und schätzen $\frac{e^{-j(1-\varepsilon)}}{j}$ durch $e^{-(1-\varepsilon)}$ ab. Wegen $\varepsilon < 1$ ist der letzte Ausdruck kleiner 1. Wir verwenden den Grenzwert der geometrischen

Reihe. Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-r_j}}{|s_j|^d} &\leq N(1 - \delta) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(e^{-(1-\varepsilon)})^j}{(1 - \varepsilon)} \\ &\leq N(1 - \delta) + \frac{e^{-(1-\varepsilon)}}{(1 - \varepsilon)(1 - e^{-(1-\varepsilon)})} =: C_2. \end{aligned}$$

Es bleibt der erste Summand in (6.10) abzuschätzen. Wir schreiben mit Hilfe einer Teleskopsumme:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d|t_j|}{|s_j|^2} &\leq d \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|t_0| + |t_j - t_0|}{|s_j|^2} \\ &\leq d \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|t_0|}{|s_j|^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{|t_m - t_{m-1}|}{|s_j|^2}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

Die Differenz der Imaginärteile schätzen wir gegen den aus Abschnitt 4.2 bekannten Term ab. Es gilt:

$$\begin{aligned} |t_j - t_{j-1}| &= |\operatorname{Im}(s_j) - \operatorname{Im}(s_{j-1})| \\ &= |\operatorname{Im}(s_j - \mathcal{N}_f(s_j))| \\ &= \left| \operatorname{Im} \left(1 - \frac{p'(s_j) + e^{-s_j}}{p(s_j) + p'(s_j)} \right) \right| \\ &= \left| \operatorname{Im} \left(\frac{p'(s_j) + e^{-s_j}}{p(s_j) + p'(s_j)} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{p'(s_j) + e^{-s_j}}{p(s_j) + p'(s_j)} \right|. \end{aligned}$$

Sei $j > N$ und damit $\operatorname{Re}(s_j) > 0$. Es sei daran erinnert, dass $|s_j| > R_2$ ist. Mit (4.8) und (4.9) aus dem Beweis von Proposition 4.2.1 schätzen wir den letzten Ausdruck ab und erhalten

$$\begin{aligned} |t_j - t_{j-1}| &\leq \left| \frac{p'(s_j) + e^{-s_j}}{p(s_j) + p'(s_j)} \right| \\ &\leq \frac{1}{|s_j|} \frac{2d - 1 + 1}{(1 - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Wie in (6.11) folgt für $j > N$:

$$|t_j - t_{j-1}| \leq \frac{2d}{(j - N)(1 - \varepsilon)^2}. \quad (6.14)$$

Den zweiten Summanden in (6.13) teilen wir zunächst in zwei Summen auf und verwenden dann die grösste uns zur Verfügung stehende Ungleichung $|t_m - t_{m-1}| < 1$. Diese Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass nach Konstruktion $s_m \in D(s_{m-1} + 1, 1 - \frac{\delta}{2})$. Es gilt wegen $|s_j| > R_2$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{|t_m - t_{m-1}|}{|s_j|^2} &= \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^j \frac{|t_m - t_{m-1}|}{|s_j|^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{|t_m - t_{m-1}|}{|s_j|^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^N \frac{j}{R_2^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{|s_j|^2} \left(\sum_{m=1}^N |t_m - t_{m-1}| + \sum_{m=N+1}^j |t_m - t_{m-1}| \right). \end{aligned}$$

Wiederum verwenden wir $|t_m - t_{m-1}| < 1$. Für $j > N$ folgt aus (6.8) die Abschätzung $|s_j| > (j - N)(1 - \varepsilon)$, welche wir für die zweite Summe verwenden. Für den dritten Summanden verwenden wir zusätzlich (6.14). Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{|t_m - t_{m-1}|}{|s_j|^2} &\leq \frac{1}{R_2^2} \sum_{j=1}^N j + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{|s_j|^2} \left(N + \sum_{m=N+1}^j \frac{2d}{(m - N)(1 - \varepsilon)^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{R_2^2} \frac{N(N+1)}{2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{(j - N)^2(1 - \varepsilon)^2} \left(N + \sum_{m=1}^{j-N} \frac{2d}{m(1 - \varepsilon)^2} \right) \\ &\leq \frac{N(N+1)}{2R_2^2} + \frac{N}{(1 - \varepsilon)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + \frac{2d}{(1 - \varepsilon)^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \sum_{m=1}^j \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Es gilt $\sum_{m=1}^j \frac{1}{m} = 1 + \sum_{m=2}^j \frac{1}{m} \leq 1 + \ln(j)$. Mit $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$ erhalten wir:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j \frac{|t_m - t_{m-1}|}{|s_j|^2} = \frac{N(N+1)}{2R_2^2} + \frac{N\pi^2}{6(1 - \varepsilon)^2} + \frac{2d}{(1 - \varepsilon)^4} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 + \ln(j)}{j^2} =: C_4$$

Für numerische Berechnungen ist die Abschätzung $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 + \ln(j)}{j^2} < 2,5$ geeignet.

Die erste Reihe in (6.13) schätzen wir analog zu (6.12) ab:

$$d|t_0| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|s_j|^2} \leq \frac{Nd|t_0|}{R_1^2} + \frac{d|t_0|\pi^2}{6(1-\varepsilon)^2} =: C_3.$$

All diese Reihen sind absolut konvergente Reihen. Wir erhalten insgesamt für die im Satz betrachtete Reihe absolute Konvergenz und diese ist kleiner als die Summe über die C_k 's. Wir erhalten also:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\operatorname{Im}(s_j) - \operatorname{Im}(s_{j-1})| \leq \sum_{k=1}^4 C_k < \infty. \quad \text{☕}$$

Wir haben gezeigt, dass die Kurve γ in einem horizontalen Streifen von endlicher Höhe enthalten ist. Für den späteren Gebrauch setzen wir

$$C := \sum_{k=1}^4 C_k. \quad (6.15)$$

6.5 Kurve von einer Nullstelle nach $-\infty$

Wir werden in diesem Abschnitt beweisen, dass die Kurve γ aus dem Abschnitt 6.3 ein Urbild besitzt, welches im Realteil nach $-\infty$ strebt. Die Beweisidee ist die Folgende, vergleiche Abbildung 6.2. Wir zeigen zunächst, dass das Urbild γ^{-1} von γ in $\mathbb{H}_{1-\delta}^l$ ist. Dies geschieht per Widerspruch zur Argumentation am Ende des Abschnittes 6.3. Das heißt, dass ein zweites Urbild von s_k bzw. s_j nicht in der Nähe von γ liegen kann. Den Abschluss liefert dann die Einsicht, dass $\mathcal{N}_f^{-1}(\gamma) \cap \Psi_{\pm\pi} \cap \mathbb{H}_{1-\delta}^l = \emptyset$ ist. Dazu zeigen wir, dass das Bild von $z \in \Psi_{\pm\pi}$ in einem nach links offenen Winkelraum mit Öffnungswinkel $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ und Spitze in z ist und dieser in $\mathbb{H}_{1-\delta}^l$ ist.

Sei w die Nullstelle aus dem Abschnitt 6.3 und U deren unmittelbares Einzugsgebiet. Dann wissen wir, dass ein $\ell \in \mathbb{Z}$ existiert mit $\operatorname{Im}(w) + d \arg(w) \approx 2\pi\ell$. Sei dieses ℓ fest gewählt.

Da die Newtonfunktion $\mathcal{N}_f|_U$ eine 2-zu-1 Abbildung ist, siehe Bemerkung 4.3.2, und $\operatorname{Spur}(\gamma) \subset \mathcal{N}_f^{-1}(\gamma)$ ist, existiert ein weiteres Urbild von γ in U , welches wir mit γ^{-1} bezeichnen.

Angenommen, das Urbild γ^{-1} erstreckt sich nach $\mathbb{H}_{1-\delta}^r$. Sei $j \in \mathbb{N}$ nun so groß, dass $s_j \in \mathbb{H}_{1-\delta}^r$ ist. Wegen $|\mathcal{N}_f(z) - s_j - (z - (s_j + 1))| \leq |z - (s_j + 1)|$ müssen dann die Urbilder von s_j in $D(s_j + 1, 1 - \frac{\delta}{2})$ sein, wobei δ wie in Abschnitt 6.3 sei. Das widerspricht aber dem am Ende des Abschnittes 6.3 ausgeführten Rouché-Argument, wo wir

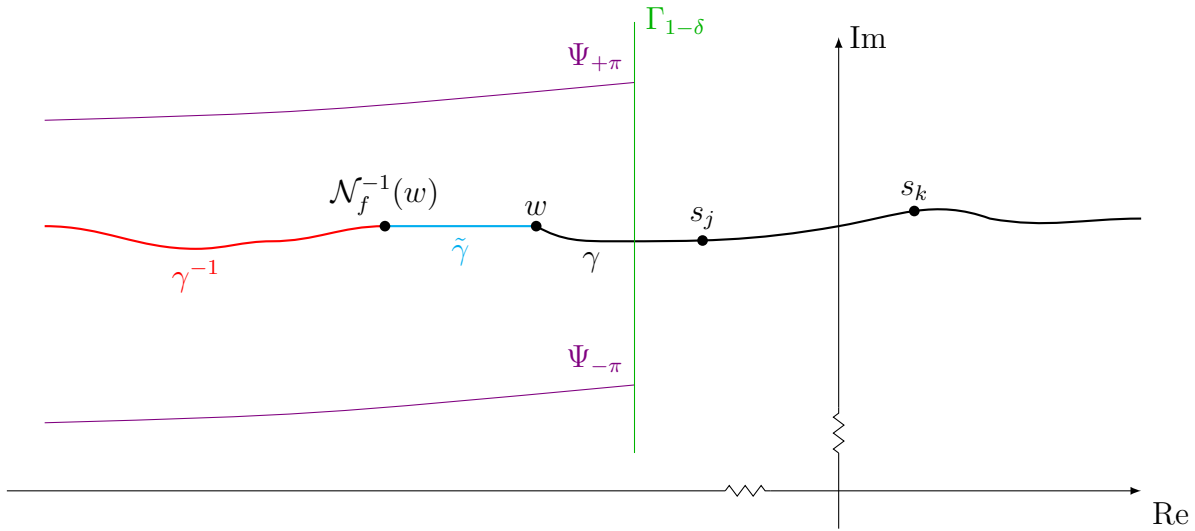


Abbildung 6.2: Skizze der Beweisidee

gezeigt haben, dass in $D(s_j + 1, 1 - \frac{\delta}{2})$ nur ein Urbild von s_j liegen kann. Somit ist das Urbild γ^{-1} eine Teilmenge von $\mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^l$.

Für die weiteren Überlegungen definieren wir für $\alpha \in [-\pi, \pi]$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Menge:

$$\Psi_{k,\alpha} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) + d \arg(z) = 2\pi k + \alpha \}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass γ^{-1} zwischen $\Psi_{\ell,+\pi}$ und $\Psi_{\ell,-\pi}$ liegt.

Sei $z \in \Psi_{\ell,\pm\pi} \cap \mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^l$. Wir zeigen, dass das Bild von $z \in \Psi_{\pm\pi}$ in einem nach links offenen Winkelraum mit Öffnungswinkel $\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ und Spitze in z ist und dieser in $\mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^l$ ist.

Es gilt $e^{i(\text{Im}(z)+d \arg(z))} = -1$. Es folgt:

$$\frac{e^{-z}}{z^d} = - \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| = -K(z).$$

Wir verwenden die Darstellung (4.5) der Newtonfunktion:

$$\mathcal{N}_f(z) = z - 1 + \frac{p'(z)}{p(z) + p'(z)} + \frac{e^{-z}}{z^d} \left(1 - \frac{\sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}} \right).$$

Wegen $|z| > R_2$ ist nach (4.8) der dritte Summand betragsmäßig kleiner ε .

Nach (4.9) ist

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}}{1 + \sum_{k=0}^{d-1} (a_k + (k+1)a_{k+1})z^{k-d}} \right| < \varepsilon$$

und damit ist der zweite Faktor im letzten Summanden betraglich größer als $1 - \varepsilon$. Es folgt wegen $K(z) > 1 - \delta$:

$$\operatorname{Re}(\mathcal{N}_f(z)) \leq \operatorname{Re}(z) - 1 - K(z)(1 - \varepsilon) + \varepsilon \leq \operatorname{Re}(z) - 1$$

und

$$|\operatorname{Im}(\mathcal{N}_f(z))| \leq |\operatorname{Im}(z)| + K(z)\varepsilon + \varepsilon.$$

Für die Steigung einer z und $\mathcal{N}_f(z)$ verbindenden Geraden g folgt somit:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{Im}(\mathcal{N}_f(z) - z)}{\operatorname{Re}(\mathcal{N}_f(z) - z)} \right| &\leq \frac{\varepsilon + K(z)\varepsilon}{1 + K(z) - K(z)\varepsilon - \varepsilon} \\ &\leq \frac{\varepsilon(1 + K(z))}{(1 - \varepsilon)(1 + K(z))} \\ &= \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \end{aligned}$$

Wählen wir in Lemma 3.6.7 $c := \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$ erhalten wir, dass auch $\mathcal{N}_f(z)$ in $\mathbb{H}_{\Gamma_{1-\delta}}^l$ liegt. Wir können somit schließen $\gamma^{-1} \cap \Psi_{\ell, \pm\pi} = \emptyset$. Die Pole von \mathcal{N}_f liegen in $D(0, R_2)$ liegen. Die Kurven $\Psi_{\ell, +\pi}$ und $\Psi_{\ell, -\pi}$ liegen in einem horizontalen Streifen liegen, welcher keine Pole enthält. Denn wegen $\ell > k_{0_2}$ folgt: $\min_{z \in \Psi_{\ell, \pm\pi}} \operatorname{Im}(z) > R_2$. Somit ist das Urbild γ^{-1} unbeschränkt. Es bleibt für γ^{-1} nur die Möglichkeit, sich im Realteil nach $-\infty$ zu erstrecken.

Weil der Fixpunkt w der einzige kritische Punkt in U ist, ist nach Bemerkung 4.3.2 $B : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, $B(z) = z^2$ das zu \mathcal{N}_f konjugierte Blaschke-Produkt. Für das Urbild von w folgt $(\mathcal{N}_f|_U)^{-1}(w) = \{w\}$. Also landet γ^{-1} in w . Die Verknüpfung von γ und γ^{-1} liefert die gewünschte Kurve und den Beweis von Satz 6.1.1.

7 Startpunkte in $D(0, \mathcal{R})$

7.1 Motivation

In diesem Kapitel beginnen wir mit den ersten Schritten zur Konstruktion der Menge \mathcal{S} der Startwerte. Wir unterteilen die Konstruktion in zwei wesentliche Segmente. Nach Bemerkung 4.3.2 besitzt die Newtonfunktion nur endlich viele mehrfache Nullstellen. Zusammen mit der Tatsache, dass es nur endlich viele freie kritische Punkte gibt, Lemma 4.1.10, impliziert Satz 4.3.5, dass es nur endlich viele unmittelbare Einzugsgebiete mit mehr als einem invarianten Zugang nach unendlich geben kann. Das heißt, dass die Nullstellen außerhalb eines gewissen Kreises einfach sind. Alle bis auf endlich viele der einfachen Nullstellen haben wir in Kapitel 5 mit jeweils nur einem Startwert approximiert. In diesem Kapitel werden wir die Startwerte für die restlichen, betraglich kleinen Nullstellen angeben.

7.2 Mindestbreite eines Zugangs nach ∞

Die Idee für die Startwerte der Newtonfunktion ist die Folgende:

Wir wissen aus Satz 4.1.8, dass jeder unmittelbare Einzugsbereich einer Nullstelle mindestens einen invarianten Zugang nach unendlich hat. Aus dem vorherigen Kapitel 6 wissen wir, dass für jede Nullstelle mit großem Betrag unter diesen einer ist, der eine Kurve enthält, die im Realteil nach ∞ strebt. Zusammen mit deren Urbild, welches im Realteil nach $-\infty$ strebt, erhielten wir eine invariante Kurve, deren Spurpunkte unter Iteration gegen diesen Fixpunkt strebt. Das impliziert, dass unmittelbare Einzugsgebiete von Fixpunkten mit kleinerem Betrag in einem horizontalen Streifen liegen müssen. Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass auch die Nullstellen mit kleinem Betrag einen nach rechts offenen Zugang nach ∞ haben. Wir benötigen darüber hinaus, dass dieser Zugang eine gewisse Mindestbreite besitzt, damit wir die Startpunkte der Menge $\mathcal{S}_{d,R}$ entsprechend platzieren können.

Wir werden zunächst zeigen, dass es einen Zugang nach ∞ geben muss, der eine gewisse Mindestbreite hat. Am Ende des Abschnittes werden wir dann zeigen, dass ein nach links geöffneter Zugang diese Bedingung nicht erfüllen kann und es somit einen nach rechts geöffneten Zugang geben muss. Im Beweis von Lemma 7.2.1 verwenden wir eine Idee von Deimling [Dei11] und im Beweis von Lemma 7.2.2 eine Idee von Hubbard,

Schleicher und Sutherland aus [HSS01].

Sei w ein Fixpunkt von \mathcal{N}_f mit $|w| < R_4$ und $U := U(w)$ dessen unmittelbare Einzugsgebiet. Zur Bestimmung einer unteren Schranke für die Breite eines Zugangs nach ∞ in U brauchen wir eine obere Schranke an den hyperbolischen Abstand eines Punktes $z \in U \cap D(0, R_4)^C$ und dessen Bild $\mathcal{N}_f|_U(z)$. Wir erinnern zunächst an die Konjugierte in der Einheitskreisscheibe, vergleiche Kapitel 4.3. Es existiert eine biholomorphe Abbildung $\Phi : \mathbb{D} \rightarrow U$, sodass $\Phi(0) = w$. Wir setzen weiter $B := \Phi^{-1} \circ \mathcal{N}_f|_U \circ \Phi$, wobei Φ dabei so normiert sei, dass $B(1) = 1$, vergleiche Absatz vor Lemma 4.3.3. Da \mathcal{N}_f eine eigentliche Funktion ist, ist auch B eigentlich. Nach Satz 3.3.4 ist B ein Blaschke-Produkt vom endlichen Grad $\text{grad}(B)$. Wir setzen noch $\lambda := B'(1)$.

Lemma 7.2.1

Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert eine invariante und unbeschränkte Kurve $\gamma : [0, 1) \rightarrow U$ im unmittelbaren Einzugsbereich U , sodass für alle $z \in \text{Spur}(\gamma)$ und $w := \mathcal{N}_f(z)$ gilt:

$$\rho_U(z, w) \leq \ln((1 + \varepsilon)B'(1)).$$

Beweis Nach dem Satz 3.5.3 existiert eine Umgebung V der 0 und eine konforme Abbildung $S : V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $S(0) = 1$ und $S'(0) = 1$, welche eine Lösung der Schröderschen Funktionalgleichung (3.1) ist. Dann existiert $\tau_0 \in \mathbb{R}$, $\tau_0 > 0$, sodass $[-\lambda\tau_0, 0] \subset V$ ist. Dann ist $S([-\tau_0, 0])$ das konforme Bild eines Geradenstücks in \mathbb{D} , welches radial in 1 landet. Dieses ist wegen der Schröderschen-Funktionalgleichung (3.1) invariant unter B . Die Vereinigung aller Iterierten $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^n(S([-\tau_0, 0]))$ ist das Bild einer unter B invarianten Kurve β , welche über das Intervall $[0, 1)$ parametrisiert sei. Wir werden zeigen, dass $\gamma := \Phi \circ \beta$ die gesuchte Kurve ist. Weil $\beta(t)$ für $t \rightarrow 1$ radial in 1 landet, existiert somit für alle Winkel $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ ein $t_\phi \in (t_0, 1)$, sodass das Endstück $\beta|_{(t_\phi, 1)}$ der Kurve β in dem nach links geöffneten Winkelraum $W_\phi := \{1 - re^{-i\varphi} \mid \varphi \in (-\phi, \phi), r \geq 0\}$ mit Spitze in 1 liegt. Wir fixieren zunächst ein $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Ein Punkt $\zeta \in \text{Spur}(\beta|_{(t_\phi, 1)})$ hat dann die Gestalt $\zeta = 1 - \delta$, wobei $\delta \in \mathbb{C}$. Wir berechnen nun den hyperbolischen Abstand von $1 - \delta$ und $B(1 - \delta)$. Dazu betrachten wir die Taylorreihe von B um den Entwicklungspunkt 1. Es ist

$$B(1 - z) = 1 - \lambda z + P(z),$$

wobei P das entsprechende Restglied mit $P(z) = \mathcal{O}(z^2)$ für $z \rightarrow 0$ ist. Mit der expliziten Darstellung des hyperbolischen Abstands in \mathbb{D} , siehe 3.4.6, folgt:

$$\begin{aligned} \rho(B(1-\delta), 1-\delta) &= \rho(1-\lambda\delta + P(\delta), 1-\delta) \\ &= \ln \left(\frac{\left| 1 - (1-\lambda\delta + P(\delta)) \overline{(1-\delta)} \right| + |1-\lambda\delta + P(\delta) - (1-\delta)|}{\left| 1 - (1-\lambda\delta + P(\delta)) \overline{(1-\delta)} \right| - |1-\lambda\delta + P(\delta) - (1-\delta)|} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\left| \lambda\delta - P(\delta) + \bar{\delta}(1-\lambda\delta + P(\delta)) \right| + |\delta(1-\lambda) + P(\delta)|}{\left| \lambda\delta - P(\delta) + \bar{\delta}(1-\lambda\delta + P(\delta)) \right| - |\delta(1-\lambda) + P(\delta)|} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\left| \lambda - \frac{P(\delta)}{\delta} + \frac{\bar{\delta}}{\delta}(1-\lambda\delta + P(\delta)) \right| + \left| (1-\lambda) + \frac{P(\delta)}{\delta} \right|}{\left| \lambda - \frac{P(\delta)}{\delta} + \frac{\bar{\delta}}{\delta}(1-\lambda\delta + P(\delta)) \right| - \left| (1-\lambda) + \frac{P(\delta)}{\delta} \right|} \right). \end{aligned}$$

Wir betrachten den Grenzwert $\phi, \delta \rightarrow 0$ derart, dass $\delta \in \{1-z \mid z \in W_\phi\}$. Unter diesem Grenzwert gilt: $\frac{\bar{\delta}}{\delta} \rightarrow 1$. Da $P(z) = \mathcal{O}(z^2)$ für $z \rightarrow 0$ ist, folgt auch $\frac{P(\delta)}{\delta} \rightarrow 0$. Beachte, dass $\lambda > 1$ ist. Wir erhalten insgesamt unter dieser Grenzwertbildung, vergleiche Lemma 4.3.3:

$$\begin{aligned} \rho(B(1-\delta), 1-\delta) &\longrightarrow \ln \left(\frac{|\lambda+1| + |1-\lambda|}{|\lambda+1| - |1-\lambda|} \right) \\ &= \ln \left(\frac{\lambda+1 + \lambda-1}{\lambda+1 - \lambda+1} \right) \\ &= \ln(\lambda). \end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert dann ein Kurvenendstück von β , ergo ein $t_\phi \in (t_0, 1)$, sodass für alle $z \in \text{Spur}(\beta|_{(t_\phi, 1)})$ der hyperbolische Abstand zum Bildpunkt $B(z)$ kleiner als $\ln((1+\varepsilon)\lambda)$ ist. Weil die Kurve β invariant ist, folgt aus dem Lemma von Schwarz-Pick, vergleiche Satz 3.4.8, für alle $z \in \text{Spur}(\beta)$:

$$\rho(B(z), z) \leq \ln((1+\varepsilon)\lambda).$$

Mit dem Teil (b) vom Lemma von Schwarz-Pick, vergleiche Satz 3.4.8, angewandt auf die Bijektion Φ folgt die Behauptung. \blacktriangleleft

Wir haben nun die Hilfsmittel zusammengetragen, um die Mindestbreite eines Zugangs im unmittelbaren Einzugsgebiet U anzugeben.

Satz 7.2.2 (Abstand zum Rand des unmittelbaren Einzugsgebietes)

Sei γ die invariante und unbeschränkte Kurve aus Lemma 7.2.1. Dann existiert ein $\mathcal{R} > 0$, sodass für alle $z \in \text{Spur}(\gamma) \cap D(0, \mathcal{R})^C$ gilt:

$$\begin{aligned} \text{dist}(z, \partial U) &\geq \frac{|z - \mathcal{N}_f(z)|}{\exp(2\rho_U(z, \mathcal{N}_f(z)))} \\ &\geq \frac{|z - \mathcal{N}_f(z)|}{((1 + \varepsilon)(d + 2))^2 - 1}. \end{aligned}$$

Beweis Sei $\mathcal{R} := R_4$. Nach Lemma 7.2.1 gilt für alle $z \in \text{Spur}(\gamma)$:

$$\rho(z, \mathcal{N}_f|_U(z)) \leq \ln((1 + \varepsilon)B'(1)).$$

Sei $z \in \text{Spur}(\gamma) \cap D(0, \mathcal{R})^C$. Sei $\alpha : [0, L] \rightarrow U$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte bezüglich der hyperbolischen Metrik, welche $z = \alpha(0)$ mit $\mathcal{N}_f(z) = \alpha(L)$ verbindet. Zunächst schätzen wir den euklidischen Abstand von z zum Rand von U ab. Sei dazu $t \in [0, L]$. Wir benutzen, dass α nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es folgt aus dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\alpha(t), \partial U) &\leq |\alpha(t) - \alpha(0)| + \text{dist}(\alpha(0), \partial U) \\ &= |t - 0| + \text{dist}(\alpha(0), \partial U) \\ &= t + \text{dist}(\alpha(0), \partial U). \end{aligned}$$

Für die Abschätzung des hyperbolischen Abstandes eines Punktes zu seinem Bild verwenden wir die Standardabschätzung, siehe Lemma 3.4.9, und erhalten:

$$\begin{aligned} \rho_U(z, \mathcal{N}_f(z)) &= \int_{\alpha} \rho_U(\xi) |d\xi| \\ &\geq \int_{\alpha} \frac{1}{2 \text{dist}(\xi, \partial U)} |d\xi| \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{t + \text{dist}(\alpha(0), \partial U)} dt \\ &= \left[\frac{1}{2} \ln(t + \text{dist}(\alpha(0), \partial U)) \right]_0^L \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{L}{\text{dist}(\alpha(0), \partial U)} \right). \end{aligned}$$

Wir wenden auf beiden Seiten der Ungleichung die Exponentialabbildung an und erhalten:

$$\exp(2\rho_U(z, \mathcal{N}_f(z))) \geq 1 + \frac{L}{\text{dist}(\alpha(0), \partial U)}.$$

Wir formen äquivalent um und erinnern uns, dass $\alpha(0) = z$ und wegen der speziellen Parametrisierung $L \geq |z - \mathcal{N}_f(z)|$ ist:

$$\text{dist}(z, \partial U) \geq \frac{|z - \mathcal{N}_f(z)|}{\exp(2\rho_U(z, \mathcal{N}_f(z))) - 1}.$$

Es folgt mit Hilfe von Lemma 7.2.1

$$\begin{aligned} \text{dist}(z, \partial U) &\geq \frac{|z - \mathcal{N}_f(z)|}{\exp(2 \ln((1 + \varepsilon)B'(1))) - 1} \\ &= \frac{|z - \mathcal{N}_f(z)|}{((1 + \varepsilon)B'(1))^2 - 1}. \end{aligned}$$

Bevor wir uns damit beschäftigen, dass dieser Zugang nach rechts unbeschränkt ist, werden wir den im Allgemeinen nicht berechenbaren Teil, also $B'(1)$, eliminieren. Nach Bemerkung 4.1.6 und (4.2) existiert ein $k \in \{0, \dots, \text{grad}(B)\}$ mit $B'(0) = \mathcal{N}'_f(w) = \frac{k-1}{k}$. Dabei ist k die Vielfachheit der Nullstelle w von f . Wegen

$$B(z) = e^{i\theta} z^\ell \prod_{m=1}^{g-\ell} \frac{z - a_m}{1 - \overline{a_m}z}$$

ist ∞ ein Fixpunkt von B mit demselben Multiplikator wie der Fixpunkt 0, vergleiche Definition 3.5.1. Wir erhalten aus der Fixpunkt-Formel, siehe Satz 3.2.5:

$$\begin{aligned} -1 &= \sum_{j=1}^{\text{grad}(B)+1} \frac{1}{B'(\zeta_j) - 1} \\ &= -2k + \sum_{\zeta_j \in \partial \mathbb{D}} \frac{1}{B'(\zeta_j) - 1}, \end{aligned}$$

7 Startpunkte in $D(0, \mathcal{R})$

wobei ζ_j die $\text{grad}(B) - 1$ Fixpunkte von B auf $\partial\mathbb{D}$ sind. Da $k \geq 1$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2k - 1 \\ &= \sum_{\zeta_j \in \partial\mathbb{D}} \frac{1}{B'(\zeta_j) - 1}. \end{aligned}$$

Da $B'(\zeta_j) > 1$ für alle $\zeta_j \in \partial\mathbb{D}$, existiert eine natürliche Zahl $j \in \{1, \dots, \text{grad}(B) - 1\}$ mit $\frac{1}{B'(\zeta_j) - 1} \geq \frac{1}{\text{grad}(B) - 1}$, denn $|\{\zeta_j\}| = \text{grad}(B) - 1$. Dies ist äquivalent zu:

$$B'(\zeta_j) < \text{grad}(B).$$

Die maximale Anzahl der freien kritischen Punkte, also der Nullstellen von f'' , die keine Nullstellen von f oder f' sind, ist gleich d , vergleiche Lemma 4.1.10. Ist die Nullstelle einfach, so ist diese ein kritischer Punkt. Ist sie nicht einfach, so ist sie nach (4.2) ein attraktiver, aber nicht superattraktiver Fixpunkt und somit auch kein kritischer Punkt. Die maximale Anzahl der kritischen Punkte in dem unmittelbaren Einzugsgebiet ist also gleich $d + 1$. Der Grad des Blaschke-Produkt B ist also beschränkt durch $d + 2$, also $\text{grad}(B) \leq d + 2$. Für alle $z \in \text{Spur}(\gamma) \cap D(0, \mathcal{R})^C$ gilt: $|z - \mathcal{N}_f(z)| > 1 - \varepsilon$. Insgesamt erhalten wir eine untere Schranke für den Abstand zum Rand.

$$\text{dist}(z, \partial U) \geq \frac{|z - \mathcal{N}_f(z)|}{((1 + \varepsilon)(d + 2))^2 - 1} > \frac{1 - \varepsilon}{((1 + \varepsilon)(d + 2))^2 - 1} =: H. \quad (7.1)$$



Für die Konstruktion der Startpunkte für den Bereich mit $|w| \leq \mathcal{R}$ bleibt zu zeigen, dass diese unmittelbaren Einzugsgebiete U nach rechts offen sind. Wie schon in der Einleitung dieses Abschnittes begründet, ist γ nach links oder nach rechts unbeschränkt. Angenommen, γ ist nach links unbeschränkt. Das heißt, $\text{Re}(\gamma(t)) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow 1$. Dann existiert ein $z \in \text{Spur}(\gamma)$ mit $\text{Re}(z) < -\mathcal{R}$. Wir verwenden die Darstellung (4.5) der Newtonfunktion. Mit (4.8) und (4.9) folgt dann $|z - \mathcal{N}_f(z)| \geq \left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| (1 - \varepsilon) - \varepsilon - 1$, wobei $\varepsilon \in \left(0, \frac{3}{20\sqrt{13}}\right)$ ist. Dann folgt mit Lemma 7.2.2:

$$\text{dist}(\alpha(0), \partial U) \geq \frac{\left| \frac{e^{-z}}{z^d} \right| (1 - \varepsilon) - \varepsilon - 1}{(2B'(1))^2 - 1} \rightarrow \infty \text{ für } \text{Re}(z) \rightarrow -\infty.$$

Wie wir in Kapitel 6 gesehen haben, ist der Zähler eine nach unendlich strebende Funktion für $\text{Re}(z) \rightarrow -\infty$. Das bedeutet, dass der Abstand zum Rand ebenfalls gegen ∞ strebt und das unmittelbare Einzugsgebiet aus dem möglichen Streifen hinausragt, was

ein Widerspruch ist. Also ist die Kurve γ und damit das unmittelbare Einzugsgebiet von w mit $|w| < \mathcal{R}$ nach rechts unbeschränkt.

7.3 Konstruktion der Startwerte in $D(0, \mathcal{R})$

Wie wir in Abschnitt 7.2 gesehen haben, enthalten alle unmittelbaren Einzugsgebiete von attraktiven Fixpunkten der Newtonfunktion von $f(z) = p(z)e^z - 1$ einen Zugang nach ∞ , der nach rechts unbeschränkt ist und eine gewisse Breite nicht unterschreitet. Wir werden Punkte äquidistant auf einem Geradenstück mit einem Abstand kleiner als diese Breite verteilen. Wie lang dieses Geradenstück sein muss, haben wir im Wesentlichen schon in Abschnitt 6.4 behandelt. Es genügt, den horizontalen Streifen zu überdecken, welcher symmetrisch zur reellen Achse ist und von den unmittelbaren Einzugsgebieten der Nullstellen w mit $|w| > R_4$ begrenzt wird. Seien $\varepsilon \in \left(0, \frac{3}{20\sqrt{13}}\right)$ und $\ell \in \mathbb{Z}$. Seien $k > k_0 := \max\{k_{0_1}, k_{0_2}\}$ und $\mathcal{R} := \max\{R_4, |z_{k_0}|\}$. Setze

$$L := \mathcal{R} + C,$$

wobei C wie in (6.15) ist. Die Startpunkte für das Newtonverfahren für den Streifen um die reelle Achse sind die Punkte der folgenden Menge:

$$S_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = \mathcal{R} + 1 \wedge \operatorname{Im}(z) = (1 - \varepsilon)\ell H, \ell \in (-M, M)\}, \quad (7.2)$$

wobei $M := \left\lceil \frac{L}{H} \right\rceil$ mit H wie in (7.1).

8 Beweis, Fazit und Ausblick

8.1 Beweis des Hauptsatzes

Beweis des Hauptsatzes Sei $\mathcal{R} > 0$ und $f \in \mathcal{F}_{d,R}$. Sei $k_0 := \max\{k_{0_1}, k_{0_2}\}$, wobei k_{0_1} wie in (5.3) und k_{0_2} wie in (6.1) sind. Verwende in den Definitionen der R_j für $j \in \{1, \dots, 4\}$ zusätzlich $R_p < R$ und $R_{p+p'} < (d+1)R$ sowie $R_{p+2p'+p''} < (d^2+d+1)R$. Setze dann $\mathcal{R} := \max\{R_4, |z_{k_0}|\}$ mit den angepassten R_j . Seien S_1 wie in (5.2) und S_2 wie in (7.2). Setze

$$\mathcal{S}_{d,R} := S_1 \cup S_2.$$

Für jeden Fixpunkt w von \mathcal{N}_f mit $|w| > \mathcal{R}$ existiert nach Kapitel 5 in $\mathcal{S}_{d,R}$ genau ein Approximationspunkt $z_k \in S_1$. Dieser konvergiert unter Iteration nach Konstruktion gegen den Fixpunkt w .

Das unmittelbare Einzugsgebiet eines Fixpunktes w mit $|w| \leq \mathcal{R}$ enthält einen Zugang nach ∞ , welcher einen gewissen Mindestabstand zum Rand des unmittelbaren Einzugsgebietes hat. Nach Konstruktion der Startwerte liegt dann ein Punkt aus S_2 in diesem Gebiet. Damit konvergiert dieser unter Iteration gegen den Fixpunkt. ☹

Beispiel 8.1.1

Für $d = 3$ und $R = 1$ und $\varepsilon = \frac{3}{20\sqrt{13}}$ ergeben sich folgende Werte:
 $R = 36697, L = 40315, H \approx 0,0586, M = 688139.$

Der Vorteil des hier vorgestellten Beweises ist, dass der numerische Wert der Konstanten konkret benannt werden kann. Allerdings sind diese im Allgemeinen sehr groß. Zwei wesentliche Faktoren treiben die Anzahl der Punkte in die Höhe. Die untere Schranke an k_0 aus (5.3) ist der eine wesentliche Term, der zweite ist die Höhe des horizontalen Streifens, in dem sich die Kurve aus Kapitel 6 befindet, vergleiche (6.15). Dies führt vermutlich dazu, dass nur die angegebenen Startwerte für den Bereich $D(0, \mathcal{R})^C$ praktische Anwendungen finden werden.

Die nun folgende Abbildung vermittelt einen Eindruck der Konstruktion der Startwerte.

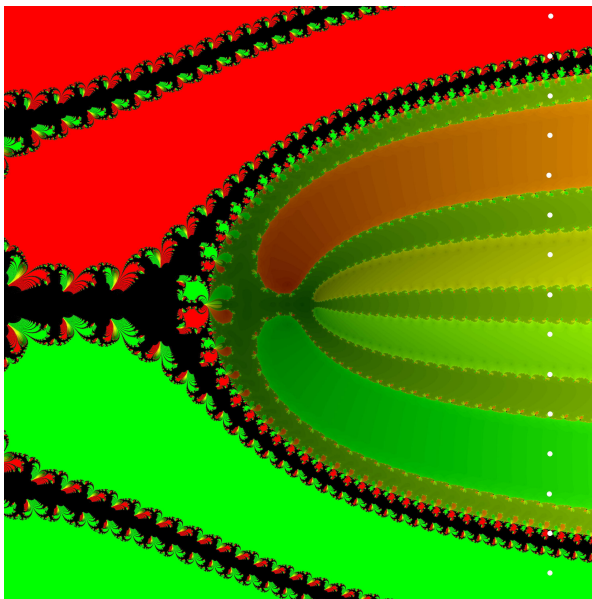


Abbildung 8.1: In dieser Abbildung ist die Verteilung der Startwerte aus S_2 schematisch angedeutet. In Wirklichkeit liegen die Punkte wesentlich dichter zusammen und das Geradenstück, auf dem die Punkte liegen, ist weiter in der rechten Halbebene.

8.2 Diskussion einer alternativen Beweisidee

Die Approximation von e^z durch $(1 + z/n)^n$ ist ein alternativer Ansatz für die Untersuchung der Newtonfunktion von $f(z) = p(z)e^z - 1$. Da die so erhaltene approximierende Funktion ein Polynom ist, kann nach entsprechender Normierung das Resultat von Hubbard, Schleicher und Sutherland angewendet werden. Kriete zeigt in [Kri01], dass die Juliamenge der approximierten gegen die der ursprünglichen Funktion konvergiert. Dies ist ein Indiz dafür, dass dieser alternative Ansatz funktionieren könnte. Es ist jedoch zu diskutieren, welche Nullstellen ab welchem Index der Approximation gefunden werden. Da auch überprüft werden müsste, ob und ab welchem Index der Startwert für die Newtonfunktion der approximierten Funktion im Einzugsgebiet der Newtonfunktion der ursprünglichen Funktion liegt, scheint dieser Ansatz sehr komplex zu sein.

Die Mindestbreite der Zugänge nach ∞ ist reziprok abhängig von dem Grad des Polynoms. Dadurch wird der benötigte Abstand zwischen den Startwerten entsprechend klein, was die Anzahl der benötigten Startwerte in die Höhe treibt. Der in dieser Arbeit gewählte Ansatz hat den Vorteil, dass für betraglich große Nullstellen genau ein Start-

wert genügt. Nur für betragsmäßig kleine Nullstellen, also dort, wo der polynomiale Anteil der Funktion f dominiert, benötigt der hier gewählte Ansatz mehrere Startwerte pro Nullstelle.

8.3 Ausblick

Es ist sehr wahrscheinlich, dass die hier verwendete Methodik sich auf das relaxierte Newton-Verfahren anwenden lässt.

Eine weitere Funktionen-Klasse, wo eine Erfolgsaussicht besteht, ist die Laguerre-Pólya-Klasse. Deimling zeigt in [Dei11], dass, falls ein unmittelbares Einzugsgebiet eines Fixpunktes der Newtonfunktion einer solchen Funktion keine transzendente Singularität enthält, sie in diesem Einzugsgebiet konjugiert zu einem endlichen Blaschke-Produkt ist. Man kann den Abbildungsgrad dieser Blaschkeprodukte gleichmäßig beschränken. Sie erhält zu Lemma 7.2.1 und 7.2.2 analoge Lemmata. Damit ist ein Teil der hier verwendeten Methode abgeschlossen. Es besteht somit die Hoffnung, dass ein zum Hauptsatz ähnliches Resultat erzielt werden kann.

Auch die Newtonfunktion der Lösungen der Differentialgleichung $u'' + Ru = 0$, wobei R eine geeignet normierte rationale Funktion ist, die Bergweiler und Terglane in [BT98] betrachten, hat eingeschränkt auf die unmittelbaren Einzugsgebiete attraktiver Fixpunkte endlichen Abbildungsgrad, sodass auch hier die Hoffnung auf ein ähnliches Resultat besteht.

Andere Klassen von Funktionen scheinen den Computerbildern nach ein ähnliches Verhalten aufzuweisen, wie Funktionen der in dieser Arbeit betrachteten. Als ein Beispiel ist hier die Riemannsche Zetafunktion zu nennen. Schleicher befasst sich mit dieser in dem Artikel [Sch08]. Ein weiteres Beispiel sind die Newtonfunktionen der Funktionen der Form $f(z) = p(z)e^z + z$. In [BFJK14a, Example 7.4] wird ein Vertreter dieser Klasse betrachtet.

Abkürzungsverzeichnis

$A(w)$	Einzugsgebiet von einem Fixpunkt w , Seite 22
B	Zu \mathcal{N}_f Konjugiertes Blaschke-Produkt, Seite 42
$D(z_0, r)$	Kreis mit Radius r um $z_0 \in \mathbb{C}$, Seite 11
H	Mindestbreite eines Zugangs nach ∞ , Seite 72
$K(z)$	$K(z) = \left \frac{e^z}{z^d} \right $ für $z \neq 0$, Seite 26
L	Länge des Geradenstücks, welches die Startwerte kleinem Betrag enthält, Seite 73
R_p	obere Schranke für den Betrag einer Nullstelle des Polynoms p , Seite 14
$U(w)$	Einzugsgebiet von einem Fixpunkt w , Seite 22
\mathcal{A}	Zugang nach ∞ , Seite 23
\mathbb{D}	Einheitskreisscheibe, Seite 11
Γ_K	Die Kurve Γ_K mit $K = \left \frac{e^z}{z^d} \right $, Seite 25
$\mathbb{H}_{\Gamma_K}^l, \mathbb{H}_{\Gamma_K}^r$	Der Teil der komplexen Zahlen, der links bzw. rechts von der Kurve Γ_K ist, Seite 25
\mathcal{N}_f	Newtonfunktion von f , Seite 29
$\text{dist}(z, \partial U)$	euklidischer Abstand von $z \in U$ zum Rand ∂U von U , Seite 15
$\ell(\gamma)$	hyperbolische Länge einer Kurve γ in der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} , Seite 17
ℓ_U	hyperbolische Länge einer Kurve γ in einem einfach zusammenhängendem Gebiet $U \neq \mathbb{C}$, Seite 19
$\text{grad}(f)$	Abbildungsgrad von f , Seite 42
$\lambda(w)$	Multiplikator eines Fixpunktes w , Seite 21

Abkürzungsverzeichnis

∂G	Rand eines Gebietes G in $\widehat{\mathbb{C}}$, Seite 11
ρ	hyperbolische Dichte bezüglich der Einheitskreisscheibe \mathbb{D} , Seite 17
$\rho(z, w)$	hyperbolischer Abstand von $z, w \in \mathbb{D}$, Seite 17
ρ_U	hyperbolische Dichte bezüglich des einfach zusammenhängendem Gebietes $U \neq \mathbb{C}$, Seite 19
$\rho_U(z, w)$	hyperbolische Abstand von $z, w \in U$, Seite 19
$\text{sing}(f^{-1})$	Menge der singulären Werte von f^{-1} , Seite 23
$\widehat{\mathbb{C}}$	Riemannsche Zahlenkugel, Seite 11
$f^n(z)$	n -te Iterierte von f , Seite 21
g	Abbildungsgrad von \mathcal{N}_f und von B , Seite 42
w	Fixpunkt von \mathcal{N}_f , Seite 21
$\Psi_{k,\alpha}$	Die Punktmenge $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) + d \arg(z) = 2\pi k + \alpha \wedge \alpha \in [-\pi, \pi]\}$, Seite 65

Literaturverzeichnis

- [AIR12] Daniel S. Alexander, Felice Iavernaro, and Alessandro Rosa. *Early days in complex dynamics. A history of complex dynamics in one variable during 1906–1942*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); London: London Mathematical Society (LMS), 2012.
- [Bel65] H.E. Bell. Gershgorin’s theorem and the zeros of polynomials. *Am. Math. Mon.*, 72:292–295, 1965.
- [Ber93a] Walter Bergweiler. Iteration of meromorphic functions. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 29(2):151–188, 1993.
- [Ber93b] Walter Bergweiler. Newton’s method and a class of meromorphic functions without wandering domains. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 13(2):231–247, 1993.
- [BFJK14a] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque, and B. Karpińska. Accesses to infinity from Fatou components. *ArXiv e-prints*, November 2014.
- [BFJK14b] Krzysztof Barański, Núria Fagella, Xavier Jarque, and Bogusława Karpińska. On the connectivity of the Julia sets of meromorphic functions. *Invent. Math.*, 198(3):591–636, 2014.
- [BFJK15] K. Barański, N. Fagella, X. Jarque, and B. Karpińska. Connectivity of Julia sets of Newton maps: A unified approach. *ArXiv e-prints*, January 2015.
- [BLS13] Béla Bollobás, Malte Lackmann, and Dierk Schleicher. A small probabilistic universal set of starting points for finding roots of complex polynomials by Newton’s method. *Math. Comput.*, 82(281):443–457, 2013.
- [BM07] A.F. Beardon and D. Minda. The hyperbolic metric and geometric function theory. In *Proceedings of the international workshop on quasiconformal mappings and their applications, December 27, 2005–January 1, 2006*, pages 9–56. New Delhi: Narosa Publishing House, 2007.
- [BT96] Walter Bergweiler and Norbert Terglone. Weakly repelling fixpoints and the connectivity of wandering domains. *Trans. Am. Math. Soc.*, 348(1):1–12, 1996.

- [BT98] Walter Bergweiler and Norbert Terglane. On the zeros of solutions of linear differential equations of the second order. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 58(2):311–330, 1998.
- [Dei11] Julka Deimling. Über die grÖÙe der einzugsbereiche des newtonverfahrens transzendenter ganzer funktionen. *Dissertation*, 1:66, 2011.
- [Deu12] Peter Deuffhard. A short history of Newton’s method. *Doc. Math., J. DMV*, Extra Vol.:25–30, 2012.
- [Fat19] P. Fatou. Sur les Équations fonctionnelles. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 47:161–271, 1919.
- [FB00] Eberhard Freitag and Rolf Busam. *Funktionentheorie 1*. Berlin: Springer, 3., neu bearb. und erweiterte aufl. edition, 2000.
- [FJT08] Núria Fagella, Xavier Jarque, and Jordi Taixés. On connectivity of Julia sets of transcendental meromorphic maps and weakly repelling fixed points. I. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 97(3):599–622, 2008.
- [FJT11] Núria Fagella, Xavier Jarque, and Jordi Taixés. On connectivity of Julia sets of transcendental meromorphic maps and weakly repelling fixed points. II. *Fundam. Math.*, 215(2):177–202, 2011.
- [HSS01] John Hubbard, Dierk Schleicher, and Scott Sutherland. How to find all roots of complex polynomials by Newton’s method. *Invent. Math.*, 146(1):1–33, 2001.
- [Jan96] M. Jankowski. *Das Newtonverfahren für transzendente meromorphe Funktionen*. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, 1996.
- [Kri94] Hartje Kriete. On the efficiency of relaxed Newton’s method. In *Complex analysis and its applications. Proceedings of the international conference, held in Hong Kong, January 15-17, 1993*, pages 200–212. Harlow: Longman Scientific & Technical; New York, NY: Wiley, 1994.
- [Kri01] Hartje Kriete. On the Newton’s method for transcendental functions. *J. Math. Kyoto Univ.*, 41(3):611–625, 2001.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in one complex variable. 3rd ed.* Princeton, NJ: Princeton University Press, 3rd ed. edition, 2006.

- [MS06] Sebastian Mayer and Dierk Schleicher. Immediate and virtual basins of Newton’s method for entire functions. *Ann. Inst. Fourier*, 56(2):325–336, 2006.
- [NT13] Tuen Wai Ng and Chiu Yin Tsang. Polynomials versus finite Blaschke products. In *Blaschke products and their applications. Proceedings based on the presentations at the conference, Toronto, Canada, July 25–29, 2011*, pages 249–273. New York, NY: Springer; Toronto: Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 2013.
- [Prz89] Feliks Przytycki. Remarks on the simple connectedness of basins of sinks for iterations of rational maps. *Dynamical systems and ergodic theory*, 28th Sem. St. Banach Int. Math. Cent., Warsaw/Pol. 1986, Banach Cent. Publ. 23, 229-235 (1989)., 1989.
- [Rad22] T. Radó. Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 1:55–64, 1922.
- [Rem95a] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie 1*. Berlin: Springer-Verlag, 4., nochmals verb. Aufl. edition, 1995.
- [Rem95b] Reinhold Remmert. *Funktionentheorie. 2*. Berlin: Springer-Verlag, 2., korr. Aufl. edition, 1995.
- [Rie90] Bernhard Riemann. *Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlaß und Nachträge. Collected papers. Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind neu hrsgg. von Raghavan Narasimhan. (Collected mathematical works, scientific posthumous works and supplements. Collected papers. According to the edition by H. Weber and R. Dedekind newly edited by R. Narasimhan)*. Berlin etc.: Springer-Verlag; Leipzig: BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1990.
- [RS07] Johannes Rückert and Dierk Schleicher. On Newton’s method for entire functions. *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.*, 75(3):659–676, 2007.
- [Sch70] Ernst Schroeder. Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. *Math. Ann.*, 2:317–365, 1870.
- [Sch08] Dierk Schleicher. Newton’s method as a dynamical system: Efficient root finding of polynomials and the Riemann ζ -function. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Toronto: The Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, 2008.

Literaturverzeichnis

- [Shi09] Mitsuhiro Shishikura. The connectivity of the Julia set and fixed points. In *Complex dynamics. Families and friends*, pages 257–276. Wellesley, MA: A K Peters, 2009.
- [Ste93a] Norbert Steinmetz. *Rational iteration: complex analytic dynamical systems*. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
- [Ste93b] Norbert Steinmetz. The formula of Riemann-Hurwitz and iteration of rational functions. *Complex Variables, Theory Appl.*, 22(3-4):203–206, 1993.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit – abgesehen von der Beratung durch den Betreuer meiner Promotion – in Inhalt und Form selbstständig angefertigt habe und dabei die Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft eingehalten habe.

Diese Arbeit hat weder ganz noch in Teilen einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen und wurde weder veröffentlicht noch zur Veröffentlichung eingereicht.

Kiel, den 08.12.2015

Daniel Sommerfeld