

Isotherme Modellierung kompressibler astrophysikalischer Fluide über kosmische Zeitskalen

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE IN DEN NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT)

VORGELEGT DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

von
STEPHAN CHRISTOPH DESCHNER

Kiel, 29.03.2018

Isotherme Modellierung kompressibler astrophysikalischer Fluide über kosmische Zeitskalen

DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE IN DEN NATURWISSENSCHAFTEN
(DR. RER. NAT)

VORGELEGT DER
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL

von
STEPHAN CHRISTOPH DESCHNER

Kiel, 29.03.2018

REFERENT: PROF. DR. W. J. DUSCHL
KOREFERENT: PROF. DR. R. WIMMER-SCHWEINGRUBER
TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 28.05.2018
ZUM DRUCK GENEHMIGT: 11.06.2018

GEZ. PROF. DR. NATASCHA OPPELT, DEKANIN

Zusammenfassung

Viele, oft sehr verschiedenartige, astrophysikalische Objekte weisen einen hohen Grad an Symmetrie auf. Diese Annahme kann zur mathematischen Beschreibung genutzt werden, wodurch sich der zugrundeliegende Gleichungssatz zum Teil enorm vereinfacht. In dieser Arbeit führen die Symmetrieanahmen zusammen mit der Isothermieannahme zu einem Modell, das es erlaubt, unterschiedliche physikalische Problemstellungen im Bereich der Astrophysik zu modellieren. Das Augenmerk liegt dabei auf der Entwicklung von Supernovaüberresten und von Aktiven Galaktischen Kernen.

Es wird ein vollständiges mathematisches Modell zur dynamischen Entwicklung isothermer Supernovaüberreste ausgearbeitet, das über die Annahme der Selbstähnlichkeit zu semi-analytischen Ausdrücken führt. Freie Parameter des Modells führen zu wichtigen Einschränkungen, die eine tragende Rolle bei der Modellierung isothermer Supernovaüberreste übernehmen. Es wird gezeigt, dass eine isotherme Entwicklungsphase für Supernovaüberreste existiert. Dies führt zum Ergebnis, dass diese Phase als Bindeglied zwischen der bekannten Sedov-Taylor-Phase und der explosionsdominierten Phase gesehen werden kann. Aktuelle Beobachtungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit von Tycho verifizieren diese Aussage.

Zur Theorie der Entwicklung Aktiver Galaktischer Kerne wird im zweiten Teil der Arbeit ein Programmpaket entwickelt. Dieses ist, aufgrund eines schnellen impliziten numerischen Zeitintegrationsverfahrens in der Lage, die dynamische Entwicklung einer Akkretionsscheibe um ein zentrales Schwarzes Loch innerhalb der Hubble-Zeit zu simulieren. Somit werden Untersuchungen ganzer Ensembles an Aktiven Galaktischen Kernen möglich. Die mathematische Formulierung der Numerik basiert auf einer koordinatenfreien Darstellung, womit unterschiedlichste Objekte simuliert werden können, beispielsweise die isothermen Supernovaüberreste aus dem ersten Teil der Arbeit. Das Programm wird ausgiebig getestet und findet anschließend Verwendung in der Untersuchung von Anfangsbedingungen des Systems. Es wird gezeigt, dass das vermutete schnelle Wachstum Aktiver Galaktischer Kerne im frühen Universum stark von der initialen Dichteverteilung sowie von der absoluten initialen Masse der Akkretionsscheibe abhängen.

Abstract

Various astrophysical objects tend to have a high degree of symmetry which is useful in reducing the mathematical complexity of the governing model equations. The scope of this work lies in the application of both, the symmetry assumptions and the additional isothermal assumption. This leads to a wide range of astrophysical problems, especially supernova remnants and active galactic nuclei.

The concept of self-similarity together with the above made assumptions are used to model the dynamics of supernova remnants, yielding semi-analytical solutions for such problems. Important restrictions of the mathematical theory are investigated, showing great importance in the expansion process of supernova remnants. Further, the existence of an isothermal phase in the development of supernova remnants is shown. Moreover it is found, that this phase may be the link between the previously known Sedov-Taylor-phase and the explosion-dominated phase. This finding is supported by recently made investigations due to the shock velocity of Tycho which is in good agreement with the findings of the isothermal, self-similar model.

The second part of this work deals with the development of a numerical scheme capable of solving the governing equations of the dynamics of an accretion disk around a massive central black hole, also known as active galactic nuclei. This scheme allows to simulate on cosmic timescales due to an efficient implicit numerical integration scheme. Hence, the investigation of numerous active galactic nuclei is possible, meaning to simulate the mass accretion of whole ensembles. The mathematical scheme is based on a coordinate free formulation permitting a wide range of applicable scenarios, for example the previously investigated supernova remnants. Widely discussed test cases are followed by an investigation of initial density conditions to the system. It is shown, that an assumed fast growth of a central black hole surrounded by an accretion disk depends strongly on the initial density distribution and the initial disk mass.

*„Vielleicht ist unsre Welt, die wie ein Körnlein Sand
Im Meer der Himmel schwimmt, des Übels Vaterland!
Die Sterne sind vielleicht ein Sitz verklärter Geister,
Wie hier das Laster herrscht, ist dort die Tugend Meister,
Und dieser Punkt der Welt von mindrer Trefflichkeit
Dient in dem großen All zu der Vollkommenheit...“*

Über den Ursprung des Übels (Drittes Buch), Albrecht von Haller (1734)

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis	1
1 Einleitung	3
1.1 Isotherme Supernovaüberreste	4
1.2 Die Entwicklung Supermassereicher Schwarzer Löcher	5
1.3 Struktureller Überblick über die Arbeit	8
2 Theoretische Grundlagen	9
2.1 Heuristische Einführung zur Morphologie und Dynamik Aktiver Galaktischer Kerne und Supernovaüberreste	9
2.2 Die Grundgleichungen in Erhaltungsform	10
2.3 Dimensionalität und koordinatenfreie Darstellung	12
2.4 Physikalische Annahmen	15
2.4.1 Gravitation	15
2.4.2 Viskosität	16
2.4.3 Isothermie	18
2.5 Luminosität und Massenbilanz	20
3 Isotherme Unstetigkeiten: Implosionen und Explosionen in der Astrophysik	23
3.1 Das Modell isothermer Unstetigkeiten	24
3.2 Die reduzierten Differentialgleichungen	26
3.3 Die Nebenbedingungen	27
3.4 Isotherme Rankine-Hugoniot-Bedingungen	30
3.5 Die selbstähnlichen Lösungen	32
3.5.1 Isotherme Implosionen in allen Geometrien ($\alpha \in \{0, 1, 2\}$)	32
3.5.2 Isotherme Explosionen in sphärischer ($\alpha = 2$) Geometrie	36
3.5.3 Analytische Lösungen zum Implosions-Problem und Explosions-Problem für $\alpha = 0, \kappa < 1$	43
3.6 Fazit	50
4 Isotherme Supernovaüberreste	53
4.1 Entwicklungsphasen von Supernovaüberresten	53
4.2 Modellierung und ableitbare Parameter	54
4.2.1 Modellgrößen: Alter und Geschwindigkeit	55
4.2.2 Abgeleitete Größen: Luminosität und Flächenhelligkeit	57
4.2.3 Die Bestimmung von κ	61
4.2.4 Masse und Energie	62
4.3 Evaluation der Modell- und Beobachtungsgrößen	66
4.3.1 Der Parameterraum	66
4.3.2 Szenarien zur Interpretation isothermer Supernovaüberreste	68
4.3.3 Diskussion der Ergebnisse	71
4.4 Interpretation der Ergebnisse	77
4.4.1 Abgleich der Ergebnisse mit der Literatur	80
4.5 Fazit	81

5	Das Programmpaket hedis 2.0	83
5.1	Die räumliche Diskretisierungsmethode	83
5.1.1	Die schwache Formulierung	84
5.1.2	Die diskrete Geometrie	86
5.1.3	Die Diskretisierung des Advektionsterms	87
5.1.4	Die Rekonstruktion	89
5.1.5	Die Quellterme	90
5.1.6	Massenberechnung	91
5.2	Die Nebenbedingungen	92
5.2.1	Anfangsbedingungen	92
5.2.2	Randbedingungen	92
5.3	Die zeitliche Diskretisierungsmethode	93
5.3.1	Die Henyey-Methode	94
5.3.2	Optimierung des Konvergenzverhaltens	95
5.3.3	Berechnung der Henyey-Matrix	97
5.4	Stabilitätsbetrachtungen und Zeitschrittberechnung	98
5.4.1	Berechnung der numerischen Stabilität	98
5.4.2	Festlegung des impliziten Zeitschrittes	101
5.4.3	Eine automatische Schrittweitenkontrolle	102
5.5	Die Implementierung	104
5.5.1	Idee zur objektorientierten Programmierung in C	104
5.5.2	Der Programmaufbau und -ablauf	107
5.6	Fazit	109
6	Numerische Tests für hedis 2.0	111
6.1	Die Burgers-Gleichung	111
6.1.1	Die partielle Differentialgleichung	111
6.1.2	Anfangsbedingungen und Randbedingungen	112
6.1.3	Die Lösungen	113
6.2	Der isotherme Vortex	113
6.2.1	Die Gleichungen	114
6.3	Die isotherme Bondi-Akkretion	118
6.3.1	Das Modell	118
6.3.2	Diskussion der Lösungen	119
6.4	Viskos zerfließende Dichteverteilung	120
6.4.1	Viskose Akkretionsprozesse	121
6.4.2	Diskussion der Ergebnisse	122
6.5	Isotherme Implosionen und Explosionen	123
6.5.1	Programmverifikation	125
6.5.2	Diskussion	127
6.6	Starr rotierendes Gas in einer Kugelschale	127
6.7	Zusammenfassung	131
7	Aktive Galaktische Kerne	133
7.1	Anfangsbedingungen für eine Akkretionsscheibe	133
7.2	Die Kalnajs-Scheibe	135
7.2.1	Die Zeitabhängigkeit der Kalnajs-Scheibe	135
7.2.2	Die Massenflüsse und Massenbilanzen	137

7.3	Dichteverteilung nach einem (gebrochenen) Potenzgesetz	139
7.3.1	Die Zeitabhängigkeit der Flächendichte	140
7.3.2	Die Massenflüsse und Massenbilanzen	141
7.4	Diskussion der untersuchten Modelle	145
7.5	Zusammenfassung	147
8	Zusammenfassung und Ausblick	149
8.1	Zusammenfassung	149
8.2	Ausblick	150
A	Anhang	153
A	Transformationsformeln koordinatenfreie Darstellung	153
B	Vektordefinitionen der Entwicklungsgleichung	154
C	Indizierung Henyey-Methode	154
D	Numerische Ergebnisse isothermer Supernovaüberreste	155
E	Berechnung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen	156
F	Anmerkungen zum Test nach Lynden-Bell und Pringle	159
G	Ergänzungen zum Kapitel 7 Aktive Galaktische Kerne	159
	Abbildungsverzeichnis	163
	Tabellenverzeichnis	165
	Literatur	167
	Danksagung	177

Abkürzungsverzeichnis

AB Anfangsbedingung	28
AGN Aktiver Galaktischer Kern (engl. active galactic nucleus).....	12
AS Akkretionsscheibe	6
ASK automatische Schrittweitenkontrolle	102
CFD numerische Strömungsmechanik (engl. computational fluid dynamics)	3
EP Explosions-Problem	18
EV Eigenvektor	33
FVM Finite-Volumen-Methode	83
GDG gewöhnliche Differentialgleichung.....	26
HM Henyey-Methode	83
IP Implosions-Problem.....	19
KT Kurganov und Tadmor	87
KS Kalnajs-Scheibe	133
PDG partielle Differentialgleichung	26
RHB Rankine-Hugoniot-Bedingung.....	23
RB Randbedingung	4
RWP Randwertproblem.....	26
SF Strukturfunktion	105
SL singuläre Linie.....	32
SP singulärer Punkt.....	33
SMSL Supermassereiches Schwarzes Loch	9
SN Supernova.....	4
SNR Supernovaüberrest (engl. supernova remnant)	4
ST Streckungstransformation (engl. stretching transformation).....	24

1 Einleitung

IN der Astrophysik sind die hydrodynamischen Gleichungen fester Bestandteil bei der Modellierung von beispielsweise der Sternentwicklung, der Akkretionsphysik oder der Strukturbildung im Universum. Mit der Navier-Stokes-Gleichung als essentieller Baustein des benötigten Gleichungssatzes¹ gelangt man schnell an die Grenzen der analytischen Lösbarkeit solcher Systeme. In sehr guter Näherung greift man deshalb auf Programme der numerische Strömungsmechanik (CFD) zurück, welche konvergente Lösungen über iterative Verfahren erzeugen. Es existieren viele solcher Programme, die auf spezielle Anwendungsmöglichkeiten ausgelegt, aber oft zu wenig flexibel oder zu komplex sind, um wichtige physikalische Prozesse gefiltert beschreiben zu können.

Einfache Modelle sind allerdings die Mikroskope zum grundlegenden Verständnis dieser wirkenden physikalischen Prozesse. Existiert ein Verfahren zum Lösen reduzierter Modelle und können die Prinzipien darüber verstanden werden, ist es ein logischer Schritt, diese zu erweitern um Stück für Stück ein immer präziseres Abbild der Wirklichkeit zu erlangen.

Im Folgenden wird ein erster Schritt in diese Richtung gegangen, indem zunächst ein theoretisches Gerüst aufgestellt wird, mit dem verschiedenste Objekte über sehr lange Zeitskalen beschrieben werden können. Das Modell baut auf den Arbeiten von Lynden-Bell und Pringle (1974), Blank (2010) und Duschl und Strittmatter (2011) auf und benutzt globale, isotrope Isothermie in einer Raumdimension. Diese Annahmen ermöglichen die gewünschten Einblicke in die grundlegende Physik.

In dieser Arbeit wird der Fokus auf Untersuchungen zur Entwicklung von Supernova-überresten (SNR) sowie auf das Wachstum Supermassereicher Schwarzer Löcher (SMSL) in den Zentren Aktiver Galaktischer Kerne (AGN) gelegt.

Im ersten Fall wird ein vollständig (semi-)analytisches Modell ausgearbeitet, das als Grundlage zur Untersuchung von SNR dient. Dies ist von besonderem Interesse, weil echte Isothermie in diesem Kontext bisher nicht betrachtet wurde und ähnliche Ansätze bereits in der 1970er-Jahren falsifiziert wurden. Die zweite Anwendung erfordert die vollständige numerische Lösung der zugrundeliegenden Modellgleichungen, wofür das Programm `hedis 2.0`² entwickelt wurde. Dieses Programm ist modular aufgebaut und zusammen mit der koordinatenfreien Diskretisierung für ein breites Anwendungsspektrum geeignet. `hedis 2.0` stellt weiterhin eine Besonderheit dar, weil es Simulationen über kosmische Zeitskalen innerhalb kurzer Rechenzeiten durchführen kann. Dies ermöglicht im Rahmen dieser Arbeit die Untersuchung des Einflusses von Anfangsbedingungen auf die Langzeitentwicklung, beziehungsweise die Massenbilanzen Supermassereicher Schwarzer Löcher SMSL innerhalb mehrerer Milliarden Jahre.

¹Die hydrodynamischen Gleichungen ergeben sich über die ersten drei Momente Dichte, Impuls und kinetische Energie aus der Maxwell-Boltzmann-Transportgleichung (z.B. Milne-Thomson 2013) zum System aus Kontinuitäts-, Navier-Stokes- und Energiegleichung. Die Navier-Stokes-Gleichung selbst stellt dabei eines der 7 Millennium-Probleme dar, welche seit 2002 als die wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik ausgeschrieben wurden.

²`hedis 2.0` ist ein Akronym für **H**enyey **D**isk **S**olver, benannt nach dem amerikanischen Astronomen L. G. Henyey. Die Zahl in `hedis 2.0` steht für die in dieser Arbeit vollzogene Neu- und Weiterentwicklung.

1.1 Isotherme Supernovaüberreste

Am Ende des Lebenszyklus eines Sternes kann es zu einer Supernova-Explosion kommen. Dabei werden die äußeren Hüllen des Sterns ausgeworfen, wobei sich das Material über eine starke, näherungsweise sphärisch symmetrische Verdichtung (Stoßwelle) in das interstellare Medium ausbreitet (z.B. Ostriker und McKee 1988). Diese Objekte werden Supernovaüberreste (SNR) genannt. Abbildung 1.1 zeigt den Tycho SNR als Beispiel, wobei die unterschiedlichen Farben aus überlagerten Röntgenmessungen in verschiedenen Energiebändern stammen. Die blaue Linie ist die Stoßwelle der Explosion. Da die physikalischen Prozesse einer Supernovaexplosion sehr komplex sind und aufgrund der geringen Explosionsrate ($\sim 3/100$ a, Vink 2012) nur spärlich untersucht werden können³, liegt es nahe, SNR mit einer Lebenszeit von 10^4 a – 10^5 a genauer zu studieren. Somit sind diese Objekte wichtige Indikatoren zum physikalischen Verständnis von SN-Ereignissen.

Seit Shklovskii (1962) ist bekannt, dass die eindimensionalen, sphärisch symmetrischen Lösungen von Sedov (1946) und Taylor (1950) zur dynamischen Beschreibung von SNR verwendet werden können. Diese haben jedoch den Nachteil, dass der sehr steile Temperaturgradient am Ursprung unphysikalisch ist (z.B. Sedov 1946). Deshalb entwickelt Korobeinikov (1956) Lösungen zu einem homothermen⁴ Modell, basierend auf den Arbeiten von Sedov (1946) und Taylor (1950). Vor allem Solinger u. a. (1975) untersuchen Korobeinikovs' homotherme Lösungen im Zusammenhang mit SNR. Lerche und Vasyliunas (1976) zeigen jedoch, dass die homothermen Lösungen zu einem ungültigen Zeitskalenargument führen und somit nicht für die dynamische Beschreibung verwendet werden können. Obwohl sehr viele Arbeiten zu diesem Thema existieren, sind bisher keine weiteren Untersuchungen zu einer *echten* isothermen Beschreibung durchgeführt worden. Eine gute Übersicht zu verschiedenen Ansätzen findet sich ebenfalls in Ostriker und McKee (1988).

In dieser Arbeit wird nun ein mathematischer Apparat vorgestellt, der die *echten* isothermen Lösungen modelliert und durch eine einfache Änderung der Randbedingungen (RB) ebenso imstande ist, Lösungen zu einem Kollaps einer Materieverteilung in unterschiedlichen Symmetrien zu liefern.

Mit diesem Apparat sollen zwei Fragen gleichermaßen beantwortet werden:

- Kann die Isothermieannahme überhaupt eine Entwicklungsphase von SNR beschreiben?
- Falls das isotherme Modell Gültigkeit besitzt, sollten sich einzelne SNR darüber modellieren lassen. Welche SNR könnten sich demnach in einer isothermen Entwicklungsphase befinden?

Dazu werden verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, die zahlreichen Parameter, welche aus Beobachtungsdaten zu einem Katalog aus 10 verschiedenen SNR zusammengetragen werden, nachzubilden.

³Eine der am besten untersuchten Supernovae (SN) ist 1987A. Sie wurde vor und nach der Explosion beobachtet und ist die erste von sehr wenigen, deren Vorläuferstern identifiziert werden konnte (Priyalnik 2000, S. 183f).

⁴Unter Homothermie versteht man eine Mischung aus adiabatischer und isothermer Beschreibung der Temperatur vor und hinter der Stoßwelle.

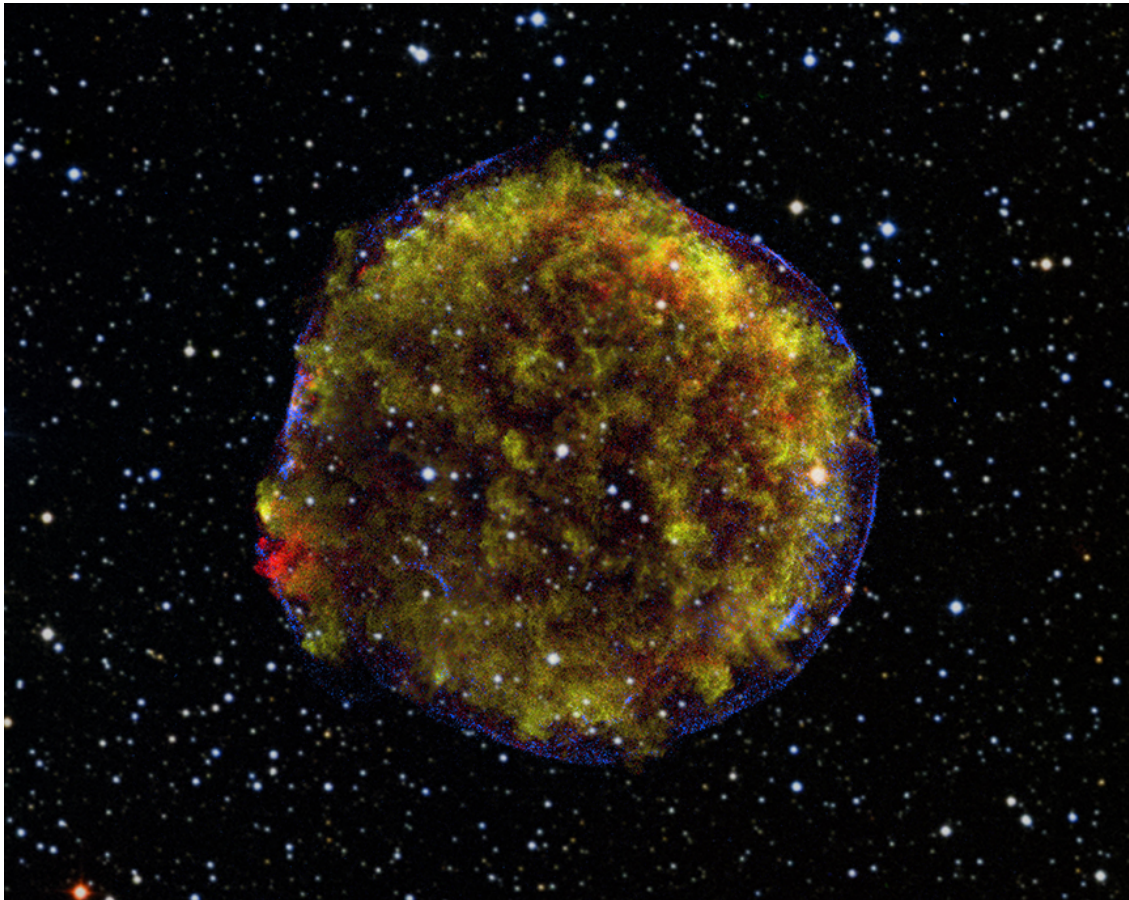


Abbildung 1.1: Überlagertes Farbbild des Tycho SNR aus unterschiedlichen Röntgenstrahlenbändern: Rot 0,95 keV – 1,26 keV, Grün 1,63 keV – 2,26 keV, Blau 4,1 keV – 6,1 keV.
© X-ray: NASA/CXC/GSFC/Williams u. a. (2016); Optical: DSS.

Da diese neuen Lösungen analytische Ausdrücke zu einem vereinfachten System der hydrodynamischen Gleichungen sind, werden diese ebenfalls benutzt, um das isotherme CFD Programm `hedis 2.0` zu testen.

1.2 Die Entwicklung Supermassereicher Schwarzer Löcher

Im zweiten Teil der Arbeit wird ein Modell zur dynamischen Entwicklung Aktiver Galaktischer Kerne (AGN) eingeführt und gelöst. Diese Lösungen müssen innerhalb der gesamten Hubble-Zeit⁵ berechnet werden. Das Modell schließt außerdem die zuvor eingeführte isotherme Beschreibung von SNR mit ein.

Ausgangspunkt ist die Frage nach maximalen Massen von Schwarzen Löchern in den Zentren von AGN, welche in Deschner (2013) gefunden wurden. Die Frage zielt darauf ab, warum ab einer Rotverschiebung⁶ von $z \sim 6 - 7$ kaum noch AGN beobachtet

⁵Die Hubble-Zeit oder die Welt-Zeit gibt das maximale Alter des Universums von $\sim 13,7 \cdot 10^9$ a seit dem Urknall an (z.B. Maoz 2016).

⁶Die Rotverschiebung ist ein Maß für die Entfernung und somit für das Alter von Galaxien. $z \sim 6 - 7$ bedeutet demnach, dass die Objekte $\sim 0,7 \cdot 10^9$ a – $0,9 \cdot 10^9$ a nach dem Urknall entstanden sind (Wright 2006).

werden (z.B. Sijacki u. a. 2009, und enthaltene Referenzen, vor allem von Xiaohui Fan). Gleichzeitig beherbergen diese Objekte im genannten Bereich bereits Schwarzschildmassen von $\sim 10^9 M_\odot - 10^{10} M_\odot$. Intuitiv vermutet man zwar, dass Schwarze Löcher über den Akkretionsprozess, welcher Masse aus seiner umgebenden Materiescheibe aufsammelt (zur Veranschaulichung die Illustration Abbildung 1.2 einer Akkretionsscheibe (AS) um ein junges, zentrales Schwarzes Loch), mit zunehmendem Alter immer schwerer werden müssten. Vielmehr verlangsamt sich ihr Wachstum, nachdem sie einen Großteil der Masse aus der Akkretionsscheibe aufgesammelt haben, schon innerhalb dieser ersten 10^9 a stark (Hasinger u. a. 2005).

Duschl und Strittmatter (2011) zeigen, dass Schwarze Löcher in AGN über eine spezielle Parametrisierung turbulenter Reibung innerhalb 10^9 a auf die gesuchten Massen anwachsen können, indem sie 20 % – 80 % der in der Akkretionsscheibe befindlichen Masse⁷ aufsammeln. In Deschner (2013) wurde mit Hilfe des Szenarios von Blank (2010) gezeigt, dass das simulierte Wachstum Schwarzer Löcher über variierende Parameterkonfigurationen stark eingeschränkt werden kann. Man findet auf diesem Wege maximale Massen Schwarzer Löcher zwischen $6 \cdot 10^9 M_\odot - 10^{10} M_\odot$. Wachstumsbeschränkte Schwarze Löcher im gleichen Massenbereich wurden ebenfalls von King (2016) und Inayoshi und Haiman (2016) gefunden. Diese Massenmaxima besagen aber nicht, dass die Schwarzen Löcher nicht weiter anwachsen können. Vielmehr sind die Akkretionsscheiben so stark ausgedünnt, dass die Akkretionsraten abfallen und dadurch keine hohen Leuchtkräfte mehr aufweisen. Somit erklärt sich, warum die ab der Rotverschiebung $z \sim 6 - 7$ gefundenen Objekte immer seltener detektiert werden – sie leuchten schlicht nicht mehr hell genug (mit zunehmender Instrumentengenauigkeit verschiebt sich diese Grenze immer weiter nach hinten z.B. Oesch u. a. 2016; Thomas u. a. 2016).

An dieser Stelle soll `hedis 2.0` anschließen, indem das Modell von Blank (2010) erweitert wird. Dabei liegt das Augenmerk auf dem Gleichungssatz, der auf bestimmte Annahmen verzichtet und dadurch allgemeinere Aussagen zulässt.

Die Erweiterungen werden so gewählt, dass die Vergleichbarkeit mit den Arbeiten von Blank (2010) und Duschl und Strittmatter (2011) erhalten bleibt, aber sehr viel umfangreichere Anwendungsmöglichkeiten liefern. Die wichtigsten Erweiterungen sind:

- Formulierung in allgemeinen krummlinigen Orthogonalkoordinaten (Illenseer und Duschl 2009) in unterschiedlichen Symmetrien
- Hinzunahme der Drehimpulserhaltung
- Hinzunahme der radialen Impulserhaltung
- flexibler Aufbau des Programms zur einfachen Handhabung und Erweiterung mit neuen Modulen.

Nimmt man eine über den Abstand gleichverteilte Anfangsmasse an, wird die Impuls- und die zeitabhängige Drehimpulsgleichung zu einer Umverteilung der Masse führen, da sich die Kräfteverhältnisse dynamisch mit dem Abstand zum Zentrum ändern. Eine andere Verteilung der Masse sollte demnach wieder eine völlig andere Dynamik zur Folge haben. Das heißt aber nicht, dass das Akkretionsprinzip (Masse wandert nach innen, wenn Drehimpuls nach außen abgegeben wird, vgl. Lüst 1952) nicht mehr gilt,

⁷siehe Tabelle G.3 im Anhang.

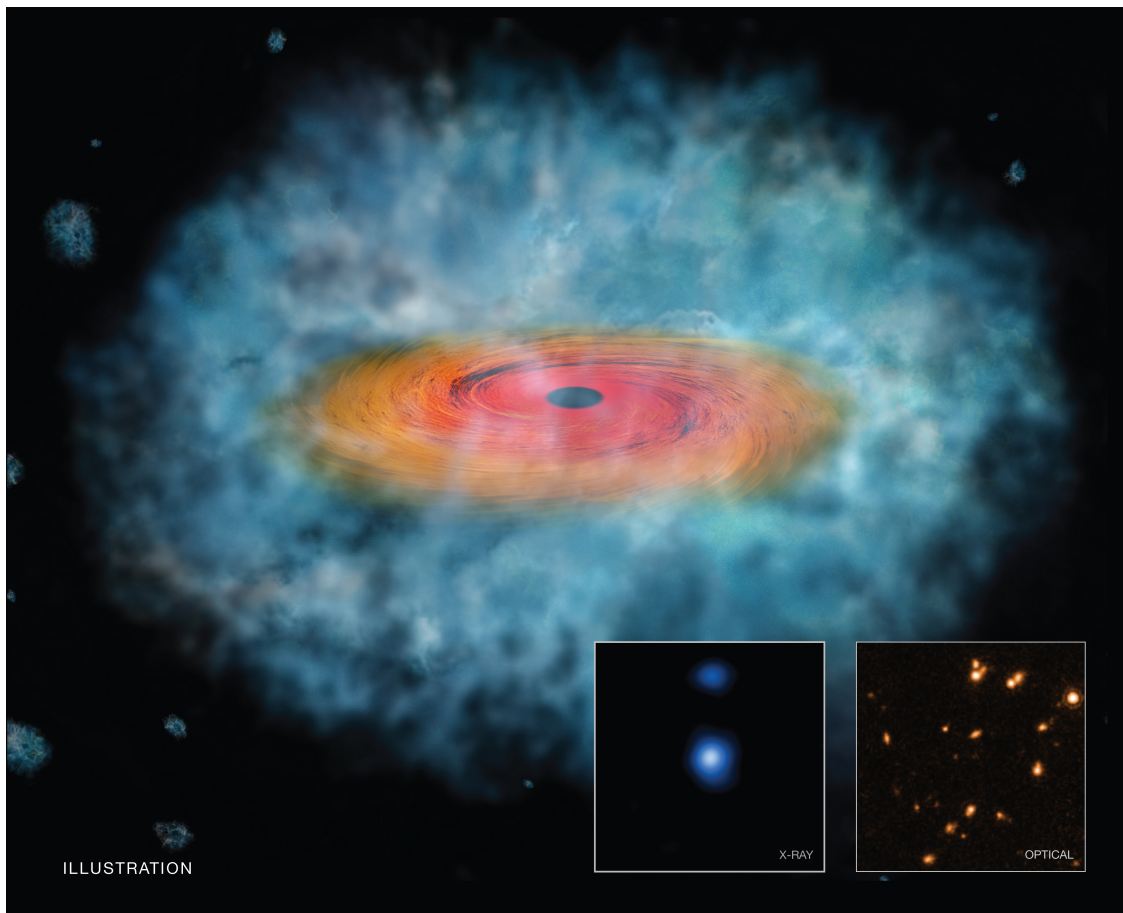


Abbildung 1.2: Illustration eines weniger als 10^9 a alten Supermassereichen Schwarzen Loches (SMBL) im Zentrum umgeben von einer (blauen) Gaswolke und einer (rot, orange) Akkretionsscheibe (AS).
© X-ray: NASA/CXC/Scuola Normale Superiore/Pacucci u. a. (2016), Optical: NASA/STScI; Illustration: NASA/CXC/M.

vielmehr könnten sich die Zeitskalen für den Massentransport verschieben. Somit wird deutlich, welchen Einfluss vor allem die Anfangsbedingungen auf das beschriebene System haben können, die sich zwangsläufig über einen erweiterten Gleichungssatz ergeben. Es stellen sich demnach folgende Fragen:

- Was ändert sich in der Massenentwicklung Schwarzer Löcher durch die Erweiterung des Gleichungssatzes?
- Wie könnten die Anfangsbedingungen des neuen Systems geartet sein?
- Wie stark und in welcher Art und Weise beeinflussen die Impuls- und die Drehimpulsleichung das System?

Nach der theoretischen Beschreibung der Funktionsweise von *hedis* 2.0 wird das Programm ausführlich getestet, indem es mit analytischen Lösungen einiger Spezialfälle (z.B. die Implosions- und Explosionslösungen, welche im Folgenden neu abgeleitet werden) verglichen und zum Teil die numerische Güte (Konvergenzordnung) bestimmt wird. Damit wird die Aussagekraft komplizierter Modelle gewährleistet.

Die zur Simulation des Wachstums Schwarzer Löcher notwendigen Anfangsbedingungen können nicht analytisch abgeleitet werden. Deshalb erfolgt eine Untersuchung verschiedener aus der Literatur bekannter Massenverteilungen (z.B. Mestel 1963; Kalnajs 1972), welche mit Lösungen des Modells von Blank (2010) und Duschl und Strittmatter (2011) verglichen werden können. Dieser Vergleich kann nun die Unterschiede in der Entwicklung verdeutlichen.

1.3 Struktureller Überblick über die Arbeit

Nachdem die Theorie beider Hauptteile der Arbeit eingeführt wurde, wird auf die Mathematik selbstähnlicher, unstetiger Lösungen sowie auf die Untersuchung wichtiger freier Modellparameter eingegangen, welche die Dynamik isothermer Explosionen und Impllosionen beschreiben. Die Ergebnisse sind in Deschner u. a. (2018) veröffentlicht. Dieses Modell wird nun verwendet, um sowohl die Existenz, als auch die Gültigkeit isothermer Explosionen am Beispiel von SNR zu überprüfen.

Anschließend wird die verwendete Numerik als auch die Implementierung von `hedis 2.0` beschrieben, gefolgt von einer Reihe an Tests, welche die Funktionstüchtigkeit des Programmpakets verifizieren. Dabei werden analytische Ausdrücke mit den numerischen Lösungen verglichen. Zum Abschluss wird der Einfluss unterschiedlicher Anfangsbedingungen auf die Dynamik einer Akkretionsscheibe und auf das Wachstum Schwarzer Löcher in den Zentren von AGN untersucht.

2 Theoretische Grundlagen

IN diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung eindimensionaler hydrodynamischer Fluide zur kosmologischen Entwicklung einer Akkretions-scheibe (AS) um ein Supermassereiches Schwarzes Loch (SMSL) beschrieben. Diese Grundlagen werden dabei so allgemein gehalten, dass sie mit einfachen Annahmen ebenso für die in Kapitel 3 untersuchten un stetigen Lösungen und deren Anwendung auf Supernovaüberreste (SNR) verwendet werden können. Nachdem die Physik der zugrundeliegenden Gleichungen geklärt ist, werden diese in allgemeinen krummlinigen Orthogonalkoordinaten angegeben. Dies ermöglicht es, den in Kapitel 5 entwickelten Code `hedis 2.0` sehr flexibel zu halten, was mit einem breiten Spektrum an Testproblemen sowie möglichen Anwendungen einhergeht.

2.1 Heuristische Einführung zur Morphologie und Dynamik Aktiver Galaktischer Kerne und Supernovaüberreste

Nahezu alle Galaxien beherbergen ein SMSL in ihren Zentren (Kormendy und Richstone 1995) mit Massen im Bereich $10^5 M_{\odot} - 10^{10} M_{\odot}$ (Alexander und Hickox 2012). Dieser Zentralbereich sticht innerhalb der Galaxien aufgrund seiner Helligkeit heraus, wobei eine Erklärung hierfür Gravitationskräfte liefern. Man nimmt an, dass ionisiertes Gas um das zentrale Objekt zu einer AS kollabiert ist und über turbulente Reibung gravitativ zum Zentrum transportiert wird (Frank u. a. 2002). Das Gas kann jedoch nicht radial ins Zentrum fallen, da einzelne Fluidelemente Drehimpuls behaftet sind und eine wichtige Erhaltungsgröße darstellen. Deshalb wird das Material im Laufe der Zeit in Spiralbahnen zum Schwarzen Loch transportiert. Erste Ideen zu einer rotierenden Gasscheibe um ein zentrales Objekt gehen auf von Weizsäcker (1944) zur Entstehung des Planetensystems zurück. Lüst (1952) löst die hydrodynamischen Gleichungen mit turbulenter Reibung und stellt fest, dass Masse nur nach innen transportiert werden kann, wenn Drehimpuls nach außen abgegeben wird.

Diese grundlegenden Überlegungen führen zu dem etablierten Bild, welches neben dem zentralen SMSL und der umgebenden AS einen Jet und einen umgebenden Staubtorus beinhaltet (Antonucci 1993). Der Jet ist ein hochenergetischer Materiestrahl, der rechtwinklig und symmetrisch zur innersten Scheibenebene ausgestoßen wird. Ursächlich werden hierfür Magnetfelder angenommen, die über das ionisierte Material in der AS konfiguriert werden (Blandford und Payne 1982). Ferner treten Jets nur in Verbindung mit AS auf. Ein Staubtorus⁸ umschließt den Zentralbereich, und hindert das emittierte Licht über Streuung an den Staubteilchen daran, den einschließenden Torus zu verlassen.

Im Folgenden sollen das SMSL, die AS und vor allem der darin auftretende Materie-transport modelliert werden. Es gehen die Annahme einer dünnen, ausgedehnten AS, sowie die der isotropen Isothermie in die Modellbeschreibung ein. Die Annahme der Isothermie kann über ein Zeitskalenargument mit einer Näherung für dünne Scheiben gerechtfertigt werden (siehe Abschnitt 2.4.3). Aus den fluiddynamischen Prozessen dieses

⁸Man klassifiziert Galaxientypen über die „broadline region“ zwischen lichtdurchlässig und lichtundurchlässig in Abhängigkeit ihrer Inklination (Antonucci 2015). Moderne Untersuchungen stellen den Torus in seiner klassischen Form jedoch in Frage (z.B. Asmus u. a. 2014; Hönig und Kishimoto 2017)

Modells lassen sich jetzt die Massen, die Massenflüsse sowie deren Verlustraten ableiten (siehe dieses und Kapitel 5).

Das Besondere an diesem Modell und dessen mathematischer Formulierung liegt im breiten Anwendungsspektrum, mit dem es möglich ist, unterschiedlichste geometrische Objekte, wie beispielsweise **SNR** oder beliebige, vertikale Fluidschichten, zu beschreiben (Symmetrie ist vorausgesetzt).

Am Ende von Sternentwicklungsstadien kann ein relativ seltenes kosmisches Ereignis in Form einer Supernova (**SN**) stehen. Unterscheidet man zwischen thermonuklearer (Typ I)⁹ und Kernkollaps- (Typ II) **SN**, so findet man bei ersteren meist einen Weißen Zwerg ($M \approx 0,2 M_{\odot} - 1,2 M_{\odot}$) als Vorläuferstern, bei letzteren Vorläufersterne mit Massen im Bereich von $M \approx 8 M_{\odot} - 17 M_{\odot}$. Diese Einteilung ist aber nicht uneindeutig und da Supernova-Ereignisse sehr selten sind (~ 3 Ereignisse pro 100 a in einer typischen Spiralgalaxie Vink 2012), liegt es nahe, deren Überreste zu untersuchen, um eventuell Rückschlüsse auf die Sternexplosionen ziehen zu können. Supernovaüberreste (**SNR**) haben je nach Alter eine dichte, gleichförmigere (junge **SNR**) oder weniger Dichte, klumpigere (alte **SNR**) Morphologie, die durch eine Stoßfront vom interstellaren Medium getrennt ist.

Die Dynamik ist durch ein initiales Ereignis (Supernova) getrieben, und kann mathematisch innerhalb einer bestimmten Phase (Woltjer 1972) ebenfalls mit den hydrodynamischen Gleichungen modelliert werden (Sedov 1946; Taylor 1950). Innerhalb dieser Arbeit wird Isothermie auch für **SNR** angenommen, was im vorliegenden Kontext ein Novum darstellt (siehe Kapitel 3).

Im Folgenden wird die benötigte Mathematik und Physik, welche zur Beschreibung beider Objekte benötigt wird, eingeführt.

2.2 Die Grundgleichungen in Erhaltungsform

In dieser Arbeit werden kompressible, ideale Fluide angenommen. Diese werden im Allgemeinen durch Erhaltungsgleichungen beschrieben, welche die zeitliche Entwicklung innerhalb eines Kontrollvolumens bilanzieren (Greiner und Stock 1991). Dadurch gewährleistet man, dass keine zusätzliche Masse, Energie oder Impuls und Drehimpuls zum System hinzugefügt oder entfernt wird. Diese Größen (Massendichte, Impuls- und Drehimpulsdichte) beschreiben die Dynamik eines Fluides (die Entwicklungsgleichungen werden sehr gut im Lehrbuch von Landau und Lifshitz 1974 eingeführt).

Zur Beschreibung der Masse wird die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

verwendet, wobei $\rho(\vec{r}, t)$ die Massendichte und $\vec{v}(\vec{r}, t)$ die Geschwindigkeit eines Fluids in Abhängigkeit des Ortes \vec{r} und der Zeit t beschreiben. Die Gesamtmasse des Fluids ändert sich damit nicht mit der Zeit und bleibt innerhalb des Systems erhalten. Gleiches

⁹Diese Einteilung ist sehr vereinfacht und gliedert sich weiter in Mischbereiche auf. Eine ausführliche Übersicht findet sich in Vink (2012).

gilt auch für den Impuls, zu dessen Beschreibung von der Navier-Stokes-Gleichung ausgegangen wird:

$$\frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v} + P \mathbf{1}) = \nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{\sigma} - \rho \nabla \phi + \rho \vec{f}. \quad (2.2)$$

Die einzelnen Komponenten der Gleichung liefern die spezifischen Impulse entlang der $\{x, y, z\}$ -Richtungen, wobei der Operator \otimes das dyadische Produkt¹⁰, $P(\vec{r}, t)$ den Druck und $\overset{\leftrightarrow}{\sigma}$ den viskosen Spannungstensor beschreibt. Die Gravitationsbeschleunigung ist über den Gradienten des Gravitationspotentials $\nabla \phi$ gegeben und \vec{f} beschreibt weitere, in das System eingehende Beschleunigungen, beziehungsweise externe spezifische Kräfte (multipliziert mit der Massendichte). Zieht man den Druckterm von der linken Seite der Gleichung auf die rechte und schreibt sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung um, kann sie folgendermaßen interpretiert werden:

$$\text{Massendichte} \times \text{Beschleunigung} = \text{Kraftdichte}.$$

Dies entspricht somit Newtons zweitem Gesetz für ein kontinuierliches Fluid (Frank u. a. 2002). Die linke Seite der Gleichung (2.2) und insbesondere der Tensorgradient $\nabla \cdot (\rho \vec{v} \otimes \vec{v})$ beschreibt den Transport der Erhaltungsgröße Impuls mit dem Gesamtfluss des Systems, also die Advektion. Die rechte Seite der Gleichung hingegen beschreibt eine Durchmischung des Fluids durch Konvektion und Diffusion (Toro 1999).

Die Energiegleichung ist über

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((E + P) \cdot \vec{v}) = \rho (\vec{f} - \nabla \phi) \cdot \vec{v} + \nabla \cdot (\overset{\leftrightarrow}{\sigma} \cdot \vec{v}) \quad (2.3)$$

gegeben, wobei die Gesamtenergie über die Relation

$$E = \rho \left(e + \frac{\vec{v}^2}{2} \right) \quad (2.4)$$

mit der inneren Energie e und der kinetischen Energiedichte zusammenhängt. Um ein geschlossenes System von Gleichungen zu erhalten muss noch eine Zustandsgleichung definiert werden (Milne-Thomson 2013), die den Druck P mit der Massendichte verknüpft. Für ein ideales Gas gilt

$$P = \frac{\rho k_B T}{\tilde{m}}, \quad \text{mit} \quad c_s \doteq \sqrt{\frac{k_B T}{\tilde{m}}}, \quad (2.5)$$

wobei $\tilde{m} \equiv \mu m_p$ die mittlere molekulare Masse beschreibt und mit der Protonenmasse m_p zusammenhängt. μ beschreibt den Ionisationsgrad und die Elementhäufigkeit (z.B. Haubold und Mathai 1997; Maoz 2016). k_B ist die Boltzmann-Konstante und c_s ist als Schallgeschwindigkeit definiert. Für eine isotherme oder adiabatische Zustandsänderung können die Spezialfälle

$$P = \begin{cases} \rho c_s^2, & T(\vec{r}, t) = \text{const.} \\ \rho e (\gamma - 1), & T(\vec{r}, t) \neq \text{const.} \end{cases} \quad (2.6)$$

definiert werden, wobei die Definition $P = \rho c_s^2$ allgemeingültig ist. Innerhalb dieser Arbeit wird sie jedoch als „Isothermiebedingung“ verwendet, da die Temperatur und

¹⁰Im Anhang A ist die Tensordivergenz als Matrix (Gleichung A.5) angegeben.

somit die Schallgeschwindigkeit (unabhängig vom Ort, also isotrop angenommen) stets als konstante Größen verwendet werden. In der zweiten Gleichung steht γ für den Adiabatenindex.

Für die Energiegleichung kann im isothermen Fall eine Gleichgewichtslösung gefunden werden, womit sie aus diesem System entfällt und im Weiteren nicht weiter betrachtet wird (zur Begründung siehe Abschnitt 2.4.3).

Im Folgenden wird die Dimensionalität des Systems reduziert, indem bestimmte Symmetrien eingeführt werden. Diese Symmetrien werden über eine koordinatenfreie Darstellung der Gleichungen berücksichtigt und ermöglichen somit eine variable Herangehensweise an unterschiedlichste Probleme. Weitere in das System eingehende Kräfte und Besonderheiten werden beschrieben und eingeführt.

2.3 Dimensionalität und koordinatenfreie Darstellung

Ziel der Arbeit ist es dynamische Prozesse astrophysikalischer Objekte, vornehmlich Aktive Galaktische Kerne (AGN) und Supernovaüberreste (SNR), zu modellieren. Diese sind ausgedehnte Objekte und weisen einen hohen Grad an Symmetrie auf. Legt man diese Symmetrien fest, kann das Gleichungssystem (2.1, 2.2) reduziert werden, was sich positiv auf die Rechenzeit zur Bestimmung einer numerischen Lösung, sowie auf die Komplexität der Gleichungen ausübt.

Beide Objekte sind jedoch in unterschiedlichen Richtungen symmetrisch. Außerdem kann es von Vorteil sein, bestimmte Regionen innerhalb eines simulierten Objekts besonders zu untersuchen. Eine Möglichkeit diese Forderungen zu gewährleisten, liegt darin, die Gleichungen koordinatenfrei zu formulieren, wodurch ein Koordinatenwechsel entsprechende Symmetrien gegebenenfalls hinzufügt.

hedis 2.0 soll deshalb analog zu dem von Illenseer und Duschl (2009) entwickelten Programm `fosite` in allgemeinen krummlinigen Orthogonalkoordinaten $\{\xi, \eta, \Phi\}$ aufgebaut werden. Über diese Formulierung kann derselbe Gleichungssatz für alle entsprechend definierten Koordinaten über Abbildungen der Form $\{\xi, \eta, \Phi\} \mapsto \{\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\Phi}\}$ transformiert werden. Dies gewährleistet die hohe Variabilität bezüglich der Anwendungsmöglichkeiten des Codes.

Formulierung der Symmetrien

Um die Entwicklungsgleichungen zu reduzieren werden verschiedene Symmetrien vorgeschlagen. Die erste Annahme, die gemacht wird, kann aus den in Abschnitt 2.1 eingeführten Objekten gefolgert werden und führt die Achsensymmetrie

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \tag{2.7}$$

ein, wodurch alle Ableitungen in \vec{e}_y -Richtung verschwinden. Zwar ist dies eine sehr starke Annahme, jedoch lässt sich die grundlegende Physik damit gut beschreiben (Lüst 1952; Lynden-Bell und Pringle 1974; Ostriker und McKee 1988).

Hawley (1990) zeigt, dass die vertikale Struktur schlanker Tori in 3-dimensionalen Modellen geometrisch dünn bleiben: Im Falle von AGN gilt also, dass diese im Laufe ihrer Evolution dünne Scheiben bleiben. Da SNR zwar sphärisch symmetrisch sind, beobachtet man sie dennoch als symmetrische Scheiben, vernachlässigt man ihre Ausdehnung entlang der Sichtlinie. Es gilt für die zwei Hälften ober- und unterhalb der x-y-Ebene

$$2 |ze_z| \ll 1, \quad (2.8)$$

womit die Objekte keine Höhenstruktur mehr haben. Gleichung (2.8) kann als die Scheibenhöhe $h = |2ze_z| \ll r$ im Verhältnis zu ihrer radialen Ausdehnung r geschrieben werden. Diese Symmetriebedingung bedeutet auch, dass die Geschwindigkeitskomponente $v_z \ll 1$ in e_z -Richtung vernachlässigt werden kann. Nun gibt es zwei Möglichkeiten, die zwar zu dem selben Gleichungssystem führen, aber wichtig zu unterscheiden sind.

Zum einen kann das Konstrukt der Flächendichte (z.B. Lüst 1952) eingeführt werden, welches für flache Scheiben gilt. Dazu müssen die Gleichungen (2.1, 2.2) zusammen mit der Definition

$$\Sigma(t, x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t, x, y, z) dz, \text{ mit } \rho(t, x, y, z) \doteq \Sigma(t, x, y) \cdot \delta(z) \quad (2.9)$$

integriert werden, wodurch die z-Komponente der Gleichung (2.2) vom System entkoppelt wird. Aus den verbleibenden Größen $\partial_z P = \partial_z \phi$ (der als isotrop angenommene Druck kompensiert die Gravitation in der Zentralebene) kann die Skalenhöhe berechnet werden.

Zum anderen kann angenommen werden, dass alle physikalischen Größen ihre Abhängigkeit von der z-Richtung verlieren $X(x, y, z) \rightarrow X(x, y)$. Somit entfällt zusammen mit der Forderung $v_z \ll 1$ ebenso die z-Komponente der Gleichung (2.2). Der Unterschied liegt in der Formulierung der Massendichte. Während der erste Ansatz zwar flache Objekte beschreibt, kann sich die Höhenstruktur dennoch ändern. Deshalb weiten sich Akkretionsscheiben nach außen hin auf. Hier werden aber dünne Scheiben angenommen, deren Skalenhöhe sich nicht ändert.

Der Gleichungssatz ändert sich somit nur über die Definition Flächendichte Σ oder Massendichte ρ . Es soll in den verbleibenden drei Gleichungen Massenerhaltung, radiale Impulserhaltung sowie Drehimpulserhaltung mit der Massendichte gerechnet und an entsprechender Stelle die Flächendichte verwendet werden, da es das Verständnis in unterschiedlichen Geometrien und Beispielen erleichtert.

Die Symmetriebedingungen (2.7, 2.8) reduzieren die Dimensionalität von 3 auf nunmehr 1 Dimension mit einer nichtverschwindenden Geschwindigkeitskomponenten in e_y -Richtung. Deshalb wird im folgenden von quasi-eindimensionalen Problemen gesprochen. Abbildung 2.1 verdeutlicht die Reduktion am Beispiel von Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Koordinatenfreie Darstellung

In einem metrischen Raum definiert die Metrik Abstände und somit eine Norm zwischen zwei Punkten im Raum. Ist die Metrik vollständig bekannt, können aus ihr alle notwendigen Voraussetzungen zu einer koordinatenfreien Darstellung eines Gleichungssatzes gewonnen werden.

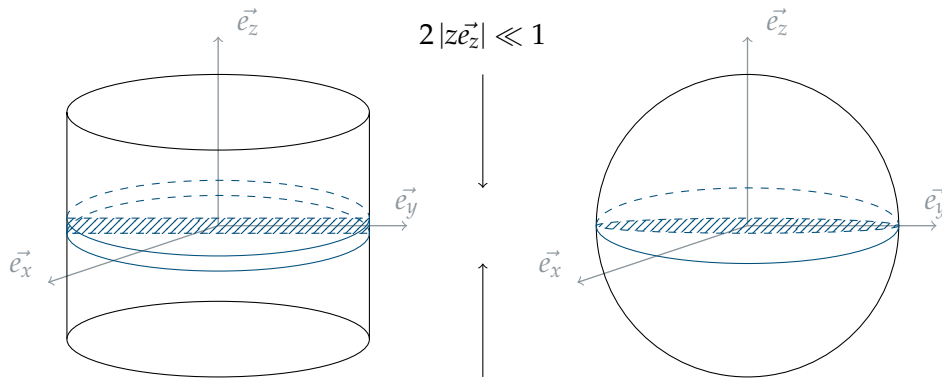


Abbildung 2.1: Die Skizze veranschaulicht die Verwendung der Symmetrien in Zylinder- und Kugelkoordinaten. Es gilt Symmetrie um die z-Achse, sowie um die x-y-Ebene.

Ein Linienelement auf einem metrischen Raum kann allgemein als

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.10)$$

$$= (h_\xi d\xi)^2 + (h_\eta d\eta)^2 + (h_\Phi d\Phi)^2 \quad (2.11)$$

geschrieben werden, wobei g_{ij} der metrische Tensor und dx^i Linienelemente in entsprechende Richtungen sind. Zur zweiten Äquivalenzumformung in obiger Gleichung geht die Forderung orthogonaler Koordinaten mit ein. Stehen alle Basisvektoren paarweise senkrecht aufeinander, ist die Metrik bezüglich ihrer Orthonormalbasis diagonal (Weinberg 1972) und kann vollständig über die Skalenfaktoren $h_i(\xi, \eta, \Phi)$ mit $i \in \{\xi, \eta, \Phi\}$ (A.1) beschrieben werden. Ein Maß für eine Volumenänderung ist über die Wurzel der Gramschen Determinante des metrischen Tensors $\sqrt{g} = h_\xi h_\eta h_\Phi$ gegeben.

Mathematisch bedeuten die Symmetrieanahmen (Abschnitt 2.3), dass sich die Abhängigkeiten der Skalenfaktoren $h_i(\xi, \eta, \Phi)$ aufgrund von Rotationssymmetrie (2.7) und aufgrund der Annahme flacher Objekte (2.8) auf $h_i(\xi, \eta, \Phi) = h_i(\xi)$ reduzieren.

Die Beschreibung des Systems aus der Orthonormalbasis krummliniger Koordinaten erfordert einen affinen Zusammenhang (Γ), mit dem zwischen der Orthonormal- und der Koordinatenbasis transformiert werden kann, um geometrische Defekte auszugleichen. Man findet zusammen mit den Symmetrieanahmen ($h_i(\xi)$), dass der affine Zusammenhang aus den zwei verbleibenden Kommutatorkoeffizienten $c_{x,y,z}$ der Basisvektoren hervorgeht:

$$\Gamma_{\xi\eta}^\eta = c_{\Phi\xi\Phi} = \frac{1}{h_\xi h_\Phi} \frac{\partial h_\xi}{\partial \xi}, \quad (2.12)$$

$$\Gamma_{\xi\Phi}^\Phi = c_{\eta\xi\eta} = \frac{1}{h_\xi h_\eta} \frac{\partial h_\eta}{\partial \xi}. \quad (2.13)$$

Zusammen mit den koordinatenunabhängigen Termen für Gradienten und Divergenzen

in Anhang A können die Gleichungen (2.1, 2.2) zu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi (\rho v_\xi) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \rho v_\xi}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi (\rho (v_\xi^2 + c_s^2)) - c_{\eta\xi\eta} \rho (v_\eta^2 + c_s^2) - c_{\phi\xi\phi} \rho c_s^2 = s_\xi, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \rho \ell}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi (\rho \ell v_\xi) = h_\eta s_\eta \quad (2.16)$$

umgeschrieben werden. Dabei findet der Differentialoperator $\mathcal{D}_\xi \doteq \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\phi)$ Anwendung, und der Drehimpuls des Systems ist über $\ell = h_\eta v_\eta$ gegeben (Illenseer 2006). Die Komponenten des Vektors \vec{s} werden im nächsten Abschnitt spezifiziert. Die Terme mit den Kommutatorkoeffizienten sind die geometrischen Quellterme, die je nach Koordinatenwahl einen Beitrag liefern können. Die Darstellung der Gleichungen verwendet sogenannte konservative Variablen ($\vec{u} = (\rho, \rho v_\xi, \rho \ell)$) welche als Erhaltungsgrößen Massendichte, Radial- und Drehimpulsdichte definiert sind.

Das quasi-eindimensionale System ist somit gegeben über die Kontinuitätsgleichung (2.14), die radiale Impulsgleichung (2.15) sowie die Drehimpulsgleichung (2.16), letztere aus der Navier-Stokes-Gleichung abgeleitet.

2.4 Physikalische Annahmen

Im Allgemeinen ist die numerische Lösung eines Systems nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen (2.14, 2.15, 2.16) nicht trivial. Deshalb werden verschiedene physikalisch sinnvolle Annahmen gemacht, um den Umfang des Rechenaufwandes gering, die Aussagen der Lösungen aber dennoch relevant zu halten. Die zugrunde liegende Physik wird nun beschrieben.

2.4.1 Gravitation

Eine der wichtigsten Energiequellen im Universum ist die Gravitation. Während die Leuchtkraft von Sternen durch die Abstrahlung von Fusionsenergie (E_{nuc}) dominiert wird, wird in AS Gravitationsenergie über Scherkräfte (E_{accr}) innerhalb der Scheibe abgegeben ($\Delta E_{\text{accr}}/\Delta E_{\text{nuc}} \approx 25 - 50$, Frank u. a. 2002). Um den Einfluss der Gravitation auf ein von einer Gasmasse umgebenes Zentralobjekt zu modellieren, wird die Poisson-Gleichung

$$\nabla (\nabla \phi) = 4\pi G \rho \quad (2.17)$$

verwendet, woraus sich das Beschleunigungsfeld und das Potential ϕ

$$\nabla \phi = -g = \frac{GM_\bullet}{r^2} \quad \text{und} \quad \phi^K = -\frac{GM_\bullet}{r} \quad (2.18)$$

für eine Punktmasse (hier die Zentralmasse M_\bullet) berechnet. Das Potential ϕ^K ist das Kepler-Potential, womit für die Gravitationsbeschleunigung $g = g^K$ gilt.

Ist das Verhältnis der Zentralmasse zur Scheibenmasse¹¹ $M_\bullet/M_D \ll 1$, erhält man einen zusätzlichen gravitativen Beitrag durch die Scheibenmasse. Das Prinzip der Selbstgravitation (Binney und Tremaine 1987) berücksichtigt also den Anteil der Scheibenmasse

¹¹ M_D bezeichnet die Scheibenmasse (engl. „disk mass“).

selbst am Gravitationspotential. Da geometrisch dünne Scheiben angenommen werden, unterteilt man die radiale Ausdehnung in einzelne Ringe und summiert die eingeschlossene Scheibenmasse zum Potential auf. Die zusätzlich zum Zentralpotential wirkende Gravitationsbeschleunigung

$$g^{\text{MP}}(r) = \frac{2\pi G}{r^2} \int_0^r r' \rho(r') dr' = \frac{-GM(r)}{r^2} \quad (2.19)$$

berücksichtigt also das durch die Scheibe verursachte Potential am Ort r (mit eingeschlossener Masse $M(r)$) und wird als einfachste Näherung der Selbstgravitation Monopolnäherung (MP) genannt.

Junker (2009) liefert für dünne, rotationssymmetrische Scheiben den exakten Ausdruck

$$g^{\text{VSG}}(r) = 2\pi G \sum_{i=1}^N \left[\frac{r_{i,\text{max}}^2 r}{2(r+r_{i,\text{max}})^3} \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{4rr_{i,\text{max}}}{(r+r_{i,\text{max}})^2}\right) - \frac{r_{i,\text{min}}^2 r}{2(r+r_{i,\text{min}})^3} \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{4rr_{i,\text{min}}}{(r+r_{i,\text{min}})^2}\right) \right] \quad (2.20)$$

als Lösung der Poisson-Gleichung zur Berechnung der vollen Selbstgravitation (VSG). Hierbei ist ${}_2F_1$ eine der hypergeometrischen Funktionen und $r_{i,\text{min}/\text{max}}$ sind die minimale, beziehungsweise maximale Ausdehnung derjenigen Ringe, welche die komplette Flächendichte zergliedern. Damit folgt für die gesamte Gravitationsbeschleunigung

$$g = -g^{\text{K}} - \begin{cases} 0 & \text{keine Selbstgravitation,} \\ g^{\text{MP}} & \text{Monopolnäherung,} \\ g^{\text{VSG}} & \text{volle Selbstgravitation,} \end{cases} \quad (2.21)$$

wobei im ersten Fall nur das Zentralpotential beiträgt, im zweiten die Monopolnäherung und im dritten die volle Selbstgravitation berücksichtigt wird.

2.4.2 Viskosität

Um die viskosen Kräfte, die in das System eingehen zu beschreiben, wird die koordinatenfreie Ableitung von Sperling (2009) verwendet. Formal wird der Eulerschen Gleichung ein weiterer Term zum Impulsstrom hinzugefügt. Fasst man diesen mit dem Druckterm zusammen, kann der Spannungstensor für ein lokal isotropes, kompressibles Fluid über

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + T_{ij} \quad (2.22)$$

ausgedrückt werden (z.B. Landau und Lifshitz 1974). Vernachlässigt man kleine Geschwindigkeitsgradienten, verringert sich der durch die Zähigkeit hervorgerufene Impulsübertrag, wodurch der Tensor $\overset{\leftrightarrow}{T}$ als lineare Funktion der Ableitungen $\partial v_i / \partial x_j$ geschrieben werden kann (Newtonsches-Fluid). Außerdem trägt bei einem nicht differentiell rotierenden Fluid (starrer Körper $\Leftrightarrow \overset{\leftrightarrow}{T} = 0$) nur der hydrostatische Druck zum Impulsstrom bei (siehe Landau und Lifshitz 1974, S. 53). Mit diesen Annahmen wird der symmetrische Tensor

$$T_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.23)$$

definiert, wobei die Bedingung $\zeta - \frac{2}{3}\mu = \lambda$ benutzt wurde. Die Volumenviskosität $\zeta = 0$ wird vernachlässigt, da sie nur in starken Stoßwellen¹² einen Beitrag liefert (Frank u. a. 2002, S. 34, S. 64). λ kann bei turbulenten Strömungen als charakteristische, räumliche Turbulenzskala angesehen werden. Über obige Bedingung findet man somit Turbulenz als Ursache der Viskosität, da die dynamische Viskosität μ und λ über den Faktor $2/3$ proportional zueinander sind. Dieses Konzept ist fundamental zu einer adäquaten Beschreibung viskoser Akkretionsscheiben (AS) (Shakura 1973; Duschl u. a. 2000).

Man findet die koordinatenfreie Darstellung der Tensorkomponenten $\overset{\leftrightarrow}{T}$ zusammen mit den Annahmen einer dünnen¹³, rotationssymmetrischen Scheibe

$$T_{\xi\xi} = \frac{2\bar{\mu}}{h_\xi} \partial_\xi v_\xi + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g}} \partial_\xi (h_\eta h_\phi v_\xi), \quad (2.24)$$

$$T_{\phi\phi} = 2\bar{\mu} c_{\phi\xi\phi} v_\xi + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g}} \partial_\xi (h_\eta h_\phi v_\xi), \quad (2.25)$$

$$T_{\eta\eta} = 2\bar{\mu} c_{\eta\xi\eta} v_\xi + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g}} \partial_\xi (h_\eta h_\phi v_\xi), \quad (2.26)$$

$$T_{\xi\eta} = \frac{\bar{\mu}}{h_\xi} \partial_\xi v_\eta - \bar{\mu} c_{\eta\xi\eta} v_\eta. \quad (2.27)$$

Für den letzten Eintrag gilt $T_{\xi\eta} = T_{\eta\xi}$. Die Tensordivergenz (A.4) in ihre verbleibenden Komponenten aufgeteilt ergibt sich zu

$$\left[\nabla \overset{\leftrightarrow}{T} \right]_\xi = \mathcal{D}_\xi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\xi} - c_{\eta\xi\eta} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\eta\eta} - c_{\phi\xi\phi} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\phi\phi}, \quad (2.28)$$

$$\left[\nabla \overset{\leftrightarrow}{T} \right]_\eta = \mathcal{D}_\xi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\eta} + c_{\eta\xi\eta} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\eta}, \quad (2.29)$$

wobei der Eintrag in \hat{e}_ϕ -Richtung aufgrund des Integrals (2.9) nicht beiträgt. Man beachte, dass durch die Divergenz zweite Ableitungen berechnet werden müssen. Scherkräfte im Fluid bewirken Reibung, die im isothermen Fall zur Umverteilung der Massendichte führt, während sie im nicht-isothermen Fall sowohl zur Umverteilung der Massendichte als auch zu einer Änderung der inneren Energie und somit der Temperatur führt. Wie die Viskosität an sich parametrisiert wird, soll im Folgenden erläutert werden.

Parametrisierung der dynamischen Viskosität

Ein physikalischer Unterbau für die Viskosität ist bis heute nicht korrekt gefunden¹⁴. Weiterhin reicht das Konzept der molekularen Viskosität nicht aus, um die hohen, von AS verursachten Dissipationsraten erklären zu können (Frank u. a. 2002). Deshalb muss die Viskosität noch immer parametrisiert werden.

Der Ansatz von Shakura (1973) und Shakura und Sunyaev (1973) zeigt, dass genügend hohe Scherkräfte über starke Magnetfelder und Turbulenz bei nicht-selbstgravitierenden

¹²Der Druck einatomiger Gase ist eine Funktion der Dichte und der Temperatur, nicht aber von der zeitlichen Änderung der Dichte (Stokessche Hypothese). Die hier betrachteten Akkretionsscheiben erfüllen diese Annahme.

¹³Es werden analog zu Gl. (2.9) die vertikal integrierten Größen $\bar{\mu}, \bar{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \mu, \lambda dz$ verwendet.

¹⁴Ein neuer Ansatz von Nath und Mukhopadhyay (2016) zeigt, dass stochastisches Rauschen in zeitabhängigen Scherströmungen zu hydrodynamischen Instabilitäten führen kann. Dieses wird als Ursache der Turbulenz interpretiert.

AS erzeugt werden können (α -Viskosität). Duschl u. a. (1998, 2000) und Richard und Zahn (1999) führen die Scherkräfte auf gravitative Instabilitäten (Duschl und Britsch 2006) bei selbstgravitierenden Scheiben zurück, welche dann die Turbulenz erzeugen. Diese Parametrisierung (β -Viskosität) erreicht im Bereich ihrer Gültigkeit eine genügend hohe Dissipation und verkürzt die Entwicklungszeitskalen AGN um eine bis zwei Größenordnungen im Vergleich zur α -Viskosität.

Die stärksten Dissipationsraten treten auf, wenn Stoßwellen Turbulenz in der AS treiben. Bei Erreichen dieser Dissipationsgrenze nicht-selbstgravitierender AS werden die Längen- und Geschwindigkeitsskalen turbulenter Wirbel der α - und β -Viskosität vergleichbar. Die unterschiedlichen Viskositätsparametrisierungen gehen damit ineinander über (Duschl u. a. 2000).

Zur Beschreibung der β -Viskosität wird die vertikal integrierte dynamische Viskosität ($\bar{\mu} = \bar{\nu}\rho$, mit der kinematischen Viskosität $\bar{\nu}$)

$$\bar{\mu} = \beta \rho r v_{\phi} \quad (2.30)$$

verwendet, wobei $\beta = \mathfrak{R}^{-1}$ mit dem Kehrwert der Reynolds-Zahl, also der Kennzahl für Turbulenz, identifiziert werden kann. Der Wert für die Reynolds-Zahl muss so gewählt sein, dass das Fluid instabil wird (er muss eine kritische Reynolds-Zahl überschreiten), um somit Turbulenz und genügend hohe Dissipationsraten zu erzeugen. Typischerweise verwendet man $\beta \in \{10^{-3} \dots 10^{-2}\}$ (Duschl und Britsch 2006; Duschl und Strittmatter 2011).

2.4.3 Isothermie

Eine grundlegende Annahme liegt in der Forderung, dass es keine Temperaturänderungen bezüglich aller Raumrichtungen innerhalb des Systems geben darf. Dies erfordert eine sehr effiziente Kühlung, sodass die Temperaturgradienten verschwinden. Alternativ könnte sich ein System in einem Wärmebad befinden, wobei Temperaturänderungen ebenfalls im Kontinuum direkt egalisiert würden. Dies wird mit der ersten der Zustandsgleichungen (2.6) erreicht, indem der Druck direkt proportional zur konstanten, isotropen Schallgeschwindigkeit (2.5) und der Dichte ist (z.B. Zel'dovich u. a. 1966, S. 177). Es gilt also mit den in Abschnitt 2.3 eingeführten Symmetrien

$$P(t, \xi) = \rho(t, \xi) c_s^2 (T = \text{const.}). \quad (2.31)$$

Eine konstante Schallgeschwindigkeit entkoppelt die Energiegleichung vom System, indem mechanische Arbeit direkt in Volumenarbeit umgewandelt wird. Einheiten der mittleren Masse pro Teilchen $\tilde{m} = \mu m_p$ ¹⁵ mit der Protonenmasse m_p . Die Boltzmannkonstante ist mit k_B angegeben.

Motivation der Isothermie bezüglich Impllosionen und Explosionen

Im Kapitel 4 findet das in Kapitel 3 abgeleitete Modell für das Explosions-Problem (EP) Anwendung, indem SNR berechnet werden. Das adiabatische Modell von Sedov hat eine entscheidende Schwachstelle, nämlich einen in Richtung Zentrum divergierenden

¹⁵Man setzt zum Beispiel $\tilde{m} = 0.62m_p$ in Protonenmassen für ein 90% Wasserstoff und 10% Helium Gemisch (z.B. Haubold und Mathai 1997) an

Temperaturgradienten (z.B. Sedov 1959; Shu 1992b). Diese Eigenschaft ist unphysikalisch, was zur Forderung einer isothermen Modellierung (Korobeinikov 1956; Solinger u. a. 1975) führt. Frühere Modelle sind ausschließlich homotherme Modelle¹⁶, deren Gültigkeit jedoch von Lerche und Vasylunas (1976) falsifiziert wird. Eine echte isotherme Behandlung gibt es bisher nicht.

Das Reproduzieren von Unstetigkeiten mittels numerischer Codes ermöglicht eine Reihe wichtiger numerischer Testfälle. Dabei verwenden moderne Programme meist wohlbekannte adiabatische Testmodelle (z.B. Noh 1976; Meyer 1988; Gehmeyr u. a. 1997; Kamm 2000). Isotherme Anwendungen sind jedoch nicht von mindermem Interesse, wobei das isotherme Implosions-Problem (IP) und das isotherme Explosions-Problem (EP) diesen wichtigen Bereich der Codeverifizierung erweitern.

Motivation der Isothermie bezüglich Aktiver Galaktischer Kerne

Bei der Modellierung von AGN kann Isothermie über ein Zeitskalenargument gerechtfertigt werden. Die wichtigsten Zeitskalen, welche man dazu benötigt, sind folgende:

Dynamische Zeitskala: Gibt diejenige Zeit an, innerhalb derer sich ein Fluidelement in einer AS keplersch¹⁷ um das Zentrum mit der Azimutalgeschwindigkeit $v_{\varphi,K}$ bewegt. Alternativ argumentiert man mit der Schallgeschwindigkeit, die sich in vertikaler Richtung (Scheibenhöhe h) innerhalb τ_{dyn} ausbreiten kann und Information über die Thermik transportiert:

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{r}{v_{\varphi,K}} = \frac{h}{c_s}. \quad (2.32)$$

Viskose Zeitskala: Gibt diejenige Zeit an, innerhalb derer sich eine AS unter Einfluss von Scherkräften (die Zeitskala bezieht sich auf die β -Viskosität und ν steht für die kinematische Viskosität) entwickelt. Sie ist die dominierende Zeitskala in der Entwicklung von AS, da der Parameter $\beta \ll 1$ (siehe Abschnitt 2.4.2) im Nenner auftritt:

$$\tau_{\text{visc}} = \frac{r^2}{\nu} = \frac{1}{\beta} \tau_{\text{dyn}} \quad \text{mit } \nu \stackrel{(2.30)}{=} \beta r v_{\varphi}. \quad (2.33)$$

Thermische Zeitskala: Gibt diejenige Zeit an, innerhalb derer sich eine AS thermisch entwickelt. Die Dissipationsrate D gibt an, wieviel thermische Energie freigesetzt wird:

$$\tau_{\text{therm}} = \frac{\rho c_s^2}{D} \approx \tau_{\text{visc}} \left(\frac{h}{r} \right)^2. \quad (2.34)$$

Mit diesen Definitionen kann leicht eine Hierarchie bezüglich der Zeitskalen für dünne AS gezeigt werden

$$\tau_{\text{therm}} = \tau_{\text{visc}} \left(\frac{h}{r} \right)^2 = \frac{\tau_{\text{dyn}}}{\beta} \left(\frac{h}{r} \right)^2, \quad (2.35)$$

$$\text{also } \tau_{\text{therm}} \ll \tau_{\text{dyn}} \quad \text{mit } h/r \ll 1. \quad (2.36)$$

¹⁶Gemischte adiabatische und isotherme Annahme. Hinter der Stoßwelle gilt Adiabasie: $T \neq \text{const.}$, $dU = \delta W$. Das bedeutet, dass innere Energie direkt in mechanische Arbeit umgewandelt wird. Vor der Stoßwelle Isothermie: $T = \text{const.}$, $\delta Q = \delta W$, eine Wärmeänderung führt zur Änderung der mechanischen Arbeit. Damit wird mit dem Prinzip der Energieerhaltung nicht gebrochen.

¹⁷Aus Gleichung (2.18) folgt die Keplersche Geschwindigkeit $\Omega_K = v_{\varphi,K}/r = \sqrt{GM_{\bullet}/r^3}$.

Die thermische Zeitskala ist damit sehr viel kleiner als die dynamische, weshalb die thermischen Prozesse sehr schnell ablaufen müssen. Instantane Änderungen der Thermik werden gerade durch die Isothermieannahme gewährleistet, welche somit eine adäquate Annahme zur Modellierung dünner AS um Aktive Galaktische Kerne (AGN) liefern.

2.5 Luminosität und Massenbilanz

Die Leuchtkraft, oder auch Luminosität gibt an, wieviel Energie pro Zeiteinheit von einem Objekt freigesetzt wird. Unter Berücksichtigung, dass ein Teilchen über den Strahlungsdruck abgedrängt wird, aber das sphärisch symmetrische Gravitationsfeld entgegenwirkt, findet man die Eddington-Grenze¹⁸

$$L_{\text{ED}} = \frac{4\pi GMm_p c}{\sigma_T}, \quad (2.37)$$

die mit dem Thomson-Wirkungsquerschnitt σ_T der Protonenmasse m_p und der Vakuumlichtgeschwindigkeit c gegeben ist (Frank u. a. 2002). Der Thomson-Wirkungsquerschnitt beschreibt dabei elastische Stöße zwischen Photonen und freien geladenen Teilchen im voll ionisierten Plasma. Die Eddington-Leuchtkraft gibt damit an, wie viel Energie maximal aus dem Strahlungsdruck-Gravitationskraft-Gleichgewicht freigesetzt werden kann. Die Eddington-Grenze beschränkt also die durch die Scherkräfte freigewordene Energie (Abschnitt 2.4.2).

Für die Simulationen werden zeitlich veränderliche Schwarzmassen in den Zentren von AGN über das Lösen der Kontinuitätsgleichung (2.14) am Innen- und am Außenrand der AS berechnet. Mit der Definition $\dot{M} = -h_\eta h_\phi v_\xi \rho \Delta\eta \Delta\phi$ des Massenflusses zusammen mit dem Volumenelement $dV = \sqrt{g} d\xi d\eta d\phi$ berechnet man die Masse am Ort $\Delta\xi$ und über die Zeitspanne Δt zu

$$M(\Delta t, \Delta\xi) = -\Delta\eta\Delta\phi \int_t^t (h_\eta h_\phi v_\xi \rho) |_{\Delta\xi} dt = \int_t \dot{M} |_{\Delta\xi} dt, \quad (2.38)$$

wobei $\Delta\eta = \Delta\phi = \text{const.}$ für die azimutale Symmetrie in den unterschiedlichen Koordinaten steht. Die Größe \dot{M} entspricht dem gesamten Massenfluss, der aus der Scheibe über den Innenrand ins Zentrum fließt. Berücksichtigt man die Eddington-Grenze und damit den Eddington-Massenfluss \dot{M}_{ED} , wird das Wachstum des zentralen Schwarzen Loches über

$$M_{\text{BH}}(\Delta t, \xi_{\text{in}}) = \max(\min(\dot{M}(\Delta t, \xi_{\text{in}}), \dot{M}_{\text{ED}}(\Delta t, \xi_{\text{in}})), 0) \quad (2.39)$$

begrenzt. Der Eddington-Massenfluss ist über

$$\dot{M}_{\text{ED}}(\Delta t, \xi_{\text{in}}) = M(\Delta t, \xi_{\text{in}}) / \eta \tau_S \quad (2.40)$$

gegeben, wobei ein Effizienzfaktor η und die Salpeter-Zeitskala $\tau_S = 4,5 \cdot 10^8 \text{ a}$ ¹⁹ verwendet werden (Duschl und Strittmatter 2011). Die Scheibenmasse wird über das Massenintegral

$$M_{\text{D}}(\Delta t) = \int_{\xi_{\text{in}}}^{\xi_{\text{out}}} \rho(\Delta t, \xi) dV \quad (2.41)$$

¹⁸Duschl u. a. (2000) und Duschl und Strittmatter (2011) zeigen, dass die sphärisch symmetrische Annahme zur Herleitung der Eddington-Grenze in guter Näherung auch auf flache Akkretionsscheiben angewendet werden kann.

¹⁹Die Salpeter-Zeitskala gibt die Zeitspanne an, in der ein Schwarzes Loch seine gesamte Masse über die Eddington-Grenze abgestrahlt hat.

berechnet. Die Verlustmasse, die durch die Eddington-Grenze verloren geht, kann aus der Massendifferenz des Schwarzen Loches mit und ohne Eddington-Grenze berechnet werden.

3 Isotherme Unstetigkeiten: Implosionen und Explosionen in der Astrophysik

ANALYTISCHE und numerisch exakte²⁰ Lösungen isothermer Unstetigkeiten werden in diesem Kapitel abgeleitet. Unstetige Lösungen in der Fluidodynamik beschreiben beispielsweise eine idealisierte Supernova und die Dynamik ihrer Überreste (SNR, Explosion) oder auch den Kollaps interstellaren Materials und die daraus entstehende Stoßwelle (Implosion).

Starke, eindimensionale und punktförmige Explosionen sind bereits von Sedov (1946) und Taylor (1950) ausgiebig untersucht worden. Wird hingegen ein Stempel instantan in ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Rohr gedrückt, beschleunigt die Flüssigkeit und wird am Ende des Rohres reflektiert. Es bildet sich eine überschallschnelle Stoßwelle entgegen der Strömungsrichtung aus (Oertel 1966; Zel'dovich u. a. 1966; Courant und Friedrichs 1972). Im Speziellen berechnete Noh (1976) Lösungen zum Implosions-Problem (IP), die zum Beispiel von Meyer (1988) sowohl numerisch als auch durch physikalische Stoßrohrmessungen bestätigt wurden. Gehmeyr u. a. (1997) erweiterten Nohs Lösungen für n -reflektierende Unstetigkeiten, die sich in einem beidseitig geschlossenen Stoßrohr bilden.

Unstetige Lösungen sind besonders als Testfall für die CFD interessant, da diese nur unter speziellen Annahmen gut abgebildet werden. Damit können die Erhaltungseigenschaften nicht-viskoser, kompressibler Fluide verifiziert werden. Die Lösungen von Sedov und Taylor sind bis heute relevant, da sie häufig benutzt werden, um einfache Abschätzungen der Dynamik von beispielsweise SN-Ereignissen und SNR zu machen (z.B. Allen u. a. 2014; Leahy und Ranasinghe 2016; Lerche und Vasyliunas 1976; Solinger u. a. 1975).

Nahezu alle früheren Arbeiten gehen jedoch davon aus, dass die Energie während einer Explosion oder Implosion erhalten bleibt und beschreiben diese Modelle mit der idealen Gasgleichung für adiabatische Zustandsänderungen²¹. Insbesondere führt dies bei den Sedov-Taylor-Lösungen zu einem unphysikalischen, divergierenden Temperaturgradienten hinter der Stoßwelle (Sedov 1959; Solinger u. a. 1975; Shu 1992a). Deshalb entwickelte Korobeinikov (1956) ein isothermes Modell, wobei darin nur ein verschwindender Temperaturgradient vor der Stoßwelle $0 \approx \partial_r T_d \ll \partial_r T_u$ angenommen wird. Dies wiederum führt zu einem adiabatischen Fluss durch die Stoßfront womit die Energie des Systems ebenfalls erhalten bleibt. Es wird also ein gemischtes, isothermes und adiabatisches (beziehungsweise homothermes) Modell berechnet, zu dem zusammen mit den Rankine-Hugoniot-Bedingungen (RHB) (Rankine 1870; Hugoniot 1887) wohldefinierte Lösungen existieren. Lerche und Vasyliunas (1976) zeigen jedoch, dass Korobeinikovs selbstähnliche Lösungen, die in der Arbeit von Solinger u. a. (1975) zur Beschreibung von SNR benutzt werden, durch ein Zeitskalenargument widerlegt werden können.

²⁰Mit numerisch exakt soll in diesem Zusammenhang angedeutet werden, dass die numerisch berechneten Lösungen mit beliebiger Genauigkeit erzeugt werden können, und somit einer analytischen Lösung ohne algebraischen Ausdruck beliebig nahe kommen.

²¹Die am System verrichtete Arbeit bewirkt eine Änderung der inneren Energie, ohne dass ein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet.

Überblick über das Kapitel

Im Folgenden wird ein Modell entwickelt, welches *echte* Isothermie ($\partial_r T = 0$) annimmt, sodass sich ein System im Temperaturgleichgewicht befindet und sich sowohl Schockheizung als auch Kühlung sehr effizient, quasi instantan, auswirken. Es können sowohl das **IP** als auch das **EP** mit dem selben Modell unter der Annahme unterschiedlicher Randbedingungen (**RB**) berechnet werden. Es findet analog zu den Arbeiten von Sedov und Taylor das Prinzip der Selbstähnlichkeit (Bluman und Anco 2002; Logan 2008) Anwendung. Die sich dadurch ergebenden Unterschiede werden diskutiert und die Existenz selbstähnlicher Lösungen durch die Lie-Invarianten über die sogenannte Streckungstransformation (**ST**) gezeigt. Der sich aus dem Modell ergebende freie Parameter der radialen Dichteverteilung wird bezüglich unterschiedlicher Geometrien untersucht und auf sinnvolle Werte eingeschränkt. Dadurch schließt dieses Kapitel die mathematischen Grundlagen isothermer Implosionen und Explosionen vollständig ab. Im Kapitel 4 wird der hier vorgestellte Apparat auf seine Anwendbarkeit bezüglich Supernovaüberreste (**SNR**) überprüft.

Die Ergebnisse sind im *SIAM Journal on Applied Mathematics* veröffentlicht (Deschner u. a. 2018).

3.1 Das Modell isothermer Unstetigkeiten

Ein eindimensionales Stoßrohr, gefüllt mit einem nicht-viskosen, kompressiblen und isothermen (siehe Gleichung 2.6) Fluid, ist in kartesischen Koordinaten in Abbildung 3.1 (a) gezeigt. Das Fluid wird instantan mit der Geschwindigkeit $u(r \rightarrow \infty, t) \leq 0$ beschleunigt und an einer Wand auf der linken Seite reflektiert. Es bildet sich eine Stoßwelle entgegen der Richtung des einströmenden Fluids mit der Geschwindigkeit v_s aus. Die Geschwindigkeit des Fluids vor der Stoßwelle beträgt $u(r > 0, t) > 0$, wobei sie an der Wand offensichtlich gleich null sein muss. Man kann zur Beschreibung eines eindimensionalen Stoßrohres also drei unterschiedliche Gebiete²² unterscheiden:

Einströmende Region (u): Gebiet hinter der Unstetigkeit. Das Fluid strömt in Richtung Ursprung oder ruht.

Ausströmende Region (d): Gebiet vor der Unstetigkeit. Das Fluid stagniert am Ursprung. Danach ruht oder fließt es je nach Anwendungsfall.

Infinitesimal schmale Region (s): Gebiet an der Unstetigkeit selbst, $r = r_s$.

In Abbildung 3.1 (b) kann das gleiche Bild mit dem Unterschied, dass man anstatt eines eindimensionalen kartesischen Rohres eine eindimensionale Scheibe oder Kugel betrachtet, angewendet werden (Gehmeyr u. a. 1997). Der Übergang zu Polar- oder Kugelkoordinaten kann im eindimensionalen Fall einfach über einen Parameter $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ (siehe Gleichungen 3.1 und 3.2) eingeführt werden. Die bereits erwähnte Wand wird zum Zentrum an der Stelle $r = 0$ und die Stoßwelle breitet sich nun symmetrisch in radialer Richtung um den Ursprung aus.

²²Die Abkürzungen u, d sind aus dem englischen Wort „upstream“ = flussaufwärts, beziehungsweise „downstream“ = flussabwärts übernommen.

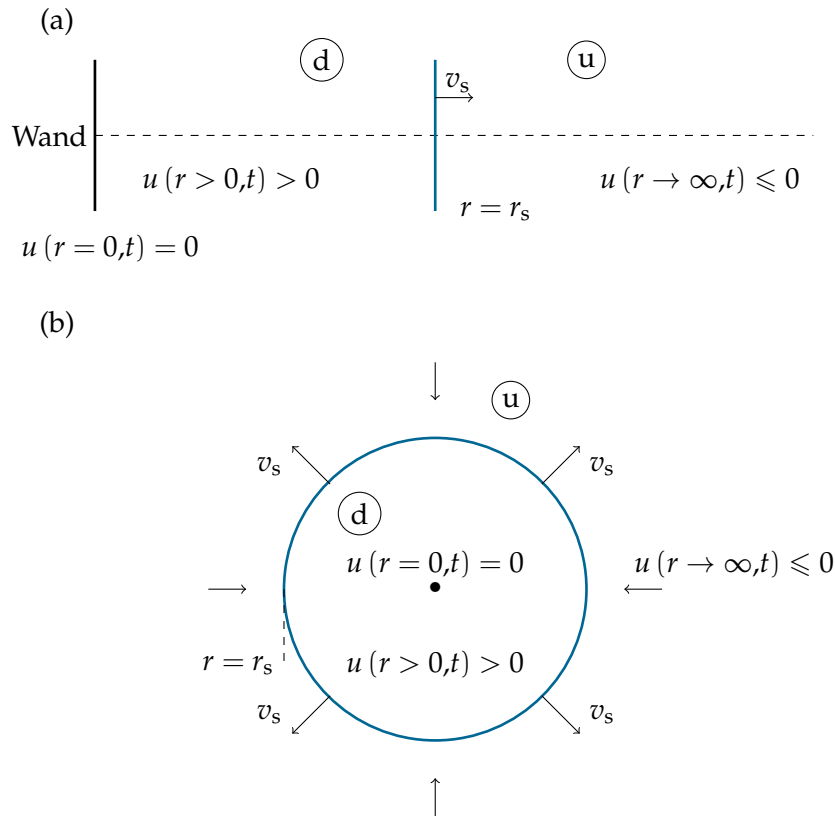


Abbildung 3.1: Skizze eindimensionaler Unstetigkeiten. (a) zeigt ein Stoßrohr in kartesischen Koordinaten, (b) in polaren beziehungsweise sphärischen Koordinaten. Dabei wird die Wand auf der linken Seite zum Ursprung. Die Bezeichnungen der ein- beziehungsweise ausströmenden Bereiche $(u, d)^{\text{IP}} \mapsto (d, u)^{\text{EP}}$ wechseln, betrachtet man anstelle des **IP** das **EP**.

Betrachtet man anstatt eines Stoßrohres beziehungsweise anstelle des **IP** nun das **EP**, propagiert die Stoßwelle nun in ein ruhendes Medium $u(r \rightarrow \infty, t) = 0$ und die einströmende Region wird zur ausströmenden. Es muss also der Index von $(u, d) \mapsto (d, u)$ überführt werden.

Um isotherme Unstetigkeiten mathematisch zu beschreiben, werden die in Kapitel 2 eingeführten Grundgleichungen (2.1, 2.2) beziehungsweise (2.14, 2.15) verwendet. Unter Vernachlässigung der Gravitation, der Viskosität und mit den entsprechenden Symmetrien in vertikaler und in azimuthaler Richtung erhält man die Kontinuitäts- und die Euler-Gleichung

$$\partial_\tau \rho + \frac{1}{r^\alpha} \partial_r (r^\alpha \rho u) = 0, \quad (3.1)$$

$$\partial_\tau u + u \partial_r u + \frac{1}{\rho} \partial_r \rho = 0, \quad (3.2)$$

wobei aufgrund der Isothermiebedingung (die erste der Gleichungen 2.6) die Energiegleichung vom System herausgenommen wird. In der koordinatenfreien Darstellung setzt sich der radiale Abstand r^α je nach Geometrie aus den Skalenfaktoren $h_\eta, h_\Phi \in \{1, r\}$ zusammen. Der Parameter $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ beschreibt den Wechsel der Koordinaten, dessen Einfluss ausgiebig überprüft werden muss. Die Geschwindigkeiten in obigen Gleichungen sind bereits über die Transformation $\tau \mapsto c_s t$ auf die Schallgeschwindigkeit c_s

normiert und die Dichten auf eine charakteristische Dichte $\hat{\rho}$. Somit tragen sie nur noch die Dimensionen Länge und Zeit, und $\rho = \rho(r, \tau)$ beziehungsweise $u = u(r, \tau)$ bleiben Funktionen der radialen Koordinate r und der normalisierten Zeit τ .

3.2 Die reduzierten Differentialgleichungen

Um selbstähnliche Lösungen zu einem System partieller Differentialgleichungen (PDG) zu berechnen, müssen zwei Bedingungen erfüllt werden. Erstens muss eine Gruppe von Transformationen existieren, welche die PDG zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen (GDG) reduziert, indem die unabhängigen Variablen des Systems (r, τ) zu einer neuen unabhängigen Variablen $\xi(r, \tau)$ verknüpft werden. Zweitens muss das reduzierte System ein wohldefiniertes Problem ergeben. Das bedeutet, dass sich die Nebenbedingungen der GDG zu einem eindeutig lösbares Randwertproblem (RWP) reduzieren lassen, und ausschließlich von den Größen der Transformationsgruppe abhängen muss (Ames 1965; Bluman und Anco 2002).

Es existieren im Allgemeinen mehrere Methoden, die in der Lage sind, Systeme PDG zu GDG zu reduzieren, zum Beispiel eine dimensionale Analyse (Buckingham'sches Theorem, Sedov 1946, 1959) oder mit der Methode Separation der Variablen (Ames 1965). Diese Methoden haben jedoch den Nachteil, dass sie auf einer sogenannten „akademischen Vermutung“ beruhen, dass man also einen möglichen Ansatz raten muss. Findet man einen Ansatz, so muss dieser aber nicht zwangsläufig zu einer wohldefinierten Reduktion führen, was in den Lehrbüchern von Ames (1965) und Sedov (1959) gut beschrieben ist. Deshalb soll im Folgenden die Methode der Streckungstransformation (ST) beziehungsweise Birkhoffs erste Methode Anwendung finden. Diese ermöglicht es in einem Schritt die Transformationsgruppe abzuleiten, falls, und nur falls, Selbstähnlichkeit für ein System PDG existiert. Das ist ein wesentlicher Vorteil gegenüber den anderen Methoden im Hinblick auf Klarheit und Verständlichkeit zum Auffinden der Invarianten.

Formal prüft eine ST die Invarianz der Gleichungen (3.1, 3.2) unter einer Schar von Punkttransformationen

$$\bar{\tau} = \lambda^a \tau, \quad \bar{r} = \lambda^b r, \quad \bar{\rho} = \lambda^c \rho, \quad \bar{u} = \lambda^d u \quad (3.3)$$

und liefert die notwendigen Bedingungen für die Konstanten a, b, c, d mit dem Gruppenparameter $\lambda \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in (3.1, 3.2) findet man Invarianz unter den Punkttransformationen, falls

$$a = b, \quad c \neq 0, \quad d = 0. \quad (3.4)$$

Mit diesen Bedingungen werden r und τ miteinander verknüpft und man definiert die Gruppeninvariante

$$\xi(r, \tau) = \frac{r}{\tau}, \quad (3.5)$$

oder auch Ähnlichkeitsvariable genannt. Die Dichte wird weiterhin mit dem Ort verknüpft

$$\rho(r, \tau) = S(\xi(r, \tau)) r^{-\kappa}, \quad (3.6)$$

wobei $\kappa \equiv b/c$ die radiale Dichteverteilung bestimmt und für die Geschwindigkeit findet man

$$u(r, \tau) = u(\xi(r, \tau)). \quad (3.7)$$

Die Konstituenten der Transformationsgruppe (3.5, 3.6, 3.7) sind beliebige Funktionen der Gruppeninvarianten 3.5, wobei S und u ausschließlich Funktionen von ξ sind. Die Ähnlichkeitsvariable (3.5) wird zur einzigen unabhängigen Variablen, indem sie die bisherigen unabhängigen Variablen Zeit (τ) und Raum (r) miteinander verknüpft. Die Gruppeninvarianten bilden eine Einparameter-Lie-Gruppe (Bluman und Anco 2002) und reduzieren eindeutig das System PDG zu einem wohldefinierten System GDG unter der Annahme von Selbstähnlichkeit. Angewendet auf die Gleichungen (3.1, 3.2) erhält man also das reduzierte System GDG

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{u\alpha - \kappa\xi}{\xi \left((\xi - u)^2 - 1 \right)}, \quad (3.8)$$

$$\frac{dS}{d\xi} = \frac{Su(\alpha - \kappa)(\xi - u) - S\kappa}{\xi \left((\xi - u)^2 - 1 \right)}, \quad (3.9)$$

wobei die Differentialtransformationen $\partial_\tau = -\frac{\xi}{\tau} \frac{d}{d\xi}$ und $\partial_r = \frac{\xi}{r} \frac{d}{d\xi}$ Anwendung finden. Alternative Gruppeninvarianten ergeben sich durch einfaches Skalieren mit einer Konstanten, führen aber zum gleichen System (3.8) und (3.9). Damit ergeben sich Lösungen zur PDG über die Abbildung der Gruppeninvarianten aus den Lösungen der GDG. Die Forderung der Invarianz restringiert die Bedeutung der normalisierten Zeit zu einer einfachen Konstanten $\tau \in \mathbb{R}_0^+$.

Die notwendigen Nebenbedingungen werden im folgenden Abschnitt 3.3 abgeleitet. Die Geschwindigkeitsgleichung (3.8) ist von der zweiten Gleichung (3.9) entkoppelt ($S(\xi)$ tritt nicht explizit in (3.8) auf), weshalb man ihr Verhalten graphisch untersuchen kann.

3.3 Die Nebenbedingungen

Ein wohldefiniertes RWP erfordert, dass die AB und RB unter der Forderung der Selbstähnlichkeit zusammenfallen (Ames 1965). Das System (3.1, 3.2) benötigt je eine AB ($f(r, t = 0) = f_a$) und zwei RB der Form $f(x_{0(\infty)}) = f_{0(\infty)}$ für jedes $f \in \{u, \rho\}$, also insgesamt sechs Nebenbedingungen, die es festzulegen gilt. Die ST reduziert die Nebenbedingungen auf vier RB, weil die AB mit den äußeren RB zusammenfallen. Nachfolgend müssen die notwendigen Nebenbedingungen für das System GDG festgelegt werden.

Anfangsbedingungen

Ein konstantes Anfangsgeschwindigkeitsfeld kann nur im Limes $\lim_{\tau \rightarrow 0} u(r, \tau) \rightarrow u_a$ existieren. Zur Erklärung kann Abbildung 3.2 herangezogen werden, welche die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit in der $u(r, \tau)$ -Ebene zeigt. Zu kleineren Zeiten hin wird der Krümmungskreis zur Lösungsfunktion vor der Unstetigkeit immer kleiner. Das Knie dieser Funktion wird also immer schärfer, bis sie in einer δ -Distributionsartigen AB endet. Da die exakte AB der Geschwindigkeit schwierig abzuleiten ist, kann die Konstante u_∞ im Limes angegeben werden.

Im Falle der Dichte wurde die AB (3.6) bereits abgeleitet. Eine sinnvolle Einschränkung dieser Bedingung ist das Einschränken des Parameters $\kappa \in \mathbb{R}_0^+$, weil sich das Fluid

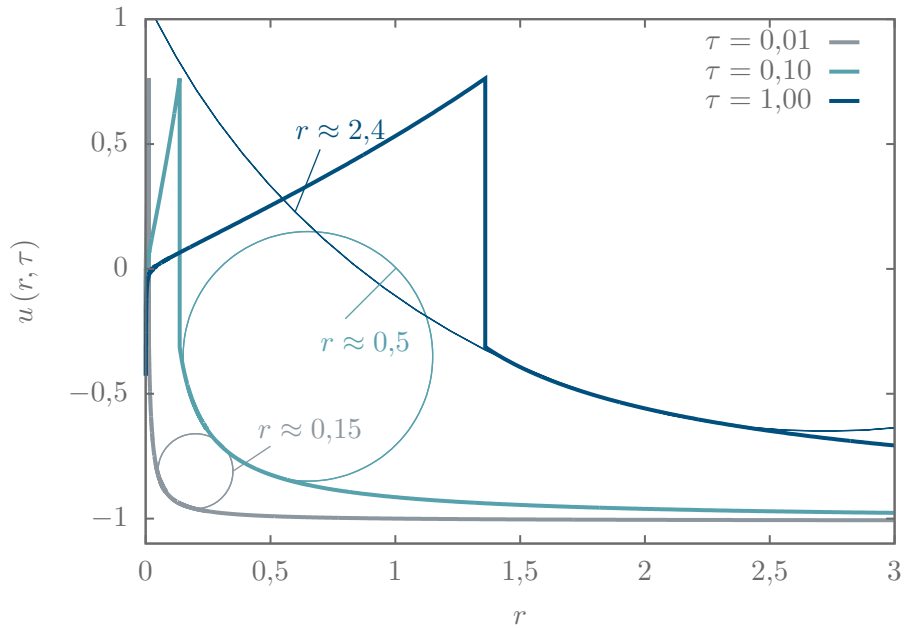


Abbildung 3.2: Lösungen der Geschwindigkeitskomponente für verschiedene Zeiten τ . Der Krümmungsradius der Lösungen hinter der Unstetigkeit schrumpft mit der Zeit und liefert eine δ -Distributionsartige Anfangsbedingung (AB), die im Unendlichen konstant wird.

hauptsächlich in den inneren Regionen befinden soll²³. Die Konstante S_∞ wird über die äußeren RB später festgelegt.

Innere Randbedingungen

Die innere RB für die Lösungen aus der Geschwindigkeitsgleichung wird über eine Linearisierung von Gleichung (3.8) zu

$$\frac{du}{d\xi} \approx \frac{\kappa\xi - u\alpha}{\xi}, \quad \text{für } 0 < \xi \ll 1 \quad \text{und} \quad 0 < |u| \ll 1, \quad (3.10)$$

bestimmt, die direkt integriert werden kann und zur Lösung

$$u_i \equiv u(\xi \ll 1) = \frac{\kappa\xi}{\alpha + 1} + c_0\xi^{-\alpha}, \quad (3.11)$$

also zur inneren RB u_i , führt. Die Integrationskonstante muss $c_0 = 0$ gewählt werden, da das Fluid an der Wand, beziehungsweise im Zentrum stagniert (siehe Abbildung 3.1). Um Gleichung (3.11) sinnvoll zu erfüllen, muss $\xi \neq 0$ gelten, weshalb $\xi|_0 = 10^{-3}$ sowohl für das IP als auch für das EP gewählt wird. Somit ist die innere RB für die Geschwindigkeit eindeutig durch einen Näherungswert u_i festgelegt.

²³Weitere mathematische Einschränkungen an κ , welche die Lösbarkeit des Systems gewährleisten, werden im Unterkapitel 3.5.2 beschrieben.

Äußere Randbedingungen

Für die Grenzen der Ähnlichkeitsvariablen (3.5) berechnet man leicht

$$\xi(r, \tau) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{für } r \rightarrow 0 \text{ oder } \tau \rightarrow \infty, \\ \infty, & \text{für } r \rightarrow \infty \text{ oder } \tau \rightarrow 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

und erkennt, dass ξ für unendlich große Radien r und zum Zeitpunkt $\tau = 0$ das gleiche Ergebnis liefert. Somit werden die AB mit den äußeren RB (Index a)

$$u_a(r) = \lim_{\tau \rightarrow 0} u(r, \tau) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = u_\infty, \quad (3.13)$$

$$\rho_a(r) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(r, \tau) = r^{-\kappa} \lim_{\xi \rightarrow \infty} S(\xi) = r^{-\kappa} S_\infty \quad (3.14)$$

verknüpft, wobei die Konstanten u_∞, S_∞ noch zu bestimmen sind. Um diese exakt festzulegen, findet die Definition $\eta = \xi^{-1}$ Anwendung, sodass $\eta \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow \infty$ gilt. Die mit η transformierte Gleichung (3.8)

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{\kappa - u\alpha\eta}{(1 - u\eta)^2 - \eta^2} \quad (3.15)$$

wird wieder linearisiert,

$$\frac{du}{d\eta} \approx \kappa - u\alpha\eta, \quad \text{für } 0 < \eta \ll 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq |u| \leq 0, \quad (3.16)$$

und kann über die imaginäre Fehlerfunktion²⁴

$$u(\eta) = e^{-\frac{\alpha\eta^2}{2}} \left(c_1 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \operatorname{kerfi} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}} \eta \right) \right) \quad (3.17)$$

gelöst werden. c_1 ist die Integrationskonstante. Diese Lösung ermöglicht es, den existierenden Grenzwert für $\eta = \xi^{-1} \rightarrow 0$ numerisch zu bestimmen. Das IP nach Noh (1987) setzt einen konstanten negativen Einfluss voraus, während das EP nach Sedov (1946) ein verschwindendes Geschwindigkeitsfeld in großem Abstand vor der Stoßwelle ($\xi \rightarrow \infty$) benötigt. Daher werden die äußeren RB (AB) über die Werte

$$u_\infty = \lim_{\eta \rightarrow 0} u(\eta) \equiv c_1 = \begin{cases} -1 & \text{für IP,} \\ 0 & \text{für EP} \end{cases} \quad (3.18)$$

festgelegt. Die Konstante $S_\infty > 0$ kann dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit mit

$$S_\infty = 1 \quad (3.19)$$

angegeben werden und gilt aufgrund der dimensionslosen Gleichungen (3.1, 3.2) sowohl für das IP, als auch für das EP.

²⁴Die Fehlerfunktion ist über das Integral $\operatorname{erf}(z) \doteq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\tau^2} d\tau$ und die imaginäre Fehlerfunktion über $\operatorname{erfi}(z) = \operatorname{erf}(iz) / i$ mit der imaginären Zahl i gegeben.

Weitere Nebenbedingungen

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sind auch andere RB denkbar. Die notwendigen Nebenbedingungen sind somit vollständig bekannt, auch wenn die innere Bedingung S_i bisher nicht angegeben ist.

Die Unstetigkeiten in den Lösungen verbinden disjunkte Regionen im Phasenraum. An welcher Position sich die Unstetigkeit ξ_0 befindet, ist bisher aber noch unbekannt. Diese muss über die RHB berechnet werden, welche die Verbindung zwischen den disjunkten Regionen herstellt. Kennt man nun eine der beiden RB $S_{0(\infty)}$ und die RHB (siehe Abschnitt 3.4), sind die Lösungen für die Dichte auch ohne Kenntnis der fehlenden RB S_i eindeutig bestimmt.

Alle wählbaren RB unterliegen somit der zusätzlichen Einschränkung, dass sie die RHB erfüllen müssen. Die für das System (3.1, 3.2) notwendigen sechs (vier) Nebenbedingungen sind über obige Betrachtungen auf nunmehr zwei Bedingungen (u_∞, S_∞) für die GDG (3.8, 3.9) reduziert worden, womit die Forderung nach einem wohldefinierten RWP erfüllt ist. Die Bedingungen (u_0, S_0) gehen aus den Lösungen der GDG und den RHB hervor, werden im Folgenden jedoch auch für deren numerische Berechnung herangezogen.

3.4 Isotherme Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Eine notwendige Bedingung an Differentialgleichungen stellt die Stetigkeit der gesuchten Lösungsfunktionen über den Satz von Picard-Lindelöf (z.B. im Lehrbuch Bärwolff 2006) dar. Um unstetige Lösungen dennoch beschreiben zu können, geht man von Differential- zu Integralgleichungen über. Die Lösungen der Integralgleichungen über ein infinitesimal dünnes Gebiet um eine Unstetigkeit, liefern dann die Rankine-Hugoniot-Bedingungen. Für die generelle Methode sollen die Lehrbücher von Courant und Friedrichs (1972, S. 123ff) und speziell für isotherme Bedingungen Clarke und Carswell (2003) Erwähnung finden. Schreibt man die wohlbekannteren RHB mit den Relationen (3.5, 3.6, 3.7) um, so erhält man

$$\begin{aligned} S_u u_u &= S_d u_d, \\ S_u (u_u^2 + 1) &= S_d (u_d^2 + 1), \end{aligned}$$

wobei die Geschwindigkeiten in das mitbewegte Bezugssystem bezüglich der Unstetigkeit über

$$u_{u,d} = u_{u,d} - \xi_0 \quad (3.20)$$

umtransformiert sind (Courant und Friedrichs 1972). Die Indizes u, d stehen für die ein- und ausströmenden Regionen. Die Geschwindigkeiten $u_{u,d}$ beziehen sich auf das Inertialsystem, und $\xi_0|_{\{r_s, \tau_s\}}$ gibt die Sprungstelle an. Obige Bedingungen zeigen keine radiale Abhängigkeit, da diese im unendlich schmalen Grenzfall an der Sprungstelle verschwinden und somit auch unabhängig von der gewählten Geometrie (α) sind. Aus obigen Gleichungen ergeben sich nun für die einströmenden Größen

$$u_u = u_d^{-1}, \quad S_u = S_d u_d^2,$$

insofern $S_u \neq S_d$ und $S_u, S_d > 0$ gelten. Diese Bedingungen sind symmetrisch, das heißt, dass die Indizes einfach vertauscht werden können, ohne dass sich die Gleichungen

	κ	α	ξ_0	u_u	u_d	S_u	S_d	
IP	0	0	0,6181	-1,0000	0,0000	1,0000	2,6178	
		1	0,7371	-0,6196	0,0000	2,6802	4,9328	
		2	0,8376	-0,3562	0,0000	5,4619	7,7844	
	1/3	0	0,9388	-0,7906	0,3606	0,8507	2,5447	
		1/2		1,1905	-0,7262	0,6688	0,8175	3,0030
		2/3		1,5829	-0,7017	1,1452	0,8004	4,1777
	1	1	1,3657	-0,3028	0,7663	1,2373	3,4443	
		2	1,2594	-0,0445	0,4925	2,1326	3,6260	
EP	1/3	0	1,5844	0,3100	0,7998	1,1743	1,9072	
	1/2		1,8694	0,3590	1,2073	1,1835	2,6998	
	2/3		2,2696	0,3605	1,7458	1,1587	4,2229	
	1	2	1,7716	0,7192	0,8213	1,0929	1,2103	
	9/5		2,3858	1,0023	1,6629	1,3182	2,5225	

Tabelle 3.1: RHB für unterschiedliche Anfangsdichteverteilungen κ und Geometrien α . Die Werte für das IP und EP wurden über das Programm in Anhang E berechnet.

ändern (siehe Abschnitt 3.5.2). Mit Hilfe von Gleichung (3.20) erhält man die Rankine-Hugoniot-Bedingungen bezüglich des Inertialsystems (siehe auch Abbildung 3.1):

$$u_u = \frac{1 + u_d \xi_0 - \xi_0^2}{u_d - \xi_0}, \quad (3.21)$$

$$S_u = S_d (u_d - \xi_0)^2. \quad (3.22)$$

Hierbei muss betont werden, dass die Werte $u_{u,d}$ und $S_{u,d}$ den Lösungen aus (3.8, 3.9) genügen müssen, um ein voll bestimmtes Gleichungssystem zu erhalten.

Numerische Berechnung der RHB

Die RHB müssen numerisch berechnet werden, da weder die Sprungstelle, noch die Geschwindigkeiten an der Unstetigkeit bekannt sind. Dazu wird octave²⁵ und ein Adams-Moulton Prädiktor-Korrektor Verfahren vierter Ordnung benutzt (z.B. Hairer und Wanner 1996). Die numerische Integration beginnt dann mit der Linearisierung (3.10) an der Stelle $\xi_0 = 10^{-3}$, hin zu einer initial gesetzten Sprungstelle $\tilde{\xi}_0 = \tilde{\eta}_0^{-1}$. Somit ist die temporäre Downstreamgeschwindigkeit $u_d(\tilde{\xi}_0) = \tilde{u}_d$ bekannt. Zu der transformierten Gleichung (3.15) können wohldefinierte Ränder angegeben werden, weshalb dies im nächsten Schritt für die entsprechenden Ränder (3.18) bis zur Stelle $\tilde{\eta}_0$ gelöst wird. Man erhält $u_u(\tilde{\xi}_0) = \tilde{u}_u$ als exakten Ausdruck und zusammen mit (3.21) einen alternativen Ausdruck \tilde{u}_d^* . Der relative Fehler zwischen diesen Größen

$$\epsilon = \left| \frac{\tilde{u}_d - \tilde{u}_d^*}{\tilde{u}_d^*} \right| \leq 10^{-4} \quad (3.23)$$

muss unterhalb einer hinreichend kleinen Fehlerschranke ϵ liegen. Wird die Fehlerschranke nicht eingehalten, wird geprüft, ob der Wert $\tilde{\xi}_0$ über- oder unterschätzt wurde

²⁵Freies Softwarepaket zur numerischen Berechnung unter der GNU General Public License (Eaton u. a. 2014).

und das Verfahren mit einer Änderung von ξ_0 (1 ± 0.1) wiederholt, bis die Schranke unterschritten ist. Die Änderung von 10% zum letzten Wert gewährleistet, im relevanten Streifen nahe der Unstetigkeit zu bleiben²⁶. Das beschriebene Verfahren konvergiert also automatisch zu der mit ϵ gewählten Genauigkeit. Die berechneten Werte für einige RHB sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst und das Programm ist im Anhang E gegeben. Die RHB müssen einmal zum Erzeugen einer Lösung des Systems (3.8, 3.9) berechnet werden.

3.5 Die selbstähnlichen Lösungen

In diesem Abschnitt werden Lösungen des Systems in allen Geometrien $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ für verschiedene Exponenten der Dichteverteilung κ besprochen und insbesondere für die Spezialfälle $\kappa = 0$ und $\kappa = 1$ ausführlich diskutiert. Danach werden dieselben Methoden auf isotherme Explosionen in sphärischer Geometrie angewendet und untersucht. Der Parameter κ unterliegt weiteren mathematischen Schranken, die angegeben und begründet werden. Im einfachsten Fall von kartesischen Koordinaten ($\alpha = 0$) können analytische Ausdrücke für unterschiedliche $\kappa < 1$, im Speziellen $\kappa = 1/3, 1/2, 2/3$ berechnet werden.

3.5.1 Isotherme Implosionen in allen Geometrien ($\alpha \in \{0, 1, 2\}$)

Das selbstähnlich transformierte Gleichungssystem (3.8, 3.9) mit der RB für das IP wird über einfache Integrationsverfahren aus Standardbibliotheken numerisch berechnet. Dabei werden die Gleichungen (3.8, 3.9) mit dem Programm ode²⁷ (Tufillaro u. a. 1992) mit justierbarer Genauigkeit gelöst.

Im Speziellen wird wie in Abschnitt 3.4 das Adams-Moulton Prädiktor-Korrektor Verfahren verwendet, wobei die RHB an der Unstetigkeitsstelle $\mathcal{U}_{u,d}$ ($\xi = \xi_0$) als AB gewählt werden. Von der Unstetigkeit wird nun zum Ursprung $\xi = 0$ und zum weit außen liegenden Punkt $\xi|_{\infty} = 1000$ integriert. Dieses Vorgehen schließt die Unstetigkeitsstelle an sich in den Graphen mit ein. Eindeutigkeit bleibt ebenfalls bestehen, da die RHB zuvor bereits über die RB berechnet worden sind.

Im Folgenden zeigen die Graphen zwar die physikalischen Variablen $\rho(r, \tau)$ und $u(r, \tau)$, es wurden jedoch die dimensionslosen Gleichungen gelöst und die Schallgeschwindigkeit, soweit nicht anders angegeben, stets auf $c_s = 1$ gesetzt.

Analyse der Phasenraumdiagramme

Die Lösungen werden graphisch über Phasenraumdiagramme analysiert, um trotz ihrer Komplexität Einblicke bezüglich ihres Verhaltens zu gewinnen. Im Allgemeinen trennen singuläre Linien (SL) disjunkte Regionen im Phasenraum, womit keine Lösungen existieren, welche diese Regionen stetig verbinden. Lösungen, welche den gesamten räumlichen

²⁶Vorgriff: ξ_0 liegt zu Beginn unterhalb des singulären Punktes \mathcal{D}_2 (3.25). Die Abweichung von 10% gewährleistet, nahe an dem gültigen Gebiet zwischen dem singulären Punkt und dem Schnittpunkt der entsprechenden Lösung zur äußeren RB mit der singulären Linie (3.24) (siehe z.B. Abbildung 3.3 und die Beschreibung in Abschnitt 3.5.1) zu bleiben.

²⁷Funktionsbibliothek zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen unter der GNU General Public License.

Bereich beschreiben, müssen demnach eine Unstetigkeit aufweisen. In den Phasenraumdiagrammen 3.3, 3.4, 3.6, 3.8, 3.9 und 3.11 werden also keine kontinuierlichen Lösungen gezeigt. Vielmehr sind Lösungen dargestellt, welche jeweils an einem bestimmten Punkt an einer SL enden.

Formal werden über die Zähler- und die Nennerfunktionen in Gleichung (3.8) die SL und die singulären Punkte (SP) im Phasenraum berechnet. SL sind diejenigen Linien, an denen die Zähler- oder Nennerfunktion verschwinden. Die SP sind über die Schnittpunkte der SL definiert. Man findet die SL

$$u(\xi) = \frac{\kappa\xi}{\alpha}, \quad u(\xi) = \xi \pm 1, \quad \xi = 0, \quad (3.24)$$

wobei das negative Vorzeichen für die Lösungen in der positiven Halbebene für den Fall $\kappa \leq \alpha$ steht. Für $\kappa > \alpha$ muss der Schnittpunkt der Kurven mit dem positiven Vorzeichen berechnet werden. Die letzte Bedingung in (3.24) zeigt, dass an der Stelle $\xi = 0$ alle Lösungen divergieren und beschreibt deshalb eine Nullkline²⁸. Die SP berechnen sich zu

$$\mathcal{D}_1 = (0, 0), \quad \mathcal{D}_2 = \left(\frac{\pm\alpha}{\alpha - \kappa}, \frac{\pm\kappa}{\alpha - \kappa} \right), \quad (3.25)$$

wobei der zweite SP sowohl von der Geometrie (α) als auch vom Exponenten der Anfangsdichteverteilung (κ) abhängig ist. Linearisiert man die GDG (3.8), kann sie als Matrixgleichung in Abhängigkeit eines freien Parameters t

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^2 - 4u\xi + 3\xi^2 - 1 & 2u\xi - 2\xi^2 \\ -\kappa & \alpha \end{pmatrix}_{\mathcal{D}_{1,2}} \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{\mathcal{D}_{1,2}}^{(\alpha, \kappa)} \begin{pmatrix} \xi \\ u \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

geschrieben werden. Es sind $\mathcal{J}_{\mathcal{D}_{1,2}}$ die Jacobi-Matrix an den SP $\mathcal{D}_{1,2}$. Über das Lösen des Eigenwertproblems können jetzt die SP charakterisiert werden (z.B. Logan 2008), wodurch das Verhalten der Lösungen an diesen kritischen Punkten beschrieben werden kann.

Die Eigenvektoren (EV) am Punkt \mathcal{D}_1 sind über $\vec{x}_{1,2}$ und am Punkt \mathcal{D}_2 über $\vec{z}_{1,2}$ gekennzeichnet. Der EV $\vec{x}_1 = (0, 1)^T$ ist in allen Symmetrien gleich und zeigt instabiles, divergierendes Verhalten an der Stelle \mathcal{D}_1 und wird als Sattelpunkt charakterisiert. In allen Phasenräumen werden die SP \mathcal{D}_1 als Dreiecke (▲) und \mathcal{D}_2 als Punkte (●) in orange gezeigt. Weiterhin sollte erwähnt werden, dass eine Lösung aus Gleichung (3.26) gerade durch die innere RB (3.11) gegeben und das Verhalten somit bekannt ist.

Kartesische Koordinaten ($\alpha = 0$) und $\kappa = 0$

Die einfachsten Lösungen entsprechen dem Problem mit kartesischen Koordinaten $\alpha = 0$ und konstanter Anfangsdichte ($\kappa = 0$, Gleichung 3.5). Da die rechte Seite des Systems (3.8, 3.9) verschwindet, werden die analytischen Lösungen über die konstanten Stufenfunktionen

$$u(r, \tau) = \begin{cases} u_d, & \text{für } \xi \leq \xi_0 \\ u_u, & \text{für } \xi \geq \xi_0 \end{cases} \quad (3.27)$$

²⁸Im Spezialfall, dass Zähler- und Nennerfunktion gemeinsam verschwinden, spricht man von einer Nullkline. Hier gilt $u(\xi = 0) = 0$ und die SL $\xi = 0$ ist eine Nullkline.

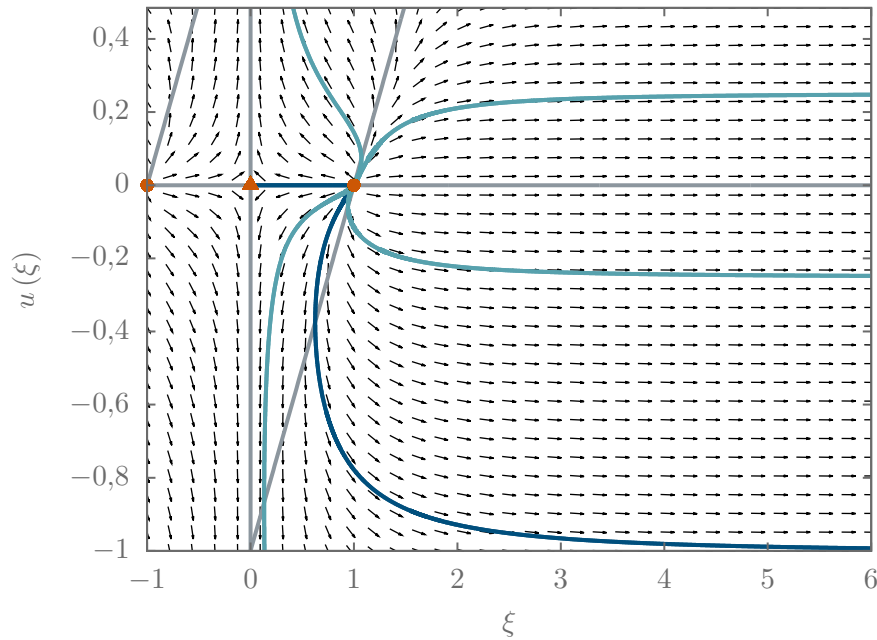


Abbildung 3.3: Phasenraumdiagramm für polare Koordinaten $\alpha = 1$ und konstanter Anfangsdichteverteilung $\kappa = 0$. Die SL (3.24) sind in grau dargestellt, wobei ihre Schnittpunkte die SP (orange Dreieck und orange Kreise) ergeben. Die Kreise entsprechen einem instabilen, uneigentlichen Knoten und das Dreieck einem Sattelpunkt. Die hellblauen Linien sind mögliche Lösungszweige, die dunkelblauen entsprechen der Lösung des IP.

und

$$\rho(r, \tau) = \begin{cases} S_d r^0, & \text{für } \xi \leq \xi_0 \\ S_u r^0, & \text{für } \xi \geq \xi_0 \end{cases} \quad (3.28)$$

gegeben. Die Werte der RHB können aus Tabelle 3.1 entnommen werden und die über $\xi, \mapsto r = c_s t$ (Gleichung 3.5) rücktransformierten Lösungen sind in Abbildung 3.5a,b gezeichnet. Die Position der Unstetigkeit hängt also direkt von ihrer Position an der Stelle $r = r_s$ zu unterschiedlichen Zeiten τ ab. Zum Vergleich sollen die nicht-isothermen Lösungen von Meyer (1988) und Gehmeyr u. a. (1997) erwähnt werden, welche sich qualitativ gleich verhalten.

Polare ($\alpha = 1$) und sphärische ($\alpha = 2$) Koordinaten mit $\kappa = 0$

Zur Diskussion der höherdimensionalen Lösungen wird im Folgenden Gebrauch von den Phasenraumdiagrammen 3.3 und 3.4 gemacht. Die SL ($u(\xi) = \{0, \xi \pm 1\}$) sind ebenso wie die SP $\mathcal{D}_1 = (0, 0)$ in beiden Diagrammen identisch. Im Ursprung befindet sich ein Sattelpunkt, in den der stabile Lösungszweig entlang der Richtung des EV $\vec{x}_2 = (1, 0)^T$ mündet. Die instabile Lösung streift den Sattelpunkt und verläuft in Richtung des EV $\vec{x}_1 = (0, 1)^T$. Die SP $\mathcal{D}_2 = (1, 0)$ sind geometrieabhängig und unterscheiden sich deshalb voneinander.

Im polaren Fall $\alpha = 1$ (Abbildung 3.3) findet man einen instabilen, uneigentlichen Knoten als Quelle, dessen erster EV $\vec{z}_1 = (1, 0)^T$ die Hauptrichtung der aus ihm quellenden

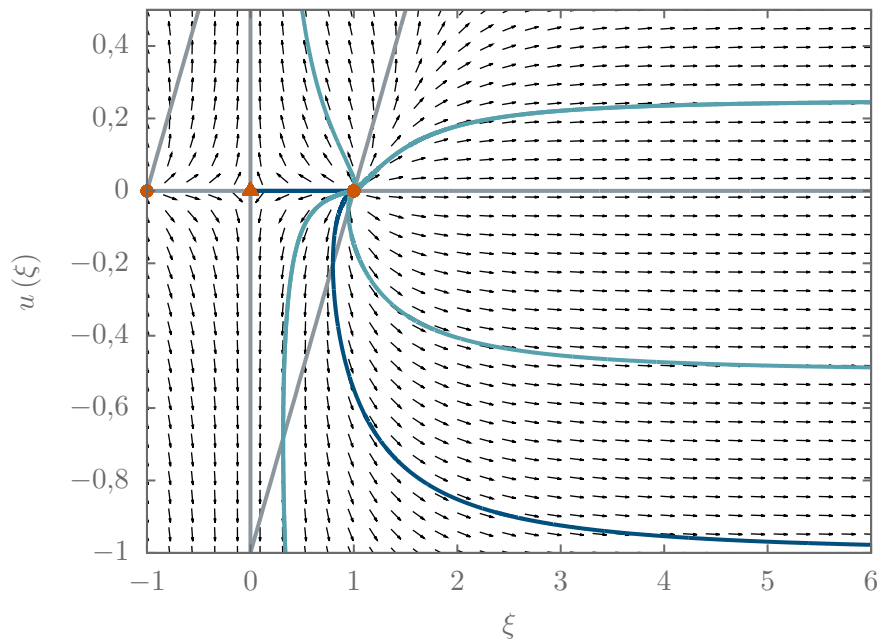


Abbildung 3.4: Phasenraumdiagramm in sphärischen Koordinaten $\alpha = 2$ und konstanter Anfangsdichteverteilung $\kappa = 0$. Die SL und deren Schnittpunkte SP sind analog zu Abbildung 3.3 dargestellt. Der orange Punkt entspricht einem instabilen, degenerierten, uneigentlichen Knoten und das orange Dreieck im Ursprung einem Sattelpunkt. Die hellblauen Linien sind mögliche Lösungszweige, die dunkelblauen sind Lösungen des sphärischen IP.

Lösungen ist. Die anderen Lösungen verlassen den Knoten in Richtung $\vec{z}_2 = (2,1)^T$. Es existiert aber nur genau eine Lösung (dunkelblaue Linie), welche ihren Ursprung in \mathcal{D}_2 hat und gleichzeitig die äußere RB (3.18) erfüllt. Die Unstetigkeit selber muss sich zwischen dem singulären Punkt \mathcal{D}_2 und dem Umkehrpunkt jener Lösung, die der äußeren RB genügt, befinden. Dieser Umkehrpunkt ist gleichzeitig auch der Schnittpunkt der Lösungen mit den SL.

Sehr ähnlich verhält es sich im Falle sphärischer Koordinaten ($\alpha = 2$, Abbildung 3.4), jedoch findet man einen instabilen, degenerierten, uneigentlichen Knoten²⁹ \mathcal{D}_2 , mit dem EV $\vec{z}_1 = (1,0)^T$. Die Lösung, die \mathcal{D}_2 verlässt und in \mathcal{D}_1 mündet, ist eine stabile Lösung, die RB und der Knoten \mathcal{D}_2 definiert den zweiten Lösungszweig. Die Lösungen für das Problem konstanter Anfangsdichte in den vorgeschlagenen Koordinaten ($\alpha \in \{0, 1, 2\}$) sind in Abbildung 3.5a-f gesammelt. Die Geschwindigkeit des Fluids hinter der Unstetigkeit verschwindet in allen Geometrien, was mit den beschriebenen Eigenschaften der singulären Punkte erklärt werden kann. Die Dichte verhält sich hinter der Unstetigkeit analog, da die rechte Seite der GDG (3.9) verschwindet. Im Unterschied zum kartesischen Fall (Abbildung 3.5a,b) fallen die Lösungen vor der Unstetigkeit kontinuierlich ab und nähern sich für sehr große r den äußeren RB an. Dieses Verhalten ist auf die Geometrieterme zurückzuführen, die nur im kartesischen Fall ($\alpha = 0$) auf der rechten Seite der Gleichung verschwinden.

²⁹Ein SP mit Multiplizität 2, also mit reellen, identischen Eigenwerten, wird degenerierter Knoten genannt, siehe z.B. Logan (2008).

Polare Koordinaten ($\alpha = 1$) mit $\kappa = 1$

Am Ende des Abschnittes 3.5.3 wird gezeigt, dass keine Lösungen für $\alpha = 0$, $\kappa \geq 1$ existieren, da die RHB immer verletzt werden. Deshalb beginnt die Diskussion bei den Lösungen in ebenen Polarkoordinaten.

Die SL sind über Gleichung (3.24) $u(\xi) = \{\xi, \xi \pm 1\}$ in Abbildung 3.6 gezeigt. Es existiert aber nur ein einziger SP, ein Sattelpunkt in $\mathcal{D}_1 = (0,0)$. Der zugehörige stabile Lösungszweig führt entlang der Richtung $\vec{x}_2 = (2,1)^T$ zum SP. Im hier betrachteten Fall ($\alpha = \kappa = 1$) divergieren die Funktionen (3.25) und es existiert kein Knoten \mathcal{D}_2 , womit die SL parallel zueinander verlaufen. Die relevanten Lösungen sind also durch den stabilen Lösungszweig und denjenigen, der die äußere RB Gleichung (3.18) erfüllt, gegeben. Der Ort der Unstetigkeit muss sich zwischen dem Schnittpunkt der Lösung mit der SL und „unendlich“ befinden, da sich die Lösungen asymptotisch an die Funktion (3.24) $u(\xi) = \xi - 1$ annähert.

In Abbildung 3.7a, b sind die Lösungen für verschiedene Zeiten $\tau = 1, 3, 6$ gezeigt. Die Geschwindigkeit hinter der Stoßwelle steigt hier sehr schnell an, bis die entsprechende RHB erreicht wird, und nähert sich nach dem Sprung der äußeren RB an. Die Dichte hat nun einen endlichen Wert am Ursprung. Das Verhalten der Lösungen $u(r, \tau)$ und $\rho(r, \tau)$ hinter der Unstetigkeit erklärt sich über die zusätzlichen Geometrieterme im Gleichungssystem (3.8, 3.9).

Sphärische Koordinaten ($\alpha = 2$) mit $\kappa = 1$

Die Gleichungen $u(\xi) = \{\xi, \xi \pm 1\}$ sind im Phasenraumdiagramm 3.8 zusammen mit möglichen Lösungszweigen eingezeichnet. Die stabile Lösung läuft tangential zum EV $\vec{x}_2 = (3,1)^T$ Richtung Sattelpunkt $\mathcal{D}_1 = (0,0)$ zurück. Sie entstammt dem instabilen, uneigentlichen Knoten $\mathcal{D}_2 = (2,1)$ mit der Hauptrichtung $\vec{z}_1 = (-1 - \sqrt{5}, 1)^T$ und $\vec{z}_2 = (-1 + \sqrt{5}, 1)^T$. Der Lösungsverlauf vor der Unstetigkeit muss wieder die äußere RB erfüllen und aus \mathcal{D}_2 quellen. Die Unstetigkeit kann nur zwischen dem Umkehrpunkt der entsprechenden Lösung³⁰ und \mathcal{D}_2 liegen. In Abbildung 3.7c, d sind die Lösungen mit den entsprechenden RHB für verschiedene Zeiten τ gezeigt. Im Gegensatz zu den Lösungen in Abbildung 3.5 zerfließt die Dichte mit zunehmender Zeit. Dies ist eine Folge der zwei Terme ($-\kappa\xi$; -5κ) im Zähler der Gleichungen (3.8, 3.9), die für das Anwachsen der Geschwindigkeit und der Dichte hinter der Stoßwelle verantwortlich sind. Aufgrund der Massenerhaltung bleibt die Fläche unter der Dichtefunktion konstant und die RHB fallen mit $S_{u,d}r^{-\kappa}$ ab.

3.5.2 Isotherme Explosionen in sphärischer ($\alpha = 2$) Geometrie

In Analogie zu den wohlbekannten Modellen von Sedov (1946) und Taylor (1950) wurden isotherme Lösungen von Korobeinikov (1956) entwickelt. Das isotherme Modell verwendet die Annahme, dass der Temperaturgradient hinter der Unstetigkeit verschwindet, also dass $0 \approx \partial_r T_d \ll \partial_r T_u$ gelten muss³¹. Diese Annahme führt jedoch zu einem Sprung im Temperaturprofil, da $0 \approx T_d \neq T_u$ gilt, während echte Isothermie $T_d = T_u$ erfordert.

³⁰Am Umkehrpunkt verliert die Lösung ihre Eindeutigkeit und entspricht dem Schnittpunkt mit der SL.

³¹Es muss beachtet werden, dass in diesem Fall die Indizes (u, d) \mapsto (d, u) vertauscht sind, da sich die Ausbreitungsrichtung des Fluids mit den RB geändert hat.

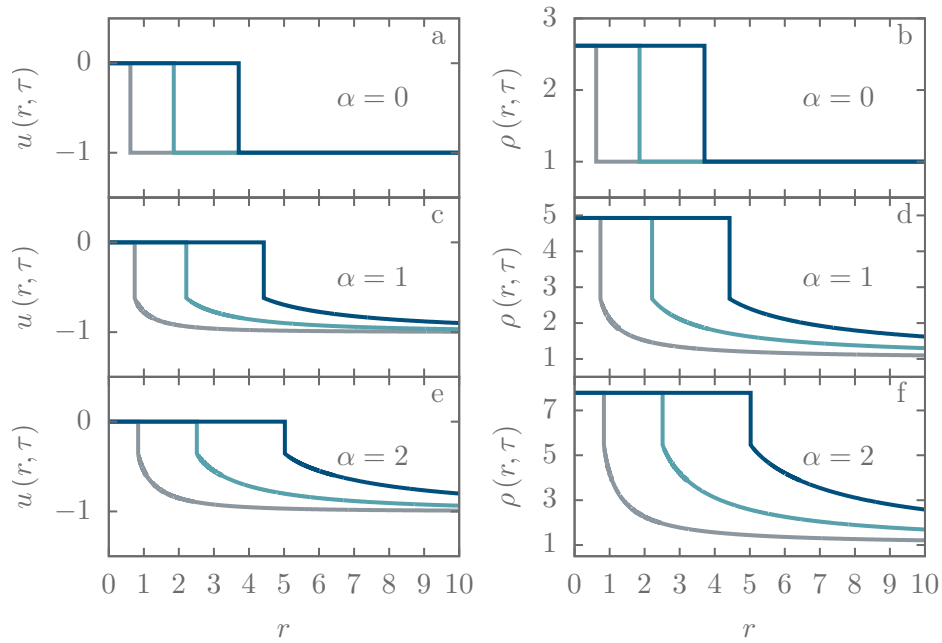


Abbildung 3.5: Die selbstähnlichen Lösungen für konstante Dichteverteilungen $\kappa = 0$ in kartesischen ($\alpha = 0$), polaren ($\alpha = 1$) und sphärischen ($\alpha = 2$) Koordinaten ($\tau = 1, 3, 6$; grau, hellblau, dunkelblau).

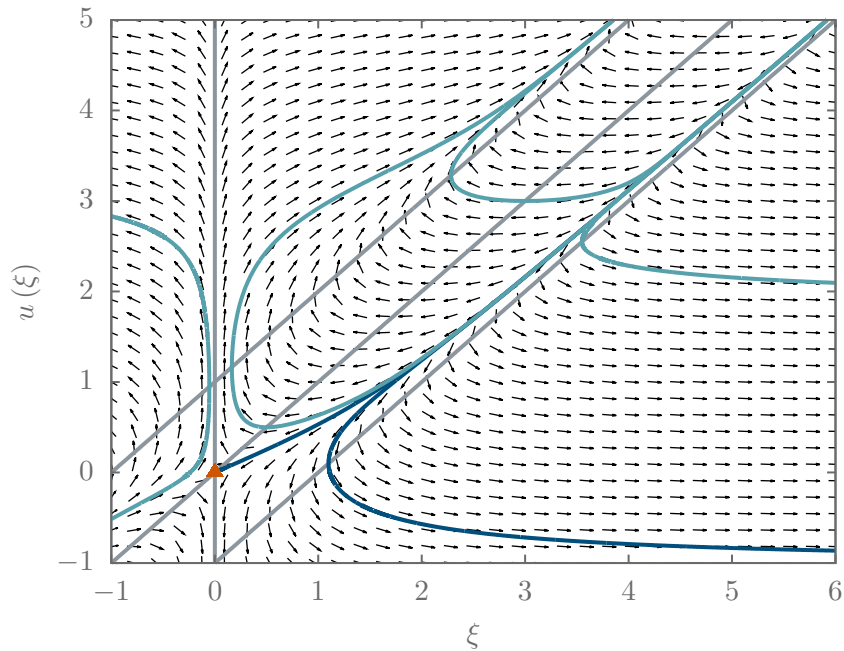


Abbildung 3.6: Der Phasenraum ($\alpha = \kappa = 1$) hat nur einen Sattelpunkt im Ursprung und die **SL** verlaufen parallel zueinander. Die echte Lösung muss die äußere **RB** und die **RHB** erfüllen.

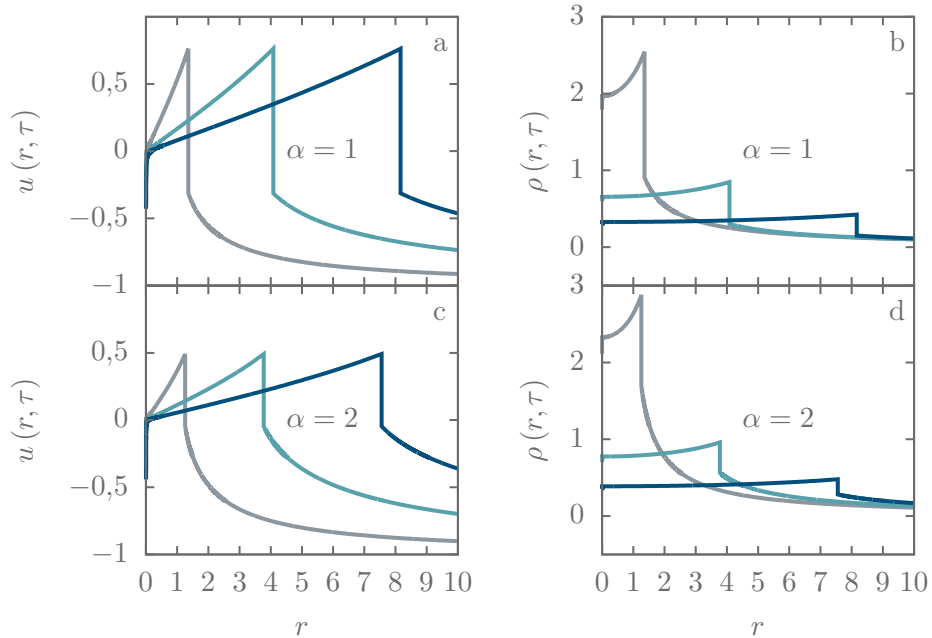


Abbildung 3.7: Die Lösungen in verschiedenen Koordinaten ($\alpha \in \{1, 2\}$) und $\kappa = 1$. Die Dichte zerfließt mit zunehmender Zeit ($\tau = 1, 3, 6$; grau, hellblau, dunkelblau) aufgrund der Massenerhaltung und die Fläche unter der Kurve bleibt konstant.

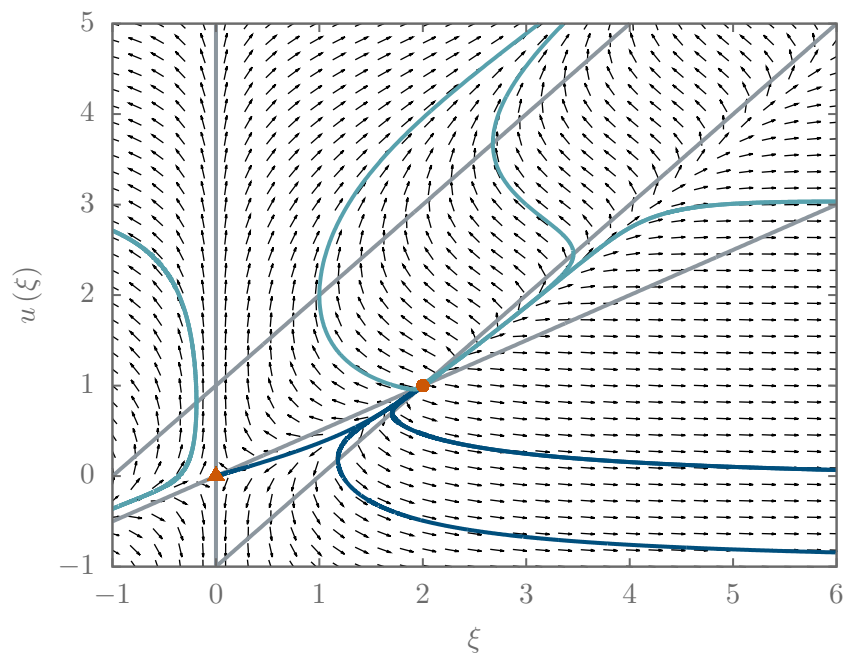


Abbildung 3.8: Der Phasenraum ($\alpha = 2, \kappa = 1$) gilt sowohl für das IP, das die äußere RB $u_a = -1$ erfüllt, als auch für das EP mit $u_a = 0$. Deshalb sind drei dunkelblaue Kurven gezeichnet.

Letztere Annahme setzt einen sehr effizienten Kühlungsmechanismus voraus, der die Temperatur über die Stoßwelle hinweg konstant hält. Die Lösungen von Korobeinikov sind demnach eine Vermischung aus adiabatischen und isothermen Annahmen, sogenannte homotherme Lösungen. Deshalb existiert ein adiabatischer Fluß über die Stoßwelle, womit Energieerhaltung vom System gefordert werden kann. Isothermie verletzt jedoch die Energieerhaltung (siehe auch Abschnitt 2.2). Korobeinikov benutzt die von Sedov vorgeschlagene Ähnlichkeitsvariable $\eta = (r^5 \rho t^{-2} E^{-1})^{1/5}$, wobei mit E die Anfangsenergie, mit t die Zeit, mit r der radiale Abstand und mit ρ die Dichte beschrieben werden. Dies erlaubt eine, auf einen sehr engen Raum bezogene, instantane Energiefreisetzung und somit wohldefinierte, punktförmige Explosionslösungen bezüglich der Parameter Energie und Dichte (Korobeinikov 1956, 1976; Solinger u. a. 1975; Lerche und Vasyliunas 1976).

Im Gegensatz zu den früheren Lösungen kann das in der vorliegenden Arbeit entwickelte isotherme Modell auch zur Berechnung von Explosionen verwendet werden. Dazu bedient man sich der GDG (3.8, 3.9) mit den dem System entsprechend angepassten Randbedingungen (Gleichung 3.18).

Allgemeine Einschränkungen für κ

Am Ende des Abschnittes 3.5.3 wird gezeigt, dass keine physikalisch sinnvollen Lösungen in kartesischer Geometrie für $\kappa \geq 1$ existieren können, die gleichzeitig die RB und die RHB erfüllen. In Abschnitt 3.5.1 ist eine Methode beschrieben, die es erlaubt, numerische Lösungen des Systems (3.8, 3.9) für beliebige κ zu berechnen. Dennoch gibt es weitere Einschränkungen, die den Wertebereich für κ limitieren. Betrachtet man Gleichung (3.8), kann mit Hilfe der singulären Lösung $u(\xi) = \xi$ die Grenze $\kappa = \alpha + 1$ gefunden werden. Für kleine Abweichungen $\epsilon \ll 1$ in der singulären Lösung $u_d = \xi + \epsilon$ können die RHB (3.21)

$$u_u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{\epsilon} \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

nicht mehr erfüllt werden, weshalb sogar die Grenze $\kappa < \alpha + 1$ gelten muss.

Zum selben Ergebnis führt eine physikalische Argumentation über das endliche Massenintegral des Systems

$$M = cS_\infty \int_0^r \frac{dr'}{r'^{1-\epsilon}} = \frac{cS_\infty}{\epsilon} r^\epsilon, \quad (3.30)$$

wobei Gleichung (3.14) verwendet wurde und $\kappa = \alpha + 1 - \epsilon$ gilt. Das Integral divergiert für $\epsilon = 0$ und liefert negative Massen für $\epsilon < 0$. Man erhält also nur sinnvolle Werte für das Massenintegral mit $\epsilon > 0$, weshalb zusammen mit der Forderung $\kappa \in \mathbb{R}_0^+$

$$\kappa_{\max} \equiv \kappa < \alpha + 1 \quad (3.31)$$

eine strenge Grenze für die Lösbarkeit des Systems gegeben ist (siehe auch Solinger u. a. 1975; Lerche und Vasyliunas 1976).

κ_{\max} behält seine Gültigkeit auch für das EP, für welches κ noch weiteren Einschränkungen unterliegt und somit die Lösbarkeit des Systems gewährleistet. Aufgrund der

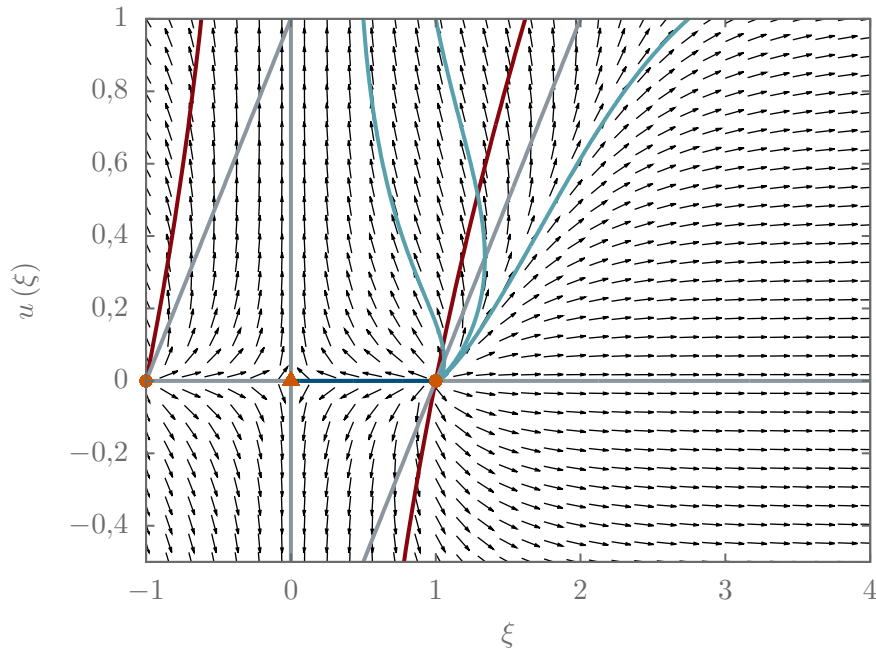


Abbildung 3.9: Der Phasenraum ($\alpha = 2, \kappa = 0$) falsifiziert sphärische Explosionen mit konstanter Dichteverteilung, weil die äußere RB nie über eine Unstetigkeit erfüllt werden kann. Die rote Linie ist die RHB (3.32).

geänderten äußeren Randbedingungen (3.18) findet man für die RHB (3.21, 3.22) im Falle³² $\kappa = 0$ die einfachen Relationen

$$u_d = \xi_0 - \xi_0^{-1}, \quad S_d = S_u \xi_0^{-2}, \quad (3.32)$$

die nur von der Unstetigkeitsstelle ξ_0 abhängen. Das Phasenraumdiagramm 3.9 zeigt mögliche Lösungen für den hier betrachteten Fall des EP mit einer konstanten Anfangsdichteverteilung. Die singulären Punkte sind bereits in Abschnitt 3.5.1 eingeführt und beschrieben worden. Die rote Kurve im Diagramm zeigt Gleichung (3.32). Aus dem Phasenraum können nun zwei unterschiedliche Schlüsse gezogen werden, die jedoch zum gleichen Ergebnis führen. Zum einen muss die äußere RB erfüllt werden, was nur durch eine konstante Lösung $u(\xi) = 0$ zwischen \mathcal{D}_2 und Gleichung (3.18) gelingt. Dies hat jedoch zur Folge, dass das System keine Unstetigkeit besitzen kann. Zum anderen verlieren diejenigen Lösungen, die \mathcal{D}_2 verlassen, ihre Eindeutigkeit³³ bevor sie den RHB (rote Linie) genügen können. Deshalb existiert keine Lösung zum EP für $\kappa = 0$ in sphärischen Koordinaten.

In Abbildung 3.10 sind die RHB in Abhängigkeit von κ gezeigt. Dort verschwindet die Differenz $u_d - u_u$ ab einem bestimmten κ , wodurch die Unstetigkeit selber verschwindet. Hinter diesem Wert ändert sich das Verhalten der RHB unphysikalisch. Der Phasenraum 3.11 zeigt den SP für das kleinstmögliche κ , wobei die dunkelblauen Kurven den Lösungen entsprechen, die den äußeren RB und den RHB gerade noch genügen. Diese

³²Die vertauschten Indizes erfordern, dass für $\kappa = 0 \rightarrow u_u = 0$ gilt.

³³Der Umkehrpunkt der Lösungsfunktion ist durch den Schnittpunkt mit den singulären Linien gekennzeichnet.

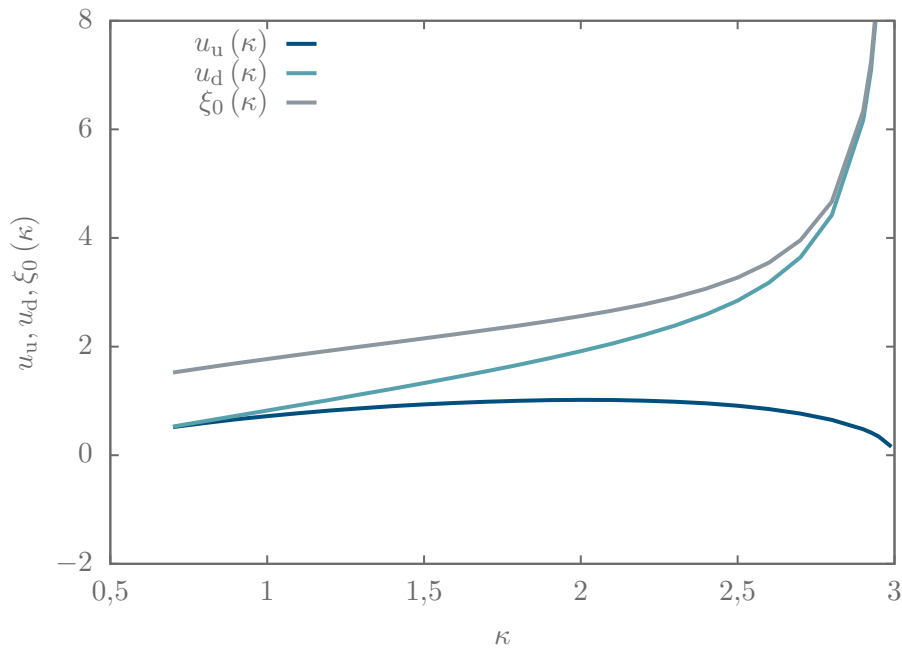


Abbildung 3.10: Die RHB in Abhängigkeit von κ innerhalb der Schranken $\kappa_{\min} \leq \kappa < \kappa_{\max}$ in sphärischer Geometrie ($\alpha = 2$).

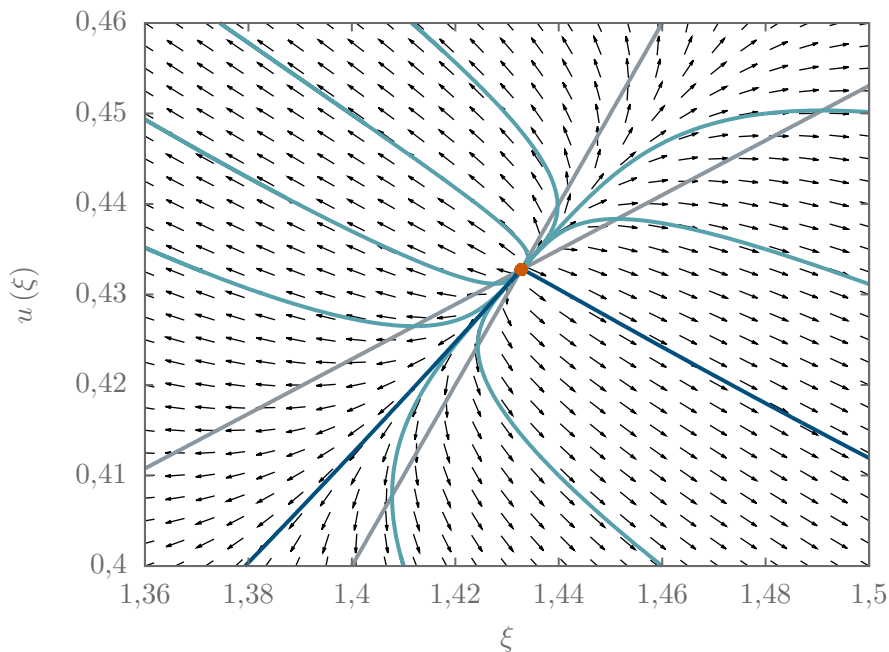


Abbildung 3.11: Phasenraum mit dem instabilen, uneigentlichen Knoten \mathcal{D}_2 (orange) und möglichen Lösungen (hellblau). Die dunkelblauen Kurven sind die dem System eindeutig zugeordneten Lösungen zu einer hebbaren Unstetigkeit bezüglich der unteren Schranke $\kappa_{\min} = 0,60409$. SL sind in hellgrau dargestellt.

Lösungen zeigen anstelle einer Unstetigkeit eine hebbare Definitionslücke (z.B. Merzinger und Wirth 2006). Damit kann nun gezeigt werden, dass ein minimales κ existieren muss. Um den zur Definitionslücke gehörigen Wert κ_{\min} zu bestimmen, werden die linearisierten Gleichungen (3.26) um den SP \mathcal{D}_2 gelöst³⁴ und als innere RB benutzt:

$$u(\xi) = \frac{\kappa(\kappa - \alpha)}{2\alpha} \xi + \frac{\kappa}{\alpha - \kappa} \left(1 + \frac{\alpha - \kappa}{2} \right) \quad \text{mit } \xi \ll 1 \quad \text{und} \quad |u| \approx 0. \quad (3.33)$$

Fordert man zusätzlich die Existenz einer Lösung zur Gleichung (3.8), erhält man zusammen mit (3.33) und der äußeren RB (3.18) Eindeutigkeit für ein bestimmtes κ . Dieses minimale κ berechnet man numerisch, indem (3.33) als Startwert dient und der Parameter κ so lange variiert wird, bis die äußere RB erfüllt ist. Auf diesem Wege findet man

$$\kappa_{\min} = 0,60409 \leq \kappa < 3 = \kappa_{\max} \quad (3.34)$$

als exakte Schranken des EP in sphärischen Koordinaten. Dieses Verfahren ist nur für sphärische und polare Koordinaten anwendbar, da Gleichung (3.33) für $\alpha = 0$ keine Lösung besitzt und somit die Überlegungen am Anfang des Abschnitts bestätigt.

Diskussion isothermer Explosionen für $\kappa = 1$

Für die Diskussion der Lösungen $\kappa = 1$ wird auf Abbildung 3.8 zurückgegriffen. Die Eigenschaften der SP wurden bereits behandelt (Abschnitt 3.5.1), wobei man einen Sattelpunkt in $\mathcal{D}_1 = (0,0)$ und einen instabilen, uneigentlichen Knoten $\mathcal{D}_2 = (2,1)$ findet. Die erlaubten Lösungen sind jene, die \mathcal{D}_2 verlassen und entlang der Haupttrichtung in den Sattelpunkt münden oder die äußere RB erfüllen. Die numerischen Werte für die RHB sind in Tabelle 3.1 aufgelistet, womit wohldefinierte Bedingungen für die Lösbarkeit des Systems geschaffen sind. In Abbildung 3.10 sind die RHB in Abhängigkeit von κ gezeichnet. Die Funktionen divergieren für $\kappa \rightarrow \kappa_{\max} = 3$ und schneiden sich an $\kappa_{\min} = 0,60409$.

Die Lösungen zu $\kappa \in \{1, 9/5\}$ sind in Abbildung 3.12a-d gezeigt. Je größer die Werte κ , desto stärker ist die Explosion, da die Differenz $u_d - u_u$ wächst. Die Geschwindigkeiten breiten sich konstant mit der Zeit aus, wobei die Dichten mit zunehmender Zeit abnehmen, was der Massenerhaltung geschuldet ist. Der Abfall der Dichte folgt wieder der Bedingung (3.6) $\rho(r, \tau) = S_d(\kappa) r^{-\kappa}$.

Die Lösungen von Korobeinikov (1956) erfordern eine konstante Anfangsdichte und Anfangsenergie. Deshalb kann die Delta-Distribution als Anfangsbedingung gesetzt werden, wobei die Explosion an sich durch eine instantan freigesetzte Energie getrieben wird. In Sedov (1959), Solinger u. a. (1975) und Lerche und Vasyliunas (1976) wird künstlich die Umgebungsdichte $\rho \propto r^{-\omega}$ eingeführt, die in dieser Arbeit rein mathematisch über die ST abgeleitet wurde (siehe Gleichung 3.6, wobei $\omega \equiv \kappa$ gilt). Solinger u. a. (1975) argumentiert weiter, dass physikalisch sinnvolle Lösungen nur für $\omega = 0$ existieren, während echte isotherme Lösungen nur für $0,60409 \leq \kappa < 3$ gefunden werden können. Sedov (1959, S. 260) untersuchte ebenfalls Lösungen für variable Anfangsdichten mit derselben oberen Grenze $\omega < 3$ für eine endliche Masse im System.

Die Explosion im echten isothermen Fall wird nicht mehr durch die Anfangsenergie, sondern durch die am Anfang freigesetzte Masse getrieben. Dabei gilt: je steiler der

³⁴Durch die Entwicklung um \mathcal{D}_2 verschiebt sich der Ursprung des Systems, sodass die Näherung gilt. Die Integrationskonstante wird dann so bestimmt, dass diese Verschiebung wieder egalisiert wird.

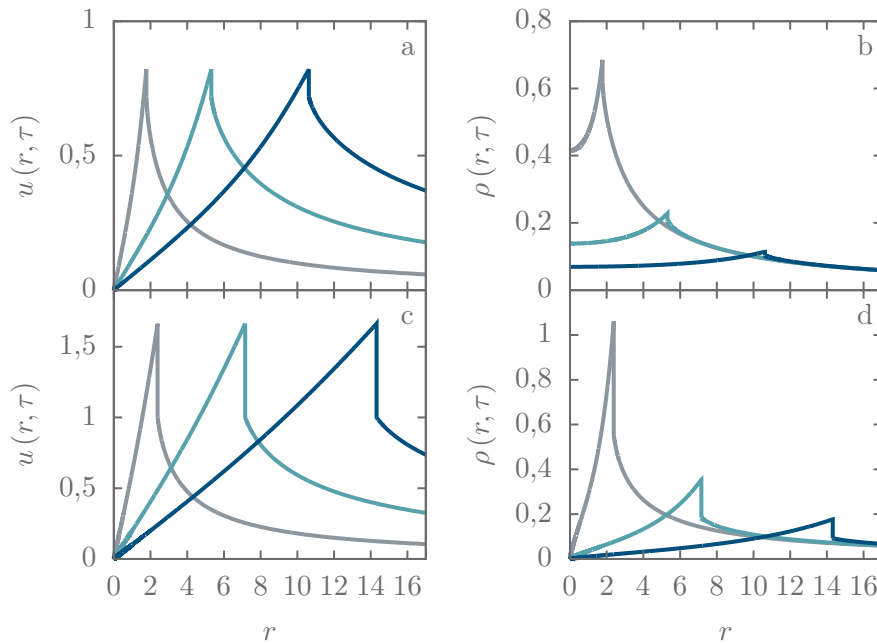


Abbildung 3.12: Selbstähnliche Lösungen zum sphärischen EP für $\alpha = 2$, $\kappa = 1$ (a, b) und $\kappa = 9/5$ (c, d) zu den Zeitpunkten $\tau = 1, 3, 6$ über die Farben grau, hellblau, dunkelblau dargestellt.

Gradient der Massen- beziehungsweise Dichteverteilung (κ), desto stärker bildet sich die Unstetigkeit aus und desto höher ist die Geschwindigkeit der Unstetigkeit (siehe auch Abbildung 3.12 im Vergleich der gezeigten κ). Ein weiterer Unterschied zwischen den Lösungen liegt darin, dass die Geschwindigkeit in den Arbeiten von Korobeinikov (1956) und Solinger u. a. (1975) bis zu einem singulären Punkt identisch Null sind. Dies ist zwar kein falsches Verhalten, aber man findet auch keine echte physikalische Erklärung dafür, dass das Gas bis zu diesem Punkt (absolut) ruht. Diese Punkte zeigen deutlich auf, dass es einen berechtigten Grund für die Entwicklung echter isothermer Lösungen gibt, und dass im Bereich physikalischer Anwendungen Potential für den Gewinn neuer Einsichten existiert.

3.5.3 Analytische Lösungen zum Implosions-Problem und Explosions-Problem für $\alpha = 0$, $\kappa < 1$

Im Fall kartesischer Koordinaten und $\kappa < 1$ können analytische Ausdrücke für das IP und EP abgeleitet werden. Diese sind hilfreich um die Güte der verwendeten numerischen Methoden zu verifizieren, als auch ein Indikator für die generelle Korrektheit des hier entwickelten Modells. Im Speziellen werden die Werte $\kappa = 1/3, 1/2, 2/3$ untersucht, da diese den erlaubten Bereich in etwa gleichem Maße aufteilen.

Analytische Implosionslösungen

Substituiert man die Definition $w \doteq \xi - u$ in Gleichung (3.8) und setzt $\alpha = 0$, erhält man die separable Differentialgleichung

$$\frac{dw}{d\xi} \left(1 + \frac{\kappa}{(1 - \kappa) - w^2} \right) = 1, \quad (3.35)$$

die ihr Verhalten über den zweiten Term in der Klammer für $\kappa = 1$ verändert. Daher werden zunächst die Lösungen für $\kappa < 1$ und am Ende des Abschnitts die Lösungen für den Fall $\kappa \geq 1$ untersucht. Die allgemeine Lösung von (3.35) ist

$$w + \frac{1}{\nu} \ln \left(\pm \frac{\sigma + w}{\sigma - w} \right) = \xi + c_{\pm}, \quad (3.36)$$

mit den Definitionen $\nu = \frac{2\sqrt{1-\kappa}}{\kappa}$, $\sigma = \sqrt{1-\kappa}$ und c_{\pm} der Integrationskonstanten. Das positive Vorzeichen gilt für den Fall $|w| < \sigma$ und umgekehrt. Deshalb ist die Lösung in zwei Lösungsäste aufgeteilt, wobei einer als einströmender (u) und der andere als ausströmender (d) Bereich festgelegt wird (siehe Abbildung 3.1):

$$\begin{aligned} u \rightarrow 0 \text{ für } \xi \rightarrow 0 &\Rightarrow |w| \rightarrow 0 < \sqrt{1-\kappa} \quad (\text{d}), \\ u \rightarrow -1 \text{ für } \xi \rightarrow \infty &\Rightarrow |w| \rightarrow \infty > \sqrt{1-\kappa} \quad (\text{u}). \end{aligned}$$

Zusammen mit den RB (3.10, 3.18) ergeben sich die Integrationskonstanten zu $c_+ = 1$ und $c_- = e^{\nu}$, womit die impliziten beziehungsweise die transzendenten Lösungen

$$\xi(u) = u - \sigma \frac{1 - e^{\nu u}}{1 + e^{\nu u}}, \quad \xi < \xi_0, \quad (3.37)$$

$$\xi(u) = u - \sigma \frac{1 + e^{\nu(1+u)}}{1 - e^{\nu(1+u)}}, \quad \xi > \xi_0 \quad (3.38)$$

für das ein- und das ausströmende Gebiet angegeben werden können. Die Variable ξ_0 steht für die Position der Unstetigkeit. Die Lösungen (3.37) und (3.38) zusammen mit den RHB (3.21) ergeben drei Gleichungen für die drei Unbekannten (u_u, u_d, ξ_0). Die Definition

$$\psi \doteq \frac{1 - e^{\nu(1+u_u)}}{1 + e^{\nu(1+u_u)}} \Leftrightarrow u_u = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{1 - \psi}{1 + \psi} \right) - 1 \quad (3.39)$$

führt zusammen mit der Einströmgeschwindigkeit $u_u = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0^+} u^{(\xi > \xi_0)}$ an der Sprungstelle ξ_0 und eingesetzt in Gleichung (3.38) zur Sprungposition

$$\xi_0 = u_u - \frac{\sigma}{\psi} = u_d - \frac{\psi}{\sigma}. \quad (3.40)$$

Die zweite Relation wurde mit Hilfe der RHB (3.21) abgeleitet. Die Ausströmgeschwindigkeit an der Unstetigkeit $u_d = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0^-} u^{(\xi < \xi_0)}$ als Funktion von ψ erhält man mit Hilfe der Gleichungen (3.21, 3.37, 3.40):

$$u_d = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{\sigma^2 - \psi}{\sigma^2 + \psi} \right). \quad (3.41)$$

Aus den Relationen (3.39) und (3.41) können u_u und u_d eliminiert werden und man erhält eine nichtlineare Bestimmungsgleichung

$$f(\psi) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{(\sigma^2 - \psi)(1 + \psi)}{(\sigma^2 + \psi)(1 - \psi)} \right) - \frac{\psi}{\sigma} + \frac{\sigma}{\psi} + 1 = 0, \quad (3.42)$$

die für ψ numerisch gelöst werden kann. Für jedes κ kann somit ein ψ berechnet werden, was eingesetzt in (3.39) und (3.41) die Werte u_u, u_d und ξ_0 liefert. Für die Fälle $\kappa = 1/3, 1/2, 2/3$ sind diese in Tabelle 3.2 angegeben.

	κ	α	ξ_0	u_u	u_d	S_u	S_d
IP	1/3	0	0,9389	-0,7907	0,3607	0,8508	2,5449
	1/2		1,1905	-0,7262	0,6687	0,8175	3,0031
	2/3		1,5829	-0,7017	1,1452	0,8004	4,1779
EP	1/3	0	1,5844	0,3100	0,7998	1,1743	1,9072
	1/2		1,8694	0,3590	1,2073	1,1835	2,6999
	2/3		1,2696	0,3605	1,7457	1,1587	4,2229

Tabelle 3.2: Semi-analytisch berechnete RHB für das IP und EP mit unterschiedlichen Exponenten für die Dichteverteilung $\kappa < 1$ in kartesischen Koordinaten ($\alpha = 0$).

Abbildung 3.13 zeigt die RHB als Funktionen von $\kappa \in [0, 1)$. Die bisher nicht berücksichtigte Differentialgleichung (3.9) muss für die Funktion $S(u)$ anstelle der Funktion $S(\xi)$ umgeschrieben werden, damit die impliziten Lösungen (3.37) und (3.38) angewendet werden können

$$\frac{dS}{du} = S \frac{1 + u(\xi - u)}{\xi}. \quad (3.43)$$

Diese Differentialgleichung ist ebenfalls separabel und liefert die Lösungen

$$S(u) = C_+ e^{\mathcal{V}(u)}, \quad \xi < \xi_0, \quad (3.44)$$

$$S(u) = C_- e^{\mathcal{W}(u)}, \quad \xi > \xi_0 \quad (3.45)$$

mit den Integralfunktionen

$$\mathcal{V}(u) = \int_0^u \frac{(1 + e^{\nu u'}) - u' \sigma(1 - e^{\nu u'})}{u'(1 + e^{\nu u'}) - \sigma(1 - e^{\nu u'})} du', \quad (3.46)$$

$$\mathcal{W}(u) = \int_u^{-1} \frac{(1 - e^{\nu(1+u')}) - \sigma u'(1 + e^{\nu(1+u')})}{u'(1 - e^{\nu(1+u')}) - \sigma(1 + e^{\nu(1+u')})} du'. \quad (3.47)$$

Diese Funktionen haben keine analytische Lösung. Aber mit Hilfe der RB (3.18, 3.19) und dem Grenzwert

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_\infty} S(\xi) = \lim_{u \rightarrow u_\infty} S(u) = S_\infty = 1 \quad (3.48)$$

kann die Integrationskonstante $C_- = 1$ festgelegt werden. Damit wird das Integral (3.47) für eine gegebene Einflussgeschwindigkeit u_u gelöst und zusammen mit (3.45) findet man die Dichte vor der Unstetigkeit S_u . Die RHB (3.22) erneut darauf angewendet liefert S_d , also die Dichte nach der Unstetigkeit. Die somit berechneten Werte sind in Tabelle 3.2 gesammelt. In Abbildung 3.13 werden die RHB (3.39, 3.40 und 3.41) als Funktion κ aufgetragen. Man erkennt, dass die Funktionen $u_d(\kappa)$ und $\xi_0(\kappa)$ für $\kappa \rightarrow 1$ divergieren und deshalb der Wert $\kappa = 1$ aus diesem Lösungszweig herausgenommen werden muss. Somit ist das erlaubte Intervall auf $\kappa \in [0, 1)$ eingeschränkt.

In Abbildung 3.14 sind die Lösungen zum IP für den Wert $\kappa = 1/2$ gezeigt. Dabei werden die analytischen Ausdrücke mit den numerisch in Abschnitt 3.5.1 berechneten Lösungen verglichen. Beide Lösungen sind nahezu identisch und liefern somit eine Aussage über die Qualität der in Abschnitt 3.5.1 eingeführten Methode. Die RHB werden in Abschnitt 3.4 bezüglich ihrer relativen Fehler untersucht.

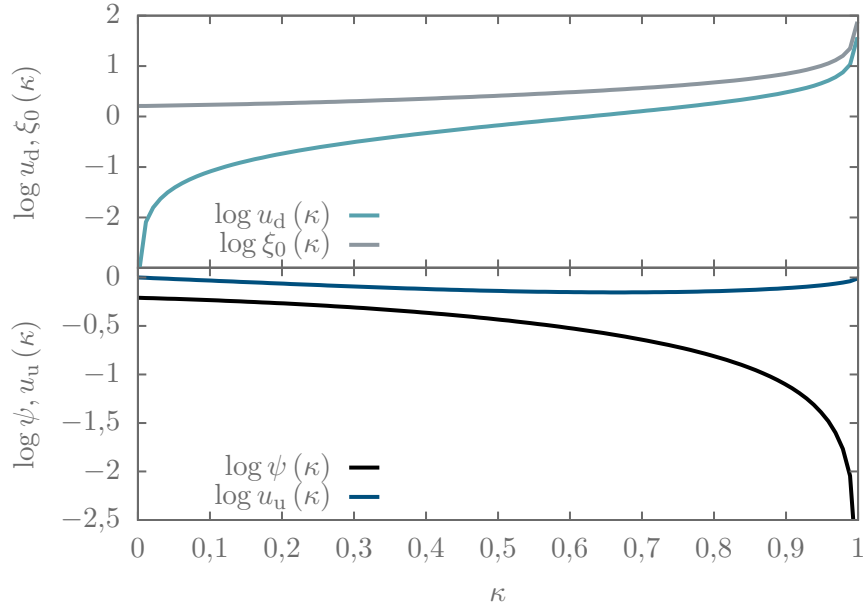


Abbildung 3.13: Die RHB u_u , u_d und ξ_0 in Abhängigkeit von κ . Die Funktionen divergieren für $\kappa \rightarrow 1$, weshalb $\kappa_{\max} < 1$ gelten muss.

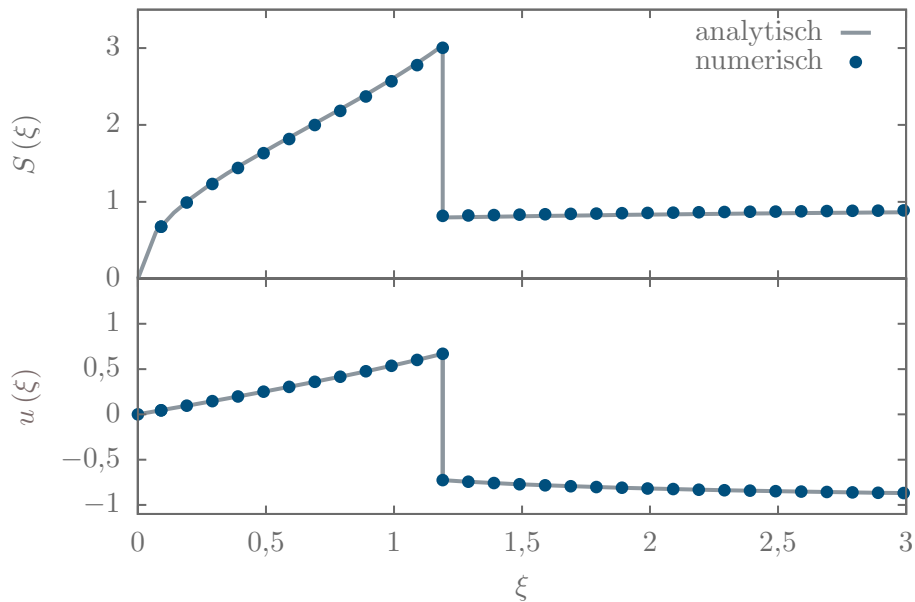


Abbildung 3.14: Die analytischen Lösungen des IP im Vergleich zu den in Abschnitt 3.5.1 numerisch berechneten Lösungen in kartesischen Koordinaten ($\alpha = 0$). Es ist $\kappa = 1/2$ gezeigt und die Integrationskonstante (3.44) ist zu $C_+ = 0.0097$ bestimmt. Beide Lösungen, sowie die in den Tabellen 3.1 und 3.2 angegebenen RHB stimmen sehr gut miteinander überein.

Falsifizierung der singulären Lösung: Untersucht man die analytischen Ausdrücke für $\kappa = 1$, kann man sehr einfache Lösungen für die Regionen (u, d) finden. Für das Gebiet vor der Stoßwelle gilt die singuläre Lösung

$$u(\xi) = \xi \quad (3.49)$$

mit der Eigenschaft, nicht in der allgemeinen Lösungsschar gewöhnlicher Differentialgleichungen (z.B. Stepanow 1976) enthalten zu sein. Die singuläre Lösung substituiert in die RHB liefert jedoch undefiniertes Verhalten, da der Divisor von (3.21) verschwindet. Deshalb gibt es keine physikalisch sinnvollen Lösungen für das IP mit $\kappa = 1$.

Falsifizierung der Lösungen für $\kappa > 1$: Man findet für Gleichung (3.35) die impliziten Lösungen

$$\xi(u) = u - \hat{\sigma} \tan(\hat{\nu}u), \quad \xi < \xi_0, \quad (3.50)$$

$$\xi(u) = u - \hat{\sigma} \tan\left(\hat{\nu}(1+u) - \frac{\pi}{2}\right), \quad \xi > \xi_0, \quad (3.51)$$

wobei die Definitionen $\hat{\sigma} = \sqrt{\kappa - 1}$ und $\hat{\nu} = \sqrt{\kappa - 1}/\kappa$ verwendet wurden. Analog zum Fall $\kappa < 1$ berechnet man die RHB

$$\begin{aligned} \varpi &\doteq \tan(\hat{\nu}u_d) \Leftrightarrow u_d = \frac{1}{\hat{\nu}} \arctan(\varpi), \\ u_u &= -\frac{1}{\hat{\nu}} \arctan(\hat{\sigma}^2 \varpi) - 1, \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\xi_0 = u_d - \hat{\sigma} \varpi = u_u - \frac{1}{\hat{\sigma} \varpi} \quad (3.53)$$

in Abhängigkeit der Variablen ϖ , welche über eine Bestimmungsgleichung gelöst werden kann. Im Grenzwert für $\kappa \rightarrow \{1, \infty\}$ findet man den Wertebereich für die Definitionen $\hat{\nu} \in \{0, 0\}$ und $\hat{\sigma} \in \{0, \infty\}$ und für ihre Produkte $\hat{\nu} \cdot \hat{\sigma}^{-1} \in \{1, 0\}$ und $\hat{\nu} \cdot \hat{\sigma} \in \{0, 1\}$. Da in diesem Abschnitt $\kappa > 1$ ist, muss $u_d > 0$ gelten, weil für die Lösungen $u(\xi < \xi_0) > 0$ gilt³⁵. Diese notwendige Bedingung kann aber nur für $\varpi > 0$ erfüllt werden (siehe Abbildung 3.15b). Da weiterhin $u(\xi > \xi_0) \leq 0$ für einen bestimmten Bereich $\varpi > 0$ gilt, ist diese Aussage konsistent (siehe Abbildung 3.15a). Die Unstetigkeitsstelle ist offensichtlich nur für $\xi_0 > 0$ sinnvoll und muss für beide Gleichungen (3.53) gelten. Man findet jedoch über den Grenzwert

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} -\arctan(\eta^2 \varpi) - \hat{\nu} - \frac{\hat{\nu}}{\hat{\sigma} \varpi} = 1/\varpi > 0 \Rightarrow \varpi < 0, \quad (3.54)$$

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} -\arctan(\eta^2 \varpi) - \hat{\nu} - \frac{\hat{\nu}}{\hat{\sigma} \varpi} \approx -\frac{\pi \varpi}{2} > 0 \Rightarrow \varpi < 0, \quad (3.55)$$

sodass also $\varpi < 0$ gelten muss, was zum Widerspruch mit obiger Überlegung ($\varpi > 0$) steht. Deshalb existieren für kartesische Koordinaten und $\kappa > 1$ keine Lösungen, die allen RHB gleichermaßen genügen. Abbildung 3.15c bestätigt ebenfalls dieses Verhalten, da $\xi_0 > 0$ nur für $\varpi < 0$ möglich ist.

³⁵Nur für $\kappa = 0$ gilt $u(\xi < \xi_0) = 0$, da die rechte Seite in Gleichung (3.8) nur dann verschwindet.

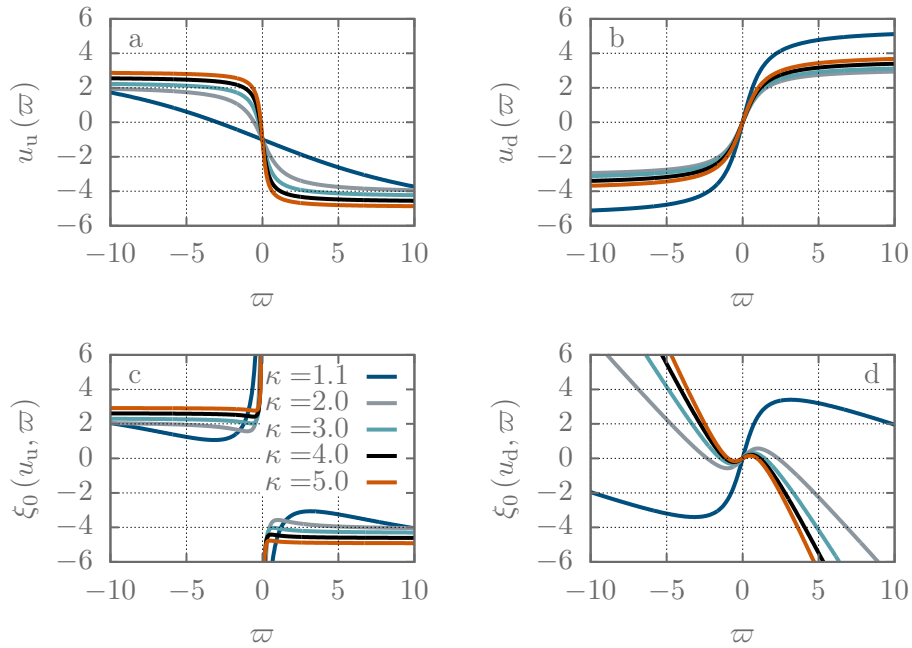


Abbildung 3.15: Die Größen u_u , u_d und ξ_0 in Abhängigkeit von der Variablen ϖ . In Kombination genügen die Lösungen für unterschiedliche κ keinem errechneten Wert ϖ , der allen RHB genügt. Deshalb existieren nur analytische Lösungen für das IP in kartesischen Koordinaten mit $\kappa < 1$.

Analytische Explosionslösungen

Zur analytischen Lösung des IP wird analog zu den analytischen Implosionslösungen im vorherigen Abschnitt 3.5.3 verfahren, wobei die äußere RB der Geschwindigkeit nun mit $u_\infty = 0$ (Gleichung (3.18)) gewählt wird. Man findet die impliziten analytischen Ausdrücke für $\kappa < 1$

$$\xi(u) = u - \sigma \frac{1 \mp e^{\nu u}}{1 \pm e^{\nu u}}, \quad \xi \leq \xi_0. \quad (3.56)$$

Dabei sind die Gleichungen (3.38, 3.56) für das obere Vorzeichen identisch, weil die innere RB nicht geändert wird. Zusammen mit der RHB (3.21) kann erneut eine Bedingungsgleichung

$$f(\psi) = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{(1 - \sigma^2 \psi)(1 + \psi)}{(1 + \sigma^2 \psi)(1 - \psi)} \right) - \frac{1}{\sigma \psi} + \sigma \psi = 0 \quad (3.57)$$

angegeben werden, die für ψ numerisch über eine Nullstellensuche gelöst wird. Für die Relationen u_u , u_d , ξ_0 als Funktionen von ψ findet man

$$u_d = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{1 + \psi}{1 - \psi} \right), \quad u_u = \frac{1}{\nu} \ln \left(\frac{1 - \sigma^2 \psi}{1 + \sigma^2 \psi} \right), \quad \xi_0 = u_d - \sigma \psi = u_u - \frac{1}{\sigma \psi}, \quad (3.58)$$

wobei ihre numerischen Werte in Tabelle 3.2 für $\kappa \in \{1/3, 1/2, 2/3\}$ aufgelistet sind. Die Lösungen der Dichte sind über die Gleichungen (3.44, 3.45) gegeben, wobei sich (3.46) aufgrund gleicher innerer Ränder nicht ändert und nur die zweite Funktion

$$\mathcal{W}(u) = \int_u^0 \frac{(1 - e^{\nu u'}) - u' \sigma (1 + e^{\nu u'})}{u' (1 - e^{\nu u'}) - \sigma (1 + e^{\nu u'})} du' \quad (3.59)$$

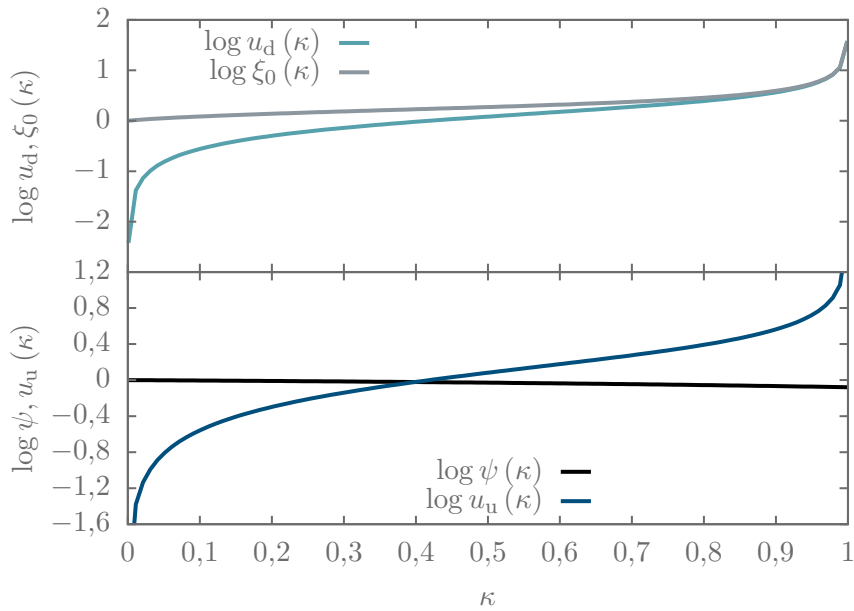


Abbildung 3.16: Die RHB in Abhängigkeit von κ . Auch hier ist $\kappa = 1$ ausgenommen, da die Funktionen für $\kappa \rightarrow 1$ divergieren.

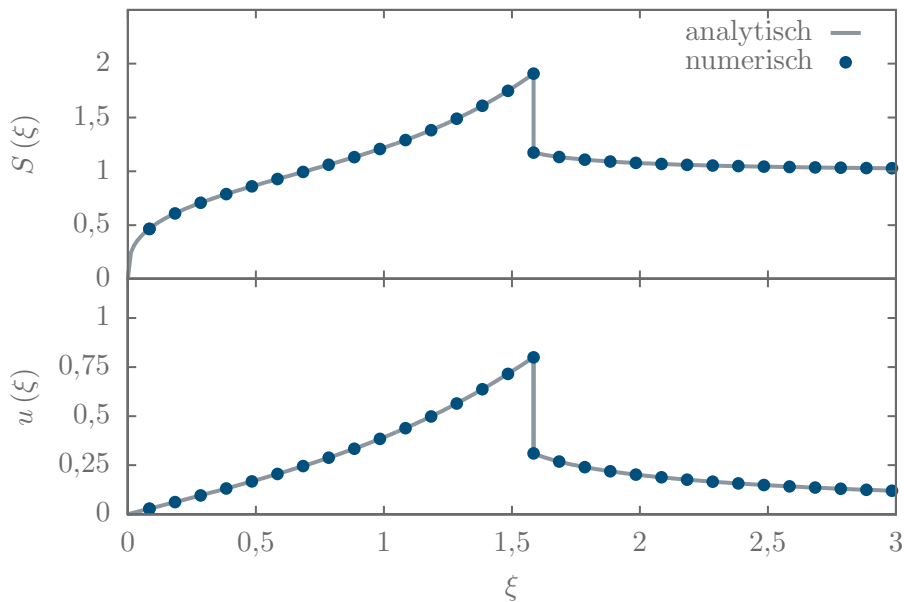


Abbildung 3.17: Analytische Lösungen des EP in kartesischer Geometrie für $\alpha = 0$, $\kappa = 1/3$ im Vergleich zu den numerischen Lösungen. Die Integrationskonstante wurde zu $C_+ = 0,3388$ bestimmt.

	κ	α	$\delta\xi_0$	δu_u	δu_d	δS_u	δS_d
IP	1/3	0	$3,29 \cdot 10^{-5}$	$2,01 \cdot 10^{-6}$	$4,28 \cdot 10^{-5}$	$3,59 \cdot 10^{-6}$	$5,72 \cdot 10^{-5}$
	1/2		$2,63 \cdot 10^{-5}$	$3,44 \cdot 10^{-6}$	$3,15 \cdot 10^{-5}$	$4,23 \cdot 10^{-6}$	$4,37 \cdot 10^{-5}$
	2/3		$2,19 \cdot 10^{-5}$	$4,18 \cdot 10^{-6}$	$2,38 \cdot 10^{-5}$	$3,68 \cdot 10^{-6}$	$3,78 \cdot 10^{-5}$
EP	1/3	0	$1,55 \cdot 10^{-5}$	$1,37 \cdot 10^{-5}$	$2,27 \cdot 10^{-5}$	$5,95 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-5}$
	1/2		$1,62 \cdot 10^{-5}$	$3,09 \cdot 10^{-6}$	$2,45 \cdot 10^{-5}$	$3,56 \cdot 10^{-6}$	$1,36 \cdot 10^{-6}$
	2/3		$1,92 \cdot 10^{-5}$	$7,16 \cdot 10^{-6}$	$2,67 \cdot 10^{-5}$	$5,92 \cdot 10^{-7}$	$1,24 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 3.3: Vergleich der analytisch und numerisch berechneten RHB über den relativen Fehler. Die geringen Fehler lassen auf die Güte und die Korrektheit des entwickelten Algorithmus schließen.

neu abgeleitet werden muss. Abbildung 3.16 zeigt die RHB als Funktionen von $\kappa < 1$. Der Wert $\kappa \geq 1$ ist aufgrund der Argumentation am Ende des vorherigen Abschnitts ebenfalls vom System ausgenommen, da die Lösungen nicht den RHB genügen. Die Lösungen kartesischer Explosionen sind in Abbildung 3.17 gezeigt. Das schnelle Anwachsen der Geschwindigkeit hängt in diesem Fall jedoch nicht mit der Geometrie zusammen, sondern ist dem Parameter κ , sowie der äußeren RB geschuldet. Das Fluid breitet sich also sehr schnell in das ruhende Medium aus. In der gleichen Abbildung sind die numerischen Lösungen im Vergleich mit den analytischen enthalten, die sehr gute Übereinstimmung zeigen und somit die Güte des Verfahrens bestätigen.

Verifizierung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen

Im Abschnitt 3.5.3 werden analytische Ausdrücke für das IP und EP in kartesischen Koordinaten berechnet. Diese Ausdrücke ermöglichen es, die Güte des beschriebenen Verfahrens zu verifizieren. Dazu wird der relative Fehler zwischen den in Tabelle 3.1 berechneten Werten und den semi-analytisch berechneten aus Tabelle 3.2 mit der Relation

$$\delta X = \frac{X_{\text{num}} - X_{\text{analyt}}}{X_{\text{analyt}}} \quad (3.60)$$

für jedes $X \in \{\xi_0, u_u, u_d, S_u, S_d\}$ berechnet. Die Ergebnisse zeigen sehr kleine Abweichungen in der Größenordnung $10^{-5} - 10^{-6}$ und sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst. Es soll noch erwähnt werden, dass der relative Fehler des numerischen Verfahrens innerhalb octave auf den Wert 10^{-6} gesetzt wurde, sodass die Fehlerschranke (3.23) vergleichbare Werte berechnet. Die Fehlerschranke ϵ ist über die Genauigkeit der Werte δX genauso wie über die Rechenzeit des Verfahrens gerechtfertigt.

3.6 Fazit

In diesem Kapitel wurde ein Modell entwickelt, welches sowohl die dynamische Entwicklung isothermer Implosionen als auch für Explosionen beschreibt. Es wurde ein numerisches Lösungsverfahren eingeführt, das sowohl die RHB für die freien Parameter Geometrie (α) und Massenverteilung (κ), als auch Lösungen des Systems GDG selbst berechnet. Die numerischen Lösungen des Verfahrens wurden diskutiert und ihre Güte über den relativen Fehler bezüglich analytischer Ausdrücke quantifiziert. Es wurden mathe-

matische Schranken des Modells abgeleitet, sodass wohldefinierte Lösungen angegeben werden können.

Diese mathematischen Grundlagen werden im nächsten Kapitel verwendet, um herauszufinden, ob eine Modellierung von Supernovaüberresten [SNR](#) möglich ist, und ob es [SNR](#) gibt, die sich in einer isothermen Phase ihrer Entwicklung befinden können.

4 Isotherme Supernovaüberreste

Die Bedeutung von SN-Ereignissen wird nicht zuletzt durch den Nobelpreis für Physik 2011 an S. Perlmutter, A. Riess und B. Schmitt über den Nachweis eines expandierenden Universums hervorgehoben. Vielmehr bieten diese Objekte vielschichtige Einblicke in unterschiedlichste physikalische Prozesse. Da sie jedoch sehr selten sind (etwa drei Ereignisse pro Jahrhundert in einer typischen Spiralgalaxie, z.B. Vink 2012), liegt es nahe, über ihre Überreste, welche eine Lebensdauer von mehreren 10^4 a aufweisen, Rückschlüsse auf die Explosionsmechanismen zu ziehen.

Das Standardmodell zur Beschreibung von SNR benennt verschiedene Phasen ihrer Entwicklung, welche alle nach einer unterschiedlichen Modellierung verlangen (Chevalier 1977). Eine weitere Phase kann über die isothermen Explosionslösungen (Kapitel 3) in sphärischer Symmetrie eingeführt werden. Frühere isotherme Modelle sind seit Lerche und Vasyliunas (1976) nicht weiter untersucht worden.

In diesem Kapitel werden die zur Beschreibung eines SNR benötigten physikalischen Größen eingeführt, untersucht und mit dem isothermen Modell über unterschiedliche Methoden berechnet. Das Ziel ist es zu zeigen, ob das isotherme Modell Gültigkeit im isothermen Kontext besitzt und welche beobachteten SNR sich in einem isothermen Entwicklungsstadium befinden könnten.

4.1 Entwicklungsphasen von Supernovaüberresten

Das erwähnte Standardmodell beschreibt vier unterschiedliche Phasen und geht auf Woltjer (1972) zurück, der diese Phasen anhand von Radio- und Röntgenlichtbeobachtungen unterscheidet. Unterschiedliche Vorläufersterne bestimmen den Typ³⁶ einer SN, die weitere Entwicklung ist für die unterschiedlichen Typen ähnlich. Es wird instantan sehr viel Energie ($\sim 10^{50}$ erg) freigesetzt, welche fast das gesamte Sternmaterial mit hoher Geschwindigkeit nach außen treibt. Nach dieser freien Expansion wechselwirkt die schalenförmige, sphärische Stoßwelle mit dem interstellaren Medium. Diese Schale ist zunächst sehr heiß und von hohen Drücken dominiert, bis Kühleffekte sehr effizient werden. Die Stoßwelle bewegt sich durch das interstellare Material, bis die Stoßwellengeschwindigkeit und die des interstellaren Mediums vergleichbar werden und sich der SNR auflöst (Woltjer 1972; Chevalier 1977). Im Speziellen teilt man die Phasen folgendermaßen ein:

explosionsdominierte Phase (I): In dieser Phase dominiert die ausgeworfene (ejected) Masse (M_{ej}) des explodierten Sterns die in der Stoßwelle verdichtete (swept up,

³⁶Man unterscheidet grob zwei Typen von SN. Typ I (thermonukleare) SN entstehen aus einem kataklysmischen Doppelsternsystem. Dabei akkretiert ein Weißer Zwerg das Gas aus der Hülle seines Begleiters, bis er die Chandrasekhar-Grenzmasse erreicht und kollabiert. Bei Typ II (hydrodynamische) SN verliert der Stern sein Gleichgewicht zwischen Strahlungsdruck und Gravitationskraft. Das Sternmaterial fusioniert dabei immer schneller schwerere Elemente, wodurch ein schalenförmiger Aufbau mit dem schwersten Element Eisen im Zentrum und dem leichtesten Element Wasserstoff in der äußersten Hülle des Sternes entsteht. Die Gravitationskraft im Inneren kann nicht mehr vom Strahlungsdruck der Fusionsprozesse (Neutrinos) kompensiert werden und der Stern kollabiert. Typ II SN unterscheiden sich auch über das Vorkommen von Wasserstofflinien in ihren Spektren von Typ I SN (z.B. Voigt 2012; Maoz 2016).

aufgeschobene) Masse (M_{sw}) des interstellaren Mediums, $M_{ej} \gg M_{sw}$. Deshalb spielt zunächst nur die von der Explosion verursachte Dynamik eine Rolle und die Stoßwelle expandiert frei.

Sedov-Taylor-Phase (II): Die ausgeworfene Masse wird jetzt von der aufgeschobenen Masse des interstellaren Mediums dominiert und die Gesamtenergie des Systems ändert sich wenig durch Strahlungsverluste über $M_{ej} \ll M_{sw}$, $E_{rad} \ll E_{ges}$. Somit kann Energieerhaltung gefordert werden, was Voraussetzung zu den Lösungen von Sedov (1946) und Taylor (1950) ist.

kühlungsdominierte Phase (III): Die Dominanz der Druckkräfte lässt nach und Kühleffekte werden sehr effizient, wodurch der Anteil an Strahlungsverlusten energetisch relevant wird. Deshalb wächst der SNR jetzt mit konstanter, radialer Geschwindigkeit, beziehungsweise mit konstantem, radialem Impuls.

Vermischungsphase (IV): In dieser Phase werden die Stoßgeschwindigkeiten und Temperaturen innerhalb und außerhalb des SNR vergleichbar, wodurch eine Vermischung des ausgeworfenen Materials mit dem interstellaren Medium entsteht und sich der Überrest auflöst.

Einerseits beschreibt Woltjer (1972) die Wichtigkeit von Magnetfeldern, der kosmischen Strahlung innerhalb der Schale und von Inhomogenitäten im interstellaren Medium, vor allem in der frühen Phase II. Andererseits wird in Vink (2012) nicht mehr von festen Grenzen unter den Entwicklungsphasen gesprochen, sondern vielmehr von fließenden Übergängen. Analog zu Sedov (1946), Woltjer (1972) und Solinger u. a. (1975) werden diese Effekte in einer ersten Untersuchung vernachlässigt, um eine einfache Einordnung in obige Entwicklungsphasen zu ermöglichen.

Im nachfolgenden Text wird außerdem häufig auf die einfachere Einteilung von Jones u. a. (1998) zurückgegriffen, in der die drei folgenden Kategorien unterschieden werden:

Jung J: Die SNR sind jünger als 1000 a – 2000 a.

Gealtert G: Die SNR befinden sich in der späten Phase II bis zur frühen Phase III.

Alt A: Die SNR befinden sich in Phase IV und emittieren keinerlei Röntgenstrahlung mehr.

Die in Kapitel 3 eingeführten Lösungen sollten sich nach erster Einteilung in Phase II bis III, beziehungsweise nach zweiter Einteilung in jung bis gealtert (J – G) eingliedern lassen. Die Isothermieannahme passt sehr gut auf Phase III, also gealterte SNR, welche optisch dünn werden und somit sehr effizient kühlen können. Wie bereits angemerkt, wird untersucht, ob diese Aussage überhaupt zutrifft. Ebenso wird eine Suche nach passenden, sich isotherm entwickelnden SNR durchgeführt.

4.2 Modellierung und ableitbare Parameter

Aus den Modellen von Sedov (1946), Korobeinikov (1956), Woltjer (1972), Reynolds und Chevalier (1984) und Ostriker und McKee (1988) können die Geschwindigkeit, der Ort oder das Alter und die Temperatur eines SNR berechnet werden. Im isothermen Modell (Kapitel 3) wird die Energiegleichung nicht explizit gelöst, da die Temperatur und analog

dazu die Schallgeschwindigkeit Konstanten sind. Deshalb können nur Lösungen zur Geschwindigkeit und dem Ort beziehungsweise dem Alter aus dem Modell bestimmt werden. Freie Parameter müssen festgelegt werden, wozu ein Katalog aus Beobachtungsdaten benötigt wird. Diese sind aus Röntgenlichtbeobachtungen (aufgenommen mit z.B. CHANDRA, XMM, ROSAT) entnommen, da aus deren Spektraldaten im 0,5 keV – 10 keV Band die relativen Häufigkeiten typischer Elemente³⁷ der Elementsynthese im heißen, optisch dünnen Plasma gewonnen werden können (Vink 2012).

Weitere physikalische Größen wie die Leuchtkraft, die Flächenhelligkeit, die mittlere Dichte sowie die Masse und Energie eines SNR werden neben dem angesprochenen Katalog eingeführt. Anschließend werden Beobachtungsdaten mit den Ergebnissen des neuen Modells verglichen.

4.2.1 Modellgrößen: Alter und Geschwindigkeit

Die im letzten Kapitel entwickelten Explosionslösungen in sphärischer Symmetrie ($\alpha = 2$ und $0,60409 \leq \kappa < 3$, siehe Ende des Abschnitts 3.5.2) aus den PDG (3.1, 3.2) beinhalten Informationen über die Geschwindigkeit und den Ort beziehungsweise das Alter eines sich über eine Unstetigkeit isotherm ausbreitenden Objektes. Im Falle eines SNR wird diese Information an der Unstetigkeitsstelle selbst, beziehungsweise am Ort der Stoßwelle r_s benötigt. Über die Transformationsgruppe (3.5, 3.6, 3.7) werden die benötigten Parameter berechnet. Die Gruppenparameter werden ausführlich formuliert als

$$\xi = \frac{r}{\tilde{r}}, \quad \frac{\rho}{\tilde{\rho}} = S(\xi) \left(\frac{r}{\tilde{r}} \right)^{-\kappa}, \quad \frac{u}{\tilde{u}} = v \quad (4.1)$$

geschrieben, sodass die Variablen \tilde{X} mit $\tilde{X} \in \{\tilde{r}, \tilde{\rho}, \tilde{u}\}$ ausschließlich die entsprechenden Dimensionen tragen. $\tau \equiv \tilde{r} = c_s t$ wird aus Gründen der Übersichtlichkeit gesetzt. An der Unstetigkeitsstelle $\xi|_{r=r_s} = \xi_0$, wobei $\xi_0 = \xi_0(\kappa)$ eine Funktion von κ ist (siehe Abbildung 3.10), gilt demnach

$$r_s(t, \xi_0, T) = \xi_0 c_s t, \quad (4.2)$$

$$v_s(\xi_0, T) = \frac{dr_s}{dt} = \xi_0 c_s = \text{const.} \quad (4.3)$$

und die Geschwindigkeit der Stoßwellenfront (4.3) bleibt zeitlich konstant. Dies ist ein signifikanter Unterschied zu den Lösungen von Korobeinikov (1956) und Solinger u. a. (1975) und ein Hinweis darauf, dass Isothermie nur für ein bestimmtes Entwicklungsstadium von SNR Gültigkeit besitzt. Aus Gleichung (4.2) kann nun entweder die radiale Ausdehnung r_s , oder aber das Alter t

$$t(r_s, \xi_0, T) = \frac{r_s}{\xi_0 c_s}, \quad (4.4)$$

$$c_s = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_p}} \quad (4.5)$$

eines SNR berechnet werden. Die Zustandsgleichung (4.5) für ein vollständig ionisiertes ideales Gasgemisch aus 90 % H und 10 % He ($\mu = 0,62$) (Solinger u. a. 1975; Haubold

³⁷Man spricht von den sogenannten α -Elementen O, Ne, Mg, Si, S, Ar, Ca, Fe, Ni, die primär über die Nukleosynthese in SNR entstehen.

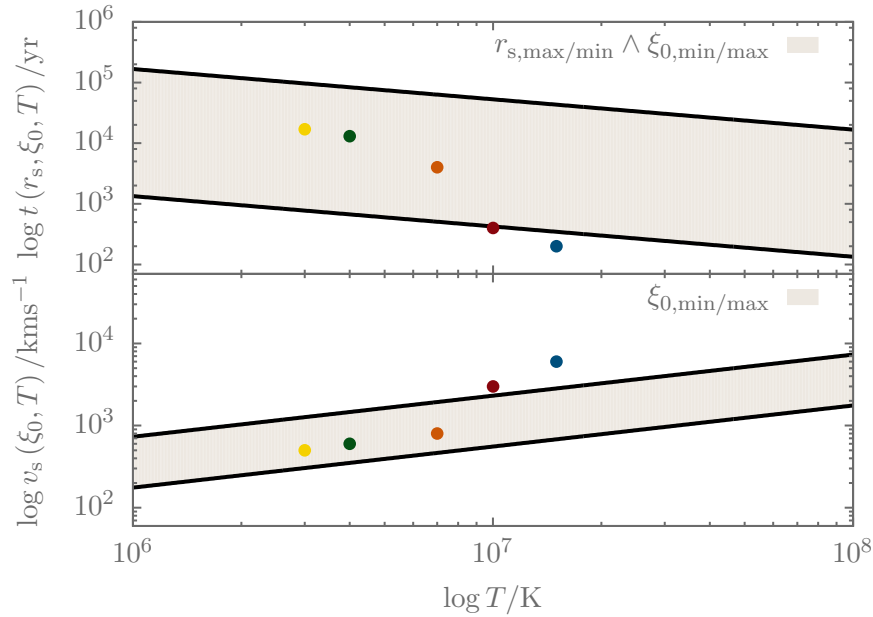


Abbildung 4.1: Die Bänder zeigen den möglichen Parameterraum $\{r_s, \xi_0, T\}$ für Lösungen aus dem System für Stoßwellenradien $r_s \in \{1 - 30\}$ und alle möglichen Werte für ξ_0 (κ) und $T \in \{10^6 - 10^8\}$. Die Punkte stehen für Messwerte aus Gorenstein u. a. (1974), wobei dunkelblau: Cassiopeia A, rot: Tycho, orange: Puppis A, grün: Vela X, gelb: Cygnusbogen angeben.

und Mathai 1997) wird zur Beschreibung der Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Temperatur benutzt. Zusammen mit Messwerten aus Beobachtungen³⁸ (siehe den Katalog in Tabelle 4.2) und der noch zu bestimmenden modellabhängigen Konstanten ξ_0 sind alle freien Parameter festgelegt. Die Stoßwellengeschwindigkeit (Gleichung 4.3) ist proportional und das Alter (Gleichung 4.4) umgekehrt proportional zur Quadratwurzel der Temperatur. Je heißer (kühler) ein SNR im isothermen Zustand also ist, desto schneller (langsamer) dehnt er sich aus und desto jünger (älter) ist er. Gleichzeitig hängt das Alter noch von der radialen Ausdehnung ab.

In Abbildung 4.1 ist der Parameterraum für das Alter und die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Stoßwelle in Abhängigkeit der Temperatur gezeigt. Der Einfluss des Stoßwellenradius ($r_s = 1 \text{ pc} - 30 \text{ pc}$) und den über das Modell berechneten minimalen und maximalen dimensionslosen Ort der Stoßwelle ξ_0 ($\kappa_{\min} \dots \kappa_{\max}$) = 1,522 – 6,334 (Abbildung 3.10) ist mithilfe der hellgrauen Bänder dargestellt. Ein veränderter Wert der radialen Ausdehnung entspricht einer Geraden innerhalb des grauen Bandes. Die Temperaturen liegen in einem für SNR typischen Bereich $10^6 \text{ K} - 10^8 \text{ K}$ (z.B. Gorenstein u. a. 1974; Vink 2012). Die logarithmisch dargestellten Bänder zeigen das durch alle Kombinationen der Parameter r_s, ξ_0, T mögliche Alter und die Ausbreitungsgeschwindigkeiten, die das Modell wiedergeben kann. Mit zunehmender Temperatur modelliert man jüngere SNR mit höheren Ausbreitungsgeschwindigkeiten. Die farbigen Punkte im Diagramm sind gemessene Werte aus Gorenstein u. a. (1974) wobei dunkelblau Cassiopeia A (G111.7-2.1), rot Tycho (G120.1+1.4), orange Puppis A (G260.4-3.4), gelb Cygnusbogen (G74.0-8.5) und grün Vela

³⁸In der Literatur findet man die Größen $r_s^o, T^o, \mathcal{L}^o$ als typische und gut messbare Observablen. Der Index O an den Beobachtungsgrößen steht für Observable.

X (263.9-3.3) angeben³⁹. Cassiopaia A und Tycho liegen knapp außerhalb der grauen Bänder. Beide sind mit einigen hundert Jahren (Tabelle 4.2) junge Überreste, die sich zwischen der frühen, explosionsdominierten (I) und der Sedov-Taylor-Phase (II) befinden (Shklovskii 1962; Gorenstein u. a. 1974). Puppis A, Cygnusbogen und Vela X hingegen sind entwickelte, ältere SNR in der Sedov-Taylor-Phase (II) und können mit dem isothermen Modell in dieser ersten Einstufung relativ gut erfasst werden. Der Grund liegt im Energiehaushalt der Objekte, die sich entweder noch fernab einer Gleichgewichtstemperatur befinden, oder sich dieser langsam annähern. Für isotherme Explosionen erwartet man dieses Verhalten, da optisch dünne Dichteverteilungen sehr effizient kühlen und somit die Isothermieannahme erfüllen. Da die Bänder den Parameter κ beinhalten, muss bedacht werden, dass sich diese je nach Dichteverteilung stark verschmälern können und so den Parameterraum weiter einschränken. Außerdem verwendet Gorenstein u. a. (1974) das Modell nach Sedov (1946) und Taylor (1950) um aus den Beobachtungsdaten weitere Werte, wie z.B. das Alter zu berechnen. Dies erklärt, warum Cassiopaia A und Tycho etwas außerhalb des Bandes liegen. Mit dem isothermen Modell werden sich alle SNR im Parameterraum verschieben. Im Folgenden wird diese Diskussion weitergeführt und mit Hilfe weiterer Größen untersucht.

4.2.2 Abgeleitete Größen: Luminosität und Flächenhelligkeit

Weitere messbare Größen sind die Leuchtkraft \mathcal{L} und deren Verteilung auf einer Oberfläche, also die Flächenhelligkeit \mathcal{B} . Mit deren Hilfe kann zum einen die mittlere Umgebungsdichte und zum anderen der Exponent der Dichteverteilung κ festgelegt werden.

Die Röntgen-Luminosität

Die Luminosität für Röntgenquellen wird mit dem in Rappaport u. a. (1974) und Solinger u. a. (1975) hergeleiteten Ausdruck

$$d\mathcal{L} = 4\pi r^2 \rho^2 \Lambda(\Delta E, T) dr \quad (4.6)$$

berechnet und gibt die abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit in erg s^{-1} an. Dabei beschreibt die Funktion $\Lambda(\Delta E, T)$ die vom Objekt emittierte Strahlung im Energieintervall ΔE als Funktion der Temperatur und wird radiative Verlustfunktion genannt (siehe nächster Abschnitt: [Die radiative Verlustfunktion und die Volumenemissivität](#)). Solange Λ eine von r unabhängige Funktion ist, kann das Integral (4.6) ausgeführt werden. Zuvor wird es jedoch mit Hilfe der dimensionslosen Variablen (3.5, 3.6, 3.7) umgeschrieben, wodurch sich der Ausdruck

$$\mathcal{L} = 4\pi r_s^3 \bar{\rho}^2 \Lambda(\Delta E, T) \int_0^{\xi_0} S(\xi)^2 \xi^{2-2\kappa} d\xi \quad (4.7)$$

ergibt. Im Vergleich mit Solinger u. a. (1975) sind beide Ausdrücke für $\kappa = 0$ identisch. Die Größe $\bar{\rho} = \tilde{\rho}/\mu m_p$ bezieht auf das bereits genannte Gasgemisch mit der Einheit cm^{-3} (Gleichung 4.5), $\tilde{r} = r_s$ für die Position der Stoßwelle und die Integralgrenzen beziehen sich auf den Bereich zwischen Zentrum und Stoßwelle. In Abbildung 4.2 ist das Integral $l(\xi, \kappa) = \mathcal{L}/f(r_s, \bar{\rho}, T)$ dargestellt, wobei die Funktion $f(r_s, \bar{\rho}, T) = 4\pi r_s^3 \bar{\rho}^2 \Lambda(\Delta E, T)$ alle Dimensionen beinhaltet. Die dimensionslose Luminosität $l(\xi)$ verhält sich nahezu linear mit einer Steigung $\sim 1/5$ (siehe den Fit in Abbildung 4.2) zur Unstetigkeitsstelle

³⁹Die in Klammern angegebene Bezeichnung entspricht einer Standardbezeichnung, siehe Voigt (z.B. 2012).

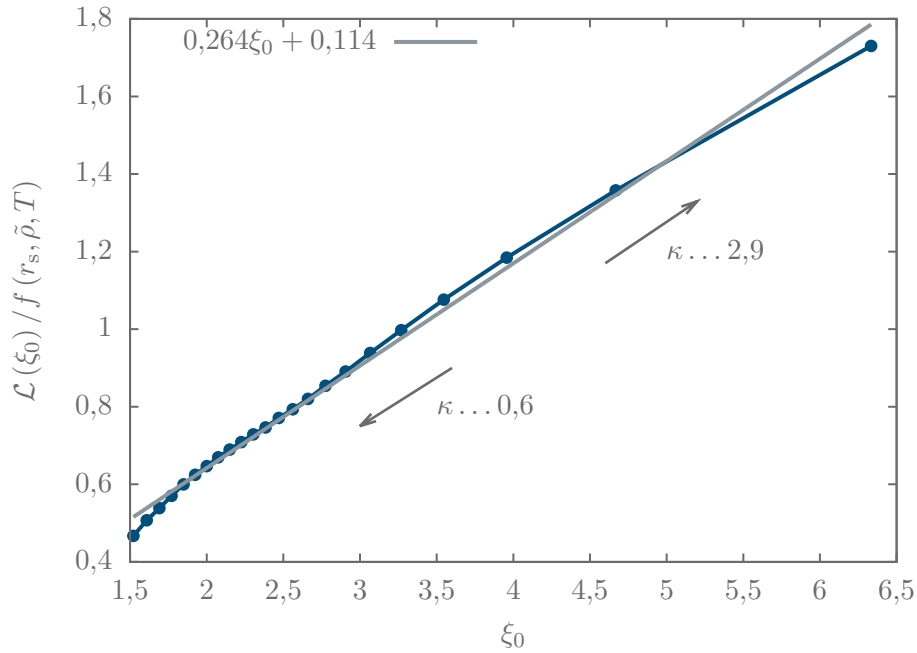


Abbildung 4.2: Die Leuchtkraft des Systems wächst mit zunehmendem dimensionslosen Ort der Stoßwelle nahezu linear mit einer Steigung von $\sim 1/5$. Die Leuchtkraft ist ein skalarer und richtungsunabhängiger Wert in entsprechenden Einheiten.

und somit auch zu κ . Der Charakter der Funktion (4.7) ändert sich ab $\kappa \geq 1$ kaum, obwohl das Vorzeichen des Exponenten von ξ wechselt. Mithilfe der Leuchtkraft als Beobachtungsgröße kann Gleichung 4.7 umgestellt werden, wodurch sich die mittlere Umgebungsdichte

$$\bar{\rho} = \frac{\tilde{\rho}}{\mu m_p} \equiv n_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{L}^o}{4\pi r_s^3 \Lambda(\Delta E, T) l(\xi)}} \quad (4.8)$$

errechnet. \mathcal{L}^o ist zur beobachteten Luminosität mit der Einheit cm^{-3} (z.B. Solinger u. a. 1975) umgeschrieben. Die mittlere Umgebungsdichte ist aufgrund der Funktion $l(\xi)$ eine modellabhängige Größe, die sich zusammen mit der radialen Ausdehnung und der beobachteten Luminosität berechnen lässt.

Die radiative Verlustfunktion und die Volumenemissivität

Wie in der Einleitung des Kapitels 4.2 angemerkt, befinden sich die Spektrallinien der Primär (α) - Elemente im 0,5 keV – 10 keV Energieband des durch Stoßwellen geheizten, ionisierten Plasma (siehe Abschnitt 4.1). Energie wird zum Beispiel durch Rekombination und thermische Bremsstrahlung frei und abgestrahlt. Die Menge der freigewordenen Energie ist über die radiative Verlustrate \mathcal{P} charakterisiert (z.B. Tucker und Koren 1971; Rosner u. a. 1978). Dabei werden die einzelnen Linienbeiträge der Elemente entlang der Sichtlinie zum optisch dünnen SNR zur gleichen Temperatur und Elektronendichte aufsummiert. Neben der Temperatur hat die Elementhäufigkeit A_X Einfluss auf diese Funktion (Anschwanden 2004). Der Zusammenhang zwischen der radiativen Verlustrate und der Verlustfunktion Λ ist über

$$\mathcal{P}(T) = n_e^2 \Lambda(T) \quad (4.9)$$

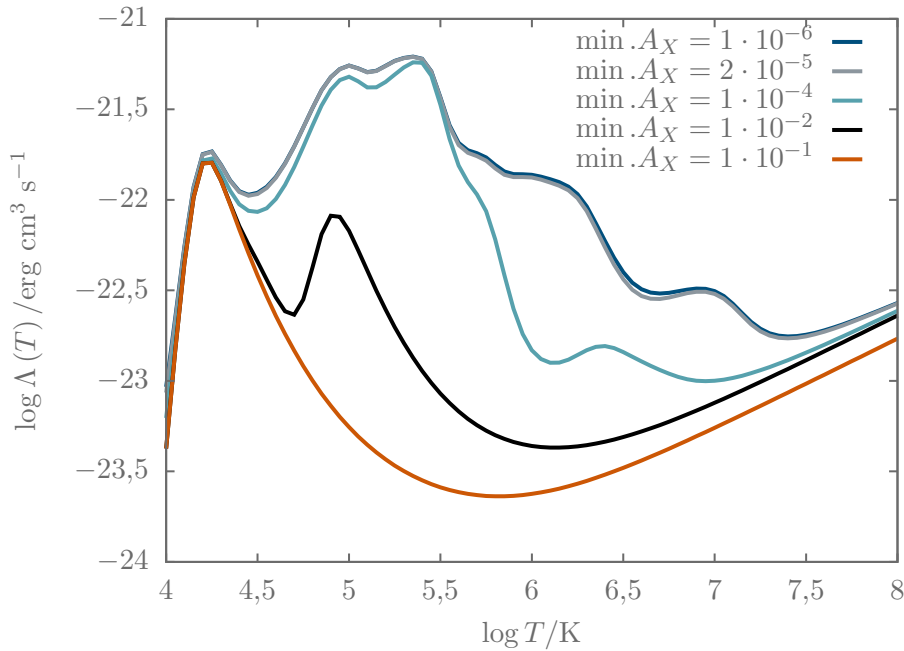


Abbildung 4.3: Vergleich der über das Paket CHIANTIpy berechneten radiativen Verlustfunktion mit unterschiedlichen Elementhäufigkeiten A_X . Mit kleinerer Elementhäufigkeit werden immer mehr Elemente zur Berechnung hinzugefügt. Um möglichst alle Elemente zu berücksichtigen, wird im Folgenden auf die dunkelblaue Kurve zurückgegriffen, um den Einfluss des jeweiligen Energiebandes zu vernachlässigen.

in den Einheiten $\text{erg cm}^3 \text{s}^{-1}$ gegeben und verknüpft die durch Strahlung abgegebene Energie mit der Elektronendichte n_e . Die Berechnung dieser Funktion ist allerdings aufwendig und die Datenlage erweitert sich stetig. Um die aktuellsten Daten zu berücksichtigen, wird deshalb auf das Paket CHIANTIpy und die CHIANTI-Database (z.B. Del Zanna u. a. 2015) zurückgegriffen.

In Abbildung 4.3 ist die über CHIANTIpy berechnete, radiative Verlustfunktion für unterschiedliche minimale Elementhäufigkeiten dargestellt. Dabei werden über geringere Häufigkeiten zusätzliche Elemente berücksichtigt, wobei $\min A_X = 10^{-1} - 10^{-2}$ die Elemente H, He beinhaltet, $\min A_X = 10^{-4}$ fügt die Elemente H, He, C, O hinzu, $\min A_X = 2 \cdot 10^{-5}$ die Elemente N, Mg, Si, S, Fe, und $A_X = 10^{-6}$ die Elemente Na, Al, Ar, Ca, Ni. Die minimalen Elementhäufigkeiten sollen sehr selten vorkommende Elemente aus der Berechnung ausschließen, um den Rechenaufwand gering zu halten und ist vom Paket CHIANTIpy gefordert (Dere 2017). Die Unterschiede im interessanten Temperaturbereich zwischen $\sim 10^6 \text{ K} - 10^8 \text{ K}$ sind zwischen $\min A_X = 10^{-5} - 10^{-6}$ (den meisten eingeschlossenen Elementen) sehr gering und es ist anzunehmen, dass mehr Elemente als H, He (C, O) bei jungen, als auch bei entwickelten SNR eine Rolle spielen. Auch sind alle aufgezählten Elemente durch die angegebene Elementhäufigkeit berücksichtigt. Deshalb wird der Einfluss des Energiebandes zur Berechnung aller im Katalog Tabelle 4.2 gegebenen SNR vernachlässigt (siehe auch Anschwanden 2004; Imada und Zweibel 2012), obwohl je nach Entwicklungsstadium die Elementhäufigkeit variieren kann. Durch das Vernachlässigen des Energiebandes ergibt sich die Unabhängigkeit der Volumenemissivität $\Lambda(\Delta E, T) \mapsto \Lambda(T)$ vom Energiebereich ΔE .

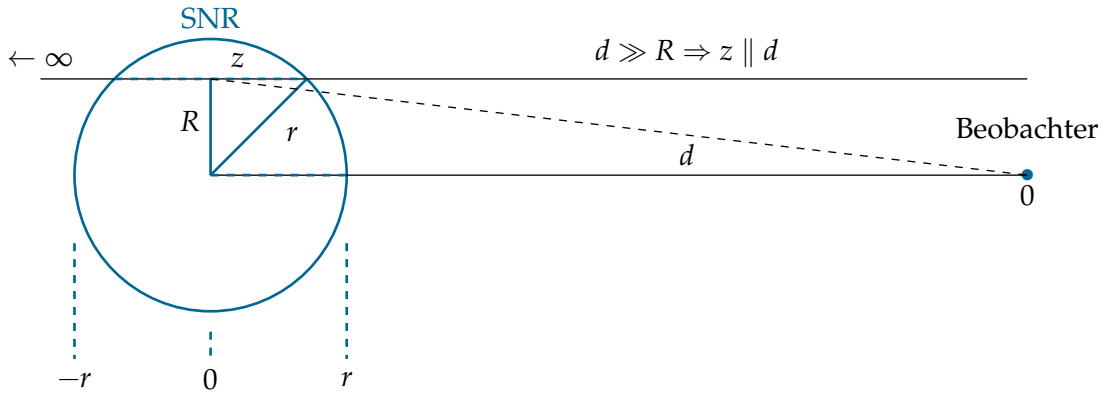


Abbildung 4.4: Die sich ins unendliche erstreckende Sichtlinie d eines Beobachters wird durch eine sphärische Materialwolke unterbrochen. Durch Aufsummieren der Leuchtkraftdichte durch die Materialwolke (z wird vom Rand in Richtung Zentrum größer) ist die Wolke am Rand heller, als im Zentrum (nicht in der Abbildung gezeigt). Auf die Oberfläche projiziert berechnet sich somit die Flächenhelligkeit \mathcal{B} .

Die Flächenhelligkeit

Die Flächenhelligkeit kann über die Skizze Abbildung 4.4 hergeleitet werden. Es wird dazu eine Materialwolke, beziehungsweise ein SNR angenommen, der sich entlang der Sichtlinie d ausgebildet hat. Die Sichtlinie erstreckt sich vom Ort des Beobachters bei 0 bis unendlich. Das angeregte Material an der Stoßfront der als Kugel angenommenen Materialwolke strahlt Licht ab, das am Rand heller erscheint, als im Zentrum. Dieser Effekt erklärt sich darüber, dass am Rand das Licht hinter der Symmetrieachse zur Gesamthelligkeit beiträgt, weil die Wegstrecke z durch die Wolke dort am kürzesten ist. In Richtung Zentrum vergrößert sich z und die Helligkeit nimmt ab. Für ein SNR wird eine eindimensionale Kugelschale mit dem projizierten Radius R als Materialwolke angenommen. Man integriert nun über die Leuchtkraftdichte $L \doteq \frac{d\mathcal{L}(r)}{dV}$ (siehe Gleichung 4.7) entlang der Sichtlinie z durch die Wolke:

$$\mathcal{B}(R) = 2 \int_0^\infty L(r) dz \quad (4.10)$$

$$= 2 \int_R^\infty \frac{L(r) r dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \quad (4.11)$$

wobei für die zweite Umformung der Satz von Pythagoras verwendet wurde (Skizze 4.4). Den Faktor 2 erhält man durch den Umstand, dass die Kugelschale den Raum von $\{-z, \dots, +z\}$ symmetrisch umfasst. Umgeschrieben mit den dimensionslosen Größen (4.1) folgt dann für das radiale Profil der Flächenhelligkeit

$$\mathcal{B}(\xi) = 2\bar{\rho}^2 \Lambda(\Delta E, T) r_s \int_\xi^{\xi_0} \frac{S(\xi')^2 \xi'^{1-2\kappa} d\xi'}{\sqrt{\xi'^2 - \xi^2}}, \quad (4.12)$$

und auf $\|\mathcal{B}\| = 1$ normiert:

$$\|\mathcal{B}(\xi)\| = \frac{\int_\xi^{\xi_0} \frac{S(\xi')^2 \xi'^{1-2\kappa} d\xi'}{\sqrt{\xi'^2 - \xi^2}}}{\int_0^{\xi_0} S(\xi')^2 \xi'^{1-2\kappa} d\xi'}. \quad (4.13)$$

Auch hier geht das Integral für $\kappa = 0$ wieder zum Ausdruck in Solinger u. a. (1975) und Naidu u. a. (1983) über. In Abbildung 4.5 ist die Funktion $\|\mathcal{B}(\xi)\|$ für unterschiedliche

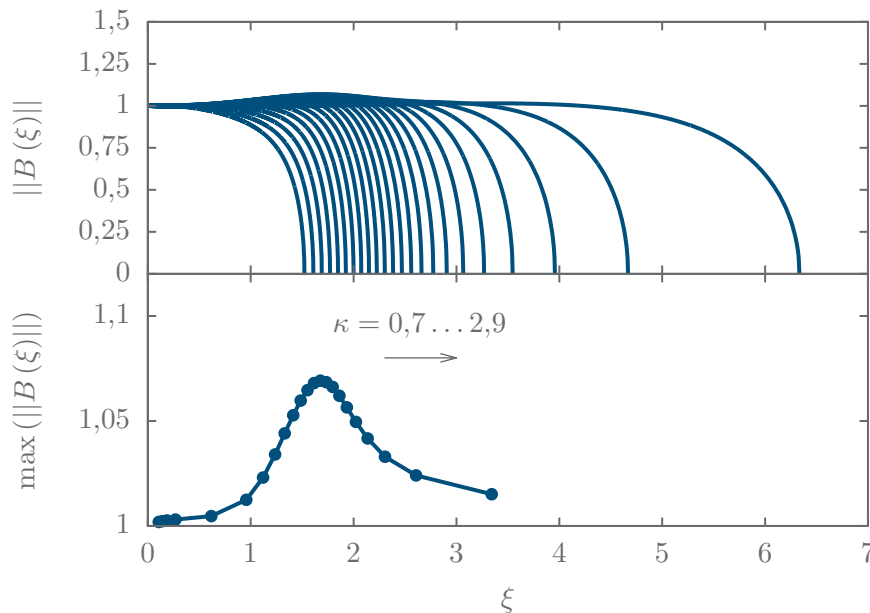


Abbildung 4.5: Die Flächenhelligkeit und ihre Maxima für unterschiedliche κ . Für $\kappa = 2$ findet man das größte Maxima, wobei dies um nur $\sim 7\%$ von der umgebenden Helligkeit $\mathcal{B} = 1$ abweicht ($\xi = \xi(\kappa)$). Isotherme SNR weisen keinen wesentlich helleren Rand im Vergleich zu ihren Zentren auf.

$\xi(\kappa)$ gezeigt. Die Flächenhelligkeit ändert sich mit größer werdendem ξ nur unwesentlich und fällt am Rand stark ab. Im unteren Teilbild ist dies über die Kurve der Maxima von $\|\mathcal{B}(\xi)\|$ verdeutlicht. Die maximale Flächenhelligkeit tritt bei $\kappa = 2$ auf, wobei der relative Unterschied bei nur $\sim 7\%$ liegt. Das isotherme Modell zeigt demnach kein Helligkeitsmaximum am Rand, sondern weist eine gleichmäßige Helligkeitsverteilung auf. Zum Vergleich wird das Verhältnis zwischen der Flächenhelligkeit im Zentrum der Schale zur maximalen Flächenhelligkeit ($\mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_{\max}$) angegeben. Dabei gilt in der Reihenfolge adiabatisches, homothermes und echtes isothermes Modell:

$$\mathcal{B}_0 : \mathcal{B}_{\max} = \begin{cases} 1 : 3 & \text{Sedov (1946),} \\ 1 : 2 & \text{Solinger u. a. (1975)} \\ 1 : 1,07 & \text{Modell Kapitel 3.} \end{cases} \quad (4.14)$$

Die Ursache für die geringe Variation der maximalen Flächenhelligkeit liegt im Verhältnis zwischen des Dichteverlaufs und der Geometrie. Da $\kappa \gtrsim 0,6$ sein muss (siehe Abschnitt 3.5.2) wechselt in Gleichung (4.12) der Exponent der Größe $\xi^{1-2\kappa}$ das Vorzeichen und kompensiert somit stets den Dichtegradienten. Dadurch verteilt sich die Leuchtkraft gleichmäßig auf die Kugeloberfläche und ein wesentlich hellerer Rand am SNR wird unterdrückt. Dieser Fall tritt bei Solinger u. a. (1975) oder Naidu u. a. (1983) nicht auf, da dort immer $\kappa = 0$ verwendet wird.

4.2.3 Die Bestimmung von κ

Einige mathematische Einschränkungen für den Exponenten der Dichteverteilung κ wurden bereits im Abschnitt 3.5.2 abgeleitet. Jetzt soll über eine physikalische Argumen-

κ	α	ξ_0	u_u	u_d	S_u	S_d
2,7	2	3,957	0,7638	3,6438	1,2025	12,2616

Tabelle 4.1: RHB für $\kappa = 2.7$ in sphärischen Koordinaten eines isothermen SNR (EP). Der Wert für den Exponenten der Dichteverteilung wurde über die Relation der Flächenhelligkeit mit der Leuchtkraft berechnet.

tation κ exakt festgelegt werden. Dazu wird die $\mathcal{B} - D$ Relation⁴⁰ verwendet. Die $\mathcal{B} - D$ Relation stellt einen Zusammenhang zwischen der Flächenhelligkeit und der radialen Ausdehnung eines SNR über die Leuchtkraft her (Duric und Seaquist 1986; Case und Bhattacharya 1998; Urosevic u. a. 2007). Dieser Vergleich lautet

$$D = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{4\pi \langle \mathcal{B} \rangle}}, \quad (4.15)$$

wobei der Proportionalitätsfaktor 4π hinzugefügt wurde. Dieser projiziert die sphärisch symmetrisch abgestrahlte Energie (Luminosität) auf eine Fläche, um mit der Flächenhelligkeit verglichen werden zu können. $D = 2r_s$ definiert den Durchmesser eines SNR, und $\langle \mathcal{B} \rangle$ ist die radial gemittelte Flächenhelligkeit (siehe auch die Skizze Abbildung 4.4). Setzt man die Gleichungen (4.7) und (4.12) in (4.15) ein, kürzen sich alle dimensionsbehafteten Größen und man findet für

$$D = 2r_s \Rightarrow 2\pi \langle b(\xi) \rangle - l(\xi) = 0. \quad (4.16)$$

Dabei sind mit $b(\xi)$, $l(\xi)$ die dimensionslosen Integrale aus (4.7, 4.12) abgekürzt. Diese Bestimmungsgleichung wird für genau ein ξ_0 erfüllt und dementsprechend ein eindeutiges κ zugewiesen. Es ergibt sich

$$\xi_0 \approx 3,957 \Leftrightarrow \kappa = 2,7, \quad (4.17)$$

womit alle weiteren Untersuchungen festgelegt sind. Aufgrund der Annahme von Gleichung (4.15) wird der Einfluss von κ auf die Entwicklung isothermer SNR auf eine einzige Zahl beschränkt. Ohne diese Annahme müssten alle κ im erlaubten Bereich separat untersucht werden. In Tabelle 4.1 sind die RHB zum isothermen EP in sphärischer Symmetrie ($\alpha = 2$) für den Exponenten der Dichteverteilung $\kappa = 2,7$ aufgelistet. In Abbildung 4.6 sind die zugehörigen dimensionslosen Lösungen gezeigt. Die verwendeten Zeiten sind ohne Dimension mit $t = 1, 3, 6$ gewählt. Wie erwartet sind die Geschwindigkeiten an der Unstetigkeit konstant, wodurch sich ein SNR konstant ausbreitet. Die Dichte an der Unstetigkeit nimmt mit zunehmender Zeit ab, da sich das Volumen des SNR vergrößert, aber Massenerhaltung gefordert ist.

4.2.4 Masse und Energie

Weiterhin können die Größen Masse und Energie aus dem Modell berechnet werden. Im wesentlichen soll die von der Stoßwelle aufgeschobene Masse M_{sw} , auch „swept-up

⁴⁰Diese Relation ist in der Literatur als $\Sigma - D$ Relation bekannt und wird wegen der bereits vorhandenen Variablen für die Flächenhelligkeit (Σ) zu $\mathcal{B} - D$ umbenannt.

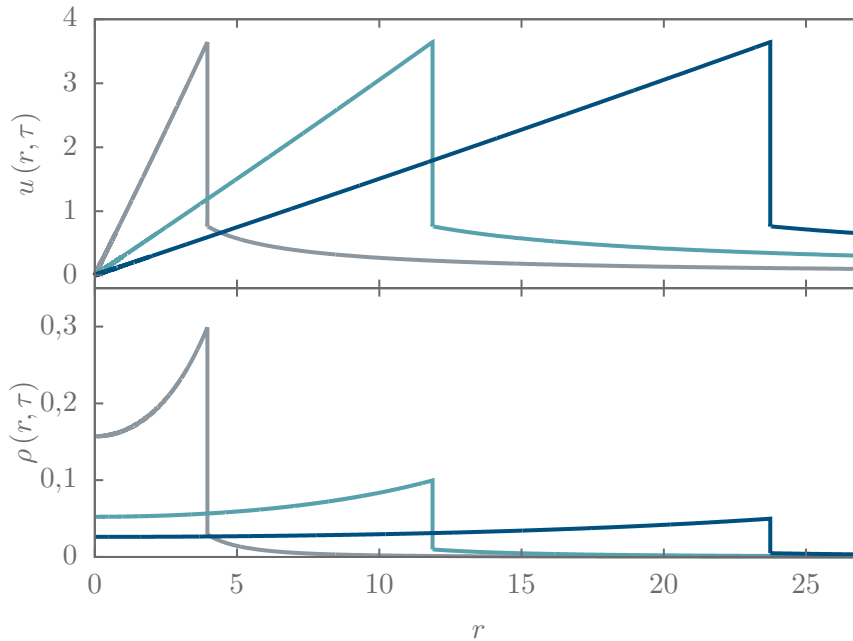


Abbildung 4.6: Die Lösungen einer isothermen Explosion in sphärischen Koordinaten $\alpha = 2$ mit dem Exponenten $\kappa = 2,7$ für die Dichteverteilung und zu verschiedenen Zeiten $t = 1, 3, 6$ (grau, hellblau, dunkelblau).

mass“ genannt, innerhalb einer dünnen Schale um die Stoßwelle untersucht werden. Die Dicke dieser Schale kann über die Massenerhaltung

$$4\pi\xi_0^2\Delta\xi_0S_d = \frac{4}{3}\pi\xi_0^3S_u \quad (4.18)$$

berechnet werden (Gorenstein u. a. 1974, 1983). Im Vergleich gilt:

$$\Delta\xi_0/\xi_0 = 1/12, \text{ Gorenstein u. a. (1974),} \quad (4.19)$$

$$\Delta\xi_0/\xi_0 = 1/30, \text{ isothermes Modell.} \quad (4.20)$$

Die Schale ist im isothermen Modell also um einen Faktor 2,5 dünner als die im adiabatischen Modell. Am Verlauf der Flächenhelligkeit lässt sich eine Schale kaum ausmachen (Abbildungen 4.5, 4.7), obwohl an der dichtesten Region der Überreste eigentlich eine höhere Helligkeit zu erwarten wäre (siehe zur Begründung Ende des Abschnittes 4.2.2). Das Maximum der Flächenhelligkeit befindet sich bei etwa $\xi = 2,3 \approx \xi_0/2$, also der halben radialen Ausdehnung des SNR und hat eine Dicke von $\sim 0,03$.

In Abbildung 4.7 sind die normierten Flächenhelligkeiten gezeigt, wobei beim isothermen Modell der Parameter $\kappa = 2,7$ verwendet wird. Der Farbverlauf im linken Teilbild zeigt die Helligkeitsverteilungen, deren Verhältnisse bereits über Gleichung (4.14) angegeben wurden. Die untere Hälfte des linken Teilbildes zeigt die Ergebnisse aus Solinger u. a. (1975) und eine Schale am Außenrand. Beim isothermen Modell kann diese Schale nicht ausgemacht werden. Zwar tendiert das isotherme Modell zur Schalenbildung (obere Hälfte), falls $\kappa \rightarrow 0$, jedoch sind diese Lösungen nach Abschnitt 3.5.2 über die Schranke $0,60409 \leq \kappa < 3$ verboten. Isotherme SNR bilden demnach keine Schale an der Stoßwelle aus.

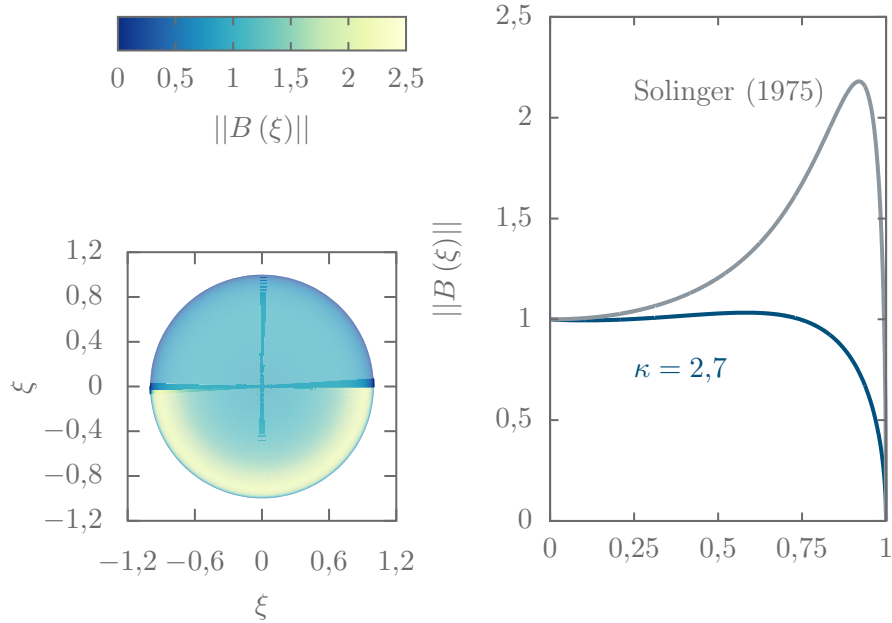


Abbildung 4.7: Vergleich der Flächenhelligkeit des isothermen Modells (oben) mit dem Modell von Solinger u. a. (1975). Der starke Anstieg von B in Richtung Außenrand kann mit dem isothermen Modell nicht reproduziert werden, weshalb es nicht zur Schalenbildung neigt.

Eine Unbekannte des Systems ist die vom explodierten Stern ausgeworfene Masse. Deshalb ist es sinnvoll, nur die Masse innerhalb der Kugelschale um die Stoßwelle M_{sw} mit Hilfe der mittleren Umgebungsdichte (4.8) zu berechnen. Sie kann über das Integral

$$M_{\text{sw}}(r) = 4\pi \int_{r_0}^{r'} \rho r'^2 dr' \quad (4.21)$$

in eindimensionaler, sphärischer Symmetrie berechnet werden, wobei die Integralgrenzen über die Dicke der Kugelschale motiviert sind. Mit den Gleichungen (4.1) dimensionslos umgeschrieben, ergibt sich

$$M_{\text{sw}}(r) \mapsto M_{\text{sw}}(\xi) = 4\pi \bar{\rho} r_s^3 \underbrace{\int_{\xi_0 - \xi_0/30}^{\xi_0} S(\xi) \xi^{2-\kappa} d\xi}_{m(\xi)}, \quad (4.22)$$

wobei auch diese Gleichung in eine dimensionsbehaftete ($f(r_s, \bar{\rho})$) und dimensionslose Funktion ($m(\xi)$) aufgeteilt und berechnet werden kann. Dabei ist die Massendichte wieder über $\bar{\rho} = \bar{\rho}_\mu m_p$ gegeben. Abbildung 4.8 zeigt die dimensionslose aufgeschobene Masse in Abhängigkeit der Position der Stoßwelle $m(\xi)$. Ab ξ ($\kappa \gtrsim 2$) $\gtrsim 2,56$ ändert sich die Steigung der Masse, was auf die Änderung des Vorzeichens im Exponenten $\xi^{2-\kappa}$ zurückzuführen ist.

Die Gesamtenergie setzt sich aus einem Anteil an kinetischer Energie E_k und einem Anteil der Arbeit durch Volumenänderung E_p die am System verrichtet wird, zusammen.

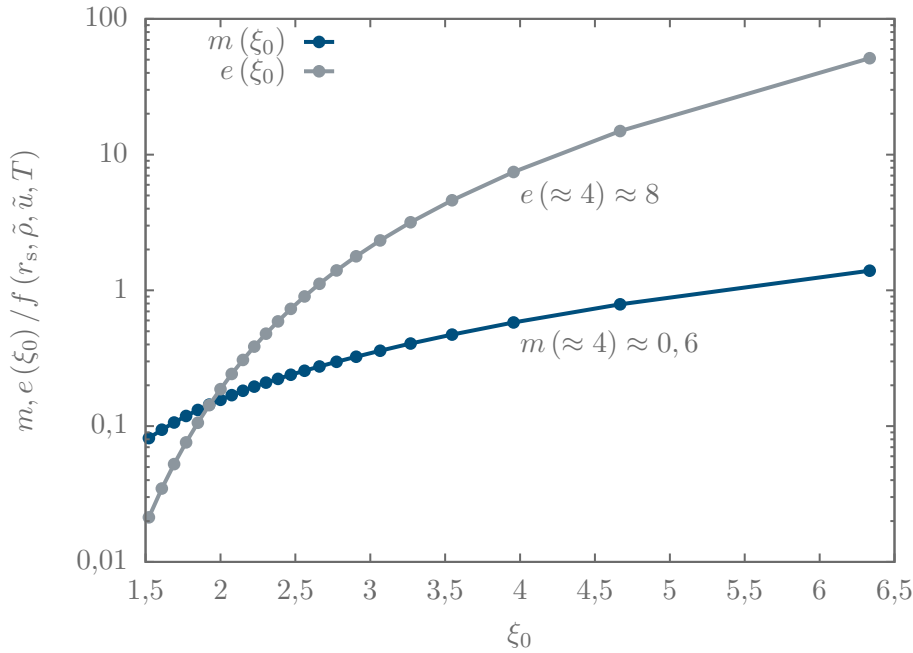


Abbildung 4.8: Die dimensionslose Masse m und kinetische Energie e als Funktion von ξ_0 . Während für $\xi_0 \lesssim 2$ die potentielle Energie dominiert, dominiert die kinetische für $\xi_0 \gtrsim 2$, was Voraussetzung ($\text{Ma} > 1$) zur Ausbildung einer Stoßwelle ist.

Analog zu den bisherigen Rechnungen ergeben sich die Ausdrücke

$$E(r) = E_k + E_p = \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho c_s^2 \right) dV, \quad (4.23)$$

$$E(r) \mapsto E(\xi) = c_s^2 M_{\text{sw}}(\xi) + \underbrace{2\pi \tilde{\rho} \tilde{u}^2 r_s^3 \int_{\xi_0 - \xi_0/30}^{\xi_0} S(\xi) u^2 \xi^{2-\kappa} d\xi}_{e(\xi)}, \quad (4.24)$$

wobei die zweite Gleichung wieder dimensionslos umgeschrieben wurde. Diese Gleichung gibt die Gesamtenergie des Systems innerhalb einer Kugelschale an, die aber per Voraussetzung nicht erhalten ist. Somit ist sie eine von außen das System beschreibende Funktion und liefert nur Information über einen bestimmten Zustand des Systems, nicht aber über die Entwicklung.

Betrachtet man die dimensionsbehafteten Koeffizienten zu den Funktionen $m(\xi)$ und $e(\xi)$ findet man eine klare Hierarchie der Energien. Es gilt:

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\tilde{u}^2 e(\xi)}{2c_s^2 m(\xi)} \begin{cases} > 1, & E_k \text{ dominiert,} \\ < 1, & E_p \text{ dominiert.} \end{cases} \quad (4.25)$$

In Abbildung 4.8 ist die dimensionslose kinetische Energie $e(\xi)$ Gleichung (4.24), welche analog zur Masse die Steigung ab $\kappa \sim 2$ verändert, gezeigt. Für $\xi_0 \lesssim 2$ dominiert der potentielle Energieanteil $m(\xi)$, für $\xi_0 \gtrsim 2$ der kinetische $e(\xi)$. Speziell für ξ_0 ($\kappa = 2,7$) ≈ 4 , ergibt sich

$$1 < \frac{\tilde{u}}{c_s} \equiv \text{Ma} < \sqrt{\frac{2m}{e}} \approx 1,3, \quad (4.26)$$

wobei Ma die Machzahl definiert. Diese Bedingung wird für den Fall einer Überschallströmung $Ma > 1$ erfüllt, welcher im Allgemeinen die Voraussetzung zur Ausbreitung einer Unstetigkeit ist (Courant und Friedrichs 1972). Die Bedingung ist demnach für $E_k > E_p$, also für die dominante kinetische Energie, erfüllt. Isotherme SNR sind also erlaubt, falls die Ausbreitungsgeschwindigkeit des SNR die Schallgeschwindigkeit übersteigt. Während junge SNR sehr heiß sind und sich mit hoher Geschwindigkeit ausbreiten, sind die gealterten und alten SNR bereits abgekühlt, wobei sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit ebenfalls verringert hat. Diese Zuordnung ist ein Hinweis darauf, dass Isothermie nur in bestimmten Entwicklungsphasen gültig ist, da der gesuchte Zustand des Systems $E_k > E_p$ nur über bestimmte Variablenkonfigurationen möglich wird. Somit könnte die isotherme Phase das Bindeglied zwischen der explosionsdominierten und der Sedov-Taylor-Phase darstellen (Phase I und II, siehe Einteilung 4.1).

4.3 Evaluation der Modell- und Beobachtungsgrößen

Um modellabhängige Größen berechnen zu können, benötigt man Referenzwerte (Sedov 1959) aus Beobachtungen. Die Parameter des isothermen Modells können mit diesen auf unterschiedliche Weise kombiniert werden und liefern demnach die entsprechend fehlenden Werte. Um den Einfluss möglichst aller Parameter und deren Abhängigkeiten zu untersuchen, werden später vier verschiedene Szenarien vorgeschlagen, welche auf unterschiedliche Weise Beobachtungs- und Modellgrößen miteinander kombinieren, um die Grenzen des Modells zu testen.

In Tabelle 4.2 ist ein Katalog bestehend aus 10 SNR zusammengestellt. Dieser Katalog enthält Beobachtungsdaten aus Röntgenlichtspektren innerhalb eines Zeitraums von etwa 40 a. Die Instrumentengenauigkeit hat sich innerhalb dieser Zeitspanne enorm verbessert und damit einhergehend auch die Methodik der Dateninterpretation. Die Beobachtungsdaten weichen dadurch teils erheblich voneinander ab, weshalb für die isotherme Modellierung jeweils der arithmetische Mittelwert $\langle X \rangle$ aller korrespondierenden Messgrößen verwendet wird. Dadurch können die Beobachtungsdaten in ihrer Gesamtheit verglichen werden.

Zu jedem SNR wurden zwischen zwei und fünf Quellen angegeben, wodurch ein gutes Abbild der Objekte über Beobachtungsdaten entsteht. Der Katalog enthält sehr junge (J), gealterte (G) und alte (A) SNR, was in Tabelle 4.2 über die blauen Trennstriche gekennzeichnet ist. In Tabelle D.2 sind die Entfernungen d und das mittlere Alter t der SNR gegeben. Da sich alle SNR im Abstand zwischen $\sim 0,4$ kpc – 4 kpc befinden, können sie als nahe Objekte innerhalb der Milchstraße aufgefasst werden.

4.3.1 Der Parameterraum

Analog zu Abbildung 4.1 wird der Parameterraum bestehend aus (t, r_s, v_s, T) in Abbildung 4.9 über $\kappa = 2,7$ eingeschränkt (Abschnitt 4.2.3). Die Stoßwellengeschwindigkeit v_s ist in Abbildung 4.9 auf der Ordinate gegen das Alter t auf der Abszisse aufgetragen. Die verbleibenden freien Parameter T, r_s gehen über die Farbgradienten in den Graphen ein. Die Temperatur T im oberen Teilbild liegt im Bereich 10^5 K – 10^8 K und die radiale Ausdehnung r_s im unteren zwischen 1 pc – 30 pc. Die Abbildung kann für eine erste Abschätzung der Observablen benutzt werden, da der gesamte Parameterraum abgebildet

4.3 Evaluation der Modell- und Beobachtungsgrößen

	r_s^O pc	T^O 10^6 K	\mathcal{L}^O 10^{35} erg s $^{-1}$	E^O 10^{51} erg	v_s^O km s $^{-1}$	t^O 10^3 a	n_0^O cm $^{-3}$	M_{sw}^O M_\odot
Cassiopeia A (G111.7-2.1)								
Reed u. a. (1995)	1,7 (104,5'')	–	–	–	5290(90)	–	–	–
Gorenstein u. a. (1974)	2,25	15 ($_{(2-10\text{ keV})}$)	12 (a)	3	6000	0,15 – 0,4	1 – 7	8
Willingale u. a. (2002)	2,52 (153'')	2,3 – 6,9	–	–	4000(500)	0,537(70)	–	–
(X)	2,15	10,25	12	3	5096	0,406	4	8
Kepler (G4.5+6.8)								
Decourchelle u. a. (2000)	4	200	–	0,3	4000	0,4	0,67	–
Seward u. a. (2010)	5,9 (4,1')	–	1,23 b	–	–	–	–	–
Kinugasa und Tsunemi (1999)	4,36	35	–	–	–	0,39	2 – 6	4 – 5?
(X)	4,75	117,5	1,23	0,3	4000	0,395	2,34	4,5
Tycho (G120.1+1.4)								
Gorenstein u. a. (1974)	3	10	10 (a)	1	3000	0,4	2...5	14
Hughes (2000)	2,8	290	–	0,1 – 0,2	4600(400)	0,425	0,35 – 0,45	–
Hayato u. a. (2010)	3,5(9)	19 – 35	–	2,5(20)	4000 – 4700	0,435	–	–
Reid u. a. (1982)	3	6,3	50 ($_{(0,15-4,5\text{ keV})}$)	1 – 2	3400	–	1,1 – 2,3	–
Warren u. a. (2005)	2,8 (251'')	100	–	–	3400	–	0,05	–
(X)	2,88	73,98	24	1,28	3974	0,417	1,93	14
Krebsnebel (G184.6-5.8)								
Seward u. a. (2010)	1,28 (2,2')	–	60	–	–	–	–	–
Bietenholz und Kronberg (1991)	–	–	–	–	1500	0,75	0,08	–
Kennel und Coroniti (1984)	2 (200'')	6 – 10	40	0,5 – 2	500 – 1500	–	3 – 6	10 – 15
Reynolds und Chevalier (1984)	3,5	–	250	–	3000	0,93	–	–
(X)	2,26	8	116	1,25	1833	0,84	2,29	12,5
Vela Jr. (G266.2-1.2)								
Allen u. a. (2014)	11	3,5	–	1,0	1700	4,2	0,022	40
Bamba u. a. (2005)	11,5	–	–	1	6000	0,66	0,5	10
Lee u. a. (2013)	12,7	16	–	1	2130	2,5	0,033	–
(X)	11,73	9,75	–	1	3276	2,45	0,19	25
Puppis A (G260.4-3.4)								
Gorenstein u. a. (1974)	8,5	7	24 (b)	0,3	800	4	0,6	40
Berthiaume u. a. (1994)	–	6,67	–	–	–	3,4	1	–
Reynoso u. a. (2016)	10	–	–	–	750	1	0,8 – 0,9	–
Dubner u. a. (2013)	–	–	120	0,048	670	4,4	–	–
(X)	9,25	6,84	72	0,17	740	3,2	0,817	40
Vela X (G263.9-3.3)								
Gorenstein u. a. (1974)	20	4	3 (b)	0,4	600	13	0,08	60
Cha u. a. (1999)	16	4,5	–	1 – 2	–	11,4	–	–
(X)	18	4,25	3	0,95	600	12,2	0,08	60
Cygnusbogen (G74.0-8.5)								
Gorenstein u. a. (1974)	19	3	6 (b)	0,4	500	17	0,15	100
Braun und Strom (1986)	–	4	–	0,5	200	4,4	0,07	14
Falle und Garlick (1982)	19,7	1	2 ($_{(0,18-1,5\text{ keV})}$)	0,7	100 – 400	70	–	–
Ku u. a. (1984)	18,8(10)	3	1,1 ($_{(0,1-4\text{ keV})}$)	0,3	400	18	0,16	–
(X)	18,83	2,75	3,03	0,48	337,5	27,35	0,13	57
W 28 (G6.04-0.1)								
Rho und Borkowski (2002)	9,5	20	0,6	0,4	80	36	0,2	22
Long u. a. (1991)	12	8,9 – 23	0,72 – 0,28	1	70	8	0,23 – 0,13	27 – 47
(X)	10,7	17,9	0,8	0,7	75	22	0,19	29
Simeis 147 (G180.0-1.7)								
Sauvageot u. a. (1990)	26	1,16	–	0,3	120	40	0,01	–
Kundu und Velusamy (1980)	24	–	0,1	0,3	110	80	0,44	–
Romani und Ng (2003)	–	–	10	1	80	140	–	–
(X)	25	1,16	1	0,53	103	120	0,22	–

Tabelle 4.2: Katalog gut bekannter und vermessener SNR. Die SNR sind nach ihrem Alter, von jung (Cassiopeia A) nach alt (Simeis 147) sortiert, wobei die einzelnen Bereiche mit den blauen Trennstrichen unterteilt sind. Zur Einteilung siehe Abschnitt 4.1. Alle SNR befinden sich in einem Abstand zwischen $\sim 0,4$ kpc – 4 kpc. Nur zum Teil konnten Messabweichungen zu den Messwerten gefunden und angegeben werden.

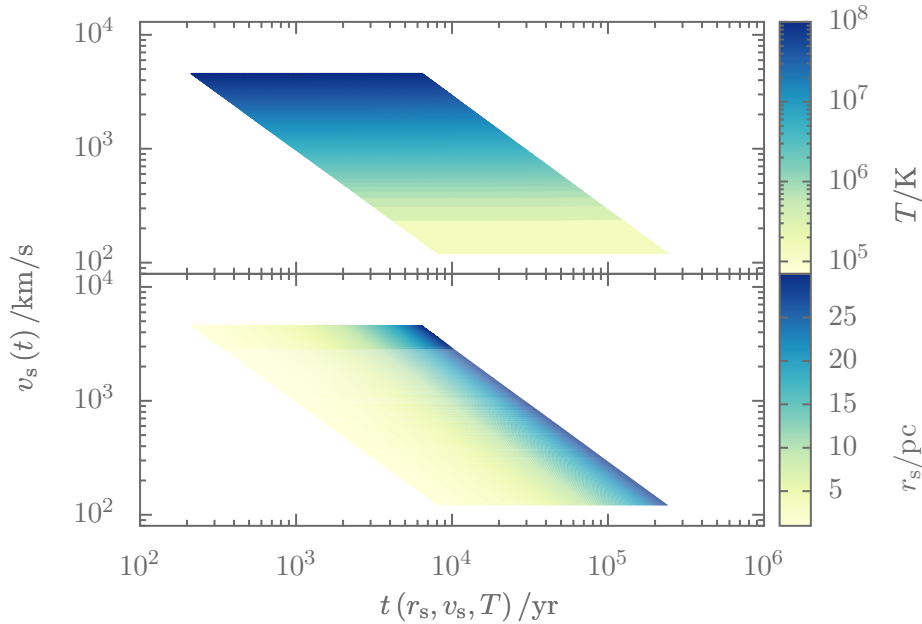


Abbildung 4.9: Graph zur Einschränkung des Parameterraums (t, r_s, v_s, T) . Kennt man zwei der vier aufgetragenen Größen, können die verbleibenden zwei abgeschätzt werden, indem ein Punkt des oberen in den unteren Graphen verlegt wird, oder umgekehrt.

wird. Gültige Lösungen existieren nur im Bereich der über die Farbgradienten gezeigten Parameter. Während in der oberen Hälfte des Graphen die Stoßwellengeschwindigkeit zusammen mit der Temperatur mit zunehmendem Alter konstant bleibt, nimmt die radiale Ausdehnung in der unteren Bildhälfte zu. Für ein konstant gehaltenes Alter im unteren Graphen ändert sich die Stoßwellengeschwindigkeit und mit ihr auch der Radius des SNR. Gleichzeitig findet man im oberen Plot, dass sich dabei ebenfalls die Temperatur ändert (siehe auch Gleichungen 4.3, 4.4). Zusammengefasst verknüpft Abbildung 4.9 vier Parameter miteinander. Ein Punkt im Farbgradienten im unteren Bild wird entlang einer imaginären, vertikalen Linie ins obere Bild transformiert, um dadurch Aussagen über die restlichen noch zu bestimmenden Werte zu treffen. Diese Vorgehensweise gilt auch im umgekehrten Fall. Kennt man zum Beispiel die Temperatur 10^6 K und den Stoßwellenradius 15 pc , beträgt die Stoßwellengeschwindigkeit $\sim 600 \text{ km s}^{-1}$ und mit Hilfe des unteren Graphen legt man ein Alter von $\sim 25\,000 \text{ a}$ fest. Man erkennt jedoch auch, dass das Modell nicht alle Parameterkombinationen abbilden kann.

4.3.2 Szenarien zur Interpretation isothermer Supernovaüberreste

Will man physikalische Größen über theoretische Modelle berechnen, sind Beobachtungsdaten essentiell (z.B. Sedov 1959). So kann man beispielsweise mit Kenntnis der radialen Ausdehnung und der Temperatur über das isotherme Modell und Gleichung (4.4) das Alter eines SNR errechnen. Andererseits kann auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit gemessen werden, worüber die Temperatur und somit ebenfalls das Alter berechnet werden kann. Es führen also unterschiedliche Beobachtungsgrößen zum gleichen Ziel, nämlich zur Berechnung fehlender physikalischer Größen. Das Ergebnis des absoluten Alters ist über beide Methoden aber nicht identisch, sondern unterscheidet sich aufgrund der

unterschiedlichen Berechnungsmethoden und dadurch, dass die Beobachtungsgrößen aus unterschiedlichen Beobachtungen und Messmethoden stammen.

Dieser Freiheitsgrad, unterschiedliche Größen zu kombinieren und freie Parameter zu berechnen, lässt auf eine Abhängigkeit der verwendeten Beobachtungsgrößen von den Ergebnissen des Modells schließen. Um diesen Einfluss und die Grenzen der Anwendbarkeit des isothermen Modells zu prüfen, werden deshalb vier mögliche Szenarien vorgeschlagen. Durch die unterschiedlichen Methoden der Anpassung des Modells an die Beobachtung wird ebenfalls deutlich, wie flexibel dieses ist. Die vier Szenarien werden folgendermaßen eingeteilt:

Szenario 1: Die Messwerte T^O und r_s^O werden direkt in die Gleichungen (4.3, 4.4, 4.8) eingesetzt. Alle abgeleiteten Größen werden berechnet und mit ■ in den folgenden Abbildungen gekennzeichnet.

Szenarien 2 & 3: Es wird eine Optimierung vorgenommen, wobei gefordert wird, dass die Gleichungen (4.3, 4.4) ihrem Messwert exakt entsprechen sollen

$$v_s(T, \xi_0) - v_s^O = 0, \quad (4.27)$$

$$t(r_s, \xi_0, T) - t^O = 0. \quad (4.28)$$

Multipliziert man beide Gleichungen miteinander und löst nach der Schallgeschwindigkeit (4.5) auf, erhält man eine quadratische Gleichung, die für die Temperatur umgeschrieben über

$$T = \begin{cases} \frac{\tilde{m}r_s^{O,2}}{k_B(\xi_0 t^O)^2}, & \text{positives Vorzeichen,} \\ \frac{\tilde{m}v_s^{O,2}}{k_B\xi_0^2}, & \text{negatives Vorzeichen,} \end{cases} \quad (4.29)$$

entsprechend der beiden Lösungswege, gelöst wird. Damit wird die Temperatur entweder über die Observablen r_s^O und t^O , oder über v_s^O und r_s^O bezüglich des isothermen Modells berechnet. Das Szenario 2 beschreibt die Lösung mit positivem Vorzeichen und ist mit den Rauten ◆ gekennzeichnet, die Lösung mit negativem Vorzeichen das Szenario 3 mit den Dreiecken ▲.

Szenario 4: Im letzten Szenario wird das unterbestimmte Gleichungssystem (4.3, 4.4) bestehend aus den abhängigen Variablen $v_s(T_{v_s}), t(T_t, r_s)$ und den unabhängigen Variablen T_{v_s}, T_t, r_s gelöst. Der Index der Temperaturen bezieht sich auf die jeweilige Gleichung, in der sie verwendet werden. Ein unterbestimmtes Gleichungssystem besteht aus m Gleichungen mit n Unbekannten, wobei $m > n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ gilt. Es wird gefordert, dass die Temperaturen möglichst wenig voneinander abweichen, wodurch sich die Zwangsbedingung

$$\min \left| T_{v_s} - \left(\frac{r_s}{\eta t} \right)^2 \right| \quad (4.30)$$

ergibt. Der quadratische Term im Betrag ist die nach der Temperatur umgestellte Gleichung (4.4) und $\eta = \xi_0 \sqrt{k_B/\tilde{m}}$ verkürzt die Schreibweise. Somit liefert diese dritte Bedingung ein voll bestimmtes Gleichungssystem. Über das durch Variation der unabhängigen Variablen T_{v_s}, r_s, t gesuchte Minimum in Bedingung (4.30) werden die abhängigen Größen bestimmt, ohne dass auf die Beobachtungsdaten zurückgegriffen werden muss. Das Szenario 4 wird mit ● markiert.

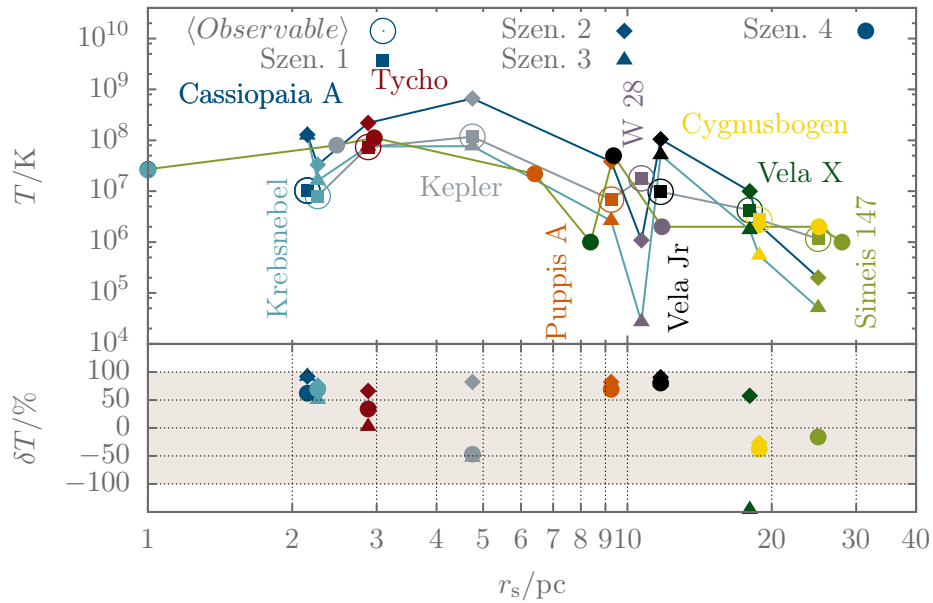


Abbildung 4.10: Die Temperatur in Abhängigkeit von r_s für alle vier Szenarien. Die Observablen fallen mit den Werten aus dem Szenario 1 zusammen, wobei alle Szenarien den qualitativ gleichen Verlauf zeigen. Die Linien verbinden die Ergebnisse eines Szenarios, wobei schwarz für Szenario 1, dunkelblau für Szenario 2, hellblau für Szenario 3 und grün für Szenario 4 verwendet wurde. Die graue Linie verbindet die Observablen und überlagert die schwarze. Im unteren Teilbild ist der relative Fehler Gleichung (4.31) gezeigt, wobei das Vorzeichen angibt, ob die Observable über- oder unterschätzt wird.

Um eine gesicherte Aussage über die Anwendbarkeit des isothermen Modells zu ermöglichen, werden die Ergebnisse der Szenarien untereinander und mit den Observablen verglichen. Zur Veranschaulichung der folgenden Diskussion wird beispielsweise Abbildung 4.10 herangezogen, wobei die eigentliche Diskussion der Temperatur erst später erfolgt. In der oberen Bildhälfte ist die radial abhängige Temperatur $T(r_s)$ gezeigt, wobei die gemittelten Messdaten (im Weiteren mit \circ markiert) aus Tabelle 4.2, sowie die berechneten Ergebnisse aus dem isothermen Modell aufgetragen werden. Im Beispiel sind die Observablen identisch mit den Werten des Szenarios 1 (\blacksquare), da diese dort keine berechneten Werte sind. Der Farbcode der Quadrate, Punkte, Rauten und Kreise bezieht sich auf die einzelnen SNR, wobei blau: Cassiopeia A, grau: Kepler, hellblau: Krebsnebel, schwarz: Vela Jr., orange: Puppis A, rot: Tycho, grün: Vela X, gelb: Cygnusbogen, lila: W 28 und hellgrün: Simeis 147 entspricht. Die Observablen sind mit der grauen Linie verbunden, die schwarze Linie, welche von der grauen überlagert ist, verbindet die Ergebnisse aus dem Szenario 1, die dunkelblaue jene aus Szenario 2, die hellblaue aus Szenario 3 und die grüne aus Szenario 4. Da die SNR ihrer Größe und somit ihrem Alter nach sortiert sind, kann ebenfalls die globale Entwicklung eines SNR nachvollzogen werden. Im Beispiel gilt demnach, dass die Temperatur von SNR mit zunehmendem Alter und größeren Radien abnimmt. Dabei gilt zu beachten, dass die globale Entwicklung nur bedingt Aussagekräftig ist, da sie sich nur auf das isotherme Modell bezieht, und somit nicht Allgemeingültig ist. Dies gilt auch für die Observablen, welche jeweils mit unterschiedlichen Messmethoden und aus unterschiedlichen Experimenten mit unterschiedlicher Auflösung über ihr arithmetisches Mittel verglichen werden.

Im unteren Teilbild ist die relative Abweichung

$$\delta X = \left(\frac{X - X^O}{X} \right) 100 \% \quad (4.31)$$

bezogen auf die berechnete Grundgesamtheit X mit $X \in \{T, r_s, v_s, t, n_0, M_{sw}, E_k\}$ zu den beobachteten Werten X^O gezeigt. Sie dient zur Abschätzung der Güte des isothermen Modells bezüglich der Observablen. Die Vorzeichen im $\pm 100\%$ Band werden berücksichtigt, um abzulesen, ob die Observablen ($\delta X < 0$) oder die berechneten Werte ($\delta X > 0$) dominant sind.

Im Folgenden werden die in diesem Abschnitt getroffenen Definitionen verwendet, um die Ergebnisse aus den Szenarien 1 - 4 sowohl qualitativ, als auch quantitativ über den relativen Fehler δX mit Hilfe der Abbildungen 4.10 bis 4.17 zu untersuchen und zu diskutieren. Dadurch lassen sich Abschätzungen bezüglich der Anwendbarkeit des isothermen Modells treffen und feststellen, welche der zehn untersuchten SNR möglicherweise isotherm modelliert werden können.

4.3.3 Diskussion der Ergebnisse

Die Diskussion beginnt mit der Berechnung der radialen Ausdehnung, da diese nur im Szenario 4 (●) verändert wird, um bestmögliche Parameter zu finden. Im oberen Teil der Abbildung 4.11 ist, wie bereits beschrieben, der direkte Vergleich zwischen den berechneten Werten und den Observablen gezeigt, im unteren ihre relative Abweichung. Offensichtlich liefert die Methode des Szenarios 4 nur für bestimmte SNR eine gute Approximation. Auffällig ist, dass die Methode vor allem für die jungen SNR Cassiopaia A, Kepler und Krebsnebel mit Ausnahme von Tycho ungeeignet zu sein scheint, da der Fehler außerhalb des $\pm 100\%$ Bereichs liegt. Dagegen sind die Unterschiede der berechneten Radien der mittleren und entwickelten SNR gegenüber den Literaturwerten im $\pm 50\%$ Bereich relativ gut abgebildet. Inwieweit diese Aussage eindeutig und aussagekräftig ist, muss mit Hilfe weiterer Ergebnisse geprüft werden.

Temperatur

Abbildung 4.10 zeigt die Unterschiede der Temperatur zwischen den Szenarien 2 - 4 und den Mittelwerten der Observablen (○). Da das Szenario 1 (■) alle abgeleiteten Größen direkt aus den Messergebnissen (T, r_s) berechnet, sind diese natürlich identisch mit den Observablen und deshalb nicht gezeigt. Das Szenario 2 (◆) kann die Temperaturen innerhalb des $\pm 100\%$ Bereichs für alle Objekte bis auf W 28 und Simeis 147 abbilden, während das Szenario 3 (▲) nur Cassiopaia A, Krebsnebel, Tycho, Kepler und Vela Jr. im interessanten Bereich abbilden kann. Das Szenario 4 verschiebt zusätzlich die radiale Ausdehnung der Objekte und kann alle Überreste bis auf W 28 und Vela X abbilden. Die Szenarien 2 - 4 zeigen dennoch den qualitativ gleichen Temperaturverlauf, was über die grauen Verbindungslinien für die Observablen, die schwarzen für Szenario 1, die dunkelblauen für Szenario 2, die hellblauen für Szenario 3 und die hellgrünen für Szenario 4 gezeigt ist. Im $\pm 50\%$ Bereich kann durch alle Szenarien nur der Cygnusbogen und knapp Tycho reproduziert werden. Je weiter ein SNR ausgedehnt ist, beziehungsweise je älter er ist, desto niedriger ist seine Temperatur. Diese ändert sich in etwa um 2 Größenordnungen, im Vergleich zwischen sehr jungen (~ 400 a) und sehr alten ($\sim 10^5$ a) SNR (Katalog Tabelle 4.2).

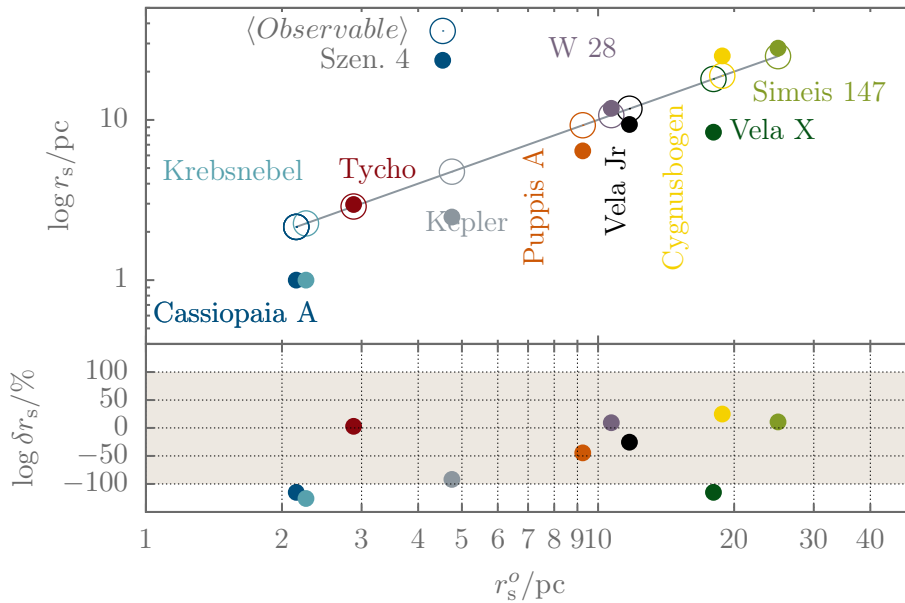


Abbildung 4.11: Die über das Szenario 4 berechnete radiale Ausdehnung in Abhängigkeit der beobachteten Werte und ihr relativer Fehler. Für Cassiopeia A, Krebsnebel, Kepler und Vela X scheint das Szenario 4 ungeeignet zu sein. Während die ersten drei junge SNR sind, zählt Vela X zu den alten SNR. Die Aussage ist über den relativen Fehler außerhalb des $\pm 100\%$ Bereichs im unteren Teilbild getroffen.

Stoßwellengeschwindigkeit

Die Stoßwellengeschwindigkeit ist in Abhängigkeit vom Radius in Abbildung 4.12 dargestellt. Das Szenario 3 fällt mit den Observablen zusammen. Ähnlich zur Temperatur fällt die Stoßwellengeschwindigkeit mit zunehmendem Radius ab, wobei die negative Steigung im Ensemble sehr gering, also als nahezu konstant betrachtet werden kann, zumal sich die Überreste im Ensemble in unterschiedlichen Entwicklungsstadien befinden. Während das Szenario 1 die Überreste Cassiopeia A, Vela Jr. und das Szenario 4 Cassiopeia A innerhalb $\pm 100\%$ nicht modellieren können, liefert das Szenario 2 für alle SNR Ergebnisse. Quantitativ werden die Geschwindigkeiten der meisten Überreste über die Szenarien 1 und 4 reproduziert. W 28 stellt für alle Szenarien ein Sonderfall am Rande der Reproduzierbarkeit dar. Die geringsten Fehler aller Szenarien werden für den Krebsnebel, Tycho und den Cygnusbogen im $\pm 50\%$ Bereich gefunden.

Alter

Das Alter der SNR im Ensembles ist in Abbildung 4.13 über den Radius dargestellt, wobei das Szenario 2 und die Observablen identisch sind. Das Alter steigt mit wachsendem Radius im Ensemble an. Auch hier zeigt das isotherme Modell den qualitativ gleichen Verlauf, wobei beachtet werden muss, dass die Isothermieannahme nur für eine bestimmte Entwicklungsphase Gültigkeit besitzt, und somit nicht geeignet ist, die globale Entwicklung zu beschreiben. Das Szenario 3 kann alle 10 Überreste modellieren, beim Szenario 1 fallen W 28 und Simeis 147, beim vierten nur der Krebsnebel heraus. Im Band der geringsten Abweichungen ($\pm 50\%$) liegen szenarienübergreifend Tycho und Kepler knapp.

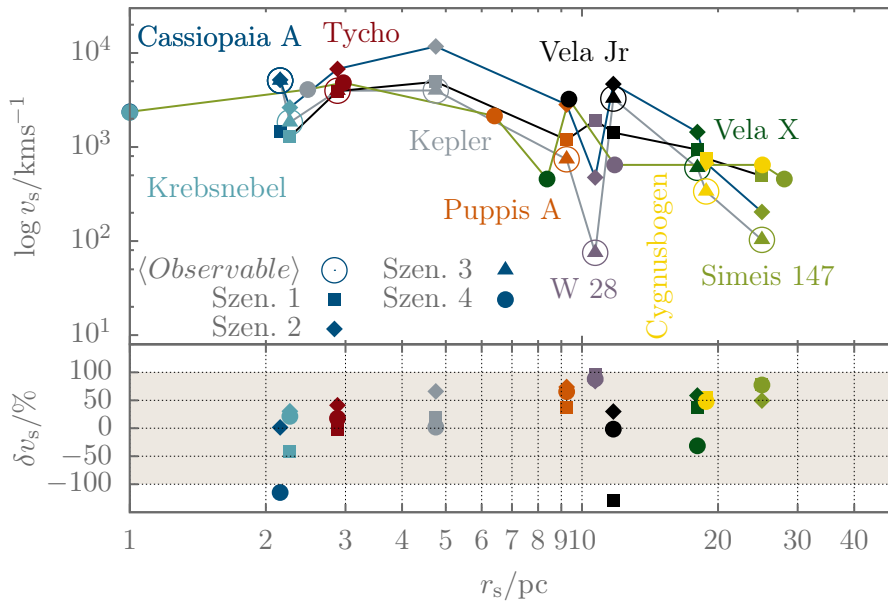


Abbildung 4.12: Die berechnete Stoßwellengeschwindigkeit über die radiale Ausdehnung aller Szenarien im Vergleich zu den Observablen. Die Observablen und das Szenario 3 fallen zusammen. Die Stoßwellengeschwindigkeit erscheint über das Ensemble betrachtet relativ konstant. Der Krebsnebel, Tycho und der Cygnusbogen weisen den kleinsten relativen Fehler aller drei Szenarien auf.

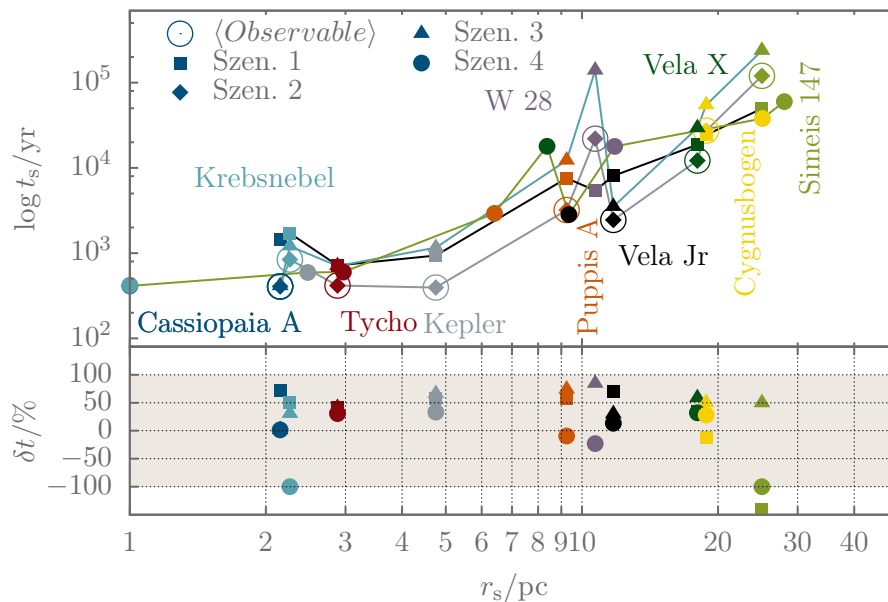


Abbildung 4.13: Das Alter über den Radius der SNR, wobei das Szenario 2 mit den Observablen zusammenfällt. Das Ensemble steigt mit zunehmendem Radius an und wird von allen Szenarien reproduziert. Tycho ist der über alle Szenarien am besten modellierte SNR.

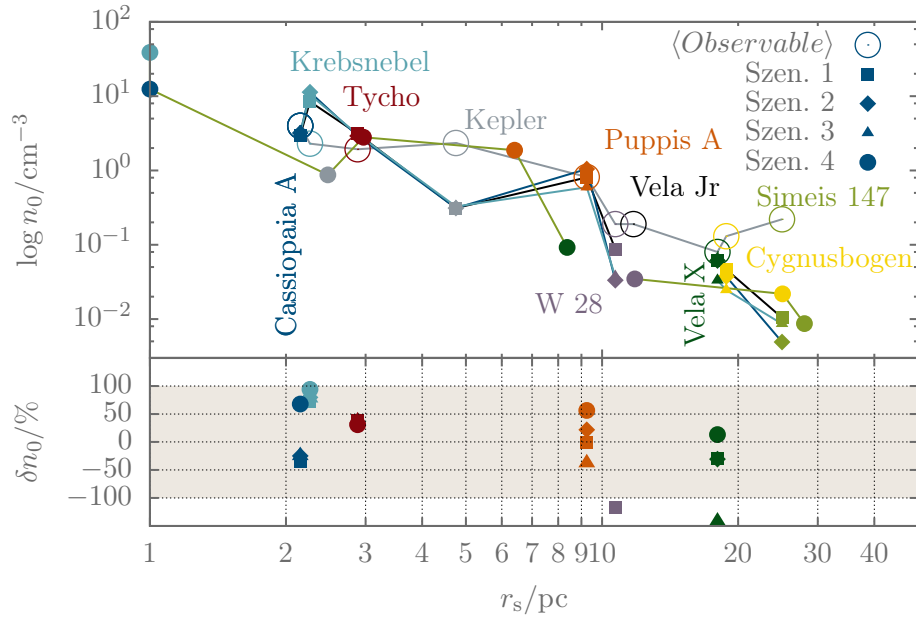


Abbildung 4.14: Die mittlere Umgebungsdichte aus dem isothermen Modell für das Ensemble aus Tabelle 4.2. Die SNR Cassiopeia A, Krebsnebel, Tycho, Puppis A und Vela X werden vom isothermen Modell reproduziert. Tycho und Puppis A sind dabei die am besten modellierten, betrachtet man den relativen Fehler δn_0 .

Mittlere Umgebungsdichte

Die mittlere Umgebungsdichte n_0 kann über Gleichung (4.8) berechnet werden, wobei eine weitere Observable, nämlich die beobachtete Luminosität \mathcal{L}^o benötigt wird. Abbildung 4.14 zeigt: Je größer die radiale Ausdehnung, desto geringer ist die Dichte im SNR. Auch hier liefern alle Szenarien den selben Verlauf, wobei einzelne SNR stärker von der Beobachtung abweichen. Betrachtet man die relative Abweichung, können nur die fünf SNR Cassiopeia A, Krebsnebel, Tycho, Puppis A und Vela X innerhalb des $\pm 100\%$ Bereichs abgebildet werden, wobei alle vier Szenarien ähnliche Ergebnisse liefern. Im Bereich $\pm 50\%$ hält das isotherme Modell sogar nur Tycho und Vela X stand. Für den Cygnusbogen, der bisher stets gut abgebildet werden konnte, findet man Abweichungen zwischen $200\% - 500\%$. Hierfür sollte separat noch einmal untersucht werden, inwieweit und in welchem Maße die Observablen schwanken und die radiative Verlustrate Einfluss auf die Ergebnisse hat.

Masse und Energie

In Abbildung 4.15 ist die aufgeschobene Masse gezeigt. Qualitativ werden die Observablen im radialen Verlauf reproduziert, mit zunehmendem Radius bleiben die Massen nahezu konstant. Dies passt zur geforderten Massenerhaltung, allerdings gilt die Aussage für die Ensembleentwicklung, das heißt, dass die unterschiedlichen SNR vormals unterschiedliche Protosternmassen hatten und ein Trend über die Zeit schwierig zu interpretieren ist. Die Szenarien 1 - 3 liegen nahe an den Observablen, insbesondere der Krebsnebel, Tycho, Kepler, Puppis A und Vela X. Das Szenario 4 kann nur Tycho, Puppis A und den Cygnusbogen gut abbilden, wobei sich bei letzteren die radialen

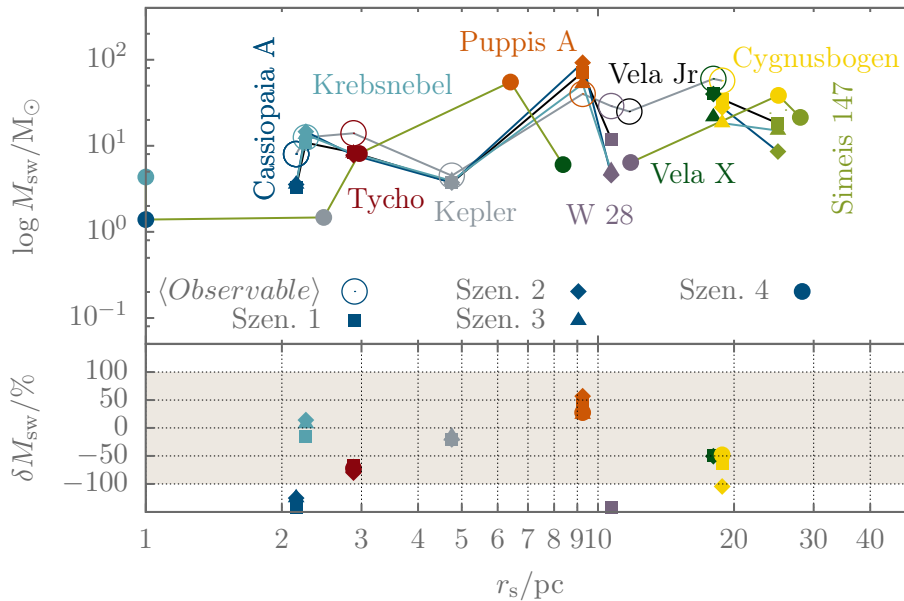


Abbildung 4.15: Die aufgeschobene Masse M_{sw} der untersuchten SNR. M_{sw} entwickelt sich nahezu konstant über den Radius, wobei der Hinweis im Text beachtet werden muss. Die SNR Tycho und Puppis A werden szenarienübergreifend am besten innerhalb $\sim 75\%$ Abweichung isotherm modelliert.

Ausdehnungen unterscheiden. Demnach sind Tycho und Puppis A die beiden, über alle vier Szenarien in der Masse korrekt berechneten SNR mit einer Abweichung von $\sim 75\%$ und $\sim 50\%$.

Die Gesamtenergie des Systems innerhalb einer Kugelschale um die Stoßwelle ist in Abbildung 4.16 gezeigt. Alle vier Szenarien weisen einen qualitativ unterschiedlichen Verlauf zu den Observablen und dabei eine Abweichung von bis zu drei Größenordnungen auf. Im unteren Teilbild ist das Verhältnis zwischen der potentiellen und der kinetischen Energie gezeigt. Die kinetische Energie dominiert stets die potentielle um einen Faktor ~ 100 . Die unterbrochenen Linien hängen mit den fehlenden Daten für die Luminosität für Vela Jr. und somit für die fehlende mittlere Umgebungsdichte zusammen. Die Gesamtenergie eines isothermen SNR überschätzt die Observablen, da die potentielle Energie die kinetische dominiert. Eine isotherme Modellierung erfordert jedoch nach Gleichung (4.25) in Abschnitt 4.2.4, dass $E_k > E_p$, beziehungsweise $Ma > 1$ (Gleichung 4.26) gelten muss. Deshalb wird im folgenden nur der kinetische Energieanteil betrachtet.

In Abbildung 4.17 ist zu erkennen, dass die Energien nach unten korrigiert sind, da der Anteil der potentiellen Energie fehlt. Eine eindeutige Zuordnung der mit mindestens einem der Szenarien modellierbaren SNR bezüglich der Stoßwellengeschwindigkeit und der Temperatur (siehe Abschnitt 4.2.4) kann wie erwartet nicht getroffen werden. Vielmehr können nur zwei der zehn SNR, nämlich Tycho und Puppis A szenarienübergreifend isotherm modelliert werden, wobei diese innerhalb des $\pm 80\%$ Bereiches liegen. Im Ensemble ist die potentielle Energie über die radiale Ausdehnung konstant bis leicht fallend. Da über die Zeit gesehen die Ausbreitungsgeschwindigkeit konstant bleibt, aber die Massendichte abnimmt (Abbildung 4.6, r_s wächst mit der Zeit), kann dieses Verhalten erklärt werden.

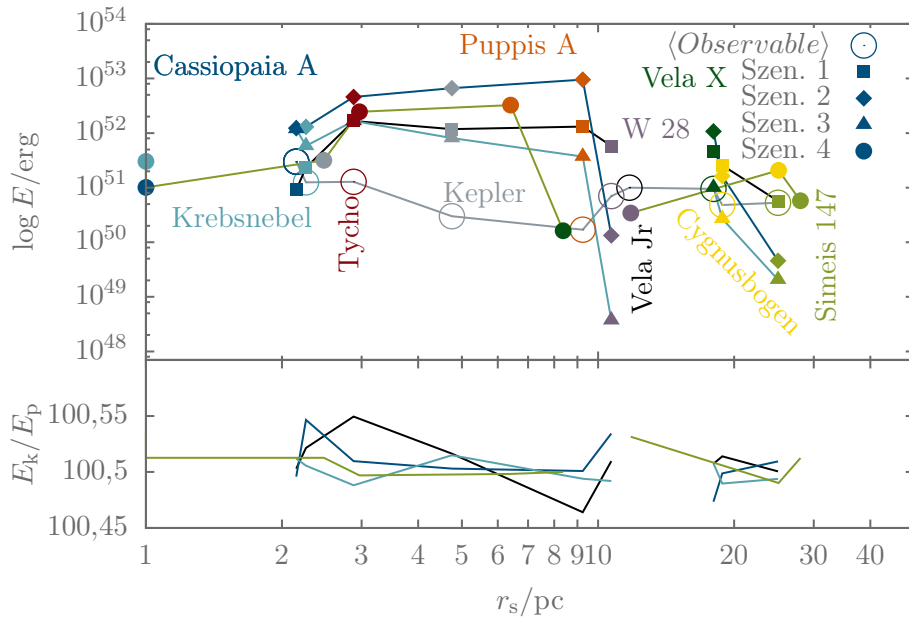


Abbildung 4.16: Die Gesamtenergie überschätzt die Observablen stark, da die potentielle Energie um einen Faktor ~ 100 sehr viel Größer als die kinetische Energie ist (unteres Teilbild). Eine isotherme Modellierung erfordert jedoch $E_k > E_p$, weshalb nur der kinetische Energieanteil zur Modellierung verwendet werden darf. Die Unterbrechung innerhalb der Kurven ist durch fehlende Observablen E^O für Vela Jr. verursacht.

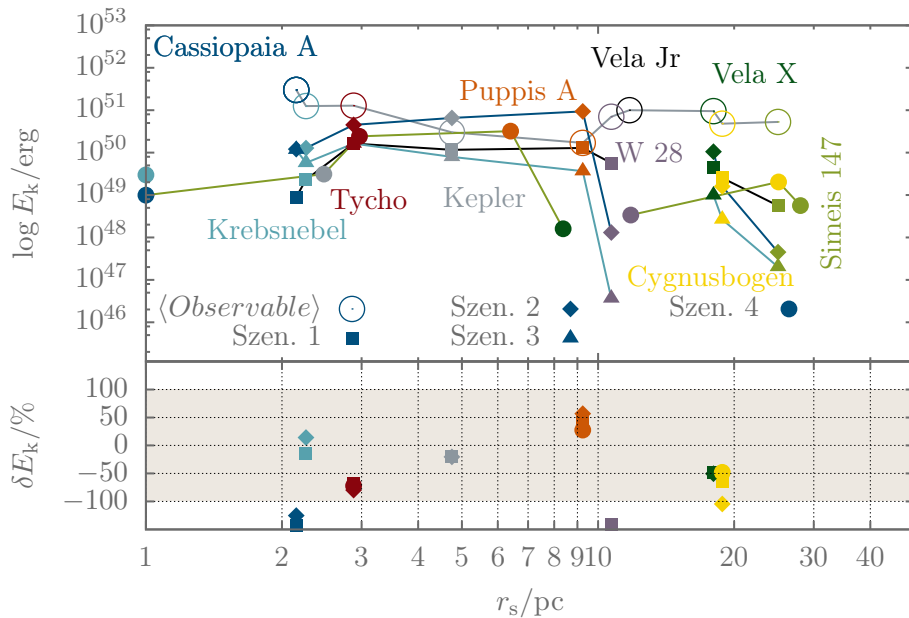


Abbildung 4.17: Die kinetische Energie kann die Observablen relativ gut nachbilden. Ihr radialer Verlauf bleibt nahezu konstant. Szenarienübergreifend lassen sich Tycho und Puppis A über ihre relativen Fehler δE_k innerhalb des $\pm 80\%$ Bereiches am ehesten isotherm modellieren. Dennoch unterscheiden sich die berechneten Werte und die Observablen relativ stark.

4.4 Interpretation der Ergebnisse

Die vier vorgeschlagenen Szenarien sollen das isotherme Modell bezüglich beobachtbarer Größen vermessen. Die Observablen zehn verschiedener Überreste in den Phasen I - IV (Abschnitt 4.1) sind im Katalog Tabelle 4.2 zusammengefasst und finden Anwendung in der Verifikation des isothermen Modells. Die Abbildungen 4.10 bis 4.17 zeigen den radialen Verlauf, die berechneten Ergebnisse sowie den relativen Fehler wichtiger Modellparameter aller vier Szenarien im Vergleich mit den Observablen.

Zum Überblick über die Ergebnisdiskussion kann die Fehlerkarte Abbildung 4.18 herangezogen werden. In dieser Karte sind die relativen Fehler $|\delta X|$ (Gleichung 4.31) aller zehn SNR und der Szenarien 1 - 4 bezüglich der physikalischen Größen über den diskreten Farbcode dargestellt. Der Farbcode liegt innerhalb des 100 % Bereichs, wobei die Abstufung im 14 % Intervall erfolgt. Die diskreten Schranken erleichtern die Auswahl gut beschreibbarer SNR. Zur Vereinfachung wird nur der Betrag der relativen Abweichung betrachtet. Die durchgehenden vertikalen Bereiche in Abbildung 4.18 geben die Observablen wieder, aus denen die anderen Werte anschließend berechnet wurden. Da im vierten Szenario alle Werte variiert werden und nicht auf Observablen zurückgegriffen wird, gibt es in diesem Fall keine durchgehenden Bereiche. Die grauen Bereiche liegen entweder außerhalb der 100 % Abweichung, oder der Fehler konnte wegen nicht vorhandener Observablen nicht berechnet werden. Der rote, gelbe und orange Rahmen hebt die am besten isotherm reproduzierbaren SNR hervor, wobei die Reihenfolge Tycho und Puppis A und zuletzt der Krebsnebel gefunden wird.

Ein erstes offensichtliches Ergebnis ist, dass weder alle relevanten Werte über die Observablen berechnet werden können, noch können die Größen aller SNR gleichermaßen gut reproduziert werden. Das isotherme Modell kann die qualitative Entwicklung des Ensembles wiedergeben, wobei sich die einzelnen Ergebnisse teilweise stark von den Observablen unterscheiden, sodass die Isothermieannahme fallengelassen werden muss. Damit können nur bestimmte SNR aus dem Katalog mit dem isothermen Modell berechnet werden. Das Szenario 4 belegt diese Aussage, da keine Observablen zur Berechnung nötig und starke Abweichungen zu den Beobachtungsdaten abzulesen sind.

Zur Quantifizierung weiterer Ergebnisse kann für jeden SNR die Kennzahl δK über das arithmetische Mittel aller Teilfehler δX

$$\delta K = \sum_{\delta X} \frac{|\delta X|}{7}, \text{ mit } \delta X \in \{\delta T, \delta r_s, \delta v_s, \delta t, \delta n_0, \delta M_{sw}, \delta E_k\} \quad (4.32)$$

gebildet werden. Diese Kennzahlen sind für alle SNR und alle Szenarien in Tabelle 4.3 aufgelistet und liefern mit Hilfe der Mittelwerte $\langle \delta K_{Sn} \rangle$, $n \in \{1 - 4\}$ zweierlei Aussagen: Zum einen erkennt man, welche SNR am ehesten isotherm modelliert werden können und zum anderen, welches Szenario die Beobachtungsdaten am besten reproduziert.

Demnach sind die passendsten Kandidaten sich isotherm entwickelnder SNR Tycho, Puppis A und der Krebsnebel (Tabelle 4.3 und rote, orange, gelbe Markierung in Abbildung 4.18). Interessant ist, dass diese isothermen Kandidaten junge bis gealterte SNR sind, beziehungsweise sich zwischen Phase I und II befinden. Tycho und Krebsnebel mit einem Alter von ~ 400 a zählen zu den jungen, Puppis A mit einem Alter von ~ 3200 a zu den gealterten SNR (Tabelle 4.3). Sehr junge SNR z.B. Cassiopeia A und

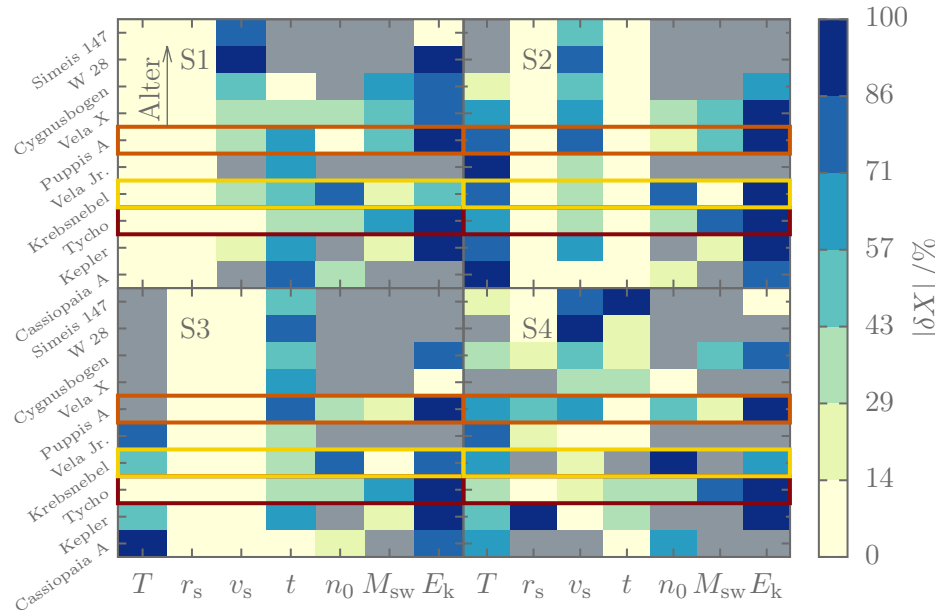


Abbildung 4.18: Karte des Betrags der relativen Fehler bis 100 % der Szenarien 1 - 4 gegenüber der Beobachtung. Die einzelnen SNR sind gegen die berechneten Größen aufgetragen, wobei S1 - S4 für die Szenarien steht. Der Pfeil deutet die Sortierung nach dem Alter an, die grauen Felder markieren Daten außerhalb der 100 % Abweichung, beziehungsweise fehlende Daten.

Kepler sowie sehr alte SNR z.B. der Cygnusbogen und W 28 fallen recht deutlich aus der Modellierbarkeit heraus. Zu Beginn des Kapitels wurde angedeutet, dass ältere SNR eher zur Isothermie tendieren, da diese optisch dünn werden und somit besser kühlen können. Diese Hypothese muss demnach jedoch fallengelassen werden. Eine isotherme Entwicklung bezieht sich auf junge bis gealterte (Phase I - II) SNR, wobei diese Aussage szenarienübergreifend Gültigkeit besitzt. In Tabelle 4.4 sind die Ergebnisse für Tycho, Puppis A und den Krebsnebel zusammengefasst⁴¹. Die Ergebnisse der Rechnungen beziehen sich auf die Mittelwerte der Observablen $\langle X \rangle$, wobei die Tabelle zusätzlich den Bereich angibt, in dem die Messwerte streuen.

Um das beste Szenario zu finden, werden nur Tycho, Puppis A und der Krebsnebel in die Betrachtung einbezogen, weil diese bereits als isotherme SNR identifiziert wurden. Demnach liefert Szenario 1, als einfachstes aller Szenarien, die besten Ergebnisse. Dies liegt daran, dass die Messwerte aus der Beobachtung, also die Temperatur und die radiale Ausdehnung, direkt verwendet werden. Das Szenario 2 und das Szenario 3 verwenden abgeleitete, beziehungsweise berechnete Größen und verfälschen somit den wichtigsten Parameter, die Temperatur. Das vierte Szenario schneidet wider Erwarten am schlechtesten ab, wobei die Aussagekraft der Methode nicht unterschätzt werden sollte. Während bei den Szenarien 1 - 3 direkt Messdaten verwendet werden und somit den Modellgrößen entsprechen (durchgehende gelbe Bänder in Abbildung 4.18), variiert Szenario 4 alle Größen, um die bestmöglichen Parameter nahe der Observablen zu finden. Da sich die Ergebnisse mit denen aus den anderen Szenarien decken (allen voran für Tycho und Puppis A), liefert das Szenario 5 das Argument zur Verifikation des

⁴¹Alle Ergebnisse der zehn SNR sind in Tabelle D.1 im Anhang aufgelistet.











	SNR	$\langle t^O \rangle$	δK_{S1}	δK_{S2}	δK_{S3}	δK_{S4}	$\langle \delta K_{Sn} \rangle$
	Cassiopeia A (G111.7-2.1)	< 400 a (4)	104	46	45	148	86
	Kepler (G4.5+6.8)	395 a (7)	121	131	121	91	116
	Tycho (G120.1+1.4)	417 a (1)	34	45	35	40	39
	Krebsnebel (G184.6-5.8)	840 a (3)	32	42	35	94	51
	Vela Jr. (G266.2-1.2)	2450 a	-	-	-	-	-
	Puppis A (G260.4-3.4)	3200 a (2)	34	48	56	53	48
	Vela X (G263.9-3.3)	12 200 a (6)	33	41	76	271	105
	Cygnusbogen (G74.0-8.5)	27 350 a (5)	56	71	167	108	101
	W 28 (G6.04-0.1)	22 000 a (8)	107	439	12 304	260	3278
	Simeis 147 (G180.0-1.7)	120 000 a	-	-	-	-	-

Tabelle 4.3: Die Kennzahlen δK der Szenarien 1 - 4 aller zehn SNR zur Interpretation der Fehlerkarte. Es lassen sich die am besten modellierbaren SNR (Spalte ganz rechts) sowie das beste Modell zur isothermen Modellierung ableiten (Werte innerhalb einer Zeile). Das Alter gewährleistet die Übersicht über die Einteilung in die Entwicklungsphasen, die Zahl in Klammer gibt die Reihenfolge der Reproduzierbarkeit der SNR an. Dabei sind Tycho, Puppis A und Krebsnebel isotherme Kandidaten, die am besten mit Szenario 1 reproduziert werden.

isothermen Modells, bezogen auf die drei gefundenen isothermen SNR.

Die Massen in einer Kugelschale um die Stoßwelle M_{sw} passen zu den aus den Beobachtungen. Im Unterschied zu den adiabatischen Modellen gilt jedoch, dass die Flächenhellichkeit des isothermen Modells keine Schalenbildung aufweist, was in Abschnitt 4.2.4 bereits diskutiert wurde. Dies ist eine Folge der über κ gesteuerten Dichteverteilung und der Geometrie, die sich gegenseitig kompensieren. Über die Energiebilanz konnte gezeigt werden, dass ein isothermer SNR durch die kinetische Energie dominiert ist und somit gut zwischen die Phasen I und II eingeordnet werden kann, weil sich eine Stoßwelle nur dann ausbildet, wenn die Dynamik durch die kinetische Energie bestimmt wird (Gleichung 4.26).

Über eine vollständige Fehleranalyse können die absoluten, mit dem isothermen Modell berechneten Werte überprüft werden. Allerdings sind die Fehler der Observablen nicht immer in der Literatur angegeben, beziehungsweise sind viele der Observablen ebenfalls über bestimmte andere Modelle berechnete Werte. Des Weiteren liegen die Ziele des Kapitels nicht darin, die absoluten, beobachteten Werte zu reproduzieren, sondern vielmehr im Nachweis, dass eine isotherme Entwicklungsphase für SNR existiert. Diese Annahme wurde seit Solinger u. a. (1975) und Lerche und Vasyliunas (1976) nicht näher untersucht und stellt deshalb eine wichtige Neuerung dar.

Abschließend sollen nochmals die zwei wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst werden:

- (i): Das isotherme, selbstähnliche Modell ist in der Lage, die Entwicklungsphase junger bis gealterter SNR (Phase I - II) zu beschreiben.
- (ii): In einer isothermen Entwicklungsphase befinden sich demnach Tycho, Puppis A und der Krebsnebel.

	r_s (pc)	T (10^6 K)	E_0 (10^{51} erg)	v_s (km s^{-1})	t (10^3 a)	n_0 (cm^{-3})	M_{sw} (M_{\odot})
Tycho (G120.1+1.4)							
$\langle X \rangle$	2,88	73,98	1,28	3974	0,417	1,93	14
$X_{\text{min}} \dots X_{\text{max}}$	2,8 – 3,5	6,3 – 290	0,1 – 2,5	3000 – 4600	0,4 – 0,435	0,05 – 5	14
Szenario 1	2,880	73,980	0,164	3927,083	0,717	3,134	8,362
Szenario 2	2,880	218,766	0,453	6753,097	0,417	2,919	7,789
Szenario 3	2,880	75,758	0,164	3974,000	0,709	3,062	8,169
Szenario 4	2,966	112,000	0,242	4831,945	0,600	2,793	8,141
Puppis A (G260.4-3.4)							
$\langle X \rangle$	9,25	6,84	0,17	740	3,2	0,817	40
$X_{\text{min}} \dots X_{\text{max}}$	8,5 – 10	6,67 – 7	0,048 – 0,3	670 – 800	1 – 4,4	0,6 – 1	40
Szenario 1	9,250	6,840	0,129	1194,101	7,574	0,807	71,358
Szenario 2	9,250	38,322	0,943	2826,431	3,200	1,046	92,464
Szenario 3	9,250	2,627	0,036	740,000	12,222	0,593	52,381
Szenario 4	6,407	22,000	0,322	2141,531	2,925	1,876	55,108
Krebsnebel (G184.6-5.8)							
$\langle X \rangle$	2,26	8	1,25	1833	0,84	2,29	12,5
$X_{\text{min}} \dots X_{\text{max}}$	1,28 – 3,5	6 – 10	0,5 – 2	500 – 3000	0,75 – 0,93	0,08 – 6	10 – 15
Szenario 1	2,260	8,000	0,023	1291,392	1,711	8,425	10,862
Szenario 2	2,260	33,199	0,128	2630,727	0,840	11,306	14,576
Szenario 3	2,260	16,118	0,576	1833,000	1,206	10,421	13,436
Szenario 4	1,000	26,000	0,300	2328,089	0,420	38,819	4,336

Tabelle 4.4: Die berechneten Ergebnisse aller vier Szenarien, die Mittelwerte der Observablen und deren Streubereiche. Teilweise liegen die berechneten Werte im Streubereich, teilweise weichen sie ab.

4.4.1 Abgleich der Ergebnisse mit der Literatur

Bezüglich Tycho werden die Aussage (i) und (ii) durch Untersuchungen von Hughes (2000) und Warren u. a. (2005) und deren gemessenen Flächenhelligkeitsprofile gestützt. Diese variieren nur schwach über den Radius (abhängig vom entsprechenden Kreissegment), wie im isothermen Modell gezeigt (Abbildung 4.5). Weiterhin ist Tycho sehr symmetrisch, was die Annahme der Isothermie ebenso stützt, wie die gleichmäßige Röntgenlichtemission und die Materialdichte.

Eine aktuelle Untersuchung über die Expansionsgeschwindigkeit von Tycho stellt Williams u. a. (2016) vor. Dort wird, aufbauend auf Untersuchungen von Reynoso u. a. (1997), gezeigt, dass ein nichtverschwindender Gradient der Ausdehnungsgeschwindigkeit existiert. Der Gradient hat jedoch keine ausgezeichnete Richtung, sondern oszilliert marginal um die Ausbreitungsgeschwindigkeit⁴² von 5300 km s^{-1} und kann damit als konstante, mittlere Geschwindigkeit interpretiert werden. Die konstante Ausbreitungsgeschwindigkeit deckt sich mit einer der Hauptaussagen des isothermen Modells, die besagt, dass sich isotherme SNR mit konstanter Stoßwellengeschwindigkeit entwickeln. Damit kann die konstante, beobachtete Expansionsgeschwindigkeit von Tycho mit Hilfe des isothermen Modells erklärt werden. Eine konstante Stoßwellengeschwindigkeit während der gesamten Entwicklung (einige $\sim 10^4$ a) ist unphysikalisch, womit die Isothermieannahme nur für einen bestimmten Zeitraum, indem sich Tycho befinden könnte, Gültigkeit besitzt.

⁴²Dieser Wert stimmt gut mit den in Tabelle 4.4 zusammengefassten Ergebnissen überein.

4.5 Fazit

Um die Anwendbarkeit des isothermen Modells zu prüfen, wurden die Mittelwerte der Observablen unterschiedlicher Messungen verwendet und den berechneten Werten gegenübergestellt. Zur Berechnung sind mindestens zwei Observablen notwendig, um Vorhersagen aus dem isothermen Modell zu erzeugen. Daher wurden vier unterschiedliche Szenarien benutzt, um sowohl den Einfluss der verwendeten Observablen in die Gesamtbetrachtung einfließen zu lassen, als auch die Grenzen des Modells zu testen.

Obwohl die Ergebnisse zum Teil stark streuen und Mittelwerte der Observablen benutzt wurden, kristallisieren sich eindeutige Ergebnisse heraus, nämlich dass sich Tycho, Puppis A und der Krebsnebel in einer isothermen Entwicklungsphase befinden. Gleichzeitig wurde damit nachgewiesen, dass eine isotherme Entwicklungsphase existiert und sich junge bis gealterte (Phase I - II) SNR darin eingliedern lassen. Moderne Beobachtungsergebnisse von Hughes (2000), Warren u. a. (2005) und Williams u. a. (2016) über Tycho stützen die zuvor gemachten Aussagen und fügen sich in das neu gezeichnete Bild isothermer SNR.

Weitere Untersuchungen könnten einen erweiterten Katalog beinhalten, um die gemachten Aussagen zusätzlich zu stützen. Des weiteren kann über eine vollständige Fehleranalyse die Güte der berechneten Werte noch besser interpretiert werden.

5 Das Programmpaket `hedis 2.0`

ZUR Lösung des in Kapitel 2 vorgestellten nichtlinearen Systems partieller Differentialgleichungen (PDG) wird im Folgenden ein numerisches Verfahren vorgestellt und die Funktionsweise des darüber entwickelten Programmpaketes `hedis 2.0` beschrieben. Dem numerischen Verfahren werden zwei Prinzipien zugrunde gelegt, nämlich eine koordinatenfreie, semidiskrete Diskretisierungsmethode nach Illenseer und Duschl (2009), sowie die Möglichkeit, beliebige Integrationsverfahren zu verwenden. In diesem Kontext wird hauptsächlich auf das implizite Verfahren nach Henyey u. a. (1959, 1964) eingegangen, dem `hedis 2.0` (**H**enyey **D**isk **S**olver) seinen Namen verdankt. `hedis 2.0` ist eine umfassende Neu- beziehungsweise Weiterentwicklung des von Blank (2010) vorgestellten Programms.

Das numerische Verfahren ermöglicht das Abbilden unstetiger Lösungen, womit beispielsweise auch das **IP** und das **EP** (Kapitel 3) gelöst werden können. Die hohe Modularität von `hedis 2.0` ermöglicht ein sehr breites Anwendungsspektrum, das sich über die dynamische Entwicklung **AGN**, deren Zeitskalen bei mehreren Millionen Jahren liegen, bis hin zu **SNR** mit unterschiedlicher Physik und in verschiedenen Koordinaten erstreckt.

Nachdem die räumliche Diskretisierungsmethode eingeführt worden ist, wird auf die zeitliche Diskretisierung, die Henyey-Methode (**HM**), eingegangen. Über Stabilitätsbetrachtungen kann die Zeitschrittweite abgeschätzt werden. Danach wird auf die Implementierung und die zugrundeliegenden Prinzipien eingegangen.

5.1 Die räumliche Diskretisierungsmethode

Die Erhaltungsgleichungen (2.14, 2.15, 2.16) können numerisch über die Finite-Volumen-Methode (**FVM**) gelöst werden. Diese Methode hat zum Vorteil, dass die diskrete Formulierung automatisch erfüllt ist und gewährleistet somit die Verwendung beliebiger Geometrien (Hirsch 2007), welche in Kapitel 2 über die koordinatenfreie Darstellung eingeführt wurden. Gleichzeitig ermöglicht sie die Verwendung beliebiger Zeitintegrationsmethoden, da diese von der räumlichen Diskretisierung getrennt sind.

Werden Erhaltungsgleichungen über die **FVM** gelöst, spricht man auch von einer konservativen Formulierung (siehe Ende von Abschnitt 2.3). Dabei werden die Differentialgleichungen in eine Integraldarstellung umgeschrieben, welche im Gegensatz zur differentiellen Darstellung auch schwache Lösungen (unstetige Lösungen) beinhalten und demnach schwache Formulierung genannt werden. Gerade bei kompressiblen Fluiden ist es wichtig, Stoßwellen aufzulösen, was über die schwache Formulierung erreicht wird.

Zunächst wird das System **PDG** ausführlich aufgeschrieben und die differentielle Darstellung abgeleitet, um den Übergang zur schwachen Formulierung zu vollziehen. Danach wird auf Details der Diskretisierung eingegangen, bis alle notwendigen Gleichungen zur Implementierung bereit stehen.

5.1.1 Die schwache Formulierung

Zusammen mit der in Kapitel 2 eingeführten Physik lassen sich die Grundgleichungen ausführlich in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi (\rho v_\xi) = 0 \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v_\xi}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi (\rho (v_\xi^2 + c_s^2)) - c_{\eta\xi\eta} \rho (v_\eta^2 + c_s^2) - c_{\Phi\xi\Phi} \rho c_s^2 = \\ \left\{ \mathcal{D}_\xi \left(\frac{(2\bar{\mu} + \bar{\lambda})}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \bar{\lambda} v_\xi (c_{\Phi\xi\Phi} + c_{\eta\xi\eta}) \right) - \right. \\ \left. c_{\eta\xi\eta} \left(\frac{\bar{\lambda}}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\xi (\bar{\lambda} c_{\Phi\xi\Phi} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) c_{\eta\xi\eta}) \right) - \right. \\ \left. c_{\Phi\xi\Phi} \left(\frac{\bar{\lambda}}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + v_\xi (\bar{\lambda} c_{\eta\xi\eta} + (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) c_{\Phi\xi\Phi}) \right) \right\} - \rho \nabla \Phi \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \ell}{\partial t} + \mathcal{D}_\xi (\rho \ell v_\xi) = \\ h_\eta \left\{ \mathcal{D}_\xi \left(\bar{\mu} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} - c_{\eta\xi\eta} v_\eta \right) \right) - c_{\eta\xi\eta} \left(\bar{\mu} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} - c_{\eta\xi\eta} v_\eta \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

schreiben. Dabei findet wieder der Differentialoperator $\mathcal{D}_\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\xi (h_\eta h_\Phi)$ Verwendung. Die Terme auf der rechten Seite sind die viskosen Terme, die zusammen mit der Gravitationskraft ($\rho \nabla \Phi$) alle Quellterme

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ s_\xi \\ h_\eta s_\eta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

vereinen. Bisher sind keine weiteren Quellen vom physikalischen Modell gefordert, deren zusätzliche Formulierung findet jedoch an dieser Stelle statt. Die Flussvektoren und die einzelnen Quellterme sollen im Programm über separate Module berechnet werden, weshalb man über die in Anhang B definierten Vektoren (B.1, B.2, B.3, B.4) die differentielle Darstellung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{D}_\xi \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{s}(\mathbf{u}) = \mathcal{D}_\xi \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \mathbf{V}(\mathbf{u}) + \mathbf{W}(\mathbf{u}) + \mathbf{G}(\mathbf{u}) \quad (5.5)$$

ableitet. Dabei stehen $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ für die physikalischen Flussvektoren und $\mathbf{V}(\mathbf{u})$ für die viskosen, $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ für die gravitativen und $\mathbf{W}(\mathbf{u})$ für die geometrischen Quellterme, wobei ρ in die Vektordefinition aufgenommen ist. Die Funktionen $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi, \eta, \Phi, t)$ sind Funktionen der Koordinaten $\{\xi, \eta, \Phi\}$ und der Zeit t . Die schwache Formulierung erfordert eine Integration über die Zeit Δt , als auch über ein Volumen $\mathcal{L} \subset [\xi \times \eta \times \Phi]$, beziehungsweise über die Oberfläche dieses Volumens⁴³. Die ausführliche Darstellung der kontinuierlichen schwachen Formulierung steht gut beschrieben zum Beispiel in Hirsch (2007). Hier soll direkt die diskrete Form angegeben werden.

Dazu wird das diskrete Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$, sowie ein Ausdruck für das diskrete Volumen \mathcal{L}_i , welches über

$$\mathcal{L}_i = [\xi_{i-1/2}, \xi_{i+1/2}] \times [\Delta \eta] \times [\Delta \Phi] \quad (5.6)$$

⁴³Das Integral über die Oberfläche in den PDG ergibt sich über den Satz von Gauß.

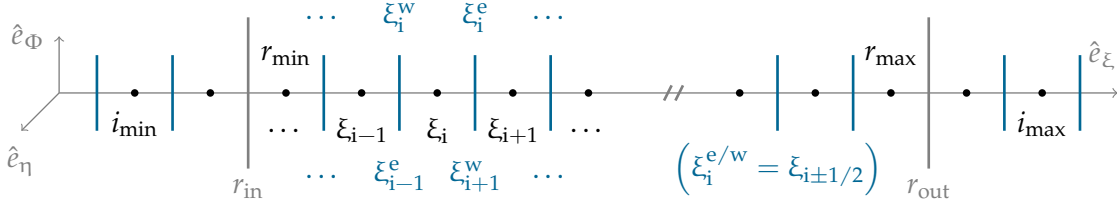


Abbildung 5.1: Skizze des diskreten Raumgitters. Zellmittelpunkte sind in schwarz, Zellrandwerte in blau und die Geisterzellen in grau dargestellt.

definiert werden kann, benötigt. Das räumliche Gitter ist über Abbildung 5.1 dargestellt. Während die Richtungen \hat{e}_η , \hat{e}_Φ aufgrund der Symmetrien nur konstante Faktoren sein können, wird die Richtung \hat{e}_ξ in diskrete Abstände aufgeteilt: ξ_i bezeichnen Zellmittelpunkte, und $\xi_{i+1/2} = \xi_i^e$ die Zellwände östlich (east) und $\xi_{i-1/2} = \xi_i^w$ westlich (west), also rechts und links neben den Zellmittelpunkten. Für die schwache Formulierung von Gleichung (5.5) ergibt sich damit

$$\langle \mathbf{u}(t_{n+1}) \rangle_{\mathcal{L}} = \langle \mathbf{u}(t_n) \rangle_{\mathcal{L}} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle \mathcal{D}_\xi \mathbf{F} - \mathbf{V} - \mathbf{W} - \mathbf{G} \rangle_{\mathcal{L}} dt, \quad (5.7)$$

wobei die Klammern $\langle \bullet \rangle$ die Mittelung

$$\langle \mathbf{X}(t) \rangle_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta \eta} \int_{\Delta \Phi} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \sqrt{g} \mathbf{X}(\xi, \eta, \Phi, t) d\xi d\eta d\Phi, \quad (5.8)$$

$$\Delta V = \int_{\mathcal{L}} dV = \int_{\Delta \eta} \int_{\Delta \Phi} \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \sqrt{g} d\xi d\eta d\Phi \quad (5.9)$$

eines Wertes $\mathbf{X}(t)$ innerhalb eines bestimmten Volumens im Gebiet \mathcal{L} und zur Zeit t darstellen (siehe auch Abb. 5.1). Man bilanziert damit den Wert einer Größe innerhalb einer Zelle, um von einem kontinuierlichen zu einem diskreten Ausdruck zu gelangen. Zwar wird eine eindimensionale Formulierung betrachtet, aber dennoch müssen die Symmetrien berücksichtigt werden, die sich bei einem Koordinatenwechsel ändern. Je nach Koordinate kann ein konstanter Faktor bezüglich der Geometrie hinzukommen. Deshalb wird das Integral über alle Richtungen ($d\xi d\eta d\Phi$) ausgeführt dargestellt.

Die vektorwertigen Funktionen \mathbf{u} in Gleichung (5.5) sind über eine der beiden möglichen Variablen

$$\mathbf{u}^k = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_\xi \\ h_\eta \rho v_\eta \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathbf{u}^p = \begin{pmatrix} \rho \\ v_\xi \\ v_\eta \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

definiert. Dabei repräsentieren die konservativen (k) Variablen die konservierte Dichte und Impulse, während die primitiven (p) Variablen die physikalischen Größen selbst, also die Dichte und die Geschwindigkeiten enthalten. Die konservativen Variablen sind für Erhaltungsgleichungen notwendig, jedoch ist es oft von Vorteil, auch die primitiven Variablen zu verwenden.

Im Folgenden werden Ausdrücke für das Integral in Gleichung (5.7) ermittelt. Besonders wichtig ist die Diskretisierungsvorschrift des Advektionsterms, die nach einer ausführlichen Beschreibung der Gitter in unterschiedlichen Koordinaten abgeleitet wird.

5.1.2 Die diskrete Geometrie

Das in Abb. 5.1 dargestellte Gitter zeigt N räumliche Intervalle, beziehungsweise Kontrollvolumen, innerhalb der Grenzen $i \in \{r_{\min}, r_{\max}\}$. Die Zahl N gibt somit die Auflösung des Gitters an. Jedes Kontrollvolumen ist durch den Raumbereich in Gleichung (5.6) begrenzt, wobei sich die ganzzahligen Indizes auf die Zellmittelpunkte und die halbzahligen Indizes auf die Zellränder beziehen. Die Schreibweisen ($\xi_i^{e/w} \equiv \xi_{i \pm 1/2}$) sind identisch und helfen später bei der Darstellung der Rekonstruktion in Abschnitt 5.1.4. Die Kontrollvolumen sind außerhalb von r_{in} und r_{out} noch um jeweils zwei weitere Zellen, den Geisterzellen (GZ), erweitert⁴⁴. Sie dienen zur numerischen Umsetzung von RB, denen die Gleichungen (5.1, 5.2, 5.3) genügen müssen (siehe Abschnitt 5.2.2). Die Zellmittelpunkte sowie die Zellränder werden über die Verteilungsfunktionen

$$\begin{aligned}\xi_i &= r_{\text{in}} + \frac{1}{2} (2(i-1) - 1) \Delta\xi, \\ \xi_i^{e/w} &= \xi_i \pm \frac{1}{2} \Delta\xi\end{aligned}\quad (5.11)$$

zusammen mit den Geisterzellen von $i \in \{i_{\min}, i_{\max}\}$ gesetzt. $\Delta\xi$ ist der Abstand zwischen den Zellmittelpunkten ($\xi_{i+1} - \xi_i$). Das Gitter ist in Abb. 5.1 zwar äquidistant gezeichnet, muss diese Eigenschaft aber nicht zwangsweise erfüllen, weil ebenfalls nicht-äquidistante Gitter Anwendung finden sollen. Folgende Koordinaten sind vorgesehen (siehe auch Abschnitt A.1 zur Berechnung der Skalenfaktoren):

Kartesische Koordinaten: Ein äquidistantes Gitter mit $\{\xi, \eta, \Phi\} \mapsto \{x, y, z = 1\}$, wobei alle Skalenfaktoren $h_{x,y,z} = 1$ sind und $c_{yxy} = c_{zxx} = 0$ verschwinden. Die Gleichungen (5.11) müssen nicht transformiert werden.

Polare Koordinaten: Ein äquidistantes Gitter mit $\{\xi, \eta, \Phi\} \mapsto \{r, \varphi, z = 1\}$, wobei die Skalenfaktoren $h_r = h_z = 1$ und $h_\varphi = r$ verwendet werden und nur $c_{\varphi r \varphi} \neq 0$ ist. Es gilt $\Delta\varphi = 2\pi$ und $\Delta z = 1$. Die Gleichungen (5.11) müssen nicht transformiert werden.

Logpolare Koordinaten: Ein logarithmisch skaliertes Gitter mit $\{\xi, \eta, \Phi\} \mapsto \{r = e^\varrho, \varphi, z = 1\}$, wobei die Skalenfaktoren $h_r = h_\varphi = r$ und $h_z = 1$ verwendet werden und nur $c_{\varphi r \varphi} \neq 0$ ist. Es gilt $\Delta\varphi = 2\pi$ und $\Delta z = 1$. Die Gleichungen (5.11) müssen über $r = e^\varrho$ transformiert werden.

Sphärische Koordinaten: Ein äquidistantes Gitter mit $\{\xi, \eta, \Phi\} \mapsto \{r, \varphi, \theta\}$, wobei die Skalenfaktoren $h_r = 1$ und $h_\varphi = h_\theta = r$ verwendet werden und $c_{\varphi r \varphi} \neq 0$ und $c_{\theta r \theta} \neq 0$ sind. Es gilt $\Delta\varphi = 2\pi$ und $\Delta\theta = 1$. Die Gleichungen (5.11) müssen nicht transformiert werden.

Die koordinatenunabhängige Darstellung ermöglicht es, mit einem einzigen Satz an Gleichungen in leicht zu implementierenden Koordinaten zu rechnen, ohne wesentliche Programmteile umschreiben zu müssen. Weitere Koordinaten sind ebenfalls möglich, sofern sie die radiale Ausdehnung skalieren, die Symmetriebedingung jedoch nicht brechen.

⁴⁴In *hedis* 2.0 kann die Anzahl der Geisterzellen (GZ) zwar variabel gesetzt werden, jedoch werden im Allgemeinen immer je zwei Geisterzellen am Innen- und am Außenrand gesetzt. Somit ist der gesamte Raumbereich mit $i \in \{0 \dots N + 2\text{GZ} - 1\}$ gegeben.

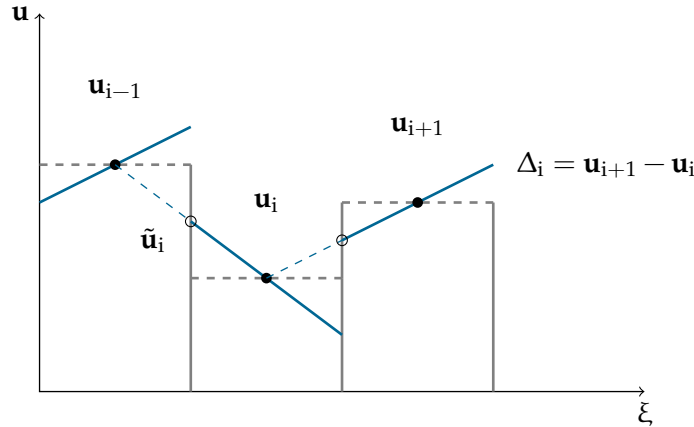


Abbildung 5.2: Die Skizze demonstriert die Funktionsweise der Rekonstruktion. Im Gegensatz zum Zellmittelwert werden die Steigungen auf den Zellrand extrapoliert, wodurch auftretende Oszillationen geglättet werden.

5.1.3 Die Diskretisierung des Advektionsterms

Der Advektionsterm

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle \mathcal{D}_\xi \mathbf{F}(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{L}} dt &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} \int_{\Delta t} \int_{\Delta \eta} \int_{\Delta \xi} \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\xi (h_\eta h_\xi \mathbf{F}) \sqrt{g} d\eta d\xi dt, \\ &= \frac{\Delta \Phi}{\Delta V} \int_{\Delta t} \int_{\Delta \eta} (h_\eta h_\xi \mathbf{F}) \Big|_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} d\eta dt \end{aligned} \quad (5.12)$$

in Gleichung (5.7) ist neben den Integrationsroutinen das Kernstück von `hedis 2.0`. Der diskrete Ausdruck wird auf eine FVM nach Kurganov und Tadmor (2000, KT) umgeschrieben. In Illenseer und Duschl (2009) wurde dieses Verfahren für krummlinige Orthogonalkoordinaten erweitert. Das entscheidende bei der Diskretisierung ist die Berechnung der Zellrandwerte des numerischen Flusses $\mathbf{F}(\mathbf{u})$ innerhalb der Mittelwertbildung. Im Kurganov und Tadmor (KT)-Verfahren wird dazu auf eine lineare Rekonstruktion⁴⁵ der Daten auf die Zellränder zurückgegriffen

$$\tilde{\mathbf{u}}_i^n(\xi) = \mathbf{u}_i^n + (\partial_\xi \mathbf{u})_i^n (\xi - \xi_0), \quad (5.13)$$

die nach obiger Formel eine lineare Extrapolation darstellt. Das ist der entscheidende Unterschied zur ursprünglichen Methode von Godunov (1959), die stückweise konstante Daten innerhalb eines Kontrollvolumens benutzt. Dieser Unterschied wird in Abbildung 5.2 deutlich, wobei die gestrichelten grauen Linien die konstante, und die durchgezogenen zusammen mit den gestrichelten blauen Linien die lineare Rekonstruktion skizzieren. In Gleichung (5.13) wird also der Zellwert \mathbf{u}_i über die Steigung $(\partial_\xi \mathbf{u})_i = \Delta_i$ und die Positionen $\xi, \xi_0 \in [\xi_{i-1/2}, \xi_{i+1/2}]$ auf den Randwert $\tilde{\mathbf{u}}_i$ extrapoliert. Dadurch werden die Abstände zwischen den Zellmittelwerten auf den Randwerten verringert, die Randwertdaten werden exakter und somit numerische Unstetigkeiten geglättet. Das Verfahren unterdrückt dadurch das Auftreten von numerischen Oszillationen (Toro 1999). Δ_i wird

⁴⁵Die lineare Rekonstruktion geht auf das MUSCL Verfahren (Monotone Upstream centred Schemes for Conservation Laws) nach van Leer (1976) zurück und benutzt Vorwärtsdifferenzenquotienten für die numerischen Differentiale. Deshalb wird es Upwind-Verfahren genannt.

als Limiterfunktion, welche in Abschnitt 5.1.4 eingehender diskutiert wird, bezeichnet. Die numerischen Flüsse des KT-Verfahrens werden an dieser Stelle nicht abgeleitet (siehe Illenseer und Duschl 2009), wobei die wichtigsten Annahmen dennoch genannt werden sollen. Dazu zählen:

Konsistenz des Mittelungsprozesses: Die Erhaltungseigenschaft für nicht-kartesische Gitter ist über die Annahme

$$\langle \tilde{\mathbf{u}}_i^n \rangle_{\mathcal{L}_i} = \langle \mathbf{u}^n(t_n)_i \rangle_{\mathcal{L}_i} = \mathbf{u}_i^n \quad (5.14)$$

gegeben. Gemittelte Zellwerte entsprechen den Zellmittelwerten.

Homogenität der Flussvektoren: Solange die Homogenitätsbedingung erfüllt ist, müssen die Eigenwerte λ nur einmal berechnet werden:

$$\mathcal{D}_\xi \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathcal{D}_\xi \mathbf{u}. \quad (5.15)$$

Gleichung (5.5) schreibt man damit als ein lineares System mit konstanten Koeffizienten (Toro 1999). Die Eigenwerte der Jacobi-Matrix berechnen sich zu

$$\lambda_1 = \lambda_{\min} = v_\xi - c_s, \quad \lambda_2 = v_\xi, \quad \lambda_3 = \lambda_{\max} = v_\xi + c_s. \quad (5.16)$$

Signalausbreitungsgeschwindigkeit: Information innerhalb einer Zelle über einen physikalischen Zustand können diese nicht verlassen. Dies gewährleisten die Signalausbreitungsgeschwindigkeiten

$$a_{i\pm 1/2}^\pm = \max/\min_{\vec{u} \in \{\mathbf{u}_{i+1/2}^{(+)}, \mathbf{u}_{i+1/2}^{(-)}\}} (\lambda_{\max/\min}(\mathbf{u}), 0), \quad (5.17)$$

welche über die Eigenwerte (5.16) der Jacobi-Matrix (5.15) gegeben sind. Sie schränken Lösungen des Integrals (5.12) derart ein, dass die zeitliche Entwicklung $t_n \mapsto t_{n+1}$ nur innerhalb dieser Grenzen definierte, konstante Ausdrücke liefert.

Mit diesen Annahmen kann das Integral (5.12) gelöst werden, wobei die zeitliche Entwicklung über Multiplikation mit der Zeitspanne $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ realisiert wird:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \langle \mathcal{D}_\xi \mathbf{F}(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{L}} dt = \Delta t \left(\frac{\mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}}{\Delta V_i} \right). \quad (5.18)$$

Die numerischen, semi-diskreten Flüsse

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+1/2} &= \frac{\Delta A_{i+1/2}}{a_{i+1/2}^+ - a_{i+1/2}^-} \left[a_{i+1/2}^+ \mathbf{F}(\mathbf{u}_i^{(e)}) - a_{i+1/2}^- \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+1}^{(w)}) \right. \\ &\quad \left. - a_{i+1/2}^+ a_{i+1/2}^- \left(\mathbf{u}_i^{(e)} - \mathbf{u}_{i+1}^{(w)} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

sind hier über die Mittelpunktsregel (z.B. Faires und Burden 2000) abgeleitet und die Differenz in (5.18) geht aus dem Indexshift $i \mapsto i - 1$ hervor. Die Flächen sind über

$$\Delta A_{i+1/2} = h_{\eta,i}^e h_{\Phi,i}^e \Delta \eta \quad (5.20)$$

gegeben. Die Methode nach [KT](#), beziehungsweise nach [Illenseer und Duschl \(2009\)](#) hat zum Vorteil, dass sie auf beliebige Geometrien angewendet werden kann. Weiterhin ist das semi-diskrete Verfahren von zweiter Ordnung Genauigkeit in der räumlichen Diskretisierung und zusätzlich von der zeitlichen Diskretisierung getrennt. Dadurch können beliebige zeitliche Integrationsverfahren höherer Ordnung benutzt werden, um das System zu lösen. In [Abschnitt 5.3](#) wird ein mögliches Verfahren vorgestellt, sowie Stabilitätsbedingungen an die Konstante Δt formuliert ([Abschnitt 5.4](#)).

5.1.4 Die Rekonstruktion

[Godunov \(1959\)](#) zeigte, dass sich bei Anwesenheit starker Stoßwellen, also bei sehr großen Unterschieden zwischen den Kontrollvolumen \mathbf{u}_i und $\mathbf{u}_{i\pm 1}$ ([Abbildung 5.2](#)) numerische Oszillationen ausbilden, benutzt man eine konstante Rekonstruktion ([Toro 1999](#)). Deshalb begrenzt man die Steigungen durch eine mindestens lineare Rekonstruktion über geeignete (nicht-lineare) Limiterfunktionen. Diese erfüllen die sogenannte TVD-Bedingung (Total Variation Diminishing), die besagt, dass ein numerisches Verfahren keine neuen lokalen Extrema innerhalb der Zeitentwicklung erzeugt, und dass diese, wenn sie existieren, weder größer, noch kleiner werden. Man nennt dieses Verhalten monotonieerhaltend ([Toro 1999](#)) und führt damit Verfahren höherer Ordnung ein (siehe auch [Godunovs Theorem](#) z.B. in [Toro 1999](#); [Hirsch 2007](#)).

Aus der TVD-Bedingung folgen viele unterschiedliche Möglichkeiten das Differential $(\partial_\xi \mathbf{u})_i = \Delta_i$ zu berechnen. Dazu werden unter anderem auch nicht-lineare Limiterfunktionen eingeführt, die sich je nach Typ für die entsprechend gewählten Steigungen im Vergleich zu den Nachbarzellen entscheiden. Exemplarisch wird der monotonized-centred-Limiter (MONOCENT) ([Toro 1999](#)) vorgestellt, der aufgrund seiner Variabilität einen breiten Anwendungsbereich aufweist. Er ist über

$$\text{mc}(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} x, & \text{falls } a_1 \cdot \dots \cdot a_n > 0 : x = \min(|a_1|, \dots, |a_n|), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.21)$$

definiert und sagt aus, dass im Falle positiver Funktionsargumente das betragsmäßig kleinste Argument zurückgegeben wird. Andernfalls verschwindet der Rückgabewert, womit die Steigungen der Zellmittelwerte als Zellmittelwert selbst identifiziert sind. Letzterer Fall entspricht dem bereits erwähnten Verfahren nach [Godunov \(1959\)](#), also einer konstanten Rekonstruktion. Die Funktionsargumente sind gerade die Steigungen der Zellmittelwerte

$$\Delta_i = \text{mc} \left(\theta_{\text{mc}} \frac{\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i-1}}{r_i - r_{i-1}}, \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_{i-1}}{r_{i+1} - r_{i-1}}, \theta_{\text{mc}} \frac{\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i}{r_{i+1} - r_i} \right) \quad (5.22)$$

der links- und rechtsseitigen Steigungen (siehe z.B. auch [Illenseer 2006](#)), wobei der Parameter $\theta_{\text{mc}} \in [1, 2]$ das Verhalten des Limiters, beziehungsweise seine künstliche Viskosität definiert. Für $\theta_{\text{mc}} = 1$ geht die Limiterfunktion zum MINMOD-Limiter über, und die Steigungen werden direkt übernommen. Für $\theta_{\text{mc}} > 1$ werden die Steigungen künstlich vergrößert und die Zellrandwerte ungenauer approximiert. Wird $\theta_{\text{mc}} \gtrsim 1.5$ eingestellt, führt der Limiter allmählich zu numerischen Instabilitäten. In [hedis 2.0](#) sind ebenfalls der MINMOD- sowie der SUPERBEE-Limiter implementiert ([Toro 1999](#)). Je nach Anwendung kann die numerische Stabilität und das Auftreten starker Stoßfronten durch unterschiedliche Limiter besser abgebildet werden.

5.1.5 Die Quellterme

Bisher wurde die Diskretisierung der numerischen Flüsse, also des Advektionsterms durchgeführt. Im Weiteren werden die sehr viel einfacher umzusetzenden diskreten Ausdrücke für die ins System eingehenden Quellen angegeben.

Gravitative und geometrische Quellen

Wird die Mittelpunktsregel auf die gemittelten geometrischen und gravitativen Quellen $\langle \mathbf{W}(\mathbf{u}) + \mathbf{G}(\mathbf{u}) \rangle_{\mathcal{L}_i}$ in Gleichung (5.7) angewendet, so heben sich die geometrischen Anteile in den Integralen weg. Dies erlaubt es, die Ausdrücke

$$\langle \mathbf{W}(\mathbf{u})_i + \mathbf{G}(\mathbf{u})_i \rangle_{\mathcal{L}_i} = \frac{1}{\Delta V_i} (\mathbf{W}(t, \xi_i, \eta_i) + \mathbf{G}(t, \xi_i, \eta_i)) h_{\xi} h_{\eta} h_{\Phi} |_{\xi_i} d\xi d\eta d\Phi, \quad (5.23)$$

$$= \mathbf{W}(t, \xi_i, \eta_i) + \mathbf{G}(t, \xi_i, \eta_i) \quad (5.24)$$

direkt zu diskretisieren. Die Kommutatorkoeffizienten innerhalb der geometrischen Quellen erfordern etwas mehr Beachtung, denn das hydrostatische Gleichgewicht aus den Eulerschen Gleichungen kann nur über die Vorschrift

$$c_{\eta\xi\eta} = \frac{\Delta\eta}{\Delta V} \frac{h_{\Phi}^e + h_{\Phi}^w}{2} (h_{\eta}^e - h_{\eta}^w), \quad (5.25)$$

$$c_{\Phi\xi\Phi} = \frac{\Delta\eta}{\Delta V} \frac{h_{\eta}^e + h_{\eta}^w}{2} (h_{\Phi}^e - h_{\Phi}^w) \quad (5.26)$$

erfüllt werden (Illenseer und Duschl 2009). Die gesamte Gravitationsbeschleunigung (2.21), also der keplersche als auch der selbstgravitative Anteil, kann nach Junker (2009) und Blank (2010) über

$$g_i = -\frac{GM_{\bullet}}{r_i^2} - \sum_j G_{ij}^k \rho_j \quad (5.27)$$

approximiert werden, wobei die Matrix G_{ij}^k über den Index k für die Monopolnäherung oder die volle Selbstgravitation berechnet werden muss. Es gilt mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1(a; b; c; z)$:

$$G_{ij}^k = \begin{cases} G \frac{\Delta V_j}{\xi_i^2}, & \text{für } k = \text{MP}, \\ 2\pi G \left[\frac{\xi_i \xi_j^{w,2}}{2(\xi_i + \xi_j^w)^3} \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{4\xi_i \xi_j^w}{(\xi_i + \xi_j^w)^2}\right) - \frac{\xi_i \xi_j^{e,2}}{2(\xi_i + \xi_j^e)^3} \cdot {}_2F_1\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 3; \frac{4\xi_i \xi_j^e}{(\xi_i + \xi_j^e)^2}\right) \right], & \text{für } k = \text{VSG}, \end{cases} \quad (5.28)$$

wobei das Volumen über

$$\Delta V_i = h_{\xi,i} h_{\eta,i} h_{\Phi,i} d\xi d\eta d\Phi \quad (5.29)$$

eingeht. Diese Art der Berechnung hat zwei wesentliche Vorteile. Zum einen ist die Matrix G_{ij}^k nur von der radialen Ausdehnung abhängig, weshalb sie nur ein einziges Mal zur Initialisierung des Programms berechnet werden muss. Zum anderen ist sie modular ausgelegt.

Viskose Quellen

Die in Abschnitt 2.4.2 eingeführten Ausdrücke für den viskosen Spannungstensor können auch direkt diskretisiert werden. Allerdings sind die Differentiale auf Zellrandwerte angewiesen. Da Viskosität im Allgemeinen zu stabilerem Verhalten der Numerik tendiert, können die Zellrandwerte der Tensorkomponenten $\overset{\leftrightarrow}{T}$ aus dem einfachen arithmetischen Mittel

$$\overset{\leftrightarrow e/w}{T}_i = \frac{(\overset{\leftrightarrow}{T}_{i+1} + \overset{\leftrightarrow}{T}_i)}{2} \quad (5.30)$$

der Zellmittelwerte berechnet werden. Die Differenzen innerhalb der Tensorkomponenten in den Gleichungen (2.24 - 2.27) werden in zweiter Ordnung entweder über zentrale Differenzen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \quad (5.31)$$

oder über die Dreipunkte-Endpunktformel (Faires und Burden 2000) diskretisiert:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h}. \quad (5.32)$$

Letztere bietet den Vorteil, die Steigung des Zellpunktes $f(x)$ in die Berechnung des Differentials mit einzuschließen. Nach Hirsch (2007) kann die Genauigkeit beziehungsweise der numerische Fehler bei diesem Differenzenquotienten bei nicht-äquidistanten Gittern drastisch reduziert werden. Obwohl bei den logarithmisch polaren Gittern bisher kein Stabilitätsverlust ausgemacht werden konnte, sollte dieser Effekt berücksichtigt werden. Die Komponenten der Tensordivergenz (Gleichungen 2.29) sind nach der Vorschrift

$$\langle \nabla \overset{\leftrightarrow}{T} \rangle_{\mathcal{L}} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\xi_-}^{\xi_+} \int_{\eta_-}^{\eta_+} \sqrt{g} \nabla \overset{\leftrightarrow}{T} d\xi d\eta \quad (5.33)$$

$$= \frac{\Delta A_{i+1/2} \overset{\leftrightarrow e}{T}_i - \Delta A_{i-1/2} \overset{\leftrightarrow w}{T}_i}{\Delta V_i} \quad (5.34)$$

diskretisiert, wobei die Flächen aus Gleichung (5.20) Anwendung finden.

5.1.6 Massenberechnung

Der Masse im Zentrum wird eine Anfangsmasse (initiale Masse) M_{\bullet}^0 zugewiesen⁴⁶. Bei Akkretionsprozessen wächst die Zentralmasse im Laufe der Zeit an (siehe Integral Gleichung 2.38) und muss zur Berechnung des Gravitationspotentials in der Numerik berücksichtigt werden. Um ein möglichst exaktes Verhalten der Massenentwicklung zu erzielen, werden die numerischen Randflüsse zum aktuellen Zeitschritt in erster Ordnung direkt integriert. Demnach kann das aus der Kontinuitätsgleichung (5.1) gefolgerte Integral (2.38) zur Entwicklungsgleichung

$$M_i^{n+1} = M_i^n - \Delta t \mathcal{F}_{i+1/2}^n \quad (5.35)$$

⁴⁶Der Index i wird hier als räumlicher Laufindex verwendet, weshalb anstelle $M_{\bullet,i}$ für die initiale Masse des zentralen Schwarzen Loches die Bezeichnung M_{\bullet}^0 Verwendung findet.

zurückgeführt werden. Diese Gleichung entspricht einem expliziten Euler-Verfahren erster Ordnung, wobei der Massenfluss an den westlichen Rändern $\mathcal{F}_{i+1/2}^n$ zeitlich aufsummiert wird. Das Verfahren erster Ordnung wurde aus Gründen der Schnelligkeit und der Einfachheit gewählt. Die Gesamtmasse während eines Zeitschrittes berechnet sich dann aus der Summe

$$M_{\bullet} = M_{\bullet}^0 + (M_{r_{in}}^{n+1} - M_{r_{in}}^n). \quad (5.36)$$

Soll die Eddington-Grenze berücksichtigt werden, muss der Eddington-Massenfluss mit dem hier gezeigten Massenfluss über Gleichung (2.39) verglichen werden. Das Integral für die Scheibenmasse (2.41) berechnet sich einfach über die Riemann-Summe

$$M_D = \sum_{i=r_{in}}^{r_{out}} \rho_i \Delta V_i, \quad (5.37)$$

wobei das Volumenelement über Gleichung (5.29) gegeben ist.

5.2 Die Nebenbedingungen

Einem wohldefinierten System PDG müssen definierte AB und RB genügen. Das System (2.14, 2.15, 2.16) benötigt drei AB (Dichte, Impuls, Drehimpuls, siehe Gleichung 5.10) und sechs RB, für jede physikalische Größe am Innen- und am Außenrand. Werden diese Bedingungen nicht korrekt gesetzt, entwickelt sich das System unter Umständen in eine falsche Richtung, was entweder zum Versagen der Numerik führt oder dem System aus physikalischer Sicht nicht gerecht wird.

5.2.1 Anfangsbedingungen

Es gestaltet sich mitunter schwierig korrekte AB für komplexe Systeme zu finden. Deshalb werden die im Allgemeinen problemabhängigen AB in eigenen Modulen gesetzt. Während zum Beispiel die AB für das IP oder das EP (Abschnitt 3.3) genau bekannt sind, hat man für komplexere Probleme (zum Beispiel für eine viskose AS) oft keinen analytischen Ausdruck für die AB. In diesem Falle kann eine falsche AB zu unphysikalischen Ergebnissen führen, weshalb diese sehr sorgfältig gewählt werden müssen. Mögliche AB werden für die entsprechenden Test- und Anwendungsfälle an entsprechender Stelle ausführlich diskutiert.

5.2.2 Randbedingungen

Es stehen in der Praxis eine Vielzahl an RB für die numerischen Euler-Gleichungen bereit. Besonders zu erwähnen sind dabei reflektierende, no-Gradients und exakte RB:

Reflektierende Ränder (REFLEKT): Das Vorzeichen der Radialgeschwindigkeit wird negiert, wodurch die Randflüsse über die Mittelwertbildung verschwinden. Dadurch wird kein Material mehr über den Innenrand transportiert. Um das gewünschte Ergebnis auch bei nicht-äquidistanten Gittern zu gewährleisten, muss auf eine korrekte Extrapolation auf die Randwerte geachtet werden (Deschner 2013).

No-Gradients Ränder (NOGRAD): Extrapolation der Größen aus dem Rechengebiet direkt auf jene im Rand, wodurch die Lösungen unter keinerlei Einfluss der RB stehen.

Exakte Ränder (EXAKT): Die bekannte analytische Lösung definiert die Werte der Geisterzellen.

Die **RB** können für die einzelnen physikalischen Komponenten auch gemischt werden. Beispielsweise **NOGRAD** für die Dichte, und **EXAKT** für die Azimutalgeschwindigkeit.

Angepasste Ränder (CUSTOM): Speziell für **AS** führt Sperling (2013) angepasste Ränder ein. Diese setzen sich zusammen aus **NOGRAD** für die Flächendichte

$$\Sigma(r \in \{i_{\min} + 1, i_{\min}\}, t) = \Sigma(r \in \{r_{\min}, r_{\min} - 1\}, t), \quad (5.38)$$

$$\Sigma(r \in \{i_{\max} - 1, i_{\max}\}, t) = \Sigma(r \in \{r_{\max}, r_{\max} + 1\}, t) \quad (5.39)$$

und speziellen **RB** für die Radialgeschwindigkeit, welche den Forderungen entsprechen muss, dass es nur Ausfluss aus dem Rechengebiet, aber keinen Einfluss in das Rechengebiet am Innenrand geben darf:

$$v_r(r \in \{i_{\min} + 1, i_{\min}\}, t) = \begin{cases} v_r(r \in \{r_{\min}, r_{\min} - 1\}, t), & v_{r_{\min}} \geq 0 \quad (\text{NOGRAD}), \\ -v_r(r \in \{r_{\min}, r_{\min} - 1\}, t), & v_{r_{\min}} < 0 \quad (\text{REFLEKT}). \end{cases} \quad (5.40)$$

Dazu muss die Geschwindigkeit am Innenrand über eine lineare Extrapolation

$$v_{r_{\min}} = \frac{v_{r_{\min}+1}(r_{\text{in}} - r_{\min}) - v_{r_{\min}}(r_{\text{in}} - r_{\min} + 1)}{r_{\min} + 1 - r_{\text{in}}} \quad (5.41)$$

abgeschätzt werden. Die äußeren Ränder werden entsprechend umgekehrt gesetzt. Das Zentralobjekt darf also nur wachsen, aber keine Masse verlieren, was im Falle eines Schwarzen Loches sinnvoll ist. Die Azimutalgeschwindigkeit wird über die Kepler-Bedingung am Innen- und Außenrand aus dem Rechengebiet extrapoliert:

$$\frac{v_{\varphi}(r \in \{i_{\min} + 1, i_{\min}\}, t)}{v_{\varphi}(r \in \{r_{\min}, r_{\min} - 1\}, t)} = \sqrt{\frac{r \in \{r_{\min}, r_{\min} - 1\}}{r \in \{r_{\min} - 1, r_{\min} - 2\}}}. \quad (5.42)$$

5.3 Die zeitliche Diskretisierungsmethode

Neben dem grundlegenden Prinzip der koordinatenfreien, räumlichen Diskretisierung in hoher Ordnung (Illenseer und Duschl 2009) ist das zweite Prinzip, das `hedis 2.0` erfüllen soll, die implizite numerische Zeitintegration.

Dieses Prinzip ermöglicht Rechnungen auf sehr langen physikalischen Zeitskalen, wie beispielsweise die Entwicklung eines **SMSL**, innerhalb relativ kurzer CPU-Zeiten. Durch implizite Verfahren wird die Stabilitätsregion numerischer Verfahren vergrößert, beziehungsweise unterliegen solche Verfahren unter Umständen keiner Stabilitätsbedingung: Sie sind A-stabil (Hairer u. a. 1993; Hairer und Wanner 1996). Aufgrund der Aufteilung in zeitliche und räumliche Terme (Gleichung 5.7) werden beliebige Zeitintegrationsmethoden möglich. So sind ebenfalls explizite Runge-Kutta-Verfahren in erster und vierter Ordnung implementiert.

Das hier verwendete Verfahren geht auf ein numerisches Sternentwicklungsprogramm nach Kippenhahn u. a. (1967) zurück und verwendet ein von Henyey u. a. (1964, 1959,

kurz Henyey-Methode (**HM**) vorgeschlagenes Verfahren, das im Folgenden eingeführt wird. Für ein performantes Verfahren wird zunächst die θ -Methode (Hairer u. a. 1993, S. 204)

$$\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \theta \mathbf{f}_i(\mathbf{u}_{1\dots N}^{n+1}) + (1 - \theta) \mathbf{f}_i(\mathbf{u}_{1\dots N}^n) = 0 \quad (5.43)$$

eingeführt, die es ermöglicht, zwischen impliziten und expliziten Methoden⁴⁷ umzuschalten (Chrispell u. a. 2007; Liniger 1969). Dabei ist \mathbf{f} die Verfahrens- oder die Inkrementfunktion. Der Parameter $0 \leq \theta \leq 1$ variiert die Diskretisierungsmethode zwischen

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{explizites Euler-Verfahren, } \mathcal{O}(t^1), \\ 0.5, & \text{implizite Trapezregel, } \mathcal{O}(t^2), \\ 0.5, \dots, 1, & \text{implizites Euler-Verfahren, } \mathcal{O}(t^1), \end{cases} \quad (5.44)$$

also einem voll expliziten und einem voll impliziten Euler-Verfahren. Zwischenwerte liefern Mischzustände der Diskretisierung und der jeweiligen Ordnung der Verfahren, wobei Farago (2013) $\theta = 0,878$ angibt, was über eine Optimierung zwischen Stabilität, Rechenzeit und Konvergenzordnung berechnet worden ist.

5.3.1 Die Henyey-Methode

Die **HM** basiert auf einem Newton-Raphson-Verfahren (Kippenhahn u. a. 2012, Seite 106), welches im Allgemeinen Korrekturen zu Lösungen linearisierter Gleichungen berechnet

$$u_{ji}^{n+1} = u_{ji}^n + \delta u_{ji}, \quad (5.45)$$

wobei an dieser Stelle die Schreibweise $\mathbf{u}_i = u_{ji}$, mit $j = \{0, 1, 2\}$ eingeführt werden soll. Der Index j steht für die physikalische Größe, also für die Vektorkomponenten Gleichung (5.10), der Index i , wie bisher, für die diskrete räumliche Auflösung. Die Methode ist ein Mehrschrittverfahren und greift deshalb auf zuvor bereits berechnete Datenpunkte u_{ji}^n zurück. Man benötigt demnach Startwerte (**AB**) u_{ji}^0 , um eine erste Lösung zu berechnen, und wiederholt dann die Methode bis das Verfahren für einzelne Zeitschritte konvergiert.

Im Speziellen wird der Integrand in Gleichung (5.7) zur Verfahrensfunktion $\mathbf{D}_i = \langle \mathcal{D}_\xi \mathbf{F}_i - \mathbf{V}_i - \mathbf{W}_i - \mathbf{G}_i \rangle_{\mathcal{L}_i}$ zusammengefasst, womit die Entwicklungsgleichung der θ -Methode als

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t} + \theta \mathbf{D}_i(\mathbf{u}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^{n+1}) + (1 - \theta) \mathbf{D}_i(\mathbf{u}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^n) &= 0 \\ \Leftrightarrow \mathbf{A}_i(\mathbf{u}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^{n+1}, \mathbf{u}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^n) &= 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

geschrieben werden kann. In diesem Schritt wird gleichzeitig die nichtlineare Matrixfunktion

$$A_{ji} = 0 \quad (5.47)$$

in Komponentenschreibweise mit $\mathbf{A}^{\{0,1,2\} \times \{r_{\min} \dots r_{\max}\}}$ definiert. Es handelt sich um keine quadratische Matrix, sondern sie beinhaltet über ihren ersten Index die Anzahl der Erhaltungsgrößen und über ihren zweiten die Auflösung. Eine Linearisierung von Gleichung

⁴⁷Während explizite Methoden die Verfahrensfunktion zu bekannten Lösungen berechnen, benötigen die impliziten einen wohlgewählten Vorschlag zur Lösung zum Zeitschritt t^{n+1} (Gleichung 5.43).

(5.47) liefert

$$\tilde{A}_k + \frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{u}_l} \delta \tilde{u}_l = 0 \quad \text{mit } j = \left\lfloor \frac{k-1}{r_{\max}} \right\rfloor, \quad i = \lfloor k-j+1 \rfloor, \quad (5.48)$$

also eine Gleichung der Form $y = mx + b$, wobei δu_l die gesuchten Korrekturen zu den Lösungen (5.45) sind. Die Matrix ist über eine Indextransformation ($A_{ji} \mapsto \tilde{A}_k$) zu einer einfach indizierten Größe (Vektor) mit $k, l \in \{r_{\min} \dots 3r_{\max}\}$ umgeschrieben, wobei die Gaußklammer oder Abrundungsfunktion verwendet wurde, die auf die nächste Ganzzahl abrundet (siehe auch Anhang C). Die Henyey-Matrix wird nun als die quadratische Jacobi-Matrix

$$\mathbf{H} \doteq \frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{u}_l} \quad (5.49)$$

definiert und erfüllt zusammen mit der Forderung einer nichtverschwindenden Determinante (nicht singular) $\det \mathbf{H} \neq 0$ die Voraussetzungen einer invertierbaren Matrix ($\exists \mathbf{H}^{-1}$). Dies sind die notwendigen Voraussetzungen zur Lösbarkeit der umgestellten Gleichung (5.48) und führt zu einer der Korrekturen

$$\delta \tilde{u}_{ji} = -\mathbf{H}^{-1} A_{ji}. \quad (5.50)$$

Während in Bodenheimer u. a. (2007) und Kippenhahn u. a. (1967) über Operator-Splitting die Gleichung weiter vereinfacht wird, benutzt `hedis 2.0` die effizienten GSL-Bibliotheken, um Gleichung (5.50) über eine Dreieckszerlegung (LR-Zerlegung, z.B. Bronštejn und Musiol 2008) numerisch zu lösen.

Die über (5.45) und (5.50) neu berechnete Lösung \tilde{u}_{ji}^{n+1} (5.45) wird jetzt als neuer Startwert gesetzt, um die Korrekturen stetig zu verbessern, bis die Konvergenzbedingung

$$\left| \frac{\delta \tilde{u}_{ji}}{\tilde{u}_{ji}^{n+1}} \right| < \epsilon \quad (5.51)$$

erfüllt ist und $u_{ji}^{n+1} = \tilde{u}_{ji}^{n+1}$ gilt. Dabei ist $\epsilon = 10^{-4}$ eine hinreichende Fehlerschranke zur Konvergenz des Verfahrens. In Abbildung 5.3 ist der schematische Programmablaufplan des Verfahrens gezeigt. Der Terminator erwartet eine Approximation zur Lösung des neuen Zeitschrittes $\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}$ (Prädiktor Schritt). Anschließend wird eine Lösung zur Approximation erzeugt. Sind die Approximationen zu ungenau, greift die Kontrollinstanz und das Lösungsverfahren wird $m \leq m_{\max}$ -fach wiederholt, bis Konvergenz erreicht wird (Korrektor Schritt).

5.3.2 Optimierung des Konvergenzverhaltens

Das Konvergenzverhalten kann bezüglich Geschwindigkeit und Stabilität über folgende Methoden verbessert werden.

Schätzen der Approximation

Eine Approximation $\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1}$ muss so geschätzt werden, dass die Rechenzeit nicht durch unnötige Iterationsschritte verlängert wird. Dazu wird die Änderung zwischen dem neuen und dem vorangegangenen Zeitschritt geschätzt, mit einem Sicherheitsfaktor ϵ_1 multipliziert und zur aktuellen Lösung

$$\hat{\mathbf{u}}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \epsilon_1 (\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_i^{n-1}) \quad (5.52)$$

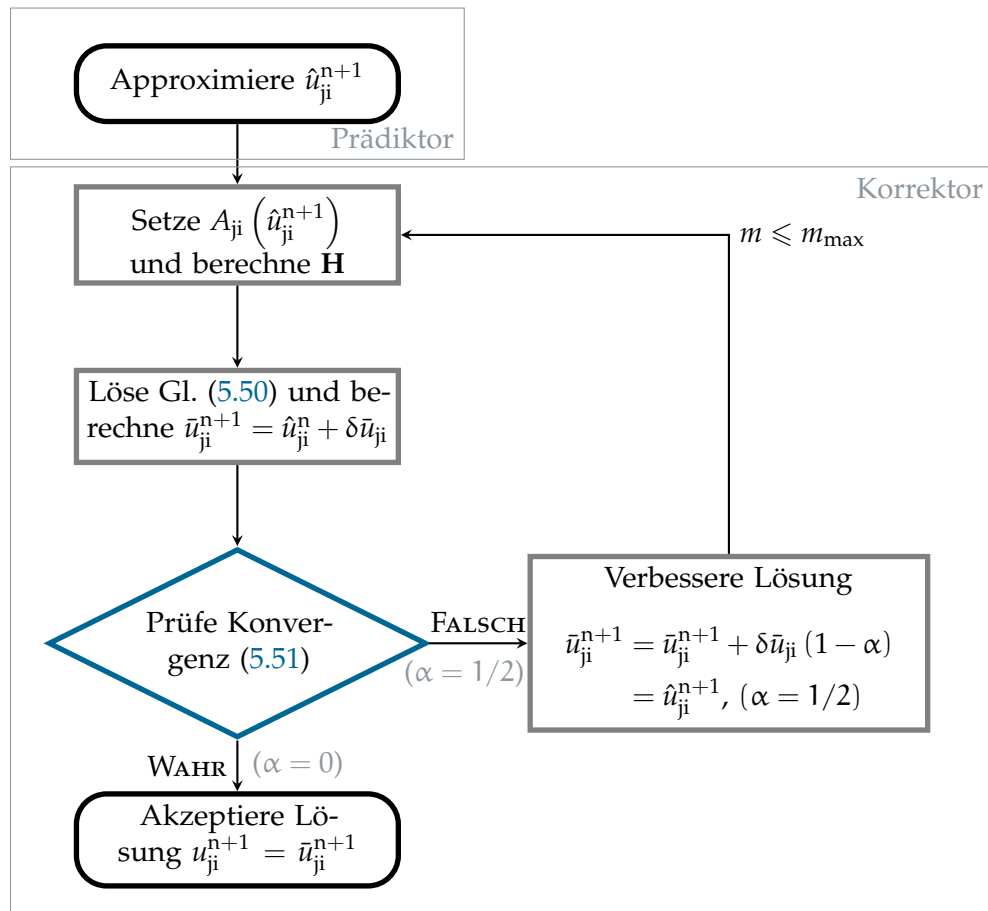


Abbildung 5.3: Struktogramm der HM als Prädiktor-Korrektorverfahren. Die Kontrollinstanz „Prüfe Konvergenz“ prüft das Konvergenzverhalten ($\alpha = 0$). Für $\alpha = 1/2$ kann die Konvergenzgeschwindigkeit erhöht werden.

addiert. Um ϵ_1 zu quantifizieren, wird Abbildung 5.4 herangezogen. Dort ist die mittlere Anzahl der Iterationen bis zur Konvergenz der Lösung in Abhängigkeit von ϵ_1 gezeigt. Der Fit an die Datenpunkte folgt einer Exponentialfunktion mit steigendem ϵ_1 . Für $\epsilon_1 \lesssim 10^{-6}$ ist die Anzahl der Iterationen nahezu konstant bei ~ 14 . Obwohl das Zeitdifferential in Gleichung (5.7) für sehr kleine ϵ_1 (5.52) verschwindet und somit nicht mehr zur Entwicklung beiträgt, konvergieren die Lösungen schneller (weniger Iterationsschritte). Für große $\epsilon_1 \gtrsim 0$ können keine Lösungen mehr erzeugt werden. Deshalb wird der Parameter $\epsilon_1 = 10^{-6}$ gewählt. Die Ergebnisse aus Abbildung 5.4 sind repräsentativ für *hedis* 2.0, weshalb ϵ_1 nicht variabel einstellbar, sondern im Modul `integ_H.c` festgelegt ist.

Konservative Wahl der Korrekturen

Bei Kippenhahn u. a. (1967) wird gezeigt, dass das Verfahren innerhalb $m \approx 10$ Iterationsschritte konvergiert. Es können jedoch Fälle auftreten, bei denen das Verfahren nicht konvergiert, da nicht-lineare Gleichungen über ein lineares Lösungsverfahren berechnet

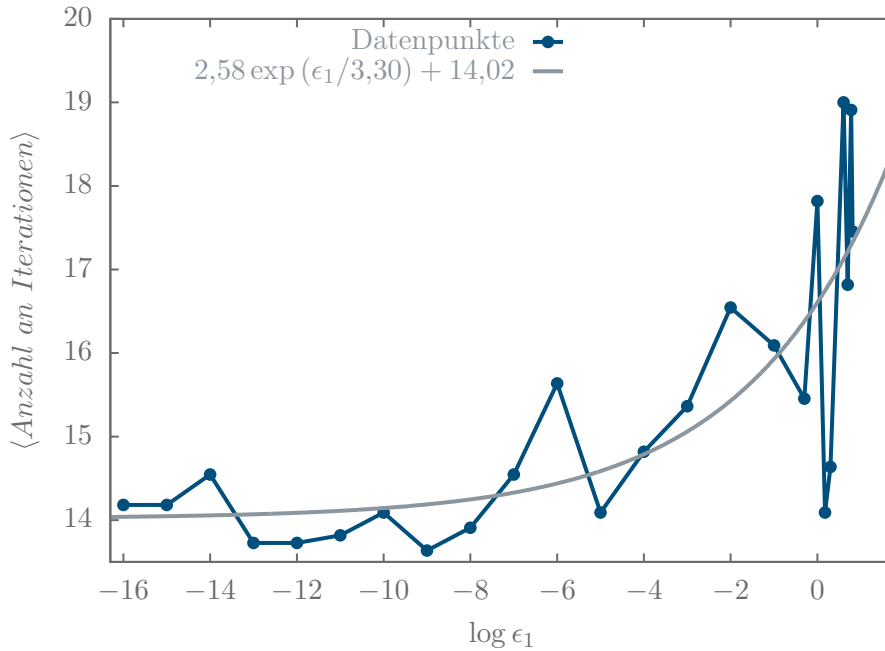


Abbildung 5.4: Anzahl der mittleren Iterationsschritte zum Erzeugen einer Lösung in Abhängigkeit des Parameters ϵ_1 (Gleichung 5.52). Für $\epsilon_1 \lesssim 10^{-6}$ tendiert die mittlere Anzahl an Iterationen zu einem konstanten Wert und rechtfertigt somit die Festlegung der Zahl $\epsilon_1 = 10^{-6}$.

werden. Deshalb wird nach jeder Iteration die Bedingung

$$\{m_{\max} \geq m \geq 8\} \wedge \left\{ \left| \frac{\delta \tilde{u}_{ji}}{\tilde{u}_{ji}^{n+1}} \right| > \epsilon \right\} \quad (5.53)$$

überprüft, was der Verzweigung „Prüfe Konvergenz“ in Abbildung 5.3 entspricht. Liefert die Abfrage den Wert FALSCH, werden die Korrekturen (5.50) zusätzlich mit einem Faktor $\alpha = 1/2$ (Prozessfeld „Verbessere Lösung“) multipliziert und erneut berechnet. Damit dies nicht zu einer Endlosschleife ausartet, wird zusätzlich eine obere Schranke $m_{\max} = 35$ als Programmvariable festgelegt.

5.3.3 Berechnung der Henyey-Matrix

Zur Lösung der linearen Gleichung (5.50) muss zunächst die Henyey-Matrix berechnet und invertiert werden. Zusammen mit den einfach indizierten Größen (5.49) wird diese entweder über Vorwärts- oder zentrale Differenzen

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{u}_l} \approx \frac{\tilde{A}_k(\tilde{u}_{r_{\min} \dots l-1}, \tilde{u}_l + \Delta \tilde{u}_l, \tilde{u}_{l+1} \dots 3r_{\max}) - \tilde{A}_k(\tilde{u}_{r_{\min} \dots 3r_{\max}})}{\Delta \tilde{u}_l}, \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial \tilde{A}_k}{\partial \tilde{u}_l} \approx \frac{\tilde{A}_k(\tilde{u}_{r_{\min} \dots l-1}, \tilde{u}_l + \Delta \tilde{u}_l, \tilde{u}_{l+1} \dots 3r_{\max}) - \tilde{A}_k(\tilde{u}_{r_{\min} \dots l-1}, \tilde{u}_l - \Delta \tilde{u}_l, \tilde{u}_{l+1} \dots 3r_{\max})}{2\Delta \tilde{u}_l} \quad (5.55)$$

numerisch berechnet. Ein analytischer Ausdruck kann zwar abgeleitet werden, ist jedoch sehr aufwendig und unflexibel und liefert kaum verbesserte Resultate. Dies wurde für den Vorwärtsdifferenzenquotienten von Vanden und Orkwis (1996) gezeigt. Der

zentrale Differenzenquotient erhöht außerdem die Ordnung von $\mathcal{O}(\Delta\tilde{u}_1) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta\tilde{u}_1^2)$. Die Schrittweite des Differentials ist über

$$\Delta\tilde{u}_1 = \begin{cases} \epsilon_2 \tilde{u}_1, & \text{wenn } \tilde{u}_1 \neq 0, \\ \epsilon_2, & \text{wenn } \tilde{u}_1 = 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

definiert. Die Fallunterscheidung muss gemacht werden, um die unerlaubte Division durch 0 zu verhindern. Der Faktor $\epsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}^+$, $\epsilon_2 = 10^{-6}$ ist größer als der von Vanden und Orkwis (1996) vorgeschlagene Wert $\epsilon_2 \sim 10^{-9}$, genügt aber den Genauigkeitsanforderungen bezüglich der Maschinengenauigkeit. Die Henyey-Matrix wird in Anhang C noch einmal in ihrer Blockdarstellung angegeben.

5.4 Stabilitätsbetrachtungen und Zeitschrittberechnung

Neben dem impliziten Zeitintegrationsverfahren erster Ordnung ($\mathcal{O}(t^1)$) sind in *hedis* 2.0 ebenfalls Runge-Kutta-Verfahren erster und vierter Ordnung (Hairer u. a. 1993) implementiert. Explizite Zeitintegrationsverfahren unterliegen strengen Stabilitätsbedingungen, unter denen die Verfahren konvergieren. Diese werden über die CFL-Bedingung⁴⁸

$$\Delta t_{\text{cfl}}^n = c_{\text{cfl}} \max \left(\left| \frac{\Delta x}{v_r + c_s} \right| \right) \quad (5.57)$$

mit einem Sicherheitsfaktor $0 < c_{\text{cfl}} \leq 1$ wiedergegeben, jedoch schließen sie viskose, nicht-lineare Terme des Gleichungssystems (5.1, 5.2, 5.3) nicht mit ein. Die Geschwindigkeiten entsprechen den maximalen Eigenwerten der Jacobi-Matrix (5.16). Zlatev u. a. (2010), Faragó u. a. (2010) und Farago (2013) untersuchen die Stabilitätsregion der θ -Methode und erweitern diese um eine Richardson-Extrapolation. Ihre Untersuchungen zeigen, dass die Methode nur für bestimmte Werte für θ stabil ist, was aufgrund des Umschaltens zwischen impliziter und expliziter Methode zu erwarten ist.

5.4.1 Berechnung der numerischen Stabilität

Da *hedis* 2.0 viskose Prozesse berücksichtigen kann, wird im Vergleich zu den bereits erwähnten Arbeiten eine Stabilitätsanalyse der θ -Methode durchgeführt, welche viskose Terme einschließen. Im rein expliziten ($\theta = 0$), nicht-viskosen Fall wird die gewöhnliche CFL-Bedingung erwartet. Ansonsten soll die Frage beantwortet werden, ob die gemischten und voll impliziten Verfahren Stabilitätsbedingungen der Zeitschrittweitenberechnung unterliegen.

Modellannahmen

Anstatt des Ausgangssystems (2.14, 2.15, 2.16) wird die relativ einfache Advektions-Diffusions-Gleichung

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{A} \partial_x \mathbf{u} - \mathbf{B} \partial_x^2 \mathbf{u} = 0 \quad (5.58)$$

verwendet. Dabei sind die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} die Advektions- und die Diffusionsmatrix, die wegen der Homogenitätsbedingung (5.15) als konstant angenommen werden können.

⁴⁸Stabilitätsbedingung nach (CFL) Courant, Friedrichs und Lewy (Courant u. a. 1928; Hairer und Wanner 1996).

Weiterhin werden die komplizierten KT-Flüsse durch die ähnlichen, aber einfacheren Rusanov-Flüsse (Rusanov 1962; Toro 1999)

$$\mathcal{F}_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}(\mathbf{u}_i^n) + \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i+1}^n)) + a(\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i+1}^n)] \quad (5.59)$$

mit $a \equiv a_{i+1/2}^+$ und $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{e/w}$ ersetzt. Es wird nur eine Richtung der Signalausbreitungsgeschwindigkeit (Eigenwerte der Advektionsmatrix A) betrachtet und die Randflüsse werden über die lineare Rekonstruktion berechnet.

Im Folgenden wird nun eine Von-Neumann-Stabilitätsanalyse (L2-Stabilitätsanalyse) durchgeführt (Thomas 1995), die den zeitlichen und räumlichen periodischen Fehler der diskretisierten Gleichung in einer Fourierreihe entwickelt. Die Koeffizienten der Fourierreihe beschreiben dann die Evolution des numerischen Verfahrens über eine Amplifikationsmatrix. Gilt für den Spektralradius dieser Matrix $|\rho(\omega)|^2 \leq 1$ (Stabilität), kann das Verfahren als numerisch stabil betrachtet werden. Per Annahme geht die diskrete Gleichung im zeitlichen und räumlichen Grenzwert in die kontinuierliche Gleichung über, womit das Verfahren konsistent ist. Konsistente und stabile Verfahren sind konvergente Verfahren.

Stabilitätsanalyse über diskrete Fourier-Transformation

Zur Vereinfachung der über die θ -Methode (5.43) diskretisierten Gleichung (5.58) findet man zusammen mit den Rusanov-Flüssen (5.59)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{n+1} + \theta \left[\frac{\mathbf{AR}}{2} (\mathbf{u}_{i+1}^{n+1} - \mathbf{u}_{i-1}^{n+1}) - \frac{aR}{2} (\mathbf{u}_{i+1}^{n+1} - 2\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_{i-1}^{n+1}) \right. \\ \left. - \mathbf{Br} (\mathbf{u}_{i+1}^{n+1} - 2\mathbf{u}_i^{n+1} + \mathbf{u}_{i-1}^{n+1}) \right] = \\ \mathbf{u}_i^n - (1 - \theta) \left[\frac{\mathbf{AR}}{2} (\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_{i-1}^n) - \frac{aR}{2} (\mathbf{u}_{i+1}^n - 2\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i-1}^n) \right. \\ \left. - \mathbf{Br} (\mathbf{u}_{i+1}^n - 2\mathbf{u}_i^n + \mathbf{u}_{i-1}^n) \right], \end{aligned} \quad (5.60)$$

wobei die Abkürzungen

$$r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad \text{und} \quad R = \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (5.61)$$

verwendet wurden. Die Gleichung ist nach den Zeitschritten sortiert: Auf der linken Seite stehen die Lösungen \mathbf{u} zum Zeitpunkt $n + 1$ und auf der rechten die Lösungen zum Zeitpunkt n . Im nächsten Schritt wird eine diskrete Fourier-Transformation durchgeführt (Thomas 1995). Diese ist über die Reihenentwicklung

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} \mathbf{u}_k \quad (5.62)$$

mit $\xi \in [-\pi, \pi]$ gegeben und bildet das zeitdiskrete Signal auf raumdiskrete periodische Funktionen ($e^{-ik\omega}$) ab. Setzt man $m = k \pm 1$ in den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\omega} \mathbf{u}_{k\pm 1} = \quad (5.63)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i(m\pm 1)\omega} \mathbf{u}_m = S_{\pm} \hat{\mathbf{u}}(\omega) \quad (5.64)$$

ein, ergibt sich die Definition der Verschiebeoperatoren $S_{\pm} \hat{\mathbf{u}}(\varpi) = e^{\pm i\varpi} \hat{\mathbf{u}}(\varpi)$, womit Gleichung (5.60) transformiert werden kann. Unter Verwendung der Eulerschen Formel und (5.61) kann die Matrix \mathbf{M}

$$\mathbf{M} \doteq \left(\frac{\mathbf{A}i}{\Delta x} \sin(\varpi) + (1 - \cos(\varpi)) \left(\frac{a}{\Delta x} + \frac{2\mathbf{B}}{\Delta x^2} \right) \right) \quad (5.65)$$

definiert und für die transformierte Gleichung (5.60)

$$[\mathbf{1} + \Delta t \theta \mathbf{M}] \hat{\mathbf{u}}^{n+1}(\varpi) = [\mathbf{1} - \Delta t(1 - \theta) \mathbf{M}] \hat{\mathbf{u}}^n(\varpi) \quad (5.66)$$

gefunden werden. Die Matrix \mathbf{M} ist aus der Advektions- und der Diffusionsmatrix (\mathbf{A} und \mathbf{B}) zusammengesetzt. Unter der Annahme, dass \mathbf{A} , \mathbf{B} gemeinsam diagonalisierbar sind, ist \mathbf{M} ebenfalls diagonalisierbar und die Eigenwerte sind über $\det(\mathbf{M} - m_k \mathbf{1}) = 0$, $k \in \{1, 2, 3\}$ gegeben. Damit ergibt sich der Spektralradius zu

$$\rho(\varpi) = \frac{1 - \Delta t(1 - \theta) m_k}{1 + \Delta t \theta m_k} \quad (5.67)$$

und hängt nur noch von den Eigenwerten $m_k(\varpi)$ ab. Um Stabilität zu gewährleisten, muss für den Spektralradius die Bedingung

$$|\rho(\varpi)|^2 = 1 + \frac{\Delta t^2(1 - 2\theta) m_k \bar{m}_k - \Delta t(m_k + \bar{m}_k)}{(1 + \Delta t \theta \Re(m_k))^2 + \Delta t^2 \theta^2 \Im^2(m_k)} \leq 1 \quad (5.68)$$

mit dem komplex konjugierten Eigenwert \bar{m}_k erfüllt sein (Thomas 1995). Im Nenner stehen nur noch quadratische Terme, weshalb das Vorzeichen des gesamten Ausdrucks immer positiv ist. Deshalb kann die 1 eliminiert und der Ausdruck mit dem Nenner, ohne dass sich das Vorzeichen ändert, multipliziert werden. Der Ausdruck vereinfacht sich somit zu

$$\Delta t^2(1 - 2\theta)(\Re^2(m_k) + \Im^2(m_k)) - 2\Delta t \Re(m_k) \leq 0. \quad (5.69)$$

Die Eigenwerte der Matrix \mathbf{M} können mit den Eigenwerten von $\det(\mathbf{A} - \lambda_k) = 0$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$ und $\det(\mathbf{B} - \sigma_k) = 0$, $\sigma_k \in \mathbb{R}$ ausgedrückt werden, wobei $a = \max(\lambda_k)$ per Voraussetzung gilt. Damit ist es möglich, die Real- und Imaginärteile in Gleichung (5.69) zu berechnen:

$$\begin{aligned} \Re(m_k) &= -\frac{\sin(\varpi)}{\Delta x} \Im(\lambda_k) + (1 - \cos(\varpi)) \left(\frac{a}{\Delta x} + \frac{2\Re(\sigma_k)}{\Delta x^2} \right), \\ \Im(m_k) &= \frac{\sin(\varpi)}{\Delta x} \Re(\lambda_k) + 2 \frac{(1 - \cos(\varpi))}{\Delta x^2} \Im(\sigma_k). \end{aligned} \quad (5.70)$$

Da die Eigenwerte λ_k , $\sigma_k \in \mathbb{R}$ reell sind, ist die Stabilitätsbedingung durch

$$\Delta t(1 - 2\theta) \leq \frac{\Delta x}{a} \frac{\left(1 + \frac{2\sigma_k}{\Delta x a}\right)}{1 + 4 \sin^2\left(\frac{\varpi}{2}\right) \frac{\sigma_k}{\Delta x a} \left(1 + \frac{\sigma_k}{\Delta x a}\right)} \quad (5.71)$$

gegeben. Des Weiteren wird die Stabilitätsregion minimal, wenn der Ausdruck im Nenner dominant wird. Deshalb wird $\lambda_k \leq a$ und $\max(\sin^2(\frac{\varpi}{2})) = 1$ verwendet und führt schließlich zur Bedingung

$$\Delta t(1 - 2\theta) \leq \frac{\Delta x^2}{(a\Delta x + 2\sigma_k)}, \quad (5.72)$$

die für unterschiedliche θ erfüllt sein muss. Da a die maximale Signalausbreitungsgeschwindigkeit des Systems ist, geht die Bedingung ohne Viskosität ($\sigma_k = 0$) und für ein explizites Euler-Verfahren ($\theta = 0$) in die CFL-Bedingung (5.57) (ohne den Sicherheitsfaktor) über. Weiterhin werden folgende drei Fälle unterschieden:

Fall $\theta < 1/2$ und $a, \sigma_k > 0$: Stabilität ist nur unter der Bedingung (5.72) gegeben.

Fall $\theta = 1/2$ und $a, \sigma_k > 0$: Die linke Seite von (5.72) verschwindet und die Aussage ist immer wahr. Deshalb ist die Trapezregel bedingungslos stabil.

Fall $\theta > 1/2$ und $a, \sigma_k > 0$: Die linke Seite von (5.72) wird negativ. Die Bedingung ist bedingungslos stabil, insofern $a\Delta x + 2\sigma_k > 0$ gewährleistet ist.

Insbesondere sind die impliziten Fälle stabil und sollten demnach beliebig große Zeitschritte benutzen können. Da das Verfahren also stabil und konsistent ist, ist das Verfahren auch konvergent.

Um einen Ausdruck für das in `hedis 2.0` benutzte Modell zu bekommen, werden den Eigenwerten noch die entsprechenden Ausdrücke zugeordnet. Die maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten sind über $a = v_r + c_s$ gegeben und für die Viskosität gilt nach Duschl u. a. (1998) $\sigma_k = \beta\Delta x v_\varphi$, was zum Ausdruck

$$\Delta t (1 - 2\theta) \leq \frac{\Delta x^2}{(\Delta x (v_r + c_s) + 2\beta\Delta x v_\varphi)} \quad (5.73)$$

führt. Die Summe aus maximaler Radial- und Schallgeschwindigkeit sowie die Azimutalgeschwindigkeit sind positive Größen, weshalb die Voraussetzung erfüllt und das implizite Verfahren tatsächlich bedingungslos stabil ist.

Diese Analyse zeigt die Stabilität der θ -Methode. Die Stabilität der HM (5.48) wurde noch nicht gezeigt und muss in aufbauenden Untersuchungen analysiert werden. Dennoch muss festgehalten werden, dass die beschriebene Methode mit Erfolg in der Sternentwicklung benutzt wird (z.B. Kippenhahn u. a. 1967) und deshalb als experimentell funktionstüchtig betrachtet werden kann.

5.4.2 Festlegung des impliziten Zeitschrittes

Da die θ -Methode in Kombination mit den Rusanov-Flüssen A-Stabilität zeigt (implizite Methode), muss ein Ausdruck für den numerischen Zeitschritt gesetzt werden, welcher die Berechnung nicht unnötig beschränkt. Gleichzeitig wächst der numerische Fehler mit größeren Zeitschritten, weshalb eine adäquate Abschätzung der Zeitschrittweite gesetzt werden muss. Dazu wird der Vorschlag von Blank (2010) verwendet:

$$\Delta t_{itw}^{n+1} = \max \left(\Delta t_{cfl}^{n+1}, \frac{c_{itw}\Delta t^n}{\max_{i \in \{r_{\min}-1 \dots r_{\max}+1\}} \left| 1 - \frac{u_{0,i}^n}{u_{0,i}^{n-1}} \right|} \right). \quad (5.74)$$

Die Lösungen der Flächendichte des aktuellen Schrittes werden mit denen des vorhergehenden Schrittes verglichen und die maximale Abweichung im räumlichen Verlauf bestimmt. Im Vergleich mit dem alten Zeitschritt und einem Sicherheitsfaktor $c_{itw} \in \{0,01$

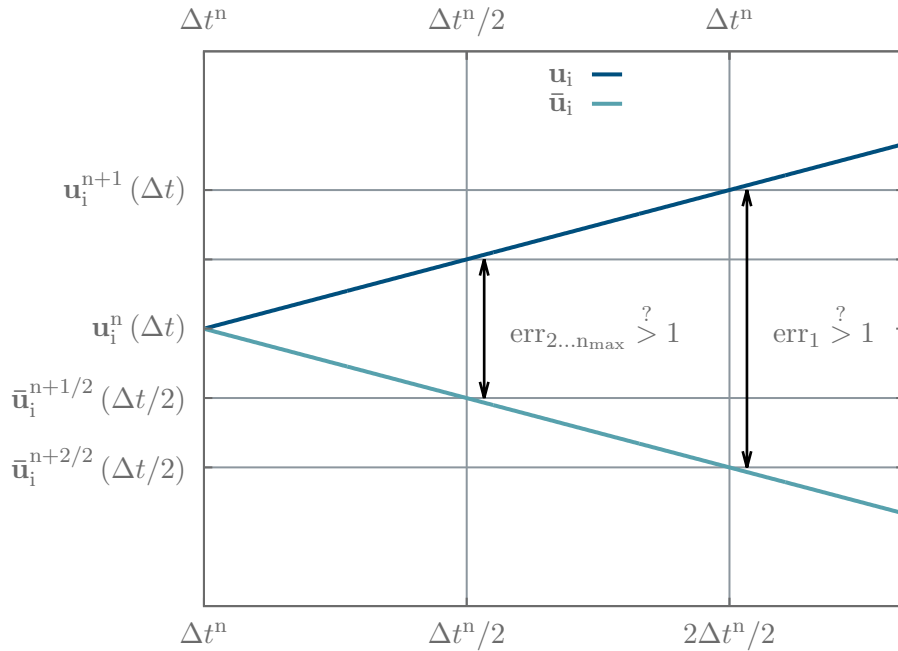


Abbildung 5.5: Funktionsweise der ASK. Wird der Zeitschritt halbiert, verringert sich der Fehler err zwischen beiden Lösungen. Wird die Fehlerschranke unterschritten, ist die Lösung akzeptiert und ein neuer Zeitschritt wird berechnet.

– 1} ergibt sich eine Abschätzung für den neuen Zeitschritt, der die Änderungen innerhalb der Lösungen berücksichtigt. Finden also relevante Umverteilungsprozesse im Fluid statt, wird der Zeitschritt automatisch verringert, um diese Änderungen berücksichtigen zu können. Als minimaler Zeitschritt wird Gleichung (5.57), die CFL-Zeit, angesetzt.

5.4.3 Eine automatische Schrittweitenkontrolle

Das implizite Verfahren lässt einen gewissen Freiraum in der Wahl der Schrittweite. Um sicherzustellen, dass die Lösungen immer konvergieren, wird ein Mechanismus vorgeschlagen, welcher Lösungen anhand des numerischen Fehlers entweder zulässt, oder verwirft. Dieser Mechanismus wird automatische Schrittweitenkontrolle (ASK) genannt und wird zum Beispiel in Hairer u. a. (1993) und Zlatev u. a. (2010) grundlegend eingeführt. Formal werden drei Schritte vorgenommen:

Erzeugung einer Lösung zu Δt : Es wird ein Zeitschritt vorgeschlagen, und die Lösungen \mathbf{u}_i^{n+1} zu diesem Zeitschritt berechnet. Dies entspricht Lösungen auf der dunkelblauen Linie in Abbildung 5.5, über die θ -Methode Gleichung (5.46) berechnet.

Erzeugung von Lösungen zu $\Delta t/2$ und $2\Delta t/2$: Die Lösung aus Schritt 1 wird gespeichert und die Prozedur mit dem halben Zeitschritt wiederholt. Diese Zwischenlösungen werden nun verwendet, um den ganzen Zeitschritt über zwei halbe Zeitschritte zu berechnen

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} = \mathbf{u}_i^n + \frac{1}{2}\Delta t \left[\theta \mathbf{D}_i \left(\bar{\mathbf{u}}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^{n+1/2} \right) + (1 - \theta) \mathbf{D}_i \left(\mathbf{u}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^n \right) \right] \quad (5.75)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^{n+2/2} = \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t \left[\theta \mathbf{D}_i \left(\bar{\mathbf{u}}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^{n+2/2} \right) + (1 - \theta) \mathbf{D}_i \left(\bar{\mathbf{u}}_{r_{\min} \dots r_{\max}}^{n+1/2} \right) \right]. \quad (5.76)$$

Der Vorteil liegt darin, dass der Verfahrensfehler der numerischen Integration kleiner wird, da die zeitliche Entwicklung über kleinere (zeitliche) Extrapolationen stattfindet. Somit stehen mit Schritt 1 und 2 unterschiedliche Lösungen zur Verfügung, die miteinander verglichen werden können. Schritt 2 entspricht der hellblauen Linie in Abbildung 5.5.

Korrekturmechanismus: Es wird der numerische Fehler err zwischen den Lösungen berechnet:

$$err = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}}{\mathbf{sc}_i} \right)^2}, \quad (5.77)$$

$$\text{mit } \mathbf{sc}_i = \mathbf{A}_{\text{tol}} + R_{\text{tol}} \max(|\mathbf{u}_i^{n+1}|, |\bar{\mathbf{u}}_i^{n+1}|), \quad (5.78)$$

wobei N die räumliche Auflösung ist. Die Variable \mathbf{sc}_i steht für die englische Bezeichnung „satisfy componentwise“ und besagt, dass alle räumlichen Komponenten berücksichtigt werden. \mathbf{A}_{tol} bezeichnet die absoluten Fehler der physikalischen Variablen und R_{tol} , den relativen Fehler, die beide als Parameter gesetzt werden. Der Korrekturmechanismus greift, indem die Lösung \mathbf{u}_i^{n+1} verworfen wird, falls

$$err_1 > 1 \quad (5.79)$$

gilt. In diesem Fall wird der Zeitschritt halbiert und die Rechnung n -Mal wiederholt, bis $err_n \leq 1$, $n \leq n_{\text{max}}$ gilt⁴⁹. Ist der Fehler kleiner als 1, wird die Lösung akzeptiert. Dies ist in Abbildung 5.5 gezeigt, indem der Abstand err mit dem halben Zeitschritt immer kleiner wird.

Wie bereits am Ende von Abschnitt 5.4.1 angemerkt, wurde die Stabilität der **HM** bisher nicht gezeigt. Die **ASK** vergrößert diesbezüglich die Stabilitätsregion der **HM**. Der schematische Ablauf ist über das Ablaufdiagramm 5.6 gezeigt und erweitert bei Verwendung der **ASK** das Diagramm 5.3.

Probleme der **ASK** sind zum einen die Rechendauer, da der implizite Löser mindestens drei Mal aufgerufen werden muss, um eine gültige Lösung zu erzeugen⁵⁰. Ein weiteres Problem liegt in der Schätzung der Zeitschrittweite Δt , die über den Fehler (5.77) mit

$$\Delta t_{\text{asc}}^{n+1} = \max \left(\Delta t_{\text{cfl}}^{n+1}, \Delta t^n \min \left(\text{asc}_{\text{max}}, \max \left(\text{asc}_{\text{min}}, \text{asc} \sqrt{1/err} \right) \right) \right) \quad (5.80)$$

berechnet wird. Nach Hairer u. a. (1993) ist $\text{asc}_{\text{min}} = 0,4$ der minimale und $\text{asc}_{\text{max}} = 5$ der maximale Schrittweitzuwachs und $\text{asc} = 0,8$ ein typischer Sicherheitsfaktor⁵¹. Ist die Schätzung von Beginn an zu groß, kann das System eine Lösung \mathbf{u}_i^{n+1} unter Umständen nicht berechnen, da die **HM** eventuell instabil wird. Dies hat sich in der Praxis jedoch als selten erwiesen. Der minimale Zeitschritt ist wieder über Gleichung (5.57) festgelegt.

⁴⁹Der Index des Fehlers err ist über die Anzahl der verworfenen Lösungen definiert.

⁵⁰An dieser Stelle könnte in Zukunft über eine Parallelisierung zwischen \mathbf{u}_i^{n+1} und $\mathbf{u}_i^{n+2/2}$ (erster Prozess im Diagramm 5.6) nachgedacht werden, wodurch sich die Rechenzeit um den Faktor $2/3$, aufgrund der Berechnung einer Lösung mittels $1 \times \Delta t$ und $2 \times \Delta t/2$, verringern würde.

⁵¹„asc“ steht für die englische Abkürzung automatic stepsize control, also **ASK**

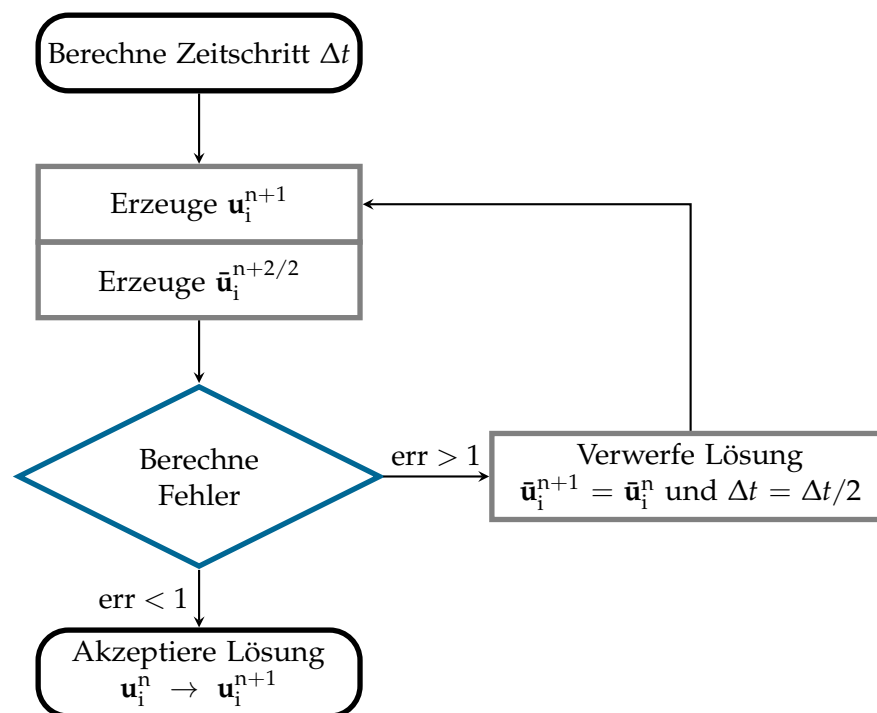


Abbildung 5.6: Ablaufdiagramm *ASK* in *hedis* 2.0, wobei die Prozesse 1 und 2 als zusammenhängend dargestellt sind (Abschnitt 5.4.3).

5.5 Die Implementierung

In diesem Abschnitt soll auf den Programmaufbau und -ablauf genauer eingegangen werden. Dieser Abschnitt ist auch als Anleitung zum Gebrauch und zur eigenständigen Programmierung von *hedis* 2.0 gedacht und deshalb ausführlicher gehalten.

hedis 2.0 ist in der Programmiersprache C verfasst und benutzt GSL-Bibliotheken (Galassi u. a. 2009) zur Speicherverwaltung von Vektoren und Matrizen, sowie standardisierter Berechnungen wie beispielsweise der inversen Henyey-Matrix (5.49). Die Verwendung standardisierter Bibliotheken hat die Vorteile, dass die verwendeten Algorithmen getestet und sehr effizient und performant in der Verwendung sind. Dies vereinfacht und verkürzt den Programmieraufwand sowie Tests einzelner Module erheblich. *hedis* 2.0 verwendet ebenfalls Konzepte in Anlehnung an objektorientierte Sprachen, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden.

5.5.1 Idee zur objektorientierten Programmierung in C

C ist per se keine objektorientierte Sprache. Dennoch sollen einige Konzepte aus der Objektorientierung Anwendung finden. Dies betrifft vor allem die Abstraktion, die Datenkapselung und die Persistenz,⁵² um einen einfachen Austausch und problemlose Erweiterungen innerhalb des Programms garantieren zu können. Im Folgenden wird kurz auf die technische Umsetzung eingegangen, um die Modularität von *hedis* 2.0 zu

⁵²Persistenz beschreibt das Beibehalten von Daten, welche auch nach dem Abarbeiten einer Routine immer noch bereitstehen.


```

1  /*
   Copyright (C) 2016-2017
3  This program is licensed under the terms of the GNU General Public
   License (version 3) ...
   */
5
   // Einbinden von Präprozessor Direktiven/ Bibliotheken
7 #include <...>
9
   // Struktur Deklaration
struct DISK{
11     gsl_matrix *D;
   ...
13 };
   // Struktur Definition
15 struct DISK *disk (struct INIT_VALUES *, gsl_matrix *, double);
17 //EOF

```

Abbildung 5.7: Eine typische Header-Datei (unvollständiger Auszug aus `disk.h`) in `hedis 2.0`. Nach dem Lizenzierungsblock werden Präprozessor Direktiven eingebunden und danach die `SF` deklariert.

demonstrieren. Danach folgt eine Beschreibung des Programmaufbaus und -ablaufs des gesamten Programmpakets.

Modul-Deklaration und Definition in Header-Datei

Die Abstraktion wird mit Hilfe von Strukturfunktionen (`SF`) bewerkstelligt, die in abgewandelter Form den Ideen aus Herold und Arndt (2002), Kernighan und Ritchie (2008) und Schreiner (1994) entsprechen. Eine Struktur in C ist eine logische Einheit, die aus einer oder mehreren frei deklarierbaren Datentypen bestehen können. Eine Strukturfunktion verwaltet zusätzlich Funktionsargumente sowie Rückgabewerte und kann deshalb als abgeschlossenes Modul betrachtet werden.

Zunächst werden in einer Header-Datei (Abbildung 5.7) die nötigen Präprozessor Direktiven eingebunden (Zeile 6) und anschließend die Struktur `DISK` deklariert (Zeilen 9 - 12). Diese Struktur beinhaltet alle Datentypen (Zeile 10, 11), die als Rückgabewert der `SF` benötigt werden. In Zeile 14 wird die `SF` `disk` nun mit den Funktionsargumenten einer Struktur `INIT_VALUES`, einem `GSL`-Datentyp und einer `double` Variablen definiert. Der Pointer auf die `SF` `disk` erlaubt die Rückgabe (`return`-Anweisung) aller Funktionswerte der Funktion. Damit steht die `SF` nun zum Einbinden als abgeschlossenes Modul bereit.

Modul-Initialisierung in Programmdatei

Die Header-Datei muss nun in der Programmdatei (Abbildung 5.8) als Präprozessor Direktive (ab Zeile 6) eingebunden werden. Innerhalb der Initialisierung (Zeile 11) werden auch die internen, gekapselten Routinen eines Moduls implementiert. Über Zeile 13 wird der Speicher der kompletten `SF` auf dem dynamischen Speicher („Heap“) allokiert, in Zeile 17 separat die Strukturvariable `D`. Wird ein Modul, zum Beispiel `FLUXES` (Zeile 19), angefordert, wird der Heap automatisch belegt, aber nicht freigegeben. Um Speicherüberläufe zu verhindern, muss nach jedem Aufruf eines Moduls an entsprechender Stelle

```

1  /*
   Copyright (C) 2016-2017
3  This program is licensed under the terms of the GNU General Public
   License (version 3) ...
   */
5
6  #include <...>
7  #include "../fluxes/fluxes.h"
8  #include "disk.h"
9  ...
11 struct DISK *disk (struct INIT_VALUES *val, gsl_matrix *up, double time)
12 {
13     struct DISK *save = malloc (sizeof (struct DISK) + sizeof (*save));
14
15     size_t i, j;
16     // Allokiere Struktur Datentypen
17     save -> D = gsl_matrix_calloc ((*val).l, (*val).size);
18     // Rufe Modul zur Flussberechnung
19     struct FLUXES *flx = flux (val, up);
20
21     ...
22     // Initialisiere interne Variable DEX und berechne ...
23     gsl_matrix *DEX = gsl_matrix_calloc ((*val).l, (*val).size);
24
25     for (j = 0; j < (*val).l; j++)
26         for (i = (*val).rin-1; i <= (*val).imax; i++)
27             {
28                 gsl_matrix_set (DEX, j, i, (*val).deta * (
29                     gsl_matrix_get (flx -> F_num, j, i) -
30                     gsl_matrix_get (flx -> F_num, j, i-1)) /
31                     gsl_vector_get ((*val).vol, i) ... )
32             );
33     }
34
35     // Speicherfreigabe
36     gsl_matrix_free (flx -> F_num);
37     free (flx);
38     // Speichern der Strukturvariablen
39     gsl_matrix_memcpy (save -> D, DEX);
40
41     gsl_matrix_free (DEX);
42
43     return save;
44
45     //EOF
}

```

Abbildung 5.8: Eine typische Programmdatei (unvollständiger Auszug aus disk.c) in hedis 2.0. Das Modul disk.c wird für die expliziten Integrationsmethoden verwendet und ist strukturell einfacher als das Modul diskimpl.c, welches in Abbildung 5.9 schematisch dargestellt ist.

(zum Beispiel Zeile 36, 37) der Speicher wieder freigegeben werden. Interne Vektoren und Matrizen, die über die GSL-Bibliothek eingebunden werden, müssen gleichfalls initialisiert und am Ende wieder freigegeben werden, da diese Objekte auch als Strukturen definiert sind (Zeile 23, 41). Interne Berechnungen können nun implementiert werden (Zeile 25 - 33), und der Heap der SF wird über Zeile 39 befüllt. Über die return save

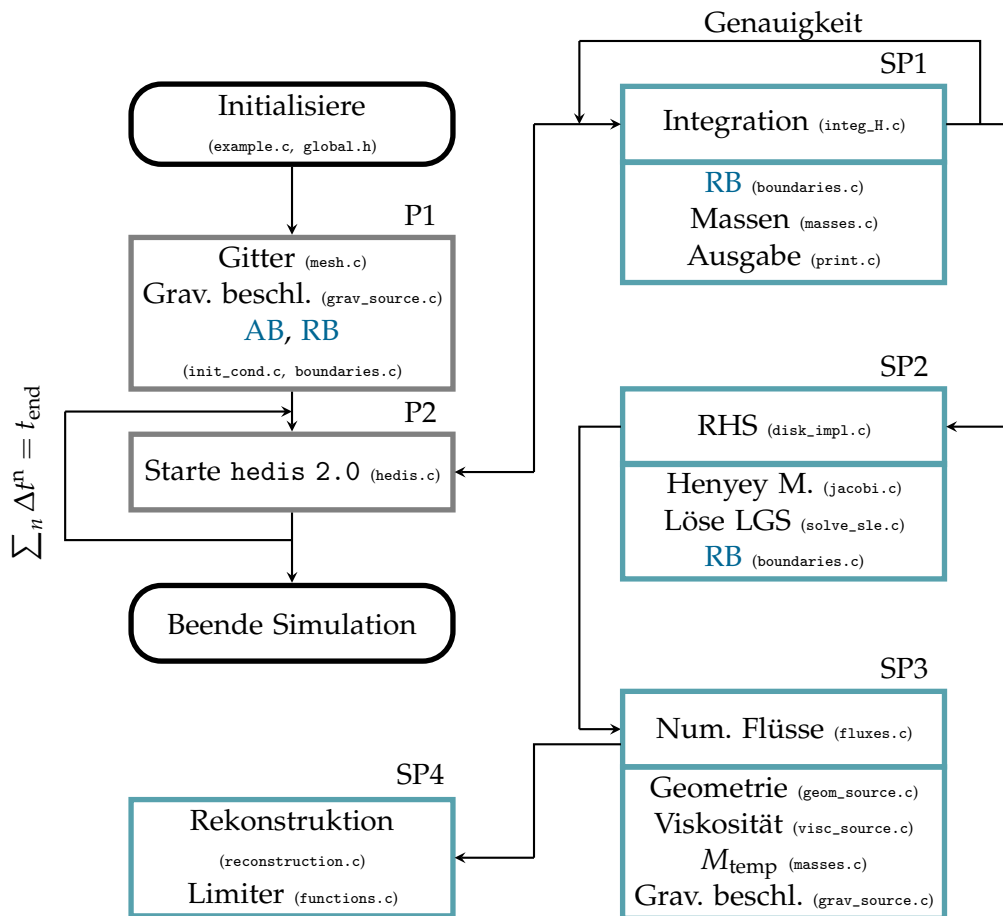


Abbildung 5.9: Ablaufdiagramm des impliziten Verfahrens mit der Schrittweitensteuerung Gleichung (5.74). Die ASK setzt am Subprozess SP1 an.

Anweisung werden die SF Variablen zurückgegeben und zum Ort des Aufrufs der SF im Programm zurückgekehrt. Der Pointer auf die SF *save erlaubt die Rückgabe der GSL-Datentypen.

Diese Art der Programmierung erfüllt somit die Abstraktion und die Datenkapselung, indem SF definiert werden, deren interne Variablen nur innerhalb der Module relevant sind. Über ein manuelles Zwischenspeichern der Rückgabewerte ist ebenfalls die Anforderung der Persistenz erfüllt, wenn auch nur manuell. Dies wird im Folgenden näher erläutert.

5.5.2 Der Programmaufbau und -ablauf

hedis 2.0 ist über eine objektorientierte Idee modular aufgebaut. Die Hauptroutrinen verwalten zunächst nur die Initialisierung von Parametern und elementaren Nebenroutinen, sowie die persistenten Datentypen. Alle diese Variablen und Funktionen werden in der allgemeinen Header-Datei `global.h` definiert, die somit zum Teil auch die Aufgabe eines „Dictionaries“ erfüllt. Die Verwendung dieses Dictionaries⁵³ ist deshalb dem Konzept

⁵³Das Konzept eines Dictionaries ist bisher nur in Teilen realisiert und kann in zukünftigen Entwicklungen generisch implementiert werden.

Parameter		Wert	Modus	Art
Innenradius	r_{\min}	10^{-3}	RB	z.B. REFLEKT, EXAKT, ...
Außenradius	r_{\max}	$3 \cdot 10^2$	AB	z.B. ANALYT, ...
Scheibenmasse	M_D	bel.	Geometrie	KARTESISCH
Zentralmasse	M_{\bullet}	bel.		POLAR
Schallgeschw.	c_s	bel.		LOGPOLAR
Viskositätsparam.	β	$10^{-3} - 10^{-2}$		SPHÄRISCH
Akk. Effizienz	η	0,1	Gravitation	KEINE
Auflösung	N	50		KEPLER
Massenverteilung	p	1		SELBSTGRAVITATION
Geisterzellen	g_c	2	Art der Grav.	MONOPOL $\mathcal{O}(1)$
Dim. phys. Variablen	l	3		MONOPOL $\mathcal{O}(> 1)$
Param. Monocent	θ_{mc}	1,3		SELBSTGRAVITATION
Num. Viskosität	numvisk	1	Viskosität	DSB
Courant-Zahl	c_{cfl}	0,3	Akkretion	TRUE/FALSE
Impl. Sicherheitszahl	c_{itw}	0,1	Massenverlust	TRUE/FALSE
Visk. Sicherheitszahl	c_{visc}	1,0	Limiter	MONOCENT
θ -Methode	θ	1,0		SUPERBEE
Num. Jacobi-Matrix (5.56)	epsil	10^{-4}		MINMOD
Max. Iteration	stepmax	40	Integration	RK $\mathcal{O}(1)$
Genauigkeit Integr.	accuracy	10^{-4}		RK $\mathcal{O}(4)$
Min. Zeitschritt	Δt_{\min}	10^{-10}		HENYEEY
Rel. Fehler ASK	R_{tol}	10^{-4}	Zeitberechnung	CFL
Abs. Fehler ASK	$A_{\text{tol},i}$	10^{-2}		ITW
Parameter ASK (5.80)	asc	0,8		ASC
	ascmin	0,4	Henyey-Matrix \mathcal{O}	FORWARD FST
	ascmax	5		CENTR. SEC
Simulationszeit	t_{end}	bel.		FORWARD SEC
Max. Iter. ASK	asc _{max}	25	Invertierungsmeth.	LU DECOMP
Max. Iterationen	maxiter	10^7		HOUSEHOLDER
Anzahl Ausgabeschritte	step _{store}	bel.	Bildschirmausgabe	TRUE/FALSE
Param. AB	ick	0	Wähle Ausg. Variabl.	PRIM/KONS
-	-	-	Zeitabh. Daten	TRUE/FALSE

Tabelle 5.1: Auflistung aller wählbarer Parameter und Modi in *hedis* 2.0, die über problemspezifische *example*-Dateien festgelegt werden müssen.

der Persistenz zuträglich, da nur die Daten, welche nicht verloren gehen dürfen, dort hinterlegt sind.

Die Datei *global.h* legt ebenso alle physikalischen und numerischen Parameter, sowie die Bezeichnungen der einstellbaren Modi fest. Diese Parameter sind nochmals in Tabelle 5.1 zusammengefasst und gelten für alle Simulationen. Falls Änderungen notwendig sind, werden diese an entsprechender Stelle separat aufgelistet.

Das Ablaufdiagramm 5.9 zeigt den schematischen Aufbau des gesamten Programms und die wichtigsten Module zur Berechnung. Das Hauptprogramm ist über die schwarzen Start/ Stop Anweisungen (Terminatoren) gegeben. Nach der Initialisierung erfolgt der Aufruf der Prozesse P1, die alle physikalischen Größen und Parameter erzeugen. Der Prozess P2 besteht aus verschachtelten Subprozessen SP1 - SP4 und stellt die Kernfunktion von *hedis* 2.0 dar, nach deren Ausführung das Programm beendet wird. Der Prozess P2 wird ausgeführt, bis die Bedingung $\sum_n \Delta t^n = t_{\text{end}}$, also die eingestellte Simulationszeit, erreicht ist.

Der Subprozess SP1 führt die numerische Integration aus. Wird eine Lösung erzeugt, müssen zuerst die **RB** und dann die Massenbilanz (falls gewünscht) berechnet werden, bevor die Daten in eine Datei geschrieben und am Bildschirm ausgegeben werden (dies kann über „Bildschirmausgabe“ (Tabelle 5.1) zu- oder abgeschaltet werden). Die Integration erfordert die aktuellen Informationen aller räumlichen Terme auf der rechten Seite von Gleichung (5.5) in SP2, und somit eine Lösung der Henyey-Matrix und des Gleichungssystems (5.50). Unter der RHS versteht man den Zusammenschluss aller Terme, die auf der rechten Seite der zu lösenden Differentialgleichung stehen. Im Falle von Gleichung (5.5) sind das alle Terme, mit Ausnahme des Zeitdifferentials. Das lineare Gleichungssystem, Gleichung (5.50), wird mit GSL-Bibliotheken berechnet, wobei der Schalter „Invertierungsmethode“ die Berechnungsmethode einstellt. Der Subprozess SP3 berechnet die numerischen Flüsse (Abschnitt 5.1.3) und die zugeschalteten Quellterme (Abschnitt 5.1.5). Die Flussberechnung erfordert die lineare Rekonstruktion der Daten, sowie eine Limiterfunktion (SP4). Die temporäre Massenberechnung M_{temp} berechnet die aktuelle Masse der Zwischenlösungen, bis eine Lösung konvergiert, und summiert erst dann in SP1 die Massen $M(t)$ auf. Für die **ASK** muss das Diagramm in Abbildung 5.6 berücksichtigt werden.

5.6 Fazit

In diesem Kapitel wurde die Numerik und die Implementierung von `hedis 2.0` motiviert und vorgestellt. Dabei wurde hauptsächlich auf das implizite Verfahren eingegangen, wodurch ein Überblick über die Programmstruktur ermöglicht wird. Neben dem impliziten Verfahren mit der **ASK** sind in `hedis 2.0` zusätzlich ein Runge-Kutta-Verfahren in erster und in vierter Ordnung implementiert, womit die impliziten Methoden stets abgeglichen werden können.

6 Numerische Tests für `hedis 2.0`

VIELE physikalische Fragestellungen müssen aufgrund ihrer Komplexität numerisch gelöst werden. Erweitert sich der Parameterraum dieser Fragestellungen, muss die Güte der verwendeten Numerik bekannt sein, um die genäherten Lösungen aussagekräftig zu halten.

Dies soll in diesem Kapitel untersucht werden, indem die Ergebnisse aus `hedis 2.0` auf reduzierte Problemstellungen mit exakten Ausdrücken⁵⁴ angewendet und mit diesen verglichen werden. Einige Testprobleme sind analytisch gelöst, andere „numerisch exakt“, also mit beliebiger Genauigkeit.

6.1 Die Burgers-Gleichung

Als einfachstes Beispiel einer Erhaltungsgleichung wird häufig die nicht-viskose Burgers-Gleichung herangezogen (Hirsch 2007). Mit ihr können grundlegende Transporteigenschaften wie der Konvektionsmechanismus erklärt werden. Da die Lösungen der nicht-viskosen Burgers-Gleichung bekannt und verstanden sind, können diese zum Testfall numerischer Verfahren dienen.

Wird eine kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilung angenommen, generiert die Burgers-Gleichung unstetige Lösungen, die vollständig analysiert sind (Ames 1965; Hirsch 2007). Die zeitliche Entwicklung der Lösungen ist in Abbildung 6.1 gezeigt. Die sinusförmige **AB** verschiebt sich beidseitig in Richtung ihrer Nullstelle. Sobald die Funktion u ihre Eindeutigkeit verliert, bildet sie eine Unstetigkeit aus, die im weiteren zeitlichen Verlauf verschwindet. Dieses Verhalten soll mit `hedis 2.0` reproduziert werden, um speziell die **HM** zu untersuchen.

6.1.1 Die partielle Differentialgleichung

Vernachlässigt man in kartesischen Koordinaten Änderungen der Dichte $\rho(x,t) = \text{const.}$ und des spezifischen Drehimpulses $\ell(x,t) \rho(x,t) = \text{const.}$ in den Gleichungen (2.14, 2.15, 2.16), so erhält man die skalare Entwicklungsgleichung

$$\partial_t v_x + \frac{1}{2} \partial_x v_x^2 = 0, \quad (6.1)$$

beziehungsweise die nicht-viskose Burgers-Gleichung (z.B. Toro 1999). Mit Hilfe der Orte $s = x/x_0$, der Geschwindigkeiten $u = v_x/v_0$ und Zeiten $\tau = t/t_0$, $t_0 \doteq x_0/u_0$ findet man die dimensionslose **PDG**

$$\partial_\tau u + a(u) \partial_s u = 0, \quad (6.2)$$

wobei über die Homogenitätsbedingung (5.15) die Konvektionsgeschwindigkeit $a(u) = u$ definiert wird. Dieser skalare Wert entspricht den Eigenwerten der Jacobimatrix (5.16).

⁵⁴Diese Formulierung wird analog zum Kapitel 3 verwendet. Exakte Lösungen können mit beliebiger Genauigkeit numerisch erzeugt werden und sind deshalb vergleichbar mit analytischen Ausdrücken.

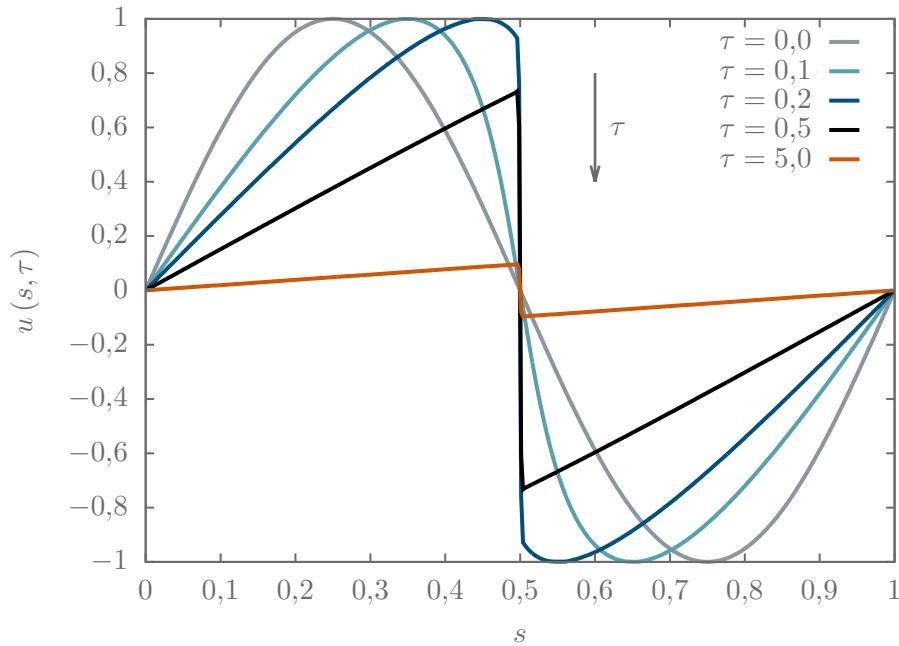


Abbildung 6.1: Die Burgers-Gleichung entwickelt sich zu einer unstetigen Lösung für u , sobald diese ihre Eindeutigkeit verliert. Die Unstetigkeit wird im Laufe der Zeit τ schwächer. Die Lösungen sind mit dem Programmpaket `clawpack` (Clawpack Development Team 2017) berechnet.

Die numerischen Flüsse (B.1) in Gleichung (5.18) sowie die Signalausbreitungsgeschwindigkeiten (5.17) müssen für das Verfahren nach Kurganov und Tadmor (KT) zusammen mit dem Faktor $1/2$ angepasst werden:

$$\mathbf{F}(u) = (f(u), 0, 0)^T, \quad (6.3)$$

$$\lambda_{\max/\min, i \pm 1}(u) = \max / \min(u_{i+1}^w, u_i^e). \quad (6.4)$$

hedis 2.0 kann aufgrund der modularen Formulierung für die Burgers-Gleichung leicht umgebaut und zusammen mit passenden **AB** und **RB** zum Testen der Integrationsroutinen benutzt werden.

6.1.2 Anfangsbedingungen und Randbedingungen

Als typische **AB** wird eine sinusförmige Geschwindigkeitsverteilung

$$u(s, \tau = 0) = \sin(2\pi s, \tau = 0) \quad (6.5)$$

angesetzt. Für die **RB** wird gefordert, dass die Lösung am Beginn/Ende des Rechengebietes stetig zum Ende/Beginn des Rechengebietes fortgesetzt wird

$$u_{r_{\text{in}}-2+k} = u_{r_{\text{out}}-1+k}, \quad (6.6)$$

$$u_{r_{\text{out}}+1+k} = u_{r_{\text{in}}+k}, \quad \text{mit } k \in \{0, 1\}. \quad (6.7)$$

Innerhalb einer Periode entspricht dies dem natürlichen Verhalten der Sinusfunktion, weshalb diese speziellen Ränder periodische Randbedingungen genannt werden. Somit ist die Burgers-Gleichung voll bestimmt.

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	0	RB	PERIODISCH
r_{\max}	1	AB	Glg. (6.5)
N	$2^n \cdot 50, n = 0 \dots 3$	Geometrie	KARTESISCH
t_{end}	5τ	Löser	HENYEY
θ_{mc}	1,3	Quellen	KEINE
–	–	Limitier	MONOCENT

Tabelle 6.1: Eingestellte Parameter zur Reproduktion der Lösungen aus der Burgers-Gleichung. Nicht erwähnte Parameter sind in Tabelle 5.1 gelistet.

6.1.3 Die Lösungen

Die Lösungen des Problems nach $\tau = 5$ (entsprechend der orangefarbenen Kurve in Abbildung 6.1) sind in Abbildung 6.2 gezeigt. Mit zunehmender Auflösung N nähern sich die Lösungen dem semi-analytischen Ausdruck aus `clawpack`. Dabei sind die größten Abweichungen am oberen und unteren Übergang zur Unstetigkeit auszumachen. Der Unterschied zwischen dem exakten Ausdruck und den Lösungen aus `hedis 2.0` verringert sich mit zunehmender Auflösung; die Lösung konvergiert. Dies wird im Bildausschnitt in der oberen Bildhälfte deutlicher. In der unteren Bildhälfte ist der relative Fehler der Lösungen gezeigt, der an der Nullstelle der Sinusfunktion maximal wird und in Richtung des inneren und des äußeren Rands absinkt. Der Fehler liegt im Bereich $|\delta u| \approx 3 \cdot 10^{-2} - 3 \cdot 10^{-7}$, und nimmt mit zunehmender räumlicher Auflösung sukzessive ab. Innerhalb einer quantitativen Untersuchung zeigen die Lösungen Konsistenz.

Die **HM** ist ein Verfahren erster Ordnung, dessen Stabilität bisher nicht gezeigt werden konnte (siehe auch Kippenhahn u. a. 1967, Abschnitt IV D). Die in Abschnitt 5.4 abgeleiteten Stabilitätsbedingungen sind für die θ -Methode berechnet worden. Damit fehlt neben der Konvergenz eine Aussage über die Konsistenz der **HM**, also ob und wie der Algorithmus die gesuchten Lösungen reproduziert. Obwohl der Fehler des Verfahrens relativ groß ist, entspricht das Konvergenzverhalten dem Erwarteten. Die Vorteile der **HM** als ein relativ simples und sehr schnelles Verfahren überwiegen, da es ohne großen Aufwand leicht für kleinere und vor allem auch für größere Gleichungssysteme erweitert werden kann (z.B. Blank 2010; Illenseer und Duschl 2015).

6.2 Der isotherme Vortex

Der isotherme Vortex beschreibt ein statisches ($\partial_t X = 0$) und rotationssymmetrisches Wirbelfeld (siehe Deschner 2013; Jung u. a. 2015). Zu seiner Formulierung wird nur eine der beiden Geschwindigkeitskomponenten, nämlich die Radialgeschwindigkeit ($v_\xi = 0$) vernachlässigt. Die Azimutalgeschwindigkeit v_η und die Schallgeschwindigkeit c_s bleiben weiterhin im ansonsten ebenfalls quellfreien System (2.14, 2.15, 2.16) erhalten. Dieser Test liefert somit eine Aussage über die Erhaltung des spezifischen Drehimpulses. Diese Aussage wird in diesem Fall über einen Konvergenztest qualitativ festgehalten.

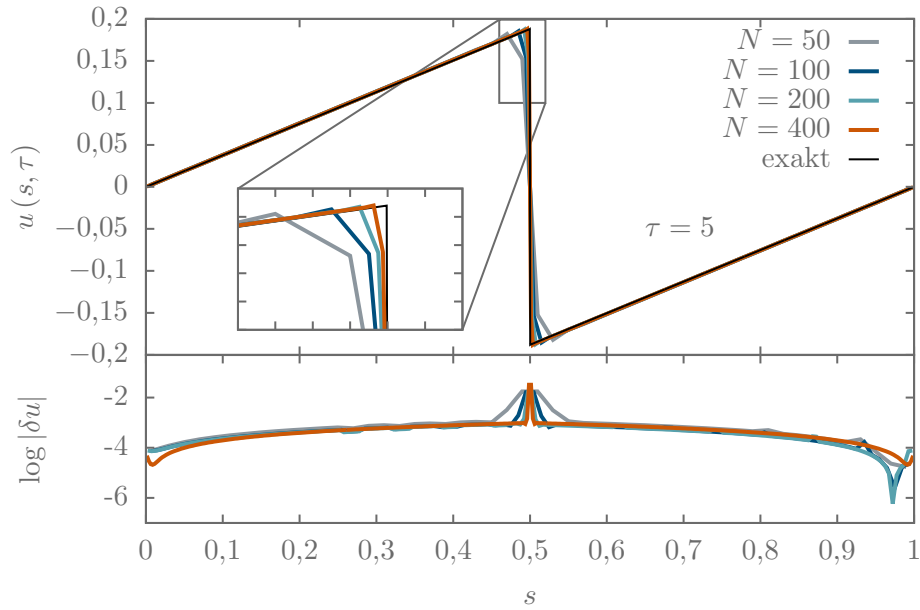


Abbildung 6.2: Das Konvergenzverhalten der Burgers-Gleichung mit zunehmender Auflösung zum Zeitpunkt $\tau = 5$. Die stärksten Abweichungen sind am Ort der Unstetigkeit $s = 0,5$ auszumachen, wobei der Fehler δu (unteres Bild) ausreichend klein ist und mit höherer Auflösung abnimmt. Demnach konvergieren die Lösungen und sind im quantitativen Vergleich konsistent.

6.2.1 Die Gleichungen

Zusammen mit den eingeführten Annahmen ergeben sich die Gleichungen

$$\partial_t \rho = 0, \quad (6.8)$$

$$\mathcal{D}_\xi (\rho c_s^2) - c_{\eta\xi\eta} \rho (v_\eta^2 + c_s^2) - c_{\Phi\xi\Phi} \rho c_s^2 = 0, \quad (6.9)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\rho}{dr} - \frac{\rho v_\eta^2}{rc_s^2} = 0, \quad (6.10)$$

$$\partial_t v_\eta = 0, \quad (6.11)$$

die gelöst werden sollen. Die erste und dritte Gleichung beschreiben das statische Verhalten des Vortex bezüglich der Größen ρ und v_η , also eine Reduktion der abhängigen Variablen auf $X(r, t) \rightarrow X(r)$, $X \in \{\rho, v_\eta\}$. Die AB fallen also zu jedem Zeitpunkt mit den exakten Lösungen des Systems zusammen. In kartesischer (eindimensionaler) Geometrie sind die geometrischen Quellterme exakt Null, und es ergeben sich konstante Lösungen, die hier nicht weiter betrachtet werden sollen. Die verbleibenden Geometrien liefern mit $R = \rho/\rho_\infty$, $u = v_\eta/c_s$, $s = r/r_0$ und zusammen mit der Annahme, dass die Winkelgeschwindigkeit $\omega(s) = \exp(-s)$ hinreichend schnell mit dem Radius abfallen sollen, die analytischen Lösungen

$$u(s) \doteq s\omega(s) = s \exp(-s), \quad (6.12)$$

$$R(s) = \rho_\infty \exp\left(-\frac{\omega^2(s)}{4}(1+2s)\right). \quad (6.13)$$

Dabei ist $\rho_\infty = 1$ die äußere RB des Systems und r_0 die charakteristische Größe des Vortex (Verschiebung). Eine typische Zeitskala des Vortex wird aus der Umlaufgeschwindigkeit

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	10^{-1}	RB	EXAKT (6.12, 6.13)
r_{\max}	10	AB	ANALYT (6.12, 6.13)
N	50, 100	Geometrie	POLAR
	200, 300	Löser	HENYEY
t_{end}	$100 \tau_v$	Zeitber.	ASC
r_0	1	Quellen	KEINE

Tabelle 6.2: Simulationsparameter und die verwendeten Modi zur Simulation des isothermen Vortex. Nicht erwähnte Parameter sind in Tabelle 5.1 gelistet.

am Ort r_0 berechnet,

$$\tau_v = \frac{2\pi}{\omega(r=r_0)} \approx 17, \quad (6.14)$$

und gibt die Zeit für einen Umlauf um die Symmetrieachse, beziehungsweise einen Orbit an.

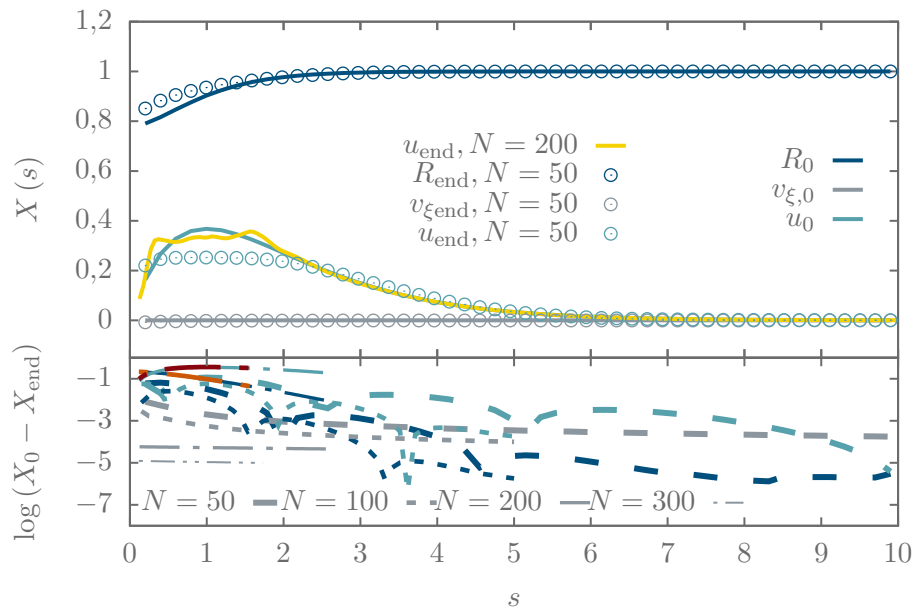
Polarkoordinaten

In Abbildung 6.3a sind die analytischen Lösungen X_0 im Vergleich zu den numerischen Lösungen nach 100 Orbits X_{end} in polarer Geometrie gezeigt (siehe Parameter in Tabelle 6.2). Die Punkte zeigen die numerischen Lösungen, die erheblich von den AB abweichen. Der Vortex zerfließt im Laufe der Zeit, da sich im Widerspruch zur Annahme $v_\xi = 0$ ein nichtverschwindender, negativer Gradient der Radialgeschwindigkeit einstellt und somit die Erhaltungseigenschaften der physikalischen Größen verletzt werden. Im unteren Teilbild (Abbildung 6.3a) sind die Residuen gezeigt, die sich im Bereich $\sim 10^{-1} - 10^{-7}$ befinden. Mit steigender Auflösung sinken die Residuen und fallen zunehmend exakt mit dem analytischen Ausdruck zusammen. Richtung Innenrand steigen die Residuen in allen Fällen, wobei sich die Dichte und die Azimutalgeschwindigkeit für die räumlichen Auflösungen $N = 200, 300$ überlagern.

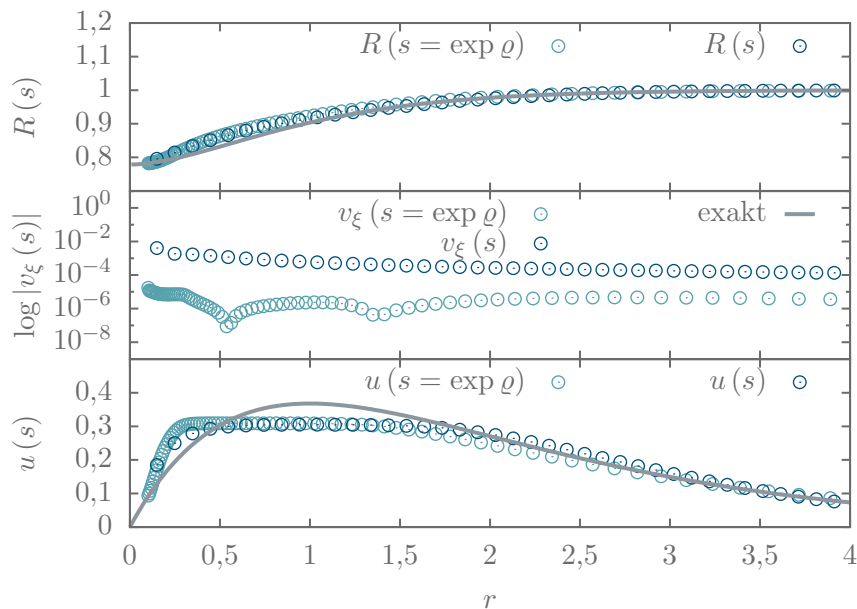
Logarithmisch polare Koordinaten

In Abbildung 6.3b ist ein Vergleich zwischen ebenen polaren und logarithmisch polaren Koordinaten gezeigt. Die logarithmisch polaren Lösungen sind rücktransformiert, sodass sie mit den polaren Lösungen direkt verglichen werden können. Im Bild wird der Nutzen der Verwendung der logpolaren Geometrie deutlich: Die Abstände der Gitterpunkte werden Richtung Ursprung kleiner, womit dort mehr Gitterpunkte zur Verfügung stehen, die den inneren Bereich besser auflösen. Dieses Verhalten führt zur besseren Erhaltung des Drehimpulses, da gerade am Innenrand Umverteilungsprozesse stattfinden. Besonders über die Radialgeschwindigkeit, die um einen Faktor $10^{-2} - 10^{-4}$ kleiner als in polarer Symmetrie ist, verdeutlicht diesen Befund. Neben dieser Eigenschaft zeigen die Lösungen ein sehr ähnliches Verhalten (Abweichungen sind offensichtlich auf die unterschiedliche Verteilung der Gitterzellen zurückzuführen), sodass die numerische Realisierung der Koordinaten ebenfalls überprüft ist.

Erwähnenswert ist jedoch, dass sich die CPU-Zeit im logarithmisch polaren Gitter erhöht, da aufgrund der kleineren Gitterzellen am Innenrand die Zeitschrittweite (Gleichungen 5.57, 5.74) verringert ist.



(a) Dichte und Geschwindigkeiten des Vortex (polar) nach 100 Umläufen mit $N = 50$ zerfließen aufgrund einer geringen, nach innen gerichteten Radialgeschwindigkeit v_{ξ} . Der Farbcode in der unteren Bildhälfte entspricht den physikalischen Größen aus der oberen zu unterschiedlichen Auflösungen (Linienstile). Dabei sind die rote und orange Linie der höchsten Auflösung ($N = 300$) zugeordnet und mit der Linie für $N = 200$ überlagert.



(b) Vergleich zwischen polarer und logarithmisch polarer Symmetrie (dunkelblau/ hellblau) mit $N = 100$, nach 100 Umläufen. Mehr Gitterzellen am Innenrand verringern die Radialgeschwindigkeit und reproduzieren das statische Verhalten besser.

Abbildung 6.3: Zeitliches Verhalten der Lösungen (a) und Vergleich zwischen polarer und logarithmisch polarer Symmetrie (b).

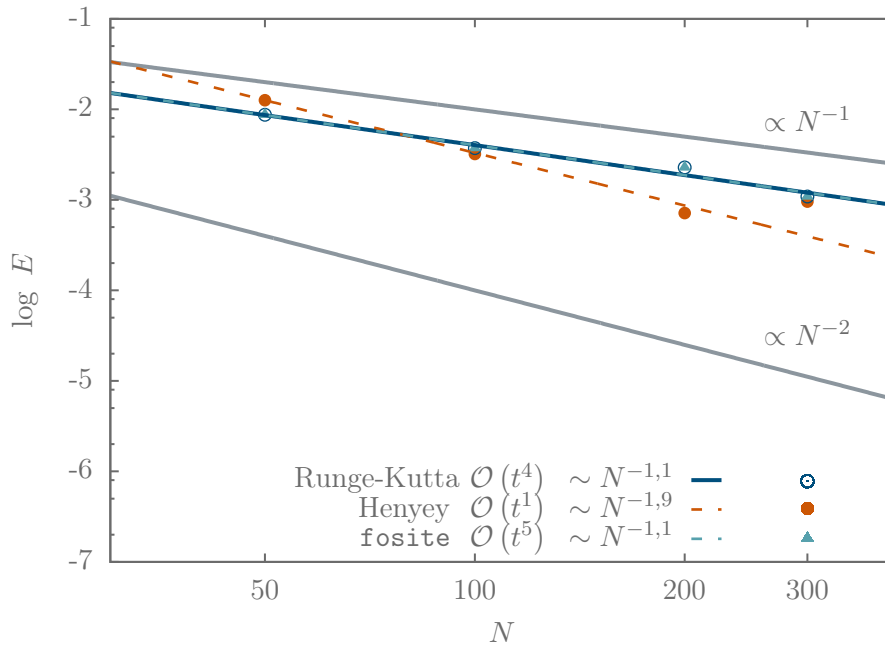


Abbildung 6.4: Das Konvergenzverhalten des isothermen Vortex. Dargestellt sind die Fehler E als Funktion des Radius r im Vergleich der expliziten und impliziten Methoden aus `hedis 2.0` mit Ergebnissen aus `fosite`. Die Steigungen der Fehler E liegen im erwarteten Bereich, wobei die `HM` die höchste Konvergenzordnung besitzt.

Der Konvergenztest

In Abbildung 6.4 ist das Konvergenzverhalten der Lösungen des isothermen Vortex gezeigt. Die in Abschnitt 5.1.3 vorgestellte semi-diskrete `KT`-Methode liefert eine Genauigkeit in zweiter Ordnung ($\mathcal{O}(N^{-2})$). Deshalb sollten sich numerisch berechnete Lösungen immer innerhalb der Ordnungen $\mathcal{O}(N^{-(1..2)})$ befinden, was über die grauen Geraden in Abbildung 6.4 angedeutet ist. Zum Vergleich wird die `HM` zusammen mit dem expliziten Runge-Kutta-Verfahren in vierter Ordnung ($\mathcal{O}(\Delta t^4)$) in den räumlichen Auflösungen $N = 50, 100, 200, 300$ analysiert. Ebenso werden Lösungen zum isothermen Vortex mit dem Programm `fosite` (Illenseer und Duschl 2009) erzeugt. Dabei wird die zeitliche Integration mit einem expliziten Verfahren fünfter Ordnung durchgeführt.

Die Datenpunkte zeigen die Fehler E zwischen der `AB` aus `hedis 2.0` und der Lösung nach 100 Orbits über

$$E = \sqrt{\sum_j^3 (u_j)^2} \quad \text{und} \quad u_j = \frac{1}{N} \sum_i^N |u_{j,i} - u_{0,j,i}| \quad (6.15)$$

berechnet. Mit zunehmender Auflösung verringert sich der Fehler, analog zu der Beobachtung in Abbildung 6.3. Durch die Datenpunkte lässt sich eine Gerade der Form $f(N) = aN^m$ fitten, wobei sich die Steigungen $1 \leq m \leq 2$, $m \sim 1,9$ für das implizite und $m \sim 1,1$ für die expliziten Verfahren aus `hedis 2.0` und `fosite` ermitteln lassen. Diese Werte liegen im erwarteten Bereich. Interessanterweise sind die Ergebnisse aus den unterschiedlichen Programmen nahezu identisch. Für hohe Auflösungen wird der Fehler der `HM` wieder etwas größer. Gleiches wird im unteren Teilbild 6.3a sichtbar, da

sich die Kurven für $N = 300$ (orange, rote Linien) nicht mehr von denjenigen für $N = 200$ unterscheiden.

Obwohl die **HM** eine geringere Ordnung als die Runge-Kutta-Methode hat, ist ihre Konvergenzordnung höher. Dies könnte ursächlich an der Steifheit des Problems liegen. Eine steife Differentialgleichung liegt vor, wenn die Eigenwerte der Jacobimatrix ($v_\xi \pm c_s$) des Systems klein sind, beziehungsweise immer von der Schallgeschwindigkeit dominiert werden (Unterschallströmung). Da die Radialgeschwindigkeit verschwindet, liegt also ein steifes Problem vor, die im Allgemeinen besser mit impliziten Verfahren berechnet werden können (Toro 1999).

Bei hohen Auflösungen generiert die **HM** Schwingungen (gelbe Linie in Abbildung 6.3a), die wahrscheinlich dadurch zustande kommen, dass kein echtes Stabilitätskriterium vorliegt. Diese numerischen Schwingungen werden durch die **ASK** unterdrückt, jedoch nur bis zur Auflösung von $N \sim 300$.

6.3 Die isotherme Bondi-Akkretion

Die Bondi-Akkretion (Bondi 1952) ist ein Standardmodell (Frank u. a. 2002; Kato u. a. 2008) zur Beschreibung eines sphärisch-symmetrischen Akkretionsprozesses. Nimmt man das interstellare Medium als ein Gaswolke um einen isolierten Stern an, kann unter Vernachlässigung eines Magnetfeldes, des Drehimpulstransports und der großskaligen Bewegung des Gases auch eine konstante Akkretionsrate \dot{M} des interstellaren Mediums auf den Stern angenommen werden. Damit lassen sich nun analytische Lösungen für polytrope Gase ableiten.

Die im Folgenden eingeführten isothermen Lösungen zur Bondi-Akkretion beruhen auf Arbeiten von Dr. Tobias Illenseer.

6.3.1 Das Modell

Ziel dieses Abschnittes ist es, analytische Ausdrücke zum isothermen Bondi-Problem sowohl in polarer als auch in sphärischer Geometrie abzuleiten, um *hedis* 2.0 in den entsprechenden Symmetrien zu testen. Ausgehend von den stationären Gleichungen (2.14, 2.15, 2.16) zusammen mit dem Potential $\phi(r) = \frac{GM}{r}$ für eine Punktquelle findet man ähnlich zu den Gleichungen in Kapitel 3 die Ausdrücke

$$\frac{1}{r^\alpha} \mathrm{d}_r (r^\alpha \rho v_r) = 0, \quad (6.16)$$

$$v_r \mathrm{d}_r v_r + \frac{c_s^2}{\rho} \mathrm{d}_r \rho + \mathrm{d}_r \phi = 0. \quad (6.17)$$

Für ebene Polarkoordinaten ist $\alpha = 1$ und für symmetrische Kugelkoordinaten $\alpha = 2$. Für die Gleichungen (6.16, 6.17) können (zum Beispiel über eine **ST** Gleichung 3.3) die dimensionslosen Gruppenparameter

$$s = \frac{r}{r_b}, \quad \text{mit } r_b = \frac{GM}{c_s^2}, \quad v = \frac{v_r}{c_s}, \quad R = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \tau_b = \frac{r_b}{c_s} \quad (6.18)$$

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	$0,1 r_b$	RB	EXACT
r_{\max}	$2 r_b$	AB	$\rho_{(\infty)} = 1, v_r = v_\phi = 0$
N	50	Geometrie	POLAR
t_{end}	$100\tau_b$ (6.18)		SPHÄRISCH
M_\bullet	G^{-1}	Löser	HENYEY
c_s	1	Quellen	KEPLER
θ_{mc}	1,2	Limiter	MONOCENT

Tabelle 6.3: Simulationsparameter des Bondi-Problems mit $r_b = 1$. Alle nicht genannten Parameter sind über Tabelle 5.1 gegeben.

gefunden werden. Dabei ist r_b der Bondi-Radius, ρ_∞ eine beliebige Konstante und τ_b eine typische Zeitskala für das Bondi-Problem. Nach einigen Umformungen ergeben sich damit die Gleichungen

$$\frac{dv(s)}{ds} = \frac{v(s)(\alpha s - 1)}{s^2(v^2(s) - 1)} \quad (6.19)$$

$$R(s) = \frac{\dot{m}}{s^\alpha v(s)}, \quad (6.20)$$

$$\dot{m} = s^\alpha R v = \frac{-\dot{M}}{2\pi\alpha r_b^\alpha R_\infty c_s} = \text{const.}, \quad (6.21)$$

die das System vollständig bestimmen. Die GDG für die Geschwindigkeit hat einen kritischen Punkt bei $\mathcal{D} = (s_t = 1/\alpha, v_t = \pm 1)$ und genau eine Lösung, die durch diesen Punkt führt. Da $v = v_r/c_s \stackrel{!}{=} \pm 1$ gilt, nennt man diese Lösung transsonische Lösung, was den Index t der singulären Punkte erklärt. Setzt man die Gruppenparameter (6.18) in Gleichung (6.17) zusammen mit dieser Lösung ein, ergibt sich für die Dichte $R_t = \exp(\alpha - 1/2)$. Damit kann nun die transsonische Akkretionsrate über

$$\dot{m} = \pm \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha \exp(\alpha - 1/2) \quad (6.22)$$

angegeben werden. Gleichung (6.19) ist separabel und besitzt somit eine analytische Lösung, die recht simpel zu bestimmen ist. Allerdings ist diese Lösung ein transzendenten Ausdruck, deren Nutzen nur in den RB für hedis 2.0 liegt, aber immer numerisch berechnet werden muss. Deshalb wird auf die Angabe der analytischen Ausdrücke verzichtet. Vielmehr wird die GDG analog zu der Methode in Abschnitt 3.5.1 semi-analytisch gelöst und dann mit den Ergebnissen aus hedis 2.0 verglichen. Tabelle 6.3 zeigt die in hedis 2.0 eingestellten Simulationsparameter, wobei $\rho_{(\infty)}$ gleichzeitig die AB und die Konstante aus (6.18) beschreibt.

6.3.2 Diskussion der Lösungen

In Abbildung 6.5 sind die semi-analytischen Lösungen zusammen mit den aus hedis 2.0 berechneten Lösungen dargestellt. In der oberen Bildhälfte sind die Dichten, in der unteren die Radialgeschwindigkeiten jeweils in polarer und sphärischer Geometrie gezeigt. Für die RB wurden die analytischen Ausdrücke am entsprechenden Ort ausgewertet und

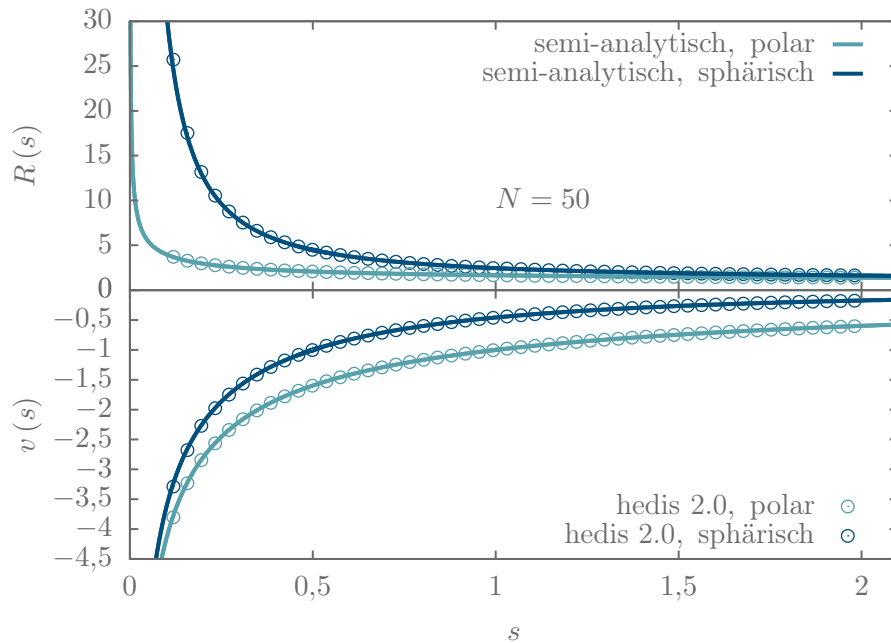


Abbildung 6.5: Das isotherme Bondi-Problem im Vergleich der semi-analytischen zu den aus *hedis* 2.0 berechneten Lösungen nach 100 charakteristischen Zeitskalen τ_b in polarer und sphärischer Symmetrie.

direkt als **RB** gesetzt. Bei einer Auflösung von $N = 50$ sind die Abweichungen vom semi-analytischen Ausdruck bereits sehr klein. Die Simulationszeit, in typischen Zeitskalen von $t_{\text{end}} = 100 \tau_b$ angegeben, lässt ebenfalls darauf schließen, dass *hedis* 2.0 sehr gute Ergebnisse bezüglich unterschiedlicher Geometrien liefert. Besonders die Diskretisierung der geometrischen als auch der gravitativen Quellterme liegen hierbei im Fokus der Untersuchung und zeigen kaum Abweichung zum analytischen Ausdruck an.

In Abbildung 6.6 ist die Akkretionsrate in Abhängigkeit vom Ort (oben) sowie von der Zeit (unten) aufgetragen. Man erkennt eine sehr geringe Abweichung vom analytischen Ausdruck, wobei die räumliche Abhängigkeit nach 100 typischen Zeitskalen gezeigt ist. Im unteren Teilbild ist der Massenfluss mit den in Abschnitt 2.5 und 5.1.6 beschriebenen Methoden berechnet worden. Da der Massenfluss auch zeitlich konstant bleibt, kann das Modul der Massenberechnung ebenfalls als getestet betrachtet werden.

6.4 Viskos zerfließende Dichteverteilung

Bisher sind unterschiedliche Koordinaten, die Diskretisierung und die Zeitintegration getestet. Die isotherme Bondi-Akkretion bindet ebenfalls die Berechnung eines Newtonschen Punktpotentials ein, womit dies auch als gut integriert in die Numerik angesehen werden kann. Als nächstes wird zusätzlich die Viskosität berücksichtigt und die Flächendichte Σ anstelle der Massendichte ρ benutzt (siehe Abschnitt 2.3).

Die Verwendung der expliziten Zeitintegrationsroutine ist dem Umstand geschuldet, dass die Zeitschrittberechnung der Henyey-Methode (**HM**) aufgrund einer auftretenden Instabilität nur kleine Schritte gehen kann (starke Umverteilungsprozesse innerhalb eines Zeitschrittes). Kleine Zeitschritte führen nicht zwangsläufig zur schnelleren Konvergenz,

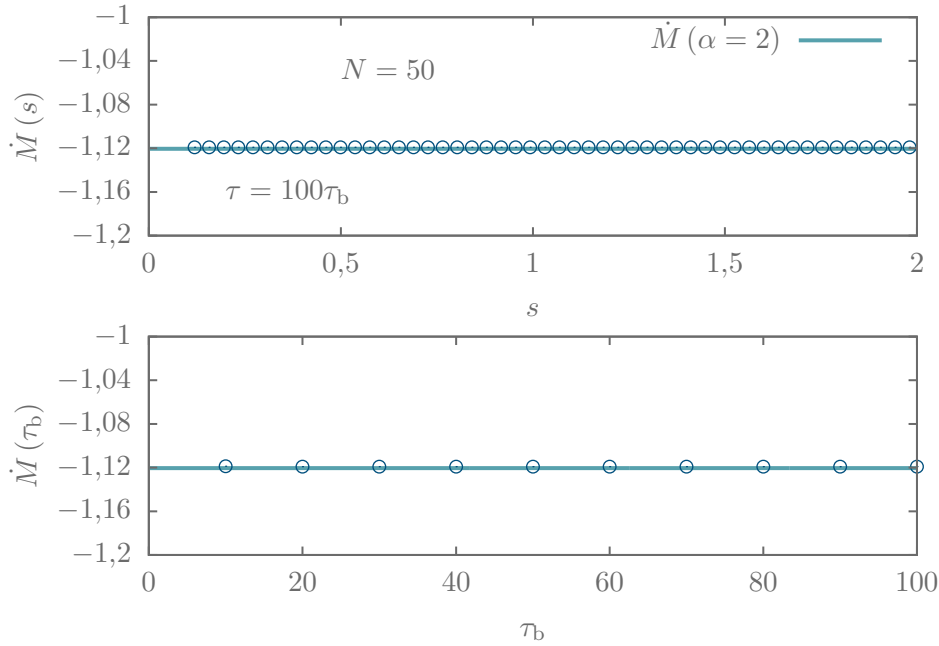


Abbildung 6.6: Die räumliche und zeitabhängige Akkretionsrate des Bondi-Problems zeigt kaum Abweichung zur konstanten, analytischen Rate. Damit wird auch das Modul zur Massenberechnung verifiziert.

weshalb die Henyey-Matrix sehr häufig berechnet werden muss (siehe Abschnitt 5.3). Der Vorteil, beziehungsweise die Ersparnis der HM liegt aber nicht im schnellen Erzeugen einer konvergenten Lösung, sondern in der Verwendung großer Zeitschritte. Da im folgenden Testproblem die Prüfung der Quellterme im Vordergrund steht, ist die Wahl des Zeitintegrationsverfahrens zweitrangig.

6.4.1 Viskose Akkretionsprozesse

Ein grundlegendes Beispiel viskoser Akkretionsprozesse liefern die analytischen Lösungen von Lynden-Bell und Pringle (1974) und Pringle (1981). Für diesen Test wird eine konstante kinematische Viskosität $\nu = \text{const.}$ angenommen, womit die dynamische Viskosität $\eta = \nu\Sigma$ von der Flächendichte und somit von Zeit und Ort abhängt. Die analytischen Ausdrücke setzen eine δ -Distribution als AB für die Flächendichte voraus. Numerisch kann diese über die Lösung des Problems

$$\Sigma(x, \tau) = \pi \frac{\exp\left(-\frac{(1-x)^2}{\tau}\right)}{\sqrt{4\tau} (\pi\sqrt{x})^3} \quad (6.23)$$

gegeben werden. Die kinematische Viskosität ν wird über die Reynoldszahl \mathfrak{R}

$$\nu = Re^{-1} = \text{const.}, \quad \tau = 12\nu t/r_0^2 = 1/\mathfrak{R}, \quad x = r/r_0 \quad (6.24)$$

beschrieben. Die Zeiten τ und der Ort x sind dimensionslos, wobei die verbleibenden Konstanten entsprechend gewählt werden müssen (siehe Tabelle 6.4). Die Radial- und

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	$0,01 r_0$	RB	EXACT
r_{\max}	$2 r_0$	AB	Glg. (6.23)
r_0	1,0	Geometrie	POLAR
τ_0	0,01	Löser	RK4
N	200	(fosite)	MOD. EULER 3
t_{end}	$0,1\tau = 0,115$ (6.24)	Quellen	GRAVIT
M_{\bullet}	G^{-1}		VISKOS
c_s	$Ma^{-1} = 10^{-2}$	Limitier	MONOCENT
\mathfrak{R}	10^4	θ_{mc}	1,2

Tabelle 6.4: Gesammelte Simulationsparameter der Entwicklungsgleichung nach Lynden-Bell und Pringle (1974) und Pringle (1981). Die Parameter für *fosite* unterscheiden sich nur in der Wahl des Zeitintegrationsverfahrens.

Azimutalgeschwindigkeiten werden zu

$$v_r = \frac{3}{Re} \left(\frac{1}{4x} + \frac{2(x-1)}{\tau} \right), \quad (6.25)$$

$$v_{\varphi} = \sqrt{\frac{GM_{\bullet}}{x}} \quad (6.26)$$

berechnet, wobei die Azimutalgeschwindigkeit als Keplergeschwindigkeit angenommen ist. Die Radialgeschwindigkeit weist zusätzlich noch eine Zeitabhängigkeit auf (siehe z.B. Frank u. a. 2002).

Die analytischen Ausdrücke werden als **AB** und als **RB** gesetzt. Die Zeitabhängigkeit der Flächendichte und der Radialgeschwindigkeit wird dabei vernachlässigt.

6.4.2 Diskussion der Ergebnisse

Abbildung 6.7 zeigt die mit *hedis* 2.0 berechnete rotationssymmetrische Flächendichte (Gleichung 6.23) über den Farbgradienten. Alle räumliche Information ändert sich nur in radialer Richtung. In azimutaler Richtung ist die zeitliche Änderung im Intervall $\tau_{\varphi} = 2\pi t_{\text{end}}/100$ aufgetragen. Für $\tau_{\varphi} = 0,01$ hat die Flächendichte ein Maximum in radialer Richtung an der Stelle $x = 1$ und fällt für $x < 1$ und $x > 1$ schnell ab. Das Maximum verringert sich im Laufe der Zeit, bis sich bei etwa $\tau_{\varphi} \sim \pi$ spiralförmige Streifen ausbilden, die sich über die Flächendichte in Richtung Außenrand bewegen. Ab etwa $\tau_{\varphi} \sim 3\pi/4$ sind die Oszillationen über das Maximum in der Flächendichte hinweg gewandert, sodass das Maximum wie erwartet nach innen wandert und zunehmend schwächer wird.

In Abbildung 6.8a ist ein Schnitt durch die Flächendichte für die Zeiten $\tau = \{0,029, 0,046, 0,057, 0,069\}$ gezeigt. Die *hedis* 2.0 Lösungen (○) werden dabei mit den Lösungen aus *fosite* (gelbe, gestrichelte Linie) verglichen. Die rote Linie zeigt die analytische Lösung. Die numerischen Lösungen zeigen qualitativ das gleiche Verhalten, nämlich dass Oszillationen vom Innenrand in Richtung Außenrand wandern. Die analytischen Ausdrücke hingegen zeigen diese Oszillationen nicht.

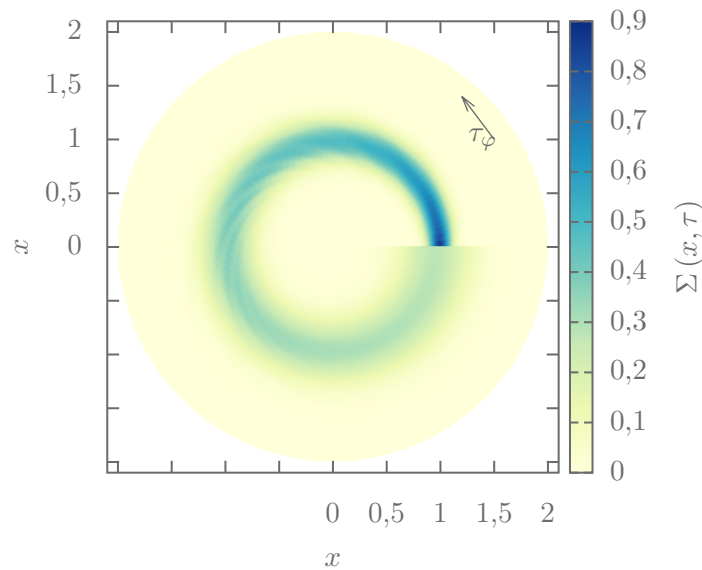


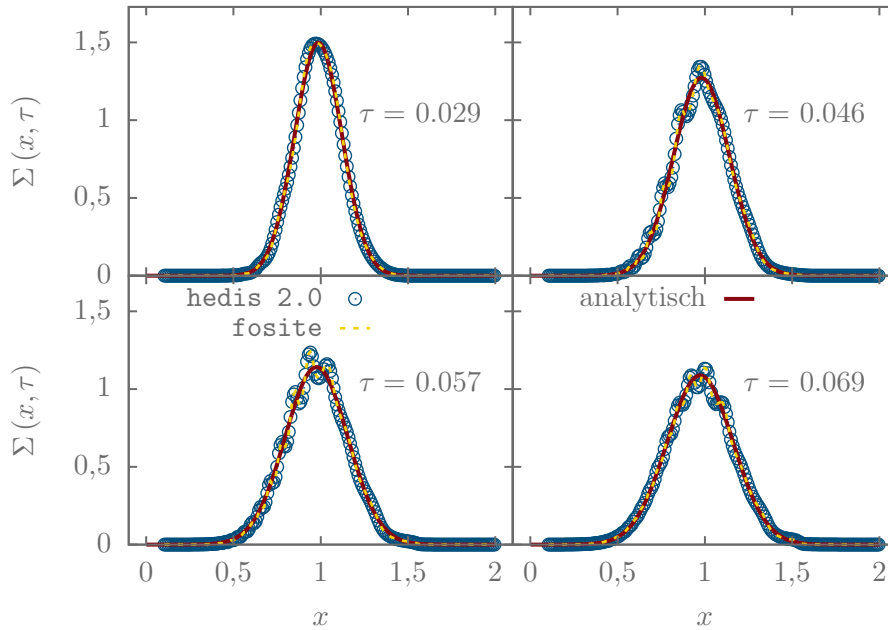
Abbildung 6.7: Zeitabhängige Entwicklung der Flächendichte. In azimuthaler Richtung ist die Zeitachse aufgetragen. Die spiralförmigen Strukturen sind Oszillationen, die keine Abhängigkeit von der Auflösung aufweisen und mit den von Speith und Kley (2003) gezeigten Instabilitäten erklärt werden können.

In Abbildung 6.8b sind die Azimutalgeschwindigkeiten (dunkelblau) und die Radialgeschwindigkeiten (hellblau) entlang des Schnittes analog zur Flächendichte zusammen mit den analytischen und den Lösungen aus *fosite* gezeigt. Die Radialgeschwindigkeit weist bei $x \sim 1$ ebenfalls eine regelmäßig oszillierende Struktur entsprechend der Flächendichte auf, wobei die Lösungen aus *hedis 2.0* und *fosite* dort nahezu identisch sind. Die Schwingungen am Innenrand werden durch die Wahl der **RB** verursacht, was den geringen Unterschied zu den *fosite*-Lösungen ausmacht. Die Schwingungen in der Azimutalgeschwindigkeit sind sehr gering, aber ebenfalls vorhanden. Die *hedis 2.0*- und die *fosite*-Lösungen zeigen sehr ähnliches Verhalten, wobei die Unterschiede lediglich auf die verschiedenen Zeitintegrationsroutinen (Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung und explizites Euler-Verfahren dritter Ordnung) zurückzuführen sind.

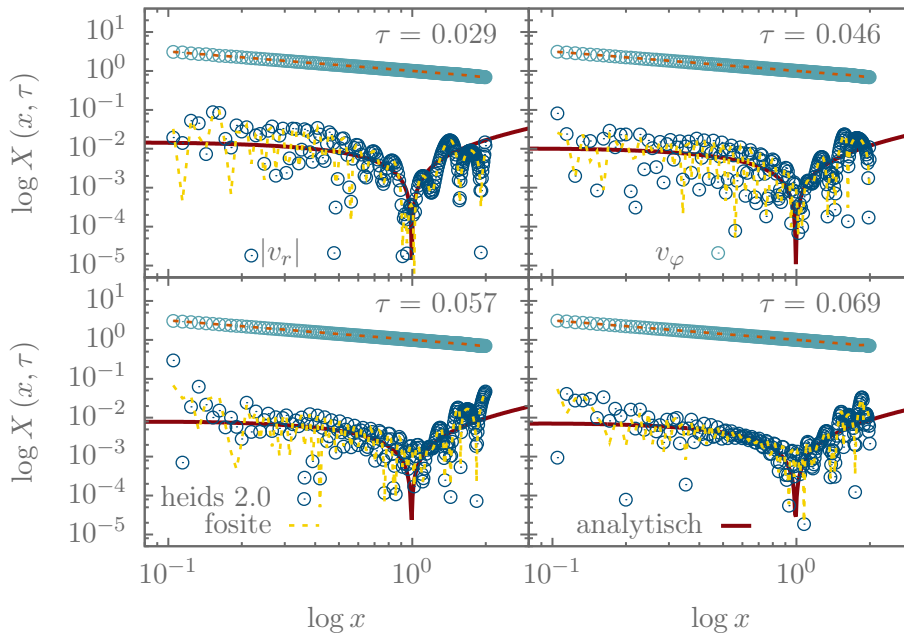
Speith und Kley (2003) zeigen, dass sich bei einem viskos zerfließenden Ring viskos getriebene Instabilitäten ausbilden. Ob die in diesem Testbeispiel auftretenden Oszillationen (Abbildungen 6.8) diesem Befund genügen, kann überprüft werden, indem die Simulation mit 5-facher räumlicher Auflösung ($N = 1000$) wiederholt wird. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen F.1 und F.2 gezeigt. Man erkennt das gleiche Verhalten mit gleicher Amplitude der Oszillationen bei sehr viel höherer Auflösung. Damit wird ein numerischer Effekt ausgeschlossen und die viskos getriebenen Instabilitäten von Speith und Kley (2003) sind als Ursache sehr wahrscheinlich.

6.5 Isotherme Implosionen und Explosionen

In Kapitel 3 sind zwei Anwendungsmöglichkeiten isothermer Unstetigkeiten vorgeschlagen: Das modellieren isothermer Entwicklungsphasen von **SNR** (Kapitel 4) und das



(a) Die Flächendichte (blau) für verschiedene Zeiten im Vergleich mit *fosite* (gelb) und den analytischen Ausdrücken (rot).



(b) Analog zu (a) mit den Geschwindigkeiten ($X = v_r$, dunkelblaue und $X = v_\varphi$, hellblaue Punkte) des Pringle-Tests im Vergleich mit *fosite* ($X = v_r$, orange und $X = v_\varphi$, gelbe Linien). Die stärksten Abweichungen treten für die Radialgeschwindigkeit auf.

Abbildung 6.8: Die Flächendichte (a) und Geschwindigkeiten (b) für verschiedene Zeitpunkte zur Verdeutlichung der Oszillationen. Im Vergleich dazu die Ergebnisse aus *fosite*.

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	10^{-3}	RB (i/a):	REFLEKT/NOGRAD
r_{\max}	10^2	AB	Abschn. 3.3
c_s	1	Geom.	SPHÄRISCH
κ	5/4	Löser	HENYEY
N	$\{1, 3, 6, 10, 25, 50\} \cdot 10^2$		(Rk4)
t_{end}	6	Limiter	MONOCENT
c_{cfl}	0,3	θ_{mc}	1,4
c_{itw}	0,1	–	–

isotherme RHB für $\kappa = 5/4$, $\alpha = 2$

IP		EP
r_0	1,391	1,963
u_u	0,012	0,844
u_d	0,666	1,070
ρ_u	1,221	0,507
ρ_d	2,325	0,635

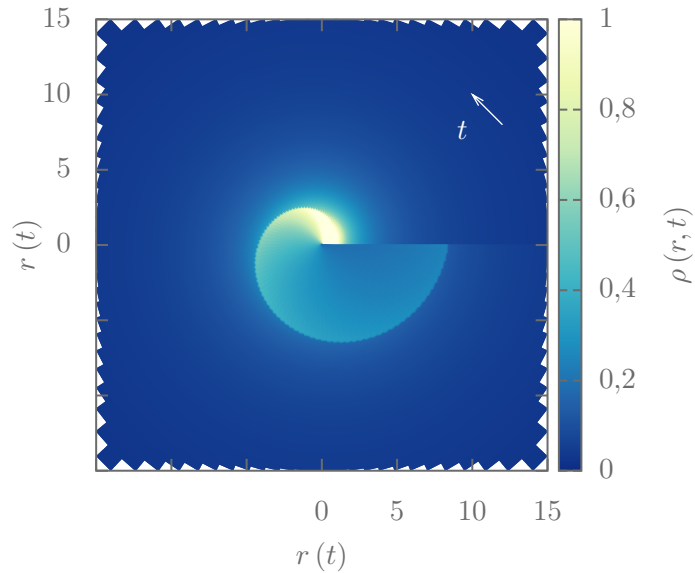
Tabelle 6.5: Simulationsparameter und RHB zur Programmverifikation des IP und EP. Die RHB in der unteren Tabellenhälfte sind für $\kappa = 5/4$ und in sphärischer Geometrie $\alpha = 2$ numerisch berechnet.

Testen isothermer CFD-Programme. Unstetige Strömungen numerisch abzubilden ist bis heute eine Herausforderung und führte unter anderem zur Entwicklung der Godunov-Verfahren (Toro 1999), auf welche auch `hedis 2.0` zurückgreift (siehe auch Abschnitt 5.1.3). Somit stellen die in Kapitel 3 entwickelten Lösungen zum IP und EP wichtige Testfälle speziell für isotherme Probleme dar. Da das Modell in Kapitel 3 ausführlich eingeführt wurde, werden die Lösungen im Folgenden nur im Vergleich diskutiert. Die Unstetigkeiten testen keine Quellterme, vielmehr aber die Numerik und Integrationsroutinen und verdeutlichen die Wirkungsweise der Limiterfunktionen. Die RHB (Tabelle 6.5) wurden mit der in Abschnitt 3.4 beschriebenen und in Anhang E aufgelisteten Routine berechnet.

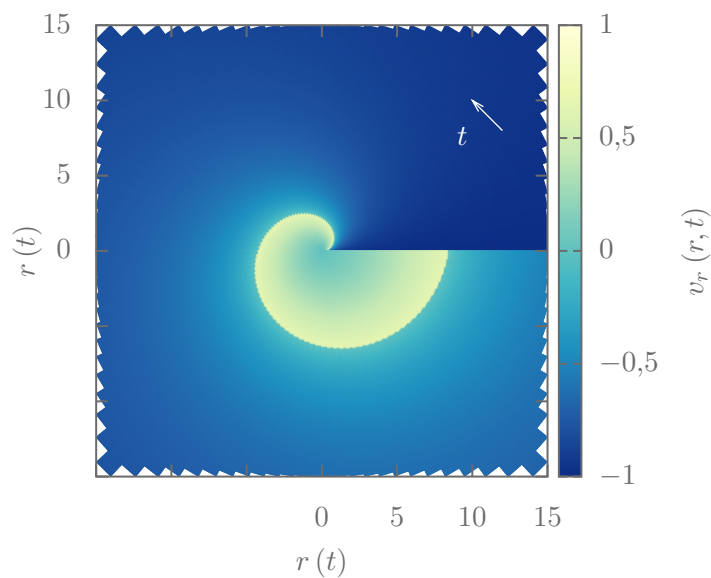
6.5.1 Programmverifikation

In Abbildung 6.9a ist die Massendichte und in Abbildung 6.9b die Radialgeschwindigkeit des IP im zeitlichen Verlauf gezeigt. Die Zeit ist in azimuthaler Richtung aufgetragen, analog zur Abbildung 6.7. In Tabelle 6.5 sind die Simulationsparameter für `hedis 2.0` angegeben, wobei die höchste Auflösung über das explizite Zeitintegrationsverfahren für die Darstellung der Farbgradienten benutzt wurde. Weitere Auflösungen sind in den Abbildungen 6.10 gezeigt.

Die normierte Massendichte fällt im Laufe der Zeit aufgrund der Massenerhaltung ab. Im Besonderen wird deutlich, dass die Massendichte über die Simulationszeit $t_{\text{end}} = 6$ hinter der Stoßwelle langsam verschwindet ($\rho \neq 0$). Das Material in der Stoßwelle und innerhalb eines bestimmten Bereiches dahinter wird mittransportiert. Auch das aufgeworfene Material vor der Stoßwelle wird mit abnehmender Stoßstärke geringer, die Unstetigkeit dissipiert.



(a) Zeitlicher Verlauf der Massendichte des IP ($N = 2500$, RK4). Die Dichte nimmt im Laufe der Zeit immer mehr ab, da sich das Volumen vergrößert, die Masse aber erhalten bleibt. Die Dichtewelle wird mit der Umgebung vergleichbar, die Stoßwelle dissipiert.



(b) Zeitlicher Verlauf der Radialgeschwindigkeit des IP ($N = 2500$, RK4). Die Stoßwellengeschwindigkeit bleibt zeitlich konstant.

Abbildung 6.9: Isotherme Implosionen mit zeitlichem Verlauf im Azimut. Die Dichte (a) fällt im Laufe der Zeit beziehungsweise mit zunehmender Ausdehnung ab, die Radialgeschwindigkeit (b) bleibt zeitlich konstant.

Für die konstante Radialgeschwindigkeit gilt dies nicht. Die Stoßstärke des **IP** bleibt über die gesamte Simulationszeit erhalten, die Unstetigkeit bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. In Richtung Zentrum fällt die Geschwindigkeit auf Null ab, was den Voraussetzungen (Kapitel 3) entspricht. Kurz gefasst wird über die Abbildungen 6.9 besonders deutlich, dass die Unstetigkeit Material mit konstanter Geschwindigkeit auf ein immer größeres Volumen verteilt, weshalb die Dichte abnimmt und die Unstetigkeit dissipiert.

In Abbildung 6.10a sind die Lösungen für $t = 1$ gezeigt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Lösungen mit zunehmender Auflösung gegen den exakten Ausdruck konvergieren womit die Lösungen Konsistenz zeigen. Die **RHB** werden mit den relativ kleinen Auflösungen zwar schlecht wiedergegeben, aber mit größerem N exakter. Das relativ große Rechengebiet hat zur Folge, dass sehr hohe Auflösungen verwendet werden müssen. Dadurch erreicht man eine gewisse Unabhängigkeit von den äußeren **RB**, die einfach als **NOGRAD** gesetzt werden können. Am Innenrand wird die Radialgeschwindigkeit reflektiert (**REFLEKT**), die Massendichte ebenfalls aus dem Rechengebiet fortgesetzt (**NOGRAD**). Die laxen Behandlung der Ränder erfordert in diesem Fall also ein großes Rechengebiet.

In Abbildung 6.10b sind die Lösungen zum **EP** dargestellt. Man erkennt dasselbe Verhalten wie beim **IP**, sodass die Lösungen mit zunehmender Auflösung konvergieren. Auch hier bildet erst eine Auflösung von $N = 5000$ die Stoßwelle hinreichend gut ab. Der Ort der Stoßwelle wird im Vergleich mit den Werten in Tabelle 6.5 gut wiedergegeben und die Geschwindigkeiten und Dichten an der Stoßwelle $u_{u,d}$, $\rho_{u,d}$ werden erst mit sehr großen Auflösungen hinreichend gut abgebildet.

6.5.2 Diskussion

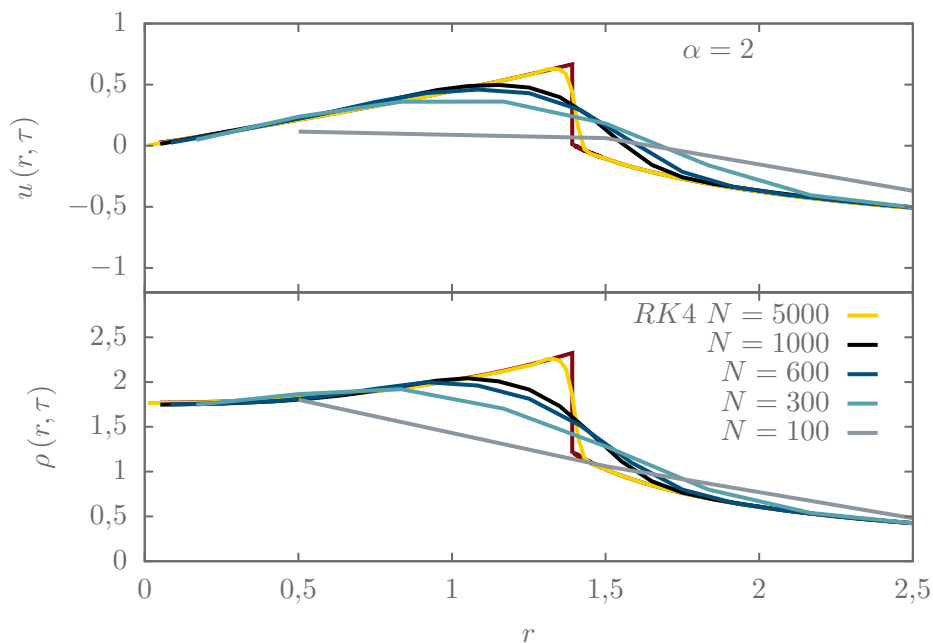
hedis 2.0 liefert im Falle der isothermen **IP** und **EP** quantitativ gute Übereinstimmung mit den exakten Lösungen. Anstelle der Auflösung N kann man die effektive Auflösung N_{eff} , also das Verhältnis des gesamten Rechengebietes r_{max} zur Auflösung im Vergleich mit dem betrachteten Rechengebiet $r_{\text{eff}} = 2,5$ und 5 (**IP**, **EP**)

$$N_{\text{eff}} = r_{\text{eff}} \frac{N}{r_{\text{out}}} = 125,250 \quad (6.27)$$

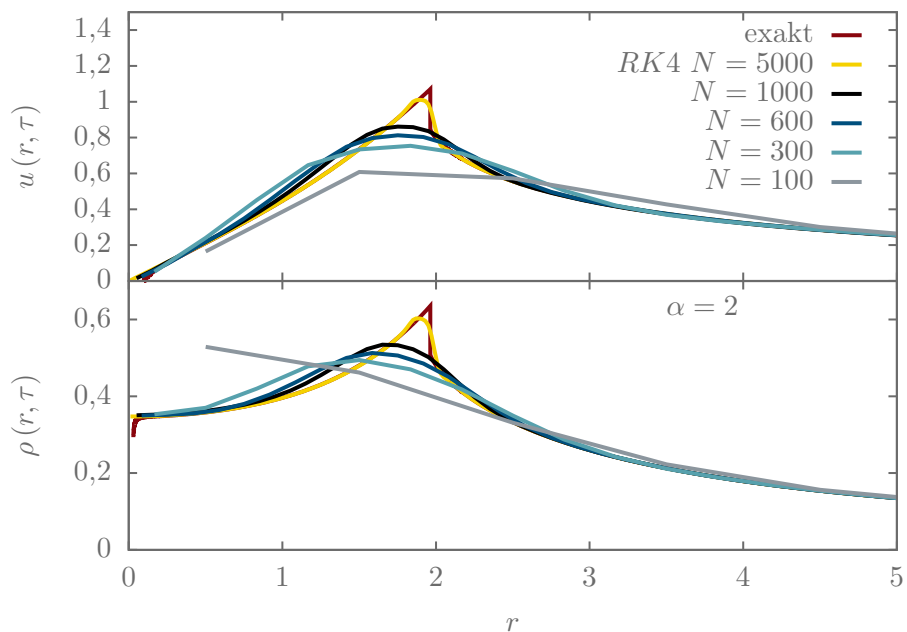
betrachten. Dadurch werden die Ergebnisse mit den anderen Tests vergleichbar, weil die benötigten effektiven Auflösungen, den notwendigen der anderen Testfälle entspricht. In den Abbildungen 6.10 ist das Konvergenzverhalten mit steigender Auflösung klar zu erkennen. Die Randbedingungen sollten in Abhängigkeit von der Zeit implementiert werden, um das Rechengebiet zu verkleinern und somit die Auflösungen geringer zu halten. Diese Abhängigkeit ist dem Wandern der Stoßwelle vom Zentrum weg hinein in ein begrenztes Rechengebiet geschuldet. Der Effekt unterschiedlicher Limiter-Funktionen auf die Ausbildung der scharfen Kanten an der Unstetigkeit kann mit dieser Untersuchung gezeigt werden.

6.6 Starr rotierendes Gas in einer Kugelschale

In diesem Abschnitt wird eine Flüssigkeit betrachtet, die in einer Kugelschale starr um eine massive Punktquelle rotiert. Ein solches Szenario könnte beispielsweise eine



(a) *hedis* 2.0- und exakte Lösungen des IP mit unterschiedlichen Auflösungen N nach $t = 1$ Zeitskalen.



(b) *hedis* 2.0- und exakte Lösungen des EP mit unterschiedlichen Auflösungen N und nach $t = 1$ Zeitskalen.

Abbildung 6.10: Das IP (a) und EP (b) in unterschiedlichen Auflösungen N . Mit steigendem N verbessert sich die Konvergenz und die RHB werden exakter reproduziert.

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	0,3	RB (i/a):	EXAKT (6.34)
r_{\max}	5	AB	(6.34)
N	50, 100, 200, 300	Geom.	SPHÄRISCH
c_s	1	Löser	HENYEV
v_φ	1	Limitier	MONOCENT
M_\oplus	G^{-1}	θ_{mc}	1,4
$M_{\text{Atm.}}$	1	Quellen	KEPLER
t_{end}	100		

Tabelle 6.6: Simulationsparameter einer rotierenden Gaskugel.

Atmosphäre um einen nicht rotierenden Planeten sein⁵⁵. Mathematisch setzt man die Annahmen einer konstanten Azimutalgeschwindigkeit und das Potential einer Punktquelle mit der Masse eines Planeten M_\oplus

$$v_\varphi(r, t) = \text{const.}, \quad \phi = -\frac{GM_\oplus}{r} \quad (6.28)$$

an, und schreibt die Gleichungen (2.14, 2.15, 2.16) analog zur Bondi-Akkretion (Abschnitt 6.3) mit einem Parameter $\alpha \in \{0, 1, 2\}$ für unterschiedliche Symmetrien:

$$\partial_t \rho + \frac{1}{r^\alpha} \partial_r (r^\alpha \rho v_r) = 0, \quad (6.29)$$

$$\partial_t (\rho v_r) + \frac{1}{r^\alpha} \partial_r (r^\alpha \rho (v_r^2 + c_s^2)) - \rho \frac{(v_\varphi^2 + 2c_s^2)}{r} + \frac{\rho GM}{r^2} = 0, \quad (6.30)$$

$$r v_\varphi \partial_t (\rho) + \frac{v_\varphi}{r^\alpha} \partial_r (r^{\alpha+1} \rho v_r v_\varphi) = 0. \quad (6.31)$$

Da es keinen Geschwindigkeitsgradienten in azimuthaler Richtung gibt, kann v_φ aus den Differentialen in der dritten Gleichung herausgezogen werden. Nach einigen Umformungsschritten ergibt sich zusammen mit der Kontinuitätsgleichung die Bedingung

$$\rho v_r = 0, \quad (6.32)$$

was zu einem insgesamt stationären Problem führt. Unter Verwendung von Bedingung (6.32) für die Impulsgleichung, findet man die GDG

$$\frac{d_r \rho}{\rho} = \frac{v_\varphi^2}{rc_s^2} - \frac{GM_\oplus}{c_s^2 r^2} - \frac{(\alpha - 2)}{r} \Leftrightarrow \frac{d_s R}{R} = \frac{u^2 + 2 - \alpha}{s} - \frac{1}{s^2}. \quad (6.33)$$

Zur Interpretation des dimensionsbehafteten Ausdrucks multipliziert man die Gleichung mit ρc_s^2 und identifiziert den spezifischen Druck auf der linken Seite und die spezifische Zentripetal- und Gravitationskraft auf der rechten. Der verbleibende Ausdruck ist ein geometrischer Zusatzterm zum spezifischen Druck. Somit stellt sich eine stationäre Dichteverteilung zwischen Druck, Zentripetal- und Gravitationskraft ein. Für die

⁵⁵Trotz ausführlicher Sichtung vorhandener Literatur konnte dieses Problem nicht gefunden und entsprechend referenziert werden. Eventuell ist es ähnlich der Lösungen aus Kapitel 3 ebenfalls ein neues Problem.

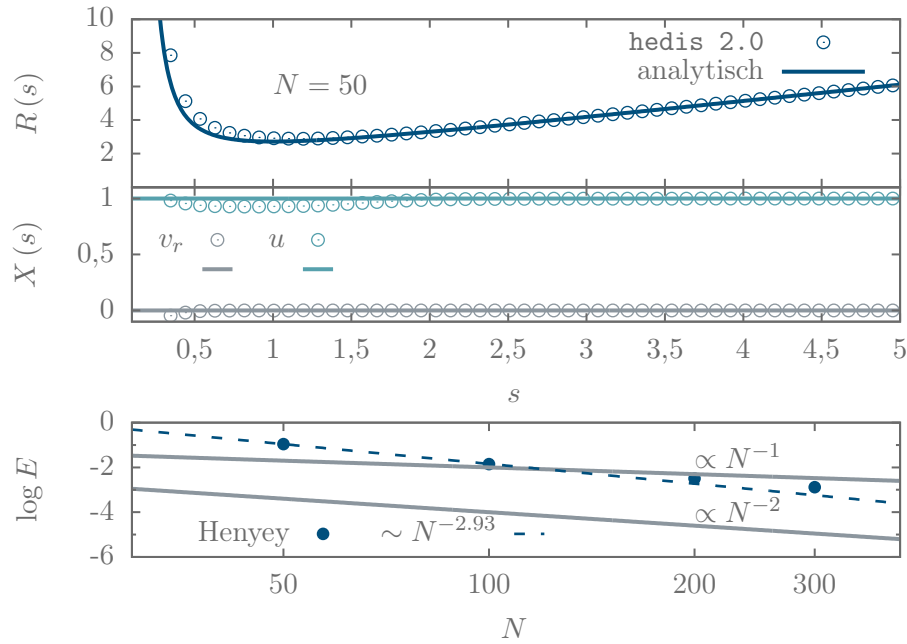


Abbildung 6.11: Die dimensionslosen Größen Massendichte R und Geschwindigkeiten $X \in \{v_r, u\}$ einer rotierenden Kugelschale. Das untere Teilbild zeigt den Konvergenztest zum Problem, also die Abhängigkeit des relativen Fehlers zur Auflösung. Die grauen Linien entsprechen der erwarteten Konvergenzordnung, welche für diesen Test übertroffen wird.

dimensionslose Äquivalenzumformung wurden die Definitionen (6.18) analog zur Bondi-Akkretion benutzt ($R = \rho/\rho_\infty$), wobei in den Definitionen v_r durch v_φ , also $u = v_\varphi/c_s$ ersetzt wurde. Die umgeschriebene Gleichung kann über Trennung der Variablen zu

$$R(s) = Cs^{u^2+2-\alpha} \exp(s^{-1}) \quad (6.34)$$

gelöst werden, wobei die Konstante $C = 1$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit gesetzt werden kann.

Die Simulationsparameter sind in Tabelle 6.6 aufgelistet und die Lösungen in sphärischer Symmetrie ($\alpha = 2$) in Abbildung 6.11 gezeigt. Alle physikalischen Größen sind ohne Dimensionen dargestellt. Die Massendichte ist an der Oberfläche des angenommenen Planeten am höchsten, hat ein Minimum an der Stelle $\rho(r=1) \sim 2,7$ und wächst mit zunehmendem Radius linear an. Dieser Verlauf erklärt sich über die Kräftebilanz des Problems. Während die Gravitation das Gas auf die Oberfläche zieht, versucht die Zentripetalkomponente das Gas nach außen zu drücken. Der Druck kann über Gleichung (2.6) dargestellt werden und ist somit proportional zur Massendichte. Damit gibt es eine Schicht in der Atmosphäre, die ein Druckminimum aufweist, im Gegensatz zu beispielsweise der Atmosphärenschichtung auf der Erde. Aufgrund der Symmetrien gibt es in diesem Fall ebenfalls keinen Unterschied zwischen der Schichtung am Äquator und an den Polen.

Die numerische Lösung, in Abbildung 6.11 mit einer Auflösung $N = 50$ gezeigt, bleibt auch nach 100 typischen Zeitskalen ($\tau = GM/c_s^3$) stationär, wobei sich ein geringer Geschwindigkeitsgradient an der Oberfläche ausbildet. Stationäre Probleme eignen sich

gut um die Konvergenzgeschwindigkeit der Numerik zu bestimmen, was im unteren Teilbild gezeigt ist. Mit zunehmender Auflösung konvergieren die Lösungen besser, was sich in der Konvergenzgeschwindigkeit $\sim N^{-3}$ ausdrückt.

6.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden eine Reihe numerischer Tests durchgeführt, um die Güte von `hedis 2.0` zu verifizieren. Neben dem Vergleich mit analytischen, beziehungsweise exakten Lösungen wurden auch Ergebnisse aus dem umfangreichen Programmpaket `fosite` (Illenseer und Duschl 2009) verglichen. Nicht alle Tests sind qualitativ untersucht worden. Dennoch lässt sich durchweg zeigen, dass alle Module (Quellen), Geometrien, die Diskretisierungstechnik sowie die Verfahren zur Zeitintegration zu konvergenten Lösungen führen. Insbesondere wurde dies für die Abhängigkeit von der Auflösung über den Konvergenztest nachgewiesen. Neben den neu eingeführten Lösungen zu isothermen `IP` und `EP` sind Lösungen zu einem starr rotierenden Gas hinzugekommen.

Die meisten Testfälle sind mit der `HM` berechnet worden. In einigen Fällen (beispielsweise beim isothermen Vortex) wurde eine andere Zeitschrittberechnung (`ASK`) verwendet, in anderen waren die hohen Auflösungen mit dieser Methode nicht realisierbar.

Diese Fälle könnten darauf zurückgeführt werden, dass die Matrixinversion trotz effizienter Bibliotheken innerhalb der Methode sehr aufwändig ist. Obwohl die `HM` nicht bedingungslos stabil sein muss und somit einem unverzichtbaren Kriterium zur Zeitschrittberechnung (siehe auch die Diskussion in Kapitel 5) unterliegen könnte, kann `hedis 2.0` mit Hilfe aller durchgeführten Tests als absolut verifiziert angenommen werden.

7 Aktive Galaktische Kerne

Die Intention zur Entwicklung von `hedis 2.0` liegt darin herauszufinden, wie sich die Massenbilanz Schwarzer Löcher in den Zentren von AGN ausbildet (siehe Abschnitt 1.2). Im Gegensatz zum Modell von Blank (2010) und Duschl und Strittmatter (2011) werden verschiedene Annahmen fallen gelassen, sodass die radiale Impulsgleichung und die zeitabhängige Drehimpulsgleichung zusätzlich gelöst werden. Diese Erweiterungen des Modells ermöglichen realistische Szenarien, sind aber aufgrund der Dimensionalität noch immer so grundlegend, dass die fundamentalen physikalischen Vorgänge herausgefiltert und interpretiert werden können. Aufgrund der impliziten Zeitintegrationsmethode ist `hedis 2.0` in Kombination mit den eingeführten Erweiterungen im verwendeten physikalischen Kontext einzigartig.

Dieses Kapitel schließt keine vollständige Untersuchung der Entwicklung von AGN ab, sondern es sollen wichtige Unterschiede zwischen den Modellen aufgezeigt werden. Dabei spielen die nunmehr drei, anstelle von einer Anfangsbedingung (AB) des Systems partieller Differentialgleichungen (PDG) (Abschnitt 2) eine tragende Rolle. Da diese nicht analytisch aus dem System abgeleitet werden können, werden verschiedene, in der Literatur geläufige AB für die Dichteverteilung angesetzt und mit den Lösungen aus Blank (2010) verglichen.

Nachdem ein direkter Vergleich einer Kalnajs-Scheibe (KS) (Kalnajs 1972) zwischen Blank (2010) und `hedis 2.0` angestellt wird, werden drei verschiedene Dichteverteilungen, die einem (gebrochenen) Potenzgesetz folgen, untersucht. Es zeigt sich, dass eine sorgfältige Wahl der AB essentiell, nicht nur zur Lösbarkeit des Systems (siehe z.B. auch Abschnitt 3.3), sondern ebenfalls zur Aussagekraft der erhaltenen Lösungen ist.

7.1 Anfangsbedingungen für eine Akkretionsscheibe

Die Wahl passender AB zu einem System PDG beeinflusst entscheidend die resultierenden Lösungen. Im Falle des Gleichungssatzes (2.14, 2.15, 2.16) können jedoch keine analytischen Ausdrücke für die drei Bedingungen Σ_0 , $v_{r,0}$, $v_{\phi,0}$ angegeben werden. Deshalb greift man auf plausible Annahmen zurück, welche gewährleisten sollen, Lösungen möglichst nahe an den echten AB zu erzeugen. Für AS haben sich in der Vergangenheit folgende Annahmen (z.B. Blank 2010; Illenseer und Duschl 2015) durchgesetzt, die jetzt kurz diskutiert werden sollen.

Flächendichte: Es werden die Dichteverteilungen

$$\Sigma(r, t = 0) = \Sigma_0 \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{r_k}\right)^2}, & \text{falls } r \leq r_k, \\ f(r) = r^{-2}, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\Sigma(r, t = 0) = \Sigma_0 \begin{cases} \left(\frac{r_k}{r}\right)^a, & \text{falls } r \leq r_k, \\ \left(\frac{r_k}{r}\right)^b, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.2)$$

definiert, wobei die Verteilung (7.1) nach Kalnajs (1972) gewählt wurde, um Vergleiche mit der Arbeit von Blank (2010) anstellen zu können. Die Verteilung (7.2)

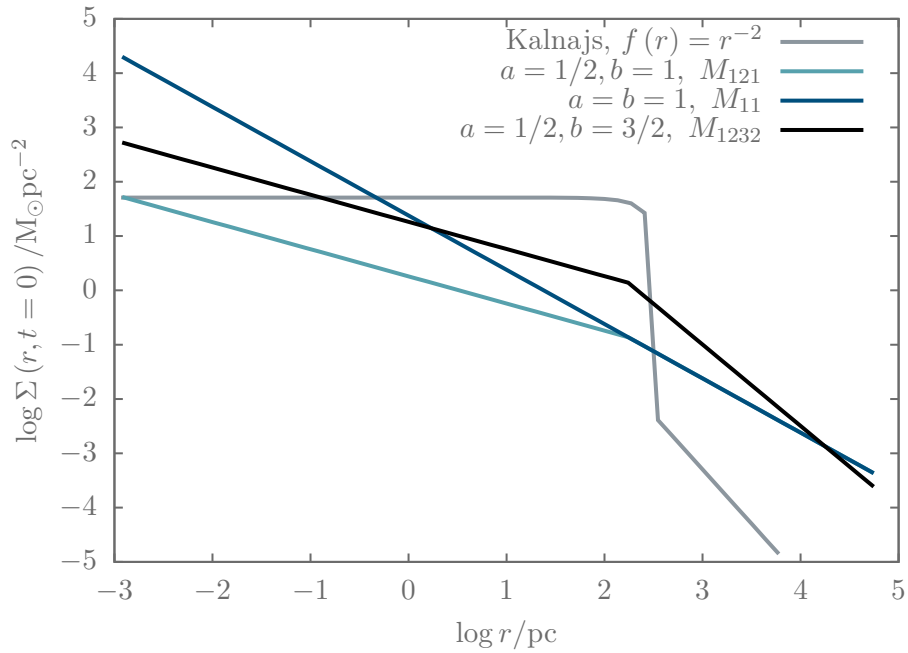


Abbildung 7.1: **AB** der radialen Dichteverteilung nach Gleichung (7.1). Es ist die **KS** gezeigt, sowie Verteilungen nach einem gebrochenen Potenzgesetz, wobei für $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ gilt. Die Modelle M_{121} , M_{11} und M_{1232} stellen spezielle Parameter für a, b dar, die untersucht werden sollen (Abschnitt 7.3).

beschreibt den Verlauf der Flächendichte über ein gebrochenes Potenzgesetz, wobei für beide Verteilungen an der Stelle $r = r_k$ ein Knick im radialen Dichteverlauf vorliegt. Das Besondere an der zweiten Verteilung ist, dass die Parameter $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ variabel gewählt werden können. So findet man beispielsweise für $a = b = 1$ die von Mestel (1963) vorgeschlagene Dichteverteilung $\Sigma \propto r^{-1}$. In Abbildung 7.1 sind die zur Untersuchung vorgeschlagenen Verteilungen gezeigt. Die Flächendichte der **KS** bleibt bis zum Außenrand der Scheibe konstant und folgt nach einem sprunghaften Abfall der Funktion $f(r) = r^{-2}$.

Die Funktion f wird verwendet, um den Außenbereich von **AS** ab r_k zu modellieren. Dabei werden 99,9 % der Masse verwendet, um die Flächendichte ρ im Innenbereich bis zum Knick zu verteilen und nur 0,1 % der Masse fällt auf die Funktion f im Außenbereich. Die Idee dabei liegt in der weitestgehenden Unabhängigkeit von der äußeren **RB**. Die Scheibe kann dadurch während ihrer Entwicklung Masse nach außen schieben (ohne dass diese verloren geht) und im weiteren Verlauf wieder akkretieren.

Das Dichteprofil eines gebrochenen Potenzgesetzes besitzt keine harte Kante am Außenrand. Während die Parameter $a \neq b$ so gewählt sind, dass sich der Hauptteil der Masse am Innenrand befindet ($a < b$ für $r \leq r_k$), wird ein steilerer Verlauf am Außenrand angenommen, um ähnlich der **KS** den Einfluss der Masse bei $r > r_k$ zu reduzieren. Der leicht versetzte Knick sowie der abweichende Außenrand in der **AB** sind zum einen der Zellverteilungsfunktion (5.11) geschuldet. Zum anderen können die Parameter a, b sowie die Position des Knickes r_k nur innerhalb eines

schmalen Bereiches gewählt werden. Deshalb kann kein direkter, aber zumindest ein quantitativer Vergleich gezogen werden.

Radialgeschwindigkeit: Über die Annahme, dass sich das Material in der Scheibe in Richtung Zentrum bewegt, kann $v_r \ll v_\varphi$ angenommen werden (slow-accretion limit). Da die Radialgeschwindigkeit auch durch die Schallgeschwindigkeit dominiert ist, wird sie in den meisten Fällen als $v_r(r, t = 0) = 0$ gesetzt. Die Eigenwerte der Advektionsmatrix (5.15) verschwinden dadurch nicht, da für die konstante Schallgeschwindigkeit immer $c_s \neq 0$ gilt.

Azimutalgeschwindigkeit: Über das Gravitationspotential (2.21) kann die Azimutalgeschwindigkeit $v_\varphi(r, t = 0)$ berechnet werden. Sie setzt sich demnach aus der Kepler-Geschwindigkeit und, falls gewünscht, dem aus der Selbstgravitation resultierenden Geschwindigkeitsprofil zusammen.

Zwar ist es essentiell alle AB möglichst korrekt zu wählen, aber dennoch ist es sinnvoll das Augenmerk auf verschiedene Verteilungen der Flächendichte zu legen, da sie den stärksten Einfluss auf die Dynamik einer AS ausübt. Deshalb werden die vorgeschlagenen Verteilungen (7.1, 7.2) und deren Auswirkungen auf das Wachstum von AGN in den folgenden Abschnitten näher betrachtet.

7.2 Die Kalnajs-Scheibe

Die Einflüsse der KS auf die Dynamik und die Massenbilanz eines AGN sollen aufgezeigt werden. Dabei werden der Viskositätsparameter β (Abschnitt 2.4.2) sowie die Anfangsscheibenmasse $M_{D,i}$ variiert. Zur Vereinfachung der Schreibweise gelten folgende Definitionen:

$$\beta_2 \doteq \beta = 10^{-2}, \quad (7.3)$$

$$\beta_3 \doteq \beta = 10^{-3}, \quad (7.4)$$

$$M_{D,7} \doteq M_{D,i} = 10^7 M_\odot, \quad (7.5)$$

$$M_{D,9} \doteq M_{D,i} = 10^9 M_\odot. \quad (7.6)$$

7.2.1 Die Zeitabhängigkeit der Kalnajs-Scheibe

Die Dynamik einer KS ist über Abbildung 7.2 gezeigt. Dabei gilt, dass ortsabhängige Information nur in radialer Richtung getragen wird, die Entwicklung in der Zeit in azimuthaler. Die vier Abbildungen zeigen die Flächendichte $\Sigma(r, t)$ und unterscheiden sich in der Anfangsscheibenmasse sowie im Viskositätsparameter (Gleichung 2.30). Dabei gilt für Abbildung 7.2a $M_{D,7}$, β_2 , für Abbildung 7.2b $M_{D,7}$, β_3 , für Abbildung 7.2c $M_{D,9}$, β_2 und für Abbildung 7.2d $M_{D,9}$, β_3 . Alle weiteren Simulationsparameter sind in Tabelle 7.1 zusammengetragen, wobei der Knick in der AB der KS bei ~ 240 pc lokalisiert ist.

In Abbildung 7.2a ist ein sehr glattes Profil der Flächendichte zu erkennen, das innerhalb der ersten $\sim 4 \cdot 10^8$ a anwächst und anschließend sukzessive ausdünnt. Die Dichteverteilung stellt sich schnell und ähnlich einem gebrochenen Potenzgesetz ein, wobei der Knick im Laufe der Zeit nach außen wandert⁵⁶ (siehe Abbildung F.3 im Anhang).

⁵⁶Dieses Verhalten gleicht den Befunden von Lüst (1952), der die Akkretion auf ein Zentralobjekt analytisch löst.

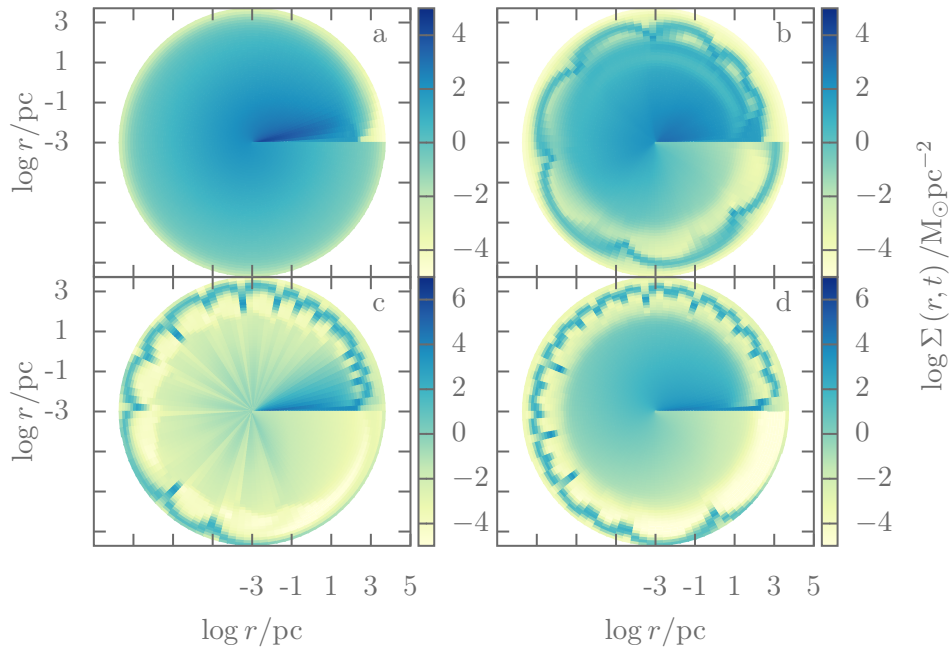


Abbildung 7.2: Die Dynamik der KS, wobei über den Azimut die Zeit aufgetragen ist. Teilbilder a (b) beziehen sich auf $M_{D,7}$, β_2 (β_3) und c (d) auf $M_{D,9}$, β_2 (β_3).

Bei der Simulation mit gleicher Scheibenmasse und geringerem Viskositätsparameter (Abbildung 7.2b) bildet sich über die Zeit gesehen ein Muster aus, wobei Material während $\sim 10^9$ a und innerhalb $100 \text{ pc} - 300 \text{ pc}$ oszilliert. Die Periode dieser Oszillation scheint sich mit der Zeit zu vergrößern. Man erkennt weiterhin eine Umverteilung der Masse, wobei sich am Außenbereich der AS bei $\sim 300 \text{ pc}$ Material angesammelt hat. Zwischen $\sim 200 \text{ pc} - 300 \text{ pc}$ hingegen wird sehr viel Material entfernt. Dadurch entsteht eine Aufteilung der Scheibe zu einem inneren und einem äußeren Bereich, der einen weiteren Massentransport verhindert.

Abbildung 7.2c zeigt bei einer hohen Viskosität und für hohe Scheibenmassen ebenfalls Oszillationen zwischen $\sim 200 \text{ pc} - 300 \text{ pc}$, wobei die Periode geringer ist. Es wurde sehr viel Masse in einen äußeren Ring umverteilt, welcher hohe Akkretionsraten unterdrückt. Auch hier wird die AS durch Umverteilungsprozesse zwischen $\sim 200 \text{ pc} - 300 \text{ pc}$ aufgetrennt.

Auch im letzten Teilbild 7.2d oszilliert die Flächendichte am Außenbereich der Scheibe mit der kürzesten Periode der vier Beispiele. Die Entwicklung ist ansonsten sehr ähnlich zu Abbildung 7.2c, wobei sich der Bereich zwischen Zentrum und der freigeräumten Lücke bei $r \lesssim 200 \text{ pc} - 300 \text{ pc}$ sehr glatt entwickelt.

Allgemein muss noch die Simulationszeit Erwähnung finden. Während die Rechnung mit $M_{D,7}$, β_2 recht schnell abläuft, wird für die anderen drei Parameterkombinationen bis zu ~ 2 Größenordnungen mehr Zeit⁵⁷ benötigt, da Oszillationen zu kürzeren Zeitschritten führen (siehe Berechnung der Zeitschrittweite in Gleichung 5.74).

⁵⁷Die CPU-Zeit bezieht sich hier auf einen Intel(R) Core(TM) i5-2400 CPU @ 3.10GHz mit 4 Kernen, wobei nur ein Kern verwendet wird, da `hedis` 2.0 nicht parallelisiert ist. Die kürzesten Rechenzeiten liegen bei etwa 2 min – 5 min pro Simulation.

Phys. Größe	Wert	Modus	Art
r_{\min}	10^{-3} pc	RB (i/a):	ANGEPASST
r_{\max}	$3 \cdot 10^2$ pc	AB	Abschnitt 7.1
c_s	$9,28 \cdot 10^{-7}$ m s $^{-1}$	Geom.	LOGPOL
β	$10^{-3}, 10^{-2}$	Löser	HENYEV
N	50	Quellen	GRAV, MP
t_{end}	10^{10} a		VISKOS
$M_{D,i}$	$10^7 M_{\odot} - 10^{10} M_{\odot}$	Limitier	MONOCENT
$M_{\bullet,i}$	$10^4 M_{\odot}$	θ_{mc}	1,4

Tabelle 7.1: Simulationsparameter für `hedis 2.0`, die für alle **AB** gleich sind. Der Parameter p setzt den Knick der Verteilung.

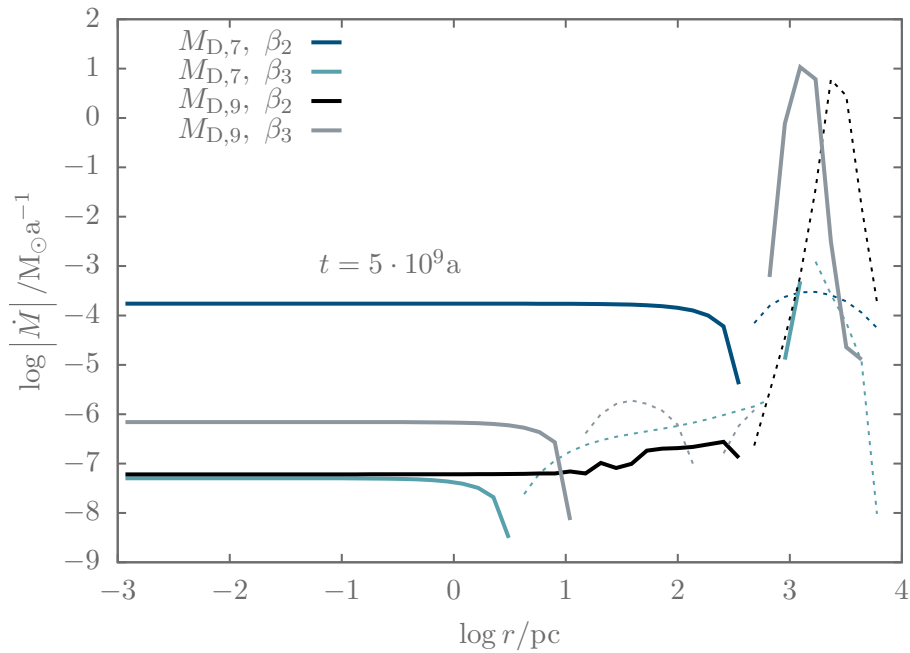
Ein Oszillieren der Flächendichte tritt im Modell von Blank (2010) nicht auf. Im nächsten Abschnitt wird besprochen, wie sich die Oszillationen auf die Massenbilanz und die Massenflüsse ausüben.

7.2.2 Die Massenflüsse und Massenbilanzen

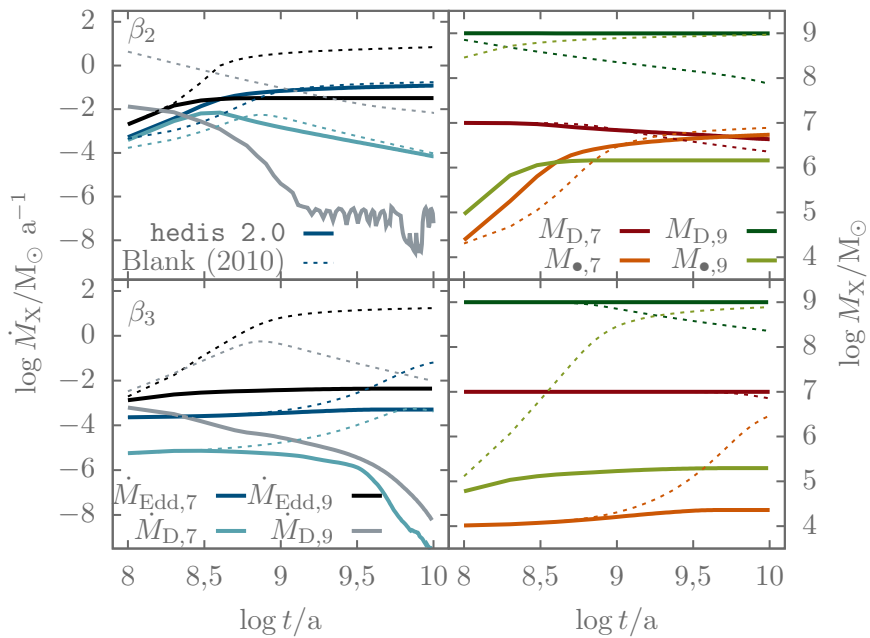
Der radiale Massenfluss ist in Teilbild 7.3a nach $5 \cdot 10^9$ a gezeigt. Die erste Parameterkombination ($M_{D,7}, \beta_2$) zeigt eine konstante Akkretionsrate (durchgezogene Linie) bis zum Knick der Verteilung bei ~ 240 pc. Anschließend ändert sich zwar das Vorzeichen (gestrichelte Linie), nicht aber die Größenordnung von $10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$. Bei den drei restlichen Parameterkombinationen gibt es ebenfalls einen inneren Bereich konstanter Akkretionsrate, der allerdings bei nur $\sim 10^{-8} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ liegt. Danach wechselt das Vorzeichen und zwischen der konstanten Rate und dem maximalen Massenfluss am Außenrand liegen bis zu ~ 9 Größenordnungen. Da im Unterschied zum Modell von Blank (2010) auch die radiale Impulsgleichung gelöst wird, wirkt die Druckkraft der vom Zentralobjekt erzeugten Schwerkraft entgegen und sorgt dadurch für die sehr geringen Akkretionsraten.

Dies kann auch in den zeitabhängigen Massenbilanzen und Massenflüssen 7.3b abgelesen werden. In der oberen Bildzeile in Abbildung 7.3b ist der Viskositätsparameter β_2 , in der unteren β_3 gezeigt. Die linke Bildspalte zeigt die zeitabhängigen Massenflüsse \dot{M}_D und die Eddington-Massenflüsse \dot{M}_{Edd} (siehe Gleichungen 2.39), die rechte Bildhälfte die Scheibenmasse M_D und die Masse des Schwarzen Lochs M_{\bullet} bezüglich der jeweiligen Anfangsscheibenmassen (Farbpaare). Die Diskussion kann in folgende Fälle gegliedert werden:

Hohe Viskosität, geringe Scheibenmasse (obere Bildzeile): Die Eddington-Rate (dunkelblaue Kurve) wird im Beispiel knapp verfehlt, weshalb das Schwarze Loch (orange Kurve) über die Akkretionsrate (hellblaue Kurve) anwächst. Die Scheibenmasse (rote Kurve) verringert sich dadurch kontinuierlich. Im Vergleich zu Blank (2010) (gestrichelte Kurven gleicher Farben) erkennt man das qualitativ gleiche Verhalten mit einem kleinen, zeitlichen Versatz beim Übergang in eine fallende Akkretionsrate, die durch eine ausgedünnte Scheibe abschwilt. Zu diesem Zeitpunkt ($\sim 6 \cdot 10^8$ a) ist fast die gesamte Scheibenmasse akkretiert worden (logarithmische Skala). Das Modell aus `hedis 2.0` kann somit für Langzeitsimulationen verifiziert werden.



(a) Radialer Massenfluss der KS nach $5 \cdot 10^9$ a. Der Innenbereich der Scheibe weist eine konstante Akkretionsrate in Richtung Zentrum auf (durchgezogene Linie entspricht negativem Vorzeichen). Danach ändert sich das Vorzeichen (gestrichelte Linie) und die Rate um bis zu ~ 9 Größenordnungen.



(b) Die Massenflüsse \dot{M}_{Edd} und die Akkretionsrate \dot{M}_{D} sind in der linken Bildhälfte gezeigt, die Entwicklung der Scheibenmassen M_{D} Schwarzwlochmassen M_{\bullet} in der rechten. Die obere Bildhälfte zeigt die Massen und Massenflüsse zum hohen Viskositätsparameter β_2 , die untere β_3 . Nur für eine Parameterkombination (durchgezogene Linien) können die Ergebnisse aus Blank (2010) (gestrichelte Linien) reproduziert werden.

Abbildung 7.3: Massenbilanz und Massenflüsse der KS. Teilbild (a) zeigt die radialabhängigen und Teilbild (b) die zeitabhängigen Größen.

Hohe Viskosität, hohe Scheibenmasse (obere Bildzeile): Das Zentralobjekt wächst entlang der Eddington-Grenze bis $\sim 5 \cdot 10^8$ a an (schwarze Linie), danach wird das Wachstum von der Scheibendynamik bestimmt (graue Linie). Die Akkretionsrate fällt schnell über mehrere Größenordnungen ab und pendelt sich ab $\sim 10^9$ a um einen Minimalwert ein. Deshalb wächst das Schwarze Loch in der „Eddingtondominierten Phase“ zunächst um zwei Größenordnungen an, stagniert danach aber aufgrund der abschwelldenden Akkretionsrate. Die AS verliert über die gesamte Simulationszeit kaum Masse (grüne Linie). Im Vergleich zu Blank (2010) können weder die Akkretionsraten, noch die Massenzu- beziehungsweise abnahmen reproduziert werden.

Geringe Viskosität, geringe und hohe Scheibenmasse (untere Bildzeile): Auch hier findet man sehr unterschiedliches Verhalten im Vergleich zu Blank (2010). Die Eddington-Rate wird in keinem der Fälle erreicht. Die Akkretionsrate ist zu gering, um das Schwarze Loch innerhalb der relevanten Zeitskala anwachsen zu lassen. Zwar ist der Zeitversatz des Wachstums im Vergleich ähnlich (das Schwarze Loch erreicht bedingt durch die dominante viskose Zeitskala Gleichung (2.33) erst zu einem späteren Zeitpunkt seine Endmasse), jedoch können die simulierten Schwarzen Löcher innerhalb 10^{10} a, also fast der gesamten Hubble-Zeit, nicht entsprechend anwachsen, weil die Masse umverteilt, aber nicht akkretiert wird (grüne und rote Linie bleiben nahezu konstant).

Die Kalnajs-Scheibe als Anfangsbedingung zeigt in drei der vier untersuchten Fällen eine unterschiedliche Dynamik im Vergleich zum Modell von Blank (2010). Die Massen wachsen nur gering an, da die erforderlichen Akkretionsraten nie erreicht werden. Da die Ergebnisse des Modells $M_{D,7}$, β_2 aber qualitativ gut mit denen aus Blank (2010) übereinstimmen, kann die Funktionsweise von `hedis 2.0` als korrekt angesehen werden. Unterschiede ergeben sich beispielsweise durch die Berechnung der eingeschlossenen Masse, die in `hedis 2.0` exakt über die Lösung der Kontinuitätsgleichung (2.38, 5.35) bestimmt wird.

Betrachtet man die viskosen Zeitskalen (Gleichung 2.33) in Abbildung 7.4, gilt für $t(r) = 0$ und alle vier Parameterkombinationen, dass $t(240 \text{ pc}) < 10^{10}$ a gilt. Das heißt, dass 20 % – 80 % (siehe Anhang G.3) der Masse innerhalb der Hubble-Zeit akkretiert werden können. Für Zeiten $t > 0$ gilt jedoch für die KS in `hedis 2.0`, dass auch die Zeitskala in der Nähe des starken Dichtegradienten bei ~ 240 pc oszilliert und somit den Akkretionsprozeß verzögert. Da bei allen Parameterkombinationen mit zunehmender Entwicklungszeit die Zeitskala wieder kleiner wird, kann man schließen, dass die angesetzten 10^{10} a nicht ausreichen, um das weit außen liegende Material nach innen zu transportieren.

Obwohl die KS als AB funktioniert, liefert die Dynamik des in `hedis 2.0` verwendeten Modells keine vergleichbaren Ergebnisse. Ob dies über passendere AB verbessert werden kann, wird im nächsten Abschnitt untersucht. Da sich die Verteilung der Flächendichte der KS schnell auf ein gebrochenes Potenzgesetz einstellt (siehe Abbildung F.3 im Anhang), werden diese als alternative AB betrachtet.

7.3 Dichteverteilung nach einem (gebrochenen) Potenzgesetz

Als nächstes soll die Anfangsdichteverteilung einem gebrochenen Potenzgesetz folgen und unter Verwendung verschiedener Parameter a und b (Gleichung 7.2) untersucht

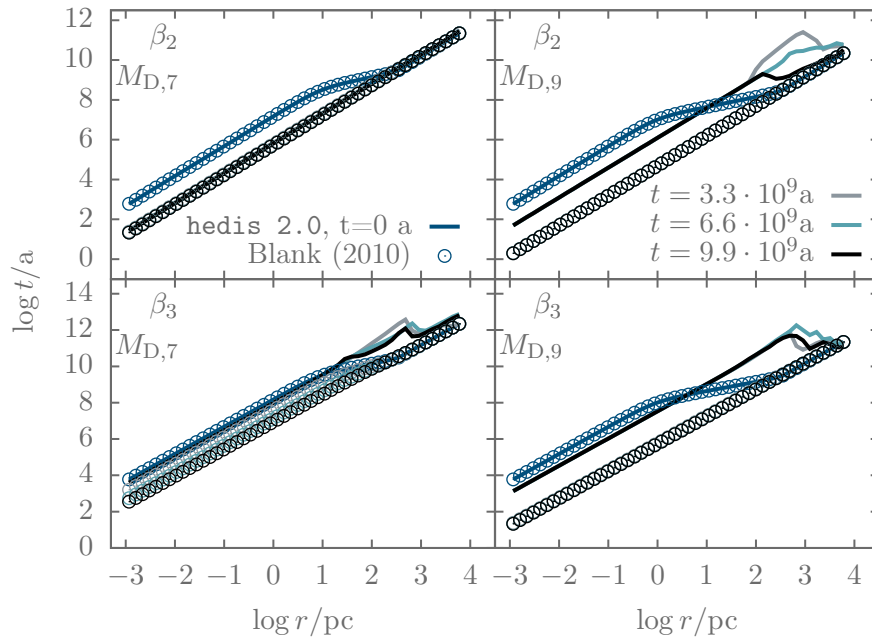


Abbildung 7.4: Die viskosen Zeitskalen der *KS* im Vergleich zu Blank (2010). Die Zeitskalen am Außenrand verlängern sich, die Oszillationen in *hedis 2.0* bewirken also Umverteilungen und führen zu ~ 2 Größenordnungen höheren Zeitskalen, um das Material weit außen zu akkretieren. 10^{10} a sind also zu kurz um das Material ins Zentrum zu transportieren.

werden. Neben einem gebrochenen Potenzgesetz wird auch die Verteilung nach Mestel (1963) betrachtet, womit die Kombinationen der freien Parameter a und b über

$$\begin{aligned}
 a = 1/2, b = 1, & \text{ Modell } M_{121}, \\
 a = b = 1, & \text{ Modell } M_{11}, \\
 a = 1/2, b = 3/2, & \text{ Modell } M_{1232}
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

festgelegt werden. Der Parameter $a = 1/2$ ist aufgrund des sich zügig einstellenden Exponenten der Dichteverteilung einer *KS* (Abbildung F.3) im inneren Bereich gesetzt. b für den äußeren Bereich ist steiler gewählt, um die Akkretionsscheibe (*AS*) kompakter zu halten. Die unterschiedlichen Modelle stehen nun im Vergleich zur *KS*, worüber sich Aussagen über die Lösungen und deren Abhängigkeiten von der *AB* ableiten lassen.

7.3.1 Die Zeitabhängigkeit der Flächendichte

In Abbildung 7.5 ist der zeitliche Verlauf der Flächendichte in azimuthaler Richtung dargestellt, wobei Abbildung 7.5a die Modelle M_{121} , M_{11} und M_{1232} mit dem Viskositätsparameter β_2 zeigen. Die erste Bildzeile bezieht sich auf Anfangsscheibenmassen $M_{D,7}$, die zweite auf $M_{D,9}$. In Abbildung 7.5b ist die Aufteilung äquivalent, nur dass der Viskositätsparameter β_3 verwendet wurde.

Hohe Viskosität

Analog zur *KS* mit β_2 (Abbildung 7.2a, c) zeigt sich ein sehr glatter, zeitlicher Dichteverlauf (Abbildung 7.5a) aller drei Modelle M_{121} , M_{11} und M_{1232} . Die oszillierenden

Strukturen haben sich allein durch die Verwendung einer alternativen **AB** für die Flächendichte und für $M_{D,7}$ und $M_{D,9}$ aufgelöst. Interessanterweise entwickeln sich die Modelle M_{121} und M_{11} nahezu identisch. Nur kleine Unterschiede sind im radialen Dichteverlauf auszumachen. Man erkennt schwache, spiralförmig nach außen wandernde Strukturen, die im Laufe der Zeit dissipieren. Am stärksten fallen diese Strukturen im Modell M_{1232} aus, also bei einem steileren Abfall der Flächendichte im Außenbereich der Scheibe. Keine der beiden untersuchten Anfangsscheibenmassen ($M_{D,7}$ und $M_{D,9}$) führen zusammen mit der hohen Viskosität (β_2 , Abbildung 7.5a) in einem der Modelle zu einer deutlich ausgeprägten Strukturbildung und bleiben während ihrer dynamischen Entwicklung kompakt.

Geringe Viskosität

In Abbildung 7.5b, also im Falle der geringen Viskosität (β_3), sind für alle Modelle deutliche Strukturen zu erkennen. Im Gegensatz zur **KS** sind aber auch hier keine Oszillationen vorhanden, vielmehr wird das Material gleichmäßig umverteilt. Die Entwicklung geringer Anfangsscheibenmassen ($M_{D,7}$) verläuft auch hier innerhalb der Modelle M_{121} und M_{11} analog ab. Allerdings bildet sich eine deutliche Kante bei ~ 100 pc – 150 pc aus, weiter außerhalb wird die Flächendichte verhältnismäßig dünn. Die Kante verschiebt sich beim Modell M_{1232} auf die Region bei ~ 900 pc und zeigt einen sehr dichten inneren und ausgedünnten äußeren Bereich der Scheibe.

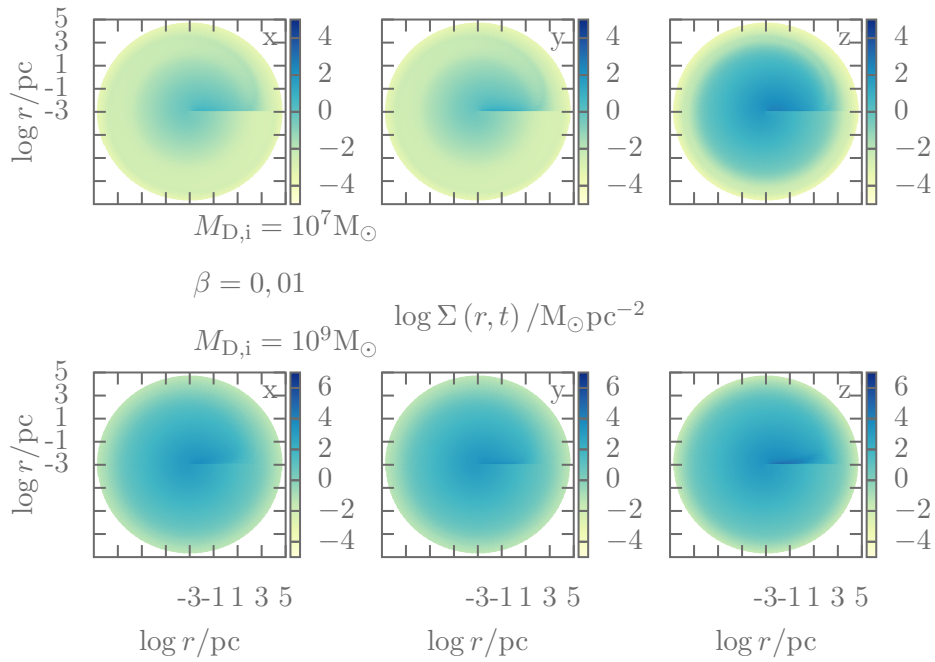
Im Falle der hohen Anfangsscheibenmassen ($M_{D,9}$) zeichnen sich ebenfalls deutliche Strukturen ab. Die Modelle M_{121} und M_{1232} lösen die Strukturen am Außenrand innerhalb der Simulationszeit nicht auf, sondern räumen eine Lücke zwischen Innenrand und Material am Außenrand frei. Nur das Modell M_{11} zeigt eine glatte Entwicklung.

Zusammengefasst lässt sich festhalten, dass es im Vergleich zur **KS** keine Oszillationen mehr am Außenrand gibt. Die Flächendichte zeigt eine relativ glatte, dynamische Verteilung in allen drei untersuchten Modellen auf. Auftretende spiralartige Strukturen weisen auf einen nach außen gerichteten Massentransport hin, der dafür verantwortlich ist, dass sich in manchen Fällen eine Lücke zwischen innerer und äußerer Dichteverteilung ausbildet. Dennoch scheint die Dynamik durch ein gebrochenes Potenzgesetz als **AB** besser wiedergegeben zu werden, weil die Akkretion gleichmäßiger als bei der zuvor untersuchten Verteilung nach Kalnajs (1972) abläuft.

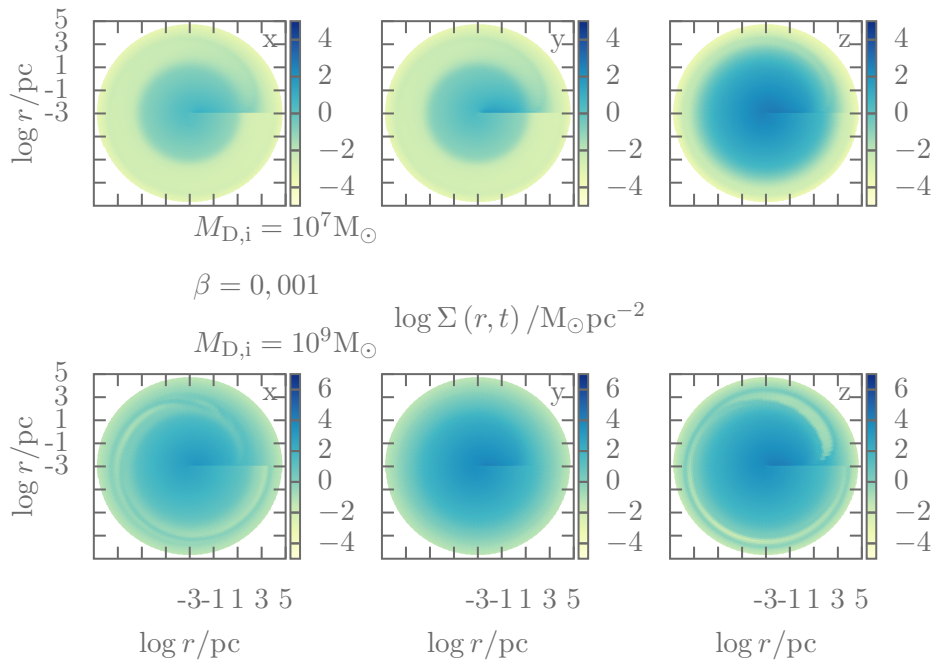
Es bleibt zu klären, wie sich die Dynamik auf die Akkretionsraten und somit auf die Gesamtmassen des zentralen Schwarzen Loches im Zentrum nach 10^{10} a auswirkt.

7.3.2 Die Massenflüsse und Massenbilanzen

Die radialen Massenflüsse sind in Abbildung 7.6 zum Zeitpunkt $5 \cdot 10^9$ a aufgetragen. Auch hier existiert ein konstanter innerer Bereich, der in Abhängigkeit des Viskositätsparameters ($\beta_{2,3}$) innerhalb der drei Modelle schwankt. Höhere Akkretionsraten entstehen offensichtlich über größere Viskositätsparameter. In Abbildung 7.3a ist diese eindeutige Zuordnung wider Erwarten nicht streng gegeben (siehe auch den Hinweis in Tabelle G.3). Allerdings lässt sich über die vorliegenden Daten kein eindeutiges Verhalten ablesen, da ein signifikanter Trend nur über eine große Parameterstudie abgeleitet werden



(a) Die dynamische Entwicklung einer AS unterschiedlicher Potenzgesetzverteilungen folgend, bei hoher Viskosität β_2 innerhalb 10^{10} a.



(b) Die dynamische Entwicklung einer AS unterschiedlicher Potenzgesetzverteilungen folgend, bei geringer Viskosität β_3 innerhalb 10^{10} a.

Abbildung 7.5: Die Untersuchung der Dynamik einer AS anhand der Modelle M_{121} , M_{11} und M_{1232} zeigt keine Oszillationen wie bei der KS, sondern eine relativ glatte Umverteilung des Materials.

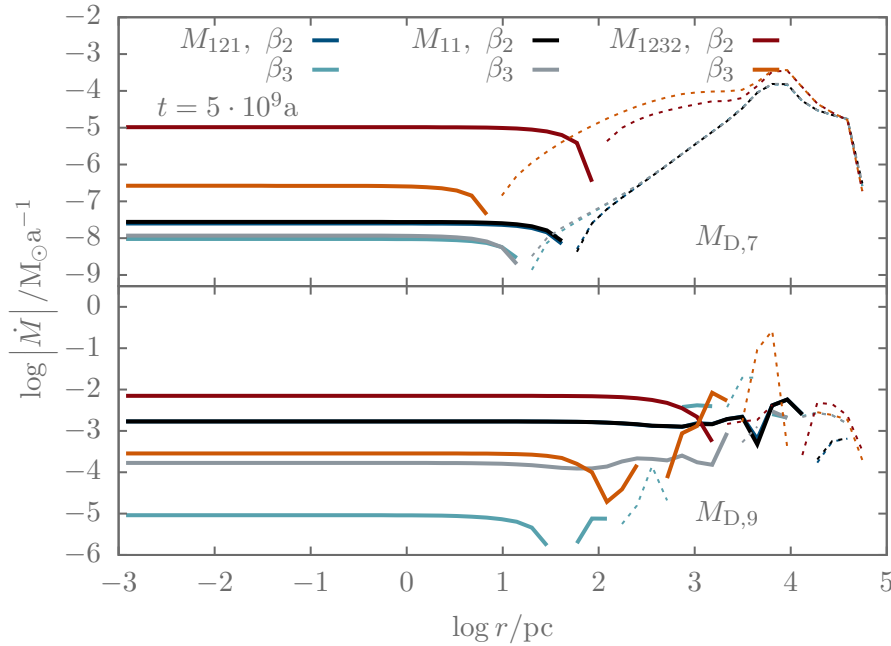


Abbildung 7.6: Radialer Massenfluss der Modelle M_{121} , M_{11} , M_{1232} . Die durchgezogenen Linien beziehen sich auf $\dot{M}(r) < 0$ (Akkretion in Richtung des Zentrums), die gestrichelten auf $\dot{M}(r) \geq 0$ (vom Zentrum weg). Die positiven Massenflüsse sind für die Strukturbildung verantwortlich und somit für das Freiräumen eines bestimmten Bereichs der Scheibe. Die obere Bildhälfte zeigen die Ergebnisse der Anfangsscheibenmassen $M_{D,7}$, die untere für $M_{D,9}$, wobei die dunkelblauen und schwarzen Linien überlagert sind.

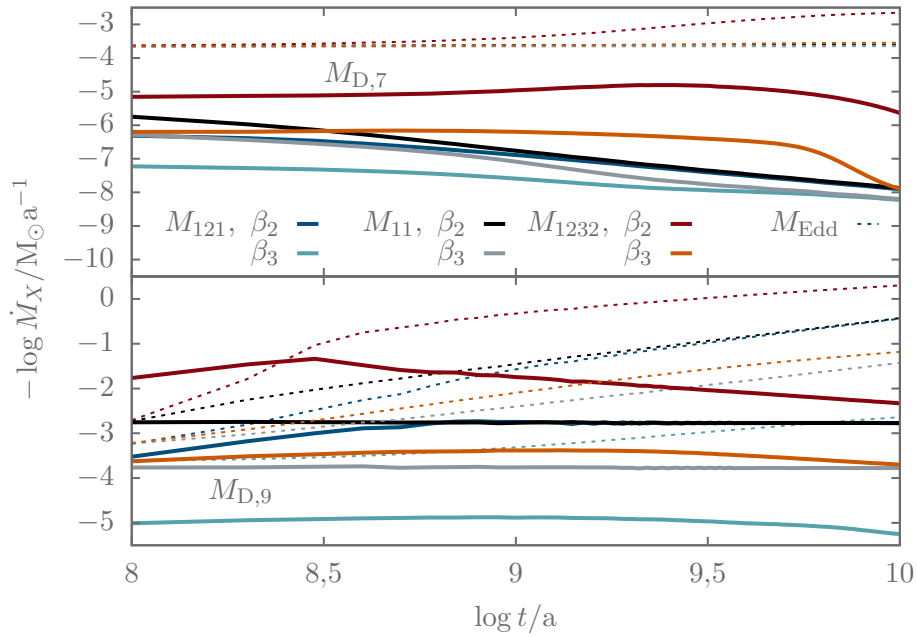
kann. Dennoch liegt in diesem Verhalten ein bedeutender Unterschied in der Entwicklung, hervorgerufen durch die Verwendung anderer AB. Auch die Modelle selber haben Einfluss auf die Akkretionsrate, wobei sich die Modelle M_{121} und M_{11} qualitativ gleichwertig entwickeln, die höchsten Akkretionsraten aber für das Modell M_{1232} auftreten⁵⁸. Der äußere Bereich wechselt zwar ebenfalls das Vorzeichen, jedoch um maximal nur 4 Größenordnungen, im Vergleich zu 9 Größenordnungen bei der KS.

Auch in der unteren Bildzeile ($M_{D,9}$) bleibt die Zuordnung bezüglich des absoluten Wertes der Akkretionsrate in Abhängigkeit des Viskositätsparameters erhalten. Ebenfalls bleibt die starke Ähnlichkeit zwischen den Modellen M_{121} und M_{11} bestehen, wobei alle drei Modelle sehr viel höhere Akkretionsraten erzeugen. Der konstante innere Bereich vergrößert sich nach außen, der Wechsel des Vorzeichens im äußeren Bereich beträgt im absoluten Unterschied ebenfalls nur maximal 4 Größenordnungen.

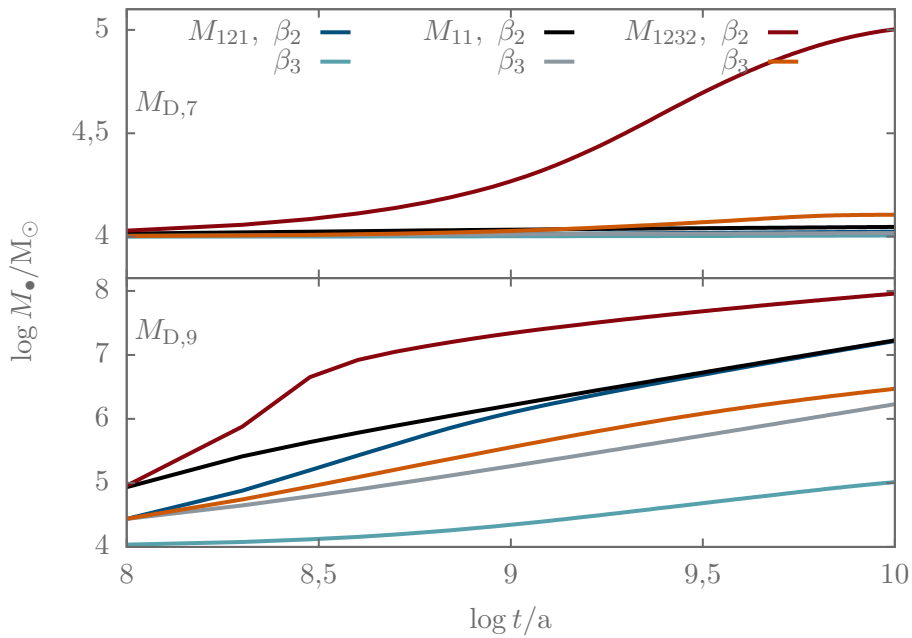
Die Abbildungen 7.7 zeigen die zeitabhängigen Massenflüsse (7.7a) und die Massenbilanzen (7.7b) der Modelle M_{121} , M_{11} , M_{1232} . Die Eddington-Rate wird für $M_{D,7}$ nie erreicht und liegt mindestens eine Größenordnung unterhalb der Akkretionsrate. Nur die Raten für das Modell M_{1232} sind konstant oder haben einen geringen Anstieg im zeitlichen Verlauf. Die Akkretionsraten der beiden anderen Modelle fallen im zeitlichen Verlauf. Die Eddington-Rate für $M_{D,9}$ liegt sehr viel näher an der Akkretionsrate und ist für $M_{D,9}$, β_2 im Modell M_{1232} bis $\sim 5 \cdot 10^8 \text{ a}$ die dominante Rate⁵⁹. Die mittlere Akkretionsrate bei

⁵⁸Das Modell M_{1232} (β_2) mit einer Akkretionsrate von $\dot{M} \approx 10^{-5} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$ reicht am ehesten an die der KS heran.

⁵⁹Das entspricht in etwa der Salpeter-Zeitskala in Gleichung (2.40).



(a) Der Eddington-Massenfluss (gestrichelte Linie) und der Massenfluss ins Schwarze Loch (durchgezogene Linie) in Abhängigkeit der Zeit.



(b) Die Massenbilanz des zentralen Schwarzen Loches, das über Akkretion innerhalb 10^{10} a angewachsen ist.

Abbildung 7.7: Dynamik und Massenbilanzen einer AS mit einem gebrochenen Potenzgesetz als AB innerhalb von 10^{10} a. Im Vergleich zur KS wachsen die Objekte zwar schneller, aber dennoch zu langsam, um ähnliche finale Massen $M_{\bullet,f}$ (siehe auch Tabelle G.3) wie in Blank (2010) zu generieren.

allen drei Modellen liegt bei $\sim 10^{-4} M_{\odot} \text{ a}^{-1} - 10^{-2} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$. Das bedeutet, dass eine Änderung der absoluten initialen Scheibenmasse $M_{D,i}$ die Akkretionsrate beeinflusst, was im Vergleich zwischen den Abbildungen 7.7a, 7.7b zu erkennen ist.

Betrachtet man den zugehörigen Massenzuwachs (Abbildung 7.7b) innerhalb der Hubble-Zeit, hebt sich im Falle von $M_{D,7}$ nur das Modell M_{1232} von den anderen ab. Die zentralen Massen der anderen Modelle sind kaum angewachsen. Im Falle von $M_{D,9}$ erkennt man ein deutliches Wachstum zwischen dem 10-fachen und 10 000-fachen der initialen Schwarzschildmasse $M_{\bullet,i} = 10^4 M_{\odot}$. Das Schwarze Loch wächst in allen Modellen stetig an, wobei gilt: Je steiler die Flächendichte am Außenrand abfällt, desto stärker ist das Wachstum des zentralen Schwarzen Loches.

Es bleibt zunächst festzuhalten, dass sowohl die absolute initiale Scheibenmasse ($M_{D,i}$), als auch die radiale Verteilung der Masse (KS, Modelle M_{121} , M_{11} , M_{1232}) starken Einfluss auf die Dynamik und somit das Wachstum eines Schwarzen Loches haben.

7.4 Diskussion der untersuchten Modelle

Der Unterschied zwischen dem hier vorgeschlagenen Modell und dem von Blank (2010) liegt in der Zeitabhängigkeit der azimuthalen Geschwindigkeitskomponente (2.16), sowie in der Gleichung für den radialen Impulsfluss (2.15). Beide Erweiterungen führen von einer PDG zu einem System aus drei PDG. Dadurch erhöht sich die Anzahl der RB und AB, die in *hedis* 2.0 für das vorliegende Problem nicht analytisch angegeben werden können. Standardisierte und gut funktionierende RB zur Simulation von AS existieren und liefern gute Ergebnisse (Abschnitt 5.2.2, und vgl. Sperling 2013). Bei der Wahl der AB für die radiale Dichteverteilung kann zwar auch auf existierende Vorschläge (z.B. Kalnajs 1972; Mestel 1963, oder einem gebrochenen Potenzgesetz) zurückgegriffen werden. Dieser *Freiheitsgrad*⁶⁰ entspricht aber unter Umständen nicht den Erfordernissen des Systems und stört das Einstellen auf einen Gleichgewichtszustand, was bis zum Abbruch der Simulation führen kann. Die Radialgeschwindigkeit wird hier aufgrund der Annahmen in Abschnitt 7.1 in der AB weiterhin vernachlässigt werden, solange die Schallgeschwindigkeit ungleich Null ist. Die AB der Azimutalgeschwindigkeit wird über das Fliehkraftgleichgewicht gesetzt (Abschnitte 5.2.2, 7.1).

Es wurde zuerst die KS zwischen dem Modell nach Blank (2010) und *hedis* 2.0 direkt verglichen und anschließend die Dichteverteilungen nach einem (gebrochenen) Potenzgesetz. Es hat sich gezeigt, dass die KS das schnelle Wachstum der zentralen Schwarzen Löcher nur für kleine Scheibenmassen reproduzieren kann. Zwar liegen die Ergebnisse zwischen dem Modell von Blank (2010) und *hedis* 2.0 für die untersuchten Parameter ($M_{D,7}$, β_2 , Abschnitt 7.2) sehr nahe beieinander, jedoch liefern weitere Parameterkombinationen abweichende Ergebnisse.

Die Entwicklung der Dichteverteilung läuft zum Teil weit entfernt einer Gleichgewichtsbedingung ab, sodass Einschwingvorgänge länger dauern, als die geforderte Zeitskala

⁶⁰Das Wort *Freiheitsgrad* wird hier in dem Sinne verwendet, um auszudrücken, dass es prinzipiell möglich ist verschiedene AB zu wählen. Diese können jedoch beliebig weit von einer Gleichgewichtsbedingung, also der analytischen Grundform entfernt sein. Ungültige Nebenbedingungen können zu unphysikalischen Lösungen führen.

von $\sim 10^9$ a. Deshalb kann die Aussage getroffen werden, dass eine **KS** keine geeignete **AB** des in dieser Arbeit eingeführten Modells darstellt.

Die beschriebenen Oszillationen am Außenrand einer **KS** weisen auf die Notwendigkeit einer konstanten Akkretionsrate über den radialen Verlauf hin (Abbildung 7.3a), wenn das zentrale Schwarze Loch $\sim 20\% - 80\%$ (Tabelle G.3) der Scheibenmasse akkretieren soll.

Die Untersuchung der Dichteverteilung über die Modelle M_{121} , M_{11} , M_{1232} (7.7) zeigt in keinem der betrachteten Fälle Oszillationen am Außenrand und glatte Dichteverteilungen über den gesamten Zeitraum (Abbildung 7.5). Die Unterschiede in den radial abhängigen Akkretionsraten (Abbildung 7.6) der Modelle M_{121} , M_{11} , M_{1232} sind geringer (etwa $\sim 10^4 M_{\odot} \text{ a}^{-1}$) als bei der **KS**. Die Modelle M_{121} und M_{11} entwickeln sich ähnlich, aber nur das Modell M_{1232} mit einem steileren Abfall des Potenzgesetzes am Außenrand erreicht höhere Akkretionsraten. Damit wird bei der Verwendung eines gebrochenen Potenzgesetzes mit steilerem Abfall am Außenrand die Gleichgewichtsbedingung des Systems am schnellsten erreicht. Die höchsten Akkretionsraten und somit die höchsten finalen Massen des zentralen Schwarzen Loches lassen sich über das kompakteste der drei Modelle, Modell M_{1232} , realisieren.

Die Massenflüsse der geringen initialen Scheibenmassen sind immer geringer als die der hohen Scheibenmassen. Ebenso gilt, dass die Massenverteilung (die der **KS**, sowie aller Potenzgesetzverteilungen) starken Einfluss auf die Akkretionsraten haben. Somit findet man, dass sowohl die absolute initiale Scheibenmasse, als auch die Verteilung der Scheibenmasse großen Einfluss auf das Wachstum Schwarzer Löcher im Zentrum eines **AGN** haben. Letztere Aussage wird durch Untersuchungen von Illenseer und Duschl (2015) gestützt. Die Unterschiede der Massenbilanzen und Massenflüsse sind bezüglich der Verwendung unterschiedlicher Viskositätsparameter in `hedis 2.0` deutlicher ausgeprägt als im Modell von Blank (2010).

In Abbildung 7.8 sind die finalen Massen des zentralen Schwarzen Loches (nach 10^{10} a) über die absoluten initialen Scheibenmassen aufgetragen. Die grünen Punkte stammen aus Simulationen mit dem Modell von Blank (2010), die Punkte anderer Farben von `hedis 2.0`.

Man erkennt, dass die hohen finalen Schwarzlochmassen (grüne Punkte) mit `hedis 2.0` und den verwendeten gebrochenen Potenzgesetzen nie erreicht werden können. Das Modell M_{121} wächst am schwächsten, aber nahezu linear mit zunehmender Scheibenmasse analog zu den Ergebnissen aus Blank (2010). Auch das Modell M_{11} zeigt dieses nahezu lineare Verhalten, wobei die Massen sehr ähnlich anwachsen. Im Fall der hohen Viskosität wachsen die Massen um etwa eine Größenordnung stärker an. Das Modell M_{1232} zeigt die höchsten finalen Massen $M_{\bullet,f}$. Allerdings fällt auf, dass diese nach $M_{D,i} = 10^9 M_{\odot}$ wieder abfallen, ihr nahezu lineares Wachstum also verlassen. Dieses Verhalten entspricht zunächst dem gesuchten Verhalten in Deschner (2013). Dort wurden mit dem Modell nach Blank (2010) Massenmaxima gesucht um verstehen zu können, ob das Wachstum unter bestimmten Parameterkombinationen abgebremst werden kann. Gibt es solche Maxima, könnten diese erklären, warum ab $z \approx 6 - 7$ keine leuchtkräftigen **AGN** mehr gefunden werden können (siehe z.B. Mortlock u. a. 2011). Ob das in Abbildung 7.8 gefundene Maxima dem in Deschner (2013) gesuchten entspricht, bleibt jedoch zweifelhaft.

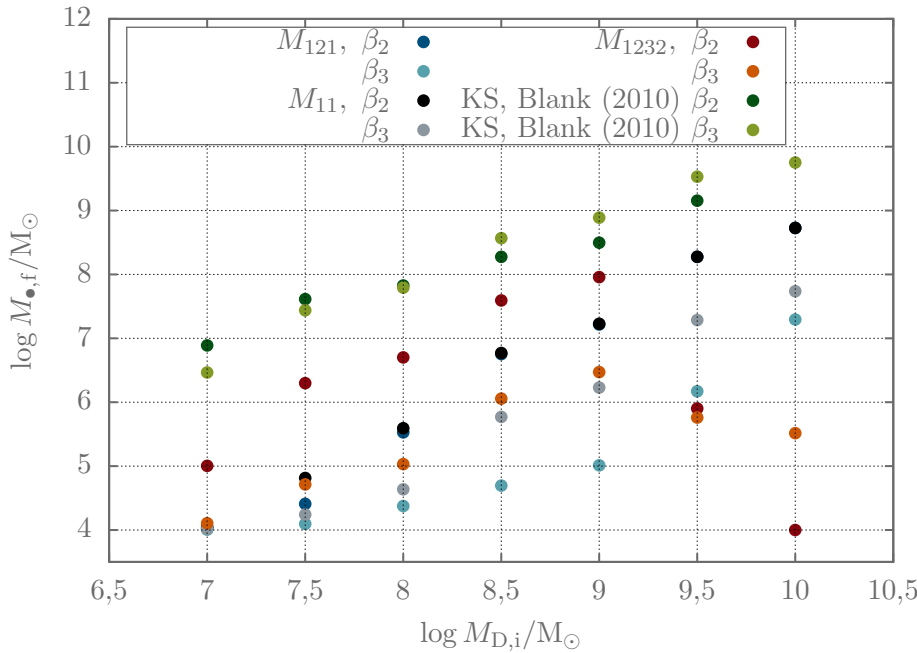


Abbildung 7.8: Die finalen Massen eines Schwarzen Loches in Abhängigkeit der initialen Scheibenmasse nach 10^{10} a, analog zu den Untersuchungen in Deschner (2013). Die Modelle M_{121} und M_{11} für β_2 überlagern sich. Die Maxima in den Schwarzlochmassen des Modells M_{1232} sind wahrscheinlich den AB geschuldet und keine echte Analogie zu Deschner (2013).

Vergleicht man die Ergebnisse aus `hedis 2.0` mit denen aus Deschner (2013) fällt auf, dass bei gleichen Parametern (siehe Tabelle 7.1) erst bei sehr viel höheren initialen Scheibenmassen Maxima auftreten. Weiterhin beeinflusst das hier betrachtete, umfangreichere Modell die Dynamik, dadurch die Akkretionsrate und letztendlich die Massenbilanz des zentralen Schwarzen Loches. Deutlich wird dies über die verwendeten AB, deren Korrektheit bisher nicht untersucht ist. So zeigt bereits eine Änderung der Potenz b in Gleichung (7.2) sehr unterschiedliche Ergebnisse.

Es muss jedoch festgehalten werden, dass je steiler der Verlauf des Dichteprofiles im Außenbereich der Scheibe ist, desto schneller wächst das Schwarze Loch an. Ob der Parameter b für das Absinken der finalen Schwarzlochmasse verantwortlich ist, oder ob für $b > 3/2$ dieses Verhalten verschwindet, sollte in der Zukunft ebenso untersucht werden, wie der Einfluss des Ortes, an dem sich der Knick befindet ($r_k \sim 220$ pc).

7.5 Zusammenfassung

Es wurde der Einfluss unterschiedlicher AB der Flächendichte auf das Wachstum Schwarzer Löcher in den Zentren von AGN untersucht. Dabei wurde deutlich, wie empfindlich das System auf AB reagiert, die einem Gleichgewichtszustand des Systems PDG zu fern sind. Es verschieben sich die Zeitskalen und die finalen Massen des zentralen Schwarzen Loches sind geringer, weil die Akkretion nicht kontinuierlich abläuft.

Mit Hilfe der in Kapitel 6 durchgeführten Testfälle können alle zur Simulation des Wachstums Schwarzer Löcher im Zentrum von AGN benötigten Module sowie die be-

nötige Physik verifiziert werden. Auch die zeitabhängigen Massenflüsse konnten über das isotherme Bondi-Problem getestet werden. Dass dennoch nur wenige Parameterkonfigurationen funktionieren, liegt demnach nicht an der Numerik oder an Fehlern im Quellcode von `hedis 2.0`, sondern vielmehr an der Formulierung der [AB](#) und [RB](#). Ein Vergleich mit anderen Programmpaketen gestaltet sich schwierig, da diese lange CPU-Rechenzeiten benötigen, um bis zu den interessanten Umverteilungsprozessen zu gelangen.

Eine vollständige Untersuchung darüber, welche [AB](#) das System korrekt beschreiben, muss Aufgabe zukünftiger Arbeiten sein. Die Funktionsweise von `hedis 2.0` wurde im Vergleich zu den Arbeiten von Blank (2010) quantitativ verifiziert und auf die Wichtigkeit passender [AB](#) hingewiesen.

8 Zusammenfassung und Ausblick

DIE vorliegende Arbeit hat sich mit der Entwicklung eines analytischen Modells zur Beschreibung isothermer Implosionen und Explosionen sowie ihrer physikalischen Anwendung bezogen auf Supernovaüberreste (SNR) beschäftigt. Darüber hinaus wurden die hydrodynamischen Gleichungen auf allgemeine, krummlinige Orthogonalkoordinaten in verschiedenen Symmetrien verallgemeinert und mit der Annahme globaler, isotroper Isothermie umgeschrieben. Die resultierenden Gleichungen erweitern das Modell von Blank (2010) und Duschl und Strittmatter (2011) um grundlegende, physikalische Gegebenheiten, wie der Impuls- und Drehimpulserhaltung. Zur numerischen Lösung dieses System wurde `hedis 2.0` entwickelt, welches die Dynamik innerhalb vergleichsweise kurzer CPU-Zeiten über kosmologische Zeitskalen wiedergeben kann.

Der modulare Aufbau von `hedis 2.0` sowie der allgemein gehaltene Gleichungssatz ermöglichen neben der Reproduktion der zuvor genannten Implosionen und Explosionen ein breites Spektrum an Anwendungsmöglichkeiten, von denen einige nach dem Rezitieren der Ergebnisse genannt werden sollen.

8.1 Zusammenfassung

Isotherme Unstetigkeiten und Supernovaüberreste

Es wurde ein (semi-) analytisches Modell abgeleitet, mit dem isotherme Unstetigkeiten vollständig beschrieben werden können. Das Modell beinhaltet alle Notwendigkeiten zur Lösung des entsprechenden Gleichungssystems sowie eine Untersuchung der Einflüsse freier Parameter. Besonders ist zu erwähnen, dass das System über eine einfache Änderung der Randbedingungen sowohl zur Beschreibung von Implosionen als auch für Explosionen Gültigkeit besitzt.

Es zeigt sich mit Hilfe dieser Explosionslösungen, dass sich selbständig entwickelnde SNR in einer isothermen Phase befinden können. Dies ist eine Neuerung, da seit den Arbeiten von Lerche und Vasyliunas (1976) isotherme SNR nicht weiter untersucht worden sind. Weiterhin haben sich vor allem Tycho, aber auch Puppis A und der Krebsnebel als Kandidaten sich isotherm entwickelnder SNR herauskristallisiert. Neben den in dieser Arbeit gefundenen Ergebnissen, dass sich junge bis gealterte SNR (Phase I-II) isotherm beschreiben lassen, decken sich ebenfalls die Erkenntnisse neuerer Arbeiten von Hughes (2000), Warren u. a. (2005) und Williams u. a. (2016) mit den Befunden für Tycho. Dieser SNR neigt kaum zur Schalenbildung und breitet sich in seiner aktuellen Entwicklungsphase mit näherungsweise konstanter Geschwindigkeit aus, was einer Grundaussage des isothermen Modells entspricht.

Der Katalog mit Messwerten zu den bestehenden SNR sollte sowohl mit weiteren Observablen als auch mit weiteren SNR ergänzt werden. Dadurch ließe sich die Aussagekraft des Modells und dessen Anwendbarkeit deutlich ausbauen. Zusammen mit einer vollständigen Fehleranalyse könnten Vorhersagen des isothermen Modells getroffen und eingeordnet werden.

hedis 2.0 und Aktive Galaktische Kerne

Die Funktionsweise und die Implementierung von hedis 2.0 wurden ausführlich eingeführt und beschrieben. Wichtige Neuerungen wie die hohe Modularität und Abgeschlossenheit des Programms auf technischer Seite, wurden ebenfalls die Unabhängigkeit von Koordinaten sowie die Berechnung auf sehr langen Zeitskalen auf numerischer beziehungsweise physikalischer Seite realisiert. hedis 2.0 stellt damit ein umfangreiches Programmpaket dar, das in seiner Ausführlichkeit nur über spezielle, eingeschränkte Testfälle geprüft werden kann, da vergleichbare Software innerhalb der erforderlichen Simulationszeiten nicht konkurrenzfähig ist.

hedis 2.0 wurde einer Reihe solcher Testfälle unterzogen. Diesen Tests genügt hedis 2.0 qualitativ sehr gut, quantitativ konnte die Güte über die Bestimmung der Konvergenzordnung im erwarteten Bereich bestätigt werden. Im Beispiel der numerischen Lösungen isothermer Implosionen und Explosionen zeigt sich an den Unstetigkeiten ein aufgeweichetes Verhalten der Lösungen nahe der RHB. Deutlicher ausgedrückt können diese nur näherungsweise reproduziert werden. Dies ist jedoch ein bekanntes Problem der Numerik (siehe z.B. Toro 1999) und lässt sich über die Wahl geeigneter Limiter-Funktionen, passenderen RB sowie höheren Auflösungen verbessern.

Die Frage nach den AB der Massenverteilung zur Simulation von AGN wurde aufgegriffen. Die Untersuchung des Einflusses verschiedener Verteilungen der Flächendichte zeigt, dass die Kalnajs-Scheibe für das in dieser Arbeit vorgestellte System keine passende AB darstellt. Die Verwendung eines gebrochenen Potenzgesetzes scheint sinnvoller, auch wenn die erforderlichen Akkretionsraten, um 20 % – 80 % der Gesamtmasse zu akkretieren, im Vergleich zu den Lösungen von Blank (2010) nicht reproduziert werden konnten. Dennoch zeigte sich, dass der Exponent des Außenbereiches der Dichteverteilung einen großen Einfluss auf die Akkretionsraten haben. Als wichtigstes Ergebnis muss betont werden, dass sowohl die absolute Masse der Scheibe, als auch ihre Verteilung (AB) starken Einfluss auf das Wachstum des sich im Zentrum befindenden Schwarzen Loches haben (ähnliche Befunde auch in Illenseer und Duschl 2015). Befindet sich die AB der Flächendichte fernab eines Gleichgewichtszustandes, können die Ergebnisse unter Umständen ihre Aussagekraft verlieren.

8.2 Ausblick

Der Ausblick dieses Kapitels ist dazu gedacht, eine Auswahl an Anwendungsmöglichkeiten sowie Erweiterungen aufzulisten, die sich aus dieser Arbeit ergeben.

Unstetige Lösungen: Shu u. a. (2002) und Bian und Lou (2005) stellen selbstähnliche Lösungen zu sphärischen Staubkollaps-Problemen vor. Diese beinhalten einen zusätzlichen Kraftbeitrag über das Gravitationspotential und liefern einen Anwendungsfall zu den Kollaps-Problemen. Diese Lösungen können als Testfall mit hedis 2.0 leicht nachgerechnet werden. Darauf aufbauend kann mit hedis 2.0 der Einfluss weiterer physikalischer Prozesse wie beispielsweise Viskosität oder erweiterte gravitative Quellen (Selbstgravitation) untersucht werden.

SNR Katalog: Wie bereits angemerkt sollte der Katalog der SNR erweitert werden. Neben den bereits vorhandenen Messwerten, sollten neue Daten aufgenommen werden, um die gemachten Aussagen weiter zu stützen.

Neue Physik in `hedis 2.0`: Eine wichtige Erweiterung für `hedis 2.0` liegt in der möglichen Einführung der Energiegleichung (2.3) in das Gleichungssystem. Die dynamische Berechnung des Druckes und somit der Scheibenhöhe würde einige Effekte bezüglich der Massenumverteilung kompensieren. Außerdem wäre das Programm universeller.

Die `AB` der Flächendichte: Über eine ausgeweitete Parameterstudie könnte die `AB` der Flächendichte auf wenige zulässige Parameter beschränkt werden. Im Weiteren könnte auch der Einfluss verbesserter `AB` für die radiale als auch für die azimutale Geschwindigkeitskomponente geprüft werden. Interessant wäre in diesem Zusammenhang ein erster numerischer Zeitschritt, der als `AB` für die Radialgeschwindigkeit gesetzt werden könnte.

Einfluss weiterer Parameter: Der Einfluss weiterer Parameter wie beispielsweise der initialen Schwarzschild-Masse $M_{\bullet,i}$, oder des Innen- und Außenradius und weiterer Physik, wie der vollen Selbstgravitation, müssen untersucht werden. Letztere berücksichtigt auch nach außen wirkende Kräfte und könnte ein Zerreißen der Scheibe zur Folge haben, wenn die Scheibenmasse nicht korrekt verteilt wird.

Burgers Gleichung: Das Testbeispiel mit der Burgers-Gleichung zeigt, dass über einfache Änderungen neue Gleichungssysteme gelöst werden können. Auch dies ist eine Folge der Flexibilität von `hedis 2.0`.

Atmosphären Modelle: Das letzte Testbeispiel des starr rotierenden Gases in einer Kugelschale, Abschnitt 6.6, führt eine weitere Anwendung ein. So könnte der Einfluss unterschiedlicher Potentialfelder oder die Entwicklung der chemischen Zusammensetzung der Atmosphärenkonstituenten untersucht werden. Letzteres verlangt nach der Berechnung der Chemie im Gleichungssystem, das aufgrund der schnellen, impliziten `HM` effektiv in `hedis 2.0` realisiert werden könnte.

„subgrid“-Modellierung: Ebenfalls könnte die Schnelligkeit und die Simplizität von `hedis 2.0` zur „subgrid“-Modellierung von Turbulenz genutzt werden. Dabei rechnet ein Programm die Dynamik eines Fluids, wobei `hedis 2.0` eingekoppelt wird, um effektiv kleinskalige Wirbel und die darüber generierte Viskosität zu berechnen.

Die Möglichkeit hydrodynamische Simulationen über sehr lange Zeitskalen in unterschiedlichen Symmetrien zu berechnen sowie die vielfältigen, daraus resultierenden Anwendungsfälle, liefern das wesentliche Potential von `hedis 2.0`. Die gewonnenen Erkenntnisse zeigen außerdem, wie ergiebig die aufgegriffenen Themenfelder sind.

A Anhang

A Transformationsformeln koordinatenfreie Darstellung

Die Skalenfaktoren sind die normierten Längen der Einheitsvektoren und berechnen sich über

$$h_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^i} \right| \quad (\text{A.1})$$

mit $i \in \{\xi, \eta, \Phi\}$. Die Divergenz in krummlinigen Orthogonalkoordinaten (Weinberg 1972; Illenseer und Duschl 2009) schreibt sich als

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi v_\xi) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\Phi v_\eta) \right), \quad (\text{A.2})$$

und entsprechend der Gradient eines Skalarfeldes $\phi(\vec{r})$ als

$$\nabla \phi = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \hat{e}_{x_i}, \quad \phi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}. \quad (\text{A.3})$$

Für die Komponenten der Tensordivergenz gilt

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}]_\xi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\Phi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\eta}) \right) \\ &\quad - c_{\eta\xi\eta} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\eta\eta} - c_{\Phi\xi\Phi} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\Phi\Phi}, \\ [\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}]_\eta &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\eta}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\Phi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\eta\eta}) \right) \\ &\quad + c_{\eta\xi\eta} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\eta}, \\ [\nabla \cdot \overset{\leftrightarrow}{T}]_\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\Phi\xi}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (h_\xi h_\Phi \overset{\leftrightarrow}{T}_{\Phi\eta}) \right) \\ &\quad + c_{\Phi\xi\Phi} \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\Phi}, \\ \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\eta} &= \overset{\leftrightarrow}{T}_{\eta\xi}, \\ \overset{\leftrightarrow}{T}_{\Phi\xi} &= \overset{\leftrightarrow}{T}_{\xi\Phi} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

und das dyadische Produkt der Geschwindigkeiten in der Navier-Stokes-Gleichung ($\vec{v} \otimes \vec{v}$) kann als quadratischer (2×2) Tensor geschrieben werden (Toro 1999),

$$\rho(\vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho \begin{pmatrix} v_\xi^2 & v_\xi v_\eta & v_\xi v_\Phi \\ v_\eta v_\xi & v_\eta^2 & v_\eta v_\Phi \\ v_\Phi v_\xi & v_\Phi v_\eta & v_\Phi^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\Phi \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Das Tensorprodukt ist bilinear, weshalb das Skalarfeld erst später in die Matrix gezogen werden kann.

B Vektordefinitionen der Entwicklungsgleichung

Für die physikalischen Flüsse in Erhaltungsform gilt

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \Sigma v_\xi \\ \Sigma (v_\xi^2 + c_s^2) \\ \ell \Sigma v_\xi \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

in Form der Drehimpulserhaltung $\ell = h_\eta v_\eta$ in der letzten Komponente. Die viskosen Terme schreibt man ausführlich

$$\mathbf{V}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathcal{D}_\xi \left(\frac{2\bar{\mu}}{h_\xi} \frac{\partial v_\xi}{\partial \xi} + \frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi v_\xi) \right) - c_{\eta\xi\eta} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi v_\xi) + 2\bar{\mu} c_{\eta\xi\eta} v_\xi \right) \\ -c_{\Phi\xi\Phi} \left(\frac{\bar{\lambda}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi v_\xi) + 2\bar{\mu} c_{\Phi\xi\Phi} v_\xi \right) \\ h_\eta \left(\mathcal{D}_\xi \left(\bar{\mu} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} - c_{\eta\xi\eta} v_\eta \right) \right) - c_{\eta\xi\eta} \left(\bar{\mu} \left(\frac{1}{h_\xi} \frac{\partial v_\eta}{\partial \xi} - c_{\eta\xi\eta} v_\eta \right) \right) \right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

mit Hilfe des Differentialoperators $\mathcal{D}_\xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} (h_\eta h_\Phi)$. Die geometrischen Quellen äußern sich nur in η -Richtung

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -c_{\eta\xi\eta} (v_\eta^2 + c_s^2) - c_{\Phi\xi\Phi} c_s^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Die gravitativen Quellen, die über die Gleichungen (2.18, 2.21) zusammengefasst wurden, können über

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}) = \Sigma \begin{pmatrix} 0 \\ -\nabla\Phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

geschrieben werden.

C Indizierung Henyey-Methode

Der Übergang von einer zweifach zu einer einfach-indizierten Matrix kann mit Hilfe von Gaußklammern bewerkstelligt werden. Die enthaltene Information in der Matrix wird über einen neuen Index umsortiert, wobei die Gaußklammer für ganzzahlige Indizes sorgt. Im gleichen Schritt wird eine quadratische Matrix geschrieben. Dabei werden aber keine neuen Einträge erzeugt, sondern die vorhandenen Einträge müssen mehrfach geschrieben werden. Die Matrix vergrößert sich also, ohne neue Information zu generieren. Der Vorteil, ungeachtet der großen Matrix, liegt darin, die Jacobi-Matrix (Henyey-Matrix) berechnen zu können. Sie besitzt die Form

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_0}{\partial u_0} & \frac{\partial A_0}{\partial u_1} & \frac{\partial A_0}{\partial u_2} \\ \frac{\partial A_1}{\partial u_0} & \frac{\partial A_1}{\partial u_1} & \frac{\partial A_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial A_2}{\partial u_0} & \frac{\partial A_2}{\partial u_1} & \frac{\partial A_2}{\partial u_2} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

wobei jeder der neun Gradienten ein Block aus $3N$ Einträgen ist, siehe Gleichung (5.55) (N gibt die Auflösung, also die Anzahl an Gitterzellen an). Man erhält über den Gradienten eine streifenförmige, dünnbesetzte Matrix. Zwar sind die `gs1`-Bibliotheken (Galassi u. a.

2009) effizient, dennoch können noch geringere Rechenzeiten erreicht werden, unter Verwendung von speziellen Algorithmen zum Lösen der dünnbesetzten Matrix (z.B. Cholesky-Zerlegung). In dem in dieser Arbeit betrachteten eindimensionalen System ist dies jedoch nicht notwendig, soll an dieser Stelle aber dennoch Erwähnung finden.

D Numerische Ergebnisse isothermer Supernovaüberreste

Alle Ergebnisse aus den vier Szenarien aus Kapitel 4 sind in unten stehender Tabelle zusammengetragen. Ein Vergleich der Observablen ist ebenso wie der gewählte Streubereich aufgenommen. Ein Auszug der Tabelle für Tycho und Puppis A ist über Tabelle 4.4 gegeben.

	r_s (pc)	T_X (10^6 K)	E_0 (10^{51} erg)	v_s (km s $^{-1}$)	t (10^3 a)	n_0 (cm $^{-3}$)	M (M_\odot)
Cassiopeia A (G111.7-2.1)							
$\langle X \rangle$	2,15	10,25	6,3	5096	0,406	4	8
$X_{\min} \dots X_{\max}$	1,7 – 2,52	2,3 – 15	3	4000 – 6000	0,15 – 0,537	1 – 7	8
Szenario 1	2,150	10,250	0,0089	1461,756	1,438	2,969	3,296
Szenario 2	2,150	128,615	0,121	5177,964	0,406	3,200	3,553
Szenario 3	2,150	124,576	0,117	5096,000	0,413	3,200	3,553
Szenario 4	1,000	27,000	0,100	2372,438	0,412	12,455	1,391
Kepler (G4.5+6.8)							
$\langle X \rangle$	4,75	117,5	0,3	4000	0,395	2,34	4,5
$X_{\min} \dots X_{\max}$	4 – 5,9	35 – 200	0,3	4000	0,39 – 0,4	0,67 – 6	4 – 5
Szenario 1	4,750	117,500	0,116	4949,164	0,938	0,312	3,735
Szenario 2	4,750	663,224	0,659	11758,261	0,395	0,312	3,735
Szenario 3	4,750	76,753	0,080	4000,000	1,161	0,327	3,917
Szenario 4	2,475	80,000	0,031	4083,739	0,593	0,870	1,473
Tycho (G120.1+1.4)							
$\langle X \rangle$	2,88	73,98	1,28	3974	0,417	1,93	14
$X_{\min} \dots X_{\max}$	2,8 – 3,5	6,3 – 290	0,1 – 2,5	3000 – 4600	0,4 – 0,435	0,05 – 5	14
Szenario 1	2,880	73,980	0,164	3927,083	0,717	3,134	8,362
Szenario 2	2,880	218,766	0,453	6753,097	0,417	2,919	7,789
Szenario 3	2,880	75,758	0,164	3974,000	0,709	3,062	8,169
Szenario 4	2,966	112,000	0,242	4831,945	0,600	2,793	8,141
Krebsnebel (G184.6-5.8)							
$\langle X \rangle$	2,26	8	1,25	1833	0,84	2,29	12,5
$X_{\min} \dots X_{\max}$	1,28 – 3,5	6 – 10	0,5 – 2	500 – 3000	0,75 – 0,93	0,08 – 6	10 – 15
Szenario 1	2,260	8,000	0,023	1291,392	1,711	8,425	10,862
Szenario 2	2,260	33,199	0,128	2630,727	0,840	11,306	14,576
Szenario 3	2,260	16,118	0,576	1833,000	1,206	10,421	13,436
Szenario 4	1,000	26,000	0,300	2328,089	0,420	38,819	4,336
Vela Jr. (G266.2-1.2)							
$\langle X \rangle$	11,73	9,75	1	3276	2,45	0,19	25
$X_{\min} \dots X_{\max}$	11 – 12,7	3,5 – 16	1	1700 – 6000	0,66 – 4,2	0,022 – 0,5	10 – 40
Szenario 1	11,730	9,750	–	1425,658	8,045	–	–
Szenario 2	11,730	105,131	–	4681,430	2,450	–	–
Szenario 3	11,730	51,483	–	3276,000	3,501	–	–
Szenario 4	9,356	50,000	–	3228,479	2,834	–	–
Puppis A (G260.4-3.4)							
$\langle X \rangle$	9,25	6,84	0,17	740	3,2	0,817	40
$X_{\min} \dots X_{\max}$	8,5 – 10	6,67 – 7	0,048 – 0,3	670 – 800	1 – 4,4	0,6 – 1	40
Szenario 1	9,250	6,840	0,129	1194,101	7,574	0,807	71,358
Szenario 2	9,250	38,322	0,943	2826,431	3,200	1,046	92,464
Szenario 3	9,250	2,627	0,036	740,000	12,222	0,593	52,381
Szenario 4	6,407	22,000	0,322	2141,531	2,925	1,876	55,108

	r_s (pc)	T_X (10^6 K)	E_0 (10^{51} erg)	v_s (km s^{-1})	t (10^3 a)	n_0 (cm^{-3})	M (M_\odot)
Vela X (G263.9-3.3)							
$\langle X \rangle$	18	4,25	0,95	600	12,2	0,08	60
$X_{\min} \dots X_{\max}$	16 – 20	4 – 4,5	0,4 – 2	600	11,4 – 13	0,08	60
Szenario 1	18,000	4,250	0,045	941,255	18,699	0,062	40,288
Szenario 2	18,000	9,984	0,106	1442,644	12,200	0,061	39,922
Szenario 3	18,000	1,727	0,0099	600,000	29,334	0,033	21,542
Szenario 4	8,373	1,000	0,001 61	456,576	17,931	0,092	6,041
Cygnusbogen (G74.0-8.5)							
$\langle X \rangle$	18,83	2,75	0,48	337,5	27,35	0,13	57
$X_{\min} \dots X_{\max}$	18,8 – 19,7	1 – 4	0,3 – 0,7	100 – 500	4,4 – 70	0,07 – 0,16	14 – 100
Szenario 1	18,830	2,750	0,025	757,145	24,317	0,047	34,726
Szenario 2	18,830	2,174	0,016	673,193	27,350	0,037	27,860
Szenario 3	18,830	0,546	0,0026	337,500	54,554	0,025	18,345
Szenario 4	25,085	2,000	0,0205	645,696	37,986	0,022	38,512
W 28 (G6.04-0.1)							
$\langle X \rangle$	10,7	17,9	0,7	75	22	0,19	29
$X_{\min} \dots X_{\max}$	9,5 – 12	8,9 – 23	0,4 – 1	70 – 80	8 – 36	0,13 – 0,23	22 – 47
Szenario 1	10,700	17,900	0,0057	1931,699	5,416	0,088	12,004
Szenario 2	10,700	1,085	0,0013	475,563	22,000	0,033	4,560
Szenario 3	10,700	0,027	$4 \cdot 10^{-5}$	75,000	139,498	0,037	5,120
Szenario 4	11,814	2,000	0,0034	645,696	17,890	0,035	6,396
Simeis 147 (G180.0-1.7)							
$\langle X \rangle$	25	1,16	0,53	103	120	0,22	–
$X_{\min} \dots X_{\max}$	24 – 26	1,16	0,3 – 1	80 – 120	40 – 140	0,01 – 0,44	–
Szenario 1	25,000	1,160	0,562	491,747	49,710	0,010	18,210
Szenario 2	25,000	0,199	0,045	203,707	120,000	0,005	8,564
Szenario 3	25,000	0,051	0,0002	103,000	237,328	0,009	15,027
Szenario 4	28,034	1,000	0,000 56	456,576	60,037	0,009	21,369

Tabelle D.1: Die numerischen Ergebnisse der über die vier Szenarien berechneten isothermen SNR. Die Ergebnisse sind absteigend nach dem Alter sortiert.

SNR	d	$\langle t \rangle$
Cassiopeia A (G111.7-2.1)	~3,3 kpc	400 a
Kepler (G4.5+6.8)	~3,9 kpc	395 a
Tycho (G120.1+1.4)	~3,9 kpc	417 a
Krebsnebel (G184.6-5.8)	~1,9 kpc	840 a
Vela Jr. (G266.2-1.2)	~0,8 kpc	2450 a
Puppis A (G260.4-3.4)	~2,1 kpc	3200 a
Vela X (G263.9-3.3)	~0,4 kpc	12 200 a
Cygnusbogen (G74.0-8.5)	~0,5 kpc	27 350 a
W 28 (G6.04-0.1)	~1,8 kpc	22 000 a
Simeis 147 (G180.0-1.7)	~1 kpc	120 000 a

Tabelle D.2: Auflistung der Entfernungen der zehn untersuchten SNR. Es fällt auf, dass die jungen SNR weiter entfernt sind als die alten.

E Berechnung der Rankine-Hugoniot-Bedingungen

In diesem Abschnitt wird das Skript zur Berechnung der isothermen Rankine-Hugoniot-Bedingungen (RHB) angegeben. Der Code kann einfach in eine Textdatei kopiert und mit der Skriptsprache OCTAVE ausgeführt werden.

```

2  #!/usr/local/bin/octave -qf
4  printf("#####\n")
4  printf("# calculation of the Rankine-Hugoniot Jump-Conditions #\n")
4  printf("# @ Stephan Deschner sdeschner@astrophysik.uni-kiel.de #\n")
6  printf("#####\n\n")

8  lsode_options ("integration method","adams")
8  lsode_options ("maximum order", 4)
10 lsode_options ("absolute tolerance", 1E-6)
10 lsode_options ("relative tolerance", 1E-6)

12 disp ("specify variables\n ");
14 system = input ("1 for implosion, 2 for explosion \n ");
14 alpha = input ("coordinate alpha in 0, 1, 2: \n ");
16 kappa = input ("IC density exponent kappa >= 0: \n");

18 S00 = 1.;
18 tmin = 1.E-3;

20 accuracy = 1.E+5;
22 epsilon = 1.E-4;

24 function p0 = p (a, k)
24     if (a == 0 || a == k)
26         p0 = 2.;
26     else
28         p0 = a ./ (a .- k);
28     endif
30     if (k >= 2.)
30         p0 = 3.;
30     endif
32     endif
34 endfunction

34 t_start=p(alpha,kappa);

36 // boundary conditions u0
38 function u_0 = g (a, k, x)
38     u_0 = k .* x ./ (a .+ 1.);
40 endfunction

42 u0=[g(alpha,kappa,tmin), S00];

44 if (system == 1)
44     u00 = [-1.0, S00];
46 else
46     u00 = [0.0, S00];
48 endif

50 tend = p(alpha,kappa);
50 ttemp=tend;
52 disp("\n..... running exact RHC ..... \n")

54 function xdot = f (x, t, a, k)
54     xdot(1) = (x(1) .* a-k .* t) ./ (t .* ((t .- x(1)).^2. .- 1.));
56     xdot(2) = (x(2) .* x(1) .* (a-k) .* (t .- x(1)) .- x(2) .* k)/(t .* ((t
56         .- x(1)).^2. .- 1.));
58 endfunction

```

```

58 function xdota = s (x, t, a, k)
60     xdota(1) = (k .* x(1) .* a .* t) ./ ((1. - t .* x(1)).^2. - t.^2);
        xdota(2) = (x(2) .* k .* t - x(2) .* x(1) .* (a-k) .* (1. - x(1) .* t))
            ./ ((1. - t .* x(1)).^2. - t.^2);
62 endfunction

64 eta1 = linspace (0.0, 1. ./ tend, accuracy);
u_eta = lsode (@(x, t) s(x,t,alpha,kappa), u00, eta1);
66 utemp = u_eta(end/2);
eps=1.;

68 while (eps > epsilon)
70     td = linspace (tmin, tend,accuracy);
72     yd = lsode (@(x, t) f(x,t,alpha,kappa), u0, td);

74     u_u = (1. .+ yd(end/2.) .* td(end) - td(end)^2.) / (yd(end/2.) - td(end)
        );

76     tu = linspace (0, 1 ./ td(end), accuracy);
yu = lsode (@(x, t) s(x,t,alpha,kappa), u00, tu);
78     Su = yu(end);

80     Sd = Su ./ (yd(end/2.) - td(end))^2.;

82     eps = abs ((yu(end/2.) - (1. .+ yd(end/2.) .* td(end) - td(end)^2.) ./
        (yd(end/2.) - td(end))) ./ (yu(end/2.)));

84     if (eps > epsilon)
        if (u_u > utemp)
86         tend = td(end) .* (1. - 5. .* epsilon);
            else
88         tend = (1. .+ 5. .* epsilon) .* td (end);
            endif
90         utemp = yu(end/2);
            endif
92     endwhile

94 // output
96 printf(" RB: v_0=%f und S_0=%f\n RB: v_00=%f und S_00=%f\n epsilon=%f\n
        start jumppos=%f\n system=%f\n alpha=%f\n kappa=%f\n"
98         ,u0(1), u0(2),u00(1), u00(2),epsilon,ttemp,system,alpha,kappa)

100 disp("\n_____|solutions|_____ \n")
printf ("x0 = %1.5e\n",tend)
102 printf ("uu = %1.5e\n",yu(end/2.))
printf ("ud = %1.5e\n",yd(end/2.))
104 printf ("Su = %1.5e\n",Su)
printf ("Sd = %1.5e\n",Sd)
106 disp("_____ \n")
disp("timemanagement: ")
108 disp("_____ \n")

110 [total, user, system] = cputime ()

112 // EOF

```

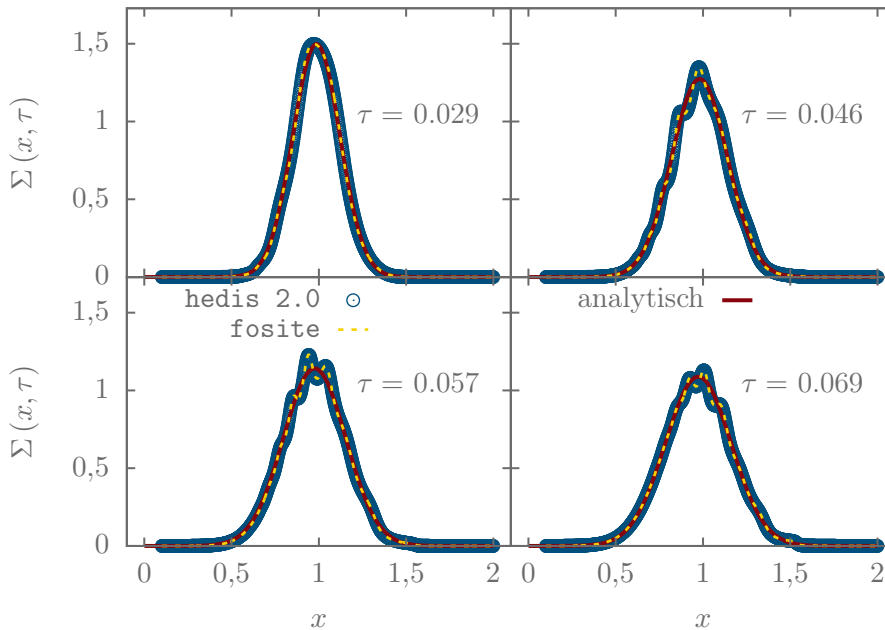


Abbildung F.1: Die Flächendichte zu verschiedenen Zeitpunkten zur Verdeutlichung der Oszillationen im Vergleich mit *fosite*. Die Oszillationen breiten sich in etwa mit gleicher Amplitude aus.

F Anmerkungen zum Test nach Lynden-Bell und Pringle

In Abschnitt 6.4.1 wurde angemerkt, dass Oszillationen über den viskos zerfließenden Delta-Peak hinweg wandern und die Vermutung einer Instabilität (Speith und Kley 2003) geäußert. Die Tests werden jetzt mit einer Auflösung von $N = 1000$ wiederholt, um zu zeigen, dass sich die Instabilitäten weder aufbauen, noch abschwächen sondern mit gleicher Amplitude und Geschwindigkeit im Vergleich zur geringeren Auflösung über den Peak hinweg laufen. Dies ist über die Abbildungen F.1 und F.2 gezeigt. Die Ergebnisse aus *fosite* und *hedis 2.0* stimmen dabei sehr gut überein. Während die Flächendichten sich nahezu identisch entwickeln, nähern sich die Geschwindigkeiten zwischen *hedis 2.0* und *fosite* stark an. Das gleiche Verhalten bei unterschiedlichen Auflösungen schließt numerische Effekte, oder Artefakte aus und deutet stark auf die vermutete Instabilität hin. Demnach kann *hedis 2.0* den Test gut abbilden und verifiziert damit die Implementierung des Viskositätsmoduls.

G Ergänzungen zum Kapitel 7 Aktive Galaktische Kerne

Abbildung F.3 zeigt die Flächendichte der Kalnajs-Scheibe (KS) zu verschiedenen Zeitpunkten, berechnet mit dem Modell von Blank (2010). Es stellt sich schnell ein Gleichgewichtszustand ein, der den Vorhersagen von Lüst (1952) folgt: zuerst ein Anstieg der Flächendichte im zeitlichen Verlauf, worauf ein Abfall folgt. Es stellt sich ein gebrochenes Potenzgesetz ein, das zuerst $\propto r^{-1/2}$, dann einem steileren radialen Verlauf $\propto r^{-3/2}$ folgt. Der Knick im radialen Verlauf wandert mit der Zeit nach außen. Hierüber sind nun die Beiwerte a, b in Gleichung (7.2) motiviert.

Zur Berechnung der Masse die nach 10^{10} a akkretiert wurde (es wird das Modell nach

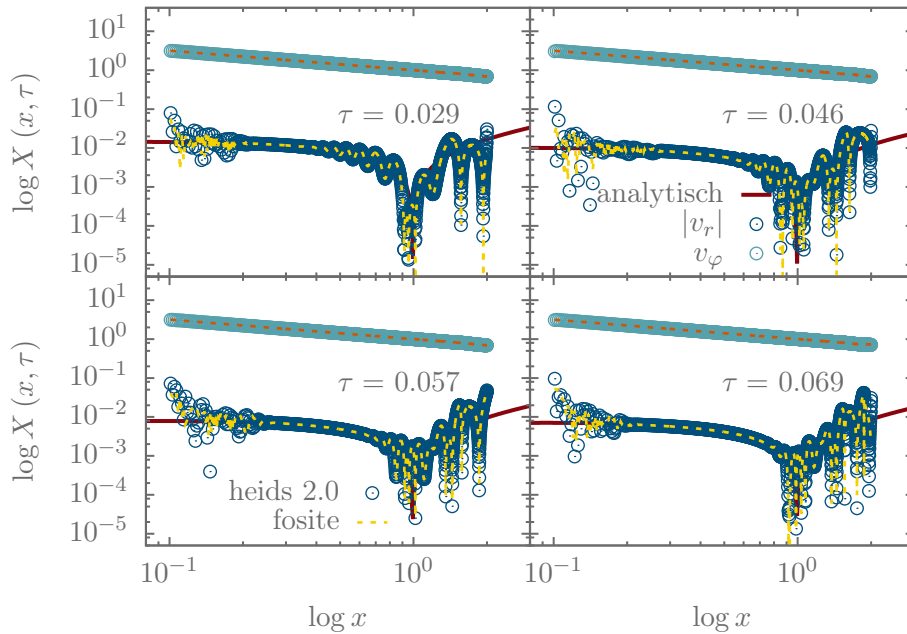


Abbildung F.2: Die Geschwindigkeiten des Pringle-Tests im selben Vergleich. Die Lösungen aus heids 2.0 und fosite nähern sich einander stark an.

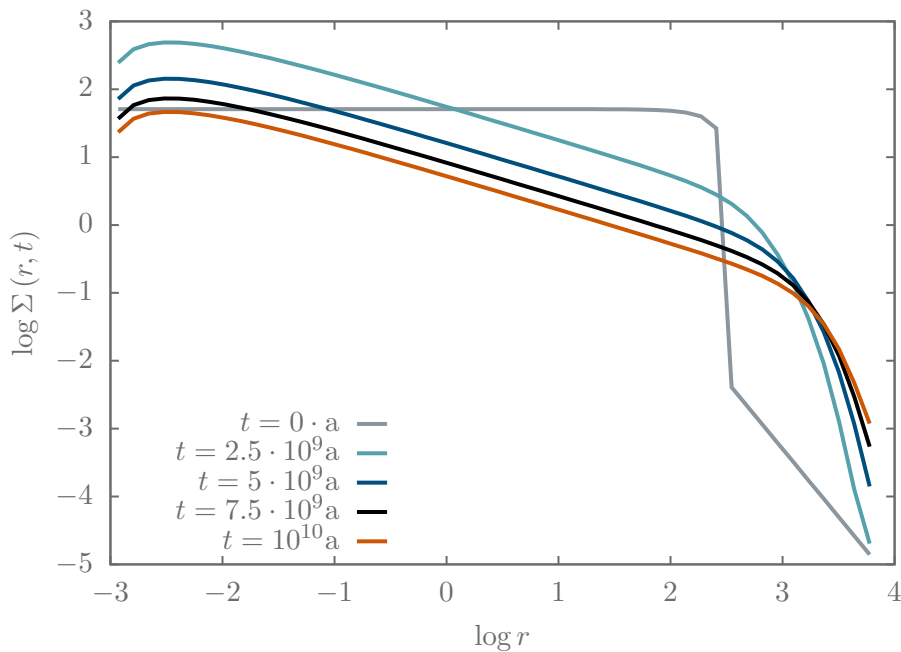


Abbildung F.3: Die Flächendichte der Kalnajs-Scheibe (KS) nach Blank (2010) für verschiedene Zeitpunkte. Bis $2,5 \cdot 10^9$ a steigt die Flächendichte am Innenrand an, danach fällt sie wieder ab (Lüst 1952). Außerdem stellt sich ein gebrochenes Potenzgesetz im radialen Verlauf der Zeitentwicklung ein.

$M_{D,i} / M_{\odot}$	$M_{\bullet,f} / M_{\odot}$		$M_{\text{akkr}} / \%$	
	β_2	β_3	β_2	β_3
$1 \cdot 10^7$	$7,8 \cdot 10^6$	$3,0 \cdot 10^6$	78	30
$5 \cdot 10^7$	$4,0 \cdot 10^7$	$2,7 \cdot 10^7$	80	54
$1 \cdot 10^8$	$6,7 \cdot 10^7$	$6,2 \cdot 10^7$	67	62
$5 \cdot 10^8$	$1,8 \cdot 10^8$	$3,7 \cdot 10^8$	36	74
$1 \cdot 10^9$	$3,1 \cdot 10^8$	$7,7 \cdot 10^8$	31	77
$5 \cdot 10^9$	$1,4 \cdot 10^9$	$3,4 \cdot 10^9$	28	68
$1 \cdot 10^{10}$	$2,0 \cdot 10^9$	$5,6 \cdot 10^9$	20	56

Tabelle G.3: Anteil der akkretierten Scheibenmasse an der finalen Schwarzslochmasse des Modells nach Blank (2010) und nach einer Zeitspanne von 10^{10} a.

Blank 2010 betrachtet), wird die Formel

$$M_{\text{akkr}} = 100\% \frac{M_{\bullet,f} - M_{D,i}}{M_{D,i}} \quad (\text{G.1})$$

verwendet. Die Ergebnisse sind in Tabelle G.3 zusammengefasst. Es ergibt sich die Aussage, dass nach 10^{10} a zwischen 20% – 80% der initialen Scheibenmasse akkretiert wurden. Interessanterweise lässt sich dabei kein einheitlicher Trend am Einfluss des Viskositätsparameters β ausmachen. Ab einer Anfangsscheibenmasse $M_{D,i} \sim 5 \cdot 10^8 M_{\odot}$ führt nicht mehr der größere Viskositätsparameter β_2 zu schnellerem Wachstum des zentralen Schwarzen Loches, sondern der kleinere Wert β_3 .

Abbildungsverzeichnis

1.1	CHANDRA Beobachtung des Tycho SNR	5
1.2	Ein Supermassereiches Schwarzes Loch umgeben von einer Akkretions- scheibe	7
2.1	Skizze flacher 3D Koordinaten	14
3.1	Skizze eindimensionaler Unstetigkeiten in verschiedenen Geometrien . .	25
3.2	Annäherung an die AB der Schockgeschwindigkeit mittels Schmiegekreis	28
3.3	Phasenraum des IP in polarer Geometrie und konstanter Dichteverteilung	34
3.4	Phasenraum des IP in sphärischer Geometrie und konstanter Dichtevertei- lung	35
3.5	Die selbstähnlichen Lösungen des IP für konstante Dichteverteilungen $\kappa = 0$	37
3.6	Phasenraum des IP in polarer Geometrie und Dichteverteilung $\propto r^{-1}$. .	37
3.7	Die selbstähnlichen Lösungen des IP für Dichteverteilungen mit $\propto r^{-1}$. .	38
3.8	Phasenraum des IP in sphärischer Geometrie und Dichteverteilung $\propto r^{-1}$	38
3.9	Phasenraum zur Falsifizierung des EP in sphärischer Geometrie mit kon- stanter Dichteverteilung	40
3.10	Sphärische RHB in Abhängigkeit von κ	41
3.11	Phasenraum der Definitionslücke zur Bestimmung von κ_{\min}	41
3.12	Selbstähnliche Lösungen des EP für $\kappa = 1, 9/5$	43
3.13	Die analytischen RHB des IP $\alpha = 0, \kappa < 1$	46
3.14	Die selbstähnlichen Lösungen des IP $\alpha = 0, \kappa < 1$ im Vergleich zu den numerisch berechneten	46
3.15	Die RHB zur Falsifizierung kartesischer Lösungen für $\kappa > 1$	48
3.16	Die analytischen RHB des EP in Abhängigkeit von $\kappa > 1$	49
3.17	Die selbstähnlichen, kartesischen Lösungen des EP für $\kappa < 1$	49
4.1	Gesamter Parameterraum isothermer SNR	56
4.2	Dimensionslose Luminosität isothermer SNR	58
4.3	Radiative Verlustfunktion aus CHIANTIPy	59
4.4	Skizze zur Herleitung der Flächenhelligkeit	60
4.5	Radiale Ausdehnung der normierten Flächenhelligkeit und ihre Maxima	61
4.6	Explosionslösungen zur Berechnung SNR	63
4.7	Vergleich der Flächenhelligkeit	64
4.8	Dimensionslose Masse und Energie	65
4.9	Abschätzung möglicher modellabhängiger Parameter	68
4.10	Temperatur und radiale Ausdehnung der vier Szenarien zur Beschreibung SNR	70
4.11	Vergleich des Stoßwellenradius mit den beobachteten Größen	72
4.12	Stoßwellengeschwindigkeit und radiale Ausdehnung der vier Szenarien zur Beschreibung SNR	73
4.13	Alter und radiale Ausdehnung der vier Szenarien zur Beschreibung SNR	73
4.14	Mittlere Umgebungsdichte und radiale Ausdehnung der vier Szenarien zur Beschreibung SNR	74
4.15	Die aufgeschobene Masse der vier Szenarien zur Beschreibung SNR . . .	75

4.16	Gesamtenergie und Energieverhältnis der vier Szenarien zur Beschreibung SNR	76
4.17	Vergleich der kinetischen Energie aller vier Szenarien	76
4.18	Fehlerkarte der isothermen SNR	78
5.1	Skizze des diskreten Raumgitters	85
5.2	Skizze Rekonstruktion	87
5.3	Struktographische Darstellung der HM	96
5.4	Festlegung einer approximativen Lösung für die HM	97
5.5	Funktionsweise der ASK	102
5.6	Ablaufdiagramm für die ASK	104
5.7	Eine typische Header-Datei	105
5.8	Eine typische Programmdatei	106
5.9	Ablaufdiagramm des gesamten Verfahrens	107
6.1	Die Entwicklung der Burgers-Gleichung	112
6.2	Das Konvergenzverhalten der Burgers-Gleichung	114
6.3	Analyse isothermer Vortex in verschiedenen Symmetrien	116
6.4	Konvergenztest des isothermen Vortex.	117
6.5	Isotherme Bondi-Akkretionslösungen	120
6.6	Isotherme Bondi-Akkretionsrate	121
6.7	Zeitabhängige Entwicklung der Flächendichte des zerfließenden δ -Peaks	123
6.8	Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung des Pringle-Tests	124
6.9	Zeitlicher Verlauf des isothermen IP	126
6.10	Test isothermer IP und EP in Unterschiedlichen Auflösungen	128
6.11	Lösungen zur rotierende Gaskugelschale mit Konvergenztest	130
7.1	Initiale Dichteverteilungen als Anfangsbedingung für Aktive Galaktische Kerne	134
7.2	Dynamik der Kalnajs-Scheibe	136
7.3	Massenbilanz und Massenflüsse der Kalnajs-Scheibe	138
7.4	Zeitskalen der Kalnajs-Scheibe im Vergleich	140
7.5	Die dynamische Entwicklung einer Akkretionsscheibe mit unterschiedlichen Potenzgesetzverteilungen als Anfangsbedingung	142
7.6	Radialer Massenfluss der Dichteverteilung über ein Potenzgesetz	143
7.7	Dynamik und Massenbilanzen eines gebrochenen Potenzgesetzes als Anfangsbedingung	144
7.8	Die finalen Massen eines Schwarzen Loches in Abhängigkeit der initialen Scheibenmasse nach $10 \cdot 10^9$ a	147
F.1	Dichteverteilung des Pringle-Tests	159
F.2	Geschwindigkeitsverteilungen des Pringle-Tests	160
F.3	Dichteverteilung der Kalnajs-Scheibe	160

Tabellenverzeichnis

3.1	RHB des IP und EP für verschiedene κ berechnet	31
3.2	Semi-analytisch berechnete Werte des IP $\alpha = 0, \kappa < 1$	45
3.3	Relativer Fehler zwischen den analytischen und numerischen RHB	50
4.1	RHB für die Berechnung SNR mit $\kappa = 2.7$	62
4.2	Katalog verschiedener SNR in unterschiedlichen Phasen	67
4.3	Kennwerte zur Quantifizierung der Beobachtungsdaten des isothermen Modells	79
4.4	Numerische Ergebnisse isothermer SNR	80
5.1	Parameter und Modi in <code>hedis 2.0</code>	108
6.1	Simulationsparameter Burgers-Gleichung	113
6.2	Simulationsparameter isothermer Vortex	115
6.3	Simulationsparameter der isothermen Bondi-Akkretion	119
6.4	Simulationsparameter viskose δ -Distribution	122
6.5	Simulationsparameter und RHB zur Programmverifikation des IP und EP	125
6.6	Simulationsparameter einer rotierenden Gaskugel	129
7.1	Simulationsparameter AGN	137
D.1	Numerische Ergebnisse aller isothermer SNR	156
D.2	Entfernungen der SNR zur Erde	156
G.3	Anteil der akkretierten Scheibenmasse an der finalen Schwarzslochmasse	161

Literatur

- Alexander, D. M. und Hickox, R. C. (2012). „What drives the growth of black holes?“ In: *New Astronomy Reviews* 56.4, S. 93–121.
- Allen, G. E. u. a. (2014). „On the Expansion Rate, Age, and Distance of the Supernova Remnant G266.2-1.2 (Vela Jr.)“ In: *The Astrophysical Journal* 2, S. 1–30.
- Ames, W. F. (1965). *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. New York und London: Academic Press Inc., S. 510.
- Anschwanden, Markus J. (2004). *Physics of the Solar Corona. An Introduction*. Chichester, UK: Praxis Publishing Ltd.
- Antonucci, Robert (1993). „Unified Models for Active Galactic Nuclei and Quasars“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 31.1, S. 473–521.
- (2015). „Active Galactic Nuclei and Quasars: Why Still a Puzzle after 50 years?“ In: *ArXiv e-prints*.
- Asmus, D. u. a. (2014). „The subarcsecond mid-infrared view of local active galactic nuclei- I. The N- and Q-band imaging atlas“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 439.2, S. 1648–1679.
- Bamba, Aya, Yamazaki, Ryo und Hiraga, Junko S (2005). „Chandra Observations of Galactic Supernova Remnant Vela Jr. : a New Sample of Thin Filaments Emitting Synchrotron X-Rays“. In: *The Astrophysical Journal* 1006, S. 294–301.
- Bärwolff, Günter (2006). *Höhere Mathematik*. Springer Spektrum, S. XIV, 970.
- Berthiaume, G. D. u. a. (1994). „CCD Soft X-ray Observations of the Puppis A SNR“. In: *The Astrophysical Journal* 425, S. 132.
- Bian, Fu Yan und Lou, Yu Qing (2005). „Spherical isothermal self-similar shock flows“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 363. February, S. 1315–1328.
- Bietenholz, M. F. und Kronberg, P. P. (1991). „The expansion of the crab nebula“. In: *The Astrophysical Journal* 373, S. L59–L62.
- Binney, J. und Tremaine, S. (1987). *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p.
- Blandford, R. D. und Payne, D. G. (1982). „Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 199.4, S. 883–903.
- Blank, Marvin (2010). „Das Wachstum Schwarzer Löcher in aktiven galaktischen Kernen“. Diplomarbeit. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Bluman, George W. und Anco, Stephen C. (2002). *Symmetry and Integration Methods for Differential Equations*. 154. Aufl. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, S. 419.

- Bodenheimer, Peter u. a. (2007). *Numerical Methods in Astrophysics: An Introduction*. Boca Raton, FL USA: Taylor & Francis Group.
- Bondi, H. (1952). „On spherically symmetric accretion“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 112, S. 195.
- Braun, R. und Strom, R. G. (1986). „The structure and dynamics of evolved supernova remnants. The IC 443 complex“. In: *Astronomy & Astrophysics* 164, S. 193–207.
- Bronštejn, I. N. und Musiol, G. (2008). *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch.
- Case, Gary L. und Bhattacharya, Dipen (1998). „A New Σ -D Relation and Its Application to the Galactic Supernova Remnant Distribution“. In: *The Astrophysical Journal* 504.2, S. 761–772.
- Cha, A. N., Sembach, K. R. und Danks, A. C. (1999). „The distance to the Vela supernova remnant“. In: *The Astrophysical Journal* 515, S. 28–31.
- Chevalier, R. A. (1977). „The Interaction of Supernovae with the Interstellar Medium“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 15, S. 176–96.
- Chispell, J. C., Ervin, V. J. und Jenkins, E. W. (2007). „A fractional step theta method for convection diffusion problems“. In: *Mathematical Analysis and Applications* 333.1, S. 204–218.
- Clarke, C. J. und Carswell, R. F. (2003). *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, S. 240.
- Clawpack Development Team (2017). *Clawpack software*.
- Courant, R. und Friedrichs, K. O. (1972). *Supersonic Flow and Shock Waves*. 2nd. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Courant, R., Friedrichs, K. und Lewy, H. (1928). „Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik“. In: *Mathematische Annalen*.
- Decourchelle, A., Ellison, D. C. und Ballet, J. (2000). „Thermal X-Ray Emission and Cosmic-Ray Production in Young Supernova Remnants“. In: *The Astrophysical Journal* 543, S. L57–L60.
- Del Zanna, G. u. a. (2015). „CHIANTI - An atomic database for Emission Lines. Version 8“. In: *Astronomy & Astrophysics* 173, S. 149–173.
- Dere, Ken (2017). *ChiantiPy Documentation*.
- Deschner, Stephan C. (2013). „Wie massereich können Schwarze Löcher in Galaktischen Zentren werden?“ Diplomarbeit. Karlsruhe Institut of Technology (KIT), Christian Albrechts Universität zu Kiel (CAU).
- Deschner, Stephan C., Illenseer, Tobias F. und Duschl, Wolfgang J. (2018). „Self-similar solutions to isothermal shock problems“. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 78.1, S. 80–103.

- Dubner, G. u. a. (2013). „The most complete and detailed X-ray view of the SNR Puppis A“. In: *Astronomy and Astrophysics* 555, S. 1–9.
- Duric, N. und Seaquist, E. R. (1986). „A theoretical interpretation of the Σ -D relation for supernova remnants“. In: *The Astrophysical Journal* 301, S. 308–311.
- Duschl, Wolfgang J. und Britsch, Markward (2006). „A Gravitational Instability-driven Viscosity in Self-gravitating Accretion Disks“. In: *The Astrophysical Journal* 653.2, S. L89–L92.
- Duschl, Wolfgang J. und Strittmatter, Peter A. (2011). „The cosmogony of supermassive black holes“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 413.2, S. 1495–1504.
- Duschl, Wolfgang J., Strittmatter, Peter A. und Biermann, Peter L. (1998). „Hydrodynamic Viscosity and Self-gravitation in Accretion Disks“. In: American Astronomical Society Meeting Abstracts, S. 917.
- (2000). „A Note on Hydrodynamic Viscosity and Selfgravitation in Accretion Disks“. In: *Astronomy and Astrophysics* 357.may, S. 1123–1132.
- Eaton, John W. u. a. (2014). *GNU Octave version 3.8.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations*.
- Faires, John Douglas und Burden, Richard L. (2000). *Numerische Methoden Näherungsverfahren und ihre praktische Anwendung*. Spektrum Lehrbuch. Heidelberg: Spektrum, Akad. Verl.
- Falle, S. A. E. G. und Garlick, A. R. (1982). „A model of the Cygnus Loop“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 201, S. 635–644.
- Farago, Istvan (2013). „Convergence and stability constant of the theta-method“. In: *Applications of Mathematics* 3, S. 42–51.
- Faragó, István, Havasi, Ágnes und Zlatev, Zahari (2010). „Efficient implementation of stable Richardson Extrapolation algorithms“. In: *Computers & Mathematics with Applications* 60.8, S. 2309–2325.
- Frank, Juhan, King, Andrew und Raine, Derek (2002). *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge Astrophysics Series.
- Galassi, Mark u. a. (2009). *GNU Scientific Library Reference Manual - Third Edition*. 3. Aufl. GNU Free Documentation License, S. 592.
- Gehmeyr, M., Cheng, B. und Mihalas, D. (1997). „Noh’s constant-velocity shock problem revisited“. In: *Shock Waves* 7.5, S. 255–274.
- Godunov, S. K. (1959). „A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics“. In: *Mat. Sb. (N.S.)* 47(89), S. 271–306.
- Gorenstein, Paul, Harnden Jr., Frank R. und Tucker, Wallace H. (1974). „The X-ray spectra of the Vela and Puppis supernova remnants and the shock-wave model of supernova remnants“. In: *The Astrophysical Journal* 192, S. 611–676.

- Gorenstein, Paul, Seward, Fred und Tucker, Wallace H. (1983). *Supernova Remnants and their X-ray Emission: The mass and structure of the remnant of Tycho's supernova*. Hrsg. von J. Danziger und P. Gorenstein, S. 1–15.
- Greiner, Walter und Stock, Horst (1991). *Hydrodynamik*. 4. Aufl. Thun; Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch.
- Hairer, E., Norsett, S. P. und Wanner, G. (1993). *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Solving Ordinary Differential Equations. Springer.
- Hairer, E. und Wanner, G. (1996). *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Haller, Albrecht von (1734). *Die Alpen und andere Gedichte (1734)*. Stuttgart: Philipp Reclam jun., S. 53–74.
- Hasinger, Gunther, Miyaji, Takamitsu und Schmidt, Maarten (2005). „Luminosity-dependent evolution of soft x-ray selected AGN: New Chandra and XMM-Newton surveys“. In: *Astronomy & Astrophysics* 441, S. 417–434.
- Haubold, Hans J. und Mathai, A. M. (1997). „SUNSun“. In: *Encyclopedia of Planetary Science*. Dordrecht: Springer Netherlands, S. 786–794.
- Hawley, J. F. (1990). „Nonaxisymmetric instabilities in a slender torus - Two- and three-dimensional simulations“. In: *The Astrophysical Journal* 356, S. 580–590.
- Hayato, Asami u. a. (2010). „Expansion Velocity of Ejecta in Tycho's Supernova Remnant Measured by Doppler Broadened X-ray Line Emission“. In: *The Astrophysical Journal* 725.1, S. 894–903.
- Heney, L. G., Forbes, J. E. und Gould, N. L. (1964). „A New Method of Automatic Computation of Stellar Evolution.“ In: *The Astrophysical Journal* 139, S. 306.
- Heney, L. G. u. a. (1959). „A Method for Atomic Computation of Stellar Evolution.“ In: *The Astrophysical Journal* 129, S. 628.
- Herold, Helmut und Arndt, Jörg (2002). *C-Programmierung unter Linux: Beispiele, Anwendungen, Programmieretechniken*. Nürnberg: SuSE-Press, S. 1085.
- Hirsch, Ch. (2007). *Numerical computation of internal and external flows : fundamentals of computational fluid dynamics*. Elsevier/Butterworth-Heinemann, S. 656.
- Hönig, Sebastian F. und Kishimoto, Makoto (2017). „Dusty Winds in Active Galactic Nuclei: Reconciling Observations with Models“. In: *The Astrophysical Journal Letters* 838.2, S. L20.
- Hughes, John P. (2000). „The Expansion of the X-ray Remnant of Tycho's Supernova (SN1572)“. In: *The Astrophysical Journal* 545, S. L53–L56.
- Hugoniot, H. (1887). „Memoir on the propagation of movements in bodies, especially perfect gases (first part)“. In: *Journal de l'Ecole Polytechnique* 57, S. 3–97.
- Illenseer, Tobias F. (2006). „Hochauflösende Verfahren zur numerischen Berechnung von strahlungsgetriebenen Scheibenwinden“. Dissertation. Universität Heidelberg.

- Illenseer, Tobias F. und Duschl, Wolfgang J. (2009). „Two-dimensional central-upwind schemes for curvilinear grids and application to gas dynamics with angular momentum“. In: *Computer Physics Communications* 180.11, S. 2283–2302.
- (2015). „Self-similar Evolution of Self-Gravitating Viscous Accretion Discs“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 450, S. 691–713.
- Imada, S. und Zweibel, E. G. (2012). „Self-Organization of Reconnecting Plasmas To Marginal Collisionality in the Solar Corona“. In: *The Astrophysical Journal* 755.2, S. 93.
- Inayoshi, Kohei und Haiman, Zoltan (2016). „Is there a maximum mass for black holes in galactic nuclei?“ In: *The Astrophysical Journal* 828.sep, S. 110.
- Jones, T. W. u. a. (1998). „10⁵¹ Ergs: The Evolution of Shell Supernova Remnants“. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 110.744, S. 125–151.
- Jung, Manuel, Illenseer, Tobias F. und Duschl, Wolfgang J. (2015). „Resolving vortices with an isothermal HLLC Riemann solver“. In: *ArXiv e-prints* 4, S. 6.
- Junker, Marc Andre (2009). „Selbstgravitation in zylindersymmetrischen, geometrisch dünnen Systemen“. Diplomarbeit. Universität Kiel.
- Kalnajs, A. J. (1972). „The Equilibria and Oscillations of a Family of Uniformly Rotating Stellar Disks“. In: *The Astrophysical Journal* 175, S. 63.
- Kamm, James R. (2000). „Evaluation of the Sedov-von Neumann–Taylor Blast Wave Solution“. In: *The Astrophysical Journal*.
- Kato, S., Fukue, J. und Mineshige, S. (2008). *Black-Hole Accretion Disks: Towards a New Paradigm*. Kyoto University Press.
- Kennel, C. F. und Coroniti, F. V. (1984). „Confinement of the Crab pulsar’s wind by its supernova remnant“. In: *The Astrophysical Journal* 283, S. 694.
- Kernighan, Brian W und Ritchie, Dennis M (2008). *The C programming language*. 2. Aufl. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, S. 1–272.
- King, Andrew (2016). „How Big Can a Black Hole Grow?“ In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 456, S. L109–L112.
- Kinugasa, Kenzo und Tsunemi, Hiroshi (1999). „ASCA Observation of Kepler’s Supernova Remnant“. In: *Publications of the Astronomical Society of Japan* 51, S. 239–252.
- Kippenhahn, Rudolf, Weigert, Alfred und Weiss, Achim (2012). *Stellar Structure and Evolution*. Astronomy and astrophysics library. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, S. XVIII, 606.
- Kippenhahn, Rudolf, Weigert, Andreas und Hofmeister, Emmi (1967). *Methods for Calculating Stellar Evolution*. Hrsg. von Berni; Alder, Sidney; Fernbach und Manuel Rotenberg. New York und London: Academic Press, S. 128–190.
- Kormendy, John und Richstone, Douglas (1995). „No Inward Bound - The Search for Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 33, S. 581.

- Korobeinikov, V. P. (1956). „The problem of a strong point explosion in a gas with zero temperature-gradient“. In: *Dokl. Akad. Nauk* 109.2, S. 271–273.
- (1976). *Problems in the Theory of Point Explosion in Gases*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.
- Ku, W. H. M. u. a. (1984). „Einstein observations of the Cygnus Loop“. In: *The Astrophysical Journal* 278, S. 615–618.
- Kundu, M. R. und Velusamy, T (1980). „Observation with the VLA of a stationary loop structure on the sun at 6 centimeter wavelength“. In: *The Astrophysical Journal* 240, S. L63–L67.
- Kurganov, Alexander und Tadmor, Eitan (2000). „New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection-Diffusion Equations“. In: *Journal of Computational Physics* 160, S. 241–282.
- Landau, Lev D. und Lifshitz, Evgenij M. (1974). *Lehrbuch der theoretischen Physik Band 6: Hydrodynamik*. 3. Aufl. Berlin: Akademie-Verlag.
- Leahy, D. A. und Ranasinghe, S. (2016). „Distance and Evolutionary State of the Supernova Remnant 3C 397 (G41.1-0.3)“. In: *The Astrophysical Journal* 817.1, S. 74.
- Lee, Shiu-Hang u. a. (2013). „A Cr-Hydro-Nei model of multi-wavelength emission from the Vela Jr Supernova Remnant (SNR RX J0852.0–4622)“. In: *The Astrophysical Journal* 767.1, S. 20.
- Leer, Bram van (1976). „MUSCL, a new approach to numerical gas dynamics.“ In: *Computing in Plasma Physics and Astrophysics*.
- Lerche, I. und Vasyliunas, V. M. (1976). „Mathematical theory of isothermal blast waves and the question of their applicability to supernova remnants“. In: *The Astrophysical Journal* 210, S. 85–99.
- Liniger, W. (1969). „Global Accuracy and A-Stability of one- and two-step integration formulae for stiff ordinary differential equations“. In: 49.638.
- Logan, John David (2008). *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. 2nd. Wiley, S. 397.
- Long, K. S. u. a. (1991). „W28 and 3C 400.2 - Two shell-like radio supernova remnants with centrally peaked X-ray morphologies“. In: *The Astrophysical Journal* 373, S. 567–578.
- Lüst, Reimar (1952). „Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse. I. Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit turbulenter Reibung“. In: *Zeitschrift Naturforschung Teil A* 7, S. 87–98.
- Lynden-Bell, D. und Pringle, J. E. (1974). „The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables.“ In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Maoz, Dan (2016). *Astrophysics in a Nutshell*. 2nd Editio. Princeton: Princeton University Press, S. 290.

- Merziger, Gerhard und Wirth, Thomas (2006). *Repetitorium der Höheren Mathematik*. 5. Aufl. Springe: Binomi Verlag.
- Mestel, L. (1963). „On the galactic law of rotation“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 126, S. 553.
- Meyer, Hubert W. Jr. (1988). *Derivation of a Godunov One Dimensional Fluid Dynamics Code*. Techn. Ber. Army Ballistic Research Lab Aberdeen Proving Ground MD.
- Milne-Thomson, L. M. (2013). *Theoretical Hydrodynamics*. Neuauflage. Dover Books on Physics. Dover Publications, S. 768.
- Mortlock, Daniel J. u. a. (2011). „A luminous quasar at a redshift of $z = 7.085$ “. In: *Nature* 474, S. 616–619.
- Naidu, G. Narasimhulu, Rao, M. P Ranga und Yadav, Hira Lal (1983). „Approximate solutions for isothermal flows behind strong spherical shocks with variable energy“. In: *Astrophysics and Space Science* 89.1, S. 77–87.
- Nath, Sujit Kumar und Mukhopadhyay, Banibrata (2016). „A pure hydrodynamic instability in shear flows and its application to astrophysical accretion disks“. In: *The Astrophysical Journal* 830.2, S. 10.
- Noh, W. F. (1976). „Numerical methods in hydrodynamic calculations“. In: *NASA STI/Recon Technical Report N 77*, S. 26430.
- (1987). „Errors for calculations of strong shocks using an artificial viscosity and an artificial heat flux“. In: *Journal of Computational Physics* 72, S. 78–120.
- Oertel, Herbert (1966). *Stossrohre*. Wien, New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Oesch, P. A. u. a. (2016). „A Remarkably Luminous Galaxy at $z=11.1$ Measured with Hubble Space Telescope Grism Spectroscopy“. In: *The Astrophysical Journal* 819, S. 129.
- Ostriker, Jeremiah P. und McKee, Christopher F. (1988). „Astrophysical blastwaves“. In: *Reviews of Modern Physics* 60.1, S. 1–68.
- Pacucci, Fabio u. a. (2016). „First Identification of Direct Collapse Black Hole Candidates in the Early Universe in CANDELS/GOODS-S“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 1439, stw725.
- Prialnik, Dina (2000). *An Introduction to the Theory of Stellar Structure and Evolution*. 1. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, S. 261.
- Pringle, J. E. (1981). „Accretion Discs in Astrophysics“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 19, S. 137–162.
- Rankine, W. J. M (1870). „On the Thermodynamic Theory of Waves of Finite Longitudinal Disturbance“. In: *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I* 160, S. 277–288.
- Rappaport, S. u. a. (1974). „X-ray structure of the Cygnus loop“. In: *The Astrophysical Journal* 194, S. 329–335.

- Reed, Jeri E. u. a. (1995). „The Three-dimensional Structure of the Cassiopeia A Supernova Remnant. I. The Spherical Shell“. In: *The Astrophysical Journal* 440, S. 706.
- Reid, P. B., Becker, R. H. und Long, K. S. (1982). „An X-ray image of Tycho’s supernova remnant“. In: *The Astrophysical Journal* 261, S. 485–491.
- Reynolds, S. P. und Chevalier, R. A. (1984). „Evolution of pulsar-driven supernova remnants“. In: *The Astrophysical Journal* 278, S. 630.
- Reynoso, E. M., Cichowolski, S und Walsh, A. J. (2016). „A high resolution HI study towards the supernova remnant Puppis A and its environments“. In: *ArXiv e-prints* 12.September, S. 1–12.
- Reynoso, E. M. u. a. (1997). „A VLA Study of the Expansion of Tycho’s Supernova Remnant“. In: *The Astrophysical Journal* 491.2, S. 816–828.
- Rho, J. und Borkowski, K. J. (2002). „ROSAT/ASCA Observations of the Mixed-Morphology Supernova Remnant W28“. In: *The Astrophysical Journal* 575, S. 201–216.
- Richard, D. und Zahn, J.-P. (1999). „Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment“. In: *Astronomy and Astrophysics* 347, S. 734–738.
- Romani, Roger W. und Ng, C.-Y. (2003). „The Pulsar Wind Nebula Torus of PSR J0538+2817 and the Origin of Pulsar Velocities“. In: *The Astrophysical Journal* 585.1, S. L41–L44.
- Rosner, R., Tucker, W. H. und Vaiana, G. S. (1978). „Dynamics of the quiescent solar corona“. In: *The Astrophysical Journal* 220, S. 643.
- Rusanov, V .V. (1962). *Calculation of Interaction of Non-steady Shock Waves with Obstacles*. Technical translation. National Research Council of Canada.
- Sauvageot, J. L., Ballet, J. und Rothenflug, R. (1990). „EXOSAT observation toward S147 and A0535+ 26“. In: *Astronomy and Astrophysics* 227, S. 183–187.
- Schreiner, Axel T. (1994). *Objektorientierte Programmierung mit ANSI-C*. München Wien: Carl Hanser Verlag, S. 262.
- Sedov, Leonid I. (1946). „Propagation of strong shock waves“. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 10, S. 241–250.
- (1959). *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. New York: Academic Press [u.a.]
- Seward, Fred u. a. (2010). *Chandra Supernova Remnant Catalog*.
- Shakura, N. I. (1973). „Disk Model of Gas Accretion on a Relativistic Star in a Close Binary System.“ In: *Soviet Astronomy* 16, S. 756.
- Shakura, N. I. und Sunyaev, R. A. (1973). „Black holes in binary systems. Observational appearance.“ In: *Astronomy and Astrophysics* 24, S. 337–355.

- Shklovskii, I. S. (1962). „Supernova Outbursts and the Interstellar Medium“. In: *Soviet Astronomy* 6, S. 162.
- Shu, Frank H. (1992a). *The Physics of Astrophysics: Gas Dynamics I*. 1. Aufl. Mill Valley, California: University Science Books.
- (1992b). *The Physics of Astrophysics: Gas Dynamics II*. 1. Aufl. Bd. 2. Mill Valley, California: University Science Books, S. 476.
- Shu, Frank H. u. a. (2002). „Self-similar Champagne Flows in H ii Regions“. In: *The Astrophysical Journal* 580.1968, S. 969–979.
- Sijacki, Debora, Springel, Volker und Haehnelt, Martin G. (2009). „Growing the first bright quasars in cosmological simulations of structure formation“. In: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 400.1, S. 100–122.
- Solinger, A., Buff, J. und Rappaport, S. (1975). „Isothermal blast wave model of supernova remnants“. In: *The Astrophysical Journal* 201, S. 381–386.
- Speith, R. und Kley, W. (2003). „Stability of the viscously spreading ring“. In: *Astronomy and Astrophysics* 399, S. 395–407.
- Sperling, Björn (2009). „Zweidimensionale Modellierung selbstgravitierender Akkretions-scheiben“. Diplomarbeit. Christian Albrechts Universität zu Kiel.
- (2013). „Large Eddy Simulationen von selbstgravitierenden Akkretionsscheiben“. Dissertation. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- Stepanow, Vjaceslav. W. (1976). *Lehrbuch der Differentialgleichungen*. 4. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaft.
- Taylor, Geoffrey (1950). „The formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion. I. Theoretical Discussion“. In: *Proceedings of the Royal Society of London Series A* 201, S. 159–174.
- Thomas, Jens u. a. (2016). „A 17-billion-solar-mass black hole in a group galaxy with a diffuse core“. In: *Nature* Ngc 4874, S. 1–11.
- Thomas, J.W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Graduate Texts in Mathematics Bd. 1. Springer.
- Toro, Eleuterio F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. 2. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
- Tucker, Wallace H. und Koren, Marvin (1971). „Radiation from a High-Temperature Low-Density Plasma: the X-Ray Spectrum of the Solar Corona“. In: *The Astrophysical Journal* 168, S. 283–311.
- Tufillaro, N. B., Abbott, T. und Reilly, J. (1992). *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, Redwood City, CA.
- Urosevic, D. u. a. (2007). „The Σ - D Relation for Planetary Nebulae : an Introductory Analysis“. In: *Serb. Astron. J.* 174, S. 537–546.

- Vanden, Kirk J. und Orkwis, Paul D. (1996). „Comparison of Numerical and Analytical Jacobians“. In: *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 34.1125-1129.
- Vink, Jacco (2012). „Supernova remnants: The X-ray perspective“. In: *Astronomy and Astrophysics Review* 20, S. 49.
- Voigt, Hans-Heinrich (2012). *Abriss der Astronomie*. Hrsg. von Hermann-Josef Röser und Werner Tscharnuter. 6. Aufl. Berlin: Wiley-VCH, S. 1150.
- Warren, Jessica S. u. a. (2005). „Cosmic-Ray Acceleration at the Forward Shock in Tycho's Supernova Remnant: Evidence from Chandra X-Ray Observations“. In: *The Astrophysical Journal* 634.1, S. 376–389.
- Weinberg, Steven (1972). *Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, S. 657.
- Weizsäcker, Carl Friedrich von (1944). „Über die Entstehung des Planetensystems“. In: *Zeitschrift für Astrophysik*, S. 22, 319.
- Williams, Brian J. u. a. (2016). „An X-ray and Radio Study of the Varying Expansion Velocities in Tycho's Supernova Remnant“. In: *The Astrophysical Journal* 823.L32, S. L32.
- Willingale, R. u. a. (2002). „X-ray spectral imaging and Doppler mapping of Cassiopeia A“. In: *Astronomy and Astrophysics* 381, S. 1039–1048.
- Woltjer, L. (1972). „Supernova Remnants“. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 10, S. 129.
- Wright, E. L. (2006). „A Cosmology Calculator for the World Wide Web“. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 118, S. 1711–1715.
- Zel'dovich, Ya. B. u. a. (1966). *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena*. 1. Aufl. New York und London: Academic press.
- Zlatev, Zahari, Faragó, István und Havasi, Ágnes (2010). „Stability of the Richardson Extrapolation applied together with the θ -method“. In: *Journal of Computational and Applied Physics* 235.2, S. 507–517.

Danksagung

Mein besonderer Dank geht an Prof. Dr. Wolfgang Duschl, ohne den eine Arbeit bei der Kieler Astrophysik nicht möglich gewesen wäre. Auch danke ich für die vielen Gespräche, Hinweise und Anregungen sowie für die Unterstützung jeglicher Art.

Besonderer Dank gilt ebenfalls Prof. Dr. Robert Wimmer-Schweingruber, der die Finanzierung des ersten Jahres meiner Dissertation überbrückte, indem ich am Projekt Solar Orbiter mitarbeiten konnte. Ohne diese Finanzierung wäre es nicht zur Promotion gekommen.

Weiter möchte ich Dr. Tobias Illenseer für alle Gespräche und Anregungen während der Arbeit danken. Ebenso danke ich Frau Kuhr für die großartige administrative Unterstützung, die in vielen Fällen weit über das gewöhnliche hinaus ging. Auch Holger Boll gilt mein Dank, der mir nicht nur in Sachen Linux immer mit Rat und Tat zur Seite stand.

Wäre meine Freundin Dana nicht gewesen, hätte mir in vielerlei Hinsicht die Kraft und die positive Einstellung gegenüber sehr vieler Schwierigkeiten gefehlt, die sich mir im Laufe der letzten vier Jahre in den Weg gestellt haben. Ohne dich hätte nichts funktioniert.

Auch Jannes Klee, meinem Zimmergenossen und gutem Freund, möchte ich für die besondere Zeit mit vielen Gesprächen, die bei weitem nicht nur die Physik betrafen, danken.

Ebenso möchte ich meiner Familie meinen großen Dank aussprechen. Es gab viele Gegebenheiten, die leider ohne meine persönliche Anwesenheit durchzustehen waren. Für euer enormes Verständnis und eure Geduld möchte ich mich bei euch Gerald, Gabriele und Sabine Deschner sowie Sonja, Holger, Felice und Mariella Feldmann zutiefst bedanken.

Mein Dank geht sowohl an meine Freunde aus der Heimat, als auch an alle Freunde, die ich hier kennen und schätzen gelernt habe. Ihr seid mir immer treue Freunde geblieben, auch wenn dies durch die viele Arbeit nicht immer leicht war. Vielen Dank an die АНХОГ und alle anderen deren Verständnis mich voran kommen ließen.

Dank geht auch an meine Lehrer in der Abendschule, besonders an Herrn Kraft, sowie an meinen früheren Chef Harald Huber.

Mithilfe eines Stipendiums der RICHARD WINTER STIFTUNG konnte ich einen Teil des letzten Promotionsjahres überbrücken. Sie hat mich nicht nur finanziell, sondern allem voran auch mental über die schwierigen letzten Monate gebracht. Herzlichsten Dank!

*„Das Einzige, was die Menschheit zu retten vermag, ist Zusammenarbeit,
und der Weg zur Zusammenarbeit nimmt im Herzen der Einzelnen seinen Anfang“*

-Bertrand Russel

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die

- Abhandlung - abgesehen von der Beratung durch die Betreuer - nach Inhalt und Form die eigene Arbeit ist;
- Arbeit weder im Ganzen noch zum Teil einer anderen Stelle im Rahmen eines Prüfungsverfahrens vorgelegen hat, veröffentlicht worden ist oder zur Veröffentlichung eingereicht wurde;
- Arbeit unter Einhaltung der Regeln guter wissenschaftlicher Praxis der Deutschen Forschungsgemeinschaft entstanden ist.

KIEL, DEN 29.03.2018

STEPHAN DESCHNER