

Skalare und elektromagnetische Beugung an semi-infiniten Kegeln bei partieller Beleuchtung

Dissertation

von Hendrik Brüns

2018

Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Arbeitsgruppe Computational Electromagnetics
Prof. Dr.-Ing. Ludger Klinkenbusch

Referent: Prof. Dr.-Ing. Ludger Klinkenbusch
Koreferent: Prof. Dr.-Ing. Thomas Eibert
Datum der mündlichen Prüfung: 19.9.2018

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt die Beugung von elektromagnetischen und skalaren Complex-Source Beams an Kegeln. Der Complex-Source Beam bietet dabei die Möglichkeit, auf analytischem Wege ein strahlenförmiges, fokussiertes Wellenfeld zu beschreiben. Die Felder werden mit einer sphärischen Multipolentwicklung berechnet, die durch die Verwendung eines Complex-Source Beams als anregende Quelle im gesamten Lösungsgebiet stark konvergente Ergebnisse liefert.

Es wird sowohl der Kreiskegel als auch der allgemeinere Fall des elliptischen Kegels behandelt. Die numerische Auswertung umfasst skalare Felder für einen schallharten und schallweichen Kegel, sowie elektrische Felder an einem ideal leitenden Kegel. Öffnungswinkel des Kegels sowie Einfall- und Polarisationsrichtung des einfallenden Feldes können beliebige Werte annehmen. Es werden exemplarisch Feldbilder für einige interessante Fälle vorgestellt.

Zuletzt wird gezeigt, wie diese Ergebnisse, die mithilfe eines Complex-Source Beams gewonnen wurden, Anwendung in asymptotischen Verfahren finden können.

Summary

This thesis deals with the diffraction of electromagnetic and scalar complex-source beams at cones. The complex-source beam offers the possibility to describe the field of a focused beam analytically. The fields are computed by means of a spherical multipole expansion, which yields strongly convergent results when a complex-source beam is used as the incident field.

Both the circular cone and elliptic cone are considered. The numerical analysis covers scalar fields at acoustically soft and hard cones, as well as electric fields at perfectly conducting cones. The opening angle of the cones and the direction of incidence and polarisation can be chosen arbitrarily. Results are shown exemplarily for several interesting cases.

Finally a method is presented how results that are generated by a complex-source beam can be integrated into asymptotic methods.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Die sphärische Multipolentwicklung	6
2.1	Die Maxwellschen Gleichungen	6
2.2	Lösung der homogenen Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten	8
2.2.1	Sphärische Zylinderfunktionen	8
2.2.2	Kugelflächenfunktionen und zugeordnete Legendrefunktionen	9
2.2.2.1	Normierung der Kugelflächenfunktionen	10
2.2.2.2	Eigenwertbestimmung für den Außenraum eines Kegels	13
2.2.2.3	Entwicklung der zugeordneten Legendrefunktionen als hypergeometrische Reihe	17
2.2.3	Vektorielle Multipolfunktionen	19
2.3	Die Greensche Funktion	20
2.4	Die Greensche Dyade	21
2.5	Sphärische Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten	23
2.5.1	Fernfelddarstellung	24
2.6	Elliptische Kegelkoordinaten	25
2.7	Lösungen der homogenen Helmholtzgleichung in elliptischen Kegelkoordinaten	26
2.7.1	Periodische Lamésche Funktionen	28
2.7.2	Nichtperiodische Lamésche Funktionen	29
2.7.3	Vektorielle Multipolfunktionen	31
2.8	Sphärische Multipolentwicklung in elliptischen Kegelkoordinaten	31
3	Räumlich begrenzte Feldanregungen	33
3.1	Complex-Source Beam	33
3.1.1	Uniformer Complex-Source Beam	34
3.1.2	Der Gaußstrahl als Näherung des CSB	36

Inhaltsverzeichnis

3.1.3	Gouy-Phase	41
3.1.4	Normierung	41
3.1.5	Ausrichtung des Complex-Source Beam in Kugelkoordinaten	42
3.1.6	Ausrichtung des Complex-Source Beam in elliptischen Kegelkoordinaten	45
3.1.7	Complex-Source Beam als Feldanregung bei der Multipolentwicklung	46
3.1.7.1	Genauigkeit der Entwicklung	46
3.2	Inhomogene ebene Welle	53
3.2.1	Inhomogene ebene Welle in Kugelkoordinaten	54
3.2.2	Inhomogene ebene Welle als Feldanregung bei der Multipolentwicklung	56
3.2.2.1	Genauigkeit der Entwicklung	56
4	Beugung eines Complex-Source Beam am Kreiskegel	60
4.1	Nahfelder am akustisch weichen und harten Kreiskegel	60
4.2	Nahfelder des elektromagnetischen Feldes am Kreiskegel	67
4.3	Fernfelder am Kreiskegel	69
5	Beugung eines Complex-Source Beam am elliptischen Kegel	73
5.1	Nahfelder am elliptischen Kegel	73
5.2	Fernfelder am elliptischen Kegel	76
5.3	Spezialfall: Winkelsektor	79
6	Asymptotische Methoden	82
6.1	Geometrical Theory of Diffraction	82
6.2	Uniform Theory of Diffraction	83
6.2.1	Die UTD-Übergangsfunktion	84
6.3	Evaluierung von Beugungskoeffizienten aus CSB-Problemen	85
6.3.1	Einschub: Lösung der Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten	85
6.3.2	Vergleich des CSB-Fernfeldes mit GTD-Beugungskoeffizienten	86
6.3.3	Anpassung von CSB-Ergebnissen an UTD-Beugungskoeffizienten	87
7	Zusammenfassung und Ausblick	90
	Literaturverzeichnis	92

1 Einleitung

Wenn man Feldsimulationen durchführen möchte, bei denen die Wellenlänge der Anregung einige Größenordnungen unter den Abmaßen des betrachteten Modells liegt, sind meistens asymptotische Methoden die Feldberechnungsverfahren der Wahl. Bei diesen Verfahren wird die Beugung an Unstetigkeiten mithilfe von Beugungskoeffizienten ausgedrückt, die aus Lösungen zu entsprechenden kanonischen Strukturen gewonnen werden. Das Finden von analytischen Lösungen zu solchen kanonischen Problemstellungen kann für spezielle Strukturen sehr anspruchsvoll sein. In dieser Arbeit soll die Beugung an Kreiskegeln und elliptischen Kegeln untersucht werden.

Hierbei kommt die sphärische Multipolentwicklung zum Einsatz. Sie ist eine Entwicklung des elektromagnetischen Feldes, die sich am besten für kugelsymmetrische Probleme eignet. Eine Abwandlung der klassischen Multipolentwicklung durch geeignete Eigenfunktionen ermöglicht das Berechnen von Feldern im Außenraum von beliebigen Kegeln. Dieser Ansatz wurde schon in früheren Arbeiten verfolgt; es kommt allerdings zu Konvergenzproblemen bei der Entwicklung von ebenen Wellen außerhalb eines bestimmten Konvergenzradius.

Bei den Untersuchungen in dieser Arbeit wird ein sogenannter Complex-Source Beam (CSB) als anregendes Feld verwendet. Namensgebend ist das Phänomen, dass die Annahme eines komplexen Ortes für die Position einer Punktquelle zu einer Feldbeschreibung eines fokussierten Strahls führt. Der entstehende Strahl, der sich durch einen Gaußstrahl angenähert beschreiben lässt, soll als lokal beschränktes ebenes Wellenfeld verwendet werden, um die zu untersuchende Struktur, insbesondere die Kegelspitze, zu beleuchten. Auf diese Weise sollen Feldbilder erzeugt werden, die Rückschlüsse auf das Beugungsverhalten von ebenen Wellen an Kegelspitzen ermöglichen. Gleichzeitig hat die lokale Begrenzung des Feldes zur Folge, dass die Entwicklung eine bessere Konvergenz besitzt.

KAPITEL 1. EINLEITUNG

Die Grundlagen der sphärischen Multipolentwicklung werden in Kapitel 2 behandelt. In Kapitel 3 werden der CSB sowie die inhomogene ebene Welle als anregende Felder vorgestellt. Anschließend werden in Kapitel 4 und 5 Ergebnisse für das Nah- und Fernfeld bei der Beugung von einem CSB am Kreiskegel oder elliptischem Kegel präsentiert. Abschließend wird in Kapitel 6 untersucht, wie diese Ergebnisse als Beugungskoeffizienten in asymptotischen Verfahren verwendet werden können.

2 Die sphärische Multipolentwicklung

Ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen werden in diesem Kapitel kompakt, doch möglichst vollständig die Lösungen für die skalare und vektorielle Helmholtzgleichung hergeleitet. Es werden dabei zwei verschiedene Koordinatensysteme berücksichtigt, nämlich die Kugelkoordinaten und die elliptischen Kegelkoordinaten. Es werden Lösungen sowohl für den freien Raum als auch für den Außenraum von Kreiskegeln und elliptischen Kegeln gesucht. Deren Darstellung erfolgt über sphärische Multipolentwicklungen.

2.1 Die Maxwellschen Gleichungen

Als Grundlage zur Beschreibung sämtlicher elektromagnetischer Vorgänge dienen die Maxwellschen Gleichungen. Die differentielle Formulierung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}). \quad (2.1d)$$

Für zeitharmonische Vorgänge bei einer festen Kreisfrequenz ω lassen sich die Größen zeitunabhängig als Phasoren gemäß

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{F}(\vec{r})e^{+j\omega t}\} \quad (2.2)$$

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

ausdrücken, wobei hier – wie im Rest dieser Arbeit – von dem Zeitfaktor $+j\omega t$ ausgegangen wird. Die Maxwellgleichungen werden in Phasorschreibweise zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J} + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \quad (2.3a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \quad (2.3b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.3c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \varrho(\vec{r}). \quad (2.3d)$$

Für eine vollständige Beschreibung müssen zusätzlich noch die elektrische Feldstärke \vec{E} mit der elektrischen Flussdichte \vec{D} und der Stromdichte \vec{J} , sowie die magnetische Feldstärke \vec{H} mit der magnetischen Flussdichte \vec{B} verknüpft werden. Für ein lineares, homogenes und isotropes Medium geschieht dies über folgende Materialgleichungen:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \varepsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad (2.4a)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) \quad (2.4b)$$

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{J}_{imp}(\vec{r}) + \sigma \vec{E}(\vec{r}), \quad (2.4c)$$

wobei J_{imp} die eingeprägte elektrische Stromstärke darstellt und als Anregung des elektromagnetischen Feldes dienen kann.

Durch das Kombinieren von (2.3a) und (2.3b) erhält man mit (2.4a) – (2.4c)

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} - \kappa^2 \vec{E} = -j\omega \mu \vec{J}_{imp}(\vec{r}) \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} - \kappa^2 \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{J}_{imp}(\vec{r}) \quad (2.6)$$

mit der Wellenzahl

$$\kappa = \sqrt{\omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \sigma} = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{eff}}. \quad (2.7)$$

Wenn nun die beiden verbleibenden Maxwellschen Gleichungen (2.3c) und (2.3d) herangezogen werden, ergeben sich mithilfe der Vektoridentität $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = -\Delta \vec{F} + \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ die vektoriellen inhomogenen Helmholtzgleichungen für das elektrische und magnetische Feld:

$$\Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \varrho + j\omega \mu \vec{J}_{imp} \quad (2.8)$$

$$\Delta \vec{H} + \kappa^2 \vec{H} = -\vec{\nabla} \times \vec{J}_{imp}. \quad (2.9)$$

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

Für die Herleitung der skalaren inhomogenen Helmholtzgleichung verwenden wir den Zusammenhang

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - j\omega\vec{A} \quad (2.10)$$

zwischen den Phasoren des elektrischen Feldes und den Phasoren des elektrischen Potentials und des magnetischen Vektorpotentials \vec{A} . Wird (2.10) in die inhomogene Helmholtzgleichung für das elektrische Feld (2.8) eingesetzt und gewährleistet man die Einhaltung der Lorentz-Konvention [1, p. 275] für Phasoren

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + j\omega\epsilon\mu\Phi = 0 \quad (2.11)$$

so ergibt sich die inhomogene skalare Helmholtzgleichung für das elektrische Potential [1, p. 284]:

$$\Delta\Phi + \kappa^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad (2.12)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichungen soll über eine Greensche Funktion geschehen, die wiederum aus einem Fundamentalsystem aus Lösungen zur homogenen Differentialgleichung dargestellt werden kann. Deswegen wird im kommenden Kapitel zunächst ausführlich die Lösung zum homogenen Problem behandelt. Die skalare homogene Helmholtzgleichung lautet

$$\Delta\Phi + \kappa^2\Phi = 0. \quad (2.13)$$

2.2 Lösung der homogenen Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten

In diesem Kapitel soll die Lösung der homogenen Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten r, θ, ϕ hergeleitet werden, welche mit den kartesischen Koordinaten über

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (2.14a)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (2.14b)$$

$$z = r \cos \theta \quad (2.14c)$$

zusammenhängen. Zunächst wird der Laplace-Operator in der skalaren Helmholtzgleichung (2.13) in Kugelkoordinaten ausgeführt:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin(\theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right) + \kappa^2 \Phi = 0. \quad (2.15)$$

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

Diese Differentialgleichung lässt sich in Kugelkoordinaten – wie in einigen anderen Koordinatensystemen [2], [3] – vollständig in drei unabhängige Differentialgleichungen separieren. Als erstes werde der Produktansatz

$$\Phi(r, \theta, \phi) = z(r)Y(\theta, \phi) \quad (2.16)$$

mit der Wahl einer Separationskonstanten $\nu(\nu+1)$ angewendet, um eine r -abhängige und eine (θ, ϕ) -abhängige Differentialgleichung zu erhalten; anschließend wird die letztere Differentialgleichung erneut separiert (siehe Abschnitt 2.2.2).

2.2.1 Sphärische Zylinderfunktionen

Die r -abhängige Differentialgleichung, die durch die Separation entsteht, lautet

$$\frac{1}{(\kappa r)^2} \frac{d}{d(\kappa r)} \left[(\kappa r)^2 \frac{dz_\nu(\kappa r)}{d(\kappa r)} \right] + \left(1 - \frac{\nu(\nu+1)}{(\kappa r)^2} \right) z_\nu(\kappa r) = 0 \quad (2.17)$$

und ist als Differentialgleichung der sphärischen Zylinderfunktionen bekannt; meistens mit der Substitution $x = \kappa r$ ausgeführt. Die Lösungen $z_\nu(\kappa r)$ heißen sphärische Zylinderfunktionen und sind mit den bekannteren Zylinderfunktionen $Z_\nu(\kappa r)$ über

$$z_\nu(\kappa r) = \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa r}} Z_{\nu+1/2}(\kappa r) \quad (2.18)$$

miteinander verknüpft. Da es sich bei (2.17) um eine lineare, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung handelt, muss es zwei linear unabhängige Lösungen und somit verschiedene Varianten von sphärischen Zylinderfunktionen geben: Die sphärischen Besselfunktionen $j_\nu(\kappa r)$, die sphärischen Neumannfunktionen $n_\nu(\kappa r)$ (auch sphärische Besselfunktionen zweiter Art genannt), sowie die sphärischen Hankelfunktionen erster Art $h_\nu^{(1)}$ und zweiter Art $h_\nu^{(2)}$. Die letzteren beiden werden auch sphärische Besselfunktionen dritter Art genannt und sind Linearkombinationen der ersten beiden Varianten:

$$h_\nu^{(1)}(\kappa r) = j_\nu(\kappa r) + j n_\nu(\kappa r) \quad (2.19)$$

$$h_\nu^{(2)}(\kappa r) = j_\nu(\kappa r) - j n_\nu(\kappa r). \quad (2.20)$$

Da Lösungen gesucht werden, die im gesamten Raum gültig sind, benötigen wir Funktionen, die insbesondere auch im Ursprung, also für $r = 0$ regulär bleiben. Dies

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

erfüllt von den vier sphärischen Zylinderfunktionen allein die sphärische Besselfunktion $j_\nu(\kappa r)$, da die Neumannfunktionen für $r = 0$ gegen $-\infty$ streben. Im freien Raum suchen wir außerdem Lösungen, welche die Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{d z_\nu(\kappa r)}{dr} + j_\nu \kappa z_\nu(\kappa r) \right) = 0 \quad (2.21)$$

erfüllen. Dies erfüllen wiederum einzig die sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art $h_\nu^{(2)}(\kappa r)$. Es kommen folglich nur diese beiden Funktionen für die Lösung infrage.

2.2.2 Kugelflächenfunktionen und zugeordnete Legendrefunktionen

Die zweite Differentialgleichung, die durch die Separation mit der Separationskonstanten $\nu(\nu + 1)$ entsteht, ist abhängig von θ, ϕ und ist als Eigenwertgleichung der Kugelflächenfunktionen bekannt:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} + \nu(\nu + 1) Y(\theta, \phi) = 0. \quad (2.22)$$

Diese lässt sich mit einem zweiten Produktansatz und einer weiteren Separationskonstanten μ^2 weiter in θ und ϕ separieren. Die ϕ -abhängige Differentialgleichung lautet

$$\frac{d^2 W(\phi)}{d\phi^2} + \mu^2 W(\phi) = 0 \quad (2.23)$$

und linear unabhängige Lösungen sind zum Beispiel die harmonischen Funktionen $\sin(\mu\phi)$ und $\cos(\mu\phi)$. In dieser Arbeit werden ausschließlich Fälle betrachtet, bei denen ϕ den gesamten Definitionsbereich von 0 bis 2π durchläuft. Die Lösungen müssen folglich auch periodisch über diesen Bereich sein. Somit kann μ nur ganzzahlige Werte annehmen, die im kommenden ausschließlich mit m bezeichnet werden sollen. Da für die Lösung sowohl gerade Funktionen $\sin(m\phi)$ als auch ungerade Funktionen $\cos(m\phi)$ infrage kommen, ist es zweckmäßig als Lösung die komplexe Exponentialfunktion $e^{jm\phi}$ und damit eine Linearkombination aus beiden heranzuziehen.

In θ ergibt sich die Differentialgleichung der zugeordneten Legendrefunktionen

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin \theta \frac{d P_\nu^m(\cos \theta)}{d\theta} \right] + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P_\nu^m(\cos \theta) = 0. \quad (2.24)$$

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

Weiter verbreitet ist die Form, die sich mit der Substitution $x = \cos \theta$ ergibt:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 P_\nu^m(x)}{dx^2} - 2x \frac{dP_\nu^m(x)}{dx} + \left(\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right) P_\nu^m(x) = 0. \quad (2.25)$$

Die zugeordneten Legendrefunktionen sind somit der θ -abhängige Teil der Kugelflächenfunktionen. Für den Fall, dass der freie Raum betrachtet wird und θ somit den gesamten Definitionsbereich von 0 bis π durchläuft, nimmt der Grad ν der zugeordneten Legendrefunktionen ausschließlich ganzzahlige Werte n an. In dieser Arbeit wird jedoch im Allgemeinen davon ausgegangen, dass der Definitionsbereich von θ beschränkt ist und ν somit reelle Werte annimmt.

Mit dem getroffenen Produktansatz lassen sich die Kugelflächenfunktionen mit

$$Y_{\nu,m}(\theta, \phi) = N_\nu^m P_\nu^m(\cos \theta) e^{jm\phi} \quad (2.26)$$

beschreiben, wobei noch ein geeigneter Normierungsfaktor N_ν^m bestimmt werden muss.

2.2.2.1 Normierung der Kugelflächenfunktionen

Damit die Kugelflächenfunktionen ein orthonormiertes Funktionensystem darstellen, muss der Vorfaktor N_ν^m entsprechend gewählt werden.

Für Orthogonalität muss das Skalarprodukt zwischen zwei verschiedenen Kugelflächenfunktionen stets null ergeben. Soll das Funktionensystem zusätzlich normiert sein, ist das Skalarprodukt zwischen zwei gleichen Kugelflächenfunktion genau 1. Das Skalarprodukt zweier Funktionen wird durch die Multiplikation mit der komplex konjugierten Funktion und anschließender Integration über den gesamten Definitionsbereich berechnet. Für die Kugelflächenfunktionen wird somit Orthonormalität mit folgender Formel erzielt:

$$\int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} Y_{\nu,m} Y_{\nu',m'}^* \sin \theta \, d\theta d\phi = \delta_{\nu,\nu'} \delta_{m,m'} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \nu = \nu' \text{ und } m = m' \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Der Definitionsbereich für ϕ ist in dieser Arbeit stets 2π -periodisch und kann somit zwischen 0 und 2π angegeben werden, während der Definitionsbereich für θ zwischen

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

0 und θ_0 begrenzt ist. Wird (2.26) nun für den Fall $\nu = \nu'$ und $m = m'$ in die obige Gleichung eingesetzt, ergibt sich der Normierungsfaktor

$$N_\nu^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi \int_0^{\theta_0} [P_\nu^m]^2 \sin \theta \, d\theta}}. \quad (2.28)$$

Für den Freiraum, das heißt für $\theta_0 = \pi$ und ganzzahlige $\nu = n$, kann das bestimmte Integral leicht mit

$$\int_0^\pi [P_n^m(\cos \theta)]^2 \sin \theta \, d\theta = \int_{-1}^1 [P_n^m(x)]^2 \, dx = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \quad (2.29)$$

angegeben werden [4]. Damit lässt sich der allgemein bekannte Vorfaktor für orthonormierte Kugelfunktionen im Freiraum angeben:

$$N_n^m = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}. \quad (2.30)$$

Für den allgemeineren Fall, dass θ_0 einen Wert zwischen 0 und π annimmt, kann das Integral über das Quadrat der zugeordneten Legendrefunktion nicht so leicht angegeben werden. Die bisherige Vorgehensweise war, dass das Integral numerisch berechnet wird. Im Rahmen dieser Arbeit ist es jedoch gelungen, eine Stammfunktion für $[P_\nu^\mu(x)]^2$ zu finden, die im folgenden Abschnitt hergeleitet wird:

$$\begin{aligned} \int [P_\nu^\mu(x)]^2 \, dx &= \frac{-x \cdot [P_\nu^\mu(x)]^2}{2\nu+1} + \frac{1}{2\nu+1} \left[P_{\nu+1}^\mu(x) \cdot P_\nu^\mu(x) \right. \\ &\quad \left. + (\nu - \mu + 1) \frac{\partial P_{\nu+1}^\mu(x)}{\partial \nu} \cdot P_\nu^\mu(x) - (\nu - \mu + 1) P_{\nu+1}^\mu(x) \cdot \frac{\partial P_\nu^\mu(x)}{\partial \nu} \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Auf diese Weise ist es möglich, zu bekannten Eigenwerten ν, m die Normierungsfaktoren N_ν^m für die Kugelflächenfunktionen auf analytischem Wege auszudrücken.

Stammfunktion zum Quadrat der zugeordneten Legendrefunktion

Es soll das unbestimmte Integral

$$\int [P_\nu^m(x)]^2 \, dx \quad (2.32)$$

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

hergeleitet werden. Als erstes werde in die Differentialgleichung der zugeordneten Legendrefunktionen (2.25) eine Lösung $P_{\nu_1}^m$ mit dem Grad ν_1 und der Ordnung m eingesetzt und die Gleichung mit einer anderen Lösung $P_{\nu_2}^m$ mit identischer Ordnung aber abweichendem Grad ν_2 multipliziert:

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_{\nu_1}^m(x)}{dx^2}P_{\nu_2}^m(x) - 2x\frac{dP_{\nu_1}^m(x)}{dx}P_{\nu_2}^m(x) + \left(\nu_1(\nu_1+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{\nu_1}^m(x)P_{\nu_2}^m(x) = 0 \quad (2.33)$$

Von dieser Gleichung werde nun die Differentialgleichung subtrahiert, die entsteht, wenn auf umgekehrte Weise $P_{\nu_2}^m$ als Lösung eingesetzt und $P_{\nu_1}^m$ multipliziert wurde:

$$\begin{aligned} & (1-x^2)\frac{d^2 P_{\nu_1}^m(x)}{dx^2}P_{\nu_2}^m(x) - 2x\frac{dP_{\nu_1}^m(x)}{dx}P_{\nu_2}^m(x) + \left(\nu_1(\nu_1+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{\nu_1}^m(x)P_{\nu_2}^m(x) \\ & - (1-x^2)\frac{d^2 P_{\nu_2}^m(x)}{dx^2}P_{\nu_1}^m(x) + 2x\frac{dP_{\nu_2}^m(x)}{dx}P_{\nu_1}^m(x) - \left(\nu_2(\nu_2+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right)P_{\nu_1}^m(x)P_{\nu_2}^m(x) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Weiteres Umformen liefert

$$\begin{aligned} (1-x^2)\left(\frac{d^2 P_{\nu_1}^m(x)}{dx^2}P_{\nu_2}^m(x) - \frac{d^2 P_{\nu_2}^m(x)}{dx^2}P_{\nu_1}^m(x)\right) - 2x\left(\frac{dP_{\nu_1}^m(x)}{dx}P_{\nu_2}^m(x) - \frac{dP_{\nu_2}^m(x)}{dx}P_{\nu_1}^m(x)\right) \\ = (\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 + 1)P_{\nu_1}^m(x)P_{\nu_2}^m(x) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\Rightarrow P_{\nu_1}^m(x)P_{\nu_2}^m(x) = \frac{\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\left(P_{\nu_1}^m(x)\frac{dP_{\nu_2}^m(x)}{dx} - P_{\nu_2}^m(x)\frac{dP_{\nu_1}^m(x)}{dx}\right)\right]}{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 + 1)}. \quad (2.36)$$

Anschließendes Integrieren über x ergibt

$$\int P_{\nu_1}^m(x)P_{\nu_2}^m(x)dx = \frac{\left[(1-x^2)\left(P_{\nu_1}^m(x)\frac{dP_{\nu_2}^m(x)}{dx} - P_{\nu_2}^m(x)\frac{dP_{\nu_1}^m(x)}{dx}\right)\right]}{(\nu_1 - \nu_2)(\nu_1 + \nu_2 + 1)}, \quad (2.37)$$

was dem Ziel schon sehr nahe ist, wobei das setzen von $\nu_1 = \nu_2$ nur einen undefinierten Term liefern würde. Stattdessen setzen wir

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu + \epsilon \\ \nu_2 &= \nu - \epsilon \end{aligned} \quad (2.38)$$

und betrachten den Grenzwert für $\epsilon \rightarrow 0$. Die Ableitungen nach x werden mithilfe von

$$(1-x^2)\frac{dP_{\nu}^{\mu}(x)}{dx} = (\mu - \nu - 1)P_{\nu+1}^{\mu}(x) + (\nu + 1)xP_{\nu}^{\mu}(x) \quad (2.39)$$

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

ersetzt:

$$\int [P_\nu^\mu(x)]^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)(P_{\nu+\epsilon}^\mu \frac{d}{dx} P_{\nu-\epsilon}^\mu - P_{\nu-\epsilon}^\mu \frac{d}{dx} P_{\nu+\epsilon}^\mu)}{2\epsilon(2\nu+1)} \quad (2.40)$$

$$= \frac{-x \cdot [P_\nu^\mu(x)]^2}{2\nu+1} + \frac{1}{2\nu+1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{(\nu+\epsilon-\mu+1)P_{\nu+\epsilon+1}^\mu(x)P_{\nu-\epsilon}^\mu(x)}{2\epsilon} - \frac{(\nu-\epsilon-\mu+1)P_{\nu-\epsilon+1}^\mu(x)P_{\nu+\epsilon}^\mu(x)}{2\epsilon} \right]. \quad (2.41)$$

An dieser Stelle kann nun der Grenzwert gebildet werden, indem folgender Differentialquotient angewendet wird und Ableitungen nach ν eingeführt werden:

$$\frac{\partial f}{\partial \nu} \cdot g - \frac{\partial g}{\partial \nu} \cdot f = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\nu+\epsilon) \cdot g(\nu-\epsilon) - f(\nu-\epsilon) \cdot g(\nu+\epsilon)}{2\epsilon} \quad (2.42)$$

Für die Stammfunktion erhalten wir schließlich

$$\int [P_\nu^\mu(x)]^2 dx = \frac{-x \cdot [P_\nu^\mu(x)]^2}{2\nu+1} + \frac{1}{2\nu+1} \left[P_{\nu+1}^\mu(x) \cdot P_\nu^\mu(x) + (\nu-\mu+1) \frac{\partial P_{\nu+1}^\mu(x)}{\partial \nu} \cdot P_\nu^\mu(x) - (\nu-\mu+1) P_{\nu+1}^\mu(x) \cdot \frac{\partial P_\nu^\mu(x)}{\partial \nu} \right]. \quad (2.43)$$

Die Ableitung der zugeordneten Legendrefunktion nach dem Grad kann als Entwicklung angegeben werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu^m(x) &= \pi \cot(\nu\pi) P_\nu^m \\ &- \frac{1}{\pi} \sin(\nu\pi) \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{m/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x)^k \Gamma(k-\nu) \Gamma(k+\nu+1)}{k! \Gamma(k-m+1)} \\ &\quad \times (\psi(k+\nu+1) - \psi(k-\nu)), \end{aligned} \quad (2.44)$$

wobei $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ die Digamma-Funktion ist. Dieser Zusammenhang lässt sich herleiten, indem die hypergeometrische Darstellung der zugeordneten Legendrefunktionen nach ν abgeleitet wird. Da die Auswertung dieser Reihenentwicklung recht aufwendig ist und nicht über die gesamten Wertebereiche der Parameter zuverlässig konvergiert, bietet es sich an, auf ein anderes Verfahren zur Differentiation zurückzugreifen (siehe [5], Kapitel 25.3.); im einfachsten Falle auf einen Differenzenquotienten [6].

2.2.2.2 Eigenwertbestimmung für den Außenraum eines Kegels

Im Allgemeinen soll in dieser Arbeit der Definitionsbereich von θ eingeschränkt werden und zwar durch Anwesenheit eines Kreiskegels symmetrisch zur negativen

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

z -Achse. An der Oberfläche des Kreiskegels, bei $\theta = \theta_0$, müssen die Lösungen, beziehungsweise die θ -abhängigen zugeordneten Legendrefunktionen, bestimmte Randbedingungen erfüllen [7]. Dabei werden zwei verschiedene Randbedingungen betrachtet:

- Die Dirichlet-Randbedingung besagt, dass die Lösungen auf dem Rand des Definitionsbereiches einen bestimmten Wert annehmen. In unserem Fall soll dieser Wert stets null sein. Damit diese Randbedingung erfüllt werden kann, muss für die zugeordneten Legendrefunktionen folgendes Problem gelöst werden:

$$P_{\nu_d}^m(\cos \theta_0) = 0. \quad (2.45)$$

- Die zweite Art von Randbedingung ist die Neumann-Randbedingung, die besagt, dass die Normalenableitung der betrachteten Lösung auf dem Rand einen konstanten Wert annimmt – auch hier soll dies null sein. Die Normalenableitung entspricht bei der Kegeloberfläche einer Ableitung nach θ , womit sich für die Neumann-Randbedingung folgende Gleichung formulieren lässt:

$$\left. \frac{\partial P_{\nu_n}^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta_0} = 0. \quad (2.46)$$

Es müssen also Eigenwerte ν_d und ν_n gefunden werden, für die die Gleichungen (2.45) und (2.46) erfüllt werden. Dies kann durch ein einfaches numerisches Verfahren zur Nullstellensuche geschehen. In Abbildung 2.1 ist exemplarisch eine zugeordnete Legendrefunktion an der Stelle $\theta_0 = 135^\circ$ und mit konstantem $m = 2$ über dem Grad ν aufgetragen; Abbildung 2.2 zeigt denselben Fall für die Ableitung der zugeordneten Legendrefunktion. Die gefundenen Eigenwerte sind jeweils gekennzeichnet. Es sei erwähnt, dass das Vorkommen der Eigenwerte keiner strengen Periodizität folgt, wie es augenscheinlich zunächst aussieht. Ebenso wenig besteht eine Beziehung zwischen den Extremwertstellen der beiden Kurven mit den jeweils anderen Eigenwerten, was man auf dem ersten Blick vermuten könnte.

Für einen vollständigen Eigenwertsatz müssen konsequent sämtliche Nullstellen für $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ für die beiden Randbedingungen bestimmt werden. Für Grad und Ordnung der zugeordneten Legendrefunktion gilt stets [8]

$$\nu(\nu + 1) \geq m^2 \quad (2.47)$$

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

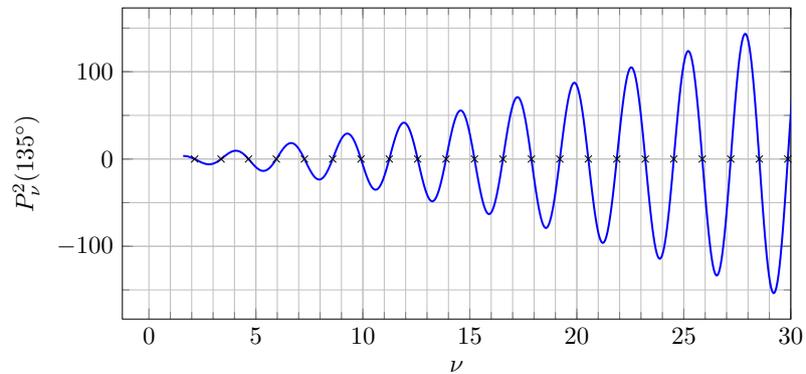


Abbildung 2.1 Die zugeordnete Legendrefunktion zu einem konstanten $\theta_0 = 135^\circ$ und $m = 2$ aufgetragen über den Grad ν . Die Nullstellen (x) entsprechen den Dirichlet-Eigenwerten.

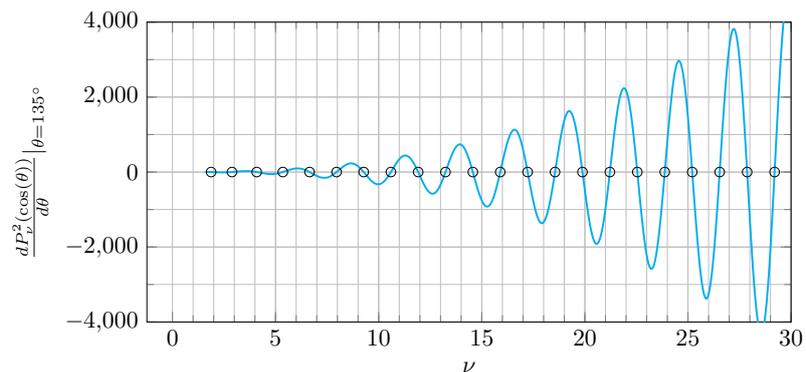


Abbildung 2.2 Die Ableitung $d/d\theta$ der zugeordneten Legendrefunktion mit $m = 2$ an der Stelle $\theta_0 = 135^\circ$ über den Grad ν . Die Nullstellen (o) entsprechen den Neumann-Eigenwerten.

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

wodurch sich ergibt, dass für ein bestimmtes m die untere Grenze von ν durch

$$\nu_{min} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + m^2} \quad (2.48)$$

gegeben ist. In der Praxis ist es natürlich notwendig, eine obere Grenze ν_{max} festzulegen, bis zu der die Eigenwerte gesucht werden. Die maximale Ordnung m_{max} ergibt sich dann gemäß (2.47). Für die zugeordneten Legendrefunktionen ergeben sich für negative m in der Regel zwar andere Funktionswerte, allerdings sind die Nullstellen identisch, wie sich leicht an der Beziehung zwischen P_ν^m und P_ν^{-m} einsehen lässt:

$$P_\nu^{-m}(\cos \theta) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu + 1 - m)}{\Gamma(\nu + 1 + m)} P_\nu^m(\cos \theta). \quad (2.49)$$

Eine Beschränkung auf positive m ist bei der Eigenwertbestimmung also völlig ausreichend. In den Abbildungen 2.3 und 2.4 ist jeweils ein vollständiger Eigenwertsatz bis $\nu_{max} = 20$ für $\theta_0 = 135^\circ$ und für $\theta_0 = 150^\circ$ in der ν, m -Ebene dargestellt. Es fällt auf, dass sich die Eigenwertpaare für größere ν in einem Bereich nahe der Obergrenze an ganzzahlige Werte annähern. Dieser Bereich wird mit dem Winkel θ_0 größer, wie ein Vergleich der beiden Abbildungen zeigt. Die Anteile, die diese Eigenwerte liefern, entsprechen also denen, die auch im Freiraum mit dem entsprechenden P_n^m vorhanden sind, wobei sich allerdings die Normierung für die Kugelflächenfunktion gemäß (2.28) unterscheidet. Vielmehr entsprechen diese Moden jenen Anteilen einer Feldanregung, die trotz Anwesenheit eines Kegels nahezu ungestört bleiben. Weiterhin ist zu erkennen, dass sich Dirichlet- und Neumann-eigenwerte streng abwechseln. Dies ist eine Eigenschaft, die sich für Dirichlet- und Neumannrandbedingungen bei einem Sturm-Liouville-Eigenwertproblem – um das es sich hierbei handelt – beweisen lässt [9].

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

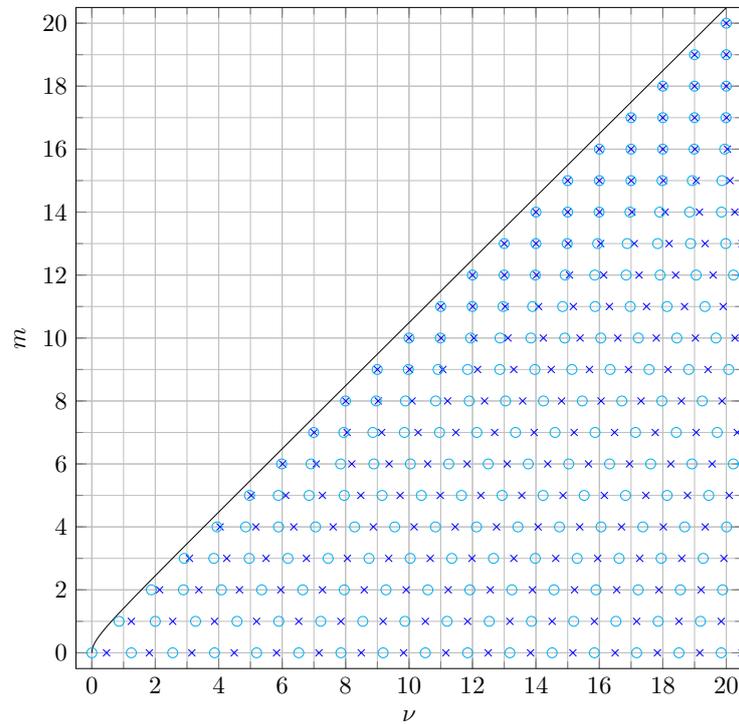


Abbildung 2.3 Dirichlet- (x) und Neumann-Eigenwertpaare (o) für $\theta_0 = 135^\circ$. Die schwarze Kurve entspricht $\nu(\nu + 1) = m^2$; oberhalb dieser Kurve können keine Eigenwerte liegen.

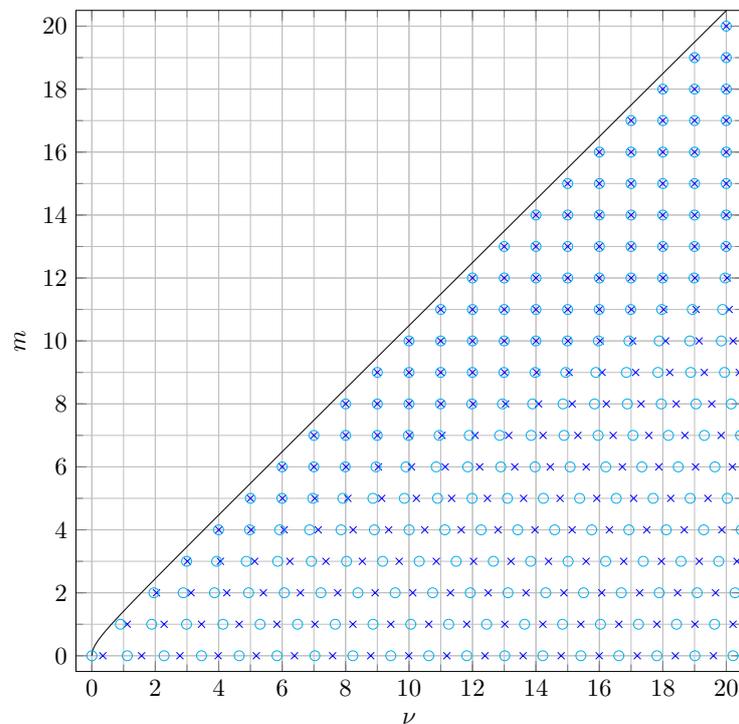


Abbildung 2.4 Dirichlet- (x) und Neumann-Eigenwertpaare (o) für $\theta_0 = 150^\circ$.

2.2.2.3 Entwicklung der zugeordneten Legendrefunktionen als hypergeometrische Reihe

Die Berechnung der zugeordneten Legendrefunktionen stellt die größte numerische Herausforderung bei der Bestimmung von Lösungen der Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten dar. Für Freiraumprobleme ist die Berechnung noch relativ einfach möglich, da hier sowohl der Grad n als auch die Ordnung m der Funktionen stets ganzzahlig bleibt. Die zugeordneten Legendrefunktionen können in diesem Fall explizit als Polynome angegeben werden und werden entsprechend auch zugeordnete Legendrepolynome genannt. Die Darstellung erfolgt über die m -te Ableitung des Legendrepolynoms mit entsprechendem Grad

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \quad (2.50)$$

wobei die Legendrepolynome explizit mit der Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (2.51)$$

angegeben werden können.

Für Lösungen im Außenraum eines Kegels nimmt der Grad der Legendrefunktionen reelle Werte ν an und die explizite Angabe eines Polynoms ist nicht länger möglich. Für diesen Fall existieren zahlreiche Möglichkeiten der Berechnung, wie beispielsweise eine trigonometrische Entwicklung, eine Integraldarstellung [5], Anordnungen von Rekursionsformeln [10] oder eine direkte numerische Auswertung der Differentialgleichung. In dieser Arbeit wurde die Darstellung über eine hypergeometrische Reihe gewählt, die zusätzlich auch die Verwendung komplexer Argumente gestattet.

Die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion ${}_pF_q$ ist eine umfangreiche Klasse an Funktionen, die über geometrische Reihen gebildet werden. Sie kann mithilfe des Pochhammer-Symbols

$$(s)_k = \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s)}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

geschrieben werden als

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (2.53)$$

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

Für $p = 2$ und $q = 1$ erhält man den Spezialfall der Gaußschen hypergeometrischen Funktionen ${}_2F_1(a, b; c; z)$:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (2.54)$$

Sie erfüllen die Differentialgleichung

$$z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} {}_2F_1 + [c - (a+b+1)z] \frac{d}{dz} {}_2F_1 - ab {}_2F_1 = 0. \quad (2.55)$$

Mithilfe dieser Gaußschen hypergeometrischen Funktionen lassen sich die zugeordneten Legendrefunktionen in einer Vielzahl an Formen darstellen [4]. Nicht alle Darstellungen sind für die Definitionsbereiche der benötigten Parameter $\nu \in [0, \infty]$, $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ und $x \in [-1, 1]$ definiert. Eine günstige Darstellung, die in dieser Arbeit ausschließlich verwendet wurde, ist

$$P_\nu^m(x) = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(\nu - m + 1)} (1 - x^2)^{m/2} \frac{1}{\Gamma(m + 1)} {}_2F_1(\nu + m + 1, m - \nu; m + 1; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x). \quad (2.56)$$

Sie ist für ganzzahlige $\nu > m$ nicht definiert, da hier im Zähler der Reihenentwicklung Gammafunktionen mit negativen Ganzzahlen als Argument vorkommen. Für diesen Fall sind aber ohnehin Polynome mit (2.50) und (2.51) definiert – wie zuvor erläutert.

Für bestimmte Konfigurationen der Parameter kann die Reihe in (2.56) eine schwache Konvergenz aufweisen, insbesondere, wenn

- der Grad ν der zugeordneten Legendrefunktionen groß wird ($\gtrsim 20$), die Ordnung m gleichzeitig klein bleibt ($\lesssim 10$),
- der Grad ν sehr nahe an eine Ganzzahl kommt
- und für große Winkel θ ($\gtrsim 150^\circ$), also für x nahe -1 .

Dem ersten Punkt kann man beikommen, indem man eine geeignete Rekursionsgleichung ausnutzt, wie beispielsweise [4]

$$(\nu - m + 2)P_{\nu+2}^m(x) - (2\nu + 3)x P_{\nu+1}^m(x) + (m + \nu + 1)P_\nu^m(x) = 0. \quad (2.57)$$

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

Man berechnet also die zugeordneten Legendrefunktionen mit niedrigerem ν , für die die Reihenentwicklung in (2.56) eine ausreichende Konvergenz besitzt und kann anschließend durch rekursive Anwendung von (2.57) auf den Wert der zugeordneten Legendrefunktion mit den gewünschten Parametern schließen.

Beim zweiten Punkt handelt es sich um Werte, die denen der Freiraummoden sehr nahe kommen. Näherungsweise kann ab einer bestimmten Schwelle, beispielsweise $\nu - n < 10^{-6}$, der Wert für einen ganzzahligen Grad gemäß (2.50) und (2.51) berechnet werden.

Zum dritten Punkt lässt sich sagen, dass es keine einfache Lösung zur Vermeidung der Konvergenzprobleme gibt. Die Reihen können hunderttausende Reihenglieder enthalten, die alle einen relevanten Anteil an der Gesamtsumme ausmachen. Bei der Summation kommt es zu einem großen numerischen Fehler, der sich durch die Verwendung einer hohen Gleitkommagenauigkeit (beispielsweise vierfache Genauigkeit nach IEEE 754-2008 [11]) zumindest reduzieren lässt.

2.2.3 Vektorielle Multipolfunktionen

In den vorangehenden Kapiteln wurden Fundamentallösungen zur skalaren homogenen Helmholtzgleichung hergeleitet, die gemäß dem Produktansatz (2.16) folgendermaßen lauten:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = z_\nu(r) Y_\nu^m(\theta, \phi). \quad (2.58)$$

Diese Lösungen können verwendet werden, um die Lösungen für den vektoriellen Fall auszudrücken. Die vektorielle homogene Helmholtzgleichung für das elektrische Feld lautet

$$\Delta \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = 0. \quad (2.59)$$

Es lässt sich zeigen [12, 13], dass die vektoriellen Multipolfunktionen \vec{M} und \vec{N} ein geeignetes linear unabhängiges Lösungspaar für diese Gleichung darstellen. Sie lassen sich mithilfe von Fundamentallösungen Φ für den korrespondierenden skalaren Fall

2.2. LÖSUNG DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN KUGELKOORDINATEN

ausdrücken:

$$\vec{M}(\vec{r}) = \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \right) \Phi(\vec{r}), \quad (2.60)$$

$$\vec{N}(\vec{r}) = \left(\frac{1}{\kappa} \vec{\nabla} \times \left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \right) \right) \Phi(\vec{r}). \quad (2.61)$$

In Kugelkoordinaten lässt sich der Differentialausdruck $\vec{r} \times \vec{\nabla}$ angeben mit

$$\left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \right) = \vec{e}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \vec{e}_\theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (2.62)$$

Damit lauten die vektoriellen Multipolfunktionen in Kugelkoordinaten

$$\vec{M}_{\nu,m}(r, \theta, \phi) = z_\nu(\kappa r) \vec{m}_{\nu,m}(\theta, \phi) \quad (2.63)$$

$$\vec{N}_{\nu,m}(r, \theta, \phi) = -\frac{z_\nu(\kappa r)}{\kappa r} \nu(\nu+1) Y_{\nu,m}(\theta, \phi) \vec{e}_r - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_\nu(\kappa r)] \vec{n}_{\nu,m}(\theta, \phi). \quad (2.64)$$

wobei die bezüglich r transversalen Vektoranteile mit den Funktionen \vec{m} und \vec{n} ausgedrückt werden:

$$\vec{m}_{\nu,m}(\theta, \phi) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\nu,m}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \vec{e}_\theta + \frac{\partial Y_{\nu,m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{e}_\phi \quad (2.65)$$

$$\vec{n}_{\nu,m}(\theta, \phi) = \frac{\partial Y_{\nu,m}(\theta, \phi)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\nu,m}(\theta, \phi)}{\partial \phi} \vec{e}_\phi. \quad (2.66)$$

Im Folgenden wird durch einen oberen Index angegeben, ob die sphärischen Zylinderfunktionen, die in den vektoriellen Multipolfunktionen vorkommen, durch sphärische Besselfunktionen (*I*) oder durch sphärische Hankelfunktionen zweiter Art (*II*) repräsentiert werden, also

$$\vec{M}_{\nu,m}^{(I)}(r, \theta, \phi) = j_\nu(\kappa r) \vec{m}_{\nu,m}(\theta, \phi) \quad (2.67)$$

$$\vec{N}_{\nu,m}^{(I)}(r, \theta, \phi) = -\frac{j_\nu(\kappa r)}{\kappa r} \nu(\nu+1) Y_{\nu,m}(\theta, \phi) \vec{e}_r - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r j_\nu(\kappa r)] \vec{n}_{\nu,m}(\theta, \phi) \quad (2.68)$$

$$\vec{M}_{\nu,m}^{(II)}(r, \theta, \phi) = h_\nu^{(2)}(\kappa r) \vec{m}_{\nu,m}(\theta, \phi) \quad (2.69)$$

$$\vec{N}_{\nu,m}^{(II)}(r, \theta, \phi) = -\frac{h_\nu^{(2)}(\kappa r)}{\kappa r} \nu(\nu+1) Y_{\nu,m}(\theta, \phi) \vec{e}_r - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r h_\nu^{(2)}(\kappa r)] \vec{n}_{\nu,m}(\theta, \phi). \quad (2.70)$$

2.3 Die Greensche Funktion

Die Lösung der gewöhnlichen, inhomogenen Differentialgleichung (2.12) soll mithilfe einer Greenschen Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ geschehen. Das bedeutet, es wird zunächst die Lösung zu der gleichen Differentialgleichung, aber mit der Inhomogenität $-\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ gesucht:

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') + \kappa^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.71)$$

Die Lösung des ursprünglichen Problems kann dann durch Multiplikation der Greenschen Funktion mit der Inhomogenität der Differentialgleichung (2.12) und anschließender Integration über den Definitionsbereich ermittelt werden:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon} \iiint_V G(\vec{r}, \vec{r}') \varrho(\vec{r}') dv'. \quad (2.72)$$

Da die Inhomogenität der vorliegenden Differentialgleichung die Quelle der auftretenden Felder beschreibt, kann die Greensche Funktion bei systemtheoretischer Betrachtung auch als Impulsantwort der Lösung verstanden werden. Für den Freiraum lautet sie in geschlossener Form [1, p. 287]

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-j\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.73)$$

Im Allgemeinen kann die Greensche Funktion mithilfe eines Fundamentalsystems aus Lösungen für die zugeordnete homogene Differentialgleichung

$$\Delta\Phi + \kappa^2\Phi = 0 \quad (2.74)$$

dargestellt werden [14]. Über bereichsweise, vollständige Ansätze aus Fundamentallösungen, die in Kapitel 2.2 hergeleitet w, und unter Berücksichtigung der Symmetrie der Greenschen Funktion bezüglich einer Vertauschung von r und r' , gelangt man zu der Bilinearentwicklung der Greenschen Funktion:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{cases} -j\kappa \sum_{\nu, m} j_\nu(\kappa r) h_\nu^{(2)}(\kappa r') Y_\nu^m(\theta, \phi) Y_\nu^{m*}(\theta', \phi'), & \text{falls } (r < r'), \\ -j\kappa \sum_{\nu, m} j_\nu(\kappa r') h_\nu^{(2)}(\kappa r) Y_\nu^m(\theta', \phi') Y_\nu^{m*}(\theta, \phi), & \text{falls } (r > r'). \end{cases} \quad (2.75)$$

Diese Darstellung berücksichtigt die Überlegung aus Kapitel 2.2.1, dass für kleine Werte von r , insbesondere für $r = 0$, sphärische Besselfunktionen verwendet

2.4. DIE GREENSCHE DYADE

werden und für große r sphärische Hankelfunktionen. Gleichzeitig wird damit die Symmetrie der Greenschen Funktion gegenüber einer Vertauschung von \vec{r} und \vec{r}' erfüllt. Zusätzlich ist diese Lösung mit dem Vorfaktor $j\kappa$ derart normiert, dass die Normierungsrelation der Diracfunktion erfüllt ist. Die Summe ist gültig für jeden vollständigen Satz an Fundamentallösungen, also für jeden Eigenwertsatz, der gemäß Kapitel 2.2.2.2 für den Außenraum eines Kreiskegels bestimmt wurde. Für das Feld an einem schallweichen Kegel werden Dirichlet-Eigenwertpaare ν_d, m benötigt, für das Feld an einem schallharten Kegel Neumann-Eigenwertpaare ν_n, m . Auch der Fall des Freiraums ist mit ganzzahligen Eigenwerten n, m möglich, wobei man zweckmäßigerweise eine Doppelsumme $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n$ schreibt.

In der Praxis muss die Summe bis zu einem maximalen Eigenwert ν_{max} beschränkt sein. Die Genauigkeit der Entwicklung hängt im Allgemeinen von diesem Maximalwert ab und muss im Einzelfall untersucht werden.

Für eine einzige Punktquelle in einem Gebiet mit homogener Permittivität ε lässt sich die Gleichung (2.72) aufgrund der Ausblendeigenschaft der Diracfunktion leicht auswerten. Das elektrische Potential am Ort \vec{r} bei Anwesenheit einer Punktladung Q am Ort \vec{r}' lässt sich damit angeben als

$$\Phi(\vec{r}) = \begin{cases} -j \frac{\kappa Q}{\varepsilon} \sum_{\nu, m} j_{\nu}(\kappa r) h_{\nu}^{(2)}(\kappa r') Y_{\nu}^m(\theta, \phi) Y_{\nu}^{m*}(\theta', \phi'), & \text{falls } (r < r'), \\ -j \frac{\kappa Q}{\varepsilon} \sum_{\nu, m} j_{\nu}(\kappa r') h_{\nu}^{(2)}(\kappa r) Y_{\nu}^m(\theta', \phi') Y_{\nu}^{m*}(\theta, \phi), & \text{falls } (r > r'). \end{cases} \quad (2.76)$$

Diese Entwicklung unterscheidet sich nur durch einen konstanten Faktor Q/ε von (2.75), sodass bei Auswertung des skalaren Problems meistens eine Betrachtung der Greenschen Funktion ausreichend ist.

2.4 Die Greensche Dyade

Auf ähnliche Weise kann mit den vektoriellen, inhomogenen Differentialgleichungen (2.8) und (2.9) verfahren werden, wobei hier ein System aus drei gekoppelten Differentialgleichungen für die Vektorkomponenten vorliegt. Das Problem kann zunächst übersichtlicher gestaltet werden, wenn eine Feldanregung (Inhomogenität) angenommen wird, die alleinig in eine der drei Koordinatenrichtungen ausgeprägt ist – hier

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

sei allgemein ein Koordinatensystem mit den Koordinaten ζ, ξ, ς angenommen, in dem das Problem lösbar ist. Für diesen Fall kann für jede der drei Vektorkomponenten eine Greensche Funktion wie im vorangehenden Kapitel 2.3 formuliert werden. Für eine Inhomogenität in $i \in \{\zeta, \xi, \varsigma\}$ ergibt sich somit die Differentialgleichung

$$\Delta \begin{bmatrix} G_{\zeta}^{(i)}(\vec{r}, \vec{r}') \\ G_{\xi}^{(i)}(\vec{r}, \vec{r}') \\ G_{\varsigma}^{(i)}(\vec{r}, \vec{r}') \end{bmatrix} + \kappa^2 \begin{bmatrix} G_{\zeta}^{(i)}(\vec{r}, \vec{r}') \\ G_{\xi}^{(i)}(\vec{r}, \vec{r}') \\ G_{\varsigma}^{(i)}(\vec{r}, \vec{r}') \end{bmatrix} = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{e}_i. \quad (2.77)$$

Wird diese für Inhomogenitäten in allen drei Koordinatenrichtungen ausgewertet, ergeben sich also 9 verschiedene skalare Greensche Funktionen $G_i^{(j)}$ mit $i, j \in \{\zeta, \xi, \varsigma\}$. Diese werden zu einem Tensor $\tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}')$ zusammengefasst, der als Greensche Dyade oder Greensche dyadische Funktion bekannt ist. Sie genügt der Differentialgleichung, die sich durch Kombination der drei möglichen Gleichungen von (2.77) ergibt

$$\Delta \tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') + \kappa^2 \tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \tilde{I} \quad (2.78)$$

mit \tilde{I} als Einheitsmatrix. Ähnlich wie im skalaren Fall, ergibt sich die Lösung des ursprünglichen Problems durch Multiplikation der Greenschen Dyade mit der Inhomogenität des Ausgangsproblems und anschließender Integration über den Raum. Für das elektrische Feld lautet die Lösung damit

$$\vec{E}(\vec{r}) = j\omega\mu_0 \iiint_V \tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') \cdot \vec{J}_e^{imp}(\vec{r}') dv'. \quad (2.79)$$

Für den freien Raum lautet die Greensche Dyade in geschlossener Form [15]

$$\tilde{\Gamma} = \left(\tilde{I} + \frac{1}{\kappa^2} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \right) \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(-j\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.80)$$

Auch die Greensche Dyade lässt sich – wie die Greensche Funktion – aus Fundamentallösungen zur zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$\Delta \vec{F} + \kappa^2 \vec{F} = 0 \quad (2.81)$$

darstellen. Als geeignete Lösungen wurden in Kapitel 2.2.3 die vektoriellen Multipolfunktionen vorgestellt. Genau wie für die skalare Greensche Funktion lassen sich diese Funktionen unter Berücksichtigung, dass auch die Greensche Dyade symmetrisch bezüglich einer Vertauschung von \vec{r} und \vec{r}' sein muss, zu einer bereichsweise

2.4. DIE GREENSCHE DYADE

gültigen Entwicklung kombinieren. Mithilfe der Orthogonalitätsrelationen der transversalen vektoriiellen Multipolfunktionen [13]

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi) \cdot \vec{m}_{n',m'}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = n(n+1) \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.82)$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{n}_{n,m}(\theta, \phi) \cdot \vec{n}_{n',m'}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = n(n+1) \delta_{nn'} \delta_{mm'} \quad (2.83)$$

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{m}_{n,m}(\theta, \phi) \cdot \vec{n}_{n',m'}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = 0 \quad (2.84)$$

kann anschließend so normiert werden, dass die Normierungsrelation der Diracfunktion in (2.78) erfüllt ist. Die Greensche Dyade des freien Raumes lässt sich somit für $\vec{r} \neq \vec{r}'$ angeben mit

$$\tilde{\Gamma}(\vec{r}, \vec{r}') = j\kappa_0 \left(\sum_{n,m} \frac{\vec{N}_{n,m}^{II(I^*)}(\vec{r}) \vec{N}_{n,m}^{I^*(II)}(\vec{r}')}{n(n+1)} + \sum_{n,m} \frac{\vec{M}_{n,m}^{II(I^*)}(\vec{r}) \vec{M}_{n,m}^{I^*(II)}(\vec{r}')}{n(n+1)} \right), \quad (2.85)$$

$r > r', (r < r').$

Die Multiplikationen zwischen den \vec{M} beziehungsweise \vec{N} in dieser Formel sind dyadische Produkte, was rechnerisch als Matrixmultiplikation einer 3x1 Matrix mit einer 1x3 Matrix aufgefasst werden kann. Auf diese Weise ist das Ergebnis eine 3x3 Matrix, wie es für die dyadische Funktion Voraussetzung ist. Allerdings ist die direkte Auswertung dieser Produkte zur Bestimmung des elektrischen und magnetischen Feldes nicht notwendig, wie im kommenden Kapitel 2.5 gezeigt wird. Die Indizes (I) und (II) sind wie auch bei der skalaren Greenschen Funktion so gewählt, dass für kleine Werte von r sphärische Besselfunktionen und für große Werte sphärische Hankelfunktionen zweiter Art zum Einsatz kommen.

Für die Berechnung im Außenraum eines ideal leitenden Kegels muss die Greensche Dyade denselben Randbedingungen unterworfen werden, wie die gesuchte Lösung. Für das elektrische Feld bedeutet dies, dass die tangentialen Feldanteile auf der Kegeloberfläche gleich null sein müssen, was in Kugelkoordinaten der ϕ - und der r -Komponente entspricht. Bei der Greenschen Dyade kann dies durch kombinierte Verwendung von Dirichlet- und Neumann-Eigenwerten realisiert werden:

$$\tilde{\Gamma}_E(\vec{r}, \vec{r}') = j\kappa_0 \left(\sum_{\nu_d, m} \frac{\vec{N}_{\nu_d, m}^{II(I^*)}(\vec{r}) \vec{N}_{\nu_d, m}^{I^*(II)}(\vec{r}')}{\nu_d(\nu_d + 1)} + \sum_{\nu_n, m} \frac{\vec{M}_{\nu_n, m}^{II(I^*)}(\vec{r}) \vec{M}_{\nu_n, m}^{I^*(II)}(\vec{r}')}{\nu_n(\nu_n + 1)} \right), \quad (2.86)$$

$r > r', (r < r').$

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

Ein Vergleich mit der Definition der vektoriellen Multipolfunktionen \vec{M} und \vec{N} aus Abschnitt 2.2.3 bestätigt, dass sämtliche ϕ - und r -Komponenten für $\theta = \theta_0$ bei dieser Wahl der Eigenwerte verschwinden. Vertauscht man die Rollen von Dirichlet- und Neumann-Eigenwerten in (2.86), verschwindet wiederum die θ -Komponente und somit die Tangentialkomponente auf der Kugeloberfläche. Die Greensche Dyade ist auf diese Weise dafür geeignet, die Randbedingungen für die magnetische Feldstärke zu erfüllen:

$$\tilde{\Gamma}_H(\vec{r}, \vec{r}') = j\kappa_0 \left(\sum_{\nu_n, m} \frac{\vec{N}_{\nu_n, m}^{II(I^*)}(\vec{r}) \vec{N}_{\nu_n, m}^{I^*(II)}(\vec{r}')}{\nu_n(\nu_n + 1)} + \sum_{\nu_d, m} \frac{\vec{M}_{\nu_d, m}^{II(I^*)}(\vec{r}) \vec{M}_{\nu_d, m}^{I^*(II)}(\vec{r}')}{\nu_d(\nu_d + 1)} \right), \quad (2.87)$$

$$r > r', \quad (r < r').$$

2.5 Sphärische Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten

Die vorgestellten Greenschen Dyaden sollen nun verwendet werden, um das elektromagnetische Feld im Lösungsgebiet zu bestimmen. Für die Berechnung der elektrischen Feldstärke im Außenraum eines ideal leitenden Kegels setzen wir die entsprechende Dyade (2.86) in (2.79) ein, wobei die Stromdichte J_e^{imp} der gewünschten Quellanregung entspricht. Es ist zweckmäßig die Anteile, die allein von dem Ort und der Beschaffenheit der Quellanregung abhängen, von jenen zu isolieren, die vom Ortsvektor \vec{r} des untersuchten Aufpunktes abhängen. Auf diese Weise gelangt man zu einer Darstellung, die als sphärische Multipolentwicklung des elektrischen und magnetischen Feldes bekannt ist [16]. Es ergibt sich für den Außenraum eines ideal leitenden Kegels:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\nu_d, m} a_{\nu_d, m}^{II(I)} \vec{N}_{\nu_d, m}^{II(I)}(\vec{r}) + \frac{Z_0}{j} \sum_{\nu_n, m} b_{\nu_n, m}^{II(I)} \vec{M}_{\nu_n, m}^{II(I)}(\vec{r}), \quad (2.88a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{Z_0} \sum_{\nu_d, m} a_{\nu_d, m}^{II(I)} \vec{M}_{\nu_d, m}^{II(I)}(\vec{r}) + \sum_{\nu_n, m} b_{\nu_n, m}^{II(I)} \vec{N}_{\nu_n, m}^{II(I)}(\vec{r}), \quad (2.88b)$$

$$r > r', \quad (r < r').$$

2.5. SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG IN KUGELKOORDINATEN

Die Koeffizienten dieser Entwicklung ergeben sich zu

$$a_{\nu_d, m}^{II(I)} = -\kappa_0^2 Z_0 \frac{(-1)^m}{\nu_d(\nu_d + 1)} \iiint_V \vec{N}_{\nu_d, -m}^{II(I)}(\vec{r}') \cdot \vec{J}_e^{imp}(\vec{r}') dv', \quad (2.89a)$$

$$b_{\nu_n, m}^{II(I)} = -j\kappa_0^2 \frac{(-1)^m}{\nu_n(\nu_n + 1)} \iiint_V \vec{M}_{\nu_n, -m}^{II(I)}(\vec{r}') \cdot \vec{J}_e^{imp}(\vec{r}') dv'. \quad (2.89b)$$

Sie werden Multipolamplituden genannt und enthalten sämtliche Informationen zur Quellenanregung, sind aber unabhängig vom Ortsvektor \vec{r} vom Aufpunkt. Sie müssen folglich bei der Auswertung vieler Aufpunkte für eine bestimmte Quellkonfiguration nur ein einziges Mal bestimmt werden. Diese Darstellung der Multipolamplituden hat den Nachteil, dass sich in einem Bereich von r'_{min} bis r'_{max} , über den sich eine betrachtete Quellverteilung erstreckt, nicht eindeutig bestimmen lassen. Für eine einzige punktweise Anregung

$$\vec{J}_e^{imp} = \vec{c}_e \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.90)$$

mit einem Strommoment \vec{c}_e , was einem Hertzschen Dipol entspricht, vereinfachen sich die Multipolamplituden aufgrund der Ausblendeigenschaft der Diracfunktion zu

$$a_{\nu_d, m}^{II(I)} = -\kappa_0^2 Z_0 \frac{(-1)^m}{\nu_d(\nu_d + 1)} \vec{N}_{\nu_d, -m}^{II(I)}(\vec{r}_d) \cdot \vec{c}_e \quad (2.91a)$$

$$b_{\nu_n, m}^{II(I)} = -j\kappa_0^2 \frac{(-1)^m}{\nu_n(\nu_n + 1)} \vec{M}_{\nu_n, -m}^{II(I)}(\vec{r}_d) \cdot \vec{c}_e. \quad (2.91b)$$

Die Entwicklungen für den Freiraum lassen sich ebenso durch Einsetzen der Dyade (2.85) in (2.79) herleiten:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n, m}^{II(I)} \vec{N}_{n, m}^{II(I)}(\vec{r}) + \frac{Z_0}{j} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n, m}^{II(I)} \vec{M}_{n, m}^{II(I)}(\vec{r}), \quad (2.92)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{Z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{n, m}^{II(I)} \vec{M}_{n, m}^{II(I)}(\vec{r}) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{n, m}^{II(I)} \vec{N}_{n, m}^{II(I)}(\vec{r}), \quad (2.93)$$

$$r > r', \quad (r < r').$$

Das Ergebnis entspricht den Gleichungen für den Außenraum eines Kegels (2.88), nur mit ganzzahligen Eigenwerten. Die Multipolamplituden sind folglich ebenfalls wie (2.89) und (2.91) mit $\nu = n$ definiert.

2.5.1 Fernfelddarstellung

Ist man nicht an Werten in unmittelbarer Nähe zum Ursprung interessiert, sondern an dem Verhalten im Fernfeld, ist es sinnvoll, eine Fernfelddarstellung zu formulieren, indem der Grenzwert für $r \rightarrow \infty$ betrachtet wird. Der r -abhängige Teil der Lösungen für $r > r'$ entspricht den sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art. Ihr Verhalten lässt sich für große Werte von r asymptotisch annähern:

$$h_{\nu}^{(2)}(\kappa r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} j^{(\nu+1)} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r}. \quad (2.94)$$

Wenn dies in die Entwicklungen des elektrischen und magnetischen Feldes eingesetzt wird, kann durch Ausklammern des Kugelwellenterms $\exp(-j\kappa r)/\kappa r$ die Fernfelddarstellung der Felder hergeleitet werden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \right) \left[\sum_{\nu_d, m} -j^{\nu_d} a_{\nu_d, m}^{II} \vec{n}_{\nu_d, m} + \frac{Z_0}{j} \sum_{\nu_n, m} j^{\nu_n+1} b_{\nu_n, m}^{II} \vec{m}_{\nu_n, m} \right] \quad (2.95)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \left(\frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \right) \left[\frac{j}{Z_0} \sum_{\nu_d, m} j^{\nu_d+1} a_{\nu_d, m}^{II} \vec{m}_{\nu_d, m} + \sum_{\nu_n, m} -j^{\nu_n} b_{\nu_n, m}^{II} \vec{n}_{\nu_n, m} \right]. \quad (2.96)$$

2.6 Elliptische Kegelkoordinaten

Das zweite Koordinatensystem, das in dieser Arbeit neben den Kugelkoordinaten behandelt wird, sind die elliptischen Kegelkoordinaten. Dieses Koordinatensystem stellt eine Verallgemeinerung der Kugelkoordinaten dar und seine Koordinatenflächen umfassen zahlreiche Strukturen, wie Kugel, Keil, Sektor, Kreiskegel oder elliptischer Kegel.

Die elliptischen Kegelkoordinaten sollen mit r, ϑ, φ bezeichnet werden. Der Zusammenhang zu den kartesischen Koordinaten lautet

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (2.97a)$$

$$y = r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \sin \varphi \quad (2.97b)$$

$$z = r \cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}. \quad (2.97c)$$

Die Winkelkoordinaten ϑ und φ besitzen denselben Definitionsbereich wie ihr Pendant in Kugelkoordinaten, nämlich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ und $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Die radiale

2.6. ELLIPTISCHE KEGELKOORDINATEN

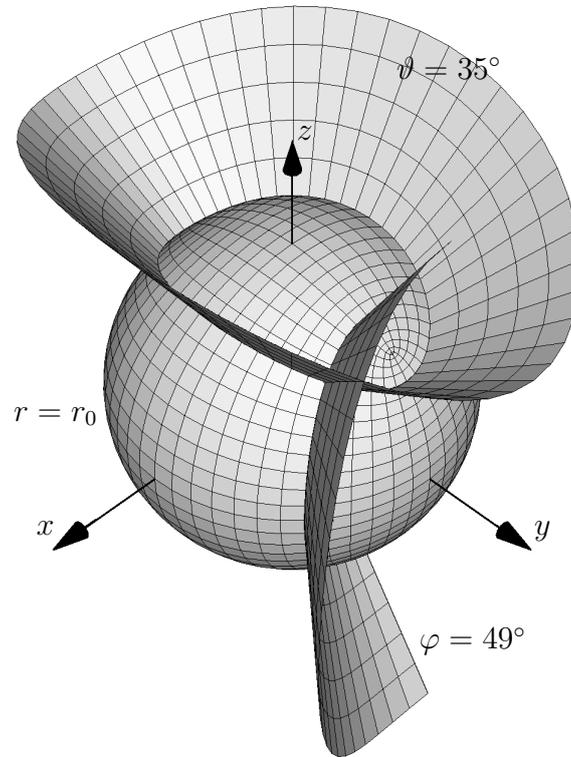


Abbildung 2.5 Drei verschiedene Koordinatenflächen in elliptischen Kegelkoordinaten.

Koordinate r ist mit der radialen Koordinate, wie sie aus den Kugelkoordinaten bekannt ist, identisch und besitzt den Definitionsbereich $0 \leq r$. Die Geometrieparameter k und k' beeinflussen die Elliptizität der Winkelkoordinatenlinien und hängen miteinander über

$$k^2 + k'^2 = 1 \quad (2.98)$$

zusammen. Die Gleichungen (2.97) entsprechen für $k = 1, k' = 0$ dem Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Kugelkoordinaten (2.14). Auf diese Weise ist leicht zu sehen, dass die Kugelkoordinaten einen Sonderfall der elliptischen Kegelkoordinaten darstellen. In Abbildung 2.5 sind verschiedene Koordinatenflächen und -linien dargestellt. Konstante Werte von $\vartheta = \vartheta_0$ beschreiben dabei einen elliptischen Kegel, dessen halbe Außenöffnungswinkel mit

$$\theta_x = \vartheta_0 \quad (2.99a)$$

$$\theta_y = \arccos(k \cos \vartheta_0) \quad (2.99b)$$

angegeben werden können. Ein Sonderfall, der von besonderem Interesse ist, ist die Koordinatenfläche, die sich für $\vartheta_0 = 180^\circ$ ergibt. Sie beschreibt einen Sektor, der in der y, z -Ebene liegt. Der halbe Außenöffnungswinkel in x -Richtung ist stets

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

$\theta_x = 180^\circ$ und in y -Richtung $\theta_y = \arccos(k)$. Für $k^2 = k'^2 = 0.5$ entsteht somit eine Viertelebene symmetrisch zur negativen z -Achse; siehe Abbildung 2.6.

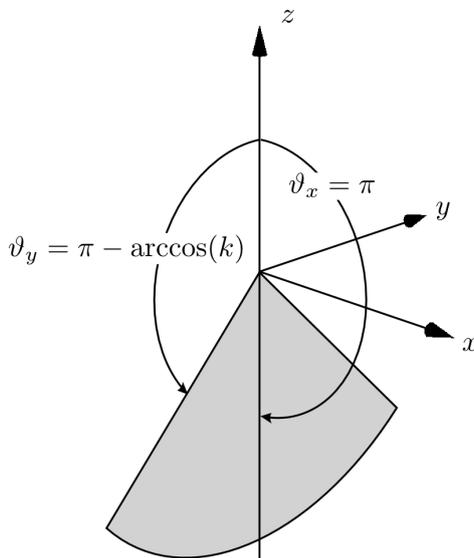


Abbildung 2.6 Die Sektorfläche, die bei $\vartheta_0 = 180^\circ$ entsteht. Für $k^2 = k'^2 = 0.5$ ergibt sich Außenöffnungswinkel ϑ_y von 135° und somit eine Viertelebene.

2.7 Lösungen der homogenen Helmholtzgleichung in elliptischen Kegelkoordinaten

Der Nabla-Operator, der für die Lösung der Helmholtzgleichung benötigt wird, lässt sich in elliptischen Kegelkoordinaten mit

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{rs_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{rs_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.100)$$

angeben. Dabei sind s_ϑ und s_φ die auf r normierten, metrischen Skalierungsfaktoren:

$$s_\vartheta = \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \right| = \sqrt{\frac{k^2 \sin^2 \vartheta + k'^2 \cos^2 \varphi}{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}} \quad (2.101)$$

$$s_\varphi = \frac{1}{r} \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \sqrt{\frac{k^2 \sin^2 \vartheta + k'^2 \cos^2 \varphi}{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (2.102)$$

Anschaulich bedeuten diese Faktoren, um welche Strecke sich ein Ortsvektor auf der Einheitskugel bewegt, wenn die Koordinate ϑ beziehungsweise φ variiert. Der

2.7. LÖSUNGEN DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN ELLIPTISCHEN KEGELKOORDINATEN

Laplace-Operator lautet entsprechend

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \quad (2.103)$$

mit

$$(\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 = \frac{1}{s_\vartheta s_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{s_\varphi}{s_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{s_\vartheta}{s_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]. \quad (2.104)$$

Als erstes wird der Laplace-Operator, so wie er in (2.103) für elliptische Kegelkoordinaten angegeben ist, auf die homogene, skalare Helmholtzgleichung (2.13) angewendet:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi(r, \vartheta, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\vec{r} \times \vec{\nabla})^2 \Phi(r, \vartheta, \varphi) + \kappa^2 \Phi(r, \vartheta, \varphi) = 0. \quad (2.105)$$

Wie zuvor schon in Kugelkoordinaten, wird (2.105) mithilfe desselben Produktansatzes

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = z(r)Y(\vartheta, \varphi) \quad (2.106)$$

und derselben Separationskonstante $\nu(\nu + 1)$ in eine r -abhängige und eine (ϑ, φ) -abhängige Differentialgleichung separiert. Da die radiale Koordinate r in Kugelkoordinaten und in elliptischen Kegelkoordinaten identisch definiert ist, ergibt sich für r auch dieselbe Differentialgleichung, die bereits in Kapitel 2.2.1 behandelt wurde. Die Lösungen heißen sphärische Zylinderfunktionen, wobei insbesondere die sphärischen Besselfunktionen j_ν und sphärische Hankelfunktionen $h_\nu^{(2)}$ für Freiraumlösungen von Interesse sind.

Die (ϑ, φ) -abhängige Differentialgleichung lautet

$$\left(\vec{r} \times \vec{\nabla} \right)^2 Y_\nu(\vartheta, \varphi) = \nu(\nu + 1)Y_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (2.107)$$

und heißt Eigenwertgleichung der Laméschen Produkte. Diese Laméschen Produkte sind das Pendant der Kugelflächenfunktionen in elliptischen Koordinaten und bestehen – wie der Name schon suggeriert – aus dem Produkt von ϑ - und φ -abhängigen Teilfunktionen:

$$Y_\nu(\vartheta, \varphi) = \Theta_\nu(\vartheta)\Phi_\nu(\varphi). \quad (2.108)$$

Dies soll gleichzeitig als Produktansatz für eine Separation von (2.107) mit der Separationskonstante $\tilde{\lambda}$ dienen. Es ergeben sich dadurch die Differentialgleichungen

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

der periodischen Laméschen Funktionen

$$\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\Phi_\nu}{d\varphi} \right) + [\nu(\nu + 1)k'^2 \cos^2 \varphi + \tilde{\lambda}] \Phi_\nu = 0 \quad (2.109)$$

und der nichtperiodischen Laméschen Funktionen

$$\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d\Theta_\nu}{d\vartheta} \right) + [\nu(\nu + 1)k^2 \sin^2 \vartheta - \tilde{\lambda}] \Theta_\nu = 0. \quad (2.110)$$

Durch die Substitution

$$\tilde{\lambda} = \lambda - k'^2 \nu(\nu + 1) \quad (2.111)$$

gelangt man alternativ zu den Differentialgleichungen

$$\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left(\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\Phi_\nu}{d\varphi} \right) + [\lambda - \nu(\nu + 1)k'^2 \sin^2 \varphi] \Phi_\nu = 0 \quad (2.112)$$

und

$$\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d\Theta_\nu}{d\vartheta} \right) + [\nu(\nu + 1)(1 - k^2 \cos^2 \vartheta) - \lambda] \Theta_\nu = 0. \quad (2.113)$$

Diese beiden gekoppelten Differentialgleichungen und die Berechnung ihrer Lösungen werden ausführlich in [17] behandelt. Das Vorgehen soll in den nächsten beiden Kapiteln kurz zusammengefasst werden.

2.7.1 Periodische Lamésche Funktionen

Die periodischen Laméschen Funktionen, die Lösungen der Differentialgleichung (2.112) liefern, lassen sich durch vier verschiedene Typen von Fourierreihen ausdrücken:

$$\Phi_\nu^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i} \cos 2i\varphi \\ \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i} \cos 2i\varphi \end{cases} \quad (2.114)$$

2.7. LÖSUNGEN DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN ELLIPTISCHEN KEGELKOORDINATEN

$$\Phi_{\nu}^{(2)}(\varphi) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i+1} \cos(2i+1)\varphi \\ \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i+1} \cos(2i+1)\varphi \end{cases} \quad (2.115)$$

$$\Phi_{\nu}^{(3)}(\varphi) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+2} \sin(2i+2)\varphi \\ \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} D_{2i+2} \sin(2i+2)\varphi \end{cases} \quad (2.116)$$

$$\Phi_{\nu}^{(4)}(\varphi) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+1} \sin(2i+1)\varphi \\ \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} D_{2i+1} \sin(2i+1)\varphi \end{cases} . \quad (2.117)$$

Für jeden Typ sind zwei mögliche Entwicklungen angegeben, was bei der Berechnung gewisse Vorteile bietet [17]: Die erste Möglichkeit bietet einen direkten Zusammenhang mit den nichtperiodischen Laméschen Funktionen, die im nächsten Absatz behandelt werden; die zweite Möglichkeit vereinfacht das Auffinden von geeigneten Eigenwerten, die für beide Darstellungen identisch sind.

Wenn diese Ansätze in die zugehörige Differentialgleichung eingesetzt werden, ergeben sich 3-Term-Rekursionsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten. Mithilfe dieser Rekursionsgleichungen können Gleichungssysteme zur Bestimmung der Koeffizienten aufgestellt werden. Dabei handelt es sich zunächst um unendliche Gleichungssysteme, da die Folge der Fourierkoeffizienten A_i, B_i, C_i, D_i definitionsgemäß erst einmal unendlich ist. Mit einem beliebig kleinen Fehler können diese allerdings auf eine endliche Anzahl an Koeffizienten begrenzt werden [17]. Es entstehen endliche Gleichungssysteme, die durch Vorgabe des ersten Eigenwertes ν und des Geometrieparameters k' gelöst werden können. Man erhält einen entsprechenden Entwicklungsvektor und dazugehörige zweite Eigenwerte λ . Wenn die gefundenen Eigenwerte λ über ν bei einem festem k aufgetragen werden, kann man sehen, dass die Eigenwertpaare sämtlicher gültigen Lösungen für die periodischen Laméschen Funktionen auf kontinuierlichen Eigenwertkurven liegen.

2.7.2 Nichtperiodische Lamésche Funktionen

Die nichtperiodischen Laméschen Funktionen werden aus Entwicklungen von zugeordneten Legendrefunktionen erzeugt. Auch hier werden 4 Typen unterschieden, die

KAPITEL 2. DIE SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG

wie folgt definiert werden:

$$\Theta_\nu^{(1)}(\vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i} T(2i) P_\nu^{2i}(\cos \vartheta) \quad (2.118)$$

$$\Theta_\nu^{(2)}(\vartheta) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i+1} T(2i+1) P_\nu^{2i+1}(\cos \vartheta) \quad (2.119)$$

$$\Theta_\nu^{(3)}(\vartheta) = \frac{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+2} (2i+2) T(2i+2) P_\nu^{2i+2}(\cos \vartheta) \quad (2.120)$$

$$\Theta_\nu^{(4)}(\vartheta) = \frac{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+1} (2i+1) T(2i+1) P_\nu^{2i+1}(\cos \vartheta) \quad (2.121)$$

Die Faktoren $T(i)$ sind genau so gewählt, dass beim Einsetzen dieser Ansätze in die zugehörige Differentialgleichung (2.113) dieselben 3-Term-Rekursionsformeln für A_i und B_i zustande kommen, wie zuvor bei den periodischen Laméschen Funktionen. Dies kann durch die rekursive Definition

$$\begin{aligned} T(i) &= -(\nu-1)(\nu+i+1)T(i+2), \\ T(0) &= T(1) = 1 \end{aligned} \quad (2.122)$$

gewährleistet werden. Dadurch, dass sich dieselben Gleichungssysteme wie bei den periodischen Laméschen Funktionen ergeben, sind auch dieselben Eigenwertkurven für die nichtperiodischen Laméschen Funktionen gültig. Allerdings werden die gültigen Lösungen eingeschränkt, wenn bestimmte Randbedingungen für $\Theta_\nu(\vartheta)$ bei ϑ_0 erfüllt sein müssen, wie es für Lösungen im Außenraum eines elliptischen Kegels der Fall ist. Für die Dirichlet-Randbedingung gilt

$$\Theta_{\nu_d}^{(l)}(\vartheta_0) = 0 \quad (2.123)$$

und für die Neumann-Randbedingung

$$\left. \frac{d\Theta_{\nu_d}^{(l)}(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (2.124)$$

für alle vier Funktionstypen $l = 1, 2, 3, 4$. Durch eine Nullstellensuche entlang der kontinuierlichen Eigenwertkurven kann man zu diskreten Eigenwerten für Dirichlet-

2.7. LÖSUNGEN DER HOMOGENEN HELMHOLTZGLEICHUNG IN ELLIPTISCHEN KEGELKOORDINATEN

beziehungsweise Neumann-Randbedingungen gelangen. Ein Lamésches Produkt Y_ν muss sich schließlich aus periodischen und nichtperiodischen Laméschen Funktionen vom selben Typ und zu denselben Eigenwerten ν, λ zusammensetzen. Im Allgemeinen werden alle vier Typen für die vollständige Beschreibung eines Feldproblems benötigt; allerdings können im Einzelfall aus Symmetriegründen bestimmte Funktionstypen vernachlässigt werden. Abbildung 2.7 zeigt die kontinuierlichen Eigenwertkurven in einer ν, λ -Ebene für $k^2 = 0.5$. Die diskreten Dirichlet-Eigenwerte, die sich für $\vartheta = 135^\circ$ ergeben, sind entlang der Kurven gekennzeichnet.

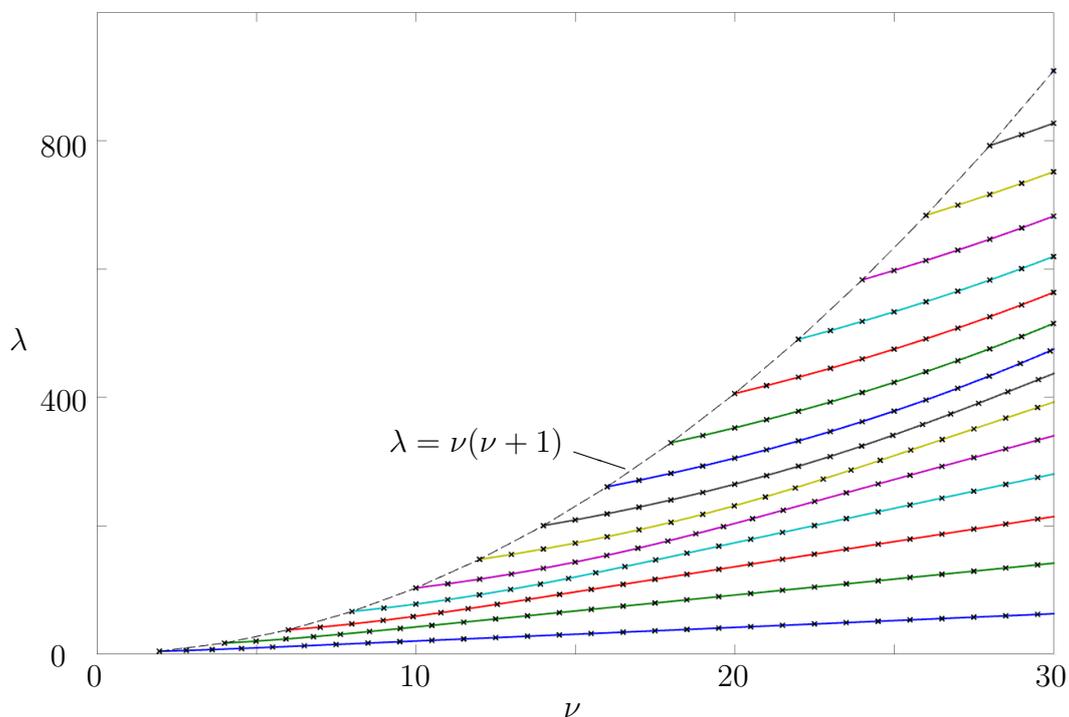


Abbildung 2.7 Dirichlet-Eigenwerte für $\vartheta_0 = 135^\circ$ auf den kontinuierlichen Eigenwertkurven für $k^2 = 0.5$.

2.7.3 Vektorielle Multipolfunktionen

Die vektoriellen Multipolfunktionen lassen sich genau wie in Kugelkoordinaten auch in elliptischen Kegelkoordinaten als linear unabhängiges Lösungspaar der vektoriellen Helmholtzgleichung definieren [18]. Statt der Kugelflächenfunktionen kommen hier Lamésche Produkte zum Einsatz. Die vektoriellen Multipolfunktionen lauten

[16]

$$\vec{M}_\nu(r, \vartheta, \varphi) = z_\nu(\kappa r) \vec{m}_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (2.125a)$$

$$\vec{N}_\nu(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{z_\nu(\kappa r)}{\kappa r} \nu(\nu + 1) Y_\nu(\vartheta, \varphi) \vec{e}_r - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_\nu(\kappa r)] \vec{n}_\nu(\vartheta, \varphi). \quad (2.125b)$$

mit den transversalen Vektorfunktionen

$$\vec{m}_\nu(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \vec{e}_\varphi \quad (2.126a)$$

$$\vec{n}_\nu(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_\nu(\vartheta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (2.126b)$$

Auch hier kann durch einen oberen Index angegeben werden, ob für die sphärischen Zylinderfunktionen in (2.125a) und (2.125b) sphärische Besselfunktionen (I) oder sphärische Hankelfunktionen zweiter Art (II) verwendet werden.

2.8 Sphärische Multipolentwicklung in elliptischen Kegelkoordinaten

Die Herleitung der Gleichungen für die Multipolentwicklung in elliptischen Kegelkoordinaten soll hier nicht im Detail erfolgen [19, 18]. Mit der Definition der vektoriel- len Multipolfunktionen gemäß Abschnitt 2.7.3 als Fundamentallösungen der homo- genen, vektoriellen Helmholtzgleichung lassen sich die Vorgänge, die in den Kapiteln 2.4 und 2.5 zur Herleitung der Greenschen Dyade und der Multipoldarstellung des elektromagnetischen Feldes durchgeführt wurden, ganz analog in elliptischen Kegel- koordinaten nachvollziehen. Bei Verwendung rein reeller Fundamentallösungen kann in der Bilinearentwicklung der Greenschen Dyade (2.86) auf die komplexe Konjuga- tion verzichtet werden. Für den Außenraum eines ideal leitenden, elliptischen Kegels ergibt sich somit für die elektrische und magnetische Feldstärke:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\nu_d} a_{\nu_d}^{II(I)} \vec{N}_{\nu_d}^{II(I)}(\vec{r}) + \frac{Z_0}{j} \sum_{\nu_n} b_{\nu_n}^{II(I)} \vec{M}_{\nu_n}^{II(I)}(\vec{r}), \quad (2.127a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{Z_0} \sum_{\nu_d} a_{\nu_d}^{II(I)} \vec{M}_{\nu_d}^{II(I)}(\vec{r}) + \sum_{\nu_n} b_{\nu_n}^{II(I)} \vec{N}_{\nu_n}^{II(I)}(\vec{r}), \quad (2.127b)$$

$$r > r', \quad (r < r').$$

2.8. SPHÄRISCHE MULTIPOLENTWICKLUNG IN ELLIPTISCHEN KEGELKOORDINATEN

Die Multipolamplituden für eine Punktquelle lauten:

$$a_{\nu_d}^{II(I)} = -\kappa_0^2 Z_0 \frac{\vec{N}_{\nu_d}^{I(II)}(\vec{r}')}{\nu_d(\nu_d + 1)} \cdot \vec{c}_e \quad (2.128a)$$

$$b_{\nu_n}^{II(I)} = -j\kappa_0^2 \frac{\vec{M}_{\nu_n}^{I(II)}(\vec{r}')}{\nu_n(\nu_n + 1)} \cdot \vec{c}_e. \quad (2.128b)$$

Man beachte, dass sich im Gegensatz zu (2.91) durch den Wegfall der komplexen Konjugation kein alternierendes Vorzeichen $(-1)^m$ ergibt.

Ebenso kann auch die Entwicklung der Greenschen Funktion für skalare Probleme analog zu Kugelkoordinaten hergeleitet werden. Statt der komplexen Kugelflächenfunktionen $Y_\nu^m(\theta, \phi)$ kommen hier die reellen Laméprodukte $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ zum Einsatz:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{cases} -j\kappa \sum_{\nu} j_{\nu}(\kappa r) h_{\nu}^{(2)}(\kappa r') Y_{\nu}(\vartheta, \varphi) Y_{\nu}(\vartheta', \varphi'), & \text{falls } (r < r'), \\ -j\kappa \sum_{\nu} j_{\nu}(\kappa r') h_{\nu}^{(2)}(\kappa r) Y_{\nu}(\vartheta', \varphi') Y_{\nu}(\vartheta, \varphi), & \text{falls } (r > r'). \end{cases} \quad (2.129)$$

3 Räumlich begrenzte Feldanregungen

Benutzt man die Multipolentwicklung zur Berechnung von Streufeldern an kanonischen Strukturen, beispielsweise am elliptischen Kegel [20], kommt es bei der Verwendung von ebenen Wellen als Feldanregung zu Konvergenzproblemen und es gelingt bislang nur mithilfe von konvergenzbeschleunigenden Verfahren zu einer Lösung zu kommen (zum Beispiel Reihentransformationen, [21]). Zentrales Problem stellt hierbei die unendlich ausgedehnte, beleuchtete Oberfläche der untersuchten Struktur dar, da es sich hierbei für die Streufeldberechnung um eine unendlich ausgedehnte Quellstruktur handelt. Zudem haben ebene Wellen bei der Multipolentwicklung einen begrenzten Konvergenzradius. Daher rührt die Idee, das anregende ebene Wellenfeld lokal zu begrenzen oder zumindest außerhalb eines bestimmten relevanten Bereiches schnell abfallen zu lassen. Im folgenden werden hierfür zwei Möglichkeiten präsentiert: der Complex-Source Beam und die inhomogene Welle als ein seitlich exponentiell gedämpftes ebenes Wellenfeld.

3.1 Complex-Source Beam

Der Complex-Source Beam (CSB) beschreibt einen fokussierten Strahl und stellt im Gegensatz zum bekannteren Gaußstrahl eine valide Lösung der Helmholtzgleichung dar. Im wesentlichen entsteht ein CSB, wenn für eine punktförmige Quelle ein komplexwertiger Ort \vec{r}_c angenommen wird [22],[23]:

$$\vec{r}' = \vec{r}_c = \vec{r}_r - j\vec{r}_i. \quad (3.1)$$

Der Realteil \vec{r}_r des Ortsvektors entspricht hierbei der Position der Strahltaille, während der Imaginärteil \vec{r}_i die Richtung und den Fokus des Strahls beschreibt

3.1. COMPLEX-SOURCE BEAM

(Abbildung 3.1). Der Betrag von \vec{r}_i entspricht der Fokusslänge und wird im folgenden auch mit b bezeichnet. Das transversale Profil des entstehenden Strahls besitzt

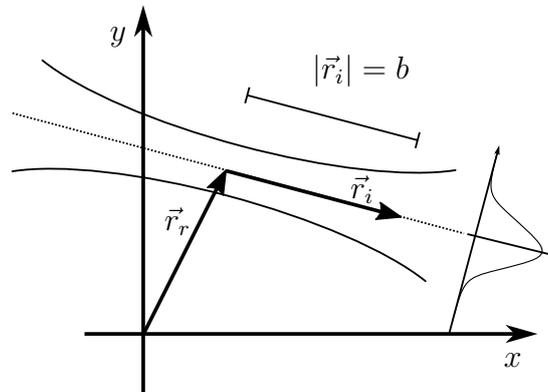


Abbildung 3.1 Ein komplexer Ortsvektor bei einer Punktquelle erzeugt einen CSB: Der Realteil \vec{r}_r entspricht dem Ort der Strahltaille, der Imaginärteil \vec{r}_i beschreibt die Ausbreitungsrichtung.

die Erscheinung einer Gaußverteilung. Er erinnert damit stark an einen Gaußstrahl, dessen transversales Profil exakt durch die Gaußverteilung beschrieben wird. Weiterhin wird nur der auslaufende Teil des Strahls vorgestellt. Im folgenden Abschnitt wird zunächst gezeigt, wie sich der Strahl vollständig als uniformer CSB beschreiben lässt. Anschließend wird die Beziehung zwischen CSB und Gaußstrahl untersucht werden.

3.1.1 Uniformer Complex-Source Beam

Bei Betrachtung der Feldbilder, die sich durch eine Implementierung der Greenschen Funktion des freien Raumes mit einer komplexen Quellkoordinate ergeben, fällt auf, dass einzig der auslaufende beziehungsweise divergierende Teil des Strahls dargestellt werden kann. Bei der Multipolentwicklung in Kugelkoordinaten wird der konvergierende Teil des einfallenden Feldes genau bis zum Radius $\sqrt{r'^2 + b^2}$ dargestellt, was genau der Grenze entspricht, wo zwischen sphärischen Besselfunktionen und sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art in der Darstellung gewechselt wird, vergleiche Abbildung 3.2. Auch wenn die geschlossene Darstellung der Greenschen Funktion direkt ausgewertet wird, ist der konvergierende Teil des Strahles scheinbar an der Strahltaille abgeschnitten. Das Problem liegt hier an der Uneindeutigkeit der

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

Wurzelfunktion: in der Regel wird nur der Hauptast der Wurzelfunktion verwendet, dessen Wertebereich die positiven reellen Zahlen umfasst. Wenn der Ast gewechselt wird, indem ein negatives Vorzeichen für das Ergebnis der Wurzelfunktion angenommen wird, verschwindet wiederum der divergierende Teil des Strahls. Nur der konvergierende Teil wird dargestellt, der scheinbar in der Taille endet. Eine uniforme Darstellung der geschlossenen Form der Greenschen Funktion kann erreicht werden, wenn der Ast der Wurzelfunktion in der Strahltaile gewechselt wird [24]:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + (z - jb)^2} & \text{falls } z > 0 \\ -\sqrt{x^2 + y^2 + (z - jb)^2} & \text{falls } z < 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Es lässt sich andererseits auch argumentieren, dass die Greensche Funktion in ihrer geschlossenen Form mit dem negativen Vorzeichen im Exponenten einzig auslaufende Kugelwellen berücksichtigen kann. Man benötigt also einen zweiten Term, um die einlaufenden Wellen im konvergierenden Teil des Strahls zu berücksichtigen. Für die uniforme Darstellung eines CSB kann man also – ohne auf eine Fallunterscheidung zurückgreifen zu müssen – schreiben:

$$G_{uni}(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\exp(-j\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\exp(+j\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right). \quad (3.3)$$

Um eine uniforme Darstellung eines CSB mit den Multipolentwicklungen zu erlangen, muss man zunächst zurückgreifen auf die in Kapitel 2.2.1 getroffenen Annahmen zu gültigen Lösungen der Differentialgleichungen in r (2.17). Im Allgemeinen wird mit der Ausstrahlungsbedingung (2.21) der Fall von einlaufenden Kugelwellen vernachlässigt; im Falle eines konvergierenden Strahls ergeben sich allerdings sehr wohl einlaufende Kugelwellen. Als gültige Lösungen für (2.17) müssen folglich sphärische Hankelfunktionen erster Art $h_\nu^{(1)}$ für den konvergierenden Teil des Strahls und wie gehabt sphärische Hankelfunktionen zweiter Art $h_\nu^{(2)}$ für den divergierenden Teil des Strahls verwendet werden [25, 26].

Es stellt sich sofort die Frage, ob eine Konstellation mit diesen beiden Lösungen immer noch die Voraussetzung erfüllt, dass das Feld überall – insbesondere im Ursprung, also für $r = 0$ – regulär bleibt, da dies für beide Funktionen im einzelnen nicht erfüllt ist und aus diesem Grund sphärische Besselfunktionen nahe des Ursprungs herangezogen werden. Die Felder für den konvergierenden und den divergierenden Teil des Strahls müssen also separat betrachtet werden, damit die Regularität

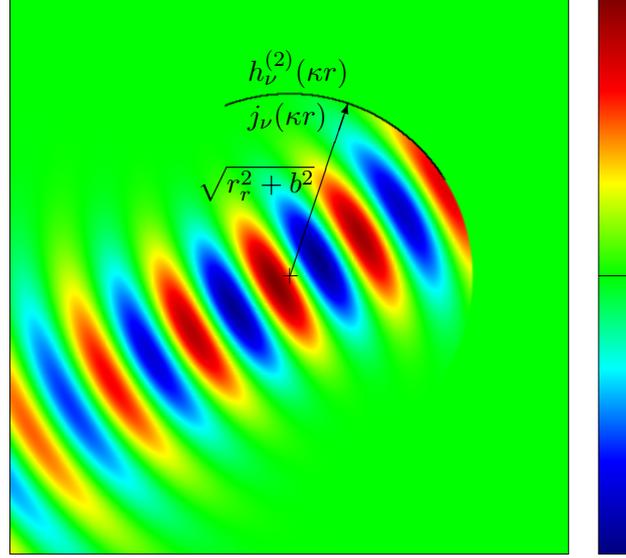


Abbildung 3.2 Bei Verwendung von sphärischen Besselfunktionen j_ν und sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art $h_\nu^{(2)}$ wird der konvergierende Teil des Strahls nur bis $\sqrt{r_r^2 + b^2}$ dargestellt.

für $r = 0$ für beide Teile jeweils gewährleistet bleibt. Um dies zu untersuchen, betrachten wir die Multipoldarstellung der skalaren Greenschen Funktion des freien Raumes (2.75) jeweils für die beiden nachstehenden Fälle

$$G_{div}(\vec{r}, \vec{r}') = -j\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} j_n(\kappa r_{<}) h_n^{(2)}(\kappa r_{>}) Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi') \quad (3.4)$$

$$G_{konv}(\vec{r}, \vec{r}') = -j\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} j_n(\kappa r_{<}) h_n^{(1)}(\kappa r_{>}) Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi'), \quad (3.5)$$

wobei hier die verkürzenden Schreibweisen

$$\begin{aligned} r_{>} &= \max(r, r') \\ r_{<} &= \min(r, r') \end{aligned} \quad (3.6)$$

zum Einsatz kommen. Die Addition dieser beiden Darstellungen ergibt

$$\begin{aligned} G_{uni}(\vec{r}, \vec{r}') &= G_{div}(\vec{r}, \vec{r}') + G_{konv}(\vec{r}, \vec{r}') \\ &= -j\kappa \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} j_n(\kappa r) j_n(\kappa r') Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi'), \end{aligned} \quad (3.7)$$

womit wir eine Entwicklung erhalten, die ohne sphärische Hankelfunktionen auskommt, da sich die sphärischen Neumannfunktionen, die den Imaginärteil der Han-

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

kelfunktionen mit jeweils unterschiedlichem Vorzeichen darstellen, gegenseitig aufheben [24, 27]. Die Formulierung nach (3.7) ist außerdem symmetrisch bezüglich r, r' , ohne dass eine Fallunterscheidung notwendig ist. Mithilfe von

$$P_n(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^{+n} Y_n^m(\theta, \phi) Y_n^{m*}(\theta', \phi'), \quad (3.8)$$

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}, \quad (3.9)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (3.10)$$

und den Gegenbauer-Additionstheoremen für sphärische Zylinderfunktionen

$$\frac{\sin(\kappa R)}{\kappa R} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(\kappa r) j_n(\kappa r') P_n(\cos \gamma), \quad (3.11)$$

$$-\frac{\cos(\kappa R)}{\kappa R} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) j_n(\kappa r) y_n(\kappa r') P_n(\cos \gamma), \quad (3.12)$$

lässt sich (3.7) wieder auf die bereits gefundene Darstellung (3.3) für einen uniformen CSB zurückführen.

3.1.2 Der Gaußstrahl als Näherung des CSB

Die wohlbekannteste strahlförmige Anregung ist der Gaußstrahl, der mithilfe folgender Formel beschrieben werden kann:

$$u(\rho, z) = u_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{w(z)^2}\right) \exp\left(-\frac{j\kappa\rho^2}{2R(z)}\right) \exp\left(-j\kappa z + j \arctan\left(\frac{z}{b}\right)\right). \quad (3.13)$$

Hierbei sei z die Ortsvariable entlang der Strahlachse mit der Strahltaile bei $z = 0$, ρ sei die Ortsvariable transversal zur Strahlachse. Anhand dieser Formel können mit u sowohl der Phasor eines skalaren Feldes, wie auch die Phasoren des elektrischen oder magnetischen Feldes in der jeweiligen Polarisationsrichtung beschrieben werden. Die maximale Amplitude des Strahls ist in der Strahltaile und beträgt u_0 . Die Rayleighlänge oder auch Fokusslänge b ist ein Maß für die Fokussierung des Strahls. Sie entspricht der Distanz zur Strahltaile, bei der sich der Strahlradius gegenüber der Taile um den Faktor $\sqrt{2}$ vergrößert hat, beziehungsweise bei der sich der Strahlquerschnitt verdoppelt hat. Der Strahlradius, der auf den $\frac{1}{e}$ -ten Anteil

3.1. COMPLEX-SOURCE BEAM

zum Maximum bezogen ist, wird mit w bezeichnet und berechnet sich mit

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}, \quad (3.14)$$

wobei w_0 der Strahlradius in der Taille ist, der direkt von der Rayleighlänge und der Wellenzahl κ abhängt:

$$w_0 = \sqrt{2 \frac{b}{\kappa}}. \quad (3.15)$$

Das Verhältnis aus dem Strahlradius an der Stelle z zum Strahlradius in der Taille beschreibt das longitudinale Profil des Strahls. Die erste Exponentialfunktion in (3.13) beschreibt das namensgebende transversale Profil – es entspricht nämlich einer Gaußverteilung. Die zweite Exponentialfunktion beschreibt die Krümmung der Wellenfronten, die mit dem Krümmungsradius

$$R(z) = 2z + \frac{b^2}{z} \quad (3.16)$$

angegeben wird. Der letzte Term beschreibt schließlich die Ausbreitung einer Welle in z -Richtung. Der Phasenversatz $\arctan\left(\frac{z}{b}\right)$ wird als Gouy-Phase bezeichnet. Während der Gaußstrahl nahe der Strahltaile am stärksten fokussiert ist und hier annähernd ebene Wellenfronten ausprägt, divergiert er jenseits der Rayleighlänge immer stärker – und zwar innerhalb des Divergenzwinkels

$$\theta_{div} = \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{b\kappa}}\right). \quad (3.17)$$

Die Beschreibung nach Gleichung (3.13) stellt allerdings nur eine *Näherung* des Feldbildes eines fokussierten Strahls im Freiraum dar. Der Gaußsche Strahl ist keine Lösung der Helmholtzgleichung und kann somit auch nicht als Anregung für die exakte Lösung eines komplexeren Problems, wie der Streuung an kanonischen Strukturen, herangezogen werden. Allerdings können alle genannten Formeln und Parameter des Gaußstrahls genutzt werden, um das Verhalten eines Complex-Source Beams in guter Näherung zu charakterisieren.

Um die Ähnlichkeit zwischen CSB und Gaußstrahl zu demonstrieren, wird ein komplexer Vektor

$$\vec{r}' = -b\vec{e}_z \quad (3.18)$$

in die Greensche Funktion des freien Raumes als Ort für die erzeugende Punktquelle eingesetzt. Dieser komplexe Ortsvektor bedeutet gemäß (3.1), dass der resultierende

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

Strahl entlang der z -Achse propagiert und seine Taille im Koordinatenursprung hat. In der Greenschen Funktion muss der Term $|\vec{r} - \vec{r}'|$ ausgewertet werden. Für die Erzeugung eines CSB muss dieser Term als komplexer Abstand mit

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (3.19)$$

berechnet werden. Es sei erwähnt, dass (3.19) mit komplexwertigen x' , y' , z' nicht der euklidischen Norm eines komplexen Vektors entspricht:

$$|\vec{v}_c|_{euklid} = \sqrt{|v_x|^2 + |v_y|^2 + |v_z|^2}. \quad (3.20)$$

Diese berücksichtigt die Betragsquadrate der einzelnen komplexen Komponenten und erzielt somit immer ein reelles Ergebnis. Mit der euklidischen Norm kann kein CSB erzeugt werden.

Im folgenden soll der Ausdruck für $|\vec{r} - \vec{r}'|$ durch eine Taylorreihenentwicklung vereinfacht werden. Wählt man als Entwicklungsfunktion

$$f(\rho) = \sqrt{\rho^2 + (z + jb)^2} \quad (3.21)$$

mit $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und als Entwicklungspunkt $\rho = 0$, so gilt für die Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\rho) \approx f(0) + f'(0)\rho = (z + jb) + \frac{\rho^2}{2(z + jb)}. \quad (3.22)$$

Für den Betrag ergibt sich also die Näherung

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho^2 + (z + jb)^2} \approx \left((z + jb) + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{(z + jb)} \right). \quad (3.23)$$

Durch Einsetzen von (3.23) in die Greensche Funktion des freien Raumes und anschließendes Umformen ergibt sich

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &\approx \frac{1}{4\pi(z + jb)} \exp\left(-j\kappa(z + jb) - \frac{j\kappa\rho^2}{2(z + jb)}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(\kappa b)}{jb} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}} \exp\left(j \arctan\left(\frac{z}{b}\right)\right) \\ &\quad \exp(-j\kappa z) \exp\left(-\frac{j\kappa\rho^2}{2(z + \frac{b^2}{z})}\right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\frac{b}{\kappa}(1 + \frac{z^2}{b^2})}\right). \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.1. COMPLEX-SOURCE BEAM

Dies entspricht genau der Formel für einen Gaußschen Strahl mit der Rayleighlänge b , eingeführt mit (3.13), bis auf einen konstanten Vorfaktor. Mit der in (3.23) getroffenen Näherung stellt der Gaußsche Strahl somit eine *paraxiale Näherung* der eigentlichen Lösung dar. Das heißt, dass der Gaußsche Strahl entlang der Strahlachse präzise Werte liefert, wie auch in den Abbildungen 3.3c und 3.3d nachvollzogen werden kann. Somit kann insbesondere das longitudinale Profil eines uniformen CSB entlang der Strahlachse exakt mit

$$\left| \frac{E_{CSB}(z)}{E_0} \right|_{\rho=0} = \frac{w_0}{w(z)} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}} \quad (3.25)$$

angegeben werden. Weiterhin lässt sich Abbildung 3.3c entnehmen, dass der relative Fehler des Gaußstrahls abseits der Strahlachse rapide zunimmt und Abweichungen von weit über 100% wenige Wellenlängen in ρ -Richtung erreicht. Allerdings ist der Betrag des Feldes in diesen Bereichen ohnehin sehr klein, wie in den Abbildungen 3.3a und 3.3b, die den Betrag des Phasors von CSB und Strahltaille zeigen, ersichtlich wird. Dieser Umstand wird im absoluten Fehler in Abbildung 3.3d berücksichtigt und es ist zu sehen, dass die maximale Abweichung bei etwa 0.01 liegt. Zuletzt ist in Abbildung 3.3e die Phasendifferenz zwischen CSB und Gaußstrahl dargestellt. Auch hier lässt sich beobachten, dass die Abweichungen nahe der Strahlachse minimal sind. Erst in Bereichen, wo die Amplitude der Felder ohnehin kleiner als 0.01 (1% vom Maximum in der Strahltaille) wird, kommt es zu stärkeren Phasendifferenzen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Complex-Source Beam, der eine exakte Lösung für einen fokussierten Strahl darstellt, durch einen Gaußstrahl nur angenähert werden kann. Diese Näherung ist allerdings in den relevanten Bereichen des Strahls sehr genau und der relative Fehler nimmt erst in Bereichen stark zu, wo die Feldamplituden sehr klein gegenüber der Strahlachse wird. Der absolute Fehler übersteigt somit nirgendwo 1%. Nichtsdestoweniger ist der Gaußstrahl als Anregung für komplexere Problemstellungen ungeeignet, da er im Gegensatz zum CSB keine Lösung der Helmholtzgleichung darstellt.

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

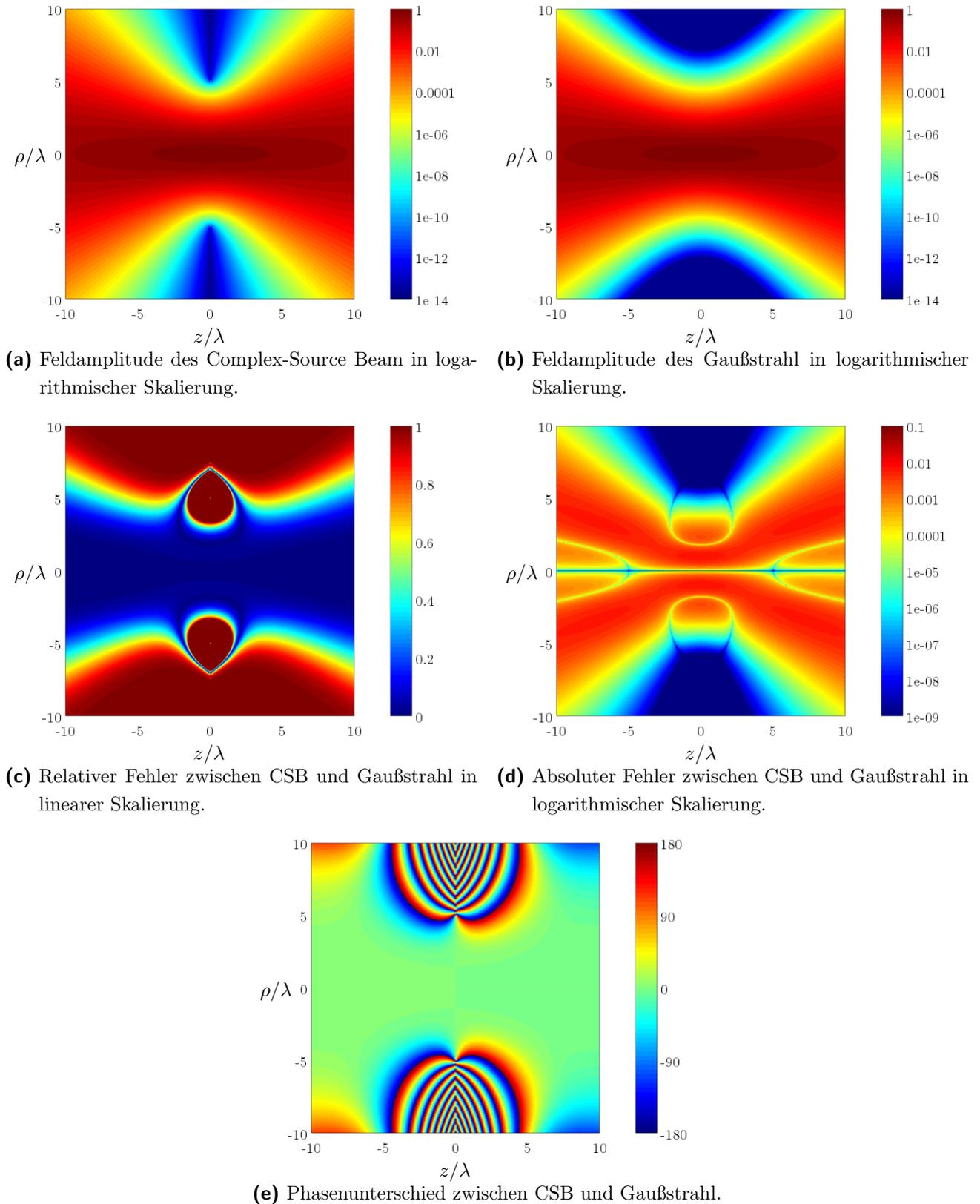


Abbildung 3.3 Uniformer Complex-Source Beam und Gaußstrahl im Vergleich. Die Aufnahmen sind in einer Ebene mit der jeweiligen Strahlachse, wobei die Strahlachse der z -Achse entspricht. Die Fokusslänge ist in allen Beispielen $b = 5\lambda$, die Taille befindet sich im Koordinatenursprung.

3.1.3 Gouy-Phase

Vergleicht man den Complex-Source Beam mit einer ebenen Welle, so fällt auf, dass die Wellenfronten, während sie im Ursprung noch direkt übereinander liegen, außerhalb der Rayleighzone immer weiter auseinander laufen. Natürlich spielt hierbei der Krümmungsradius der Wellenfronten eine Rolle, aber auch direkt auf der Strahlachse kommt es überraschenderweise zu einer Abweichung, die auf maximal $\pm\pi/2$ im Fernfeld ansteigt und einen sigmoidalen Verlauf aufweist (siehe Abbildung 3.4). Dieser Phasenunterschied lässt sich zumindest auf der Strahlachse exakt bestimmen, indem die Formel für den CSB für $x = y = 0$, beziehungsweise $\rho = 0$ ausgewertet wird. Für genau diesen Fall kann die paraxiale Näherung (3.24) herangezogen werden. Die Phasendifferenz zu einer ebenen Welle mit $\exp(-j\kappa z)$ kann direkt abgelesen werden als

$$\phi_{Gouy} = \arg(j(z - jb)) = \arctan\left(\frac{z}{b}\right) \quad (3.26)$$

und ist als Gouy-Phasenverschiebung – oder auch nur Gouy-Phase – bekannt. Diese hat zur Folge, dass die Wellenlänge nahe der Strahltaile leicht größer ist und die Phasenfronten sich somit durch den Fokus eines Strahls mit einer höheren Geschwindigkeit bewegen. Dieses Phänomen wurde erstmals 1890 von Louis Georges Gouy experimentell beobachtet.

In dieser Arbeit wird der CSB als örtlich beschränktes, ebenes Wellenfeld verwendet, um auf die Streufelder an bestimmten kanonischen Strukturen schließen zu können. Wenn man diese Felder zur Gewinnung von Beugungskoeffizienten für ebene Wellen verwenden möchte, muss die Gouy-Phasenverschiebung berücksichtigt werden.

3.1.4 Normierung

Wie in der paraxialen Näherung (3.24) zu sehen ist, entsteht ein Vorfaktor, der von b und κ abhängt und der dazu neigt, sehr große numerische Werte anzunehmen. Diese Formel gilt für einen speziellen CSB, es soll deswegen nochmal die Greensche Funktion für einen allgemeinen CSB an der Strahltaile ausgewertet werden. Der

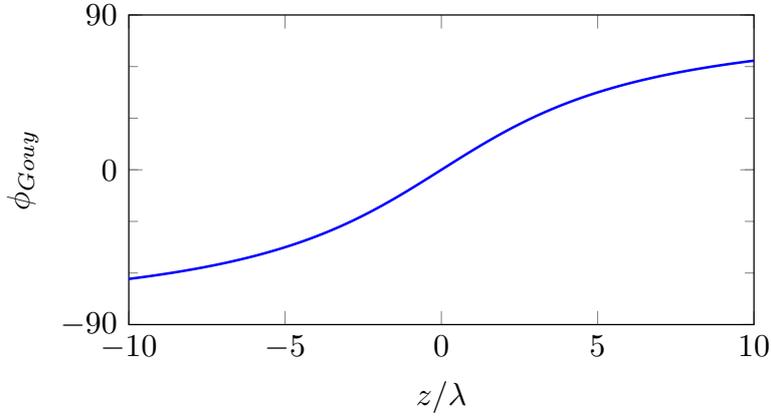


Abbildung 3.4 Die Phasendifferenz zwischen einem CSB und einer ebenen Welle entlang der z -Achse. Diese entspricht der Gouy-Phase, die allgemein bei fokussierten Strahlen auftritt.

Ortsvektor \vec{r} muss dafür dem Realteil des komplexen \vec{r}' entsprechen, somit sind

$$\vec{r}' = \vec{r}_r - j\vec{r}_i = (x', y', z') = (x_r - jx_i, y_r - jy_i, z_r - jz_i), \quad (3.27)$$

$$\vec{r} = (x, y, z) = \Re(\vec{r}') = (x_r, y_r, z_r). \quad (3.28)$$

Der komplexe Abstand $|\vec{r} - \vec{r}'|$ zwischen diesen Vektoren lässt sich angeben mit

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(jx_i)^2 + (jy_i)^2 + (jz_i)^2}. \quad (3.29)$$

An dieser Stelle wird deutlich, dass der komplexe Abstand in der Strahltaile ganz unabhängig von der Position der Strahltaile und der Ausbreitungsrichtung immer $j|\vec{r}'_i|$ ergibt. Eingesetzt in die Greensche Funktion ergibt

$$G_0(\Re(\vec{r}'), \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{\kappa b}}{jb}. \quad (3.30)$$

Hinsichtlich des elektrischen Potentials verwenden wir dieses Ergebnis für den Zusammenhang zwischen Potential und Greenscher Funktion (2.72) und erhalten

$$\Phi_0 = \frac{Qe^{\kappa b}}{4\pi\epsilon} \quad (3.31)$$

für den Wert in der Strahltaile. Weiterhin kann G_0 in die geschlossene Form der Greenschen Dyade (2.80) eingesetzt werden und anschließend kann mit dem Zusammenhang (2.79) zwischen elektrischem Feld und Greenscher Dyade das elektrische Feld in der Strahltaile zu

$$\vec{E}_0 = \frac{\kappa Z_0 e^{\kappa b} \vec{c}_e}{4\pi b} \quad (3.32)$$

bestimmt werden. Dies macht zudem ersichtlich, dass das elektrische Feld eines CSB immer in die Richtung des erzeugenden Strommoments \vec{c}_e polarisiert ist. Die Werte (3.31) und (3.32) können schließlich verwendet werden, um beliebige CSB auf einen gewünschten Wert zu normieren.

3.1.5 Ausrichtung des Complex-Source Beam in Kugelkoordinaten

Zunächst sollen zwei Sonderfälle betrachtet werden, die sich dadurch auszeichnen, dass sie sich einfach realisieren lassen: Erstens, dass der CSB von einem beliebigen Punkt im Raum auf den Koordinatenursprung gerichtet ist, und zweitens, dass die Strahltaile ausgehend vom Ursprung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verschoben wird.

Ausrichtung des Strahls auf den Koordinatenursprung

Es wird ein CSB betrachtet, der seine Strahltaile bei den Koordinaten r_r, θ_r, ϕ_r hat. Um ihn von dort auf den Ursprung zeigen zu lassen, muss der imaginäre Vektor \vec{r}_i die Koordinaten $r_i = b, \theta_i = \pi - \theta_r, \phi_i = \phi_r + \pi$ besitzen; siehe Abbildung 3.5. Diese

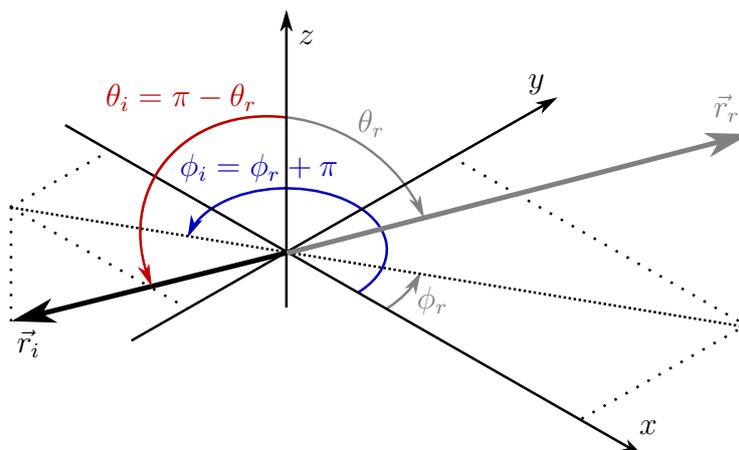


Abbildung 3.5 Wenn \vec{r}_i auf den Ursprung zeigt, also entgegengesetzt zu \vec{r}_r , lassen sich seine Koordinaten in Abhängigkeit von θ_r und ϕ_r darstellen.

Koordinaten werden nun für einen komplexen Ortsvektor gemäß (3.1) verwendet

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

und in kartesischen Koordinaten umgerechnet:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_c &= \vec{r}_r - j\vec{r}_i \\
 &= \begin{pmatrix} r_r \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) \\ r_r \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) \\ r_r \cos(\theta_r) \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} r_i \sin(\pi - \theta_r) \cos(\pi + \phi_r) \\ r_i \sin(\pi - \theta_r) \sin(\pi + \phi_r) \\ r_i \cos(\pi - \theta_r) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} r_r \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) \\ r_r \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) \\ r_r \cos(\theta_r) \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} -r_i \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) \\ -r_i \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) \\ -r_i \cos(\theta_r) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (r_r + jr_i) \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) \\ (r_r + jr_i) \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) \\ (r_r + jr_i) \cos(\theta_r) \end{pmatrix}. \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich also ein Ortsvektor, der allein eine komplexe r -Koordinate hat; die Winkelkoordinaten θ_r und ϕ_r bleiben reell und entsprechen den Winkelkoordinaten der Tailenposition \vec{r}_r . Der Imaginärteil r_i entspricht genau der Fokusslänge b .

Für den Fall, dass $r = 0$ ist, befindet sich die Strahltaile genau im Ursprung und für die Position der Strahltaile sind θ_r und ϕ_r im allgemeinen irrelevant; allerdings beschreiben θ_r und ϕ_r weiterhin die Ausbreitungsrichtung des Strahls und müssen somit für den komplexen Ortsvektor unter allen Umständen definiert werden.

Verschieben des Strahls senkrecht zur Ausbreitungsrichtung

Wir wollen nun den Fall untersuchen, dass zusätzlich der Winkel θ_i komplexe Werte annimmt. Dazu betrachten wir einen CSB, der seine Strahltaile im Ursprung hat, die Fokusslänge \tilde{b} besitzt und dessen Wellenfronten sich aus der Richtung θ_r, ϕ_r kommend in Richtung des Ursprungs ausbreiten. Zusätzlich habe die θ_i -Winkelkoordinate diesmal einen negativen Imaginärteil $\tilde{\theta}$. Der komplexe Ortsvektor lautet also in kartesischen Koordinaten

$$\vec{r}_c = - \begin{pmatrix} j\tilde{b} \sin(\theta_r - j\tilde{\theta}) \cos(\phi_r) \\ j\tilde{b} \sin(\theta_r - j\tilde{\theta}) \sin(\phi_r) \\ j\tilde{b} \cos(\theta_r - j\tilde{\theta}) \end{pmatrix}. \tag{3.34}$$

Der Sinus und Kosinus mit jeweils komplexem Argument lassen sich schreiben als

$$\sin(x + jy) = \sin(x) \cosh(y) + j \cos(x) \sinh(y), \tag{3.35}$$

$$\cos(x + jy) = \cos(x) \cosh(y) - j \sin(x) \sinh(y). \tag{3.36}$$

3.1. COMPLEX-SOURCE BEAM

Damit wird aus dem Ortsvektor

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_c &= - \begin{pmatrix} j\tilde{b} (\sin(\theta_r) \cosh(-\tilde{\theta}) + j \cos(\theta_r) \sinh(-\tilde{\theta})) \cos(\phi_r) \\ j\tilde{b} (\sin(\theta_r) \cosh(-\tilde{\theta}) + j \cos(\theta_r) \sinh(-\tilde{\theta})) \sin(\phi_r) \\ j\tilde{b} (\cos(\theta_r) \cosh(-\tilde{\theta}) - j \sin(\theta_r) \sinh(-\tilde{\theta})) \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} (j\tilde{b} \sin(\theta_r) \cosh(\tilde{\theta}) - \tilde{b} \sin(\theta_r - \frac{\pi}{2}) \sinh(\tilde{\theta})) \cos(\phi_r) \\ (j\tilde{b} \sin(\theta_r) \cosh(\tilde{\theta}) - \tilde{b} \sin(\theta_r - \frac{\pi}{2}) \sinh(\tilde{\theta})) \sin(\phi_r) \\ j\tilde{b} \cos(\theta_r) \cosh(\tilde{\theta}) - \tilde{b} \cos(\theta_r - \frac{\pi}{2}) \sinh(\tilde{\theta}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \tilde{b} \sinh(\tilde{\theta}) \sin(\theta_r - \frac{\pi}{2}) \cos(\phi_r) \\ \tilde{b} \sinh(\tilde{\theta}) \sin(\theta_r - \frac{\pi}{2}) \sin(\phi_r) \\ \tilde{b} \sinh(\tilde{\theta}) \cos(\theta_r - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} - j \begin{pmatrix} \tilde{b} \cosh(\tilde{\theta}) \sin(\theta_r) \cos(\phi_r) \\ \tilde{b} \cosh(\tilde{\theta}) \sin(\theta_r) \sin(\phi_r) \\ \tilde{b} \cosh(\tilde{\theta}) \cos(\theta_r) \end{pmatrix}. \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

Wir haben somit einen Ortsvektor, der einen Strahl parallel versetzt zu dem Ausgangsstrahl erzeugt. Die Versatz entspricht genau der Distanz

$$r_v = \tilde{b} \sinh(\tilde{\theta}) \quad (3.38)$$

und geschieht in die Richtung der θ -Winkelcoordinate. Der Fokuslänge des Strahls ändert sich zu

$$b = \tilde{b} \cosh(\tilde{\theta}), \quad (3.39)$$

die Richtung bleibt unverändert. In Abbildung 3.6 sind diese Zusammenhänge dargestellt.

Will man also den Strahl mit der Fokuslänge b um die Distanz r_v senkrecht zur Ausbreitungsrichtung verschieben, muss der Imaginärteil der Winkelcoordinate θ_i wie folgt gewählt werden:

$$\tilde{\theta} = \operatorname{artanh} \left(\frac{r_v}{b} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{r_v + b}{r_v - b}. \quad (3.40)$$

Die Länge des komplexen Ortsvektors muss entsprechend auf

$$\tilde{b} = \frac{b}{\cosh \tilde{\theta}} \quad (3.41)$$

geändert werden, wenn die Fokuslänge von b beibehalten werden soll.

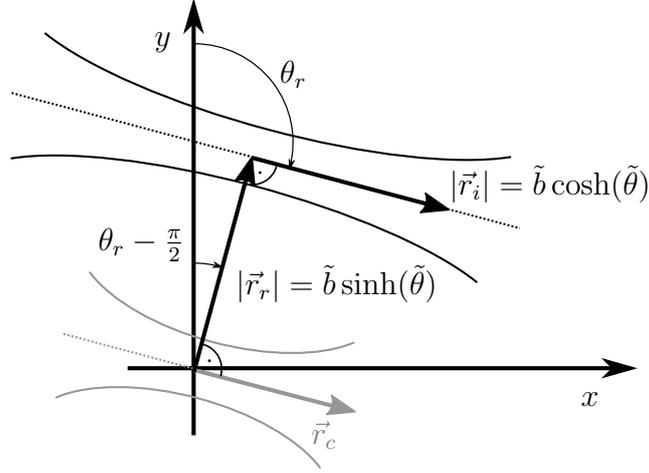


Abbildung 3.6 Wenn dem Ortsvektor in Kugelkoordinaten ein imaginärer Winkel $\tilde{\theta}$ hinzugefügt wird, verschiebt sich der Strahl in θ -Richtung und damit senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

3.1.6 Ausrichtung des Complex-Source Beam in elliptischen Kegelkoordinaten

Genau wie in Kugelkoordinaten, reicht es auch in elliptischen Kegelkoordinaten die r -Komponente des erzeugenden Ortsvektors komplex zu wählen. Der Beweis läuft analog zu Abschnitt 3.1.5: Die Position der Strahltaile und somit der Realteil des komplexen Vektors sei r_r , ϑ_r , φ_r . Der Imaginärteil lautet $r_i = b$, $\vartheta_i = \pi - \vartheta_r$, $\varphi_i = \varphi_r + \pi$; wenn der Strahl von der Taille aus auf den Ursprung gerichtet ist. Es ergibt sich für den Ortsvektor umgerechnet in kartesische Komponenten:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_r - j\vec{r}_i \quad (3.42)$$

$$= \begin{pmatrix} r_r \sin \vartheta_r \cos \varphi_r \\ r_r \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\vartheta_r)} \sin \varphi_r \\ r_r \cos \vartheta_r \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi_r} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$- j \begin{pmatrix} b \sin(\pi - \vartheta_r) \cos(\pi + \varphi_r) \\ b \sqrt{1 - k^2 \cos^2(\pi - \vartheta_r)} \sin(\pi + \varphi_r) \\ b \cos(\pi - \vartheta_r) \sqrt{1 - k'^2 \sin^2(\pi + \varphi_r)} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

$$= \begin{pmatrix} (r_r + jb) \sin \vartheta_r \cos \varphi_r \\ (r_r + jb) \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_r} \sin \varphi_r \\ (r_r + jb) \cos \vartheta_r \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi_r} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Das letzte Ergebnis zeigt schließlich wieder einen Ortsvektor, an dessen Komponenten sich die entsprechenden elliptischen Kegelkoordinaten ablesen lassen: Die reellen Winkelkoordinaten ϑ_r und φ_r und ein komplexes $r_c = r_r + jb$.

3.1.7 Complex-Source Beam als Feldanregung bei der Multipolentwicklung

Der Complex-Source Beam soll als Anregung für die Multipolentwicklung dienen, die im Kapitel 2 aus Lösungen für die Helmholtzgleichung hergeleitet wurde. Hierfür muss lediglich ein komplexer Vektor gemäß (3.1) in die Darstellung für Punktquellen eingesetzt werden. Am wichtigsten für die Untersuchungen in dieser Arbeit ist der Fall, dass sich die Strahltaile im Ursprung befindet. Für die Berechnung im Außenraum eines Kegels bedeutet dies, dass die Strahltaile direkt auf der Kegelspitze platziert ist. Für diesen Fall wurde bereits in Kapitel 3.1.5 hergeleitet, dass hierfür nur die radiale Komponente des komplexen Ortsvektors der Quelle imaginär sein muss. Die Entwicklungen, die in Abschnitt 2.3 für den skalaren Fall und in Abschnitt 2.5 für den vektoriellen Fall vorgestellt wurden, sind unter Verwendung eines komplexen r' ohne weiteres für die Verwendung eines CSB als Anregung geeignet. Allerdings werden diese Darstellungen nur den divergenten Teil des Strahls und den konvergierenden Teil des Strahls bis zum Radius $\sqrt{r_r'^2 + b^2}$ repräsentieren, wie in Kapitel 3.1.1 untersucht wurde. Um einen uniformen CSB zu erzeugen, dürfen lediglich sphärische Besselfunktionen in den Entwicklungen verwendet werden. Dies sei hier exemplarisch für die Multipolentwicklung im Außenraum eines ideal leitenden Kegels ausgeführt. Die Entwicklung lautet

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{\nu_d, \pm m} a_{\nu_d, m} \vec{N}_{\nu_d, m}^I(\vec{r}) + \frac{Z_0}{j} \sum_{\nu_n, \pm m} b_{\nu_n, m} \vec{M}_{\nu_n, m}^I(\vec{r}), \quad (3.46)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{Z_0} \sum_{\nu_d, \pm m} a_{\nu_d, m} \vec{M}_{\nu_d, m}^I(\vec{r}) + \sum_{\nu_n, \pm m} b_{\nu_n, m} \vec{N}_{\nu_n, m}^I(\vec{r}) \quad (3.47)$$

mit den Multipolamplituden

$$a_{\nu_d, m} = -\kappa_0^2 Z_0 \frac{(-1)^m}{\nu_d(\nu_d + 1)} \vec{N}_{\nu_d, -m}^I(\vec{r}_d) \cdot \vec{c}_e, \quad (3.48)$$

$$b_{\nu_n, m} = -j\kappa_0^2 \frac{(-1)^m}{\nu_n(\nu_n + 1)} \vec{M}_{\nu_n, -m}^I(\vec{r}_d) \cdot \vec{c}_e. \quad (3.49)$$

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

Genau wie bei der Greenschen Funktion für einen uniformen CSB (3.7) hat diese Darstellung den Vorteil, dass keine Fallunterscheidung mehr benötigt wird.

3.1.7.1 Genauigkeit der Entwicklung

Es soll in Abhängigkeit verschiedener Parameter untersucht werden, wie akkurat die vorgestellten Entwicklungen bei der Nachbildung eines CSB sind. Es werden dafür Lösungen im Freiraum betrachtet, da hier als Referenz die Lösung aus der geschlossenen Form der Greenschen Funktion des freien Raumes genutzt werden kann. Folglich werden als Eigenwerte nur ganzzahlige n benötigt. Die Strahltaile befindet sich im Ursprung: Dies ist eine typische Situation, da bei den noch folgenden Streufelduntersuchungen die Spitzen von semi-infiniten Strukturen, die sich immer im Ursprung befinden, mit den ebenen Wellenfronten der Strahltaile beleuchtet werden sollen. Die Auswertung erfolgt in einer Ebene entlang der Strahlachse.

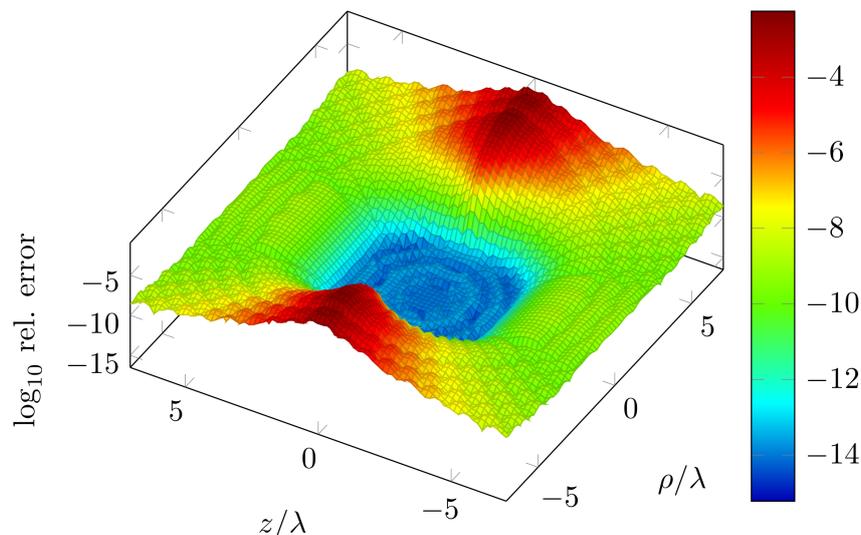


Abbildung 3.7 Relativer Fehler der Multipolentwicklung eines CSB mit der Fokusslänge $b = 3\lambda$ im Freiraum. Als Referenz dient die geschlossene Form der Greenschen Funktion. Die Strahlachse entspricht der z -Achse, ρ ist die transversale Koordinate. Die Entwicklung umfasst alle Eigenwerte bis $n_{max} = 30$.

Abbildung 3.7 zeigt den relativen Fehler einer skalaren Entwicklung gemäß (2.75) eines Complex-Source Beams mit der Fokusslänge $b = 3$. Es ist zu sehen, dass sich das Feld im Ursprung bis zu einem Radius von etwa 2 Wellenlängen im Rahmen der Rechnergenauigkeit exakt berechnen lässt. Weiter entfernt nimmt der Fehler

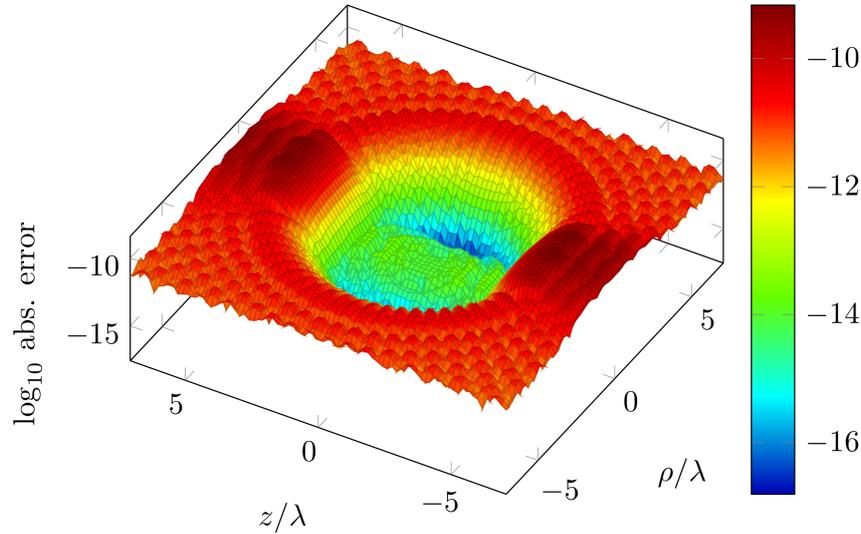


Abbildung 3.8 *Absoluter Fehler korrespondierend zum untersuchten Fall in Abbildung 3.7: Multipolentwicklung mit $n_{max} = 30$ eines CSB mit der Fokusslänge $b = 3\lambda$ im Freiraum. Es zeigt sich, dass die großen relativen Fehler transversal zur Ausbreitungsrichtung auf den absoluten Fehler keinerlei Auswirkung haben.*

zwar zu, bleibt auf der Strahlachse allerdings auf einem konstanten Niveau von etwa 10^{-10} . In transversaler Richtung zum Ursprung zeigen sich zwar etwas höhere Fehler von bis zu 10^{-3} , aber – wie schon vorher in dieser Arbeit erläutert – strebt das Gesamtfeld in diesen Bereichen gegen Null. Abbildung 3.8 zeigt für denselben Fall den absoluten Fehler und es bestätigt sich, dass dieser transversal zur Strahlachse sehr klein ($< 10^{-10}$) bleibt, sogar kleiner als in Strahlrichtung.

In Abbildung 3.9 wurde die maximale Ordnung für diese Entwicklung auf $n_{max} = 40$ erhöht. Insgesamt gibt es deutlich geringere relative Fehler als mit $n_{max} = 30$, aber dies scheint sich nicht so stark in Strahlrichtung auszuwirken, wo der Fehler unverändert bleibt. Dies wird in Abbildung 3.10 genauer untersucht. Hier ist der Fehler entlang der Strahlachse für verschiedene n_{max} aufgetragen. Während eine Erhöhung der maximalen Ordnung von 20 auf 30 noch eine große Verbesserung der Ergebnisse bewirkt, bleibt der Fehler für eine weitere Erhöhung auf $n_{max} = 40$ in Strahlrichtung unverändert. Es ist außerdem gut zu sehen, dass die Genauigkeit mit einem Abstand von etwa 5 Wellenlängen ein konstantes Niveau erreicht.

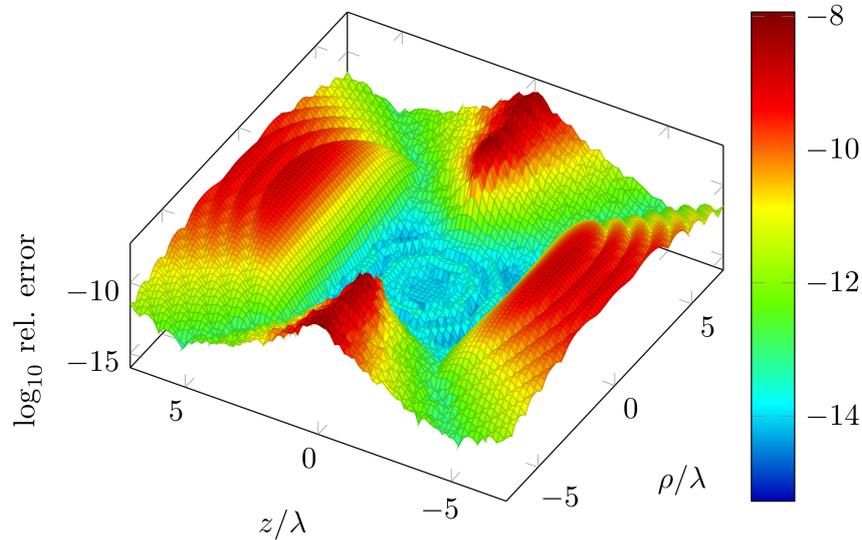


Abbildung 3.9 Relativer Fehler einer Multipolentwicklung eines CSB mit der Fokusslänge $b = 3\lambda$ im Freiraum. Der maximale Eigenwert ist $n_{max} = 40$. Im Vergleich zu $n_{max} = 30$ verbessert sich der relative Fehler abseits der Strahlachse um einige Größenordnungen. Entlang der Strahlachse bleibt der Fehler fast unverändert.

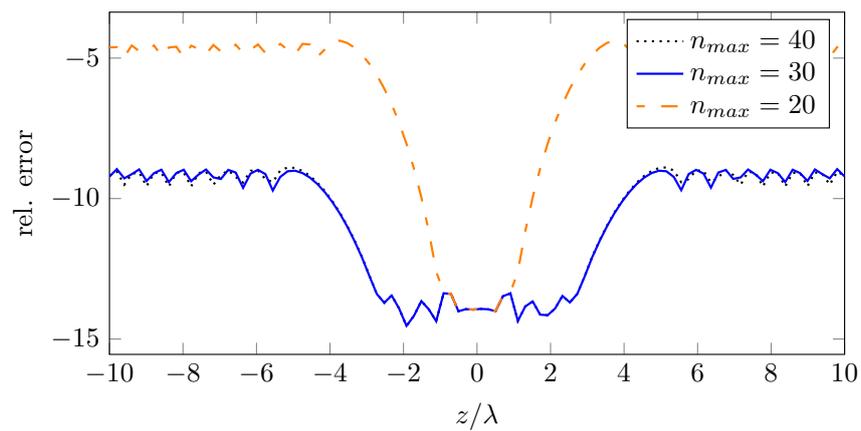


Abbildung 3.10 Relativer Fehler von Multipolentwicklungen eines CSB mit der Fokusslänge $b = 3\lambda$ für verschiedene maximale Ordnungen n_{max} . Die Werte gelten entlang der Strahlachse ($\rho = 0$).

3.1. COMPLEX-SOURCE BEAM

Weiterhin soll der Einfluss der Fokusslänge b untersucht werden. In Abbildung 3.11 ist der relative Fehler für eine Fokusslänge von $b = 5$ dargestellt; die maximale Ordnung ist $n_{max} = 30$. Es ist zu sehen, dass die Genauigkeit gegenüber dem korrespondierenden Fall mit $b = 3$ (Abbildung 3.7) sinkt und entlang der Strahlachse nur noch etwa 10^{-6} beträgt. Die größere Fokusslänge sorgt also für einen größeren Fehler bei der Berechnung. Dies bestätigt Abbildung 3.12, wo der relative Fehler entlang der Strahlachse für verschiedene Fokusslängen aufgetragen ist: Ein sehr schwach fokussierter Strahl mit $b = 1\lambda$ lässt sich im Rahmen der Rechnergenauigkeit exakt berechnen, während $b = 9\lambda$ ein Fehlerniveau von über 10^{-4} erreicht. Außerdem bestätigt sich auch hier, dass die Genauigkeit ab einem bestimmten Abstand ein konstantes Niveau erreicht. In Abbildung 3.13 ist dasselbe nochmal mit einer maximalen Ordnung $n_{max} = 40$ ausgeführt. Es zeigt sich, dass sich kaum eine Verbesserung durch die höhere Ordnung erzielen lässt.

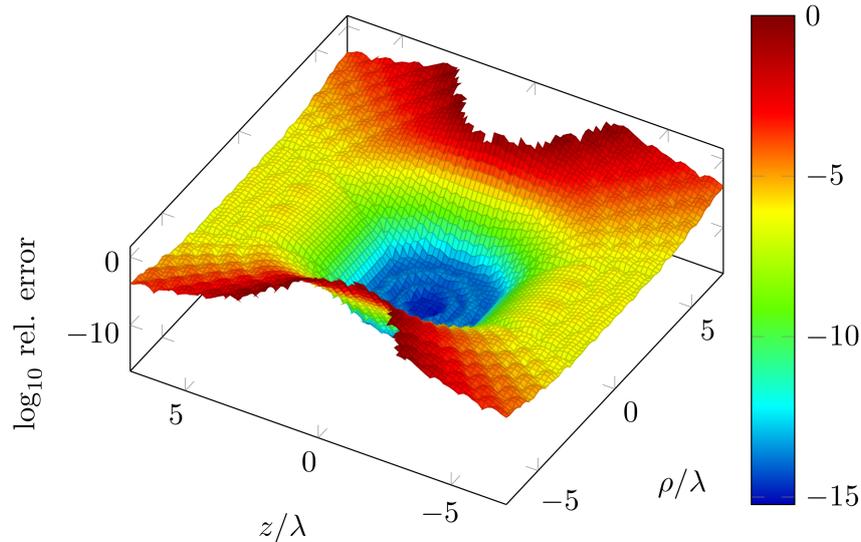


Abbildung 3.11 Relativer Fehler einer Multipolentwicklung eines CSB mit der Fokusslänge $b = 5\lambda$ im Freiraum. Der maximale Eigenwert ist $n_{max} = 30$. Gegenüber den vorherigen Beispielen zeigt sich, dass eine größere Fokusslänge zu einer schlechteren Genauigkeit der Multipolentwicklung führt.

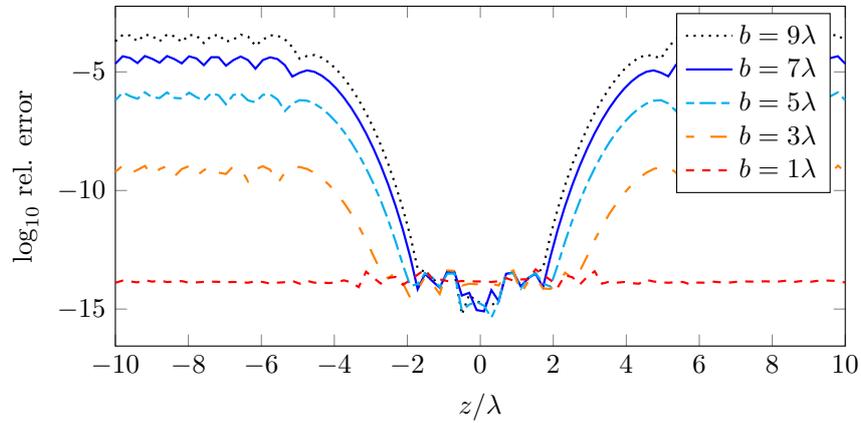


Abbildung 3.12 Relativer Fehler von Multipolentwicklungen eines CSB mit verschiedenen Fokusslängen b . Die maximale Ordnung beträgt bei allen Beispielen $n_{max} = 30$. Die Werte gelten entlang der Strahlachse ($\rho = 0$).

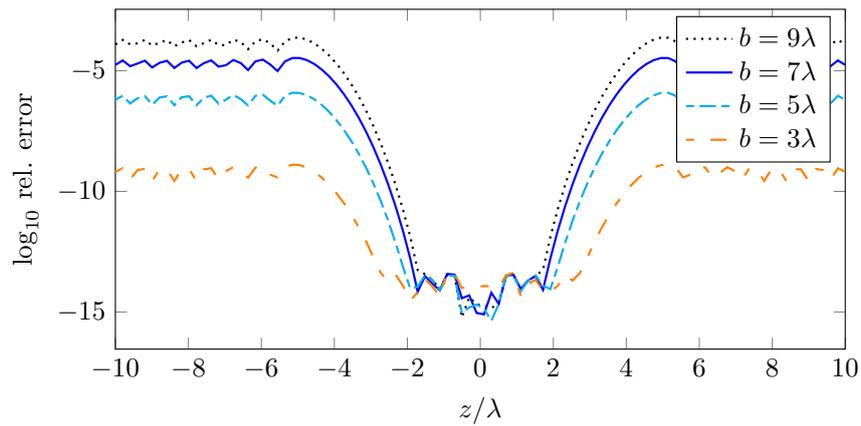


Abbildung 3.13 Relativer Fehler von Multipolentwicklungen eines CSB mit verschiedenen Fokusslängen b . Die maximale Ordnung liegt bei $n_{max} = 40$.

3.1. COMPLEX-SOURCE BEAM

Abschließend wird noch der Fall betrachtet, dass sich die Strahltaile nicht im Ursprung befindet, sondern um zwei Wellenlängen in z -Richtung verschoben ist. Eine solche Verschiebung wird erreicht, indem der Realteil des komplexen Radius r' des CSB-Ortsvektors auf 2λ gesetzt wird. In Abbildung 3.14 ist der relative Fehler für diesen Fall dargestellt. Die höchste Genauigkeit wird weiterhin im Ursprung erzielt. Der hohe Fehler, der transversal zur Strahlrichtung auftritt, hat sich entsprechend verschoben und das allgemeine relative Fehlerniveau ist um etwa 2 Größenordnungen angestiegen. Dieser Anstieg kann in Abbildung 3.15 besser abgelesen werden. Dort ist der relative Fehler entlang der z -Achse für verschiedene Positionen der Strahltaile zu sehen.

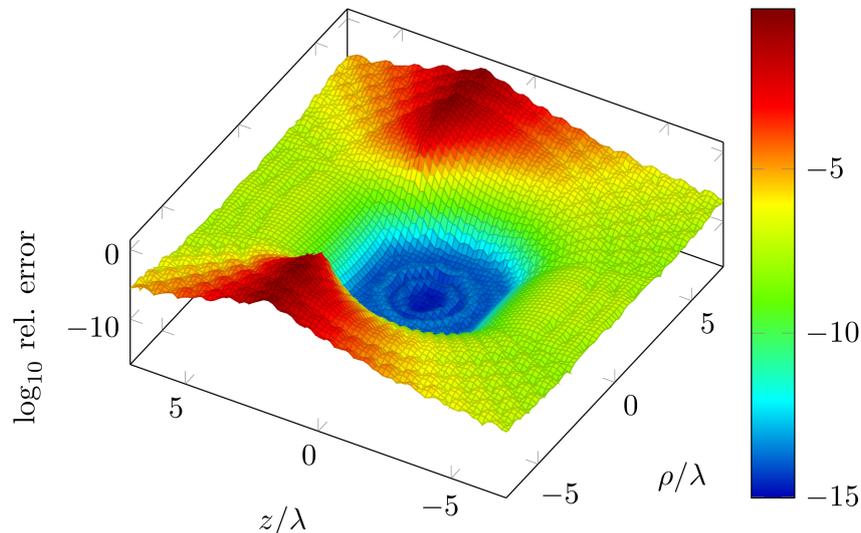


Abbildung 3.14 Relativer Fehler der Multipolentwicklung eines CSB mit der Fokusslänge $b = 3\lambda$ im Freiraum ($n_{max} = 30$). Die Strahltaile ist diesmal um 2λ in z -Richtung verschoben. Es zeigt sich, dass das allgemeine Fehlerniveau gegenüber dem Fall, dass die Strahltaile im Ursprung liegt, um etwa 2 Größenordnungen ansteigt.

Die wichtigste Erkenntnis der Untersuchungen in diesem Kapitel ist, dass der Fehler bei der Multipolentwicklung eines CSB auch außerhalb eines engeren Konvergenzradius, der wenige Wellenlängen um den Ursprung beträgt, auf einem akzeptablen Niveau bleibt. Dies ist der größte Vorteil, den die Verwendung eines CSB als Anregung in der Multipolentwicklung bietet. Es sei abschließend erwähnt, dass die in diesem Kapitel aufgeführten Ergebnisse, die für ein skalares Feld erzeugt wurden, ebenso für die elektrische oder magnetische Feldkomponente eines elektromagnetischen CSB gelten.

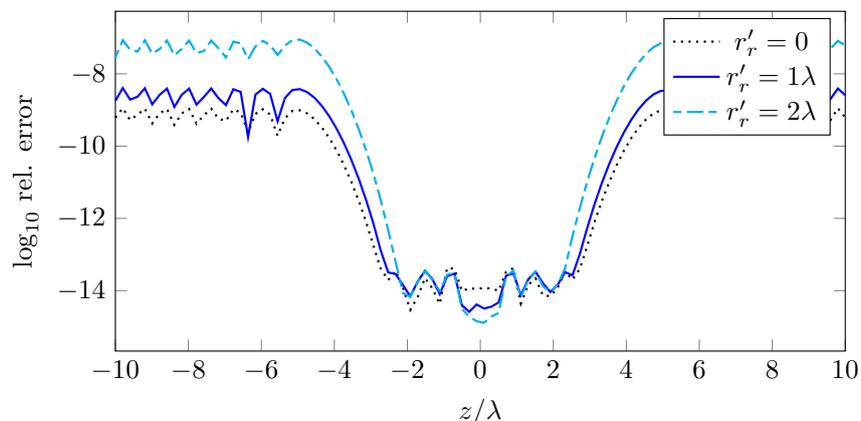


Abbildung 3.15 Relativer Fehler von Multipolentwicklungen eines CSB mit $b = 3$, $n_{max} = 30$ für verschiedene Positionen r'_r auf der z -Achse.

3.2 Inhomogene ebene Welle

Eine inhomogene Welle verfügt zwar über ebene Wellenfronten, aber keine konstante Verteilung der Amplitude. In dieser Arbeit werden als inhomogene Wellen ausschließlich solche ebenen Wellen betrachtet, die entlang einer Fläche gleicher Phase eine exponentiell verlaufende Amplitudenverteilung besitzen. Eine inhomogene Welle kann dann auch als ein quer zur Ausbreitungsrichtung exponentiell gedämpftes ebenes Wellenfeld verstanden werden. In Abbildung 3.16 ist das elektrische Feld einer solchen Welle dargestellt. Es ist gut das exponentiell verlaufende Profil zu erkennen.

Die Grundidee ist, diese Art der Anregung für semi-infinite Strukturen zu verwenden, wobei die exponentielle Dämpfung in Richtung der unendlich ausgedehnten Struktur erfolgen soll. Auf solche Weise ergibt sich ein Streufeld, das durch die Spitze der Struktur dominiert ist. Einflüsse von weiter entfernten Punkten der Struktur werden exponentiell mit dem Abstand minimiert. Ähnlich wie der CSB bietet die inhomogene Welle somit die Möglichkeit, ein lokal beschränktes Wellenfeld zu erzeugen.

Der Phasor einer ebenen Welle wird im Allgemeinen durch

$$u(\vec{r}) = u_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.50)$$

ausgedrückt, wobei u sowohl die Amplitude einer skalaren ebenen Welle als auch

3.2. INHOMOGENE EBENE WELLE

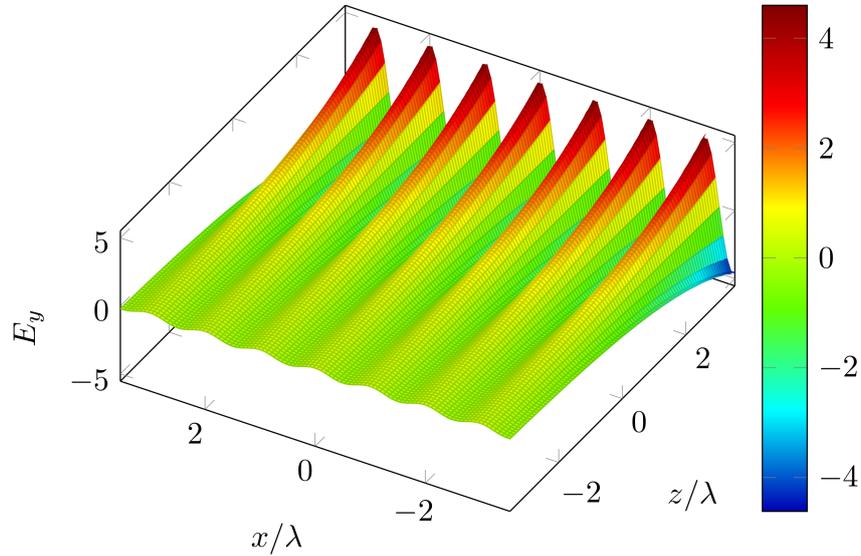


Abbildung 3.16 Eine inhomogene ebene Welle im Freiraum.

den Betrag des elektrischen oder magnetischen Feldes einer elektromagnetischen Welle repräsentieren kann. Der Wellenvektor \vec{k} ist im Falle einer inhomogenen Welle komplexwertig:

$$\vec{k} = \vec{k}' - j\vec{k}'' . \quad (3.51)$$

Real- und Imaginärteil dieses Vektors müssen im Falle eines verlustlosen Mediums senkrecht aufeinander stehen [28]. Die Ausbreitungsrichtung wird durch \vec{k}' bestimmt, während \vec{k}'' in die Richtung der größten exponentiellen Dämpfung zeigt. Die Beträge dieser Vektoren können zu

$$k' = k \cosh \psi = k \cos(j\psi) \quad (3.52)$$

$$k'' = k \sinh \psi = -jk \sin(j\psi) \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

gesetzt werden – mit einem im folgenden noch zu bestimmenden $\psi \in \mathbb{R}$. Die reelle Wellenzahl k (in dieser Arbeit auch mit κ bezeichnet) hängt entsprechend mit diesen Größen über

$$k = k'^2 - k''^2 \quad (3.55)$$

zusammen.

3.2.1 Inhomogene ebene Welle in Kugelkoordinaten

Es soll nun eine Methode hergeleitet werden, wie sich eine inhomogene ebene Welle in Kugelkoordinaten erzeugen lässt. Der Ausdruck für eine homogene, ebene Welle mit einem reellen Wellenvektor $\vec{k}(k, \theta_k, \phi_k)$ lässt sich in Kugelkoordinaten schreiben als

$$u_h(\vec{r}) = u_0 \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) = \exp(-jkr \cos \gamma) \quad (3.56)$$

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_k + \sin \vartheta \sin \vartheta_k \cos(\varphi - \varphi_k) \quad (3.57)$$

wobei γ der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{r} ist [29].

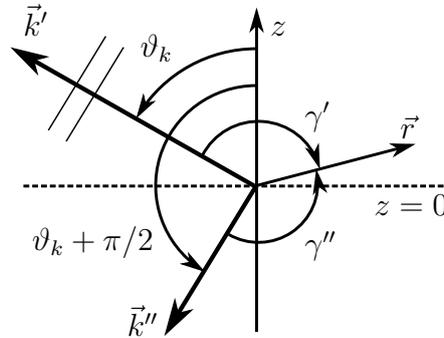


Abbildung 3.17 Der Realteil \vec{k}' und der Imaginärteil \vec{k}'' des komplexen Wellenvektors. Für eine Ausbreitungsrichtung, die durch ϑ_k gekennzeichnet ist, ergeben sich die dargestellten Winkel.

Im Falle einer inhomogenen Welle lauten die Koordinaten für die Wellenvektoren \vec{k}' und \vec{k}''

$$\vec{k}'(k', \vartheta_k, \varphi_k) \quad (3.58)$$

$$\vec{k}''(k'', \vartheta_{k''}, \varphi_{k''}) = \vec{k}''(k'', \vartheta_k + \pi/2, \varphi_k), \quad (3.59)$$

wie auch in Abbildung 3.17 nachzuvollziehen ist. Der Phasor des inhomogenen Wellenfeldes lässt sich folglich schreiben als:

$$\begin{aligned} u_i(\vec{r}) &= u_0 \exp(-j(\vec{k}' - j\vec{k}'') \cdot \vec{r}) \\ &= u_0 \exp(-jk'r \cos \gamma') \exp(-k''r \cos \gamma'') \\ &= u_0 \exp(-jk \cos(j\psi)r \cos \gamma') \exp(jk \sin(j\psi)r \cos \gamma''). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Die Winkel γ' und γ'' sind, wie in der Abbildung gezeigt, die Winkel zwischen \vec{r} und \vec{k}' beziehungsweise zwischen \vec{r} und \vec{k}'' . Sie lassen sich in Kugelkoordinaten angeben

3.2. INHOMOGENE EBENE WELLE

mit

$$\cos \gamma' = \cos \theta \cos \theta_k + \sin \theta \sin \theta_k \cos(\phi - \phi_k) \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \cos \gamma'' &= \cos \theta \cos(\theta_k + \pi/2) + \sin \theta \sin(\theta_k + \pi/2) \cos(\phi - \phi_k) \\ &= -\cos \theta \sin \theta_k + \sin \theta \cos \theta_k \cos(\phi - \phi_k). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Durch Einsetzen von (3.61) und (3.62) in den Phasor (3.60) erhält man

$$\begin{aligned} u_i(\vec{r}) &= u_0 \exp(-jkr(\cos(j\psi) \cos \theta \cos \theta_k + \cos(j\psi) \sin \theta \sin \theta_k \cos(\phi - \phi_k) \\ &\quad + \sin(j\psi) \cos \theta \sin \theta_k - \sin(j\psi) \sin \theta \cos \theta_k \cos(\phi - \phi_k))) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} &= u_0 \exp \left(-jkr \left(\cos \theta \frac{1}{2} (\cos(\theta_k - j\psi) + \cos(\theta_k + j\psi)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin \theta \frac{1}{2} (\sin(\theta_k - j\psi) + \sin(\theta_k + j\psi)) \cos(\phi - \phi_k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \theta \frac{1}{2} (\cos(\theta_k - j\psi) - \cos(\theta_k + j\psi)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \theta \frac{1}{2} (\sin(-\theta_k + j\psi) + \sin(\theta_k + j\psi)) \cos(\phi - \phi_k) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.64)$$

und schließlich

$$= u_0 \exp \left(-jkr \left(\cos \theta \cos(\theta_k - j\psi) + \sin \theta \sin(\theta_k - j\psi) \cos(\phi - \phi_k) \right) \right). \quad (3.65)$$

Ein Vergleich mit (3.56) macht deutlich, dass es sich hierbei um dieselbe Darstellung handelt, allerdings mit dem Unterschied, dass ein komplexer Winkel $\theta_k - j\psi$ verwendet wird. Eine inhomogene ebene Welle kann folglich erzeugt werden, indem für eine homogene ebene Welle ein komplexer Einfallswinkel θ definiert wird. Wenn diese inhomogene ebene Welle eine bestimmte Dämpfung k'' besitzen soll, muss der komplexe Einfallswinkel θ_c der Welle gemäß (3.53) wie folgt gewählt werden:

$$\theta_c = \theta_k - j\psi = \theta_k - j \operatorname{arsinh} \left(\frac{k''}{k} \right). \quad (3.66)$$

Die Richtung der größten Dämpfung ist dabei stets in θ -Richtung.

3.2.2 Inhomogene ebene Welle als Feldanregung bei der Multipolentwicklung

Die Grundidee, um eine ebene Welle mit einer Multipolentwicklung zu beschreiben, ist, eine sehr weit entfernte Punktquelle zu betrachten. Der Krümmungsradius der

KAPITEL 3. RÄUMLICH BEGRENZTE FELDANREGUNGEN

Wellenfronten wird dann gleichsam mit dem Abstand groß und es liegen lokal angenähert ebene Wellen vor. Die entstehende Feldamplitude muss dann der Distanz entsprechend normiert werden. Tatsächlich existiert der Grenzwert für eine unendlich entfernte, normierte Punktquelle. Für diesen Fall wird auch der Krümmungsradius unendlich und es liegen ideale ebene Wellenfronten vor. Die Multipolamplituden für eine ebene Welle, polarisiert in \vec{E} und mit der elektrischen Feldamplitude E_0 lauten [13]

$$a_{n,m} = E_0 4\pi j^{n+1} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{n}_{n,-m}(\theta_k, \phi_k) \vec{E}, \quad (3.67)$$

$$b_{n,m} = \frac{E_0}{Z_0} 4\pi j^{n+1} \frac{(-1)^m}{n(n+1)} \vec{m}_{n,-m}(\theta_k, \phi_k) \vec{E}. \quad (3.68)$$

Um eine inhomogene Welle zu erzeugen, muss für θ_k ein komplexer Winkel θ_c gemäß (3.66) gesetzt werden.

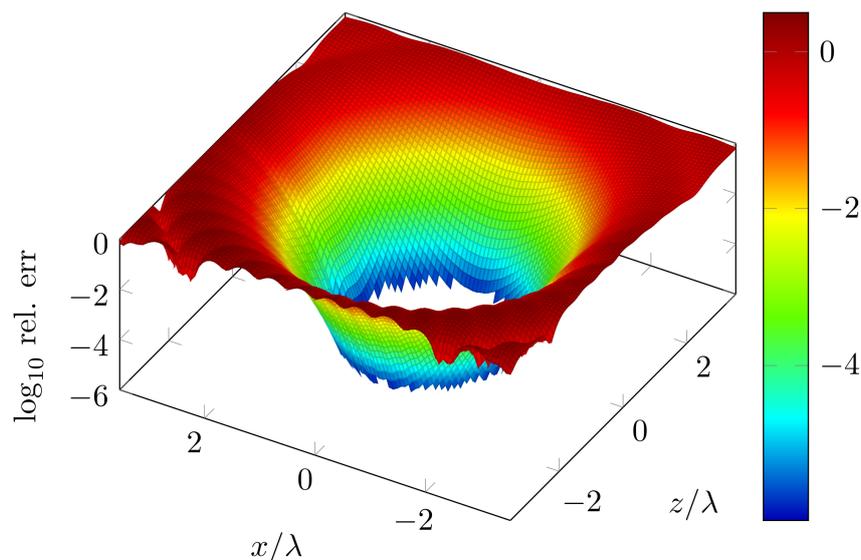


Abbildung 3.18 Relativer Fehler einer Multipolentwicklung einer inhomogenen Welle mit $\psi = 0.07$ und $n_{max} = 20$ im Freiraum.

3.2.2.1 Genauigkeit der Entwicklung

Da Multipolentwicklungen mit ebenen Wellen eine vergleichsweise schwache Konvergenz außerhalb eines bestimmten Konvergenzradius besitzen, soll hier die Genauigkeit einer solchen Entwicklung in Bezug auf eine inhomogenen Welle untersucht werden. Es werden Ergebnisse im Freiraum betrachtet und als Referenz dient

3.2. INHOMOGENE EBENE WELLE

die geschlossene Form. Abbildung 3.18 zeigt den relativen Fehler einer inhomogenen Welle, die mit einer Multipolentwicklung bis $n_{max} = 20$ ausgewertet wurde. Der Imaginärteil des komplexen Winkels θ_c beträgt $\psi = 0.07$, was etwa einem Dämpfungsfaktor von $k'' = 0.44\frac{1}{\lambda}$ entspricht. Es zeigt sich, dass die Ergebnisse zunächst nur in einem kleinen Radius von weniger als zwei Wellenlängen um den Ursprung verlässliche Werte liefern. Abbildung 3.19 zeigt, wie sich die Genauigkeit entlang der z -Achse für höhere maximale Ordnungen n_{max} verbessert.

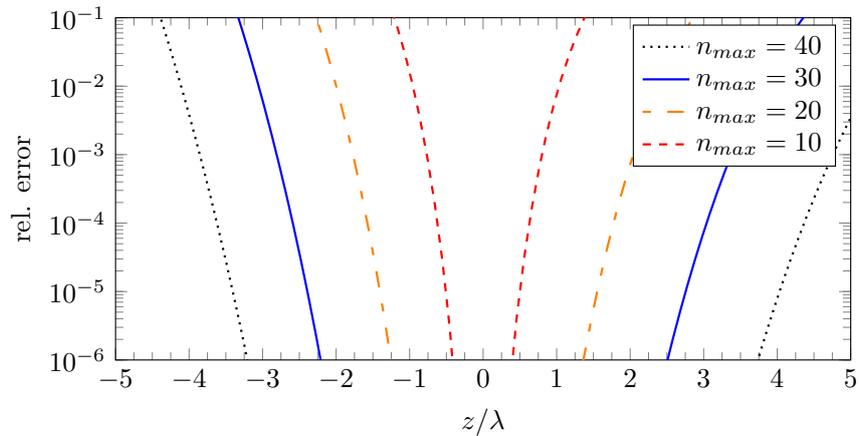


Abbildung 3.19 Relativer Fehler für eine inhomogenen Welle mit $\psi = 0.14$ und für verschiedene n_{max} entlang der z -Achse.

In Abbildung 3.20 wird in Ergänzung der Einfluss von ψ auf die Genauigkeit untersucht. Es ist zu sehen, dass sich die Genauigkeit mit größerem ψ verschlechtert.

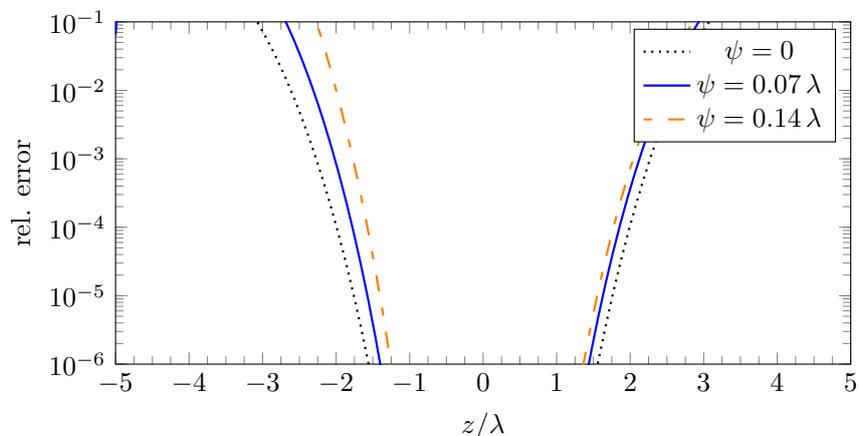


Abbildung 3.20 *Relativer Fehler von inhomogenen Wellen mit verschiedenen ψ entlang der z -Achse. $\psi = 0$ bedeutet, dass es sich um eine homogene ebene Welle handelt. Alle Entwicklungen sind bis $n_{max} = 20$ ausgeführt.*

Zusammenfassend ist zu sagen, dass Multipolentwicklungen von inhomogenen, ebenen Wellen mit denselben Konvergenzschwierigkeiten zu kämpfen haben, wie Entwicklungen von homogenen ebenen Wellen. Je nach gewählter Dämpfung ist die Konvergenz sogar noch schlechter. Auswertungen können nur in einem begrenzten Radius um den Ursprung zuverlässige Werte liefern. Abbildung 3.21 zeigt das Gesamtfeld einer inhomogenen ebenen Welle mit $\psi = 0.07$, die aus x -Richtung kommend auf einen ideal leitenden Kreiskegel fällt. Die maximale Ordnung beträgt bei diesem Beispiel $n_{max} = 50$, womit die Entwicklung für das gesamte betrachtete Gebiet eine ausreichende Genauigkeit von 10^{-5} besitzt. Da die numerische Berechnung – insbesondere der zugeordneten Legendrefunktionen – für noch größere Ordnungen sehr anspruchsvoll wird, ist eine Untersuchung des Feldes weit außerhalb des in Abbildung 3.21 gezeigten Gebietes ($r \gg 5\lambda$) ohne den Einsatz einer konvergenzbeschleunigenden Transformation fast aussichtslos. Das vorgestellte Verfahren ist somit nur für Evaluierungen des Nahfeldes bis zu einem Radius von 5 Wellenlängen um den Ursprung gut geeignet.

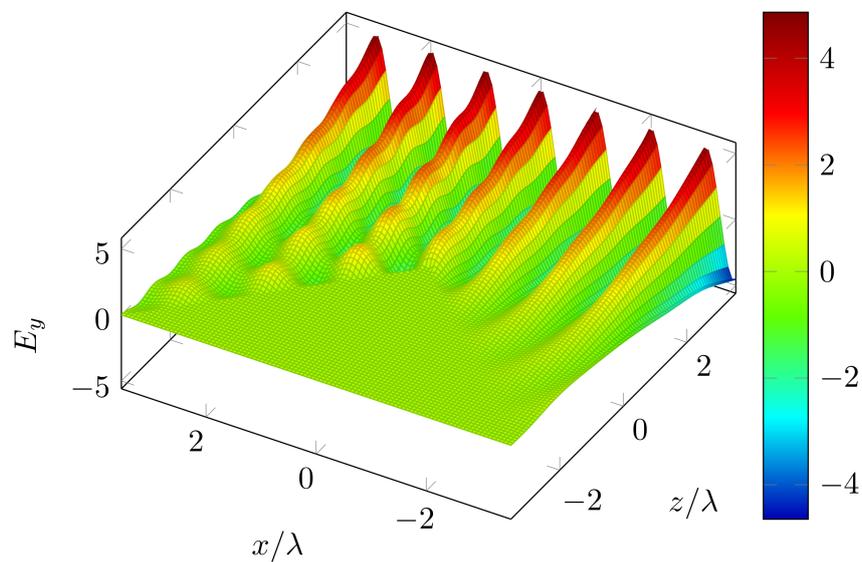


Abbildung 3.21 Beispiel für den Einfall einer inhomogenen ebenen Welle mit $\psi = 0.07$, auf einen ideal leitenden Kreiskegel. Die Welle kommt aus positiver x -Richtung. Die maximale verwendete Ordnung bei der Multipolentwicklung beträgt $n_{max} = 50$. Für $x > 0$ sind Interferenzen mit an der Kegelloberfläche reflektieren Anteilen zu beobachten. Für $x < 0$ kommt es zu Beugung in den vom Kegel abgeschatteten Bereich.

4 Beugung eines Complex-Source Beam am Kreiskegel

Im folgenden werden numerische Ergebnisse für die Beugung eines Complex-Source Beams an einem Kreiskegel präsentiert. Hierzu werden Multipolentwicklungen verwendet, die im Kapitel 2 vorgestellt und hergeleitet werden. Die Grundlagen für die Benutzung eines CSB als anregende Quelle werden in Kapitel 3 behandelt. Die Auswertung umfasst die skalaren Fälle des akustisch weichen und harten Kreiskegels sowie den vektoriellen Fall eines elektrisch ideal leitenden Kegels. Der CSB soll seine Strahltaile in allen Beispielen stets im Ursprung haben, damit die Spitze des Kegels mit möglichst ebenen Wellenfronten beleuchtet wird.

4.1 Nahfelder am akustisch weichen und harten Kreiskegel

Als erstes werde das skalare Feld im Außenraum eines akustisch weichen und akustisch harten Kegels betrachtet. Akustisch weich bedeutet, dass die Oberfläche des Kegels der Dirichlet-Randbedingung genügt; akustisch hart, dass die Oberfläche der Neumann-Randbedingung genügt. Folglich werden Dirichlet- und Neumann-Eigenwerte und -funktionen gemäß Abschnitt 2.2.2.2 verwendet. Die folgenden Abbildungen sind in einem Schnitt durch den Kreiskegel in der x, z -Ebene dargestellt. Die Ergebnisse sind immer auf die maximale Amplitude Φ_0 in der Strahltaile des ungestörten Strahls normiert.

In den Abbildungen 4.1a und 4.1b ist das Feld für einen uniformen CSB mit der Fokusslänge $b = 6\lambda$ und mit den Einfallswinkeln $\theta' = 90^\circ$, $\phi' = 0^\circ$ darge-

4.1. NAHFELDER AM AKUSTISCH WEICHEN UND HARTEN KREISKEGEL

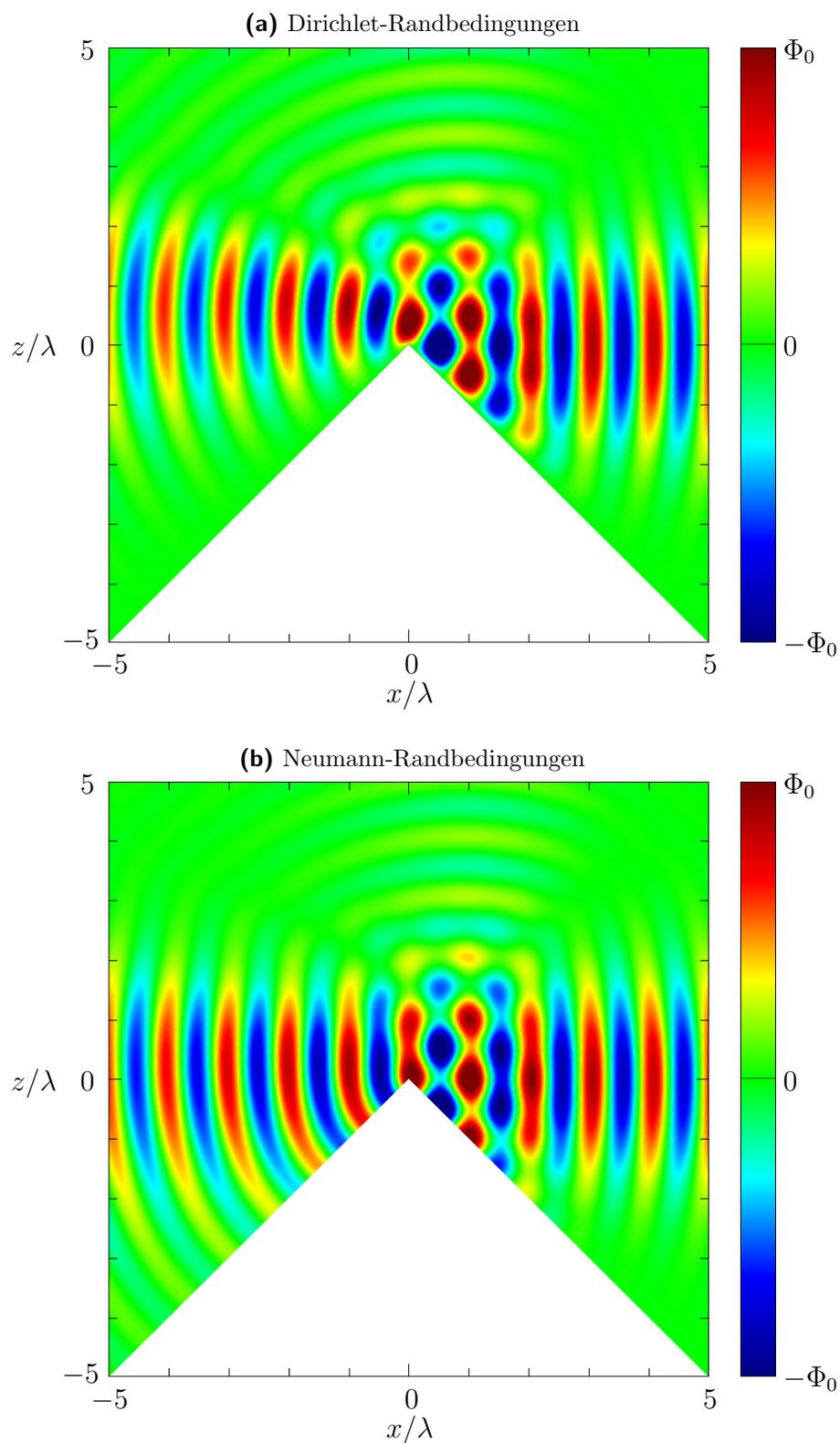


Abbildung 4.1 Skalares Feld eines uniformen CSB an einem Kreiskegel mit (a) Dirichlet-Randbedingungen und (b) Neumann-Randbedingungen. Der Einfallswinkel ist $\theta' = 90^\circ$, $\phi' = 0^\circ$. Die Fokusslänge beträgt $b = 6\lambda$.

KAPITEL 4. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM KREISKEGEL

stellt, das heißt, der Strahl ist in negative x -Richtung ausgerichtet. Der Kegel habe zunächst den halben Außenöffnungswinkel von $\theta_0 = 135^\circ$. Die obere Abbildung berücksichtigt Dirichlet-Randbedingungen, die untere Neumann-Randbedingungen. Die Einhaltung der Randbedingungen $\Phi = 0$ beziehungsweise $\frac{d\Phi}{d\theta} = 0$ kann in beiden Fällen an der Kegeloberfläche nachvollzogen werden. Es ist zu sehen, wie ein Teil des Strahls in z -Richtung reflektiert wird. Die Ausprägung des reflektierten Feldes ist in beiden Fällen gleichartig, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen; dies ist auch zu erwarten, da Dirichlet-Randbedingungen einem Reflexionsfaktor von -1 entsprechen und Neumann-Randbedingungen einem Reflexionsfaktor von 1 . Durch Addition der beiden Felder ließe sich folglich ein Feldbild für einen reflexionsfreien Kegel erzeugen. In unmittelbarer Kegelnähe sind Interferenzmuster durch Interaktion der reflektierten Anteile mit dem einfallenden Strahl zu erkennen. Im abgeschatteten Bereich ($x < 0, z < 0$) sind gebeugte Feldanteile zu sehen, die im Falle von Neumann-Randbedingungen deutlich ausgeprägter sind.

Als nächstes wird der Einfluss der Fokusslänge untersucht. Die Abbildungen 4.2a und 4.2b zeigen denselben Fall für Dirichlet-Randbedingungen, aber mit unterschiedlichen Fokusslängen. Für $b = 3$ ist zu sehen, wie der Strahl bereits innerhalb des abgebildeten Bereiches ($-5\lambda \leq x \leq 5\lambda$) an maximaler Amplitude verliert und an den Randbereichen des Lösungsgebiets deutlich gekrümmte Wellenfronten aufweist. Der Radius der Strahltaile ist geringer. Für $b = 9\lambda$ ist der Strahl fokussierter und es sind kaum gekrümmte Wellenfronten innerhalb des Lösungsgebietes zu erkennen; gleichzeitig nimmt der Strahlradius zu. Abgesehen von diesen Beobachtungen, die ebenso im Freiraum gültig wären, besteht kein sichtbarer, qualitativer Unterschied zu $b = 6\lambda$ (Abbildung 4.1a).

In den Abbildungen 4.3a und 4.3b sind die Feldbilder für andere Einfallswinkel dargestellt; der Kegel sei weiterhin schallweich, die Fokusslänge bleibe unverändert bei $b = 6\lambda$. Mit dem Einfallswinkel ändert sich erwartungsgemäß die Richtung, in die Feldanteile reflektiert werden. Für den Fall $\theta' = 30^\circ$ gibt es keinen abgeschatteten Bereich, entsprechend wird das Feld aber an der vormals abgewandten Seite reflektiert.

Für andere Öffnungswinkel des Kegels, müssen neue Sätze von Eigenwerten bestimmt werden. Die Abbildungen 4.4a und 4.4b zeigen die Feldbilder für $\theta_0 = 120^\circ$ und $\theta_0 = 150^\circ$. Die reflektierten Anteile werden durch den abweichenden Kegelöffnungswinkel nicht nur in eine andere Richtung gelenkt, sondern sind auch un-

4.1. NAHFELDER AM AKUSTISCH WEICHEN UND HARTEN KREISKEGEL

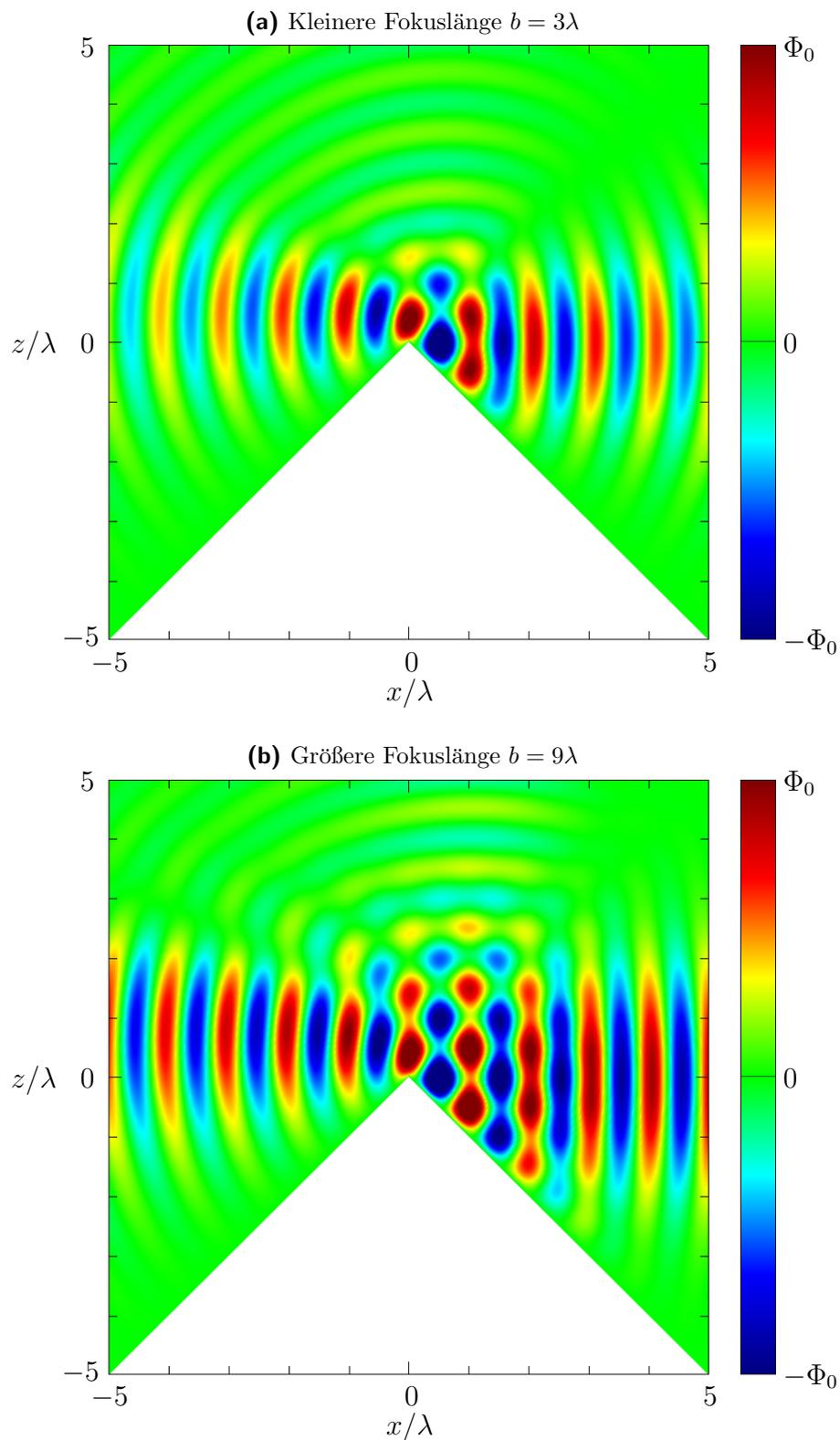


Abbildung 4.2 Skalares Feld eines CSB mit der Fokusslänge (a) $b = 3\lambda$ und (b) $b = 9\lambda$ an einem schallweichen Kreiskegel.

KAPITEL 4. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM KREISKEGEL

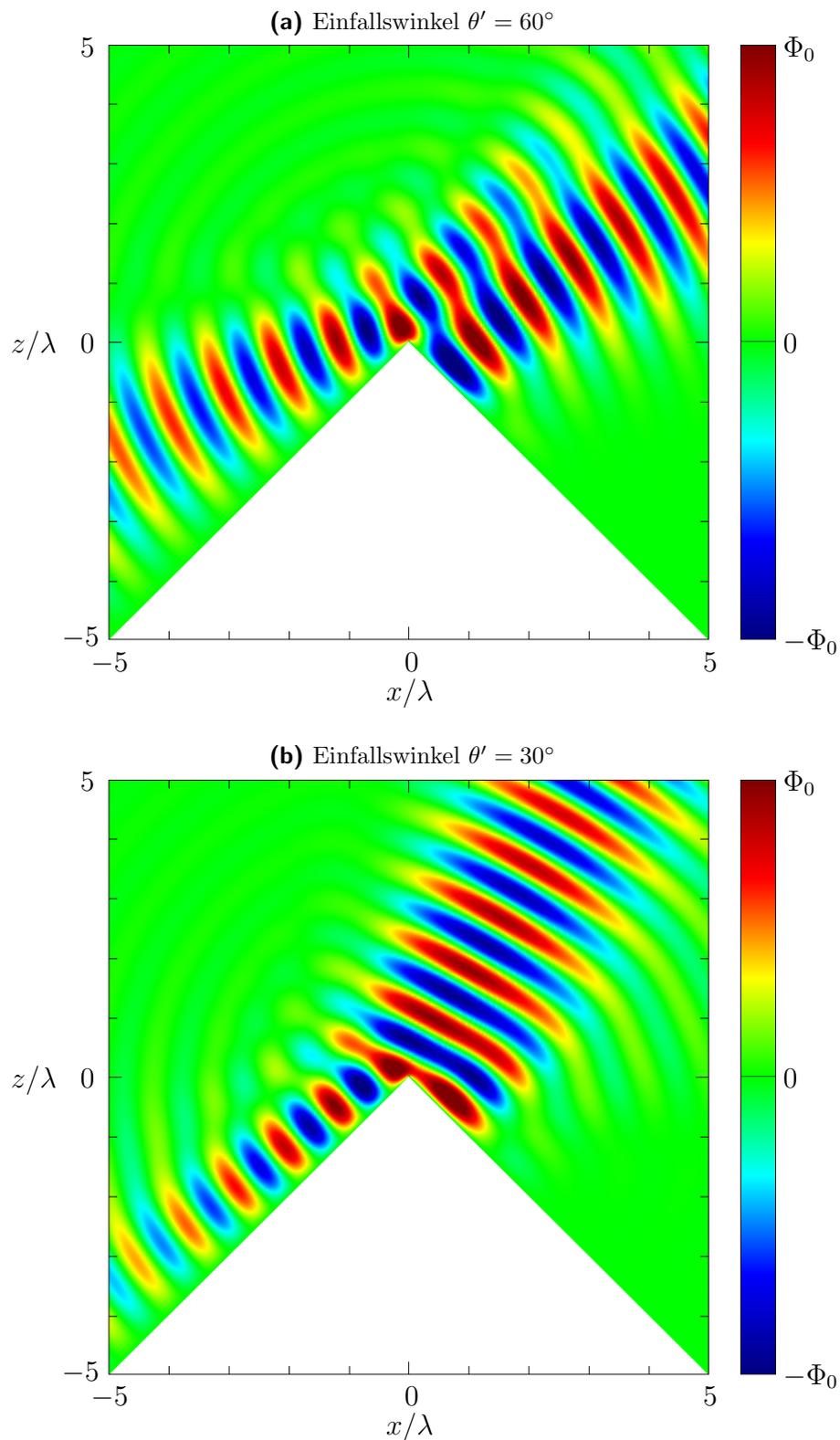


Abbildung 4.3 Skalares Feld eines CSB für verschiedene Einfallswinkel: (a) $\theta' = 60^\circ$, (b) $\theta' = 30^\circ$. Die Fokusslänge des Strahls ist jeweils $b = 6\lambda$.

4.1. NAHFELDER AM AKUSTISCH WEICHEN UND HARTEN KREISKEGEL

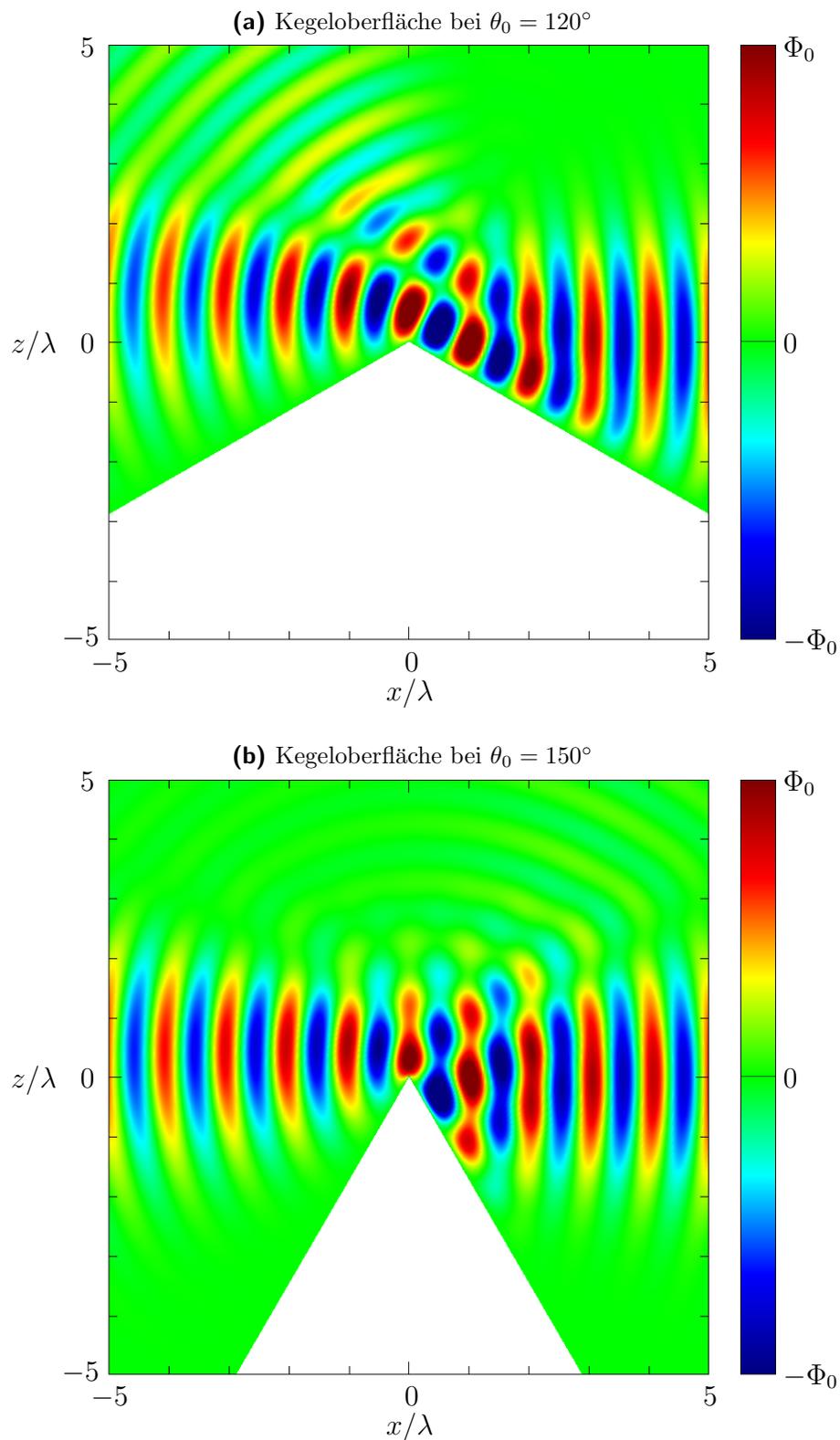


Abbildung 4.4 Skalares Feld eines CSB mit der Fokusslänge $b = 6\lambda$ an einem schallweichen Kreiskegel mit (a) $\theta_0 = 120^\circ$ und (b) $\theta_0 = 150^\circ$.

KAPITEL 4. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM KREISKEGEL

terschiedlich stark in der Amplitude ausgeprägt. Dies lässt sich dadurch erklären, dass bei $\theta_0 = 120^\circ$ ein entsprechend größerer Teil des Strahls ($1/3$) reflektiert wird, als bei $\theta_0 = 135^\circ$ ($1/4$) oder bei $\theta_0 = 150^\circ$ ($1/6$).

Bei allen vorgestellten Ergebnissen wurden die Entwicklungen bis $\nu_{max} = 50$ ausgeführt. Aufgrund fehlender Referenzlösungen ist es nicht möglich den relativen Fehler der Ergebnisse zu überprüfen. Um dennoch die Konvergenz der Ergebnisse im gesamten Lösungsgebiet sicherzustellen, wird während der Berechnung der relative Anteil jedes Entwicklungsgliedes betrachtet. Dadurch kann eine Ordnung ν_{rel} ermittelt werden, ab der alle folgenden Entwicklungsglieder unterhalb einer bestimmten relativen Schwelle bleiben. Diese Schwelle wurde bei den Berechnungen auf 10^{-4} festgelegt und wird im gesamten Lösungsgebiet ($r \leq 7.07\lambda$) angewendet. Diese Schwelle ist nicht gleichbedeutend mit dem relativen Fehler, der bei einer Entwicklung bis zur zugehörigen Ordnung ν_{rel} entsteht, liegt aber empirisch weniger als eine Größenordnung darüber (maximaler relativer Fehler $\lesssim 10^{-3}$). Dieses Vorgehen setzt voraus, dass die Ergebnisse eine absolute Konvergenz aufweisen, was für alle hier betrachteten Fälle zutrifft.

Tabelle 4.1 zeigt die auf diese Weise bestimmten ν_{rel} für verschiedene Fokusslängen des Strahls und Öffnungswinkel eines schallweichen Kegels (Dirichlet); in Tabelle 4.2 sind die entsprechenden Ergebnisse für einen schallharten Kegel (Neumann). An diesen Tabellen lassen sich verschiedene Aussagen ablesen:

- Mit größerer Fokusslänge werden mehr Eigenwerte benötigt. Dies lässt sich dadurch erklären, dass sich der CSB mit größerem b in der Strahltaile verbreitert und über einen größeren Bereich ebene Wellenfronten bildet. Er nähert sich somit an ein ebenes Wellenfeld an, das im allgemeinen eine schlechtere Konvergenz besitzt.
- Dirichlet- und Neumann-Probleme benötigen für eine bestimmte Genauigkeit etwa vergleichbar viele Eigenwerte.
- Bei Lösungen zum Neumann-Problem steigt die Anzahl der benötigten Eigenwerte mit dem Außenöffnungswinkel θ_0 . Dieser Trend lässt sich beim Dirichlet-Problem nicht bestätigen.

4.1. NAHFELDER AM AKUSTISCH WEICHEN UND HARTEN KREISKEGEL

$\nu_{rel} =$ (Dirichlet)	$b = 3\lambda$	$b = 6\lambda$	$b = 9\lambda$
$\theta_0 = 120^\circ$	17.51	27.00	36.00
$\theta_0 = 135^\circ$	27.00	28.00	28.00
$\theta_0 = 150^\circ$	19.00	27.00	32.00

Tabelle 4.1 Ordnung ν_{rel} für verschiedene Berechnungsparameter bei Dirichlet-Randbedingungen. Sie sagt aus, ab welcher Ordnung alle Folgeglieder kleiner als 10^{-4} bleiben. Der Einfallswinkel ist konstant bei $\theta' = 90^\circ$.

$\nu_{rel} =$ (Neumann)	$b = 3\lambda$	$b = 6\lambda$	$b = 9\lambda$
$\theta_0 = 120^\circ$	15.85	23.94	27.91
$\theta_0 = 135^\circ$	17.97	24.42	31.05
$\theta_0 = 150^\circ$	18.88	27.84	34.86

Tabelle 4.2 Ordnung ν_{rel} für verschiedene Berechnungsparameter bei Neumann-Randbedingungen. Der Einfallswinkel ist konstant bei $\theta' = 90^\circ$.

$\nu_{rel} =$	$\theta' = 30^\circ$	$\theta' = 60^\circ$	$\theta' = 90^\circ$
Dirichlet	28.00	29.00	28.00
Neumann	21.53	21.43	24.42

Tabelle 4.3 Ordnung ν_{rel} für verschiedene Einfallswinkel für Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen.

4.2 Nahfelder des elektromagnetischen Feldes am Kreiskegel

Mithilfe der Multipolentwicklung aus Abschnitt 2.5 lassen sich das elektrische und magnetische Feld im Außenraum eines ideal leitenden Kegels berechnen. Unter Berücksichtigung des Abschnitts 3.1.7 kann mit den Formeln 3.46 – 3.49 das Feld für einen uniformen Complex-Source Beam erzeugt werden.

Bei der Betrachtung von elektromagnetischen Wellen ergibt sich ein weiterer Freiheitsgrad, nämlich die Richtung der Polarisation, die durch \vec{c}_e festgelegt wird. Zunächst sei die Polarisation in ϕ -Richtung, also $\vec{c}_e = \vec{e}_\phi$. In Abbildung 4.5 ist die y -Komponente des elektrischen Feldes in der x, z -Ebene gezeigt; die Kegeloberfläche ist bei $\theta_0 = 135^\circ$ und die Fokusslänge des CSB ist $b = 6\lambda$. Das elektrische Feld des Strahls ist somit senkrecht zur Betrachtungsebene polarisiert; bei der Reflexion an der Kegeloberfläche entstehen folglich keine anderen Feldkomponenten als E_y – zumindest in dieser Betrachtungsebene. Ist der Strahl mit $\vec{c}_e = \vec{e}_\theta$ polarisiert, das heißt parallel zur Betrachtungsebene, ergeben sich für das elektrische Feld zwei Feldkomponenten, die in den Abbildungen 4.6a und b dargestellt sind. Bei diesem Fall ist außerdem zu beachten, dass es an der Kegelspitze zu einer Singularität des Feldes kommt.

Jede andere Polarisation lässt sich als Linearkombination dieser beiden Fälle darstellen. Es ist nicht möglich, eine Polarisation zu erzeugen, die nicht senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ist; wird ein entsprechendes \vec{c}_e in die Gleichungen eingesetzt, heben sich die Anteile von \vec{c}_e auf, die linear abhängig zur Ausbreitungsrichtung sind.

In den Tabellen 4.4 und 4.5 sind für verschiedene Parameter die Ordnungen ν_{rel} aufgezeigt; die Definition von ν_{rel} ist wie im vorangehenden Abschnitt 4.1 gehandhabt: Die Ordnung, ab der alle Folgeglieder einen relativen Beitrag zum Ergebnis liefern, der kleiner als 10^{-4} ist. Es bestätigt sich auch hier, dass die Konvergenz der Entwicklungen mit steigender Fokusslänge b schlechter wird. Bemerkenswert ist, dass die Konvergenz mit steigendem Außenöffnungswinkel θ_0 eindeutig besser wird; im Gegensatz zum Neumann-Fall (Tabelle 4.2), wo der Zusammenhang genau umgekehrt ist, oder zum Dirichlet-Fall (Tabelle 4.1), wo sich keine klare Tendenz feststellen ließ. Schließlich zeigt Tabelle 4.5, wie sich ν_{rel} für verschiedene Einfallswinkel θ' verhält.

4.2. NAHFELDER DES ELEKTROMAGNETISCHEN FELDDES AM KREISKEGEL

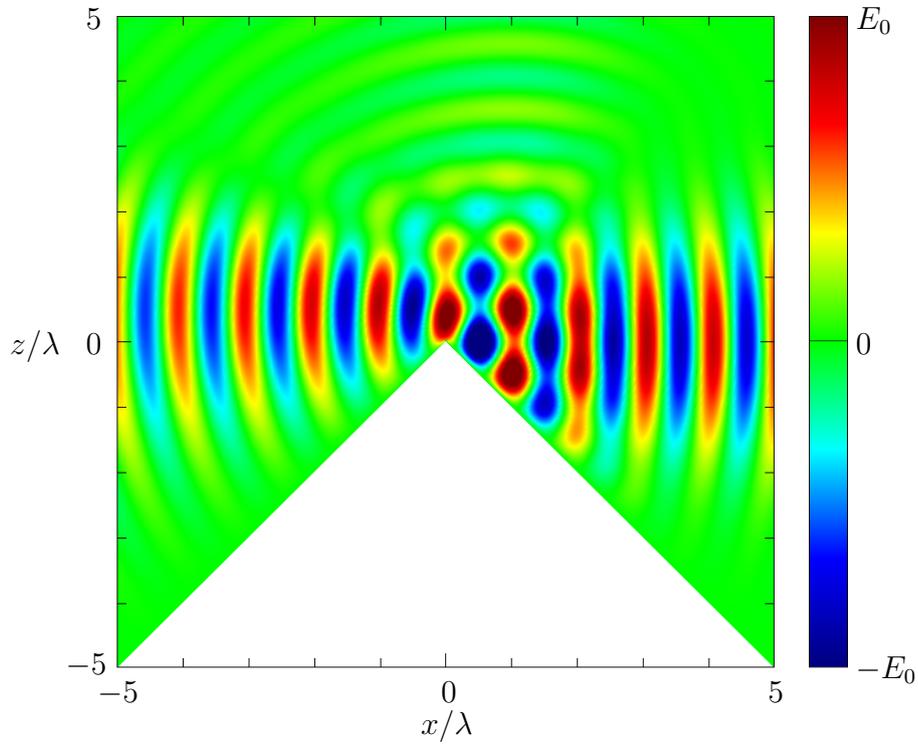


Abbildung 4.5 y -Komponente E_y des elektrischen Feldes in der x, z -Ebene. Der CSB ist in negative x -Richtung ausgerichtet, hat die Fokusslänge $b = 6\lambda$ und ist mit $\vec{c}_e = \vec{e}_\phi$ polarisiert.

$\nu_{rel} =$	$b = 3$	$b = 6$	$b = 9$
$\theta_0 = 120^\circ$	39.97	45.01	49.00
$\theta_0 = 135^\circ$	33.09	39.85	44.84
$\theta_0 = 150^\circ$	27.03	35.91	39.98

Tabelle 4.4 Ordnung ν_{rel} für verschiedene Berechnungsparameter bei der Berechnung am ideal leitenden Kreiskegel. Der Einfallswinkel ist konstant bei $\theta' = 90^\circ$.

	$\theta' = 30^\circ$	$\theta' = 60^\circ$	$\theta' = 90^\circ$
$\nu_{rel} =$	44.97	43.35	39.85

Tabelle 4.5 Ordnung ν_{rel} bei der vektoriellen Berechnung am ideal leitenden Kegel für verschieden Einfallswinkel.

KAPITEL 4. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM KREISKEGEL

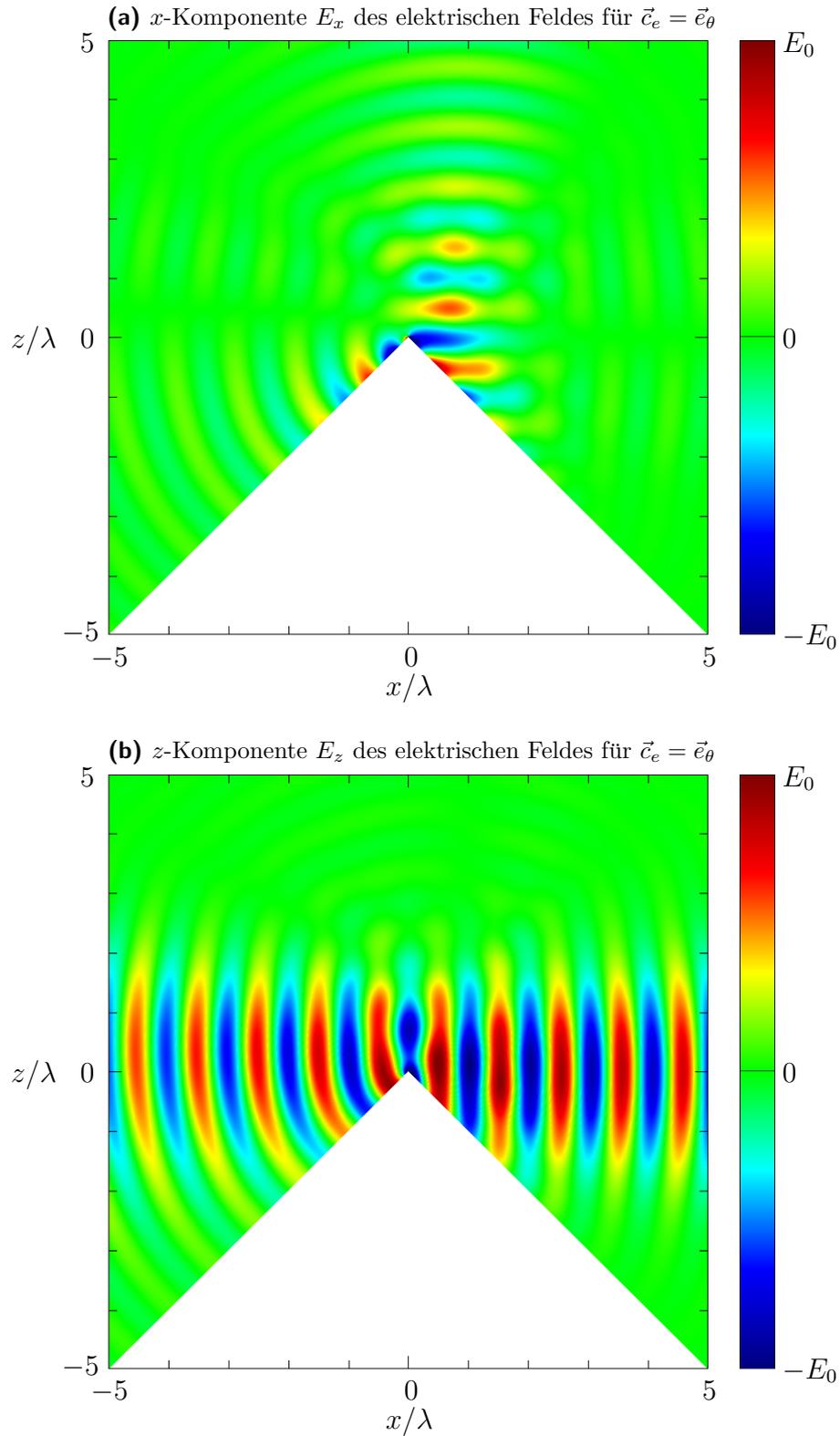


Abbildung 4.6 (a) x -Komponente E_x und (b) z -Komponente E_z des elektrischen Feldes in der x, z -Ebene. Der CSB ist hier mit $\vec{c}_e = \vec{e}_\phi$ polarisiert. E_y ist für diesen Fall null.

4.3 Fernfelder am Kreiskegel

Ist man an Feldern interessiert, die sich sehr weit weg von der untersuchten Struktur befinden, bietet es sich an, die Fernfelddarstellung der Multipolentwicklung aus Abschnitt 2.5.1 zu verwenden. Alternativ können die bisher verwendeten Formeln auch direkt ausgewertet werden. Um die Ergebnisse mit der Fernfelddarstellung vergleichen zu können, muss anschließend durch den Kugelwellenterm $\exp(-j\kappa r)/\kappa r$ geteilt werden. Die Entfernung, ab der die Nahfelddarstellung in die Fernfelddarstellung übergeht, hängt beim CSB maßgeblich von der verwendeten Fokuslänge b ab. Beispielsweise erreicht man bei $r = 2b$ eine maximale relative Abweichung von weniger als 10^{-3} .

Die Abbildungen 4.7a und b zeigen das Fernfeld eines CSB, der auf einen Kegel mit $\theta_0 = 135^\circ$ und Dirichlet-, beziehungsweise Neumann-Randbedingungen einfällt; 4.7(a) ist in der x, z -Ebene, 4.7(b) in der y, z -Ebene. Der CSB ist dabei genauso ausgerichtet, wie in den meisten Beispielen zum Nahfeld: Mit der Einfallrichtung $\theta' = 90^\circ$, $\phi' = 0^\circ$ und der Fokuslänge $b = 6\lambda$. Die Ergebnisse für das Fernfeld $\phi_f f$ sind auf den maximal vorkommenden Feldwert Φ_{max} normiert. Erwartungsgemäß tritt dieser etwa in Ausbreitungsrichtung auf, da der größte Teil des Strahls den Kegel ungehindert passiert.

Die Fernfelddarstellung, wie sie in 2.5.1 hergeleitet wird, basiert auf sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art und sie beschreibt somit einen divergierenden CSB. Es wäre ohne weiteres möglich, eine Fernfelddarstellung für einen uniformen CSB mit dem asymptotischen Verhalten für sphärische Besselfunktionen

$$j_\nu(\kappa r) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} \frac{\sin(\kappa r - \frac{1}{2}\nu\pi)}{\kappa r} \quad (4.1)$$

zu formulieren. Allerdings wäre dies wenig sinnvoll, da man bei Fernfeldbetrachtungen nur an den auslaufenden Anteilen interessiert ist.

Die Abbildungen 4.7a und b zeigen den entsprechenden Fall für den Betrag der elektrischen Feldstärke im Fernfeld für die beiden linear unabhängigen Polarisationsrichtungen, die sich über die Wahl von $\vec{c}_e = \vec{e}_\phi$ (ϕ -polarisiert) und $\vec{c}_e = \vec{e}_\theta$ (θ -polarisiert) definieren.

KAPITEL 4. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM KREISKEGEL

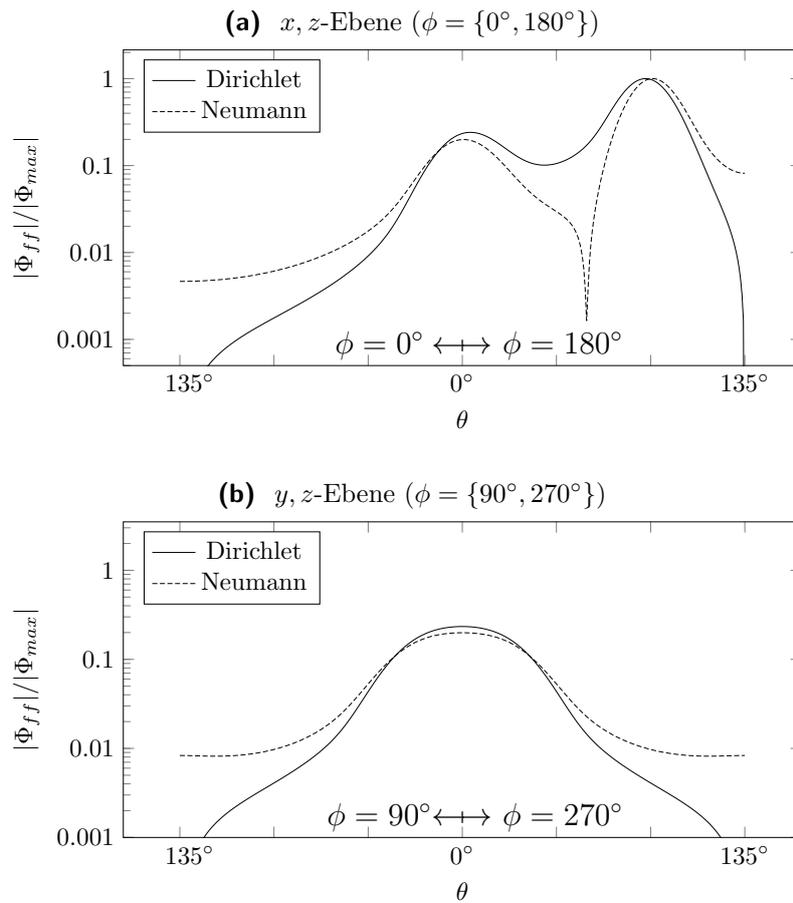


Abbildung 4.7 Fernfeld Φ_{ff} für einen skalaren CSB am schallweichen und schallharten Kreiskegel in der (a) x, z -Ebene und in der (b) y, z -Ebene über θ . Die Ergebnisse sind jeweils auf den Maximalwert normiert. Der Strahl hat die Fokusslänge $b = 6\lambda$ und breitet sich in negative x -Richtung aus.

4.3. FERNFELDER AM KREISKEGEL

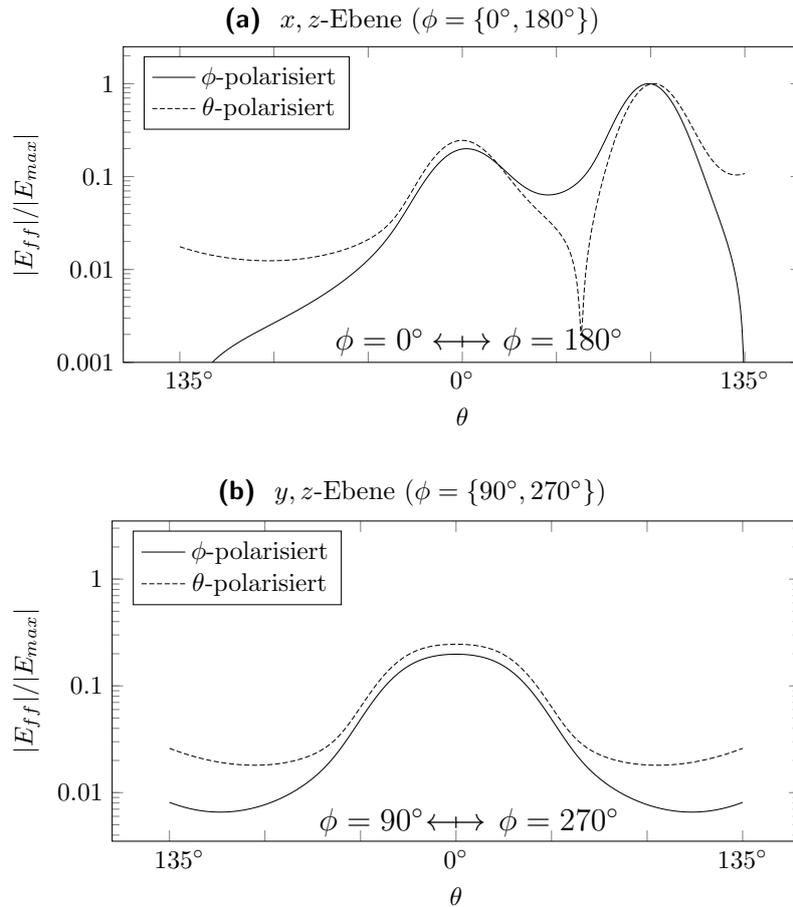


Abbildung 4.8 Betrag des Fernfeldes der elektrischen Feldstärke $|E_{ff}|$ für einen CSB am ideal leitenden Kreiskegel in der (a) x, z -Ebene und in der (b) y, z -Ebene über θ . Es sind jeweils zwei verschiedene Polarisationsrichtungen dargestellt. Die Ergebnisse sind jeweils auf den Maximalwert normiert. Der Strahl hat die Fokusslänge $b = 6\lambda$ und breitet sich in negative x -Richtung aus.

5 Beugung eines Complex-Source Beam am elliptischen Kegel

Es folgen Darstellungen des Nah- und Fernfeldes eines Complex-Source Beams am elliptischen Kegel. Die Ergebnisse umfassen, wie im vorherigen Abschnitt, skalare Felder für Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sowie für die elektrische Feldstärke am ideal leitenden Kegel. Beim elliptischen Kegel ergibt sich durch den Geometrieparameter k beziehungsweise k' ein weiterer Freiheitsgrad. Bei allen gezeigten Beispielen gilt exemplarisch $k^2 = k'^2 = 0.5$. Als erstes werde ein elliptischer Kegel mit $\vartheta_0 = 135^\circ$ behandelt, anschließend der Sonderfall $\vartheta_0 = 180^\circ$, der einem Winkelsektor entspricht.

5.1 Nahfelder am elliptischen Kegel

Die Felder für den Dirichlet-Fall sind in den Abbildungen 5.1a und b zu sehen, für den Neumann-Fall in den Abbildungen 5.2a und b. Wenn auch die Berechnungen in elliptischen Kegelkoordinaten erfolgen, so sind sämtliche Beschreibungen zu den Darstellungen aus Übersichtsgründen weiterhin in Kugelkoordinaten oder kartesischen Koordinaten gehalten. Die Elliptizität des untersuchten Kegels, die durch die Wahl von k festgelegt wird, lässt sich anschaulicher durch die Außenöffnungswinkel beschreiben. Dass sich die Kegeloberfläche bei $\vartheta_0 = 135^\circ$ befindet, bedeutet gemäß (2.99) bei $k^2 = k'^2 = 0.5$ für die halben Außenöffnungswinkel:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \vartheta_0 = 135^\circ \\ \theta_y &= \arccos(k \cos \vartheta_0) = 120^\circ .\end{aligned}$$

5.1. NAHFELDER AM ELLIPTISCHEN KEGEL

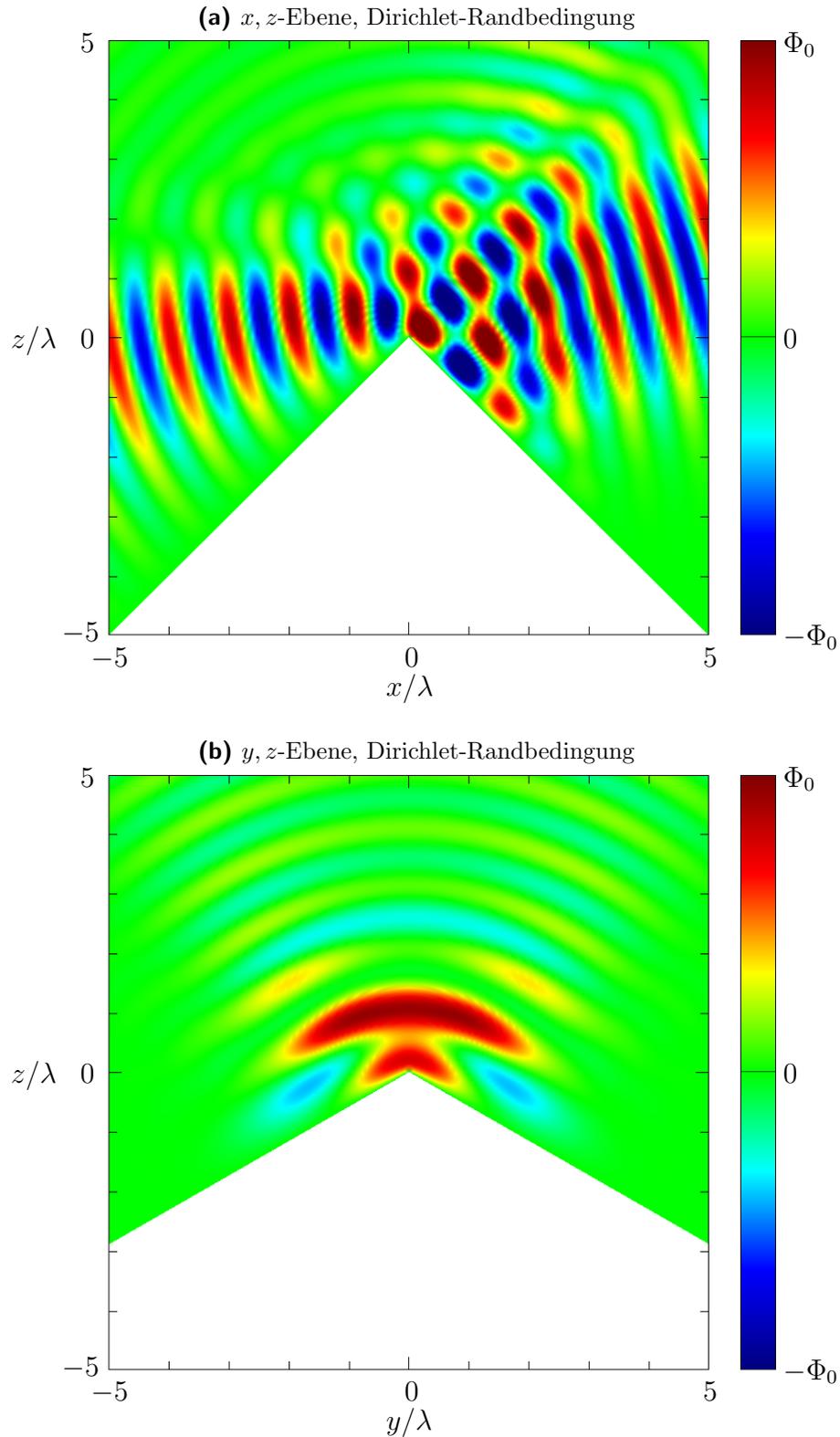


Abbildung 5.1 Feldbilder eines CSB am elliptischen Kegel ($\vartheta_0 = 135^\circ$, $k^2 = 0.5$) mit Dirichlet-Randbedingungen (a) in der x, z -Ebene und (b) in der y, z -Ebene. Der CSB hat die Fokuslänge $b = 10\lambda$, und fällt mit dem Winkel $\vartheta' = 75^\circ$ (in dieser Ebene gleichbedeutend mit $\vartheta' = 75^\circ$) ein.

KAPITEL 5. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM ELLIPTISCHEN KEGEL

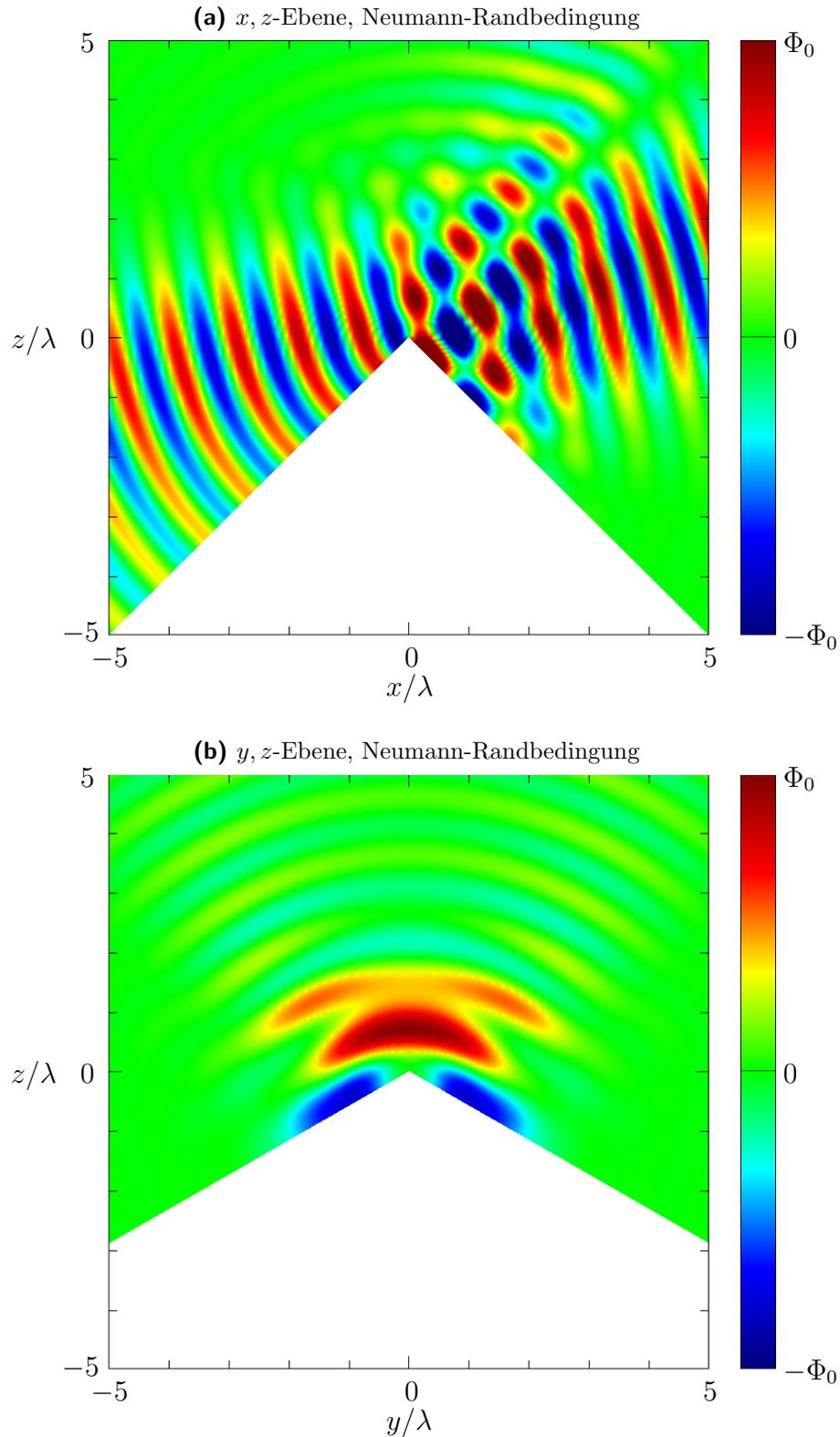


Abbildung 5.2 Felddiagramme eines CSB am elliptischen Kegel ($\vartheta_0 = 135^\circ$, $k^2 = 0.5$) mit Neumann-Randbedingungen (a) in der x, z -Ebene und (b) in der y, z -Ebene. Der CSB hat die Fokusslänge $b = 10\lambda$, und fällt mit dem Winkel $\theta' = 75^\circ$ ein.

5.2. FERNFELDER AM ELLIPTISCHEN KEGEL

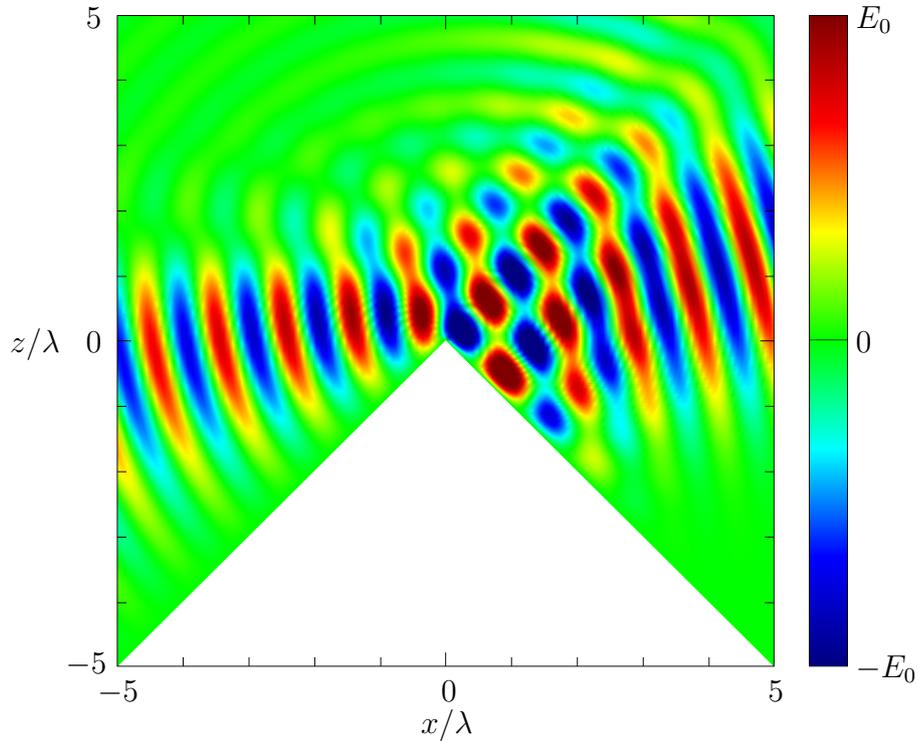


Abbildung 5.3 y -Komponente des elektrischen Feldes eines CSB am ideal leitenden elliptischen Kegel ($\vartheta_0 = 135^\circ$, $k^2 = 0.5$) in der x, z -Ebene. Der CSB hat die Fokuslänge $b = 10\lambda$, und fällt mit dem Winkel $\theta' = 75^\circ$ ein. Die Polarisation des Strahls ist in ϕ -Richtung, was in dieser Ebene gleichbedeutend ist mit φ .

5.2 Fernfelder am elliptischen Kegel

Es wurde bislang nicht explizit darauf hingewiesen, aber die Fernfelddarstellung aus Abschnitt 2.5.1 ist ebenso für die Multipolentwicklung in elliptischen Kegelkoordinaten gültig. Es können somit auch Fernfelder für die Beugung eines CSB an einem elliptischen Kegels berechnet werden. Abbildung 5.4(a) bis 5.4(c) zeigen das Fernfeld eines skalaren CSB mit $\theta' = 75^\circ$, $\phi' = 0$, $b = 10\lambda$ an einem elliptischen Kegel mit Dirichlet- und mit Neumann-Randbedingungen. Abbildung 5.5(a) bis 5.5(c) behandeln den entsprechenden Fall für den Betrag des elektrischen Feldes. Der elliptische Kegel ist wieder durch $\vartheta_0 = 135^\circ$, $k^2 = 0.5$ beschrieben. Die Fernfelder sind folglich mit allen Parametern passend zu den Ergebnissen aus dem vorherigen Abschnitt.

KAPITEL 5. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM ELLIPTISCHEN KEGEL

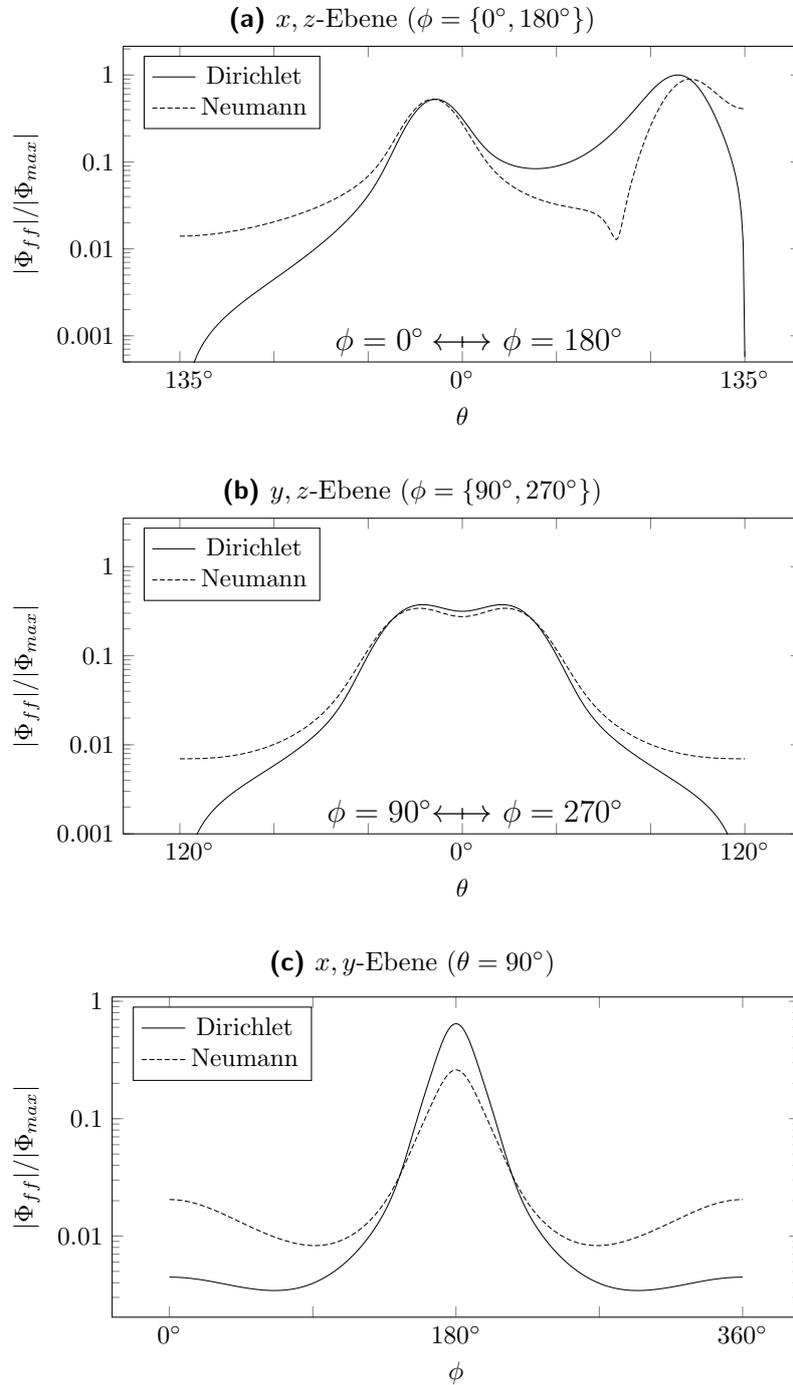


Abbildung 5.4 Fernfeld eines skalaren CSB mit $\theta' = 75^\circ$, $\phi' = 0$, $b = 10\lambda$ an einem elliptischen Kegel mit Dirichlet- und mit Neumann-Randbedingungen.

5.2. FERNFELDER AM ELLIPTISCHEN KEGEL

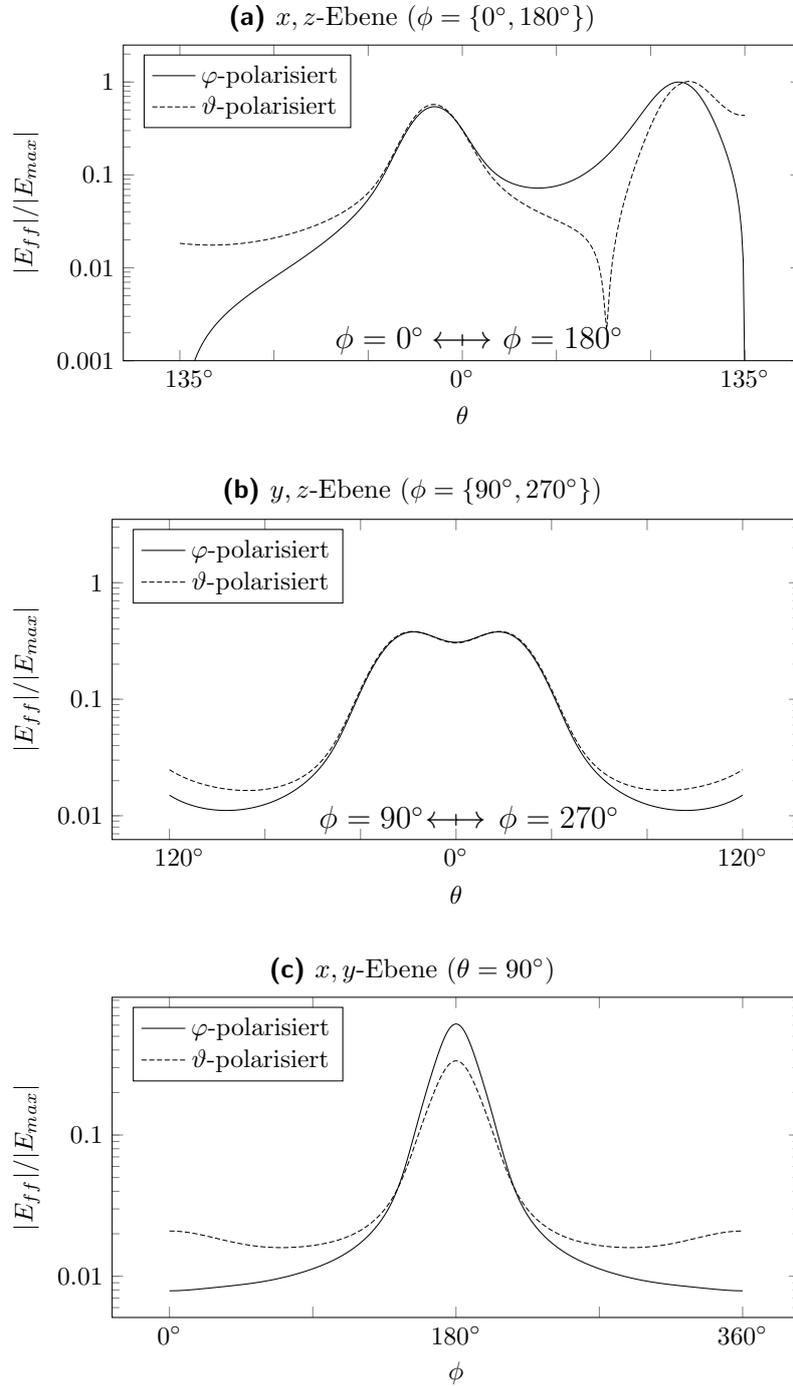


Abbildung 5.5 Betrag des elektrischen Feldes im Fernfeld von einem CSB mit $\theta' = 75^\circ$, $\phi' = 0$, $b = 10\lambda$ an einem ideal leitenden elliptischen Kegel. Die beiden Polarisationsrichtungen werden durch eine entsprechende Wahl von $\vec{c}_e = \vec{e}_\varphi$ oder $\vec{c}_e = \vec{e}_\vartheta$ erzeugt.

5.3 Spezialfall: Winkelsektor

Zuletzt werde der Spezialfall eines Winkelsektors behandelt, der sich ergibt, wenn $\vartheta = 180^\circ$ gesetzt wird. Man kann diesen Fall als einen komplett abgeflachten Kegel verstehen. Der Öffnungswinkel des Sektors kann durch $2 \arccos(k)$ beschrieben werden, beträgt für $k^2 = 0.5$ also genau 90° und entspricht damit einer Viertelebene.

Die Abbildungen 5.6a und b behandeln einen Winkelsektor mit Dirichlet-Randbedingungen. Der CSB fällt mit $\theta' = 120^\circ$, $\phi' = 0^\circ$ auf die Sektorspitze ein und habe die Fokusslänge $b = 10\lambda$. Die Abbildungen 5.7a und b zeigen den entsprechenden Neumann-Fall. Hierbei ergibt sich in der y, z -Ebene eine Besonderheit: Das Feld verschwindet auf der Sektoroberfläche nicht wie beim Dirichlet-Fall und auf beiden Seiten können sich andere Feldamplituden ausprägen. Es muss jeweils der Grenzwert des Feldes für $x \rightarrow 0^+$, das heißt aus positiver Richtung kommend, und für $x \rightarrow 0^-$, aus negativer Richtung kommend, betrachtet werden. In elliptischen Kegelkoordinaten können diese beiden Fälle mit $\varphi = \{[0^\circ, 90^\circ], [270^\circ, 360^\circ]\}$ für $x > 0$ und $\varphi = [90^\circ, 270^\circ]$ für $x < 0$ unterschieden werden. In Abbildung 5.7(b) sind beide Fälle kompakt dargestellt: Durch die Symmetrie der Anordnung kann die jeweils andere Hälfte durch Spiegelung an der z -Achse erzeugt werden.

5.3. SPEZIALFALL: WINKELSEKTOR

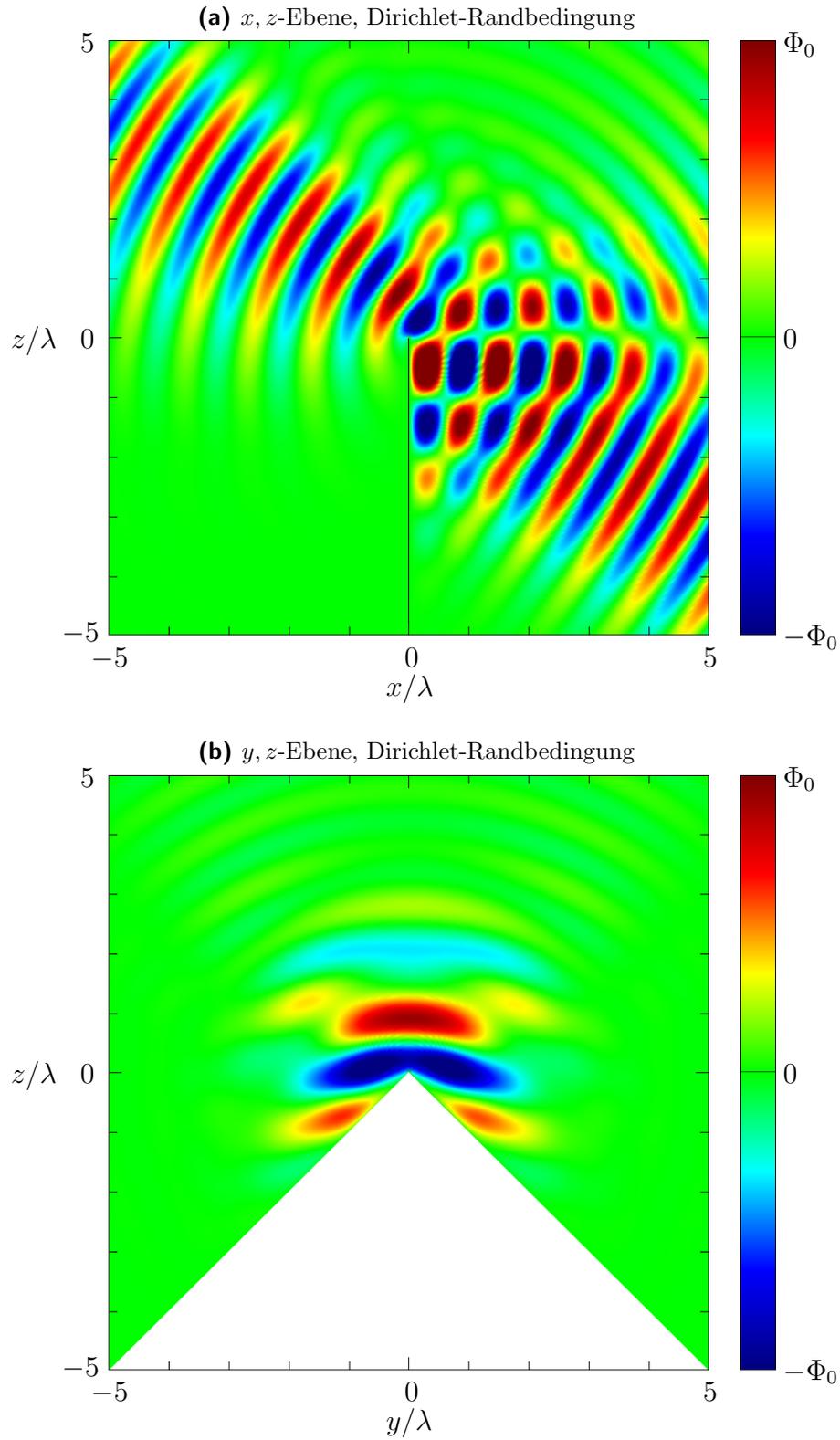


Abbildung 5.6 Einfall eines CSB mit $\theta' = 120^\circ$, $\phi' = 0^\circ$, $b = 10\lambda$ auf einen schallweichen (Dirichlet) Winkelsektor. Oben (a) ist die x, z -Ebene dargestellt, unten (b) die y, z -Ebene.

KAPITEL 5. BEUGUNG EINES COMPLEX-SOURCE BEAM AM ELLIPTISCHEN KEGEL

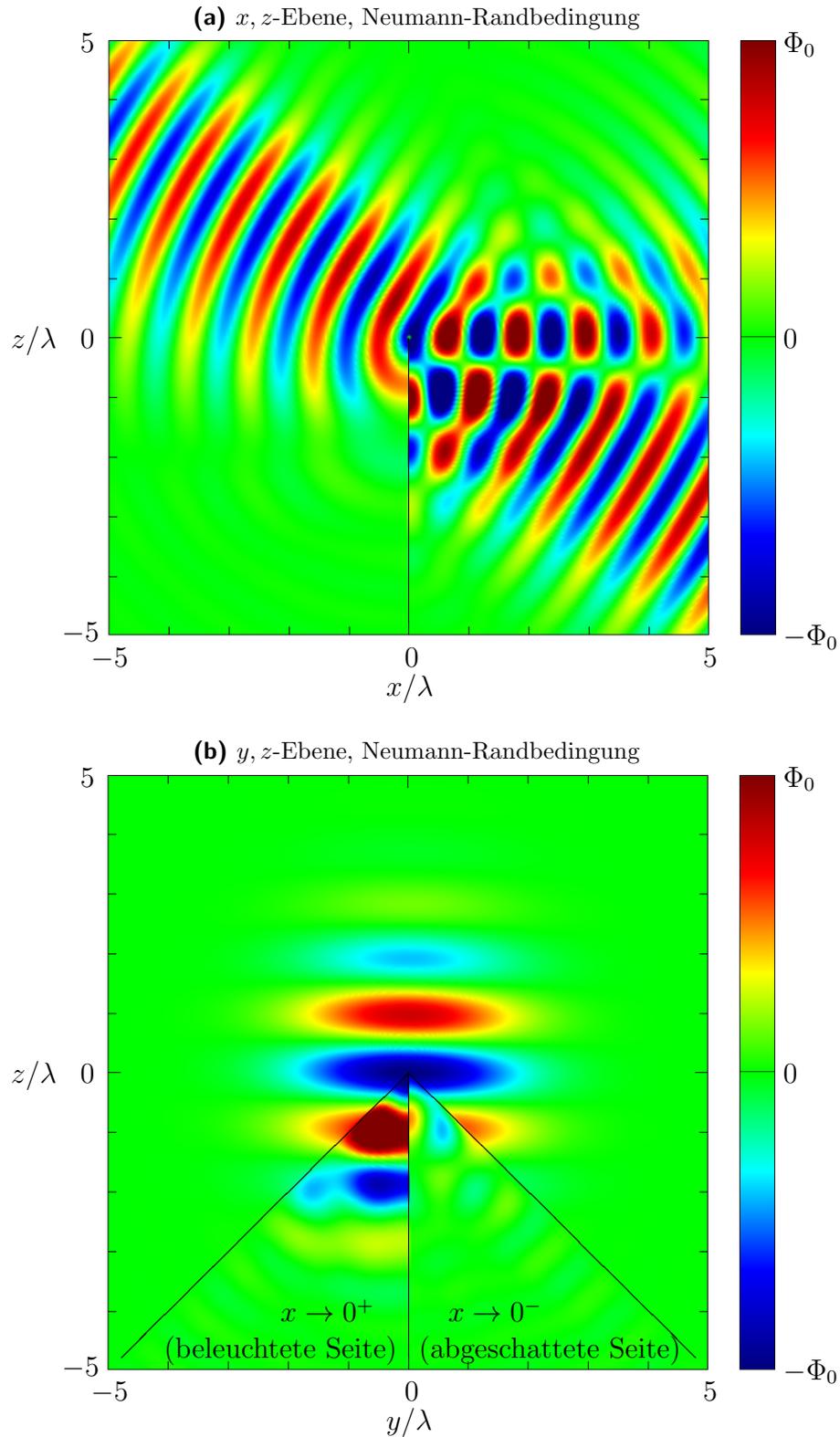


Abbildung 5.7 Einfall eines CSB mit $\theta' = 120^\circ$, $\phi' = 0^\circ$, $b = 10\lambda$ auf einen schallharten (Neumann) Winkelsektor. Oben (a) ist die x, z -Ebene dargestellt, unten (b) die y, z -Ebene mit einer kompakten Darstellung des Feldes auf beiden Sektorseiten.

6 Asymptotische Methoden

Die Ergebnisse, die mit den in Kapitel 2 und 3 vorgestellten Verfahren erzielt werden können, sollen unter anderem dazu dienen, das Streuverhalten an sogenannten kanonischen Strukturen zu untersuchen. Damit können Beugungskoeffizienten gewonnen werden, die ihren Einsatz in asymptotischen Verfahren finden. Diese Feldrechenverfahren haben zur Grundlage, dass sich elektromagnetische Wellen im Wesentlichen gemäß der Strahlenoptik verhalten. Für sehr hochfrequente elektromagnetische Wellen – wie das sichtbare Licht – sind auf diese Weise getroffene Vorhersagen bekanntermaßen recht zutreffend und Abweichungen können nur an wenigen Stellen beobachtet werden, wie beispielsweise bei Beugungsexperimenten am Spalt. Zusätzlich zu den strahlenoptischen Anteilen wird berücksichtigt, dass Kanten und andere Unstetigkeiten Ausgangspunkte für gestreute und gebeugte Wellenanteile sind.

Asymptotische Verfahren finden vornehmlich bei sehr hochfrequenten Problemen Anwendung, da zum einen der quasi-optische Ansatz aufgrund der höheren Frequenz zutreffender ist, zum anderen, weil andere Feldrechenverfahren, wie beispielsweise FDTD (Finite-Differenzen-Methode im Zeitbereich) oder FEM (Finite Elemente Methode), mit der aktuellen Rechenleistung nicht in der Lage sind, ein Modell zu beschreiben, das viele hunderte oder tausende Wellenlängen umspannt.

6.1 Geometrical Theory of Diffraction

Ein wichtiger Vorstoß bei den asymptotischer Verfahren in der Feldberechnung ist die geometrische Beugungstheorie (Geometrical Theory of Diffraction, GTD), die 1962 von Joseph Keller vorgeschlagen wurde [30]. Hier werden einfallende und reflektierte Felder nach den Gesetzen der geometrischen Optik bestimmt und durch Kantenbeugungsfelder ergänzt. Die Kantenbeugungsfelder einer ebenen Welle wer-

KAPITEL 6. ASYMPTOTISCHE METHODEN

den als Zylinderwellen mit

$$u_e = \frac{DA_i}{\sqrt{r}} \exp -j(\kappa r + \Psi_i) \quad (6.1)$$

beschrieben, wobei A_i und Ψ_i Amplitude und Phase des einfallenden Feldes an der Kante sind. Der Kantenbeugungskoeffizient D wird mit

$$D_{\begin{smallmatrix} s \\ h \end{smallmatrix}} = \frac{\exp(j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi\kappa} \sin \beta} \left(\sec \left(\frac{\phi - \alpha}{2} \right) \pm \csc \left(\frac{\phi + \alpha}{2} \right) \right) \quad (6.2)$$

angegeben und berechnet sich aus der Sommerfeldschen Lösung für das Fernfeld an einer Halbebene bei Einfall einer ebenen Welle. Hierbei beschreibt der Index s den Fall einer akustisch weichen Halbebene und der Index h den Fall einer akustisch harten. Der Sekans (\sec) ist als Kehrwert der Kosinusfunktion definiert, während der Kosekans (\csc) dem Kehrwert der Sinusfunktion entspricht. Die Winkel sind gemäß Abbildung 6.1a definiert. Der Beugungskoeffizient einer ideal leitenden Kante für den elektromagnetischen Fall kann als Matrix mithilfe der skalaren Beugungskoeffizienten ausgedrückt werden:

$$D_e = \begin{bmatrix} -D_s & 0 \\ 0 & -D_h \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Ein großer Nachteil dieser Methode besteht in dem Vorhandensein von Kaustiken, die an den Übergangsgrenzen zu den abgeschatteten und den reflektierten Bereichen entstehen. Der Beugungskoeffizient geht an diesen Grenzflächen gegen unendlich, wie in der Abbildung 6.1b bei $\phi = 45^\circ$ und bei $\phi = 315^\circ$ zu sehen ist.

6.2. UNIFORM THEORY OF DIFFRACTION

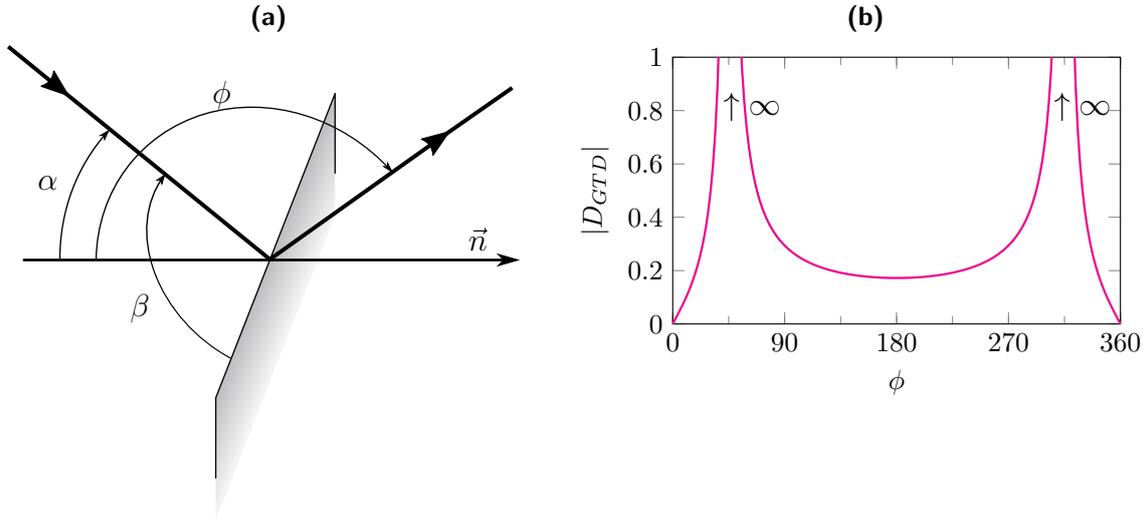


Abbildung 6.1 (a) Ein einfallender und ein gebeugter Strahl an einer Halbebene mit den Winkeln α , ϕ und β wie sie für den GTD-Beugungskoeffizienten nach (6.2) definiert sind. (b) GTD-Beugungskoeffizient über ϕ für $\beta = 90^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$.

6.2 Uniform Theory of Diffraction

Die Einheitliche Beugungstheorie (Uniform Theory of Diffraction, UTD) wurde 1974 mit [31] eingeführt und stellt eine Erweiterung zur GTD dar. Mit ihr wird für die Beugungskoeffizienten eine Übergangsfunktion (transition function) definiert, die die Singularitäten an den Schatten- und Reflektionsübergängen umgeht. Die skalaren UTD Beugungskoeffizienten für die Halbebene lauten

$$D_h^s = \frac{-\exp(-j\pi/4)}{2\sqrt{2\pi\kappa}\sin\beta} \left(\sec\left(\frac{\phi-\alpha}{2}\right) F(kLa(\phi-\alpha)) \mp \sec\left(\frac{\phi+\alpha}{2}\right) F(kLa(\phi+\alpha)) \right). \quad (6.4)$$

Für eine ebene Welle als einfallendes Feld ist

$$L = r \sin^2 \beta \quad (6.5)$$

und

$$a(\phi \pm \alpha) = 2 \cos^2 \left(\frac{\phi \pm \alpha}{2} \right). \quad (6.6)$$

6.2.1 Die UTD-Übergangsfunktion

Die Übergangsfunktion $F(X)$ wird angegeben mit [31]

$$F(X) = 2j\sqrt{X} \exp(jX) \int_{\sqrt{X}}^{\infty} \exp(-j\tau^2) d\tau. \quad (6.7)$$

Das zu lösende Integral entspricht einem komplexen Fresnel-Integral. Die Fresnel-Integrale sind definiert als [5]

$$C(z) = \int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \quad (6.8a)$$

$$S(z) = \int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt. \quad (6.8b)$$

Die numerische Berechnung dieser Funktionen gestaltet sich durch immer näher zusammenrückende Nullstellen als anspruchsvoll. Durch Verwendung dieser Funktionen und durch Aufteilung in Real- und Imaginärteil erhalten wir für die Übergangsfunktion

$$F(X) = 2j\sqrt{X} \exp(jX) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{C(\infty)}_{=\frac{1}{2}} - C\left(\sqrt{X}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) - j \left(\underbrace{S(\infty)}_{=\frac{1}{2}} - S\left(\sqrt{X}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) \right) \right]. \quad (6.9)$$

Die beiden Fresnel-Integrale lassen sich mithilfe der Fehlerfunktion ausdrücken, für die gilt [5]:

$$C(z) + jS(z) = \frac{1+j}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-i)z\right]. \quad (6.10)$$

Durch Anwendung auf (6.9) und durch Ausnutzung, dass die Fehlerfunktion und die komplexe Konjugation kommutativ sind, ergibt sich

$$F(X) = \sqrt{X} \exp(jX) \sqrt{\frac{\pi}{2}} (j-1) \left(1 - \operatorname{erf}\left[\frac{(1+j)\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\right] \right). \quad (6.11)$$

Diese Darstellung unter Verwendung der Fehlerfunktion ist numerisch erheblich einfacher zu handhaben als eine Auswertung des Integrals in (6.7) oder eine separate Auswertung der Fresnel-Integrale (6.8).

6.3 Evaluierung von Beugungskoeffizienten aus CSB-Problemen

In diesem Kapitel soll untersucht werden, ob und in welchem Rahmen sich die Ergebnisse, die mit den vorgestellten Verfahren berechnet werden können, überhaupt für Beugungskoeffizienten in asymptotischen Verfahren eignen. Dabei werden zunächst Kantenbeugungskoeffizienten betrachtet; zum einen, weil diese einen Freiheitsgrad weniger besitzen und sich somit einfacher und übersichtlicher darstellen lassen, zum anderen, weil sich diese überhaupt erst mit den vorhandenen, klassischen Beugungskoeffizienten aus der GTD und UTD vergleichen lassen.

6.3.1 Einschub: Lösung der Helmholtzgleichung in ebenen Polarkoordinaten

Die Lösung der Helmholtzgleichung in Polarkoordinaten (R, φ) soll hier nur kurz zusammengefasst werden. Das Vorgehen ist analog mit dem aus den Kapiteln 2.2 und 2.7 für Kugelkoordinaten beziehungsweise elliptische Kegelkoordinaten. Die homogene Helmholtzgleichung kann in Polarkoordinaten in zwei Differentialgleichungen jeweils abhängig von R und φ separiert werden. Die Lösungen in R sind Zylinderfunktionen, von denen insbesondere die Besselfunktionen $J_n(\kappa R)$ und Hankelfunktionen zweiter Art $H_n^{(2)}(\kappa R)$ relevant sind. In φ ergeben sich die harmonischen Funktionen. Die Greensche Funktion zur Helmholtzgleichung lässt sich auf die bisher vorgestellte Weise unter Berücksichtigung der Symmetrie bezüglich R und R' sowie geeigneter Normierung formulieren.

Für den Außenraum eines schallweichen, keilförmigen Gebiets mit dem Außenöffnungswinkel β lässt sich die Greensche Funktion angeben mit

$$G(\vec{R}, \vec{R}') = \begin{cases} \frac{\pi}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} J_{\frac{n\pi}{\beta}}(\kappa R) H_{\frac{n\pi}{\beta}}^{(2)}(\kappa R') \frac{\epsilon_n}{\beta} \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{n\pi\varphi'}{\beta}\right), & \text{falls } (R < R'), \\ \frac{\pi}{2j} \sum_{n=0}^{\infty} J_{\frac{n\pi}{\beta}}(\kappa R') H_{\frac{n\pi}{\beta}}^{(2)}(\kappa R) \frac{\epsilon_n}{\beta} \sin\left(\frac{n\pi\varphi}{\beta}\right) \sin\left(\frac{n\pi\varphi'}{\beta}\right), & \text{falls } (R > R'), \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ 2, & \text{falls } n > 0. \end{cases} \quad (6.13)$$

Für den Fall, dass das keilförmige Gebiet schallhart ist, sind die Sinusfunktionen in (6.12) durch Kosinusfunktionen zu ersetzen.

Die geschlossene Form der Greenschen Funktion des Freiraums lautet in Polarkoordinaten

$$G(\vec{R}, \vec{R}') = \frac{\exp(-j\kappa|\vec{R} - \vec{R}'| - j\frac{\pi}{4})}{4\pi\sqrt{|\vec{R} - \vec{R}'|}}. \quad (6.14)$$

6.3.2 Vergleich des CSB-Fernfeldes mit GTD-Beugungskoeffizienten

Als erstes wird der GTD-Kantenbeugungskoeffizient mit dem Ergebnis eines CSB im Fernfeld an einer Halbebene verglichen. Dabei ist zu beachten, dass der Strahl auf den Wert in der Taille normiert werden muss, da ebenso Beugungskoeffizienten auf ein normiertes einfallendes Wellenfeld bezogen sind. Abbildungen 6.2 zeigt den Betrag des GTD-Beugungskoeffizienten D_s für eine schallweiche Kante verglichen mit dem Fernfeld eines CSB mit verschiedenen Fokusslängen b . Es ist insgesamt eine große Übereinstimmung vorhanden, insbesondere abseits der Schatten- und Reflexionsübergänge, wo die GTD ohnehin keine verlässlichen Ergebnisse liefern kann. Eine Evaluierung in diesen Bereichen ist somit wenig sinnvoll. Allerdings nähern sich die Ergebnisse mit steigender Fokusslänge an.

Ein Vergleich der Phase liefert zunächst Abweichungen, die um die 90° betragen. An dieser Stelle muss man sich in Erinnerung rufen, dass hier die Differenz zwischen der Phase einer ebenen Welle und der Phase eines Beams betrachtet wird, die in Abschnitt 3.1.3 als Gouy-Phase identifiziert wurde. Das CSB-Ergebnis muss also noch um die Gouy-Phase korrigiert werden, was im Fernfeld in Ausbreitungsrichtung genau eine Multiplikation mit $-j$ entspricht. Abbildung 6.3 zeigt den Vergleich der Phase zwischen dem GTD-Kantenbeugungskoeffizienten und dem Ergebnis eines CSB an einer Halbebene, das um den Faktor $-j$ korrigiert wurde.

6.3. EVALUIERUNG VON BEUGUNGSKOEFFIZIENTEN AUS CSB-PROBLEMEN

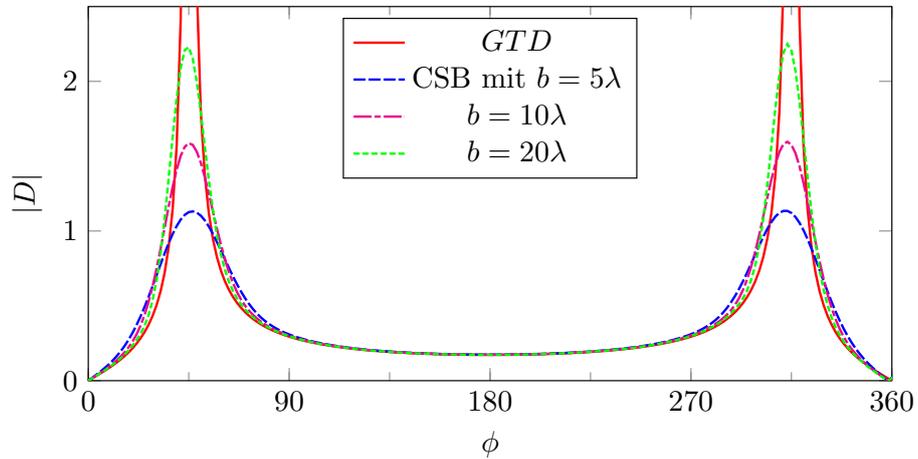


Abbildung 6.2 Betrag des GTD-Kantenbeugungskoeffizienten und der Betrag des Fernfeldes eines CSB an einer Halbebene für verschiedene Fokusslängen b .

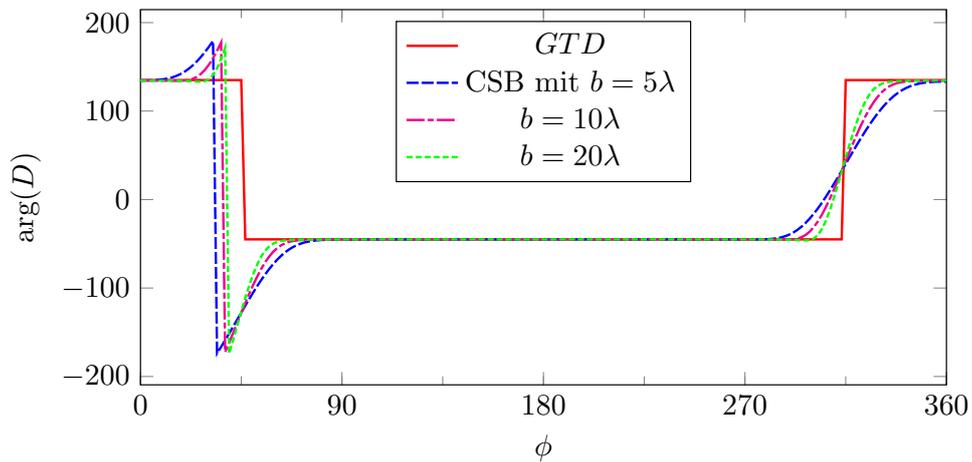


Abbildung 6.3 Phase des GTD-Kantenbeugungskoeffizienten und die Phase des Fernfeldes eines CSB an einer Halbebene für verschiedene Fokusslängen b . Die CSB-Ergebnisse wurden mit $-j$ multipliziert, um den Einfluss der Gouy-Phase zu korrigieren.

6.3.3 Anpassung von CSB-Ergebnissen an UTD-Beugungskoeffizienten

Für die Anpassung von CSB-Ergebnissen an UTD-Beugungskoeffizienten für ebene Wellen ist ein wenig mehr Sorgfalt nötig, da diese im gesamten Winkelbereich und in jeder Entfernung zu einer Kante gültig sind. Es können Feldwerte $G(\vec{R})$ für einen CSB im Nahfeld genutzt werden – oder auch im Fernfeld, sofern der betrachtete Punkt deutlich weiter entfernt ist, als die verwendete Fokusslänge des CSB. Nahfeld-ergebnisse müssen zusätzlich durch den Zylinderwellenterm $\exp(-j\kappa R)/\sqrt{R}$ geteilt werden; in beiden Fällen muss das Feld mit dem maximalen Wert in der Strahltaile normiert sein. Weiterhin müssen von den Ergebnissen solche Anteile des einfallenden und reflektierten Feldes subtrahiert werden, die nach den Gesetzen der geometrischen Optik erzeugt werden, im folgenden G_{SB} und G_{RB} genannt. Das Ergebnis der bisherigen Schritte, sei mit $\tilde{G}(R, \phi)$ zusammengefasst:

$$\tilde{G}(R, \phi) = \frac{G(R, \phi)}{G_0} \frac{\sqrt{R}}{\exp(-j\kappa R)} - G_{SB} - G_{RB} \quad (6.15)$$

Zusätzlich zur Gouy-Phase muss nun noch das longitudinale Profil des CSB entlang der Strahlachsen des einfallenden und reflektierten Feldes berücksichtigt werden, da die gesuchten Koeffizienten eine ebene Welle nachbilden sollen – und nicht einen CSB. Dies muss auf eine geeignete Weise in unmittelbarer Umgebung um die Reflexions- und Schattenübergänge geschehen. Eine solche Weise wäre durch eine Gewichtungsfunktion $w(\phi)$ gewährleistet, die an das transversale Profil eines CSB angehört ist, zum Beispiel:

$$w(\phi) = \exp\left(-\left(\frac{\phi}{\theta_{div}}\right)^2\right). \quad (6.16)$$

Diese wird sowohl beim Einfallswinkel ϕ_{inc} , als auch beim Reflexionswinkel ϕ_{ref} angewendet; θ_{div} ist gemäß (3.17) der Divergenzwinkel des Strahls. Das longitudinale Profil sei mit $G_{\rho=0}(z)$ bezeichnet und lautet in Polarkoordinaten

$$G_{\rho=0}(z) = \frac{b}{\sqrt[4]{b^2 + z^2}}. \quad (6.17)$$

Ein Kantenbeugungskoeffizient kann schließlich angegeben werden mit

$$D_{CSB} = \tilde{G}(R, \phi) \exp(-j\phi_{Gouy}) \left[1 + (w(\phi - \phi_{ref}) + w(\phi - \phi_{inc})) \left[G_{\rho=0}(R) - 1 \right] \right]. \quad (6.18)$$

6.3. EVALUIERUNG VON BEUGUNGSKOEFFIZIENTEN AUS CSB-PROBLEMEN

Abbildung 6.4(a) zeigt exemplarisch Kantenbeugungskoeffizienten für die Halbebene, die auf diese Weise aus CSB-Ergebnissen gewonnen werden, im Vergleich mit den entsprechenden klassischen UTD-Kantenbeugungskoeffizienten. Der relative Fehler zwischen diesen beiden Verfahren ist in Abbildung 6.4(b) für einige Beispiele dargestellt. Es ist zu sehen, dass die Fehler mit größerer Fokusslänge b abnehmen, sowie für kleinere Abstände R zur Kante.

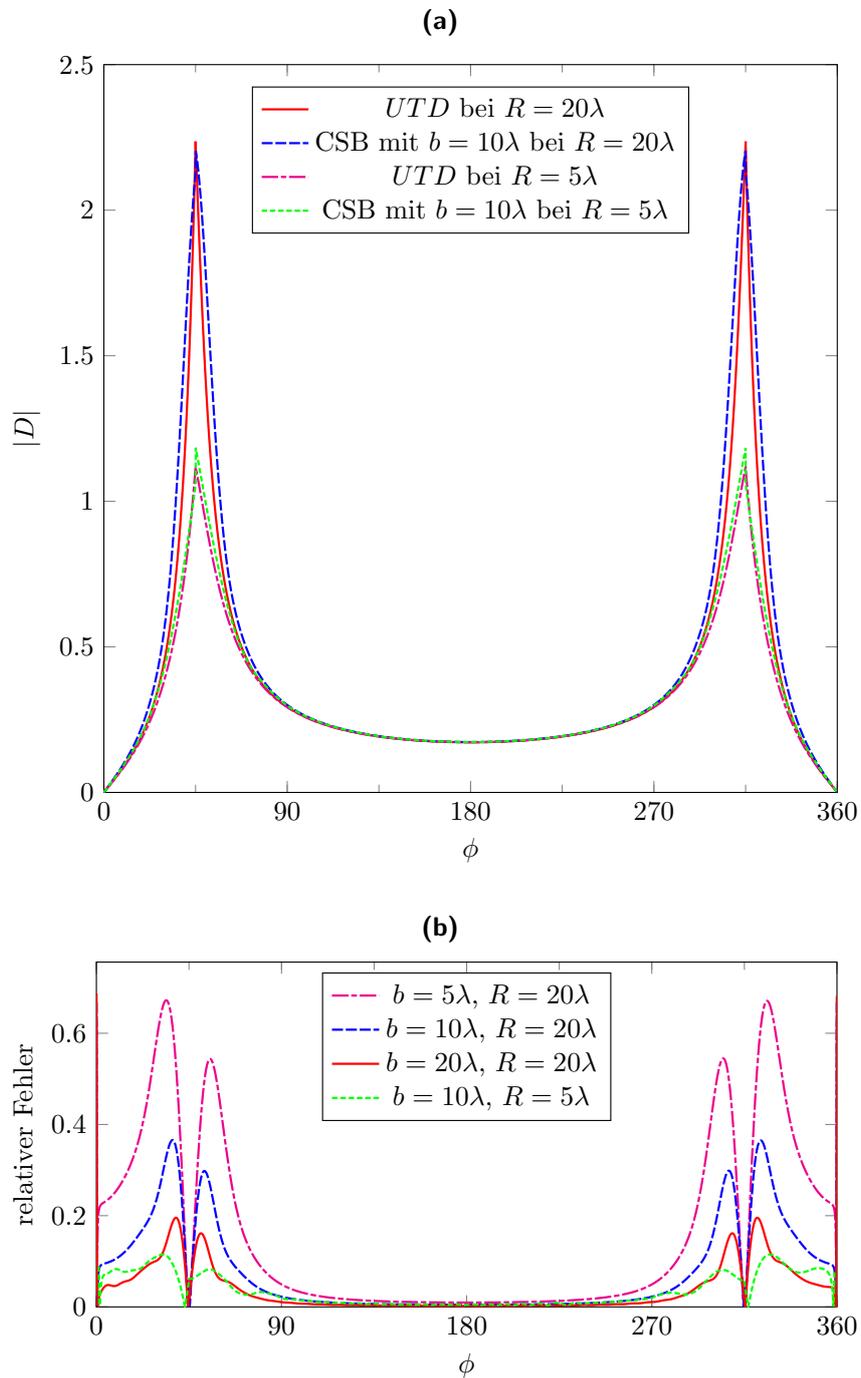


Abbildung 6.4 (a) Betrag von Kantenbeugungskoeffizienten für $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 45^\circ$ und $R = 5\lambda$ sowie $R = 20\lambda$. Es sind sowohl die klassischen UTD-Kantenbeugungskoeffizienten dargestellt, wie auch solche, die aus CSB-Ergebnissen gewonnen wurden. In (b) ist der relative Fehler zwischen diesen beiden Verfahren für einige Beispiele aufgetragen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Mit der Zielsetzung, Lösungen für die Spitzenbeugung zur Verwendung bei asymptotischen Methoden zu beschreiben, wird in dieser Arbeit die Beugung eines Complex-Source Beams am Kreiskegel sowie am elliptischen Kegel behandelt. Der Complex-Source Beam soll dabei als lokales quasi-ebenes Wellenfeld verwendet werden, um auch im Fernfeld zu konvergenten Ergebnissen mit der sphärischen Multipolentwicklung zu gelangen.

In Kapitel 2 wird ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen die sphärische Multipolentwicklung des elektromagnetischen Feldes vorgestellt. Die Herleitung erfolgt über Fundamentallösungen zur skalaren und vektoriiellen Helmholtzgleichung in Kugelkoordinaten und in elliptischen Kegelkoordinaten. Um Felder im Außenraum eines Kegels zu beschreiben zu können, müssen die Fundamentallösungen mithilfe einer Eigenwertbestimmung an Randbedingungen auf der Kegeloberfläche angepasst werden.

In Kapitel 3 wird der Complex-Source Beam (CSB) als örtlich begrenzte Feldanregung genauer vorgestellt. Ein Vergleich mit dem allgemein bekannteren Gaußstrahl bringt die Eigenschaften des CSB näher und zeigt die Vorteile dieser Feldanregung auf. Es wird untersucht, wie genau sich das Wellenfeld dieser strahlförmigen Anregung im Freiraum mit der Multipolentwicklung nachbilden lässt. Es zeigt sich, dass die Multipolentwicklung in Verbindung mit dem CSB ausgezeichnete Konvergenzeigenschaften besitzt. Außerdem wird eine alternative Anregung in Form einer inhomogenen ebenen Welle aufgezeigt.

Ergebnisse für das Nah- und Fernfeld eines CSB am Kreiskegel sind in Kapitel 4 zusammengetragen. Es werden verschiedene Einfallswinkel und Fokusslängen des Strahls sowie unterschiedliche Öffnungswinkel des Kegels berücksichtigt. Es werden sowohl skalare Felder für den schallweichen und schallharten Kreiskegel betrachtet,

KAPITEL 7. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

als auch die elektrische Feldstärke am ideal leitenden Kreiskegel. Kapitel 5 behandelt entsprechende Ergebnisse am elliptischen Kegel und berücksichtigt außerdem den Sonderfall eines Winkelsektors, der eine wichtige Entartung des elliptischen Kegels darstellt.

Kapitel 6 untersucht schließlich, wie sich die gefundenen Ergebnisse zur Herleitung von Beugungskoeffizienten für asymptotische Methoden eignen. Da ein Vergleich mit Spitzenbeugungskoeffizienten mangels Referenzlösungen nicht möglich ist, werden CSB-Ergebnisse in Polarkoordinaten herangezogen. Diese können mit den klassischen Kantenbeugungskoeffizienten für ebene Wellen der Geometrical Theory of Diffraction (GTD) und der Uniform Theory of Diffraction (UTD) verglichen werden. Es wird ein Verfahren vorgestellt, mit dem man mithilfe von Ergebnissen, die mittels eines CSB erzeugt wurden, zu Beugungskoeffizienten für ebene Wellen gelangen kann, die sich an denen der UTD annähern.

Zukünftige Arbeiten in diesem Themenbereich können sich mit der Verwendung und näheren Evaluierung der Beugungskoeffizienten aus CSB-Feldern in asymptotischen Methoden beschäftigen. Insbesondere muss untersucht werden, wie Spitzenbeugungskoeffizienten, die mit dem Vorgehen in Kapitel 6.3.3 ebenso gewonnen werden können, zur Verbesserung bei der Berechnung von Feldern beitragen können.

Darüber hinaus hat sich der CSB im allgemeinen als überaus flexibles und nützliches Hilfsmittel erwiesen. Die Erkenntnisse in dieser Arbeit können dazu verwendet werden, diese Form der Feldanregung auch für andere Untersuchungen einzusetzen. Beispielsweise wurde der CSB in [32] und [33] bereits erfolgreich zur Modellierung von hoch fokussierten Antennen angewendet.

Veröffentlichungen, die im Rahmen der Promotionsarbeit getätigt wurden: [34, 35, 36, 24, 37, 38, 39, 40, 27, 41, 42, 32, 33, 6]

Formelzeichen

x, y, z	kartesische Koordinaten
r, θ, ϕ	Kugelkoordinaten
r, ϑ, φ	elliptische Kegelkoordinaten
j	imaginäre Einheit
ω	Kreisfrequenz
κ	Wellenzahl
λ	Wellenlänge
Z	Wellenimpedanz
ε	Permittivität
μ	Permeabilität
$\vec{E}(\vec{r})$	elektrische Feldstärke
$\vec{H}(\vec{r})$	magnetische Feldstärke
$\Phi(\vec{r})$	elektrisches Potential
ν, m	erster und zweiter Eigenwert bei Entwicklungen in Kugelkoordinaten
$z_\nu(\kappa r)$	sphärische Zylinderfunktion zur Ordnung ν
$j_\nu(\kappa r)$	sphärische Besselfunktion
$h_\nu^{(1)}(\kappa r), h_\nu^{(2)}(\kappa r)$	sphärische Hankelfunktion erster und zweiter Art
$P_\nu^m(x)$	zugeordnete Legendrefunktion
$Y_\nu^m(\theta, \phi)$	Kugelflächenfunktion
ν, λ	erster und zweiter Eigenwert bei Entwicklungen in elliptischen Kegelkoordinaten
$\Theta_\nu(\vartheta)$	Nichtperiodische Lamésche Funktion
$\Phi_\nu(\varphi)$	Periodische Lamésche Funktion
$Y_\nu(\vartheta, \varphi)$	Lamésches Produkt
$G(\vec{r}, \vec{r}')$	Greensche Funktion
$\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$	Greensche Dyade

Tabelle 7.1 Übersicht über die in dieser Arbeit verwendeten Zeichen und Symbole.

Literaturverzeichnis

- [1] S. Blume. *Theorie elektromagnetischer Felder (4. Auflage)*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994.
- [2] L.P. Eisenhart. Stäckel systems in conformal euclidian space. *Annals of Mathematics*, 36:57–70, 1935.
- [3] P. Moon and D.E. Spencer. *Field Theory Handbook (2nd ed.)*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971. pp. 136-143.
- [4] Magnus. W., F. Oberhettinger, and R.P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [5] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Pocketbook of Mathematical Functions*. Harri Deutsch, Frankfurt/Main, 1984.
- [6] H. Brüns and L. Klinkenbusch. Analytical normalization of the associated Legendre functions of the first kind of arbitrary degree and order. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2018.
- [7] S. Blume and V. Krebs. Der Rückstreuquerschnitt des semiinfiniten Kreiskegels. *Archiv für Elektrotechnik*, 77(4):239–244, May 1994.
- [8] M. Katsav, E. Heyman, and L. Klinkenbusch. Complex-source beam diffraction by an acoustically soft or hard circular cone. In *2012 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*, pages 135–138, Sept 2012.
- [9] J. Boersma and J.K.M. Jansen. *Electromagnetic field singularities at the tip of an elliptic cone*. EUT report. WSK, Dept. of Mathematics and Computing

- Science. Technische Universiteit Eindhoven, 1990.
- [10] W. Gautschi. Computational aspects of three-term recurrence relations. *SIAM Review*, 9(1):24–82, 1967.
- [11] IEEE standard for floating-point arithmetic. *IEEE Std 754-2008*, pages 1–70, Aug 2008.
- [12] J.A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill, New York, 1941.
- [13] L. Klinkenbusch. *Theorie der sphärischen Absorberkammer und des mehrschaligen Kugelschirmes*. Habilitation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Deutschland, 1996.
- [14] H.J. Dirschmid. *Einführung in die Mathematischen Methoden der Theoretischen Physik*. Vieweg, Braunschweig, 1988.
- [15] F.E. Borgnis and C.H. Papas. *Randwertprobleme der Mikrowellenphysik*. Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
- [16] S. Blume and L. Klinkenbusch. Spherical-multipole analysis in electromagnetics. In *Frontiers in Electromagnetics*, pages 553–608. IEEE Press, Piscataway (NJ), 2000.
- [17] J.K.M. Jansen. *Simple-periodic and non-periodic Lamé functions and their application in the theory of conical waveguides*. Dissertation, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 1976.
- [18] L. Klinkenbusch. *Sphärische Multipolanalyse der Beugung und Streuung an elliptisch berandeten Kugelschalen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Deutschland, 1991.
- [19] S. Blume. Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen am Kegel elliptischen Querschnitts. *Annalen der Physik*, 481(4):302–308, 1971.
- [20] L. Klinkenbusch. Electromagnetic scattering by semi-infinite circular and elliptic cones. *Radio Science*, 42(RS6S10), 2007.

Literaturverzeichnis

- [21] V. Krebs. *Sphärische Multipolentwicklung von Beugungsfeldern des elliptischen Kegels und ihre numerische Auswertung mit Hilfe von Reihentransformationen*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, Bochum, Deutschland, 1997.
- [22] L.B. Felsen. Evanescent waves. *Journal of the Optical Society of America*, 66(8):751–760, Aug 1976.
- [23] S.Y. Shin and L.B. Felsen. Gaussian beam modes by multipoles with complex source points. *Journal of the Optical Society of America*, 67(5):699–700, May 1977.
- [24] L. Klinkenbusch and H. Brüns. Diffraction of a uniform complex-source beam by a circular cone. In *Proc. 2014 International Conference on Electromagnetics in Advanced Application, Aruba, August 3-8*, pages 470–472, 70 2014.
- [25] M. Katsav, E. Heyman, and L. Klinkenbusch. Diverging and converging beam diffraction by a wedge. part II: Plane wave spectral solutions and complex ray solutions. In *Proceedings of the Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS), Prague, July 6-9*, pages 1204–1208, 2015.
- [26] M. Katsav and E. Heyman. Converging and diverging beam diffraction by a wedge: a complex-source formulation and alternative solutions. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 64(7):3080–3093, 2016.
- [27] L. Klinkenbusch and H. Brüns. Combined complex-source beam and spherical-multipole analysis for the electromagnetic probing of conical structures. *Compte Rendue Physique*, 17:960–965, 2016.
- [28] R. G. Kouyoumjian, G. Manara, P. Nepa, and B. J. E. Taute. The diffraction of an inhomogeneous plane wave by a wedge. *Radio Science*, 31(6):1387–1397, 1996.
- [29] P.C. Clemmow. *The plane wave spectrum representation of electromagnetic fields*. Pergamon Press, Tarrytown, 1980.
- [30] Joseph B. Keller. Geometrical theory of diffraction. *J. Opt. Soc. Am.*, 52(2):116–130, Feb 1962.

- [31] R. G. Kouyoumjian and P. H. Pathak. A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface. *Proceedings of the IEEE*, 62(11):1448–1461, Nov 1974.
- [32] A. Reinhardt, A. Teplyuk, H. Brüns, M. Höft, and L. Klinkenbusch. Noninvasive characterization of solid particle streams enclosed in a dielectric pipeline by a bistatic doppler radar. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 65(12):5244–5250, Dec 2017.
- [33] A. Reinhardt, A. Teplyuk, H. Brüns, M. Höft, and L. Klinkenbusch. Obstacle-free particle measurement with a bistatic cw-radar. In *2017 IEEE MTT-S International Microwave Symposium (IMS)*, pages 56–59, June 2017.
- [34] H. Brüns and L. Klinkenbusch. Electromagnetic diffraction and scattering of a complex-source beam by a semi-infinite circular cone. *Advances in Radio Science*, 11:31–36, 2013.
- [35] H. Brüns, L. Klinkenbusch, M. Katsav, and E. Heyman. Electromagnetic complex-source beam diffraction by the tip of a circular cone. In *2013 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pages 1083–1086, Sept 2013.
- [36] H. Brüns and L. Klinkenbusch. Acoustic scattering of a complex-source beam by the edge of a plane angular sector. *Advances in Radio Science*, 12:179–186, 2014.
- [37] A. Reinhardt, H. Brüns, L. Klinkenbusch, M. Katsav, and E. Heyman. Scattering and diffraction of an arbitrarily directed complex-source beam by a semi-infinite circular cone. In *2014 XXXIth URSI General Assembly and Scientific Symposium (URSI GASS)*, pages 1–4, Aug 2014.
- [38] A. Reinhardt, H. Brüns, L. Klinkenbusch, M. Katsav, and E. Heyman. Spherical-multipole analysis of an arbitrarily directed complex-source beam diffracted by an acoustically soft or hard circular cone. *Advances in Radio Science*, 13:57–61, 2015.
- [39] H. Brüns and L. Klinkenbusch. Electromagnetic scattering of a complex-source

Literaturverzeichnis

- beam by semi-infinite sectors and cones. In *2015 IEEE International Symposium on Antennas and Propagation USNC/URSI National Radio Science Meeting*, pages 181–182, July 2015.
- [40] H. Brüns and L. Klinkenbusch. Derivation of diffraction coefficients from complex-source beam solutions to canonical problems. In *2015 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*, pages 899–902, Sept 2015.
- [41] M. Katsav, E. Heyman, H. Brüns, and L. Klinkenbusch. Diverging and converging beam diffraction by wedges and cones. In *2016 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory (EMTS)*, pages 49–52, Aug 2016.
- [42] H. Brüns, L. Klinkenbusch, and G. Manara. Spherical-multipole expansion of an inhomogeneous electromagnetic plane wave in lossless media. In *2017 XX-XIIInd General Assembly and Scientific Symposium of the International Union of Radio Science (URSI GASS)*, pages 1–4, Aug 2017.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Hendrik Brüns
Geburtsdatum	03.11.1987
Geburtsort	Hamburg
Staatsangehörigkeit	deutsch

Werdegang

November 2012 bis Juli 2018	Wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel im Fachbereich Computational Electromagnetics unter der Leitung von Prof. Dr.-Ing Ludger Klinkenbusch.
Oktober 2012	Abschluss Master of Science im Fach Elektrotechnik und Informationstechnik.
April 2011	Abschluss Bachelor of Science im Fach Elektrotechnik und Informationstechnik
Oktober 2007 bis Oktober 2012	Studium der Elektrotechnik und Informationstechnik an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, 10 Studiensemester.
2007	Abitur am Gymnasium Neu Wulmstorf.

