

Dissertation

# Multiskalensimulationen von Schwarzlochakkretion in Balkengalaxien

**Manuel Jung**  
aus Wildeshausen

Kiel, 2016

zur Erlangung der Doktorwürde der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel



Erster Gutachter: Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl

Zweiter Gutachter: Prof. Dr. Robert F. Wimmer-Schweingruber

Tag der mündlichen Prüfung: 21.07.2016

Zum Druck genehmigt: 21.07.2016

gez. Prof. Dr. Natascha Oppelt, Dekanin



## Zusammenfassung

Balkenspiralgalaxien zeichnen sich nicht nur durch ihre namensgebenden Spiralarme und stellare Balken aus, sondern können, induziert durch das Drehmoment des Balkens, zahlreiche Strukturen in der dünnen Gasscheibe ausbilden. Zu diesen Strukturen zählen unter anderem nukleare Ringe, innere Spiralen und Staubarme. Die  $M$ - $\sigma$ -Verbindung weist auf eine enge Verbindung der Masse des zentralen Schwarzen Lochs  $M$  und der Geschwindigkeitsdispersion des Bulges  $\sigma$  einer Galaxie hin. Es gibt also einen Zusammenhang zwischen der Entwicklung eines zentralen Schwarzen Lochs und der Galaxie auf deutlich größeren Skalen. Das Ziel dieser Arbeit ist, den Einfluss eines stellaren Balkens in einer Spiralgalaxie auf die dünne selbstgravitierende Gasscheibe zu untersuchen. Dabei stehen vor allem die Akkretion auf das zentrale, massereiche Schwarze Loch und dessen verschiedene Entwicklungspfade im Vordergrund.

Ein 2D Finite-Volumen-Verfahren zum Lösen von Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie wird für die Simulation der Gasscheibe verwendet. Die exakte Erhaltung von Drehimpuls und Gesamtenergie spielt eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von Akkretionsscheiben und wird in dieser Arbeit durch die Implementierung eines modifizierten Transportverfahrens sichergestellt.

Es werden isotherme und nicht isotherme Multiskalensimulationen mit unterschiedlich massereichen Gasscheiben, sowie unterschiedlichen Schallgeschwindigkeiten, beziehungsweise Kühlungsparametern untersucht. Sowohl in isothermen als auch nicht-isothermen Simulationen können zwei verschiedene Akkretionsmodi identifiziert werden, welche teilweise zu einem effektiven Schwarzwachstum führen. Die Akkretionsströmung wird getrieben durch gravitativ instabile Akkretionsscheiben, Energiedissipation an Stoßfronten und stark exzentrische Orbits. Die durch den Balken typischerweise erzeugten Strukturen können in den Simulationen beobachtet werden, falls sie nicht durch gravitativ-instabiles Verhalten dominiert werden. In den meisten Simulationen ist eine starke Abhängigkeit der Akkretion vom Gasfluss in die innere Region aus der Kiloparsec-Region erkennbar.



## Abstract

The outstanding features of barred spiral galaxies are not only their characteristic spiral arms and stellar bars. They also form a variety of structures within the thin gas disc, induced by the non-axisymmetric bar torques. Among these structures are nuclear rings, inner spirals and dust-lanes. The  $M$ - $\sigma$ -relation suggests a strong correlation between the mass of the central black-hole and the velocity dispersion of the bulge within a galaxy. Therefore a connection between the black-hole evolution and the galaxy on much bigger scales cannot be dismissed. The aim of this work is to investigate the influence of a stellar bar in a spiral galaxy on the thin self-gravitating gas disc. The focus lies on the accretion of gas onto the central massive black-hole and its time evolution.

A 2D finite-volume scheme, which solves the conservation equations of mass, momentum and energy, is used to simulate a gas disc. The accurate conservation of angular momentum and energy is of great importance for the research of accretion discs. In this work it is ensured by implementing a modified transport scheme.

Isothermal as well as non-isothermal multi-scale simulations of a gas disc with varying masses and speeds of sound, respectively cooling parameters are explored. Both, isothermal and non-isothermal simulations, show two different accretion types, which sometimes lead to efficient black-hole feeding. The accretion is driven by a gravitationally unstable accretion disc, energy dissipation at strong shocks and very excentric orbits. The bar induced structures can be observed in the simulations, which are not dominated by gravitational instabilities. Most simulations show a strong dependence of the gas accretion flow into the inner disc region on the kiloparsec region.





---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Allgemeine Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1. Galaxien auf allen Skalen . . . . .	5
2.1.1. Balkenspiralgalaxien . . . . .	6
2.1.2. Akkretionsscheibenphysik . . . . .	11
2.2. Hydrodynamik . . . . .	18
2.2.1. Erhaltungssätze . . . . .	18
2.2.2. Quasi-stationäre Probleme . . . . .	20
2.2.3. Finite-Volumen-Verfahren . . . . .	21
2.3. FOSITE – 2D Hydrodynamik Softwarepaket . . . . .	22
2.3.1. Geometrien . . . . .	23
2.3.2. Rekonstruktion und Limiter . . . . .	25
2.3.3. Randbedingungen . . . . .	27
2.3.4. Kurganov-Tadmor Flüsse . . . . .	29
2.3.5. Zeitintegrationsverfahren . . . . .	30
<b>3. Drehimpulserhaltung in rotierenden Bezugssystemen</b>	<b>31</b>
3.1. Modifikation der Transportgrößen . . . . .	32
3.1.1. Coriolis- und Zentrifugalkräfte als Quellterm . . . . .	33
3.1.2. Inertialdrehimpuls-Transport . . . . .	34
3.1.3. Rothalpie- statt Energieerhaltung . . . . .	35
3.1.4. Anwendung der FARGO Methode . . . . .	36
3.1.5. Erhaltungsgleichungen in 2D krummlinig-orthogonalen Koordina- tensystemen . . . . .	37
3.2. Modifikation des Transports . . . . .	39
3.2.1. Abtrennen des linearen Transports . . . . .	44
3.2.2. Konservative Implementierung des modifizierten Verfahrens . . . . .	45
3.3. Numerische Tests . . . . .	46
3.3.1. Isothermer und isentroper Vortex . . . . .	46
3.3.2. Planet-Scheibe Wechselwirkungen . . . . .	50

<b>4. Quasi-stationäre Probleme mit verschwindender kinematischer Viskosität</b>	<b>55</b>
4.1. Godunov-Verfahren . . . . .	56
4.2. Ein isothermer HLLC-Riemann-Löser . . . . .	58
4.3. Numerische Tests . . . . .	60
4.3.1. 1D Riemann-Probleme . . . . .	61
4.3.2. Konvergenz des isothermen 2D Vortex . . . . .	64
4.3.3. Simulation einer Kármánschen Wirbelstraße . . . . .	67
4.3.4. Erdähnlicher Planet . . . . .	70
<b>5. Multiskalensimulationen von Schwarzlochwachstum in Balkengalaxien</b>	<b>75</b>
5.1. Gravitation . . . . .	76
5.1.1. Externe Gravitationspotentiale . . . . .	76
5.1.2. Selbstgravitation . . . . .	77
5.1.3. Schwierigkeiten beim Verwenden der Energiegleichung . . . . .	87
5.1.4. Untere Temperaturschranke . . . . .	93
5.2. Galaxien Setup . . . . .	95
5.3. Simulationen mit konstanter Schallgeschwindigkeit . . . . .	103
5.3.1. Schwache Akkretion . . . . .	107
5.3.2. Starke Akkretion . . . . .	110
5.3.3. Weitere Trends . . . . .	114
5.4. Simulationen mit Temperaturstruktur . . . . .	119
5.4.1. Kalte Akkretion . . . . .	121
5.4.2. Heiße Akkretion . . . . .	125
5.4.3. Weitere Trends . . . . .	125
5.4.4. Zusammenfassung und Diskussion . . . . .	129
<b>6. Fazit</b>	<b>135</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>139</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>157</b>
A.1. Tensordivergenz . . . . .	157
A.2. Kommutatorkoeffizienten . . . . .	157
A.3. Rechnen mit Tensoren . . . . .	158
A.4. Herleitung der koordinatenfreien Residualimpuls- und Residualenergiegleichung . . . . .	158
A.5. Modifizierte Bessel Funktionen . . . . .	160
A.6. Fouriertransformation . . . . .	160
A.7. Potential eines triaxialen Homeoiden . . . . .	161
A.8. Weitere Grafiken aus den Galaxiensimulationen . . . . .	162
<b>Danksagung</b>	<b>167</b>
<b>Erklärung</b>	<b>169</b>

# 1. Einleitung

Das Hubble Deep Field eines kleinen mit bloßem Auge sichtbaren schwarzen Stück Himmels hat 1994 eindrucksvoll demonstriert, dass es sehr viele Galaxien auch schon zu Frühzeiten des Universums gab (Abbildung 1.1; Williams et al., 1996). Dabei war die Dichte an Galaxien so hoch, dass es vermehrt zu Wechselwirkungen der Galaxien untereinander gekommen sein muss. Davon zeugt auch die hohe Sternentstehungsrate, die beobachtet werden kann (Connolly et al., 1997). Der Blick in so große Entfernungen ist in der Astrophysik auch immer ein Blick in die Vergangenheit und gibt Gelegenheit, die Entwicklung von Galaxien zu beobachten, was ansonsten im Laufe von Menschenleben (oder der menschlichen Geschichte) nicht möglich wäre. Das Hubble Deep Field offenbart eine Vielzahl unterschiedlicher Galaxien, Morphologien und Strukturen (Abraham et al., 1996). Wie funktioniert die Entstehung dieser Vielzahl unterschiedlicher Galaxien und gibt es einen Zusammenhang zwischen ihnen? Schon früh wurde vermutet, dass es zeitliche Entwicklungsphasen im Leben einer Galaxie geben könnte, deren unterschiedliche Erscheinungen am Himmel beobachtet werden können (Hubble, 1926).

Besonders prominent sind die großen Spiralgalaxien mit teils weitreichenden Spiralarmen, hellen Sternentstehungsregionen und durch Staub obskurierten Regionen (Dreyer, 1888). Auch die Milchstraße gehört zu den Spiralgalaxien. Sie zeichnen sich vor allem weit außen durch zwei oder mehrere Spiralarme und einen zentralen hellen Bulge aus. Dabei machen diese sichtbaren Teile der Galaxie nur etwa 5% der gesamten Masse aus. Die Rotationsgeschwindigkeiten in der Galaxie lassen nur den Schluss zu, dass der weitaus größere Teil der Masse nicht sichtbar ist und in einem großen Halo um die Galaxie verteilt ist. Dabei ist es bis heute nicht gelungen, auch nur die Ausdehnung dieses Halos zu bestimmen (Kafle et al., 2014; Phelps et al., 2013).

Heutzutage wird vermutet, dass sich im Zentrum jeder Galaxie ein Schwarzes Loch befinden muss (King, 2003). Selbstverständlich ist eine direkte Beobachtung dessen aber sehr schwierig. In der Milchstraße können mittlerweile die Bahnen von Sternen in nächster Nähe des zentralen Schwarzen Lochs beobachtet werden (Ghez et al., 1998; Gillessen et al., 2009) und dadurch ein eindrucksvoller visueller Beweis erbracht werden, welch massereiches und kompaktes Objekt sich im Zentrum der Galaxie befindet. Das Schwarze Loch hat jedoch nicht nur einen Einfluss auf die zentrale Region einer Galaxie, sondern ist auch eng mit der Entwicklung einer Galaxie verknüpft. Ein starkes Indiz dafür ist die empirisch ermittelte Verbindung von Bulge und Schwarzlochmassen (Ferrarese und Merritt, 2000; Gebhardt et al., 2000). Damit es zu so einem Zusammenhang kommen kann, muss es bereits zu einer gemeinsamen Entwicklung gekommen sein (King, 2003; Silk und Rees, 1998).



Abbildung 1.1.: Hubble Deep Field Aufnahme von 2.5 Bogenminuten mit insgesamt 10 Tagen Belichtungszeit. Es sind Galaxien verschiedenster Morphologien zu sehen, welche größtenteils eine hohe Rotverschiebung besitzen. (NASA; R. Williams and The Hubble Deep Field Team, STScI)

Etwa bei  $(23.6 \pm 0.4)\%$  aller Galaxien im lokalen Universum (Rotverschiebungen von  $0.01 < z < 0.06$ ; Cheung et al., 2013) können zudem Balken, also Regionen mit einer Vielzahl von Sternen auf hoch exzentrischen Umlaufbahnen, beobachtet werden. Obwohl der genaue Entstehungsprozess dieser Balkenstrukturen noch unbekannt ist, ist klar, dass sie einen wichtigen Einfluss auf die Struktur in der Galaxie besitzt (Mihalas und Routly, 1968). Sie rotieren ausgedehnt über große Skalen mindestens über einen Teil des Lebens einer Galaxie als starre Struktur und können große nicht axialsymmetrische Drehmomente auf Sterne und Gas induzieren. Das Gas in der dünnen Scheibe kann dadurch Drehimpuls abgeben und Masse in weiter innen liegende Bereiche der Galaxie transportieren, was zum Beispiel zur Sternentstehung und zum Wachstum des Schwarzen Lochs führen kann (Knapen et al., 2002).

In dieser Arbeit werden genau diese Gasströmung in der dünnen Scheibe simuliert, also die Teile der Galaxie modelliert, die nicht direkt beobachtet werden können. Es liegen genaue Informationen über die Verteilung der Sterne, die ja gut sichtbar sind, und über die Ausdehnung von stellaren Balken und die Rotationskurve der galaktischen Scheibe vor (Binney und Tremaine, 2008). Die Beobachtung der zentralen Galaxieregionen ist schwierig. Einerseits sind sie häufig durch die hohen Gas- und Sterndichten obskuriert, andererseits fehlt die Auflösung, um mehr als eine radiale Helligkeitsverteilung zu bestimmen. Erste hochauflösende Beobachtungen mit dem Radiointerferometer ALMA sind vielversprechend (Fathi et al., 2015; Xu et al., 2015) und erfordern eine genaue Modellierung, um die physikalischen Prozesse verstehen zu können. Das Ziel dieser Arbeit ist den Einfluss von

---

galaktischen Gravitationspotentialen und insbesondere eines Balkenpotentials auf die Gasströmungen der dünnen Scheibe zu untersuchen. Kann ein Schwarzes Loch durch eine Balkenstruktur effektiv mit Gas aus den Regionen auf Kiloparsec-Skalen versorgt werden? Welche Strukturen können in der inneren Scheibe erwartet werden? Sind bestimmte Strukturen im Gas ein Hinweis auf die Akkretionsvorgänge im Zentrum der Galaxie? Wann wird soviel Material in das Zentrum der Galaxie geliefert, dass das schwarze Loch mit maximaler Geschwindigkeit wächst?

Um solche Fragen beantworten zu können, wird komplexe Software benötigt, die eine Vielzahl von Anforderungen gleichzeitig erfüllen muss. Bevor ein korrektes Galaxienmodell simulieren werden kann, das sowohl die innere Akkretionsscheibe um ein Schwarzes Loch als auch großskalige Strukturen auf Kiloparsec-Skalen abbilden soll, muss sichergestellt werden, dass das verwendete numerische Verfahren zum Lösen der Transportgleichungen des Gases dafür geeignet ist. Eine große Herausforderung stellt die genaue Erhaltung des Drehimpulses dar, der für den korrekten Transport des Materials in der Scheibe von enormer Wichtigkeit ist. Können hier die physikalischen Erhaltungsgleichungen von Masse, Drehimpuls und Energie nicht erfüllt werden, führt das zum Beispiel beim Drehimpuls zu einem unphysikalisch starken oder schwachen Transport des Materials zum Zentrum der Galaxie. Andere Strukturen entstehen vielleicht nie oder werden schnell durch den Drehimpulsverlust zerstört. Besonders bei Berechnungen in rotierenden Bezugssystemen ist die Erhaltung von Drehimpuls eine Herausforderung, da die entstehenden Scheinkräfte nicht direkt in das Verfahren implementiert werden dürfen.

Oft wird unterschätzt, dass die Klasse der quasi-stationären Probleme (LeVeque, 1998), zu denen zum Beispiel Planet-Scheibe-Wechselwirkungen oder Simulationen von Spiralgalaxien gehören können, besondere Anforderungen an die Genauigkeit des verwendeten numerischen Verfahrens stellen. Solche Probleme können dominante und physikalisch sehr wichtige Effekte wie Wirbelbildung und empfindliche Scherströmungen aufweisen, welche nur durch ein vollständiges approximieren der Riemann Lösung zuverlässig untersucht werden können. Bereits relativ schwach dissipative Verfahren können sich in solch empfindlichen Systemen als problematisch erweisen.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut. Im zweiten Kapitel werden die Grundlagen von Balkengalaxien und der Akkretionsscheibenphysik erläutert. Außerdem wird die Hydrodynamiksoftware FOSITE eingeführt.

Nachdem bereits in Jung (2012) die numerischen Herausforderungen der Drehimpulserhaltung in rotierenden Bezugssystemen im Kontext von Planet-Scheibe-Wechselwirkungen klar wurden, war die logische Erweiterung des damals entstandenen Systems der Umformulierung der Erhaltungsgrößen die Rothalpieerhaltung. Diese Erweiterungen bilden den Anfang des dritten Kapitels.

Da die numerischen Flüsse des verwendeten Verfahrens nicht den Anforderungen bei quasi-stationären Problemen mit verschwindender Viskosität genügen, wurde eine neue Approximation der Riemann Lösung für isotherme Probleme implementiert, welche im Kapitel vier beschrieben wird. Diese Änderungen sind allerdings nur bedingt kompatibel

mit der ursprünglichen Implementierung der Drehimpulserhaltung, sodass eine zweite, flexiblere Variante hinzugefügt werden musste, wie im zweiten Teil von Kapitel drei erklärt wird.

Schließlich werden im fünften Kapitel Simulationen von Balkengalaxien durchgeführt. Hier werden erst die benötigten Gravitationsmodule beschrieben, welche eine wichtige Rolle in den Galaxiensimulationen einnehmen und auf Probleme und Lösungen in Hinblick auf die Verwendung der Energiegleichung in rotations- und gravitationsdominierten Systemen mit präziser Drehimpulserhaltung eingegangen. Dann werden die Simulationssets mit Isothermie und Temperaturstruktur vorgestellt und deren Resultate diskutiert und hinterfragt. Zuletzt werden alle Ergebnisse der Dissertation zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche Fortsetzungen der Arbeit gegeben.

## 2. Allgemeine Grundlagen

Im ersten Teil dieses Kapitels werden die notwendigen Grundlagen für die spätere Modellbildung und Diskussion von Galaxienmodellen erläutert. Dabei kann natürlich keine vollständige Übersicht über das Gebiet der Extragalaktik und Galaxien gegeben werden. Im Vordergrund stehen die Balkenspiralgalaxien, sowie deren Aufbau und Bestandteile. Dabei wird vor allem auf die Gaskomponente und die notwendige Akkretionsscheibephysik eingegangen. Es folgt eine Beschreibung der wichtigsten Komponenten der 2D Hydrodynamiksoftware FOSITE, welche für die Berechnung der Galaxienmodelle Verwendung findet. Damit wird die Grundlage für die Diskussion der Ergebnisse und das Verständnis möglicher numerischer Einflüsse auf die Ergebnisse geschaffen.

### 2.1. Galaxien auf allen Skalen

Galaxien können nach dem Hubble-Schema (Hubble, 1926) in verschiedene morphologische Klassen eingeteilt werden. Die verschiedenen Typen werden in der Abbildung 2.1 illustriert. Die prägnantesten Vertreter von Galaxien sind die Spiralgalaxien, welche einen großen Bruchteil aller Galaxien ausmachen. Sie werden mit „Sx“ bezeichnet, wobei das „x“ für unterschiedliche Ausprägungen eines zentralen Bulge und der Morphologie der Spiralarme steht. Alle Typen von Spiralgalaxien können auch mit einem zentralen Balken am Himmel beobachtet werden und werden daher Balkenspiralgalaxie genannt. Balkenspiralgalaxien weisen eine zentrale balkenförmige Sternansammlung auf. Diese Art von Sternansammlung kann in etwa 2/3 (Eskridge und Frogel, 1999) aller Spiralgalaxien gefunden werden. Spiralgalaxien zeichnen sich durch zwei oder mehrere großskalige Spiralarme aus, die vom Zentrum der Galaxie bis in große Entfernungen von diesem reichen können. Die Spiralarme sind in der Regel heller als der Rest der Galaxie, da sie sich durch Sternentstehung und die Strahlung von jungen Sternen auszeichnen.

Eine gänzlich andere Erscheinung haben elliptische Galaxien „Ex“, wobei das „x“ für das Verhältnis von großer und kleiner Halbachse der Ellipse steht. Die verschiedenen Typen von elliptischen Galaxien sind dabei am Himmel nur schwer voneinander zu trennen, da ihre 3D Struktur anhand der 2D Projektion oft nicht unterscheidbar ist. Die „S0“ Galaxien oder auch lentikularen Galaxien haben zusätzlich zu einem ausgeprägten elliptischen Anteil eine Scheibenkomponente. Sie sind häufig schwer von elliptischen Galaxien zu unterscheiden.

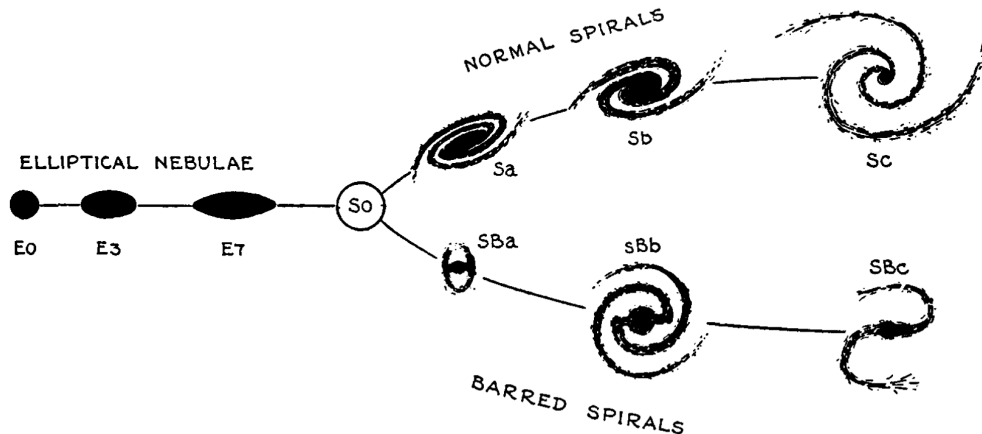


Abbildung 2.1.: Das Hubble Schema zeigt die häufigsten Morphologien, die beobachtete Galaxien aufweisen. Dazu gehören elliptische und Spiralgalaxien, sowie Balkenspiralgalaxien (Hubble, 1936).

Historisch wurde die Hubblesequenz als zeitlicher Entwicklungsweg einer Galaxie vorgeschlagen, wobei links die frühen Galaxien und rechts die späten beheimatet sind. Dies ist allein dadurch nicht schlüssig, dass die elliptischen Galaxien einen deutlich geringeren Gesamtdrehimpuls haben als die Spiralgalaxien. Der Übergang einer Galaxie zu einer anderen morphologischen Klasse ist trotzdem denkbar, zum Beispiel durch die Verschmelzung zweier Spiralgalaxien zu einer elliptischen Galaxie. Ein solcher Vorgang kann starke dynamische Reibung auf die Sterne in den Systemen ausüben, welche dann zu einer elliptischen Galaxie mit insgesamt verringertem Gesamtdrehimpuls verschmelzen könnten. Da der zeitliche Verlauf einer einzelnen Verschmelzung niemals beobachtet werden kann, sondern nur Statistik über die Wahrscheinlichkeit von Galaxienwechselwirkungen auf kosmologischen Zeit- und Raumskalen möglich ist, sind hierfür ebenfalls numerische Experimente unverzichtbar, die den Ablauf solcher Wechselwirkungen untersuchen (Chilingarian et al., 2010).

Es soll nun genauer auf die Zusammensetzung von Spiralgalaxien, beziehungsweise vor allem von den für diese Arbeit relevanten Balkenspiralgalaxien eingegangen werden.

### 2.1.1. Balkenspiralgalaxien

Der genaue Entstehungsprozess von Balken aus Sternen auf stark exzentrischen Bahnen ist unbekannt. Es wird vermutet, dass Dichtewellen aus dem Zentrum die Bahnen der Sterne verändern und daher eine balkenförmige Struktur entsteht (Bournaud und Combes, 2002). Es handelt sich wahrscheinlich um vergleichsweise kurze Phänomene im Leben einer Galaxie. Die Dichtewelle, welche im nächsten Abschnitt noch genauer beschrieben wird, ist auch der Grund für Spiralarme in den Außenbereichen. Die Balken besitzen





Abbildung 2.2.: NGC1300 ist ein Paradebeispiel für eine prägnante Balkenspiralgalaxie. Die Galaxie im Eridanus Cluster vom Hubble Typ SBb hat etwa  $2/3$  der Größe der Milchstraße und befindet sich in 18.8 Mpc Entfernung. (HST/NASA/ESA, de Vaucouleurs et al., 1991)

einen großen Einfluss auf die Bewegung der Sterne und die des Gases in der Galaxie und beeinflussen deren Bahnen maßgeblich. Dies könnte auch die hohe Anzahl von aktiven galaktischen Kernen in Spiralgalaxien erklären (Knapen et al., 2002).

Die Abbildungen 2.2 und 2.3 zeigen prominente Vertreter unterschiedlicher Klassen von Balkenspiralgalaxien. Der zentrale helle Bereich, der Bulge, der Balken und großskalige Spiralarme sind die auffälligsten visuellen Merkmale. Hellblau gefärbte Bereiche zeugen von hoher Temperatur und daher von jungen Sternen und Sternentstehung. Die wichtigsten Komponenten einer Spiralgalaxie sind:

- Eine geometrisch flache, rotierende Scheibe aus Sternen und interstellarem Material
- Ein sphärischer Halo aus Sternen und ein sphärischer Halo aus dunkler Materie
- Gegebenenfalls ein ausgedehnter Balken aus Sternen auf stark exzentrischen Bahnen
- Ein zentraler Bulge aus alten Sternen
- Ein super-massereiches Schwarzes Loch im Zentrum der Galaxie

Die Masse der dunklen Materie ist dabei in der Regel größer als die der Baryonischen (Ashman, 1992; Trimble, 1987). Der typische Gasanteil einer Balkenspiralgalaxie liegt bei 8% der Gesamtmasse (Schneider, 2006).



Abbildung 2.3.: Links: Messier 95 ist eine sehr helle Balkenspiralgalaxie vom Typ SBb. Sie hat am Nachthimmel mehrere Bogenminuten Ausdehnung und kann im Sternbild Löwe beobachtet werden. Die Aufnahme wurde mit einem 24" Teleskop auf Mt. Lemmon, Arizona gemacht (Schulman, 2010). Rechts: NGC1365 ist ebenfalls eine Balkenspiralgalaxie vom Typ SBb. Die Galaxie im Sternbild Fornax weist eine hohe Sternentstehungsrate auf und wird als Seyfertgalaxie klassifiziert (VLT, ESO; Skrutskie et al., 2006).

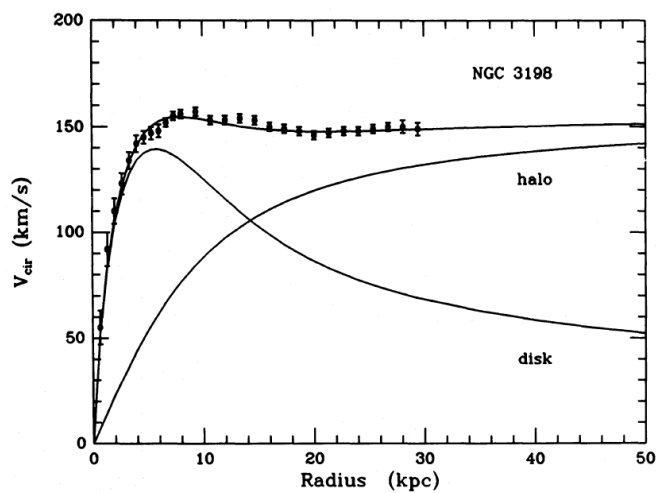


Abbildung 2.4.: Typische Rotationskurve einer Spiralgalaxie am Beispiel der Balkenspiralgalaxie NGC3198 vom Typ SBb. Auf großen Skalen ist die Rotationsgeschwindigkeit konstant und nur durch einen entsprechenden massereichen Halo aus dunkler Materie zu erklären (van Albada et al., 1985).

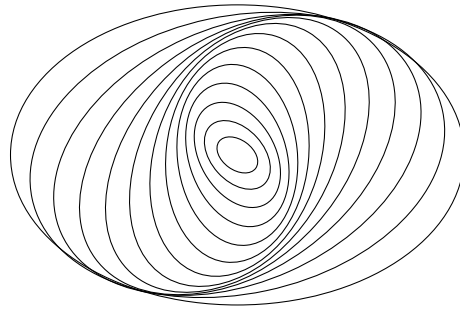


Abbildung 2.5.: Schematische Darstellung der Spiralarmbildung durch Sterne auf verschiedenen leicht zueinander rotierten exzentrischen Bahnen (nach Kalnajs, 1973).

### Dichtewellentheorie

Ein wichtiges Merkmal vieler prominenter Galaxien sind deren großskalige Spiralarms. Da deren Entstehungsmechanismus einige wichtige Konzepte zum Verstehen der späteren Ergebnisse liefert, sollen diese kurz erläutert werden. Nach der Theorie von Lin und Shu (1964, 1966) bestehen die Spiralarms aus Gebieten erhöhter Dichte, welche durch einen Stauungsprozess entstehen. Die Erhöhung der Dichte beträgt dabei in der Regel nur 10 – 20%, währenddessen die Helligkeit je nach Wellenlänge durch die dadurch erzeugte Sternentstehung deutlich stärker anwachsen kann. Der Stauungsprozess funktioniert analog zu einem Stau auf einer Straße. Die Fahrzeuge bewegen sich durch den Stau mit einer geringeren Geschwindigkeit als zuvor. Dadurch steigt hier lokal die Dichte der Autos. Der Stau selber bewegt sich dabei nicht oder sehr viel langsamer als die Autos. Es handelt sich also um eine Kompressionsregion von Gas, Staub und Sternen, welche sich danach aber weiter bewegen. Durch die Kompression von Gas steigt an der vorderen Kante der Spiralarms die Sternentstehungsrate. Da die massereichen und damit besonders hellen, bläulichen Sterne eine gegenüber der Umlaufzeit der Spiralarms in der Galaxie kurze Lebensdauer besitzen, erscheint ihre Strahlung lokalisiert um einen kleinen Bereich hinter der vorderen Spiralarmkante. Massenarme rötliche Sterne haben hingegen eine lange Lebensdauer und werden über die ganze galaktische Scheibe verteilt.

Die Abbildung 2.5 visualisiert die Ausbildung der Spiralstruktur. Das Material auf unterschiedlichen Orbits bewegt sich durch spiralartige Störungen auf leicht zueinander rotierten exzentrischen Bahnen. Das Ergebnis ist eine erhöhte Materialdichte in Form von Spiralarms. Die dafür notwendigen Bedingungen werden nun aufgeführt. Die starre Rotationsgeschwindigkeit der Spiralarms heißt  $\Omega_{gp}$  (en.: global pattern speed). Die Spiralarms ruhen im rotierenden Bezugssystem der Geschwindigkeit  $\Omega_{gp}$ . Im Allgemeinen rotieren die Sterne nicht mit der gleichen Geschwindigkeit wie die Dichtewelle. Es existiert jedoch ein Radius, an dem beide die gleiche Rotationsgeschwindigkeit besitzen, der sogenannte Korotationsradius  $R_c$ . Dementsprechend bewegen sich Sterne bei kleineren Radien schneller als die Dichtewelle und durchlaufen diese in regelmäßigen Abständen.

Für einen Stern beim Radius  $R$  mit Rotationsgeschwindigkeit  $\Omega(R)$  und eine  $m$ -armige Spirale bedeutet dies eine Durchlauffrequenz von

$$m(\Omega_{\text{gp}} - \Omega(R)). \quad (2.1)$$

Falls diese Frequenz größer als die epizyklische Frequenz  $\kappa(R)$  (siehe Abschnitt 2.1.2) des Sterns ist, kann die Spiralstruktur durch die Gravitationskraft zwischen den Sternen nicht mehr aufrechterhalten werden. Die Rotationsgeschwindigkeiten an denen es gerade zu dieser Resonanz kommt heißen innere und äußere Lindbladresonanzen (kurz: ILR, OLR; Binney und Tremaine, 2008)

$$\Omega(R) = \Omega_{\text{gp}} \pm \frac{\kappa}{m}. \quad (2.2)$$

Langlebige Spiralstrukturen können daher nur an Radien zwischen der inneren und äußeren Lindbladresonanz beobachtet werden. Die gleichen Überlegungen gelten prinzipiell auch für Gas, wobei dieses im Allgemeinen weiteren nennenswerten Beschleunigungen ausgesetzt sein kann. Der Raum zwischen den Sternen in Galaxien ist nicht leer, sondern durch das sogenannte interstellare Medium ausgefüllt. Im nächsten Abschnitt soll auf die prinzipielle Zusammensetzung dieses Mediums eingegangen werden, welches auch die im letzten Kapitel der Arbeit simulierten Gasscheiben umfasst.

### Interstellares Medium

Interstellares Material besteht aus unterschiedlichen Gasphasen und Staub. Das Gas besteht dabei zu über 91% aus molekularem Wasserstoff, einatomigen oder ionisiertem Wasserstoff und etwa 9% aus Helium (nach Teilchenzahl; Ferrière, 2001). Die wichtigsten Typen der Gasphasen sind (Gnedin et al., 2015):

**Warmes ionisiertes Medium (WIM)** Ionisiertes Gas kann aus heißem koronalen Gas  $\sim 10^6$  K und warmem ionisiertem Gas  $\sim 10^4$  K bestehen.

**Warmes neutrales Medium (WNM)** Dies ist atomares Gas, das entweder warm ( $10^4$  K) oder kalt ( $10^2$  K) sein kann.

**Molekulares Gas** Molekulares Gas ist immer kalt bei etwa  $10^2$  K.

Sternentstehung ist dabei vor allem auf molekulares Gas angewiesen. Damit molekulares Gas tatsächlich so kalt sein kann, muss es abgeschirmt werden (Krumholz et al., 2011). Ohne die Abschirmung können UV und optische Photonen durch den photoelektrischen Effekt (Einstein, 1905) energetische Elektronen aus Staubteilchen herauslösen, welche das Gas thermalisieren. Allerdings verhindert die Abschirmung auch die direkte Beobachtung von Strahlung des molekularen Wasserstoffs. Es ist daher üblich molekulares Gas dank

seiner CO-Strahlung zu beobachten (z.B. Koay et al., 2016; König et al., 2016). Das häufigste CO Molekül (Gnedin et al., 2015)  $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$  strahlt durch Rotationsübergänge, zum Beispiel für den  $1 \rightarrow 0$  Übergang mit 115 GHz bzw. bei einer Wellenlänge von 2.6 mm. Über einen Konversionsfaktor wird dann der Anteil von molekularem Wasserstoff bestimmt. Es hat sich aber gezeigt, dass falls die Gasmasse durch andere Methoden bestimmt werden kann, die CO Helligkeit gut mit der von molekularem Wasserstoff korreliert (Gnedin et al., 2015).

Das Gas des interstellaren Mediums ist der Grundstein von Akkretionsscheiben und der Akkretionsscheibenphysik, welche im nächsten Kapitel erläutert wird.

### 2.1.2. Akkretionsscheibenphysik

Jede durch ihre eigene Masse oder durch gravitative Anziehung eines zentralen Objekts global kontrahierende Gaswolke bildet, falls ausreichend Drehimpuls vorhanden ist, eine Scheibe aus. Führt diese Scheibe zu einem Massenwachstum des zentralen Objekts oder zur Bildung eines neuen zentralen Objekts, wird diese *Akkretionsscheibe* (Pringle, 1981; Shakura und Sunyaev, 1973) genannt. Damit Materie, welche einen Drehimpuls besitzt in das Zentrum einer Akkretionsscheibe fallen kann, muss es auf Grund der Drehimpulserhaltung diesen abgeben, beziehungsweise dissipieren, also durch Reibung in Wärme umwandeln. Nur dann kann Materie das zentrale Objekt erreichen und akkretiert werden. In diesem Kapitel soll eine kurze Übersicht über relevante Teile der Akkretionsscheibenphysik gegeben werden. Für eine ausgezeichnete und ausführlichere Darstellung sei auf Frank et al. (2002) verwiesen. Falls nichts anderes vermerkt ist, stellt dies auch die Quelle der in diesem Unterkapitel genannten Informationen dar.

Sowohl die Akkretion von Material auf ein zentrales Objekt, als auch die Geschwindigkeit dieses Vorgangs sind äußerst wichtige Vorgänge in der Astrophysik. Sie sind maßgeblich bei der Sternenstehung und vermutlich auch bei der Planetenentstehung. Bei der Akkretion von Material auf Schwarze Löcher in kurzer Zeit können enorme Mengen Energie in Strahlung umgewandelt werden. Dabei ist dieser Prozess deutlich effizienter als Kernfusion, wie sie in Sternen stattfindet. Eine Akkretion der Masse  $m$  auf ein zentrales Objekt mit Masse  $M$  und Radius  $R$  setzt Gravitationsenergie von der Größenordnung

$$E_{\text{acc}} = \frac{GMm}{R} \quad (2.3)$$

frei. Die freigesetzte Energie hängt von dem Verhältnis  $M/R$  ab. Mit anderen Worten setzen kompakte massereiche Objekte besonders viel Gravitationsenergie bei der Akkretion frei. Um einen Vergleich für die freigesetzte Energie zu erhalten, wird die durch Fusion freigesetzte Energie der Masse  $m$  betrachtet. In der Astrophysik spielt dabei die Fusion

	Masse	Radius	$\log(E_{\text{acc}}/E_{\text{nuc}})$
Sonne	$1 M_{\odot}$	$1 R_{\odot}$	-4
Weißer Zwerg	$1 M_{\odot}$	$10^4 \text{ km}$	-2
Neutronenstern	$1 M_{\odot}$	$10 \text{ km}$	1
Schwarzes Loch	$M_{\bullet}$	$3 (M_{\bullet}/M_{\odot}) \text{ km}$	5

Tabelle 2.1.: Effizienz der Energiefreisetzung durch Akkretion im Vergleich zur Umsetzung der Masse in Energie durch Kernfusion. Massereiche kompakte Objekte können durch Akkretion äußerst effizient Energie freisetzen.  $M_{\odot}$  und  $R_{\odot}$  bezeichnen die Masse beziehungsweise den Radius der Sonne und  $M_{\bullet}$  die frei wählbare Masse eines Schwarzen Lochs.

von Wasserstoff zu Helium die größte Rolle. Dabei wird die Energie (Bethe, 1939)

$$E_{\text{nuc}} = 0.007mc^2 \quad (2.4)$$

pro Masse  $m$  freigesetzt. In Tabelle 2.1 sind die Massen, Radien und das Verhältnis von freigesetzter Akkretions- und Fusionsenergie angegeben. Bei der Entstehung von sonnenähnlichen Sternen ist die Energieerzeugung durch Akkretion deutlich ineffizienter als durch Kernfusion möglich ist. Die bei der Akkretion von Materie auf Neutronensterne oder Schwarze Löcher freigesetzte Energie ist eine bzw. fünf Größenordnungen über der möglichen Energieerzeugung durch Kernfusion der gleichen Materie. Für Weiße Zwerge ist die absolut erzeugbare Energie durch Akkretion zwar geringer als bei Kernfusion, jedoch kann diese dennoch eine Rolle spielen, da unsere bisherigen Argumente keine Aussage über die Zeitskalen der Prozesse gemacht haben. Wird die gesamte Fusionsenergie in kurzer Zeit verbraucht, kann die Akkretionsenergie über lange Zeiträume relevant sein, da die beobachtbare Leuchtkraft eines Objekts mit festgelegter Kompaktheit proportional zur Akkretionsrate  $\dot{M}$

$$L \propto \dot{M} \quad (2.5)$$

ist. Für hohe Akkretionsraten  $\dot{M}$  auf kompakte Objekte kann die hohe Leuchtkraft selbst den Akkretionsprozess verlangsamen oder ganz stoppen. Es existiert daher eine maximale Akkretionsrate beziehungsweise Helligkeit für jedes Objekt. Diese Grenze wird im folgenden Kapitel besprochen.

### Die Eddington-Grenze

Die Akkretionsrate auf ein kompaktes Objekt, zum Beispiel ein Schwarzes Loch oder einen Protostern, kann nicht beliebig stark anwachsen. Sie ist im Allgemeinen dadurch beschränkt, dass die bei Akkretion entstehende Strahlung durch Druck, in der Regel

Strahlungsdruck, der Gravitationskraft des einfallenden Materials entgegenwirkt. Kurzzeitig kann die Grenze problemlos überwunden werden, aber es ist keine dauerhafte Akkretion über der sogenannten Eddington-Grenze möglich. Ebenso stellt sie ein Limit an die maximal mögliche Leuchtkraft, die Eddington Leuchtkraft.

Um die Größenordnung dieser Grenze abzuschätzen, wird wie in Rybicki und Lightman (1979) und Frank et al. (2002) vorgegangen und stationäre sphärisch-symmetrische Akkretion angenommen. Das zu akkretierende Material ist ionisiert und größtenteils atomarer Wasserstoff. Die bei Akkretion entstehende Leuchtkraft wirkt durch Thomson-Streuung eine Kraft auf die freien Elektronen aus. Die auf die Protonen wirkende Kraft kann vernachlässigt werden, da der Thomson-Streuquerschnitt der Protonen deutlich niedriger ist als für die Elektronen (Eddington, 1921). Diese ziehen durch die anziehende elektrostatische Kraft die Protonen mit sich. Für die radial nach außen gerichtete Kraft der Thomson-Streuung ergibt sich

$$F_T = \frac{\sigma_T S}{c}. \quad (2.6)$$

Dabei ist  $\sigma_T$  der Streuquerschnitt der Elektronen,  $S$  der Strahlungsfluss und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit. Gleichzeitig werden die Protonen-Elektronen Paare mit Massen  $(m_p + m_e)$  durch die Zentralmasse  $M$  angezogen

$$F_g = \frac{GM(m_p + m_e)}{r^2} \approx \frac{GMm_p}{r^2}, \quad (2.7)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante bezeichnet. Wenn die Leuchtkraft des Zentralobjekts nun

$$L = S \cdot 4\pi r^2 \quad (2.8)$$

beträgt, wirkt die Gesamtkraft auf die Protonen-Elektronen Paare:

$$F = F_g - F_T = \left( GMm_p - \frac{L\sigma_T}{4\pi c} \right) \frac{1}{r^2}. \quad (2.9)$$

Der Grenzfall  $F = 0$ , also die Eddington Grenze, liefert die Eddington Leuchtkraft (Eddington, 1921; Rybicki und Lightman, 1979)

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c GM m_p}{\sigma_T}. \quad (2.10)$$

Um eine Vorstellung von der Größenordnung der Leuchtkraft zu bekommen, eignet sich das Einsetzen der Konstanten und Formulierung in Abhängigkeit von Sonnenmassen und Sonnenleuchtkräften  $M_\odot$ ,  $L_\odot$

$$L_{\text{Edd}} \approx 33000 \frac{M}{M_\odot} L_\odot. \quad (2.11)$$

Falls ein kompaktes Objekt allein durch Akkretion (im Gegensatz zu z.B. Fusion) mit Energie versorgt wird, können ebenfalls eine Eddington Grenze für die Akkretionsrate angegeben werden. Mit der Annahme, dass die Gravitationsenergie des einfallenden Materials der Masse  $m$

$$E = \frac{GMm}{R} \quad (2.12)$$

an der Oberfläche beim Radius  $R$  des kompakten Objekts in Strahlung umgewandelt wird, ergibt sich die Akkretionsleuchtkraft zu

$$L_{\text{acc}} = \frac{GM\dot{M}}{R}. \quad (2.13)$$

Im Falle eines Schwarzen Lochs kann jedoch kaum davon ausgegangen werden, dass die komplette Gravitationsenergie in Strahlung umgewandelt wird. Vielmehr muss damit gerechnet werden, dass ein Teil der Energie von dem Schwarzen Loch verschlungen wird. Um diese Unsicherheit abzubilden wird üblicherweise ein Effizienzfaktor  $\eta$  (z.B. Davis und Laor, 2011; Frank et al., 2002) eingeführt. Verwendung des Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.14)$$

liefert für die Akkretionsleuchtkraft

$$L_{\text{acc}} = \eta \frac{2GM\dot{M}}{R_S} \quad (2.15)$$

$$= \eta \dot{M} c^2 \quad (2.16)$$

und damit die von der Leuchtkraft  $L_{\text{acc}}$  abhängige Akkretionsrate

$$\dot{M} = \frac{L_{\text{acc}}}{\eta c^2}. \quad (2.17)$$

Falls die Leuchtkraft gerade der Eddington-Leuchtkraft entspricht, kann analog dazu eine Eddington-Akkretionsrate  $\dot{M}_{\text{Edd}}$  angegeben werden:

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta c^2}. \quad (2.18)$$

Das Bestimmen eines realistischen Wertes für  $\eta$  ist nicht trivial. Ein Wert von  $\eta = 1$  würde dem unendlich langsamen Absenken des akkretierten Materials ins Schwarze Loch entsprechen. Ein schnell rotierendes Schwarzes Loch würde einen deutlich geringeren Wert vorweisen (Netzer, 2013). Genauere Untersuchungen dazu sind hier nicht relevant, sodass in dieser Arbeit der weit verbreitete Wert von  $\eta = 0.1$  verwendet wird.



Für die Akkretionsscheibenrechnungen sind diese Abschätzungen ein Mittel zur Begrenzung der maximal möglichen Akkretionsrate. Dabei werden wahrscheinlich beide am Anfang gemachten Annahmen verletzt. Die Akkretion findet nicht mit einer konstanten Rate und nicht sphärisch symmetrisch statt. Es stellt aber auch für geometrisch dünne Scheiben eine nützliche Abschätzung dar (Kato et al., 2008).

### Drehimpulsverteilung

Eine Akkretionsscheibe kann durch Akkretion auf ein massereiches kompaktes Objekt eine sehr effiziente Energiequelle darstellen. Bisher wurde vernachlässigt, wie das Material zum Zentrum der Gravitation gelangen kann. Dafür muss es mehr als 99.9% seines Drehimpulses abgeben. Dazu stehen mehrere prinzipiell denkbare Prozesse zur Verfügung:

- Die Wechselwirkung mit einem nicht-axialsymmetrischen Potential kann ein Drehmoment in der Scheibe induzieren und für radialen Materialtransport sorgen. Es ist bekannt, dass der Balken einer Balkengalaxie effizient den Drehimpuls von Material entfernen kann, bis dieses auf Radien von ungefähr 1 kpc abgesunken ist (Knapen et al., 2002). Für kleinere Radien ist der großskalige Balken nicht mehr effizient.
- Eine turbulente Viskosität sorgt für Energiedissipation und hilft bei der Umverteilung von Masse und Drehimpuls. Hierfür existieren verschiedene Parametrisierungen (Duschl et al., 2000; Shakura und Sunyaev, 1973), die Abschätzungen über die beteiligten Größenskalen vornehmen, um die mögliche Stärke der Viskosität zu begrenzen. Die genauen physikalischen Prozesse, welche die Viskosität erzeugen, werden dabei nicht direkt simuliert, sondern modelliert. Mögliche Viskositätsquellen sind Magnetismus, Gravitation oder Turbulenz.
- Die Magnetorotationsinstabilität (MRI, Balbus und Hawley, 1991) kann ein differentiell rotierendes Plasma destabilisieren und zu Drehimpuls- und Massentransport führen. Es wird vermutet, dass sie eine wichtige Rolle bei der Sternentstehung und dem Wachstum Schwarzer Löcher besitzt. Das Gas muss dafür ionisiert und es müssen Magnetfelder ausreichender Stärke vorhanden sein.
- Stoßwellen können sehr effizient Energie dissipieren und Material dementsprechend stark abbremsen und auf diese Weise Masse und Drehimpuls umverteilen (Landau und Lifshitz, 1966).

Innere Reibung spielt in galaktischen Scheiben meist keine Rolle, da die freien Weglängen im Gas viel zu groß sind, um nennenswerte innere Reibung zu erzeugen. Gerade die Viskositätsparametrisierungen haben sich als erfolgreiches Mittel für die Modellierung zahlreicher astrophysikalischer Phänomene erwiesen. Jede Parametrisierung ist dabei zwar

auf vielfältige Probleme anwendbar, aber unterschiedliche Modelle benötigen unterschiedliche Parameter. Sie sind daher für Multiskalenprobleme nicht besonders gut geeignet. Für solche Probleme sind direkte Simulationen der erzeugenden Kräfte, also zum Beispiel von Selbstgravitation oder Magnetismus, notwendig. Ob durch Selbstgravitation Instabilitäten in einer Akkretionsscheibe zu erwarten sind, kann mit dem Toomre-Kriterium ermittelt werden.

### Toomre Kriterium

Würde ein Gas nur der Gravitationskraft unterliegen, wäre es bedingungslos instabil. Bei stationären Gasen wirkt hauptsächlich der thermisch erzeugte Druck der Gravitation entgegen und kann das Gas gegebenenfalls stabilisieren. Ob ein stationäres Gas gravitativ stabil ist, kann mit dem Jeanskriterium (Jeans, 1902) bestimmt werden. Bei differentiell rotierenden Gasscheiben liefern die entstehenden Scherkräfte einen weiteren wesentlichen Beitrag zur Stabilität des Systems. Die Einbeziehung der Scherkräfte führt zum Toomre Kriterium (Toomre, 1964) mit dem Toomre-Parameter

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma}, \quad (2.19)$$

wobei  $c_s$  die Schallgeschwindigkeit,  $\kappa$  die epizyklische Frequenz und  $\Sigma$  die Oberflächendichte der Scheibe angibt. Die Gasscheibe ist gravitativ stabil, falls

$$Q > 1 \quad (2.20)$$

gilt. Die epizyklische Frequenz wird im folgenden Abschnitt eingeführt.

### Epizyklische Frequenz

Die Frequenz mit der ein radial gestörtes Fluid-Partikel in einer Gasscheibe um seine ungestörte Bahn oszilliert, wird epizyklische Frequenz genannt. Die epizyklische Frequenz (Pringle und King, 2007)

$$\kappa^2 = \frac{2\Omega}{R} \frac{d}{dR} (R^2 \Omega) \quad (2.21)$$

hängt dabei von der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega(R)$  und der Entfernung zum Rotationsmittelpunkt  $R$  ab. Bei einer keplerschen Scheibe<sup>1</sup>  $\kappa = \Omega$ . Wird  $\kappa^2$  negativ, ist die zugehörige Fluidpartikelbahn instabil gegen kleine radiale Störungen. Dies führt zu typischen scharfen

<sup>1</sup>Eine keplersche Scheibe zeichnet sich durch Rotation im Fliehkraft-Gravitations-Gleichgewicht einer Punktquelle aus.

Kanten in der Gasscheibe, wie zum Beispiel beim letzten stabilen Orbit eines Schwarzschild Schwarzen Lochs.

## Zeitskalen

Es ist häufig sehr nützlich sich von physikalischen Prozessen ein Bild der wichtigsten beteiligten zeitlichen Skalen zu machen, bevor die Geschehnisse im Detail betrachtet werden. Häufig lässt sich direkt abschätzen, ob ein physikalischer Prozess relevant ist und in dem jeweiligen Modell beachtet werden muss. Je nach beteiligten physikalischen Quelltermen, werden zum Beispiel die dynamische, viskose und Kühlzeitskala verwendet, um die Dauer einer Simulation festzulegen. Um relevante Prozesse beobachten zu können, muss mindestens einige charakteristische Zeitskalen lang simuliert werden. Die für diese Arbeit wichtigsten Zeitskalen sind die Folgenden (Hanslmeier, 2002):

### Freifallzeitskala

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (2.22)$$

Die Freifallzeitskala  $\tau_{\text{ff}}$  gibt an, wie lange der freie Fall eines Testteilchen im Abstand  $R$  mit einer gravitativen Beschleunigung  $g$ , beziehungsweise im Punktmassenspotential einer Masse  $M$  dauert. Hiermit kann zum Beispiel abgeschätzt werden, wie lange eine Gaswolke mindestens zum Kollabieren benötigt oder in welcher Zeit die nach innen gerichtete Bewegung eines dichten Klumpens abläuft.

### Dynamische Zeitskala

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{1}{\Omega(R)} \quad (2.23)$$

Die dynamische Zeitskala  $\tau_{\text{dyn}}$  gibt die Dauer eines Orbits eines Testteilchens/Fluid-elements, zum Beispiel in einer Akkretionsscheibe mit lokaler Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ , an.

### Viskose Zeitskala

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{R^2}{\nu} \quad (2.24)$$

Die viskose Zeitskala  $\tau_{\text{visc}}$  gibt an, wie lange es dauert, bis ein viskoser Prozess mit Viskosität  $\nu$  im Abstand  $R$  zum Zentralobjekt Wirkung zeigt. In Simulationen mit Viskosität stellt sie für Akkretionsscheiben üblicherweise die größte Zeitskala dar.

## Kühlzeitskala

$$\tau_{\text{cool}} = \frac{b_{\text{cool}}}{\Omega} \quad (2.25)$$

In dieser Arbeit wird eine parametrisierte Zeitskala, wie sie von Gammie (2001) benutzt wurde, als Kühlung verwendet. Diese im folgenden als **GAMMIE-Kühlung** bezeichnete Vorschrift entzieht dem System innere Energie auf dynamischen Zeitskalen. Die Wirkungsgeschwindigkeit der Kühlung wird mit dem Parameter  $b_{\text{cool}}$  eingestellt und ergibt dann die Kühlzeitskala  $\tau_{\text{cool}}$ . Ein Kühlungsparameter von 3 bedeutet zum Beispiel, dass die Kühlung in der Zeit von 3 dynamischen Zeitskalen, also innerhalb von 3 Orbits, wirken kann. Weitere Informationen zur **GAMMIE-Kühlung** finden sich in Abschnitt 5.2.

## 2.2. Hydrodynamik

Die Hydrodynamik ist die Lehre von bewegten Flüssigkeiten und Gasen. Die in der Astrophysik relevanten Flüssigkeiten sind üblicherweise gasförmig. Das heißt, dass die Materie aus einzelnen Partikeln, meist freien Elektronen und Ionen, besteht, die nur über Kollisionen miteinander wechselwirken. Ein Gaspartikel legt dabei die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  zurück, bevor es seine Bewegungsrichtung ändert. Für ein Volumen, welches deutlich größere Ausdehnungen als die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  besitzt, lässt sich die mittlere Geschwindigkeit der Partikel in diesem Volumen, die Gasgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , definieren. Die einzelnen Partikel in dem Volumen sind um die mittlere Gasgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  Maxwell-Boltzmann verteilt, sodass dem Gasvolumen eine entsprechende Temperatur zugeordnet werden kann. Im Folgenden werden nur Längenskalen  $l \gg \lambda$  betrachtet, sodass von einem kontinuierlichen Gas ausgegangen werden kann (Frank et al., 2002; Landau und Lifshitz, 1966).

Zuerst werden nun allgemeine und die in der Hydrodynamik relevanten Erhaltungssätze eingeführt. Auf Basis der hydrodynamischen Grundgleichungen können die quasi-stationären Probleme als spezielle Lösungsklassen dieser Gleichungen erklärt werden. Nach einem kurzen Blick auf Finite-Volumen-Verfahren zur Lösung von Systemen von Erhaltungssätzen, wird die Hydrodynamiksoftware FOSITE mit den für diese Arbeit relevanten Untermodulen eingeführt.

### 2.2.1. Erhaltungssätze

Ein Erhaltungssatz in der Physik beschreibt die fundamentale Beobachtung, dass sich eine physikalische Größe, die Erhaltungsgröße, unter bestimmten Prozessen nicht verändert

wird. Präziser können spezielle hyperbolische partielle Differentialgleichungen, sogenannte Erhaltungsgleichungen (Toro, 2013),

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) + \nabla \cdot f(u(x, t)) = S(u(x, t)) \quad (2.26)$$

für eine Erhaltungsgröße  $u$ , deren räumlichen Fluss  $f$  und einen Quellen- oder Senkenbeitrag  $S$  auf einem Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$  formuliert werden. Für eine einfache Erhaltungsgleichung existiert kein Quellenbeitrag ( $S = 0$ ). Verallgemeinert kann eine Erhaltungsgleichung geschrieben werden als

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot T(u) = 0. \quad (2.27)$$

Dabei ist  $u$  entweder ein Skalar oder ein Vektor und  $T$  ein Vektor oder ein Tensor zweiter Stufe. Im ersten Fall heißt diese Gleichung skalärer Erhaltungssatz, andernfalls vektorieller Erhaltungssatz.

Der Zustand einer kompressiblen Flüssigkeit, beziehungsweise eines Gases, kann eindeutig durch Dichte  $\rho$ , Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  und Druck  $p$  an jedem Punkt im Raum beschrieben werden. Diese Größen heißen auch **primitive Variablen**. Im Folgenden werden die Erhaltungsgleichungen für diese Größen (Landau und Lifshitz, 1966; Toro, 2013) angegeben. Erhalten sind dabei mit Ausnahme der Dichte jedoch nicht die primitiven Größen, sondern die sogenannten **konservativen Variablen**. Die Menge der konservativen Variablen in der kompressiblen Hydrodynamik besteht aus der Dichte  $\rho$ , den linearen Impulsen  $\rho \mathbf{v}$  und der Gesamtenergie  $E$ .

### Kontinuitätsgleichung

Die Massenerhaltung wird durch die Kontinuitätsgleichung beschrieben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.28)$$

### Impulsgleichung

Die Erhaltung linearer Impulse wird mit der Impulsgleichung beschrieben. Es handelt sich dabei um drei Gleichungen, jeweils eine für jede Raumrichtung.

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbb{I}p) = 0 \quad (2.29)$$

### Energiegleichung

Die Energiegleichung beschreibt die Erhaltung der Gesamtenergie, also der Summe aus innerer und kinetischer Energie  $E = \epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2$ .

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) = 0 \quad (2.30)$$

### Zustandsgleichung

Der Zusammenhang zwischen der inneren Energie und dem Druck wird durch eine Zustandsgleichung beschrieben. Für ein ideales Gas gilt

$$p = (\gamma - 1) \epsilon, \quad (2.31)$$

wobei  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  den Isentropenexponent, also das Verhältnis der spezifischen Wärmen, angibt. Wenn von einer isothermen oder lokal isothermen Zustandsgleichung ausgegangen werden kann, vereinfacht sich das System stark. Durch diese Annahmen ist die Energiegleichung direkt gelöst und der Druck ist durch

$$p = \rho c_s^2 \quad (2.32)$$

definiert, wobei  $c_s$  die isotherme Schallgeschwindigkeit ist. Bei lokaler Isothermie ist die Schallgeschwindigkeit ortsabhängig, aber dennoch zeitlich konstant.

#### 2.2.2. Quasi-stationäre Probleme

Viele der in dieser Arbeit betrachteten Systeme befinden sich in einem quasi-stationären Zustand. Das bedeutet, dass die Zeitableitung der Zustandsvariablen sehr klein ist, beziehungsweise nahezu Null beträgt. Im Inertialsystem ist das für Systeme mit nicht-axialsymmetrischen Gravitationspotentialen in der Regel nicht erfüllt. Kann ein rotierendes Bezugssystem gefunden werden, in dem das Gravitationspotential konstant bleibt, befindet sich die darin entstehende Gasströmung häufig in quasi-stationären Zuständen. Dabei treten hauptsächlich drei verschiedene Kräfte auf, welche im stationären Zustand balanciert sind:

1. Nach innen gerichtete Gravitationsbeschleunigung
2. Nach außen gerichtete Zentrifugalbeschleunigung

### 3. Nach außen gerichteter Druckgradient

Da der Druckgradient häufig deutlich kleiner ist als die anderen beiden Beiträge, kann er in der Scheibenebene vernachlässigt werden. In der vertikalen Richtung befinden sich Akkretionsscheiben üblicherweise im hydrostatischen Gleichgewicht zwischen vertikalem Druck und Gravitationskraft. Die Erhaltung des quasi-stationären Zustandes ist häufig ein hoher Anspruch an die Numerik – insbesondere in rotierenden Bezugssystemen, wie in den folgenden Kapiteln noch erläutert wird. Für sehr empfindliche Systeme empfiehlt es sich, numerische Verfahren anzuwenden, welche den stationären Zustand exakt erhalten können. Solche wohl-balancierten Verfahren finden sich zum Beispiel in (Käppeli und Mishra, 2016).

#### 2.2.3. Finite-Volumen-Verfahren

Ein Finite-Volumen-Verfahren ist ein numerisches Verfahren zum Lösen von Erhaltungsgleichungen (Hirsch, 2001, 2007; LeVeque, 2002; Toro, 2013). Hierfür wird ein Gebiet  $\Omega$  in eine endliche (finite) Zahl von Volumenelementen  $\Omega_i$  zerlegt. Der Erhaltungssatz gilt auch auf jedem Volumenelement einzeln. Die Volumenintegration einer Erhaltungsgleichung (2.26) über das Volumen  $\Omega_i$  ergibt nach der Anwendung des Satzes von Gauß (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $S = 0$ ):

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial t} u \, d\Omega + \int_{\Omega_i} \nabla \cdot f(u) \, d\Omega = 0 \quad (2.33)$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial t} u \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_i} f(u) \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.34)$$

Mit dieser Integralgleichung kann das Erhaltungsgesetz leicht verstanden werden. Jede zeitliche Änderung der Erhaltungsgröße  $u$  im Volumen  $\Omega_i$  kann nur durch einen Fluss dieser über den Rand des Volumens  $\partial\Omega_i$  verursacht werden. Für den Mittelwert von  $u$  im Volumen  $\Omega_i$

$$u_i = \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\Omega_i} u \, d\Omega \quad (2.35)$$

kann für zeitlich konstante Zellvolumen  $\Omega_i$  eine Zeitentwicklungsgleichung angegeben werden:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{1}{|\Omega_i|} \int_{\partial\Omega_i} f(u) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.36)$$

Mit dieser Gleichung kann die Zeitentwicklung der Erhaltungsgröße berechnet werden. Für ein robustes und hochauflösendes Verfahren können hierfür noch einige Feinheiten und Verbesserungen vorgenommen werden. Die wichtigsten der Modifikationen, welche in dieser Arbeit Anwendung finden, werden später besprochen. Die Implementierung eines solchen Verfahrens wird im nächsten Abschnitt erklärt.

### 2.3. FOSITE – 2D Hydrodynamik Softwarepaket

Das Softwarepaket FOSITE (Illenseer und Duschl, 2009) kann Systeme nicht-linearer hyperbolischer Erhaltungsgleichungen der Art (2.27) lösen. Zum Lösen solcher Erhaltungsgleichungen verwendet FOSITE die Finite-Volumen-Methode auf krummlinig-orthogonalen Gittern. In der aktuellen Version löst es dabei 2 oder 2.5 räumliche Dimensionen mit zum Beispiel Polarkoordinaten, kartesischen Koordinaten, rotationssymmetrischen Zylinderkoordinaten oder bipolaren Koordinaten auf. Die ursprüngliche Implementierung basiert auf der Arbeit von Kurganov und Tadmor (2000). Seitdem ist das Softwarepaket durch Teamarbeit in unserer Arbeitsgruppe erheblich gewachsen.

In den folgenden Abschnitten werden Basisteile aus FOSITE beschrieben, die für spätere Diskussionen der Simulationsergebnisse relevant sind. Viele dieser Module<sup>2</sup> sind durch meine Arbeit während der Promotion entstanden und waren nicht Teil des ursprünglichen Softwaresystems. Zu den wichtigsten Eigenschaften von FOSITE gehören:

- Finite-Volumen-Verfahren für hyperbolische Erhaltungsgesetze
- Semidiskret: Zweite räumliche Ordnung und bis zur fünften zeitlichen Ordnung
- Minimierung der totalen Variation mit einer großen Auswahl an Steigungslimitern
- Beliebige krummlinig-orthogonale Gitter
- Upwind Verfahren: Die Informationsflussrichtung wird beachtet
- Fortran 95, Objektorientiertes Design, GPL Lizenz
- MPI parallelisiert, Vektorisiert für NEC SX8/9/ACE

---

<sup>2</sup>Unter anderem alle Riemann-Löser, SSPRK Zeitintegrationsverfahren, Drehimpuls erhaltende Physikmodule, Drehimpuls erhaltene Formulierung der rechten Seite, Selbstgravitationslöser für polare Geometrien, Gravitationsbeschleunigung für beliebige Gravitationspotentiale, ein neues verallgemeinertes Dateiausgabeformat mit flexibler Python-basierter Datenanalyse-Software, sowie ein generalisiertes Parametersystem für die flexible Erweiterung beliebiger Module.



- Zahlreiche Ausgabeformate: ASCII, Gnuplot, VTK, simples Binärformat
- Flexibles Python-basiertes Auswertungspaket

Die Optimierung von FOSITE für NEC SX Vektorrechner ist ein besonders bemerkenswertes Feature und lässt sich sogar mit gleichzeitiger MPI Parallelisierung verwenden. Der NEC SX ACE hat pro Kern eine beachtliche Spitzenleistung von 64 GFLOPS, vier Kerne pro CPU und eine Speicherbandbreite von 256 GByte/s pro CPU (SX-ACE, 2016). Die FLOPS (en. Floating Point Operations) beziehen sich dabei auf Vektorinstruktionen, welche bei dieser CPU 256 Elemente umfassen können. Es können natürlich nicht alle Operationen vektorisiert werden, aber FOSITE kann einen Vektorisierungsgrad von mehr als 95% erreichen. Kann zudem die volle Vektorlänge von 256 Elementen ausgenutzt werden, entspricht dies der Leistung einer gewöhnlichen CPU mit mehr als 16 TFLOPS. Diese große Leistung auf einem einzelnen Vektorkern ist auch besonders bei der Verwendung des neuen Selbstgravitationsmodul nützlich, da die darin verwendeten eindimensionalen Fouriertransformationen nicht effizient parallelisiert werden können<sup>3</sup>.

Es werden jetzt die Koordinaten und grundlegenden Module von FOSITE eingeführt. Seien  $(\xi, \eta, \varphi)$  krummlinig-orthogonale Koordinaten mit der orthonormal Basis  $(e_\xi, e_\eta, e_\varphi)$  und metrischen Skalenfaktoren  $(h_\xi, h_\eta, h_\varphi)$ .

Nach der Definition neuer räumlicher Ableitungsoperatoren (wobei  $\partial_\varphi \equiv 0$ , da ein zweidimensionales Schema abgeleitet werden soll)

$$\mathcal{D}_\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} h_\eta h_\varphi \quad \mathcal{D}_\eta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} h_\xi h_\varphi, \quad (2.37)$$

kann die Gleichung (2.27) in krummlinig-orthogonalen Koordinaten umgeschrieben werden

$$\partial_t u + \mathcal{D}_\xi F(u) + \mathcal{D}_\eta G(u) = S(u), \quad (2.38)$$

wobei  $F$  und  $G$  Flussvektoren und  $S$  geometrische Quellen heißen. Für skalare Erhaltungsgleichungen gibt es keinen geometrischen Beitrag zu den Quelltermen  $S = 0$ .

### 2.3.1. Geometrien

FOSITE ermöglicht die Implementierung beliebiger krummlinig-orthogonaler Koordinatensysteme. In der aktuellen Version können 2D aufgelöste Gitter verwendet werden, wodurch die möglichen Anwendungsfälle auf 2.5D, 2D und 1D Fälle beschränkt sind. In dieser Arbeit werden nur flache Geometrien, welche in der  $x$ - $y$ -Ebene liegen, verwendet.

<sup>3</sup>Dies ist ein allgemeines Problem der Fouriertransformation, da sie eine globale Operation auf einen Vektor von Daten darstellt. Eine Parallelisierung würde soviel Kommunikation zwischen den Prozessen erfordern, dass die Berechnung insgesamt deutlich verlangsamt werden würde.

Name	$f(\xi)$	Ortsvektor $\mathbf{r}$	Skalenfaktoren $\begin{pmatrix} h_\xi \\ h_\eta \\ h_\varphi \end{pmatrix}$
Polar	$\xi$	$\xi \cdot \begin{pmatrix} \cos(\eta) \\ \sin(\eta) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ 1 \end{pmatrix}$
Logpolar	$\kappa_1 \exp(\xi)$	$\kappa_1 \exp(\xi) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\eta) \\ \sin(\eta) \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \kappa_1 \exp(\xi) \\ \kappa_1 \exp(\xi) \\ 1 \end{pmatrix}$

Tabelle 2.2.: Ortsvektor und Skalenfaktoren für Polarkoordinaten mit linearer und logarithmischer Skalierung.

Eine besondere Rolle kommt dabei den polaren Geometrien zu. Im einfachsten Fall sind dies die üblichen Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

Im Allgemeinen kann die radiale Skalierung beliebig sein, zum Beispiel mit logarithmischer Skalierung. Eine beliebige monoton steigende Funktion  $f(\xi)$  mit Inverser  $f^{-1}(|r|)$  kann verwendet werden, um Polarkoordinaten

$$\mathbf{r} = f(\xi) \begin{pmatrix} \cos(\eta) \\ \sin(\eta) \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

zu definieren. Solche Koordinatensysteme haben zwei sehr wichtige Eigenschaften, auf welche sich die nachfolgenden numerischen Methoden stützen. Als erste Eigenschaft ist der Abstand zum Ursprung gleich dem metrischen Skalenfaktor  $h_\eta$ :

$$|\mathbf{r}| = h_\eta. \quad (2.41)$$

Unter Verwendung von dieser Eigenschaft und  $h_\xi = 1$  erhalten wir

$$\frac{\partial h_\eta}{\partial \xi} = 1. \quad (2.42)$$

Die Tabelle 2.2 zeigt die Ortsvektoren und Skalenfaktoren für Polarkoordinaten mit linearer und logarithmischer Skalierung, welche in Abbildung 2.6 skizziert sind. In den Baryzentren der Zellen, also in ihren Schwerpunkten, sind die konservativen und primitiven Variablen definiert. Um die Randflüsse zu bestimmen, werden jedoch die Daten der Variablen auf

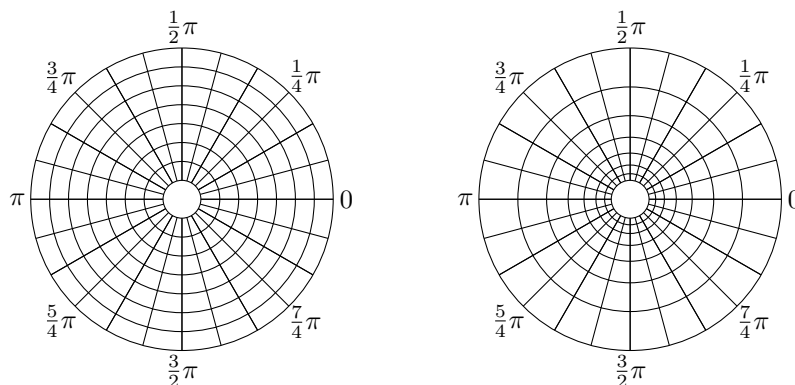


Abbildung 2.6.: Schematische Darstellung von Polarkoordinaten mit linearer und logarithmischer Skalierung.

den Zellrändern benötigt. Die dafür nötige Rekonstruktion der Daten in jeder Zelle wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

### 2.3.2. Rekonstruktion und Limiter

Bevor die physikalischen Flüsse auf den Rändern einer Gitterzelle berechnet werden können, müssen die primitiven und konservativen Variablen an diesen Orten bestimmt werden. Je nach gewählter Ordnung wird hierfür eine konstante oder lineare Rekonstruktion durchgeführt.

#### Konstante Rekonstruktion

Bei der konstanten Rekonstruktion wird angenommen, dass die Variablen in der Zelle konstant sind. Die Randdaten entsprechen den jeweiligen baryzentrischen Zellmitten und ein Schema räumlich erster Ordnung wird erreicht.

#### Lineare Rekonstruktion

Bei der linearen Rekonstruktion werden die Zellmittendaten linear auf die Zellränder rekonstruiert. Ein solches Verfahren ist räumlich zweiter Ordnung. Da es dabei leicht zu numerischen Instabilitäten durch abwechselndes unter- und überschätzen der Daten zum

Beispiel in der Nähe von Stoßfronten kommen kann, werden sogenannte Steigungslimiter (Slopelimiter; Hirsch, 2001; Toro, 2009; van Leer, 1977) zum Begrenzen der Steigungen verwendet. Um die Steigung innerhalb einer Zelle (entlang einer Koordinatenlinie) zu bestimmen, werden jeweils die Steigungen zur letzten und zur nächsten Zelle bestimmt. Diese beiden Werte werden an den Slopelimiter weitergegeben, welcher die limitierte Steigung zurück gibt. Mit den limitierten Steigungen aus beiden Raumrichtungen können alle benötigten Zellwerte rekonstruiert werden.

### Slopelimiter

Das Ziel eines Slopelimiters ist, numerische Instabilitäten, welche durch Über- bzw. Unterschätzen von Steigungen bei der Rekonstruktion entstehen können, zu verhindern oder wenigstens zu vermindern. Insbesondere müssen alle Limiter die maximale Variation minimieren (TVD, Total Variation Diminishing; Harten, 1997). Das heißt sie müssen in der TVD Region liegen. Limitiert wird das Verhältnis des Rückwärtsdifferenzenquotienten zum Vorwärtsdifferenzenquotienten

$$r_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_i} \quad (2.43)$$

der betrachteten Größe  $u$ . Das Ergebnis  $\Phi(r_i)$  ist die limitierte Steigung innerhalb der Zelle  $i$  und kann zur linearen Rekonstruktion anderer Punkte in der Zelle verwendet werden. Klassischer Weise (Stone und Norman, 1992) wurde dies durch das Hinzufügen von künstlicher Viskosität erreicht. Gleichzeitig soll die Rekonstruktion in glatten Lösungsbereichen räumlich zweiter Ordnung bleiben, was nicht immer der Fall ist (Zeng, 2013). TVD Limiter zweiter Ordnung müssen mindestens die folgenden Kriterien erfüllen (Sweby, 1984):

$$\varphi \in \begin{cases} [r, \max(2r, 1)] & 0 \leq r \leq 1 \\ [1, \max(r, 2)] & 1 < r \end{cases} \quad (2.44)$$

Die wichtigsten Limiter in FOSITE sind

**Minmod** (Roe, 1986)

$$\Phi(r) = \max(0, \min(1, r)) \quad (2.45)$$

**Superbee** (Roe, 1986)

$$\Phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)) \quad (2.46)$$

**Monocent** (van Leer, 1977)

$$\Phi(r, \theta) = \max\left(0, \min\left(\theta r, \frac{1+r}{2}, \theta\right)\right) \quad \theta \in [1, 2] \quad (2.47)$$

**Vanleer** (van Leer, 1974)

$$\Phi(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|} \quad (2.48)$$

Welcher Limiter für die jeweilige Simulation am besten geeignet ist, hängt von der Problemstellung ab. Im Allgemeinen wird versucht, einen möglichst wenig dissipativen Limiter zu verwenden, ohne Steigungen zu überschätzen und damit eventuell numerische Instabilitäten zu generieren. Gute Ergebnisse können häufig mit dem MONOCENT ( $\theta = 1.3$ ) oder dem VANLEER Limiter erzielt werden, wie auch die zahlreichen Beispiele in den folgenden Kapiteln zeigen werden. Alle der vorgestellten Limiter sind reine 1D Limiter, das heißt sie limitieren nur auf Basis der direkt benachbarten Zellen in ihrer Richtung. Dies kann vor allem in der Nähe von geringen Werten in der Dichte oder dem Druck zu Oszillationen und Verletzung der Positivität führen. Ein möglicher Ausweg aus dem Problem können positivitäts-erhaltende Verfahren sein, welche echte 2D Limiter einsetzen, um die Positivität zu erhalten. FOSITE hat dafür den PP Limiter (Suresh, 2000) implementiert. Unsere Versuche mit dem Verfahren hatten leider nicht den gewünschten Effekt. Im Abschnitt 5.1.3 wird gezeigt, dass es von Vorteil ist, diese Probleme bei ihrer Entstehung an anderer Stelle zu vermeiden. Das Hauptproblem ist dabei weniger die Rekonstruktion, als die große Differenz zwischen innerer und Gesamtenergie. Ein weiteres Problem ist der mögliche Verlust der TVD Eigenschaft und der Konvergenz der Ordnung zwei (Zeng, 2013) in krummlinigen oder entarteten Gittern, in denen sich die Ausdehnung der Zellen entlang einer Koordinate stark ändert. So wichtig Slope-limiter für das Verfahren sind, genauso schwierig ist es, ihr Verhalten in allen möglichen Situationen zu verstehen und zu kontrollieren.

### 2.3.3. Randbedingungen

FOSITE verfügt über eine Vielzahl wählbarer Randbedingungen. Egal ob die Randbedingung offen oder geschlossen, beziehungsweise reflektierend sein soll – das Ziel ist bei den astrophysikalischen Berechnungen die Lösung im Rechengebiet nicht ausschlaggebend zu beeinflussen. Damit sind natürlich vor allem unphysikalische Beeinflussungen numerischer Natur gemeint. Dies kann leicht passieren, wenn die Randbedingungen die Werte des Rechengebiets nicht sinnvoll fortsetzen. In den in dieser Arbeit vor allem relevanten Polarkoordinaten ist bei Akkretionsscheiben der Innenrand problematisch. Die physikalische

Scheibe reicht normalerweise sehr dicht bis an das Zentralobjekt heran. Dort wird die CFL-Bedingung (Courant et al., 1967), welche den maximal erlaubten Zeitschritt limitiert, minimal und somit der mögliche Zeitschritt meistens durch die Rotationsgeschwindigkeit am Innenrand und die zunehmend kleiner werdenden Zellen bestimmt. In Folge dessen ist der Innenradius des Rechengebiets stets größer als der Innenradius der physikalischen Scheibe, da andernfalls die Anzahl der erforderlichen Zeitschritte, beziehungsweise die Rechenzeit, viel zu groß wäre. Es hat sich dabei herausgestellt, dass vor allem die Wahl der Fortsetzung der Azimutalgeschwindigkeit ausschlaggebend ist (Sperling, 2013). Diese Größe ist außerdem frei wählbar, da sie nicht beeinflusst, ob die Randbedingung offen oder reflektierend ist. Da die Simulationen, selbst wenn sie die Selbstgravitation des Gases betrachten, am Innenrand in der Regel keplersch sind, wird die Geschwindigkeit nach dem Keplergesetz interpoliert. Seien nun  $r_1$  der Radius der zu bestimmenden Randzelle und  $v_1$  die Azimutalgeschwindigkeit der Zelle, sowie  $r_0, v_0$  die entsprechenden Werte in der innersten Rechengebietszelle. Dann gilt für ein Zentralobjekt der Masse  $m$  und  $k \in \{0, 1\}$ :

$$v_k = \sqrt{\frac{GM}{r_k}}. \quad (2.49)$$

Gleichsetzen von  $\sqrt{GM}$  liefert uns dann den gesuchten Zusammenhang

$$\sqrt{r_1}v_1 = \sqrt{r_0}v_0 \quad (2.50)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{r_0}{r_1}}v_0. \quad (2.51)$$

Diese Bedingung muss dabei auf die Geschwindigkeiten im Inertialsystem angewendet werden. In den anderen primitiven Variablen können unterschiedliche Randbedingungen gewählt werden. Die wichtigsten sind:

**NO\_GRADIENTS** Diese Randbedingung beschreibt einen offenen Rand. Die primitiven Variablen werden ohne Gradienten in den Randzellen fortgesetzt.

**REFLECTING** Reflektierende Randbedingungen negieren die Geschwindigkeit senkrecht zum Rand (Normalgeschwindigkeit,  $v_n \rightarrow -v_n$ ) und spiegeln alle anderen Variablen direkt an der Grenze des Rechengebiets. Dies ist nützlich, wenn keine nennenswerten Flüsse über den Rand zu erwarten sind und jeder Einfluss von außerhalb des Rechengebiets auf die Lösung verhindert werden soll.

**OUTFLOW** Die OUTFLOW Randbedingung ist von der Radialgeschwindigkeit abhängig. Ist die Geschwindigkeit in der letzten Zelle des Rechengebiets aus dem Rechengebiet heraus gerichtet, wird die NO\_GRADIENTS Randbedingung angewendet. Ist sie jedoch so gerichtet, dass es zu einem Einfluss kommen würde, werden stattdessen reflektierende Randbedingungen in der radialen Geschwindigkeit gewählt. Dies ver-

hindert einen Einfluss von Außen. Das ist insbesondere mit Selbstgravitation wichtig, da ansonsten lokale Gravitationspotentialsenken leicht Material von außerhalb des Rechengebiets ansaugen können. Da das Materialreservoir außerhalb des Rechengebiets jedoch nicht beschränkt ist, führt dies schnell zu einem unphysikalischen, sich selbst verstärkenden Wachstum. Dies kann durch die OUTFLOW Randbedingung leicht und effektiv verhindert werden. Da die Akkretionsscheibe außerhalb des inneren Randes des Rechengebiets weitergeht, ist durch die Drehimpulsverteilung in diesem nicht modellierten Bereich mit nach außen gerichteten Massentransport von Material mit hohem Drehimpuls zu rechnen. Dies kann diese Randbedingung jedoch nicht abbilden.

**AXIS** Achsenrandbedingungen spiegeln ein geschlossenes Rechengebiet an der Polstelle bzw. Achse wider. Das Rechengebiet kann dabei nicht tatsächlich bis zur Polstelle reichen, da dort die Zellen zu Dreiecken entarten würden. Hierfür gibt es Lösungsmöglichkeiten (Ziegler, 2011), doch es ist meistens unproblematisch, einen kleinen Ausschnitt um den Pol übrig zu lassen.

### 2.3.4. Kurganov-Tadmor Flüsse

Die Kurganov-Tadmor-Flüsse (KT-Flüsse, Kurganov und Tadmor, 2000) sind die ersten und ursprünglichen numerischen Flüsse von FOSITE. Sie zeichnen sich durch ihre Generalität, sie eignen sich nämlich für beliebige Erhaltungsgleichungen, sowie durch ihre Einfachheit aus. Wenn  $\Delta A$  einen Geometrie abhängigen Faktor,  $F$  den physikalischen Fluss,  $u_L$  den linksseitigen und  $u_R$  den rechtsseitigen Vektor konservativer Variablen, sowie  $a^\pm$  die lokalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten bezeichnet, lautet der eindimensionale Fluss:

$$\mathcal{F}_{\text{KT}} = \frac{\Delta A}{a^+ - a^-} (a^+ F(u_L) - a^- F(u_R) - a^+ a^- (u_L - u_R)). \quad (2.52)$$

Der letzte Term ist einer künstlichen Viskosität nicht unähnlich. Er resultiert allerdings aus einer Abschätzung bei der Ableitung und wird nicht künstlich in das System eingeführt. Die Ableitung lässt auch die Betrachtung von Kontaktunstetigkeiten unbeachtet. Diese können daher nicht adäquat aufgelöst werden. In (Kurganov und Lin, 2007; Kurganov und Liu, 2012) wird versucht die Kontaktunstetigkeiten besser abzuschätzen und die numerische Viskosität des Systems zu reduzieren. Kurganov und Lin (2007) verwenden hierfür sorgfältiger gewählte Integrationsflächen, in denen sich die an Unstetigkeiten bildenden Wellen ausbreiten könnten. Dies führt effektiv zu einem zusätzlichen Beitrag im letzten Term der Kurganov-Tadmor Flüsse (2.52) und somit zu einer geringeren Dissipation des Systems.

### 2.3.5. Zeitintegrationsverfahren

Eine Besonderheit von FOSITE ist die semidiskrete Formulierung des Schemas. Dies ermöglicht es auf einfache Weise das Zeitintegrationsverfahren auszuwechseln und unterschiedliche Ordnungen in der Zeitintegration und der räumlichen Integration zu verwenden. Ursprünglich war in FOSITE nur das modifizierte Euler Verfahren dritter Ordnung implementiert. Zwischenzeitlich wurde auch ein System für die Implementierung von Runge-Kutta-Verfahren hinzugefügt. Neue Runge-Kutta-Verfahren können nun leicht durch Eingabe des Butcher-Tableaus<sup>4</sup> (Butcher, 1963) implementiert werden.

#### SSPRK

Stand der Kunst bei der diskreten Zeitintegration von Erhaltungsgleichungen stellen Runge-Kutta-Verfahren dar, welche besonders stabilitätserhaltend sind (Gottlieb et al. (2011), Strong Stability Preserving Runge Kutta, SSPRK). Sie beruhen auf der numerischen Optimierung des Butcher-Tableau, sodass die Stabilitätsregion an den relevanten Stellen maximiert wird. Dadurch können größere Zeitschritte gewählt werden oder eine bessere Stabilität in kritischen Situationen erreicht werden. Das neu in FOSITE implementiert SSPRK Butcher-Tableau fünfter Ordnung, wird mittlerweile standardmäßig verwendet. Es zeichnet sich besonders in kritischen Bereichen potentieller, numerischer Instabilität durch ein robustes Verhalten aus und benötigt weniger Korrekturen des Zeitschritts bezüglich der vorgegebenen relativen und absoluten Fehlergrenzen. Falls viele numerisch anspruchsvolle Quellterme verwendet werden, kann der Rechenaufwand eines Verfahrens fünfter Ordnung vergleichsweise groß werden. Hier wäre die Implementation des Butcher-Tableaus eines SSPRK Verfahrens dritter Ordnung von Vorteil.

---

<sup>4</sup>Das Butcher-Tableau ist eine übersichtliche Darstellung aller charakteristischen Koeffizienten des Runge-Kutta-Verfahrens in einer Tabelle.



---

### 3. Drehimpulserhaltung in rotierenden Bezugssystemen

Die Drehimpulserhaltung ist eine der wesentlichen Erhaltungsgrößen in der Physik. In der Akkretionsscheibenphysik hat diese eine besondere Bedeutung, da Materie, welche auf das zentrale Objekt akkretiert wird, fast seinen kompletten Drehimpuls abgeben muss. Ein Teil der Materie gewinnt deutlich an Drehimpuls und wandert in die äußeren Bereiche der Scheibe. Eine zentrale Fragestellung ist dabei, welche Ursache die Drehimpuls- und Massenumverteilung hat. Um dies exakt untersuchen zu können, müssen numerische Ungenauigkeiten ausgeschlossen werden. Jeder numerische Algorithmus versteht sich als Näherung des analytischen Zusammenhanges, sodass bei dessen Berechnung immer kleine Fehler entstehen. Die Kunst dabei ist es, diese Fehler zu kontrollieren und in einem wohl bekanntem Rahmen zu behalten. Ziel dieses Kapitels ist es, die Drehimpulserhaltung, welche natürlich in den analytischen Gleichungen gegeben ist, auch in der Numerik wiederherzustellen. Ein Simulationscode, welcher den Drehimpuls erhält, kann dazu verwendet werden, feine Zusammenhänge, welche zur Drehimpulsverteilung führen, zu ermitteln und zu quantifizieren.

Besondere Schwierigkeiten entstehen bei Drehimpulserhaltung im rotierenden Bezugssystem. Eine naive Implementierung der entstehenden Scheinkräfte führt zu besonders schlechten Drehimpulserhaltungseigenschaften. Diese Systeme erfordern unbedingt den Einsatz entsprechender Verfahren zur Verbesserung der wesentlichen Erhaltungseigenschaften.

Weiterhin führen vektorielle Erhaltungssätze bei der Wahl von krummlinig-orthogonalen Koordinaten im Allgemeinen (Stone und Norman, 1992) zu weiteren Quelltermen, den geometrischen Quellen. Die Ursache hiervon ist, dass die Tensordivergenz (siehe Anhang A.1) nicht nur die Ableitung des Arguments, sondern ebenso die Ableitungen der Basisvektoren beinhaltet. Auch hier zerstört eine einfache Implementierung die Erhaltungseigenschaften des vektoriellen Erhaltungssatzes.

Als Verallgemeinerung eines rotierenden Bezugssystems werden auch allgemein quellfreie Hintergrundgeschwindigkeitsfelder betrachtet. In polaren Koordinaten kann der Transport solcher Geschwindigkeitsfelder durch eine getrennte lineare Advektion vollzogen werden. Gerade bei quasi-stationären Problemen kann so der Limitation des Zeitschritts einer typischerweise mit Überschallgeschwindigkeit strömenden Akkretionsscheibe reduziert

werden. Die lineare Advektion ist nämlich bedingungslos stabil (Mignone et al., 2012). Die ursprüngliche Idee für dieses Verfahren kommt von Masset (2000) und wird seitdem FARGO Transport genannt. Viele andere astrophysikalische Simulationscodes (Johnson et al., 2008; Mignone et al., 2012; Mudryk und Murray, 2009; Skinner und Ostriker, 2010) verwenden dieses Verfahren, das prinzipiell einem bewegten Gitter entspricht. Es werden dabei jedoch nur ganzzahlige Gitterzellenverschiebungen vorgenommen, sodass sich die Geometrie nicht verändert. Die Fortsetzungen dieser Idee mit einem tatsächlich bewegten Gitter in Ringen (Duffell und MacFadyen, 2012; Springel, 2010), beziehungsweise beliebiger Geometrie (Duffell und MacFadyen, 2011) existieren bereits, aber haben zur Zeit noch mit verschiedenen Problemen, wie der Komplexität des Algorithmus, dem erhöhten Rechenaufwand, sowie Gitterrauschen (Duffell und MacFadyen, 2012) zu kämpfen.

Im folgenden Abschnitt werden nun zwei Verfahren zur Herstellung der numerischen Drehimpulserhaltung vorgestellt. Beide haben unterschiedliche Vorteile, welche noch weiter erläutert werden. Das Verfahren der Änderung der Transportgrößen formuliert den Satz von Erhaltungsgleichungen (2.28)-(2.30) neu. Dieses Verfahren wurde bereits in Jung (2012) entwickelt, welches sich nun durch Einführung der Rothalpie als Erhaltungsgröße in rotierenden Bezugssystemen an Stelle der Gesamtenergie auch auf nicht isotherme Systeme anwenden lässt. Außerdem wurde die FARGO-Advektion implementiert. Ein alternatives Verfahren basiert auf der konservativen Implementierung der Quellterme, wie es bereits von Paardekooper und Mellema (2006) und Mignone et al. (2012) verwendet wird. Die Transportgrößen bleiben dabei unverändert. Dies erleichtert die Einführung eines neuen Riemann Löser im Kapitel 4 deutlich.

### 3.1. Modifikation der Transportgrößen

Das Verfahren der Modifikation der Transportgrößen basiert auf der Umformulierung der Erhaltungsgleichen. Diese verlieren ihre Erhaltungseigenschaften, wenn von kartesischen in krummlinige Koordinaten oder in rotierende Bezugssysteme transformiert wird. Es lassen sich dann aber neue Größen, wie der Drehimpuls, Inertialdrehimpuls und die Rothalpie finden, welche in diesen Systemen Erhaltungsgrößen sind (Toro, 2013). Die Abbildung 3.1 illustriert die verschiedenen Variablenmodifikationen der Impulsleichung, um schon einmal eine gewisse Übersicht zu erlangen.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{u} & \xrightarrow{\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}} & \mathbf{v} & \xrightarrow{\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}} & \mathbf{v}' \\
\downarrow l_{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{u} & & \downarrow l = \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{v} & & \downarrow l' = \mathbf{e}_{\varphi} \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{v}' \\
l_{\mathbf{u}} & \longrightarrow & l & \longrightarrow & l'
\end{array}$$

Abbildung 3.1.: Übersicht der möglichen Variablenmodifikationen in der Impulsgleichung, um die Erhaltungseigenschaften in krummlinigen Koordinaten und rotierenden Bezugssystem wiederherzustellen.  $\mathbf{u}$  ( $l_{\mathbf{u}}$ ) bezeichnet die Geschwindigkeit (den Drehimpuls) im rotierenden Bezugssystem. Durch die aufgeführten Operationen lassen sich von links nach rechts die Variablen in Größen im Inertialsystem  $\mathbf{v}$ ,  $l$  und Residualsystem  $\mathbf{v}'$ ,  $l'$  bei der Verwendung von FARGO-Transport umwandeln. Die Modifikation von oben nach unten erzeugt jeweils die dazugehörigen Drehimpulsvariablen.

### 3.1.1. Coriolis- und Zentrifugalkräfte als Quellterm

Häufig werden rotierende Bezugssysteme in die Eulergleichungen durch Hinzufügen von Scheinkraftquelltermen integriert. Sei nun die Rotationsachse definiert als

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\Omega}t. \quad (3.1)$$

Dann ist  $|\boldsymbol{\Omega}|$  die Rotationswinkelgeschwindigkeit. Weiterhin ist es sinnvoll den Vektor des kürzesten Abstandes von der Rotationsachse zu einem Punkt  $\mathbf{r}$  zu definieren

$$\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}, \quad (3.2)$$

wobei  $\mathbf{n} = \boldsymbol{\Omega}/|\boldsymbol{\Omega}|$  die Richtung der Rotationsachse bezeichnet. Für den Betrag  $|\mathbf{s}|$  ergibt sich der einfachere Ausdruck

$$|\mathbf{s}| = |(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{n}|. \quad (3.3)$$

Für den einfachen Fall, dass  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_z$  und  $\mathbf{r}_0 = 0$  gilt, ist  $\mathbf{s} = \mathbf{r}$ . Nach diesen geometrischen Überlegungen, können Scheinkräfte im rotierenden Bezugssystem notiert werden:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{R}} = -\boldsymbol{\Omega} \times (2\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}). \quad (3.4)$$

Diese Kräfte werden als Quellterme zu den Eulergleichungen hinzugefügt

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u} + p \mathbb{I}) = \rho (\mathbf{f}_{\mathbf{e}} + \mathbf{f}_{\mathbf{R}}) \quad (3.6)$$

$$\partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{u}) = \rho (\mathbf{f}_e + \mathbf{f}_R) \cdot \mathbf{u}, \quad (3.7)$$

wobei  $\mathbf{f}_e$  externe Quellterme bezeichnet. Das System kann dann mit einer Zustandsgleichung

$$E = E(\rho, T) \quad (3.8)$$

geschlossen werden.  $\mathbf{u}$  bezeichnet jetzt das Geschwindigkeitsfeld im rotierenden Bezugssystem. Von Kley (1998) wurde als erstes festgestellt, dass diese Art der Inklusion der Corioliskraft zu großen Fehlern im Transport von Drehimpuls und Energie führt. Seitdem wurde eine Reihe unterschiedlicher Lösungsansätze für dieses Problem vorgeschlagen (FARGO von Masset (2000), RODEO von Paardekooper und Mellema (2006) und weitere in de Val-Borro et al. (2006), sowie RAPID von Mudryk und Murray (2009)).

### 3.1.2. Inertialdrehimpuls-Transport

Der Drehimpuls ist in einem rotierenden Bezugssystem keine Erhaltungsgröße (Binney und Tremaine, 2008). Daher wird der Drehimpuls im Inertialsystem als konservative Variable verwendet. Diese Größe wird mit Inertialdrehimpuls bezeichnet. Sei nun

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}, \quad (3.9)$$

das inertielle Geschwindigkeitsfeld, welches sich in

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}. \quad (3.10)$$

zerlegen lässt. Wie bereits von Mignone et al. (2012) festgestellt wurde, sind folgende Ableitungen für alle quellenfreien Vektorfelder  $\mathbf{w}$  richtig. Dies kann für die vorliegende Wahl leicht nachgeprüft werden

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}) = \mathbf{s} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{s}) = 0, \quad (3.11)$$

da  $\boldsymbol{\Omega}$  räumlich konstant ist und wegen

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{s} &= \nabla \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) - ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}) \nabla \times \mathbf{n} + \nabla ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \\ &= (\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \nabla (\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n})) \times \mathbf{n} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

da  $\nabla (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$  parallel zu  $\mathbf{n}$  ist. Anwendung der Gleichung (3.10) auf die Impulsgleichung (3.6) liefert

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{v} + p \mathbb{I}) = \rho \mathbf{f}_e + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}. \quad (3.13)$$

Dies ist nun eine Transportgleichung für Inertialimpulse. Da nach einer Inertialdrehimpuls-gleichung gesucht wird, muss linearer Impuls in Drehimpuls transformiert werden. Dies kann durch Anwendung des Operators

$$L = \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \times \quad (3.14)$$

auf den Inertialimpuls  $\rho \mathbf{v}$  geschehen. Das Ergebnis ist der Inertialdrehimpuls  $l$

$$l = L\rho \mathbf{v} = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{v}. \quad (3.15)$$

Die komplette Inertialdrehimpuls-Transportgleichung lautet dann

$$\partial_t (\rho l) + \nabla \cdot (\rho l \mathbf{u}) = 0. \quad (3.16)$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Geometrien. Dabei ist zunächst unklar, welche Impulsgrößen für die verbleibenden zwei (bzw. eine im Falle von 2D Geometrien) Gleichungen gewählt werden sollten. Für alle später betrachteten Geometrien hängt der Inertialdrehimpuls nur von einer einzigen Geschwindigkeitskomponente in dem entsprechenden Koordinatensystem ab. Aus der anderen Geschwindigkeitskomponente ergibt sich dann die zweite Impulsgleichung. Ergibt sich der Drehimpuls aus den Geschwindigkeiten beider Koordinaten, muss eine radiale Impulsgleichung eingeführt werden, welche dann ebenfalls von beiden Geschwindigkeitskomponenten abhängt.

### 3.1.3. Rothalpie- statt Energieerhaltung

Externe Kräfte wirken nicht nur auf die Impulsgleichungen, sondern auch auf die Energiegleichung, wie bereits in Gleichung (3.7) gezeigt wurde. Dies ist ebenfalls richtig, wenn Inertialdrehimpulstransport verwendet wird. In einem rotierenden Bezugssystem enthält die Energiegleichung Quellterme, welche von Coriolis- und Zentrifugalkraft abhängen. Die Gesamtenergie  $E$  ist dann keine Erhaltungsgröße mehr. Hirsch (1990) hat gezeigt, dass eine neue Erhaltungsgröße, die sogenannte Rothalpie, definiert werden kann. Im Folgenden wird die Erhaltung der Rothalpie im rotierenden Bezugssystemen nachvollzogen. Die Rothalpie ist definiert als

$$I := E - \rho \frac{\mathbf{w}^2}{2}. \quad (3.17)$$

Damit kann die Energiegleichung als konservative Erhaltungsgleichung für die Rothalpie  $I$  aufgeschrieben werden:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \nabla \cdot ((I + p) \mathbf{u}) = \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} \quad (3.18)$$

Da diese Gleichung nur externe Quellterme enthält, erhält sie die Rothalpie in quellfreien Umgebungen.

### 3.1.4. Anwendung der FARGO Methode

Der Gasfluss in Akkretionsscheiben wird häufig durch die Scherströmung einer keplerschen Rotation dominiert. Das Abziehen des Hintergrundfelds vom Geschwindigkeitsfeld führt zu einem Residualgeschwindigkeitsfeld mit deutlich geringerer Amplitude. Dies ermöglicht die Verwendung von größeren Zeitschritten bei der expliziten Zeitintegration, falls dieser, wie bei Akkretionsscheiben typisch, durch die Rotationsgeschwindigkeit dominiert ist. Zunächst wird wie bereits in Abschnitt 3.1.2 ein quellfreies Vektorfeld  $\mathbf{w}$  vorausgesetzt. Beginnend mit Gleichung (3.13) kann das Inertialgeschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}$  in  $\mathbf{w}$  und ein Residualgeschwindigkeitsfeld  $\mathbf{v}'$  aufgeteilt werden

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{w}. \quad (3.19)$$

Weiterhin ist es hilfreich  $\mathbf{u}' = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}$  zu definieren, sodass

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{w} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s} \quad (3.20)$$

gilt. Verwendung dieser neuen Definitionen liefert

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \rho \mathbf{v}' + p \mathbb{I}) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}') = \rho \mathbf{f}_e - \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}. \quad (3.21)$$

Dies ist die Inertialimpulstransportgleichung mit FARGO Transport. Um wiederum die Erhaltungseigenschaften der Gleichung herzustellen und die Quellterme zu eliminieren, wird der Operator  $L$  angewendet und zu residualem Inertialdrehimpulstransport  $\rho l' = \rho \mathbf{n} \cdot \mathbf{s} \times \mathbf{v}'$  transformiert. Das Ergebnis der Anwendung lautet

$$\partial_t (\rho l') + \nabla \cdot (\rho l' \mathbf{u}') + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho l') = \rho \mathbf{f}_e. \quad (3.22)$$

Dies ist nun eine echte Erhaltungsgleichung, frei von geometrischen oder Scheinkräften. In der Kontinuitäts- und Energiegleichung wird die FARGO Geschwindigkeit von der Transportgeschwindigkeit  $\mathbf{u}$  durch Transformation in die Residualgeschwindigkeit  $\mathbf{u}'$  getrennt. Damit ist das komplette koordinatenfreie Eulergleichungssystem im rotierenden Bezugssystem mit FARGO Advektion festgelegt:

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}') + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.23)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}') + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \rho \mathbf{v}' + p \mathbb{I}) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{v}') = \rho \mathbf{f}_e - \rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} \quad (3.24)$$

$$\partial_t I + \nabla \cdot (I \mathbf{u}' + p \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla I = \rho \mathbf{f}_e \cdot \mathbf{u} \quad (3.25)$$

Im Gegensatz zu den meisten astrophysikalischen Programmen, die für Planet-Scheibe-Wechselwirkungssimulationen verwendet werden (z.B. FARGO von Masset, 2000; RODEO von Paardekooper und Mellema, 2006 und andere aus de Val-Borro et al., 2006; als auch RAPID von Mudryk und Murray, 2009), löst FOSITE die Eulergleichungen in einem Schritt, ohne Verfahren wie Operator-Splitting zu verwenden. Dies trifft allerdings nicht mehr zu, wenn der FARGO Transport aktiviert wird. In diesem Verfahren wird die lineare Advektion unabhängig vom Lösen der restlichen partiellen Differentialgleichung durch ein ganzzahliges Verschieben der Zellen in jedem Ring gelöst.

Die zentrale Größe in FOSITE sind die konservativen Variablen. Diese dürfen generell nur durch numerische Flüsse verändert werden, um die Erhaltungseigenschaften des Verfahrens nicht zu verletzen. Das heißt die primitiven Variablen werden aus den konservativen Variablen erzeugt und bieten analytisch zwar den gleichen Informationsgehalt, doch sie dürfen nicht zu den konservativen Variablen zurück transformiert werden. Jede dieser Umwandlungen unterliegt den Verlusten der endlichen Darstellungsmöglichkeiten einer Gleitkommazahl und damit Rundungsfehlern. Da es in einer Simulation schnell zu Millionen oder gar Milliarden Zeitschritten kommt, addieren sich auch kleinere Fehler und ein großer Teil der vorangegangenen Arbeit um Drehimpuls und Energie zu erhalten, ist umsonst gewesen. Dies ist insbesondere bei nicht isothermen Problemen von erheblicher Wichtigkeit.

### 3.1.5. Erhaltungsgleichungen in 2D krummlinig-orthogonalen Koordinatensystemen

Mit den Definitionen aus Abschnitt 2.3 können die Eulergleichungen in rotierenden, polaren Koordinaten formuliert werden. Zusätzlich zur Drehimpulserhaltungsgleichung in azimuthaler Richtung wird die Projektion von Gleichung (3.21) auf  $\mathbf{e}_r$  in radialer Richtung verwendet. Da das Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{w}$  keine Komponente in  $\mathbf{e}_r$  Richtung besitzt, verschwindet der Quellterm

$$\rho \mathbf{e}_r \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w}). \quad (3.26)$$

Es verschwinden also alle Quellterme in allen Gleichungen, welche aus der FARGO Advektion resultieren. In polaren Koordinaten lautet der Inertialdrehimpuls

$$\rho l = \rho h_\eta (v_\eta + h_\eta \Omega). \quad (3.27)$$

Die konservativen Variablen  $\mathbf{u}$ , die Flussvektoren  $F$  und  $G$ , sowie die geometrischen Quellen und Scheinkraftquellen  $S$  lauten

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_\xi \\ \rho l \\ I \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$F = \begin{bmatrix} \rho v_\xi \\ \rho v_\xi^2 + p \\ \rho v_\xi l \\ (I + p)v_\xi \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \rho v_\eta \\ \rho v_\xi v_\eta \\ \rho v_\eta l + h_\eta p \\ I(v_\eta - w) + p v_\eta \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho h_\eta \left( \frac{v_\eta}{h_\eta} + \Omega \right)^2 + p c_{\eta\xi\eta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

### Quasi-Linearisierung der komplexen Flussvektoren

Das von FOSITE verwendete, numerische Verfahren erfordert das Umformulieren der Transportgleichung (2.38) in quasi-lineare Schreibweise mit Hilfe der Jacobi-Matrizen  $\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)$  und  $\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)$  (Illenseer und Duschl, 2009):

$$\partial_t u + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) \mathcal{D}_\xi(u) + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right) \mathcal{D}_\eta(u) = S(u). \quad (3.31)$$

Üblicherweise wird die Homogenität der Flussvektoren  $F$  und  $G$  ausgenutzt, um die quasi-lineare Formulierung zu erreichen. Ein Flussvektor  $f$  heißt homogen, wenn für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt (Hirsch, 1990):

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \implies \mathcal{D}_\eta f(u) = \frac{\partial f(u)}{\partial u} \mathcal{D}_\eta u. \quad (3.32)$$

Im Fall von Inertialdrehimpulstransport ist der Flussvektor  $G$  allerdings nicht mehr homogen, sondern hängt zusätzlich vom Skalenfaktor  $h_\eta$  ab.

$$G = G(u, h_\eta). \quad (3.33)$$



Ist sowohl der Skalenfaktor  $h_\eta$  als auch  $h_\xi h_\varphi$  unabhängig von  $\eta$ , also

$$\begin{aligned}\partial_\eta h_\eta &= 0 \\ \partial_\eta (h_\xi h_\varphi) &= 0,\end{aligned}\tag{3.34}$$

dann folgt, dass

$$\mathcal{D}_\eta G(u, h_\eta) = \left( \frac{\partial G}{\partial u} \right) \mathcal{D}_\eta(u)\tag{3.35}$$

für alle Flussvektoren  $G$  gilt, welche außer von den konservativen Variablen  $u$  zusätzlich direkt oder indirekt von dem geometrischen Skalenfaktor  $h_\eta$  abhängen.

## 3.2. Modifikation des Transports

Die Änderung der Transportgrößen aus dem vorherigen Kapitel ist ein sehr elegantes Mittel, die Erhaltungsgleichungen für linearen Impuls und Gesamtenergie bereits in analytischer Form umzuformulieren, um stattdessen exakte Erhaltungseigenschaften in den Größen von größtem Interesse zu erhalten. Der Flexibilität von FOSITE ist zu verdanken, dass dies in der Numerik abbildbar ist. Die meisten anderen hydrodynamischen Simulationsprogramme sind dazu ohne weitreichende Änderungen nicht in der Lage. Insbesondere die Kurganov-Tadmor Flüsse machen dies möglich, da sie auf eine sehr allgemeine Klasse von Erhaltungsgleichungen anwendbar sind (siehe Abschnitt 2.2.1). Das nächste Kapitel wird zeigen, dass vor allem für Probleme mit verschwindender Viskosität speziellere Berechnungen numerischer Flüsse als die Kurganov-Tadmor Flüsse notwendig sind. Mit der Verwendung von Riemann Lösern kann bei vielen in der Astrophysik erforderlichen Problemstellungen eine größere Genauigkeit erreicht werden. Riemann Löser erfordern jedoch Kenntnisse auf die den Erhaltungsgleichungen zu Grunde liegende Physik. Sie beziehen sich auf die Euler Gleichungen und erfordern damit einen speziellen Satz von Erhaltungsgleichungen. Die Änderung der Transportgrößen verändert allerdings die Erhaltungsgleichungen und erfordert damit neue Lösungsverfahren für die numerischen Flüsse, um die gleichen Eigenschaften der exakten Lösung wiederherzustellen.

Dies ist ein kompliziertes Vorhaben und würde insbesondere das Verwenden von bereits etablierten Riemann Lösern verhindern oder deutlich erschweren. Stattdessen wurde zu Gunsten eines anderen Verfahrens entschieden, motiviert durch eine Veröffentlichung von Mignone et al. (2012). Die Idee hierbei ist es, durch Modifikation des Divergenzoperators und durch Reformulierung der geometrischen, Zentrifugal- und Coriolis-Quellterme alle Beiträge in der Impulsgleichung und der Energiegleichung durch die numerischen Flüsse der üblichen Transportgrößen darstellen zu können. Analytisch sind die neuen Ausdrücke

mathematisch äquivalent, jedoch komplizierter als die vorherige Formulierung. Bei direkter Übertragung und Verwendung der bereits berechneten numerischen Flüsse lassen sich hiermit sehr gute Erhaltungseigenschaften erreichen. Die Herleitung der Ausdrücke in analytischer Form ist Hauptbestandteil des folgenden Abschnitts. Hierbei wird gleichzeitig das Abspalten eines Hintergrundgeschwindigkeitsfeldes für den FARGO Transport und ein rotierendes Bezugssystem betrachtet. Die Ableitung ist dem analytischen Teil von Mignone et al. (2012) ähnlich. Bei der expliziten Ableitung für polare Koordinaten erweitere ich es jedoch auf beliebige radiale Skalierung der Koordinaten. Das System kann auch für andere in rotierenden Bezugssystemen nützlichen Koordinatensystem verwendet werden. Mignone et al. (2012) zeigt Ableitungen für Kugel- und Zylinderkoordinaten, sowie für die Shearingbox (Hawley et al., 1995).

Die Ableitung der Gleichungen erfolgt unter ähnlichen Voraussetzungen wie zuvor. Sei nun  $\mathbf{v}$  das Inertialgeschwindigkeitsfeld,  $\mathbf{w}$  ein quelfreies Vektorfeld, zum Beispiel die lokale Geschwindigkeit eines rotierenden Bezugssystems

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}. \quad (3.36)$$

Dann ist

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} \quad (3.37)$$

die Residualgeschwindigkeit, also zum Beispiel die Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem. Analog dazu wird die residuale Energiedichte  $E'$  definiert, welche von der Geschwindigkeit  $\mathbf{u}$  im rotierenden Bezugssystem abhängt:

$$E' = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2. \quad (3.38)$$

Dann können die Gleichungen (2.28) - (2.30) geschrieben werden als

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbb{I}p) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + \nabla \cdot ((E' + p) \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla E' = -\rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}). \quad (3.41)$$

Für die Kontinuitätsgleichung ist dies sofort klar. Für die Impulsgleichung lässt sich dies am einfachsten zeigen, indem auf Zusammenhänge aus der Tensorrechnung (siehe

Anhang A.3) zurückgegriffen wird.

$$\begin{aligned}
& \partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \\
&= \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{v}) + \nabla (\mathbf{w} \otimes \rho \mathbf{u} + \mathbf{w} \otimes \rho \mathbf{w}) \\
&= \partial_t (\rho \mathbf{u}) - \mathbf{w} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{w}) + \nabla \cdot (\mathbf{w} \otimes \rho \mathbf{u}) \\
&= \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) + (\nabla \cdot \mathbf{w}) \rho \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \rho \mathbf{w}) \\
&\quad - \mathbf{w} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\
&= \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) + (\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) \mathbf{w} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} - \mathbf{w} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\
&= \partial_t (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Der Nachweis der Energiegleichung ist für uns hier nicht weiter relevant, da diese Gleichung so nicht direkt verwendet wird. Die Herleitung ist jedoch im Anhang A.4 zu finden. Es sind vielmehr die zuvor genannten Gleichungen in polaren Koordinaten relevant, da Mignone et al. (2012) nur die Gleichung für polare Koordinaten mit linearer Skalierung angeben<sup>1</sup>. In polaren Koordinaten mit beliebiger radialer Skalierung lauten die Gleichungen (3.39) - (3.41):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho = 0 \tag{3.43}$$

$$\frac{\partial (\rho u_\xi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_\xi \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\xi) + \mathbf{w} \cdot (\rho u_\xi) = \rho v_\eta^2 c_{\eta \xi \eta} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial (\rho u_\eta)}{\partial t} + \nabla_R \cdot (\rho u_\eta \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\eta) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho u_\eta) = -\nabla_R \cdot (\rho w \mathbf{u}) + w \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E'}{\partial t} + \nabla \cdot ((E' + p) \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla E' &= \nabla \cdot \left( \frac{w^2}{2} \rho \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) \right) \\
&\quad - \frac{w^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\
&\quad - w \nabla_R \cdot (\rho u_\eta \mathbf{u}) - w \nabla_R (\rho w \mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Die Kommutatoroeffizienten  $c_{\eta \xi \eta}$  und andere werden im Anhang A.2 definiert. Diese Gleichungen können wie folgt hergeleitet werden. Die Impulsgleichung für die Residualgeschwindigkeit (3.40) wird mit  $\mathbf{e}_\xi$  und  $\mathbf{e}_\eta$  multipliziert, um die radiale und die azimutale

<sup>1</sup>Die Herleitung von Mignone et al. (2012) enthält ein paar kleine Fehler, welche in dieser Arbeit korrigiert wurden.

Impulsleichung zu erhalten. Für die radiale Impulsleichung gilt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(\rho u_\xi)}{\partial t} + \mathbf{e}_\xi \cdot (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \mathbb{I}p)) + \mathbf{w} \cdot \nabla(\rho u_\xi) = -\rho v_\eta w (\mathbf{e}_\xi \cdot \nabla_{\mathbf{e}_\eta} \mathbf{e}_\eta) \\
& \quad - w \rho u_\eta (\mathbf{e}_\xi \cdot \nabla_{\mathbf{e}_\eta} \mathbf{e}_\eta) \\
\Leftrightarrow & \frac{\partial(\rho u_\xi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_\xi \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\xi) - \rho u_\eta^2 c_{\eta\xi\eta} + \mathbf{w} \cdot \nabla(\rho u_\xi) = \rho v_\eta w c_{\eta\xi\eta} + \rho u_\eta w c_{\eta\xi\eta} \\
& \Leftrightarrow \frac{\partial(\rho u_\xi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_\xi \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\xi) + \mathbf{w} \cdot (\rho u_\xi) = \rho v_\eta^2 c_{\eta\xi\eta}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Für die azimutale Impulsleichung wird ein modifizierter Vektordivergenz-Operator  $\nabla_R$  verwendet

$$\nabla_R \mathbf{F} = \frac{1}{h_\xi h_\eta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta^2 F_1) + \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi F_2), \tag{3.48}$$

welcher geometrische Quellterme, die bei der Krümmung der Tensordivergenz in Polarkoordinaten entstehen, aufhebt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\eta \cdot (\nabla \cdot T) &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta T^{\eta\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi T^{\eta\eta}) \right) + T^{\xi\eta} c_{\eta\xi\eta} \\
&= \frac{1}{h_\xi h_\eta^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta^2 T^{\eta\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi T^{\eta\eta}) \right) - \frac{h_\eta T^{\eta\xi}}{h_\xi h_\eta^2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} h_\xi \right) + T^{\xi\eta} c_{\eta\xi\eta} \\
&= \nabla_R \cdot (\mathbf{e}_\eta \cdot T) + (T^{\xi\eta} - T^{\eta\xi}) c_{\eta\xi\eta} \\
&= \nabla_R \cdot (\mathbf{e}_\eta \cdot T).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Der letzte Schritt funktioniert offensichtlich nur, wenn  $T$  symmetrisch ist. Das Verfahren ähnelt dem der Änderung der Transportgrößen, da hier effektiv wieder die Transportgröße zu Drehimpuls gewandelt wird. Dies geschieht aber nur innerhalb des Divergenzoperators mit einer deutlich voneinander verschiedenen Implementierung, wie später in Abschnitt 3.2.2 erläutert wird. Mit diesem neuen Operator ist es nun leicht die azimutale Impulsleichung abzuleiten. Es ist zu beachten, dass der Operator  $\mathbf{w} \cdot \nabla$  auf einen Vektor angewendet ebenfalls geometrische Quellterme erzeugt, da Basisvektoren abgeleitet werden müssen. Gerade dieser Term entfällt durch die Generierung des  $\nabla_R$  Quellterms des nicht symmetrischen Tensors  $\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}$  auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\rho u_\eta)}{\partial t} + \nabla_R \cdot (\rho u_\eta \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\eta) + \mathbf{w} \cdot \nabla(\rho u_\eta) &= -w \rho u_\xi c_{\eta\xi\eta} - \mathbf{e}_\eta \cdot (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \\
&\quad - (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})) \mathbf{w}) \\
&= -\nabla_R \cdot (\rho w \mathbf{u}) + w \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Durch Ausnutzung der Krümmung der Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\eta \cdot (\mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u})) &= \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho u_\eta) + w \rho u_\xi (\mathbf{e}_\eta \cdot \nabla_{\mathbf{e}_\eta} \mathbf{e}_\xi) \\ &= \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho u_\eta) + w \rho u_\xi c_{\eta\xi\eta} \end{aligned} \quad (3.51)$$

und des zuvor benannten Quellterms, der bei der Krümmung der nicht-symmetrischen Tensordivergenz trotz  $\nabla_R$  Operators entsteht, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\eta \cdot (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})) &= \nabla \cdot (\rho w \mathbf{u}) \\ &= \nabla_R \cdot (\rho w \mathbf{u}) - \rho w u_\xi c_{\eta\xi\eta}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Als nächstes muss die Energiegleichung (3.41) abgeleitet werden. Sei nun  $E'$  die Residualenergie und  $\tilde{E}$  die kinetische Energie aus der Differenz von Residual- und Gesamtenergie:

$$E = E' + \tilde{E} \quad (3.53)$$

$$\tilde{E} = \frac{w^2}{2} \rho + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}. \quad (3.54)$$

Dann kann die Energiegleichung umgeformt werden zu:

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + \nabla \cdot ((E' + p) \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla E' = -\nabla \cdot (\tilde{E} \mathbf{v} + p \mathbf{w}) - \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t}. \quad (3.55)$$

Die rechte Seite muss noch so umformuliert werden, dass sie leicht in einer konservativen Art und Weise implementiert werden kann, also in Abhängigkeit von Flusstermen:

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot (\tilde{E} \mathbf{v} + p \mathbf{w}) + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot (\tilde{E} \mathbf{u} + p \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \nabla \tilde{E} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{w^2}{2} \rho \mathbf{u} + (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{u} + p \mathbf{w} \right) + \mathbf{w} \cdot \nabla \left( \frac{w^2}{2} \rho \right) + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \\ &\quad + \frac{w^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{w^2}{2} \rho \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) \right) + \frac{w^2}{2} \mathbf{w} \cdot \nabla \rho + w (\mathbf{w} \cdot \nabla (\rho u_\eta)) \\ &\quad - \frac{w^2}{2} (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla \rho) + \mathbf{w} \cdot \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{w^2}{2} \rho \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) \right) - \frac{w^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) + w \left( \frac{\partial (\rho u_\eta)}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla (\rho u_\eta) \right) \\ &= \nabla \cdot \left( \frac{w^2}{2} \rho \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p) \right) - \frac{w^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - w \nabla_R \cdot (\rho u_\eta \mathbf{u} + \rho w \mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Diese rechte Seite verwendet nun nur noch Flüsse der Kontinuitäts- und azimuthalen Impulsgleichung, welche mit  $\frac{w^2}{2}$  bzw.  $w$  multipliziert werden und die rechten Seiten dieser Gleichungen, welche ebenfalls mit diesen Termen multipliziert werden müssen.

### 3.2.1. Abtrennen des linearen Transports

Die Gleichungen (3.39) - (3.41) bzw. (3.43) - (3.46) sind alle von der Form

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_q + \mathbf{w} \cdot \nabla q = S_q. \quad (3.57)$$

Durch Operator-Splitting kann der lineare Transportterm  $\mathbf{w} \cdot \nabla q$  vom Rest der Gleichung gelöst werden. Das Ergebnis sind zwei Differentialgleichungen

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_q = S_q \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{w} \cdot \nabla q = 0, \quad (3.59)$$

wobei die zweite Gleichung den linearen Transport in Richtung  $\mathbf{w}$  beschreibt. In unserem Fall zeigt  $\mathbf{w}$  immer in Richtung  $\mathbf{e}_\eta$ , sodass diese Gleichung numerisch durch eine Translation um eine gebrochen-rationale Anzahl von Zellen gelöst werden kann. Dies passiert durch eine ganzzahlige Verschiebung und ein einfaches Flussverfahren für den übrigen Teil der verbleibenden Verschiebungsgeschwindigkeit  $\mathbf{w}$ . Insgesamt wird dadurch eine Implementierung des ursprünglichen FARGO-Verfahrens erhalten.

$\mathbf{w}$  muss nicht unbedingt die mittlere azimuthale Geschwindigkeit sein, sondern kann zum Beispiel auch dem Geschwindigkeitsfeld einer starren Rotation entsprechen:

$$\mathbf{w} = r\Omega \mathbf{e}_\eta. \quad (3.60)$$

Dann kann der lineare Transport komplett unterlassen werden, da er nur das Gitter als ganzes rotieren würde, aber zu keiner Rotation zwischen verschiedenen Zellringen führen würde. Dies entspricht einem Wechsel in ein rotierendes Bezugssystem mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$ . In FOSITE sind beide Fälle implementiert, sodass Mischformen der Art

$$\mathbf{w} = (\tilde{w} + r\Omega) \mathbf{e}_\eta \quad (3.61)$$

möglich werden. Der lineare Transport kommt dann nur für  $\tilde{w} \neq 0$  zur Anwendung.

### 3.2.2. Konservative Implementierung des modifizierten Verfahrens

Bei einem Finite-Volumen-Verfahren ergibt sich die Änderung einer Größe  $u$  in der Zelle  $(i, j)$  durch den Fluss dieser Größe über die Ränder der Zelle und durch externe Quellen oder Senken, die diese Größe erzeugen oder vernichten können. Da FOSITE ein semidiskretes Verfahren implementiert, ist die räumliche Dimension diskretisiert, währenddessen die zeitliche Dimension unabhängig von dieser Diskretisierung ist. Wenn nun die numerischen Flüsse über die Zellränder in den beiden unterschiedlichen Richtungen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{G}$  heißen, und  $S$  die externen Quellen bezeichnet, kann die Änderung der Größe  $u$  in der Zelle  $(i, j)$  durch

$$\frac{du_{i,j}}{dt} = -\frac{\mathcal{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta V_{i,j}} - \frac{\mathcal{G}_{j+\frac{1}{2}} - \mathcal{G}_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta V_{i,j}} + \langle S \rangle_{D_{i,j}} \quad (3.62)$$

angegeben werden. Bei einer Erhaltungsgleichung existieren keine externen Quellen

$$S = 0. \quad (3.63)$$

Unser Verfahren wird konservativ bleiben, falls die betrachtete Größe nur Flüsse über die Ränder aufweist, da ja nichts erzeugt oder vernichtet werden kann. Gleichzeitig soll der physikalische Fluss nicht verändert werden. Dies war Gegenstand des am Anfang dieses Kapitels beschriebenen Verfahrens. Das Ziel ist nun die weiteren Quellterme, die durch das Abspalten des Geschwindigkeitsfeldes  $\mathbf{w}$  entstehen, ebenfalls durch Flüsse über die Zellränder auszudrücken. Die üblichen Flussargumente lassen sich als

$$\mathbf{F}_\rho = \rho \mathbf{u} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{F}_{m_\xi} = \rho u_\xi \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\xi \quad (3.65)$$

$$\mathbf{F}_{m_\eta} = \rho u_\eta \mathbf{u} + p \mathbf{e}_\eta \quad (3.66)$$

$$\mathbf{F}_E = (E' + p) \mathbf{u} \quad (3.67)$$

zusammenfassen. Auf diese Terme werden die üblichen numerischen Flussberechnungen angewandt. Da sie sich formell nicht von den üblichen physikalischen Flüssen unterscheiden, sondern lediglich für ein reduziertes Geschwindigkeitsfeld formuliert sind, lassen sich alle üblichen Riemann Flussapproximationen verwenden. Die Gleichungen (3.43) - (3.46) lauten in der Form von Gleichung (3.62)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_\rho \rangle \quad (3.68)$$

$$\frac{d(\rho u_\xi)}{dt} = -\langle \nabla \cdot \mathbf{F}_{m_\xi} \rangle + \rho v_\eta^2 c_{\eta\xi\eta} \quad (3.69)$$

$$\frac{d(\rho u_\eta)}{dt} = -\langle \nabla_R \cdot (\mathbf{F}_{m_\eta} + w \mathbf{F}_\rho) \rangle + w \langle \nabla \cdot \mathbf{F}_\rho \rangle \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE'}{dt} = & - \left\langle \nabla \cdot \left( \mathbf{F}_E + w \mathbf{F}_{m_\eta} + \frac{w^2}{2} \mathbf{F}_\rho \right) \right\rangle + w \langle \nabla_R \cdot (\mathbf{F}_{m_\eta} + w \mathbf{F}_\rho) \rangle \\ & + \frac{w^2}{2} \langle \nabla \cdot \mathbf{F}_\rho \rangle, \end{aligned} \quad (3.71)$$

wobei Terme der Art  $\langle \nabla \cdot \mathbf{F} \rangle$  durch die Flussdifferenzenquotienten aus Gleichung (3.62) ersetzt werden müssen. Alle Terme können durch die ursprünglichen Flussargumente berechnet werden. Die Divergenzoperatoren werden durch das übliche Flussschema (3.62) berechnet. Zusätzlich beinhaltet die rechte Seite der azimuthalen Impulsgleichung die komplette rechte Seite der Kontinuitätsgleichung, genauso wie die Energiegleichung die komplette rechte Seite der azimuthalen Impulsgleichung beinhaltet.

### 3.3. Numerische Tests

Das neue Verfahren des modifizierten Transports wird anhand einer Wirbelströmung und einer Planet-Scheibe-Wechselwirkung getestet. Mit der Wirbelströmung kann die überlegene Auflösung des neuen Verfahrens bei rotierenden Strömungen in einem sehr kontrollierten Umfeld überprüft werden. Die Planet-Scheibe-Wechselwirkung gibt einen qualitativen Eindruck auf den Einfluss auf realistischere Anwendungsfälle.

#### 3.3.1. Isothermer und isentroper Vortex

Die neuen Physikmodule werden nun mit dem Setup eines isentropen und isothermen Vortex getestet. Der isentrope Vortex basiert auf dem Vorschlag von Yee et al. (1999). Die Idee ist, bei beiden Zustandsgleichungen dieselbe: Die Zentripetalkräfte einer rotierenden Strömung sollen durch einen radialen Druckgradienten balanciert werden. Das Ergebnis ist eine stationäre Strömung, welche von der Numerik erhalten werden soll. Dies ist in der Regel natürlich nur näherungsweise möglich. Das ursprüngliche isentrope Setup von Yee et al. (1999) erfordert das Lösen der Energiegleichung. Die folgenden Erweiterungen erlauben auch eine lokal oder global isotherme Zustandsgleichung zu verwenden.

Sei nun  $\rho_\infty$  die Hintergrunddichte,  $T_\infty$  die Hintergrundtemperatur und  $u_\infty, v_\infty$  die Hintergrundgeschwindigkeiten des ungestörten Fluids. Unter Verwendung von dimensionslosen Größen (Oertel und Laurien, 1995) gilt:

$$\rho_\infty = T_\infty = p_\infty = 1, \quad (3.72)$$

$$u_\infty = v_\infty = 0. \quad (3.73)$$

Nun wird der isentrope Vortex als Störung hinzugefügt. Als Geschwindigkeitsfeld kann jedes beliebige gewählt werden, das für  $r \rightarrow 0$  und  $r \rightarrow \infty$  gegen Null geht. Dabei soll die



vortex2dpolar.f90		Hintergrunddichte	$\rho_\infty = 1$
		Vortexstärke	$V_{\text{str}} = 5$
Physik	Modul		EULER2D[_ISOTHERM]
	Rotationsgeschwindigkeit		$\Omega = 0.79$
Flüsse	Rekonstruktionsordnung		LINEAR
	Variablen		PRIMITIVE
	Limiter		VANLEER
Gitter	Geometrie		POLAR
	Typ		MIDPOINT
	Auflösung	$N_r \times N_\varphi = 100 \times 10$	
	Radiale Ausdehnung	$R \in [0, 5]$	
	Azimutale Ausdehnung	$\varphi \in [0, 2\pi]$	
Randbedingung	Innen		AXIS
	Außen		NOSLIP
Zeitintegrator	Verfahren		SSPRK
	CFL-Zahl		0.3
	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 2 \cdot 10^4$	

Tabelle 3.1.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter des isentropen und isothermen Vortex-Tests.

Entropie erhalten bleiben ( $\delta S = 0$ ):

$$\begin{pmatrix} \delta u \\ \delta v \end{pmatrix} = \frac{\beta}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (3.74)$$

$$\delta T = -\frac{(\gamma-1)\beta^2}{8\gamma\pi^2} \exp(1-r^2). \quad (3.75)$$

Dabei ist  $\beta = 5$  die Vortexstärke,  $\gamma = 1.4$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen (Isentropenexponent) und  $r^2 = x^2 + y^2$ . Unter Verwendung von

$$\rho = \rho_\infty + \delta\rho, \quad T = T_\infty + \delta T, \quad p = \rho T, \quad (3.76)$$

$$u = u_\infty + \delta u, \quad v = v_\infty + \delta v \quad (3.77)$$

und der isentropen Bedingung für ein ideales Gas  $p/\rho^\gamma = p_\infty/\rho_\infty^\gamma = 1$ , ergeben sich die primitiven Variablen in kartesischen Koordinaten

$$\rho = \left(1 - \frac{(\gamma-1)\beta^2}{8\gamma\pi} \exp(1-r^2)\right)^{1/(\gamma-1)}, \quad (3.78)$$

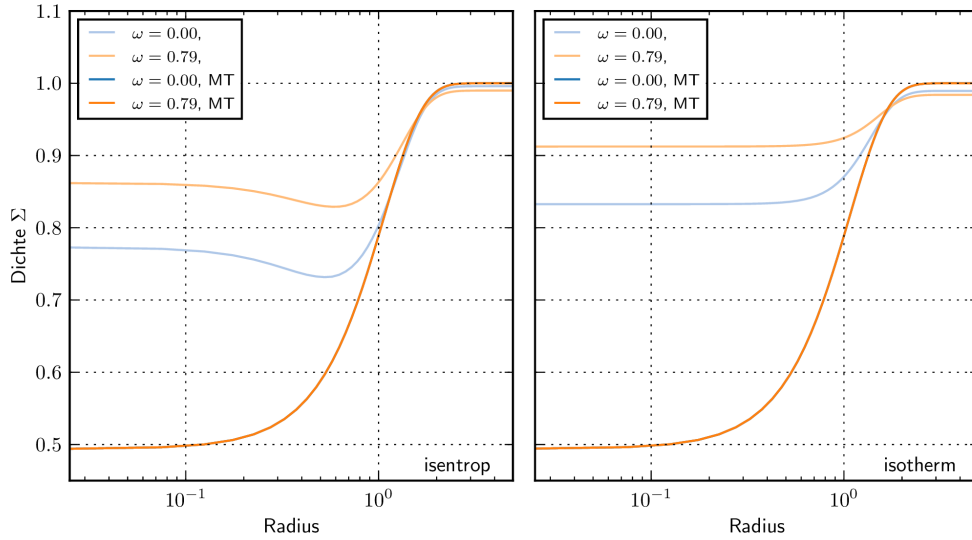


Abbildung 3.2.: Radiales Dichteprofil des isentropen (links) und isothermen (rechts) Vortex am Ende der Simulationszeit. Dichte und Radius sind dimensionslos. Die Simulationen ohne modifiziertes Transportschema (blasses Blau und Orange) zeigen ein stark dissipatives Verhalten und zunehmende Auflösung des Wirbels. Ein rotierendes Bezugssystem (blasses Orange) beschleunigt den Effekt noch. Bei Verwendung des modifizierten Transports (MT, kräftiges Blau und Orange) spielt die Geschwindigkeit eines rotierenden Bezugssystems keine Rolle. Der Wirbel zeigt im Verlauf der Simulationszeit keine Änderung.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\beta}{2\pi} \exp\left(\frac{1-r^2}{2}\right) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}, \quad (3.79)$$

$$p = \rho^\gamma. \quad (3.80)$$

Wenn die lokal isotherme Zustandsgleichung getestet werden soll, wird die Schallgeschwindigkeit in jeder Zelle als

$$c_s = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (3.81)$$

definiert, sodass Druckgradienten- und Zentripetalkraft balanciert sind, solange der stationäre Fall aufrechterhalten bleibt. Der isotherme Vortex basiert auf der gleichen Idee wie zuvor, wobei der Druckgradient durch einen Dichtegradienten modelliert werden muss, da für den Druck gilt

$$p = \rho c_s^2. \quad (3.82)$$

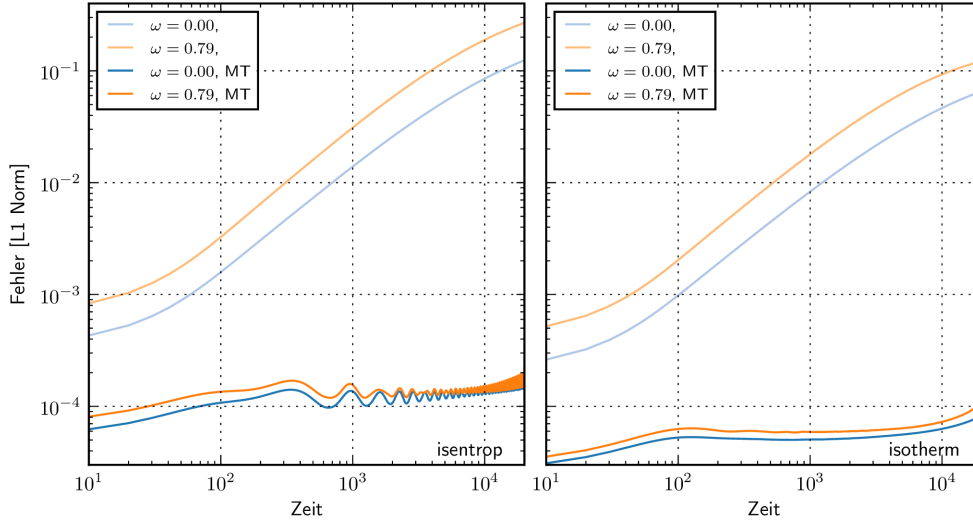


Abbildung 3.3.: Zeitlicher Verlauf der Abweichung vom anfänglichen stationären Zustand des isentropen und isothermen Vortex für die verschiedenen Transportmodule. Die Zeit ist dimensionslos. Generell zeigen die Simulationen ohne rotierendes Bezugssystem einen etwas kleineren Fehler. Ohne modifizierten Transport liegt der Fehler am Ende bei etwa 10%, wohingegen der modifizierte Transport (MT) den Fehler in der Größenordnung von  $10^{-4}$  halten kann und erst am Ende langsam zu steigen beginnt.

Die neuen Geschwindigkeits- und Dichtefelder lauten:

$$\rho = \rho_{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{2}\right) \exp(-2r)\right), \quad (3.83)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \exp(-r) \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Dieses Mal wurde ein anderes Geschwindigkeitsfeld gewählt, welches die Lösung für die Dichte im isothermen Fall vereinfacht. Es werden nun Simulationen des isentropen und des lokal isothermen Vortex jeweils mit und ohne Drehimpulserhaltung durchgeführt. Zusätzlich werden diese Simulationen in einem rotierenden Bezugssystem der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = 0.79$  gestartet. Beim Radius höchster Winkelgeschwindigkeit hat der Wirbel am Ende der Simulationszeit  $t_{\text{sim}} = 2 \cdot 10^4$  ungefähr 4175 Orbits durchlaufen. Die Rotationsgeschwindigkeit des Bezugssystems entspricht dabei der maximalen Rotationsgeschwindigkeit in den Setups. Die weiteren Parameter der Simulation können der Tabelle 3.1 entnommen werden.

Abbildung 3.2 zeigt den radialen Dichteverlauf des isentropen bzw. des lokal isothermen Vortex zum Endzeitpunkt der Simulation. Der klassische Transport kann den Wirbel nicht

erhalten. Er verliert nach kurzer Zeit bereits den Großteil seines Profils. Der modifizierte Transport kann hingegen die Wirbelform auch über lange Zeiträume erhalten.

In Abbildung 3.3 ist die Abweichung der konservativen Variablen in der L1 Norm über der Zeit aufgetragen. Bereits bei der ersten Ausgabe liegt der Fehler in den Simulationen ohne modifizierten Transport über dem zeitlich globalen Maximum der Drehimpuls erhaltenden Simulationen. Im weiteren Verlauf steigt der Fehler für die klassische Formulierung deutlich an, währenddessen er für die Simulationen mit modifizierten Transport nahezu konstant bleibt. Erst zum Ende der Simulationen ist ein nennenswerter Anstieg zu verzeichnen.

### 3.3.2. Planet-Scheibe Wechselwirkungen

Simulationen von Planet-Scheibe-Wechselwirkungen besitzen eines der einfachsten nicht axialsymmetrischen Gravitationspotentiale, welches im rotierenden Bezugssystem konstant ist. Sie eignen sich daher hervorragend, die Eigenschaften des modifizierten Transports im rotierenden Bezugssystem zu untersuchen. Das Gravitationspotential besteht aus zwei Punktquellen, einem Zentralobjekt (Stern) und einem störenden Objekt (Planet), welches sich im Rechengebiet befindet. Die simulierte Gasscheibe befindet sich zum Beginn der Simulation in hydrostatischer Keplerrotation. Das Planetengravitationspotential wird über die ersten fünf Planetenorbits angeschaltet, damit sich die umliegende Gasverteilung langsam daran anpassen kann. Von Interesse ist der quasi-stationäre Zustand des Systems nach mehr als 100 Planetenorbits. In diesen Simulationen wird ein stark gestörtes System betrachtet, welches dem Massenverhältnis zwischen Zentralmasse und störendem Objekt ähnlich dem von Sonne und Jupiter entspricht.

Da das System nicht von den Randbedingungen beeinflusst werden soll und damit diese möglichst keinen Einfluss auf die Lösung haben sollen, werden offene Randbedingungen gewählt und so genannte Randdämpfungszonen eingeführt. Innerhalb dieser Regionen wird der radiale Impuls in einer orbitalen Zeitskala des Innen- beziehungsweise Außenrandes auf ihren Anfangswert gedämpft. Ohne diese kann es auch bei offenen Randbedingungen zu Reflexionen kommen, welche nicht nur unphysikalisch, sondern insbesondere für quasi-stationäre Probleme vermieden werden müssen. Weitere numerische Parameter sind in der Tabelle 3.2 aufgetragen.

Es werden dabei jeweils die KT-Flüsse mit und ohne modifizierten Transport und mit FARGO Advektion kombiniert. Der Vollständigkeit halber ist auch die Lösung mit den HLLC-Flüssen, die im nächsten Kapitel eingeführt werden, aufgetragen. Die Abbildung 3.4 zeigt das normierte und azimuthal gemittelte Dichteprofil nach 100 orbitalen Zeitskalen. Alle Simulationen zeigen eine starke Lücke in der Dichteverteilung auf, wie bei einer solchen starken Störung zu erwarten ist. Die Lösung mit dem klassischen Transport unterscheidet sich allerdings maßgeblich von den anderen. Bei Radien größer als 1.5 ist die Dichte stark abgesunken und für Radien kleiner als 0.7 angestiegen. Es findet offensichtlich nennenswerter Massentransport statt. Die Lücke ist zwar ähnlich tief wie in den anderen Simulationen, jedoch steigt an ihren Flanken die Dichte nur gemächlich an. Bei den anderen Simulationen ist die Dichte an den Flanken sogar erhöht. Hier sammelt

	Massenverhältnis	$q = 10^{-3}$
	Längeneinheit	$a = 1$
	Zeiteinheit	$P_0 = 2\pi\sqrt{a^3/(Gm_\star)}$
planeteu.f90	Flaring	$\beta = 0.05$
	Dichte	$\Sigma_0 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot m_\star / (\pi a^3)$
	Radialgeschwindigkeit	$v_{r,0} = 0$
	Azimutalgeschwindigkeit	$v_{\varphi,0}(r) = \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{Gm_\star/r}$
	Modul	EULER2D_ISO THERM
Physik	Rotationsgeschwindigkeit	$\Omega = \sqrt{Gm_\star/a^3}$
	Schallgeschwindigkeit	$c_s(r) = \beta \sqrt{Gm_\star/r}$
	Einheiten	GEOMETRICAL
	Rekonstruktionsordnung	LINEAR
Flüsse	Variablen	PRIMITIVE
	Limiter	MINMOD
	Geometrie	POLAR
	Typ	MIDPOINT
Gitter	Auflösung	$N_r \times N_\varphi = 128 \times 384$
	Radiale Ausdehnung	$R \in [0.4, 2.5]$
	Azimutale Ausdehnung	$\varphi \in [-\pi, \pi] + \pi/N_\varphi$
Randbedingungen	Innen und Außen	NOGRAD+KEPLER
	Große Halbachse	$a = 1.0$
	Masse	$m_s = q$
Planet	Exzentrizität	$e = 0$
	Glättungsparameter	$\epsilon = 0.6H = 0.6(\beta \cdot a)$
	Anschaltverzögerung	$\tau = 5P_0$
Stern	Masse	$m_\star = 1 - q$
	Innen	$r_0 = 0.5a$
		$\tau_0 = 2\pi \cdot (0.4a)^3 / (Gm_\star)$
Wellendämpfung	Außen	$r_1 = 2.1a$
		$\tau_1 = 2\pi \cdot (2.1a)^3 / (Gm_\star)$
	Verfahren	SSPRK
Zeitintegrator	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 200P_0$

Tabelle 3.2.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter der Planet-Scheibe-Wechselwirkungssimulationen.

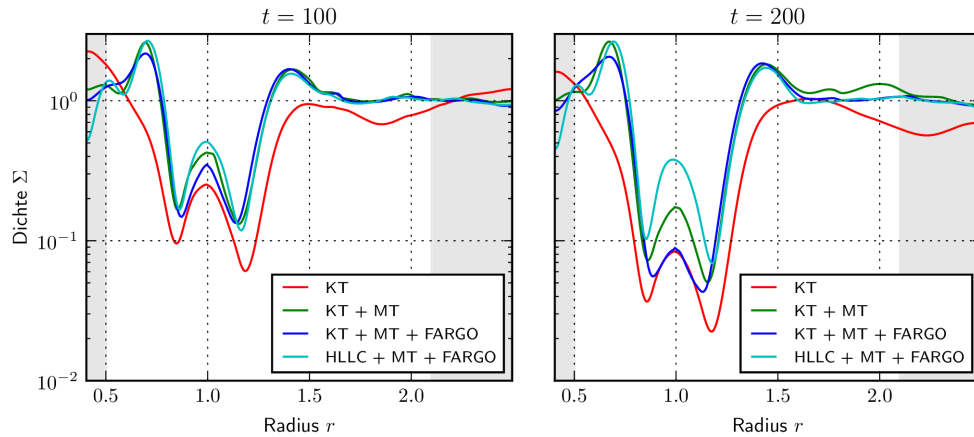


Abbildung 3.4.: Normierte, azimuthal gemittelte, radiale Dichteverteilung der Planetenscheibe-Wechselwirkungs Simulationen. Die Simulationen mit modifiziertem Transport (MT) sind alle in der Lage die steilen Dichtegradienten an den Rändern der Lücke abzubilden. Sie unterscheiden sich vor allem darin, wie viel Masse aus der Lücke entfernt wird. Die KT-Flüsse zeigen einen deutlich anderen Dichteverlauf, welcher vor allem auch wegen des Dichteeinbruchs in den äußeren Gebieten in Frage gestellt werden muss.

sich das Material, welches aus der Lücke verdrängt wird.

Die Abbildung 3.4 zeigt die Situation nach 200 orbitalen Zeitskalen. Bei allen Simulationen ist die Lücke noch etwas tiefer geworden. Auch die Massenansammlung innerhalb der Lücke sinkt weiter ab. Der modifizierte Transport erhält die Kanten der Lücken sehr gut, welche ein wichtiges Merkmal für die Beobachtbarkeit solcher Systeme darstellen. Die Ergebnisse des modifizierten Transports sind vergleichbar mit denen von de Val-Borro et al. (2006); Mudryk und Murray (2009), welche ebenso eine schmale Lücke zeigen die weniger stark aus geschmiert ist als bei den KT-Flüssen. Typisch sind auch die stärkere Massenansammlung am Innenrand der Lücke und eine Massenansammlung innerhalb der Lücke. Alle Simulationen mit Drehimpulserhaltung weisen einen Wirbel am Außenrand der Lücke auf. Diese kann als nicht-axialsymmetrische Massenansammlung erkannt werden. Dies ist ein bekannter Effekt (de Val-Borro et al., 2007), welcher durch eine Rossby Welleninstabilität (Li et al., 2000, 2001; Lovelace et al., 1999) hervorgerufen wird.

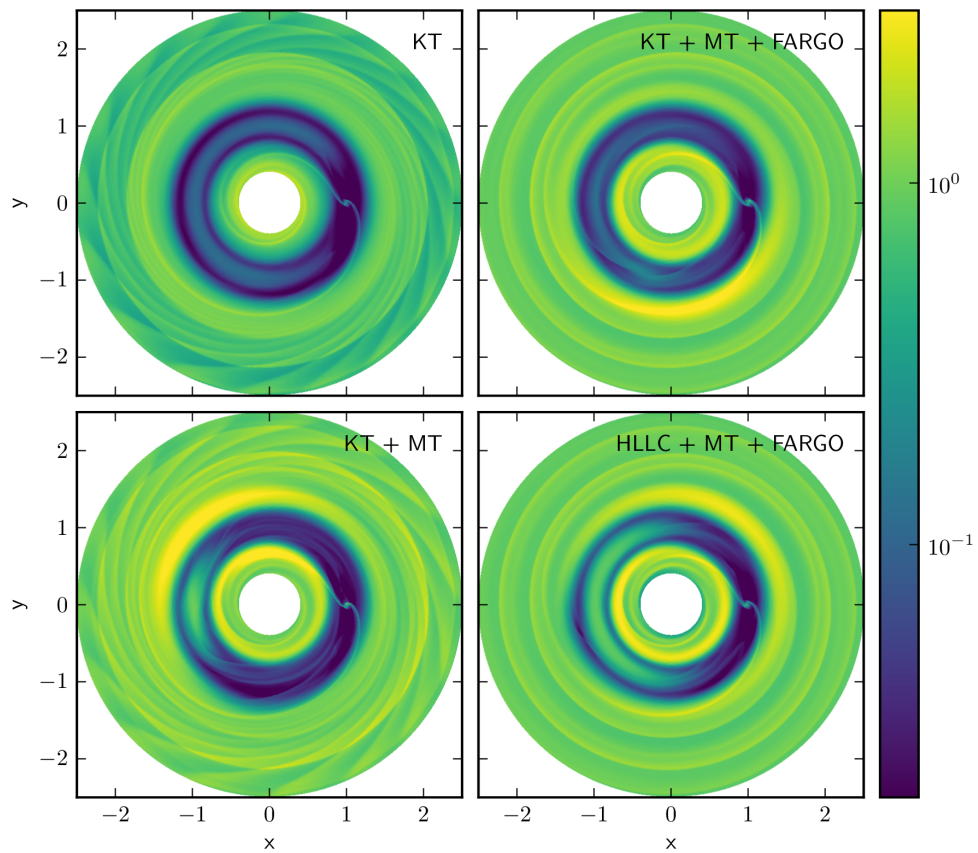


Abbildung 3.5.: Normierte Oberflächendichte für die unterschiedlichen Kombinationen aus Flüssen, modifiziertem Transport (MT) und FARGO-Advektion nach 200 Planetenorbits. Auffällig ist die Massenansammlung am Außenrand der Lücke bei den Simulationen mit modifiziertem Transport.





## 4. Quasi-stationäre Probleme mit verschwindender kinematischer Viskosität

Eines der häufigsten Werkzeuge zum Lösen der Gleichungen der kompressiblen Hydrodynamik mit verschwindender kinematischer Viskosität sind moderne hochauflösende Godunov Verfahren. Solche hydrodynamischen Problemstellungen reagieren bereits auf sehr schwache Stoßwellen, welche Vortizität und damit Wirbel erzeugen können. Das Auflösen von Wirbeln ist eine wichtige Fähigkeit moderner Hydrodynamik Software.

Typischerweise werden 1D Riemann-Löser verwendet, um die Riemann-Probleme an den Zellgrenzen zu lösen. Einige der beliebtesten Verfahren der letzten Jahre sind die aus Harten et al. (1983); Kurganov und Tadmor (2000); Roe (1981); Toro et al. (1994). Diese Verfahren basieren auf den 1D Euler Gleichungen und vernachlässigen daher die Rolle zusätzlicher passiver Skalare in der Lösung. In mehrdimensionalen Lösungen wird angenommen, dass die zusätzlichen Variablen für langsame Ausbreitungsgeschwindigkeiten konstant sind.

Spezielle isotherme Riemann-Löser sind nur sehr selten diskutiert worden (Balsara, 1994; Mignone, 2007). Dabei kommt eine isotherme Zustandsgleichung häufig zur Anwendung, zum Beispiel für Simulationen von Planet-Scheibe-Wechselwirkungen oder Strukturen in Balkengalaxien. Das meist verwendete Mittel sind Zwei-Wellen-Löser wie die Harten-Lax-van Leer (HLL; Harten et al., 1983) Flüsse. Harten-Lax-van-Leer-Contact (HLLC; Toro et al., 1994) Riemann-Löser für nicht isotherme Eulergleichungen und Erweiterungen für magnetische und relativistische Effekte wurden mehrfach diskutiert (Balsara, 2012a; Honkkila und Janhunen, 2007; Li, 2005; Mignone et al., 2009; Toro et al., 1994). Es ist aber relativ unbekannt, dass Kontaktunstetigkeiten eine Rolle in der isothermen Hydrodynamik spielen können, da sie nur in mehrdimensionalen Lösungen existierten (Toro, 2012). In diesem Kapitel wird ein HLLC-Riemann-Löser für isotherme Hydrodynamik abgeleitet und die wichtigen Implikationen für die Lösungen aufgezeigt.

Wir stellen außerdem fest, dass die Auflösung der Lösungen und besonders der Kontaktunstetigkeiten von dem gewählten Bezugssystem bzw. von einem Hintergrundgeschwindigkeitsfeld abhängig ist. Bereits Robertson et al. (2010) hat gezeigt, dass moderne Verfahren auf statischen Gittern im Allgemeinen nicht Galilei-invariant sind, obwohl es die Eulergleichungen in analytischer Form sind. Daher ist besondere Vorsicht geboten bei der Wahl des Bezugssystems, insbesondere, wenn schwache Eigenschaften in der Strömung,

wie beispielsweise Wirbel in einer kompressiblen Strömung, erwartet werden.

Unabhängig vom gewählten Riemann-Löser, können nur ruhende oder langsam bewegte Kontaktunstetigkeiten bei praktikablen Auflösungen aufgelöst werden. Techniken mit bewegten Gittern (Duffell und MacFadyen, 2011, 2012; Springel, 2010) könnten ein Ausweg aus dieser Unzulänglichkeit sein. Zur Zeit haben diese Verfahren noch mit Gitterrauschen zu kämpfen, was wiederum deren Auflösung reduziert.

Das Auflösen von Kontaktunstetigkeiten kann auch in Simulationen mit Viskosität relevant sein, da Regionen geringer kinematischer Viskosität existieren können, in denen Kontaktunstetigkeiten eine Rolle spielen.

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert. Zunächst werden die verwendeten hydrodynamischen Grundgleichungen repetiert, welche die Basis dieses Kapitels bilden. Nach kurzer Ableitung des HLL-Riemann-Lösers (Harten et al., 1983) wird eine darauf basierende Erweiterung entwickelt, welche isotherme Kontaktunstetigkeiten in der Lösung approximiert. Zuletzt wird der neue isotherme HLLC-Riemann-Löser in typischen 1D und 2D Simulationen getestet. Dabei liegen das Konvergenzverhalten und die Wirbelerzeugung in Simulationen der Kármánschen Wirbelstraße und von Planet-Scheibe-Wechselwirkungen im Mittelpunkt der Betrachtungen.

## 4.1. Godunov-Verfahren

Die Klasse der Godunov-Verfahren (Godunov, 1959) sind Finite-Volumen-Verfahren (siehe Abschnitt 2.2.3), welche die numerischen Flüsse über die Zellränder durch exakte oder approximative Lösungen des sogenannten Riemann-Problems bestimmen. Das Riemann-Problem (LeVeque, 2002; Toro, 2009) ist eine spezielle Art von Anfangswertproblem, welches zu einem System partieller Differentialgleichungen zwei konstante Anfangszustände  $u_L$ ,  $u_R$  links- und rechtsseitig von einer Sprungstelle besitzt:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0 \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Diese Anfangsbedingung besitzt im Allgemeinen bei  $x = 0$  eine Sprungstelle und stellt den einfachsten nicht-trivialen Zustand dar. Jedes dem Riemann-Problem zugrunde liegende partielle Differentialgleichungssystem besitzt verschiedene elementare Lösungen, welche durch sogenannte Charakteristiken (auch Wellen genannt) von einander getrennt werden. Die Abbildung 4.1 zeigt im  $x$ - $t$ -Diagramm drei unterschiedliche Charakteristiken, die sich mit ihren charakteristischen Geschwindigkeiten  $\lambda_{\pm}$  und  $\lambda_c$  ausbreiten. Außerhalb des Gebietes der äußersten Charakteristiken bleibt der Anfangszustand unberührt. Um das Riemann-Problem zu lösen, müssen die signifikanten Charakteristiken und deren Ausbreitungsgeschwindigkeiten bestimmt, sowie die Lösungen zwischen diesen approximiert werden.

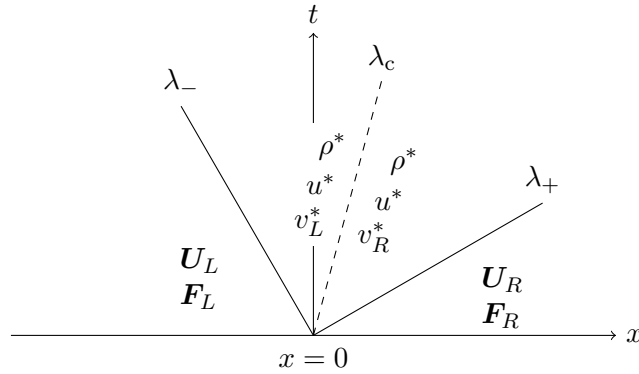


Abbildung 4.1.: Lösungsstruktur des Riemann-Problems in der  $x$ - $t$ -Ebene für 2D isotherme Eulergleichungen. Es werden drei unterschiedliche Wellenfamilien mit zugehörigen Eigenwerten  $\lambda_{\pm}$  und  $\lambda_c$  erzeugt. Der Bereich zwischen den  $\lambda_-$  und  $\lambda_+$  Wellen wird Sternregion genannt.

Im Folgenden soll die Lösung des Riemann-Problems für das System der isothermen Eulergleichungen, welche bereits im Abschnitt 2.2.1 eingeführt wurden, bestimmt werden. Dazu werden die Kontinuitätsgleichung (2.28) für die Dichte  $\rho$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.2)$$

mit der Gasgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , sowie drei Impulsgleichungen (2.2.1)

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + \mathbb{I}p) = 0 \quad (4.3)$$

benötigt. Da eine isotherme Zustandsgleichung betrachtet wird, ist der Druck durch

$$p = \rho c_s^2 \quad (4.4)$$

definiert, wobei  $c_s$  die isotherme Schallgeschwindigkeit bezeichnet. Der eindimensionale Riemann-Löser bestimmt die numerischen Flüsse an den Zellrändern des Finite-Volumen-Verfahrens. Die zugrunde liegenden eindimensionalen hyperbolischen Erhaltungsgesetze lauten

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (4.5)$$

wobei durch

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

die Vektoren der konservativen Variablen und der dazugehörigen Flüsse  $\mathbf{F}$  definiert sind. Der Transversalimpuls  $\rho v$  ist in isothermer Gasdynamik ein passiver Skalar (Toro, 2012). Das heißt, dass der Transversalimpuls mit dem Gas transportiert wird, aber die Lösung der ersten beiden Erhaltungsgesetze in Gleichung (4.5) nicht beeinflusst.

## 4.2. Ein isothermer HLLC-Riemann-Löser

Die hier angegebene Herleitung der numerischen Flüsse eines isothermen HLLC-Riemann-Lösers basiert auf den Ergebnissen von Mignone (2007). Dort wurde der allgemeinere Fall eines isothermen HLLC-Riemann-Lösers für ideale Magnetohydrodynamik vorgestellt. Dasselbe Resultat kann, wie von den Autoren bemerkt, erlangt werden, wenn der Grenzfall eines verschwindenden Magnetfelds untersucht wird.

Bevor mit der Ableitung des HLLC-Riemann-Lösers begonnen werden kann, wird die Ableitung des HLL-Riemann-Lösers rekapituliert, da dies die Basis für die spätere Arbeit darstellt. Der HLL-Riemann-Löser verwendet nur zwei Wellen und verwendet für alle mittleren Wellen einen einzigen konstanten Zustand

$$\mathbf{U} = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{for } S_L > 0, \\ \mathbf{U}_{\text{HLL}} & \text{for } S_L < 0 < S_R, \\ \mathbf{U}_R & \text{for } S_R < 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

wobei  $S_L$  und  $S_R$  die Geschwindigkeiten der linken und rechten Wellen sind. Der konstante mittlere Zustand ist festgelegt durch (Harten et al., 1983)

$$\mathbf{U}_{\text{HLL}} = \frac{S_R \mathbf{U}_R - S_L \mathbf{U}_L + \mathbf{F}_L - \mathbf{F}_R}{S_R - S_L}. \quad (4.8)$$

Die Rankine-Hugoniot Sprungbedingungen (LeVeque, 2002; Toro, 2009) kann jetzt auf die linke (oder rechte) Welle angewendet werden

$$\mathbf{F}_{\text{HLL}} = \mathbf{F}_L + S_L (\mathbf{U}_{\text{HLL}} - \mathbf{U}_L). \quad (4.9)$$

Einsetzen von Gleichung (4.8) in (4.9) liefert den HLL-Fluss

$$\mathbf{F}_{\text{HLL}} = \frac{S_{\text{R}}\mathbf{F}_{\text{L}} - S_{\text{L}}\mathbf{F}_{\text{R}} + S_{\text{L}}S_{\text{R}}(\mathbf{U}_{\text{R}} - \mathbf{U}_{\text{L}})}{S_{\text{R}} - S_{\text{L}}}, \quad (4.10)$$

mit welchem der komplette HLL-Fluss aufgeschrieben werden kann

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{L}} & \text{for } S_{\text{L}} > 0, \\ \mathbf{F}_{\text{HLL}} & \text{for } S_{\text{L}} < 0 < S_{\text{R}}, \\ \mathbf{F}_{\text{R}} & \text{for } S_{\text{R}} < 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Nun kann mit der Berechnung der charakteristischen Felder für das Eulergleichungssystem mit Transversalimpulsleichung begonnen werden. Dafür werden die Eigenwerte der Jacobi-Matrix  $(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U})$  des Flussvektors

$$\lambda_{-} = u - a, \quad \lambda_{\text{c}} = u, \quad \lambda_{+} = u + a \quad (4.12)$$

benötigt. Die den Eigenwerten  $\lambda_{\pm}$  zugeordneten charakteristischen Felder sind echt nicht-linear und bekanntermaßen entweder Stöße oder Verdünnungsfächer (en.: rarefaction wave). Die mittlere Welle  $\lambda_{\text{c}}$  ist immer eine Kontaktunstetigkeit, welche nur im Falle isothermer Gase mit passivem Skalar existiert. Die komplette Lösung in Abbildung 4.1 zeigt alle vier voneinander verschiedenen Zustände unterteilt durch drei Wellen. Von der exakten Lösung wissen wir, dass die Dichte  $\rho_{*}$  und die senkrechte Geschwindigkeit  $u_{*}$  in der Sternregion auf beiden Seiten der Kontaktunstetigkeit gleich sind, da im Fall ohne passiven Skalar keine Kontaktunstetigkeit existiert. Daher ist der Sternzustand identisch zum HLL-Zustand

$$\rho^{*} = \rho^{\text{HLL}}, \quad m_x^{*} = m_x^{\text{HLL}}. \quad (4.13)$$

Das Gleiche gilt für die Sternflüsse

$$F_{\rho}^{*} = F_{\rho}^{\text{HLL}}, \quad F_{m_x}^{*} = F_{m_x}^{\text{HLL}}. \quad (4.14)$$

Es verbleibt die Aufgabe der Bestimmung der Geschwindigkeiten  $v_{\text{K}}^{*}$ , wobei K entweder L oder R sein kann, sowie  $u^{*}$ . Im isothermen Fall kann entweder  $u^{*} = F_{\rho}^{\text{HLL}}/\rho^{\text{HLL}}$  oder  $u^{*} = m_x^{\text{HLL}}/\rho^{\text{HLL}}$  definiert werden (Mignone, 2007). Unter Zuhilfenahme der Rankine-Hugoniot Sprungbedingungen (LeVeque, 2002; Rankine, 1870) für die Unstetigkeiten welche zu den  $\lambda_{\pm}$  Wellen gehören,

$$S_{\text{K}}(\mathbf{U}_{\text{K}}^{*} - \mathbf{U}_{\text{K}}) = \mathbf{F}_{\text{K}}^{*} - \mathbf{F}_{\text{K}}, \quad (4.15)$$

kann leicht nachvollzogen werden, dass die Bedingung  $v_{\text{K}}^{*} = v_{\text{K}}$  nur durch die erste Wahl  $u^{*} = F_{\rho}^{\text{HLL}}/\rho^{\text{HLL}}$  erfüllt werden kann. Der Zustand und die Flussvektoren in der

Sternregion sind daher gegeben durch

$$\mathbf{U}^* = \begin{pmatrix} \rho^* \\ m_x^* \\ \rho^* v_K \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_K^* = \begin{pmatrix} \rho^* u^* \\ F_{m_x}^* \\ \rho^* v_K u^* \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Nun müssen noch passende Werte für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten gewählt werden. Eine häufige Wahl sind die Vorschriften von Davis (1988)

$$S_L = \min(\lambda_-(\mathbf{U}_L), \lambda_-(\mathbf{U}_R)), \quad (4.17)$$

$$S_R = \max(\lambda_+(\mathbf{U}_L), \lambda_+(\mathbf{U}_R)), \quad (4.18)$$

aber es existieren auch andere Möglichkeiten, wie zum Beispiel die Positivitäts erhaltende Methode von Batten et al. (1997). Wir verwenden die einfache Vorschrift von Davis (1988), da diese auch problemlos auf die isothermen Gleichungen anwendbar ist und keinen nennenswerten zusätzlichen Rechenaufwand hinzufügt. Die komplette Flussfunktion ergibt sich durch Abtasten der Lösung bei  $x/t = 0$  unter Verwendung von (4.15) und (4.16)

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{for } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L + S_L (\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{for } S_L < 0 < u^*, \\ \mathbf{F}_R + S_R (\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) & \text{for } u^* < 0 < S_R, \\ \mathbf{F}_R & \text{for } S_R < 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Die Implementierung der HLLC-Flüsse erfordert nur eine neue Verzweigung, aber benötigt keine komplexen Auswertungen für die Berechnung der Sternregion. Die zusätzliche Rechenzeit ist daher meist vernachlässigbar, oder häufig sogar kürzer als bei der Kurganov-Tadmor Methode, wenn die Lösung eine entsprechende Änderung durch das Verfahren erfährt. Auf dem NEC SX Vektorrechner sind die HLLC-Flüsse zur Zeit leider nicht optimiert. Eine Verzweigung in der innersten Schleife stellt in diesem Fall ein schwieriges Problem für die Vektorisierung da. Da die Flussberechnungen ein zentraler und häufig aufgerufener Quellcodeteil sind, wird die Programmausführung ohne eine Optimierung erheblich verlangsamt. Dennoch ist eine Vektorisierung sicherlich möglich, jedoch erfordert sie eine Umstrukturierung der Implementierung.

### 4.3. Numerische Tests

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der vorgestellte isotherme HLLC-Riemann-Löser die Ergebnisse von 1D Standard Riemann-Problemen approximiert und langsam bewegte Kontaktunstetigkeiten gut auflösen kann. Zudem wird die Konvergenz des numerischen Verfahrens demonstriert, sowie die überlegene Auflösung von 2D Wirbeln thematisiert.

Test	$\rho_L$	$u_L$	$v_L$	$\rho_R$	$u_R$	$v_R$	$t_{\text{sim}}$
nohiso	1	1	0	1	-1	1	0.5
shock1	1	0	1	0.1	0	0	0.2
shock2	1	-0.89	1	0.1	-0.89	0	0.2
shock3	1	-1.18	1	0.1	-1.18	0	0.2

Tabelle 4.1.: Anfangsbedingungen der unterschiedlichen 1D Riemann-Probleme. Die linke und rechte Region wird bei  $x = 0.5$  unterteilt. Für das isotherme Stoßrohr-Problem werden drei unterschiedliche Hintergrundgeschwindigkeitsfelder shock1-shock3 verwendet.

Wir verwenden dafür die Basiseinstellungen der linearen Rekonstruktion der Zellranddaten mit dem MONOCENT in 1D oder VANLEER Limiter (siehe Abschnitt 2.3.2) in 2D Simulationen. Die Zeitintegration wird mit der SSPRK Methode (siehe Abschnitt 2.3.5) durchgeführt.

Für alle Tests werden vier verschiedene numerische Flüsse verwendet. Die EXACT-Flüsse verwenden das Ergebnis des exakten Riemann-Lösers ausgewertet für  $x/t = 0$ . Diese Lösungen unterscheiden sich nur von der exakten Lösung des Riemann-Problems als Ergebnis der Diskretisierung. Bei den HLL-Flüssen handelt es sich um den bekannten Zwei-Wellen-Löser von Harten et al. (1983). Wir verwenden dabei die gleiche Wellengeschwindigkeitsapproximation wie für den HLLC-Löser. Die KT-Flüsse sind eine Implementierung des zentralen Upwind-Verfahrens von Kurganov et al. (2001). Die numerischen KT- und HLL-Flüsse unterscheiden sich nur durch die Wahl der approximierten Wellengeschwindigkeiten. Ihre Herleitung ist jedoch unterschiedlich, sodass die KT-Flüsse nicht nur eine Approximation für das Riemann-Problem darstellen, sondern eine deutlich größere Klasse von partiellen Differentialgleichungen approximieren können.

#### 4.3.1. 1D Riemann-Probleme

Als Erstes werden zwei unterschiedliche 1D Riemann-Probleme betrachtet. Die jeweiligen linken und rechten Zustände sind in Tabelle 4.1 aufgetragen. Das erste Problem nohiso ist eine isotherme Version des Noh Problems (Noh, 1987) mit einer zusätzlichen Unstetigkeit in der Transversalgeschwindigkeit. Wie erwartet, zeigt die Abbildung 4.2, dass die Dichte nicht variiert im Vergleich zum Fall ohne passiven Skalar. Die Transversalgeschwindigkeit  $v$  zeigt, dass die ruhende Kontaktunstetigkeit von den HLLC- und EXACT-Lösern exakt aufgelöst wird. Die anderen beiden Riemann-Löser schmieren die Kontaktunstetigkeiten über mehrere Zellen aus.

Im zweiten Test wird eine isotherme Variante des Sod Stoßwellen Tests (Sod, 1978)

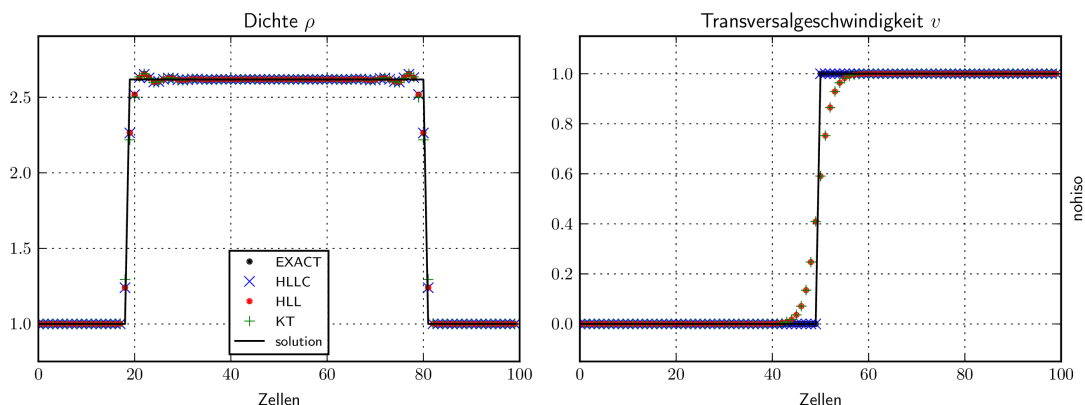


Abbildung 4.2.: Dichte- und Transversalgeschwindigkeitsprofil zum Zeitpunkt  $t_{\text{sim}} = 0.5$  der *nohiso* Simulation in dimensionslosen Einheiten. Alle Riemann-Löser zeigen sehr ähnliche Lösungen für die Dichte. Die HLLC- und EXACT-Flüsse lösen die Kontaktunstetigkeit in der Transversalgeschwindigkeit exakt auf.

mit einem zusätzlichen Sprung in der Transversalgeschwindigkeit  $v$  betrachtet. Dieses Setup beinhaltet eine isolierte Kontaktunstetigkeit, welche sich in Test shock1 schnell bewegt, in Test shock2 langsam bewegt und in Test shock3 näherungsweise still steht. Die Stoßwellengeschwindigkeit wird durch ein passendes Hintergrundgeschwindigkeitsfeld modifiziert. Die Ergebnisse in Abbildung 4.3 zeigen, dass die HLLC-Flüsse keine Vorteile für schnelle Kontaktunstetigkeiten zeigen. Die Auflösung steigt allerdings deutlich, falls sich die Kontaktunstetigkeit langsamer bewegt. Wie zu erwarten, wird die ruhende Kontaktunstetigkeit nahezu exakt aufgelöst. Der verbleibende Fehler ist auf eine minimale Restbewegung der Kontaktunstetigkeit zurückzuführen.

Durch das Einführen einer Hintergrundgeschwindigkeit wird die Auflösung der Dichte und der normalen Geschwindigkeit vermindert. Dies ist am offensichtlichsten am Knie der Verdünnungswelle in den Darstellungen der normalen Geschwindigkeit in Abbildung 4.3. Durch die Erhöhung der Hintergrundgeschwindigkeit nimmt der Gleitkommazahlen-Abschneidefehler (en.: truncation error) des numerischen Verfahrens zu. Offensichtlich ist keiner der besprochenen Riemann-Löser Galilei-invariant für nicht aufgelöste Lösungen. Das bedeutet auch, dass mehrere nicht-triviale Unstetigkeiten nicht gleichzeitig aufgelöst werden können.

Daraus folgt das wichtige Ergebnis, dass die Auflösung einer Kontaktunstetigkeit immer von der Wahl des Bezugssystems abhängt. Dies muss beachtet werden, wenn ein passendes Bezugssystem für die vorliegende Problemstellung gewählt wird. Berechnungen in rotierenden Bezugssystemen sind also nicht nur eine bequeme und effiziente Wahl für die Implementierung von zum Beispiel Gravitationsquelltermen, sondern wichtig, um quasi-stationäre Probleme überhaupt auflösen zu können.



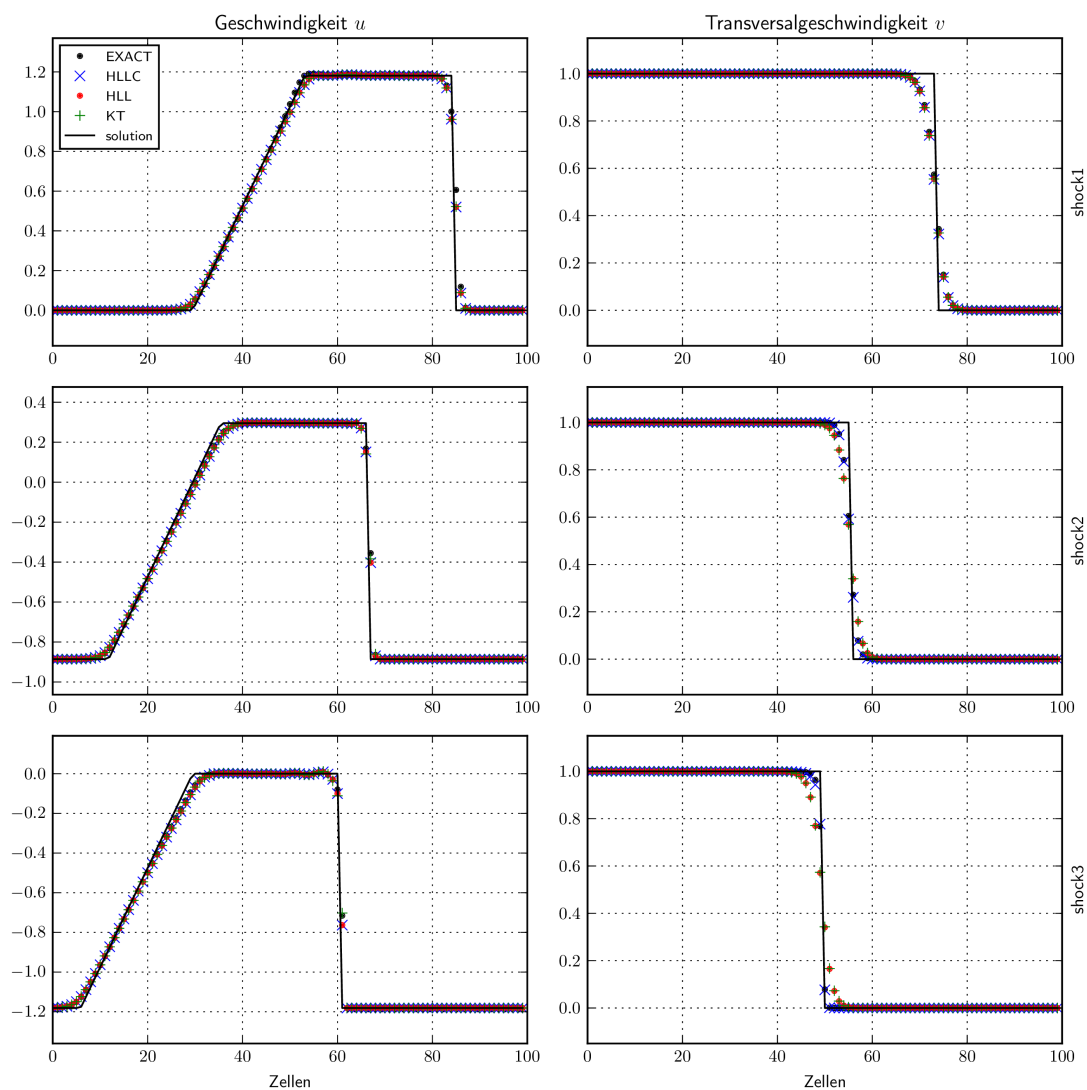


Abbildung 4.3.: Normale und transversale Geschwindigkeitsprofile des shock Problems für unterschiedliche Hintergrundgeschwindigkeiten in dimensionslosen Einheiten. Wenn die Hintergrundgeschwindigkeit steigt, sinkt die Auflösungen gleichermaßen für alle numerischen Flüsse. Die HLLC- und EXACT-Flüsse lösen die langsam bewegte und still stehende Kontaktunstetigkeit besser auf als KT- und HLL-Flüsse.

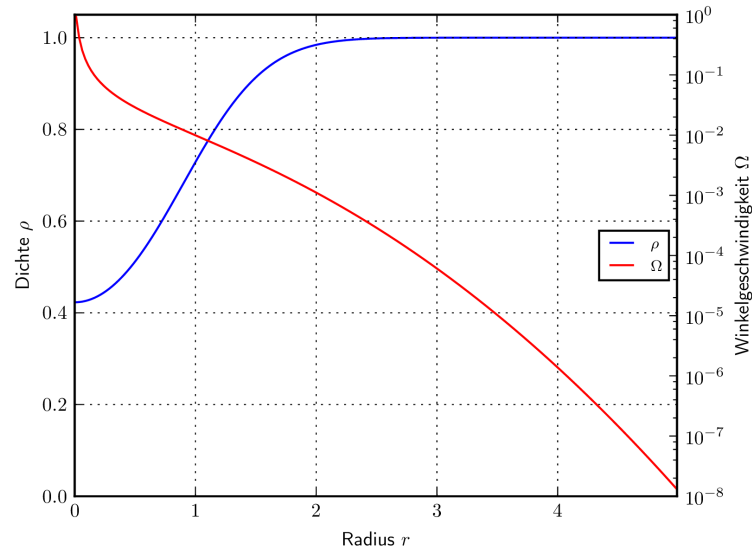


Abbildung 4.4.: Anfangsbedingungen der Dichte- und Winkelgeschwindigkeitsverteilungen der 2D isothermen Vortex Simulation in dimensionslosen Einheiten.

#### 4.3.2. Konvergenz des isothermen 2D Vortex

Um die Konvergenz des Verfahrens zu überprüfen, wird ein Test basierend auf der Lösung eines stationären isentropen Vortex, der von Yee et al. (1999) entwickelt wurde, verwendet. Dieser Test wurde bereits im Drehimpulskapitel in Abschnitt 3.3.1 verwendet. Dieses Mal finden jedoch keine polaren, sondern kartesische Koordinaten mit einem zusätzlichen Hintergrundgeschwindigkeitsfeld Verwendung. Außerdem handelt es sich um einen isothermen Vortex, bei dem die Zentrifugalkräfte der rotierenden Strömung durch einen Druckgradienten balanciert werden. Wir verwenden eine konstante Schallgeschwindigkeit von  $a = 1$ , sodass der Druckgradient durch Variieren des Dichteprofiles modelliert werden muss. Trotz des axialsymmetrischen Setups muss erwartet werden, dass perfekte Symmetrie nicht erhalten werden kann, falls die Strömung nicht an das Gitter angepasst und die 2D Lösung mit Hilfe von 1D Riemann-Lösern wiederhergestellt werden soll.

Wir definieren die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{\kappa}{2\pi} \exp\left(1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^2\right), \quad (4.20)$$

wobei  $\kappa$  die Vortexstärke und  $R_0$  die charakteristische Größe des Vortex beschreibt. Das dazugehörige Geschwindigkeitsfeld ist durch

$$\mathbf{v} = \Omega R \mathbf{e}_\varphi \quad (4.21)$$

vortex2d.f90	Hintergrunddichte	$\rho_\infty = 1$
	Hintergrunddruck	$p_\infty = 1$
	Vortexstärke	$V_{\text{str}} = 5$
	Hintergrundgeschw.	$v_\infty \in \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right]$
Physik	Modul	EULER2D
Flüsse	Rekonstruktionsordnung	LINEAR
	Variablen	PRIMITIVE
	Limiter	VANLEER
Gitter	Geometrie	CARTESIAN
	Typ	MIDPOINT
	Auflösung	$N_x \times N_y \in [50^2, 100^2, 200^2, 400^2]$
	Rechengebiet	$[-5, 5] \times [-5, 5]$
Randbedingungen		PERIODIC
Zeitintegrator	Verfahren	SSPRK
	CFL-Zahl	0.4
	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 100$

Tabelle 4.2.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter des isentropen Vortex-Tests.

gegeben. Die durch den Drehimpuls erzeugten Zentrifugalkräfte müssen durch den isothermen Druckgradienten balanciert werden. Das Dichteprofil

$$\rho = \rho_\infty \exp\left(-\frac{(R_0 \cdot \Omega/a)^2}{2}\right) \quad (4.22)$$

erfüllt diese Vorgabe. Das Dichte- und Winkelgeschwindigkeitsprofil ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

Für diese Simulation werden periodische Randbedingungen in dem Simulationsgebiet, welches durch  $X = [-5, 5]$  und  $Y = [-5, 5]$  begrenzt wird, verwendet. Die Dichte im Unendlichen sei  $\rho_\infty = 1$ , die charakteristische Größe des Vortex  $R_0 = 1$  und die Vortex-Stärke  $\kappa = 5$ , damit dimensionslos gerechnet werden kann und ein starker Druckgradient im Zentrum erreicht wird. Die Simulation läuft bis zu einer Zeit von  $t_{\text{sim}} = 100$  für Auflösungen von  $[50^2, 100^2, 200^2, 400^2]$  mit verschiedenen numerischen Flüssen und Hintergrundgeschwindigkeitsfeldern. Die Hintergrundgeschwindigkeitsfelder sind so gewählt, dass sich der Vortex am Ende der Simulationszeit wieder am Ausgangspunkt befindet. Weitere numerische Parameter sind in Tabelle 4.2 aufgeführt.

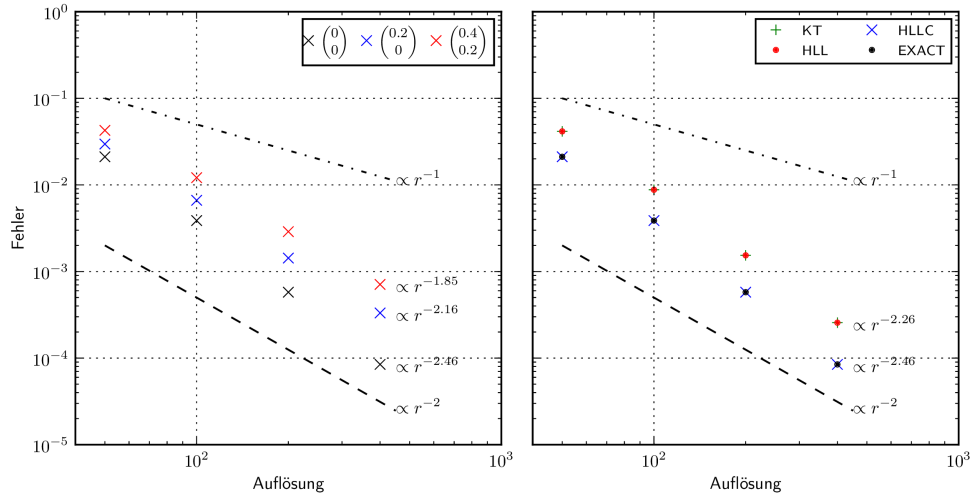


Abbildung 4.5.: Abweichungen vom Anfangszustand des isothermen Vortex in Abhängigkeit der Auflösung. Das Erhöhen der Hintergrundgeschwindigkeit führt zu einem Auflösungsverlust (links). Alle numerischen Flüsse zeigen Konvergenz zweiter Ordnung (rechts).

Heiße nun der initiale Vektor der konservativen Variablen  $k$   $U_{0,ij}^{(k)}$  und der resultierende  $U_{ij}^{(k)}$ , dann kann der Gesamtfehler  $E$  angegeben werden als

$$U^{(k)} = \sum_{i,j} \left| U_{ij}^{(k)} - U_{0,ij}^{(k)} \right|, \quad (4.23)$$

$$E = \sqrt{\sum_k (U^{(k)})^2}. \quad (4.24)$$

Wir wählen nun zuerst ein mitbewegtes Bezugssystem, in dem der Vortex kein Hintergrundgeschwindigkeitsfeld besitzt und variieren die Auswertung der numerischen Flüsse. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.5 (rechts) dargestellt. Alle Riemann-Löser erreichen eine Konvergenz von mindestens der Ordnung zwei. Die HLLC- und EXACT-Flüsse zeigen bei jeder Auflösung einen nur etwa halb so großen Fehler wie die KT- und HLL-Flüsse. Jetzt wird der HLLC-Fluss mit unterschiedlichen Hintergrundgeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}_\infty \in \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.2 \end{pmatrix} \right] \quad (4.25)$$

verwendet. Die Abbildung 4.5 (links) zeigt, dass obwohl das Konvergenzverhalten immer noch von zweiter Ordnung ist, Auflösung verloren geht. Dies ist wieder ein Effekt der fehlenden Galilei Invarianz.

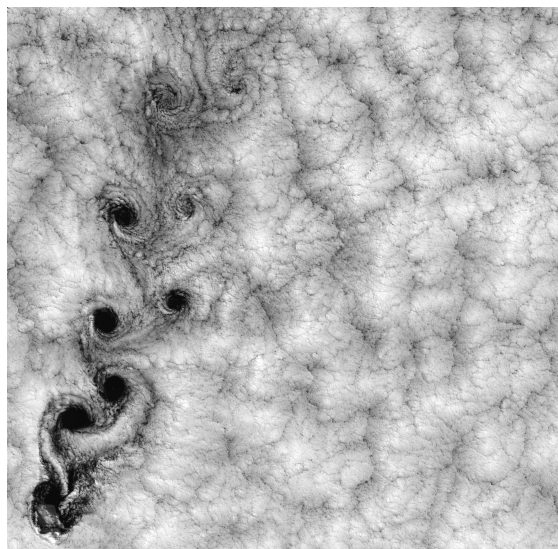


Abbildung 4.6.: Aufnahme des Landsat 7 Satelliten der Wolkendecke in der Nähe der Juan Fernandez Inseln am 15. September 1999. Die gleichmäßigen Winde, welche durch eine Insel behindert werden, erzeugen eine Kármánsche Wirbelstraße. Die Wolkendecke macht diese Strömung sichtbar (NASA GSFC, 1999).

#### 4.3.3. Simulation einer Kármánschen Wirbelstraße

Um die überlegene Auflösung des HLLC-Lösers von Wirbeln in isothermen Strömungen zu demonstrieren, wird die Simulation einer Kármánschen Wirbelstraße (von Kármán, 1911) aufgesetzt. Die Abbildung 4.6 zeigt die Aufnahme des Landsat 7 Satelliten einer Kármánschen Wirbelstraße, welche sich hinter einer Insel bildet und durch eine dünne Wolkendecke sichtbar wird. Dies ist nur ein Beispiel einer Kármánschen Wirbelstraße, welche durch ihre periodische Wirbelablösung für Schwingungen an vielen Hindernissen sorgen. Zur Modellierung eines solchen Hindernisses wird ein Rechengebiet verwendet, dessen linke Randbedingung zwei unterschiedlich definierte Bereiche besitzt. Für  $|Y| < R_0/2$  werden reflektierende Randbedingungen gesetzt, um eine Barriere zu modellieren. Außerhalb dieses Bereiches wird der gleiche Zustand wie der Anfangszustand im Rechengebiet gesetzt:

$$\rho = 1, \quad (4.26)$$

$$u = u_0, \quad (4.27)$$

$$v = 0. \quad (4.28)$$

Die Idee ist, dass ein Wind, beziehungsweise eine Gasströmung, durch ein Hindernis gestört wird. Hinter dem Hindernis kann sich dann abhängig von den Strömungsbedingungen eine

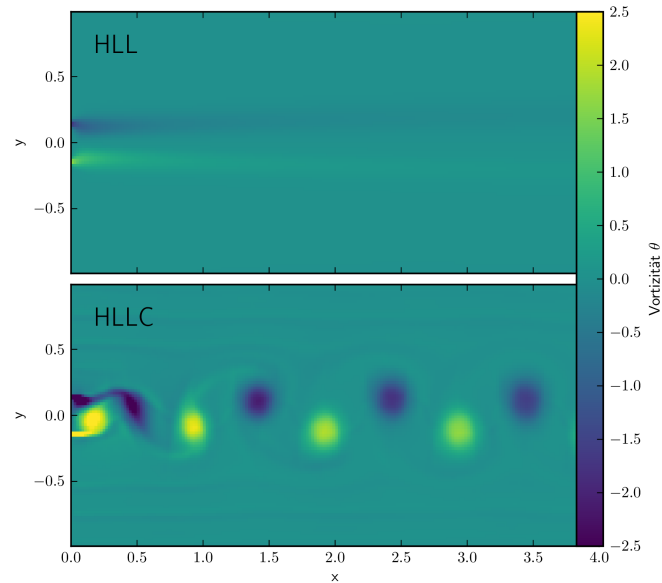


Abbildung 4.7.: Vortizitätskarte der Kármánschen Wirbelstraßensimulation bei  $t_{\text{sim}} = 1000$ . Die Einflussgeschwindigkeit beträgt  $v = 0.1$  und es werden HLL-Flüsse in der oberen und HLLC-Flüsse in der unteren Karte verwendet. Die HLL-Flüsse können dieses Problem nicht auflösen und zeigen eine laminare Strömung. Im Gegensatz dazu können die HLLC-Flüsse die Wirbelstraße auflösen.

Wirbelstraße ausbilden. Da der HLLC-Löser den Sprung in der  $u$ -Geschwindigkeit an den  $|Y| = R_0/2$  Kanten exakt auflösen kann, muss eine geringe relative Störung von  $10^{-4}$  dem  $u$ -Geschwindigkeitsfeld hinzugefügt werden. Damit kann genug Durchmischung erreicht werden, um die Wirbelerzeugung zu starten. Die Süd-, Nord- und Ostränder erfüllen die NO\_GRADIENTS Randbedingungen. Die Größe der Simulationsbox beträgt  $X = [0, 4]$  und  $Y = [-1, 1]$ . Die Simulation läuft bis zu einer Zeit von  $t_{\text{sim}} = 1000$  bei einer Auflösung von  $100 \times 200$  Zellen. Weitere Parameter sind der Tabelle 4.3 zu entnehmen. Wir variieren die Einflussgeschwindigkeit  $u_0$  und vergleichen die Ergebnisse des HLL- und HLLC-Lösers. Die Abbildung 4.7 zeigt die Vortizität für  $u_0 = 0.1$ . Die HLLC-Flüsse können bei dieser Einflussgeschwindigkeit Wirbel generieren. Im Gegensatz dazu zeigen die HLL-Flüsse ein laminares Strömungsbild. Die Abbildung 4.8 zeigt das Vortizitätsmaximum

$$\max(|\theta|) = \max(|\nabla \times \mathbf{v}|) \quad (4.29)$$

in der Region  $X \in [1, 3]$  über der Zeit aufgetragen für zwei unterschiedliche Einflussgeschwindigkeiten. Der laminare Fall für  $u_0 = 0.1$  der HLL-Flüsse kann eindeutig von

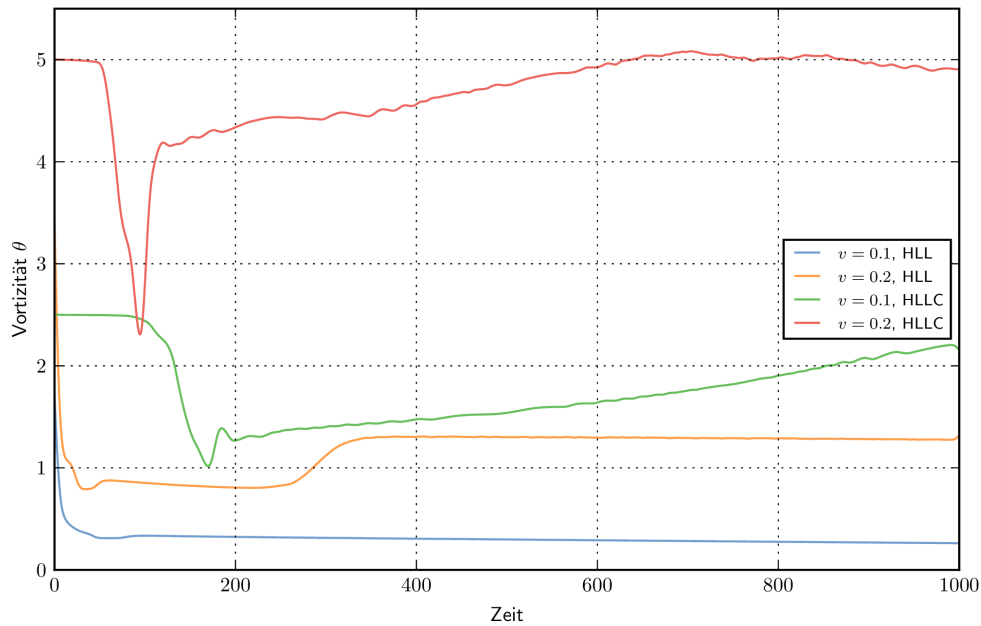


Abbildung 4.8.: Maximale Vortizität in der Region  $X \in [1, 3]$  für zwei verschiedene Hintergrundgeschwindigkeiten und numerische Flüsse als Funktion der Simulationszeit. Oszillationen auf kleinen Zeitskalen wurden durch einen Gaußfilter entfernt. Für eine Geschwindigkeit von  $v = 0.1$  und die HLL-Flüsse ist die Vortizität niedrig, da keine Wirbel generiert werden. Die HLLC-Flüsse zeigen eine höhere Vortizität. Für eine Geschwindigkeit von  $v = 0.2$  generieren beide numerische Flüsse Wirbelstraßen, aber die Wirbel der HLLC-Flüsse haben eine deutliche höhere Vortizität und sind daher besser aufgelöst.

den Wirbel bildenden HLLC-Flüssen unterschieden werden. Bei einer höheren Einflussgeschwindigkeit von  $u_0 = 0.2$  generieren auch die HLL-Flüsse Wirbel an der Barriere, aber die maximale Vortizität und damit auch die Auflösung ist deutlich höher bei der Simulation mit HLLC-Flüssen. Wenn die Strömung um das Hindernis Wirbel ablöst, kann ein Zusammenhang zwischen den physikalischen Skalen des Problems, der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der Reynolds-Zahl  $\mathcal{R}$  hergestellt werden (Lienhard, 1966):

$$\mathcal{R} = \frac{u_0 R_0}{\nu}. \quad (4.30)$$

Laut Lienhard (1966) findet Wirbelablösung ungefähr bei einer kritischen Reynolds-Zahl von  $\mathcal{R} = 90$  statt. Die dimensionslose Geschwindigkeit  $u_0$  und die Hindernisgröße  $R_0$  können in SI-Einheiten interpretiert werden. Für die minimal wirbelablösende Geschwindigkeit  $u_0$  der HLL-, beziehungsweise HLLC-Flüsse, ergeben sich unterschiedliche obere

karman.f90	Hintergrunddichte	$\rho_\infty = 1$
	Hindernisdurchmesser	$R_0 = 0.3$
	Hintergrundgeschw.	$u_0 \in [0.1, 0.2]$
Physik	Modul	EULER2D_ISO THERM
Flüsse	Rekonstruktionsordnung	LINEAR
	Variablen	PRIMITIVE
	Limiter	VANLEER
Gitter	Geometrie	CARTESIAN
	Typ	MIDPOINT
	Auflösung	$N_x \times N_y = 200 \times 100$
	Rechengebiet	$[0, 4] \times [-1, 1]$
Randbedingungen		siehe Abschnitt 4.3.3
Zeitintegrator	Verfahren	SSPRK
	CFL-Zahl	0.4
	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 1000$

Tabelle 4.3.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter der Simulation einer Kármán-schen Wirbelstraße.

Grenzen für die numerische Viskosität des Verfahrens  $\nu_{\text{HLL}}$  und  $\nu_{\text{HLLC}}$ :

$$\nu_{\text{HLL}} = \frac{0.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.3 \text{ m}}{90} = 6.7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (4.31)$$

$$\nu_{\text{HLLC}} = \frac{0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.3 \text{ m}}{90} = 3.3 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (4.32)$$

Die durch die Numerik erzeugte numerische Viskosität ist bei Verwendung der HLLC-Flüsse also nur halb so groß, wie bei der Verwendung der HLL-Flüsse.

#### 4.3.4. Erdähnlicher Planet

Alle bisherigen Tests sind in kartesischen Koordinaten durchgeführt worden. Dies ist zunächst auch kein Problem, da die Berechnung der numerischen Flüsse unabhängig von den gewählten Koordinaten ist. Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass die Erhaltungseigenschaften zum Beispiel in Polarkoordinaten besonders in rotierenden Bezugssystemen problematisch sind. Dass in einem solchen Fall die HLLC-Flüsse entscheidene Vorteile liefern, soll anhand einer Planet-Scheibe-Wechselwirkung in einem einfachen Zwei-Körper-Setup nachgewiesen werden. Im rotierenden Bezugssystem ist das Gravitationspotential



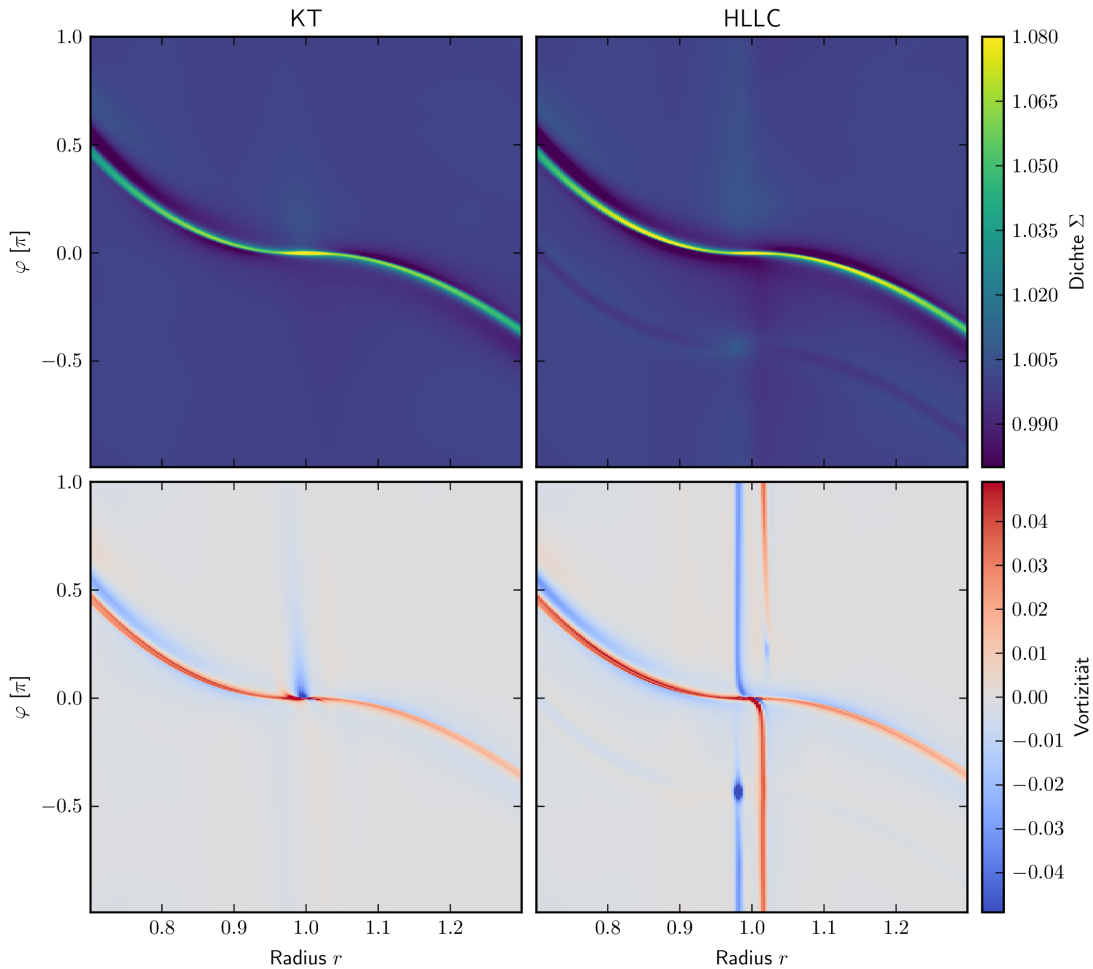


Abbildung 4.9.: Farbkarten der Oberflächendichte und Vortizität zum Zeitpunkt  $t = 30$ . Die HLLC-Simulation zeigt einen deutlichen antizyklonischen Wirbel mit eigenen Spiralarmen.

von Stern und Planet konstant. Dies führt zu einem quasi-stationären Zustand in der Dichteverteilung. Falls hier Kontaktunstetigkeiten entstehen, ist ein Auflösungs-vorteil mit den HLLC-Flüssen zu erwarten. Bereits die Simulationen im vorherigen Kapitel 3.3.2 mit einem Jupiter-Massen-Planet zeigen das Entstehen von Wirbeln an den Grenzen der Lücke. Hier soll die Wechselwirkung mit einem Erdmassen-Planet betrachtet werden. Dies ist numerisch ungleich schwieriger, da es sich um eine Größenordnungen kleinere Störung handelt. Dabei muss ein schwacher Wirbel am Rand der Lücke entstehen (Kley et al., 2012), welcher nur mit dem neuen HLLC-Flussmodul aufgelöst werden kann.

Es werden zwei identische Simulationen durchgeführt mit jeweils dem KT- und dem HLLC-Flussmodul. Dabei wird eine lokal isotherme Zustandsgleichung verwendet und für

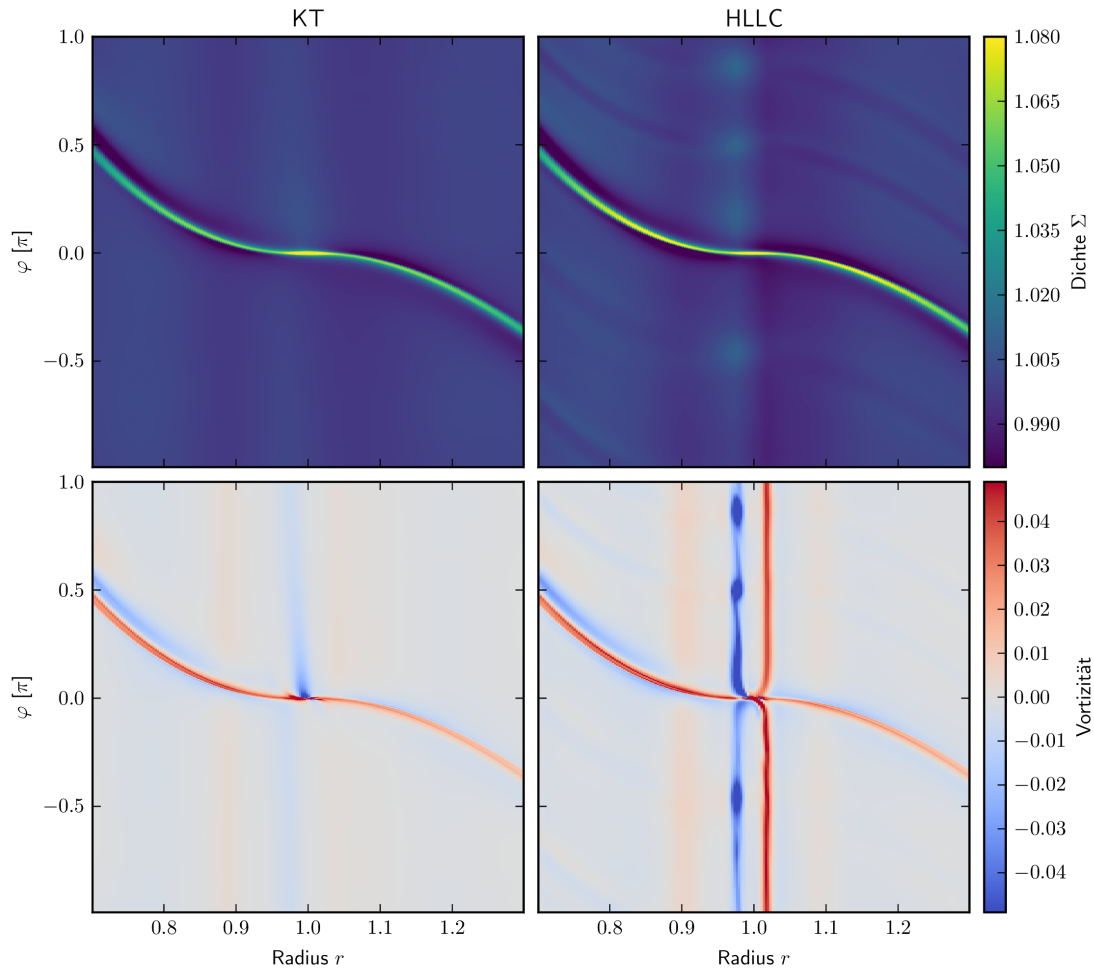


Abbildung 4.10.: Farbkarten der Oberflächendichte und Vortizität zum Zeitpunkt  $t = 150$ . Die HLLC-Simulation hat mittlerweile mehrere Wirbel ausgebildet, währenddessen die KT-Simulation nur diffuse Vortizitätsbänder aufweisen kann.

das Verhältnis von Planet- zu Zentralmasse  $q = 6 \cdot 10^{-6}$  festgelegt. Das weitere Setup entspricht weitestgehend dem aus Abschnitt 3.3.2. Die Unterschiede in Ausdehnung des Rechengebiets, Auflösung und andere Details sind in der Tabelle 4.4 festgehalten. Die Abbildung 4.9 zeigt Farbkarten der Oberflächendichte und der Vortizität beider Simulationen nach 30 Planetenorbits. Beide Simulationen zeigen identische Spiralarme und eine leichte Massenansammlung in der Bahn des Planeten, da dieser nicht massereich genug ist, um eine Lücke zu erzeugen. Die Vortizitätskarte der HLLC-Simulation (und schwach auch die Dichtekarte) zeigen einen starken, korotierenden Wirbel an der Innenkante des Planetenorbits. Ein zweiter schwächerer Wirbel ist an der Außenkante zu sehen. Beide hinterlassen Vortizitätsspuren und besitzen eigene Spiralarme. Diese sind auch in der

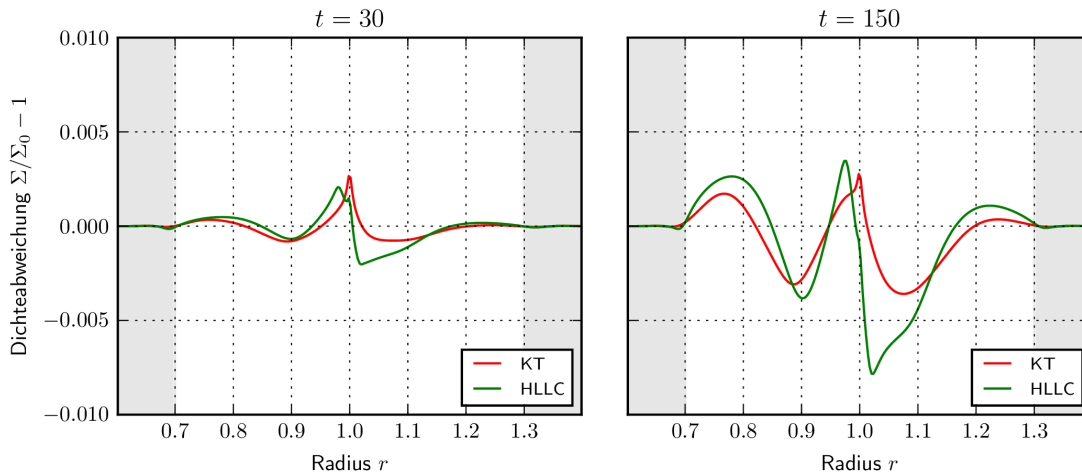


Abbildung 4.11.: Azimutal gemittelter radialer Verlauf der Dichteabweichungen gegenüber dem ungestörten Profil für die KT- und HLLC-Flüsse zu den Zeitpunkten  $t = 30$  und  $t = 150$ .

KT-Simulation zu erahnen, jedoch sind sie hier offensichtlich viel zu diffus, um einen Wirbel zu bilden. In Abbildung 4.10 sind dieselben Variablen nach 150 Orbits zu sehen. Die HLLC-Simulation hat mittlerweile mehrere Wirbel gebildet, die bei einem etwas kleineren Radius als der Planeten umlaufen. Beide Simulation zeigen leichtes Anhäufen von Masse entlang der Planetenbahn.

Die Abbildung 4.11 zeigt den radialen, azimutal gemittelten Dichteverlauf beider Simulationen nach 30 bzw. 150 Orbits. Grundsätzlich ähneln sich die beiden Verläufe, aber es gibt einige nennenswerte Unterschiede. Die HLLC-Flüsse zeigen ihr Maximum bei etwas kleineren Radien als dem Planetenradius, nämlich dort wo sich die Wirbel bilden. Der typische asymmetrische Verlauf der Dichte, ist bei den HLLC-Flüssen deutlich stärker ausgeprägt. Zudem scheint sich in beiden Simulationen eine schwache Lücke auszubilden.

	Massenverhältnis	$q = 6 \cdot 10^{-6}$
	Längeneinheit	$a = 1$
	Zeiteinheit	$P_0 = 2\pi\sqrt{a^3/(Gm_\star)}$
planetkley.f90	Flaring	$\beta = 0.05$
	Dichte	$\Sigma_0 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot m_\star / (\pi a^3)$
	Radialgeschwindigkeit	$v_{r,0} = 0$
	Azimutalgeschwindigkeit	$v_{\varphi,0}(r) = \sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{Gm_\star/r}$
	Modul	EULER2D_ISO THERM
Physik	Rotationsgeschwindigkeit	$\Omega = 1$
	Schallgeschwindigkeit	$c_s(r) = \beta \sqrt{Gm_\star/r}$
	Einheiten	GEOMETRICAL
	Rekonstruktionsordnung	LINEAR
Flüsse	Variablen	PRIMITIVE
	Limiter	VANLEER
	Geometrie	POLAR
	Typ	MIDPOINT
Gitter	Auflösung	$N_r \times N_\varphi = 256 \times 2004$
	Radiale Ausdehnung	$R \in [0.6, 1.4]$
	Azimutale Ausdehnung	$\varphi \in [-\pi, \pi] + \pi/N_\varphi$
Randbedingungen	Innen und Außen	REFLECT+KEPLER
	Große Halbachse	$a = 1.0$
	Masse	$m_s = q$
Planet	Exzentrizität	$e = 0$
	Glättungsparameter	$\epsilon = 0.1H = 0.1(\beta \cdot a)$
	Anschaltverzögerung	$\tau = 1P_0$
Stern	Masse	$m_\star = 1 - q$
	Innen	$r_0 = 0.7a$
		$\tau_0 = 2\pi \cdot (0.6a)^3 / (Gm_\star)$
Wellendämpfung	Außen	$r_1 = 1.3a$
		$\tau_1 = 2\pi \cdot (2.1a)^3 / (Gm_\star)$
	Verfahren	SSPRK
Zeitintegrator	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 30P_0$

Tabelle 4.4.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter der Simulation eines erdähnlichen Planeten.

## 5. Multiskalensimulationen von Schwarzlochwachstum in Balkengalaxien

Bereits ohne einen detaillierten Einblick in die innere Struktur von Galaxien und aktiven galaktischen Kernen zu besitzen, muss vermutet werden, dass es einen engen Zusammenhang zwischen dem Wachstum Schwarzer Löcher und des Bulge gibt. Darauf weist die Schwarzloch-Bulge-Korrelation (Ferrarese und Merritt, 2000; Gebhardt et al., 2000; McConnell et al., 2011)

$$M \approx 1.9 \cdot 10^8 \left( \frac{\sigma}{200 \text{ km/s}} \right)^{5.1} M_{\odot} \quad (5.1)$$

hin, wobei  $M$  die Masse des Schwarzen Lochs und  $\sigma$  die Geschwindigkeitsdispersion des Bulge ist. Sie wird daher häufig auch  $M$ - $\sigma$ -Verbindung genannt. Dieser Zusammenhang ist so gut korreliert (Ferrarese und Merritt, 2000; Gebhardt et al., 2000; McConnell et al., 2011), dass es eine enge Verbindung zwischen dem Wachstum von Schwarzen Löchern und galaktischen Bulges geben muss. Dies ist zunächst überraschend, da sie sich um viele Größenskalen voneinander unterscheiden. Bereits im Grundlagenkapitel 2.1.2 wurde deutlich, dass Schwarze Löcher durch Akkretionsprozesse sehr viel Energie freisetzen und schon bei relativ geringen Akkretionsraten sehr hohe Leuchtkräfte erzeugen können. Durch die beobachteten Leuchtkräfte aktiver galaktischer Kerne lässt sich so auf die Akkretionsraten auf Schwarze Löcher zurück schließen. Es zeigt sich, dass selbst im lokalen Universum ein breites Spektrum von Akkretionsraten von  $10^{-5...0} M_{\odot}/\text{yr}$  gefunden werden kann (Alexander und Hickox, 2012).

Was aber die Ursache für den Schwarzloch-Bulge-Zusammenhang ist, bleibt bisher unklar. In Einzelfällen kann der Zusammenhang zum Beispiel durch Galaxienverschmelzungen, AGN Ausflüsse oder stellare Winde erklärt werden. Es ist ungeklärt, inwieweit diese Prozesse auf andere Galaxien anwendbar sind und wie ihre genaue Wirkung auf das gemeinsame Wachstum abläuft.

Die Akkretion von Gas auf das Schwarze Loch kann nur durch den Transport von Material auf viel größeren Skalen der Galaxie im Kiloparsec-Bereich in die direkte Nähe des Schwarzen Loches und dessen gravitativen Einfluss auf die Bereiche  $< 0.1 \text{ pc}$  erklärt werden. Dabei muss das Gas nicht nur fast seinen kompletten Drehimpuls abgeben, sondern könnte durch gravitativen Kollaps auch zu neuer Sternentstehung führen. Damit

würde die Akkretion des Gases zunächst verhindert.

Neue hochauflösende Beobachtungen (Fathi et al., 2015; Xu et al., 2015) geben allmählich einen detaillierteren Einblick in die Strukturbildung in den Zentren von Galaxien. So können innere Strukturen auf Skalen von 100 pc aufgelöst werden, wie zum Beispiel klumpige nukleare Ringe, welche 1000-fach erhöhte Sternentstehung gegenüber ihrer Umgebung aufweisen (Xu et al., 2015) oder vom Zentrum aus ausgedehnte Arme, welche Gasbewegung in Richtung des Zentrums aufweisen (Salak et al., 2016).

Das Kapitel ist folgendermaßen aufgebaut. Zuerst werden die neuen Quellterme für externe Gravitationspotentiale und die Selbstgravitation flacher Scheiben eingeführt und getestet. Dann wird eine konservative Implementierung der nicht-selbstgravitierenden Gravitationsquellterme in der Energiegleichung vorgestellt. Ohne diese sind Drehimpuls erhaltende Rechnung mit starken zentralen Gravitationsquellen nicht möglich, sondern führen zu numerischen Instabilitäten. Im Zusammenhang mit starken Stoßfronten und Kühlung kann es außerdem zu sehr niedriger innerer Energie kommen, weshalb eine untere Schranke für die Temperatur eingeführt werden muss.

Als nächstes kann auf das gemeinsame Setup der isothermen und isentropen Galaxien-simulationen eingegangen werden. Deren Verlauf wird detailliert erläutert, bevor die Ergebnisse diskutiert werden können.

## 5.1. Gravitation

Die Gravitation ist der maßgebliche Faktor bei der Strukturbildung auf galaktischen Skalen. FOSITE verfügt über ein elaboriertes Modul für die Berechnung von Gravitationsquellen, aber es gab bisher keine Möglichkeit der Integration beliebiger Potentiale oder der Selbstgravitation flacher Scheiben. Daher sind die im Folgenden beschriebenen Module im Rahmen dieser Arbeit entwickelt worden.

### 5.1.1. Externe Gravitationspotentiale

Die Simulation einer Balkengalaxie erfordert die Implementierung anwendungsspezifischer Gravitationspotentiale von ausgedehnten Sternmassenverteilungen. Bisher waren in FOSITE hauptsächlich Gravitationsquellterme für Punktmassen oder ein System aus zwei Punktmassen vorgesehen, aber es existierte keine Möglichkeit anwendungsspezifische Gravitationsbeschleunigungen in FOSITE zu verwenden. Das neue `gravity_potential` Modul bietet die Möglichkeit, beliebige vom Anwender spezifizierte Gravitationspotentiale zu verwenden, diese in Abhängigkeit der Simulationszeit zu skalieren und deren kumulierte Gravitationsbeschleunigung zu berechnen. Wenn durch  $\Phi_i$ ,  $i \in n$ ,  $n$  Gravitationspotentiale

definiert sind, ergibt sich deren Gravitationsbeschleunigung durch

$$\Phi = \sum_{i \in n} \Phi_i, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi. \quad (5.3)$$

Vor dem Berechnen der Beschleunigung können die Gravitationspotentiale noch skaliert werden, um ein langsames, nicht-destruktives Einschalten von nicht-axialsymmetrischen Potentialen zu gewährleisten. Wenn der Skalierungsstartwert  $s_{0,i}$  und die Skalierung  $s_{\Delta,i}$  in der Zeit  $\tau$  lauten, gilt:

$$f_i(t) = s_{0,i} + s_{\Delta,i} \cdot \min\left(\frac{t}{\tau}, 1\right). \quad (5.4)$$

Das `gravity_potential` bekommt von der vom Anwender definierten Funktion Potential und Dichte der Massenverteilungen an jedem angefragten Ort im Raum. Das Potential wird an allen vier Zellrändern sowie an den Zellbaryzentren abgefragt. Mit den Zellrändern werden die Beschleunigung mit zweiter räumlicher Ordnung berechnet

$$a_\xi = \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2},j} - \Phi_{i-\frac{1}{2},j}}{h_\xi \Delta\xi}, \quad (5.5)$$

$$a_\eta = \frac{\Phi_{i,j+\frac{1}{2}} - \Phi_{i,j-\frac{1}{2}}}{h_\eta \Delta\eta}. \quad (5.6)$$

Zusätzlich wird die Dichte der Massenverteilung an den Zellbaryzentren gespeichert. Potential- und Dichtewerte an den Zellzentren werden benötigt, um die Gravitationsenergie als Beitrag zur Energieflussdichte zu werten, wie in Abschnitt 5.1.3 noch genauer erläutert wird.

### 5.1.2. Selbstgravitation

Viele massereiche Akkretionsscheiben erzeugen selbst ausreichende Gravitationsbeschleunigungen, sodass diese Gasmasse in bestimmten Regionen der Scheibe gegenüber der Zentralmasse oder stellaren Masse dominieren kann. Unter bestimmten Bedingungen (siehe Abschnitt 2.1.2) kann eine Akkretionsscheibe zudem gravitativ-instabil werden.

Für eine Massenverteilung mit Volumendichte  $\rho$  gilt die bekannte Poisson-Gleichung

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (5.7)$$

wobei  $G$  die Gravitationskonstante und  $\Phi$  das durch die Massenverteilung erzeugte

Gravitationspotential beschreibt. Hierbei erfüllt  $\Phi$  jederzeit die Randbedingung eines im unendlichen verschwindenden Potentials

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{x}) = 0. \quad (5.8)$$

Generell kann die Poissongleichung entweder durch eine Finite-Differenzen-Methode (LeVeque, 2007) oder durch direkte Integration gelöst werden. Die erste Klasse von Methoden löst direkt die Poisson-Gleichung (5.7) und benötigt hierfür entsprechende Randbedingungen an den Rändern des Rechengebietes. Die Randbedingungen im Unendlichen sind ohne weiteres keine Hilfe bei der Lösung. Die richtigen Randbedingungen zu bestimmen kann sehr schwierig sein.

Im Falle von Methoden direkter Integration muss das Volumenintegral

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \quad (5.9)$$

gelöst werden. Die Randbedingungen sind hier kein Problem, da das Integral an den Grenzen des Rechengebietes endet. Allerdings kann es Probleme bei der Auswertung an der singulären Stelle  $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$  geben. Außerdem sind Integralmethoden typischerweise sehr rechenaufwendig. Im Folgenden wird eine Methode direkter Integration vorgestellt, welche die Rechenzeit durch effiziente Verwendung von Fourier-Transformationen und Vorabberechnung gering hält. Singuläre Stellen können durch zwei unterschiedliche Gitter vermieden werden. Die Methode basiert auf den Veröffentlichungen von Chan et al. (2006) und Li et al. (2009). Sie unterscheidet sich geringfügig von diesen durch die Wahl des sekundären Gitters und die Erweiterung auf polare Koordinaten mit beliebiger radialer Skalierung. Um Simulationen von Akkretionsscheiben in 2D Polarkoordinaten durchzuführen, muss stets die Annahme gemacht werden, dass diese geometrisch dünn sind. Das bedeutet, dass für die Skalenhöhe  $H$  der Akkretionsscheibe

$$\frac{H(r)}{r} \ll 1 \quad (5.10)$$

gilt. Zusätzlich wird nun angenommen, dass die Skalenhöhe nur von der radialen, nicht aber von der azimuthalen Koordinate  $\varphi$  oder der Zeit  $t$  abhängt:

$$H = H(r). \quad (5.11)$$

Damit kann die vertikale Struktur in zylindrischen Koordinaten durch eine Funktion  $Z(r, z)$  beschrieben werden. Die Volumendichte  $\rho$  ergibt sich nun als Produkt aus Ober-



flächendichte  $\Sigma$  und vertikaler Struktur  $Z$ :

$$\rho(t, r, \varphi, z) = \Sigma(t, r, \varphi) Z(r, z). \quad (5.12)$$

Dieser Zusammenhang kann nun in die Gleichung (5.9) eingesetzt und für  $z = 0$  ausgewertet werden, da hier nur das Potential in der Äquatorialebene von Interesse ist.

$$\begin{aligned} \Phi(t, r, \varphi) = & \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \int_0^{2\pi} \Sigma(t, r', \varphi') \\ & \cdot \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{GZ(r', z')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + z'^2}} dz' \sqrt{g} d\varphi' dr' \end{aligned} \quad (5.13)$$

Dabei ist  $\sqrt{g}$  die Funktionaldeterminante. Das letzte Integral wird als Greensche Funktion bezeichnet

$$\mathcal{G}(r, r', \varphi - \varphi') = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{Z(r', z')}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi') + z'^2}} dz'. \quad (5.14)$$

Da die Höhenstruktur  $Z$  als zeitunabhängig vorausgesetzt wird, kann diese vorab berechnet werden. In allen implementierten Fällen existieren analytische Lösungen für das Integral. Die einfachste Höhenstruktur ist eine infinitesimal dünne Scheibe

$$Z(r, z) = \delta(z), \quad \mathcal{G}(r, r', \varphi - \varphi') = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi')}}. \quad (5.15)$$

Für geometrisch dünne, vertikal-isotherme, nicht-selbstgravitierende Akkretionsscheiben stellt sich in vertikaler Richtung eine Gaußschichtung in der Dichte ein (Shakura und Sunyaev, 1973). Dies stellt näherungsweise auch für vertikal-isotherme selbstgravitierende Akkretionsscheiben eine wichtige Höhenstruktur dar (Illenseer und Duschl, 2015). Für eine vorgegebene Skalenhöhe  $H(r)$  kann dann die Höhenstruktur und die entsprechende Greensche Funktion angegeben werden:

$$Z(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}H(r)} \exp\left(-\frac{z^2}{2H^2(r)}\right), \quad \mathcal{G}(r, r', \varphi - \varphi') = -\frac{e^{R^2/4} K_0(R^2/4)}{\sqrt{2\pi}H(r')}, \quad (5.16)$$

mit  $R^2 = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi - \varphi'))/H^2(r')$  und  $K_0$  der modifizierten Besselfunktion 2. Art (siehe Anhang A.5). Mit der Definition

$$I(r, r', \varphi - \varphi') := 2\pi G r' \mathcal{G}(r, r', \varphi - \varphi') \quad (5.17)$$

kann das Integral (5.13) geschrieben werden als:

$$\Phi(t, r, \varphi) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Sigma(t, r', \varphi') I(r, r', \varphi - \varphi') dr' d\varphi'. \quad (5.18)$$

Das zweite Integral kann als Faltung identifiziert werden, wobei  $\hat{\Sigma}$  und  $\hat{I}$  die Fouriertransformierten (siehe Anhang A.6) bezeichnen. Unter Verwendung des Faltungstheorems, ergibt sich die Fouriertransformierte des Gravitationspotentials als

$$\hat{\Phi}_m(t, r) = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \hat{\Sigma}_m(t, r') \hat{I}_m(r, r') dr' \quad m \in [-\infty, \infty]. \quad (5.19)$$

Dieses Integral kann leicht mit der Mittelpunktsregel berechnet werden. Um das Divergieren bei der Abstandsberechnung für  $r \rightarrow r'$  zu vermeiden, werden für  $r$  und  $r'$  unterschiedliche Positionen im Gitter verwendet.  $r'$  wird an den Zellmittelpunkten ausgewertet. Dies bietet sich an, da  $\Sigma$  ebenfalls an den Zellmittelpunkten definiert ist, und daher keine Rekonstruktion notwendig ist.  $r$  wird an den Zellrändern definiert. Diese Wahl erleichtert auch die Berechnung der Gravitationsbeschleunigung. Folgende Schritte müssen bei jeder Quelltermauswertung vorgenommen werden:

1. Berechnen der Fouriertransformierten von  $\Sigma$ .
2. Auswertung des Integrals (5.19) mit der Mittelpunktsregel.
3. Rücktransformation von  $\hat{\Phi}$ .

Als Vorbereitung muss einmal vor Beginn der Simulation die Fouriertransformierte von  $I$  berechnet werden. Der eigentliche zu wiederholende Algorithmus besteht dann nur noch aus zwei Fouriertransformationen und der Summation von Produkten (siehe Gleichung (5.19)). Da für die Fouriertransformationen sehr schnelle und effiziente Algorithmen zur Verfügung stehen, ist dies ein vergleichsweise schnelles Verfahren. Insgesamt nimmt die Berechnung der Selbstgravitation erfahrungsgemäß ein Drittel der Simulationszeit in Anspruch. Die 1D Fouriertransformationen lassen sich zudem nicht effizient parallelisieren, sodass nur eine Parallelisierung der radialen Integration implementiert ist. Insgesamt kann das Rechengebiet also nur noch in Ringe aufgeteilt werden, was für das allgemeine Interprozesskommunikationsaufkommen negativ sein kann.

Für sehr große Auflösungen können kleine Frequenzen bei der radialen Summation vernachlässigt werden, also ein Moden-Abschneidepunkt definiert werden. Dies reduziert nicht nur die Anzahl der radialen Summationskomponenten, sondern auch die notwendige radiale Kommunikation insgesamt. Tests zeigen, dass die Fehler beim Abschneiden der

unteren Hälfte aller Moden im kleinen einstelligen Prozentbereich liegen. Genauere Tests finden sich dazu in Li et al. (2009). Dieses Verfahren ist in FOSITE implementiert, wird aber in den durchgeführten Simulationen mit Selbstgravitation nicht verwendet, da deren Auflösung und damit auch die Kommunikation vergleichsweise gering ausfällt.

Die Gravitationsbeschleunigung ist das Ergebnis des Gradienten des Potentials

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi. \quad (5.20)$$

Für eine Zelle  $(i, j)$  wird die Beschleunigung in der Zellmitte benötigt. Da das Potential an den Mitten der radialen Zellränder zur Verfügung steht, können die Beschleunigungen wie folgt berechnet werden:

$$g_r(r_i, \varphi_j) = \frac{\Phi(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_j) - \Phi(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_j)}{\Delta r}, \quad (5.21)$$

$$g_\varphi(r_i, \varphi_j) = \frac{\Phi(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j+1}) + \Phi(r_{i+\frac{1}{2}}, \varphi_{j-1}) - \Phi(r_{i-\frac{1}{2}}, \varphi_{j-1})}{4r_i\Delta\varphi}. \quad (5.22)$$

Im folgenden Abschnitt werde einige Testergebnisse vorgestellt, um die richtige Funktionsweise und die Qualität der Potentialberechnung zu gewährleisten.

### Dichte-Potential Paare

Der einfachste Test des neuen Spektrallösers ist der Vergleich mit einer Dichteverteilung, deren gravitatives Potential als analytischer Ausdruck bekannt ist. Da das vorliegende Modul nur das Potential von Masse innerhalb des Rechengebietes berechnet, aber keine Randbedingungen zulässt, welche Einflüsse von außerhalb des Rechengebiets liegender Masse auf das innere Potential ausüben, müssen die betrachteten Dichteverteilungen in der Nähe des Rechengebietsrandes vernachlässigbar klein werden. Das Potential von Massenverteilung außerhalb des Rechengebiets kann mit anderen Gravitationsmodulen modelliert werden. Hierzu bieten sich typischerweise Massenverteilungen an, die um einen Punkt zentriert sind und nach gewissen Gesetzmäßigkeiten mit zunehmender Entfernung abfallen. Solche Verteilungen sind sowohl für infinitesimal dünne Scheiben, als auch für Scheiben mit Gaußverteilungen in  $z$ -Richtung bekannt. Für infinitesimal flache Scheiben ergibt sich für eine Dichteverteilung, welche um  $(r_k, \varphi_k)$  zentriert ist:

$$\Sigma_{(r_k, \varphi_k)}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R_k}{\sigma}\right), \quad (5.23)$$

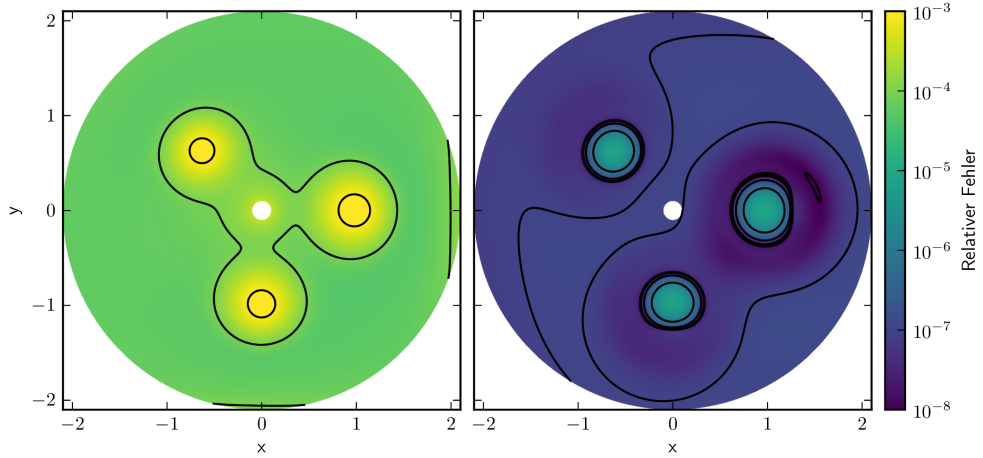


Abbildung 5.1.: Relativer Fehler des numerisch bestimmten Gravitationspotentials von flachen Zylindern (links) und von Zylindern mit vertikalen Gaußschichtungen (rechts) mit unterschiedlichen Massen.

wobei  $\sigma$  ein Maß für Breite der Verteilung ist.  $R_k$  bezeichnet den Abstand eines Koordinatenpunkts vom Zentrum der Verteilung:

$$R_k = \sqrt{r^2 + r_k^2 - 2rr_k \cos(\varphi - \varphi_k)}. \quad (5.24)$$

Eine solche Massenverteilung erzeugt das Potential (Chan et al., 2006):

$$\Phi_{(r_k, \varphi_k)}(r, \varphi) = -\frac{G}{\sigma} (I_0(y_k) K_1(y_k) - I_1(y_k) K_0(y_k)), \quad (5.25)$$

wobei  $y_k = R_k / (2\sigma)$  ist.  $I_n$  und  $K_n$  bezeichnen dabei die modifizierten Besselfunktionen erster bzw. zweiter Art mit ganzzahliger Ordnung (siehe Anhang A.5). Die Dichteverteilung ist durch

$$\Sigma(r, \varphi) = 2\Sigma_{(1, 10^{-3})}(r, \varphi) + 0.5\Sigma_{(1, \pi + 10^{-3})}(r, \varphi) + \Sigma_{(0.9, \frac{3}{4}\pi)}(r, \varphi) \quad (5.26)$$

festgelegt. Die dazugehörige Lösung für das Potential lautet:

$$\Phi(r, \varphi) = 2\Phi_{(1, 10^{-3})}(r, \varphi) + 0.5\Phi_{(1, \pi + 10^{-3})}(r, \varphi) + \Phi_{(0.9, \frac{3}{4}\pi)}(r, \varphi). \quad (5.27)$$

Abbildung 5.1 (links) zeigt den relativen Fehler der numerischen Lösung gegenüber dem analytischen Potential. Der maximale Fehler ist kleiner als  $10^{-3}$  an den Orten der maximalen Dichte und beträgt typischerweise  $10^{-5}$  an Orten ohne große Dichtegradienten.

Als nächstes wird die Implementierung des Verfahrens mit der Greenschen Funktion für eine vertikale Gauß-Verteilung getestet, wobei  $\sigma = 0.1$  das Maß für die Skalenhöhe ist. Eine Dichteverteilung, die um den Punkt  $(r_k, \varphi_k)$  zentriert ist

$$\Sigma_{(r_k, \varphi_k)} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R_k^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5.28)$$

erzeugt das gravitative Potential

$$\Phi(r_k, \varphi_k) = -\frac{1}{R_k} \operatorname{erf}\left(\frac{R_k}{\sqrt{2}\sigma}\right). \quad (5.29)$$

Wenn nun die gleichen Punkte und Massen wie zuvor verwendet werden, ergibt sich der in Abbildung 5.1 (rechts) aufgetragene relative Fehler. Für die vertikal gaußförmige Massenverteilung ist der maximale relative Fehler kleiner als  $10^{-5}$  an den Orten größter Dichte und ansonsten von der Größenordnung  $10^{-7}$ .

Die Ergebnisse von Dichte-Potential-Tests von Chan et al. (2006) zeigen eine ähnliche Fehlerstruktur. Der maximale relative Fehler in der Simulation mit vertikaler Gaußschichtung ist in beiden Arbeiten mit  $10^{-3}$  ungefähr gleich groß. Bei einer infinitesimal dünnen Scheibe ist der maximale relative Fehler in dieser Arbeit mit etwa  $10^{-5}$  zwei Größenordnungen kleiner als bei Chan et al. (2006). Ein genauer Vergleich kann allerdings nicht angestellt werden, da bei Chan et al. (2006) zum Beispiel die Auflösung ihres Rechengebiets (in dieser Arbeit:  $1024 \times 3072$ ) nicht dokumentiert wurde.

### Selbstgravitierende rotierende Zylinder

Um nicht nur die Potentialberechnung, sondern auch das Bestimmen der Beschleunigungen und das Verhalten in einer zeitabhängigen Simulation zu testen, wird ein von Chan et al. (2006) vorgestelltes Setup verwendet. In dieser Simulation werden zwei Zylinder mit gaußförmiger Dichteverteilung generiert, welche sich dieses Mal im polaren Rechengebiet genau gegenüberstehen. Ein Hintergrundgeschwindigkeitsfeld versetzt das ganze Rechengebiet in starre Rotation. Die dabei entstehende Zentrifugalkraft muss von der Selbstgravitation der Massenverteilung balanciert werden. Dies ist ein sehr anspruchsvolles Setup an die Genauigkeit der selbstgravitativen Beschleunigung und die allgemeine Drehimpulserhaltung.

Die Anfangsbedingungen sind durch die Dichteverteilung

$$\rho(r, \varphi) = \frac{10^{-2}}{\pi(r_{\max}^2 - r_{\min}^2)} + 0.99 \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R_1}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{R_2}{2\sigma^2}\right) \right), \quad (5.30)$$

orbitingcylinders.f90		Anfangsbedingungen	siehe Abschnitt 5.1.2
Physik		Modul	EULER2D
		Rotationsgeschwindigkeit	$\Omega = 1$
		Isentropenexponent	$\gamma = 5/3$
Flüsse		Rekonstruktionsordnung	LINEAR
		Typ	KT
		Limiter	VANLEER
Gitter		Geometrie	POLAR
		Typ	MIDPOINT
		Auflösung	$N_r \times N_\varphi = 256 \times 1024$
		Radiale Ausdehnung	$R \in [0.2, 1.8]$
	Azimutale Ausdehnung	$\varphi \in [-\pi, \pi]$	
Randbedingung		Innen & Außen	NOSLIP
Zeitintegrator		Verfahren	SSPRK
		Ordnung	5
		CFL-Zahl	0.3
		Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 100$

Tabelle 5.1.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter der selbstgravitierenden rotierenden Zylinder.

den Druck

$$p(r, \varphi) = \frac{10^{-2}}{\pi (r_{\text{max}}^2 - r_{\text{min}}^2)} + \frac{G}{2\pi\sigma^2} \left( \text{Ei} \left( -\frac{R_1}{\sigma^2} \right) - \text{Ei} \left( -\frac{R_1}{2\sigma^2} \right) + \text{Ei} \left( -\frac{R_2}{\sigma^2} \right) - \text{Ei} \left( -\frac{R_2}{2\sigma^2} \right) \right) \quad (5.31)$$

und das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = r \mathbf{e}_\varphi \quad (5.32)$$

definiert. Dabei bezeichnet Ei die Integraleponentialfunktion (Abramowitz und Stegun, 1965):

$$\text{Ei}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{\exp(t)}{2} dt. \quad (5.33)$$

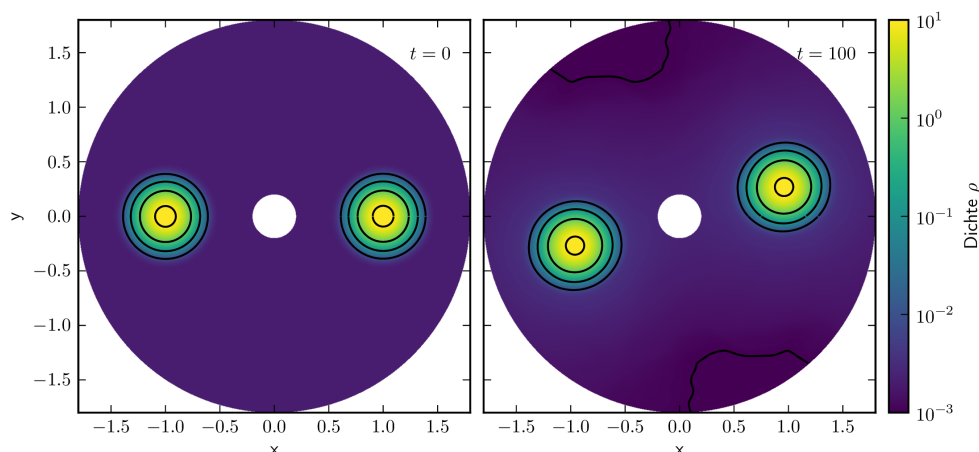


Abbildung 5.2.: Farbkarte der Dichte für die rotierenden, selbstgravitativen Zylinder zum Anfangs- und Endzeitpunkt der Simulation. Die Form der Zylinder kann sehr gut erhalten werden. Der Wert der maximalen Dichte sinkt minimal.

Weitere Setupparameter können der Tabelle 5.1 entnommen werden.

Abbildung 5.2 zeigt die Anfangsbedingung und den Endzustand der Dichteverteilung. Die Zylinder behalten ihre kreisrunde Form sehr gut bei. Die Abbildung 5.3 zeigt den Dichteverlauf in azimuthaler Richtung beim Radius maximaler Dichte zu unterschiedlichen Zeitpunkten. Die Dichte sinkt geringfügig, aber die Form der Zylinder kann sehr gut erhalten werden. Die Veränderung der Lösung beim Übergang zur Hintergrunddichteverteilung ist zu erwarten, da hier nur künstlich abgeschnitten wurde.

Die Abbildung 5.4 zeigt den Druck in den ersten beiden Ausgaben  $t \in \{1, 2\}$  nach dem Start der Simulationen. Offenbar ist die Anfangsbedingung nicht optimal, da beide Zylinder direkt zu Beginn einen Teil ihre Energie als Druckwelle abgeben. Für die nachfolgende Überprüfung der Erhaltungseigenschaften, hat das jedoch keinen besonderen Einfluss. Es erklärt aber, warum die Dichte in der ersten Hälfte der Simulation stärker nachlässt als im zweiten Teil.

Bei der in dieser Arbeit durchgeführten Simulation geht im Laufe von 100 Orbits der Zylinder im rotierenden Bezugssystem 0.06% Gesamtdrehimpuls verloren. Chan et al. (2006) können die Form der Zylinder auch relativ gut erhalten, verlieren jedoch im Zeitraum von 16 durchgeführten Orbits bereits 2% des Gesamtdrehimpulses. Ihre verwendete Rechengebietsauflösung ist wieder unbekannt, jedoch haben sie für die 16 Orbits  $5 \cdot 10^4$  Zeitschritte benötigt, hingegen die in dieser Arbeit durchgeführte Simulation für 100 Orbits weniger als  $5 \cdot 10^5$  Zeitschritte benötigt haben. Daraus lässt sich ein etwa  $200\times$  bessere Drehimpulserhaltung pro Zeitschritt für das in dieser Arbeit verwendete Verfahren mit Drehimpulserhaltung ableiten.

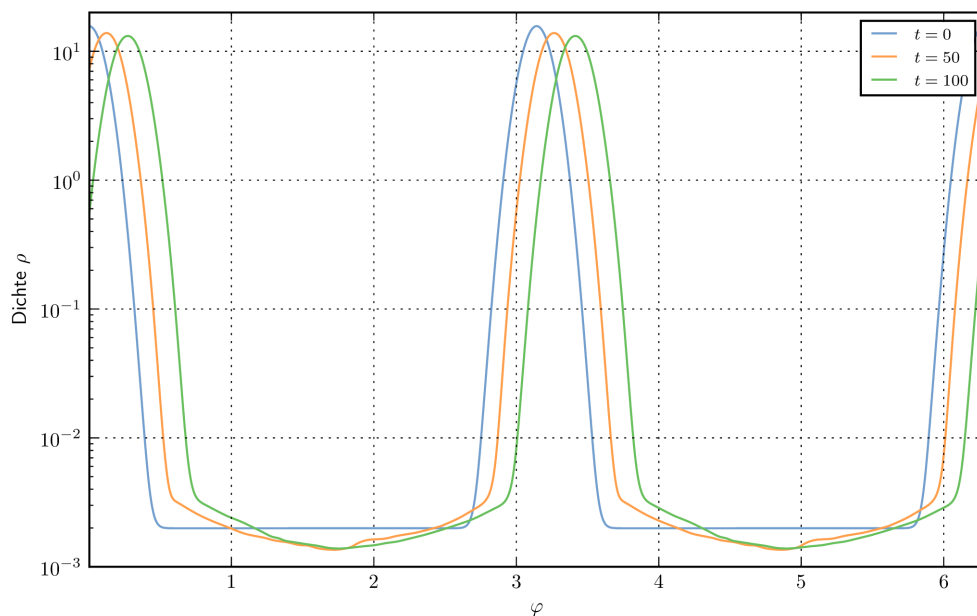


Abbildung 5.3.: Azimutaler Schnitt entlang der Dichte-Maxima zu verschiedenen Zeitpunkten in der Simulation rotierender selbstgravitierender Zylinder. Das Dichte-Maximum kann sehr gut erhalten werden. Im Bereich der künstlich abgeschnittenen Hintergrunddichte findet nach dem Einschalten ein Anpassungsprozess statt.

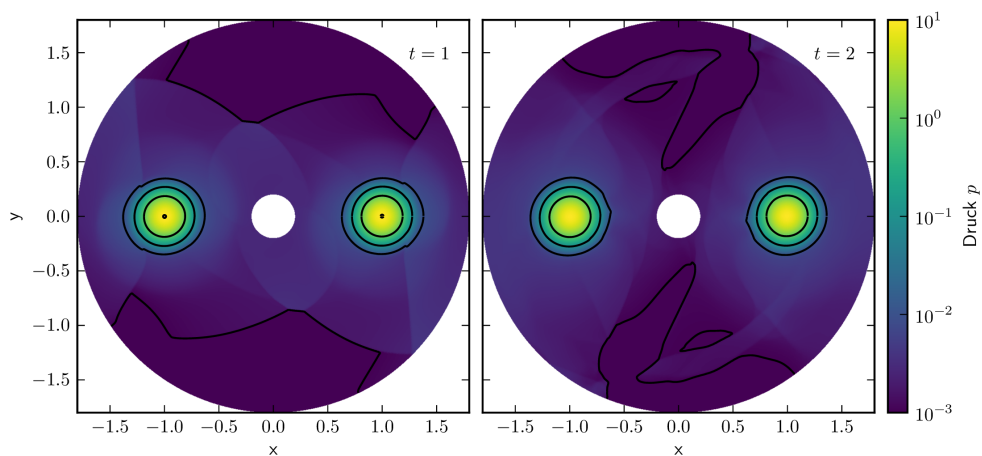


Abbildung 5.4.: Farbkarte des Drucks in der Simulation rotierender, selbstgravitierender Zylinder. Es ist eine Stoßwelle sichtbar, die direkt nach dem Einschalten entsteht, da die Anfangsbedingung kein optimales Equilibrium darstellen.



### 5.1.3. Schwierigkeiten beim Verwenden der Energiegleichung

Akkretionsscheiben befinden sich näherungsweise in einem Gleichgewicht aus Gravitationskraft, Druckgradient und Fliehkraft. Der Druckgradient ist dabei in der Regel deutlich kleiner als die Gravitationskraft und kann daher für die folgenden Überlegungen vernachlässigt werden. Dieses Gleichgewicht spielt bereits in der radialen Impulsgleichung eine wichtige Rolle, da beide Terme auf der rechten Seite vorkommen. Heben sich Gravitations- und Fliehkraft gerade gegenseitig auf, befindet sich das System im Gleichgewicht. Das heißt, falls die radiale Geschwindigkeit null ist, verschwindet auch der Fluss des radialen Impulses<sup>1</sup>. Dass ein großes Ungleichgewicht zwischen innerer Energie und Gesamtenergie problematisch ist, wurde bereits von Einfeldt et al. (1991) festgestellt. Ihr Lösungsvorschlag setzt jedoch bei der Modifikation des gesamten Verfahrens an und würde viele andere Forderungen und Fähigkeiten des numerischen Verfahrens verletzen.

Das hier vorgestellte Verfahren bietet zudem den Vorteil auch für selbstgravitierende Gravitationspotentiale verwendet werden zu können. Der elegante alternative Lösungsvorschlag von Jiang et al. (2013) erfordert eine komplizierte Modifikation der konservativen Variable in der Energiegleichung und ist daher leider nicht ohne weiteres mit der umformulierten Gleichung für die Rothalpie in Gleichung (3.18) vereinbar. Die in dieser Arbeit verwendete Methode ermöglicht jedoch den konservativen Energietransport im rotierenden Bezugssystem mit (Selbst-)Gravitation.

In der gewöhnlichen Formulierung der Energiegleichung

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) = -\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad (5.34)$$

muss bei einer typischen Akkretionsscheibe zu jeder Zeit die große kinematische Energie, die der potentiellen Energie entgegensteht, in azimuthaler Richtung transportiert werden. Im einfachsten Fall eines rein axialsymmetrischen Potentials, besitzen sowohl dieses, als auch der Betrag des Geschwindigkeitsfelds einen radialen Gradienten. Der radiale Gradient des Gravitationspotentials erzeugt eine Quelle in der Energiegleichung, welche durch den radialen Geschwindigkeitsgradienten auf der linken Seite ausgeglichen werden muss. Dies wohl balanciert zu erledigen, ist aber äußerst schwierig, da der Flussterm auf der linken Seite noch der Rekonstruktion und der numerischen Flussberechnung unterliegt.

Ähnlich wie bei der balancierten Formulierung der Quellterme zur besseren Drehimpulserhaltung, kann die potentielle Energie umformuliert werden, sodass die Gravitationsenergie mit der Materie mittransportiert wird. Da sie einen ähnlichen Betrag wie die kinetische

---

<sup>1</sup>Wird der Druck mit in die Betrachtung genommen, führt dies zu einem Gleichgewichtszustand, der sich aus Druckgradient im numerischen Fluss und den Gravitations-, Flieh- und Druckbeschleunigungen auf der Quellenseite zusammensetzt. Hier einen hydrostatischen Zustand herzustellen ist deutlich aufwendiger, aber häufig nicht notwendig, da die Beschleunigungen aus Druckgradient soviel kleiner als die der Gravitation sind.

Energie, jedoch das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt, heben beide sich größtenteils auf. Die numerischen Flüsse transportieren dann nur noch die Differenz zum Gravitations-Fliehkraft-Gleichgewicht. Dies erhöht die Genauigkeit, da kleine Änderungen nicht mehr ein Opfer des Abschneidefehlers (en.: truncation error; Atkinson, 2008) werden. Der Gravitationsquellterm in der Energiegleichung wird mit

$$-\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = -\nabla \cdot (\rho \Phi \mathbf{v}) + \Phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (5.35)$$

erweitert. Dann kann die Energiegleichung umformuliert werden:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\nabla \cdot ((E + p + \rho \Phi) \mathbf{v}) + \Phi \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (5.36)$$

Die Gravitationsenergie wird also ebenfalls mittransportiert und wird nicht mehr als klassische Quelle behandelt. Die Implementierung erfolgt genau wie bei der balancierten Formulierung der Drehimpulsquellterme. Zuerst werden die numerischen Flüsse der üblichen Gleichung berechnet, dann wird die Gravitationsenergie hinzugefügt und die räumliche Ableitung berechnet. Für den zweiten Term wird die rechte Seite der Kontinuitätsgleichung mit dem Potential multipliziert. Auf diese Weise kann die Erhaltung der Gesamtenergie deutlich verbessert werden. Alle der nachfolgenden Simulationen mit Energiegleichung und Gravitationspotentialen werden erst auf diese Art und Weise möglich. Üblicherweise kommt es ansonsten insbesondere in der Nähe von massereichen Zentralobjekten zu numerischen Instabilitäten bzw. negativen Drücken. Die Fehler in Berechnungen von innerer, kinetischer und potentieller Energie sind in diesem Fall einfach zu groß. Ohne den modifizierten Transport mit Drehimpulserhaltung sind diese Änderungen an der Energiegleichung erfahrungsgemäß nicht unbedingt notwendig. Hier genügt die intrinsische Dissipation des Verfahrens, damit die Rechnungen stabil bleiben. Ein simples Beispiel zum Überprüfen der umformulierten Energiegleichung findet sich im folgenden Abschnitt.

### Wirbeltransport in einer keplersch rotierenden Scheibe

Dieser Test überprüft, ob die Numerik in der Lage ist, einen antizyklonischen Wirbel in einer keplersch rotierenden Scheibe über längere Zeit zu transportieren und die Strömung zu erhalten. Ist dies nicht der Fall, kann zum Beispiel nicht davon ausgegangen werden, dass sich ein solcher Wirbel auf Grund äußerer Umstände bilden kann. Ohne HLLC-Flüsse und die umformulierte Energiegleichung zerfällt der Wirbel in kürzester Zeit. Dies demonstriert die überlegene Auflösung eines HLLC-Lösers besonders für Wirbelströmungen. Die Anfangsbedingungen werden hier nur kurz zusammen gefasst. Eine ausführliche Beschreibung kann in Bodo et al. (2007) gefunden werden, wo der Test ursprünglich vorgeschlagen wurde. Weitere Vergleichsdaten sind auch in Mignone et al. (2012) zu finden. Die Hintergrundgeschwindigkeit wird als  $\rho_\infty = 1$  und der Druck als  $p_\infty = 1/(\gamma M^2)$  festgesetzt, wobei  $M = 10$  die Machzahl beim Radius  $r = 1$  ist. Dann

keplerianvortex.f90	Hintergrunddichte	$\rho_\infty = 1$
	Vortexstärke	$\kappa = -1$
	Modul	EULER2D
Physik	Rotationsgeschwindigkeit	$\Omega = 1$
	Verhältnis der spez. Wärmen	$\gamma = 5/3$
	Machzahl	$M = 10$
Flüsse	Rekonstruktionsordnung	LINEAR
	Variablen	PRIMITIVE
	Limiter	VANLEER
	Geometrie	POLAR
Gitter	Typ	MIDPOINT
	Radiale Auflösung	$N_r = \{256, 512, 1024\}$
	Azimutale Auflösung	$N_\varphi = 4 \cdot N_r$
	Radiale Ausdehnung	$R \in [0.4, 2.0]$
	Azimutale Ausdehnung	$\varphi \in [-\pi, \pi]$
Randbedingung	Innen & Außen	REFLECT_KEPLER
Zeitintegrator	Verfahren	SSPRK
	Ordnung	5
	CFL-Zahl	0.4
	FARGO	2
	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 30$

Tabelle 5.2.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter des Wirbeltransports in einer keplerschen Scheibe.

wird ein kreisförmiger Vortex zur Hintergrundströmung hinzugefügt:

$$\begin{pmatrix} \delta v_r \\ \delta v_\varphi \end{pmatrix} = \kappa \exp\left(-\frac{r^2}{h^2}\right) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Hierbei sind  $x$  und  $y$  kartesische Koordinaten bezüglich des Mittelpunkts des Wirbels  $(x_0, y_0)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\kappa = -1$  die Vortex Stärke und  $h = 1/(2M)$ . Weitere numerische Parameter finden sich in der Tabelle 5.2. Abbildung 5.5 zeigt den Druck in der Simulation mit HLLC-Flüssen ohne den modifizierten Transport der Gravitationsenergie. Bereits nach zwei dynamischen Zeitskalen, also kurz nachdem der innere Spiralarm auf den Innenrand trifft, entsteht hier eine starke numerische Instabilität. Diese wächst schnell an und führt innerhalb kürzester Zeit zu einem Abbruch der Simulation, da die innere Energie negativ wird. Diese Instabilität kann unabhängig von anderen Parametern in Simulationen mit Drehimpulserhaltung und einer Zentralmasse beobachtet werden, sobald es eine nicht

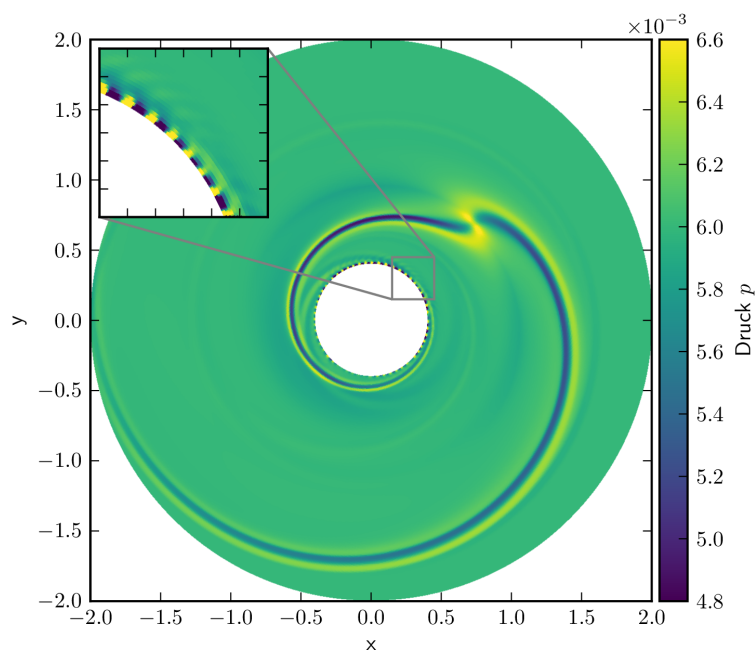


Abbildung 5.5.: Farbkarte des Drucks in einer Simulation mit KT-Flüssen bei 256 radialen Zellen ohne modifizierten Gravitationsenergie-transport. Bereits nach zwei Orbits, sobald der innere Spiralarm, beziehungsweise im Allgemeinen eine nicht axialsymmetrische Störung auf diesen trifft, bildet sich dort eine numerische Instabilität aus. Die Folge sind negativer Druck und ein Abbruch der Simulation.

axialsymmetrische Störung am Innenrand gibt. Ihr Auftreten ist ebenso unabhängig von der gewählten Randbedingung.

Abbildung 5.6 zeigt die Vortizität des Wirbels nach 30 dynamischen Zeitskalen bei unterschiedlichen Gitterauflösungen. Bei Verwendung der KT-Flüsse ist der Wirbel zu diesem Zeitpunkt bei den Auflösungen 256 und 512 bereits völlig zerstört. Erst eine Auflösung von 1024, die in üblichen Simulationen, welche häufig neu gestartet werden, kaum noch zu stemmen ist, kann der Wirbel über längere Zeit erhalten werden. In der Simulation mit den HLLC-Flüssen ist ein ausgeprägter antizyklonischer Wirbel zu beobachten, welcher bereits in der geringsten Auflösung einigermaßen erhalten wird. Seit dem Start der Simulation ist dieser durch die differentielle Rotation in die Länge gezogen worden. Eine innere Dichtespiralwelle ist noch zu sehen. Reste von der äußeren Dichtespiralwelle, sowie derer zahlreichen Reflektionen am Außenrand sind noch zu erahnen. Ein Blick auf die höheren Auflösungen zeigt, dass diese Simulation jedoch noch nicht konvergiert ist. Eine Auflösung von 512 zeigt ein ähnliches Bild wie die KT-Flüsse bei 1024. Die HLLC-1024-Simulation kann die Auflösung des Wirbels noch einmal erhöhen.

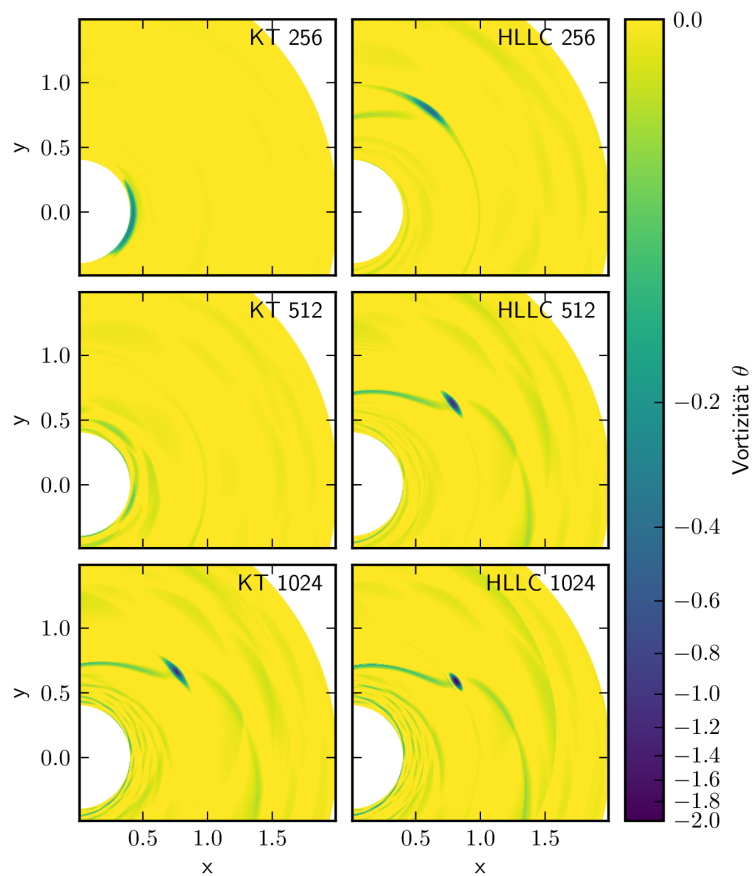


Abbildung 5.6.: Vortizität des Wirbeltransports in einer keplersch rotierenden Scheibe nach 30 Orbits für die KT- und HLLC-Flüsse. Die Farbskala ist arcsinh-skaliert, also linear um die Null und hat ansonsten einen logarithmischen Verlauf. Nur dadurch können die feinen Details in der Vortizität sichtbar gemacht werden. Die kleinen Auflösungen mit den KT-Flüssen können den Wirbel über 30 Orbits nicht erhalten. Die am besten aufgelöste Simulation HLLC 1024 zeigt nochmal eine Verbesserung gegenüber den bereits brauchbaren KT 1024 und HLLC 512.

Seine Ausdehnung schrumpft ein wenig und insbesondere der äußere Spiralarm ist nun deutlicher ausgeprägt.

Abbildung 5.7 zeigt den Verlauf der Vortizitätsminima verschiedener Auflösung für Simulationen mit KT- und HLLC-Flüssen. Die Abbildung 5.6 hatte gezeigt, dass die Wirbel bei den KT-Flüssen in den Auflösungen 256 und 512 nach 30 Umläufen komplett aufgelöst sind. Es kann daher mit Sicherheit gesagt werden, dass Wirbel, deren Vortizität auf weniger als 10% ihres ursprünglichen Wertes abgesunken ist, vollkommen aufgelöst sind. Der Anstieg der Vortizität in der geringsten Auflösung für die KT-Flüsse ist durch eine

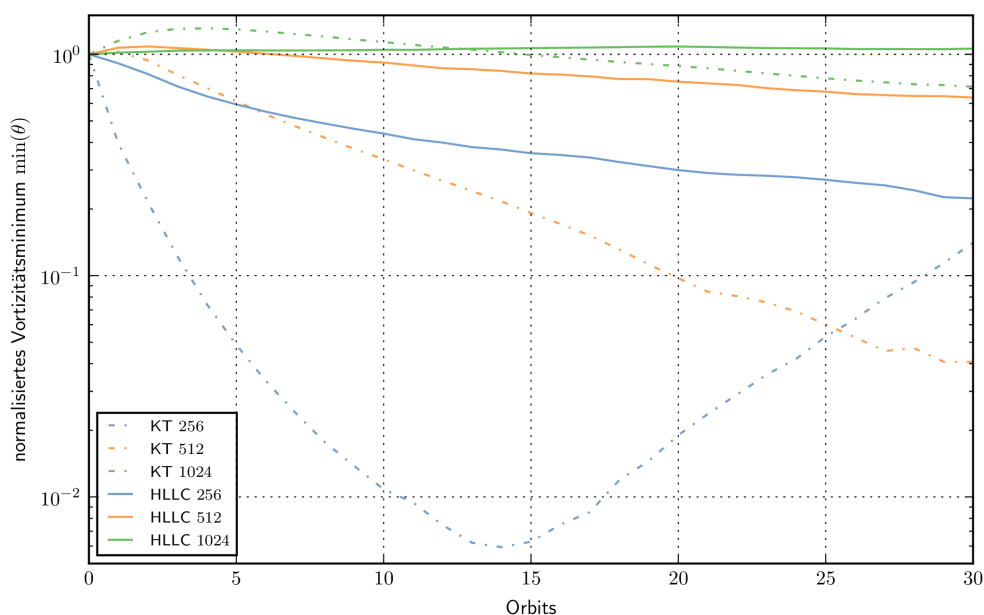


Abbildung 5.7.: Verlauf des normierten Vortizitätsminimums für die verschiedenen Simulation des Wirbeltransports in einer keplersch rotierenden Scheibe. Für alle Auflösungen zeigen die HLLC-Flüsse deutlich niedrigere Dämpfungsraten als die KT-Flüsse. Zudem nimmt die Dämpfungsraten ab, währenddessen sie bei den KT-Flüssen über den Simulationsverlauf weitestgehend konstant bleibt.

Ansammlung von Vortizität am Innenrand zu erklären, aber hat nichts mit der Erhaltung des Wirbels zu tun. Die Simulation mit HLLC-Flüssen bei der geringsten Auflösung hat am Ende noch 20% der Ursprungsvortizität im Wirbelzentrum. Die Abnahme der Vortizität flacht zwar langsam ab, aber es ist anzunehmen, dass dieser Wirbel sich ebenfalls bald auflösen wird. Dafür spricht auch, dass er seine ursprüngliche Position im Rechengebiet verlassen hat und etwas nach innen gewandert ist. Die KT-Flüsse bei einer Auflösung von 1024 und die HLLC-Flüsse bei 512 zeigen tatsächlich einen ähnlichen Vortizität am Ende der Simulation auf. Dies liegt aber offensichtlich vor allem an einem Anschalteffekt bei den KT-Flüssen durch den hier die Vortizität zunächst steigt. Die Dämpfungsraten sind danach größer als in den HLLC-Flüssen bei 512 radialen Zellen. Bei 1024 Zellen und den HLLC-Flüssen kann der Wirbel sehr gut erhalten werden. Die Vortizität steigt leicht, was durch einen angepassten Vortizitätsverlauf innerhalb des Wirbels erklärt werden kann. Die Anfangsbedingung gibt natürlich nicht genau die sich später einstellende Lösung wieder. Allgemein kann festgehalten werden, dass die Dämpfungsverläufe bei den KT-Flüssen in jeder Auflösung eine konstante Dämpfungsraten erkennen lassen. Die HLLC-Flüsse zeigen dagegen in den kleineren Auflösungen ein langsames nachlassen der Dämpfungsraten. Die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen mit HLLC-Flüssen sind mit den FARGO Simulationen in Mignone et al. (2012) vergleichbar. Die Strömungsbilder der Simulationen

mit einer Auflösung von  $1024 \times 4096$  Zellen zeigen in beiden Arbeiten die gleichen Wirbelformen und Dichtespiralwellen. Der Verlauf der minimalen Vortizität stimmt in allen Auflösungsstufen sehr gut überein.

#### 5.1.4. Untere Temperaturschranke

Bei Simulationen mit Energiegleichung kann es selbst bei sehr einfachen Setups schnell zu numerischen Problemen kommen. Im vorherigen Kapitel wurde bereits darauf eingegangen, dass es im Zusammenhang mit potentieller Energie Schwierigkeiten geben kann. In diesem Kapitel wird auf ein anderes Problem im Zusammenhang mit der Energiegleichung eingegangen, welches Gegenstand vieler Setups ist. Das Problem äußert sich dadurch, dass bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit

$$c_s = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \quad (5.38)$$

die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen werden soll. Die Dichte ist hierbei üblicherweise kein Problem, da ihre Positivität durch das Verfahren, das heißt durch die Rekonstruktion mit Limitern und numerischen Flüssen mit entsprechenden Eigenschaften gewährleistet wird. Der Druck ist allerdings keine Erhaltungsgröße und kann daher von diesen Eigenschaften keinen Gebrauch machen. Typischerweise gibt es zwei Möglichkeiten, die zu einer geringen inneren Energie und damit einem sehr niedrigen Druck führen können. Die erste Möglichkeit ist, dass physikalische Quellterme fehlerhaft implementiert sind und deren Approximation eine Minderung der Gesamtenergie zur Folge hat, welche direkt einen Verlust an innerer Energie zur Folge hat. Im Gegensatz zur inneren Energie kann kinetische Energie außer durch die Dichte nur durch den Geschwindigkeitsbetrag vermindert werden. Ein Energiequellterm muss also ein Zeitschrittkriterium liefern, welches die Minderung der inneren Energie auf einen Bruchteil ihres aktuellen Wertes garantiert. Zusätzlich ist denkbar, dass mehrere Quellterme zur selben Zeit die innere Energie reduzieren. Dies in einem gemeinsamen Zeitschrittlimit zu beachten, ist nicht trivial.

Akkretionsscheiben rotieren üblicherweise mit starker Überschallgeschwindigkeit. Daher überwiegt häufig die kinetische Energie deutlich über der inneren Energie. Trotz Erhaltung der Gesamtenergie kann es passieren, dass soviel Energie von der kinetischen zu der inneren Energie übertragen wird, dass die innere Energie negativ ist. Dies führt dann zu den zuvor beschriebenen Problemen bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit. Es existieren verschiedene Lösungsvorschläge, um dieses Problem zu lösen (Balsara, 2012b; Suresh, 2000). Allen ist dabei gemein, dass es sich um nachträgliche Modifikationen an dem numerischen Verfahren handelt, also nicht ein direktes Ergebnis von dessen Ableitung sind. Häufig ist deren direkte Wirkung und Einfluss auf andere Regime der Lösung undurchsichtig. Es ist daher wünschenswert ein transparenteres Verfahren zu verwenden, um die Auswirkungen überschaubar zu halten. Damit der Druck keine negativen Werte

annehmen kann, wird eine untere Schranke definiert, welche nicht unterschritten werden darf. Sollte diese unterschritten werden, wird der Druck in den entsprechenden Zellen auf das untere Limit  $p_{\min}$  angehoben

$$p_{i,j} = \max(p_{i,j}, p_{\min}). \quad (5.39)$$

Im Allgemeinen ist allerdings nicht klar, welches ein sinnvoller Wert für die untere Schranke ist. In der Hydrodynamik spielt der Druck einerseits als Druckgradient in der Impulsgleichung eine Rolle. Hierfür ist der absolute Wert irrelevant. Andererseits spielt er bei der Berechnung der Schallgeschwindigkeit eine wichtige Rolle. Tatsächlich geht hier jedoch das Verhältnis von Druck  $p$  und Dichte  $\rho$ , welches beim idealen Gas proportional zur Temperatur ist

$$T = \frac{\mu}{R_G} \frac{p}{\rho}, \quad (5.40)$$

ein, sodass es sich als hilfreich erwiesen hat, stattdessen die Temperatur als physikalisch gut zu fassende Größe nach unten zu beschränken. Hier kann häufig leicht begründet werden, dass die Temperatur einer optisch dünnen Scheibe zum Beispiel nicht unter der Temperatur des kosmischen Mikrowellenhintergrundes, welcher dann als Wärmebad dient, liegen sollte. Der Druck wird so angepasst, dass das Temperaturlimit  $T_{\min}$  erfüllt wird:

$$p_{i,j} = \max\left(p_{i,j}, \rho_{i,j} \frac{R_G}{\mu} T_{\min}\right). \quad (5.41)$$

Dabei sind  $R_G$  die allgemeine Gaskonstante und  $\mu$  das mittlere molekulare Gewicht des Gases. Bei der Auswertung der Simulationen können dann die Stellen, welche das Temperaturminimum erreichen, betrachtet werden. Normalerweise ist dies nur für sehr kurze Zeiträume der Fall, wenn es zu sehr dynamischen Ereignissen, wie zum Beispiel einem starken Akkretionsevent, kommt. Auch hinter Stoßfronten können kleine sehr kalte Regionen entstehen, welche sich meist nach kurzer Zeit wieder aufheizen. Diese Limitierung der Zellmittelwerte führt auch zu einer Positivitätserhaltung der Zellranddaten, da dies eine Eigenschaft der TVD-Limiter ist. Dafür muss natürlich auf den primitiven Variablen rekonstruiert werden, da eine Rekonstruktion der Gesamtenergie dies nicht gewährleisten kann. Das wird vor allem im Zusammenhang mit den HLLC-Flüssen wichtig, da dafür Wurzeln von Termen mit  $p/\rho$  berechnet werden müssen. Die KT-Flüsse sind eher unempfindlich gegen negative Drücke. Die Sinnhaftigkeit der physikalischen Lösung muss dann jedoch in Frage gestellt werden. Häufig bleiben dabei negative Drücke in der numerischen Flussberechnung und auch in den Zellmitten unbemerkt, wenn diese von kurzer Dauer sind und bei der Datenausgabe nicht mehr existieren.



## 5.2. Galaxien Setup

Der wichtigste Teil des numerischen Setups aller folgenden Galaxiensimulationen ist die Implementierung der Gravitationspotentiale. Als Startpunkt für die Gravitationsbeiträge meiner Simulationen diente das Setup von Kim et al. (2012). Jedoch werden in dieser Arbeit ein klassisches Punktmassenspotential für das Schwarze Loch und ein Potential mit einer parametrisierten Ausdehnung in  $z$ -Richtung für die stellare Scheibe verwendet. Die Verwendung einer nicht-infinitesimal dünnen stellaren Scheibe ermöglicht die Angabe der Dichte in der Zentralebene. Diese wird benötigt, falls die Berechnung der Skalenhöhe und damit der  $z$ -Komponente der Gravitationsbeschleunigung benötigt wird (Illenseer und Duschl, 2015).

**Schwarzes Loch** Für das Schwarze Loch wird ein normales Punktmassenspotential verwendet. Der Innenrand in den Simulationen ist so weit vom Schwarzen Loch entfernt, dass relativistische Effekte vernachlässigt werden können. Die Masse des Schwarzen Lochs  $M_{\text{BH}}$  kann während der Simulationen wachsen. Dabei wird der Materialfluss über den Innenrand des Rechengebiets aufsummiert und alles, was unter der Eddingtongrenze liegt, dem Schwarzen Loch hinzugefügt. Alles andere wird aus dem System entfernt. Ein Feedback durch den Eddingtonausfluss wird nicht simuliert. Dieser hätte den größten Einfluss auf die Akkretionsscheibe innerhalb des inneren Rechengebietsrandes von 2 pc. Das Potential hat die Form:

$$\Phi_{\text{BH}} = -\frac{GM_{\text{BH}}}{R}. \quad (5.42)$$

**Stellare Scheibe** Die stellare Scheibe wird durch ein Kuzmin-Toomre Modell (Binney und Tremaine, 2008; Kuzmin, 1956; Toomre, 1963) mit der Dichte

$$\rho_{\text{disk}}(r, z=0) = \frac{R_1^2 M_{\text{disk}}}{4\pi} \cdot \frac{R_0 r^2 + (R_0 + 3 \cdot R_1) \cdot (R_0 + R_1)^2}{R_1^3 \left( r^2 + (R_0 + R_1)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.43)$$

angenähert. Das dazugehörige Potential in der  $z = 0$ -Ebene lautet:

$$\Phi_{\text{disk}}(r, z=0) = -\frac{G \cdot M_{\text{disk}}}{\sqrt{r^2 + (R_0 + R_1)^2}} \quad (5.44)$$

mit den Konstanten  $v_0 = 260$  km/s,  $R_0 = 14.1$  kpc und  $R_1 = 14.1$  pc. Die Gesamtscheibenmasse beträgt

$$M_{\text{disk}} = \frac{v_0^2 R_0}{G} = 2.2 \cdot 10^{11} M_{\odot}. \quad (5.45)$$

**Bulge** Für den Bulge wird ein modifiziertes sphärisch-symmetrisches Hubble-Profil (Binney und Tremaine, 2008) mit der Dichte

$$\rho_{\text{bul}}(r) = \rho_{\text{bul},0} \left(1 + \frac{r^2}{R_b^2}\right)^{-3/2} \quad (5.46)$$

und dem Potential

$$\Phi_{\text{bul}}(r) = -\frac{4\pi G \rho_{\text{bul}} R_b^3}{R} \ln \left( \frac{r}{R_b} + \sqrt{1 + \frac{R^2}{R_b^2}} \right) \quad (5.47)$$

verwendet, wobei die Zentraldichte  $\rho_{\text{bul}} = 2.4 \cdot 10^{10} \frac{\text{M}_\odot}{\text{kpc}^3}$  und die charakteristische Ausdehnung  $R_b = 0.33 \text{ kpc}$  ist. Damit hat der Bulge eine Masse von  $M_{\text{bul}} = 2.8 \cdot 10^{10} \text{ M}_\odot$  innerhalb eines 6 kpc Radius.

**Balken** Für das Balkenpotential wird ein Ferrers Rotationsellipsoid (Chandrasekhar, 1969; Ferrers, 1887; Pfenniger, 1984) mit einer Dichte

$$\rho_{\text{bar}} = \begin{cases} \rho_{\text{bar},0} (1 - g^2)^n & \text{if } g < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.48)$$

für  $g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$  verwendet.  $a$  und  $b$  geben dabei die große und kleine Halbachse an. Das Ferrers-Potential kann auch für allgemeine Ellipsoiden verwendet werden durch Angabe einer dritten Halbachse  $c$ . In diesen Simulationen ist stets  $c = 0.99b$ , da das Ferrers-Potential in dieser Form nur für  $c < b$  definiert ist. Mit dem Exponenten  $n$  kann ein Dichteabfall der Massenverteilung eingestellt werden. In allen Simulationen gilt  $n = 1$ ,  $a = 5 \text{ kpc}$ ,  $b = 2 \text{ kpc}$  und  $\rho_{\text{bar}} = 0.45 \frac{\text{M}_\odot}{\text{pc}^3}$ . Die totale Masse des Balkens lautet  $M_{\text{bar}} = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ M}_\odot$ . Das Potential des Balkens in der Ebene  $z = 0$  ist

$$\Phi_{\text{bar}}(x, y, 0) = -\frac{\pi G a b c \rho_{\text{bar}}}{2} (W_{000} + x^2 (x^2 W_{200} + 2y^2 W_{110} - 2W_{100}) + y^2 (y^2 W_{020} - 2W_{010})), \quad (5.49)$$

wobei die Definition des Potentials und der Koeffizienten  $W_{ijk}$  aus Pfenniger (1984) stammen. Die für die Simulationen benötigten Koeffizienten sind nochmal im Anhang A.7 zusammengefasst. Das Balkenpotential wird im Laufe der ersten Balkenrotation langsam angeschaltet, um eine schockartige Anpassung der Gasverteilung zu vermeiden. Damit sich die Gesamtmasse im System dabei nicht ändert, wird im gleichen Maße wie dem Balken effektiv Masse hinzugefügt wird, Masse vom Bulge

Dichte $\Sigma_0$ [ $M_\odot/\text{pc}^2$ ]	Gasscheibe [ $M_\odot$ ]	Stellare Scheibe [ $M_\odot$ ]	Bulge [ $M_\odot$ ]	Balken [ $M_\odot$ ]	Schwarzes Loch [ $M_\odot$ ]
10	$1.0 \cdot 10^9$	$2.2 \cdot 10^{11}$	$2.8 \cdot 10^{10}$	$1.5 \cdot 10^{10}$	$1.0 \cdot 10^6$
30	$3.0 \cdot 10^9$				
50	$5.0 \cdot 10^9$				

Tabelle 5.3.: Übersicht der Anfangsmassen der verschiedenen Gravitationskomponenten für unterschiedliche Anfangsdichteparameter.

entfernt. Der Balken rotiert mit einer Geschwindigkeit von

$$\Omega_p = 33 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{kpc}}. \quad (5.50)$$

Durch die Verwendung eines rotierenden Bezugssystems mit der Winkelgeschwindigkeit  $\Omega_p$ , ruht der Balken in allen Simulationen entlang der  $x$ -Achse.

Alle diese Potentiale modellieren die Gravitation von Sternen, dunkler Materie und einem Schwarzen Loch. Unsere Simulation betrachtet nun die Gaskomponente in einer höhenintegrierten Flächendichte  $\Sigma$ . Die Scheibe wird durch ein Gitter in Polarkoordinaten mit logarithmischer radialer Skalierung modelliert. Das Gitter reicht dabei von  $R \in [2 \text{ pc}, 16 \text{ kpc}]$ . Zusätzlich zu den bisher besprochenen Gravitationskomponenten kommt nun noch die Selbstgravitation des Gases dazu. Als Greensche Funktion für die Selbstgravitation wird eine Deltadistribution für die Höhenstruktur angenommen. In Tabelle 5.3 sind die Anfangsmassen aller unterschiedlicher Gravitationsquellen zusammengefasst. Die Dichteverteilung folgt einem Potenzgesetz mit Exponenten  $\kappa = -1$ , das zum Innenrand hin limitiert ist:

$$\Sigma(r) = \Sigma_0 \cdot \min\left(\left(\frac{r}{R_\kappa}\right)^\kappa, 1\right). \quad (5.51)$$

Das Abschneiden ist notwendig, damit kein starker Gradient direkt am Innenrand der Scheibe in der Anfangsbedingung herrscht. Der Abschneideradius beträgt  $R_\kappa = 100 \text{ pc}$  und die Anfangsdichte  $\Sigma_0$  ist eine Variable des betrachteten Modellraums. Negative Potenzgesetze sind für die Dichteverteilung notwendig, um kein lokales Potentialminimum durch die Selbstgravitation zu erzeugen, welches zu unphysikalischen Lösungen führt. Illenseer und Duschl (2015) beschreiben ausführlich, welche Exponenten in Akkretionsscheiben sinnvoll sind. Mit dem hier gewählten Potenzgesetz und Anfangsdichten werden beim Radius  $R_\kappa$  vergleichbare Dichten zu Kim et al. (2012) erzielt.

Für die isothermen Simulationen wird eine konstante Schallgeschwindigkeit im gesamten Rechengebiet festgelegt. Für die Simulationen mit Energiegleichung wird, wie bei der Dichte, ein Potenzgesetz für die Temperatur mit einem Maximum in der Nähe des Innenrandes

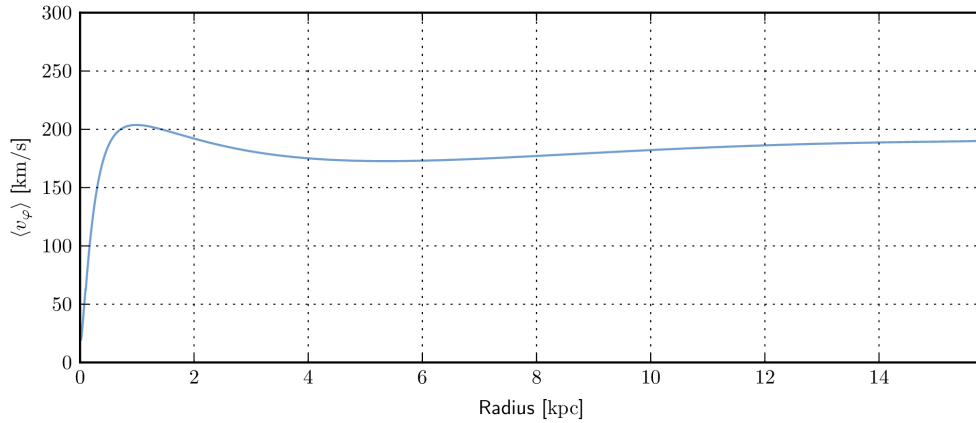


Abbildung 5.8.: Typische Rotationskurve zum Anfang einer Galaxiensimulation. Die Kurve weist den typischen flachen Verlauf bei großen Radien auf (vgl.: van Albada et al., 1985, siehe Abschnitt 2.1.1). Der Unterschied zu Kurven mit anderer Gesamtmasse und daher stärkerer Selbstgravitation ist vernachlässigbar klein.

gewählt

$$T(r) = T_0 \cdot \min\left(\left(\frac{r}{R_\iota}\right)^\iota, 1\right) \quad (5.52)$$

mit  $\iota = -1$  und  $R_\iota = 100$  pc. Die Lösungen sind allerdings vor allem im Innenbereich relativ unabhängig von der Temperatur, da hier vor allem die Kühlung auf sehr kurzen Zeitskalen agiert und dadurch schnell einen physikalischen Zustand erreicht. Es ist aber üblich mit einer relativ hohen Temperatur zu beginnen, sodass die Scheibe weitestgehend Toomre stabil ist. Ansonsten wird ein physikalischer Zustand vorgegeben, welcher komplett durch womöglich physikalisch unrealistische Anfangsbedingungen vorgegeben ist.

Das radiale Geschwindigkeitsfeld ist zum Beginn der Simulation Null und die azimuthale Geschwindigkeit wird so gewählt, dass die entstehende Fliehkraft alle anderen Kräfte balanciert, also im Fliehkraftgleichgewicht mit den Gravitationsbeiträgen und dem radialen Druckgradienten steht. Dies wird auf numerischen Wege durch Auswertung der rechten Seite des Differentialgleichungssystems erreicht, um den numerischen Gleichgewichtszustand zu finden. Dieser weicht zum Beispiel durch die Auswertung der numerischen Flüsse und die lineare Rekonstruktion von einem analytischen Ausdruck ab. Die resultierende Rotationskurve ist in Abbildung 5.8 zu sehen. Das Gas rotiert dabei im mathematisch positiven Sinne, das heißt im rotierenden Bezugssystem innerhalb des Korotationsradius gegen und außerhalb im Uhrzeigersinn.

In dieser Arbeit wird eine parametrisierte Zeitskala, wie sie von Gammie (2001) benutzt wurde, als Kühlung verwendet (siehe auch Abschnitt 2.1.2). Diese Vorschrift basiert

auf der Kopplung der Kühlzeitskala  $\tau_{\text{cool}}$  mit der dynamischen Zeitskala  $\tau_{\text{dyn}}$  über den Parameter  $b_{\text{cool}}$

$$\tau_{\text{cool}} = b_{\text{cool}} \cdot \tau_{\text{dyn}}. \quad (5.53)$$

Mit der inneren Energie  $e = p/(\gamma - 1)$  und der azimuthalen Winkelgeschwindigkeit  $\Omega$  lautet dann der Kühlquellterm  $S_{\text{cool}}$ :

$$S_{\text{cool}} = -\frac{e\Omega}{b_{\text{cool}}}. \quad (5.54)$$

Abgesehen von hydrodynamischen Heizprozessen, wie zum Beispiel Stoßwellen- und Kompressionsheizung, werden keine weiteren Heizprozesse direkt modelliert. Das Gas in einer Spiralgalaxie wird unter anderem durch Sternentstehung und die daraus resultierenden stellaren Winde und Supernovae geheizt (McKee und Ostriker, 1977; Springel und Hernquist, 2003; Yepes et al., 1997). Falls solche Rückkopplungseffekte betrachtet würden, wäre eine realistischere Kühlung, wie zum Beispiel die Methode von Hubeny (1990) basierend auf grauer Abstrahlung mit mittleren Rosselandopazitäten (Bell und Lin, 1994), notwendig. Diese realistischere Kühlung agiert jedoch auf Zeitskalen der Größenordnung  $10^{-6 \dots -4} \tau_{\text{dyn}}$  (Hopkins und Quataert, 2010), was deutlich kleiner ist, als der typische hydrodynamische Zeitschritt  $[10 - 100] \text{ yr}$ . Die Anzahl der benötigten Zeitschritte bei Verwendung detaillierter Modellierung der Kühlbeiträge würde mindestens um den Faktor  $10 - 100$  steigen. Das Verfolgen der Simulationen über mehrere Balkenumdrehungen wird dadurch unmöglich, da die jetzigen parallelisierten Rechnungen bereits die maximal erlaubte Rechenzeit auf dem zur Verfügung stehenden NEC SX ACE Vektorrechner von zwei Wochen ausnutzen.

Die Abschätzung der Heizungszeitskala ist auf Grund der vielen beteiligten Prozesse schwierig. Die Lebenszeit der für den Energieeintrag relevanten massereichen Sterne beträgt typischerweise weniger als  $10^7 \text{ yr}$  (Yepes et al., 1997), bevor sie durch eine Supernova-Explosion eine große Menge Energie freisetzen. Die Simulation des kompletten Sternentstehungsprozesses ist so umfangreich und komplex, dass selbst die umfangreichsten Modellierungen in Hydrodynamiksimulationen starke Vereinfachungen darstellen (Braun und Schmidt, 2012; Christensen et al., 2010; Murante et al., 2010; Scannapieco et al., 2008; Springel und Hernquist, 2003; Stinson et al., 2006; Yepes et al., 1997). Daher wird in dieser Arbeit die Gammie-Kühlung verwendet, die als aus den Heiz- und Kühlbeiträgen resultierende, effektive Kühlung verstanden werden muss. Eine detaillierte Diskussion dieser Vereinfachung wird in Abschnitt 5.4.4 durchgeführt.

Gammie (2001) hat gezeigt, dass ein Kühlungsparameter von  $b_{\text{cool}} \approx 3$  zu einem effizient akkretierenden Zustand führt. Das System befindet sich dann in einem gravitativ turbulenten Zustand mit einem Toomre Parameter von  $Q \approx 1$ . Für kleinere Kühlungsparameter ist mit der Entstehung von Fragmenten zu rechnen, welche den Akkretionsprozess auf das Zentralobjekt verhindern können. Daher werden für den Modellraum einige typische Werte für  $b_{\text{cool}} \in \{1, 3, 6, 10\}$  in der Nähe des kritischen Wertes festgelegt.

Da die Kühlung von der dynamischen Zeitskala abhängig ist, bietet es sich an einen Überblick über die beteiligten Zeitskalen in der Simulation zu verschaffen. Eine Balkenrotation

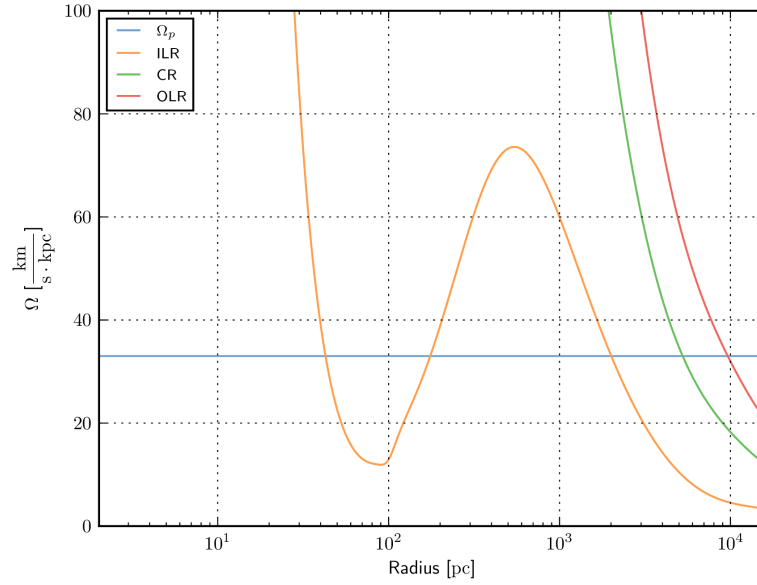


Abbildung 5.9.: Die drei Kurven geben den Frequenzverlauf von innerer (ILR) und äußerer (OLR), sowie der Korotationsfrequenz (CR) an. Die waagerechte Gerade ist die Frequenz des Balkens  $\Omega_p$ . An den Schnittpunkten der Kurven der Gerade sind Resonanzpunkte.

dauert

$$\tau_{\text{bar}} = 186 \text{ Myr} \quad (5.55)$$

und die dynamischen Umlaufzeitskalen am Innen- und Außenrand sind

$$\tau_{\text{dyn,inner}} = 0.3 \text{ Myr}, \quad (5.56)$$

$$\tau_{\text{dyn,outer}} = 500 \text{ Myr}. \quad (5.57)$$

Die Kühlungszeitskala

$$\tau_{\text{cool}} = \frac{b_{\text{cool}}}{\Omega} \quad (5.58)$$

hängt jeweils von der lokalen Rotationsgeschwindigkeit ab und liegt dabei im Bereich

$$\tau_{\text{cool}} \in b_{\text{cool}} \cdot [0.04, 80] \text{ Myr}. \quad (5.59)$$

Die maximale Kühlungszeitskala in allen Simulationen ist also ungefähr 800 Myr. Die

Simulationszeit wird auf neun Balkenumdrehungen

$$t_{\text{sim}} = 1674 \text{ Myr} \quad (5.60)$$

festgelegt. Im Falle der schwächsten Kühlung werden am Außenrand immerhin noch zwei Kühlzeitskalen erreicht. Die großen Radien außerhalb des Korotationsradius ( $\approx 5 \text{ kpc}$ ) sind für die Dynamik der inneren Scheibe wenig relevant. Eine längere Simulationszeit oder vor allem auch Auflösung wäre natürlich wünschenswert, allerdings benötigen die Simulationen mit Energiegleichung und Selbstgravitation bereits zwei Wochen Rechenzeit bei paralleler Rechnung auf einem SX ACE Vektorrechner. Eine höhere Auflösung ist daher technisch momentan nicht sinnvoll umsetzbar.

Wichtig für die Dynamik des Systems sind auch noch die Lindbladresonanzen, welche in den Grundlagen Abschnitt 2.1.1 eingeführt wurden. Abbildung 5.9 zeigt Resonanzfrequenzen und Rotationsgeschwindigkeit des Balkens für eine der Simulationen zum Anfangszeitpunkt. Am Anfang ähnelt sich diese Struktur bei allen Simulationen stark, da bis auf die Selbstgravitation die Gravitationspotentiale gleich sind. In diesem Fall gibt es innere Lindbladresonanzen (siehe Abschnitt 2.1.1) bei

$$r_{\text{ILR}} = \{42, 173, 1970\} \text{ pc}, \quad (5.61)$$

eine Korotationsresonanz bei

$$r_{\text{CR}} = 5.14 \text{ kpc} \quad (5.62)$$

und eine äußere Lindbladresonanz bei

$$r_{\text{OLR}} = 9.45 \text{ kpc}. \quad (5.63)$$

Um eventuelle Instabilitäten anzuregen, wird ein relatives Rauschen von  $10^{-3}$  zu der Dichteverteilung hinzugefügt. Die Auflösung des Gitters beträgt  $N_r \times N_\varphi = 384 \times 256$ , was einem Seitenverhältnis von  $\sim 1$  der Zellen in der ganzen Scheibe entspricht.

Die wichtigsten Parameter des numerischen Setups sind in Tabelle 5.4 zusammengefasst.

agndisk.f90		$M_{\text{BH}} = 10^6 M_{\odot}$
		$\Sigma_0 \in \{10, 30, 50\} \frac{M_{\odot}}{\text{pc}^2}$
		$c_s \in \{1, 3, 5, 10\} \frac{\text{km}}{\text{s}}$
		$\beta_{\text{cool}} \in \{1, 3, 5, 10\}$
Physik	Modul	EULER2D[_ISOTHERM]
	Rotationsgeschwindigkeit	$\Omega = 33 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{kpc}}$
	Isentropenexponent	$\gamma = 5/3$
Flüsse	Rekonstruktionsordnung	LINEAR
	Typ	KT
	Limiter	VANLEER
Gitter	Geometrie	POLAR
	Typ	MIDPOINT
	Auflösung	$N_r \times N_{\varphi} = 384 \times 256$
	Radiale Ausdehnung	$R \in [2 \text{ pc}, 16 \text{ kpc}]$
	Azimutale Ausdehnung	$\varphi \in [-\pi, \pi]$
Randbedingung	Innen	OUTFLOW_KEPLER
	Außen	NOGRADIENTS_KEPLER
Zeitintegrator	Verfahren	SSPRK
	Ordnung	5
	CFL-Zahl	0.4
	Fargo	2
	Temperaturlimit	$T_{\text{min}} = 1 \text{ K}$
	Simulationszeit	$t_{\text{sim}} = 100$

Tabelle 5.4.: Zusammenfassung aller wichtigen Parameter Balkengalaxie Simulationen.



### 5.3. Simulationen mit konstanter Schallgeschwindigkeit

Die Galaxiensimulationen stellen natürlich nicht den Anspruch, alle Teile einer Galaxie realistisch simulieren zu können. Das Hauptaugenmerk liegt nicht auf den Strukturen in der Gasscheibe, wie zum Beispiel nukleare Ringe oder nuklearen Spiralen, sondern auf dem Schwarzlochwachstum und dessen Abhängigkeiten vom Materialfluss. Daher ist die zeitabhängige Schwarzlochmasse auch der erste Parameter, der in Abbildung 5.10 betrachtet wird. Viele Simulationen erreichen beachtliche Schwarzlochmassen von bis zu  $4 \cdot 10^8 M_{\odot}$ . Alle Simulationen durchlaufen eine gewisse Einschaltphase, während der Balken aktiviert wird und erreichen nach etwa 370 Myr zwei unterschiedliche Zustände:

1. Simulationen mit eher hoher Schallgeschwindigkeit und geringer Masse akkretieren langsam.
2. Simulationen mit eher niedriger Schallgeschwindigkeit und hoher Masse akkretieren schnell.

Dabei ist der Übergang der Simulationen von langsamer zu schneller Akkretion offensichtlich möglich und das Starten der schnellen Akkretion wird durch höhere Masse und geringere Schallgeschwindigkeit begünstigt, wie die Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_{\odot} \text{pc}^{-2}$  und  $\{1, 3, 5\} \text{ km/s}$  zeigen (Abbildung 5.10). Die Schwarzen Löcher in Simulationen mit starker Akkretion wachsen bis zum Ende mit näherungsweise konstanter Akkretionsrate an, wie später noch gezeigt wird.

Um sich zunächst mit der typischen Strukturbildung in der Modellgalaxie vertraut zu machen, wird die isotherme Simulation mit dem Anfangsmassendichte-Parameter  $\Sigma_0 = 10 M_{\odot} / \text{pc}^2$  und  $c_s = 5 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit betrachtet. Diese zeigt ein relativ laminares Strömungsbild und die typischen Strukturen, die entstehen können. Simulationen mit mehr Masse oder kleineren Schallgeschwindigkeiten weisen kleine, räumlich lokalisierte Regionen mit signifikant höherer Dichte als ihre Umgebung auf. Durch diese *Klumpen* können Teile der typischen Strukturen in der Gasscheibe zerstört oder verändert werden. Die Abbildungen 5.11-5.12 zeigen die Dichte in dieser Simulation in verschiedenen Vergrößerungsstufen mit den Radien

$$R \in \{16 \text{ kpc}, 6 \text{ kpc}, 2 \text{ kpc}, 300 \text{ pc}\}. \quad (5.64)$$

In der ersten Abbildung 5.11 (oben) befindet sich das Balkenpotential noch in der Aktivierungsphase. Es bilden sich Spiralstrukturen auf der Kiloparsec-Skala aus, welche langsam an Krümmung zunehmen. Diese Spiralstrukturen sind eine Quelle für potentielle Vortizität und können an dieser Stelle zu der sogenannten Wackel Instabilität (en.: Wiggle Instability; Kim et al., 2014; Wada und Koda, 2004) führen. Die Auflösung in diesem Teil des Rechengebiets ist allerdings zu niedrig um die Instabilität frühzeitig aufzulösen.

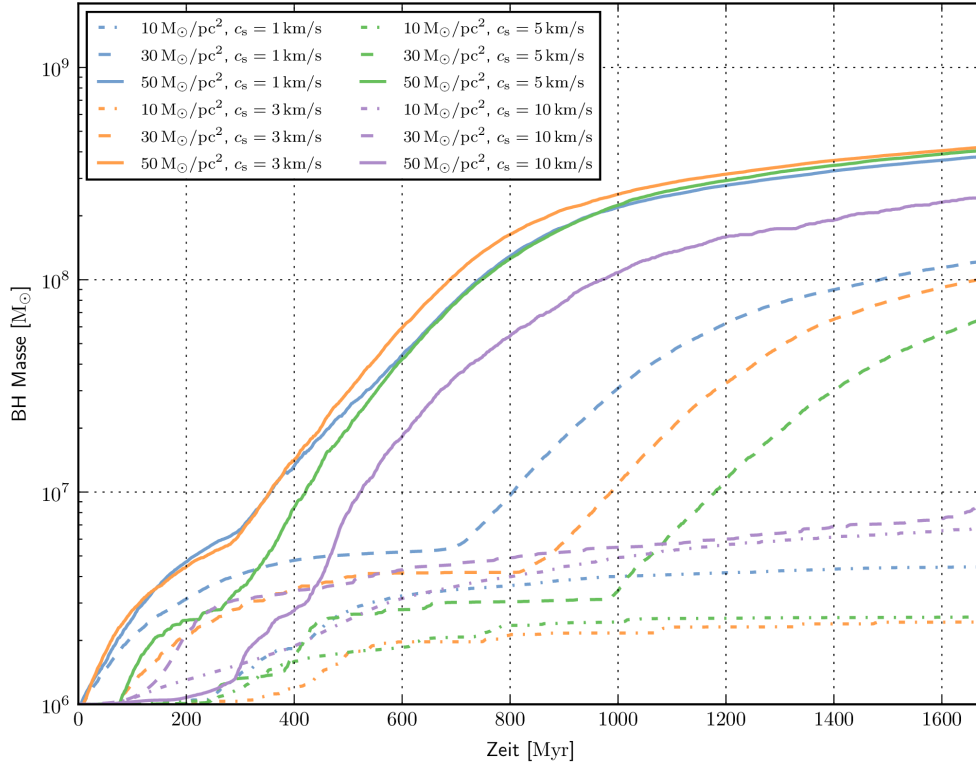


Abbildung 5.10.: Verlauf der Schwarzwachstumsmasse aller Parameterkombinationen der isothermen Simulationen. Es fällt sofort auf, dass es zwei deutlich voneinander unterscheidbare Akkretionsmodi gibt. Die Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  zeigen besonders gut, dass je kleiner die Schallgeschwindigkeit ist, desto eher wechselt die Simulation in den starken Akkretionsmodus und desto höher ist die daraus resultierende Schwarzwachstumsmasse am Ende der Simulationszeit.

Häufig tritt in den durchgeführten Simulationen eine Instabilität erst weiter innen auf, wenn das Material in den Bereich des nuklearen Rings strömt.

In der Abbildung 5.11 (unten) hat das Balkenpotential seine volle Stärke erreicht. Die Spiralstrukturen haben sich zu einem nuklearen Ring mit den Halbachsen 2.5 kpc und 2 kpc zusammengeschlossen. Dieser kann häufig in einzelne Klumpen zerfallen, da hier lokal hohe Dichten erreicht werden und das Material hohe Vortizität aus den Spiralarmen besitzt. Falls ohne Selbstgravitation, aber dafür mit höherer Auflösung gerechnet wird, können hier oft auch Klumpen gefunden werden, die durch die Wackel Instabilität in den Spiralstrukturen entstehen und zum Ring hin strömen. Die Spiralstrukturen werden nach Bildung des nuklearen Rings nahezu gerade und befinden sich in einem kleinen Winkel zur x-Achse geneigt. Sie werden dann auch off-axis Stoßfronten genannt (Kim

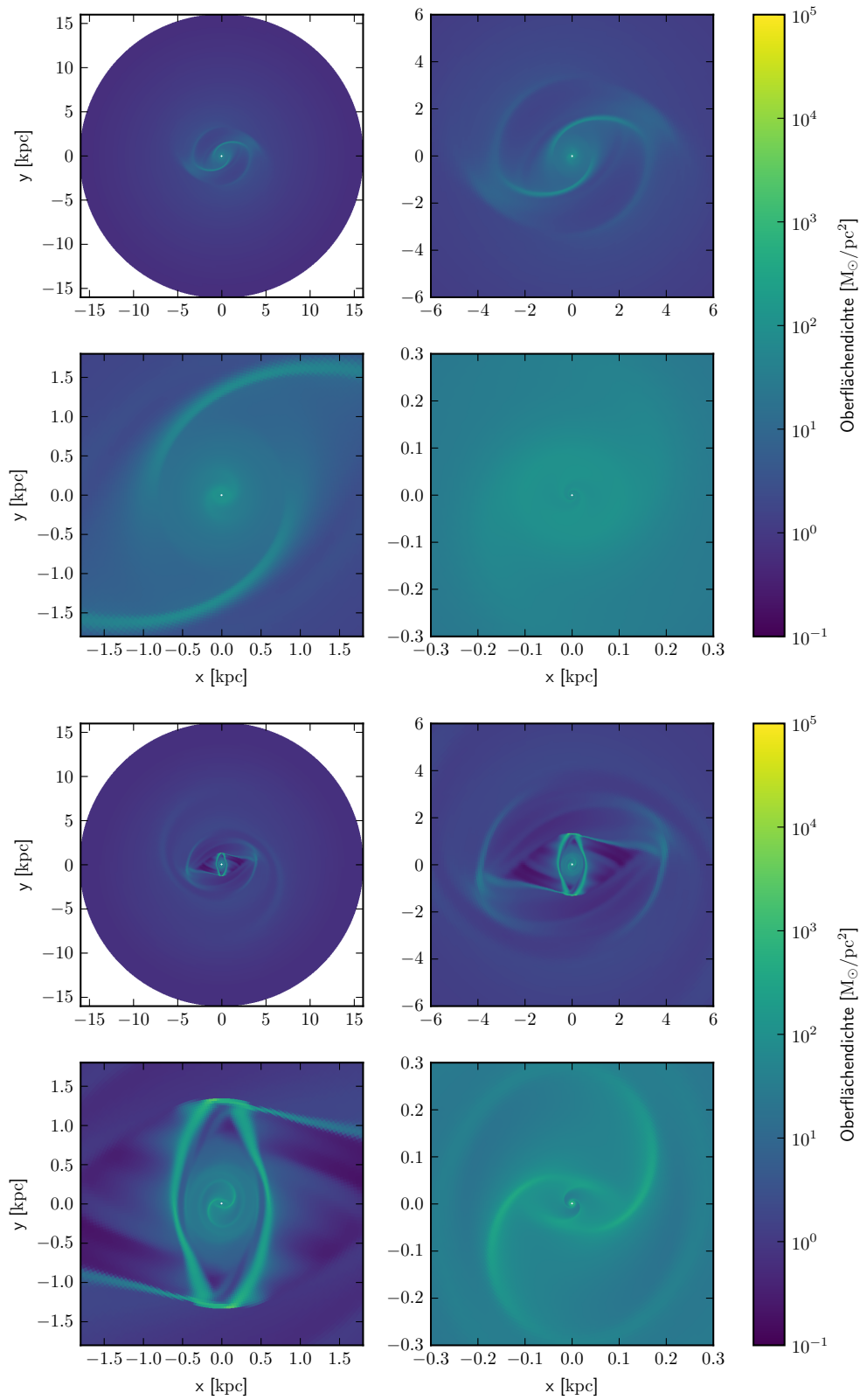


Abbildung 5.11.: Abbildungen der Oberflächendichte der Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $c_s = 5 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit in unterschiedlichen Vergrößerungen der zentralen Region nach einer halben Balkenrotation  $t = 93 \text{ Myr}$  (oben), beziehungsweise nach einer Balkenumdrehung  $t = 186 \text{ Myr}$  (unten).

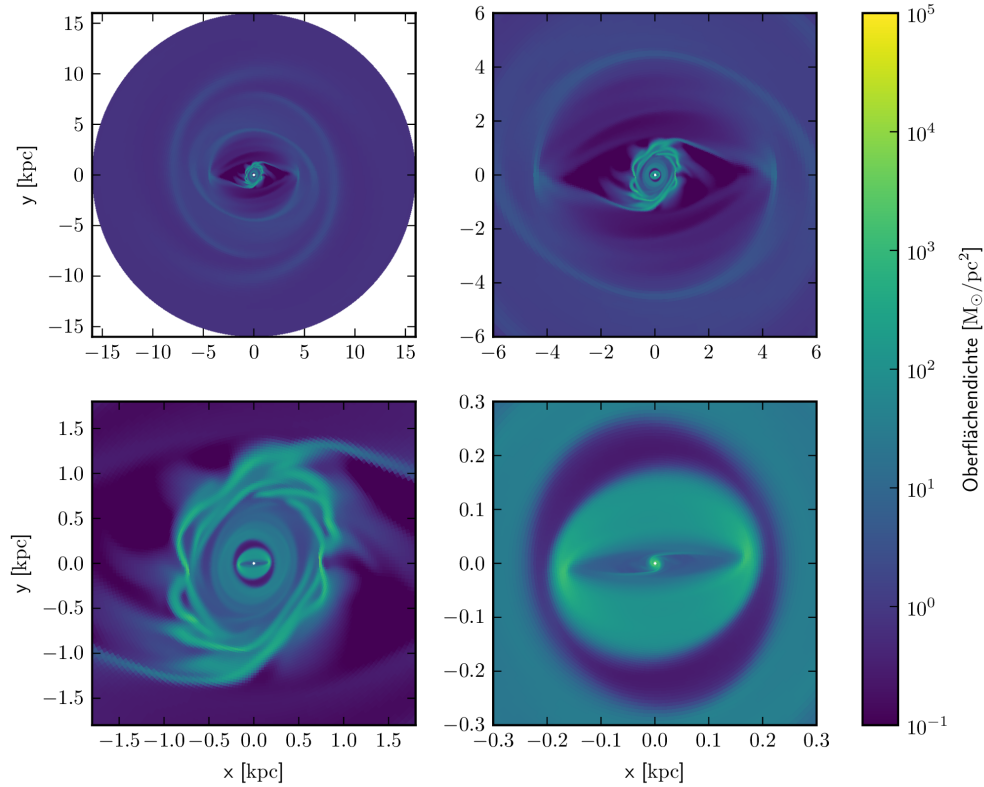


Abbildung 5.12.: Abbildungen der Oberflächen-dichte der Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_{\odot}/\text{pc}^2$  und  $c_s = 5 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit in unterschiedlichen Vergrößerungen der zentralen Region nach zwei Balkenrotationen beziehungsweise  $t = 372 \text{ Myr}$ .

et al., 2012) und verbinden den Ring auf  $\sim 1 \text{ kpc}$  mit der Region außerhalb von  $4 \text{ kpc}$ . Das Gas außerhalb des nuklearen Rings bewegt sich typischerweise auf stark exzentrischen Bahnen. Wenn es auf eine der beiden off-axis Stoßfronten trifft, verliert es einen großen Teil seiner Rotationsenergie und fällt entweder auf einen kleineren Orbit oder kann direkt entlang des Stoßes durch anderes Material zum nuklearen Ring mitgerissen werden (vgl. Kim et al., 2012). Auf diese Weise wird der Ring mit Material beliefert. Weiterhin können auf großen Skalen und innerhalb des nuklearen Rings Spiralarme erkannt werden.

In Abbildung 5.12 ist die Dichte im nuklearen Ring soweit angewachsen, dass er gravitativ instabil geworden ist. Zudem hat seine Exzentrizität abgenommen. Seine elliptische Gestalt rotiert dabei häufig im mathematisch positiven Sinne, sodass seine lange Halbachse unterschiedliche Ausrichtungen besitzen kann. Innerhalb des nuklearen Rings ist nun ein weiterer Ring bzw. eine Scheibe zu erkennen. Diese besitzt wiederum eine balkenförmige Region mit geringerer Dichte und zwei Spiralarme.

Eine Vielzahl von Beobachtungen weisen nukleare Ringe (z.B. Comerón et al., 2010; Fathi

et al., 2015; Koay et al., 2016; König et al., 2016), off-axis Stoßfronten (z.B. Martini et al., 2003a,b; Prieto et al., 2005; van de Ven und Fathi, 2010), sowie innere Spiralen und Balken (z.B. Erwin, 2004) auf, deren Entstehen auch in mit dieser Arbeit vergleichbaren numerischen Untersuchungen von z.B. Athanassoula (1992); Kim et al. (2012); Li et al. (2015); Maciejewski (2004); Piner et al. (1995); Roberts et al. (1979) nachvollzogen werden kann. Ein genauer Vergleich der entstehenden Strukturen mit Beobachtungen wird in Abschnitt 5.4.4 angestellt. Als Erstes wird der Fall schwacher Akkretion genauer betrachtet.

### 5.3.1. Schwache Akkretion

Die Simulation mit Oberflächendichteparameter  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $c_s = 3 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit ist ein gutes Beispiel für den Fall schwacher Akkretion. Die Abbildung 5.13 (oben) zeigt die Akkretionsrate und das Schwarzwachstum. Die Akkretionsrate bleibt in jedem Fall unter  $10^{-2} M_\odot/\text{yr}$  und weist ähnlich starke Eddington-Ausflussraten auf. Der Hauptteil der Akkretion kommt von einer kurzen Akkretionsphase nach etwa 300 Myr. Zu diesem Zeitpunkt kann in Abbildung 5.13 (unten) Klumpenbildung beobachtet werden. Später ist das Strömungsbild weitestgehend laminar und es sind zwei nukleare Ringe zu erkennen. Insbesondere die massenarme Lücke bei etwa 300 pc scheint weitere Akkretion zu verhindern, da kein weiteres Material in die innere Scheibe gelangen kann. Dadurch bleibt diese stabil und weitere Akkretion wird verhindert.

Die Abbildung 5.14 zeigt die Oberflächendichte und die Akkretionsrate der Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $c_s = 10 \text{ km/s}$ . Hier reicht der nukleare Ring bei  $\sim 800 \text{ pc}$  aus, um die innere Scheibe, nachdem sie erst Masse verloren hat, wieder aufzufüllen. Der hierbei relevante physikalische Prozess ist jedoch keine klumpige Akkretion, sondern der Verlust von kinetischer Energie durch Kompression an Stoßfronten (z.B. Shore, 1992). Da es sich jedoch um eine isotherme Simulation handelt, verändert sich die Temperatur des Gases nicht. Dies wird durch Abbildung 5.15 anhand instantaner Stromlinien, also dem Ergebnis numerischer Integration entlang des momentanen Geschwindigkeitsfeldes, im Innenbereich des Simulationsgebiets gezeigt. Jeweils an den Stoßfronten verliert das Gas einen großen Teil seiner Rotationsgeschwindigkeit und fällt zu kleineren Orbits. So kann es sehr schnell Drehimpuls verlieren, bis es akkretiert wird. Die Akkretionsrate auf das Schwarze Loch liegt während der längsten Zeit zwischen  $10^{-3} \dots 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$  ohne starke Schwankungen.

Es sei angemerkt, dass es sich bei der Akkretionsrate und der Eddingtonausflussrate um mittlere Werte des Zeitraums zwischen zwei Datenausgaben handelt, welche also Schwankungen die kürzer als  $\Delta t = 1.86 \text{ Myr}$  nicht auflösen können. Wenn die Akkretionsrate die Eddington-Grenze für einen sehr kurzen Zeitraum  $< 1.86 \text{ Myr}$  überschreitet, kommt es also zu einem Ausfluss, obwohl die z.B. in Abbildung 5.14 dargestellte mittlere Akkretionsrate niemals die Eddington-Grenze erreicht. Daher liegt die Eddingtonausflussrate in dieser Simulation wegen der relativ konstanten Akkretion fast immer unter  $10^{-4} M_\odot/\text{yr}$ , sodass über die gesamte Simulationszeit weniger als  $\sim 5 \cdot 10^5 M_\odot$  Material durch die Eddingtongrenze verloren geht. Kurz vor dem Ende der Simulation erreicht die innere

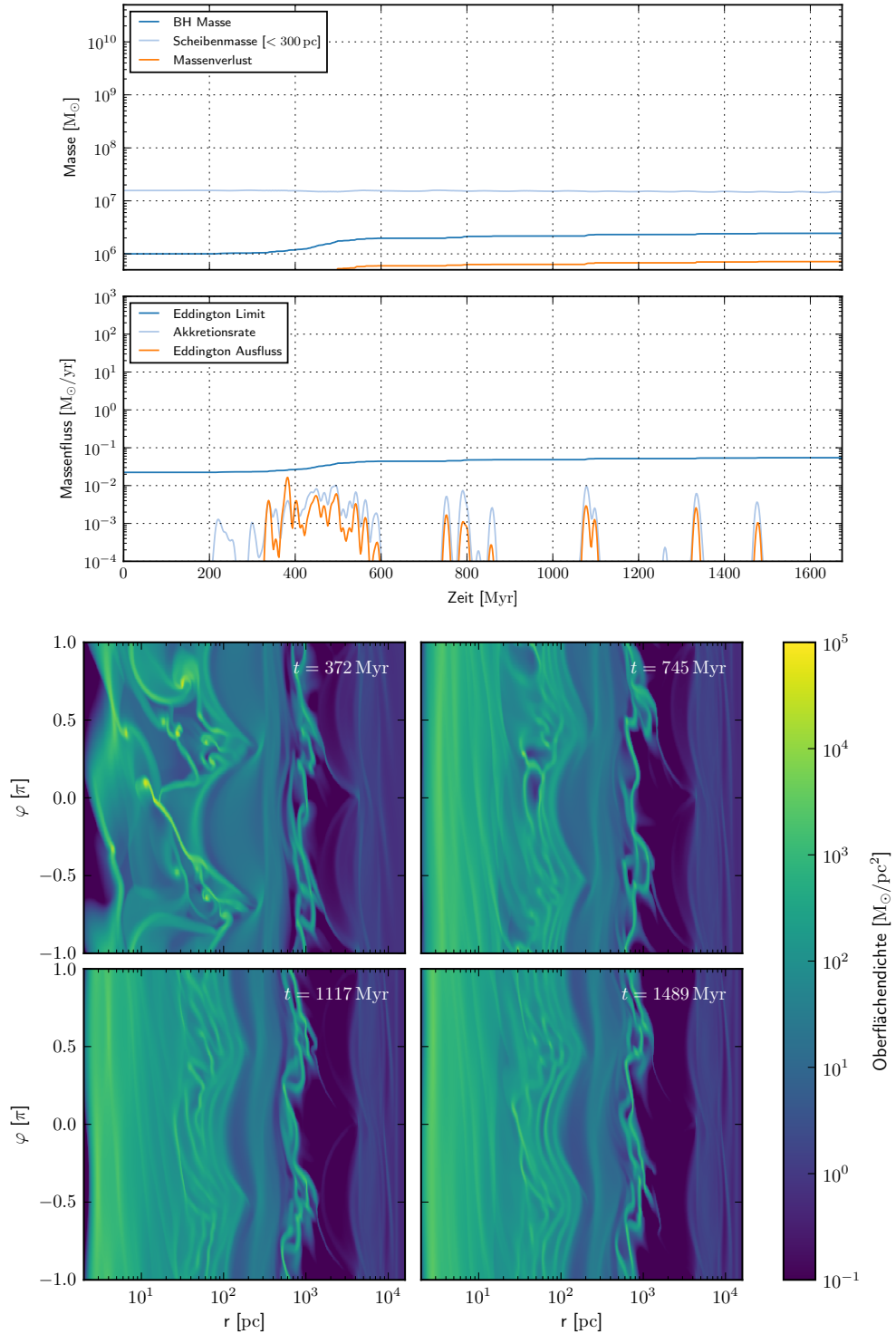


Abbildung 5.13.: Zeitlicher Verlauf der Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_{\odot}/\text{pc}^2$  und  $c_s = 3$  km/s Schallgeschwindigkeit als Beispiel der schwachen Akkretion.

*Oben:* Nach dem Einschalten des Balkens gibt es eine kurze Akkretionsphase. Später ist die Akkretionsrate meist kleiner als  $10^{-4} M_{\odot}/\text{yr}$ .

*Unten:* Zu Beginn der Simulation weist die Oberflächendichte im inneren Bereich Fragmentation auf. Später ist der innere Strömungsverlauf laminar. Bei 80 pc und 800 pc sind exzentrische nukleare Ringe erkennbar.

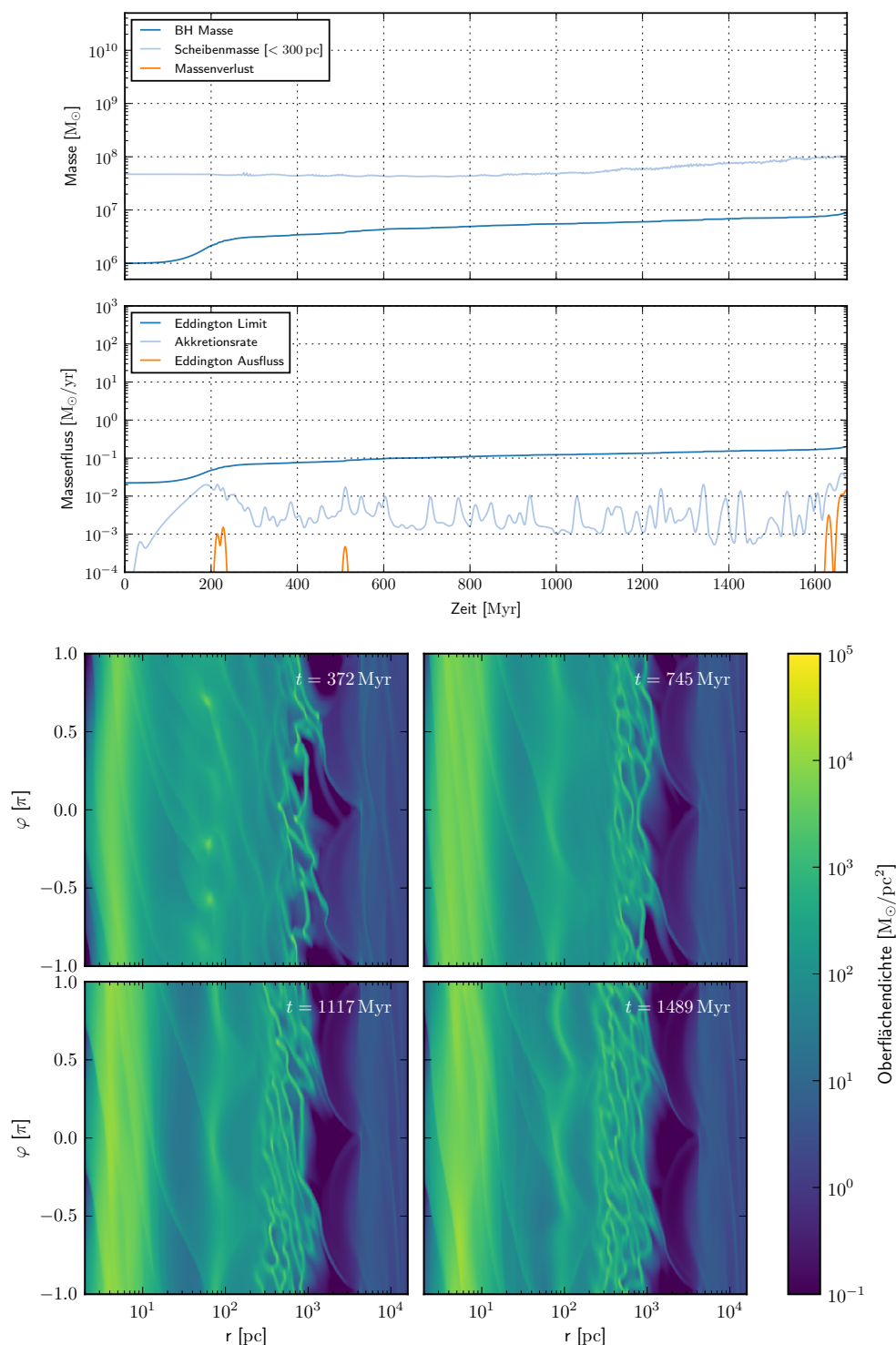


Abbildung 5.14.: Zeitlicher Verlauf der Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $c_s = 10$  km/s Schallgeschwindigkeit als Beispiel von schwacher Akkretion mit zentralen Stoßfronten.

*Oben:* Bei dieser Simulation kann stetig eine Akkretionsrate von  $10^{-3} \dots 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$  erreicht werden.

*Unten:* Anfangs ist Fragmentation bei etwa 100 pc und in einem nuklearen Ring bei etwa 800 pc erkennbar. Später lässt die innere Fragmentation nach und stattdessen bildet sich bei 80 pc ein exzentrischer Ring und innere Stoßfronten.

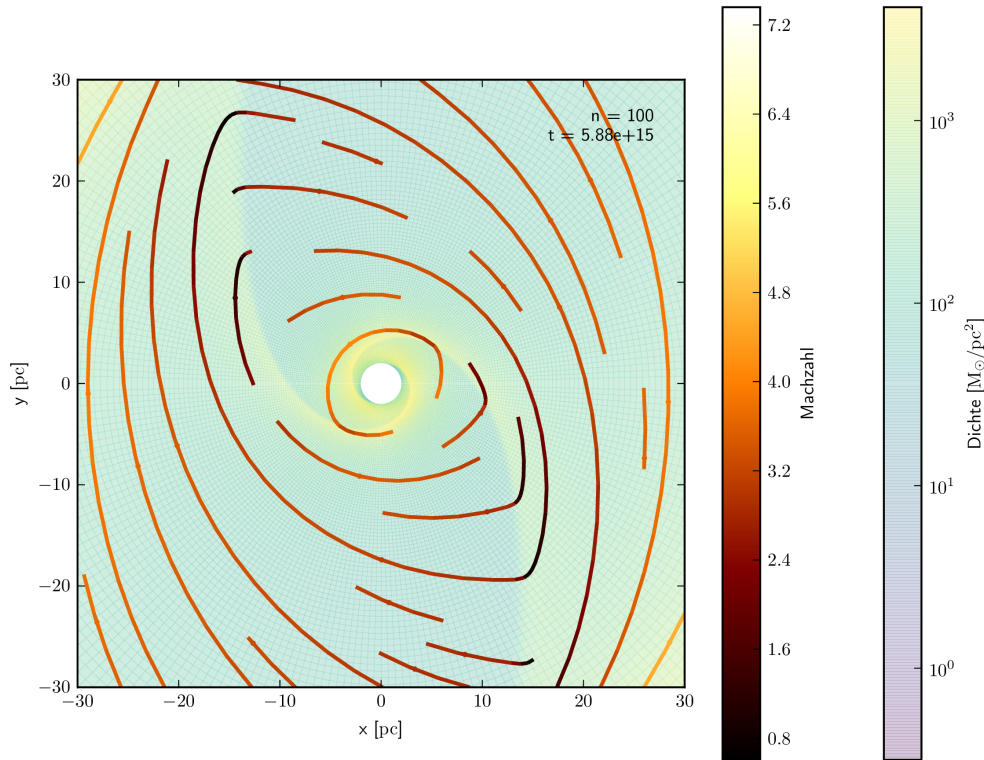


Abbildung 5.15.: Instantane Strömungslinien und Dichtekarte der Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $c_s = 10 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit. An den Stoßfronten wird das Gas verdichtet und verliert einen großen Teil seiner kinetischen Energie. Seine Geschwindigkeit wird subsonisch und es fällt nach innen, bis es wieder nennenswert Geschwindigkeit aufgebaut hat. Dieser Prozess kann das Material innerhalb weniger Orbits weit nach Innen transportieren.

Scheibe eine Masse von etwa  $10^8 M_\odot$ , welches wie gleich noch erläutert wird, in der Regel der Auslöser für die starke Akkretion ist. Tatsächlich steigt die Akkretionsrate bereits auf ihren bisher höchsten Wert und auch der Eddingtonausfluss steigt vermutlich wegen klumpiger Akkretion an.

### 5.3.2. Starke Akkretion

Zunächst wird eine Simulation betrachtet, in der die starke Akkretion zu einem späteren Zeitpunkt einsetzt, nachdem der Abschaltvorgang vollständig abgeschlossen ist. Hierzu eignet sich zum Beispiel die Simulation  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$ ,  $c_s = 3 \text{ km/s}$ , bei der die starke Akkretion nach 800 Myr einsetzt. Die Abbildung 5.16 (oben) zeigt die Akkretionsrate,



den Eddington-Massenverlust, sowie die Schwarzschildmasse über der Zeit aufgetragen. Für  $t < 800$  Myr sind die Akkretionsraten kleiner als  $10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$  mit relativ starker Variation und ebenso großer Massenverlustrate. Beides nimmt mit der Zeit ab. Die Variation und die starke Massenverlustrate weisen auf eine klumpige Akkretion hin, bei der einzelne Klumpen kurzzeitig für Akkretionsraten über der Eddingtongrenze sorgen. Die abgebildete Akkretionsrate summiert jedoch die Akkretion über die Zeit zwischen zwei Datenausgaben, also über eine Zeit von etwa 1.86 Myr. Kurzfristige Akkretionsereignisse können damit nicht direkt abgebildet werden. Die Abbildung 5.16 (unten) zeigt die Oberflächendichte zu verschiedenen Zeitpunkten. Die Abbildung zum Zeitpunkt 372 Myr stützt die Beobachtung einer klumpigen Akkretion, da mehrere Klumpen im inneren Scheibenbereich zu sehen sind. Die Freifallzeitskala eines Klumpen beim Radius  $R = 30$  pc beträgt, wenn man nur das Potential des Schwarzen Lochs mit der Anfangsmasse  $M = 10^6 M_{\odot}$  betrachtet,

$$\tau_{\text{ff}} = 2.45 \text{ Myr} \quad (5.65)$$

und ist damit mit der zeitlichen Auflösung der Simulationsausgaben 1.86 Myr vergleichbar. Es kann daher nicht erwartet werden, den Einfall eines Klumpen direkt zu beobachten. Nach 745 Myr ist diese Phase abgeschlossen und es findet keine Akkretion mehr statt. Im Inneren der Scheibe sind jetzt drei runde Ringe zu erkennen (Abbildung 5.16, unten). Vorher hat die Masse in der inneren Scheibe mit Radien  $< 300$  pc um  $5 \cdot 10^6 M_{\odot}$  abgenommen, also gerade soviel, wie akkretiert und durch die Eddingtongrenze verloren gegangen ist. Ab etwa 400 Myr beginnt die innere Scheibenmasse zu steigen. Wenn diese eine Masse von  $10^8 M_{\odot}$  erreicht hat, wird sie gravitativ instabil (Kozłowski et al., 1979; Paczynski, 1978; Rafikov, 2015; Safronov, 1960; Toomre, 1964) und die starke Akkretion setzt ein, welche zunächst wieder stark klumpig ist. Diese Art von gravitativer Instabilität, welche einzelne selbst-gravitativ gebundene Strukturen erzeugt, ist typisch für Systeme mit sehr kurzen Kühlzeitskalen (Gammie, 2001). In diesem Fall wird eine isotherme Zustandsgleichung verwendet, was mit einer instantanen Kühlung gleichzusetzen ist, da das Gas weder durch Stöße noch durch Kompression aufgeheizt werden kann. Der Toomre-Parameter (siehe Abschnitt 2.1.2) charakterisiert, ob in einer Akkretionsscheibe gravitative Instabilitäten zu erwarten sind. Da er proportional zu  $Q \propto T/\Sigma$  ist, aber in diesem Fall die Temperatur als konstant vorausgesetzt wurde, kann ein stabiler Zustand  $Q > 1$  erst wieder durch das Senken der Dichte  $\Sigma$  erreicht werden. In nicht isothermen System mit relativer langsamer Kühlung kann ein gravitativ marginal-stabiler Zustand erreicht werden (Cossins et al., 2009, 2010; Durisen et al., 2007; Paczynski, 1978; Rice et al., 2003, 2005). Wenn die Akkretionsscheibe durch Kühlung oder Ansammeln von Masse Toomre-instabil wird, entstehen gravitative Instabilitäten. Diese dissipieren Energie und heizen die Akkretionsscheibe auf. Da die Kühlung schwächer als die Heizung durch die Instabilitäten ist, steigt der Toomre-Parameter auf  $Q > 1$  und die Scheibe wird wieder stabil. Da die Kühlung weiterhin wirkt, kann dieser Prozess von vorne beginnen. Es stellt sich dadurch ein marginal stabiler Zustand mit einem Toomre-Parameter  $Q \sim 1$  ein, wie von Paczynski (1978) vorausgesagt wurde.

Die Abbildung 5.16 (unten) zeigt, wie bei einem Radius von etwa 800 pc Instabilitäten

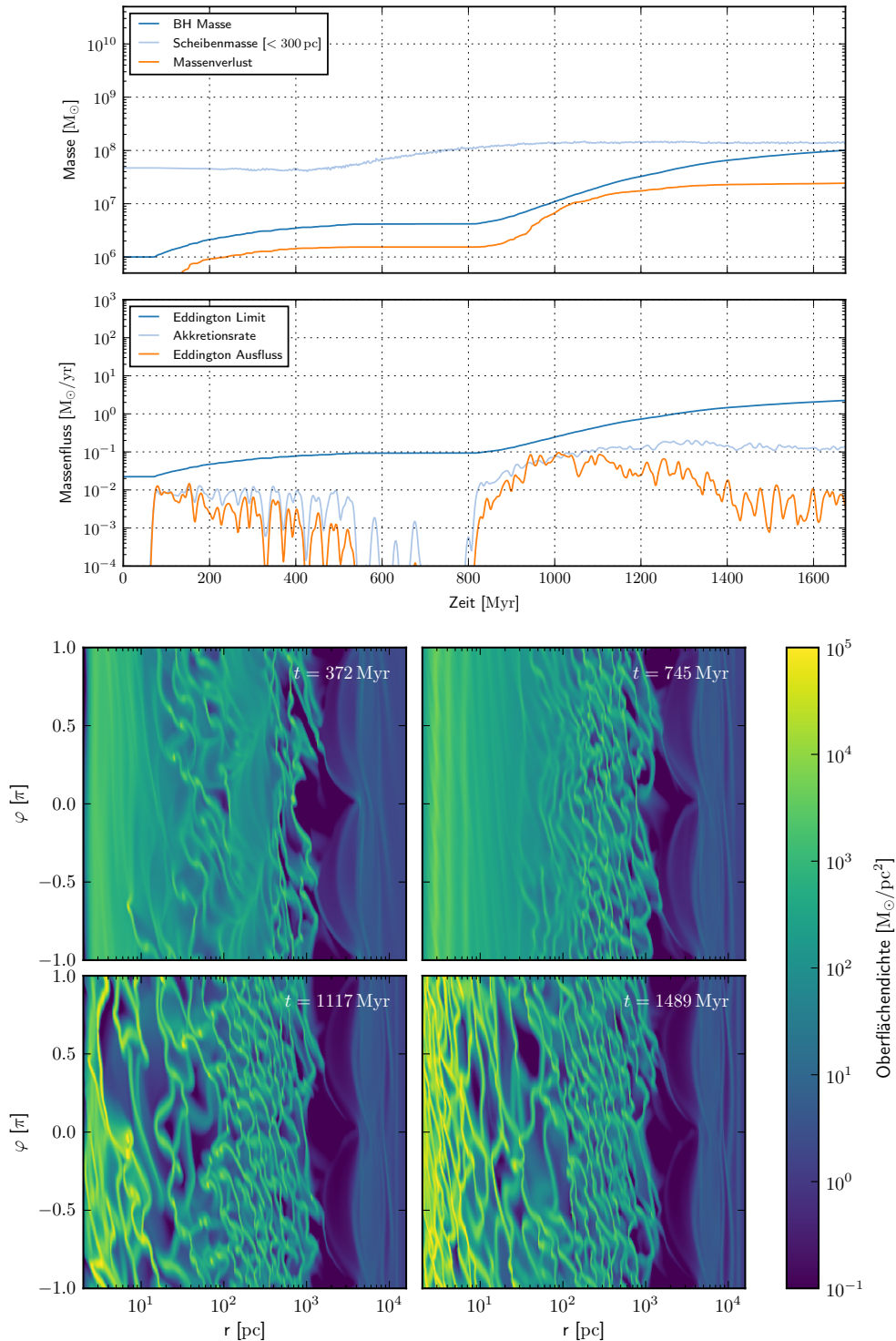


Abbildung 5.16.: Zeitlicher Verlauf der Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_{\odot}/\text{pc}^2$  und  $c_s = 3$  km/s Schallgeschwindigkeit als Beispiel der starken Akkretion.

*Oben:* Bereits nach einer halben Balkenumdrehung kommt es zu stark klumpiger Akkretion mit hohem Eddingtonausfluss, welche mit der Zeit nachlässt. Später setzt die starke Akkretion ein, welche zunächst auch stark klumpig ist und eine Akkretionsrate von  $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$  erreicht.

*Unten:* Zunächst ist Klumpenbildung in der inneren Scheibe zu erkennen, welche schnell nachlässt. Die innere Scheibe wird dann laminar bis die starke Akkretion einsetzt. Danach zeichnet sich die gesamte Scheibe innerhalb von 1 kpc erst durch starke Klumpenbildung und dann durch einen gravitativ turbulenten Modus aus.

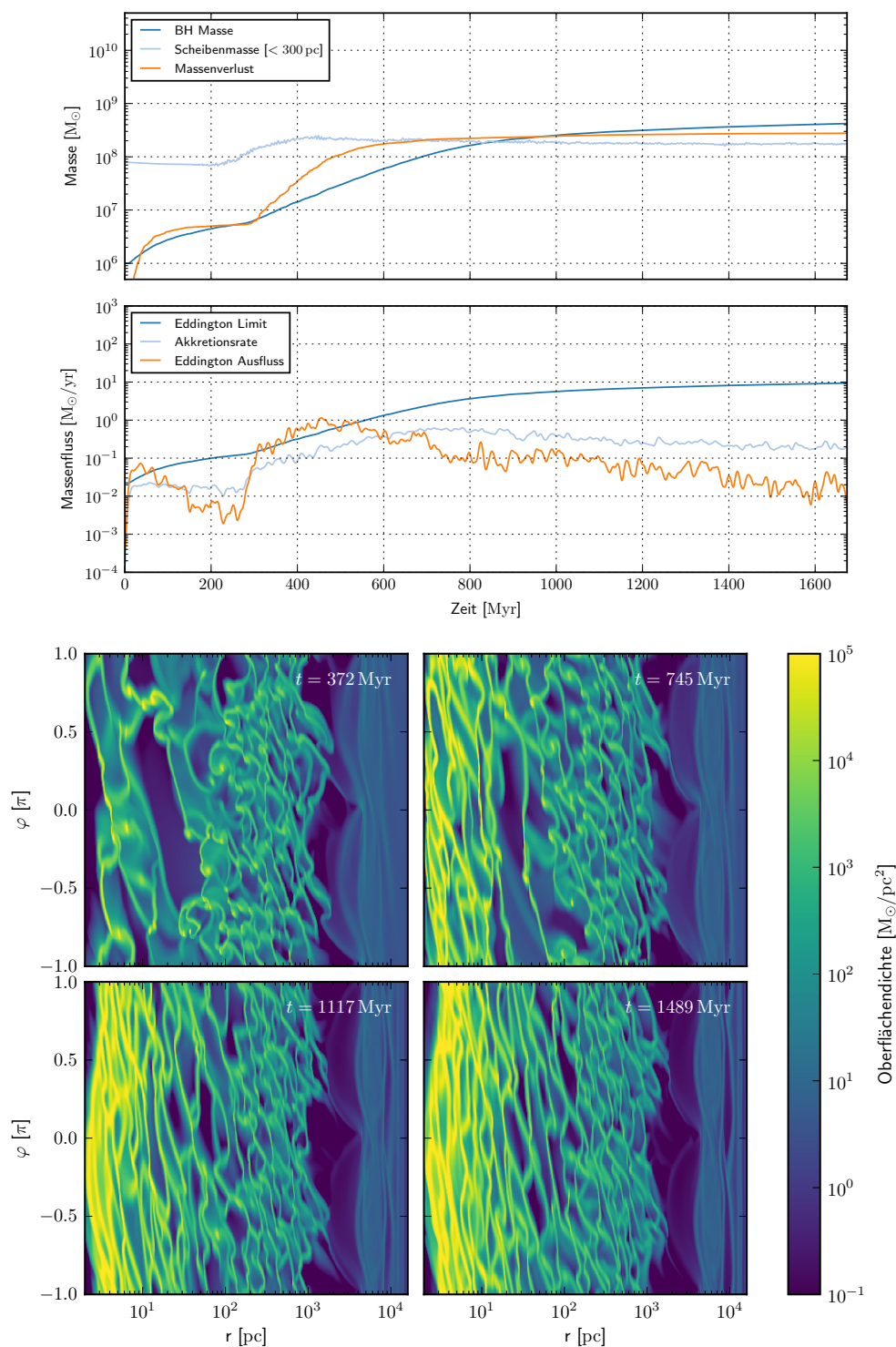


Abbildung 5.17.: Zeitlicher Verlauf der Simulation mit  $\Sigma_0 = 50 M_{\odot}/\text{pc}^2$  und  $c_s = 3 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit als Beispiel der starken Akkretion.

*Oben:* Diese Simulation erreicht die höchste Schwarzwlochmasse von allen Simulationen. Noch während der Akkretion durch das Anschalten des Balkens kann eine innere Scheibenmasse von mehr als  $10^8 M_{\odot}$  erreicht werden. Dadurch kann direkt der starke Akkretionsmodus erreicht werden mit mehr als  $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$ .

*Unten:* Die Simulation weist starke Fragmentation am Anfang auf, bevor sie in einen gravitativ turbulenten Akkretionsmodus wechselt. Eine laminare innere Scheibe kann nicht beobachtet werden.

bereits zum Zeitpunkt 372 Myr entstehen, die sich bis 1117 Myr zu immer kleineren Radien ausbreiten und damit zu einem Anwachsen der inneren Scheibenmasse führen. Nach etwa 1100 Myr pendelt sich die Akkretionsrate bei  $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$  ein und die Massenverlustrate geht zurück. Die innere Scheibenmasse bleibt ab diesem Zeitpunkt auch ungefähr konstant bei  $1.5 \cdot 10^8 M_{\odot}$ . Offensichtlich wird die innere Scheibe im gleichen Maße von außen mit Masse versorgt, wie über den inneren Rand abfließt. Der Eddington-Massenverlust nimmt zum Ende um eine Größenordnung ab. Eine Betrachtung der Dichteverteilung lässt darauf schließen, dass nun weniger einzelne Klumpen akkretiert werden, sondern dass die Klumpen im zentralen Scheibenbereich  $< 10 \text{ pc}$  so zahlreich sind, dass sie zu Dichtefilamenten ausgeschert werden. Der eigentliche Akkretionsstrom ist dennoch gleich groß, aber gleichmäßiger und weniger abrupt. Es existieren also drei unterschiedliche Phasen:

**0-800 Myr** Eine initiale Akkretion  $10^{-4} \dots 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$  bezieht ihr Material aus der inneren Scheibe und füllt diese langsam von außen auf.

**800-1100 Myr** Die innere Scheibe wird weiter aufgefüllt und treibt nun wegen ihrer höheren Masse eine starke klumpige Akkretion  $10^{-2} \dots 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$ .

**1100-1600 Myr** Es findet starke Akkretion  $10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$  mit konstanter Rate statt und die innere Scheibe wird in gleichem Maße von außen aufgefüllt.

Die Simulation mit  $\Sigma_0 = 50 M_{\odot}/\text{pc}^2$  Anfangsdichte und  $c_s = 3 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit ist die isotherme Simulation mit der größten Schwarzwachstum am Ende der Simulationszeit. Sie besitzt ebenso wie die vorige Simulation eine Einschaltphase, welche direkt in den Modus starker Akkretion mündet, da eine Masse von  $> 10^8 M_{\odot}$  in der inneren Scheibe schon nach etwa 300 Myr erreicht werden kann. Die Abbildung 5.17 zeigt, dass es sich zunächst um eine klumpige Akkretion mit starkem Eddingtonausfluss handelt. Später sind bis zu einem Radius von etwa 100 pc vor allem filamentartige Strukturen zu erkennen. Wenn sich nach 1000 Myr die Akkretionsrate bei etwa  $2 \cdot 10^{-1} M_{\odot}/\text{yr}$  einpendelt, sinkt auch die Eddington-Ausflussrate. In der instabilen Region zwischen 100 pc und 1 kpc sind dann auch keine Fragmente mehr zu erkennen. Stattdessen wird diese Region durch eine gravitativ turbulente Strömung dominiert.

### 5.3.3. Weitere Trends

Die Abbildung 5.10 zeigt, dass zum Beispiel bei den Simulationen mit  $c_s = 3 \text{ km/s}$  Schallgeschwindigkeit höhere Anfangsmassen in der Gasscheibe zu schnellerer Akkretion führen und zum Ende höhere Schwarzwachstum erreicht werden. Die Tabelle 5.5 trägt mittlere Akkretionsraten und Schwarzwachstum am Ende der Simulation auf. Dies zeigt nochmal den Trend der stärkeren Akkretion in massereicheren Simulationen. Bei den Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_{\odot}/\text{pc}^2$  liegt die maximale Akkretionsrate bei  $0.02 M_{\odot}/\text{yr}$  und

$\Sigma_0$ [ $M_\odot/\text{pc}^2$ ]	$c_s$ km/s	$\langle \dot{M} \rangle$ [ $M_\odot/\text{yr}$ ]	$\max(\dot{M})$ [ $M_\odot/\text{yr}$ ]	Ring	Innere Scheibe	$M_{\text{BH}}$ [ $M_\odot$ ]
10	1	$< 10^{-2}$	0.02	Ja	GI	$1.25 \cdot 10^6$
10	3	$< 10^{-2}$	0.02	Ja	GI	$2.44 \cdot 10^6$
10	5	$< 10^{-2}$	0.02	Ja	Spirale	$2.58 \cdot 10^6$
10	10	$< 10^{-2}$	0.04	Ja	Stoß	$6.73 \cdot 10^6$
30	1	$0.07 \pm 0.26$	0.26	Nein	GI	$1.23 \cdot 10^8$
30	3	$0.06 \pm 0.26$	0.26	Nein	GI	$1.01 \cdot 10^8$
30	5	$0.04 \pm 0.26$	0.08	Nein	GI	$6.53 \cdot 10^7$
30	10	$0.00 \pm 0.08$	0.69	Nein	GI	$8.93 \cdot 10^6$
50	1	$0.27 \pm 0.69$	0.82	Nein	GI	$3.81 \cdot 10^8$
50	3	$0.25 \pm 0.82$	0.82	Nein	GI	$4.21 \cdot 10^8$
50	5	$0.24 \pm 0.78$	0.78	Nein	GI	$4.06 \cdot 10^8$
50	10	$0.14 \pm 0.76$	0.76	Nein	GI	$2.43 \cdot 10^8$

Tabelle 5.5.: Übersicht über mittlere und maximale Akkretionsrate, entstehende Strukturen (GI: Gravitative Instabilitäten, Stoß: Stoßfronten) und Schwarzslochmassen am Ende der isothermen Simulationen.

ist im zeitlichen Mittel sogar unter  $< 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ . Die Tabelle trägt außerdem auf, ob nukleare Ringe gebildet und über einen längeren Zeitraum erhalten bleiben können und was für eine Strömung sich in der inneren Scheibe  $< 300 \text{ pc}$  ausbildet. Nukleare Ringe können nur in den masseärmsten Simulationen bestehen bleiben und selbst hier sind es in der Regel klumpige Ringe auf Grund der hohen Massedichten, die hier entstehen. Bei den massereicheren Simulationen sind die Ringe so massereich, dass sie fragmentieren und ihre Struktur nicht bestehen bleiben kann. Bei sehr massereichen Simulationen kann es bereits frühzeitig zu so starker Akkretion kommen, dass es zu keiner Ringbildung kommt.

Die innere Scheibe weist bei den isothermen Simulationen meistens gravitative Instabilitäten (GI) auf. Nur die massearmen Simulationen mit hohen Schallgeschwindigkeiten zeigen stattdessen die Bildung innerer eng gewundener Spiralen oder starke Stoßbildung. Dies ist offensichtlich ein effizienterer Akkretionsmechanismus im Gegensatz zu den anderen Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$ . Eine Variation der Schallgeschwindigkeit kann zu unterschiedlichen Endmassen der Schwarzen Löcher führen, aber beeinflusst vor allem, ob und wann die starke Akkretion einsetzt. Die Abbildung 5.18 zeigt die Akkretionsraten aller isothermen Simulationen. Die unterschiedlichen Akkretionsmodi sind deutlich voneinander unterscheidbar. Es gibt entweder Akkretionsraten von mehr als  $0.1 M_\odot/\text{yr}$  oder weniger als  $0.01 M_\odot/\text{yr}$ . Es fällt außerdem auf, dass alle Simulationen recht starke Schwankungen in der Akkretionsrate aufweisen. Dies liegt vermutlich auch daran, dass der

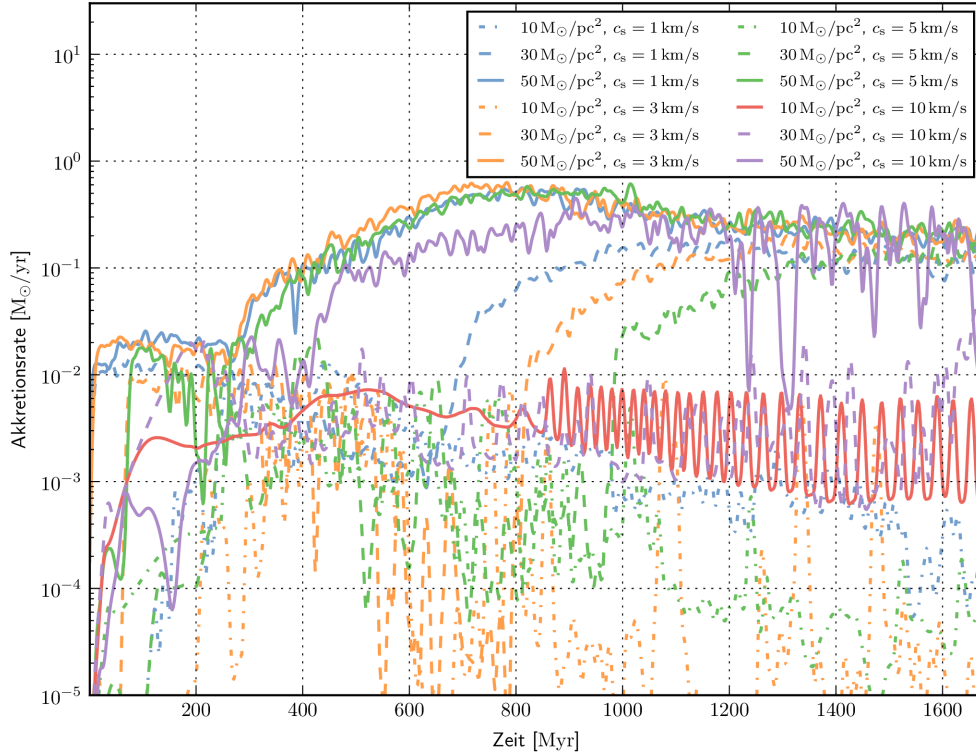


Abbildung 5.18.: Darstellung der Akkretionsraten aller isothermen Galaxiensimulationen. Es ist gut erkennbar, dass die Simulationen entweder in eine starke Akkretion mit mehr als  $0.1 M_{\odot}/\text{yr}$  oder schwache Akkretion mit weniger als  $0.01 M_{\odot}/\text{yr}$  münden. Alle Simulationen weisen zudem starke Variation bei der Akkretionsrate auf.

innere Rand des Rechengebiets mit 2 pc noch relativ weit innerhalb der Akkretionsscheibe liegt und ein wichtiger Teil der Akkretionsscheibe sich noch außerhalb des Rechengebiets befindet. Dennoch wird angenommen, dass Masse, die hier das Rechengebiet verlässt, direkt auf das Schwarze Loch akkretiert wird. Gerade bei klumpiger Akkretion ist das problematisch. Bei kleineren Radien wird die differentielle Rotation immer stärker und würde Klumpen irgendwann zu Dichtefilamenten ausscheren. Die Akkretion dieser wäre kontinuierlicher, sodass die effektive Akkretionsrate auf das Schwarze Loch näher an der Eddingtongrenze liegt.

Ein besonderen Fall stellt die Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_{\odot}/\text{pc}^2$  und einer Schallgeschwindigkeit von  $c_s = 10 \text{ km/s}$  dar. Bei dieser kommt es ab etwa 800 Myr zu einer periodischen Akkretionsrate mit einer Periodendauer von etwa 20 – 25 Myr (siehe Abbildung 5.18, rote Kurve). Eine nähere Betrachtung der Dichtestruktur zu verschiedenen Zeitpunkten liefert Aufschluss über die Ursache für dieses Verhalten. In dieser Simulation ist ein nuklearer Ring und etwa ab dem Einsetzen der Periodizität auch ein innerer Stoß zu erkennen. Der exzentrische nukleare Ring oszilliert auf den zuvor genannten Zeitskalen und kann dadurch

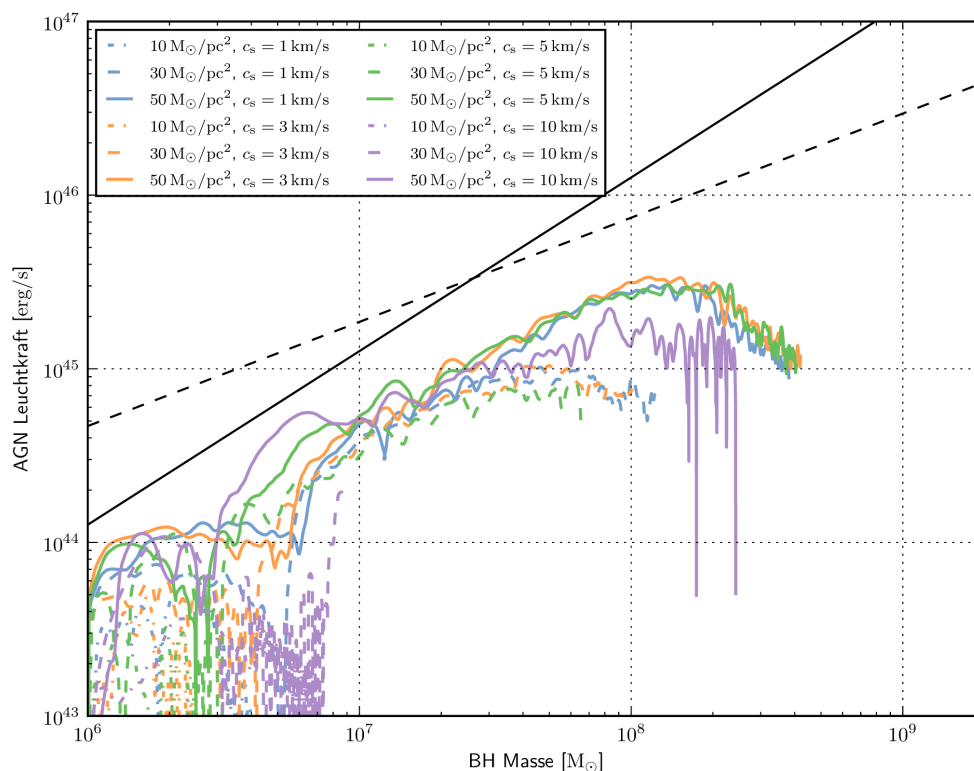


Abbildung 5.19.: Evolutionspfade der Schwarzen Löcher in den isothermen Galaxiensimulationen. Da nur die Massereichen nennenswerte Schwarzlochmassen zu Stande bringen, verbleiben die massearmen Simulationen in der unteren linken Ecke. Die anderen Simulationen bewegen sich zunächst auf einem Pfad parallel zur Eddingtongrenze (schwarze Linie), bevor sie später einknicken und konstante Akkretionsraten aufweisen. Die gestrichelte schwarze Linie gibt die Subeddingtongrenze für Rotverschiebungen von  $0.6 < z < 0.8$  aus Steinhardt und Elvis (2010) an. Für die hier betrachteten Simulationen kann sie keine Rolle spielen.

in regelmäßigen Abständen über die Stoßfronten Masse an die innere Scheibenregion und das Schwarze Loch abgeben. Die Periodendauer nimmt mit der Zeit langsam ab, aber es ist kein Nachlassen der Schwingung zu beobachten, sondern sie bleibt über mehr als 800 Myr stabil.

Mit den gewonnenen Daten lässt sich die Evolution der einzelnen Schwarzen Löcher in einem AGN Leuchtkraft-Massen-Diagramm auftragen. Die entsprechende Abbildung 5.19 zeigt, dass nur die Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $\Sigma_0 = 50 M_\odot/\text{pc}^2$  zu nennenswerten Evolutionskurven führen. Die massearmen Simulationen tauchen durch die sehr kleinen erreichten Schwarzlochmassen in der Grafik kaum auf. Ihre Entwicklungspfade sind dann nämlich sehr kurz. Die anderen Simulationen verlaufen teilweise parallel zur

Eddingtongrenze, aber gut eine halbe Dekade unter ihr. Dies liegt an dem eben besprochenen Effekt der klumpigen Akkretion und dem relativ weit außen liegenden inneren Rechengebietsgrenze. Es geht überproportional viel Masse durch den Eddingtonausfluss verloren. Bei allen massereichen Simulationen ist das Verlassen der Akkretion parallel zur Eddingtongrenze zu beobachten. Sie akkretieren zunächst langsamer und später mit konstanter Rate. Die Simulationszeit reicht nicht aus, um zu verfolgen, ob damit die Akkretion im System größtenteils beendet ist und die Akkretionsrate nun komplett einbrechen wird.

Steinhardt und Elvis (2010) tragen die Helligkeiten von über 60000 Quasare über ihren Schwarzwachsmassen in Abhängigkeit der Rotverschiebung auf. Sie beobachten, dass während Quasare mit niedrigen Schwarzwachsmassen von bis zu  $10^7 M_{\odot}$  Helligkeiten bis zu ihrer jeweiligen Eddingtonleuchtkraft erreichen können, Quasare mit höheren Schwarzwachsmassen einer zweiten Grenze unterhalb der Eddington-Leuchtkraft unterworfen sind (siehe auch Caplar et al., 2015; Kollmeier et al., 2006; Steinhardt und Speagle, 2014). Ihr beobachtetes Ensemble ist nach unten durch das Detektionslimit auf Leuchtkräfte ab ungefähr  $10^{45}$  erg/s beschränkt. Dies schränkt leider die Vergleichbarkeit mit den isothermen Simulationen ein. Nur die massereichsten Simulationen erreichen Leuchtkräfte von mehr als  $10^{45}$  erg/s. In Übereinstimmung mit den Beobachtungen liegen sie unter der Subeddingtongrenze, aber ohne ein größeres Set an Simulationen kann keine statistisch relevante Aussage getroffen werden.



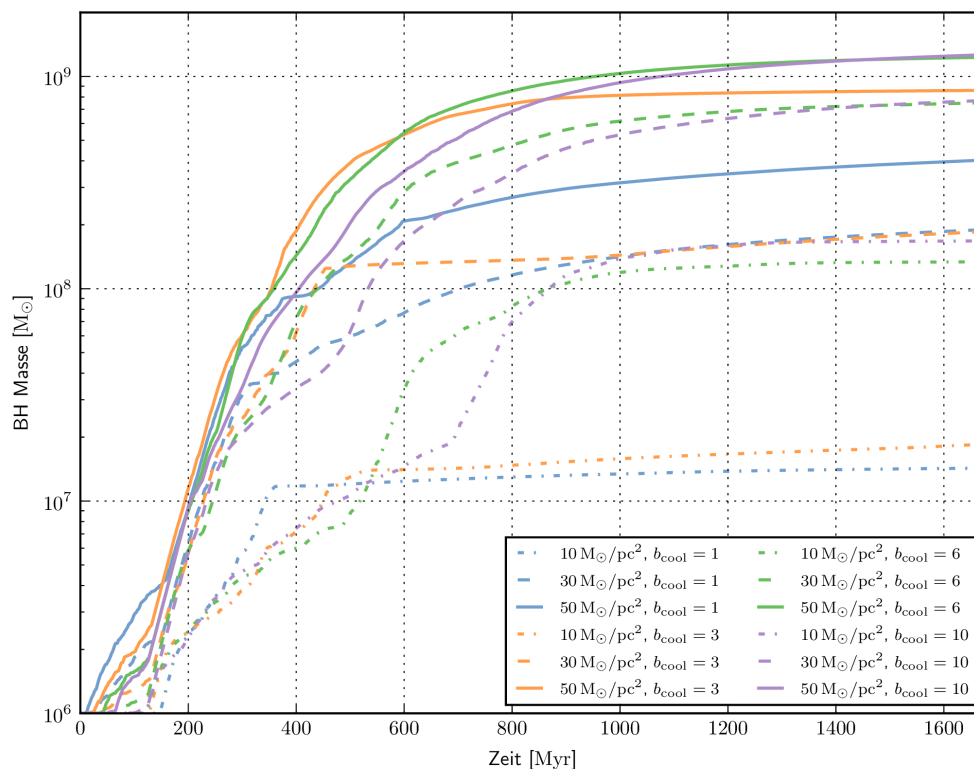


Abbildung 5.20.: Übersicht des Schwarzwachstums des gesamten Parameterraums der Galaxiensimulationen mit Temperaturstruktur. Nachdem alle Simulationen mindestens zeitweise an der Eddingtongrenze akkretieren, lässt die Akkretion bei Simulationen mit starker Kühlung nach einiger Zeit stark nach.

## 5.4. Simulationen mit Temperaturstruktur

Die Ergebnisse der Simulationen mit Temperaturstruktur erweisen sich als deutlich komplexer als die Ergebnisse der isothermen Simulationen. Einige unterschiedliche Lösungen in der Dichte und Temperaturstruktur können sich einstellen, welche die Akkretion auf das Schwarze Loch maßgeblich beeinflussen. Der wichtigste Parameter ist hierbei die Kühlung.

Als Erstes wird der Verlauf der Schwarzwachstums aller gesammelten Simulationen in Abbildung 5.20 betrachtet. Einige Simulationen beginnen direkt nach dem Start in Folge der Anfangsbedingungen mit der Akkretion. Etwa nach einer Balkenrotation akkretieren alle Simulationen nahe der Eddingtongrenze. Der Auslöser dafür scheint auch die bereits zuvor akkretierenden Simulationen zu betreffen, sodass diese nun auch an der Eddingtongrenze akkretieren.

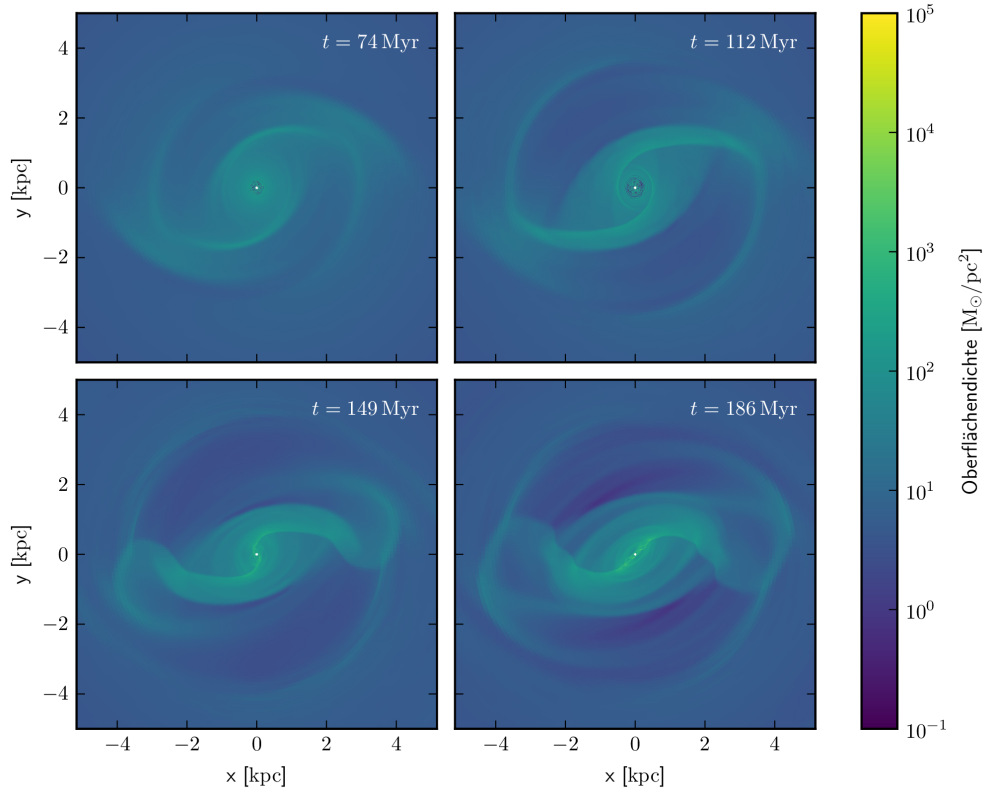


Abbildung 5.21.: Die Stoßbildung in den Simulationen mit Energiegleichung ähnelt den isothermen Simulationen. Der Stoß verbindet sich aber nicht zu einem Ring, sondern wird weiter gekrümmt, bis der Innenrand des Rechengebiets berührt wird. Hier an der Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $b_{\text{cool}} = 1$  gezeigt.

Die Abbildung 5.21 gibt Aufschluss über den allen gemeinsamen Auslöser dieser sehr starken Akkretion. Ebenso wie in den isothermen Simulationen bildet sich eine Stoßfront auf Grund des Balkenpotentials aus, welche immer mehr an Krümmung zunimmt. Hier verbinden sich die Stoßwellen jedoch nicht zu einem Ring oder klumpigen Ring, sondern krümmen sich weiter und wandern nach innen, bis sie den Innenrand des Rechengebiets erreichen. Dort bleiben sie fixiert, während die äußeren Teile in weiteren chaotischen Stoßfronten Material in alle Richtungen verteilen. Dabei heizen die Spiralarme den inneren Scheibenbereich sehr stark bis zu  $10^6$  K auf. Diese Stoßfronten sind ein sehr effektiver Mechanismus (Athanasoula, 1992), um Gas in das Zentrum der Galaxie zu transportieren. Die Abbildung 5.22 zeigt, dass das Gas an den Stoßfronten jeweils einen großen Teil seiner kinetischen Energie dissipiert, dadurch die Umgebung weiter aufheizt und sich selber wegen der niedrigeren Rotationsgeschwindigkeit dem Schwarzen Loch nähern muss. Es kommt dadurch zu außerordentlich exzentrischen Bahnen selbst in der direkten Umgebung des Schwarzen Lochs, in der dessen Gravitation bereits eine nennenswerte Rolle

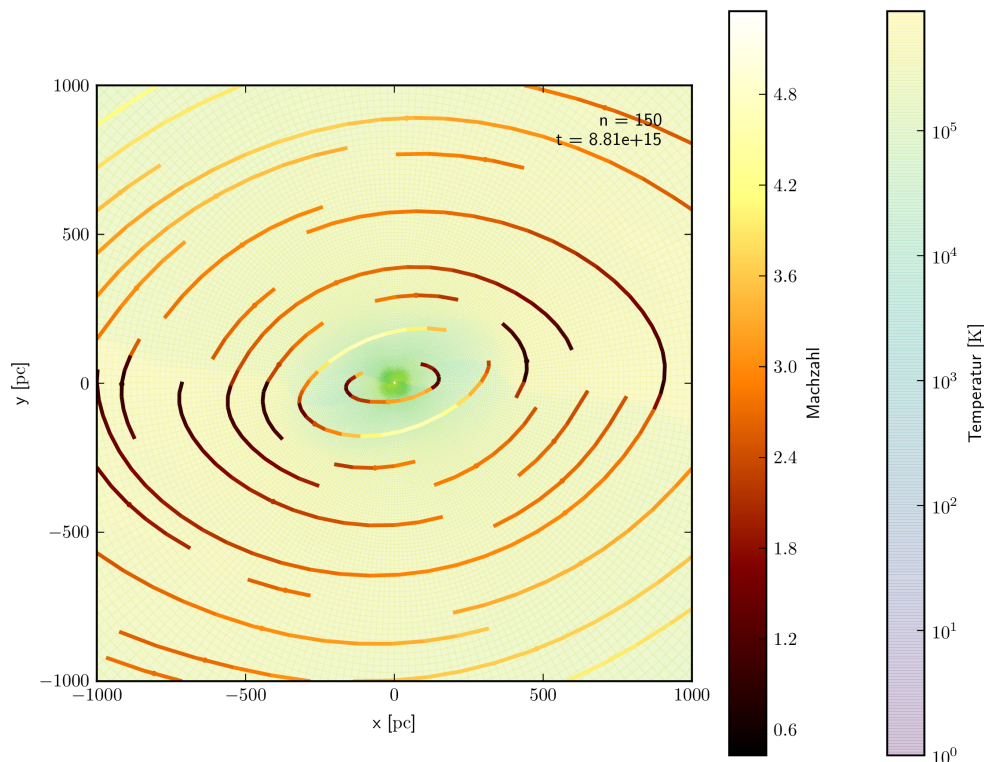


Abbildung 5.22.: Entlang des Balkens sind starke Stoßfronten erkennbar, welche das Gas stark aufheizen. Der Verlust an kinetischer Energie führt dazu, dass die Fluidpartikel auf kleinere Orbits fallen und sich so auf Spiralbahnen sehr schnell in das Zentrum der Scheibe bewegen können.

spielen kann. Das Schwarzwachstum zeigt, dass dies einen außerordentlich effektiven Akkretionsprozess ermöglicht.

Die Akkretion an der Eddingtongrenze kann bereits nach kurzer Zeit von keiner der Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  aufrechterhalten werden. Sie akkretieren nun alle langsamer, bis die mit starker Kühlung  $t_{\text{cool}} \in \{1, 3\}$  nach 350 Myr beziehungsweise nach 500 Myr abrupt ihre Akkretionsrate deutlich verringern und nun schwächer akkretieren. Es folgt nun eine genauere Betrachtung dieses Akkretionsmodus.

#### 5.4.1. Kalte Akkretion

Ein Beispiel kalter Akkretion ist die Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  und einem Kühlungsparameter  $b_{\text{cool}} = 1$ . Die Abbildung 5.23 zeigt die Akkretionsrate und den Eddington-Massenverlust über der Zeit. Während der starken Akkretionsphase, welche alle Simulationen mindestens zu Beginn durchlaufen, lässt die Akkretionsrate in dieser Simulation nach

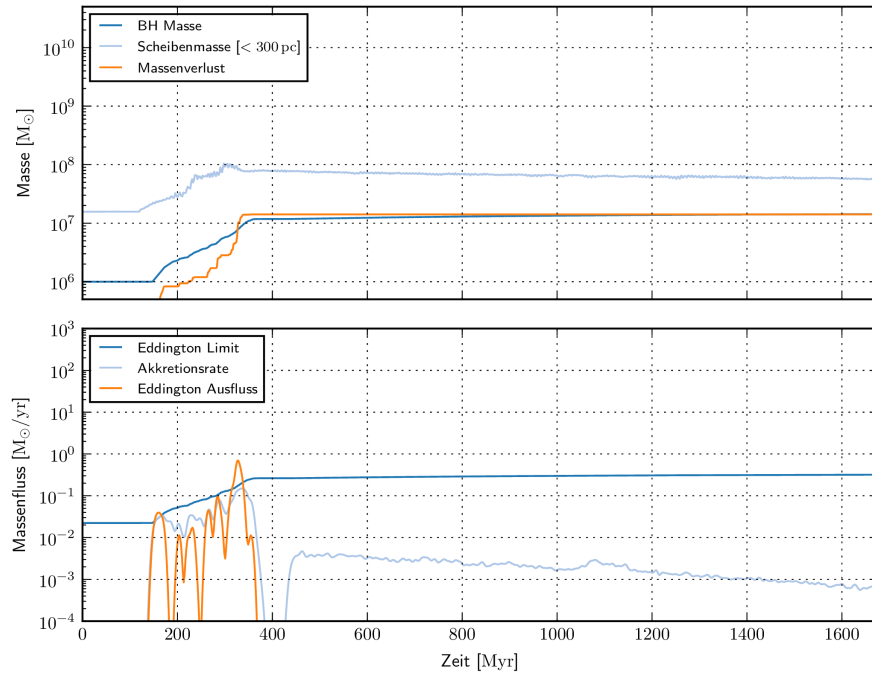


Abbildung 5.23.: Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Akkretionsrate, Eddington-Ausfluss und der Schwarzwachstummasse für die Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $b_{\text{cool}} = 1$ . Abgesehen von einer kurzen Akkretionsphase nach dem Einschalten des Balkens findet relativ schwache Akkretion statt.

etwa 370 Myr sehr stark nach. Nach einem kompletten Einbruch findet eine gleichmäßige Akkretion mit zunächst  $4 \cdot 10^{-3} M_\odot/\text{yr}$  statt, welche im weiteren Verlauf exponentiell abnimmt. Ein Massenverlust durch die Eddingtongrenze, wie zuvor während der starken Akkretion beobachtet wurde, kommt nun nicht mehr vor. Es gehen jedoch in kurzer Zeit bereits mehr als  $> 10^7 M_\odot$  verloren, also etwa soviel, wie das Schwarze Loch akkretiert hat. Die wohl wichtigste Erkenntnis aus diesem Diagramm ist, dass die Akkretionsrate einbricht, kurz nachdem die Masse der inneren Scheibe zu schrumpfen beginnt. Zuvor hat hier ein sehr schnelles Wachstum stattgefunden, welches nach etwa 300 Myr beendet ist. Es handelt sich daher wahrscheinlich um einen Einschalteneffekt, welcher bei  $t = 186$  Myr startet, wenn der Balken seine volle Stärke erreicht hat. Es deutet daher nichts darauf hin, dass sich dieser Prozess im weiteren Verlauf wiederholen könnte. Die innere Scheibe verliert mehr Masse als auf das Schwarze Loch akkretiert oder durch die Eddingtongrenze aus dem System entfernt wird. Die innere Scheibe muss also Material an weiter außen liegende Bereiche der Galaxie verlieren.

Die Abbildung 5.24 zeigt die Dichtestruktur während der starken Akkretion und nach dem Einbruch der Akkretionsrate. Während der starken Akkretion ist die Situation in der Kiloparsec-Region relativ chaotisch. Ringähnliche Strukturen sind zwar vorhanden,

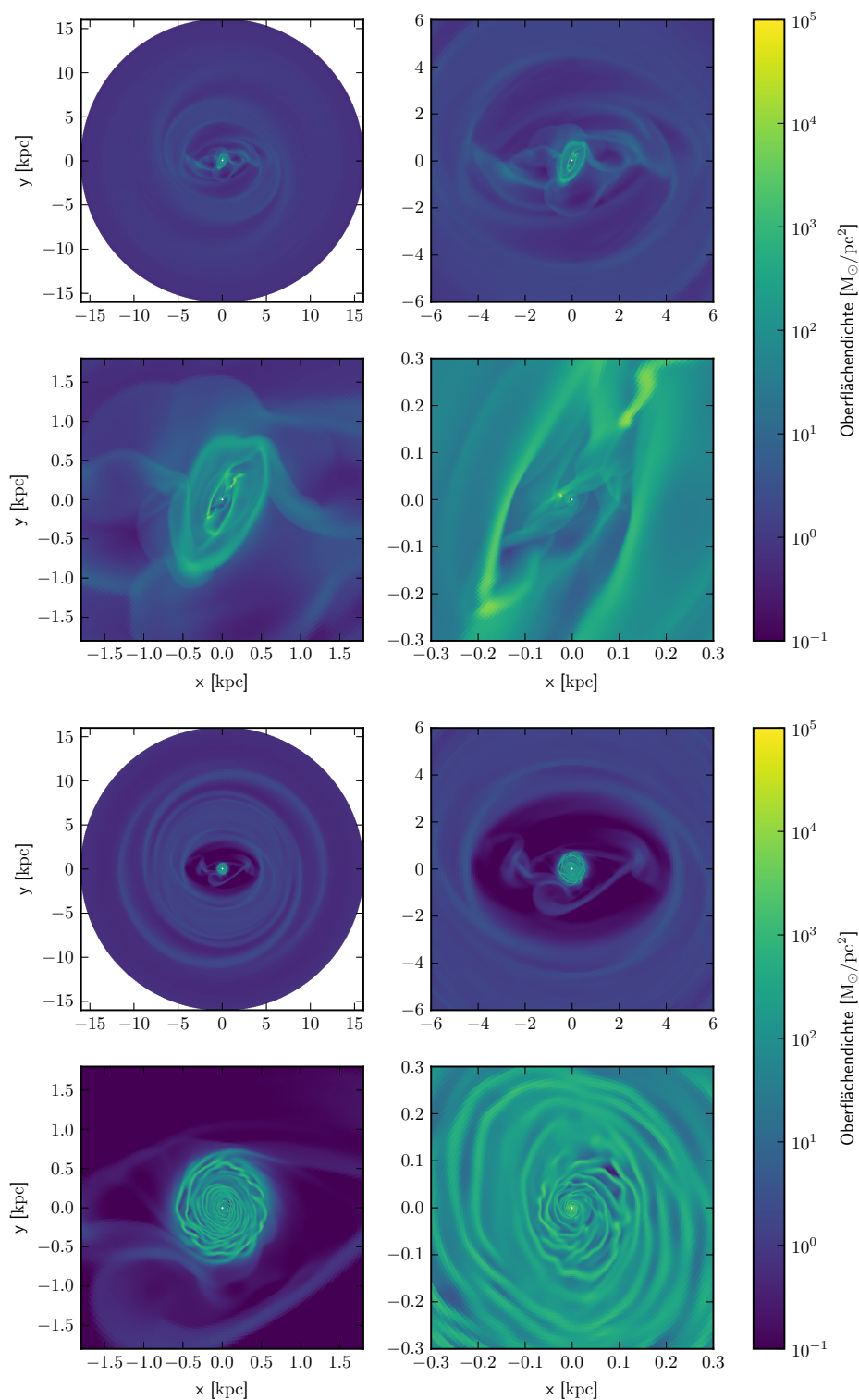


Abbildung 5.24.: Darstellung der Oberflächendichte der Simulation mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $b_{\text{cool}} = 1$  bei verschiedenen Vergrößerungen.

*Oben* (253 Myr): Im Zentrum ist ein relativ irregulärer Ring zu erkennen. Die Gesamtstruktur ist sehr chaotisch und einige Fragmente mit hoher Dichte sind erkennbar.

*Unten* (744 Myr): Im Inneren hat sich jetzt eine marginal-stabile Akkretionsscheibe ausgebildet. Die Region darum ist allerdings sehr gasarm und kann daher nicht effektiv mit der Akkretionsscheibe viskos koppeln. Dies verhindert die Drehimpulsabgabe der Akkretionsscheibe nach außen und damit weitere starke Akkretion.

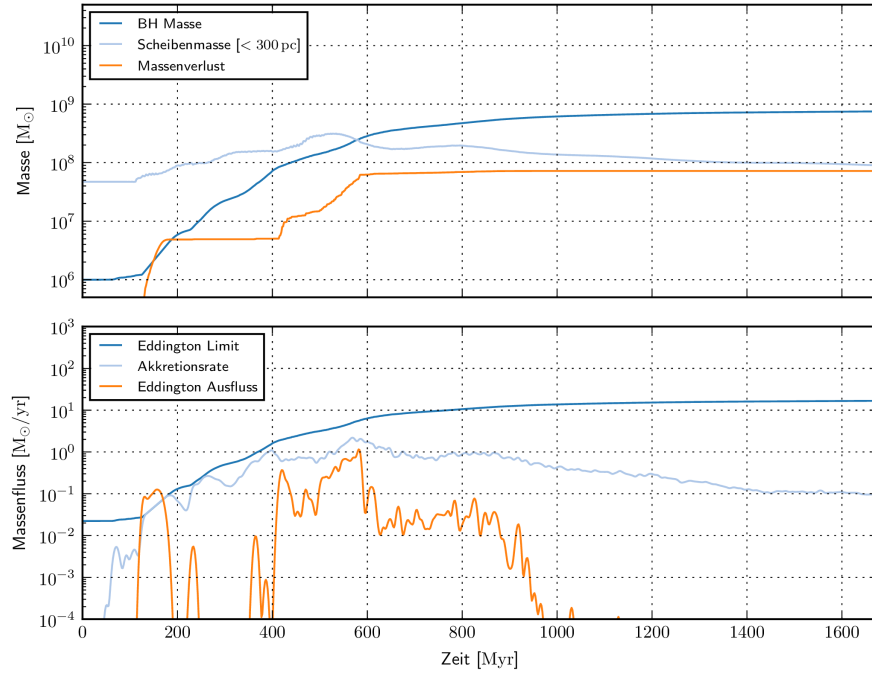


Abbildung 5.25.: Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Akkretionsrate, Eddingtonausfluss und der Schwarzwachstummasse für die Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $b_{\text{cool}} = 6$ . Bereits bevor das Balkenpotential komplett eingeschaltet (186 Myr) ist, kommt es zu stark klumpiger Akkretion. Die innere Scheibenmasse kann schnell ansteigen und dadurch hohe Akkretionsraten von bis zu  $2 M_\odot/\text{yr}$  erreicht werden. Später lässt der Eddingtonausfluss deutlich schneller als die Akkretionsrate nach. Dies lässt darauf schließen, dass es nun weniger klumpige Akkretion gibt.

jedoch eher formlos und eine relativ große Menge Gas strömt etwa entlang des Balkens zu diesen zentralen Strukturen. Nach dem Einbruch der Akkretion hat sich im Inneren eine marginal-stabile Akkretionsscheibe ausgebildet, sodass eigentlich weitere Akkretion zu erwarten wäre. Da die Region um die Akkretionsscheibe jedoch sehr gasarm ist, kann keine effektive viskose Kopplung mit dieser stattfinden und Drehimpuls von der Akkretionsscheibe nach außen transportiert werden (vgl. Illenseer und Duschl, 2015). Ohne Drehimpulstransport kann jedoch auch keine Akkretion stattfinden.

Die Entwicklungen anderer Simulationen in Abbildung 5.20 zeigen, dass viele dieser deutlich länger an der Eddingtongrenze akkretieren und auch, dass zum Beispiel die beiden Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  und der schwächeren Kühlung mehr Material akkretieren können, als die Simulationen mit starker Kühlung. Ein solcher Fall wird im folgenden Abschnitt behandelt.

### 5.4.2. Heiße Akkretion

Ein typischer Fall mit starker Akkretion und schwacher Kühlung ist die Simulation mit einer Dichte von  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  und dem Kühlungsparameter  $t_{\text{cool}} = 6$ . Die Abbildung 5.25 zeigt die Akkretionsrate und den Eddingtonverlust im Laufe der Simulationszeit. Bereits bevor das Balkenpotential komplett eingeschaltet ist, findet nennenswert Akkretion auf das Zentralobjekt statt. Im weiteren Verlauf bis zu 600 Myr liegt die Akkretionsrate nahe der Eddingtongrenze, wobei die Verlustrate für eine teils klumpige Akkretion spricht. Nachdem die maximale Akkretionsrate von  $2 M_\odot/\text{yr}$  nach 600 Myr erreicht ist, sinkt sie etwa exponentiell bis sie die letzten 200 Myr konstant bei  $0.1 M_\odot/\text{yr}$  verbleibt. Der Verlauf der Akkretionsrate scheint dabei eng mit dem Verlauf der inneren Scheibenmasse verknüpft zu sein. So wird die maximale innere Scheibenmasse von  $3 \cdot 10^8 M_\odot$  kurz vor der maximalen Akkretionsrate erreicht. Die innere Scheibe erzeugt nicht selbst den Akkretionsprozess, sondern reicht das von außen kommende Material mit einer gewissen Verzögerung nach innen weiter. Der innere Transportmechanismus entspricht dem zuvor beschriebenen der Energiedissipation an starken Stoßfronten, wie er in Abbildung 5.22 illustriert ist. Genau wie zum Start aller Simulationen befinden sich im Zentrum dieser zwei Stoßfronten, welche kinetische in thermische Energie dissipieren und dadurch für eine heiße innere Regionen und stark exzentrische Orbits sorgen. Auf diese Weise kann schnell Drehimpuls nach innen abgegeben und effektiv Masse akkretiert werden.

### 5.4.3. Weitere Trends

Alle Simulationen mit Temperaturstruktur münden in den heißen oder kalten Akkretionsmodus. Welcher der beiden erreicht wird, hängt dabei nicht wesentlich von der Masse ab, sondern nur von dem Kühlungsparameter. Die Abbildung 5.20 zeigt am Beispiel der massearmen Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$ , dass der genaue Parameter allerdings im gewählten Parameterraum keine Rolle spielt, sondern nur, ob er unter oder über der kritischen Grenze liegt. Die am Ende resultierende Schwarzwlochmasse hängt von der Anfangsscheibenmasse, also dem Dichteparameter und dem Akkretionsmodus ab. Die resultierende Masse der kalten und der heißen Akkretion unterscheiden sich für diese Simulationen immerhin um einen Faktor fünf. Das die Endmasse stark von der initialen Scheibenmasse abhängt, bleibt unverändert von den isothermen Simulationen, wie zum Beispiel die Simulationen mit  $b_{\text{cool}} = 3$  in Abbildung 5.20 zeigen.

Eine Ausnahme stellt die Simulation mit  $\Sigma_0 = 50 M_\odot/\text{pc}^2$  und  $b_{\text{cool}} = 3$  dar. Im Gegensatz zu Simulationen mit anderen Scheibenmassen führt diese Kühlung nicht zu den gleichen Schwarzwlochmassen wie bei der Simulation mit einem Kühlungsparameter  $b_{\text{cool}} = 1$ , sondern liegt zwischen dem kalten und heißen Akkretionsmodus. Die Grenze beim Kühlungsparameter ist anscheinend Scheibenmassen abhängig und in diesem Fall wurde genau der Übergangsbereich getroffen.

Die Abbildung 5.26 zeigt die Akkretionsraten aller Galaxiensimulationen mit Tempera-

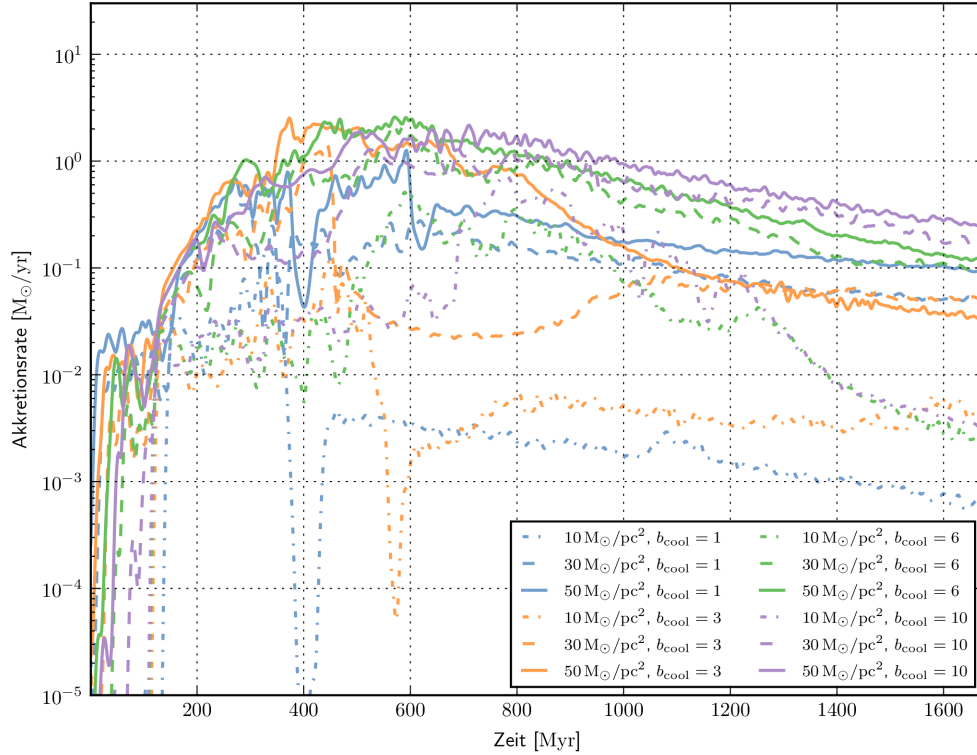


Abbildung 5.26.: Darstellung der Akkretionsraten aller Galaxiensimulationen mit Temperaturstruktur. Die Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  Anfangsmassendichte weisen deutlich geringere Akkretionsraten zum Ende der Simulationen auf, als alle anderen Simulationen. Die massereicheren Simulationen besitzen ab 800 Myr Akkretionsraten mit relativ geringer Variation die exponentiell fallen.

turstruktur. Im Gegensatz zu den isothermen Simulationen ist hier kein ganz eindeutiger Trend zwischen einer starken und schwachen Akkretion zu erkennen. Die Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$  zeigen zum Ende der Simulation nur noch eine Akkretionsrate von weniger als  $5 \cdot 10^{-3} M_\odot/\text{yr}$ . Die Simulationen mit höherer Anfangsmassendichte haben hingegen Akkretionsraten von mehr als  $2 \cdot 10^{-2} M_\odot/\text{yr}$ . Sie weisen außerdem ab etwa 800 Myr eine exponentiell sinkende Akkretionsrate auf.

In der Tabelle 5.6 sind die mittleren und maximalen Akkretionsraten, sowie die endgültig resultierenden Schwarzwachsmassen aufgetragen. Heiße Simulationen mit schwacher Kühlung und  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  erreichen höhere Schwarzwachsmassen als die massereicheren Simulationen mit kalter Akkretion. Bei allen Massendichten werden bei den Simulationen mit  $b_{\text{cool}} = 10$  die höchsten Schwarzwachsmassen und Akkretionsraten erreicht. Die Tabelle 5.6 listet ebenso auf, welche Struktur in der inneren Scheibe und ob nukleare Ringe entstehen und über lange Zeiten erhalten bleiben. Nur bei der geringsten Oberflächendichte können nukleare Ringe entstehen, da sie andernfalls sehr schnell oder bereits vor



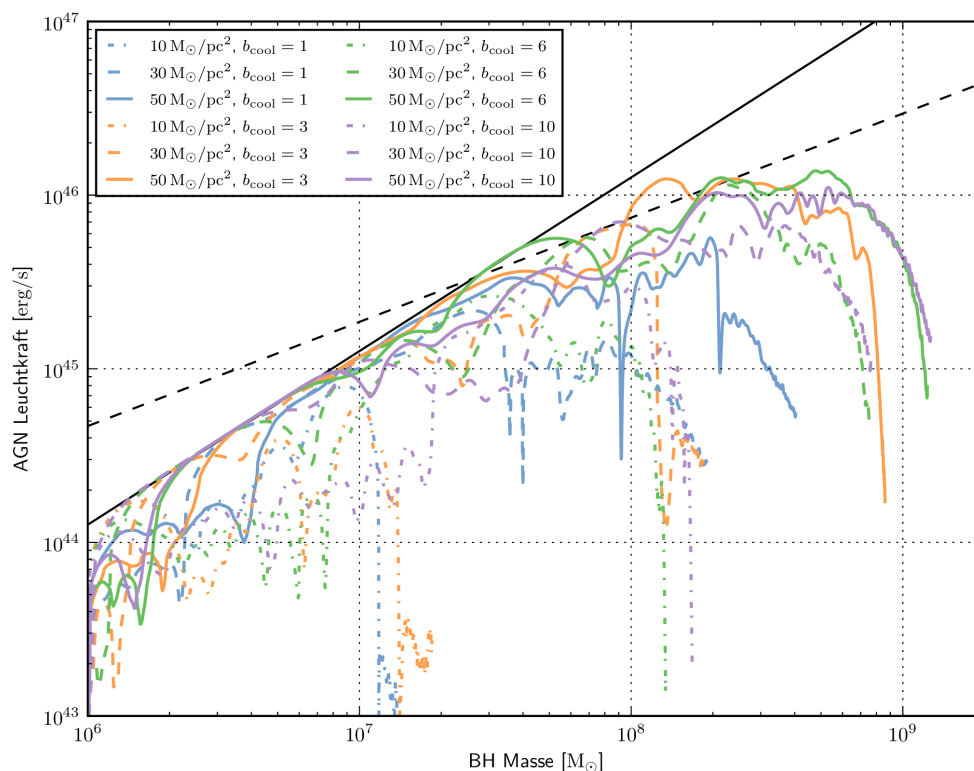


Abbildung 5.27.: Evolutionspfade der Schwarzen Löcher in den Galaxiensimulationen mit Temperaturstruktur. Alle Simulationen akkretieren lange Zeit nahe der Eddingtongrenze (schwarze Linie). Je nach Anfangsparameter verlassen sie diesen Evolutionspfad bei unterschiedlichen Schwarzslochmassen und weisen stark sinkende AGN Leuchtkräfte auf. Die gestrichelte schwarze Linie gibt die Subeddingtongrenze für Rotverschiebungen von  $0.6 < z < 0.8$  aus Steinhardt und Elvis (2010) an.

ihrem entstehen durch gravitative Instabilitäten zerstört werden. Die Simulationen mit starker Kühlung weisen eine gravitativ instabile innere Scheibe auf. Die Fragmentation zerstört die sich zunächst in allen Simulationen bildenden inneren Stoßfronten. Die heißen Simulationen mit schwacher Kühlung können diese Stoßfronten über die gesamte Simulationsdauer erhalten und werden im Innenbereich nicht gravitativ instabil.

Im Gegensatz zu den isothermen weisen alle Simulationen mit Temperaturstruktur nennenswertes Schwarzslochwachstum auf, sodass die Abbildung 5.27 des AGN Leuchtkraft-Massen-Diagramms für alle Simulationen lange Entwicklungspfade zeigt. Die Evolutionswege sehen dabei alle sehr ähnlich aus: Zunächst findet eine Akkretionsphase an der Eddingtongrenze statt, welche stark variabel sein kann. Dies könnte wieder durch den relativ weit außen liegenden inneren Rechenrand bedingt sein. Material welches diesen übertritt, wird direkt bezüglich der Eddingtongrenze bewertet, sodass klumpige Akkretion

$\Sigma_0$ [ $M_\odot/\text{pc}^2$ ]	$b_{\text{cool}}$	$\langle \dot{M} \rangle$ [ $M_\odot/\text{yr}$ ]	$\max(\dot{M})$ [ $M_\odot/\text{yr}$ ]	Ring	Innere Scheibe	$M_{\text{BH}}$ [ $M_\odot$ ]
10	1	$0.01 \pm 0.02$	0.21	Ja	GI	$1.43 \cdot 10^7$
10	3	$0.01 \pm 0.02$	0.22	Ja	GI	$1.85 \cdot 10^7$
10	6	$0.08 \pm 0.12$	0.66	Ja	Stoß	$1.34 \cdot 10^8$
10	10	$0.10 \pm 0.16$	0.74	Ja	Stoß	$1.68 \cdot 10^8$
30	1	$0.13 \pm 0.09$	0.62	Nein	GI	$1.90 \cdot 10^8$
30	3	$0.11 \pm 0.23$	2.25	Nein	GI	$1.86 \cdot 10^8$
30	6	$0.45 \pm 0.46$	3.14	Nein	Stoß	$7.51 \cdot 10^8$
30	10	$0.46 \pm 0.39$	2.22	Nein	Stoß	$7.70 \cdot 10^8$
50	1	$0.24 \pm 0.23$	2.13	Nein	GI	$4.03 \cdot 10^8$
50	3	$0.51 \pm 0.65$	3.16	Nein	GI/Stoß	$8.59 \cdot 10^8$
50	6	$0.73 \pm 0.72$	4.95	Nein	Stoß	$1.23 \cdot 10^9$
50	10	$0.75 \pm 0.60$	3.34	Nein	Stoß	$1.27 \cdot 10^9$

Tabelle 5.6.: Übersicht über mittlere und maximale Akkretionsrate, entstehende Strukturen (GI: Gravitative Instabilitäten, Stoß: Stoßfronten) und Schwarzwachstumsmassen am Ende der Simulationen mit Temperaturstruktur.

sehr oft hohe Eddingtonausflüsse zur Folge hat. Tatsächlich müssten diese Klumpen noch einige Dekaden Radius der Akkretionsscheibe außerhalb des Rechengebiets durchlaufen. Falls sie dort durch die differentielle Rotation ausgeschert werden, ist die eigentliche Akkretion kontinuierlicher und führt zu keinem so starken Ausfluss. Nach einer gewissen Zeit, abhängig von den Parametern, verlassen die Simulationen die Akkretion an der Eddingtongrenze und knicken allmählich zu schwächeren AGN Leuchtkräften ab. Oft ist der Abfall nach kurzer Zeit sehr groß, sodass das Schwarze Loch nur noch marginal wächst.

Die Evolutionspfade können jetzt mit den Helligkeiten und Schwarzwachstumsmassen von 60000 Quasaren aus Steinhardt und Elvis (2010) verglichen werden. Die Autoren zeigen, dass Quasar Ensembles unterschiedlicher Rotverschiebungen unterschiedliche Subbeddingtongrenzen aufweisen. Die jüngsten Quasare, die die in den Simulationen gemessenen Schwarzwachstumsmassen von bis zu  $2 \cdot 10^9 M_\odot$  erreichen, haben eine Rotverschiebung von  $z \approx 0.8$ . Daher ist in der Abbildung 5.27 die von Steinhardt und Elvis (2010) bestimmte Subbeddingtongrenze für Quasare mit Rotverschiebungen von  $0.6 < z < 0.8$  als schwarz gestrichelte Linie eingezeichnet. Die Ergebnisse der Simulationen stimmen mit dieser Grenze gut überein, bevor ihre Akkretionsraten stark zurück gehen. Um eine eindeutige Aussage zu treffen, wären Simulationen mit höheren Massen wünschenswert.

#### 5.4.4. Zusammenfassung und Diskussion

Die klumpige Akkretion spielt in vielen der betrachteten Simulationen eine wesentliche Rolle. Vor allem die isothermen Simulationen mit starker Akkretion besitzen Eddingtonausflüsse, die vergleichbar groß wie die Akkretionsrate sind. Die einfache Implementierung der Eddingtonakkretionsgrenze könnte hier nicht mehr ausreichend sein. Einerseits befindet sich ein wesentlicher Teil der Akkretionsscheibe außerhalb des Rechengebiets bei Radien  $< 2$  pc. Dort könnten die Klumpen zu einer homogeneren Scheibe zerfallen, welche das Material kontinuierlicher auf das Schwarze Loch transportiert. Das wäre vor allem beim Einfall einzelner massereicher Klumpen relevant. Ist die Ausflussrate allerdings konstant sehr hoch, würde dies keinen besonderen Einfluss besitzen. Andererseits ist die Eddingtongrenze nicht als Maximum einer variablen Akkretionsrate anzusehen. Sie gibt den Grenzfall zwischen der Kräftebillanz von Gravitationskraft und Thomson-Streuung an (siehe Abschnitt 2.1.2). Das bedeutet, dass massereiche Klumpen mit starkem nach innen gerichtetem Impuls, wie es zum Beispiel bei typischer Klumpen-Klumpen-Wechselwirkung häufig vorkommt, durch die Thomson-Streuung zwar abgebremst werden, aber dennoch das Schwarze Loch erreichen können. Aber auch für diesen Fall ist eine detaillierte Modellierung der Scheibe  $< 2$  pc notwendig. Diese Limitierungen des Modells erfordern die Interpretation der ermittelten Akkretionsraten vor allem im Fall klumpiger Akkretion als untere Grenzen. Die Akkretionsraten und Eddingtonausflüsse einer solchen Simulation sind in Abbildung 5.17 (oben) zu sehen. Der Gesamteffekt auf die endgültige Schwarzslochmasse ist jedoch vernachlässigbar, da selbst in dem Fall, in dem gar keine Masse durch die Eddingtongrenze verloren gehen würde, das Schwarze Loch maximal weniger als den Faktor 2 an Masse gewinnt. Dennoch wäre ein insgesamt anderer Verlauf der Simulation und Akkretion denkbar, da der Massenverlust durch die Eddingtongrenze einen Einfluss auf die Masse und damit auf die Relevanz von Selbstgravitation der inneren Scheibe haben kann.

Bisher sind die beteiligten Temperaturen in den Simulationen noch nicht detailliert diskutiert worden, da zum Beispiel keine Quellterme, die aufgrund der Temperatur unterschiedlich kühlen, verwendet werden. Die Temperatur geht in den Simulationen nur indirekt durch den Druck, beziehungsweise die Schallgeschwindigkeit und damit auch in das Toomre-Kriterium mit ein. Unter der Annahme eines idealen Gases, welches vollständig ionisiert ist und zu 75% aus Wasserstoff, sowie 25% aus Helium besteht, ergibt sich eine mittlere molekulare Masse zu  $\mu = 6.02 \cdot 10^{-4}$  kg/mol und die Temperatur kann in Abhängigkeit der Dichte und des Drucks bestimmt werden (siehe z.B. Hanslmeier, 2002):

$$T = \frac{\mu p}{R \rho}. \quad (5.66)$$

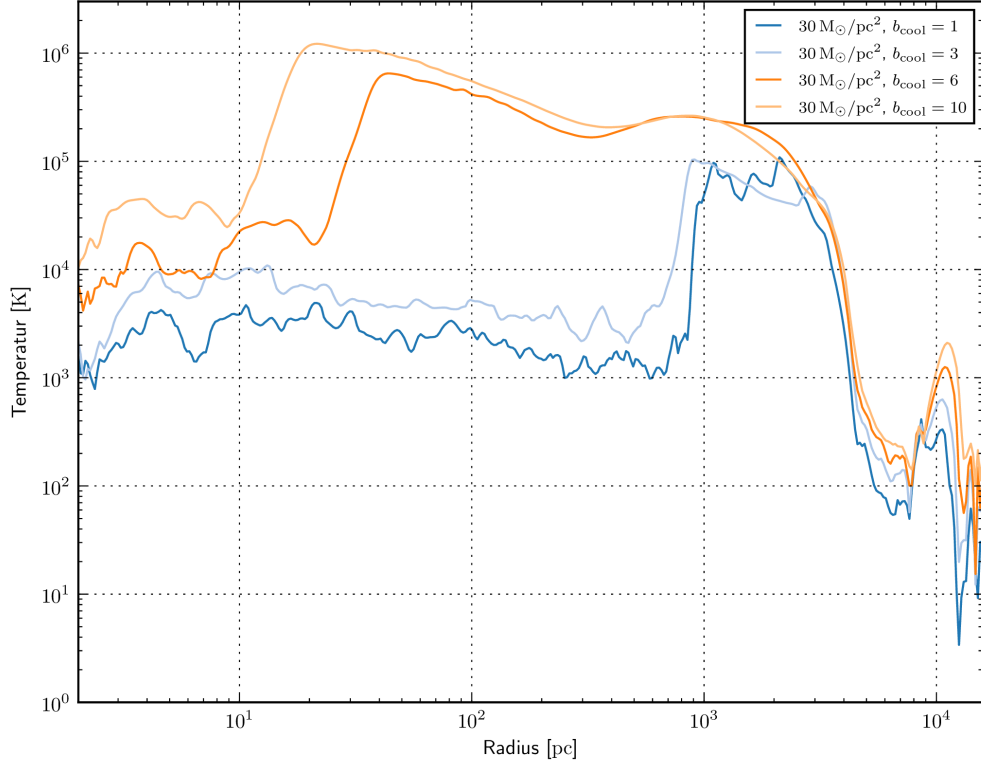


Abbildung 5.28.: Azimutal gemittelter Temperaturverlauf der isentropen Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$ . Die Simulationen mit starker Kühlung haben im Bereich  $< 1 \text{ kpc}$  Temperaturen, welche typischerweise im warmen ionisierten Medium erwartet werden. Die Simulationen mit schwacher Kühlung weisen hingegen sehr hohe Temperaturen bis zu  $10^6 \text{ K}$  auf, wenn die hydrodynamischen Schallgeschwindigkeiten der idealen Gasgleichung zu Grunde liegen.

Für eine isotherme Zustandsgleichung ist

$$\frac{p}{\rho} = c_s^2. \quad (5.67)$$

Die isothermen Simulationen besitzen dementsprechend Temperaturen von

$$T \in \{72, 652, 1811, 7244\} \text{ K}. \quad (5.68)$$

Die Abbildung 5.28 zeigt den radialen azimutal gemittelten Temperaturverlauf der Simulation mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$  für die unterschiedlichen Kühlungsparameter. Die Temperaturen in den Simulationen mit Temperaturverlauf entsprechen bei kalter Akkretion bis zu Radien von  $1 \text{ kpc}$  dem warmen ionisierten Medium (siehe Abschnitt 2.1.1). Dies gilt ebenso für

den Bereich innerhalb von etwa 10 pc in Simulationen mit heißer Akkretion. Außerhalb von diesen Radien können die Simulationen mit heißer Akkretion Temperaturen von  $10^5 - 10^6$  K erreichen, was eher den typischen Temperaturen von heißem koronalem Gas entspräche. Die Temperaturen in den isothermen Simulationen stimmen je nachdem gut mit denen des molekularen Gases  $\sim 100$  K oder dem warmen neutralen oder ionisierten Medium überein. Wie bereits bemerkt, haben die Temperaturen selber keine direkten Auswirkungen auf die Simulation, weil keine temperaturabhängigen Quellterme verwendet werden.

Da wie bereits bemerkt, keine direkt Temperatur abhängigen Quellterme in den Simulationen eingehen, ist die Schallgeschwindigkeit die einzige temperaturabhängige Größe, welche jedoch eine wesentliche Größe der Gasdynamik darstellt. In den Simulationen mit Temperaturprofil ist in allen Simulationen am Anfang eine starke Stoßfront zu beobachten, welche das Material in der inneren Scheibe  $< 1$  kpc stark auf Temperaturen von bis zu  $10^{5..6}$  K aufheizt. Diese Struktur ist in Simulationen mit schwacher Kühlung auch noch am Ende der Laufzeit zu beobachten. Ob eine solche Lösung realistisch ist, muss kritisch hinterfragt werden. Sehr hohe Temperaturen werden in Galaxien zum Beispiel in der direkten Nähe des Schwarzen Lochs erwartet und erreichen hier  $\sim 6 \cdot 10^5$  K (Alexander und Hickox, 2012). Heißes koronales Gas kann aber auch durch Stoßkompression von Supernovae-Explosionen erzeugt werden (McKee und Ostriker, 1977). Die explodierenden Sterne erzeugen dabei große heiße Blasen geringer Dichte im interstellaren Medium (Krause et al., 2014; Scannapieco et al., 2008; Seitzzahl et al., 2013). Insgesamt müssen die Prozesse, welche zur Kühlung und Heizung des Gases beitragen genauer modelliert werden. Die in dieser Arbeit verwendeten Beiträge bestehen aus Stoß- und Kompressionsheizung und einer einfachen Kühlung in Abhängigkeit der dynamischen Zeitskala. Die Wahl der Kühlungsparameter stützt sich dabei auf eine Wahl von Parametern um den kritischen Wert von  $b_{\text{cool}}$ , welcher bekanntermaßen (Gammie, 2001) eine gravitativ-turbulente Strömung erzeugt. Die eigentlich benötigten Kühlprozesse arbeiten auf Zeitskalen von  $\sim 10^{-6..-4} \tau_{\text{dyn}}$  (Hopkins und Quataert, 2010). Auch die Heizprozesse zum Beispiel durch Supernovae-Explosionen finden deutlich schneller als die dynamische Zeitskala statt, wie bereits in Abschnitt 5.2 beschrieben. Die in dieser Arbeit verwendete Kühlung soll daher den effektiven Beitrag aus der Bilanz von den tatsächlichen Kühl- und Heizbeiträgen modellieren, um die andernfalls entstehenden sehr kleinen Zeitschritte bei der Berechnung zu vermeiden.

FOSITE bietet die Möglichkeit der Kühlung mit der Methode von Hubeny (1990), welche eine graue Abstrahlung mit mittleren Rosselandopazitäten nach Bell und Lin (1994) modelliert. Dies führt tatsächlich zu sehr kurzen Kühlungszeitskalen und dementsprechend kleineren Zeitschritten und längeren Simulationsdauern. Das zentrale Problem dabei ist, dass das komplette Gas in kürzester Zeit bis auf die minimal erlaubte Temperatur (siehe Abschnitt 5.1.4) abgekühlt wird. Das ist nicht weiter verwunderlich, da bisher ja keine Heizterme betrachtet wurden. Eine Modellierung der Heizterme ist allerdings auch besonders schwierig. Die Heizung findet hauptsächlich durch das Sternenlicht und Supernovae

statt. Die Supernovae können durch Stoßkompression und Impulseintrag eine sehr starke Heizung darstellen und sind vor allem in den inneren Bereichen hoher Dichte, welche hohe Opazitäten und starke Sternentstehung aufweisen, von großer Wichtigkeit (z.B. Kim und Ostriker, 2015; Seo und Kim, 2013). Dies sind jedoch Prozesse, die bei weitem nicht durch die ausgeführten Hydrodynamiksimulationen aufgelöst werden können. Um die Heizprozesse zu modellieren, ist daher ein sogenanntes Subgrid-Scale-Modell notwendig. Dieses modelliert die Sternentstehung, beziehungsweise die Entstehung von Sternclustern, den Feedback der Sternentstehung (Strahlungseintrag) und von Supernovae-Explosionen. Das Resultat ist Gasturbulenz auf Skalen kleiner als das Gitter der Hydrodynamiksimulation. Um diese turbulenten Bewegungen auf kleinsten Skalen zu modellieren, kann zum Beispiel ein turbulenter Druck eingeführt werden (Alexander und Hickox, 2012; Murray et al., 2010), welcher zusammen mit dem thermischen Druck einen effektiven Druck (Robertson et al., 2006; Springel und Hernquist, 2005; Springel et al., 2005) bildet. Dieser effektive Druck ist hoch genug, um den Kollaps auf kleinen Skalen zu verhindern und kann den Toomre-Parameter und die Jeanslänge erhöhen. Murray et al. (2010) verwenden zum Beispiel im Einklang mit Beobachtungen (z.B. Downes und Solomon, 1998) turbulente Schallgeschwindigkeiten der Größenordnung  $10 - 100$  km/s. Die hohen Schallgeschwindigkeiten in den Simulationen können also als effektive Schallgeschwindigkeiten interpretiert werden, welche sich aus thermischem und turbulentem Druck zusammensetzen. Kim et al. (2012) begründen damit auch ihre hohen isothermen Schallgeschwindigkeiten von bis zu  $20$  km/s.

Die beobachteten Gastemperaturen lassen den Schluss zu, dass es sich um teilweise ionisiertes Gas handeln muss. Daher könnten Magnetfelder eine wichtige Rolle in der Hydrodynamik spielen. Kim und Stone (2012) haben zweidimensionale nicht-selbstgravitierende Magneto-hydrodynamik-Simulationen von Balkengalaxien durchgeführt. Sie berichten davon, dass die typischen Spiralarme durch die Magnetfelder geringere Dichten aufweisen und in allen Simulationen nukleare Ringe beobachtet werden. Anfangs gibt es zudem eine zweite Balkenstruktur (Shlosman et al., 1989) innerhalb des nuklearen Rings im Einklang mit Beobachtungen (z.B. Friedli et al., 1996; Shaw et al., 1995). Es können außerdem durchschnittliche Akkretionsraten von  $10^{-4} - 10^{-2} M_{\odot}/\text{yr}$  beobachtet werden. Da in ihren Modellen allerdings keine Selbstgravitation oder das Potential einer äußeren Spiralstruktur modelliert wird, gelangt nach einer initialen Phase kein weiteres Material aus der Region auf Kiloparsec-Skala mehr in die innere Scheibe.

Nukleare Ringe können in einer Vielzahl von Systemen (z.B. Fathi et al., 2015; Koay et al., 2016; König et al., 2016; Martini et al., 2003a,b), teils mit offensichtlich klumpiger Struktur (z.B. Xu et al., 2015) und sogar im galaktischen Zentrum (Lau et al., 2013) beobachtet werden. Die Beobachtungen weisen Oberflächendichten von  $10^2 M_{\odot}/\text{pc}^2$  (Fathi et al., 2015) im inneren Kiloparsec bis zu  $10^4 M_{\odot}/\text{pc}^2$  (Xu et al., 2015) maximaler Dichte in klumpigen Ringstrukturen auf. Die Messungen unterliegen jedoch großen Unsicherheiten, besonders wegen des benötigten Umrechnungsfaktors zwischen Indikator HCN und der Gasdichte. Die klumpigen Ringstrukturen stehen im Einklang mit den Ergebnissen der in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen, welche in dem Bereich  $> 100$  pc Dichten von

$10^4 M_{\odot}/\text{pc}^2$  erreichen können. Zwischen 2 – 100 pc werden bei massereichen Simulationen mit Temperaturstruktur sogar Dichten von mehr als  $10^5 M_{\odot}/\text{pc}^2$  beobachtet. Diese Regionen können von den Beobachtungen jedoch nicht aufgelöst werden. Die maximale Auflösung von zum Beispiel  $^{12}\text{CO}$  in NGC1808 beträgt  $\sim 100$  pc (Salak et al., 2016). Die radialen Dichteverläufe sind dabei kein Artefakt der Anfangsbedingungen, die innen eine deutlich geringere Dichte aufweist, sondern ist ein Teil der sich einstellenden Lösung (siehe dazu die Karten des radialen Dichteverlaufs über der Zeit im Anhang A.8).

Fathi et al. (2015) können einen Stabilitätsparameter  $Q$  (Romeo und Falstad, 2013; Romeo und Wiegert, 2011) für ihre Beobachtung von HCN-Gas ähnlich dem Toomre-Parameter bestimmen, welcher ebenfalls die Dicke der Scheibe in die Betrachtung mit einbezieht. Ihr Ergebnis ist, dass die innere Scheibe  $< 500$  pc stabil und die Ringregion  $\sim 800$  pc instabil ist. Die Simulationen in dieser Arbeit weisen häufig auch innerhalb eines nuklearen Rings gravitativ instabile innere Scheiben ( $< 300$  pc) auf. Dies kann durch die Beobachtungen nicht bestätigt werden und ist ein weiterer Hinweis darauf, dass stabilisierende Faktoren in das Modell mit einbezogen werden müssen. Im letzten Abschnitt ist bereits auf die Möglichkeit einer effektiven Schallgeschwindigkeit eingegangen worden, welche die Stabilität des Systems erhöhen würde (Romeo et al., 2010).





## 6. Fazit

Das Ziel dieser Arbeit ist, die Auswirkungen eines stellaren Balkens in einer Spiralgalaxie auf die selbstgravitierende Gasscheibe und auf das Schwarzwachstum mit Hilfe von hydrodynamischen Simulationen zu untersuchen. Dafür ist es notwendig, ein sehr gutes Verständnis des numerischen Verfahrens zu besitzen, um dessen Eignung für die betrachteten hydrodynamischen Probleme zu überprüfen. Diese Aussage lässt sich auf numerische Modelle mit anderen Verfahren ganz unabhängig von der Hydrodynamik verallgemeinern. Die fundamentalen Erhaltungssätze für Masse, Impulse, Drehimpuls und Energie müssen in Inertialsystem und beschleunigtem Bezugssystem eingehalten werden. Dies gilt besonders für quasi-stationäre Probleme, wie zum Beispiel Planet-Scheibe-Wechselwirkungen und Balkenspiralgalaxien, welche die Ausbreitung von kleinen Störungen um einen ruhenden Zustand beobachten. Um die Erhaltungseigenschaften zu gewährleisten, muss beträchtlicher Aufwand getrieben werden. Die Herstellung der formellen Erhaltungseigenschaften, wie bei dem Verfahren der Änderung der Erhaltungsgrößen, führt nicht unbedingt zu dem gewünschten Ergebnis im numerischen Verfahren. Die Änderung der konservativen Variablen stellt einen starken Eingriff in den Charakter der Gleichungen dar und führt an vielen Stellen im numerischen Verfahren zu Problemen, beziehungsweise neuen Herausforderungen. Manche Quellterme müssen angepasst werden, Randbedingungen können leicht abweichende Bedeutungen erhalten, die Rekonstruktion wird abhängig von der Geometrie. Der Grund dafür ist vor allem die Auflösung der üblichen Zusammenhänge zwischen primitiven und konservativen Variablen. Dennoch können mit der neu implementierten Methode der Änderung der Variablen effektiv die gewünschten Erhaltungseigenschaften hergestellt werden. Statt azimuthalem spezifischem Impuls und spezifischer Geschwindigkeit, welche sich nur durch die Dichte unterscheiden, finden spezifischer Inertialimpuls und die Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem Verwendung. Diese beiden neuen Größen unterscheiden sich dabei nicht mehr nur durch die Dichte, sondern erfordern eine von den Koordinaten abhängige Transformation.

Die in dieser Arbeit neu hinzugefügte Methode des modifizierten Transports ist deutlich vielfältiger in der Verwendungsmöglichkeit. Ihre hervorragenden Erhaltungseigenschaften lassen sich mit allen Modulen von FOSITE verwenden, da die konservativen Variablen nicht modifiziert werden. Bisher kann das Verfahren für polare Geometrien verwendet werden. In Zukunft wäre eine Implementierung für die Shearingbox wünschenswert. Zudem lässt sich das Verfahren auch auf weitere kritische Quellterme, wie zum Beispiel die Gravitation, anwenden. Da sich Akkretionsscheiben typischerweise im Gravitations-Fliehkraft-Gleichgewichten befinden, kann die übliche direkte Implementierung der resultierenden

großen radialen Gravitationsbeschleunigungen zu numerischen Instabilitäten führen, welche nur bei der Verwendung von Drehimpulserhaltung auftreten. Erst wenn all diese Zutaten zusammen genommen werden, lassen sich nicht isotherme quasi-stationäre Simulationen mit axial- oder nicht axialsymmetrischen Gravitationsquelltermen durchführen. Möglicherweise ist das der Grund dafür, dass wenig andere nicht-isotherme quasi-stationäre Simulationen in der Literatur zu finden sind, die auf einem Gitter diskretisiert sind. Es konnte gezeigt werden, dass das Verfahren des modifizierten Transports sich hervorragend für Akkretionsscheiben, welche exakte Drehimpulserhaltung benötigen, eignet und zudem einen minimalen Eingriff in die komplexe Struktur einer Hydrodynamiksoftware erfordert. Dadurch ist es für eine große Bandbreite an unterschiedlichen Problemstellungen verwendbar und fügt keine neuen Abhängigkeiten zum Beispiel der Quellterme, der Rekonstruktion oder des Flussmoduls von der Drehimpuls und Energieerhaltung hinzu.

Für schwache Störungen kann die Verwendung vollständiger Riemann-Löser, welche alle Wellenlösungen approximieren können, unverzichtbar sein. Ursprünglich war in FOSITE nur das Kurganov-Tadmor-Verfahren implementiert. Dessen größter Vorteil ist die Anwendbarkeit auf eine große Klasse von Erhaltungsgleichungen, ohne auf die Eulergleichungen eingeschränkt zu sein. Insbesondere hat dies die Implementierung der Methode der Änderung der Transportgrößen zur Drehimpuls- und Rothalpieerhaltung in dieser Arbeit möglich gemacht. Die Eulergleichungen besitzen aber mehr als die zwei Wellen, welche durch die Kurganov-Tadmor Flüsse approximiert werden. Bei der Verwendung der vollständigen nicht isothermen Gleichungen sind seit langem gute Approximationsverfahren der vollständigen Riemann-Lösung bekannt, welche auch die Ausbreitung von Kontaktunstetigkeiten beachten. Für die isothermen Gleichungen ist allerdings relativ unbekannt, dass die Lösung Kontaktunstetigkeiten besitzen kann. Typischerweise werden Riemann-Löser für eindimensionale Probleme abgeleitet und dann zu einem mehrdimensionalen Verfahren zusammengesetzt. Die Betrachtungen in dieser Arbeit zeigen, dass falls der eindimensionale Fluss in einer zweidimensionalen Umgebung eingebettet ist, Kontaktunstetigkeiten existieren und zudem durch eine Modifikation des Verfahrens approximiert werden können. Mit den numerisch durchgeführten Tests konnte nachgewiesen werden, dass eine deutlich höhere Auflösung für Probleme, in denen Kontaktunstetigkeiten eine Rolle spielen, erreicht werden kann. Der zusätzliche numerische Aufwand ist dabei gleichzeitig minimal. Die meisten Verfahren, die auf Gittern diskretisiert sind, können die Galilei Invarianz der Eulergleichungen nicht erhalten. Die Verwendung einer Hintergrundgeschwindigkeit vermindert die Auflösung des Ergebnisses. Dies fällt bei Kontaktunstetigkeiten besonders ins Gewicht, da dieses schwache Merkmal bei zunehmender Bewegungsgeschwindigkeit kaum noch aufgelöst werden kann. Der Wahl eines Bezugssystems kommt dadurch eine besondere Rolle zu. Insgesamt ist ein Kontaktunstetigkeiten auflösendes Verfahren also nur für die Betrachtung sehr kleiner Abweichungen von einem quasi-stationären Zustand notwendig. Falls viskose Effekte, sei es durch eine parametrisierte Viskosität, Selbstgravitation oder Magnetfelder, betrachtet werden, kann auch ein Zwei-Wellen-Löser verwendet werden.

Durch die neuen Erweiterungen des numerischen Verfahrens genügt FOSITE nun auch in polaren Geometrien den höchsten Erwartungen und stellt ein hervorragendes Werkzeug für die Betrachtung von verschiedensten physikalischen Fragestellungen dar. In dieser Arbeit wurden selbstgravitierende isotherme und nicht isotherme Simulationen von Balkenspiralgalaxien in Hinblick auf deren Schwarzwachstum durchgeführt. In den isothermen Simulationen konnte die Abhängigkeit des Wachstums von der Anfangsgasmasse und der isothermen Schallgeschwindigkeit beobachtet werden. Es existieren zwei unterschiedliche Akkretionsmodi, welche sich durch schwache beziehungsweise starke Akkretionsraten auszeichnen. Im schwachen Akkretionsmodus kann durch das nicht-axialsymmetrische Drehmoment des Balkens und die Selbstgravitation der äußeren Scheibe nicht genug Material in die innere Scheibe transportiert werden, um eine gravitativ instabile Akkretionsscheibe auszubilden. Besitzt die innere Scheibe eine Masse von mehr als  $10^8 M_\odot$ , sei es vom Start der Simulation an oder durch Einfluss aus der Kiloparsec-Region, startet die starke Akkretion. Das Schwarze Loch kann dann Massen von mehr als  $10^8 M_\odot$  erreichen. Die dabei häufig klumpige Strömung führt zum Überschreiten der Eddingtongrenze am inneren Rechengebietsrand und damit zu einem Ausfluss. Die Modellierung der Eddingtongrenze stellt eine feste Grenze dar, die auch nicht für kurze Zeitspannen das Überschreiten der Grenze erlaubt, wodurch die tatsächliche Akkretion auf das Schwarze Loch bei einigen Simulationen unterschätzt werden könnte.

Des Weiteren wurden Simulationen von Balkengalaxien mit Temperaturstruktur durchgeführt. Statt der isothermen Schallgeschwindigkeit geht ein einfacher Parameter, welcher die Kühlzeitskala verändern kann, in den Parameterraum zusätzlich zur Masse der Gas-scheibe ein. Je nach Stärke der Kühlung stellen sich zwei unterschiedliche Lösungen ein. Eine starke Kühlung führt zu einer vergleichsweise kühlen inneren Scheibe, welche eine gravitativ instabile Akkretionsscheibe bilden kann. Diese genügt, um Schwarze Löcher von bis zu  $4 \cdot 10^8 M_\odot$  herzustellen. Der deutlich effizientere Mechanismus ist jedoch die heiße Akkretion. Wenn die Kühlung nicht ausreicht, um die innere Scheibe schnell genug zu kühlen, können zwei starke Stoßfronten, welche von der Kiloparsec-Region bis zum Innenrand des Rechengebiets reichen, Gas bei jedem Passieren der Stoßfronten stark abbremesen und so auf exzentrischen Bahnen sehr effizient in das Zentrum der Galaxie transportieren. Damit können Schwarze Löcher mit Massen von bis zu  $10^9 M_\odot$  generiert werden.

Sowohl bei den isothermen Simulationen als auch den nicht isothermen Simulationen liegt die größte Unsicherheit in der Modellierung der Temperaturstruktur. Statt der isothermen Simulationen sind auch lokal isotherme Simulationen möglich, welche eine radiale Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit modellieren. Es liegen jedoch keine zuverlässigen Informationen über den radialen Verlauf der Temperaturstruktur in Galaxien vor. Nicht aufgelöste oder nicht auflösbare Prozesse könnten dem gravitativen Kollaps entgegen wirken und so gravitative Instabilitäten in der Akkretionsscheibe verhindern. Bei den isentropen Simulationen ist die Modellierung der Temperaturstruktur um ein vielfaches aufwändiger. Die Wahl der einfachen Kühlungsparametrisierung ist dabei weniger eine Folge komplizierter Kühlungsprozesse – ein einfaches physikalisches Modell, welches zu realistischen Kühlungszeitskalen führt, liegt bereits zur Verwendung vor – sondern der

komplizierten physikalischen Prozesse, welche zur Heizung des Gases führen. Ohne die Modellierung der heizenden Prozesse wird das Gas nahezu instantan auf sein numerisch erlaubtes Minimum herabgekühlt. Die verwendete einfache Kühlungsparametrisierung ist der Versuch, heizende und kühlende Effekte zu einer insgesamt vergleichsweise schwachen Kühlung zusammenzufassen, um der Heizung durch Stöße und gravitative Kompression entgegenzuwirken. Insbesondere der Modus der heißen Akkretion muss vor dem Hintergrund dieser Vereinfachungen mit Vorsicht betrachtet werden und Bedarf einer Überprüfung durch eine detailliertere Modellierung der Heiz- und Kühlterme.

Insgesamt zeigen die durchgeführten isothermen und isentropen Simulationen, dass es durch das Zusammenspiel von Selbstgravitation und dem Balkenpotential zu großen Akkretionsraten und bedeutendem Schwarzwachstum kommen kann. Dabei werden typische beobachtete Strukturen, wie nukleare Ringe, sowie innere und äußere Spiralen reproduziert und Evolutionspfade generiert, welche gut in die beobachteten Ensembles mit moderaten Rotverschiebungen passen.

In Zukunft könnte die vorliegende Arbeit durch die Sub-Grid-Scale Modellierung von Stern- beziehungsweise Sternclustereinstellung, sowie dessen Feedback durch Sternstrahlung und Supernovae-Explosionen erweitert werden. Dies erlaubt die Verwendung einer realistischeren Kühlung und damit der Simulation einer detaillierteren Temperaturstruktur.

Ein weiterer wichtiger Schritt für die exaktere Berechnung der Schwarzwachstum wäre die Modellierung der Akkretionsscheibe innerhalb des jetzigen Rechengebietrandes. Durch die Verschiebung des inneren Randes könnte ein nennenswerter Teil der Akkretionsscheibe des Schwarzen Lochs modelliert werden und dabei ebenfalls auf direktes Feedback der Akkretion auf die Akkretionsscheibe eingegangen werden. So kann eine dynamische Edgingtongrenze erreicht werden, die kurzzeitig auch Superedgingtonakkretion zulässt. Dies könnte in einigen Simulationen wichtige Auswirkungen auf die Evolution des Schwarzen Loches und der inneren Region insgesamt besitzen.

In dieser Arbeit wurde stets angenommen, dass sich im Zentrum der Galaxie ein einzelnes Schwarzes Loch befindet. Das Wissen über die Existenz Schwarzer Löcher in Galaxienzentren basiert auf dem Rückschluss, dass in einem sehr kleinen Volumen sehr große Masse eingeschlossen sein muss. Es ist allerdings anzunehmen, dass bei der Verschmelzung von Galaxien, Binärsysteme aus Schwarzen Löchern entstehen können. Die ersten Kandidaten für binäre Schwarze Löcher konnten bereits beobachtet werden (Abbott et al., 2016; Gerke et al., 2007; Graham et al., 2015; Valtonen et al., 2010; Zhou et al., 2004). Die Auswirkungen eines solchen Systems könnte ein Antrieb aktiver galaktischer Kerne sein und Auswirkungen auf die Wechselwirkungen mit der Galaxie haben. Binärsysteme können je nach Entfernung der Binärkomponenten voneinander quasi-stationäre Probleme im rotierenden Bezugssystem (Farris et al., 2014, 2015a,b; Ivanov et al., 1999, 2015) darstellen. Mit FOSITE steht durch die in dieser Arbeit gemachten Modifikation ein hervorragendes Werkzeug für deren Untersuchung zur Verfügung.

---

## Literaturverzeichnis

- B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, M. R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, und et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116(6):061102, February 2016. doi: 10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- R. G. Abraham, S. van den Bergh, K. Glazebrook, R. S. Ellis, B. X. Santiago, P. Surma, und R. E. Griffiths. The Morphologies of Distant Galaxies. II. Classifications from the Hubble Space Telescope Medium Deep Survey. *ApJS*, 107:1, November 1996. doi: 10.1086/192352.
- M. Abramowitz und I. A. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. 1965.
- D. M. Alexander und R. C. Hickox. What drives the growth of black holes? *NewAR*, 56: 93–121, June 2012. doi: 10.1016/j.newar.2011.11.003.
- K. M. Ashman. Dark matter in galaxies. *PASP*, 104:1109–1138, December 1992. doi: 10.1086/133099.
- E. Athanassoula. The existence and shapes of dust lanes in galactic bars. *MNRAS*, 259: 345–364, November 1992. doi: 10.1093/mnras/259.2.345.
- K. E. Atkinson. *An introduction to numerical analysis*. John Wiley & Sons, 2008.
- S. A. Balbus und J. F. Hawley. A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376:214–233, July 1991. doi: 10.1086/170270.
- D. S. Balsara. Higher order godunov schemes for isothermal hydrodynamics. *Astrophys. J.*, 420:197–212, January 1994. doi: 10.1086/173553.
- D. S. Balsara. A two-dimensional HLLC riemann solver for conservation laws: Application to euler and magnetohydrodynamic flows. *J. Comput. Phys.*, 231:7476–7503, September 2012a. doi: 10.1016/j.jcp.2011.12.025.

- D. S. Balsara. Self-adjusting, positivity preserving high order schemes for hydrodynamics and magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 231(22):7504–7517, 2012b.
- P. Batten, N. Clarke, C. Lambert, und D. M. Causon. On the choice of wavespeeds for the hllc riemann solver. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 18(6):1553–1570, 1997.
- K. R. Bell und D. N. C. Lin. Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. *ApJ*, 427:987–1004, June 1994. doi: 10.1086/174206.
- H. A. Bethe. Energy Production in Stars. *Physical Review*, 55:434–456, March 1939. doi: 10.1103/PhysRev.55.434.
- J. Binney und S. Tremaine. *Galactic Dynamics: Second Edition*. Princeton University Press, 2008.
- G. Bodo, A. Tevzadze, G. Chagelishvili, A. Mignone, P. Rossi, und A. Ferrari. Stability and nonlinear adjustment of vortices in Keplerian flows. *A&A*, 475:51–61, November 2007. doi: 10.1051/0004-6361:20077695.
- F. Bournaud und F. Combes. Gas accretion on spiral galaxies: Bar formation and renewal. *A&A*, 392:83–102, September 2002. doi: 10.1051/0004-6361:20020920.
- H. Braun und W. Schmidt. A semi-analytic model of the turbulent multi-phase interstellar medium. *MNRAS*, 421:1838–1860, April 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19889.x.
- J. C. Butcher. Coefficients for the study of runge-kutta integration processes. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 3(02):185–201, 1963.
- N. Caplar, S. J. Lilly, und B. Trakhtenbrot. AGN Evolution from a Galaxy Evolution Viewpoint. *ApJ*, 811:148, October 2015. doi: 10.1088/0004-637X/811/2/148.
- C.-K. Chan, D. Psaltis, und F. Özel. Spectral Methods for Time-dependent Studies of Accretion Flows. II. Two-dimensional Hydrodynamic Disks with Self-Gravity. *ApJ*, 645:506–518, July 2006. doi: 10.1086/500394.
- S. Chandrasekhar. *Ellipsoidal figures of equilibrium*. Yale University Press, 1969.
- E. Cheung, E. Athanassoula, K. L. Masters, R. C. Nichol, A. Bosma, E. F. Bell, S. M. Faber, D. C. Koo, C. Lintott, T. Melvin, K. Schawinski, R. A. Skibba, und K. W. Willett. Galaxy Zoo: Observing Secular Evolution through Bars. *ApJ*, 779:162, December 2013. doi: 10.1088/0004-637X/779/2/162.

- I. V. Chilingarian, P. Di Matteo, F. Combes, A.-L. Melchior, und B. Semelin. The GalMer database: galaxy mergers in the virtual observatory. *A&A* , 518:A61, July 2010. doi: 10.1051/0004-6361/200912938.
- C. R. Christensen, T. Quinn, G. Stinson, J. Bellovary, und J. Wadsley. Star Formation and Feedback in Smoothed Particle Hydrodynamic Simulations. II. Resolution Effects. *ApJ* , 717:121–132, July 2010. doi: 10.1088/0004-637X/717/1/121.
- S. Comerón, J. H. Knapen, J. E. Beckman, E. Laurikainen, H. Salo, I. Martínez-Valpuesta, und R. J. Buta. AINUR: Atlas of Images of NUClear Rings. *MNRAS* , 402:2462–2490, March 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.16057.x.
- A. J. Connolly, A. S. Szalay, M. Dickinson, M. U. Subbarao, und R. J. Brunner. The evolution of the global star formation history as measured from the hubble deep field based on observations made with the nasa/esa hubble space telescope, obtained from the data archive at the space telescope science institute, which is operated by the association of universities for research in astronomy, inc., under cooperative agreement with the national science foundation. *The Astrophysical Journal Letters*, 486(1):L11, 1997.
- P. Cossins, G. Lodato, und C. J. Clarke. Characterizing the gravitational instability in cooling accretion discs. *MNRAS* , 393:1157–1173, March 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.14275.x.
- P. Cossins, G. Lodato, und C. Clarke. The effects of opacity on gravitational stability in protoplanetary discs. *MNRAS* , 401:2587–2598, February 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15835.x.
- R. Courant, K. Friedrichs, und H. Lewy. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal*, 11(2):215–234, 1967.
- S. F. Davis. Simplified second-order godunov-type methods. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 9(3):445–473, May 1988. ISSN 0196-5204. doi: 10.1137/0909030.
- S. W. Davis und A. Laor. The Radiative Efficiency of Accretion Flows in Individual Active Galactic Nuclei. *ApJ* , 728:98, February 2011. doi: 10.1088/0004-637X/728/2/98.
- M. de Val-Borro, R. G. Edgar, P. Artymowicz, P. Cieliegi, P. Cresswell, G. D’Angelo, E. J. Delgado-Donate, G. Dirksen, S. Fromang, A. Gawryszczak, H. Klahr, W. Kley, W. Lyra, F. Masset, G. Mellema, R. P. Nelson, S.-J. Paardekooper, A. Peplinski, A. Pierens, T. Plewa, K. Rice, C. Schäfer, und R. Speith. A comparative study of disc-planet interaction. *MNRAS* , 370:529–558, August 2006. doi: 10.1111/j.1365-2966.2006.10488.x.

- M. de Val-Borro, P. Artymowicz, G. D'Angelo, und A. Peplinski. Vortex generation in protoplanetary disks with an embedded giant planet. *Astronomy & Astrophysics*, 471(3):1043–1055, 2007.
- G. de Vaucouleurs, A. de Vaucouleurs, H. G. Corwin, Jr., R. J. Buta, G. Paturel, und P. Fouqué. *Third Reference Catalogue of Bright Galaxies. Volume I: Explanations and references. Volume II: Data for galaxies between 0<sup>h</sup> and 12<sup>h</sup>. Volume III: Data for galaxies between 12<sup>h</sup> and 24<sup>h</sup>*. 1991.
- D. Downes und P. M. Solomon. Rotating Nuclear Rings and Extreme Starbursts in Ultraluminous Galaxies. *ApJ*, 507:615–654, November 1998. doi: 10.1086/306339.
- J. L. E. Dreyer. A New General Catalogue of Nebulæ and Clusters of Stars, being the Catalogue of the late Sir John F. W. Herschel, Bart, revised, corrected, and enlarged. *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, 49:1, 1888.
- P. C. Duffell und A. I. MacFadyen. TESS: A relativistic hydrodynamics code on a moving voronoi mesh. *ApJS*, 197:15, December 2011. doi: 10.1088/0067-0049/197/2/15.
- P. C. Duffell und A. I. MacFadyen. Global calculations of density waves and gap formation in protoplanetary disks using a moving mesh. *ApJS*, 755:7, August 2012. doi: 10.1088/0004-637X/755/1/7.
- R. H. Durisen, A. P. Boss, L. Mayer, A. F. Nelson, T. Quinn, und W. K. M. Rice. Gravitational Instabilities in Gaseous Protoplanetary Disks and Implications for Giant Planet Formation. *Protostars and Planets V*, pages 607–622, 2007.
- W. J. Duschl, P. A. Strittmatter, und P. L. Biermann. A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *A&A*, 357:1123–1132, May 2000.
- A. S. Eddington. Das Strahlungsgleichgewicht der Sterne. *Zeitschrift für Physik*, 7: 351–397, December 1921. doi: 10.1007/BF01332806.
- B. Einfeldt, C.-D. Munz, P. L. Roe, und B. Sjögren. On godunov-type methods near low densities. *Journal of computational physics*, 92(2):273–295, 1991.
- A. Einstein. Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6):132–148, 1905.
- P. Erwin. Double-barred galaxies. I. A catalog of barred galaxies with stellar secondary bars and inner disks. *A&A*, 415:941–957, March 2004. doi: 10.1051/0004-6361:20034408.



- P. B. Eskridge und J. A. Frogel. What is the True Fraction of Barred Spiral Galaxies? *APSS* , 269:427–430, December 1999. doi: 10.1023/A:1017025820201.
- B. D. Farris, P. Duffell, A. I. MacFadyen, und Z. Haiman. Binary Black Hole Accretion from a Circumbinary Disk: Gas Dynamics inside the Central Cavity. *ApJ* , 783:134, March 2014. doi: 10.1088/0004-637X/783/2/134.
- B. D. Farris, P. Duffell, A. I. MacFadyen, und Z. Haiman. Characteristic signatures in the thermal emission from accreting binary black holes. *MNRAS* , 446:L36–L40, January 2015a. doi: 10.1093/mnrasl/slu160.
- B. D. Farris, P. Duffell, A. I. MacFadyen, und Z. Haiman. Binary black hole accretion during inspiral and merger. *MNRAS* , 447:L80–L84, February 2015b. doi: 10.1093/mnrasl/slu184.
- K. Fathi, T. Izumi, A. B. Romeo, S. Martín, M. Imanishi, E. Hatziminaoglou, S. Aalto, D. Espada, K. Kohno, M. Krips, S. Matsushita, D. S. Meier, N. Nakai, und Y. Terashima. Local Instability Signatures in ALMA Observations of Dense Gas in NGC 7469. *ApJL* , 806:L34, June 2015. doi: 10.1088/2041-8205/806/2/L34.
- L. Ferrarese und D. Merritt. A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies. *ApJL* , 539:L9–L12, August 2000. doi: 10.1086/312838.
- N. M. Ferrers. On the potentials of ellipsois, ellipsoidal shells, elliptic laminae, and elliptic rings, of variable densities. "*Q. J. Pure Appl. Math.*", 14, 1887. URL [http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN600494829\\_0014|LOG\\_0009](http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN600494829_0014|LOG_0009).
- K. M. Ferrière. The interstellar environment of our galaxy. *Reviews of Modern Physics*, 73:1031–1066, October 2001. doi: 10.1103/RevModPhys.73.1031.
- J. Frank, A. King, und D. Raine. *Accretion power in astrophysics*. Cambridge university press, 2002.
- D. Friedli, H. Wozniak, M. Rieke, L. Martinet, und P. Bratschi. Disc galaxies with multiple triaxial structures. II. JHK surface photometry and numerical simulations. *AAPS* , 118:461–479, September 1996.
- C. F. Gammie. Nonlinear Outcome of Gravitational Instability in Cooling, Gaseous Disks. *ApJ* , 553:174–183, May 2001. doi: 10.1086/320631.
- K. Gebhardt, R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, A. V. Filippenko, R. Green, C. Grillmair, L. C. Ho, J. Kormendy, T. R. Lauer, J. Magorrian, J. Pinkney, D. Rich-

- stone, und S. Tremaine. A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. *ApJL* , 539:L13–L16, August 2000. doi: 10.1086/312840.
- B. F. Gerke, J. A. Newman, J. Lotz, R. Yan, P. Barmby, A. L. Coil, C. J. Conselice, R. J. Ivison, L. Lin, D. C. Koo, K. Nandra, S. Salim, T. Small, B. J. Weiner, M. C. Cooper, M. Davis, S. M. Faber, und P. Guhathakurta. The DEEP2 Galaxy Redshift Survey: AEGIS Observations of a Dual AGN at  $z = 0.7$ . *ApJL* , 660:L23–L26, May 2007. doi: 10.1086/517968.
- A. M. Ghez, B. L. Klein, M. Morris, und E. E. Becklin. High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A\*: Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy. *ApJ* , 509:678–686, December 1998. doi: 10.1086/306528.
- S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, und T. Ott. Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center. *ApJ* , 692:1075–1109, February 2009. doi: 10.1088/0004-637X/692/2/1075.
- N. Y. Gnedin, S. G. O. Glover, R. S. Klessen, und V. Springel. *Star Formation in Galaxy Evolution: Connecting Numerical Models to Reality*. November 2015.
- S. K. Godunov. A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3):271–306, 1959.
- S. Gottlieb, D.I. Ketcheson, und C.W. Shu. *Strong Stability Preserving Runge-Kutta and Multistep Time Discretizations*. World Scientific, 2011. ISBN 9789814289269.
- M. J. Graham, S. G. Djorgovski, D. Stern, E. Glikman, A. J. Drake, A. A. Mahabal, C. Donalek, S. Larson, und E. Christensen. A possible close supermassive black-hole binary in a quasar with optical periodicity. *Nature* , 518:74–76, February 2015. doi: 10.1038/nature14143.
- A. Hanslmeier. *Einführung in Astronomie und Astrophysik*. 2002.
- A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 135:260–278, August 1997. doi: 10.1006/jcph.1997.5713.
- A. Harten, P. Lax, und B. Leer. On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1):35–61, 1983. doi: 10.1137/1025002.
- J. F. Hawley, C. F. Gammie, und S. A. Balbus. Local Three-dimensional Magneto-hydrodynamic Simulations of Accretion Disks. *ApJ* , 440:742, February 1995. doi: 10.1086/175311.

- C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows, Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows (Numerical Computation of Internal & External Flows, Computat)*. Wiley, 1990. ISBN 0471924520.
- C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization (Wiley Series in Numerical Methods in Engineering)*. John Wiley & Sons, 2001. ISBN 0471923850.
- C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows: The Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, Second Edition*. Butterworth-Heinemann, 2007. ISBN 0750665947.
- V. Honkkila und P. Janhunen. HLLC solver for ideal relativistic MHD. *J. Comput. Phys.*, 223:643–656, May 2007. doi: 10.1016/j.jcp.2006.09.027.
- P. F. Hopkins und E. Quataert. How do massive black holes get their gas? *MNRAS* , 407:1529–1564, September 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.17064.x.
- E. P. Hubble. Extragalactic nebulae. *ApJ* , 64, December 1926. doi: 10.1086/143018.
- E. P. Hubble. *Realm of the Nebulae*. 1936.
- I. Hubeny. Vertical structure of accretion disks - A simplified analytical model. *ApJ* , 351:632–641, March 1990. doi: 10.1086/168501.
- T. F. Illenseer und W. J. Duschl. Two-dimensional central-upwind schemes for curvilinear grids and application to gas dynamics with angular momentum. *Computer Physics Communications*, 180:2283–2302, November 2009. doi: 10.1016/j.cpc.2009.07.016.
- T. F. Illenseer und W. J. Duschl. Self-similar evolution of self-gravitating viscous accretion discs. *MNRAS* , 450:691–713, June 2015. doi: 10.1093/mnras/stv587.
- P. B. Ivanov, J. C. B. Papaloizou, und A. G. Polnarev. The evolution of a supermassive binary caused by an accretion disc. *MNRAS* , 307:79–90, July 1999. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02623.x.
- P. B. Ivanov, J. C. B. Papaloizou, S.-J. Paardekooper, und A. G. Polnarev. The evolution of a binary in a retrograde circular orbit embedded in an accretion disk. *A&A* , 576: A29, April 2015. doi: 10.1051/0004-6361/201424359.
- J. H. Jeans. The Stability of a Spherical Nebula. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 199:1–53, 1902. doi: 10.1098/rsta.1902.0012.

- Y.-F. Jiang, M. Belyaev, J. Goodman, und J. M. Stone. A new way to conserve total energy for eulerian hydrodynamic simulations with self-gravity. *New Astronomy*, 19: 48–55, 2013.
- B. M. Johnson, X. Guan, und C. F. Gammie. Orbital advection by interpolation: A fast and accurate numerical scheme for super-fast mhd flows. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 177(1):373, 2008.
- M. Jung. Zeitliche Entwicklung einer Akkretionsscheibe mit einem störenden gravitierenden Objekt. 2012.
- P. R. Kafle, S. Sharma, G. F. Lewis, und J. Bland-Hawthorn. On the Shoulders of Giants: Properties of the Stellar Halo and the Milky Way Mass Distribution. *ApJ* , 794:59, October 2014. doi: 10.1088/0004-637X/794/1/59.
- A. J. Kalnajs. Spiral Structure Viewed as a Density Wave. *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, 2:174, October 1973.
- R. Käppeli und S. Mishra. A well-balanced finite volume scheme for the Euler equations with gravitation. The exact preservation of hydrostatic equilibrium with arbitrary entropy stratification. *A&A* , 587:A94, March 2016. doi: 10.1051/0004-6361/201527815.
- S. Kato, J. Fukue, und S. Mineshige. *Black-Hole Accretion Disks — Towards a New Paradigm* —. March 2008.
- C.-G. Kim und E. C. Ostriker. Momentum Injection by Supernovae in the Interstellar Medium. *ApJ* , 802:99, April 2015. doi: 10.1088/0004-637X/802/2/99.
- W.-T. Kim und J. M. Stone. Two-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Barred Galaxies. *ApJ* , 751:124, June 2012. doi: 10.1088/0004-637X/751/2/124.
- W.-T. Kim, W.-Y. Seo, J. M. Stone, D. Yoon, und P. J. Teuben. Central Regions of Barred Galaxies: Two-dimensional Non-self-gravitating Hydrodynamic Simulations. *ApJ* , 747:60, March 2012. doi: 10.1088/0004-637X/747/1/60.
- W.-T. Kim, Y. Kim, und J.-G. Kim. Nature of the Wiggle Instability of Galactic Spiral Shocks. *ApJ* , 789:68, July 2014. doi: 10.1088/0004-637X/789/1/68.
- A. King. Black Holes, Galaxy Formation, and the  $M_{BH}-\sigma$  Relation. *ApJL* , 596:L27–L29, October 2003. doi: 10.1086/379143.
- W. Kley. On the treatment of the Coriolis force in computational astrophysics. *A&A* , 338:L37–L41, October 1998.

- W. Kley, T. W. A. Müller, S. M. Kolb, P. Benítez-Llambay, und F. Masset. Low-mass planets in nearly inviscid disks: numerical treatment. *Astronomy & Astrophysics*, 546: A99, 2012.
- J. H. Knapen, D. Pérez-Ramírez, und S. Laine. Circumnuclear regions in barred spiral galaxies - II. Relations to host galaxies. *MNRAS*, 337:808–828, December 2002. doi: 10.1046/j.1365-8711.2002.05840.x.
- J. Y. Koay, M. Vestergaard, V. Casasola, D. Lawther, und B. M. Peterson. ALMA probes the molecular gas reservoirs in the changing-look Seyfert galaxy Mrk 590. *MNRAS*, 455:2745–2764, January 2016. doi: 10.1093/mnras/stv2495.
- J. A. Kollmeier, C. A. Onken, C. S. Kochanek, A. Gould, D. H. Weinberg, M. Dietrich, R. Cool, A. Dey, D. J. Eisenstein, B. T. Jannuzi, E. Le Floch, und D. Stern. Black Hole Masses and Eddington Ratios at  $0.3 < z < 4$ . *ApJ*, 648:128–139, September 2006. doi: 10.1086/505646.
- S. König, S. Aalto, S. Muller, J. S. Gallagher, III, R. J. Beswick, C. K. Xu, und A. Evans. Deep ALMA imaging of the merger NGC1614 - Is CO tracing a massive inflow of non-starforming gas? *ArXiv e-prints*, March 2016.
- M. Kozłowski, P. J. Wiita, und B. Paczynski. Self-gravitating accretion disk models with realistic equations of state and opacities. *ACTAA*, 29:157–176, 1979.
- M. Krause, R. Diehl, H. Böhringer, M. Freyberg, und D. Lubos. Feedback by massive stars and the emergence of superbubbles. II. X-ray properties. *A&A*, 566:A94, June 2014. doi: 10.1051/0004-6361/201423871.
- M. R. Krumholz, A. K. Leroy, und C. F. McKee. Which Phase of the Interstellar Medium Correlates with the Star Formation Rate? *ApJ*, 731:25, April 2011. doi: 10.1088/0004-637X/731/1/25.
- A. Kurganov und C.-T. Lin. On the reduction of numerical dissipation in central-upwind schemes. *Commun. Comput. Phys*, 2(1):141–163, 2007.
- A. Kurganov und Y. Liu. New adaptive artificial viscosity method for hyperbolic systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 231:8114–8132, October 2012. doi: 10.1016/j.jcp.2012.07.040.
- A. Kurganov und E. Tadmor. New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations. *Journal of Computational Physics*, 160:241–282, May 2000. doi: 10.1006/jcph.2000.6459.

- A. Kurganov, S. Noelle, und G. Petrova. Semidiscrete central-upwind schemes for hyperbolic conservation laws and hamilton-jacobi equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 23(3):707–740, 2001. doi: 10.1137/S1064827500373413.
- G. G. Kuzmin. Model of the steady galaxy allowing of the triaxial distribution of velocities. *Astronomicheskii Zhurnal*, 33:27, 1956.
- L. D. Landau und E. M. Lifshitz. Hydrodynamik. *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Berlin: Akademie-Verlag, 1966, 1, 1966.
- R. M. Lau, T. L. Herter, M. R. Morris, E. E. Becklin, und J. D. Adams. SOFIA/FORCAST Imaging of the Circumnuclear Ring at the Galactic Center. *ApJ*, 775:37, September 2013. doi: 10.1088/0004-637X/775/1/37.
- R. J. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm. *Journal of computational physics*, 146(1):346–365, 1998.
- R. J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems*, volume 31. Cambridge university press, 2002.
- R. J. LeVeque. *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: steady-state and time-dependent problems*, volume 98. Siam, 2007.
- H. Li, J. M. Finn, R. V. E. Lovelace, und S. A. Colgate. Rossby wave instability of thin accretion disks. ii. detailed linear theory. *The Astrophysical Journal*, 533(2):1023, 2000.
- H. Li, S. A. Colgate, B. Wendroff, und R. Liska. Rossby wave instability of thin accretion disks. iii. nonlinear simulations. *The Astrophysical Journal*, 551(2):874, 2001.
- S. Li. An HLLC riemann solver for magneto-hydrodynamics. *J. Comput. Phys.*, 203:344–357, February 2005. doi: 10.1016/j.jcp.2004.08.020.
- S. Li, M. J. Buoni, und H. Li. A Fast Potential and Self-Gravity Solver for Nonaxisymmetric Disks. *ApJS*, 181:244–254, March 2009. doi: 10.1088/0067-0049/181/1/244.
- Z. Li, J. Shen, und W.-T. Kim. Hydrodynamical Simulations of Nuclear Rings in Barred Galaxies. *ApJ*, 806:150, June 2015. doi: 10.1088/0004-637X/806/2/150.
- J. H. Lienhard. *Synopsis of lift, drag, and vortex frequency data for rigid circular cylinders*. Technical Extension Service, Washington State University, 1966.

- C. C. Lin und F. H. Shu. On the Spiral Structure of Disk Galaxies. *ApJ* , 140:646, August 1964. doi: 10.1086/147955.
- C. C. Lin und F. H. Shu. On the Spiral Structure of Disk Galaxies, II. Outline of a Theory of Density Waves. *Proceedings of the National Academy of Science*, 55:229–234, February 1966. doi: 10.1073/pnas.55.2.229.
- R. V. E. Lovelace, H. Li, S. A. Colgate, und A. F. Nelson. Rossby wave instability of keplerian accretion disks. *The Astrophysical Journal*, 513(2):805, 1999.
- W. Maciejewski. Nuclear spirals in galaxies: gas response to an asymmetric potential - II. Hydrodynamical models. *MNRAS* , 354:892–904, November 2004. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.08254.x.
- P. Martini, M. W. Regan, J. S. Mulchaey, und R. W. Pogge. Circumnuclear Dust in Nearby Active and Inactive Galaxies. II. Bars, Nuclear Spirals, and the Fueling of Active Galactic Nuclei. *ApJ* , 589:774–782, June 2003a. doi: 10.1086/374685.
- P. Martini, M. W. Regan, J. S. Mulchaey, und R. W. Pogge. Circumnuclear Dust in Nearby Active and Inactive Galaxies. I. Data. *ApJS* , 146:353–406, June 2003b. doi: 10.1086/367817.
- F. Masset. FARGO: A fast eulerian transport algorithm for differentially rotating disks. *AAPS* , 141:165–173, January 2000. doi: 10.1051/aas:2000116.
- N. J. McConnell, C.-P. Ma, K. Gebhardt, S. A. Wright, J. D. Murphy, T. R. Lauer, J. R. Graham, und D. O. Richstone. Two ten-billion-solar-mass black holes at the centres of giant elliptical galaxies. *Nature* , 480:215–218, December 2011. doi: 10.1038/nature10636.
- C. F. McKee und J. P. Ostriker. A theory of the interstellar medium - Three components regulated by supernova explosions in an inhomogeneous substrate. *ApJ* , 218:148–169, November 1977. doi: 10.1086/155667.
- A. Mignone. A simple and accurate riemann solver for isothermal MHD. *J. Comput. Phys.*, 225:1427–1441, August 2007. doi: 10.1016/j.jcp.2007.01.033.
- A. Mignone, M. Ugliano, und G. Bodo. A five-wave harten-lax-van leer riemann solver for relativistic magnetohydrodynamics. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 393:1141–1156, March 2009. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.14221.x.
- A. Mignone, M. Flock, M. Stute, S. M. Kolb, und G. Muscianisi. A conservative orbital advection scheme for simulations of magnetized shear flows with the PLUTO code. *A&A* , 545:A152, September 2012. doi: 10.1051/0004-6361/201219557.

- D. Mihalas und P. M. Routly. *Galactic astronomy*. 1968.
- L. R. Mudryk und N. W. Murray. RAPID: A fast, high resolution, flux-conservative algorithm designed for planet disk interactions. *NA* , 14:71–87, January 2009. doi: 10.1016/j.newast.2008.05.002.
- G. Murante, P. Monaco, M. Giovalli, S. Borgani, und A. Diaferio. A subresolution multiphase interstellar medium model of star formation and supernova energy feedback. *MNRAS* , 405:1491–1512, July 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16567.x.
- N. Murray, E. Quataert, und T. A. Thompson. The Disruption of Giant Molecular Clouds by Radiation Pressure and the Efficiency of Star Formation in Galaxies. *ApJ* , 709: 191–209, January 2010. doi: 10.1088/0004-637X/709/1/191.
- B. Cahalan NASA GSFC. <http://earthobservatory.nasa.gov/IOTD/view.php?id=625&src=ve>, September 1999. Abgerufen 05.04.2016, Public Domain.
- H. Netzer. *The Physics and Evolution of Active Galactic Nuclei*. November 2013.
- W. F. Noh. Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux. *J. Comput. Phys.*, 72:78–120, September 1987. doi: 10.1016/0021-9991(87)90074-X.
- H. Oertel und E. Laurien. Numerische strömungsmechanik. *Springer Verlag*, 1995.
- S.-J. Paardekooper und G. Mellema. RODEO: a new method for planet-disk interaction. *A&A* , 450:1203–1220, May 2006. doi: 10.1051/0004-6361:20053761.
- B. Paczynski. A model of selfgravitating accretion disk. *ACTAA* , 28:91–109, 1978.
- D. Pfenniger. The 3D dynamics of barred galaxies. *A&A* , 134:373–386, May 1984.
- S. Phelps, A. Nusser, und V. Desjacques. The Mass of the Milky Way and M31 Using the Method of Least Action. *ApJ* , 775:102, October 2013. doi: 10.1088/0004-637X/775/2/102.
- B. G. Piner, J. M. Stone, und P. J. Teuben. Nuclear Rings and Mass Inflow in Hydrodynamic Simulations of Barred Galaxies. *ApJ* , 449:508, August 1995. doi: 10.1086/176075.
- M. A. Prieto, W. Maciejewski, und J. Reunanen. Feeding the Monster: The Nucleus of NGC 1097 at Subarcsecond Scales in the Infrared with the Very Large Telescope. *AJ* , 130:1472–1481, October 2005. doi: 10.1086/444591.



- J. E. Pringle. Accretion discs in astrophysics. *ARAA* , 19:137–162, 1981. doi: 10.1146/annurev.aa.19.090181.001033.
- J. E. Pringle und A. King. *Astrophysical Flows*. April 2007.
- R. R. Rafikov. Viscosity Prescription for Gravitationally Unstable Accretion Disks. *ApJ* , 804:62, May 2015. doi: 10.1088/0004-637X/804/1/62.
- W. J. Macquorn Rankine. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 160:277–288, 1870. doi: 10.1098/rstl.1870.0015. URL <http://rstl.royalsocietypublishing.org/content/160/277.short>.
- W. K. M. Rice, P. J. Armitage, M. R. Bate, und I. A. Bonnell. The effect of cooling on the global stability of self-gravitating protoplanetary discs. *MNRAS* , 339:1025–1030, March 2003. doi: 10.1046/j.1365-8711.2003.06253.x.
- W. K. M. Rice, G. Lodato, und P. J. Armitage. Investigating fragmentation conditions in self-gravitating accretion discs. *MNRAS* , 364:L56–L60, November 2005. doi: 10.1111/j.1745-3933.2005.00105.x.
- W. W. Roberts, Jr., J. M. Huntley, und G. D. van Albada. Gas dynamics in barred spirals - Gaseous density waves and galactic shocks. *ApJ* , 233:67–84, October 1979. doi: 10.1086/157367.
- B. Robertson, J. S. Bullock, T. J. Cox, T. Di Matteo, L. Hernquist, V. Springel, und N. Yoshida. A Merger-driven Scenario for Cosmological Disk Galaxy Formation. *ApJ* , 645:986–1000, July 2006. doi: 10.1086/504412.
- B. E. Robertson, A. V. Kravtsov, N. Y. Gnedin, T. Abel, und D. H. Rudd. Computational eulerian hydrodynamics and galilean invariance. *MNRAS* , 401:2463–2476, February 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15823.x.
- P. L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43:357–372, October 1981. doi: 10.1016/0021-9991(81)90128-5.
- P. L. Roe. Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18:337–365, 1986. doi: 10.1146/annurev.fl.18.010186.002005.
- A. B. Romeo und N. Falstad. A simple and accurate approximation for the Q stability parameter in multicomponent and realistically thick discs. *MNRAS* , 433:1389–1397, August 2013. doi: 10.1093/mnras/stt809.

- A. B. Romeo und J. Wiegert. The effective stability parameter for two-component galactic discs: is  $Q^{-1} \approx Q_{\text{stars}}^{-1} + Q_{\text{gas}}^{-1}$ ? *MNRAS* , 416:1191–1196, September 2011. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19120.x.
- A. B. Romeo, A. Burkert, und O. Agertz. A Toomre-like stability criterion for the clumpy and turbulent interstellar medium. *MNRAS* , 407:1223–1230, September 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2010.16975.x.
- G. B. Rybicki und A. P. Lightman. *Radiative processes in astrophysics*. 1979.
- V. S. Safronov. On the gravitational instability in flattened systems with axial symmetry and non-uniform rotation. *Annales d'Astrophysique*, 23:979, February 1960.
- D. Salak, N. Nakai, T. Hatakeyama, und Y. Miyamoto. Gas Dynamics and Outflow in the Barred Starburst Galaxy NGC 1808 Revealed with ALMA. *ArXiv e-prints*, March 2016.
- C. Scannapieco, P. B. Tissera, S. D. M. White, und V. Springel. Effects of supernova feedback on the formation of galaxy discs. *MNRAS* , 389:1137–1149, September 2008. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13678.x.
- P. Schneider. *Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie*. Springer-Verlag, 2006.
- J. Schulman. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Messier\\_95.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Messier_95.jpg), June 2010. Abgerufen 06.04.2016.
- I. R. Seitenzahl, F. Ciaraldi-Schoolmann, F. K. Röpkke, M. Fink, W. Hillebrandt, M. Kromer, R. Pakmor, A. J. Ruiter, S. A. Sim, und S. Taubenberger. Three-dimensional delayed-detonation models with nucleosynthesis for Type Ia supernovae. *MNRAS* , 429:1156–1172, February 2013. doi: 10.1093/mnras/sts402.
- W.-Y. Seo und W.-T. Kim. Star Formation in Nuclear Rings of Barred Galaxies. *ApJ* , 769:100, June 2013. doi: 10.1088/0004-637X/769/2/100.
- N. I. Shakura und R. A. Sunyaev. Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A* , 24:337–355, 1973.
- M. Shaw, D. Axon, R. Probst, und I. Gatley. Nuclear bars and blue nuclei within barred spiral galaxies. *MNRAS* , 274:369–387, May 1995. doi: 10.1093/mnras/274.2.369.
- I. Shlosman, J. Frank, und M. C. Begelman. Bars within bars - A mechanism for fuelling active galactic nuclei. *Nature* , 338:45–47, March 1989. doi: 10.1038/338045a0.

- S. N. Shore. *An introduction to astrophysical hydrodynamics*. 1992.
- J. Silk und M. J. Rees. Quasars and galaxy formation. *A&A* , 331:L1–L4, March 1998.
- M. A. Skinner und E. C. Ostriker. The athena astrophysical magnetohydrodynamics code in cylindrical geometry. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 188(1):290, 2010.
- M. F. Skrutskie, R. M. Cutri, R. Stiening, M. D. Weinberg, S. Schneider, J. M. Carpenter, C. Beichman, R. Capps, T. Chester, J. Elias, J. Huchra, J. Liebert, C. Lonsdale, D. G. Monet, S. Price, P. Seitzer, T. Jarrett, J. D. Kirkpatrick, J. E. Gizis, E. Howard, T. Evans, J. Fowler, L. Fullmer, R. Hurt, R. Light, E. L. Kopan, K. A. Marsh, H. L. McCallon, R. Tam, S. Van Dyk, und S. Wheelock. The Two Micron All Sky Survey (2MASS). *AJ* , 131:1163–1183, February 2006. doi: 10.1086/498708.
- G. A. Sod. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. *J. Comput. Phys.*, 27:1–31, April 1978. doi: 10.1016/0021-9991(78)90023-2.
- B. Sperling. *Large Eddy Simulationen von selbstgravitierenden Akkretionsscheiben*. PhD thesis, Christian-Albrechts Universität Kiel, 2013.
- V. Springel. E pur si muove: Galilean-invariant cosmological hydrodynamical simulations on a moving mesh. *MNRAS* , 401:791–851, January 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.15715.x.
- V. Springel und L. Hernquist. Cosmological smoothed particle hydrodynamics simulations: a hybrid multiphase model for star formation. *MNRAS* , 339:289–311, February 2003. doi: 10.1046/j.1365-8711.2003.06206.x.
- V. Springel und L. Hernquist. Formation of a Spiral Galaxy in a Major Merger. *ApJL* , 622:L9–L12, March 2005. doi: 10.1086/429486.
- V. Springel, T. Di Matteo, und L. Hernquist. Modelling feedback from stars and black holes in galaxy mergers. *MNRAS* , 361:776–794, August 2005. doi: 10.1111/j.1365-2966.2005.09238.x.
- C. L. Steinhardt und M. Elvis. The quasar mass-luminosity plane - I. A sub-Eddington limit for quasars. *MNRAS* , 402:2637–2648, March 2010. doi: 10.1111/j.1365-2966.2009.16084.x.
- C. L. Steinhardt und J. S. Speagle. A Uniform History for Galaxy Evolution. *ApJ* , 796: 25, November 2014. doi: 10.1088/0004-637X/796/1/25.

- G. Stinson, A. Seth, N. Katz, J. Wadsley, F. Governato, und T. Quinn. Star formation and feedback in smoothed particle hydrodynamic simulations - I. Isolated galaxies. *MNRAS* , 373:1074–1090, December 2006. doi: 10.1111/j.1365-2966.2006.11097.x.
- J. M. Stone und M. L. Norman. ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS* , 80:753–790, June 1992. doi: 10.1086/191680.
- A. Suresh. Positivity-preserving schemes in multidimensions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 22(4):1184–1198, 2000.
- P. K. Sweby. High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21:995–1011, October 1984. doi: 10.1137/0721062.
- NEC SX-ACE. [http://de.nec.com/de\\_DE/emea/products/hpc/sx-series/index.html](http://de.nec.com/de_DE/emea/products/hpc/sx-series/index.html), April 2016. Abgerufen 05.04.2016.
- A. Toomre. On the Distribution of Matter Within Highly Flattened Galaxies. *ApJ* , 138:385, August 1963. doi: 10.1086/147653.
- A. Toomre. On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ* , 139:1217–1238, May 1964. doi: 10.1086/147861.
- E. F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer, 3rd edition, 2009. ISBN 9783540252023.
- E. F. Toro. The riemann-problem in computational science. In *The Riemann-Problem in computational science*, pages 87–103. CRC Press, November 2012. ISBN 978-0-415-62150-2. doi:10.1201/b14172-10.
- E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.
- E. F. Toro, M. Spruce, und W. Speares. Restoration of the contact surface in the HLL-riemann solver. *Shock Waves*, 4:25–34, July 1994. doi: 10.1007/BF01414629.
- V. Trimble. Existence and nature of dark matter in the universe. *ARAAS* , 25:425–472, 1987. doi: 10.1146/annurev.aa.25.090187.002233.
- M. J. Valtonen, S. Mikkola, D. Merritt, A. Gopakumar, H. J. Lehto, T. Hyvönen, H. Rampadarath, R. Saunders, M. Basta, und R. Hudec. Measuring the Spin of

- the Primary Black Hole in OJ287. *ApJ* , 709:725–732, February 2010. doi: 10.1088/0004-637X/709/2/725.
- T. S. van Albada, J. N. Bahcall, K. Begeman, und R. Sancisi. Distribution of dark matter in the spiral galaxy NGC 3198. *ApJ* , 295:305–313, August 1985. doi: 10.1086/163375.
- G. van de Ven und K. Fathi. Kinematic Analysis of Nuclear Spirals: Feeding the Black Hole in NGC 1097. *ApJ* , 723:767–780, November 2010. doi: 10.1088/0004-637X/723/1/767.
- B. van Leer. Towards the ultimate conservation difference scheme. II. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme. *J. Comput. Phys.*, 14:361–370, March 1974. doi: 10.1016/0021-9991(74)90019-9.
- B. van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme. III - Upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. IV - A new approach to numerical convection. *Journal of Computational Physics*, 23:263–299, March 1977. doi: 10.1016/0021-9991(77)90094-8.
- T. von Kármán. *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*. Weidmann, 1911.
- K. Wada und J. Koda. Instabilities of spiral shocks - I. Onset of wiggle instability and its mechanism. *MNRAS* , 349:270–280, March 2004. doi: 10.1111/j.1365-2966.2004.07484.x.
- R. E. Williams, B. Blacker, M. Dickinson, W. V. D. Dixon, H. C. Ferguson, A. S. Fruchter, M. Giavalisco, R. L. Gilliland, I. Heyer, R. Katsanis, Z. Levay, R. A. Lucas, D. B. McElroy, L. Petro, M. Postman, H.-M. Adorf, und R. Hook. The Hubble Deep Field: Observations, Data Reduction, and Galaxy Photometry. *AJ* , 112:1335, October 1996. doi: 10.1086/118105.
- C. K. Xu, C. Cao, N. Lu, Y. Gao, T. Diaz-Santos, R. Herrero-Illana, R. Meijerink, G. Privon, Y.-H. Zhao, A. S. Evans, S. König, J. M. Mazzarella, S. Aalto, P. Appleton, L. Armus, V. Charmandaris, J. Chu, S. Haan, H. Inami, E. J. Murphy, D. B. Sanders, B. Schulz, und P. van der Werf. ALMA Observations of Warm Dense Gas in NGC 1614 - Breaking of the Star Formation Law in the Central Kiloparsec. *ApJ* , 799:11, January 2015. doi: 10.1088/0004-637X/799/1/11.
- H. C. Yee, N. D. Sandham, und M. J. Djomehri. Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic-Based Filters. *Journal of Computational Physics*, 150:199–238, March 1999. doi: 10.1006/jcph.1998.6177.
- G. Yepes, R. Kates, A. Khokhlov, und A. Klypin. Hydrodynamical simulations of galaxy

- formation: effects of supernova feedback. *MNRAS* , 284:235–256, January 1997. doi: 10.1093/mnras/284.1.235.
- B. York. Vector and dyadic analysis, 2001. URL <http://my.ece.ucsb.edu/York/Bobsclass/201B/W01/vectors.pdf>.
- X. Zeng. A general approach to enhance slope limiters on non-uniform grids. *arXiv preprint arXiv:1301.0967*, 2013.
- H. Zhou, T. Wang, X. Zhang, X. Dong, und C. Li. Obscured Binary Quasar Cores in SDSS J104807.74+005543.5? *ApJL* , 604:L33–L36, March 2004. doi: 10.1086/383310.
- U. Ziegler. A semi-discrete central scheme for magnetohydrodynamics on orthogonal–curvilinear grids. *Journal of Computational Physics*, 230(4):1035–1063, 2011.

## A. Anhang

### A.1. Tensordivergenz

Für orthogonal krummlinige Koordinaten  $\{\xi, \eta, \varphi\}$  mit der Orthonormalbasis  $\{e_\xi, e_\eta, e_\varphi\}$  und den metrischen Skalenfaktoren  $\{h_\xi, h_\eta, h_\varphi\}$  können wir die Tensordivergenz angeben:

$$\begin{aligned}
 [\nabla \cdot T]_\xi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\varphi T_{\xi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\varphi T_{\xi\eta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\xi h_\eta T_{\xi\varphi}) \right) \\
 &\quad - c_{\eta\xi\eta} T_{\eta\eta} - c_{\varphi\xi\varphi} T_{\varphi\varphi} + c_{\xi\eta\xi} T_{\eta\xi} + c_{\xi\varphi\xi} T_{\varphi\xi}, \\
 [\nabla \cdot T]_\eta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\varphi T_{\eta\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\varphi T_{\eta\eta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\xi h_\eta T_{\eta\varphi}) \right) \\
 &\quad - c_{\xi\eta\xi} T_{\xi\xi} - c_{\varphi\eta\varphi} T_{\varphi\varphi} + c_{\eta\xi\eta} T_{\xi\eta} + c_{\eta\varphi\eta} T_{\varphi\eta}, \\
 [\nabla \cdot T]_\varphi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\varphi T_{\varphi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\varphi T_{\varphi\eta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (h_\xi h_\eta T_{\varphi\varphi}) \right) \\
 &\quad - c_{\xi\varphi\xi} T_{\xi\xi} - c_{\eta\varphi\eta} T_{\eta\eta} + c_{\varphi\xi\varphi} T_{\xi\varphi} + c_{\varphi\eta\varphi} T_{\eta\varphi}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Dabei ist  $\sqrt{g}$  die Determinante der metrischen Matrix, also  $\sqrt{g} = h_\xi h_\eta h_\varphi$ . Die Kommutatorkoeffizienten  $c_{ijk}$  hängen von den metrischen Skalenfaktoren und deren Ableitungen ab. Ihre genaue Definition ist im Anhang A.2 und in Illenseer und Duschl (2009) zu finden. Da wir uns nun auf den zweidimensionalen Fall beschränken wollen, nehmen wir eine Symmetrie bezüglich der  $\varphi$  Koordinate an, also dass  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \equiv 0$  gilt.

### A.2. Kommutatorkoeffizienten

Die Tensordivergenz (A.1) enthält Kommutatorkoeffizienten  $c_{ijk}$ . Ihre Herleitung ist in Illenseer und Duschl (2009) beschrieben. Die Kommutatorkoeffizienten lauten:

$$c_{\eta\xi\eta} = -c_{\xi\eta\eta} = \frac{1}{h_\eta h_\xi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}, \quad c_{\varphi\xi\varphi} = -c_{\xi\varphi\varphi} = \frac{1}{h_\varphi h_\xi} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \xi},$$

$$\begin{aligned}
c_{\xi\eta\xi} = -c_{\eta\xi\xi} &= \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\xi}{\partial h_\eta}, & c_{\varphi\eta\varphi} = -c_{\eta\varphi\varphi} &= \frac{1}{h_\varphi h_\eta} \frac{\partial h_\varphi}{\partial \eta}, \\
c_{\xi\varphi\xi} = -c_{\varphi\xi\xi} &= \frac{1}{h_\xi h_\varphi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \varphi}, & c_{\eta\varphi\eta} = -c_{\varphi\eta\eta} &= \frac{1}{h_\eta h_\varphi} \frac{\partial h_\eta}{\partial \varphi}.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Hieraus ergibt sich direkt, dass nur  $c_{\eta\xi\eta}$  in polaren Koordinaten nicht verschwindet. Die Kommutatorkoeffizienten sind außerdem Ergebnis der kovarianten Ableitungen der Basisvektoren in Richtung der Basisvektoren (Illenseer und Duschl, 2009). Die für uns relevanten lauten:

$$\nabla_{e_\xi} e_\xi = -c_{\xi\eta\xi} e_\eta \tag{A.3}$$

$$\nabla_{e_\xi} e_\eta = c_{\xi\eta\xi} e_\xi \tag{A.4}$$

$$\nabla_{e_\eta} e_\xi = c_{\eta\xi\eta} e_\eta \tag{A.5}$$

$$\nabla_{e_\eta} e_\eta = -c_{\eta\xi\eta} e_\xi \tag{A.6}$$

### A.3. Rechnen mit Tensoren

Da prägnante Literatur zum koordinatenfreien Rechnen mit Tensoren, insbesondere wenn die Tensordivergenz beteiligt ist, schwierig zu finden ist, werden hier kurz die wichtigsten in dieser Arbeit verwendeten Regeln eingeführt. Eine umfassende Darstellung kann gefunden werden in York (2001). Sei nun  $\Phi$  ein Skalarfeld,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  Vektorfelder,  $\mathbf{T}$  ein Tensorfeld zweiter Stufe und  $\mathbb{I}$  die Eins zweiter Stufe. Dann gilt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}^t \cdot \mathbf{A} \tag{A.7}$$

$$\nabla(\Phi \mathbf{A}) = (\nabla \Phi) \mathbf{A} + \Phi \nabla \mathbf{A} \tag{A.8}$$

$$\nabla(\Phi \mathbf{T}) = (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{T} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{T} \tag{A.9}$$

$$\nabla(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot (\nabla \mathbf{B}) \tag{A.10}$$

$$\nabla \cdot (\Phi \mathbb{I}) = \nabla \Phi \tag{A.11}$$

### A.4. Herleitung der koordinatenfreien Residualimpuls- und Residualenergiegleichung

Mit der analytisch äquivalenten Schreibweise der Quellterme in der Impulsgleichung

$$-\rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{w} - \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \tag{A.12}$$

$$= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}) + \mathbf{w} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) - \rho \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} \tag{A.13}$$



leicht hergeleitet. Man beachte, dass der letzte Term nur einen Beitrag zur radialen Impulsgleichung liefert. Der Nachweis für die Energiegleichung ist etwas trickreicher. Zunächst stellen wir die gewünschten Terme für die linke Seite her:

$$\partial_t E + \nabla \cdot ((E + p) \mathbf{v}) \quad (\text{A.14})$$

$$= \partial_t E' + \partial_t \left( \frac{\rho}{2} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^2) \right) + \nabla \cdot \left( (E' + p) \mathbf{v} + \frac{\rho}{2} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^2) \mathbf{v} \right) \quad (\text{A.15})$$

$$= \partial_t E' + \nabla \cdot ((E' + p) \mathbf{u}) + \nabla \cdot ((E' + p) \mathbf{w}) + \partial_t \left( \frac{\rho}{2} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^2) \right) + \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{2} (2\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^2) \mathbf{v} \right) \quad (\text{A.16})$$

$$= \partial_t E' + \nabla \cdot ((E' + p) \mathbf{u}) + \mathbf{w} \cdot \nabla E' + \mathbf{w} \cdot \nabla p + w \partial_t (\rho u_\eta) + \frac{\mathbf{w}^2}{2} \partial_t \rho + \nabla \cdot \left( (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \rho \mathbf{v} + \frac{\mathbf{w}^2}{2} \rho \mathbf{v} \right) \quad (\text{A.17})$$

Die übrig bleibenden Terme sind die übrig bleibenden Quellterme. Betrachte zunächst:

$$w \partial_t (\rho u_\eta) + \mathbf{w} \cdot \nabla p + \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \rho \mathbf{v}) \quad (\text{A.18})$$

$$= w \partial_t (\rho v_\eta) + -w^2 \partial_t \rho + \mathbf{w} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (w u_\eta \rho \mathbf{v} - w^2 \rho \mathbf{v}) \quad (\text{A.19})$$

$$= w \partial_t (\rho v_\eta) + \nabla \cdot (w u_\eta \rho \mathbf{v}) + \mathbf{w} \cdot \nabla p - w^2 (\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w^2 \quad (\text{A.20})$$

$$= w (\partial_t (\rho u_\eta) + \nabla \cdot (u_\eta \rho \mathbf{v}) + \mathbf{e}_\eta \cdot \nabla p) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w^2 + u_\eta \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w \quad (\text{A.21})$$

$$= w S_\eta + (u_\eta - 2w) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w. \quad (\text{A.22})$$

$S_\eta$  sind dabei die Quellterme der azimuthalen Impulsgleichung

$$S_\eta = \rho v_\xi^2 c_{\xi\eta\xi} - \rho v_\eta v_\xi c_{\eta\xi\eta}. \quad (\text{A.23})$$

In orthogonal krummlinigen Koordinaten können wir dann den Energiequellterm aufschreiben:

$$S_{E'} = -w S_\eta - (v_\eta - 2w) \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \frac{\mathbf{w}^2}{2} \quad (\text{A.24})$$

$$= -w S_\eta - u_\eta \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w \quad (\text{A.25})$$

$$= \rho w v_\xi v_\eta c_{\eta\xi\eta} - \rho w v_\xi^2 c_{\xi\eta\xi} - u_\eta \rho \mathbf{v} \cdot \nabla w \quad (\text{A.26})$$

Wir wollen aber ja gerne die Gleichung 3.41 bestätigen. Hierfür vereinfachen wir nun die rechte Seite der behaupteten Energiegleichung

$$-\rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla w) = -\rho \mathbf{u} \cdot ((v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta) \cdot \nabla w \mathbf{e}_\eta) \quad (\text{A.27})$$

$$= -\rho \mathbf{u} \cdot \left( w \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{e}_\eta + \mathbf{e}_\eta v_\xi \frac{1}{h_\xi} (\partial_\xi w) \right) \quad (\text{A.28})$$

$$= -\rho \mathbf{u} \cdot \left( \mathbf{e}_\eta v_\xi \frac{1}{h_\xi} (\partial_\xi w) + w (v_\xi \mathbf{e}_\xi \cdot \nabla \mathbf{e}_\eta + v_\eta \mathbf{e}_\eta \cdot \nabla \mathbf{e}_\eta) \right) \quad (\text{A.29})$$

$$= -\rho \mathbf{u} \cdot \left( \left( \mathbf{e}_\eta v_\xi \frac{1}{h_\xi} \partial_\xi w \right) + w v_\xi c_{\xi\eta\xi} \mathbf{e}_\xi - w v_\eta c_{\eta\xi\eta} \mathbf{e}_\xi \right) \quad (\text{A.30})$$

$$= -\rho \mathbf{u} v_\xi \frac{1}{\xi} \partial_\xi w - w (\rho v_\xi^2 c_{\xi\eta\xi} - \rho v_\eta v_\xi c_{\eta\xi\eta}) \quad (\text{A.31})$$

$$= -\rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) \quad (\text{A.32})$$

Dabei verwenden wir die Definitionen von den Kommutatorkoeffizienten  $c_{\xi\eta\xi}$ ,  $c_{\eta\xi\eta}$  aus dem Anhang A.2. Das Ergebnis ist dasselbe wie zuvor. Damit ist die Energiegleichung verifiziert.

Der Quellterm in der Energiegleichung kann ebenfalls umformuliert werden. Das Ergebnis dieser Umformung lautet:

$$\begin{aligned} -\rho \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \cdot (\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{w})) - \frac{w^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \\ &\quad - \nabla \cdot \left( \frac{w^2}{2} \rho \mathbf{u} + \mathbf{w} \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

## A.5. Modifizierte Bessel Funktionen

Die modifizierte Bessel Funktion erster und zweiter Art lauten (Abramowitz und Stegun, 1965):

$$I_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2m + \alpha} \quad (\text{A.34})$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - I_\alpha(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (\text{A.35})$$

## A.6. Fouriertransformation

Da einige unterschiedliche Normierungen der Fouriertransformation und Faltung üblich sind, wollen wir kurz die in dieser Arbeit verwendete Konvention einführen. Als

Kurzschreibweise verwenden wir  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ .

$$\hat{f}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \quad (\text{A.36})$$

$$\mathcal{F}(f \star g) = 2\pi \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g) \quad (\text{A.37})$$

## A.7. Potential eines triaxialen Homeoiden

Pfenniger (1984) beschreibt das allgemeine Potential eines triaxialen Homeoiden nach den ursprünglichen Veröffentlichungen (Chandrasekhar, 1969; Ferrers, 1887). Da dies ein recht komplexes Unterfangen ist, geben wir hier das Ergebnis des für uns relevanten Spezialfalles  $n = 1$  wieder. Die Dichteverteilung des betrachteten Körpers sei

$$\rho = \begin{cases} \rho_{\text{bar}} (1 - g^2)^n & \text{if } g < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}, \quad (\text{A.38})$$

mit  $g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ . Wenn nun  $F(\varphi, k)$  und  $E(\varphi, k)$  die unvollständigen elliptischen Integrale 1. und 2. Art

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \quad (\text{A.39})$$

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (\text{A.40})$$

bezeichnen, definieren wir die folgenden Parameter:

$$k = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \quad (\text{A.41})$$

$$\varphi = \arcsin \left( \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 + \lambda}} \right) \quad (\text{A.42})$$

$$W_{000} = \frac{2}{a^2 - c^2} F(\varphi, k) \quad (\text{A.43})$$

$$W_{100} = \frac{2}{(a^2 - b^2) \cdot \sqrt{a^2 - c^2}} (F(\varphi, k) - E(\varphi, k)) \quad (\text{A.44})$$

$$W_{001} = \frac{2}{a^2 - b^2} \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} - \frac{2}{(b^2 - c^2) \sqrt{a^2 - c^2}} E(\varphi, k) \quad (\text{A.45})$$

$$W_{010} = \frac{2}{\Delta(\lambda)} - W_{100} - W_{001} \quad (\text{A.46})$$

$$W_{110} = \frac{W_{010} - W_{100}}{a^2 - b^2} \quad (\text{A.47})$$

$$W_{011} = \frac{W_{001} - W_{010}}{b^2 - c^2} \quad (\text{A.48})$$

$$W_{101} = \frac{W_{100} - W_{001}}{c^2 - a^2} \quad (\text{A.49})$$

$$W_{200} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\Delta(\lambda) \cdot (a^2 + \lambda)} - W_{110} - W_{101} \right) \quad (\text{A.50})$$

$$W_{020} = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{\Delta(\lambda) \cdot (b^2 + \lambda)} - W_{011} - W_{110} \right). \quad (\text{A.51})$$

$\lambda$  muss dabei die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 \quad (\text{A.52})$$

erfüllen. Die Lösung kann durch Nullstellensuche gefunden werden und hängt von den Koordinaten  $x, y$  ab. Wir können dann die Lösung für das Potential in der Ebene  $z = 0$  angeben:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{bar}}(x, y, 0) = & -\frac{\pi G a b c \rho_{\text{bar}}}{2} (W_{000} + x^2 (x^2 W_{200} + 2y^2 W_{110} - 2W_{100}) \\ & + y^2 (y^2 W_{020} - 2W_{010})), \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

## A.8. Weitere Grafiken aus den Galaxiensimulationen

Es folgen nun einige Grafiken der azimuthal-gemittelten Dichte im Verlauf der Simulationszeit. Dadurch kann ein Überblick über das komplette Simulationsset gewonnen werden.

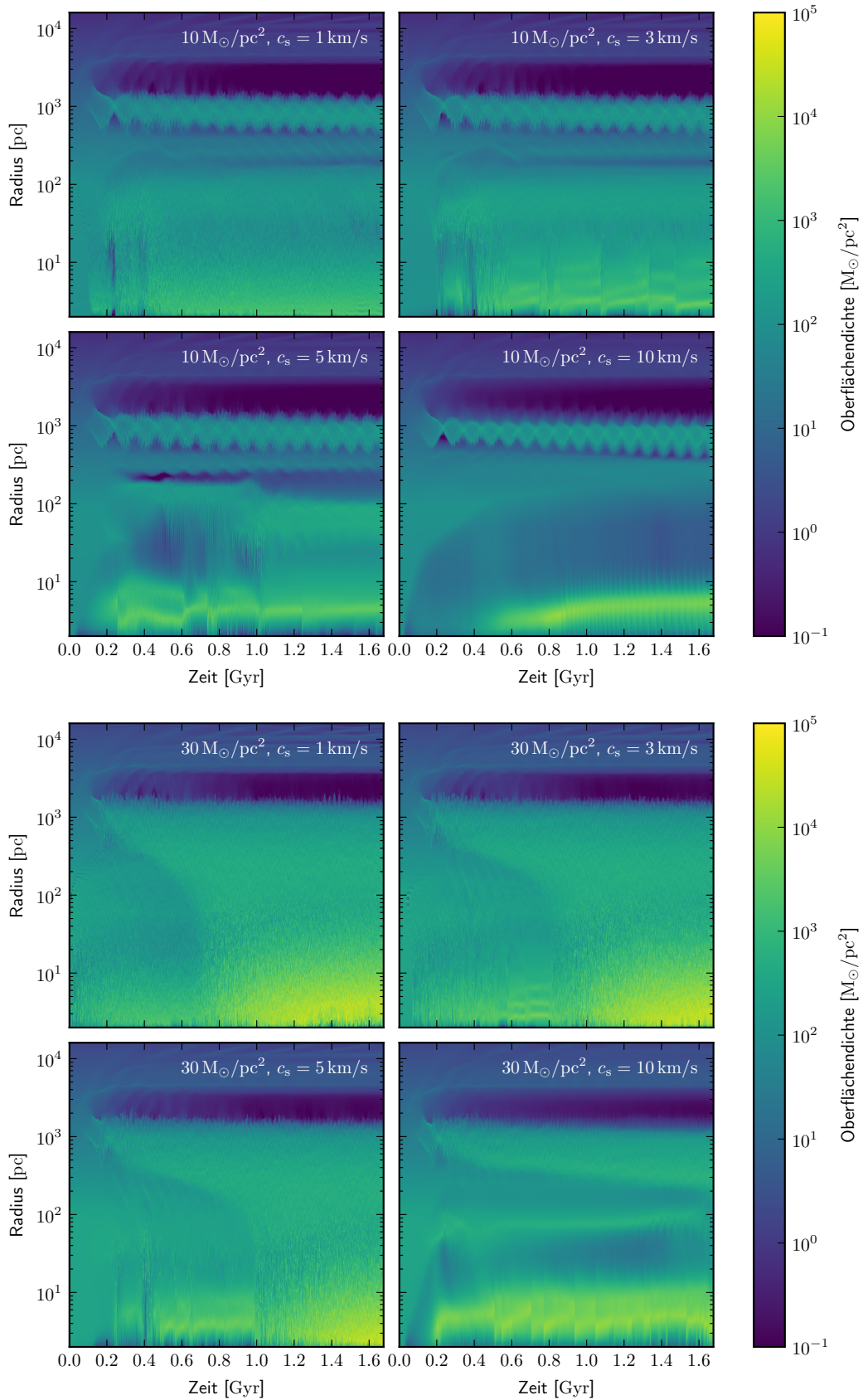


Abbildung A.1.: Azimutal gemittelte Dichte über die Zeit aufgetragen.

*Oben:* Isotherme Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$

*Unten:* Isotherme Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$

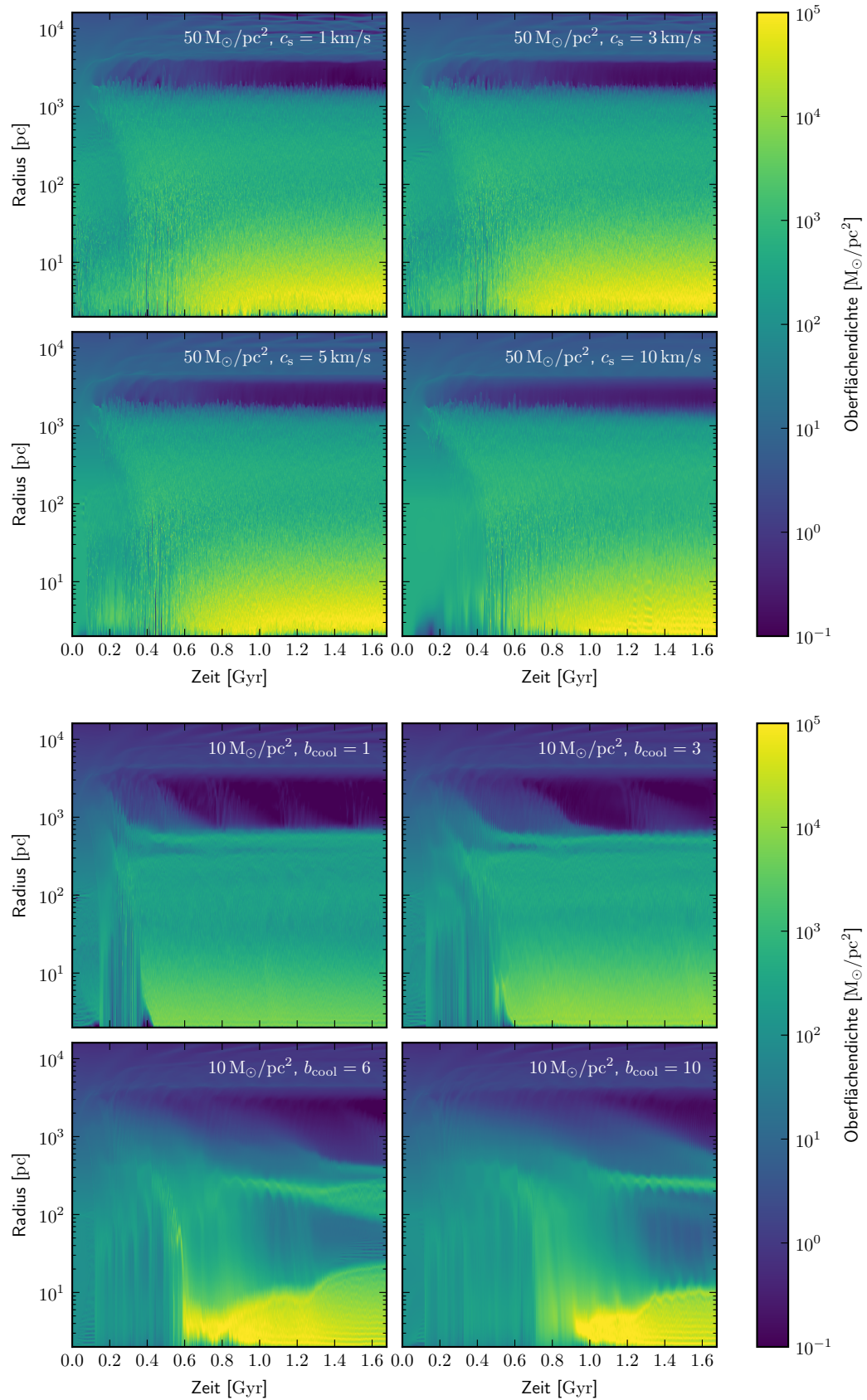


Abbildung A.2.: Azimutal gemittelte Dichte über die Zeit aufgetragen.  
 Oben: Isotherme Simulationen mit  $\Sigma_0 = 50 M_\odot/\text{pc}^2$   
 Unten: Isentrope Simulationen mit  $\Sigma_0 = 10 M_\odot/\text{pc}^2$

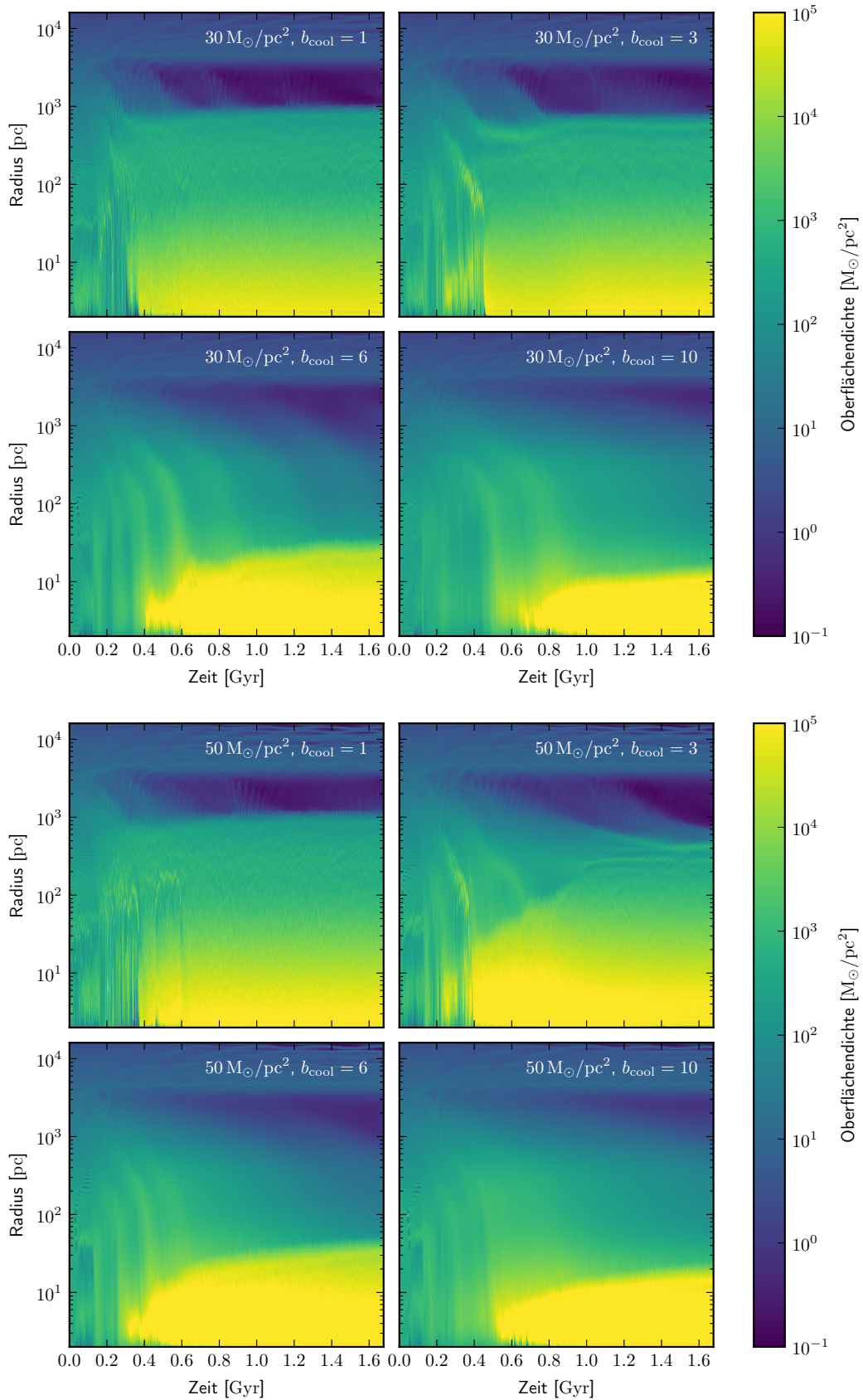


Abbildung A.3.: Azimutal gemittelte Dichte über die Zeit aufgetragen.  
 Oben: Isentrope Simulationen mit  $\Sigma_0 = 30 M_\odot/\text{pc}^2$   
 Unten: Isentrope Simulationen mit  $\Sigma_0 = 50 M_\odot/\text{pc}^2$





## Danksagung

Ich möchte mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl für die Zusammenarbeit, richtungsweisenden Ratschläge und hilfreichen Gespräche bedanken. Stets habe ich die Möglichkeit bekommen, ganz frei meinen eigenen Ideen und Wünschen zu folgen.

Ganz besonders möchte ich mich bei Dr. Tobias Illenseer bedanken, dessen Zeit ich ungefragt zu unzähligen Gesprächen und Diskussionen in Anspruch genommen habe. Stets freundlich hat er all meine teils mutig bis frechen Behauptungen widerlegen und sich dagegen verteidigen müssen. Ohne seine Anregungen und kritischen Fragen wäre meine Arbeit in diesem Rahmen nicht möglich gewesen.

Ich bedanke mich bei Frau Kuhr und Herrn Boll, sowie der gesamten Arbeitsgruppe, die stets für ein kleines Gespräch oder Hilfestellung bereit gestanden haben. Ohne euch wäre mein Alltag kaum so flüssig und angenehm verlaufen.

Ich bedanke mich bei allen Korrekturlesern und ganz besonders bei Jan Philipp Ruge und Thorben Kewitz.

Meinen Eltern danke ich nicht nur für die Möglichkeit zu studieren, sondern auch für die gesamte Ausbildung auf dem Weg zum Studium. Vielen Dank!



## Erklärung

Ich erkläre hiermit,

1. dass diese Abhandlung – abgesehen von der Beratung durch meinen Betreuer – nach Inhalt und Form meine eigene Arbeit ist,
2. diese Arbeit weder ganz noch zum Teil an einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat, nicht veröffentlicht worden ist und nicht zur Veröffentlichung eingereicht wurde,
3. dass diese Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden ist.

Kiel, den

---

Manuel Jung